HAL open science

Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches (M4)

Armelle Chabot

To cite this version:

Armelle Chabot. Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches (M4). Matériaux. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997. Français. NNT : . tel-00197853

HAL Id: tel-00197853

https://pastel.hal.science/tel-00197853v1

Submitted on 15 Dec 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE
présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR
DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : Structures et Matériaux

présentée par :

Armelle CHABOT

Sujet de la thèse :

ANALYSE DES EFFORTS A L'INTERFACE ENTRE LES COUCHES DES MATERIAUX COMPOSITES A L'AIDE DE MODELES MULTIPARTICULAIRES DE MATERIAUX MULTICOUCHES (M4)

Soutenue à Champs sur Marne, le 24 juin 1997
devant le jury composé de :

Président :	**G. VERCHERY**
Rapporteurs :	**O. ALLIX** **M. C. LAFARIE-FRENOT**
Examinateurs :	**L. ANQUEZ** **F. LENE**
Directeur de thèse :	**A. EHRLACHER**

RESUME

La thèse a pour but de concevoir un outil simple d'utilisation, pour l'ingénieur, capable d'analyser les champs de contraintes tridimensionnels responsables de délaminage au bord ou de fissuration transverse dans les matériaux multicouches. Dans la première partie du mémoire, nous construisons des modélisations multiparticulaires (M4) à partir de champs de contraintes tridimensionnels approchés écrits sous forme de polynômes de Legendre en z par couche. Les coefficients de ces polynômes sont des champs en (x,y) reliés aux efforts généralisés. Nous utilisons la formulation d'Hellinger-Reissner pour en déduire les déplacements et les déformations généralisées associées. Par stationnarité de la fonctionnelle, nous donnons les équations d'équilibre, les conditions aux limites et le comportement écrit en souplesse. La richesse plus ou moins grande des champs de contraintes approchés ainsi construit mène à 7n, 5n, 3n et (2n+1) (n: nombre de couches) équations d'équilibre dans le plan. Dans la seconde partie de la thèse, nous testons quatre modèles sur le problème de la traction simple pour des stratifiés non troués d'empilement quelconque et troués d'empilement $(0°, 90°)_s$. Nous posons analytiquement les systèmes d'équations qui par combinaison se condensent en un système d'équations différentielles de degré 2 en y et dont la résolution se fait par le logiciel de calcul formel MATHEMATICA. Sur le cas du stratifié $(0°, 90°)_s$ non troué, nous montrons que l'énergie due aux efforts manquants dans les modèles réduits ne disparaît pas complètement mais est transférée sur celles des efforts restants. Dans le cas du modèle multiparticulaire M4_(2n+1)M (M: pour membrane) le plus simple, pour assurer l'équilibre global de la plaque, nous proposons un concept, généralisable, d'effort linéique de type Dirac dont l'intensité est relié au maximum des cisaillements au bord. Nous pensons que l'intensité du Dirac peut servir de base à un critère sur le délaminage.

MOTS -CLES

COMPOSITE - STRATIFIE - DELAMINAGE - MODELISATION - MULTIPARTICULAIRE - ENDOMMAGEMENT - EFFETS DE BORD - PLAQUE TROUEE

ABSTRACT

The aim of the thesis is to designa tool for engineers, simple to use which is able to analyse 3D stresses responsible for edge delamination or transverse crackings in multilayered materials. In the first part of the dissertation, we built Multiparticle Models (M4) from 3D approximate stresses written as Legendre's z polynomials layerwise. Polynomial coefficients are (x, y) fields which are connected to generalized stresses. We use Hellinger-Reissner's formulation to deduce displacements and associate generalized strains. Writing the formulation stationarity, we give equilibrium equations, boundary conditions and constitutive laws. According to the different approximate stress fields we have 7n, 5n, 3n and (2n+1) (n: layer number) plane equilibrium equations. In the second part of the thesis, we test four models concerning the problem of the boundary traction conditions on any angles laminates and $(0°, 90°)_s$ laminate with circular opening. We write analytically the systems of equations which condense on y second order of différential system of equations and whose resolution is performed by MATHEMATICA. On $(0°, 90°)_s$ laminate without hole, we show that miss stresses energy of reduced models do not disappear but is transfered on these still remaining stresses. On the simplest Multiparticle Model M4_(2n+1)M case, to ensure a global equilibrium of laminate, we propose a concept, which can be applied generally, of Dirac lineic stress whose intensity is connected with the maximum of edge shear stress. We think that it can be used as the essential information in order to define a criterion of delamination.

KEY WORDS

COMPOSITE - LAMINATE - DELAMINATION - MODELIZATION (?) - MULTI-PARTICLE - DAMAGES - EDGE EFFECT - PLATE WITH HOLE

REMERCIEMENTS

Pour m'avoir accueillie dans son laboratoire, associée à différentes "aventures" d'un jeune Centre d'Enseignement et de Recherche à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, pour m'avoir dirigée, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Alain Ehrlacher, directeur du CERAM, "The Chief". Durant ces années de thèse, à des heures très souvent indues, j'ai eu l'honneur de partager avec lui de grands moments de "pure Science" qui m'ont fascinée et envoûtée, sans lesquels je n'aurais jamais pu me convaincre que la recherche est un des plus beaux métiers du monde. Un très grand merci Alain.

Pour l'honneur qu'ils m'ont fait et leur disponibilité malgré leurs nombreuses occupations, je tiens à remercier l'ensemble des membres de mon jury.
Monsieur le Professeur G. Verchery a bien voulu accepter de juger ce travail et de présider mon jury, je lui en suis gré.
Monsieur le Professeur O. Allix et Madame la Professeur M. C. Lafarie-Frenot ont accepté de rapporter, de transporter ces deux "pavés", je leur en suis reconnaissante ainsi que et pour le grand intérêt qu'à suscité ce travail.
Pour avoir très volontiers examiné ce mémoire, j'adresse mes plus sincères et chaleureux remerciements à Mademoiselle la Professeur F. Léné qui s'est souvenue de son ancienne élève, et à Monsieur L. Anquez de chez Dassault Aviation.

De Djazounette en passant par Amina et Taïeb à Tam, je tiens également à remercier très amicalement tous les "céramiens" pour leur aide à différentes occasions, leur soutien et pour l'ambiance dynamique qu'ils savent assurer avec brio que ce soit par le sport, par les différents repas organisés ou par l'humour.

Enfin, je remercie ma famille pour m'avoir permis de faire des études, plus particulièrement mon père et ma mère.

Pour son soutien moral constant à travers les différentes périodes passées à chercher, pour sa confiance, sa patience et le relais qu'il a assuré auprès de nos deux petites merveilles de la nature, Valentine et Jérémie, j'exprime aussi ici toute ma gratitude et mon amour à mon mari Christian.

A la Science, avec regrets

SOMMAIRE

INTRODUCTION - BIBLIOGRAPHIE **4**

1. Introduction générale **5**
2. Analyse bibliographique **10**
   - 2.1 Les champs correcteurs d'effets de bord 11
     - 2.1.1 Approche asymptotique 12
     - 2.1.2 Approches mixtes 12
     - 2.1.3 Comparaisons 14
   - 2.2 Les modèles de plaque d'ordre supérieur 14
   - 2.3 Les modèles multiparticulaires 17
   - 2.4 Les principaux travaux de N. J. Pagano 20

PARTIE I: Construction de modèles multiparticulaires de multicouche élastique à l'aide de la formulation variationnelle de Hellinger-Reissner **24**

CHAPITRE I *La méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner* **26**

- I.1 Formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner des problèmes d'élasticité 3D 28
- I.2 Utilisation de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner pour la construction de modèles approchés 30
- I.3 Base polynomiale choisie 31

CHAPITRE II *Approximation des champs de contraintes 3D à partir des efforts intérieurs généralisés des modèles multiparticulaires* **35**

- II.1 Les champs de contraintes 3D approchés du modèle M4_7n 37
- II.2 Les champs de contraintes 3D approchés du modèle M4_5n 40
- II.3 Les champs de contraintes 3D approchés du modèle M4_3n plaque 42
- II.4 Les champs de contraintes 3D approchés du modèle M4_(2n+1) plaque 44
- II.5 Les champs de contraintes 3D approchés du modèle M4_3n membrane 46
- II.6 Les champs de contraintes 3D approchés du modèle M4_(2n+1) membrane 47

II.7 Les champs de contraintes 3D approchés du modèle de Love-Kirchhoff 49

CHAPITRE III *Déplacements généralisés associés aux approximations en contrainte des modèles multiparticulaires* **52**

III.1 Les déplacements généralisés associés pour le modèle M4_7n 54
III.2 Les déplacements généralisés associés pour le modèle M4_5n 63
III.3 Les déplacements généralisés associés pour le modèle M4_3n plaque 68
III.4 Les déplacements généralisés associés pour le modèle M4_(2n+1) plaque 70
III.5 Les déplacements généralisés associés pour le modèle M4_3n membrane 73
III.6 Les déplacements généralisés associés pour le modèle M4_(2n+1) membrane 75
III.7 Les déplacements généralisés associés pour le modèle de Love-Kirchhoff 76

CHAPITRE IV *Ecriture du comportement élastique linéaire cohérent avec les approximations* **79**

IV.1 Comportement élastique linéaire du modèle M4_7n 82
IV.2 Comportement élastique linéaire du modèle M4_5n 84
IV.3 Comportement élastique linéaire du modèle M4_3n plaque 87
IV.4 Comportement élastique linéaire du modèle M4_(2n+1) plaque 89
IV.5 Comportement élastique linéaire du modèle M4_3n membrane 91
IV.6 Comportement élastique linéaire du modèle M4_(2n+1) membrane 92
IV.7 Comportement élastique linéaire du modèle de Love-Kirchhoff 93

CONCLUSION PARTIE I **96**

PARTIE II: Résolutions analytiques des problèmes de traction à l'aide des modèles multiparticulaires des matériaux multicouches **97**

CHAPITRE V *Multicouche* $(0°, 90°)_S$ *en traction* **99**

V.1 Calculs analytiques du quadricouche $[0°,90°]_S$ en traction 101
V.2 Analyse des résultats 118
V.3 Conclusion 133

CHAPITRE VI *Multicouches* $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$ *en traction* **134**

VI.1 Calcul analytique du multicouche $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$ en traction par le modèle M4_5n 135

VI.2 Calcul analytique du multicouche $(\theta_1,...,\theta_m)_s$ en traction par le modèle M4_(2n+1)M 140
VI.3 Analyse des résultats. Comparaison avec la littérature 144
VI.4 Analyse approchée de la plaque trouée $(\theta_1,\theta_2)_s$ en traction par le modèle M4_(2n+1)M 160
VI.5 Conclusion 166

CONCLUSION PARTIE II **168**

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXES

ANNEXE I *Calcul des déplacements généralisés associés pour les modèles M4_5n; M4_3n P et M ; M4_(2n+1) P et M et de Love-Kirchhoff*
ANNEXE II *Courbes M4_7n du quadricouche $[0°,90°]_S$ en traction*
ANNEXE III *Courbes M4_5n du quadricouche $[0°,90°]_S$ en traction*
ANNEXE IV *Courbes M4_3n M du quadricouche $[0°,90°]_S$ en traction*
ANNEXE V *Courbes M4_(2n+1) M du quadricouche $[0°,90°]_S$ en traction*
ANNEXE VI *Détails des calculs analytiques du quadricouche $[0°,90°]_S$ en traction par les modèles M4_7n, M4_5n, M4_3nM et M4_(2n+1)M*
ANNEXE VII *Détails des calculs analytiques des multicouches $(\theta_1,..., \theta_m)_s$ en traction par les modèles M4_5n et M4_(2n+1)M*
ANNEXE VIII *Résumé des modèles M4*
ANNEXE IX *Distribution des efforts d'arrachement en y des empilements $(\theta, \theta - 90°)_s$ en traction par les modèles M4_5n et M4_(2n+1)M pour le matériau de [Pagano, 1978]*
ANNEXE X *Courbes des efforts intérieurs pour les multicouches $(0°, 45°, -45°, 90°)_s$ $(45°, -45°, 0°, 90°)_s$ et $(90°, 0°, 45°, -45°)_s$ en traction par le modèle M4_(2n+1)M pour le matériau de [Pagano, 1978]*

INTRODUCTION
BIBLIOGRAPHIE

1. Introduction générale

L'utilisation des matériaux composites à fibres longues se développe lentement depuis une cinquantaine d'années. Compte tenu de leurs propriétés remarquables de résistance et de raideur spécifique, dans les années 70, les experts avaient prévu une généralisation rapide de leur emploi en remplacement principalement des matériaux métalliques traditionnels. Il n'en a pas été ainsi pour trois raisons principales.
La première de ces raisons est que les matériaux métalliques ont remarquablement évolué, sans doute en partie à cause de la menace de leur remplacement par les matériaux composites.
La seconde est due aux relatifs faibles progrès réalisés dans le domaine de la mise en oeuvre automatisée des matériaux composites. Ainsi l'usage de ces matériaux n'apparaît économiquement intéressant que dans le cas de petites séries de pièces à forte valeur ajoutée et à performance mécanique très élevée. Ainsi on utilise le plus souvent ces matériaux composites dans les domaines de l'aérospatial et du naval ou pour les matériels de sport. La SNCF envisage son utilisation pour la réalisation de véhicules de T.G.V. [Cléon, 1994]. Au contraire dans l'industrie automobile où les séries sont plus importantes, l'usage des composites à haute performance reste très marginal [Le Borgne, 1996].
La troisième raison est liée à un certain "manque de confiance" des ingénieurs et des décideurs techniques, notamment pour les pièces jouant un rôle structural majeur. Ce manque de confiance est sans doute dû principalement au fait que la plupart des formations d'ingénieurs mécaniciens ne proposent pas d'initiation aux matériaux composites. Toutefois, il faut bien dire aussi que les outils clairs et simples de dimensionnement de structures n'existent que si l'on s'intéresse à un dimensionnement en raideur. Si l'on considère le dimensionnement en résistance ou en durée de vie les outils actuels sont beaucoup plus lourds, les prévisions quelquefois contradictoires et l'on sait bien que les critères de résistance par couche ne donnent qu'une satisfaction limitée aux utilisateurs. La conception d'outils simples pour le dimensionnement vis à vis de la rupture ou de la fatigue reste donc encore du domaine de la recherche et c'est sans doute en travaillant dans cette voie que le chercheur en mécanique peut le plus utilement aider l'ingénieur en matériaux composites.

Lorsque l'on étudie les phénomènes d'endommagement des matériaux composites qui précèdent la ruine des structures, en chargement quasi-statique monotone, cyclique ou dynamique, on retrouve toujours les phénomènes de microfissuration transverse et de délaminage entre les couches qui précèdent les phénomènes de rupture de fibres [Crossman & Wang, 1982] [Tahari & Al., 1994].
Ces phénomènes d'endommagement sont principalement pilotés par les efforts à l'interface entre les couches. Ceci est évident si l'on considère le délaminage, mais est aussi vrai pour la micro fissuration transverse car ce sont les efforts d'interface de cisaillement dans le plan qui "rechargent"

les couches rompues entraînant le risque d'une augmentation du nombre de fissures transverses [Caron, 1993] [Caron, 1997].
L'étude de ces phénomènes d'endommagement et les modèles permettant de les décrire et de les prévoir font l'objet de très nombreux travaux. Il est devenu impossible d'être exhaustif dans leur analyse.

Depuis les années 1970, beaucoup de ces travaux sont naturellement orientés vers l'analyse des efforts à l'interface entre les couches avant l'apparition du premier endommagement. Nous citerons plus loin quelques travaux qui nous paraissent importants. Il nous a semblé toutefois que les outils élaborés jusqu'à présent pour l'analyse de ces efforts d'interface:
- n'avaient soit pas le niveau de simplicité nécessaire pour un usage dans les bureaux d'études,
- soit étaient très simples, mais n'avaient pas un niveau de pertinence suffisant pour l'étude du problème.

Il nous a ainsi semblé qu'un outil ou plutôt une gamme d'outils simples et pertinents pour l'étude des efforts d'interface dans une structure afin d'aider au dimensionnement des structures vis à vis de la ruine restait à concevoir et qu'il y avait là matière à un sujet de recherche utile.
L'outil devant être simple, nous avons privilégié les modèles décrivant le multicouche comme une surface. L'analyse des efforts entre les couches devant être le produit essentiel du modèle, nous nous sommes intéressés aux modèles multiparticulaires décrivant l'empilement à l'aide de plusieurs particules en chaque point de la surface (une particule par couche). Dans ces modèles, les efforts entre les couches sont naturellement décrits par les efforts entre les particules du modèle.

Le sujet du travail de recherche a donc été défini ainsi: Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de Modèles Multiparticulaires de Matériaux Multicouches (M4)

Le mémoire commence par une analyse bibliographique qui tente de recenser les modèles appartenant de près ou de loin à la famille multiparticulaire qui nous intéresse. Nous les comparons aux autres grandes familles d'approches classiques de ces problèmes d'analyse d'efforts d'interface et d'étude de l'endommagement des structures en matériaux composites.

Puis, le mémoire est divisé en deux parties.

La première partie propose la construction systématique d'une famille de modèles multiparticulaires élastiques à l'aide de la méthode d'Hellinger-Reissner [Reissner, 1950] rappelée dans le chapitre I. Elle est articulée en quatre étapes.

La première étape, décrite dans le chapitre II, propose une approximation des champs de contrainte tridimensionnels sous forme polynomiale en z par couche où z est la coordonnée de la direction

hors plan. Les coefficients de ces polynômes sont des champs en x et y. Les efforts généralisés du modèle seront aussi des champs en x, y reliés simplement aux coefficients de ces polynômes. Les modèles se distinguent suivant la "finesse" de la description polynomiale de ces champs tridimensionnels. Pour que les champs de contraintes approchées 3D soient statiquement admissibles, il est nécessaire que les efforts intérieurs généralisés vérifient des équations d'équilibre. Le nombre de ces équations d'équilibre nous a servi à nommer les différents Modèles Multiparticulaires de Matériaux Multicouches (M4). Nous proposons ainsi plusieurs approximations statiquement admissibles des champs de contraintes 3D. Elles vont du modèle M4_7n, équivalent au modèle local de Pagano [Pagano, 1978], jusqu'au modèle M4_(2n+1)M qui semble être le plus simple que l'on puisse construire dans cette famille.

Contenue dans le chapitre III, la deuxième étape de construction de modèles multiparticulaires analyse, pour chaque modèle, les champs de déplacements généralisés déduits de la formulation variationnelle des problèmes d'élasticité d'Hellinger-Reissner. Ainsi les champs de déplacements généralisés apparaissent comme, en quelque sorte, des moyennes pondérées dans l'épaisseur des couches des champs de déplacements 3D. Dans une troisième étape, l'écriture de la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner pour une variation de ces champs de déplacements généralisés redonne les équations d'équilibre sur les efforts intérieurs généralisés déterminés au chapitre II précédent ainsi que les conditions aux limites.

La quatrième étape, exposée au chapitre IV de cette partie, vise à établir les comportements élastiques reliant les efforts intérieurs généralisés et les déformations généralisées. Les comportements sont obtenus en écrivant la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner pour une variation des champs d'efforts intérieurs généralisés. Ainsi le comportement est écrit en souplesse. Ayant toujours pour objectif la simplicité des modèles à construire, nous introduisons, dans l'écriture des énergies élastiques en contrainte, certaines simplifications que nous pensons justifiées. Ces simplifications conduisent à des écritures de comportement très simples, mais couplant en général les efforts et les déformations généralisés de plusieurs couches ou interfaces. Ce couplage joue un rôle important dans la détermination des champs solutions d'un problème de calcul de structures sans pour autant compliquer beaucoup le problème. Il nous a semblé donc inutile de pousser plus loin les simplifications de nos modèles.

La deuxième partie du mémoire vise à construire les solutions analytiques de quelques problèmes de traction simple de façon à comparer les solutions obtenues par les différents modèles entre elles ainsi qu'à celles existant dans la littérature. Nous disposons alors d'informations permettant de juger de la pertinence de tel ou tel modèle et de déterminer le modèle le plus simple possible restant pertinent pour le problème à traiter. Cette deuxième partie est décomposée en deux chapitres.

Le chapitre V étudie l'empilement $(0°,90°)_s$ en traction simple parallèlement aux fibres à 0°.

Dans la première partie du chapitre, on écrit les équations des différents problèmes pour les principaux modèles multiparticulaires. On décrit la démarche de résolution de ces problèmes, ce qui conduit à des solutions analytiques simples obtenues à l'aide du logiciel de calcul formel MATHEMATICA.

Dans la deuxième partie du chapitre, nous donnons et comparons les principaux champs solutions, tout d'abord dans le cas de la géométrie et des matériaux du problème posé par Wang et Crossman [Wang & Crossman, 1977] et par Pagano [Pagano, 1978]. Ces données sont très souvent reprises dans la littérature pour pouvoir établir des comparaisons. Puis nous étendons ces résultats dans le cas de la plaque semi-infinie, ce qui nous permet de proposer une solution approchée simple pour un problème d'effet de bord. La comparaison de ces différents modèles montre des "hypothèses physiques" cachées derrière les simplifications énergétiques introduites dans le chapitre IV de la première partie du mémoire. Elle aide à se faire une idée de la pertinence de ces simplifications. Enfin, nous envisageons le cas où un délaminage a commencé à partir du bord et nous en déduisons le taux de relaxation d'énergie qui pilote le délaminage grâce au modèle multiparticulaire le plus simple à savoir le modèle M4_(2n+1)M. La relation simple entre ce taux de relaxation d'énergie et les efforts intérieurs calculés précédemment renforce notre conviction sur la pertinence de l'analyse et des simplifications.

Le chapitre VI aborde le même problème de chargement en traction simple mais pour un empilement symétrique $[\theta_1,...,\theta_m]_s$ quelconque. Dans ce chapitre, pour alléger le mémoire, nous n'étudions que les solutions des modèles dits M4_5n et M4_(2n+1)M. En effet le premier modèle, M4_5n, se prête bien à un développement simple dans les codes éléments finis classiques par une superposition d'éléments de coque préexistant dans le code. Il suffit pour cela d'y introduire une énergie couplant l'ensemble des degrés de liberté de toutes les couches en un noeud. Le second modèle, M4_(2n+1)M, est le modèle multiparticulaire le plus simple et nous pensons que son domaine de pertinence est cependant très étendu. Il couvre notamment les études sur les effets de bord.

La première et deuxième parties du chapitre expose la méthode de résolution analytique des modèles M4_5n et M4_(2n+1)M.

La troisième partie du chapitre reprend la géométrie et les matériaux utilisés dans [Wang & Crossman, 1977] [Pagano, 1978] pour une comparaison de nos résultats avec ceux tirés de la littérature. Nous traitons le cas des empilements $(\pm\theta)_s$ et $(\theta,\theta-90)_s$. Nous donnons en annexe X quelques courbes d'efforts d'interface avec le modèle M4_(2n+1)M sur des huit couches formés d'angles à 0°, 45°, -45° et 90°.

Dans la quatrième partie du chapitre, nous proposons une analyse simplifiée des efforts d'interface au bord d'un trou circulaire dans une plaque $(0,90)_s$ trouée soumise à une traction suivant la direction des fibres à 0°. Nous reprenons pour cela l'idée de la méthode approchée développée par [Raju & Crews, 1982]. Cette méthode analyse les efforts au voisinage du bord du trou à un angle θ en approximant le problème par celui d'une traction simple sur une plaque semi-infinie constituée

d'un empilement $(\theta,\theta-90)_s$ soumis à une déformation d'allongement $\varepsilon_{\theta\theta}(\theta)$ parallèlement au bord libre, où $\varepsilon_{\theta\theta}(\theta)$ est la déformation obtenue au bord du trou pour une plaque infinie homogène équivalente à l'empilement. Ce dernier problème admet une solution analytique simple donnée par la méthode de [Lekhnitskii, 1968].

En conclusion, nous proposons un critère de délaminage très simple et cohérent avec les analyses développées dans ce mémoire. Nous le comparons avec ceux généralement proposés dans la littérature.

2. Analyse bibliographique

La conception des structures multicouches vis à vis de la raideur globale est particulièrement simple puisqu'elle est généralement basée sur un modèle de plaque de Love-Kirchhoff [Kirchhoff, 1850] [Love, 1934] ou de Reissner-Mindlin [Reissner, 1945] [Mindlin, 1951]. Les caractéristiques de plaque sont généralement obtenues par la théorie classique des stratifiés [Tsaï & Al., 1980] [Gay, 1989] [Berthelot, 1992].

Ces modèles de plaque "classiques" dits au premier ordre ont été beaucoup étudiés dans les années 70-80 notamment pour évaluer quantitativement les erreurs par rapport aux solutions 3D [Danielson, 1970], [Koiter, 1970], [Simmonds, 1972], [Simmonds & Duva, 1981], [Ladevèze, 1976], [Ladevèze, 1980]. Ils continuent de faire aujourd'hui l'objet de réflexions approfondies [Ladevèze et Simmonds, 1996] [Nayroles, 1996]. Il est maintenant bien admis que ces modèles classiques permettent une bonne description des déformations globales de la plaque et des champs de contrainte, sauf au voisinage des bords, à une distance d'environ 3 ou 4 fois l'épaisseur. Or les bords des plaques multicouches sont le lieu de concentration tridimensionnelle de contrainte, pouvant avoir des conséquences importantes sur la résistance de la structure, en chargement monotone, ou sur sa durée de vie en fatigue (ruptures par délaminage).

Le phénomène de concentration tridimensionnelle de contraintes au voisinage des bords d'un matériau multicouche est bien connu depuis longtemps [Hayashi, 1967]. Il peut notamment être clairement mis en évidence dans les rares solutions analytiques 3D exactes qu'il est possible d'obtenir en choisissant convenablement le chargement [Pagano, 1969] [Pagano, 1970a].

Le champ de contrainte au bord peut même devenir singulier [Bogy, 1968], [Hess, 1969], [Davet & Destuynder, 1985] [Sanchez-Palancia, 1985] [Leguillon & Sanchez-Palancia, 1985, 1986]. La singularité est donnée par la racine complexe d'un polynôme caractéristique d'un problème aux valeurs propres. L'analogie qui peut être faite entre ce phénomène et celui de la singularité usuelle des fissures en milieu homogène, a conduit quelques auteurs [Wang & Choi, 1982] à proposer sur cette base une mécanique de la rupture, notamment pour l'initiation du délaminage par effets de bords. Parmi d'autres travaux, notons le développement de l'élément fini "métis" [Saxce & col., 1994] qui semble intéressant. Cependant l'étude des singularités des champs au bord ne fournit pour l'instant pas un outil utilisable pour l'ingénieur car, d'une part, la singularité est variable d'un problème à un autre rendant difficile l'établissement de critères de délaminage, d'autre part le taux de relaxation d'énergie dans un processus de délaminage ne semble pas relié simplement aux facteurs d'intensité de contrainte correspondants [Leguillon, 1989]. Beaucoup de chercheurs ont donc cherché d'autres voies pour analyser le problème.

Une des premières études numériques de ce phénomène 3D a été faite par [Pipes et Pagano, 1970] en utilisant une méthode de différences finies sur le cas d'un multicouche en traction uniforme, mais, bien sûr, très vite les principales études ont utilisé la méthode des éléments finis 3D. Parmi

les papiers pionniers les plus cités utilisant cette méthode, notons: celui de [Rybicki, 1971] qui propose une formulation variationnelle élément finis en contrainte; celui de [Wang et Crossmann, 1977], ces derniers utilisent un maillage tridimensionnel très fin au voisinage des bords et des interfaces; celui de [Spilker et Chou, 1980], ces auteurs construisent un élément fini multicouche hybride en contrainte avec lequel ils réalisent l'équilibre dans chacune des couches et avec lequel les conditions aux limites et les continuités des champs aux interfaces sont exactement vérifiées; celui de [Raju et Crews, 1981] qui utilise une analyse éléments finis quasi-tridimensionnelle en discrétisant très finement un quart de la tranche du stratifié de plan (y, z), car les déplacements sont supposés être linéaires en x pour le déplacement suivant l'axe de traction et indépendants de x pour les autres composantes du déplacement; celui de [Dong et Goetschel, 1982] qui expose une méthode semi-analytique utilisée avec des interpolations éléments finis dans l'épaisseur des couches et des champs exponentiels décroissants dans le plan des couches du bord vers l'intérieur de la plaque; enfin celui de [Anquez & Al., 1985] qui utilise, sur l'exemple d'un barreau $(\alpha_1,\alpha_2)_s$ en traction uniforme, des éléments finis pseudo-tridimensionnels quadrilatères à 13 degrés de liberté: 3 déplacements par noeuds plus un degré de liberté commun à tous les éléments d'une même section de plan (y, z), pour rechercher les champs de contraintes sous une forme singulière. Ces études ont généralement donné des résultats satisfaisants mais au prix de maillages pseudo3D ou 3D très fins puisque la taille caractéristique des mailles est en relation directe avec l'épaisseur des couches. Cette manière d'aborder le problème est donc vite apparue trop lourde pour être utilisable dans un logiciel simple de conception de pièces composites vis à vis de la rupture en chargement monotone ou de la fatigue.

Beaucoup d'auteurs ont donc tenté de proposer des approches simplifiées pour l'étude des effets de bord dans les matériaux multicouches. Nous tentons ici de donner quelques éléments d'information sur les principales idées apparues. Nous proposons de les classer en 3 familles:

- les champs correcteurs d'effets de bord;
- les théories de plaque d'ordre supérieur;
- les modèles multiparticulaires.

2.1 Les champs correcteurs d'effets de bord

Les modèles classiques de plaques donnent une bonne approximation des champs sauf au voisinage des bords ou les champs ne vérifient en particulier pas les conditions aux limites en contrainte. Il est naturellement apparu l'idée de superposer aux champs de plaque d'autres champs dits "correcteurs" n'ayant une valeur significative qu'au voisinage des bords et décroissant très vite vers l'intérieur de la plaque. Les équations que doivent vérifier ces champs peuvent être obtenues par différentes méthodes. Nous distinguons ci-dessous une approche asymptotique dont le petit paramètre considéré est l'épaisseur de la plaque et une approche mixte contrainte-déplacement où l'on cherche

à minimiser l'erreur sur le comportement.

2.1.1 Approche asymptotique

Nous allons décrire succinctement la méthode dite du zoom asymptotique. Elle consiste à faire une dilatation de rapport 1/e, e étant l'épaisseur, au voisinage du bord dans les directions normale à la plaque et normale au bord, l'épaisseur de la plaque devient alors égale à l'unité, puis à faire tendre e vers zéro. La plaque devient semi-infinie d'épaisseur unité. Les équations régissant les champs correcteurs sont assez simples et couplent un problème plan et un problème antiplan.
Cette méthode est notamment mise en oeuvre par Engrand [Engrand, 1982a-1982b] qui s'inspire des travaux de Fredrichs [Fredrichs & Dressler, 1961] et de Destuynder [Destuynder, 1980].
Les équations obtenues peuvent être résolues soit par la méthode de Ritz-Galerkin, soit par une méthode d'éléments finis dans l'épaisseur conduisant ainsi à la résolution d'un système aux valeurs propres [Lecuyer, 1990]. La solution obtenue est de la forme:

$$f(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{Re}\left(f^{(i)}(\eta)e^{-\lambda_i\xi}\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{Re}(\lambda_i)>0\,;\,\eta=\frac{z}{h}\,;\,\xi=\frac{y}{h} \tag{2.1.1.1}$$

L'inverse de la partie réelle des λ_i définit la profondeur caractéristique de la couche limite, c'est à dire la distance à partir de laquelle son effet est négligeable [Lecuyer, 1987]. Une identification avec l'expérience est proposée pour la détermination de cette distance caractéristique [Lecuyer & Engrand, 1991]. Cette méthode a conduit à la réalisation d'un logiciel nommé CLEOPS [Lecuyer, 1991] dont le coût est très réduit en temps de calcul.

Notons que dans le cas de stratifié épais présentant dans l'épaisseur une même séquence d'empilement qui se répète périodiquement il est possible de s'inspirer de travaux d'homogénéisation [Duvaut, 1976] et d'endommagement des matériaux composites [Léné, 1984] pour proposer une méthode de calcul asymptotique qui repose sur une formulation variationnelle en déplacement [Lecuyer & Al., 1987] [Dumontet, 1985] [Dumontet, 1990]. Un logiciel a été développé sur cette idée et est commercialisé par la société SIMULOG et sur cette base est proposé dans [Kail, 1994] un modèle de plaque et de coque.

2.1.2 Approches mixtes

Les solutions tridimensionnelles de plaque sont approximées par superposition de deux effets: un dit "intérieur" U_P, c'est à dire de grande longueur d'onde, calculé par la version optimale du modèle de Reissner-Mindlin; et un dit "extérieur" U_L, de faible longueur d'onde, approximé par séries de Fourier [Pecastaings, 1985].

(2.1.2.1) $$U = U_P + U_L$$

Pour le calcul de l'effet intérieur, de nombreuses études ont été menées, elles reposent sur le fait que l'approximation cinématique du modèle de Love-Kirchoff pour l'étude du problème de plaque et le paradoxe qu'il entraîne (état de déformation plane et contraintes σ_{i3} approximativement nulles) n'en fait pas un modèle adapté pour l'étude des plaques épaisses ou l'étude des effets de bord [Ladevèze, 1980] [Ladevèze, 1988] [Ladevèze, 1991]. Une version optimale du modèle de plaque de Reissner-Mindlin est proposée [Ladevèze & Pecastaing, 1988]. Cette version est dite au second ordre, car en développant les champs de contraintes et de déformations, seuls sont gardés les termes allant au second ordre [Ladevèze, 1987] [Pecastaings, 1987]. L'erreur se calcule, d'après une méthode inspirée des travaux de Danielson [Danielson, 1970], de Koiter [Koiter, 1970] et Simmonds [Simmonds, 1972], sur la loi de comportement et elle est en $0(h^2/L^2)$. Après l'introduction d'un coefficient de cisaillement dans la loi de comportement, les auteurs obtiennent une meilleure approximation de l'énergie de cisaillement transverse. Dans le cas de plaque stratifiée à couches orthotropes, le coefficient de cisaillement est trouvé indépendant de l'angle d'orthotropie des couches par rapport à la structure [Sanchez & Racineux, 1995].
Le calcul des effets de bord se fait alors par ajout d'un résidu ΔH sur les conditions aux limites en contraintes [Ladevèze, 1988] tel que:

(2.1.2.2) $$\bar{\Delta H} = \left(\bar{T}_d - \bar{\bar{\sigma}}.\bar{n} \right) \text{ sur le bord}$$

Le travail de Pecastaings est étendu au cas de plaques stratifiées constituées de couches isotropes transverses pour modéliser les endommagements dont le délaminage [Allix, 1989]. Le modèle d'Allix est donc constitué de deux étapes. La première effectue un calcul de plaque classique. La seconde est itérative et semi-analytique. Elle consiste à réanalyser la zone bord, là où les champs sont supposés tridimensionnels, en décomposant le problème tridimensionnel en une série de problèmes bidimensionnels à l'aide de développements en série de Fourier qui sont rendus performants par l'emploi de la Transformation de Fourier Rapide. Pour prendre en compte les phénomènes d'endommagement, problèmes non linéaires, Allix utilise une méthode de résolution numérique à Grands Incréments de Temps (MAGIT). Cet endommagement progressif est décrit par un paramètre d qui prend la valeur un lorsqu'il y a délaminage. Le calcul va jusqu'à l'ouverture de fissures de délaminage. Ce modèle est construit pour des trous de petits diamètres ou à forte courbure en tronquant les séries de Fourier. Le logiciel DSDM ainsi construit, effectue les premières prévisions d'initiation du délaminage, de sa progression et de la visualisation des endommagements dans le plan de la plaque et selon l'épaisseur [Allix, 1992]. Ce modèle a conduit à établir un lien entre la mécanique de l'endommagement et la mécanique de la rupture en postulant que pour un délaminage établi, le taux de restitution d'énergie critique G_c, calculé au moyen de la mécanique de l'endommagement, est indépendant de la longueur de fissure $G_c = 2Y_c$. Une version

simplifiée du modèle (endommagements réduits à ceux des liaisons entre les couches et bord faiblement courbé) est donné dans la thèse de Daudeville [Daudeville, 1992]. Une première comparaison des prévisions du logiciel DSDM avec l'expérience est amorcée dans une étude [Allix, Ladevèze et Corigliano, 1992] où les zones endommagées expérimentales et simulées sont relativement voisines.

Nous pouvons aussi rattacher à cette section sur les champs correcteurs, le papier de [Bar-Joseph & Pian, 1981] qui combine la méthode asymptotique et celle de Rayleigh-Ritz. Le domaine de solution est divisé en deux régions: une intérieure et une extérieure. Le champ à l'intérieur est déduit de l'emploi de la théorie classique des plaques et le champ à l'extérieur (aux bords) est obtenu par l'emploi de polynômes de Legendre. Le champ de contraintes ainsi construit vérifie les équations d'équilibre, la continuité interlaminaire et les conditions de bords libres. Les comparaisons avec Pagano sont effectuées sur les exemples de plaques en traction et montrent que le modèle est prédictif.

2.4.3 Comparaison

Les deux types de modèles précédents ont la même caractéristique à savoir qu'il faut pour calculer un effet de bord, effectuer deux calculs: un de plaque, l'autre de correction d'effets de bord. Pour éviter cela plusieurs auteurs ont cherché à construire des modélisations approchées permettant d'estimer directement au premier calcul les effets de bord. La première idée qui vient à l'esprit est de construire des théories de plaques d'ordre supérieur aux théories de plaque classique de Love-Kirchoff et Reissner-Mindlin.

2.2 Les modèles de plaque d'ordre supérieur

Depuis les tout premiers travaux de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces [Levy, 1877] en passant par les modèles, dits au premier ordre, de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques soit à partir de cinématiques plus raffinées (ordre du développement supérieur) [Lardeur & Batoz, 1990], soit en construisant des champs de contraintes plus riches. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les différents principaux modèles.

La théorie au premier ordre de Reissner-Mindlin part du champ de déplacement suivant:

$$(2.2.1) \qquad \begin{cases} u(x,y,z) = u_0(x,y) + z\psi_x(x,y) \\ v(x,y,z) = v_0(x,y) + z\psi_y(x,y) \\ w(x,y,z) = w_0(x,y) \end{cases}$$

C'est une théorie à cinq champs. Les théories au premier ordre se distinguent principalement par la manière de prendre en compte l'énergie de cisaillement. En 1920 les travaux de Timoshenko sur l'effet du cisaillement transversal, appliqués au cas des plaques par Reissner [Reissner, 1945] et par Hencky et Uflyan en 1947 et 1948 obligent Mindlin [Mindlin, 1951] à modifier ses équations. Il introduit un facteur de correction k (valant soit 2/3; 8/9; $\pi^2/12$) appliqué à la loi de comportement en cisaillement transversal pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal. Signalons l'approche récente du même problème par Sab [Sab, 1995], qui à partir d'une famille de solutions analytiques de problèmes de flexion aboutit à la conclusion que la raideur à l'effort tranchant doit plutôt s'écrire comme l'inverse de l'intégrale sur l'épaisseur des souplesses des matériaux, plutôt que comme l'intégrale des raideurs. Son modèle semble mieux approcher les solutions analytiques 3D connues dans les problèmes de flexion [Philippe, 1997].

Indépendamment des perfectionnements des théories au premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Depuis, de nombreux ordres de ce développement ont été effectués. Ils s'écrivent sous la forme générale [Fish & Markolefas, 1992] suivante:

$$(2.2.2) \qquad \begin{cases} u_\alpha(x,y,z,t) = \sum_{k=0}^{n} z^k u_{k\alpha}(x,y,t) \quad \alpha = 1,2 \\ w(x,y,z,t) = \sum_{k=0}^{m} z^k w_k(x,y,t) \end{cases}$$

En vue d'étudier les problèmes d'impacts, [Whitney & Sun, 1973] propose un champ de déplacement où n vaut 1 et m vaut 2. Les coefficients de cisaillement employés sont empruntés aux travaux de Mindlin et Medick (1969).

En 1975, Reissner modifie le champ de déplacement choisi initialement en 1945, pour introduire dans son développement des termes cubiques pour les déplacements (n=3) dans le plan et quadratique pour le déplacement selon la troisième dimension (m=2) [Reissner, 1975]. Les termes $u_{0\alpha}$, $u_{2\alpha}$ et w_1 sont négligés. Cette théorie donne de bons résultats et est applicable à l'étude de la plaque trouée. Mais en négligeant la contribution des déformations dans le plan, ce champ, bien adapté au problème étudié par Reissner, ne l'est pas forcément à tous les problèmes. Seuls les effets hors plan sont étudiés.

En 1977, Lo, Christensen et Wu [Lo, Christensen et Wu, 1977] reprennent cette fois de façon

complète le champ de déplacement de Reissner [Reissner, 1975]. Mais sans coefficient de cisaillement transversal, ce modèle conduit à une mauvaise estimation de la rigidité de cisaillement transversal.

[Reddy, 1984] fait un développement de la forme cubique dans le plan (n=3) et constant ailleurs (m=0). [Nwokoy et Lexcellent, 1988] généralisent cette approche en développant les déplacements jusqu'à l'ordre n et montrent que les résultats sont satisfaisants à l'ordre trois dans leur application en flexion cylindrique dans le cas de plaques épaisses. Dans [Reddy, 1987], l'auteur propose un champ quadratique partout (n=2 et m=2) donnant de bons résultats au dire de [Rohwer, 1992] par comparaison avec les autres types de champs. Plus tard, en 1989, [Reddy, 1989] propose une forme de champ de déplacement général tel que:

$$\text{(2.2.3)} \qquad \begin{cases} u(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{n} U_j(x,y,t)\Phi_j(z) \\ v(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{n} V_j(x,y,t)\Phi_j(z) \\ w(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{n} W_j(x,y,t)\Phi_j(z) \end{cases}$$

Elle peut s'interpréter comme une approximation éléments finis semi-discrète des déplacements suivant l'épaisseur, où les fonctions Φ_j seraient les fonctions d'interpolations globales, Uj, Vj et Wj les valeurs des déplacements aux noeuds. On retrouve là une idée déjà proposée par [Levy, 1877]. Les applications sont effectuées par comparaison avec la solution exacte de flexion cylindrique de [Pagano, 1969].
Puis Reddy s'associe avec Robbins [Robbins & Reddy, 1992] [Robbins & Reddy, 1993] pour proposer une modélisation éléments finis basée sur la forme de ce champ.

Les résultats fournis par ces théories de plaque d'ordre supérieur sont généralement satisfaisants mais font appel à des développements numériques très coûteux.

De manière alternative, certains auteurs proposent des développements d'ordre supérieur en contrainte plutôt qu'en déplacement.
Dans les modèles en contrainte, on peut distinguer ceux qui considèrent des développements polynomiaux globaux sur l'épaisseur et ceux qui considèrent des développements par couche. Nous ne reprenons ici que ceux du premier type, ceux du deuxième type étant, pour des raisons exposées plus loin, plus proches des modèles multiparticulaires.

Par exemple [Tang, 1975] utilise un développement en série des contraintes, sous la forme de polynôme en z dans toute l'épaisseur du multicouche. Son modèle est basé sur le respect exact de l'équilibre et des équations de compatibilité du champ de contrainte, mais la solution ne vérifie qu'une part des conditions aux limites et en moyenne.
L'approche de [Flanagan, 1994] est assez semblable à celle de [Tang, 1975]. Elle s'appuie sur un développement des fonctions de contraintes [Lekhnitskii, 1968] en produit de fonctions dans lesquelles les coordonnées apparaissent sous forme de variables séparées.

Certains auteurs proposent aussi des formulations mixtes d'ordre élevé, citons par exemple: [Verchery, 1974] qui propose une théorie des plaques stratifiées reposant sur une formulation mixte 3D et sur des approximations polynomiales dans l'épaisseur des contraintes de cisaillement transverse et d'arrachement et des déplacements.
[Liao et Tsaï, 1992] modifie la formulation variationnelle mixte de Hellinger-Reissner pour construire un élément fini ayant, en chacun des noeuds, cinq degrés de liberté: la valeur des trois déplacements u, v, w et la valeur des deux contraintes transverses (τ_{xz}, τ_{yz}). Ils appliquent leur modèle sur l'exemple de la flexion cylindrique.

En conclusion, l'utilisation des modèles d'ordre supérieur semble correcte pour l'analyse des contraintes tridimensionnelles d'interface à partir du moment où l'ordre est grand (au moins 3), ce qui revient à l'idée d'employer des éléments finis construits à partir des déplacements, solution que nous avons vue précédemment et qui mène à des calculs coûteux.
L'utilisation d'une approximation du champ de contrainte à partir de champs en (x, y) définis par couche, nous semble conduire à des modèles plus simples que ceux cités ci-dessus. Ce choix revient à retenir une cinématique généralisée définie elle aussi à partir de champs en (x, y) par couche. On est ainsi amené à considérer qu'en un point de la surface définissant géométriquement l'objet se trouvent n particules, n étant le nombre de couches. C'est ce que nous appelons dans la section suivante les modèles multiparticulaires.

2.3 Les modèles multiparticulaires

Par définition un modèle multiparticulaire est un modèle mécanique dans lequel les objets sont caractérisés par:
1) un domaine géométrique Ω qui est le support des champs. On appelle un point de matière, un point de ce domaine;
2) une décomposition de chaque point de matière en n particules distinctes mais géométriquement

confondues;
3) une cinématique définie par n champs sur Ω, chaque champ correspondant à la cinématique d'une des particules.
Ainsi par exemple, la mécanique des sols propose des modèles biparticulaires 3D (une particule squelette et une particule fluide confondues au même point) [Biot, 1941].
Si l'on considère un objet 3D stratifié perpendiculaire à e_z, et si on approche les champs de déplacement à l'aide de champs en (x, y) <u>définis par couche</u>, nous obtenons un modèle multiparticulaire surfacique contenant autant de particules que de couches. La cinématique de chaque particule est donnée à l'aide des champs cinématiques définis dans la couche. De manière alternative, si l'on préfère approcher le champ de contraintes à l'aide de champs en (x,y) <u>définis par couche</u>, les déplacements généralisés associés seront des champs cinématiques définis eux aussi par couche. Nous avons donc là encore un modèle multiparticulaire surfacique.
Nous avons donc regroupé ci-dessous plusieurs modélisations qui par certains aspects de leur construction pourraient se ramener à des modèles multiparticulaires.

Il semble que, dans le domaine qui nous intéresse, les premiers modèles que l'on puisse rattacher aux modèles multiparticulaires, sont ceux de [Cox, 1951], [Hedgepeth, 1961] qui analysent l'interaction entre fibres d'un U. D. [Foret, 1995]. Ces modèles utilisent une géométrie uniaxiale et une cinématique pour chacune des fibres. Ils font intervenir une interaction entre les fibres liée à leur mouvement relatif.
L'une des premières propositions de modélisation alternative de plaques multicouches, que nous nommerions multiparticulaire, est celle de Puppo et Evensen [Puppo et Evensen, 1970]. Le modèle est basé sur une approche en contrainte d'un multicouche chargé dans son plan. Il prend en compte les champs moyens <u>par couche, dans chaque couche</u>. Le stratifié est modélisé comme un empilement de couches anisotropes, dans lesquelles la contrainte d'arrachement est supposée nulle. Les couches sont reliées par une couche isotrope dans laquelle le champ de contrainte est tridimensionnel. Ce modèle permet de montrer comment l'influence des bords d'un stratifié génère des valeurs finies significatives de cisaillement interlaminaire.
La construction du champ de contrainte par couche pourrait permettre de ramener le modèle de Puppo et Evensen à un modèle multiparticulaire tel que nous l'avons défini plus haut. Il apparaît comme l'ancêtre du modèle Shear Lag Analysis popularisé en 1977 par [Garett et Bailey, 1977] pour modéliser des problèmes de fissuration transverse [Caron, 1993]. Ce modèle fait l'hypothèse que les champs sont uniaxiaux et uniformes suivant l'épaisseur de chaque couche du stratifié. Le modèle de Shear Lag Analysis reste encore très utilisé de nos jours dans des versions plus ou moins sophistiquées [Macquire, Petitpas & Valentin, 1992] [Foret, 1995] [Hadj-Ahmed & Al., 1997] mais il ne peut traiter que de problèmes de chargement dans le plan de la plaque multicouche. De plus, ces modèles font intervenir des caractéristiques de raideur d'interface qui restent le sujet de nombreuses discussions. Le modèle Shear Lag Analysis nous apparaît comme le plus simple des Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches. Dans sa version plane il fait intervenir une

cinématique à 2n champs en (x, y) (2 composantes de déplacement dans le plan pour chaque particule-couche).

Le plus complet des modèles multiparticulaires, proposé dans la littérature, semble être le modèle Local de Pagano [Pagano, 1978]. Il est construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche. Les polynômes sont:

- de degré 1 pour les contraintes membranaires $\sigma_{\alpha\beta}(x,y,z)\ \alpha,\beta \in \{1,2\}$;
- de degré 2 pour les contraintes de cisaillement $\sigma_{\alpha 3}(x,y,z)\ \alpha \in \{1,2\}$ et
- de degré 3 pour les contraintes d'arrachement $\sigma_{33}(x,y,z)$.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations des champs de contraintes ci-dessus conduit à une cinématique du multicouche à 7n champs en (x,y) (7 champs par particule-couche). Ces champs sont:

- 2 composantes de déplacement moyen sur l'épaisseur de la couche,
- 2 composantes de rotation moyenne de la section de la couche,
- 1 composante du déplacement moyen perpendiculaire au plan de la couche,
- 2 composantes correspondant à des moments d'ordre 1 et 2, par rapport au plan moyen de la couche, du déplacement perpendiculaire à la couche (ces 2 derniers champs n'ont pas un sens physique très clair).

Ces champs "moyens" correspondent à des classes d'équivalence de champs de déplacement 3D (2 champs 3D appartenant à la même classe d'équivalence si leur 7n "éléments de réduction" ci-dessus sont égaux).

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Notons que ce modèle peut poser quelques difficultés au niveau des conditions aux limites. Nous reviendrons plus loin sur cette question. Le modèle a une capacité de prévision tout à fait intéressante, ainsi que Pagano l'a prouvé en comparant les résultats de ses applications avec les calculs par éléments finis de [Wang et Crossman, 1977]. Il est conceptuellement très simple mais reste cependant assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle sera le point de départ de notre travail et notre objectif sera de proposer une série de simplifications permettant de l'alléger tout en lui conservant un bon niveau de prédictibilité.

Plus tard Pagano a proposé une évolution de ce modèle lorsque le nombre de couches est très élevé. Il a nommé cette variante "Global Local Variationnal Model" [Pagano & Soni, 1983]. L'idée de Pagano est de conserver une approche en contrainte dans les quelques couches qui nous intéressent et d'adopter une approche globale en déplacement pour toutes les autres couches de manière à diminuer très sensiblement le nombre de champs inconnus.

On peut rattacher aux approches multiparticulaires les travaux de [Ren, 1986] [Kassapoglou & Lagace, 1986] et [Yin, 1991] car dans leur démarche ils utilisent une approximation des champs de contraintes par couche. Ainsi [Ren, 1986] utilise un champ de contraintes dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche. Les déplacements sont considérés cubiques par

couche et continus aux interfaces. Pour [Kassapoglou & Lagace, 1986] le champ de contraintes est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. L'hypothèse restrictive de constance selon l'épaisseur des contraintes planes est émise. Les contraintes hors plan obtenues sont très différentes de celles obtenues par des méthodes moins restrictives. Dans [Yin, 1991], les fonctions de contraintes de Lekhnitskii sont employées par couche pour déterminer les contraintes interlaminaires d'un multicouche. Elles sont approximées de façon polynomiale dans l'épaisseur.

Dans la suite du mémoire, nous nous placerons donc résolument dans la philosophie d'une approche multiparticulaire car il nous a semblé qu'elle était la plus à même de fournir l'outil simple mais prédictif que nous recherchons.
Compte tenu de l'importance des recherches de Pagano pour notre travail, nous avons pensé utile de conclure ce chapitre bibliographique par un récapitulatif de ses principaux travaux jusqu'au "Global Local Variationnal Model".

2.4 Principaux travaux de N. J. Pagano

Nous faisons ici un bref rappel chronologique au cours de ces vingt-cinq dernières années des travaux de Pagano qui l'ont conduit à proposer un modèle nommé Global local variational model.

Sur des applications analytiques pour une deux et trois couches, Pagano met tout d'abord en évidence les limitations des théories classiques de plaque et réfléchit à leur validation.
Pour ce faire [Pagano, 1969] compare sa solution analytique exacte avec celle obtenue par la théorie des plaques classique de Love-Kirchhoff pour un chargement cylindrique perpendiculaire de la forme $q_0 \sin\left(\frac{n\Pi x}{l}\right)$, sur des stratifiés formés de plis orthotropes orientés à 0° ou à 90°et posés sur appuis simples. En faisant varier le rapport de la longueur de la plaque sur sa hauteur, il montre, sur des courbes comparatives, la nécessité de prendre en compte les effets de cisaillement transverse, et la convergence de ses solutions vers celles issues des théories classiques lorsque ce rapport devient très grand. Puis [Pagano, 1970a] donne des solutions analytiques tridimensionnelles exactes pour des chargements perpendiculaires de type $q(x,y) = \sigma \sin px.\sin qy$. Ces exemples sont étendus [Pagano, 1970b] au cas de stratifiés dont les couches ne présentent pas une direction d'orthotropie θ parallèle aux axes x et y. Ces calculs peuvent servir de références comparatives pour l'étude de structures sandwich [Philippe, 1997].

