HAL
open science

Etude de gaz quantiques dégénérés quasi-unidimensionnels confinés par une micro-structure

Jean-Baptiste Trebbia

To cite this version:

Jean-Baptiste Trebbia. Etude de gaz quantiques dégénérés quasi-unidimensionnels confinés par une micro-structure. Matière Condensée [cond-mat]. Université Paris Sud - Paris XI, 2007. Français. NNT : . tel-00186656

HAL Id: tel-00186656

https://pastel.hal.science/tel-00186656

Submitted on 10 Nov 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 8808

LABORATOIRE CHARLES FABRY DE L'INSTITUT D'OPTIQUE

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Spécialité : Sciences Physiques

par

Jean-Baptiste TREBBIA

Sujet :

ETUDE DE GAZ QUANTIQUES DÉGÉNÉRÉS QUASI-UNIDIMENSIONNELS CONFINÉS PAR UNE MICRO-STRUCTURE

Soutenue le 17 octobre 2007 devant la Commission d'examen :

Mr.	Christoph Westbrook	Directeur de thèse
Mr.	Pierre Chavel	Président
Mr.	Jakob Reichel	Rapporteur
Mr.	Jook Walraven	Rapporteur
Mr	Brahim Lounis	Examinateur
Mlle	Isabelle Bouchoule	Membre invité

Table des matières

1 Introduction **1**

2 La condensation de Bose-Einstein **5**

2.1 Condensation de Bose-Einstein pour un gaz idéal 5

2.1.1 Piège harmonique faiblement anisotrope à 3 dimensions 6

2.1.2 Piège harmonique à une dimension 8

2.1.3 Piège fortement anisotrope à 3 dimensions 9

2.2 Condensation de Bose-Einstein pour un gaz dans le régime d'interactions faibles 10

2.2.1 Interactions traitées sous forme de champ moyen 11

2.2.2 A température non nulle : régime de quasi-condensat 13

3 Description du dispositif expérimental **15**

3.1 Piégeage d'atomes neutres sur microstructure 15

3.1.1 Guide magnétique quadrupolaire 16

3.1.2 Effets de taille finie 17

3.1.3 Ajout d'un confinement longitudinal 19

3.1.4 Piège Ioffe Pritchard 20

3.2 La puce atomique 25

3.2.1 Les différentes implémentations des micro-fils 25

3.2.2 Fabrication de la puce atomique 28

3.3 La puce à atomes dans son environnement 32

3.3.1 Le système à vide 32

3.3.2 Configuration des champs magnétiques utilisés 33

3.4 Système laser 35

3.5 Système d'imagerie par absorption 35

3.5.1 Principe de fonctionnement de l'absorption 35

3.5.2 Système et résolution optique 38

3.6 Description générale du cycle expérimental 40

3.6.1 Du PMO externe au PMO de surface 40

3.6.2 Mélasse et pompage optique 43

3.6.3 Piège magnétique 43

3.6.4 Refroidissement évaporatif dans le piège en Z 44

3.6.5 Coupure du piège et temps de vol 46
3.7 Paramètres et valeurs typiques sur l'expérience 52

4 Réduction du potentiel rugueux créé par une puce atomique 55
4.1 Caractéristiques du potentiel rugueux 56
4.1.1 Origines possibles et mesures préliminaires 56
4.1.2 Déformations des lignes de courant 57
4.1.3 Propriétés spectrales du potentiel rugueux 58
4.2 Principe du guide modulé 62
4.2.1 Potentiel moyen pour un guide magnétique modulé 62
4.2.2 Champ homogène B_0 créé par la microstructure 65
4.2.3 Ajout d'un confinement longitudinal (piège en H) 68
4.2.4 Propriétés des pièges DC et AC 72
4.3 Réalisation expérimentale 74
4.3.1 Synchronisation des courants 76
4.3.2 Chargement des pièges DC et AC 78
4.4 Mesure du potentiel rugueux 83
4.4.1 Via la distribution de Maxwell-Boltzmann 83
4.4.2 Via la mesure de décroissance des oscillations dipolaires 88
4.4.3 Modélisation du temps d'amortissement en fonction de l'amplitude de la rugosité 90
4.5 Limitations fondamentales de la méthode 92
4.5.1 Imperfections du potentiel moyen 92
4.5.2 Effet de la modulation sur le mouvement longitudinal : taux de chauffage 95
4.5.3 Condition d'adiabaticité sur l'évolution du spin 97
4.5.4 Effet de la modulation sur le mouvement transverse 99
4.6 Refroidissement évaporatif dans le piège modulé 105
4.6.1 Apparition de bandes latérales 107
4.6.2 Conséquences sur le nuage atomique 109

5 Fluctuations de densité dans un gaz de Bose allongé 111
5.1 Introduction 112
5.1.1 Le groupement de bosons : un effet de statistique 112
5.1.2 Analogie avec l'optique : le corps noir 116
5.1.3 Fonctions de corrélation du premier et du second ordre 118
5.1.4 Observations antérieures du groupement de bosons 120
5.2 Effet du groupement de bosons sur les fluctuations de densité d'un gaz atomique 125
5.2.1 Lien entre fluctuations de densité et la fonction de corrélation $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 125

5.2.2 Fluctuations de densité dans un gaz de Bose idéal dans un piège harmonique anisotrope . . . 126
5.3 Séquences expérimentales et traitement des images . . . 131
5.3.1 Obtention de pièges très anisotropes : décompression longitudinale 131
5.3.2 Prise d'image . . . 134
5.3.3 Précautions à prendre pour être limiter par le bruit de photon . . 135
5.4 Traitement des images . . . 140
5.4.1 Rappel de statistiques . . . 140
5.4.2 Bruit sur les images par absorption . . . 140
5.4.3 Comment extraire les fluctuations de densité ? . . . 141
5.4.4 Résultats : . . . 144
5.5 Fluctuations de densité dans la limite quasi-condensat . . . 148
5.5.1 Prise en compte des excitations sous forme de phonons (modèle 1D) 149
5.5.2 Recours à la thermodynamique . . . 152
5.5.3 Comparaison avec l'expérience . . . 153
5.6 Discussions sur les problèmes expérimentaux . . . 155
5.6.1 Effet de la durée du pulse d'imagerie . . . 155
5.6.2 Extraire les fluctuations de densité pour des absorptions optiques fortes . . . 156
5.7 Conclusion : les fluctuations de densité un moyen de sonder la transition entre gaz idéal et quasi-condensat . . . 160

6 Rôle des interactions répulsives entre atomes sur la formation d'un quasi-condensat 163
6.1 Transition vers un quasi-condensat . . . 164
6.1.1 Compétition entre deux mécanismes . . . 164
6.1.2 Théorie de champ moyen au dessus de T_c : modèle Hartree-Fock . 166
6.2 Détermination de l'équation d'état du gaz : résolution numérique du modèle de Hartree-Fock . . . 168
6.2.1 Méthode par itération . . . 173
6.2.2 Méthode par minimisation . . . 174
6.2.3 Comparaison des différentes méthodes . . . 177
6.3 Séquence expérimentale . . . 179
6.3.1 Préparation du nuage atomique . . . 179
6.3.2 Mesures du profil de densité in-situ . . . 179
6.3.3 Extraction de la température et du potentiel chimique . . . 186
6.4 Résultats . . . 189
6.4.1 Vérification de l'approximation de densité locale . . . 189
6.4.2 Observation de la présence d'un quasi-condensat pour $T > T_c^{H.F.}$. 191
6.4.3 Estimation de la densité atomique au "cross-over" . . . 193
6.5 Conclusion . . . 194

7 Conclusion **195**

A Critère de condensation à 1D et 3D **199**
A.1 Expression de la densité d'états dans un piège harmonique 199
A.2 Population des états excités 200

B Expression de l'hamiltonien du pour le piège modulé **203**
B.1 Dérivation de la forme générale de l'hamiltonien 203

C Expression des fluctuations de densité pour un gaz de Bose idéal **207**

D Calcul de l'absorption pour un nuage gaussien **211**

E Expression matricielle de l'hamiltonien de Hartree-Fock **215**

F Publications **217**
F.1 Atom chips in the real world : the effects of wire corrugation 219
F.2 Realizing a stable magnetic double-well potential on an atom chip 230
F.3 Observations of density fluctuations in an elongated Bose gas : ideal gas and quasi-condensate 237
F.4 Evidence for the Breakdown of a Hartree-Fock Approach in a Weakly Interacting Bose Gas 242
F.5 Roughness suppression in an AC atom chip 247
F.6 Limitation of the modulation method to smooth a wire guide roughness . 252

Remerciements

Le doctorat représente une aventure scientifique mais également une tranche de vie où des aventures humaines se créent. Je souhaite profiter de ces quelques lignes pour remercier vivement les personnes avec qui j'ai eu la joie de travailler, de côtoyer au cours de ces trois (quatre) années de thèse et qui ont contribuées d'une façon ou d'une autre à l'aboutissement de ce travail.

Ces travaux de thèse ont été effectués au laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique dans le groupe d'Optique Atomique. Je remercie son directeur Pierre Chavel de m'y avoir accueilli et d'avoir accepter avec enthousiasme de participer à mon jury, ainsi qu'Alain Aspect pour m'avoir donner l'opportunité de travailler dans son groupe. Je lui suis également particulièrement reconnaissant pour les précieux conseils et analogies avec l'optique qu'il m'a transmis notamment lors de la rédaction du papier sur la modulation du potentiel rugueux. Ce papier ne serait pas si clair sans toi. Merci !

Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse, Chris Westbrook, pour m'avoir fait confiance pendant près de quatre ans et m'avoir permis de vivre une expérience de recherche aussi enrichissante. J'ai également beaucoup apprécié son approche de la physique et les nombreuses discussions que nous avons eues lorsque nous partagions le même bureau.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont manifestés pour cette thèse : Jook Walraven et Jakob Reichel pour avoir acceptés la charge de rapporteurs, et Brahim Lounis pour avoir accepté le rôle d'examinateur, avec l'enthousiasme qui le caractérise.

Je remercie la DGA pour avoir financée ma bourse de thèse et plus particulièrement Bruno Desruelle pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux.

Au quotidien, ce travail de thèse a été suivi par Isabelle Bouchoule dont ses qualités scientifiques et humaines sont appréciées de tous. J'ai beaucoup appris à tes côtés, et je t'en suis infiniment reconnaissant. Tu m'as toujours fait confiance et cela m'a fait très plaisir. Je regrette seulement que la manip Josephson n'ai pas réussie (car d'une part nous n'étions vraiment pas loin ... et puis d'autre part, manger une (seconde) pièce-montée n'aurait pas été si désagréable !). Je te remercie également chaleureusement pour ta relecture assidue et rapide de mon manuscrit. Outre l'aventure scientifique que nous avons partagée, je garderais également longtemps en mémoire ces virées en bateau (de jour comme de nuit) que nous avons faites, ainsi que cette mémorable escapade à vélo faite en direction de Fontainebleau.

La première phase de ma thèse s'est déroulée au laboratoire de Photonique et Nano-

structure de Marcoussis et a consisté en la fabrication de la puce atomique. Je remercie Dominique Mailly, GianCarlo Fiani, l'ensemble du personnel de la salle blanche en pensant plus particulièrement à Laetitia Leroy, Xavier Lafosse, Kamel Bencheikh pour toute l'aide qu'ils nous ont apportée. J'ai eu la chance inestimable de pouvoir utiliser sans limite l'ensemble du matériel mis à notre disposition (microscope à électrons, bâti d'attaque plasma, bâti de déposition d'or,...) pour réaliser notre puce atomique, et je remercie par ce biais la collaboration fructueuse qui existe entre nos deux laboratoires.

L'art de la micro-fabrication m'a été enseigné par Thorsten Schumm, thésard de la manip puce à l'époque. Nous avons découvert, à nos dépends, que la réalisation de nano-fils d'or est une tâche nettement plus ardue que prévu surtout lorsque l'on ajoute les caprices du bâti d'évaporation. Je me souviendrai sûrement longtemps de ce clivage raté un vendredi soir de Mars retardant notre retour à l'Institut d'Optique. Malgré ces aléas, je garderais un très bon souvenir de cette période, de tous ces petits moments où tu m'expliquais avec tant d'enthousiasme ce que nous pourrons faire avec cette nouvelle puce. Ces moments ont profondément ancrés en mon intérieur l'idée que la physique est une merveilleuse discipline. Je te remercie également pour ton optimisme à toute épreuve (commencer à casser le vide à 17h en est un exemple) et ton sens pragmatique d'aborder les problèmes expérimentaux avec tes fameuses "check-list". Merci !

Les résultats présentés dans cette thèse sont bien entendus le fruit d'un travail d'équipe. Je souhaite donc remercier Christine Aussibal et Jérôme Estève, les deux premiers thésards de la manip qui l'ont montée depuis zéro. Merci également à Jérôme pour m'avoir familiariser avec GUS et ses sous-programmes complètement absconds pour un néophyte comme seqcompile avec ces fameux temps imaginaires... Merci à mon premier post-doc Hai Nguyen, arrivé au labo quelques jours avant moi, avec qui nous avons eu l'excitation de notre premier BEC un mercredi matin de Mai. Thanks you so much for your happiness ! Je remercie aussi Ronald Cornelussen pour avoir passé quelques mois sur la manip lorsque nous essayions de moduler nos petits-fils et de résoudre nos problèmes de boucles de masse si difficiles à comprendre.

En septembre 2007, Carlos Garrido Alzar est arrivé comme post-doc sur la manip. Ces derniers mois de manip avec lui m'ont permis de bénéficier de ces nombreux conseils avisés. Merci pour tout, ta bonne humeur, tes compétences scientifiques, ton sens de l'humour. Ces quelques mois passés ensemble sur la manip ont été un réel plaisir. Je te souhaite bonne chance pour la suite et je suis sûr que vous allez réussir à faire de magnifiques crêpes atomiques !

Les expériences d'atomes froids sont non seulement un travail d'équipe mais également un travail de groupe où l'entraide mutuelle est naturellement très présente et très forte. J'ai eu le plaisir de partager ma salle de manip avec la manip "Pince" et la manip "Bio" et je remercie chacune et chacun de mes voisins pour toutes les discussions animées, scientifiques et autres, que nous avons eues.

Un grand merci à toute l'équipe passée et présente du groupe d'Optique Atomique : Alain Bernard, David Dulin, Denis Boiron, Jean-Christophe Jaskula, Jean-Félix Riou,

Jean-Philippe Brantut, Jocelyn Retter et Matt Jones, José Gomes, Karen Perronet, Marie Fauquembergue, Martin Robert de Saint-Vincent, Mathilde Hugbart, Philippe Bouyer, Pierre Lugan, Robert Nyman, Rodolphe Hoppeler, Sébastien Gleyzes, Signe Seidelin, Simon Bernon, Vanessa Leung, Yann Le Coq, Zhanchun Zuo.

Les conférences sont des moment propices pour lier des amitiés. Hanovre, Innsbruck, Dublin, Durham, Vienne que de villes où nous avons passé de très bons moments avec ces nombreuses discussions scientifiques. Je me souviendrai longtemps de cette conférence à Innsbruck avec William Guérin, de ces nombreuses glaces englouties sous un soleil de plomb au château de Schönbrunn (Vienne) à coté de la Gloriette. Merci à Karim El Amili pour cette visite de Newgrange en marge de la conférence et ces moments inoubliables dans la grande ville de Maynooth.

En 2005, j'ai eu le plaisir de participer à l'organisation d'une conférence avec quatre autres membres du groupe : Gaël Varoquaux, Aurélien Perrin, Andrès Varon et Martijn Schellekens ainsi que Francesca Arcaca. Je souhaite par ces quelques lignes les remercier pour tout le travail qu'ils ont accomplis et sans lequel cette conférence n'aurait pas eu le succès escompté. Je me souviendrai de ces glorieux moments avec la YAO-mobile pour aller chercher le samedi matin les derniers préparatifs pour la conf', le comptage des 156 paires de draps et édredons ... Quelle organisation, merci ! Je souhaite également exprimer ma gratitude envers Françoise Chavel pour nous avoir expliqué avec patience les rudiments de l'organisation d'une conférence.

Mes remerciements seraient sûrement incomplets si j'omettais nos deux électroniciens de choc Frédéric Moron et André Villing sans qui notre manip "puce" ne tournerait pas si bien. Merci à toi André pour m'avoir initié au joie du séquenceur. Je garderai en mémoire qu'il ne faut jamais utiliser des condensateurs de trop bonnes qualités avec des batteries de camion. Frédéric, merci pour ta patience et pour les réponses à toutes les questions d'électronique que je t'ai posées. Tu m'as enseigné entre autre l'art du positionnement de la capa de 100 nF et je t'en remercie.

De manière plus anecdotique et technique je remercie Digamma, par l'intermédiaire de Gaël, pour m'avoir sauvé la vie plusieurs fois en fin de rédaction notamment les dimanches où l'Institut d'Optique était fermé.

J'ai également eu un grand plaisir à enseigner les TD de Lasers pour les Masters à l'Institut d'Optique pendant deux années et je remercie Nathalie Westbrook ainsi que François Balembois pour m'avoir offert cette opportunité.

Je remercie mon bibliothécaire préféré dont sa bibliothèque qui n'a rien a enviée avec celle de la fac d'Orsay est ouverte tous les week-ends et parfois même en plein milieu de la nuit. Pierre, merci infiniment !

La thèse comporte également des moments plus difficiles, je souhaite remercier chaleureusement tous ceux qui m'ont apporté leur soutien notamment Jean-François, Juliette, Valentina, Yvan. Par ce même biais, je remercie chaleureusement ces personnes invisibles au laboratoire, mais au combien essentielles en fin de thèse, pour m'avoir soutenu avec dévouement. Merci à ma famille et à tous mes amis. Une pensée particulière à Eric

Wenger pour m'avoir donné cette impulsion finale fin juillet.

J'ai également une pensée amicale pour tous les habitants du 503 qui m'ont soutenus avec patience : Aurélie, Arnaud, Christophe, David, Gaid, Sébastien, Vincent.

Je souhaite remercier vivement Yvan, Juliette et Jean-François pour la correction fastidieuse et ingrate de mes fautes d'orthographes.

Je remercie l'ensemble des services des TPs pour le prêt de matériel ainsi que les mesures impromptues que nous avons faites notamment sur notre système d'imagerie.

Je remercie l'ensemble des services techniques et administratifs de l'Institut d'Optique et plus particulièrement Jocelyne Armand ainsi que Christine Bruneau pour tous ces petits services qui m'ont rendus ma vie si facile. Je tiens également à exprimer ma gratitude à Graça Martin pour le tirage papier de ce manuscrit.

Pour finir, je souhaite remercier mes parents et mes grands-parents pour m'avoir toujours encouragés dans tous les choix que j'ai faits sans jamais y interférer. J'ai la chance inestimable aujourd'hui de faire ce que j'aime et je vous en remercie chaleureusement.

Je vous souhaite à toutes et tous une très bonne lecture.

Les choses les plus belles sont celles que souffle la folie et qu'écrit la raison. Il faut demeurer entre les deux, tout près de la folie quand on rêve, tout près de la raison quand on écrit.
André Gide

pour tous ces très bons moments passés,

CHAPITRE 1

Introduction

En 1924, le physicien indien Satyendranath Nathanel Bose fit l'hypothèse que la lumière peut être décrite par des particules indiscernables, sans masse, ayant deux états de polarisation : les photons. A partir de ces considérations, il retrouva l'expression de la loi de Planck relative au corps noir. Einstein s'aperçu rapidement de l'importance de ces travaux [1] et étendit ce raisonnement au cas des particules bosoniques (particules de spin entier). Il prédit ainsi qu'en refroidissant un gaz de bosons en-dessous d'une température dite critique, un nombre macroscopique d'atomes s'accumulerait dans l'état fondamental du système pour former une onde de matière cohérente macroscopique, appelé condensat de Bose-Einstein. Cette idée fut débattue par un grand nombre de scientifiques et certains d'entres eux s'interrogeaient sur le temps de formation du condensat qu'il pensait être infini.

Il fallu attendre 70 ans pour que le groupe d'E. Cornell et de C. Wieman apporte la confirmation expérimentale de la condensation de Bose-Einstein dans un gaz atomique dilué de rubidium [2]. Dans les quelques mois qui suivirent, un foisonnement d'expériences virent le jour et plusieurs autres espèces atomiques alcalines furent condensées : le sodium [3] et le lithium [4]. Actuellement, tous les éléments alcalins à l'exception du francium [2, 4–7] ont été condensés ainsi que l'hydrogène [8], l'hélium métastable [9] ou des espèces plus exotiques comme l'ytterbium [10] et le chrome [11]. Près de 50 groupes de recherche dans le monde possèdent leur propre condensat et étudient leurs propriétés quantiques dans différentes configurations de pièges et en particulier dans les régimes de basses dimensionalités. Cet attrait pour ce type de régime est nourri d'une part par le fait qu'il existe des modèles analytiques pour le cas purement unidimensionnel et d'autre part pour les similarités profondes qui existent entre les condensats et la physique de la matière condensée (superfluidité, effet Hall quantique, transition Berezinsky-Kosterlitz-Thouless pour un gaz bidimensionnel). Expérimentalement les propriétés du nuage atomique peuvent être, contrairement au cas de la matière condensée, facilement variées que ce soit en terme de nombre d'atomes, de confinement, ou même de l'effet des interactions entre atomes avec l'utilisation de résonances de Feshbach [12].

De plus, la dimensionalité du système étudié joue un rôle essentiel sur la formation du condensat. Pour un système tridimensionnel, le nuage atomique subit une transition de phase bien décrite par la théorie du gaz idéal [13] où à partir de la température critique, les atomes viennent s'accumuler dans le niveau fondamental du piège, l'effet des interactions répulsives entre atomes n'ayant qu'un effet perturbatif sur la température

de condensation (effet de l'ordre de 10% [14]) et vérifié expérimentalement par [15]. A contrario, pour un régime unidimensionnel, l'effet des interactions ne peut plus être considéré comme perturbatif puisque un gaz idéal piégé dans un potentiel harmonique ne peut subir de condensation de Bose-Einstein à la limite thermodynamique. C'est alors l'effet progressif des interactions répulsives entre atomes qui va amener le nuage atomique, lorsque sa température est abaissée, vers un régime dit de quasi-condensat. Dans ce régime, la densité atomique du nuage est donnée par celle d'un condensat idéal mais présente une phase non uniforme sur l'ensemble du nuage [16, 17]. Les premiers quasi-condensats ont été observés expérimentalement dans le groupe de Ketterle dans des pièges anisotropes obtenus à partir d'un piégeage optique [17,18]. Cependant, au seuil de condensation le nuage n'est pas encore suffisamment unidimensionnel et l'apparition du (quasi-)condensat se produit encore par une transition de phase.

Pour disposer de pièges très anisotropes et étudier les propriétés de ces gaz quantiques dégénérés dans le régime unidimensionnel, plusieurs solutions existent comme par exemple l'utilisation de réseaux optiques 2D, obtenus à partir de l'interférence de deux faisceaux contra-propageants. Les atomes sont alors piégés, via la force dipolaire, le long de tubes de lumière [19–21]. La solution de piégeage magnétique est également possible, cependant le fort confinement transverse requis nécessite des précautions particulières, comme l'utilisation d'un électro-aimant à noyau ferromagnétique [22] ou d'une puce atomique qui permettent de créer des gradients de champ magnétique très importants au voisinage de la microstructure [23, 24].

Dans cette thèse, nous avons utilisé cette dernière solution qui présente l'avantage d'avoir un dispositif expérimental plus simple et la possibilité de concevoir des géométries de piégeages variées (piège très anisotrope, double puits de potentiel, guide magnétique, ...).

L'une des questions centrales de cette thèse sera de savoir s'il est possible d'observer l'apparition d'un quasi-condensat par l'effet progressif des interactions répulsives entre atomes. Nous verrons que la réponse est affirmative et sera détaillée aux chapitres 5 et 6.

Ce manuscrit est organisé de la façon suivante :

Premier chapitre : le premier chapitre sera consacré à des rappels théoriques sur la condensation de Bose-Einstein où nous verrons les différences fondamentales qui existent entre un système tridimensionnel et un système unidimensionnel.

Deuxième chapitre : le second chapitre présentera le dispositif expérimental que nous avons utilisé au cours de cette thèse. Nous rappellerons, à cette occasion, le principe de fonctionnement d'une puce atomique pour piéger et manipuler des atomes froids. Dans une deuxième partie, nous décrirons les aspects techniques de notre dispositif expérimental ainsi que la séquence expérimentale pour l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein à 3D.

Troisième chapitre : au cours du troisième chapitre, nous verrons qu'un nuage d'atomes froids devient sensible aux imperfections de micro-fabrication de la puce atomique

lorsqu'il est approché au voisinage de celle-ci ce qui limitent le confinement radial accessible. Nous montrerons qu'il est possible de moyenner l'effet de ces imperfections en modulant le potentiel de piégeage de sorte que les atomes ne soient sensibles qu'au potentiel moyen, exempt de rugosité. Dans une seconde partie, nous présenterons également de manière quantitative les limitations tant expérimentales que théoriques de cette méthode de modulation. Nous finirons par montrer que la technique de refroidissement évaporatif au moyen d'une onde radio-fréquence, largement utilisée dans la communauté, peut être appliquée à ce type de piège.

Quatrième chapitre : le quatrième chapitre sera consacré à la mesure de fluctuations de densité dans un gaz de Bose allongé. Nous verrons qu'elles sont un moyen indirect pour sonder la transition entre le gaz de Bose idéal et le régime du quasi-condensat et ceci pour une géométrie de piégeage proche du régime unidimensionnel. Nous verrons ainsi que les fluctuations de densité suivent des comportements notoirement différents dans ces deux types de régimes. Nous montrerons que les fluctuations de densité sont associées d'une part au bruit de grenaille atomique mais aussi à un phénomène quantique qui est le groupement de bosons. Nous expliquerons en quoi il consiste et nous présenterons les expériences qui ont déjà été réalisées à son sujet pour le mesurer. Nous décrirons ensuite l'originalité de notre expérience qui réside dans la détection de ces fluctuations de densité à partir d'images faites par absorption alors que les atomes sont encore confinés dans le potentiel de piégeage.

Cinquième chapitre : le cinquième chapitre abordera une question sous-jacente présente au quatrième chapitre concernant la nature de la "transition" qui existe entre le régime du gaz idéal et le régime du quasi-condensat. Nous commencerons par rappeler en quoi consiste la théorie de champ moyen, qui dans le cas d'un piégeage à trois dimensions, prédit avec précision la température de condensation du gaz. Nous appliquerons cette méthode pour calculer numériquement les profils de densité atomiques attendus et nous les comparerons aux profils expérimentaux. Nous constaterons, à ce titre, que la présence d'un quasi-condensat au centre du nuage, observée expérimentalement, ne peut être prédite par cette théorie. Pour finir, nous conclurons en donnant les raisons pour lesquelles cette théorie de champ moyen n'est pas applicable dans ce cas en montrant que les collisions entrent particules corrèlent ces particules en position.

CHAPITRE 2

La condensation de Bose-Einstein

Ce premier chapitre présente des rappels théoriques sur le phénomène de condensation de Bose-Einstein.

A partir des propriétés du gaz idéal, nous dériverons les critères de condensation pour un piège harmonique à trois dimensions ainsi que pour un piège unidimensionnel. A la limite thermodynamique, nous verrons qu'en fonction de la dimensionalité du système, un nombre macroscopique d'atomes peut s'accumuler ou non dans l'état fondamental du piège (*i.e.* présence d'un condensat de Bose-Einstein). Nous nous pencherons ensuite sur le cas des systèmes réels ne contenant qu'un nombre fini de particules et pour lesquels une condensation de Bose-Einstein est toujours attendue. Nous détaillerons pour finir comment ces effets de taille finie modifient la température critique de condensation.

Dans un deuxième temps, nous inclurons dans le traitement précédent l'effet des interactions répulsives entre atomes dans la limite du régime du gaz dilué. Nous verrons qu'elles conditionnent, pour des pièges très anisotropes, l'apparition d'objets quantiques non idéaux : les quasi-condensats dont nous donnerons les caractéristiques essentielles.

2.1 Condensation de Bose-Einstein pour un gaz idéal

Considérons un gaz de N bosons identiques (même état interne, même état de spin) confinés dans un potentiel de piégeage $V_{\text{ext.}}$ à une température T. Chacun des niveaux d'énergie du piège ϵ_i est peuplé thermiquement, dont le nombre moyen est donné par la distribution de Bose f_{Bose} :

$$f_{\text{Bose}} = \frac{1}{e^{-\frac{\mu-\epsilon_i}{k_{\text{B}}T}} - 1} \qquad \text{avec} \qquad \sum_{i=0}^{\infty} f_{\text{Bose}} = N \tag{2.1}$$

où μ est le potentiel chimique du gaz et se trouve à l'aide de la condition de normalisation $\sum_i f_{\text{Bose}} = N$. Notons que pour que le taux d'occupation $f_{\text{Bose}}(\epsilon_i)$ ait un sens physique (*i.e.* soit positif), il est impératif que le potentiel chimique soit inférieur à l'énergie du niveau fondamental ϵ_0. Nous voyons à partir de 2.1 que lorsque nous augmentons progressivement le nombre d'atomes N du gaz à température et confinement fixés, le potentiel chimique μ augmente. Lorsque le potentiel chimique s'approche de ϵ_0, la population du niveau fondamental s'écrit $N_0 \simeq \frac{k_{\text{B}}T}{\epsilon_0-\mu}$ et devient macroscopiquement grande.

Pour s'en rendre compte écrivons l'expression du nombre d'atomes contenus dans le piège. Nous traiterons le cas du niveau fondamental à part puisque lorsque μ va tendre vers ϵ_0, N_0 va diverger et nous trouvons :

$$\begin{aligned} N &= N_0 + \sum_{i\neq 0}^{\infty} \frac{1}{e^{-\frac{\mu-\epsilon_i}{k_\mathrm{B}T}} - 1} \\ \text{avec} & \\ N_0 &= \frac{z}{1-z} \qquad \text{où z est la fugacité du gaz définie par} \qquad z = e^{\frac{\mu-\epsilon_0}{k_\mathrm{B}T}} \end{aligned} \tag{2.2}$$

En se plaçant à la limite thermodynamique, la différence d'énergie séparant deux niveaux adjacents ϵ_{i+1} et ϵ_i devient négligeable devant $k_\mathrm{B}T$, ce qui permet de remplacer la somme discrète par une intégrale et d'utiliser l'expression de la densité d'états $\rho(\epsilon)$.

$$N = N_0 + \int_{\epsilon_0}^{\infty} \rho(\epsilon) f_\mathrm{Bose} d\epsilon \tag{2.3}$$

Pour obtenir le phénomène de condensation de Bose-Einstein, il faut que l'intégrale présente dans l'équation 2.3 converge lorsque le potentiel chimique tend vers ϵ_0, c'est-à-dire que le nombre d'atomes présents dans les états excités sature à la valeur N^sat. Si le nombre d'atomes confinés dans le potentiel de piégeage est supérieur à N^sat, les atomes excédentaires n'ont d'autre choix que de s'accumuler dans l'état fondamental du système. Le phénomène de condensation de Bose-Einstein est donc associé à la saturation des états excités. Nous voyons que ce phénomène n'aura pas lieu dans toutes les géométries de piégeage puisqu'il est conditionné par la convergence de l'intégrale 2.3 et donc par l'expression de la densité d'états. Nous allons dans les sous-sections suivantes nous concentrer sur l'exemple du potentiel harmonique, largement utilisé dans les expériences d'atomes froids.

2.1.1 Piège harmonique faiblement anisotrope à 3 dimensions

Pour commencer cette étude, nous prendrons un potentiel harmonique faiblement anisotrope pour $V_\mathrm{ext.}$ dont l'expression est :

$$V_\mathrm{ext.} = \frac{1}{2} m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \tag{2.4}$$

avec ω_x, ω_y, ω_z les trois fréquences d'oscillation du piège et nous noterons la fréquence d'oscillation moyenne $\overline{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$.

Dans ce cas, la densité d'états $\rho(\epsilon)$ s'obtient facilement (voir annexe A) et s'écrit :

$$\rho(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2(\hbar\overline{\omega})^3} \qquad \text{avec} \qquad \overline{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3} \tag{2.5}$$

Le calcul de l'intégrale de 2.3, nous donne l'expression du nombre d'atomes en fonction de la fugacité du gaz :

$$N = N_0 + \left(\frac{k_B T}{\hbar\overline{\omega}}\right)^3 g_3(z) \qquad \text{avec} \qquad g_\alpha(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i^\alpha} \tag{2.6}$$

De cette expression, nous voyons que le nombre d'atomes présents dans les niveaux excités sature lorsqu'à température fixée, nous augmentons le nombre d'atomes total. En effet, augmenter le nombre d'atomes total fait croître le potentiel chimique vers ϵ_0 et donc la fugacité vers 1. Comme la fonction de Reimann $g_3(z)$ prend une valeur finie en $z = 1$ ($g_3(1) = 1.202$), le nombre d'atomes maximum qu'il est possible de placer dans les états excités est :

$$N^{\text{sat}} \simeq 1.202 \left(\frac{k_\text{B} T}{\hbar\overline{\omega}}\right) \tag{2.7}$$

La température de condensation à laquelle se produit ce phénomène se trouve lorsque le nuage sature juste ses niveaux excités (la proportion du nombre d'atomes dans le niveau fondamental est encore négligeable) :

$$T_c^{3D} \simeq 0.94 \frac{\hbar\overline{\omega}}{k_\text{B}} N^{1/3} \tag{2.8}$$

A cette température, l'ajout de tout atome supplémentaire ne fera que peupler le niveau fondamental du piège qui pourra alors prendre une proportion macroscopique. Le nombre d'atomes condensés dans l'état fondamental est alors donné par la formule :

$$N_0 = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_c^{3D}}\right)^3\right) \tag{2.9}$$

Toutes les formules précédentes ont été données à la limite thermodynamique. Pour les expériences réalisées dans ce manuscrit, le nombre d'atomes est typiquement de quelques 10^4 et des effets au-delà de la limite thermodynamique peuvent être visibles. A nombre fini d'atomes dans le piège, la condensation n'est pas à proprement parlé une transition de phase puisque les variables thermodynamiques ne subissent pas de discontinuité au passage de la "température critique". Elles varient cependant suffisamment rapidement pour laisser une signification physique à cette dernière.

En prenant en compte le nombre fini de particules contenues dans le piège, le nombre d'atomes condensés peut s'écrire [25] :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^{3D}}\right)^3 - \frac{3\Omega g_2(1)}{2\overline{\omega} g_3^{2/3}(1)} \left(\frac{T}{T_c^{3D}}\right) N^{-1/2} \tag{2.10}$$

où $\Omega = \frac{1}{3}(\omega_x + \omega_y + \omega_z)$ est la moyenne arithmétique de la fréquence d'oscillation du piège.

La température de condensation est également décalée d'une quantité [14, 25] :

$$\frac{\delta T_c}{T_c^{3D}} = -\frac{\Omega\zeta(2)}{2\overline{\omega}\zeta(3)^{2/3}}N^{-1/3} \simeq -0.73\frac{\Omega}{\overline{\omega}}N^{-1/3} \tag{2.11}$$

Pour les paramètres expérimentaux que nous utiliserons dans les chapitres 4 et 5 ($\omega_x = \omega_y = 2750$ Hz , $\omega_z \simeq 15$ Hz, $N = 10^4$) cet effet correspond à un décalage de la température de condensation de 12% et doit être pris en compte si nous souhaitons la mesurer de manière précise.

2.1.2 Piège harmonique à une dimension

Pour réaliser un piège harmonique unidimensionnel, il faut fortement comprimer deux des trois dimensions du piège précédent. A cette condition il faut rajouter que l'énergie d'agitation thermique par particule du nuage piégé doit être inférieure à l'écart en énergie de deux niveaux transverses successifs. Dans ces conditions, les degrés de liberté transverses du nuage sont gelés et les atomes ne peuplent que le mode fondamental transverse du piège. Dans la direction longitudinale, par contre, aucune contrainte n'est imposée et beaucoup de modes peuvent être peuplés. Nous parlerons alors de distribution thermique unidimensionnelle[1].

Contrairement au cas 3D, un nuage 1D de bosons ne pourra condenser à la limite thermodynamique. Ceci peut se voir en regardant à nouveau l'expression de la densité d'état dans le régime 1D et en montrant que le nombre d'atomes contenus dans les états excités ne va peut saturer lorsque la fugacité tend vers 1. En prenant, comme expression pour le potentiel de piégeage $V_{\text{ext.}}(z) = \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2$, la densité d'états s'écrit :

$$\rho_{1D}(\epsilon) = \frac{1}{\hbar\omega_z} \tag{2.12}$$

Le nombre d'atomes présents dans les états excités se trouve, comme précédemment, à partir du calcul de l'intégrale de l'équation 2.12 (voir l'annexe A) :

$$\begin{aligned} N_{\text{excité}}^{1D} &= \int_{\epsilon_0}^{\infty} \rho_{1D}(\epsilon) f_{\text{Bose}}(\epsilon) d\epsilon \\ &= \left(\frac{k_{\text{B}}T}{\hbar\omega_z}\right) \ln(1 - ze^{-\frac{\hbar\omega_z}{k_{\text{B}}T}}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

En se plaçant à la limite thermodynamique ($\omega_z \to 0$, $N \to \infty$ en gardant $N\omega_z$ constant), nous voyons en faisant tendre z vers 1 dans l'expression 2.13 que la température de condensation tend vers 0. Il n'est donc pas possible d'obtenir un condensat de Bose-Einstein à la limite thermodynamique dans cette configuration. Heureusement, si l'on

[1] Il est à noter que dans ce régime purement unidimensionnel, il ne peut pas y avoir d'échange d'énergie entre les degrés de liberté transverse et longitudinal et la rethermalisation du nuage peut alors poser un problème.

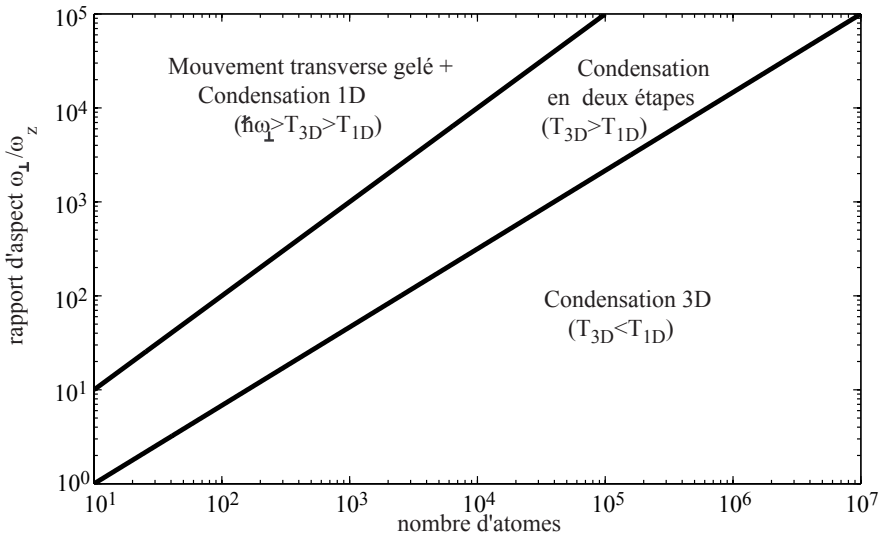

FIG. 2.1 – Les différents régimes possibles d'un gaz de Bose idéal en fonction de l'anisotropie du piège. Pour un grand nombre d'atomes et un piège faiblement anisotrope, la traditionnelle condensation à 3 dimensions a lieu. Pour des systèmes plus allongés, la condensation se fait en deux étapes : premièrement le système condense dans la direction transverse lorsque la température décroît en dessous de T_c^{3D}. Nous sommes alors en présence d'un système quasiment 1D qui condensera ensuite dans la direction longitudinale lorsque T sera inférieure à T_c^{1D}. Pour des pièges encore plus anisotropes, le degré de liberté transverse est gelé avant même d'atteindre le critère de condensation transverse.

reste avec un nombre fini d'atomes, le potentiel de piégeage harmonique introduit une énergie de point zéro et la température de condensation est non nulle et s'écrit :

$$T_c^{1D} = \frac{\hbar\omega_z}{k_\mathrm{B}} \frac{N}{\ln(2N)}. \tag{2.14}$$

2.1.3 Piège fortement anisotrope à 3 dimensions

Voyons maintenant ce qui ce passe dans le régime intermédiaire, c'est-à-dire pour un piège fortement anisotrope mais dans le cas où le nuage ne peut pas être approximé par un système 1D. Nous nous placerons dans le cas où les deux fréquences transverses du piège sont égales : $\omega_\perp = \omega_x = \omega_y$.

Sur la figure 2.1, nous avons représenté les différents régimes du gaz en fonction du nombre d'atomes et du rapport d'anisotropie du piège :

$T_c^{3D} < T_c^{1D}$ **:** la condensation est tridimensionnelle, comme dans un piège isotrope et se produit à T_c^{3D} en utilisant comme fréquence du piège la fréquence moyenne $\overline{\omega}$.

$T_c^{3D} > T_c^{1D}$ **:** A nombre d'atomes fixés en baissant la température, nous allons d'abord saturer les états transverses à T_c^{3D}. Le comportement du nuage devient alors unidimensionnel et rien ne se passe avant T_c^{1D} où le nuage condense dans la direction longitudinale.

$\hbar\omega_\perp > T_c^{3D} > T_c^{1D}$ **:** il s'agit d'un régime où le mouvement transverse des atomes est gelé, non pas par un effet de condensation mais simplement parce que l'énergie d'agitation thermique est trop faible. Dans ce régime, nous attendons simplement une condensation dans la direction longitudinale donnée par T_c^{1D}.

Nous voyons clairement que la condensation en deux étapes[2] sera d'autant plus visible que le rapport d'anisotropie du piège est important (partie haute du diagramme 2.1). A notre connaissance, celle-ci n'a jamais été observée expérimentalement notamment parce que la présence des interactions répulsives entre atomes va profondément modifier ce type de scénario.

2.2 Condensation de Bose-Einstein pour un gaz dans le régime d'interactions faibles

Bien que qualitativement valable, la théorie du gaz idéal ne permet de rendre compte quantitativement de la valeur de la température critique pour un gaz réel car la densité atomique au seuil de condensation est relativement élevée et donc l'effet des interactions entre atomes (répulsives dans le cas du rubidium 87) ne peuvent pas être négligées. L'hamiltonien du système à N corps s'écrit alors en seconde quantification :

$$\begin{aligned}\widehat{H} &= \int d\mathbf{r}\Psi^\dagger(\mathbf{r})\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{\text{ext.}}\right)\Psi(\mathbf{r}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\iint \Psi^\dagger(\mathbf{r})\Psi^\dagger(\mathbf{r'})V_{\text{int.}}(\mathbf{r}-\mathbf{r'})\Psi(\mathbf{r}')\Psi(\mathbf{r})d\mathbf{r}d\mathbf{r'}\end{aligned} \tag{2.15}$$

où $\Psi(\mathbf{r})$ est l'opérateur champ et $V_{\text{int.}}(\mathbf{r}-\mathbf{r'})$ est le potentiel d'interaction.

A très basse température, les collisions binaires entre deux particules se font uniquement en onde s et il est possible de remplacer le potentiel d'interaction $V_{\text{int.}}(\mathbf{r}-\mathbf{r'})$ par un potentiel de contact en delta : $V_{\text{int.}}(\mathbf{r}-\mathbf{r'}) = g_{3D}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r'})$ avec g_{3D} la constante de couplage à 3D qui a pour expression [26] :

$$g_{3\text{D}} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{2m} \tag{2.16}$$

Même avec cette expression simplifiée du potentiel d'interaction, l'état fondamental du problème à N corps n'est pas facilement calculable et il est nécessaire de faire des approximations supplémentaires notamment ce que nous appelons communément l'approximation de champ moyen.

[2] Condensation obtenue d'abord suivant la direction transverse puis suivant la direction longitudinale du piège.

2.2.1 Interactions traitées sous forme de champ moyen

Dans le cas du régime du gaz dilué, c'est-à-dire $\rho a^3 \ll 1$ où ρ est la densité atomique et a la longueur de diffusion, les interactions entre particules peuvent être traitées en première approximation par une théorie de type champ moyen et ainsi permettre de donner une expression plus commode de $\widehat{H}$. Dans cette approche, chaque particule évolue dans le potentiel de piégeage $V_{\text{ext.}}$ sur lequel vient s'ajouter un potentiel moyen supplémentaire créé par les (N-1) autres particules $V_{\text{H.F.}} = 2g_{3\text{D}}\rho(r)$. Le gaz est ainsi décrit, au dessus du seuil de condensation, par un gaz parfait confiné dans un potentiel qui dépend de la densité atomique par un terme en $2g_{3\text{D}}\rho(r)$ (pour la présence du facteur 2 on pourra se reporter au chapitre 6). Il faut alors résoudre le problème auto-consistant (la densité atomique modifiant le confinement qui lui-même détermine la densité atomique du nuage).

Nous voyons ainsi que dans le cas du gaz homogène à 3D, l'effet des interactions entre atomes n'aura aucun effet sur le critère de condensation puisque l'effet de champ moyen ne produit qu'un décalage global du spectre d'énergie sur l'ensemble du nuage. Par contre dans le cas d'un gaz piégé dans un potentiel harmonique 3D, le profil de densité dépend des coordonnées spatiales et le raisonnement est tout autre. Bien que le critère de condensation sur la densité atomique au centre reste donné par $n_{3\text{D}}\lambda_{\text{dB}}^3 = 2.612$, comme dans le cas du gaz idéal, la température de condensation sera alors légèrement plus faible. En effet, les interactions répulsives entre atomes vont avoir tendance à élargir le profil de densité du nuage (*i.e.* diminuer la densité pic du nuage), et la condition précédente ne sera vérifiée que pour une température T_c^{3D} légèrement inférieure. Le décalage de la température critique, dérivé dans [14], s'écrit :

$$\frac{\delta T_c}{T_c^{3D}} = -1.3\frac{a}{a_{\text{ho}}}N^{1/6} \tag{2.17}$$

Ce décalage en température est de 6% dans le cas de nos paramètres expérimentaux (gaz de ^{87}Rb contenant 10^4 atomes au voisinage de la transition dans un piège de fréquences d'oscillation $\omega_\perp = 2750$ et $\omega_z = 15$ Hz). Cet effet est non négligeable puisqu'il est du même ordre de grandeur que les effets de taille finie et a déjà été observé dans le groupe par Fabrice Gerbier *et al* [15].

2.2.1.1 Description du condensat dans l'approximation de Thomas-Fermi

Passons maintenant à l'analyse du profil de densité du condensat, en se plaçant à température nulle. Dans ce cas, la fonction d'onde du condensat est régie par l'équation de Gross-Pitaevskii [27, 28] :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{\text{ext.}}(\mathbf{r}) + g_{3\text{D}}|\Psi(\mathbf{r},t)|^2\right)\Psi(\mathbf{r},t) \tag{2.18}$$

En régime stationnaire, il est possible d'écrire $\Psi(\mathbf{r},t)$ sous la forme $\phi(\mathbf{r})e^{-i\mu t/\hbar}$ et en

normalisant ϕ par le nombre total de particules contenues dans le système ($\int |\phi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} = N$), nous obtenons :

$$\left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{\text{ext.}}(\mathbf{r}) + g_{3\text{D}}|\phi(\mathbf{r})|^2\right)\phi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}) \tag{2.19}$$

Cette expression n'est toujours pas soluble analytiquement, mais dans le cas où les interactions entre particules sont importantes, il est possible de se placer dans l'approximation dite de Thomas-Fermi et de résoudre simplement 2.19.

Approximation de Thomas-Fermi 3D :

Pour $g_{3\text{D}} > 0$ (*i.e.* interactions répulsives entre atomes) et un confinement faible dans les trois directions de l'espace, il est possible de négliger le terme d'énergie cinétique ($-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}$) par rapport au terme d'interactions ($g_{3\text{D}}|\phi(\mathbf{r})|^2$) dans l'équation 2.19. Le profil de densité à 3 dimensions s'écrit alors :

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\mu - V_{\text{ext.}}(\mathbf{r})}{g_{3\text{D}}} \qquad \text{pour} \qquad \mu - V_{\text{ext.}}(\mathbf{r}) > 0. \tag{2.20}$$

Le profil de densité est alors donné par la forme du potentiel de piégeage qui dans le cas où $V_{\text{ext.}}$ est un potentiel harmonique correspond à une parabole inversée[3].

L'approximation de Thomas-Fermi est en général bien vérifiée dans la direction longitudinale alors que la condition ($-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} \ll g_{3\text{D}}|\phi(\mathbf{r})|^2$) est plus difficile à satisfaire dans la direction transverse. On parle alors de régime Thomas-Fermi 3D si l'approximation de Thomas-Fermi est vérifiée dans les trois directions de l'espace, et de régime Thomas-Fermi 1D lorsqu'elle n'est vérifiée que dans la direction longitudinale.

Approximation de Thomas-Fermi 1D :

Pour les pièges anisotropes où règnent de très forts confinements transverses, la fonction d'onde dans le plan transverse est dominée par le terme d'énergie cinétique et donc donnée par le mode fondamental transverse de l'oscillateur harmonique.

En écrivant la fonction d'onde du condensat, en coordonnées cylindriques, sous la forme

$$\Psi(\mathbf{r}, z) = \Psi_\perp(\mathbf{r}, \theta)\Psi(z) \qquad \text{avec} \qquad \Psi_\perp(\mathbf{r}, \theta) = \frac{1}{2\pi a_\perp} e^{-\frac{r^2}{2a_\perp^2}} \tag{2.21}$$

et $a_\perp$ la largeur rms du mode fondamental transverse de l'oscillateur harmonique

$$a_\perp = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_\perp}}, \tag{2.22}$$

[3]Notons que cette approximation n'est en général pas valable sur les bords du condensat, où la densité atomique est faible. Ainsi la densité atomique ne présente pas de point anguleux, comme attendu pour une parabole inversée, mais une décroissance douce vers 0.

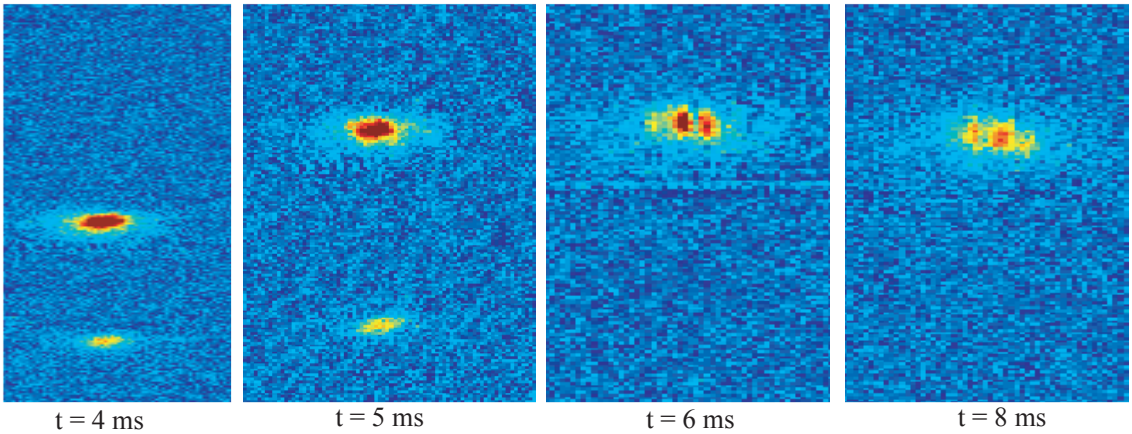

FIG. 2.2 – Evolution en temps de vol du profil de densité d'un quasi-condensat. Quatre images par absorption d'un nuage obtenue après ouverture du piège ($\omega_\perp = 1.5$ kHz, $\omega_z = 10$ Hz). A faible temps de vol, le profil de densité est donné par une parabole inversée. Des modulations de densité apparaissent pour des temps de vol plus longs traduisant la présence de fluctuations de phases dans le quasi-condensat.

l'équation de Gross-Pitaevskii peut alors se simplifier en :

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_{\text{ext.}}(z) + g_{1\text{D}}|\Psi_{1\text{D}}(z)|^2\right)\Psi_{1\text{D}}(z) = \mu_{1\text{D}}\Psi_{1\text{D}}(z) \tag{2.23}$$

où $g_{1\text{D}} = 2\hbar\omega_\perp a$ correspond à la constante de couplage à une dimension et $\mu_{1\text{D}}$ est le potentiel chimique du gaz. La fonction d'onde $\Psi_{1D}(z)$ est reliée à la densité atomique 1D par la formule $n_{1\text{D}}(z) = |\Psi_{1\text{D}}(z)|^2$.

Un critère théorique introduit par Menotti et Stringari et présenté dans [29] permet d'estimer dans quel type de régime le nuage se trouve. Il repose sur le paramètre $\xi = Na/(\alpha a_\perp)$, où α est le rapport d'anisotropie du piège. Pour $\xi \ll 1$ le nuage est dans le régime de Thomas-Fermi 1D alors que pour $\xi \gg 1$ le nuage trouve dans le régime Thomas-Fermi 3D. Pour nos paramètres expérimentaux typiques ($\xi \simeq 1$), nous nous trouvons donc à la frontière entre ces deux régimes ($\mu \simeq \hbar\omega_\perp$).

2.2.2 A température non nulle : régime de quasi-condensat

A température non nulle, les excitations élémentaires dans le nuage à faibles énergies se produisent principalement sous la forme de phonons et induisent des fluctuations de phase sur l'extension longitudinale du condensat. Alors que dans le cas 3D la cohérence en phase est un caractère global, c'est-à-dire que la phase est uniforme sur toute l'ex-

tension du condensat, un condensat unidimensionnel présente une phase non uniforme sur son extension caractérisée par une longueur de cohérence l_ϕ [30–33]. Ces condensats unidimensionnels sont alors appelés quasi-condensat. Bien qu'ils possèdent encore des fluctuations de phases importantes, leurs fluctuations de densité sont fortement réduites par rapport à celles du gaz idéal (voir chapitre 5 pour leurs mesures expérimentales). Ces fluctuations de phases sont visibles après expansion du nuage puisqu'elles se traduisent en fluctuations de densité [34](voir figure 2.2 pour illustration). Deux températures $T_{c.o.}$ et T_ϕ permettent de distinguer les différents régimes possibles [35–37] :

$$T_{\text{c.o.}} = \frac{N\hbar\omega_z}{\ln(N\hbar^3\omega_z/mg^2)} \qquad \text{et} \qquad T_\phi = N\hbar^2\omega_z^2/\mu_{1D} \tag{2.24}$$

Lorsque la température du gaz est réduite au voisinage de $T_{\text{c.o.}}$, à nombre constant d'atomes, le gaz entre doucement dans le régime de quasi-condensat. Ensuite, il faut distinguer les cas suivants :

- pour $T_\phi \ll T \ll T_{\text{c.o.}}$ les fluctuations de densité sont fortement réduites par rapport au cas du gaz idéal. Cependant il persiste des fluctuations de phase dont la longueur caractéristique l_ϕ est plus petite que l'extension du quasi-condensat.
- $T \ll T_\phi$, les fluctuations de phase s'établissent sur une longueur qui est plus grande que la taille du condensat et nous retrouvons les propriétés d'un condensat 3D c'est-à-dire une phase globale bien définie.

CHAPITRE 3

Description du dispositif expérimental

3.1 Piégeage d'atomes neutres sur microstructure

Dans cette partie, nous allons rappeler brièvement le principe de piégeage d'atomes neutres dans un champ magnétique ainsi que les différents types de configurations de piégeage utilisés.

Un atome de moment cinétique total $\mathbf{F}$ possède un moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ dont son interaction avec un champ magnétique inhomogène $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ est régi par l'hamiltonien Zeeman suivant :

$$H = -\boldsymbol{\mu}.\mathbf{B}(r) \tag{3.1}$$

En faisant l'approximation adiabatique, c'est-à-dire que le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ de l'atome suit à tout instant l'orientation du champ magnétique, l'hamiltonien d'interaction se met sous la forme :

$$H = \frac{g_{\mathrm{F}} m_{\mathrm{F}}}{\hbar} \mu_{\mathrm{B}} |\mathbf{B}(\mathbf{r})| \tag{3.2}$$

où g_{F} est le facteur de Landé associé à la structure hyperfine de l'atome, m_F le nombre quantique correspondant au sous-niveau Zeeman considéré, et μ_{B} le magnéton de Bohr. Dans la formule précédente, nous avons négligé le terme Zeeman quadratique dans la limite où $|\mathbf{B}(\mathbf{r})|$ est faible. Dans la majeure partie des cas, cet effet est négligeable puisque le champ magnétique vu par les atomes reste très faible par rapport à la largeur de la structure hyperfine (qui est typiquement de 0.5 T dans le cas du rubidium ^{87}Rb). Dans toute la suite, sauf mention contraire, nous considérons l'état $|F = 2, m_F = +2\rangle$ dont le facteur de Landé est $g_F = 1/2$.

Pour des champs magnétiques statiques, les équations de Maxwell interdisent l'existence d'un maximum de champ magnétique dans une zone de l'espace exempt de sources (théorème de Wing [38]). Seuls les atomes dont le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ est anti-aligné avec la direction du champ magnétique peuvent être piégés et ceci au voisinage d'un minimum local de champ magnétique.

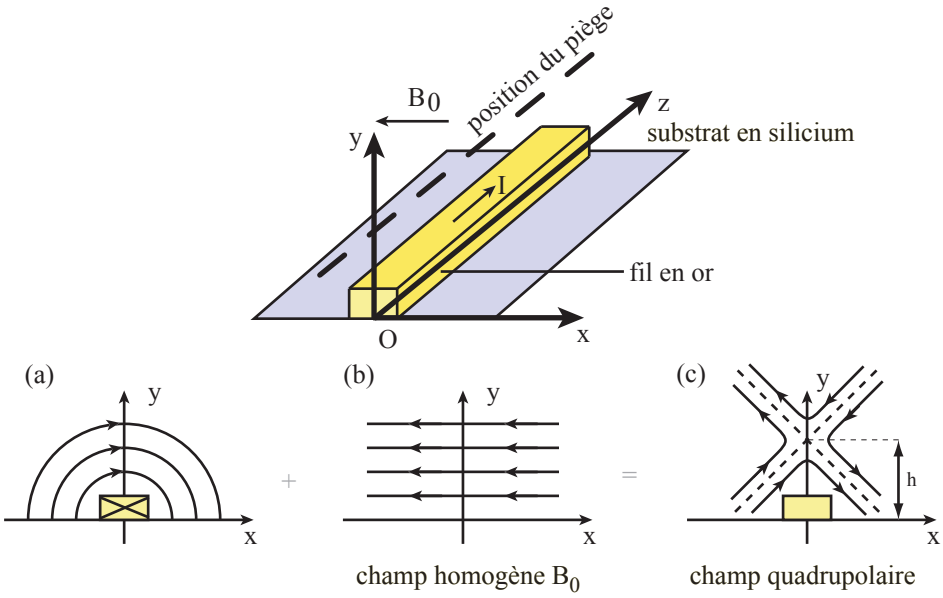

FIG. 3.1 – La combinaison d'un champ magnétique homogène avec le champ créé par un fil rectiligne produit un champ magnétique quadrupolaire à une hauteur h au-dessus du fil.

3.1.1 Guide magnétique quadrupolaire

Pour créer un guide magnétique quadrupolaire, considérons un fil rectiligne de section infiniment mince[1] parcouru par un courant I (voir figure 3.1). Pour des raisons de symétrie et d'invariance par rotation, le courant I produit dans le plan transverse (0xy), à une distance r du fil, un champ magnétique orthoradial au fil dont la norme vaut $|\mathbf{B}_{\text{fil}}| = \mu_0 I/(2\pi r)$ (Fig.3.1(a)). Pour obtenir un champ quadrupolaire dans le plan transverse, il suffit de superposer au champ précédent, un champ magnétique homogène B_0 (voir Fig.3.1(b)) qui en général est créé par des bobines macroscopiques en configuration Helmholtz à l'extérieur de la chambre à vide. A une hauteur $h = \mu_0 I/(2\pi B_0)$ au-dessus du fil, les deux champs précédents se compensent et créent un minimum local de champ magnétique dans le plan transverse (Fig.3.1(c)). L'invariance longitudinale du fil, permet ainsi d'obtenir un guide pour les atomes. Notons que le centre du guide peut être déplacé à distance constante autour du fil en changeant simplement l'orientation du champ homogène.

Au voisinage du minimum transverse, le champ magnétique est au premier ordre quadrupolaire. Ses axes propres sont orientés à 45° de la droite passant par le fil et

[1] Les dimensions de la section doivent être très faibles devant la hauteur h, future position de piégeage (voir figure 3.1).

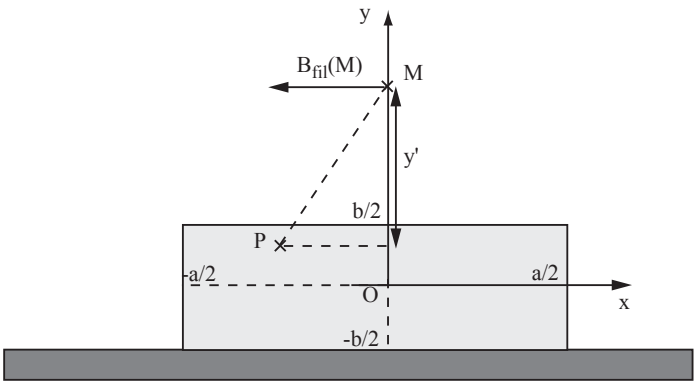

FIG. 3.2 – Prise en compte des effets de taille finie dans le cas d'un fil de section rectangulaire $a \times b$: pour un point M situé sur l'axe Oy, la direction du champ magnétique est suivant l'axe Ox par raison de symétrie. Le calcul de ce champ est effectué dans le repère Oxy ayant pour origine le centre du fil. La norme du champ est obtenue en sommant les contributions élémentaires de chacun des éléments de courants situés aux différents points P.

le centre du piège et les composantes du champ ont pour expression, en prenant les conventions de la figure 3.1 :

$$\mathbf{B}(r) = \begin{bmatrix} b'(y-h) \\ b'x \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

où $b' = \frac{\mu_0 I}{2\pi h^2}$ est le gradient quadrupolaire. Nous voyons que b' augmente lorsque h diminue. Ainsi, pour obtenir de forts gradients, il est intéressant de réaliser des pièges au très proche voisinage du micro-fil. Ce gradient peut atteindre des valeurs de l'ordre de 6000 G.cm^{-1} (pour des valeurs expérimentales typiques $I = 3$ A, $h = 100$ μm) difficilement réalisables dans le cadre d'expériences plus conventionnelles utilisant uniquement des bobines macroscopiques (gradient de l'ordre de 600 G.cm^{-1}). Cependant, les résultats de cette section ne sont valables que pour des dimensions faibles du micro-fil devant la hauteur h. Ainsi pour des distances de piégeage plus faibles, les effets de taille finie du micro-fil viennent réduire la valeur du gradient quadrupolaire. Nous nous proposons dans la section suivante d'estimer ces effets.

3.1.2 Effets de taille finie

Prenons le cas d'un fil de section rectangulaire de largeur a et de hauteur b s'étendant sur une distance $\mathcal{L}$ dans lequel circule une densité de courant uniforme $j_0 = I/(ab)$.

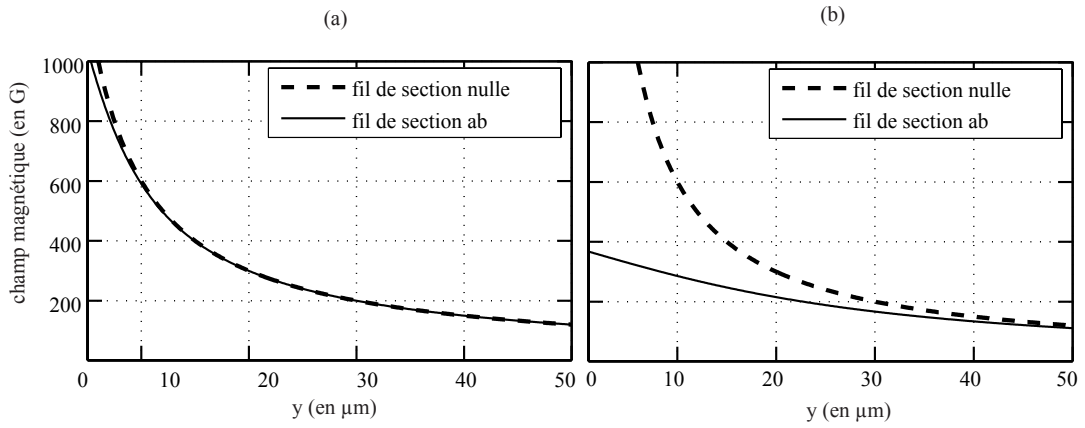

FIG. 3.3 – Comparaison du champ magnétique créé par un fil infiniment mince avec celui produit par un fil de section carrée (10×10 μm^2) (figure (a)) et d'un fil plat de hauteur 2 μm et de largeur 50 μm (figure (b)) avec un courant identique $I = 3$ A dans les deux cas. Dans le cas (b), nous observons une saturation plus nette du champ magnétique au voisinage de la surface du fil ($y = b/2$).

Dans un premier temps, nous considérons que $h \ll \mathcal{L}$, c'est-à-dire que nous négligerons l'extension longitudinale finie du fil.

Dans le plan de symétrie (Oyz), le champ magnétique B_{fil} est suivant l'axe x et se calcule, à l'extérieur du fil, en additionnant les contributions élémentaires des différents éléments de courant $dI = j_0 dxdy$ et nous trouvons alors que :

$$B_x(x=0,y) = \iint dB_x(y) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi ab}\int_{-\mathrm{a}/2}^{\mathrm{a}/2}\int_{-\mathrm{b}/2}^{\mathrm{b}/2} dxdy' \frac{(y-y')}{(x^2+(y-y')^2)} \tag{3.4}$$

cette intégrale est analytique et s'écrit :

$$B_x(x=0,y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi ab}[(b+2y)\arctan(\frac{a}{b+2y}) - (b-2y)\arctan(\frac{a}{b-2y})] + \tag{3.5}$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi ab}\frac{a}{2}\ln(1+\frac{8by}{a^2+(b-2y)^2}) \tag{3.6}$$

Sur la figure 3.3, nous avons reporté le résultat du calcul précédent (pour $a = b = 10$ μm : figure 3.3(a) et pour $a = 20$ μm, $b = 5$ μm : figure 3.3(b) avec un même courant de 3 A) ainsi que du champ magnétique obtenu dans le cas d'un fil de section nulle. Pour une distance au-dessus du fil supérieure à deux fois la largeur du fil, les effets de taille

finie sont négligeables[2]. Pour des distances plus faibles, par contre, le champ magnétique ne diverge plus sature à la valeur

$$B_x^{\text{sat}}(y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi ab}\left(2b\arctan(\frac{a}{2b}) + a\ln(1+\frac{4b^2}{a^2})\right) \tag{3.7}$$

A partir de la figure 3.3(b) nous voyons que la saturation du gradient est bien plus prononcée dans le cas des fils plats par rapport au cas des fils de section carrée. Pour toutes les expériences que nous avons réalisées dans la suite du manuscrit, la hauteur du piège par rapport aux fils est au moins 5 fois supérieure aux dimensions caractéristiques des fils ce qui valide l'utilisation du modèle du fil infiniment fin.

Dans le cas où l'approximation $h \ll \mathcal{L}$ n'est pas valable, il suffit de remplacer dans le calcul du champ magnétique (fait au centre de la structure, x=z=0) $dB_x(y) = \frac{\mu_0 j_0 dxdy}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}$ par $dB_x(y) = \mu_0 \frac{j_0 dxdy}{(2\pi\sqrt{x^2+y^2})}\sin(\arctan(\frac{\mathcal{L}}{2h}))$. Pour nos paramètres expérimentaux $h \simeq 100$ μm au dessus du fil et une extension $\mathcal{L} = 2800$ μm la correction induite par cet effet de taille finie sur le champ est inférieure à 10^{-8}, c'est-à-dire complètement négligeable.

Ainsi pour ne pas être limité par les effets de taille finie, augmenter le gradient de champ magnétique à courant fixé, requiert de réduire la section du fil. Il faut cependant prendre garde à l'échauffement du fil par effet Joule qui est augmenté par les dimensions réduites du fil [39]. En supposant que toute la chaleur est évacuée au travers de la surface de contact entre le fil et le substrat, via la couche d'isolation électrique de 1 μm (en SiO_2 dans notre cas, voir figure 3.2), le courant limite, pour ne pas avoir une croissance exponentielle de la température à l'intérieur du fil, est donné par [40] :

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{\kappa a^2 b}{\alpha\rho}} \tag{3.8}$$

où, κ est la conductivité thermique de la couche d'isolation (typiquement 3.5 10^6 W/K.m^2, ρ est la résistivité de l'or (2.2 10^{-8} Ω.m^{-1}) et α le coefficient de variation de la résistivité ohmique de l'or en fonction de la température (*i.e.* tel que $\rho = \rho_0 + \alpha(T - T_0)$). L'application numérique pour le fil en Z que nous utilisons ($a = b = 10$ μm) donne un courant critique de 6 A. Nous prendrons donc une marge de sécurité et nous travaillerons avec un courant de 3 A.

Pour un fil à section carrée, les lois d'échelle sur le gradient ($I_{\max} \propto \sqrt{a^2 b}$ et $\nabla B^{\max} \propto I/a^2$) montrent qu'il faut diminuer les dimensions des fils pour augmenter le gradient.

3.1.3 Ajout d'un confinement longitudinal

Jusqu'à présent, nous avons uniquement décrit la réalisation de guides magnétiques quadrupolaires. Ce type de confinement ne permet pas de piéger les atomes dans les

[2]Pour une hauteur de deux fois la distance au fil, l'écart entre les deux formules est seulement de 0.2%.

trois directions de l'espace. Il faut, en effet, rajouter une dépendance spatiale du champ magnétique suivant l'axe longitudinal du fil pour obtenir un piégeage tridimensionnel. Ceci peut se faire, par exemple, en courbant les extrémités des micro-fils [41]. Nous citerons comme exemple les deux principales configurations utilisées dont une description détaillée peut être trouvée dans [42] :

fil en U : la barre centrale du U joue le rôle du fil infini précédent et les deux autres sections de fils créent, quant à elles, le champ magnétique longitudinal. En ajoutant au champ magnétique produit par le fil en U, un champ homogène externe orthogonal à la barre centrale, nous obtenons au centre de la barre centrale du U un zéro de champ magnétique. En effet, en ce point, les champs magnétiques produits par les deux barres externes du U se compensent exactement. Autour de cette position, un développement au premier ordre montre que le champ magnétique croit linéairement avec les trois coordonnées de l'espace prouvant que le champ magnétique créé est alors un champ quadrupolaire.

fil en Z : si au lieu d'utiliser un fil en forme de U, nous retournons l'une des barres du U pour former un Z, nous voyons que le champ magnétique longitudinal ne s'annule plus au centre de symétrie de la structure. Nous créons toujours un minimum de champ magnétique au centre de symétrie de la structure qui cette fois-ci est non nul contrairement au cas précédent. Nous sommes alors en présence d'un piège dit de Ioffe-Pritchard.

3.1.4 Piège Ioffe Pritchard

3.1.4.1 Critère d'adiabacité

La condition de suivi adiabatique du spin, que nous avons supposée précédemment, n'est pas vérifiée au centre d'un piège quadrupolaire. En effet, pour que celle-ci soit valide il faut, dans une approche semi-classique, que les variations temporelles de la direction instantanée du spin $\theta(t)$ soient lentes par rapport à la fréquence de Larmor ω_L [43] :

$$\frac{d\theta(t)}{dt} \ll \omega_L \tag{3.9}$$

Or ω_L s'annule au centre du piège quadrupolaire et la condition 3.9 ne peut donc être vérifiée. Ceci induit des pertes par basculement de spin entre un état piégé et un état anti-piégé. Pour réduire ces pertes, appelées également pertes Majorana [44], une méthode consiste à ajouter un champ directeur B_0^z au centre du piège suivant la direction longitudinale du piège. Les auteurs de [45] ont estimé, par un calcul quantique, le taux de perte par basculement de spin pour un nuage d'atomes de spin demi-entier, piégé transversalement dans un guide (fréquence d'oscillation $\omega/(2\pi)$), à une température T par :

$$\Gamma = 2\pi\omega \tanh(\frac{\hbar\omega}{2k_BT})e^{-2\frac{(2\mu_B B_0^z+\hbar\omega)}{\hbar\omega}\tanh(\frac{\hbar\omega}{2k_BT})} \tag{3.10}$$

Ainsi si nous souhaitons un temps de vie de 100 s (supérieur au temps de vie associé aux collisions avec le gaz résiduel) pour un nuage à une température de 1 μK avec une fréquence d'oscillation de $\omega/(2\pi) = 1$ kHz, il faut imposer un champ B_0^z d'au moins 90 mG. En pratique nous sommes en fait limités par des bruits techniques qui nous imposent de travailler avec des champs B_0^z de l'ordre de 1 G.

Différentes configurations de champs utilisant un minimum de champ magnétique non nul peuvent être employées. Initialement proposée par Pritchard en 1983 [46], la configuration qu'il utilise consiste à superposer un piège quadrupolaire (transverse) avec un champ magnétique homogène B_0^z ayant une légère courbure longitudinale pour obtenir un minimum tridimensionnel de potentiel. Ce champ magnétique peut être créé par des bobines externes ou directement avec des fils de la puce (piège en Z)[3]. Il existe également d'autres configurations pour limiter les pertes par spin-flip comme par exemple les pièges TOP (Time Orbiting Potential) où la position du zéro de champ magnétique est modulée temporellement.

3.1.4.2 Approximation harmonique

Un guide magnétique créé par la combinaison d'un quadrupôle transverse et d'un champ longitudinal est, dans le cas général, semi-linéaire. Cependant pour des nuages suffisamment froids (de largeur rms transverse ℓ), le potentiel perçu par les atomes au centre du piège est dans une très bonne approximation harmonique et ceci tant que $B_0^z \gg b'\ell$, où b' est le gradient de champ magnétique transverse du guide. Cette approximation est particulièrement intéressante puisque d'une part la connaissance de la fréquence d'oscillation du piège et l'énergie du fond du piège est suffisante pour caractériser complètement le piège. D'autre part, l'ensemble des propriétés du nuage atomique (états propres, énergies propres, densité atomique à toute température, etc ...) ont des expressions analytiques [49].

Pour pouvoir se limiter à l'ordre deux dans le développement limité du potentiel, il faut que l'énergie moyenne par particule $k_{\mathrm{B}}T$ pour chaque degré de liberté de l'atome soit faible devant l'énergie du fond du piège $\mu_B B_0^z$. Concrètement, pour un champ magnétique B_0^z de 1 G au fond du piège, la température du nuage doit être inférieure à $T_{\max} = \frac{2\mu_{\mathrm{B}} B_0^z}{k_{\mathrm{B}}}$ [50] soit 135 μK.

A la condition précédente, il faut rajouter l'approximation du champ quadrupolaire transverse pour conserver un potentiel harmonique. Pour un piège créé à partir d'un micro-fil, cette approximation reste valable tant que $\ell \ll h$ où h est la hauteur du piège par rapport au fil. Pour le piège en H, que nous utiliserons dans la suite (voir §3.1.4.3), les deux approximations précédentes sont parfaitement légitimes puisque la température du nuage est de l'ordre de quelques dizaines de μK et le nuage s'étend alors transversalement sur une distance $\ell = 1.6$ μm $\ll h$.

Dans la direction longitudinale, la condition pour vérifier l'approximation harmo-

[3]Pour une revue complète voir [47, 48].

nique est plus difficile à satisfaire. Pour la suite[4], il est intéressant de quantifier l'erreur faite sur la détermination du potentiel par rapport à celui obtenu dans l'approximation harmonique pour une distance typique de 500 μm de part et d'autre du minimum de potentiel. Il suffit pour cela de développer à l'ordre 4 le champ magnétique suivant la direction longitudinale dans le cas d'un fil en Z (voir § 3.1.4.3) :

$$B(0,h,z) = B_z^{(0)} + \frac{B_z^{(2)}}{2}z^2 + \frac{B_z^{(4)}}{4!}z^4 + \mathcal{O}(z^6) \tag{3.11}$$

où

$$B_z^{(0)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2h}{\frac{\mathcal{L}^2}{4}+h^2} \tag{3.12}$$

$$B_z^{(2)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\Big(\frac{2\mathcal{L}^2 h}{(\frac{\mathcal{L}^2}{4}+h^2)^3} - \frac{2h}{(\frac{\mathcal{L}^2}{4}+h^2)^2}\Big) \tag{3.13}$$

$$B_z^{(4)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\Big(\frac{2\mathcal{L}^4 h}{(\frac{\mathcal{L}^2}{4}+h^2)^5} - \frac{6\mathcal{L}^2 h}{(\frac{\mathcal{L}^2}{4}+h^2)^4} + \frac{2h}{(\frac{\mathcal{L}^2}{4}+h^2)^3}\Big) \tag{3.14}$$

$$\tag{3.15}$$

Pour un courant de 3 A dans le fil en Z avec un champ de biais transverse B_0 de 40 G, nous obtenons un écart de 2% par rapport au potentiel harmonique à une distance de 500 μm. Dans toute la suite du manuscrit, nous nous placerons dans le domaine où l'approximation harmonique est valable.

3.1.4.3 Configuration en H

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à configuration en H, alternative de la configuration en Z, pour créer un piège de type Ioffe-Pritchard. Cette géométrie, permet d'introduire un degré de liberté supplémentaire[5] pour faire varier la fréquence longitudinale du piège sans trop affecter la fréquence transverse, ce qui est impossible dans le cas du fil en Z. Reprenons brièvement le cas du fil en Z, pour ensuite généraliser au cas de la structure en H.

Considérons donc un fil en forme de Z (décrit sur la figure 3.4) dans lequel circule un courant I_z ainsi qu'un champ de transverse B_0 homogène sur la zone d'étude suivant la direction de l'axe 0x. Le courant circulant dans la partie centrale du fil en Z avec le champ transverse B_0 produit un guide magnétique transverse (0xy) à une hauteur h au-dessus du fil. Le confinement longitudinal est obtenu grâce aux champs magnétiques créés par les deux bras du fil en Z dans le plan 0yz. Les lois de symétrie montrent que le champ pointe suivant l'axe z au centre de symétrie du Z (x=0, z=0). En considérant les

[4]Pour notamment la mesure du taux d'amortissement des oscillations dipolaires dans un piège non harmonique (voir chapitre 4).

[5]Par l'ajout d'un courant supplémentaire.

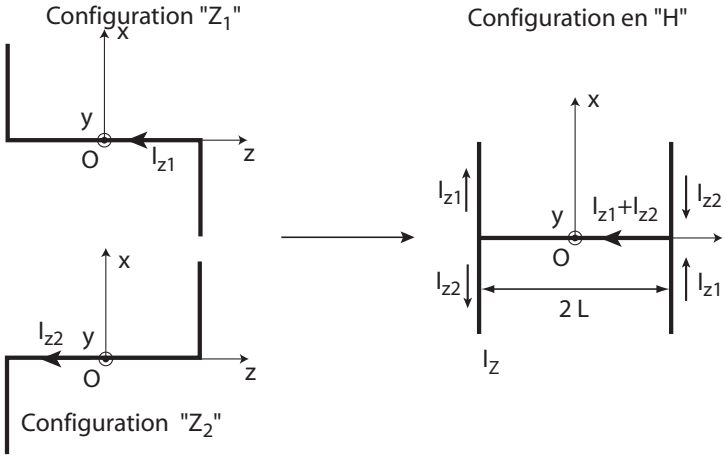

FIG. 3.4 – Schéma du fil en H : celui-ci se compose de deux fils en Z (Z_1 et Z_2). Le principe de superposition permet de calculer le champ magnétique pour la configuration en H. Les deux courants $I_{Z,1}$ et $I_{Z,2}$ s'ajoutent dans le fil central du H.

bras du Z, comme des fils semi-infinis, l'expression du champ magnétique que les deux barres créent dans le plan (Oyz, x=0) est :

$$\begin{cases} B_x(y,z) = 0 \\ B_y(y,z) = -\frac{\mu_0 I_z}{4\pi}\left(\frac{z}{(z-L/2)^2+y^2} + \frac{z}{(z+L/2)^2+y^2}\right) \\ B_z(y,z) = \frac{\mu_0 I_z}{4\pi}\left(\frac{y}{(z-L/2)^2+y^2} + \frac{y}{(z+L/2)^2+y^2}\right) \end{cases} \tag{3.16}$$

Les deux barres de la structure en Z produisent au centre de la structure $x = 0, z = 0$ un champ magnétique longitudinal (de 150 mG pour $y = 100$ μm et un courant $I_z = 3$ A dans les deux barres du Z). Comme nous l'avons mentionné précédemment, ce champ est en général trop faible pour éviter les pertes par spin-flip d'origine technique (bruits techniques à quelques centaines de kHz), un champ homogène longitudinal de l'ordre de 1 G est ajouté à l'aide de bobines en configuration Helmholtz situées à l'extérieur de l'enceinte à vide.

Donnons les propriétés essentielles de ce piège en Z :

– Le minimum de potentiel est localisé, par raison de symétrie, sur l'axe (x=z=0). Autour du minimum de potentiel, il est possible de développer le champ au premier ordre (x,y,z) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0^z \end{pmatrix}}_{\text{champ constant longitudinal}} + \underbrace{\begin{pmatrix} b'(y-h) \\ b'x \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{fil central+champ transverse}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ b'_Z z \\ b'_Z y \end{pmatrix}}_{\text{bras du Z}} \tag{3.17}$$

avec $b'_Z = \frac{\mu_0 I_z}{\pi \mathcal{L}^2}$ et $b' = \frac{\mu_0 I_z}{2\pi h^2}$ respectivement les gradients de champ magnétique longitudinal et transverse. A cet ordre, le développement du champ magnétique ne fait pas apparaître le confinement longitudinal. Pour l'obtenir, il convient de pousser le développement à l'ordre 2 en la variable z.

– La valeur du minimum de potentiel en $z = 0$ est :

$$|B|^2 = b'(y-h)^2 + (b'_z y + B_0^z)^2 \tag{3.18}$$

– La présence du gradient magnétique b'_Z modifie la hauteur du piège par rapport au fil d'une quantité Δh. Au point (x=z=0), Δh s'écrit :

$$\Delta h = -\frac{b'^2_Z h + b'_Z B_0^z}{b'^2_Z + b'^2} \tag{3.19}$$

L'application numérique pour nos paramètres expérimentaux ($\mathcal{L} = 2800$ μm, $I = 3$ A, $B_0^z = 1$ G) donne les résultats suivants :

dans le cas d'un piège comprimé (B_0 de 35 G) : un déplacement Δh de 46 nm. Cet effet de déplacement est donc complètement négligeable par rapport à la hauteur h du centre du piège.

dans le cas d'un piège décomprimé (B_0 de 12 G) : un déplacement Δh de $4,6$ μm qui devront prendre en compte pour des expériences fines (double puits de potentiel par exemple). Par ce biais, nous voyons que cet effet est d'autant plus important que la décompression transverse du piège est importante.

Passons maintenant au cas de la structure en H. Cette dernière peut être vue comme la superposition de deux fils en Z (figure 3.4) parcourus par des courants différents I_{Z1} et I_{Z2}. En applicant le principe de superposition, il est possible de calculer simplement le champ magnétique global de la structure à partir de celui d'un fil en Z. Etant donné la configuration des courants utilisés, il suffit de remplacer dans toutes les expressions précédentes, le courant circulant dans la barre centrale du Z par $I_{Z1} + I_{Z2}$ et le courant circulant dans ses bras par $I_{Z2} - I_{Z1}$. De la même manière que précédemment, ces expressions ne sont valables que dans un domaine restreint au voisinage du centre de la structure ($z \ll \mathcal{L}$)[6].

La partie non longitudinale du champ magnétique créée par les barres du H a pour effet de tourner les axes principaux du piège dans le plan (Oxz). Pour trouver ces nouveaux axes propres (x',y,z'), il suffit de calculer la matrice aux dérivés partielles du champ magnétique (matrice Hessienne) et de la diagonaliser[7].

Au fond du piège, comme le champ B_0^z est grand devant le champ quadrupolaire transverse, il est possible d'utiliser l'approximation harmonique. Suivant les axes (x',y,z'), les

[6] Dans le cas contraire, il faudrait prendre en compte les effets de taille finie.

[7] Notons quand même que la condition $h \ll \mathcal{L}$ permet de négliger l'angle que fait le piège avec les axes (0x,0z).

fréquences d'oscillation sont proportionnelles à la courbure du champ magnétique et sont données par la formule :

$$\omega_i = \sqrt{\frac{m_F g_F \mu_\mathrm{B}}{m} \frac{\partial^2 B}{\partial x_i^2}} \qquad \text{où} \qquad x_i = \{x', y, z'\} \tag{3.20}$$

Pour les deux directions transverses, le résultat est identique et nous trouvons :

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x_\perp^2} = \frac{4\pi^2 B_0^4}{\mu_0^2 (I_{Z,1} + I_{Z,2})^2 B_0^z} \qquad \text{où} \qquad x_\perp = \{x', y\} \tag{3.21}$$

de même pour la direction longitudinale :

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z'^2} = \frac{3\mu_0^2 (I_{Z2} - I_{Z1})^2}{4\pi^2 L^4 B_0} \tag{3.22}$$

Le degré de liberté supplémentaire introduit par les deux courants (I_{Z1}, I_{Z2}) permet de mieux découpler le confinement transverse du confinement longitudinal, ce qui était impossible dans le cas du fil en Z . En jouant notamment sur le différentiel de courant $I_{Z1} - I_{Z2}$ à $I_{Z1} + I_{Z2}$ constant, il est possible de modifier le rapport d'anisotropie du piège tout en maintenant le confinement transverse constant. Ainsi, tout en gardant des confinements transverses très importants (quelques kHz), il est possible de décomprimer très fortement le piège dans la direction longitudinale et d'atteindre des situations proches du régime unidimensionnel. Dans les expériences présentées aux chapitres 5 et 6, nous avons fait varier le rapport d'anisotropie entre 100 et 400.

3.2 La puce atomique

La puce atomique que nous avons utilisée pour toutes les expériences décrites dans ce manuscrit a été réalisée au Laboratoire de Photonique et de Nanostructures de Marcoussis (LPN), avec la collaboration de Dominique Mailly et JuanCarlo Faini.

3.2.1 Les différentes implémentations des micro-fils

La puce atomique que nous utilisons est composée de deux substrats en silicium. Le premier substrat d'épaisseur 1 mm, que nous appellerons substrat principal dans la suite, contient un fil en forme de U pour le piège quadrupolaire, une structure en H pour le piège de Ioffe-Pritchard ainsi que l'ensemble des plots de connection pour amener les différents courants sur la puce atomique. Sur la figure 3.12(a), nous avons représenté le schéma d'implantation des différents fils (les proportions des différentes longueurs sont préservées sur le schéma, seul un facteur de réduction global est appliqué) :

- Le fil en U est situé entre les plots de connection (1) et (2) et est alimenté par une alimentation stabilisée en courant (5 A, 5 V) de marque High Finess. Sa largeur importante (100 μm permet de faire passer un courant conséquent (4 A) pour

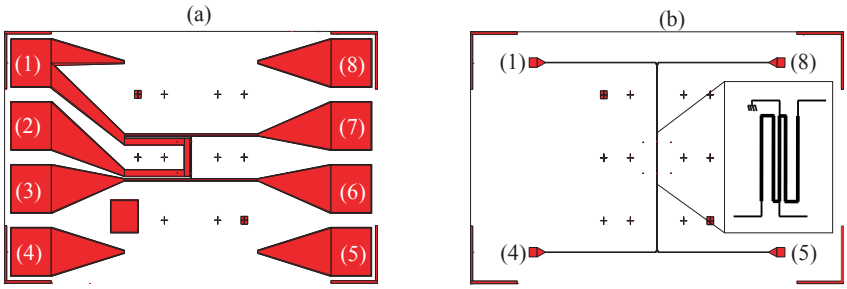

FIG. 3.5 – Schéma d'implantation des fils. Sur la figure (a) se trouve les fils contenus sur la puce principale : entre les pattes (1) et (2) se trouve le fil en U. Le fil en Z connecté entre les pattes (1)-(6). Il est possible de brancher un second fil en Z entre les pattes (3)-(7) pour former le H. Sur la figure (b) nous avons représenté le schéma d'implantation des petits fils dont la masse commune est la patte (1). Les croix de centrage marquées avec un plot sont utilisées pour l'alignement respectif des deux substrats lors de l'étape de collage.

pouvoir créer un champ quadrupolaire important). Le plot noté (1) constitue la masse générale de notre montage électrique[8].

- Le piège Ioffe-Pritchard utilisé pour l'obtention du condensat utilise le fil en Z (noté Z_1) situé entre les plots de connection (1) et (6). Ce fil est également alimenté par une alimentation faible bruit de type High Finess (3 A, 12 V). Sa résistance ohmique est de 0.5 Ω.
- Le second fil en Z noté (Z_2)(connections (3)-(7)), de même résistance que le premier, utilisé pour créer le piège en H, doit être piloté par une alimentation de courant flottante. Malheureusement l'isolation du mode commun des alimentations High-Finess lorsqu'elles sont alimentées par le secteur, n'est pas suffisante et des fuites de courant ainsi que des bruits apparaissent sur les courants des deux fils en Z. Pour pallier ce problème, nous avons choisi d'utiliser une alimentation fonctionnant sur batteries de voiture. La faible charge du fil en H et donc les faibles puissances dissipées permet de réaliser environ 50000 cycles expérimentaux avant de devoir recharger les batteries. Il faut, de plus, isoler le contrôle en tension de cette alimentation par rapport à la masse, ce que nous réalisons à l'aide de circuits électroniques utilisant des opto-coupleurs.
- la longueur de la barre centrale du H (2800 μm) a été choisie pour réaliser des

[8]Notons que cette configuration peut poser des problèmes de boucles de masse. Une seconde génération de puce utilisant des fils complètement indépendants ainsi que le remplacement du connecteur électrique ultra-vide (limité à 10 connections) est à l'étude pour éviter ce type de problème.

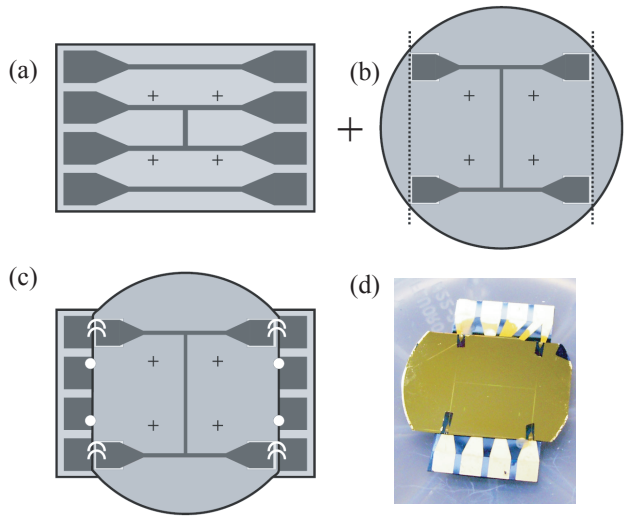

FIG. 3.6 – La puce utilisée dans nos expériences est composée de deux substrats (a) et (b). Les fils en U et en H sont réalisés par lithographie optique sur le substrat (a). Les petits fils sont, quant à eux, réalisés par lithographie électronique sur le substrat (b) (d'épaisseur 100 μm). Avant d'être collés avec une colle epoxy ultra-vide, les deux substrats sont positionnés l'un par rapport l'autre à l'aide de croix de centrage précédemment lithographiés sur les deux substrats. Le substrat (b) est également clivé pour laisser apparaître les connections du substrat (a). De plus, des connections électriques (fil d'or) visible sur la figure (c) entre les deux substrats permettent de faire circuler le courant entre les deux puces.

pièges fortement anisotropiques (son rapport d'anisotropie pouvant varier de 8 à 400). Nous utiliserons cette spécificité dans les chapitres 5 et 6.

Sur le second substrat beaucoup plus fin (100 μm d'épaisseur), appelé substrat secondaire, nous avons déposé cinq nano-fils d'or de section carrée 700 $\times$ 700 nm^2. Ils s'étendent longitudinalement sur 2 mm et ont une forme de serpentin. Ils sont connectés sur les plots (1),(4),(5) et (8) (voir figure 3.12(b)). Pour des questions de stabilité relative (10^{-4}) et de bande-passante élevée ($\simeq$ 100 kHz) requises, nous avons choisi d'utiliser des alimentations de courant faites au laboratoire par nos électroniciens André Villing et Fréderic Moron. Elles sont au nombre de trois et peuvent délivrer un courant de 20 mA (30 V). Leur utilisation sera détaillée au chapitre 4.

3.2.2 Fabrication de la puce atomique

Commençons par rappeler brièvement les grandes étapes de fabrication des différentes structures en or[9].

Pour le substrat principal :

Nous avons choisi d'enterrer le fil en U ainsi que la structure en H dans le substrat en silicium pour faciliter l'étape finale de planarisation de la surface de la puce (voir figure 3.7). Premièrement, il convient d'oxyder thermiquement (four à 220°C sous flux d'oxygène) le substrat pour former une couche d'oxyde SiO_2 en surface. Cette couche servira de masque lors de la gravure chimique du silicium (voir figure 3.7(a) et 3.7(b)).

Pour la réalisation du substrat principal, nous utilisons une étape de lithographie optique (UV) qui permet de transférer les motifs d'un masque en chrome directement sur une couche de résine photo-sensible préalablement déposée sur le substrat. Le développement de la résine met à nu la couche de silicium oxydée sur les zones non éclairées. Celle-ci est à son tour retirée au moyen d'une attaque en phase sèche (à l'aide d'un plasma contenant du SF_6 (figure 3.7(b))). Après avoir éliminé cette couche de résine, la couche de SiO_2 joue le rôle de masque pour la gravure du silicium en phase humide (qui est faite avec de l'acide fluoridrique figure 3.7(c)). Cette attaque chimique se fait suivant les plans cristallins du silicium ce qui confère une forme trapézoïdale aux tranchées. Le temps de la gravure est ajusté pour que la profondeur des tranchées soit égale à la dimension verticale des futurs fils en or (10 μm). Une seconde étape d'oxydation thermique est alors nécessaire avant le dépôt des fils pour les isoler du substrat en silicium, matériau semi-conducteur.

Une fois cette étape finie, nous devons déposer une fine couche d'or au fond de ces tranchées pour jouer le rôle de germe lors de la croissance électrolytique de l'or. Pour ce faire, nous réalisons une seconde étape de lithographie optique. La révélation de la résine permet de mettre à nu le fond des tranchées. Cette étape est ensuite suivie d'un dépôt par évaporation d'une couche de titane (5 nm, couche d'accroche) et d'une couche d'or (300 nm) sur l'ensemble de la puce. La résine restante ainsi que l'or se trouvant à sa surface sont retirés (étape de lift-off), ne laissant sur la puce que l'or présent au fond des tranchées (voir figure 3.7(d)).

La croissance électrolytique de l'or est alors réalisée de la façon suivante : la puce est introduite dans un bain contenant une solution de cyanure d'or. Un courant de quelques mA circule entre deux électrodes (dont la cathode est jouée par la fine couche d'or présente au fond des tranchées de la puce) et permet de réduire les ions Au^{3+} sous la forme métallique. Nous déposons par cette technique une épaisseur d'or de 10 μm (figure 3.7(e)).

Pour planariser l'ensemble de la puce nous l'enduisons, à l'aide d'une tournette, d'une résine de 15 μm d'épaisseur (BCB,Cyclotene©) que nous chauffons à 220° sous

[9]Pour tous les détails techniques sur les valeurs des paramètres expérimentaux, on pourra se référer à [40].

flux d'azote pour qu'elle se polymérise. La surface de la puce est finalement polie mécaniquement et les contacts électriques, situés sur les bords de puce sont découverts par une attaque plasma du BCB (figure 3.7(f)).

Initialement, à la suite de cette dernière étape, nous souhaitions déposer directement les petits fils d'or ($700 \times 700\text{nm}^2$) sur la couche de BCB. Nous avons renoncé pour les deux raisons suivantes :

- premièrement, bien que l'état de surface soit relativement correct, des micro-rayures apparaissent en surface de la puce et auraient un effet néfaste sur la forme finale des nano-fils d'or.
- deuxièmement, les mauvaises propriétés thermiques de la couche de BCB limitent le courant maximal dans les petits fils à 10 mA, ce qui est insuffisant pour les expériences que nous souhaitons réaliser.

Nous avons donc choisi d'utiliser un second substrat en silicium qui permet de mieux répartir le transfert de chaleur. En effet, en l'absence du substrat en silicium le transfert de chaleur au travers de la couche de BCB ne s'effectue que sur les dimensions caractéristiques du fil (700 nm). Par contre en présence du substrat, bien meilleur conducteur que le BCB, le transfert de chaleur au niveau de la couche de BCB, est réalisé sur une zone de contact de l'ordre de l'épaisseur du substrat (100 μm). Nous pouvons alors augmenter le courant à 20 mA pendant des durées de quelques secondes sans les détruire.

Pour le substrat secondaire :

Comme pour le substrat principal, le substrat secondaire est oxydé thermiquement pour former une couche de SiO_2 isolante électriquement d'environ 1 μm .

Il n'est plus possible, comme dans le cas du substrat principal, d'utiliser une lithographie optique puisque la résolution requise pour écrire le motif sur la résine est inférieure à la limite de diffraction de la source UV utilisée. Nous avons donc utilisé un masqueur électronique de marque Leica qui consiste à insoler une résine de PMMA sensible aux électrons. Pour des questions de temps d'insolation, nous avons choisi une résolution de 5 nm pour écrire le motif. En effet, l'insolation complète de notre motif avec une résolution de 5 nm prend près de 40 min et notre taux de succès aux étapes ultérieures est encore relativement faible (typiquement de 1 sur 10). De plus, comme nous le verrons au chapitre suivant, les atomes piégés sont trop éloignés des fils pour être sensibles à ce type d'imperfections sur des échelles typiques de 5 nm.

Les dimensions importantes du motif (grande zone d'exposition à couvrir) imposent des contraintes supplémentaires :

- il faut déplacer mécaniquement l'échantillon durant la procédure d'insolation. Ceci implique donc de prendre grand soin à positionner parfaitement le substrat sur le porte-échantillon car le masqueur ne peut pas compenser des désalignements angulaires supérieurs à 5°.
- la qualité de surface (notamment poussière, mauvais dépôt de résine) doit être impeccable sur toute la zone à couvrir qui s'étend quand même sur plusieurs mm^2.

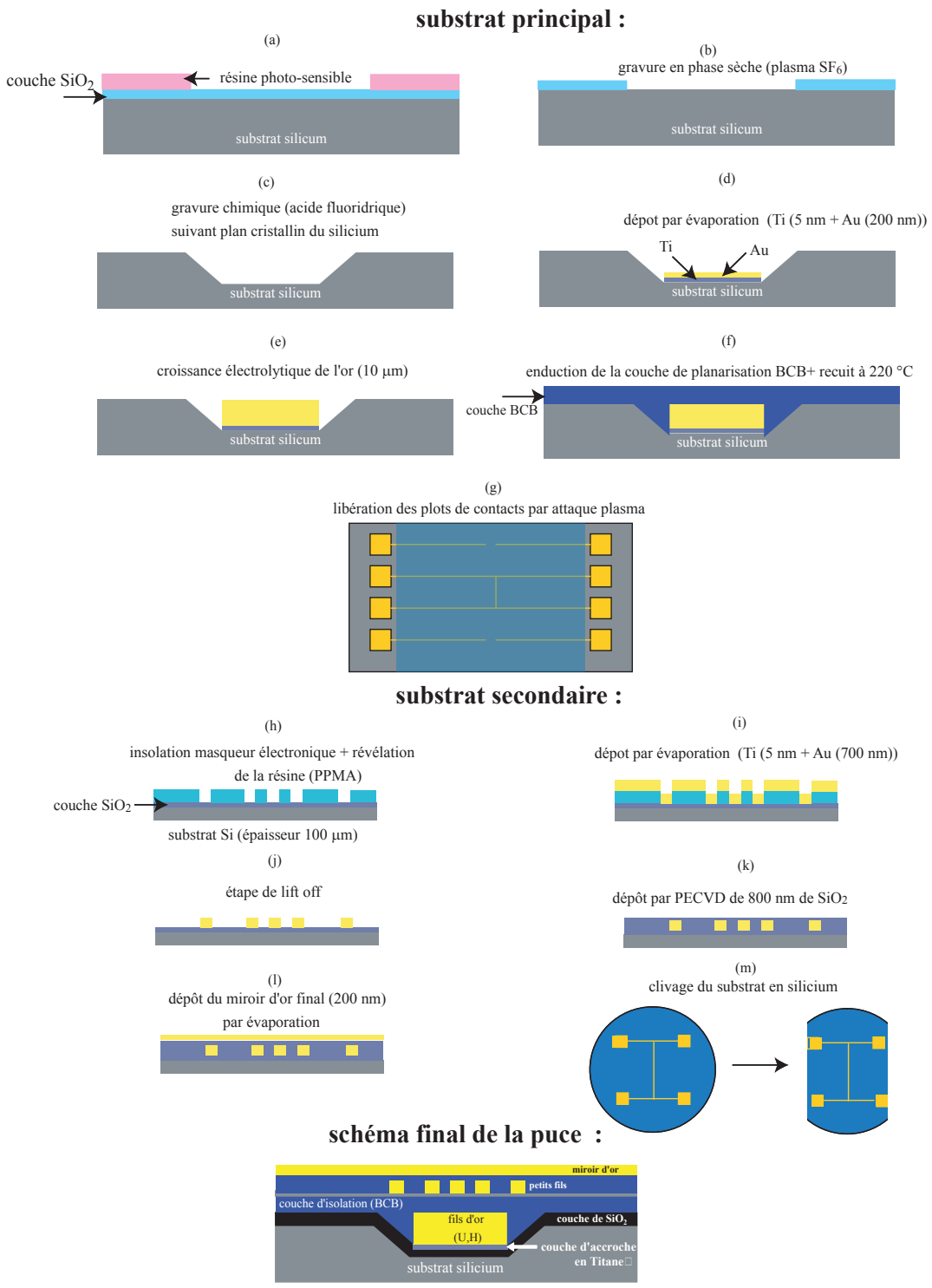

FIG. 3.7 – Présentation des grandes étapes de fabrication de la puce atomique

.

Après révélation du PMMA, nous déposons une couche d'or par évaporation de 700 nm d'épaisseur sur l'ensemble du substrat. Cette étape est également délicate, puisqu'elle requiert également un dépôt homogène sur l'ensemble du substrat. A plusieurs reprises, pour des raisons inexpliquées, nous avons observé l'apparition de bulles d'or en sa surface, nous forçant à éliminer l'échantillon. La solution a consisté à diminuer considérablement la vitesse de dépôt (0.07 nm/s). Le PMMA résiduel ainsi que le dépôt situé en sa surface sont ensuite éliminés à l'aide d'une solution d'acétone. Après cette étape, il est possible de contrôler la qualité des fils et notamment de leur rugosité résiduelle. Nous avons remarqué que cette dernière dépend fortement de la quantité d'électrons que la résine a reçue lors de son insolation. Nous avons alors optimisé la valeur de la dose d'électrons pour minimiser ces imperfections.

Nous déposons ensuite une couche de 800 nm de SiO_2 par pulvérisation cathodique (PECVD), pour recouvrir complètement les petits fils et les isoler électriquement avant le dépôt du miroir d'or final[10](voir figure 3.7(k)). Comme la couche de SiO_2 est déposée de manière uniforme sur l'ensemble de la puce, les plots de contact électrique associés aux différents fils sont également recouverts de SiO_2 . Pour les découvrir, la couche de SiO_2 est uniquement gravée (attaque plasma) au niveau des plots de contact après avoir protégé le reste de la puce à l'aide d'un masque (morceau de silicium). Avant de déposer le miroir d'or, il faut veiller à masquer ces zones découvertes pour ne pas mettre en contact électrique les petits fils avec le miroir. Des plots de résine (résine AZ5214) sont déposés au niveau des plots de contact au moyen d'une lithographie optique. Notons qu'il faut bien vérifier que la résine recouvre complètement les zones où les petits fils d'or sont directement visibles pour éviter les contacts électriques entre les fils et le futur miroir.

Le miroir d'or, d'une épaisseur de 200 nm, est déposé par évaporation sur une couche d'accroche de 5 nm en titane préliminairement déposée sur l'échantillon. Pour finir, les plots de contact sont ensuite découverts en enlevant la résine avec une solution d'acétone pure.

Avant de coller les deux substrats ensemble, il est indispensable de cliver le substrat secondaire sur deux de ses bords (voir figure 3.12 (m)), pour réduire ses dimensions et laisser apparaître les plots de contact présents sur le substrat principal. Le clivage s'est également révélé être une étape difficile à cause de la faible épaisseur du substrat (100 μm) qui le fragilise énormément. Nous avons développé une technique spécifique pour augmenter le taux de réussite de cette étape. Une pré-entaille est faite à l'aide d'un scriber (pointe en diamant), puis le substrat est déposé entre deux lames de microscope que nous plaquons l'une sur l'autre avant de donner un "petit coup sec" avec une pointe en diamant sur le bord du substrat.

Pour aligner les deux substrats l'un par rapport à l'autre, nous avons au moment des différentes lithographies, déposé des croix de centrage sur chacun des deux substrats. L'alignement est réalisé sous lunette binoculaire et la précision de centrage que nous

[10]Utilisé pour les pièges magnéto-optiques (voir §3.6.1).

avons réussie à obtenir est de 50 μm dans chacune des directions du plan transverse. Les deux substrats sont ensuite collés ensemble par 4 points de colle ultra-vide (Epotek 77). La polymérisation de la colle nécessite d'étuver la puce à 150°C pendant une heure. Cette étape va malheureusement induire des contraintes mécaniques sur la puce et le miroir va très légèrement se déformer une fois redescendu à température ambiante.

Pour finaliser la puce, il reste encore à connecter électriquement les plots des deux substrats ensemble en y soudant des micro-fils d'or de 50 μm de diamètre. Plusieurs de ces fils sont utilisés sur chacun des plots pour limiter la résistance électrique induite par ces connections.

3.3 La puce à atomes dans son environnement

3.3.1 Le système à vide

La puce atomique est montée sur un support en cuivre, de très bonne conductivité thermique, et inclinée à 45° par rapport à la verticale. Elle est maintenue en position sur le support par deux plaques de cuivre lui assurant ainsi un bon contact thermique. Ces plaques sont quant à elles directement vissées dans le support de la puce (voir figure 3.8(a)). Elles servent également à plaquer, sur les plots de contact électrique de la puce, deux rubans en kapton sur lesquels se trouvent des pistes en cuivre qui permettent d'amener le courant au niveau des fils de la puce.

La monture est fixée sur un adaptateur CF40/CF16 qui contient un passage ultra-vide pour faire passer les connections électriques. L'adaptateur que nous utilisons ne possède que 10 connections, notamment parce que les fils doivent pouvoir supporter des courants de plusieurs ampères. Deux de ces connections sont utilisées pour alimenter le "dispenser" de rubidium situé juste au-dessus de la puce (à 2 cm environ). Les 8 autres connecteurs sont dédiés à l'alimentation en courant de la puce (fil en U, fil en H, et petits fils).

Le support de la puce est fixé sur une face de notre enceinte à vide (cube en inox de 7 cm de coté). Trois des six faces de ce cube sont directement fermées par des hublots CF40 traités anti-reflet à 780 nm pour permettre le passage des faisceaux laser. Sur la quatrième face du cube, un tube CF40 associé à une croix de pompage permet de fixer une pompe ionique (120 L.min^{-1}), une vanne tout métal pour les remises à l'air, une jauge magnétron inverse, ainsi que le quatrième hublot pour le passage d'un des faisceaux laser. La dernière face du cube est utilisée pour fixer une pompe à sublimation titane.

En fonctionnement normal, la pression dans l'enceinte à vide est comprise entre 10^{-10} mbar et 10^{-11} mbar et mesurée par la jauge. Cependant comme celle-ci est relativement excentrée par rapport à la puce atomique, il n'est pas possible de suivre les variations de pression durant un cycle expérimental. Il est donc difficile de connaître la pression au voisinage de la puce (problème de dégazage de la colle ultravide, adsorption de rubidium sur la surface de la puce, etc...) sinon que par une mesure directement sur

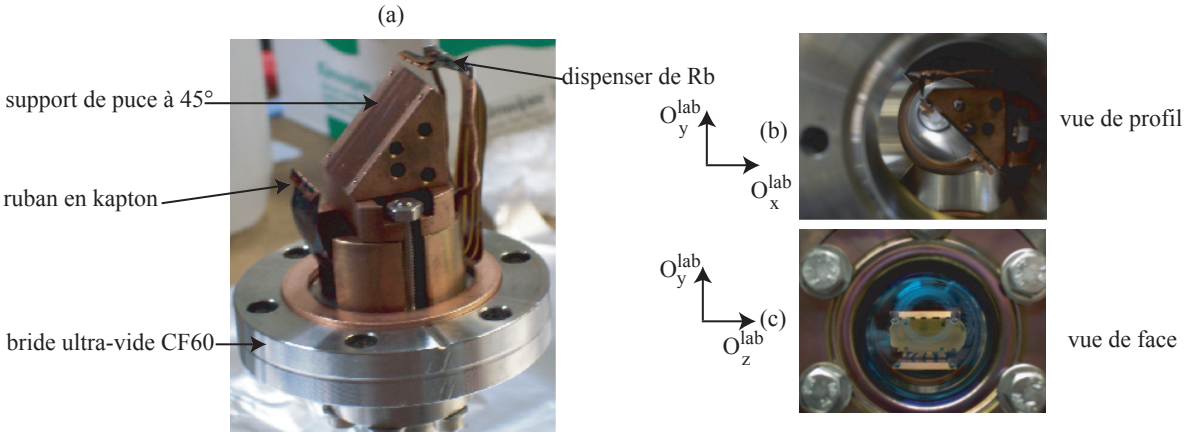

FIG. 3.8 – Sur la figure (a), nous pouvons voir la monture de la puce fixée sur une bride ultra-vide CF40 ainsi que les rubans de kapton sur lesquels 4 bandes de cuivre amènent le courant vers la puce. Les figures (b) et (c) représentent, respectivement, une vue de profil et une vue de face de la puce lorsqu'elle est positionnée dans le système à vide.

le nuage atomique (durée de vie).

3.3.2 Configuration des champs magnétiques utilisés

Nous utilisons deux types de bobines pour générer nos champs magnétiques.

bobines de compensations :

Trois paires de bobines (bobines de compensations) sont placées suivant les trois axes de la chambre à vide (X,Y,Z, voir figure 3.9) et positionnées directement en contact avec le cube en inox de la chambre à vide. Elles sont montées en configuration Helmholtz pour créer un champ homogène et sont utilisées pour plusieurs raisons :

- Principalement pour créer le champ de B_0 pour le piège magnétique.
- Deuxièmement, pour déplacer le centre du piège quadrupolaire du piège magnéto-optique externe[11].
- Troisièmement, pour compenser d'éventuels champs magnétiques parasites durant l'étape de mélasse optique et appliquer le champ directeur pendant l'étape de pompage optique.

Les bobines de compensation qui créent le champ transverse (dans le plan Oxy) sont alimentées par des alimentations commerciales (stabilité relative 10^{-3}) de marque High-Finess. Elles peuvent fournir un champ homogène maximum de 45 G parallèlement à la surface de la puce pour un courant de 3 A dans chacune de ces deux paires de

[11]Pour notamment éviter que le centre du piège quadrupolaire ne se retrouve à l'intérieur de la monture de la puce.

