

**THÈSE**  
présentée pour l'obtention du diplôme de  
**DOCTEUR**  
**DE**  
**L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES**  
Spécialité : Structures et Matériaux

présentée par :

**Armelle CHABOT**

Sujet de la thèse :

**ANALYSE DES EFFORTS A L'INTERFACE ENTRE LES  
COUCHES DES MATERIAUX COMPOSITES A L'AIDE DE  
MODELES MULTIPARTICULAIRES DE MATERIAUX  
MULTICOUCHES (M4)**

## **ANNEXES**

Soutenu à Champs sur Marne, le 24 juin 1997  
devant le jury composé de :

Président : **G. VERCHERY**  
Rapporteurs : **O. ALLIX**  
**M. C. LAFARIE-FRENOT**  
Examineurs : **L. ANQUEZ**  
**F. LENE**  
Directeur de thèse : **A. EHRLACHER**

**ANNEXE I**

**CALCUL DES DEFORMATIONS GENERALISEES DES  
MODÈLES  $M4_{3nP}$ ,  $M4_{(2n+1)P}$ ,  $M4_{3nM}$ ,  $M4_{(2n+1)M}$   
ET DE LOVE-KIRCHOFF**

### III.3 LES DÉPLACEMENTS GÉNÉRALISÉS ASSOCIÉS POUR LE MODÈLE M4\_3N PLAQUE

Les composantes du champ  $\bar{\sigma}^*$  pour le modèle M4\_3nP s'écrivent (II.3.2->4):

$$(III.3.1) \quad \sigma_{\alpha\beta}^{a3nP*}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^{i*}(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i^2}} M_{\alpha\beta}^{i*}(x, y) P_1^i(z) \quad z \in [h_i^-, h_i^+]$$

$$(III.3.2) \quad \sigma_{\alpha 3}^{a3nP*}(x, y, z) = \left( \frac{\tau_{\alpha}^{i,i+1*}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i*}(x, y)}{2} + \frac{M_{\alpha\beta}^{i*}(x, y)}{e^i} \right) P_0^i(z) \\ + \left( \tau_{\alpha}^{i,i+1*}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i*}(x, y) \right) P_1^i(z) + \frac{M_{\alpha\beta}^{i*}(x, y)}{e^i} P_2^i(z)$$

$$(III.3.3) \quad \sigma_{33}^{a3nP*}(x, y, z) = \left( \frac{v^{i,i+1*}(x, y) + v^{i-1,i*}(x, y)}{2} + \frac{e^i}{12} \operatorname{div} \left( \tilde{\tau}^{i,i+1*}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i*}(x, y) \right) \right) P_0^i(z) \\ + \left( -\frac{1}{5} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^{i*}(x, y) + \left( v^{i,i+1*}(x, y) - v^{i-1,i*}(x, y) \right) \right) P_1^i(z) \\ + \frac{e^i}{12} \operatorname{div} \left( \tilde{\tau}^{i,i+1*}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i*}(x, y) \right) P_2^i(z) - \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^{i*}(x, y) P_3^i(z)$$

où  $\tilde{N}^{i*}$ ,  $\tilde{M}^{i*}$ ,  $\tilde{\tau}^{i-1,i*}$ ,  $\tilde{\tau}^{i,i+1*}$ ,  $v^{i-1,i*}$  et  $v^{i,i+1*}$  sont des champs réguliers sur  $\omega$ . Ce sont les efforts intérieurs généralisés du modèle approché M4\_3nP.

De même que précédemment, le déplacement généralisé associé à l'approximation  $\bar{\sigma}^*$  s'obtient en écrivant ce champ  $\bar{\sigma}^*$  dans la partie de la fonctionnelle H. R.  $(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  qui dépend de  $\underline{U}^*$  (III.1.5).

Une autre façon d'envisager cette écriture est de remplacer  $\tilde{Q}^{i*}$  dans l'expression (III.2.4) du paragraphe précédent par sa valeur tirée de (II.2.8). Soit:

$$(III.3.4)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = & \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \begin{aligned}
 & N_{\alpha\beta}^i \int_{h_i^-}^{h_i^+} \varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{U}^*) \frac{P_0^i(z)}{e^i} dz + M_{\alpha\beta}^i \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12}{e^{i^2}} \varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{U}^*) P_1^i(z) dz \\
 & + \left( \frac{\tau_{\alpha}^{i,i+1*} + \tau_{\alpha}^{i-1,i*}}{2} + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i}{e^i} \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial z} P_0^i(z) dz + \left( \tau_{\alpha}^{i,i+1*} - \tau_{\alpha}^{i-1,i*} \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial z} P_1^i(z) dz \\
 & + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial z} P_2^i(z) dz \\
 & + \left( \frac{\tau_{\alpha}^{i,i+1*} + \tau_{\alpha}^{i-1,i*}}{2} + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i}{e^i} \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial x_{\alpha}} P_0^i(z) dz + \left( \tau_{\alpha}^{i,i+1*} - \tau_{\alpha}^{i-1,i*} \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial x_{\alpha}} P_1^i(z) dz \\
 & + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial x_{\alpha}} P_2^i(z) dz \\
 & + \left( \frac{v^{i,i+1*} + v^{i-1,i*}}{2} + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\bar{\tau}^{i,i+1*} - \bar{\tau}^{i-1,i*}) \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial z} P_0^i(z) dz \\
 & + \left( -\frac{1}{5} \operatorname{div} \operatorname{div} \bar{M}^{i*} + (v^{i,i+1*} - v^{i-1,i*}) \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial z} P_1^i(z) dz \\
 & + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\bar{\tau}^{i,i+1*} - \bar{\tau}^{i-1,i*}) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial z} P_2^i(z) dz - \operatorname{div} \operatorname{div} \bar{M}^{i*} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial z} P_3^i(z) dz
 \end{aligned} \right] d\omega \\
 & - \int_{\omega} \mathbf{T}^d(x, y, h_n^+) \cdot \underline{U}^*(x, y, h_n^+) d\omega - \int_{\omega} \mathbf{T}^d(x, y, h_1^-) \cdot \underline{U}^*(x, y, h_1^-) d\omega - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \mathbf{T}^d \cdot \underline{U}^* dz ds
 \end{aligned}$$

De même, en introduisant les définitions et les notations posées précédemment (III.1.7->17), en intégrant par parties chaque fois qu'apparaît une dérivée par rapport à z et en tenant compte de l'élimination couche à couche des facteurs  $\bar{u}_+^i, \bar{u}_-^i, u_{+3}^i, u_{-3}^i$  ( $i=1, n$ ) sauf les facteurs de  $\bar{u}_+^n, u_{+3}^n, \bar{u}_-^1, u_{-3}^1$  qui s'annulent avec les termes de bords,  $\mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  se réécrit:

(III.3.5)

$$\mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \begin{aligned} & \left[ \tilde{\mathbf{N}}^{i*} : \tilde{\varepsilon}^{i*} + \tilde{\mathbf{M}}^{i*} : \tilde{\chi}^{i*} - (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \tilde{U}^{i*} + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \tilde{\Phi}^{i*} \right. \\ & + \left( \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \right) \cdot \operatorname{Grad} U_3^{i*} + e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \operatorname{Grad} \bar{U}_3^{i*} \\ & - \left( -\frac{1}{5} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} + (v^{i,i+1*} - v^{i-1,i*}) \right) U_3^{i*} + e^i \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \bar{U}_3^{i*} \\ & \left. + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \operatorname{Grad} \hat{U}_3^{i*} + \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \left( \hat{U}_3^{i*} - \frac{2}{10} U_3^{i*} \right) \right] d\omega \\ & - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left( \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{\mathbf{T}}^d \cdot \underline{U}^* dz \right) ds \end{aligned} \right]$$

Constatons que:

(III.3.6)

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\omega} \left( e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \operatorname{Grad} \bar{U}_3^{i*} + e^i \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \bar{U}_3^{i*} \right) d\omega = \int_{\partial\omega} e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{\mathbf{n}} \bar{U}_3^{i*} ds \\ & \int_{\omega} \left( \tilde{\mathbf{M}}^{i*} : \tilde{\chi}^{i*} + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \tilde{\Phi}^{i*} \right) d\omega = \int_{\partial\omega} \left( \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \underline{\mathbf{n}} \right) \cdot \tilde{\Phi}^{i*} ds \\ & \int_{\omega} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \operatorname{Grad} U_3^{i*} d\omega = - \int_{\omega} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} : \operatorname{Grad} \operatorname{Grad} U_3^{i*} d\omega + \int_{\partial\omega} \left( \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \underline{\mathbf{n}} \right) \cdot \operatorname{Grad} U_3^{i*} ds \\ & \int_{\omega} \left( \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \operatorname{Grad} \hat{U}_3^{i*} + \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \hat{U}_3^{i*} \right) d\omega = \int_{\partial\omega} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \underline{\mathbf{n}} \hat{U}_3^{i*} ds \end{aligned} \right.$$

$\mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  devient alors:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(\underline{\mathbf{U}}^*, \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*) &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \tilde{\mathbf{N}}^{i*} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i*} - \tilde{\mathbf{M}}^{i*} : \tilde{\text{Grad}} \tilde{\text{Grad}} U_3^{i*} \right] d\omega \\
 &+ \sum_{i=0}^n \int_{\omega} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} \cdot \left( \tilde{\mathbf{U}}^{i+1*} - \tilde{\mathbf{U}}^{i*} + \frac{\mathbf{e}^i}{2} \tilde{\text{Grad}} U_3^{i*} + \frac{\mathbf{e}^{i+1}}{2} \tilde{\text{Grad}} U_3^{i+1*} \right) d\omega \\
 &+ \sum_{i=0}^n \int_{\omega} \mathbf{v}^{i,i+1*} \cdot \left( U_3^{i+1*} - U_3^{i*} \right) d\omega \\
 \text{(III.3.7)} \quad &+ \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left( +\mathbf{e}^i \left( \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*} \right) \cdot \underline{\mathbf{n}} \bar{U}_3^{i*} + \left( \tilde{\text{div}} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \underline{\mathbf{n}} \right) \hat{U}_3^{i*} \right) ds - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left( \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{\mathbf{T}}^* \cdot \underline{\mathbf{U}}^* dz \right) ds
 \end{aligned}$$

Ainsi les déplacements généralisés du modèle M4\_3nP sont les 3n champs scalaires:

$$\tilde{\mathbf{U}}^{i*} \text{ et } U_3^{i*}$$

La liste ci-dessous donne la correspondance entre les contraintes généralisées et les déformations généralisées:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{N}}^i &\leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^i = \frac{1}{2} \left( \tilde{\text{Grad}} \tilde{\mathbf{U}}^i + {}^T \tilde{\text{Grad}} \tilde{\mathbf{U}}^i \right) \\
 \tilde{\mathbf{M}}^i &\leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{\chi}}^i = -\tilde{\text{Grad}} \tilde{\text{Grad}} U_3^i \\
 \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} &\leftrightarrow \tilde{\mathbf{D}}^{i,i+1} = \left( \tilde{\mathbf{U}}^{i+1} - \tilde{\mathbf{U}}^i + \frac{\mathbf{e}^i}{2} \tilde{\text{Grad}} U_3^i + \frac{\mathbf{e}^{i+1}}{2} \tilde{\text{Grad}} U_3^{i+1} \right) \\
 \mathbf{v}^{i,i+1} &\leftrightarrow \mathbf{D}_v^{i,i+1} = \left( U_3^{i+1} - U_3^i \right)
 \end{aligned}
 \text{(III.3.8)}$$

Pour retrouver les équations d'équilibre et déterminer les conditions aux limites, nous procédons classiquement à une intégration par parties convenables de  $\mathbf{T}(\underline{\mathbf{U}}^*, \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*)$  ce qui donne après regroupement des termes en fonction des déplacements généralisés:

$$(III.3.9) \quad \mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)|_{\underline{U}^*} = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \begin{aligned} & \left( -\tilde{\text{div}} \tilde{\mathbf{N}}^{i*} - \tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) \tilde{U}^{i*} \\ & - \left( \text{div} \tilde{\text{div}} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} + \frac{e^i}{2} \text{div} \left( \tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) + \left( v^{i,i+1*} - v^{i-1,i*} \right) \right) U_3^{i*} \end{aligned} \right] d\omega \\ + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left[ \begin{aligned} & \left( \tilde{\mathbf{N}}^{i*} \cdot \underline{n} \right) \tilde{U}^{i*} + \left( \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \underline{n} \right) \tilde{\Phi}^{i*} + \left( \tilde{\text{div}} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \underline{n} \right) \left( \hat{U}_3^{i*} + U_3^{i*} \right) \\ & + \frac{e^i}{2} \left( \tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) \cdot \underline{n} U_3^{i*} + e^i \left( \tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) \cdot \underline{n} \bar{U}_3^{i*} \\ & - \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{\mathbf{T}}^d \cdot \underline{U}^* dz \end{aligned} \right] ds$$

Par variation de  $\tilde{U}^{i*}$  et  $U_3^{i*}$  au coeur de la plaque, on trouve bien les équations d'équilibre attendues.

Intéressons nous aux termes de bords pour en tirer les conditions aux limites. Remarquons tout d'abord que compte tenu du degré de dérivation dans les équations d'équilibre, nous avons besoin de quatre conditions aux limites scalaires par couche en chaque point de la frontière. Ce résultat se retrouve facilement si l'on isole la couche  $i$  et que l'on considère que les efforts d'interface  $\tilde{\tau}^{i-1,i}$ ,  $\tilde{\tau}^{i,i+1}$ ,  $v^{i-1,i}$  et  $v^{i,i+1}$  sont des "données", alors la couche  $i$  est modélisée ici comme une plaque de Love-Kirchhoff. On s'attend donc à avoir des conditions aux limites de type: vecteur contrainte membranaire au bord de la couche  $i$ ,  $\tilde{\mathbf{N}}^i \cdot \underline{n}$ , donné (deux conditions scalaires); composante normale du vecteur moment au bord de la couche,  $\underline{n} \cdot \tilde{\mathbf{M}}^i \cdot \underline{n}$ , donnée (une condition scalaire); enfin une dernière condition au limite scalaire associant l'effort tranchant sur la frontière (donné ici par  $\left( \tilde{\text{div}} \tilde{\mathbf{M}}^i + \frac{e^i}{2} \left( \tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i} \right) \right) \cdot \underline{n}$ ) et la dérivée sur la frontière de la composante tangentielle du vecteur moment au bord de la couche  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \underline{t} \cdot \tilde{\mathbf{M}}^i \cdot \underline{n} \right)$  (où  $\frac{\partial}{\partial t}$  est mis pour  $\tilde{\text{Grad}}(\cdot)$ ,  $\underline{t}$  et  $\underline{n}$  le vecteur du plan  $(e_1, e_2)$  directement orthogonal à  $\underline{n}$ ).

Pour retrouver ces résultats nous écrivons les champs de déplacements au bord lorsque  $z \in [h_i^-, h_i^+]$  sous la forme:

$$(III.3.10) \quad \underline{U}^*(x, y, z) = \begin{cases} \tilde{U}^*(x, y, z) = P_0^i(z) \tilde{U}^{i*}(x, y) - e^i P_1^i(z) \tilde{\text{Grad}} U_3^{i*}(x, y) + \Delta \tilde{U}^{i*}(x, y, z) \\ U_3^*(x, y, z) = P_0^i(z) U_3^{i*}(x, y) + \Delta U_3^{i*}(x, y, z) \end{cases}$$

Nous modifions la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner en négligeant dans les termes de bord les contributions de  $\Delta U_\alpha^{*i}(x,y,z)$  et  $\Delta U_3^{*i}(x,y,z)$ . Ainsi dans les termes de bord  $\tilde{\Phi}^{i*}(x,y)$  est remplacé par  $-\tilde{\text{Grad}} U_3^{i*}(x,y)$ ,  $\hat{U}_3^{i*}$  et  $\bar{U}_3^{i*}$  sont négligés.

Enfin nous notons:

$$(III.3.11) \quad \left| \begin{aligned} \tilde{T}_d^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \tilde{T}^d \cdot P_0^i(z) dz \\ Q_{3d}^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d \cdot P_0^i(z) dz \\ \tilde{M}_d^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} e^i \tilde{T}^d \cdot P_1^i(z) dz \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons alors réécrire l'approximation du dernier terme de bord (III.3.9):

$$(III.3.12) \quad \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d \cdot \underline{U}^* dz \approx \tilde{T}_d^i \cdot \tilde{U}^{i*} + Q_{3d}^i U_3^{i*} - \tilde{M}_d^i \cdot \tilde{\text{Grad}} U_3^{i*}$$

Le terme de bord de la fonctionnelle  $\mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  modifiée s'écrit alors:

$$(III.3.13) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left( \left( \left( \tilde{\text{div}} \tilde{M}^i + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot \underline{n} - Q_{3d}^i \right) U_3^{i*} \right. \\ \left. + \left( \tilde{N}^i \cdot \underline{n} - \tilde{T}_d^i \right) \cdot \tilde{U}^{i*} - \left( \tilde{M}^i \cdot \underline{n} - \tilde{M}_d^i \right) \cdot \tilde{\text{Grad}} U_3^{i*} \right) ds$$

Au voisinage du bord les variations de  $\tilde{U}^{i*}$  et  $U_3^{i*}$  et de la dérivée normale de  $U_3^{i*}$  ( $\tilde{\text{Grad}} U_3^{i*} \cdot \underline{n}$ ) peuvent être réalisées indépendamment. Il n'en est pas de même de la dérivée tangentielle de  $U_3^{i*}$  ( $\tilde{\text{Grad}} U_3^{i*} \cdot \underline{t}$ ) qui est évidemment reliée à la variation de  $U_3^{i*}$  au bord.

Ainsi le dernier terme sous l'intégrale de (III.3.13) est découpé en deux parties:

$$(III.3.14) \quad \left( \tilde{M}^i \cdot \underline{n} - \tilde{M}_d^i \right) \cdot \tilde{\text{Grad}} U_3^{i*} = \left( \underline{n} \cdot \tilde{M}^i \cdot \underline{n} - \tilde{M}_d^i \cdot \underline{n} \right) \left( \tilde{\text{Grad}} U_3^{i*} \cdot \underline{n} \right) + \left( \underline{t} \cdot \tilde{M}^i \cdot \underline{n} - \tilde{M}_d^i \cdot \underline{t} \right) \left( \tilde{\text{Grad}} U_3^{i*} \cdot \underline{t} \right)$$



Cette dernière partie peut être intégrée par parties sur le bord  $\partial\omega$  pour être écrite sous la forme:

$$(III.3.15) \quad -\frac{\partial}{\partial t} \left( \underline{t} \cdot \tilde{\tilde{M}}^i \cdot \underline{n} - \tilde{M}_{d \cdot \underline{t}}^i \right) U_3^i$$

où  $\frac{\partial}{\partial t}$  signifie la dérivée en suivant le bord.

On peut alors déterminer par variation indépendante de  $\tilde{U}^i$ ,  $U_3^i$  et de  $\text{Grad } U_3^i \cdot \underline{n}$  les quatre conditions aux limites sur la couche  $i$  suivantes:

$$(III.3.16) \quad \begin{aligned} \tilde{N}^i \cdot \underline{n} &= \tilde{T}_d^i \\ \underline{n} \cdot \tilde{M}^i \cdot \underline{n} &= \tilde{M}_{d \cdot \underline{n}}^i \\ \left( \text{div } \tilde{M}^i + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot \underline{n} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \underline{t} \cdot \tilde{\tilde{M}}^i \cdot \underline{n} - \tilde{M}_{d \cdot \underline{t}}^i \right) &= Q_{3d}^i \end{aligned}$$

Nous retrouvons le résultat classique des plaques de Love-Kirchhoff. Il n'est pas possible d'imposer indépendamment l'effort tranchant au bord et la composante tangentielle du vecteur moment.

#### III.4 LES DÉPLACEMENTS GÉNÉRALISÉS ASSOCIÉS POUR LE MODÈLE M4\_2N+1 PLAQUE

Les composantes du champ  $\bar{\sigma}^*$  pour le modèle M4\_(2n+1)P s'écrivent (II.4.3->5):

$$(III.4.1) \quad \sigma_{\alpha\beta}^{a(2n+1)P^*}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}} M_{\alpha\beta}^i(x, y) P_1^i(z) \quad z \in [h_i^-, h_i^+]$$

$$(III.4.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{a(2n+1)P^*}(x, y, z) &= \left( \frac{\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)}{2} + \frac{M_{\alpha\beta}^i}{e^i} \right) P_0^i(z) \\ &+ \left( \tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y) \right) P_1^i(z) + M_{\alpha\beta}^i \frac{P_2^i(z)}{e^i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{33}^{a(2n+1)P^*}(z) &= \left( \begin{aligned} &\frac{T_3^+(x,y) - T_3^-(x,y)}{2} + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}(x,y)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1^*}(x,y) + \tilde{\tau}^{j-1,j^*}(x,y)) + \operatorname{div} \tilde{\operatorname{div}} \tilde{M}^j(x,y) \right] \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1^*}(x,y) + \tilde{\tau}^{j-1,j^*}(x,y)) + \operatorname{div} \tilde{\operatorname{div}} \tilde{M}^j(x,y) \right] \end{aligned} \right) P_0^i(z) \\
 \text{(III.4.3)} \quad &- \left( \frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}(x,y)) + \frac{6}{5} \operatorname{div} \tilde{\operatorname{div}} \tilde{M}^i(x,y) \right) P_1^i(z) \\
 &+ \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}(x,y)) P_2^i(z) - \operatorname{div} \tilde{\operatorname{div}} \tilde{M}^i(x,y) P_3^i(z)
 \end{aligned}$$

où  $\tilde{N}^{i^*}$ ,  $\tilde{M}^{i^*}$ ,  $\tilde{\tau}^{i-1,i^*}$  et  $\tilde{\tau}^{i,i+1^*}$  sont des champs réguliers sur  $\omega$ . Ce sont les efforts intérieurs généralisés du modèle approché  $M4_{(2n+1)P}$ .

De même que précédemment, le déplacement généralisé associé à l'approximation  $\bar{\sigma}^*$  s'obtient en écrivant ce champ  $\bar{\sigma}^*$  dans la partie de la fonctionnelle H. R.  $(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  qui dépend de  $\underline{U}^*$  (III.1.5).

Soit:

(III.4.4)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} & \left[ \begin{aligned}
 & N_{\alpha\beta}^i \int_{h_i^-}^{h_i^+} \varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{U}^*) \frac{P_0^i(z)}{e^i} dz + M_{\alpha\beta}^i \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12}{e^{i^2}} \varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{U}^*) P_1^i(z) dz \\
 & + \left( \frac{\tau_{\alpha}^{i,i+1*} + \tau_{\alpha}^{i-1,i*}}{2} + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i}{e^i} \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial z} P_0^i(z) dz \\
 & + \left( \tau_{\alpha}^{i,i+1*} - \tau_{\alpha}^{i-1,i*} \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial z} P_1^i(z) dz + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial z} P_2^i(z) dz \\
 & + \left( \frac{\tau_{\alpha}^{i,i+1*} + \tau_{\alpha}^{i-1,i*}}{2} + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i}{e^i} \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial x_{\alpha}} P_0^i(z) dz \\
 & + \left( \tau_{\alpha}^{i,i+1*} - \tau_{\alpha}^{i-1,i*} \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial x_{\alpha}} P_1^i(z) dz + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial x_{\alpha}} P_2^i(z) dz \\
 & + \left[ \begin{aligned}
 & \frac{T_3^+ - T_3^-}{2} + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1*} + \tilde{\tau}^{j-1,j*}) + \operatorname{div} \tilde{\operatorname{div}} \tilde{M}^{j*} \right] \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial z} P_0^i(z) dz \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1*} + \tilde{\tau}^{j-1,j*}) + \operatorname{div} \tilde{\operatorname{div}} \tilde{M}^{j*} \right] \\
 & - \left( \frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) + \frac{6}{5} \operatorname{div} \tilde{\operatorname{div}} \tilde{M}^{i*} \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial z} P_1^i(z) dz \\
 & + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial z} P_2^i(z) dz - \operatorname{div} \tilde{\operatorname{div}} \tilde{M}^{i*} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial z} P_3^i(z) dz
 \end{aligned} \right] dz
 \end{aligned} \right] d\omega \\
 & - \int_{\omega} \underline{\mathbf{T}}^d(x, y, h_n^+) \cdot \underline{U}^*(x, y, h_n^+) d\omega - \int_{\omega} \underline{\mathbf{T}}^d(x, y, h_1^-) \cdot \underline{U}^*(x, y, h_1^-) d\omega - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left( \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{\mathbf{T}}^d \cdot \underline{U}^* dz \right) ds
 \end{aligned}$$

On introduit à nouveau les définitions et les notations posées précédemment (III.1.7->17), et l'on intègre par parties chaque fois qu'apparaît une dérivée par rapport à  $z$ . Les facteurs  $\tilde{u}_+^i, \tilde{u}_-^i, u_{+3}^i, u_{-3}^i$  ( $i=1, n$ ) s'éliminent de couche à couche à l'exception des facteurs de  $u_{+3}^n$  et  $u_{-3}^1$ .  $\mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  se réécrit:

(III.4.5)

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = & \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \begin{aligned} & \tilde{N}^{i*} : \tilde{\varepsilon}^{i*} + \tilde{M}^{i*} : \tilde{\chi}^{i*} - (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \tilde{U}^{i*} + \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} \cdot \tilde{\Phi}^{i*} \\ & + \left( \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) + \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} \right) \cdot \operatorname{Grad} U_3^{i*} + e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \operatorname{Grad} \bar{U}_3^{i*} \\ & + \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} \cdot \operatorname{Grad} \hat{U}_3^{i*} + \left( \frac{e^i}{2} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) + \frac{6}{5} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} \right) U_3^{i*} \\ & + e^i \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \bar{U}_3^{i*} + \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} \left( \hat{U}_3^{i*} - \frac{2}{10} U_3^{i*} \right) \end{aligned} \right] d\omega \\
 & - \int_{\omega} \left( T_3^+ + T_3^- \right) + \sum_{j=1}^n \left( \frac{e^j}{2} \operatorname{div} (\tilde{\tau}^{j,j+1*} + \tilde{\tau}^{j-1,j*}) + \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^{j*} \right) \left( \frac{u_{+3}^{n*} + u_{-3}^{n*}}{2} \right) d\omega \\
 & - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left( \int_{h_i^-}^{h_i^+} \mathbf{T}^d \cdot \underline{U}^* dz \right) ds
 \end{aligned}$$

On peut regrouper les termes suivants:

(III.4.6)

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\omega} \left( \tilde{M}^{i*} : \tilde{\chi}^{i*} + \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} \cdot \tilde{\Phi}^{i*} \right) d\omega = \int_{\partial\omega} \left( \tilde{M}^{i*} \cdot \underline{n} \right) \cdot \tilde{\Phi}^{i*} ds \\ & \int_{\omega} \left( \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} \cdot \operatorname{Grad} U_3^{i*} + \left( \frac{6}{5} - \frac{2}{10} \right) \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} U_3^{i*} \right) d\omega = \int_{\partial\omega} \left( \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} \cdot \underline{n} \right) U_3^{i*} ds \\ & \int_{\omega} \left( \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} \cdot \operatorname{Grad} \hat{U}_3^{i*} + \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} \hat{U}_3^{i*} \right) d\omega = \int_{\partial\omega} \left( \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} \cdot \underline{n} \right) \hat{U}_3^{i*} ds \\ & \int_{\omega} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^{j*} \left( \frac{u_{+3}^{n*} + u_{-3}^{n*}}{2} \right) d\omega = \int_{\omega} \tilde{M}^{j*} : \operatorname{Grad} \operatorname{Grad} \left( \frac{u_{+3}^{n*} + u_{-3}^{n*}}{2} \right) d\omega \\ & + \int_{\partial\omega} \left( \operatorname{div} \tilde{M}^{j*} \cdot \underline{n} \right) \cdot \left( \frac{u_{+3}^{n*} + u_{-3}^{n*}}{2} \right) ds - \int_{\partial\omega} \left( \tilde{M}^{j*} \cdot \underline{n} \right) \cdot \operatorname{Grad} \left( \frac{u_{+3}^{n*} + u_{-3}^{n*}}{2} \right) ds \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\omega} \left( \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \text{Grad } U_3^i + \frac{e^i}{2} \text{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) U_3^i \right) d\omega = \int_{\partial\omega} \left( \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{n} \right) U_3^i ds \\ & \int_{\omega} \left( e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \text{Grad } \bar{U}_3^i + e^i \text{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \bar{U}_3^i \right) d\omega = \int_{\partial\omega} \left( e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{n} \right) \bar{U}_3^i ds \\ & \int_{\omega} \frac{e^i}{2} \text{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \left( \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2} \right) d\omega = \int_{\omega} -\frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \text{Grad} \left( \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2} \right) d\omega \\ & + \int_{\partial\omega} \left( \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{n} \right) \left( \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2} \right) ds \end{aligned} \right.$$

$\mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  se réécrit:

(III.4.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) &= - \int_{\omega} (T_3^+ + T_3^-) \left( \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2} \right) d\omega + \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \tilde{N}^{i*} : \tilde{\varepsilon}^{i*} - \tilde{M}^{i*} : \text{Grad Grad} \left( \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2} \right) \right] d\omega \\ &+ \sum_{i=0}^n \int_{\omega} \tilde{\tau}^{i,i+1*} \cdot \left( \tilde{U}^{i+1*} - \tilde{U}^{i*} + \frac{e^i + e^{i+1}}{2} \text{Grad} \left( \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2} \right) \right) d\omega - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d \cdot \underline{U}^* dz ds \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left( \begin{aligned} & \tilde{M}^{i*} \cdot \underline{n} \cdot \tilde{\Phi}^{i*} + \text{div} \tilde{M}^{i*} \cdot \underline{n} (U_3^i + \hat{U}_3^i) + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{n} U_3^i \\ & + e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{n} \bar{U}_3^i - \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{n} \left( \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2} \right) \\ & - \text{div} \tilde{M}^{i*} \cdot \underline{n} \left( \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2} \right) + \tilde{M}^{i*} \cdot \underline{n} \cdot \text{Grad} \left( \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2} \right) \end{aligned} \right) ds \end{aligned}$$

Ainsi les déplacements généralisés du modèle M4\_(2n+1)P sont les 2n+1 champs scalaires:

$$\tilde{U}^{i*}, \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2} = W_3^*$$

La liste ci-dessous donne la correspondance entre les contraintes généralisées et les déformations généralisées:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{N}}^i &\leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^i = \frac{1}{2} \left( \text{Grad } \tilde{\mathbf{U}}^i + {}^T \text{Grad } \tilde{\mathbf{U}}^i \right) \\
 \tilde{\mathbf{M}}^i &\rightarrow \\
 \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{M}}^i &\leftarrow \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \tilde{\boldsymbol{\chi}} = -\text{Grad Grad } W_3 \\
 \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1} &\leftrightarrow \tilde{\mathbf{D}}^{i,i+1} = \left( \tilde{\mathbf{U}}^{i+1} - \tilde{\mathbf{U}}^i + \frac{\mathbf{e}^i + \mathbf{e}^{i+1}}{2} \text{Grad } W_3 \right)
 \end{aligned}
 \tag{III.4.8}$$

Ces déformations généralisées sont évidemment nulles dans tout mouvement rigidifiant.

Pour retrouver les équations d'équilibre et déterminer les conditions aux limites, nous procédons classiquement à une intégration par parties convenable de  $\mathbf{T}(\underline{\mathbf{U}}^*, \overline{\boldsymbol{\sigma}}^*)$  ce qui donne après regroupement des termes en fonction des déplacements généralisés:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(\underline{\mathbf{U}}^*, \overline{\boldsymbol{\sigma}}^*)_{|\underline{\mathbf{U}}^*} &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \left( -\text{div } \tilde{\mathbf{N}}^{i*} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*} \right) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{i*} \right. \\
 &\quad \left. - \left( \mathbf{T}_3^+ + \mathbf{T}_3^- + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\mathbf{e}^i}{2} \text{div} \left( \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*} \right) + \text{div div } \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \right) \right) \cdot \mathbf{W}_3^* \right] d\omega \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left[ \left( \tilde{\mathbf{N}}^{i*} \cdot \underline{\mathbf{n}} \right) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{i*} + \left( \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \underline{\mathbf{n}} \right) \cdot \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^* \right. \\
 &\quad \left. + \text{div } \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \underline{\mathbf{n}} \left( \mathbf{U}_3^i + \hat{\mathbf{U}}_3^i \right) + \frac{\mathbf{e}^i}{2} \left( \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*} \right) \cdot \underline{\mathbf{n}} \mathbf{U}_3^{i*} \right] ds \\
 &\quad \left. + \mathbf{e}^i \left( \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*} \right) \cdot \underline{\mathbf{n}} \overline{\mathbf{U}}_3^{i*} - \int_{h_i^-}^{h_i^+} \mathbf{T}^d \cdot \underline{\mathbf{U}}^* dz \right]
 \end{aligned}
 \tag{III.4.9}$$

Une variation de  $\tilde{\mathbf{U}}^i$  et  $W_3$  au coeur de la plaque redonne les équations d'équilibre attendues.

Intéressons nous aux termes de bords pour la détermination des conditions aux limites.

Compte tenu des degrés de dérivation des conditions aux limites, on en a besoin de  $2n+2$  ( $2n$  sur les conditions aux limites des efforts internes membranaires, plus 2 conditions aux limites de type Love-Kirchhoff sur la somme des moments membranaires et la somme des efforts tranchants).

Pour retrouver ce résultats, nous écrivons le champ de déplacement au bord sous la forme:

$$\underline{\mathbf{U}}^*(x, y, z) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}^*(x, y, z) = P_0^i(z) \tilde{\mathbf{U}}^{i*}(x, y) - e^i P_1^i(z) \text{Grad } W_3^*(x, y) + \Delta \tilde{\mathbf{U}}^{i*}(x, y, z) \\ \mathbf{U}_3^*(x, y, z) = W_3^*(x, y) + \Delta U_3^{i*}(x, y, z) \end{cases}
 \tag{III.4.10}$$

Nous modifions la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner en négligeant dans les termes de bord la contribution de  $\Delta U_\alpha^{*i}(x,y,z)$  et  $\Delta U_3^{*i}(x,y,z)$ . Ainsi dans les termes de bord  $\tilde{\Phi}^{i*}(x,y)$  est approximé par  $-\text{Grad } W_3^*(x,y)$ ,  $\hat{U}_3^{i*}$  et  $\bar{U}_3^{i*}$  sont négligés,  $U_3^{i*}(x,y)$  est approximé par  $W_3^*(x,y)$ .

Enfin nous notons:

$$(III.4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}_d^i(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \tilde{T}^d(x,y,z) \cdot P_0^i(z) dz \\ Q_{3d}(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d(x,y,z) dz \\ \tilde{M}_d(x,y) = \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \tilde{T}^d(x,y,z) \cdot e^i P_1^i(z) dz \end{array} \right.$$

Nous pouvons alors réécrire l'approximation du dernier terme de bord dans (III.4.9):

$$(III.4.12) \quad \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \tilde{T}^d(x,y,z) \cdot \underline{U}^*(x,y,z) dz \approx \sum_{i=1}^n \tilde{T}_d^i \cdot \tilde{U}^{i*} + Q_{3d} W_3^* - \tilde{M}_d \cdot \tilde{\text{Grad}} W_3^*$$

Le terme de bord de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner modifiée s'écrit alors:

$$(III.4.13) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left( \begin{array}{l} + \left( \tilde{N}^i \cdot \underline{n} - \tilde{T}_d^i \right) \cdot \tilde{U}^{i*} + \left( \sum_{i=1}^n \left( \tilde{\text{div}} \tilde{M}^i + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot \underline{n} - Q_{3d} \right) W_3^* \\ - \left( \left( \sum_{i=1}^n \tilde{M}^i \right) \cdot \underline{n} - \tilde{M}_d \right) \cdot \tilde{\text{Grad}} W_3^* \end{array} \right) ds$$

Le dernier terme de l'intégrale (III.4.13) est décomposé en deux parties:

$$(III.4.14) \quad \left( \left( \sum_{i=1}^n \tilde{M}^i \right) \cdot \underline{n} - \tilde{M}_d \right) \cdot \tilde{\text{Grad}} W_3^* = \left( \underline{n} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \tilde{M}^i \right) \cdot \underline{n} - \tilde{M}_d \cdot \underline{n} \right) \frac{\partial W_3^*}{\partial n} \\ + \left( \underline{t} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \tilde{M}^i \right) \cdot \underline{n} - \tilde{M}_d \cdot \underline{t} \right) \frac{\partial W_3^*}{\partial t}$$

Cette deuxième partie peut être intégrée par parties sur le bord  $\partial\omega$  pour être écrite sous la forme:

$$(III.5.5) \quad \mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = \sum_{i=1}^n \left[ \int_{\omega} \left[ \begin{array}{l} \tilde{N}^i : \tilde{\varepsilon}^i - (\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \cdot \tilde{U}^i \\ + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \cdot \text{Grad } U_3^i + e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \cdot \text{Grad } \bar{U}_3^i \\ - (v^{i,i+1} - v^{i-1,i}) U_3^i + e^i \text{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \bar{U}_3^i \end{array} \right] d\omega \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \mathbf{T}^d \cdot \underline{U}^* dz \right] ds$$

Notons que:

$$(II.5.6) \quad \int_{\omega} \left( e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \cdot \text{Grad } \bar{U}_3^i + e^i \text{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \bar{U}_3^i \right) d\omega = \int_{\partial\omega} e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \cdot \underline{n} \bar{U}_3^i ds$$

Ainsi  $\mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  s'écrit:

$$(III.5.7) \quad \mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [\tilde{N}^i : \tilde{\varepsilon}^i] d\omega + \sum_{i=0}^n \int_{\omega} v^{i,i+1} (U_3^{i+1} - U_3^i) d\omega \\ + \sum_{i=0}^n \int_{\omega} \tilde{\tau}^{i,i+1} \cdot \left( \tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i + \frac{e^i}{2} \text{Grad } U_3^i + \frac{e^{i+1}}{2} \text{Grad } U_3^{i+1} \right) d\omega \\ + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left( e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \cdot \underline{n} \bar{U}_3^i \right) ds - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \mathbf{T}^d \cdot \underline{U}^* dz ds$$

Ainsi les déplacements généralisés du modèle M4\_3nM sont les 3n champs scalaires:

$$\tilde{U}^i \text{ et } U_3^i$$

La liste ci-dessous donne la correspondance entre les contraintes généralisées et les déformations généralisées:

$$(III.5.8) \quad \tilde{N}^i \leftrightarrow \tilde{\varepsilon}^i = \frac{1}{2} \left( \text{Grad } \tilde{U}^i + {}^T \text{Grad } \tilde{U}^i \right) \\ \tilde{\tau}^{i,i+1} \leftrightarrow \tilde{D}^{i,i+1} = \left( \tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i + \frac{e^i}{2} \text{Grad } U_3^i + \frac{e^{i+1}}{2} \text{Grad } U_3^{i+1} \right) \\ v^{i,i+1} \leftrightarrow D_v^{i,i+1} = (U_3^{i+1} - U_3^i)$$



Pour retrouver les équations d'équilibre et déterminer les conditions aux limites, nous procédons classiquement à une intégration par parties convenables de  $\mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  ce qui donne après regroupement des termes en fonction des déplacements généralisés:

$$(III.5.9) \quad \mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)|_{\underline{U}^*} = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \begin{aligned} & \left( -\operatorname{div} \tilde{N}^{i*} - \tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) \tilde{U}^{i*} \\ & - \left( \frac{e^i}{2} \operatorname{div} \left( \tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) + \left( v^{i,i+1*} - v^{i-1,i*} \right) \right) U_3^{i*} \end{aligned} \right] d\omega \\ + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left[ \begin{aligned} & \left( \tilde{N}^{i*} \cdot \underline{n} \right) \tilde{U}^{i*} + \frac{e^i}{2} \left( \tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) \cdot \underline{n} U_3^{i*} + e^i \left( \tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) \cdot \underline{n} \bar{U}_3^{i*} \\ & - \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d \cdot \underline{U}^* dz \end{aligned} \right] ds$$

Une variation de  $\tilde{U}^{i*}$  et  $U_3^{i*}$  au coeur de la plaque redonne les équations d'équilibre attendues. Intéressons nous aux termes de bord pour la détermination des conditions aux limites.

Nous décomposons  $\underline{U}^*(x, y, z)$  sur la base orthogonale de la manière suivante:

$$(III.5.10) \quad \underline{U}^*(x, y, z) = \begin{cases} U_{\alpha}^*(x, y, z) = P_0^i(z) U_{\alpha}^{i*}(x, y) + \Delta U_{\alpha}^{*i}(x, y, z) \\ U_3^*(x, y, z) = P_0^i(z) U_3^{i*}(x, y) + \Delta U_3^{*i}(x, y, z) \end{cases}$$

où  $\Delta U_{\alpha}^{*i}$  et  $\Delta U_3^{*i}$  sont orthogonaux à  $P_0^i(z)$ .

Le terme de bord  $-\int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d \cdot \underline{U}^* dz$  s'écrit alors:

$$(III.5.11) \quad -\tilde{T}_d^i \tilde{U}^{i*} - Q_{3d}^i U_3^{i*} - \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d \cdot \Delta \underline{U}^* dz$$

où

$$(III.5.12) \quad \begin{cases} T_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_{\alpha}^d \cdot P_0^i(z) dz \\ Q_{3d}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d \cdot P_0^i(z) dz \end{cases}$$

Si maintenant nous modifions la fonctionnelle  $T(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  en négligeant les termes de bord faisant intervenir des composantes du champ de déplacement orthogonales à  $\tilde{U}^i P_0^i(z)$  et  $U_3^i P_0^i(z)$ , nous obtenons par variation les conditions aux limites suivantes:

$$(III.5.13) \quad \begin{cases} \tilde{N}^i \cdot \underline{n} = \tilde{T}_d^i \\ \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \cdot \underline{n} = Q_{3d}^i \end{cases}$$

Notons que nous avons aussi n conditions (III.5.13b) reliant n-1 valeurs  $\tilde{\tau}^{i,i+1} \cdot \underline{n}$ .

Le problème n'aura donc une solution que si la condition suivante sur les données est vérifiée:

$$(III.5.14) \quad \frac{\tilde{\tau}^{0,1} \cdot \underline{n}}{2} + (-1)^n \frac{\tilde{\tau}^{n,n+1} \cdot \underline{n}}{2} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{Q_{3d}^i}{e^i}$$

Cette condition est satisfaite dans le cas d'un bord libre.

### III.6 LES DEPLACEMENTS GENERALISES ASSOCIES POUR LE MODELE M4\_(2N+1) MEMBRANE

Les composantes du champ  $\bar{\sigma}^*$  pour le modèle M4\_(2n+1)M s'écrivent (II.6.1->3):

$$(III.6.1) \quad \sigma_{\alpha\beta}^{a(2n+1)M^*}(x,y,z) = N_{\alpha\beta}^i(x,y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} \quad z \in [h_i^-, h_i^+]$$

$$(III.6.2) \quad \sigma_{\alpha 3}^{a(2n+1)M^*}(x,y,z) = \frac{1}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1*}(x,y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i*}(x,y)) P_0^i(z) + (\tau_{\alpha}^{i,i+1*}(x,y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i*}(x,y)) P_1^i(z)$$

$$(III.6.3) \quad \sigma_{33}^{a(2n+1)M^*}(z) = \left( \begin{array}{l} \frac{T_3^+(x,y) - T_3^-(x,y)}{2} + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}(x,y)) \\ \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1^*}(x,y) + \tilde{\tau}^{j-1,j^*}(x,y)) \right] \\ - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1^*}(x,y) + \tilde{\tau}^{j-1,j^*}(x,y)) \right] \end{array} \right) P_0^i(z) \\ - \frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}(x,y)) P_1^i(z) + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}(x,y)) P_2^i(z)$$

où  $\tilde{N}^i$ ,  $\tilde{\tau}^{i-1,i^*}$  et  $\tilde{\tau}^{i,i+1^*}$  sont des champs réguliers sur  $\omega$ . Ce sont les efforts intérieurs généralisés du modèle approché  $M4_{(2n+1)M}$ .

De même que précédemment, le déplacement généralisé associé à l'approximation  $\bar{\sigma}^*$  s'obtient en écrivant ce champ  $\bar{\sigma}^*$  dans la partie de la fonctionnelle H. R.  $(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  qui dépend de  $\underline{U}^*$  (III.1.5).

Soit:

$$(III.6.4)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(\underline{\mathbf{U}}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*) &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \begin{aligned}
 &N_{\alpha\beta}^i \int_{h_i^-}^{h_i^+} \varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{\mathbf{U}}^*) \frac{P_0^i(z)}{e^i} dz \\
 &+ \left( \frac{\tau_{\alpha}^{i,i+1*} + \tau_{\alpha}^{i-1,i*}}{2} \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial z} P_0^i(z) dz + \left( \tau_{\alpha}^{i,i+1*} - \tau_{\alpha}^{i-1,i*} \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial z} P_1^i(z) dz \\
 &+ \left( \frac{\tau_{\alpha}^{i,i+1*} + \tau_{\alpha}^{i-1,i*}}{2} \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial x_{\alpha}} P_0^i(z) dz + \left( \tau_{\alpha}^{i,i+1*} - \tau_{\alpha}^{i-1,i*} \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial x_{\alpha}} P_1^i(z) dz \\
 &\left( \frac{T_3^+ - T_3^-}{2} + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial z} P_0^i(z) dz \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1*} + \tilde{\tau}^{j-1,j*}) \right] \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1*} + \tilde{\tau}^{j-1,j*}) \right] \\
 &- \frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial z} P_1^i(z) dz \\
 &+ \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial z} P_2^i(z) dz
 \end{aligned} \right] d\omega \\
 &- \int_{\omega} \mathbf{T}^d(x, y, h_n^+) \cdot \underline{\mathbf{U}}^*(x, y, h_n^+) d\omega - \int_{\omega} \mathbf{T}^d(x, y, h_1^-) \cdot \underline{\mathbf{U}}^*(x, y, h_1^-) d\omega - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \mathbf{T}^d \cdot \underline{\mathbf{U}}^* dz ds
 \end{aligned}$$

On introduit à nouveau les définitions et les notations posées précédemment (III.1.7->17) on intègre par parties chaque fois qu'apparaît une dérivée par rapport à z. Les facteurs  $\tilde{u}_+^{i*}, \tilde{u}_-^{i*}, u_{+3}^{i*}, u_{-3}^{i*}$  ( $i = 1, n$ ) s'éliminent couche à couche à l'exception des facteurs de  $u_{+3}^{n*}$  et  $u_{-3}^{1*}$ .  $\mathbf{T}(\underline{\mathbf{U}}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*)$  se réécrit:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(\underline{\mathbf{U}}^*, \overline{\boldsymbol{\sigma}}^*) &= \sum_{i=1}^n \left[ \int_{\omega} \left[ \tilde{\mathbf{N}}^i : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^i - (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^i \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{e^i}{2} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \cdot \text{Grad } \mathbf{U}_3^i + e^i (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \cdot \text{Grad } \overline{\mathbf{U}}_3^i \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{e^i}{2} \text{div} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \mathbf{U}_3^i + e^i \text{div} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \overline{\mathbf{U}}_3^i \right] d\omega \right. \\
 &\quad - \int_{\omega} \left( (\mathbf{T}_3^+ + \mathbf{T}_3^-) + \sum_{i=1}^n \frac{e^i}{2} \text{div} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \right) \left( \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2} \right) d\omega \\
 &\quad \left. - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \mathbf{T}^d \cdot \underline{\mathbf{U}}^* dz ds \right]
 \end{aligned}
 \tag{III.6.5}$$

On peut regrouper ou modifier les termes suivants qui donnent alors des termes de bord:

$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned}
 &\int_{\omega} \left( \frac{e^i}{2} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \cdot \text{Grad } \mathbf{U}_3^i + \frac{e^i}{2} \text{div} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \mathbf{U}_3^i \right) d\omega \\
 &\quad = \int_{\partial\omega} \left( \frac{e^i}{2} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \cdot \underline{\mathbf{n}} \right) \mathbf{U}_3^i ds \\
 &\int_{\omega} \left( e^i (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \cdot \text{Grad } \overline{\mathbf{U}}_3^i + e^i \text{div} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \overline{\mathbf{U}}_3^i \right) d\omega \\
 &\quad = \int_{\partial\omega} \left( e^i (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \cdot \underline{\mathbf{n}} \right) \overline{\mathbf{U}}_3^i ds \\
 &\int_{\omega} \frac{e^i}{2} \text{div} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \left( \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2} \right) d\omega \\
 &= \int_{\omega} -\frac{e^i}{2} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \cdot \text{Grad} \left( \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2} \right) d\omega + \int_{\partial\omega} \left( \frac{e^i}{2} (\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i,i+1*} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{i-1,i*}) \cdot \underline{\mathbf{n}} \right) \left( \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2} \right) ds
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{III.6.6}$$

$\mathbf{T}(\underline{\mathbf{U}}^*, \overline{\boldsymbol{\sigma}}^*)$  se réécrit:

$$\tag{III.6.7}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(\underline{\mathbf{U}}^*, \overline{\boldsymbol{\sigma}}^*) &= - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left( \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{\mathbf{T}}^d \cdot \underline{\mathbf{U}}^* dz \right) ds + \sum_{i=1}^n \int_{\omega} [\tilde{\mathbf{N}}^{i*}; \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i*}] d\omega \\
 &+ \sum_{i=0}^n \int_{\omega} \tilde{\tau}^{i,i+1*} \left( \tilde{\mathbf{U}}^{i+1*} - \tilde{\mathbf{U}}^{i*} + \frac{e^i + e^{i+1}}{2} \text{Grad} \left( \frac{u_{+3}^{n*} + u_{-3}^{l*}}{2} \right) \right) d\omega - \int_{\omega} (T_3^+ + T_3^-) \left( \frac{u_{+3}^{n*} + u_{-3}^{l*}}{2} \right) d\omega \\
 &+ \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left( \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{U}_3^{i*} + e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{\mathbf{n}} \bar{\mathbf{U}}_3^{i*} - \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{\mathbf{n}} \left( \frac{u_{+3}^{n*} + u_{-3}^{l*}}{2} \right) \right) ds
 \end{aligned}$$

Ainsi les déplacements généralisés du modèle M4\_(2n+1)M sont les 2n+1 champs scalaires:

$$\tilde{\mathbf{U}}^{i*}, \frac{u_{+3}^{n*} + u_{-3}^{l*}}{2} = \mathbf{W}_3^*$$

La liste ci-dessous donne la correspondance entre les contraintes généralisées et les déformations généralisées:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{N}}^i &\leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^i = \frac{1}{2} \left( \text{Grad} \tilde{\mathbf{U}}^i + {}^T \text{Grad} \tilde{\mathbf{U}}^i \right) \\
 \tilde{\tau}^{i,i+1} &\leftrightarrow \tilde{\mathbf{D}}^{i,i+1} = \left( \tilde{\mathbf{U}}^{i+1} - \tilde{\mathbf{U}}^i + \frac{e^i + e^{i+1}}{2} \text{Grad} \mathbf{W}_3 \right)
 \end{aligned}
 \tag{III.6.8}$$

Ces déformations généralisées sont évidemment nulles dans tout mouvement rigidifiant.

Pour retrouver les équations d'équilibre et déterminer les conditions aux limites, nous procédons classiquement à une intégration par parties convenable de  $\mathbf{T}(\underline{\mathbf{U}}^*, \overline{\boldsymbol{\sigma}}^*)$  ce qui donne après regroupement des termes en fonction des déplacements généralisés:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(\underline{\mathbf{U}}^*, \overline{\boldsymbol{\sigma}}^*) \Big|_{\underline{\mathbf{U}}^*} &= \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left( -\text{div} \tilde{\mathbf{N}}^{i*} - \tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*} \right) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{i*} d\omega \\
 &- \int_{\omega} \left( T_3^+ + T_3^- + \sum_{i=1}^n \frac{e^i}{2} \text{div} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \right) \mathbf{W}_3^* d\omega \\
 &+ \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left( \left( \tilde{\mathbf{N}}^{i*} \cdot \underline{\mathbf{n}} \right) \tilde{\mathbf{U}}^{i*} + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{\mathbf{n}} \mathbf{U}_3^{i*} \right. \\
 &\left. + e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}) \cdot \underline{\mathbf{n}} \bar{\mathbf{U}}_3^{i*} - \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{\mathbf{T}}^d \cdot \underline{\mathbf{U}}^* dz \right) ds
 \end{aligned}
 \tag{III.6.9}$$

Une variation de  $\tilde{U}^{i*}$  ou  $W_3^*$  au coeur de la plaque redonne bien les équations d'équilibre attendues. Intéressons nous aux termes de bords pour déterminer les conditions aux limites. Nous avons  $2n+1$  champs de déplacements généralisés, nous décomposons  $\underline{U}^*(x,y,z)$  lorsque  $z \in [h_1^-, h_1^+]$  de la manière suivante:

$$(III.6.10) \quad \underline{U}^*(x,y,z) = \begin{cases} U_\alpha^*(x,y,z) = P_0^i(z)U_\alpha^{i*}(x,y) + \Delta U_\alpha^{*i}(x,y,z) \\ U_3^*(x,y,z) = W_3^*(x,y) + \Delta U_3^*(x,y,z) \end{cases}$$

avec  $\Delta U_\alpha^{*i}(x,y,z)$  orthogonal à  $P_0^i(z)$ . Nous modifions la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner en négligeant dans les termes de bord la contribution de  $\Delta U_\alpha^{*i}$  et  $\Delta U_3^*$ .

Ainsi dans les termes de bord  $U_3^{i*}$  est approximé par  $W_3^*$  et  $\tilde{U}_3^{i*}$  est négligé.

Enfin notons:

$$(III.6.11) \quad \begin{cases} \tilde{T}_d^i(x,y) = \int_{h_1^-}^{h_1^+} \tilde{T}^d(x,y,z) \cdot P_0^i(z) dz \\ Q_3^d(x,y) = \int_{h_1^-}^{h_1^+} T_3^d(x,y,z) dz \end{cases}$$

Nous pouvons alors écrire l'approximation du dernier terme de bord dans (III.6.9):

$$(III.6.12) \quad \sum_{i=1}^n \int_{h_1^-}^{h_1^+} \underline{T}^d \cdot \underline{U}^* dz = \sum_{i=1}^n \tilde{T}_d^{i*} \cdot \tilde{U}^{i*} + Q_3^d W_3^*$$

Le terme de bord de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner modifiée s'écrit alors:

$$(III.6.13) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left( \tilde{N}^i \cdot \underline{n} - \tilde{T}_d^i \right) \cdot \tilde{U}^{i*} ds + \int_{\partial\omega} \left( \sum_{i=1}^n \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \cdot \underline{n} - Q_3^d \right) W_3^* ds$$

On peut alors déterminer par variation indépendante de  $\tilde{U}^{i*}$  et  $W_3^*$  les  $2n+1$  conditions aux limites suivantes:

$$(III.6.14) \quad \begin{aligned} \tilde{N}^i \cdot \underline{n} &= \tilde{T}_d^i \\ \left( \sum_{i=1}^n \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot \underline{n} &= Q_3^d \end{aligned}$$

Notons que contrairement au modèle M4\_3nM nous n'avons pas de conditions sur les données au bord.