Sur l'exemple célèbre de la plaque (ou poutre) quadricouche $(\theta,-\theta)_s$ en traction uniforme [Pipes & Pagano, 1970] mettent en évidence l'existence de concentration de contrainte de cisaillement

interlaminaire au bord jusqu'à une distance équivalente à l'épaisseur de la plaque. Pour ce faire, ils étudient un problème de traction uniaxiale suivant x tel que le champ de contraintes soit indépendant de x. Ils utilisent les relations de comportement orthotrope et ils intègrent les équations liant les déformations aux déplacements pour obtenir le champ de déplacement qui, après des considérations de symétrie et de continuité aux interfaces, s'écrit ainsi:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= C_6 x + U(y,z) \\ v(x,y,z) &= V(y,z) \\ w(x,y,z) &= W(y,z) \end{aligned} \qquad \text{où } C_6 \text{ est une constante d'intégration} \tag{2.4.1}$$

En injectant ce champ de déplacement dans les équations d'équilibre, ils obtiennent un système d'équations différentielles partielles elliptiques au second ordre couplées. En utilisant les conditions aux limites de bords libres, ils résolvent ce système par différences finies. Leurs résultats sont en corrélation avec ceux de Puppo et Evensen [Puppo & Evensen, 1970]. Dans l'article de [Whitney & Pagano, 1970], la confirmation de l'importance de la prise en compte des contraintes de cisaillement dans un modèle de plaque est démontrée sur des exemples de flexion et de vibration de stratifiés.

Puis vient une série d'études sur la détermination de la contrainte d'arrachement supposée être, aux vues d'observations expérimentales, la contrainte déterminante dans la prédiction des phénomènes de délaminage.

En corrélation avec les résultats expérimentaux de Foye et Baker [Foye & Baker, 1970] sur des stratifiés contenant des plis ±15° et ±45°, [Pagano & Pipes, 1971] présentent l'importance de prendre en compte l'ordre des empilements pour pouvoir prédire les phénomènes de délaminage. A partir du modèle décrit dans le précédent article [Pipes & Pagano, 1970], et suivant que les plis à ±15°sont à l'intérieur ou à l'extérieur du laminé, dessinent sur une courbe (Cf. fig. 2.5.2.1) la différence significative des valeurs de la contrainte normale obtenues suivant l'épaisseur.

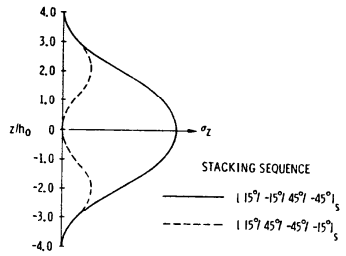


Fig. 2.4.1: Comparaison sur deux laminés de la distribution de la contrainte normale suivant l'épaisseur [Pagano & Pipes, 1971]

Puis [Pagano & Pipes, 1973] reprennent leurs résultats précédents pour étudier l'influence de cette contrainte normale sur les phénomènes de délaminage. L'influence des séquences d'empilement est étudiée sur une éprouvette stratifiée symétrique particulière, restrictivement constituée de couches orientées à $\pm\theta_1$ et $\pm\theta_2$ d'épaisseur totale respective h_1 et h_2, pour laquelle la contrainte d'arrachement est maximale lorsque l'éprouvette est soumise à des efforts de traction de valeur $4\sigma_0 bh$ (b est la demi-largeur et h la demi-épaisseur de la plaque). Pour le matériau en graphite-epoxy choisi (E_L=20.10^6 psi; E_T=1,3.10^6 psi; G_{LT}=0,8.10^6 psi et ν_{LT}=0,25), ils trouvent $\theta_1 = 25°, \theta_2 = 90°$ et $\eta_0 = \frac{h_1}{h_2} = 3{,}1$. Dans les tests, ils choisissent ce rapport égal à quatre et étudient deux laminés de type $\left((25°,-25°)_2,90°\right)_s$ et $\left(90°,(25°,-25°)_2\right)_s$ dont les couches sont d'épaisseurs égales et de façon à ce que la force induite par les contraintes de cisaillement soit réduite. Ils trouvent le premier laminé délaminant alors que le deuxième ne l'est pas (la contrainte d'arrachement étant obtenue négative). Ce résultat est en bon accord avec leurs observations expérimentales.

En 1974, [Pagano, 1974] modifie le modèle de [Whitney et Sun, 1973] (Cf. Chap. II.2) pour étudier la distribution de la contrainte normale sur un problème de flexion circulaire. Il choisit un champ de déplacement de la forme suivante:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \varepsilon\, x + U(y) + z\psi(y) \\ v(x,y,z) &= V(y) + z\Omega(y) \\ w(x,y,z) &= W(y) + z\Phi(y) \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

qui induit un champ de contrainte normal écrit ainsi:

$$q = -\sigma_z\left(y,-\frac{h}{2}\right) = A_1\cosh(\lambda_1 y) + A_2\cosh(\lambda_2 y) \tag{2.4.3}$$

où A_1, A_2, λ_1 et λ_2 dépendent des caractéristiques mécanique et géométrique du stratifié.

La comparaison de ce modèle avec une approche élastique tridimensionnelle tirée de la thèse de Pipes pour un bicouche (0,90°) donne de bons résultats.

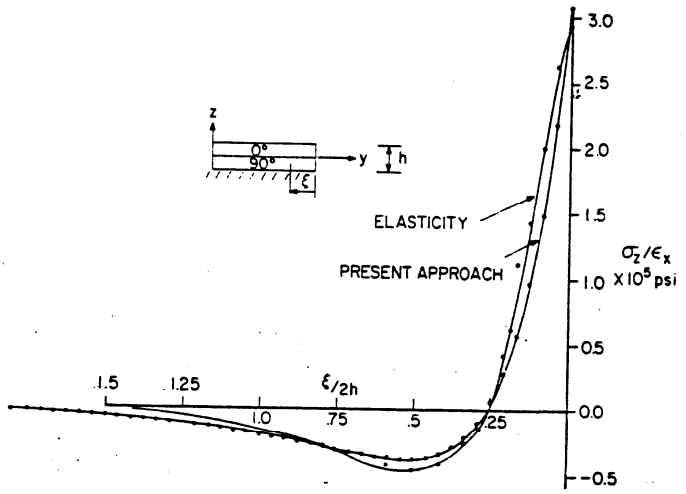


Fig. 2.4.2: Comparaison de la distribution de σ_Z [Pagano, 1974]

[Pagano, 1978] construit ensuite un modèle en contrainte, à l'aide de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner [Reissner, 1950] en proposant des champs de type coque empruntés à [Whitney & Sun , 1973] dans chaque couche. Cette modélisation, très intéressante mais un peu lourde, compte tenu du nombre de champs, s'est révélée être en bon accord avec les études tridimensionnelles réalisées par [Wang et Crossman, 1977] par éléments finis. Le Global Local Variational Model de Pagano est une extension de ce modèle à des empilements à très grand nombre de couches dans lesquels la zone d'intérêt est limitée à quelques couches [Pagano & Soni, 1983]. Ces travaux ont donné lieu à un ouvrage [Pagano, 1989] et un logiciel, nommé ASCA, de bureau d'étude fonctionnant sur P.C. [Pagano & Soni, 1992].

C'est par cette approche en contrainte que nous choisissons de travailler et de développer nos modèles. Nous l'exposons dans la suite du mémoire.

PARTIE I

CONSTRUCTION DE MODELES MULTIPARTICULAIRES DE MULTICOUCHE ÉLASTIQUE À L'AIDE DE LA FORMULATION VARIATIONNELLE DE HELLINGER-REISSNER

CHAPITRE I *La méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner*

CHAPITRE II *Approximation des champs de contraintes 3D à partir des efforts intérieurs généralisés des modèles multiparticulaires*

CHAPITRE III *Déplacements généralisés associés aux approximations en contrainte des modèles multiparticulaires*

CHAPITRE IV *Ecriture du comportement élastique linéaire cohérent avec les approximations*

Dans la partie introductive et bibliographique précédente, nous avons vu, qu'il existait de nombreuses modélisations conduisant, parfois directement, souvent en deux étapes, à l'analyse des efforts intérieurs généralisés de plaque et d'efforts de cisaillement et d'arrachement aux interfaces. La pluspart des modèles existants donnent de bonnes prévisions, mais, sont souvent trop complexes pour répondre à une utilisation courante dans les bureaux d'études en charge du dimensionnement des structures multicouches vis à vis de la rupture en chargement monotone ou cyclique. L'objectif principal de cette thèse est de proposer des modèles permettant de déterminer avec une bonne approximation les efforts d'interface dans un multicouche élastique et de simplicité suffisante pour une utilisation facile en bureau d'étude.

Nous proposons, dans cette première partie du mémoire, la construction d'une famille de ces modèles. Nous avons vu précédemment que par souci de simplicité, nous avons choisi de développer des modèles surfaciques. Pour obtenir naturellement les efforts d'interface, nous avons choisi, en chaque point de la surface, n particules si n est le nombre de couches et les efforts interparticulaires sont alors les efforts d'interface cherchés. Plusieurs méthodes sont possibles pour construire ces modèles. Parmi celles-ci, citons la très générale méthode des puissances virtuelles [Germain & Muller, 1986] qui présente l'avantage de déterminer les efforts intérieurs généralisés et les équations d'équilibre sans avoir à se préoccuper du comportement [Ehrlacher & al., 1993], [Caron, 1993], [Ehrlacher & Al., 1994], [Foret, 1995], [Smaoui, 1996], [Naciri & Al., 1997] et [Philippe, 1997] .

Cependant, comme dans ce travail, nous ne nous intéressons qu'au comportement élastique des multicouches, nous avons retenu pour construire ces modèles une méthode d'approximation basée sur la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner des problèmes d'élasticité 3D [Reissner, 1950]. Cette méthode présente pour nous l'avantage de donner directement le comportement élastique reliant les efforts intérieurs généralisés et les déformations généralisées du modèle. Nous la présentons brièvement au chapitre I. La méthode s'appuyant, tout d'abord, sur une approximation des champs de contrainte, nous présentons au chapitre II les différentes approximations de $\overline{\overline{\sigma}}$ conduisant chacune à un modèle différent. Au chapitre III, nous déduisons les déplacements généralisés associés de manière cohérente avec les approximations de $\overline{\overline{\sigma}}$. Les comportements élastiques reliant les contraintes généralisées et les déformations généralisées sont établis au chapitre IV en postulant la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner par rapport aux efforts intérieurs généralisés.

CHAPITRE I

METHODE D'APPROXIMATION D'HELLINGER-REISSNER

I.1 Formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner des problèmes d'élasticité 3D

I.2 Utilisation de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner pour la construction de modèles approchés

I.3 Base polynomiale choisie

Nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire au niveau 3D et nous souhaitons construire divers modèles approchés. Pour mener à bien notre analyse d'efforts d'interface dans les matériaux composites, nous utilisons une méthode de construction de modèles approchés basée sur la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner des problèmes d'élasticité 3D [Reissner, 1950]. Nous l'adoptons car elle présente l'avantage de donner à la fois les contraintes généralisées, les déplacements généralisés, les équations d'équilibre, les conditions aux limites et surtout le comportement du modèle approché. Cette méthode a notamment été utilisée par Reissner pour effectuer une théorie approchée de plaque prenant en compte l'effort tranchant dans le cas d'une plaque homogène. Pagano l'a reprise pour la construction de son modèle "local" de plaque multicouche [Pagano, 1978].

Nous rappelons dans la première section de ce chapitre en quoi consiste la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner des problèmes d'élasticité 3D et le théorème associé.

Puis nous présentons dans la deuxième section les grandes lignes de cette méthode de construction de modèles approchés. Elle consiste tout d'abord à proposer une famille de champs de contraintes approchés 3D dont les composantes s'expriment à l'aide d' "efforts intérieurs généralisés" définis dans chacune des couches et aux interfaces. En introduisant cette forme approchée des champs de contrainte 3D dans la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner, nous pouvons en déduire une relation d'équivalence sur les champs de déplacements 3D. Les champs de déplacements donnant le même travail virtuel dans la famille d'efforts intérieurs approchés seront équivalents. Ainsi les déplacements généralisés du modèle seront ces classes d'équivalence et se présentent comme des champs en (x, y) correspondant à des moyennes pondérées des champs 3D. Les champs de déplacements généralisés étant définis dans chaque couche, nous avons donc ainsi construit un milieu multiparticulaire dans le plan (x,y), dans lequel chaque point de matière contient n particules (1 particule par couche).

En écrivant la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner par rapport à une variation des champs de déplacements généralisés, nous en déduiront les équations d'équilibre et les conditions aux limites.

En écrivant la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner par rapport aux efforts généralisés, nous en déduirons le comportement approché.

I.I FORMULATION VARIATIONNELLE D'HELLINGER-REISSNER DES PROBLEMES D'ELASTICITE 3D

Dans cette section, nous rappelons la formulation variationnelle des problèmes d'élasticité 3D décrite dans l'article de [Reissner, 1950].

Nous notons respectivement $\underline{A}$, $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}$ un tenseur A d'ordre 1, 2 et 4.

Considérons le problème d'élasticité 3D suivant:
Trouver les champs de déplacement $\underline{U}$ et de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ tridimensionnels solutions dans le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ satisfaisant les équations suivantes:
- Equation de compatibilité:

$$\text{(I.1.1)} \qquad \overline{\overline{\varepsilon}}(\underline{U}) = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\underline{U} + {}^{t}\overline{\overline{\mathrm{Grad}}}\underline{U}\right)$$

- Equation d'équilibre quasi-statique:

$$\text{(I.1.2)} \qquad \underline{\mathrm{div}}\overline{\overline{\sigma}}(\underline{x}) + \underline{f}(\underline{x}) = 0 \text{ dans } \Omega$$

où $\underline{f}(\underline{x})$ est le champ de forces de volume
- Equation de comportement élastique linéaire:

$$\text{(I.1.3)} \qquad \overline{\overline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x}) : \overline{\overline{\sigma}}(\underline{x})$$

où $\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x})$ est le tenseur d'ordre quatre des souplesses du matériau en $\underline{x}$
- Equations de conditions aux limites:

$$\text{(I.1.4)} \qquad \begin{array}{l} \underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^{d}(\underline{x}) \text{ sur } \partial\Omega_U \\ \left(\overline{\overline{\sigma}}.\underline{n}\right)(\underline{x}) = \underline{T}^{d}(\underline{x}) \text{ sur } \partial\Omega_T \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \partial\Omega_U \cap \partial\Omega_T = \varnothing \\ \partial\Omega_U \cup \partial\Omega_T = \partial\Omega \end{array}$$

où $\underline{U}^{d}(\underline{x})$ est le déplacement imposé sur la partie $\partial\Omega_U$ de la frontière Ω et $\underline{T}^{d}(\underline{x})$ le vecteur contrainte imposé sur la partie $\partial\Omega_T$ de la frontière Ω.

Nous considérons maintenant la fonctionnelle suivante de Hellinger-Reissner définie sur les couples de champs $\left(\underline{U}^{*}, \overline{\overline{\sigma}}^{*}\right)$, où $\underline{U}^{*}$ est un champ de vecteur continu 3D sur Ω, C^1 par morceaux et $\overline{\overline{\sigma}}^{*}$ est un champ de tenseur d'ordre 2 symétrique, C^1 par morceaux sur Ω:

$$\text{(I.1.5)}\quad \begin{aligned} \text{H.R.}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right) = &\int_\Omega \left[\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}):\overline{\overline{\varepsilon}}\left(\underline{U}^*(\underline{x})\right) - \underline{f}(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) - \frac{1}{2}\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}):\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x}):\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x})\right]d\Omega \\ &- \int_{\partial\Omega_U}\left(\overline{\overline{\sigma}}^*.\underline{n}\right)(\underline{x}).\left(\underline{U}^* - \underline{U}^d\right)(\underline{x})dS - \int_{\partial\Omega_T}\underline{T}^d(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x})dS \end{aligned}$$

Théorème:
La solution du problème élastique est le couple $\left(\underline{U},\overline{\overline{\sigma}}\right)$ qui rend stationnaire la fonctionnelle H. R..

On voit facilement que la stationnarité par rapport à une variation quelconque du champ de déplacement tridimensionnel $\underline{U}^*$ donne les équations d'équilibre et les conditions aux limites en contraintes sur $\partial\Omega_T$:

$$\text{(I.1.6)}\quad \begin{aligned} &\forall\, \partial\underline{U}^* \\ &\int_\Omega \overline{\overline{\sigma}}:\overline{\overline{\varepsilon}}\left(\partial\underline{U}^*\right)d\Omega - \int_\Omega \underline{f}(\underline{x}).\partial\underline{U}^*d\Omega - \int_{\partial\Omega_T}\underline{T}^d(\underline{x}).\partial\underline{U}^*dS - \int_{\partial\Omega_U}\left(\overline{\overline{\sigma}}.\underline{n}\right).\partial\underline{U}^*dS = 0 \\ &\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \tilde{\text{div}}\,\overline{\overline{\sigma}} + \underline{f} = 0 \\ \overline{\overline{\sigma}}.\underline{n} = \underline{T}^d \text{ sur } \partial\Omega_T \\ \overline{\overline{\sigma}}.\underline{n} \text{ continu sur les surfaces de discontinuité de } \overline{\overline{\sigma}} \end{array}\right. \end{aligned} ,$$

alors que la stationnarité par rapport à une variation quelconque du champ de contraintes tridimensionnel $\overline{\overline{\sigma}}^*$ donne le comportement élastique linéaire et les conditions aux limites en déplacement sur $\partial\Omega_U$:

$$\text{(I.1.7)}\quad \begin{aligned} &\forall\, \partial\overline{\overline{\sigma}}^* \\ &\int_\Omega \partial\overline{\overline{\sigma}}^*:\overline{\overline{\varepsilon}}(\underline{U})d\Omega - \int_\Omega \partial\overline{\overline{\sigma}}^*:\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}:\overline{\overline{\sigma}}\,d\Omega - \int_{\partial\Omega_U}\left(\partial\overline{\overline{\sigma}}^*.\underline{n}\right).\left(\underline{U} - \underline{U}^d\right)dS = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}:\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\varepsilon}}(\underline{U}) \\ \underline{U} = \underline{U}^d\big|_{\partial\Omega_U} \end{array}\right. \end{aligned}$$

I.2 UTILISATION DE LA FORMULATION VARIATIONNELLE D'HELLINGER-REISSNER POUR LA CONSTRUCTION DE MODELES APPROCHES

Pour simplifier la présentation, dans la suite nous supposons l'absence de forces volumiques.

Aussi bien, Reissner pour la théorie des plaques homogènes avec prise en compte de l'effort tranchant [Reissner, 1945], que, Pagano pour la construction de son modèle "local" de plaque multicouche [Pagano, 1978], ont procédé en quatre étapes pour la construction de modèles approchés:

1) Construction des champs de contraintes 3D approchés:

Le sous-ensemble de l'ensemble des champs de tenseur d'ordre 2 symétrique régulier, dans lequel évolue la variable champ $\overline{\overline{\sigma}}^*$, est en général un sous-espace vectoriel ou affine de l'espace vectoriel des champs tensoriels d'ordre 2 symétriques définis dans le domaine. Les champs $\overline{\overline{\sigma}}^*$ appartenant à ce sous-ensemble s'expriment à l'aide de champs qui sont les efforts généralisés du modèle. Il est possible de considérer des sous-ensembles de champs $\overline{\overline{\sigma}}^*$ polynomiaux en z par couche. Les coefficients de ces polynômes en z sont des champs en (x, y) qui sont directement reliés aux efforts intérieurs du modèle approché qui est donc un modèle plan.

2) *Utilisation des champs de contraintes 3D approchés précédents, dans la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner, afin de mettre en évidence les <u>champs de déplacements généralisés</u> cohérents avec les approximations en contrainte.*

Le choix du sous-ensemble dans lequel $\overline{\overline{\sigma}}^*$ varie, implique une relation d'équivalence sur les champs de déplacements continus. Deux champs de déplacement ayant le même travail virtuel pour tous les champs $\overline{\overline{\sigma}}^*$ du sous-ensemble sont dits équivalents. Les classes d'équivalence des champs de déplacements sont les champs de déplacements généralisés du modèle. Ces classes d'équivalence, dans l'application aux multicouches, sont valablement représentées par des champs en (x, y) décrits par des moyennes pondérées sur l'épaisseur de chaque couche des champs de déplacements 3D.

3) Ecriture de la stationnarité d'une approximation de la fonctionnelle de H. R. par rapport aux champs de déplacements généralisés afin de retrouver les équations d'équilibre.

L'idée naturelle consistant à écrire la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner sur les couples $\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$, où $\overline{\overline{\sigma}}^*$ appartient au sous-ensemble retenu et $\underline{U}^*$ à l'ensemble quotient des champs de déplacements continus 3D par la relation d'équivalence définie ci-dessus, peut se trouver confrontée à quelques difficultés si les données en force à la frontière sur $\partial\Omega_T$ ne sont pas compatibles avec la forme retenue pour $\overline{\overline{\sigma}}^*$. Il est dans ce cas nécessaire de "projeter" en quelque sorte les données en contraintes du problème initial sur l'ensemble que constitue les champs de type $\overline{\overline{\sigma}}^*.\underline{n}$ sur $\partial\Omega_T$ où $\overline{\overline{\sigma}}^*$ appartient au sous-

ensemble retenu. Cela revient à modifier éventuellement les termes contenant les efforts surfaciques sur $\partial\Omega_T$ dans la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner. On peut aussi dire que les conditions aux limites sont, dans le modèle approché, satisfaites en un sens "moyen" par rapport aux conditions aux limites du problème 3D. Moyennant cette modification de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner, il est alors possible d'écrire sa stationnarité par rapport aux déplacements généralisés. Nous retrouvons alors les équations d'équilibre généralisées du modèle et ses conditions aux limites en contraintes généralisées.

4) Ecriture de la stationnarité de la fonctionnelle approchée de H. R. par rapport aux champs d'efforts généralisés afin d'établir le comportement du modèle approché .

Ce comportement est alors écrit en souplesse. Les déformations généralisées s'expriment comme des fonctions affines des contraintes généralisées. En effet certains efforts extérieurs peuvent apparaître dans la relation déformations généralisées - contraintes généralisées. C'est notamment le cas pour les multicouches si l'on a des efforts extérieurs sur les faces supérieures ou inférieures ainsi que nous le voyons plus loin.

Notons que la fonctionnelle de H. R. utilise une écriture de l'énergie en contrainte. Dans les cas les plus compliqués, cette écriture peut judicieusement être "simplifiée" avant l'écriture de la stationnarité. C'est cette méthode que nous appliquons dans les chapitres suivants pour chacun de nos modèles multiparticulaires.

I.3 BASE POLYNOMIALE CHOISIE

Nous utilisons la convention suivante: α et $\beta \in \{1,2\}$. n est le nombre de couches.

Les tenseurs plans sont notés avec un ou plusieurs "~" suivant leur ordre.

Le multicouche est parallèle au plan (x,y), l'empilement des couches se fait suivant la direction $\underline{e}_z$ et la première direction d'orthotropie de chaque couche fait un angle θ avec la direction principale $\underline{e}_x$ du laminé:

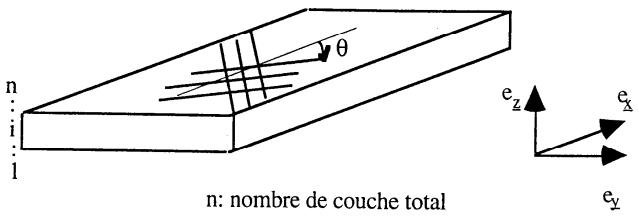


Fig. 1.3.1: Schéma du multicouche

Nous résumons sur la figure suivante les différentes notations utilisées dans une couche i (i=1, n):

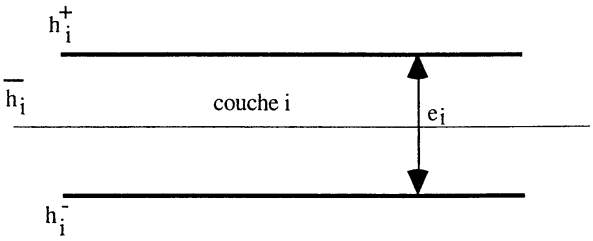


Fig. I.3.2: Notations utilisées dans une couche i

Nous proposons dans ce qui suit de construire un modèle approché en astreignant $\bar{\bar{\sigma}}^*$ à appartenir au sous ensemble des champs polynomiaux en z par couche. Cela revient à retenir une approximation des champs de contraintes 3D, solution du problème, sous forme polynomiale en z par couche. Compte tenu des équations d'équilibre 3D, dans l'hypothèse où les forces de volume sont nulles, si p est le degré des polynômes en z approchant les composantes membranaires $\sigma_{\alpha\beta}$ du champ de contrainte 3D, alors celui des composantes de cisaillement $\sigma_{\alpha 3}$ est au plus p+1 et celui de la composante hors plan σ_{33} est au plus p+2. Les polynômes de la base sont différents dans chaque couche et nous retenons de les écrire en fonction de la grandeur adimensionnelle $\frac{z-\bar{h}_i}{e_i}$ où comme indiqué sur la figure I.3.2, e_i est l'épaisseur de la ième couche et $\bar{h}_i$ la côte de son plan moyen.

Compte tenu du fait que l'épaisseur des couches est petite par rapport aux autres dimensions de la structure, il ne sera pas nécessaire de développer le sous-ensemble définissant $\bar{\bar{\sigma}}^*$ au delà des polynômes de degré 3 par couche.
Dans notre étude, nous prenons p égal à 0 ou 1 et nous choisissons d'écrire, <u>dans la couche i,</u> ces champs de contraintes tridimensionnels approchés dans une "base" polynomiale. Ces polynômes de degré croissant en z sont choisis orthogonaux entre eux afin de faciliter ultérieurement le calcul des énergies élastiques écrites en contrainte, c'est à dire que:

(I.3.1) $$\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_\alpha^i(z) P_\beta^i(z)\, dz = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta$$

La "base" polynomiale choisie est la suivante:

(I.3.2)
$$\left|\begin{array}{l} P_0^i(z) = 1 \\ P_1^i(z) = \dfrac{\left(z - \bar{h}_i\right)}{e^i} \\ P_2^i(z) = -6\left(\dfrac{z - \bar{h}_i}{e^i}\right)^2 + \dfrac{1}{2} \\ P_3^i(z) = -2\left(\dfrac{z - \bar{h}_i}{e^i}\right)^3 + \dfrac{3}{10}\left(\dfrac{z - \bar{h}_i}{e^i}\right) \end{array}\right.$$

Ces polynômes sont reliés au polynômes de Legendre classiques:

(I.3.3)
$$P_0^L(x) = 1 \quad P_1^L(x) = x \quad P_2^L(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} \quad P_3^L(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$$

par les relations suivantes:

(I.3.4)
$$\left|\begin{array}{l} P_0^i(x) = P_0^L\left(2\left(\dfrac{z - \bar{h}_i}{e_i}\right)\right) \\ P_1^i(x) = \dfrac{1}{2}P_1^L\left(2\left(\dfrac{z - \bar{h}_i}{e_i}\right)\right) \\ P_2^i(x) = -P_2^L\left(2\left(\dfrac{z - \bar{h}_i}{e_i}\right)\right) \\ P_3^i(x) = -\dfrac{1}{10}P_3^L\left(2\left(\dfrac{z - \bar{h}_i}{e_i}\right)\right) \end{array}\right.$$

Notre choix donne ci-dessous des calculs un peu plus simples.

Les polynômes de cette "base" vérifient les relations suivantes:

$$
\text{(I.3.5)} \qquad
\left|\begin{array}{l}
P_0^{i\,\prime}(z) = 0 \\
P_1^{i\,\prime}(z) = \dfrac{P_0^i(z)}{e^i} \\
P_2^{i\,\prime}(z) = \dfrac{-12}{e^i} P_1^i(z) \\
P_3^{i\,\prime}(z) = \dfrac{P_2^i(z)}{e^i} - \dfrac{2}{10}\dfrac{P_0^i(z)}{e^i}
\end{array}\right.
\quad ; \quad
\left|\begin{array}{l}
P_1^i\left(h_i^+\right) = \dfrac{1}{2} \\
P_1^i\left(h_i^-\right) = -\dfrac{1}{2} \\
P_2^i\left(h_i^+\right) = -1 \\
P_2^i\left(h_i^-\right) = -1 \\
P_3^i\left(h_i^+\right) = -\dfrac{1}{10} \\
P_3^i\left(h_i^-\right) = \dfrac{1}{10}
\end{array}\right.
\quad ; \quad
\left|\begin{array}{l}
\displaystyle\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_0^i(z)P_0^i(z)dz = e^i \\
\displaystyle\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z)P_1^i(z)dz = \frac{e^i}{12} \\
\displaystyle\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_2^i(z)P_2^i(z)dz = \frac{e^i}{5} \\
\displaystyle\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_3^i(z)P_3^i(z)dz = \frac{e^i}{700}
\end{array}\right.
$$

Dans le développement des champs $\overline{\overline{\sigma}}^*(x,y,z)$ approchés sur cette "base" polynomiale, les coefficients sont des champs en (x, y). Ils sont reliés aux efforts généralisés du modèle approché. C'est cette relation que nous explicitons au chapitre II suivant.

CHAPITRE II

APPROXIMATION DES CHAMPS DE CONTRAINTES 3D A PARTIR DES EFFORTS INTERIEURS GENERALISES DES MODELES MULTIPARTICULAIRES

II.1 Les champs de contraintes 3D approchés du modèle M4_7n

II.2 Les champs de contraintes 3D approchés du modèle M4_5n

II.3 Les champs de contraintes 3D approchés du modèle M4_3n plaque

II.4 Les champs de contraintes 3D approchés du modèle M4_(2n+1) plaque

II.5 Les champs de contraintes 3D approchés du modèle M4_3n membrane

II.6 Les champs de contraintes 3D approchés du modèle M4_(2n+1) membrane

II.7 Les champs de contraintes 3D approchés du modèle de Love-Kirchhoff

Dans ce chapitre afin d'exposer la première étape de construction de modèles approchés par la méthode variationnelle d'Hellinger-Reissner rappelée au chapitre précédent, nous choisissons d'écrire des champs de contraintes 3D approchés, notés $\overline{\overline{\sigma}}^a$, polynomiaux en z par couche.

Les coefficients de ces polynômes sont des champs en (x, y) (coordonnées dans le plan des plaques étudiées). On pourrait penser les retenir comme définition des efforts intérieurs généralisés, mais cette idée n'apparaît pas très bonne car il faudrait alors écrire la continuité du vecteur contrainte aux interfaces, ce qui impliquerait des relations entre ces champs en (x, y). En outre, il est préférable d'essayer de donner un sens physique aussi clair que possible aux efforts intérieurs généralisés. Nous allons dans ce chapitre, proposer une expression des coefficients de ces polynômes en fonction des efforts intérieurs qui nous paraissent devoir être retenus comme ayant la signification physique la plus claire. Par construction, le champ $\overline{\overline{\sigma}}^a$ construit vérifie la continuité du vecteur contrainte aux interfaces. Nous posons ces définitions dans la première section de ce chapitre. Certains efforts intérieurs généralisés sont définis comme des champs moyens éventuellement pondérés (moments) sur l'épaisseur des couches, alors que d'autres sont des champs définis aux interfaces pour assurer automatiquement la continuité du vecteur contrainte. Rappelons que ces efforts intérieurs généralisés sont des champs en (x, y). Le milieu macroscopique obtenu est ainsi plan. L'aspect tridimensionnel est rendu par l'indice i de couche variant de 1 à n.

Nous construisons ces champs en partant de l'approximation la plus riche, c'est à dire faisant intervenir le plus d'efforts intérieurs généralisés. Puis, dans les modèles successifs, nous diminuons progressivement le nombre de ces efforts intérieurs généralisés en exploitant les équations d'équilibre auxquelles sont soumises les approximations. Les différentes sections contiennent chacune une approximation de champs de contraintes approchés.

Les différents modèles obtenus sont nommés d'une part à l'aide du nombre d'équations d'équilibre sur les efforts intérieurs généralisés. D'autre part, pour distinguer les modèles ayant le même nombre d'équations d'équilibre, nous qualifions de modèle "plaque" et de modèle "membrane" ceux qui utilisent respectivement des approximations du premier degré et de degré 0 en z pour les contraintes dans le plan des couches.

Dans tout ce qui suit, nous rappelons que nous avons supposées négligeables les forces de volume.

II.1 LES CHAMPS DE CONTRAINTES 3D APPROCHÉS DU MODÈLE M4_7N

Pour construire les champs de contrainte 3D approchés, nous devons tout d'abord choisir le degré des polynômes approximant ces champs. Dans ce premier modèle, nous choisissons des polynômes de degré un pour les contraintes membranaires $\sigma_{\alpha\beta}$, donc, par intégration des 2 premières équations d'équilibre 3D, des polynômes de degré deux pour les contraintes $\sigma_{\alpha 3}$ et de nouveau par intégration, de la dernière équation d'équilibre, de degré trois pour la contrainte σ_{33}. Les coefficients de ces polynômes sont des champs en (x,y) qui sont reliés aux efforts intérieurs généralisés du modèle. Nous choisissons les efforts intérieurs généralisés de façon à ce qu'ils aient le plus possible une signification physique, qu'ils assurent automatiquement la continuité du vecteur contrainte et qu'ils soient en nombre suffisant pour permettre d'exprimer les coefficients des polynômes.

Ainsi pour les composantes des contraintes membranaires $\sigma_{\alpha\beta}$, nous avons besoin de 2 champs puisque l'approximation par polynôme de degré 1 demande 2 coefficients. Nous choisissons:

- Le tenseur plan d'ordre 2 $\tilde{\tilde{N}}^i$ des efforts normaux de la couche i :

(II.1.1) $$N^i_{\alpha\beta}(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}(x,y,z)dz;$$

- Le tenseur plan d'ordre 2 $\tilde{\tilde{M}}^i$ des moments de flexion de la couche i par rapport au plan médian de la couche:

(II.1.2) $$M^i_{\alpha\beta}(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i)\sigma_{\alpha\beta}(x,y,z)dz;$$

Pour les composantes de cisaillement $\sigma_{\alpha 3}$, l'approximation est de degré 2 par couche, il nous faut donc 3 champs d'efforts intérieurs. Cependant, nous devons assurer la continuité de $\sigma_{\alpha 3}$ aux interfaces. Ainsi, pour exprimer les coefficients des développements polynomiaux, nous choisissons:

- Le vecteur plan $\tilde{Q}^i$ d'effort tranchant de la couche i:

(II.1.3) $$Q^i_\alpha(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}(x,y,z)dz;$$

- Le vecteur plan $\tilde{\tau}^{i,i+1}$ d'effort intérieur de cisaillement à l'interface i, i+1:

(II.1.4) $$\tau^{i,i+1}_\alpha = \sigma_{\alpha 3}\left(x,y,h_i^+\right);$$

- Le vecteur plan $\tilde{\tau}^{i-1,i}$ d'effort intérieur de cisaillement à l'interface i-1,i:

(II.1.5) $$\tau^{i-1,i}_\alpha = \sigma_{\alpha 3}\left(x,y,h_i^-\right);$$

Le choix du vecteur de cisaillement aux interfaces assure la continuité de $\sigma_{\alpha 3}$.

Remarque: Dans ce qui précède $\tilde{\tau}^{i,i+1}$ est défini pour i variant de 1 à n-1 (les interfaces). Cependant il est commode de noter:

$\tilde{\tau}^{0,1}$ l'effort extérieur de cisaillement sur la face inférieure de la couche N°1

et

$\tilde{\tau}^{n,n+1}$ l'effort extérieur de cisaillement sur la face supérieure de la couche N°n

Comme dans la suite pour simplifier la présentation, nous restreignons l'étude au cas ou le vecteur contrainte est imposé sur les faces supérieure et inférieure du multicouche, bien évidemment $\tilde{\tau}^{0,1}$ et $\tilde{\tau}^{n,n+1}$ sont alors des données. Si nous notons T_α^- $\left(\text{respectivement } T_\alpha^+\right)\alpha \in \{1,2\}$ la composante suivant α du vecteur contrainte imposé sur la face externe inférieure (respectivement supérieure) du multicouche, nous avons:

(II.1.6) $$\tau_\alpha^{0,1}(x,y) = -T_\alpha^-(x,y) \text{ respectivement } \tau_\alpha^{n,n+1}(x,y) = T_\alpha^+(x,y)$$

Pour les composantes d'arrachement σ_{33} l'approximation est de degré 3, il nous faut donc 4 champs d'efforts intérieurs. Cependant nous devons assurer la continuité de σ_{33} aux interfaces. Ainsi, nous choisissons d'exprimer le développement polynomial, tout d'abord, en fonction des efforts normaux d'interface qui ont un sens physique clair:

- Le scalaire $v^{i,i+1}$ d'effort intérieur d'arrachement à l'interface i, i+1:

(II.1.7) $$v^{i,i+1} = \sigma_{33}^i\left(x,y,h_i^+\right);$$

- Le scalaire $v^{i-1,i}$ d'effort intérieur d'arrachement à l'interface i-1,i:

(II.1.8) $$v^{i-1,i} = \sigma_{33}^i\left(x,y,h_i^-\right);$$

Remarque: Dans ce qui précède $v^{i,i+1}$ est défini pour i variant de 1 à n-1 (les interfaces). Cependant il est commode comme précédemment de noter:

$v^{0,1}$ l'effort extérieur normal sur la face inférieure de la couche N°1

et

$v^{n,n+1}$ l'effort extérieur normal sur la face supérieur de la couche N°n

Ainsi, on défini:

(II.1.9) $$v^{0,1}(x,y) = -T_3^-(x,y) \text{ et } v^{n,n+1}(x,y) = T_3^+(x,y)$$

où T_3^- $\left(\text{respectivement } T_3^+\right)$ est la composante normale du vecteur contrainte imposé sur la face externe inférieure (respectivement supérieure) du multicouche.

Comme nous avons besoin de quatre coefficients pour exprimer σ_{33}, nous choisissons en outre les deux grandeurs suivantes dont le sens physique est moins direct:
- Les scalaires N_3^i et M_3^i des moments d'ordre zéro et un de la contrainte normale au plan de la couche i:

(II.1.10)
$$\begin{cases} N_3^i(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{33}(x,y,z)dz \\ M_3^i(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(z - \bar{h}^i\right)\sigma_{33}(x,y,z)dz \end{cases};$$

Ainsi que nous le verrons plus loin, ces choix conduisent à 7n champs cinématiques scalaires, donc 7n équations d'équilibre, d'où la dénomination retenue M4_7n.

Tous calculs faits, dans la base polynomiale définie par (I.3.2), le champ de contrainte tridimensionnel approché $\bar{\bar{\sigma}}^{a7n}$ choisi, compatible avec les efforts intérieurs généralisés du modèle à 7n équations d'équilibre, s'écrit ainsi :

(II.1.11)
$$\sigma_{\alpha\beta}^{a7n}(x,y,z) = N_{\alpha\beta}^i(x,y)\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}}M_{\alpha\beta}^i(x,y)P_1^i(z)$$

(II.1.12)
$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha3}^{a7n}(x,y,z) &= Q_\alpha^i(x,y)\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \left(\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y) - \tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)\right)P_1^i(z) \\ &+ \left(Q_\alpha^i(x,y) - \frac{e^i}{2}\left(\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y) + \tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)\right)\right)\frac{P_2^i(z)}{e^i}\end{aligned}$$

(II.1.13)
$$\begin{aligned}\sigma_{33}^{a7n}(x,y,z) &= N_3^i(x,y)\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}}M_3^i(x,y)P_1^i(z) \\ &+ \left(N_3^i(x,y) - \frac{e^i}{2}\left(v^{i,i+1}(x,y) + v^{i-1,i}(x,y)\right)\right)\frac{P_2^i(z)}{e^i} \\ &+ \left(\frac{60}{e^{i2}}M_3^i(x,y) - 5\left(v^{i,i+1}(x,y) - v^{i-1,i}(x,y)\right)\right)P_3^i(z)\end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que le champ approché ci-dessus vérifie les équations (II.1.1->10).
Pour que le champ $\bar{\bar{\sigma}}^{a7n}$ soit en équilibre, il faut vérifier que $\underline{\mathrm{div}}\,\bar{\bar{\sigma}}^{a7n} = \underline{0}$, ce qui implique les 7n relations suivantes sur les efforts intérieurs généralisés:

- Première et deuxième équations d'équilibre, facteur de $\frac{P_0^i(z)}{e^i}$:

(II.1.14) $$\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^{i}(x,y)+\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)-\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

- Troisième équation d'équilibre, facteur de $\frac{P_0^i(z)}{e^i}$:

(II.1.15) $$\mathrm{div}\tilde{Q}^i(x,y)+\left(v^{i,i+1}(x,y)-v^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

(Notez la contribution de $P_3^{i\prime}(z)$ à cette équation)

- Première et deuxième équation d'équilibre, facteur de $\frac{12}{e^{i2}}P_1^i(z)$:

(II.1.16) $$\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^{i}(x,y)+\frac{e_i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)+\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)\right)-\tilde{Q}^i(x,y)=0 \text{ sur } \omega$$

- Troisième équation d'équilibre, facteur de $-\frac{12}{e^{i2}}P_1^i(z)$:

(II.1.17) $$N_3^i(x,y)-\frac{e^i}{2}\left(v^{i,i+1}(x,y)+v^{i-1,i}(x,y)\right)-\frac{e^{i2}}{12}\left(\mathrm{div}\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)-\mathrm{div}\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

- Troisième équation d'équilibre, facteur de $\frac{P_2^i(z)}{e^i}$:

(II.1.18)

$$\mathrm{div}\tilde{Q}^i(x,y)+\frac{60M_3^i(x,y)}{e^{i2}}-\frac{e^i}{2}\left(\mathrm{div}\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)+\mathrm{div}\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)\right)-5\left(v^{i,i+1}(x,y)-v^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

Dans l'article de Pagano (Cf. éq. N°18 [Pagano, 1978]), on retrouve les six équations d'équilibre écrites ci-dessus dans (II.1.14; 15 16 et 17) plus l'équation notée ci-dessous:

(II.1.19)

$$\mathrm{div}\tilde{Q}^i(x,y)+\frac{20M_3^i(x,y)}{e^{i2}}-\left(v^{i,i+1}(x,y)-v^{i-1,i}(x,y)\right)-\frac{e^i}{6}\left(\mathrm{div}\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)+\mathrm{div}\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

Elle n'est autre que la combinaison linéaire des équations $\frac{2}{3}$(II.1.15) + $\frac{1}{3}$(II.1.18).

II.2 LES CHAMPS DE CONTRAINTES 3D APPROCHÉS DU MODÈLE M4_5N

On peut souhaiter construire un modèle qui ne fasse pas apparaître les efforts intérieurs généralisés N_3^i et M_3^i dont la signification physique n'est pas directe. Pour ce faire, on déduit les champs de contrainte du modèle à partir des champs $\bar{\bar{\sigma}}^{a7n}$ en utilisant dans (II.1.13) les relations ci-dessous

issues des équations d'équilibre (II.1.17 et 18) du modèle M4_7n:

(II.2.1) $$M_3^i = \frac{e_i^3}{120}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right) + \frac{e_i^2}{12}\left(v^{i,i+1} - v^{i-1,i}\right) - \frac{e_i^2}{60}\mathrm{div}\tilde{Q}^i$$

(II.2.2) $$N_3^i = \frac{e_i^2}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}\right) + \frac{e_i}{2}\left(v^{i,i+1} + v^{i-1,i}\right)$$

Le modèle ainsi construit conduit à 5n équations d'équilibre d'où sa dénomination M4_5n.

Tous calculs faits, on obtient:

(II.2.3) $$\sigma_{\alpha\beta}^{a5n}(x,y,z) = N_{\alpha\beta}^i(x,y)\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}}M_{\alpha\beta}^i(x,y)P_1^i(z)$$

(II.2.4) $$\sigma_{\alpha3}^{a5n}(x,y,z) = Q_\alpha^i(x,y)\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \left(\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y) - \tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)\right)P_1^i(z) + \left(Q_\alpha^i(x,y) - \frac{e_i}{2}\left(\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y) + \tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)\right)\right)\frac{P_2^i(z)}{e^i}$$

(II.2.5)
$$\sigma_{33}^{a5n}(x,y,z) = \left(\left(\frac{v^{i,i+1}(x,y) + v^{i-1,i}(x,y)}{2}\right) + \frac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)\right)P_0^i(z)$$
$$+\left(-\frac{\mathrm{div}\tilde{Q}^i(x,y)}{5} + \frac{e^i}{10}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right) + \left(v^{i,i+1}(x,y) - v^{i-1,i}(x,y)\right)\right)P_1^i(z)$$
$$+\frac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)P_2^i(z) + \left(-\mathrm{div}\tilde{Q}^i(x,y) + \frac{e^i}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)\right)P_3^i(z)$$

Notons que les champs $\overline{\overline{\sigma}}^{a5n}$ et $\overline{\overline{\sigma}}^{a7n}$ ne se distinguent que sur la composante σ_{33}^a. Ainsi, nous vérifions que cette composante σ_{33}^a dépendant directement des deux efforts intérieurs généralisés

$$v^{i-1,i}(x,y) \text{ et } v^{i,i+1}(x,y)$$

doit faire intervenir la divergence d'autres efforts intérieurs généralisés du modèle pour qu'elle puisse s'écrire sous la forme d'une approximation polynomiale de degré trois. Ceci implique les 5n relations suivantes sur les efforts intérieurs généralisés du M4_5n:

(II.2.6) $$\mathrm{div}\tilde{\tilde{N}}^i(x,y) + \left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right) = 0 \text{ sur } \omega$$

(II.2.7) $$\mathrm{div}\tilde{Q}^i(x,y)+\left(v^{i,i+1}(x,y)-v^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

(II.2.8) $$\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^i(x,y)+\frac{e_i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)+\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)\right)-\tilde{Q}^i(x,y)=0 \text{ sur } \omega$$

Elles sont identiques aux équations (II.1.14->16) du modèle M4_7n.

II.3 LES CHAMPS DE CONTRAINTES 3D APPROCHÉS DU MODÈLE M4_3N PLAQUE

Le modèle à 5n équations d'équilibre peut, pour certaines applications, être jugé trop riche donc trop lourd. On peut alors tenter de construire un modèle qui ne fasse pas explicitement intervenir l'effort tranchant $\tilde{Q}^i$ par couche. Pour ce faire, on tire $\tilde{Q}^i$ de l'équation d'équilibre (II.2.8) du modèle M4_5n , soit:

(II.3.1) $$\tilde{Q}^i=\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^i+\frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i-1,i}+\tilde{\tau}^{i,i+1}\right)$$

Nous verrons plus loin que ce modèle conduit à 3n équations d'équilibre d'où sa dénomination M4_3n. Les contraintes membranaires restent inchangées par rapport au modèle précédent M4_5n, c'est à dire qu'elles s'expriment sous la forme d'approximations polynomiales, de degré un en z, d'efforts généralisés. Nous nommons ce modèle M4_3nP (P: plaque) suivant les conventions de notations exposées dans l'introduction de ce premier chapitre.

En reportant dans l'écriture des contraintes (II.2.4 et 5) l'expression (II.3.1), on obtient finalement:

(II.3.2) $$\sigma_{\alpha\beta}^{a3nP}(x,y,z)=N_{\alpha\beta}^i(x,y)\frac{P_0^i(z)}{e^i}+\frac{12}{e^{i2}}M_{\alpha\beta}^i(x,y)P_1^i(z)$$

(II.3.3) $$\sigma_{\alpha3}^{a3nP}(x,y,z)=\left(\frac{1}{2}\left(\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y)+\tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)\right)+\frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i(x,y)}{e^i}\right)P_0^i(z)$$
$$+\left(\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y)-\tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)\right)P_1^i(z)+M_{\alpha\beta,\beta}^i(x,y)\frac{P_2^i(z)}{e^i}$$

$$\sigma_{33}^{a3nP}(x,y,z)=\left(\frac{v^{i,i+1}(x,y)+v^{i-1,i}(x,y)}{2}+\frac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)-\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)\right)P_0^i(z)$$

(II.3.4)
$$+\left(-\frac{1}{5}\mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^i(x,y)+\left(v^{i,i+1}(x,y)-v^{i-1,i}(x,y)\right)\right)P_1^i(z)$$

$$+\frac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)-\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)P_2^i(z)-\mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^i(x,y)P_3^i(z)$$

Les efforts intérieurs généralisés associés aux composantes $\sigma_{\alpha\beta}$ sont donc identiques au modèle M4_5n précédent:

$$N_{\alpha\beta}^i(x,y) \text{ et } M_{\alpha\beta}^i(x,y)$$

Les efforts intérieurs généralisés du modèle M4_3nP associés aux composantes $\sigma_{\alpha 3}$ étant réduits à deux : $\tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)$ et $\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y)$,

nous vérifions bien que pour être cohérent avec les équations d'équilibre du milieu tridimensionnel elles font intervenir des divergences d'efforts intérieurs généralisés.

De même la composante σ_{33} de la couche i n'étant associée qu'à deux efforts intérieurs généralisés du M4_3nP: $v^{i-1,i}(x,y)$ et $v^{i,i+1}(x,y)$

est exprimée à l'aide de divergences d'efforts intérieurs généralisés afin que son approximation polynomiale en z soit de degré trois.

Ainsi, pour que le champ $\overline{\overline{\sigma}}^{a3nP}$ vérifie l'équilibre, il faut que $\underline{\mathrm{div}}\,\overline{\overline{\sigma}}^{a3nP}=\underline{0}$, ce qui implique les 3n relations suivantes sur les efforts intérieurs généralisés du M4_3nP:

(II.3.5)
$$\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^i(x,y)+\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)-\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

(II.3.6)
$$\mathrm{div}\left(\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^i(x,y)\right)+\mathrm{div}\left(\frac{e_i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)+\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)\right)\right)+\left(v^{i,i+1}(x,y)-v^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

Ces équations au nombre de 3n et le fait que l'on ait conservé l'effort intérieur $\tilde{\tilde{M}}^i$ expliquent le nom donné à ce modèle M4_3nP. Elles correspondent bien à l'élimination de l'effort intérieur $\tilde{Q}^i$ dans les équations d'équilibre du M4_5n.

II.4 LES CHAMPS DE CONTRAINTES 3D APPROCHÉS DU MODÈLE M4_2N+1 PLAQUE

Dans beaucoup d'applications, l'utilisation explicite des efforts normaux d'interface ne présente qu'un faible intérêt, l'essentiel de l'information recherchée se trouvant au niveau des champs de cisaillement d'interface. Il est alors possible de construire un modèle plus simple. Nous verrons que le nombre d'équations d'équilibre est réduit à 2n+1 d'où le nom du modèle M4_(2n+1) P.

En sommant la troisième équation d'équilibre (II.3.6) du modèle précédent M4_3nP de j=1 à i-1, on peut tirer la contrainte normale d'interface $v^{i-1,i}(x,y)$, soit:

(II.4.1) $$v^{i-1,i}(x,y) = -T_3^- - \sum_{j=1}^{i-1}\left[\frac{e^j}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)\right) + \mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^j(x,y)\right]$$

(Nous rappelons que $v^{0,1} = -T_3^-$)

Pour avoir une expression symétrique, nous sommons (II.3.6) de j=i+1 à n et nous tirons la contrainte d'interface $v^{i,i+1}(x,y)$:

(II.4.2) $$v^{i,i+1}(x,y) = T_3^+ + \sum_{j=i+1}^{n}\left[\frac{e^j}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)\right) + \mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^j(x,y)\right]$$

(Nous rappelons que $v^{n,n+1} = T_3^+$)

Reportons ces deux valeurs dans l'expression de la contrainte σ_{33} écrite en (II.3.4) pour en déduire une expression du champ de contrainte dans laquelle $v^{i,i+1}(x,y)$ n'apparaît pas. On obtient alors:

(II.4.3) $$\sigma_{\alpha\beta}^{a(2n+1)P}(x,y,z) = N_{\alpha\beta}^i(x,y)\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}}M_{\alpha\beta}^i(x,y)P_1^i(z)$$

(II.4.4) $$\sigma_{\alpha3}^{a(2n+1)P}(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}\left(\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y) + \tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)\right) + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i(x,y)}{e^i}\right)P_0^i(z)$$

(II.4.5) $$+\left(\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y) - \tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)\right)P_1^i(z) + M_{\alpha\beta,\beta}^i(x,y)\frac{P_2^i(z)}{e^i}$$

$$\sigma_{33}^{a(2n+1)P}(x,y,z)=\begin{bmatrix}\dfrac{T_3^+(x,y)-T_3^-(x,y)}{2}\\ +\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n}\left[\dfrac{e^j}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y)+\tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)\right)+\mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^j(x,y)\right]\\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\left[\dfrac{e^j}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y)+\tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)\right)+\mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^j(x,y)\right]\\ +\dfrac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)-\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)\end{bmatrix}P_0^i(z)$$

$$-\left(\frac{e^i}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)+\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)+\frac{6}{5}\mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^i(x,y)\right)P_1^i(z)$$

$$+\frac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)-\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)P_2^i(z)-\mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^i(x,y)P_3^i(z)$$

De même que précédent pour le modèle M4_3nP, les efforts intérieurs généralisés associés aux composantes $\sigma_{\alpha\beta}$ sont:

$$N_{\alpha\beta}^i(x,y) \text{ et } M_{\alpha\beta}^i(x,y)$$

Les efforts intérieurs généralisés du modèle M4_(2n+1)P associés aux composantes $\sigma_{\alpha 3}$ sont:

$$\tau_\alpha^{i-1,i}(x,y) \text{ et } \tau_\alpha^{i,i+1}(x,y)$$

Ils font donc bien intervenir des divergences d'efforts de façon à être cohérent avec les équations d'équilibre du milieu tridimensionnel et être ainsi des approximations polynomiales de degré de deux par couche.