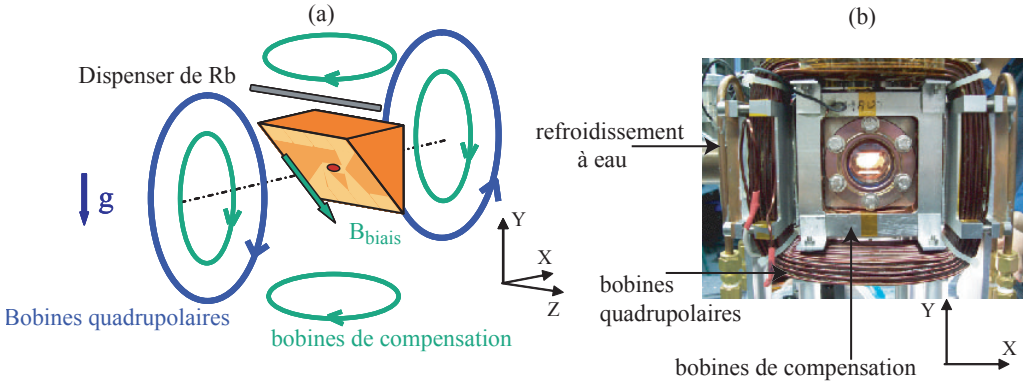

FIG. 3.9 – Figure (a) : configuration des champs magnétiques utilisée et positionnement de la puce par rapport aux axes du laboratoire (X,Y,Z). La puce atomique est inclinée de 45° par rapport à la verticale (0Z). Figure (b) : nous pouvons distinguer sur l'image les bobines quadrupolaires avec leur système de refroidissement à eau, les bobines de compensation créant le champ B_0 ainsi qu'au travers du hublot la surface réfléchissant de la puce.

bobines. Suivant la direction longitudinale, nous utilisons deux alimentations de courant indépendantes ce qui nous permet d'appliquer des gradients de champ magnétique pour déplacer le centre du piège dans la direction longitudinale.

bobines quadrupolaires :

Il s'agit d'une paire de bobines en configuration anti-Helmholtz qui crée le champ quadrupolaire pendant la phase du piège magnéto-optique externe (Cf. §3.6.1). Elles sont de forme carrée (de coté 30 cm), orientées suivant la direction 0x, et créent pour un courant de 9 A un gradient de champ quadrupolaire de 300 G.cm^{-1}. Elles viennent se fixer par dessus les bobines de compensation. De plus, pour éviter un échauffement excessif de ces bobines (dissipation de 100 W), leurs montures sont refroidies par un circuit d'eau (voir figure 3.9)[12].

De plus, pour éviter les champs parasites présents dans la pièce (notamment ceux introduits par la pompe ionique), nous avons installé un blindage magnétique en mumétal autour de la chambre à vide englobant également les différentes bobines ainsi que la pompe à sublimation titane. Il est constitué de deux coquilles concentriques l'une en fer doux située à l'intérieur et l'autre en mumétal. Ce blindage permet de réduire d'au moins un facteur 100 les champs parasites externes. Nous avons mesuré la stabilité du champ magnétique du fond du piège sur une demi-journée et nous avons observé une

[12]La température n'excède pas la trentaine de degré Celsius.

stabilité à court terme (demi-journée) meilleure que 800 μG (voir note[13]).

3.4 Système laser

Rappelons sommairement le montage du système laser dont une description plus détaillée peut être trouvée dans [42,51]. Le système laser que nous utilisons est composé de trois diodes lasers. Deux de ces diodes sont montées en configuration maître-esclave pour fournir les quatre faisceaux du piège magnéto-optique (PMO), le faisceau de pompage ainsi que le faisceau d'imagerie.

Le laser maître, diode sur réseau en configuration Littrow, est asservi d'une part en température et d'autre part en longueur d'onde par absorption saturée sur le croisement entre les transitions $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ et $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$. Un modulateur acousto-optique (AOM), monté en double passage, permet de décaler la fréquence de ce faisceau sur la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ avant d'injecter une diode libre (laser esclave) avec une puissance de 200 μW. La puissance en sortie du laser esclave est typiquement de 50 mW. Ce faisceau passe au travers d'un second élément acousto-optique , pour la coupure rapide des faisceaux, où l'ordre -1 est divisé en trois au moyen de lames $\lambda/2$ et de cubes polarisants pour former les futurs faisceaux du PMO, le faisceau de pompage optique ainsi que le faisceau d'imagerie. L'AOM du laser maître permet de décaler en fréquence les faisceaux du PMO pendant la phase de mélasse ainsi que le faisceau d'imagerie pendant la prise d'image. Pour le faisceau de pompage, un second AOM est utilisé en simple passage, pour ramener la fréquence du faisceau sur la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$. En sortie de cet AOM, nous récupérons une intensité de l'ordre de I_{sat} avec un diamètre de faisceau de 2 mm.

Pour repomper les atomes qui sont tombés dans l'état $|F = 1\rangle$, nous utilisons un laser repompeur (diode libre) accordé sur la transition D_1 (voir la figure 3.10). Comme l'écart entre les niveaux hyperfins de la transition D_1 est de plusieurs centaines de MHz[14], il est possible de les résoudre avec simplement une diode libre dont la largeur de raie est typiquement de quelques MHz. L'asservissement en longueur d'onde se fait via une rétroaction sur le courant et la puissance optique de sortie de la diode est de 30 mW.

3.5 Système d'imagerie par absorption

3.5.1 Principe de fonctionnement de l'absorption

Pour imager le nuage, nous utilisons la technique standard d'imagerie par absorption. Celle-ci consiste à observer l'ombre du nuage atomique portée sur une caméra CCD lorsque le nuage est éclairé par un faisceau sonde proche de résonance. Cette étape est

[13]Cette mesure a été réalisée en traçant la courbe donnant le nombre d'atomes dans un condensat en fonction de la valeur finale de l'onde radio-fréquence appliquée à différents instants de l'après-midi.

[14]L'écart entre les niveaux hyperfins de l'état $5P_{1/2}$ est 817 MHz.

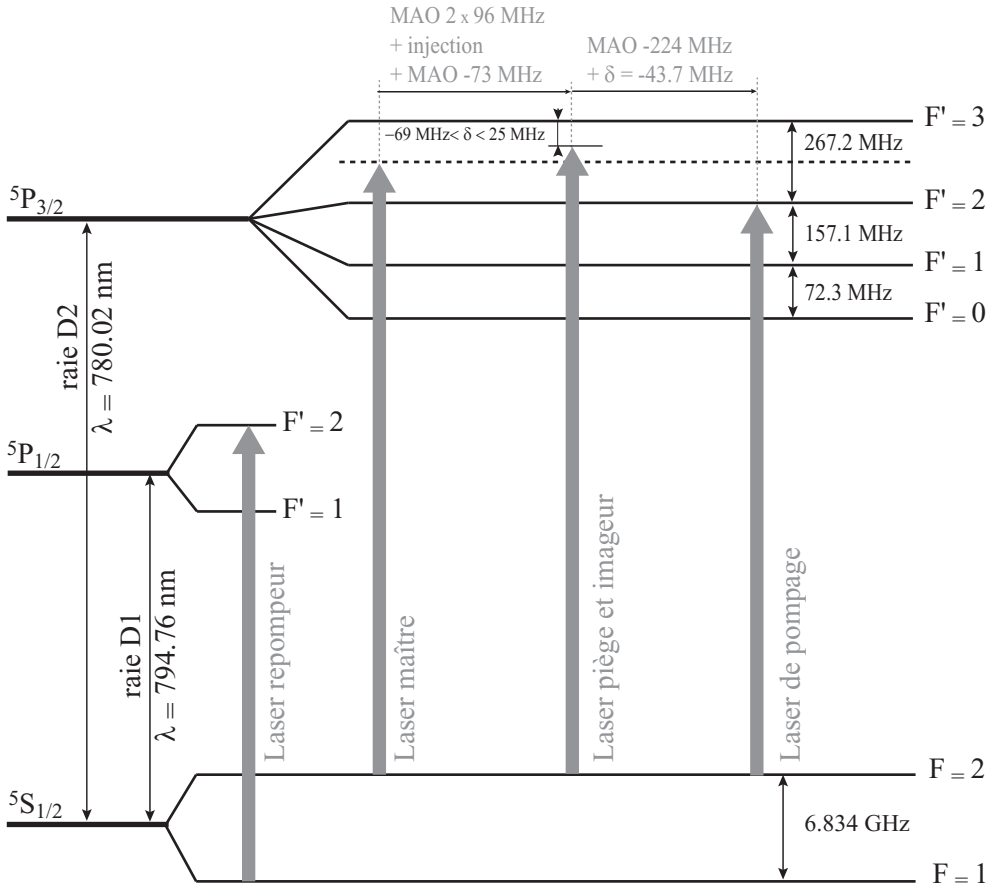

FIG. 3.10 – Structure hyperfine de l'atome de ^{87}Rb et longueurs d'onde des lasers maître, esclave et repompeur.

.

destructive dans le sens où les photons absorbés pendant le pulse d'imagerie chauffe considérablement le nuage (tout comme une imagerie en fluorescence)[15].

Dans notre cas, nous imageons sur la transition fermée $|F = 2, m_F = +2\rangle \rightarrow |F' = 3, m_F = +3\rangle$. Pour un nuage suffisamment dilué[16] et pour une intensité de faisceau de sonde faible devant l'intensité de saturation I_{sat} de la transition[17], l'intensité optique du faisceau sonde en sortie du nuage atomique $\mathcal{I}^+(x, y)$ se déduit de l'intensité incidente $\mathcal{I}^-(x, y)$ par la loi de Beer-Lambert :

$$\mathcal{I}^+(x, y) = \mathcal{I}^-(x, y) \exp\left(- \frac{\sigma_0}{1 + 4\frac{\delta^2}{\Gamma^2}} \int \rho(x, y, z) dz \right) \tag{3.23}$$

où $\rho(x, y, z)$ correspond à la densité atomique du nuage, $\sigma_0 = 3\lambda^2/(2\pi)$ la section efficace d'absorption de l'atome avec λ la longueur d'onde de la transition, Γ la largeur de raie de l'état excité de l'atome et δ le désaccord du faisceau sonde par rapport à la résonance atomique. Cependant, si la polarisation du faisceau sonde n'est pas parfaitement circulaire σ^+ ou pour une mauvaise polarisation des atomes dans l'état $|F = 2, m_F = +2\rangle$, il faut remplacer σ_0 par une section efficace effective σ_{eff} qui prend en compte l'évolution temporelle (équation de Bloch optique) des populations des différents sous-niveaux atomiques lors du pulse d'imagerie.

Pour une mesure par temps de vol, nous éteignons uniquement les courants circulant dans la structure de la puce[18]. En effet, la constante de décroissance des courants de Foucault associée à la coupure du champ transverse B_0 est trop grande (plusieurs millisecondes) pour ne pas influencer la trajectoire des atomes durant le temps de vol. Nous choisissons donc de ne pas éteindre le champ B_0 lors de la coupure du piège et pendant la prise d'image. Ainsi l'imagerie sera faite en présence d'un champ magnétique homogène non nul.

En prenant comme axe de quantification la direction du champ B_0, parallèle à la surface de la puce, le faisceau sonde vu par les atomes n'est pas parfaitement σ^+ et des transitions vers les états $|F' = 3, m_F = +1\rangle$, $|F' = 3, m_F = +2\rangle$ sont possibles. Ces probabilités de transition respectives ont déjà été évaluées dans [42]. Pour un champ magnétique parallèle à la surface de la puce et n'ayant pas de composante suivant la direction longitudinale, la probabilité de transition entre l'état $|F = 2, m_F = +2\rangle$ et l'état $|F' = 3, m_F = +3\rangle$ est de 73%. De plus, ces transitions sont désaccordées par rapport à la résonance (0.7 MHz/G) par effet Zeeman[19]. Pour une imagerie en champ, seule la transition $|F = 2, m_F = +2\rangle \rightarrow |F' = 3, m_F = +3\rangle$ est à considérer.

[15] Pour s'affranchir de ce problème il est possible d'imager en "temps réel" le nuage par la méthode dite du contraste de phase (voir par exemple [52, 53]).

[16] C'est-à-dire en négligeant les diffusions multiples. Pour un nuage isotrope de rayon r et de densité uniforme n la condition pour ne pas avoir de diffusion multiples s'écrit $n\sigma_0^2 r \ll 1$, où $\sigma_0 = 3\lambda^2/(2\pi)$ est la section efficace d'absorption d'un atome pour une transition à la longueur d'onde λ.

[17] L'intensité du faisceau d'imagerie est égale à $I_{\text{sat}}/8$ dans les expériences présentées dans ce manuscrit.

[18] Dont la constante de temps de coupure est inférieure à 100 μs.

[19] Dans le cas d'une imagerie in-situ, comme nous le verrons dans aux chapitres 5 et 6, le faisceau laser est majoritairement polarisé π suivant l'axe 0z. Ceci n'induit pas réellement de contrainte à partir

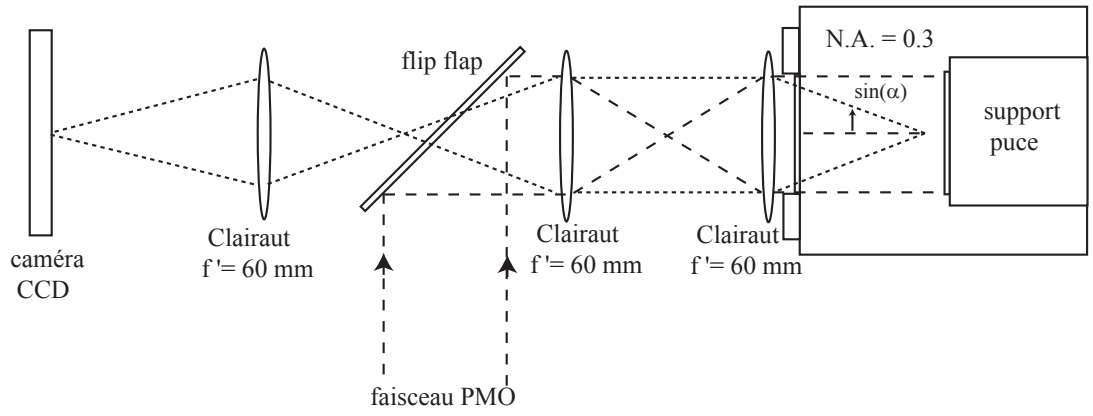

FIG. 3.11 – Configuration du système d'imagerie. Le miroir amovible (flip-flap) permet d'avoir sur le même accès optique le faisceau du piège magnéto-optique (miroir en position basse) et le faisceau d'imagerie (miroir en position relevée)

3.5.2 Système et résolution optique

Le système optique se compose de deux doublets (Clairaut) de focale 60 mm et de diamètre 40 mm, corrigés de l'aberration sphérique à faible ouverture ainsi que des aberrations chromatiques. Malheureusement pour les ouvertures que nous considérons dans la suite, l'aberration sphérique n'est pas totalement compensée et la présence du hublot de l'enceinte à vide (épaisseur 2.3 mm en Kodial) ne nous permet pas d'atteindre la limite de diffraction (diamètre de la tache d'Airy : 3 μm)[20].

La particularité de notre montage réside dans l'utilisation du miroir de la puce comme surface réfléchissante pour imager le nuage (cf figure 3.12). Nous obtenons ainsi, sur la caméra CCD, deux images du nuage (image directe et image du nuage dans le miroir) qui correspondent respectivement aux profils de densité optique intégrés suivant les deux directions transverses orthogonales. Suivant la configuration d'imagerie utilisée (imagerie en champ, ou in situ, et en fonction du désaccord du faisceau sonde par rapport à la transition $|F = 2, m_F = +2\rangle \rightarrow |F' = 3, m_F = +3\rangle$), il est possible d'observer simultanément les deux images et ainsi de déterminer la hauteur des atomes par rapport à la surface de la puce en mesurant la distance séparant les deux nuages sur la caméra CCD.

Pour des problèmes d'accès optique, l'axe d'imagerie est aussi l'un des axes du faisceau du PMO (voir figure 3.11). Une lame semi-réfléchissante (80%-20%) amovible montée sur un support motorisé (flip-flap) permet de jouer le rôle du miroir pour le PMO et

du moment où la section efficace d'absorption est correctement calibrée.

[20] L'ouverture numérique de notre système optique ($N.A. = \sin(\alpha) = 0.3$) est limitée par la taille du hublot du système à vide (diamètre de 40 mm).

se soulève lors de la prise d'image[21].

Pour les mesures que nous avons réalisées dans la suite de ce manuscrit, l'intensité du faisceau imageur est de $I_{\text{sat}}/8$ et la durée du pulse d'imagerie est de 150 μs.

Précautions à prendre sur l'imagerie :

Plusieurs optimisations sur le système d'imagerie ont été faites afin que l'image issue de la caméra soit limitée par le bruit de grenaille photonique :

- la fenêtre de protection située devant la matrice CCD a été enlevée pour éviter les systèmes de franges parasites qui se produisent à cause des réflexions sur ces deux interfaces air-verre.
- l'ensemble de la caméra et de sa monture est montée sur sorbothane, pour limiter les vibrations dues aux mouvements du miroir amovible (flip-flap).
- Nous avons placé un tube entre la dernière lentille et la caméra pour limiter au maximum les turbulences d'air.
- le temps entre les deux prises d'image a été raccourci à 200 ms pour éliminer les mouvements de faisceaux ainsi que la variation d'intensité lumineuse entre les deux prises d'image.

De plus, l'utilisation d'un laser esclave asservi par une diode laser maître permet de stabiliser l'intensité optique du faisceau d'imagerie. En effet, une diode sur réseau est beaucoup plus sensible qu'une diode libre aux vibrations mécaniques et acoustiques qui produisent un bruit d'amplitude difficilement compensable durant le temps d'intégration de l'image (150 μs).

En complément du système afocal, nous utilisons une troisième lentille de focale 60 mm qui permet d'ajuster le grandissement de notre système optique. En configuration 2f-2f (voir figure 3.11), elle permet d'obtenir une image non renversée sur la caméra CCD avec un grandissement de 1. Pour imager le nuage dans le piège magnétique ainsi que le condensat, nous modifions la position de cette lentille pour obtenir un grandissement de $\times(-3)$ (configuration 4/3f-4f). Un système de marques déposées sur la surface de la puce et sous le miroir d'or permet d'effectuer une calibration précise du grandissement du système optique. Sauf mention contraire dans la suite, nous nous placerons dans le cas d'un grandissement $\times(-3 \pm 0.1)$. L'erreur principale sur la détermination du grandissement provient du fait que les marques ne sont pas dans le même plan que les atomes mais 700 μm de part et d'autre du plan d'imagerie. La procédure de mise au point du système d'imagerie est la suivante : nous commençons par focaliser la caméra sur les marques lithographiées de la puce pour avoir un réglage grossier. Ensuite, nous utilisons un nuage de petite dimension transverse, moins de 3 pixels rms et nous faisons varier la position de la troisième lentille afin de minimiser la taille rms du nuage à position de caméra fixe.

[21] Il faut cependant prendre garde que le temps de monté de la lame relativement long 500 ms imposant de faire des durées de pièges magnétiques d'au moins cette durée.

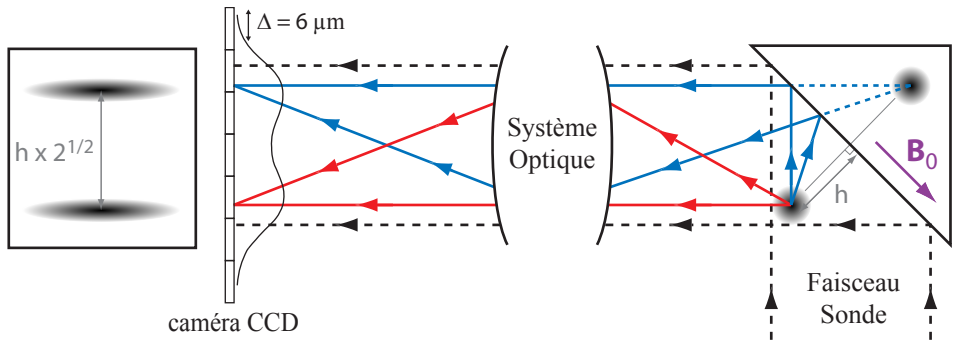

FIG. 3.12 – Configuration du système d'imagerie. La distance séparant les deux images (directe et réfléchie par le miroir) sur la caméra CCD permet d'accéder à la hauteur du nuage par rapport à la surface de la puce.

3.6 Description générale du cycle expérimental

Dans cette section, nous présenterons les différentes étapes pour l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein représentées sur la figure 3.13. Un piège magnéto-optique (PMO) externe[22] est chargé en une dizaine de seconde à partir d'une vapeur atomique de rubidium (§3.6.1). En quelques millisecondes, le nuage atomique est ensuite transféré dans un piège magnéto-optique en U (le champ quadrupolaire est réalisé par le fil en U)(§3.6.1) au proche voisinage de la surface de la puce. Après une étape de compression de ce PMO, le nuage est refroidi à une température de l'ordre de 50 μK à l'aide d'une étape de mélasse optique (§3.6.2) puis est pompé dans l'état $|F = 2, m_F = +2\rangle$. A cette température, il est possible de charger efficacement le piège en Z (piège purement magnétique) et d'effectuer en 4 s un refroidissement évaporatif au moyen d'une onde radio-fréquence jusqu'à la condensation de Bose-Einstein.

L'ensemble de l'expérience est piloté au moyen de cartes programmables réalisées par André Villing ingénieur au laboratoire [51]. Un module principal, possédant sa propre référence de temps à 8 MHz (voir note[23]), reçoit d'un ordinateur la séquence expérimentale puis répartit les instructions reçues sur chacune des voies de sortie de chacune des cartes. Suivant le type de carte, les cartes peuvent délivrer des signaux TTL, des signaux analogiques, et des signaux sous forme de rampes.

3.6.1 Du PMO externe au PMO de surface

Pour les expériences traditionnelles de condensation, la durée d'un cycle expérimental est en majeure partie déterminée par la durée du refroidissement évaporatif ($\simeq$ 1 min)

[22] Dont le champ quadrupolaire est réalisé avec des bobines externes.

[23] Cette horloge de référence est transmise à l'ensemble des autres cartes programmables pour assurer leur synchronisme.

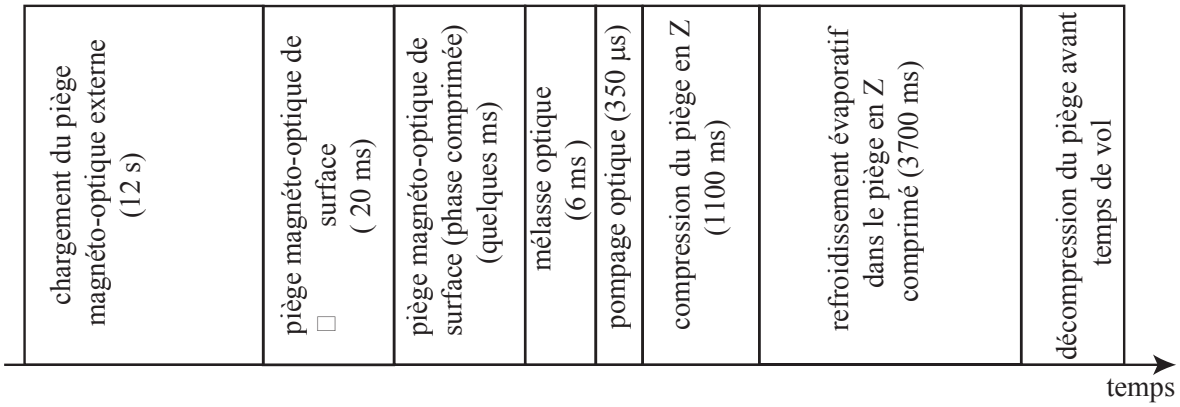

FIG. 3.13 – Grandes étapes de la séquence expérimentale pour l'obtention d'un condensat de Bose-Eintein.

(voir §3.6.4)), imposant des contraintes importantes sur la qualité du vide pour d'éviter des collisions néfastes avec les atomes chauds du gaz résiduel. Comme nous le verrons au paragraphe §3.6.4, cette durée est déterminée par le taux de collisions élastiques à deux corps, c'est-à-dire à nombre fixé d'atomes par les fréquences d'oscillation du piège. Les forts confinements magnétiques atteignables sur puce atomique (quelques kHz), permettent de réduire cette durée à environ 4 s. Un temps de vie dans le piège magnétique de l'ordre de la dizaine de seconde est ainsi suffisant pour l'obtention d'un condensat et les expériences que nous souhaitons réaliser. Il est donc possible de simplifier le dispositif expérimental (notamment de ne pas utiliser de ralentisseur Zeeman [54]) en chargeant notre PMO directement à partir d'une vapeur de rubidium. Cette vapeur est obtenue en faisant passer un courant de 8 A pendant 3.6 s dans un "dispenser" de rubidium (filament sur lequel le rubidium est adsorbé). L'augmentation de température engendre une réaction chimique qui libère le rubidium.

Comme la présence de la puce atomique obstrue partiellement une partie de l'espace, l'accès optique des 6 faisceaux laser, nécessaire au PMO, est rendu difficile. Pour pallier ce problème, nous utilisons la surface de la puce comme miroir (idée initialement proposée par [41, 55]). Les deux faisceaux réfléchis par le miroir de la puce jouent alors un rôle analogue aux faisceaux directs que nous aurions utilisés s'il n'y avait pas eu de puce. Pour s'en convaincre, regardons la réflexion d'un faisceau polarisé circulairement sur un miroir parfait. La réflexion du faisceau produit un déphasage de π sur chacune des composantes du champ électrique. Un faisceau circulaire incident reste donc circulaire après réflexion, mais son hélicité est inversée. Nous retrouvons alors la configuration des PMO traditionnels. Il est à noter cependant que dans notre configuration (miroir d'or) l'indice de réfraction est en fait égal à $n = 0.17 + 4.54i$ à $\lambda = 780$ nm [56]. Pour

une incidence de 45°, le faisceau réfléchi n'est plus circulaire mais elliptique et son taux d'ellipticité est de 1.68 (voir note[24]). Le déphasage à la réflexion entre les deux états de polarisation est de 17.5°. Cet effet ne semble pas trop gêner nos pièges magnéto-optiques relativement robustes à ce type de défauts. En vue d'une amélioration possible de la puce, il est envisageable de remplacer le miroir d'or par un miroir réalisé avec un empilement de couches diélectriques bien choisi.

Le PMO externe combine les 6 faisceaux laser précédents ainsi qu'un champ magnétique quadrupolaire produit à partir des bobines quadrupolaires. Le chargement de ce piège dissipatif externe se fait avec un courant de 8.8 A dans les bobines, ce qui correspond à un gradient quadrupolaire typique de 300 G/cm. Pour limiter l'échauffement des bobines dû à l'effet Joule, nous avons rajouté un système de refroidissement à eau, permettant notamment de stabiliser la température et d'éviter les turbulences thermiques associées à des gradients d'indice, et ceci pour veiller à la qualité des images prises.

Après le pulse de courant dans le dispenser (3.6 s), nous attendons 12 s pour le chargement du PMO externe. Durant cette période, la pompe ionique réduit la pression du gaz résiduel dans l'enceinte à environ 10^{-10} (voir note[25]). Le piégeage des atomes au centre du PMO et le refroidissement Doppler sont assurés par le décalage vers le rouge des faisceaux du PMO de 10 MHz par rapport à la transition atomique $|F=2\rangle \rightarrow |F=3\rangle$. Nous chargeons typiquement quelques 10^7 atomes dans le PMO externe.

Ces atomes sont alors transférés vers le PMO de surface. Ce dernier utilise toujours les 6 faisceaux lasers précédents mais le champ quadrupolaire est obtenu par la combinaison du champ crée par le fil en U et un champ externe B_0 approprié. Pour des questions sur le volume de capture, il est très difficile de charger directement le PMO de surface à partir de la vapeur de rubidium. Le transfert entre les deux PMO est réalisé en 30 ms, en rampant simultanément le courant dans les bobines externes à zéro et le courant circulant dans le U à $I_{\mathrm{U}} = 4$ A. La norme du champ transverse homogène est quant à elle amenée à la valeur de $B_0 = 3.8$ G en faisant un angle $\theta = -20°$ avec la surface de la puce[26]. La position du PMO en U est alors située à environ 2.5 mm de la surface de la puce et le gradient du piège quadrupolaire correspondant est égal à 12 G/cm. A ce stade, nous avons mesuré, par temps de vol, une température pour le nuage atomique de 500 μK ainsi qu'un nombre d'atomes de 2×10^7. En 3 ms, ce piège est ensuite comprimé pour l'approcher de la surface et ainsi mieux adapter la forme du nuage au piège magnétique pour faciliter son chargement. Cette étape est réalisée en diminuant le courant dans le fil en U à 2.6 A alors que pendant le même temps le champ B_0 est augmenté à 4.1 G et tourné à un angle de 2° par rapport à la surface de la puce. Avant de pouvoir charger efficacement notre piège magnétique, dont la profondeur est de seulement 500 μK (pour $I_Z = 3$ A et $|B_0| = 8$ G), une étape de mélasse et de pompage optique sont nécessaires.

[24] Rapport des longueurs des deux axes propres de l'ellipse.

[25] Il est difficile d'avoir une meilleure estimation de la pression regnant au voisinage de la puce atomique puisque la jauge que nous utilisons se trouve, proche de la pompe ionique et à une dizaine de centimètre de la zone d'étude.

[26] Un angle nul correspond à un champ homogène parallèle à la surface de la puce.

3.6.2 Mélasse et pompage optique

Pour réduire davantage la température du nuage avant de procéder à son transfert dans le piège magnétique (piège en Z), nous utilisons une étape de mélasse optique. Cette étape consiste à éteindre l'ensemble des champs magnétiques présents et à décaler fortement la fréquence des 6 faisceaux lasers vers le rouge ($\delta = -78$ MHz) de la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ tout en réduisant leur intensité. Les gradients de polarisation des faisceaux en configuration σ^+-σ^- associés à la structure hyperfine de l'atome produisent un refroidissement sub-Doppler [57], basé sur les effets de gradients de polarisation [58,59]. Ce refroidissement permet d'atteindre des températures de l'ordre de la cinquantaine de μK. Dans notre expérience, il n'est pas possible de couper rapidement le champ magnétique de biais [42] (moins de 3 ms), à cause des courants de Foucault qui apparaissent dans le bloc en inox de l'enceinte à vide. Pour pallier ce problème, nous diminuons le courant dans le fil en U ainsi que le champ magnétique de biais B_0 en 3.8 ms. Ceci permet également de réduire la largeur en impulsion du nuage et donc d'améliorer le refroidissement. Avec cette méthode, nous arrivons à diminuer la température du nuage jusqu'à 40 μK.

Nous souhaitons également polariser notre échantillon dans l'état $|F = 2, m_F = +2\rangle$, pour d'une part augmenter le confinement magnétique perçu par les atomes et d'autre part pour éviter les collisions inélastiques entre les états $|F = 2, m_F = +1\rangle$ et $|F = 2, m_F = +2\rangle$ qui réduisent le nombre d'atomes dans le piège magnétique [60]. Pour cela nous utilisons la technique de pompage optique. Premièrement, nous appliquons un champ magnétique directeur de 5 G suivant la direction z puis suivant cet axe de quantification nous éclairons pendant 350 μs les atomes avec un faisceau appelé faisceau de pompage, polarisé σ^+ à résonance avec la transition $|F = 2\rangle \leftrightarrow |F' = 2\rangle$. Dans notre montage expérimental, le faisceau de pompage est monté en simple passage avec comme faisceau contra-propageant le faisceau de repompage pour minimiser l'effet de recul sur les atomes lié à la pression de radiation. Suivant les règles de sélection, les atomes sont alors pompés optiquement dans l'état noir $|F = 2, m_F = +2\rangle$. Idéalement, cette technique permet de polariser l'ensemble des atomes, qui initialement sont équirépartis sur les cinq sous-niveaux Zeeman, dans l'état $|F = 2, m_F = +2\rangle$ et donc de gagner un facteur 5 sur le nombre d'atomes présents dans le piège magnétique. Cependant, notre efficacité est limitée à 2.5 ce que nous expliquons notamment par le chauffage du nuage dû aux photons diffusés pendant le pulse de pompage.

3.6.3 Piège magnétique

A la fin du pompage optique, nous allumons rapidement (en quelques dizaines de micro-secondes) le piège magnétique obtenu à partir du fil en Z et du champ de biais B_0 (Cf. §3.1.4.3). De plus, comme le nuage se trouve encore assez loin de la surface après la mélasse et le pompage optique, nous travaillons à courant maximal dans le fil en Z, soit 3 A pour avoir une profondeur de piège non négligeable. Pour maximiser le

transfert d'atomes, nous ajustons la position du piège en Z en jouant sur la norme ainsi que l'orientation du champs de B_0. Les valeurs utilisées sont alors $B_0 = 12$ G avec un angle de 16°. Comme le chargement n'est pas adiabatique[27], nous attendons 200 ms dans ce piège pour que le nuage se relaxe avant d'entamer une phase de compression et une phase de refroidissement évaporatif. Après rethermalisation et une légère évaporation naturelle due à la profondeur finie du piège ($\simeq 800$ μK), le nombre d'atomes piégés est de 2×10^6 à une température de 50 μK.

Pour augmenter la durée de vie dans ce piège (en diminuant les pertes par spin-flip), nous ajoutons au champ longitudinal crée par les deux bras du Z (150 mG)[28] un champ homogène 1 G suivant la direction longitudinale. Dans cette configuration, une mesure du temps de vie donne $\tau = 16$ s ce qui est suffisant pour être dans le régime d'emballement lors du refroidissement évaporatif. Cette durée de vie est principalement limitée par les collisions avec le gaz résiduel et non pas à cause de la profondeur finie du piège. En effet, si cette dernière est 10 fois supérieure à $k_\mathrm{B}T$, l'évaporation peut être considérée comme négligeable car très peu d'atomes se trouve dans la queue de la distribution de vitesse [61].

Dans le piège non comprimé les fréquences d'oscillations, $\omega_\perp/(2\pi) = (172 \pm 1)$ Hz et $\omega_\mathrm{long}/(2\pi) = (20.5 \pm 0.1)$ Hz, ne sont pas encore suffisantes pour induire un refroidissement évaporatif efficace en 5 s (voir §3.6.4). Comme nous travaillons à courant maximal[29], pour comprimer le piège nous avons rapproché le nuage atomique de la surface de la puce en jouant sur le champ de transverse B_0 (35 G). Dans ce cas les fréquences d'oscillation que nous avons mesurées sont respectivement $\omega_\perp/(2\pi) = (1.5 \pm 0.2)$ kHz, et $\omega_\mathrm{z}/(2\pi) = (11 \pm 0.2)$ Hz. Durant cette phase de compression, la hauteur du piège par rapport au fil passe de 500 μm pour sa valeur initiale à une cinquantaine de μm au-dessus de la surface de la puce ($\simeq 170$ μm au-dessus du fil à cause de la présence du second substrat). Lors de l'approche, nous perdons une grande partie des atomes chauds lorsque ces derniers rentrent en contact avec la surface de la puce. Pour limiter ce problème, nous effectuons la compression en 1100 ms pour que durant cette étape nous induisons un refroidissement évaporatif sur la surface de la puce [62].

3.6.4 Refroidissement évaporatif dans le piège en Z

Pour atteindre la condensation de Bose-Einstein, il est nécessaire d'augmenter encore la densité dans l'espace des phases. Le refroidissement évaporatif [63], consistant à tronquer la profondeur du piège pour laisser s'échapper les atomes ayant une grande énergie, typiquement plusieurs fois $k_\mathrm{B}T$, est une technique largement utilisée dans les expériences impliquant les condensats de Bose-Einstein [64]. Cette troncature peut être obtenue au

[27] due à la montée brusque du champ de piégeage.

[28] Au centre du piège les deux composantes transverses créées par les deux bras du Z suivant l'axe y se compensent exactement par raison de symétrie et seule reste la composante longitudinale de 150 mG.

[29] Il est difficile d'augmenter le courant dans le fil en Z à plus de 3 A car durant les 5 s que durent le refroidissement évaporatif dans le piège magnétique, le fil en Z s'échauffe de près de 40 K.

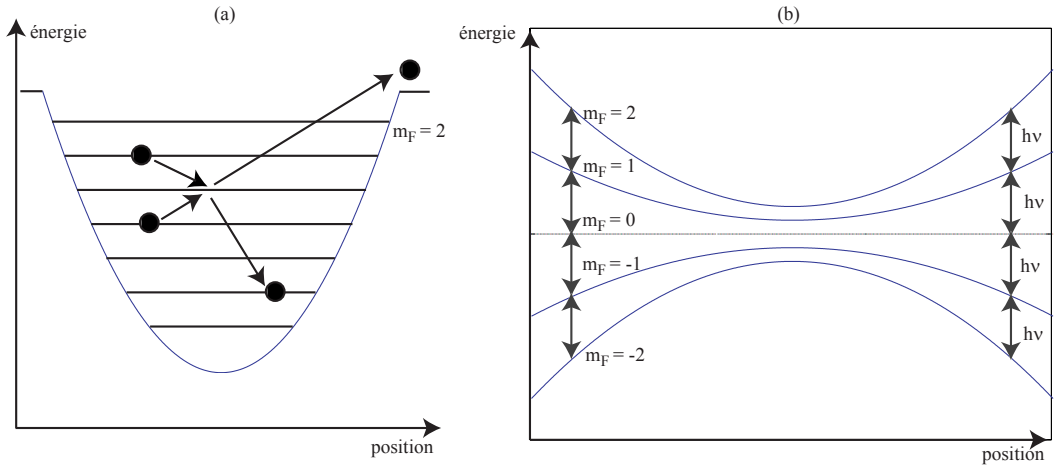

FIG. 3.14 – Schéma de principe du refroidissement évaporatif avec une onde radio-fréquence dans une approche semi-classique. Le bilan d'une collision entre deux atomes d'énergies voisines peut donner deux atomes d'énergies très différentes dont l'un des atomes aurait l'énergie suffisante pour s'échapper du piège. La température du nuage piégé est alors diminuée. Sur la figure (b), nous avons représenté le schéma de principe du couplage radio-fréquence à une dimension entre les différents sous-niveaux Zeeman (état $|F = 2, m_F = +2\rangle$).

moyen d'un champ magnétique radio-fréquence qui induit des basculements de spin des atomes entre les états piégés et anti-piégés sur le cercle isomagnétique où la condition de résonance $\mu_\mathrm{B} B(r) = h\nu_\mathrm{RF}$ est vérifiée [30]. Un schéma récapitulatif de cette technique est présenté en figure 3.15. Les atomes restant se rethermalisent par collision élastique à une température plus faible que la température initiale. Dans le cas d'un piège harmonique, il est possible d'exprimer la température finale T_f du nuage en fonction de sa température initiale T_i ainsi que du rapport du nombre d'atomes initial N_i et final N_f par [47] :

$$\frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{i}} = \left(\frac{N_\mathrm{f}}{T_\mathrm{i}}\right)^{\frac{\eta-2}{3}} \tag{3.24}$$

où le paramètre $\eta = h\nu_\mathrm{RF} - E_0/(k_\mathrm{B}T)$ exprime la profondeur du potentiel en unité de $k_\mathrm{B}T$, avec E_0 l'énergie du fond du piège.

Cependant, il n'est à priori pas évident que cet abaissement de la température augmente la densité dans l'espace des phases, puisqu'il se fait au prix d'une perte d'atomes. Les auteurs de [61] ont montré qu'il y a effectivement un gain dans l'espace des phases pour $\eta > 3$. De plus, pour $\eta > 7$, le taux de collisions élastiques augmente en même

[30] Où ν_RF est la fréquence de l'onde radio-fréquence et $B(r)$ la norme du champ magnétique perçue par les atomes.

temps que la densité dans l'espace des phases. L'évaporation devient alors de plus en plus efficace pendant la rampe radio-fréquence et on parle de "régime d'emballement". Pour notre expérience où le nombre initial d'atomes est relativement faible 2×10^6, il est crucial d'atteindre ce régime d'emballement sans lequel nous ne pourrions obtenir de condensat de Bose-Einstein. Il semble naturel de prendre η le plus élevé possible pour ôter la plus grande énergie par particule perdue. Cependant, les collisions engendrant ce type d'événement sont exponentiellement rares[31] avec le paramètre η et d'autres processus, comme les pertes avec le gaz résiduel, limitent en pratique notre valeur de η. Dans notre cas, nous maintenons durant toute la période de rampe entre la compression et la décompression un paramètre η légèrement supérieur à 7. Le taux de collisions initial avant le début de l'évaporation est typiquement de $\tau = \overline{n}\sigma v$ soit 200 collisions.s^{-1} pour une température de 40 μK, où $\overline{n}$ est la densité moyenne du nuage, σ la section efficace de collision et v la vitesse quadratique moyenne des particules.

En tenant compte des pertes dues aux collisions avec le gaz résiduel, le paramètre pertinent pour juger de l'efficacité du refroidissement est le produit $\gamma_{\text{collisions}}\tau_{\text{pertes}}$, où $\gamma_{\text{collisions}}$ est le taux de collisions élastiques et τ_{pertes} le taux de pertes par atome. Si ce taux de pertes est plus grand que $\gamma_{\text{collisions}}$, l'évaporation efficace ne permet pas de compenser les pertes néfastes. Il est donc en général favorable de comprimer fortement le piège pour augmenter le taux de collisions élastiques, proportionnel à la densité, afin d'accélérer le processus d'évaporation et atteindre le processus d'emballement obtenu pour $\tau_{\text{pertes}}\gamma_{\text{collisions}} \geq 300$. Il faut cependant prendre garde aux pertes à trois corps[32] qui augmentent quadratiquement avec la densité atomique, $\gamma_{3\ corps} = C_{3\ \text{corps}} n^2$ (voir note[33]).

D'un point de vue expérimental, l'antenne radio-fréquence est réalisée à l'aide du fil en U. Un relais mécanique permet de commuter entre l'alimentation du U et la source radio-fréquence. L'onde radio-fréquence est générée à l'aide d'un module DDS (Direct Digital Synthesis). Ce DDS combiné avec un ampli RF (1W) réalise les rampes successives d'évaporation lors du processus d'évaporation. Nous optimisons la forme des rampes successives de la courbe RF, en maximisant et minimisant respectivement le nombre d'atomes et la température avec 7 segments de droites dont les valeurs ainsi que les durées respectives sont représentées sur la figure 3.15. Pour plus de details sur la méthode d'optimisation des rampes voir [42].

3.6.5 Coupure du piège et temps de vol

Les propriétés des nuages atomiques (température, mesure du nombre d'atomes, observation de l'inversion d'ellipticité pour un condensat, etc ...) sont mesurées après

[31] puisque le nombre d'atomes situé dans la queue de la distribution de Maxwell-Boltzmann est exponentiellement petit en $k_B T$.

[32] lors de la collision deux atomes forment une molécule généralement dans un état vibrationnel excité, et le troisième atomes emporte l'énergie restante. Les trois atomes sont alors perdus en fin de processus.

[33] Pour le rubidium 87 polarisé dans l'état $|F = 2, m_F = +2\rangle$, C_3 vaut 1.8 $10^{-29} S.I.$

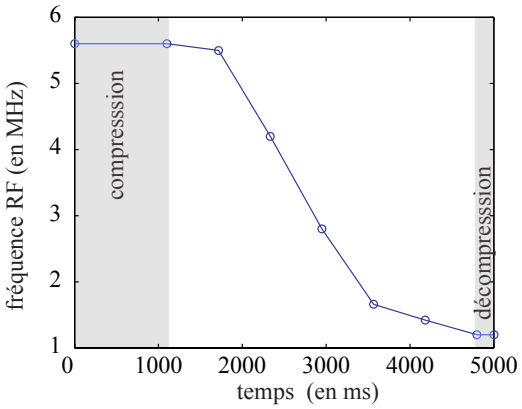

FIG. 3.15 – Evolution temporelle de la fréquence de l'onde radio-fréquence pendant la période d'évaporation. Durant la première étape de compression, une évaporation de surface est également induite en approchant le nuage dans le très proche voisinage de la puce. Une étape de décompression (200 ms) permet d'éloigner le nuage de la surface et d'effectuer un temps de vol pour imager le nuage.

expansion au bout d'un temps de vol variable. Sur notre expérience, au lieu de couper l'ensemble des champs magnétiques (champ homogène et courants de la microstructure), nous n'éteignons que les courants circulants dans la microstructure. Ceci à pour but de limiter les courants de Foucault produits dans la structure en inox de l'enceinte à vide lors de la coupure du champ de biais. La prise d'image du nuage atomique se fait alors dans le champ homogène B_0 ce qui ne pose pas de problème mis à part un décalage par effet Zeeman de la fréquence de transition $|F=2, m_F=+2\rangle \rightarrow |F'=3, m_F=+3\rangle$[34]. Un modulateur acousto-optique, monté en simple passage, est ajouté sur le faisceau d'imagerie pour décaler sa fréquence de 70 MHz vers le bleu. Ainsi, en jouant simplement sur la fréquence de l'AOM situé sur le laser maître, nous pouvons atteindre la fréquence pour la mélasse (décalage de -78 MHz vers le rouge) et d'imager en champ homogène de près de 30 G.

De plus, la coupure du piège doit être rapide par rapport à la constante de temps associée au mouvement de centre de masse de l'atome, donnée par la valeur de la fréquence d'oscillation transverse. Pour estimer le temps de coupure maximal admissible, prenons le cas d'un condensat de Bose-Einstein pur dans un piège anisotrope ($\omega_\perp \gg \omega_z$), la densité atomique après temps de vol est déduite de la densité atomique initiale en ap-

[34]Cet effet Zeeman permet également de mesurer la constante de temps de décroissance des courants de Foucault associée à la coupure du champ de biais. Il suffit pour cela de mesurer l'évolution du décalage en fréquence associé à cet effet Zeeman en fonction de la durée du temps de vol lorsque tous les champs sont coupés en même temps. Cette mesure nous donne un temps de décroissance $\tau = 3$ ms.

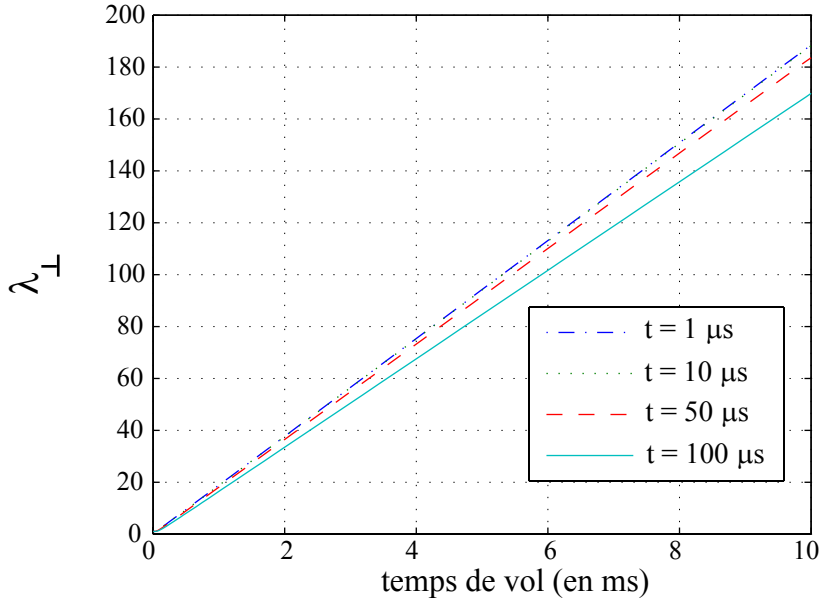

FIG. 3.16 – Evolution du facteur d'échelle transverse $\lambda_\perp$ en fonction du temps de vol pour 4 coupures linéaires de pièges (1 μs, 10 μs, 50 μs, 100 μs). Paramètres utilisés : fréquence perpendiculaire 3 kHz, fréquence longitudinale 10 Hz.

pliquant les facteurs d'échelle λ_j sur chacun des axes du piège. Les λ_j vérifient le système d'équations différentielles suivant (dérivé dans la référence [65], voir aussi [66])

$$\ddot{\lambda}_j = \frac{\omega_j^2(0)}{\lambda_j \lambda_{perp}^2 \lambda_z} - \omega_j^2(t)\lambda_j \qquad \text{avec} \qquad j = \{x, y, z\} \tag{3.25}$$

où j désigne la coordonnée de l'axe sur lequel nous faisons le calcul et $\omega_j(t)$ l'évolution temporelle de la fréquence d'oscillation dans la direction j durant la coupure du piège.

Pour la résolution numérique de ce système différentiel, nous supposerons que la fréquence $\omega_j(t)$ décroît linéairement vers 0 pendant un temps τ_{rampe}. Nous prendrons comme paramètres numériques une fréquence d'oscillation transverse 3 kHz et une fréquence longitudinale de 10 Hz. Nous avons reporté sur la figure 3.16 le facteur d'échelle $\lambda_\perp$ pour quatre temps de coupure différents : 1 μs, 10 μs, 50 μs et 100 μs. Pour les temps de coupure rapide (*i.e.* 1 μs et 10 μs) nous ne voyons pas de différence significative sur l'évolution de $\lambda_\perp$. Pour un temps de coupure de 50 μs, nous observons une erreur de 3% par rapport à une coupure infiniment rapide.

Expérimentalement pour avoir des temps de coupure de l'ordre de 10 μs nous ajoutons en série sur les deux fils en Z (Z_1 et Z_2) un transistor MOSFET à canal N (STP80NE03L-06) qui ouvre le circuit en un temps de 5 μs. Le choix de ce transistor a été orienté pour sa très faible résistance série (0.005 Ω) ainsi que son courant de claquage élevé (80 A).

Pour obtenir la température du nuage, une technique consiste à mesurer la distribution en vitesse du nuage après une coupure rapide du piège. Pour des nuages suffisamment dilués ($\rho a^3 \ll 1$) et non dégénérés, leur profil de densité est donné par la distribution de Maxwell-Boltzmann (profil de densité gaussien dans un piège harmonique) :

$$n(r, t_{\text{tof}}) = n(0, t_{\text{tof}}) e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2(t_{\text{tof}})} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2(t_{\text{tof}})} + \frac{z^2}{2\sigma_z^2(t_{\text{tof}})}\right)} \tag{3.26}$$

où t_{tof} est le temps de vol.

A partir de la distribution gaussienne initiale dans l'espace des phases, on montre que l'évolution de la taille rms du nuage au cours du temps de vol s'écrit dans les trois directions de l'espace :

$$\sigma_y^2(t_{\text{tof}}) = \sigma_y^2(t_{\text{tof}} = 0) + \frac{k_{\text{B}}T}{m} t_{\text{tof}}^2 \tag{3.27}$$

Afin d'accéder à la température à partir de la mesure expérimentale de $\sigma_y^2(t_{\text{tof}})$, il suffit de déterminer (ajustement par les moindres carrés) le coefficient directeur de la droite donnant $\sigma_y^2(t_{\text{tof}})$ en fonction de t_{tof}^2. L'ordonnée à l'origine fournit quant à elle la taille initiale du nuage convoluée par la résolution optique finie du système d'imagerie.

3.6.5.1 Condensation de Bose-Einstein

Pour des températures inférieures à la température critique (voir chapitre précédent), l'accumulation des atomes dans l'état fondamental du piège (condensation de Bose-Einstein) se traduit par l'apparition d'un pic de densité au centre du nuage lors de son expansion par temps de vol. La valeur théorique de la température de condensation pour nos paramètres expérimentaux est de 350 nK pour un nombre d'atomes de 10^4 et des fréquences d'oscillations : $\omega_\perp/(2\pi) = 1.5$ kHz et $\omega_z/(2\pi) = 20$ Hz.

Il n'est pas possible d'imager directement le condensat dans le piège comprimé car l'effet Zeeman est trop important pour être accessible par notre faisceau d'imagerie. Pour imager le condensat, nous decomprimons adiabatiquement le nuage atomique en réduisant le champ de biais externe à 12 G avant d'effectuer le temps de vol. Durant cette décompression la fréquence d'oscillation transverse passe de 1.45 kHz à 170 Hz. La figure 3.17 présente des profils de densité à différentes températures au voisinage du seuil de condensation. Ils sont obtenus en modifiant la valeur finale du couteau radio-fréquence lors de la dernière rampe d'évaporation.

En plus de l'apparition du pic de densité au centre du nuage, l'inversion de l'ellipticité du condensat, contrairement à l'expansion isotrope dans le cas d'un gaz de Maxwell-Boltzmann sans interaction, constitue une seconde signature de la condensation de Bose-Einstein. La figure 3.18 présente trois images par absorption pour des temps de vol différents.

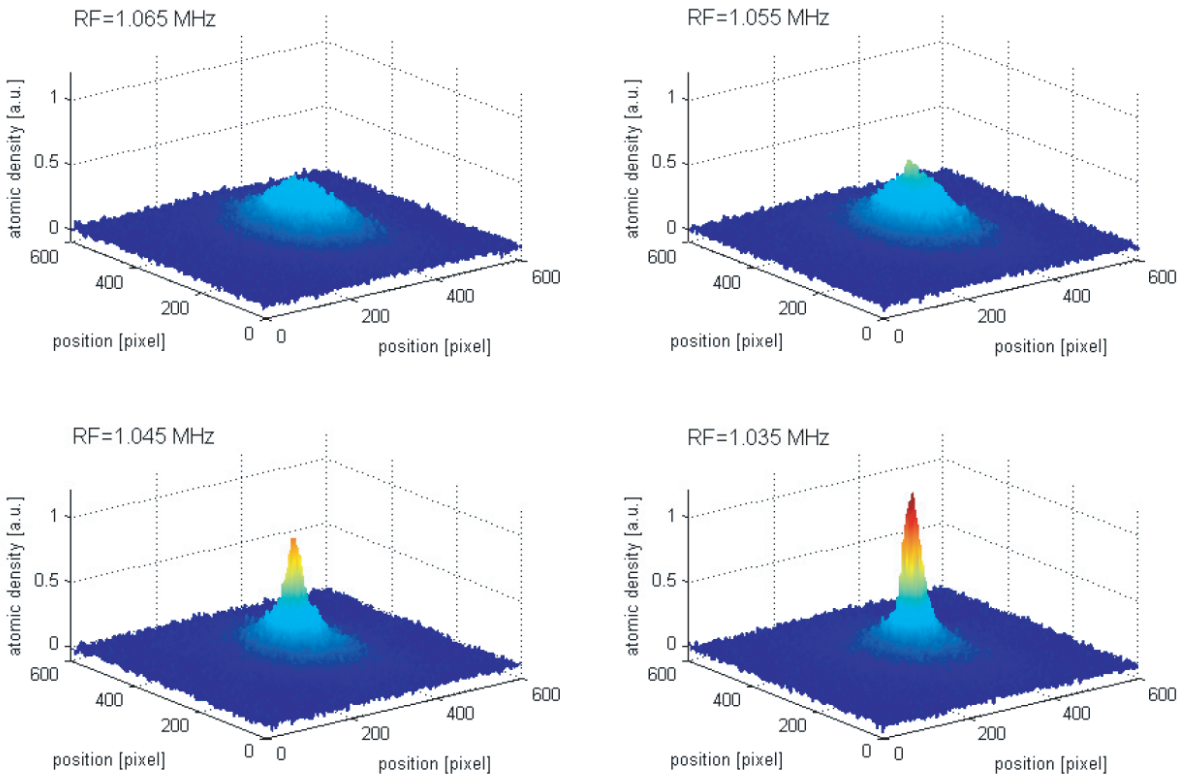

FIG. 3.17 – Transition de phase entre un gaz thermique et un condensat de Bose-Einstein. Les profils de densité atomique ont été obtenus après un temps de vol de 15 ms. La température du nuage est variée en changeant la valeur finale de la rampe radio-fréquence par pas de 10 kHz. Le phénomène de condensation se traduit par l'apparition d'un pic de densité au centre du nuage, conséquence d'une population macroscopique de l'état fondamental.

.

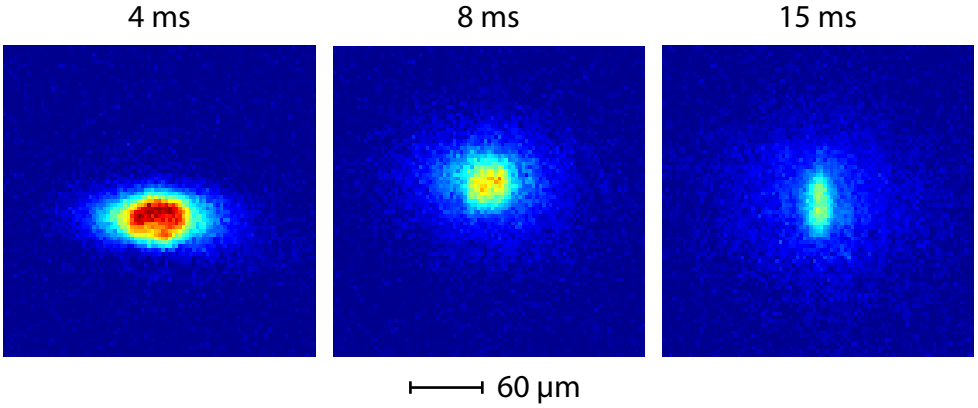

FIG. 3.18 – images par absorption de trois nuages à des temps de vol différents. L'inversion de l'ellipticité au cours du temps de vol est une signature de la présence d'un condensat au centre du nuage.

.

3.6.5.2 Calibration du nombre d'atomes

Usuellement la calibration du nombre d'atomes N_{tot} est obtenue en mesurant soit la température critique de condensation et en utilisant la formule $T_c^{3D} = 0.94\frac{\hbar(\omega_\perp^2\omega_z)^{1/3}N_{tot}^{1/3}}{k_{\text{B}}}$ [30], soit en mesurant le rayon Thomas-Fermi éventuellement corrigé par le faible nombre d'atomes comme proposé par Zubarev [67]. Cette calibration sur notre expérience est rendue délicate et imprécise par le faible nombre d'atomes condensés et la faible dépendance de la température de condensation en fonction du nombre d'atomes (en $N^{1/3}$). Une précision de l'ordre de 10 % sur la mesure de la température se traduit par une précision sur la détermination du nombre d'atomes de 30% sans compter les autres erreurs systématiques pouvant être introduites comme les effets de taille finie et le décalage de la température de transition à cause des effets de champ moyen.

Nous avons donc choisi une autre méthode pour calibrer le signal d'absorption afin d'obtenir le nombre réel d'atomes contenus dans le nuage. Pour un faisceau sonde parfaitement polarisé σ^+ suivant l'axe de quantification du champ magnétique, le coefficient d'absorption est parfaitement connu pour la transition $|F = 2, m_F = +2\rangle \rightarrow |F' = 3, m_F = +3\rangle$ et vaut $3\lambda^2/(2\pi)$. Expérimentalement après la coupure du piège et avant la prise d'image (qui a lieu 6 ms après), nous tournons le champ magnétique B_0 (12 G) pour qu'il pointe suivant la direction $0y$. Le faisceau sonde est alors polarisé σ^+ pour le faisceau traversant directement le nuage avant la réflexion sur le miroir. En mesurant son absorption et en la comparant à celle obtenue dans la configuration de champ souhaité (soit *in-situ* où le champ est majoritairement suivant $0z$, soit dans le cas d'un champ de transverse homogène parallèle à la puce dans le plan 0xy), il est possible de déduire la section efficace effective en supposant que le nombre d'atomes réels est le

même dans les deux cas.

Nous avons souhaité tester cette méthode dans un cas connu (champ magnétique B_0 de 12 G parallèle à la surface dans la puce dans le plan (0xy) où nous attendons une section d'absorption de $0.7 \times 3\lambda^2/(2\pi)$ [42, 51]. Pour faire cette mesure, nous retirons également le transistor de coupure rapide (MOSFET) présent sur le fil en Z pour être certains que tous les atomes aient le temps de se polariser suivant la direction finale du champ magnétique (temps de décroissance du courant dans le fil en Z de 500 μs). Nous produisons un nuage de 10^4 atomes à une température de 3 μK dans le piège de 12 G. La fréquence du faisceau est ajustée pour être à résonance à mieux que le MHz sur la transition $|F = 2, m_F = +2\rangle \rightarrow |F' = 3, m_F = +3\rangle$ dans les deux cas[35]. Alternativement, nous mesurons après le même temps de vol le nombre d'atomes dans les deux configurations où le champ est suivant la direction parallèle à la puce et suivant l'axe du faisceau d'imagerie. Nous obtenons alors $\mathcal{C} = 0.74 \pm 0.02$ (moyennage sur 20 coups) confirmant ainsi le principe de la méthode.

Il est alors possible de passer au même type de mesure dans le cas *in-situ*. Dans ce cas, la polarisation du faisceau n'est absolument pas circulaire mais majoritairement π. Nous avons également vérifié que la présence d'un faisceau repompeur pendant la prise d'image ne change pas le nombre d'atomes détectés.

3.7 Paramètres et valeurs typiques sur l'expérience

Pour finir ce chapitre, donnons un tableau récapitulatif de nos paramètres expérimentaux :

Phase	durée	Nombre d'atomes	Temperature (μK)
PMO externe	12 s	10^7	
PMO de surface	20 ms		
PMO de surface comprimé	5 ms		
Mélasse optique	150 μs		50 μK
Pompage optique	350 μs	$(\|F = 2, m_F = +2\rangle)$	
Piège magnétique	3 s	$2\ 10^6$	10 μK
Au seuil de condensation		$3\ 10^4$	290 nk
Condensat pur		10^4	

ainsi que les propriétés des différents pièges magnétiques utilisés :

[35] Nous n'observons pas de décalage de fréquence appréciable entre les deux configurations de champs magnétiques.

type de pièges	courant	champs de biais	$\omega_\perp/(2\pi)$	$\omega_z/(2\pi)$
Piège en U	3.7 A	3.2 G, $\theta = -14°$		
Piège en U (compressé)	2.7 A	3.8 G, $\theta = -4°$		
Piège en Z comprimé	3 A	35 G, $\theta = 16°$	1.45 kHz	15.5 Hz
Piège en Z décomprimé	3 A	12 G, $\theta = 16°$	170 Hz	20.5 Hz

CHAPITRE 4

Réduction du potentiel rugueux créé par une puce atomique

L'attrait des puces atomiques par la communauté des atomes froids est motivé par les nombreuses applications potentielles de ces dispositif miniaturisés. Contrairement aux cas des dispositifs expérimentaux traditionnels n'utilisant que des bobines macroscopiques pour créer leur potentiel de piégeage, les puces à atomes peuvent produire quant à elles des potentiels variant significativement sur des échelles typiques de l'ordre du micromètre ([68–70]). Les très forts confinements magnétiques également atteignables permettent de produire des pièges en dimensionalité réduite (et plus particulièrement unidimensionnels [71, 72]). Au cours de cette thèse, nous avons bénéficié de cette propriété, pour étudier les propriétés d'un gaz de Bose très anisotrope dans le régime d'interactions faibles (cf chapitres 5 et 6) et il serait intéressant de poursuivre cette étude dans le régime de couplage fort (régime de Tonks-Girardeau [20, 21, 73]). Pour atteindre ce régime, il est nécessaire de produire des confinements transverses très importants tout en gardant un confinement longitudinal très lâche. Les puces à atomes semblent donc avec leurs très forts gradients transverses être des candidats idéaux pour réaliser ce type de piège.

Cependant peu de temps après l'introduction des puces atomiques dans la communauté des atomes froids (1999), la majorité des groupes utilisant ce type de dispositifs expérimentaux ont été confrontés à un phénomène inattendu : un nuage froid (condensé ou non) se fragmente lorsqu'il est approché au voisinage de la microstructure qui le piège. Cette observation a été initialement faite par le groupe de C. Zimmermann où les auteurs de [74] ont pu déterminer que cette fragmentation provient d'une fluctuation spatiale du champ magnétique longitudinal le long de la micro-structure piégeante (micro-fil en cuivre dans leur cas). En inversant le courant dans le fil ainsi que le champ transverse de piégeage, ils ont montré que la rugosité est inversée. Bien que dans leur dispositif expérimental, cette composante de champ magnétique soit typiquement très faible ($\Delta B/B \simeq 10^{-4}$) pour une distance de 100 μm au-dessus du fil, un nuage à une température de 1 μK fragmente. Des observations similaires ont été faites sur des microstructures utilisant des aimants permanents [75, 76], des film minces [77], ainsi que des micro-fils en or [78–80] ou en cuivre [74].

Une étude quantitative sur l'origine de ces fluctuations de champs magnétiques a été réalisé dans le groupe par Jérôme Estève *et al.* [51] et Thorsten Schumm *et al.* [40]. Cette

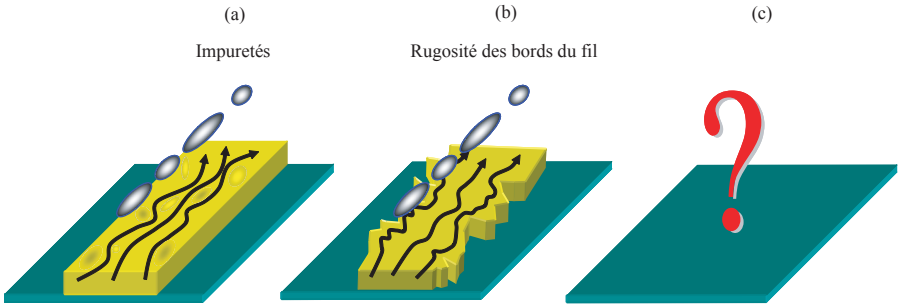

FIG. 4.1 – Origines possibles de la rugosité de potentiel : (a) présence d'impuretés magnétiques à l'intérieur du micro-fil, (b) déformations des lignes de courants dans le micro-fil ou d'autres effets d'origine inconnue (c).

étude a montré que dans le cas de fils plats les fluctuations de champs magnétiques sont principalement dues à la déformation des bords du fil qui induisent des déformations des lignes de courants. Pour un fil dont les déformations de ces bords sont décrites par un bruit de densité spectrale constante, la norme du champ magnétique varie en $h^{-5/2}$ où h est la hauteur du nuage par rapport au fil. Cette forte dépendance avec la distance est un sérieux frein à la miniaturisation des dispositifs et à la réalisation de système purement unidimensionnel, bien que des progrès ont été faits pour améliorer la qualité des fils [81, 82].

Nous allons montrer au cours de ce chapitre comment il est possible de s'affranchir de la rugosité en modulant rapidement le potentiel magnétique de sorte que les atomes ressentent uniquement le potentiel moyen, qui exempt de rugosité.

4.1 Caractéristiques du potentiel rugueux

4.1.1 Origines possibles et mesures préliminaires

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons uniquement à la rugosité de potentiel introduite par les micro-fils conducteurs. Nous pouvons penser à plusieurs origines possibles pour expliquer cette rugosité (voir figure 4.1) :

- effets purement géométriques des micro-fils conducteurs,
- effets d'impuretés magnétiques présentes dans le micro-fil,
- absorption d'atomes de rubidium sur le substrat de la puce qui, par effet Stark, produisent un potentiel rugueux [83].

Différentes expériences peuvent être menées pour déterminer la cause de cette rugosité. L'équipe de Ketterle [80] a comparé la fragmentation (ou non) d'un condensat de Bose-Einstein lorsque celui-ci est piégé au voisinage d'une puce atomique par respectivement un piège dipolaire ou un piège magnétique créé à partir de courants circulant dans la microstructure. Le condensat fragmente dans le cas de second cas alors qu'aucune fragmentation n'est visible dans le cas du piège dipolaire pour des positions de pièges identiques. Cette expérience montre que la rugosité est due à la circulation du courant électrique à l'intérieur de la microstructure. Ces déformations peuvent être dues soit à la présence d'impuretés qui se magnétisent au passage du courant dans les micro-fils soit plus simplement à la déformation des lignes de courants provenant des bords rugueux des micro-fils.

4.1.2 Déformations des lignes de courant

Jusqu'à présent, toutes les expériences faites sur puce atomique ont permis de vérifier que l'amplitude mesurée du potentiel rugueux varie linéairement avec le courant. Ces observations semblent donc indiquer que la déformation des lignes de courant à l'intérieur du micro-fil sont à l'origine de ce potentiel rugueux. De plus, suivant les techniques de fabrication utilisées, l'amplitude de rugosité associée peut varier de manière importante. Pour des fils usinés mécaniquement ou électro-déposés sur substrats [79, 84], l'amplitude de rugosité est typiquement du même ordre de grandeur (quelques centaines de nK à 100 μm) et celle-ci semble indépendante du type de matéraux utilisés cuivre ou or. A contrario les fils réalisés par évaporation d'or dans le groupe de Schmiedmayer ne présentent pas de rugosité visible pour un nuage thermique et ceci quelque soit la distance à laquelle il est approché du fil. Une faible fragmentation est seulement visible pour un condensat et ceci uniquement au voisinage très proche du micro-fil [85]. La qualité à apporter à la micro-fabrication des fils semble donc être un enjeu crucial.

En 2004, Lukin *et al.* ont suggéré que les déformations géométriques des fils des bords du fil et de sa surface qui induisent des déformations des lignes de courants pourraient être à l'origine du potentiel rugueux perçu par les atomes [86]. Ils ont développé un modèle théorique, similaire à celui présenté dans [40, 51], et très brièvement rappelé au § 4.1.3, qui permet de faire le lien entre les déformations géométriques des bords du fil et le champ magnétique rugueux créé. Cette hypothèse a été testée dans notre laboratoire sur des fils d'or électro-déposés. En comparant le potentiel magnétique mesuré à l'aide d'un nuage atomique thermique avec celui obtenu à partir de la mesure des déformations des bords du fil, il a été prouvé que la rugosité des bords du fils explique majoritairement le potentiel rugueux perçu par les atomes [79].

Ces résultats sont évidemment spécifiques à notre dispositif expérimental et d'autres effets, comme la rugosité de la surface du dessus du fil, ou des inhomogénéités dans le fil, qui peuvent être dominants dans d'autres configurations. Cette théorie, a néanmoins le mérite de donner un critère sur la qualité minimale qu'il faut apporter à la fabrication des micro-fils pour avoir une amplitude donnée de potentiel rugueux à une hauteur donnée

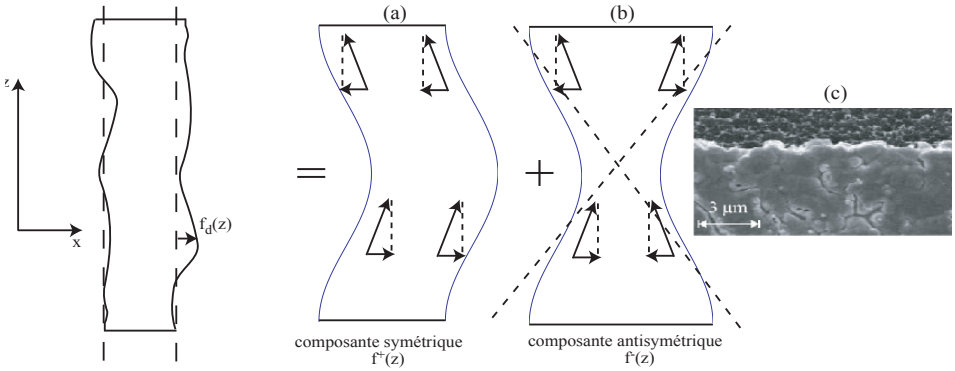

FIG. 4.2 – Décomposition des déformations des bords du fils $f_d(z)$ en deux composantes : une composante symétrique (a) et une composante anti-symétrique (b). Par raison de symétrie, la composante anti-symétrique produit une contribution de champ magnétique nulle dans le plan Oxz (x=0). Figure (c) : vue de dessus d'un fil en Z obtenu par électrodéposition (image au microscope à électrons).

au-dessus du fil.

4.1.3 Propriétés spectrales du potentiel rugueux

Dans cette partie, nous décrirons succinctement, comment il est possible de dériver l'expression du champ magnétique rugueux associé aux déformations géométriques du micro-fil. Nous appliquerons ces résultats pour comparer deux techniques de micro-fabrications que nous avons utilisées pour fabriquer respectivement le fil en H (lithographie optique suivi d'un dépôt électrolytique d'or) et les cinq nano-fils d'or (lithographie électronique suivi d'un dépôt d'or par évaporation).

Prenons un micro-fil de section transverse moyenne $a \times b$ (voir figure 4.2) et s'étendant dans la direction longitudinale sur une distance que nous considérons comme infinie. Nous noterons également $f_{\mathrm{g/d}}$ la déviation du bord du fil par rapport au fil parfaitement rectiligne (voir figure 4.2 pour les conventions de signes). Nous supposerons, de plus, que cette fonction ne dépend que de la coordonnée longitudinale. Dans le cas de nos fils, fabriqués par lithographie optique ou électronique, les déformations des bords dépendent très peu de la coordonnée x, ce qui valide cette hypothèse. Pour calculer la distribution de courant à l'intérieur du micro-fil rugueux, nous supposerons également que la conductivité ohmique γ est uniforme à l'intérieur du micro-fil.

La loi d'Ohm locale $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$ et la loi de conservation de la charge $\nabla\mathbf{J} = 0$ imposent que le potentiel électrique V à l'intérieur du fil satisfasse l'équation de Laplace $\nabla^2 V = 0$. Les conditions aux limites imposées sur les bords du fil (la densité de courant devant

être parallèle aux bords du fil) se traduisent par l'équation suivante :

$$\frac{df_{\mathrm{g/d}}}{dz}(z)\left\{j_0 - \gamma\frac{\partial v}{\partial z}(x = \pm a/2 + f_{\mathrm{g/d}}, z)\right\} = -\gamma\frac{\partial v}{\partial x}(x = \pm a/2 + f_{\mathrm{g/d}}, z) \tag{4.1}$$

en écrivant le potentiel électrique sous la forme $V = v + j_0 z/\gamma$, où $j_0 = I/(\mathrm{ab})$ représente la densité moyenne de courant et v correspond à la déviation du potentiel électrique par rapport au potentiel moyen.

Dans le cas où l'amplitude $f_{\mathrm{g/d}}$ est petite, il est possible d'approximer $\frac{\partial v}{\partial z}(x = \pm a/2 + f_{\mathrm{g/d}}, z)$ et $\frac{\partial v}{\partial x}(x = \pm a/2 + f_{\mathrm{g/d}}, z)$ par $\frac{\partial v}{\partial z}(x = \pm a/2, z)$ et $\frac{\partial v}{\partial x}(x = \pm a/2, z)$ respectivement (développement à l'ordre 1 en $f_{\mathrm{g/d}}$).

Compte tenu de l'approximation précédente, les conditions aux limites données par l'équation 4.1 s'écrivent dans l'espace de Fourier :

$$ikj_0 f_{\mathrm{g/d,k}} = -\gamma\frac{\partial v_k}{\partial x}(x = \pm a/2). \tag{4.2}$$

Il est intéressant de décomposer les fluctuations des bords du fil en une partie symétrique $f^+ = \frac{f_{\mathrm{g}} + f_{\mathrm{d}}}{2}$ et une partie antisymétrique $f^- = \frac{f_{\mathrm{g}} - f_{\mathrm{d}}}{2}$. La composante de Fourier de la densité de courant $j_k(y)$ s'écrit avec ces deux notations pour un vecteur d'onde k :

$$j_k(x) = ikj_0\{\frac{\cosh(kx)}{\cosh(ka/2)}f_k^+ + \frac{\sinh(kx)}{\sinh(ka/2)}f_k^-\} \tag{4.3}$$

A partir de l'équation 4.3, nous pouvons déduire les propriétés suivantes :

- les composantes symétriques f_k^+ de grand vecteur d'onde (devant $1/a$) ont une contribution importante seulement sur les bords du fil. A contrario, pour les petits vecteurs d'onde, $j_k(x)$ est quasiment constante sur la largeur du fil.
- par raison de symétrie, à l'aplomb du fil ($x = 0$, y, z), seule la composante f_k^+ produit un champ magnétique longitudinal non nul. En effet, les contributions des deux éléments de courant situés en (x, y, z) et ($-x$, z, y) se compensent exactement (voir figure 4.2).

L'expression de la densité de courant à la composante de Fourier de vecteur d'onde k fait intervenir les valeurs de f_k^+ et f_k^-. Pour les déterminer expérimentalement nous avons utilisé la procédure suivante : en prenant une série d'images en vue de dessus au microscope à électrons (voir 4.2(c)) du fil à caractériser, nous avons reconstitué une image complète du fil, en recollant chacune de ces images entre elles. Une fois cette étape faite, nous extrayons les déformations du bords du fils par détection de contour. Nous avons appliqué cette méthode pour caractériser nos deux techniques de micro-fabrication :

- lithographie optique et croissance électrolytique d'or : en regardant les déformations des bords du fil associée à la barre centrale du H.
- lithographie électronique suivie d'un dépôt d'or par évaporation : en regardant les déformations des bords des cinq nano-fils d'or (voir figure 4.3).

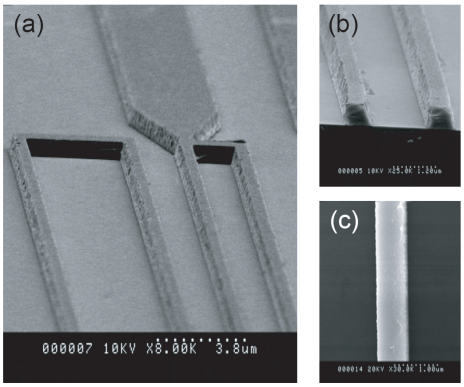

FIG. 4.3 – Image au microscope électronique à balayage de nos cinq nanofils d'or (dimensions : section carrée de 700×700 nm^2, 2 mm dans la direction longitudinale). Des défauts de fabrication sont visibles notamment sur la figure (a) : rugosité des bords du fils et mauvaise élimination de l'or lors de l'étape de lift-off (voir texte). Sur la figure (b), on peut également noter une forme légèrement trapezoidale des fils. (La déformation des fils présente au premier plan est une conséquence de la contrainte que nous avons exercé lors du clivage du substrat). Figure (c) : vue de dessus d'un des fils à partir de laquelle nous avons extrait les déformations du bord du fil (le champ de vue est alors de 2.5 μm).

Sur la figure 4.4, nous avons représenté les deux densités spectrales de bruit des bords du fils pour les deux méthodes de fabrication. Pour les petits fils, il ne nous est pas possible de reconstruire le spectre sur une aussi grande plage de vecteurs d'onde que pour la barre centrale du H. En effet, à cause du fort grandissement utilisé sur le microscope à électrons (environ 18 fois plus grand que pour l'analyse du fil en H), des aberrations apparaissent en bord de champ (3×4 μm^2) déformant l'image du fil. Le recollement des images introduit alors des erreurs systématiques et il est difficile de déterminer avec précision l'amplitude de rugosité pour des échelles spatiales plus grande que 2 ou 3 images. Nous nous sommes donc limités aux vecteurs d'onde supérieurs à $k_{\min} = 10$ μm^{-1}. Pour cette gamme de vecteurs d'onde accessibles, le gain sur la densité spectrale de bruit est typiquement entre 3 et 4 ordres de grandeurs.

A partir de ces valeurs, il est possible d'estimer la rugosité longitudinale attendue au fond du piège en connaissant la fonction de réponse $R(k, y) = |B_{z,k}/f^+(k)|$. Son expression a été dérivée dans [51, 81], et s'écrit en un point M situé au-dessus du fil à une distance y (grande devant sa taille a) :

$$R(k, y) = \frac{(\mu_0 I)^2}{4\pi^2 y^4}(ky)^4 K_1^2(ky) \tag{4.4}$$

où K_1 représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1. Cette fonction de réponse agit comme un filtre sur les différentes composantes spectrales des déformations

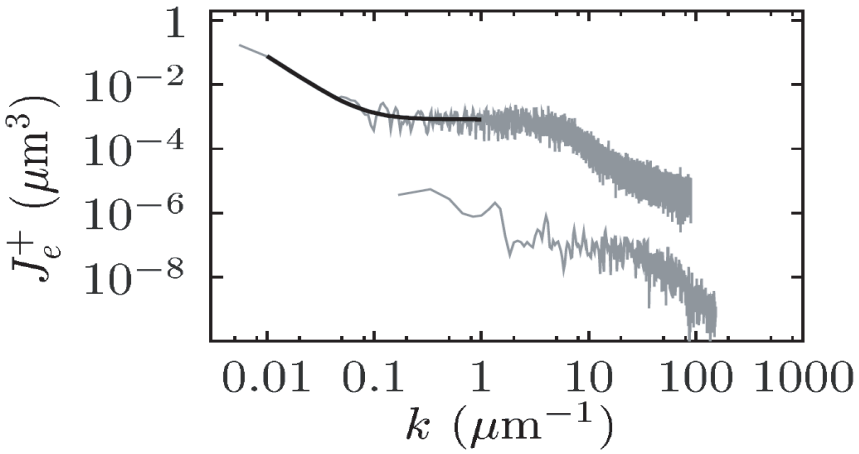

FIG. 4.4 – Densités spectrales mesurées, pour des fils obtenus par électrodéposition (courbe du dessus) et pour les petits fils obtenus par évaporation (courbe de dessous).

des lignes de courant dans le fil. Sur la figure 4.5, nous avons tracé la fonction sans dimension $R(k,y)/(\frac{(\mu_0 I)^2}{4\pi^2 y^4})$. Elle est maximale pour $ky = 1.3$ et décroît vers zéro de part et d'autre de ce point. Ceci peut se comprendre intuitivement de la manière suivante :

- à amplitude de rugosité fixée, l'accroissement de la longueur d'onde tend à diminuer la composante transverse du courant à l'intérieur du fil et donc sa contribution au champ magnétique longitudinal.
- Dans le cas des faibles longueurs d'onde, l'effet est tout autre puisqu'il s'agit simplement d'un effet de moyennage.

Pour estimer l'ordre de grandeur de l'amplitude de la rugosité, associée à l'utilisation des petits fils, nous considérons un bruit blanc et nous intégrons la fonction de réponse sur l'ensemble des vecteurs d'onde. Pour les expériences que nous allons présenter dans ce chapitre, le piège se trouve à une hauteur $h = 7$ μm au-dessus du fil central. Nous prendrons donc une valeur de densité spectale moyenne de $10^{-5}\mu\text{m}^3$. En supposant que les fluctuations spatiales des bords des cinq fils sont décorrélées entre elles, nous trouvons une amplitude rms de 140 nK pour un courant de 15 mA dans chacun des petits fils.

Ce calcul montre qu'en dépit d'une amélioration de la qualité des bords du fil par quatre ordres de grandeur la rugosité du potentiel reste toujours un problème puisque l'amplitude de la rugosité est du même ordre de grandeur que le potentiel chimique du condensat ($\simeq 1$ kHz).

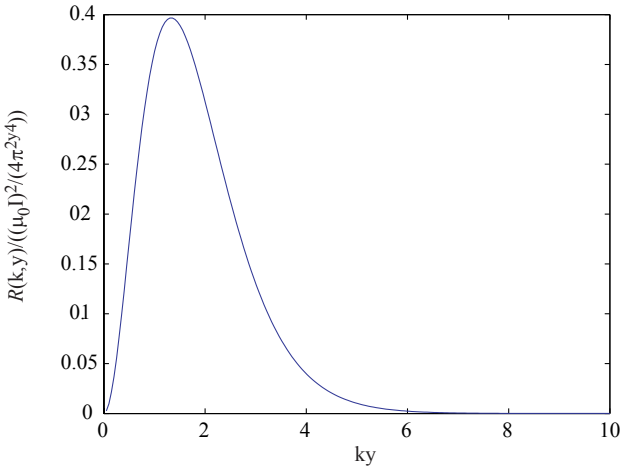

FIG. 4.5 – Evolution de la fonction de réponse adimensionnée $R(k,y)/((\mu_0 I)^2/(4\pi^2 y^4))$ donnant l'amplitude du champ magnétique à la composante de Fourier k en fonction de la variable ky où y est la hauteur par rapport au fil. Elle est maximale à $ky = 1.3$ et par raison de symétrie, seule la composante symétrique f^+ contribue au potentiel rugueux lorsque le nuage est dans le plan de symétrie (Oxz,y=0).

4.2 Principe du guide modulé

Dans cette partie, nous décrirons le principe du guide modulé créé par la combinaison d'un fil parcouru par un courant I et un champ transverse homogène B_0. Nous verrons ainsi comment le potentiel moyen est exempt de rugosité et nous dériverons les propriétés du potentiel moyen. Nous expliciterons également au travers des paragraphes suivants quelles sont les conditions, valeur inférieure et valeur supérieure, que doit satisfaire la fréquence de modulation $\omega_{\mathrm{m}}/(2\pi)$ de I et B_0 pour que les atomes perçoivent un potentiel adiabatique moyen[1].

4.2.1 Potentiel moyen pour un guide magnétique modulé

Reprenons le cas du guide magnétique obtenu par l'association du champ magnétique créé par un courant I parcourant un micro-fil et d'un champ magnétique homogène B_0 dont l'orientation est orthogonale à l'axe du fil (voir figure 3.1 du chapitre 3). Comme précédemment nous rajouterons un champ magnétique B_z^0 constant dans la direction longitudinale (axe du fil) pour éviter les pertes par basculement de spin (pertes Majorana

[1]Le terme "moyen" sera pris au sens de valeur moyenne temporelle du potentiel par rapport aux constantes de temps associées aux degrés de liberté externes de l'atome. Le terme "adiabatique" quant à lieu sera utilisé dans le sens où le moment magnétique de l'atome doit suivre à tout instant la direction instantanée du champ magnétique oscillant.

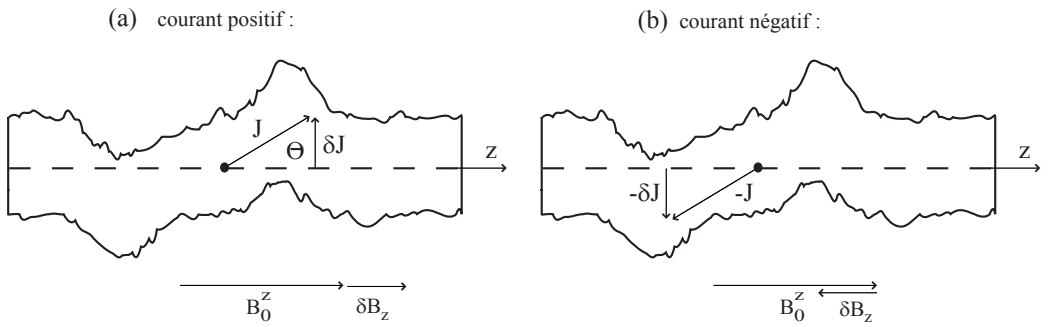

FIG. 4.6 – Schéma de principe de l'inversion de rugosité : l'élément de courant δJ produit dans la direction longitudinale un champ magnétique δBz qui s'ajoute ou se retranche à B_0^z suivant l'orientation du courant positif (a), négatif (b).

.

[87]). Dans cette configuration, le potentiel rugueux $\delta V(z)$ au centre du guide magnétique est proportionnel au courant I. En effet, le potentiel magnétique vu par les atomes au centre du guide est donné par :

$$V(z) = \mu_{\mathrm{B}} |B_z^0 + \delta B_z(z)| \tag{4.5}$$

où δB_z représente le champ magnétique créé par les déformations des lignes de courants à l'intérieur du micro-fil [74,79]. En remarquant que $\delta B_z(z)$ (typiquement de l'ordre de quelques mG) est faible devant la valeur du champ $|B_z^0|$ (1.8 G), l'expression précédente se simplifie avec la condition $|B_z^0| > \delta B_z(z)$ en :

$$V(z) = \mu_{\mathrm{B}} B_z^0 + \delta V_z(z) \tag{4.6}$$

avec $\delta V_z(z) = \mu_B \delta B_z(z)$. Ainsi, $\delta V(z)$ devient proportionnel au courant I et inverser périodiquement I sur une échelle de temps rapide par rapport à l'évolution longitudinale du mouvement du centre de masse permet aux atomes de n'être sensibles qu'au potentiel moyen (voir figure 4.6).

Rappelons que la position du piège est définie par l'orientation relative du courant I et du champ transverse homogène B_0. Ceci impose, pour garder à tout instant un potentiel piégéant localisé au même emplacement, de moduler I et B_0 à la même fréquence de modulation ω_{m} et en phase. Nous reviendrons sur cette contrainte expérimentale dans le paragraphe § 4.2.2.

Dans la suite, nous considérons une modulation sinusoïdale du courant et du champ B_0 à la fréquence $\omega_m/(2\pi)$. Nous supposerons que ω_m est suffisamment grande pour

que les atomes ne soient sensibles qu'au potentiel moyen. Pour des atomes dans l'état $|F=2, m_F=+2\rangle$, ce potentiel s'écrit :

$$\langle V(\mathbf{r},t)\rangle = \mu_B \left\langle \sqrt{(B_0^z + \delta B_z(z,t))^2 + ((\mathbf{B}_\perp^{\text{fil}}(\mathbf{r},t) - \mathbf{B}_0(t)) + \mathbf{B}_\perp)^2} \right\rangle \tag{4.7}$$

où $\mathbf{B}_\perp^{\text{fil}} - \mathbf{B}_0$ correspond au champ magnétique quadrupolaire transverse créé par la combinaison du courant I et du champ de biais $\mathbf{B}_0$. $\mathbf{B}_\perp$ représente quant à lui l'ensemble des champs constants temporellement, contenus dans le plan transverse Oxy. De plus, nous supposerons que les échelles de variations spatiales de $\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})$ sont grandes devant l'extension spatiale du nuage de sorte que $\mathbf{B}_\perp$ n'introduit pas de rugosité supplémentaire[2]. Expérimentalement, $\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})$ correspond à tous les champs homogènes mal compensés (pompe ionique, courant dans le dispenser, etc...).

Comme B_z^0 (1.8 G) est grand devant tous les autres champs magnétiques sur l'extension spatiale du nuage atomique, il est alors possible de se placer dans l'approximation harmonique et en développant la relation 4.7 au second ordre nous obtenons :

$$\langle V(\mathbf{r},t)\rangle = \mu_{\text{B}} \left\langle |B_{\text{z}}^0 + \delta B_{\text{z}}(\mathbf{r},t)| \right\rangle + \frac{\mu_{\text{B}}}{2B_{\text{z}}^0} \left\langle |(\mathbf{B}_\perp^{\text{fil}}(t) - \mathbf{B}_0(t)) + \mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})|^2 \right\rangle \tag{4.8}$$

Nous voyons immédiatement que comme $|B_{\text{z}}^0| > |\delta B_{\text{z}}(\mathbf{r})|$, $\langle |B_{\text{z}}^0 + \delta B_{\text{z}}(\mathbf{r},t)|\rangle = |B_{\text{z}}^0|$ ce qui a pour effet d'éliminer la rugosité à cet ordre du développement dans la direction longitudinale [3]. De plus, en développant le second terme de l'équation 4.8, le terme croisé $2\langle(\mathbf{B}_\perp^{\text{fil}}(t) - \mathbf{B}_0(t))\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})\rangle$ se moyenne à zéro pour produire une contribution nulle sur le potentiel moyen. Nous trouvons alors comme expression du potentiel moyen :

$$\langle V(\mathbf{r},t)\rangle = \mu_{\text{B}}|B_{\text{z}}^0| + \frac{\mu_{\text{B}}}{2|B_{\text{z}}^0|} \left\langle (\mathbf{B}_\perp^{\text{fil}}(t) - \mathbf{B}_0(t))^2 \right\rangle + \left\langle \mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})^2 \right\rangle \tag{4.9}$$

Les deux derniers termes présents dans l'expression 4.9 du potentiel moyen s'interprètent de la façon suivante :

1er terme $\langle(\boldsymbol{B}_\perp^{\text{fil}} - \boldsymbol{B}_0)^2\rangle$:

Ce terme correspond au confinement transverse du guide. Comme $\mathbf{B}_\perp^{\text{fil}} - \mathbf{B}_0$ produit un champ quadrupolaire, l'expression de la fréquence d'oscillation du guide dans l'approximation harmonique s'écrit :

$$\overline{\omega}_\perp = \omega_{\perp,\text{DC}} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} T & \text{: période de modulation des champs} \\ \omega_{\perp,\text{DC}} & \text{: fréquence transverse à courants maximum} \end{cases} \tag{4.10}$$

[2]Les déformations du courant dans le fil produisent également un champ magnétique transverse rugueux pour satisfaire les équations de Maxwell. Nous le négligerons pour la raison suivante. Les déplacements associés du quadrupole δx sont très faibles étant donné les forts gradients transverses utilisés b' : $\delta x = \delta B_\perp / b'$, avec $\delta B_\perp$ la composante de champ rugueux dans la direction transverse, ce qui correspond typiquement à des déplacements de l'ordre du nanomètre.

[3]Nous étudierons les effets d'ordres supérieurs au paragraphe §4.5.1.1.

où f est une fonction d'amplitude unité définie par $I(t) = I_0 f(t)$, avec $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = 0$. En l'absence de champ externe $\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})$, le potentiel de piégeage instantané s'écrit simplement pour la modulation de courant sinusoïdale considérée $\langle V(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{1}{2}m\omega_{\perp,\mathrm{DC}}^2\cos^2(\omega_\mathrm{m}t)$. La position transverse du guide est donc fixe et sa fréquence d'oscillation instantanée $\omega_\perp(t)$ évolue sinusoïdalement avec une période $\pi/(\omega_\mathrm{m})$ entre 0 et sa fréquence maximale $\omega_{\perp,DC}$. Cette modulation de courant va faire décroître la fréquence d'oscillation effective d'un facteur $\sqrt{2}$. A noter que les propriétés du potentiel moyen se trouvent alors avec les valeurs efficaces des courants. Il est possible d'accroître ces "courants effectifs" en jouant sur la forme de f notamment en augmentant l'aire de la courbe de f^2 en prenant garde, cependant, à que le spin de l'atome puisse suivre, de manière adiabatique, la direction du champ magnétique[4].

2ème terme $\langle(\boldsymbol{B}_\perp(\boldsymbol{r}))^2\rangle = \boldsymbol{B}_\perp^2(\boldsymbol{r})$:

Ce terme a pour effet d'introduire un décalage en énergie du fond du guide. Si les variations spatiales de $\mathbf{B}_\perp^2(\mathbf{r})$ sont lentes par rapport au second terme de l'équation 4.9, alors ce décalage en énergie n'introduit pas de réelle rugosité mais simplement une déformation du piège à grande échelle. Nous verrons qu'il est possible de jouer sur cet effet pour introduire un confinement longitudinal (§4.2.3). Par contre, il peut produire des effets beaucoup plus problématiques comme notamment une perte d'atomes (comme nous le verrons dans la partie 4.5.4.3) lorsque la fréquence de modulation n'est pas très grande devant la fréquence transverse du piège $\omega_{\perp,\mathrm{DC}}$. L'approche en terme de potentiel moyen n'est alors plus valide.

4.2.2 Champ homogène B_0 créé par la microstructure

Dans cette partie, nous présenterons l'implémentation expérimentale d'un guide magnétique modulé à l'aide de courants sinusoïdaux et notamment la réalisation d'un champ de biais modulé à des fréquences de plusieurs dizaines de kHz. Nous verrons également comment lui ajouter un confinement longitudinal pour obtenir un piège 3D, à l'aide de la structure en H.

Dans la plupart des expériences impliquant des puces à atomes [68, 74, 78, 79, 88–93], B_0 est créé à l'aide de bobines macroscopiques externes en configuration Helmholtz. Bien que l'homogénéité de ce champ soit très bonne sur les dimensions caractéristiques du piège, la forte inductance (typiquement de quelques centaines de μH) ainsi que les forts courants de Foucault résultants de sa modulation à haute fréquence, rendent très difficile son utilisation en mode alternatif. Si nous considérons uniquement l'effet de l'inductance des bobines, la modulation du courant de quelques ampères à une cinquantaine de kHz, produirait des pics de tension de l'ordre de la dizaine de Volt aux bornes des bobines. Ceci impose donc que l'alimentation stabilisée de courant soit capable de gérer cet excès de tension et donc de puissance. En réalité, l'effet est encore plus problématique à cause

[4] Ce qui rend difficile l'utilisation de fonction de type créneau dont le spectre en fréquence est très large.

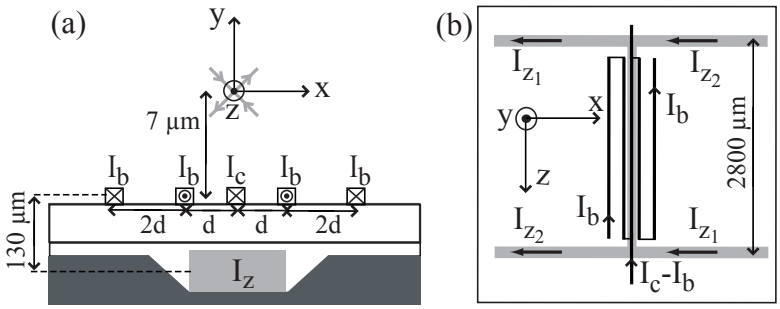

FIG. 4.7 – vue de profil et vue de dessus de la puce. Le substrat principal (gris foncé) contient le fil en U et le fil en H (largeur de 15 μm). Quant au second substrat (représenté en blanc sur la figure), il contient une structure à cinq fils permettant de créer un guide magnétique, sans la nécessité de champ externe, dans lequel nous avons mesuré sa rugosité.

des courants de Foucault puisqu'ils viennent s'opposer au champ modulé. Il faudrait ainsi augmenter le courant des bobines pour que le champ magnétique modulé perçu par les atomes soit identique au cas non modulé.

Afin de contourner ce problème, nous avons choisi de créer le champ de biais directement sur la puce atomique au moyen de cinq micro-fils d'or. Leur très faible inductance et capacitance, estimées à 10 pF et 1 nH permettent de pouvoir les moduler à de telles fréquences sans crainte. De plus, leur proximité à la zone de piégeage nous permet d'utiliser des courants relativement faibles de l'ordre de la dizaine de mA.

Outre l'intérêt mentionné précédemment, l'utilisation de la microstructure permet également de réduire considérablement les courants de Foucault. En effet, les champs magnétiques créés par cette nano-structure décroissent très rapidement avec la distance et les courants de Foucault dans le support de la puce et dans les parois de l'enceinte à vide sont alors négligeables. Seul le miroir d'or conducteur situé en surface de la puce pourrait poser problème. Néanmoins, à la fréquence de modulation que nous utilisons (30 kHz), l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega_m \sigma}} = 400$ μm (voir note[5]) est très grande devant l'épaisseur du miroir d'or (40 nm) et les courants de Foucault sont négligeables à l'intérieur du miroir d'or.

La figure 4.7 présente la configuration de fils utilisées. Le substrat du dessus, comporte cinq nano-fils d'or, de section carrée (700×700 nm^2) et les fils s'étendent dans la direction longitudinale sur 2 mm. Les distances relatives séparant deux fils consécutifs sont, en allant de la gauche vers la droite sur la figure 4.7(a) 2d, d, d, 2d avec $d = 2.5$ μm. Avec cette configuration, le sens du courant est alterné dans deux fils consécutifs[6]. L'intérêt de

[5]Où σ est la conductivité électrique de l'or et μ_0 la permittivité magnétique du vide.

[6]Cette structure, originellement conçue pour créer un double puits de potentiel au voisinage du point de coalescence obtenu dans la configuration (c) de la figure 4.8, ne sera utilisée dans ce manuscrit que

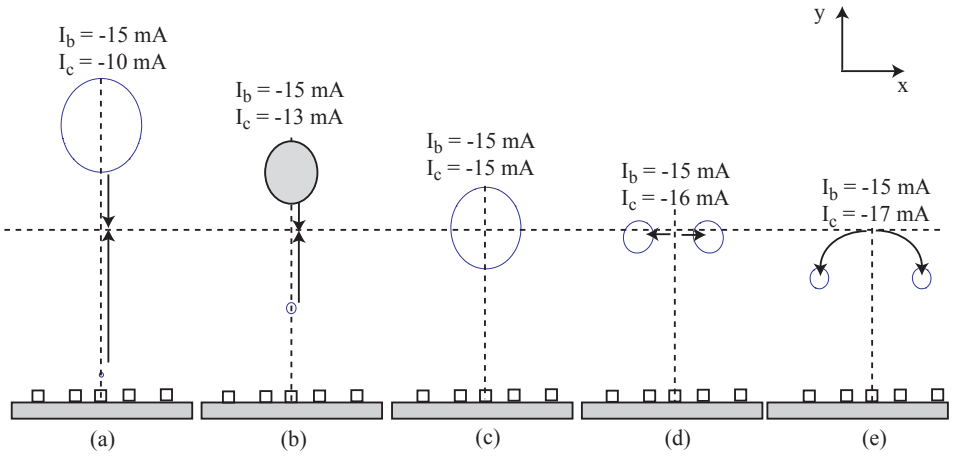

FIG. 4.8 – Positions transverses des deux guides magnétiques pour différents valeurs de courant I_c à I_b donné (15 mA). Pour $I_b > I_c$, les deux centres des quadrupoles sont situés sur l'axe Oy et se rapprochent lorsque nous augmentons le courant I_c vers la valeur de I_b. Ils fusionnent lorsque $I_b = I_c$ (point de coalescence où le champ magnétique est hexapolaire (voir [94, 95]) puis ensuite se séparent horizontalement pour former un double puits de potentiel. Pour $I_c > I_b$ les positions des deux puits sont situées sur le demi-cercle de rayon $\sqrt{3}d$. La configuration utilisée dans ce chapitre est celle du cas (b). Le guide que nous chargeons a été grisé.

cette configuration réside dans sa capacité à créer un potentiel magnétique piégeant sans la présence de champ externe. Nous contrôlons indépendamment le courant des deux fils de gauche, des deux fils de droite et du fil central. Pour les expériences que nous avons réalisées dans ce chapitre, nous utilisons le même courant ($I_b = -15$ mA) dans les deux paires de fils externes et un courant $I_c = -13$ mA dans le fil central (figure 4.8 (b)). Pour cette configuration symétrique de courants, la structure à cinq fils produit, en l'absence de champ externe, deux quadrupôles sur l'axe 0y, l'un situé à 3 μm au-dessus des fils très comprimé (fréquence d'oscillation de 5 kHz) et le second situé à 6.7 μm (fréquence d'oscillation de 2 kHz) pour un champ longitudinal $B_0^z = 2$ G. La position relative du centre de ces deux guides magnétiques est donnée par le rapport des courants I_b et I_c (voir figure 4.8). Pour $|I_b| > |I_c|$ les deux quadrupôles sont situés sur l'axe Oy et se rapprochent lorsque que nous augmentons le courant dans le fil central jusqu'à fusionner pour un courant $I_b = I_c$. En augmentant encore I_c par rapport à I_b, les deux quadrupôles se séparent à nouveau mais cette fois-ci dans l'autre direction (suivant $0x$).

Dans toute la suite, nous ne considérons que le piège le plus éloigné de la puce, qui est le plus facile à charger parce que son volume de capture est plus grand ($\omega_\perp = 2$ kHz à comparer à 5 kHz pour le second puits) et parce que sa distance à la surface de la puce

pour charger un seul des deux puits (le plus loin de la surface).

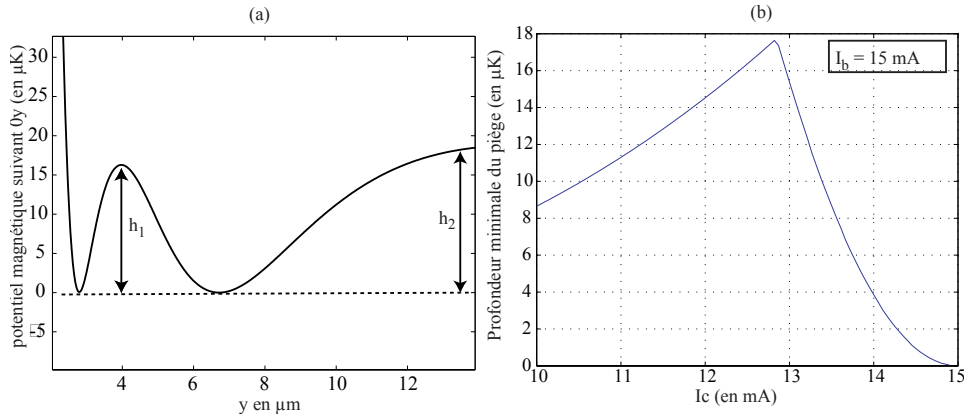

FIG. 4.9 – Figure (a) : coupe du potentiel magnétique (en μK) suivant la direction 0y pour la configuration de courant $I_c = 13$ mA et $I_b = 15$ mA . La hauteur de la barrière de potentiel est déterminée par le minimum entre les deux hauteurs h_1 et h_2. Figure (b) : évolution de la profondeur du potentiel dans le plan Oxy en fonction du courant I_c pour un courant I_b de 15 mA. Pour $I_c < 12.8$ mA, la profondeur minimale du piège est donnée par h_2 alors que pour $I_c > 12.8$ mA c'est h_1 qui limite cette profondeur.

est plus grande. Les valeurs de I_b et I_c sont choisies de sorte à maximiser la barrière de potentiel du piège. Cette barrière est donnée par le minimum entre les deux hauteurs de potentiel h_1 et h_2 (voir figure 4.9(a)).

Sur la figure 4.9, nous avons représenté la profondeur minimale du piège en fonction de I_c à I_b fixé (15 mA) en présence d'un champ homogène B_0^z de 1.8 G. Pour $I_c < 12.8$ mA la profondeur du guide est limitée par h_2 alors que pour $15 > I_c > 12.8$ mA celle-ci est limitée par la proximité du second guide (h_2) et celle-ci tend vers 0 lorsque les deux guides coalescent ($I_b = I_c$). Pour des questions d'efficacité de chargement nous avons choisi de prendre 13 mA pour I_c (avec $I_b = 15$ mA).

4.2.3 Ajout d'un confinement longitudinal (piège en H)

La quasi-invariance par translation de la géométrie des petits fils dans la direction longitudinale ne permet pas d'avoir de confinement magnétique dans cette direction. Seules les interconnections entre les cinq fils produisent à leurs très proches voisinages un champ magnétique longitudinal. Pour des courants constants $I_b = 15$ mA et $I_c = 13$ mA, le champ magnétique produit une barrière de potentiel d'une hauteur de 700 nK (pour un nuage situé dans un plan horizontal à 150 μm au-dessus des petits fils) (voir figure 4.10). Dans le cas modulé, l'effet de ce champ magnétique est beaucoup plus faible et l'effet de boite disparaît. Il en résulte la perte de la totalité du nuage atomique au bout de quelques dizaines de ms (temps donné aux atomes pour atteindre les bords de la

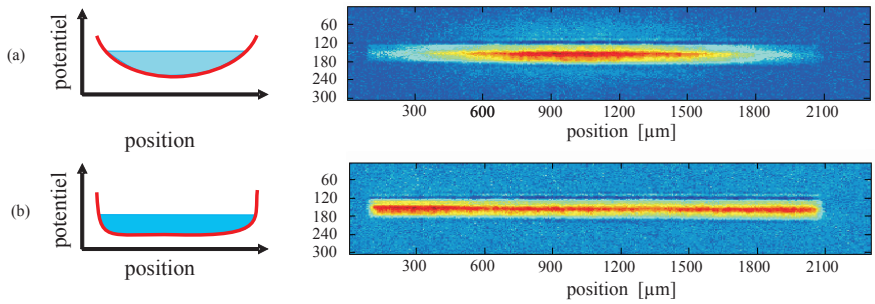

FIG. 4.10 – Images par absorption d'un nuage atomique ($T \simeq 1$ μK) dans le piège créé par les petits fils à courant continu en présence figure (a), ou en l'absence (figure (b)) de courant dans les bras du H. Figure (b) : sans confinement longitudinal, le nuage s'étend sur la totalité de la longueur des petits fils. Les interconnections entre les petits fils produisent un potentiel ayant la forme d'une boite.

nano-structure).

Pour contrer cet effet et permettre au nuage de se rethermaliser, nous ajoutons un confinement longitudinal variable au moyen de la structure en H avec les courants I_{Z1} et I_{Z2} (Cf. notations du chapitre 3). Dans cette situation, nous imposerons $I_{Z1} = -I_{Z2} = I_H$ pour ne pas avoir de courant dans le fil central de la structure en H. Cette situation est alors formellement équivalente au cas de deux barres parcourues par un courant identique I_H. La figure 4.11 illustre les champs magnétiques produits pour différentes positions longitudinales au-dessus de la puce par les deux barres du H. Dans le plan de symétrie de la structure en H (Oxy, z=0), seule la composante longitudinale du champ subsiste. En se déplaçant de part et d'autre de ce plan, elle croit quadratiquement avec la coordonnée z, suivant la loi $B_z = B_z^{(2)} z^2$ où

$$B_z^{(2)} = \frac{\mu_0 I_H}{2\pi}\Big(\frac{2\mathcal{L}^2 h}{(\frac{\mathcal{L}^2}{4}+h^2)^3} - \frac{2h}{(\frac{\mathcal{L}^2}{4}+h^2)^2}\Big) \tag{4.11}$$

avec $\mathcal{L}$ la distance séparant les deux barres du H et h la hauteur du centre du piège (voir figure 4.11)

La fréquence d'oscillation longitudinale ne s'écrit plus simplement comme $\sqrt{\frac{2\mu_B B_z^{(2)}}{m}}$,

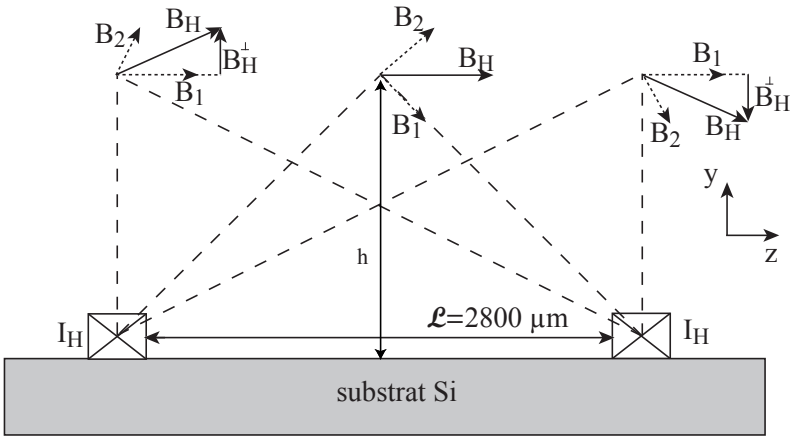

FIG. 4.11 – Configuration des champ magnétiques créés par les deux barres du H parcourues par un même courant I_H. Sur l'axe de symétrie (z=0), le champ magnétique est purement longitudinal.

contrairement aux cas à courants constants (I_b,I_c). En plus du confinement standard que les barres du H produisent, ces dernières produisent un champ magnétique transverse suivant l'axe Oy, qui dépend de la coordonnée z, via la loi $B_\perp(z) = B'_H z$. Ce champ va également accroître le confinement longitudinal par le terme $|B_\perp(z)|^2$ de l'équation 4.7 (voir note[7]). L'expression de la fréquence d'oscillation longitudinale $\omega_{\mathrm{z,AC}}$ devient alors lorsque I_b et I_c sont modulés :

$$\omega^2_{\mathrm{z,AC}} = \omega^2_{\mathrm{z,DC}} + \frac{\mu_{\mathrm{B}} B'_H}{m B_0^z} \qquad \text{avec} \qquad B'_Z = \frac{2\mu_0 I_H}{\pi \mathcal{L}^2}. \tag{4.12}$$

Pour une hauteur $h = 150$ μm au-dessus de la structure en H, et un courant $I_H = 0.4$, les fréquences d'oscillation théoriques sont respectivement dans le cas DC et AC, $\omega_{\mathrm{z,DC}}/(2\pi) = 7.2$ Hz et $\omega_{\mathrm{z,AC}}/(2\pi) = 10.8$ Hz. Ces deux valeurs sont à comparer aux valeurs expérimentales $\omega_{\mathrm{z,DC}}/(2\pi) = 9$ Hz et $\omega_{\mathrm{z,AC}}/(2\pi) = 10.6$ Hz (voir §4.2.4.2). Nous voyons effectivement un accroissement de la fréquence d'oscillation lorsque nous modulons les courants I_b et I_c. Nous expliquons la valeur élevée de la fréquence $\omega_{\mathrm{z,DC}}$ par l'effet de la rugosité qui produit localement un confinement plus important que les 7.2 Hz théoriques (puits de potentiel local).