### III.7 LES DEPLACEMENTS GENERALISES ASSOCIES POUR LE MODELE DE LOVE-KIRCHHOFF

Les composantes du champ  $\bar{\sigma}^*$  pour le modèle de Love s'écrivent (II.7.3->5):

$$(III.7.1) \quad \sigma_{\alpha\beta}^{aLK*}(x,y,z) = N_{\alpha\beta}^i(x,y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i/2}} M_{\alpha\beta}^i(x,y) P_1^i(z)$$

$$(III.7.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{aLK*}(x,y,z) &= -N_{\alpha\beta}^i(x,y) P_1^i(z) + M_{\alpha\beta}^i(x,y) \frac{P_2^i(z)}{e^i} \\ &+ \left( \frac{T_{\alpha}^+ - T_{\alpha}^-}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} N_{\alpha\beta}^j + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n N_{\alpha\beta}^j + \frac{M_{\alpha\beta}^i(x,y)}{e^i} \right) P_0^i(z) \end{aligned}$$

$$(III.7.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{33}^{aLK*}(x,y,z) &= \sigma_{33}^{aLK0*} P_0^i(z) + \sigma_{33}^{aLK1*} P_1^i(z) \\ &- \frac{e^i}{12} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^i(x,y) P_2^i(z) - \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^i(x,y) P_3^i(z) \end{aligned}$$

avec:



$$\begin{aligned}
 \sigma_{33}^{\text{aLK}0^*} &= \left[ \begin{aligned} & \frac{T_3^+(x,y) - T_3^-(x,y)}{2} - \frac{e^i}{12} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^{i^*}(x,y) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=i+1}^n e^k \left[ \begin{aligned} & \left( \operatorname{div} \left( \frac{\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-}{2} \right) + \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^{k^*}(x,y) \right) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^j(x,y) + \frac{1}{2} \sum_{j=k+1}^n \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^j(x,y) \end{aligned} \right] \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-1} e^k \left[ \begin{aligned} & \left( \operatorname{div} \left( \frac{\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-}{2} \right) + \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^{k^*}(x,y) \right) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^j(x,y) + \frac{1}{2} \sum_{j=k+1}^n \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^j(x,y) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right] \\
 \sigma_{33}^{\text{aLK}1^*} &= \left( \begin{aligned} & \frac{6}{5} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^{i^*}(x,y) \\ & + e^i \left( \operatorname{div} \left( \frac{\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-}{2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^j(x,y) + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^j(x,y) \right) \end{aligned} \right)
 \end{aligned}
 \tag{III.7.4}$$

où  $\tilde{N}^{i^*}$  et  $\tilde{M}^{i^*}$  sont des champs réguliers sur  $\omega$ . De même que précédemment, le déplacement généralisé associé à l'approximation  $\bar{\sigma}^*$  s'obtient en écrivant ce champ  $\bar{\sigma}^*$  dans la partie de la fonctionnelle H. R.  $(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  qui dépend de  $\underline{U}^*$  (III.1.5). Soit:

(III.7.5)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} & \left[ \begin{aligned}
 & N_{\alpha\beta}^i \int_{h_i^-}^{h_i^+} \varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{U}^*) \frac{P_0^i(z)}{e^i} dz + M_{\alpha\beta}^i \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12}{e^{i^2}} \varepsilon_{\alpha\beta}(\underline{U}^*) P_1^i(z) dz \\
 & + \left( \frac{T_{\alpha}^+ - T_{\alpha}^-}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} N_{\alpha\beta,\beta}^j + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n N_{\alpha\beta,\beta}^j + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i}{e^i} \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial z} P_0^i(z) dz \\
 & - N_{\alpha\beta,\beta}^i \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial z} P_1^i(z) dz + M_{\alpha\beta,\beta}^i \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial z} \frac{P_2^i(z)}{e^i} dz \\
 & + \left( \frac{T_{\alpha}^+ - T_{\alpha}^-}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} N_{\alpha\beta,\beta}^j + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n N_{\alpha\beta,\beta}^j + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i}{e^i} \right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial x_{\alpha}} P_0^i(z) dz \\
 & - N_{\alpha\beta,\beta}^i \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial x_{\alpha}} P_1^i(z) dz + M_{\alpha\beta,\beta}^i \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_{\alpha}^*}{\partial x_{\alpha}} \frac{P_2^i(z)}{e^i} dz \\
 & + \sigma_{33}^{LK0*} P_0^i(z) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial z} P_0^i(z) dz + \sigma_{33}^{LK1*} P_1^i(z) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial z} P_1^i(z) dz \\
 & - \frac{e^i}{12} \operatorname{div} \bar{\mathbf{N}}^i \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial z} P_2^i(z) dz - \operatorname{div} \bar{\mathbf{M}}^i \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial z} P_3^i(z) dz
 \end{aligned} \right] d\omega \\
 & - \int_{\omega} \underline{\mathbf{T}}^d(x, y, h_n^+) \cdot \underline{U}^*(x, y, h_n^+) d\omega - \int_{\omega} \underline{\mathbf{T}}^d(x, y, h_1^-) \cdot \underline{U}^*(x, y, h_1^-) d\omega - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{\mathbf{T}}^d \cdot \underline{U}^* dz ds
 \end{aligned}$$

On introduit à nouveau les définitions et les notations posées précédemment (III.1.7->17) on intègre par parties chaque fois qu'apparaît une dérivée par rapport à z. Les facteurs  $\bar{u}_+^i, \bar{u}_-^i, u_{+3}^i, u_{-3}^i$  ( $i=1, n$ ) s'éliminent de couche à couche à l'exception des facteurs de  $u_{+\alpha}^n, u_{-\alpha}^n, u_{+3}^n$  et  $u_{-3}^n$ .  $\mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*)$  se réécrit:

(III.7.6)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = & \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[ \begin{aligned} & \tilde{N}^{i*} : \tilde{\varepsilon}^{i*} + \tilde{M}^{i*} : \tilde{\chi}^{i*} + \operatorname{div} \tilde{N}^{i*} \cdot \tilde{U}^{i*} + \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} \cdot \tilde{\Phi}^{i*} \\ & + e^i \left( \frac{\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \operatorname{div} \tilde{N}^{j*} + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \operatorname{div} \tilde{N}^{j*} + \frac{\operatorname{div} \tilde{M}^{i*}}{e^i} \right) \cdot \operatorname{Grad} U_3^{i*} \\ & - e^i \operatorname{div} \tilde{N}^{i*} \cdot \operatorname{Grad} \bar{U}_3^* + \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} \cdot \operatorname{Grad} \hat{U}_3^{i*} \\ & \left( \frac{6}{5} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} \right. \\ & \left. + e^i \left( \operatorname{div} \left( \frac{\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-}{2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^{j*} + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^{j*} \right) \right) U_3^{i*} \\ & - e^i \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^{i*} \cdot \bar{U}_3^* + \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^{i*} \left( \hat{U}_3^{i*} - \frac{2}{10} U_3^{i*} \right) \end{aligned} \right] d\omega \\
 & - \int_{\omega} \left( \tilde{T}^+ + \tilde{T}^- + \sum_{j=1}^n \operatorname{div} \tilde{N}^{j*} \right) \left( \frac{\bar{u}_+^n + \bar{u}_-^l}{2} \right) d\omega \\
 & - \int_{\omega} \left( T_3^+ + T_3^- + \frac{h_n^- - h_1^-}{2} \operatorname{div}(\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-) \right. \\
 & \left. + \operatorname{div} \operatorname{div} \sum_{j=1}^n \left( \tilde{M}^{j*} + \left( \bar{h}_j - \frac{h_n^+ - h_1^-}{2} \right) \tilde{N}^{j*} \right) \right) \left( \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2} \right) d\omega \\
 & - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \mathbf{T}^d \cdot \underline{U}^* dz ds
 \end{aligned}$$

On peut regrouper ou modifier les termes suivants:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\omega} \left( \tilde{\mathbf{N}}^{i*} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i*} + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^{i*} \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{i*} \right) d\omega = \int_{\partial\omega} \tilde{\mathbf{N}}^{i*} \cdot \underline{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{i*} ds \\
 & \int_{\omega} \left( \tilde{\mathbf{M}}^{i*} : \tilde{\boldsymbol{\chi}}^{i*} + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \tilde{\Phi}^{i*} \right) d\omega = \int_{\partial\omega} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \underline{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\Phi}^{i*} ds \\
 & \int_{\omega} \left( e^i \left( \frac{\tilde{\mathbf{T}}^+ - \tilde{\mathbf{T}}^-}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^{j*} + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^{j*} + \frac{\operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*}}{e^i} \right) \cdot \tilde{\operatorname{Grad}} \tilde{\mathbf{U}}_3^{i*} \right. \\
 & \left. + \operatorname{div} \left( \frac{\tilde{\mathbf{T}}^+ - \tilde{\mathbf{T}}^-}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^{j*} + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^{j*} + \frac{\operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*}}{e^i} \right) \cdot \tilde{\mathbf{U}}_3^{i*} \right) d\omega \\
 & \quad = \int_{\partial\omega} \left( \frac{\tilde{\mathbf{T}}^+ - \tilde{\mathbf{T}}^-}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^{j*} + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^{j*} + \frac{\operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*}}{e^i} \right) \cdot \underline{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{U}}_3^{i*} ds \\
 (III.7.7) \quad & \int_{\omega} \left( e^i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^{i*} \cdot \tilde{\operatorname{Grad}} \tilde{\mathbf{U}}_3^{i*} + e^i \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^{i*} \cdot \tilde{\mathbf{U}}_3^{i*} \right) d\omega = \int_{\partial\omega} \left( e^i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^{i*} \right) \cdot \underline{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}_3^{i*} ds \\
 & \int_{\omega} \left( \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \tilde{\operatorname{Grad}} \tilde{\mathbf{U}}_3^{i*} + \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \tilde{\mathbf{U}}_3^{i*} \right) d\omega = \int_{\partial\omega} \left( \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \right) \cdot \underline{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}_3^{i*} ds
 \end{aligned}$$

Nous posons:

$$(III.7.8) \quad W_{\alpha}^* = \frac{u_{+\alpha}^n + u_{-\alpha}^l}{2} \quad \text{et} \quad W_3^* = \frac{u_{+3}^n + u_{-3}^l}{2}$$

$\mathbf{T}(\underline{\mathbf{U}}^*, \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*)$  se réécrit:

$$(III.7.9) \quad \mathbf{T}(\underline{U}^*, \bar{\sigma}^*) = - \int_{\omega} \left( \begin{array}{l} \left( \tilde{\mathbf{T}}^+ + \tilde{\mathbf{T}}^- + \sum_{i=1}^n \operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^{i*} \right) \cdot \tilde{\mathbf{W}}^* \\ \left( \mathbf{T}_3^+ + \mathbf{T}_3^- + \frac{h_n^+ - h_l^-}{2} \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{T}}^+ - \tilde{\mathbf{T}}^-) \right) \\ + \operatorname{div} \operatorname{div} \sum_{i=1}^n \left( \tilde{\mathbf{M}}^{i*} + \left( \bar{h}_j - \frac{h_n^+ + h_l^-}{2} \right) \tilde{\mathbf{N}}^{i*} \right) \cdot \mathbf{W}_3^* \end{array} \right) d\omega$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega} \left( \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{N}}^{i*} \cdot \underline{n} \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{i*} + \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \underline{n} \cdot \tilde{\Phi}^{i*} + e^i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^{i*} \cdot \underline{n} \cdot \bar{\mathbf{U}}_3^* + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*} \cdot \underline{n} \cdot \hat{\mathbf{U}}_3^* \\ + e^i \left( \frac{\tilde{\mathbf{T}}^+ - \tilde{\mathbf{T}}^-}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^{j*} + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \operatorname{div} \tilde{\mathbf{N}}^{j*} + \frac{\operatorname{div} \tilde{\mathbf{M}}^{i*}}{e^i} \right) \cdot \underline{n} \cdot \mathbf{U}_3^* \\ - \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{\mathbf{T}}^d \cdot \underline{\mathbf{U}}^* dz \end{array} \right) ds$$

Ainsi les déplacements généralisés du modèle de Love-Kirchhoff sont les 3 champs scalaires:  
 $\tilde{\mathbf{W}}^*$  et  $\mathbf{W}_3^*$

En intégrant par parties, on trouve les déformations généralisées associées aux contraintes généralisées. La liste ci-dessous en donne la correspondance:

$$(III.7.10) \quad \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{N}}^i \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\varepsilon}^i = \operatorname{Sym} \left( \operatorname{Grad} \tilde{\mathbf{W}}^* \right) - \left( \bar{h}_i - \frac{h_n^+ + h_l^-}{2} \right) \operatorname{Grad} \operatorname{Grad} \mathbf{W}_3^* \\ \tilde{\mathbf{M}}^i \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\chi}^i = - \operatorname{Grad} \operatorname{Grad} \mathbf{W}_3^* \end{array}$$

Pour la détermination des conditions aux limites, intéressons nous aux termes de bord. Nous approximations:

$$(III.7.11) \quad \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{U}}^{i*} \quad \text{par} \quad \tilde{\mathbf{W}}^* - \left( \bar{h}_i - \frac{h_n^+ + h_l^-}{2} \right) \operatorname{Grad} \mathbf{W}_3^* \\ \tilde{\Phi}^{i*} \quad \text{par} \quad - \operatorname{Grad} \mathbf{W}_3^* \\ \mathbf{U}_3^{i*} \quad \text{par} \quad \mathbf{W}_3^* \\ \bar{\mathbf{U}}_3^{i*} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{U}}_3^{i*} \quad \text{sont négligés} \end{array}$$

Enfin, nous notons:

$$(III.7.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{Q}_d(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \bar{T}^d(x,y,z) dz \\ Q_{3d}(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d(x,y,z) dz \\ \bar{M}_d(x,y) = \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \bar{T}^d(x,y,z) \left( z - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right) dz \end{array} \right.$$

Nous pouvons alors écrire l'approximation du terme de bord:

$$(III.7.13) \quad \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \bar{T}^d \cdot \underline{U}^* dz = \bar{Q}_d \cdot \bar{W}^* + Q_{3d} W_3^* - \bar{M}_d \cdot \text{Grad } W_3^*$$

Modifiant les termes de bord de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner pour ne prendre en compte que les parties principales et en faisant varier indépendamment  $\bar{W}^*$ ,  $W_3^*$ , et  $\frac{\partial}{\partial n} W_3^*$ , on trouve les conditions aux limites suivantes:

$$(III.7.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \bar{N}^i \cdot \underline{n} = \bar{Q}_d \\ \underline{n} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \left( \bar{M}^i + \left( \bar{h}_i - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right) \bar{N}^i \right) \right) \cdot \underline{n} = \bar{M}_d \cdot \underline{n} \\ \left( \text{div} \sum_{i=1}^n \left( \bar{M}^i + \left( \bar{h}_i - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right) \bar{N}^i \right) + \frac{h_n^+ - h_1^-}{2} (\bar{T}^+ - \bar{T}^-) \right) \cdot \underline{n} \\ - Q_{3d} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \left( \underline{t} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \bar{M}^i + \left( \bar{h}_i - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right) \bar{N}^i \right) \right) \cdot \underline{n} \right) - \bar{M}_d \cdot \underline{t} = 0 \end{array} \right.$$

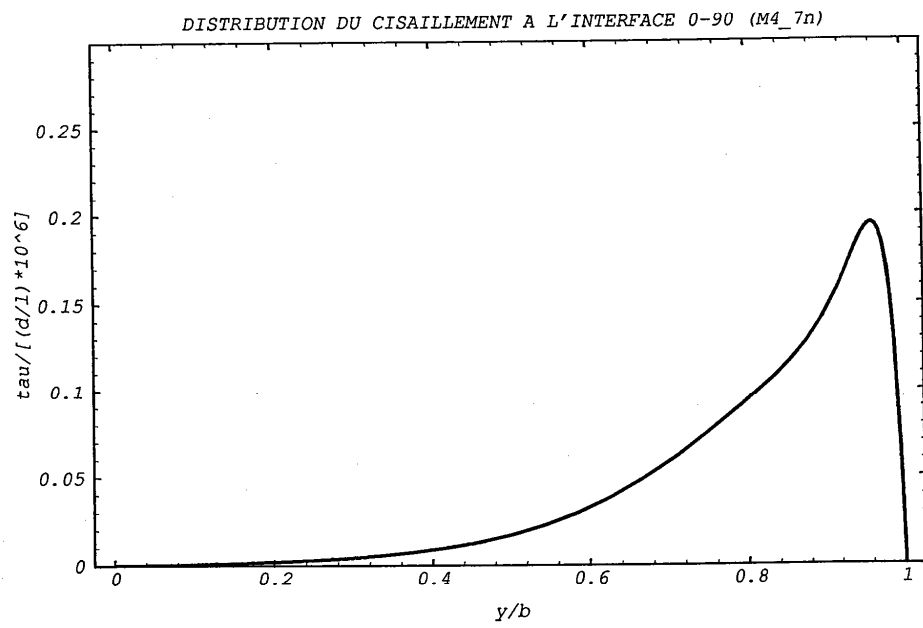
On retrouve bien les conditions aux limites de Love-Kirchhoff.

(Rappelons que  $\sum_{i=1}^n \bar{M}^i + \left( \bar{h}_i - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right) \bar{N}^i = \bar{M}$  ).

**ANNEXE II**

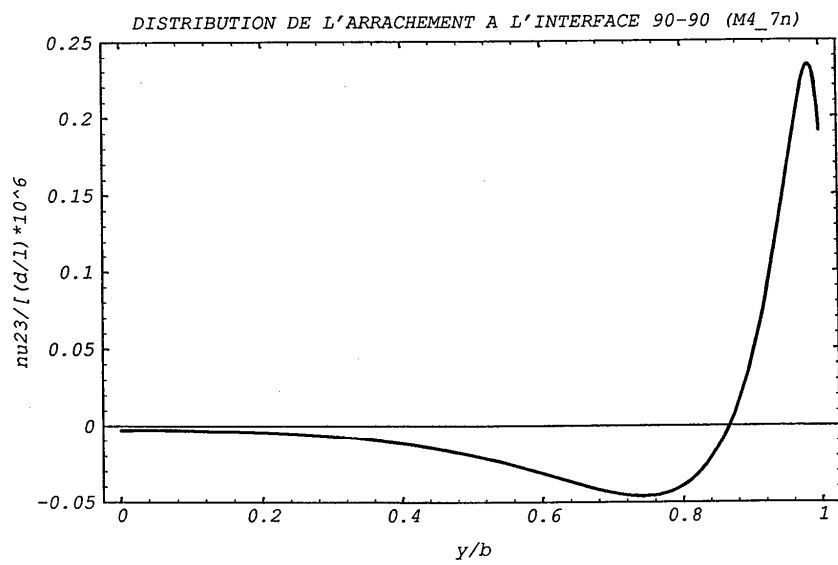
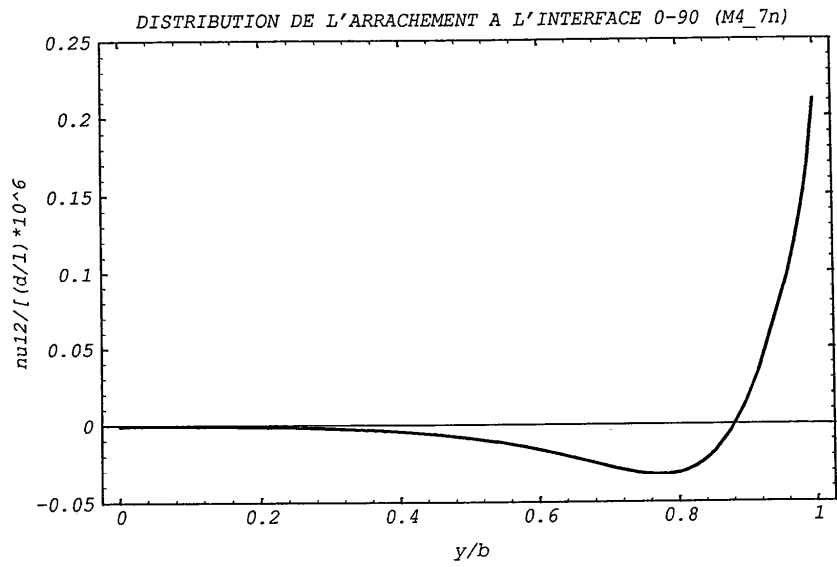
**COURBES M4\_7N**  
**DU QUADRICOUCHE [0°, 90°]<sub>S</sub> EN TRACTION**

*Courbes M4\_7n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction*

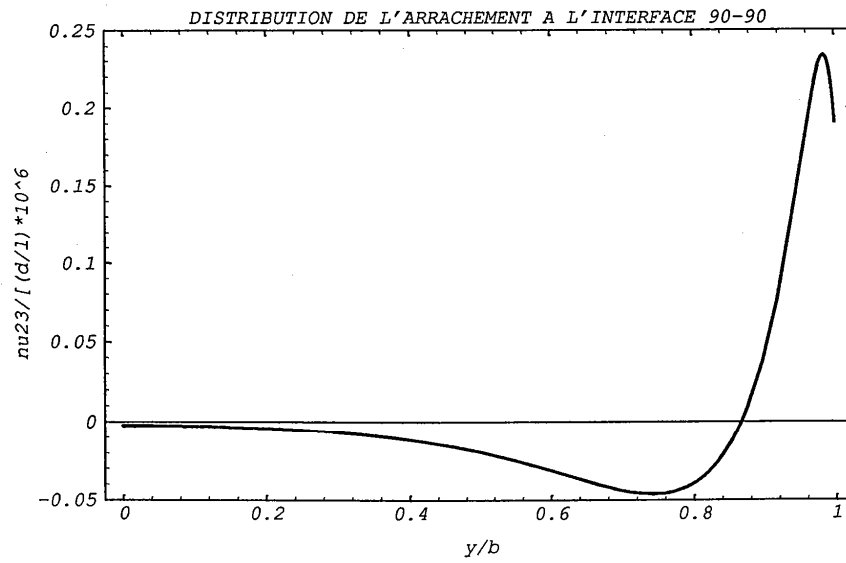
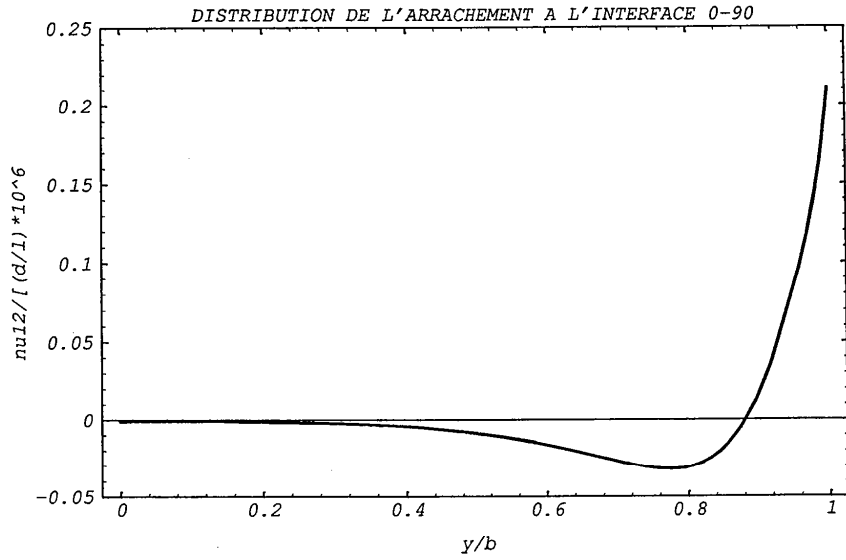




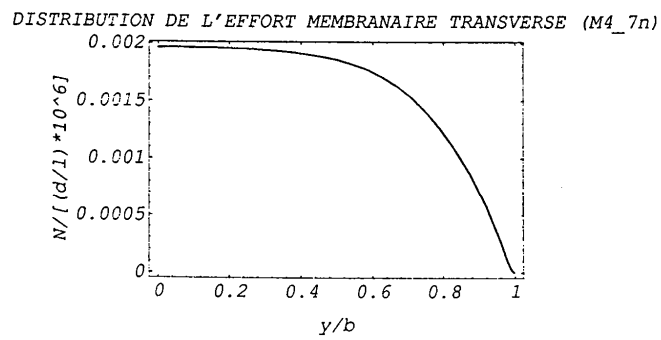
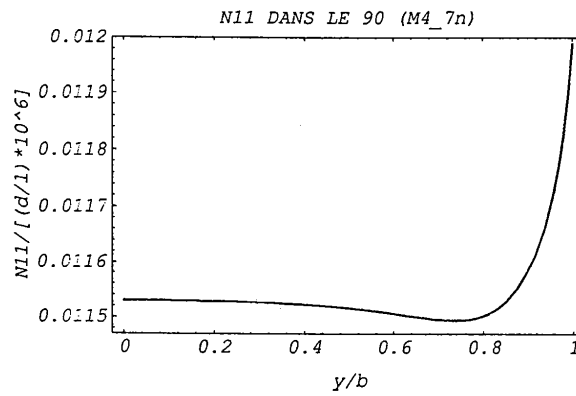
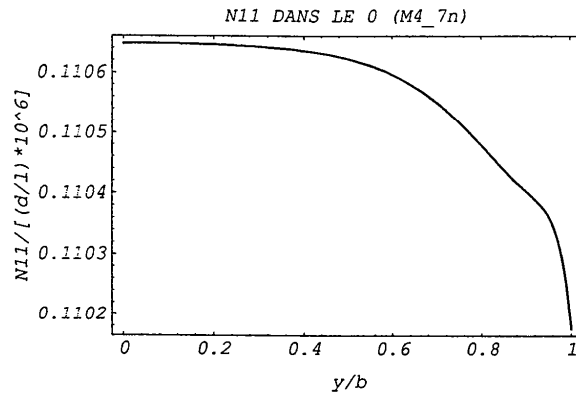
Courbes M4\_7n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction



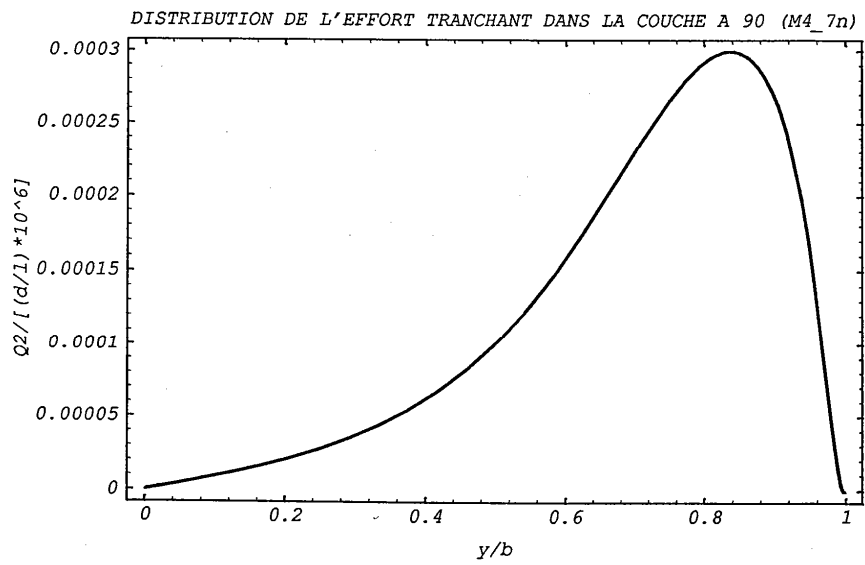
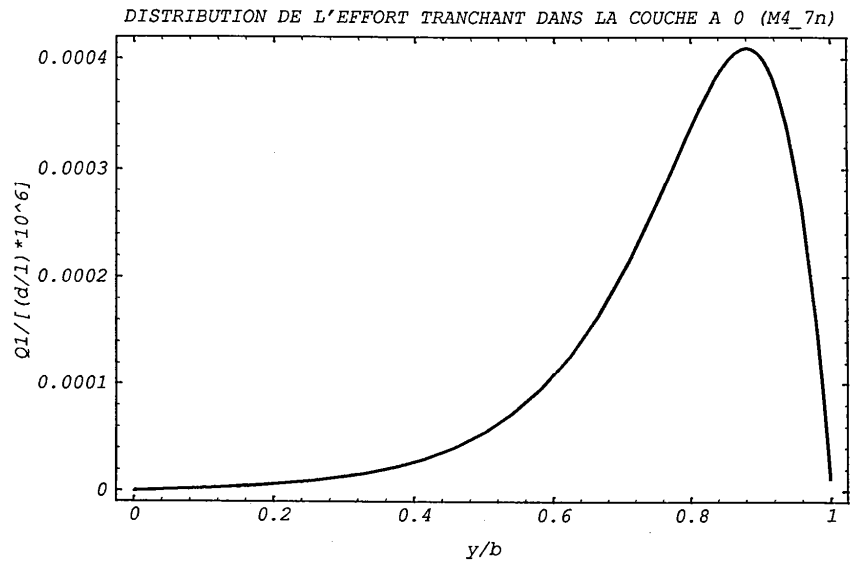
Courbes M4\_7n du quadricouche  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction



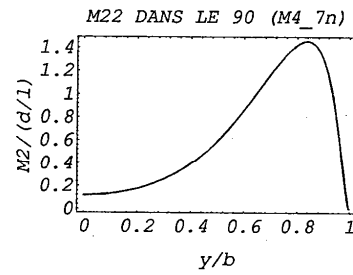
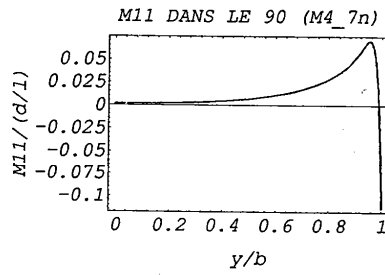
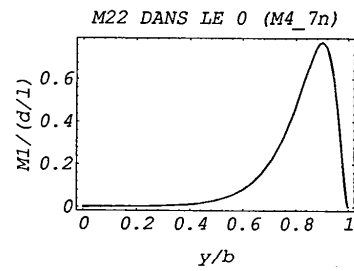
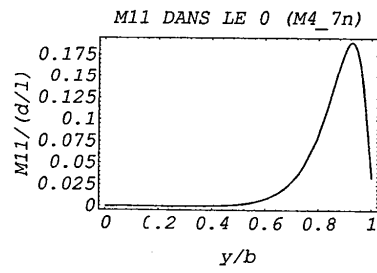
Courbes M4\_7n du quadricouche [0°, 90°], en traction



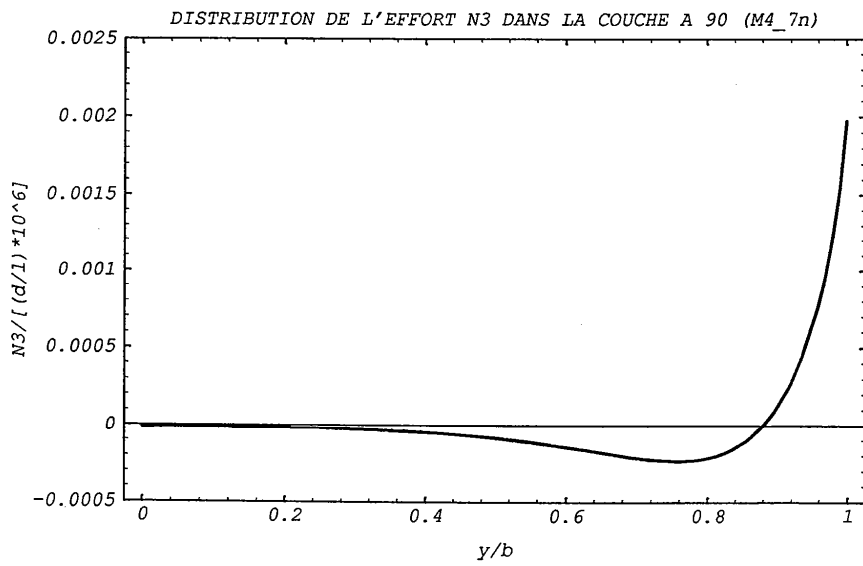
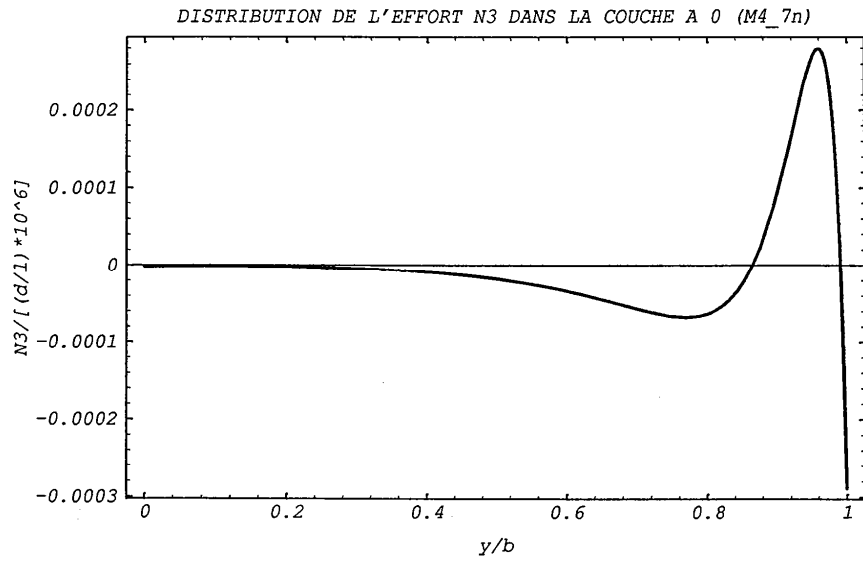
Courbes M4\_7n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction



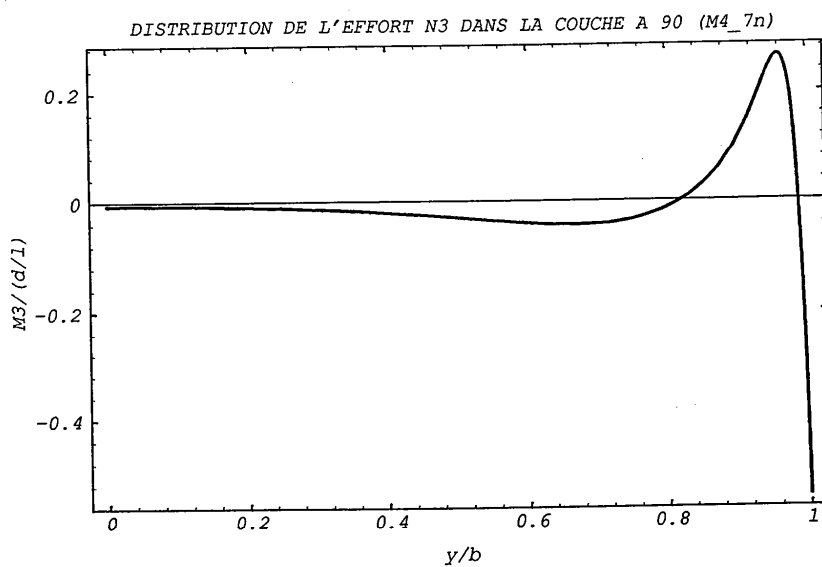
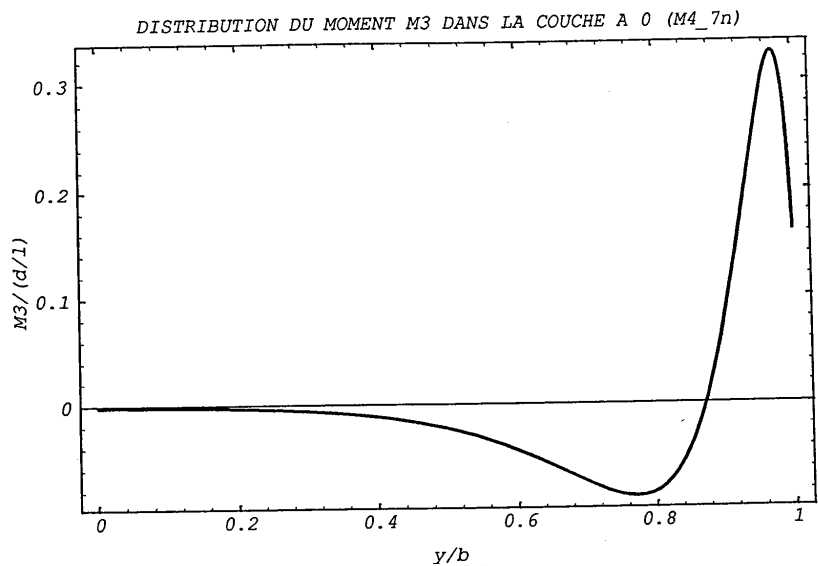
Courbes  $M4\_7n$  du quadricouche  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction



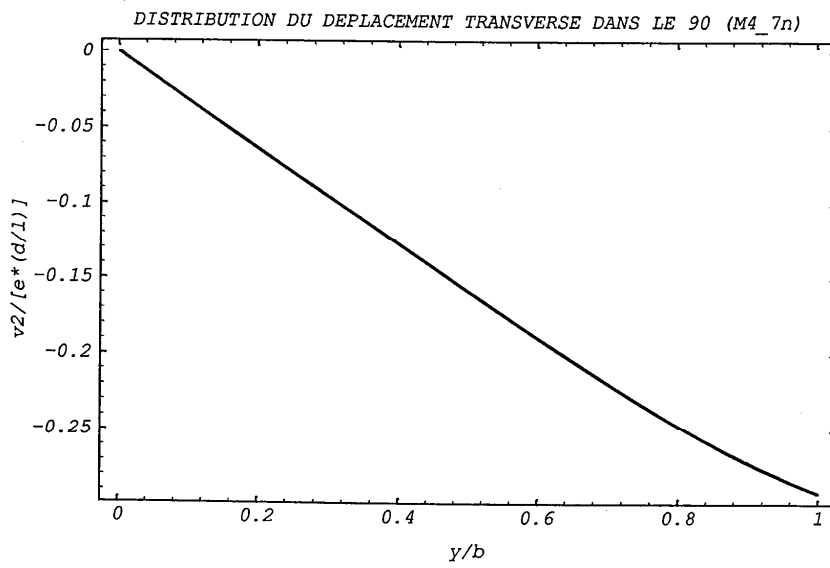
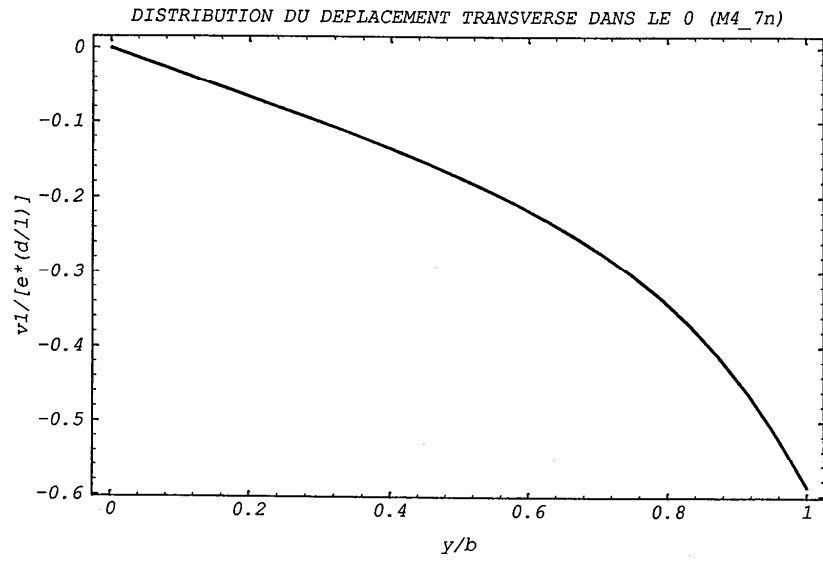
Courbes M4\_7n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction



Courbes M4\_7n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction

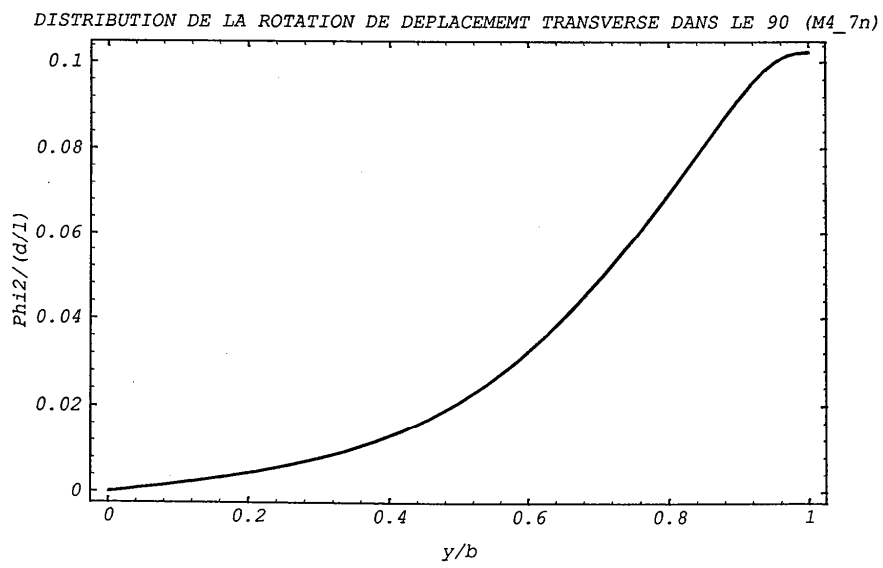
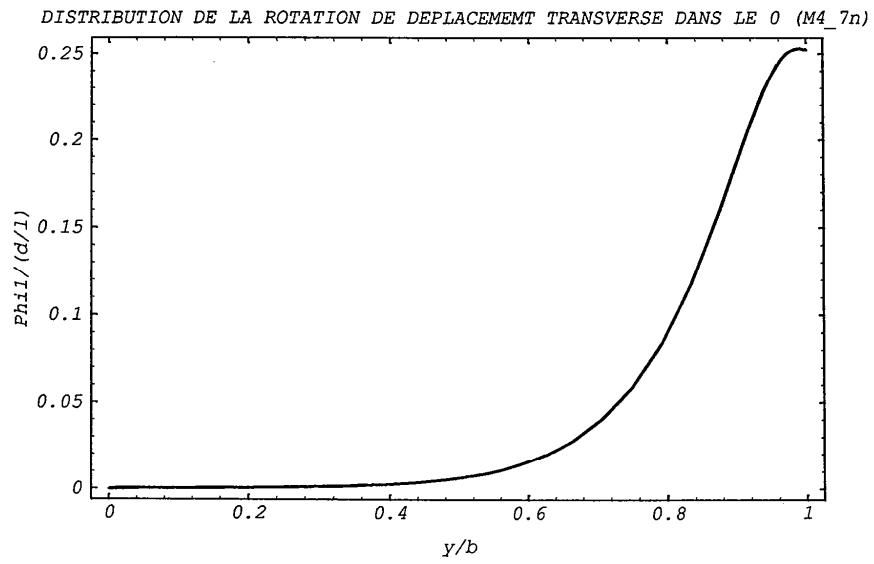


Courbes M4\_7n du quadricouche [0°, 90°], en traction

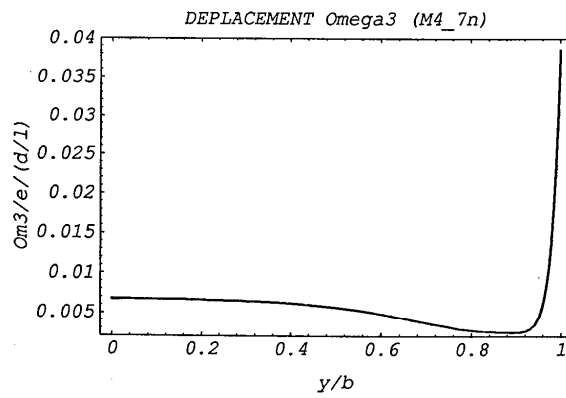
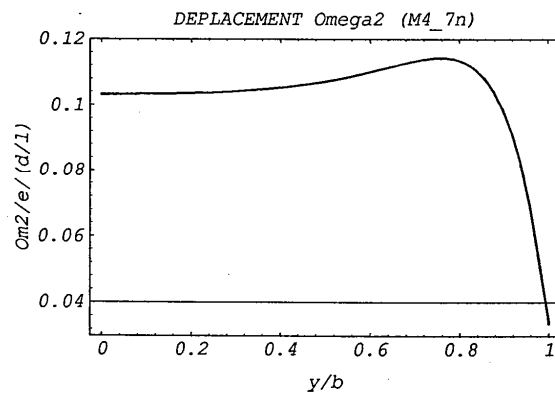
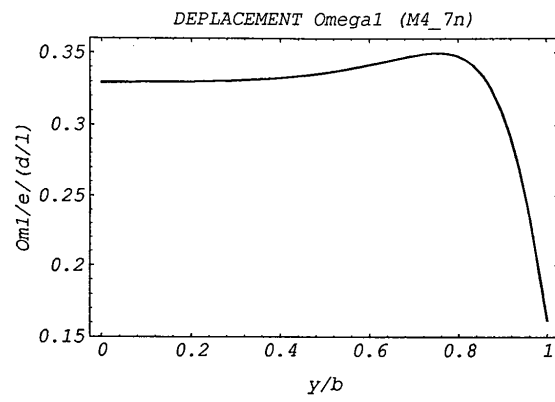




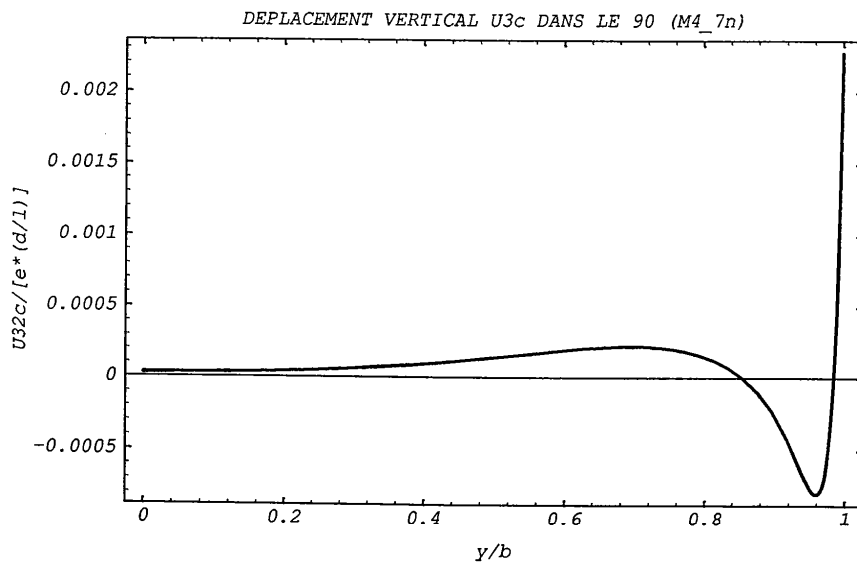
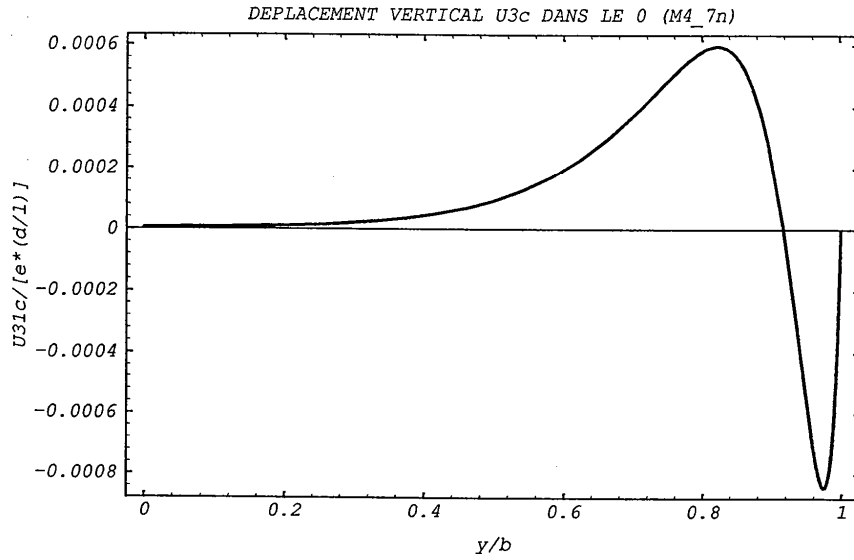
*Courbes M4\_7n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction*



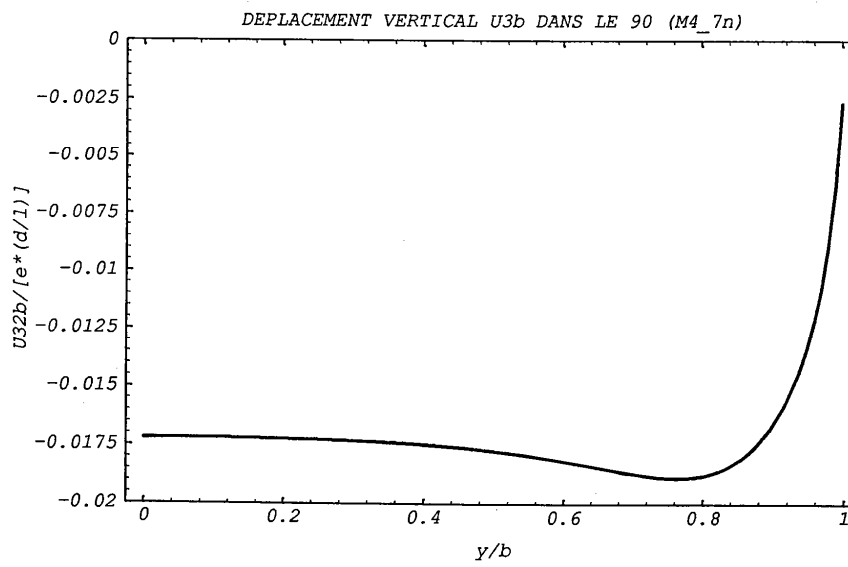
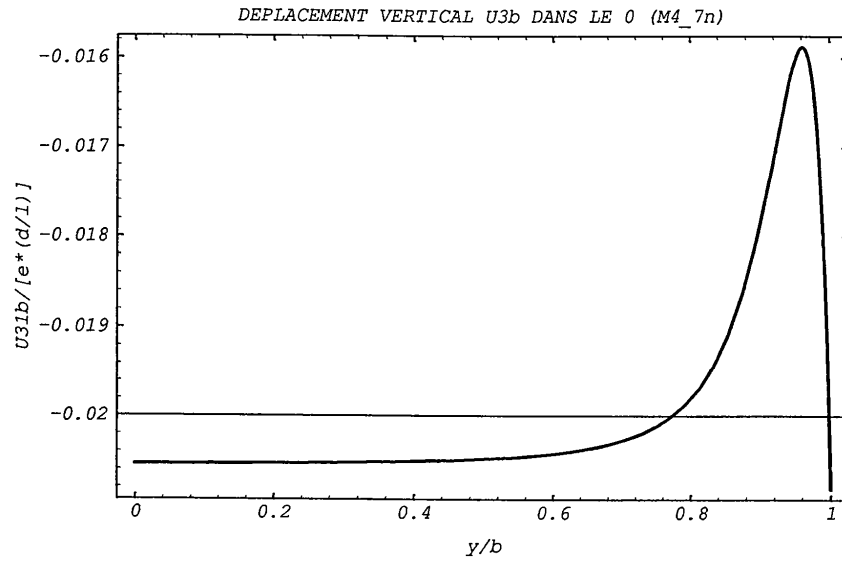
Courbes M4\_7n du quadricouche [0°, 90°], en traction



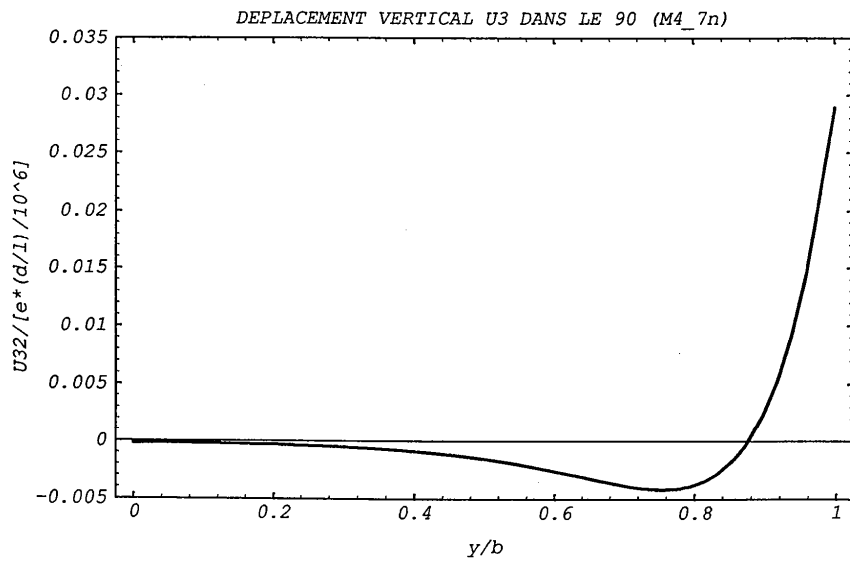
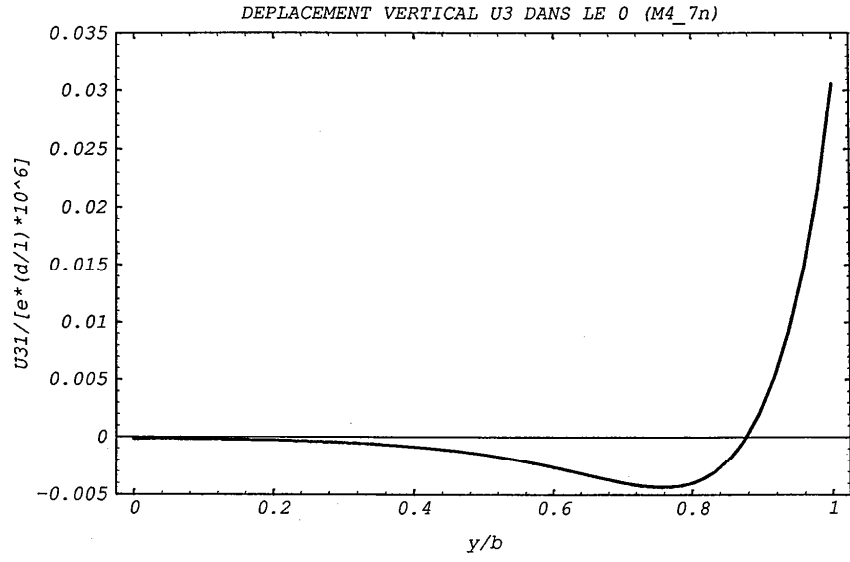
*Courbes M4\_7n du quadricouche [0°, 90°], en traction*



Courbes M4\_7n du quadricouche  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction

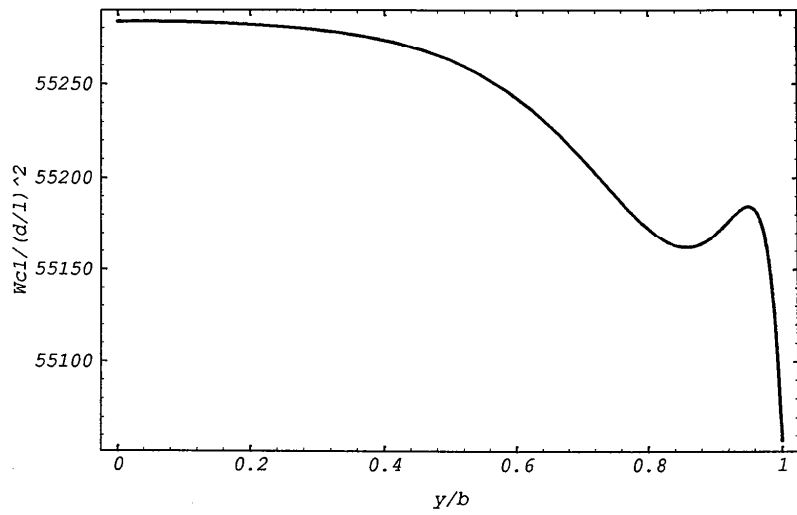


Courbes M4\_7n du quadricouche  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction

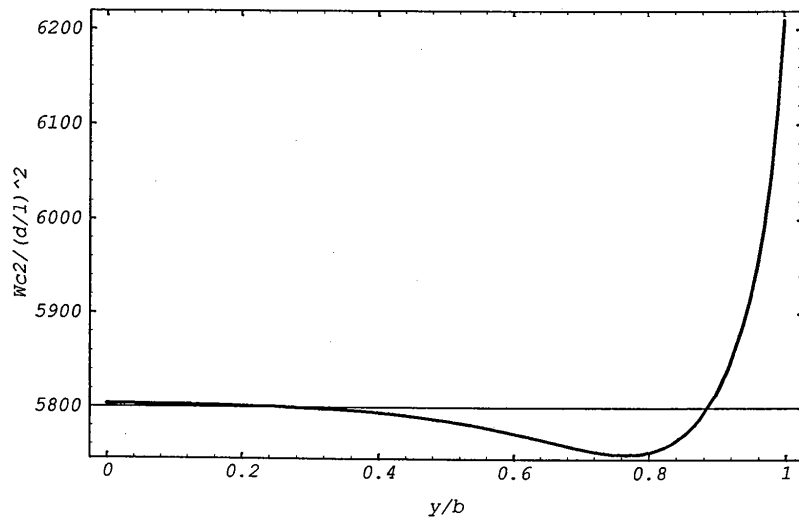


*Courbes M4\_7n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction*

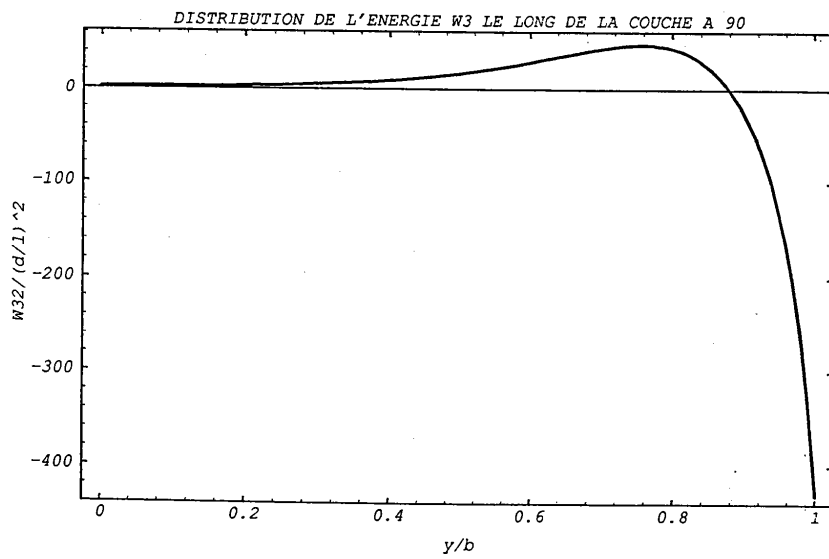
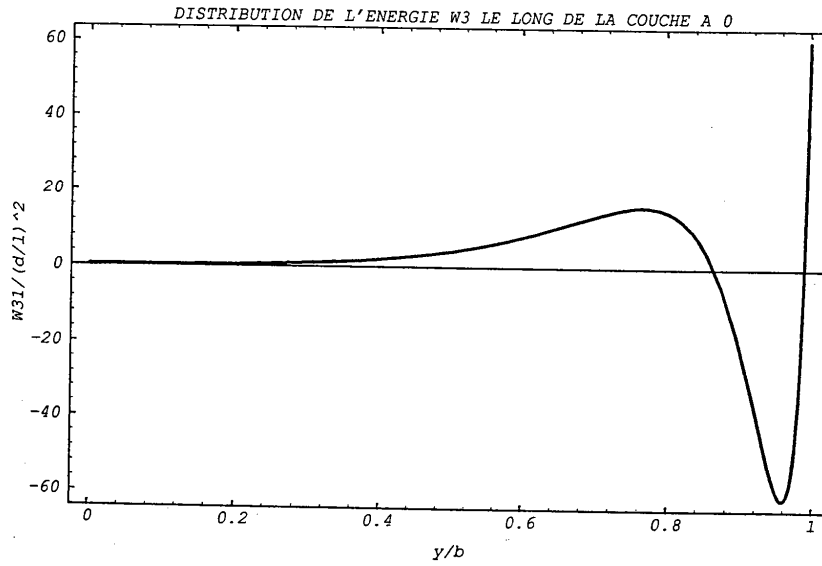
DISTRIBUTION DE L'ENERGIE MEMBRANAIRE  $w_c$  LE LONG DE LA COUCHE A 0 (M4\_7n)



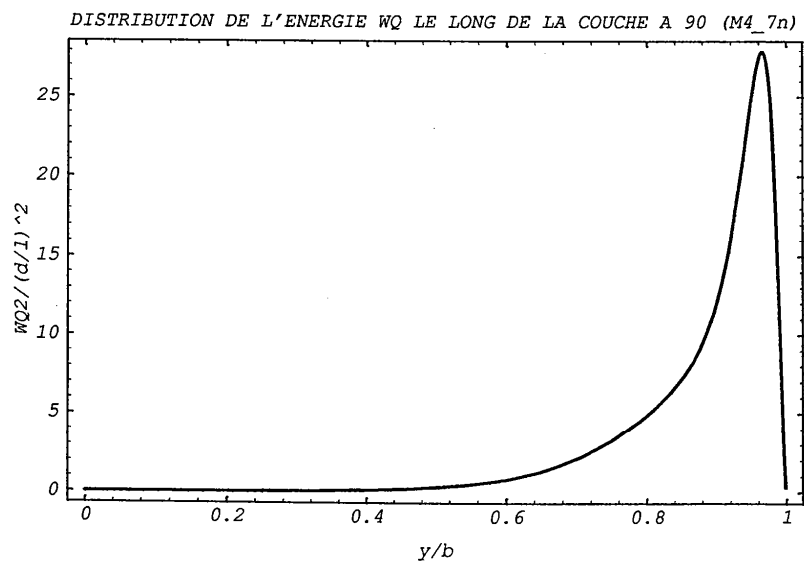
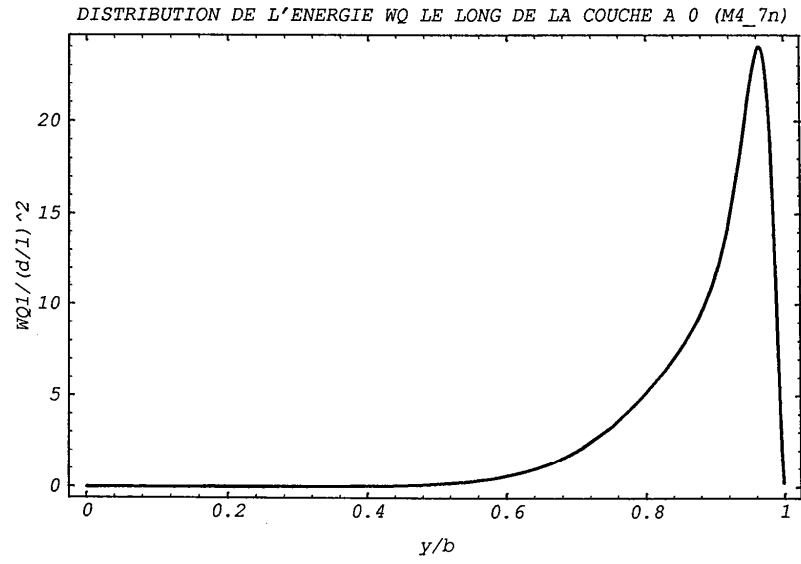
DISTRIBUTION DE L'ENERGIE MEMBRANAIRE  $w_c$  LE LONG DE LA COUCHE A 90 (M4\_7n)



Courbes M4\_7n du quadricouche  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction

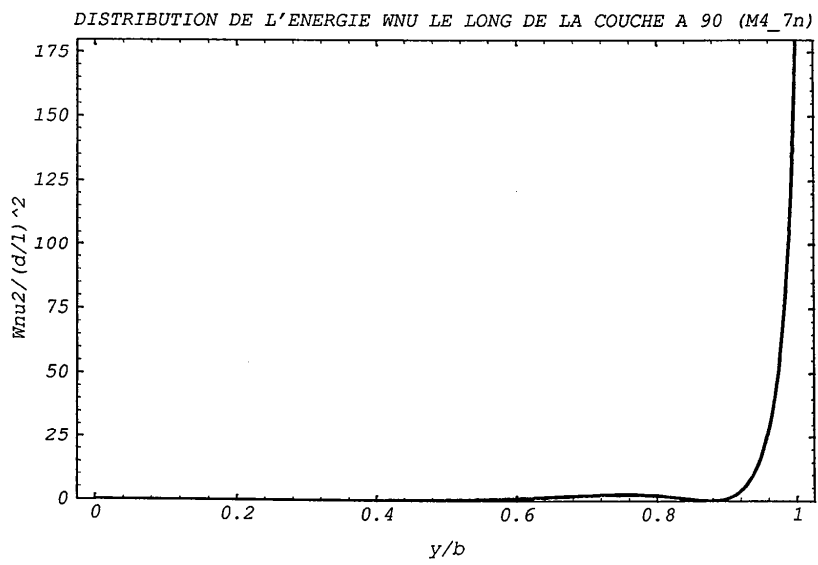
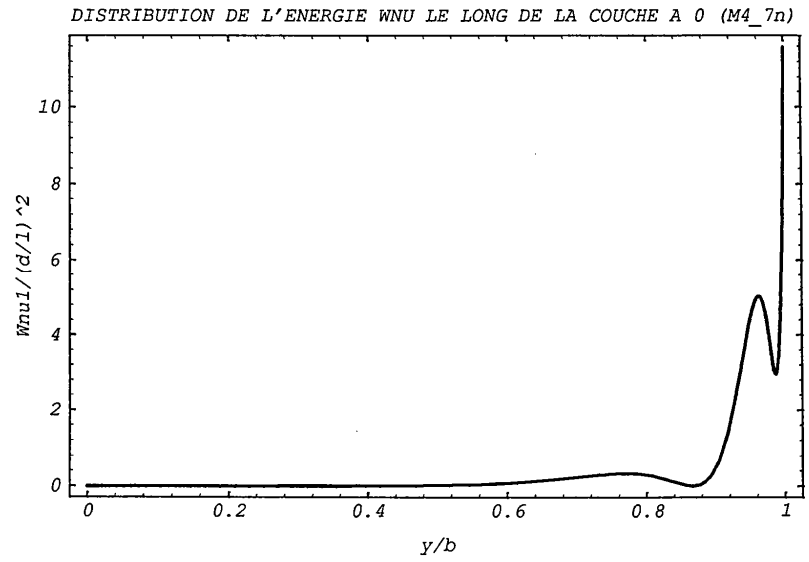


Courbes M4\_7n du quadricouche  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction

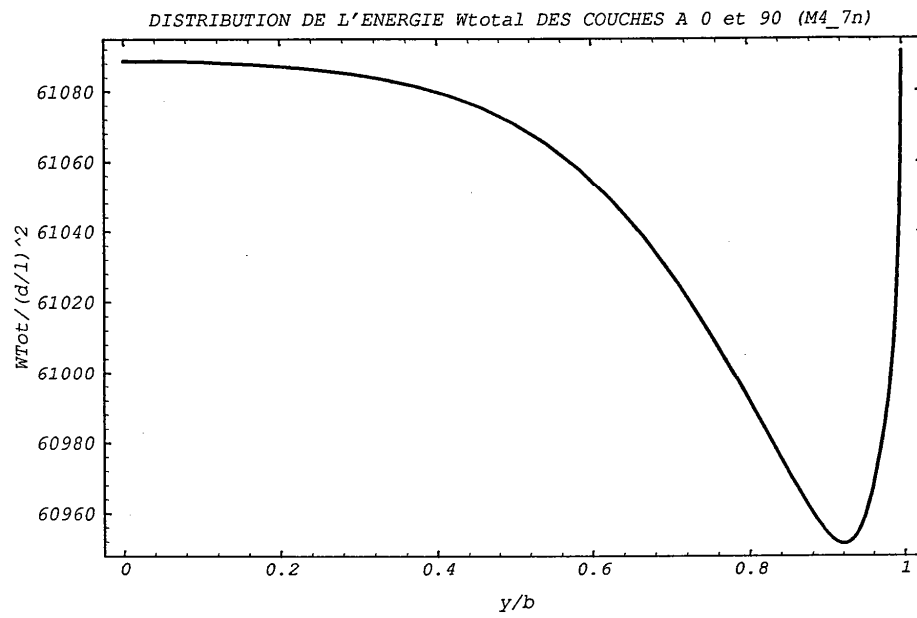




Courbes M4\_7n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction



*Courbes M4\_7n du quadricouche [0°, 90°], en traction*

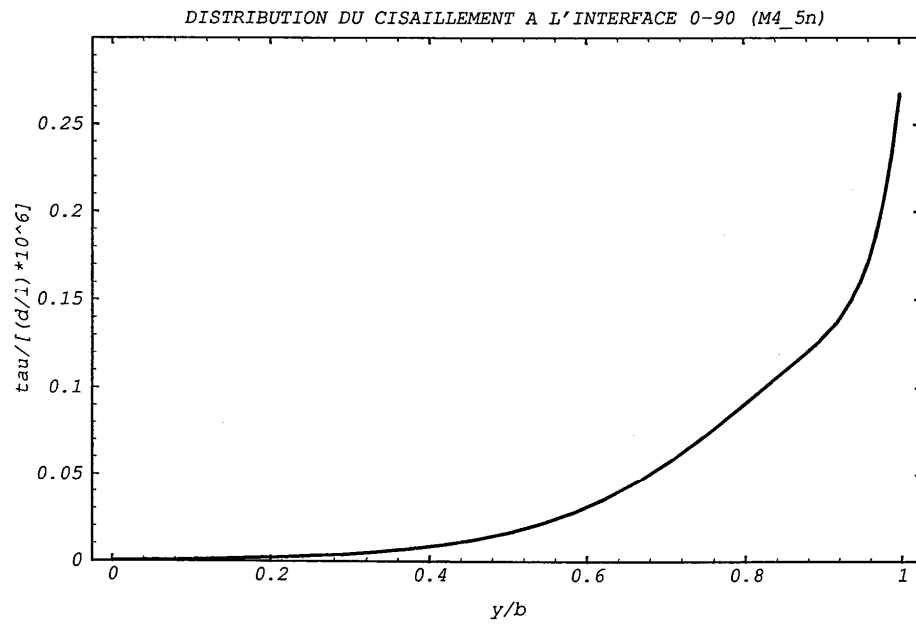


**ANNEXE III**

**COURBES M4\_5N**  
**DU QUADRICOUCHE [0°, 90°]s EN TRACTION**

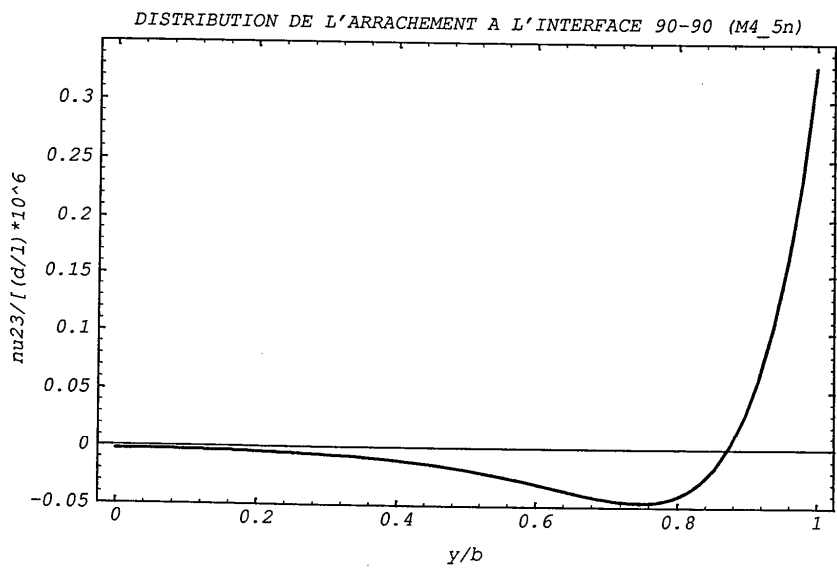
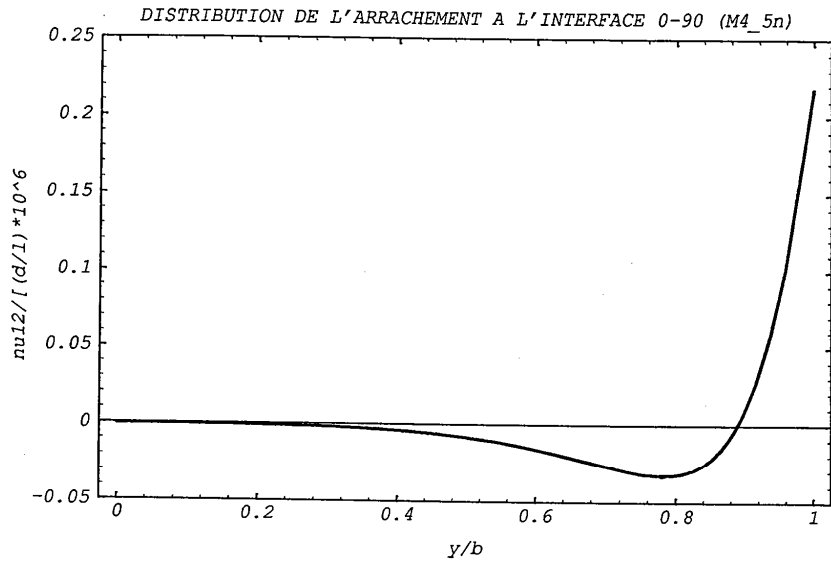
*Annexe III-1-*

Courbes M4\_5n du quadricouche  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction

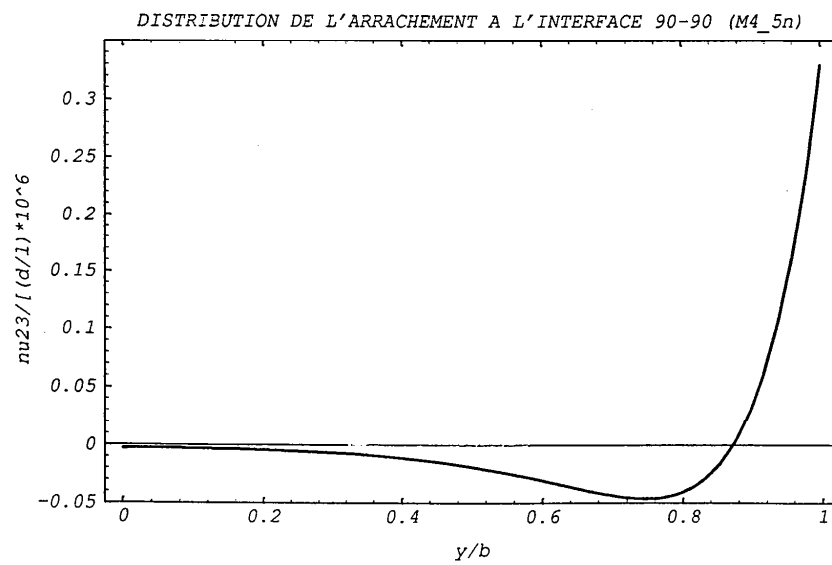
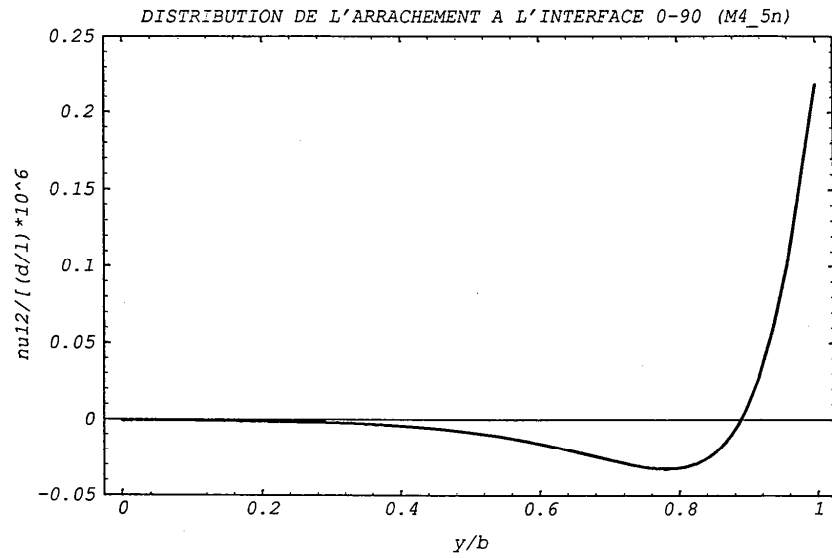


Annexe III-I'

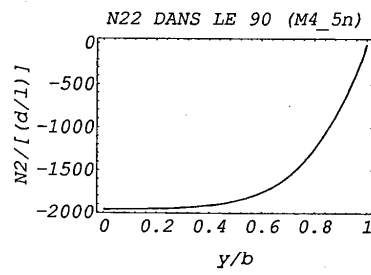
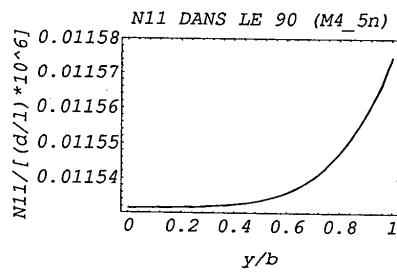
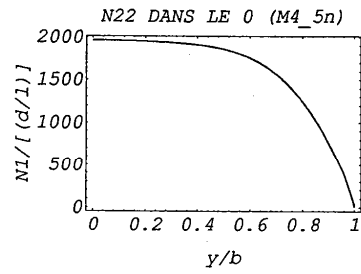
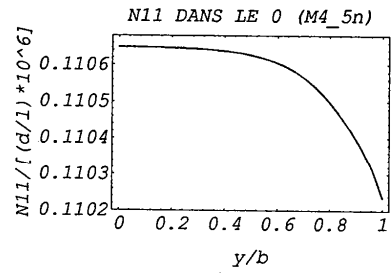
Courbes M4\_5n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction



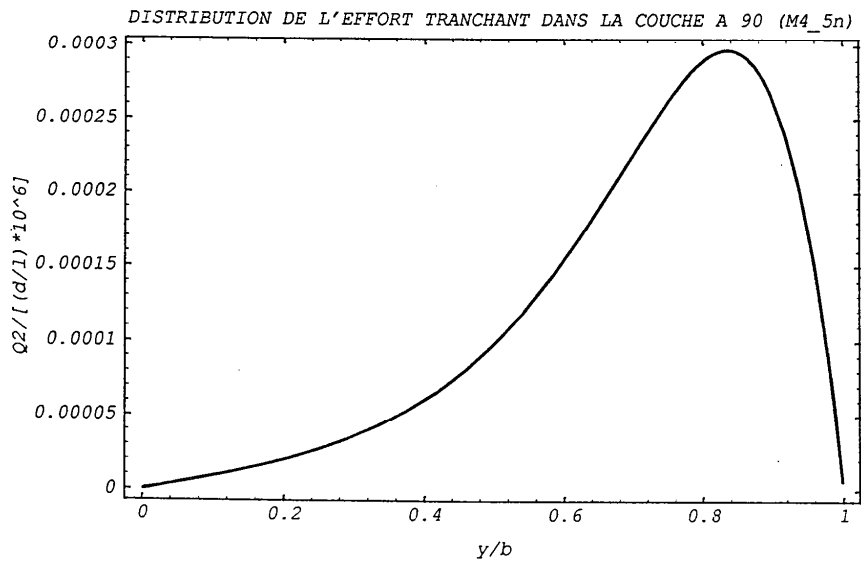
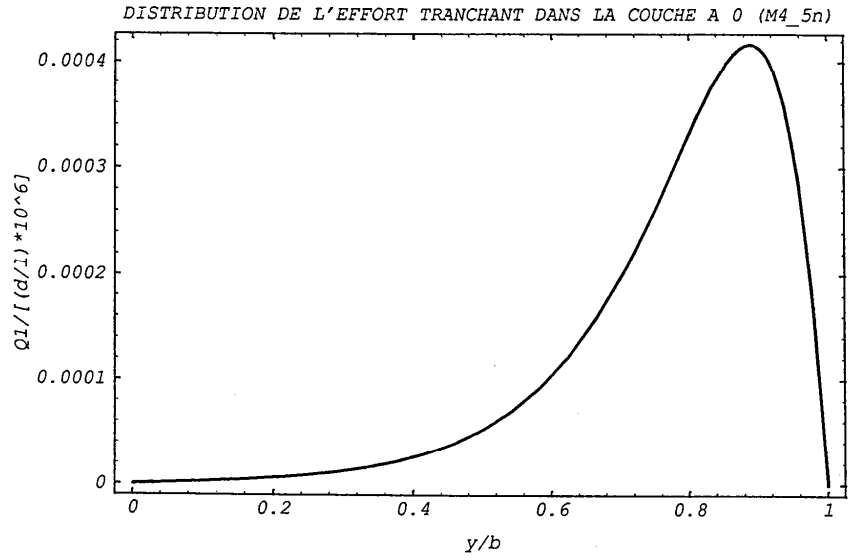
Courbes M4\_5n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction



Courbes M4\_5n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction

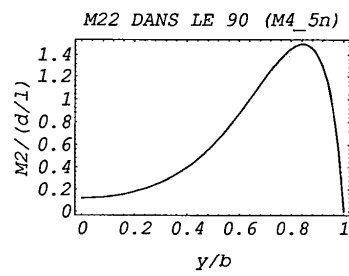
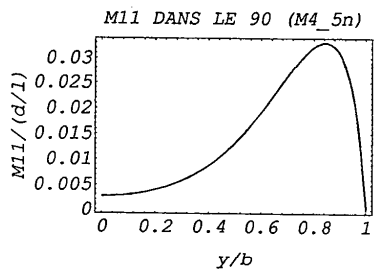
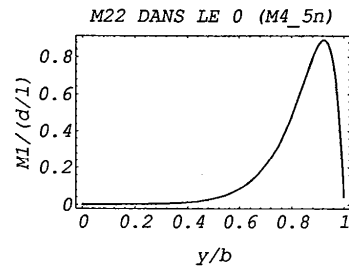
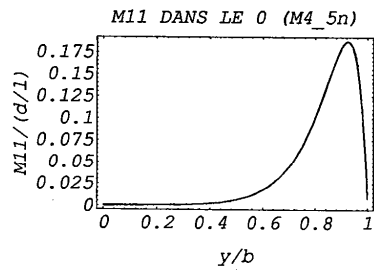


Courbes M4\_5n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction

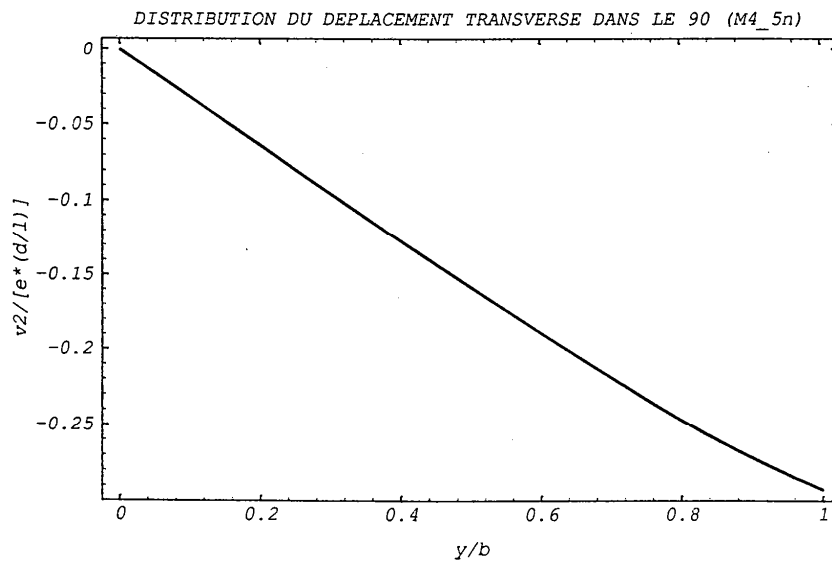
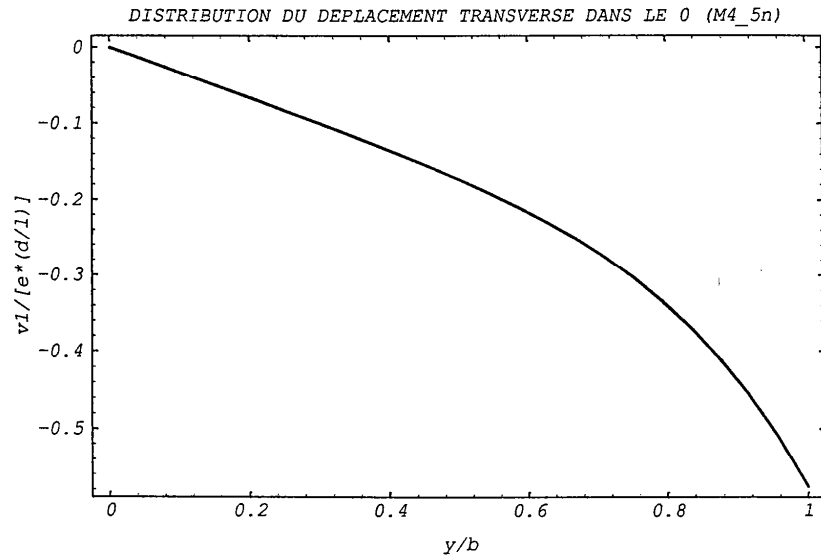




Courbes  $M4\_5n$  du quadricouche  $[0^\circ, 90^\circ]$ , en traction

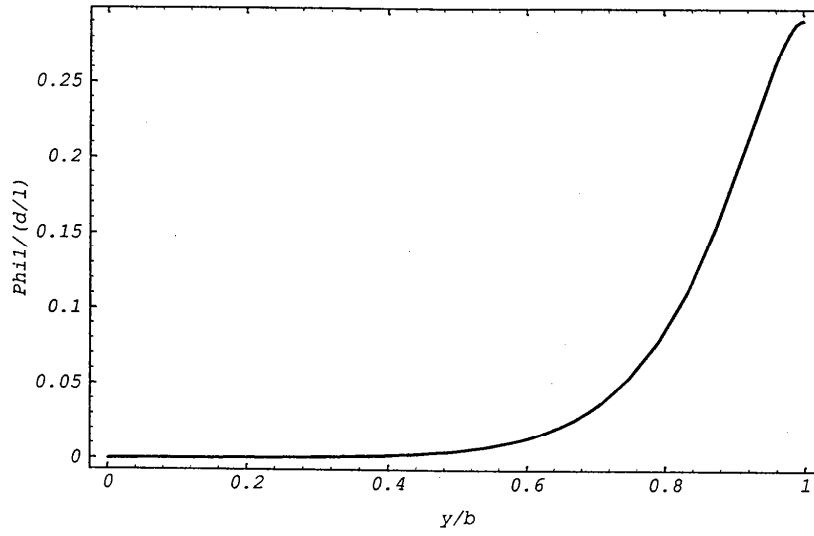


*Courbes M4\_5n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction*

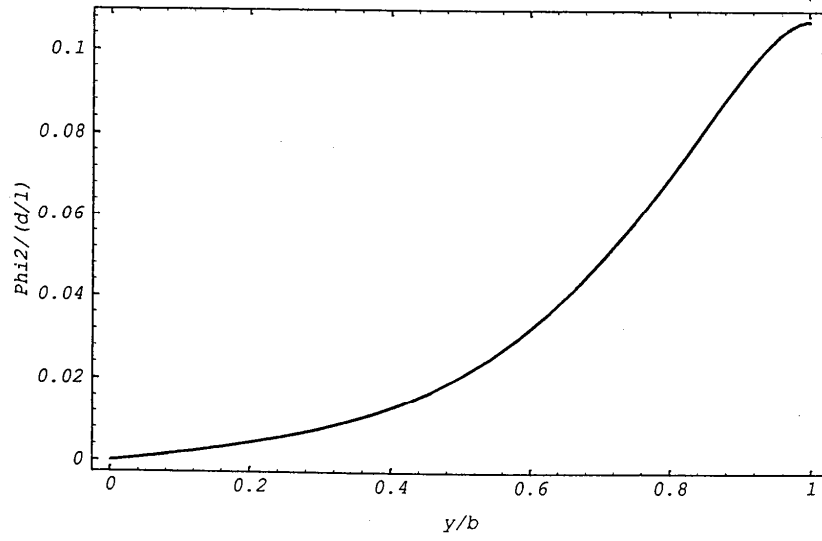


*Courbes M4\_5n du quadricouche [0°, 90°], en traction*

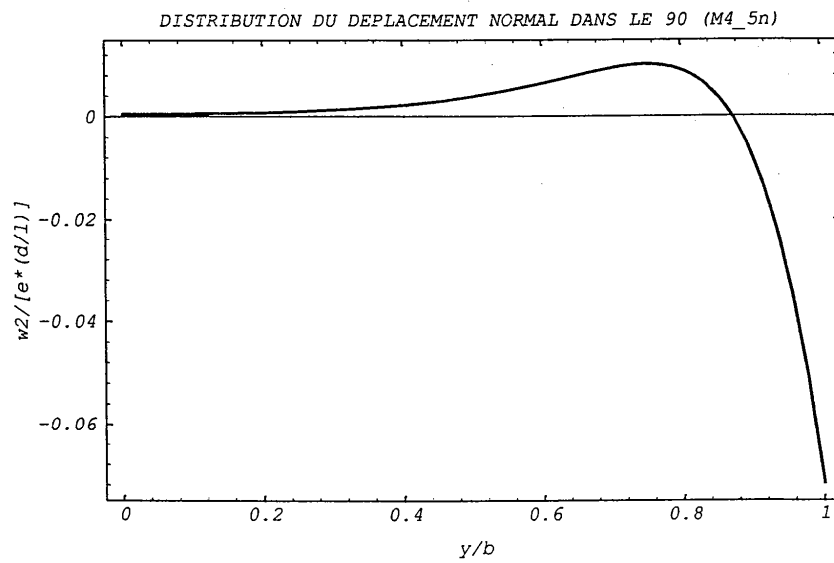
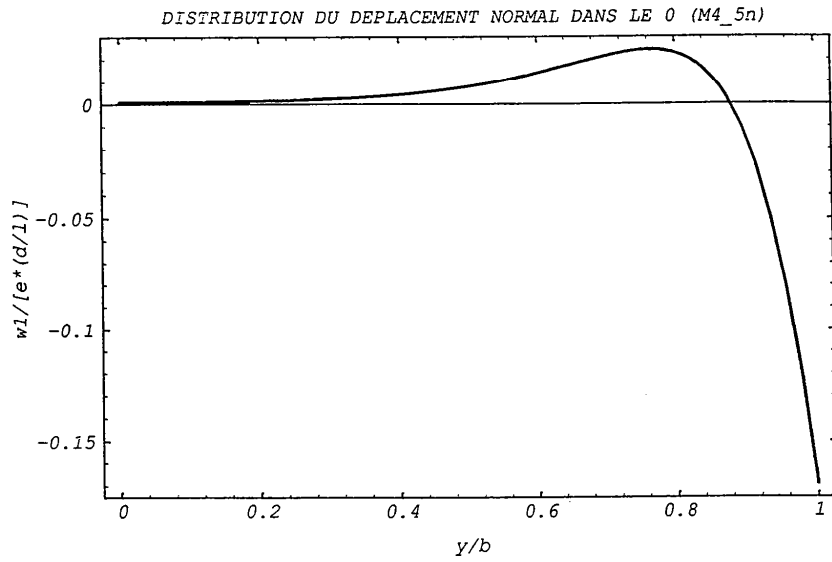
DISTRIBUTION DE LA ROTATION DE DEPLACEMENT TRANSVERSE DANS LE 0 (M4\_5n)



DISTRIBUTION DE LA ROTATION DE DEPLACEMENT TRANSVERSE DANS LE 90 (M4\_5n)

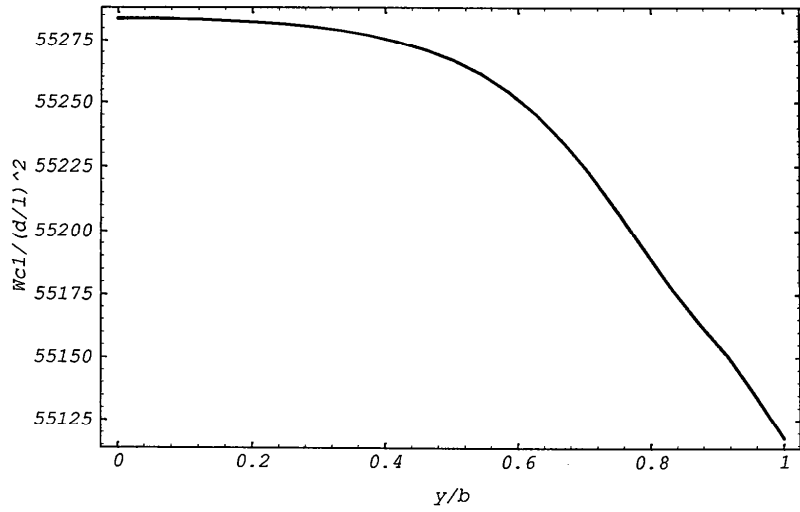


Courbes M4\_5n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction

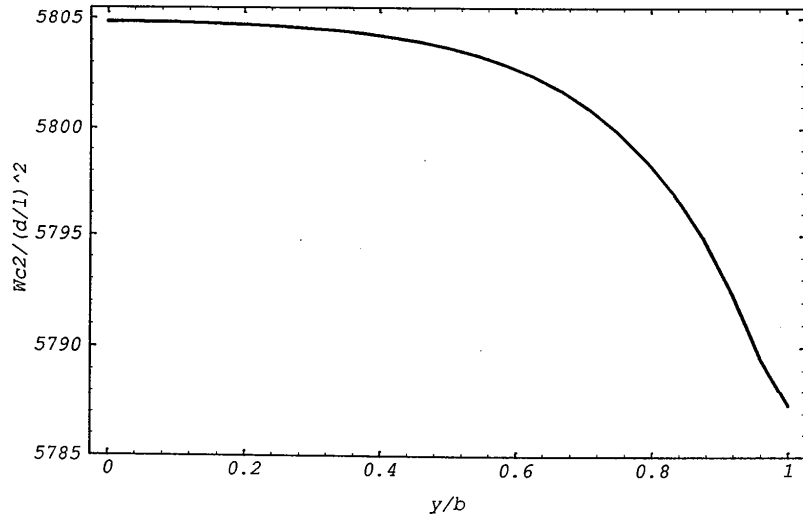


*Courbes M4\_5n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction*

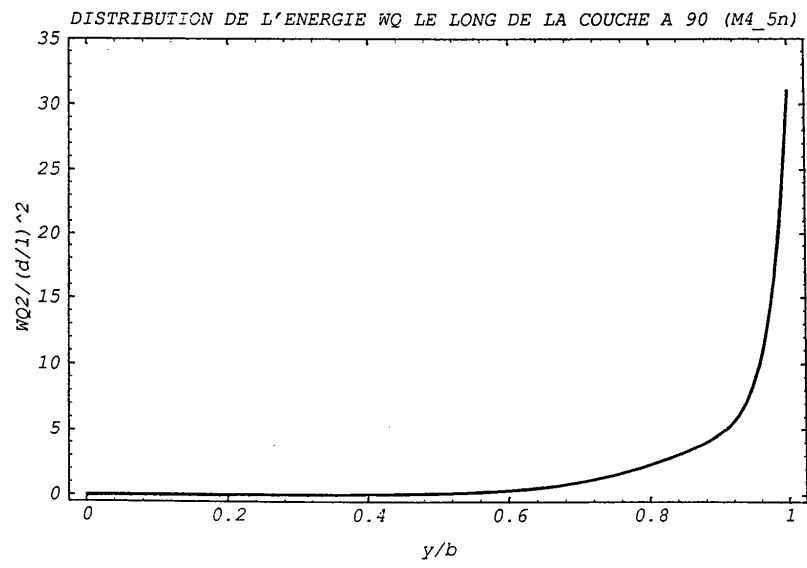
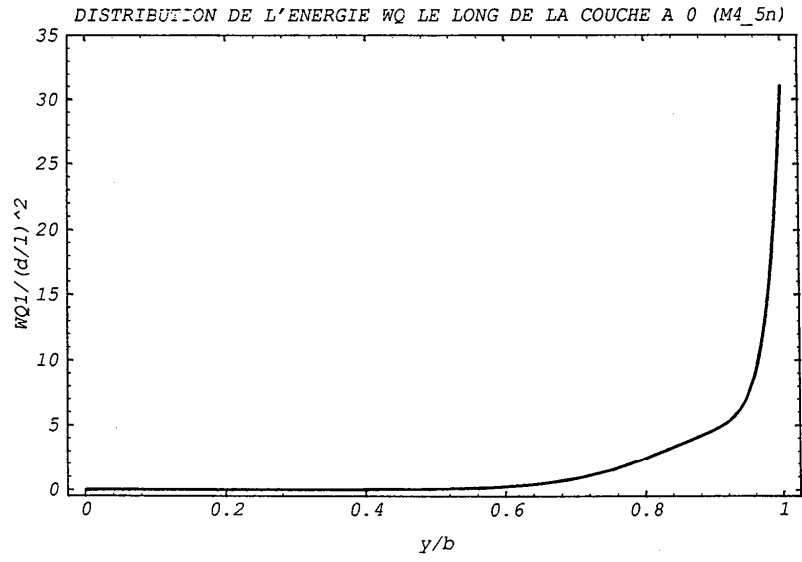
DISTRIBUTION DE L'ENERGIE MEMBRANAIRE  $w_c$  LE LONG DE LA COUCHE A 0 (M4\_5n)



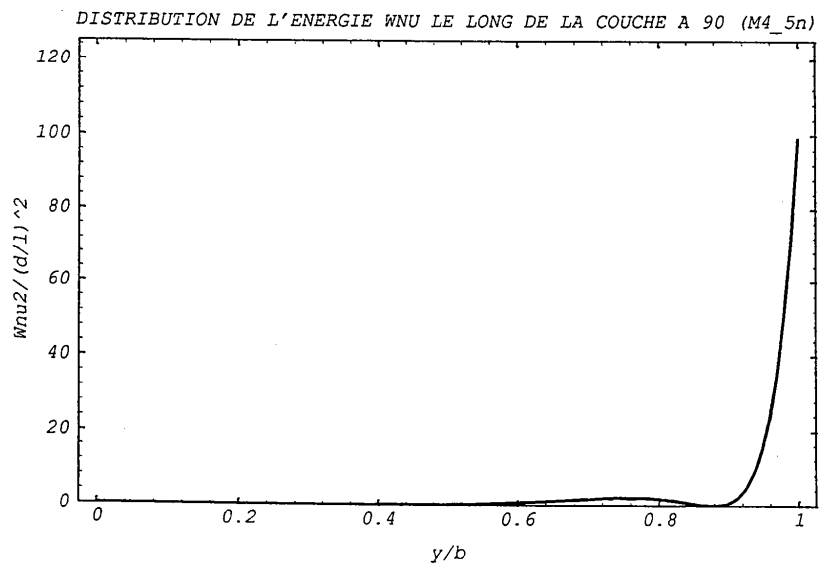
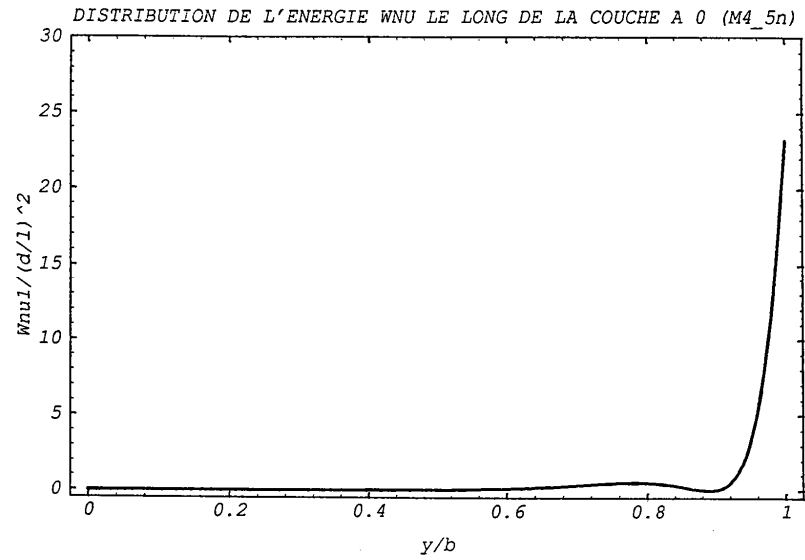
DISTRIBUTION DE L'ENERGIE MEMBRANAIRE  $w_c$  LE LONG DE LA COUCHE A 90 (M4\_5n)



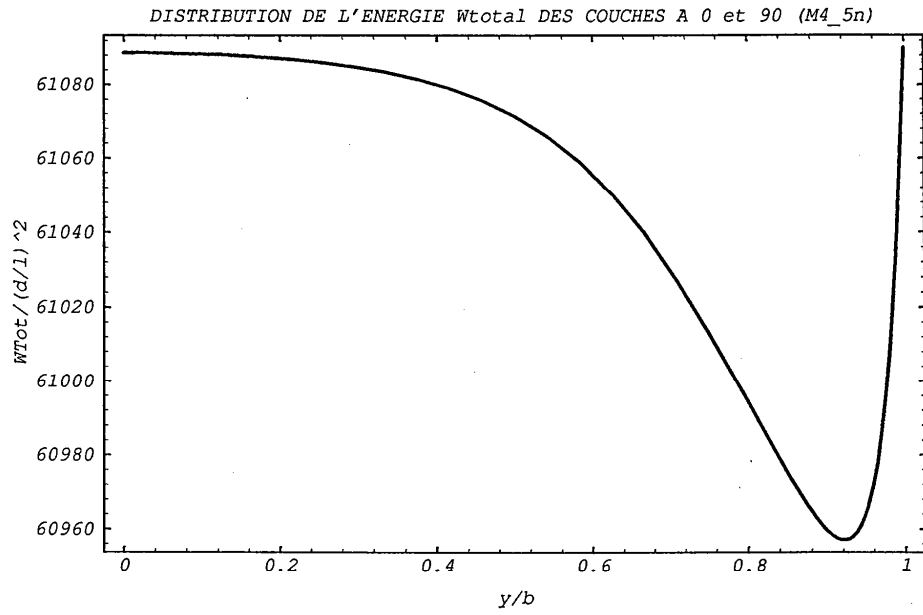
Courbes M4\_5n du quadricouche [0°, 90°], en traction



Courbes M4\_5n du quadricouche [0°, 90°], en traction



Courbes M4\_5n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction



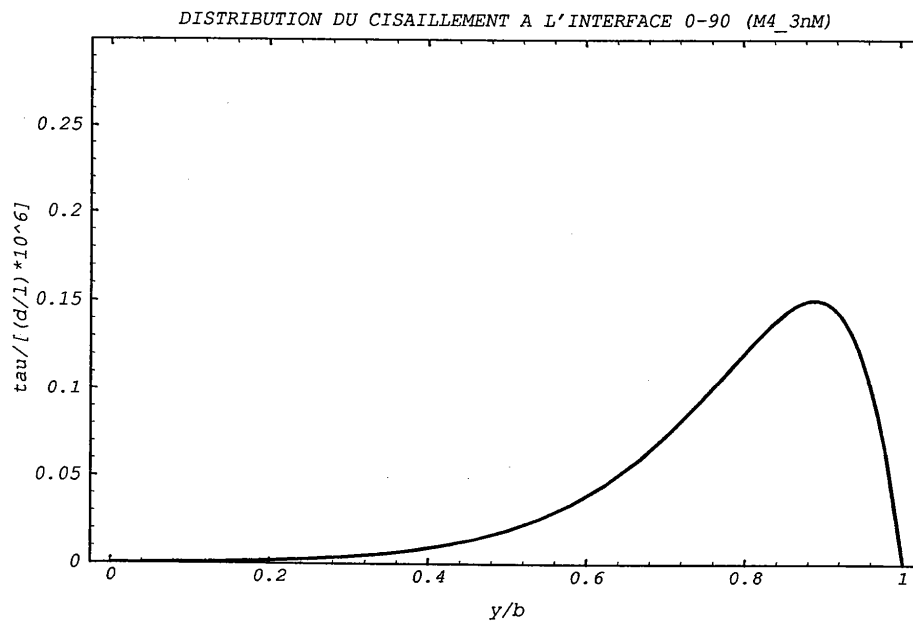


**ANNEXE IV**

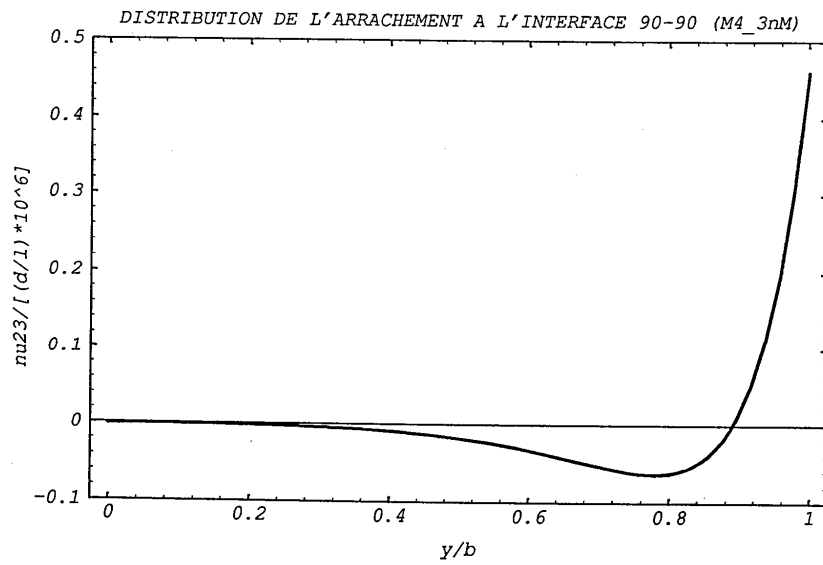
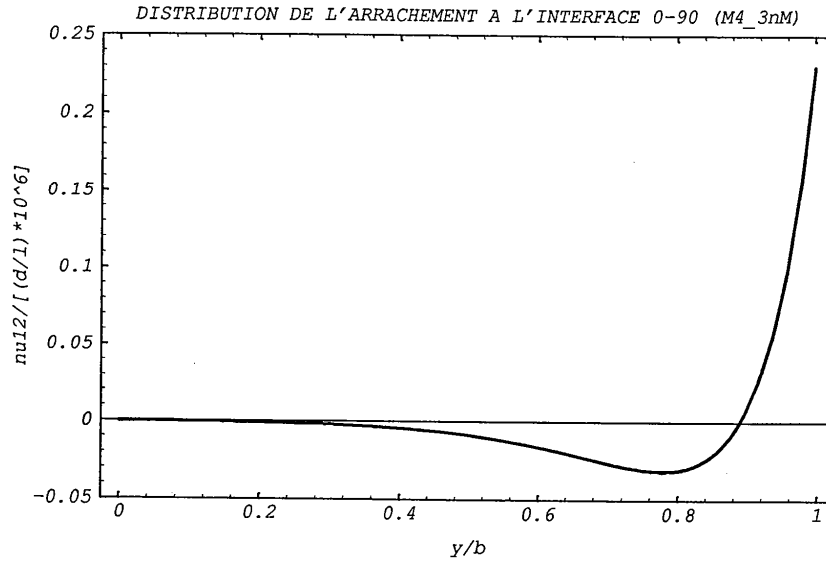
**COURBES M4\_3N**

**DU QUADRICOUCHE [0°, 90°]<sub>S</sub> EN TRACTION**

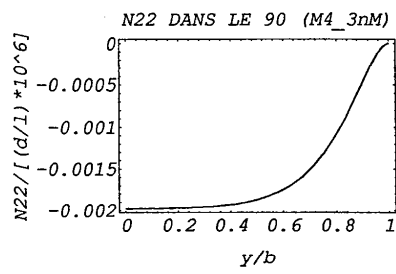
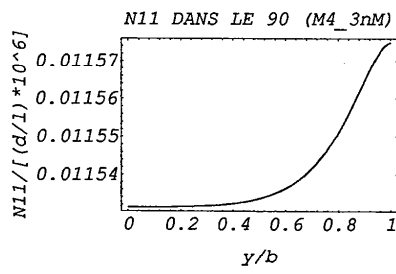
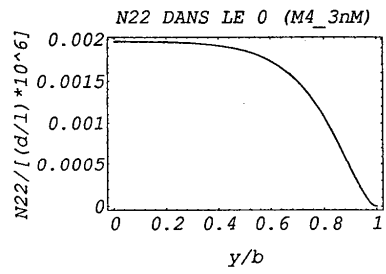
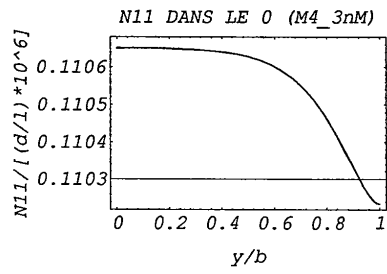
*Courbes M4\_3n M du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction*



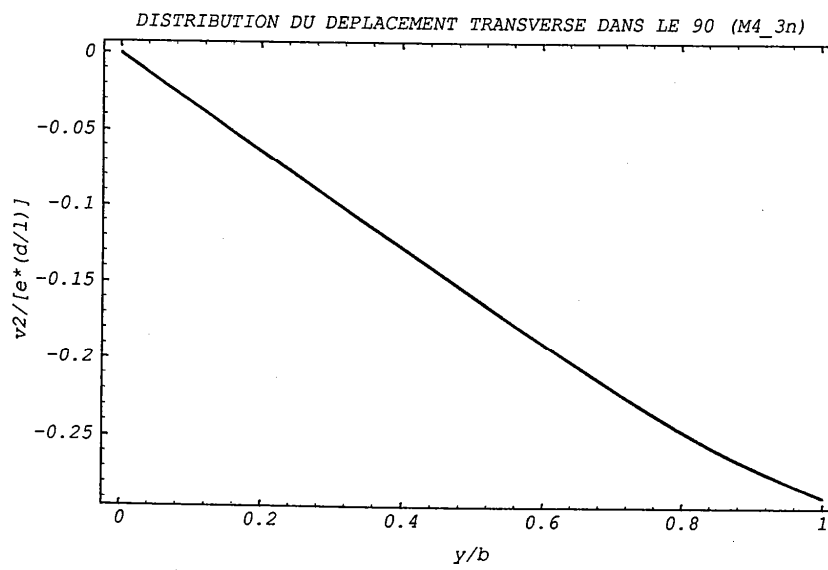
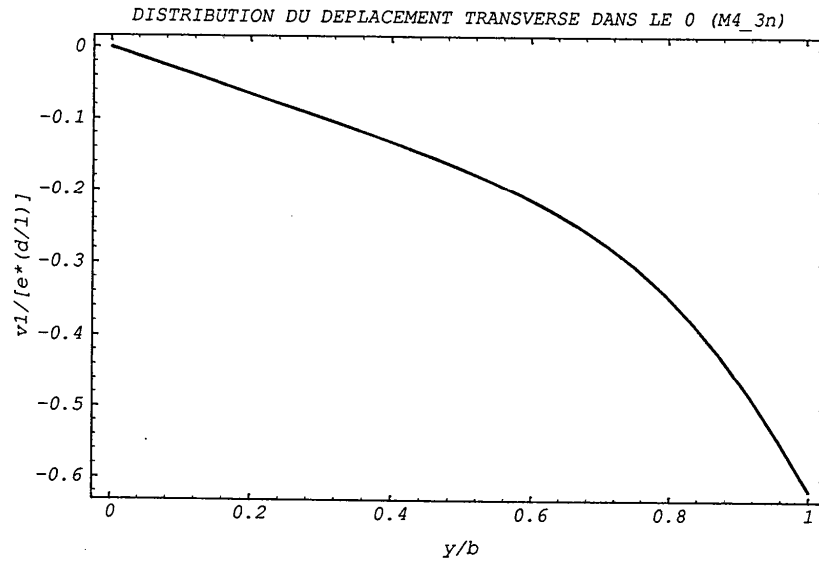
Courbes M4\_3n M du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction



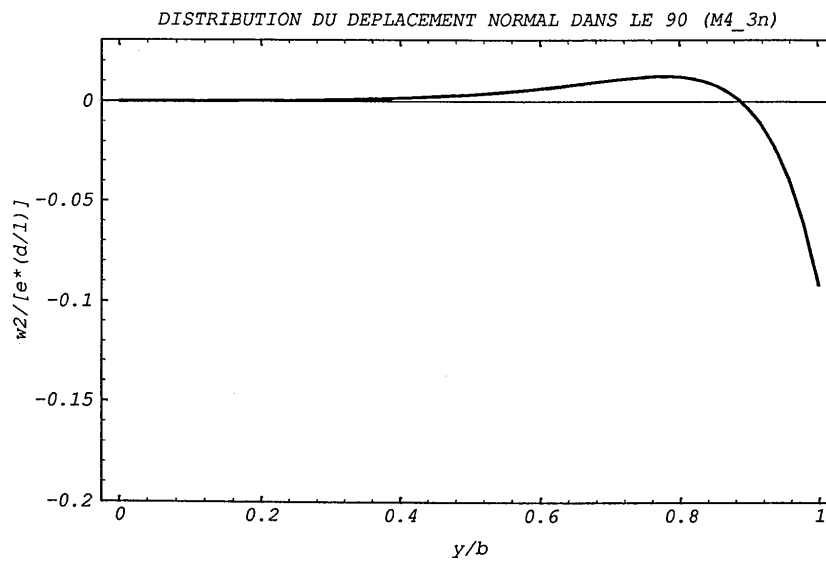
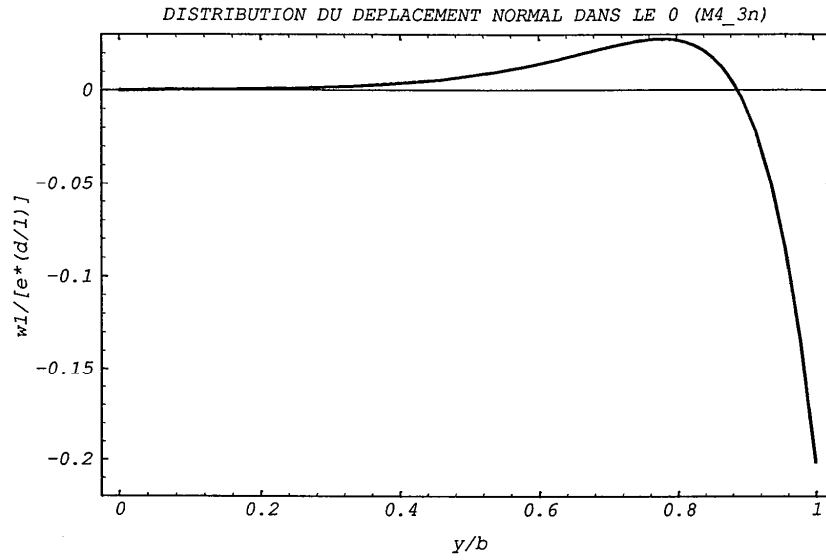
Courbes M4\_3n M du quadricouche  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction



Courbes M4\_3n du quadricouche  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction

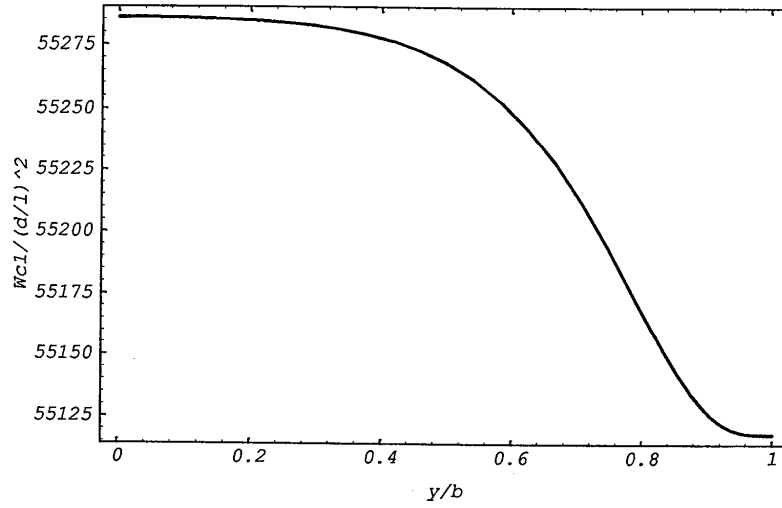


Courbes M4\_3n du quadricouche  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction

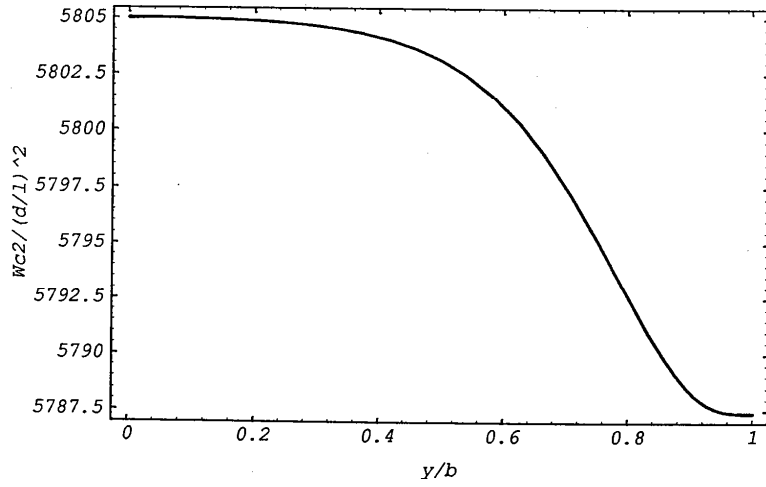


Courbes M4\_3n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction

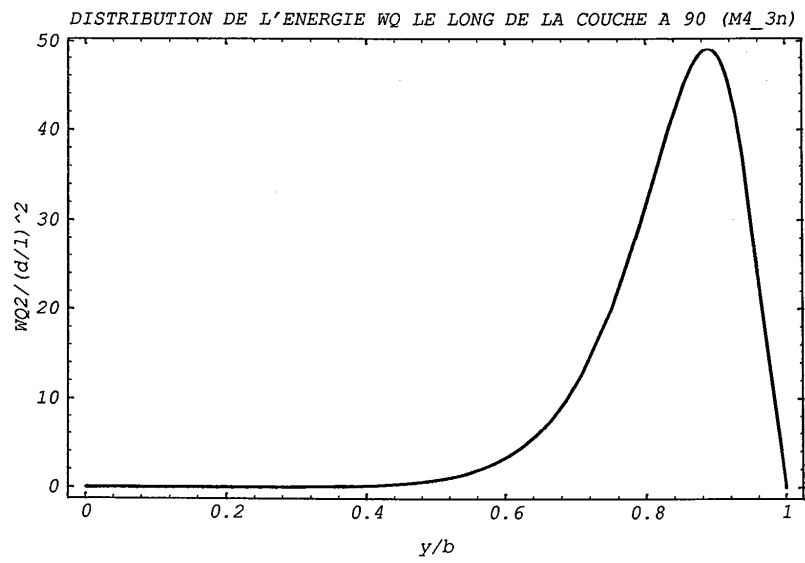
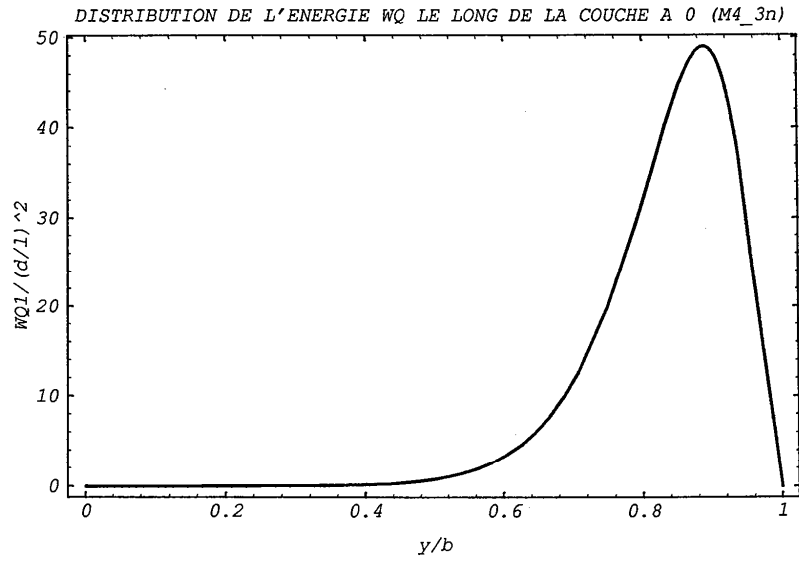
DISTRIBUTION DE L'ENERGIE MEMBRANAIRE  $w_c$  LE LONG DE LA COUCHE A 0 (M4\_3nM)



DISTRIBUTION DE L'ENERGIE MEMBRANAIRE  $w_c$  LE LONG DE LA COUCHE A 90 (M4\_3nM)

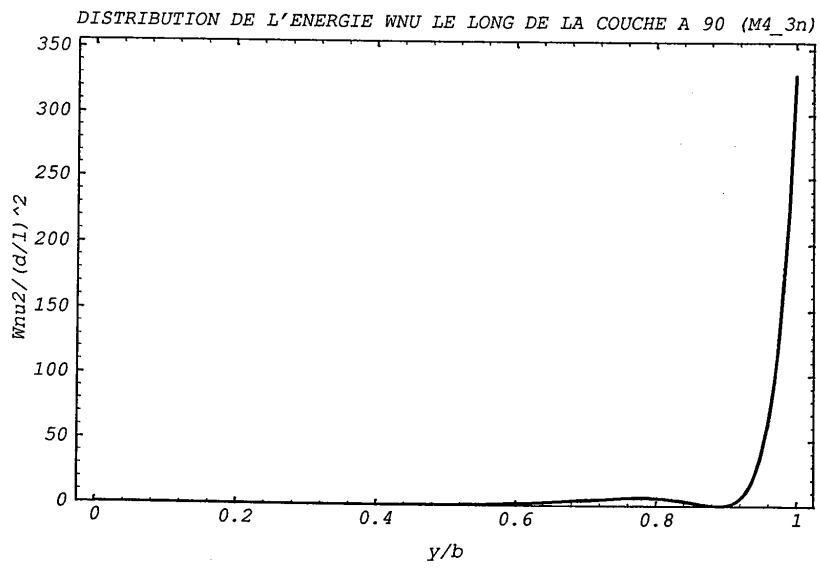
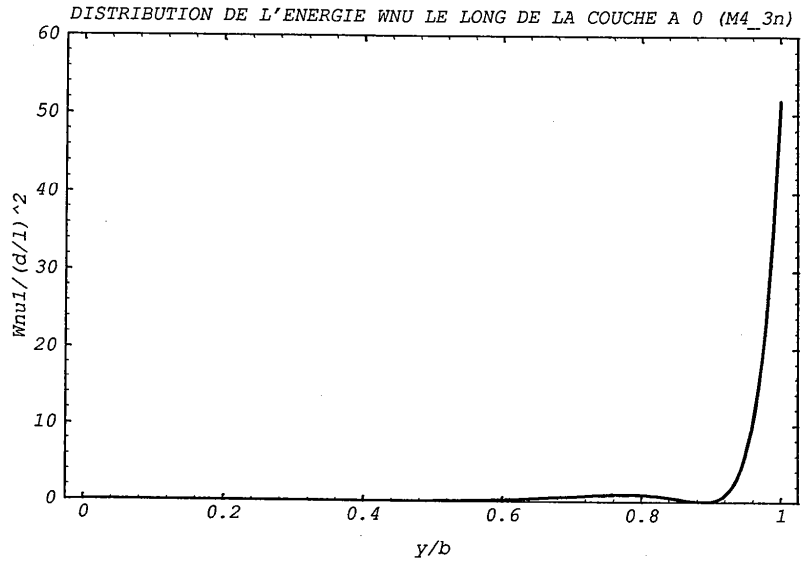


Courbes M4\_3n du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction

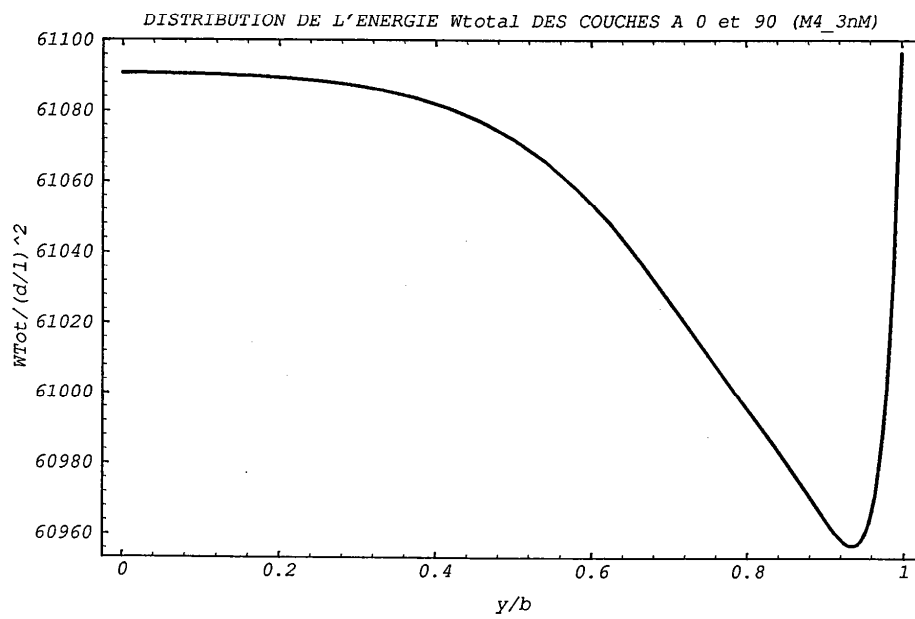




Courbes M4\_3n du quadricouche [0°, 90°], en traction



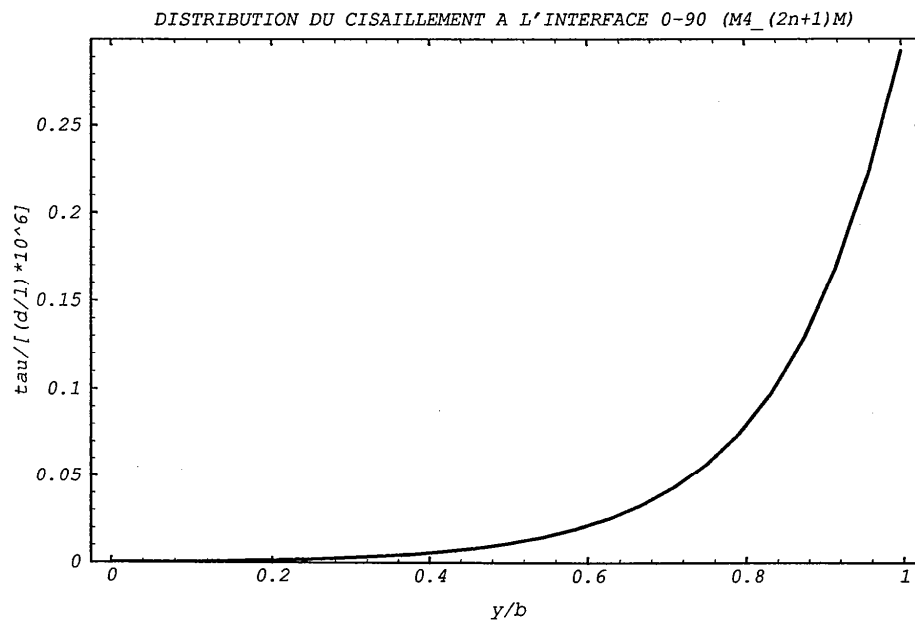
Courbes M4\_3n M du quadricouche [0°, 90°], en traction



**ANNEXE V**

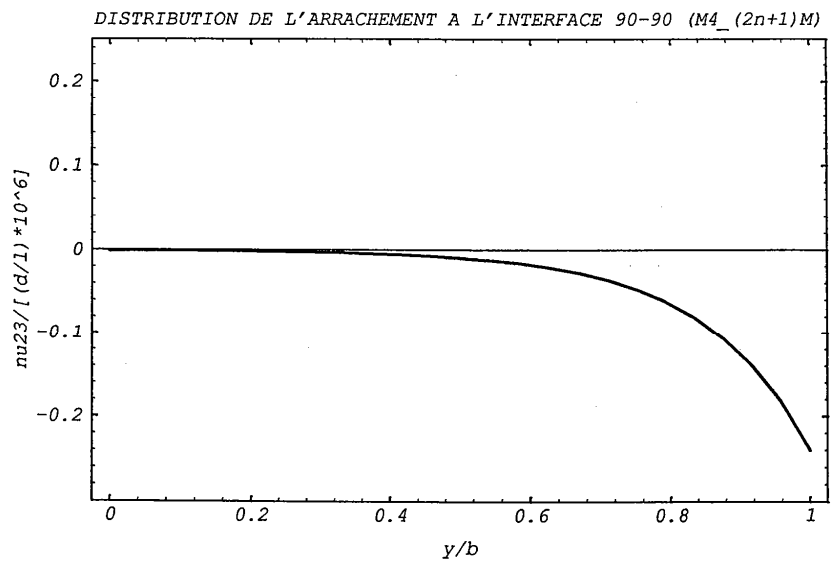
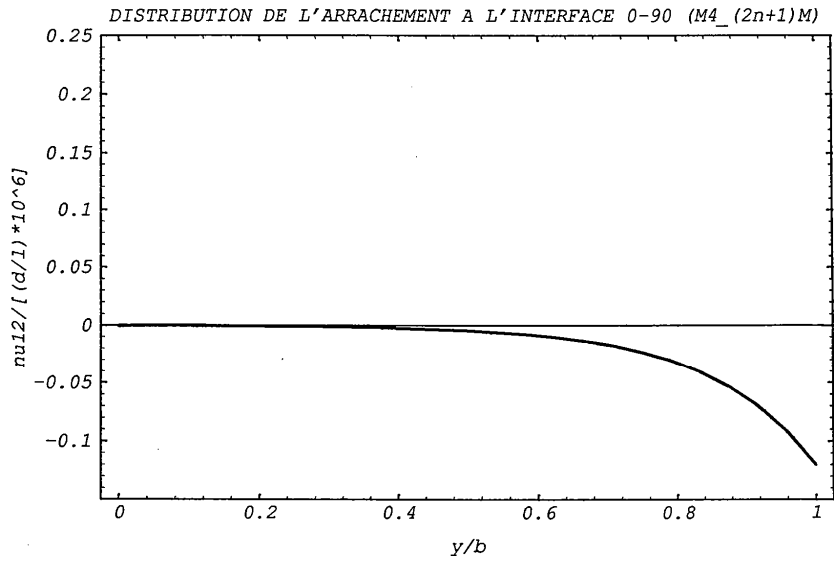
**COURBES  $M4_{(2N+1)M}$   
DU QUADRICOUCHE  $[0^\circ, 90^\circ]_S$  EN TRACTION**

*Courbes M4\_(2n+1)M du quadricouche [0°, 90°]<sub>s</sub> en traction*

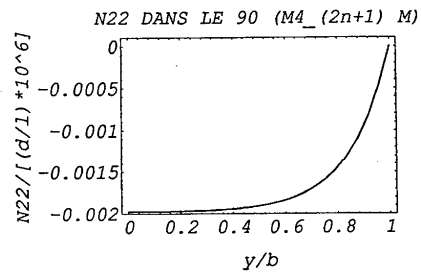
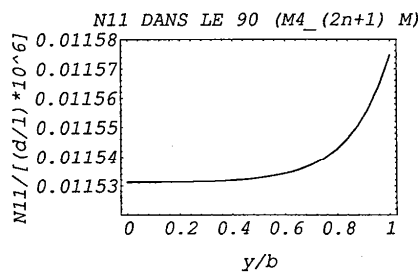
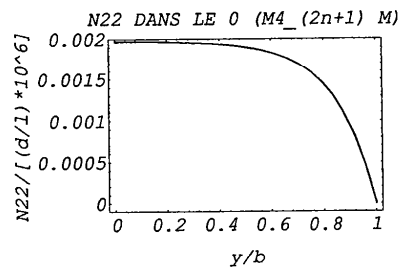
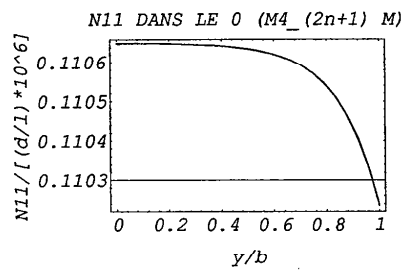


Annexe V-1-

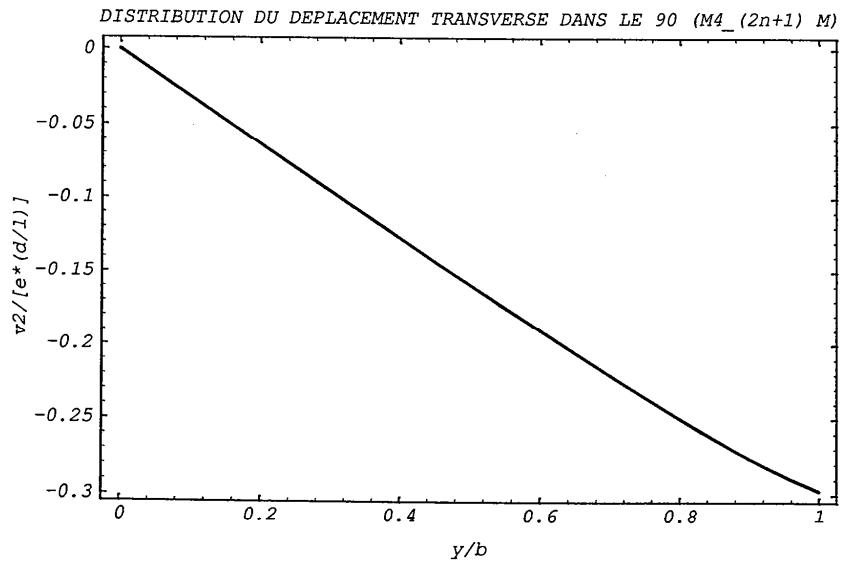
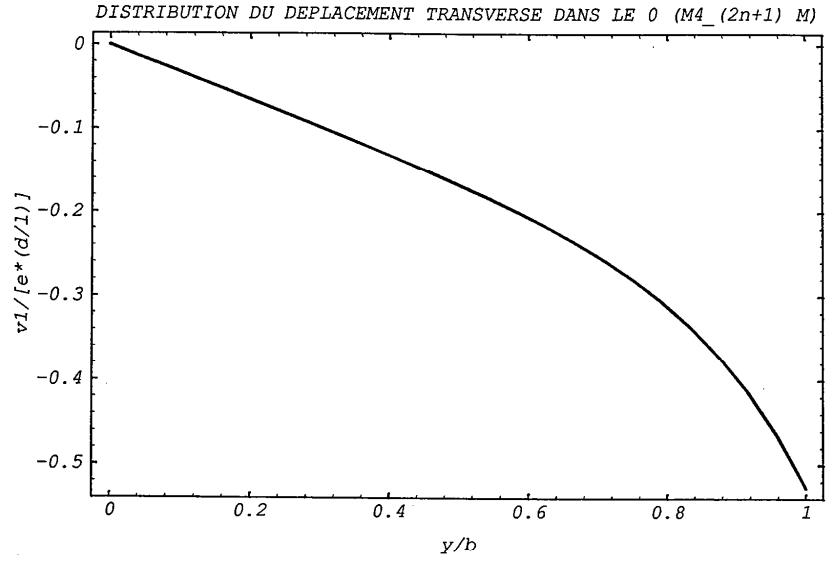
*Courbes  $M4_{(2n+1)M}$  du quadricouche  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction*



Courbes  $M4_{(2n+1)} M$  du quadricouche  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction

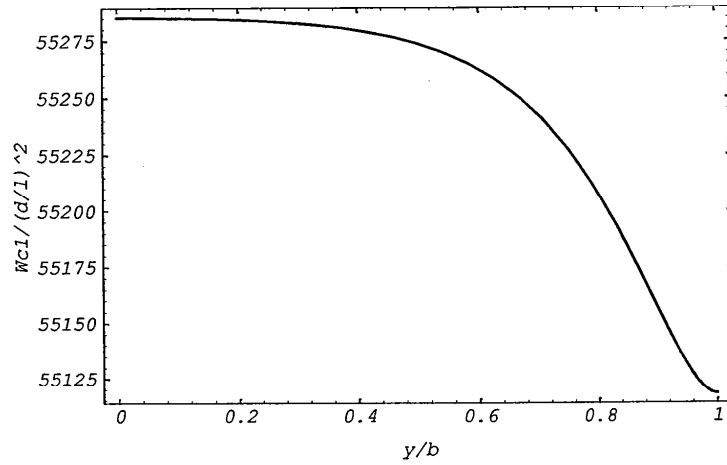


*Courbes  $M4_{(2n+1)M}$  du quadricouche  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction*

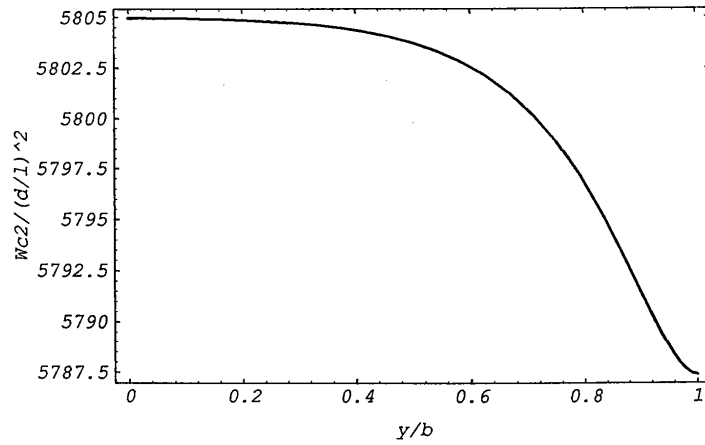


Courbes  $M4_{(2n+1)M}$  du quadricouche  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction

DISTRIBUTION DE L'ENERGIE MEMBRANAIRE  $w_c$  LE LONG DE LA COUCHE A 0 ( $M4_{(2n+1)M}$ )



DISTRIBUTION DE L'ENERGIE MEMBRANAIRE  $w_c$  LE LONG DE LA COUCHE A 90 ( $M4_{(2n+1)M}$ )







$$(V.1.2.27) \quad \boxed{\begin{aligned} v'(y) = & -N(y) \frac{(1 - \nu_{TL}\nu_{LT})}{e} \left( \frac{E_L + E_T}{E_L E_T} \right) \\ & + N_3^1(y) \frac{(\nu_{TN} + \nu_{TL}\nu_{LN})}{e E_T} - N_3^2(y) \frac{(\nu_{LN} + \nu_{LT}\nu_{TN})}{e E_L} + \mathcal{E}(\nu_{LT} - \nu_{TL}) \end{aligned}}$$

Le comportement à l'effort tranchant:

$$(V.1.2.28) \quad \left( \varphi^i(y) + U_3^{i,0}(y) + \hat{U}_3^i(y) \right) = \tilde{S}_Q^i \left( \frac{6}{5e} \begin{pmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \end{pmatrix} - \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \tau_1^{1,2} \\ \tau_2^{1,2} \end{pmatrix} \right)$$

$$(V.1.2.29) \quad \tilde{S}_Q^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{G_{NL}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_{TN}} \end{pmatrix} ; \quad \tilde{S}_Q^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{G_{TN}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_{NL}} \end{pmatrix}$$

On en tire les deux équations différentielles suivantes:

$$(V.1.2.30) \quad \boxed{\begin{cases} \Omega_1' = -\varphi^1 + \frac{1}{G_{TN}} \left( \frac{6}{5e} Q^1 - \frac{\tau}{10} \right) \\ \Omega_2' = -\varphi^2 + \frac{1}{G_{LN}} \left( \frac{6}{5e} Q^2 - \frac{\tau}{10} \right) \end{cases}}$$

Le comportement de flexion des couches s'écrit:

$$(V.1.2.31) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^i(y) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{12}{e^3} \tilde{S}^i \begin{pmatrix} M_{11}^i \\ M_{22}^i \\ M_{12}^i \end{pmatrix} + \frac{12}{e^3} M_3^i \begin{pmatrix} S_{1133}^i \\ S_{2233}^i \\ 2S_{1233}^i \end{pmatrix}$$

On en tire les deux équations différentielles:

$$(V.1.2.32) \quad \boxed{\begin{cases} \varphi^1(y) = \frac{12}{e^3 E_T} (1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) M^1(y) - \frac{12}{e^3 E_T} (\nu_{TN} + \nu_{TL}\nu_{LN}) M_3^1(y) \\ \varphi^2(y) = \frac{12}{e^3 E_L} (1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) M^2(y) - \frac{12}{e^3 E_L} (\nu_{LN} + \nu_{LT}\nu_{TN}) M_3^2(y) \end{cases}}$$

Ecrivons le comportement au cisaillement d'interface:

$$(V.1.2.33)$$

$$\left( v^2 - v^1 - \frac{e}{2} \left( \varphi^1 + \varphi^2 + \hat{U}_3^1 + \hat{U}_3^2 - 2\bar{U}_3^1 + 2\bar{U}_3^2 \right) \right) = \tilde{S}_Q^1 \left( \frac{e}{6} \tau - \frac{1}{10} \left( Q^1 - \frac{e}{2} \tau \right) \right) - \tilde{S}_Q^2 \left( \frac{Q^2}{10} - \frac{e}{20} \tau \right)$$

On en tire l'équation différentielle suivante:

$$(V.1.2.34) \quad \boxed{\Omega_3' = \frac{2}{e} v - (\varphi^1 + \varphi^2) + \frac{Q^1}{5eG_{TN}} + \frac{Q^2}{5eG_{LN}} - \tau \left( \frac{13}{30G_{TN}} + \frac{1}{10G_{LN}} \right)}$$

Ecrivons maintenant les comportements des efforts normaux des couches et des efforts d'arrachement d'interface. Il s'agit de six équations algébriques:

Comportement des efforts normaux dans la couche i:

$$(V.1.2.35) \quad -\frac{60}{e^2} \hat{U}_3^i = S_v^i \left( \frac{120}{7e^3} M_3^i - \frac{3}{7e} (v^{i,i+1} - v^{i-1,i}) \right) + \frac{6}{e^3} (2M_{11}^i S_{1133}^i + 2M_{22}^i S_{2233}^i + 4M_{12}^i S_{1233}^i)$$

$$(V.1.2.36) \quad \frac{12}{e} \bar{U}_3^i = S_v^i \left( \frac{6}{5e} N_3^i - \frac{1}{10} (v^{i,i+1} + v^{i-1,i}) \right) + \frac{1}{e} (N_{11}^i S_{1133}^i + N_{22}^i S_{2233}^i + 2N_{12}^i S_{1233}^i)$$

avec

$$(V.1.2.37) \quad S_v^1 = S_v^2 = S_v^3 = \frac{1}{E_N}$$

Comportement des efforts d'arrachement:

$$(V.1.2.38) \quad -U_3^1 + U_3^2 - 6(\bar{U}_3^1 + \bar{U}_3^2) + 5(\hat{U}_3^1 - \hat{U}_3^2) = \frac{1}{E_N} \left( -\frac{1}{10} (N_3^1 + N_3^2) + \frac{e}{20} (v^{2,3} + 2v^{1,2}) \right) + \frac{5}{700} \left( \frac{60}{e} (M_3^2 - M_3^1) - 5e(v^{2,3} - 2v^{1,2}) \right)$$

$$(V.1.2.39) \quad -2U_3^2 - 12\bar{U}_3^2 + 10\hat{U}_3^2 = \frac{1}{E_N} \left( \frac{e}{20} (2v^{2,3} + 2v^{1,2}) - \frac{1}{5} N_3^2 + \frac{5}{700} \left( \frac{60}{e} (-2M_3^2) + 10e(v^{2,3} - v^{1,2}) \right) \right)$$

Ces équations (V.1.2.35->39) se réécrivent:

$$(V.1.2.40)$$

Calculs analytiques du  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction

$$\begin{cases} \hat{U}_3^1 = \frac{M_3^1}{eE_N} \left( -\frac{2}{7} + \frac{v_{NL}v_{LN}}{5} \right) + \frac{e}{140E_N} v^{1,2} + \frac{M^1}{5eE_N} (v_{NT} + v_{NL}v_{LT}) \\ \hat{U}_3^2 = \frac{M_3^2}{eE_N} \left( -\frac{2}{7} + \frac{v_{NT}v_{TN}}{5} \right) + \frac{e}{140E_N} (v^{2,3} - v^{1,2}) + \frac{M^2}{5eE_N} (v_{NL} + v_{NT}v_{TL}) \\ \bar{U}_3^1 = \frac{N_3^1}{E_N} \left( \frac{1}{10} - \frac{v_{NL}v_{LN}}{12} \right) - \frac{e}{120E_N} v^{1,2} - \frac{N}{12E_N} (v_{NT} + v_{NL}v_{LT}) - \frac{e}{12} \mathcal{E}v_{LN} \\ \bar{U}_3^2 = \frac{N_3^2}{E_N} \left( \frac{1}{10} - \frac{v_{NT}v_{TN}}{12} \right) - \frac{e}{120E_N} (v^{2,3} + v^{1,2}) + \frac{N}{12E_N} (v_{NL} + v_{NT}v_{TL}) - \frac{e}{12} \mathcal{E}v_{TN} \end{cases}$$

(V.1.2.41)

$$-U_3^1 + U_3^2 - 6(\bar{U}_3^1 + \bar{U}_3^2) + 5(\hat{U}_3^1 - \hat{U}_3^2) = \frac{1}{E_N} \left( -\frac{1}{10}(N_3^1 + N_3^2) + \frac{3}{7e}(M_3^2 - M_3^1) + \frac{e}{35} \left( \frac{v^{2,3}}{2} + 6v^{1,2} \right) \right)$$

(V.1.2.42)

$$-2U_3^2 - 12\bar{U}_3^2 + 10\hat{U}_3^2 = \frac{1}{E_N} \left( -\frac{N_3^2}{5} - \frac{6M_3^2}{7e} + \frac{e}{35} (v^{1,2} + 6v^{2,3}) \right)$$

On tire facilement de ces équations les trois champs cinématiques principaux  $\Omega^1, \Omega^2$  et  $\Omega^3$  :

(V.1.2.43)

$$\Omega_1 = U_3^1 + \hat{U}_3^1$$

D'où:

(V.1.2.44)

$$\Omega_1 = \frac{N_3^1}{E_N} \left( \frac{-1 + v_{NL}v_{LN}}{2} \right) + \frac{N_3^2}{E_N} (-1 + v_{NT}v_{TN}) + \frac{M_3^1}{eE_N} \left( -\frac{9}{7} + \frac{6v_{NL}v_{LN}}{5} \right) + \frac{ev^{1,2}}{140E_N} + \frac{N}{E_N} \left( -(v_{NL} + v_{NT}v_{TL}) + \frac{v_{NT} + v_{NL}v_{LT}}{2} \right) + \frac{M^1}{eE_N} \left( \frac{6(v_{NT} + v_{NL}v_{LT})}{5} \right) + \frac{e}{2} \mathcal{E} \left( \frac{v_{LN}}{2} + v_{TN} \right)$$

(V.1.2.45)

$$\Omega_2 = U_3^2 + \hat{U}_3^2$$

D'où:

(V.1.2.46)

$$\Omega_2 = -\frac{N_3^2}{E_N} \left( \frac{1 - v_{NT}v_{TN}}{2} \right) - \frac{M_3^2}{eE_N} \left( \frac{9}{7} - \frac{6v_{NT}v_{TN}}{5} \right) + \frac{ev^{2,3}}{140E_N} - \frac{ev^{1,2}}{140E_N} - \frac{N}{E_N} \left( \frac{v_{NL} + v_{NT}v_{TL}}{2} \right) + \frac{M^2}{eE_N} \left( \frac{6(v_{NL} + v_{NT}v_{TL})}{5} \right) + \frac{e}{2} \mathcal{E}v_{TN}$$

$$(V.1.2.47) \quad \Omega^1 = \hat{U}_3^1 + \hat{U}_3^2 - 2\bar{U}_3^1 + 2\bar{U}_3^2$$

Ce qui donne:

$$(V.1.2.48)$$

$$\Omega_3 = \frac{N_3^1}{E_N} \left( -\frac{1}{5} + \frac{v_{NL}v_{LN}}{6} \right) + \frac{N_3^2}{E_N} \left( \frac{1}{5} - \frac{v_{NT}v_{TN}}{6} \right) + \frac{M_3^1}{eE_N} \left( -\frac{2}{7} + \frac{v_{NL}v_{LN}}{5} \right) + \frac{M_3^2}{eE_N} \left( -\frac{2}{7} + \frac{v_{NT}v_{TN}}{5} \right) - \frac{ev^{2,3}}{105E_N} + \frac{N}{E_N} \left( \frac{v_{NT} + v_{NL}v_{LT}}{6} + \frac{v_{NL} + v_{NT}v_{TL}}{6} \right) + \frac{M^1}{eE_N} \left( \frac{v_{NT} + v_{NL}v_{LT}}{5} \right) + \frac{M^2}{eE_N} \left( \frac{v_{NL} + v_{NT}v_{TL}}{5} \right) - \epsilon e \left( \frac{v_{TN} - v_{LN}}{6} \right)$$

Nous avons ainsi pour ces dix-huit champs principaux douze équations différentielles et six équations algébriques. Ces équations ont heureusement une structure très simple qui va permettre de les condenser.

Rappelons que  $b$  est la demie largeur de la plaque dans le cas borné. C'est une valeur arbitraire généralement égale à un petit multiple de  $4e$  dans le cas de la plaque infinie. Notons avec le changement de variable suivant  $y=bu$ :

$$(V.1.2.49) \quad \underline{X}(u) = \left( \frac{v}{e}, \frac{\tau}{E_N}, \varphi_1, \varphi_2, \frac{Q^1}{eE_N}, \frac{Q^2}{eE_N} \right) (bu)$$

$$(V.1.2.50) \quad \underline{Y}(u) = \left( \frac{N}{eE_N}, \frac{M^1}{e^2E_N}, \frac{M^2}{e^2E_N}, \frac{\Omega_1}{e}, \frac{\Omega_2}{e}, \frac{\Omega_3}{e} \right) (bu)$$

$$(V.1.2.51) \quad \underline{Z}(u) = \left( \frac{N_3^1}{eE_N}, \frac{N_3^2}{eE_N}, \frac{M_3^1}{e^2E_N}, \frac{M_3^2}{e^2E_N}, \frac{v^{1,2}}{E_N}, \frac{v^{2,3}}{E_N} \right) (bu)$$

On constate que les six équations algébriques s'écrivent:

$$(V.1.2.52) \quad \boxed{\bar{\bar{A}} \cdot \underline{Y} + \bar{\bar{B}} \cdot \underline{Z} = \bar{\bar{F}}}$$

et les équations différentielles:

$$(V.1.2.53) \quad \boxed{\underline{Y}' = \bar{\bar{C}} \cdot \underline{X}}$$

$$(V.1.2.54) \quad \boxed{\underline{X}' = \bar{\bar{D}} \cdot \underline{Y} + \bar{\bar{E}} \cdot \underline{Z} + \bar{\bar{G}}}$$

Calculs analytiques du  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction

$\bar{\bar{A}}$ ,  $\bar{\bar{B}}$ ,  $\bar{\bar{C}}$ ,  $\bar{\bar{D}}$  et  $\bar{\bar{E}}$  sont des matrices 6x6 écrites par la suite et  $\bar{\mathbf{F}}$  et  $\bar{\mathbf{G}}$  sont des vecteurs à six composantes connues.

La condensation de ces équations permettent d'aboutir à un système de six équations différentielles du 2ème degré sur  $\bar{\mathbf{X}}$ , en effet:  $\bar{\mathbf{Z}} = -\bar{\bar{B}}^{-1} \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\mathbf{Y}} + \bar{\bar{B}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{F}}$  si  $\bar{\bar{B}}$  est inversible. Donc:

$$(V.1.2.55) \quad \boxed{\bar{\mathbf{X}}'' = (\bar{\bar{D}} - \bar{\bar{E}} \cdot \bar{\bar{B}}^{-1} \cdot \bar{\bar{A}}) \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\mathbf{X}}}$$

$$\text{En posant } \begin{cases} a_{NL} = v_{NL} + v_{NT}v_{TL} \\ a_{NT} = v_{NT} + v_{NL}v_{LT} \\ a_{LN} = v_{LN} + v_{LT}v_{TN} \\ a_{TN} = v_{TN} + v_{TL}v_{LN} \end{cases} \text{ on a:}$$

$$(V.1.2.56) \quad \bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{NL} + \frac{a_{NT}}{6} & \frac{6}{5}a_{NT} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{NL}}{2} & 0 & -\frac{6}{5}a_{NL} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{a_{NT}}{6} + \frac{a_{NL}}{6} & \frac{a_{NT}}{5} & \frac{a_{NL}}{5} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(V.1.2.57) \quad \bar{\bar{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 1 & \frac{1}{1} & \frac{-3}{20} \\ \frac{-1 + v_{NL}v_{LN}}{2} & -1 + v_{NT}v_{TN} & -\frac{9}{7} + \frac{6v_{NL}v_{LN}}{5} & 0 & \frac{20}{1} & \frac{20}{0} \\ 0 & \frac{1 - v_{NT}v_{TN}}{2} & 0 & \frac{9}{7} - \frac{6v_{NT}v_{TN}}{5} & \frac{1}{140} & \frac{-1}{140} \\ \frac{-1}{5} + \frac{v_{NL}v_{LN}}{6} & \frac{1}{5} - \frac{v_{NT}v_{TN}}{6} & -\frac{2}{7} + \frac{v_{NL}v_{LN}}{5} & -\frac{2}{7} + \frac{v_{NT}v_{TN}}{5} & 0 & \frac{-1}{105} \end{pmatrix}$$

Calculs analytiques du  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction

$$(V.1.2.58) \quad \bar{\bar{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2e}{b} & 0 & 0 & \frac{b}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{2e}{b} & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{e} \\ 0 & -\frac{b}{e} \frac{E_N}{10e G_{TN}} & -\frac{b}{e} & 0 & \frac{6b}{5e} \frac{E_N}{G_{TN}} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{e} \frac{E_N}{10e G_{LN}} & 0 & -\frac{b}{e} & 0 & \frac{6b}{5e} \frac{E_N}{G_{LN}} \\ \frac{2b}{e} & -\frac{b}{e} \left( \frac{13E_N}{30G_{TN}} + \frac{E_N}{10G_{LN}} \right) & -\frac{b}{e} & -\frac{b}{e} & \frac{b}{5e} \frac{E_N}{G_{TN}} & \frac{b}{5e} \frac{E_N}{G_{LN}} \end{pmatrix}$$

$$(V.1.2.59) \quad \bar{\bar{D}} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{e} (1 - \nu_{TL} \nu_{LT}) \left( \frac{(E_L + E_T) E_N}{E_L E_T} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 \frac{b E_N}{e E_T} (1 - \nu_{TL} \nu_{LT}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \frac{b E_N}{e E_L} (1 - \nu_{TL} \nu_{LT}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(V.1.2.60) \quad \bar{\bar{E}} = \begin{pmatrix} \frac{b E_N}{e E_T} a_{TN} & -\frac{b E_N}{e E_L} a_{LN} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 \frac{b}{e} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6b}{e} & 0 \\ 0 & 0 & -12 \frac{b E_N}{e E_T} a_{TN} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \frac{b E_N}{e E_L} a_{LN} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{e} & -\frac{b}{e} \end{pmatrix}$$

Avec les vecteurs suivants:

$$(V.1.2.61) \quad \underline{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mathcal{E} \left( \frac{v_{LN}}{2} + v_{TN} \right) \\ \mathcal{E} \frac{v_{TN}}{2} \\ \mathcal{E} \left( \frac{v_{TN} - v_{LN}}{6} \right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{G} = \begin{pmatrix} \frac{b}{e} \mathcal{E} (v_{LT} - v_{TL}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à expliciter les conditions aux limites. distinguons les cas de la plaque bornée et de la plaque semi-infinie.

*a) Plaque bornée*

Les conditions aux limites du modèle se mettent sous la forme:

$$(V.1.2.62) \quad \begin{cases} \tilde{N}^i(x, b) \cdot \tilde{n} = 0 \\ \tilde{Q}^i(x, b) \cdot \tilde{n} = 0 \\ \tilde{M}^i(x, b) \cdot \tilde{n} = 0 \\ \tilde{\tau}^{i,i+1}(x, b) \cdot \tilde{n} = 0 \quad i = 1, n-1 \end{cases} \quad \forall i = 1, n$$

Avec les conditions de parité et en fonction des inconnues, ces conditions aux limites se réécrivent:

$$(V.1.2.63) \quad \begin{array}{|l|l|} \hline v(0) = 0 & N(b) = 0 \\ \tau(0) = 0 & \tau(b) = 0 \\ \varphi^1(0) = 0 & M^1(b) = 0 \\ \varphi^2(0) = 0 & M^2(b) = 0 \\ Q^1(0) = 0 & Q^1(b) = 0 \\ Q^2(0) = 0 & Q^2(b) = 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{et}$$

Ce qui en fonction des champs inconnus  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  s'écrit:

$$(V.1.2.64) \quad \begin{array}{|l|l|} \hline \underline{X}(0) = 0 & Y_1(1) = 0 \\ X_2(1) = 0 & Y_2(1) = 0 \\ X_5(1) = 0 & Y_3(1) = 0 \\ X_6(1) = 0 & \\ \hline \end{array} \quad \text{et}$$



avec  $\underline{Y} = [\bar{D} - \bar{E} \cdot \bar{B}^{-1} \cdot \bar{A}]^{-1} [\underline{X}' - \underline{G} - \bar{E} \cdot \bar{B}^{-1} \cdot \underline{F}]$

b) *Plaque semi-infinie*

Les conditions aux limites du modèle se mettent sous la forme:

$$(V.1.2.65) \quad \text{en } y=0 \quad \begin{cases} \bar{N}^i(x,0) \cdot \bar{n} = 0 \\ \bar{Q}^i(x,0) \cdot \bar{n} = 0 \\ \bar{M}^i(x,0) \cdot \bar{n} = 0 \\ \bar{\tau}^{i,i+1}(x,0) \cdot \bar{n} = 0 \quad i=1, n-1 \end{cases} \quad \forall i=1, n$$

$$(V.1.2.66) \quad \text{lorsque } y \rightarrow \infty \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \begin{cases} v(x,y) = 0 \\ \tau(x,y) = 0 \\ \varphi^1(x,y) = 0 \\ \varphi^2(x,y) = 0 \\ Q^1(x,y) = 0 \\ Q^2(x,y) = 0 \end{cases}$$

Ce qui en fonction des champs inconnus  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  s'écrit:

$$(V.1.2.67) \quad \boxed{\begin{array}{l} \lim_{u \rightarrow \infty} \underline{X}(u) = 0 \\ X_2(0) = 0 \\ X_5(0) = 0 \\ X_6(0) = 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} Y_1(0) = 0 \\ Y_2(0) = 0 \\ Y_3(0) = 0 \end{array}}$$

### V.1.3 Utilisation du modèle multiparticulaire M4\_5n

Les champs inconnus principaux sont:

- Les déplacements généralisés:

$$(V.1.3.1) \quad \begin{aligned} \tilde{U}^i(x,y) &= \begin{cases} u^i(x,y) = \mathcal{E}x \\ v^i(x,y) = v^i(y) \end{cases} \\ U_3^i(x,y) &= w^i(y) \quad i=1,4 \\ \tilde{\Phi}^i(x,y) &= \begin{cases} \Phi_x^i(x,y) = 0 \\ \Phi_y^i(x,y) = \varphi^i(y) \end{cases} \end{aligned}$$

Dans le cas de la plaque bornée, la symétrie du problème par rapport au plan  $y=0$  nous impose:

$$(V.1.3.2) \quad \begin{cases} v^i(y) \text{ et } \varphi^i(y) \text{ sont impaires} \\ w^i(y) \text{ est paire} \end{cases}$$

La symétrie par rapport au plan  $z=0$  donne:

$$(V.1.3.3) \quad \begin{aligned} v^3(y) &= v^2(y) & v^4(y) &= v^1(y) \\ \varphi^3(y) &= -\varphi^2(y) & \varphi^4(y) &= -\varphi^1(y) \\ w^3(y) &= -w^2(y) & w^4(y) &= -w^1(y) \end{aligned}$$

En écrivant les équations du problème, on constate que  $v^1$  et  $v^2$  n'interviennent que sous la forme combinée  $v(y) = v^2(y) - v^1(y)$ . Nous avons donc cinq champs cinématiques principaux fonction de  $y$ :

$$\boxed{v(y), \varphi^1(y), \varphi^2(y), w^1(y) \text{ et } w^2(y)}$$

Les déformations généralisées s'écrivent alors:

$$(V.1.3.4) \quad \begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^i(x,y) &= \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & v^i(y) \end{pmatrix} \\ \tilde{\chi}^i(x,y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi^i(y) \end{pmatrix} \\ \tilde{d}\Phi^i(x,y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^i(y) + w^i(y) \end{pmatrix} \\ D^{i,i+1}(x,y) &= \left( v^{i+1}(y) - v^i(y) - \frac{0}{2}(\varphi^i(y) + \varphi^{i+1}(y)) \right) \\ D_3^{i,i+1}(x,y) &= w^{i+1}(y) - w^i(y) \end{aligned}$$

- Les efforts intérieurs généralisés:

$$\begin{aligned}
 (V.1.3.5) \quad & N_{\alpha\beta}^i(x,y) = N_{\alpha\beta}^i(y) && (\alpha,\beta) \in \{1,2\}^2 \quad i \in (1,4) \\
 & M_{\alpha\beta}^i(x,y) = M_{\alpha\beta}^i(y) \\
 & Q_{\alpha}^i(x,y) = Q_{\alpha}^i(y) \\
 & \tau_{\alpha}^{i,i+1}(x,y) = \tau_{\alpha}^{i,i+1}(y) && \alpha \in \{1,2\} \quad i \in (1,3) \\
 & v^{i,i+1}(x,y) = v^{i,i+1}(y)
 \end{aligned}$$

La prise en compte des symétries par rapport au plan  $z=0$  conduit à:

$$\begin{aligned}
 (V.1.3.6) \quad & N_{\alpha\beta}^1(y) = N_{\alpha\beta}^4(y) \\
 & N_{\alpha\beta}^2(y) = N_{\alpha\beta}^3(y) \\
 & M_{\alpha\beta}^1(y) = -M_{\alpha\beta}^4(y) \quad \text{et} \quad \tilde{\tau}^{2,3}(y) = 0 \\
 & M_{\alpha\beta}^2(y) = -M_{\alpha\beta}^3(y) \quad \tilde{\tau}^{3,4}(y) = -\tilde{\tau}^{1,2}(y) \\
 & Q_{\alpha}^1(y) = -Q_{\alpha}^4(y) \quad v^{3,4}(y) = v^{1,2}(y) \\
 & Q_{\alpha}^2(y) = -Q_{\alpha}^3(y)
 \end{aligned}$$

Dans le cas de la plaque bornée, il n'est pas utile de considérer les symétries par rapport au plan  $y=0$ . Les résultats de parité des champs d'efforts intérieurs étant donnés par le comportement en fonction de la parité des déplacements généralisées.

Introduisons dès maintenant quelques conséquences simples et évidentes des équations de comportement ou d'équilibre.

Le comportement implique que les champs suivants sont nuls:

$$(V.1.3.7) \quad N_{12}^i = M_{12}^i = Q_1^i = \tau_1^{i,i+1} = 0$$

L'équilibre implique que:

$$(V.1.3.8) \quad N_{22}^1(y) = -N_{22}^2(y), \text{ nous notons: } N(y) = N_{22}^1(y)$$

Les premières équations de comportement membranaire sont:

$$(V.1.3.9) \quad \begin{cases} \frac{1}{eE_L} N_{11}^1 - \frac{v_{LT}}{eE_L} N_{22}^1 = \mathcal{E} \\ \frac{1}{eE_T} N_{11}^2 - \frac{v_{TL}}{eE_T} N_{22}^2 = \mathcal{E} \end{cases}$$

Calculs analytiques du  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction

Nous en tirons, tout de suite les expressions de  $N_{11}^1$  et  $N_{11}^2$  qui ne figurent plus dans la liste des inconnues principales:

$$(V.1.3.10) \quad \begin{cases} N_{11}^1 = eE_L \mathcal{E} + v_{LT} N \\ N_{11}^2 = eE_T \mathcal{E} - v_{TL} N \end{cases}$$

De la même manière, les premières équations de comportement de flexion permettent de tirer  $M_{11}^1$  et  $M_{11}^2$  que nous retirons de la liste des champs principaux:

$$(V.1.3.11) \quad \begin{cases} \frac{12}{e^3} \left( \frac{M_{11}^1}{E_L} - \frac{v_{LT}}{E_L} M_{22}^1 \right) = 0 \\ \frac{12}{e^3} \left( \frac{M_{11}^2}{E_T} - \frac{v_{TL}}{E_T} M_{22}^2 \right) = 0 \end{cases}$$

Nous notons:

$$(V.1.3.12) \quad M^1(y) = M_{22}^1(y) \quad \text{et} \quad M^2(y) = M_{22}^2(y)$$

Le système (V.1.3.11) précédent devient alors:

$$(V.1.3.13) \quad \begin{cases} M_{11}^1 = v_{LT} M^1 \\ M_{11}^2 = v_{TL} M^2 \end{cases}$$

De plus, nous notons:

$$(V.1.3.14) \quad \begin{cases} Q^1(y) = Q_2^1(y) \\ Q^2(y) = Q_2^2(y) \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau = \tau_2^{1,2}$$

Nos principales inconnues en efforts généralisés sont donc au nombre de huit:

$$\boxed{N, M^1, M^2, Q^1, Q^2, \tau, v^{1,2} \text{ et } v^{2,3}}$$

En ajoutant les cinq champs cinématiques principaux, nous avons donc un total de treize champs principaux en y inconnus à déterminer.