La composante σ_{33} de la couche i n'est associée à aucun effort intérieur généralisé du M4_(2n+1)P ainsi sa construction ne fait intervenir que des divergences des autres efforts.

Pour que le champ $\overline{\overline{\sigma}}^{a(2n+1)P}$ vérifie l'équilibre, il faut que $\underline{\mathrm{div}}\,\overline{\overline{\sigma}}^{a(2n+1)P}=\underline{0}$ et que $\begin{vmatrix}\sigma_{33}(x,y,h_1^-)=-T_3^-\\ \sigma_{33}(x,y,h_n^+)=T_3^+\end{vmatrix}$, ce qui implique les 2n+1 relations suivantes sur les efforts intérieurs généralisés du M4_(2n+1)P:

(II.4.6) $$\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^i(x,y)+\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)-\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

(II.4.7) $$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{e_j}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)+\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y)\right)+\mathrm{div}\left(\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^j(x,y)\right)\right]+\left(T_3^-(x,y)+T_3^+(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

Notons que la 2n+1ème équation d'équilibre est la somme de i=1, n des équations (II.3.6) du modèle M4_3nP.

II.5 LES CHAMPS DE CONTRAINTES 3D APPROCHÉS DU MODÈLE M4_3N MEMBRANE

Nous nous intéressons maintenant à la construction d'un modèle dans lequel on accorde peu d'importance aux moments de flexion de chacune des couches (par rapport à son propre plan de symétrie). Ce point de vue est surtout justifié compte tenu de la faible épaisseur de couches ($\approx 100\mu m$) lorsque le nombre de couches est ≥ 4.

Dans ce cas, les efforts intérieurs généralisés associés aux composantes $\sigma_{\alpha\beta}$ sont:

$$N^i_{\alpha\beta}(x,y)$$

nous choisissons donc une approximation polynomiale de degré zéro par couche, d'où la dénomination "membrane" du modèle ainsi construit.

Les deux premières équations d'équilibre tridimensionnel imposent alors aux composantes de contraintes de cisaillement $\sigma_{\alpha 3}$ d'être exprimées sous la forme d'un polynôme de degré un par couche. Or, les efforts intérieurs généralisés du modèle M4_3nM associés à $\sigma_{\alpha 3}$ dans la couche i sont au nombre de trois. Soit:

$$Q^i_\alpha(x,y),\ \tau^{i-1,i}_\alpha(x,y) \text{ et } \tau^{i,i+1}_\alpha(x,y)$$

Cette information est trop riche pour construire une approximation polynomiale de degré un. Nous ne retenons, pour fabriquer le champ de contrainte de cisaillement, que les relations sur les cisaillement (II.1.4 et 5) pour l'interface (i-1, i) et (i, i+1). L'effort tranchant $Q^i_\alpha(x,y)$ s'exprime alors en fonction de $\tau^{i-1,i}_\alpha(x,y)$ et $\tau^{i,i+1}_\alpha(x,y)$ à l'aide de l'expression (II.1.3).

La composante σ_{33} de la couche i n'est associée qu'à deux efforts intérieurs généralisés du M4_3nM, soit: $v^{i-1,i}(x,y)$ et $v^{i,i+1}(x,y)$

Pour être cohérent avec les équations d'équilibre du milieu tridimensionnel son approximation polynomiale doit être de degré deux par couche. Il nous faut donc faire intervenir des divergences d'efforts intérieurs généralisés.

On obtient :

(II.5.1) $$\sigma^{a3nM}_{\alpha\beta}(x,y,z) = N^i_{\alpha\beta}(x,y)\frac{P^i_0(z)}{e^i}$$

(II.5.2) $$\sigma^{a3nM}_{\alpha 3}(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(\tau^{i,i+1}_\alpha(x,y)+\tau^{i-1,i}_\alpha(x,y)\right)P^i_0(z)+\left(\tau^{i,i+1}_\alpha(x,y)-\tau^{i-1,i}_\alpha(x,y)\right)P^i_1(z)$$

(II.5.3)
$$\sigma_{33}^{a3nM}(x,y,z)=\left(\frac{v^{i-1,i}(x,y)+v^{i,i+1}(x,y)}{2}+\frac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)-\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)\right)P_0^i(z)$$
$$+\left(v^{i,i+1}(x,y)-v^{i-1,i}(x,y)\right)P_1^i(z)+\frac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)-\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)P_2^i(z)$$

Remarque: nous avons choisi d'exprimer le tenseur des contraintes tridimensionnelles approchées du modèle multiparticulaire à 3n champs en fonction des efforts macroscopiques $\tilde{\tilde{N}}^i(x,y)$ $\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)$ et $v^{i,i+1}(x,y)$ seulement. L'effort tranchant $\tilde{Q}^i(x,y)$ n'est pas représenté dans les efforts intérieurs généralisés du modèle, c'est un choix, on peut en faire d'autres. Ce choix induit d'après la formule (II.1.3) une relation entre l'effort tranchant de la couche i et les cisaillements d'interface:

(II.5.4)
$$Q_\alpha^i(x,y)=\frac{e^i}{2}\left(\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y)+\tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)\right)$$

Pour que le champ $\bar{\bar{\sigma}}^{a3nM}$ vérifie l'équilibre, il faut que $\underline{\mathrm{div}}\bar{\bar{\sigma}}^{a3nM}=\underline{0}$, ce qui implique les 3n relations suivantes sur les efforts intérieurs généralisés du M4_3nM, d'où la dénomination donnée au modèle:

(II.5.5)
$$\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^i(x,y)+\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)-\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

(II.5.6)
$$\frac{e^i}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)+\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)+\left(v^{i,i+1}(x,y)-v^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

Notons que ces approximations et les équations d'équilibre sur les efforts généralisés du modèle M4_3nM se déduisent globalement de celles du modèle M4_3nP dans l'hypothèse où l'on remplace $\tilde{\tilde{M}}^i$ par $\tilde{\tilde{0}}$.

II.6 LES CHAMPS DE CONTRAINTES 3D APPROCHÉS DU MODÈLE M4_(2N+1) MEMBRANE

Si nous ne nous intéressons ni au moment de flexion propre de chaque couche, ni aux efforts normaux d'interface, on peut alternativement, et de manière équivalente, choisir $\tilde{\tilde{M}}^i=\tilde{\tilde{0}}$ dans les écritures des champs de contrainte (II.4.3) (II.4.4) et (II.4.5) du modèle M4_3nP. De même que pour le modèle M4_(2n+1)P, on peut aussi tirer les efforts intérieurs normaux généralisés d'interface $v^{i,i+1}$ et $v^{i-1,i}$ par une sommation convenable des équations d'équilibre (II.5.6) du

modèle précédent M4_3nM et reporter ces valeurs dans sa contrainte normale écrite en (II.5.3). On obtient alors:

(II.6.1) $$\sigma_{\alpha\beta}^{a(2n+1)M}(x,y,z) = N_{\alpha\beta}^{i}(x,y)\frac{P_0^i(z)}{e^i}$$

(II.6.2) $$\sigma_{\alpha 3}^{a(2n+1)M}(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y) + \tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)\right)P_0^i(z) + \left(\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y) - \tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)\right)P_1^i(z)$$

(II.6.3) $$\sigma_{33}^{a(2n+1)M}(x,y,z) = \left[\begin{array}{l} \dfrac{T_3^+(x,y) - T_3^-(x,y)}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n}\left[\frac{e^j}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)\right)\right] \\ \qquad - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\left[\frac{e^j}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)\right)\right] \\ \qquad + \dfrac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right) \end{array}\right]P_0^i(z)$$
$$- \frac{e^i}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)P_1^i(z) + \frac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)P_2^i(z)$$

Les composantes $\sigma_{\alpha\beta}$ ne sont fonction alors que de:

$$N_{\alpha\beta}^{i}(x,y)$$

Les efforts intérieurs généralisés du modèle M4_(2n+1)M associés aux composantes $\sigma_{\alpha 3}$ sont réduits à deux : $\tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)$ et $\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y)$

La composante σ_{33} de la couche i n'est associée à aucun effort intérieur généralisé .

Pour que le champ $\overline{\overline{\sigma}}^{a(2n+1)M}$ vérifie l'équilibre, il faut que $\underline{\mathrm{div}}\overline{\overline{\sigma}}^{a(2n+1)M} = \underline{0}$, ce qui implique les 2n+1 relations suivantes sur les efforts intérieurs généralisés du M4_(2n+1)M, d'où le nom donné au modèle:

(II.6.4) $$\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^{i}(x,y) + \left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right) = 0 \text{ sur } \omega$$

(II.6.5) $$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{e_j}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y) + \tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y)\right)\right] + \left(T_3^-(x,y) + T_3^+(x,y)\right) = 0 \text{ sur } \omega$$

Notons que la dernière équation d'équilibre correspond à la somme de i=1, n des dernières équations d'équilibre du modèle M4_3nM. Ces équations (II.6.4 et 5) sont aussi les équations

d'équilibre sur les efforts généralisés du modèle M4_(2n+1)P dans l'hypothèse où l'on remplace $\tilde{\tilde{M}}^i$ par $\tilde{\tilde{0}}$.

II.7 LES CHAMPS DE CONTRAINTES 3D APPROCHÉS DU MODÈLE DE LOVE-KIRCHHOFF

Notons qu'il est possible par sommation des équations d'équilibre dans le plan (II.4.6) de j=1 à i-1 de tirer l'effort de cisaillement d'interface $\tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)$ comme suit:

(II.7.1) $$\tau_\alpha^{i-1,i} = -T_\alpha^- - \sum_{j=1}^{i-1} N_{\alpha\beta,\beta}^j$$

(Nous rappelons que $\tau_\alpha^{0,1} = -T_\alpha^-$).

Pour avoir une expression symétrique, nous calculons $\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y)$ à partir de la somme de j=i+1 à n, soit:

(II.7.2) $$\tau_\alpha^{i,i+1} = T_\alpha^+ + \sum_{j=i+1}^{n} N_{\alpha\beta,\beta}^j$$

(Nous rappelons que $\tau_\alpha^{n,n+1} = T_\alpha^+$).

Si nous rajoutons ces deux valeurs dans l'approximation du modèle M4_(2n+1)P, nous obtenons:

(II.7.3) $$\sigma_{\alpha\beta}^{aLK}(x,y,z) = N_{\alpha\beta}^i(x,y)\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}} M_{\alpha\beta}^i(x,y) P_1^i(z)$$

(II.7.4) $$\sigma_{\alpha3}^{aLK}(x,y,z) = -N_{\alpha\beta,\beta}^i(x,y)P_1^i(z) + M_{\alpha\beta,\beta}^i(x,y)\frac{P_2^i(z)}{e^i} + \left(\frac{T_\alpha^+ - T_\alpha^-}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} N_{\alpha\beta,\beta}^i + \frac{1}{2}\sum_{j=i+1}^{n} N_{\alpha\beta,\beta}^j + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i(x,y)}{e^i}\right) P_0^i(z)$$

$$
\sigma_{33}^{aLK}(x,y,z) = \left[\begin{array}{l}
\dfrac{T_3^+(x,y) - T_3^-(x,y)}{2} - \dfrac{e^i}{12} \tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^i(x,y) \\
+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=i+1}^{n} \left[e^k \left(\begin{array}{l} \mathrm{div}\left(\dfrac{\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-}{2}\right) + \tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^k(x,y) \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^j(x,y) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} \tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^j(x,y) \end{array} \right) \right] \\
-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} \left[e^k \left(\begin{array}{l} \mathrm{div}\left(\dfrac{\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-}{2}\right) + \tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^k(x,y) \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^j(x,y) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} \tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^j(x,y) \end{array} \right) \right]
\end{array} \right] P_0^i(z)
$$

$$
\text{(II.7.5)} \qquad -\left(\begin{array}{l}
\dfrac{6}{5} \tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^i(x,y) \\
+e^i \left(\mathrm{div}\left(\dfrac{\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^j(x,y) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} \tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^j(x,y) \right)
\end{array} \right) P_1^i(z)
$$

$$
-\frac{e^i}{12} \tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^i(x,y) P_2^i(z) - \tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^i(x,y) P_3^i(z)
$$

Le champ $\overline{\overline{\sigma}}^{aLK}$ vérifie par construction $\underline{\mathrm{div}}\,\overline{\overline{\sigma}}^{aLK} = 0$. Pour qu'il vérifie l'équilibre, il suffit que:

$$
\text{(II.7.6)} \qquad \left| \begin{array}{l} \sigma_{\alpha 3}^{LK}\left(x,y,h_n^+\right) = T_\alpha^+ \\ \sigma_{33}^{LK}\left(x,y,h_n^+\right) = T_3^+ \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} \sigma_{\alpha 3}^{LK}\left(x,y,h_1^-\right) = -T_\alpha^- \\ \sigma_{33}^{LK}\left(x,y,h_1^-\right) = -T_3^- \end{array} \right.
$$

Ce qui implique les trois relations suivantes:

$$
\text{(II.7.7)} \qquad \tilde{\mathrm{div}}\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{N}}^i \right) + \tilde{T}^+ + \tilde{T}^- = 0
$$

(II.7.8) $$\operatorname{div}\tilde{\operatorname{div}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{\tilde{M}}^{j}+\left(\bar{h}_{j}-\frac{h_{n}^{+}+h_{1}^{-}}{2}\right)\tilde{\tilde{N}}^{j}\right)\right)+T_{3}^{+}+T_{3}^{-}+\left(\frac{h_{n}^{+}-h_{1}^{-}}{2}\right)\operatorname{div}\left(\tilde{T}^{+}-\tilde{T}^{-}\right)=0$$

Nous notons :

(II.7.9) $$\tilde{\tilde{N}}=\sum_{i=1}^{n}\tilde{\tilde{N}}^{i}$$

Cet effort intérieur est l'effort membranaire global sur le multicouche.
Les deux premières équations correspondent à l'équilibre membranaire global du multicouche.
Dans la troisième équation, le terme:

(II.7.10) $$\tilde{\tilde{M}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{\tilde{M}}^{i}+\left(\bar{h}_{i}-\frac{h_{n}^{+}+h_{1}^{-}}{2}\right)\tilde{\tilde{N}}^{i}\right)$$

est le moment global des efforts intérieurs dans le multicouche par rapport à la surface moyenne de côte $\frac{h_{n}^{+}+h_{1}^{-}}{2}$. Cette dernière équation ne traduit donc que l'équilibre global de flexion du multicouche.
Nous retrouvons avec $\tilde{\tilde{N}}$ et $\tilde{\tilde{M}}$ les équations d'équilibre d'un modèle de plaque de Love-Kirchhoff.

L'écriture des champs de contraintes 3D approchés est ainsi développée suivant le degré de finesse du modèle macroscopique recherché. Cette étude nous a conduit pour le modèle le plus complexe, M4_7n, aux champs de contraintes et équations d'équilibre de Pagano et pour le moins fin nous retrouvons les équations du modèle de Love-Kirchhoff en passant par une série de modèles de complexité et de richesse décroissante. A chacune de ces approximations en contrainte correspond une cinématique généralisée que nous allons établir au chapitre suivant.

CHAPITRE III

DEPLACEMENTS GENERALISES ASSOCIES AUX APPROXIMATIONS EN CONTRAINTE DES MODELES MULTIPARTICULAIRES

III.1 Les déplacements généralisés associés pour le modèle M4_7n

III.2 Les déplacements généralisés associés pour le modèle M4_5n

III.3 Les déplacements généralisés associés pour le modèle M4_3n plaque

III.4 Les déplacements généralisés associés pour le modèle M4_2n+1 plaque

III.5 Les déplacements généralisés associés pour le modèle M4_3n membrane

III.6 Les déplacements généralisés associés pour le modèle M4_2n+1 membrane

III.7 Les déplacements généralisés associés pour le modèle de Love-Kirchhoff

Les champs de contrainte $\overline{\overline{\sigma}}^a$ tridimensionnels approchés ont été définis pour chacun des six modèles multiparticulaires dans le chapitre II précédent. Nous effectuons dans le chapitre III présent, les deuxième étape et troisième étape de construction de nos modèles par la méthode d'Hellinger-Reissner. Nous déduisons par réécriture de la fonctionnelle d'Helinger-Reissner les déplacements généralisés associés à ces approximations et par stationnarité les équations d'équilibre et les conditions aux limites.

Ainsi, il suffit d'écrire la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner ou la partie de cette fonctionnelle dans laquelle interviennent les champs de déplacements (I.1.5). Les facteurs des contraintes généralisées apparaissent généralement alors comme des moyennes dans l'épaisseur des couches pondérées par des polynômes en z des champs de déformations 3D. En intégrant éventuellement par parties, on exhibe facilement des champs de déplacements généralisés qui sont généralement des moyennes dans l'épaisseur des couches de déplacements 3D. Ces champs sont au nombre de 7n dans le cas du modèle M4_7n. Dans le cas des autres modèles, certains de ces champs n'apparaissent que dans les termes de frontières sur $\partial\omega$ par application du théorème de la divergence. Le nombre de déplacements généralisés au coeur de la plaque reste ainsi toujours égal au nombre d'équations d'équilibre du modèle.

Pour l'écriture des conditions aux limites, on considère les termes de bord après applications éventuelles du théorème de la divergence. Les termes de la fonctionnelle doivent être modifiés en ne conservant dans les efforts extérieurs au bord que la projection de ceux-ci sur la base polynomiale en z adaptée au modèle. L'écriture de la stationnarité par rapport aux déplacements généralisés de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner ainsi modifiée donne alors les équations d'équilibre sur les efforts intérieurs généralisés au coeur de la plaque et les conditions aux limites en contraintes généralisées.

Pour ne pas alourdir le mémoire, nous présentons en détail ces raisonnements pour le modèle M4_7n et le modèle M4_5n uniquement, car, pour les autres modèles, les raisonnements sont similaires à ceux du modèle M4_5n. Le détail des calculs est développé en annexe I.

III.1 LES DEPLACEMENTS GENERALISES ASSOCIES POUR LE MODELE M4_7N

Nous nous intéressons dans le cas du modèle M4_7n aux champs $\overline{\overline{\sigma}}^*$ dont les composantes peuvent s'écrire (II.1.11->13):

(III.1.1) $$\sigma_{\alpha\beta}^{a7n^*}(x,y,z) = N_{\alpha\beta}^{i\ *}(x,y)\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}}M_{\alpha\beta}^{i\ *}(x,y)P_1^i(z) \qquad z \in \left[h_i^-, h_i^+\right]$$

(III.1.2) $$\begin{aligned}\sigma_{\alpha3}^{a7n^*}(x,y,z) &= Q_\alpha^{i\ *}(x,y)\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \left(\tau_\alpha^{i,i+1^*}(x,y) - \tau_\alpha^{i-1,i^*}(x,y)\right)P_1^i(z) \\ &+ \left(Q_\alpha^{i\ *}(x,y) - \frac{e^i}{2}\left(\tau_\alpha^{i,i+1^*}(x,y) + \tau_\alpha^{i-1,i^*}(x,y)\right)\right)\frac{P_2^i(z)}{e^i}\end{aligned}$$

(III.1.3) $$\begin{aligned}\sigma_{33}^{a7n^*}(x,y,z) &= N_3^{i\ *}(x,y)\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}}M_3^{i\ *}(x,y)P_1^i(z) \\ &+ \left(N_3^{i\ *}(x,y) - \frac{e^i}{2}\left(v^{i,i+1^*}(x,y) + v^{i-1,i^*}(x,y)\right)\right)\frac{P_2^i(z)}{e^i} \\ &+ \left(\frac{60}{e^{i2}}M_3^{i\ *}(x,y) - 5\left(v^{i,i+1^*}(x,y) - v^{i-1,i^*}(x,y)\right)\right)P_3^i(z)\end{aligned}$$

où $\tilde{N}^{i^*}, \tilde{M}^{i^*}, \tilde{Q}^{i^*}, \tilde{\tau}^{i-1,i^*}, \tilde{\tau}^{i,i+1^*}, N_3^{i\ *}, M_3^{i\ *}, v^{i-1,i^*}$ et $v^{i,i+1^*}$ sont des champs réguliers sur ω. Ce sont les efforts intérieurs généralisés du modèle approché M4_7n.
Considérons la restriction de la fonctionnelle H. R. $\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ (I.1.5) au sous-ensemble des champs $\overline{\overline{\sigma}}^*$ définis ci-dessus. Nous supposons pour simplifier le raisonnement que les conditions aux limites sont données sur tout $\partial\Omega$ de type vecteur contrainte imposée $\left(\partial\Omega_T = \partial\Omega; \partial\Omega_U = \varnothing\right)$ et que les forces volumiques sont nulles. $\partial\Omega$ est la réunion de trois parties $\omega \times \left\{h_1^-\right\}; \omega \times \left\{h_n^+\right\}$ et $\partial\omega \times \left\{h_1^-; h_n^+\right\}$.

Notons que:

(III.1.4) $$\int_\Omega \ldots d\Omega = \int_\omega \left(\int_{h_1^-}^{h_n^+} \ldots dz\right) d\omega = \sum_{i=1}^{n} \int_\omega \left(\int_{h_i^-}^{h_i^+} \ldots dz\right) d\omega$$

Le déplacement généralisé associé à l'approximation $\overline{\overline{\sigma}}^*$ s'obtient en considérant la partie de la fonctionnelle H. R. $\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ (I.1.5) qui dépend de $\underline{U}^*$ et que nous notons $\mathbf{T}\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$:

(III.1.5)
$$\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)=\int_{\Omega}\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}):\overline{\overline{\varepsilon}}\left(\underline{U}^*(\underline{x})\right)d\Omega-\int_{\partial\Omega}\underline{T}^d(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x})dS$$

En introduisant dans l'expression ci-dessus l'écriture du champ $\overline{\overline{\sigma}}^*$ écrit en (III.1.1->3), on obtient:

(III.1.6)
$$\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\omega}\left[\left[\begin{array}{l}
N^i_{\alpha\beta}{}^*\displaystyle\int_{h_i^-}^{h_i^+}\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\underline{U}^*\right)\frac{P^i_0(z)}{e^i}dz+M^i_{\alpha\beta}{}^*\int_{h_i^-}^{h_i^+}\frac{12}{e^{i2}}\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\underline{U}^*\right)P^i_1(z)dz\\
+Q^i_\alpha{}^*\displaystyle\int_{h_i^-}^{h_i^+}\frac{\partial U^*_\alpha}{\partial z}\frac{P^i_0(z)}{e^i}dz+\left(\tau^{i,i+1*}_\alpha-\tau^{i-1,i*}_\alpha\right)\int_{h_i^-}^{h_i^+}\frac{\partial U^*_\alpha}{\partial z}P^i_1(z)dz\\
+\left(Q^i_\alpha{}^*-\frac{e_i}{2}\left(\tau^{i,i+1*}_\alpha+\tau^{i-1,i*}_\alpha\right)\right)\displaystyle\int_{h_i^-}^{h_i^+}\frac{\partial U^*_\alpha}{\partial z}\frac{P^i_2(z)}{e^i}dz\\
+Q^i_\alpha{}^*\displaystyle\int_{h_i^-}^{h_i^+}\frac{\partial U^*_3}{\partial x_\alpha}\frac{P^i_0(z)}{e^i}dz+\left(\tau^{i,i+1*}_\alpha-\tau^{i-1,i*}_\alpha\right)\int_{h_i^-}^{h_i^+}\frac{\partial U^*_3}{\partial x_\alpha}P^i_1(z)dz\\
+\left(Q^i_\alpha{}^*-\frac{e_i}{2}\left(\tau^{i,i+1*}_\alpha+\tau^{i-1,i*}_\alpha\right)\right)\displaystyle\int_{h_i^-}^{h_i^+}\frac{\partial U^*_3}{\partial x_\alpha}\frac{P^i_2(z)}{e^i}dz\\
+N^i_3{}^*\displaystyle\int_{h_i^-}^{h_i^+}\frac{\partial U^*_3}{\partial z}\frac{P^i_0(z)}{e^i}dz+\frac{12}{e^{i2}}M^i_3{}^*\int_{h_i^-}^{h_i^+}\frac{\partial U^*_3}{\partial z}P^i_1(z)dz\\
+\left(N^i_3{}^*-\frac{e_i}{2}\left(v^{i,i+1*}+v^{i-1,i*}\right)\right)\displaystyle\int_{h_i^-}^{h_i^+}\frac{\partial U^*_3}{\partial z}\frac{P^i_2(z)}{e^i}dz\\
+\left(\frac{60}{e^{i2}}M^i_3{}^*-5\left(v^{i,i+1*}-v^{i-1,i*}\right)\right)\displaystyle\int_{h_i^-}^{h_i^+}\frac{\partial U^*_3}{\partial z}P^i_3(z)dz
\end{array}\right]\right]d\omega$$

$$-\int_{\omega}\underline{T}^d\left(x,y,h_n^+\right).\underline{U}^*\left(x,y,h_n^+\right)d\omega-\int_{\omega}\underline{T}^d\left(x,y,h_1^-\right).\underline{U}^*\left(x,y,h_1^-\right)d\omega-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(\int_{h_i^-}^{h_i^+}\underline{T}^d.\underline{U}^*dz\right)ds$$

où les trois derniers termes correspondent respectivement aux termes de bords dus aux forces s'exerçant sur les faces des peaux supérieurs et inférieurs et des termes de bord dus aux forces

s'exerçant sur le contour de la plaque.

Nous introduisons les définitions et les notations suivantes:

- $\tilde{U}^{i*}$ est le champ de déplacement membranaire de la couche i (champ de vecteurs du plan) de composantes U_α^{i*} $\alpha \in \{1,2\}$ avec:

(III.1.7) $$U_\alpha^{i*}(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_\alpha^*(x,y,z)dz$$

- $\tilde{\Phi}^{i*}$ est le champ de rotation de la couche i (champ de vecteurs du plan) de composantes Φ_α^{i*} $\alpha \in \{1,2\}$ avec:

(III.1.8) $$\Phi_\alpha^{i*}(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12}{e^{i2}} P_1^i(z) U_\alpha^*(x,y,z)dz$$

- $\tilde{u}_+^{i*}$ est le champ de déplacement tangent de l'interface supérieure de la couche i (champ de vecteurs du plan) de composantes $u_{+\alpha}^{i*}$ $\alpha \in \{1,2\}$ avec:

(III.1.9) $$u_{+\alpha}^{i*}(x,y) = U_\alpha^*\left(x,y,h_i^+\right)$$

- $\tilde{u}_-^{i*}$ est le champ de déplacement tangent de l'interface inférieure de la couche i (champ de vecteurs du plan) de composantes $u_{-\alpha}^{i*}$ $\alpha \in \{1,2\}$ avec:

(III.1.10) $$u_{-\alpha}^{i*}(x,y) = U_\alpha^*\left(x,y,h_i^-\right)$$

- U_3^{i*} est le champ de déplacement moyen normal de la couche i (champ scalaire) avec:

(III.1.11) $$U_3^{i*}(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_3^*(x,y,z)dz$$

- $\overline{U}_3^{i*}$ est un champ scalaire que nous pourrions appeler premier moment du déplacement normal avec:

(III.1.12) $$\overline{U}_3^{i*}(x,y) = \frac{1}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z) U_3^*(x,y,z)dz$$

- $\hat{U}_3^{i\,*}$ est un champ scalaire que nous pourrions appeler, de même, second moment du déplacement normal avec:

(III.1.13) $$\hat{U}_3^{i\,*}(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_2^i(z)}{e^i} U_3^*(x,y,z)dz$$

- $u_{+3}^{i\,*}$ est le champ de déplacement normal de l'interface supérieure de la couche i avec:

(III.1.14) $$u_{+3}^{i\,*}(x,y) = U_3^*\left(x,y,h_i^+\right)$$

- $u_{-3}^{i\,*}$ est le champ de déplacement normal de l'interface supérieure de la couche i avec:

(III.1.15) $$u_{-3}^{i\,*}(x,y) = U_3^*\left(x,y,h_i^-\right)$$

Notons en outre:
- $\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{i*}$ est le champ tensoriel plan d'ordre 2 de déformation membranaire de la couche i de composantes:

(III.1.16) $$\varepsilon_{\alpha\beta}^{i\,*}(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_\alpha^{i\,*}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta^{i\,*}}{\partial x_\alpha}\right) \alpha,\beta \in \{1,2\}$$

- $\tilde{\tilde{\chi}}^{i*}$ est le champ tensoriel plan d'ordre 2 de courbure de la couche i de composantes:

(III.1.17) $$\chi_{\alpha\beta}^{i\,*}(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_\alpha^{i\,*}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \Phi_\beta^{i\,*}}{\partial x_\alpha}\right) \alpha,\beta \in \{1,2\}$$

Avec ces notations et en intégrant par parties chaque fois qu'apparaît une dérivée par rapport à z, $\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ se réécrit:

(III.1.18)

$$\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{\omega}\left[\begin{array}{l}
\tilde{\tilde{N}}^{i^*}:\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{i^*}+\tilde{\tilde{M}}^{i^*}:\tilde{\tilde{\chi}}^{i^*}+\left(\dfrac{\tilde{\tau}^{i,i+1^*}+\tilde{\tau}^{i-1,i^*}}{2}\right).\left(\tilde{u}_+^{i\,*}-\tilde{u}_-^{i\,*}\right)\\
+\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}-\tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right).\left(\dfrac{1}{2}\left(\tilde{u}_+^{i\,*}+\tilde{u}_-^{i\,*}\right)-\tilde{U}^{i^*}\right)+\left(\tilde{Q}^{i^*}-\dfrac{e_i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}+\tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right)\right).\tilde{\Phi}^{i^*}\\
+\tilde{Q}^{i^*}.\tilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^{i^*}+e^i\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}-\tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right).\tilde{\mathrm{Grad}}\,\overline{U}_3^{i^*}\\
+\left(\tilde{Q}^{i^*}-\dfrac{e_i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}+\tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right)\right).\tilde{\mathrm{Grad}}\,\hat{U}_3^{i^*}+\left(v^{i,i+1^*}+v^{i-1,i^*}\right)\dfrac{1}{2}\left(u_{+3}^{i\,*}-u_{-3}^{i\,*}\right)\\
+\dfrac{12}{e^{i^2}}M_3^{i^*}\left(\dfrac{1}{2}\left(u_{+3}^{i\,*}+u_{-3}^{i\,*}\right)-U_3^{i^*}\right)+\left(N_3^{i^*}-\dfrac{e_i}{2}\left(v^{i,i+1^*}+v^{i-1,i^*}\right)\right)\left(\dfrac{12}{e^i}\overline{U}_3^{i^*}\right)\\
+\left(\dfrac{60}{e^{i^2}}M_3^{i^*}-5\left(v^{i,i+1^*}-v^{i-1,i^*}\right)\right)\left(-\dfrac{1}{10}\left(u_{+3}^{i\,*}+u_{-3}^{i\,*}\right)-\hat{U}_3^{i^*}+\dfrac{2}{10}U_3^{i^*}\right)
\end{array}\right]d\omega\right.$$

$$-\int_{\omega}\underline{T}^d\left(x,y,h_n^+\right).\underline{U}^*\left(x,y,h_n^+\right)d\omega-\int_{\omega}\underline{T}^d\left(x,y,h_1^-\right).\underline{U}^*\left(x,y,h_1^-\right)d\omega-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(\int_{h_i^-}^{h_i^+}\underline{T}^d.\underline{U}^*dz\right)ds$$

On constate que les facteurs de $\tilde{u}_+^{i\,*}$, $\tilde{u}_-^{i\,*}$, $u_{+3}^{i\,*}$, $u_{-3}^{i\,*}$ $(i=1,n)$ hors $\tilde{u}_+^{n\,*}$, $u_{+3}^{n\,*}$, $\tilde{u}_-^{1\,*}$, $u_{-3}^{1\,*}$ s'éliminent de couche à couche. Ces quatre derniers termes s'éliminent avec les termes de bords sur $\omega\times\left\{h_1^-\right\}$et $\omega\times\left\{h_n^+\right\}$.

Notons que ce résultat s'étend à la situation d'un délaminage de la ième interface, s'il n'y a pas de contrainte sur les lèvres de la zone délaminée. Dans ce cas, et contrairement au cas qui nous intéresse ici, $\tilde{u}_+^{i\,*}$ et $\tilde{u}_-^{i+1^*}$ sont différents mais le facteur correspondant est nul. S'il y a des efforts sur les lèvres de la zone délaminée, les champs $\tilde{u}_+^{i\,*}$ et $\tilde{u}_-^{i+1^*}$ ne s'éliminent plus et le modèle fait alors intervenir la différence $\tilde{u}_-^{i+1^*}-\tilde{u}_+^{i\,*}$ qui joue le rôle d'une variable d'état du modèle.

Revenons au calcul de $\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)$, on trouve après élimination:

(III.1.19)

$$\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\omega}\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{N}}^{i^*}:\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{i^*}+\tilde{\tilde{M}}^{i^*}:\tilde{\tilde{\chi}}^{i^*}+\tilde{Q}^{i^*}.\left(\tilde{\Phi}^{i^*}+\tilde{\mathrm{Grad}}\,\hat{U}_3^{i^*}+\mathrm{Grad}U_3^{i^*}\right)\\ -M_3^{i^*}\dfrac{60}{e^{i^2}}\hat{U}_3^{i^*}+N_3^{i^*}\dfrac{12}{e^i}\overline{U}_3^{i^*}\end{bmatrix}d\omega$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\int_{\omega}\tilde{\tau}^{i,i+1^*}.\begin{pmatrix}\tilde{U}^{i+1^*}-\tilde{U}^{i^*}-\dfrac{e^i}{2}\left(\tilde{\Phi}^{i^*}+\tilde{\mathrm{Grad}}\,\hat{U}_3^{i^*}\right)-\dfrac{e^{i+1}}{2}\left(\tilde{\Phi}^{i+1^*}+\tilde{\mathrm{Grad}}\,\hat{U}_3^{i+1^*}\right)\\ +e^i\mathrm{Grad}\overline{U}_3^{i^*}-e^{i+1}\mathrm{Grad}\overline{U}_3^{i+1^*}\end{pmatrix}d\omega$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\int_{\omega}v^{i,i+1^*}\left(-U_3^{i^*}+U_3^{i+1^*}-6\overline{U}_3^{i^*}-6\overline{U}_3^{i+1^*}+5\hat{U}_3^{i^*}-5\hat{U}_3^{i+1^*}\right)d\omega-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(\int_{h_i^-}^{h_i^+}\underline{T}^d.\underline{U}^*dz\right)ds$$

Ainsi l'ensemble des champs $\overline{\overline{\sigma}}^{a7n^*}$ et la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner partitionnent l'ensemble des champs $\underline{U}^*(\underline{x})$ en classes d'équivalence à l'aide de la relation d'équivalence:

$$\underline{U}^{*1}\approx\underline{U}^{*2}\quad\text{ssi}\quad \mathrm{H.R.}\left(\underline{U}^{*1},\overline{\overline{\sigma}}^{a7n^*}\right)=\mathrm{H.R.}\left(\underline{U}^{*2},\overline{\overline{\sigma}}^{a7n^*}\right)\quad\forall\overline{\overline{\sigma}}^{a7n^*}$$

Deux champs de déplacement 3D $\underline{U}^{*1}$ et $\underline{U}^{*2}$ sont équivalents si leurs 7n champs surfaciques $\tilde{U}^{i^*}$, $\tilde{\Phi}^{i^*}$, $U_3^{i^*}$, $\overline{U}_3^{i^*}$ et $\hat{U}_3^{i^*}$, que l'on peut déduire à l'aide des équations (III.1.7, 8, 11, 12 et 13) sont respectivement égaux deux à deux. Dans la suite nous appelons les déplacements généralisés du modèle M4_7n , les 7n champs surfaciques ci-dessus. La liste ci-dessous donne la correspondance entre les contraintes généralisées et les déformations généralisées:

$$\tilde{\tilde{N}}^i\leftrightarrow\tilde{\tilde{\varepsilon}}^i=\frac{1}{2}\left(\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{U}^i+{}^T\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{U}^i\right)$$

$$\tilde{\tilde{M}}^i\leftrightarrow\tilde{\tilde{\chi}}^i=\frac{1}{2}\left(\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{\Phi}^i+{}^T\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{\Phi}^i\right)$$

$$\tilde{Q}^i\leftrightarrow\tilde{d}_{\Phi}^i=\tilde{\Phi}^i+\tilde{\mathrm{Grad}}\,\hat{U}_3^i+\tilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^i$$

$$M_3^i\leftrightarrow d_{M_3}^i=-\frac{60}{e^{i^2}}\hat{U}_3^i$$

$$N_3^i\leftrightarrow d_{N_3}^i=\frac{12}{e^i}\overline{U}_3^i$$

(III.1.20)

$$\tilde{\tau}^{i,i+1}\leftrightarrow\tilde{D}^{i,i+1}=\begin{pmatrix}\tilde{U}^{i+1}-\tilde{U}^i-\dfrac{e^i}{2}\left(\tilde{\Phi}^i+\tilde{\mathrm{Grad}}\,\hat{U}_3^i\right)-\dfrac{e^{i+1}}{2}\left(\tilde{\Phi}^{i+1}+\tilde{\mathrm{Grad}}\,\hat{U}_3^{i+1}\right)\\ +e^i\,\tilde{\mathrm{Grad}}\,\overline{U}_3^i-e^{i+1}\,\tilde{\mathrm{Grad}}\,\overline{U}_3^{i+1}\end{pmatrix}$$

$$v^{i,i+1}\leftrightarrow D_v^{i,i+1}=\left(-U_3^i+U_3^{i+1}-6\overline{U}_3^i-6\overline{U}_3^{i+1}+5\hat{U}_3^i-5\hat{U}_3^{i+1}\right)$$

Remarque: on vérifie facilement que dans un mouvement rigidifiant 3D toutes les déformations généralisées sont nulles, ce qui assure leur objectivité.

Pour retrouver les équations d'équilibre et déterminer les conditions aux limites, nous procédons classiquement à une intégration par parties convenable de $\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ ce qui donne après regroupement des termes en fonction des déplacements généralisés:

(III.1.21)

$$\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)_{|\underline{U}^*} = \sum_{i=1}^{n}\int_{\omega}\left[\begin{array}{l}\left(-\tilde{\mathrm{div}}\tilde{\tilde{N}}^{i^*} - \tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right).\tilde{U}^{i^*} \\ +\left(-\tilde{\mathrm{div}}\tilde{\tilde{M}}^{i^*} + \tilde{Q}^{i^*} - \frac{e^i}{2}\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \frac{e^i}{2}\tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right).\tilde{\Phi}^{i^*} \\ +\left(-\mathrm{div}\tilde{Q}^{i^*} - \frac{60}{e^{i^2}}M_3^{i^*} + \frac{e^i}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right) + 5\left(v^{i,i+1^*} - v^{i-1,i^*}\right)\right)\hat{U}_3^{i^*} \\ -\left(\mathrm{div}\tilde{Q}^{i^*} + \left(v^{i,i+1^*} - v^{i-1,i^*}\right)\right)U_3^{i^*} \\ +\left(\frac{12}{e^i}N_3^{i^*} - e^i\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right) - 6\left(v^{i,i+1^*} + v^{i-1,i^*}\right)\right)\overline{U}_3^{i^*}\end{array}\right]d\omega$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(\begin{array}{l}\left(\tilde{\tilde{N}}^{i^*}.\underline{n}\right).\tilde{U}^{i^*} + \left(\tilde{\tilde{M}}^{i^*}.\underline{n}\right).\tilde{\Phi}^{i^*} + \left(\tilde{Q}^{i^*} - \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right)\right).\underline{n}\hat{U}_3^{i^*} \\ +\tilde{Q}^{i^*}.\underline{n}U_3^{i^*} + e^i\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right).\underline{n}\overline{U}_3^{i^*} - \int_{h_i^-}^{h_i^+}\underline{T}^d.\underline{U}^*dz\end{array}\right)ds$$

La fonctionnelle écrite ci-dessus n'est pas exactement fonction seulement des 7n déplacements généralisés à cause du terme de bord $-\int_{h_i^-}^{h_i^+}\underline{T}^d.\underline{U}^*dz$ et la stationnarité par rapport à $\underline{U}^*$ est en général impossible. Dans la littérature, on trouve deux façons de s'accommoder de cette difficulté. La plus courante, consiste à faire l'hypothèse que le vecteur contrainte sur le bord a une forme particulière, cohérente avec les hypothèses sur les champs de contraintes:

(III.1.22)
$$\overline{T}^d(x,y,z) = \begin{cases}\tilde{T}^d(x,y,z) = \tilde{T}_d^i\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \tilde{M}_d^i\frac{12P_1^i(z)}{e^{i^2}} \\ T_3^d(x,y,z) = Q_{3d}^i\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \overline{Q}_{3d}^i\frac{P_1^i(z)}{e^i} + \hat{Q}_{3d}^i\frac{P_2^i(z)}{e^i}\end{cases}$$

Dans ce cas, la fonctionnelle $\mathbf{T}\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ ne fait plus intervenir que les 7n champs de déplacements généralisés. Elle admet des champs stationnaires pour une variation de $\underline{U}^*$ quelconque qui se résume d'ailleurs à une variation des 7n champs de déplacements généralisés. Un raisonnement classique permet de montrer alors que les facteurs des 7n champs de déplacements généralisés dans l'expression ci-dessus sont nuls. On vérifie qu'il s'agit bien des 7n équations d'équilibre attendues. On vérifie de plus, sur le bord $\partial\omega$, 7n conditions aux limites en contraintes généralisées:

$$\text{(III.1.23)} \qquad \begin{cases} \tilde{\tilde{N}}^i.\underline{n} = \tilde{T}^i_d \\ \tilde{\tilde{M}}^i.\underline{n} = \tilde{M}^i_d \\ \left(\tilde{Q}^i - \dfrac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right).\underline{n} = \hat{Q}^i_{3d} \\ \tilde{Q}^i.\underline{n} = Q^i_{3d} \\ e^i\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}\right).\underline{n} = \overline{Q}^i_{3d} \end{cases}$$

Remarquons que les trois dernières conditions aux limites reviennent à imposer au bord de la ième couche:

$$\text{(III.1.24)} \qquad \tilde{\tau}^{i,i+1}.\underline{n} = \frac{Q^i_{3d}}{e^i} - \frac{\hat{Q}^i_{3d}}{e^i} + \frac{\overline{Q}^i_{3d}}{2e^i}$$

Les conditions aux limites au bord de la i+1ème couche imposent:

$$\text{(III.1.25)} \qquad \tilde{\tau}^{i,i+1}.\underline{n} = \frac{Q^{i+1}_{3d}}{e^{i+1}} - \frac{\hat{Q}^{i+1}_{3d}}{e^{i+1}} - \frac{\overline{Q}^{i+1}_{3d}}{2e^{i+1}}$$

Il faut bien sûr que ces deux conditions ne soient pas contradictoires, ce qui est assuré si T^d_3 est continu en z sur le bord de la plaque.

Evoquons rapidement une alternative à l'hypothèse concernant l'écriture du terme de force extérieure $\overline{T}^d$ sur $\partial\omega$. Il est possible de décomposer le champ de déplacement $\underline{U}^*(x,y,z)$ sur la base orthogonale de $P^i_0(z)$, $P^i_1(z)$ et $P^i_2(z)$ lorsque $z \in \left[h^-_i, h^+_i\right]$ soit:

$$\text{(III.1.26)} \qquad \underline{U}^*(x,y,z) = \left| \begin{array}{l} U^*_\alpha(x,y,z) = P^i_0(z)U^{i\,*}_\alpha + e^i P^i_1(z)\Phi^{i\,*}_\alpha + \Delta U^{i\,*}_\alpha(x,y,z) \\ U^*_3(x,y,z) = P^i_0(z)U^{i\,*}_3 + 12P^i_1(z)\overline{U}^{i\,*}_3 + 5P^i_2(z)\hat{U}^{i\,*}_3 + \Delta U^{i\,*}_3(x,y,z) \end{array} \right.$$

où $\tilde{U}^{i^*}$, $\tilde{\Phi}^{i^*}$, $U_3^{i^*}$, $\overline{U}_3^{i^*}$ et $\hat{U}_3^{i^*}$ sont donnés par (III.1.7;8;11;12;13).

Dans ce cas, $\Delta U_\alpha^{i^*}(x,y,z)$ est par construction une fonction de z orthogonale à P_0^i et P_1^i et $\Delta U_3^{i^*}(x,y,z)$ à P_0^i, P_1^i et P_2^i. Si on développe $\underline{U}^*(x,y,z)$ sur la base orthogonale comme indiqué dans (III.1.26), le terme de bord $-\int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d.\underline{U}^* dz$ peut s'écrire:

(III.1.27) $$-\tilde{T}_d^i\tilde{U}^{i^*} - \tilde{M}_d^i\tilde{\Phi}^{i^*} - Q_{3d}^i U_3^{i^*} - \overline{Q}_{3d}^i\overline{U}_3^{i^*} - \hat{Q}_{3d}^i\hat{U}_3^{i^*} - \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d.\Delta\underline{U}^* dz$$

où

(III.1.28) $$\left|\begin{array}{l} T_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_\alpha^d.P_0^i(z)dz \\ M_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} e^i T_\alpha^d.P_1^i(z)dz \\ Q_{3d}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d.P_0^i(z)dz \\ \overline{Q}_{3d}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} 12T_3^d.P_1^i(z)dz \\ \hat{Q}_{3d}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} 5T_3^d.P_2^i(z)dz \end{array}\right.$$

Ceci revient à projeter les conditions aux limites sur la base choisie.

Si maintenant nous modifions la fonctionnelle $\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ en négligeant le terme $\int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d.\Delta\underline{U}^* dz$, celle-ci n'est plus alors qu'une fonction des déplacements généralisés et la conclusion est identique à celle qui précède en termes d'équations d'équilibre et de conditions aux limites. Nous avons en particulier à vérifier la condition suivante sous peine d'inexistence de solution:

(III.1.29) $$\frac{Q_{3d}^i}{e^i} - \frac{\hat{Q}_{3d}^i}{e^i} + \frac{\overline{Q}_{3d}^i}{2e^i} = \frac{Q_{3d}^{i+1}}{e^{i+1}} - \frac{\hat{Q}_{3d}^{i+1}}{e^{i+1}} - \frac{\overline{Q}_{3d}^{i+1}}{2e^{i+1}}$$

Elle ne traduit plus alors la continuité de T_3^d en z le long du bord.

Nous avons en outre les deux conditions supplémentaires sur les données:

(III.1.30) $$\tilde{\tau}^{n,n+1}.\underline{n} = \frac{Q_{3d}^{n}}{e^{n}} - \frac{\hat{Q}_{3d}^{n}}{e^{n}} + \frac{\overline{Q}_{3d}^{n}}{2e^{n}}$$

(III.1.31) $$\tilde{\tau}^{0,1}.\underline{n} = \frac{Q_{3d}^{1}}{e^{1}} - \frac{\hat{Q}_{3d}^{1}}{e^{1}} - \frac{\overline{Q}_{3d}^{1}}{2e^{1}}$$

Notons que toutes ces conditions sont satisfaites dans le cas d'un bord libre qui peut donc être étudié avec le modèle M4_7n.

III.2 LES DEPLACEMENTS GENERALISES ASSOCIES POUR LE MODELE M4_5N

Il nous paraît utile de reprendre en détail le raisonnement pour le M4_5n de manière à montrer clairement comment une élimination d'efforts intérieurs généralisés dans le M4_7n conduit à une diminution du nombre de champs cinématiques associés.

Dans le cas du modèle M4_5n les composantes du champ $\overline{\overline{\sigma}}^{*}$ peuvent s'écrire (II.2.3->5):

(III.2.1) $$\sigma_{\alpha\beta}^{a5n^{*}}(x,y,z) = N_{\alpha\beta}^{i\,*}(x,y)\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}}M_{\alpha\beta}^{i\,*}(x,y)P_1^i(z) \qquad z \in \left[h_i^-, h_i^+\right]$$

(III.2.2) $$\begin{aligned}\sigma_{\alpha3}^{a5n^{*}}(x,y,z) &= Q_{\alpha}^{i\,*}(x,y)\frac{P_0^i(z)}{e^i} + \left(\tau_{\alpha}^{i,i+1^{*}}(x,y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i^{*}}(x,y)\right)P_1^i(z) \\ &+ \left(Q_{\alpha}^{i\,*}(x,y) - \frac{e^i}{2}\left(\tau_{\alpha}^{i,i+1^{*}}(x,y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i^{*}}(x,y)\right)\right)\frac{P_2^i(z)}{e^i}\end{aligned}$$

(III.2.3)

$$\begin{aligned}\sigma_{33}^{a5n^{*}}(x,y,z) &= \left(\frac{v^{i,i+1^{*}}(x,y) + v^{i-1,i^{*}}(x,y)}{2} + \frac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^{*}}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i^{*}}(x,y)\right)\right)P_0^i(z) \\ &+ \left(-\frac{\mathrm{div}\tilde{Q}^{i^{*}}}{5} + \frac{e^i}{10}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^{*}}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i^{*}}(x,y)\right) + \left(v^{i,i+1^{*}}(x,y) - v^{i-1,i^{*}}(x,y)\right)\right)P_1^i(z) \\ &+ \frac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^{*}}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i^{*}}(x,y)\right)P_2^i(z) + \left(-\mathrm{div}\tilde{Q}^{i^{*}} + \frac{e^i}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^{*}}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i^{*}}(x,y)\right)\right)P_3^i(z)\end{aligned}$$

où $\tilde{\tilde{N}}^{i^{*}}, \tilde{\tilde{M}}^{i^{*}}, \tilde{Q}^{i^{*}}, \tilde{\tau}^{i-1,i^{*}}, \tilde{\tau}^{i,i+1^{*}}, v^{i-1,i^{*}}$ et $v^{i,i+1^{*}}$ sont des champs réguliers sur ω. Ce sont les efforts

intérieurs généralisés du modèle approché M4_5n.