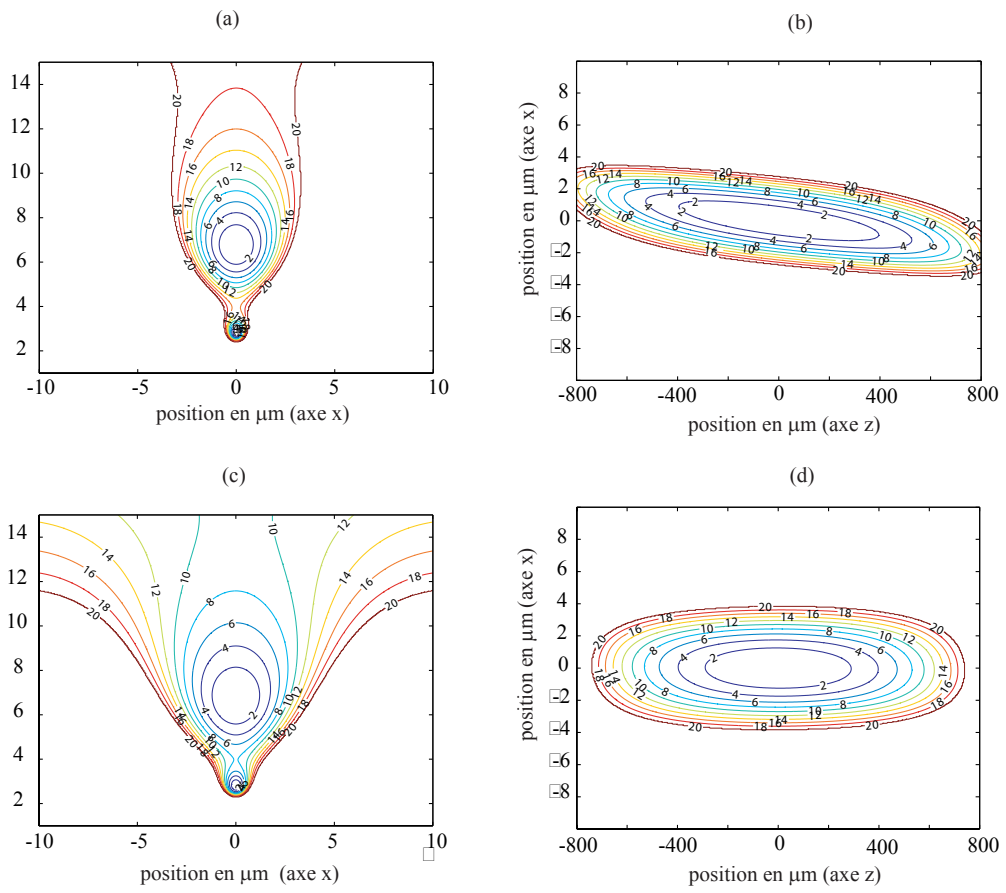

FIG. 4.12 – Les figures (a) et (b) représentent respectivement la coupe transverse (dans le plan Oyx) et la coupe longitudinale (dans le plan Oxz) du potentiel magnétique créé par la structure à cinq fils ($I_b = 15$ mA, $I_c = 13$ mA) et par les bras du H dans lesquels circulent un courant 0.4 A. Les figures (c) et (d) montrent ces mêmes coupes pour le potentiel moyen obtenu en modulant le courant dans les cinq fils avec la même amplitude que précédemment. Le courant dans les bras du H est quant à lui, non modulé.

4.2.4 Propriétés des pièges DC et AC

4.2.4.1 Propriétés théoriques

Sur la figure 4.12, nous avons représenté la coupe transverse (plan Oxy, z=0) et la coupe longitudinale (plan Oxz, y=6.7 μm) du potentiel créé par les 5 fils ($I_b = 15$ mA, $I_c = 13$ mA) et les barres du H ($I_H = 0.4$ A) pour le cas non modulé (DC) et pour le cas modulé (AC) et en l'absence d'autre champ magnétique homogène dans la direction transverse (0xy). La diminution du confinement transverse (par $\sqrt{2}$) et l'augmentation de la fréquence d'oscillation longitudinale sont visibles sur la figure. De plus, contrairement au cas DC où les axes propres font un angle de 0.2° avec la direction de la barre centrale du fil en H (voir [42]), les axes du piège modulé sont confondus avec les axes 0x et 0z.

Étudions l'effet de l'application d'un champ homogène $B_{\text{hom.}}$ dans le plan transverse sur le comportement transverse et longitudinal du piège. Rappelons pour mémoire la formule du potentiel dans les deux cas (DC et AC) qui permettra de mieux comprendre les différents effets observés :

$$\begin{cases} \text{pour les cas DC :} & V(\mathbf{r},t) = \mu_{\text{B}} B_{\text{z}}^0 + \frac{\mu_{\text{B}}}{2|B_{\text{z}}^0|}\left(\mathbf{B}_\perp^{\text{fil}}(t) - \mathbf{B}_0(t) + \mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})\right)^2 \\ \text{pour le cas AC :} & \langle V(\mathbf{r},t)\rangle = \mu_{\text{B}}|B_{\text{z}}^0| + \frac{\mu_{\text{B}}}{2|B_{\text{z}}^0|}\left\langle(\mathbf{B}_\perp^{\text{fil}}(t) - \mathbf{B}_0(t))^2\right\rangle + \left\langle\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})^2\right\rangle \end{cases} \tag{4.13}$$

$B_{\text{hom.}}$ **suivant la direction Ox : cas DC :** le champ homogène $B_{\text{hom.}}$ ne fait que déplacer le centre du quadrupôle transverse d'une quantité $B_{\text{hom.}}/b'$ et donc le centre du piège.

cas AC : $B_{\text{hom.}}$ produit, dans ce cas, simplement un décalage en l'énergie du fond du piège qui correspond au terme $\left\langle\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})^2\right\rangle$ de l'équation 4.13.

$B_{\text{hom.}}$ **suivant la direction 0y :** dans cette direction il faut veiller en outre à ne pas oublier la contribution $B_\perp^H = B'_H z u_y$ du champ magnétique créé par les barres du H.

cas DC : A partir de l'équation 4.13, nous voyons qu'il existe toujours une position transverse y_0 qui compense le champ $B_{\text{hom.}}$ déplaçant ainsi le piège dans le plan transverse suivant la direction $0y$. De plus l'équation 4.13 montre que $B_{\text{hom.}}$ ne produit pas de déplacement du centre du piège dans la direction longitudinale. Ceci se traduit, sur la figure 4.13 (a), par une tangente horizontale au voisinage de $B_{\text{hom.}}$. A plus grande valeur de $|B_{\text{hom}}|$, l'approximation harmonique n'est plus valable (il faudrait pousser le développement limité de $V(\mathbf{r},t)$ à l'ordre suivant).

cas AC : $\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})^2 = (B'_H z + B_{\text{hom.}})^2$ le déplacement du centre du piège s'écrit $B_{\text{hom.}}/B'_H$ et a une évolution linéaire en fonction de $B_{\text{hom.}}$ (figure 4.13 (b)).

[7]Remarque : il est amusant de noter qu'il est possible de réaliser un confinement longitudinal uniquement à l'aide d'un gradient magnétique suivant l'axe z.

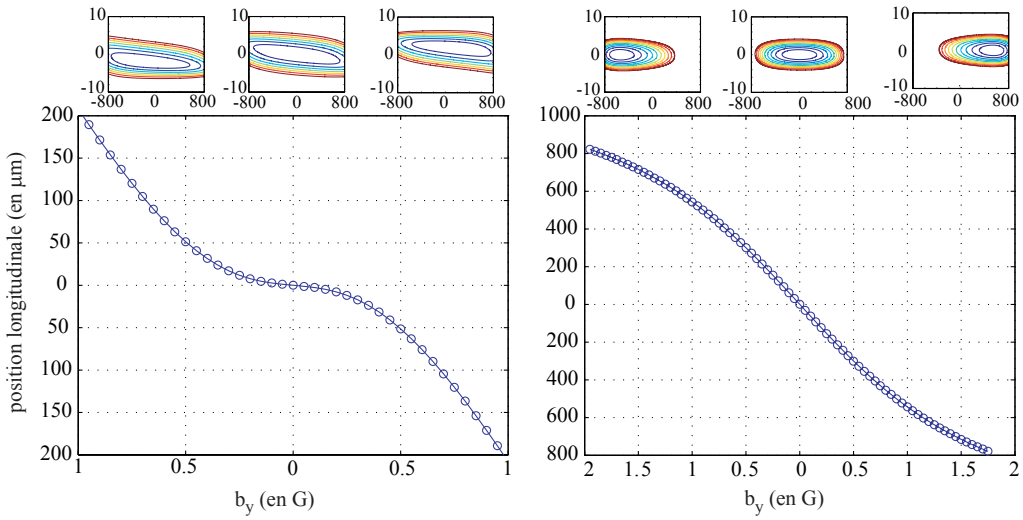

FIG. 4.13 – Effet d'un champ by sur la position longitudinale et déformation du piège associée dans les deux cas : courants DC (a), courants AC (b). A noter la différence d'échelle entre les cas AC et DC.

Sur la figure 4.13 nous avons représenté la position longitudinale du centre du piège en fonction d'un champ $\mathbf{B}_{\text{hom.}} = b_y \mathbf{u}_y$ pour les deux configuration de courants AC et DC. Nous voyons effectivement que la position longitudinale du centre du piège est beaucoup plus sensible dans la configuration AC ce qui peut causer des problèmes de chargement entre le piège en Z et le piège modulé (apparition d'oscillations dipolaires d'amplitude importante si le transfert n'est pas réalisé suffisamment lentement par rapport à la constante de temps dans la direction longitudinale).

4.2.4.2 Propriétés expérimentales

En excitant le mode dipolaire transverse, nous avons mesuré la fréquence d'oscillation transverse du piège créé par les petits fils dans les trois configurations de courants suivantes :

- courants continus et positifs : (15 mA, 13 mA, 15 mA),
- courants continus et négatifs : (−15 mA, −13 mA, −15 mA),
- courants alternatifs : (±15 mA, ±13 mA, ±15 mA).

Pendant 10 ms, nous déplaçons le centre du piège d'environ 400 nm en faisant une rampe sur le courant du fil central de 13 mA à 13.5 mA (les autres courants étant gardés constants pendant cette période). Puis durant les 50 μs suivante, nous ramenons brusquement la position du piège à sa position d'origine. Nous laissons ensuite évoluer le nuage dans le piège pendant un temps variable t_{attente}. Les oscillations dipolaires

transverses ainsi générées sont observées, après un temps de vol fixe, en mesurant la hauteur du nuage par rapport à la surface de la puce en fonction de t_{attente}. Le temps de vol est fixé à 5 ms pour pouvoir résoudre le déplacement du nuage au cours du temps (pour les cas DC) et 8 ms (pour le cas AC). Comme l'effet de l'excitation est plus faible dans le cas AC que dans le cas DC (confinement plus faible d'un facteur $\sqrt{2}$), nous avons augmenté le temps de vol à 8 ms pour la mesure des oscillations dipolaires dans le cas AC.

La hauteur du nuage par rapport à la surface de la puce, comme expliqué au chapitre 3, est trouvée en déterminant la position du centre du nuage ainsi que celle de sa réflexion dans le miroir d'or. Sur la figure 4.14, nous avons représenté les résultats obtenus pour les différentes configurations possibles.

La fréquence d'oscillation est trouvée par ajustement d'une sinusoïde exponentiellement amortie de la forme $f(t) = Ae^{-t^2/\tau^2}\cos(2\pi f_\perp t + \phi) + B$, où A,τ,$f_\perp$, ϕ et B sont les paramètres de l'ajustement par la méthode des moindres carrés[8]. Avec cette méthode nous mesurons la fréquence d'oscillation à 5% près. Nous constatons que les valeurs trouvées dans les deux cas DC coïncident. Comme attendu pour une modulation sinusoïdale, la fréquence d'oscillation transverse est diminuée par un facteur $\sqrt{2}$. Cependant, pour un champ longitudinal au fond du piège de 1.8 G nous observons une différence entre la fréquence théorique attendue de 3.4 kHz (pour le piège non modulé) et la fréquence mesurée. Nous attribuons cette différence à la température finie du nuage. Celui-ci explore, dans ce cas, une partie de la zone non harmonique du piège ayant pour conséquence de réduire la fréquence effective du piège. Cette hypothèse est confirmée d'une part par un amortissement important des oscillations dipolaires transverses observées sur la figure 4.14 et d'autre part par une simulation[9] des oscillations du centre de masse du nuage dans le potentiel réel pour la même température que celle mesurée expérimentalement (500 nK).

Les résultats des mesures sont présentés dans le tableau récapitulatif suivant :

configuration	courants négatifs	courants positifs	courants AC
fréquence transverse	(2.2 ± 0.1) kHz	(2.1 ± 0.1) kHz	(1.2 ± 0.2) kHz
fréquence longitudinale	(9.0 ± 0.1) Hz		(10.7 ± 0.1) Hz

4.3 Réalisation expérimentale

Dans cette partie, nous présenterons la réalisation expérimentale du piège modulé en commençant par détailler le dispositif d'alimentation des petits fils. Nous verrons ensuite comment nous avons chargé le piège final dans les trois configurations de courants possibles (courants positifs, courants négatifs et courants modulés).

[8] Voir §4.4.3 pour la justification de la forme de f et notamment la dépendance quadratique du terme situé dans l'exponentielle.

[9] Simulation de type Monte-Carlo.

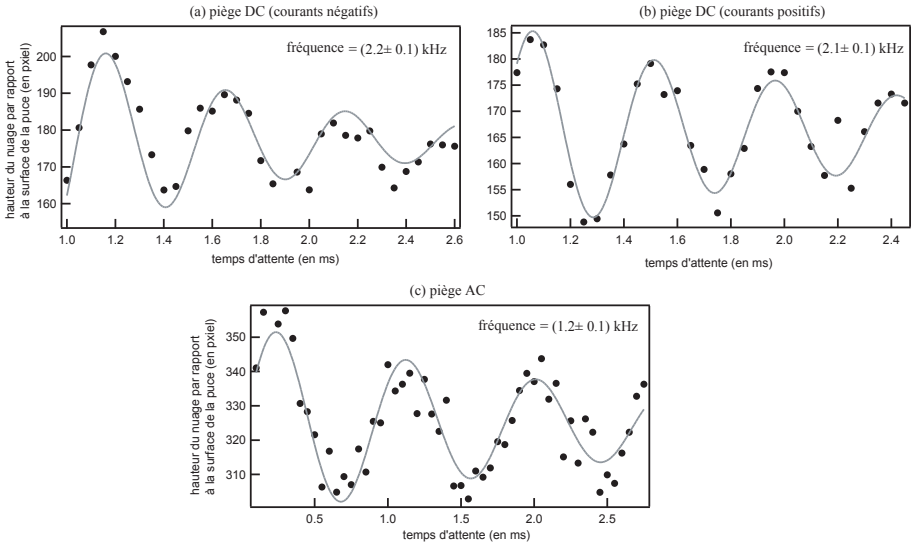

FIG. 4.14 – Mesure de la fréquence transverse du piège pour les trois configurations suivantes : courants négatifs (a), courants positifs (b) et courants alternatifs (c). Nous constatons que la fréquence transverse est bien réduite d'un facteur $\sqrt{2}$ dans le cas AC. Les oscillations dipolaires sont mesurées à partir des positions transverses des nuages après un temps de vol de 8 ms pour le cas AC et de 5 ms dans le cas DC. L'ajustement est réalisé avec une sinusoïde exponentiellement amortie (voir texte).

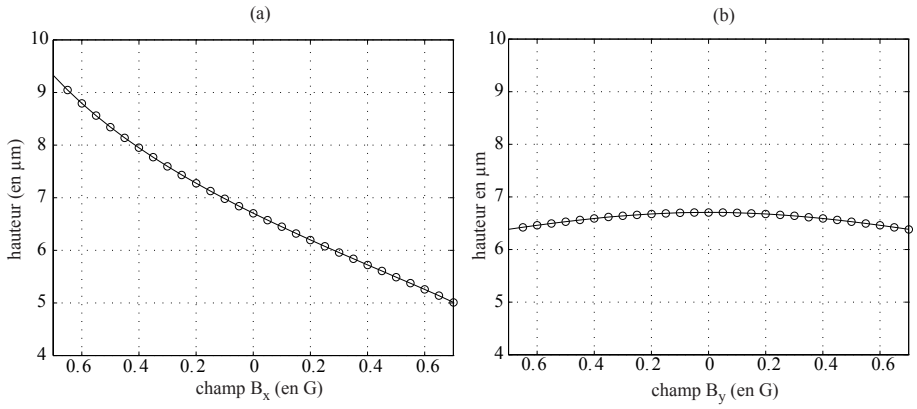

FIG. 4.15 – Evolution de la fréquence d'oscillation transverse en fonction du courant I_c. Elle devient nulle lorsque les deux puits coalescent ($I_b = I_c$, champ hexapolaire).

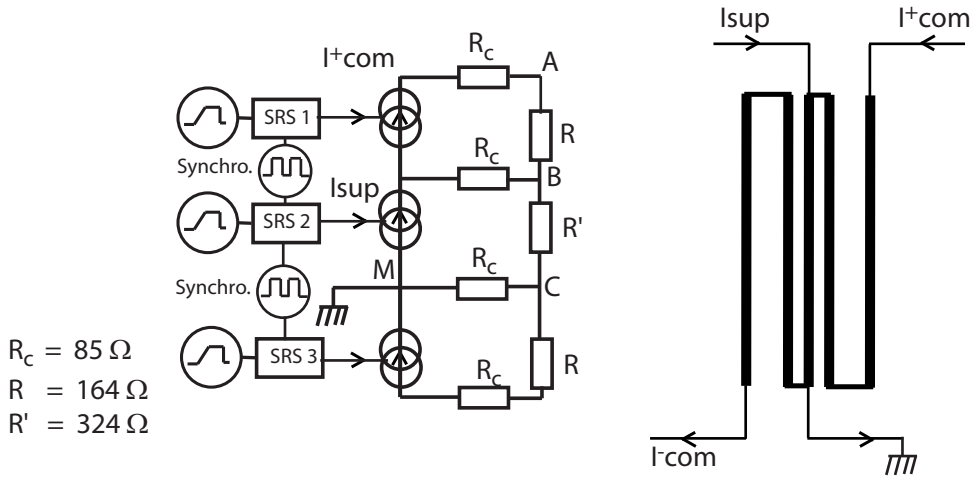

FIG. 4.16 – Chacune des alimentations de courant I^+_{com}, I_{sup}, I^-_{com} convertie la tension sinusoidale, issue du générateur de fonctions, en courant. L'enveloppe de cette sinusoïde peut également varier temporellement par l'application d'un signal analogique sur l'entrée modulation d'amplitude des SRS. Les courants I^+_{com}, I_{sup}, I^-_{com} sont synchronisées en phase à l'aide d'une horloge commune. Les micro-fils utilisés pour le piégeage sont modélisés par deux résistances R (pour les deux paires de fils extérieurs) et R' (pour le fil central). R_c désigne les résistances des fils de connection, identiques par construction pour tous les fils.

4.3.1 Synchronisation des courants

Les micro-fils d'or sont alimentés à l'aide d'alimentions fabriquées au laboratoire par André Villing et notées I^-_{com} , I_{sup} et I^+_{com} (voir figure 4.16). I^-_{com} contrôle le courant dans les deux fils de gauche, par le biais de I_{sup} nous contrôlons le courant I_c et pour finir I^+_{com} permet de modifier le courant dans la paire de fils de droite.

Pour modifier le moins possible les caractéristiques du piège instantané lors de la modulation, nous avons choisi de synchroniser en phase les trois courants I^+_{com} , I_{sup} et I^-_{com} car la position instantanée du piège dépend de la valeur relative de ces trois courants. Chacune des alimentations de courant I^+_{com} , I_{sup} et I^-_{com} est pilotée en amplitude au moyen de générateur de tension de marque Stanford Research System (SRS). Chaque SRS produit un signal sinusoïdal à la pulsation ω_{m} dont l'amplitude est elle-même contrôlée par le séquenceur via leur entrée de modulation d'amplitude. Les deux SRS pilotant les courants I_{sup} et I^-_{com} sont asservis en fréquence par la base de temps du SRS pilotant I^+_{com}(voir figure 4.16)[10].

[10]Notons de plus que pour éviter les boucles de masses, l'ensemble des sources de courants I^+_{com} , I_{sup} et I^-_{com} sont alimentées par des batteries chimiques (batteries de voiture). Les tensions de contrôle des différents SRS ont été également découplées de la masse à l'aide de transformateurs d'isolement.

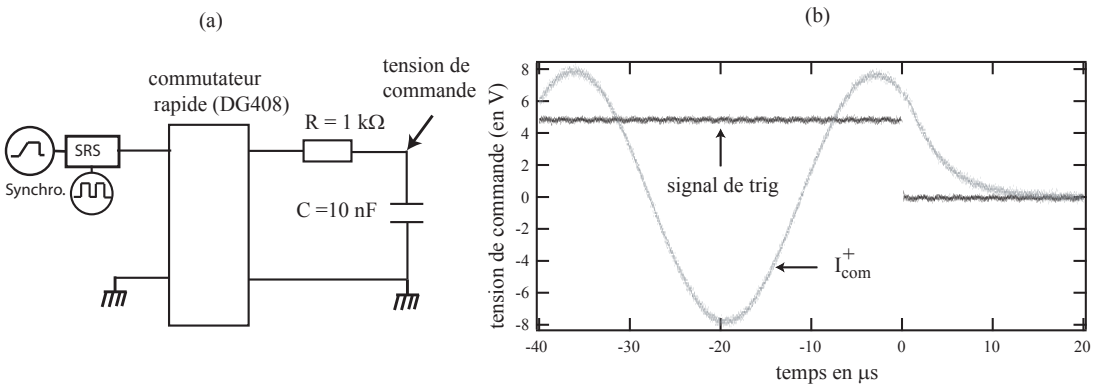

FIG. 4.17 – Figure (a) : schéma électrique pour la coupure rapide des tensions de contrôle issues des générateurs SRS. Un multiplexeur commute rapidement entre la sortie du SRS et la masse. Figure (b) : évolution temporelle de l'une de ces tensions. Le filtre RC qui permet d'ajuster le temps de coupure, à une constante de temps de 5 μs. Notons que la synchronisation de la séquence expérimentale sur la base de temps des SRS permet de reproduire à chaque cycle le même profil de coupure.

La synchronisation en phase des trois courants I^+_{com} , I_{sup} et I^-_{com} doit être faite directement sur les petits fils pour éviter tout déphasage additionnel lié à la bande passante finie des trois alimentations précédemment citées (de l'ordre de 100 kHz). Pour accéder facilement à l'ensemble des courants, nous avons utilisé une simulation des petits fils au moyen de résistances comme décrit sur la figure 4.16. L'utilisation de cette simulation est justifiée par le fait que les inductances et les capacitances des petits fils sont beaucoup trop faibles pour introduire des déphasages appréciables entre les différents courants.

Les phases relatives des courants I^+_{com} , I_{sup} et I^-_{com} sont alors ajustées de la façon suivante.

Mise en phase des courants I^+_{com} et I_{sup} : Pour ce faire, il suffit simplement de noter que la valeur rms de la tension U_{BC} aux bornes de la résistance R' est proportionnelle à la valeur rms de $(I^+_{\text{com}} + I_{\text{sup}})^2$. La différence de phase $\Delta\phi$ entre les courants I^+_{com} et I_{sup} intervient alors dans le terme croisé égal à $2I^+_{\text{com}}I_{\text{sup}}\cos(\Delta\phi)$. Pour obtenir une différence de phase $\Delta\phi$ nulle il suffit de minimiser ou maximiser la valeur rms de la tension U_{BC} suivant si I_{sup} est positif ou négatif ($I_{\text{sup}}I^+_{\text{com}} > 0$ ou $I_{\text{sup}}I^+_{\text{com}} < 0$).

Mise en phase des courants I^-_{com} et I_{sup} : Nous procédons de même pour la mise en phase des courants I_{sup} et I^-_{com} en sondant la tension U_{CM}.

Cette méthode permet un ajustement des différentes phases relatives à mieux que le

degré près et suffisant pour avoir un temps de vie de l'ordre de la dizaine de seconde dans le piège modulé.

Pour ne pas être limité par la faible bande passante de l'entrée modulation des SRS (20 kHz), lors de la coupure du piège, nous avons ajouté un système de commutation rapide en sortie de chacun des SRS. Ce système se compose d'un multiplexeur analogique qui commute l'entrée des alimentations de courant I^{+}_{com} , I_{sup} et I^{-}_{com} entre la sortie du SRS et la masse. Cependant la coupure du champ magnétique ne doit pas être trop brutale pour que la condition du suivi adiabatique du spin soit respectée (projection du spin des atomes dans tous les niveaux hyperfins). Nous avons donc rajouté un filtre passe-bas de constante de coupure de l'ordre de 5 μs (voir figure 4.17).

4.3.2 Chargement des pièges DC et AC

Dans cette section nous allons détailler la séquence expérimentale de chargement du piège dans les différents cas suivant : pour des courants non modulés (mode DC) en faisant la distinction entre le cas à courants négatifs ($(I_b, I_c) < 0$), le cas à courants positifs ($(I_b, I_c) > 0$) et pour le cas AC. Nous commencerons par expliquer le chargement à courants négatifs. Il s'agit de la configuration la plus favorable puisque l'orientation du quadrupôle transverse produite par la barre centrale du H est identique à celle produite par les petits fils. Il est ainsi possible de réaliser un transfert adiabatique entre les deux pièges si le temps de rampe est suffisamment long.

Chargement à courants négatifs :

Partons du piège magnétique réalisé par le fil Z_1, décrit au chapitre 3, ayant les paramètres suivants : $I_Z = 3$ A, $B_{\text{biais}} = 34$ G, $\theta = 14°$. Ce piège contient un nuage de quelques 10^5 atomes à une température de l'ordre de 1 μK. La première phase consiste à superposer, dans le plan transverse, le quadrupôle produit par le fil en Z avec celui créé par les cinq petits fils. Ce positionnement est réalisé en faisant varier linéairement pendant 50 ms le champ transverse B_0 (norme et angle) vers sa valeur finale de $B_0 = 40$ G, $\theta = 15°$. Ces deux valeurs finales sont optimisées *a posteriori* en maximisant le nombre d'atomes transférés dans le piège. Sur la figure 4.20(a) nous avons représenté cette efficacité de transfert en fonction de la norme de B_0 à angle fixé figure 4.20(b) ainsi qu'en fonction de l'angle à norme fixée. La plage d'accord est typiquement de l'ordre de quelques G et de quelques degrés, ce qui n'est pas critique pour le transfert. En effet, il est très facile de montrer que la somme de deux quadrupôles (voir figure 4.18) dont les axes propres ont les mêmes directions et orientations reste encore un quadrupôle dont le gradient quadrupolaire est la somme des deux gradients quadrupolaires. Le centre du quadrupôle résultant est situé au barycentre des deux quadrupôles pondérés respectivement par leur valeur de gradient quadrupolaire. Ainsi lors du transfert à courant négatif, le nuage passe progressivement d'un quadrupôle à l'autre sans jamais voir d'annulation

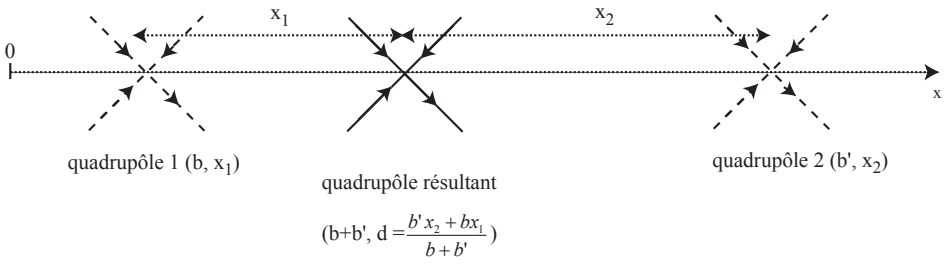

FIG. 4.18 – La somme de deux quadrupôles reste un quadrupôle avec les propriétés suivantes : son centre est situé au barycentre des deux quadrupôles 1 et 2 avec comme gradient quadrupolaire $b + b'$.

de champ[11].

Nous attendons ensuite un temps $T_{\text{attente}} = 250$ ms en présence d'un couteau radiofréquence pour atteindre l'équilibre thermodynamique (voir figure 4.19 pour l'allure du chronogramme de chargement).

Chargement à courants positifs :

Le chargement à courants positifs est réalisé de manière différente parce que l'orientation du quadrupôle transverse des petits fils est inversé. A un instant donné durant la rampe de courant, le quadrupôle des petits fils va exactement compenser le quadrupôle du piège en Z annulant ainsi le confinement transverse perçu par les atomes. Pour limiter au maximum cet effet, nous avons choisi de charger initialement le piège des petits fils à courants négatifs puis d'inverser les courants I_b et I_c au moyen d'une rampe de durée brève (50 μs)[12]. Si les champs externes sont parfaitement compensés[13], la position

[11]Expérimentalement, le raisonnement est légèrement faussé par le fait que les deux quadrupôles sont légèrement tournés l'un par rapport à l'autre à cause du décentrement de la puce secondaire ($\simeq 50\mu$m). Cependant la somme de deux quadrupôles reste un quadrupôle même si les axes des deux quadrupôles sont légèrement tournés l'un par rapport à l'autre.

[12]Une autre méthode aurait consisté à charger directement le piège des petits fils à partir du piège en Z. Cependant, comme nous l'avions mentionné précédemment, les deux quadrupôles, même localisés au même emplacement n'ont pas exactement les mêmes axes propres (tourné l'un par rapport à l'autre d'un petit angle). La rotation des axes propres du quadrupôle risque de produire un chauffage supplémentaire. Nous avons préféré choisir de charger d'abord le piège à courant négatif et d'inverser ensuite le sens du quadrupôle. Dans ce cas, les axes propres des deux quadrupôles sont confondus par construction.

[13]NB : nous utiliserons cette méthode pour compenser les champs magnétiques en maximisant le nombre d'atomes après la rampe de courant.

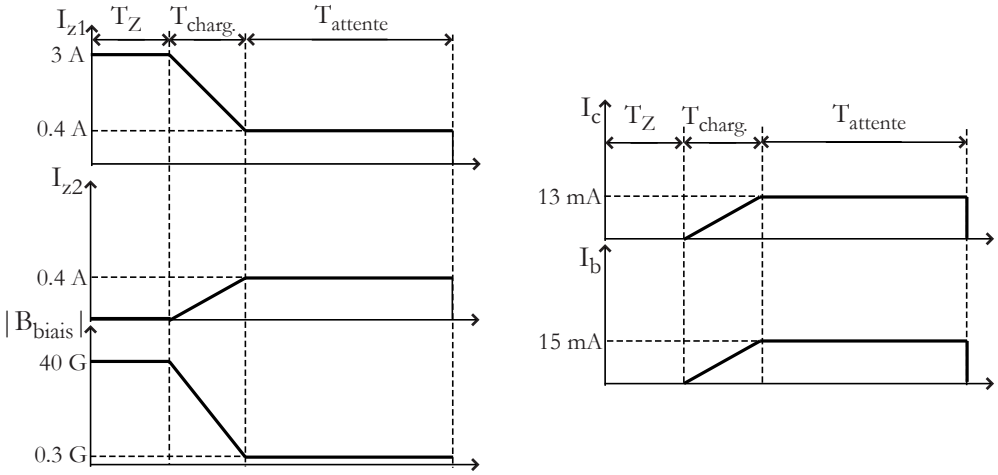

FIG. 4.19 – Chronogramme de chargement pour le piège à courants négatifs et à courants modulés. Pour les courants I_b et I_c seule l'enveloppe est représentée sur le schéma ($T_{\text{charg}} = 50$ ms, $T_{\text{attente}} = 50$ ms).

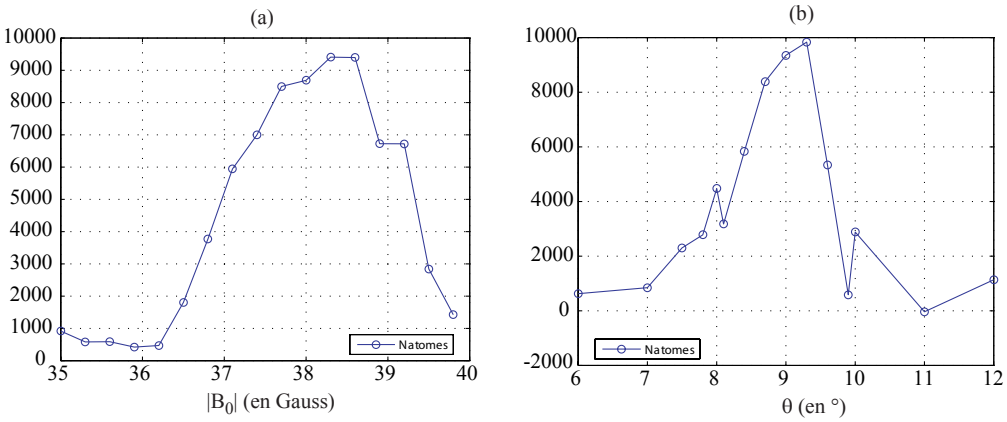

FIG. 4.20 – Figure(a) : nombre d'atomes chargés dans le piégé créé par les petits fils (courants DC négatif) en fonction du champ de la norme du champ transverse B_0 (figure (a)) et de l'angle θ appliqué (figure (b)).

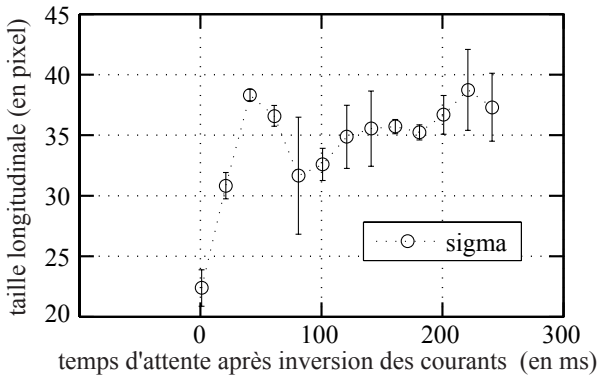

FIG. 4.21 – Evolution de la taille rms dans la direction longitudinale du nuage après inversion des courants (−15 mA, −13 mA, −15 mA)→(15 mA, 13 mA, 15 mA) pour une durée de rampe de 50 μs. Lors de ce processus, la température du nuage augmente d'un facteur 3.

du piège est identique et nous devons conserver la majeure partie des atomes sans trop chauffer le nuage. En pratique nous conservons effectivement plus de 90% des atomes, mais la température est accrue d'un facteur 3 (voir figure 4.21). Cette augmentation de température n'est pas réellement problème, puisque nous pouvons *a posteriori* refroidir le nuage par refroidissement évaporatif.

Chargement à courants alternatifs :

Dans le cas AC le transfert entre le piège en Z et le piège AC est un peu plus délicat. Une mauvaise compensation des champs magnétiques transverses se traduit par l'apparition d'un gradient longitudinal très important dans le piège modulé (cf §4.2.4.1) et induit des oscillations dipolaires de fortes amplitudes. Il convient dans un premier temps de minimiser ces oscillations par ajustement des champs magnétiques externes. En jouant sur les compensations de champs magnétiques nous arrivons à des oscillations dipolaires d'amplitude résiduelle de l'ordre de la largeur rms du nuage ($\sigma_z = 20$ μm). Si ce n'est pas suffisant, il faut attendre que le nuage se rethermalise dans le piège modulé et appliquer un couteau radio-fréquence pour retrouver un condensat au repos.

4.3.2.1 Compensation des champs magnétiques résiduels

Pour que la position transverse du piège entre les deux configurations de courants DC soit identique, il faut parfaitement compenser les champ magnétiques résiduels. Pour ce faire, nous inversons le courant dans les cinq petits fils pendant un temps de rampe

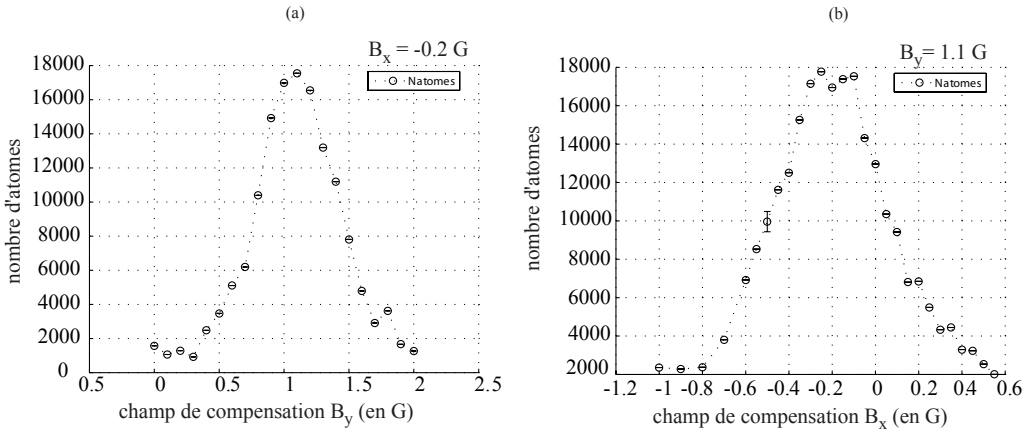

FIG. 4.22 – Nombre d'atomes restant piégés lorsque le sens des courants est inversé pendant la séquence (temps de rampe de 1.5 ms) en fonction du champ de compensation que nous appliquons suivant la direction x (figure (a)) et suivant la direction y (figure(b)).

$T_{\text{rampe}} = 1.5\ ms$: les courants évoluant ainsi de (-15 mA,-13 mA,-15 mA)→(15 mA,13 mA,15 mA), I_H étant gardé constant. Durant ces rampes de courant, la position transverse du piège est fortement déplacée lorsque les champs magnétiques résiduels sont mal compensés. Il suffit donc de regarder le nombre d'atomes restant après les rampes de courant pour déterminer les valeurs de champs magnétiques transverses nulles. Une mauvaise compensation des champs se traduit par une perte important du nombre d'atomes. En procédant de manière itérative (B_x constant et en faisant varier B_x et réciproquement), il est possible de compenser les champs avec une précision de l'ordre de 100 mG. Sur la figure 4.22, nous avons représenté le nombre d'atomes restant en fonction des champs de compensation B_x et B_y appliqués[14]. Ces valeurs de compensations sont gardées constantes pour la mesure des potentiels rugueux dans les trois configurations.

Comme nous avons vu au paragraphe §4.2.4.1, la position longitudinale dépend fortement de la valeur du champ de compensation dans la direction 0y. Le centrage des pièges pour les trois configurations (voir figure 4.23) est un bon indicateur du fait que les champs externes indésirables sont correctement compensés.

[14]Notons qu'il est possible d'affiner cette courbe en augmentant la durée des rampes de courants.

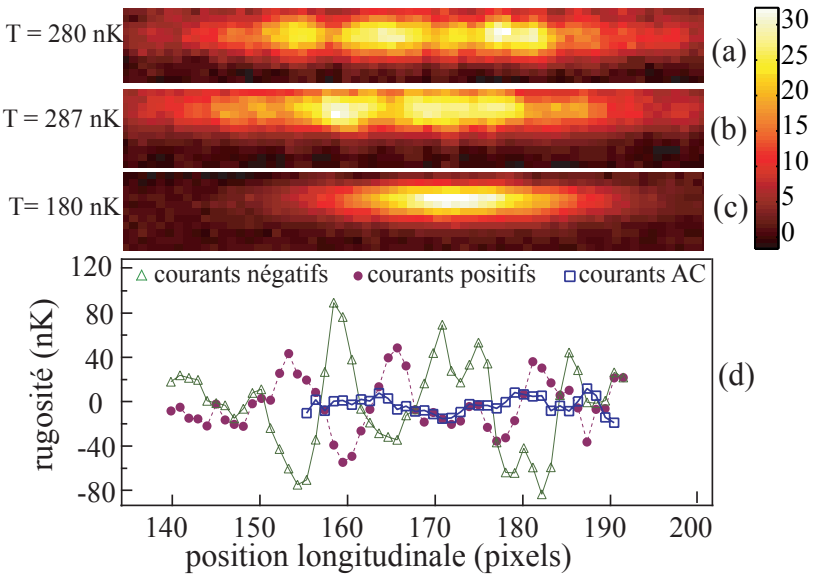

FIG. 4.23 – Images par absorption d'un nuage thermique pour les trois configurations suivantes : (a) courants négatifs, (b) courants positifs, (c) courants alternatifs. Sur la figure (d), le potentiel rugueux est extrait de la densité longitudinale à partir de la loi de Maxwell-Boltzmann (taille du pixel : 6 μm).

4.4 Mesure du potentiel rugueux

4.4.1 Via la distribution de Maxwell-Boltzmann

Dans cette partie, nous présenterons les résultats des mesures du potentiel rugueux obtenus dans les différentes configurations possibles de courant (DC et AC).

A l'équilibre thermodynamique, le profil de densité d'un gaz idéal non dégénéré nous renseigne, via la distribution de Maxwell-Boltzmann, sur le potentiel perçu par les atomes. En effet dans ce cas, la densité atomique s'écrit :

$$n(z) = n(0)e^{-V(x,y,z)/k_BT} \tag{4.14}$$

Pour remonter à l'expression du potentiel longitudinal, nous supposerons que le potentiel est harmonique dans la direction transverse et que la fréquence transverse du piège $\omega_\perp$ dépend pas de la coordonnée z. Dans ce cas, l'expression précédente se réécrire sous la forme :

$$n(z) = n'(0)e^{-V(z)/k_BT} \qquad \text{avec } n'(0) = \iint n(0)e^{-V_\perp(x,y)}\, dxdy \tag{4.15}$$

Pour nos paramètres expérimentaux, nous avons vérifié que la fréquence d'oscillation transverse ne varie de pas de plus de 10% sur l'extension longitudinale du nuage. Nous

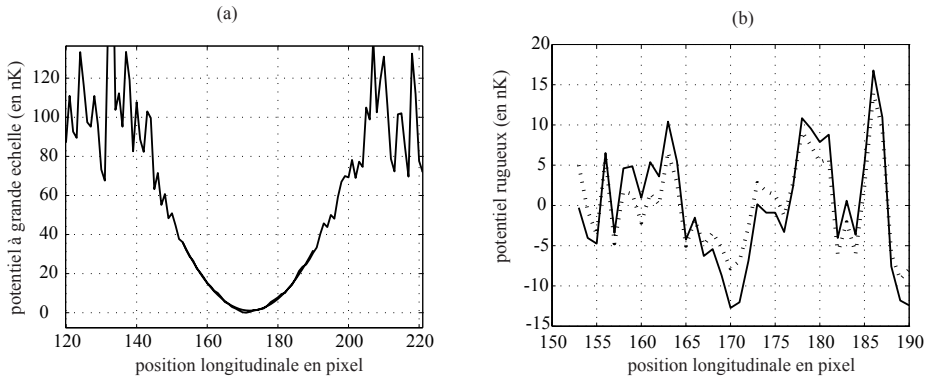

FIG. 4.24 – Figure (a) : potentiel magnétique obtenu à partir de la formule de Bose pour un nuage piégé dans le piège AC. L'ajustement par un polynôme d'ordre 2 permet d'obtenir la fréquence d'oscillation longitudinale $\omega_z = 10.8$ Hz (à comparer au 10.6 Hz obtenu à partir de la mesure des oscillations dipolaires) ainsi que d'extraire le potentiel rugueux. Figure (b) : comparaison des rugosités obtenues pour une analyse utilisant la formule de Maxwell-Boltzmann (courbe tiretée) ou avec la formule de Bose (courbe en trait plein). L'erreur commise est typiquement de 20%.

utiliserons donc la formule précédente pour extraire la rugosité du potentiel à partir des profils de densité trouvés.

En inversant simplement la formule 4.15, le potentiel de piégeage s'exprime à une constante près par :

$$V(z) = k_B T \ln(n(z)) \tag{4.16}$$

Pour obtenir le potentiel rugueux $\delta V(z)$ à partir de la formule précédente, il convient de retirer au potentiel de piégeage, la composante à grande échelle du potentiel. Celle-ci est créée par les barres du H et bien approximée sur l'extension du nuage par un potentiel harmonique (erreur de 6% sur 2 fois la largeur rms du nuage atomique). Ce potentiel harmonique est trouvé par ajustement du potentiel de piégeage par un polynôme d'ordre deux (voir figure 4.24). En retranchant la contribution de ce potentiel harmonique à $V(z)$, nous obtenons les potentiels rugueux pour les trois cas différents (courants constants : négatifs et positifs, ainsi que pour les courants modulés). Les amplitudes rms du potentiel rugueux sont respectivement 39 nK, 22 nK et 5 nK. L'asymétrie résiduelle observée sur les courbes (a) et (b) de la figure 4.23 peut être partiellement due au champ résiduel transverse qui modifie la position relative des deux pièges.

Pour quantifier cet effet nous avons calculé la variation de hauteur du piège par rapport au fil central en fonction de deux champs b_x et b_y homogènes appliqués respectivement suivant les directions Ox et Oy. Le résultat de ce calcul est présenté sur la

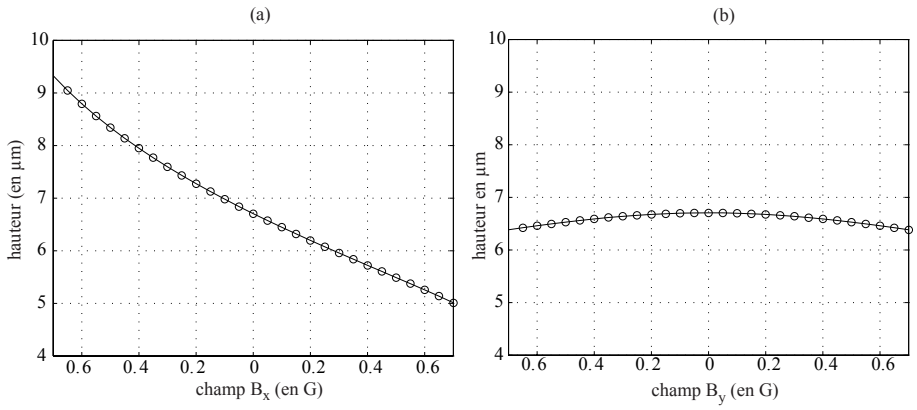

FIG. 4.25 – Evolution de la hauteur du piège au-dessus des petits fils en fonction d'un champ externe homogène appliqué soit dans la direction 0x (figure (a)) soit dans la direction 0y (figure (b)). Le piège magnétique est réalisé avec les courants $I_b = 15$ mA et $I_c = 13$ mA.

figure 4.25. Nous constatons d'une part que la variation de hauteur est nettement plus importante pour le champ b_y que pour le champ b_x. D'autre part, nous voyons qu'une erreur de 100 mG sur la compensation du champ transverse produit un déplacement de $\Delta h = 500$ nm entre les deux configurations de courant positifs et négatifs. Pour cette valeur de Δh, l'amplitude de la rugosité varie entre les deux configurations de près de 20% ce qui permet d'expliquer en partie les différences observées entre les deux configurations.

Etant donné la faible valeur de température de nos nuages, nous avons décidé de comparer la formule de Maxwell-Boltzmann avec la formule de Bose pour un gaz idéal pour quantifier l'erreur que nous faisons sur la détermination du potentiel. Dans une approche de type densité locale (Cf. chapitre 6), le profil de densité longitudinal (intégré dans les deux directions transverses) s'écrit :

$$n(z) = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{dB}}} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{e^{(\mu - V(z))/k_B T}}{\sqrt{\alpha}} \frac{e^{-mk_B T z^2/(2\alpha\hbar^2)}}{(1 - e^{-\alpha\hbar\omega_\perp/k_B T})^2} \tag{4.17}$$

où $\lambda_{\mathrm{dB}} = \sqrt{\hbar^2/mk_B T}$ est la longueur d'onde de De Broglie. Sur la figure 4.24, nous avons tracé la rugosité de potentiel obtenue respectivement avec la formule de Maxwell-Boltzmann (points) et celle obtenue dans le cas de la distribution de Bose pour le cas d'un nuage confiné dans le piège AC. Bien que le nombre d'atomes soit à peu près comparable au cas DC, le plus fort confinement longitudinal et la température plus basse rapprochent significativement le potentiel chimique de l'énergie du niveau fondamental rendant le nuage ainsi plus dégénéré que ceux obtenu dans le cas DC. Ceci se traduit sur la figure 4.24 par une surestimation de la rugosité de près de 20% dans le cas de l'analyse Maxwell-Boltzmann. Cependant, de manière à être consistant lors de la

comparaison des données entre le cas AC et le cas DC nous avons choisi d'analyser tous nos profils de densité en utilisant la distribution de Maxwell-Boltzmann et ceci pour les raisons suivantes :

- la détermination du potentiel dans le cas d'une analyse suivant Maxwell-Boltzmann ne fait pas intervenir la fréquence d'oscillation transverse ni le nombre d'atomes contrairement à une analyse avec la distribution de Bose.
- de plus, nous avons vu §4.2.4.2 que le confinement transverse n'est pas complètement harmonique sur les dimensions transverses du nuage rendant encore plus difficile l'analyse des données.

Nous aurions pu également réduire le nombre d'atomes dans le cas modulé, pour s'éloigner du régime de dégénérescence quantique. Cependant dans ce cas, c'est le rapport signal à bruit des images qui limite notre mesure de rugosité.

4.4.1.1 Effet du temps de vol sur la distribution de densité

D'un point de vue expérimental, nous avons choisi de mesurer la distribution de densité après un court temps de vol ($t_{\text{tof}} = 1.5$ ms), ceci pour éloigner le nuage atomique du proche voisinage des petits fils d'or. En effet, la réflexion du faisceau d'imagerie sur la surface du miroir de la puce au voisinage de ces derniers produit une figure de diffraction et introduit des erreurs systématiques sur le profil de densité[15]. Pour déplacer significativement le nuage de cette région, nous avons donné, lors de la coupure du piège, une brève impulsion transverse[16] au centre de masse et ainsi nous avons limité ces effets systématiques liés à l'imagerie. Néanmoins certains de ces effets sont encore présents (voir figure 4.23). Il n'est malheureusement pas possible d'augmenter beaucoup plus le temps de vol puisque l'expansion balistique des particules va brouiller les structures présentes sur le profil de densité longitudinal (déjà relativement importante). De plus l'impulsion en vitesse ne doit pas être trop important pour ne pas déformer le nuage, c'est-à-dire déplacer les particules sur plus d'un pixel lors de la prise d'image.

Nous avons estimé l'erreur que nous commettons sur l'amplitude de la rugosité lors de la mesure du profil de densité après temps de vol. La dispersion en vitesse des différentes particules a pour effet, lors de l'expansion ballistique de brouiller les structures présentes sur le profil de densité longitudinal. Nous avons modélisé simplement cet effet de la manière suivante : considérons un gaz thermique idéal unidimensionnel à une température T dont la densité atomique, avant expansion, est modulée sinusoïdalement suivant la forme $n(z, t = 0) = n_0 \sin(2\pi z/\lambda)$. Après un temps de vol t_{tof}, l'expression de la densité devient :

[15] La surface du miroir au niveau des petits fils n'est absolument pas plane puisqu'elle épouse la forme des petits fils. L'écart de planéité est typiquement de λ.

[16] En faisant varier le temps de coupure du courant I_c par rapport au courant I_b.

$$n(z,t_{\rm tof}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2(t_{\rm tof})}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-z')^2}{2\delta(t_{\rm tof})^2}}\sin(\frac{2\pi z'}{\lambda})dz' \quad (4.18)$$

$$= e^{2\pi^2\frac{\delta(t_{\rm tof})^2}{\lambda^2}}\sin(\frac{2\pi z'}{\lambda}) \quad (4.19)$$

où $\delta(t) = \sqrt{k_{\rm B}T/M}t_{\rm tof}$ est la distance quadratique moyenne parcourue un atome pendant $t_{\rm tof}$.

De la même manière, nous devons prendre en compte la résolution optique finie de notre système d'imagerie. Nous approximerons sa réponse impulsionnelle par une gaussienne de largeur rms $\delta_{\rm res} = 8$ μm. Cette valeur correspond au plus petit objet que nous pouvons imager[17]. De plus, nous verrons au chapitre sur les fluctuations de densité que nous retrouvons cette valeur à partir de la mesure du bruit de grenaille atomique.

L'amplitude mesurée des modulations de la densité atomique est donc réduite d'un facteur $e^{2\pi^2\frac{\delta(t)^2_{\rm tof}+\delta(t)^2_{\rm res}}{\lambda^2}}$. D'après cette expression, nous voyons que la perte de contraste dépend de la longueur d'onde spatiale λ. Il faudrait donc pour obtenir la valeur absolue de la rugosité déconvoluer le signal mesuré par cette fonction de réponse. Cependant, la forte chute de contraste à faible λ rend difficile toute correction de ce problème puisque l'application d'une telle déconvolution n'aurait pour rôle que d'amplifier le bruit de mesure présent sur nos images en absorption et d'ajouter des erreurs supplémentaires sur la détermination de la rugosité. Nous avons donc choisi de ne pas corriger cet effet, bien qu'important (40%) pour un temps de vol de 1.5 ms, et une résolution optique de 8 μm rms.

Cependant, le facteur de réduction du contraste est quasiment identique dans le cas AC et les deux cas DC[18]. Il suffit simplement, de comparer les amplitudes relatives des différentes rugosités sans tenir des comptes de leurs valeurs absolues. Nous obtenons alors un facteur de réduction de (5.5 ± 1.5) entre la rugosité mesurée dans le piège modulé et la rugosité moyenne obtenue dans les pièges DC.

Pour accroître notre sensibilité de mesure, il aurait été souhaitable de nous placer dans le régime de (quasi)-condensat où le potentiel chimique est $\mu = g_{\rm 3D}n$ ($g_{\rm 3D}$ est la constante de couplage définie dans le premier chapitre) et donne de meilleurs résultats quant à la détermination de la rugosité. Cependant le faible nombre d'atomes condensés dont nous disposons et la grande longueur de corrélation du potentiel rugueux (60 μm), ne nous permet pas de peupler plusieurs puits de potentiel différents et l'extraction du potentiel rugueux devient impossible. Nous avons choisi de sonder le potentiel rugueux à partir d'une autre méthode qui sera expliquée dans le paragraphe suivant.

[17] Réalisé avec un condensat très peu dense (une centaine d'atomes).

[18] L'écart en température entre les cas AC et DC modifie légèrement la fonction de réponse du système. Cet effet ne faisant qu'augmenter la valeur relative de la rugosité dans le cas AC, nous le négligerons.

4.4.2 Via la mesure de décroissance des oscillations dipolaires

Dans cette section, nous allons exploiter une des propriétés remarquables du potentiel harmonique pour estimer la rugosité résiduelle présente dans le piège modulé. Rappelons que dans le cas d'un potentiel harmonique 3D et isotrope ou anisotrope, les oscillations du centre de masse (ou oscillations dipolaires) d'un nuage thermique ne sont pas amorties et ceci même en présence de collisions [96]. La dynamique des particules en présence d'un potentiel rugueux est tout autre. La période des oscillations n'est alors plus, comme dans le cas du potentiel harmonique, indépendante de l'amplitude des oscillations de chacune des particules.

Commençons par estimer le taux de collisions à deux corps au centre du nuage donné par :

$$\tau = n_0 \sigma \overline{v} \tag{4.20}$$

où n_0 est la densité atomique au centre du nuage, $\overline{v} = \sqrt{\frac{8k_{\mathrm{B}}T}{\pi m}}$ est la vitesse moyenne relative entre deux particules et σ est la section efficace de collision. Pour les très faibles températures considérées, seules les collisions en onde s sont accessibles et la section efficace s'écrit dans ce cas $\sigma = 8\pi a^2$.

Pour nos paramètres expérimentaux ($T = 500\ nK$, $N = 5\ 10^3$), la formule précédente donne un taux de collision à deux corps de l'ordre de 10 s^{-1}. Cette valeur est typiquement du même ordre de grandeur que le taux d'amortissement des oscillations dipolaires pour les courbes présentées sur la figure 4.26. Il n'est donc pas vraiment légitime de négliger les collisions. Cependant, si le potentiel moyen avait présenté une rugosité résiduelle du même ordre de grandeur que celle observée dans le cas DC, le taux d'amortissement que nous aurions dû mesurer dans ce cas aurait dû être le même qu'en absence de modulation. Nous pensons donc que les conclusions de cette partie ne sont pas modifiées par la présence de collisions.

D'un point de vue expérimental, nous déclenchons les oscillations dipolaires longitudinales en déplaçant rapidement la position du centre du piège. Pendant la durée du chargement du piège des petits fils à partir du piège en Z, nous appliquons progressivement un gradient longitudinal afin de déplacer longitudinalement le centre du piège par rapport à sa position finale (de mesure). Ce gradient (typiquement de 0.2 G.cm^{-1}) est ensuite rapidement éteint[19] (en 1 ms) pour générer les oscillations dipolaires longitudinalement. La température avant le déclenchement des oscillations est de 500 nK avec un nombre typique de particule de 10^4. Nous éteignons également le couteau radio-fréquence pour ne pas perturber la mesure. La position longitudinale du centre de masse est obtenue à partir d'un ajustement gaussien de la densité atomique *in-situ*. Étant donné que $k_{\mathrm{B}}T$ est grand devant la valeur rms de la rugosité $\langle u_{\mathrm{rms}} \rangle$, les modulations de densité associées à la rugosité ne perturbent pas la détermination du centre du nuage. Sur la figure 4.26, nous avons reporté le résultat de ces oscillations dans le cas du piège non

[19] Déplaçant ainsi le centre du piège par près de 30 μm.

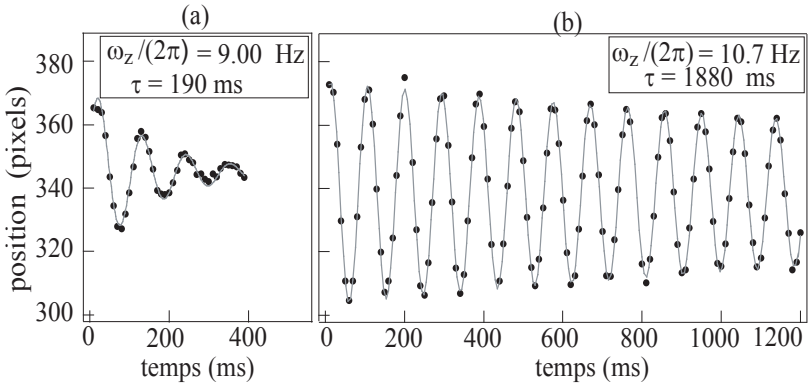

FIG. 4.26 – Evolution des oscillations dipolaires dans le cas du potentiel DC à courants négatifs (a) et dans le cas du potentiel AC (b). Les points noirs sont les données expérimentales et les lignes pleines correspondent à un ajustement avec la fonction 4.21. L'augmentation importante du temps de décroissance dans le cas AC montre la forte réduction du potentiel rugueux. Taille du pixel (6 μm).

modulé (à courants négatifs) et dans le cas du piège modulé. Pour pouvoir comparer, les deux mesures du taux d'amortissement, nous avons réglé l'amplitude du déplacement du piège initial pour avoir la même amplitude sur les oscillations dipolaires. Nous voyons clairement un effet drastique de la rugosité sur le temps de décroissance des oscillations dipolaires qui est réduit pratiquement d'un facteur 10.

Nous avons ajusté ces points expérimentaux à partir de la formule suivante :

$$Z(t) = Z_0 + Z_1 e^{-t^2/\tau^2} \cos(\omega t + \phi) \tag{4.21}$$

où Z_0 est la position du centre du piège final, Z_1 est l'amplitude des oscillations, τ le temps d'amortissement, ω la pulsation des oscillations et ϕ un terme de phase. L'ensemble de ces cinq paramètres est utilisé pour ajuster la courbe théorique aux points expérimentaux.

Contrairement à un effet des collisions, où l'on attend une décroissance exponentielle des oscillations dipolaires, nous avons choisi de modéliser la fonction de décroissance des oscillations dipolaires par une gaussienne. En effet, il ne s'agit pas ici ni d'un processus de dissipation d'énergie ni d'une redistribution d'énergie suivant un autre axe du piège mais simplement d'un déphasage entre les trajectoires des différentes particules qui brouillent les oscillations du centre de masse. A temps courts, nous attendons donc une décroissance quadratique du contraste des oscillations, comme dans le cas d'un interféromètre optique (type trous de Young ou interféromètre Michelson éclairé en lumière blanche où, au voisinage de la frange centrale, le contraste des franges décroît quadratiquement).

Dans le cas du piège AC, il subsiste un faible taux amortissement des oscillations di-

polaires ($\tau = 4\ s$). Cette décroissance peut être, d'une part, due à une rugosité résiduelle présente dans le potentiel moyen (mauvaise inversion de courants, effet d'interaction avec le rubidium absorbé sur la surface de la puce [97]) ainsi qu'à une imparfaite anharmonicité du piège.

Avant de pouvoir simuler le taux d'amortissement attendu, nous avons besoin de connaître les paramètres réels du piège (position par rapport aux barres du H, hauteur au-dessus de la puce). Pour les extraire, nous avons ajusté le potentiel longitudinal trouvé à partir de la densité atomique avec le potentiel théorique obtenu à partir de deux fils séparés d'une distance L. Celui-ci s'écrit en négligeant les effets de taille finie :

$$V_{\text{long}} = \mu_B(B_0^z + B_z^{(2)} z^2 + B_z^{(4)} z^4 + \mathcal{O}(z^5)) \tag{4.22}$$

Rappelons pour mémoire les expressions $B_z^{(2)}$ et de $B_z^{(4)}$ obtenues au chapitre précédent :

$$B_z^{(2)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\Big(\frac{2\mathcal{L}^2 h}{(\frac{\mathcal{L}^2}{4} + h^2)^3} - \frac{2h}{(\frac{\mathcal{L}^2}{4} + h^2)^2}\Big) \tag{4.23}$$

et

$$B_z^{(4)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\Big(\frac{2\mathcal{L}^4 h}{(\frac{\mathcal{L}^2}{4} + h^2)^5} - \frac{6\mathcal{L}^2 h}{(\frac{\mathcal{L}^2}{4} + h^2)^4} + \frac{2h}{(\frac{\mathcal{L}^2}{4} + h^2)^3}\Big) \tag{4.24}$$

De plus pour ajuster ce potentiel à nos données expérimentales, nous avons ajouté un gradient longitudinal $B_z^{(1)} z$ pour déplacer le centre du piège. Nous trouvons alors une hauteur au-dessus de la puce de 130 μm et un gradient de 1.5 G.cm^{-1}.

Pour ces paramètres d'ajustement, nous avons simulé le taux de décroissance des oscillations dipolaires. Pour ce faire, nous tirons au hasard suivant la loi de Maxwell-Boltzmann la position et la vitesse d'un millier de particules et nous regardons l'amortissement du centre de masse (ajouté sur la figure 4.26). Cette courbe reproduit relativement bien les données expérimentales (pas de paramètre ajustable) bien que l'amortissement théorique soit légèrement plus grand que les données expérimentales. Nous attribuons cette légère déviation a une mauvaise détermination du terme quartique (ordre 4) qui à lui seul permet d'expliquer l'amortissement dans le cas AC.

4.4.3 Modélisation du temps d'amortissement en fonction de l'amplitude de la rugosité

Nous nous proposons dans cette section de relier le temps d'amortissement des oscillations dipolaires à l'amplitude rms du potentiel rugueux. Nous supposerons que le spectre de rugosité est connu (densité de bruit obtenue à partir de l'equation 4.4 pour une hauteur h du nuage au dessus des cinq fils). Seule la valeur rms de la rugosité sera considérée comme un paramètre ajustable.

L'évolution de la position du centre de masse du nuage est obtenue, en intégrant l'évolution de chacune des particules contenues dans le piège à partir de l'intégrale sui-

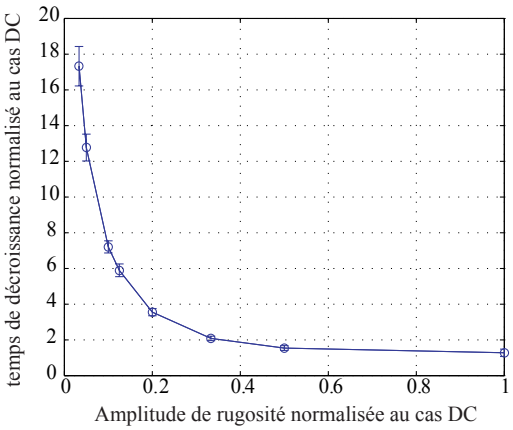

FIG. 4.27 – Evolution du temps de décroissance τ des oscillations dipolaires en fonction de l'amplitude de la rugosité. Chacune des deux coordonnées est normalisée par rapport au résultat donné pour une amplitude rms de 80 nK (valeur de rugosité trouvée dans le cas à courant négatif).

vante :

$$C(t) = z_0 + \delta_z \int_0^\infty \frac{1}{k_B T} e^{-\frac{E}{k_B T}} \cos(\omega(E)t) dE \tag{4.25}$$

où z_0 est la position du centre du piège, δ_z est le déplacement initial du centre de masse du nuage et $\omega(E)$ la dépendance en énergie de la fréquence d'oscillation du piège.

Cependant pour intégrer l'expression précédente, nous devons connaître l'expression $\omega(E)$. En supposant que sur la gamme d'énergie $k_B T$, la fréquence d'oscillation $\omega(E)$ puisse se développer au premier ordre sous la forme $\omega(E) = \omega_0 + \alpha E$ (avec $\alpha \ll \omega_0/E$, nous obtenons en négligeant les termes du second ordre :

$$C(t) = z_0 + \delta_z \int_0^\infty \frac{1}{k_B T} e^{-\frac{E}{k_B T}} \cos((\omega_0 + \alpha E)t) dE \tag{4.26}$$

$$C(t) = z_0 + \delta_z \frac{\cos(\omega_0 t) - k_B T \alpha t \sin(\omega_0 t)}{1 + \alpha^2 k_B^2 T^2 t^2} \qquad \text{avec} \qquad k_B T \alpha t \ll 1 \tag{4.27}$$

Nous retrouvons bien à temps courts la décroissance quadratique de l'enveloppe de la fonction $C(t)$ prédit à la section §4.4.2. Pour connaître la valeur de α au voisinage de la fréquence d'oscillation ω_0 pour une amplitude et une densité spectrale de rugosité données, il suffit par exemple de determiner numériquement la période d'oscillations de billes dans le potentiel rugueux unidimensionnel superposé au confinement harmonique, pour différentes énergies mécaniques se répartissant autour de E_0 (énergie associée à la fréquence d'oscillation ω_0).

Dans notre cas, nous avons choisi de simuler directement la trajectoire d'un millier de particules et de déterminer l'évolution du centre de masse pour en déduire, par ajustement par la fonction $f(t) = Ae^{\frac{-t^2}{\tau^2}} \cos(\omega_0 t + \phi)$, le taux de décroissance pour différentes amplitudes de rugosité. Sur la figure 4.27, nous avons représenté, le taux d'amortissement des oscillations dipolaires pour des températures et des amplitudes d'oscillation similaires aux données expérimentales. Les barres d'erreurs (valeurs rms) sont calculées à partir de la dispersion des temps de décroissance obtenus pour différentes réalisations statistiques de potentiels rugueux. Pour expliquer un accroissement de τ d'un facteur 10 la valeur rms du potentiel rugueux doit être réduite d'un facteur 14 ± 1. Cependant, ce modèle ne prend pas en compte les collisions entre atomes (notamment à cause d'un temps de calcul trop important) bien qu'elles interviennent sur des constantes de temps du même ordre de grandeur que l'amortissement des oscillations dipolaires. Néanmoins comme le taux de collision sont pratiquement identiques ($\tau_{\mathrm{DC}} \simeq \tau_{\mathrm{AC}} \simeq 10\ \mathrm{s}^{-1}$) dans les deux configurations nous pensons que le résultat précédent reste pertinent.

4.5 Limitations fondamentales de la méthode

4.5.1 Imperfections du potentiel moyen

4.5.1.1 Rugosité effective résiduelle

Intéressons-nous à la dynamique du mouvement longitudinal. Comme précédemment, nous découplerons la dynamique du mouvement transverse de celle du mouvement longitudinal. De plus, pour simplifier l'analyse et avoir des résultats analytiques, nous négligerons les collisions entre particules et nous supposerons un gaz parfait.

Dans une approche de type séculaire, nous décrirons la position longitudinale $\mathbf{z}(t)$ de l'atome sous la forme $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}^{(0)}(t) + \mathbf{z}^{(1)}(t)$ où $\mathbf{z}^{(0)}(t)$ correspond à un mouvement lent de grande amplitude (à la fréquence du piège ω_{z}) et d'un micro-mouvement dû à la rugosité, de faible amplitude $\mathbf{z}^{(1)}(t)$ (évoluant à la fréquence de modulation ω_m).

L'équation du mouvement, projetée suivant la direction longitudinale, s'écrit :

$$m\frac{\partial^2 \mathbf{z}}{\partial t^2} = m\omega_z z - \frac{\partial u(z)}{\partial z} cos(\omega_{\mathrm{m}} t) \tag{4.28}$$

où $u(z)$ est l'amplitude du potentiel rugueux.

Comme $\mathbf{z}^{(0)}$ est solution de l'équation sans potentiel rugueux et que $\mathbf{z}^{(0)} \ll \mathbf{z}^{(1)}$, $\mathbf{z}^{(1)}$ prend la forme suivante :

$$\mathbf{z}^{(1)}(t) = \frac{\partial u(z)}{m\partial z} cos(\omega_{\mathrm{m}} t). \tag{4.29}$$

L'énergie cinétique associée à ce micro-movement, prise au mouvement longitudinal, produit une rugosité effective [96], qui moyennée sur une période oscillation $2\pi/\omega_{\mathrm{m}}$, a pour expression :

$$V_{\text{eff}} = \frac{(\partial u(z)/\partial z)^2}{4m\omega_{\text{m}}^2}. \tag{4.30}$$

Pour un fil dont les déformations de ces bords sont bien décrites par une densité spectrale de bruit constantes (bruit blanc), l'équation 4.30 s'intègre sous la forme suivante ne faisant intervenir que l'amplitude rms de rugosité résiduelle :

$$V_{\text{eff}} = 1.1\frac{\langle u_{DC,\text{eff}}^2\rangle}{m\omega^2 d^2} \tag{4.31}$$

où $\langle u_{DC,\text{eff}}^2\rangle$ correspond à la variance du potentiel rugueux que l'on aurait si les courants n'étaient pas modulés.

Ordre de grandeur :

Pour une amplitude de rugosité de 100 nK, à une fréquence de modulation de 30 kHz, $V_{\text{eff}} = 10^{-3}$ nK. A une telle fréquence de modulation, les atomes perçoivent parfaitement le potentiel moyen. Nous pourrions penser qu'il serait possible de baisser notoirement la fréquence de modulation tout en gardant une rugosité effective faible. Nous verrons en fait que nous sommes limités par la condition sur la stabilité du mouvement transverse.

4.5.1.2 Champ transverse rugueux

Pour satisfaire les équations de Maxwell, le champ magnétique créé par les micro-fils doit posséder en plus de sa composante rugueuse longitudinale δB_z, une composante rugueuse transverse $\delta B_\perp$. Celle-ci a pour effet de déplacer transversalement le centre du quadrupôle et ainsi créer des méandres longitudinaux du piège. Cet effet n'est pas éliminé par la modulation puisque $\delta B_\perp$ est modulé en phase avec les autres champs modulés. Comme le gradient quadrupolaire est très important, ce déplacement n'excède pas quelques nanomètres, il est ainsi complètement négligeable devant les tailles typiques du mode fondamental de l'oscillateur harmonique. Nous le négligerons dans la suite du manuscrit.

4.5.1.3 Termes non harmoniques

Pour l'instant l'ensemble des études que nous avons menées sur le potentiel moyen se sont limitées à un développement de $\langle V(\mathbf{r},t)\rangle$ à l'ordre 2. Dans ce cas, nous avons vu que le potentiel est harmonique dans les directions transverse et longitudinale et exempt de rugosité. Nous nous proposons dans cette sous-section de développer $\langle V(\mathbf{r},t)\rangle = \langle \mu_{\text{B}}|B|\rangle$ à l'ordre 3 pour déterminer la contribution non moyennée du champ magnétique longitudinal rugueux δB_z. Nous en profiterons également pour voir les corrections que ce développement apporte sur les termes du troisième ordre.

Nous écrirons le potentiel moyen sous la forme générale :

$$\langle V(\mathbf{r},t)\rangle = \mu_B\langle\sqrt{(B_0^z + B_H^z + \delta B_z(z,t))^2 + ((\mathbf{B}_\perp^{\text{fil}}(\mathbf{r},t) - \mathbf{B}_0(t)) + \mathbf{B}_\perp)^2}\rangle \tag{4.32}$$

Après avoir moyenné sur une période d'oscillation, nous obtenons :

$$\langle V(\mathbf{r},t)\rangle = \mu_{\mathrm{B}} B_0^z \left(1 + \frac{B_H^z}{B_0^z}\left(1 - \frac{\mathbf{B}_\perp^2}{2(B_0^z)^2}\right) + \frac{\mathbf{B}_\perp^2}{2(B_0^z)^2} + \frac{(\mathbf{B}_\perp^{\mathrm{fil}})^2}{4(B_0^z)^2}\left(1 - \frac{B_H^z}{B_0^z}\right) + \frac{\mathbf{B}_\perp \mathbf{B}_\perp^{\mathrm{fil}} \delta B_z}{2(B_0^z)^3}\right) \tag{4.33}$$

Donnons la signification physique de chacun de ces termes :

$\mu_{\mathrm{B}} B_0^z$ **:** ce premier terme correspond simplement à un décalage global de l'énergie du fond du piège et n'a pas de réelle signification physique.

$\mu_{\mathrm{B}} B_H^z \left(1 - \frac{\mathbf{B}_\perp^2}{2(B_0^z)^2}\right)$ **:** Le terme $\mu_{\mathrm{B}} B_H^z$ correspond au confinement harmonique longitudinal classique. Celui-ci est, cependant, modifié à l'ordre 3 par un terme supplémentaire $\mu_{\mathrm{B}} B_H^z \frac{B_H^z \mathbf{B}_\perp^2}{2(B_0^z)^3}$.

$\mu_{\mathrm{B}} B_0^z \frac{\mathbf{B}_\perp^2}{2(B_0^z)^2}$ **:** ce troisième terme produit un décalage en énergie du fond du piège qui dépend de la position longitudinale par le terme $\mathbf{B}_\perp^2$. Si $\mathbf{B}_\perp^2$ n'est produit que par les barres du H, nous retrouvons alors que la fréquence d'oscillation dans le cas AC est augmentée par rapport au cas DC (voir l'équation 4.12).

$\left(\frac{\mathbf{B}_\perp^{\mathrm{fil}}}{2B_0^z}\right)^2 (1 - \frac{B_H^z}{B_0^z})$ **:** avec ce quatrième terme nous reobtenons l'expression du confinement transverse $\left(\frac{\mathbf{B}_\perp^{\mathrm{fil}}}{2B_0^z}\right)^2$. Il est corrigé à l'ordre 3 par le terme $-\left(\frac{\mathbf{B}_\perp^{\mathrm{fil}}}{2B_0^z}\right)^2 \frac{\mathcal{B}_H^z}{B_0^z}$. Comme ce dernier décroit avec la coordonnée z, les équipotentielles du piège ont une forme qui ressemble à un "noeud papillon".

$\mu_{\mathrm{B}} B_0^z \frac{\mathbf{B}_\perp \mathbf{B}_\perp^{\mathrm{fil}} \delta B_z}{2(B_0^z)^3}$: ce dernier terme correspond à la contribution non moyennée du champ magnétique rugueux. Ce terme introduit à la fois :

- une dépendance longitudinale de la position transverse du centre du piège dont l'écart $\delta \mathbf{r}_0$ par rapport à sa position idéale est donné par :

$$\delta r_0 = \frac{\mathbf{B}_\perp \delta B_z}{b' B_0} \tag{4.34}$$

- et une rugosité résiduelle :

$$\delta V = \frac{\mu_B \mathbf{B}_\perp^2 \delta B z^2}{4 B_0^3} \tag{4.35}$$

- ainsi qu'une modification locale de la fréquence d'oscillation transverse :

$$\omega_{\perp,AC}^{(3)} = \left(1 - \frac{B_H^z}{B_0^{(z)3}}\right) \omega_{\perp,AC}^{(2)} \tag{4.36}$$

où $\omega_{\perp,AC}^{(2)}$ est la fréquence d'oscillation du potentiel développée à l'ordre 2.

Application numérique : Donnons les valeurs de ces trois dernières quantités pour les paramètres suivants $B_0 = 1$ G, $B_\perp = 50$ mG et $\delta Bz = 1$ mG : $\delta \mathbf{r}_0 = 2$ nm, $(\omega_{\perp,AC}^2 - \omega_{\perp,AC}^2)/\omega_{\perp,AC}^2 = 2.5\%$ et $\delta V = 4\ 10^{-5}$ nK.

– Tout comme dans le paragraphe §4.5.1.2, $\delta\mathbf{r}_0$ est totalement négligeable devant la taille typique du mode fondamental de l'oscillateur harmonique.
– La valeur δV est plus faible que V_{eff} (trouvée au paragraphe §4.5.1.1). En pratique, la rugosité résiduelle du piège sera donc donnée par V_{eff} (*i.e.* par la valeur de la fréquence de modulation).

4.5.2 Effet de la modulation sur le mouvement longitudinal : taux de chauffage

Dans cette sous-section, nous allons étudier l'effet de la modulation du potentiel rugueux à la fréquence ω_m sur un nuage atomique confiné dans un guide magnétique rugueux. Les atomes étant soumis à un hamiltonien dépendant du temps, ils vont pouvoir échanger de l'énergie avec le potentiel rugueux. Ce transfert d'énergie va se traduire comme nous allons le montrer par un chauffage du nuage. Pour ce faire, nous prendrons le cas d'un nuage atomique dont le spin de chacun des atomes est unité (les vecteurs propres seront notés : $|1\rangle$,$|0\rangle$ et $|-1\rangle$) piégé transversalement par un confinement harmonique modulé et soumis longitudinalement au potentiel rugueux modulé $\mathcal{U}(z)\cos(\omega_m t)$ de longueur de corrélation l_c et de valeur moyenne nulle.

L'hamiltonien décrivant la dynamique de la particule est alors[20] :

$$H(r,t) = H_\perp(r,t) + H_z(r,t)$$
$$\text{avec} \quad \begin{cases} H_\perp(r,t) = \frac{p_\perp^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_{\perp,\text{DC}}^2\cos^2(\omega_m t)r^2 \\ H_z(r,t) = \frac{p_z^2}{2m} + \mathcal{U}(z)\cos(\omega_m t) \end{cases} \tag{4.37}$$

La dynamique transverse d'un atome est ainsi découplée de sa dynamique longitudinale. Nous supposerons de plus que $\omega_{\text{m}} > 0.87\omega_{\perp,\text{DC}}$ pour que l'évolution de la dynamique transverse soit stable (voir §4.5.4.1 pour la détermination de ce critère de stabilité). Bien que ce critère soit issu d'un raisonnement classique, il reste néanmoins valable dans une approche quantique puisque la fonction de Wigner qui décrit complètement le système dans l'espace des phases a une évolution classique pour un potentiel harmonique [98].

Intéressons nous alors uniquement à la partie longitudinale de l'hamiltonien. Comme l'hamiltonien est périodique en temps, les solutions de l'équation de Schrödinger $i\hbar\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = H_z(t)|\Psi\rangle$ peuvent être trouvées, d'après le théorème de Floquet [99], en résolvant le problème aux valeurs propres donné par l'hamiltonien indépendant du temps suivant :

$$H = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{p^2}{2m^*} + 2m\hbar\omega_{\text{m}}\right)|m\rangle\langle m| + \frac{u(z)}{2}(|m+1\rangle\langle m| + |m\rangle\langle m+1|) \tag{4.38}$$

où m^* est la masse de l'atome considéré, m est un nombre quantique introduit pour tenir compte de la modulation du potentiel rugueux. La représentation d'un état Floquet de la forme $\sum_n |\Phi\rangle_{\text{nF}}|n_F\rangle$ qui s'écrit dans la représentation précédente $\sum_n |\Phi\rangle_{\text{nF}} e^{-in_F\omega_m t}$.

[20] en négligeant la rugosité de potentiel transverse.

Le premier terme de l'hamiltonien H est adiabatique, dans le sens où il ne modifie pas l'indice de Floquet de la particule alors que le second terme couple deux niveaux de Floquet adjacents ($\Delta m = \pm 1$). C'est ce second terme qui est à l'origine du taux de chauffage dans le piège modulé. Par ce terme, à tout instant, l'atome peut transférer ou recevoir de l'énergie de la part du potentiel modulé. De plus, cette évolution est irréversible puisque l'atome est couplé à un continuum (le spectre du potentiel rugueux définit un continuum) et il perd progressivement "la mémoire" de son état initial.

Dans la suite nous estimerons le taux de chauffage engendré par la modulation du potentiel rugueux produit pour un fil dont la densité spectrale des bords J_f est blanche. A une hauteur h grande devant les dimensions du fil, la densité spectrale du potentiel rugueux $\mathcal{U}$ est donnée par l'expression suivante [81] :

$$S(k) = \mu_{\mathrm{B}} J_f \frac{(\mu_0 I)^2}{4\pi^2 x^4} (kx)^4 K_1(kx)^2 \tag{4.39}$$

où K_1 représente la fonction de Bessel modifiée de première espèce.

Pour un gaz thermique, le taux de chauffage s'obtient en intégrant sur l'ensemble de la distribution en vitesse $n(v)$ la contribution $\frac{dE}{dt}(v)$ qui correspond à la variation d'énergie d'une particule par unité de temps :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{k_B} \int_{-\infty}^{\infty} n(v) \frac{dE}{dt} dv \tag{4.40}$$

Un atome se trouvant initialement dans l'état $|1, p_0, n_F\rangle$ d'impulsion p_0 et de nombre de Floquet n_F peut être couplé (second terme de l'équation 4.38) à un état $|1, \pm p_\pm, n_F \pm 1\rangle$ du continuum d'impulsion final $p_\pm$ et d'indice de Floquet $n_F \pm 1$. Par conservation de la quantité de mouvement $p_\pm = \sqrt{p_0^2 \pm 2m\hbar\omega_{\mathrm{m}}}$. Il est à noter que le couplage vers l'état $|0, p_-, n_F + 1\rangle$ nécessite que $p_0^2 > 2m\hbar\omega_{\mathrm{m}}$ pour satisfaire la condition de conservation de l'énergie.

En prenant en compte les deux orientations pour le vecteur d'onde initial k_0, la variation d'énergie totale d'un atome par unité de temps $\frac{dE}{dt}$ a pour expression [100] :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi\omega m}{\hbar^2} ((S(-k_0 + q_+) + S(-k_0 - q_+))/q_+ \tag{4.41}$$

$$-\Theta(|k_0| - \sqrt{2m\omega/\hbar})(S(-k_0 + q_-) + S(-k_0 - q_-))/q_-) \tag{4.42}$$

$$\tag{4.43}$$

où $S(q) = 1/(2\pi) \int e^{iqz} \langle \mathcal{U}(0)\mathcal{U}(z)\rangle dz$ est la densité spectrale du potentiel rugueux $\mathcal{U}(z)$, ayant une longueur de corrélation l_c. $\Theta(x)$ est la fonction de Heaviside.

Sur la figure 5.12 nous avons tracé le taux de chauffage en fonction du nuage en fonction de sa température pour une fréquence de modulation donnée.

Pour $\omega_m/(2\pi) = 30$ kHz, une hauteur $h = 7$ μm au-dessus des petits fils et pour une valeur rms du potentiel rugueux de 80 nK, le taux de chauffage est de 10^{-10} nK/s, valeur complètement négligeable par rapport aux durées typiques des expériences réalisées

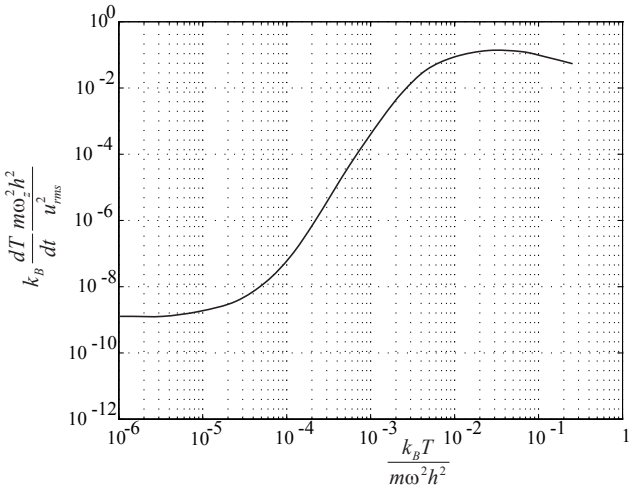

FIG. 4.28 – Taux de chauffage d'un nuage atomique dans le potentiel rugueux, obtenu à partir de l'équation 4.43, en fonction de sa température pour une fréquence de modulation $\omega_m/(2\pi) = 200\hbar/(mh^2)$ (correspondant à $\omega_m = 50$ kHz). Pour les températures considérées expérimentalement $k_B T/(m\omega_m^2 h^2) = 10^{-6}$, le taux de chauffage est de 10^{-10} nK/s pour une rugosité rms de 80 nK.

(quelques secondes). En conclusion, la modulation du potentiel rugueux n'introduit pas de chauffage sur le nuage atomique. Bien que sur notre expérience, le rubidium 87 est piégé dans l'état $|F = 2\rangle$ la conclusion précédente reste valable. De plus, nous n'avons pas pu mettre en évidence de taux de chauffage particulier à la modulation. En effet, notre taux de chauffage est limité par les bruits techniques et typiquement de 160 nK/s que se soit dans le piège modulé ou non.

4.5.3 Condition d'adiabaticité sur l'évolution du spin

Toute l'analyse précédente suppose que le spin de l'atome a le temps de suivre adiabatiquement les variations instantanées du champ magnétique. Nous verrons dans cette section quelles sont les conditions sur ω_m pour que cette approche soit valide. De manière intuitive, nous attendons que le taux de basculement de spin soit faible lorsque $\omega_m \ll \omega_{\text{Larmor}}$, où $\omega_{\text{Larmor}} = \mu_B B_0^z/\hbar$ est la fréquence de Larmor. Nous suivrons les mêmes étapes de calcul que celles présentées dans [45] où les auteurs calculent le taux de basculement de spin dans le cas de pièges DC.

Considérons un atome de spin un dans le piège modulé précédent. Nous choisirons les axes $0x$ et $0y$ à 45° des axes propres du quadrupôle transverse. Nous noterons $\mathbf{J}$ le moment angulaire de spin qui se décompose sur les différentes coordonnées $0x$,$0y$ et $0z$ en respectivement J_x,J_y,J_z.

Appliquons une rotation $\mathcal{R}(x, y, z, t)$ pour que la direction de l'axe de quantifica-

tion du spin soit à tout instant et en tout point suivant la direction locale du champ magnétique. Dans cette nouvelle représentation l'hamiltonien du système s'écrit :

$$H_0 = \mathcal{R}^{-1}\frac{p^2}{2m}\mathcal{R} + (\mu_B B_0^z + \frac{1}{2}m\omega_\perp^2\cos(\omega_\mathrm{m}^2 t)r^2)\frac{J_z/\hbar}{+}i\hbar\frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt}\mathcal{R} \tag{4.44}$$

L'approximation harmonique que nous avons utilisée pour écrire l'équation précédente, suppose que le champ magnétique perçu par les atomes est majoritairement suivant l'axe 0z. Dans cette approximation, nous sommes donc autorisés à développer au premier ordre la rotation $\mathcal{R}(x,y,z,t)$ comme un produit de deux rotations qui commutent l'une suivant l'axe Ox d'angle $\theta_x = b'x\cos(\omega_m t)/B_0^z$ et l'autre suivant l'axe Oy d'angle $\theta_y = b'y\cos(\omega_m t)/B_0^z$. Nous obtenons alors (voir annexe B) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{-1}\frac{p^2}{2m}\mathcal{R} &= \frac{p^2}{2m} + \frac{\sqrt{2}b'}{B_0^z}\cos(\omega_\mathrm{m}t)(p_x - ip_y)|0\rangle\langle 1| + h.c \\
i\hbar\frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt}\mathcal{R} &= \frac{b'}{\sqrt{(}2)B_0^z}\omega_\mathrm{m}\sin(\omega_\mathrm{m}t)(x - iy)|0\rangle\langle 1| + h.c
\end{aligned} \tag{4.45}$$

où la notation $h.c.$ denote le conjugué hermitique.

Notons que le second terme de la première équation donne les pertes par basculement de spin dans les pièges de Ioffe traditionnels. Le terme $i\hbar\frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt}\mathcal{R}$ est quant à lui uniquement présent pour des pièges modulés temporellement. Pour $\omega_\mathrm{m} \gg \omega_\perp$, c'est lui qui prédomine pour les pertes par spin-flip.

Si les atomes sont dans le niveau fondamental transverse, il est possible d'appliquer la règle d'or de Fermi pour calculer le taux de départ vers le continuum (cf [100]) :

$$\Gamma_0 = \frac{\sqrt{2}\pi\omega_\mathrm{m}^2}{m\mu_B B_0^z\omega_\perp}\hbar k_f^2 e^{\frac{-\sqrt{2\hbar^2 k_f^2}}{m\omega_\perp}} \tag{4.46}$$

où k_f correspond au vecteur d'onde de l'état final égal à $\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(\mu_B B_0^z + \hbar(\omega_{\perp,\mathrm{AC}} - \omega_\mathrm{m}))}$

Le taux de départ Γ_0 est exponentiellement décroissant lorsque ω_m s'écarte de la valeur $\mu_B B_0^z/\hbar + \omega_{\perp,\mathrm{AC}}$. Quand Γ_0 est très petit, il faut prendre en compte des couplages d'ordres supérieurs dans l'hamiltonien : notamment des couplages apparaissent lorsque l'énergie de l'état initial (mode fondamental) est voisine d'un état final de nombre de Floquet $n_F + 3$. Sur la figure 4.29, nous avons représenté l'évolution du taux de pertes en fonction de la fréquence de modulation. Nous voyons une première résonance apparaître lorsque $\omega_\mathrm{m} = (\mu_B B_0^z/\hbar + \omega_{\perp,\mathrm{AC}})/3$. En poursuivant ce raisonnement et nous attendons des résonances pour toutes les fréquences de modulation ω_n vérifiant :

$$\omega_n = \frac{\mu B_z + \hbar\omega_{\perp,\mathrm{DC}}/\sqrt{2}}{(2n+1)\hbar} \tag{4.47}$$

En conclusion, les pertes par spin-flip peuvent facilement être évitées en choisissant correctement la fréquence de modulation du piège :

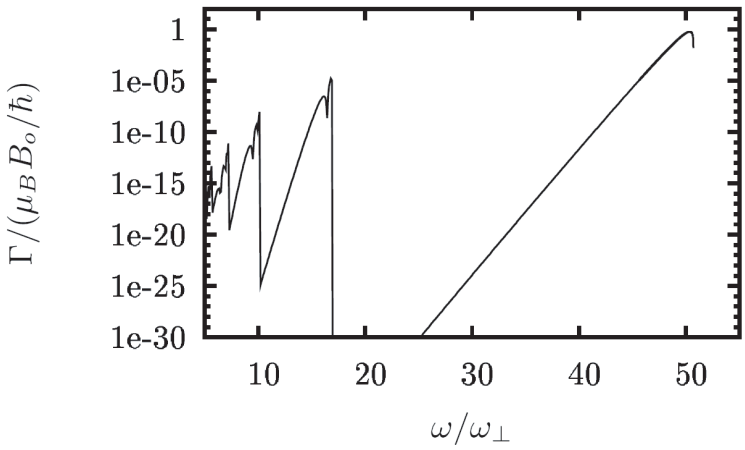

FIG. 4.29 – Evolution du taux de pertes pour des atomes piégés dans l'état fondamental du piège. Le champ longitudinal B_z^0 est de 1.8 G et pour une fréquence de piège de 50 kHz

- elle doit être petite devant la fréquence de Larmor ω_L,
- et relativement loin de toute résonance, i.e. $\omega_\mathrm{m} \neq (\mu_B B_0^z/\hbar + \omega_{\perp,\mathrm{AC}})/(2n+1)$, avec $n \geq 0$.

Pour une fréquence de modulation de 50 kHz ou inférieure avec une fréquence de Larmor de 2.5 MHz (associé à un champ B_0^z de 1.8 G), le taux de pertes reste inférieur à $10^{-15}s^{-1}$ est donc complètement négligeable dans notre cas.

4.5.4 Effet de la modulation sur le mouvement transverse

Intéressons-nous maintenant à l'étude du mouvement transverse des atomes dans le potentiel modulé et étudions les conditions de validité d'utilisation du potentiel moyen pour décrire la dynamique transverse des atomes.

4.5.4.1 Equation de Mathieu

Commençons par nous pencher sur la situation simple où les champs magnétiques externes dans le plan transverse sont nuls. Dans ce cas, le centre du potentiel magnétique instantané reste immobile sur une période d'oscillation et seule la fréquence d'oscillation du piège est modulée temporellement entre 0 et $\omega_{\perp,\mathrm{DC}}$ à la fréquence $2\omega_m$. Le potentiel magnétique instantané s'écrit alors simplement par $V(r,t) = 1/2m\omega_\perp^2 r^2 \cos(\omega_\mathrm{m} t)^2$.

La trajectoire d'une particule dans le plan 0xy est obtenue par intégration de la relation fondamentale de la dynamique projetée suivant chacun des axes transverses du

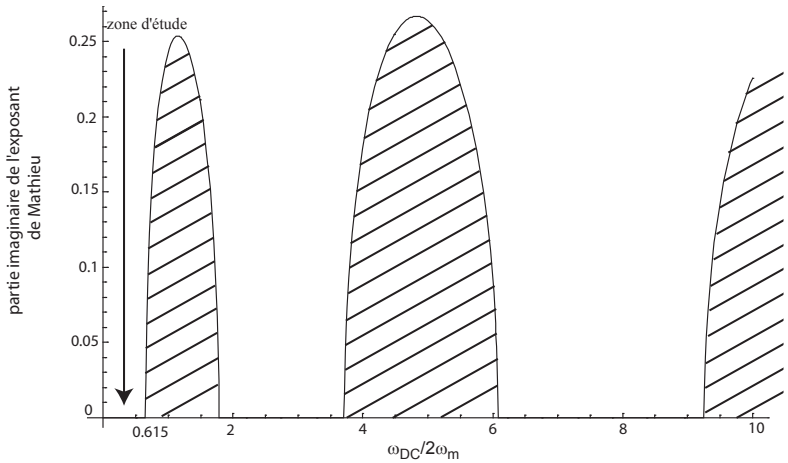

FIG. 4.30 – Graphique donnant les zones de stabilité dans le piège modulé. Les trajectoires stables sont obtenues lorsque la partie imaginaire de l'exposant de Mathieu est nulle (les zones non stables sont hachurées). Expérimentalement, nous nous placerons à $\omega_{\mathrm{m}} \gg 0.87\omega_{\perp,\mathrm{DC}}$ pour que le potentiel vu par les atomes soit très proche du potentiel moyen.

piège :

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial \tau^2} + \frac{\omega_0^2}{2\omega_m^2}(1+\cos(2\tau))y_i = 0 \tag{4.48}$$

où $\tau = \omega_{\mathrm{mod}} t$ est un paramètre sans dimension et y_i désigne la coordonnée x ou y du plan transverse. Il s'agit d'une équation de Mathieu [101]($\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + a - 2q\cos(2\tau)y = 0$) avec comme paramètres $a = \frac{\omega_0^2}{2\omega_m^2}$ et $q = -a/2$. Cette équation étant périodique en temps elle admet, d'après le théorème de Bloch, des solutions de la forme :

$$y(a,q,t) = \mathcal{A}e^{i\mu t}\mathcal{F}(a,q,t) + \mathcal{B}e^{-i\mu t}\mathcal{F}(a,q,-t) \tag{4.49}$$

où μ est l'exposant caractéristique de Mathieu et $\mathcal{F}$ une fonction spéciale tabulée $2\pi/\omega_m$-périodique, et $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ des constantes déterminées par les conditions initiales de la particule (position, vitesse).

Intéressons-nous aux conditions de stabilité de cette équation différentielle sur le confinement transverse du potentiel. Tant que la partie imaginaire de μ est nulle, les solutions de cette équation sont bornées et les trajectoires des particules sont stables. Sur la figure 4.30, nous avons donc tracé la partie imaginaire de l'exposant de Mathieu en fonction du rapport $\omega_0/2\omega_m$. Bien qu'il existe des zones de stabilité pour $\omega_0/\omega_m > 1$, il n'est pas souhaitable de se mettre dans ce régime car le potentiel vu par les atomes est notoirement différent du potentiel moyen et la dynamique des particules est donc difficile à analyser. Pour des fréquences de modulation plus élevées que $0.87\omega_0$, la dynamique

est également stable ($\mathcal{I}\mathrm{m}(\mu) = 0$). Pour les fréquences de modulation bien supérieures à $0.87\omega_0$, le mouvement complet d'un atome peut se découpler en un mouvement lent à la fréquence du piège et d'un micro-mouvement à la fréquence de modulation dont l'amplitude est d'autant plus faible que la modulation est rapide. Pour une fréquence de modulation typique de 30 kHz (utilisée dans nos expériences), et une fréquence de piège instantanée maximale de 2 kHz, l'amplitude relative du micro-mouvement comparée à celle du mouvement lent est donnée par $\omega_0^2/8\omega_m^2$, et est typiquement de l'ordre de 5.10^{-4}. Pour ces valeurs de paramètres une description en terme de potentiel moyen est alors bien adaptée au problème.

Il est intéressant de noter que les zones de stabilité ne dépendent que du rapport ω_m/ω_0 et notamment ne dépendent pas des conditions initiales sur le mouvement des particules. Ceci a pour conséquence d'assurer la stabilité complète du nuage et ceci même vis à vis des collisions élastiques.

4.5.4.2 Résultats expérimentaux

Expérimentalement, nous avons mesuré la durée de vie du nuage atomique pour des fréquences de modulation allant de 3 kHz et 50 kHz. Sur la figure 4.32, nous avons représenté ces différentes courbes sur la figure Fig. 4.32. Le temps de vie est trouvé à partir d'un ajustement par une exponentielle décroissante de constante de temps τ.

Pour les fréquences de modulation supérieures à 15 kHz, le temps de vie du nuage est constant compte tenu des barres d'erreurs et est le même que dans le cas du piège non modulé, soit 16 s. Nous pouvons donc attribuer cette valeur aux pertes par collision avec le gaz résiduel ainsi que la proximité de la surface de la puce (pertes par spin-flip dû au bruit de Johnson) et éliminer l'effet de la modulation sur cette durée de vie finie. Par contre, pour des fréquences inférieures à 15 kHz, bien au-dessus de la fréquence $f_{\mathrm{min}}^{\mathrm{seuil}} = 1.82$ kHz prédite par l'équation de Mathieu, nous observons une chute brutale de la durée de vie traduisent l'effet de la modulation sur la dynamique des atomes. Par exemple, à une fréquence de modulation de 5 kHz, le temps de vie n'est plus que de 30 ms. Nous allons voir dans le paragraphe suivant qu'il est possible d'attribuer cette observation à la présence de champs transverses résiduels constants (typiquement de l'ordre de 100 mG).

4.5.4.3 Cas général : simulations Monte-Carlo classique

Dans le cas d'un champ externe constant, la dynamique du piège n'est plus régie par l'équation de Mathieu notamment parce que la position du centre du piège évolue au cours du temps. En effet, en présence d'un champ magnétique homogène et constant, la position du quadrupôle transverse créé par les petits fils est décalée d'une quantité B_{ext}/b'. Notons que dans l'approximation harmonique le décalage est d'autant plus important que le gradient est faible, c'est-à-dire que le piège part à l'infini quand le courant dans les différents fils tend vers 0. Cette approximation n'est cependant pas valable

lorsque le courant dans le fil avoisine 0 et la trajectoire du piège est en fait un arc de cercle comme illustré sur la figure 4.31, où nous avons représenté l'évolution temporelle du centre du piège au cours d'une période d'oscillation. Bien que le centre du piège bouge de manière importante sur une période de modulation, une modulation suffisamment rapide des courants I_b et I_c permettent aux atomes de ne percevoir que le potentiel moyen $\langle V(r,t)\rangle$ et donc de maintenir des trajectoires stables.

Afin d'avoir un critère plus quantitatif sur la fréquence minimale qu'il est nécessaire d'appliquer pour avoir des trajectoires stables, nous avons réalisé des simulations numériques de type Monte-Carlo. Pour une température de $T = 500$ nK correspondant aux données expérimentales, nous avons tiré au hasard, suivant la statistique de Maxwell-Boltzmann, les positions ansi que les vitesses initiales d'un millier de particules. L'évolution temporelle de chacune d'elles est obtenue en résolvant, suivant la méthode de Runge Kutta d'ordre 4, la relation fondamentale de la dynamique dans le plan transverse :

$$m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -\overrightarrow{\nabla}V(\overrightarrow{r},t) \tag{4.50}$$

où $V(\overrightarrow{r},t)$ est le potentiel magnétique transverse instantané créé par les cinq fils.

Pour trouver la durée de vie du nuage atomique dans ce piège, nous considérons qu'une particule est perdue si son énergie à l'instant t est au moins 10 fois plus grande que son énergie initiale. Les trajectoires sont simulées pour des temps de l'ordre de 20 ms et nous avons vérifié que la durée de vie calculée dépend peu de cette valeur.

De manière à pouvoir comparer avec nos mesures expérimentales, nous avons pris en compte la durée de vie finie de notre piège (principalement due aux collisions avec le gaz résiduel) de 16 s. Le temps de vie s'écrit dans ce cas là :

$$\tau = \frac{1}{\frac{1}{\tau_{\text{mod}}} + \frac{1}{\tau_{\text{res}}}} \tag{4.51}$$

où τ_{mod} est la durée de vie due à l'effet de modulation et τ_{res} est le temps de vie mesuré expérimentalement dans le cas du piège non modulé.

Sur la figure 4.32, nous avons ajouté la courbe théorique de la durée de vie du nuage atomique en fonction de la fréquence de modulation pour les paramètres suivants :

- température du nuage : $T = 500$ nK,
- nombre de particules $N_{\text{at}} = 1000$ atomes,
- courants $I_b = 15$ mA et $I_c = 13$ mA.

Les résultats de la figure 4.32 confirment ce que nous attendions intuitivement, c'est-à-dire une augmentation de la fréquence de modulation minimale pour avoir un piège stable. Pour un champ transverse de 0.15 G dans chacun des axes x et y, cette fréquence vaut typiquement 15 kHz soit supérieure par près d'un facteur 10 au cas où il n'y a pas de champ magnétique résiduel.

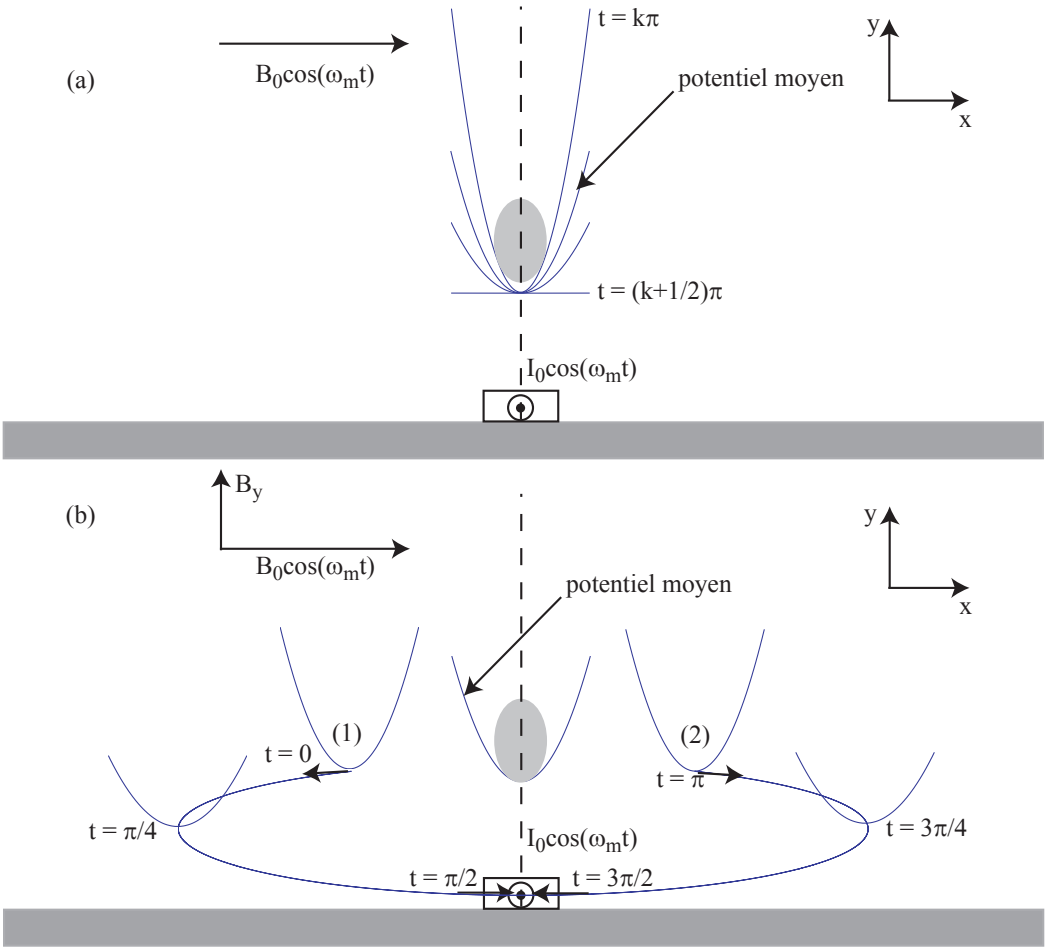

FIG. 4.31 – Evolution temporelle du potentiel magnétique créé par un fil parcouru par un courant I_0 et par un champ de biais B_0 modulés tous les deux en phase dans les deux configurations différentes : figure (a) sans champ externe constant, figure (b) avec un champ magnétique constant B_y non nul suivant la direction y. Dans le cas (a), la position du centre du piège n'est pas modifiée au cours d'une période de modulation. Seule la fréquence d'oscillation est modulée en temps suivant la loi $\omega_\perp^2(t) = \omega_{\perp,\mathrm{DC}}^2 \cos^2(\omega_m t)$. Dans le cas (b) par contre, la présence du champ B_y déplace la position du centre du piège. Le piège initialement à la position (1) (t=0), part horizontalement vers la gauche (dans l'approximation harmonique) en décrivant le cercle jusqu'à arriver en position (2) au bout d'une demi-période, puis repart en sens inverse pour la seconde moitié de la période d'oscillation. La position du potentiel moyen est quant à elle située au centre de symétrie de la figure.

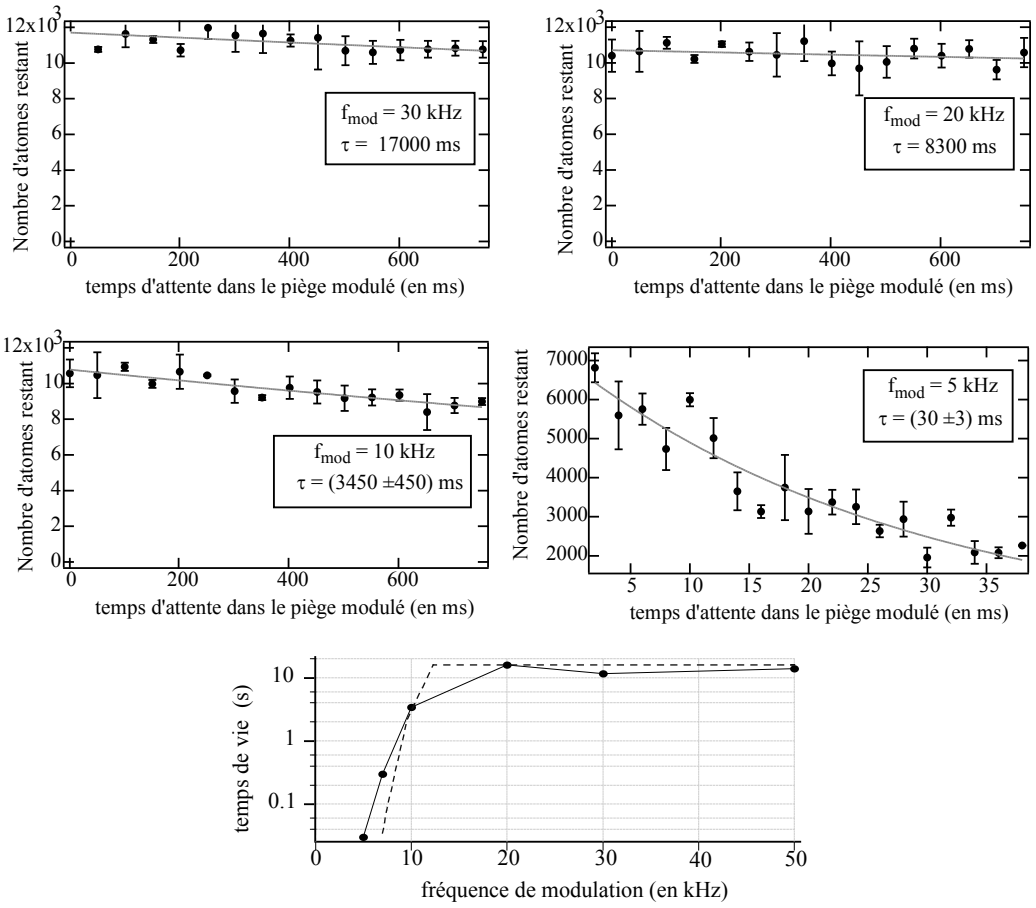

FIG. 4.32 – Temps de vie d'un nuage atomique pour différentes valeurs de fréquences de modulation (respectivement 30 kHz, 20 kHz, 10 kHz, 5 kHz). La figure (e) donne l'évolution du temps de vie en fonction de la fréquence de modulation. La ligne pointillée représente le résultat de la simulation Monte Carlo dans le cas d'un champ transverse de 150 mG dans les deux directions x et y. Les durées de vie typiques dans le piège non modulé sont de 16 s.

Le champ résiduel, provenant d'une mauvaise compensation peut avoir plusieurs origines : le courant continu de 2 A dans le filament du dispenser (100 mG) ou la magnétisation indésirable du blindage par application de forts champs magnétiques notamment pendant la phase du PMO externe.

La courbe précédente permet d'élaborer une méthode de compensation des champs magnétiques statiques transverses au niveau du piège. Il est possible de compenser ces champs magnétiques résiduels, de manière itérative en maximisant la durée de vie du nuage en fonction des champs de compensation[21]. Cependant, nous n'avons pas choisi d'utiliser cette méthode notamment parce qu'elle est très coûteuse en temps. De plus la composante transverse du champ magnétique créé par les barres du H produit un champ transverse typiquement de 50 mG au bord du nuage. Il ne sert donc à rien de compenser à mieux que cette valeur.

4.6 Refroidissement évaporatif dans le piège modulé

L'utilisation du refroidissement évaporatif s'est révélée cruciale, en 1995, pour l'obtention du premier condensat de Bose-Einstein [43]. Rappelons que ce mécanisme consiste à laisser s'échapper du piège les atomes les plus énergétiques (*i.e.* les plus chauds) en tronquant sa profondeur ce qui réduit la température du nuage au prix d'une perte d'atomes. La troncature du piège peut être réalisée par plusieurs méthodes suivant le type de pièges utilisés :

- transitions radio-fréquence dans le cas des pièges magnétiques de type Ioffe-Prichard [43] ou de type TOP (time orbiting potential) [102].
- diminution de la puissance optique du ou des faisceaux de piégeage pour des pièges optiques [103].