- L'équilibre:

Les équations d'équilibre s'écrivent simplement en fonction des champs inconnus principaux.

$$\left( v^2(y) - v^1(y) - \frac{0}{2}(\varphi^1(y) + \varphi^2(y)) \right) = -\frac{1}{10} \tilde{S}_Q^1 \begin{pmatrix} 0 \\ Q^1 \end{pmatrix} - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^2 \begin{pmatrix} 0 \\ Q^2 \end{pmatrix} + \frac{2}{15} e \left( \tilde{S}_Q^1 + \tilde{S}_Q^2 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix}$$

et

$$(V.1.3.28) \quad \begin{cases} w^2(y) - w^1(y) = \frac{13}{35} e (S_v^1 + S_v^2) v^{1,2} + \frac{9}{70} e S_v^2 v^{2,3} \\ -2w^2(y) = \frac{9}{70} e S_v^1 v^{1,2} + \frac{13}{35} e (S_v^2 + S_v^3) v^{2,3} + \frac{9}{70} e S_v^3 v^{3,4} \end{cases}$$

avec

$$(V.1.3.29) \quad S_v^1 = S_v^2 = S_v^3 = \frac{1}{E_N}$$

On en tire les trois équations algébriques suivantes:

$$(V.1.3.30) \quad \tau = \frac{15}{2e} \left( \frac{G_{LN} G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}} \right) \left( v - \frac{e}{2} (\varphi^1 + \varphi^2) + \frac{Q^1}{10 G_{TN}} + \frac{Q^2}{10 G_{LN}} \right)$$

$$(V.1.3.31) \quad v^{1,2} = \frac{70 E_N}{e} \left( \frac{35 w^2 - 26 w^1}{1271} \right)$$

$$(V.1.3.32) \quad v^{2,3} = \frac{70 E_N}{e} \left( \frac{-61 w^2 + 9 w^1}{1271} \right)$$

Nous avons ainsi pour ces treize champs principaux, dix équations différentielles et trois équations algébriques. Les équations algébriques permettent d'éliminer les champs  $\tau$ ,  $v^{1,2}$  et  $v^{2,3}$  des champs inconnus principaux.

Nous posons:

$$(V.1.3.33) \quad \underline{X}(u) = \left( \frac{v}{e}, \varphi_1, \varphi_2, \frac{Q^1}{e E_N}, \frac{Q^2}{e E_N} \right) (bu)$$

$$(V.1.3.34) \quad \underline{Y}(u) = \left( \frac{N}{e E_N}, \frac{M^1}{e^2 E_N}, \frac{M^2}{e^2 E_N}, \frac{w_1}{e}, \frac{w_2}{e} \right) (bu)$$

où  $b$  est la demie largeur de la plaque dans le cas de la plaque bornée et est un petit multiple de  $4e$  arbitraire dans le cas de la plaque infinie.

Les équations différentielles s'écrivent:

$$(V.1.3.35) \quad \boxed{\underline{X}' = \overline{\overline{A}} \cdot \underline{Y} + \underline{F}}$$

$$(V.1.3.36) \quad \boxed{\underline{Y}' = \overline{\overline{B}} \cdot \underline{X}}$$

et le système se condense en:

$$(V.1.3.37) \quad \boxed{\underline{X}'' = (\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}}) \cdot \underline{X}}$$

où les tenseurs  $\overline{\overline{A}}$ ,  $\overline{\overline{B}}$  et  $\overline{\overline{F}}$  sont donnés ci-dessous en posant

$$\begin{cases} a = \frac{15b}{2e} \frac{G_{LN}G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}} \frac{1}{E_N} \\ c = (1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) \frac{b}{e} \frac{E_N}{E_T} \end{cases}$$

$$(V.1.3.38) \quad \overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} -c \frac{E_L + E_T}{E_L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1820}{1271} \frac{b}{e} & -\frac{2450}{1271} \frac{b}{e} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1271}{6720} \frac{e}{b} & \frac{1271}{6720} \frac{e}{b} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1271}{1271} \frac{e}{b} & \frac{1271}{1271} \frac{e}{b} \end{pmatrix}$$

$$(V.1.3.39) \quad \overline{\overline{B}} = \begin{pmatrix} -a & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & -\frac{aE_N}{10G_{TN}} & -\frac{aE_N}{10G_{LN}} \\ -\frac{a}{2} & \frac{a}{4} & \frac{a}{4} & \frac{b}{e} \frac{aE_N}{20G_{TN}} & -\frac{aE_N}{20G_{LN}} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{4} & \frac{a}{4} & -\frac{aE_N}{20G_{TN}} & \frac{b}{e} \frac{aE_N}{20G_{LN}} \\ -\frac{aE_N}{10G_{TN}} & -\frac{b}{e} + \frac{aE_N}{20G_{TN}} & \frac{aE_N}{20G_{TN}} & \frac{6b}{5e} \frac{E_N}{G_{TN}} - \frac{a}{100} \frac{E_N^2}{G_{TN}^2} & -\frac{a}{100} \frac{E_N^2}{G_{TN}G_{LN}} \\ -\frac{aE_N}{10G_{LN}} & \frac{aE_N}{20G_{LN}} & -\frac{b}{e} + \frac{aE_N}{20G_{LN}} & -\frac{a}{100} \frac{E_N^2}{G_{TN}G_{LN}} & \frac{6b}{5e} \frac{E_N}{G_{LN}} - \frac{a}{100} \frac{E_N^2}{G_{LN}^2} \end{pmatrix}$$

$$(V.1.3.40) \quad \underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{b}{e} \mathcal{E}(v_{LT} - v_{TL}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il reste à écrire les conditions aux limites. Distinguons le cas de la plaque bornée et de la plaque semi-infinie.

*a) Cas de la plaque bornée*

Les conditions aux limites s'écrivent:

$$(V.1.3.41) \quad \begin{cases} \overset{\approx i}{N}(x, b) \cdot \bar{n} = 0 \\ \tilde{Q}^i(x, b) \cdot \bar{n} = 0 \quad \forall i = 1, n \\ \overset{\approx i}{M}(x, b) \cdot \bar{n} = 0 \end{cases} ,$$

avec les conditions de parité (V.1.3.3) en fonctions des inconnues du problème, on déduit alors:

$$(V.1.3.42) \quad \begin{cases} v(0) = 0 & N(b) = 0 \\ \varphi^1(0) = 0 & M^1(b) = 0 \\ \varphi^2(0) = 0 & \text{et } M^2(b) = 0 \\ Q^1(0) = 0 & Q^1(b) = 0 \\ Q^2(0) = 0 & Q^2(b) = 0 \end{cases}$$

Ce qui en fonction des champs inconnus  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  s'écrit:

$$(V.1.3.43) \quad \boxed{\begin{array}{l|l} \underline{X}(0) = 0 & Y_1(1) = 0 \\ X_4(1) = 0 & \text{et } Y_2(1) = 0 \\ X_5(1) = 0 & Y_3(1) = 0 \end{array}}$$

avec  $\underline{Y} = \bar{\bar{A}}^{-1} [\underline{X}' - \underline{F}]$

b) Cas de la plaque semi-infinie

Les conditions aux limites s'écrivent:

$$(V.1.3.44) \quad \text{en } y=0 \quad \begin{cases} \tilde{N}^i(x,0) \cdot \tilde{n} = 0 \\ \tilde{Q}^i(x,0) \cdot \tilde{n} = 0 \quad \forall i = 1, n \\ \tilde{M}^i(x,0) \cdot \tilde{n} = 0 \end{cases}$$

$$(V.1.3.45) \quad y \rightarrow \infty \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \begin{cases} v(x,y) = 0 \\ \varphi^1(x,y) = 0 \\ \varphi^2(x,y) = 0 \\ Q^1(x,y) = 0 \\ Q^2(x,y) = 0 \end{cases}$$

Ce qui en fonction des champs inconnus  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  s'écrit:

$$(V.1.3.46) \quad \boxed{\begin{array}{l|l} \lim_{u \rightarrow \infty} \underline{X}(u) = 0 & Y_1(0) = 0 \\ X_4(0) = 0 & \text{et } Y_2(0) = 0 \\ X_5(0) = 0 & Y_3(0) = 0 \end{array}}$$

#### V.1.4 Utilisation du modèle multiparticulaire M4\_3n membrane

Les champs inconnus principaux sont:

-Les déplacements généralisés:

$$(V.1.4.1) \quad \begin{aligned} \tilde{U}^i(x,y) &= \begin{cases} u^i(x,y) = \mathcal{E}x \\ v^i(x,y) = v^i(y) \end{cases} & i=1,4 \\ U_3^i(x,y) &= w^i(y) \end{aligned}$$

Dans le cas de la plaque bornée, la symétrie du problème par rapport au plan  $y=0$  nous impose:

$$(V.1.4.2) \quad \begin{cases} v^i(y) \text{ est impaire} \\ w^i(y) \text{ est paire} \end{cases}$$

La symétrie par rapport au plan  $z=0$  donne:



$$(V.1.4.3) \quad \begin{aligned} v^3(y) &= v^2(y) & v^4(y) &= v^1(y) \\ w^3(y) &= -w^2(y) & w^4(y) &= -w^1(y) \end{aligned}$$

En écrivant les équations complètes du problème, on constate que  $v^1$  et  $v^2$  n'interviennent que sous forme combinée :  $v(y) = v^2(y) - v^1(y)$ . Nous avons donc trois champs cinématiques principaux fonction de  $y$ :

$$\boxed{v(y), w^1(y) \text{ et } w^2(y)}$$

Les déformations généralisées s'exprime alors sous la forme:

$$(V.1.4.4) \quad \begin{cases} \tilde{\varepsilon}^i(x, y) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & v^i(y) \end{pmatrix} \\ D^{i, i+1}(x, y) = \left( v^{i+1}(y) - v^i(y) + \frac{e}{2} (w^{i+1}(y) + w^i(y)) \right) \\ D_3^{i, i+1}(x, y) = w^{i+1}(y) - w^i(y) \end{cases}$$

- Les efforts intérieurs généralisés:

$$(V.1.4.5) \quad \begin{aligned} N_{\alpha\beta}^i(x, y) &= N_{\alpha\beta}^i(y) & (\alpha, \beta) &\in \{1, 2\}^2 \quad i \in (1, 4) \\ \tau_\alpha^{i, i+1}(x, y) &= \tau_\alpha^{i, i+1}(y) & \alpha &\in \{1, 2\} \quad i \in (1, 3) \\ v^{i, i+1}(x, y) &= v^{i, i+1}(y) \end{aligned}$$

De même que précédemment, la prise en compte de la symétrie par rapport au plan  $z=0$  conduit à:

$$(V.1.4.6) \quad \begin{aligned} N_{\alpha\beta}^1(y) &= N_{\alpha\beta}^4(y) & \tilde{\tau}^{2,3}(y) &= 0 \\ N_{\alpha\beta}^2(y) &= N_{\alpha\beta}^3(y) & \tilde{\tau}^{3,4}(y) &= -\tilde{\tau}^{1,2}(y) \\ & & v^{3,4}(y) &= v^{1,2}(y) \end{aligned} \quad \text{et}$$

*Dans le cas de la plaque bornée, il est inutile de considérer les symétries par rapport au plan  $y=0$ . Elles sont impliquées ultérieurement pour le comportement.*

Introduisons dès maintenant quelques conséquences simples et évidentes des équations de comportement ou d'équilibre.

Le comportement implique que les champs suivants sont nuls:

$$(V.1.4.7) \quad N_{12}^i = \tau_1^{i,i+1} = 0$$

L'équilibre implique que:

$$(V.1.4.8) \quad N_{22}^1(y) = -N_{22}^2(y), \text{ nous notons: } N(y) = N_{22}^1(y)$$

Les premières équations de comportement membranaires sont:

$$(V.1.4.9) \quad \begin{cases} \frac{1}{eE_L} N_{11}^1 - \frac{\nu_{LT}}{eE_L} N_{22}^1 = \mathcal{E} \\ \frac{1}{eE_T} N_{11}^2 - \frac{\nu_{TL}}{eE_T} N_{22}^2 = \mathcal{E} \end{cases}$$

Nous en tirons, tout de suite les expressions de  $N_{11}^1$  et  $N_{11}^2$  qui ne figurent plus dans la liste des inconnues principales:

$$(V.1.4.10) \quad \begin{cases} N_{11}^1 = eE_L \mathcal{E} + \nu_{LT} N \\ N_{11}^2 = eE_T \mathcal{E} - \nu_{TL} N \end{cases}$$

De plus, nous notons:

$$(V.1.4.11) \quad \tau = \tau_2^{1,2}$$

Nos principales inconnues en efforts généralisés sont donc au nombre de quatre:

$$\boxed{N, \tau, \nu^{1,2} \text{ et } \nu^{2,3}}$$

En ajoutant les trois champs cinématiques principaux, nous avons donc un total de sept champs principaux en y inconnus à déterminer.

- L'équilibre:

L'équilibre membranaire des couches 1 et 2 se résume à une seule équation:

$$(V.1.4.12) \quad \boxed{N'(y) + \tau(y) = 0}$$

L'équilibre des efforts d'interface donne:

$$(V.1.4.13) \quad \begin{cases} \frac{e}{2} \tau'(y) + v^{1,2}(y) = 0 \\ \frac{e}{2} \tau'(y) + v^{2,3}(y) - v^{1,2}(y) = 0 \end{cases}$$

Nous préférons réécrire ce système sous la forme d'une équation algébrique et d'une équation différentielle:

$$(V.1.4.14) \quad \boxed{\begin{cases} \tau'(y) = -\frac{2}{e} v^{1,2}(y) \\ v^{2,3}(y) = 2v^{1,2}(y) \end{cases}}$$

- Comportement

Comportement des couches:

le comportement des couches s'écrit:

$$(V.1.4.15) \quad \begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ v^i(y) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\tilde{S}^i}{e} \begin{pmatrix} N_{11}^i \\ N_{22}^i \\ N_{12}^i \end{pmatrix}$$

où

$$(V.1.4.16) \quad \tilde{S}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 \\ -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{S}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{pmatrix}$$

Nous avons déjà largement utilisé le comportement pour diminuer le nombre de champs principaux. Nous en tirons encore:

$$(V.1.4.17) \quad \begin{cases} v^1(y) = \frac{1}{eE_T} (1 - \nu_{TL}\nu_{LT}) N(y) - \mathcal{E}\nu_{LT} \\ v^2(y) = -\frac{1}{eE_L} (1 - \nu_{TL}\nu_{LT}) N(y) - \mathcal{E}\nu_{TL} \end{cases}$$

d'où par différence:

$$(V.1.4.18) \quad \boxed{v'(y) = -N(y) \frac{(1 - \nu_{TL}\nu_{LT})}{e} \left( \frac{E_L + E_T}{E_L E_T} \right) + \mathcal{E}(\nu_{LT} - \nu_{TL})}$$

Comportement d'interface:

$$(V.1.4.19) \quad \left( v(y) + \frac{e}{2} \left( w^1{}'(y) + w^2{}'(y) \right) \right) = \frac{e}{3} \left( \tilde{S}_Q^1 + \tilde{S}_Q^2 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix}$$

$$(V.1.4.20) \quad \begin{cases} w^2(y) - w^1(y) = \frac{e}{3} (S_v^1 + S_v^2) v^{1,2} + \frac{e}{6} S_v^2 v^{2,3} \\ -2w^2(y) = \frac{e}{6} S_v^1 v^{1,2} + \frac{e}{3} (S_v^2 + S_v^3) v^{2,3} + \frac{e}{6} S_v^3 v^{3,4} \end{cases}$$

avec

$$(V.1.4.21) \quad \tilde{S}_Q^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ G_{NL} & 1 \\ 0 & G_{TN} \end{pmatrix} ; \quad \tilde{S}_Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ G_{TN} & 1 \\ 0 & G_{NL} \end{pmatrix} \text{ et } S_v^1 = S_v^2 = S_v^3 = \frac{1}{E_N}$$

Avec le comportement d'interface (V.1.4.13) et les conditions de symétrie (V.1.4.6) nous en déduisons les deux équations algébriques et l'équation différentielle suivante

$$(V.1.4.21) \quad \boxed{\begin{cases} v^{1,2} = -\frac{6E_N}{5e} w^2 \\ w^1 = \frac{11}{5} w^2 \\ w^2{}' = \frac{5}{16} \left( -\frac{2}{e} v + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{G_{TN}} + \frac{1}{G_{LN}} \right) \tau \right) \end{cases}}$$

Nous avons ainsi pour ces sept champs principaux quatre équations différentielles et trois équations algébriques.

Les équations algébriques permettent d'éliminer les champs  $v^{1,2}$ ,  $v^{2,3}$  et  $w^1$  des champs inconnus principaux.

Nous posons:

$$(V.1.4.22) \quad \underline{X}(u) = \left( \frac{v}{e}, \frac{\tau}{E_N} \right) (bu)$$

$$(V.1.4.23) \quad \underline{Y}(u) = \left( \frac{N}{eE_N}, \frac{w_2}{e} \right) (bu)$$

Calculs analytiques du  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction

où  $b$  est la demie largeur de la plaque dans le cas de la plaque bornée et un petit multiple de  $4e$  arbitraire dans le cas de la plaque infinie.

Les équations différentielles s'écrivent:

$$(V.1.4.24) \quad \boxed{\underline{X}' = \overline{\overline{A}} \cdot \underline{Y} + \underline{F}}$$

$$(V.1.4.25) \quad \boxed{\underline{Y}' = \overline{\overline{B}} \cdot \underline{X}}$$

et le système se condense en:

$$(V.1.4.26) \quad \boxed{\underline{X}'' = (\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}}) \cdot \underline{X}}$$

où les tenseurs  $\overline{\overline{A}}$ ,  $\overline{\overline{B}}$  et  $\underline{F}$  sont donnés ci-dessous:

$$(V.1.4.27) \quad \overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{e}(1 - \nu_{TL}\nu_{LT})E_N \left( \frac{E_L + E_T}{E_L E_T} \right) & 0 \\ 0 & \frac{12b}{5e} \end{pmatrix}$$

$$(V.1.4.28) \quad \overline{\overline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{e} \\ \left( -2\frac{b}{e} \right) \frac{5}{16} & \left( \frac{2b}{3e} E_N \left( \frac{1}{G_{TN}} + \frac{1}{G_{LN}} \right) \right) \frac{5}{16} \end{pmatrix}$$

$$(V.1.4.29) \quad \underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{b}{e} \mathcal{E}(\nu_{LT} - \nu_{TL}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il reste à écrire les conditions aux limites. Distinguons le cas de la plaque bornée et celui de la plaque semi-infinie.

*a) Cas de la plaque bornée*

Les conditions aux limites du modèle s'écrivent:

$$(V.1.4.30) \quad \begin{cases} \tilde{N}^i(x, b) \cdot \tilde{n} = 0 \\ \frac{e}{2} \tilde{\tau}^{i,i+1}(x, b) \cdot \tilde{n} = 0 \end{cases} \quad \forall i = 1, n$$

et les conditions de parité donnent alors les conditions suivantes:

$$(V.1.4.31) \quad \boxed{\begin{matrix} \tau(0) = 0 & \tau(b) = 0 \\ v(0) = 0 & N(b) = 0 \end{matrix}}$$

Ce qui en fonction des champs inconnus  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  s'écrit:

$$(V.1.4.32) \quad \begin{matrix} \underline{X}(0) = 0 \\ X_2(1) = 0 \end{matrix} \quad Y_1(1) = 0$$

a) Cas de la plaque semi-infinie

Les conditions aux limites du modèle s'écrivent:

$$(V.1.4.33) \quad \text{en } y = 0 \quad \begin{cases} \tilde{N}^i(x, 0) \cdot \tilde{n} = 0 \\ \frac{e}{2} \tilde{\tau}^{i,i+1}(x, 0) \cdot \tilde{n} = 0 \end{cases} \quad \forall i = 1, n$$

$$(V.1.4.34) \quad y \rightarrow \infty: \lim_{y \rightarrow \infty} \begin{cases} v(x, y) = 0 \\ \tau(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ce qui en fonction des champs inconnus  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  s'écrit:

$$(V.1.4.35) \quad \begin{matrix} \lim_{u \rightarrow \infty} \underline{X}(u) = 0 \\ X_2(0) = 0 \end{matrix} \quad Y_1(0) = 0$$

Dans ce modèle, seules deux distances caractéristiques des effets de bord interviennent.

#### V.1.5 Utilisation du modèle multiparticulaire M4<sub>(2n+1)</sub> membrane

Les champs inconnus principaux sont:

- Les déplacements généralisés:

$$(V.1.5.1) \quad \begin{aligned} \bar{U}^i(x,y) &= \begin{cases} u^i(x,y) = \epsilon x \\ v^i(x,y) = v^i(y) \quad i=1,4 \end{cases} \\ U_3^i(x,y) &= w(y) \end{aligned}$$

dans le cas de la plaque bornée, la symétrie par rapport au plan  $y=0$  implique:

$$(V.1.5.2) \quad \begin{cases} v^i(y) \text{ est impaire} \\ w(y) \text{ est paire} \end{cases}$$

La symétrie par rapport au plan  $z=0$  donne:

$$(V.1.5.3) \quad \begin{aligned} v^3(y) &= v^2(y) \\ v^4(y) &= v^1(y) \\ w &= 0 \end{aligned}$$

En écrivant les équations complètes du problème, on constate que  $v^1$  et  $v^2$  n'interviennent que sous forme combinée :  $v(y) = v^2(y) - v^1(y)$ . Nous avons donc un seul champ cinématique principal fonction de  $y$ :

$$\boxed{v(y)}$$

Nous déduisons alors les déformations généralisées du modèle M4\_(2+1) membrane comme suit:

$$(V.1.5.4) \quad \begin{aligned} \bar{\tilde{\epsilon}}^i(x,y) &= \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & v'^i(y) \end{pmatrix} \\ \bar{D}^{i,i+1}(x,y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ v^{i+1}(y) - v^i(y) + \epsilon w'(y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Les efforts intérieurs généralisés:

$$(V.1.5.5) \quad \begin{aligned} N_{\alpha\beta}^i(x,y) &= N_{\alpha\beta}^i(y) & (\alpha,\beta) \in \{1,2\}^2 \quad i \in (1,4) \\ \tau_{\alpha}^{i,i+1}(x,y) &= \tau_{\alpha}^{i,i+1}(y) & \alpha \in \{1,2\} \quad i \in (1,3) \end{aligned}$$

On déduit de la symétrie par rapport au plan  $z=0$ :

$$(V.1.5.6) \quad \begin{cases} \tilde{\tau}^{2,3} = 0 \\ \tilde{\tau}^{3,4} = -\tilde{\tau}^{1,2} \end{cases}$$

Dans le cas de la plaque bornée, la symétrie par rapport au plan  $y=0$  est prise en compte par le comportement.

De même que pour les calculs de la section précédente, nous introduisons dès maintenant quelques conséquences simples et évidentes des équations de comportement ou d'équilibre.

Le comportement implique que les champs suivants sont nuls:

$$(V.1.5.7) \quad N_{12}^i = \tau_1^{i,i+1} = 0$$

L'équilibre implique que:

$$(V.1.5.8) \quad N_{22}^1(y) = -N_{22}^2(y), \text{ nous notons: } N(y) = N_{22}^1(y)$$

Les premières équations de comportement membranaires sont:

$$(V.1.5.9) \quad \begin{cases} \frac{1}{eE_L} N_{11}^1 - \frac{\nu_{LT}}{eE_L} N_{22}^1 = \mathcal{E} \\ \frac{1}{eE_T} N_{11}^2 - \frac{\nu_{TL}}{eE_T} N_{22}^2 = \mathcal{E} \end{cases}$$

Nous en tirons, tout de suite les expressions de  $N_{11}^1$  et  $N_{11}^2$  qui ne figurent plus dans la liste des inconnues principales:

$$(V.1.5.10) \quad \begin{cases} N_{11}^1 = eE_L \mathcal{E} + \nu_{LT} N \\ N_{11}^2 = eE_T \mathcal{E} - \nu_{TL} N \end{cases}$$

De plus, nous notons:

$$(V.1.5.11) \quad \tau = \tau_2^{1,2}$$

Nos principales inconnues en efforts généralisés sont donc au nombre de deux:

$$\boxed{N \text{ et } \tau}$$



En ajoutant le champ cinématique principal, nous avons donc un total de trois champs principaux à déterminer.

- L'équilibre:

L'équilibre membranaire des couches 1 et 2 se résume à une seule équation:

$$(V.1.5.12) \quad \boxed{N'(y) + \tau(y) = 0}$$

L'équation (III.6.4) est ici automatiquement vérifiée à cause de la symétrie par rapport au plan  $z=0$ .

- Comportement

Comportement des couches:

La loi de comportement membranaire s'écrit pour chaque couche  $i$ :

$$(V.1.5.13) \quad \begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ v^i(y) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\tilde{S}^i}{e} \begin{pmatrix} N_{11}^i \\ N_{22}^i \\ N_{12}^i \end{pmatrix}$$

où

$$(V.1.5.14) \quad \tilde{S}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 \\ -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{S}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{pmatrix}$$

Nous avons déjà largement utilisé le comportement pour diminuer le nombre de champs principaux. Nous en tirons encore:

$$(V.1.5.15) \quad \begin{cases} v^1(y) = \frac{1}{eE_T}(1 - \nu_{TL}\nu_{LT})N(y) - \mathcal{E}\nu_{LT} \\ v^2(y) = -\frac{1}{eE_L}(1 - \nu_{TL}\nu_{LT})N(y) - \mathcal{E}\nu_{TL} \end{cases}$$

d'où par différence:

$$(V.1.5.16) \quad \boxed{v'(y) = -N(y) \frac{(1 - \nu_{TL}\nu_{LT})}{e} \left( \frac{E_L + E_T}{E_L E_T} \right) + \mathcal{E}(\nu_{LT} - \nu_{TL})}$$

Comportement d'interface:

$$(V.1.5.17) \quad \tilde{D}^{1,2}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ v(y) \end{pmatrix} = \frac{e}{3} \left( \tilde{S}_Q^1 + \tilde{S}_Q^2 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix}$$

avec

$$(V.1.5.18) \quad \tilde{S}_Q^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{G_{NL}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_{TN}} \end{pmatrix} ; \quad \tilde{S}_Q^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{G_{TN}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_{NL}} \end{pmatrix}$$

Le comportement d'interface se réduit à l'équation algébrique suivante qui permet l'élimination de  $\tau$  des champs inconnus principaux:

$$(V.1.5.19) \quad \tau = \frac{3}{e} \left( \frac{G_{LN} G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}} \right) v$$

Il reste à résoudre un système de deux équations différentielles:

$$(V.1.5.20) \quad \begin{cases} N' = -\frac{3}{e} \left( \frac{G_{LN} G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}} \right) v \\ v' = \left( \frac{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}}{e} \right) \left( \frac{E_L + E_T}{E_L E_T} \right) N + (\nu_{LT} - \nu_{TL}) \mathcal{E} \end{cases}$$

Après condensation ce système se réécrit:

$$(V.1.5.21) \quad v'' = 3 \left( \frac{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}}{e^2} \right) \left( \frac{G_{LN} G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}} \right) \left( \frac{E_L + E_T}{E_L E_T} \right) v$$

Il reste à exprimer les conditions aux limites. Distinguons le cas de la plaque bornée et de la plaque semi-infinie.

*a) Cas de la plaque bornée*

Les conditions aux limites s'expriment dans les équations ci-dessous:

$$(V.1.5.22) \quad \begin{cases} \tilde{N}^i(x,b) \cdot \tilde{n} = \tilde{0} \quad \forall i = 1,4 \\ \sum_{i=1}^3 \tilde{\tau}^{i,i+1}(x,b) \cdot \tilde{n} = \tilde{0} \end{cases}$$

(V.1.5.22.c et d) sont automatiquement vérifiées à cause de la symétrie par rapport au plan  $z=0$ .

Soit, en fonction de l'inconnue  $v$ , avec les conditions de parité exprimées dans les équations (V.1.5.3):

$$(V.1.5.23) \quad \boxed{v'(b) = \mathcal{E}(v_{LT} - v_{TL}) \quad v(0) = 0}$$

L'équation (V.1.5.21) s'intègre facilement en posant:

$$(V.1.5.24) \quad \boxed{\lambda^2 = 3 \left( \frac{1 - v_{LT}v_{TL}}{e^2} \right) \left( \frac{G_{TN}G_{LN}}{G_{LN} + G_{TN}} \right) \left( \frac{E_L + E_T}{E_L E_T} \right)}$$

On en déduit, d'après l'application de condition de parité et de condition aux limites, la fonction inconnue  $v(y)$ :

$$(V.1.5.25) \quad \boxed{v(y) = \mathcal{E}(v_{LT} - v_{TL}) \frac{\text{sh}\lambda y}{\lambda \text{ch}\lambda b}}$$

Soit encore

$$(V.1.5.26) \quad \tau(y) = \frac{3}{e} \mathcal{E}(v_{LT} - v_{TL}) \frac{G_{LN}G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}} \frac{\text{sh}\lambda y}{\lambda \text{ch}\lambda b}$$

Notons que dans ce modèle une seule distance caractéristique de l'effet de bord apparaît  $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ . Lorsque les modules d'Young  $E_L$  et  $E_T$  sont très différents et les modules de cisaillement sont proches (notés  $G$ ) la distance caractéristique est proche de  $e\sqrt{\frac{2E_T}{3G}}$ , ce qui pour les matériaux composites courant reste de l'ordre de grandeur de  $e$ .

*b) Cas de la plaque semi-infinie*

Les conditions aux limites s'expriment dans les équations ci-dessous:

$$(V.1.5.27) \quad \text{en } y = 0 \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^4 \tilde{N}^i(x, 0) \cdot \tilde{n} = 0 \quad \forall i = 1, 4 \\ \sum_{i=1}^3 \tilde{\tau}^{i,i+1}(x, 0) \cdot \tilde{n} = 0 \end{cases}$$

$$(V.1.5.28) \quad y \rightarrow \infty: \lim_{y \rightarrow \infty} v(x, y) = 0$$

Calculs analytiques du  $[0^\circ, 90^\circ]_s$  en traction

Ce qui, en fonction de l'inconnue  $v$ , s'écrit:

$$(V.1.5.29) \quad \boxed{v'(0) = \mathcal{E}(v_{LT} - v_{TL}) \quad ; \quad \lim_{y \rightarrow 0} v(y) = 0}$$

On en déduit:

$$(V.1.5.30) \quad \boxed{v(y) = \mathcal{E}(v_{LT} - v_{TL}) \frac{e^{(-\lambda y)}}{\lambda}}$$

Soit encore

$$(V.1.5.31) \quad \tau(y) = \frac{3}{e} \mathcal{E}(v_{LT} - v_{TL}) \frac{G_{LN} G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}} \frac{e^{(-\lambda y)}}{\lambda}$$

Ce qui donne un cisaillement maximal de

$$(V.1.5.32) \quad \tau^{\max} = \frac{3}{\lambda e} \mathcal{E}(v_{LT} - v_{TL}) \frac{G_{LN} G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}}$$



*Calculs analytiques des  $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$  en traction*

**ANNEXE VII**

***DETAILS DES CALCULS ANALYTIQUES DES  $[\theta_1, \dots, \theta_m]$   
EN TRACTION PAR LES MODÈLES  
M4\_5n ET M4\_(2n+1)M***



**VI.1 CALCUL ANALYTIQUE DU MULTICOUCHE  $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$  EN TRACTION PAR LE MODELE M4\_5N**

*VI.1.1 Equations générales du multicouche  $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$  en traction*

Considérons une éprouvette de largeur  $2b$  et de longueur  $2l$  constituée d'un empilement de  $n$  ( $n=2m$ ) couches  $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$ , occupant le domaine  $\Omega = [-1, 1] \times [-b, b] \times [-ne, ne]$ . L'éprouvette est soumise à une traction telle qu'en  $x=-1$  (respectivement  $x=1$ ) le déplacement moyen suivant  $x$  est  $-d$  (respectivement  $d$ ), les autres bords sont libres. Dans la partie centrale de l'éprouvette, loin des bords  $x=-1$  et  $x=1$ , la composante suivant  $x$  du champ de déplacement peut s'écrire sous la forme (VI.1.1.1). Les autres champs ne sont fonctions que de  $y$ .

Les champs inconnus principaux sont:

- Les déplacements généralisés:

$$(VI.1.1.1) \quad \begin{aligned} \tilde{U}^i(x, y) &= \begin{cases} u^i(x, y) = \frac{\Delta}{L} x + u^i(y) \\ v^i(x, y) = v^i(y) \end{cases} \\ U_3^i(x, y) &= w^i(y) \quad i=1, 2m \\ \tilde{\Phi}^i(x, y) &= \begin{cases} \Phi_x^i(x, y) = \varphi_x^i(y) \\ \Phi_y^i(x, y) = \varphi_y^i(y) \end{cases} \end{aligned}$$

La symétrie du problème par rapport au plan  $y=0$  nous impose:

$$(VI.1.1.2) \quad \begin{cases} u^i(y) \text{ et } \varphi_x^i(y) \text{ sont impaires} \\ v^i(y) \text{ et } \varphi_y^i(y) \text{ sont impaires} \\ w^i(y) \text{ est paire} \end{cases}$$

La symétrie par rapport au plan  $z=0$  donne:



$$(VI.1.1.3) \quad \begin{cases} u^i(y) = u^{2m-i+1}(y) \\ \varphi_x^i(y) = -\varphi_x^{2m-i+1}(y) \\ v^i(y) = v^{2m-i+1}(y) \\ \varphi_y^i(y) = -\varphi_y^{2m-i+1}(y) \\ w^i(y) = -w^{2m-i+1}(y) \end{cases} \quad i=1, 2m$$

Les déformations généralisées s'écrivent alors:

$$(VI.1.1.4) \quad \left. \begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^i(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{L} & \frac{1}{2} u^{i'}(y) \\ \frac{1}{2} u^i(y) & v^{i'}(y) \end{pmatrix} \\ \tilde{\chi}^i(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \varphi_x^{i'}(y) \\ \frac{1}{2} \varphi_x^{i'}(y) & \varphi_y^{i'}(y) \end{pmatrix} \\ d\Phi^i(x, y) &= \begin{pmatrix} \varphi_x^i(y) \\ \varphi_y^i(y) + w^i(y) \end{pmatrix} \\ D^{i,i+1}(x, y) &= \begin{pmatrix} u^{i+1}(y) - u^i(y) - \frac{e}{2} (\varphi_x^i(y) + \varphi_x^{i+1}(y)) \\ v^{i+1}(y) - v^i(y) - \frac{e}{2} (\varphi_y^i(y) + \varphi_y^{i+1}(y)) \end{pmatrix} \\ D_3^{i,i+1}(x, y) &= w^{i+1}(y) - w^i(y) \end{aligned} \right\}$$

- Les efforts intérieurs généralisés:

$$(VI.1.1.5) \quad \begin{aligned} N_{\alpha\beta}^i(x, y) &= N_{\alpha\beta}^i(y) & (\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2 \quad i \in (1, 2m) \\ M_{\alpha\beta}^i(x, y) &= M_{\alpha\beta}^i(y) \\ Q_{\alpha}^i(x, y) &= Q_{\alpha}^i(y) \\ \tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) &= \tau_{\alpha}^{i,i+1}(y) & \alpha \in \{1, 2\} \quad i \in (1, 2m-1) \\ v^{i,i+1}(x, y) &= v^{i,i+1}(y) \end{aligned}$$

La prise en compte des symétries par rapport au plan  $z=0$  conduit à:

Calculs analytiques des  $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$  en traction

$$(VI.1.1.6) \quad \begin{aligned} N_{\alpha\beta}^i(y) &= N_{\alpha\beta}^{2m-i+1}(y) & \bar{\tau}^{m,m+1} &= 0 \\ M_{\alpha\beta}^i(y) &= M_{\alpha\beta}^{2m-i+1}(y) & \text{et} & \bar{\tau}^{i,i+1} = -\bar{\tau}^{2m-i,2m-i+1} \\ Q_\alpha^i(y) &= -Q_\alpha^{2m-i+1}(y) & v^{i,i+1} &= v^{2m-i,2m-i+1} \end{aligned}$$

Nous sommes ainsi conduit à un problème comprenant  $16m-2$  champs en  $y$  inconnus:

$$\boxed{u^i, v^i, w^i, \varphi_x^i, \varphi_y^i, N_{11}^i, N_{12}^i, N_{22}^i, M_{11}^i, M_{12}^i, M_{22}^i, Q_1^i, Q_2^i, v^{i,i+1} \quad i = 1, m}$$

$$\tau_1^{i,i+1} \text{ et } \tau_2^{i,i+1} \quad i = 1, m-1$$

- L'équilibre:

Compte tenu des symétries, on peut se contenter d'étudier l'équilibre des couches 1 à  $m$ . Ceci donne  $5m$  équations différentielles:

$$(VI.1.1.7) \quad \boxed{\begin{aligned} N_{12}^i{}' &= -\tau_1^{i,i+1}(y) + \tau_1^{i-1,i}(y) \\ N_{22}^i{}' &= -\tau_2^{i,i+1}(y) + \tau_2^{i-1,i}(y) \\ Q_2^i{}' &= -v^{i,i+1}(y) + v^{i-1,i}(y) \\ M_{12}^i{}' &= Q_1^i(y) - \frac{e}{2}(\tau_1^{i,i+1}(y) + \tau_1^{i-1,i}(y)) \\ M_{22}^i{}' &= Q_2^i(y) - \frac{e}{2}(\tau_2^{i,i+1}(y) + \tau_2^{i-1,i}(y)) \end{aligned}} \quad \text{couches 1 à } m$$

- Le comportement:

Le comportement des couches donne  $5m$  équations différentielles et  $3m$  équations algébriques:

$$(VI.1.1.8) \quad \boxed{\begin{pmatrix} \frac{\Delta}{L} \\ v^i{}'(y) \\ u^i{}'(y) \end{pmatrix} = \frac{\tilde{S}^i}{e} \begin{pmatrix} N_{11}^i \\ N_{22}^i \\ N_{12}^i \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_y^i{}'(y) \\ \varphi_x^i{}'(y) \end{pmatrix} = \frac{12}{e^3} \tilde{S}^i \begin{pmatrix} M_{11}^i \\ M_{22}^i \\ M_{12}^i \end{pmatrix}} \quad i=1, m$$

$$(VI.1.1.9) \quad \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ w^i{}'(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_x^i \\ -\varphi_y^i \end{pmatrix} + \frac{6}{5e} \tilde{S}_Q^i \begin{pmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \end{pmatrix} - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^i \begin{pmatrix} \tau_1^{i-1,i} + \tau_1^{i,i+1} \\ \tau_2^{i-1,i} + \tau_2^{i,i+1} \end{pmatrix}}$$

où les tenseurs  $\tilde{S}^i$  et  $\tilde{S}_Q^i$  représentent respectivement la souplesse de contrainte plane et la souplesse du cisaillement de la couche  $i$  qui valent, dans le repère d'orthotropie, en notation de

Calculs analytiques des  $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$  en traction

Voigt, les expressions suivantes:

$$(VI.1.1.10) \quad \tilde{S}_{(\varepsilon_L, \varepsilon_T, \varepsilon_N)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 \\ -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{S}_{Q(\varepsilon_L, \varepsilon_T, \varepsilon_N)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{G_{NL}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_{TN}} \end{pmatrix}$$

et, dans le repère structural:

$$(VI.1.1.11) \quad \tilde{S}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}^i = \begin{pmatrix} S_{11}^i & S_{12}^i & S_{16}^i \\ & S_{22}^i & S_{26}^i \\ \text{SYM} & & S_{66}^i \end{pmatrix}$$

$$S_{11}^i = \frac{\cos^4 \theta^i}{E_L} + \frac{\sin^4 \theta^i}{E_T} + \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta^i \cos^2 \theta^i$$

$$S_{22}^i = \frac{\sin^4 \theta^i}{E_L} + \frac{\cos^4 \theta^i}{E_T} + \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta^i \cos^2 \theta^i$$

$$S_{66}^i = \frac{\sin^4 \theta^i + \cos^4 \theta^i}{G_{LT}} + 2 \left( 2 \left( \frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^2 \theta^i \cos^2 \theta^i$$

$$S_{12}^i = -\frac{\nu_{LT}}{E_L} (\sin^4 \theta^i + \cos^4 \theta^i) + \left( \frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^2 \theta^i \cos^2 \theta^i$$

$$S_{16}^i = \left( 2 \left( \frac{1}{E_L} - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin \theta^i \cos^3 \theta^i + \left( 2 \left( -\frac{1}{E_T} - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) + \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^3 \theta^i \cos \theta^i$$

$$S_{26}^i = \left( 2 \left( \frac{1}{E_L} - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^3 \theta^i \cos \theta^i + \left( 2 \left( -\frac{1}{E_T} - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) + \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin \theta^i \cos^3 \theta^i$$

$$(VI.1.1.12) \quad \tilde{S}_{Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}^i = \begin{pmatrix} S_{Q11}^i & S_{Q12}^i \\ S_{Q12}^i & S_{Q22}^i \end{pmatrix} ; \begin{cases} S_{Q11}^i = \frac{1}{G_{NL}} \cos^2 \theta^i + \frac{1}{G_{TN}} \sin^2 \theta^i \\ S_{Q22}^i = \frac{1}{G_{NL}} \sin^2 \theta^i + \frac{1}{G_{TN}} \cos^2 \theta^i \\ S_{Q12}^i = 2 \left( \frac{1}{G_{NL}} - \frac{1}{G_{TN}} \right) \sin \theta^i \cos \theta^i \end{cases}$$

Comportements d'interface:

-En cisaillement le comportement d'interface donne  $2(m-1)$  équations algébriques:

$$(VI.1.1.13) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^{i+1}(y) + u^i(y) + \frac{e}{2}(\phi_x^i(y) + \phi_x^{i+1}(y)) \\ -v^{i+1}(y) + v^i(y) + \frac{e}{2}(\phi_y^i(y) + \phi_y^{i+1}(y)) \end{pmatrix} - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^i \cdot \begin{pmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \end{pmatrix} - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \begin{pmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \end{pmatrix} \\ + \left( \frac{-e^i}{30} \right) \tilde{S}_Q^i \cdot \begin{pmatrix} \tau_1^{i-1,i} \\ \tau_2^{i-1,i} \end{pmatrix} + \frac{2}{15} (e^i \tilde{S}_Q^i + e^{i+1} \tilde{S}_Q^{i+1}) \cdot \begin{pmatrix} \tau_1^{i,i+1} \\ \tau_2^{i,i+1} \end{pmatrix} + \left( \frac{-e^{i+1}}{30} \right) \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \begin{pmatrix} \tau_1^{i+1,i+2} \\ \tau_2^{i+1,i+2} \end{pmatrix}$$

- En arrachement le comportement donne m équations algébriques

$$(VI.1.1.14) \quad 0 = -w^{i+1}(y) + w^i(y) + \frac{9}{70} e^i S_v^i v^{i-1,i} + \frac{13}{35} (e^i S_v^i + e^{i+1} S_v^{i+1}) v^{i,i+1} + \frac{9}{70} e^{i+1} S_v^{i+1} v^{i+1,i+2}$$

avec: 
$$S_v^i = \frac{1}{E_N}$$

Rappelons que 
$$\begin{cases} w^{m+1} = -w^m \\ v^{m+1,m+2} = v^{m-1,m} \\ \tau_\alpha^{m,m+1} = 0 \end{cases}$$

L'équilibre et le comportement fournissent ainsi 10m équations différentielles et 6m-2 équations algébriques.

Les champs  $N_{11}^i$  sont donnés en fonction de  $\frac{\Delta}{L}$  et des efforts  $N_{22}^i (= N^i)$  et  $N_{12}^i (= N_6^i)$  par les m premières équations de comportement membranaire de (VI.1.1.8) de chaque couche, qui sont algébriques.

$$(VI.1.1.15) \quad N_{11}^i = -\frac{S_{12}^i}{S_{11}^i} N^i - \frac{S_{16}^i}{S_{11}^i} N_6^i + \frac{e\Delta}{S_{11}^i L}$$

Les champs  $M_{11}^i$  sont donnés en fonction des moments  $M_{22}^i (= M^i)$  et  $M_{12}^i (= M_6^i)$  par les m premières équations algébriques de comportement de moment membranaire de (VI.1.1.8) dans chaque couche.

$$(VI.1.1.16) \quad M_{11}^i = -\frac{S_{12}^i}{S_{11}^i} M^i - \frac{S_{16}^i}{S_{11}^i} M_6^i$$

Les efforts d'arrachement d'interface  $v^{i,i+1}$  sont donnés en fonction des déplacements  $w^i$  et  $w^{i+1}$

*Calculs analytiques des  $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$  en traction*

hors plan par les  $m$  équations algébriques (VI.1.14).

Les champs  $Q_1^i, \tau_1^{i,i+1}$  et  $\tau_2^{i,i+1}$  sont donnés par les expressions algébriques (VI.1.1.9) et (VI.1.1.13) en fonction des  $Q_2^j, \varphi_x^j, \varphi_y^j, u^{j+1} - u^j$  et  $v^{j+1} - v^j$ .

Il reste donc les  $10m$  champs suivants reliés par  $10m$  équations différentielles:

$$\boxed{N^i; N_6^i; M^i; M_6^i; Q_2^i; u^i; v^i; w^i; \varphi_x^i; \varphi_y^i}$$

On constate que l'on peut se contenter de faire apparaître les  $2(m-1)$  champs  $\begin{cases} u^{i,i+1} = u^{i+1} - u^i \\ v^{i,i+1} = v^{i+1} - v^i \end{cases}$  au lieu des  $2m$  champs  $u^i$  et  $v^i$ .

Posons le vecteur à  $5m-2$  composantes suivant:

$$(VI.1.1.17) \quad \underline{X} = (u^{i,i+1}, v^{i,i+1}, \varphi_x^i, \varphi_y^i, Q_2^i)$$

Le système peut se réécrire sous la forme:

$$(VI.1.1.18) \quad \boxed{\underline{X}'' = \overline{M} \cdot \underline{X}}$$

Il n'est pas utile d'expliciter dans le cas général, l'expression de  $\overline{M}$  étant assez compliquée. A titre d'illustration, développons le cas du quadricouche symétrique.

*VI.1.2 Application dans le cas du multicouche  $(\theta_1, \theta_2)_s$*

Dans le cas  $m=2$ , nous avons huit inconnues principales que nous notons  $\begin{cases} u = u^2 - u^1 \\ v = v^2 - v^1 \\ Q^1 = Q_2^1 \\ Q^2 = Q_2^2 \\ \varphi_x^1, \varphi_y^1, \varphi_x^2 \text{ et } \varphi_y^2 \end{cases}$ .

Dans la suite, de façon à pouvoir traiter plus simplement le problème nous restreignons l'application au cas particulier du quadricouche symétrique  $(\theta_1, \theta_2)_s$  dont les modules de cisaillement sont égaux soit:  $G_{LN} = G_{TN}$ .

Les équations algébriques (VI.1.1.9) et (VI.1.1.13) s'écrivent alors simplement:

Calculs analytiques des  $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$  en traction

$$(VI.1.2.1) \quad -\varphi_x^1 + \frac{1}{G_{LN}} \left( \frac{6}{5e} Q_1^1 - \frac{1}{10} \tau_1^{1,2} \right) = 0$$

$$(VI.1.2.2) \quad -\varphi_x^2 + \frac{1}{G_{LN}} \left( \frac{6}{5e} Q_1^2 - \frac{1}{10} \tau_1^{1,2} \right) = 0$$

$$(VI.1.2.3) \quad -u^2 + u^1 + \frac{e}{2} (\varphi_x^1 + \varphi_x^2) + \frac{1}{G_{LN}} \left( -\frac{1}{10} (Q_1^1 + Q_1^2) + \frac{4e}{15} \tau_1^{1,2} \right) = 0$$

$$(VI.1.2.4) \quad -v^2 + v^1 + \frac{e}{2} (\varphi_y^1 + \varphi_y^2) + \frac{1}{G_{LN}} \left( -\frac{1}{10} (Q^1 + Q^2) + \frac{4e}{15} \tau_2^{1,2} \right) = 0$$

Ce système d'équations algébriques permet d'exprimer  $\tau_1^{1,2}$ ,  $\tau_2^{1,2}$ ,  $Q_1^1$  et  $Q_2^1$  en fonction des huit inconnues principales ci-dessus.

$$(VI.1.2.5) \quad \boxed{\frac{\tau_1^{1,2}}{G_{LN}} = \frac{4}{e} \left( u - \frac{5e}{12} (\varphi_x^1 + \varphi_x^2) \right)}$$

$$(VI.1.2.6) \quad \boxed{\frac{\tau_2^{1,2}}{G_{LN}} = \frac{15}{4e} \left( v - \frac{e}{2} (\varphi_y^1 + \varphi_y^2) \right) + \frac{3}{8eG_{LN}} (Q^1 + Q^2)}$$

$$(VI.1.2.7) \quad \boxed{\frac{Q_1^1}{eG_{LN}} = \frac{u}{3e} + \frac{25}{36} \varphi_x^1 - \frac{5}{36} \varphi_x^2}$$

$$(VI.1.2.8) \quad \boxed{\frac{Q_1^2}{eG_{LN}} = \frac{u}{3e} - \frac{5}{36} \varphi_x^1 + \frac{25}{36} \varphi_x^2}$$

Les équations algébriques de comportement d'arrachement d'interface (VI.1.1.14) s'expriment:

$$(VI.1.2.9) \quad \begin{aligned} 0 &= -w^2 + w^1 + \frac{26e}{35E_N} v^{1,2} + \frac{9e}{70E_N} v^{2,3} \\ 0 &= 2w^2 + \frac{18e}{70E_N} v^{1,2} + \frac{26e}{35E_N} v^{2,3} \end{aligned}$$

On obtient alors:

$$(VI.1.2.10) \quad \boxed{v^{1,2} = \frac{70E_N}{2542e} (70w^2 - 52w^1)}$$

$$(VI.1.2.11) \quad \boxed{v^{2,3} = \frac{70E_N}{2542e} (-122w^2 + 18w^1)}$$

Le système d'équations d'équilibre (VI.1.1.7) se réécrit:

$$(VI.1.2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_6^1(y) = -\frac{4G_{LN}}{e} \left( u - \frac{5e}{12} (\varphi_x^1 + \varphi_x^2) \right) \\ N_6^2(y) = \frac{4G_{LN}}{e} \left( u - \frac{5e}{12} (\varphi_x^1 + \varphi_x^2) \right) \\ N^1(y) = -\frac{15G_{LN}}{4e} \left( v - \frac{e}{2} (\varphi_y^1 + \varphi_y^2) \right) - \frac{3}{8e} (Q^1 + Q^2) \\ N^2(y) = \frac{15G_{LN}}{4e} \left( v - \frac{e}{2} (\varphi_y^1 + \varphi_y^2) \right) + \frac{3}{8e} (Q^1 + Q^2) \\ Q^1(y) = -\frac{70E_N}{2542e} (70w^2 - 52w^1) \\ Q^2(y) = \frac{70E_N}{2542e} (192w^2 - 70w^1) \\ M_6^1(y) = \frac{5eG_{LN}}{6} \varphi_x^1 - \frac{5G_{LN}}{3} \left( u - \frac{5e}{12} (\varphi_x^1 + \varphi_x^2) \right) \\ M_6^2(y) = \frac{5eG_{LN}}{6} \varphi_x^2 - \frac{5G_{LN}}{3} \left( u - \frac{5e}{12} (\varphi_x^1 + \varphi_x^2) \right) \\ M^1(y) = Q^1 - \frac{15G_{LN}}{8} \left( v - \frac{e}{2} (\varphi_y^1 + \varphi_y^2) \right) - \frac{3}{16} (Q^1 + Q^2) \\ M^2(y) = Q^2 - \frac{15G_{LN}}{8} \left( v - \frac{e}{2} (\varphi_y^1 + \varphi_y^2) \right) - \frac{3}{16} (Q^1 + Q^2) \end{array} \right.$$

En éliminant  $N_{11}^1$  et  $M_{11}^1$  à l'aide des équations (VI.1.1.15 et 16), les équations (VI.1.1.18->21) se réécrivent sur les couches un et deux ainsi:

$$(VI.1.2.13) \quad u' = \frac{N^2}{e} B^2 + \frac{N_6^2}{e} C^2 + \frac{S_{16}^2}{S_{11}^2} \frac{\Delta}{L} - \frac{N^1}{e} B^1 - \frac{N_6^1}{e} C^1 - \frac{S_{16}^1}{S_{11}^1} \frac{\Delta}{L}$$

$$(VI.1.2.14) \quad v' = \frac{N^2}{e} A^2 + \frac{N_6^2}{e} B^2 + \frac{S_{12}^2}{S_{11}^2} \frac{\Delta}{L} - \frac{N^1}{e} A^1 - \frac{N_6^1}{e} B^1 - \frac{S_{12}^1}{S_{11}^1} \frac{\Delta}{L}$$

$$(VI.1.2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_x^1 = \frac{12}{e^3} (B^1 M^1 + C^1 M_6^1) \\ \varphi_x^2 = \frac{12}{e^3} (B^2 M^2 + C^2 M_6^2) \end{array} \right.$$

Calculs analytiques des  $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$  en traction

$$(VI.1.2.16) \quad \begin{cases} \varphi_y^1 = \frac{12}{e^3} (A^1 M^1 + B^1 M_6^1) \\ \varphi_y^2 = \frac{12}{e^3} (A^2 M^2 + B^2 M_6^2) \end{cases}$$

où

$$(VI.1.2.17) \quad A^i = S_{22}^i - \frac{S_{12}^i{}^2}{S_{11}^i} ; \quad B^i = S_{26}^i - \frac{S_{16}^i S_{12}^i}{S_{11}^i} \quad \text{et} \quad C^i = S_{66}^i - \frac{S_{16}^i{}^2}{S_{11}^i},$$

L'équation différentielle de comportement de couches (VI.1.1.9) devient, après utilisation des équations (VI.1.2.5->8):

$$(VI.1.2.18) \quad \begin{cases} w^1 = -\frac{13}{16} \varphi_y^1 + \frac{3}{16} \varphi_y^2 + \frac{93}{80} \frac{Q^1}{e G_{LN}} - \frac{3}{80} \frac{Q^2}{e G_{LN}} - \frac{3}{8e} (v^2 - v^1) \\ w^2 = \frac{3}{16} \varphi_y^1 - \frac{13}{16} \varphi_y^2 - \frac{3}{80} \frac{Q^1}{e G_{LN}} + \frac{93}{80} \frac{Q^2}{e G_{LN}} - \frac{3}{8e} (v^2 - v^1) \end{cases}$$