De même que pour le modèle M4_7n, le déplacement généralisé associé à l'approximation $\overline{\overline{\sigma}}^*$ s'obtient en écrivant ce champ $\overline{\overline{\sigma}}^*$ dans la partie de la fonctionnelle H. R. $\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ qui dépend de $\underline{U}^*$ (III.1.5). Une autre façon d'envisager cette écriture est de remplacer $N_3^{i\,*}$ et $M_3^{i\,*}$ par leur valeur tirées de (II.2.1 et 2) dans l'expression (III.1.6) de la section précédente. Soit:

(III.2.4)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right) = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[\int_{\omega} \Bigg[& N_{\alpha\beta}^{i\,*} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \varepsilon_{\alpha\beta}\left(\underline{U}^*\right) \frac{P_0^i(z)}{e^i} dz + M_{\alpha\beta}^{i\,*} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12}{e^{i2}} \varepsilon_{\alpha\beta}\left(\underline{U}^*\right) P_1^i(z) dz \\
& + Q_\alpha^{i\,*} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_\alpha^*}{\partial z} \frac{P_0^i(z)}{e^i} dz + \left(\tau_\alpha^{i,i+1*} - \tau_\alpha^{i-1,i*}\right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_\alpha^*}{\partial z} P_1^i(z) dz \\
& + \left(Q_\alpha^{i\,*} - \frac{e_i}{2}\left(\tau_\alpha^{i,i+1*} + \tau_\alpha^{i-1,i*}\right)\right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_\alpha^*}{\partial z} \frac{P_2^i(z)}{e^i} dz \\
& + Q_\alpha^{i\,*} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial x_\alpha} \frac{P_0^i(z)}{e^i} dz + \left(\tau_\alpha^{i,i+1*} - \tau_\alpha^{i-1,i*}\right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial x_\alpha} P_1^i(z) dz \\
& + \left(Q_\alpha^{i\,*} - \frac{e_i}{2}\left(\tau_\alpha^{i,i+1*} + \tau_\alpha^{i-1,i*}\right)\right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial x_\alpha} \frac{P_2^i(z)}{e^i} dz \\
& + \left(\frac{\nu^{i,i+1*} + \nu^{i-1,i*}}{2} + \frac{e^i}{12} \mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}\right)\right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial z} P_0^i(z) dz \\
& + \left(-\frac{\mathrm{div}\tilde{Q}^{i*}}{5} + \frac{e_i}{10} \mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}\right) + \left(\nu^{i,i+1*} - \nu^{i-1,i*}\right)\right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial z} P_1^i(z) dz \\
& + \frac{e_i}{12} \mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}\right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial z} P_2^i(z) dz \\
& + \left(-\mathrm{div}\tilde{Q}^i + \frac{e_i}{2} \mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}\right)\right) \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{\partial U_3^*}{\partial z} P_3^i(z) dz \Bigg] \Bigg] d\omega \\
& - \int_{\omega} \underline{T}^d\left(x,y,h_n^+\right).\underline{U}^*\left(x,y,h_n^+\right) d\omega - \int_{\omega} \underline{T}^d\left(x,y,h_1^-\right).\underline{U}^*\left(x,y,h_1^-\right) d\omega - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\omega} \left(\int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d.\underline{U}^* dz \right) ds
\end{aligned}
$$

De même, en introduisant les définitions et les notations posées précédemment (III.1.7->17), en intégrant par parties chaque fois qu'apparaît une dérivée par rapport à z et en tenant compte de l'élimination couche à couche des facteurs $\tilde{u}_+^{i\,*}, \tilde{u}_-^{i\,*}, u_{+3}^{i\,*}, u_{-3}^{i\,*}$ $(i=1,n)$ sauf les facteurs de $\tilde{u}_+^{n\,*}, u_{+3}^{n\,*}, \tilde{u}_-^{1\,*}, u_{-3}^{1\,*}$ qui s'annulent avec les termes de bords, $\mathbf{T}\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ se réécrit:

(III.2.5)

$$\mathbf{T}\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{\omega}\left[\begin{array}{l}
\tilde{\tilde{N}}^{i\,*}:\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{i\,*} + \tilde{\tilde{M}}^{i\,*}:\tilde{\tilde{\chi}}^{i\,*} - \left(\tilde{\tau}^{i,i+1\,*} - \tilde{\tau}^{i-1,i\,*}\right).\tilde{U}^{i\,*} + \left(\tilde{Q}^{i\,*} - \frac{e_i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1\,*} + \tilde{\tau}^{i-1,i\,*}\right)\right).\tilde{\Phi}^{i\,*} \\
+\tilde{Q}^{i\,*}.\widetilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^{i\,*} + e^i\left(\tilde{\tau}^{i,i+1\,*} - \tilde{\tau}^{i-1,i\,*}\right).\widetilde{\mathrm{Grad}}\,\overline{U}_3^{i\,*} \\
-\left(-\frac{\mathrm{div}\tilde{Q}^{i\,*}}{5} + \frac{e^i}{10}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1\,*} + \tilde{\tau}^{i-1,i\,*}\right) + \left(v^{i,i+1\,*} - v^{i-1,i\,*}\right)\right)U_3^{i\,*} + e^i\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1\,*} - \tilde{\tau}^{i-1,i\,*}\right)\overline{U}_3^{i\,*} \\
+\left(\tilde{Q}^{i\,*} - \frac{e_i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1\,*} + \tilde{\tau}^{i-1,i\,*}\right)\right).\widetilde{\mathrm{Grad}}\,\hat{U}_3^{i\,*} \\
-\left(-\mathrm{div}\tilde{Q}^{i\,*} + \frac{e^i}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1\,*} + \tilde{\tau}^{i-1,i\,*}\right)\right)\left(\hat{U}_3^{i\,*} - \frac{2}{10}U_3^{i\,*}\right)
\end{array}\right]\right]d\omega$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(\int_{h_i^-}^{h_i^+}\underline{T}^d.\underline{U}^*dz\right)ds$$

Constatons que:

(III.2.6)

$$\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\int_{\omega}\left(e^i\left(\tilde{\tau}^{i,i+1\,*} - \tilde{\tau}^{i-1,i\,*}\right).\widetilde{\mathrm{Grad}}\,\overline{U}_3^{i\,*} + e^i\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1\,*} - \tilde{\tau}^{i-1,i\,*}\right)\overline{U}_3^{i\,*}\right)d\omega = \int_{\partial\omega}e^i\left(\tilde{\tau}^{i,i+1\,*} - \tilde{\tau}^{i-1,i\,*}\right).\underline{n}\,\overline{U}_3^{i\,*} \\
\displaystyle\int_{\omega}\left(-\frac{e_i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1\,*} + \tilde{\tau}^{i-1,i\,*}\right).\widetilde{\mathrm{Grad}}\,\hat{U}_3^{i\,*} - \frac{e^i}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1\,*} + \tilde{\tau}^{i-1,i\,*}\right)\hat{U}_3^{i\,*}\right)d\omega = \int_{\partial\omega}-\frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1\,*} + \tilde{\tau}^{i-1,i\,*}\right).\underline{n}\,\hat{U}_3^{i\,*} \\
\displaystyle\int_{\omega}\left(\tilde{Q}^{i\,*}.\widetilde{\mathrm{Grad}}\,\hat{U}_3^{i\,*} + \mathrm{div}\tilde{Q}^{i\,*}\hat{U}_3^{i\,*}\right) = \int_{\partial\omega}\tilde{Q}^{i\,*}.\underline{n}\,\hat{U}_3^{i\,*}
\end{array}\right.$$

On trouve alors:

(III.2.7)

$$\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\omega}\left[\tilde{\tilde{N}}^{i*}:\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{i*}+\tilde{\tilde{M}}^{i*}:\tilde{\tilde{\chi}}^{i*}+\tilde{Q}^{i*}.\left(\tilde{\Phi}^{i*}+\widetilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^{i*}\right)\right]d\omega$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\int_{\omega}\tilde{\tau}^{i,i+1*}.\left(\tilde{U}^{i+1*}-\tilde{U}^{i*}-\frac{e^i}{2}\tilde{\Phi}^{i*}-\frac{e^{i+1}}{2}\tilde{\Phi}^{i+1*}\right)d\omega+\sum_{i=0}^{n}\int_{\omega}v^{i,i+1*}\left(U_3^{i+1*}-U_3^{i*}\right)d\omega$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(\left(\tilde{Q}^{i*}-\frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1*}+\tilde{\tau}^{i-1,i*}\right)\right).\underline{n}\hat{U}_3^{i*}+e^i\left(\tilde{\tau}^{i,i+1*}-\tilde{\tau}^{i-1,i*}\right).\underline{n}\overline{U}_3^{i*}\right)ds$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(\int_{h_i^-}^{h_i^+}\underline{T}^d.\underline{U}^*dz\right)ds$$

Ainsi les déplacements généralisés du modèle M4_5n sont les 5n champs scalaires:

$$\tilde{U}^{i*},\tilde{\Phi}^{i*}\text{ et }U_3^{i*},$$

les deux autres déplacements généralisés du modèle M4_7n ont bien "disparus" du coeur de la plaque ainsi qu'il était attendu.

La liste ci-dessous donne la correspondance entre les contraintes généralisées et les déformations généralisées:

(III.2.8)

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{N}}^i &\leftrightarrow \tilde{\tilde{\varepsilon}}^i=\frac{1}{2}\left(\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{U}^i+{}^T\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{U}^i\right)\\
\tilde{\tilde{M}}^i &\leftrightarrow \tilde{\tilde{\chi}}^i=\frac{1}{2}\left(\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{\Phi}^i+{}^T\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{\Phi}^i\right)\\
\tilde{Q}^i &\leftrightarrow \tilde{d}_\Phi^i=\tilde{\Phi}^i+\widetilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^i\\
\tilde{\tau}^{i,i+1} &\leftrightarrow \tilde{D}^{i,i+1}=\left(\tilde{U}^{i+1}-\tilde{U}^i-\frac{e^i}{2}\tilde{\Phi}^i-\frac{e^{i+1}}{2}\tilde{\Phi}^{i+1}\right)\\
v^{i,i+1} &\leftrightarrow D_v^{i,i+1}=\left(U_3^{i+1}-U_3^i\right)
\end{aligned}$$

Ces déformations généralisées sont évidemment nulles dans tout mouvement rigidifiant.

Pour retrouver les équations d'équilibre et déterminer les conditions aux limites, nous procédons classiquement à une intégration par parties convenable de $\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ ce qui donne après regroupement des termes en fonction des déplacements généralisés:

$$\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)_{|\underline{U}^*} = \sum_{i=1}^{n}\int_{\omega}\begin{bmatrix}\left(-\mathrm{div}\tilde{\tilde{N}}^{i^*} - \tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right).\tilde{U}^{i^*} \\ +\left(-\mathrm{div}\tilde{\tilde{M}}^{i^*} + \tilde{Q}^{i^*} - \frac{e^i}{2}\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \frac{e^i}{2}\tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right).\tilde{\Phi}^{i^*} \\ +\left(-\mathrm{div}\tilde{Q}^{i^*} - \left(\nu^{i,i+1^*} - \nu^{i-1,i^*}\right)\right)U_3^{i^*}\end{bmatrix}d\omega$$

(III.2.9)

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\begin{pmatrix}\left(\tilde{\tilde{N}}^{i^*}.\underline{n}\right).\tilde{U}^{i^*} + \left(\tilde{\tilde{M}}^{i^*}.\underline{n}\right).\tilde{\Phi}^{i^*} + \left(\tilde{Q}^{i^*} - \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right)\right).\underline{n}\hat{U}_3^i \\ +\tilde{Q}^{i^*}.\underline{n}U_3^{i^*} + e^i\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right).\underline{n}\overline{U}_3^{i^*} - \int_{h_i^-}^{h_i^+}\underline{T}^d.\underline{U}^*dz\end{pmatrix}ds$$

Nous voyons bien sûr tout de suite que les variations des cinq champs de déplacements généralisés au coeur de la plaque redonnent les cinq équations d'équilibre attendus.
Intéressons nous aux termes de bord. Comme nous avons 5n champs de déplacements généralisés, nous décomposons $\underline{U}^*(x,y,z)$ lorsque $z \in \left[h_i^-, h_i^+\right]$ de la manière suivante:

(III.2.10)
$$\underline{U}^*(x,y,z) = \left|\begin{array}{l} U_\alpha^*(x,y,z) = P_0^i(z)U_\alpha^{i^*}(x,y) + e^iP_1^i(z)\Phi_\alpha^{i^*}(x,y) + \Delta U_\alpha^{*i}(x,y,z) \\ U_3^*(x,y,z) = P_0^i(z)U_3^{i^*}(x,y) + \Delta U_3^{*i}(x,y,z)\end{array}\right.$$

avec $\Delta U_\alpha^{*i}(x,y,z)$ orthogonal à $P_0^i(z)$ et $P_1^i(z)$ et $\Delta U_3^{*i}(x,y,z)$ orthogonal à $P_0^i(z)$.

Le terme de bord $-\int_{h_i^-}^{h_i^+}\underline{T}^d.\underline{U}^*dz$ s'écrit alors:

(III.2.11)
$$-\tilde{T}_d^i\tilde{U}^{i^*} - \tilde{M}_d^i\tilde{\Phi}^{i^*} - Q_{3d}^iU_3^{i^*} - \int_{h_i^-}^{h_i^+}\underline{T}^d.\Delta\underline{U}^*dz$$

où

(III.2.12)
$$\left|\begin{array}{l} T_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+}T_\alpha^d.P_0^i(z)dz \\ M_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+}e^iT_\alpha^d.P_1^i(z)dz \\ Q_{3d}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+}T_3^d.P_0^i(z)dz\end{array}\right.$$

Si maintenant nous modifions la fonctionnelle $\mathbf{T}\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ en négligeant les termes de bord faisant intervenir des composantes du champ de déplacement orthogonales aux composantes principales $U_\alpha^{i\,*}$, $\Phi_\alpha^{i\,*}$ et $U_3^{i\,*}$, nous obtenons les conditions aux limites ci-dessous:

$$\text{(III.2.13)} \qquad \begin{aligned} \tilde{\tilde{N}}^i.\underline{n} &= \tilde{T}_d^i \\ \tilde{\tilde{M}}^i.\underline{n} &= \tilde{M}_d^i \\ \tilde{Q}^i.\underline{n} &= Q_{3d}^i \end{aligned}$$

Nous remarquons ici que, contrairement au modèle M4_7n, il n'y a pas de conditions à vérifier entre les données aux limites ci-dessus.
Le modèle apparaît, du point de vue des déplacements généralisés, comme un "empilement" de plaque de Reissner-Mindlin (une plaque par couche). Nous verrons au chapitre suivant qu'au niveau du comportement, ce n'est pas tout à fait si simple car on voit apparaître un couplage entre les efforts de différentes interfaces.

III.3 LES DEPLACEMENTS GENERALISES ASSOCIES POUR LE MODELE M4_3N PLAQUE

Pour éviter d'alourdir le texte, le raisonnement complet, similaire à celui du M4_5n, concernant le modèle M4_3nP est reporté en annexe. Nous ne donnons ici que les grandes lignes de ce raisonnement.
A partir des composantes du champ de contraintes tridimensionnel approché du modèle M4_3nP (éq. II.3.2->4 de l'annexe I), où les efforts intérieurs généralisés du modèle approché M4_3nP $\tilde{\tilde{N}}^{i*}$, $\tilde{\tilde{M}}^{i*}$, $\tilde{\tau}^{i-1,i*}$, $\tilde{\tau}^{i,i+1*}$, $v^{i-1,i*}$ et $v^{i,i+1*}$ sont des champs réguliers sur ω, et à partir de l'écriture de la stationnarité de la fonctionnelle H. R. $\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ qui dépend de $\underline{U}^*$ par rapport à ce champ, nous trouvons la fonctionnelle sous la forme suivante:

$$
\begin{aligned}
T\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right) &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\omega}\left[\tilde{\tilde{N}}^{i^*}:\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{i^*}-\tilde{\tilde{M}}^{i^*}:\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^{i^*}\right]d\omega \\
&+\sum_{i=0}^{n}\int_{\omega}\tilde{\tau}^{i,i+1^*}.\left(\tilde{U}^{i+1^*}-\tilde{U}^{i^*}+\frac{e^i}{2}\tilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^{i^*}+\frac{e^{i+1}}{2}\tilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^{i+1^*}\right)d\omega \\
&+\sum_{i=0}^{n}\int_{\omega}v^{i,i+1^*}\left(U_3^{i+1^*}-U_3^{i^*}\right)d\omega \\
&+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(\begin{array}{l}+e^i\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}-\tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right).\underline{n}\,\overline{U}_3^{i^*}+\left(\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^{i^*}.\underline{n}\right)\hat{U}_3^{i^*}\\ +\left(\tilde{\tilde{M}}^{i^*}.\underline{n}\right)\Phi^{i^*}+\left(\tilde{\tilde{M}}^{i^*}.\underline{n}\right)\tilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^{i^*}\end{array}\right)ds-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(\int_{h_i^-}^{h_i^+}\underline{T}^*.\underline{U}^*dz\right)ds
\end{aligned}
\tag{III.3.1}
$$

Ainsi les déplacements généralisés du modèle M4_3nP sont les 3n champs scalaires:

$$\tilde{U}^{i^*} \text{ et } U_3^{i^*}$$

La liste ci-dessous donne la correspondance entre les contraintes généralisées et les déformations généralisées:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{N}}^i \leftrightarrow \tilde{\tilde{\varepsilon}}^i=\frac{1}{2}\left(\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{U}^i+{}^T\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{U}^i\right)\\
&\tilde{\tilde{M}}^i \leftrightarrow \tilde{\tilde{\chi}}^i=-\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^i\\
&\tilde{\tau}^{i,i+1} \leftrightarrow \tilde{D}^{i,i+1}=\left(\tilde{U}^{i+1}-\tilde{U}^i+\frac{e^i}{2}\tilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^i+\frac{e^{i+1}}{2}\tilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^{i+1}\right)\\
&v^{i,i+1} \leftrightarrow D_v^{i,i+1}=\left(U_3^{i+1}-U_3^i\right)
\end{aligned}
\tag{III.3.2}
$$

Les déformations généralisées sont évidemment nulles dans tout mouvement rigidifiant.
Par intégration par parties de $T\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)$, en regroupant les termes en fonction des déplacements généralisés et en faisant varier $\tilde{U}^{i^*}$ et $U_3^{i^*}$ au coeur de la plaque, on obtient les équations d'équilibre du modèle M4_3nP ci-dessous:

$$\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^i(x,y)+\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)-\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega \tag{II.3.3}$$

(II.3.4)

$$\mathrm{div}\left(\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^i(x,y)\right)+\mathrm{div}\left(\frac{e_i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)+\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)\right)\right)+\left(v^{i,i+1}(x,y)-v^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

Après modification des termes de bord de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner, en projetant convenablement le vecteur contrainte sur l'espace choisi pour les contraintes du modèle M4_3nP, les conditions aux limites s'écrivent:

$$
\text{(III.3.5)} \qquad
\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{N}}^i.\underline{n} = \tilde{T}^i_d \\
&\underline{n}.\tilde{\tilde{M}}^i.\underline{n} = \tilde{M}^i_d.\underline{n} \\
&\left(\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^i + \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right).\underline{n} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{t}.\tilde{\tilde{M}}^i.\underline{n} - \tilde{M}^i_d.\underline{t}\right) = Q^i_{3d}
\end{aligned}
$$

nota: $\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^i + \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)$ est l'effort tranchant

où les donnés sont définies à partir des données 3D par:

$$
\text{(III.3.6)} \qquad
\left|
\begin{aligned}
&\tilde{T}^i_d = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \tilde{T}^d.P^i_0(z)dz \\
&Q^i_{3d} = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T^d_3.P^i_0(z)dz \\
&\tilde{M}^i_d = \int_{h_i^-}^{h_i^+} e^i\tilde{T}^d.P^i_1(z)dz
\end{aligned}
\right.
$$

Nous trouvons que les conditions aux limites au bord de chaque couche ont la forme très classique des conditions aux limites de plaque de Love-Kirchhoff: c'est à dire qu'il n'est pas possible d'imposer indépendamment l'effort tranchant au bord et la composante tangentielle du vecteur moment.

III.4 LES DÉPLACEMENTS GÉNÉRALISÉS ASSOCIÉS POUR LE MODÈLE M4_2N+1 PLAQUE

De même que ci-dessus, le raisonnement complet est rédigé en annexe.
Le déplacement généralisé associé à l'approximation $\overline{\overline{\sigma}}^*$ écrit en annexe I (II.4.3->5), s'obtient en

écrivant ce champ dans la partie de la fonctionnelle H. R. $\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ qui dépend de $\underline{U}^*$ (III.1.5), avec $\tilde{\tilde{N}}^{i^*}, \tilde{\tilde{M}}^{i^*}, \tilde{\tau}^{i-1,i^*}$ et $\tilde{\tau}^{i,i+1^*}$ les efforts intérieurs généralisés du modèle approché M4_(2n+1) P qui sont des champs réguliers sur ω.

Après calcul, on obtient finalement:

(III.4.1)

$$\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right) = -\int_\omega \left(T_3^+ + T_3^-\right)\left(\frac{u_{+3}^{n\,*} + u_{-3}^{1\,*}}{2}\right)d\omega + \sum_{i=1}^{n}\int_\omega \left[\tilde{\tilde{N}}^{i^*}:\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{i^*} - \tilde{\tilde{M}}^{i^*}:\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{\mathrm{Grad}}\left(\frac{u_{+3}^{n\,*} + u_{-3}^{1\,*}}{2}\right)\right]d\omega$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\int_\omega \tilde{\tau}^{i,i+1^*}.\left(\tilde{U}^{i+1^*} - \tilde{U}^{i^*} + \frac{e^i + e^{i+1}}{2}\tilde{\mathrm{Grad}}\left(\frac{u_{+3}^{n\,*} + u_{-3}^{1\,*}}{2}\right)\right)d\omega - \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(\int_{h_i^-}^{h_i^+}\underline{T}^d.\underline{U}^*dz\right)ds$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(\begin{array}{l}\tilde{\tilde{M}}^{i^*}.\underline{n}.\tilde{\Phi}^{i^*} + \tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^{i^*}.\underline{n}\left(U_3^{i\,*} + \hat{U}_3^{i\,*}\right) + \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right).\underline{n}U_3^{i\,*} \\ +e^i\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right).\underline{n}\,\overline{U}_3^{i\,*} - \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right).\underline{n}\left(\frac{u_{+3}^{n\,*} + u_{-3}^{1\,*}}{2}\right) \\ -\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^{i^*}.\underline{n}\left(\frac{u_{+3}^{n\,*} + u_{-3}^{1\,*}}{2}\right) + \tilde{\tilde{M}}^{i^*}.\underline{n}.\tilde{\mathrm{Grad}}\left(\frac{u_{+3}^{n\,*} + u_{-3}^{1\,*}}{2}\right)\end{array}\right)ds$$

Ainsi les déplacements généralisés du modèle M4_(2n+1)P sont les 2n+1 champs scalaires:

$$\tilde{U}^{i^*}, \frac{u_{+3}^{n\,*} + u_{-3}^{1\,*}}{2} = W_3^*$$

La liste ci-dessous donne la correspondance entre les contraintes généralisées et les déformations généralisées:

$$\tilde{\tilde{N}}^i \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\tilde{\varepsilon}}^i = \frac{1}{2}\left(\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{U}^i + {}^T\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{U}^i\right)$$

(III.4.2)
$$\left.\begin{array}{l}\tilde{\tilde{M}}^i \quad \rightarrow \\ \sum_{i=1}^{n}\tilde{\tilde{M}}^i \leftarrow\end{array}\right\} \tilde{\tilde{\chi}} = -\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{\mathrm{Grad}}\,W_3$$

$$\tilde{\tau}^{i,i+1} \quad \leftrightarrow \quad \tilde{D}^{i,i+1} = \left(\tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i + \frac{e^i + e^{i+1}}{2}\tilde{\mathrm{Grad}}\,W_3\right)$$

Ces déformations généralisées sont évidemment nulles dans tout mouvement rigidifiant.

Par intégration par parties de $T(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*)$, en regroupant les termes en fonction des déplacements généralisés et en faisant varier $\tilde{U}^{i^*}$ et $W_3{}^*$ au coeur de la plaque, on obtient les 2n+1 équations d'équilibre du modèle M4_(2n+1)P suivantes:

(II.4.3) $$\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^{i}(x,y)+\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)-\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

(II.4.4) $$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{e_j}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)+\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y)\right)+\mathrm{div}\left(\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^{j}(x,y)\right)\right]+\left(T_3^-(x,y)+T_3^+(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

Après modification de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner en projetant les termes de bord, on obtient les conditions aux limites ci-dessous:

(III.4.5) $$\begin{aligned}&\tilde{\tilde{N}}^{i}.\underline{n}=\tilde{T}_d^i\\&\underline{n}.\sum_{i=1}^{n}\tilde{\tilde{M}}^{i}.\underline{n}=\tilde{M}_d.\underline{n}\\&\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^{i}+\frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}+\tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right).\underline{n}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{t}.\sum_{i=1}^{n}\tilde{\tilde{M}}^{i}.\underline{n}-\tilde{M}_d.\underline{t}\right)-Q_{3d}=0\end{aligned}$$

où les données sont définies à partir des données 3D par:

(III.4.6) $$\left|\begin{aligned}&\tilde{T}_d^i(x,y)=\int_{h_i^-}^{h_i^+}\tilde{T}^d(x,y,z).P_0^i(z)dz\\&Q_{3d}(x,y)=\int_{h_i^-}^{h_i^+}T_3^d(x,y,z)dz\\&\tilde{M}_d(x,y)=\sum_{i-1}^{n}\int_{h_i^-}^{h_i^+}\tilde{T}^d(x,y,z).e^iP_1^i(z)dz\end{aligned}\right.$$

Nous retrouvons comme attendu une condition aux limites de type Love-Kirchhoff portant cette fois-ci, et contrairement au modèle M4_3nP, sur l'ensemble des couches.

III.5 LES DEPLACEMENTS GENERALISES ASSOCIES POUR LE MODÈLE M4_3N MEMBRANE

Le raisonnement complet, de même que pour les 2 modèles précédents, est donné en annexe I afin de ne pas alourdir le texte.

A partir des composantes du champ de contraintes tridimensionnel approché du modèle M4_3nM (II.5.1->3) où les efforts intérieurs généralisés du modèle $\tilde{\tilde{N}}^{i^*}$, $\tilde{\tau}^{i-1,i^*}$, $\tilde{\tau}^{i,i+1^*}$, v^{i-1,i^*} et $v^{i,i+1^*}$ sont des champs réguliers sur ω et à partir de l'écriture de la stationnarité de la fonctionnelle H. R. $\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ qui dépend de $\underline{U}^*$ (III.1.5) par rapport à ce champ, nous trouvons la fonctionnelle sous la forme:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right) &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\omega}\left[\tilde{\tilde{N}}^{i^*}:\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{i^*}\right]d\omega + \sum_{i=0}^{n}\int_{\omega} v^{i,i+1^*}\left(U_3^{i+1^*}-U_3^{i^*}\right)d\omega \\
&+ \sum_{i=0}^{n}\int_{\omega}\tilde{\tau}^{i,i+1^*}.\left(\tilde{U}^{i+1^*}-\tilde{U}^{i^*}+\frac{e^i}{2}\tilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^{i^*}+\frac{e^{i+1}}{2}\tilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^{i+1^*}\right)d\omega \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(e^i\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}-\tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right).\underline{n}\,\overline{U}_3^{i^*}\right)ds - \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(\int_{h_i^-}^{h_i^+}\underline{T}^d.\underline{U}^*dz\right)ds
\end{aligned}
\tag{III.5.1}
$$

Ainsi les déplacements généralisés du modèle M4_3nM sont les 3n champs scalaires:

$$\tilde{U}^{i^*} \text{ et } U_3^{i^*}$$

La liste ci-dessous donne la correspondance entre les contraintes généralisées et les déformations généralisées:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{N}}^i \leftrightarrow \tilde{\tilde{\varepsilon}}^i = \frac{1}{2}\left(\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{U}^i + {}^{T}\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{U}^i\right) \\
&\tilde{\tau}^{i,i+1} \leftrightarrow \tilde{D}^{i,i+1} = \left(\tilde{U}^{i+1}-\tilde{U}^i+\frac{e^i}{2}\tilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^i+\frac{e^{i+1}}{2}\tilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^{i+1}\right) \\
&v^{i,i+1} \leftrightarrow D_v^{i,i+1} = \left(U_3^{i+1}-U_3^i\right)
\end{aligned}
\tag{III.5.2}
$$

Les déformations généralisées sont évidemment nulles dans tout mouvement rigidifiant.
Pour retrouver les équations d'équilibre et déterminer les conditions aux limites, nous procédons classiquement à une intégration par parties convenables de $\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)$. La variation de $\tilde{U}^{i^*}$ et $U_3^{i^*}$

au coeur de la plaque redonne les équations d'équilibre attendues:

(III.5.3) $$\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^{i}(x,y)+\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)-\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

(III.5.4) $$\frac{e^{i}}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)+\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)+\left(v^{i,i+1}(x,y)-v^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

Si maintenant nous modifions la fonctionnelle $\mathbf{T}\left(\underline{U}^{*},\overline{\overline{\sigma}}^{*}\right)$ en projetant les termes de bord on obtient les conditions aux limites ci-dessous:

(III.5.5) $$\begin{cases}\tilde{\tilde{N}}^{i}.\underline{n}=\tilde{T}^{i}_{d}\\ \frac{e^{i}}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}+\tilde{\tau}^{i-1,i}\right).\underline{n}=Q^{i}_{3d}\end{cases}$$

où les données sont définies à partir des données 3D par:

(III.5.6) $$\left|\begin{array}{l}T^{i}_{d\alpha}=\displaystyle\int_{h_i^-}^{h_i^+}T^{d}_{\alpha}.P^{i}_{0}(z)dz\\ Q^{i}_{3d}=\displaystyle\int_{h_i^-}^{h_i^+}T^{d}_{3}.P^{i}_{0}(z)dz\end{array}\right. ,$$

Notons que nous avons ainsi n conditions reliant n-1 valeurs $\tilde{\tau}^{i,i+1}.\underline{n}$.
Le problème n'aura donc une solution que si la condition suivante sur les données est vérifiée:

(III.5.7) $$\frac{\tilde{\tau}^{0,1}.\underline{n}}{2}+(-1)^{n}\frac{\tilde{\tau}^{n,n+1}.\underline{n}}{2}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{Q^{i}_{3d}}{e^{i}}$$

Cette condition est satisfaite dans le cas d'un bord libre.

III.6 LES DEPLACEMENTS GENERALISES ASSOCIES POUR LE MODELE M4_(2N+1) MEMBRANE

De même, le raisonnement complet est donné en annexe I.

A partir des composantes du champ de contraintes tridimensionnel approché du modèle M4_(2n+1)M (II.6.1->3) où les efforts intérieurs généralisés du modèle $\tilde{\tilde{N}}^{i*}$, $\tilde{\tau}^{i-1,i*}$ et $\tilde{\tau}^{i,i+1*}$ sont des champs réguliers sur ω, à partir de l'écriture de la stationnarité de la fonctionnelle H. R. $\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ qui dépend de $\underline{U}^*$ (III.1.5) par rapport à ce champ nous trouvons la fonctionnelle sous la forme suivante:

(III.6.1)

$$\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right) = -\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(\int_{h_i^-}^{h_i^+}\underline{T}^d.\underline{U}^* dz\right)ds + \sum_{i=1}^{n}\int_{\omega}\left[\tilde{\tilde{N}}^{i*}:\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{i*}\right]d\omega$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\int_{\omega}\tilde{\tau}^{i,i+1*}.\left(\tilde{U}^{i+1*}-\tilde{U}^{i*}+\frac{e^i+e^{i+1}}{2}\tilde{\mathrm{Grad}}\left(\frac{u_{+3}^{n\,*}+u_{-3}^{1\,*}}{2}\right)\right)d\omega - \int_{\omega}\left(T_3^+ + T_3^-\right)\left(\frac{u_{+3}^{n\,*}+u_{-3}^{1\,*}}{2}\right)d\omega$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(\frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1*}+\tilde{\tau}^{i-1,i*}\right)\underline{n}.U_3^{i*}+e^i\left(\tilde{\tau}^{i,i+1*}-\tilde{\tau}^{i-1,i*}\right).\underline{n}\overline{U}_3^{i*}-\frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1*}+\tilde{\tau}^{i-1,i*}\right).\underline{n}\left(\frac{u_{+3}^{n\,*}+u_{-3}^{1\,*}}{2}\right)\right)ds$$

Ainsi les déplacements généralisés du modèle M4_(2n+1)M sont les 2n+1 champs scalaires:

$$\tilde{U}^{i*},\frac{u_{+3}^{n\,*}+u_{-3}^{1\,*}}{2}=W_3^*$$

La liste ci-dessous donne la correspondance entre les contraintes généralisées et les déformations généralisées:

(III.6.2)

$$\tilde{\tilde{N}}^i \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\tilde{\varepsilon}}^i=\frac{1}{2}\left(\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{U}^i+{}^T\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{U}^i\right)$$

$$\tilde{\tau}^{i,i+1} \quad \leftrightarrow \quad \tilde{D}^{i,i+1}=\left(\tilde{U}^{i+1}-\tilde{U}^i+\frac{e^i+e^{i+1}}{2}\tilde{\mathrm{Grad}}\,W_3\right)$$

Ces déformations généralisées sont évidemment nulles dans tout mouvement rigidifiant.

Pour retrouver les équations d'équilibre et déterminer les conditions aux limites, nous procédons classiquement à une intégration par parties convenable de $\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)$. Une variation de $\tilde{U}^{i*}$ ou W_3^* au coeur de la plaque redonne bien les équations d'équilibre attendues:

(III.6.3) $$\widetilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^{i}(x,y)+\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)-\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

(III.6.4) $$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{e_j}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y)+\tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y)\right)\right]+\left(T_3^-(x,y)+T_3^+(x,y)\right)=0 \text{ sur } \omega$$

Nous modifions la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner en projetant les termes de bord. On obtient les conditions aux limites ci-dessous:

(III.6.5) $$\begin{aligned}&\tilde{\tilde{N}}^{i}.\underline{n}=\tilde{T}_d^i\\&\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}+\tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right).\underline{n}=Q_3^d\end{aligned}$$

où les données sont définies à partir des données 3D par:

(III.6.6) $$\left|\begin{aligned}&\tilde{T}_d^i(x,y)=\int_{h_i^-}^{h_i^+}\tilde{T}^d(x,y,z).P_0^i(z)dz\\&Q_3^d(x,y)=\int_{h_i^-}^{h_n^+}T_3^d(x,y,z)dz\end{aligned}\right.$$

Notons que contrairement au modèle M4_3nM nous n'avons pas de conditions sur les données au bord.

III.7 LES DEPLACEMENTS GENERALISES ASSOCIES POUR LE MODELE DE LOVE-KIRCHHOFF

De même que pour les quatre modèles précédents, pour ne pas alourdir le mémoire, nous donnons le détail des calculs des déplacements généralisés du modèle de Love-Kirchhoff en annexe I.
En résumé, comme précédemment, l'écriture de la stationnarité de la fonctionnelle H. R. $\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ qui dépend de $\underline{U}^*$ (III.1.5) s'obtient à partir des composantes du champ de contraintes tridimensionnel (II.7.3->5), où les efforts généralisés du modèle de Love-Kirchhoff $\tilde{\tilde{N}}^{i*}$ et $\tilde{\tilde{M}}^{i*}$ sont des champs réguliers sur ω. On trouve:

$$\mathbf{T}\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)=-\int_{\omega}\left(\begin{array}{l}\left(\tilde{T}^{+}+\tilde{T}^{-}+\sum_{i=1}^{n}\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^{i*}\right).\left(\dfrac{\tilde{u}^{n\,*}_{+\alpha}+\tilde{u}^{1\,*}_{-\alpha}}{2}\right)\\ +\left(\begin{array}{l}\left(T_3^{+}+T_3^{-}+\dfrac{h_n^{+}-h_1^{-}}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{T}^{+}-\tilde{T}^{-}\right)\right)\\ +\mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{div}}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{\tilde{M}}^{i*}+\left(\bar{h}_j-\dfrac{h_n^{+}+h_1^{-}}{2}\right)\tilde{\tilde{N}}^{i*}\right)\end{array}\right)\left(\dfrac{u^{n\,*}_{+3}+u^{1\,*}_{-3}}{2}\right)\end{array}\right)d\omega$$

(III.7.1)

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega}\left(\begin{array}{l}\tilde{\tilde{N}}^{i*}.\underline{n}.\tilde{U}^{i*}+\tilde{\tilde{M}}^{i*}.\underline{n}.\tilde{\Phi}^{i*}+e^{i}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^{i*}.\underline{n}\overline{U}_3^{i*}+\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^{i*}.\underline{n}\hat{U}_3^{i*}\\ +e^{i}\left(\dfrac{\tilde{T}^{+}-\tilde{T}^{-}}{2}-\dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1}\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^{j*}+\dfrac{1}{2}\sum_{j=i+1}^{n}\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}^{j*}+\dfrac{\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^{i*}}{e^{i}}\right).\underline{n}U_3^{i*}\\ -\int_{h_i^{-}}^{h_i^{+}}\underline{T}^{d}.\underline{U}^{*}dz\end{array}\right)ds$$

Ainsi les déplacements généralisés du modèle de Love-Kirchhoff sont les 3 champs scalaires:

$$\tilde{W}^*=\left(\frac{\tilde{u}^{n\,*}_{+\alpha}+\tilde{u}^{1\,*}_{-\alpha}}{2}\right)\text{ et }W_3^*=\left(\frac{\tilde{u}^{n\,*}_{+3}+\tilde{u}^{1\,*}_{-3}}{2}\right)$$

En intégrant par parties, on trouve les déformations généralisées associées aux contraintes généralisées. La liste ci-dessous en donne la correspondance:

(III.7.2)

$$\begin{array}{lll}\tilde{\tilde{N}}^{i} & \leftrightarrow & \tilde{\tilde{\varepsilon}}^{i}=\mathrm{Sym}\left(\tilde{\mathrm{Grad}}\,\tilde{W}^*\right)-\left(\bar{h}_i-\dfrac{h_n^{+}+h_1^{-}}{2}\right)\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{\mathrm{Grad}}\,W_3^*\\ \tilde{\tilde{M}}^{i} & \leftrightarrow & \tilde{\tilde{\chi}}^{i}=-\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{\mathrm{Grad}}\,W_3^*\end{array}$$

Les déformations généralisées sont évidemment nulles dans tout mouvement rigidifiant.
Par intégration par parties de la fonctionnelle $T\left(\underline{U}^*,\overline{\overline{\sigma}}^*\right)$, en regroupant les termes en fonction des déplacements généralisés et en faisant varier $\tilde{W}^*$ et W_3^* au coeur de la plaque, on obtient les équations d'équilibre attendues du modèle de Love-Kirchhoff:

(III.7.3) $$\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{N}}+\tilde{T}^{+}+\tilde{T}^{-}=0$$

(III.7.4) $$\mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}+T_3^{+}+T_3^{-}+\left(\frac{h_n^{+}-h_1^{-}}{2}\right)\mathrm{div}\left(\tilde{T}^{+}-\tilde{T}^{-}\right)=0$$

où l'on a posé (Chapitre II):

(III.7.5) $$\tilde{\underline{\underline{N}}} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\underline{\underline{N}}}^{i}$$

(III.7.6) $$\tilde{\underline{\underline{M}}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{\underline{\underline{M}}}^{i} + \left(\bar{h}_i - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right) \tilde{\underline{\underline{N}}}^{i} \right)$$

Enfin, modifiant la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner en projetant les termes de bord, on trouve les conditions aux limites suivantes:

(III.7.5)
$$\tilde{\underline{\underline{N}}}.\underline{n} = \tilde{Q}_d$$
$$\underline{n}.\tilde{\underline{\underline{M}}}.\underline{n} = \tilde{M}_d.\underline{n}$$
$$\left(\tilde{\mathrm{div}}\tilde{\underline{\underline{M}}} + \frac{h_n^+ - h_1^-}{2}\left(\tilde{T}^+ - \tilde{T}^-\right) \right).\underline{n} - Q_{3d} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{t}.\tilde{\underline{\underline{M}}}.\underline{n} - \tilde{M}_d.\underline{t} \right) = 0$$

où les donnés sont définies à partir des données 3D par:

(III.7.6)
$$\tilde{Q}_d(x,y) = \int_{h_1^-}^{h_n^+} \tilde{T}^d(x,y,z)dz$$
$$Q_{3d}(x,y) = \int_{h_1^-}^{h_n^+} T_3^d(x,y,z)dz$$
$$\tilde{M}_d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \tilde{T}^d(x,y,z)\left(z - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right)dz$$

On retrouve bien les conditions aux limites de Love-Kirchhoff.

Nous avons construit les efforts intérieurs généralisés, les déplacements et déformations généralisées, les équations d'équilibre et les conditions aux limites en contrainte de nos divers modèles approchés. Il nous reste maintenant à établir le comportement reliant les contraintes généralisées et les déformations généralisées. Nous écrivons pour cela la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner par rapport à une variation des efforts intérieurs généralisés après avoir éventuellement simplifié l'écriture de l'énergie en contrainte. Cette démarche est présentée au chapitre IV suivant.

CHAPITRE IV

ECRITURE DU COMPORTEMENT ELASTIQUE LINEAIRE COHÉRENT AVEC LES APPROXIMATIONS

IV.1 Comportement élastique linéaire du modèle M4_7n

IV.2 Comportement élastique linéaire du modèle M4_5n

IV.3 Comportement élastique linéaire du modèle M4_3n plaque

IV.4 Comportement élastique linéaire du modèle M4_2n+1 plaque

IV.5 Comportement élastique linéaire du modèle M4_3n membrane

IV.6 Comportement élastique linéaire du modèle M4_2n+1 membrane

IV.7 Comportement élastique linéaire du modèle de Love-Kirchhoff

Les efforts généralisés sont choisis, les contraintes tridimensionnelles approchées sont construites, les déformations généralisées en sont déduites, il reste à écrire le comportement global de notre objet plan.

Le comportement généralisé reliant les efforts intérieurs généralisés aux déformations généralisées s'obtient en écrivant la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner par rapport à une variation des efforts intérieurs généralisés. La fonctionnelle d'Hellinger-Reissner comprend un terme linéaire en fonction des efforts intérieurs généralisés dont les cofacteurs sont les déformations généralisées et un terme quadratique en fonction des efforts intérieurs généralisés qui est l'opposé de l'énergie élastique écrite en contrainte pour les champs $\overline{\overline{\sigma}}^*$ approchés écrits à l'aide des efforts intérieurs généralisés. La stationnarité par rapport à une variation des efforts intérieurs généralisés implique donc que chaque déformation généralisée soit égale à la dérivée par rapport à l'effort intérieur généralisé correspondant de l'énergie de l'énergie élastique écrite en contrainte sur les champs $\overline{\overline{\sigma}}^*$ approchés. Nous nous intéressons donc ci-dessous à l'écriture de cette énergie.

Notons $\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}'(z)$ le tenseur d'ordre 4 des souplesses du matériau. $\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}'(z)$ est constant dans chaque couche et est égal à $\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}'^{i}$ de composante S'^{i}_{mnop} $m,n,o,p \in \{1,2,3\}^4$.

Pour simplifier, nous supposons que chaque couche est orthotrope et que l'axe $\underline{e}_3$ est un axe d'orthotropie. Ainsi les composantes de la matrice de souplesse contenant un nombre impair d'indice 3 sont nulles.

Nous notons respectivement $\overline{\overline{\tilde{\tilde{S}}}}^{i}$ le tenseur d'ordre quatre plan des souplesses sur les efforts tridimensionnels membranaires, S^{i}_{v} le scalaire de souplesse sur les efforts tridimensionnels d'arrachement, $\tilde{\tilde{S}}^{i}_{Q}$ le tenseur d'ordre 2 plan de souplesse sur les efforts tridimensionnels de cisaillement et $\tilde{\tilde{S}}^{i}_{3}$ le tenseur d'ordre 2 plan de souplesse du couplage entre les efforts tridimensionnels membranaires et d'arrachement. Ces tenseurs ont pour composantes [Ehrlacher, 1995]:

(IV.0.1)

$$\left(\overline{\overline{\tilde{\tilde{S}}}}^{i}\right)_{\alpha\beta\gamma\delta} = S'^{i}_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad ; \quad \left(S^{i}_{v}\right) = S'^{i}_{3333} \quad ; \quad \left(\tilde{\tilde{S}}^{i}_{Q}\right)_{\alpha\beta} = 4S'^{i}_{\alpha3\beta3} \quad \text{et} \quad \left(\tilde{\tilde{S}}^{i}_{3}\right)_{\alpha\beta} = 2S'^{i}_{\alpha\beta33} \quad (\alpha,\beta) \in \{1,2\}^2$$

L'énergie en contrainte du champ de contrainte tridimensionnel approché s'exprime sur chacune des couches en fonction de quatre termes ainsi:

(IV.0.2) $$W_{3D}^{a\,*} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\omega} \left[w_c^{a\,i^*} + w_v^{a\,i^*} + w_3^{a\,i^*} + w_Q^{a\,i^*} \right] dS$$

où $w_c^{a\,i^*}$ est l'énergie élastique des contraintes membranaires $\sigma_{\alpha\beta}$ de la couche i:

(IV.0.3) $$w_c^{a\,i^*} = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \tilde{\tilde{\sigma}}^{a\,*} : \tilde{\tilde{\tilde{S}}}^{i} : \tilde{\tilde{\sigma}}^{a\,*} \, dz$$

$w_v^{a\,i^*}$ est l'énergie élastique des contraintes σ_{33} normales à la couche i:

(IV.0.4) $$w_v^{a\,i^*} = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{33}^{a\,*} S_v^{i} \sigma_{33}^{a\,*} \, dz$$

$w_3^{a\,i^*}$ est l'énergie élastique de couplage entre les contraintes membranaires $\sigma_{\alpha\beta}$ et les contraintes normales σ_{33} de la couche i:

(IV.0.5) $$w_3^{a\,i^*} = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\tilde{\tilde{\sigma}}^{a\,*} : \tilde{\tilde{S}}_3^{i} \right) \sigma_{33}^{a\,*} \, dz$$

$w_Q^{a\,i^*}$ est l'énergie élastique du cisaillement perpendiculaire au plan de la couche i:

(IV.0.6) $$w_Q^{a\,i^*} = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}^{a\,*} \cdot \left(\tilde{\tilde{S}}_Q^{i} \right)_{\alpha\beta} . \sigma_{\beta 3}^{a\,*} \, dz$$

Pour construire les matrices de souplesse de chacun des modèles multiparticulaires, il suffit de dériver cette énergie par rapport à chacun des efforts généralisés concernés, nous obtenons ainsi les équations de comportement en souplesse généralisée.

Nous rappelons le formulaire suivant:

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_0^i(z)P_0^i(z)dz = e^i$$

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z)P_1^i(z)dz = \frac{e^i}{12} \qquad \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_\alpha^i(z)P_\beta^i(z)dz = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta$$

(IV.0.7)

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_2^i(z)P_2^i(z)dz = \frac{e^i}{5}$$

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_3^i(z)P_3^i(z)dz = \frac{e^i}{700}$$

IV.1 COMPORTEMENT ÉLASTIQUE LINÉAIRE DU MODÈLE M4_7N

Les contraintes tridimensionnelles approchées $\overset{=a7n}{\sigma}(x,y,z)$ du modèle M4_7n sont écrites en fonction des efforts macroscopiques $\overset{\approx i}{N}(x,y)$, $\overset{\approx i}{M}(x,y)$, $\tilde{Q}^i(x,y)$, $N_3^i(x,y)$, $M_3^i(x,y)$, $\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)$, $\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)$, $v^{i-1,i}(x,y)$ et $v^{i,i+1}(x,y)$ (II.1.11->13).

(IV.1.1)
$$2w_c^{7n^{i*}} = \tilde{N}^{i*} : \frac{\tilde{\tilde{S}}^i}{e_i} : \tilde{N}^{i*} + \tilde{M}^{i*} : \left(\frac{12}{e_i^3}\right)\tilde{\tilde{S}}^i : \tilde{M}^{i*}$$

(IV.1.2)
$$2w_v^{7n^{i*}} = S_v^i \left[\begin{array}{l} \dfrac{N_3^{i*2}}{e^i} + \dfrac{12}{e^{i3}} M_3^{i*2} + \dfrac{1}{5e^i}\left(N_3^{i*} - \dfrac{e^i}{2}\left(v^{i,i+1*} + v^{i-1,i*}\right)\right)^2 \\ + \dfrac{e^i}{700}\left(\dfrac{60}{e^{i2}} M_3^{i*} - 5\left(v^{i,i+1*} - v^{i-1,i*}\right)\right)^2 \end{array} \right]$$

(IV.1.3)
$$2w_3^{7n^{i*}} = \left[\tilde{N}^{i*} : \left(\frac{\tilde{\tilde{S}}_3^i}{e^i}\right) N_3^{i*} + \tilde{M}^{i*} : \left(\frac{12}{e^{i3}} \tilde{\tilde{S}}_3^i\right) M_3^{i*} \right]$$

(IV.1.4)
$$2w_Q^{7n^{i*}} = \left[\begin{array}{l} \tilde{Q}^{i*}.\left(\dfrac{\tilde{\tilde{S}}_Q^i}{e_i}\right).\tilde{Q}^{i*} + \left(\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}\right).\dfrac{e^i}{12}\tilde{\tilde{S}}_Q^i.\left(\tilde{\tau}^{i,i+1*} - \tilde{\tau}^{i-1,i*}\right) \\ +\left(\tilde{Q}^{i*} - \dfrac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}\right)\right).\dfrac{\tilde{\tilde{S}}_Q^i}{5e^i}.\left(\tilde{Q}^{i*} - \dfrac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1*} + \tilde{\tau}^{i-1,i*}\right)\right) \end{array} \right]$$

Sachant que $W^{7n} = W_{3D}^{a7n}$ est l'énergie élastique en contrainte (IV.0.2) du modèle M4_7n, nous avons ainsi les (5n+2(n-1)) lois de comportement dont cinq sont sur la couche i et deux sont sur l'interface i,i+1 comme suit:

loi de comportement des efforts normaux de membrane de la couche i:

(IV.1.5)
$$\tilde{\tilde{\varepsilon}}^i(x,y) = \frac{\partial W^{7n}}{\partial \tilde{N}^i} = \frac{\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i}{e^i} : \tilde{\tilde{N}}^i(x,y) + \frac{\tilde{\tilde{S}}_3^i}{2e^i} N_3^i(x,y);$$

loi de comportement des moments de flexion et de torsion dans le plan de la couche i:

(IV.1.6)
$$\tilde{\tilde{\chi}}^i(x,y) = \frac{\partial W^{7n}}{\partial \tilde{M}^i} = \frac{12}{e^{i3}}\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i : \tilde{M}^i(x,y) + \frac{12}{2e^{i3}}\tilde{\tilde{S}}_3^i M_3^i(x,y);$$

loi de comportement des efforts de cisaillement hors plan de la couche i:

(IV.1.7)
$$\tilde{d}_\Phi^i(x,y) = \frac{\partial W^{7n}}{\partial \tilde{Q}^i} = \left(\frac{6}{5}\tilde{\tilde{S}}_Q^i\right).\tilde{Q}^i - \left(\frac{1}{10}\right)\tilde{\tilde{S}}_Q^i.\left(\tilde{\tau}^{i-1,i} + \tilde{\tau}^{i,i+1}\right);$$

loi de comportement du moment d'ordre zéro de la contrainte normale au plan de la couche i:

(IV.1.8)
$$d_{N_3}^i(x,y) = \frac{\partial W^{7n}}{\partial N_3^i} = S_v^i\left(\frac{6}{5e^i}N_3^i - \frac{1}{10}\left(v^{i,i+1} + v^{i-1,i}\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{\tilde{\tilde{S}}_3^i}{e^i} : \tilde{\tilde{N}}^i;$$

loi de comportement du moment d'ordre un de la contrainte normale au plan de la couche i:

(IV.1.9)
$$d_{M_3}^i(x,y) = \frac{\partial W^{7n}}{\partial M_3^i} = S_v^i\left(\frac{120}{7e^{i3}}M_3^i - \frac{3}{7e^i}\left(v^{i,i+1} - v^{i-1,i}\right)\right) + \frac{6}{e^{i3}}\tilde{\tilde{S}}_3^i : \tilde{M}^i;$$

loi de comportement des efforts de cisaillement à l'interface i,i+1:

(IV.1.10)
$$\begin{aligned} \tilde{D}^{i,i+1}(x,y) = \frac{\partial W^{7n}}{\partial \tilde{\tau}^{i,i+1}} &= -\frac{1}{10}\tilde{\tilde{S}}_Q^i.\tilde{Q}^i - \frac{1}{10}\tilde{\tilde{S}}_Q^{i+1}.\tilde{Q}^{i+1} + \left(\frac{-e^i}{30}\right)\tilde{\tilde{S}}_Q^i.\tilde{\tau}^{i-1,i} \\ &.+\frac{2}{15}\left(e^i\tilde{\tilde{S}}_Q^i + e^{i+1}\tilde{\tilde{S}}_Q^{i+1}\right).\tilde{\tau}^{i,i+1} + \left(\frac{-e^{i+1}}{30}\right)\tilde{\tilde{S}}_Q^{i+1}.\tilde{\tau}^{i+1,i+2} \end{aligned} ;$$

loi de comportement des efforts d'arrachement à l'interface i,i+1:

$$
\begin{aligned}
D_3^{i,i+1}(x,y) = \frac{\partial W^{7n}}{\partial v^{i,i+1}} = S_v^i\left(-\frac{1}{10}\left(N_3^i - \frac{e^i}{2}\left(v^{i,i+1} + v^{i-1,i}\right)\right)\right) \\
+ S_v^{i+1}\left(-\frac{1}{10}\left(N_3^{i+1} - \frac{e^{i+1}}{2}\left(v^{i+1,i+2} + v^{i,i+1}\right)\right)\right) \\
- \frac{5}{700} S_v^i\left(\frac{60}{e^i} M_3^i - 5e^i\left(v^{i,i+1} - v^{i-1,i}\right)\right) \\
+ \frac{5}{700} S_v^{i+1}\left(\frac{60}{e^{i+1}} M_3^{i+1} - 5e^{i+1}\left(v^{i+1,i+2} - v^{i,i+1}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{IV.1.11}
$$

Avec, pour mémoire, les définitions des déformations généralisées établies dans le chapitre précédent:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{\varepsilon}}^i &= \frac{1}{2}\left(\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{U}^i + {}^T\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{U}^i\right) \\
\tilde{\tilde{\chi}}^i &= \frac{1}{2}\left(\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{\Phi}^i + {}^T\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{\Phi}^i\right) \\
\tilde{d}_\Phi^i &= \tilde{\Phi}^i + \tilde{\mathrm{Grad}}\,\hat{U}_3^i + \tilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^i \\
d_{M_3}^i &= -\frac{60}{e^{i2}}\hat{U}_3^i \\
d_{N_3}^i &= \frac{12}{e^i}\overline{U}_3^i \\
\tilde{D}^{i,i+1} &= \begin{pmatrix} \tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i - \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\Phi}^i + \mathrm{grad}\hat{U}_3^i\right) - \frac{e^{i+1}}{2}\left(\tilde{\Phi}^{i+1} + \mathrm{grad}\hat{U}_3^{i+1}\right) \\ + e^i \mathrm{grad}\overline{U}_3^i - e^{i+1}\mathrm{grad}\overline{U}_3^{i+1} \end{pmatrix} \\
D_v^{i,i+1} &= \left(-U_3^i + U_3^{i+1} - 6\overline{U}_3^i - 6\overline{U}_3^{i+1} + 5\hat{U}_3^i - 5\hat{U}_3^{i+1}\right)
\end{aligned}
\tag{IV.1.12}
$$

IV.2 COMPORTEMENT ÉLASTIQUE LINÉAIRE DU MODÈLE M4_5N

Les contraintes tridimensionnelles approchées $\overset{=}{\sigma}^{a5n}(x,y,z)$ du modèle M4_5n sont écrites en fonction des efforts macroscopiques $\overset{\approx}{N}^i(x,y)$, $\overset{\approx}{M}^i(x,y)$, $\tilde{Q}^i(x,y)$, $\tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)$, $\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y)$, $v^{i-1,i}(x,y)$ et $v^{i,i+1}(x,y)$ (II.2.3->5). La distinction entre ce champ de contrainte tridimensionnel approché et celui du modèle 7n ne se fait que sur la composante σ_{33}^a, l'écriture des énergies ne

diffère donc que sur celles de $w_v^{a^{i^*}}$ et $w_3^{a^{i^*}}$. Soit:

(IV.2.1) $$w_c^{5n^{i^*}} = w_c^{7n^{i^*}}$$

Dans le calcul de $w_v^{5n^{i^*}}$ intervient un terme en $-\mathrm{div}\tilde{Q}^i$ que nous remplaçons par $v^{i,i+1} - v^{i-1,i}$ d'après l'équation d'équilibre (II.1.15):

(IV.2.2)
$$2w_v^{5n^{i^*}} = S_v^i \left[\begin{array}{l} e^i\left(\dfrac{v^{i,i+1^*} + v^{i-1,i^*}}{2} + \dfrac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tau^{i,i+1^*} - \tau^{i-1,i^*}\right)\right)^2 \\ +\dfrac{e^i}{12}\left(\dfrac{e^i}{10}\mathrm{div}\left(\tau^{i,i+1^*} + \tau^{i-1,i^*}\right) + \dfrac{6}{5}\left(v^{i,i+1^*} - v^{i-1,i^*}\right)\right)^2 + \dfrac{e^i}{5}\left(\dfrac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tau^{i,i+1^*} - \tau^{i-1,i^*}\right)\right)^2 \\ +\dfrac{e^i}{700}\left(\left(v^{i,i+1^*} - v^{i-1,i^*}\right) + \dfrac{e^i}{2}\mathrm{div}\left(\tau^{i,i+1^*} + \tau^{i-1,i^*}\right)\right)^2 \end{array} \right]$$

(IV2.3)
$$2w_3^{5n^{i^*}} = \left[\begin{array}{l} \tilde{\tilde{N}}^{i^*} : \tilde{\tilde{S}}_3^i\left(\left(\dfrac{v^{i,i+1^*} + v^{i-1,i^*}}{2}\right) + \dfrac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right)\right) \\ +\dfrac{\tilde{\tilde{M}}^{i^*}}{e^i} : \tilde{\tilde{S}}_3^i\left(\dfrac{6}{5}\left(v^{i,i+1^*} - v^{i-1,i^*}\right) + \dfrac{e^i}{10}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right)\right) \end{array} \right]$$

(IV.2.4) $$w_Q^{5n^{i^*}} = w_Q^{7n^{i^*}}$$

Cette expression de l'énergie W_{3D}^{5n} permet assez facilement le calcul des variations par rapport aux efforts généralisés $\tilde{\tilde{N}}^i, \tilde{\tilde{M}}^i, \tilde{Q}^i$ et $v^{i,i+1}$. Le calcul des variations par rapport à $\tilde{\tau}^{i,i+1}$ est un peu plus compliqué puisque $\tilde{\tau}^{i,i+1}$ intervient dans l'expression aussi avec sa divergence.
De plus, le comportement généralisé déduit des expressions ci-dessus donne des calculs de structure un peu lourd et le modèle perd le caractère opératoire que nous recherchons à l'aide de nos approximations. Nous simplifions donc l'expression des énergies élastiques approchées en négligeant certaines contributions.
Simplification N°1:
Nous négligeons tout d'abord les énergies couplant les efforts membranaires et les contraintes perpendiculaires aux couches, c'est à dire que nous négligeons $w_3^{5n^{i^*}}$ $\forall i$. Cela revient en quelque sorte à négliger les effets Poisson dus au "pincement" des couches. Cette hypothèse est habituelle

dans la plupart des théories de plaque.