Comme nous venons de le voir, le potentiel modulé possède des propriétés particulièrement intéressantes (très faible rugosité résiduelle, forme du potentiel moyen relativement insensible aux champs magnétiques externes statiques) et nous pouvons nous demander s'il est possible d'appliquer le refroidissement évaporatif par onde RF sur ce type de piège.

Dans cette partie, nous montrerons comment il est possible d'utiliser une onde radio-fréquence pour réaliser un refroidissement évaporatif dans le piège modulé.

Considérons, en plus des champs magnétiques nécessaire au piégeage, un champ magnétique radio-fréquence $\mathbf{B}_{\mathrm{RF}}$ polarisé suivant la direction x oscillant à la fréquence ω_{RF}. Pour simplifier l'analyse nous nous restreindrons à un atome de spin entier dont les états de spin seront notés $|1\rangle$ (état piégeant), $|0\rangle$ (état insensible au champ magnétique) et $|-1\rangle$ (l'état anti-piégeant). Dans ce modèle nous verrons que lorsque ω_m est faible devant la fréquence de Larmor $\omega_{\mathrm{Larmor}} = \mu_B B_0^z/\hbar$, l'effet de l'onde radio-fréquence peut s'interpréter simplement comme l'apparition de bandes latérales sur la transition atomique entre l'état $|1\rangle$ et l'état $|0\rangle$.

[21] En faisant varier itérativement la compensation suivant l'axe x puis suivant l'axe y.

De manière analogue au paragraphe (cf.§ 4.5.3), nous appliquons la même rotation $\mathcal{R}(x, y, z, t)$ pour qu'à tout instant le spin $|1\rangle$ pointe suivant la direction locale du champ magnétique. Dans cette représentation, l'hamiltonien global du système s'écrit sous la forme $H = H_0 + H_{RF}$, où H_0 a été défini au paragraphe 4.5.3 et H_{HF} est l'hamiltonien H^{RF} associé au champ radio-fréquence $\mathbf{B}_{\mathrm{RF}}$ s'écrit dans la base $(|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle)$,

$$H^{RF} = \hbar\Omega_{\mathrm{RF}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\omega_{\mathrm{RF}} t) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{b'x}{2B_0} \cos(\omega_{\mathrm{m}} t) \cos(\omega_{\mathrm{RF}} t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \tag{4.52}$$

où $\Omega_{\mathrm{RF}} = \mu_{\mathrm{B}} B_{\mathrm{RF}}/\hbar$ est la pulsation de Rabi.

Dans la suite, nous noterons H_1^{RF} et H_2^{RF} respectivement le premier et le second terme de H^{RF}.

H_1^{RF} correspond au terme de couplage usuel faisant basculer le spin de l'état piégeant $|1\rangle$ vers l'état $|0\rangle$, puis vers l'état $|-1\rangle$.

H_2^{RF}, quant à lui, provient de la dépendance temporelle de la rotation $\mathcal{R}(x, y, z, t)$ (voir annexe B). Bien que H_2^{RF} ne couple pas les deux états $|1\rangle$ et $|0\rangle$, nous verrons qu'il peut induire également des pertes par des processus du second ordre.

Analysons maintenant l'effet de chacun des termes de H_{RF}. Dans le cas général (*i.e.* si ω_m et Ω_{RF} ne sont pas multiples l'un de l'autre), l'hamiltonien H n'est pas périodique en temps. Cependant comme H ne fait intervenir que deux fréquences ω_m et Ω_{RF}, il est possible d'utiliser une représentation de Floquet généralisée dans laquelle deux nombres quantiques sont utilisés : le nombre de Floquet n_m associé à la fréquence de modulation et le nombre n_{RF} associé au nombre de photons radio-fréquence. Dans ce cas, nous écrirons ces états sous la forme $|N_{\mathrm{RF}}, n_m\rangle$. Dans cette nouvelle représentation, nous décomposons l'état $|1\rangle$ sous la forme :

$$|1\rangle = \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} \sum_{n_F=-\infty}^{\infty} a_{N_{\mathrm{RF}}, n_m}(t) |1, N_{\mathrm{RF}}, n_m\rangle \tag{4.53}$$

De plus, nous nous placerons dans le cas où le champ magnétique radio-fréquence est faible ($B_{RF} \ll B_0$) c'est-à-dire que nous considérons uniquement des transitions à un seul photon RF. De plus, seules les transitions quasi-résonnantes avec l'état non piégé ayant $N_{\mathrm{RF}} + 1$ photons radio-fréquence est important et nous négligerons les autres couplages.

Dans cette approximation l'hamiltonien H_{RF} s'écrit donc, en ne considérant que les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$:

$$H_{\mathrm{RF}} = \sum_{n_m, n_{\mathrm{RF}}} \Bigg[\underbrace{\frac{\hbar\Omega_{\mathrm{RF}}}{\sqrt{2}} (|1, N_{\mathrm{RF}}, n_m\rangle\langle 0, N_{\mathrm{RF}}+1, n_m| + |0, N_{\mathrm{RF}}+1, n_m\rangle\langle 1, N_{\mathrm{RF}}, n_m|)}_{H_1^{\mathrm{RF}}}$$
$$\underbrace{+\frac{\mu_B b' x}{4B_0} |1, N_{\mathrm{RF}}-1, n_m \pm 1\rangle\langle 1, N_{\mathrm{RF}}, n_m|}_{H_2^{\mathrm{RF}}} \Bigg] \tag{4.54}$$

Supposons pour clarifier les idées qu'un atome se trouve dans l'état piégé $|1, N_{\mathrm{RF}}, n_m = 0>$. Cet état initial peut être transféré vers un état non piégeant $|0\rangle$ ayant pour nombre de Floquet $n_m = 0$ ou ± 2 de plusieurs façons différentes (voir figure 4.33) :

transitions vers l'état $|N_{\mathrm{RF}}+1, n_m = 0\rangle$ **:** cette transition est induite par le terme H_1^{RF} avec la constante de couplage $\hbar\Omega_{\mathrm{RF}}$.

transitions vers l'état $|N_{\mathrm{RF}}+1, n_m = \pm 2\rangle$ **:** le terme $1/2m\omega^2 r^2 \cos(2\omega_m t) S_z$ de H_0 peut induire une transition entre l'état $|N_{\mathrm{RF}}, n_m = 0\rangle$ et l'état $|N_{RF}, n_m = \pm 2\rangle$. Cet état intermédiaire pourra être à son tour être transféré vers l'état $|0, N_{RF}+1, n_m = \pm 2\rangle$ via le terme H_1^{RF} (processus (a)).

- le second processus possible utilise le couplage entre l'état $|N_{RF}, n_m = 0\rangle$ et l'état $|N_{RF}+1, n_m = \pm 1\rangle$ (terme H_2^{RF}). Cet état est ensuite transféré vers l'état final $|N_{RF}+1, n_m = \pm 2\rangle$ (terme $i\frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt}\mathcal{R}$ de H_0 (processus (b))).

Le rapport entre les taux de couplage des processus de type (a) et des processus de type (b) est proportionnel à $\hbar\omega_m/\mu_B B_0$. Dans les expériences que nous avons réalisées, ce rapport est typiquement de 1/20, ce qui nous permet de négliger les processus de type (b) au profit des processus de type (a). De façon plus général, l'état initial peut être transféré à tout état final du type $|N_{RF}-1, n_m = 2k\rangle$ (où k est un entier relatif). Le processus dominant implique H_1^{RF} et le terme à l'ordre n de $1/4m\omega^2 r^2 \cos(2\omega_m t) S_z$ contenu dans H_0. De manière itérative, il est possible de montrer que le couplage effectif associé à ce processus s'écrit

$$V_{\mathrm{eff}}^{(n)} = \frac{\mu_B B_{\mathrm{RF}}}{n!} \left(\frac{\mu_B b'^2 r^2}{16 B_0 \hbar\omega} \right)^n . \tag{4.55}$$

4.6.1 Apparition de bandes latérales

En négligeant la modulation du couplage avec la rotation de l'orientation du spin (approximation du paragraphe §4.5.3), il est possible de comprendre le refroidissement évaporatif dans le piège modulé en considérant simplement que l'écart en énergie de la transition $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ est modulé. Pour une position donnée dans le piège magnétique, l'écart en énergie entre ces deux niveaux s'écrit :

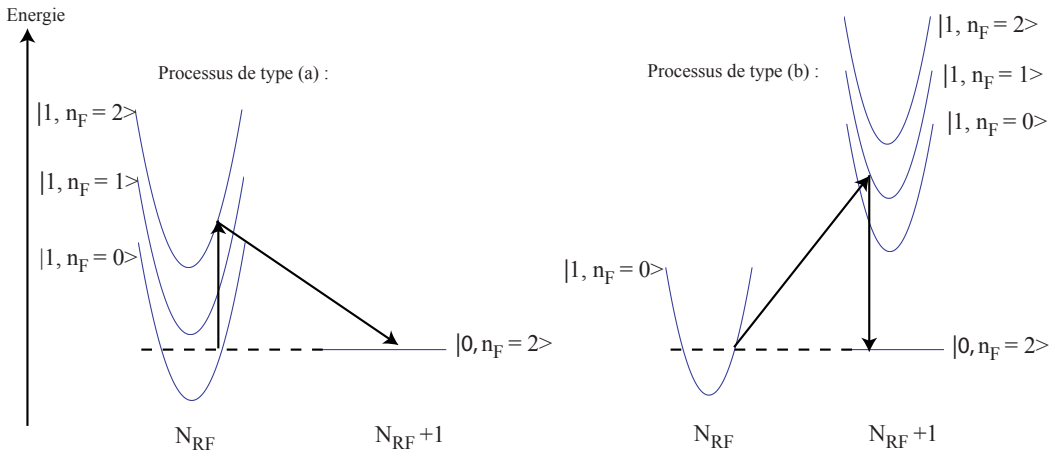

FIG. 4.33 – Transitions possibles entre l'état piégé $|1, n_F = 0, N_{\mathrm{RF}}\rangle$ et l'état $|0, n_F = 2, N_{\mathrm{RF}} - 1\rangle$ lors de l'application d'une onde radio-fréquence sur le potentiel modulé. Les processus de type (a) sont en général prédominants (voir texte).

$$\Delta E = \hbar\omega_0 + \hbar\delta\omega\cos(2\omega_m t) \tag{4.56}$$

où $\omega_0 = \mu_B B_0/\hbar + \delta\omega$ avec $\delta\omega = \mu_B(b'r)^2/(2B_0)$ et b' le gradient quadrupolaire transverse du piège[22].

La situation précédente est également formellement équivalente à dire que l'écart en énergie de la transition $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ est constant mais que c'est la fréquence du couteau radio-fréquence qui est modulée temporellement avec un spectre en fréquence donné par la transformée Fourier :

$$\mathcal{S}(\nu) = \int_{-\infty}^{-\infty} \cos\left(\omega_{\mathrm{RF}} t + \delta\omega\cos(2\omega_m t)t\right) e^{-2i\pi\nu t} dt \tag{4.57}$$

avec ω_{RF} est la fréquence du couteau RF.

Nous trouvons alors en développant l'intégrale :

$$\mathcal{S}(\nu) = \left[J_0(\frac{\delta\omega}{2\omega_m})\delta(\nu - \frac{\omega_0}{2\pi}) + \sum_{n\neq 0} 2J_n(\frac{\delta\omega}{2\omega_m})\delta(\nu - \frac{\omega_0 + 2n\omega_{\mathrm{m}}}{2\pi}) \right] \tag{4.58}$$

où J_n représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n.

[22]Seule l'énergie de l'état piégé $|1\rangle$ est modulée.

La modulation temporelle de ΔE produit donc sur le spectre de l'onde radio-fréquence des bandes latérales, espacées de $2n\omega_m$ de part et d'autre de la fréquence centrale ω_{RF} dont les poids relatifs sont donnés par les fonctions de Bessel d'ordre n (voir note [23]).

4.6.2 Conséquences sur le nuage atomique

Nous avons montré que le champ radio-fréquence produit des couplages entre l'état piégé $|1\rangle$ et l'état $|0\rangle$ pour plusieurs positions à l'intérieur du piège séparées en énergie par $2\hbar\omega_m$ (voir note[24]). Pour une fréquence de modulation de 30 kHz, la difference en énergie entre deux résonances consécutives est 2 μK. En conséquence, pour des nuages atomiques ayant des températures du même ordre de grandeur, plusieurs résonances sont présentes à l'intérieur même du nuage pouvant introduire des pertes par basculement de spin. Pour résoudre ce problème deux solutions sont possibles : soit augmenter la fréquence de modulation pour séparer encore plus les zones de résonances[25], soit commencer par refroidir le nuage dans un piège non modulé à des températures plus faibles puis le transférer dans le piège modulé. Dans ces conditions, le processus d'évaporation est majoritairement dû à la présence d'un seul couteau RF, comme pour un piège statique standard. Il est préférable pour le choix du couteau radio-fréquence de prendre la porteuse du signal : le couplage entre l'état $|1\rangle$ et $|0\rangle$ est alors maximum et ne dépend pas de la position radiale $(\mu_{\mathrm{B}}(b'r)^2/(4B_0^z\hbar\omega))$ ce qui est particulièrement intéressant lorsque la fréquence RF est abaissée pour effectuer le refroidissement évaporatif.

[23] Notons que dans le cas où la fréquence de modulation est faible devant ω_{RF}, le développement limité au premier ordre des fonctions de Bessel redonne bien l'expression du couplage effectif obtenu au paragraphe 4.6.

[24] Signalons que le refroidissement évaporatif dans les pièges de type TOP (time-orbiting potential), présente les mêmes types de multi-résonances [104].

[25] La résonance correspondant à la première bande latérale $(\omega_{\mathrm{RF}} - 2\omega_{\mathrm{m}})$ se trouve en-dessous du fond piège.

CHAPITRE 5

Fluctuations de densité dans un gaz de Bose allongé

L'un des fondements de la mécanique quantique repose sur la dualité onde-corpuscule. En 1923, Louis de Broglie étendit ce concept, initialement proposé pour décrire les propriétés de la lumière, à toute particule matérielle. Pour tenir compte de leurs propriétés ondulatoires, il leur associe une longueur d'onde qui est inversement proportionnelle à leur impulsion p [105], $\lambda_{\mathrm{dB}} = \frac{h}{p}$,où h est la constante de Planck. Pour un nuage atomique, c'est la longueur d'onde de De Broglie thermique qui permet d'étudier les propriétés de cohérence du nuage :

$$\Lambda_{\mathrm{dB}} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\pi m k_B T}} \tag{5.1}$$

où m est la masse des particules, k_B la constante de Boltzmann et T la température du nuage. Lorsque la température du nuage est élevée ($\Lambda_{\mathrm{dB}} < 1$ nm), le nuage atomique est très bien décrit classiquement par une assemblée de particules ponctuelles et indépendantes. A plus faible température le comportement ondulatoire des particules, qui se manifeste sur des distances de l'ordre de Λ_{dB}, devient alors mesurable. Du fait du principe de symétrisation des fonctions d'ondes il se traduit, pour les bosons, par un effet de groupement (*bunching effect* en anglais) : la probabilité de trouver deux particules en un même endroit de l'espace est plus élevée que dans le cas de particules indépendantes. L'effet Hanbury-Brown et Twiss pour les photons, que nous rappellerons dans l'introduction, est une illustration de ce phénomène [106]. D'autres expériences réalisées cette fois-ci sur des particules massives [107–109], ont permis de mesurer la fonction de corrélation du second ordre pour des particules de type bosonique et fermionique. Au travers d'un bref historique, nous reviendrons sur ces différentes expériences dans l'introduction de ce chapitre.

En 2004, Altman *et Al.* [110] ont montré que des images de nuage atomique prises par absorption contiennent des informations sur les corrélations du second ordre entre particules. Celles-ci peuvent être extraites en analysant soigneusement le bruit détecté sur chacune des images acquises. Cette méthode fût appliquée en 2005, par l'équipe de D.S. Jin, pour mesurer la corrélation en impulsion de paires fermioniques obtenues à partir d'un condensat de molécules [111]. Dans ce chapitre, nous montrerons que cette méthode peut être également utilisée pour mesurer la fonction de corrélation du second

ordre dans l'espace des positions, contrairement aux expériences précédentes [107–109] qui ont été réalisées dans l'espace des impulsions. Pour ce faire, nous imagerons des nuages atomiques alors qu'ils sont encore confinés par le potentiel de piégeage (imagerie *in-situ*). Nous verrons que l'intégration inévitable du profil de densité suivant l'axe du faisceau d'imagerie peut masquer l'effet du groupement de bosons dont la longueur de corrélation est donnée par Λ_{dB}. Pour éviter au maximum cet effet, nous tirerons parti de l'utilisation des puces atomiques qui permettent de produire des nuages atomiques proches du régime unidimensionnel[1] et ainsi de limiter cet effet d'intégration.

Dans une deuxième partie, nous présenterons les résultats que nous avons obtenus sur la mesure du groupement de bosons et nous verrons également le rôle que jouent les interactions répulsives entre atomes.

5.1 Introduction

5.1.1 Le groupement de bosons : un effet de statistique

Commençons cette section par expliquer "avec les mains" en quoi consiste le groupement de bosons et comment il se traduit sur les fluctuations de densité dans un gaz de Bose. Comme nous le verrons, il s'agit d'un effet quantique relatif au principe de symétrisation des fonctions d'onde. Nous décrirons successivement le cas des particules quantiques discernables pour lesquelles il n'y a pas de groupement de bosons puis nous étudierons le cas des particules quantiques indiscernables.

5.1.1.1 Cas des particules discernables

Considérons un gaz de N_0 particules statistiquement indépendantes contenues dans une boite de volume L^3 et étudions les fluctuations du nombre de particules dans un volume élémentaire dans les deux situations suivantes : le volume élémentaire correspondra dans un premier temps à une cellule de l'espace des phases de volume $\hbar^3$ puis contiendra dans un deuxième temps G états quantiques (voir figure 5.1).

Un état quantique observé :

Dans ces conditions, la probabilité d'obtenir N particules dans une cellule élémentaire de l'espace des phases est donnée, pour des particules indépendantes, par la loi binomiale :

$$p_N = \frac{N_0!}{N!(N_0-N)!}\left(\frac{\langle n\rangle}{N_0}\right)^N\left(1-\frac{\langle n\rangle}{N_0}\right)^{N_0-N} \tag{5.2}$$

où $\langle n\rangle$ correspond à la valeur moyenne du nombre de particules contenues dans la cellule élémentaire. La notation $\langle . \rangle$ représente une moyenne statistique obtenue sur un grand nombre de réalisations indépendantes.

[1] *i.e.* lors que la température du nuage est du même ordre de grandeur que l'énergie de point zéro dans les deux directions transverses.

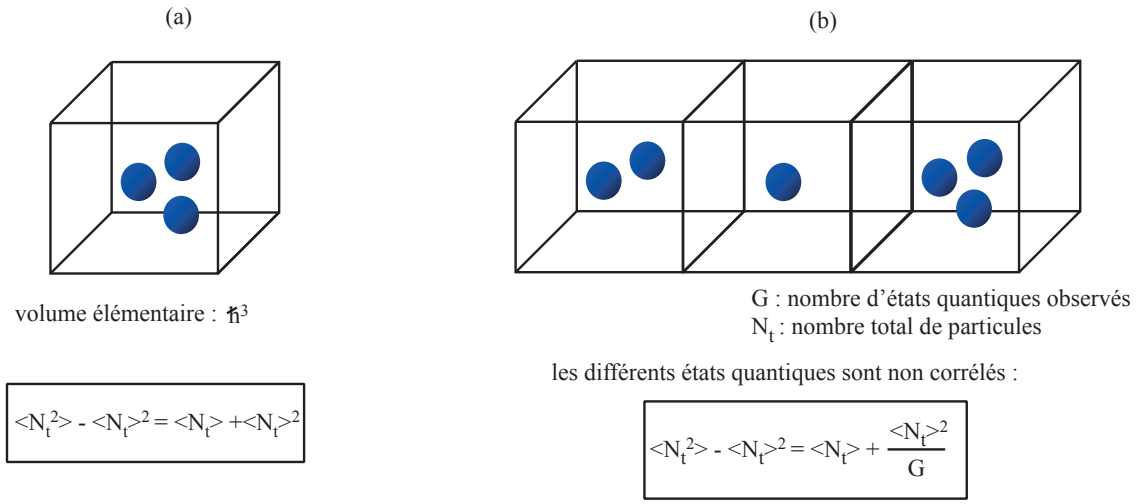

FIG. 5.1 – Fluctuations du nombre d'atomes contenus dans un volume élémentaire : (a) pour un état quantique donné, (b) pour plusieurs états quantiques observés.

En général N_0 est grand par rapport à N, et nous pouvons approximer p_N par :

$$p_N = \frac{\langle n \rangle^N e^{-\langle n \rangle}}{N!} \tag{5.3}$$

qui correspond à la loi de Poisson. A partir de cette loi de probabilité, nous pouvons calculer la variance du nombre de particules contenues dans une cellule élémentaire à partir de $\langle n \rangle$ (voir démonstration en bas de page[2]) :

$$\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \sum_{N=0}^{\infty} N^2 p_N - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle \tag{5.5}$$

Nous constatons que pour des particules indépendantes, la variance (*i.e.* fluctuations) du nombre d'atomes contenus dans une cellule élémentaire de l'espace des phases varie linéairement avec la valeur moyenne du nombre d'atomes présents dans cette cellule. Ces fluctuations sont analogues au bruit de grenaille temporel observé avec des photons lorsqu'ils sont émis par un laser.

[2]En effet,

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \sum_{N=0}^{\infty} N^2 p_N = e^{-\langle n \rangle} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^N N}{(N-1)!} = e^{-\langle n \rangle} \sum_{N=2}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^N N}{(N-2)!} + e^{-\langle n \rangle} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^N N}{(N-1)!} \\ &= \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle \end{aligned} \tag{5.4}$$

Plusieurs états quantiques observés :

Dans le cas où nous regardons la contribution de plusieurs états quantiques, le raisonnement précédent se généralise à l'aide de l'indépendance statistique entre les différents états quantiques. La probabilité d'obtenir N particules dans G cellules élémentaires de l'espace des phases est toujours donnée par la loi de Poisson et la variance $\langle N_t^2\rangle - \langle N_t\rangle^2$ est encore linéaire avec le nombre moyen $\langle N_t\rangle$ de particules observées dans les G états quantiques.

En conclusion, quelque soit le nombre d'états quantiques observés dans un volume V, les fluctuations du nombre d'atomes sont données par le bruit de grenaille atomique. Le raisonnement précédent n'est valable que dans le cas de particules discernables. Attachons nous maintenant à étudier le cas des particules indiscernables.

5.1.1.2 Pour des particules quantiques indiscernables

Reprenons maintenant le même raisonnement pour des particules quantiques indiscernables. L'indiscernabilité des particules (symétrisation de la fonction d'onde) impose de ne pas tenir compte de l'ordre d'arrangement des différentes particules dans l'espace des phases. Pour des bosons, il est ainsi beaucoup plus probable, d'un point de vue statistique, de se trouver dans la situation où toutes les particules se trouvent dans une même cellule de l'espace des phases que dans le cas où elles sont chacune dans une cellule différente. Ainsi, ce raisonnement permet de prévoir intuitivement la présence de grandes fluctuations du nombre d'atomes dans une cellule élémentaire pour plusieurs réalisations statistiques indépendantes.

Un état quantique observé :

D'après la loi de Maxwell-Boltzmann à l'équilibre thermodynamique, la probabilité de trouver $n_{k,b.}$ bosons dans une même cellule de l'espace des phases d'énergie ϵ_k est donnée par $p(n_{k,b.}) \propto e^{-n_{k,b.}\frac{\epsilon_k-\mu}{k_\mathrm{B}T}}$. L'expression de la variance du nombre d'atomes dans une cellule élémentaire de l'espace des phases est alors égale à (voir démonstration en bas de page[3]) :

$$\begin{aligned}\langle n_{k,b.}^2\rangle - \langle n_{k,b.}\rangle^2 &= \sum_n n_{k,b.}^2 p(n_{k,b.}) \\ &= \langle n_{k,b.}\rangle + \langle n_{k,b.}\rangle^2 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Si au lieu de prendre des bosons, nous avions pris des fermions la variance aurait été :

[3]Partons de la définition de la variance $\langle n_k^2\rangle$:

$$\langle n_k^2\rangle = \left(1 - e^{\frac{(\epsilon_k-\mu)}{k_\mathrm{B}T}}\right)\sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-\frac{n(\epsilon_k-\mu)}{k_\mathrm{B}T}} \tag{5.6}$$

$$\langle {n_{k,\mathrm{f.}}}^2\rangle - \langle n_{k,\mathrm{f.}}\rangle^2 = \langle n_{k,\mathrm{f.}}\rangle - \langle n_{k,\mathrm{f.}}\rangle^2 \tag{5.9}$$

Au travers de ces expressions, nous voyons que les fluctuations du nombre d'atomes sont la somme de deux contributions, le bruit de grenaille atomique $\langle n_k\rangle$ et d'un terme de groupement pour les bosons et d'anti-groupement pour les fermions. Ainsi d'un point de vue statistique, les bosons ont tendance à se regrouper pour accroître les fluctuations du nombre d'atomes $\langle {n_{k,\mathrm{b.}}}^2\rangle - \langle n_{k,\mathrm{b.}}\rangle^2$, alors qu'au contraire les fermions, qui ne peuvent se trouver dans le même état quantique par le principe d'exclusion de Pauli, limitent leurs fluctuations (leurs fluctuations sont inférieures au bruit de grenaille atomique) [108].

Plusieurs états quantiques observés :

De même que précédément, par indépendance statistique des différents états quantiques (addition des variances), les fluctuations du nombre d'atomes contenus dans G cellules élémentaires sont données à l'équilibre thermodynamique par :

$$\langle(\Delta N)^2\rangle = \sum_N \langle {n_k}^2\rangle - \langle n_k\rangle^2 = \sum_N \langle n_k\rangle + \sum_N \langle n_k\rangle^2 \tag{5.10}$$

En prenant la situation où toutes les cellules de l'espace des phases sont peuplées avec la même valeurs moyenne $\langle n_k\rangle$, l'expression précédente se simplifie par :

$$\langle(\Delta N)^2\rangle = \langle N\rangle + \frac{\langle N\rangle^2}{G} \tag{5.11}$$

Notons premièrement qu'à faible $\langle N\rangle$, nous retrouvons le résultat des particules indépendantes c'est-à-dire que la variance suit une évolution linéaire avec $\langle N\rangle$.

Nous voyons également ici que le terme de groupement de bosons est pondéré par le coefficient G. Pour que le groupement de bosons soit appréciable par rapport au bruit de grenaille atomique, il faut que $\langle N\rangle/G$ soit de l'ordre de l'unité. Si G est trop grand ou $\langle N\rangle$ trop faible, le groupement de bosons sera noyé dans la mesure du bruit de grenaille atomique à moins de moyenner pendant des durées très longues (le rapport signal à bruit ne variant qu'en $\sqrt{N_{\mathrm{mesure}}}$, où N_{mesure} représente le nombre de mesures réalisées).

---

en posant $\alpha = \frac{\epsilon_i - \mu}{k_{\mathrm{B}}T}$ et en remarquant que $n^2 e^{-\alpha n} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(e^{-\alpha n}\right)$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle n_k^2\rangle &= (1-e^{-\alpha})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(e^{-\frac{n\alpha}{k_{\mathrm{B}}T}}\right)\\
\langle n_k^2\rangle &= (1-e^{-\alpha})\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{n\alpha}{k_{\mathrm{B}}T}}\right)\\
&= \frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})} + \frac{2e^{-2\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2}\\
&= \langle n_k\rangle + 2\langle n_k\rangle^2
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Nous trouvons bien alors que $\langle n_k^2\rangle - \langle n_k\rangle^2 = \langle n_k\rangle + \langle n_k\rangle^2$

Estimons l'ordre de grandeur du nombre moyen de particules dans un même état quantique pour un gaz froid dans un piège harmonique $3D$. A l'équilibre thermodynamique, la largeur en impulsion d'un nuage non dégénéré est donnée dans les trois directions de l'espace par $\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z \simeq \sqrt{mk_BT}$. Ainsi, le nombre moyen d'atomes par état quantique est $\frac{N}{G} \simeq \frac{N_{\text{tot}}}{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \Delta x \Delta y \Delta z} \simeq n_{3\text{D}} \lambda_{\text{dB}}^3$ où n_{3D} est la densité atomique 3D. Pour mesurer un groupement de bosons le plus grand possible par rapport au bruit de grenaille atomique, il faut que $n_{3\text{D}} \lambda_{\text{dB}}^3$ soit le plus grand possible. L'expression précédente n'est pas sans rappeler, à un facteur numérique près, le critère de condensation pour un gaz idéal confiné dans un piège harmonique isotrope 3D. Or nous savons que dans le cas d'un condensat pur, ses fluctuations de densité sont données par le bruit de grenaille atomique (dans le cas sans interaction[4]). Ceci limite donc la valeur de $n_{3\text{D}} \lambda_{\text{dB}}^3$ à 2.612. Nous verrons dans le paragraphe §5.2.2.1 qu'il est possible de repousser cette limite en prenant des nuages très anisotropes.

5.1.2 Analogie avec l'optique : le corps noir

En 1909, Einstein obtint, en calculant les fluctuations d'intensité optique d'un corps noir [113, 114], une expression analogue à celle que nous venons d'obtenir (équation 5.11). Il considère, pour cela, une cavité optique de volume V_0 contenant un rayonnement thermique de fréquence compris entre ν et $\nu + \delta\nu$ et note η l'énergie instantanée contenu dans le volume V.

Au cours du temps η va fluctuer autour de sa valeur moyenne η_0. En supposant que les variations de η autour de η_0 sont petites ($\eta = \eta_0 + \epsilon$ avec $\epsilon \ll \eta_0$), Einstein montre que ses fluctuations $\Delta\eta^2$ s'écrivent [113] :

$$\Delta\eta^2 = \langle(\eta - \eta_0)^2\rangle = h\nu\eta_0 + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu}\frac{\eta_0^2}{v} \tag{5.12}$$

Avec cette équation écrite sous sa forme originale, Einstein met en évidence sur la dualité onde-corpuscule de la description de la lumière. En effet, le premier terme de 5.12, proportionnel à η_0, montre le comportement particulaire de la lumière (bruit de photons) alors que le second terme proportionnel η_0^2 correspond à son comportement ondulatoire. La présence du second terme dans les fluctuations de η résulte d'interférences constructives ou destructives au cours du temps des différentes composantes du champ électrique présent dans la cavité optique (différents modes de cavité).

Voyons intuitivement comment nous pouvons retrouver ce second terme : le champ électrique à l'intérieur du volume V est la superposition cohérente d'une multitude de champs électriques d'amplitude a_n et de phase ϕ_n associée à la répartition thermique suivant les différents modes de la cavité. En appliquant le théorème de la limite centrale,

[4]En effet, l'approche précédente n'est valable que dans le formalisme grand canonique où l'on suppose avoir un réservoir contenant un grand nombre de particules N_0 [112]. Pour un condensat pur, l'ensemble des particules se trouvent dans le même niveau d'énergie et cette hypothèse n'est pas vérifiée.

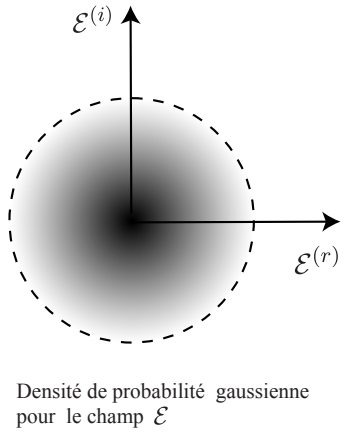

FIG. 5.2 – Allure de la densité de probabilité du champ électrique pour un mode du rayonnement du corps noir dans le plan complexe Re($\mathcal{E}$) et Im($\mathcal{E}$).

la densité de probabilité de la somme de ces champs pour la partie réelle $\mathcal{E}^{(r)} = \sum \mathcal{E}_n^{(r)}$ et la partie imaginaire $\mathcal{E}^{(i)} = \sum \mathcal{E}_n^{(i)}$ devient gaussienne [115] :

$$\begin{aligned} p_r(\mathcal{E}^{(r)}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_r} e^{\frac{-(\mathcal{E}^{(r)})^2}{2\sigma_r^2}} \\ p_i(\mathcal{E}_{(i)}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{\frac{-(\mathcal{E}^{(i)})^2}{2\sigma_i^2}} \end{aligned} \tag{5.13}$$

et la distribution d'intensité optique est exponentielle :

$$p(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} e^{-\frac{I}{\langle I \rangle}} \tag{5.14}$$

Ainsi les fluctuations de I sont données par $\langle \Delta I \rangle = 2\langle I \rangle^2 - \langle I \rangle^2 = \langle I \rangle^2$. En intégrant sur toutes les fréquences comprises entre ν et $\nu + d\nu$ nous obtenons :

$$\langle \Delta I^2_{\nu,\nu+d\nu} \rangle = \frac{I^2_{\nu,\nu+d\nu}}{G} \tag{5.15}$$

où G correspond au nombre de modes compris en ν et $\nu + d\nu$. Nous voyons notamment que plus G sera grand et plus le coté "ondulatoire" de la lumière sera écranté par son coté "corpusculaire". La mesure des fluctuations d'intensité ne donnera accès qu'au bruit de grenaille photonique (*shot noise* en anglais). Dans le cas contraire, si nous observons le rayonnement du corps noir dans des conditions telles que $G \simeq 1$, par exemple en utilisant un filtre très sélectif en longueur d'onde (voir §5.1.4.1), il est possible de mesurer cet excès

de bruit $\frac{I^2_{\nu,\nu+d\nu}}{G}$ par rapport au bruit de grenaille. Les photons se rassemblent, on parle alors de groupement de photons (ou *bunching* en anglais).

Ordre de grandeur :

A quelle condition sera-t-il possible d'observer le groupement de bosons ? Prenons par exemple, un corps noir à la température de 5800 K (soleil). Le nombre de photons par mode est donné par la loi de Planck et vaut $1/(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1)$ soit 10^{-2} si nous observons la longueur d'onde de 550 nm. Cette valeur est très faible. En pratique, la plupart des modes sont vides, et le soleil se comporte comme une source classique dans la mesure où le bruit de grenaille photonique est prédominant devant le groupement de photons. Pour avoir un taux d'occupation par mode de l'ordre de l'unité, il faudrait avoir une température de l'ordre 40000 K pour la même longueur d'onde d'observation[5].

5.1.3 Fonctions de corrélation du premier et du second ordre

Les résultats sur le groupement de bosons peuvent se retrouver plus rigoureusement à partir des fonctions de corrélation du premier et du second ordre. Nous nous intéresserons ici uniquement au cas des bosons. Dans le formalisme de la seconde quantification [101], nous introduirons les opérateurs création et annihilation d'une particule au point $\mathbf{r}$ par respectivement $\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ et $\widehat{\Psi}(\mathbf{r})$:

$$\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_i \phi_i^*(\mathbf{r})\widehat{a}_i^\dagger \qquad \text{et} \qquad \widehat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_i \phi_i(\mathbf{r})\widehat{a}_i \tag{5.16}$$

avec $\widehat{a}_i$ et $\widehat{a}_i^\dagger$ les opérateurs création et annihilation d'une particule dans le mode ϕ_i, qui vérifient les lois de commutations usuelles : $[\widehat{a}_i, \widehat{a}_j^\dagger]$=0 si $i \neq j$ et $[\widehat{a}_i, \widehat{a}_i^\dagger]$=1.

Nous définissons les fonctions de corrélation du premier ordre $G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r'})$ et du second ordre par $G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r'})$ par :

$$G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r'}) = \langle \widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\widehat{\Psi}(\mathbf{r'})\rangle$$

$$\text{et} \tag{5.17}$$

$$G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r'}) = \langle \widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r'})\widehat{\Psi}(\mathbf{r'})\widehat{\Psi}(\mathbf{r})\rangle \tag{5.18}$$

$$\tag{5.19}$$

[5]Notons qu'il est possible d'augmenter ce facteur en jouant sur la longueur d'onde d'observation en se décalant notamment vers l'infrarouge.

ainsi que leurs formes normalisées :

$$g^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r'}) = \frac{G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r'})}{\sqrt{G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r})}\sqrt{G^{(1)}(\mathbf{r'},\mathbf{r'})}} \tag{5.20}$$

et

$$g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r'}) = \frac{G^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r'})}{G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r})G^{(1)}(\mathbf{r'},\mathbf{r'})} \tag{5.21}$$

$$\tag{5.22}$$

Interprétation physique des fonctions de corrélation :

- la fonction $g^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r'})$ donne en optique la valeur du contraste (i.e. la cohérence spatiale du champ électrique) des interférences produites, par exemple par deux faisceaux laser d'intensités égales.
- la fonction $g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r'})$ traduit la cohérence spatiale en intensité de la source en étudiant par exemple les propriétés du speckle d'une source laser.

Les propriétés de la fonction de corrélation du second ordre peuvent, dans le cas d'un gaz idéal au-dessus du seuil de condensation, s'écrire en fonction de la fonction de corrélation du premier ordre [116] :

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r'}) &= \langle\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r'})\widehat{\Psi}(\mathbf{r'})\widehat{\Psi}(\mathbf{r})\rangle \\ &= \sum_{klmn}\phi_k^*(\mathbf{r})\phi_l^*(\mathbf{r'})\phi_m(\mathbf{r'})\phi_n(\mathbf{r})\langle\widehat{a}_k^\dagger\widehat{a}_l^\dagger\widehat{a}_m\widehat{a}_n\rangle \\ &= |\langle\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\widehat{\Psi}(\mathbf{r})\rangle|^2 + |\langle\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r'})\widehat{\Psi}(\mathbf{r})\rangle|^2 + \\ &\quad \sum_m |\phi_m(\mathbf{r})|^2|\phi_m(\mathbf{r'})|^2(\langle\widehat{a}_m^\dagger\widehat{a}_m^\dagger\widehat{a}_m\widehat{a}_m\rangle - 2\langle\widehat{a}_m^\dagger\widehat{a}_m\rangle\langle\widehat{a}_m^\dagger\widehat{a}_m\rangle) \end{aligned} \tag{5.23}$$

D'après le théorème de Wick [117], pour un gaz de Bose au-dessus du seuil de condensation, $\langle\widehat{a}_m^\dagger\widehat{a}_m^\dagger\widehat{a}_m\widehat{a}_m\rangle = 2\langle\widehat{a}_m^\dagger\widehat{a}_m\rangle\langle\widehat{a}_m^\dagger\widehat{a}_m\rangle$. Ainsi chacun des termes de la somme de l'équation 5.23 s'annule et nous en déduisons la forme simplifiée de $G^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r'})$:

$$G^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r'}) = G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r})G^{(1)}(\mathbf{r'},\mathbf{r'}) + |G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r'})|^2 \tag{5.24}$$

ce qui donne en utilisant les notations normalisées :

$$g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r'}) = 1 + |g^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r'})|^2 \tag{5.25}$$

A partir de l'expression 5.25, nous voyons facilement que :

- à grande distance comme $\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|\to+\infty} g^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r'}) = 0$, $\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|\to+\infty} g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r'}) = 1$ et nous retrouvons le résultat classique des particules indépendantes.
- pour $\mathbf{r} = \mathbf{r'}$ nous constatons que $g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r'}) = 2$. Ainsi la probabilité de détecter deux particules au même endroit est deux fois plus grande à courtes distances qu'à grandes distances.

Différents types d'expériences ont permis de déterminer les propriétés de la fonction $g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Comme nous allons le voir, la forme de cette fonction a été mesurée expérimentalement pour des photons (§5.1.4.1) ainsi que pour des particules massiques (fermions et bosons). La valeur de $g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r})$ peut également être déterminée expérimentalement à partir du taux de photoassociation de molécules diatomiques, processus qui nécessite la présence de deux particules dans un proche voisinage [118] [6].

Pour les expériences que nous avons réalisées dans la suite de ce manuscrit, nous verrons que nous ne sommes pas capable de résoudre la forme de la fonction de corrélation $g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ puisque sa longueur caractéristique de décroissance, donnée par λ_{dB} ($\simeq$ 300 nm), est très petite par rapport à la taille de notre pixel de caméra CCD ($\Delta = 6$ μm). Nous intégrerons, alors une grande portion de la courbe où $g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ est constante ce qui réduit la contribution du groupement de bosons par rapport au bruit de grenaille atomique, diminuant par conséquence notre rapport signal à bruit [7].

5.1.4 Observations antérieures du groupement de bosons

Par le passé, le groupement de bosons a déjà été observé par la mesure de la fonction de corrélation $g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ dans différents configurations. Nous présenterons dans cette section un bref historique de cette mesure : la première date de 1956 et a été obtenue par R. Hanbury Brown et R. Q. Twiss sur les photons [106,120,121](§5.1.4.1). En ce qui concerne les atomes froids, la fonction $g^{(2)}$ a été mesurée pour la première fois en 1996 par M. Yasuda et F. Shimizu sur un jet continu d'atomes de néon [122] (voir §5.1.4.2)[8]. Plus récemment, l'équipe d'Immanuel Bloch l'a observée sur un nuage d'atomes froids après expansion, une fois piégé dans un réseau optique dans la phase de MOTT (§5.1.4.3) [123]. Dans notre groupe, la fonction $g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ a été obtenue à partir de la mesure en position de chacune des particules d'hélium métastable et ce après un long temps de vol [107].

5.1.4.1 Avec les photons : Expérience de Hanbury Brown et Twiss

Initialement Hanbury Brown et Twiss voulaient mesurer le diamètre angulaire d'étoile par méthode interférométrique [124]. Cependant, la tâche fût plus compliquée que prévu puisque les fluctuations temporelles de l'indice de réfraction de l'atmosphère produisent un déplacement rapide des franges d'interférences et donc un brouillage (par intégration temporelle). Pour cette raison, ils ont décidé de développer une méthode de mesure du diamètre angulaire de l'étoile (basé sur la cohérence spatiale de la source) qui s'affranchit des perturbations atmosphériques. Pour cela, ils ont mesuré la corrélation temporelle du temps d'arrivée des photons sur deux photodétecteurs en fonction de leur écartement

[6] il est également possible de sonder la fonction de corrélation d'ordre 3 en regardant les pertes à trois corps résultant de la collision inélastique de trois particules [119].

[7] le bruit de grenaille atomique étant un bruit blanc, sa contribution est constante quelque soit la taille du pixel considérée.

[8] dans cette configuration, ils sondent la cohérence temporelle de la source.

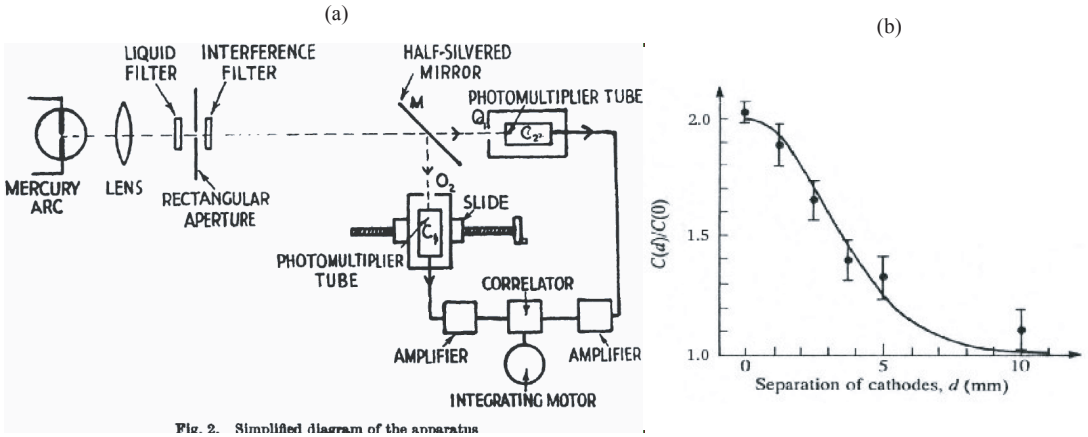

FIG. 5.3 – Figure (a) : schéma du dispositif expérimental utilisé par Hanbury Brown et Twiss. Une lampe à vapeur de mercure éclaire deux photomulticateurs au travers d'une lame séparatrice. Figure (b) : résultat de la corrélation temporelle obtenue à partir des deux signaux issus des photomultiplicateurs et pour différentes positions de ces derniers.

mutuel [106] ce qui leur permettait ainsi de remonter aux propriétés de cohérence spatiale de la source. Avant de réaliser cette expérience grandeur nature, ils ont décidé de réaliser une expérience de principe dont le schéma expérimental est présenté sur la figure 5.3. Une lampe à vapeur de mercure éclaire, après passage au travers d'une lame séparatrice, deux photomultiplicateurs. Hanbury Brown et Twiss effectuent ensuite la corrélation temporelle des signaux issus des deux photodétecteurs en fonction de la distance qui les séparent (voir figure 5.3(b)). Leurs résultats montrent que lors que les détecteurs sont suffisamment espacés, il n'y a pas de corrélation temporelle entre les deux signaux. Au contraire, à faibles distances, ils observent une probabilité conjointe non nulle de détecter deux photons de la source [106, 120, 121].

5.1.4.2 Dans un jet atomique : expérience de Masuda et Shimizu

La première mesure de la fonction d'auto-corrélation sur des particules massiques a été réalisée par Masuda et Shimizu en 1996. Un jet atomique de Néon métastable ^{12}Ne est obtenu à partir d'un piège magnéto-optique (température de 2.5 mK) et extrait en continu avec un laser à 598 nm un jet atomique en pompant les atomes entre l'état piégeant $3S^3P_2$ et l'état $3S^3P_0$ non piégeant [125]. Les atomes tombant alors sous l'effet de la gravité viennent percuter un miroir en or. Lorsqu'une particule de néon métastable heurte le miroir, un électron résultant de la collision est arraché à un atome du miroir. Cet électron est ensuite accéléré puis amplifié. L'impulsion électrique générée est ensuite détectée électroniquement. La corrélation des temps d'arrivée des différentes particules

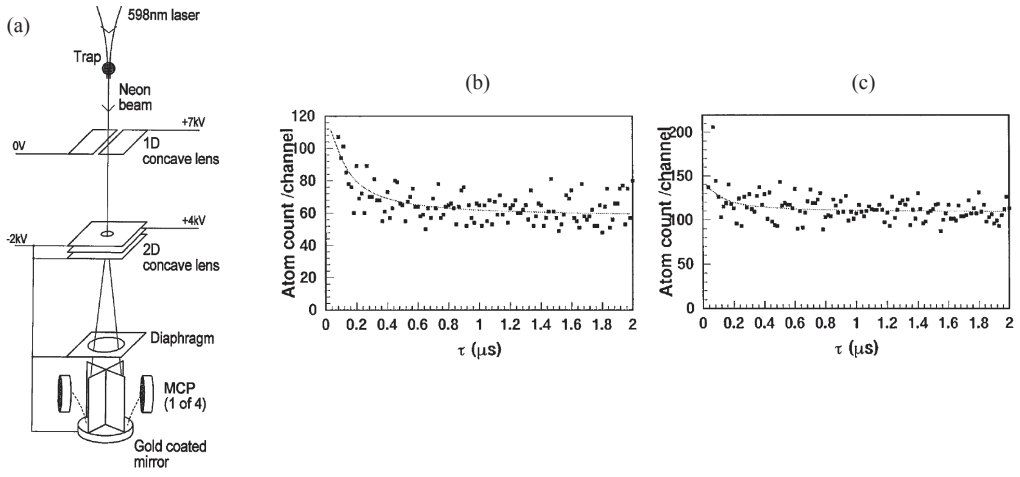

FIG. 5.4 – Figure (a) : schéma du dispositif expérimental utilisé par Yasuda et Shimizu pour mesurer les corrélations temporelles entre les temps d'arrivée, sur le miroir d'or, de différentes particules issues d'un même jet atomique de néon métastable. Les résultats obtenus et présentés sur les figures (b) et (c) respectivement en présence et en absence de lentille de défocalisation. Figures extraites de [125].

sur le détecteur peut ensuite être calculée au moyen d'un corrélateur. Cette mesure s'apparente dans le principe à la mesure originale de Hanbury Brown et Twiss.

Le résultat de la corrélation temporelle du jet a été reporté sur la figure 5.4(c). Pour la première série d'expérience, aucune corrélation temporelle n'est visible même à faible intervalle de temps d'arrivée. Cette absence de corrélation s'explique par la très faible cohérence temporelle de la source qui provient d'une dispersion en vitesse transverse du jet atomique trop importante. Pour pallier ce problème, Masuda et Shimizu ont choisi d'utiliser une lentille (champ électrique) pour défocaliser le jet sur le miroir de détection et ainsi d'opérer une sélection en vitesse du jet en pour accroître sa cohérence temporelle (voir figure 5.4(a)). Dans ce cas, le résultat de la corrélation temporelle des temps d'arrivée des particules est beaucoup plus concluant (figure 5.4(b)). Les auteurs observent, dans ce cas, une probabilité plus importante de détecter deux particules pour une différence de temps faible que pour une différence de temps d'arrivée importante, démontrant pour la première fois l'effet Hanbury Brown et Twiss pour des particules massiques.

5.1.4.3 Dans un réseau optique : expérience de Fölling *et al.*

Dans cette expérience [109], Fölling *et al* prépare dans un réseau optique 3D un gaz ultra-froid de bosons dans la phase de Mott [126] avec quelques centaines de milliers d'atomes. Dans cette phase, les interactions répulsives entre atomes imposent un nombre

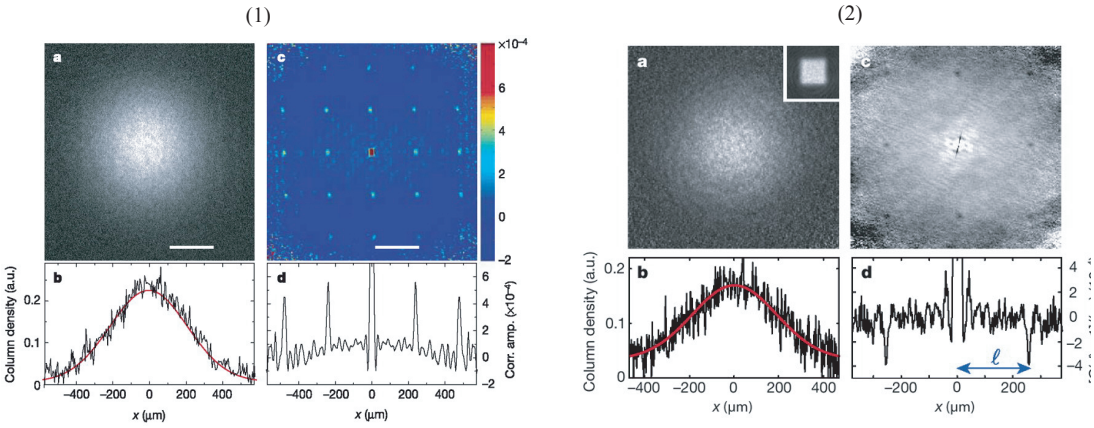

FIG. 5.5 – Un nuage d'atomes froids est initialement piégé dans un réseau optique. Après un temps de vol, un cliché photographique est acquis. Les figures (1) et (2) correspondent aux résultats expérimentaux obtenus respectivement dans le cas de bosons (^{87}Rb) et dans le cas de fermions (^{40}K). A partir des fluctuations de densité mesurées autour de sa valeur moyenne figure 1(b) et 2(b), le calcul de la fonction d'autocorrélation permet de remonter à l'allure de la fonction $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ (groupement de bosons figure (1(d)) et anti groupement de fermions 2(d)). Figures reproduites à partir de [109].

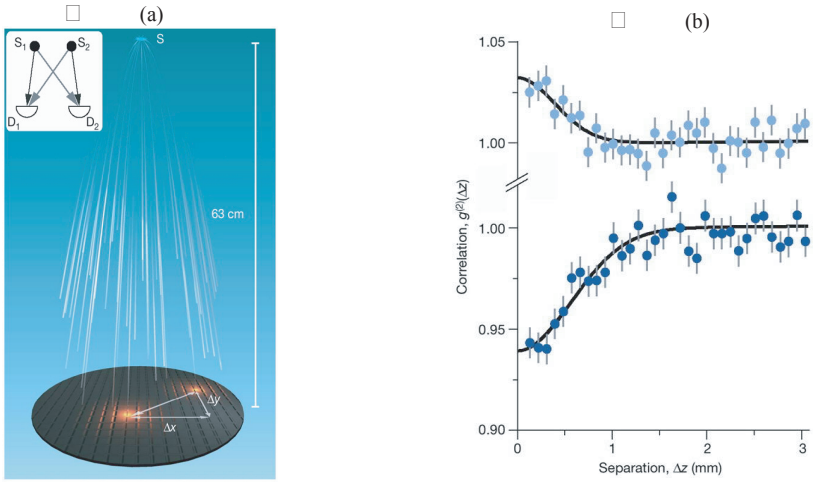

FIG. 5.6 – Figure (a) : description du dispositif expérimental. Un nuage d'atomes froids d'hélium métastable (^{4}He) ou (^{3}He) est relaché après la coupure du piège. Le nuage s'étend au cours du temps de vol et tombe sous l'effet de la gravité sur la galette à micro-canaux. Sur la figure (b) sont représentés les résultats de la fonction $g^{(2)}(|z-z'|,0)$ dans le cas des bosons (cercles blancs) et dans le cas des fermions cercles noirs pour une température de 0.5 μK. La fonction $g^{(2)}(|z-z'|,0)$ ne monte pas à sa valeur théorique de 2 à cause de la résolution finie du détecteur. Figures reproduites à partir de [108].

entier de particules par site (entre 1 et 3 dans leur expérience). Les atomes sont ensuite relâchés du réseau puis détectés par imagerie par absorption après un temps de vol (10 ms). Des images typiques sont montrées sur les figures 5.5(2,a) et 5.5(2,b). Le profil de densité (coupe horizontale) présente d'importantes fluctuations autour de sa valeur moyenne (obtenue par un ajustement avec une gaussienne). En faisant l'autocorrélation de ces fluctuations, ils obtiennent la courbe 5.5(2,d) présentant des pics d'intensité régulièrement espacés qui correspondent à la fonction de corrélation $g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, comme attendu pour les bosons $g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r}') > 1$ lorsque $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ est faible. Ils ont également répétés la même expérience avec un nuage fermionique (^{40}K). Dans ce cas, le calcul de l'autocorrélation produit des minima d'intensité montrant que la fonction de corrélation est inférieure à 1 lorsque $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \to 0$.

5.1.4.4 Dans un nuage de Bose en expansion : expérience de Schellekens *et al.*

L'une des spécificités de cette expérience réside dans l'utilisation d'atomes d'hélium métastable combinés avec un détecteur sensible en position. La différence d'énergie de 20 eV entre l'état métastable piégé et le véritable état fondamental permet de détecter individuellement les particules heurtant le détecteur, tout comme dans l'expérience de

Masuda et Shimizu. Ici, le détecteur utilisé est une galette micro-canaux [127] sensible en position et résolue en temps de sorte à pouvoir remonter à la position de chacune des particules dans les trois dimensions de l'espace. Un nuage froid d'hélium métastable est initialement préparé dans un piège magnétique, au-dessus du seuil de condensation puis lâché au-dessus de la galette micro-canaux. A partir de l'enregistrement des positions transverses et du temps d'arrivée sur le détecteur (donnant la position suivant la troisième direction), il est possible de reconstituter la fonction de corrélation $g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ à trois dimensions. La figure 5.6 tirée de [107] présente le schéma du dispositif expérimental ainsi que les résultats obtenus dans le cas des bosons (^{4}He) et dans le cas de fermions (^{3}He) où nous voyons clairement l'effet de groupement pour les bosons et d'anti-groupement pour les fermions.

Cette mesure est rendue possible par la détection individuelle des particules. Comme nous allons voir dans la suite de ce chapitre, pour une imagerie par absorption standard, l'intégration de la densité atomique suivant l'axe d'imagerie réduit considérablement le signal de groupement de bosons si l'imagerie n'est pas faite après temps de vol. Cependant pour des conditions expérimentales bien choisies (piège fortement anisotrope), cet effet est néanmoins mesurable.

5.2 Effet du groupement de bosons sur les fluctuations de densité d'un gaz atomique

Dans cette section, nous allons voir comment les fluctuations de densité présentes dans un gaz de Bose sont reliées à la fonction de corrélation du second ordre $g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Nous donnerons également une expression des fluctuations du nombre d'atomes détectés sur des images prises par absorption.

5.2.1 Lien entre fluctuations de densité et la fonction de corrélation $g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$

Ecrivons l'expression des fluctuations de densité $\langle n(\mathbf{r})n(\mathbf{r'})\rangle$ autour de sa valeur moyenne $\langle n(\mathbf{r})\rangle\langle n(\mathbf{r'})\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle n(\mathbf{r})n(\mathbf{r'})\rangle - \langle n(\mathbf{r})\rangle\langle n(\mathbf{r'})\rangle &= \langle\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\widehat{\Psi}(\mathbf{r})\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r'})\widehat{\Psi}(\mathbf{r'}) - \langle\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\widehat{\Psi}(\mathbf{r})\rangle\langle\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r'})\widehat{\Psi}(\mathbf{r'})\rangle \\
&= G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r'})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r'}) + G^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r'}) - \langle n(\mathbf{r})\rangle\langle n(\mathbf{r'})\rangle \\
&= G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r'})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r'}) + |G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r'})|^2
\end{aligned} \tag{5.26}$$

A partir de l'équation 5.26, nous voyons le lien entre fluctuations de densité et fonction de corrélation du premier et du second ordre.

Le premier terme de 5.26 représente des fluctuations de densité qui est proportionnelle à $\langle n(\mathbf{r})\rangle$. Il correspond au bruit de grenaille atomique dont la densité spectrale

de bruit est blanche. Le terme $|G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r'})|^2$ est, quant à lui, associé au groupement de bosons. Comme nous le présentions dans l'introduction, le groupement de bosons accroît les fluctuations de densité du gaz. Dans la suite de ce chapitre, nous observerons le groupement de bosons à partir de la mesure des fluctuations de densité. D'un point de vue pratique, nous mesurerons les fluctuations du nombre d'atomes contenus dans un pixel d'extension $\Delta_x \times \Delta_z$ de la caméra CCD. En utilisant la densité atomique longitudinale intégrée dans les deux directions transverses n_{1D}, la variance du nombre d'atomes contenus dans un pixel s'écrit :

$$\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 = \int_{-\frac{\Delta_z}{2}}^{\frac{\Delta_z}{2}}\int_{-\frac{\Delta_z}{2}}^{\frac{\Delta_z}{2}} \big(\langle n_{1D}(z)n_{1D}(z')\rangle - \langle n_{1D}(z)\rangle\langle n_{1D}(z')\big)\rangle dz dz' \tag{5.27}$$

5.2.2 Fluctuations de densité dans un gaz de Bose idéal dans un piège harmonique anisotrope

Nous allons donner les résultats du calcul précédent dans le cas d'un piège harmonique anisotrope. Pour cela, nous considérons un gaz de Bose à l'équilibre thermodynamique confiné dans un piège harmonique de fréquences d'oscillation radiale $\omega_\perp$ et longitudinale ω_z. Comme nous venons de le voir, les fluctuations de densité $\langle n(\mathbf{r})n(\mathbf{r'})\rangle - \langle n(\mathbf{r})\rangle\langle n(\mathbf{r'})\rangle$ sont directement reliées aux propriétés de $G^{(1)}$ qui elle-même est obtenue pour d'un piège harmonique en calculant :

$$G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_i \psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}')\frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i-\mu)}-1} \tag{5.28}$$

où $\frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i-\mu)}-1}$ correspond au taux d'occupation moyen pour un niveau d'énergie ϵ_i.

En suivant le calcul fait dans [116], on peut montrer que (voir annexe C) :

$$\begin{aligned}\langle n_{1D}(z)n_{1D}(z')\rangle - \langle n_{1D}(z)\rangle\langle n_{1D}(z')\rangle &= \langle n_{1D}(z)\rangle\delta(z-z') \\ &+\frac{1}{\lambda_{\mathrm{dB}}^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{(i+j)\beta\mu(z)}}{\sqrt{ij}}\frac{e^{-\pi\frac{(z-z')^2}{\lambda_{\mathrm{dB}}^2}(\frac{1}{i}+\frac{1}{j})}}{[1-e^{-\beta\hbar\omega_\perp(i+j)}]^2}\end{aligned} \tag{5.29}$$

Pour obtenir l'expression 5.29, nous avons utilisé l'approximation de densité locale [128] dans la direction longitudinale (valide pour $\beta\hbar\omega_z \ll 1$ et un nuage non condensé), qui consiste à supposer que les propriétés locales du gaz peuvent être décrites à l'aide d'un potentiel chimique effectif dépendant de la position longitudinale $\mu(z) = \mu_0 - \frac{1}{2}m\omega_{\mathrm{m}}^2 z^2$, où μ_0 est le potentiel chimique réel du gaz. Notons que l'expression 5.29 est légèrement différente de celle donnée dans la référence [116] puisque Roy Glauber *et al.* utilise l'approximation de densité locale dans les trois directions de l'espace, ce qui revient à

supposer en plus que $\beta\hbar\omega_\perp \ll 1$. Cette approximation n'est pas justifiée dans notre cas puisque comme nous verrons dans §5.4.4.1 que $\beta\hbar\omega_\perp$ vaut typiquement 2.

L'expression 5.29 peut être simplifiée pour des gaz faiblement dégénérés ($n_{1D}\lambda_{\rm dB} \ll 1$) en utilisant l'approximation de Maxwell-Boltzmann.

Approximation de Maxwell-Boltzmann :

Lorsque le gaz est faiblement dégénéré, $|\beta\mu| \gg 1$, seul le premier terme de la somme ($i = j = 1$) de l'équation 5.29 contribue significativement aux fluctuations de densité. Dans ce cas, nous obtenons alors l'expression simplifiée :

$$\begin{aligned}\langle n_{1D}(z)n_{1D}(z')\rangle - \langle n_{1D}(z)\rangle\langle n_{1D}(z')\rangle &= \langle n_{1D}(z)\rangle\delta(z-z') \\ &\quad + \langle n_{1D}(z)\rangle\langle n_{1D}(z')\rangle e^{-2\pi\frac{(z-z')^2}{\lambda_{\rm dB}^2}} \tanh^2(\frac{\beta\hbar\omega_\perp}{2})\end{aligned} \tag{5.30}$$

Nous retrouvons alors avec le second terme de 5.30, la forme gaussienne "traditionnelle" de la fonction de corrélation $g^{(2)}(z,z')$ dont la largeur à $1/e^2$ vaut $\lambda_{\rm dB}/\sqrt{\pi}$.

Les fluctuations du nombre d'atomes par pixel s'obtiennent en intégrant l'expression précédente sur Δ_z. En supposant que $\mu(z)$ est constant sur l'extension Δ_z, nous obtenons :

$$\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 = \langle N\rangle + \langle N\rangle^2 \frac{\lambda_{\rm dB}}{\sqrt{2}\Delta_z} \tanh^2(\frac{\beta\hbar\omega_\perp}{2}) \tag{5.31}$$

A partir de cette expression 5.31 nous trouvons, par identification une estimation du facteur G, que nous avions défini dans l'introduction ($\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 = \langle N\rangle + \frac{\langle N\rangle^2}{G}$), et qui correspond au nombre d'états quantiques observés[9] :

$$G = \frac{\sqrt{2}\Delta_z}{\lambda_{\rm dB}\tanh^2(\frac{\beta\hbar\omega_\perp}{2})}. \tag{5.32}$$

Nous avons tracé sur la figure 5.7, l'évolution du facteur G en fonction de la température du nuage pour une fréquence d'oscillation transverse de 2.85 kHz et une taille de pixel de $\Delta_z = 6$ μm. Nous constatons que G atteint des valeurs supérieures à 10000 dès que T dépasse $7\hbar\omega_\perp/k_{\rm B}$. Pour obtenir un groupement de bosons observable, c'est-à-dire un excès de bruit au moins supérieur de 10% par rapport au bruit de grenaille atomique et ce pour un nombre d'atomes par pixel de 200 (voir note[10]), il faut que la température du nuage soit inférieure à $3.5\hbar\omega_\perp/k_{\rm B}$.

Pour ces valeurs typiques de température et de densité atomique, le gaz est, bien que non condensé, très dégénéré ($n_{1\rm D}\lambda_{\rm dB} \simeq 10$ pour $T = 2.4\hbar\omega_\perp/k_{\rm B}$ et $\langle N\rangle = 200$) et

[9] Il n'y a en fait pas identification exacte avec le facteur G défini dans l'introduction puisque nous avions supposé, à ce moment que le taux d'occupation de tous les états quantiques peuplés était identique ce qui n'est pas le cas ici.

[10] Valeur typique atteignable expérimentalement.

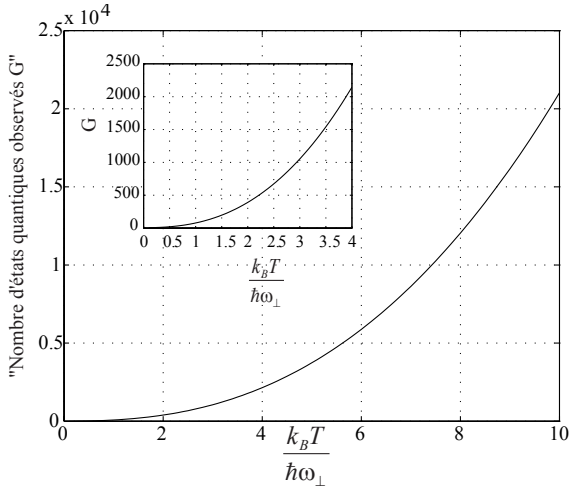

FIG. 5.7 – Evolution du nombre d'états quantiques observé dans un pixel en fonction de la température en unité réduite $k_B T/(\hbar\omega_\perp)$ pour $\omega_\perp = 2.85$ kHz.

nous pouvons nous demander si l'approximation de Maxwell-Boltzmann reste légitime. Sur la figure 5.8, nous avons tracé les fluctuations de densité données par l'équation 5.29 en tronquant la double somme à différentes valeurs que nous noterons $i_{\max}$ et $j_{\max}$. En partant de la courbe du bas et en remontant nous trouvons respectivement $i_{\max} = j_{\max} = 1$, $i_{\max} = j_{\max} = 2$, $i_{\max} = j_{\max} = 5$, $i_{\max} = j_{\max} = 10$, $i_{\max} = j_{\max} = 20$, et $i_{\max} = j_{\max} = 30$. Ces courbes ont été tracées pour une température du nuage de $2.4\hbar\omega_\perp/k_B$ et $\omega_\perp/(2\pi) = 2.85$ kHz, correspondant à l'un des jeux de données expérimentales.

Pour une valeur de $\langle N\rangle = 200$, nous voyons que l'approximation de Maxwell-Boltzmann est très mauvaise puisqu'elle sous-estime les fluctuations de nombre d'atomes par pixel par près d'un facteur 4. Nous constatons, de plus, que le nombre de termes à prendre en compte dans la somme pour quelle converge est relativement important. Une trentaine de termes sont ainsi nécessaires pour obtenir une convergence à mieux que 1% lorsque le nombre moyen d'atomes par pixel est de 200. De la même manière la fonction de corrélation du second ordre $g^{(2)}(z - z')$ est élargie par la dégénérescence du nuage par rapport à la simple forme gaussienne de l'approximation harmonique (voir figure 5.9).

Notons que l'écart de la formule 5.29 avec celle donnée dans l'approximation de Maxwell Boltzmann est faible dans le cas de piège isotrope où le paramètre de dégénérescence $n_{1\mathrm{D}}\lambda_{\mathrm{dB}}$ ne peut dépasser 2.612 sans que le nuage condense.

5.2.2.1 Intérêt de la géométrie unidimensionnelle

Pour avoir une chance d'observer un excès de bruit par rapport au bruit de grenaille atomique dû au groupement de bosons, il faut que le nombre moyen d'atomes par niveau quantique soit l'ordre de l'unité c'est-à-dire avoir un gaz dégénéré ($n_{1D}\lambda_{\mathrm{dB}} \simeq 1$) et avoir

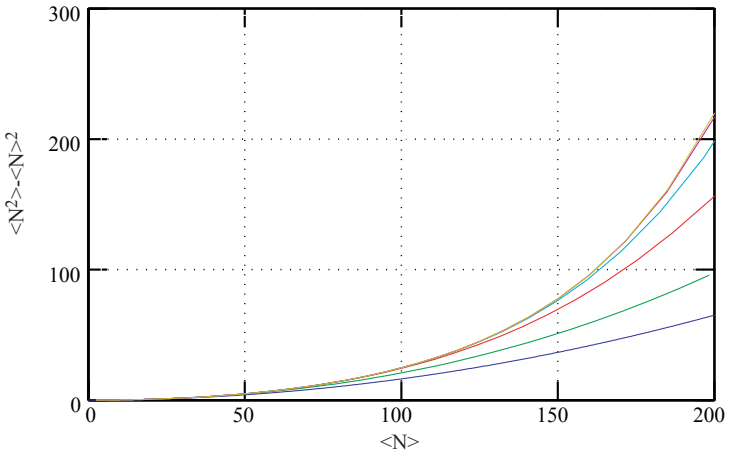

FIG. 5.8 – Evolution de la variance théorique du nombre d'atomes par pixel obtenue à partir de l'équation 5.29 pour différents de valeurs de $i_{\max}$ et $j_{\max}$ (en partant de bas en haut nous trouvons successivement $i_{\max} = j_{\max} = 1$, $i_{\max} = j_{\max} = 2$, $i_{\max} = j_{\max} = 5$, $i_{\max} = j_{\max} = 10$, $i_{\max} = j_{\max} = 20$, $i_{\max} = j_{\max} = 30$) après soustraction du bruit de grenaille. Nous observons une convergeance de la série pour $i_{\max} = j_{\max} = 30$ à mieux que 1% pour un nombre d'atomes par pixel de 200. Ces courbes ont été calculées pour $T = 2.4\hbar\omega_\perp/k_{\mathrm{B}}$ et $\omega_\perp/(2\pi) = 2.85$ kHz.

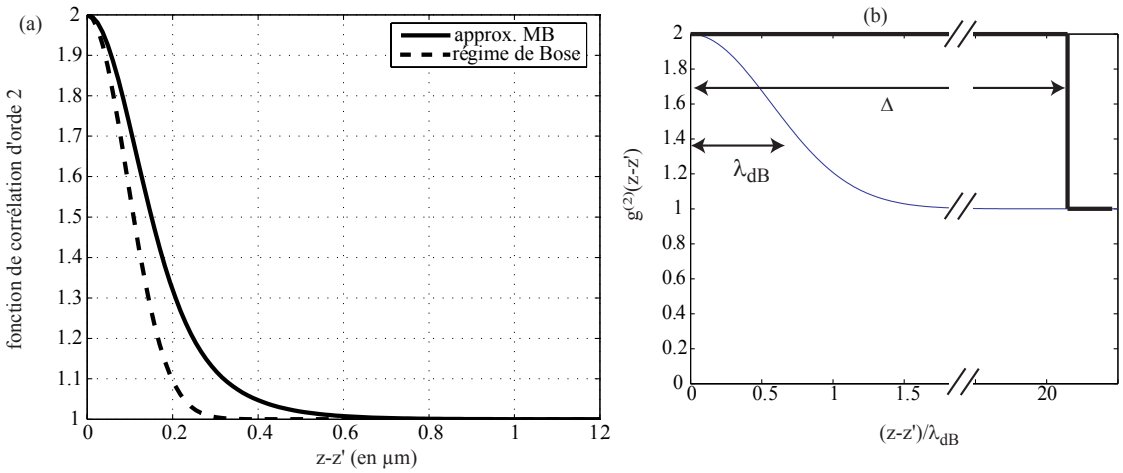

FIG. 5.9 – Figure (a) : comparaison des fonctions de corrélation d'ordre 2 dans l'approximation de Maxwell Boltzmann et dans le cas général à partir de l'équation 5.29 pour un nombre d'atome par pixel au centre du nuage de 200 et une température de 2.4 $k_BT/(\hbar\omega_\perp)$. Figure (b) : comparaison entre la largeur de la fonction de corrélation du second ordre $g^{(2)}(z,z')$ (gaussienne de largeur $\lambda_{\rm dB}/\sqrt{\pi}$ et l'extension Δ_z du pixel).

une faible valeur de G. Comment réaliser cette condition tout en restant au-dessus de la température critique de condensation ?

Pour un piège harmonique isotrope 3D : le seuil de condensation est donné par $n_{3D}\lambda_{\rm dB}^3 = 2.612$ [14]. Si nous prenons nos paramètres expérimentaux, pour conserver un gaz non condensé contenant typiquement entre 10^4 et 5×10^4 dans un piège de fréquence d'oscillation moyenne $\overline{\omega}/(2\pi) = 450$ Hz, il faut que la température soit supérieure à $T_c^{(3D)}$ soit respectivement à 430 nK ($\simeq 20\hbar\overline{\omega}/k_{\rm B}$) et 740 nK ($\simeq 34\hbar\overline{\omega}/k_{\rm B}$). Pour ces valeurs de température, l'intégration transverse par le faisceau d'imagerie va considérablement réduire le signal de groupement de bosons typiquement de l'ordre de 20^2 et 34^2 respectivement. Ceci rend difficile l'observation du groupement de bosons par rapport au bruit de grenaille atomique.

Pour un piège harmonique très anisotrope : ($\omega_\perp/(2\pi) = 2.7$ kHz, $\omega_z/(2\pi) = 10$ Hz de même fréquence moyenne $\overline{\omega}$ que précédemment) si nous reprenons la formule précédente, nous trouvons une température de condensation de l'ordre de $3\hbar\omega_\perp/k_{\rm B}$. L'effet de l'intégration transverse du faisceau d'imagerie aura alors un effet beaucoup moins néfaste que dans le cas précédent sur la mesure du groupement de bosons. Ce caractère unidimensionnel sera d'autant plus prononcé que la fréquence d'oscillation transverse sera grande. De plus à $\omega_\perp$ fixée, nous pourrons faire varier le confinement longitudinal du piège pour observer les fluctuations de densité dans le cas du gaz idéal (faible compression $\simeq 7$ Hz) ainsi que dans le régime de quasi-

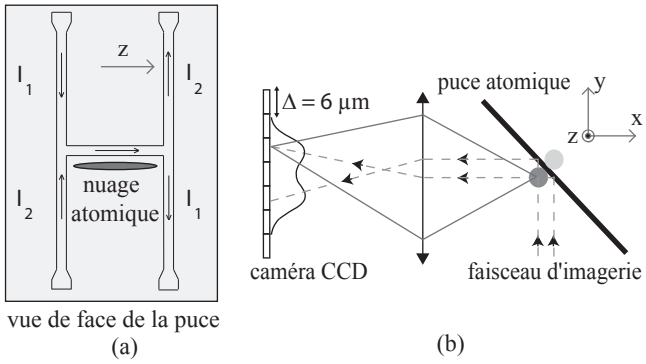

FIG. 5.10 – Configuration des courants pour réaliser un potentiel magnétique de rapport d'aspect variables. Deux alimentations de courant envoient respectivement les courants I_{Z1} et I_{Z2} dans la structure en H avec $I_{Z1} + I_{Z2}$ constant et $I_{Z1} - I_{Z2}$ variable. Des rapports d'aspect entre 100 et 400 sont atteignables.

condensat à plus forte compression ($\simeq$ 11 Hz).
Pour ces faibles valeurs de température, le nuage acquiert des propriétés unidimensionnelles pour lesquelles il est possible d'atteindre des paramètres de dégénérescence largement supérieur à l'unité sans toute fois avoir un condensat au centre du piège. Ainsi le groupement de bosons persiste (gaz non condensé) et nous bénéficions de la géométrie 1D du piège qui augmente significativement le rapport signal à bruit du groupement de bosons par rapport au bruit de grenaille atomique.

5.3 Séquences expérimentales et traitement des images

5.3.1 Obtention de pièges très anisotropes : décompression longitudinale

5.3.1.1 Une autre utilisation de la configuration en H

La structure en H présentée au chapitre 3 nous a permis de réaliser un confinement longitudinal pour le piège produit par les 5 petits fils. Ici, nous choisissons de n'utiliser que les deux courants I_{Z1} et I_{Z2} pour créer avec un champ externe homogène B_0 un piège anisotrope[11]. Sur la figure 5.10 nous avons rappelé pour mémoire la configuration de courant utilisée (I_{Z1}, I_{Z2}). Rappelons également que le champ magnétique créé par la barre centrale du H et associé au champ transverse homogène B_0 produit le confinement transverse, alors que les champs magnétiques produits par les bras du H génèrent le

[11]Le sens du courant I_{Z2} est inversé par rapport au chapitre précédent.

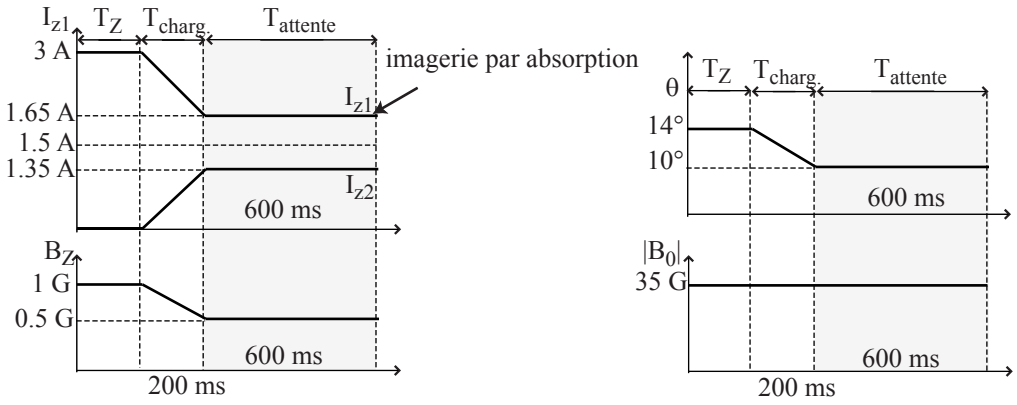

FIG. 5.11 – Chronogramme de la décompression longitudinale du piège magnétique. En 200 ms ($T_{\text{charg.}}$), le confinement longitudinal passe de 20 Hz à 7 Hz. S'en suit une période d'attente de 600 ms pendant laquelle nous appliquons un couteau radio-fréquence pour rethermaliser le nuage. La partie grisée de l'image correspond à la durée de l'onde radio-fréquence.

confinement longitudinal. En maintenant constant le courant $I_{Z1} + I_{Z2}$ circulant dans la barre centrale du H, et en faisant varier la différence $I_{Z1} - I_{Z2}$, il est ainsi possible de décomprimer le piège dans la direction longitudinale tout en gardant un confinement transverse important.

Expérimentalement, nous souhaitons avoir le confinement transverse maximal pour les raisons citées précédemment. Nous travaillons donc au courant maximum $I_{Z1}+I_{Z2} =$ 3 A (voir note[12]). En ce qui concerne le confinement longitudinal, il est en théorie possible de faire tendre la fréquence d'oscillation ω_z vers 0 (voir note[13]). En pratique nous sommes limités à 6 Hz par la présence du potentiel rugueux[14]. Nous choisissons donc de faire varier $\omega_z/(2\pi)$ entre 7 Hz et 20 Hz avec une fréquence transverse proche de 2.85 kHz.

Le chargement de ce piège décomprimé est réalisé de la manière suivante (voir figure 5.11) : initialement, nous partons du piège en Z utilisé pour obtenir le condensat, ($I_{Z1} = 3$ A,$|B| = 35$ G), contenant 5×10^4 atomes à une température de 1 μK. En 200 ms, nous rampons simultanément les courants I_{Z1} et I_{Z2} de respectivement 3 A et

[12]Valeur du courant maximum que peut supporter la barre en H pendant un temps de 3 s.

[13]Ceci en négligeant les effets de bords.

[14]Il aurait été intéressant de répéter la mesure des fluctuations de densité dans le piège modulé. Cependant, au proche voisinage des cinq fils, l'imagerie n'est pas limitée par le bruit de photons et il est très difficile d'extraire uniquement les fluctuations de densité d'un nuage à partir du signal fournit par la caméra.

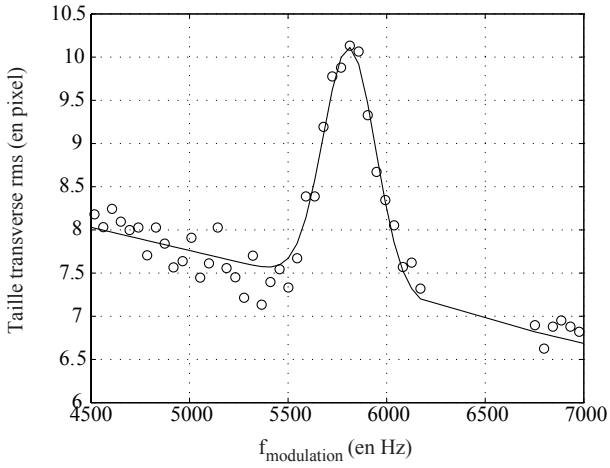

FIG. 5.12 – Taille transverse du nuage $\sigma_\perp$ après un temps de vol (5 ms) en fonction de la fréquence de modulation appliquée pour le chauffage paramétrique (le temps d'application de la modulation est de 100 ms avec une amplitude relative de quelques %). Nous observons une augmentation brutale de $\sigma_\perp$ à la fréquence $2\omega_\perp$. La fréquence transverse du piège est alors obtenue par l'ajustement des points expérimentaux par une fonction gaussienne à laquelle nous avons ajouté une droite d'inclinaison variable : $\omega_\perp/(2\pi) = (2.85\pm0.10)$ kHz. L'incertitude est donnée par la largeur rms de la gaussienne.

0 A à leurs valeurs finales $I_{Z1} = 1.65$ A et $I_{Z2} = 1.35$ A.

De plus, nous prenons garde à ce que la position transverse du piège ne soit pas juste au-dessus des petits fils. En effet, comme nous avions mentionné au chapitre précédent, l'image divisée présente des anneaux de diffraction, nous empêchant d'avoir une imagerie de bonne qualité dans cette zone, *i.e.* d'être limité par le bruit de photons. Ainsi pendant les 200 ms de rampe des courants I_{Z1} et I_{Z2}, nous tournons également l'angle du champ de homogène transverse de $\theta_1 = 16°$ et $\theta_2 = -16°$ pour déplacer la position du piège de 5 pixels en-dessous de la zone des petits fils.

Une fois le nuage transféré dans ce piège décomprimé, nous appliquons une rampe radio-fréquence pendant 600 ms pour atteindre l'équilibre thermodynamique. Le nombre d'atomes typique est de 5×10^3 pour la température la plus faible que nous arrivons à atteindre $1.4\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$. Dans ces conditions, le nuage s'étend longitudinalement sur 100 μm (valeur rms) et sa taille rms transverse théorique est de 300 nm (taille rms de l'oscillateur harmonique).

5.3.1.2 Propriétés du piège

Dans un premier temps, nous avons caractérisé le piège en H en mesurant les fréquences d'oscillations transverse et longitudinale pour deux couples de courants (I_{Z1}, I_{Z2}).

Pour la mesure de la fréquence transverse nous avons utilisée la technique du chauffage paramétrique [129]. Celle-ci consiste à moduler légèrement la fréquence d'oscillation du piège (modulation du courant $I_{Z1} = I_{Z1}^{(0)} + \delta I_{Z1}^{(1)} \cos(2\pi f t)$, $I_{Z1}^{(0)} = 3$ A, $\delta I_{Z1}^{(1)} = 100$ mA) et à regarder son effet sur le nuage atomique. Nous mesurons la largeur rms transverse $\sigma_\perp$ du nuage après un temps de vol fixé (5 ms), reflet de sa température. Des résonances très fines doivent apparaître à toutes les fréquences du type $2f_0/n$, où n est un entier et f_0 la fréquence du piège. Sur la figure 5.12, nous avons représenté une partie du spectre d'excitation du piège correspondant à la résonance à $2f_0$. Cette technique nous permet de déterminer la fréquence transverse du piège pour les deux couples de courants (I_{Z1}, I_{Z2}) suivant :

fréquence d'oscillation	$(I_{Z1} = 1.65\ A, I_{Z2} = 1.35\ A)$	$(I_{Z1} = 2\ A, I_{Z2} = 1\ A)$
$\omega_\perp/(2\pi)$	(2.75 ± 0.1) kHz	(2.85 ± 0.1) kHz
$\omega_z/(2\pi)$	7.5 Hz	11 Hz

Les fréquences longitudinales sont mesurées quant à elles, par excitation du centre de masse du nuage atomique, comme au chapitre précédent §4.4.2. Nous vérifions ainsi l'indépendance relative entre $\omega_\perp$ et ω_z.

5.3.2 Prise d'image

Le faisceau sonde, polarisé σ_+ par rapport à son axe de propagation, d'intensité $I_{\text{sat}}/10$ est accordé sur la transition $|F = 2, m_F = +2\rangle \rightarrow |F' = 3, m_F = +3\rangle$ et éclaire les atomes pendant une durée de 150 μs. Deux images sont enregistrées par la caméra CCD, la première avec les atomes lorsqu'il sont encore confinés dans le piège magnétique et la seconde 200 ms plus tard pour normalisation (*i.e.* sans atome). Nous avons préféré mesurer la distribution atomique *in-situ* par rapport à celle obtenue après un court temps de vol, pour ne pas dépendre des effets de coupures du piège (comme une légère variation du temps de réponse des alimentations, entraînant un champ magnétique variable lors de la prise d'image et donc une section efficace d'absorption variable).

A cause de la trop forte compression du piège, le nuage atomique se trouve trop près de la surface de la puce et il n'est pas possible de le résoudre de sa réflexion dans le miroir. Ainsi, sur la caméra CCD nous observons un unique nuage. Le nombre d'atome est déterminé par une section efficace d'absorption effective prenant en compte ces deux images non résolues. Pour cela, nous comparons le nombre total d'atomes mesurés *in-situ*, avec celui obtenu après temps de vol (voir figure 5.13 et figure 5.14). Dans ce second cas, l'expansion du nuage diminue suffisamment sa densité optique (< 0.1) pour pouvoir linéariser le logarithme présent de l'équation 3.23 et ainsi mesurer le réel nombre d'atomes présents (voir également le chapitre 3, §5.14). De plus, l'image du nuage atomique après temps de vol (5 ms) est obtenue en présence d'un champ magnétique homogène (12 G) orienté dans la direction du faisceau imageur. Ainsi les atomes voient un faisceau polarisé σ_+ et dans cette configuration la section efficace d'absorption est connue et vaut $3\lambda^2/(2\pi)$. La section efficace *in-situ* $\sigma_{\text{in situ}}$ se déduit de la formule $\sigma_{\text{in situ}} = N_{\text{in situ}}/N_{\text{tof}}\sigma_0$.

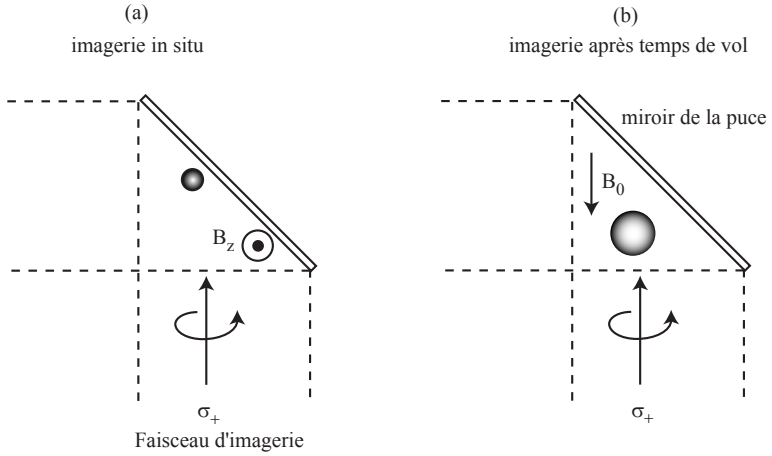

FIG. 5.13 – Configuration de champ magnétique lors de l'imagerie in situ (a) et après un temps de vol(b). Entre les deux configurations, l'orientation du champ magnétique est modifiée : il pointe majoritairement dans la direction longitudinale du nuage (0z) (1 G) pour l'image in situ et dans l'axe du faisceau d'imagerie (12 G) pour l'imagerie par temps de vol. Dans le cas (b) la section efficace d'absorption est connue ($\frac{3\lambda^2}{2\pi}$) et permet par comparaison de calibrer celle des nuages pris *in-situ*.

Malheureusement cette procédure souffre d'un défaut : la section efficace d'absorption mesurée[15] dépend de la densité atomique à l'intérieur même d'un nuage et la valeur de la section efficace mesurée est donc une moyenne. Cependant pour les nombres d'atomes que nous considérons (entre 2×10^3 et 9×10^3) la section efficace d'absorption mesurée ne varie pas de plus de 10%. En prenant en compte une erreur de 15% sur la détermination de σ_0, nous estimons une erreur totale sur la détermination du nombre d'atomes de moins de 20%. Nous reviendrons sur ce problème dans le paragraphe §5.6.2. En fait, nous corrigeons partiellement de ce problème en renormalisant le nombre d'atomes entre le cas *in-situ* et le cas après temps de vol.

5.3.3 Précautions à prendre pour être limiter par le bruit de photon

5.3.3.1 Contraintes sur le système d'imagerie

Dans cette sous-section, nous détaillerons les différentes précautions expérimentales que nous avons prises pour que le système d'imagerie soit limité par le bruit de photons.

Nous utilisons une caméra Princeton Instrument ST138 possèdant une matrice CCD

[15] la section efficace réelle des atomes ne dépend évidemment pas de la densité atomique. C'est la non linéarité du logarithme qui induit cette dépendance avec la densité lorsque nous calculons le rapport des nombres d'atomes entre le cas après temps de vol et le cas *in-situ*.

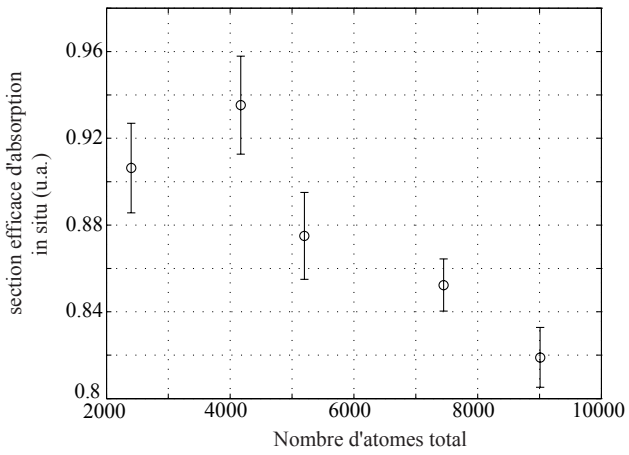

FIG. 5.14 – Evolution de la section efficace d'absorption mesurée *in-situ* en fonction du nombre d'atomes présents dans le nuage ($T = 2.4\hbar\omega_\perp$, $\omega_\perp = 2.85$ kHz). La section efficace effective s'obtient alors en multipliant le résultat obtenu (valeur des ordonnées) par la section efficace $3\lambda^2/(2\pi)$.

de 512×768 pixels (9×9 μm^2). Chacun des pixel a une efficacité quantique de 45% @780 nm et le signal issu qu'il fournit est codé sur une échelle de 4096 niveaux de gris (12 bits) avec un gain donné par le constructeur de 9.1 photons par niveaux de gris.

La caméra est montée sur deux rails supportés par quatre pieds (voir figure 5.16). Chacun de ces pieds est posé sur un morceau de sorbothane de 5 cm, pour absorber les vibrations mécaniques induites, 3 secondes avant la prise de la première image, par la montée du miroir amovible (flip-flap) au début de l'étape de piégeage magnétique (piège Z_1) (voir 3.5.2).

Le première précaution consiste à retirer la fenêtre de protection située en amont de la matrice CCD pour éviter les systèmes de franges parasites qui peuvent apparaître par la réflexion du faisceau d'imagerie sur les deux dioptres de la fenêtre (qui ne sont pas à l'origine traités anti-reflet).

Deuxièmement, nous avons limité au maximum les gradients d'indice optique (turbulences atmosphériques) pour ne pas déformer le front d'onde du faisceau d'imagerie. En effet, comme le faisceau d'imagerie est très inhomogène (variant typiquement sur Δ) (voir figure 5.18), il faut absolument que le faisceau d'imagerie ne bouge pas de plus de 6 μm entre les deux prises d'images. Après la dernière lentille, l'angle du faisceau d'imagerie ne doit pas varier de plus de $\Delta/d = 7.5 \times 10^{-5}$, où $d = 4/3f'$ est la distance entre la dernière lentille et la caméra CCD (grandissement $\times(-3)$).

Pour cela, nous avons ajouté :

– un flux laminaire au-dessus de la table optique,

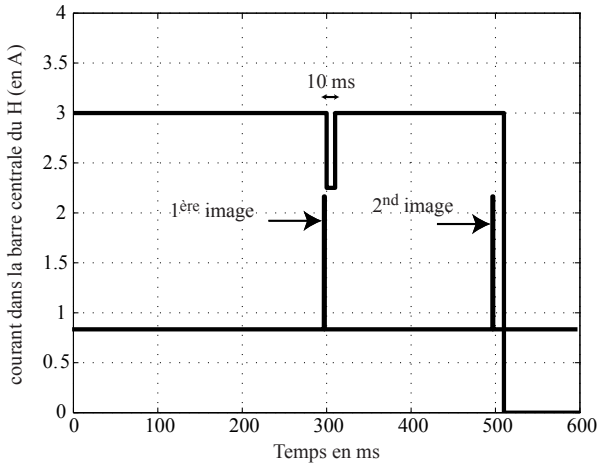

FIG. 5.15 – Chronogramme d'acquisition d'images : évolution temporelle du courant I_{Z1} ainsi que du signal TTL déclenchant la prise d'image. Après la première image(image *in-situ*), le courant dans la barre centrale du H est réduit à 2.2 A pendant 10 ms, puis réaugmenté à 3 A pendant 190 ms pour permettre au miroir d'or en surface de la puce de retrouver sa forme lors de la première image.

- des panneaux en plexiglass autour de l'ensemble de l'expérience,
- une boite en carton noir sur le système d'imagerie pour éviter toute lumière parasite,
- un refroidissement à eau des bobines quadrupolaires.

L'ensemble de ces précautions doit être pris simultanément en compte pour que le système d'imagerie soit limité par le bruit de photons (voir figure 5.16).

Une contrainte supplémentaire et inattendue a été la déformation du faisceau d'imagerie entre les deux images et ceci à cause de la déformation du miroir à la surface de la puce. Cette déformation est induite par l'élévation de température des fils par effet Joule, lors du piégeage magnétique. Pour que la division entre les deux images se passe correctement, il faut vérifier que le miroir retrouve la même position lors de la prise de la seconde image (200 ms plus tard). Comme le régime thermique stationnaire n'est pas encore atteint, nous devons diminuer le courant dans la structure en H à $I_{z1} = I_{z1,\text{réduit}}$ $I_{z2} = I_{z2,\text{réduit}}$ pendant un temps t_{crash} avant de leur redonner leurs valeurs initiales pour la seconde prise d'image (voir le chronogramme figure 5.15). Ces trois variables sont ajustées de manière empirique pour minimiser le bruit sur la matrice CCD[16]. De plus, l'abaissement de ces courants a également pour effet d'écraser, sur la surface de la

[16] A noter que la constante typique de relaxation est estimée à 10 ms en observant que pour des temps de vol de plus de 10 ms (i.e. après la coupure des courants), l'imagerie redevient limitée par le bruit de photons.

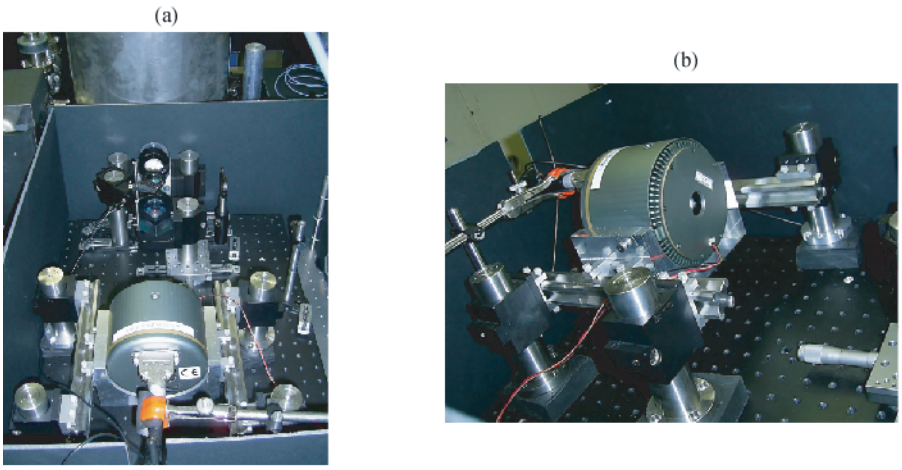

FIG. 5.16 – Photos présentant l'implémentation expérimentale du système d'imagerie. Photo (a) : en remontant l'image du premier plan vers le blindage magnétique, nous pouvons distinguer successivement la caméra avec son support, la lentille d'agrandissement, le miroir amovible (flip-flap) ainsi qu'un des deux doublets utilisés pour le transport d'image. La photo (b), montre en détail le système de fixation de la caméra (rails + pieds). Les pieds sont posés sur des plots de Sorbothane pour absorber les vibrations lors du mouvement du flip-flap.

puce, les atomes restants après la prise de la première image. Nous trouvons comme jeu de paramètres : $I_{z1,\text{réduit}} = 1.2$ A, $I_{z2,\text{réduit}} = 1$ A, $t_{\text{crash}} = 10$ ms.

A l'ensemble des précautions expérimentales précédentes, nous utilisons un laser exclave en cavité libre injecté par une diode maitre sur réseau. Sa cavité monolithique limite les vibrations acoustiques et mécaniques qui induisent pour des diodes laser montées en cavité étendue des fluctuations d'intensité en sortie de cavité. Sur les images brutes, nous détectons typiquement 10^4 sur chaque pixel de 6×6 μm^2 et ceci pour un temps d'exposition de 150 μs. Les fluctuations admissibles sur les variations d'intensité laser moyenne entre les deux prises d'images doivent donc être très inférieures au bruit de photons qui est de l'ordre de $\frac{\sqrt{10000}}{10000} = 1\%$ une fois le bruit de photons retiré.

5.3.3.2 Mesure du bruit de photons

Après avoir mis en oeuvre l'ensemble des précautions précédentes, nous avons voulu vérifier que notre système d'imagerie est bien limité par le bruit de photons en l'absence d'atomes en suivant la méthode décrite dans [130]. Pour déterminer si le système d'imagerie est limité par le bruit de photons, il suffit de calculer la variance des fluctuations de l'intensité optique mesurée sur chaque pixel de la caméra et de vérifier qu'elle varie linéairement avec la valeur moyenne de l'intensité optique.

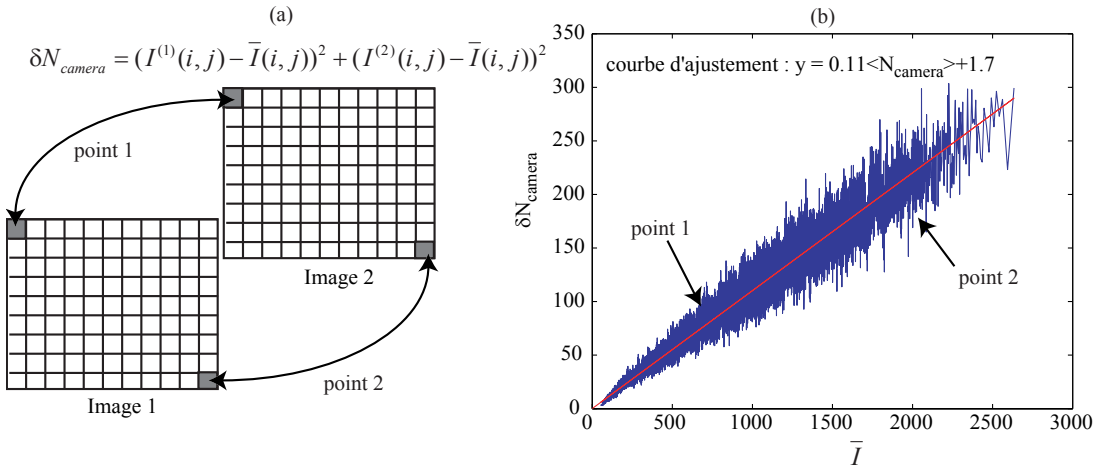

FIG. 5.17 – Figure(a) : diagramme présentant le mode de calcul de la variance du signal détectés par la caméra en (niveaux de gris)^2. Pour chaque pixel, une fois que $\langle \delta N_{\text{camera}} \rangle$ est calculé, il est reporté sur le graphe (b). Figure (b) : $\langle \delta N_{\text{camera}} \rangle$ en fonction de $\overline{I}(i,j)$. La linéarité de $\langle \delta N_{\text{camera}} \rangle$ en fonction $\overline{I}$ permet de conclure que le bruit détecté par la caméra correspond au bruit de photons. Une régression linéaire fournit le gain de la caméra ($g = 0.11$ niveaux de gris.électrons^{-1}).

Pour ce faire, nous avons acquis 20 jeux de deux images. Chaque jeu comporte, comme dans le cas d'une imagerie par absorption standard, deux images séparées temporellement par 200 ms où aucune de ces deux images ne contient d'atome. Les différents jeux sont obtenus en faisant varier le temps d'exposition de chaque image entre 5 μs à 300 μs. Pour chaque pixel de chaque jeu d'images, nous estimons la variance du signal détecté par la caméra par la formule : $\delta N_{\text{camera}} = (I^{(1)}(i,j) - \overline{I}(i,j))^2 + (I^{(2)}(i,j) - \overline{I}(i,j))^2$ avec $\overline{I} = \frac{1}{2}(I^{(1)}(i,j) + I^{(2)}(i,j))$. A partir de ces données, nous traçons la courbe $\delta N_{\text{camera}}(\overline{I})$ (les points sont regroupés par 5 niveaux de gris et moyennés.). Nous voyons sur la figure 5.17, effectivement que la variation δN_{camera} est linéaire avec $\overline{I}$ et une régression linéaire nous donne le gain de la caméra $g = 0.11$ niveaux de gris.électrons^{-1} qui est compatible avec les données constructeurs 9.1 électrons.niveaux de gris^{-1}. Nous en déduisons donc que notre système d'imagerie est limité par le bruit de photon.

Par cette méthode, nous pouvons également déterminer le gain effectif de chacun des pixels. Sur l'ensemble de la matrice CCD, le gain est homogène à 10% près. Nous prendrons en compte ces faibles inhomogénités de gain en utilisant une matrice de gain effectif, dont chacun des éléments correspond au gain propre de chaque pixel considéré.

5.4 Traitement des images

5.4.1 Rappel de statistiques

Avant d'entamer le traitement explicite des images, commençons par faire un bref rappel de statistique qui nous permettra d'introduire les différentes notations utilisées et de donner un estimateur pour la variance et la valeur moyenne.

Considérons une grandeur physique aléatoire X qui donne lors de sa mesure une valeur x. Pour estimer les propriétés statistiques de la variable aléatoire X qui suit la loi de probabilité $p(x)$, nous utiliserons les deux premiers moments statistiques définis par :

– la moyenne $\langle x \rangle$, ou moment d'ordre 1 :

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \tag{5.33}$$

– la variance σ^2 ou moment d'ordre 2 tel que :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \tag{5.34}$$

Par définition $\overline{x}$ et σ^2 sont obtenus à partir d'un nombre infini de mesures et ne sont pas accessibles expérimentalement.

Pour un nombre N fini de réalisations, nous définirons alors deux autres quantités :

– la moyenne arithmétique, que nous appelerons simplement moyenne dans la suite :

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{5.35}$$

il s'agit d'une estimation de $\overline{x}$ lorsque $N \to +\infty$

– De la même manière nous utiliserons $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ définie par :

$$\mathrm{Var}(x) = \langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \langle x \rangle)^2 \tag{5.36}$$

Les grandeurs données par les relations 5.35 et 5.36 sont par contre accessibles expérimentalement et représentent de bons estimateurs (*i.e.* sans biais) de $\overline{x}$ et σ^2.

5.4.2 Bruit sur les images par absorption

Dans cette sous-section nous nous proposons d'établir l'expression de la variance du signal détecté (converti en nombre d'atomes par pixel) sur chacun des pixels de la caméra CCD.

A partir des deux images prises par absorption (image contenant le nuage atomique et image de référence), nous déterminons pour chacun des pixels le nombre d'atomes

détectés à partir de la loi de Beer-Lambert :

$$N_{\text{at}}^{(\text{mes})} = \frac{\Delta_z \Delta_x}{\sigma_0} \log\left(\frac{N_2^{\text{photons}}}{N_1^{\text{photons}}}\right) = \langle N_{\text{at}} \rangle + \delta N_{\text{at}} + \left(\frac{\Delta_x \Delta_z}{\sigma_0}\right)\left(\frac{\delta N_{\text{ph}}^{(1)}}{N_{\text{ph}}^{(1)}} + \frac{\delta N_{\text{ph}}^{(2)}}{N_{\text{ph}}^{(2)}}\right) \quad (5.37)$$

où $\langle N_{\text{at}} \rangle$ désigne le nombre d'atomes moyen par pixel, δN_{at} sa fluctuation autour de sa valeur moyenne et $\frac{\delta N_{\text{ph}}^{(1)}}{N_{\text{ph}}^{(1)}} + \frac{\delta N_{\text{ph}}^{(2)}}{N_{\text{ph}}^{(2)}}$ sont les fluctuations d'intensité optique précédemment mesurées et dues au bruit de photon.

A partir de cette formule, nous pouvons calculer la variance du nombre d'atomes détectés qui s'écrit alors :

$$\text{Var}\left(N_{\text{at}}^{(\text{mes})}\right) = \langle \delta N_{\text{atomes}}^2 \rangle + \left(\frac{\Delta_x \Delta_z}{\sigma_0}\right)^2 \left(\frac{\langle (\delta N_{\text{photons}}^1)^2 \rangle}{(N_{\text{photons}}^1)^2} + \frac{\langle (\delta N_{\text{photons}}^2)^2 \rangle}{(N_{\text{photons}}^2)^2}\right) \quad (5.38)$$

Ainsi pour obtenir uniquement la variance du nombre d'atomes détectés par pixel, il faut soustraire la contribution du bruit de photons avec la formule[17] :

$$\langle \delta N_{\text{ph}}^2 \rangle = \left(\frac{\Delta_x \Delta_z}{\sigma_0}\right)^2 \left(\frac{1}{(N_{\text{photons}}^1)} + \frac{1}{(N_{\text{photons}}^2)}\right) \quad (5.39)$$

5.4.3 Comment extraire les fluctuations de densité ?

Pour mesurer la variance du nombre d'atomes par pixel en fonction de la valeur moyenne du nombre d'atomes par pixels, nous procédons de la manière suivante :

Acquisition d'images :

Premièrement, nous acquerrons un grand nombre d'images (300 images) de nuages atomiques prises par imagerie par absorption dans les mêmes conditions expérimentales (images *in-situ*).

Tri des images :

Nous commençons par éliminer toutes les images qui ne sont pas limitées par le bruit du photon. Pour ce faire, nous calculons, à partir de la zone sans atome représentée sur la figure 5.18 les quantités $\mathcal{V}_{\text{image}}(i,j) = (I_1(i,j) - \overline{I}(i,j))^2 + (I_2(i,j) - \overline{I}(i,j))^2$, avec $I_1(i,j)$ l'intensité où (i,j) correspond aux coordonnées du pixel considéré et I la valeur en niveau de gris donnée par la caméra. Cette quantité est ensuite moyennée sur l'ensemble des pixels de la zone considérée pour obtenir une variance moyenne des fluctuations du faisceau d'imagerie entre les deux images prises (avec atomes et référence). Cette variance moyenne est ensuite comparée au bruit de photon attendu

[17] La formule précédente se simplifie en utilisant le fait que pour le bruit de photons $\langle (\delta N_{\text{photons}})^2 \rangle = \langle N_{\text{photons}} \rangle$.

$V_{\text{shotnoise}} = g/N_{\text{pixel}} \sum_{i,j}(\frac{I_1(i,j)+I_2(i,j)}{2})$, où N_{pixel} est le nombre de pixels considérés pour effectuer le calcul. Toutes les images telles que $\mathcal{V}_{\text{image}} > 1.1\mathcal{V}_{\text{shotnoise}}$ sont rejetées. A ce premier tri, nous ajoutons également la contrainte que le nombre total d'atomes et la température du nuage, obtenu à partir d'un fit gaussien de son profil longitudinal, ne doivent pas varier de plus de 20%. Une fois le tri fait, nous calculons pour chacun des jeux d'images la quantité $\Lambda = \frac{\Delta_x \Delta_z}{\sigma_0} \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$ qui permet de convertir l'échelle de niveaux de gris en nombre d'atomes par pixel.

Sur la figure 5.18, nous avons représenté un jeu de deux images non divisées ainsi que le résultat du calcul donné par la formule $\Lambda = \frac{\Delta_x \Delta_z}{\sigma_0} \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$. Bien que le faisceau d'imagerie soit très inhomogène, nous voyons une corrélation quasi-parfaite entre les deux images prises. Après division et prise en compte du logarithme nous obtenons l'image de la figure 5.18(c) sur laquelle voyons le nuage atomique. La zone de calcul du bruit de grenaille optique est représentée par le grand carré blanc.

Profil longitudinal :

A cause du confinement radial du piège trop important et de notre résolution optique trop faible, nous ne sommes pas capables de résoudre la forme du profil de densité dans la direction transverse. Nous intégrons donc la contribution de 5 pixels dans la direction transverse (x) pour récolter 95% du signal d'absorption. Nous regardons ainsi les fluctuations du nombre d'atomes sur des macro pixels de taille $5\Delta \times \Delta$ avec $\Delta = 6$ μm. Pour trouver le nombre moyen d'atomes par pixel (*i.e.* le profil de densité longitudinal moyen), le moyen le plus simple serait de moyenner l'ensemble des images obtenues pour toutes les réalisations expérimentales. Cependant, pendant le temps d'acquisition des 300 images (2 heures) des fluctuations techniques "long terme" apparaissent : légères déformations du piège[18] ou variation de la température du nuage, déplacement du fond du piège qui modifie le nombre moyen d'atomes par pixel (20%)[19]. Pour corriger ces fluctuations "long terme", au lieu de moyenner sur l'ensemble des réalisations, nous moyennons sur un nombre réduit d'images en appliquant la technique de la moyenne glissante : chaque image possède alors son profil de densité longitudinal moyen qui lui est propre. Ce profil est obtenu en moyennant $(p-1)/2$ images autour de l'image considérée. Nous avons vérifié que les résultats sont globalement indépendant de p lorsqu'il varie entre 5 et 21. Dans la suite, tous les résultats expérimentaux présentés sont obtenus avec $p = 21$.

Calcul de la variance :

Avant de comparer le profil de densité moyen avec la réalisation courante, nous renormalisons le profil moyen de sorte qu'il contienne le même nombre d'atomes que le nuage atomique courant. Ceci permet de s'affranchir des fluctuations coup sur coup du nombre d'atomes qui n'est évidemment pas, pour des raisons techniques, limité par

[18] Variation des courants I_{Z1} et I_{Z2}.

[19] Ce qui pose problème dans le cas de nuages dégénérés puisque le profil de densité longitudinal dépend du nombre d'atomes.