Dans la suite, nous condons les inconnues en éliminant par dérivations des équations précédentes (VI.1.2.13->16) les quantités  $N^1, N^2, N_6^1, N_6^2, M^1, M^2, M_6^1, M_6^2, w^1$  et  $w^2$  (VI.1.2.12) et (VI.1.2.18). On déduit de ces équations (VI.1.2.13->16):

$$(VI.1.2.19) \quad u'' = \frac{15G_{LN}}{4e^2} (B^1 + B^2) \left( v - \frac{e}{2} (\varphi_y^1 + \varphi_y^2) \right) + \frac{3(B^1 + B^2)}{8e^2} (Q^1 + Q^2) + \frac{4G_{LN}}{e^2} (C^1 + C^2) \left( u - \frac{5e}{12} (\varphi_x^1 + \varphi_x^2) \right)$$

$$(VI.1.1.20) \quad v'' = \frac{15G_{LN}}{4e^2} (A^1 + A^2) \left( v - \frac{e}{2} (\varphi_y^1 + \varphi_y^2) \right) + \frac{3(A^1 + A^2)}{8e^2} (Q^1 + Q^2) + \frac{4G_{LN}}{e^2} (B^1 + B^2) \left( u - \frac{5e}{12} (\varphi_x^1 + \varphi_x^2) \right)$$

$$(VI.1.2.21) \quad \varphi_x^1 = \frac{12}{e^3} \left( \frac{13}{16} B^1 Q^1 - \frac{3B^1}{16} Q^2 - \frac{15B^1 G_{LN}}{8} \left( v - \frac{e}{2} (\varphi_y^1 + \varphi_y^2) \right) + \frac{5e G_{LN}}{6} C^1 \varphi_x^1 - \frac{5C^1 G_{LN}}{3} \left( u - \frac{5e}{12} (\varphi_x^1 + \varphi_x^2) \right) \right)$$

$$(VI.1.2.22) \quad \varphi_x^2 = \frac{12}{e^3} \left( -\frac{3}{16} B^2 Q^1 + \frac{13B^2}{16} Q^2 - \frac{15B^2 G_{LN}}{8} \left( v - \frac{e}{2} (\varphi_y^1 + \varphi_y^2) \right) + \frac{5e G_{LN}}{6} C^2 \varphi_x^2 - \frac{5C^2 G_{LN}}{3} \left( u - \frac{5e}{12} (\varphi_x^1 + \varphi_x^2) \right) \right)$$



Calculs analytiques des  $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$  en traction

(VI.1.2.23)

$$\varphi_y^{1''} = \frac{12}{e^3} \left( \frac{13}{16} A^1 Q^1 - \frac{3A^1}{16} Q^2 - \frac{15A^1 G_{LN}}{8} \left( v - \frac{e}{2} (\varphi_y^1 + \varphi_y^2) \right) + \frac{5e G_{LN}}{6} B^1 \varphi_x^1 - \frac{5B^1 G_{LN}}{3} \left( u - \frac{5e}{12} (\varphi_x^1 + \varphi_x^2) \right) \right)$$

(VI.1.2.24)

$$\varphi_y^{2''} = \frac{12}{e^3} \left( -\frac{3}{16} A^2 Q^1 + \frac{13A^2}{16} Q^2 - \frac{15A^2 G_{LN}}{8} \left( v - \frac{e}{2} (\varphi_y^1 + \varphi_y^2) \right) + \frac{5e G_{LN}}{6} B^2 \varphi_x^2 - \frac{5B^2 G_{LN}}{3} \left( u - \frac{5e}{12} (\varphi_x^1 + \varphi_x^2) \right) \right)$$

(VI.1.2.25)

$$Q^1'' = -\frac{35E_N}{1271e} \left( \frac{443}{8} \varphi_y^1 - \frac{533}{8} \varphi_y^2 - \frac{2523}{40} \frac{Q^1}{e G_{LN}} + \frac{3333}{40} \frac{Q^2}{e G_{LN}} - \frac{27}{4} \frac{v}{e} \right)$$

(VI.1.2.26)

$$Q^2'' = \frac{35E_N}{1271e} \left( \frac{743}{8} \varphi_y^1 - \frac{1353}{8} \varphi_y^2 - \frac{3543}{40} \frac{Q^1}{e G_{LN}} + \frac{9033}{40} \frac{Q^2}{e G_{LN}} - \frac{183}{4} \frac{v}{e} \right)$$

Enfin, nous rendons le système d'équations différentielles du second ordre dimensionnel en posant:

$$\begin{aligned} a^1 &= G_{LN} A^1 \frac{b^2}{e^2} \\ a^2 &= G_{LN} A^2 \frac{b^2}{e^2} & a &= a^1 + a^2 \\ b^1 &= G_{LN} B^1 \frac{b^2}{e^2} & b &= b^1 + b^2 \\ b^2 &= G_{LN} B^2 \frac{b^2}{e^2} & c &= c^1 + c^2 \\ c^1 &= G_{LN} C^1 \frac{b^2}{e^2} & U(s) &= \frac{u(bs)}{e} \\ c^2 &= G_{LN} C^2 \frac{b^2}{e^2} & V(s) &= \frac{v(bs)}{e} \\ d &= \frac{E_N}{G_{LN}} \frac{b^2}{e^2} & \phi_i^j(s) &= \frac{\phi_i^j(bs)}{e G_{LN}} \\ & & q^j(s) &= \frac{Q^j(bs)}{e G_{LN}} \end{aligned}$$

Le système à résoudre est de la forme:  $\underline{X}'' = \overline{\overline{M}} \cdot \underline{X}$  avec  $\underline{X} = (V, U, \phi_x^1, \phi_x^2, \phi_y^1, \phi_y^2, q^1, q^2)$  et:

(VI.1.2.28)

Calculs analytiques des  $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$  en traction

$$\bar{\bar{M}} = \begin{pmatrix} \frac{15a}{4} & 4b & \frac{-5b}{3} & \frac{-5b}{3} & \frac{-15a}{8} & \frac{-15a}{8} & \frac{3a}{8} & \frac{3a}{8} \\ \frac{15b}{4} & 4c & \frac{-5c}{3} & \frac{-5c}{3} & \frac{-15b}{8} & \frac{-15b}{8} & \frac{3b}{8} & \frac{3b}{8} \\ \frac{4}{-45a^1} & -20c^1 & \frac{55}{3}c^1 & \frac{25}{3}c^1 & \frac{45b^1}{8} & \frac{45b^1}{8} & \frac{39b^1}{8} & \frac{-9b^1}{8} \\ \frac{2}{-45a^2} & -20c^2 & \frac{25}{3}c^2 & \frac{55}{3}c^2 & \frac{45b^2}{4} & \frac{45b^2}{4} & \frac{-9b^2}{4} & \frac{39b^2}{4} \\ \frac{2}{-45b^1} & -20b^1 & \frac{55}{3}b^1 & \frac{25}{3}b^1 & \frac{45a^1}{4} & \frac{45a^1}{4} & \frac{39a^1}{4} & \frac{-9a^1}{4} \\ \frac{2}{-45b^2} & -20b^2 & \frac{25}{3}b^2 & \frac{55}{3}b^2 & \frac{45a^2}{4} & \frac{45a^2}{4} & \frac{-9a^2}{4} & \frac{39a^2}{4} \\ \frac{1890}{10168}d & 0 & 0 & 0 & \frac{-15505}{10168}d & \frac{18655}{10168}d & \frac{17661}{10168}d & \frac{-23331}{10168}d \\ \frac{-12810}{10168}d & 0 & 0 & 0 & \frac{26005}{10168}d & \frac{-47355}{10168}d & \frac{-24801}{10168}d & \frac{63231}{10168}d \end{pmatrix}$$

Nous avons 8 fonctions inconnues, respectant les huit conditions de parité écrites dans les relations (VI.1.1.2):

$$(VI.1.2.29) \quad \boxed{\begin{array}{l} U(0) = 0 ; V(0) = 0 ; \\ \phi_x^i(0) = 0 ; \phi_y^i(0) = 0 ; \\ q^i(0) = 0 \end{array}}$$

Il reste à exprimer à nouveau les conditions aux limites en fonction des inconnues principales du problème:

$$(VI.1.2.30) \quad \begin{cases} \overset{\approx}{N}(x, b) \cdot \bar{n} = 0 \\ \overset{\approx}{\tilde{Q}}(x, b) \cdot \bar{n} = 0 \\ \overset{\approx}{M}(x, b) \cdot \bar{n} = 0 \end{cases} \quad \forall i = 1, n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_6^i(b) = N^i(b) = 0 \\ Q^i(b) = 0 \\ M_6^i(b) = M^i(b) = 0 \end{cases}$$

Ces équations injectées dans les relations de comportement membranaire écrites en (VI.1.1.13->16) donnent les conditions suivantes:

$$(VI.1.2.31) \quad \begin{cases} u^i(b) = \frac{\Delta S_{16}^i}{L S_{11}^i} \\ v^i(b) = \frac{\Delta S_{12}^i}{L S_{11}^i} \end{cases}$$

Calculs analytiques des  $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$  en traction

$$(VI.1.2.32) \quad \begin{cases} \phi_x^i(b) = 0 \\ \phi_y^i(b) = 0 \end{cases}$$

En fonction des inconnues du problème, nous en déduisons les huit conditions aux limites suivantes :

$$(VI.1.2.33) \quad \boxed{\begin{cases} U'(1) = \frac{b \Delta}{e L} \left( \frac{S_{16}^2}{S_{11}^2} - \frac{S_{16}^1}{S_{11}^1} \right) \\ V'(1) = \frac{b \Delta}{e L} \left( \frac{S_{12}^2}{S_{11}^2} - \frac{S_{12}^1}{S_{11}^1} \right) \end{cases} ; \quad \begin{cases} \phi_x^i(1) = 0 \\ \phi_y^i(1) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad q^i(1) = 0 \quad (i=1,2)}$$

Ce système peut facilement être résolu à l'aide de MATHEMATICA. Nous présentons les résultats plus loin dans le chapitre après avoir donné la solution du même problème pour le modèle M4\_(2n+1)M dans la section suivante.

## VI.2 CALCUL ANALYTIQUE DU MULTICOUCHE $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$ EN TRACTION PAR LE MODELE M4\_(2N+1) MEMBRANE

Nous étudions un problème similaire à celui de la section précédente à l'aide du modèle M4\_(2n+1)M.

### VI.2.1 Equations générales du multicouche $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$ en traction

Nous faisons l'hypothèse que loin des bords  $x=1$  et  $x=-1$ , les champs sont invariants par translation.

Les champs inconnus principaux sont:

- Les déplacements généralisés:

$$(VI.2.1.1) \quad \tilde{U}^i(x, y) = \begin{cases} u^i(x, y) = \frac{\Delta}{L} x + u^i(y) \\ v^i(x, y) = v^i(y) \end{cases} \quad i=1, 2m$$

$$U_3^1(x, y) = w(y)$$

La symétrie du problème par rapport au plan  $y=0$  nous impose:

$$(VI.2.1.2) \quad \begin{cases} u^i(y) \text{ et } v^i(y) \text{ sont impaires} \\ w(y) \text{ est paire} \end{cases}$$

La symétrie par rapport au plan  $z=0$  donne:

$$(VI.2.1.3) \quad \begin{aligned} u^i(y) &= u^{2m-i+1}(y) \\ v^i(y) &= v^{2m-i+1}(y) \\ w(y) &= 0 \end{aligned} \quad i=1, 2m$$

Les déformations généralisées s'écrivent alors:

$$(VI.2.1.4) \quad \begin{cases} \tilde{\epsilon}^i(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{L} & \frac{1}{2} u^{i'}(y) \\ \frac{1}{2} u^{i'}(y) & v^{i'}(y) \end{pmatrix} \\ \tilde{D}^{i, i+1}(x, y) = \begin{pmatrix} u^{i+1}(y) - u^i(y) \\ v^{i+1}(y) - v^i(y) \end{pmatrix} \end{cases}$$

- Les efforts intérieurs généralisés:

$$(VI.2.1.5) \quad \begin{aligned} N_{\alpha\beta}^i(x, y) &= N_{\alpha\beta}^i(y) & (\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2 \quad i \in (1, 2m) \\ \tau_{\alpha}^{i, i+1}(x, y) &= \tau_{\alpha}^{i, i+1}(y) & \alpha \in \{1, 2\} \quad i \in (1, 2m-1) \end{aligned}$$

La prise en compte des symétries par rapport au plan  $z=0$  conduit à:

$$(VI.2.1.6) \quad \begin{aligned} N_{\alpha\beta}^i(y) &= N_{\alpha\beta}^{2m-i+1}(y) & \tilde{\tau}^{m, m+1} &= 0 \\ Q_{\alpha}^i(y) &= -Q_{\alpha}^{2m-i+1}(y) & \tilde{\tau}^{i, i+1} &= -\tilde{\tau}^{2m-i, 2m-i+1} \\ & & v^{i, i+1} &= v^{2m-i, 2m-i+1} \end{aligned} \quad \text{et}$$

Nous sommes ainsi conduit à un problème comprenant  $7m-2$  champs en  $y$  inconnus:

$\begin{aligned} u^i, v^i, N_{11}^i, N_{12}^i, N_{22}^i \quad i = 1, m \\ \tau_1^{i, i+1}, \tau_2^{i, i+1} \quad i = 1, m-1 \end{aligned}$
--

- L'équilibre:

Compte tenu des symétries, on peut se contenter d'étudier l'équilibre des couches 1 à  $m$ . Ceci s'écrit:

$$(VI.2.1.7) \quad \begin{cases} N_{12}^i{}'(y) = -\tau_1^{i,i+1}(y) + \tau_1^{i-1,i}(y) \\ N_{22}^i{}'(y) = -\tau_2^{i,i+1}(y) + \tau_2^{i-1,i}(y) \end{cases} \quad \text{couches 1 à m}$$

et  $\text{div}\left(\sum \tilde{\tau}^{i,i+1}\right) = 0$  automatiquement vérifiée.

- Le comportement:

Le comportement des couches donne  $2m$  équations différentielles et  $m$  équations algébriques:

$$(VI.1.1.8) \quad \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{L} \\ v^i{}'(y) \\ u^i{}'(y) \end{pmatrix} = \frac{\tilde{S}^i}{e} \begin{pmatrix} N_{11}^i \\ N_{22}^i \\ N_{12}^i \end{pmatrix} \quad i=1, m$$

où par souci d'autonomie du paragraphe, on rappelle que le tenseur  $\tilde{S}^i$  représente la souplesse de contrainte plane et la souplesse du cisaillement de la couche  $i$  et qui vaut, en notation de Voigt, l'expression suivante:

$$(VI.2.1.9) \quad \tilde{S}_{(e_L, e_T, e_N)}^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & 0 \\ -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{pmatrix}$$

et, dans le repère structural:

Calculs analytiques des  $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$  en traction

$$\tilde{S}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}^i = \begin{pmatrix} S_{11}^i & S_{12}^i & S_{16}^i \\ & S_{22}^i & S_{26}^i \\ \text{SYM} & & S_{66}^i \end{pmatrix}$$

$$S_{11}^i = \frac{\cos^4 \theta^i}{E_L} + \frac{\sin^4 \theta^i}{E_T} + \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta^i \cos^2 \theta^i$$

$$S_{22}^i = \frac{\sin^4 \theta^i}{E_L} + \frac{\cos^4 \theta^i}{E_T} + \left( \frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta^i \cos^2 \theta^i$$

$$S_{66}^i = \frac{\sin^4 \theta^i + \cos^4 \theta^i}{G_{LT}} + 2 \left( 2 \left( \frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^2 \theta^i \cos^2 \theta^i$$

$$S_{12}^i = -\frac{\nu_{LT}}{E_L} (\sin^4 \theta^i + \cos^4 \theta^i) + \left( \frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^2 \theta^i \cos^2 \theta^i$$

$$(VI.2.1.10) \quad S_{16}^i = \left( 2 \left( \frac{1}{E_L} - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin \theta^i \cos^3 \theta^i + \left( 2 \left( -\frac{1}{E_T} - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) + \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^3 \theta^i \cos \theta^i$$

$$S_{26}^i = \left( 2 \left( \frac{1}{E_L} - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) - \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin^3 \theta^i \cos \theta^i + \left( 2 \left( -\frac{1}{E_T} - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \right) + \frac{1}{G_{LT}} \right) \sin \theta^i \cos^3 \theta^i$$

Le comportement d'interface donne  $2(m-1)$  équations algébriques:

$$(VI.2.1.11) \quad \begin{pmatrix} u^{i+1}(y) - u^i(y) \\ v^{i+1}(y) - v^i(y) \end{pmatrix} = e^i \tilde{S}_Q^i \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \tau_1^{i-1,i} + \frac{1}{3} \tau_1^{i,i+1} \\ \frac{1}{6} \tau_2^{i-1,i} + \frac{1}{3} \tau_2^{i,i+1} \end{pmatrix} + e^{i+1} \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \tau_1^{i,i+1} + \frac{1}{6} \tau_1^{i+1,i+2} \\ \frac{1}{3} \tau_2^{i,i+1} + \frac{1}{6} \tau_2^{i+1,i+2} \end{pmatrix}$$

avec:

$$(VI.2.1.12) \quad \tilde{S}_{Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}^i = \begin{pmatrix} S_{Q11}^i & S_{Q12}^i \\ S_{Q12}^i & S_{Q22}^i \end{pmatrix} ; \begin{cases} S_{Q11}^i = \frac{1}{G_{NL}} \cos^2 \theta^i + \frac{1}{G_{TN}} \sin^2 \theta^i \\ S_{Q22}^i = \frac{1}{G_{NL}} \sin^2 \theta^i + \frac{1}{G_{TN}} \cos^2 \theta^i \\ S_{Q12}^i = 2 \left( \frac{1}{G_{NL}} - \frac{1}{G_{TN}} \right) \sin \theta^i \cos \theta^i \end{cases}$$

Le système peut se condenser. Pour cela, nous posons:

$$(VI.2.1.13) \quad \begin{aligned} u^{i,i+1} &= u^{i+1} - u^i \\ v^{i,i+1} &= v^{i+1} - v^i \end{aligned}$$

Il vient alors:

Calculs analytiques des  $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$  en traction

$$(VI.2.1.14) \quad \boxed{\begin{aligned} u^{i,i+1}(y) &= \tau_2^{i+1,i+2} \left( \frac{e^{i+1}}{6} S_{Q12}^{i+1} \right) + \tau_2^{i,i+1} \left( \frac{e^{i+1}}{3} S_{Q12}^{i+1} + \frac{e^i}{3} S_{Q12}^i \right) + \tau_2^{i-1,i} \left( \frac{e^i}{6} S_{Q12}^i \right) \\ &\quad \tau_1^{i+1,i+2} \left( \frac{e^{i+1}}{6} S_{Q11}^{i+1} \right) + \tau_1^{i,i+1} \left( \frac{e^{i+1}}{3} S_{Q11}^{i+1} + \frac{e^i}{3} S_{Q11}^i \right) + \tau_1^{i-1,i} \left( \frac{e^i}{6} S_{Q11}^i \right) \end{aligned}}$$

$$(VI.2.1.15) \quad \boxed{\begin{aligned} v^{i,i+1}(y) &= \tau_2^{i+1,i+2} \left( \frac{e^{i+1}}{6} S_{Q22}^{i+1} \right) + \tau_2^{i,i+1} \left( \frac{e^{i+1}}{3} S_{Q22}^{i+1} + \frac{e^i}{3} S_{Q22}^i \right) + \tau_2^{i-1,i} \left( \frac{e^i}{6} S_{Q22}^i \right) \\ &\quad \tau_1^{i+1,i+2} \left( \frac{e^{i+1}}{6} S_{Q12}^{i+1} \right) + \tau_1^{i,i+1} \left( \frac{e^{i+1}}{3} S_{Q12}^{i+1} + \frac{e^i}{3} S_{Q12}^i \right) + \tau_1^{i-1,i} \left( \frac{e^i}{6} S_{Q12}^i \right) \end{aligned}}$$

On note:

$$(VI.2.1.16) \quad N^i = N_{22}^i; N_6^i = N_{12}^i$$

Les champs  $N_{11}^i$  sont donnés en fonction de  $\frac{\Delta}{L}$  et des efforts  $N_{22}^i$  et  $N_{12}^i$  par les m premières équations de comportement membranaire de (VI.2.1.8) de chaque couche, qui sont algébriques:

$$(VI.2.1.17) \quad N_{11}^i = -\frac{S_{12}^i}{S_{11}^i} N^i - \frac{S_{16}^i}{S_{11}^i} N_6^i + \frac{e\Delta}{S_{11}^i L}$$

En posant:

$$(VI.2.1.18) \quad A^i = S_{22}^i - \frac{S_{12}^i{}^2}{S_{11}^i}; \quad B^i = S_{26}^i - \frac{S_{16}^i S_{12}^i}{S_{11}^i} \quad \text{et} \quad C^i = S_{66}^i - \frac{S_{16}^i{}^2}{S_{11}^i},$$

on obtient les équations différentielles du premier degré suivantes:

$$(VI.2.1.19) \quad u^i{}' = \frac{N^i}{e^i} B^i + \frac{N_6^i}{e^i} C^i + \frac{S_{16}^i}{S_{11}^i} \frac{\Delta}{L}$$

$$(VI.2.1.20) \quad v^i{}' = \frac{N^i}{e^i} A^i + \frac{N_6^i}{e^i} B^i + \frac{S_{12}^i}{S_{11}^i} \frac{\Delta}{L}$$

et les équations (VI.2.1.19 et 20) se réécrivent ainsi:

$$(VI.2.1.21) \quad u^{i,i+1}{}' = \frac{N^{i+1}}{e^{i+1}} B^{i+1} - \frac{N^i}{e^i} B^i + \frac{N_6^{i+1}}{e^{i+1}} C^{i+1} - \frac{N_6^i}{e^i} C^i + \left( \frac{S_{16}^{i+1}}{S_{11}^{i+1}} - \frac{S_{16}^i}{S_{11}^i} \right) \frac{\Delta}{L}$$

$$(VI.2.1.22) \quad v^{i,i+1}' = \frac{N^{i+1}}{e^{i+1}} A^{i+1} - \frac{N^i}{e^i} A^i + \frac{N_6^{i+1}}{e^{i+1}} B^{i+1} - \frac{N_6^i}{e^i} B^i + \left( \frac{S_{12}^{i+1}}{S_{11}^{i+1}} - \frac{S_{12}^i}{S_{11}^i} \right) \frac{\Delta}{L}$$

Or en dérivant ce dernier système d'équations et en y injectant les équations d'équilibre (VI.2.7), on en déduit:

$$(VI.2.1.23) \quad \boxed{u^{i,i+1}'' = -\frac{B^{i+1}}{e^{i+1}} \tau_2^{i+1,i+2} + \left( \frac{B^{i+1}}{e^{i+1}} + \frac{B^i}{e^i} \right) \tau_2^{i,i+1} - \frac{B^i}{e^i} \tau_2^{i-1,i} - \frac{C^{i+1}}{e^{i+1}} \tau_1^{i+1,i+2} + \left( \frac{C^{i+1}}{e^{i+1}} + \frac{C^i}{e^i} \right) \tau_1^{i,i+1} - \frac{C^i}{e^i} \tau_1^{i-1,i}}$$

$$(VI.2.1.24) \quad \boxed{v^{i,i+1}'' = -\frac{A^{i+1}}{e^{i+1}} \tau_2^{i+1,i+2} + \left( \frac{A^{i+1}}{e^{i+1}} + \frac{A^i}{e^i} \right) \tau_2^{i,i+1} - \frac{A^i}{e^i} \tau_2^{i-1,i} - \frac{B^{i+1}}{e^{i+1}} \tau_1^{i+1,i+2} + \left( \frac{B^{i+1}}{e^{i+1}} + \frac{B^i}{e^i} \right) \tau_1^{i,i+1} - \frac{B^i}{e^i} \tau_1^{i-1,i}}$$

Nous notons:

$\underline{X}$  le vecteur de composante  $(v^{1,2}, u^{1,2}, \dots, v^{m-1,m}, u^{m-1,m})$

$\underline{Y}$  le vecteur de composante  $(\tau_2^{1,2}, \tau_1^{1,2}, \dots, \tau_2^{m-1,m}, \tau_1^{m-1,m})$

soit

$$\begin{cases} X_{2k+1} = v^{k+1,k+2} \\ X_{2k+2} = u^{k+1,k+2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y_{2k+1} = \tau_2^{k+1,k+2} \\ Y_{2k+2} = \tau_1^{k+1,k+2} \end{cases}$$

On a deux systèmes qui se condensent en un système final à résoudre de la forme:

$$(VI.2.1.25) \quad \begin{cases} \underline{X}_k'' = M_{kl} \cdot Y_l \\ \underline{X}_k = N_{kl} \cdot Y_l \end{cases} \Rightarrow \underline{X}'' = \overline{M} \cdot \overline{N}^{-1} \cdot \underline{X}$$

Où, après avoir noté:

$$(VI.2.1.26) \quad \begin{aligned} a^i &= \frac{A^i}{e^i}, b^i = \frac{B^i}{e^i} \text{ et } c^i = \frac{C^i}{e^i} \\ \alpha^i &= \frac{e^i}{6} S_{Q22}^i, \beta^i = \frac{e^i}{6} S_{Q12}^i \text{ et } \gamma^i = \frac{e^i}{6} S_{Q11}^i \end{aligned}$$



les coefficients des matrices  $\overline{\overline{M}}$  et  $\overline{\overline{N}}$  sont donnés par:

$$(VI.2.1.27) \quad \begin{cases} M_{2k+1,2k+1} = a^{k+2} + a^{k+1} \\ M_{2k+1,2k+2} = b^{k+2} + b^{k+1} \\ M_{2k+1,2k+3} = -a^{k+2} \\ M_{2k+1,2k+4} = -b^{k+2} \\ M_{2k+1,2k} = -b^{k+1} \\ M_{2k+1,2k-1} = -a^{k+1} \end{cases} \quad \begin{cases} M_{2k+2,2k+1} = b^{k+2} + b^{k+1} \\ M_{2k+2,2k+2} = c^{k+2} + c^{k+1} \\ M_{2k+2,2k+3} = -b^{k+2} \\ M_{2k+2,2k+4} = -c^{k+2} \\ M_{2k+2,2k} = -c^{k+1} \\ M_{2k+2,2k-1} = -b^{k+1} \end{cases} \quad \begin{matrix} k > 0 \\ k > 0 \end{matrix}$$

les autres coefficients  $M_{ij}$  sont nuls ( $\overline{\overline{M}}$  est tant symétrique)

$$(VI.2.1.28) \quad \begin{cases} N_{2k+1,2k+1} = 2(\alpha^{k+2} + \alpha^{k+1}) \\ N_{2k+1,2k+2} = 2(\beta^{k+2} + \beta^{k+1}) \\ N_{2k+1,2k+3} = \alpha^{k+2} \\ N_{2k+1,2k+4} = \beta^{k+2} \\ N_{2k+1,2k} = \beta^{k+1} \\ N_{2k+1,2k-1} = \alpha^{k+1} \end{cases} \quad \begin{cases} N_{2k+2,2k+1} = 2(\beta^{k+2} + \beta^{k+1}) \\ N_{2k+2,2k+2} = 2(\gamma^{k+2} + \gamma^{k+1}) \\ N_{2k+2,2k+3} = \beta^{k+2} \\ N_{2k+2,2k+4} = \gamma^{k+2} \\ N_{2k+2,2k} = \gamma^{k+1} \\ N_{2k+2,2k-1} = \beta^{k+1} \end{cases} \quad \begin{matrix} k > 0 \\ k > 0 \end{matrix}$$

les autres coefficients  $N_{ij}$  sont nuls ( $\overline{\overline{N}}$  est tant symétrique)

Enfin, nous rendons le système d'équations différentielles du second ordre dimensionnel en posant:

$$(VI.2.1.29) \quad \begin{cases} \underline{x}(u) = \frac{\underline{X}(bu)}{e^{\text{choisi}}} & \underline{x}'(u) = \frac{b}{e^{\text{choisi}}} \underline{X}(bu) \\ \underline{y}(u) = \frac{\underline{Y}(bu)}{G^{\text{choisi}}} & \underline{x}''(u) = \frac{b^2}{e^{\text{choisi}}} \underline{X}(bu) \end{cases}$$

où les valeurs de  $e^{\text{choisi}}$  et  $G^{\text{choisi}}$  sont choisies parmi toutes les valeurs des épaisseurs des couches et parmi toutes les valeurs des modules de cisaillement selon le problème à traiter.

Les systèmes précédents (VI.2.1.25) après adimensionnalisation s'expriment ainsi:

Calculs analytiques des  $(\theta_1, \dots, \theta_m)_s$  en traction

$$(VI.2.1.30) \quad \begin{cases} \underline{x}''(u) = \frac{b^2 G}{e} \overline{\overline{M}} \cdot \underline{y}(u) = \overline{\overline{m}} \cdot \underline{y}(u) \\ \underline{x}(u) = \frac{G}{e} \overline{\overline{N}} \cdot \underline{y}(u) = \overline{\overline{n}} \cdot \underline{y}(u) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\underline{x}''(u) = \overline{\overline{m}} \cdot \overline{\overline{n}}^{-1} \underline{x}(u)}$$

Le vecteur  $\underline{x}(u)$  vérifie les conditions de parité écrites dans les relations (VI.2.1.2) soit:

$$(VI.2.1.31) \quad \boxed{\underline{x}(0) = 0}$$

Il reste à exprimer à nouveau, les conditions aux limites suivantes:

$$(VI.2.1.32) \quad \overline{\overline{N}}^i(x, b) \cdot \overline{\overline{n}} = 0 \quad \forall i = 1, n \Rightarrow \underline{x}'(1) = \frac{b}{e} \underline{X}'(b) = \text{cst}$$

Sachant que ces équations injectées dans les relations de comportement membranaire écrites en (VI.2.1.8) donnent les conditions suivantes:

$$(VI.2.1.33) \quad \begin{cases} u^i(b) = \frac{\Delta S_{16}^i}{L S_{11}^i} \\ v^i(b) = \frac{\Delta S_{12}^i}{L S_{11}^i} \end{cases}$$

En fonction des inconnues du problème, nous en déduisons les conditions aux limites suivantes :

$$(VI.2.1.34) \quad \boxed{\begin{cases} x_{2k+1}'(1) = \frac{b \Delta}{e L} \left( \frac{S_{12}^{k+2}}{S_{11}^{k+2}} - \frac{S_{12}^{k+1}}{S_{11}^{k+1}} \right) \\ x_{2k+2}'(1) = \frac{b \Delta}{e L} \left( \frac{S_{16}^{k+2}}{S_{11}^{k+2}} - \frac{S_{16}^{k+1}}{S_{11}^{k+1}} \right) \end{cases}}$$

### VI.2.2 Application au multicouche $(\theta_1, \theta_2)_s$ en traction

Dans un premier temps nous résolvons le système (VI.2.1.30) dans le cas du quadricouche  $(\theta_1, \theta_2)_s$  étudié dans la section précédente par le modèle M4\_5n. Les matrices  $\overline{\overline{M}}$  et  $\overline{\overline{N}}$  s'écrivent alors sous la forme:

$$(VI.2.2.1) \quad \overline{\overline{M}} = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} A^1 + A^2 & B^1 + B^2 \\ B^1 + B^2 & C^1 + C^2 \end{pmatrix}$$

$$(VI.2.2.2) \quad \bar{\bar{N}} = \frac{e}{3} \begin{pmatrix} S_{Q22}^1 + S_{Q22}^2 & S_{Q12}^1 + S_{Q12}^2 \\ S_{Q12}^1 + S_{Q12}^2 & S_{Q11}^1 + S_{Q11}^2 \end{pmatrix}$$

**VI.2.3 Application au multicouche  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)_s$  en traction**

Cette application nous permet dans un premier temps d'avoir un aperçu sur "l'effet d'épaisseur" décrit dans l'article de [Lecuyer & Engrand, 1992]. Nous analysons pour cela les laminés  $[15, -15]_s$  et  $[15_2, -15_2]_s$ . Puis dans un second temps, nous recherchons la solution du huit couches symétriques  $[0, 45, -45, 90]_s$  dont nous changeons l'ordre des couches pour prédire quel empilement est le plus délaminant.

Dans ce cas les matrices  $\bar{\bar{M}}$  et  $\bar{\bar{N}}$  s'écrivent alors sous la forme:

$$(VI.2.3.1) \quad \bar{\bar{M}} = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} A^1 + A^2 & B^1 + B^2 & -A^2 & -B^2 & 0 & 0 \\ B^1 + B^2 & C^1 + C^2 & -B^2 & -C^2 & 0 & 0 \\ -A^2 & -B^2 & A^2 + A^3 & B^2 + B^3 & -A^3 & -B^3 \\ -B^2 & -C^2 & B^2 + B^3 & C^2 + C^3 & -B^3 & -C^3 \\ 0 & 0 & -A^3 & -B^3 & A^3 + A^4 & B^3 + B^4 \\ 0 & 0 & -B^3 & -C^3 & B^3 + B^4 & C^3 + C^4 \end{pmatrix}$$

$$(VI.2.3.2) \quad \bar{\bar{N}} = \frac{e}{3} \begin{pmatrix} S_{Q22}^1 + S_{Q22}^2 & S_{Q12}^1 + S_{Q12}^2 & \frac{S_{Q22}^2}{2} & \frac{S_{Q12}^2}{2} & 0 & 0 \\ S_{Q12}^1 + S_{Q12}^2 & S_{Q11}^1 + S_{Q11}^2 & \frac{S_{Q12}^2}{2} & \frac{S_{Q11}^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{S_{Q22}^2}{2} & \frac{S_{Q12}^2}{2} & S_{Q22}^2 + S_{Q22}^3 & S_{Q12}^2 + S_{Q12}^3 & \frac{S_{Q22}^3}{2} & \frac{S_{Q12}^3}{2} \\ \frac{S_{Q12}^2}{2} & \frac{S_{Q11}^2}{2} & S_{Q12}^2 + S_{Q12}^3 & S_{Q11}^2 + S_{Q11}^3 & \frac{S_{Q12}^3}{2} & \frac{S_{Q11}^3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{S_{Q22}^3}{2} & \frac{S_{Q12}^3}{2} & S_{Q22}^3 + S_{Q22}^4 & S_{Q12}^3 + S_{Q12}^4 \\ 0 & 0 & \frac{S_{Q12}^3}{2} & \frac{S_{Q11}^3}{2} & S_{Q12}^3 + S_{Q12}^4 & S_{Q11}^3 + S_{Q11}^4 \end{pmatrix}$$

***ANNEXE VIII***

***RESUME DES MODELES M4***

La "base" polynomiale  $(P_0^i(z), P_1^i(z), P_2^i(z), P_3^i(z))$  pour l'approximation de  $\bar{\sigma}$  est la suivante :

$$(I.3.2) \quad \begin{cases} P_0^i(z) = 1 \\ P_1^i(z) = \frac{(z - \bar{h}_i)}{e^i} \\ P_2^i(z) = -6 \left( \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^2 + \frac{1}{2} \\ P_3^i(z) = -2 \left( \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^3 + \frac{3}{10} \left( \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right) \end{cases}$$

Ces polynômes de degré croissant en  $z$  sont orthogonaux entre eux, c'est à dire:

$$(I.3.1) \quad \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_\alpha^i(z) P_\beta^i(z) dz = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta$$

Ils vérifient, de plus, les relations suivantes:

$$(I.3.5) \quad \begin{cases} P_0^i(z) = 0 \\ P_1^i(z) = \frac{P_0^i(z)}{e^i} \\ P_2^i(z) = \frac{-12}{e^i} P_1^i(z) \\ P_3^i(z) = \frac{P_2^i(z)}{e^i} - \frac{2}{10} \frac{P_0^i(z)}{e^i} \end{cases} ; \begin{cases} P_1^i(h_i^+) = \frac{1}{2} \\ P_1^i(h_i^-) = -\frac{1}{2} \\ P_2^i(h_i^+) = -1 \\ P_2^i(h_i^-) = -1 \\ P_3^i(h_i^+) = -\frac{1}{10} \\ P_3^i(h_i^-) = \frac{1}{10} \end{cases} ; \begin{cases} \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_0^i(z) P_0^i(z) dz = e^i \\ \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z) P_1^i(z) dz = \frac{e^i}{12} \\ \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_2^i(z) P_2^i(z) dz = \frac{e^i}{5} \\ \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_3^i(z) P_3^i(z) dz = \frac{e^i}{700} \end{cases}$$

Les modèles résumés dans cette annexe font intervenir tout ou une partie des efforts intérieurs généralisés suivants.

- Tenseur plan d'ordre 2,  $\tilde{N}^i$ , des efforts normaux de la couche i :

$$(II.1.1) \quad N_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz;$$

- Tenseur plan d'ordre 2,  $\tilde{M}^i$ , des moments de flexion de la couche i par rapport au centre de la couche:

$$(II.1.2) \quad M_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz;$$

- Vecteur plan,  $\tilde{Q}^i$ , d'effort tranchant de la couche i:

$$(II.1.3) \quad Q_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}(x, y, z) dz;$$

- Vecteur plan,  $\tilde{\tau}^{i,i+1}$ , d'effort intérieur de cisaillement à l'interface i, i+1:

$$(II.1.4) \quad \tau_{\alpha}^{i,i+1} = \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_i^+) = \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_{i+1}^-);$$

Remarque: Dans ce qui précède  $\tilde{\tau}^{i,i+1}$  est défini pour i variant de 1 à n-1 (les interfaces). Cependant il est commode de noter:

$\tilde{\tau}^{0,1}$  l'effort extérieur de cisaillement sur la face inférieure de la couche N°1

et

$\tilde{\tau}^{n,n+1}$  l'effort extérieur de cisaillement sur la face supérieure de la couche N°n

Bien évidemment  $\tilde{\tau}^{0,1}$  et  $\tilde{\tau}^{n,n+1}$  sont alors des données. Si nous notons  $T_{\alpha}^{-}$  (respectivement  $T_{\alpha}^{+}$ )  $\alpha \in \{1, 2\}$  la composante suivant  $\alpha$  du vecteur contrainte imposé sur la face externe inférieure (respectivement supérieure) du multicouche, nous avons:

$$(II.1.6) \quad \tau_{\alpha}^{0,1}(x, y) = -T_{\alpha}^{-}(x, y) \text{ respectivement } \tau_{\alpha}^{n,n+1}(x, y) = T_{\alpha}^{+}(x, y)$$

- Scalaire,  $v^{i,i+1}$ , d'effort intérieur d'arrachement à l'interface i, i+1:

$$(II.1.7) \quad v^{i,i+1} = \sigma_{33}(x, y, h_i^+) = \sigma_{33}(x, y, h_{i+1}^-);$$

Remarque: Dans ce qui précède  $v^{i,i+1}$  est défini pour i variant de 1 à n-1 (les interfaces). Cependant il est commode comme précédemment de noter:

$v^{0,1}$  l'effort extérieur normal sur la face inférieure de la couche N°1

et

$v^{n,n+1}$  l'effort extérieur normal sur la face supérieur de la couche N°n

Ainsi, on définit :

$$(II.1.9) \quad v^{0,1}(x,y) = -T_3^-(x,y) \text{ et } v^{n,n+1}(x,y) = T_3^+(x,y)$$

où  $T_3^-$  (respectivement  $T_3^+$ ) est la composante normale du vecteur contrainte imposée sur la face externe inférieure (respectivement supérieure) du multicouche.

-Scaires  $N_3^i$  et  $M_3^i$  des moments d'ordre zéro et un de la contrainte normale au plan de la couche i :

$$(II.1.10) \quad \begin{cases} N_3^i(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{33}(x,y,z) dz \\ M_3^i(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) \sigma_{33}(x,y,z) dz \end{cases}$$

**MODELE M4\_7N**

Champs de contraintes 3D approchés du modèle M4\_7n:

$$(II.1.11) \quad \sigma_{\alpha\beta}^{a7n}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i^2}} M_{\alpha\beta}^i(x, y) P_1^i(z)$$

$$(II.1.12) \quad \begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{a7n}(x, y, z) &= Q_{\alpha}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) P_1^i(z) \\ &+ \left( Q_{\alpha}^i(x, y) - \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) \right) \frac{P_2^i(z)}{e^i} \end{aligned}$$

$$(II.1.13) \quad \begin{aligned} \sigma_{33}^{a7n}(x, y, z) &= N_3^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i^2}} M_3^i(x, y) P_1^i(z) \\ &+ \left( N_3^i(x, y) - \frac{e^i}{2} (v^{i,i+1}(x, y) + v^{i-1,i}(x, y)) \right) \frac{P_2^i(z)}{e^i} \\ &+ \left( \frac{60}{e^{i^2}} M_3^i(x, y) - 5(v^{i,i+1}(x, y) - v^{i-1,i}(x, y)) \right) P_3^i(z) \end{aligned}$$

Champs de déplacements généralisés du modèle M4\_7n:

$$(III.1.7) \quad U_{\alpha}^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_{\alpha}^*(x, y, z) dz$$

$$(III.1.8) \quad \Phi_{\alpha}^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12}{e^{i^2}} P_1^i(z) U_{\alpha}^*(x, y, z) dz$$

$$(III.1.11) \quad U_3^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_3^*(x, y, z) dz$$

$$(III.1.12) \quad \bar{U}_3^{i*}(x, y) = \frac{1}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z) U_3^*(x, y, z) dz$$

$$(III.1.13) \quad \hat{U}_3^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_2^i(z)}{e^i} U_3^*(x, y, z) dz$$



Champs de déformations généralisées du modèle M4\_7n:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}^i &= \frac{1}{2} \left( \tilde{\text{Grad}} \tilde{U}^{i+} + \tilde{\text{Grad}} \tilde{U}^i \right) \\
 \tilde{\chi}^i &= \frac{1}{2} \left( \tilde{\text{Grad}} \tilde{\Phi}^{i+} + \tilde{\text{Grad}} \tilde{\Phi}^i \right) \\
 \tilde{d}_{\Phi}^i &= \tilde{\Phi}^i + \tilde{\text{Grad}} \hat{U}_3^i + \tilde{\text{Grad}} U_3^i \\
 d_{M_3}^i &= -\frac{60}{e_i^2} \hat{U}_3^i \\
 d_{N_3}^i &= \frac{12}{e_i} \bar{U}_3^i \\
 \tilde{D}^{i,i+1} &= \left( \begin{array}{l} \tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i - \frac{e_i}{2} \left( \tilde{\Phi}^i + \tilde{\text{Grad}} \hat{U}_3^i \right) - \frac{e^{i+1}}{2} \left( \tilde{\Phi}^{i+1} + \tilde{\text{Grad}} \hat{U}_3^{i+1} \right) \\ + e^i \tilde{\text{Grad}} \bar{U}_3^i - e^{i+1} \tilde{\text{Grad}} \bar{U}_3^{i+1} \end{array} \right) \\
 D_v^{i,i+1} &= \left( -U_3^i + U_3^{i+1} - 6\bar{U}_3^i - 6\bar{U}_3^{i+1} + 5\hat{U}_3^i - 5\hat{U}_3^{i+1} \right)
 \end{aligned}
 \tag{III.1.20}$$

Equations d'équilibre du modèle M4\_7n:

$$\text{div} \tilde{N}^i(x, y) + \left( \tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y) \right) = 0 \text{ sur } \omega
 \tag{II.1.14}$$

$$\text{div} \tilde{Q}^i(x, y) + v^{i,i+1}(x, y) - v^{i-1,i}(x, y) = 0 \text{ sur } \omega
 \tag{II.1.15}$$

$$\text{div} \tilde{M}^i(x, y) + \frac{e_i}{2} \left( \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y) + \tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) \right) - \tilde{Q}^i(x, y) = 0 \text{ sur } \omega
 \tag{II.1.16}$$

$$M_3^i = \frac{e_i^3}{120} \text{div} \left( \tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i} \right) + \frac{e_i^2}{12} \left( v^{i,i+1} - v^{i-1,i} \right) - \frac{e_i^2}{60} \text{div} \tilde{Q}^i
 \tag{II.2.1}$$

$$N_3^i = \frac{e_i^2}{12} \text{div} \left( \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} \right) + \frac{e_i}{2} \left( v^{i,i+1} + v^{i-1,i} \right)
 \tag{II.2.2}$$

Conditions aux limites du modèle M4\_7n:

$$(III.1.23) \quad \begin{cases} \tilde{N}^i \cdot \underline{n} = \tilde{T}_d^i \\ \tilde{M}^i \cdot \underline{n} = \tilde{M}_d^i \\ \left( \tilde{Q}^i - \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot \underline{n} = \hat{Q}_{3d}^i \\ \tilde{Q}^i \cdot \underline{n} = Q_{3d}^i \\ e^i (\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \cdot \underline{n} = \bar{Q}_{3d}^i \end{cases}$$

où les données sont définies à partir des données 3D par:

$$(III.1.28) \quad \begin{cases} T_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_{\alpha}^d \cdot P_0^i(z) dz \\ M_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} e^i T_{\alpha}^d \cdot P_1^i(z) dz \\ Q_{3d}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d \cdot P_0^i(z) dz \\ \bar{Q}_{3d}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} 12 T_3^d \cdot P_1^i(z) dz \\ \hat{Q}_{3d}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} 5 T_3^d \cdot P_2^i(z) dz \end{cases}$$

Notons que les trois dernières conditions aux limites ne sont possibles que si les données vérifient la condition suivante:

$$(III.1.29) \quad \frac{Q_{3d}^i}{e^i} - \frac{\hat{Q}_{3d}^i}{e^i} + \frac{\bar{Q}_{3d}^i}{2e^i} = \frac{Q_{3d}^{i+1}}{e^{i+1}} - \frac{\hat{Q}_{3d}^{i+1}}{e^{i+1}} - \frac{\bar{Q}_{3d}^{i+1}}{2e^{i+1}}$$

Loi de comportement du modèle M4\_7n:

Cette loi est déduite de l'énergie élastique écrite en contrainte à partir des champs approchés.

$$(IV.1.5) \quad \varepsilon^i(x, y) = \frac{\partial W^{7n}}{\partial \tilde{N}^i} = \frac{\tilde{S}^i}{e^i} \cdot \tilde{N}^i(x, y) + \frac{\tilde{S}_3^i}{2e^i} N_3^i(x, y)$$

$$(IV.1.6) \quad \bar{\chi}^i(x, y) = \frac{\partial W^{7n}}{\partial \bar{M}^i} = \frac{12}{e^{i^3}} \bar{\bar{S}}^i : \bar{M}^i(x, y) + \frac{12}{2e^{i^3}} \bar{S}_3^i M_3^i(x, y)$$

$$(IV.1.7) \quad \bar{d}_Q^i(x, y) = \frac{\partial W^{7n}}{\partial \bar{Q}^i} = \left( \frac{6}{5} \bar{S}_Q^i \right) \cdot \bar{Q}^i - \left( \frac{1}{10} \right) \bar{S}_Q^i \cdot (\bar{\tau}^{i-1, i} + \bar{\tau}^{i, i+1})$$

$$(IV.1.8) \quad d_{N_3}^i(x, y) = \frac{\partial W^{7n}}{\partial N_3^i} = S_v^i \left( \frac{6}{5e^i} N_3^i - \frac{1}{10} (v^{i, i+1} + v^{i-1, i}) \right) + \frac{1}{2} \frac{\bar{S}_3^i}{e^i} : \bar{N}^i$$

$$(IV.1.9) \quad d_{M_3}^i(x, y) = \frac{\partial W^{7n}}{\partial M_3^i} = S_v^i \left( \frac{120}{7e^{i^3}} M_3^i - \frac{3}{7e^i} (v^{i, i+1} - v^{i-1, i}) \right) + \frac{6}{e^{i^3}} \bar{S}_3^i : \bar{M}^i$$

$$(IV.1.10) \quad \bar{D}^{i, i+1}(x, y) = \frac{\partial W^{7n}}{\partial \bar{\tau}^{i, i+1}} = -\frac{1}{10} \bar{S}_Q^i \cdot \bar{Q}^i - \frac{1}{10} \bar{S}_Q^{i+1} \cdot \bar{Q}^{i+1} + \left( \frac{-e^i}{30} \right) \bar{S}_Q^i \cdot \bar{\tau}^{i-1, i} \\ + \frac{2}{15} \left( e^i \bar{S}_Q^i + e^{i+1} \bar{S}_Q^{i+1} \right) \bar{\tau}^{i, i+1} + \left( \frac{-e^{i+1}}{30} \right) \bar{S}_Q^{i+1} \cdot \bar{\tau}^{i+1, i+2}$$

$$(IV.1.11) \quad D_3^{i, i+1}(x, y) = \frac{\partial W^{7n}}{\partial v^{i, i+1}} = S_v^i \left( -\frac{1}{10} \left( N_3^i - \frac{e^i}{2} (v^{i, i+1} + v^{i-1, i}) \right) \right) \\ + S_v^{i+1} \left( -\frac{1}{10} \left( N_3^{i+1} - \frac{e^{i+1}}{2} (v^{i+1, i+2} + v^{i, i+1}) \right) \right) \\ - \frac{5}{700} S_v^i \left( \frac{60}{e^i} M_3^i - 5e^i (v^{i, i+1} - v^{i-1, i}) \right) \\ + \frac{5}{700} S_v^{i+1} \left( \frac{60}{e^{i+1}} M_3^{i+1} - 5e^{i+1} (v^{i+1, i+2} - v^{i, i+1}) \right)$$

MODELE M4\_5N

Champs de contraintes 3D approchés du modèle M4\_5n:

L'approximation de  $\bar{\sigma}$  ci-dessous est déduit de la précédente en remplaçant  $N_3^i$  et  $M_3^i$  par leur expression tirée des équations d'équilibre (II.2.1) et (II.2.2).

$$(II.2.3) \quad \sigma_{\alpha\beta}^{a5n}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}} M_{\alpha\beta}^i(x, y) P_1^i(z)$$

$$(II.2.4) \quad \sigma_{\alpha 3}^{a5n}(x, y, z) = Q_{\alpha}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) P_1^i(z) \\ + \left( Q_{\alpha}^i(x, y) - \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) \right) \frac{P_2^i(z)}{e^i}$$

$$(II.2.5) \quad \sigma_{33}^{a5n}(x, y, z) = \left( \left( \frac{v^{i,i+1}(x, y) + v^{i-1,i}(x, y)}{2} \right) + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) \right) P_0^i(z) \\ + \left( -\frac{\operatorname{div} \tilde{Q}^i}{5} + \frac{e^i}{10} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) + (v^{i,i+1}(x, y) - v^{i-1,i}(x, y)) \right) P_1^i(z) \\ + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) P_2^i(z) \\ + \left( -\operatorname{div} \tilde{Q}^i + \frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) \right) P_3^i(z)$$

Champs de déplacements généralisés du modèle M4\_5n:

$$(III.1.7) \quad U_{\alpha}^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_{\alpha}^*(x, y, z) dz$$

$$(III.1.8) \quad \Phi_{\alpha}^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12}{e^{i2}} P_1^i(z) U_{\alpha}^*(x, y, z) dz$$

$$(III.1.11) \quad U_3^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_3^*(x, y, z) dz$$

Champs de déformations généralisées du modèle M4\_5n:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}^i &= \frac{1}{2} \left( \tilde{\text{Grad}} \tilde{U}^i + \tilde{\text{Grad}}^T \tilde{U}^i \right) \\
 \tilde{\chi}^i &= \frac{1}{2} \left( \tilde{\text{Grad}} \tilde{\Phi}^i + \tilde{\text{Grad}}^T \tilde{\Phi}^i \right) \\
 \tilde{d}_{\Phi}^i &= \tilde{\Phi}^i + \tilde{\text{Grad}} U_3^i \\
 \tilde{D}^{i,i+1} &= \left( \tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i - \frac{e^i}{2} \tilde{\Phi}^i - \frac{e^{i+1}}{2} \tilde{\Phi}^{i+1} \right) \\
 D_v^{i,i+1} &= \left( U_3^{i+1} - U_3^i \right)
 \end{aligned}
 \tag{III.2.8}$$

Equations d'équilibre du modèle M4\_5n:

$$\text{div} \tilde{N}^i(x, y) + \left( \tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y) \right) = 0 \text{ sur } \omega
 \tag{II.2.6}$$

$$\text{div} \tilde{Q}^i(x, y) + \left( v^{i,i+1}(x, y) - v^{i-1,i}(x, y) \right) = 0 \text{ sur } \omega
 \tag{II.2.7}$$

$$\text{div} \tilde{M}^i(x, y) + \frac{e_i}{2} \left( \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y) + \tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) \right) - \tilde{Q}^i(x, y) = 0 \text{ sur } \omega
 \tag{II.2.8}$$

Conditions aux limites du modèle M4\_5n:

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}^i \cdot \underline{n} &= \tilde{T}_d^i \\
 \tilde{M}^i \cdot \underline{n} &= \tilde{M}_d^i \\
 \tilde{Q}^i \cdot \underline{n} &= Q_{3d}^i
 \end{aligned}
 \tag{III.2.13}$$

Où les données sont définies à partir des données 3D par:

$$\begin{cases}
 T_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_{\alpha}^d \cdot P_0^i(z) dz \\
 M_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} e^i T_{\alpha}^d \cdot P_1^i(z) dz \\
 Q_{3d}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d \cdot P_0^i(z) dz
 \end{cases}
 \tag{III.2.12}$$

Loi de comportement du modèle M4\_5n:

Cette loi est déduite de l'énergie élastique écrite en contrainte à partir des champs approchés en négligeant:

- l'énergie entre les contraintes membranaires et les contraintes perpendiculaires aux couches. Cela revient en quelque sorte à négliger les effets Poisson dus au "pincement" des couches. Cette hypothèse est habituelle dans la plupart des théories de plaque;

- les termes en  $e^{i2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i})$  et les termes en  $e^{i3} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i})^2$  dans l'écriture de l'énergie des contraintes  $\sigma_{33}$  normales à la couche  $i$ . Cette simplification revient à approximer

$M_3^i$  par  $\frac{e^{i2}}{10}(v^{i,i+1} - v^{i-1,i})$  et  $N_3^i$  par  $\frac{e^i}{2}(v^{i,i+1} + v^{i-1,i})$ .

$$(IV.2.5) \quad \tilde{\varepsilon}^i(x, y) = \frac{\tilde{S}_i^i}{e^i} : \tilde{N}^i(x, y)$$

$$(IV.2.6) \quad \tilde{\chi}^i(x, y) = \frac{12}{e^{i3}} \tilde{S}_i^i : \tilde{M}^i(x, y)$$

$$(IV.2.7) \quad \tilde{d}_\Phi^i(x, y) = \left(\frac{6}{5e^i}\right) \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{Q}^i - \left(\frac{1}{10}\right) \tilde{S}_Q^i \cdot (\tilde{\tau}^{i-1,i} + \tilde{\tau}^{i,i+1})$$

$$(IV.2.8) \quad \begin{aligned} \tilde{D}^{i,i+1}(x, y) = & -\frac{1}{10} \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{Q}^i - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \tilde{Q}^{i+1} + \left(\frac{-e^i}{30}\right) \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{\tau}^{i-1,i} \\ & + \frac{2}{15} \left( e^i \tilde{S}_Q^i + e^{i+1} \tilde{S}_Q^{i+1} \right) \cdot \tilde{\tau}^{i,i+1} + \left(\frac{-e^{i+1}}{30}\right) \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \tilde{\tau}^{i+1,i+2} \end{aligned}$$

$$(IV.2.9) \quad D_3^{i,i+1}(x, y) = \frac{9}{70} e^i S_v^i v^{i-1,i} + \frac{13}{35} (e^i S_v^i + e^{i+1} S_v^{i+1}) v^{i,i+1} + \frac{9}{70} e^{i+1} S_v^{i+1} v^{i+1,i+2}$$

### MODELE M4\_3N PLAQUE

Champs de contraintes approchés 3D du modèle M4\_3nP:

L'approximation du champ de contrainte  $\bar{\sigma}$  3D ci-dessous est déduit de la précédente en remplaçant  $Q^i$  par une expression tirée de (II.2.8).

$$(II.3.2) \quad \sigma_{\alpha\beta}^{a3nP}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}} M_{\alpha\beta}^i(x, y) P_1^i(z)$$

$$(II.3.3) \quad \sigma_{\alpha 3}^{a3nP}(x, y, z) = \left( \frac{1}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i(x, y)}{e^i} \right) P_0^i(z) \\ + (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) P_1^i(z) + M_{\alpha\beta,\beta}^i(x, y) \frac{P_2^i(z)}{e^i}$$

$$(II.3.4) \quad \sigma_{33}^{a3nP}(x, y, z) = \left( \frac{v^{i,i+1}(x, y) + v^{i-1,i}(x, y)}{2} + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\bar{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \bar{\tau}^{i-1,i}(x, y)) \right) P_0^i(z) \\ + \left( -\frac{1}{5} \operatorname{div} \operatorname{div} \bar{M}^i + (v^{i,i+1}(x, y) - v^{i-1,i}(x, y)) \right) P_1^i(z) \\ + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\bar{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \bar{\tau}^{i-1,i}(x, y)) P_2^i(z) - \operatorname{div} \operatorname{div} \bar{M}^i P_3^i(z)$$

Champs de déplacements généralisés du modèle M4\_3nP:

$$(III.1.7) \quad U_{\alpha}^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_{\alpha}^*(x, y, z) dz$$

$$(III.1.11) \quad U_3^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_3^*(x, y, z) dz$$

Champs de déformations généralisées du modèle M4\_3nP:

$$(III.3.8) \quad \bar{\epsilon}^i = \frac{1}{2} \left( \bar{\operatorname{Grad}} \tilde{U}^{i+1} + {}^T \bar{\operatorname{Grad}} \tilde{U}^i \right) \\ \bar{\chi}^i = -\bar{\operatorname{Grad}} \bar{\operatorname{Grad}} U_3^i \\ \bar{D}^{i,i+1} = \left( \tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i + \frac{e^i}{2} \bar{\operatorname{Grad}} U_3^i + \frac{e^{i+1}}{2} \bar{\operatorname{Grad}} U_3^{i+1} \right) \\ D_v^{i,i+1} = (U_3^{i+1} - U_3^i)$$

Equations d'équilibre du modèle M4\_3nP:

$$(II.3.5) \quad \operatorname{div} \tilde{N}^i(x, y) + \left( \tilde{\tau}^{i, i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1, i}(x, y) \right) = 0 \text{ sur } \omega$$

$$(II.3.6) \quad \operatorname{div} \left( \tilde{d} \tilde{M}^i(x, y) \right) + \operatorname{div} \left( \frac{e_i}{2} \left( \tilde{\tau}^{i-1, i}(x, y) + \tilde{\tau}^{i, i+1}(x, y) \right) \right) + \left( v^{i, i+1}(x, y) - v^{i-1, i}(x, y) \right) = 0 \text{ sur } \omega$$

Conditions aux limites du modèle M4\_3nP

$$(III.3.16) \quad \begin{aligned} \tilde{N}^i \cdot \underline{n} &= \tilde{T}_d^i \\ \underline{n} \cdot \tilde{M}^i \cdot \underline{n} &= \tilde{M}_d^i \cdot \underline{n} \\ \left( \tilde{d} \tilde{M}^i + \frac{e_i}{2} \left( \tilde{\tau}^{i, i+1} + \tilde{\tau}^{i-1, i} \right) \right) \cdot \underline{n} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \underline{t} \cdot \tilde{M}^i \cdot \underline{n} - \tilde{M}_d^i \cdot \underline{t} \right) &= Q_{3d}^i \end{aligned}$$

où les données sont définies à partir des données 3D par:

$$(III.3.11) \quad \left| \begin{aligned} \tilde{T}_d^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \tilde{T}^d \cdot P_0^i(z) dz \\ Q_{3d}^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d \cdot P_0^i(z) dz \\ \tilde{M}_d^i &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} e^i \tilde{T}^d \cdot P_1^i(z) dz \end{aligned} \right.$$

Notons la similitude de ces conditions aux limites par couche avec celles de Love-Kirchhoff.