Simplification N°2:

Dans l'écriture $w_v^{5n^i}$ apparaissent les termes en $e^{i^2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)$ et des termes en $e^{i^3}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)^2$. La présence de ces termes complique beaucoup les calculs alors qu'étant multipliés par e^{i^2} ou e^{i^3}, leur contribution à l'énergie est probablement faible.

Nous décidons donc de les négliger. Si l'on se reporte à l'énergie du M4_7n et aux équations (II.2.1 et 2), on voit que cette simplification revient à approximer M_3^i par $\frac{e^{i^2}}{10}\left(v^{i,i+1} - v^{i-1,i}\right)$ et N_3^i par $\frac{e^i}{2}\left(v^{i,i+1} + v^{i-1,i}\right)$.

Après ces simplifications le comportement s'écrit:

loi de comportement des efforts normaux de membrane de la couche i:

(IV.2.5) $$\overset{\approx i}{\varepsilon}(x,y) = \frac{\overset{\approx}{\tilde{S}}{}^i}{e^i} : \overset{\approx i}{N}(x,y);$$

loi de comportement des moments de flexion et de torsion dans le plan de la couche i:

(IV.2.6) $$\overset{\approx i}{\chi}(x,y) = \frac{12}{e^{i^3}} \overset{\approx}{\tilde{S}}{}^i : \tilde{M}^i(x,y);$$

loi de comportement des efforts de cisaillement hors plan de la couche i:

(IV.2.7) $$\tilde{d}_\Phi^i(x,y) = \left(\frac{6}{5e^i}\right)\tilde{S}_Q^i.\tilde{Q}^i - \left(\frac{1}{10}\right)\tilde{S}_Q^i.\left(\tilde{\tau}^{i-1,i} + \tilde{\tau}^{i,i+1}\right);$$

loi de comportement des efforts de cisaillement à l'interface i,i+1:

(IV.2.8) $$\begin{aligned}\tilde{D}^{i,i+1}(x,y) = &-\frac{1}{10}\tilde{S}_Q^i.\tilde{Q}^i - \frac{1}{10}\tilde{S}_Q^{i+1}.\tilde{Q}^{i+1} + \left(\frac{-e^i}{30}\right)\tilde{S}_Q^i.\tilde{\tau}^{i-1,i} \\ &+ \frac{2}{15}\left(e^i\tilde{S}_Q^i + e^{i+1}\tilde{S}_Q^{i+1}\right).\tilde{\tau}^{i,i+1} + \left(\frac{-e^{i+1}}{30}\right)\tilde{S}_Q^{i+1}.\tilde{\tau}^{i+1,i+2}\end{aligned};$$

loi de comportement des efforts d'arrachement à l'interface i,i+1:

(IV.2.9) $$D_3^{i,i+1}(x,y) = \frac{9}{70}e^iS_v^iv^{i-1,i} + \frac{13}{35}\left(e^iS_v^i + e^{i+1}S_v^{i+1}\right)v^{i,i+1} + \frac{9}{70}e^{i+1}S_v^{i+1}v^{i+1,i+2}$$

Avec l'écriture des déformations généralisées établie dans le chapitre précédent et rappelée ci-dessous:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{N}}^i \leftrightarrow \tilde{\tilde{\varepsilon}}^i = \frac{1}{2}\left(\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{U}^i + {}^{T}\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{U}^i\right)\\
&\tilde{\tilde{M}}^i \leftrightarrow \tilde{\tilde{\chi}}^i = \frac{1}{2}\left(\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{\Phi}^i + {}^{T}\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{\Phi}^i\right)\\
&\tilde{Q}^i \leftrightarrow \tilde{d}^i_{\Phi} = \tilde{\Phi}^i + \tilde{\mathrm{Grad}}\,U^i_3\\
&\tilde{\tau}^{i,i+1} \leftrightarrow \tilde{D}^{i,i+1} = \left(\tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i - \frac{e^i}{2}\tilde{\Phi}^i - \frac{e^{i+1}}{2}\tilde{\Phi}^{i+1}\right)\\
&v^{i,i+1} \leftrightarrow D^{i,i+1}_v = \left(U^{i+1}_3 - U^i_3\right)
\end{aligned}
\tag{IV.2.10}
$$

IV.3 COMPORTEMENT ELASTIQUE LINEAIRE DU MODELE M4_3N PLAQUE

Il s'agit d'exprimer les différents termes de l'énergie écrite en contrainte en fonction des relations liant les contraintes tridimensionnelles approchées $\overset{=}{\sigma}^{a3nP}(x,y,z)$ aux efforts macroscopiques $\overset{\approx}{N}^i(x,y)$, $\overset{\approx}{M}^i(x,y)$, $\tau^{i-1,i}_{\alpha}(x,y)$, $\tau^{i,i+1}_{\alpha}(x,y)$, $v^{i-1,i}(x,y)$ et $v^{i,i+1}(x,y)$ du modèle M4_3nP (II.3.1->3).

La distinction entre ce champ de contrainte tridimensionnel approché et celui du modèle 5n ne se fait que sur les composantes $\sigma^a_{\alpha 3}$ et σ^a_{33}, l'écriture de l'énergie membranaire ne diffère donc pas. Les termes d'énergie (IV.0.3->6) après calcul deviennent:

$$
w_c^{3nP^{i^*}} = w_c^{5n^{i^*}} \tag{IV.3.1}
$$

$$
2w_v^{3nP^{i^*}} = S^i_v \left[
\begin{aligned}
&e^i\left(\frac{v^{i,i+1^*} + v^{i-1,i^*}}{2} + \frac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right)\right)^2\\
&+\frac{e^i}{12}\left(-\frac{1}{5}\mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^{i^*} + \left(v^{i,i+1^*} - v^{i-1,i^*}\right)\right)^2\\
&+\frac{e^i}{5}\left(\frac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right)\right)^2 + \frac{e^i}{700}\left(\mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^{i^*}\right)^2
\end{aligned}
\right]
\tag{IV.3.2}
$$

(IV.3.3)
$$2w_3^{3nP^{i^*}} = \left[\begin{array}{l} \tilde{\tilde{N}}^{i^*} : \tilde{\tilde{S}}_3^i \left(\dfrac{v^{i,i+1^*} + v^{i-1,i^*}}{2} + \dfrac{e^i}{12} \mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right)\right) \\ + \dfrac{\tilde{\tilde{M}}^{i^*}}{e^i} : \tilde{\tilde{S}}_3^i \left(\dfrac{6}{5}\left(v^{i,i+1^*} - v^{i-1,i^*}\right) + \dfrac{e^i}{10} \mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right)\right) \end{array}\right]$$

(IV.3.4)
$$2w_Q^{3nP^{i^*}} = \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{1}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right) + \dfrac{\tilde{\mathrm{div}}\tilde{\tilde{M}}^{i^*}}{e^i} \right) . \tilde{\tilde{S}}_Q^i e^i . \left(\dfrac{1}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} + \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right) + \dfrac{\tilde{\mathrm{div}}\tilde{\tilde{M}}^{i^*}}{e^i} \right) \\ + \left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right) . \dfrac{\tilde{\tilde{S}}_Q^i e^i}{12} . \left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*} - \tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right) \\ + \left(\dfrac{\tilde{\mathrm{div}}\tilde{\tilde{M}}^{i^*}}{e^i} \right) . \dfrac{\tilde{\tilde{S}}_Q^i e^i}{5} . \left(\dfrac{\tilde{\mathrm{div}}\tilde{\tilde{M}}^{i^*}}{e^i} \right) \end{array}\right]$$

Cette expression de l'énergie W_{3D}^{3nP} donnerait, elle aussi, par dérivation, un comportement un peu compliqué. Nous allons donc proposer quelques simplifications.

Simplification N°1:

Nous négligeons $w_3^{3nP^{i^*}}$ $\forall i$. Cela revient à négliger les conséquences de l'effet Poisson dû au "pincement des couches" comme nous l'avons proposé dans le modèle M4_5n.

Simplification N°2:

Dans $w_v^{3nP^{i^*}}$ apparaissent des termes en $\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)$ que nous négligeons (Cf. M4_5n). Ceci nous conduit à approcher $\mathrm{div}\tilde{\mathrm{div}}\tilde{\tilde{M}}^{i^*}$ par $-\left(v^{i,i+1^*} - v^{i-1,i^*}\right)$ en utilisant l'équation d'équilibre (II.3.6).

Simplification N°3:

Dans $w_Q^{3nP^{i^*}}$ apparaissent des termes en $\tilde{\mathrm{div}}\tilde{\tilde{M}}^i$ que nous négligeons. Ceci revient à dire que l'énergie associée aux contraintes de cisaillement perpendiculaires au plan de la couche peut valablement être approchée à l'aide des seules contraintes de cisaillement d'interface. On peut dire aussi que l'on se contente d'une approximation affine des contraintes $\sigma_{\alpha\beta}$ dans chaque couche lorsqu'il s'agit de déterminer cette partie de l'énergie élastique.

Ainsi on aboutit au comportement suivant:

loi de comportement des efforts normaux de membrane de la couche i:

(IV.3.5)
$$\tilde{\tilde{\varepsilon}}^i(x,y) = \frac{\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i}{e^i} : \tilde{\tilde{N}}^i(x,y);$$

loi de comportement des moments de flexion et de torsion dans le plan de la couche i:

(IV.3.6) $$\tilde{\tilde{\chi}}^i(x,y) = \frac{12}{e^{i^3}} \tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i : \tilde{\tilde{M}}^i(x,y);$$

loi de comportement des efforts de cisaillement à l'interface i,i+1:

(IV.3.7) $$\tilde{D}^{i,i+1}(x,y) = \left(\frac{e^i}{6}\tilde{\tilde{S}}_Q^i\right).\tilde{\tau}^{i-1,i} + \frac{1}{3}\left(e^i\tilde{\tilde{S}}_Q^i + e^{i+1}\tilde{\tilde{S}}_Q^{i+1}\right).\tilde{\tau}^{i,i+1} + \left(\frac{e^{i+1}}{6}\tilde{\tilde{S}}_Q^{i+1}\right).\tilde{\tau}^{i+1,i+2};$$

loi de comportement des efforts d'arrachement à l'interface i,i+1:

(IV.3.8) $$D_3^{i,i+1}(x,y) = \frac{9}{70}e^i S_v^i v^{i-1,i} + \frac{13}{35}\left(e^i S_v^i + e^{i+1}S_v^{i+1}\right)v^{i,i+1} + \frac{9}{70}e^{i+1}S_v^{i+1}v^{i+1,i+2}$$

Nota: Si au lieu de la simplification N°2: $\mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^{i^*} = -\left(v^{i,i+1^*} - v^{i-1,i^*}\right)$, on avait choisi de négliger les termes en $\mathrm{div}\,\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^{i^*}$ on aurait trouvé la déformation généralisée $D_3^{i,i+1}$ du modèle M4_3nM (IV.5.7).

Rappelons que les déformations généralisées du modèle M4_3nP s'écrivent:

(IV.3.9) $$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{\varepsilon}}^i &= \frac{1}{2}\left(\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{U}^i + {}^T\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{U}^i\right)\\
\tilde{\tilde{\chi}}^i &= -\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\,\tilde{\mathrm{Grad}}\,U_3^i\\
\tilde{D}^{i,i+1} &= \left(\tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i + \frac{e^i}{2}\mathrm{Grad}U_3^i + \frac{e^{i+1}}{2}\mathrm{Grad}U_3^{i+1}\right)\\
D_v^{i,i+1} &= \left(U_3^{i+1} - U_3^i\right)
\end{aligned}$$

IV.4 COMPORTEMENT ELASTIQUE LINEAIRE DU MODELE M4_(2N+1) PLAQUE

Il s'agit d'exprimer les différents termes de l'énergie écrite en contrainte en fonction des relations liant les contraintes tridimensionnelles approchées $\overset{=}{\sigma}^{a(2n+1)P}(x,y,z)$ aux efforts macroscopiques $\tilde{\tilde{N}}^i(x,y)$, $\tilde{\tilde{M}}^i(x,y)$, $\tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)$ et $\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y)$ du modèle M4_(2n+1)P (II.4.3->5).

Dans ce cas, nous simplifions en négligeant $w_v^{(2n+1)P^{i^*}}$ et $w_3^{(2n+1)P^{i^*}}$. Le terme $w_3^{(2n+1)P^{i^*}}$

correspond à l'effet poisson dû au pincement des couches qui a déjà été négligé dans la plupart des précédents modèles. L'énergie $w_V^{(2n+1)P^{i^*}}$ est associée aux contraintes σ_{33}. Nous la négligeons car la cinématique du multicouche dans la direction normale est prise très schématiquement en compte dans le modèle M4_(2n+1)P à l'aide d'un seul champ $W_3(x,y)$ pour l'ensemble des couches. Nous ne sommes donc pas très loin d'une hypothèse de rigidité infinie du matériau dans la direction 3.
Il reste deux termes pour composer cette énergie élastique.

(IV.4.1) $$w_c^{(2n+1)P^{i^*}} = w_c^{7n^{i^*}}$$

(IV.4.2) $$w_Q^{(2n+1)P^{i^*}} = w_Q^{3nP^{i^*}}$$

Nous négligeons dans $w_Q^{(2n+1)P^{i^*}}$ les termes en $\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^{i^*}$, le comportement s'écrit alors:

loi de comportement des efforts normaux de membrane de la couche i:

(IV.4.3) $$\overset{\approx}{\varepsilon}^{i}(x,y) = \frac{\tilde{\tilde{S}}^{i}}{e^{i}} : \overset{\approx}{N}^{i}(x,y);$$

loi de comportement des moments membranaire de la couche i:

(IV.4.4) $$\tilde{\tilde{\chi}}(x,y) = \frac{12}{e^{i^3}} \tilde{\tilde{S}}^{i} : \overset{\approx}{M}^{i}(x,y) \quad \forall i \in [i,n];$$

loi de comportement des efforts de cisaillement à l'interface i,i+1:

(IV.4.5) $$\tilde{D}^{i,i+1}(x,y) = \left(\frac{e^{i}}{6}\right)\tilde{\tilde{S}}_Q^{i}.\tilde{\tau}^{i-1,i} + \frac{1}{3}\left(e^{i}\tilde{\tilde{S}}_Q^{i} + e^{i+1}\tilde{\tilde{S}}_Q^{i+1}\right).\tilde{\tau}^{i,i+1} + \left(\frac{e^{i+1}}{6}\right)\tilde{\tilde{S}}_Q^{i+1}.\tilde{\tau}^{i+1,i+2}$$

Avec la définition des déformations généralisées du modèle M4_(2n+1)P rappelée ci-dessous:

(IV.4.6) $$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\varepsilon}}^{i} &= \frac{1}{2}\left(\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{U}^{i} + {}^{T}\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{U}^{i}\right) \\ \tilde{\tilde{\chi}} &= -\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{\mathrm{Grad}}\,W_3 \\ \tilde{D}^{i,i+1} &= \left(\tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^{i} + \frac{e^{i}+e^{i+1}}{2}\mathrm{Grad}W_3\right) \end{aligned}$$

IV.5 COMPORTEMENT ELASTIQUE LINEAIRE DU MODELE M4_3N MEMBRANE

Il s'agit d'exprimer les différents termes de l'énergie écrite en contrainte en fonction des relations liant les contraintes tridimensionnelles approchées $\overset{=a3nM}{\sigma}(x,y,z)$ aux efforts macroscopiques $\overset{\approx i}{N}(x,y)$, $\tau_\alpha^{i-1,i}(x,y)$, $\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y)$, $v^{i-1,i}(x,y)$ et $v^{i,i+1}(x,y)$ du modèle M4_3nM (II.2.1->3).
Nous rappelons que, l'effort tranchant $Q_\alpha^i(x,y)$ relié aux cisaillement par (II.5.4) n'est pas représenté dans la construction du champ de contrainte tridimensionnel approché du modèle M4_3nM.
Les termes d'énergie après calcul s'écrivent:

(IV.5.1) $$2w_c^{3nM^{i*}} = \tilde{N}^{i*}(x,y):\frac{\tilde{\tilde{S}}^i}{e_i}:\tilde{N}^{i*}(x,y)$$

(IV.5.2) $$2w_v^{3nM^{i*}} = S_v^i\left[\begin{array}{l} e^i\left(\dfrac{v^{i,i+1^*}+v^{i-1,i^*}}{2}+\dfrac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}-\tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right)\right)^2 \\ +\dfrac{e^i}{12}\left(v^{i,i+1^*}-v^{i-1,i^*}\right)^2+\dfrac{e^{i^3}}{720}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}-\tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right)^2 \end{array}\right]$$

(IV.5.3) $$2w_3^{3nM^{i*}} = \tilde{N}^{i*}:\tilde{\tilde{S}}_3^i\left(\frac{v^{i,i+1^*}+v^{i-1,i^*}}{2}+\frac{e^i}{12}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}-\tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right)\right)$$

(IV.5.4) $$2w_Q^{3nM^{i*}} = \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{\tilde{\tau}^{i,i+1^*}+\tilde{\tau}^{i-1,i^*}}{2}\right).e^i\tilde{\tilde{S}}_Q^i.\left(\dfrac{\tilde{\tau}^{i,i+1^*}+\tilde{\tau}^{i-1,i^*}}{2}\right) \\ +\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}-\tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right).\dfrac{e^i}{12}\tilde{\tilde{S}}_Q^i.\left(\tilde{\tau}^{i,i+1^*}-\tilde{\tau}^{i-1,i^*}\right) \end{array}\right]$$

Nous faisons les mêmes simplifications que pour que le modèle M4_5n.
C'est à dire que:
1°) Nous négligeons ici encore $w_3^{3nM^{i*}}$ $\forall i$. Cela revient à négliger les conséquences de l'effet Poisson dû au "pincement des couches".
2°) Nous négligeons les termes en $\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}\pm\tilde{\tau}^{i-1,i}\right)$ dans $w_v^{3nM^{i*}}$

Ainsi, on aboutit au comportement suivant:

loi de comportement des efforts normaux de membrane de la couche i:

(IV.5.5) $$\overset{\approx}{\varepsilon}^{i}(x,y)=\frac{\overset{\approx}{\tilde{S}}{}^{i}}{e^{i}}:\overset{\approx}{N}{}^{i}(x,y);$$

loi de comportement des efforts de cisaillement à l'interface i,i+1:

(IV.5.6) $$\tilde{D}^{i,i+1}(x,y)=\left(\frac{e^{i}}{6}\right)\tilde{\tilde{S}}{}^{i}_{Q}.\tilde{\tau}^{i-1,i}+\frac{1}{3}\left(e^{i}\tilde{\tilde{S}}{}^{i}_{Q}+e^{i+1}\tilde{\tilde{S}}{}^{i+1}_{Q}\right).\tilde{\tau}^{i,i+1}+\left(\frac{e^{i+1}}{6}\right)\tilde{\tilde{S}}{}^{i+1}_{Q}.\tilde{\tau}^{i+1,i+2};$$

loi de comportement des efforts d'arrachement à l'interface i,i+1:

(IV.5.7) $$D_{3}^{i,i+1}(x,y)=\frac{e^{i}}{6}S_{v}^{i}v^{i-1,i}+\frac{1}{3}\left(e^{i}S_{v}^{i}+e^{i+1}S_{v}^{i+1}\right)v^{i,i+1}+\frac{e^{i}}{6}e^{i+1}S_{v}^{i+1}v^{i+1,i+2}$$

Notons que le comportement est légèrement différent de celui du modèle M4_3nP. Ceci vient du fait que l'on a ici négligé l'influence du terme en $\operatorname{div}\tilde{\operatorname{div}}\tilde{\tilde{M}}^{i^{*}}$ contrairement au modèle M4_3nP.

Rappelons que les déformations généralisées du modèle M4_3nM ont été établies au chapitre précédent sous la forme:

(IV.5.8) $$\begin{aligned}\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{i}&=\frac{1}{2}\left(\overset{\approx}{\operatorname{Grad}}\tilde{U}^{i}+{}^{T}\overset{\approx}{\operatorname{Grad}}\tilde{U}^{i}\right)\\ \tilde{D}^{i,i+1}&=\left(\tilde{U}^{i+1}-\tilde{U}^{i}+\frac{e^{i}}{2}\tilde{\operatorname{Grad}}U_{3}^{i}+\frac{e^{i+1}}{2}\tilde{\operatorname{Grad}}U_{3}^{i+1}\right)\\ D_{v}^{i,i+1}&=\left(U_{3}^{i+1}-U_{3}^{i}\right)\end{aligned}$$

IV.6 COMPORTEMENT ELASTIQUE LINEAIRE DU MODELE M4_(2N+1) MEMBRANE

Il s'agit d'exprimer les différents termes de l'énergie écrite en contrainte en fonction des relations liant les contraintes tridimensionnelles approchées $\overset{=}{\sigma}^{a(2n+1)M}(x,y,z)$ aux efforts macroscopiques $\overset{\approx}{N}{}^{i}(x,y)$, $\tau_{\alpha}^{i-1,i}(x,y)$ et $\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x,y)$ du modèle M4_(2n+1)M (II.6.1->3). Nous négligeons ici encore les termes $w_{v}^{(2n+1)M^{i^{*}}}$ et $w_{3}^{(2n+1)M^{i^{*}}}$.

Les termes d'énergie s'écrivent:

(IV.6.1) $$w_c^{(2n+1)M^{i^*}} = w_c^{3nM^{i^*}}$$

(IV.6.2) $$w_Q^{(2n+1)M^{i^*}} = w_Q^{3nM^{i^*}}$$

Le comportement s'écrit alors:
loi de comportement des efforts normaux de membrane de la couche i:

(IV.6.3) $$\overset{\approx}{\varepsilon}^{i}(x,y) = \frac{\overset{\approx}{\tilde{S}}^{i}}{e^{i}} : \overset{\approx}{N}^{i}(x,y);$$

loi de comportement des efforts de cisaillement à l'interface i,i+1:

(IV.6.4) $$\tilde{D}^{i,i+1}(x,y) = \left(\frac{e^{i}}{6}\right)\tilde{\tilde{S}}_Q^{i}.\tilde{\tau}^{i-1,i} + \frac{1}{3}\left(e^{i}\tilde{\tilde{S}}_Q^{i} + e^{i+1}\tilde{\tilde{S}}_Q^{i+1}\right).\tilde{\tau}^{i,i+1} + \left(\frac{e^{i+1}}{6}\right)\tilde{\tilde{S}}_Q^{i+1}.\tilde{\tau}^{i+1,i+2}$$

Les déformations généralisées du modèle M4_(2N+1)M issues du chapitre précédent sont:

(IV.6.5) $$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\varepsilon}}^{i} &= \frac{1}{2}\left(\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{U}^{i} + {}^{T}\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{U}^{i}\right) \\ \tilde{D}^{i,i+1} &= \left(\tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^{i} + \frac{e^{i} + e^{i+1}}{2}\mathrm{Grad}\,W_3\right) \end{aligned}$$

IV.7 COMPORTEMENT ELASTIQUE LINEAIRE DU MODELE DE LOVE-KIRCHHOFF

Il s'agit d'exprimer les différents termes de l'énergie écrite en contrainte en fonction des relations liant les contraintes tridimensionnelles approchées $\overset{=}{\sigma}^{aLK}(x,y,z)$ aux efforts macroscopiques du modèle de Love-Kirchhoff (II.7.1->3).
Nous négligeons les termes $w_v^{LK^{i^*}}$ $w_3^{LK^{i^*}}$ et $w_Q^{LK^{i^*}}$:
- pour l'énergie élastique de couplage entre les contraintes membranaires $\sigma_{\alpha\beta}$ et les contraintes normales σ_{33} de la couche i, cela revient à négliger les conséquences de l'effet Poisson dû au "pincement des couches" comme nous l'avons proposé dans le modèle M4_5n.
- dans l'énergie élastique du cisaillement perpendiculaire au plan de la couche i apparaissent des termes en $\tilde{\mathrm{div}}\,\tilde{\tilde{M}}^{i}$ que nous négligeons.

Le terme d'énergie restant est:

(IV.7.1) $$w_c^{LK^{i^*}} = w_c^{7n^{i^*}}$$

Le comportement s'écrit alors:

(IV.7.2) $$i = 1,n \quad \begin{cases} \mathrm{Sym}\left(\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{W}\right) - \left(\bar{h}_i - \dfrac{h_n^+ + h_1^-}{2}\right)\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{\mathrm{Grad}}\,W_3 = \dfrac{\tilde{\tilde{S}}^i}{e^i} : \tilde{N}^i \\ \overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{\mathrm{Grad}}\,W_3 = \dfrac{12}{e_i^3}\tilde{\tilde{S}}^i : \tilde{M}^i \end{cases}$$

Pour retrouver l'écriture habituelle du comportement de Love-Kirchhoff, nous introduisons à nouveau les efforts membranaires globaux:

(IV.7.3) $$\tilde{\tilde{N}} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{N}}^i$$

et les efforts de flexion globaux:

(IV.7.4) $$\tilde{\tilde{M}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{\tilde{M}}^i + \left(\bar{h}^i - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right) \tilde{\tilde{N}}^i \right)$$

Des équations (IV.7.2), on en déduit:

(IV.7.5) $$\begin{cases} \tilde{\tilde{N}} = \left(\sum_{i=1}^{n} e^i \left(\tilde{\tilde{S}}^i \right)^{-1} \right) : \mathrm{Sym}\left(\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{W} \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} e^i \left(\bar{h}_i - \dfrac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right) \left(\tilde{\tilde{S}}^i \right)^{-1} \right) : \overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{\mathrm{Grad}}\,W_3 \\ \tilde{\tilde{M}} = \left(\sum_{i=1}^{n} e^i \left(\bar{h}_i - \dfrac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right) \left(\tilde{\tilde{S}}^i \right)^{-1} \right) : \mathrm{Sym}\left(\overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{W} \right) \\ \qquad - \left(\sum_{i=1}^{n} \left(e^i \left(\bar{h}_i - \dfrac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right)^2 + \dfrac{e_i^3}{12} \right) \left(\tilde{\tilde{S}}^i \right)^{-1} \right) : \overset{\approx}{\mathrm{Grad}}\,\tilde{\mathrm{Grad}}\,W_3 \end{cases}$$

Si l'on note comme cela se fait classiquement:

$$\text{(IV.7.6)} \qquad \begin{cases} \tilde{\tilde{\tilde{A}}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e^i \left(\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i \right)^{-1} \\ \tilde{\tilde{\tilde{B}}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e^i \left(\bar{h}_i - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right) \left(\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i \right)^{-1} \\ \tilde{\tilde{\tilde{D}}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(e^i \left(\bar{h}_i - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right)^2 + \frac{e_i^3}{12} \right) \left(\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i \right)^{-1} \end{cases},$$

sachant que les déformations généralisées s'expriment sous la forme:

$$\text{(IV.7.7)} \qquad \begin{cases} \tilde{\tilde{\varepsilon}} = \mathrm{Sym}\, \tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\, \tilde{W} \\ \tilde{\tilde{\chi}} = -\tilde{\tilde{\mathrm{Grad}}}\, \tilde{\mathrm{Grad}}\, W_3 \end{cases},$$

on retrouve bien le comportement classique d'une théorie de Love-Kirchhoff pour une plaque multicouche:

$$\text{(IV.7.8)} \qquad \begin{cases} \tilde{N} = \tilde{\tilde{\tilde{A}}} : \tilde{\tilde{\varepsilon}} + \tilde{\tilde{\tilde{B}}} : \tilde{\tilde{\chi}} \\ \tilde{M} = \tilde{\tilde{\tilde{B}}} : \tilde{\tilde{\varepsilon}} + \tilde{\tilde{\tilde{D}}} : \tilde{\tilde{\chi}} \end{cases}$$

Nous remarquons que:

$$\tilde{\tilde{\tilde{A}}} \text{ n'est autre que } \int_{h_1^-}^{h_n^+} \left(\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i \right)^{-1} dz$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{B}}} \text{ n'est autre que } \int_{h_1^-}^{h_n^+} \left(z - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right) \left(\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i \right)^{-1} dz$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{D}}} \text{ n'est autre que } \int_{h_1^-}^{h_n^+} \left(z - \frac{h_n^+ + h_1^-}{2} \right)^2 \left(\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i \right)^{-1} dz$$

CONCLUSION PARTIE I

Nous avons ainsi construit 6 modèles approchés pour l'analyse des efforts d'interface dans les multicouches récapitulés dans [Chabot & Ehrlacher, 1997]. Nous avons montré comment la même méthode permet de retrouver la théorie monoparticulaire classique des plaques de Love-Kirchhoff. Le plus complexe des modèles multiparticulaires, le M4_7n, à 7n équations d'équilibre et 7n champs de déplacements généralisés est identique au modèle "local" de Pagano [Pagano, 1978]. Le plus simple, M4_(2n+1)M, est une généralisation du très classique Shear-Lag-Analysis [Garett & Bailey, 1977] permettant notamment de considérer des problèmes de flexion via la déformation généralisée $\tilde{D}^{i,i+1} = \tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^{i} + \frac{e^{i+1} + e^{i}}{2} \tilde{\mathrm{Grad}}\, W_3$. Pour ce dernier modèle, il est important de noter que les simplifications introduites au niveau des énergies élastiques ont permis un découplage au niveau des comportements membranaires (IV.6.3). Par contre, les comportements d'interface restent couplés entre trois interfaces voisines dans (IV.6.4). En effet, la déformation $\tilde{D}^{i,i+1}$ ne peut s'écrire linéairement en fonction de la seule contrainte $\tilde{\tau}^{i,i+1}$ mais aussi en fonction de $\tilde{\tau}^{i-1,i}$ et $\tilde{\tau}^{i+1,i+2}$. Signalons que l'on peut assez facilement montrer que les expressions couramment utilisées dans la littérature pour la détermination d'une "raideur d'interface" découplée en fonction des caractéristiques mécaniques et géométriques des couches aboutissent à des contradictions [Carreira & Caron, 1996].

Ces six modèles étant construit, il nous reste à nous poser la question essentielle de leur pertinence et de leur prédictibilité en fonction de la question posée, à savoir le choix du modèle le plus simple possible compatible avec le niveau de pertinence et de précision demandé.

Bien évidemment la réponse à cette question n'est pas unique et dépend du problème posé. Cependant, nous pouvons déjà remarquer que les modèles M4_7n et M4_3nM ne peuvent être utilisés avec n'importe quelle condition aux limites.

Pour se faire une opinion, il est dans un premier temps utile (voir nécessaire) de commencer par traiter complètement quelques applications simples. C'est ce que nous ferons dans la deuxième partie de ce mémoire. Il nous a semblé utile de donner un résumé étendu de cette partie I en annexe VIII, reprenant, pour chaque modèle, l'ensemble des équations établies.

PARTIE II

RESOLUTIONS ANALYTIQUES DES PROBLEMES DE TRACTION A L'AIDE DES MODELES MULTIPARTICULAIRES DES MATERIAUX MULTICOUCHES

CHAPITRE V *Multicouche* $[0°, 90°]_s$ *en traction*

CHAPITRE VI *Multicouches* $[\theta_1,\ldots,\theta_m]_s$ *en traction*

Les équations de six modèles multiparticulaires des matériaux multicouches viennent d'être établies dans la première partie de ce mémoire de thèse.

Dans cette seconde partie, nous nous proposons de présenter quelques solutions analytiques de problèmes classiques de multicouche en traction. Vu le chargement appliqué, nous n'avons pas considéré utile d'appliquer les modèles de plaque M4_3nP et M4_(2n+1)P.

Nous étudions le quadricouche $(0°, 90°)_S$ dans le chapitre V. Dans la première section du chapitre, nous résolvons les équations des modèles multiparticulaires M4_7n de Pagano, M4_5n, M4_3nM et M4_(2n+1)M. Le détail des calculs est reporté en annexe VI. La comparaison de ces différentes solutions entre elles et avec d'autres solutions proposées dans la littérature doit permettre de juger de la pertinence des différents modèles. Pour cela dans la deuxième section, nous analysons, tout d'abord, les termes d'énergie des différents modèles, puis, nous comparons les efforts intérieurs généralisés et en particulier ceux d'interface.

Dans le chapitre VI, nous nous proposons de présenter des solutions pour la plaque multicouche d'empilement $[\theta_1,...,\theta_m]_s$ en traction. Le détail des calculs est reporté en annexe VII. Dans une première section, nous résolvons les équations du problème pour le modèle M4_5n dans le cas particulier du quadricouche $[\theta_1,\theta_2]_s$ de matériaux ayant leurs modules de cisaillement transverse G_{LN} et G_{TN} égaux. Dans une deuxième section, nous présentons la solution du même problème par le modèle plus simple, le M4_(2n+1) membrane, mais cette fois dans le cas plus général d'un matériau quelconque pour un quadricouche et un huit couches. Dans la troisième section du chapitre, nous comparons nos résultats avec ceux de la littérature sur des empilements de type $[\theta,-\theta]_s$ et $[\theta,\theta-90]_s$. Dans la dernière section, nous montrons comment en utilisant l'approximation de Raju et Crews [Raju & Crews, 1981], il est possible d'étudier une plaque $[\theta_1,\theta_2]_s$ trouée, en traction.

CHAPITRE V

MULTICOUCHE $(0°,90°)_S$ EN TRACTION

V.1 Calculs analytiques du quadricouche $(0°,90°)_s$ en traction

V.1.1 Points communs aux différentes modélisations M4

V.1.2 Utilisation du modèle multiparticulaire M4_7n de Pagano

V.1.3 Utilisation du modèle multiparticulaire M4_5n

V.1.4 Utilisation du modèle multiparticulaire M4_3n membrane

V.1.5 Utilisation du modèle multiparticulaire M4_(2n+1) membrane

V.2 Analyse des résultats

V.2.1 Comparaison des énergies

V.2.2 Comparaison des efforts

V.2.3 Calculs du taux de relaxation d'énergie dans le cas du modèle M4_(2n+1)M

V.3 Conclusion

L'objet de ce chapitre est de calculer et d'analyser les champs solutions pour différents modèles multiparticulaires dans le cas simple et classique du quadricouche $(0°,90°)_s$ en traction.

Dans une première section, après avoir présenté tout d'abord une méthode simple de résolution analytique commune aux quatre modèles multiparticulaires retenus pour traiter ce problème (le M4_7n, le M4_5n, le M4_3nM et le M4_(2n+1)M), nous posons le système analytique condensé sous forme adimensionnel et les conditions aux limites de chacun des différents modèles dans les quatre paragraphes suivants. Ce sont ces systèmes qui sont résolus par le logiciel de calcul formel MATHEMATICA. Cela consiste simplement à résoudre un problème aux valeurs propres puis un système d'équations linéaires. Pour ne pas alourdir le corps du texte le détail des calculs est donné en Annexe VI.

Dans la seconde section de ce chapitre, nous analysons les courbes des principaux champs de manière à comparer les prévisions des différents modèles sur la géométrie et le matériau donnés par l'article de Pagano [Pagano, 1978]. Tout d'abord, dans un premier paragraphe, nous présentons les courbes énergétiques essentielles à la compréhension des différentes simplifications énergétiques introduites dans l'écriture des modèles. Nous montrons, par regroupement de certains termes d'énergie, comment l'absence d'un effort généralisé d'un "sous modèle" par rapport à un modèle plus complexe est compensée énergétiquement en partie par les autres efforts de ce modèle. Dans le second paragraphe, nous donnons les courbes des efforts d'arrachement et de cisaillement d'interface de chacun des modèles. Ces dernières courbes nous permettent de mieux expliquer le passage d'un modèle à l'autre. Enfin, dans un troisième paragraphe, nous montrons comment un raisonnement basé sur le taux de relaxation d'énergie dans une plaque délaminée permet de calculer directement le cisaillement maximum au bord d'un empilement $(0°,90°)_s$ à l'interface 0°/90° dans le cadre du modèle M4_(2n+1)M. Le résultat se prolonge au cas de la plaque non délaminée. Cette étude permet l'ébauche d'une réflexion appuyée sur l'analyse précédente concernant l'écriture de critères de délaminage pour les différents modèles multiparticulaires M4.

V.1 CALCULS ANALYTIQUES DU QUADRICOUCHE $(0°,90°)_S$ EN TRACTION

V.1.1 Points communs aux différentes modélisations M4

L'empilement des quatre couches se fait suivant z. Nous numérotons les couches de 1 à 4 du bas vers le haut. Les couches 1 et 4 sont des couches à 0° (par rapport à Ox) et les couches 2 et 3 à 90°. Nous étudions deux géométries.

La première est une plaque bornée. Dans ce cas le domaine occupé par le multicouche est $x \in [-l,l]$ $y \in [-b,b]$ $z \in [-2e,2e]$ où e est l'épaisseur de chaque couche (Cf. fig. V.1.1.1):

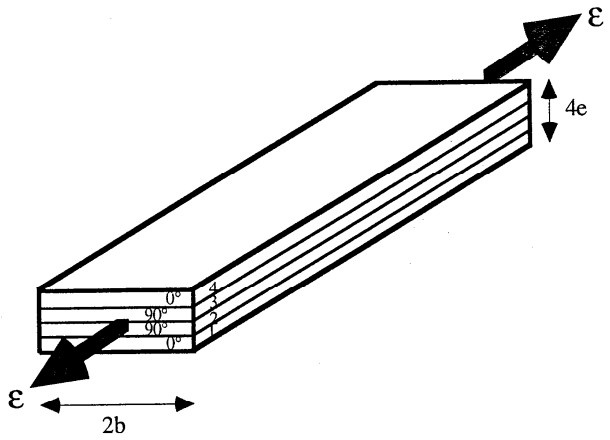


Fig. V.1.1.1: Schéma du quadricouche $(0°,90°)_s$ en traction

La seconde géométrie est une plaque semi-infinie. Dans ce cas $x \in]-\infty,+\infty[$, $y \in]0,+\infty[$ et $z \in]-2e,2e[$. Le deuxième problème se présente comme une limite du premier lorsque la largeur est grande $(b \to \infty)$. Il permet l'étude générale d'un effet de bord dans une pièce aussitôt que la dimension perpendiculaire au bord est supérieure ou égale à environ 8e, car, comme nous le verrons plus loin, au delà de cette distance l'effet de bord n'est plus sensible à la géométrie réelle de la plaque.

La traction est effectuée suivant x. Nous nous plaçons dans une hypothèse d'invariance par translation suivant x du problème.

1°) Champ $u^i(x,y)$:

Dans le cas de la plaque bornée, le déplacement dans la direction x est de -d en x=-l et +d en x=l. Donc, l'invariance par translation et les symétries du problème permettent de déduire que:

$$u^i(x,y) = \varepsilon x \quad \text{où} \quad \varepsilon = \frac{d}{l} \quad \forall i \in 1,4 \quad \forall \text{ modèles;}$$

Dans le cas de la plaque semi-infinie, l'invariance par translation et les symétries du problème permettent de déduire que:

$$u^i(x,y) = \varepsilon x \quad \forall i \in 1,4$$

où ε est une déformation d'allongement suivant x imposée.

2°) Autres champs:

Tous les autres champs sont indépendants de x et ne sont donc fonction que de la variable $y \in [-b,b]$ ou $y \in [0,+\infty]$.

La symétrie de l'empilement et du chargement par rapport au plan z=0 nous conduit à nous intéresser seulement aux champs des couches 1 et 2 et à ceux des interfaces 1, 2 et 2, 3 , ce qui diminue sensiblement la taille du problème.

Dans le cas de la plaque bornée, d'autres considérations de symétrie par rapport au plan y=0 permettent de montrer que les champs cherchés sont pairs ou impairs ce qui permet de restreindre l'étude au domaine $y \in [0,b]$.

Dans le cas de la plaque semi-infinie, les efforts d'interface décroissent vers zéro à l'infini.

Si l'on retient comme inconnues principales les déplacements généralisés et les efforts intérieurs généralisés, l'ensemble des équations d'équilibre et de comportement prend une forme simple. Cet ensemble d'équations est composé de deux sous-ensembles:

- Le premier sous-ensemble est constitué d'équations algébriques linéaires (ce qui permet, nous le verrons par la suite, de diminuer le nombre de champs principaux inconnus).
- Le second sous-ensemble est constitué d'équations différentielles linéaires du premier degré particulièrement simples permettant d'écrire les équations du problème sous la forme:

$$\text{(V.1.1.1)} \qquad \underline{f}'(y) = \overline{\overline{M}}.\underline{f}(y) + \underline{A}$$

où $\underline{f}(y)$ est le vecteur dont les composantes sont les champs inconnus principaux (après élimination de certains champs à l'aide des équations algébriques).

On constate dans chaque cas que la taille du problème peut être facilement divisée par deux par condensation et le problème prend finalement la forme suivante:

$$\text{(V.1.1.2)} \qquad \underline{g}''(y) = \overline{\overline{P}}.\underline{g}(y)$$

où les composantes de $\underline{g}$ sont des champs inconnus en nombre bien plus restreint que dans la forme initiale du problème.

Les conditions aux limites (en y=0 et y=b pour la plaque bornée, ou y=0 et $y \to \infty$ pour la plaque semi- infinie) s'expriment à l'aide des champs composantes de $\underline{g}$ et de leur dérivée.
Pour résoudre ces équations, nous avons cherché les valeurs propres λ_p et les vecteurs propres $\underline{g}_p$ de la matrice $\overline{\overline{P}}$, puis nous avons écrit $\underline{g}(y)$ sous la forme d'une combinaison linéaire d'exponentielles:

$$\text{(V.1.1.3)} \qquad \underline{g}(y) = \sum_p \left(a_p \underline{g}_p \exp\left(\sqrt{\lambda_p} y\right) + b_p \underline{g}_p \exp\left(-\sqrt{\lambda_p} y\right) \right)$$

où $\sqrt{\lambda_p}$ est la racine carrée éventuellement complexe de λ_p dont la partie réelle est positive. L'inverse de la partie réelle de $\sqrt{\lambda_p}$ apparaît comme une distance caractéristique de l'effet de bord. Les coefficients a_p et b_p sont donnés par les conditions aux limites et donc par inversion d'un système linéaire.
Dans le cas de la plaque bornée, dans la pratique pour que $\overline{\overline{P}}$ soit bien conditionnée il est utile d'écrire le problème sous forme adimensionnelle (y compris sur la variable y remplacée par bu, $u \in [0,1]$). Les différents coefficients de la matrice peuvent prendre sinon des valeurs dispersées sur plusieurs ordres de grandeur. Pour que la matrice "des conditions aux limites" servant au calcul de a_p et b_p soit bien conditionnée, il est en outre utile de chercher $\underline{g}(y)$ sous la forme:

$$\text{(V.1.1.4)} \qquad \underline{g}(y) = \sum_p c_p \underline{g}_p \left(\exp\left(\sqrt{\lambda_p} b(u-1)\right) + \underline{\varepsilon}^p \exp\left(-\sqrt{\lambda_p} b(u+1)\right) \right)$$

où $\underline{\varepsilon}^p$ est choisi en fonction de considération de symétrie des composantes $\underline{g}(y)$ par rapport à y, toutes les composantes de $\underline{\varepsilon}^p$ valent 1 ou -1. La parité des solutions est ainsi "forcée" et le facteur (u-1) dans les exponentielles permet d'écrire les conditions aux limites en y=b sans avoir des coefficients démesurément grands ou petits dans la matrice permettant le calcul des constantes c_p (dans les applications, nous choisissons b=8e pour comparer nos résultats avec ceux de [Pagano, 1978]).

Dans le cas de la plaque semi-infinie, les conditions de décroissance lorsque $y \to +\infty$ conduisent à écrire g(y) sous la forme:

$$\text{(V.1.1.5)} \qquad \underline{g}(y) = \sum_p b_p \underline{g}_p \exp\left(-\sqrt{\lambda_p} y\right)$$

Les conditions aux limites en y=0 permettent le calcul des coefficients b_p. Pour avoir un système mieux conditionné, il est préférable d'écrire le problème sous forme adimensionnelle. En

particulier, on change la variable y en $u = \frac{y}{b}$ où b est une longueur arbitrairement choisie comme un petit multiple de l'épaisseur totale 4e de la plaque (dans les applications nous choisissons b=8e). Lorsque l'on prend les deux précautions ci-dessus le calcul quasi-analytique des solutions, fait à l'aide du logiciel de calcul formel MATHEMATICA (version 2.2 pour Solaris de Wolfram Research - Copyright 1988-93), ne pose pas de problème.

Pour ne pas alourdir le texte, nous préférons donner le détail des calculs pour les différents modèles en annexe VI.
Nous résumons dans les quatre paragraphes suivants les systèmes d'équations programmés dans MATHEMATICA pour chacun des modèles utilisés. Les équations sont très similaires dans les cas de la plaque bornée ou de la plaque semi-infinie. Aussi, dans la suite nous indiquerons lorsqu'une équation ou un commentaire ne concerne que l'un des cas. En l'absence de cette indication les équations concernent les deux cas.

V.1.2 Utilisation du modèle multiparticulaire M4_7n

Les champs inconnus principaux sont:
- Les déplacements généralisés:

$$\text{(V.1.2.1)} \qquad \begin{aligned} &\tilde{U}^i(x,y) = \begin{cases} u^i(x,y) = \varepsilon x \\ v^i(x,y) = v^i(y) \end{cases} \\ &U_3^i(x,y) = U_3^i(y) \\ &\overline{U}_3^i(x,y) = \overline{U}_3^i(y) \\ &\hat{U}_3^i(x,y) = \hat{U}_3^i(y) \\ &\tilde{\Phi}^i(x,y) = \begin{cases} \Phi_x^i(x,y) = 0 \\ \Phi_y^i(x,y) = \varphi^i(y) \end{cases} \end{aligned} \qquad i=1,4$$

- Les efforts intérieurs généralisés:

$$
\text{(V.1.2.2)} \qquad
\begin{aligned}
&N^i_{\alpha\beta}(x,y) = N^i_{\alpha\beta}(y) && (\alpha,\beta) \in \{1,2\}^2 \quad i \in (1,4)\\
&M^i_{\alpha\beta}(x,y) = M^i_{\alpha\beta}(y) && \\
&Q^i_{\alpha}(x,y) = Q^i_{\alpha}(y) && \\
&N^i_3(x,y) = N^i_3(y) && \\
&M^i_3(x,y) = M^i_3(y) && \\
&\tau^{i,i+1}_{\alpha}(x,y) = \tau^{i,i+1}_{\alpha}(y) && \alpha \in \{1,2\} \quad i \in (1,3)\\
&v^{i,i+1}(x,y) = v^{i,i+1}(y) &&
\end{aligned}
$$

En écrivant l'ensemble des équations du problème (voir annexe VI), y compris la symétrie par rapport au plan z=0, on constate que n'interviennent que six champs cinématiques et douze champs principaux d'efforts intérieurs généralisés, nous avons donc un total de dix-huit champs principaux fonction de y à déterminer:

$$
\boxed{v(y), \varphi^1(y), \varphi^2(y), \Omega^1(y), \Omega^2(y) \text{ et } \Omega^3(y)}
$$
$$
\boxed{N, M^1, M^2, Q^1, Q^2, \tau, v^{1,2}, v^{2,3}, N^1_3, N^2_3, M^1_3 \text{ et } M^2_3}
$$

où l'on a noté:

$$
\text{(V.1.2.3)} \qquad
\begin{aligned}
&v(y) = v^2(y) - v^1(y)\\
&\Omega_1(y) = U^1_3(y) + \hat{U}^1_3(y)\\
&\Omega_2(y) = U^2_3(y) + \hat{U}^2_3(y)\\
&\Omega_3(y) = \hat{U}^1_3(y) + \hat{U}^2_3(y) - 2\overline{U}^1_3(y) + 2\overline{U}^2_3(y)
\end{aligned}
$$

$$
\text{(V.1.2.4)} \qquad N(y) = N^1_{22}(y) = -N^2_{22}(y)
$$

$$
\text{(V.1.2.5)} \qquad M^1(y) = M^1_{22}(y) \quad \text{et} \quad M^2(y) = M^2_{22}(y)
$$

$$
\text{(V.1.2.6)} \qquad
\begin{aligned}
&Q^1(y) = Q^1_2(y)\\
&Q^2(y) = Q^2_2(y)
\end{aligned}
\quad \text{et} \quad \tau = \tau^{1,2}
$$

<u>Dans le cas de la plaque bornée</u>: on a en plus, par symétrie par rapport au plan y=0, $v(y)$, $\varphi^1(y)$ et $\varphi^2(y)$ impairs et $\Omega^1(y)$, $\Omega^2(y)$ et $\Omega^3(y)$ pairs .