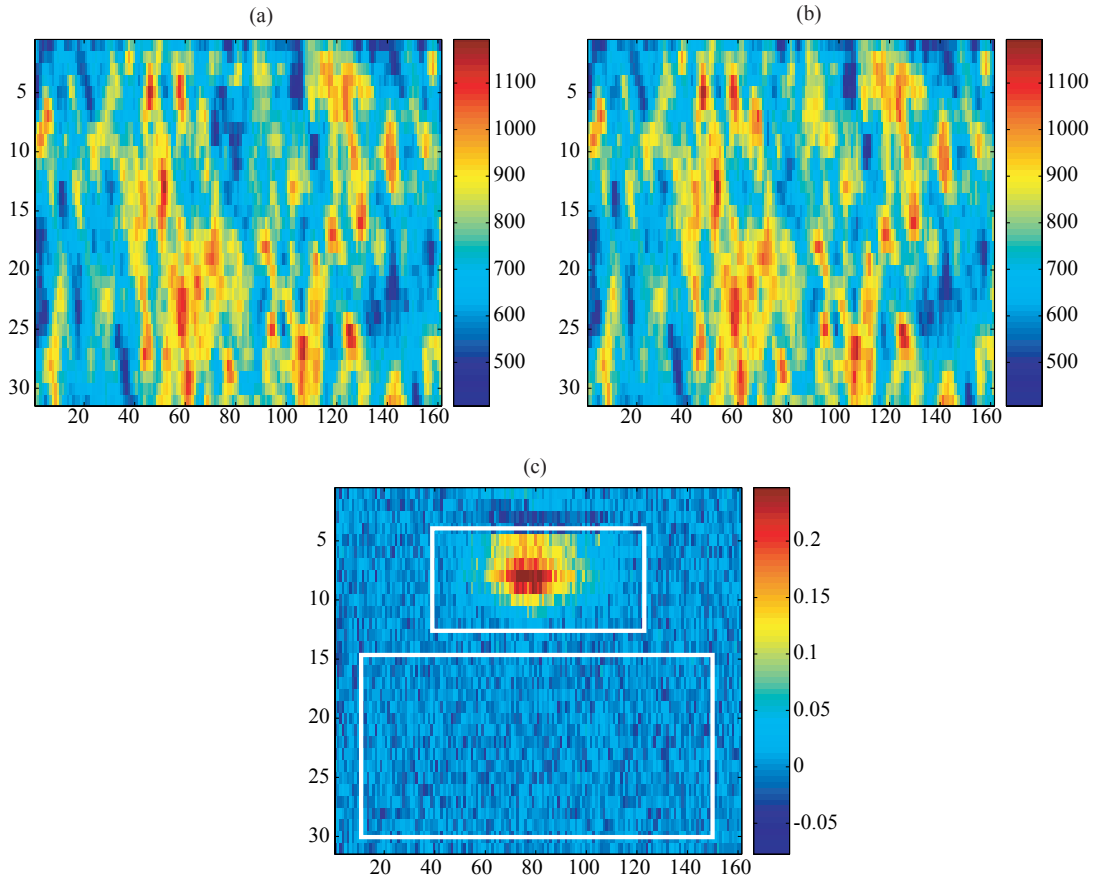

FIG. 5.18 – Les figures (a) et (b) représentent l'intensité détectée par la caméra CCD (en niveau de gris) pour les deux images prises respectivement avec atomes (Fig. (a)) et sans atome (Fig. (b)), sur la même échelle de niveaux de gris. La corrélation en intensité entre ces deux images est quasiment parfaite sauf sur la zone où se trouvent les atomes. La figure (c) est le résultat de la division des deux images précédentes (unité : densité optique). Le temps entre la prise des deux images est de 200 ms.

le bruit de grenaille [20]. La variance du nombre moyen d'atomes par pixel est estimée par la $\langle \delta N^2 \rangle = (N(z) - \langle N \rangle)^2 \frac{p}{p-1}$. Comme pour la mesure du bruit de photons, nous rangeons pour chaque image $\langle \delta N^2 \rangle$ dans un histogramme en fonction de $\langle N \rangle$. Puis nous moyennons cet histogramme avec toutes les réalisations expérimentales.

Soustraction du bruit de photons :

Pour obtenir δN_{at} à partir de l'expression de Λ, il faut soustraire la contribution du bruit de photons. Nous détectons typiquement 10^4 photons sur chaque pixel ce qui produit des fluctuations converties en nombre d'atomes de 50 atomes^2 sur $\langle \delta N^2 \rangle$ représentant une partie non négligeable du signal détecté. Il est donc nécessaire de soustraire cette contribution. Pour des faibles valeurs d'intensité du faisceau d'imagerie $I \ll I_{\text{sat}}$, l'absorption ne dépend pas de I, et les fluctuations dues au bruit de grenaille optique sont indépendantes des fluctuations du nombre d'atomes mesurés.

5.4.4 Résultats :

Nous avons appliqué la méthode précédente pour plusieurs jeux de données (i.e. nuages à différentes températures).

5.4.4.1 Mesure du bruit de grenaille atomique à "haute température"

Nous souhaitons dans un premier temps observer uniquement le bruit de grenaille atomique. Comme nous avons vu au paragraphe §5.2.2.1, les fluctuations du nombre d'atomes observés associées au groupement de bosons sont pondérées par le coefficient G. Ainsi pour des nuages "chauds" ($10\hbar\omega_\perp/k_{\text{B}}$), le facteur G déduit de l'équation 5.32 vaut typiquement de 20000. A cette température, le groupement de bosons est alors inobservable pour le nombre moyen d'atomes par pixel que nous arrivons à obtenir ($N_{at.}^{\max} = 300$). Seul le bruit de grenaille atomique, de spectre blanc, est alors observable.

Après avoir acquis 300 images d'un nuage atomique contenant 4×10^4 atomes à la température de $10\hbar\omega_\perp/k_{\text{B}}$ ($\omega_\perp/(2\pi) = 2.85$ kHz et $\omega_{\text{z}}/(2\pi) = 7.5$ Hz) dans les mêmes conditions expérimentales, nous appliquons la procédure décrite au paragraphe précédent. Sur la figure 5.19 nous avons tracé les résultats de cette analyse avec des cercles blancs. Nous observons un comportement linéaire comme attendu dans le cas d'un bruit de grenaille atomique. Une régression linéaire en imposant une ordonnée à l'origine nulle donne une pente de 0.17. Cette valeur plus faible que l'unité provient de notre résolution optique finie où l'absorption d'un atome est répartie sur plusieurs pixels (effet de moyennage). Pour s'en convaincre, déterminons le coefficient directeur théorique ζ de $\langle \delta N^2 \rangle$ en présence d'une résolution optique finie et ceci dans le cas d'une densité optique faible[21].

Le flux de photons $\mathcal{F}_{\text{photons}}(z)$ en sortie du nuage atomique (de densité n_{at}) et par unité de longueur s'écrit, d'après la loi de Beer-Lambert :

[20] Pour 10^4 atomes, il faudrait que les fluctuations du nombre d'atomes coup sur coup soit de l'ordre du %.

[21] Développement au premier ordre des facteurs se trouvant dans les exponentielles.

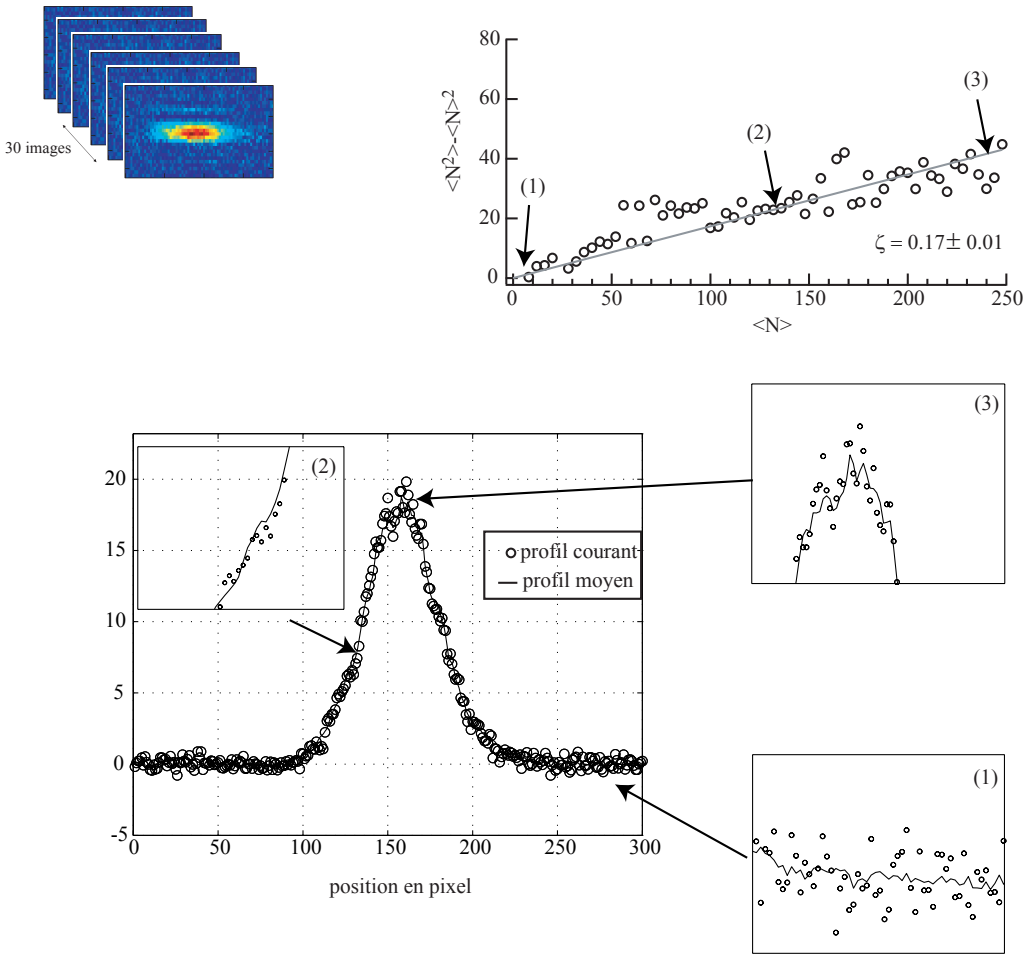

FIG. 5.19 – Figure (a) : présentation du principe de la moyenne glissante. L'image moyenne, pour chaque image est calculée en moyennant p images de part et d'autre de celle-ci. Figure (b) : comparaison entre un profil moyenné et un profil obtenu à partir d'une réalisation expérimentale. Figure (c) : à partir de la comparaison de ces deux profils, nous calculons la variance du nombre d'atomes détectés en fonction de sa valeur moyenne (figure (c)). Ainsi chaque zone du profil de densité de l'image (b) correspond à une partie de l'histogramme. Résultats obtenus pour le nuage chaud $10\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$ avec $\omega_\perp/(2\pi) = 2.85$ kHz et $\omega_z/(2\pi) = 7.5$ Hz.

$$\mathcal{F}_{\text{photons}}(z) = \mathcal{F}^0_{\text{photons}}(x) e^{-\int \sigma_0 n_{\text{at}}(x,y,z)dy} \tag{5.40}$$

où $\mathcal{F}^0$ correspond au flux de photons par unité de longueur en l'absence de nuage atomique.

Nous ne prendrons pas en compte la résolution optique dans la direction transverse puisque la taille du pixel est $\Delta_z = 5\Delta$ est grande devant l'extension du nuage et nous noterons $n_{\text{at,1D}}$ la densité du nuage atomique intégrée dans les deux directions transverses.

En modélisant la réponse percussionnelle du système optique par une fonction gaussienne de largeur rms δ, l'absorption $\mathcal{A}$ s'obtient après convolution de la densité atomique et intégration sur un pixel de la caméra CCD et pour $\int \sigma_0 n_{\text{at}}(z)dz \ll 1$ $\mathcal{A}$ vaut :

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{N}_{\text{photons}} - \mathcal{N}^0_{\text{photons}}}{\mathcal{N}^0_{\text{photons}}} = \frac{1}{\Delta_z} \int_{-\Delta_z/2}^{\Delta_z/2} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_0 n_{\text{at,1D}}(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{(z-z')^2}{2\delta^2}} dz' dz \tag{5.41}$$

où $\mathcal{N}_{\text{photons}}$ est le nombre de photons reçus sur un pixel de la CCD en présence du nuage atomique et $\mathcal{N}^0_{\text{photons}}$ celui sans atome.

L'expression de la variance du nombre d'atomes par pixel se déduit de 5.41 en supposant que $n_{\text{at,1D}}$ est constante sur l'extension d'un pixel Δ_z et sur la largeur δ de la fonction de réponse du système optique :

$$\begin{aligned} \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 &= \zeta \langle N \rangle \\ &\text{avec} \\ \zeta &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\delta}{\Delta_z} (e^{-\frac{\Delta_z^2}{4\delta^2}} - 1 + \frac{\Delta_z}{\delta} \text{Erf}(\frac{\Delta}{2\delta})) \end{aligned} \tag{5.42}$$

Nous avons tracé sur la figure 5.20 l'évolution de ζ en fonction de δ. La pente de 0.17 que nous avons mesurée est expliquée par une résolution optique de 10 μm ce qui est compatible avec la taille rms du plus petit nuage que nous arrivons à observer c'est à dire 8 μm. Nous en concluons que les fluctuations $\langle \delta N^2 \rangle$ de notre nuage atomique chaud sont données par le bruit de grenaille atomique.

5.4.4.2 Mesure du groupement de bosons à "faibles températures"

Nous avons répété la même expérience pour deux nuages atomiques plus froids à des températures respectives de $T_1 = 2.1\hbar\omega_\perp/k_{\text{B}}$ et $T_2 = 2.9\hbar\omega_\perp/k_{\text{B}}$ (voir figure 5.21) : les points blancs correspondent au bruit de grenaille atomique mesuré précédemment avec des nuages chauds et les points noirs correspondent aux nuages aux températures T_1 et T_2. Pour le nuage atomique le plus froid, le paramètre G vaut 320. Nous attendons donc à observer un groupement de bosons égal au bruit de grenaille atomique pour $\langle N \rangle = 200$.

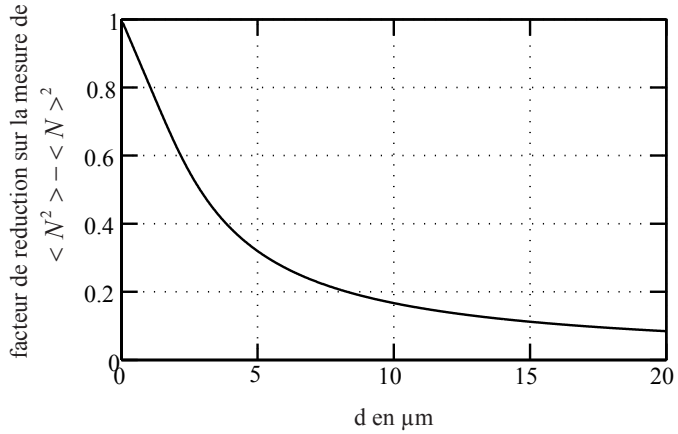

FIG. 5.20 – Facteur de réduction ζ sur la variance $\langle \delta N^2 \rangle$ en fonction de la résolution du système optique. Pour notre résolution optique ($\delta = 10$ μm), nous attendons un facteur de réduction de 0.15.

Nous voyons que la quasi-unidimensionnalité du nuage rend beaucoup moins néfaste l'effet d'intégration transverse lors de l'imagerie. Les barres d'erreurs sont données par le calcul de la variance de la quantité $\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$.

Pour comparer nos données expérimentales à la courbe théorique, nous devons corriger cette dernière de l'effet de la résolution optique. Les fluctuations de densités dues à l'effet de groupement de bosons, contrairement au bruit de grenaille atomique, ont une longueur de corrélation finie de l'ordre de la longueur d'onde de De Broglie. Pour les gammes de température des nuages utilisés $\lambda_{dB} \ll \delta$ (voir note[22]), il est possible d'assimiler la fonction de corrélation du groupement de bosons par une fonction de Dirac δ. Le facteur de réduction associé pour la variance doit donc être aussi ζ. Nous multiplions donc simplement la courbe théorique par ζ pour la comparer aux données expérimentales (voir figure 5.21). Nous avons tracé sur la même courbe, la courbe donnée par l'équation 5.31 (en pointillé) dans l'approximation de Maxwell-Boltzmann, ainsi que la courbe donnée par le calcul exact qui prend en compte la distribution de Bose (courbe en trait point trait (équation 5.29 où la somme a été tronquée à $\alpha_{\max} = \beta_{\max} = 30$). Nous voyons que l'équation 5.31 donnée dans l'approximation de Maxwell-Boltzmann sous-estime la valeur de la variance mesurée et ceci de manière d'autant plus importante que la température est faible. Le calcul complet ($\alpha = 30$, $\beta = 30$) est en meilleur accord avec les données expérimentales et ceci sans paramètre ajustable.

[22] 300 nm à comparer à 10 μm.

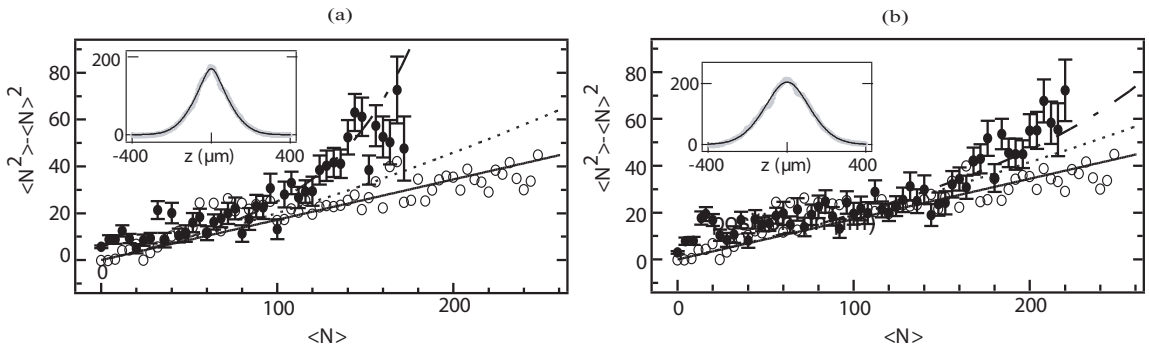

FIG. 5.21 – Variance du nombre d'atomes détectés par pixel en fonction de la valeur moyenne d'atomes détectés. Les cercles blancs correspondent à un nuage atomique "chaud" ($T = 10\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$) pour lequel les fluctuations du nombre d'atomes sont données par le bruit de grenaille atomique (ligne noire). Les cercles noirs correspondent à des nuages "froids" $T = 2.1\hbar\omega_\perp/k_B$ (figure (a)) et $T = 2.9\hbar\omega_\perp/k_B$ (figure (b)). Les fluctuations excédentaires par rapport au bruit de grenaille atomique sont dues à l'effet de groupement de bosons. La courbe en tiretée est la courbe théorique attendue dans le cas d'un gaz de Bose idéal et la courbe en pointillé correspond à la courbe donnée dans l'approximation de Maxwell-Boltzmann.

En conclusion, l'ensemble des résultats présentés dans cette section suivent les prédictions du gaz idéal. A plus fortes densités atomiques, où les interactions entre particules deviennent non négligeables, nous attendons une déviation par rapport au comportement du gaz idéal. Nous allons étudier ce phénomène dans la section suivante.

5.5 Fluctuations de densité dans la limite quasi-condensat

Commençons cette section par donner une explication intuitive du rôle que vont jouer les interactions répulsives entre atomes sur l'amplitude des fluctuations de densité. Pour cela, prenons un gaz unidimensionnel homogène, profondément dans le régime de quasi-condensat, et évaluons son énergie d'interaction (voir figure 5.22) lorsque :

– sa densité atomique $n_{1\mathrm{D}}(z)$ est une constante et égale à n_0. L'énergie d'interaction du gaz est alors donnée par :

$$E_{\mathrm{int}}^{\mathrm{hom.}} = g_{1D} \int n_0^2 dz \tag{5.43}$$

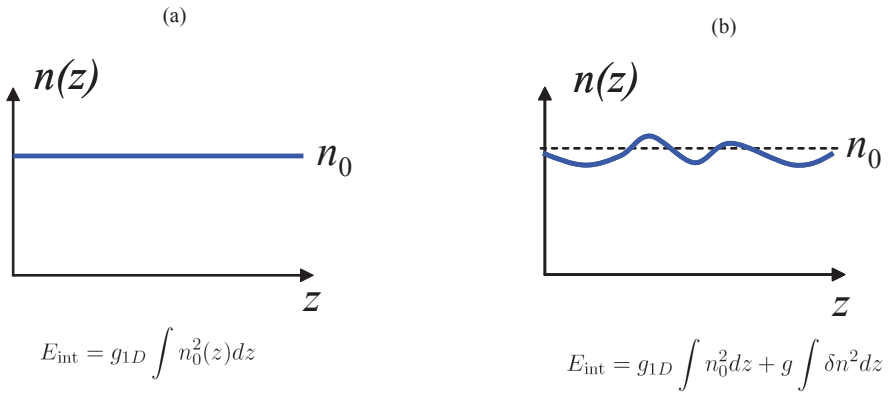

FIG. 5.22 – Comparaison de l'énergie d'interaction d'un gaz unidimensionnel homogène lorsque sa densité atomique est uniforme figure (a) ou lorsqu'elle présente des fluctuations de densité δn autour de sa valeur moyenne (figure(b)).

– sa densité atomique présente des fluctuations de densité $\delta n_{1D}(z)$ autour de sa valeur moyenne n_0. L'énergie d'interaction dans cette configuration s'écrit :

$$E_{\text{int}} = g_{1D} \int n_0^2 dz + g_{1D} \int \delta n^2 dz \tag{5.44}$$

Ainsi nous voyons que $E_{\text{int}}^{\text{hom.}} \leq E_{\text{int}}$, c'est-à-dire que les fluctuations de densité sont coûteuses en énergie d'interaction. Ainsi le gaz aura tendance à réduire ses fluctuations de densité, par rapport au cas du gaz idéal, pour minimiser son énergie. A partir de quelle densité atomique ce phénomène se produira-t-il ? La réponse se trouve lorsque le potentiel chimique μ du gaz sera voisin de $g_{1D}n$ c'est-à-dire que lorsque la densité atomique dépasse la valeur $n_T = \left(\frac{m(k_{\text{B}}T)^2}{\hbar^2 g_{1\text{D}}}\right)^{1/3}$ [35]. Cette valeur pourra directement être confrontée avec les données expérimentales obtenues (voir §5.5.1).

Dans la suite de ce chapitre, nous nous proposons de déterminer l'expression des fluctuations de densité résiduelles présentes qui sont dues à la température non nulle du nuage. A partir d'une théorie unidimensionnelle de type Bogoliubov nous trouverons une expression simple donnant les fluctuations du nombre d'atomes par pixel en fonction de la température du nuage et de la constante de couplage $g_{1\text{D}}$.

5.5.1 Prise en compte des excitations sous forme de phonons (modèle 1D)

Dans le régime de quasi-condensat les fluctuations de densité sont petites et nous pouvons exprimer l'opérateur champ $\widehat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ à partir de l'opérateur densité $\widehat{n} = \widehat{n_0} + \delta\widehat{n}$ où

$\widehat{n_0}$ est la densité moyenne du quasi-condensat (solution de l'équation de Gross-Pitaevskii) et d'un opérateur de phase $\widehat{\phi}$ sous la forme :

$$\widehat{\Psi}(\mathbf{r},t) = \sqrt{n_0 + \delta\widehat{n}(\mathbf{r},t)}e^{i\widehat{\phi}(\mathbf{r},t)} \tag{5.45}$$

.

avec $\sqrt{n_0}$ est solution de l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\text{ext.}}(\mathbf{r}) - \mu + gn_0\right)\sqrt{n_0} = 0 \tag{5.46}$$

Connaissant la solution Gross-Pitaevskii précédente, il est possible de linéariser autour de cette solution l'équation de Shrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial\widehat{\Psi}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\text{ext.}}(\mathbf{r}) - \mu + g\widehat{\Psi}^\dagger\widehat{\Psi}\big)\widehat{\Psi}^\dagger \tag{5.47}$$

pour trouver les excitations élémentaires du système. Ces excitations (modes de Bogoliubov) sont alors solutions de [131] :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_\nu u_\nu \\ \epsilon_\nu v_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2\Delta}{2m} + V_{\text{ext}} + 2gn_0 - \mu & -gn \\ -gn & -\frac{\hbar^2\Delta}{2m} + V_{\text{ext}} + 2gn_0 - \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_\nu \\ v_\nu \end{pmatrix} \tag{5.48}$$

en ayant posé

$$\begin{aligned} \delta\widehat{\Psi} &= \sum_\nu [u_\nu\widehat{a}_\nu \exp(-i\epsilon_\nu t/\hbar) - v_\nu^*\widehat{a}_\nu^\dagger \exp(i\epsilon_\nu t/\hbar)] \\ \delta\widehat{\Psi}^\dagger &= \sum_\nu [u_\nu^*\widehat{a}_\nu^\dagger \exp(i\epsilon_\nu t/\hbar) - v_\nu\widehat{a}_\nu \exp(-i\epsilon_\nu t/\hbar)] \end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\tag{5.50}$$

où $\widehat{a}_\nu$ et $\widehat{a}_\nu^\dagger$ sont respectivement les opérateurs annihilation et créations des excitations élémentaires d'énergie ϵ_ν[23].

Pour un gaz piégé dans une boîte à une dimension (*i.e.* V_{ext}=cste), les fluctuations de densité, dans la limite quasi-condensat $T \ll T_d$ s'écrivent à l'aide des fonctions u_k et v_k :

$$\langle\delta n_{1D}(z)\delta n_{1D}(z')\rangle = \langle n_{1D}(z)\rangle\delta(z) + \frac{\langle n_{1D}\rangle}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(z-z')}\langle(u_k+v_k)^2 n_k + v_k(u_k+v_k)\rangle dk \tag{5.51}$$

les énergies propres de l'équation 5.48 sont données par $\epsilon_k = \sqrt{k^2(k^2+4\xi^{-2}\hbar^2/(2m)}$ avec $\xi = \hbar/\sqrt{mgn}$ la longueur de relaxation.

[23]Les fonctions d'onde u_ν et v_ν vérifient la condition de normalisation $\int(|u_\nu(\mathbf{r})|^2 - |v_\nu(\mathbf{r})|^2)d\mathbf{r} = 1$.

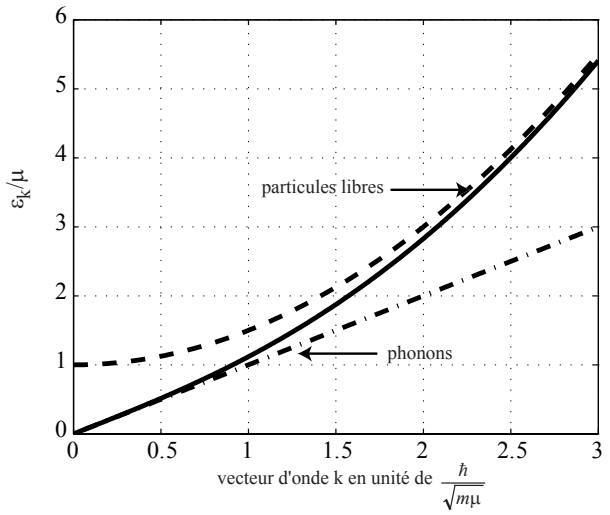

FIG. 5.23 – Spectre en énergie des excitations de Bogoliubov (trait plein) et comparaison avec celui les excitations de type phonon et particule libre (pointillés).

En remplaçant les u_ν et les v_ν par leur expression, les fluctuations de densité sont alors données par la formule suivante :

$$\langle \delta n_{1D}(z)\delta n_{1D}(z')\rangle = \frac{\langle n_{1D}\rangle}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{k^2}{k^2+\frac{4}{\xi^2}}}(1+2n_k)e^{ik(z-z')}dk \tag{5.52}$$

où n_k est le facteur d'occupation de Bose pour le mode d'énergie ϵ_k. Nous voyons que cette relation de dispersion $\epsilon_k(k)$ joue un rôle essentiel dans les fluctuations de densité. Pour comprendre l'origine physique de ces fluctuations, attardons nous sur la relation de dispersion :

$$\epsilon_k = \sqrt{\frac{\hbar^2k^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}+2\mu\right)} \tag{5.53}$$

- pour $\frac{\hbar^2k^2}{2m} \ll \mu$, ϵ_k se simplifie en $\epsilon_k \simeq \hbar k\sqrt{\frac{\mu}{m}}$, les excitations élémentaires sont des phonons qui se propagent à la vitesse $c = \hbar\sqrt{\mu/m}$.
- à contrario, pour les excitations de plus hautes énergies ($\frac{\hbar^2k^2}{2m} \gg \mu$), la relation de dispersion s'écrit $\epsilon_k = \frac{\hbar^2k^2}{2m} + \mu$ ce qui correspond à l'énergie cinétique de particules libres.

La courbe de dispersion $\epsilon_k(k)$ est tracée sur la figure 5.23.

Pour les expériences que nous avons réalisées, comme la taille du pixel est très grande devant ξ, nous ne voyons que la contribution des phonons. D'autre part comme $k_\mathrm{B}T \gg \mu$, les fluctuations de point 0 sont négligeables devant la contribution thermique. En utilisant

le fait que $k \ll \frac{1}{\xi}$ et en approximant le taux d'occupation par mode par $n_k \simeq k_B T/\epsilon_k$, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
\langle \delta n_{1D}(z)\delta n_{1D}(z')\rangle &= \frac{\langle n_{1D}\rangle}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{k^2}{k^2+\frac{4}{\xi^2}}}(1+2n_k)e^{ik(z-z')}dk \\
&\simeq \frac{\langle n_1 D\rangle}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2k_{\mathrm{B}}T\sqrt{\frac{k^2}{4\xi^{-2}}}2\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{4k^2\xi^{-2}}}e^{ik(z-z')}dk \\
&\simeq \frac{\langle n_{1D}(z)\rangle}{2\pi}\frac{2k_{\mathrm{B}}T}{g_{1D}}\delta(z-z')
\end{aligned} \tag{5.54}$$

en intégrant cette équation sur l'extension d'un pixel nous trouvons :

$$\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 = \Delta\frac{k_{\mathrm{B}}T}{g_{1D}} \tag{5.55}$$

Pour un piège harmonique le raisonnement précédent est valable tant que $k_B T \ll \hbar\omega_\perp$ et que l'approximation de densité locale longitudinale est valable ($\beta\hbar\omega_z \ll 1$). Ainsi nous attendons des fluctuations de densité constantes en fonction de la densité atomique. Comme nous le mentionnions dans l'introduction les fluctuations de densité sont coûteuses en énergie (à cause des interactions répulsives entre atomes).

Expérimentalement, les nuages atomiques que nous arrivons à obtenir ne sont pas unidimensionnels au sens strict ($k_B T < \hbar\omega_\perp$). Il convient alors de faire un calcul à 3D pour prendre en compte les excitations de Bogoliubov. Cependant le calcul n'est pas analytique et est fastidieux numériquement, nous nous proposons donc dans le prochain paragraphe de dériver une expression approchée à partir d'un raisonnement simple de thermodynamique.

5.5.2 Recours à la thermodynamique

Prenons un petit volume V du gaz mais dont les dimensions sont cependant grandes devant la longueur de corrélation des fluctuations de densité et contenant N particules. Les fluctuations du nombre d'atomes dans ce volume d'étude s'écrivent [132] :

$$\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 = k_{\mathrm{B}}T\left(\frac{\partial N}{\partial\mu}\right)_{(\mathrm{T,V})} \tag{5.56}$$

Ainsi pour connaître la variance du nombre d'atomes contenus dans le volume V, il suffit simplement de déterminer l'équation d'état $N(\mu)$. Appliquons alors ce raisonnement au cas d'un quasi-condensat piégé dans le potentiel harmonique anisotrope suivant : $V(r,z) = 1/2m\omega_\perp^2 r^2 + 1/2m\omega_z^2 z^2$. Comme au paragraphe §5.2.2, nous utiliserons l'approximation de densité locale dans la direction longitudinale et nous remplacerons donc

le potentiel de piégeage $1/2m\omega_z^2 z^2$ par un potentiel constant en utilisant un potentiel effectif $\mu_{\text{eff}} = \mu_0 - 1/2m\omega_z^2 z^2$ au lieu de μ_0 le potentiel chimique réel du gaz. Par abus de language, nous utiliserons dans la suite μ pour désigner μ_{eff}.

- Pour des quasi-condensats unidimensionnels tel que $n_{1D}a \ll 1$ (voir note [24]), le potentiel chimique est $\mu_{1D} = \hbar\omega_\perp + g_{1D}n_{1D}$, avec g_{1D} est la constante de couplage à 1D [36]. Nous retrouvons alors la formule du paragraphe précédent et la variance $\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2$ est une constante pour toute densité (dans la limite $n > n_T$) [25].
- Pour des paramètres $na \simeq 1$, les propriétés du quasi-condensat ne sont plus unidimensionnelles et l'expression précédente n'est plus valable. Par contre il est possible d'approximer le potentiel chimique μ par la formule [133] :

$$\mu(N) = \hbar\omega_\perp\sqrt{1 + \frac{4Na}{\Delta}} \tag{5.57}$$

Notons qu'à $n_{1D}a \ll 1$, nous retrouvons l'expression valable pour des quasi-condensats dans le régime unidimensionnel. La dépendance du potentiel chimique avec la densité atomique traduit le fait que la constante de couplage g_{1D} n'est pas une constante avec la densité atomique. Pour comprendre cet effet, rappelons que la constante de couplage à $1D$ est définie par :

$$g_{1\text{D}} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\int|\Psi_\perp|^2 d^2\rho. \tag{5.58}$$

où $\Psi_\perp$ est la fonction d'onde transverse du quasi-condensat. Dans le régime où $n_{1D}a \ll 1$, cette fonction d'onde correspond à l'état fondamental de l'oscillateur harmonique et $g_{1\text{D}} = 2\hbar\omega_\perp a$.

A plus forte densité ($n_{1D}a \simeq 1$), la forme du profil de densité transverse dépend explicitement de la densité atomique (*i.e.* de la présence des interactions répulsives entre atomes) ce qui a pour conséquence de modifier la constante de couplage g_{1D}. Les excitations élémentaires (phonons) produisent des fluctuations de densité dans la direction longitudinale ainsi que dans la direction transverse des modes de respiration de la densité atomique. Ces modes de respiration ajoutent une légère pente $k_B T/\hbar\omega_\perp$(voir résultats expérimentaux §5.5.3).

5.5.3 Comparaison avec l'expérience

Expérimentalement, nous sommes également capable d'accéder au régime de quasi-condensat en augmentant la valeur de la fréquence d'oscillation longitudinale $\omega_z/(2\pi)$ à 11 Hz (soit un rapport d'aspect de 260). La figure 5.24 présente les résultats que nous avons obtenus pour deux températures différentes $T_1 = 1.4\hbar\omega_\perp/k_\text{B}$ et $T_2 = 2.1\hbar\omega_\perp/k_\text{B}$.

[24] Où a est la longueur d'onde de diffusion.

[25] Il arrive un moment, où cette horizontale coupe la courbe donnant le bruit de grenaille atomique. Pour des densités ou des températures vérifiant $k_\text{B}T < \mu$, nous attendons à ce que les fluctuations de densité soient sous le bruit de grenaille atomique.

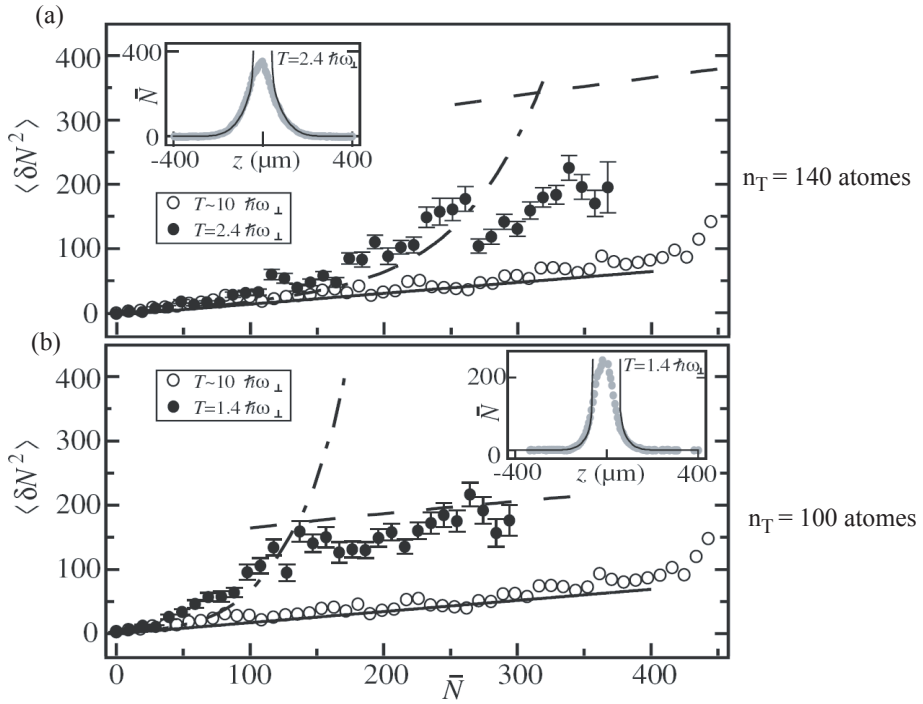

FIG. 5.24 – Fluctuations du nombre d'atomes par pixel en fonction du nombre moyen d'atomes par pixel pour différentes températures. A température élevée (points blancs), nous observons le bruit de grenaille atomique. A température plus faible (points noirs), nous observons les fluctuations de densité d'un gaz de Bose idéal pour un faible nombre d'atomes par pixel ($N < 130$) et celles d'un quasi-condensat à densité atomique élevée.

Dans les deux cas, deux régimes se distinguent. Pour $N \ll N_T = (m(k_\mathrm{B}T)^2/(\hbar^2 g_{1D}))^{1/3}\Delta$ nous retrouvons le comportement du gaz idéal alors qu'à plus forte densité nous observons une nette réduction des fluctuations de densité par rapport au cas du gaz idéal. Sur la figure 5.24, nous avons également ajouté le résultat du calcul obtenu dans la limite quasi-bec. Comme $n_{1D}a$ atteint 0.17 pour nos données expérimentales les plus froides, nous utilisons l'équation 5.57 que nous injectons dans 5.56 et après l'avoir corrigée de la résolution optique nous obtenons :

$$(\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2)_\mathrm{q.b.} = \zeta\frac{k_\mathrm{B}T\Delta}{a\hbar\omega_\perp}\left(\frac{1}{2}+N\right) \tag{5.59}$$

Nous voyons que pour les données à T_1, ce calcul reproduit bien les données expérimentales. Pour le nuage à la température T_2, le calcul dans la limite quasi-condensat, surestime les fluctuations de densité de près de 40%. Le comportement prédit dans la limite quasi-condensat n'est qu'un comportement asymptotique nous laissant supposer à la température T_2 que le nuage n'a pas encore atteint le régime de quasi-condensat. De plus, pour cette valeur de température, le calcul de n_T (valide uniquement dans le régime 1D) sous-estime la valeur à laquelle à laquelle le gaz entre dans le régime de quasi-condensat[26].

5.6 Discussions sur les problèmes expérimentaux

Nous allons passer en détail les problèmes expérimentaux liés à l'imagerie en se focalisant sur la durée du temps de pulse d'imagerie ainsi que les conséquences d'une densité optique trop grande.

5.6.1 Effet de la durée du pulse d'imagerie

Pendant la durée de la prise d'image $T_\mathrm{sonde} = 150\ \mu$s, chaque atome du nuage atomique va absorber et réémettre un grand nombre de photons lors de son interaction avec le faisceau sonde. Le nuage va donc s'étaler transversalement à cause de la diffusion de photons et subir également la pression de radiation qui va lui communiquer une vitesse globale parallèle à la puce (combinaison du faisceau direct et du faisceau réfléchi par la surface de la puce).

Un ordre de grandeur du nombre de photons absorbés par un atome peut être évaluée à partir de :

$$N_\mathrm{photonabs.} = \frac{\sigma_\mathrm{eff}\lambda I T_{sonde}}{hc} \tag{5.60}$$

pour une intensité sonde $I = I_\mathrm{sat}/10$ et une section effective $0.7\frac{3\lambda^2}{2\pi}$ soit $N_\mathrm{photon\ abs.} = 200$. La pression de radiation induit sur les atomes un décalage de la résonance par effet

[26]Notons que c'est également le cas pour les données de la figure 5.21 où l'on attend $N_T = 160$ atomes.pixel^{-1} pour $k_\mathrm{B}T = 2.9\hbar\omega_\perp$ et $N_T = 130$ atomes.pixel^{-1} pour $k_\mathrm{B}T = 2.1\hbar\omega_\perp$.

Doppler de $\frac{\sigma_{\text{eff}}\hbar k\Gamma t_{\text{pulse}}I}{2\sigma_0 m\lambda I_{\text{sat}}} = 1.4$ MHz, avec $\Gamma = 38\ 10^6\ s^{-1}$. Cette valeur est à comparer avec les 6 MHz de la largeur naturelle de l'état excité $|F = 3\rangle$.

La réémission des photons dans des directions aléatoires va également produire une une marche au hazard sur la position des atomes et ceci dans les trois directions de l'espace. En supposant que l'émission des photons se fait de manière isotrope, la diffusion de photon se fait sur une distance donnée par l'équation [134] :

$$d = \frac{\sqrt{2}N_{\text{photonabs.}}}{3}\frac{\hbar k}{m}T_{\text{sonde}} \tag{5.61}$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le vecteur d'onde du faisceau sonde.

Nous devons choisir le temps de pulse, le plus grand possible pour réduire au maximum le bruit de photons sur chaque pixel de la caméra. Pour un pulse d'imagerie de 150 μs, les atomes vont diffuser sur une distance de $d = 5.9$ μm. Ce processus de diffusion est un processus incohérent qui a tendance à décorréler les atomes en position. Tant que $d \ll \Delta_z$, cet effet sur l'intégration de la fonction $g^{(2)}$ sur la taille du pixel reste faible. Nous avons choisi une durée de pulse d'imagerie de 150 μs, pour que les atomes ne diffusent que sur une distance de $d = 5.9$ μm.

Comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, nous avons également tout intérêt à avoir un pulse d'imagerie le plus long possible de manière à dilater le nuage dans la direction transverse pour en réduire sa densité optique. Initialement l'extension transverse est quasiment donnée par la taille du mode fondamental (300 nm). A la fin du pulse d'imagerie, nous avons gagné un facteur 100 sur la densité optique.

5.6.2 Extraire les fluctuations de densité pour des absorptions optiques fortes

Dans cette sous-section, nous allons estimer l'erreur que nous faisons sur la détermination du nombre d'atomes à fortes densités optiques. Pour cela nous écrirons l'expression du nombre d'atomes que nous mesurons et nous la comparerons avec la formule 5.37, utilisée pour calculer le nombre d'atomes et qui est uniquement valide pour les faibles densités optiques.

Pour cela commençons par écrire l'expression du signal reçu sur chaque pixel de la caméra (*i.e.* intégré sur la surface du pixel $\Delta_x \times \Delta_z$) :

$$V_{cam} = \frac{g\eta}{\Delta_x\Delta_z}\left(\int_{-\Delta_x/2}^{\Delta_x/2}\int_{-\Delta_z/2}^{\Delta_z/2}\mathcal{I}(x,z)e^{-\sigma_0\int_{-\infty}^{\infty}n(x,y,z)dy}dxdz\right) \tag{5.62}$$

avec η le rendement quantique de la caméra.

Pour déterminer le nombre d'atomes, nous avons utilisé implicitement la formule suivante qui consiste à d'abord intégrer l'intensité optique sur la surface d'un pixel avant d'en prendre le logarithme pour calculer le nombre d'atomes :

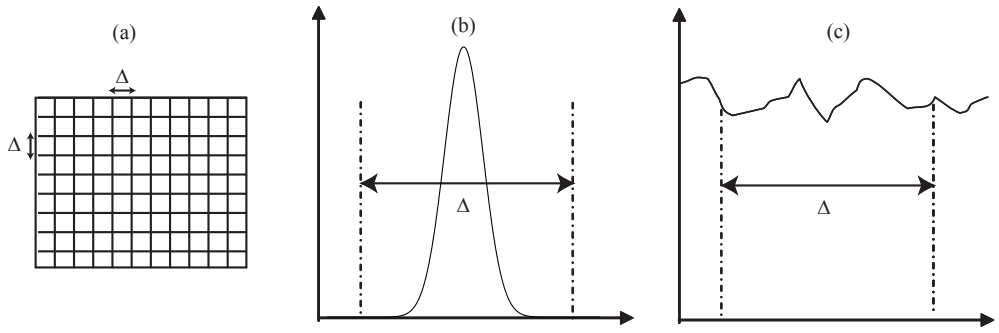

FIG. 5.25 – Présentation des deux problèmes d'imagerie associés à une densité optique trop forte : (b) le profil moyen de densité varie significativement sur la taille d'un pixel Δ. (c) même si le profil moyen est constant sur l'extension d'un pixel, les fluctuations de densité à l'intérieur de celui-ci produisent également des erreurs systématiques sur la détermination du nombre d'atomes.

$$N_{mesure} = \frac{-\Delta_x \Delta_z}{\sigma_0} \log\left(\frac{V^1_{\text{cam}}}{V^1_{\text{cam}}}\right) = \frac{-\Delta_x \Delta_z}{\sigma_0} \log\left(\frac{\iint_{\Delta_x,\Delta_z} \mathcal{I}(x,z) e^{-\sigma_0 \int_{-\infty}^{\infty} n(x,y,z)dy} dxdz}{\iint_{\Delta_x,\Delta_z} \mathcal{I}(x,z) dxdz}\right) \tag{5.63}$$

En utilisant le fait que l'intensité du faisceau d'imagerie est constante sur $\Delta_x \times \Delta_z$, nous pouvons simplifier l'expression précédente par :

$$N_{mesure} = -\frac{\Delta_x \Delta_y}{\sigma_0} \log\left(\iint_{\Delta_x,\Delta_y} \frac{1}{\Delta_x \Delta_y} e^{-\sigma_0 \int_{-\infty}^{\infty} n(x,y,z)dz} dxdy\right) \tag{5.64}$$

A quelles conditions N_{mesure} correspond-t-il au nombre réel d'atomes $N_{\text{rel}} = \iiint n(x,y,z)dxdydz$? Pour répondre à cette question, nous distinguons les deux cas suivants :

Une densité optique faible[27] et $n(x,y,z)$ quelconque sur $\Delta_x \times \Delta_y$:

$$\begin{aligned}
N_{mesure} &= -\frac{\Delta_x\Delta_y}{\sigma_0}\log\left(\iint_{\Delta_x,\Delta_y}\frac{1}{\Delta_x\Delta_y}e^{-\sigma_0\int_{-\infty}^{\infty}n(x,y,z)dz}dxdy\right)\\
N_{mesure} &\simeq \frac{-\Delta_x\Delta_y}{\sigma_0}\log\left(1-\frac{\sigma_0\iint_{\Delta_x,\Delta_y}n'(x,y)dxdy}{\Delta_x\Delta_y}\right)\\
N_{mesure} &\simeq \iint_{\Delta_x,\Delta_z}n'(x,y)dxdy
\end{aligned} \tag{5.65}$$

une densité optique quelconque et $n'(x,y)=\int n(x,y,z)dz$ constant sur $\Delta_x\times\Delta_y$:

dans ce cas, il est facile d'intégrer l'expression de N_{mesure} sous la forme :

$$\begin{aligned}
N_{\text{mesure}} &= -\frac{\Delta_x\Delta_y}{\sigma_0}\log(e^{-\sigma_0 n'})\\
N_{\text{mesure}} &\simeq \Delta_x\Delta_y\sigma_0 n'\\
N_{\text{mesure}} &\simeq \iint_{\Delta_x,\Delta_z}n'(x,y)dxdy
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Nous voyons que dans les deux cas précédents, le nombre d'atomes est correctement donné par l'équation 5.63. Par contre dans le cas général, un développement limité à l'ordre deux de l'équation 5.63 montre qu'à fortes densités optiques, les variations du profil de densité à l'échelle d'un pixel (profil moyen et fluctuations de densité) nous font sous-estimer le nombre d'atomes contenus dans le piège (voir figure 5.26).

Pour s'en convaincre, nous avons réalisé l'expérience suivante : nous avons comparé le profil de densité longitudinal moyen obtenu dans les mêmes conditions expérimentales que le graphe(a) de la figure 5.27 ($T=1.4\hbar\omega_\perp/k_{\text{B}}$ avec le même nuage pris après un temps de vol de 5 ms). Ce temps de vol permet de réduire la densité optique (expansion transverse) alors que le profil longitudinal n'est quasiment pas modifié. Les facteurs d'échelle donnés dans [65] et rappelés au chapitre 3 permettent de le vérifier. Ainsi le profil de densité après temps de vol nous fournit le nombre réel d'atomes par pixel que nous aurions dû trouver *in-situ*. Pour connaître l'erreur faite sur la détermination du nombre d'atomes, il suffit de tracer le profil de densité *in-situ* en fonction du profil de densité après temps de vol (voir figure 5.27). La section d'absorption effective, utilisée dans le cas *in-situ*, corrige partiellement ce problème puisqu'elle impose que le nombre d'atomes total du nuage soit le même *in-situ* et après temps de vol (droite sur la figure 5.27(b)) .

Dans un calcul fait en annexe (se référer à l'annexe D), nous avons estimé l'erreur théorique que nous faisons sur la détermination du nombre d'atomes pour un nuage de forme gaussienne de largeur rms transverse $\sigma_x=3$ μm (voir note[28]), et longitudinale

[28]Extension moyenne du nuage pendant le pulse d'imagerie.

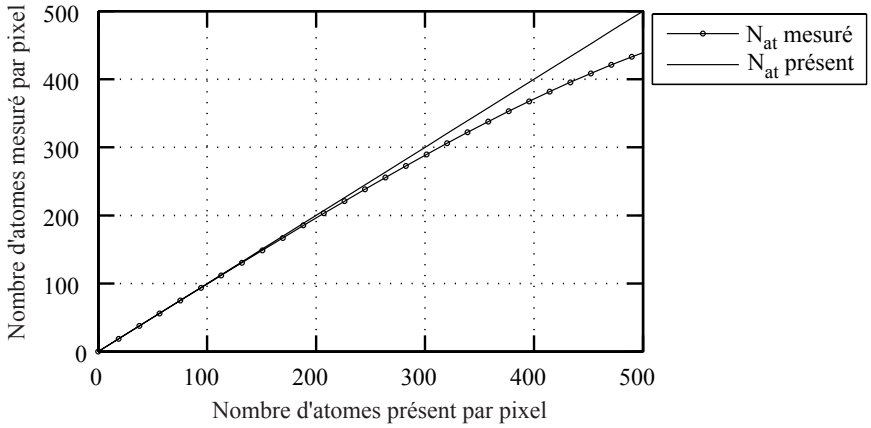

FIG. 5.26 – A partir d'un nuage gaussien de largeur rms 3 μm$\times$100 μm, nous calculons à partir de l'équation 5.63 le nombre mesuré d'atomes après convolution par le système d'imagerie (10 μm).

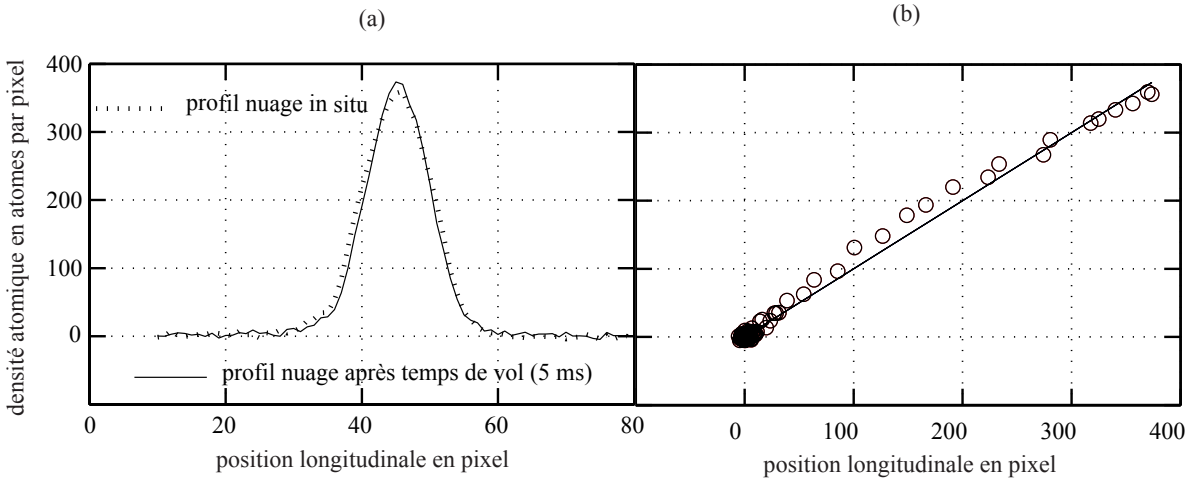

FIG. 5.27 – Figure (a) : comparaison du profil de densité expérimental obtenu par une imagerie *in-situ* et après temps de vol. La figure (b) montre l'erreur que nous faisons sur la détermination du nombre d'atomes en fonction de la densité atomique.

$\sigma_z = 100$ μm. En prenant également en compte la résolution optique finie du système d'imagerie $\delta = 10$ μm (voir note[29]), nous obtenons le résultat présenté sur la figure 5.26. Nous voyons que l'erreur est déjà conséquente pour 400 atomes par pixel puisqu'elle excède les 10% (qui correspond à une densité optique mesurée d'environ 0.9). Notons que la résolution optique faible, permet d'augmenter artificiellement la taille du nuage sur la caméra CCD et donc de limiter cet effet.

A la lumière du calcul précédent, il est donc préférable pour intégrer la contribution des pixels transverses et de calculer individuellement le nombre d'atomes par pixel puis de les sommer, comme nous l'avons fait, plutôt que sommer les intensités optiques des différents pixels pour en déduire un nombre d'atomes global.

5.7 Conclusion : les fluctuations de densité un moyen de sonder la transition entre gaz idéal et quasi-condensat

L'un des aspects cruciaux de cette expérience a été l'exploitation du caractère unidimensionnel du nuage pour éviter un effet de moyennage des fluctuations de densité dans la direction du faisceau imageur lors de la prise d'image. Cette méthode a permis de mesurer les fluctuations de densité dans deux régimes distincts : le régime du gaz idéal et le régime du quasi-condensat. Dans le régime du gaz idéal, nous avons observé un excès de bruit sur la mesure des fluctuations de densité comparé au bruit de grenaille atomique que nous avons attribué au groupement de bosons. A plus fortes densités atomiques (régime de quasi-condensat), les interactions répulsives entre atomes réduisent considérablement les fluctuations de densité qui sont coûteuses en énergie d'interaction. En traçant l'évolution de ces fluctuations en fonction de la densité atomique nous pouvons voir l'effet progressif des interactions. Cette expérience pose donc la question de la nature de la "transition" entre le régime du gaz idéal et le régime de quasi-condensat dans une géométrie de piège très allongée. Comment atteint-on le régime de quasi-condensat ? Rappelons que l'ensemble de ces mesures a été réalisé dans le régime d'interactions faibles ($\rho a^3 \ll 1$). Nous répondrons à cette question au chapitre suivant en analysant les profils de densité atomique longitudinaux.

Cette méthode pourrait être appliquée à d'autres situations unidimensionnelles et en particulier à des gaz dans le régime d'interactions fortes (régime de Tonks-Girardeau) [135]. Passons en revue les conditions nécessaire pour l'observer. M. Olshanii [136], a montré que l'amplitude de transmission, suivant l'axe longitudinal du piège, d'un boson de vecteur d'onde k_z au travers d'un autre boson au repos, tous les deux étant dans le mode fondamental transverse du piège est donné par :

$$\mathcal{T}(k) = 1 - \frac{1}{1 + ik_z a_{1D}} \tag{5.67}$$

[29] Qui lisse en fait les variations du profil de densité.

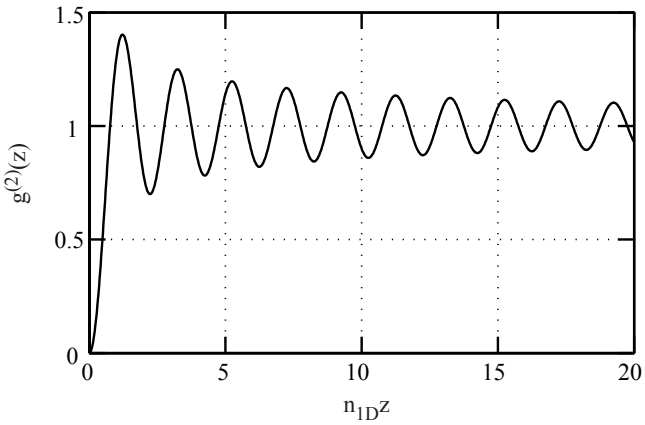

FIG. 5.28 – Fonction de corrélation $g^{(2)}(z)$ dans le régime de Tonks-Girardeau.

avec

$$a_{1\mathrm{D}} = -\frac{a_\perp^2}{2a}(1 - \mathbf{C}\frac{a}{a_\perp}) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{C} \simeq 1.46. \tag{5.68}$$

Nous voyons que pour $ka_{1\mathrm{D}} \ll 1$ l'amplitude de transmission tend vers 0 c'est-à-dire que la probabilité de trouver deux atomes proches l'un de l'autre tend vers 0 lorsque la distance entre eux tend vers 0 (i.e. $\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|\to\infty} g^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r'}) = 0$). Les bosons deviennent alors impénétables (gaz de Tonks-Girardeau), on parle alors de "fermionisation". Comment obtenir ce type de conditions ?

Au vu de l'équation 5.67, il faut avoir $k_z a_{1D} \ll 1$ c'est-à-dire diminuer $a_{1\mathrm{D}}$ et k_z. Pour réduire $a_{1\mathrm{D}}$, on ne peut que jouer sur la fréquence transverse que l'on aura tendance à augmenter pour diminuer $a_\perp$. De plus à température faible $k_z \simeq \xi^{-1} = \sqrt{mgn}/\hbar$. Il faut donc également diminuer la densité, en décomprimant dans la direction longitudinale du piège pour atteindre le régime de Tonks. Pour une densité atomique de 1 atome.μm^{-1} (ce qui parait être détectable avec la caméra actuelle) et un confinement transverse de 40 kHz, il faut avoir un confinement longitudinal de 8 Hz pour un nombre d'atomes de 5000. Malheureusement avec la puce actuelle ce type de confinement transverse n'est pas atteignable. Une nouvelle génération de puce est à l'étude pour prendre en compte cette éventualité.

Dans la limite où $n|a_{1D}| \ll 1$, la fonction de corrélation $g^{(2)}(z)$ pour un système de bosons impénétrables s'exprime sous la forme [137] :

$$g^{(2)}(z) = 1 - J_0(\pi n|z|) \tag{5.69}$$

où J_0 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0. Sur la figure 5.28, nous avons tracé cette fonction $g^{(2)}(z)$. Nous voyons qu'à faible distance celle-ci tend vers 0. Une signature possible du régime de Tonks-Girardeau est de mesurer les fluctuations de densité et de montrer qu'elles sont sous le bruit de grenaille pour des distances caractéristiques $nz \simeq \pi$. Cette mesure requière également une très bonne résolution optique puisqu'elle doit être de l'ordre du premier lobe de la fonction J_1.

CHAPITRE 6

Rôle des interactions répulsives entre atomes sur la formation d'un quasi-condensat

Depuis l'observation du premier condensat de Bose-Einstein dans un gaz d'atomes froids dilués [138], les théories de champ moyen ont toujours permis de décrire correctement les expériences réalisées, dans le régime des interactions faibles, notamment en ce qui concerne la prédiction de la température de condensation T_c [14, 15, 139]. Dans ces théories de champ moyen, un gaz de Bose au-dessus de T_c est décrit par une assemblée d'atomes considérés comme des bosons indépendants mais soumis en plus du potentiel de piégeage à un potentiel effectif moyen qui prend en compte l'effet des interactions répulsives entre atomes. Cette approche permet de décrire facilement le phénomène de condensation en présence d'interactions. Le phénomène de condensation se produit alors, comme dans le cas du gaz idéal, lorsque la population des états excités sature (*i.e.* le critère de condensation est toujours égal à $n_{3\mathrm{D}}\lambda_{\mathrm{dB}}^3 = 2.612$ à trois dimensions). Le succès de cette approche repose sur deux hypothèses : que le gaz soit dans le régime du gaz dilué ($\rho a^3 \ll 1$) et que les fluctuations de densité soient peu importantes. Dans un piège tridimensionnel, cette dernière condition n'est pas vérifiée au voisinage de la température de condensation [14], où des fluctuations critiques apparaissent, et des déviations par rapport aux théories de champ moyen sont attendues [140]. En particulier, la température de condensation est décalée vers une valeur plus élevée par rapport à celle prévue par les théories de champ moyen [141–143]. Cependant cet écart de l'ordre du % n'a jamais été observé expérimentalement dans un piège 3D [15, 144].

Ce dernier chapitre est relié à ces précédentes observations puisqu'il est consacré à l'étude de la formation de quasi-condensats dans un piège très anisotrope (*i.e.* proche du régime unidimensionnel). Nous allons montrer que l'apparition du quasi-condensat n'est pas due à la saturation des états excités, comme précédemment décrit (cas du gaz idéal ou théorie de champ moyen), mais par l'effet des interactions répulsives entre atomes qui inhibent les fluctuations de densité.

Après avoir présenté la théorie de champ moyen nous montrerons que celle-ci est incapable de reproduire nos profils de densité, et ceci dans un régime d'interactions faibles bien loin du régime d'interactions fortes [21] où les théories de champ moyen sont

connues pour donner des résultats incorrects.

Dans un premier temps, nous rappellerons quels sont les deux mécanismes en compétition pour la formation d'un (quasi)-condensat. Nous décrirons ensuite, la théorie de Hartree Fock (ou théorie de champ moyen) pour un nuage thermique au-dessus de la température de condensation et nous regarderons comment l'appliquer à nos résultats expérimentaux pour calculer les profils de densité atomique attendus et ainsi les comparer à nos données expérimentales.

6.1 Transition vers un quasi-condensat

6.1.1 Compétition entre deux mécanismes

Le terme de quasi-condensat a été initialement introduit par Popov [16], pour décrire un gaz dont les fluctuations de densité sont considérablement réduites par rapport à celles du gaz idéal, mais dans lequel persistent des fluctuations de phases qui prohibent l'existence d'une phase globale sur la totalité de l'extension du quasi-condensat. Ces fluctuations de phases proviennent d'excitations thermiques résiduelles qui peuvent par exemple être sondées par spectroscopie de Bragg [145] ou plus récemment par interférence entre deux quasi-condensats [146].

Dans ce paragraphe d'introduction nous rappellerons quels sont les différents mécanismes de formation du quasi-condensat. Dans la limite du régime unidimensionnel, et pour un confinement harmonique, il peut y avoir compétition entre deux mécanismes lors de la formation du (quasi)-condensat : les effets de taille finie qui, lorsque le nombre d'atomes dépasse $N_c = \frac{k_\mathrm{B}T}{\hbar\omega_z}\ln\left(\frac{2k_\mathrm{B}T}{\hbar\omega_z}\right)$ [147], se traduisent par une accumulation macroscopique dans l'état fondamental et dans un second cas par l'effet progressif des interactions répulsives entre atomes qui réduisent les fluctuations de densité par rapport au cas du gaz idéal. Cet effet se produit pour un nombre d'atomes qui peut être évalué par la formule [35] :

$$N_{c.o.} = \frac{k_\mathrm{B}T}{3\hbar\omega_z}\ln\left(\frac{\hbar^2 T}{m g_{1D}^2}\right). \tag{6.1}$$

Pour déterminer quel sera le type de "condensation", il convient de comparer N_c et $N_{\mathrm{c.o.}}$:

- lorsque $N_{c.o.} > N_c$, nous attendons une condensation due aux effets de taille finie.
- au contraire, lorsque $N_{c.o.} < N_c$ ce sont les interactions entre atomes qui induisent la formation du quasi-condensat.

Sur la figure 6.1, nous avons tracé d'une part l'évolution de N_c et $N_{\mathrm{c.o.}}$ en fonction de la température du nuage à $\omega_z = 10$ Hz et $\omega_\perp = 2.75$ kHz fixées et d'autre part l'évolution de N_c et $N_{\mathrm{c.o.}}$ en fonction de la fréquence d'oscillation longitudinale pour deux températures différentes $\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$ avec la même fréquence transverse. Nous voyons que pour cette gamme de paramètres, les effets de taille finie susceptibles d'apparaître

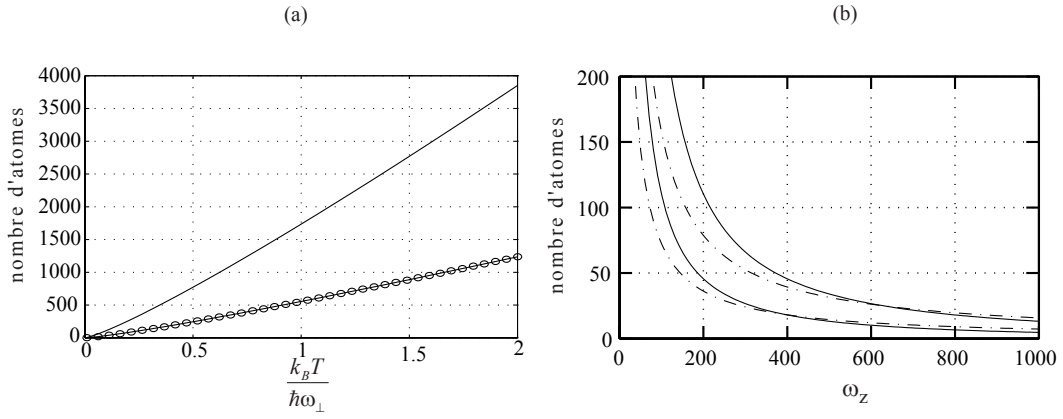

FIG. 6.1 – Comparaison entre les deux phénomènes possibles pour l'obtention d'un quasi-condensat : condensation due à des effets de taille finie et effet des interaction répulsives produisant un quasi-condensat. Figure (a) : nombre d'atomes N_c (courbe en trait plein) et $N_{\text{c.o.}}$ (cercles) en fonction de la température du nuage pour $\omega_\perp/(2\pi) = 2750$ kHz $\omega_z/(2\pi) = 10$ Hz. Figure (b) : nombre d'atomes N_c (courbe en traits pleins) et $N_{\text{c.o.}}$ (courbe en traits tiretés) en fonction de ω_z pour deux températures différentes : $T = \hbar\omega_\perp/k_{\text{B}}$ (les deux courbes inférieures) et $T = 2\hbar\omega_\perp/k_{\text{B}}$ (les deux courbes supérieures).

sont en fait masqués lorsque la fréquence d'oscillation est inférieure à 400 Hz pour $T = \hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$, par le rôle des interactions répulsives entre atomes. Il est ainsi très difficile de pouvoir observer la condensation en deux étapes prédite par Ketterle et Van Druten, procédure qui nécessiterait des interactions entre atomes beaucoup plus faibles. Pour atteindre ce type de régime, nous pouvons penser à réduire la longueur de diffusion a avec des résonances de Feshbach [148]. Donnons un ordre de grandeur de la valeur de a minimale pour observer ce type de phénomène. Pour un piège harmonique anisotrope dont le rapport d'aspect est 400 et en prenant une fréquence d'oscillation transverse $\omega_\perp = 2.7$ kHz, il faudrait que la longueur de diffusion soit inférieure à $a_\mathrm{min} = 3\times10^{-2}$ nm ce qui requière des conditions sur la stabilité expérimentale des champs magnétiques très importantes et difficile à réaliser expérimentalement.

Dans l'expérience que nous allons décrire dans ce chapitre, le gaz n'est pas purement unidimensionnel[1]. Dans ces conditions, nous pourrions nous attendre à un phénomène de condensation dû aux effets de taille finie. Néanmoins nous allons montrer que cet effet est masqué par la présence des interactions répulsives entre atomes c'est-à-dire que le gaz rentre doucement dans le régime de quasi-condensat. En effet, à partir d'un modèle Hartree-Fock à un fluide, nous allons montrer que le quasi-condensat présent au centre du nuage est obtenu alors que la température du nuage est supérieure à la température de condensation prédite dans l'approximation de champ moyen.

6.1.2 Théorie de champ moyen au dessus de T_c : modèle Hartree-Fock

Rappelons tout d'abord que l'hamiltonien d'interaction pour un gaz de Bose confiné dans un potentiel de piégeage V_ext s'écrit :

$$H = \int d\mathbf{r}\widehat{\Psi}\dagger(\mathbf{r})\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_\mathrm{ext.}\right]\widehat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\iint d\mathbf{r}d\mathbf{r}'\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r'})U_\mathrm{int.}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\widehat{\Psi}(\mathbf{r'})\widehat{\Psi}(\mathbf{r}) \tag{6.2}$$

Il est difficile en pratique de résoudre l'hamiltonien H pour un nuage thermique ou condensé car sa matrice densité à l'équilibre thermodynamique ne possède pas d'écriture simple. Une solution classique pour contourner ce problème consiste à utiliser une méthode variationnelle dans laquelle l'hamiltonien réel du système H est approximé par un hamiltonien d'essai que nous savons résoudre. Pour décrire "au mieux" l'hamiltonien réel, l'hamiltonien d'essai possède des paramètres ajustables qui seront optimisés pour d'une part minimiser l'énergie libre du système décrit par H_essai, et d'autre part pour que la matrice densité de H_essai soit la plus proche possible de celle de H.

Au dessus de la température critique[2], le modèle de Hartree-Fock consiste à approximer H par un hamiltonien à une particule de la forme (modèle à un fluide) :

[1] La température du nuage est de l'ordre de quelques $\hbar\omega_\perp$ et le nombre d'atomes impliqués est environ de 10^4 atomes.

[2] Le niveau fondamental du système ne joue pas de rôle particulier puisque sa population relative est faible.

$$H_{\text{essai}} = \frac{p^2}{2m} + V_{\text{ext.}} + U(r) \tag{6.3}$$

où la fonction $U(r)$ sera à déterminer par la méthode variationnelle.

Dans ce modèle, le gaz réel est considéré comme un gaz idéal qui, en plus du potentiel de piégeage appliqué $V_{\text{ext.}}$, est soumis à un potentiel effectif $U(r)$. Les interactions entre particules sont alors simplement décrites par une fonction complexe[3] (*i.e.* sous la forme d'un champ moyen) qui doit être d'une façon ou d'une autre proportionnelle à la densité atomique. La théorie de Hartree-Fock néglige donc complètement toutes les corrélations (en position ou impulsion) que les collisions binaires (ou d'ordre supérieur) entre particules peuvent introduire. A l'équilibre thermodynamique, l'énergie libre du système $J = \langle U \rangle - TS - \mu \langle N \rangle$ associée à l'hamiltonien réel H est par définition minimale et l'inégalité suivante est toujours vérifiée [149] :

$$J < J_{\text{essai}} + \langle H - H_{\text{essai}} \rangle_{\text{essai}} \tag{6.4}$$

où J_{essai} correspond à l'énergie libre associée à l'hamiltonien d'essai et $\langle . \rangle_{\text{essai}}$ représente la moyenne thermique qui est réalisée sur la matrice densité à l'équilibre thermodynamique de l'hamiltonien d'essai.

Pour obtenir l'expression de $U(r)$ il suffit de minimiser la somme des deux termes de droite de l'équation 6.4 par rapport aux états propres et énergies propres de H_{essai}. Nous ne ferons pas ici la démonstration qui peut par ailleurs être trouvée sous différentes formes [150, 151], mais nous pouvons montrer que $U(r) = 2g\rho(r)$. Il est cependant instructif de développer le terme $\langle H - H_{\text{essai}} \rangle_{\text{essai}}$ pour comprendre l'origine physique du facteur 2 dans l'expression de $U(r)$:

$$\langle H - H_{\text{essai}} \rangle_{\text{essai}} = \sum_k n_k \left(\langle k | H_0 | k \rangle - \epsilon_k \right) + \sum_{j<k} n_j n_k \left(\langle jk | U_{\text{int}} | jk \rangle + \langle jk | \mathrm{U}_{\text{int}} | kj \rangle \right) \tag{6.5}$$

où $|k\rangle$, ϵ_k sont respectivement les vecteurs propres et énergies propres de H_{essai}. n_k représente quant à lui la population de l'état propre $|k\rangle$ obtenue à partir de l'expression de la matrice densité.

Le calcul du terme d'interaction dans l'équation 6.5 fait apparaître :

– un terme dit direct (terme de Hartree) :

$$U_{\text{Hartree.}} = \sum_{j<k} \langle jk | U_{\text{int.}} | jk \rangle n_j n_k \tag{6.6}$$

– et un terme d'échange (terme de Fock) :

$$U_{\text{Fock.}} = \sum_{j<k} \langle jk | U_{\text{int.}} | kj \rangle n_j n_k \tag{6.7}$$

[3] Nous verrons en fait qu'elle est uniquement réelle.

Ce terme provient de la symétrisation des fonctions d'ondes pour des particules indiscernables qui n'est pas transparent dans le formalisme de la seconde quantification.

Dans le cas d'un potentiel de contact $U(r) = g_{3\mathrm{D}}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, les deux termes précédents sont égaux et s'ajoutent pour former, une fois la minimisation faite sur $E_{\mathrm{essai}} + \langle H - H_{\mathrm{essai}}\rangle_{\mathrm{essai}}$ le terme $2g\rho(r)$ dans l'expression de $U_{\mathrm{int.}}$.

Ainsi dans l'approximation de Hartree-Fock, au-dessus de la température critique, il suffit de déterminer les états propres et énergies propres de l'hamiltonien suivant pour connaître l'ensemble des propriétés du nuage atomique réel :

$$H_{\mathrm{HF}} = \frac{p^2}{2m} + V_{\mathrm{ext}} + 2g\rho(r) \tag{6.8}$$

Le comportement du gaz est donc analogue à celui d'un gaz qui serait constitué d'un ensemble de bosons indépendants soumis, en plus du confinement harmonique, à un potentiel effectif égal à $2g\rho(\mathbf{r})$. Ainsi le critère de condensation, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, s'obtient toujours à partir de la relation $n\lambda_{\mathrm{dB}}^3 = 2.612$. En d'autres termes la condensation se produit lorsque le potentiel chimique atteint la valeur de l'énergie de l'état fondamental du système (voir figure 6.2) qui correspond au moment où la population des états excités sature (*i.e.* on parle alors de saturation du fluide thermique).

A nombre fixé d'atomes, lorsque nous diminuons la température du nuage, la population des particules présentes dans les états excités sature, et les particules excédentaires viennent s'accumuler dans l'état fondamental où se forme le condensat. En dessous de la température critique, le rôle particulier que joue le niveau fondamental (population macroscopique) par rapport à l'ensemble des autres états accessibles doit être pris en compte. Pour cela, les modèles de champ moyen [131] utilisent alors une description à deux fluides, l'un décrivant la partie thermique et l'autre la partie condensée du nuage atomique, de densités atomiques respectives $n_{\mathrm{th.}}(\mathbf{r})$ et $n_0(\mathbf{r})$. Notons que le second fluide de la partie condensée est uniquement requis lorsque le fluide thermique sature. Nous allons voir que, pour les données expérimentales présentées dans la suite de ce chapitre, la théorie de Hartree-Fock ne prédit pas de saturation du fluide thermique et ne nécessite donc pas l'utilisation de ce second fluide.

6.2 Détermination de l'équation d'état du gaz : résolution numérique du modèle de Hartree-Fock

Pour montrer que la théorie de Hartree-Fock ne prédit pas de saturation du fluide thermique pour les nuages expérimentaux étudiés, nous comparerons le profil de densité longitudinal du gaz mesuré expérimentalement avec celui que prédit la théorie de Hartree-Fock pour les mêmes valeurs de paramètres expérimentaux (température et potentiel chimique).

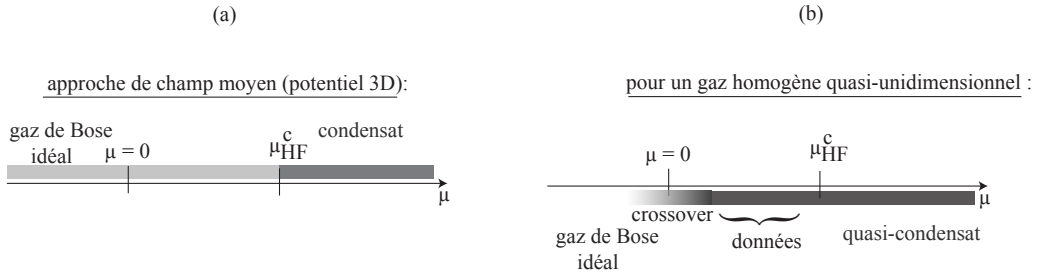

FIG. 6.2 – Cette figure illustre la différence de comportement d'apparition d'un quasi-condensat entre un piège isotrope 3D (figure (a)) et un potentiel quasi-unidimensionnel en forme de boite (figure (b)). Dans le premier cas, la condensation de Bose-Einstein apparaît lorsque le potentiel chimique du gaz atteint la valeur critique $\mu_{\mathrm{H.F.}}$. Dans le second cas, par contre, aucune condensation n'est attendue et c'est l'effet progressif des interactions répulsives entre atomes qui induit la formation du quasi-condensat ("cross-over").

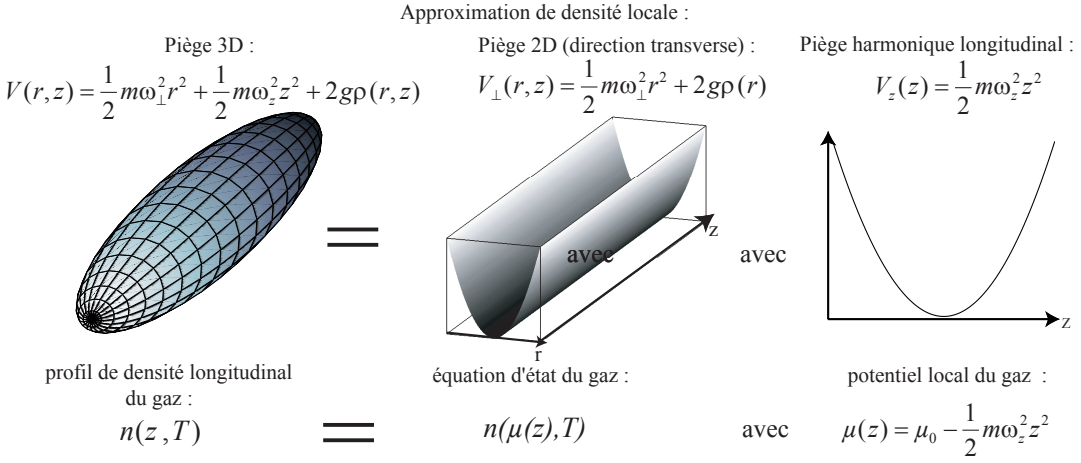

Fig. 6.3 – Méthode de calcul de l'équation d'état du gaz donnant la densité atomique longitudinale (*i.e.* integrée dans le plan transverse du piège) : en utilisant l'approximation de densité locale, l'équation d'état du gaz s'obtient en calculant à température et potentiel chimique fixés la densité atomique longitudinale pour le potentiel de la figure (b). Pour tenir compte de la présence du confinement longitudinal il suffit de remplacer le potentiel chimique μ_0 du gaz par le potentiel chimique local $\mu(z)=\mu_0-\frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2$.

Pour ce faire, nous ferons l'hypothèse d'approximation de densité locale [4], où les propriétés du gaz peuvent être décrites localement (équilibre local). Dans une tranche située entre les abscisses z et $z+dz$, les caractéristiques du gaz peuvent être déduites de celles d'un gaz homogène en utilisant un potentiel chimique effectif $\mu-(1/2)m\omega_z^2 z^2$ pour tenir compte du confinement longitudinal. Notamment, la densité atomique longitudinale $n(z)$ du gaz est identique à celle d'un gaz de Bose piégé transversalement et homogène longitudinalement $n_h(\mu(z),T)$ ayant comme potentiel chimique le potentiel chimique effectif $\mu(z)$. $n_h(\mu(z),T)$ représente donc l'équation d'état du gaz et sa seule connaissance permet de déduire l'ensemble des propriétés du gaz[5].

Ainsi pour un système purement unidimensionnel, l'approximation de densité locale permet de calculer la densité atomique du gaz par [30] :

$$n_{\rm th}=\frac{1}{\lambda_{\rm dB}}g_{1/2}\left\{\exp(-\beta\mu-\beta V_{\rm ext}-2gn_{\rm th}(r))\right\} \tag{6.9}$$

où $n_{\rm th}$ est obtenue de manière auto-consistante pour satisfaire l'équation 6.9. Malheureusement nous ne pouvons pas utiliser cette expression puisque dans notre cas plusieurs

[4]Cette hypothèse sera vérifiée *a posteriori*.

[5]Dans tout ce chapitre nous noterons les densités atomiques tridimensionnelles par la lettre grecque ρ et les densités atomiques linéiques (intégrées dans les deux directions transverses du piège) par la lettre n.

modes transverses sont peuplés. Il n'est également pas possible d'appliquer son homologue à trois dimensions $\rho_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^3} g_{3/2} \{\exp(-\beta\mu - \beta V_{\text{ext}} - 2g\rho_{\text{th}}(r))\}$ puisque dans ce cas, c'est l'approximation de densité locale dans la direction transverse qui n'est pas vérifiée. Pour tenir compte correctement de la quantification du mouvement transverse, il nous faut alors résoudre le problème suivant : trouver la densité atomique 3D $\rho(r, z)$ d'un gaz de bosons piégés dans un potentiel qui est harmonique dans la direction transverse et qui est invariant par translation dans la direction longitudinale. A ce potentiel, il faut rajouter le potentiel dû au champ moyen $2g\rho(\mathbf{r})$ (voir figure 6.3). En coordonnées cylindriques (r,θ,z) l'hamiltonien du système $H_{\text{H.F.}}$ s'écrit :

$$H_{\text{H.F.}} = \frac{p_z^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_\perp^2 + \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r^2 + 2g_{3D}\rho(r) \tag{6.10}$$

où $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_\perp^2$ correspond à l'opérateur de l'énergie cinétique transverse.

La densité atomique se trouve de manière auto-consistante en résolvant le problème aux valeurs propres $H|\Psi\rangle = \epsilon|\Psi\rangle$ et en calculant la densité atomique associée.

Le découplage entre la partie transverse de l'hamiltonien et la partie longitudinale nous permet d'écrire les fonctions d'onde solutions de l'hamiltonien $H_{\text{H.F.}}$ comme le produit d'ondes planes dans la direction longitudinale et des fonctions d'ondes transverses $|\Psi_{(\perp,\text{n})}\rangle$ solutions de :

$$H_{\perp,\text{H.F.}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_\perp^2 + \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r^2 + 2g_{3D}\rho(r) \tag{6.11}$$

L'invariance par rotation de l'hamiltonien transverse $H_{\perp,\text{H.F.}}$ autour de la direction longitudinale permet d'écrire les vecteurs d'onde $|\Psi_{(\perp,\text{n})}\rangle$ sous la forme $|\Psi_{(\perp,\text{n})}\rangle = e^{in\theta}|\phi_n(r)\rangle$.

Trouver les $|\Psi_{(\perp,\text{n})}\rangle$ consiste donc à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla_\perp^2 + \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r^2 + 2g_{3D}\rho(r)\right)|\Psi_{(\perp,\text{n})}\rangle = \epsilon_n|\Psi_{(\perp,\text{n})}\rangle \tag{6.12}$$

ce qui se réexprime en coordonnées cylindriques par :

$$H_{(\perp,\text{H.F.})}\phi_m(r) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\phi_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi_m}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2}\phi_m(r)\right) + \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r^2 + 2g_{3D}\rho(r) \tag{6.13}$$

en ayant utilisé le fait que :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{6.14}$$

La résolution de cet hamiltonien n'est malheureusement pas analytique de façon auto-consistante. Pour contourner ce problème, plusieurs possibilités s'offrent à nous : une résolution numérique itérative ou une résolution numérique par minimisation de fonctions. Ces deux solutions seront détaillées dans les prochains paragraphes.

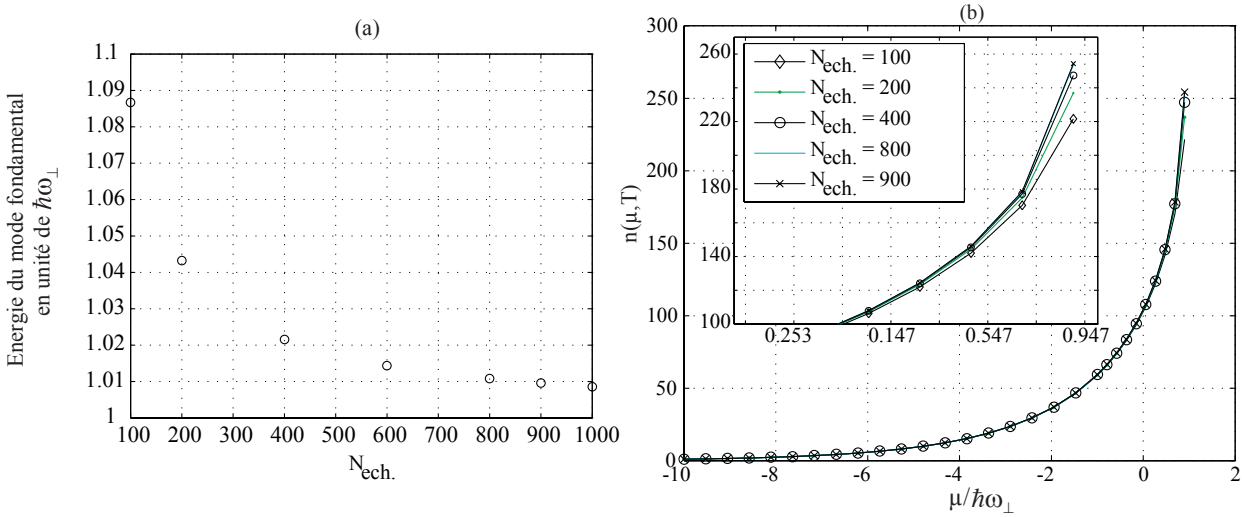

Fig. 6.4 – Etude de la convergence de l'algorithme du calcul de la densité atomique dans le cas sans interaction pour une température de $2.75\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$ en fonction du nombre de points $N_{\mathrm{ech.}}$ d'échantillonnage de la densité atomique dans le plan transverse : la figure (a) montre l'évolution de l'énergie du mode fondamental en fonction de $N_{\mathrm{ech.}}$ alors que la figure (b) montre l'évolution de l'équation d'état $n(\mu, T = 2.75\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B})$ en fonction de $N_{\mathrm{ech.}}$. Pour la valeur $N_{\mathrm{ech.}} = 900$ utilisée, la différence d'énergie entre la valeur théorique $\hbar\omega_\perp$ et la valeur calculée est inférieure à $0.01\hbar\omega_\perp$.

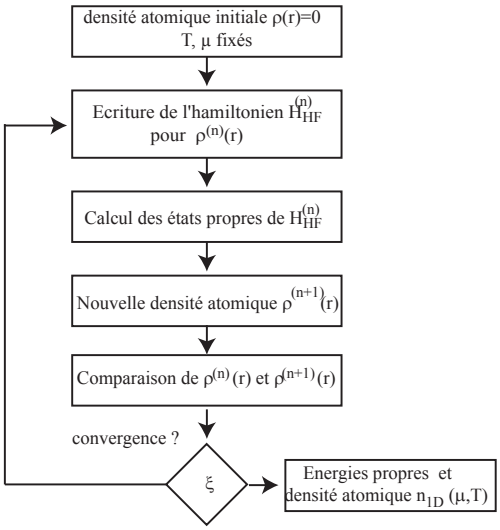

FIG. 6.5 – Diagramme donnant l'algorithme de calcul de l'équation d'état $n_{1\mathrm{D}}(T,\mu)$ dans le cas de la méthode itérative. A température fixée, nous répétons l'algorithme en faisant varier le potentiel chimique entre $-10\hbar\omega_\perp$ et le potentiel chimique réel du nuage μ_0.

6.2.1 Méthode par itération

La méthode la plus intuitive et la plus facile pour résoudre l'équation 6.13 consiste à procéder itérativement. On commence par se donner un profil de densité initial $\rho^{(0)}(r)$ et on calcule la nouvelle densité atomique à partir de l'hamiltonien $H^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r^2 + 2g\rho^{(0)}(r)$ puis on itère le processus jusqu'à convergence. Comme profil initial de densité, il est intéressant de prendre $\rho^{(0)}(r) = 0$ puisqu'à la fin de la première étape, l'expression de la densité atomique $\rho^{(1)}(r)$ correspond à celle du gaz idéal. Ensuite la n^{ième} étape se déduit de la (n − 1)^{ième} étape par (voir figure 6.3) :

- le calcul de l'expression de l'hamiltonien à partir de la densité $\rho^{(n-1)}(r)$,
- la résolution du problème aux valeurs propres et aux vecteurs propres $H^{(n)}_{\text{H.F.}}|\phi^{(n)}\rangle = \epsilon^{(n)}|\phi^{(n)}\rangle$ à partir de la méthode des éléments finis (voir l'annexe E pour la dérivation matricielle de $H^{(n)}_{\text{H.F.}}$),
- la normalisation de tous les vecteurs propres : $\iint \phi^{(n),*}(r)\phi^{(n)}(r)rdrd\theta = 1$,
- le calcul de la densité atomique à l'ordre (n) à partir de la matrice densité par :

$$\rho^{(n)}(r) = \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}}\sum_{n=1}^{N_{\max}}\left(\sum_{\alpha=1}^{\alpha_{\max}}\frac{e^{\alpha\beta(\mu-\epsilon_i^{(n)})}}{\sqrt{\alpha}}|\phi_i^{(n)}(r)|^2\right). \tag{6.15}$$

Nous tronquons les deux sommes à $\alpha_{\max} = 1000$ et $N_{\max} = 50$ respectivement, en nous assurant que la convergence des sommes est atteinte à mieux que le %.

L'opération est répétée jusqu'à convergence de l'algorithme[6]. Nous avons choisi comme paramètre de convergence la quantité ξ définie par

$$\xi = \frac{\int_0^\infty r(\rho'(r) - \rho(r))^2 dr}{\int_0^\infty r\rho(r)^2 dr} \tag{6.16}$$

qui correspond à la moyenne relative des écarts entre les profils de deux itérations successives.

Numériquement, nous discrétisons le profil de densité transverse (et donc les fonctions d'onde transverses) avec un nombre fini de points $N_{\text{ech.}}$ sur une distance de 2 μm à partir du centre du piège. Nous avons vérifié, dans le cas du gaz idéal où nous connaissons la valeur de l'énergie de l'état fondamental ($\hbar\omega_\perp$), que l'algorithme converge bien vers la valeur théorique et avec une précision meilleure que 0.1% pour $N_{\text{ech.}} = 900$ points (voir figure 6.5). Pour les calculs faits dans la suite, nous prendrons $N_{\text{ech.}} = 900$ points.

Nous décrétons que l'algorithme a convergé lorsque $\xi < 3 \times 10^{-5}$, ce qui correspond également à une erreur sur la détermination des énergies propres du piège de l'ordre de 0.1% de $\omega_\perp$ (*i.e.* de l'ordre de l'unité en unités de ω_z). Pour avoir une visualisation concrète de la convergence de l'algorithme, nous avons représenté sur la figure 6.6 le profil de densité transverse après convergence de l'algorithme ($\xi < 3 \times 10^{-5}$) ainsi que le profil de densité obtenu en résolvant H_{HF} avec ce profil de densité trouvé. Nous voyons comme attendu un très bon accord entre les deux profils de densité trouvés, une fois la convergence atteinte.

Une fois que l'algorithme a convergé, nous intégrons la densité atomique trouvée $\rho(r)$ dans le plan transverse du nuage $n_{1D} = \iint \rho(r) r dr d\theta$ pour obtenir la densité linéique pour une température et un potentiel chimique donnés qui n'est rien d'autre que la valeur de $n_h(\mu, T)$. En réitérant le processus pour différentes valeurs de μ, nous pouvons ainsi connaître l'équation d'état du gaz sur toute la gamme de potentiel chimique considéré. Sur la figure 6.7, nous avons représenté cette équation d'état pour quatre valeurs différentes de température.

Cependant, nous avons constaté que cet algorithme ne converge pas lorsque le potentiel chimique dépasse l'énergie du niveau fondamental (*i.e.* pour des densités linéiques de l'ordre de 300 atomes par pixel[7]). Dans ce cas, nous devons utiliser une méthode alternative que nous allons développer dans le paragraphe suivant.

6.2.2 Méthode par minimisation

Cette seconde méthode, plus coûteuse en temps de calcul, consiste à supposer que le profil de densité est correctement décrit par une fonction analytique avec des paramètres

[6] Cette méthode ne nécessite qu'une dizaine d'appels à la fonction de calcul du profil de densité transverse du nuage atomique et permet d'obtenir en quelques heures la valeur de $n_h(T, \mu)$ pour une trentaine de valeurs de μ.

[7] Cette valeur est obtenue pour la température $T = 2.3\hbar\omega_\perp/k_B$ et $\omega_\perp/(2\pi) = 2750$ kHz correspond aux valeurs du nuage atomique (b) de la figure 6.17.

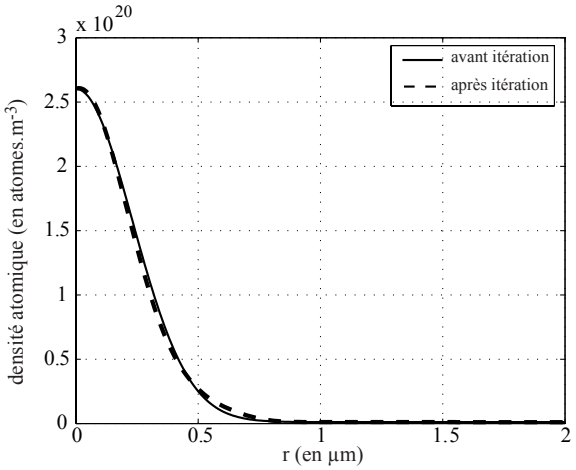

FIG. 6.6 – Comparaison du profil de densité obtenus entre deux itérations successives pour $\mu = 1.8\hbar\omega_\perp$ et $T = 2.67\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$ après convergence de l'algorithme.

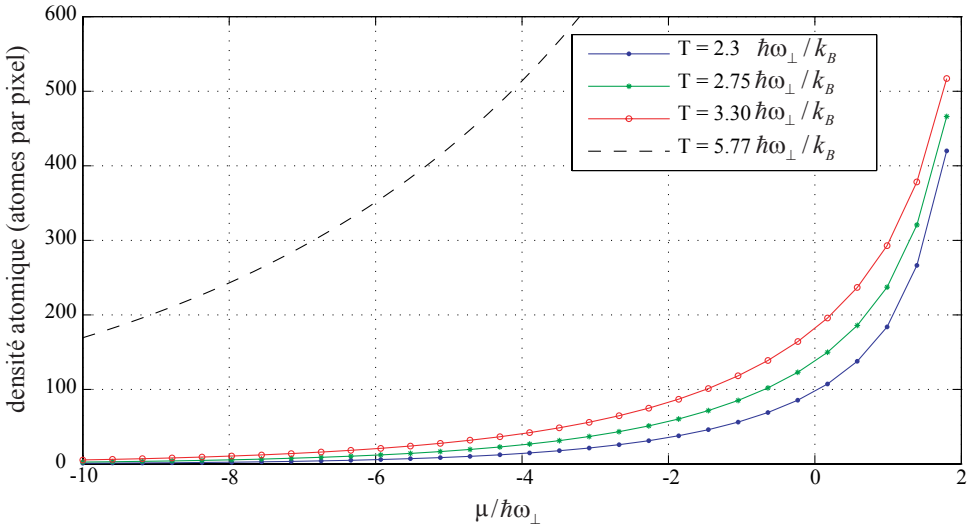

FIG. 6.7 – Evolution de l'équation d'état pour différentes températures de nuages. Les courbes tracées correspondent aux températures mesurées sur les quatres nuages présentés sur la figure 6.17.

ajustables et à trouver la valeur de ces paramètres de façon à minimiser la valeur de ξ. Nous avons choisi pour approximer la densité atomique la fonction d'essai :

$$\rho_{\text{essai}}(r) = \sum_{p=0}^{3} c_p H_{2p}(r) e^{-\frac{r^2}{2r_0^2}} \tag{6.17}$$

où $H_{2p}(r)$ désigne le polynôme de Hermite d'ordre $2p$ et les paramètres c_p et r_0 sont les variables d'ajustement[8]. Nous ne développons la densité atomique que sur les polynômes de Hermite pairs car le problème étudié est invariant par rotation autour de l'axe du piège.

Cette décomposition doit se révéler correcte pour les faibles densités atomiques puisque l'on retrouve dans ce cas la forme du gaz idéal avec $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Nous verrons que ceci reste correct même pour des densités atomiques élevées (700 atomes par pixel), puisque ξ reste encore inférieur à 3×10^{-5} et la densité atomique intégré $n_{1\text{D}}^{(n)} = \int 2\pi\rho^{(n)}(r) r dr$ est identique à $n_{1\text{D}}^{(n-1)}$ à 0.05% . Ainsi la fonction d'essai choisie est bien adaptée pour décrire la densité atomique.

L'ensemble de ce code a été implémenté sous Matlab et requiert un temps de calcul de l'ordre de 5 heures pour une valeur de potentiel chimique. Ceci provient du fait que la fonction de recherche du minimum de ξ "fminsearch" fait appel à la fonction d'essai $\rho_{\text{essai}}(r)$ environ un millier de fois. Cette évaluation de fonction est relativement longue puisqu'elle nécessite la diagonalisation de 25 matrices de 900×900 points pour le calcul de la densité atomique soit environ 20 s. Pour limiter le temps de calcul d'une courbe complète de l'équation d'état du gaz à une semaine, nous avons choisi d'échantillonner le potentiel chimique avec trente points linéairement espacés entre $-10\hbar\omega_\perp$ et sa valeur prise au centre du nuage μ_0. Les valeurs intermédiaires de $n_h(\mu, T)$ sont alors trouvées par interpolation linéaire.

Pour illustration nous avons reporté dans le tableau suivant les valeurs des paramètres de minimisations lorsque $T = 2.75\hbar\omega_\perp/k_\text{B}$ et $\mu = 1.8\hbar\omega_\perp$:

polynôme de Hermite	facteur de pondération c_{2p}
$H_0(r) = 1$	2.2361×10^{20}
$H_2(r) = 4r^2 - 2$	1.7632×10^{7}
$H_4(r) = 16r^4 - 48r^2 + 12$	9.8971×10^{-6}
$H_6(r) = 64r^6 - 480r^4 + 720r^2 - 120$	4.4168×10^{-18}

Pour les paramètres d'ajustement donnés dans le tableau précédent, nous trouvons comme une valeur de 10^{-4} pour le paramètre ξ. Ceci montre que notre modèle à 5 paramètres permet de reproduire le profil de densité transverse. De plus nous voyons que

[8] les polynômes de Hermite d'ordre n sont définis comme les solutions de l'équation différentielle $y'' - 2xy + 2ny = 0$.

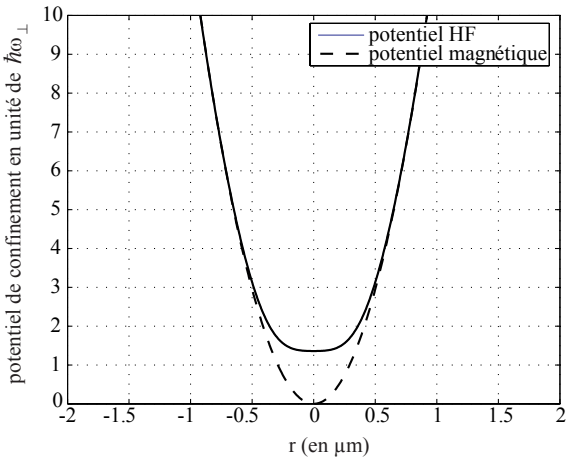

FIG. 6.8 – Comparaison entre le potentiel harmonique transverse et le potentiel Hartree-Fock vu par les atomes. La présence des interactions répulsives entre atomes a deux effets : elles augmentent la valeur du fond du piège et réduit localement (i.e. au fond du piège) le confinement.

la décomposition du profil de densité transverse est principalement faite sur le polynôme H_0. Le profil de densité est donc majoritairement gaussien.

Pour ces mêmes valeurs de paramètres, nous avons également représenté sur la figure 6.8, l'allure du potentiel effectif vu par les atomes $V_{\text{ext.}} + 2g_{3\text{D}}\rho(r)$, et pour comparaison le potentiel vu par les atomes dans le cas d'un gaz idéal. Nous constatons, comme nous le mentionnions précédemment que les interactions répulsives entre atomes augmentent l'énergie du fond du piège. Nous voyons également qu'au centre du piège le confinement effectif est plus faible, faisant ainsi "gonfler" le profil de densité atomique transverse.

6.2.3 Comparaison des différentes méthodes

Dans la zone où la méthode itérative converge, il est possible de comparer les deux méthodes. La figure 6.9 présente les deux expressions de la densité d'état pour une fréquence d'oscillation transverse $\omega_\perp/(2\pi) = 2750$ kHz et $T = 2.75\hbar\omega_\perp/k_B$ (voir note[9]). Sur toute la plage de convergence de la méthode itérative, nous voyons un très bon accord entre les deux méthodes (l'erreur commise est alors inférieure à 1 %). Nous avons également ajouté l'expression de la densité d'état pour un gaz idéal (Cf. équation 6.15). Alors que $n_{\text{ideal}}(\mu)$ diverge lorsque $\mu \to 0$, les deux autres méthodes prédisent une valeur finie pour $n_h(\mu, T)$.

[9]nous avons choisi ces paramètres de calcul car ils correspondent à l'un des jeux de données expérimentaux que nous avons étudié (profil (b) de la figure 6.17).

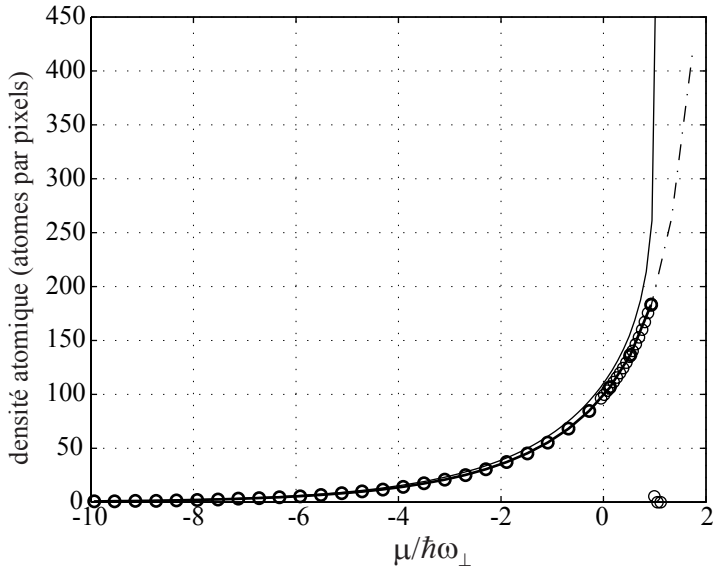

Fig. 6.9 – Comparaison des deux méthodes de calcul de l'équation d'état du gaz pour une température de $2.75\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$: méthode par itération (cercles) et méthode par minimisation (courbe en trait tiretés). Dans la zone de convergence des deux méthodes, l'erreur commise est inférieure à 5×10^{-5} sur la densité atomique ainsi que sur la valeur de l'énergie du mode fondamental. En trait plein, nous avons ajouté l'équation d'état du gaz parfait à la même température. A faible potentiel chimique,(*i.e.* lorsque l'effet des interactions est négligeable) les trois courbes se superposent. La méthode itérative diverge lorsque le potentiel chimique, pour les paramètres utilisés, avoisine $\hbar\omega_\perp$. La méthode par minimisation permet de tracer la courbe complète de l'équation d'état pour tout potentiel chimique inférieur à μ_HF.

6.3 Séquence expérimentale

6.3.1 Préparation du nuage atomique

Les nuages atomiques présentés dans ce chapitre sont obtenus à partir d'une séquence proche de celle utilisée au chapitre précédent. Le chronogramme de la séquence est présenté sur la figure 6.10. A partir d'un nuage froid (T=1.5μK= $11\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$) piégé dans le piège en Z (I_{Z1}=3 A, $|B|$=35 G, θ=14°, B_z = 1 G) et en présence d'un couteau radio-fréquence constant (ν_RF=1.5 MHz), nous comprimons le piège en 200 ms, en réduisant d'une part la valeur du champ magnétique longitudinal B_z^0 à 0.5 G et d'autre part en augmentant le champ homogène $|B_0|$ à 40 G. Le courant dans le fil Z_1 est maintenu constant à 3 A alors qu'aucun courant ne circule dans le fil Z_2 de sorte que le piège reste relativement comprimé dans la direction longitudinale. Les propriétés de ce piège ont été mesurées, comme précédemment, par excitation du mode dipolaire transverse et longitudinal du nuage. Nous obtenons alors les deux fréquences d'oscillation suivantes : $\omega_\perp/(2\pi)$ =2.75 kHz et $\omega_z/(2\pi)$ = 15.7 Hz.

Une fois cette compression réalisée, nous finissons la séquence d'évaporation pour atteindre l'équilibre thermodynamique du nuage. Celle-ci se décompose en deux rampes linéaires de fréquence de durée égales (300 ms chacune) (voir figure 6.10). Pour modifier la température finale du nuage, nous ne modifions que la valeur de la fréquence RF finale . La fréquence finale de la RF va de 0.7 MHz pour les nuages les plus chauds ($5.5\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$) à 0.512 MHz pour les nuages les plus froids ($2.3\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$). Nous prenons ensuite une image *in-situ* du nuage (1 ms avant la coupure du piège). Cette mesure *in-situ* a l'intérêt de s'affranchir des effets dus au temps de vol : modification du profil de densité en position en profil de densité en impulsion[10], effet des interactions durant le temps de vol.

6.3.2 Mesures du profil de densité in-situ

Pour ne pas être confrontés au problème du chapitre précédent concernant la détermination de la densité atomique (densité optique forte), nous avons choisi d'utiliser un faisceau sonde décalé par rapport à la fréquence de transition de la résonance entre les niveaux $|F = 2, m_F = +2\rangle \rightarrow |F' = 3, m_F = +3\rangle$ pour réduire la section efficace d'absorption effective. Pour un système à deux niveaux, celle-ci s'écrit :

$$\sigma(\delta) = \frac{\sigma_0}{1 + 4\frac{\delta^2}{\Gamma^2}} \tag{6.18}$$

où Γ est la largeur de raie naturelle de l'état $|F' = 3, m_F = +3\rangle$. Dans notre cas, cette expression n'est pas tout à fait correcte puisque, du fait de la présence d'un champ magnétique non homogène, les atomes sont rapidement dépompés vers les autres sous-niveaux Zeeman ($|F = 2, m_F = -2\rangle$, $|F = 2, m_F = -1\rangle$, $|F = 2, m_F = 0\rangle$, $|F =$

[10] apparition de fluctuations de densité à cause de fluctuations de phase présentes dans le piège initial, voir figure 2.2 du chapitre 2, ainsi que [31].

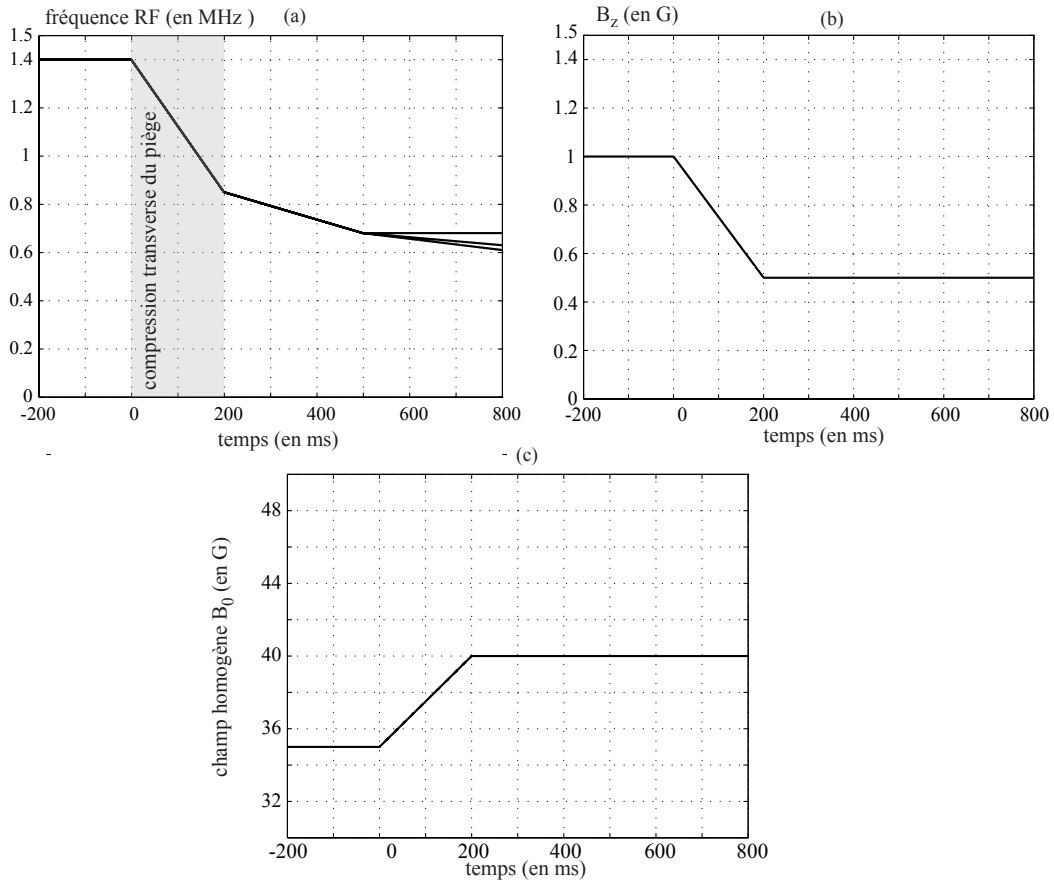

Fig. 6.10 – Chronogramme de la séquence expérimentale pour la production du quasi-condensat. Sur la figure (a) est représentée l'évolution de la fréquence du couteau radio-fréquence. En modifiant la valeur finale de la fréquence radio-fréquence nous pouvons faire varier la température du nuage. Comme dans le chapitre précédent l'imagerie est faite *in situ* 1 ms avant la coupure du piège.

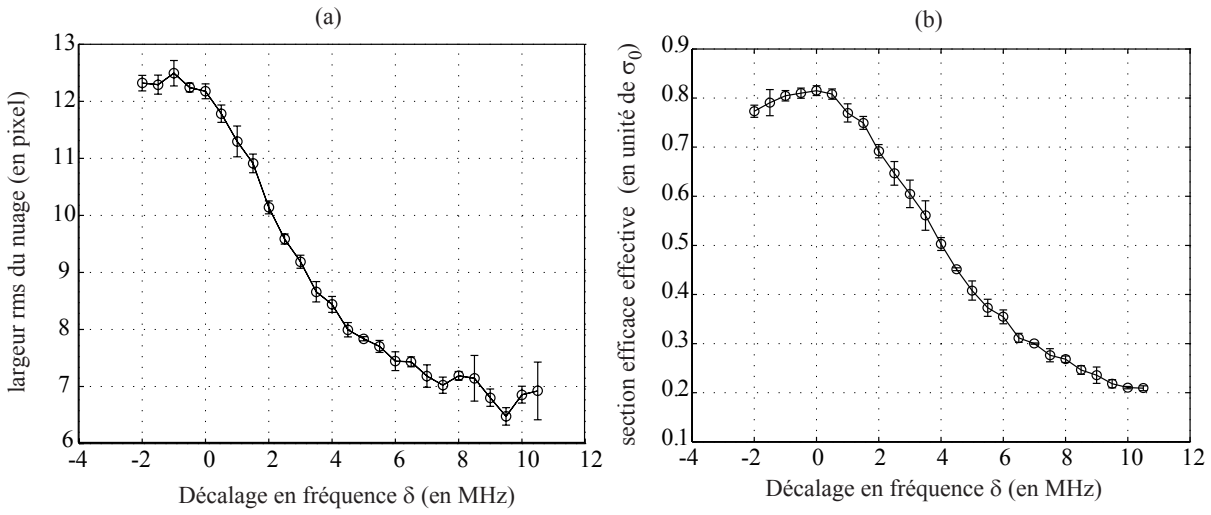

FIG. 6.11 – Figure (a) : évolution de la largeur rms du nuage (ajustement par une fonction gaussienne) en fonction du décalage δ du faisceau sonde par rapport au maximum d'absorption du nuage. Figure (b) : évolution de la section efficace d'absorption effective du nuage en fonction de δ. Les mesures présentées dans la suite du manuscrit sont faites à $\delta = 9$ MHz.