Lois de comportement du modèle M4\_3nP:

Cette loi est déduite de l'énergie élastique écrite en contrainte à partir des champs approchés et en négligeant:

- l'énergie élastique de couplage entre les contraintes membranaires et les contraintes perpendiculaires aux couches;
- les termes en  $\operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i, i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1, i})$  dans l'écriture de l'énergie élastique des contraintes normales  $\sigma_{33}$ .



Ceci nous conduit à approcher  $\text{div div } \tilde{\tilde{M}}^i$  par  $-(v^{i,i+1*} - v^{i-1,i*})$ ;

- les termes en  $\text{div } \tilde{\tilde{M}}^i$  dans l'énergie élastique du cisaillement perpendiculaire au plan de couche. On peut dire aussi que l'on se contente d'une approximation affine des contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$  dans chaque couche lorsqu'il s'agit de déterminer cette partie de l'énergie élastique.

$$(IV.3.5) \quad \tilde{\tilde{\varepsilon}}^i(x, y) = \frac{\tilde{\tilde{S}}^i}{e^i} : \tilde{\tilde{N}}^i(x, y)$$

$$(IV.3.6) \quad \tilde{\tilde{\chi}}^i(x, y) = \frac{12}{e^{i3}} \tilde{\tilde{S}}^i : \tilde{\tilde{M}}^i(x, y)$$

$$(IV.3.7) \quad \tilde{D}^{i,i+1}(x, y) = \left( \frac{e^i}{6} \tilde{\tilde{S}}_Q^i \right) \cdot \tilde{\tau}^{i-1,i} + \frac{1}{3} \left( e^i \tilde{\tilde{S}}_Q^i + e^{i+1} \tilde{\tilde{S}}_Q^{i+1} \right) \cdot \tilde{\tau}^{i,i+1} + \left( \frac{e^{i+1}}{6} \tilde{\tilde{S}}_Q^{i+1} \right) \cdot \tilde{\tau}^{i+1,i+2}$$

$$(IV.3.8) \quad D_3^{i,i+1}(x, y) = \frac{9}{70} e^i S_v^i v^{i-1,i} + \frac{13}{35} \left( e^i S_v^i + e^{i+1} S_v^{i+1} \right) v^{i,i+1} + \frac{9}{70} e^{i+1} S_v^{i+1} v^{i+1,i+2}$$

MODELE M4\_2N+1 PLAQUE

Champs de contraintes 3D approchés du modèle M4\_(2n+1)P:

L'approximation de  $\bar{\sigma}$  ci-dessous se déduit de la précédente en remplaçant  $v^{i,i+1}$  par son expression tirée des équations (II.3.6) (somme de  $j=1$  à  $i$ ).

$$(II.4.3) \quad \sigma_{\alpha\beta}^{a(2n+1)P}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}} M_{\alpha\beta}^i(x, y) P_1^i(z)$$

$$(II.4.4) \quad \sigma_{\alpha 3}^{a(2n+1)P}(x, y, z) = \left( \frac{1}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i(x, y)}{e^i} \right) P_0^i(z) \\ + (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) P_1^i(z) + M_{\alpha\beta,\beta}^i(x, y) \frac{P_2^i(z)}{e^i}$$

$$(II.4.5) \quad \sigma_{33}^{a(2n+1)P}(x, y, z) = \left[ \begin{array}{l} \frac{T_3^+(x, y) - T_3^-(x, y)}{2} \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y)) + \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^j(x, y) \right] \\ - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y)) + \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^j(x, y) \right] \\ + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) \end{array} \right] P_0^i(z) \\ - \left( \frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) + \frac{6}{5} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^i(x, y) \right) P_1^i(z) \\ + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x, y)) P_2^i(z) - \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^i(x, y) P_3^i(z)$$

Champs des déplacements généralisés du modèle M4\_(2n+1)P:

$$(III.1.7) \quad U_{\alpha}^{i*}(x, y) = \int_{h_{\bar{i}}}^{h_{\bar{i}}^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_{\alpha}^*(x, y, z) dz \\ W_3(x, y) = \frac{U_3(x, y, h_n^+) + U_3(x, y, h_{\bar{i}}^-)}{2}$$

Champs de déformations généralisées du modèle M4<sub>(2n+1)P</sub>:

$$(III.4.8) \quad \begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^i &= \frac{1}{2} \left( \text{Grad } \tilde{U}^i + \text{Grad } \tilde{U}^i \right) \\ \tilde{\chi}^i &= -\text{Grad } \tilde{W}_3 \quad \left( \text{notons que } \tilde{\chi}^i = \tilde{\chi}^j \forall (i,j) \right) \\ \tilde{D}^{i,i+1} &= \left( \tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i + \frac{e^i + e^{i+1}}{2} \text{Grad } \tilde{W}_3 \right) \end{aligned}$$

Equations d'équilibre du modèle M4<sub>(2n+1)P</sub>:

$$(II.4.6) \quad \text{div } \tilde{N}^i(x,y) + \left( \tau^{i,i+1}(x,y) - \tau^{i-1,i}(x,y) \right) = 0 \text{ sur } \omega$$

$$(II.4.7) \quad \sum_{j=1}^n \left[ \frac{e_j}{2} \text{div}(\tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y) + \tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y)) + \text{div}(\tilde{\text{div}} \tilde{M}^j(x,y)) \right] + (T_3^-(x,y) + T_3^+(x,y)) = 0 \text{ sur } \omega$$

Conditions aux limites du modèle M4<sub>(2n+1)P</sub>:

$$(III.4.16) \quad \begin{aligned} \tilde{N}^i \cdot \underline{n} &= \tilde{T}_d^i \\ \underline{n} \cdot \sum_{i=1}^n \tilde{M}^i \cdot \underline{n} &= \tilde{M}_d \cdot \underline{n} \\ \sum_{i=1}^n \left( \tilde{\text{div}} \tilde{M}^i + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot \underline{n} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \underline{t} \cdot \sum_{i=1}^n \tilde{M}^i \cdot \underline{n} - \tilde{M}_d \cdot \underline{t} \right) - Q_{3d} &= 0 \end{aligned}$$

où les données sont définies à partir des données 3D par:

$$(III.4.11) \quad \left| \begin{aligned} \tilde{T}_d^i(x,y) &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \tilde{T}^d(x,y,z) \cdot P_0^i(z) dz \\ Q_{3d}(x,y) &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d(x,y,z) dz \\ \tilde{M}_d(x,y) &= \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \tilde{T}^d(x,y,z) \cdot e^i P_1^i(z) dz \end{aligned} \right.$$

Notez la similitude de ces conditions aux limites avec celles de Love-Kirchhoff.

Lois de Comportement du modèle M4<sub>(2n+1)P</sub>:

Cette loi est déduite de l'énergie élastique écrite en contrainte à partir des champs approchés et en négligeant:

- l'énergie élastique des contraintes normales  $w_v^{(2n+1)P^i*}$
- l'énergie élastique de couplage entre les contraintes membranaires et les contraintes normales  $w_3^{(2n+1)P^i*}$ .

$$(IV.4.3) \quad \varepsilon^i(x, y) = \frac{\tilde{S}_i^i}{e^i} : N^i(x, y)$$

$$(IV.4.4) \quad \chi^i(x, y) = \frac{12}{e^{i3}} \tilde{S}_i^i : M^i(x, y)$$

$$(IV.4.5) \quad \tilde{D}^{i,i+1}(x, y) = \left(\frac{e^i}{6}\right) \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{\tau}^{i-1,i} + \frac{1}{3} \left(e^i \tilde{S}_Q^i + e^{i+1} \tilde{S}_Q^{i+1}\right) \cdot \tilde{\tau}^{i,i+1} + \left(\frac{e^{i+1}}{6}\right) \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \tilde{\tau}^{i+1,i+2}$$

### MODELE M4\_3N MEMBRANE

Champs de contraintes 3D approchés du modèle M4\_3nM:

L'approximation de  $\bar{\sigma}$  ci-dessous se déduit du modèle M4\_3nM en négligeant la contribution des moments de flexion propre des couches  $\tilde{M}^i$ .

$$(II.5.1) \quad \bar{\sigma}^{a3nM}(x, y, z) = \bar{N}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i}$$

$$(II.5.2) \quad \sigma_{\alpha 3}^{a3nM}(x, y, z) = \frac{1}{2} \left( \tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y) \right) P_0^i(z) + \left( \tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y) \right) P_1^i(z)$$

$$(II.5.3) \quad \sigma_{33}^{a3nM}(x, y, z) = \left( \frac{v^{i-1,i}(x, y) + v^{i,i+1}(x, y)}{2} + \frac{e^i}{12} \operatorname{div} \left( \tau^{i,i+1}(x, y) - \tau^{i-1,i}(x, y) \right) \right) P_0^i(z) \\ + \left( v^{i,i+1}(x, y) - v^{i-1,i}(x, y) \right) P_1^i(z) + \frac{e^i}{12} \operatorname{div} \left( \tau^{i,i+1}(x, y) - \tau^{i-1,i}(x, y) \right) P_2^i(z)$$

Champs de déplacements généralisés du modèle M4\_3nM:

$$(III.1.7) \quad U_{\alpha}^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_{\alpha}^*(x, y, z) dz$$

$$(III.1.11) \quad U_3^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_3^*(x, y, z) dz$$

Champs de déformations généralisées du modèle M4\_3nM:

$$(III.5.8) \quad \tilde{\epsilon}^i = \frac{1}{2} \left( \operatorname{Grad} \tilde{U}^i + \operatorname{Grad}^T \tilde{U}^i \right) \\ \tilde{D}^{i,i+1} = \left( \tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i + \frac{e^i}{2} \operatorname{Grad} U_3^i + \frac{e^{i+1}}{2} \operatorname{Grad} U_3^{i+1} \right) \\ D_v^{i,i+1} = \left( U_3^{i+1} - U_3^i \right)$$

Equations d'équilibre du modèle M4\_3nM:

$$(II.5.5) \quad \operatorname{div} \tilde{N}^i(x, y) + \left( \tilde{\tau}^{i, i+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{i-1, i}(x, y) \right) = 0 \text{ sur } \omega$$

$$(II.5.6) \quad \frac{e^i}{2} \operatorname{div} \left( \tilde{\tau}^{i, i+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{i-1, i}(x, y) \right) + \left( v^{i, i+1}(x, y) - v^{i-1, i}(x, y) \right) = 0 \text{ sur } \omega$$

Conditions aux limites du modèle M4\_3nM:

$$(III.5.13) \quad \begin{cases} \tilde{N}^i \cdot \underline{n} = \tilde{T}_d^i \\ \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i, i+1} + \tilde{\tau}^{i-1, i}) \cdot \underline{n} = Q_{3d}^i \end{cases}$$

où les données sont définies à partir des données 3D par:

$$(III.5.12) \quad \begin{cases} T_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_\alpha^d \cdot P_0^i(z) dz \\ Q_{3d}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d \cdot P_0^i(z) dz \end{cases}$$

Notez la condition nécessaire que doivent vérifier les données au bord:

$$(III.5.14) \quad \frac{\tilde{\tau}^{0,1} \cdot \underline{n}}{2} + (-1)^n \frac{\tilde{\tau}^{n, n+1} \cdot \underline{n}}{2} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{Q_{3d}^i}{e^i}$$

Loi de comportement du modèle M4\_3nM:

Cette loi est déduite de l'énergie élastique écrite en contrainte à partir des champs approchés et en négligeant:

- l'énergie élastique de couplage entre les contraintes membranaires  $\sigma_{\alpha\beta}$  et les contraintes normales  $\sigma_{33}$ ;

- les termes en  $\operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i, i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1, i})$  dans l'écriture de l'énergie élastique des contraintes normales  $\sigma_{33}$ .

$$(IV.5.5) \quad \tilde{\varepsilon}^i(x, y) = \frac{\tilde{S}^i}{e^i} : \tilde{N}^i(x, y)$$

$$(IV.5.6) \quad \tilde{D}^{i, i+1}(x, y) = \left( \frac{e^i}{6} \right) \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{\tau}^{i-1, i} + \frac{1}{3} \left( e^i \tilde{S}_Q^i + e^{i+1} \tilde{S}_Q^{i+1} \right) \cdot \tilde{\tau}^{i, i+1} + \left( \frac{e^{i+1}}{6} \right) \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \tilde{\tau}^{i+1, i+2}$$

$$(IV.5.7) \quad D_3^{i, i+1}(x, y) = \frac{e^i}{6} S_v^i v^{i-1, i} + \frac{e^i}{3} \left( e^i S_v^i + e^{i+1} S_v^{i+1} \right) v^{i, i+1} + \frac{e^i}{6} e^{i+1} S_v^{i+1} v^{i+1, i+2}$$

**MODELE M4\_2N+1 MEMBRANE**

Champs de contraintes 3D approchés du modèle M4\_(2n+1)M:

L'approximation de  $\bar{\sigma}$  ci-dessous se déduit de la précédente en remplaçant  $v^{i,i+1}$  par son expression tirée des équations (II.5.6) (somme de  $j=1$  à 6) ou de la manière équivalente en négligeant la contribution des moments de flexion propre des couches  $\left(\tilde{M}^i\right)$  dans le modèle M4\_(2n+1)P.

$$(II.6.1) \quad \sigma_{\alpha\beta}^{a(2n+1)M}(x,y,z) = N_{\alpha\beta}^i(x,y)P_0^i(z)$$

$$(II.6.2) \quad \sigma_{\alpha 3}^{a(2n+1)M}(x,y,z) = \frac{1}{2}(\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x,y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x,y))P_0^i(z) + (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x,y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x,y))P_1^i(z)$$

$$(II.6.3) \quad \sigma_{33}^{a(2n+1)M}(z) = \left[ \begin{array}{l} \frac{T_3^+(x,y) - T_3^-(x,y)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)) \right] \\ - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \frac{e^j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)) \right] \\ + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)) \end{array} \right] P_0^i(z) \\ - \frac{e^i}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y))P_1^i(z) + \frac{e^i}{12} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y))P_2^i(z)$$

Champs de déplacements généralisés du modèle M4\_(2n+1)M:

$$(III.1.7) \quad U_{\alpha}^{i*}(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_{\alpha}^*(x,y,z) dz \\ W_3(x,y) = \frac{U_3(x,y,h_n^+) + U_3(x,y,h_1^-)}{2}$$

Champ de déformations généralisées du modèle M4\_(2n+1)M:

$$(III.6.8) \quad \tilde{\varepsilon}^i = \frac{1}{2} \left( \operatorname{Grad} \tilde{U}^i + {}^T \operatorname{Grad} \tilde{U}^i \right) \\ \tilde{D}^{i,i+1} = \left( \tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i + \frac{e^i + e^{i+1}}{2} \operatorname{Grad} W_3 \right)$$

Equations d'équilibre du modèle M4\_(2n+1)M:

$$(II.6.4) \quad \tilde{\mathbf{N}}^i(x, y) + \left( \tau^{i, i+1}(x, y) - \tau^{i-1, i}(x, y) \right) = 0 \text{ sur } \omega$$

$$(II.6.5) \quad \sum_{j=1}^n \left[ \frac{e_j}{2} \operatorname{div}(\tilde{\tau}^{j-1, j}(x, y) + \tilde{\tau}^{j, j+1}(x, y)) \right] + (T_3^-(x, y) + T_3^+(x, y)) = 0 \text{ sur } \omega$$

Conditions aux limites du modèle M4\_(2n+1)M:

$$(III.6.14) \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{N}}^i \cdot \underline{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{T}}_d^i \\ \left( \sum_{i=1}^n \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i, i+1} + \tilde{\tau}^{i-1, i}) \right) \cdot \underline{\mathbf{n}} = Q_3^d \end{cases}$$

où les données sont définies à partir des données 3D:

$$(III.6.11) \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{T}}_d^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \tilde{\mathbf{T}}^d(x, y, z) \cdot P_0^i(z) dz \\ Q_3^d(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d(x, y, z) dz \end{cases}$$

Loi de comportement du modèle M4\_(2n+1)M:

Cette loi est déduite de l'énergie élastique écrite en contrainte à partir des champs approchés et en négligeant:

- l'énergie élastique de couplage entre les contraintes membranaires  $\sigma_{\alpha\beta}$  et les contraintes normales  $\sigma_{33}$ .
- les termes en  $\operatorname{div}(\tilde{\tau}^{i, i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1, i})$  dans l'écriture de l'énergie élastique des contraintes normales  $\sigma_{33}$ .

$$(IV.6.3) \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^i(x, y) = \frac{\tilde{\mathbf{S}}_i}{e^i} : \tilde{\mathbf{N}}^i(x, y);$$

$$(IV.6.4) \quad \tilde{\mathbf{D}}^{i, i+1}(x, y) = \left( \frac{e^i}{6} \right) \tilde{\mathbf{S}}_Q^i \cdot \tilde{\tau}^{i-1, i} + \frac{1}{3} \left( e^i \tilde{\mathbf{S}}_Q^i + e^{i+1} \tilde{\mathbf{S}}_Q^{i+1} \right) \cdot \tilde{\tau}^{i, i+1} + \left( \frac{e^{i+1}}{6} \right) \tilde{\mathbf{S}}_Q^{i+1} \cdot \tilde{\tau}^{i+1, i+2}$$



## MODELE DE LOVE-KIRCHHOFF

Champs de contraintes 3D approchés du modèle de Love-Kirchhoff:

L'approximation de  $\bar{\sigma}$  ci-dessous se déduit de celle du modèle M4<sub>(2n+1)P</sub> en remplaçant  $\tilde{\tau}^{i,i+1}$  par son expression tirée des équations (II.4.6) (somme de  $j=1$  à  $i$ ).

$$(II.7.3) \quad \sigma_{\alpha\beta}^{aLK}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^2} M_{\alpha\beta}^i(x, y) P_1^i(z)$$

$$(II.7.4) \quad \sigma_{\alpha 3}^{aLK}(x, y, z) = -N_{\alpha\beta, \beta}^i(x, y) P_1^i(z) + M_{\alpha\beta, \beta}^i(x, y) \frac{P_2^i(z)}{e^i} + \left( \frac{T_{\alpha}^+ - T_{\alpha}^-}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} N_{\alpha\beta, \beta}^j + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n N_{\alpha\beta, \beta}^j + \frac{M_{\alpha\beta, \beta}^i(x, y)}{e^i} \right) P_0^i(z)$$

$$(II.7.5) \quad \sigma_{33}^{aLK}(x, y, z) = \left[ \begin{array}{l} \frac{T_3^+(x, y) - T_3^-(x, y)}{2} - \frac{e^i}{12} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^i(x, y) \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=i+1}^n e^k \left[ \begin{array}{l} \operatorname{div} \left( \frac{\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-}{2} \right) + \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^k(x, y) \\ - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^j(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{j=k+1}^n \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^j(x, y) \end{array} \right] \\ - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-1} e^k \left[ \begin{array}{l} \operatorname{div} \left( \frac{\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-}{2} \right) + \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^k(x, y) \\ - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^j(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{j=k+1}^n \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^j(x, y) \end{array} \right] \end{array} \right] P_0^i(z) \\ - \left[ \begin{array}{l} \frac{6}{5} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^i(x, y) \\ + e^i \left( \operatorname{div} \left( \frac{\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-}{2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^j(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^j(x, y) \right) \end{array} \right] P_1^i(z) \\ - \frac{e^i}{12} \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{N}^i(x, y) P_2^i(z) - \operatorname{div} \operatorname{div} \tilde{M}^i(x, y) P_3^i(z)$$

Champ de déplacements généralisés du modèle de Love-Kirchhoff:

$$(III.7.7) \quad W_{\alpha}^* = \frac{U_{+\alpha}^n + U_{-\alpha}^l}{2} \quad \text{et} \quad W_3^* = \frac{U_{+3}^n + U_{-3}^l}{2}$$

Champs de déformations généralisées du modèle de Love-Kirchhoff:

$$(III.7.9) \quad \begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^i &= \text{Sym} \left( \text{Grad } \tilde{W} \right) - \left( \bar{h}_i - \frac{h_n^+ + h_l^-}{2} \right) \text{Grad Grad } W_3 \\ \tilde{\chi}^i &= -\text{Grad Grad } W_3 \end{aligned}$$

Equations d'équilibre du modèle de Love-Kirchhoff:

$$(II.7.7) \quad \text{div} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{N}^i \right) + \tilde{T}^+ + \tilde{T}^- = 0$$

$$(II.7.8) \quad \text{div div} \left( \sum_{j=1}^n \left( \tilde{M}^j + \left( \bar{h}_j - \frac{h_n^+ + h_l^-}{2} \right) \tilde{N}^j \right) \right) + T_3^+ + T_3^- + \left( \frac{h_n^+ - h_l^-}{2} \right) \text{div} (\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-) = 0$$

Conditions aux limites du modèle de Love-Kirchhoff:

$$(III.7.13) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \tilde{N}^i \cdot \underline{n} &= \tilde{Q}_d \\ \underline{n} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \left( \tilde{M}^i + \left( \bar{h}_i - \frac{h_n^+ + h_l^-}{2} \right) \tilde{N}^i \right) \right) \cdot \underline{n} &= \tilde{M}_d \cdot \underline{n} \\ \left( \text{div} \sum_{j=1}^n \left( \tilde{M}^j + \left( \bar{h}_j - \frac{h_n^+ + h_l^-}{2} \right) \tilde{N}^j \right) + \frac{h_n^+ - h_l^-}{2} (\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-) \right) \cdot \underline{n} \\ &\quad - Q_{3d} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \underline{t} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \tilde{M}^i + \left( \bar{h}_i - \frac{h_n^+ + h_l^-}{2} \right) \tilde{N}^i \right) \cdot \underline{n} - \tilde{M}_d \cdot \underline{t} \right) = 0 \end{aligned}$$

où les données sont définies à partir des données 3D par:

$$(III.7.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{Q}_d(x, y) = \int_{h_1^-}^{h_1^+} \bar{T}^d(x, y, z) dz \\ Q_{3d}(x, y) = \int_{h_1^-}^{h_1^+} T_3^d(x, y, z) dz \\ \tilde{M}_d(x, y) = \sum_{i=1}^n \int_{h_1^-}^{h_1^+} \tilde{T}^d(x, y, z) \left( z - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right) dz \end{array} \right.$$

Loi de comportement du modèle de Love-Kirchhoff:

Cette loi est déduite de l'énergie élastique écrite en contrainte à partir des champs approchés et en négligeant:

- l'énergie élastique de couplage entre les contraintes membranaires  $\sigma_{\alpha\beta}$  et les contraintes normales  $\sigma_{33}$ ;
- l'énergie élastique des contraintes normales  $\sigma_{33}$ ;
- les termes en  $\text{div } \tilde{M}^i$  dans l'énergie élastique du cisaillement perpendiculaire au plan de la couche.

Il est commode d'introduire les efforts intérieurs généralisés, les déformations intérieures généralisées et les notations classiques suivantes:

Effort membranaire total:

$$(IV.7.3) \quad \tilde{N} = \sum_{i=1}^n \tilde{N}^i$$

Moment de flexion total:

$$(IV.7.4) \quad \tilde{M} = \sum_{i=1}^n \left( \tilde{M}^i + \left( h_1^i - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right) \tilde{N}^i \right)$$

$$(IV.7.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\epsilon} = \text{Sym Grad } \tilde{W} \\ \tilde{\chi} = -\text{Grad Grad } W_3 \end{array} \right. ,$$

$$(IV.7.6) \quad \begin{cases} \overset{\sim}{A} = \sum_{i=1}^n e^i \left( \overset{\sim}{S}_i \right)^{-1} \\ \overset{\sim}{B} = \sum_{i=1}^n e^i \left( \bar{h}_i - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right) \left( \overset{\sim}{S}_i \right)^{-1} \\ \overset{\sim}{D} = \sum_{i=1}^n \left( e^i \left( \bar{h}_i - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right)^2 + \frac{e_i^3}{12} \right) \left( \overset{\sim}{S}_i \right)^{-1} \end{cases} ,$$

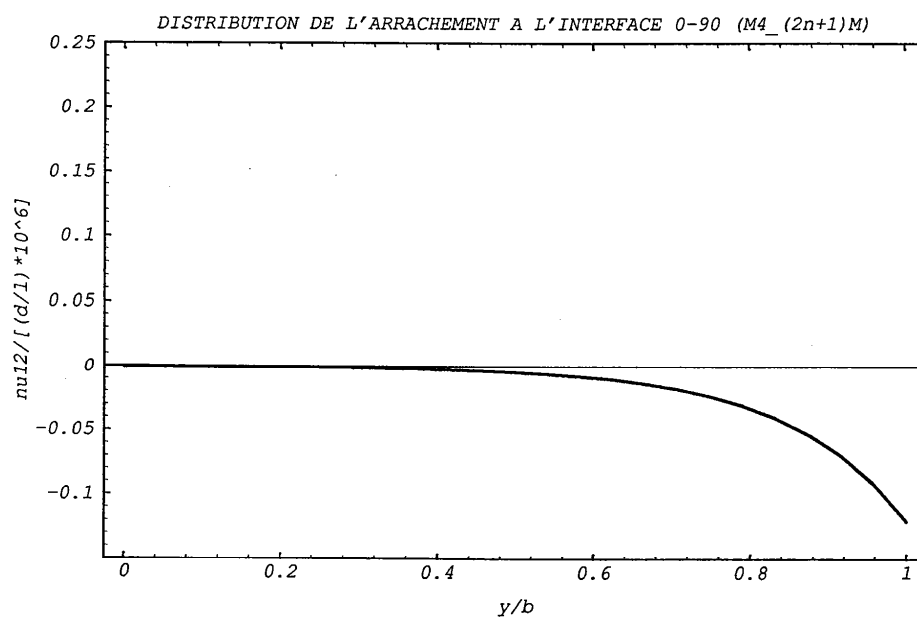
Le comportement s'écrit alors classiquement:

$$(IV.7.8) \quad \begin{cases} \overset{\sim}{N} = \overset{\sim}{A} : \overset{\sim}{\varepsilon} + \overset{\sim}{B} : \overset{\sim}{\chi} \\ \overset{\sim}{M} = \overset{\sim}{B} : \overset{\sim}{\varepsilon} + \overset{\sim}{D} : \overset{\sim}{\chi} \end{cases}$$

**ANNEXE IX**

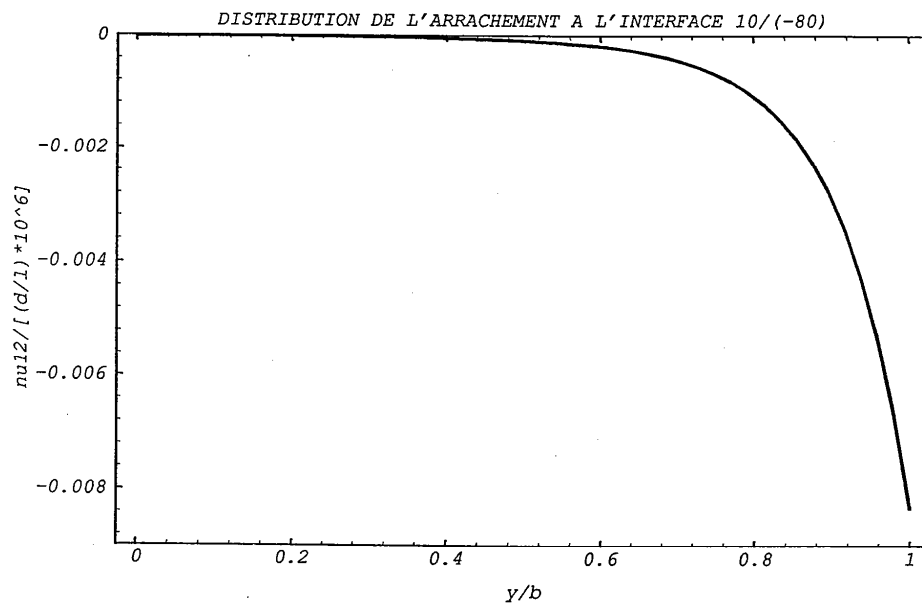
**DISTRIBUTION DES EFFORTS D'ARRACHEMENT EN Y  
DES EMPILEMENTS  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  EN TRACTION PAR LES  
MODELES M4\_5N ET M4\_(2N+1)M POUR LE MATERIAU  
DE [PAGANO, 1978]**

Courbes  $M4_{(2n+1)M}$  de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface (1, 2)



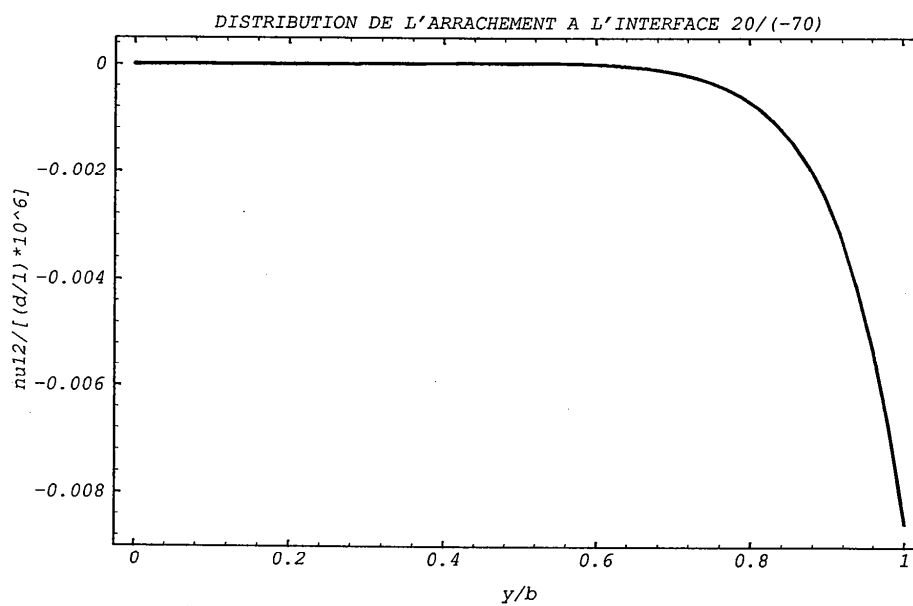
Annexe IX-I

Courbes  $M4_{(2n+1)M}$  de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface (1, 2)



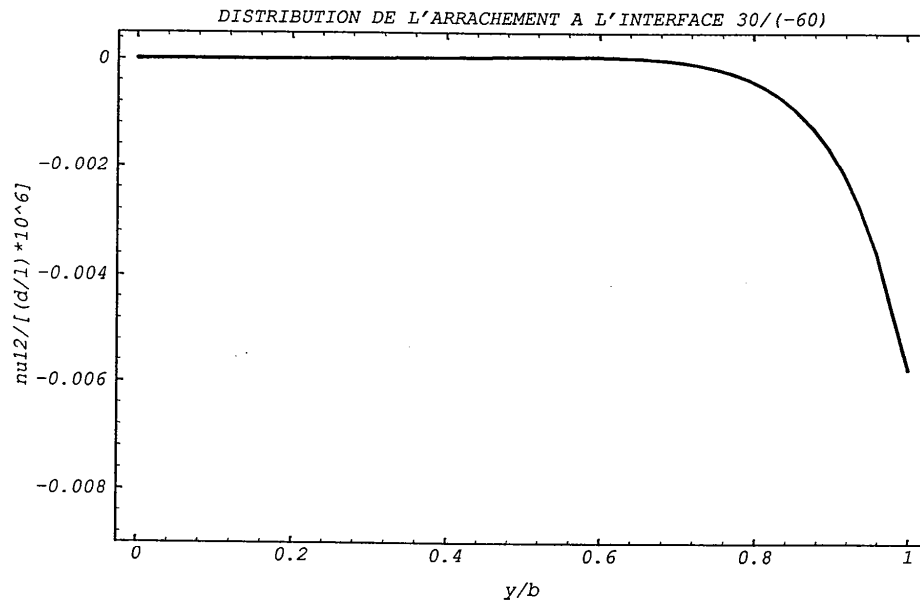
Annexe IX-2-

Courbes  $M4_{(2n+1)M}$  de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface (1, 2)



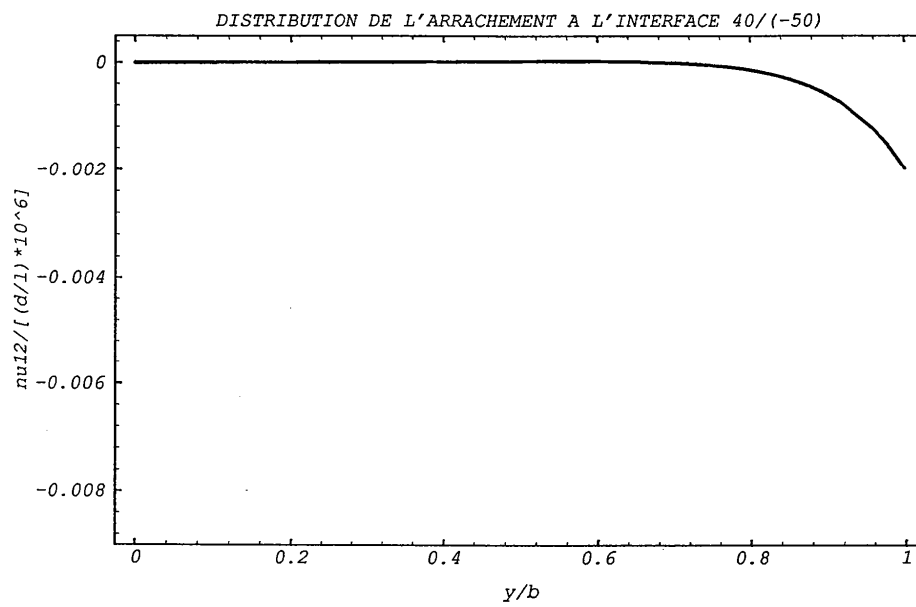


Courbes  $M4_{(2n+1)M}$  de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface (1, 2)



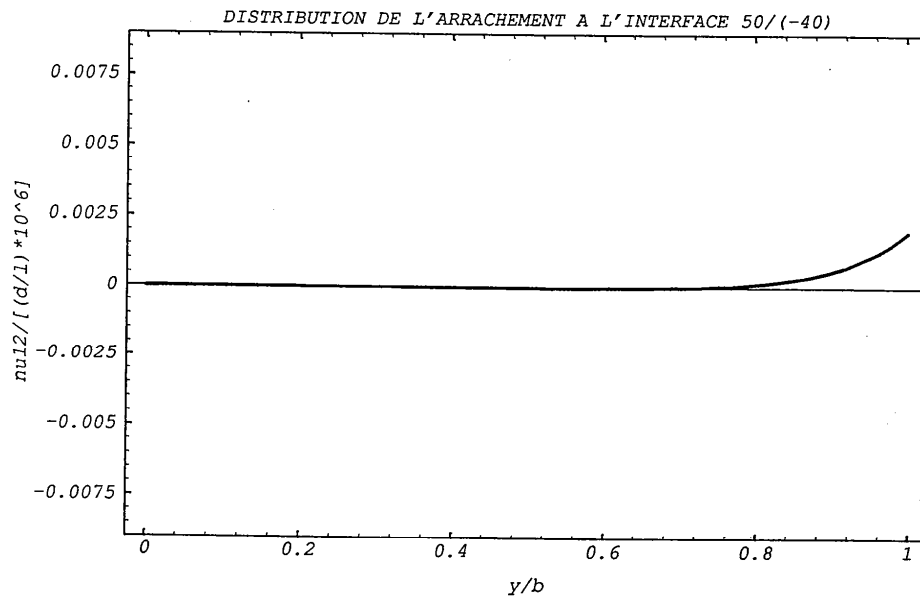
Annexe IX-4-

Courbes  $M4_{(2n+1)M}$  de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface (1, 2)

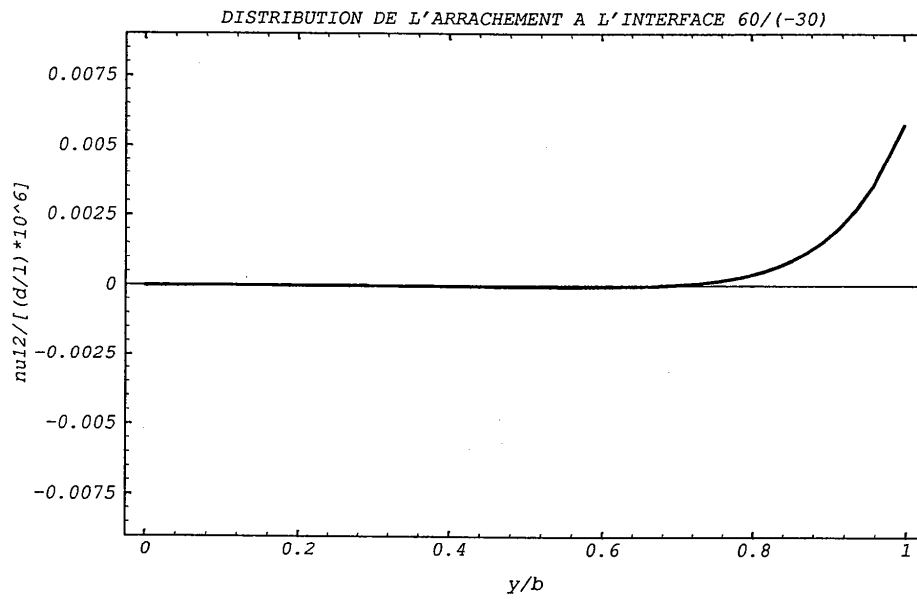


Annexe IX-5-

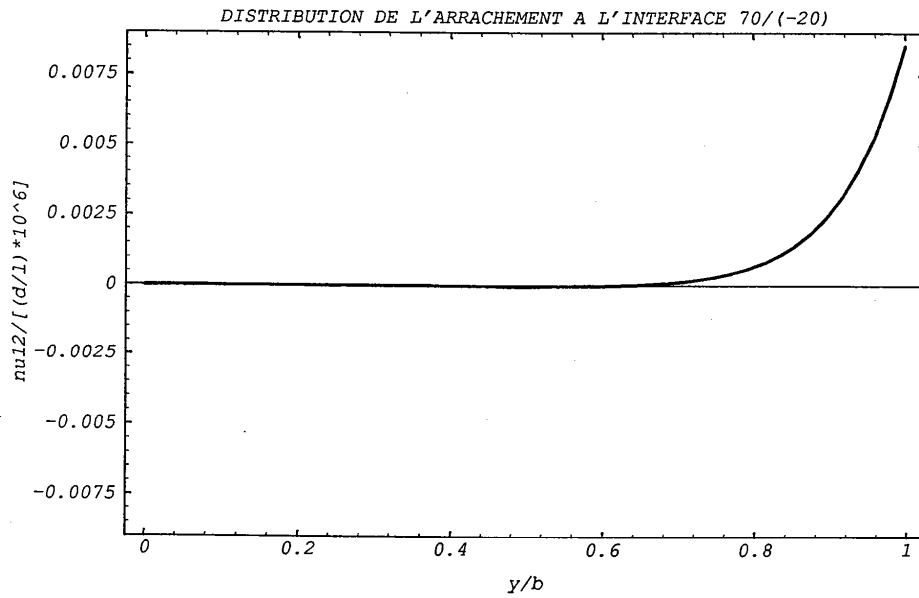
Courbes  $M4_{(2n+1)M}$  de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface (1, 2)



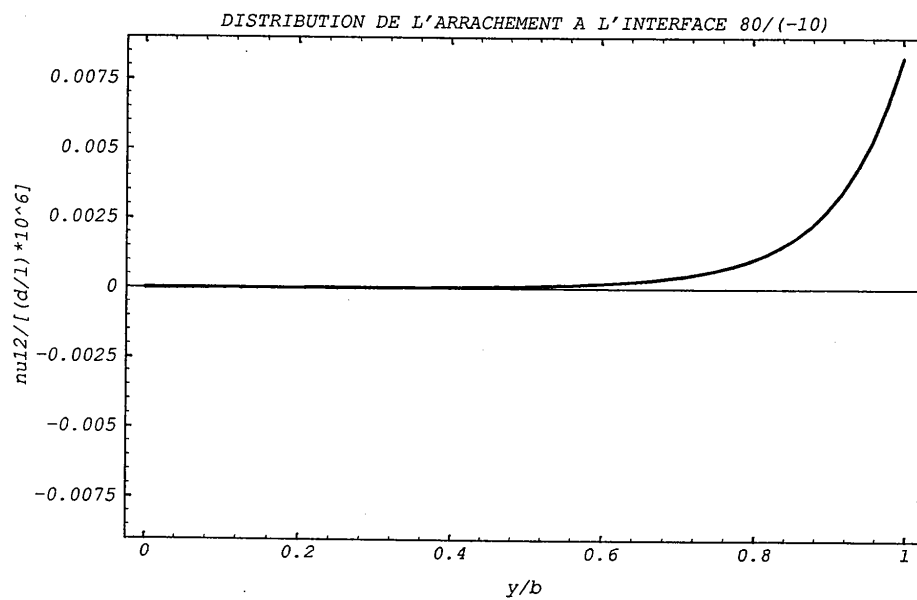
Courbes  $M4_{(2n+1)M}$  de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface (1, 2)



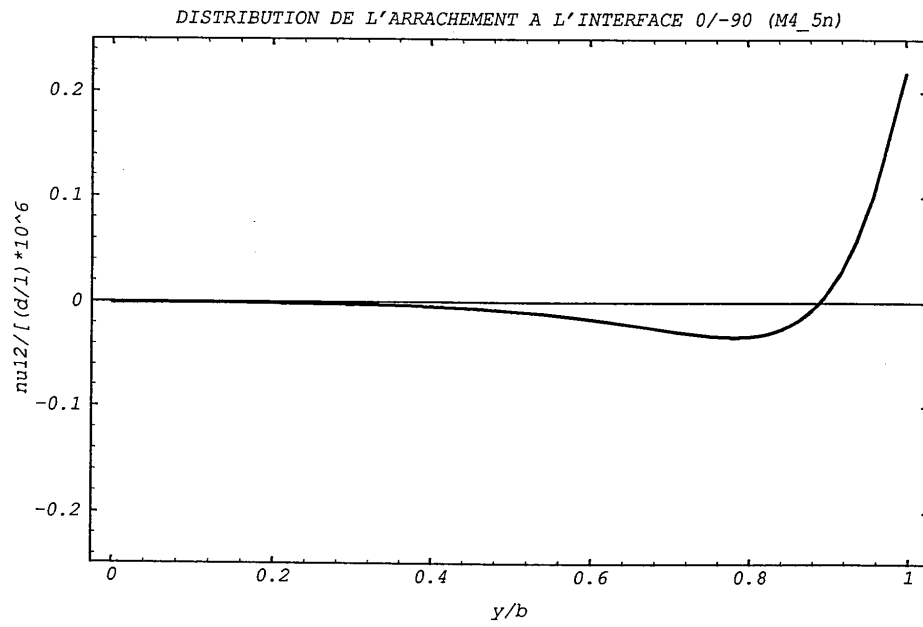
Courbes  $M4_{(2n+1)M}$  de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface (1, 2)



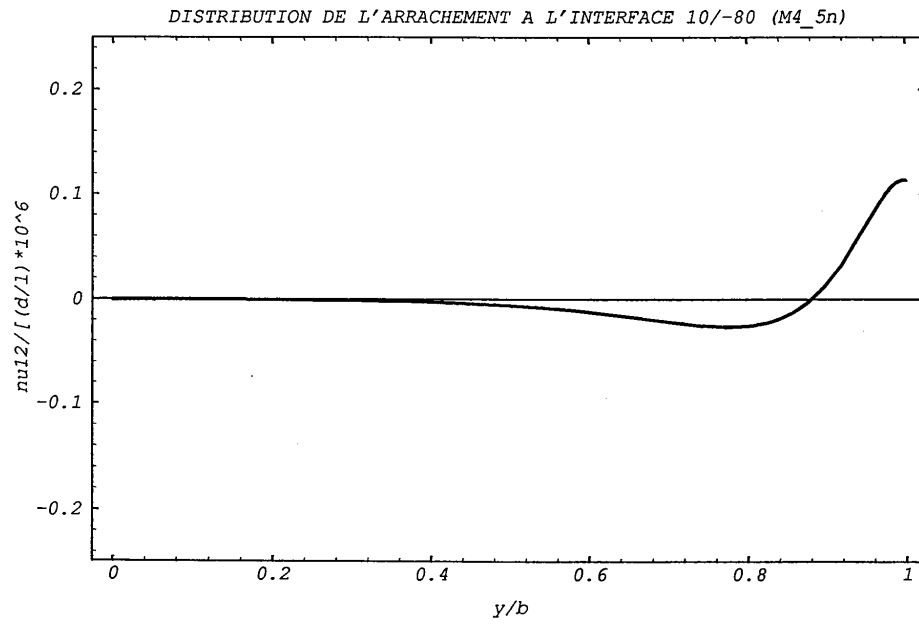
Courbes  $M4_{(2n+1)M}$  de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface (1, 2)



Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface  
(1, 2)

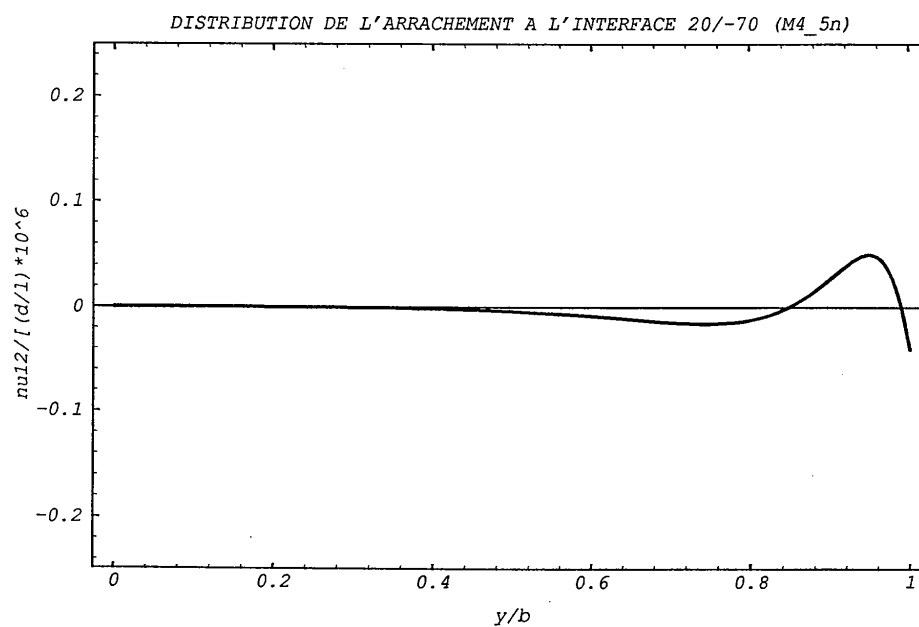


Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface  
(1, 2)

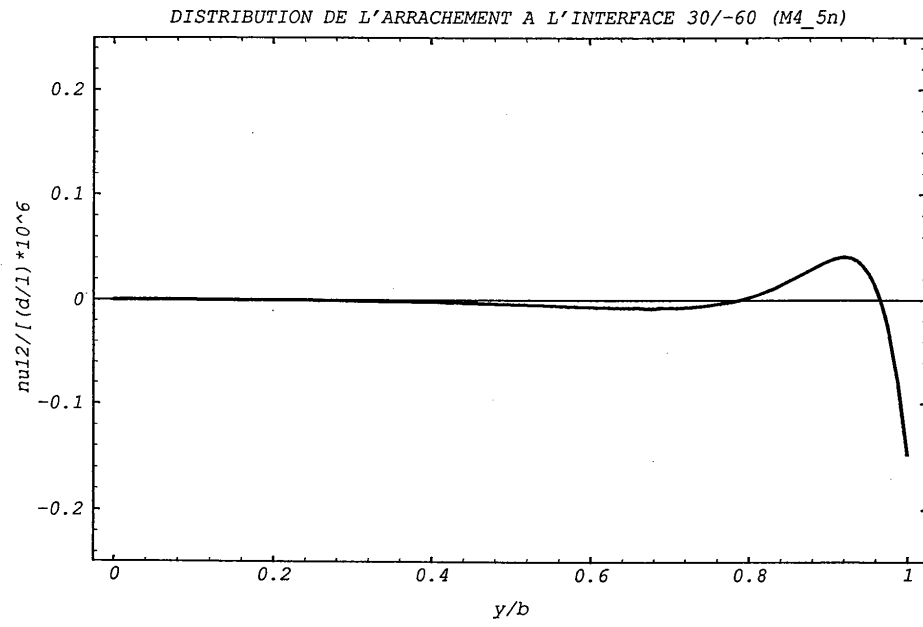




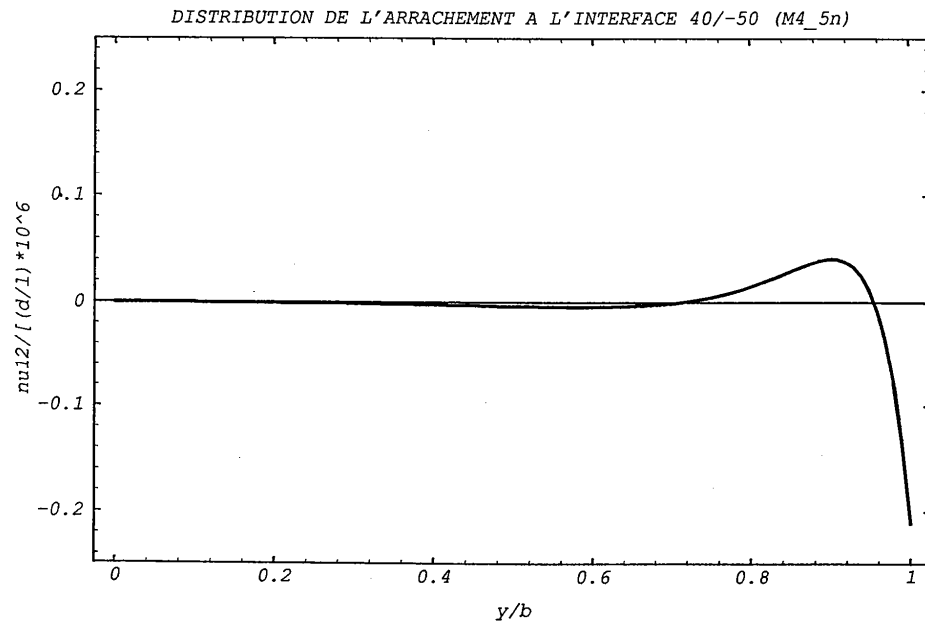
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_5$  en traction à l'interface  
(1, 2)



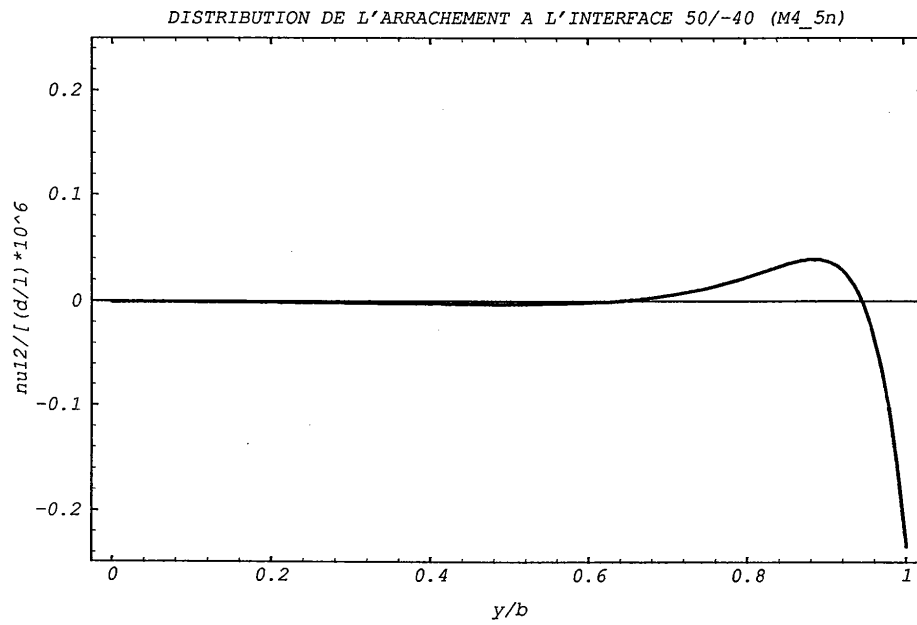
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface  
(1, 2)