En combinant les équations d'équilibre et de comportement, nous trouvons (annexe VI) pour ces dix-huit champs principaux douze équations différentielles et six équations algébriques. Ces équations ont heureusement une structure très simple qui permet de les condenser.
Nous rappelons que b est la demie largeur de la plaque dans le cas borné. C'est une valeur arbitraire généralement égale à un petit multiple de 4e dans le cas de la plaque infinie. Notons avec le changement de variable suivant y=bu:

(V.1.2.7) $$\underline{X}(u) = \left(\frac{v}{e}, \frac{\tau}{E_N}, \varphi_1, \varphi_2, \frac{Q^1}{eE_N}, \frac{Q^2}{eE_N}\right)(bu)$$

(V.1.2.8) $$\underline{Y}(u) = \left(\frac{N}{eE_N}, \frac{M^1}{e^2E_N}, \frac{M^2}{e^2E_N}, \frac{\Omega_1}{e}, \frac{\Omega_2}{e}, \frac{\Omega_3}{e}\right)(bu)$$

(V.1.2.9) $$\underline{Z}(u) = \left(\frac{N_3^1}{eE_N}, \frac{N_3^2}{eE_N}, \frac{M_3^1}{e^2E_N}, \frac{M_3^2}{e^2E_N}, \frac{v^{1,2}}{E_N}, \frac{v^{2,3}}{E_N}\right)(bu)$$

On constate que les six équations algébriques s'écrivent:

(V.1.2.10) $$\boxed{\overline{\overline{A}}.\underline{Y} + \overline{\overline{B}}.\underline{Z} = \underline{F}}$$

et les équations différentielles:

(V.1.2.11) $$\boxed{\underline{Y}' = \overline{\overline{C}}.\underline{X}}$$

(V.1.2.12) $$\boxed{\underline{X}' = \overline{\overline{D}}.\underline{Y} + \overline{\overline{E}}.\underline{Z} + \underline{G}}$$

$\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}, \overline{\overline{C}}, \overline{\overline{D}}$ et $\overline{\overline{E}}$ sont des matrices 6x6 écrites par la suite et $\underline{F}$ et $\underline{G}$ sont des vecteurs à six composantes connues.
La condensation de ces équations permettent d'aboutir à un système de six équations différentielles du 2ème degré sur $\underline{X}$, en effet: $\underline{Z} = -\overline{\overline{B}}^{-1}.\overline{\overline{A}}.\underline{Y} + \overline{\overline{B}}^{-1}.\underline{F}$ si $\overline{\overline{B}}$ est inversible. Donc:

(V.1.2.13) $$\boxed{\underline{X}'' = \left(\overline{\overline{D}} - \overline{\overline{E}}.\overline{\overline{B}}^{-1}.\overline{\overline{A}}\right).\overline{\overline{C}}.\underline{X}}$$

En posant $\begin{cases} a_{NL} = v_{NL} + v_{NT}v_{TL} \\ a_{NT} = v_{NT} + v_{NL}v_{LT} \\ a_{LN} = v_{LN} + v_{LT}v_{TN} \\ a_{TN} = v_{TN} + v_{TL}v_{LN} \end{cases}$ on a:

(V.1.2.14)
$$\overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{NL} + \frac{a_{NT}}{6} & \frac{6}{5}a_{NT} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{NL}}{2} & 0 & -\frac{6}{5}a_{NL} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{a_{NT}}{6} + \frac{a_{NL}}{6} & \frac{a_{NT}}{5} & \frac{a_{NL}}{5} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(V.1.2.15)
$$\overline{\overline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 1 & \frac{1}{20} & \frac{-3}{20} \\ \frac{-1+\nu_{NL}\nu_{LN}}{2} & -1+\nu_{NT}\nu_{TN} & -\frac{9}{7}+\frac{6\nu_{NL}\nu_{LN}}{5} & 0 & \frac{1}{140} & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu_{NT}\nu_{TN}}{2} & 0 & \frac{9}{7}-\frac{6\nu_{NT}\nu_{TN}}{5} & \frac{1}{140} & \frac{-1}{140} \\ \frac{-1}{5}+\frac{\nu_{NL}\nu_{LN}}{6} & \frac{1}{5}-\frac{\nu_{NT}\nu_{TN}}{6} & -\frac{2}{7}+\frac{\nu_{NL}\nu_{LN}}{5} & -\frac{2}{7}+\frac{\nu_{NT}\nu_{TN}}{5} & 0 & \frac{-1}{105} \end{pmatrix}$$

(V.1.2.16)
$$\overline{\overline{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2e} & 0 & 0 & \frac{b}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2e} & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{e} \\ 0 & -\frac{b}{10e}\frac{E_N}{G_{TN}} & -\frac{b}{e} & 0 & \frac{6}{5}\frac{b}{e}\frac{E_N}{G_{TN}} & 0 \\ 0 & -\frac{b}{10e}\frac{E_N}{G_{LN}} & 0 & -\frac{b}{e} & 0 & \frac{6}{5}\frac{b}{e}\frac{E_N}{G_{LN}} \\ \frac{2b}{e} & -\frac{b}{e}\left(\frac{13E_N}{30G_{TN}}+\frac{E_N}{10G_{LN}}\right) & -\frac{b}{e} & -\frac{b}{e} & \frac{b}{5e}\frac{E_N}{G_{TN}} & \frac{b}{5e}\frac{E_N}{G_{LN}} \end{pmatrix}$$

(V.1.2.17)
$$\overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{e}(1-\nu_{TL}\nu_{LT})\left(\frac{(E_L+E_T)E_N}{E_L E_T}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{b}{e}\frac{E_N}{E_T}(1-\nu_{TL}\nu_{LT}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12\frac{b}{e}\frac{E_N}{E_L}(1-\nu_{TL}\nu_{LT}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(V.1.2.18)
$$\overline{\overline{E}} = \begin{pmatrix} \frac{b}{e}\frac{E_N}{E_T}a_{TN} & -\frac{b}{e}\frac{E_N}{E_L}a_{LN} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12\frac{b}{e} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6b}{e} & 0 \\ 0 & 0 & -12\frac{b}{e}\frac{E_N}{E_T}a_{TN} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12\frac{b}{e}\frac{E_N}{E_L}a_{LN} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{e} & -\frac{b}{e} \end{pmatrix}$$

Avec les vecteurs suivants:

(V.1.2.19)
$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\varepsilon\left(\frac{\nu_{LN}}{2} + \nu_{TN}\right) \\ \varepsilon\frac{\nu_{TN}}{2} \\ \varepsilon\left(\frac{\nu_{TN} - \nu_{LN}}{6}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{G} = \begin{pmatrix} \frac{b}{e}\varepsilon(\nu_{LT} - \nu_{TL}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour expliciter les conditions aux limites, nous distinguons les cas de la plaque bornée et de la plaque semi-infinie.

a) Plaque bornée

Avec les conditions de parité et en fonction des inconnues, les conditions aux limites s'écrivent en fonction des champs inconnus $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ sous la forme:

(V.1.2.20)
$$\boxed{\begin{vmatrix} \underline{X}(0) = 0 \\ X_2(1) = 0 \\ X_5(1) = 0 \\ X_6(1) = 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} Y_1(1) = 0 \\ Y_2(1) = 0 \\ Y_3(1) = 0 \end{vmatrix}}$$

avec $\underline{Y} = \left[\overline{\overline{D}} - \overline{\overline{E}}.\overline{\overline{B}}^{-1}.\overline{\overline{A}}\right]^{-1}\left[\underline{X}' - \underline{G} - \overline{\overline{E}}.\overline{\overline{B}}^{-1}.\underline{F}\right]$

b) Plaque semi-infinie

Les conditions aux limites du modèle en fonction des champs inconnus $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ s'écrivent

(V.1.2.21)
$$\boxed{\begin{array}{l|l} \lim\limits_{u\to+\infty} \underline{X}(u)=0 & \\ X_2(0)=0 & \text{et} \quad \begin{cases} Y_1(0)=0 \\ Y_2(0)=0 \\ Y_3(0)=0 \end{cases} \\ X_5(0)=0 & \\ X_6(0)=0 & \end{array}}$$

Nous résolvons le système homogène final de 6 équations différentielles du second ordre (V.1.2.13) par le logiciel de calcul formel MATHEMATICA selon la procédure indiquée plus haut. La solution concernant les principaux champs est donnée dans la seconde partie de ce chapitre.

V.1.3 Utilisation du modèle multiparticulaire M4_5n

Les champs inconnus principaux sont:

- Les déplacements généralisés:

(V.1.3.1)
$$\tilde{U}^i(x,y)=\begin{cases} u^i(x,y)=\varepsilon x \\ v^i(x,y)=v^i(y) \end{cases}$$
$$U_3^i(x,y)=w^i(y) \qquad i=1,4$$
$$\tilde{\Phi}^i(x,y)=\begin{cases} \Phi_x^i(x,y)=0 \\ \Phi_y^i(x,y)=\varphi^i(y) \end{cases}$$

- Les efforts intérieurs généralisés:

(V.1.3.2)
$$N_{\alpha\beta}^i(x,y)=N_{\alpha\beta}^i(y) \qquad (\alpha,\beta)\in\{1,2\}^2 \quad i\in(1,4)$$
$$M_{\alpha\beta}^i(x,y)=M_{\alpha\beta}^i(y)$$
$$Q_\alpha^i(x,y)=Q_\alpha^i(y)$$
$$\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y)=\tau_\alpha^{i,i+1}(y) \qquad \alpha\in\{1,2\} \quad i\in(1,3)$$
$$v^{i,i+1}(x,y)=v^{i,i+1}(y)$$

En écrivant l'ensemble des équations du problème (voir annexe VI), y compris la symétrie par rapport au plan z=0, on constate que le problème ne fait intervenir que cinq champs cinématiques

et huit champs d'efforts généralisés, nous avons donc un total de treize champs principaux en y à déterminer:

$$\boxed{v(y), \varphi^1(y), \varphi^2(y), w^1(y) \text{ et } w^2(y)}$$
$$\boxed{N, M^1, M^2, Q^1, Q^2, \tau, v^{1,2} \text{ et } v^{2,3}}$$

Où l'on a noté:

(V.1.3.3) $$v(y) = v^2(y) - v^1(y)$$

(V.1.3.4) $$N(y) = N^1_{22}(y) = -N^2_{22}(y)$$

(V.1.3.5) $$M^1(y) = M^1_{22}(y) \quad \text{et} \quad M^2(y) = M^2_{22}(y)$$

(V.1.3.6) $$\begin{matrix} Q^1(y) = Q^1_2(y) \\ Q^2(y) = Q^2_2(y) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \tau = \tau^{1,2}_2$$

<u>Dans le cas de la plaque bornée</u>: on a en plus, par symétrie par rapport au plan y=0, $v(y), \varphi^1(y)$ et $\varphi^2(y)$ impairs et $w^1(y)$ et $w^2(y)$ pairs .

La combinaison des équations d'équilibre et de comportement (annexe VI) donne dix équations différentielles et trois équations algébriques. Les équations algébriques permettent d'éliminer les champs τ, $v^{1,2}$ et $v^{2,3}$ des champs inconnus principaux.

Nous posons:

(V.1.3.7) $$\underline{X}(u) = \left(\frac{v}{e}, \varphi_1, \varphi_2, \frac{Q^1}{eE_N}, \frac{Q^2}{eE_N}\right)(bu)$$

(V.1.3.8) $$\underline{Y}(u) = \left(\frac{N}{eE_N}, \frac{M^1}{e^2E_N}, \frac{M^2}{e^2E_N}, \frac{w_1}{e}, \frac{w_2}{e}\right)(bu)$$

où b est la demie largeur de la plaque dans le cas de la plaque bornée et est un petit multiple de 4e arbitraire dans le cas de la plaque infinie
Les équations différentielles s'écrivent:

(V.1.3.9) $$\boxed{\underline{X}' = \overline{\overline{A}}.\underline{Y} + \underline{F}}$$

(V.1.3.10) $$\boxed{\underline{Y}' = \overline{\overline{B}}.\underline{X}}$$

et le système se condense en:

(V.1.3.11) $$\boxed{\underline{X}'' = \left(\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{B}}\right).\underline{X}}$$

où les tenseurs $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$ et $\overline{F}$ sont donnés ci-dessous en posant $\begin{cases} a = \dfrac{15b}{2e}\dfrac{G_{LN}G_{TN}}{G_{LN}+G_{TN}}\dfrac{1}{E_N} \\ c = \left(1-\nu_{LT}\nu_{TL}\right)\dfrac{b}{e}\dfrac{E_N}{E_T} \end{cases}$:

(V.1.3.12) $$\overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} -c\dfrac{E_L+E_T}{E_L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1820}{1271}\dfrac{b}{e} & \dfrac{-2450}{1271}\dfrac{b}{e} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-2450}{1271}\dfrac{b}{e} & \dfrac{6720}{1271}\dfrac{b}{e} \end{pmatrix}$$

(V.1.3.13)
$$\overline{\overline{B}} = \begin{pmatrix} -a & \dfrac{a}{2} & \dfrac{a}{2} & -\dfrac{aE_N}{10G_{TN}} & -\dfrac{aE_N}{10G_{LN}} \\ -\dfrac{a}{2} & \dfrac{a}{4} & \dfrac{a}{4} & \dfrac{b}{e}-\dfrac{aE_N}{20G_{TN}} & -\dfrac{aE_N}{20G_{LN}} \\ -\dfrac{a}{2} & \dfrac{a}{4} & \dfrac{a}{4} & -\dfrac{aE_N}{20G_{TN}} & \dfrac{b}{e}-\dfrac{aE_N}{20G_{LN}} \\ -\dfrac{aE_N}{10G_{TN}} & -\dfrac{b}{e}+\dfrac{aE_N}{20G_{TN}} & \dfrac{aE_N}{20G_{TN}} & \dfrac{6b}{5e}\dfrac{E_N}{G_{TN}}-\dfrac{a}{100}\dfrac{E_N^2}{G_{TN}^2} & -\dfrac{a}{100}\dfrac{E_N^2}{G_{TN}G_{LN}} \\ -\dfrac{aE_N}{10G_{LN}} & \dfrac{aE_N}{20G_{LN}} & -\dfrac{b}{e}+\dfrac{aE_N}{20G_{LN}} & -\dfrac{a}{100}\dfrac{E_N^2}{G_{TN}G_{LN}} & \dfrac{6b}{5e}\dfrac{E_N}{G_{LN}}-\dfrac{a}{100}\dfrac{E_N^2}{G_{LN}^2} \end{pmatrix}$$

(V.1.3.14) $$\underline{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{e}\varepsilon\left(\nu_{LT}-\nu_{TL}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.Pour écrire les conditions aux limites, nous distinguons le cas de la plaque bornée et de la plaque semi-infinie.

a) Cas de la plaque bornée

Avec les conditions de parité en fonction des champs inconnus $\underline{X}$ et $\underline{Y}$, les conditions aux limites s'écrivent:

(V.1.3.15)
$$\boxed{\begin{array}{l|c|l} \underline{X}(0)=0 & & Y_1(1)=0 \\ X_4(1)=0 & \text{et} & Y_2(1)=0 \\ X_5(1)=0 & & Y_3(1)=0 \end{array}}$$

avec $\underline{Y} = \overline{\overline{A}}^{-1}\left[\underline{X}' - \underline{F}\right]$

b) Cas de la plaque semi-infinie

En fonction des champs inconnus $\underline{X}$ et $\underline{Y}$, on obtient les conditions aux limites suivantes:

(V.1.3.16)
$$\boxed{\begin{array}{l|c|l} \lim\limits_{u\to+\infty} \underline{X}(u)=0 & & Y_1(0)=0 \\ X_4(0)=0 & \text{et} & Y_2(0)=0 \\ X_5(0)=0 & & Y_3(0)=0 \end{array}}$$

Nous résolvons le système par le logiciel de calcul formel MATHEMATICA selon la procédure indiquée plus haut. La solution concernant les principaux champs est donnée dans la seconde section de ce chapitre.

V.1.4 Utilisation du modèle multiparticulaire M4_3n membrane

Les champs inconnus principaux sont:
-Les déplacements généralisés:

(V.1.4.1)
$$\tilde{U}^i(x,y) = \begin{cases} u^i(x,y) = \varepsilon x \\ v^i(x,y) = v^i(y) \end{cases} \qquad i=1,4$$
$$U_3^i(x,y) = w^i(y)$$

- Les efforts intérieurs généralisés:

(V.1.4.2)
$$N^i_{\alpha\beta}(x,y) = N^i_{\alpha\beta}(y) \qquad (\alpha,\beta) \in \{1,2\}^2 \quad i \in (1,4)$$
$$\tau^{i,i+1}_\alpha(x,y) = \tau^{i,i+1}_\alpha(y) \qquad \alpha \in \{1,2\} \quad i \in (1,3)$$
$$v^{i,i+1}(x,y) = v^{i,i+1}(y)$$

En écrivant l'ensemble des équations du problème (voir annexe VI) y compris la symétrie par rapport au plan z=0, on constate que n'interviennent que trois champs cinématiques et quatre champs d'efforts généralisés, soit sept champs principaux en y inconnus à déterminer:

$$\boxed{v(y),\ w^1(y) \text{ et } w^2(y)}$$
$$\boxed{N,\ \tau,\ v^{1,2} \text{ et } v^{2,3}}$$

où l'on note:

(V.1.4.3) $$v(y) = v^2(y) - v^1(y)$$

(V.1.4.4) $$N(y) = N^1_{22}(y) = -N^2_{22}(y)$$

(V.1.4.5) $$\tau = \tau^{1,2}_2$$

<u>Dans le cas de la plaque bornée</u>: on a en plus, par symétrie par rapport au plan y=0, $v(y)$ impair et $w^1(y)$ et $w^2(y)$ pairs .

En combinant les équations d'équilibre et de comportement (annexe VI), nous obtenons quatre équations différentielles et trois équations algébriques.
Les équations algébriques permettent d'éliminer les champs $v^{1,2}$, $v^{2,3}$ et w^1 des champs inconnus principaux.

Nous posons:

(V.1.4.6) $$\underline{X}(u) = \left(\frac{v}{e}, \frac{\tau}{E_N}\right)(bu)$$

(V.1.4.7) $$\underline{Y}(u) = \left(\frac{N}{eE_N}, \frac{w_2}{e}\right)(bu)$$

où b est la demie largeur de la plaque dans le cas de la plaque bornée et un petit multiple de 4e arbitraire dans le cas de la plaque infinie.

Les équations différentielles s'écrivent:

(V.1.4.8) $$\boxed{\underline{X}' = \overline{\overline{A}}.\underline{Y} + \underline{F}}$$

(V.1.4.9) $$\boxed{\underline{Y}' = \overline{\overline{B}}.\underline{X}}$$

et le système se condense en:

(V.1.4.10) $$\boxed{\underline{X}'' = \left(\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{B}}\right).\underline{X}}$$

où les tenseurs $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{B}}$ et $\overline{F}$ sont donnés ci-dessous:

(V.1.4.11) $$\overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{e}(1-\nu_{TL}\nu_{LT})E_N\left(\frac{E_L+E_T}{E_L E_T}\right) & 0 \\ 0 & \frac{12}{5}\frac{b}{e} \end{pmatrix}$$

(V.1.4.12) $$\overline{\overline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{e} \\ \left(-2\frac{b}{e}\right)\frac{5}{16} & \left(\frac{2}{3}\frac{b}{e}E_N\left(\frac{1}{G_{TN}}+\frac{1}{G_{LN}}\right)\right)\frac{5}{16} \end{pmatrix}$$

(V.1.4.13) $$\underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{b}{e}\varepsilon(\nu_{LT}-\nu_{TL}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour écrire les conditions aux limites, nous distinguons le cas de la plaque bornée et celui de la plaque semi-infinie.

a) Cas de la plaque bornée

Avec les conditions de parité en fonction des champs inconnus $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ les conditions aux limites s'écrivent:

(V.1.4.14) $$\boxed{\begin{array}{ll} \underline{X}(0)=0 & \\ X_2(1)=0 & Y_1(1)=0 \end{array}}$$

a) Cas de la plaque semi-infinie

Les conditions aux limites du modèle en fonction des champs inconnus $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ s'écrivent:

(V.1.4.15) $$\boxed{\begin{array}{ll} \lim\limits_{u\to+\infty} \underline{X}(u)=0 & \\ X_2(0)=0 & Y_1(0)=0 \end{array}}$$

Le système peut être facilement résolu par exemple à l'aide de MATHEMATICA selon la procédure indiquée plus haut. Les éléments principaux de la solution sont donnés dans la deuxième partie du chapitre. Dans ce modèle, seules deux distances caractéristiques des effets de bord interviennent.

V.1.5 Utilisation du modèle multiparticulaire M4_(2n+1) membrane

Les champs inconnus principaux sont:

- Les déplacements généralisés:

(V.1.5.1) $$\tilde{U}^i(x,y)=\begin{cases} u^i(x,y)=\varepsilon x \\ v^i(x,y)=v^i(y) \quad i=1,4 \end{cases}$$
$$U_3^i(x,y)=w(y)$$

- Les efforts intérieurs généralisés:

(V.1.5.2) $$N_{\alpha\beta}^i(x,y)=N_{\alpha\beta}^i(y) \qquad (\alpha,\beta)\in\{1,2\}^2 \quad i\in(1,4)$$
$$\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y)=\tau_\alpha^{i,i+1}(y) \qquad \alpha\in\{1,2\} \quad i\in(1,3)$$

En écrivant l'ensemble des équations du problème (voir annexe VI), y compris la symétrie par rapport au plan z=0, on constate que le problème ne fait intervenir qu'un champ cinématique et

deux champs d'efforts généralisés, nous avons donc un total de trois champs principaux en y à déterminer:

$$\boxed{v(y)}$$
$$\boxed{N \text{ et } \tau}$$

où l'on a noté:

(V.1.5.3) $$v(y) = v^2(y) - v^1(y)$$

(V.1.5.4) $$N(y) = N_{22}^1(y) = -N_{22}^2(y)$$

(V.1.5.5) $$\tau = \tau_2^{1,2}$$

<u>Dans le cas de la plaque bornée</u>: on a en plus, par symétrie par rapport au plan y=0, $v(y)$ impair.

En combinant les équations d'équilibre et de comportement, nous trouvons (annexe VI) deux équations différentielles et l'équation algébrique écrite ci-dessous:

(V.1.5.6) $$\boxed{\tau = \frac{3}{e}\left(\frac{G_{LN}G_{TN}}{G_{LN}+G_{TN}}\right)v}$$

Après condensation le système d'équations différentielles se réécrit:

(V.1.5.7) $$\boxed{v'' = 3\left(\frac{1-\nu_{LT}\nu_{TL}}{e^2}\right)\left(\frac{G_{LN}G_{TN}}{G_{LN}+G_{TN}}\right)\left(\frac{E_L+E_T}{E_LE_T}\right)v}$$

Il reste à exprimer les conditions aux limites. Distinguons le cas de la plaque bornée et de la plaque semi-infinie.

a) Cas de la plaque bornée

Avec la condition de parité, les conditions aux limites s'écrivent:

(V.1.5.8) $$\boxed{v'(b) = \varepsilon(\nu_{LT} - \nu_{TL}) \qquad v(0) = 0}$$

L'équation (V.1.5.7) s'intègre facilement en posant:

(V.1.5.9) $$\boxed{\lambda^2 = 3\left(\frac{1-\nu_{LT}\nu_{TL}}{e^2}\right)\left(\frac{G_{TN}G_{LN}}{G_{LN}+G_{TN}}\right)\left(\frac{E_L+E_T}{E_L E_T}\right)}$$

On en déduit la fonction inconnue v(y):

(V.1.5.10) $$\boxed{v(y) = \varepsilon(\nu_{LT}-\nu_{TL})\frac{sh\lambda y}{\lambda ch\lambda b}}$$

Soit encore avec l'équation algébrique (V.1.5.6):

(V.1.5.11) $$\tau(y) = \frac{3}{e}\varepsilon(\nu_{LT}-\nu_{TL})\frac{G_{LN}G_{TN}}{G_{LN}+G_{TN}}\frac{sh\lambda y}{\lambda ch\lambda b}$$

Notons que dans ce modèle une seule distance caractéristique de l'effet de bord apparaît $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Lorsque les modules d'Young E_L et E_T sont très différents et les modules de cisaillement sont proches (notés G) la distance caractéristique est proche de $e\sqrt{\frac{2E_T}{3G}}$, ce qui pour les matériaux composites courants reste de l'ordre de grandeur de e.

b) Cas de la plaque semi-infinie

Les conditions aux limites s'écrivent:

(V.1.5.12) $$\boxed{v'(0) = \varepsilon(\nu_{LT}-\nu_{TL}) \quad ; \quad \lim_{y\to+\infty} v(y) = 0}$$

On en déduit:

(V.1.5.15) $$\boxed{v(y) = \varepsilon(\nu_{LT}-\nu_{TL})\frac{e^{(-\lambda y)}}{\lambda}}$$

Soit encore

(V.1.5.16) $$\tau(y) = \frac{3}{e}\varepsilon(\nu_{LT}-\nu_{TL})\frac{G_{LN}G_{TN}}{G_{LN}+G_{TN}}\frac{e^{(-\lambda y)}}{\lambda}$$

Ce qui donne un cisaillement maximal de

(V.1.5.17) $$\tau^{max} = \frac{3}{\lambda e}\varepsilon\left(\nu_{LT} - \nu_{TL}\right)\frac{G_{LN}G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}}$$

Les courbes sont tracées dans la deuxième partie de ce chapitre.

V.2 ANALYSE DES RESULTATS

Afin de pouvoir comparer aux résultats abondamment cités dans la littérature de [Wang et Crossman, 1977] et [Pagano, 1978], nous choisissons d'appliquer ce qui précède au matériau qu'ils ont étudié et dont les caractéristiques sont rappelées ci-dessous:

$$E_{11} = 20 \times 10^6 \text{psi}$$
$$E_{22} = E_{33} = 2{,}1 \times 10^6 \text{psi}$$
$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0{,}85 \times 10^6 \text{psi}$$
$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0{,}21$$

$$1 \text{ psi(pound force per square inch)} = 6894{,}76 \text{Pa}$$
$$1 \text{ inch} = 0{,}0254 \text{m}$$

Dans le cas de la plaque bornée, les résultats se présentent sous forme de champs en $y \in [0,b]$ (b=8e comme dans les articles précités) et dans le cas de la plaque semi-infinie, les résultats se présentent sous forme de champs $y \in [0,+\infty]$. Les expressions quasi-analytiques de chacun des cas sont généralement obtenues à l'aide de MATHEMATICA. Nous avons constaté une très forte similitude entre les courbes de plaques bornées et des plaques semi-infinies. Ceci veut dire que dès que la largeur de la plaque bornée est supérieure à 8e, la partie centrale de la plaque ne voit déjà presque plus l'effet de bord. Nous ne présentons donc les courbes que dans le cas des plaques bornées, ce qui permet une comparaison directe avec les résultats couramment cités dans la littérature.

Il est facile d'obtenir la courbe en y de chacun des champs cinématiques et d'effort intérieur de chaque modèle, nous pouvons aussi déterminer pour chaque couche les différentes parties d'énergie élastique définies dans le chapitre IV. Tout ceci fait que le nombre de courbes donnant exhaustivement les différentes solutions est trop important pour figurer dans le corps principal du mémoire. Cependant ces courbes peuvent intéresser certains lecteurs de ce travail. Nous les avons donc intégralement données en annexes II, III, IV et V. Dans ce chapitre, nous ne reprenons que

celles qui nous paraissent essentielles pour juger de la pertinence des modèles et de leur domaine d'application.
Nous présentons tout d'abord quelques courbes présentant une partition de l'énergie permettant une comparaison synthétique globale des différents modèles pour la plaque bornée. Puis nous présentons une comparaison des principaux champs d'efforts intérieurs.
A la fin du chapitre, nous présentons une réflexion sur les critères de délaminage qui pourraient être utilisés conjointement à ces analyses de champs et nous illustrons en calculant le taux de relaxation d'énergie pour une plaque $(0°,90°)_s$ délaminée entre les deux couches à 90° à l'aide du modèle le plus simple. Nous montrons alors sur ce modèle M4_(2n+1)M comment une réflexion sur le taux de relaxation d'énergie permet de déterminer directement, sans résolution d'équations différentielles, le cisaillement maximal au bord de l'interface 0°-90°.

V.2.1 Comparaison des énergies

Cela n'aurait pas de sens de comparer directement les distributions des énergies élémentaires puisque beaucoup d'entre elles, ci-dessous, ne sont pas définies pour certains modèles. Pour une comparaison utile nous devons procéder à certains regroupements. Ainsi, nous proposons de scinder la distribution surfacique de l'énergie de la plaque bornée en trois parties. Les deux premières parties représentent la somme pour chacune des couches des énergies membranaires $\underline{w_c^{a^i}}$ et des énergies de couplage $\underline{w_3^{a^i}}$ contraintes membranaires, contrainte d'effort normal (les dernières énergies ne sont non nulles que pour le modèle M4_7n). Nous nommons ces sommes "énergie de couche" par un abus de langage assez légitime. La dernière énergie somme les énergies de cisaillements $\underline{w_Q^{a^i}}$ et les énergies d'effort normal $\underline{w_V^{a^i}}$ sur les couches à 0° et 90°. Par abus de langage cette énergie est appelée "énergie d'interface".
Nous constatons tout d'abord que "loin des bords" la densité surfacique d'énergie d'interface est nulle et que la densité surfacique d'énergie de chacune des couches est celle que prévoit le modèle de Love-Kirchhoff.
Au voisinage des bords les densités surfaciques des énergies de couche décroissent alors que l'énergie d'interface augmente.
On peut noter le résultat important suivant: quelque soit la modélisation retenue, la longueur d'action de l'effet de bord est sensiblement la même soit environ 4 fois l'épaisseur d'une couche, c'est à dire l'épaisseur du quadricouche.

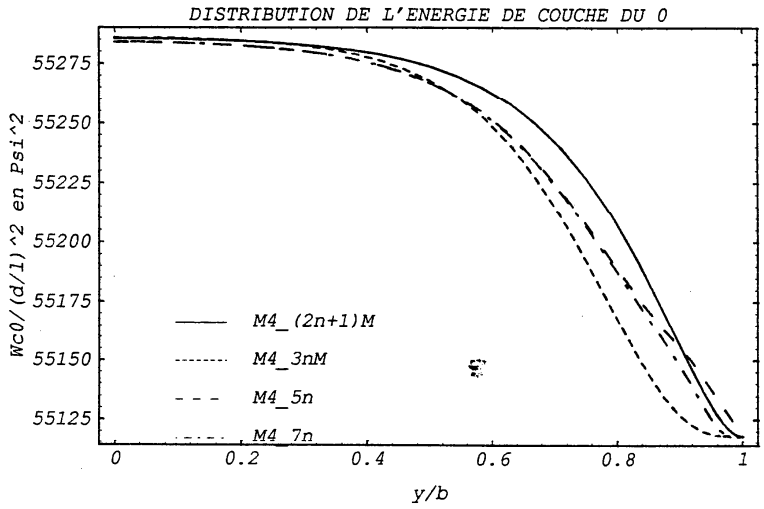


Fig. V.2.1.1: Distribution de "l'énergie de couche" de la couche à 0°

Ainsi la distance caractéristique du modèle M4_(2n+1)M (V.1.5.9):

$$d_c = e\sqrt{\frac{G_{LN}+G_{TN}}{G_{LN}G_{TN}}\cdot\frac{E_L E_T}{E_L+E_T}\cdot\frac{1}{3(1-\nu_{LT}\nu_{TL})}}$$

est une information essentielle sur le phénomène d'effet de bord (pour que l'effet de bord ne soit plus sensible il faut s'éloigner du bord de 3 à 4 fois d_c).

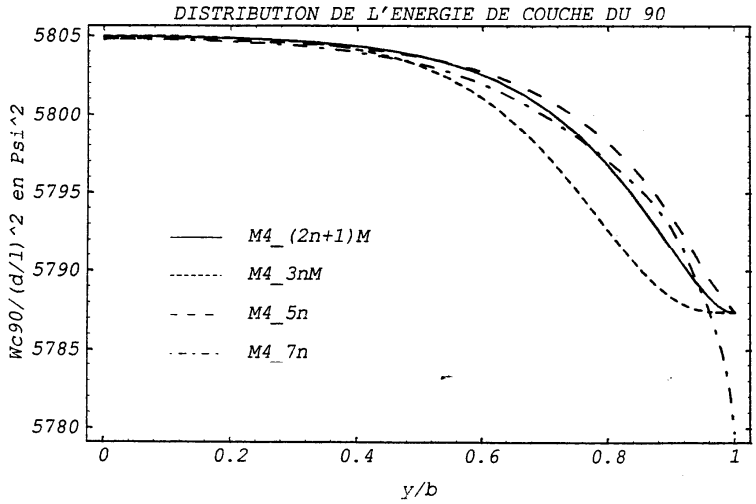


Fig. V.2.1.2: Distribution de "l'énergie de couche" de la couche à 90°

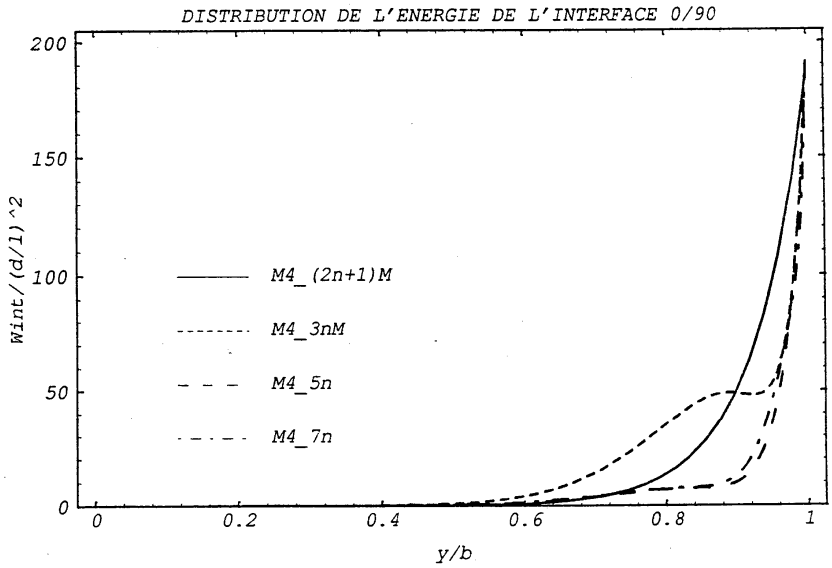


Fig. V.2.1.3: Distribution de "l'énergie d'interface"

Bien sûr le détail de la distribution surfacique de ces énergies est différent suivant les modèles, cependant qualitativement on ne constate pas de différences importantes. Ce ne serait pas le cas si au lieu de considérer ces "regroupements" d'énergies on analysait séparément chaque énergie élémentaire (Cf. Annexes II, III, IV et V). On peut donc penser que le fait de négliger une énergie dans la fonctionnelle, donnant l'expression de celle-ci en contrainte, conduit à un "transfert" de cette énergie, au niveau des solutions des problèmes élastiques, vers celle correspondant à d'autres efforts (par exemple si on néglige l'énergie de couplage efforts membranaires, efforts normaux, l'énergie membranaire est modifiée et cette modification compense, au moins qualitativement, l'énergie modifiée). Ce point qui mériterait d'être approfondi dans un cadre plus général est important, car il implique qu'il n'est pas nécessaire de prouver qu'une énergie élastique non prise en compte dans la fonctionnelle donnant le comportement est négligeable dans la solution d'un problème élastique. On peut sans doute se contenter de prouver que dans le passage d'un modèle à un modèle plus simple les énergies qui disparaissent sont convenablement transférées sur d'autres composantes. Ce point de vue est heureux car, par exemple, à l'évidence si les efforts d'arrachement sont importants aux interfaces, le couplage effort membranaire effort d'arrachement ne recèle pas une énergie surfacique négligeable dans les solutions (Cf. annexes II III IV et V). Cette problématique de comparaison de modèles joue un rôle très important dans notre travail aussi nous y reviendrons plus loin, lorsque nous étudierons les champs de contraintes solutions. Nous espérons apporter quelques arguments supplémentaires de nature à convaincre le lecteur.

V.2.2 Comparaison des efforts

Nous nous intéressons principalement aux efforts d'interface donc nous donnons sur les figures ci-dessous la distribution du cisaillement à l'interface 0°-90° et les distributions des efforts d'arrachement aux interfaces 0°-90° et 90°-90°.
En ce qui concerne les efforts d'arrachement du modèle M4_(2n+1)M, qui n'apparaissent pas explicitement dans ce modèle, nous les avons définis à partir des équations d'équilibre du modèle M4_3nM:

$$\text{(V.2.2.1)} \qquad \begin{cases} v^{1,2}(y) = -\dfrac{e}{2}\tau'(y) \\ v^{2,3}(y) = 2v^{1,2}(y) \end{cases}$$

Nous touchons là un autre point intéressant qui concerne la comparaison de modèles de finesses différentes, nous y reviendrons plus loin. Signalons que ces contraintes d'arrachement peuvent être calculées à partir de l'écriture de la contrainte tridimensionnelle approché $\sigma_{33}^{a(2n+1)M}$ (II.6.3) à la côte de l'interface concernée.

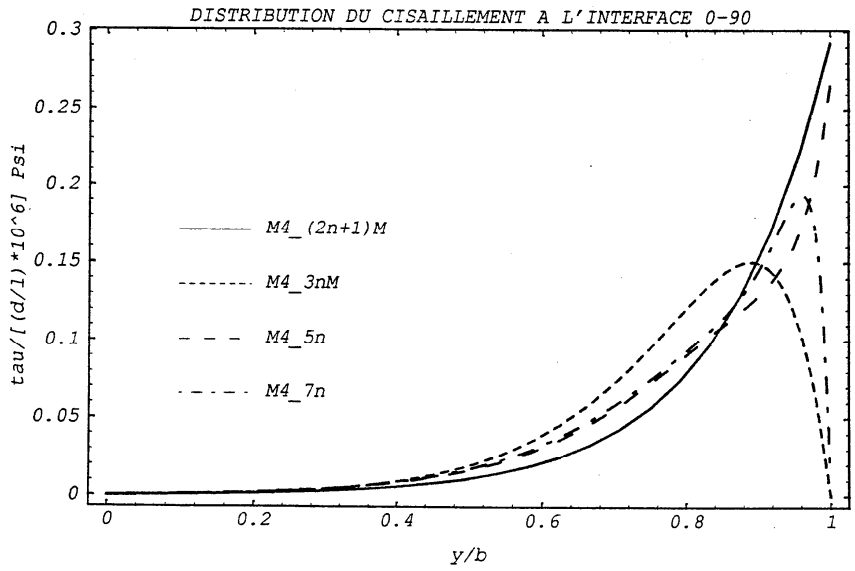


Fig. V.2.2.1: Distribution du cisaillement à l'interface 0°-90°

Intéressons nous d'abord au cisaillement d'interface. Vue de loin, nous constatons unc grande similitude entre ces courbes, cependant une différence importante apparaît au bord. En effet pour

les modèles M4_3nM et M4_7n nous avons une condition aux limites qui impose à $\tilde{\tau}.\underline{n}$ d'être nul au bord. Ce n'est pas le cas dans les modèles M4_5n et M4_(2n+1)M.

Nous allons voir plus loin qu'une interprétation correcte de ces courbes, dans la perspective d'une comparaison entres les modèles, consiste à considérer que les courbes de cisaillement du M4_5n et M4_(2n+1)M sont en fait discontinues à l'extrémité, la discontinuité étant telle que l'on ait finalement $\tilde{\tau}.\underline{n} = 0$ au bord. Ce point de vue peut paraître à priori étrange mais il permet une interprétation physique beaucoup plus riche des modélisations les plus simples.

Essayons de nous en convaincre, par exemple pour le modèle M4_(2n+1)M. Nous remarquons, tout d'abord, que ce modèle est le cas limite du modèle M4_3nM lorsque E_N tend vers l'infini (la souplesse $\frac{1}{E_N}$ tend vers zéro).

Nous traçons ci-dessous les différentes solutions en cisaillement d'interface et en effort d'arrachement des modèles M4_3nM avec les raideurs normales E_N, $10\,E_N$, $100\,E_N$ et $1000\,E_N$.

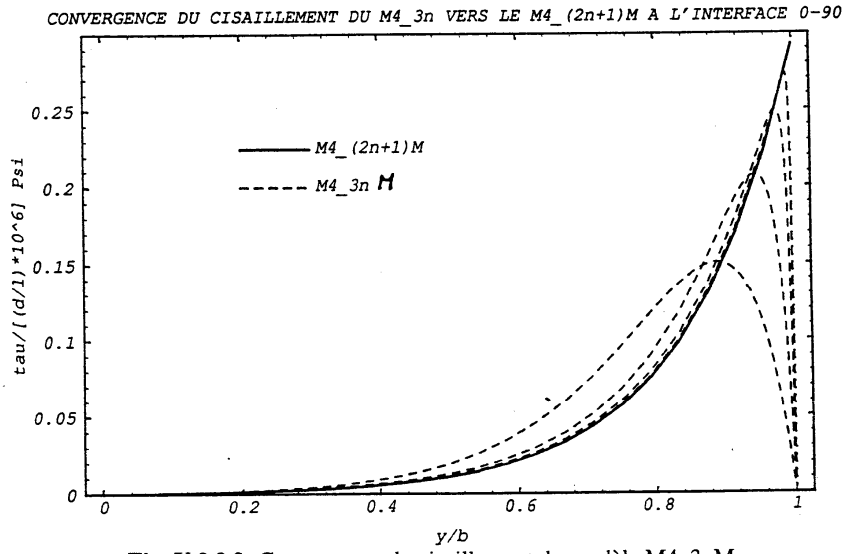


Fig. V.2.2.2: Convergence du cisaillement du modèle M4_3nM vers le modèle M4_(2n+1)M à l'interface 0°-90°

On constate que progressivement les courbes des modèles M4_3nM épousent la courbe du M4_(2n+1)M avec un retour de cisaillement à zéro au bord de plus en plus raide. C'est un argument important en faveur de l'interprétation de la courbe de cisaillement du M4_(2n+1)M faisant intervenir une discontinuité à l'extrémité y=b.

Intéressons nous maintenant aux efforts d'arrachement par exemple aux interfaces 0°/90°.

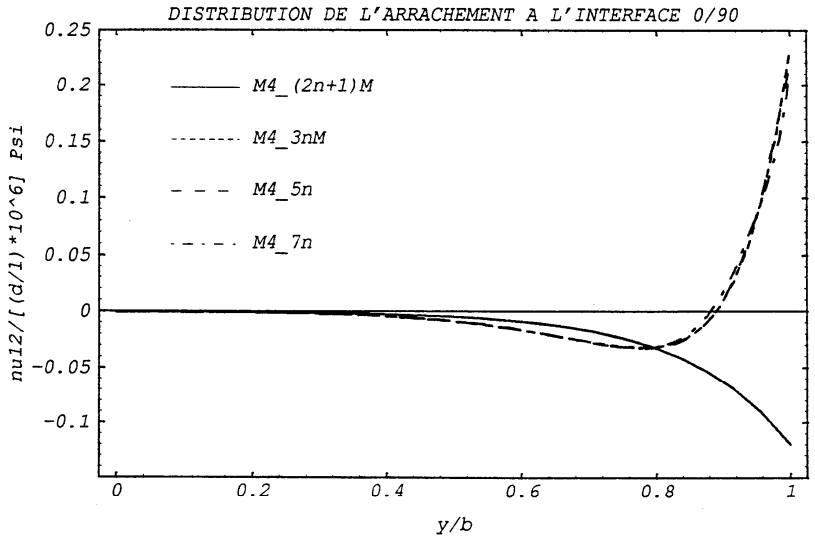


Fig. V.2.2.3: Distribution de l'arrachement à l'interface 0°-90°

On constate que la densité de l'effort d'arrachement est très similaire dans la plupart des modèles à l'exception du modèle M4_(2n+1)M. La constatation est similaire pour l'arrachement entre les couches à 90° avec un effort d'arrachement environ double de celui du 0°-90°(fig. V.2.2.3 et V.2.2.4).

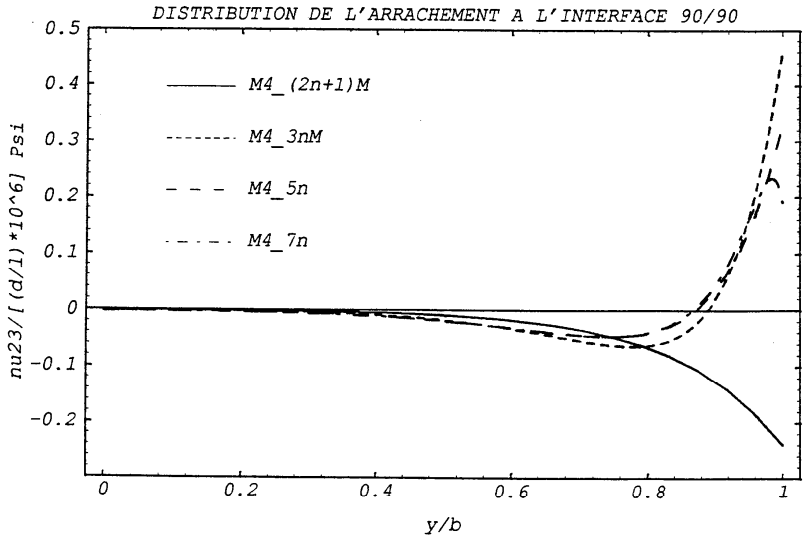


Fig. V.2.2.4: Distribution de l'arrachement à l'interface 90°-90°

Pour comprendre cette différence, reprenons l'analyse du M4_(2n+1)M comme le cas limite du M4_3nM lorsque E_n tend vers l'infini.

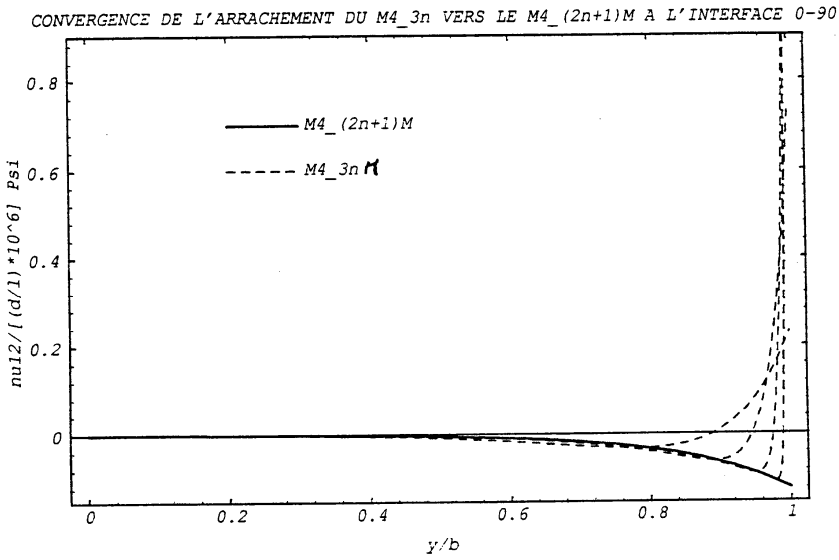


Fig. V.2.2.5: Convergence de l'arrachement du modèle M4_3nM vers le modèle M4_(2n+1)M à l'interface 0°-90°

On constate que l'effort d'arrachement épouse de plus en plus la courbe du modèle M4_(2n+1)M à l'exception de l'extrémité où sur une distance de plus en plus étroite se produit un effort d'arrachement de plus en plus intense. En fait l'équilibre global entre les deux moitiés de l'empilement séparées par une interface permet d'affirmer sans calcul que l'intégrale sur l'interface de l'effort d'arrachement de chaque modèle M4 est nulle (Résultante verticale sur la couche à 0° par exemple). Ainsi même si le support de la partie positive de l'effort d'arrachement devient très petit, l'intégrale de l'effort sur cette partie garde une valeur significative (et même croissante) pour compenser l'intégration sur la partie complémentaire. Lorsque E_n tend vers l'infini, on trouve la courbe donnant l'effort d'arrachement du modèle M4_(2n+1)M avec un Dirac d'arrachement à l'extrémité. Ainsi l'effort d'arrachement qui apparaît négatif dans le modèle M4_(2n+1)M est en fait complété par un effort concentré positif de type Dirac à l'extrémité y=b. Ce point peut être vu plus simplement en adoptant les équations (V.2.2.1), définissant les efforts d'arrachement, au sens des distributions. L'effort d'arrachement est relié à la divergence du cisaillement. Or le cisaillement est discontinu en b ainsi que nous l'avons vu plus haut donc l'effort d'arrachement du modèle M4_(2n+1)M admet une distribution de type Dirac concentré en b.

En fait des commentaires équivalent à ceux développés ci-dessus dans le cas du passage du modèle M4_3nM au modèle M4_(2n+1)M auraient pu être explicités à chacune des simplifications des

modèles décrits dans ce travail. Par exemple, le passage du modèle M4_7n au modèle M4_5n s'effectue en faisant disparaître de la modélisation initiale les efforts N_3^i et M_3^i. Cela entraîne:

1) la disparition des déplacements généralisés $\overline{U}_3^i$ et $\hat{U}_3^i$

2) la disparition des deux équations d'équilibre (II.1.17) et (II.1.18) dans lesquels apparaissent ces efforts et qui sont associés à ces déplacements généralisés.

3) la disparition des conditions aux limites (III.1.23.e) et (III.1.23.g) qui sont associées à ces déplacements généralisés. C'est ainsi que $\tilde{\tau}.\tilde{n}$ n'apparaît plus nul au bord. Pour interpréter ceci, on peut dire que:

- $\tilde{\tau}.\tilde{n}$ est nul au bord mais peut être discontinu;
- N_3^i et M_3^i peuvent être définis dans le modèle M4_5n à l'aide des équations d'équilibre (II.1.17) et (II.1.18) du modèle M4_7n comprises au sens des distributions;
- d'après la définition de N_3^i et M_3^i ces efforts admettent une distribution de type Dirac au bord.

On comprend ainsi mieux que chaque simplification consiste à décider de voir un peu plus flou au bord de la plaque en faisant tendre vers 0 certaines souplesses. Ainsi faire tendre une souplesse vers zéro revient à regarder les champs de "manière floue" au voisinage du bord et à considérer qu'une concentration d'effort intérieur peut être schématisée par un effort concentré. Bien sûr ce point de vue peut être étendu au passage ultime au modèle de Love-Kirchhoff.

Donnons ci-dessous la distribution des efforts membranaires transverses en fonction des différents modèles.

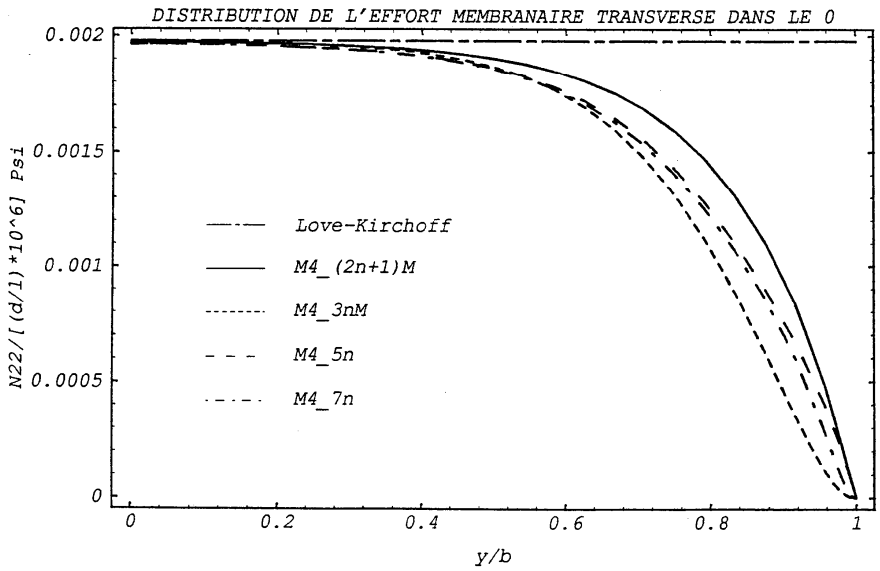


Fig. V.2.6: Distribution de l'effort membranaire transverse dans le 0°

Le modèle de Love-Kirchhoff, contrairement aux autres, ne comprend pas la condition aux limites $\tilde{\tilde{N}}^1.\underline{n} = 0$ au bord de chaque couche. On peut interpréter ceci en disant que le vecteur contrainte membranaire est nul au bord mais discontinu. On peut définir le cisaillement d'interface à l'aide de l'équation d'équilibre (II.6.4) du modèle M4_(2n+1)M qui donne au sens des distributions un effort concentré de type Dirac des efforts de cisaillement d'interface. L'intensité de ces efforts concentrés se calcule facilement à l'aide des valeurs des discontinuités des vecteurs contraintes membranaires. Ainsi l'intensité du Dirac de cisaillement à l'interface entre la couche à 0° et celle à 90° vaut:

(V.2.2.2) $$\tilde{\tau}(y) = -\left(\tilde{\tilde{N}}^1(b).\tilde{n}\right)\delta_b(y)$$

où $\delta_b(y)$ est la distribution de Dirac en y=b.