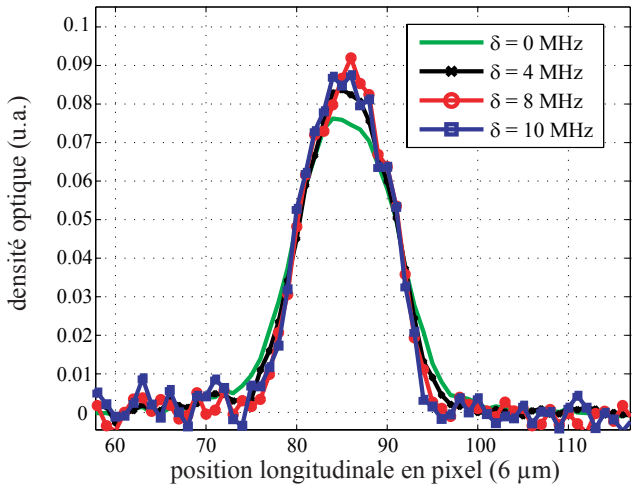

Fig. 6.12 – Evolution du profil de densité du nuage atomique mesuré en fonction du désaccord du faisceau sonde. Pour δ=9 MHz, la forme du profil de densité est identique à son véritable profil à mieux que 5% (les profils de densité obtenus ont été moyennés sur 20 réalisations expérimentales et correspondent à une température de 1.2 $\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$). Taille du pixel 6 μm.

$2, m_F = 1\rangle$, $|F = 2, m_F = 2\rangle$) qui ne voient ni le même décalage Zeeman et ni les mêmes coefficients de Clebsch-Gordan, ce qui a pour conséquence d'augmenter la largeur de la courbe de résonance par rapport au cas simple d'un système à deux niveaux. Il est alors nécessaire de décaler encore plus la fréquence du faisceau sonde pour obtenir une densité optique faible.

Afin de déterminer la valeur minimale de δ et ainsi mesurer correctement la densité atomique, nous avons regardé la largeur rms du nuage (ajustement par une fonction gaussienne) et nous avons déterminé à partir de quelle valeur de δ celle-ci converge (voir figure 6.11). Pour un désaccord de 9 MHz, la largeur rms du nuage a relativement bien convergée tout en nous permettant de conserver un bon rapport signal sur bruit (un moyennage d'une trentaine d'images sera cependant nécessaire pour obtenir un joli profil de densité). A partir de ces mesures, il est également possible de déterminer la section efficace d'absorption effective du nuage en fonction du désaccord (voir figure 6.11). Pour $\delta = 9$ MHz, la section efficace d'absorption effective est égale à 0.24.

Nous avons également vérifié que, pour des valeurs de désaccords plus importante, les profils de densité, normalisés au même nombre d'atomes, sont identiques entre eux à mieux que 5% près (écart quadratique moyen, voir figure 6.12)[11].

Cependant lorsque le nuage est éclairé par un faisceau laser qui n'est pas à résonance avec une transition atomique, celui-ci induit en plus de son absorption une lame d'indice

[11] Pour cette valeur de δ la densité optique au centre du nuage est de 0.25.

sur le faisceau d'imagerie. Cette lame d'indice va faire plus ou moins diffracter le faisceau en fonction de la densité atomique et risque d'être arrêtée par la pupille d'entrée du système optique. Cet effet ne serait pas gênant s'il se produisait de façon homogène sur toute la longueur du nuage atomique puisqu'il serait dans ce cas compensé par la calibration de la section efficace d'absorption effective. Pour un profil de densité atomique transverse dépendant de la coordonnée z ce n'est plus le cas et cela risque de modifier l'absorption du faisceau sonde détectée sur la caméra. Nous nous proposons dans le paragraphe suivant d'estimer cet effet.

effet de diffraction du nuage atomique :

Nous modéliserons le nuage par une simple lame de phase mince (le faisceau sonde n'ayant pas le temps de diffracter lors de sa propagation au travers du nuage ($\simeq 1.5$ μm). L'épaisseur optique du nuage est obtenue en intégrant le déphasage accumulé sur l'ensemble du nuage soit $\int_{-\infty}^{\infty} \Delta n(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta n(0)e^{-\frac{y^2}{2y_0^2}}dy = \sqrt{2\pi}y_0\Delta n_0$,où y_0 est la largeur rms du nuage atomique et Δn_0 est la variation de l'indice de refraction optique induit par le nuage en son centre.

Cet indice effectif peut être estimé par la formule donnée pour un système à deux niveaux[12] [152] :

$$n = 1 - \frac{\sigma_0 n_{3D}\lambda}{4\pi}\frac{\delta}{1+\delta^2} \tag{6.19}$$

où $\delta \equiv \frac{(\omega-\omega_0)}{\Gamma/2}$ est le décalage en fréquence par rapport à la résonance en unités de $\Gamma/2$ et $n_{3\mathrm{D}}$ est la densité atomique au centre du nuage.

Sur la figure 6.13, nous avons tracé l'évolution de la partie réelle et de la partie imaginaire de l'indice de réfraction optique données par la formule 6.19 en fonction du paramètre δ pour une densité atomique $n_{3\mathrm{D}} = 10^{19}$atomes.m^{-3} (correspondant au nuage obtenu expérimentalement. Pour un désaccord $\delta = 9$ MHz, Δn_0 est de 0.1, ce qui correspond à une épaisseur optique additionnelle de $\sqrt{2\pi}z_0\Delta n_0 = 0.3\lambda$ lorsque la largeur rms du nuage vaut $y_0 = 1$ μm).

A partir de ces données, nous pouvons calculer l'expression du champ électrique du faisceau sonde au niveau de la pupille d'entrée de notre système optique, *i.e.* au niveau du hublot de l'enceinte à vide (voir figure 6.14 pour les notations). Celui-ci s'exprime en appliquant le principe d'Huygens-Fresnel. Dans l'approximation paraxiale il s'écrit :

$$\mathcal{E}(x',z') = \frac{i}{\lambda d}\iint_{\text{plan}} \mathcal{E}_0 e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{2\pi}z_0\Delta n(x,z)} e^{-i\pi\frac{x^2+z^2}{\lambda d}} e^{-2i\pi\frac{xx'+zz'}{\lambda d}} dxdz \tag{6.20}$$

soit encore en utilisant les notations usuelles concernant les transformées de Fourier [13] :

[12] Bien qu'en toute rigueur fausse, cette formule nous permet d'estimer un ordre de grandeur de l'indice optique produit par le nuage lorsqu'il est éclairé par une onde hors de résonance.

[13] La transformée de Fourier de f est définie par $\widetilde{f}(\nu,\eta) = \mathcal{TF}\{f(x,y)\}_{\{\nu,\eta\}} = \iint f(x,y)e^{-2\pi(x\nu+y\eta)}dxdy$.

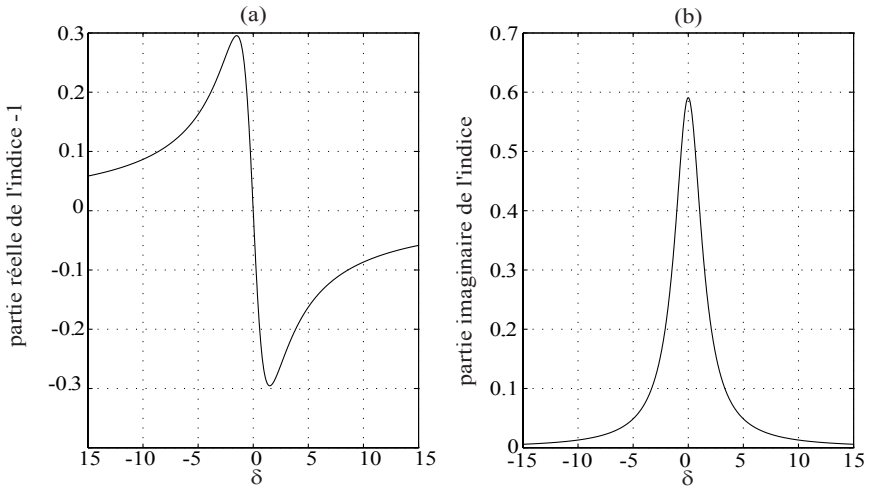

Fig. 6.13 – Parties réelle et imaginaire de l'indice de réfraction du nuage atomique pour une densité au centre de $10^{19}\mathrm{m}^{-3}$, évaluées à partir de l'équation 6.19.

$$\mathcal{E}(x',z') = \frac{i\mathcal{E}_0}{\lambda d}\mathcal{TF}\left\{e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{2\pi}z_0\Delta n(x,z)}e^{-i\pi\frac{x^2+z^2}{\lambda d}}\right\}_{\{\frac{x'}{\lambda d},\frac{z'}{\lambda d}\}} \tag{6.21}$$

et l'intensité optique s'obtient en prenant le modulé carré de l'expression 6.21 :

$$\mathcal{I}(x',y') = \frac{\mathcal{E}_0\mathcal{E}_0^*}{(\lambda d)^2}\left|\mathcal{TF}\left\{e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{2\pi}z_0\Delta n(x)}e^{-i\pi\frac{x^2}{\lambda d}}\right\}_{\left\{\frac{x'}{\lambda d}\right\}}\right|^2\left|\mathcal{TF}\left\{e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{2\pi}z_0\Delta n(y)}e^{-i\pi\frac{y^2}{\lambda d}}\right\}_{\left\{\frac{y'}{\lambda d}\right\}}\right|^2 \tag{6.22}$$

Comme la variation spatiale de l'indice de réfraction est plus importante dans la direction transverse du nuage (axe x) que dans la direction longitudinale du piège (axe z), nous ne ferons qu'un calcul unidimensionnel de la figure de diffraction dans la plan transverse.

Sur la figure 6.14, nous avons représenté la quantité de lumière diffractée qui n'est pas recueillie par le système optique. Nous voyons que l'ouverture finie du système optique ne modifie pas (à mieux que 5%) la mesure du nombre d'atomes par pixel et permet donc de s'affranchir des effets de densité optique forte lorsque nous imageons à résonance.

mesures du profil de densité atomique :

Après avoir moyenné 30 images expérimentales, nous calculons le profil de densité longitudinal en intégrant dans la direction transverse la contribution de 5 pixels comme au chapitre précédent. Sur la figure 6.17, nous avons tracé le profil de densité longitudinale pour des nuages à différentes températures à l'équilibre thermodynamique (*i.e.*

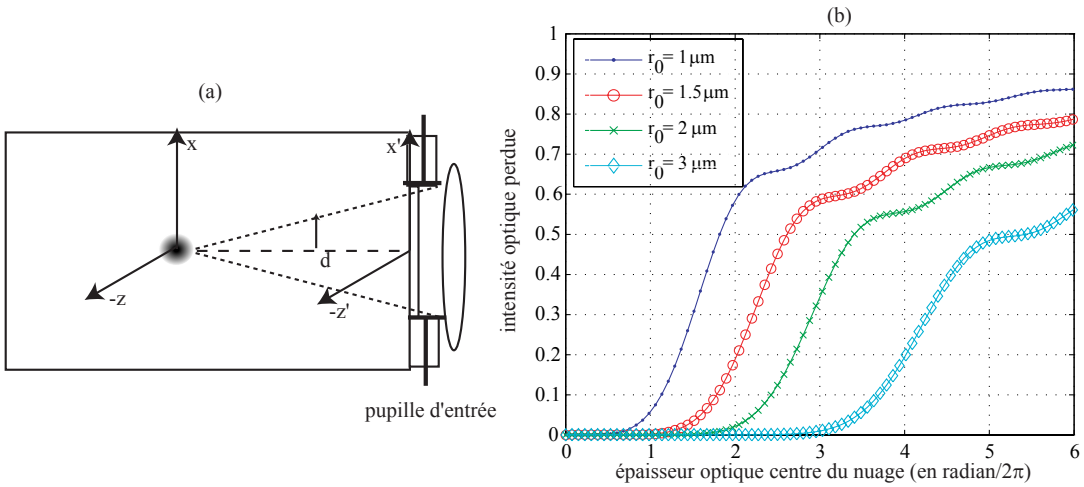

FIG. 6.14 – Effet de l'indice optique sur la mesure d'absorption du nuage atomique sur la caméra CCD. Figure (a) : une onde de profil d'intensité gaussien (largeur rms r_0) diffracte sur une distance d avant d'être interceptée par la pupille d'entrée du système optique. L'indice optique du nuage est modélisé par un terme de phase également gaussien dont l'amplitude au centre du nuage est égal à $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{2\pi}r_0\Delta n$ où Δn a été évalué avec l'équation 6.19 et est constant pour toutes les courbes tracées. Le rapport entre l'intensité diffractée non-collectée par la pupille d'entrée du système optique et l'intensité totale diffractée est représenté sur la figure (b) pour les paramètres suivants : $d = 35$ mm et un diamètre de pupille d'entrée de 40 mm. Pour $r_0 = 1\mu$m et $\Delta n = 0.1$ l'intensité optique perdue est inférieure à 5% ce qui ne modifie pratiquement pas l'absorption détectée sur la caméra CCD.

obtenues à partir de valeurs différentes de couteau radio-fréquence). Sur cette figure, nous avons également ajouté la courbe donnant le profil de densité attendu dans la limite quasi-condensat. Celui-ci est obtenu à partir des deux équations suivantes : équation d'état d'un quasi-condensat dans la direction longitudinale [153] et par l'équation donnant l'expression du potentiel chimique local

$$\begin{cases} \mu(z) = \mu_0 - \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 \\ \mu(z) = \hbar\omega_\perp\sqrt{1+4n_{1\mathrm{D}}(z)a} \end{cases}$$

Il faut pour cela tenir compte de la convolution du profil théorique par la réponse du système d'imagerie (gaussienne de largeur rms 10 μm). Nous observons un bon accord au centre du nuage pour les deux nuages les plus froids (voir figure 6.17, courbe en traits tiretés courts), ce qui nous indique que le gaz se trouve dans le régime de quasi-condensat. Ce fait a été confirmé par la mesure de la forte réduction des fluctuations de densité par rapport au cas du gaz idéal au chapitre précédent.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous attacherons à démontrer que l'apparition de ce quasi-condensat au centre du nuage atomique qu'au centre du piège n'est pas dû, contrairement au cas d'un piège tridimensionnel à une saturation des états excités (voir chapitre 1) mais simplement par l'effet progressif des interactions répulsives entre atomes.

6.3.3 Extraction de la température et du potentiel chimique

Traditionnellement, la mesure de la température d'un nuage atomique s'obtient en regardant la distribution en vitesses après temps de vol et le potentiel chimique est calculé en mesurant le nombre d'atomes total contenu dans le nuage à partir de la distribution de Bose. Comme nos profils de densité sont pris *in situ*, et pour ne pas être influencé par les problèmes expérimentaux de coupure, nous avons choisi de calibrer le potentiel chimique μ et la température T différemment, directement à partir du profil de densité *in-situ*.

Pour cela, nous ajustons, par la méthode des moindres carrés, le profil de densité à partir du profil du gaz de Bose idéal en modifiant les valeurs de T et μ. Cette approche n'est évidemment valable que dans le cas où les interactions entre atomes sont négligeables et fausse pour un quasi-condensat. Cependant, sur les ailes de la distribution du nuage atomique où la densité atomique est faible, cette approche reste valable. Ainsi, nous ferons l'ajustement uniquement sur les ailes de la distribution avec la formule

$$n_{1D}(z) = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{dB}}}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{e^{\alpha\beta(\mu-\epsilon_i)}}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{(1-e^{-\alpha\beta\hbar\omega_\perp})^2}. \tag{6.23}$$

Pour ce faire, nous excluons un nombre variable de pixels $N_{\mathrm{ex.}}$ de part et d'autre du centre du nuage atomique (voir figure 6.15) et nous regardons à partir de quelle valeur de $N_{\mathrm{ex.}}$ la procédure fournit une valeur constante de température et de potentiel chimique.

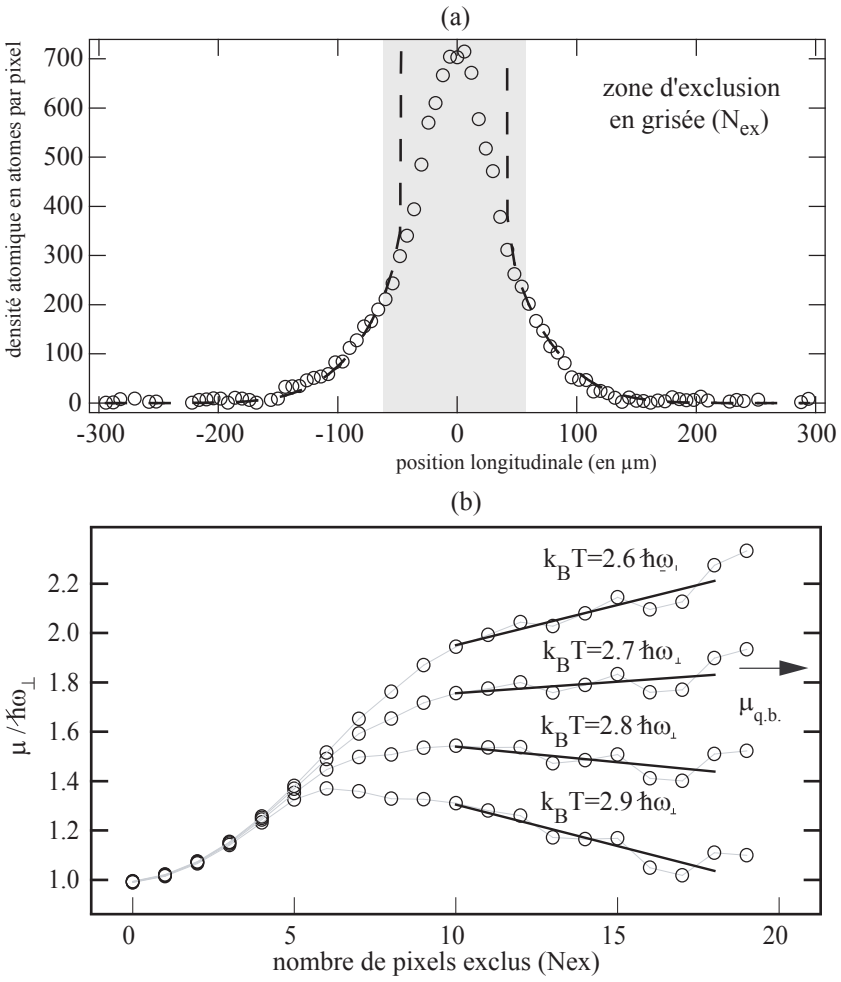

FIG. 6.15 – Figure (a) : Méthode utilisée pour la détermination de la température et du potentiel chimique du nuage. Nous excluons une zone variable contenant $2N_{\text{ex.}}+1$ points à partir du centre du nuage (zone grisée) avant d'exécuter l'ajustement des ailes de la distribution par une distribution de Bose idéale. Figure (b) : à température fixée, nous mesurons le potentiel chimique en fonction de la zone d'exclusion. Les valeurs de T et μ sont obtenues lorsque $\left(\frac{\partial \mu}{\partial N_{\text{ex.}}}\right) = 0$ dans la zone $N_{\text{ex.}} > 10$. Nous trouvons alors $T = 2.75\hbar\omega_\perp/k_{\text{B}}$ et $\mu = 1.65\hbar\omega_\perp$. La flèche $\mu_{\text{q.b.}}$ représente la valeur du potentiel chimique trouvé à partir de la densité pic au centre du nuage.

Pour le nuage le plus chaud (profil (d) de la figure 6.17), ($T = 5.5\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}$), le profil de densité est correctement décrit par le profil d'un gaz idéal sur toute son extension spatiale. Par contre pour les nuages plus froids, ceci n'est plus valable. Pour déterminer T et μ nous avons suivi la méthode suivante.

Au lieu de faire un ajustement à deux paramètres (T,μ), qui peut en général aboutir sur un minimum local de la fonction à deux paramètres à minimiser (χ^2 (voir note[14])), nous avons choisi d'ajuster le profil de densité en laissant simplement le potentiel chimique comme variable d'ajustement (la température étant fixée de manière arbitraire[15]). Nous avons tracé sur la figure 6.15 la courbe $\mu(N_{\mathrm{ex.}})$ donnant l'évolution du potentiel chimique en fonction de la zone d'exclusion dans le cas des données du profil (b) de la figure 6.17. Nous voyons que $\mu(N_{\mathrm{ex.}})$ est une fonction croissante de $N_{\mathrm{ex.}}$ jusqu'à $N_{\mathrm{ex.}} \simeq 9$. Nous utilisons alors pour l'ajustement une partie importante du nuage qui se trouve dans le régime de quasi-condensat. Pour des valeurs plus importantes de $N_{\mathrm{ex.}}$, l'évolution du potentiel chimique devient linéaire en fonction de $N_{\mathrm{ex.}}$. Suivant la valeur que nous avons fixée pour la température, μ continue de croître ou au contraire décroît. La pente relative de μ en fonction de $N_{\mathrm{ex.}}$ traduit le fait qu'il faut imposer un potentiel chimique variable (dépendant de $N_{\mathrm{ex.}}$) pour compenser une mauvaise valeur du choix de la température. Ainsi, la température réelle du nuage est donnée lorsque μ devient indépendant de $N_{\mathrm{ex.}}$ ($\frac{\partial\mu}{\partial N_{\mathrm{ex.}}} = 0$). Cette méthode nous permet d'accéder à une estimation de l'incertitude concernant la détermination de la température[16].

A température donnée, la dispersion des points $\mu(N_{\mathrm{ex.}})$ autour du comportement linéaire attendu est due principalement à la présence d'un potentiel rugueux dans le piège magnétique et ne correspond pas à un "bruit" de mesure dû à un mauvais moyennage des profils de densité. Comme nous l'avons vu au chapitre 4, la déformation des lignes de courants à l'intérieur du fil en Z produit une rugosité de potentiel. Cependant cette rugosité est faible puisque le nuage se trouve à une distance relativement grande (150 μm) des fils de piégeage. Ce fait est confirmé par la faible déviation des points expérimentaux par rapport à un profil théorique comme nous pouvons en juger sur les 4 profils de la figure 6.17. Nous pensons donc que la rugosité dû au potentiel magnétique ne modifie pas les conclusions de ce chapitre.

L'une des conséquences de cette rugosité est d'accroître l'incertitude de 5% sur la détermination de T et μ (ajustement linéaire de la courbe $\mu(N_{\mathrm{ex.}})$ pour $10 < N_{\mathrm{ex.}} < 18$). Cependant, l'incertitude principale de la détermination de T et μ provient de l'incertitude

[14]La définition de la fonction χ^2 est donnée par $\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - y(x_i,T,\mu,..))^2}{\sigma_i^2}$, où ($x_i$,$y_i$) sont les couples de points expérimentaux, $y(x_i, T, \mu, ..)$ la fonction analytique de fit. Chacun des termes de la formule est pondéré par les barres d'erreurs relatives à chacun des points de mesures (écart-types) que nous prendrons constantes.

[15]La détermination de T sera expliquée dans la suite de la procédure.

[16]Notons qu'il est également possible d'effectuer la même opération en inversant les rôles de T et de μ, c'est-à-dire en fixant la valeur du potentiel chimique et en déterminant la valeur de la température à partir de la formule 6.15 en fonction de $N_{\mathrm{ex.}}$. Dans les deux cas, nous trouvons des résultats similaires. Pour le profil (b) de la figure 6.17, nous trouvons $\mu = 1.7\hbar\omega_\perp$ et $T = 2.66\hbar\omega_\perp/k_{\mathrm{B}}$.

de mesure de la section d'absorption effective σ_{eff} (20%). Pour estimer l'effet d'une mauvaise détermination de σ_{eff} nous avons recalculé la valeur de T et μ pour cette nouvelle valeur de section efficace. Notons que si la valeur de σ_{eff} est fausse, elle est forcément plus petite que la valeur mesurée puisque nous ne pouvons que sous-estimer le nombre d'atomes détectés après temps de vol. En prenant une valeur de $\sigma_{\text{eff}} = 0.2$ et dans le cas du profil (b) de la figure 6.17, nous trouvons un potentiel chimique de $\mu = 1.9\hbar\omega_\perp$ et une température $T = 2.8\hbar\omega_\perp/k_{\text{B}}$. Nous pouvons alors estimer l'incertitude sur la détermination du potentiel chimique à 0.2 $\hbar\omega_\perp$ et de $0.05\hbar\omega_\perp/k_{\text{B}}$ pour la température.

Une seconde méthode pour obtenir la valeur du potentiel chimique consiste à utiliser la valeur de la densité atomique pic au centre du nuage atomique en supposant que le gaz est profondément dans le régime de quasi-condensat et à appliquer la formule $\mu = \hbar\omega\sqrt{1+4na}$. Ainsi pour les données du graphe (b), nous obtenons $\mu = (1.8 \pm 0.2)\hbar\omega_\perp$, ce qui est en accord avec la valeur obtenue par l'ajustement des ailes de la distribution. Dans toute la suite, nous nous consacrerons uniquement à l'étude du profil de densité longitudinal 6.17 (b) pour démontrer que la formation du quasi-condensat n'est pas due à une saturation des états excités comme dans le cas tridimensionnel. Nous ne prendrons ainsi pas en compte le profil (a) de la figure 6.17 dont les ailes thermiques sont trop petites pour déterminer avec une précision suffisante la température du nuage.

6.4 Résultats

6.4.1 Vérification de l'approximation de densité locale

Afin de pouvoir valider les calculs Hartree-Fock faits précédemment nous allons vérifier, *a posteriori*, que l'approximation de densité locale est correcte, *i.e.* qu'elle décrit correctement les profils de densité longitudinaux de la figure 6.17. Nous la vérifierons explicitement dans le cas du profil (b).

Cette approximation est valable lorsqu'un nombre important d'états longitudinaux est peuplé et que les nombres d'atomes peuplant deux états d'énergie successifs sont quasiment identiques. Cette condition est obtenue lorsque la valeur du potentiel chimique effectif, défini par $\mu_{\text{eff}} = |\mu_0 - \epsilon_0|$ (différence d'énergie entre le potentiel chimique réel du gaz μ_0 et l'énergie du niveau fondamental ϵ_0) de l'hamiltonien H_{HF} est grande devant l'écart en énergie du niveau fondamental au premier niveau excité ΔE.

Pour les données expérimentales du profil (b) de la figure 6.17, nous avons représenté sur la figure 6.16, l'évolution de μ_{eff} en fonction du potentiel chimique. Nous voyons que la croissance de μ_{eff} lorsque μ_0 augmente n'est pas linéaire et ne tend qu'asymptotiquement vers 0. Ceci s'interprète de la façon suivante : lorsque μ_0 croît, nous augmentons le nombre d'atomes contenus dans le piège, ce qui a pour effet de décaler également en énergie le niveau fondamental du piège.

Pour la température des données du graphe (b) de la figure 6.17, tant que $\mu_0 < 2\hbar\omega_\perp$, $\mu_{\text{eff}}/\Delta E$ reste supérieur à 15. Pour le potentiel chimique mesuré $\mu_0 = 1.65\hbar\omega_\perp$, le ratio

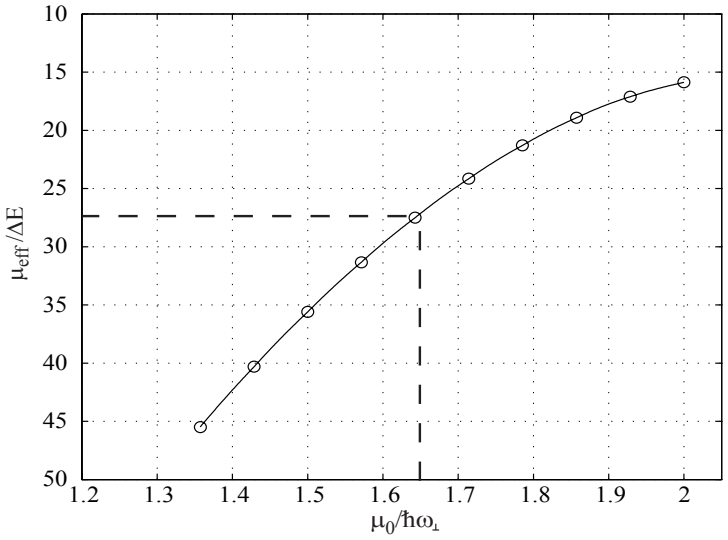

Fig. 6.16 – Evolution du rapport entre le potentiel chimique effectif μ_{eff} et l'écart en énergie ΔE entre l'état fondamental et le premier état excité, en fonction potentiel chimique réel du gaz μ_0 pour la même température que le profil (b) de la figure 6.17. Les lignes en pointillé correspondent au potentiel chimique mesuré. Pour cette valeur de μ_0, le ratio $\mu_{\text{eff}}/\Delta E$ est encore de -28 et permet d'affirmer que l'état fondamental du système n'est pas macroscopiquement peuplé.

$\mu_{\text{eff}}/\Delta E$ est alors voisin de 25. Pour cette valeur importante de $|\mu_{\text{eff}}/\Delta E|$, nous nous attendons à ce que l'approximation de densité locale soit valable.

Pour être plus quantitatifs sur l'erreur que nous commettons concernant l'évaluation du profil de densité longitudinal par l'approximation de densité locale, nous avons comparé ce profil avec le profil calculé en résolvant l'équation de Schrödinger longitudinale.

Comme $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \ll \nabla_\perp^2 \psi_\perp$, les modes propres longitudinaux du piège sont alors obtenus en résolvant pour tous les modes propres transverses l'hamiltonien longitudinal effectif :

$$H_{\text{n,z}} = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_z^2 z^2 + V_n(z) \qquad \text{avec} \qquad V_n(z) = E_n(\mu_0 - \frac{1}{2} m\omega_z^2 z^2, T) \tag{6.24}$$

où E_n correspond à l'énergie du $n^{\text{ième}}$ état de l'hamiltonien transverse H_{HF}.

Il suffit ensuite de peupler thermiquement chacun des modes propres trouvés $\phi_n^{(i)}$ pour calculer le profil de densité longitudinal :

$$n(z) = \sum_{n,i}^{\infty} e^{\beta\left(\mu_0 - \epsilon_n^{(i)}\right)} |\phi_n^{(i)}(z)|^2 \tag{6.25}$$

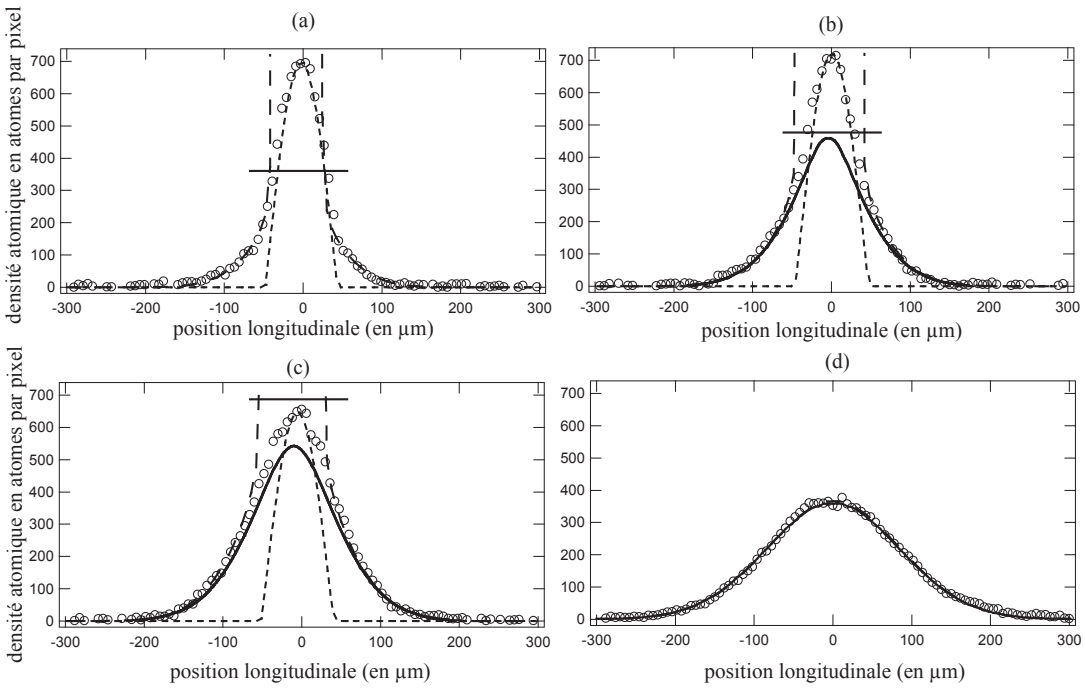

FIG. 6.17 – Profils de densité longitudinaux *in-situ* mesurés pour différentes températures (cercles). En tirets longs : profils du gaz de Bose idéal pour la même température T et le potentiel chimique μ obtenus à partir d'un ajustement des ailes du profil de densité. En traits pleins : profils obtenus dans l'approximation de Hartree-Fock pour les mêmes paramètres T, μ. En tirets courts : profils obtenus dans le régime de quasi-condensat avec la même densité pic que les données expérimentales. Lignes horizontales en traits pleins : valeur de la densité au "cross-over" estimé par un calcul utilisant la théorie de Bogoliubov (voir §6.4.3).

Nous trouvons alors un écart maximal au centre de la distribution de 5% ce qui nous permet de valider le calcul du profil Hartree-Fock obtenu précédemment. De la même manière, nous avons également appliqué cette procédure au cas des graphes (c) et (d) et montré que l'erreur commise sur le profil obtenu à partir de l'approximation de densité locale est inférieure à 5%.

6.4.2 Observation de la présence d'un quasi-condensat pour $T > T_c^{H.F.}$

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de comparer les résultats des calculs Hartree-Fock précédents avec les données expérimentales obtenues.

Sur la figure 6.17, nous avons représenté les profil de densité atomique longitudinale

pour quatre températures différentes (a),(b),(c) et (d). Nous avons ajouté à ces données expérimentales les profils de densité obtenus d'une part à partir des calculs Hartree-Fock précédents (lignes continues) ainsi que les profils de densité obtenus dans le cas du gaz idéal (lignes tiretées). Pour le nuage (d), le profil HF est en très bonne accord (mieux que 1 %) avec d'une part les données expérimentales et d'autre part avec le profil de densité obtenu pour un gaz idéal. Sur des données plus froides (profil (c) où $T = 3.3\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$), le profil de Hartree-Fock ne diverge pas comme celui du gaz idéal (qui prédit donc une saturation des états excités), mais sous-estime la densité pic par près de 25%. En effet, le potentiel chimique du gaz $\mu = 1.65\hbar\omega_\perp$ est alors supérieur à l'énergie du niveau fondamental du piège pour le gaz idéal mais reste inférieur à celui calculé dans le modèle de Hartree-Fock. La théorie de Hartree-Fock corrige partiellement ce problème en augmentant l'énergie du niveau fondamental avec le terme $2g_{3\mathrm{D}}\rho$. Cependant, dans ce cas, la théorie de champ moyen sous-estime la valeur de la densité atomique par près de 25% au centre du nuage. Pour un nuage atomique encore plus froid ($T = 2.75\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$), le désaccord entre le profil Hartree-Fock et les données expérimentales est encore plus important (environ 35%). Il est à noter que pour tous les nuages présentés sur la figure 6.17, le fluide thermique n'est pas saturé comme nous allons le montrer dans la suite et que la présence du second fluide n'est pas requise.

Cependant, comme nous le mentionnions au paragraphe 6.3.2, le centre du nuage atomique, pour le profil (b) se trouve clairement dans le régime de quasi-condensat. Donc le calcul Hartree-Fock précédent ne prédit pas de saturation des états excités. Il n'est alors pas nécessaire d'introduire un second fluide pour tenir compte d'une éventuelle fraction condensée. Plus précisement, le calcul HF montre que la population présente dans l'état fondamental est $N_0 = \frac{k_\mathrm{B}T}{\epsilon_0-\mu_0} = 3.5\ 10^{-3}N_\mathrm{tot}$ et ne constitue pas une proportion macroscopique du nuage. Ainsi le modèle de Hartree-Fock ne permet pas de prédire la présence du quasi-condensat au centre du nuage et est donc incapable d'expliquer les données expérimentales observées.

Pourquoi ce modèle de Hartree-Fock ne décrit-il pas correctement les propriétés du nuage atomique dans cette situation expérimentale ? Contrairement aux expériences précédemment réalisées [15], le nombre d'atomes présents dans le piège est environ 10 fois moins important et dans le même temps la fréquence transverse du piège est accrue d'un facteur environ 4.5. Ceci a pour conséquence de décaler la température de condensation qui était dans les expériences précédentes autour de $10\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$ vers $3\hbar\omega_\perp/k_\mathrm{B}$ rendant plus visible la défaillance du modèle de Hartree-Fock.

Or, nous savons qu'un gaz de Bose unidimensionnel et homogène (piégé dans une boite par exemple) ne peut pas condenser puisqu'il n'est pas possible de saturer ses états excités. Dans ce cas, la théorie de Hartree-Fock ne nécessite que l'utilisation d'un seul fluide thermique. Ce fluide thermique étant correctement décrit par un ensemble de bosons indépendants, la fonction de corrélation du second ordre est égale à 2 pour toute valeur de densité. Or nous savons que dans le régime des interactions faibles, les interactions répulsives entre atomes réduisent les fluctuations de densité produites dans

le gaz de sorte que ce dernier entre dans le régime de quasi-condensat où $g^{(2)}(0) \simeq 1$ [154–156]. La théorie de Hartree-Fock à un fluide ne permet donc pas de rendre compte du passage entre ces deux régimes ("cross-over"). De la même manière, ce résultat reste valable pour un nuage unidimensionnel piégé dans un potentiel harmonique à la limite thermodynamique. Aucune saturation des états excités n'est possible pour un gaz idéal [13] et le gaz entre doucement dans le régime de quasi-condensat lorsque la densité atomique pic augmente [36, 128].

6.4.3 Estimation de la densité atomique au "cross-over"

Comment estimer à partir de quelle densité atomique se produit le "cross-over" ? Pour répondre à cette question, il faut se rappeler de la définition du quasi-condensat : un quasi-condensat est caractérisé par une réduction importante de ses fluctuations de densité comparées à celles d'un gaz idéal. En se plaçant dans la limite du quasi-condensat, où les excitations élémentaires sont solutions des équations couplées de Bogoliubov (Cf. équation 5.48), il suffit de calculer les fluctuations de densité associées à la population thermique des excitations et de déterminer la frontière entre le régime de quasi-condensat et le régime de gaz idéal en disant que les fluctuations de densité doivent être petites ($\frac{\langle \delta\rho^2(r)\rangle}{\langle \rho(r)\rangle^2} \ll 1$), et de trouver *a posteriori* ce domaine de validité.

Dans le cas purement unidimensionnel, l'expression de la densité atomique au "cross-over" s'écrit [35] :

$$n_{\mathrm{T,1D}} = \left(\frac{m k_{\mathrm{B}}^2 T^2}{\hbar^2 g_{1D}}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{6.26}$$

En faisant l'application numérique nous trouvons, dans le cas du nuage (b) de la figure 6.17, que $n_{\mathrm{T,1D}} = 156$ atomes.pixel^{-1}. Nous voyons alors que l'équation 6.26 sous-estime de manière importante la valeur de la densité atomique au centre du nuage pour atteindre le régime de quasi-condensat. En effet, nous constatons pour des valeurs de densité atomique n_{1D} supérieure à la valeur trouvée $n_{\mathrm{T,1D}}$, qu'une partie non négligeable du gaz n'est clairement pas dans le régime de quasi-condensat où le profil de densité doit ressembler à une parabole inversée. Ceci est dû d'une part au fait que notre nuage n'est pas purement 1D et que les excitations sont encore 3D.

Il faut donc prendre en compte le critère 3D des excitations. Pour avoir une meilleure estimation de la densité atomique au "cross-over", nous avons effectué le calcul suivant. En supposant que le gaz se trouve dans le régime de quasi-condensat, nous avons déterminé son spectre d'excitations élémentaires dans le potentiel de piégeage utilisé ($\omega_\perp/(2\pi) = 2750$ kHz et $\omega_z/(2\pi) = 15.7$ Hz) avec la théorie de Bogoliubov. Après avoir peuplé thermiquement chacune de ces modes, nous avons calculé les fluctuations de densité associées. La densité $n_{c.o.}$ à laquelle se produit le "cross-over" est alors trouvée en imposant que les fluctuations de densité soit faibles devant la valeur moyenne de la densité $\langle \rho(r)\rangle$ (voir note[17]). Celle-ci s'obtient alors à partir de l'équation suivante :

[17] Le critère que nous avons pris est $\frac{\langle \delta\rho^2(r)\rangle}{\langle \rho(r)\rangle^2} = 1$.

$$\begin{aligned} n_{\mathrm{T}} &= \iint_{\text{plan transverse}} \frac{(\delta\rho(r))^2}{\langle\rho(r)\rangle^2}\langle\rho(r)\rangle d^2r \\ &= \iint_{\text{plan transverse}} \frac{(\delta\rho(r))^2}{\rho(r)} d^2r \end{aligned} \tag{6.27}$$

Nous avons indiqué sur la figure 6.17 la valeur de n_{T} par une ligne horizontale. Nous trouvons que n_{T} est proche de la densité atomique pour laquelle les profils de densité expérimentaux sont en accord avec ceux du régime du quasi-condensat.

6.5 Conclusion

En conclusion, nous avons tiré profit de la géométrie de piégeage très anisotrope que les puces atomiques peuvent produire ($\omega_\perp/(2\pi)$ =2.75 kHz, $\omega_z/(2\pi)$ = 15.7 Hz) pour atteindre une situation expérimentale, où bien que nous observions la présence d'un quasi-condensat au centre du nuage, une théorie de type champ moyen (Hartree-Fock) ne permet pas d'expliquer sa présence. Bien que le gaz ne soit pas purement unidimensionnel, nous avons montré que son comportement est voisin d'un système 1D dans lequel l'apparition du quasi-condensat au centre du nuage est dû à l'effet progressif des interactions répulsives entre atomes ("cross-over").

Pour faire cette observation expérimentale, nous avons comparé le profil de densité longitudinal mesuré expérimentalement avec le profil de densité obtenu à partir de l'équation d'état vérifiée par un gaz de bosons indépendants soumis à un champ moyen en $2g\rho(\mathbf{r})$. Nous avons ainsi calculé l'équation d'état du gaz $n_{1\mathrm{D}}(T,\mu)$ en résolvant de manière auto-consistante l'hamiltonien Hartree-Fock. Nous avons, en particulier, pris en considération la quantification du mouvement transverse pour prendre en compte le caractère encore 3D du gaz.

L'utilisation du champ moyen ne permet pas de rendre compte de nos observations expérimentales puisque cette théorie ne prend pas en compte des corrélations entre atomes[18] induites par les interactions répulsives entre atomes. Pour obtenir une description correcte des profils expérimentaux que nous avons obtenus, il faudrait utiliser une description plus complète des interactions, comme par exemple en utilisant une théorie complète de type Monte Carlo quantique (Integral Path Quantum Monte Carlo) [143, 157].

[18] Autres que les corrélations quantiques associées au principe de symétrisation des fonctions d'onde (présence du facteur 2 dans le terme d'interaction $2g\rho(r)$).

CHAPITRE 7

Conclusion

Mon travail de thèse a consisté à réaliser un gaz quantique dégénéré proche du régime unidimensionnel sur puce atomique.

Pour obtenir des géométries de pièges très anisotropes, il est nécessaire de rapprocher le nuage atomique au plus près de la microstructure. Dès lors, les imperfections de micro-fabrication des fils conducteurs induisent par la déformation des lignes de courant une rugosité de potentiel non contrôlée qui vient s'ajouter au confinement magnétique souhaité et qui a pour conséquence de fragmenter le nuage d'atomes froids (condensé ou non). Dans la première partie de ce manuscrit, nous avons proposé une méthode pour nous affranchir de cette rugosité. Nous avons montré expérimentalement qu'en appliquant une modulation sinusoïdale de courant (30 kHz) dans une configuration de fils conducteur bien choisie, l'amplitude rms du potentiel rugueux peut être réduite par au moins un facteur 5 en comparaison au cas non modulé. En complément, nous n'avons observé de rugosité résiduelle et ceci même avec un condensat de Bose-Einstein. Nous avons également montré que cette technique de modulation est relativement robuste vis-à-vis de la présence de champs externes constants en mesurant une durée de vie comparable au cas non modulé et ce pour une large gamme de fréquences de modulation. Théoriquement, nous avons estimé quelles sont les contraintes sur la fréquence de modulation pour ne produire ni chauffage, ni pertes par "spin-flip". Pour des paramètres expérimentaux typiques, nous avons montré que ces effets sont complètement négligeables. Cette technique de modulation nous semble donc prometteuse pour tirer parti des nombreux avantages des puces atomiques comme la réalisation de potentiels de piégeage de formes complexes sur des échelles de variations de l'ordre du micromètre ou l'obtention de confinements transverses très importants pour atteindre un régime purement unidimensionnel. Notons que cette technique de modulation ne permet pas de corriger des autres effets de rugosité qui peuvent apparaître lorsque l'on s'approche encore plus de la surface de la puce (forces de Van der Walls, Casimir-Polder, effet d'absorption du rubidium sur la surface de la puce).

Dans la seconde partie du manuscrit, nous nous sommes intéressés à l'étude d'un gaz de Bose confiné dans un piège quasiment unidimensionnel. Nous avons étudié ses propriétés statistiques en mesurant ses fluctuations de densité qui sont le reflet de la fonction de corrélation du second ordre en position. Nous avons pu mettre en évidence deux régimes distincts : faibles densités atomiques, nous avons observé des fluctuations pour des densités en bon accord avec le comportement du gaz idéal. Elles sont associées

au bruit de grenaille atomique (comportement particulaire) ainsi qu'à l'effet de groupement de bosons (effet purement quantique). Pour de plus fortes densités, à cause des interactions répulsives entre atomes qui sont coûteuses en énergie, nous avons observé une réduction de ces fluctuations de densité par comparaison au cas du gaz idéal. Nous avons montré que cette réduction des fluctuations de densité intervient au moment où le gaz commence à entrer dans le régime de quasi-condensat. Ainsi, la mesure des fluctuations de densité est un moyen indirect de sonder le passage entre le régime de gaz idéal et le régime de quasi-condensat.

Cette étude est évidemment couplée aux résultats présentés dans le dernier chapitre sur l'evolution du profil de densité entre ces deux régimes. Nous avons montré que bien que le profil de densité soit bien décrit au centre du nuage par un profil de densité de type Thomas-Fermi, la transition vers le régime de quasi-condensat n'est pas décrite, contrairement au cas 3D, par une saturation des états excités lorsque les interactions sont prises en compte sous forme de champ moyen. L'échec de cette approche vient du fait que lorsque les fluctuations de densité deviennent trop importantes, les interactions entre particules introduisent des corrélations en position des différentes particules qui ne peuvent être décrites par une approche de type champ moyen.

Dans un futur proche, nous souhaitons poursuivre l'étude des fluctuations de densité dans différentes configurations :

dans le régime d'interactions fortes (gaz de Tonks-Girardeau) :

Dans ce régime, les bosons deviennent des particules impénétrables et sont très fortement corrélées en position. Une mesure des fluctuations de densité permettrait d'observer cette corrélation en montrant que les fluctuations de densité associées sont inférieures au bruit de grenaille atomique.

Cependant, comme nous l'avons mentionné en conclusion du chapitre 4, ce régime requiert des pièges très fortement anisotropes dont le confinement transverse doit être de l'ordre de quelques kHz et le confinement longitudinale le plus faible possible (de l'ordre du Hz). La réalisation de ce type de pièges, sur puce atomique, a pour l'instant été prohibé par la présence du potentiel rugueux qui limite la dilution du nuage atomique dans la direction longitudinale. Nous pensons appliquer la technique de modulation présenté dans ce travail pour s'affranchir de ce problème. Malheureusement, nous ne pouvons pas utiliser la puce actuelle pour effectuer la mesure, car au voisinage de la zone de piégeage créée par les petits fils, l'imagerie présente un bruit de détection bien supérieur au bruit de grenaille photonique. Il reste encore quelques questions en suspens : sera-t-il possible de refroidir le nuage pour atteindre le régime purement unidimensionnel ? Pour les faibles densités atomiques requises, serons-nous capables d'avoir un rapport signal sur bruit suffisant pour effectuer la mesure, sachant que le temps d'interrogation des atomes a une durée limitée ? Serons-nous capable d'augmenter suffisamment la résolution optique pour pouvoir mesurer l'allure de la fonction de corrélation ?

Mesure du "squeezing" en nombre d'atomes dans un doublepuits de potentiel :

Nous avons vu que la configuration à cinq fils permet de produire un double puits de potentiel dans le cas général. Nous souhaitons à l'aide de cette structure séparer adiabatiquement un condensat en deux pour mesurer directement les fluctuations de la différence du nombre d'atomes entre les deux puits. En présence d'interactions répulsives entre atomes, ces fluctuations doivent être fortement réduites et nous devrions observer un "squeezing" en nombre d'atomes. Cette expérience serait un complément à la mesure indirecte faite dans le groupe de W. Ketterle qui repose sur la mesure de la différence de phase relative entre les deux condensats [158].

Fluctuations de densité dans un gaz 2D :

Pour finir, une idée serait de réaliser des pièges bidimensionnels. Pour cela, nous pouvons penser pour sa réalisation de combiner la technologie des puces atomiques et les potentiel habillé par onde radio-fréquence développés dans le groupe de H. Perrin [159, 160] et de J. Schmiedmayer [161] pour mesurer les fluctuations de densité au voisinage de la transition de Berezinsky-Kosterlitz-Thouless [162, 163].

ANNEXE A

Critère de condensation à 1D et 3D

Dans cette annexe, nous nous proposons de dériver les expressions du nombre d'atomes présent dans les états excités pour un piège harmonique 3D et pour un piège harmonique unidimensionnel ainsi que de retrouver le critère de condensation pour un système de taille finies. Nous allons voir que la dépendance de la densité d'états en fonction de l'énergie joue un rôle crucial sur le phénomène de condensation.

A.1 Expression de la densité d'états dans un piège harmonique

L'expression de la densité d'états $\rho(\epsilon)$ s'obtient en comptant le nombre d'états infinitésimaux $\rho(\epsilon)d\epsilon$ d'énergie comprise entre ϵ et $\epsilon + d\epsilon$. Pour ce faire, il suffit de dénombrer le nombre d'états discrets d'énergie ϵ pour un piège harmonique puis de faire tendre la fréquence d'oscillation vers 0 qui par passage à la limite permet de déduire la densité d'états. Calculer la densité d'états d'un piège revient donc à calculer la dégénérescence de chacun des niveaux quantiques accessibles.

cas 3D :

Pour un piège harmonique isotrope de fréquence d'oscillation ω dans les trois directions de l'espace (x,y,z), la dégénérescence d'un état quantique d'énergie déterminée par les trois nombres quantiques (n_x,n_y,n_z) est obtenue de la façon suivante : en choisissant arbitrairement le nombre quantique n_x, il reste $n - n_x - 1$ possibilités pour le couple (n_y, n_z) : $(n_y, n_z) = (0, n - n_x), (1, n - n_x - 1), ..., (n - n_x, 0)$. La dégénérescence $g_{3\mathrm{D}}(n)$ est donc :

$$g_{3\mathrm{D}}(n) = \sum_{n_x=0}^{n} (n - n_x + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{A.1}$$

Pour obtenir la densité d'états, il suffit alors d'écrire que $g_{3\mathrm{D}}(n)dn = \rho_{3\mathrm{D}}(\epsilon)d\epsilon$:

$$\rho_{3\mathrm{D}}(\epsilon) = g_{3\mathrm{D}}(\epsilon)\frac{dn}{d\epsilon} = \frac{1}{\hbar\omega} + \frac{3\epsilon}{2(\hbar\omega)^2} + \frac{\epsilon^2}{2(\hbar\omega)^3} \tag{A.2}$$

Au-dessus du seuil de condensation, l'énergie d'agitation thermique k_BT est, en générale grande devant $\hbar\omega$ et $\rho_{3\mathrm{D}}(\epsilon)$ est correctement approximée par le dernier terme de l'équation A.2 à savoir $\rho_{3\mathrm{D}}(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2(\hbar\omega)^3}$.

cas 1D :

Pour un piège harmonique à une dimension, le calcul est beaucoup plus simple puisqu'aucun des niveaux du piège n'est pas dégénéré. La densité d'états s'écrit donc :

$$\rho(\epsilon)_{1\mathrm{D}} = \frac{1}{\hbar\omega}. \tag{A.3}$$

A.2 Population des états excités

A partir de l'expression de la densité d'états $\rho(\epsilon)$, le nombre d'atomes contenus dans les états excités s'obtient à partir de la formule :

$$N_{\mathrm{e}} = \int_{\epsilon_0}^{\infty} \rho(\epsilon) f_{\mathrm{Bose}} d\epsilon \tag{A.4}$$

où ϵ_0 est l'énergie de l'état fondamental.

Cette expression nous permettra de connaître le nombre maximum d'atomes que nous pouvons mettre dans les états excités lorsque nous ferons tendre la valeur du potentiel chimique vers ϵ_0.

cas 3D :

En injectant l'équation A.2 dans l'équation A.4 nous obtenons :

$$N_{e,3\mathrm{D}} = \int_{\epsilon_0}^{\infty} \frac{\epsilon^2}{2(\hbar\overline{\omega})^3} \frac{1}{z^{-1}\exp(\beta\epsilon) - 1} d\epsilon \qquad \text{où} \qquad \beta = \frac{1}{k_BT} \qquad \text{et} \qquad z = e^{\beta(\mu-\epsilon_0)} \tag{A.5}$$

Pour calculer cette intégrale nous ferons le changement de variable $x = \beta\epsilon$

$$N_{e,1\mathrm{D}} = \frac{(k_{\mathrm{B}}T)^3}{2(\hbar\overline{\omega})^3} \int_{\frac{\epsilon_0}{k_{\mathrm{B}}T}}^{\infty} x^2 \frac{z\ \exp(-\mathrm{x})}{1 - z\exp(-\mathrm{x})} dx \tag{A.6}$$

comme la fugacité z du gaz est toujours strictement inférieure à 1, il est possible d'écrire que $\frac{z\ \exp(-\mathrm{x})}{1-z\ \exp(-\mathrm{x})} = \sum_{j=1}^{\infty}(z\ \exp(-\mathrm{x}))^{\mathrm{j}}$. Soit en remplaçant dans l'équation A.5, nous obtenons :

$$N_{e,1\mathrm{D}} = \frac{(k_{\mathrm{B}}T)^3}{2(\hbar\overline{\omega})^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^3} \int_{\frac{\epsilon_0}{k_{\mathrm{B}}T}}^{\infty} u^2 e^{-u} du \tag{A.7}$$

En supposant toujours $k_\mathrm{B}T \gg \epsilon_0$, l'intégrale $\int_{\frac{\epsilon_0}{k_\mathrm{B}T}}^{\infty} u^2 e^{-u} du$ s'approxime par $\int_0^\infty u^2 e^{-u} du = 2$. En utilisant la définition des fonctions de Bose[1], nous obtenons alors le résultat suivant :

$$N_{e,3\mathrm{D}} = \frac{(k_\mathrm{B}T)^3}{2(\hbar\overline{\omega})^3} g_3(1) \tag{A.9}$$

ainsi que la température de condensation :

$$T_{c,3\mathrm{D}} = \frac{1}{g_3(1)} \frac{\hbar\overline{\omega}}{k_\mathrm{B}} N^{1/3} \simeq 0.94 \frac{\hbar\overline{\omega}}{k_\mathrm{B}} N^{1/3} \tag{A.10}$$

cas 1D :

Intéressons nous maintenant au cas unidimensionnel. Le nombre d'atomes présents dans les états excités s'écrit dans ce cas :

$$N_{e,1\mathrm{D}} = \int_{\epsilon_0}^{\infty} \rho_{1D}(E) f_{\mathrm{Bose}} dE = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{\epsilon_0}^{\infty} \frac{z e^{-(\beta(E-\epsilon_0))} dE}{1 - z e^{-(\beta(E-\epsilon_0))}} \tag{A.11}$$

En posant comme dans le cas précédent $x = \beta(E - \epsilon_0)$

$$N_{e,1\mathrm{D}} = \frac{k_\mathrm{B}T}{\hbar\omega_z} \int_{\frac{\epsilon_0}{k_\mathrm{B}T}}^{\infty} \frac{z e^{-x} dE}{1 - z e^{-x}} \tag{A.12}$$

Le terme sous l'intégrale peut se mettre sous la forme d'une série géométrique,

$$N_{e,1\mathrm{D}} = \frac{k_\mathrm{B}T}{\hbar\omega_z} \int_{\frac{\epsilon_0}{k_\mathrm{B}T}}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} z^j e^{-jx} dx = \frac{k_\mathrm{B}T}{\hbar\omega_z} \sum_{j=1}^{\infty} z^j \int_{\frac{\epsilon_0}{k_\mathrm{B}T}}^{\infty} e^{-jx} dx \tag{A.13}$$

il suffit ensuite d'intégrer terme à terme l'expression précédente et nous obtenons :

$$N_{e,1\mathrm{D}} = \frac{k_\mathrm{B}T}{\hbar\omega_z} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j} \exp(-\frac{\mathrm{j}\hbar\omega_\mathrm{z}}{2\mathrm{k_B T}}) = \frac{\mathrm{k_B T}}{\hbar\omega_\mathrm{z}} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{j}} \left(\mathrm{z}\ \exp(-\frac{\mathrm{j}\hbar\omega_\mathrm{z}}{2\mathrm{k_B T}})\right)^{\mathrm{j}} \tag{A.14}$$

Nous reconnaissons alors le développement de Taylor de la fonction logarithme et nous obtenons :

$$N_{e,1\mathrm{D}} = -\frac{k_\mathrm{B}T}{\hbar\omega_z} \ln(1 - z \times \exp(-\frac{\hbar\omega}{2\mathrm{k_B T}})) \tag{A.15}$$

En supposant que $k_\mathrm{B}T \ll \hbar\omega_z$, au voisinage de la condensation ($z \simeq 1$), il est possible de développer l'expression précédente au premier ordre et d'obtenir l'expression de la température de condensation pour un piège unidimensionnel $T_c^{1\mathrm{D}}$.

[1] Où les fonctions de Bose $g_\alpha(z)$ sont définies

$$g_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^\alpha} \tag{A.8}$$

$$N_c^{1\mathrm{D}} = \frac{k_\mathrm{B}T}{\hbar\omega_z}\ln(\frac{2k_\mathrm{B}T}{\hbar\omega_z}) \tag{A.16}$$

et nous retrouvons l'expression dérivée dans [164].

ANNEXE B

Expression de l'hamiltonien du pour le piège modulé

Dans cette annexe, nous nous proposons de dériver l'expression de l'hamiltonien H perçu par les atomes lorsqu'ils sont confinés dans le piège modulé. Nous reprendrons les notations du chapitre 4. Nous noterons notamment $\mathcal{R}$ la matrice de rotation qui permet de tourner l'axe de quantification de sorte qu'il pointe à tout instant suivant la direction instantanée du champ magnétique.

B.1 Dérivation de la forme générale de l'hamiltonien

L'évolution d'un état $|\Psi\rangle$ est donnée à tout instant par l'équation de Shrödinger qui s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = H|\Phi\rangle \tag{B.1}$$

Pour trouver l'expression de l'hamiltonien dans le repère instantané, il suffit d'écrire l'évolution de l'état $|\Psi\rangle = \mathcal{R}(\mathbf{r},t)|\Psi\rangle$:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial|\Psi'\rangle}{\partial t} &= i\hbar\frac{\partial\left(\mathcal{R}(\mathbf{r},t)|\Psi\rangle\right)}{\partial t} \\
&= i\hbar\frac{\partial\mathcal{R}(\mathbf{r},t)}{\partial t}|\Psi\rangle + i\hbar\mathcal{R}(\mathbf{r},t)\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} \\
&= i\hbar\frac{\partial\mathcal{R}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{r},t)|\Psi'\rangle + \mathcal{R}(\mathbf{r},t)H|\Psi\rangle \\
&= i\hbar\frac{\partial\mathcal{R}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{r},t)|\Psi'\rangle + \mathcal{R}(\mathbf{r},t)H\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{r},t)|\Psi'\rangle
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Cette écriture étant valable pour tout $|\Psi'\rangle$, nous pouvons donc par identification trouver l'expression de l'hamiltonien dans le repère instantané :

$$H' = \mathcal{R}(\mathbf{r},t)H\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{r},t) + i\hbar\frac{\partial\mathcal{R}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{r},t) \tag{B.3}$$

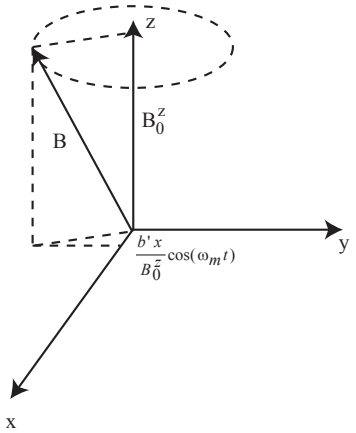

FIG. B.1 – Orientation du champ magnétique instantané dans la base 0xyz (axes du pièges). Comme le champ magnétique transverse est faible par rapport à B_0^z, le champ magnétique est principalement suivant la direction z du piège

Dans la base locale, l'hamiltonien d'interaction magnétique $H_{\text{mag}} = \boldsymbol{\mu}.\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ s'écrit simplement $\mu\widehat{J}_{z'}|B|(\mathbf{r},t)$, où $\widehat{J}_{z'}$ est la projection de l'opérateur de moment de spin $\widehat{\mathbf{J}}$ suivant la direction instantanée du champ magnétique.

Nous en déduisons donc l'expression finale de H' :

$$\begin{aligned} H' &= \mathcal{R}(\mathbf{r},t)\frac{p^2}{2m}\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{r},t) + \mu\widehat{J}_z|B|(\mathbf{r},t) + \frac{\partial\mathcal{R}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{r},t) \\ H' &= \mathcal{R}(\mathbf{r},t)\frac{p^2}{2m}\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{2}m\omega_\perp^2\cos^2(\omega_m t)r^2\widehat{J}_{z'} + \frac{\partial\mathcal{R}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{r},t) \end{aligned} \tag{B.4}$$

Dans le cas où le champ directeur B_0^z est grand devant le champ magnétique produit par le gradient transverse à une distance r du centre du piège, la direction du champ magnétique instantané est principalement suivant la direction z du piège (voir figure B.1). Pour les petits angles angles (*i.e.* $b'r \ll B_0^z$),nous développons l'opérateur rotation sous la forme de la somme de deux rotations qui commutent, l'une suivant l'axe Ox et l'autre autour de l'axe Oy :

$$\mathcal{R}(\mathbf{r},t) = 1 + i\theta_x\widehat{\mathbf{J}}_x + i\theta_y\widehat{\mathbf{J}}_y \tag{B.5}$$

avec comme angle de rotation suivant les axes x et y : $\theta_x = -\frac{b'x}{B_0^z}\cos(\omega_m t)$ et $\theta_y = \frac{b'y}{B_0^z}\cos(\omega_m t)$.

Comme l'opérateur de rotation dépend de la coordonnée d'espace $\mathbf{r}$, il ne commute pas avec le terme d'énergie cinétique et cette non-commutation est à l'origine d'un terme

supplémentaire dans H qui fait basculer le spin d'un atome d'un état piégeant vers un état non piégeant. Pour cela, développons chacun des termes de $\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{r},t)\frac{p^2}{2m}\mathcal{R}(\mathbf{r},t) = \mathcal{R}^{-1}\frac{p_x^2}{2m}\mathcal{R} + \mathcal{R}^{-1}\frac{p_y^2}{2m}\mathcal{R} + \frac{p_z^2}{2m}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{-1}\frac{p_x^2}{2m}\mathcal{R} &= \left(1 - i\theta_x\widehat{\mathbf{J}}_x - i\theta_y\widehat{\mathbf{J}}_y\right)\frac{p_x^2}{2m}\left((1 + i\theta_x\widehat{\mathbf{J}}_x + i\theta_y\widehat{\mathbf{J}}_y\right) \\
\mathcal{R}^{-1}\frac{p_y^2}{2m}\mathcal{R} &= \left(1 - i\theta_x\widehat{\mathbf{J}}_x - i\theta_y\widehat{\mathbf{J}}_y\right)\frac{p_y^2}{2m}\left((1 + i\theta_x\widehat{\mathbf{J}}_x + i\theta_y\widehat{\mathbf{J}}_y\right)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

soit en utilisant les relations de commutations usuelles entre les opérateurs position et impulsion ($[x,p_x] = i\hbar$ et $[y,p_y] = i\hbar$) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{-1}\frac{p_x^2}{2m}\mathcal{R} &= \frac{p_x^2}{2m} + 2\frac{\theta_x p_x}{m}\widehat{\mathbf{J}}_x \\
\mathcal{R}^{-1}\frac{p_y^2}{2m}\mathcal{R} &= \frac{p_y^2}{2m} + 2\frac{\theta_y p_y}{m}\widehat{\mathbf{J}}_y
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Pour aboutir au résultat donné au chapitre 4, prenons un atome de spin entier dont nous noterons les états de spin par $|-1\rangle$,$|0\rangle$ et $|1\rangle$. Dans ce cas les expressions de $\widehat{J}_x$ et $\widehat{J}_y$ sont :

$$\widehat{J}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \widehat{J}_y = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

Ainsi nous arrivons au résultat :

$$\mathcal{R}^{-1}\frac{p^2}{2m}\mathcal{R} = \frac{p^2}{2m} + \frac{\hbar b'\sqrt{2}}{mB_0^z}\left((p_x - ip_y)|0\rangle\langle 1| + h.c.\right) \tag{B.9}$$

Pour trouver l'expression de $\frac{\partial\mathcal{R}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{r},t)$, il suffit simplement d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{r},t) &= 1 - i\theta_x\widehat{J}_x - i\theta_y\widehat{J}_y \\
\frac{\partial\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= i\frac{b'x\omega_m}{B_0^z}\sin(\omega_m t)\widehat{J}_x + i\frac{b'y\omega_m}{B_0^z}\cos(\omega_m t)\widehat{J}_y
\end{aligned} \tag{B.10}$$

et ne gardant que les termes du premier ordre en $\widehat{J}_x$ et $\widehat{J}_y$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{R}^{-1}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\mathcal{R}(\mathbf{r},t) &= \left(1 + i\theta_x\widehat{J}_x + i\theta_y\widehat{J}_y\right)\left(ib'x\omega_m\sin(\omega_m t)\widehat{J}_x + ib'y\omega_m\cos(\omega_m t)\widehat{J}_y\right) \\
&= ib'x\omega_m\sin(\omega_m t)\widehat{J}_x + ib'y\omega_m\cos(\omega_m t)\widehat{J}_y
\end{aligned} \tag{B.11}$$

qui, en utilisant les expressions de $\widehat{J}_x$ et $\widehat{J}_y$, s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{R}^{-1}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\mathcal{R}(\mathbf{r},t) = \frac{b'\hbar\omega_m}{\sqrt{2}B_0^z}\sin(\omega_m t)\left[(x-iy)|0\rangle\langle 1| + h.c.\right] \tag{B.12}$$

et nous retrouvons l'expression alors 4.45 du chapitre 4.

ANNEXE C

Expression des fluctuations de densité pour un gaz de Bose idéal

Nous nous proposons d'établir dans cette annexe l'expression des fluctuations de densité d'un gaz de Bose idéal (équation 5.26) en dehors de l'approximation de Maxwell-Boltzmann intégré dans les deux directions transverses.

Comme nous avons montré dans le chapitre 4, les fluctuations de densité d'un gaz de Bose $\langle\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')\rangle$ autour de sa valeur moyenne $\langle\rho(\mathbf{r})\rangle\langle\rho(\mathbf{r}')\rangle$ s'écrivent :

$$\langle\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')\rangle - \langle\rho(\mathbf{r})\rangle\langle\rho(\mathbf{r}')\rangle = G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + |G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')|^2 \tag{C.1}$$

$$\text{avec} \tag{C.2}$$

$$G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_i \Psi_i(\mathbf{r})\Psi_i(\mathbf{r}')\frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i-\mu)}-1} \tag{C.3}$$

Pour obtenir une expression analytique de C.1, commençons par réexprimer $G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Pour cela, on pourra d'une part remarquer que le terme $\frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i-\mu)}-1}$ peut se mettre sous la forme d'une série géométrique et utiliser les fonctions de Green de l'oscillateur harmonique [165] :

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \sum_i \Psi_i(\mathbf{r})\Psi_i(\mathbf{r}')\frac{ze^{-\beta\epsilon_i}}{1-ze^{-\beta\epsilon_i}} \\ &= \sum_i \Psi_i(\mathbf{r})\Psi_i(\mathbf{r}')ze^{-\beta\epsilon_i}\sum_{k=0} z^k e^{-k\beta\epsilon_i} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \widetilde{G}_0^{\perp}(\mathbf{r},\mathbf{r}',k\beta\hbar\omega_\perp)\widetilde{G}_0^{z}(\mathbf{r},\mathbf{r}',k\beta\hbar\omega_z) \end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\tag{C.5}$$

où les fonctions $\widetilde{G}_0^{\perp}$ et $\widetilde{G}_0^{z}$ sont les fonctions de Green de l'oscillateur harmonique pour respectivement la partie transverse et la partie longitudinale. Ces deux fonctions ont pour expressions :

$$\widetilde{G}_0^{\perp}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\tau) = \left(\frac{m\omega_\perp}{\pi\hbar(1-e^{-2\tau})}\right) \times \exp\left[-\frac{m\omega_\perp}{\hbar}\frac{(r^2+r'^2)(\cosh(\tau)-1)+(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{2\sinh(\tau)}\right]$$
$$\widetilde{G}_0^{\mathrm{z}}(z,z',\tau) = \left(\frac{m\omega_{\mathrm{z}}}{\pi\hbar(1-e^{-2\tau})}\right)^{\frac{1}{2}} \times \exp\left[-\frac{m\omega_{\mathrm{z}}}{\hbar}\frac{(z^2+z'^2)(\cosh(\tau)-1)+(z-z')^2}{2\sinh(\tau)}\right] \tag{C.6}$$

Dans la direction longitudinale $\beta\hbar\omega_z \ll 1$, nous pouvons alors simplifier l'expression C.6, en utilisant le fait que $\cosh(\tau) \simeq 1-\tau^2/2$, $\sinh(\tau) \simeq \tau$ et que $1-e^{-2\tau} \simeq 2\tau$, par :

$$\widetilde{G}_0^{\mathrm{z}}(z,z',\tau) = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{dB}}}\frac{1}{\sqrt{k}}\exp\left[\frac{m\omega_{\mathrm{z}}^2}{4}\frac{k(z^2+z'^2)}{k_{\mathrm{B}}T} + \frac{\pi(z-z')^2}{k\lambda_{\mathrm{dB}}^2}\right] \tag{C.7}$$

Par contre pour la direction transverse, nous ne pouvons pas faire la même approximation puisque $k_{\mathrm{B}}T \simeq 2\hbar\omega_\perp$ mais nous pouvons cependant remplacer avec une bonne approximation $\cosh(\tau) \simeq \sinh(\tau) \simeq e^{\tau}$.

Pour obtenir les fluctuations de densité intégrée dans les deux directions transverses du piège, il convient d'intégrer l'équation C.1 :

$$\langle n_{1\mathrm{D}} n_{1\mathrm{D}}(z')\rangle - \langle n_{1\mathrm{D}}(z)\rangle\langle n_{1\mathrm{D}}(z')\rangle = \iint \langle G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + |G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')|^2 d^2\mathbf{r}d^2\mathbf{r}' \tag{C.8}$$

Il nous faut intégrer l'expression de $G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ dans les deux directions transverses du piège. En remarquant que $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+x'^2)-b(x^2-x'^2)}dxdx' = \frac{\pi}{\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}}$, il vient alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}_0^{\perp}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\tau)d\mathbf{r}d\mathbf{r}' = \frac{1}{(1-e^{-\tau})^2} \tag{C.9}$$

et ainsi nous trouvons l'expression de $\iint G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')d^2\mathbf{r}d^2\mathbf{r}'$

$$\begin{aligned}
\iint G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')d^2\mathbf{r}d^2\mathbf{r}' &= \sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{G}_0^{\mathrm{z}}(z,z',\tau)\frac{1}{(1-e^{-k\beta\hbar\omega_\perp})^2} \\
&= \frac{1}{\lambda_{\mathrm{dB}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{k\beta\mu}}{\sqrt{k}}\exp\left[\frac{1}{4}\beta m\omega_{\mathrm{z}}^2\left[k(z^2+z'^2)\right]\right] \times \frac{\exp\left[\frac{\pi(z-z')^2}{k\lambda_{\mathrm{dB}}^2}\right]}{(1-e^{-k\beta\hbar\omega_\perp})^2} \\
&= \frac{1}{\lambda_{\mathrm{dB}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{k\beta\mu(z)}}{\sqrt{k}}\frac{\exp\left[\frac{\pi(z-z')^2}{k\lambda_{\mathrm{dB}}^2}\right]}{(1-e^{-k\beta\hbar\omega_\perp})^2}
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Pour $z = z'$ nous retrouvons l'expression de la densité atomique longitudinale $n_{1\mathrm{D}}(z)$ et $\iint G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\delta(z-z')d^2\mathbf{r}d^2\mathbf{r}' = \langle n_{1D}(z)\rangle$.

Un calcul analogue permet de calculer $\iint |G^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')|^2 d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}'$ et de montrer que $\langle n_{1\mathrm{D}} n_{1\mathrm{D}}(z')\rangle - \langle n_{1\mathrm{D}}(z)\rangle\langle n_{1\mathrm{D}}(z')\rangle$ est égale à :

$$\langle n_{1\mathrm{D}} n_{1\mathrm{D}}(z')\rangle - \langle n_{1\mathrm{D}}(z)\rangle\langle n_{1\mathrm{D}}(z')\rangle = n(z)\delta(z-z') + \frac{1}{\lambda_{\mathrm{dB}}^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{(i+j)\beta\mu(z)}}{\sqrt{ij}}\frac{e^{-\pi\frac{(z-z')^2}{\lambda_{\mathrm{dB}}^2}(\frac{1}{i}+\frac{1}{j})}}{[1-e^{-\beta\hbar\omega_\perp(i+j)}]^2} \tag{C.11}$$

ANNEXE D

Calcul de l'absorption pour un nuage gaussien

Dans cette annexe nous nous proposons de détailler le calcul concernant l'erreur que nous comettons sur la détermination du nombre d'atomes mesurés en utilisant la formule $N_{\text{at}} = \frac{\sigma_0}{\Delta_x \Delta_z} \log(\frac{I_1(x,y)}{I_2(x,y)})$ lorsque la densité optique de nuage n'est faible devant l'unité.

Considérons pour cela la situation présentée sur la figure D.1. Une onde plane éclaire à résonance un nuage atomique contenant N_0 atomes et dont le profil de densité s'écrit

$$n(x,y,z) = \frac{N_0}{(\sqrt{2\pi})^3 \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{z^2}{2\sigma_z^2})\right) \tag{D.1}$$

où σ_x,σ_y,σ_z sont respectivement les largeurs rms du nuage dans les trois directions x,y,z de l'espace.

L'intensité optique en sortie du nuage s'obtient à partir de la loi d'absorption de Beer-Lambert :

$$\mathcal{I}(x,z) = \mathcal{I}_0 \exp\left(\frac{-\sigma_0 N_0}{(\sqrt{2\pi})^3 \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{z^2}{2\sigma_z^2})\right) dy\right) \tag{D.2}$$

soit en effectuant l'intégration dans l'axe du faisceau d'imagerie :

$$\mathcal{I}(x,z) = \mathcal{I}_0 \exp\left(\frac{-\sigma_0 N_0}{2\pi \sigma_x \sigma_z} \exp\left(-(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{z^2}{2\sigma_z^2})\right)\right) \tag{D.3}$$

Pour tenir compte de la résolution optique de notre système optique utilisé, nous modéliserons sa fonction de réponse par une gaussienne $h(x,y) = \frac{1}{2\pi\delta^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\delta^2}}$ de largeur rms δ. Ainsi l'intensité optique $\mathcal{I}'(x,z)$ située dans le plan de la caméra CCD s'écrit :

$$\mathcal{I}'(x,z) = \left[\mathcal{I}(x,z) \bigotimes h(x,y)\right]_{(x,y)} \tag{D.4}$$

Pour effectuer le calcul, il est utile de décomposer l'exponentielle présente dans D.3 sous la forme d'une série :

$$\exp\left(\frac{-\sigma_0 N_0}{2\pi \sigma_x \sigma_z} \exp\left(-(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{z^2}{2\sigma_z^2})\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\sigma_0 N_0}{2\pi \sigma_x \sigma_z}\right)^n \frac{1}{n!} \exp\left(-n(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{z^2}{2\sigma_z^2})\right) \tag{D.5}$$

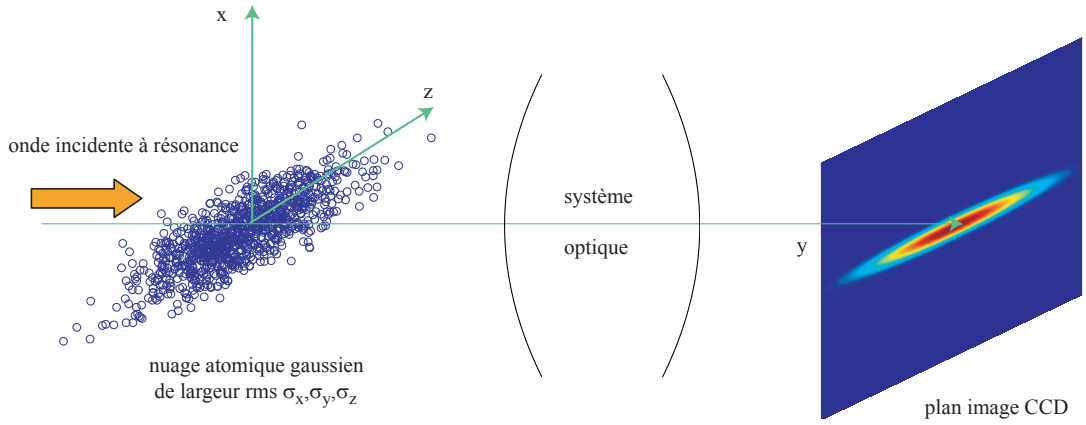

FIG. D.1 – Configuration du système d'imagerie et notations utilisées.

Nous trouvons alors que :

$$\mathcal{I}'(x,z) = \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\sigma_0 N_0}{2\pi\sigma_c\sigma_z} \right)^n \frac{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\delta_x}} \frac{\sqrt{\frac{\sigma_z^2}{n}}}{\sqrt{\frac{\sigma_z^2}{n}+\delta_z}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\frac{\sigma_x^2}{n}+\delta_x^2)} - \frac{z^2}{2(\frac{\sigma_z^2}{n}+\delta_z^2)} \right) \tag{D.6}$$

Le nombre de photons détectées sur un pixel de la caméra CCD de taille Δ_x et Δ_z s'obtient par l'intégration suivante :

$$\mathcal{N}_{\mathrm{ph}} = \int_{-\Delta_x}^{\Delta_x} \int_{\Delta_z}^{\Delta_z} \mathcal{I}'(x,z) dx dz \tag{D.7}$$

soit

$$\mathcal{N}_{\mathrm{ph}} = \mathcal{I}_0 \Delta_x \Delta_z + 2\pi \mathcal{I}_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\sigma_0 N_0}{2\pi\sigma_c\sigma_z} \right)^n \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}} \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{n}} \mathrm{Erf}\left(\frac{\Delta_{\mathrm{x}}/\sqrt{2}}{2\sqrt{\frac{\sigma_{\mathrm{x}}^2}{\mathrm{n}}+\delta_{\mathrm{x}}}} \right) \mathrm{Erf}\left(\frac{\Delta_{\mathrm{z}}/\sqrt{2}}{2\sqrt{\frac{\sigma_{\mathrm{z}}^2}{\mathrm{n}}+\delta_{\mathrm{z}}}} \right) \tag{D.8}$$

où la fonction Erf est définie par $\mathrm{Erf(x)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2} \mathrm{dt}$

Nous appliquons ensuite la formule

$$N_{\mathrm{calc.}} = \frac{\Delta_x \Delta_z}{\sigma_0} \log\left(\frac{\mathcal{N}_{\mathrm{ph}}}{\mathcal{I}_0 \Delta_x \Delta_z} \right) \tag{D.9}$$

pour retrouver le nombre d'atomes sachant que le nombre d'atomes réellement présents

dans le pixel est :

$$N_{\text{present}} = N_0 \text{ Erf}\left(\frac{\Delta_x/\sqrt{2}}{2\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\delta_x}}\right) \text{Erf}\left(\frac{\Delta_z/\sqrt{2}}{2\sqrt{\frac{\sigma_z^2}{n}+\delta_z}}\right) \tag{D.10}$$

Il faut pour finir comparer cette formule formule que nous utilisons dans le cas d'absorption faible ($\frac{\sigma_0 N_0}{2\pi\sigma_c\sigma_z} \ll 1$) c'est-à-dire en ne prenant que le premier terme de la somme de l'équation D.8.

$$\mathcal{N}_{\text{ph}} = \frac{\mathcal{I}(x,z)}{\mathcal{I}_0 \Delta_x \Delta_z} \tag{D.11}$$

ANNEXE E

Expression matricielle de l'hamiltonien de Hartree-Fock

Dans cette annexe, nous nous proposons de dériver l'expression matricielle de l'hamiltonien que nous avons utilisée pour résoudre de manière auto-consistante le problème Hartree-Fock rencontré.

Pour cela, repartons de l'expression de l'hamiltonien Hartree-Fock dérivé au chapitre 6 (Equation E.2), en coordonnées cylindriques (r,z) :

$$\mathcal{H}(r,z) = \frac{p_z^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_\perp^2 + \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r^2 + 2g_{3D}\rho(r,z) \tag{E.1}$$

Le découplage entre la partie transverse de l'hamiltonien et la partie longitudinale nous permet d'écrire les fonctions d'onde solutions de l'hamiltonien $H_{\text{H.F.}}$ comme le produit d'ondes planes dans la direction longitudinale et des fonctions d'ondes transverses $|\Psi_{(\perp,\text{n})}\rangle$ solutions de :

$$H_{\perp,\text{H.F.}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_\perp^2 + \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r^2 + 2g_{3D}\rho(r) \tag{E.2}$$

avec

$$\rho(r) = \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} e^{\alpha\beta(\mu-\epsilon_i)}\,|\phi_i(r)|^2\right) \tag{E.3}$$

L'invariance par rotation de $H_{\perp,\text{H.F.}}$ par autour de la direction longitudinale permet d'écrire les vecteurs d'onde $|\Psi_{(\perp,\text{u})}\rangle$ sous la forme $|\Psi_{(\perp,\text{n})}\rangle = e^{iu\theta}|\phi_u(r)\rangle$.

Ainsi, en utilisant l'expression du laplacien en coordonnée cylindrique, les vecteur propres ϕ_u de $H_{\perp,\text{H.F.}}$ sont solutions de :

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r^2 + 2g_{3D}\rho(r)\right)|\Psi_{(\perp,\text{n})}\rangle = \epsilon_n|\Psi_{(\perp,\text{n})}\rangle \tag{E.4}$$

La méthode des éléments finis consiste à approximer les dérivés du premier et du second ordre par des accroissements élémentaires finis :

$$\frac{\partial}{\partial r}\phi_\text{n}(r) = \lim_{dr\to 0}\frac{\phi_\text{n}(r+dr/2)-\phi_\text{n}(r-dr/2)}{dr} \simeq \frac{\phi_\text{n}(r+\delta r/2)-\phi_\text{n}(r-\delta r/2)}{\delta r} \tag{E.5}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 r}\phi_{\mathrm{n}}(r) \simeq \frac{\phi_{\mathrm{n}}(r+\delta r)+\phi_{\mathrm{n}}(r-\delta r)-2\phi_{\mathrm{n}}(r)}{(\delta r)^2} \tag{E.6}$$

où δr correspond au pas de discrétisation utilisé.

Les états propres $\phi_{\mathrm{n,u}}(r) = \begin{pmatrix} \phi_{n,u}(r_1) \\ \phi_{n,u}(r_2) \\ \vdots \\ \phi_{n,u}(r_{N-1}) \\ \phi_{n,u}(r_N) \end{pmatrix}$ de $H_{\perp,\mathrm{H.F.}}$ sont alors solution de l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & 0 & \\ & b_2 & a_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & b & a_{\mathrm{N}-1} & c_{\mathrm{N}-1} \\ & & & & b_{\mathrm{N}-1} & a_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{n,u}(r_1) \\ \phi_{n,u}(r_2) \\ \vdots \\ \phi_{n,u}(r_{N-1}) \\ \phi_{n,u}(r_N) \end{pmatrix} = E_u \begin{pmatrix} \phi_{n,u}(r_1) \\ \phi_{n,u}(r_2) \\ \vdots \\ \phi_{n,u}(r_{N-1}) \\ \phi_{n,u}(r_N) \end{pmatrix} \tag{E.7}$$

avec les coefficients a_k, b_k, c_k respectivement égaux à :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\hbar^2}{2m\delta r^2} + \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r_k^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{u^2}{r_k^2} + 2g_{3D}\rho(r_k) \qquad \forall\ k\ \epsilon[1,N] \\ b_k &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{k-1-1/2}{r_{k-1}\delta r} \\ c_k &= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{k-1+1/2}{r_{k-1}\delta r} \end{aligned} \tag{E.8}$$

Pour être sûr d'obtenir les $2p$ premiers vecteurs et énergies propres de $H_{\perp,\mathrm{H.F.}}$ ($p \in \mathbb{N}$), nous devons résoudre l'hamiltonien $H_{\perp,\mathrm{H.F.}}$ pour toutes les valeurs de u comprise entre $-p$ et p. Cependant, comme nous pouvions nous y attendre l'expression de $H_{\perp,\mathrm{H.F.}}$ est invariant par la transformation $u \to -u$. Ainsi, nous pouvons nous restreindre au calcul de $H_{\perp,\mathrm{H.F.}}$ pour seulement les valeurs de $u \geq 0$[1]. Les $2p$ premiers vecteurs et énergies propres de $H_{\perp,\mathrm{H.F.}}$ sont alors obtenues en triant par ordre croissant d'énergie l'ensemble des énergies propres trouvées.

[1] NB : une résolution numérique rapide de ces matrices consiste à utiliser les algorithmes des matrices creuses.

ANNEXE F

Publications

- T. Schumm, J. Estève, C. Figl, J.-B. Trebbia , C. Aussibal, H. Nguyen, D. Mailly, I. Bouchoule, C. I. Westbrook, et A. Aspect, **Atom chips in the real world : the effects of wire corrugation**, *Eur. Phys. J. D* **32**, 171-180 (2005).

- J. Estève, T. Schumm, J.-B. Trebbia, I. Bouchoule, A. Aspect, et C. I. Westbrook, **Realizing a stable magnetic double-well potential on an atom chip**, *Eur. Phys. J. D* **35**, 141-146 (2005).

- J. Estève, J.-B. Trebbia, T. Schumm, A. Aspect, C. Westbrook, et I. Bouchoule, **Observations of density fluctuations in an elongated Bose gas : ideal gas and quasi-condensate**, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 130403 (2006).

- J.-B. Trebbia, J. Estève, C. Westbrook, et I. Bouchoule, **Experimental Evidence for the Breakdown of a Hartree-Fock Approach in a Weakly Interacting Bose Gas**, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 250403 (2006).

- J.-B. Trebbia, C. L. Garrido Alzar, R. Cornelussen, C. Westbrook, and I. Bouchoule, **Roughness suppression in an AC atom chip**, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 263201 (2007).

- I. Bouchoule, J.-B. Trebbia et C. L. Garrido Alzar, **Limitation of the modulation method to smooth a wire guide roughness**, *soumis à Phys. Rev. A* (2007) disponible sur [hal-00159895 - version 1]

F.1 Atom chips in the real world : the effects of wire corrugation

Eur. Phys. J. D **32**, 171–180 (2005)
DOI: 10.1140/epjd/e2005-00016-x

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL D

Atom chips in the real world: the effects of wire corrugation

T. Schumm[1,a], J. Estève[1], C. Figl[1,b], J.-B. Trebbia[1], C. Aussibal[1], H. Nguyen[1], D. Mailly[2], I. Bouchoule[1], C.I. Westbrook[1], and A. Aspect[1]

[1] Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, UMR 8501 du CNRS, 91403 Orsay Cedex, France
[2] Laboratoire de Photonique et de Nanostructures, UPR 20 du CNRS, 91460 Marcoussis, France

Received 16 July 2004 / Received in final form 28 October 2004
Published online 1st February 2005 – © EDP Sciences, Società Italiana di Fisica, Springer-Verlag 2005

Abstract. We present a detailed model describing the effects of wire corrugation on the trapping potential experienced by a cloud of atoms above a current carrying micro wire. We calculate the distortion of the current distribution due to corrugation and then derive the corresponding roughness in the magnetic field above the wire. Scaling laws are derived for the roughness as a function of height above a ribbon shaped wire. We also present experimental data on micro wire traps using cold atoms which complement some previously published measurements [11] and which demonstrate that wire corrugation can satisfactorily explain our observations of atom cloud fragmentation above electroplated gold wires. Finally, we present measurements of the corrugation of new wires fabricated by electron beam lithography and evaporation of gold. These wires appear to be substantially smoother than electroplated wires.

PACS. 39.25.+k Atom manipulation (scanning probe microscopy, laser cooling, etc.) – 03.75.Be Atom and neutron optics

1 Introduction

Magnetic traps created by current carrying micro wires have proven to be a powerful alternative to standard trapping schemes in experiments with cold atoms and Bose-Einstein condensates [1]. These so-called "atom chips" combine robustness, simplicity and low power consumption with strong confinement and high flexibility in the design of the trapping geometry. Integrated atom optics elements such as waveguides and atom interferometers have been proposed and could possibly be integrated on a single chip using fabrication techniques known from microelectronics. Quantum information processing with a single atom in a micro trap has also been proposed [2].

Real world limitations of atom chip performance are thus of great interest. Losses and heating of atoms due to thermally exited currents inside conducting materials composing the chip were predicted theoretically [3,4] and observed experimentally soon after the first experimental realizations of atomic micro traps [5,6].

An unexpected problem in the use of atom chips was the observation of a fragmentation of cold atomic clouds in magnetic micro traps [7,8]. Experiments have shown that this fragmentation is due to a time independent roughness in the magnetic trapping potential created by a distortion of the current flow inside the micro wire [9]. It has also been demonstrated that the amplitude of this roughness increases as the trap center is moved closer to the micro wire [10]. Fragmentation has been observed on atom chips built by different micro fabrication processes using gold [11] and copper wires [7,8], and on more macroscopic systems based on cylindrical copper wires covered with aluminum [10] and micro machined silver foil [12]. The origin of the current distortion inside the wires causing the potential roughness is still not known for every system.

In a recent letter [11], we experimentally demonstrated that wire edge corrugation explains the observed potential roughness (as theoretically proposed in [13]) in at least one particular realization of a micro trap. In this paper, we will expand on our previous work giving a more detailed description of the necessary calculations as well as presenting a more complete set of experimental observations. We emphasize that extreme care has to be taken when fabricating atom chips, and that high quality measurements are necessary to evaluate their flatness in the frequency range of interest. We will discuss the influence of corrugations both on the edges as well as on the surface of the wire and give scaling laws for the important geometrical quantities like atom wire separation and wire dimensions. We will also present preliminary measurements on wires using improved fabrication techniques.

The paper is organized as follows. In Section 2, we give a brief introduction to magnetic wire traps and emphasize that the potential roughness is created by a spatially fluctuating magnetic field component parallel to the wire.

[a] e-mail: thorsten.schumm@iota.u-psud.fr
[b] *Present address*: Universität Hannover, D-30167 Hannover, Germany.

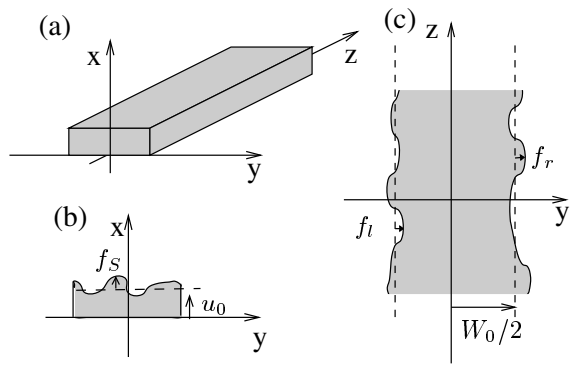

Fig. 1. Rectangular wire considered in this paper. The edge roughness and the top surface roughness are illustrated in (c) and (b) respectively.

In Section 3, we give a general framework to calculate the rough potential created by any current distortion in the wire. A detailed calculation of the current flow distortion due to edge and surface corrugations on a rectangular wire is presented in Section 4. In Section 5, we apply these calculations to the geometry of a flat wire, widely used in experiments. Edge and surface effects are compared for different heights above the wire and we present important scaling laws that determine the optimal wire size for a given fabrication quality. In Sections 6 and 7, we show measurements of the spectra of edge and surface fluctuations for two types of wires produced by different micro fabrication methods: optical lithography followed by gold electroplating and direct electron beam lithography followed by gold evaporation. We also present measurements of the rough potential created by a wire of the first type using cold trapped rubidium atoms.

2 Magnetic micro traps

The building block of atom chip setups is the so-called side wire guide [1]. The magnetic field created by a straight current carrying conductor along the z-axis combined with a homogeneous bias field B_0 perpendicular to the wire creates a two-dimensional trapping potential along the wire (see Fig. 1). The total magnetic field cancels on a line located at a distance x from the wire and atoms in a low field seeking state are trapped around this minimum. For an infinitely long and thin wire, the trap is located at a distance $x = \mu_0 I/(2\pi B_0)$. To first order, the magnetic field is a linear quadrupole around its minimum. If the atomic spin follows adiabatically the direction of the magnetic field, the magnetic potential seen by the atoms is proportional to the magnitude of the magnetic field. Consequently, the potential of the side wire guide grows linearly from zero with a gradient B_0/x as the distance from the position of the minimum increases.

For a straight wire along z, all magnetic field vectors are in the (x, y)-plane. Three dimensional trapping can be obtained by adding a spatially varying magnetic field component B_z along the wire. This can be done by bending the wire, so that a magnetic field component along the central part of the wire is created using the same current. Alternatively, separate chip wires or even macroscopic coils can be used to provide trapping in the third dimension.

For a realistic description of the potential created by a micro wire, its finite size has to be taken into account. Because of finite size effects, the magnetic field does not diverge but reaches a finite value at the wire surface. For a square shaped wire of height and width a carrying a current I, the magnetic field saturates at a value proportional to I/a, the gradient reaches a value proportional to I/a^2. Assuming a simple model of heat dissipation, where one of the wire surfaces is in contact with a heat reservoir at constant temperature, one finds the maximal applicable current to be proportional to $a^{3/2}$ [14]. Therefore, the maximal gradient that can be achieved is proportional to $1/\sqrt{a}$. This shows that bringing atoms closer to smaller wires carrying smaller currents still increases the magnetic confinement, which is the main motivation for miniaturizing the trapping structures. However the magnetic field roughness arising from inhomogeneities in the current density inside the wire also increases as atoms get closer to the wire. This increase of potential roughness may prevent the achievement of high confinement since the trap may become too corrugated.

We emphasize that only the z-component of the magnetic field is relevant to the potential roughness. A variation of the magnetic field in the (x, y)-plane will cause a negligible displacement of the trap center, whereas a varying magnetic field component B_z modifies the longitudinal trapping potential, creating local minima in the overall potential [11].

3 Calculation of the rough magnetic field created by a distorted current flow in a wire

In this section, we present a general calculation of the extra magnetic field due to distortions in the current flow creating the trapping potential. By $\mathbf{j}$ we denote the current density that characterizes the distortion in the current flow. The total current density $\mathbf{J}$ is equal to the sum of $\mathbf{j}$ and the undisturbed flow $j_0\mathbf{e}_z$. As the longitudinal potential seen by the atoms is proportional to the z-component of the magnetic field, we restrict our calculation to this component. We thus have to determine the x- and y-components of the vector potential $\mathbf{A}$ from which the magnetic field derives. In the following, we consider the Fourier transform of all the quantities of interest along the z-axis which we define by

$$A_{l,k}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} \int A_l(x, y, z) e^{-ikz}\, dz, \qquad (1)$$

where we have used the vector potential as an example and l stands for x or y, L being the length of the wire. We choose this definition so that the power spectral density of a quantity coincides with the mean square of its Fourier transform:

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ikz} \langle A_l(z) A_l(0) \rangle\, dz = \langle |A_{l,k}|^2 \rangle. \qquad (2)$$

The vector potential satisfies a Poisson equation with a source term proportional to the current density in the wire. Thus the Fourier component $A_{l,k}$ satisfies the following time independent heat equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}\right)A_{l,k}-k^2A_{l,k}=-\mu_0 j_{l,k}. \qquad (3)$$

where j_l is one component of the current density $\mathbf{j}$. In the following, we use cylindrical coordinates defined by $x=r\cos(\varphi)$ and $y=r\sin(\varphi)$. Outside the wire, the right hand side of equation (3) is zero. The solution of this 2D heat equation without source term can be expanded in a basis of functions with a given "angular momentum" n. The radial dependence of the solution is therefore a linear combination of modified Bessel functions of the first kind I_n and of the second kind K_n. Thus expanding $A_{l,k}$ on this basis, we obtain the following linear combination for the vector potential

$$A_{l,k}(r,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}c_{l_n}(k)e^{in\varphi}K_n(kr). \qquad (4)$$

We retain only the modified Bessel functions of the second kind, since the potential has to go to zero as r goes to infinity. The $c_{l_n}(k)$ coefficients are imposed by equation (3), and can be determined using the Green function of the 2D heat equation [15]. We obtain

$$c_{l_n}(k)=-\frac{\mu_0}{2\pi}\iint I_n(kr)\ e^{-in\varphi}j_{l,k}(\varphi,r)rdrd\varphi. \qquad (5)$$

Taking the curl of the vector potential and using the relations $K_n'=-(K_{n-1}+K_{n+1})/2$ and $2nK_n(u)/u=-K_{n-1}+K_{n+1}$, we obtain the z-component of the magnetic field from equation (4)

$$B_{z,k}=-\frac{k}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[c_{y_{n-1}}(k)+c_{y_{n+1}}(k)\right]K_n(kr)e^{in\varphi}$$
$$-i\frac{k}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[c_{x_{n-1}}(k)-c_{x_{n+1}}(k)\right]K_n(kr)e^{in\varphi}. \qquad (6)$$

This expression is valid only for r larger than r_0, the radius of the cylinder that just encloses the wire. At a given distance x from the wire, we expect that only fluctuations with wavelengths larger or comparable to x contribute to the magnetic field, since fluctuations with shorter wavelengths average to zero. Therefore we can simplify expression (6) assuming we calculate the magnetic field above the center of the wire ($y=0$) for x much larger than r_0. The argument of I_n in equation (5) is very small in the domain of integration and we can make the approximation $I_n(kr)\simeq(kr)^n/(2^n n!)$. This shows that the c_{l_n} coefficients decrease rapidly with n. Keeping only the dominant term of the series in equation (6), we obtain

$$B_{z,k}(x)\simeq-\frac{c_{y_0}(k)}{k}\left[k^2K_1(kx)\right]. \qquad (7)$$

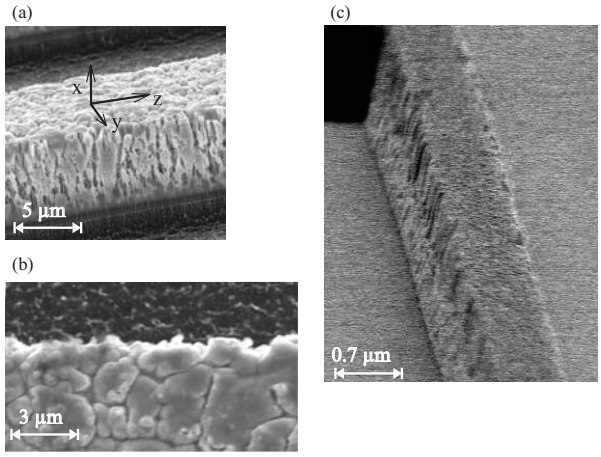

Fig. 2. Scanning electron microscope images of micro fabricated wires. Side view (a) and top view (b): electroplated gold wire of width 50 μm and height 4.5 μm fabricated using optical lithography. Side view (c): evaporated gold wire of width and height 0.7 μm fabricated using electron beam lithography.

We will see in the next section that the first factor of this expression, characterizing the distortion flow, is proportional to the power spectral density of the wire corrugation. The second factor peaks at $k\simeq 1.3/x$ justifying the expansion. Fluctuations with a wavelength much smaller or much larger than $1/x$ are filtered out and do not contribute. As we approach the wire, more and more terms have to be added in the series of equation (6) to compute the magnetic field. We emphasize that the expressions derived in equations (6) and (7) are general for any distorted current flow that may arise from bulk inhomogeneities or edge and surface corrugations.

4 Calculation of the distorted current flow in a corrugated wire

We now turn to the calculation of the distortion in the current flow due to wire edge and surface corrugations in order to determine the associated c_{l_n} coefficients. We suppose the wire has a rectangular cross-section of width W_0 and height u_0 as shown in Figure 1. Let us first concentrate on the effect of corrugations of the wire edges, i.e. the borders perpendicular to the substrate (model equivalent to [13]). Figure 2 shows that, in our samples, these fluctuations are almost independent of the x coordinate both for wires deposited by electrodeposition and by evaporation. We believe this result to be general for wires fabricated by a lithographic process, since any defect in the mask or in the photoresist is projected all along the height of the wire during the fabrication process. Thus, in the following, the function $f_{r/l}$ that describes the deviation of the right (respectively left) wire edge from $\pm W_0/2$ is assumed to depend only on z.

Conservation of charge and Ohm's law give $\nabla\mathbf{J}=0$ and $\mathbf{J}=-\chi\nabla V$ where χ is the electrical conductivity and V the electrostatic potential. We will make the approximation that χ is uniform inside the wire. In this

case V satisfies the Laplace equation $\nabla^2 V = 0$. As we are interested in deviations from the mean current density $j_0 = I/(u_0 W_0)$, we introduce the electric potential $v = V - j_0 z/\chi$ which is equal to zero in the absence of deviations. From what we have said above, v only depends on y and z and satisfies the 2D Laplace equation. The boundary conditions for the current density on the wire edge require the current to be parallel to the wire edge. Thus v satisfies

$$\frac{df_{r/l}}{dz}(z)\left[j_0 - \chi\frac{\partial v}{\partial z}(y = \pm W_0/2 + f_{r/l}, z)\right] = -\chi\frac{\partial v}{\partial y}(y = \pm W_0/2 + f_{r/l}, z). \quad (8)$$

In the following we assume the amplitude of $f_{r/l}$ to be small enough so we can make an expansion to first order in $f_{r/l}$ of both terms. We then obtain a linear relation between $v(\pm W_0/2, z)$ and $f_{r/l}(z)$ which in Fourier space can be written as

$$ikj_0 f_{r/l,k} = -\chi\frac{\partial v_k}{\partial y}(y = \pm W_0/2). \quad (9)$$

The potential v satisfies the 2D Laplace equation, so the k component $v_k(y)$ is a linear combination of e^{+ky} and e^{-ky}. The two coefficients are imposed by the two boundary conditions of equation (9). To complete the calculation of these two coefficients, we introduce the symmetric component $f^+ = (f_r + f_l)/2$ and antisymmetric component $f^- = (f_r - f_l)/2$ of the wire edge fluctuations. Going back to the current density, we obtain

$$j_{y,k} = ikj_0\left(\frac{\cosh(ky)}{\cosh(kW_0/2)}f_k^+ + \frac{\sinh(ky)}{\sinh(kW_0/2)}f_k^-\right). \quad (10)$$

We note that the symmetric part (first term) of the current deviation is maximal near the wire edges for components with a wave vector large compared to $1/W_0$. On the other hand, the components with a small wave vector are constant over the width of the wire.

We now turn to the calculation of the current distortions due to surface corrugation. We assume the bottom surface to be flat, since the wire is supposed to be fabricated on a flat substrate. We denote by f_S the fluctuations of the height of the wire from its mean value u_0 (see Fig. 1). We follow the same procedure as for the calculation of the effect of the wire edge fluctuations. Now v is the electrical potential associated with the current density j due to the surface corrugation. It depends on x, y and z and satisfies the 3D Laplace equation. To first order in f_S, the boundary conditions of a current tangent to the surface of the wire are

$$\begin{cases} \chi\dfrac{\partial v}{\partial x}(x = u_0, y, z) + j_0\dfrac{\partial f_S}{\partial z}(z) = 0 \\ \chi\dfrac{\partial v}{\partial x}(x = 0, y, z) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

and

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y = \pm W_0/2, z) = 0. \quad (12)$$

Symmetry arguments show that only the part of $f_S(y, z)$ which is odd in y contributes to the magnetic field along z in the plane $y = 0$. An even component of f_S produces currents which are symmetric under inversion with respect to the plane $y = 0$. Therefore, they cannot contribute to B_z in this plane. Thus, only the Fourier components

$$f_{S_{k,m}} = \iint \frac{dydz}{\pi\sqrt{2LW_0}}e^{-ikz}\sin(2m\pi y/W_0)f_S(y, z) \quad (13)$$

contribute, where $m = 1, ..., \infty$. With this definition, $f_{S_k}(y) = 2\sqrt{\pi/W_0}\sum_{m=0}^{\infty}\sin(2\pi my/W_0)f_{S_{k,m}}$. We choose this definition of the Fourier component $f_{S_{k,m}}$ so that $\langle|f_{S_{k,m}}|^2\rangle$ is equal to the 2-dimensional spectral density of f_S. To obtain the electric potential produced by a given component $f_{S_{k,m}}$ we use the expansion

$$\sin(2m\pi y/W_0) = \sum_{p=0}^{\infty}\gamma_{m,p}\sin((2p+1)\pi y/W_0), \quad (14)$$

where

$$\gamma_{m,p} = \frac{-8m}{\pi}\frac{(-1)^{m+p}}{(2(m+p)+1)(2(p-m)+1)}, \quad (15)$$

valid for $y \in [-W_0/2, W_0/2]$. Each p Fourier component induces an electrical potential $v_{k,m,p}$ and, since v satisfies the Laplace equation, $v_{k,m,p}$ is a linear combination of $e^{+\nu_p x}$ and $e^{-\nu_p x}$ where $\nu_p = \sqrt{k^2 + ((2p+1)\pi/W_0)^2}$. The boundary conditions on the surfaces $x = 0$ and $x = u_0$ determine the coefficients and we obtain

$$-\chi v_{k,m,p}(x, y) = ikj_0 f_{S_{k,m}}\gamma_{m,p}\frac{\cosh(\nu_p x)}{\sinh(\nu_p u_0)}\frac{1}{\nu_p}\sin((2p+1)\pi y/W_0). \quad (16)$$

With the choice of the expansion (14), the boundary conditions on $y = \pm W_0/2$ are satisfied by each term. Finally, we obtain the current density distribution

$$\begin{cases} j_{x_{k,m}}(x, y) = 2ikf_{S_{k,m}}j_0\sqrt{\frac{\pi}{W_0}} \\ \quad \times\sum_{p=0}^{\infty}\left(\gamma_{m,p}\frac{\sinh(\nu_p x)}{\sinh(\nu_p u_0)}\sin\left((2p+1)\pi y/W_0\right)\right) \\ j_{y_{k,m}}(x, y) = 2ikf_{S_{k,m}}j_0\sqrt{\frac{\pi}{W_0}} \\ \quad \times\sum_{p=0}^{\infty}\left(\gamma_{m,p}\frac{\cosh(\nu_p x)}{\sinh(\nu_p u_0)}\frac{(2p+1)\pi}{\nu_p W_0}\cos\left((2p+1)\pi y/W_0\right)\right) \end{cases}. \quad (17)$$

The Fourier components j_{l_k} are obtained by summing equation (17) for $m = 1, ..., \infty$.

5 Rough potential of a ribbon shaped wire

In this section, we combine the results of the two previous sections to compute the z-component of the rough magnetic field in the specific case of a flat rectangular wire ($u_0 \ll W_0$). This simplification enables us to obtain

analytical results for a system that is widely used in experiments [8,12,16–19].

We do the calculation on the x-axis for $x > W_0/2$ (and $y = 0$). Since the wire is considered flat, we replace the volume current density $\mathbf{j}$ by a surface current density $\boldsymbol{\sigma} = \int \mathbf{j} dx$. Then we can rewrite the c_{l_n} coefficients of equation (5) as

$$c_{l_n}(k) = -\frac{\mu_0}{2\pi}(-i)^n \int_0^{W_0/2} dy I_n(ky) \times [\sigma_{l,k}(y) + (-1)^n \sigma_{l,k}(-y)]. \quad (18)$$

We will first study the effect of wire edge fluctuations and give universal behaviors for the magnetic field roughness. We will then concentrate on the effect of the top surface roughness. We will compare the relative importance of the two effects and point out important consequences for the design of micro wires.

5.1 Effect of wire edge roughness

Let us first study the effect of wire edge fluctuations. Here we derive the same results as [13] in a different way. Note that, unlike the calculations in [13], the calculations presented here are only valid for distances from the wire larger than (or equal to) $W_0/2$. The expansion we use is nevertheless useful because it converges rapidly and permits the determination of the magnetic field roughness for any height larger than $W_0/2$ after the calculation of a few parameters (the c_n coefficients).

The distorted current flow has no component along the x-axis. The expression of the rough magnetic field is then given by the first sum of equation (6). Taking $\varphi = 0$, we can rearrange this sum using the equalities $K_n(kr) = K_{-n}(kr)$ and $c_{y_{-n}} = (-1)^n c_{y_n}$ (see Eq. (18)), we then obtain

$$B_{z,k} = -k \sum_{n=0}^{\infty} (c_{y_{2n}}(k) + c_{y_{2n+2}}(k)) K_{2n+1}(kr). \quad (19)$$

Since only the c_{y_n} with even n contribute, we see from equation (18) that only the symmetric part of the current density participates to the magnetic field. This is what we expect from a simple symmetry argument. For the $c_{y_{2n}}$ coefficients we obtain

$$c_{y_{2n}} = (-1)^{n+1} \frac{\mu_0 I}{\pi W_0} ik f_k^+ \times \int_0^{W_0/2} I_{2n}(ky) \frac{\cosh(ky)}{\cosh(kW_0/2)} dy. \quad (20)$$

As pointed out in the previous section, the sum over the angular momenta n in equation (19) converges rapidly with n if $x \gg W_0$. More precisely, the dominant term proportional to $K_1(kx)$ gives the correct result within 10% as soon as $x > 1.5W_0$. As x approaches $x = W_0/2$, more and more terms contribute, for $x = W_0/2$, 20 terms have to be taken into account to reach the same accuracy.