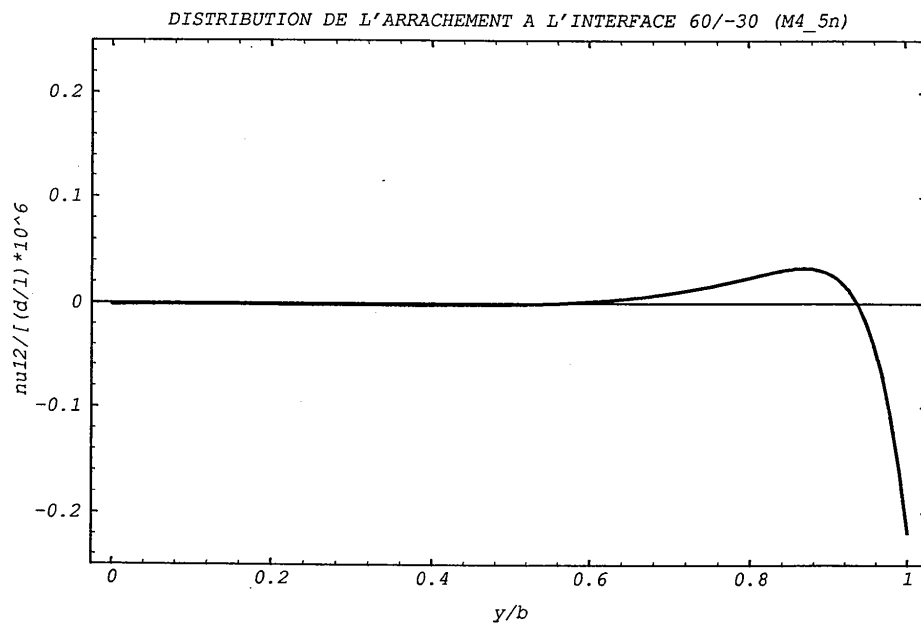
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface  
(1, 2)



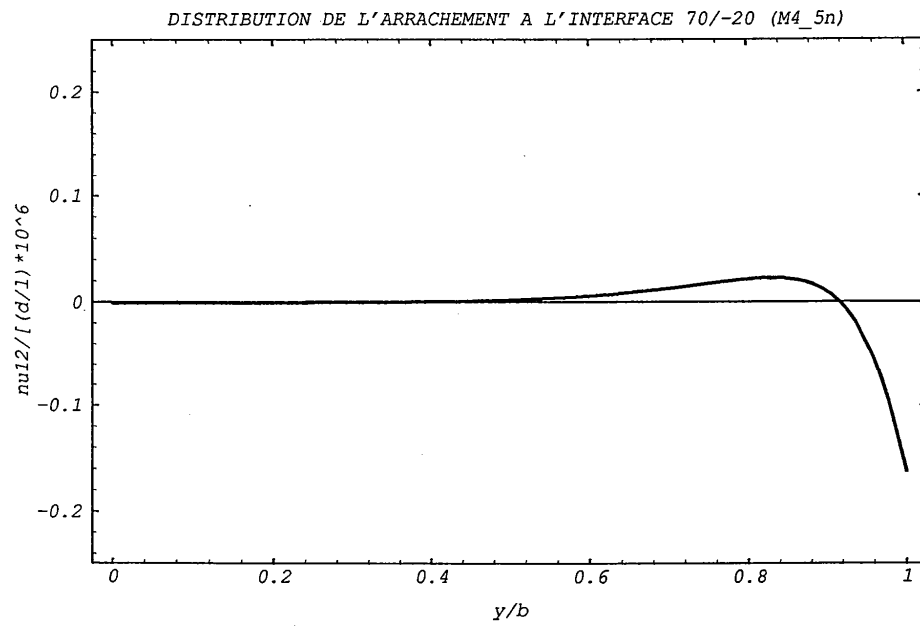
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_5$  en traction à l'interface  
(1, 2)



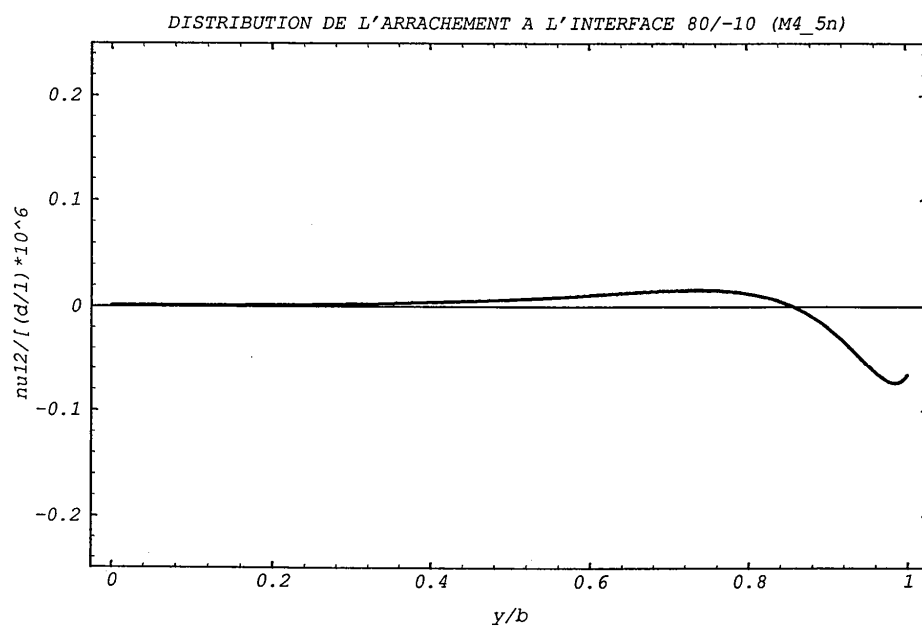
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface  
(1, 2)



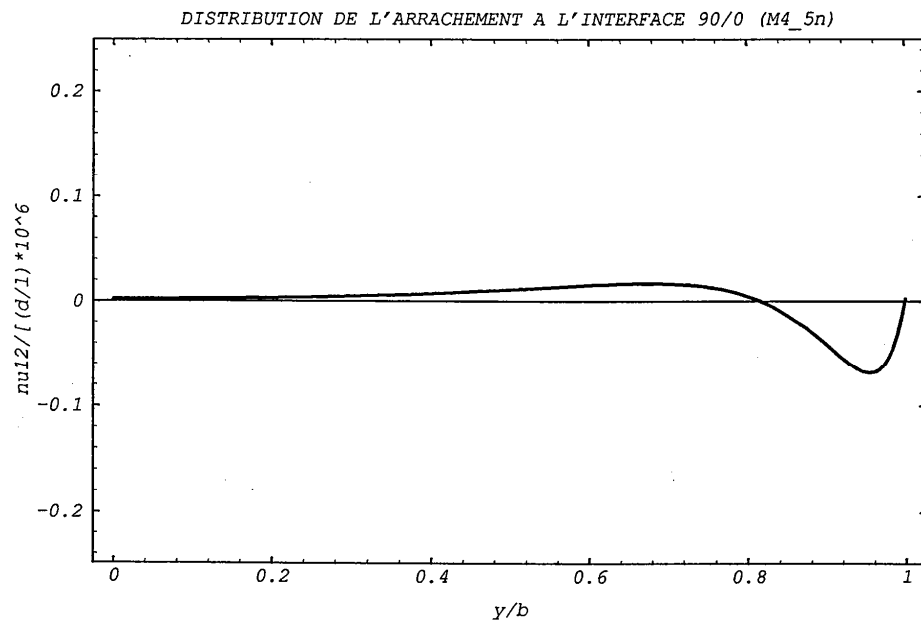
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface  
(1, 2)



Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_5$  en traction à l'interface  
(1, 2)

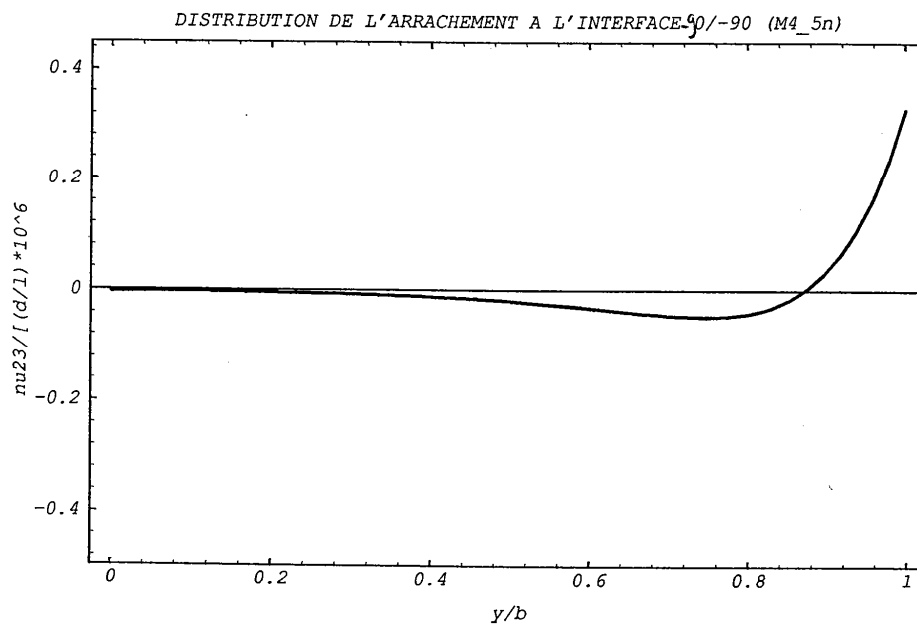


Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface  
(1, 2)

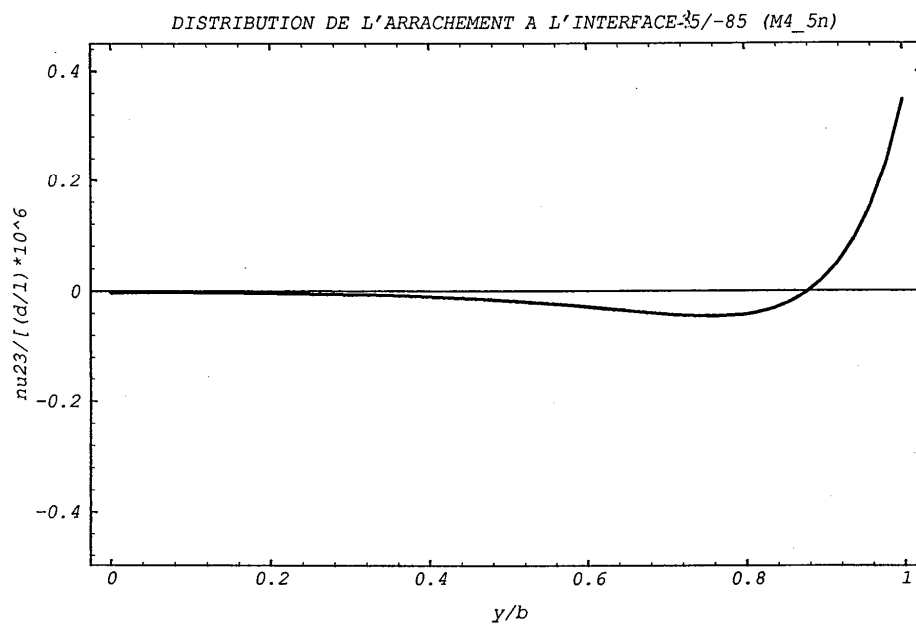




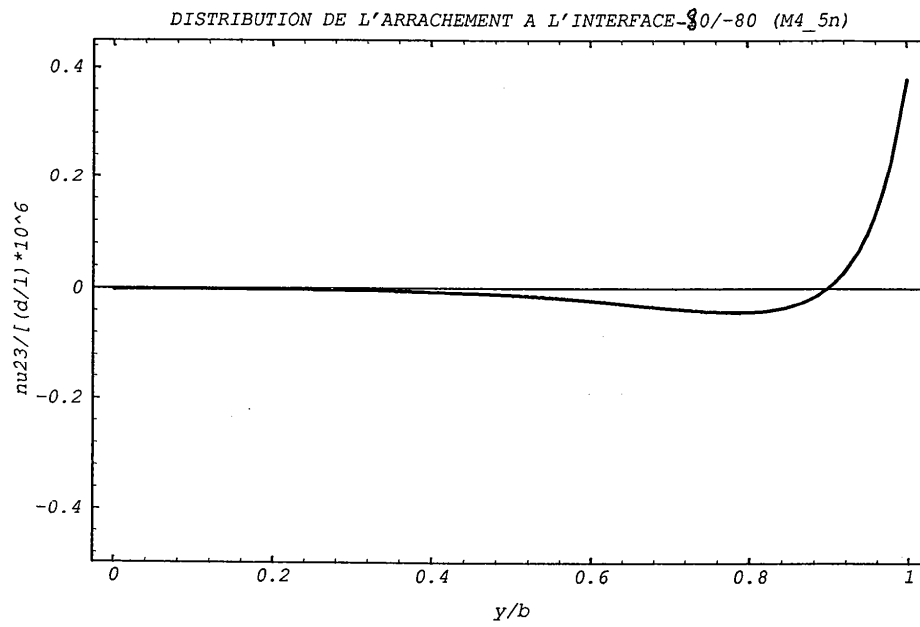
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_5$  en traction à l'interface  
(2.3)



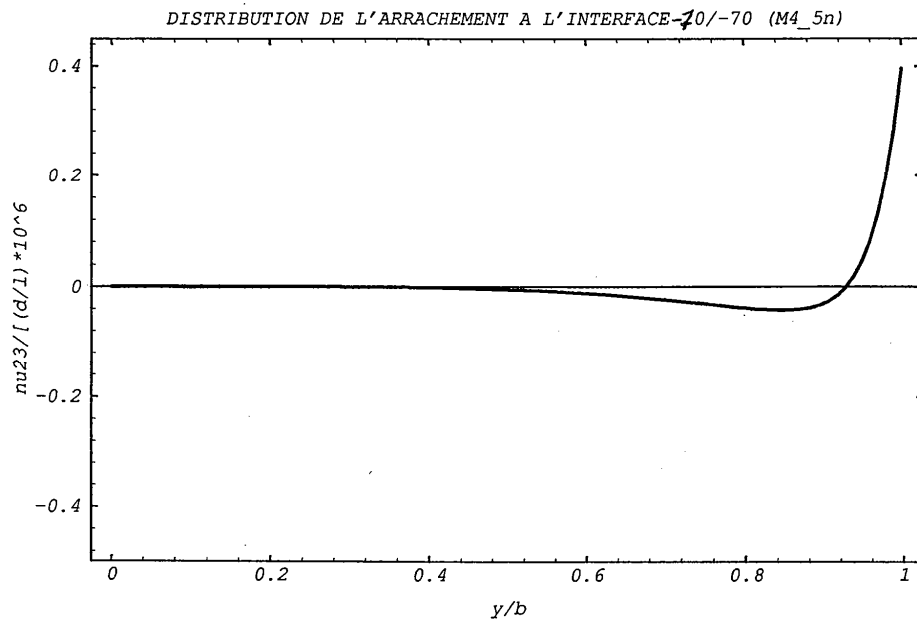
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_5$  en traction à l'interface  
(2.3)



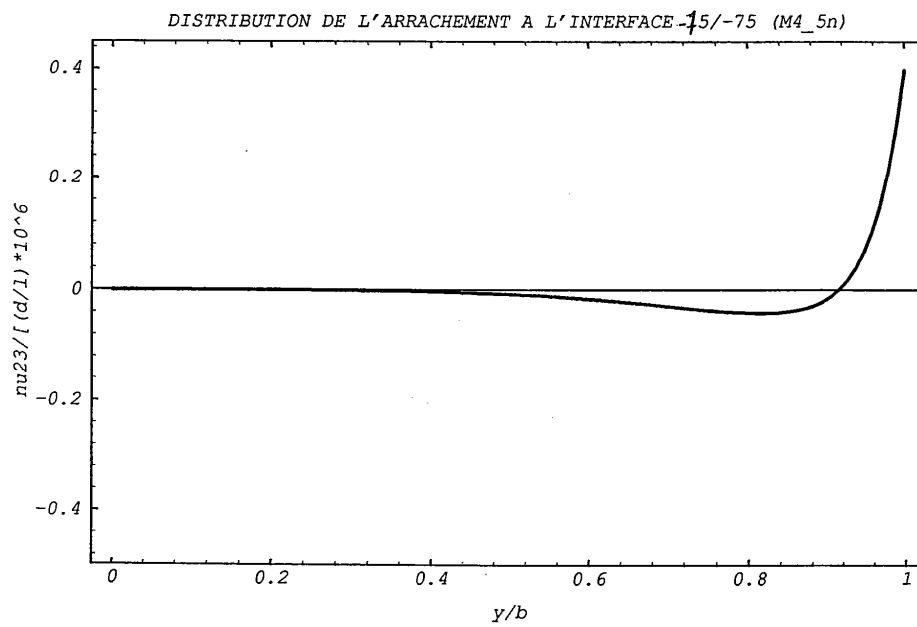
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface  
(2.3)



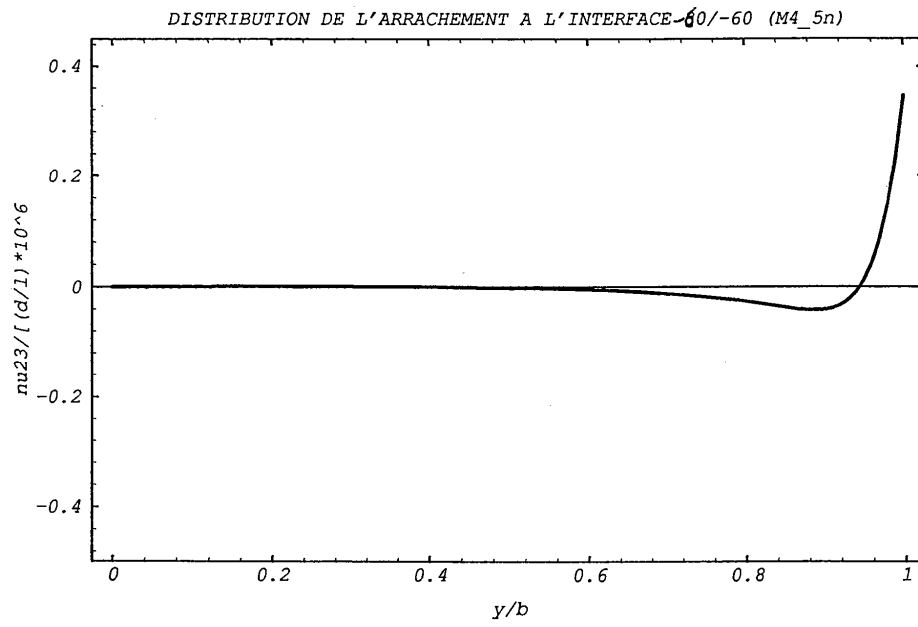
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface  
(2.3)



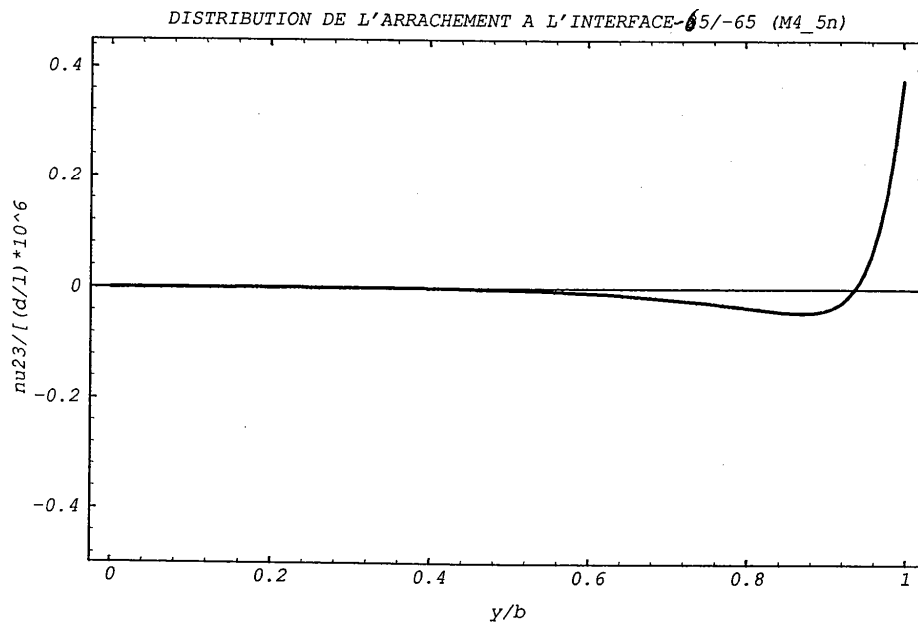
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_s$  en traction à l'interface  
(2.3)



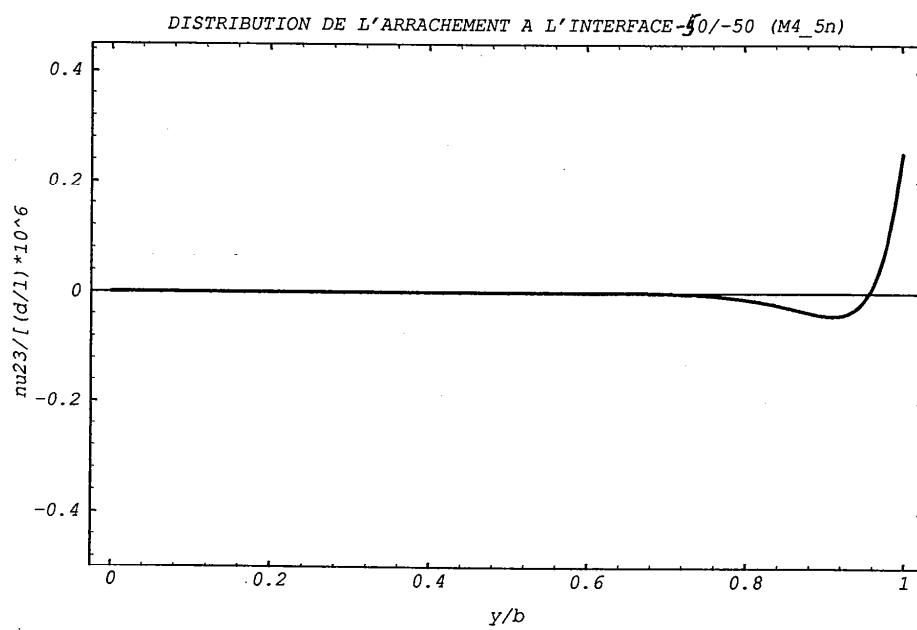
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_5$  en traction à l'interface  
(2.3)



Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_5$  en traction à l'interface  
(2.3)

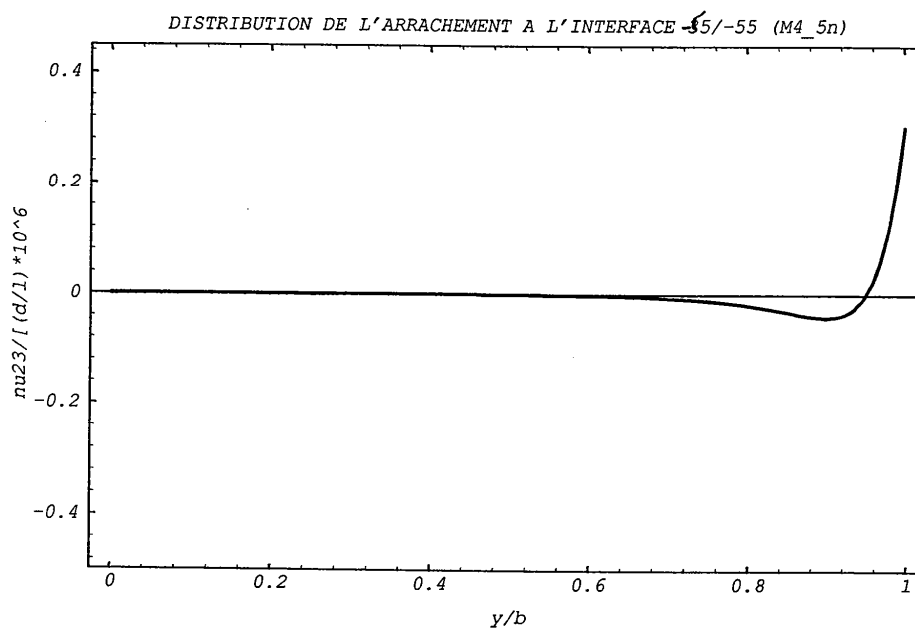


Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_5$  en traction à l'interface  
(2.3)

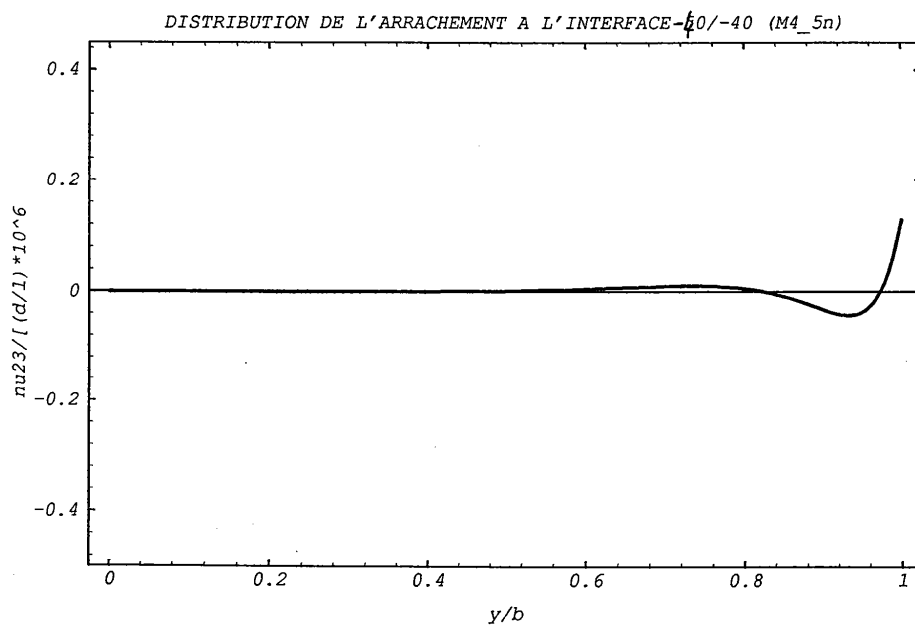




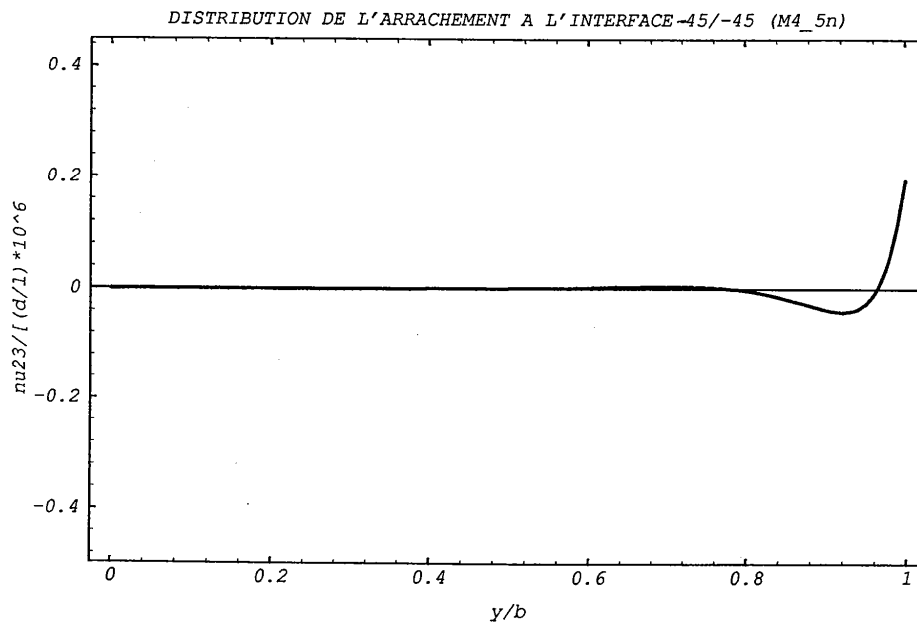
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_5$  en traction à l'interface  
(2.3)



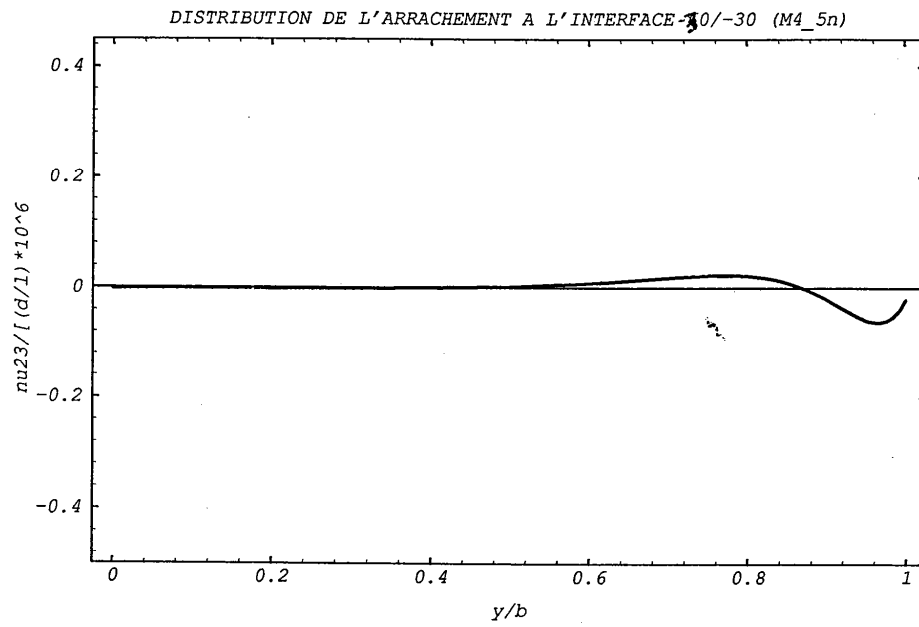
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface  
(2.3)



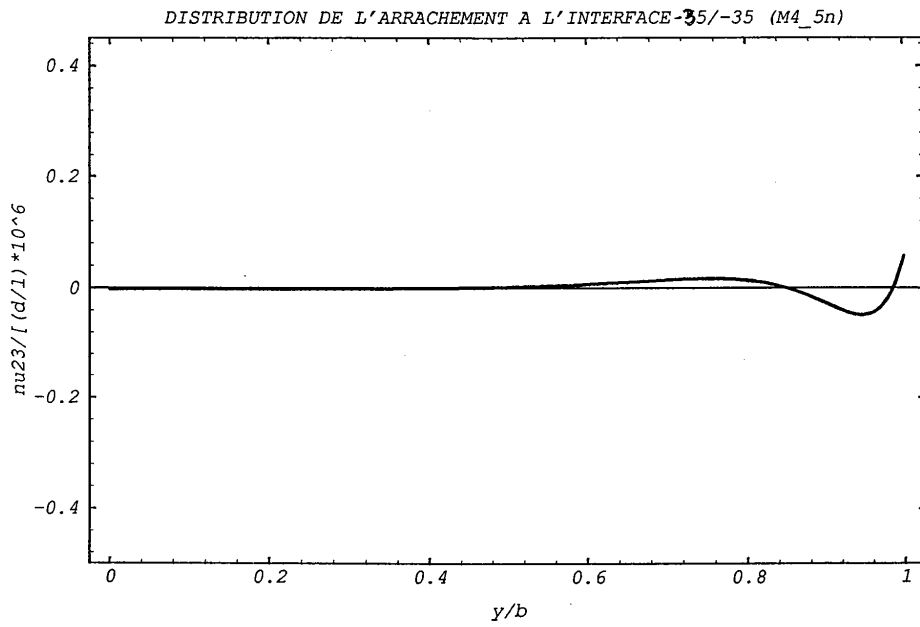
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface  
(2.3)



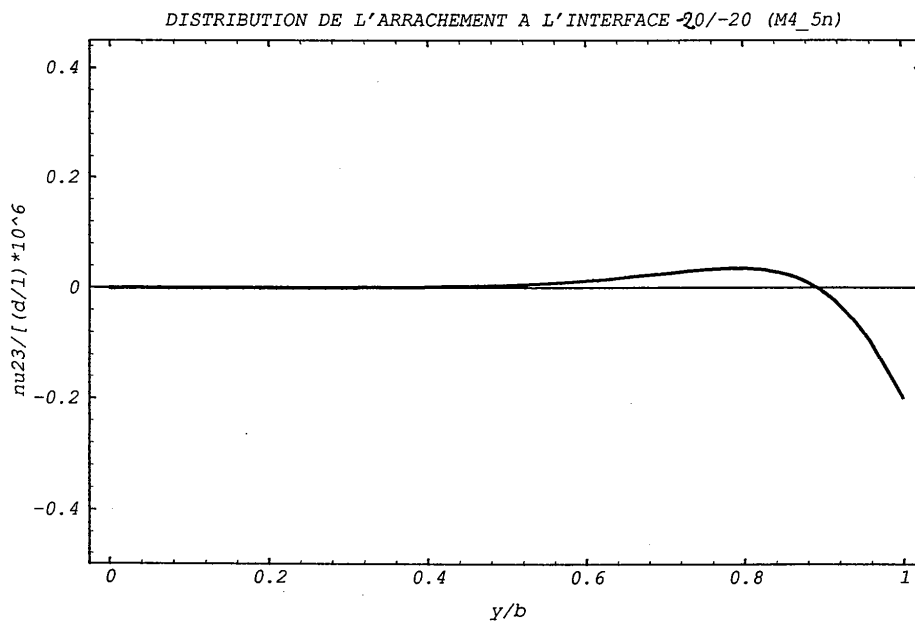
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface  
(2.3)



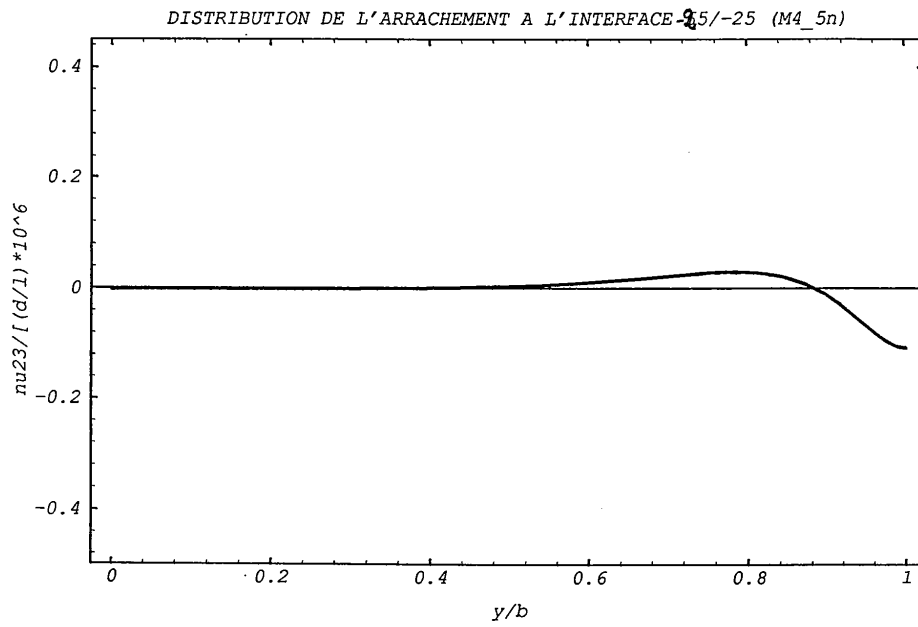
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface  
(2.3)



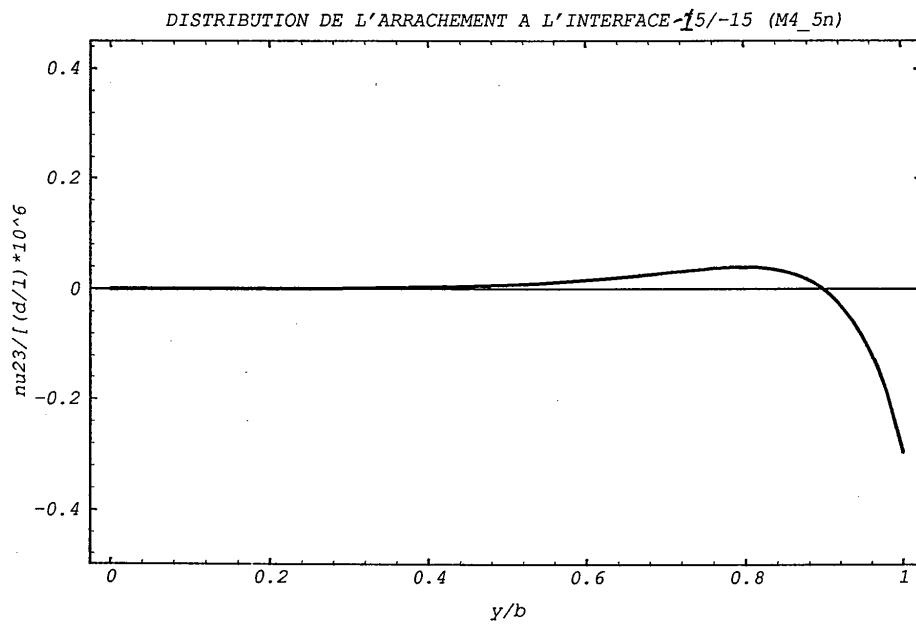
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_5$  en traction à l'interface  
(2.3)



Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface  
(2.3)

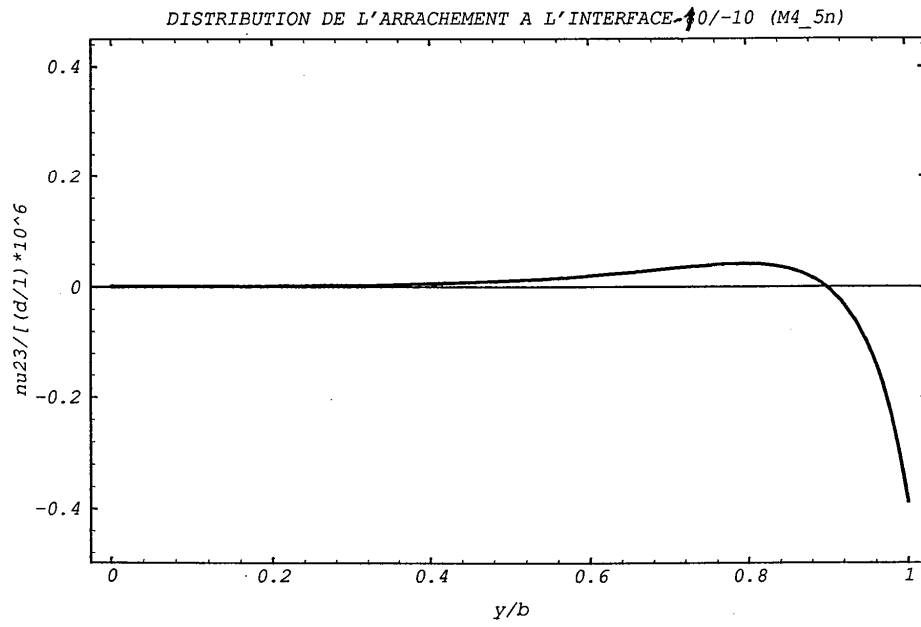


Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_5$  en traction à l'interface  
(2.3)

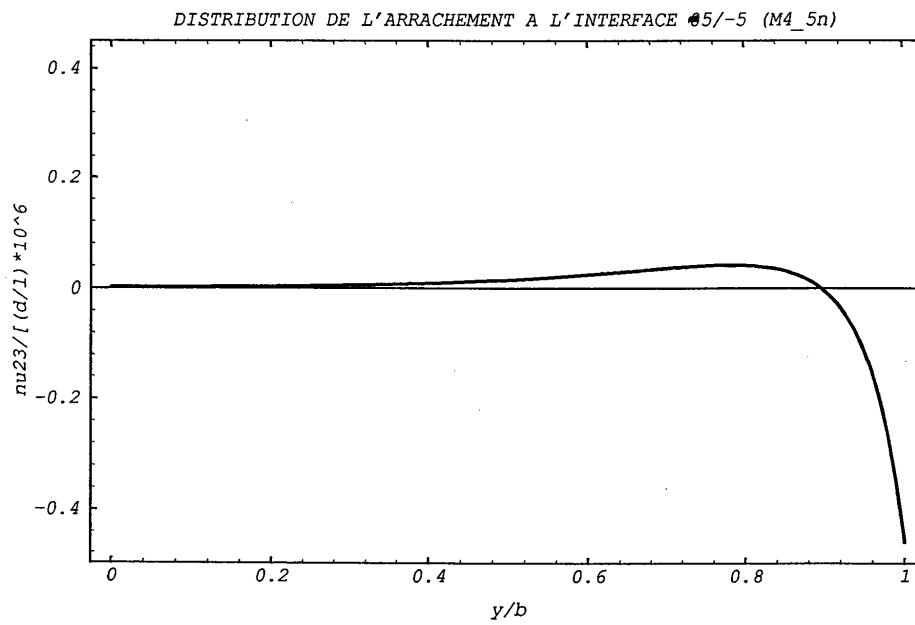




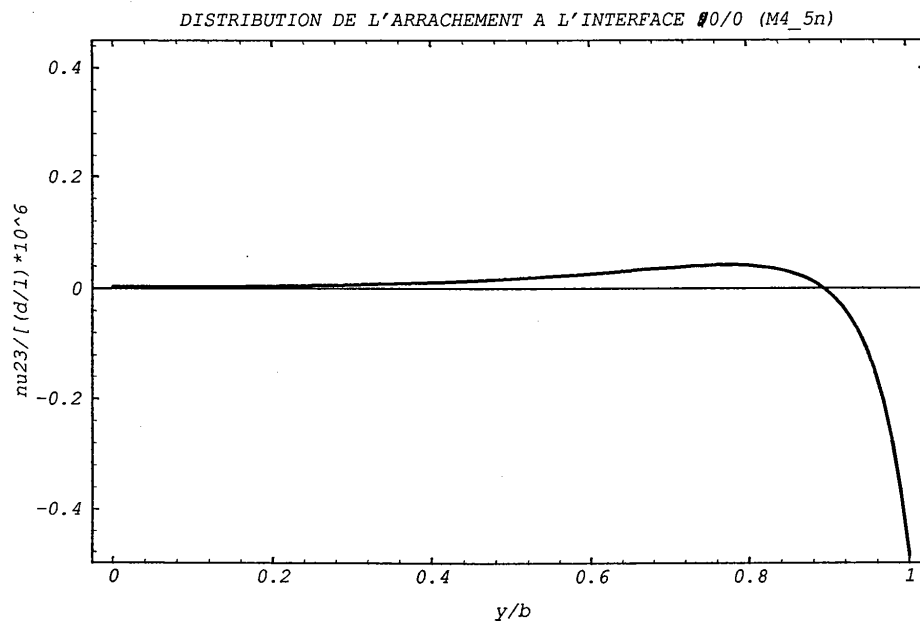
Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta = 90^\circ]$  en traction à l'interface  
(2.3)



Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_S$  en traction à l'interface  
(2.3)



Courbes M4\_5n de l'effort d'arrachement du quadricouche  $[\theta, \theta - 90^\circ]_5$  en traction à l'interface  
(2.3)



**ANNEXE X**

**COURBES DES EFFORTS INTERIEURS POUR**

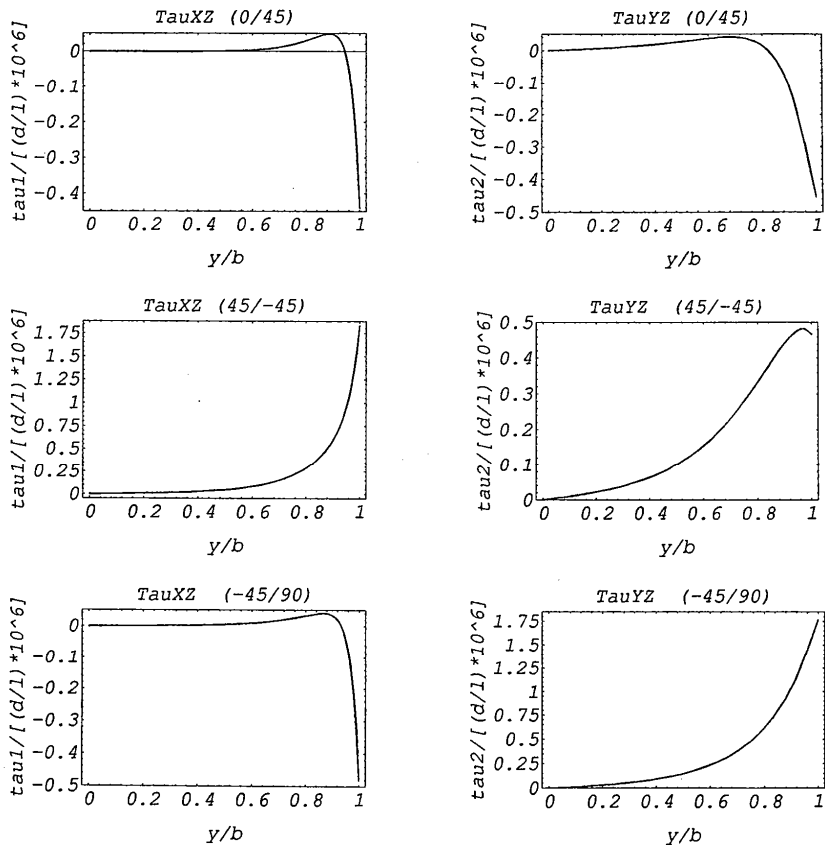
**LES MULTICOUCHES**

**$[0^\circ, 45^\circ, -45^\circ, 90^\circ]_s$ ,  $[45^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 90^\circ]_s$  et  $[90^\circ, 0^\circ, 45^\circ, -45^\circ]_s$**

**EN TRACTION PAR LE MODELES  $M4_{(2N+1)M}$  POUR LE**

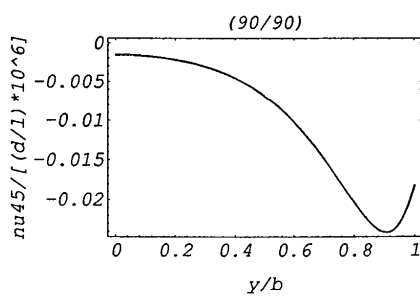
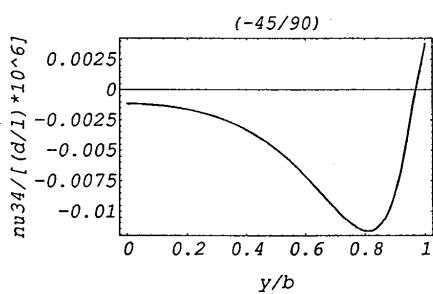
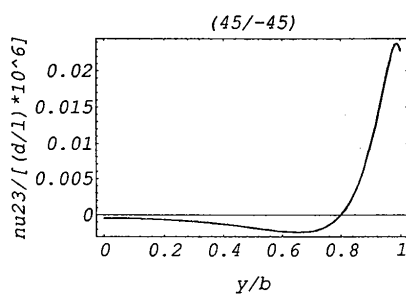
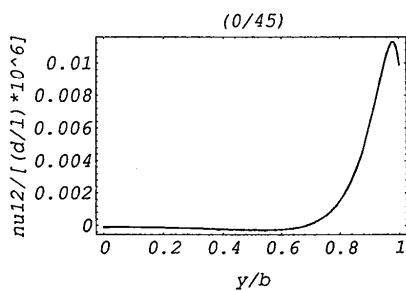
**MATÉRIAU DE [PAGANO, 1978]**

DISTRIBUTION DU CISAILLEMENT DE L'EMPILEMENT (0, 45, -45, 90) s

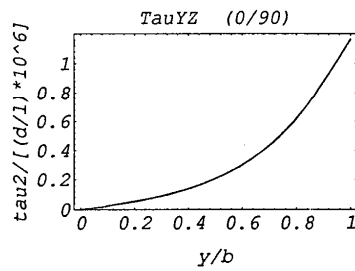
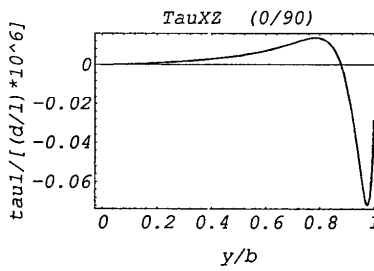
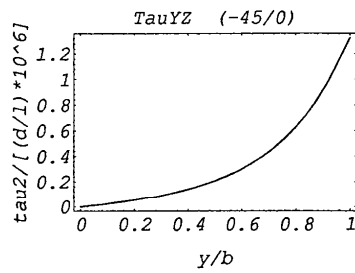
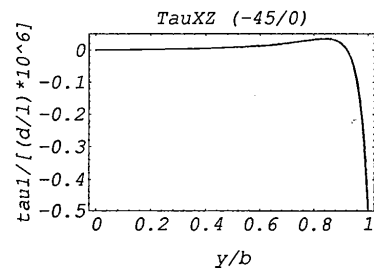
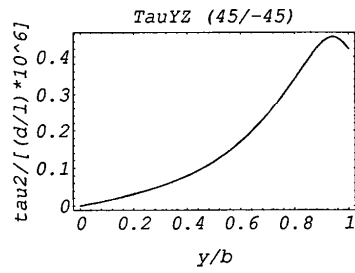
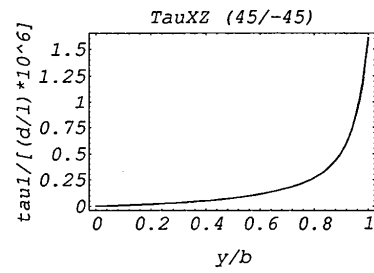


$$\frac{\tau_{yz_{0/45}}^{\max}}{\left(\frac{d}{l}\right) 10^6} = -0.45 \text{ psi}; \quad \frac{\tau_{yz_{45/-45}}^{\max}}{\left(\frac{d}{l}\right) 10^6} = 0.46 \text{ psi}; \quad \frac{\tau_{yz_{-45/90}}^{\max}}{\left(\frac{d}{l}\right) 10^6} = 1.77 \text{ psi}$$

DISTRIBUTION DE L'ARRACHEMENT DE L'EMPILEMENT (0, 45, -45, 90) s

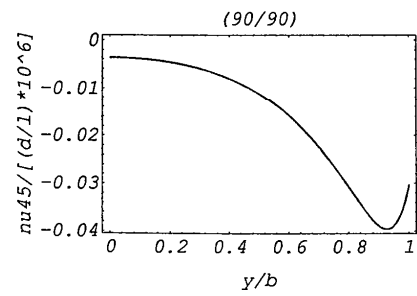
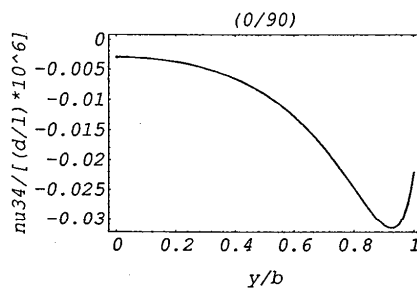
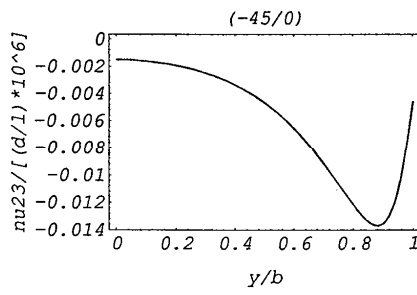
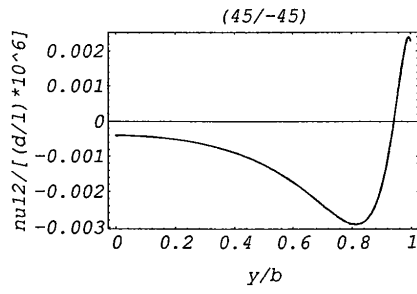


DISTRIBUTION DU CISAILLEMENT DE L'EMPILEMENT (45,-45,0,90)s



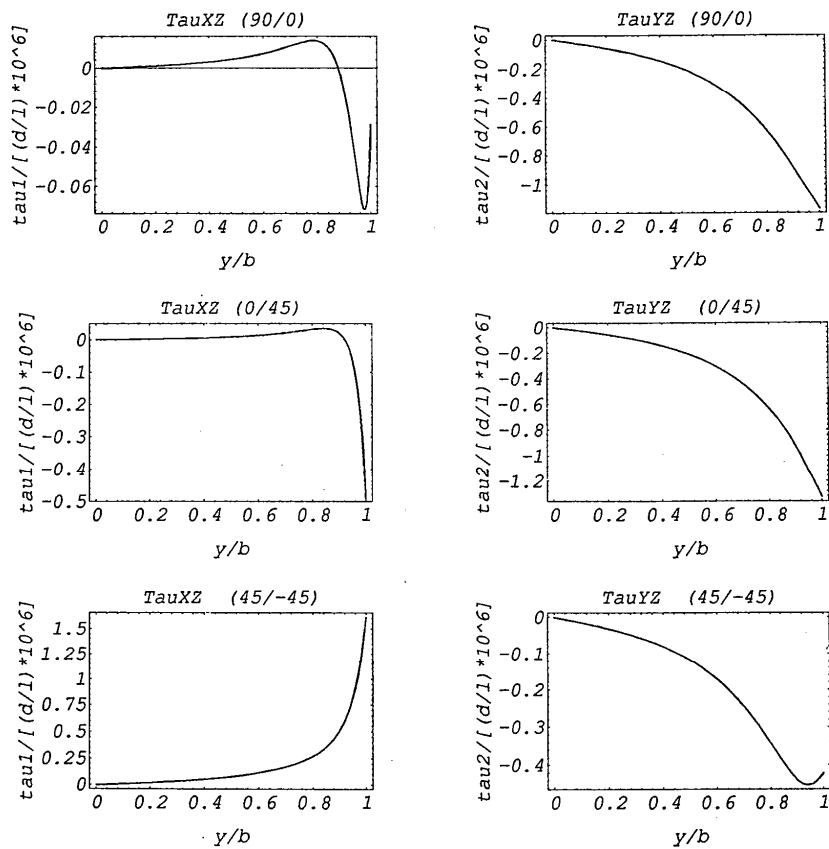
$$\frac{\tau_{yz_{45/-45}}^{\max}}{\left(\frac{d}{l}\right)10^6} = 0.42 \text{ psi}; \frac{\tau_{yz_{-45/0}}^{\max}}{\left(\frac{d}{l}\right)10^6} = 1.32 \text{ psi}; \frac{\tau_{yz_{0/90}}^{\max}}{\left(\frac{d}{l}\right)10^6} = 1.16 \text{ psi}$$

DISTRIBUTION DE L'ARRACHEMENT DE L'EMPILEMENT (45, -45, 0, 90) s





DISTRIBUTION DU CISAILLEMENT DE L'EMPILEMENT (90,0,45,-45)s



$$\frac{\tau_{yz90/0}^{\max}}{\left(\frac{d}{l}\right)10^6} = -1.16 \text{ psi}; \quad \frac{\tau_{yz0/45}^{\max}}{\left(\frac{d}{l}\right)10^6} = -1.32 \text{ psi}; \quad \frac{\tau_{yz45/-45}^{\max}}{\left(\frac{d}{l}\right)10^6} = -0.42 \text{ psi}$$

DISTRIBUTION DE L'ARRACHEMENT DE L'EMPILEMENT (90,0,45,-45)s