Si l'on est tenté d'écrire un critère de délaminage sur l'effort d'arrachement entre les couches à 90°, on peut proposer de reprendre l'équation d'équilibre (II.5.6) du modèle M4_3nM comme définition au sens des distributions de l'effort d'arrachement du modèle de Love-Kirchhoff.

Compte tenu de ce qui précède, cet effort d'arrachement est alors une distribution dont le support est concentré en b et est proportionnel à la distribution dérivée de Dirac en y=b $\delta_b'(y)$:

(V.2.2.3) $$v^{2,3}(y) = e\left(\underline{n}.\tilde{\tilde{N}}^1(b).\underline{n}\right)\delta_b'(y)$$

Dans ce cas pourquoi ne pas tenter de proposer un critère de délaminage sur cette intensité?

Comme nous ne reviendrons pas plus loin sur cette idée, développons là dans un cadre plus général. Considérons un multicouche quelconque, avec un bord libre, modélisé à l'aide du modèle de Love-Kirchhoff.

Notons $\tilde{T}^i$ les valeurs obtenues au bord pour $\tilde{\tilde{N}}^i.\underline{n}$. Selon notre proposition, il convient de considérer qu'au bord libre, $\tilde{\tilde{N}}^i.\underline{n}$ est discontinu et passe de la valeur $\tilde{T}^i$ à $\tilde{0}$. L'équation d'équilibre définissant les cisaillements d'interface est

(V.2.2.4) $$\mathrm{div}\tilde{\tilde{N}}^i + \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} = 0 \quad i = 1,n$$

En considérant $\tilde{\tilde{N}}^i.\underline{n}$ discontinu, on trouve l'intensité du Dirac de cisaillement à l'interface i, i+1 (par sommation):

(V.2.2.5) $$\tilde{\tau}^{i,i+1} = -\sum_{j=1}^{i} \tilde{T}^j \delta_b(y) \quad i = 1,n-1$$

En définissant l'effort normal $v^{i,i+1}$ par l'équation d'équilibre (II.5.6) du modèle M4_3nM:

(V.2.2.6) $$\frac{e}{2}\mathrm{div}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}+\tilde{\tau}^{i-1,i}\right)+\left(v^{i,i+1}-v^{i-1,i}\right)=0 \quad i=1,n-1$$

on trouve finalement:

(V.2.2.7) $$\begin{aligned} v^{i,i+1} &= -\frac{e}{2}\sum_{r=1}^{i}\left(\tilde{\tau}^{r,r+1}+\tilde{\tau}^{r-1,r}\right).\underline{n}\,\delta_b{}'(y) \\ &= \frac{e}{2}\sum_{r=1}^{i}\sum_{j=1}^{r}\left(\tilde{T}^{j}+\tilde{T}^{j-1}\right).\underline{n}\,\delta_b{}'(y) \end{aligned} \qquad i=1,n-1$$

Notons:

(V.2.2.8) $$A^{i,i+1}=\frac{e}{2}\sum_{r=1}^{i}\sum_{j=1}^{r}\left(\tilde{T}^{j}+\tilde{T}^{j-1}\right).\underline{n}=\frac{e}{2}\left[\tilde{T}^{i}+\sum_{j=1}^{i-1}(2i-2j+1)\tilde{T}^{j}\right].\underline{n}$$

Ainsi le calcul des grandeurs $A^{i,i+1}$ peut donner une idée du risque de délaminage à l'interface i, i+1 On peut alors tenter un critère de délaminage sur ces valeurs.
Cependant si l'on souhaite parler de critère de délaminage, il semble physiquement plus fondé de le faire porter sur le taux de relaxation d'énergie dans le processus de fissuration [Greszczuk, 1972] [O'Brien, 1982].
Il est facile de calculer la solution élastique d'une plaque délaminée entre les deux couches à 90° pour l'ensemble de nos modèles et donc de déduire le taux de relaxation d'énergie pour chacun d'entre eux. Cependant notre travail de thèse étant principalement centré sur l'analyse des champs, nous ne le faisons pas systématiquement et, à titre d'illustration, nous ne le calculons que dans le cadre du modèle M4_(2n+1)M.

V.2.3 Calculs du taux de relaxation d'énergie dans le cas du modèle M4_(2n+1)M

Nous nous intéressons donc à une plaque $(0°,90°)_s$ de largeur 2b, comprenant deux fissures symétriques de délaminage de longueur a au voisinage des bord entre les couches à 90°. Nous modélisons ce problème à l'aide du modèle M4_(2n+1)M. Par raison de symétrie, dans la suite, nous ne nous intéressons qu'à la partie $y \geq 0$.
Les équations de champs de la partie non délaminée sont identiques à celles déjà vu plus haut. Les deux lèvres délaminées sont modélisées comme deux plaques M4_(2n+1)M à deux couches chacune. La symétrie du problème par rapport au plan z=0, nous autorise à ne nous intéresser qu'à la lèvre inférieur (couches N°1 et 2). Les équations de champs sont faciles à écrire, nous ne le

pas ici. La différence principale par rapport à ce qui a été fait plus haut vient de ce que le déplacement w n'est pas nul.
Les conditions aux limites en y=b s'écrivent:

$$\text{(V.2.3.1)} \qquad \begin{aligned} &\tilde{\tilde{N}}^i(x,b).\underline{n} = \tilde{0} \\ &\tilde{\tau}^{1,2}(x,b).\underline{n} = \tilde{0} \end{aligned} \qquad i = 1,2$$

Les conditions de raccordement en y=b-a sont la continuité des déplacements u_i, v_i et w et la continuité du vecteur contrainte membranaire $\tilde{\tilde{N}}^i.\underline{n}$.
Des équations d'équilibre dans la partie délaminée et des conditions aux limites (V.2.3.1), on déduit facilement que $\tau^{1,2}$ est nul dans toute la partie délaminée et que les efforts membranaires transverses sont nuls.
Ainsi chaque couche se trouve dans cette partie en état de traction uniaxiale.
Compte tenu des effets Poisson différents entre la couche à 0° et celle à 90°, les deux parties délaminées se trouvent donc courbées (Cf figure V.2.3.1)

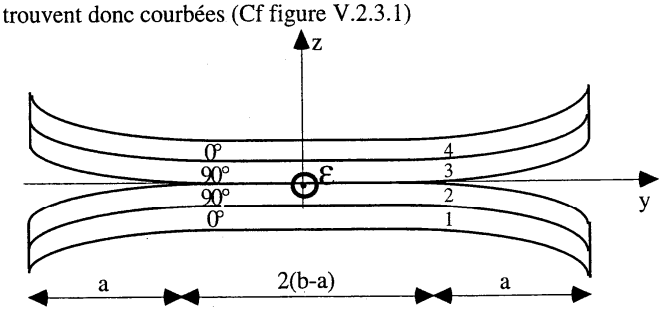


Fig. V.2.3.1: schéma de la plaque délaminée

On en déduit que la solution dans la partie non délaminée est identique à celle vu précédemment $\left(\text{en } y = b - a \quad \tilde{\tilde{N}}^i.\underline{n} = 0\right)$. Le cisaillement d'interface est donc discontinu en y=b-a (ceci est de nature à confirmer nos arguments précédents).
Ecrivons le comportement d'interface dans les différentes parties:

$$\text{(V.2.3.2)} \qquad \begin{aligned} &v^2(y) - v^1(y) + ew'(y) = 0 \quad \text{dans la partie délaminée} \\ &v^2(y) - v^1(y) = \frac{e}{3}\frac{G_{LN} + G_{TN}}{G_{LN}G_{TN}}\tau(y) \quad \text{dans la partie non délaminée} \end{aligned}$$

Notons τ^{max} la valeur du cisaillement en y=b-a dans la partie non délaminée, faisons tendre y vers b-a à droite et à gauche dans ces deux équations. Comme v^2 et v^1 sont continus, on en déduit que $w'(y)$ est discontinu en y=b-a. La discontinuité de $w'(y)$ vaut:

(V.2.3.3) $$\left[\left| w'(b-a) \right|\right] = \frac{1}{3}\frac{G_{LN}+G_{TN}}{G_{LN}G_{TN}}\tau^{max}$$

Ainsi les deux lèvres délaminées font un angle non nul en y=b-a, de valeur $2\left[\left| w'(b-a) \right|\right]$. Dans la suite, lorsque nous notons $w'(b-a)$, nous sous-entendons la limite à droite de w' en (b-a).
Intéressons nous au taux de relaxation d'énergie dans une progression de la zone délaminée. Ce taux est par définition:

(V.2.3.4) $$G = -\frac{\partial W}{\partial a}$$

où W est l'énergie élastique par unité de longueur de plaque suivant x (rappelons que le chargement considéré est en déplacement imposé).

Notons v_δ^{23} l'intensité du Dirac d'effort d'arrachement au point de délaminage. C'est un effort linéique de valeur, d'après (V.2.2.1) écris au sens des distributions:

(V.2.3.5) $$v_\delta^{23} = e\,\tau^{max}$$

Reprenons un raisonnement classique de mécanique de la rupture pour calculer le taux de restitution d'énergie G [Bui, 1970]. On peut calculer le travail de fermeture d'une fissure de longueur a+da sur une longueur da. Dans ce travail, c'est essentiellement l'effort linéique concentré v_δ^{23} qui travaille dans un déplacement dont la partie principale vaut $2w'(b-a)da$, puisque l'angle d'ouverture est $2w'(b-a)$. Ainsi:

(V.2.3.6) $$G = \frac{1}{2}\left(v_\delta^{23}.2w'(b-a)\right)$$

On peut exprimer à nouveau G à l'aide du cisaillement maximal à l'interface (0°,90°) en y=b-a car v_δ^{23} et $w'(b-a)$ peuvent s'exprimer à l'aide de τ^{max}:

(V.2.3.7) $$G = \frac{1}{3}e\,\tau^{max2}\left(\frac{G_{LN}+G_{TN}}{G_{LN}G_{TN}}\right)(= \text{Gtau max})$$

Pour vérifier ce résultat, nous avons calculé directement $G = -\frac{\partial W}{\partial a} (= \text{Gdelam})$ à partir de la solution analytique de la plaque de largeur 2b délaminée symétriquement sur une longueur a et reporté ci-dessous les deux courbes Gtaumax et Gdelam en fonction de la demi-longueur non fissurée b-a. Nous constatons que les deux courbes sont bien confondues.

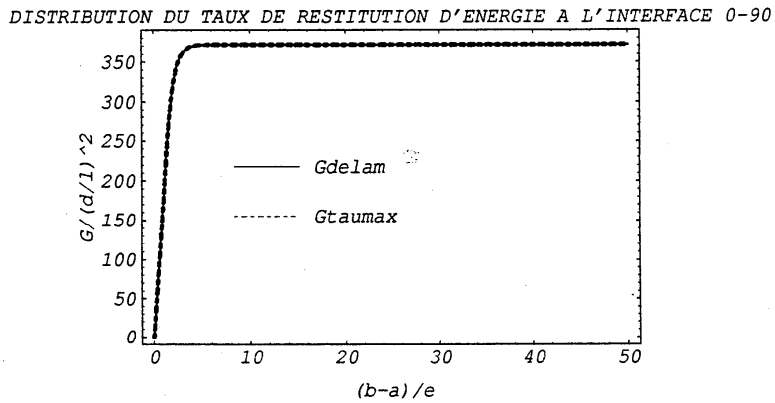


Fig. V.2.3.2: Taux de restitution d'énergie

Ainsi un critère de délaminage <u>entre les couches à 90°</u> du type G=Gc revient à écrire un critère en cisaillement maximal <u>entre les couches à 0° et 90°</u>. Ce résultat qui relie la rupture entre les couches à 90° à l'état de contrainte entre les couches à 0° et 90° n'est qu'apparemment paradoxal. En effet, le sens physique du critère porte plutôt sur l'intensité de l'effort linéique d'arrachement $v_\delta^{2,3}$ entre les couches à 90°. Notons le lien très clair entre un critère portant sur $v_\delta^{2,3}$ et le critère de délaminage le plus couramment utilisé dans la littérature qui porte sur l'intégrale de l'effort d'arrachement à l'interface calculé dans des modèles plus fins de type modélisation 3D [Whitney & Nuismer, 1974] [Kim & Soni, 1984].

Cette modélisation très simple M4_(2n+1)M nous semble capter l'essentiel de l'information nécessaire pour prédire le délaminage sans qu'il soit nécessaire d'introduire de manière artificielle des distances caractéristiques pour l'intégration des efforts. Montrons maintenant comment calculer le cisaillement maximal au bord d'une plaque dès que la largeur est suffisante ($b \geq 8e$ par exemple). Pour cela plaçons nous maintenant dans une situation de plaque suffisamment large et suffisamment délaminée pour que la zone d'effet de bord ne soit plus sensible à la largeur de la plaque. La plaque peut alors être schématiquement partagée en trois zones.

<u>La zone centrale</u> où toutes les couches sont soumises à la même déformation. La densité surfacique d'énergie, dans cette zone, est quasi-uniforme. Elle peut être calculée à l'aide d'un modèle de Love-Kirchhoff sur une plaque homogène équivalente à l'empilement $(0°, 90°)_s$ dont le module longitudinal vaut:

(V.2.3.8) $$E_L^{hom} = \frac{1}{2(1-\nu_{LT}\nu_{TL})}\left(E_L + E_T - 4\frac{\nu_{TL}{}^2 E_L{}^2}{E_T + E_L}\right)$$

Cette densité d'énergie surfacique vaut:

(V.2.3.9) $$W_{centrale} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{L}\right)^2 E_L^{hom}.4e$$

<u>La zone d'effet de bord</u> où les champs sont variables. C'est dans cette zone qu'apparaît les cisaillements et les arrachements d'interface.

<u>La zone délaminée</u> où chaque couche peut être vue par le modèle M4_(2n+1)M comme étant individuellement en traction uniaxiale. La densité surfacique d'énergie, dans cette zone, est uniforme et vaut:

(V.2.3.10) $$W_{delam} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{L}\right)^2 (E_L + E_T)2e$$

Lors d'une progression de fissure d'une longueur da, la zone d'effet de bord est translatée sans changement. La zone centrale est raccourcie d'une longueur da. La zone délaminée est allongée d'une longueur da. La densité d'énergie par unité de largeur d'éprouvette varie alors de:

(V.2.3.11) $$\frac{\partial W}{\partial a}da = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{L}\right)^2 \left(-E_L^{hom}4e + (E_L + E_T)2e\right)da$$

Le taux de relaxation d'énergie peut ainsi être calculé "loin de la zone de progression" de fissure.

(V.2.3.12) $$G = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{L}\right)^2 \left(E_L^{hom}4e - (E_L + E_T)2e\right)$$

ce qui se réécrit plus simplement:

(V.2.3.13) $$G = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{L}\right)^2 \frac{(E_L - E_T)^2 \nu_{LT}\nu_{TL}}{(E_L + E_T)(1-\nu_{LT}\nu_{TL})}$$

Notons qu'il est indépendant de la longueur de la fissure et de la largeur de la plaque, ce qui peut être vérifié sur la figure V.2.3.2 aussitôt que la largeur de la plaque est suffisante. Si on néglige, comme on le fait dans le modèle M4_(2n+1)M, les énergies de flexion propre de chacune des couches de l'empilement, l'équation (V.2.3.12) peut être retrouvée à l'aide de l'équation (39) de [Anquez & Nataf, 1987] qui a été établie à partir de l'étude de la souplesse globale de l'empilement délaminée. Notons l'intérêt d'une expression en fonction de la déformation imposée plutôt qu'en fonction de la force, car dans ce premier cas, ainsi que nous l'avons dit, G est indépendant de la longueur de la fissure.

Notons que la combinaison des équations (V.2.3.7) et (V.2.3.13) permet le calcul direct du cisaillement maximal sans avoir à intégrer les équations différentielles.

$$\tau^{max} = \sqrt{\frac{3G_{LN}G_{TN}\,\nu_{LT}\nu_{TL}}{(G_{LN}+G_{TN})(E_L+E_T)(1-\nu_{LT}\nu_{TL})}}.(E_L-E_T)\frac{d}{L} \qquad \text{(V.2.3.14)}$$

Comme dans le cas du modèle M4_(2n+1)M la zone délaminée est en contrainte uniforme, ce résultat s'étend donc au cas où il n'y a pas encore eu l'apparition d'une fissure de délaminage. On constate d'ailleurs après quelques calculs l'identité des relations (V.1.5.17) et (V.2.3.14).

V.3 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons établi la solution analytique pour le problème de la traction d'un empilement $(0°,90°)_s$ à l'aide des modèles M4_7n, M4_5n, M4_3nM et M4_(2n+1)M dont nous rappelons que les détails des calcul sont écrits en annexe VI.

L'analyse des solutions a permis de donner le sens physique d'une discontinuité au cisaillement maximal au bord observé pour certains modèles. Ainsi, par exemple, nous avons mis en évidence une force linéique d'arrachement concentrée sous forme d'un Dirac au bord des interfaces dans le modèle M4_(2n+1)M. Nous avons en outre montré qu'un critère sur l'intensité de ce Dirac peut, dans cet exemple, être équivalent à un critère portant sur le taux de relaxation d'énergie.

L'un des objectifs dans l'établissement de ces solutions analytiques étaient de pouvoir se faire une opinion sur l'intérêt relatif des modèles les uns par rapport aux autres. Ce point est à approfondir, cependant, à notre avis, deux modèles semblent intéressants. Le premier est le modèle M4_(2n+1)M qui, bien qu'il ne donne pas une distribution des champs de contrainte reproduisant fidèlement les champs 3D, présente l'avantage d'une extrême simplicité tant au niveau des calculs que des concepts mécaniques. Ainsi notamment le concept de force linéique d'arrachement concentré pourrait venir avantageusement remplacer celui de l'effort normal moyen [Whitney & Nuismer, 1974] [Kim & Soni, 1984] largement utilisé dans la littérature en guise de critère de délaminage. Le second est le modèle M4_5n. La prévision des champs de contrainte de ce modèle est très voisine des champs 3D. Il se présente en outre comme un empilement de plaques de Reissner couplées. L'énergie de couplage est plus complexe qu'un simple comportement classique d'interface mais n'est pas pour autant plus compliquée à mettre en oeuvre numériquement. Le développement de ce modèle dans un code de calcul disposant déjà d'élément de type plaque de Reissner serait donc relativement facile à faire. Ajoutons que contrairement aux modèles M4_7n et M4_3nM, les deux modèles M4_5n et M4_(2n+1)M ne réclament pas de conditions particulières sur les conditions aux limites pour obtenir des solutions.

Dans la suite du mémoire, nous ne nous intéressons donc plus qu'à ces deux modèles.

CHAPITRE VI

MULTICOUCHES $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$ *EN TRACTION*

VI.1 Calcul analytique du multicouche $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$ en traction par le modèle M4_5n

VI.1.1 Equations générales du multicouche $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$ en traction

VI.1.2 Application dans le cas du multicouche $(\theta_1,\theta_2)_s$

VI.2 Calcul analytique du multicouche $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$ en traction par le modèle M4_(2n+1)M

VI.2.1 Equations générales du multicouche $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$ en traction

VI.2.2 Application au multicouche $(\theta_1,\theta_2)_s$ en traction

VI.2.3 Application au multicouche $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)_s$ en traction

VI.3 Analyse des résultats - Comparaison avec la littérature

VI.3.1 Cas du multicouche $(\pm\theta)_s$ en traction

VI.3.2 Cas du multicouche $(\theta,\theta-90)_s$ en traction

VI.4 Analyse de la plaque trouée $(0°,90°)_s$ en traction par le modèle M4_(2n+1)M

VI.4.1 Plaque homogène trouée en traction

VI.4.2 Méthode d'analyse quasi 3D au bord du trou

VI.4.3 Comparaison des résultats des modèles M4_5n, M4_(2n+1)M et de [Raju & Crews, 1982]

VI.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous étudions la plaque multicouche $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$ en traction.

Dans une première section, nous posons les premières équations du modèle M4_5n dans le cas du multicouche $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$ en traction. Afin de mener à terme un calcul quasi-analytique et parce que les équations se simplifient nous calculons la solution pour un quadricouche $(\theta_1,\theta_2)_s$ en traction dans le cas particulier où les modules de cisaillement G_{LN} et G_{TN} sont égaux.

La deuxième étape de ce chapitre consiste à résoudre le problème du multicouche à empilement quelconque $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$ par les équations du modèle M4_(2n+1) membrane. Nous donnons le système à résoudre pour un quadricouche et un huit couches quelconque. Pour ces deux premières sections, afin de ne pas alourdir le corps du texte, nous donnons en annexe VII le détail des calculs, seuls sont présents les systèmes finaux résolus par MATHEMATICA.

Dans la troisième section, nous analysons les premiers résultats sur des stratifiés à bord rectiligne non troués. Tout d'abord, nous présentons les courbes du multicouche $(\theta,-\theta)_s$ en traction. Après avoir comparé l'ensemble des champs de contrainte d'interface pour un $(\pm 45)_s$ avec ceux de [Wang & Crossman, 1977], [Pagano, 1978], [Wang & Choi, 1982], [Robbins & Reddy, 1992 et 1993] et de [Flanagan, 1994], nous donnons, dans le cas général, l'allure des cisaillements τ_{xz} et τ_{yz} maximum au bord de la plaque. Comme il est prévu dans la littérature par [Herakovich, 1981] et [Pipes, 1972] nous confirmons le pic des contraintes de cisaillement τ_{xz} sur l'empilement $(\pm 15)_s$. Puis sur ce dernier empilement, nous analysons l'effet d'épaisseur constaté par [Lecuyer & Engrand, 1992] à l'aide du modèle M4_(2n+1)M. Dans un deuxième paragraphe, nous analysons le stratifié $(\theta,\theta-90)_s$ que nous comparons à l'article de [Raju & Crews, 1981]. L'étude de cette famille d'empilements prépare l'étude des effets de bords dans une plaque $(0°,90°)_s$ symétrique trouée étudiée dans la quatrième section de ce chapitre. Ces analyses nous permettent de conforter le concept d'effort linéique résultant d'arrachement du modèle M4_(2n+1)M relié au cisaillement τ_{yz} maximum. A titre d'exemple d'analyse du huit couches, nous donnons en annexe X les courbes d'efforts aux interfaces des multicouches $[0°,45°,-45°,90°]_s$ $[45°,-45°,0°,90°]_s$ $[90°,0°,45°,-45°]_s$ à l'aide du modèle M4_(2n+1)M.

La quatrième section, nous l'avons dit, concerne l'analyse de plaque trouée $(0°,90°)_s$. Nous nous inspirons d'une approche simplifiée par section radiale proposée par [Raju & Crews, 1982] qui est acceptable lorsque le rayon du trou est très supérieur à l'épaisseur des couches $(r \geq 20e)$. Avec cette hypothèse simplificatrice, l'analyse se ramène à celle des effets de bord dans des plaques semi-infinies pour des empilements $(\theta,\theta-90)_s$ soumis à un allongement $\varepsilon(\theta)$ qui est égal à la déformation $\varepsilon_{\theta\theta}(\theta)$ au bord d'une plaque homogène anisotrope trouée dont le comportement homogène est équivalent à l'empilement. L'expression analytique de $\varepsilon_{\theta\theta}(\theta)$ est donnée par [Lekhnitskii, 1968].

VI.1 CALCUL ANALYTIQUE DU MULTICOUCHE $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$ EN TRACTION PAR LE MODELE M4_5N

VI.1.1 Equations générales du multicouche $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$ en traction

Considérons une éprouvette de largeur 2b et de longueur 2l constituée d'un empilement de n (n=2m) couches $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$, occupant le domaine $\Omega=[-l,l]\times[-b,b]\times[-me,me]$. L'éprouvette est soumise à une traction telle qu'en x=-l (respectivement x=l) le déplacement moyen suivant x est -d (respectivement d), les autres bords sont libres. Dans la partie centrale de l'éprouvette, loin des bords x=-l et x=l, on peut faire une hypothèse d'invariance par translation parallèlement à l'axe des x [Pagano, 1974]. Dans ce cas, la composante suivant x du champ de déplacement peut s'écrire sous la forme (VI.1.1.1). Les autres champs ne sont fonctions que de y.

Les champs inconnus principaux sont:
- Les déplacements généralisés:

$$\text{(VI.1.1.1)}\qquad \begin{aligned} &\tilde{U}^i(x,y)=\begin{cases} u^i(x,y)=\dfrac{\Delta}{L}x+u^i(y) \\ v^i(x,y)=v^i(y)\end{cases} \\ &U_3^i(x,y)=w^i(y) \qquad\qquad i=1,2m \\ &\tilde{\Phi}^i(x,y)=\begin{cases}\Phi_x^i(x,y)=\varphi_x^i(y)\\ \Phi_y^i(x,y)=\varphi_y^i(y)\end{cases}\end{aligned}$$

- Les efforts intérieurs généralisés:

$$\text{(VI.1.1.2)}\qquad \begin{aligned} &N_{\alpha\beta}^i(x,y)=N_{\alpha\beta}^i(y) && (\alpha,\beta)\in\{1,2\}^2 \quad i\in(1,2m) \\ &M_{\alpha\beta}^i(x,y)=M_{\alpha\beta}^i(y) \\ &Q_\alpha^i(x,y)=Q_\alpha^i(y) \\ &\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y)=\tau_\alpha^{i,i+1}(y) && \alpha\in\{1,2\} \quad i\in(1,2m-1) \\ &v^{i,i+1}(x,y)=v^{i,i+1}(y)\end{aligned}$$

La symétrie du problème par rapport au plan z=0 conduit à un problème comprenant 16m-2 champs en y inconnus:

$$\boxed{\begin{array}{l} u^i, v^i, w^i, \varphi_x^i, \varphi_y^i, N_{11}^i, N_{12}^i, N_{22}^i, M_{11}^i, M_{12}^i, M_{22}^i, Q_1^i, Q_2^i, v^{i,i+1} \quad i=1,m \\ \tau_1^{i,i+1} \text{ et } \tau_2^{i,i+1} \quad i=1,m-1 \end{array}}$$

L'écriture de l'équilibre des couches 1 à m et du comportement, conduit à (annexe VII) 6m-2 équations algébriques et à 10m équations différentielles.

Les équations algébriques permettent d'exprimer:
- Les efforts d'arrachement d'interface $v^{i,i+1}$ en fonction des déplacements w^i et w^{i+1};
- Les champs Q_1^i, $\tau_1^{i,i+1}$ et $\tau_2^{i,i+1}$ en fonction des Q_2^j, φ_x^j, φ_y^j, $u^{j+1}-u^j$ et $v^{j+1}-v^j$.
- Les champs N_{11}^i en fonction de N_{22}^i et N_{12}^i.
- Les champs M_{11}^i en fonction de M_{22}^i et M_{12}^i.

Il reste donc les 10m champs suivants reliés par 10m équations différentielles:

$$\boxed{N^i; N_6^i; M^i; M_6^i; Q^i;\ u^i; v^i; w^i; \varphi_x^i; \varphi_y^i}$$

où

$$N^i = N_{22}^i\ ;\ N_6^i = N_{12}^i\ ;\ M^i = M_{22}^i\ ;\ M_6^i = M_{12}^i \text{ et } Q^i = Q_2^i$$

On constate que l'on peut se contenter de faire apparaître les 2(m-1) champs $\begin{cases} u^{i,i+1} = u^{i+1} - u^i \\ v^{i,i+1} = v^{i+1} - v^i \end{cases}$ au lieu des 2m champs u^i et v^i.

En posant le vecteur à 5m-2 composantes suivant:

(VI.1.1.3) $$\underline{X} = \left(u^{i,i+1}, v^{i,i+1}, \varphi_x^i, \varphi_y^i, Q^i\right)$$

le système final se réécrit sous la forme:

(VI.1.1.4) $$\boxed{\underline{X}'' = \overline{\overline{M}}.\underline{X}}$$

Pour alléger, nous n'explicitons pas dans le cas général, l'expression de $\overline{\overline{M}}$ étant assez compliquée. A titre d'illustration, développons le cas particulier du quadricouche symétrique dont les modules de cisaillement G_{LN} et G_{TN} sont égaux.

VI.1.2 Application dans le cas du multicouche $(\theta_1,\theta_2)_s$

Dans le cas m=2, nous avons huit inconnues principales que nous notons $\begin{cases} u = u^2 - u^1 \\ v = v^2 - v^1 \\ Q^1 \\ Q^2 \\ \varphi_x^1, \varphi_y^1, \varphi_x^2 \text{ et } \varphi_y^2 \end{cases}$.

Rappelons que dans la suite, de façon à pouvoir traiter plus simplement le problème nous restreignons l'application au cas particulier du quadricouche symétrique $(\theta_1,\theta_2)_s$ dont les modules de cisaillement sont égaux soit: $G_{LN} = G_{TN}$.

La symétrie par rapport au plan y=0 rend $u, v, \varphi_x^1, \varphi_y^1, \varphi_x^2$ et φ_y^2 impairs (Cf. annexe VII).

Grâce au système d'équations algébriques (annexe VII) on exprime $\tau_1^{1,2}, \tau_2^{1,2}, Q_1^1, Q_1^2, v^{1,2}$ et $v^{2,3}$ en fonction des huit inconnues principales ci-dessus.

(VI.1.2.1) $$\boxed{\frac{\tau_1^{1,2}}{G_{LN}} = \frac{4}{e}\left(u - \frac{5e}{12}\left(\varphi_x^1 + \varphi_x^2\right)\right)}$$

(VI.1.2.2) $$\boxed{\frac{\tau_2^{1,2}}{G_{LN}} = \frac{15}{4e}\left(v - \frac{e}{2}\left(\varphi_y^1 + \varphi_y^2\right)\right) + \frac{3}{8eG_{LN}}\left(Q^1 + Q^2\right)}$$

(VI.1.2.3) $$\boxed{\frac{Q_1^1}{eG_{LN}} = \frac{u}{3e} + \frac{25}{36}\varphi_x^1 - \frac{5}{36}\varphi_x^2}$$

(VI.1.2.4) $$\boxed{\frac{Q_1^2}{eG_{LN}} = \frac{u}{3e} - \frac{5}{36}\varphi_x^1 + \frac{25}{36}\varphi_x^2}$$

(VI.1.2.5) $$\boxed{v^{1,2} = -Q^{1'}}$$

(VI.1.2.6) $$\boxed{v^{2,3} = -Q^{1'} - Q^{2'}}$$

Après écriture des équations d'équilibre et des comportements en posant

(VI.1.2.7) $$A^i = S_{22}^i - \frac{S_{12}^{i\,2}}{S_{11}^i} \quad ; \quad B^i = S_{26}^i - \frac{S_{16}^i S_{12}^i}{S_{11}^i} \quad \text{et} \quad C^i = S_{66}^i - \frac{S_{16}^{i\,2}}{S_{11}^i},$$

et en rendant le système d'équations différentielles du second ordre adimensionnel en posant:

(VI.1.2.8)

$$a^1 = G_{LN} A^1 \frac{b^2}{e^2}$$

$$a^2 = G_{LN} A^2 \frac{b^2}{e^2} \qquad a = a^1 + a^2$$

$$b^1 = G_{LN} B^1 \frac{b^2}{e^2} \qquad b = b^1 + b^2$$

$$c = c^1 + c^2$$

$$b^2 = G_{LN} B^2 \frac{b^2}{e^2} \qquad U(s) = \frac{u(bs)}{e}$$

$$c^1 = G_{LN} C^1 \frac{b^2}{e^2} \qquad V(s) = \frac{v(bs)}{e}$$

$$c^2 = G_{LN} C^2 \frac{b^2}{e^2} \qquad \phi_i^j(s) = \varphi_i^j(bs)$$

$$q^j(s) = \frac{Q^j(bs)}{eG_{LN}}$$

$$d = \frac{E_N}{G_{LN}} \frac{b^2}{e^2}$$

le système final à résoudre est alors de la forme: $\underline{X}'' = \overline{\overline{M}}.\underline{X}$ avec $\underline{X} = \left(V, U, \phi_x^1, \phi_x^2, \phi_y^1, \phi_y^2, q^1, q^2\right)$

Avec:

(VI.1.2.9)

$$\overline{\overline{M}} = \begin{pmatrix} \frac{15a}{4} & 4b & \frac{-5b}{3} & \frac{-5b}{3} & \frac{-15a}{8} & \frac{-15a}{8} & \frac{3a}{8} & \frac{3a}{8} \\ \frac{15b}{4} & 4c & \frac{-5c}{3} & \frac{-5c}{3} & \frac{-15b}{8} & \frac{-15b}{8} & \frac{3b}{8} & \frac{3b}{8} \\ \frac{-45a^1}{2} & -20c^1 & \frac{55}{3}c^1 & \frac{25}{3}c^1 & \frac{45b^1}{4} & \frac{45b^1}{4} & \frac{39b^1}{4} & \frac{-9b^1}{4} \\ \frac{-45a^2}{2} & -20c^2 & \frac{25}{3}c^2 & \frac{55}{3}c^2 & \frac{45b^2}{4} & \frac{45b^2}{4} & \frac{-9b^2}{4} & \frac{39b^2}{4} \\ \frac{-45b^1}{2} & -20b^1 & \frac{55}{3}b^1 & \frac{25}{3}b^1 & \frac{45a^1}{4} & \frac{45a^1}{4} & \frac{39a^1}{4} & \frac{-9a^1}{4} \\ \frac{-45b^2}{2} & -20b^2 & \frac{25}{3}b^2 & \frac{55}{3}b^2 & \frac{45a^2}{4} & \frac{45a^2}{4} & \frac{-9a^2}{4} & \frac{39a^2}{4} \\ \frac{1890}{10168}d & 0 & 0 & 0 & \frac{-15505}{10168}d & \frac{18655}{10168}d & \frac{17661}{10168}d & \frac{-23331}{10168}d \\ \frac{-12810}{10168}d & 0 & 0 & 0 & \frac{26005}{10168}d & \frac{-47355}{10168}d & \frac{-24801}{10168}d & \frac{63231}{10168}d \end{pmatrix}$$

L'expression des parités et des conditions aux limites en fonction des inconnues principales du problème donnent alors:

(VI.1.2.10)
$$\boxed{\begin{array}{l} U(0)=0\ ;\ V(0)=0\ ; \\ \phi_x^i(0)=0\ ;\ \phi_y^i(0)=0\ ; \\ q^i(0)=0 \end{array}}$$

et

(VI.1.2.11)
$$\boxed{\begin{cases} U'(1)=\dfrac{b}{e}\dfrac{\Delta}{L}\left(\dfrac{S_{16}^2}{S_{11}^2}-\dfrac{S_{16}^1}{S_{11}^1}\right) \\ V'(1)=\dfrac{b}{e}\dfrac{\Delta}{L}\left(\dfrac{S_{12}^2}{S_{11}^2}-\dfrac{S_{12}^1}{S_{11}^1}\right) \end{cases} ;\ \begin{cases} \phi_x^{i\,\prime}(1)=0 \\ \phi_y^{i\,\prime}(1)=0 \end{cases} \text{ et } q^i(1)=0 \quad (i=1,2)}$$

Ce système peut facilement être résolu à l'aide de MATHEMATICA. Nous présentons les résultats plus loin dans le chapitre après avoir donné la solution du même problème pour le modèle M4_(2n+1)M dans la section suivante.

VI.2 CALCUL ANALYTIQUE DU MULTICOUCHE $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$ EN TRACTION PAR LE MODELE M4_(2N+1) MEMBRANE

Nous étudions un problème similaire à celui de la section précédente à l'aide du modèle M4_(2n+1)M.

VI.2.1 Equations générales du multicouche $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$ en traction

Nous faisons l'hypothèse que loin des bords x=l et x=-l, les champs sont invariants par translation.

Les champs inconnus principaux sont:
- Les déplacements généralisés:

(VI.2.1.1)
$$\tilde{U}^i(x,y)=\begin{cases} u^i(x,y)=\dfrac{\Delta}{L}x+u^i(y) \\ v^i(x,y)=v^i(y) \end{cases} \qquad i=1,\ 2m$$
$$U_3^i(x,y)=w(y)$$

Les symétries par rapport aux plans z=0 et y=0 rendent respectivement w nul et $u^i(y)$ et $v^i(y)$ impairs.

- Les efforts intérieurs généralisés:

(VI.2.1.2)
$$N^i_{\alpha\beta}(x,y) = N^i_{\alpha\beta}(y) \qquad (\alpha,\beta)\in\{1,2\}^2 \quad i\in(1,2m)$$
$$\tau^{i,i+1}_{\alpha}(x,y) = \tau^{i,i+1}_{\alpha}(y) \qquad \alpha\in\{1,2\} \quad i\in(1,2m-1)$$

La prise en compte des symétries par rapport au plan z=0 conduit à un problème comprenant 7m-2 champs en y inconnus:

$$\boxed{\begin{array}{l} u^i, v^i, N^i_{11}, N^i_{12}, N^i_{22} \quad i=1,m \\ \tau^{i,i+1}_1, \tau^{i,i+1}_2 \quad i=1,m-1 \end{array}}$$

L'écriture de l'équilibre et du comportement conduit à 3m-2 équations algébriques et 4m équations différentielles. On constate que l'on peut se contenter de faire apparaître les 2m-2 champs suivants:

(VI.2.1.3)
$$u^{i,i+1} = u^{i+1} - u^i$$
$$v^{i,i+1} = v^{i+1} - v^i$$

au lieu des 2m champs u^i et v^i. On peut de plus éliminer les efforts membranaires N^i_{11}, N^i_{22} et N^i_{12} entre les différentes équations.

Notons:

$\underline{X}$ le vecteur de composante $\left(v^{1,2}, u^{1,2}, \ldots, v^{n-1,n}, u^{n-1,n}\right)$

$\underline{Y}$ le vecteur de composante $\left(\tau^{1,2}_2, \tau^{1,2}_1, \ldots, \tau^{n-1,n}_2, \tau^{n-1,n}_1\right)$

soit

$$\begin{cases} X_{2k+1} = v^{k+1,k+2} \\ X_{2k+2} = u^{k+1,k+2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y_{2k+1} = \tau^{k+1,k+2}_2 \\ Y_{2k+2} = \tau^{k+1,k+2}_1 \end{cases}$$

Le système final à résoudre se présente sous la forme:

(VI.2.1.4)
$$\begin{cases} X_k'' = M_{kl}.Y_l \\ X_k = N_{kl}.Y_l \end{cases} \Rightarrow \underline{X}'' = \overline{\overline{M}}.\overline{\overline{N}}^{-1}.\underline{X}$$

les coefficients des matrices $\overline{\overline{M}}$ et $\overline{\overline{N}}$ sont donnés par:

$$\left|\begin{array}{l} M_{2k+1,2k+1} = a^{k+2} + a^{k+1} \\ M_{2k+1,2k+2} = b^{k+2} + b^{k+1} \\ M_{2k+1,2k+3} = -a^{k+2} \\ M_{2k+1,2k+4} = -b^{k+2} \\ M_{2k+1,2k} = -b^{k+1} \\ M_{2k+1,2k-1} = -a^{k+1} \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} M_{2k+2,2k+1} = b^{k+2} + b^{k+1} \\ M_{2k+2,2k+2} = c^{k+2} + c^{k+1} \\ M_{2k+2,2k+3} = -b^{k+2} \\ M_{2k+2,2k+4} = -c^{k+2} \\ M_{2k+2,2k} = -c^{k+1} \\ M_{2k+2,2k-1} = -b^{k+1} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ k>0 \\ k>0 \end{array}$$

(VI.2.1.5)

les autres coefficients M_{ij} sont nuls $\left(\overline{\overline{M}} \text{ étant symétrique}\right)$

$$\left|\begin{array}{l} N_{2k+1,2k+1} = 2\left(\alpha^{k+2} + \alpha^{k+1}\right) \\ N_{2k+1,2k+2} = 2\left(\beta^{k+2} + \beta^{k+1}\right) \\ N_{2k+1,2k+3} = \alpha^{k+2} \\ N_{2k+1,2k+4} = \beta^{k+2} \\ N_{2k+1,2k} = \beta^{k+1} \\ N_{2k+1,2k-1} = \alpha^{k+1} \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} N_{2k+2,2k+1} = 2\left(\beta^{k+2} + \beta^{k+1}\right) \\ N_{2k+2,2k+2} = 2\left(\gamma^{k+2} + \gamma^{k+1}\right) \\ N_{2k+2,2k+3} = \beta^{k+2} \\ N_{2k+2,2k+4} = \gamma^{k+2} \\ N_{2k+2,2k} = \gamma^{k+1} \\ N_{2k+2,2k-1} = \beta^{k+1} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ k>0 \\ k>0 \end{array}$$

(VI.2.1.6)

les autres coefficients N_{ij} sont nuls $\left(\overline{\overline{N}} \text{ étant symétrique}\right)$

où

(VI.2.1.7) $$A^i = S^i_{22} - \frac{{S^i_{12}}^2}{S^i_{11}} \quad ; \quad B^i = S^i_{26} - \frac{S^i_{16}S^i_{12}}{S^i_{11}} \quad \text{et} \quad C^i = S^i_{66} - \frac{{S^i_{16}}^2}{S^i_{11}} ,$$

(VI.2.1.8) et

$$a^i = \frac{A^i}{e^i},\ b^i = \frac{B^i}{e^i} \text{ et } c^i = \frac{C^i}{e^i}$$

$$\alpha^i = \frac{e^i}{6} S^i_{Q22},\ \beta^i = \frac{e^i}{6} S^i_{Q12} \text{ et } \gamma^i = \frac{e^i}{6} S^i_{Q11}$$

Enfin, nous rendons le système d'équations différentielles du second ordre adimensionnel en posant:

(VI.2.1.9)
$$\underline{x}(u)=\frac{\underline{X}(bu)}{e^{choisi}} \qquad \underline{x}'(u)=\frac{b}{e^{choisi}}\underline{X}(bu)$$
$$\underline{y}(u)=\frac{\underline{Y}(bu)}{G^{choisi}} \qquad \underline{x}''(u)=\frac{b^2}{e^{choisi}}\underline{X}(bu)$$

où les valeurs de e^{choisi} et G^{choisi} sont choisies parmi toutes les valeurs des épaisseurs des couches et parmi toutes les valeurs des modules de cisaillement selon le problème à traiter.

Les systèmes précédents (VI.2.1.4) après adimensionnalisation s'expriment ainsi:

(VI.2.1.10)
$$\begin{cases}\underline{x}''(u)=\dfrac{b^2G}{e}\overline{\overline{M}}.\underline{y}(u)=\overline{\overline{m}}.\underline{y}(u)\\ \underline{x}(u)=\dfrac{G}{e}\overline{\overline{N}}.\underline{y}(u)=\overline{\overline{n}}.\underline{y}(u)\end{cases} \Rightarrow \boxed{\underline{x}''(u)=\overline{\overline{m}}.\overline{\overline{n}}^{-1}\underline{x}(u)}$$

Le vecteur $\underline{x}(u)$ vérifie les conditions de parité soit:

(VI.2.1.11) $\boxed{\underline{x}(0)=0}$

Il reste à exprimer, en fonction des inconnues du problème, les conditions aux limites suivantes :

(VI.2.1.12)
$$\boxed{\begin{cases}x_{2k+1}'(1)=\dfrac{b}{e}\dfrac{\Delta}{L}\left(\dfrac{S_{12}^{k+2}}{S_{11}^{k+2}}-\dfrac{S_{12}^{k+1}}{S_{11}^{k+1}}\right)\\ x_{2k+2}'(1)=\dfrac{b}{e}\dfrac{\Delta}{L}\left(\dfrac{S_{16}^{k+2}}{S_{11}^{k+2}}-\dfrac{S_{16}^{k+1}}{S_{11}^{k+1}}\right)\end{cases}}$$

VI.2.2 Application au multicouche $(\theta_1,\theta_2)_s$ en traction

Dans un premier temps nous résolvons le système (VI.2.1.10) dans le cas du quadricouche $(\theta_1,\theta_2)_s$ étudié dans la section précédente par le modèle M4_5n. Les matrices $\overline{\overline{M}}$ et $\overline{\overline{N}}$ s'écrivent alors sous la forme:

(VI.2.2.1)
$$\overline{\overline{M}}=\begin{pmatrix}a^1+a^2 & b^1+b^2\\ b^1+b^2 & c^1+c^2\end{pmatrix}$$

(VI.2.2.2)
$$\overline{\overline{N}}=\frac{e}{3}\begin{pmatrix}S_{Q22}^1+S_{Q22}^2 & S_{Q12}^1+S_{Q12}^2\\ S_{Q12}^1+S_{Q12}^2 & S_{Q11}^1+S_{Q11}^2\end{pmatrix}$$

Le système se résout facilement à l'aide de MATHEMATICA. Nous analysons les résultats plus loin et nous tentons par la suite de résoudre le problème du $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)_s$ en traction.

VI.2.3 Application au multicouche $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)_s$ en traction

Cette application nous permet dans un premier temps d'avoir un aperçu sur "l'effet d'épaisseur" décrit dans l'article de [Lecuyer & Engrand, 1992]. Nous analysons pour cela les laminés $[15,-15]_S$ et $[15_2,-15_2]_S$. Puis dans un second temps, nous recherchons la solution du huit couches symétriques $[0,45,-45,90]_S$ dont nous changeons l'ordre des couches pour prédire quel empilement est le plus délaminant.

Dans ce cas les matrices $\overline{\overline{M}}$ et $\overline{\overline{N}}$ s'écrivent alors sous la forme:

(VI.2.3.1)
$$\overline{\overline{M}} = \begin{pmatrix} a^1+a^2 & b^1+b^2 & -a^2 & -b^2 & 0 & 0 \\ b^1+b^2 & c^1+c^2 & -b^2 & -c^2 & 0 & 0 \\ -a^2 & -b^2 & a^2+a^3 & b^2+b^3 & -a^3 & -b^3 \\ -b^2 & -c^2 & b^2+b^3 & c^2+c^3 & -b^3 & -c^3 \\ 0 & 0 & -a^3 & -b^3 & a^3+a^4 & b^3+b^4 \\ 0 & 0 & -b^3 & -c^3 & b^3+b^4 & c^3+c^4 \end{pmatrix}$$

(VI.2.3.2)
$$\overline{\overline{N}} = \frac{e}{3}\begin{pmatrix} S^1_{Q22}+S^2_{Q22} & S^1_{Q12}+S^2_{Q12} & \frac{S^2_{Q22}}{2} & \frac{S^2_{Q12}}{2} & 0 & 0 \\ S^1_{Q12}+S^2_{Q12} & S^1_{Q11}+S^2_{Q11} & \frac{S^2_{Q12}}{2} & \frac{S^2_{Q11}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{S^2_{Q22}}{2} & \frac{S^2_{Q12}}{2} & S^2_{Q22}+S^3_{Q22} & S^2_{Q12}+S^3_{Q12} & \frac{S^3_{Q22}}{2} & \frac{S^3_{Q12}}{2} \\ \frac{S^2_{Q12}}{2} & \frac{S^2_{Q11}}{2} & S^2_{Q12}+S^3_{Q12} & S^2_{Q11}+S^3_{Q11} & \frac{S^3_{Q12}}{2} & \frac{S^3_{Q11}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{S^3_{Q22}}{2} & \frac{S^3_{Q12}}{2} & S^3_{Q22}+S^4_{Q22} & S^3_{Q12}+S^4_{Q12} \\ 0 & 0 & \frac{S^3_{Q12}}{2} & \frac{S^3_{Q11}}{2} & S^3_{Q12}+S^4_{Q12} & S^3_{Q11}+S^4_{Q11} \end{pmatrix}$$

De même, le système se résout facilement à l'aide de MATHEMATICA.

VI.3 ANALYSE DES RESULTATS - COMPARAISON AVEC LA LITTERATURE

Comme nous venons de le voir dans les deux premières sections de ce chapitre, les solutions des plaques $(\theta_1,\ldots,\theta_n)_s$ en traction peuvent être calculées analytiquement par les modèles M4_(2n+1)M et M4_5n. De façon à pouvoir comparer, avec la littérature, les champs d'efforts intérieurs d'interface obtenus par nos modèles, nous appliquons, dans cette troisième section, ces solutions aux cas de quadricouches $(\pm\theta)_s$ et $(\theta,\theta-90)_s$ pour les modèles M4_(2n+1)M et M4_5n. Les multicouches $(0°,45°,-45°,90°)_s$, $(45°,-45°,0°,90°)_s$ et $(90°,0°,45°,-45°)_s$ étant souvent étudiés dans la littérature, nous avons pensé utile de donner les prévisions du modèle M4_(2n+1)M en annexe X. Les courbes sont données par le logiciel de calcul formel MATHEMATICA.

VI.3.1 Cas du multicouche $(\pm\theta)_s$ en traction

Dans ce paragraphe, nous commençons par l'étude de l'empilement $(\pm45)_s$. Nous comparons les résultats obtenus avec ceux de [Wang & Crossman, 1977], [Pagano, 1978], [Wang & Choi, 1982], [Robbins & Reddy, 1992 et 1993] et [Flanagan, 1994]. Nous donnons ensuite une analyse des efforts intérieurs d'interface pour des empilements $(\pm\theta)_s$ dont nous comparons le cisaillement τ_{xz} maximum obtenu au bord en fonction de l'angle θ, avec celui de [Pipes, 1972], [Herakovich, 1981], [Anquez & Al., 1985]. Enfin, nous analysons l'effet d'épaisseur dans le cas particulier du $(\pm15)_s$ pour comparer aux résultats de [Lecuyer & Engrand, 1992].

VI.3.1.a Empilement $(\pm45)_s$

Cet empilement est intéressant car il est très souvent étudié dans la littérature. Les premiers travaux ont d'ailleurs donnés des résultats qui étaient en désaccord [Puppo & Evensen, 1970] et [Pipes & Pagano, 1970 fig. 9 page 547].
Le matériau et la géométrie sont identiques à ceux de [Pagano, 1978].

Commençons par étudier l'interface 45°/-45°.
Trois efforts intérieurs nous intéressent: les cisaillements τ_{xz} et τ_{yz} et l'arrachement $\nu^{1,2}$. Nous rappelons que dans le modèle M4_(2n+1)M l'arrachement est défini proportionnellement à la dérivée du cisaillement τ_{yz} par les équations d'équilibre du modèle M4_3n (II.5.6): $\nu^{1,2}(y)=-\frac{e}{2}\tau_{yz}'(y)$.
Pour ce qui concerne le cisaillement τ_{xz}, nous présentons ci-dessous successivement outre les courbes obtenues par le modèle M4_5n et M4_(2n+1)M, les résultats de [Wang & Crossman, 1977], [Pagano, 1978] et [Flanagan, 1994]. Pour ne pas alourdir la figure, nous ne reportons pas les

résultats de [Wang & Choi, 1982], [Robbins & Reddy, 1992 et 1993] qui sont en accord avec les précédents.

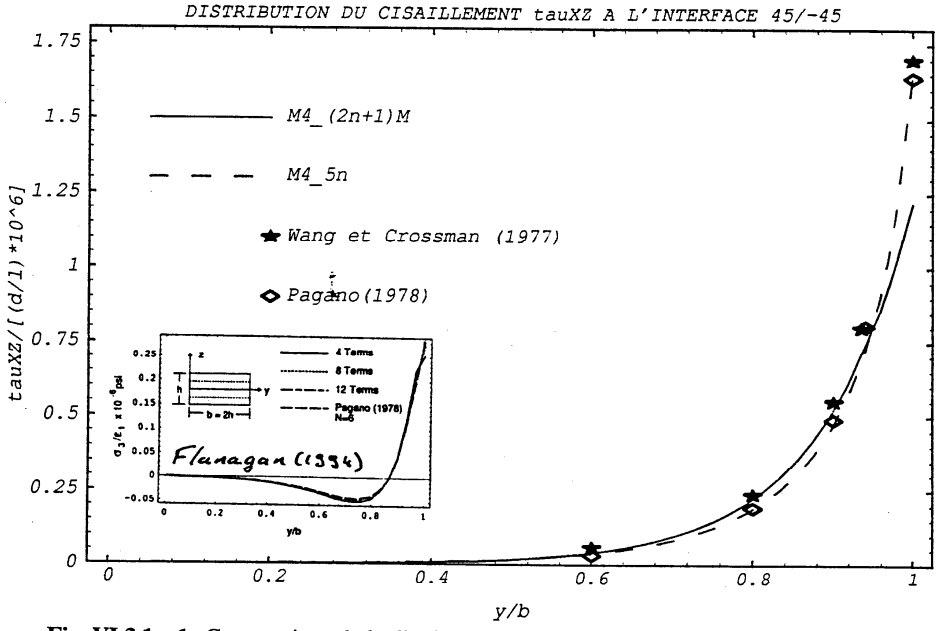


Fig. VI.3.1.a.1: Comparaison de la distribution du cisaillement τ_{xz} à l'interface 45°/-45°

On constate un bon accord entre les prédictions des différents modèles avec cependant un maximum du cisaillement prévu par le modèle M4_(2n+1)M plus faible que celui prévu par les autres modèles.