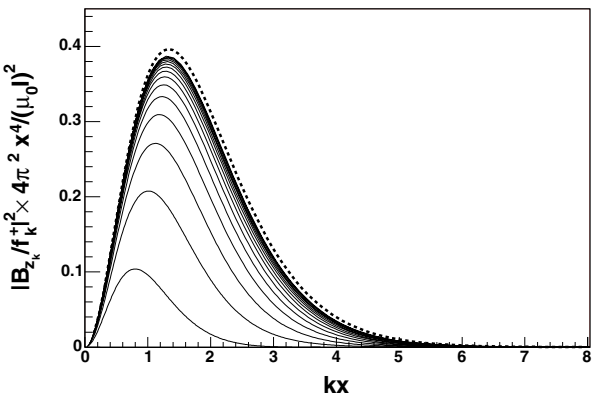

Fig. 3. Response function relating the magnetic field roughness $|B_{z_k}|^2$ to the wire edge fluctuations $|f_k^+|^2$ (see Eq. (21)). Plotted is the dimensionless quantity $|B_{z_k}/f_k^+|^2 \times 4\pi^2 x^4/(\mu_0 I)^2$ as a function of kx where x is the height above the center of the wire ($y = 0$). The different curves correspond to different ratios x/W_0 going from 0.5 to 4.7 in steps of 0.3. Small values of x/W_0 correspond to lower curves. The curve corresponding to the limit given by equation (21) is also shown (dashed line).

We now derive the response function of the magnetic field to the wire edge fluctuation for $x > W_0/2$ which we define as $R(k,x) = |B_{z,k}/f_k^+|^2$. As we already noticed in the previous section, far away from the wire ($x \gg W_0$), only wave vectors $k \ll 1/W_0$ are relevant. Then we can approximate the integral in equation (20) by expanding the integrand to zeroth order in ky. Keeping the dominant term in the series that defines the magnetic field, we obtain the following expression for the response function

$$R(k,x) \simeq \frac{(\mu_0 I)^2}{4\pi^2 x^4} (kx)^4 K_1^2(kx). \quad (21)$$

For a given height x, as k increases, this function increases from zero as k^2, peaks at $k = 1.3/x$ and finally tends exponentially to zero. This behavior can be understood as follows. At low wave vectors, the angle between the direction of the distorted current flow and the z-axis tends to zero, thus the contribution of these components becomes negligible. At high wave vectors, fluctuations with a wave length shorter than the distance to the wire average to zero.

To check the validity of equation (21), we plot the dimensionless function $R(k,x)/[(\mu_0 I)^2/(4\pi^2 x^4)]$ for different ratios x/W_0 in Figure 3. The limit function corresponds to a configuration where the distorted current flow is concentrated on the line $x = y = 0$. For a smaller distance from the wire, the finite width of the wire becomes important and $R(k,x)$ differs from the expression (21). The amplitude is smaller and the peak is shifted to a lower frequency. These effects are due to the fact that as x decreases, the distance to the borders of the wire decreases less rapidly than the distance to the central part of the wire because of the finite width of the wire. Furthermore, because corrugations of high wave vector produce a current density localized near the wire border, their decrease in amplitude is more pronounced.

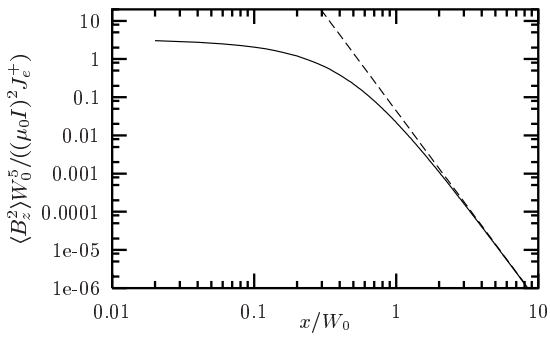

Fig. 4. Magnetic field fluctuations $\langle B_z^2\rangle$ as a function of the height above the wire ($y = 0$). Plotted is the dimensionless quantity $\langle B_z^2\rangle W_0^5/((\mu_0 I)^2 J_e^+)$, where $\langle B_z^2\rangle$ is the magnetic field roughness and J_e is the spectral density of the wire edges assumed to be white, as a function of x/W_0 where x is the height above the the wire [20]. Dashed line: $1/x^5$ law given by equation (22).

Assuming a white power spectrum of the wire edge corrugations with a spectral density J_e^+, we can integrate the equation (21) over the whole spectral range [20]. We then find the following scaling law for the rms fluctuations of B_z with the atom-wire distance x:

$$\langle B_z^2\rangle = J_e^+ \frac{(\mu_0 I)^2}{x^5} 0.044. \tag{22}$$

This expression is valid for $x \gg W_0$, the numerical factor has been found by a numerical integration of equation (21). Figure 4 shows that this expression is valid within 10% as soon as $x > 2W_0$. For smaller distances x, the fluctuations of magnetic field increase more slowly and tends to a constant. The points corresponding to $x < W_0/2$ lie outside the range of the previous calculation and their values have been obtained by a numerical integration for each x. Note that here J_e^+ is the spectral density of f^+. For edges with independent fluctuations, $J_e^+ = J_e/2$ where J_e is the spectral density of each wire edge. The asymptotic behavior of $\langle B_z^2\rangle$ was first derived in [13].

5.2 Effect of top surface corrugation

We now consider the effect of corrugations of the top surface of the wire. As shown in equation (17), it induces both a current along the x- and y-direction. The surface current densities obtained by integration over x have remarkably simple forms. We find

$$\sigma_{y_{k,m}} = \sigma^{(1)}_{y_{k,m}} + \sigma^{(2)}_{y_{k,m}} \tag{23}$$

where

$$\begin{cases} \sigma^{(1)}_{y_{k,m}} = 2ikf_{S_{k,m}} j_0 \sqrt{\frac{\pi}{W_0}} \frac{2\pi m}{\kappa^2 W_0} \cos(\frac{2\pi m y}{W_0}) \\ \sigma^{(2)}_{y_{k,m}} = -2ikf_{S_{k,m}} j_0 \sqrt{\frac{\pi}{W_0}} \frac{2\pi m}{\kappa^2 W_0} (-1)^m \frac{\cosh(ky)}{\cosh(kW_0/2)} \end{cases} \tag{24}$$

and $\kappa = \sqrt{k^2 + (2m\pi/W_0)^2}$. In the calculation of $\sigma_{x_{k,m}}$ the summation over p is not analytical. However, as we consider wires with $u_0 \ll W_0$, one can make the approximation $(\cosh(\nu_p u_0) - 1)/\sinh(\nu_p u_0) \simeq \nu_p u_0$. We then obtain

$$\sigma_{x_{k,m}} = ikf_{S_{k,m}} j_0 \sqrt{\frac{\pi}{W_0}} u_0 \sin(2m\pi y/W_0). \tag{25}$$

Comparing equation (25) and equation (24), we see that the current density along x is much smaller than the current density along y provide $\kappa \ll 1/u_0$ (i.e. small wave vectors both along y and z).

Within our flat wire approximation, where only distances from the wire $x \gg u_0$ are considered, this is always the case. In the following we therefore only consider the effect of the current density along y. For $x \geq W_0/2$, the rough magnetic field is then given by equation (19).

Assuming a white power spectrum for the surface corrugation of spectral density J_S, we now derive some properties of the rough magnetic field [20]. For large distances above the wire ($x \gg W_0$), only k-components much smaller than $1/W_0$ are relevant. Then, as we have already shown, the c_{l_n} coefficients decrease rapidly with n and the dominant contribution is given by c_{y_0}. To lowest order in ky, c_{y_0} is proportional to the total current $\int_{-W_0/2}^{W_0/2} \sigma_y(y)dy$. Thus, the only contribution comes from $\sigma^{(2)}_{y_{k,m}}$. Then, calculations similar to those presented in the previous section show that the contribution to $\langle B_z^2\rangle$ of the Fourier component m of f_{S_k} is

$$\langle B_{z,m}^2\rangle = J_s \frac{W_0}{\pi u_0^2} \frac{1}{m^2} \frac{(\mu_0 I)^2}{x^5} 0.044 \tag{26}$$

where J_s is the 2-dimensional spectral density of f_S. As expected it decreases with m as the contribution of rapidly oscillating terms averages to zero for large distances. Computing the sum over $m > 0$ gives the scaling law for the rms fluctuation of B_z due to surface corrugation with atom-wire distance x:

$$\langle B_z^2\rangle = J_s \frac{W_0}{u_0^2} \frac{\pi}{6} \frac{(\mu_0 I)^2}{x^5} 0.044 \tag{27}$$

In Figure 5 this expression is compared to numerical calculations based on equation (24). The terms $\sigma^{(2)}_{y_{k,m}}$ contribute at least 90% of $\langle B_z^2\rangle$ as soon as $x > W_0$.

Comparing edge and surface corrugation, we see that for large distances, both effects scale in the same way (see Eqs. (22) and (27)). However, at short distances from the wire, the amplitude of the magnetic field roughness produced by surface corrugation does not saturate. Indeed, although the contribution of $\sigma^{(2)}_{y_{k,m}}$ saturates in the same way as the effect of wire edge fluctuations, the contribution of $\sigma^{(1)}_{y_{k,m}}$ to the current density diverges as one gets closer to the wire. Thus at small distances from the wire, we expect surface roughness to become the dominant source of magnetic field fluctuations.

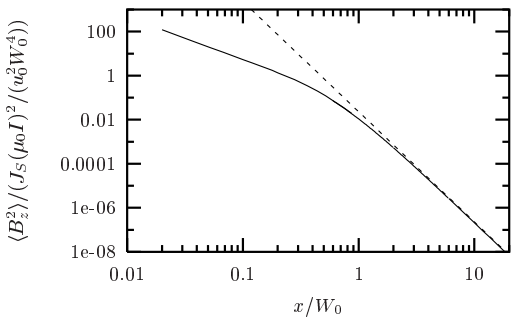

Fig. 5. Longitudinal magnetic field fluctuations $\langle B_z^2\rangle$ produced by white noise top surface wire roughness as a function of x/W_0 ($y = 0$) [20]. Plotted is the dimensionless quantity $\langle B_z^2\rangle/(J_S(\mu_0 I)^2/(u_0^2 W_0^4))$. The dashed lines represents equation (27).

5.3 Consequences for micro wire traps

The scaling laws (22) and (27) are of major importance as they impose strong constrains in the use of micro traps. As mentioned in Section 2, high magnetic field gradients are achieved with small wires and short distances. But as the distance to the wire decreases, the roughness in the magnetic trapping potential increases. Imposing a maximal roughness $\Delta B_{\max}$ tolerable in an experiment therefore directly determines the maximal transverse gradient accessible with a given realization of a micro wire.

More precisely, as mentioned in Section 2, the maximal current in a micro wire is limited by heat dissipation: $I_{\max} = \xi W_0 u_0^{1/2}$ [14]. To analyze the scaling of the system, we consider the trap center at a distance comparable to the wire width $x \simeq W_0$ and a wire height u_0 small and constant. For a given fabrication technology, we expect the wire roughness to be independent of the wire dimensions W_0 and u_0 and we assume white noise spectral densities J_e and J_S for the edge and top surface corrugations [20]. Using the above expressions for x and I and equations (22) and (27), we obtain the following scaling laws

$$\langle B_{\text{edge}}^2\rangle = \frac{J_e \mu_0^2 \kappa^2 u_0}{W_0^3}$$
$$\langle B_{\text{surf}}^2\rangle = \frac{\pi}{6}\frac{J_S \mu_0^2 \kappa^2}{W_0^2 u_0} \tag{28}$$

for the magnetic field fluctuations induced by the edge and the surface roughness respectively. Imposing magnetic field fluctuations smaller than $\Delta B_{\max}$ determines a minimal wire width $W_{0,\min}$ and the maximal transverse gradient $\nabla B_{\max}$. If the potential roughness is dominated by effects due to wire edge corrugation, we find:

$$W_{0,\min} = \left(\frac{J_e \mu_0^2 \kappa^2 u_0 0.044}{\Delta B_{\max}^2}\right)^{1/3}$$
$$\nabla B_{\max} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\mu_0 \kappa \sqrt{u_0}\Delta B_{\max}^2}{J_e 0.044}\right)^{1/3}. \tag{29}$$

For a potential roughness dominated by effects due to wire top surface corrugation, we find:

$$W_{0,\min} = \left(\frac{\pi}{6}\frac{J_S \mu_0^2 \kappa^2 0.044}{\Delta B_{\max}^2 u_0}\right)^{1/2}$$
$$\nabla B_{\max} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{u_0 \Delta B_{\max}}{J_S \frac{\pi}{6} 0.044}\right)^{1/2}. \tag{30}$$

As will be described in the following section, a micro wire fabricated by electroplating presents an edge roughness of $J_e \simeq 0.1\ \mu\text{m}^3$. Assuming a wire without top surface roughness, a wire height of $u_0 = 5\ \mu$m, a typical $\xi = 3 \times 10^7\ \text{A m}^{-3/2}$ and imposing a maximal potential roughness of $\Delta B_{\max} = 1$ mG, the wire width is limited to $W_{0,\min} \simeq 700\ \mu$m, the maximal gradient will be $\Delta B_{\max} \simeq 0.2$ T/cm.

6 Probing the rough magnetic potential with cold atoms

In a previous letter [11], we described measurements of the magnetic field roughness produced by a current carrying micro fabricated wire. The basic idea is to use the fact that the longitudinal density $n(z)$ of atoms along the wire, is related to the longitudinal potential seen by the atoms through a Boltzmann factor:

$$n(z) \propto e^{-V(z)/k_{\text{B}}T}. \tag{31}$$

As discussed in Section 2, the potential $V(z)$ is proportional to the z-component of the magnetic field a the center of the trapping potential. Our typical thermal energy, 1 μK, corresponds to a magnetic field of 15 mG for a ^{87}Rb atom in the $F = 2, m_F = 2$ state. Since longitudinal density variations of order 10% are easily visible in our experiment, we are sensitive to variations in the magnetic field at the mG level.

The micro wire we used to create the magnetic potential is a 50 μm wide electroplated gold wire of 4.5 μm height (see Fig. 2). The process of micro fabrication is the following: a silicon wafer is first covered by a 200 nm silicon dioxide layer using thermal oxidation. Next, seed layers of titanium (20 nm) and gold (200 nm) are evaporated. The wire pattern is imprinted on a 6 μm thick photoresist using optical UV lithography. Gold is electroplated between the resist walls using the first gold layer as an electrode. The photoresist is then removed, as well as the gold and titanium seed layers. Finally the wire is covered with a 10 μm layer of BCB resin and a 200 nm thick layer of evaporated gold. The gold surface acts as a mirror for a magneto-optical trap. The procedure for deducing the potential roughness from images of the atomic cloud is complex and we refer the reader to [11].

Figure 6 shows the measured longitudinal potential for various distances above the wire. We also show the power spectral density of these potentials in Figure 7. A region of 1.6 mm along the wire is explored by the atoms. To estimate the power spectral density of the potential roughness

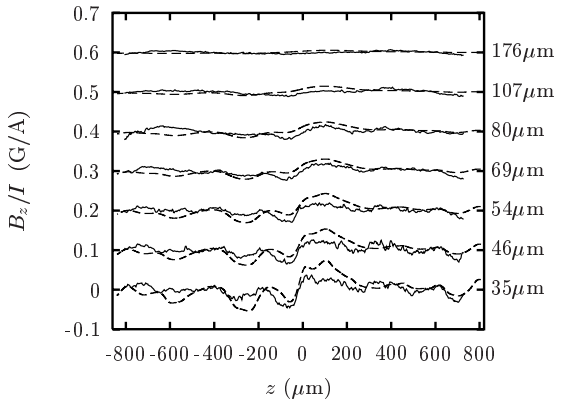

Fig. 6. Rough magnetic field $B_z(z)$ normalized to the current in the micro wire. Solid lines: magnetic field measured using cold atomic clouds. Dashed lines: magnetic field calculated from the measured corrugation of the edges of the wire. The different curves have been vertically shifted by 0.1 G/A from each other and heights above the wire are indicated on the right.

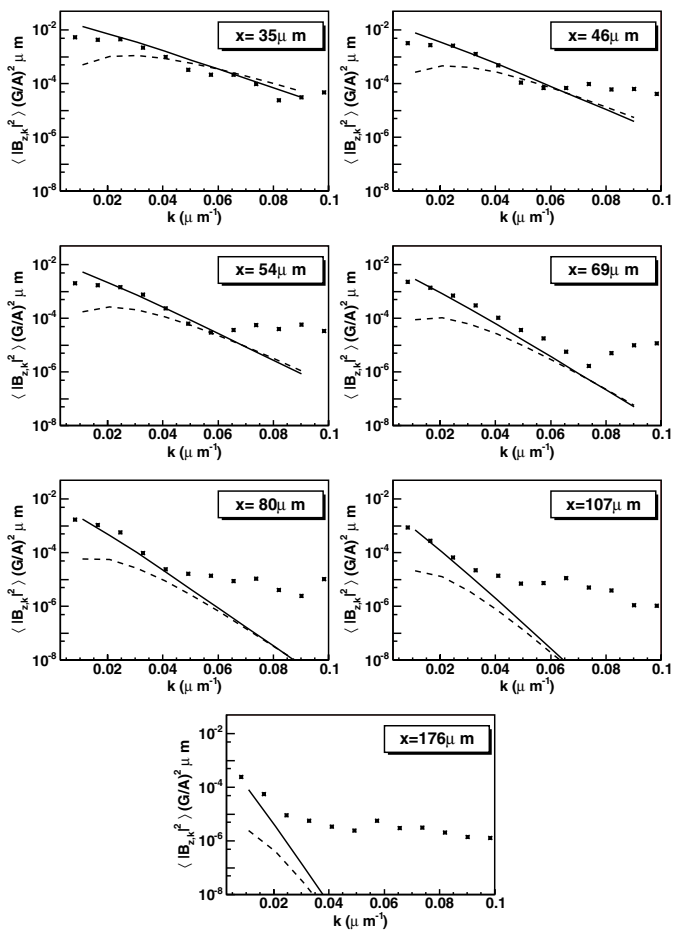

Fig. 7. Spectral density of the magnetic field roughness for different heights above the wire. The points represent experimental data. The curves result from the calculations detailed in the text. Solid curves: expected noise due to wire edge roughness. We used the power law fit to the spectral density of the wire border fluctuations. Dashed curves: expected noise due to top surface roughness.

we divide the total window in three smaller windows overlapping by 50% [21]. In each window, the Fourier transform of the potential is computed after multiplication with a Hamming window and the estimate of the spectral density is the average of the square of the Fourier transforms.

In Figure 7, a flat plateau is visible at the highest wave vectors (e.g. $k > 0.07$ μm^{-1} at 46 μm and $k > 0.04$ μm^{-1} at 80 μm). The level of this plateau depends on experimental parameters such as the temperature and density of the atom cloud. On the other hand the spectral density at low wave vectors, i.e. in the region where it rises above the plateau, is independent of these parameters. This observation leads us to conclude that while the low wave vector part of the spectrum corresponds to a potential seen by the atoms, the plateau at high wave vectors is due to instrumental noise in our imaging system, such as fringes. We expect it to vary in a complex way with temperature and atom density. Qualitatively, smaller atom-wire distances, which are analyzed with higher temperature clouds, should result in higher plateaus. This tendency is indeed observed in Figure 7.

To measure the wire corrugations, we removed the atom chip from vacuum and etched off the gold mirror and the BCB layer. We analyzed the bare wire with scanning electron microscopy (SEM) and with atomic force microscopy (AFM) techniques. The function f describing the edge corrugation is extracted from SEM images such as Figure 2b. Rms deviations of the edges are as small as 200 nm, and we use a 50 μm $\times$ 50 μm field of view in order to have a sufficient resolution. We use 66 overlapping images to reconstruct both wire edges over the whole wire length of 2.8 mm. We identify no correlation between the two edges. The spectral density obtained for $f^+ = (f_l + f_r)/2$ is plotted in Figure 8. We see two structures in the spectrum: first, we observe fluctuations with a correlation length of 0.2 μm and 100 nm rms amplitude. It corresponds to the fluctuations seen in Figure 2b which are probably due to the electrodeposition process. Second, roughness with low wave vectors is present and raises significantly the power spectral density in the 0.01−0.1 μm^{-1} range. For the spectral range 0.01−1 μm^{-1}, the wire border fluctuations are well fitted by a power law $J = 3.2 \times 10^{-6} k^{-2.15} + 8.2 \times 10^{-4}$ μm^3 as seen in Figure 8. We use this expression to compute the spectra shown in Figure 7. As we measured f over the whole region explored by the atoms, we can not only compare the spectral densities of the magnetic field roughness but we also can compare the direct shape of the magnetic field $B_z(z)$. This is done in Figure 6 where the magnetic field, computed from f as described in the previous sections, is shown by dashed lines. We note that no adjustment has been applied to superimpose the two curves, the absolute position of the atoms with respect to the wire is known to the 3 μm resolution of our imaging system.

A different approach is possible to check consistency between the wire edge measurements and the potential roughness measured with cold atoms. As seen in equations (19) and (20), $|B_{z,k}(x)|^2 = J_e^+ R(k,x)$, where the response function $R(k,x)$ does not depend on the wire edge

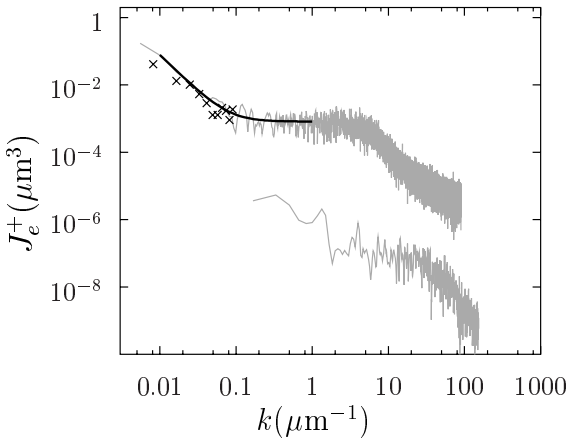

Fig. 8. Measured spectral density of the edge roughness of the electroplated wire (upper curve) and of the evaporated wire (lower curve). For the electroplated wire, the spectral density of $f^+ = (f_l + f_r)/2$ is plotted. For the electroplated wire, $J_f/2$ is plotted, where J_f is the spectral density of a single border of the wire, as expected for the spectral density of f^+ for independent wire border fluctuations. The crosses indicate edge roughness for different k vectors reconstructed from the decay of the corresponding roughness measured with the atoms. The solid line is a polynomial fit to characterize the edge roughness in the region of interest.

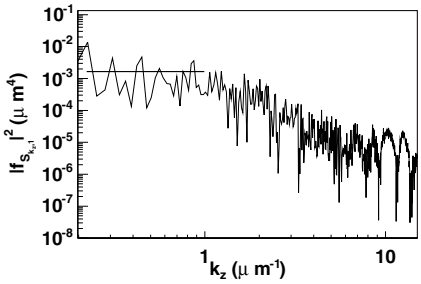

Fig. 9. Power spectral density of the wire top surface roughness measured with an AFM. We plot the spectral density corresponding to the transverse mode $m = 1$ ($k_y = 2\pi/W_0$) which is the first one to contribute to magnetic field roughness. The horizontal line indicates the mean value for k_z ranging from 0.2 $\mu\mathrm{m}^{-1}$ to 1 $\mu\mathrm{m}^{-1}$.

roughness. We compute $R(k, x)$ using the expansion (19) and for a given k-component, we deduce J_e^+ by fitting the decay of $|B_{z,k}(x)|^2$ with height (see Fig. 7). In Figure 8, the values of J_e^+ obtained by such a procedure are compared to the function J_e^+ measured with the electron microscope. We find good agreement.

The corrugation of the top surface of the wire is measured using an AFM and the observed power spectral density is plotted in Figure 9. The spectrum is flat for wave vectors smaller than 1 $\mu\mathrm{m}^{-1}$ with a value $J_S = 1.6 \times 10^{-3}$ $\mu\mathrm{m}^4$. Unfortunately, we were not able to obtain the spectrum for very long wave vectors. For purposes of calculation, we shall simply assume that the spectral density below 0.1 $\mu\mathrm{m}^{-1}$ has the same value as between 0.1 and 1 $\mu\mathrm{m}^{-1}$. The result of this calculation is plotted Figure 7 (dashed lines).

Our results indicate that the magnetic field roughness measured with cold atoms is explained by wire corrugation. At low wave vectors ($k < 0.04$ $\mu\mathrm{m}^{-1}$), it seems that the magnetic field roughness is primarily due to edge corrugations. The good agreement between the observed field and the calculation shown in Figure 6 are the strongest evidence for this conclusion. For wave vectors larger than about 0.5 $\mu\mathrm{m}^{-1}$, the corrugations of the top surface are expected to contribute as strongly as those of the edges. This wave vector regime however, is not being stringently tested by our data. Since we have no data on surface corrugation at wave vectors below 0.1 $\mu\mathrm{m}^{-1}$, it is possible that the contribution from this effect is larger than shown in Figure 7. The atom data in the figure however, indicate that the surface effect is not the dominant one although given our signal-to-noise it could be of comparable magnitude.

Figure 2b also suggests that there might be a grain structure in the bulk of the wires: we have no additional information on possible current deviations due to this effect, but the success of the model based on wire edge roughness seems to indicate, that it is not important in our system.

7 Improved fabrication process for micro wires

The fabrication technology described above limits us to atom wire separations greater than several tens of microns if we want to obtain a reasonably smooth potential. In order to improve the quality of our wire, we turn to a different micro fabrication process similar to [22]: the wire structures are patterned onto an oxidized silicon wafer using electron beam lithography. We use gold evaporation and a standard lift-off technique to obtain 700 nm square cross-section wires as shown in Figure 2c.

We extract the wire border roughness from SEM images and the obtained power spectral density is plotted in Figure 8 (lower curve). In the spectral range studied, the roughness is greatly reduced compared to the first fabrication process. This was expected as the grain size of evaporated gold is much smaller than of electroplated gold. Unfortunately, we do not have a quantitative measurement of the power spectral density in the 0.01−0.1 $\mu\mathrm{m}^{-1}$ range. Indeed, as we had to reduce the field of view to increase the resolution, it becomes very difficult to overlap hundreds of SEM pictures without adding spectral components due to stitching errors. We still hope to also have reduced the wire edge roughness in this frequency domain, as it has been demonstrated recently by the Heidelberg group [23] using similar wires.

Gold evaporation produces surfaces of optical quality at visible light. Thus the roughness of the top surface of the evaporated wire is expected to be much smaller than that of an electroplated wire.

8 Conclusion

Our goal in this paper has been to give a more detailed description of the work which led to our conclusion that wire corrugations can account for the magnetic field roughness typically observed in atom chip experiments. We wish to emphasize in this paper that great care must be taken to characterize the roughness of a micro fabricated wire. The ratio of the rms roughness to the wavelength of the imperfections is below 10^{-4}. Thus a single microscope image cannot reveal the imperfections.

The model we use has already been suggested in reference [13]. Here we have given more details of the calculation as well as some physical arguments explaining the results. We have also extended the calculation to include the effects of corrugations of the top surface of the wire. The top surface corrugations become increasingly important as the distance to the wire decreases, while the effect due to wire edge roughness saturates.

Equations (22) and (27), giving the behavior of the magnetic field roughness due to edge and surface corrugation as a function of height, are important scaling laws that one should keep in mind in the design of atom chips. The requirements of small roughness and high transverse confinement impose a tradeoff in choosing a wire size for a given fabrication quality. We do not believe however that we are at the end of our progress in improving the fabrication technology. Thus sub-micron scale atom chips continue to hold out much promise for the manipulation of ultra cold atoms.

We thank David Hermann for help in calculations. This work was supported by the E.U. under grant (IST-2001-38863 and MRTN-CT-2003-505032), as well as by the DGA (03.34.033).

References

1. R. Folman et al., Adv. At. Mol. Opt. Phys. **48**, 263 (2002) and references therein
2. T. Calarco et al., Phys. Rev. A **61**, 022304 (2000)
3. C. Henkel, S. Pötting, M. Wilkens, Appl. Phys. B **69**, 379 (1999)
4. C. Henkel, M. Wilkens, Europhys. Lett. **47**, 414 (1999)
5. M.P.A. Jones et al., Phys. Rev. Lett. **91**, 80401 (2003)
6. D. Harber, J. McGuirk, J. Obrecht, E. Cornell, J. Low Temp. Phys. **133**, 229 (2003)
7. J. Fortàgh et al., Phys. Rev. A **66**, 41604 (2002)
8. A.E. Leanhardt et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 040401 (2002)
9. S. Kraft et al., J. Phys. B **35**, L469 (2002)
10. M.P.A. Jones et al., J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **37**, L15 (2004)
11. J. Estève et al., Phys. Rev. A **70**, 043629 (2004)
12. C. Vale et al., J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **37**, 2959 (2004)
13. D.-W. Wang, M. Lukin, E. Demler, Phys. Rev. Lett. **92**, 076802 (2004)
14. S. Groth et al., Appl. Phys. Lett. **85**, 2980 (2004)
15. G.B. Arfken, H.J. Weber, *Mathematical methods for physicists*, 4th edn. (Academic Press, San Diego, California, 1995), p. 519
16. Y. Lin, I. Teper, C. Chin, V. Vuletic, Phys. Rev. Lett. **92**, 050404 (2004)
17. W. Hänsel, P. Hommelhoff, T.W. Hänsch, J. Reichel, Nature **413**, 498 (2001)
18. D. Cassettari et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 5483 (2000)
19. H. Ott et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 230401 (2001)
20. The approximation of white spectral noise in edge or surface roughness is used to obtain simple scaling laws and to demonstrate the importance of the effect of wire corrugation as a whole. This approximation is of course to be used with caution, as the noise spectrum of micro wires strongly depends on material properties and fabrication technique.
21. P.D. Welch, IEEE Trans. Audio Electroac. **AU-15**, 70 (1967)
22. R. Folman et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 04749 (2000)
23. P. Krüger, J. Schmiedmayer, private communication

F.2 Realizing a stable magnetic double-well potential on an atom chip

Eur. Phys. J. D **35**, 141–146 (2005)
DOI: 10.1140/epjd/e2005-00190-9

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL D

Realizing a stable magnetic double-well potential on an atom chip

J. Estève[a], T. Schumm, J.-B. Trebbia, I. Bouchoule, A. Aspect, and C.I. Westbrook

Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, UMR 8501 du CNRS, 91403 Orsay Cedex, France

Received 14 March 2005
Published online 26 July 2005 – © EDP Sciences, Società Italiana di Fisica, Springer-Verlag 2005

Abstract. We discuss design considerations and the realization of a magnetic double-well potential on an atom chip using current-carrying wires. Stability requirements for the trapping potential lead to a typical size of order microns for such a device. We also present experiments using the device to manipulate cold, trapped atoms.

PACS. 39.20.+q Atom interferometry techniques – 03.75.Lm Tunneling, Josephson effect, Bose-Einstein condensates in periodic potentials, solitons, vortices and topological excitations

1 Introduction

Progress in the fabrication and use of atom chips has been rapid in the past few years [1]. Two notable recent results concern the coherent manipulation of atomic ensembles on the chip: reference [2] reported the coherent superposition of different internal degrees of freedom while in [3,4] a coherent beam splitter and interferometer using Bragg scattering was reported. In the same vein, the observation of a coherent ensemble in a chip-based double-well potential also represents a significant milestone and motivates many experiments [5,6]. The dynamics of a Bose-Einstein condensate in a double-well potential has attracted an enormous amount of theoretical attention [7], in part because one can thus realize the analog of a Josephson junction. Indeed, coherent oscillations of atoms in a laser induced double-well potential have recently been observed [8]. In addition, the observation of an oscillation in a double-well amounts to the realization of a coherent beam splitter which promises to be enormously useful in future atom interferometers based on atom chips [9–12].

In this paper, we discuss progress towards the realization of coherent oscillations on an atom chip following a different way than references [5,6]. We begin with some theoretical considerations concerning atoms in double-well potentials and show that a configuration with two elongated Bose-Einstein condensates that are coupled along their entire length allows one to achieve a variety of oscillation regimes. Then, we will discuss design considerations which take into account stability requirements for the trapping potentials in the transverse direction. Fluctuations in the external magnetic fields impose a typical size less than or on the order of microns on the double-well. Atom chips implemented with current-carrying wires are well suited to elongated geometry and the micron size scale. After these general considerations, we discuss a particular realization of a magnetic double-well potential which has been constructed in our laboratory. Our device has much in common with the proposal of reference [10], but we believe it represents an improvement over the first proposal in that it is quite robust against technical noise in the various currents. We will also show some initial observations with the device using trapped ^{87}Rb atoms.

2 Dynamics of two elongated Bose-Einstein condensates coupled by tunneling

The dynamics of a Bose-Einstein condensate in a double-well potential has been widely discussed in the literature [7]. In this section, we will review some of the basic results and apply them to the case of two elongated condensates coupled by tunneling along their entire length L.

We assume the trapping potential can be written as the sum of a weakly confining longitudinal potential $V_l(z)$ and a two dimensional (2D) double-well in the transverse direction $V_r(\mathbf{r})$. We characterize the two transverse potential wells by the harmonic oscillator frequency at their centers, ω_0. We also assume that the longitudinal motion of the atoms is decoupled from the transverse motion, so that we may restrict ourselves to a 2D problem. As discussed in [13], this assumption is not always valid, but it gives a useful insight into the relevant parameters of the problem and how they affect the design of the experiment.

Considering the motion of a single atom, the lowest two energy states of the 2D potential V_r are symmetric and antisymmetric states, $|\phi_s\rangle$ and $|\phi_a\rangle$. The energy splitting $\hbar\,\delta$ between them is related to the tunneling matrix element between the states describing a particle in the right and left wells, $|\phi_r\rangle$ and $|\phi_l\rangle$. When including atom-atom interactions, we assume that the longitudinal linear density n_1

[a] e-mail: jerome.esteve@iota.u-psud.fr

is low enough to satisfy $n_1\, a \ll 1$ where a is the s-wave scattering length. In this case, the interaction energy is small compared to the characteristic energy $\hbar\,\omega_0$ of the transverse motion, and in a mean field approximation the eigenstates of the Gross-Pitaevskii equation are identical to the single particle eigenstates. The tunneling rate δ is unchanged in this approximation. If in addition, $\delta \ll \omega_0$, the two mode approximation in which one considers only the states $|\phi_s\rangle$ and $|\phi_a\rangle$ (or $|\phi_l\rangle$ and $|\phi_r\rangle$) is valid.

We now define two characteristic energies E_J and E_C. The Josephson energy $E_J = N\,\hbar\,\delta/2$ characterizes the strength of the tunneling between the wells. The charging energy $E_C = 4\,\hbar\,\omega_0\, a/L$ is analogous to the charging energy in a superconducting Josephson junction and characterizes the strength of the inter atomic interaction in each well. The properties of the system depend drastically on the ratio E_C/E_J [7]. For the considered elongated geometry, this ratio is equal to $(4\,n_1\,a) \times (\omega_0/\delta) \times 1/N^2$. A ratio ω_0/δ of 10 is enough to insure the validity of the two mode approximation. We have also assumed $n_1\, a \ll 1$ and since $N \gg 1$ we indeed obtain $E_C/E_J \ll 1$. This means that the phase difference between the two wells is well defined and that a mean field description of the system is valid.

In the mean field approximation, the transverse part of the atomic wavefunction can be written $|\phi\rangle = c_l\,|\phi_l\rangle + c_r\,|\phi_r\rangle$ where c_l and c_r are complex numbers. The atom number difference $\Delta N = (|c_l|^2 - |c_r|^2)/2$ and the phase difference $\Delta\theta = \arg(c_l/c_r)$ evolve as the classically conjugate variables of a non rigid pendulum Hamiltonian [15]. The solutions of the motion for ΔN and $\Delta\theta$ have been analytically solved [15,16]. Depending on the ratio $E_J/(N^2\,E_C)$, we distinguish two regimes: the Rabi regime ($E_J \gg N^2\,E_C$) and the Josephson regime ($E_J \ll N^2\,E_C$). For a fixed geometry (L, δ and ω_0 fixed), the Rabi regime is delimited by $N \ll N_C$ where $N_C = \delta\,L/(4\,\omega_0\,a)$ while the Josephson regime corresponds to $N \gg N_C$. For a box like potential of length $L = 1$ mm and a ratio $\omega_0/\delta = 10$, this number corresponds to $N_C = 5000$ for ^{87}Rb atoms.

In the Rabi regime, an initial phase difference of $\pi/2$ leads to the maximal relative atom number difference $\Delta N/N = 1/2$. In the Josephson regime, the signal $\Delta N/N$ is limited to $\sqrt{N_C/N}$. One motivation to attain the Rabi regime is to maximize the relative population difference. If tunneling is to be used as a beam splitting device in an atom interferometer, the Rabi regime is clearly favorable as it maximizes the measured signal. It is also important to note that the neglect of any longitudinal variations in the atom number difference or the relative phase is only valid deep in the Rabi regime [13].

The specific geometry of two elongated Bose-Einstein condensates coupled by tunneling is of special interest since it allows one to tune the strength of the interaction compared to the tunneling energy by adjusting the longitudinal atomic density. This allows realization of experiments in both the Rabi regime and the Josephson regime. On the other hand a complication of the elongated geometry is the coupling between the transverse and longitudinal motions introduced by interactions between atoms. This coupling is responsible for dynamical longitudinal instabilities in presence of uniform Josephson oscillations [13]. However, reference [13] predicts that a few Josephson oscillations periods should be visible before instabilities become too strong. Furthermore, the study of these instabilities may prove quite interesting in their own right. Other manifestations of the coupling between the transverse and the longitudinal motion may be observed. In particular, Josephson vortices are expected for large linear density [14]. These nonlinear phenomena are analogous to observations on long Josephson junctions in superconductors [17].

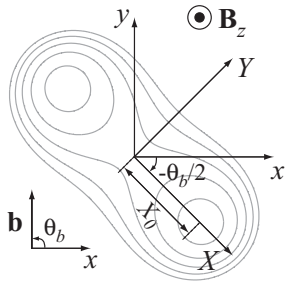

Fig. 1. Adding a small magnetic field **b** to the magnetic hexapole described in equation (1) will split the hexapole into two quadrupoles. The distance between the two minima increases with b and the direction along which the minima are split depends on the orientation of **b** as shown in the figure. We also have plotted lines of constant modulus of the total magnetic field (equipotential lines for the atoms).

3 Realization of a magnetic double-well potential

We now turn to some practical consideration concerning the realization of the transverse double-well potential $V_r(x, y)$ using a magnetic field. As first pointed out in [10], a hexapolar magnetic field is a good starting point to produce such a potential. The hexapolar field can be written

$$\begin{cases} B_x = A\,(y^2 - x^2) = -A\,r^2\,\cos 2\theta \\ B_y = \quad 2\,A\,x\,y \quad = A\,r^2\,\sin 2\theta\,. \end{cases} \tag{1}$$

where A is a constant characterizing the strength of the hexapole. In the following, we write this constant $A = \alpha\,\mu_0\,I/(4\,\pi\,d^3)$ where I is the current used to create the hexapole, d is the typical size of the current distribution creating the magnetic field (see Fig. 4) and α is a geometrical factor close to unity. Adding a uniform transverse magnetic field $\mathbf{b} = b(\cos\theta_b\,\mathbf{x} + \sin\theta_b\,\mathbf{y})$ will split the hexapole into two quadrupoles, thus realizing a double-well potential. The two minima are separated by a distance $2\,X_0$ where $X_0 = \sqrt{b/A}$ and are located on a line making an angle $\theta_b/2$ with the **x**-axis (see Fig. 1). Tilting the axis of the double-well allows one to null the gravitational energy shift which arises between the two wells if they are not at the same height. This shift has to be precisely cancelled to allow the observation of unperturbed

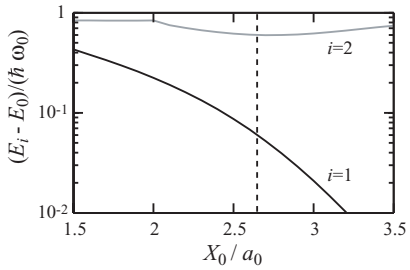

Fig. 2. Bohr frequency between the ground state and the first two excited states of the double-well potential versus the spacing between the wells. The dashed line corresponds to $X_0 = 2.65\,a_0$ for which the Bohr frequency $\omega_{2,0}$ is ten times bigger than the tunneling rate $\delta = \omega_{1,0}$.

phase oscillations in the double-well. For example, if the two wells are separated by a vertical distance of 1 μm the gravitational energy shift between the two wells leads to a phase difference of 13 rad ms^{-1} for ^{87}Rb.

In the rotated basis (O, X, Y) (see Fig. 1), the modulus of the total magnetic field is

$$\mathbf{B}^2 = 2\,A\,b\,Y^2 + 2\,A^2\,X^2\,Y^2 + A^2(X^2 - X_0^2)^2\,. \qquad (2)$$

To prevent Majorana losses around each minimum, a uniform longitudinal magnetic field B_z is added. Under the assumption $B_z \gg b$, the potential seen by an atom with a magnetic moment μ and a mass m is

$$V(X,Y) \simeq \frac{m\,\omega_0^2}{4}Y^2 + \frac{m\,\omega_0^2}{4\,X_0^2}X^2\,Y^2 + \frac{m\,\omega_0^2}{8\,X_0^2}(X^2 - X_0^2)^2 \quad (3)$$

with $\omega_0 = \sqrt{4\,\mu\,A\,b/(m\,B_z)}$.

Around each minimum ($X = \pm X_0, Y = 0$), the potential is locally harmonic with a frequency ω_0 and we denote $a_0 = \sqrt{\hbar/(m\,\omega_0)}$ the size of the ground state of this harmonic oscillator. On the X-axis, we recover the 1D double-well potential usually assumed in the literature. As seen in equation (3), the potential is entirely determined by the values of ω_0 and X_0. We have computed the energy differences between the ground state and the two first excited states for a single atom as a function of these two parameters (see Fig. 2). The Bohr frequency $\omega_{1,0}$ is equal to the tunneling rate δ. We calculate that a ratio $X_0/a_0 = 2.65$ ensures that $\omega_{2,0} = 10\,\delta$, so that the two mode approximation is valid. Further calculations are made for a double-well potential fulfilling the condition $X_0/a_0 = 2.65$.

3.1 Stability of the double-well

We now turn to the analysis of the stability of the system with respect to fluctuations of magnetic field. We will impose two physical constraints: first we require a stability of 10% on the tunneling rate δ and second we impose a gravitational energy shift between the two wells of less than 10% of the tunneling energy. Assuming a perfectly stable hexapole and that fluctuations in the external fields can be kept below 1 mG, we will obtain constraints on the possible size of the current distribution d and on the spacing between the two wells X_0.

The geometry of the magnetic double-well is determined by four experimental parameters: I the current creating the hexapole, d the size of the current distribution, B_z the longitudinal magnetic field and b the transverse field. To minimize the sensitivity of the system to magnetic field fluctuations, the current I creating the hexapole should be maximized. If we suppose the wires that create the hexapole are part of an atom chip, the maximal current allowed in such wires before damage scales as $I = I_0(d/d_0)^{3/2}$ [18]. Henceforth we suppose that the current I follows this scaling law and is not a free parameter anymore. Furthermore, the condition of the last section $X_0/a_0 = 2.65$ relates b and B_z. Thus we are left with only two free parameters which may be chosen as the size of the source d and the distance between the wells X_0. The experimental parameters b and B_z can be deduced afterwards.

We first calculate the variation $\Delta\delta$ of the tunneling rate due to longitudinal and transverse magnetic field fluctuations (respectively noted ΔB_z and Δb). From the numerical calculation of the tunneling rate shown in Figure 2 we obtain

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = -2.40\,\frac{\Delta X_0}{X_0} - 2.18\,\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \qquad (4)$$

$$= -4.27\,\frac{\Delta b}{b} + 1.09\,\frac{\Delta B_z}{B_z}\,. \qquad (5)$$

If we require a relative stability of 10% on the tunneling rate, the required relative stability for the magnetic fields b and B_z is approximately the same and is easily achievable with a standard experimental set-up. However fluctuations due to the electromagnetic environment may be problematic. Within the assumption $B_z \gg b$, only the first term in equation (5) contributes. Thus we have

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} \simeq -4.27\,\frac{4\,\pi d^3}{\alpha\,\mu_0\,I\,X_0^2}\Delta b\,. \qquad (6)$$

Using the scaling law stated above for the current creating the hexapole, we finally obtain the following expression for the tunneling rate fluctuations due to variations of the transverse magnetic field

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} \simeq -4.27\left(\frac{4\,\pi\,d_0^{3/2}}{\alpha\,\mu_0\,I_0}\right)\frac{d^{3/2}}{X_0^2}\,\Delta b\,. \qquad (7)$$

We require a relative stability of 10% for the tunneling rate given an amplitude $\Delta b = 1$ mG for the magnetic field fluctuations. This limits the possible values for X_0 and d to the domain above the continuous line plotted in Figure 3. For the numerical calculation, we have used a geometrical factor $\alpha = 4/\sqrt{3}$ (see Sect. 4) and the following values for I_0 and d_0. A maximal current of $I_0 = 20$ mA is reasonable for gold wires having a square section of 500 nm $\times$ 500 nm which are deposited on an oxidized silicon wafer [18].

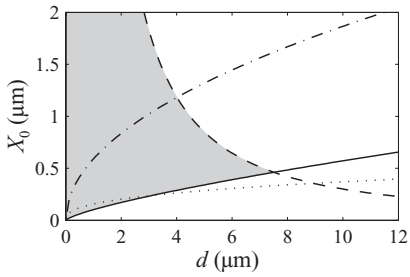

Fig. 3. Stability diagram for the size d, and the well separation X_0. The gray area represents pairs of d and X_0 for which a 1 mG fluctuation of an external magnetic field does not significantly disturb the double-well. The solid line delimits the zone where the tunneling rate fluctuates less than 10%, while the dashed line shows the area below which the fluctuations of the gravitational energy are less than 10% of the tunneling rate. In addition we show two additional constraints because of B_z: the area above the dotted line assures a B_z large enough to avoid Majorana losses and the dash-dotted line corresponds to $B_z < 100$ G. The device we describe in Section 4 operates at $d = 5$ μm.

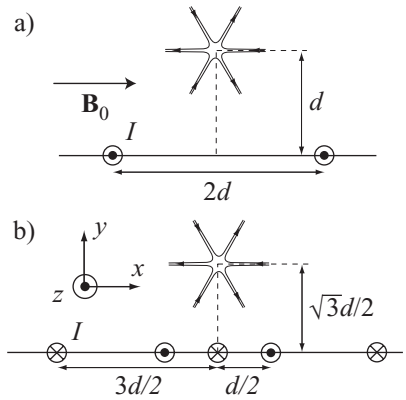

Fig. 4. Two configurations that produce a hexapolar magnetic field. Each wire carries the same current I. In (a) the hexapole is obtained with two wires and a uniform magnetic field $B_0 = \mu_0 I/(2\pi d)$. In (b) it is produced by 5 wires and no external field. In the first configuration the stability of B_0 relative to I is critical. The second configuration avoids this difficulty provided that the wires are connected in series.

Such wires can be used in a configuration where the typical distance between wires is $d_0 = 5$ μm.

We now turn to the calculation of the fluctuations of the gravitational energy shift between the two wells. Transverse magnetic field fluctuations lead to fluctuations $\Delta h = \Delta b/(A\,X_0)$ of the height difference between the two wells. The associated fluctuations of the gravitational energy difference have to be small compared to the tunneling energy so that the phase difference between the wells is not significantly modified during one oscillation in the double-well. The ratio between these two energies is

$$\frac{m\,g\,\Delta h}{\hbar\,\delta} \simeq 2.37 \left(\frac{4\,\pi\,m^2\,g\,d_0^{3/2}}{\alpha\,\mu_0\,I_0\,\hbar^2}\right) X_0\,d^{3/2}\,\Delta b\,. \qquad (8)$$

We have used the same scaling law as before for the current in the hexapole. The possible values for X_0 and d that insure this ratio being smaller than 10% are located below the dashed line in Figure 3. We have assumed the same numerical parameters as for the first condition. The intersection of the two possible domains we have calculated for X_0 and d corresponds to the gray area in Figure 3. The main result is that the characteristic size of the source d has to be smaller than 7.5 μm in order to achieve a reasonable stability of the double-well. This motivates the use of atom chips to create a magnetic double-well where external magnetic fluctuations of 1 mG still allows the possibility of coherently splitting a Bose-Einstein condensate using a magnetic double-well potential.

We have also plotted in Figure 3 the limit (dotted line) above which the condition $\mu\,B_z > 10\,\hbar\,\omega_0$ is fulfilled. This insures the Majorana loss to be negligible in the double-well. Furthermore, above this line the condition $B_z \gg b$ which is assumed in all our calculation is also fulfilled. We see this condition is not very restrictive and does not significantly reduce the domain of possible parameters. However we note that this condition becomes the limiting factor as one decreases the size d of the current distribution. The last plotted dash-dotted line delimits the more practical usable parameters. Above this line the longitudinal field B_z is greater than 100 G. Such high values of the longitudinal field should be avoided since the longitudinal field may have a small transverse component that would disturb the double-well.

4 Experimental realization of a magnetic double-well on an atom chip

As first proposed in [10], the simplest scheme to obtain a hexapolar magnetic field on an atom chip uses two wires and an external uniform field (see Fig. 4a). Denoting $2\,d$ the distance between the two wires, the value of the external field has to be $B_0 = \mu_0\,I/(2\,\pi\,d)$. One then obtains a hexapole located at a distance d from the surface of the chip. This configuration leads to a geometrical factor $\alpha = 1$. In order to safely lie in the stability domain in Figure 3, one can choose $d = 5$ μm. This leads to a current $I = 20$ mA and to a uniform magnetic field $B_0 = 8$ G. The required relative stability $\Delta B_0/B_0$ for this field is about 10^{-4} since fluctuations of only 1 mG are tolerable[1]. Relative temporal stability of this magnitude can be achieved with the appropriate experimental precaution, but it is quite difficult to produce a spatially homogeneous field on the overall length of the condensate (1 mm) with such accuracy.

To circumvent this difficulty we propose to realize the hexapolar field using only wires on the chip. Assuming all the wires are fabricated on the same layer, at least five wires must be used to create a hexapole. As seen in Figure 4, the distance between the wires can be chosen so

[1] More precisely the ratio I/B_0 has to be kept constant with such accuracy. Here we assume that the current I in the wires does not fluctuate.

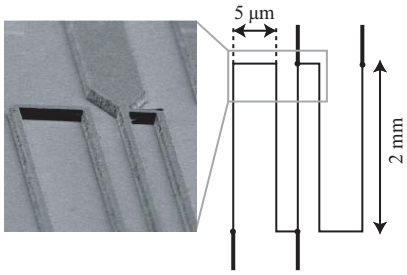

Fig. 5. Schematic and SEM picture of our five wire device. The design allows one to send the same current with a single power supply in all the wires to create a magnetic hexapole. The connections on the central wires allow us to imbalance the currents between the central wire, the two left wires and the two right wires.

that a hexapole is obtained with the same current running in all the wires. This allows rejection of the noise from the power supply delivering the current I. For this geometry, we calculate $\alpha = 4/\sqrt{3}$ which is the value we used to plot the curves in Figure 3.

We have implemented this five wire scheme on an atom chip. The wires are patterned on an oxidized silicon wafer using electron beam lithography followed by liftoff of a 700 nm thick evaporated gold layer. Each wire has a 700 nm × 700 nm cross-section and is 2 mm long. Figure 5 shows the schematic diagram of the chip and a SEM image of the wire ends. This design allows us to send the same current in the five wires using a single power supply. The extra connections are used to add a current in the central wire in order to split the hexapole into two quadrupoles without any external magnetic field. We can also change the current in the left (right) pair of wires in order to release the atoms from the left (right) trap when the separation between the wells is large enough. The transverse wires connecting the five wires at their ends insure the longitudinal confinement of the atoms in a box like potential.

The distance d characterizing the wire spacing is 5 μm. Using the exact expression of the magnetic field created by the five wires, we have carried out numerical calculation of the spectrum of the double-well. Using a transverse field $b = 60$ mG and a longitudinal field $B_z = 550$ mG, we obtain a spacing between the wells of $2\,X_0 = 1.0$ μm and a tunneling rate of $\delta = 2\pi \times 290$ Hz. The parameters have been chosen to fulfill the condition $\omega_{0,2} = 10\,\delta$ and to lie in the center of the stability domain. In our experiment, the chip is oriented so that the gravity points in the direction $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ in Figure 4. We thus have to tilt the transverse field $\mathbf{b}$ using an angle $\theta_b = 0.74 \times \pi$ to compensate for the gravitational energy shift. Finally, we have checked numerically that the two conditions on the stability of the tunneling rate and of the gravitational energy shift are indeed fulfilled.

4.1 Splitting of a thermal cloud

In order to load the double-well with a sample of cold ^{87}Rb atoms, the five wire chip is glued onto an atom chip like that used in a previous experiment to produce a Bose-Einstein condensate [19]. The five wire chip surface is located approximately 150 μm above the surface of the other chip. This two-chip design allows one to combine wires having very different sizes (typically 50 μm × 10 μm for the first chip and 700 nm × 700 nm for the five wire chip) and therefore different current-carrying capacities in a single device. Large currents are needed to efficiently capture the atoms from a MOT in the magnetic trap.

Using evaporative cooling, we prepare a sample of cold atoms in a Ioffe trap created by a Z-shaped wire on the first chip and a constant external field. Transfer of the atoms to the double-well potential is achieved by ramping down the current in the Z-shaped wire and the external field while we ramp up the currents in the five wires. The final value of the current in the central wire is smaller (10.4 mA) than for the one in the other wires (17.5 mA). We use the fact that an imbalanced current in the central wire is qualitatively equivalent to adding an external transverse field to the hexapole. Ignoring the field due to the lower chip, these current values lead to two trapping minima located on the y-axis. The position of the upper minimum is superimposed on the position of the Ioffe trap due to the lower chip. We typically transfer of order 10^4 atoms having a temperature below 1 μK.

To realize a splitting experiment, we then increase the current in the central wire to 17.5 mA and decrease the current in the other wires to 15 mA. The duration of the ramp is 20 ms. If the external transverse field is zero, the two traps located on the y-axis coalesce when all the currents are equal and then split along the x-axis when the current in the central wire is above the one in the other wires. Then, by lowering the current in the left (right) wires to zero, we eliminate the atoms in the left (right) trap and measure the number of atoms remaining in the other trap using absorption imaging. If the external magnetic field has a small component along the y-axis, the coalescence point is avoided and the atoms initially in the upper trap preferentially go in the right (left) trap if b_y is positive (negative). The number of atoms in the left or in the right well as a function of b_y is plotted in Figure 6. As expected, we observe a 50% split between the two wells if the two traps coalesce using $b_y = 0$. For an amplitude of the magnetic field b_y larger than 0.6 G, the transferred fraction of atoms is almost zero. For this specific value of the transverse magnetic field, the atomic temperature at closest approach between the wells is estimated to be 420 nK. On the other hand, for this transverse field and for the longitudinal field $B_z = 1$ G used in the experiment, the barrier height between wells at closest approach is 12 μK. Thus, the value of the atomic temperature seems too small to explain our observations. The estimated atomic temperature is calculated knowing the initial temperature (220 nK) and assuming adiabatic compression. We have reason to be confident in the adiabaticity because the temperature is observed to be constant when the splitting ramp is run backward and forward at $b_y = 0.6$ G. More precisely, numerical calculations of the classical trajectories during the splitting indicate that the

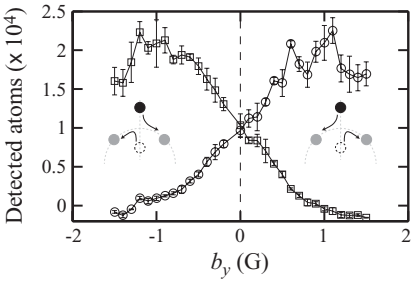

Fig. 6. Final number of atoms in the right well (□) and in the left well (○) after a splitting experiment. The schematics depict the trajectories of the two traps during the sequence. Initially all the atoms are in the upper trap. Depending on the sign of the y component of b, the atoms preferentially end in the left or in the right well. The minimal distance between the traps depends on the modulus of b_y. This distance is zero if $b_y = 0$, leading to a splitting with half of the atoms in each well.

typical width of the curves shown in Figure 6 is approximately three times too large. For the moment, we do not have a satisfactory explanation for this broadening.

4.2 Longitudinal potential roughness

For our present set-up, the actual longitudinal potential differs from the ideal box-like potential because of distortions in the current distribution inside the wires [19,20]. Preliminary measurements indicate a roughness with a rms amplitude of a few mG and a correlation length of a few μm. The condensate will thus be fragmented. Each fragment will be trapped in a potential with a typical longitudinal frequency of about 400 Hz. Given the same number of atoms and the same total length for the whole condensate, the longitudinal density in each fragment will be approximately ten times higher than for the ideal box-like potential. Thus the Rabi regime may be out of reach with our present set-up. More precise measurements of the exact longitudinal potential shape are in progress to determine the maximum ratio $E_J/(N^2\,E_C)$ we can actually achieve. Improved wire fabrication techniques may allow us to obtain a flatter longitudinal potential and to increase the $E_J/(N^2\,E_C)$ ratio.

5 Conclusion

We have shown that atom chip based set-ups are well suited to produce a stable magnetic double-well potential. Our main argument is that atom chips allow one to design a current distribution having a characteristic size small enough so that oscillations of a condensate between the wells can be reproducible despite a noisy electromagnetic field environment.

We have fabricated a device using five wires spaced by a distance of a few microns. The preliminary data in Figure 6 shows that we have good control over our transverse magnetic potential, although we cannot entirely validate our design choices before having observed coherent oscillations. To do this it remains to reproducibly place a condensate in the trap so that the two mode description applies and can be tested.

This work was supported by the E.U. under grants IST-2001-38863 INTAS (Contract 211-855) and MRTN-CT-2003-505032 and by the D.G.A. (03.34.033).

References

1. R. Folman, P. Krüger, J. Schmiedmayer, J. Denschlag, C. Henkel, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **48**, 263 (2002), and references therein
2. P. Treutlein, P. Hommelhoff, T. Steinmetz, T.W. Hänsch, J. Reichel, Phys. Rev. Lett. **92**, 203005 (2004)
3. Y.-J. Wang, D.Z. Anderson, V.M. Bright, E.A. Cornell, Q. Diot, T. Kishimoto, M. Prentiss, R.A. Saravanan, S.R. Segal, S. Wu, Phys. Rev. Lett. **94**, 090405 (2005)
4. A. Guenther, S. Kraft, M. Kemmler, D. Koelle, R. Kleiner, C. Zimmermann, J. Fortagh, e-print `arXiv:cond-mat/0504210` (2005)
5. P. Hommelhoff, W. Hänsel, T. Steinmetz, T.W. Hänsch, J. Reichel, New J. Phys **7**, 3 (2005)
6. T. Schumm, S. Hofferberth, L.M. Andersson, S. Wildermuth, S. Groth, I. Bar-Joseph, J. Schmiedmayer, P. Krüger, e-print `arXiv:quant-ph/0507047` (2005)
7. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999), and references therein; A.J. Legget, Rev. Mod. Phys. **73**, 307 (2001), and references therein
8. M. Albiez, R. Gati, J. Foelling, S. Hunsmann, M. Cristiani, M.K. Oberthaler, Phys. Rev. Lett. **95**, 010402 (2005)
9. D. Cassettari, B. Hessmo, R. Folmann, T. Maier, J. Schmiedmayer, Phys. Rev. Lett. **85**, 5483 (2000)
10. E.A. Hinds, C.J. Vale, M.G. Boshier, Phys. Rev. Lett. **86**, 1462 (2001)
11. W. Hänsel, J. Reichel, P. Hommelhoff, T.W. Hänsch, Phys. Rev. A **64**, 063607 (2001)
12. E. Andersson, T. Calarco, R. Folman, M. Andersson, B. Hessmo, J. Schmiedmayer, Phys. Rev. Lett. **88**, 100401 (2002)
13. I. Bouchoule, Eur. Phys. J. D **35**, 147 (2005)
14. V.M. Kaurov, A.B. Kuklov, Phys. Rev. A **71**, 011601(R) (2005)
15. A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi, S.R. Shenoy, Phys. Rev. Lett. **79**, 4950 (1997)
16. S. Raghavan, A. Smerzi, V.M. Kenkre, Phys. Rev. A **59**, 620 (1999)
17. K.K. Likharev, *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits* (Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986)
18. S. Groth, P. Krüger, S. Wildermuth, R. Folman, T. Fernholz, J. Schmiedmayer, D. Mahalu, I. Bar-Joseph, Appl. Phys. Lett. **85**, 2980 (2004)
19. J. Estève, C. Aussibal, T. Schumm, C. Figl, D. Mailly, I. Bouchoule, C.I. Westbrook, A. Aspect, Phys. Rev. A **70**, 043629 (2004)
20. T. Schumm, J. Estève, C. Figl, J.-B. Trebbia, C. Aussibal, H. Nguyen, D. Mailly, I. Bouchoule, C.I. Westbrook, A. Aspect, Eur. Phys. J. D **32**, 171 (2005)

F.3 Observations of density fluctuations in an elongated Bose gas : ideal gas and quasi-condensate

Observations of Density Fluctuations in an Elongated Bose Gas: Ideal Gas and Quasicondensate Regimes

J. Esteve,[1,2] J.-B. Trebbia,[1] T. Schumm,[1] A. Aspect,[1] C. I. Westbrook,[1] and I. Bouchoule[1]

[1]*Laboratoire Charles Fabry, CNRS et Université Paris Sud 11, 91403 Orsay Cedex, France*

[2]*Laboratoire de Photonique et de Nanostructures, CNRS, 91460 Marcoussis, France*

(Received 11 October 2005; published 6 April 2006)

We report *in situ* measurements of density fluctuations in a quasi-one-dimensional ^{87}Rb Bose gas at thermal equilibrium in an elongated harmonic trap. We observe an excess of fluctuations compared to the shot-noise level expected for uncorrelated atoms. At low atomic density, the measured excess is in good agreement with the expected "bunching" for an ideal Bose gas. At high density, the measured fluctuations are strongly reduced compared to the ideal gas case. We attribute this reduction to repulsive interatomic interactions. The data are compared with a calculation for an interacting Bose gas in the quasicondensate regime.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.130403 PACS numbers: 03.75.Hh, 05.30.Jp

In a classical gas, the mean square fluctuation of the number of particles within a small volume is equal to the number of particles (we shall call this fluctuation "shot noise"). On the other hand, because of quantum effects, the fluctuations in a noncondensed Bose gas are larger than the shot-noise contribution [1]. For photons, the well-known Hanbury Brown–Twiss or "photon bunching" effect is an illustration of this phenomenon [2]. Analogous studies have been undertaken to measure correlations between bosonic atoms released from a trap after a time of flight [3–6]. However, bunching in the density distribution of trapped cold atoms at thermal equilibrium has not been yet directly observed.

Density fluctuations of a cold atomic sample can be measured by absorption imaging as proposed in [7,8] and recently shown in [5,9]. When using this method, one necessarily integrates the density distribution over one direction, and this integration can mask the bunching effect whose correlation length is of the order of the de Broglie wavelength. A one-dimensional (1D) gas, i.e., a gas in an anisotropic confining potential with a temperature lower than or of order of the zero point energy in two directions, allows one to avoid this integration, and is thus a very favorable experimental geometry.

Additionally, atoms in 1D do not Bose condense [10]. One can therefore achieve a high degree of quantum degeneracy without condensation, which enhances the bunching effect for an ideal gas. When one considers the effect of interactions between atoms, two additional regimes can appear: the Tonks-Girardeau regime and the quasicondensate regime [11]. Starting from an ideal gas, as one increases density at fixed temperature T, the 1D interacting Bose gas passes smoothly to the quasicondensate regime. The linear density scale for this crossover is given by $n_T = [m(k_B T)^2/\hbar^2 g]^{1/3}$, where g is the effective 1D coupling constant and m the atomic mass [12,13]. Density fluctuations are suppressed by a factor $(n/n_T)^{3/2}$ compared to the ideal gas [see Eq. (4) below], although phase fluctuations remain [14–18]. We emphasize that this crossover occurs in the dense, weakly interacting limit which is the opposite of the Tonks-Girardeau regime.

To measure the density fluctuations of a trapped Bose gas as a function of its density, we acquire a large number of images of different trapped samples under identical conditions. We have access to both the ideal Bose gas limit, in which we observe the expected excess fluctuations compared to shot noise, as well as the quasicondensate regime in which repulsive interactions suppress the density fluctuations.

Our measurements are conducted in a highly anisotropic magnetic trap created by an atom chip. We use three current carrying wires forming an H pattern [19] and an external uniform magnetic field to magnetically trap the ^{87}Rb atoms in the $|F = 2, m_F = 2\rangle$ state (see Fig. 1). Adjusting the currents in the wires and the external magnetic field, we can tune the longitudinal frequency between 7 and 20 Hz while keeping the transverse frequency $\omega_\perp/(2\pi)$ at a value close to 2.85 kHz. Using evaporative cooling, we obtain a cold sample at thermal equilibrium in the trap. Temperatures as low as $1.4\hbar\omega_\perp/k_B$ are accessible

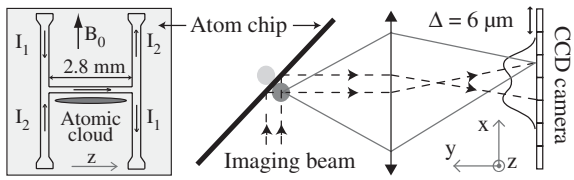

FIG. 1. Schematic of the experimental setup. Left: drawing of the wires constituting the atom chip. We keep $I_1 + I_2 = 3$ A and adjust $I_1 - I_2$ between 0.3 and 1 A to vary the confinement along z. The uniform field B_0 is approximately 40 G, we also add a small field ($\lesssim 1$ G) along z. Right: optical imaging system. We image the cloud and its reflection on the atom chip onto a CCD camera. In the radial direction, the unresolved cloud images cover approximately five pixels whose size in the object plane is $\Delta = 6$ μm.

 © 2006 The American Physical Society

with an atom number of 5×10^3. The atomic cloud has a typical length of 100 μm along the z axis and a transverse radius of 300 nm.

As shown in Fig. 1, *in situ* absorption images are taken using a probe beam perpendicular to the z axis and reflecting on the chip surface at 45°. The light, resonant with the closed transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ of the D2 line is switched on for 150 μs with an intensity of one tenth of the saturation intensity. Two images are recorded with a CCD camera whose pixel size $\Delta \times \Delta$ in the object plane is 6.0×6.0 μm^2. The first image is taken while the trapping field is still on. The second image is used for normalization and is taken in the absence of atoms 200 ms later. During the first image, the cloud expands radially to about 5 μm because of the heating due to photon scattering by the atoms. The size of the cloud's image is even larger due to resolution of the optical system (about 10 μm) and because the cloud and its image in the mirror at the atom chip surface are not resolved. Five pixels along the transverse direction x are needed to include 95% of the signal.

We denote by $N_i^{\rm ph}(x, z)$ the number of photons detected in the pixel at position (x, z) for the image i ($i = 1, 2$). We need to convert this measurement into an atom number $N(z)$ detected between z and $z + \Delta$. Normally, one simply computes an absorption per pixel $\ln(N_2^{\rm ph}/N_1^{\rm ph})$ and sums over x:

$$N(z) = \sum_x \ln[N_2^{\rm ph}(x, z)/N_1^{\rm ph}(x, z)]\Delta^2/\sigma_e, \qquad (1)$$

where σ_e is the absorption cross section of a single atom. When the sample is optically thick and the atomic density varies on a scale smaller than the optical resolution or the pixel size, Eq. (1) does not hold since the logarithm cannot be linearized. In that case, Eq. (1) underestimates the atom number and the error increases with optical thickness. Furthermore, in our geometry, optical rays cross the atomic cloud twice since the cloud image and its reflection in the atom chip surface are not resolved.

We partially correct for these effects by using in Eq. (1) an effective cross section σ_e determined as follows. We compare the measured atom number using the *in situ* procedure described above with the measured atom number after allowing the cloud to expand and to leave the vicinity of the chip surface. In this case, Eq. (1) is valid and the atomic cross section $\sigma_0 = 3\lambda^2/(2\pi)$ well known. We then obtain for the effective cross section $\sigma_e = 0.8\sigma_0$. Although this effective cross section depends on the atomic density, we have checked that for the total atom number between 2×10^3 and 9×10^3 the measured value varies by only 10%. Taking into account the uncertainty on the value of σ_0, we estimate the total error on the measured atom number $N(z)$ to be less than 20%.

To measure the variance of the atom number in a pixel, we acquire a large number of images (typically 300) taken in the same experimental conditions. To remove technical noise from our measurement, the following procedure is used to extract the variance. For each image, we form the quantity $\delta N(z)^2 = [N(z) - \bar{N}(z)]^2$, where the mean value $\bar{N}(z)$ is normalized to contain the same total atom number as the current image. We thus correct for shot to shot total atom number fluctuations. The average is performed only over $p = 21$ images which bracket the current image so that long term drifts of the experiment do not contribute to the variance. We have checked that the results are independent of p, varying p between 5 and 21 [20]. A large contribution to $\delta N(z)^2$, irrelevant to our study, is the photon shot noise of the absorption measurement. To precisely correct for this noise, we subtract the quantity $\sum_x [1/N_1^{\rm ph}(x, z) + 1/N_2^{\rm ph}(x, z)](\Delta^2\sigma_e)^2$ from $\delta N(z)^2$ for each image. We typically detect 10^4 photons per pixel corresponding to a contribution to δN^2 of about 50. To convert the camera signal into a detected photon number, we use a gain for each pixel that we determine by measuring the photon shot noise of images without atoms as explained in [21]. The corrected $\delta N(z)^2$ obtained for all images are then binned according to the value of $\bar{N}(z)$, rather than of z itself. This gives the variance of the atom number $\langle \delta N(z)^2 \rangle$ as a function of the mean atom number per pixel. Since more pixels have a small atom number, the statistical uncertainty on the estimate of the variance decreases with the average atom number (see Figs. 2 and 3).

Data shown in Fig. 2 correspond to atom clouds of sufficiently low density so that effect of interatomic interactions is expected to be small. The three data sets correspond to three different temperatures, the trapping frequencies are 2.85 kHz and 7.5 Hz. We deduce the temperature and the chemical potential of the sample by fitting the mean longitudinal profile $\bar{N}(z)$ of the cloud to the profile of an ideal Bose gas (see inset of Fig. 2). For the "hot" sample where bunching gives negligible contribution to δN^2 [see Eq. (3)], we observe atomic shot-noise fluctuations; i.e., the atom number variance increases linearly with the mean atom number. The fact that we recover the linear behavior expected for shot noise increases our confidence in the procedure described in the previous two paragraphs. The slope κ is only 0.17 and differs from the expected value of 1. We attribute this reduction to the fact that our pixel size is not much bigger than the resolution of our optical imaging system, thus one atom is spread out on more than one pixel. When the pixel size is small enough compared to the optical resolution and in the case of weak optical thickness, the expected slope is simply approximated by $\kappa \simeq \Delta/(2\sqrt{\pi}\delta)$, where δ is the rms width of the optical response which we suppose Gaussian. From the measured slope, we deduce $\delta = 10$ μm in good agreement with the smallest cloud image we have observed (8 μm).

For "cold" samples, we see an excess in the atom number variance compared to shot noise. We attribute this excess to bunching due to the bosonic nature of the atoms. In a local density approximation, the fluctuations of a radially trapped Bose gas with longitudinal density $n(z)$ are [22]

$$\langle n(z)n(z')\rangle - \langle n(z)\rangle^2 = \langle n(z)\rangle\delta(z-z') + \frac{1}{\lambda_{\rm dB}^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e^{\beta\mu(i+j)}}{\sqrt{ij}}\frac{e^{-\pi(z-z')^2(1/i+1/j)/\lambda_{\rm dB}^2}}{[1-e^{-\beta\hbar\omega_\perp(i+j)}]^2}, \quad (2)$$

where μ is the local chemical potential, $\beta = 1/(k_{\rm B}T)$, $\lambda_{\rm dB} = \sqrt{2\pi\hbar^2/(mk_{\rm B}T)}$ is the de Broglie thermal wavelength, and $\langle\cdot\rangle$ denotes an ensemble average. The first term on the right-hand side corresponds to shot noise, and the second term to bunching. For a nondegenerate gas ($n\lambda_{\rm dB} \ll 1$), one can keep only the term $i = j = 1$. The bunching term reduces to $\langle n(z)\rangle^2 \exp[-2\pi(z-z')^2/\lambda_{\rm dB}^2]\tanh^2(\beta\hbar\omega_\perp/2)$ and one recovers the well-known Gaussian decay of the correlations. The reduction factor $\tanh^2(\beta\hbar\omega_\perp/2)$ is due to the integration over the transverse states. In our experiment, the pixel size is always much bigger than the correlation length. In which case, integrating over the pixel size Δ, we have

$$\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 = \langle N\rangle + \langle N\rangle^2\frac{\lambda_{\rm dB}}{\sqrt{2}\Delta}\tanh^2(\beta\hbar\omega_\perp/2). \quad (3)$$

The coefficient of $\langle N\rangle^2$ is the inverse of the number of elementary phase space cells occupied by the N atoms.

To compare Eq. (3) to our data we must correct for the optical resolution as was done for the shot noise. Furthermore, atoms diffuse about 5 μm during the imaging pulse because of photon scattering. This diffusion modifies the correlation function, but since the diffusion distance is smaller than the resolution, 10 μm, and since its effect is averaged over the duration of the pulse, its contribution is negligible. We thus simply multiply the computed atom number variance by the factor κ.

Figure 2 shows that the value calculated from Eq. (3) (dotted line) underestimates the observed atom number variance. In fact, for the coldest sample, we estimate $n(0)\lambda_{\rm dB} \simeq 10$, and thus the gas is highly degenerate. In this situation replacing the Bose-Einstein occupation numbers by their Maxwell-Boltzmann approximations is not valid, meaning that many terms of the sum in Eq. (2) have to be taken into account. The prediction from the entire sum is shown as a dot-dashed line and is in better agreement with the data.

In the experiment we are also able to access the quasicondensate regime in which interparticle interactions are not negligible, and the ideal gas theory discussed above fails. Figure 3 shows the results of two experimental runs using denser clouds. For these data, the trapping frequencies are 2.85 kHz and 10.5 Hz. The insets show the mean longitudinal cloud profiles and a fit to the wings of the profiles to an ideal Bose gas profile. One can see from these insets that, unlike the conditions of Fig. 2, an ideal gas model does not describe the density profile in the center. We employ the same procedure to determine the variance versus the mean atom number. As in Fig. 2 we plot our experimental results along with the ideal Bose gas prediction based on the temperature determined from the fit to the wings in the insets. For small mean value $\bar{N}(z)$, the measured fluctuations follow the ideal gas curve (dot-dashed line) but they are dramatically reduced when the atom number is large.

The theory for a weakly interacting uniform 1D Bose gas permits an analytical prediction for the density fluctuations in the limit $n \gg n_T$. In this limit, the gas enters the Gross-Pitaevskii regime and density fluctuations are given in the Bogoliubov approximation by [12,13]

$$\langle\delta n(z)\delta n(z')\rangle = \frac{\langle n\rangle}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk e^{ik(z-z')}\left(\frac{k^2}{k^2+4\xi^{-2}}\right)^{1/2}(1+2n_k), \quad (4)$$

where n_k is the Bose thermal occupation factor of the mode k with energy $\epsilon_k = \sqrt{k^2(k^2+4\xi^{-2})}\times\hbar^2/(2m)$ and $\xi = \hbar/\sqrt{mng}$ is the healing length. For 200 atoms per pixel, the healing length is about 0.3 μm in our experiment [23]. The term proportional to n_k describes the contribution of thermal fluctuations while the other is due to vacuum fluctuations. Since the pixel size is much bigger than the healing length, we probe only long wavelength fluctuations for which thermal fluctuations dominate at the temperatures we consider. Using $k \ll 1/\xi$ and $n_k \simeq k_{\rm B}T/\epsilon_k$, we obtain for the atom number variance in a pixel

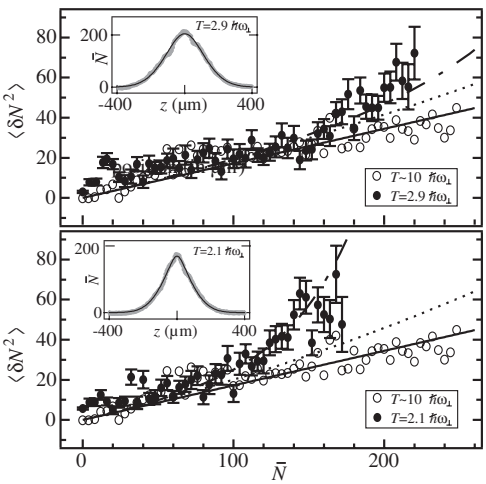

FIG. 2. Atom number variance as a function of the mean atom number per pixel. Open circles correspond to a hot cloud ($k_BT \simeq 10\hbar\omega_\perp$, $\omega_\perp = 2\pi\times 2.85$ kHz) for which fluctuations are given by the shot noise (black line). The solid circles correspond to cold clouds. Error bars show the standard deviation of the mean of $\langle\delta N^2\rangle$. The fluctuations in excess of shot noise are due to bosonic bunching. The dot-dashed line is the prediction for an ideal Bose gas while the dotted line uses the Maxwell-Boltzmann approximation [see Eq. (3)]. The insets show the longitudinal profile of the two cold clouds from which we deduce the temperature and the chemical potential used for the calculations.

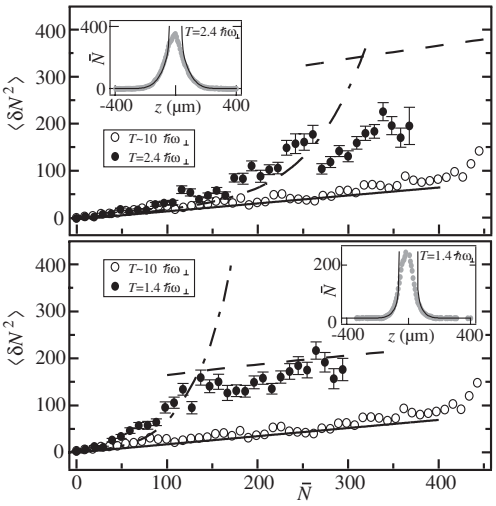

FIG. 3. We plot the same quantities as in Fig. 2. Dot-dashed lines are the predictions for an ideal Bose gas [deduced from Eq. (2)], whereas the dashed lines show the results of Eq. (6). The temperature of the sample is deduced by fitting the wings of the longitudinal profile to an ideal Bose gas profile as shown in the insets. The solid lines gives the atomic shot-noise level.

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \Delta \frac{k_B T}{g}. \tag{5}$$

This formula can also be deduced from thermodynamic considerations: for a gas at thermal equilibrium, the atom number variance in a given volume is given by

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = k_B T (\partial N / \partial \mu)_T. \tag{6}$$

For a quasicondensate with chemical potential gn, Eqs. (5) and (6) coincide.

The calculation leading to Eq. (5) holds in a true 1D situation in which case the effective coupling constant is $g = 2\hbar\omega_\perp a$, where a is the scattering length of the atomic interaction. The validity condition for the 1D calculation is $n \ll 1/a$ (equivalently $\mu \ll \hbar\omega_\perp$). In our experiment however, the value of na is as high as 0.7 and thus one cannot neglect dependence of the transverse profile on the local density. On the other hand, the thermodynamic approach is valid and, supposing $\mu(N)$ is known, Eq. (6) permits a very simple calculation. We use the approximate formula $\mu(N) = \hbar\omega_\perp \sqrt{1 + 4Na/\Delta}$ valid in the quasicondensate regime [24]. This formula connects the purely 1D regime with that in which the transverse profile is Thomas-Fermi. The results of this analysis, confirmed by a full 3D Bogoliubov calculation, are plotted in Fig. 3 (dashed line). Equation (5) predicts a constant value for the atom number variance and underestimate it by 50% for the maximal density reached in our experiment ($\bar{N} = 400$).

We compare this calculation in the quasicondensate regime with our data. From Fig. 3 we see that the calculation agrees well with the measurements for $k_B T = 1.4\hbar\omega_\perp$ but less so for $k_B T = 2.4\hbar\omega_\perp$. The one-dimensional theory predicts that the quasicondensate approximation is valid in the limit $n \gg n_T$, which corresponds to $\langle N \rangle \gg 100(140)$ for $k_B T = 1.4\hbar\omega_\perp$ ($k_B T = 2.4\hbar\omega_\perp$). The disagreement between the calculation and our data for $k_B T = 2.4\hbar\omega_\perp$ suggests that perhaps we did not achieve a high enough density to be fully in the quasicondensate approximation. In addition the one-dimensional calculation of n_T is unreliable for such high ratio $k_B T/\hbar\omega_\perp$ and underestimates the value at which the cross over appears. This is also the case for the data of Fig. 2 where the naive estimate of n_T corresponds to $\langle N \rangle = 160$ for $k_B T = 2.9\hbar\omega_\perp$ and $\langle N \rangle = 130$ for $k_B T = 2.1\hbar\omega_\perp$.

Exploitation of the 1D geometry to avoid averaging the fluctuations in the imaging direction can be applied to other situations. A Bose gas in the strong coupling regime, or an elongated Fermi gas should show sub-shot-noise fluctuations due to antibunching.

This work has been supported by the EU under Grants No. IST-2001-38863, No. MRTN-CT-2003-505032, and No. IP-CT-015714, by the DGA (03.34033) and by the French research ministry "AC nano" program. We thank D. Mailly from the LPN (Marcoussis, France) for helping us to microfabricate the chip.

[1] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Statistical Physics, Part I* (Pergamon, Oxford, 1980), Chap. 12.
[2] R. H. Brown and R. Q. Twiss, Nature (London) **177**, 27 (1956).
[3] M. Yasuda and F. Shimizu, Phys. Rev. Lett. **77**, 3090 (1996).
[4] M. Schellekens *et al.*, Science **310**, 648 (2005).
[5] S. Fölling *et al.*, Nature (London) **434**, 481 (2005).
[6] A. Öttl *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 090404 (2005).
[7] J. Grondalski, P. M. Alsing, and I. H. Deutsch, Opt. Express **5**, 249 (1999).
[8] E. Altman, E. Demler, and M. D. Lukin, Phys. Rev. A **70**, 013603 (2004).
[9] M. Greiner *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94**, 110401 (2005).
[10] P. C. Hohenberg, Phys. Rev. **158**, 383 (1967).
[11] K. V. Kheruntsyan *et al.*, Phys. Rev. A **71**, 053615 (2005).
[12] C. Mora and Y. Castin, Phys. Rev. A **67**, 053615 (2003).
[13] K. V. Kheruntsyan *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 040403 (2003).
[14] S. Dettmer *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 160406 (2001).
[15] S. Richard *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 010405 (2003).
[16] D. Hellweg *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 010406 (2003).
[17] M. Hugbart *et al.*, Eur. Phys. J. D **35**, 155 (2005).
[18] I. Shvarchuck *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 270404 (2002).
[19] J. Reichel, Appl. Phys. B **74**, 469 (2002).
[20] We actually form the quantity $\delta N(z)^2 = [N(z) - \bar{N}(z)]^2 \times p/(p-1)$ to take into account the underestimation of the variance due to the finite number of images.
[21] Y. Jiang *et al.*, Eur. Phys. J. D **22**, 521 (2003).
[22] M. Naraschewski and R. J. Glauber, Phys. Rev. A **59**, 4595 (1999).
[23] The phase correlation length $l_c = \hbar^2 n/(m k_B T)$ is about 1 μm for $k_B T = 1.4\hbar\omega_\perp$ confirming that we are in the quasicondensate regime.
[24] F. Gerbier, Europhys. Lett. **66**, 771 (2004).

F.4 Evidence for the Breakdown of a Hartree-Fock Approach in a Weakly Interacting Bose Gas

Experimental Evidence for the Breakdown of a Hartree-Fock Approach in a Weakly Interacting Bose Gas

J.-B. Trebbia,[1] J. Esteve,[1,2] C. I. Westbrook,[1] and I. Bouchoule[1]

[1]*Laboratoire Charles Fabry, CNRS et Université Paris 11, 91403 Orsay CEDEX, France*

[2]*Laboratoire de Photonique et de Nanostructures, CNRS, 91460 Marcoussis, France*

(Received 30 June 2006; published 22 December 2006)

We investigate the physics underlying the presence of a quasicondensate in a nearly one dimensional, weakly interacting trapped atomic Bose gas. We show that a Hartree-Fock (mean-field) approach fails to predict the existence of the quasicondensate in the center of the cloud: the quasicondensate is generated by interaction-induced correlations between atoms and not by a saturation of the excited states. Numerical calculations based on Bogoliubov theory give an estimate of the crossover density in agreement with experimental results.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.250403 PACS numbers: 03.75.Hh, 05.30.Jp

Since the first observation of the Bose-Einstein condensation in dilute atomic gases, self-consistent mean-field approaches (see e.g. [1,2]) have successfully described most experimental results. A good example is the critical temperature at which the condensate appears [3–5]. However, the approximate treatment made in these theories about particle correlations cannot capture all the subtle aspects of the many body problem and the success of these theories relies on the weakness of interactions in dilute atomic gases [$\rho a^3 \ll 1$ where ρ is the atomic density and a the scattering length for three-dimensional (3D) gases] and also on the absence of large fluctuations (Ginzburg criterion) [6]. In a 3D Bose gas, this latter criterion is not fulfilled for temperatures very close to the critical temperature [4] and deviations from the mean-field theories are expected. For a given atomic density, the critical temperature is calculated to be slightly shifted towards a larger value as compared to the mean-field prediction [7–9] but this discrepancy is still beyond the precision of current cold atom experiments [3,10].

In mean-field theory, a Bose gas above condensation is described by a Hartree-Fock (HF) single fluid in which atomic interactions are taken into account only via a mean-field potential $V_{\mathrm{mf}} = 2g\rho$ [11,12], where g is the coupling constant and ρ the atomic density. Interaction-induced atomic correlations are neglected and the gas is modeled as a group of noninteracting bosons that experience the self-consistent potential V_{mf}. As for an ideal Bose gas, the two-particle correlation function at zero distance $g^{(2)}(0)$ is 2 (bunching effect) [6]. This HF single fluid description holds until the excited state population saturates, which is the onset of Bose condensation.

In this Letter, we present measurements of density profiles of a degenerate Bose gas in a situation where the trap is very elongated and the temperature of the cloud is close to the transverse ground state energy. For sufficiently low temperatures and high densities, we observe the presence of a quasicondensate [13] at the center of the cloud. Using the above HF theory, we show that a gas with the same temperature and chemical potential as the experimental data is not Bose condensed. Thus, a mean-field approach does not account for our results and the quasicondensate regime is not reached via the usual saturation of the excited states. We emphasize that this failure of mean-field theory happens in a situation where the gas is far from the strong interaction regime, which in one dimension (1D), corresponds to the Tonks-Girardeau gas limit [13–15], and where mean-field theory also fails. To our knowledge, this is the first demonstration of the breakdown of a Hartree-Fock approach in the weakly interacting limit.

We attribute this failure of the mean-field theory to the nearly 1D character of the gas. It is well known that a 1D homogeneous ideal Bose gas does not experience Bose-Einstein condensation in the thermodynamic limit. On the other hand, in the presence of repulsive interactions in the weakly interacting regime, as the linear density increases one expects a smooth crossover from an ideal gas regime where $g^{(2)}(0) \simeq 2$ to a quasicondensate regime where $g^{(2)}(0) \simeq 1$ [14,16,17]. The HF approach fails to describe this crossover: as for an ideal gas, the thermal fluid does not saturate and $g^{(2)}(0) = 2$ for any density. The above results also hold for a 1D harmonically trapped gas at the thermodynamic limit: no saturation of excited states occurs for an ideal gas [18] and the gas smoothly enters the quasicondensate regime when the peak density increases [13,19].

In the experiment presented here, the gas is neither purely 1D nor at the thermodynamic limit: a few transverse modes of the trap are populated and a condensation phenomenon due to finite size effects might be expected [20]. However, we will show that, as in the scenario discussed above, the gas undergoes a smooth crossover to the quasicondensate regime without saturation of the excited states. An estimation of the crossover density using a three-dimensional Bogoliubov calculation is in agreement with experimental data.

The experimental setup is the same as [21]. Using a Z-shaped wire on an atom chip [22], we produce an anisotropic trap, with a transverse frequency of

 © 2006 The American Physical Society

$\omega_\perp/(2\pi) = 2.75$ kHz and a longitudinal frequency of $\omega_z/(2\pi) = 15.7$ Hz. By evaporative cooling, we obtain a few thousand ^{87}Rb atoms in the $|F = 2, m_F = -2\rangle$ state at a temperature of a few times $\hbar\omega_\perp/k_B$. Current-flow deformations inside the microwire, located 150 μm below the atoms, produce a roughness on the longitudinal potential [23]. The observed atomic profiles are smooth (see Fig. 1), which shows that this roughness is small and we neglect it in the following.

The longitudinal profile of the trapped gases are recorded using *in situ* absorption imaging as in [21]. The probe beam intensity is about 20% of the saturation intensity and the number of atoms contained in a pixel of a CCD camera is deduced from the formula $N_{\rm at} = (\Delta^2/\sigma) \times \ln(I_2/I_1)$, where $\Delta = 6.0$ μm is the pixel size, σ the effective cross section, and I_1 and I_2 the probe beam intensity, respectively, with and without atoms. The longitudinal profiles are obtained by summing the contribution of the pixels in the transverse direction. However, when the optical density is large and the density varies on a scale smaller than the pixel size the above formula underestimates the real atomic density [21]. In our case, the peak optical density at resonance is about 1.5, and this effect cannot be ignored. To circumvent this problem, we decrease the absorption cross section by detuning the probe laser beam from the $F = 2 \rightarrow F' = 3$ transition by $\delta = 9$ MHz. We have checked that for larger detunings, the normalized profile remains identical to within 5%. For the detuning δ, the lens effect due to the real part of the atomic refractive index is calculated to be small enough so that all the refracted light is collected by our optical system and the profile is preserved.

To get an absolute measurement of the linear density, we need the effective absorption cross section σ. We find σ by comparing the total absorption of *in situ* images taken with a detuning δ with the total number of atoms measured on images taken at resonance after a time of flight long enough (5 ms) that the optical density is much smaller than 1. In these latter images, the probe beam is σ^+ polarized and the magnetic field is pointing along the probe beam propagation direction so that the absorption cross section is $3\lambda^2/2\pi$. We obtain for the *in situ* images taken at a detuning δ, an effective absorption cross section $(0.24 \pm 0.04) \times 3\lambda^2/2\pi$. For samples as cold as that in Fig. 1(a), the longitudinal profile is expected to be unaffected by the time of flight and we checked that the profile is in agreement with that obtained from *in situ* detuned images within 5%.

Averaging over 30 measured profiles, we obtain a relative accuracy of about 5% for the linear density. A systematic error of about 20% is possible due to the uncertainty in the absorption cross section.

In Fig. 1, we plot the longitudinal density profiles of clouds at thermal equilibrium for different final evaporating knives obtained from *in situ* images. We have compared the density profiles with the expected quasicondensate density profile with the same peak density. This is obtained using the equation of state of the longitudinally homogeneous gas $\mu = \hbar\omega_\perp\sqrt{1 + 4na}$ [24], and the local chemical potential $\mu(z) = \mu_0 - 1/2m\omega_z^2 z^2$, where n is the linear atomic density, and μ_0 the chemical potential at the center of the cloud. For the two colder clouds [graphs (a) and (b)] in Fig. 1, we observe a good agreement between the central part of the experimental curves (circles) and the quasicondensate profile (short dashed lines) which indicates that the gas has entered the quasicondensate regime. In [21], we observed the inhibition of density fluctuations expected in this regime.

For a given atomic density profile, we extract the temperature and chemical potential of the data from a fit to an ideal Bose gas distribution. For cold clouds, the ideal Bose gas model should fail in the central part of the cloud where interactions are not negligible. We therefore fit only the wings of the profile by excluding a number of pixels $N_{\rm ex}$ on either side of the center of the profile. We fit the longitudinal atomic distribution with only the chemical potential μ_0 as a free parameter for different trial temperatures T. As seen in Fig. 2, $\mu_0(T, N_{\rm ex})$ is approximately linear in $N_{\rm ex}$ for $N_{\rm ex} > 10$. The cloud's temperature is the one for which $\mu_0(T, N_{\rm ex})$ is independent of $N_{\rm ex}$. The fluctuations around the straight line for $N_{\rm ex} > 10$, seen in Fig. 2, is mainly due to the potential roughness. These fluctuations contribute for about 5% to the uncertainty of T and μ_0. The determination of μ_0, however, is primarily limited by the uncer-

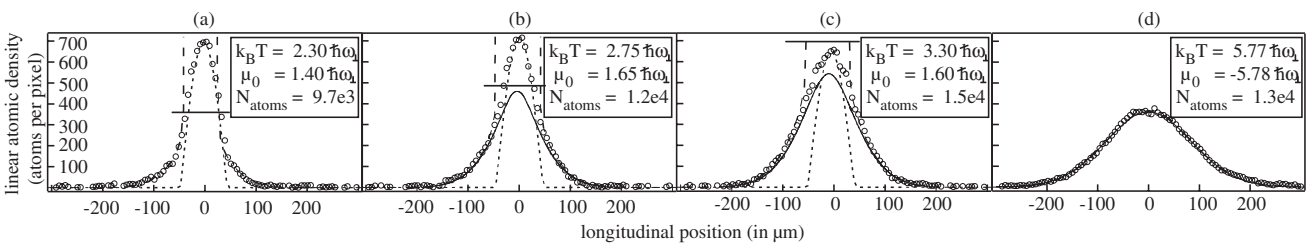

FIG. 1. *In situ* longitudinal distributions for different temperatures (circles). Long dashed lines: ideal Bose gas profile at the shown temperature T and chemical potential μ_0 obtained from a fit to the wings. Solid lines: profiles obtained in the Hartree-Fock approximation for the same T and μ_0. Short dashed lines: quasicondensate profiles with the same peak density as the experimental data. Horizontal solid lines: crossover density estimated using a Bogoliubov calculation (see text).

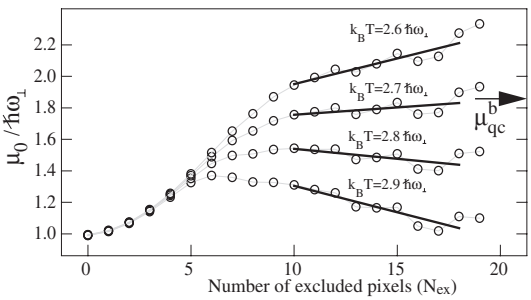

FIG. 2. Chemical potential μ_0, obtained by fitting the wings of profile (b) to an ideal Bose gas distribution, as a function of the number of excluded pixels N_{ex} on either side of the distribution, for four different trial temperatures. The arrow indicates $\mu_{qc} = \hbar\omega_\perp\sqrt{1+4n_0a}$, which is the chemical potential found from the measured peak linear density n_0.

tainty in the total atom number. For profile (b), we find $T_b = (2.75 \pm 0.05)\hbar\omega_\perp/k_B$ and $\mu_0^b = (1.65 \pm 0.5)\hbar\omega_\perp$. For the profile (a), the chemical potential and the temperature are not very accurate because the wings are too small. This profile is not analyzed in the following.

Another method to deduce the chemical potential is to use the peak atomic density and the formula $\mu = \hbar\omega_\perp\sqrt{1+4na}$, assuming the gas is well inside the quasi-condensate regime at the center of the cloud. For graph (b), we obtain $\mu_{qc}^b = (1.8 \pm 0.2)\hbar\omega_\perp$, which is consistent with the value obtained from fits of the wings of the distribution.

We now compare the experimental density profiles with the longitudinal atomic density $n(z)$ given by the Hartree-Fock theory for the same temperature and chemical potential. To do the calculation, we also assume the relative population of the ground state is negligible (no Bose-Einstein condensation) and the quantization of the longitudinal eigenstates is irrelevant. In this so-called local density approximation (LDA), the linear atomic density $n(z)$ is identical to the linear atomic density $n_h(\mu(z), T)$ of a thermal Bose gas trapped in the radial direction and longitudinally untrapped at a chemical potential $\mu(z) = \mu_0 - m\omega_z^2 z^2/2$.

To obtain $n_h(\mu, T)$, we need to compute the self-consistent three-dimensional atomic density ρ which is the thermodynamic distribution of independent bosons that experience the self-consistent HF Hamiltonian [11,12]

$$H_{HF} = \frac{p_z^2}{2m} + H_{kin} + H_{harm} + 2g\rho(r), \qquad (1)$$

where H_{kin} is the transverse kinetic energy term, H_{harm} the transverse harmonic potential, r is the radial coordinate, and $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ where a is the ^{87}Rb scattering length. The simplest approach to obtain $\rho(r)$ is to use an iterative method, starting from $\rho(r) = 0$. For each iteration, we numerically diagonalize the transverse part of H_{HF} to deduce the new thermal atomic density distribution. When the interactions become too strong (linear density larger than 320 atoms per pixels for the temperature T_b) this algorithm does not converge. In this case, we use a more time consuming method based on a minimization algorithm. We use the trial function $\rho_{trial}(r) = \sum c_{2p} H_{2p}(r) \times e^{-r^2/2r_0^2}$ where $H_{2p}(r)$ are Hermite polynomials, and $0 \le p \le 3$. We find r_0 and the four c_{2p} coefficients by minimizing $\xi = \int_0^\infty r(\rho'_{trial}(r) - \rho_{trial}(r))^2\,dr / \int_0^\infty r\rho_{trial}^2(r)\,dr$, where $\rho'_{trial}(r)$ is the thermodynamic equilibrium atomic density for $H_{HF}[\rho_{trial}(r)]$. We find ξ less than 10^{-4} meaning that our 5 parameter model describes the transverse Hartree-Fock profile well. The linear density $n_h = \int 2\pi r\rho_{trial}(r)\,dr$ is identical to $n'_h = \int 2\pi r\rho'_{trial}(r)\,dr$ within 0.5%. In the domain where both methods are valid, we also check that they give the same result.

Figure 1 compares the longitudinal profiles obtained with the HF calculation with the experimental data and the ideal gas profile for the graphs (b), (c), and (d). The HF profile for the hottest cloud [graph (d)] is in agreement with data and identical within 1% to the ideal Bose gas prediction. For the slightly colder cloud of graph (c), the HF avoids the divergence in the ideal gas model, although it underestimates the peak density by approximately 20%. For the even colder cloud of graph (b), the discrepancy between the HF profile and the experimental data is even larger (35% at the center).

To validate our Hartree-Fock calculations we check *a posteriori* the local density approximation (LDA). The LDA is valid if the population difference between adjacent energy states is negligible. This criterion is met if the absolute value of $\mu_{eff} = \mu_0 - \varepsilon_0(\mu)$ is much larger than ΔE, where $\varepsilon_0(\mu)$ is the ground state energy and ΔE the energy gap between the ground state and the first excited longitudinal state. For the temperature of the graph (b), as long as $\mu_0 < 2.0\hbar\omega_\perp$, $|\mu_{eff}/\Delta E|$ is larger than 15 (see Fig. 3), and for the chemical potential $\mu_0^b = 1.65\hbar\omega_\perp$ deduced from the data $|\mu_{eff}/\Delta E| \simeq 25$. For such a large value of $|\mu_{eff}/\Delta E|$, the LDA is expected to be valid.

For this ratio $\mu_{eff}/\Delta E$, we can quantify the error made in the density profile due to the LDA. From the HF calculation, we obtain the energies $E_n(\mu, T)$ of the transverse eigenstates. Assuming the transverse motion adiabatically

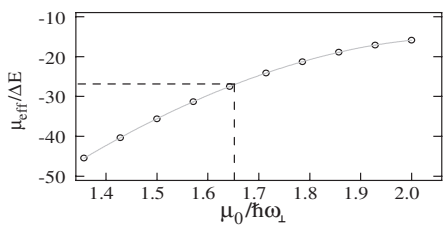

FIG. 3. Ratio between the effective chemical potential and ΔE, the energy splitting between the ground state and the first excited state as a function of the chemical potential for the temperature of profile (b). The dashed lines correspond to the measured chemical potential.

follows the longitudinal one, we obtain an effective longitudinal Hamiltonian with a potential $V_n(z) = E_n(\mu_0 - m\omega_z^2 z^2/2, T)$ for each transverse mode. Diagonalization of each effective longitudinal Hamiltonian and summation of the resulting thermal profiles gives the expected longitudinal density profile. We find agreement with the profile obtained from the LDA within 5%. This procedure also confirms the LDA for the HF calculations corresponding to the graphs (c) and (d).

In the case of profile (b), where the gas is in the quasicondensate regime at the center, the Hartree-Fock calculation predicts a population of the ground state $N_0 \approx k_B T/(\varepsilon_0 - \mu_0) = 0.0035 N_{\rm tot}$. Therefore, the Hartree-Fock approach does not predict a saturation of the excited states and fails to explain the presence of the quasicondensate at the center of the cloud. The local density approximation criterion $|\mu_{\rm eff}| = |\mu_0 - \varepsilon_0(\mu)| \gg \Delta E$ also implies a small relative ground state population.

The failure of the Hartree-Fock approach for our experimental parameters is due to the large density fluctuations this theory predicts in a dense, nearly 1D gas. When density fluctuations become too large, pair interactions induce correlations in position between particles which are not taken into account in the Hartree-Fock theory. These correlations reduce the interacting energy by decreasing density fluctuations: the gas enters the quasicondensate regime.

We now estimate the crossover density $n_{\rm co}$ at which the gas enters the quasicondensate regime. For this purpose, we assume the gas is in the quasicondensate regime and use the Bogoliubov theory to compute density fluctuations. We find *a posteriori* the validity domain of the quasicondensate regime, which requires that density fluctuations $\delta\rho$ be small compared to the mean density ρ. More precisely, we define $n_{\rm co}$ as the density for which the Bogoliubov calculation yields $\iint (\delta\rho(r))^2/(\rho(r) n_{\rm co}) d^2 r = 1$. We indicate this crossover density in Fig. 1. We find that $n_{\rm co}$ is close to the density above which the experimental profiles agree with the quasicondensate profile.

In conclusion, we have been able to reach a situation where a quasicondensate is experimentally observed but a HF approach fails to explain its presence. As for purely one dimensional systems, the passage towards quasicondensate in our experiment is a smooth crossover driven by interactions. The profiles that we observe require a more involved theory able to interpolate between the classical and the quasicondensate regime. A quantum Monte Carlo calculation that gives the exact solution of the many body problem [5,9] should reproduce the experimental data. In fact, since temperatures are larger than interaction energy, quantum fluctuations of long wavelength excitations should be negligible and a simpler classical field calculation should be sufficient [25,26]. Finally, the refined mean-field theory proposed in [27], where the coupling constant g is modified to take into account correlations between atoms, may explain our profiles.

We thank A. Aspect and L. Sanchez-Palencia for careful reading of this Letter, and D. Mailly from the LPN (Marcoussis, France) for help in microfabrication. The atom optics group is member of l'Institut Francilien de la Recherche sur les Atomes Froids. This work has been supported by the EU under Grants No. MRTN-CT-2003-505032 and No. IP-CT-015714.

[1] A. Griffin, Phys. Rev. B **53**, 9341 (1996).
[2] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, J. Low Temp. Phys. **109**, 309 (1997).
[3] F. Gerbier *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 030405 (2004).
[4] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Phys. Rev. A **54**, R4633 (1996).
[5] M. Holzmann, W. Krauth, and M. Naraschewski, Phys. Rev. A **59**, 2956 (1999).
[6] L. Landau and E. Lifschitz, in *Statistical Physics* (Pergamon, Oxford, 1980), Pt. I, Chap. 14.
[7] M. Holzmann, G. Baym, J.-P. Blaizot, and F. Laloë, Phys. Rev. Lett. **87**, 120403 (2001).
[8] P. Arnold and G. Moore, Phys. Rev. Lett. **87**, 120401 (2001).
[9] V. A. Kashurnikov, N. V. Prokofév, and B. V. Svistunov, Phys. Rev. Lett. **87**, 120402 (2001).
[10] P. Arnold and B. Tomàŝik, Phys. Rev. A **64**, 053609 (2001).
[11] Y. Castin, in *Coherent Atomic Matter Waves*, edited by R. Kaiser, C. Westbrook, and F. David (Springer, Berlin, 2001), pp. 32–36.
[12] P. Öhberg and S. Stenholm, J. Phys. B **30**, 2749 (1997).
[13] D. Petrov, G. Shlyapnikov, and J. Walraven, Phys. Rev. Lett. **85**, 3745 (2000).
[14] K. V. Kheruntsyan, D. M. Gangardt, P. D. Drummond, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. **91**, 040403 (2003).
[15] E. H. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. **130**, 1605 (1963).
[16] C. Mora and Y. Castin, Phys. Rev. A **67**, 053615 (2003).
[17] Y. Castin *et al.*, J. Mod. Opt. **47**, 2671 (2000).
[18] V. Bagnato and D. Kleppner, Phys. Rev. A **44**, 7439 (1991).
[19] K. V. Kheruntsyan, D. M. Gangardt, P. D. Drummond, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **71**, 053615 (2005).
[20] W. Ketterle and N. J. van Druten, Phys. Rev. A **54**, 656 (1996).
[21] J. Estève *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96**, 130403 (2006).
[22] J. Reichel, W. Hänsel, and T. W. Hänsch, Phys. Rev. Lett. **83**, 3398 (1999).
[23] J. Esteve *et al.*, Phys. Rev. A **70**, 043629 (2004).
[24] F. Gerbier, Europhys. Lett. **66**, 771 (2004).
[25] K. Góral, M. Gadja, and K. Rzązewski, Phys. Rev. A **66**, 051602 (2002).
[26] M. J. Davis and P. B. Blakie, Phys. Rev. Lett. **96**, 060404 (2006).
[27] U. Al Khawaja *et al.*, Phys. Rev. A **66**, 013615 (2002).

F.5 Roughness suppression in an AC atom chip

Roughness Suppression via Rapid Current Modulation on an Atom Chip

J.-B. Trebbia, C. L. Garrido Alzar, R. Cornelussen, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule
Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, CNRS, Univ Paris-Sud, Campus Polytechnique, RD128, 91127 Palaiseau cedex, France
(Received 29 January 2007; published 25 June 2007)

We present a method to suppress the roughness of the potential of a wire-based, magnetic atom guide: modulating the wire current at a few tens of kHz, the potential roughness, which is proportional to the wire current, averages to zero. Using ultracold ^{87}Rb clouds, we show experimentally that modulation reduces the roughness by at least a factor five without measurable heating or atom loss. This roughness suppression results in a dramatic reduction of the damping of center-of-mass oscillations.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.263201 PACS numbers: 39.25.+k, 03.75.Be

Atom chips, devices which trap and guide atoms with microfabricated structures on a substrate, hold enormous promise for the applications of cold atoms and for the exploration of new physical regimes of degenerate gases [1,2]. For applications, their small size facilitates the design of a large variety of structures and functionalities [3–7]. For fundamental studies, the strong confinement possible on an atom chip permits, e.g., the study of low-dimensional gases. In particular, nearly one-dimensional (1D) gases have been studied in the weakly interacting regime on atom chips [8,9], and the attainment of the strongly interacting or Girardeau regime [10–14] on a chip is attracting significant experimental effort [15].

To exploit the full potential of these devices, atoms must often be close to the material structures they contain. This proximity, however, renders atom chips highly sensitive to defects [16,17] which produce roughness in the trapping potential. In the case of current carrying wires, most of these defects are due to the wires themselves [18–22]. Advances in fabrication procedures have steadily improved wire quality [23,24], but the roughness of the trapping potential remains a problem. For example, it is a serious hindrance for the attainment of the Girardeau regime, where the atoms need to be tightly confined in the transverse direction and weakly confined in the longitudinal direction.

In this Letter we demonstrate a method, first suggested in [18], which nearly eliminates the longitudinal potential roughness of a magnetic wire trap by rapid current modulation. This idea is reminiscent of the TOP trap [25] in the sense that the atoms see a time-averaged potential. The wire configuration here is such that the rough potential component rapidly oscillates and averages to zero. We compare the potential roughness for unmodulated (dc) and modulated (ac) guides (with the same current amplitudes) and demonstrate a reduction factor of at least 5 without noticeable atom loss or heating. This roughness suppression results in a significant reduction of the damping of the center-of-mass oscillations.

A simple atomic guide can be made by a current carrying wire and a homogeneous field B_{bias} perpendicular to the wire [1]: atoms are confined transversely and guided parallel to the wire. Atoms, of magnetic moment μ in the low field seeking state, feel a potential proportional to the absolute value of the magnetic field. The guide is centered on a line where the transverse field vanishes and the longitudinal potential $V(z)$ is given by $\mu|B_z^0 + \delta B_z^w(z)|$, where B_z^0 is an external homogeneous field, typically of one Gauss, and $\delta B_z^w(z)$ is the small, spatially fluctuating field (few mG) created by current flow deformations inside the microwires. Since $|B_z^0| > \delta B_z^w(z)$ and $\delta B_z^w(z)$ is proportional to the microwire current, current modulation around zero results in a longitudinal time-averaged potential in which the effect of $\delta B_z^w(z)$ disappears. The instantaneous position of the guide is determined by both the wire current and the transverse bias field B_{bias}. If only the wire current is modulated, the atom experiences strong forces that eliminate the transverse confinement. One must therefore also modulate B_{bias}. In our experiment, this latter field is also produced by on-chip microwires whose low inductance permits high modulation frequencies.

We use a two layer atom chip as sketched in Fig. 1. The lower silicon wafer has an H structure of 15 μm thick

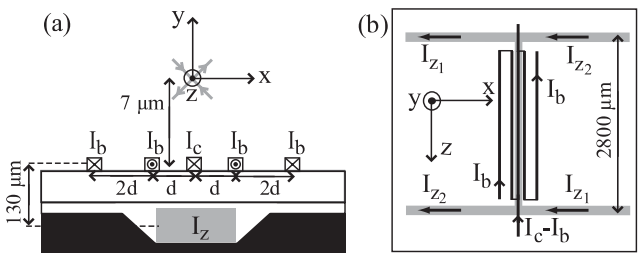

FIG. 1. Side (a) and top (b) views of the atom chip. The first wafer (dark gray) has 15 μm thick wires (gray). On the second wafer (white), a five-wire structure creates the atomic guide whose roughness is studied ($d = 2.5$ μm). Lengths are not to scale.

 © 2007 The American Physical Society

wires which carry the currents I_{z1} and I_{z2}. Atoms are initially loaded in an initial magnetic trap (Z trap) [1], which is created by setting $I_{z1} = 3$ A, $I_{z2} = 0$ A, and applying a transverse field (in the x-y plane). After evaporative cooling, we have a few times 10^4 trapped ^{87}Rb atoms in the $|F = 2, m_F = 2\rangle$ state at a temperature of the order of 1 μK. Next, we transfer the atomic cloud into a second trap (five-wire trap), where we perform the potential roughness measurements for both dc and ac cases. This five-wire trap is a combination of a transverse magnetic guide and a weak longitudinal confinement. The guide is realized with five parallel microwires (700×700 nm^2 and 2 mm long in the z direction) deposited on the upper silicon wafer. The wire geometry is described in [24], and shown in Fig. 1. By applying the currents $I_b = \pm 15$ mA in the two outer pairs of wires and $I_c = \pm 13$ mA in the central wire, the resulting magnetic field vanishes on a line (parallel to the z axis), 7 μm above the central wire. To prevent Majorana losses, we add a constant and homogenous longitudinal field $B_z^0 =$ 1.8 G. The weak longitudinal confinement is provided by the H structure on the lower chip with $I_{z1} = I_{z2} = 0.4$ A (no current flows in the central wire of the H).

First, we measured the roughness of the trapping potential for positive and negative dc currents. After the transfer to the five-wire trap, we wait 600 ms to let the sample thermalize in the presence of an evaporative knife leading to about 5×10^3 atoms at around 280 nK. To ensure that the two dc traps have the same transverse position to within 500 nm, we compensate the transverse magnetic fields to within 0.1 G. Figures 2(a) and 2(b) show absorption images, averaged over 50 runs, of the trapped cloud at thermal equilibrium for the two dc traps. In both situations the cloud becomes fragmented, revealing the presence of potential roughness. Moreover, the density maxima and minima are inverted when the currents are reversed, as previously observed in [18]. The time of flight (TOF) for imaging is 1.5 ms. This delay allows the atoms to leave the vicinity of the five-wire structure where diffraction of the imaging beam produces systematic errors in the atomic density profile. The 1.5 ms TOF of the atoms partially washes out the density modulation. This effect and the optical resolution contribute to a resolution function with a rms width of 8 μm modeled by a Gaussian function. Convolution with this Gaussian gives a contrast reduction of 40% for a wavelength of 60 μm, the typical spatial scale observed in Fig. 2. The 10% modulation in the figure is thus an underestimate of the actual potential roughness. This smearing does not affect the relative measurements we present below, except insofar as to reduce our signal to noise ratio.

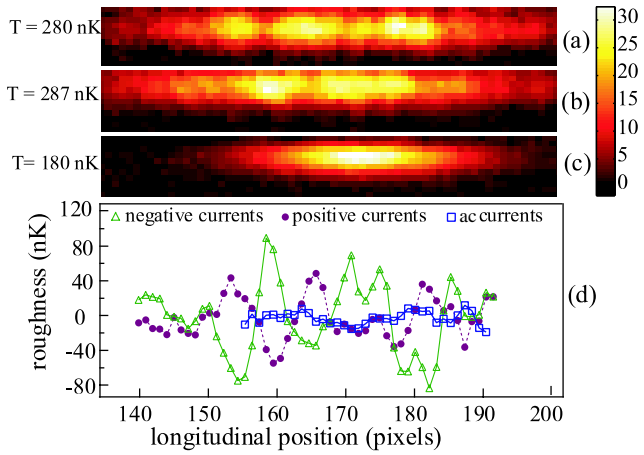

FIG. 2 (color online). Absorption images of a thermal cloud for negative dc (a), positive dc (b), and ac currents (c), respectively. Plotted is the number of atoms per pixel (pixel size is 6×6 μm^2). In (d), the potential roughnesses are extracted from longitudinal profiles using the Maxwell-Boltzmann distribution.

To extract the potential $V(z)$ along the guide center from the linear atomic density $n(z)$, we use the Maxwell-Boltzmann distribution $V(z) = -k_B T \ln[n(z)/n_0]$. This formula is valid because the transverse oscillation frequency is independent of z (to within 1% over the cloud extent) and provided that the phase space density is much smaller than unity. We deduce the temperature from the transverse velocity distribution measured by the standard TOF technique.

The longitudinal confinement, produced by the H-shaped wire, is expected to be harmonic within 6% over the extent of the cloud. A harmonic fit of $V(z)$ gives $\omega_{z,\mathrm{dc}}/2\pi = 7.1$ Hz. Subtracting this potential from $V(z)$, we obtain the potential roughness plotted in Fig. 2(d) for both positive and negative dc currents. The observed rms roughness amplitudes are 39 and 22 nK for negative and positive currents, respectively. This asymmetry in the potential roughness may be due to residual transverse magnetic fields which change the trap location, or to residual noise in the imaging system.

We now turn to the study of the ac trap. Using phase-locked oscillators at a frequency $\omega_m/2\pi = 30$ kHz, we produce the five-wire currents $I_c(t) = \mathcal{I}_c \cos(\omega_m t)$ and $I_b(t) = \mathcal{I}_b \cos(\omega_m t)$, where $\mathcal{I}_c = 13$ mA and $\mathcal{I}_b =$ 15 mA are the same currents as those used in the dc cases. The field B_z^0 and the currents I_{z1} and I_{z2} are not modulated. Loading a thermal cloud in the ac trap, the fragmentation is no longer visible in the absorption image Fig. 2(c).

To give a more quantitative analysis, we begin with a theoretical description of the ac trap. Since ω_m is much larger than all the characteristic frequencies associated with the atomic motion, the transverse and the longitudinal dynamics are described by the one cycle averaged potential $\langle V(r,t)\rangle$. Because B_z^0 is large compared to any other magnetic field, $\langle V(r,t)\rangle$ can be approximated by

$$\langle V(r,t)\rangle = \mu_B \langle |B_z(\mathbf{r},t)|\rangle + \frac{\mu_B}{2B_z^0}\langle |\mathbf{B}_\perp^w(\mathbf{r},t) + \mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})|^2\rangle. \quad (1)$$

Here, μ_B is the Bohr magneton, $B_z(\mathbf{r},t)$ is the longitudinal

magnetic field, $\mathbf{B}_\perp^w(\mathbf{r}, t)$ is the transverse magnetic field of the five wires, and $\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})$ denotes the transverse field created by the H wires plus any uncompensated, homogeneous, time-independent, transverse field. Since δB_z^w oscillates, its contribution to $\langle |B_z(\mathbf{r}, t)| \rangle$ averages to zero.

The cross term $\langle \mathbf{B}_\perp^w(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}_\perp(\mathbf{r}) \rangle$ vanishes, so that $\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})$ only produces a position dependent energy shift $\mu_B |\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})|^2 / 2B_z^0$. It has a negligible effect on the transverse confinement since the confinement created by the five wires is very strong. On the other hand, $|\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})|^2$ affects the weak longitudinal confinement. The length scale on which $\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})$ varies is much larger than the cloud extent, because it is produced by elements located at least a millimeter away from the atomic cloud. It thus only contributes to a curvature without introducing additional roughness. The transverse magnetic field created by the H-shaped wire is $\mathbf{B}_\perp(z) = B'_H z \mathbf{u}_y$, where $\mathbf{u}_y$ is the unit vector pointing along y. This field increases the longitudinal frequency according to $\omega_{z,\mathrm{ac}}^2 = \omega_{z,\mathrm{dc}}^2 + \mu_B B_H'^2 / (m B_z^0)$. On the other hand, the transverse frequency is reduced by $\sqrt{2}$ compared to the dc case. This factor is confirmed by our transverse frequency measurements which give (1.2 ± 0.2) kHz for the ac trap, (2.2 ± 0.1) kHz and (2.1 ± 0.1) kHz for dc negative and positive currents, respectively.

We extract the potential in the ac trap from the measured longitudinal profile for a sample at $T = 180$ nK. From a harmonic fit we obtain a longitudinal frequency of 11.3 Hz, slightly larger than the one in the dc trap, as expected. In Fig. 2(d), we compare the measured roughness of the ac trap to those obtained in the dc traps. In the ac configuration, the roughness rms amplitude is reduced by a factor 4 and 7 with respect to the positive and negative dc cases. The residual apparent roughness in the ac case is consistent with the noise in the imaging system and so the mean reduction factor of 5 is a lower limit.

We also tested the reduction of the potential roughness by looking at the evolution of the longitudinal center-of-mass oscillations (CMO) as shown in Fig. 3. In a harmonic trap, the CMO of an atomic cloud are undamped. In the presence of a potential roughness, the oscillation period depends on the amplitude and the dephasing between trajectories of different particles results in a damping of the CMO. Figure 3 shows the dramatic contrast between the ac and dc traps. We fit the oscillations to the function $Z(t) = Z_0 + Z_1 e^{-t^2/\tau^2} \cos(\omega t + \phi)$, where Z_0, Z_1, τ, ω, and ϕ are fitting parameters. This function ensures the expected quadratic decrease of the oscillation amplitude at small times for a damping due to trajectory dephasing. The fitted damping time in the ac case, $\tau = (1.9 \pm 0.1)$ s, is 10 times larger than its value in the dc case. In fact, the observed damping in the ac guide can be explained by the anharmonicity of the H-shaped wire confinement alone. Thus, the data are consistent with the absence of roughness.

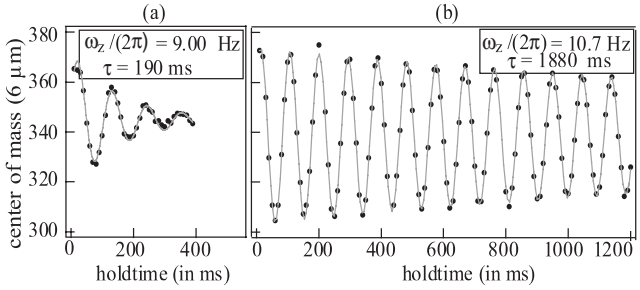

FIG. 3. Center-of-mass position vs time for negative dc current (a) and ac current (b) ($\omega_m/2\pi = 30$ kHz). The solid line is a fit to the function $Z(t)$ given in the text. The dramatic increase in damping time in the ac trap illustrates the strong reduction of the roughness.

To estimate an upper bound on the ratio of the ac to dc roughness amplitudes, we performed one-dimensional classical Monte Carlo calculations for noninteracting atoms experiencing a rough potential superimposed on a harmonic confinement. The calculations are averaged over potential roughness realizations with the spectral density expected for a single wire having white noise border deformations [22,26]. We adjust the wire border noise in order to recover the measured damping time in the dc trap (it corresponds to an rms roughness of 80 nK). We find that the observed increase of the damping time by a factor 10 requires a reduction of the potential roughness by about 14. A drawback of the model is that it does not take into account atomic collisions, happening at a rate on the order of the damping time. However, as collisions are present in both the dc and ac configurations, we assume that the above roughness reduction deduced from the calculation is still relevant.

The modulation technique does not correct for all guide defects. By considering only the time-averaged potential we neglect the micromotion of the atoms [27] whose energy is responsible for a residual roughness. This roughness is 10^{-8} times smaller than the one present in the dc guides for our experimental parameters. In fact, other imperfections are more important. First, the transverse component of the rough microwire field produces meanders of the guide equipotentials (displacement of about 2 nm) and a z-dependent modification of the transverse trapping frequency (approximately 0.3%). These two effects are not averaged out in the ac guide. Second, the rough longitudinal field δB_z^w appears in the expansion of $\langle V(r, t) \rangle$ to orders that are neglected in Eq. (1). The resulting guide imperfections are 1 order of magnitude smaller than those produced by the transverse component of the rough field.

We also investigated the dependence of the trap lifetime on ω_m as shown in Fig. 4. For modulation frequencies above 15 kHz, the lifetime of the sample is the same as in the dc case (10 s). For lower modulation frequencies, we observe a decrease in lifetime that we attribute to instabil-

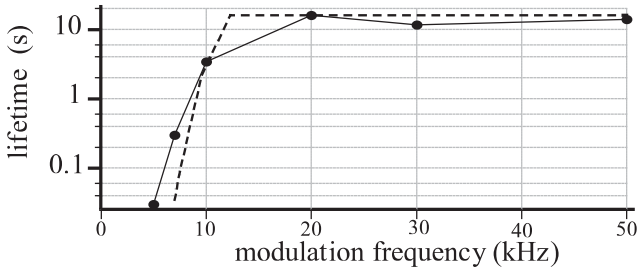

FIG. 4. Lifetime vs ω_m in the ac trap (dots). The dashed line represents the result of Monte Carlo calculations with a transverse magnetic field of 150 mG for both x and y directions.

ities of the atomic trajectories in the modulated potential. For zero unmodulated transverse magnetic field $\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})$, the transverse atomic motion close to the guide center is governed by the Mathieu equation [27] and no instabilities are expected for $\omega_m > 0.87\omega_{\perp,\mathrm{dc}}$, where $0.87\omega_{\perp,\mathrm{dc}}/2\pi = 1.82$ kHz, which is significantly below 15 kHz. We attribute this discrepancy to the presence of a nonvanishing transverse field. Classical trajectory Monte Carlo simulations, with fields of 150 mG in both x and y directions, reproduce well the measured lifetime as shown in Fig. 4 (dashed line). This value is of the same order as the accuracy of the residual transverse field compensation. Within the explored range of frequencies (up to 50 kHz), we have not identified any upper bound for the modulation frequency. The atomic spin should adiabatically follow the magnetic field orientation to avoid spin flip losses [28]. This condition is fulfilled provided that $\omega_m/2\pi \ll \mu_B B_z^0/4\pi\hbar$, where $\mu_B B_z^0/4\pi\hbar \simeq 1.3$ MHz is the Larmor frequency.

The temporal modulation of the rough potential can lead to a heating [28]. In our trap, however, the expected heating rate is very small. This is confirmed by our measured heating rate of about 160 nK/s, which is close to the technical heating also observed in the dc trap. We have also loaded a Bose-Einstein condensate in the ac trap without noticeable fragmentation.

The method presented here will enable new experimental explorations on quantum gases using atom chips. We have already mentioned the study of a 1D Bose gas in the Girardeau regime. Note that the reduction of transverse trapping frequency by $\sqrt{2}$ can be overcome by going closer to the wire. Second, the relative insensitivity of the time-averaged potential to residual transverse magnetic fields will enable us to revisit proposals of double well potentials in static magnetic fields, such as [19,24], which are very sensitive to residual magnetic fields. Finally, this method may also allow the study of atom dynamics in disordered potentials [29–31] since the roughness strength can be tuned.

The authors thank A. Aspect, T. Schumm, and J. Estève for fruitful discussions. The Atom Optics group of Laboratoire Charles Fabry is a member of the IFRAF Institute. This work was supported by the EU under Grants No. MRTN-CT-2003-505032 and No. IP-CT-015714.

[1] R. Folman *et al.*, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **48**, 263 (2002), and references therein.
[2] Special issue on Atom-Chips, edited by C. Henkel, J. Schmiedmayer, and C. Westbrook [Eur. Phys. J. D **35** 1 (2005)].
[3] W. Hänsel, J. Reichel, P. Hommelhoff, and T. W. Hänsch, Phys. Rev. Lett. **86**, 608 (2001).
[4] A. Günther *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 170405 (2005).
[5] Y.-J. Wang *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94**, 090405 (2005).
[6] T. Schumm *et al.*, Nature Phys. **1**, 57 (2005).
[7] P. Treutlein *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 203005 (2004).
[8] J. Estève *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96**, 130403 (2006).
[9] J.-B. Trebbia, J. Estève, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule, Phys. Rev. Lett. **97**, 250403 (2006).
[10] M. Girardeau, J. Math. Phys. (N.Y.) **1**, 516 (1960).
[11] B. Laburthe Tolra *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 190401 (2004).
[12] B. Parades *et al.*, Nature (London) **429**, 277 (2004).
[13] H. Moritz, T. Stöferle, M. Köhl, and T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. **91**, 250402 (2003).
[14] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, Science **305**, 1125 (2004).
[15] J. Reichel and J. H. Thywissen, J. Phys. IV (France) **116**, 265 (2004).
[16] B. V. Hall *et al.*, J. Phys. B **39**, 27 (2006).
[17] C. D. J. Sinclair *et al.*, Phys. Rev. A **72**, 031603 (2005).
[18] S. Kraft *et al.*, J. Phys. B **35**, L469 (2002).
[19] M. A. Jones *et al.*, J. Phys. B **37**, L15 (2004).
[20] A. E. Leanhardt *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 100404 (2003).
[21] J. Estève *et al.*, Phys. Rev. A **70**, 043629 (2004).
[22] D.-W. Wang, M. D. Lukin, and E. Demler, Phys. Rev. Lett. **92**, 076802 (2004).
[23] L. D. Pietra *et al.*, J. Phys.: Conf. Ser. **19**, 30 (2005).
[24] J. Estève *et al.*, Eur. Phys. J. D **35**, 141 (2005).
[25] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **74**, 3352 (1995).
[26] T. Schumm *et al.*, Eur. Phys. J. D **32**, 171 (2005).
[27] L. Landau and E. Lifshitz, *Mechanics*, Course of Theoretical Physics (MIR Editions, Moscow, 1982) 4th ed.
[28] I. Bouchoule *et al.* (to be published).
[29] D. Clément *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 170409 (2005); D. Clément *et al.*, New J. Phys. **8**, 165 (2006).
[30] T. Schulte *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 170411 (2005).
[31] J. E. Lye *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 070401 (2005).

F.6 Limitation of the modulation method to smooth a wire guide roughness

arXiv:0707.0602v1 [cond-mat.other] 4 Jul 2007

July 5, 2007

Limitations of the modulation method to smooth a wire guide roughness

I. Bouchoule, J.-B. Trebbia, and C. L. Garrido Alzar
Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique,
CNRS et Université Paris 11, 91127 Palaiseau Cedex, France

It was recently demonstrated that wire guide roughness can be suppressed by modulating the wire currents [1] so that the atoms experience a time-averaged potential without roughness. We theoretically study the limitations of this technique. At low modulation frequency, we show that the longitudinal potential modulation produces a heating of the cloud and we compute the heating rate. We also give a quantum derivation of the rough conservative potential associated with the micro-motion of the atoms. At large modulation frequency, we compute the loss rate due to non adiabatic spin flip and show it presents resonnances at multiple modulation frequencies. These studies show that the modulation technique works for a wide range of experimental parameters. We also give conditions to realise radio-frequency evaporative cooling in such a modulated trap.

PACS numbers: 39.35.+k,03.75.Be

I. INTRODUCTION

Atom-chips are a very promising tool for cooling and manipulating cold atoms [2]. Diverse potentials, varying on the micron-scale, can be realized and very high transverse confinements are possible. Envisioned applications range from integrated guided atomic interferometry [3, 4, 5] to the study of low dimensional gases [6, 7, 8]. To take benefit of the chip technology, the atoms should be brought close to the current carrying wires. But the atoms then experience a rough potential due to wire imperfections [9, 10] and this used to constitute an important limitation of the atom-chip technology. However, a method to overcome this roughness problem, based on modulated currents, was recently demonstrated [1]. Due to the important envisioned applications of this method, a study of its limitations is crucial.

The method to suppress atomic wire guide roughness relies on the proportionality between the longitudinal potential roughness and the wire current [11]. Modulating the wire current around zero at a large modulation frequency, the atoms experience the time-averaged potential, exempt from roughness. The modulation frequency ω must be large enough so that the atomic motion cannot follow the instantaneous potential. On the other hand, ω should be small enough in order to prevent losses due to spin-flip transitions. In this paper, we present analysis that go beyond the time-averaged potential approach and we identify the limitations of this method, both for low and large ω. We also investigate the possibility of using the radio-frequency evaporative cooling method in such a modulated trap.

In sec. II, we present the considered situation. In sec. III, we investigate the limitations of the method that arise at small modulation frequency. We show that the atomic cloud is submitted both to a heating and to a residual rough potential and we quatitatively study these phenomena. In sec. IV, we compute the expected spin flip losses due to the time modulation of the magnetic field orientation, that arise at large ω. Finally, the last section gives some insights on the possibility of realizing radio-frequency evaporative cooling in the modulated guide.

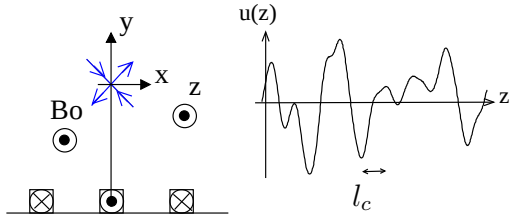

FIG. 1: A wire guide produced by three current carrying wires. Geometrical deformation of the wire produce a longitudinal potential roughness (of correlation length l_c) proportional to the wire current as depicted in the graph.

II. WIRE GUIDE

A wire guide is obtained combining a transverse quadrupolar field and an homogeneous longitudinal magnetic field B_0. The quadrupolar field can be realised using for example three current carrying wires as shown in Fig.1. Because of wire deformations [10, 12], the current density inside the wires acquire non zero transverse components. This produces a longitudinal rough magnetic field b_z proportional to the wire current, much smaller than the external field B_0. The method to effectively remove roughness consists in modulating the wire currents at a frequency ω while the longitudinal field B_0 is kept constant.

III. EFFECT OF THE MODULATION ON THE LONGITUDINAL MOTION

Let us first assume the modulation frequency of the wire currents is small enough so that the atomic spin orientation can follow adiabatically the magnetic field orientation. The atoms are then subjected to the instantaneous potential $\mu|\mathbf{B}|$, where μ is the atomic dipole moment. For B_0 much larger than E/μ where E is the typical transverse atomic energy, the instantaneous transverse potential is harmonic and proportional to the instantaneous wire currents. Since the oscillation frequency of this potential is modulated in time, the transverse classical dynamics is described by a Mathieu equation, which predicts stable motion as long as $\omega > 0.87\omega_\perp$, where $\omega_\perp$ is the maximum instantaneous transverse oscillation frequency. This classical criteria is also predicted by quantum mechanics since the Wigner function evolves as a classical phase space distribution for a harmonic potential [13]. In this paper, we assume this stability condition is fulfilled and we focus on the longitudinal motion, assuming the longitudinal dynamics is decoupled from the transverse one. The longitudinal instantaneous potential is

$$V(z,t) = u(z)\cos(\omega t), \tag{1}$$

where $u(z) = \mu b_z(z)$, sketched in Fig.1, is produced by wire deformations. The idea of the method to smooth the roughness is that the longitudinal motion of the atoms does not have time to follow the time evolution of the potential. The atomic motion is then well described by the effect of the conservative potential $\langle V(z,t)\rangle$, where the time average is done over a modulation period. Since $\langle V(z,t)\rangle = 0$, the atoms do not experience any roughness. We study below the conditions on the modulation frequency ω for such an approach to be valid.

As the Hamiltonian experienced by the atoms is periodic in time, we use the well known Floquet representation [14], briefly presented below for the situation considered here. A new quantum number n_F is introduced, which gives a relative number of modulation energy quanta. The Hamiltonian in this representation is time-independent and contains two contributions. The first one,

$$H_0 = \sum_{n_F=-\infty}^{\infty} (p^2/(2m) + \hbar\omega n_F)|n_F\rangle\langle n_F|, \tag{2}$$

does not couple different Floquet subspaces. The second one,

$$H_1 = \sum_{n_F=-\infty}^{\infty} u(z)/2(|n_F\rangle\langle n_F+1| + |n_F+1\rangle\langle n_F|), \tag{3}$$

couples adjacent Floquet subspaces. If the state of the system in the Floquet representation is $\sum_{n_F}|\psi_{n_F}\rangle(t)|n_F\rangle$, where $|\psi_{n_F}\rangle(t)$ gives the state of the system in the manifold of Floquet number n_F, then the state of the system in the bare representation is $\sum_{n_F}|\psi_{n_F}\rangle(t)e^{-in_F\omega t}$. Expectation values of observables contain cross terms involving different Floquet numbers. However, as long as evolution on time scales much larger than $1/\omega$ is considered, such cross terms (interference terms) average to zero and the different Floquet states can be interpreted as physically different states. A given state has an infinite number of Floquet expansions. In particular, it is possible to assume that the initial state is in the Floquet manifold of Floquet number $n_F = 0$.

Let us consider a state $|p_0, n_F = 0\rangle$ of momentum p_0 in the Floquet manifold $n_F = 0$. The modulated rough potential u is responsible for two different phenomena. First, it induces a change rate of the atomic energy. This irreversible evolution is due to the continuous nature of the rough potential Fourier decomposition: the state $|p_0, n_F = 0\rangle$ is coupled to a continuum of momentum states of the adjacent Floquet subspaces $n_F = \pm 1$ and this coupling to a continuum induces a departure rate from the initial state, associated to a rate of kinetic energy change. Second, the modulated potential is responsible for the well known adiabatic potential experienced by atoms in fast modulated fields [15]. We show that this adiabatic potential is due to processes of order two in u that couple the state $|p_0, n_F = 0\rangle$ to the states $|p_1, n_F = 0\rangle$ *via* the virtually populated intermediate states $|q, n_F = \pm 1\rangle$.

In the first sub-section, we investigate the first phenomenum and compute the associated heating rate for a cloud at thermal quasi-equilibrium. In the second subsection, we derive the adiabatic potential experienced by the atoms. In both sections, we emphasize on the case where the potential roughness is that obtained at large distance from a flat wire having white noise border fluctuations.

A. Heating of the atomic cloud

Let us suppose the atom is initially in the state $|p_0, n_F\rangle$ of momentum p_0 in the Floquet manifold $n_F = 0$. As shown in Fig.2, this state is coupled by u to the continuum of momentum states in the Floquet manifold $n_F = \pm 1$, which leads to a decay of the initial state population. The momentum of the final states that fulfill energy conservation in the Floquet subspace $n_F = -1$ are $\pm\hbar q_+$ where $q_+ = \sqrt{k_0^2 + 2m\omega/\hbar}$, $k_0 = p_0/\hbar$ being the initial atomic wave vector. Decay towards these states involves the Fourier component $\pm q_+ - k_0$ of u and increases the kinetic energy of the atom by $\hbar\omega$. If $k_0^2 > 2m\omega/\hbar$, there exist states in the Floquet subspace $n_F = 1$ that have the same energy as the initial state. The momentum of those final states are $\pm\hbar q_-$ where $q_- = \sqrt{k_0^2 - 2m\omega/\hbar}$ and decay towards these states decreases the kinetic energy of the atom by $\hbar\omega$. A perturbative calculation, identical to that used to derive Fermi Golden rule, gives an

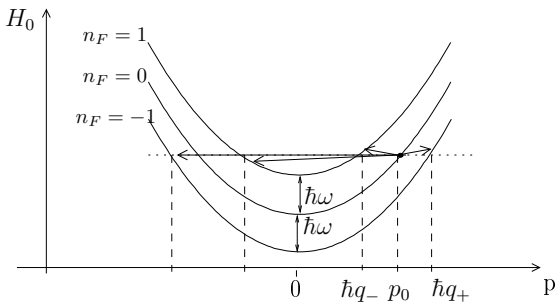

FIG. 2: Transitions responsible for a heating of the atomic cloud. The parabolas give the energy H_0, given in Eq. (2), versus the momentum p for different Floquet manifolds n_F. The state of momentum p_0 in the Floquet manifold $n_F = 0$ is coupled to different momentum states of the Floquet manifolds $n_F = \pm 1$ by the rough potential $u(z)$.

energy exchange rate

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi\omega m}{2\hbar^2}[(S(-k_0+q_+)+S(-k_0-q_+))/q_+ \\ -\Theta(|k_0|-\sqrt{2m\omega/\hbar})(S(-k_0+q_-)+S(-k_0-q_-))/q_-] \quad (4)$$

where $S(q) = 1/(2\pi)\int e^{iqz}\langle u(0)u(z)\rangle dz$ is the spectral density of u, characterized by the correlation length l_c, and $\Theta(x)$ is the Heaviside function that is zero for $x < 0$ and 1 for $x > 0$. The derivation of Eq. (4) is detailed in the appendix A. As pointed out in the appendix, Eq. (4) is not valid for initial momentum very close to $\sqrt{2m\hbar\omega}$. However, the range of k_0 for which the formula is not valid is in general very small and we ignore this in the following.

Apart from the rms amplitude of the roughness, which accounts only for a multiplicative factor in the rate of the energy change, three energy parameters enter into account: $E_\omega = \hbar\omega$ is the energy quantum corresponding to the modulation frequency, $E_m = ml_c^2\omega^2$ is about the kinetic energy of an atom that would travel over l_c during an oscillation period, and $E_c = p_0^2/(2m)$ is the atomic kinetic energy. In the following, we consider two different limits for which we give simplified expressions for the energy change rate: the classical limit and the quantum low energy limit.

Let us first assume that $E_\omega/E_c \ll 1$ and $E_\omega E_m^{1/2}/E_c^{3/2} \ll 1$. We show below that this two conditions ensures the validity of the classical behavior. The first inequality ensures that one can expand the quantity q_+ and q_- in power of $m\omega/(\hbar k_0^2)$. The second inequality ensures that the spectral components $S(-k_0 - q\pm)$ are negligible compared to the two other ones and that the latter are well approximated using a Taylor expansion of S. The energy change rate then writes

$$\frac{dE}{dt} = -\left[2\omega^2/v_0^3 S(\omega/v_0) + S'(\omega/v_0)\omega^3/v_0^4\right]\pi/(2m), \quad (5)$$

where $v_0 = \hbar k_0/m$ is the atomic velocity. This energy change rate does not depends on $\hbar$ and is thus a classical result. It is obtained through a classical calculation of kinetic energy change computed after expanding the atomic trajectory to second order in u. Note that, using the classical expression $E_c = mv_0^2/2$, the two conditions $E_\omega/E_c \ll 1$ and $E_\omega E_m^{1/2}/E_c^{3/2} \ll 1$ are verified in the limit where $\hbar$ goes to zero, as expected for the validity of classical physics.

Let us now consider the limit $E_\omega/E_c \gg 1$ and $E_c E_m^{1/2}/E_\omega^{3/2} \ll 1$, that we denote the quantum low energy limit. The first inequality ensures that the Heaviside function in Eq. (4) is zero and that q_+ can be replaced by $\sqrt{2\hbar\omega}$ in the denominator. The second inequality ensures that this replacement is also valid for the argument of the S function. Then the energy change rate given in Eq. (4) reduces to

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi\sqrt{m\omega}}{\sqrt{2\hbar^3}}\left[S(-k_0+\sqrt{2m\omega/\hbar}) + S(k_0+\sqrt{2m\omega/\hbar})\right]. \quad (6)$$

This is a quantum result, sensitive to the fact that energy exchange between the atom and the oscillating potential involves the energy quanta $\hbar\omega$. In the limit where $E_c \ll E_\omega^2/E_m$ ($k_0 \ll 1/l_c$), it converges towards a finite value

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi\sqrt{2m\omega}}{\sqrt{\hbar^3}} S(\sqrt{2m\omega/\hbar}), \quad (7)$$

that does not depends on the initial momentum $\hbar k_0/m$.

Let us now consider a cloud initially at thermal equilibrium with a velocity distribution $n(v_0)$. The heating rate, obtained after averaging Eq. (5) over $n(v_0)$, is

$$k_B\frac{dT}{dt} = 2\int_0^\infty n(v_0)\frac{dE}{dt}dv_0, \quad (8)$$

where k_B is the Boltzmann factor. Although the heating rate depends on the precise shape of the spectral density S, some general properties can be derived.

First, although the energy change rate may be negative for some velocities, we show below that dT/dt is always positive. For a longitudinally homogeneous gas, this positivity ensures the increase of the entropy, as required by the second law of thermodynamics in the absence of heat exchange with the cloud and without gaining information on the system. To demonstrate that $dT/dt > 0$, we perform a change of variables in the four integrals obtained by substituting Eq. (4) into Eq. (8) to find

$$k_B\frac{dT}{dt} = \pi\omega\sqrt{m}/\hbar \\ \int_0^{Q_0}\frac{dq}{q}S(q)\left(n(\omega/q-\hbar q/(2m)) - n(\omega/q+\hbar q/(2m))\right) \\ + \int_{Q_0}^\infty\frac{dq}{q}S(q)\left(n(\hbar q/(2m)-\omega/q) - n(\omega/q+\hbar q/(2m))\right) \quad (9)$$

where $Q_0 = \sqrt{2m\omega/\hbar}$. For a thermal equilibrium distribution, $n(v)$ is a decreasing function of $|v|$. Furthermore, the spectral density is a positive function. We thus find that $dT/dt > 0$ so that the effect of the potential roughness is always a heating of the cloud. Eq. (9) also shows

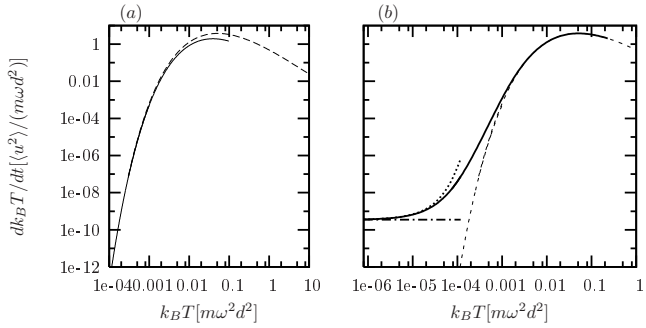

FIG. 3: Heating rate of a cloud as a function of its temperature, for a modulated rough potential whose spectral density is given by Eq. (11). Graph (a): classical predictions (dashed lines) and asymptotic behavior at low temperature given by Eq. (12) (solid line). Graph (b): exact result for $\omega/(2\pi) = 200\hbar/(md^2)$ (solid line) compared with the quantum low energy prediction (dotted line), the asymptotic prediction of Eq. (13) (dashed dotted lines) and the classical result (dashes).

that the heating rate goes to zero at very large temperature, since n is then about flat over the explored velocities.

Second, for large enough temperatures one expects to recover the classical result and the heating rate should not depend on $\hbar$. Then the heating rate depends only on the four independent quantities $\langle u^2\rangle$, E_m, ω and k_BT. Since $\langle u^2\rangle$ enters only as a multiplicative factor in the heating rate, using dimensional analysis we show that k_BdT/dt is the product of $\langle u^2\rangle/(m\omega l_c^2)$ and a function of k_BT/E_m. As a consequence, if the function giving the heating rate versus T is known for a given value of ω and E_m, then the heating rate is known for any value of T, E_m and ω.

Finally, at low enough temperatures, the heating rate is well estimated by substituting Eq. (6) into Eq. (8). One expects that the heating rate converges towards Eq. (7) when temperature becomes much smaller than $\hbar\omega$ and $\hbar^2/(ml_c^2)$.

In the following, we give quantitative results in the case of a potential roughness obtained at large distance d from a flat wire whose borders have white noise fluctuations of spectral density J_f. In this condition, the spectral density of u is given by [9, 10]

$$S(k) = J_f \frac{(\mu_0\mu I)^2}{4\pi^2} k^4 K_1(kd)^2 \qquad (10)$$

where K_1 is the modified Bessel function of the first kind. The typical correlation length of u is the distance above the wire d so that $E_m = m\omega^2 d^2$. The mean square of the rough potential is $\langle u^2\rangle \simeq 0.044(\mu\mu_O I)^2 J_f/d^5$. In the following we use $\langle u^2\rangle$ as a parameter instead of J_f. The spectral density of u then writes

$$S(k) = \alpha\langle u^2\rangle d(kd)^4 K_1(kd)^2, \qquad (11)$$

where $\alpha \simeq 23$.

We first study the heating rate predicted by classical physics. This classical heating rate is plotted in Fig.3(a) as a dashed line. The temperature and heating rate are scaled to E_m and $\omega\langle u^2\rangle/E_m$ respectively in the graph so that the curves corresponding to the classical predictions are independent of the problem parameters. We observe the expected decrease to zero of the heating rate at high temperatures. We also observe a rapid decrease of the heating rate as temperature decreases, for temperatures much smaller than E_m. The maximum heating rate is about $2.1\langle u^2\rangle/(m\omega d^2)$ and is obtained for the temperature $k_BT_M \simeq 0.07E_m$. For $d = 5$ μm and $\omega/(2\pi) = 50$ kHz, which are parameters similar to that of the experiment presented in [1], $T_M = 1.8$ mK. Typical cold atoms temperatures are much smaller than this value and it is thus of experimental interest to investigate in more detail the regime $T \ll T_M$.

The decrease of the heating rate for $T \ll T_M$ is expected since then the atoms move on a distance much smaller than the correlation length of the rough potential during a modulation period. The atoms are then locally subjected to an oscillating force almost independent of z and the atomic motion can be decomposed into a fast micro-motion in phase with the modulation and a slow motion. The micro-motion being almost in phase with the excitation force, barely no energy exchange between the atom and the potential arises on a time scale larger than the modulation period. More quantitatively, we can derive an analytical expression of the heating rate in the regime where $T \ll T_M$, which shows the decrease of the heating rate as temperature decreases. For such low temperatures, as shown *a posteriori* below, wave vector of S that contribute to the heating rate are much larger than $1/d$ so that we can replace the Bessel function $K_1(x)$ in Eq. (11) by its asymptotic value at large x. We then find that the integrand in Eq. (8) is peaked around $v_0 = 2^{1/3}(k_BT\sqrt{E_m})^{1/3}/m$ and the Laplace method gives the following approximation of the heating rate:

$$\frac{k_BdT}{dt} = \beta\frac{\omega\langle u^2\rangle}{E_m}\left(\frac{E_m}{k_BT}\right)^{7/3} e^{-3(E_m/(2k_BT))^{1/3}} \qquad (12)$$

where $\beta \simeq 0.36$. This asymptotic function is plotted in Fig.3 (a) (solid line). It coincides with the exact classical result within 20% as long as $k_BT < 0.002E_M$. The above expression of v_0 and Eq. (5) validate the expansion at large x of the Bessel function $K_1(x)$ for $T \ll T_M$.

The limit of validity of the classical results described above is given by $E_\omega/E_c \ll 1$ and $E_\omega E_m^{1/2}/E_c^{3/2} \ll 1$, where $E_c \simeq mv_0^2$, v_0 being the typical velocity involved in the heating process. Using the above value for v_0, the condition of valididty of the classical regime reduces, for $E_\omega \ll E_m$, to $k_BT \gg E_\omega$. For $\omega/(2\pi) = 50$ kHz, we find that the classical regime fails for temperatures $T \ll 2$ μK. At lower temperatures, quantum analysis is required to estimate the heating rate.

For the parameters chosen above ($d = 5$ μm and $\omega/(2\pi) = 50$ kHz), $E_m/E_\omega = 10^4$ and the heating

rate is exponentially small at temperatures smaller than a micro-Kelvin when classical physics fails (the term $e^{-3(E_m/(2k_BT))^{1/3}}$ in Eq. (12) is 3×10^{-31} for $T = 1$ μK.). Thus, in order to investigate the heating rate beyond the classical approximation, we consider a different situation for which E_m/E_ω is only equal to 200. This would correspond, for the same distance $d = 5$ μm, to a modulation frequency of only 1 kHz. The exact heating rate, which is computed by substituting Eq. (4) into Eq. (8), is plotted in Fig.3 (b). This calculation shows that the classical result is valid up to a factor of 2 as long as $k_BT > 0.2E_\omega$. At smaller temperatures, the classical result underestimates the heating rate. At temperature much smaller than $E_\omega^{3/2}/\sqrt{E_m}$, the heating rate is well approximated by the predictions in the low energy quantum limit where Eq. (6) is valid. This prediction is represented as a dotted line in the graph. At temperatures much smaller than E_ω^2/E_m (i.e. for $k_BT \ll \hbar^2/(md^2)$), the heating rate converges towards Eq. (7). Assuming $E_m/E_\omega \gg 1$, then the expansion of S at large wave vector can be used and Eq. (7) gives

$$k_B dT/dt = \zeta\langle u^2\rangle/\hbar(m\omega d^2/\hbar)^2 e^{-2\sqrt{m\omega d^2/\hbar}} \qquad (13)$$

where $\zeta \simeq 4.0$. This asymptotic value is plotted in Fig.3 as dashed-dotted lines. The heating rate is equal to this limit up to a factor of 2 as soon as $k_BT < 0.2E_\omega^2/E_m$.

The heating of the atomic cloud can easily be made small enough experimentally to have no noticeable effects. Let us for example consider the situation, similar to the experiment in [1], where $d = 5$ μm and $\sqrt{\langle u^2\rangle} = 50$ nK. If the modulation frequency is as low as 1 kHz, then the maximum heating rate is 3 μK/s and is obtained for a temperature of 700 nK. Thus, for such a low modulation frequency, the heating may be a problem in experiments. However, as soon as the modulation frequency is increased to 50 kHz, as in [1], the maximum heating rate is only of 64 nK/s and is obtained at a large temperature of 1.8 mK. At lower temperature, the exponential decrease of the heating rate shown in Eq. (12) rapidly decreases the heatig rate to completely negligible values.

B. Effective remaining potential

In this subsection, we show that Raman processes (of second order in u), in which adjacent Floquet states are virtually populated, are responsible for the effective potential

$$V_{ad} = (\partial_z u)^2/(4m\omega^2). \qquad (14)$$

This potential is a well known classical result [15] that corresponds to the kinetic energy of the micro-motion of the atom. At large oscillation frequency, the micro-motion has an amplitude $\xi \simeq -\partial_z u/(m\omega^2)\cos(\omega t)$ much smaller than the correlation length of u. It is in phase with the excitation force and has a kinetic energy V_{ad}. In this limit, since the micro-motion is in phase with the excitation force, the energy transfer between the atom and the potential, averaged over a modulation period, vanishes. Energy conservation then shows that the slow motion of the atom is subjected to an effective rough potential V_{ad}. It is well known that this effective potential, due to the fast atomic micro-motion, is responsible for the confinement in rapidly modulated Paul traps. A quantum derivation of V_{ad} has already been done in [13] using a secular approximation. Here we give an alternative derivation based on the Floquet representation.

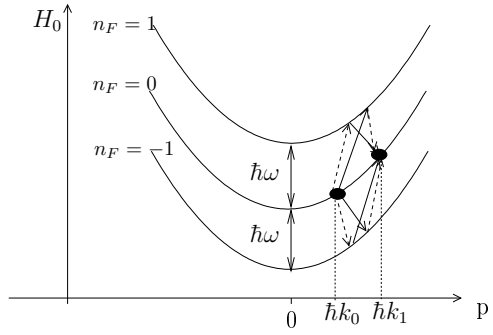

FIG. 4: Raman transitions responsible for the adiabatic potential of Eq. (14). The second order coupling between two momentum states of wave vector k_0 and k_1 is sketched. The coupling produced by two Fourier components of u of wave vector q and $q' = k_1 - q - k_0$ are represented as dashed and solid arrows respectively.

Let us compute the effective coupling between the states $|k_0\rangle$ and $|k_1\rangle$ of momentum $\hbar k_0$ and $\hbar k_1$ respectively, both being in the Floquet subspace $n_F = 0$. For this purpose, we first investigate the effect of a given pair of Fourier components of u that couple the two previous states. Their wave vectors are q and $q' = k_1 - k_0 - q$. Four processes are involved in the effective coupling between $|k_0\rangle$ and $|k_1\rangle$, as sketched in Fig.4 and the effective coupling is the sum of the four amplitudes. The precise effective coupling between two "ground" states coupled via an intermediate level has been investigated in [16]. The authors show that the effective coupling is V_1V_2/Δ where V_1 and V_2 are the coupling to the intermediate state and Δ is the difference between the energy of the intermediate state and the mean energy of the two "ground" states. Using this result, we find that the effective coupling associated with each process is

$$v_{\text{eff}} = u_q u_{q'}/(4(\hbar^2(k_0+\kappa)^2)/(2m) \pm \hbar\omega - E_0), \qquad (15)$$

where κ is q or q' depending on the process and $E_0 =$

$\hbar^2(k_0^2+k_1^2)/(4m)$. Adding the four amplitudes, we find

$$V_{\rm eff} = \frac{u_q u_{q'}}{4}\left(\frac{\hbar^2(k_0+q)^2/m - 2E_0}{(\hbar^2(k_0+q)^2/(2m)-E_0)^2-\hbar^2\omega^2} + \frac{\hbar^2(k_0+q')^2/m - 2E_0}{(\hbar^2(k_0+q')^2/(2m)-E_0)^2-\hbar^2\omega^2}\right). \tag{16}$$

Assuming that the kinetic energies of the final, initial and intermediate states are all much smaller than $\hbar\omega$, the denominator can be simplified to $\hbar^2\omega^2$ and we obtain

$$V_{\rm eff} = \frac{u_q u_{q'} q q'}{2m\omega^2}. \tag{17}$$

Doing the sum over the pairs (q,q'), we find that the coupling between the momentum states is that realised by the potential of Eq. (14).

An alternative way to derive the adiabatic potential is to use a dressed Floquet representation. As shown in appendix B, calculations are more straightforward in this representation and no detailed knowledge on the effective coupling corresponding to a transition through a virtually populated state is required.

The residual roughness given in Eq. (14) constitutes a limitation of the modulation method. It scales as $\langle u^2\rangle/(ml_c^2\omega^2)$ where l_c is the typical correlation length of u. Thus it is much smaller than the initial roughness amplitude as soon as $u_{rms} \ll ml_c^2\omega^2$. In the case where the roughness potential spectral density is that obtained at large distance d from a wire having white noise border fluctuations of spectral density J_f, we obtain a mean value

$$\langle V_{\rm eff}\rangle = 0.048 J_f \frac{(\mu_0\mu I)^2}{m\omega^2 d^7} = 1.1\langle u^2\rangle/(m\omega^2 d^2). \tag{18}$$

If the wire edges deformations have a gaussian probability distribution, then the roughness of the remaining potential is simply $\sqrt{\langle V_{\rm eff}^2\rangle - \langle V_{\rm eff}\rangle^2} = \sqrt{2}\langle V_{\rm eff}\rangle$. For $d = 5\ \mu$m, $\omega/(2\pi) = 50$ kHz and $\langle u^2\rangle/k_B = 500$ nK, the roughness of the effective remaining potential is as small as 0.09 nK.

IV. LOSSES DUE TO SPIN-FLIP TRANSITIONS

All the previous analysis assume the atomic spin can adiabatically follow the direction of the instantaneous field when the current is modulated. In this section, we investigate the conditions on the modulation frequency for this adiabatic following condition to be valid. Non adiabaticity induces losses via spin-flip transitions to the untrapped states. Intuitively, we expect that the losses are small for a modulation frequency much smalller than the Larmor frequency. In the following we compute this loss rate, following calculations made in [17] for the DC-case.

Let us consider a spin-one atom in the modulated guide described in section II with $\omega \gg \omega_\perp$. We choose a coordinate system whose origin is at the quadrupole field center and of axis x and y at 45° with the quadrupole axis as depicted in Fig.1. We assume the atomic magnetic moment is $\mu\mathbf{J}/\hbar$ where $\mathbf{J}$ is the atomic spin angular momentum of components J_x, J_y and J_z along x, y and z respectively. We note $|\pm 1\rangle$ and $|0\rangle$ the eigenstates of J_z of eigenvalues $\pm\hbar$ and 0, respectively.

The magnetic field direction depends on the position and on time. We apply a spatially and time dependent spin rotation $\mathcal{R}(t,x,y)$ so that $\mathcal{R}|1\rangle$ points along the instantaneous local magnetic field direction. In such a representation, the Hamiltonian is

$$H = \mathcal{R}^{-1}\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\mathcal{R} + UJ_z/\hbar + i\hbar\frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt}\mathcal{R} \tag{19}$$

where

$$U = \mu B_0 + m\omega_\perp^2\cos^2(\omega t)(x^2+y^2)/2. \tag{20}$$

Here we assume $m\omega_\perp^2(x^2+y^2) \ll \mu B_0$ so that the harmonic approximation is valid. We also neglect the effect gravity. This later assumption is relevant as soon as $g \ll l_\perp\omega_\perp^2$ where $l_\perp = \sqrt{\hbar/(m\omega_\perp)}$ is the harmonic oscillator length. This condition ensures that the time-averaged potential is barely affected by the gravity and that the acceleration of the atoms over the spatial extension of the trapped state has a negligible effect.

We choose the rotation $\mathcal{R}$ as a product of a rotation along x and a rotation along y. To first order in x and y, $\mathcal{R}$ is

$$\mathcal{R} = 1 + i\theta_x J_x/\hbar + i\theta_y J_y/\hbar. \tag{21}$$

where the angles of the rotations along x and y are $\theta_x = -b'x\cos(\omega t)/B_0$ and $\theta_y = b'y\cos(\omega t)/B_0$ respectively. Here $b' = \omega_\perp\sqrt{2mB_0/\mu}$ is the quadrupole gradient at maximum current. Calculation to first order in θ_x, θ_y gives

$$\mathcal{R}^{-1}\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\mathcal{R} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V_k \tag{22}$$

where

$$V_k = \frac{\sqrt{2}b'\cos(\omega t)}{B_0}(p_x - ip_y)|0\rangle\langle 1| + h.c. \tag{23}$$

and $h.c.$ stands for hermitian conjugate. Here, we ignore the state $|-1\rangle$, which is relevant for low enough coupling (see below). The term V_k, due to the fact that $\mathcal{R}$ depends on the position, is responsible for spin-flip losses in time independent ioffe magnetic traps [17]. Within the approximations made, the position dependence of $\mathcal{R}$ has no effect on the Hamiltonian within the spin state $|1\rangle$ manifold: the Coriolis coupling analysed in [20], that corresponds to a rotation frequency proportional to b'^2, is not seen in this calcuation.

Similar calculations give

$$i\hbar\frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt}\mathcal{R} = \frac{\hbar\omega b'}{\sqrt{2}B_0}\sin(\omega t)(x-iy)|0\rangle\langle 1| + h.c. \tag{24}$$

This term, due to the time modulation of the local spin orientation, may also produce spin-flip losses in modulated traps. The condition $\omega \gg \omega_\perp$ ensures that the term of Eq. (24) has an effect much larger than the term of Eq. (23) and we neglect the latter in the following.

As in the previous section, we use the Floquet representation. The Hamiltonian H in the manifold of spin state $|1\rangle$ is decomposed into the term

$$H_0 = \sum_{n_F=-\infty}^{\infty} (p^2/2m+m\omega_\perp^2(x^2+y^2)/4+n_F\hbar\omega)|1,n_F\rangle\langle 1,n_F| \tag{25}$$

and the term

$$H_2 = m\omega_\perp^2(x^2+y^2)/4\left(\sum_{n_F=-\infty}^{\infty} |1,n_F+2\rangle\langle 1,n_F| + h.c.\right) \tag{26}$$

that couples the Floquet n_F state to the Floquet states $n_F \pm 2$. Here, $|1,n_F\rangle$ is the state vector of an atom in the spin state $|1\rangle$ with the Floquet number n_F. The term H_2 is due to the part of Eq. (19) that is proportional to $\cos(2\omega t)$. Since we assumed $\omega \gg \omega_\perp$, the effect of H_2 is weak and can be treated perturbatively.

We will compute the loss rate of an atom initially in the spin state $|1\rangle$ of Floquet number $n_F = 0$ and in the ground state ϕ_0 of H_0. The term of Eq. (24) couples this trapped state to the untrapped spin states $|0\rangle$ of Floquet numbers $n_F = \pm 1$. The energy spectrum of the spin state $|0\rangle$, which is unaffected by the magnetic field, is a continuum. Coupling to this continuum leads to a departure rate from the initial state, provided the Markov approximation is fullfiled [18]. This approximation also ensures that the state $|-1\rangle$ can be neglected. We will show below that losses to the Floquet manifold $n_F = +1$ are much larger than losses to the Floquet manifold $n_F = -1$. Thus, we consider in the following the final states in the manifold $n_F = +1$. Since $i\hbar\frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt}\mathcal{R}$ does not affect the longitudinal motion, we concentrate on the transverse degrees of freedom and normalise ϕ_0 to $\iint dxdy|\phi_0|^2 = 1$. In addition, because $i\hbar\frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt}\mathcal{R}\phi_0$ is, up to a phase factor $e^{i\theta}$, invariant under rotation of angle θ in the xy plane, the losses to spin 0 states are isotropic in the xy plane. It is thus sufficient to compute the departure rate towards a plane wave travelling in the x direction. The final state wave vector is

$$k_f = \sqrt{2m(\mu B_0 + \hbar\omega_\perp/\sqrt{2} - \hbar\omega)}/\hbar, \tag{27}$$

and the Fermi Golden rule gives the departure rate

$$\Gamma_0 = \sqrt{2}\pi\frac{\omega^2}{m\mu B_0\omega_\perp}\hbar k_f^2 e^{-\sqrt{2}\hbar k_f^2/(m\omega_\perp)}. \tag{28}$$

The departure decreases exponentially with the bias field B_0, as for a usual time independent ioffe trap [17]. However, in the modulated trap, an additional exponential factor in $\omega/\omega_\perp$ reflects the fact that the Floquet level is increased by one while the spin is flipped. This transition is associated with the "emission" of a quantum of energy $\hbar\omega$, given to the oscillating magnetic field. Equation (28) also shows that the departure rate goes to zero for a modulation frequency very close to the frequency $\mu B_0/\hbar + \omega_\perp/\sqrt{2}$, *i.e.* for vanishing k_f. This cancellation is due to the fact that the coupling term of Eq. (24) is odd in x whereas the initial state is even and the final state, whose wave vector is vanishing, is flat. The departure rate towards the Floquet state $n_F = -1$ is identical to Eq. (28), ω being replaced by $-\omega$. Since we assumed $\omega \gg \omega_\perp$, the loss rate towards the Floquet state $n_F = -1$ is negligible compared to Eq. (28).

The condition $\omega \gg \omega_\perp$ and Eq. (28) show that the loss rate is exponentially small when ω reaches $\omega_1 = (\mu B_0/\hbar + \omega_\perp/\sqrt{2})/3$, the value for which the initial state has the same energy as the untrapped state of Floquet number $n_F = 3$ and of vanishing momentum. For modulation frequencies smaller than ω_1, second order processes resonantly couple the initial state to the untrapped state $|0\rangle$ of Floquet number $n_F = 3$. In theses processes, represented in Fig.5, the term H_2 of Eq. (26) first transfers the atoms in the virtually populated intermediate trapped state $|1\rangle$ of Floquet number $n_F = 2$ before the term $i\hbar\frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt}\mathcal{R}$ realizes the transfer to the untrapped state $|0\rangle$ of Floquet number $n_F = 3$. Although H_2 is weak, the loss rate associated with the second order processes is much larger than the exponentially small Γ_0.

More generally, for a given modulation frequency, losses are dominated by transitions towards untrapped states of Floquet number $n_F = 2n+1$ where $n = E((\mu B_0/\hbar + \omega_\perp/\sqrt{2})/(2\omega) - 1/2)$, the function $E(x)$ being the integer part of x. Those transitions correspond to processes where the atoms is first brought to the intermediate state $|1\rangle$ of Floquet number $n_F = 2n$ by n transitions produced by the term H_2 and is then transferred to the untrapped state $|0\rangle$ of Floquet number $n_F = 2n+1$ by the term $i\hbar d\mathcal{R}^{-1}/dt\mathcal{R}$ of Eq. (24). Perturbation theory gives an effective coupling between the state $|1\rangle$ of Floquet number $n_F = 0$ and the states $|0\rangle$ of Floquet number $n_F = 2n+1$ which is

$$U_n = -i\frac{\hbar\omega b'(x-iy)}{n!2\sqrt{2}B_0}(m\omega_\perp^2(x^2+y^2)/(16\hbar\omega))^n. \tag{29}$$

The eigenstates of H_0 in the virtual intermediate states do not appear because, since we assumed $\omega \gg \omega_\perp$, the energy difference between the intermediate states is negligible and a resummation is possible.

The departure rate from the initial state towards the Floquet state $n_F = 2n+1$ is computed from U_n using the Fermi Golden Rule. As for the calculation of Γ_0, it is sufficient to compute the departure rate in the x direction and we obtain

$$\Gamma_n = \frac{m\omega^2 b'^2}{8\hbar B_0^2}\frac{(m\omega_\perp^2)^{2n}}{n!^2(16\hbar\omega)^{2n}} \left|\iint dxdy(x-iy)e^{ik_f x}\phi_0(x,y)(x^2+y^2)^n\right|^2 \tag{30}$$

where $k_f = \sqrt{2m(\mu B_0 + \hbar\omega_\perp/\sqrt{2} - (2n+1)\hbar\omega)}/\hbar$ is

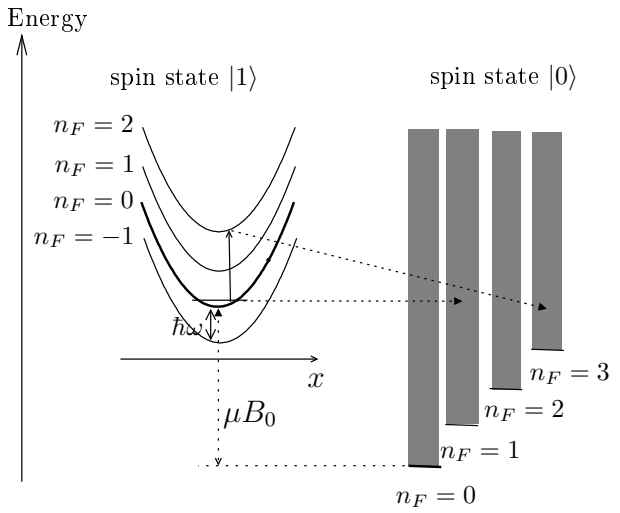

FIG. 5: Transitions responsible for spin flip losses. For the spin state $|1\rangle$, the potential energy term of Eq. (25) is represented as well as the energy of the ground state in the $n_F = 0$ manifold. For the spin state $|0\rangle$, we represented, for each Floquet manifold n_F, the whole energy spectrum, which is a semi-continuum starting at an energy $n_F\hbar\omega$. The transitions induced by the term of Eq. (24) are shown as dotted arrows whereas transitions due to the term H_2 of Eq. (26) are shown as solid lines. The initial state is the spin state $|1\rangle$ of Floquet number $n_F = 0$. For the two final Floquet states $n_F = 1$ and $n_F = 3$, only the dominant processes are sketched, whose amplitude are U_0 and U_1 respectively, where U_n is given in Eq. (29). In this picture, the odd Floquet state of $|0\rangle$ the closest to resonance corresponds to $n_F = 3$ and losses are dominated by Γ_1, where Γ_n is given in Eq. (30).

the wave vector of the final state. Using the gaussian expression for the ground state $\phi_0(x, y)$ in Eq. (30), we can show that Γ_n is the product of a polynomial in k_f and of the exponential factor $e^{-\sqrt{2}\hbar k_f^2/(m\omega_\perp)}$. The minima of the polynomial correspond to destructive interferences between the amplitude probabilities of paths having different intermediate vibrational states. Since $\hbar k_f^2/m$ is reduced by 4ω when increasing n by one and since we assumed $\omega \gg \omega_\perp$, the exponential factor ensures, as stated above, that the total loss rate is dominated by the departure towards the highest Floquet subspace.

Figure 6 gives the departure rate of the trapped ground state as a function of ω for $\mu B_0 = 50\hbar\omega_\perp$. We observe several peaks that reflect the resonance behavior at integer values of $(\mu B_0 + \omega_\perp/\sqrt{2} - \omega)/(2\omega)$. The height of the resonances goes down with the integer n as expected since the order of the transition increases with n. We verify that the loss rate is dominated by the losses towards the Floquet state of highest odd Floquet number, as expected. Between two resonances, we observe the expected exponential decrease of the loss rate. We observe a structure in the loss rate for losses to Floquet state larger than one, as expected.

The lifetime of a thermal Maxwell-Boltzmann distribution is obtained after averaging the loss rate over the thermal distribution. In this calculation, ϕ_0 in Eq. (30) is replaced by the eigenstate $\phi_i(x)\phi_j(y)$, where i and j denotes the vibrational level. Neglecting changes of the final energy $\hbar^2 k_f^2/(2m)$ across the thermal distribution, we can compute the departure rate Γ_0 for a Maxwell-Boltzmann distribution. More precisely, writing Eq. (30) as a fourth integral and using properties of Wigner functions we find, for temperatures $k_B T \gg \hbar\omega_\perp$,

$$\Gamma_0 = \frac{\pi^3}{2}\omega_\perp \frac{\hbar^3\omega_\perp\omega^2}{(k_B T)^3} e^{-(\mu B_0 - \hbar\omega)/(k_B T)}. \qquad (31)$$

Because of the crude approximation that the final energy does not depend on the initial state, this result is only valid up to a factor of the order of unity.

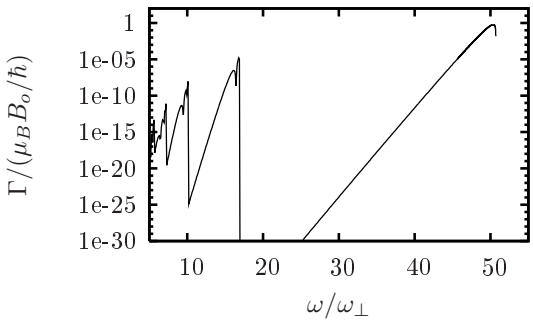

FIG. 6: Loss rate from the vibrational ground state versus the modulation frequency. The longitudinal magnetic field and the quadrupole gradient are chosen so that $\mu B_0/(\hbar\omega_\perp) = 50$.

Experimentally, spin flip losses can easily be avoided by properly choosing the modulation frequency. For example, let us assume the transverse oscillation frequency of the instantaneous trap at maximum current is $\omega_\perp/(2\pi) =$ 50 kHz and the longitudinal magnetic field fulfills $B_0 = 50\hbar\omega_\perp/\mu$. If $\mu = \mu_B$ where μ_B is the Bohr magneton, this corresponds to $B_0 = 1.8$ G and the Larmor frequency $\mu B_0/\hbar$ is 2.5 MHz. In these conditions, the loss rate is dominated the term Γ_0 of Eq. (28) as long as the oscillation frequency is larger than 0.84 MHz and, in this frequency range, it is smaller than 1 s^{-1} as soon as $\omega <$ 2.2 MHz. For $\omega < 0.84$ MHz, losses become dominated by transitions towards states of higher Floquet number and the loss rate is peaked at modulation frequencies close to integer values of $\mu B_0/(2\hbar\omega) + \omega_\perp/(2\sqrt{2}\omega) - 1/2$. In particular, loss rate goes up to about 25 s^{-1} for a modulation frequency close to 0.8 MHz. Thus, the vicinity of this resonance should be avoided experimentally. Resonances of higher order are less problematic since the maximum loss rate they induce is smaller than 0.1 s^{-1}.

V. RADIO-FREQUENCY EVAPORATION IN THE MODULATED GUIDE

In this section we present general considerations on forced evaporation in a modulated guide. Since evapo-

rative cooling is most efficiently realised in a 3D trap, longitudinal confiment is required. A 3D trap can be obtained from the modulated guide of section II by applying a z-dependent constant longitudinal field $B_0(z)$. Here, we consider evaporation in the transverse plane (xy) at a given z position and denote as B_0 the longitudinal magnetic field. For this purpose, in addition to the previous trapping potential, we apply a weak radio frequency magnetic field polarized in the x-direction, of frequency ω_{RF} and of amplitude B_{RF}. We consider here an atom of magnetic moment $\mu\mathbf{J}/\hbar$, where $\mathbf{J}$ is the atomic spin angular mometum.

Let us first give simple predictions, that rely only on the fact that, because of the modulation at 2ω of the trapping potential, the atomic Larmor frequency is modulated in time. The modulation amplitude $\delta\Omega$ increases, in the transverse plane, with the distance r from the trap center according to $\delta\Omega = \mu b'^2 r^2/(4\hbar B_0)$. Considering only the internal atomic dynamics at a given position, the modulation of the Larmor frequency is equivalent, within the rotating wave approximation, to a frequency modulation of the radio-frequency field. In this picture, the radio frequency spectrum consists of a carrier at the frequency $\omega_{\rm RF}$ and side-bands spaced by 2ω, the relative amplitude of the $n^{\rm th}$ sideband with respect to the carrier being $J_n(\mu(b'r)^2/(8B_0\hbar\omega))$, where J_n is the Bessel function of the first kind. Thus, for a given frequency of the applied RF field, the coupling to the untrapped state is resonant for the positions r_n such that

$$\omega_{RF} = \mu B_0/\hbar + \mu b'^2 r_n^2/(4B_0) - 2n\omega, \qquad (32)$$

where n is a integer. The coupling between the spin states close to a resonance position r_n is

$$V_n = V_0 J_n(\mu(b'r)^2/(8B_0\hbar\omega)) \qquad (33)$$

where V_0 is the coupling produced by the radio-frequency field in the absence of modulation. Such a shell structure of the spin flip transition resonances is characteristic of AC magnetic traps. For example, the same behavior is expected in TOP traps [19], where the Larmor frequency is also modulated in time.

In the following, we verify the statements made above by a more rigorous derivation. As in the previous section, we consider the representation in which the spin up state points along the local instantaneous magnetic field. The RF field produces a term in the Hamiltonian experienced by the atoms which is, to first order in the angles $\theta_x = -b'x\cos(\omega t)/B_0$ and $\theta_y = b'y\cos(\omega t)/B_0$,

$$\begin{aligned} H_{RF} &= \mu B_{\rm RF}\cos(\omega_{\rm RF}t)J_x \\ &\quad -\mu B_{\rm RF} b'y/B_0 \cos(\omega_{\rm m}t) cos(\omega_{\rm RF}t) J_z. \end{aligned} \qquad (34)$$

The right hand side is divided in two terms. The first term (first line) corresponds to the usual coupling between the spin states in the presence of the RF field. The second term (second line) appears due to the time dependence of $\mathcal{R}$. As in the previous section, in the following we consider the case of a spin one state and we restrict ourself to the two spin states $|1\rangle$ and $|0\rangle$. We then have $H_{RF_1} = H_{RF_1} + H_{RF_2}$, where

$$H_{RF_1} = \mu B_{\rm RF}\cos(\omega_{\rm RF}t)(|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|)/\sqrt{2} \qquad (35)$$

and

$$H_{RF_2} = -\frac{\mu B_{\rm RF} b'y}{B_0}\cos(\omega_{\rm m}t) cos(\omega_{\rm RF}t)|1\rangle\langle 1|. \qquad (36)$$

To analyze the effects of the RF field, we use the Floquet representation where two quantum number are used: the Floquet number n_F associated to the modulation frequency ω and $N_{\rm RF}$, the number of radio-frequency photons. We consider an atom in the trapped spin $|1\rangle$ state, with $N_{\rm RF}$ radio frequency (RF) photons. Because B_{RF} is weak, we only consider transitions involving a single RF photon and we only consider transitions to the quasi-resonant states where the spin is 0 and the number of RF photons is $(N_{\rm RF} - 1)$.

Let us suppose the initial trapped state is in the $n_F = 0$ manifold. The term H_{RF_1} couples the initial state to the spin 0 state in the manifold $|N_{\rm RF} - 1, n_F = 0 >$. This transition is resonant for the position r_0 given by Eq. (32) and the coupling to the spin 0 state is $\mu B_{RF}/\sqrt{2}$. The initial state can also be transferred to the spin 0 state in the $|N_{\rm RF} - 1, n_F = \pm 2 >$ manifolds by higher order processes. These transitions, resonant for the position $r_{\pm 1}$ given by Eq. (32), can occur via two kind of processes, represented in Fig.7 in the case where the final state lies in the manifold $n_F = 2$. In the first process, H_2 of Eq. (26) couples the initial state to the spin 1 state in the manifold $|N_{\rm RF}, n_F = \pm 2\rangle$, which is then transferred by the term H_{RF_1} to the spin 0 final state (process a). In the second kind of processes (process b), the transfer from the spin state 1 to the spin state 0 is ensured by the term $i\hbar\frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt}\mathcal{R}$ of the Hamiltonian (see Eq. (24)), and the term H_{RF_2} of the radio-frequency coupling is involved. In the case where $\omega \ll \mu B_0/\hbar$, the process (b) have a negligible amplitude and only the process (a) is important.

In a more general way, the initial state can be transferred to the final state of odd Floquet number $n_F = 2n$, the transitions being resonant at the positions r_n given by Eq. (32). The dominant processes involve the first term H_{RF} given in Eq. (32) and the term H_2 to order n. The effective coupling between the trapped state and the spin 0 state of Floquet number $2n$, computed to lowest order in H_2, is

$$V_{n,eff} = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{\mu b'^2 r^2}{16 B_0 \hbar\omega}\right)^{|n|}\frac{\mu B_{RF}}{\sqrt{2}}. \qquad (37)$$

We recover here the result of Eq. (33), in the limit considered here where $\hbar\omega \gg \mu b'^2 r^2/(8B_0)$. Thus the simple description in terms of frequency modulation of the Larmor frequency is sufficient to describe the physics.

In conclusion, we have shown that the radio-frequency field is resonant for different trap locations, whose potential energy differ by $2\hbar\omega/k_B$. For a modulation frequency

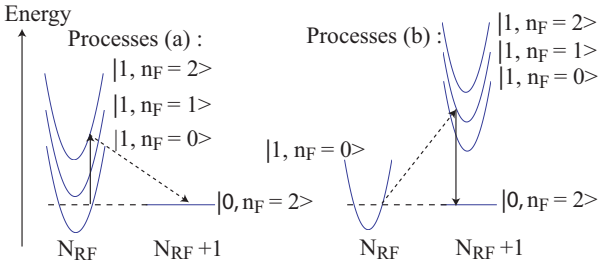

FIG. 7: Processes involved in the transition from the trapped state $|1, n_F = 0, N_{\rm RF}\rangle$ to the untrapped state $|0, n_F = 2, N_{\rm RF} - 1\rangle$. The process (a) involves the Hamiltonian H_2 of Eq. (26) (solid line) and the term H_{RF_1} of Eq. (35) (dashed line). The process (b) involves the term H_{RF_2} of Eq. (36) (dashed line) and the term $i\hbar\partial\mathcal{R}^{-1}/\partial t\mathcal{R}$ of Eq. (24) (solid line). For $\omega \ll \mu B_0$, the process (a) is the dominant one.

of 50 kHz, the potential energy difference between two resonances is 3 μK. For a temperature of the order of 3 μK or higher, some resonances are present inside the atomic cloud and induce spin-flip losses. To overcome this problem, a precooling stage in a static trap down to temperatures smaller than 3 μK is required. For clouds whose temperature is smaller than 3 μK, the evaporation process in the modulated guide involves only one radio-frequency knife, so that the evaporative cooling is similar to that realised in a trap made by DC currents. Choosing the frequency of the radio frequency field so that the transition involved in the cooling process is the transition that does not change the Floquet number is interesting for two reasons. First, as shown in Eq. (37), the coupling between the trapped and the untrapped state of this transition is larger than that of higher order transitions that change the Floquet number. Second, this coupling is homogeneous and is thus constant when ω_{RF} is chirped.

VI. CONCLUSION

The careful study of the limitations of the modulation technique to smooth wire guide roughness performed in this article show that this technique is very robust and accepts a wide range of modulation frequencies. More precisely, on one side, we have shown that the unwanted effects of the modulation on the longitudinal motion are negligible for realistic parameters as soon as modulation frequency is larger than 10 kHz: both the heating of the cloud and the remaining effective roughness are very small. On the other side, the calculation of the losses due to spin flip transitions shows that, for realistic parameters, these losses are negligible as soon as the modulation frequency is smaller than a few hundred of kHz.

The modulation technique is thus a very promising tools that should enable to fully take advantage of atom chips devices. In particular, the study of one-dimensionnal gases in the strong interaction regime on an atom chip can be considered.

VII. AKNOWLEDGMENT

The authors thank K. Mølmer for helpful discussions. The Atom Optic group of Laboratoire Charles Fabry is part of the IFRAF insitute. This work was supported by the EU under the grants No MRTN-CT-2003-505032 and IP-CT-015714.

APPENDIX A: DERIVATION OF THE ENERGY CHANGE RATE

The derivation of the heating rate follows that of the Fermi Golden rule. For the calculation, we assume a quantification box of size L and periodic boundary conditions. We assume the atom is initially in the state of momentum p_0 in the Floquet subspace $n_F = 0$. For simplicity we consider only the transitions towards the Floquet state $n_F = -1$. After a time t much smaller than the departure rate, the change in kinetic energy ΔE can be deduced from perturbation theory and we obtain

$$\Delta E = \sum_q |u_q|^2 f(q,t). \tag{A1}$$

Here $u_q = \int dz u(z) e^{iqz}/L$ is the Fourier component of wave vector q of $u(z)$ and

$$f(q,t) = (\epsilon - \hbar\omega)\frac{\sin^2(\epsilon t/2)}{\epsilon^2}, \tag{A2}$$

where $\epsilon = \hbar\omega + \hbar^2 q^2/(2m) + \hbar p_0 q/m$ is the energy change associated to the transition involving the Fourier component of u of wave vector q. The terms u_q are complex random numbers without correlation between them and of mean square value $\langle |u_q|^2\rangle = S(q)L/(2\pi)$ where $S(q) = 1/(2\pi)\int dz e^{iqz}\langle u(z)u(0)\rangle$ is the spectral density of u. For a large enough quantification box, the term $f(q)$ barely changes between adjacent Fourier components and one can replace $\sum_q |u_q|^2 f(q)$ by $\int dq S(q) f(q)$ in Eq. (A1). For a time t large enough so that the function $(\epsilon - \hbar\omega)S(q(\epsilon))$ is about constant on the interval $\epsilon \in [-\hbar/t, \hbar/t]$, the term $\sin(\epsilon t/2)/\epsilon^2$ can be replaced by the distribution $t\delta(\epsilon)\pi/2$. We then recover the first term of Eq. (4). The previous condition on t and the condition that t is much smaller than the departure rate Γ can be fulfilled simultaneously only if the function $(\epsilon - \hbar\omega)S(q(\epsilon))$ is about constant on the interval $\epsilon \in [-\Gamma, \Gamma]$. This is the condition of the Markovian approximation. This condition is fulfilled provided that both $S(q)$ and its correlation length are small enough.

The calculation is similar for losses towards the Floquet manifold $n_F = 1$ and one finally recover Eq. (4). The Markovian condition for the transition towards the Floquet manifold $n_F = 1$ is not fulfilled for initial momentum very close to $\sqrt{2m\hbar\omega}$ since the atoms are then

sensitive to the fact that the continuum is not infinite for $\epsilon < 0$. Similar non Markovian situations have been studied, for example, in photonic band gap materials [21] and oscillatory behavior and decay towards a non vanishing population of the initial state are expected.

APPENDIX B: ADIABATIC POTENTIAL IN THE DRESSED STATE REPRESENATION

In this appendix, we rederive the adiabatic potential given Eq. (14) using a dressed representation, where a local z-dependent unitary transformation $\mathcal{O}(z)$ is applied to the Floquet states so that the resulting dressed states $|n\rangle(z)$ are eigenstates of the potential energy part of the Floquet Hamiltonian (term $\hbar\omega n_F$ of H_0 given in Eq. (2) and term H_2 of Eq. (3)). By symmetry, the energy of the dressed states $|n\rangle(z)$ is $n\hbar\omega$, as that of the bare Floquet states. Using the properties of the Bessel functions $(J_{k+1}(x) + J_{k-1}(x))x/(2k) = J_k(x)$ and $\sum_n J_n(x)^2 = 1$, we show that the decomposition of $|n\rangle(z)$ in the undressed Floquet basis ($|k\rangle_0$) is

$$|n\rangle(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(u(z)/\omega)|n+k\rangle_0 = \mathcal{O}(z)|n\rangle_0. \quad \text{(B1)}$$

This well known result has been used in several other situations [22]. In the dressed state representation, the state of the system is $\tilde{\psi} = \mathcal{O}^{-1}\psi_0$ where ψ_0 is the state of the system in the undressed representation and the momentum operator, $\tilde{p} = \mathcal{O}^{-1}p\mathcal{O}$, writes

$$\tilde{p} = p - \sum_{n,k} \langle k, z|i\hbar\partial_z|n, z\rangle|k\rangle\langle n| \quad \text{(B2)}$$

where $p = -i\hbar\partial_z$ is the momentum operator that preserves the Floquet number and ∂_z is a short notation for ∂/∂_z. Thus, in the dressed state representation, the Hamiltonian is decomposed into three terms:

$$\tilde{H}_0 = p^2/2m - n_F\hbar\omega \quad \text{(B3)}$$

that does not couple different Floquet states,

$$\tilde{H}_1 = -\hbar/(2m)\left(p\sum_{n_1,n_2}|n_1\rangle\langle n_1|i\partial_z|n_2\rangle\langle n_2| + \sum_{n_1,n_2}|n_1\rangle\langle n_1|i\partial_z|n_2\rangle\langle n_2|p\right), \quad \text{(B4)}$$

and

$$\tilde{H}_2 = -\hbar^2/(2m)\sum_{n_1,n_2,n_3}|n_1\rangle\langle n_2|\langle n_1|\partial_z|n_3\rangle\langle n_3|\partial_z|n_2\rangle\ . \quad \text{(B5)}$$

Since $J_k' = (J_{k-1} - J_{k+1})/2$ and $\sum_k J_k J_{k+n} = \delta_n$, $\tilde{H}_1$ couples adjacent Floquet states. This term is responsible for the heating of the cloud. On the other hand, $\tilde{H}_2$ contain a term $\tilde{H}_{2,ad}$ that does not change the Floquet number. Using the above properties of the Bessel function, we find that $\tilde{H}_{2,ad}$ is just the adiabatic potential of Eq. (14).

[1] J.-B. Trebbia, C. L. G. Alzar, R. Cornelussen, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule, quant-ph/0701207 (2007).
[2] R. Folman, P. Krüger, J. Schmiedmayer, J. Denschlag, and C. Henkel, Adv. Atom. Mol. Opt. Phys. **48**, 263 (2002), and references therein.
[3] Y.-J. Wang, D. Z. Anderson, V. M. Bright, E. A. Cornell, Q. Diot, T. Kishimoto, M. Prentiss, R. A. Saravanan, S. R. Segal, and S. Wu, Phys. Rev. Lett. **94**, 090405 (2005),
[4] T. Schumm, S. Hofferberth, L. M. Andersson, S. Wildermuth, S. Groth, I. Bar-Joseph, J. Schmiedmayer, and P. Krüger, Nat. Phys. (2005).
[5] A. Günther, S. Kraft, C. Zimmermann, and J. Fortágh, cond-mat/0603631 (2007).
[6] J. Estève, J.-B. Trebbia, T. Schumm, A. Aspect, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule, Phys. Rev. Lett. **96**, 130403 (2006).
[7] J.-B. Trebbia, J. Esteve, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule, Phys. Rev. Lett. **97**, 250403 (2006),
[8] J. Reichel and J. H. Thywissen, J. Phys. IV **116**, 265 (2004).
[9] D. Wang, M. Lukin, and E. Demler, Phys. Rev. Lett. **92**, 076802 (2004).
[10] J. Estève, C. Aussibal, T. Schumm, C. Figl, D. Mailly, I. Bouchoule, C. I. Westbrook, and A. Aspect, Phys. Rev. A **70**, 043629 (2004).
[11] S. Kraft, A. Günther, H. Ott, D. Wharam, C. Zimmermann, and J. Fortàgh, J. Phys. B **35**, L469 (2002).
[12] T. Schumm, J. Esteve, C. Figl, J. Trebbia, C. Aussibal, D. Mailly, I. Bouchoule, C. Westbrook, and A. Aspect, Eur. Phys. J. D **32**, 171 (2005).
[13] R. J. Cook, D. G. Shankland, and A. L. Wells, Phys. Rev. A **31**, 564 (1985).
[14] J. H. Shirley, Phys. Rev. **138**, B979 (1965).
[15] E. Landau and E. Lifschitz, *Mechanics* (Mir, Moscow, 1980), chap. 5.
[16] E. Brion, L. H. Pedersen, and K. Mølmer, quant-ph/0610056 (2006).
[17] C. V. Sukumar and D. M. Brink, Phys. Rev. A **56**, 2451 (1997).
[18] G. M. Moy, J. J. Hope and C. M. Savage, Phys. Rev. A **59**, 667 (1999)
[19] J. L. Martin *et al*, J. Phys. B **33**, 3919 (1999)
[20] T.-L. Ho and V. B. Shenoy, Phys. Rev. Lett. **77**, 2595 (1996)
[21] S. John and T. Quang, Phys. Rev. A **50**, 1764 (1994)
[22] A. Eckardt *et al.*, Phys. Rev. Lett. 95, 200401 (2005) ; S. Haroche *et al*, Phys. Rev. Lett. 24, 861 - 864 (1970)

Bibliographie

[1] S. Bose., "Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese", *Zeitschrift für Physik* **27**, 178 (1924).

[2] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, et E. A. Cornell, "Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor", *Science* **269**, (1995).

[3] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, et W. Ketterle, "Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).

[4] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, et R. G. Hulet, "Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).

[5] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell, et C. E. Wieman, "Stable ^{85}Rb Bose-Einstein Condensates with Widely Tunable Interactions", *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1795 (2000).

[6] G. Modugno, G. Ferrari, G. Roati, R. J. Brecha, A. Simoni, et M. Inguscio, "Bose-Einstein Condensation of Potassium Atoms by Sympathetic Cooling", *Science* **294**, 1320 (2001).

[7] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-C. Nagerl, et R. Grimm, "Bose-Einstein Condensation of Cesium", *Science* **299**, 232 (2003).

[8] D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S. C. Moss, D. Kleppner, et T. J. Greytak, "Bose-Einstein Condensation of Atomic Hydrogen", *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3811 (1998).

[9] A. Robert, O. Sirjean, A. Browaeys, J. Poupard, S. Nowak, D. Boiron, C. I. Westbrook, et A. Aspect, "Bose-Einstein Condensate of Metastable Atoms", *Science* **299**, 461 (2001).

[10] Y. Takasu, K. Maki, K. Komori, T. Takano, K. Honda, M. Kumakura, T. Yabuzaki, et Y. Takahashi, "Spin-Singlet Bose-Einstein Condensation of Two-Electron Atoms", *Phys. Rev. Lett.* **91**, 040404 (2003).

[11] A. Griesmaier, J. Werner, S. Hensler, J. Stuhler, et T. Pfau, "Bose-Einstein Condensation of Chromium", *Phys. Rev. Lett.* **94**, 160401 (2005).

[12] D. E. A., N. R. Claussen, S. L. Cornish, J. L. Roberts, et E. A. Cornell, "Dynamics of Collapsing and Exploding Bose-Einstein Condensates", *Nature* **412**, 295 (2001).

[13] V. Bagnato et D. Kleppner, "Bose-Einstein condensation in low-dimensional traps", *Phys. Rev. A* **44**, 7439 (1991).

[14] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, et S. Stringari, "Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting Bose gas", *Phys. Rev. A* **54**, R4633 (1996).

[15] F. Gerbier, J. H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, et A. Aspect, "Critical Temperature of a Trapped, Weakly Interacting Bose Gas", *Phys. Rev. Lett.* **92**, 030405 (2004).

[16] V. N. Popov, "On the theory of the superfluidity of two- and one-dimensional bose systems", *Theoretical and Mathematical Physics* **11**, (1972).

[17] S. Richard, F. Gerbier, J. H. Thywissen, M. Hugbart, P. Bouyer, et A. Aspect, "Momentum Spectroscopy of 1D Phase Fluctuations in Bose-Einstein Condensates", *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010405 (2003).

[18] A. Görlitz *et al.*, "Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 130402 (2001).

[19] B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S. Fölling, I. Cirac, G. V. Shlyapnikov, T. W. Hänsch, et I. Bloch, "Tonks-Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice", *Nature* **429**, (2004).

[20] B. L. Tolra, K. M. O'Hara, J. H. Huckans, W. D. Phillips, S. L. Rolston, et J. V. Porto, "Observation of Reduced Three-Body Recombination in a Correlated 1D Degenerate Bose Gas", *Phys. Rev. Lett.* **92**, 190401 (2004).

[21] T. Kinoshita, T. Wenger, et D. S. Weiss, "Observation of a One-Dimensional Tonks-Girardeau Gas", *Science* **305**, 1125 (2004).

[22] V. Boyer, *Condensation de Bose-Einstein avec un électroaimant à noyau ferromagnétique : stratégies de refroidissement dans des champs magnétiques intenses*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 2000.

[23] T. W. H. W. Hänsel, P. Hommelhoff et J. Reichel, "Bose-Einstein condensation on a microelectronic chip", *Nature* **413**, (2001).

[24] H. Ott, J. Fortagh, G. Schlotterbeck, A. Grossmann, et C. Zimmermann, "Bose-Einstein Condensation in a Surface Microtrap", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 230401 (2001).

[25] S. Grossmann et M. Holthaus, "On Bose-Einstein condensation in harmonic traps", *Physics Letters A* **208**, 188 (1995).

[26] M. Olshanii et L. Pricoupenko, "Rigorous Approach to the Problem of Ultraviolet Divergencies in Dilute Bose Gases", *Phys. Rev. Lett.* **88**, 010402 (2001).

[27] L. P. Pitaevskii, "Vortex lines in an imperfect Bose gas", *Sov.Phys.JETP* **13**, 451 (1961).

[28] E. P.Gross, "Hydrodynamics of a Superfluid Condensate", *J. Math. Phys.* **4**, 195 (1963).

[29] C. Menotti et S. Stringari, "Collective oscillations of a one-dimensional trapped Bose-Einstein gas", *Phys. Rev. A* **66**, 043610 (2002).

[30] F. Gerbier, *Condensats de Bose Einstein dans un piège anisotrope.*, Thèse de Doctorat, Université Paris Sud - Paris XI, 2003.

[31] S. Dettmer *et al.*, "Observation of Phase Fluctuations in Elongated Bose-Einstein Condensates", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160406 (2001).

[32] F. Gerbier, J. H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, et A. Aspect, "Momentum distribution and correlation function of quasicondensates in elongated traps", *Phys. Rev. A* **67**, 051602 (2003).

[33] S. Richard, *Spectroscopie en impulsion des fluctuations de phase de condensats de Bose- Einstein très allongés*, Thèse de Doctorat, Université Paris Sud - Paris XI, 2004.

[34] D. Hellweg, L. Cacciapuoti, M. Kottke, T. Schulte, K. Sengstock, W. Ertmer, et J. J. Arlt, "Measurement of the Spatial Correlation Function of Phase Fluctuating Bose-Einstein Condensates", *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010406 (2003).

[35] I. Bouchoule, K. V. Kheruntsyan, et G. V. Shlyapnikov, "Interaction-induced crossover versus finite-size condensation in a weakly interacting trapped one-dimensional Bose gas", *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)* **75**, 031606 (2007).

[36] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, et J. T. M. Walraven, "Regimes of Quantum Degeneracy in Trapped 1D Gases", *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3745 (2000).

[37] D. S. Petrov, *Bose-Einstein condensation in low-dimensional trapped gases*, Thèse de Doctorat, Pays-Bas, 2003.

[38] W. H. Wing, "On neutral particle trapping in quasistatic electromagnetic fields", *Prog. Quant. Electr.* **8**, 181 (1984).

[39] S. Groth, P. Krüger, S. Wildermuth, R. Folman, T. Fernholz, D. Mahalu, I. Bar-Joseph, et J. Schmiedmayer, "Atom Chips : Fabrication and Thermal Properties", *Applied Physics Letters* **85**, 2980 (2004).

[40] T. Schumm, *Bose-Einstein condensates in magnetic double well potentials*, Thèse de Doctorat, Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, 2005.

[41] J. Reichel, W. Hänsel, et T. W. Hänsch, "Atomic Micromanipulation with Magnetic Surface Traps", *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3398 (1999).

[42] C. Aussibal, *Réalisation d'un condesat de Bose-Einstein sur une microstructure*, Thèse de Doctorat, Université Paris Sud - Paris XI, 2003.

[43] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher, et E. A. Cornell, "Stable, Tightly Confining Magnetic Trap for Evaporative Cooling of Neutral Atoms", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3352 (1995).

[44] S. Gov, S. Shtrikman, et H. Thomas, "Magnetic trapping of neutral particles : Classical and quantum-mechanical study of a Ioffe-Pritchard type trap", *J. Appl. Phys.* **87**, 3989 (2000).

[45] C. V. Sukumar et D. M. Brink, "Spin-flip transitions in a magnetic trap", *Phys. Rev. A* **56**, 2451 (1997).

[46] D. E. Pritchard, "Cooling Neutral Atoms in a Magnetic Trap for Precision Spectroscopy", *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1336 (1983).

[47] C. Cohen-Tannoudji., *Cours donnés au Collège de France* (http ://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/, 1996-1997).

[48] J. Fortagh et C. Zimmermann, "Magnetic microtraps for ultracold atoms", *Reviews of Modern Physics* **79**, 235 (2007).

[49] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, et F. Laloë, *Mécanique quantique* (Hermann, 1973).

[50] A. Browaeys, *Piégeage magnétique d'un gaz d'hélium métastable : vers la condensation de Bose-Einstein*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 2000.

[51] J. Estève, *Du miroir au guide d'onde atomique : effets de rugosité*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004.

[52] W. Ketterle, D. Durfee, et D. Stamper-Kurn, "Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates", *arXiv.org :cond-mat/9904034* (1999).

[53] Y. Shin, M. W. Zwierlein, C. H. Schunck, A. Schirotzek, et W. Ketterle, "Observation of Phase Separation in a Strongly Interacting Imbalanced Fermi Gas", *Phys. Rev. Lett.* **97**, 030401 (2006).

[54] W. D. Phillips, J. V. Prodan, et H. J. Metcalf, "Laser cooling and electromagnetic trapping of neutral atoms", *Journal of the Optical Society of America B Optical Physics* **2**, 1751 (1985).

[55] R. Folman, P. Krüger, D. Cassettari, B. Hessmo, T. Maier, et J. Schmiedmayer, "Controlling Cold Atoms using Nanofabricated Surfaces : Atom Chips", *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4749 (2000).

[56] P. B. Johnson et R. W. Christy, "Optical Constants of the Noble Metals", *Phys. Rev. B* **6**, 4370 (1972).

[57] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. L. Gould, et H. J. Metcalf, "Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit", *Phys. Rev. Lett.* **61**, 169 (1988).

[58] P. J. Ungar, D. S. Weiss, E. Riis, et S. Chu, "Optical molasses and multilevel atoms : theory", *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2058 (1989).

[59] J. Dalibard et C. Cohen-Tannoudji, "Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical-models", *Soc. Am. B* **6**, 2023 (1989).

[60] A. Marte, T. Volz, J. Schuster, S. Dürr, G. Rempe, E. G. M. van Kempen, et B. J. Verhaar, "Feshbach Resonances in Rubidium 87 : Precision Measurement and Analysis", *Phys. Rev. Lett.* **89**, 283202 (2002).

[61] O. J. Luiten, M. W. Reynolds, et J. T. M. Walraven, "Kinetic theory of the evaporative cooling of a trapped gas", *Phys. Rev. A* **53**, 381 (1996).

[62] D. M. Harber, J. M. McGuirk, J. M. Obrecht, et E. A. Cornell, Thermally Induced Losses in Ultra-Cold Atoms Magnetically Trapped Near Room-Temperature Surfaces, 2003.

[63] H. F. Hess, "Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen", *Phys. Rev. B* **34**, 3476 (1986).

[64] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. A. Joffe, M. R. Andrews, et W. Ketterle, "Evaporative Cooling of Sodium Atoms", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 5202 (1995).

[65] Y. Castin et R. Dum, "Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).

[66] Y. Kagan, E. L. Surkov, et G. V. Shlyapnikov, "Evolution of a Bose-condensed gas under variations of the confining potential", *Phys. Rev. A* **54**, R1753 (1996).

[67] A. L. Zubarev et Y. E. Kim, "Approximation for nonlinear dynamics of trapped Bose-Einstein condensates", *Phys. Rev. A* **65**, 035601 (2002).

[68] W. Hansel, J. Reichel, P. Hommelhoff, et T. W. Hansch, "Magnetic Conveyor Belt for Transporting and Merging Trapped Atom Clouds", *Phys. Rev. Lett.* **86**, 608 (2001).

[69] X. Luo, P. Krüger, K. Brugger, S. Wildermuth, H. Gimpel, M. W. Klein, S. Groth, R. Folman, I. Bar-Joseph, et J. Schmiedmayer, "Atom fiber for omnidirectional guiding of cold neutral atoms", *Optics Letters* **29**, 2145 (2004).

[70] T. Schumm, S. Hofferberth, L. M. Andersson, S. Wildermuth, S. Groth, I. Bar-Joseph, J. Schmiedmayer, et P. Krüger, "Matter-wave interferometry in a double well on an atom chip", *Nature Physics* **1**, 57 (2005).

[71] J. Esteve, J.-B. Trebbia, T. Schumm, A. Aspect, C. I. Westbrook, et I. Bouchoule, "Observations of Density Fluctuations in an Elongated Bose Gas : Ideal Gas and Quasicondensate Regimes", *Phys. Rev. Lett.* **96**, 130403 (2006).

[72] J.-B. Trebbia, J. Esteve, C. I. Westbrook, et I. Bouchoule, "Experimental Evidence for the Breakdown of a Hartree-Fock Approach in a Weakly Interacting Bose Gas", *Phys. Rev. Lett.* **97**, 250403 (2006).

[73] H. Moritz, T. Stöferle, M. Köhl, et T. Esslinger, "Exciting Collective Oscillations in a Trapped 1D Gas", *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250402 (2003).

[74] S. Kraft, A. Guenther, H. Ott, D. Wharam, C. Zimmermann, et J. Fortagh, "Anomalous Longitudinal Magnetic Field near the Surface of Copper Conductors", *At.Mol.Opt.Phys.* **35**, L469 (2002).

[75] C. D. J. Sinclair, E. A. Curtis, I. L. Garcia, J. A. Retter, B. V. Hall, S. Eriksson, B. E. Sauer, et E. A. Hinds, "Bose-Einstein condensation on a permanent-magnet atom chip", *Phys. Rev. A* **72**, 031603 (2005).

[76] B. V. Hall, S. Whitlock, F. Scharnberg, P. Hannaford, et A. Sidorov, "A permanent magnetic film atom chip for Bose-Einstein condensation", *At. Mol. Opt. Phys.* **39**, 27 (2006).

[77] I. Barb, R. Gerritsma, Y. T. Xing, J. B. Goedkoop, et R. J. Spreeuw, "Creating Ioffe-Pritchard micro-traps from permanent magnetic film with in-plane magnetization", *EPJD* **35**, 75 (2005).

[78] R. Folman, P. Krüger, D. Cassettari, B. Hessmo, T. Maier, et J. Schmiedmayer, "Controlling Cold Atoms using Nanofabricated Surfaces : Atom Chips", *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4749 (2000).

[79] J. Esteve, C. Aussibal, T. Schumm, C. Figl, D. Mailly, I. Bouchoule, C. I. Westbrook, et A. Aspect, "Role of wire imperfections in micromagnetic traps for atoms", *Phys. Rev. A* **70**, 043629 (2004).

[80] A. E. Leanhardt, Y. Shin, A. P. Chikkatur, D. Kielpinski, W. Ketterle, et D. E. Pritchard, "Bose-Einstein Condensates near a Microfabricated Surface", *Phys. Rev. Lett.* **90**, 100404 (2003).

[81] T. Schumm, J. Estève, C. Figl, J.-B. Trebbia, C. Aussibal, H. Nguyen, D. Mailly, I. Bouchoule, C. I. Westbrook, et A. Aspect, "Atom chips in the real world : the effects of wire corrugation", *Eur. Phys. J. D* **32**, 171 (2005).

[82] L. D. Pietra, S. Aigner, C. vom Hagen, H. J. Lezec, et J. Schmiedmayer, "Cold atoms near surfaces : designing potentials by sculpturing wires", *J. Phys. : Conf. Ser.* **19**, 30 (2005).

[83] J. M. McGuirk, D. M. Harber, J. M. Obrecht, et E. A. Cornell, "Alkali-metal adsorbate polarization on conducting and insulating surfaces probed with Bose-Einstein condensates", *Phys. Rev. A* **69**, 062905 (2004).

[84] M. A. Jones, C. J. Vale, D. Sahagun, B. V. Hall, C. C. Eberlein, B. E. Sauer, K. Furusawa, D. Richardson, et E. A. Hinds, "Cold atoms probe the magnetic field near a wire", *J. Phys. B* **37**, L15 (2004).

[85] P. Kruger, L. M. Andersson, S. Wildermuth, S. Hofferberth, E. Haller, S. Aigner, S. Groth, I. Bar-Joseph, et J. Schmiedmayer, "Disorder Potentials near Lithographically Fabricated Atom Chips", *arXiv :cond-mat/0504686v1* (2004).

[86] D.-W. Wang, M. D. Lukin, et E. Demler, "Disordered Bose-Einstein Condensates in Quasi-One-Dimensional Magnetic Microtraps", *Phys. Rev. Lett.* **92**, 076802 (2004).

[87] E. Majorana, "'Majorana flops'", *Nuovo Cimento* **9**, (1932).

[88] Y. Shin, C. Sanner, G.-B. Jo, T. A. Pasquini, M. Saba, W. Ketterle, D. E. Pritchard, M. Vengalattore, et M. Prentiss, "Interference of Bose-Einstein condensates split with an atom chip", *Phys. Rev. A* **72**, 021604 (2005).

[89] S. Aubin *et al.*, "Trapping Fermionic ^{40}K and Bosonic ^{87}Rb on a Chip", *Journal of Low Temperature Physics* **140**, 377 (2005).

[90] C. J. Vale, B. Upcroft, M. J. Davis, N. R. Heckenberg, et H. Rubinsztein-Dunlop, "Foil-based atom chip for Bose-Einstein condensates", *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys* **37**, 2959 (2004).

[91] S. Du, M. B. Squires, Y. Imai, L. Czaia, R. A. Saravanan, V. Bright, J. Reichel, T. W. Hansch, et D. Z. Anderson, "Atom-chip Bose-Einstein condensation in a portable vacuum cell", *Phys. Rev. A* **70**, 053606 (2004).

[92] A. H. van Amerongen, J. J. P. van Es, et N. J. van Druten, "Atom chip for studying the 1D Bose gas", *APS Meeting Abstracts* G1068+ (2006).

[93] Y.-J. Wang, D. Z. Anderson, V. M. Bright, E. A. Cornell, Q. Diot, T. Kishimoto, M. Prentiss, R. A. Saravanan, S. R. Segal, et S. Wu, "Atom Michelson Interferometer on a Chip Using a Bose-Einstein Condensate", *Physical Review Letters* **94**, 090405 (2005).

[94] J. Estève, T. Schumm, J.-B. Trebbia, I. Bouchoule, A. Aspect, et C. Westbrook, "Realizing a stable magnetic double-well potential on an atom chip", *Eur. Phys. J. D* **35**, 141 (2005).

[95] E. A. Hinds, C. J. Vale, et M. G. Boshier, "Two-Wire Waveguide and Interferometer for Cold Atoms", *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1462 (2001).

[96] L. Landau et E. Lifshitz, *Mechanics Fourth Edition, Course of Theoritical physics* (MIR Editions, Moscou, 1982).

[97] J. M. McGuirk, D. M. Harber, J. M. Obrecht, et E. A. Cornell, "Alkali-metal adsorbate polarization on conducting and insulating surfaces probed with Bose-Einstein condensates", *Phys. Rev. A* **69**, 062905 (2004).

[98] R. J. Cook, D. G. Shankland, et A. L. Wells, "Quantum theory of particle motion in a rapidly oscillating field", *Phys. Rev. A* **31**, 564 (1985).

[99] J. H. Shirley, "Solution of the Schrödinger Equation with a Hamiltonian Periodic in Time", *Phys. Rev.* **138**, B979 (1965).

[100] I. Bouchoule, J.-B. Trebbia, et C. Garrido-Alzar, "limitations of the modulation method to smooth a wire guide roughness", *arXiv :0707.0602* (2007).

[101] L. Lifchitz, *Mécanique Quantique* (Editions de Moscou, 1966).

[102] J. M. Reeves, O. Garcia, B. Deissler, K. L. Baranowski, K. J. Hughes, et C. A. Sackett, "Time-orbiting potential trap for Bose-Einstein condensate interferometry", *Phys. Rev. A* **72**, 051605 (2005).

[103] C. S. Adams, H. J. Lee, N. Davidson, M. Kasevich, et S. Chu, "Evaporative Cooling in a Crossed Dipole Trap", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3577 (1995).

[104] J. L. Martin, C. R. McKenzie, N. R. Thomas, D. M. Warrington, et A. C. Wilson, "Radio-frequency coupling of a Bose-Einstein condensate in a TOP trap", *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.* **33**, 3919 (2000).

[105] L. D. Broglie, "Ondes et Quanta", *Compt. Rend.* **177**, 507 (1923).

[106] R. H. Brown et R. Q. Twiss, "A Test of a New Type of Stellar Interferometer on Sirius", *Nature* **178**, 1046 (1956).

[107] M. Schellekens, R. Hoppeler, A. Perrin, J. V. Gomes, D. Boiron, A. Aspect, et C. I. Westbrook, "Hanbury Brown Twiss effect for ultracold quantum gases", *Science* **310**, (2005).

[108] T. . Jeltes *et al.*, "Comparison of the Hanbury Brown and Twiss effect for bosons and fermions", *Nature* **445**, 4 (2007).

[109] S. Folling, F. G. A., Widera, O. Mandel, T. Gericke, et I. Bloch, "Spatial quantum noise interferometry in expanding ultracold atom clouds", *Nature* **434**, 481 (2005).

[110] E. Altman, E. Demler, et M. D. Lukin, "Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations", *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)* **70**, 013603 (2004).

[111] M. Greiner, C. A. Regal, J. T. Stewart, et D. S. Jin, "Probing Pair-Correlated Fermionic Atoms through Correlations in Atom Shot Noise", *Phys. Rev. Letters* **94**, 110401 (2005).

[112] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, et B. Roulet, *Physique statistique* (Hermann, Paris, France, 1995).

[113] A. Einstein, "Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems", *Phys. Zeitschr.* **10**, 185 (1909).

[114] A. Einstein, "Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und Konstitution der Strahlung", *Phys. Zeitschr.* **10**, 817 (1909).

[115] L. Mandel et E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics* (Cambridge University Press, USA, 1995).

[116] M. Naraschewski et R. J. Glauber, "Spatial coherence and density correlations of trapped Bose gases", *Phys. Rev. A* **59**, 4595 (1999).

[117] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation.* (Wiley, New York, 1973).

[118] D. Meiser, C. P. Search, et P. Meystre, "Molecule formation as a diagnostic tool for second order correlations of ultra-cold gases", *arXiv.org :cond-mat/0412297* (2004).

[119] E. A. Burt, R. W. Ghrist, C. J. Myatt, M. J. Holland, E. A. Cornell, et C. E. Wieman, "Coherence, Correlations, and Collisions : What One Learns about Bose-Einstein Condensates from Their Decay", *Phys. Rev. Lett.* **79**, 337 (1997).

[120] R. H. Brown et R. Q. Twiss, "Interferometry of the intensity fluctuations in light. I. Basic theory : the correlation between photons in coherent beams of radiation", *Proc. of the Royal Society of London A* **242**, 300 (1957).

[121] R. H. Brown et R. Q. Twiss, "Interferometry of the intensity fluctuations in light. II. An experimental test of the theory for partially coherent light", *Proc. of the Royal Society of London A* **243**, 291 (1958).

[122] M. Yasuda et F. Shimizu, "Observation of Two-Atom Correlation of an Ultracold Neon Atomic Beam", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3090 (1996).

[123] S. Fölling, F. Gerbier, A. Widera, O. Mandel, T. Gericke, et I. Bloch, "Spatial quantum noise interferometry in expanding ultracold atom clouds", *Nature* **438**, 481 (2005).

[124] Hanbury-Brown et Twiss, "A test of a new type of stellar interferometer on Sirius", *Nature* **178**, 1046 (1956).

[125] M. Yasuda et F. Shimizu, "Observation of Two-Atom Correlation of an Ultracold Neon Atomic Beam", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3090 (1996).

[126] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, et I. Bloch, "Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms", *Nature* **415**, 39 (2002).

[127] R. Hoppeler, *De la condensation de Bose-Einstein à l'effet Hanbury Brown and Twiss atomique de l'hélium métastable*, Thèse de Doctorat, Université Paris Sud - Paris XI, 2005.

[128] K. V. Kheruntsyan, D. M. Gangardt, P. D. Drummond, et G. V. Shlyapnikov, "Finite-temperature correlations and density profiles of an inhomogeneous interacting one-dimensional Bose gas", *Phys. Rev. A* **71**, 053615 (2005).

[129] E. I. Butikov, "Parametric excitation of a linear oscillator", *Eur. J. Phys.* **25**, 535 (2004).

[130] Y. Jiang, O. Jedrkiewicz, S. Minardi, P. DiTrapani, A. Mosset, E. Lantz, et F. Devaux, "Retrieval of spatial shot-noise in the full dynamic range of calibrated CCD cameras", *Eur. Phys. J. D* **22**, 521 (2003).

[131] A. Griffin, "Conserving and gapless approximations for an inhomogeneous Bose gas at finite temperatures", *Phys. Rev. B* **53**, 9341 (1996).

[132] L. Landau et E. lifchitz, *Physique statistique* (Edition de Moscou, Moscou, Russie, 1967).

[133] F. Gerbier, "Quasi-1D Bose-Einstein condensates in the dimensional crossover regime", *Europhysics Letters (EPL)* **66**, 771 (2004).

[134] M. A. Joffe, W. Ketterle, A. Martin, et D. E. Pritchard, "Transverse cooling and deflection of an atomic beam inside a Zeeman slower", *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 2257 (1993).

[135] J. Reichel et J. H. Thywissen, "Using magnetic chip traps to study Tonks-Girardeau quantum gases", *J. Phys. IV France* **116**, 265 (2004).

[136] M. Olshanii, "Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons", *Phys. Rev. Lett.* **81**, 938 (1998).

[137] G. E. Astrakharchik et S. Giorgini, "Correlation functions and momentum distribution of one-dimensional Bose systems", *Phys. Rev. A* **68**, 031602 (2003).

[138] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, et E. A. Cornell, "Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor", *Science* **269**, 5221 .

[139] M. Holzmann, W. Krauth, et M. Naraschewski, "Precision Monte Carlo test of the Hartree-Fock approximation for a trapped Bose gas", *Phys. Rev. A* **59**, 2956 (1999).

[140] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, et S. Stringari, "Thermodynamics of a trapped Bose-condensed gas", *J. Low Temp. Phys.* **109**, 309 (1997).

[141] M. Holzmann, G. Baym, J.-P. Blaizot, et F. Laloë, "Nonanalytic Dependence of the Transition Temperature of the Homogeneous Dilute Bose Gas on Scattering Length", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120403 (2001).

[142] P. Arnold et G. Moore, "BEC Transition Temperature of a Dilute Homogeneous Imperfect Bose Gas", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120401 (2001).

[143] V. A. Kashurnikov, N. V. Prokof'ev, et B. V. Svistunov, "Critical Temperature Shift in Weakly Interacting Bose Gas", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120402 (2001).

[144] P. Arnold et B. Tomášik, "T_c for trapped dilute Bose gases : A second-order result", *Phys. Rev. A* **64**, 053609 (2001).

[145] F. Gerbier, J. H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, et A. Aspect, "Experimental study of the thermodynamics of an interacting trapped Bose-Einstein condensed gas", *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)* **70**, 013607 (2004).

[146] G.-B. Jo, J.-H. Choi, C. Christensen, Y.-R. Lee, T. Pasquini, W. Ketterle, et D. Pritchard*, "Matter-wave Interferometry with Phase Fluctuating Bose-Einstein Condensates", *arXiv :0706.4041v3* .

[147] N. J. van Druten et W. Ketterle, "Two-Step Condensation of the Ideal Bose Gas in Highly Anisotropic Traps", *Phys. Rev. Lett.* **79**, 549 (1997).

[148] P. Courteille, R. S. Freeland, D. J. Heinzen, F. A. van Abeelen, et B. J. Verhaar, "Observation of a Feshbach Resonance in Cold Atom Scattering", *Phys. Rev. Lett.* **81**, 69 (1998).

[149] R. Feynman, *Statistical Mechanics : A set of lectures* (Perseus Book, 1972).

[150] J. C. V. GOMES, *Thermométrie et propriétés de cohérence d'un gaz quantique ultra-froids d'hélium métastable*, Thèse de Doctorat, Université Paris Sud - Paris XI, 2006.

[151] D. A. Huse et E. D.Siggia, "The density distribution of a weakly interacting Bose gas in an external potential", *Journal of Low Temperature Physics* **46**, 137 (1981).

[152] W. Ketterle, D. S. Durfee, et D. M. Stamper-Kurn, Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates, 1999.

[153] F. Gerbier, "Quasi-1D Bose-Einstein condensates in the dimensional crossover regime", *Europhysics Letters (EPL)* **66**, 771 (2004).

[154] K. V. Kheruntsyan, D. M. Gangardt, P. D. Drummond, et G. V. Shlyapnikov, "Pair Correlations in a Finite-Temperature 1D Bose Gas", *Phys. Rev. Lett.* **91**, 040403 (2003).

[155] C. Mora et Y. Castin, "Extension of Bogoliubov theory to quasicondensates", *Phys. Rev. A* **67**, 053615 (2003).

[156] A. Sinatra, Y. Castin, et C. Lobo, "A Monte Carlo formulation of the Bogolubov theory", *Journal of Modern Optics* **47**, 2629 (2000).

[157] W. Krauth, "Quantum Monte Carlo Calculations for a Large Number of Bosons in a Harmonic Trap", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3695 (1996).

[158] G.-B. Jo, Y. Shin, S. Will, T. A. Pasquini, M. Saba, W. Ketterle, D. E. Pritchard, M. Vengalattore, et M. Prentiss, "Long Phase Coherence Time and Number Squeezing of Two Bose-Einstein Condensates on an Atom Chip", *Phys. Rev. Lett.* **98**, 030407 (2007).

[159] O. Zobay et B. M. Garraway, "Two-Dimensional Atom Trapping in Field-Induced Adiabatic Potentials", *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1195 (2001).

[160] Y. Colombe, D. Kadio, M. Olshanii, B. Mercier, V. Lorent, et H. Perrin, "Schemes for loading a Bose–Einstein condensate into a two-dimensional dipole trap", *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics* **5**, S155 (2003).

[161] T. Schumm, S. Hofferberth, L. M. Andersson, S. G. S. Wildermuth, I. Bar-Joseph, J. Schmiedmayer, et P. Krüger, "Matter-wave interferometry in a double well on an atom chip", *Nature Phys.* **1**, 57 (2005).

[162] K. J. M. et T. D. J., "Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems", *J. Phys. C : Solid State Phys.* **6**, 1180 (1973).

[163] Z. Hadzibabic, P. Krüger, M. Cheneau, B. Battelier, et J. Dalibard, "Berezinskii-Kosterlitz-Thouless crossover in a trapped atomic gas", *Nature* **441**, 1118 (2006).

[164] W. Ketterle et N. J. van Druten, "Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions", *Phys. Rev. A* **54**, 656 (1996).

[165] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, 1994).

Résumé

Cette thèse présente l'étude et la réalisation expérimentale de gaz de bosons dégénérés quasi-unidimensionnels. Pour atteindre ce type de régime, nous utilisons une puce atomique, micro-fils d'or déposés sur un substrat de silicium qui permet de créer des pièges magnétiques très anisotropes dans lesquels nous avons mesuré les propriétés statistiques de gaz de bosons ultra-froids (^{87}Rb).

Pour un gaz classique, où les particules sont statistiquement indépendantes, les fluctuations de densité sont données par le bruit de grenaille atomique. A plus basse température, la nature quantique des particules (bosons indiscernables) doit être prise en compte et des fluctuations de densité supplémentaires apparaissent dues au phénomène de groupement de bosons. A faibles densités atomiques, nous avons observé ces deux types de comportements en bon accord avec le comportement du gaz idéal. A plus fortes densités, à cause des interactions répulsives entre atomes qui sont coûteuses en énergie, nous avons observé une réduction des fluctuations de densité par rapport au gaz idéal. Cette réduction est caractéristique de la transition vers un quasi-condensat. Pour exploiter pleinement le potentiel des puces à atomes, les atomes doivent être situés aux abords des micro-structures qui les piègent.

Cependant, cette proximité rend ces dispositifs sensibles aux imperfections de microfabrication en introduisant une rugosité non contrôlée sur le potentiel de piégeage. Pour contourner ce problème, nous avons mis au point une méthode pour s'affranchir de ce problème en modulant rapidement le courant des micro-fils. Les atomes sont alors soumis à un potentiel moyen effectif exempt de rugosité.

Mots-clés : Atomes froids – Optique atomique – Condensats de Bose-Einstein – Puces Atomiques – potentiel rugueux – corrélations - quasi-condensat – bosons.

Abstract

This thesis presents experiments on degenerate Bose gases in the quasi-one dimensional regime. For this purpose we use an atom chip, microfabricated wires deposited on surfaces, to create very anisotropic traps in which we measured the statistical properties of an ultracold bosonic gas (^{87}Rb).

For a classical gas, where the particles are statistically independent, density fluctuations are given by the atomic shot noise. At lower temperatures, the quantum nature of the particles appears (indistinguishable bosons), and an extra term has to be taken into account to describe the bosonic bunching. At low atomic densities, we observe these two kinds of behavior in good agreement with the ideal Bose gas predictions. At higher atomic densities, due to the energy cost of inter-atomic repulsive interactions, we observed a reduction of density fluctuations compared to the ideal case. This reduction reflects the transition to the quasi-condensate regime. To exploit the full potential of atom chip, atoms must often be close to the material structures which confine them.

However, this proximity renders these devices highly sensitive to defects which produce roughness in the trapping potential. To circumvent this problem, we used a time-dependent trap where the atoms see the time-averaged potential without any roughness.

Keywords : Cold Atoms – Atom Optics – Bose-Einstein condensate – Atom chips – roughness – correlations– quasi-condensate – bosons.