Avec un matériau différent, les résultats donnés dans [Anquez & Al., 1985 fig. 9 page 34] sont qualitativement de même nature.

L'analyse du cisaillement τ_{yz} est un peu plus difficile. La courbe de [Wang & Crossman, 1977] semble comporter une erreur de signe. [Pagano, 1978] ne donne pas cette information. La courbe correspondante de [Flanagan, 1994] semble confirmer celle obtenue par le modèle M4_5n. Nous nous référons donc aux articles de [Wang & Choi, 1982], [Robbins & Reddy, 1992 et 1993] et [Flanagan, 1994]. La première constation est que tous les auteurs signalent que τ_{yz} est très petit à l'interface par rapport à τ_{xz}. Cela correspond aussi à la prévision de nos deux modèles avec même un cisaillement τ_{yz} nul pour le modèle M4_(2n+1)M. Il n'est pas facile de reporter sur nos diagrammes les résultats des autres auteurs compte tenu de la difficulté de mesurer les points de leur courbe avec précision, aussi nous choisissons de reporter, à coté de notre figure, la figure extraite de [Flanagan, 1994] (figure 6 p.949) où la contrainte qui nous intéresse ici est la contrainte σ_4. On constate une bonne correspondance entre cette courbe et celle obtenue par le modèle M4_5n.

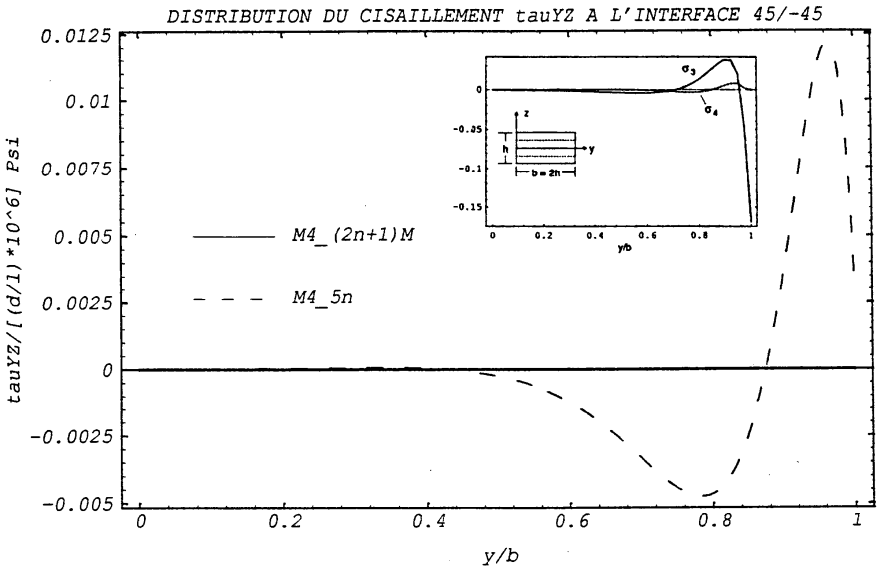


Fig. VI.3.1.a.2: Comparaison de la distribution du cisaillement τ_{yz} à l'interface 45°/-45°

Intéressons nous maintenant à l'arrachement $v^{1,2}$ de cette même interface. L'article de [Pagano, 1978] ne donne aucune information à ce sujet. Ecartons le résultat de [Wang & Crossman, 1977] qui semble comporter une erreur de signe et comparons aux résultats de [Wang & Choi, 1982], [Robbins & Reddy, 1992 et 1993] et [Flanagan, 1994]. On constate que cet effort normal d'interface est en compression au bord mais d'intensité faible. En dehors du modèle M4(2n+1)M qui prévoit un effort nul, tous les autres modèles sont en bon accord y compris avec les prévisions du modèle M4_5n. A titre d'illustration, nous reportons sur la figure ci-dessous les prévisions des modèles M4_(2n+1)M, M4_5n et les résultats de Flanagan (fig. 6 p.949)

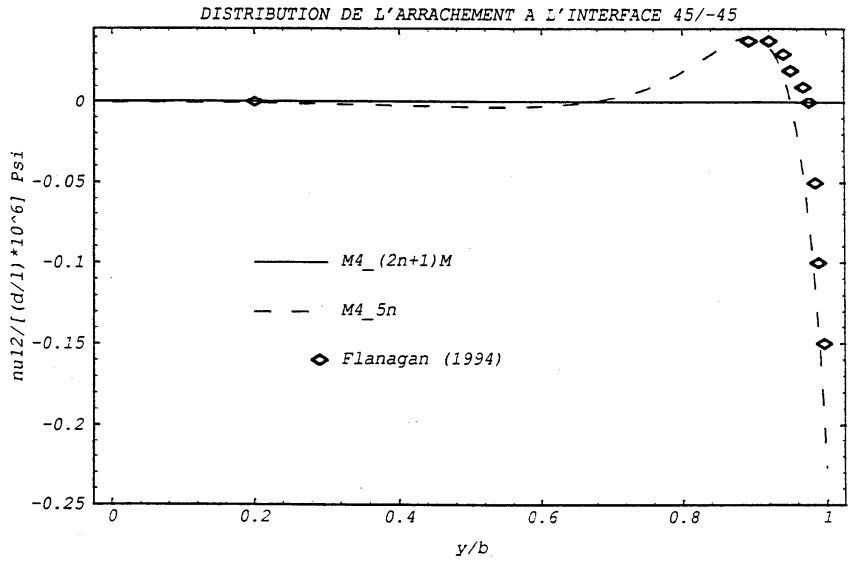


Fig. VI.3.1.a.3: Comparaison de la distribution de l'arrachement $v^{1.2}$ à l'interface 45°/-45°

L'interface -45/-45 présente aussi un intérêt.

De manière étonnante la plupart des auteurs ne se sont pas intéressés directement à cette interface. On peut toutefois tenter de reconstituer cette information à l'aide des courbes de contraintes données par [Wang & Choi, 1982] (fig. 12 page 558) ou les résultats donnés dans l'épaisseur par [Robbins & Reddy, 1993] (fig. 6 page 672).

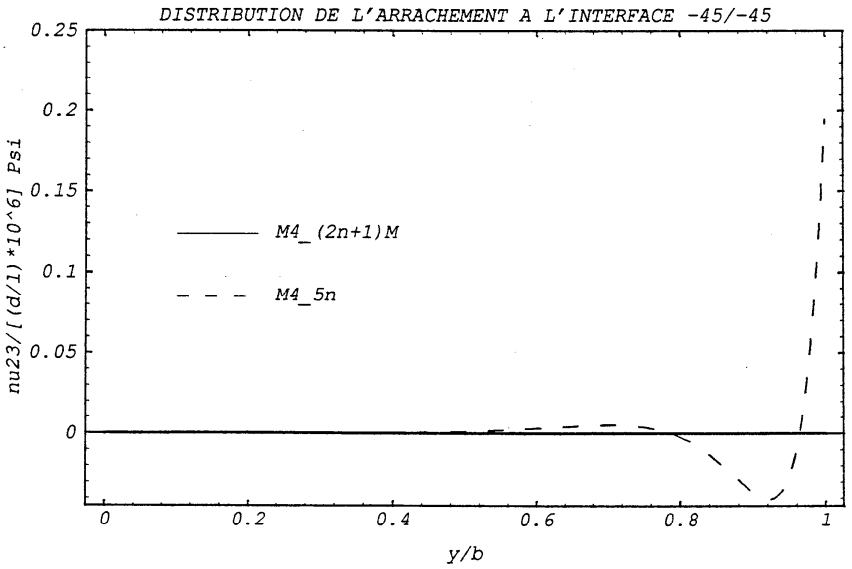


Fig. VI.3.1.a.4: Distribution de l'arrachement $v^{2.3}$ à l'interface -45°/-45°par le modèle M4_5n

Les figures indiquent l'existence d'un effort d'arrachement positif au voisinage du bord avec un fort gradient entraînant le passage de l'effort en compression à une très courte distance au bord.
Présentons la prévision du modèle M4_5n qui est conforme aux observations ci-dessus. L'effort d'arrachement maximal au bord est faible et très proche de ceux que l'on peut trouver dans les résultats de la littérature. Analysons maintenant des empilements $(\pm\theta)_s$ avec θ quelconque.

VI.3.1.b Empilements $(\pm\theta)_s$

Le résultat qui intéresse généralement les auteurs qui ont publié sur les effets de bord dans les empilements $(\pm\theta)_s$, est le maximum du champ de cisaillement τ_{xz} à l'interface $\theta/-\theta$ en fonction de θ.

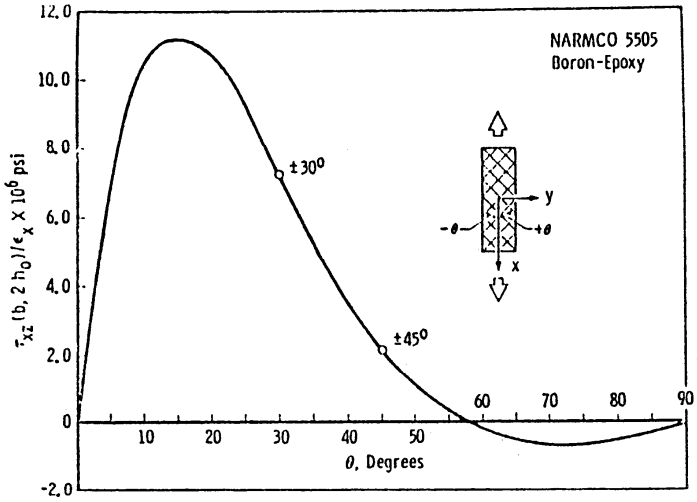


Fig. VI.3.1.b.1: Cisaillement maximum τ_{xz} à l'interface $\theta/-\theta$ par le modèle de [Pipes, 1972]

Nous constatons un pic de la contrainte de cisaillement τ_{xz} pour un angle à 15° avec notamment un changement de signe aux environs de $\theta = 60°$, ce résultat est confirmé par une analyse éléments finis 3D [Carreira, 1997].
Ces résultats peuvent dépendre du matériau, aussi ci-dessous, nous présentons deux exemples.
Dans le premier, nous comparons les résultats du champ τ_{xz} maximum à l'interface $\theta/-\theta$ pour un matériau tiré de [Pagano, 1978] prévus par les modèles M4_5n, M4_(2n+1)M. Nous constatons que les prévisions du modèle M4_(2n+1)M et M4_5n ne sont pas semblables. Le modèle M4_(2n+1)M sous estime un peu les efforts τ_{xz} ainsi que nous l'avons déjà vu dans le cas du $(\pm45°)_s$.

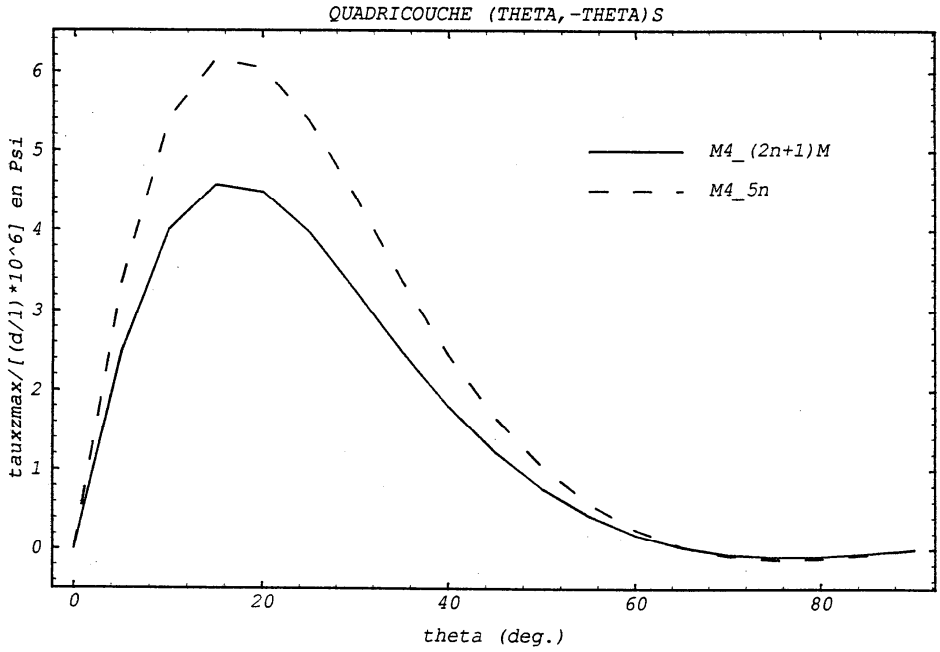


Fig. VI.3.1.b.2: Comparaison du maximum de τ_{xz} à l'interface θ/−θ des modèles M4_(2n+1)M et M4_5n pour le matériau de [Pagano, 1978]

Présentons maintenant les résultats, sous forme normalisée en fonction de l'angle θ des modèles M4_(2n+1)M, M4_5n et de l'article d'[Herakovich, 1981] dans le cas d'un matériau T300/5208 graphite epoxy dont les caractéristiques mécaniques sont trouvés dans [Lucking, Hoa et Sandar, 1984]:

$$\text{(VI.3.1.b.1)} \qquad \begin{array}{ll} E_{11} = 145{,}0\text{GPa} & \\ E_{22} = E_{33} = 10{,}7\text{GPa} & \nu_{12} = \nu_{13} = 0.31 \\ G_{12} = G_{13} = 4.5\text{GPa} & \nu_{23} = \nu_{32} = 0.49 \\ G_{23} = 3.6\text{GPa} & \nu_{21} = \nu_{31} = 0.023 \end{array}$$

Nous constatons une bonne similitude des deux courbes à la différence près que celle donnée par Herakovich est toujours positive alors que celle obtenue par le modèle M4_(2n+1)M est légèrement négative à partir de l'angle à 60°. Notons que pour un matériau différent [Anquez & Al. 1985] trouve aussi une courbe toujours positive.

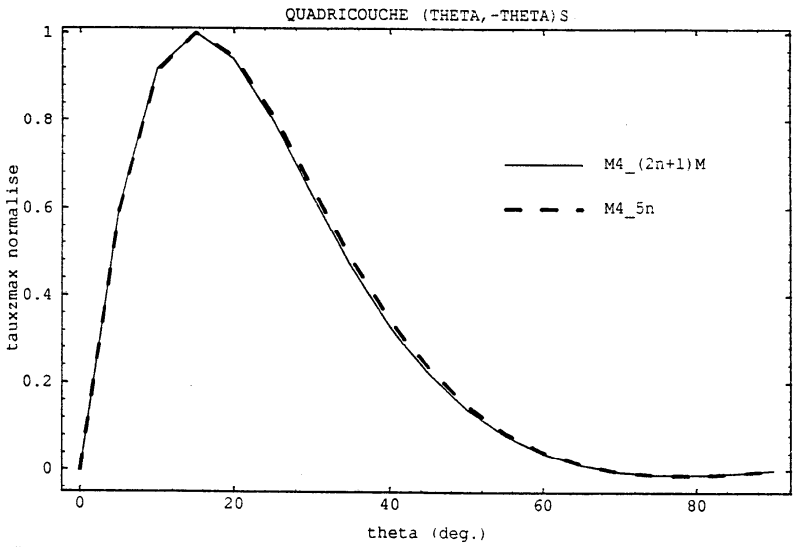


Fig. VI.3.1.b.3: Comparaison du maximum normalisé de τ_{xz} à l'interface θ/–θ des modèles M4_(2n+1)M et M4_5n pour le matériau T300/5208

Donnons ci-dessous, pour information, les différents champs d'interface au bord de la plaque dans le cas d'une modélisation M4_5n, c'est à dire les contraintes τ_{xz}, τ_{yz} et $v^{1.2}$ à l'interface θ/–θ et la contrainte $v^{2.3}$ à l'interface -θ/–θ :

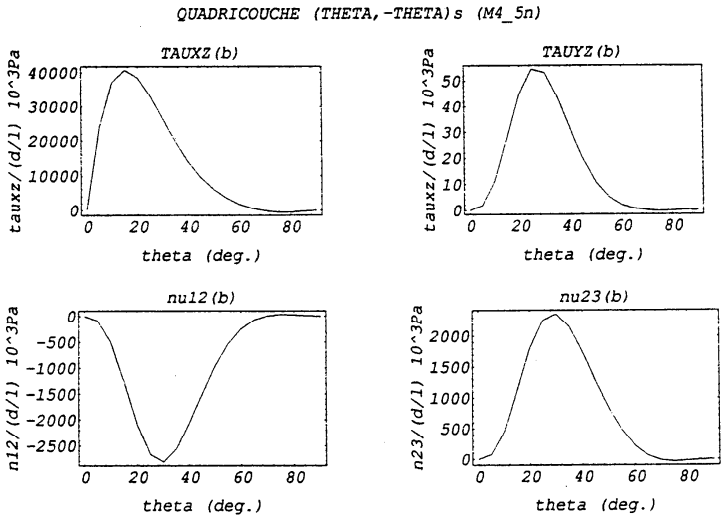


Fig. VI.3.1.b.4: Champs τ_{xz}, τ_{yz} et $v^{1.2}$ au bord à l'interface θ/–θ et champ $v^{2.3}$ au bord à l'interface -θ/–θ pour le modèle M4_5n avec un matériau T300/5208

Nous constatons que les efforts τ_{yz} restent très petits par rapport aux efforts τ_{xz}. Par ailleurs, l'interface θ/–θ est en compression $\left(v^{1.2} < 0\right)$ au bord alors que l'interface -θ/–θ est en traction $\left(v^{2.3} > 0\right)$, les modules de ces efforts restent très faibles. Le modèle M4_(2n+1)M donne pour les mêmes efforts des valeurs nulles. Ainsi pour un empilement ±θ, le délaminage sera piloté par la contrainte de cisaillement τ_{xz} à l'interface θ/–θ.

VI.3.1.c Effet d'épaisseur dans le $(\pm 15_m)_s$

Nous validons, pour cet exemple les calculs analytiques du huit couches par le modèle M4_(2n+1)M. Le phénomène d'effet d'épaisseur a été étudié par [Lecuyer et Engrand, 1992]. Les auteurs se sont intéressés au cisaillement τ_{xz} à l'interface 15/-15 pour un matériau AS/3501-6 dont les caractéristiques sont données ci-dessous:

$$\text{(VI.3.1.c.1)} \qquad \begin{array}{l} E_{11} = 129533\text{MPa} \\ E_{22} = E_{33} = 13056\text{MPa} \\ G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5861\text{MPa} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.3 \\ e = 0.169\text{mm} \end{array}$$

Le multicouche est soumis à une force de traction $N_{xx} = 1.\text{MPa}$.
Les courbes sont données pour m=1 par les modèles M4_(2n+1)M et M4_5n et pour m=2 par le modèle M4_(2n+1)M seulement.

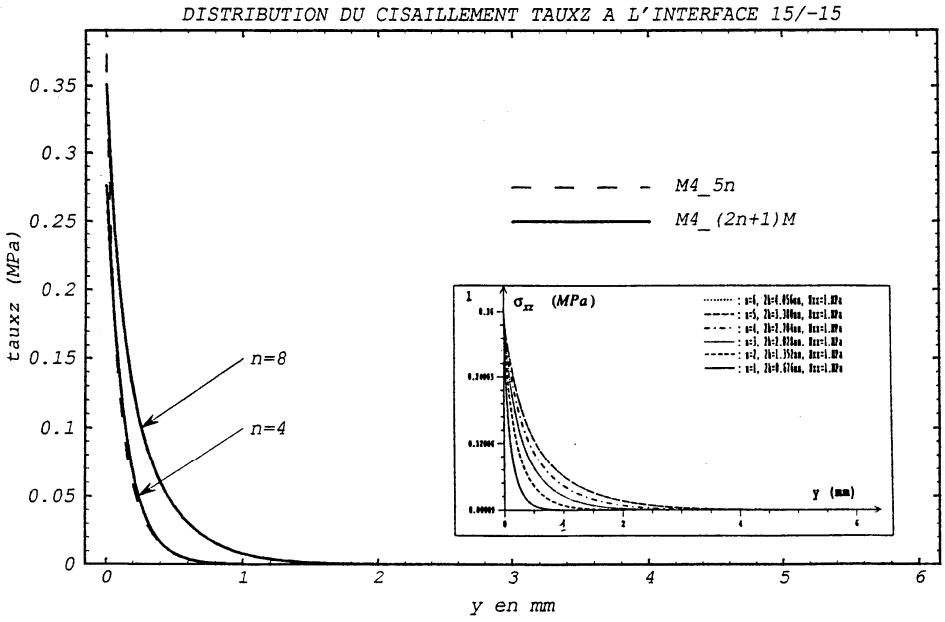


Fig. VI.3.1.c.1: Effet d'épaisseur dans le $(\pm 15_m)_s$

On constate un bon accord entre les prévisions des différents modèles. Ces résultats confirment que la profondeur de l'effet de bord est sensiblement égale à l'épaisseur de l'empilement.

VI.3.2 Cas du multicouche $(\theta,\theta-90°)_s$ *en traction*

Cette famille d'empilement présente un intérêt particulier pour deux raisons.
1) Les éprouvettes peuvent être facilement obtenues par une découpe suivant un angle θ dans une plaque $(0°,90°)_s$.
2) Si l'on s'intéresse à une plaque $(0°,90°)_s$ trouée, au bord du trou à un angle θ dans le repère local lié au bord libre, l'empilement apparaît être $(\theta,\theta-90°)_s$. Nous reviendrons sur ce point dans la section (VI.4).
Pour ces raisons les empilements $(\theta,\theta-90°)_s$ sont souvent étudiés d'un point de vue théorique ou expérimental dans la littérature. Pour nos comparaisons, nous nous référons principalement à [Raju & Crews, 1981]. Nous donnons ci-dessous les courbes normalisées par leur maximum de τ_{xz} à l'interface $\theta/\theta-90°$ en fonction de θ, lesquelles sont obtenues à l'aide des modèles M4_5n et M4_(2n+1)M. Nous ajoutons sur la même figure, la figure 12 de [Raju & Crews, 1981]:

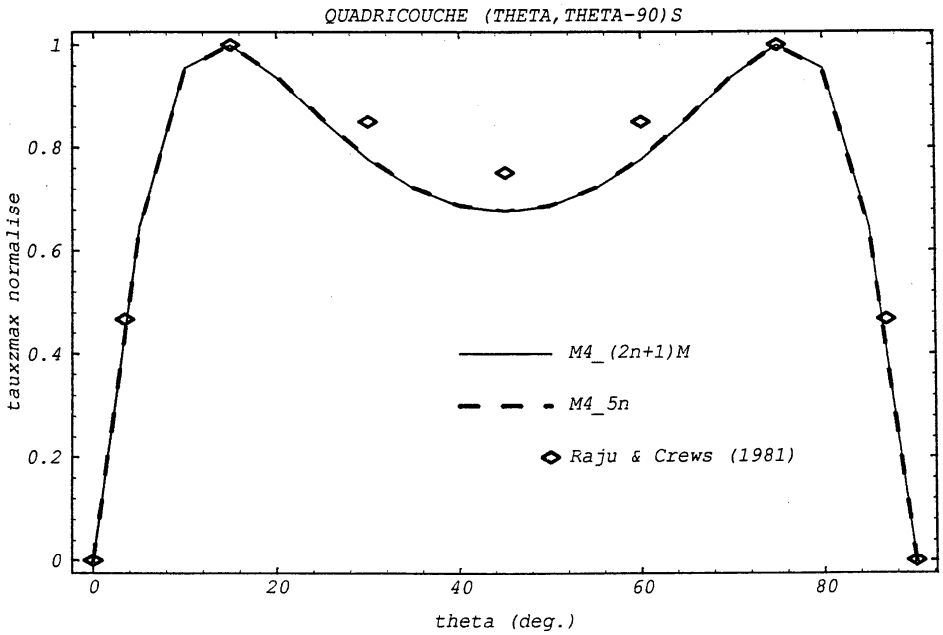


Fig. VI.3.2.1: τ_{xz} normalisé à l'interface $\theta/\theta-90°$ en fonction de θ d'un empilement $(\theta,\theta-90°)_s$

Nous constatons la très grande similitude de ces courbes. Cependant si on compare les valeurs prévues par le M4_5n et le M4_(2n+1)M, on remarque que ce dernier modèle sous-estime un peu τ_{xz} comme pour les empilements $(\theta,-\theta)_s$.

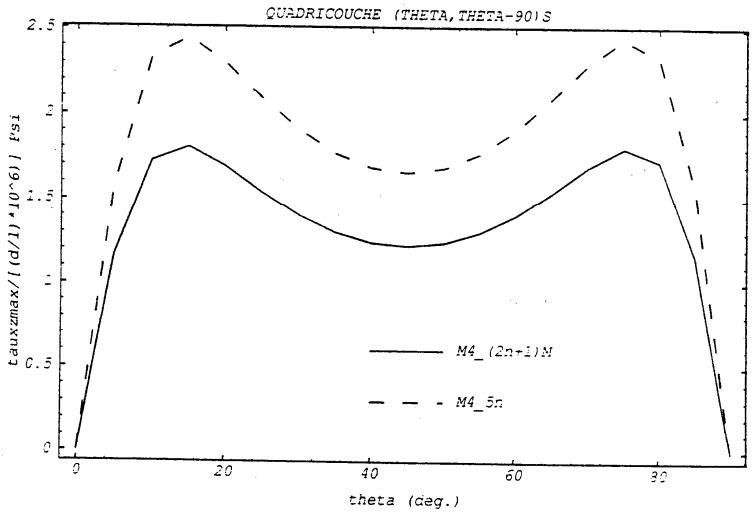


Fig. VI.3.2.2: τ_{xz} à l'interface $\theta/\theta-90°$ en fonction de θ d'un empilement $(\theta,\theta-90°)_s$ avec les modèles M4_(2n+1)M et M4_5n

Présentons maintenant les courbes donnant le cisaillement τ_{yz} au bord à l'interface $\theta/\theta-90°$ par les modèles M4_(2n+1)M et M4_5n.

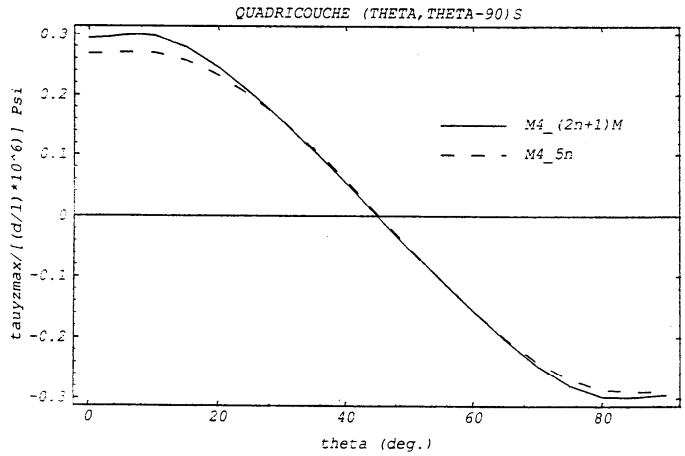
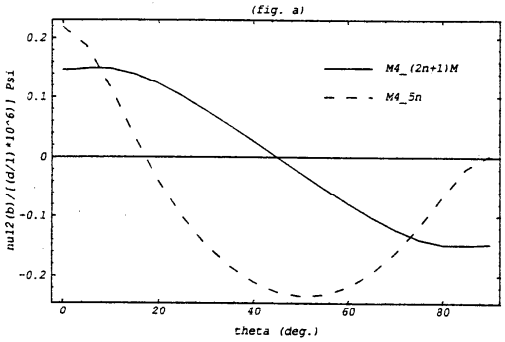


Fig. VI.3.2.3: τ_{yz} à l'interface $\theta/\theta-90°$ en fonction de θ d'un empilement $(\theta,\theta-90°)_s$ avec les modèles M4_(2n+1)M et M4_5n

Nous constatons que les deux prévisions sont très proches. A $\theta = 45°$ τ_{yz} est à peu près nul ainsi que nous l'avions indiqué plus haut. Pour les angles proches de $\theta = 0°$ et $\theta = 90°$, la valeur absolue de τ_{yz} est supérieure à τ_{xz}. Pour les autres valeurs de θ, la valeur de τ_{xz} est nettement supérieure à celle de τ_{yz}.

Analysons maintenant les efforts d'arrachement $\nu^{1.2}$ et $\nu^{2.3}$ au bord prédits par le modèle M4_5n. Il est intéressant de les comparer à l'effort linéique d'arrachement au bord prévu par le modèle M4_(2n+1)M. Pour avoir des unités identiques, nous reportons ci-dessous les efforts linéiques d'arrachement du modèle M4_(2n+1)M divisés par l'épaisseur de la couche.



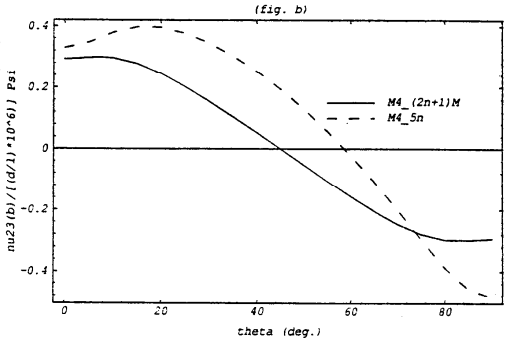


Fig. VI.3.2.4: Comparaison des $\nu^{1.2}$ à l'interface $\theta / \theta - 90°$ (fig. a) et $\nu^{2.3}$ à l'interface $\theta - 90° / \theta - 90°$(fig. b) en fonction de θ d'un empilement $(\theta, \theta - 90°)_s$ par le modèle M4_5n et les forces linéiques correspondantes du modèle M4_(2n+1)M divisées par e

On constate qu'à l'interface (2, 3) les courbes données par les deux modèles ont une allure vaguement semblable alors qu'à l'interface (1, 2) les différences sont beaucoup plus prononcées en particulier sur toute une partie de la courbe $\theta \in [15°, 45°]_s$ ou les prévisions d'efforts sont de signes opposés.

Cette différence très importante de prévision entre les modèles mérite une analyse plus approfondie. Nous pensons que le modèle M4_5n prédit convenablement les efforts d'arrachement 3D, mais nous pensons aussi que les prévisions du modèle M4_(2n+1)M doivent avoir un lien direct avec le

phénomène de délaminage. Il ne s'agit donc pas de rejeter trop vite le modèle M4_(2n+1)M sur la base de cet échec de prévision des efforts d'arrachement 3D très locaux.

On peut tout d'abord interpréter ces différences en disant que les efforts linéiques du modèle M4_(2n+1)M représentent une résultante sur une certaine distance des efforts d'arrachement 3D. Pour informer plus complètement sur ce point, nous donnons en annexe IX la distribution des efforts d'arrachement en y à l'interface (1,2) pour les modèles M4_(2n+1)M et M4_5n et à l'interface (2.3) pour le modèle M4_5n en fonction des valeurs de θ. On peut, par exemple, ainsi expliquer que le maximum de l'effort linéique d'arrachement à l'interface (2, 3) du modèle M4_(2n+1)M se situe à un angle différent de celui pour lequel l'effort d'arrachement du modèle M4_5n est maximum. En effet pour les angles plus faibles que 20°, l'effort $\nu^{2.3}$ du modèle M4_5n est plus faible que le maximum obtenu autour de 20°, mais il décroît moins vite en fonction de y.

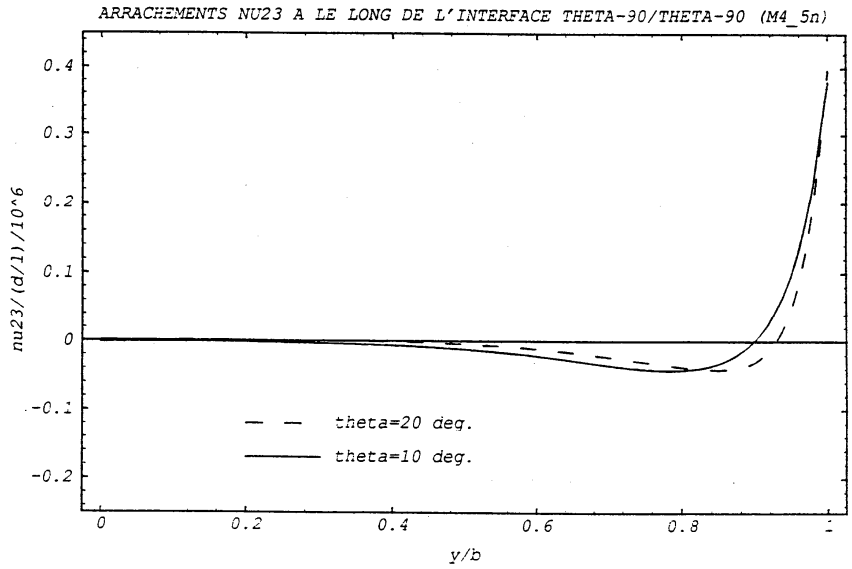


Fig. VI.3.2.5: Exemple de comparaison des $\nu^{2.3}$ à $\theta = 10°$ et à $\theta = 20°$ par le modèle M4_5n pour l'empilement $(\theta, \theta - 90°)_s$

Ainsi la résultante sur une profondeur de l'ordre de e est supérieur pour $\theta = 10°$ par rapport à $\theta = 20°$. Il en est de même de la force linéique d'arrachement prévue par le modèle M4_(2n+1)M. Nous reviendrons plus en détail sur ce point dans l'analyse de la plaque $(0°, 90°)_s$ trouée de la section suivante.

Pour mieux comprendre, nous comparons le taux de relaxation d'énergie lors du délaminage dans le plan de symétrie de l'empilement (2 fissures) au taux de relaxation d'énergie entre les couches θ/θ−90 (4 fissures):

Fig. VI.3.2.5: Schémas de plaques délaminées (2fissures et 4 fissures)

Nous étudions, comme dans le chapitre précédent la situation où les fissures ont suffisamment progressé pour que l'on puisse distinguer trois types de zones.

1) La zone centrale où les champs sont très proches de ceux déduits d'une approche par la théorie classique de plaque multicouche. Dans cette zone centrale la densité surfacique d'énergie à déformation de traction imposée est identique dans les deux cas de délaminage ci-dessus. Lors d'une progression de fissure de longueur da, cette zone sera "raccourcie" de la longueur 2da. La variation d'énergie par unité de longueur suivant x est égale à:

(VI.3.2.1) $$\Delta W_c = -\frac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2 E_{L_{(\theta,\theta-90°)_s}}(2da).4e$$

où $E_{L_{(\theta,\theta-90°)_s}}$ est le module d'Young équivalent suivant x de l'empilement $(\theta,\theta-90°)_s$

2) Les zones proches des fissures de délaminage. Dans ces zones, les champs sont compliqués, mais si la fissure a déjà suffisamment progressé, ils sont simplement translatés lors d'une progression de fissure sous chargement de déformation constant. Dans un calcul de taux de relaxation d'énergie dans une progression de fissures sous déformation constante, le bilan énergétique correspondant à la translation de ces zones sera nul.

3) La zone correspondant à l'extrémité des parties délaminées. Dans cette zone, l'influence de l'extrémité des fissures ne sera plus très sensible. Leur densité surfacique d'énergie pourra être étudiée simplement à l'aide de la théorie classique des plaques multicouches. Elle est là aussi uniforme dans chaque lèvre.

Dans le cas de quatre fissures chacune des 6 lèvres est constituée d'un matériau homogène.

Dans le cas de deux fissures progressant dans le plan de symétrie, chacune des quatre lèvres est formée d'un empilement de deux couches.

La densité surfacique d'énergie dans chacune des lèvres pourra être approchée en considérant que chacune d'elles est soumise à une traction uniaxiale à déformation ε_{xx} imposée avec les courbures χ_{xx} et χ_{xy} nulles et les efforts membranaires N_{yy}, N_{xy} et de flexion M_{yy} nuls sur les faces perpendiculaires à $\underline{e}_y$ [Anquez & Al., 1990].

Dans le cas de 4 fissures, la densité surfacique d'énergie en un point de la zone délaminée est la somme des densités surfaciques d'énergie pour les trois lèvres, soit:

(VI.3.2.2) $$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2 2e\left(E_{L_\theta} + E_{L_{(\theta-90°)}}\right)$$

où E_{L_θ} est le module d'Young suivant x de la couche à θ.

Dans le cas de 2 fissures, la densité surfacique d'énergie est:

(VI.3.2.3) $$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2 4eE_{L_{(\theta,\theta-90°)}}$$

où $E_{L_{(\theta,\theta-90°)}}$ est le module d'Young suivant x de l'empilement à deux couches non symétrique $(\theta,\theta-90°)$.

La variation d'énergie dans ces zones par unité de longueur suivant x lors d'une progression de fissure da est le produit des densités ci-dessous par une longueur 2da.

Le taux de relaxation d'énergie pour chaque fissure est:

(VI.3.2.4) $$G = -\frac{\partial W}{n_f \partial a}$$

où n_f est le nombre de fissures qui progressent.

Il vaut dans le cas de quatre fissures:

(VI.3.2.5) $$G = \frac{1}{4}\left(\frac{d}{l}\right)^2 2e\left(2E_{L_{(\theta,\theta-90°)_s}} - E_{L_\theta} - E_{L_{(\theta-90°)}}\right)$$

et dans le cas de deux fissures:

(VI.3.2.6) $$G = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{l}\right)^2 4e\left(E_{L_{(\theta,\theta-90°)_s}} - E_{L_{(\theta,\theta-90°)}}\right)$$

Considérons un bicouche non symétrique en traction suivant x. Négligeons, en première approximation les efforts de flexion de chacune des couches par rapport à leur propre plan de symétrie. Notons $\tilde{\tilde{N}}^1$ (respectivement $\tilde{\tilde{N}}^2$) les efforts membranaires de la couche 1 (respectivement 2). L'équilibre du tenseur des efforts résultants du bicouche $(\theta,\theta-90°)$ sur une face perpendiculaire à l'axe $\underline{e}_y$ s'écrit:

- Résultante suivant y sur la face du bicouche perpendiculaire à $\underline{e}_y$:

(VI.3.2.7) $$N^1_{yy}+N^2_{yy}=0$$

- Moment par rapport à l'axe $\underline{e}_x$, dans le plan de l'interface du bicouche, des efforts sur la face du bicouche perpendiculaire à $\underline{e}_y$:

(VI.3.2.8) $$\frac{e}{2}N^1_{yy}-\frac{e}{2}N^2_{yy}=0$$

- Résultante suivant x sur les faces du bicouche perpendiculaire à $\underline{e}_y$:

(VI.3.2.9) $$N^1_{xy}+N^2_{xy}=0$$

- Moment par rapport à l'axe $\underline{e}_y$, dans le plan de l'interface du bicouche, des efforts sur la face du bicouche perpendiculaire à $\underline{e}_y$:

(VI.3.2.10) $$\frac{e}{2}N^1_{xy}-\frac{e}{2}N^2_{xy}=0$$

Ainsi, si l'on néglige les moments de flexion de chaque couche par rapport à leur propre plan de symétrie, l'état des contraintes dans chaque couche est membranaire uniaxial $\left(N^i_{yy}=0\ N^i_{xy}=0\right)$. Donc, avec cette approximation:

(VI.3.2.11) $$E_{L_{(\theta,\theta-90°)}}\approx\frac{E_{L_\theta}+E_{L_{\theta-90°}}}{2}$$

On constate alors, qu'au même niveau d'approximation, le taux de relaxation d'énergie calculé plus haut, dans le cas de quatre fissures est égal à la moitié du taux de relaxation d'énergie dans le cas de deux fissures.

Nous relions, bien sûr, ceci au fait que, dans le modèle M4_(2n+1)M, l'effort linéique au bord à l'interface $(\theta,\theta-90°)$ est égal à la moitié de celui à l'interface $(\theta-90°,\theta-90°)$. C'est un argument en faveur de l'opinion que l'effort linéique d'arrachement du modèle M4_(2n+1)M est une

information synthétique directement utilisable pour la prévision des délaminages. Bien sûr, ce point de vue devra être approfondi pour être véritablement accepté et des calculs plus rigoureux de taux de relaxation d'énergie devront être faits dans des situations plus variées.

VI.4 ANALYSE DE LA PLAQUE TROUEE $(0°,90°)_S$ EN TRACTION PAR LE MODELE M4_(2N+1)M

Dans cette dernière section de ce travail, nous allons montrer comment, à l'aide des modèles M4_5n et M4_(2n+1)M et de la méthode approchée d'analyse quasi 3D de [Raju & Crews, 1982] il est possible d'analyser simplement les concentrations de contrainte au bord d'un trou dans une plaque $(0°,90°)_s$ en traction. Cette analyse s'appuie sur la solution analytique pour une plaque trouée homogène anisotrope équivalente à l'empilement. Nous rappelons les éléments essentiels de cette solution en VI.4.1. Dans la section VI.4.2 nous rappelons en quoi consiste la méthode quasi 3D de [Raju & Crews, 1982]. Cette méthode est bien adaptée à l'étude de plaques trouées dans lesquelles le rayon du trou est supérieur à trois fois l'épaisseur totale de la plaque. Dans la section VI.4.3, nous présentons notre analyse. Elle combine la solution analytique de [Lekhnitskii, 1968] et notre étude sur les empilements $(\theta,\theta-90°)_s$ donnée dans la section précédente en VI.3.2. Nous comparons nos prédictions à celles données par [Raju & Crews, 1982] à l'aide d'une étude éléments finis 3D ou quasi 3D.

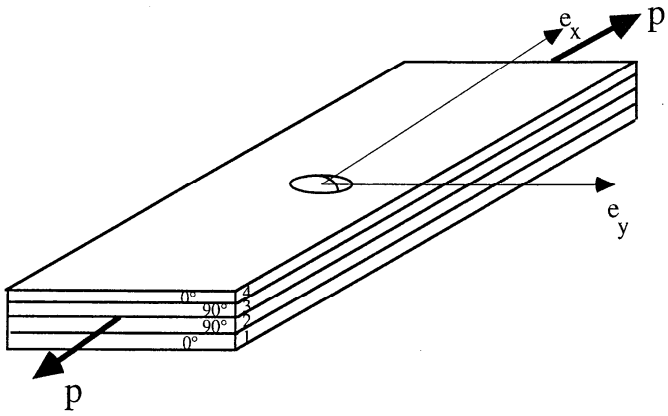


Fig. VI.4.1: Dessin de la plaque trouée $(0°,90°)_s$ étudiée

VI.4.1 Plaque homogène trouée en traction

Considérons une plaque homogène infinie, percée d'un trou de rayon R, constituée d'un matériau anisotrope dont les caractéristiques élastiques sont E_L^h, E_T^h, ν_{LT}^h et G_{LT}^h. On choisit un repère $(0,\underline{e}_x,\underline{e}_y,\underline{e}_z)$ tel que l'axe des z soit orthogonal à la plaque, l'axe des x parallèle à la direction longitudinale et 0 le centre du trou. On soumet la plaque à l'infinie à un champ de contrainte $\overline{\overline{\sigma}}^d = p\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$.

Ce problème admet une solution analytique [Lekhnitskii, 1968] (page 171->177). En particulier, il est possible de déterminer la déformation d'allongement $\varepsilon_{\theta\theta}$ au bord du trou $(x = R\cos\theta \quad y = \pm R\sin\theta)$:

(VI.4.1.1) $$\varepsilon_{\theta\theta}(\theta) = \frac{p}{E_T^h}\left(k(k+n)\cos^2\theta - k\sin^2\theta\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = \sqrt{\dfrac{E_T^h}{E_L^h}} \\ n = \sqrt{2\left(\dfrac{E_T^h}{E_L^h} - \nu_{TL}^h\right) + \dfrac{E_T^h}{G_{LT}^h}} \end{cases}$$

où

(VI.4.1.2) $$\nu_{TL}^h = \frac{E_T^h}{E_L^h}\nu_{LT}^h$$

Cette analyse peut servir de première approximation pour le problème d'une plaque trouée constituée d'un empilement $(0°,90°)_s$.

Dans ce cas, si on note E_L, E_T, ν_{LT} et G_{LT} les caractéristiques élastiques de la couche à 0°, le matériau équivalent à pour caractéristiques:

(VI.4.1.3) $$\begin{aligned} E_L^h = E_T^h &= \frac{1}{2(1-\nu_{LT}\nu_{TL})}\left(E_L + E_T - \frac{4\nu_{LT}^2 E_T^2}{(E_L+E_T)}\right) \\ \nu_{LT}^h &= \frac{2\nu_{LT}E_T}{(E_L+E_T)} \\ G_{LT}^h &= G_{LT} \end{aligned}$$

La déformation d'allongement au bord du trou peut en première approximation être calculée à l'aide [Lekhnitskii, 1968]. Elle est reportée dans la figure ci-dessous:

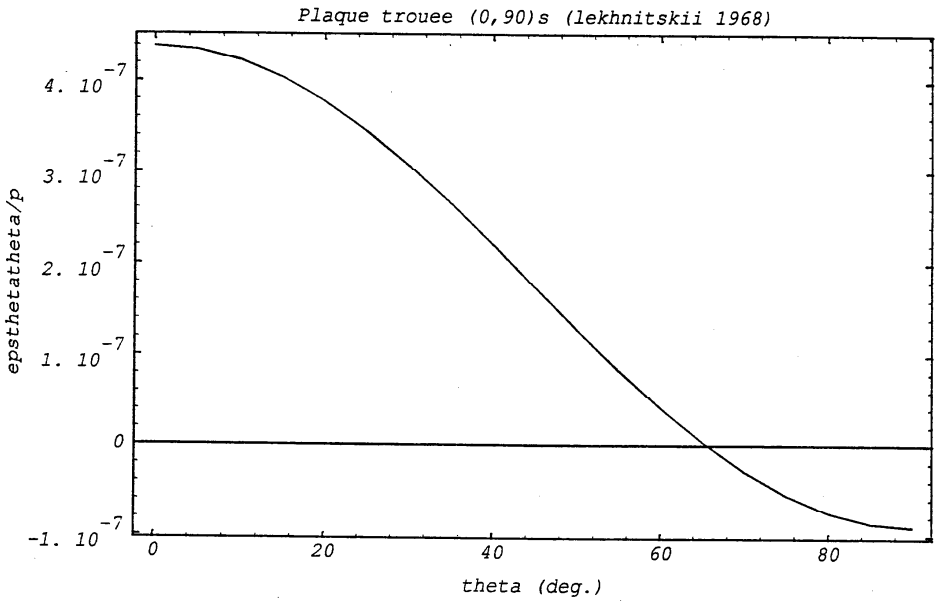


Fig. (VI.4.1.1): Déformation d'allongement $\varepsilon_{\theta\theta}$ au bord du trou

Voyons maintenant comment nous servir de cette approximation pour étudier les effets de bord à la frontière du trou.

VI.4.2 Méthode d'analyse quasi 3D au bord du trou

Cette méthode proposée dans [Raju & Crews, 1982] consiste à considérer que si le rayon du trou est assez grand par rapport à la largeur de la plaque, un point au bord du trou "ne voit" pas la courbure de la frontière et donc localement les champs peuvent être analysés à l'aide d'un modèle de plaque semi-infinie soumise à une déformation d'allongement dans la direction parallèle au bord libre de valeur $\varepsilon_{\theta\theta}$ (fig.15 [Raju & Crews, 1982]). Ces auteurs montrent qu'il n'est pas utile de prendre en compte le gradient de cette déformation dans la profondeur de la plaque.
En un point au bord du trou, situé à un angle θ, l'empilement par rapport au bord libre semble être $(\theta,\theta-90°)_s$.

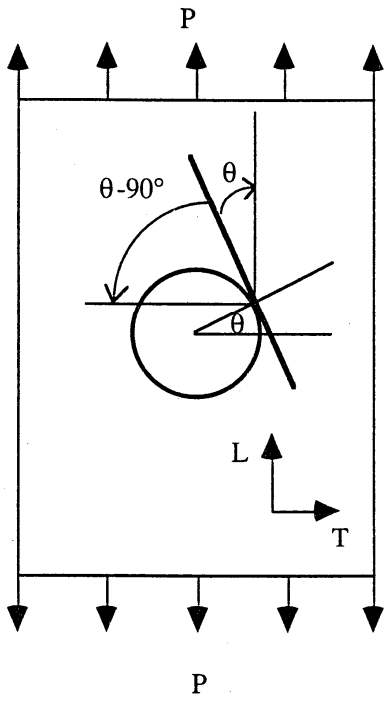


Fig. VI.4.2.1: Analyse du bord du trou de la plaque trouée $(0°,90°)_s$

On peut donc s'inspirer de l'analyse précédente concernant les plaques $(\theta,\theta-90°)_s$ en remplaçant la déformation d'allongement d/l par $\varepsilon_{\theta\theta}(\theta)$ pour avoir une analyse simplifiée des concentrations de contraintes au bord du trou.

VI.4.3 Comparaison des résultats du M4_(2n+1)M, de [Raju & Crews, 1982]

Compte tenu de la méthode d'analyse approchée utilisée, les courbes présentées ci-dessous sont le "produit" de la courbe (VI.4.1.1) donnant la déformation $\varepsilon_{\theta\theta}(\theta)$ au bord du trou pour la plaque homogène équivalente et des courbes du paragraphe VI.3.2 concernant l'analyse du multicouche $(\theta,\theta-90°)_s$.

Commençons en présentant la courbe donnant la prévision de la contrainte $\sigma_{z\theta}$ à l'interface 0°/90°, soit le produit des courbes (VI.4.1.1) et (VI.3.2.2) donnant l'effort prédit par le modèle M4_5n. Pour la comparaison, nous reportons sur la même courbe celle de la figure 13 page 122 de [Raju & Crews, 1982].

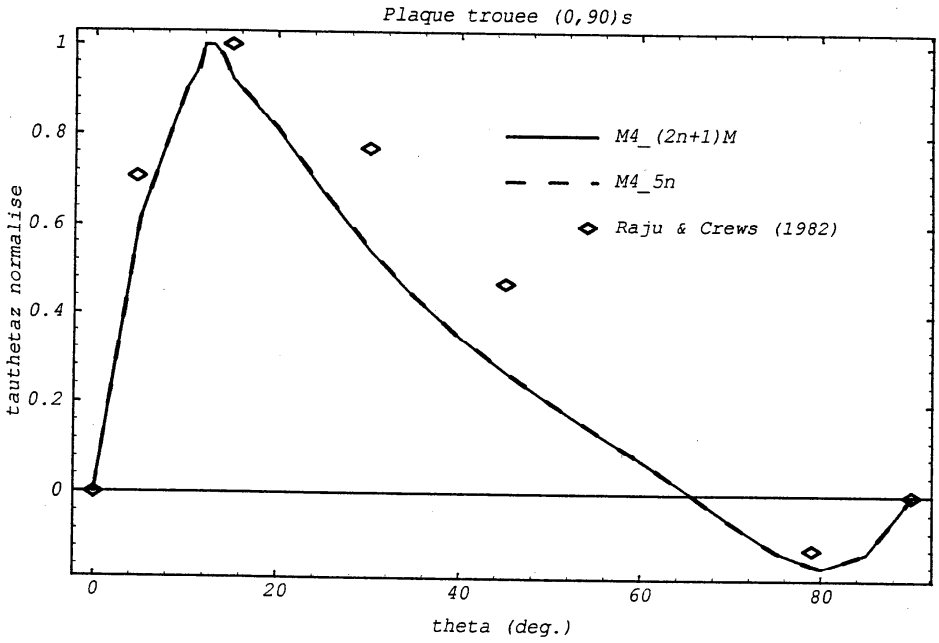


Fig. VI.4.3.1: Comparaison des contraintes $\sigma_{z\theta}$ normalisées à l'interface 0°/90° par les modèles M4_(2n+1)M, M4_5n et celui de [Raju & Crews, 1982]

L'allure des courbes est la même pour ces différents modèles. On observe un pic des contraintes pour un angle d'environ 10° à 15°. Bien sûr si l'on regarde les valeurs maximales prévues par modèles M4_5n et M4_(2n+1)M, on constate, ainsi que nous l'avons dit plus haut lors de l'étude du $(\theta,\theta-90°)_s$ en traction, que les prévisions du modèle M4_(2n+1)M sont plus faibles que celles du modèle M4_5n.

Donnons maintenant la courbe du modèle M4_5n présentant l'effort d'arrachement dans le plan de symétrie de l'empilement (produit de VI.4.1.1 et VI.3.1.b.4.d) et celle de la force linéique correspondante divisée par e du modèle M4_(2+1)M.

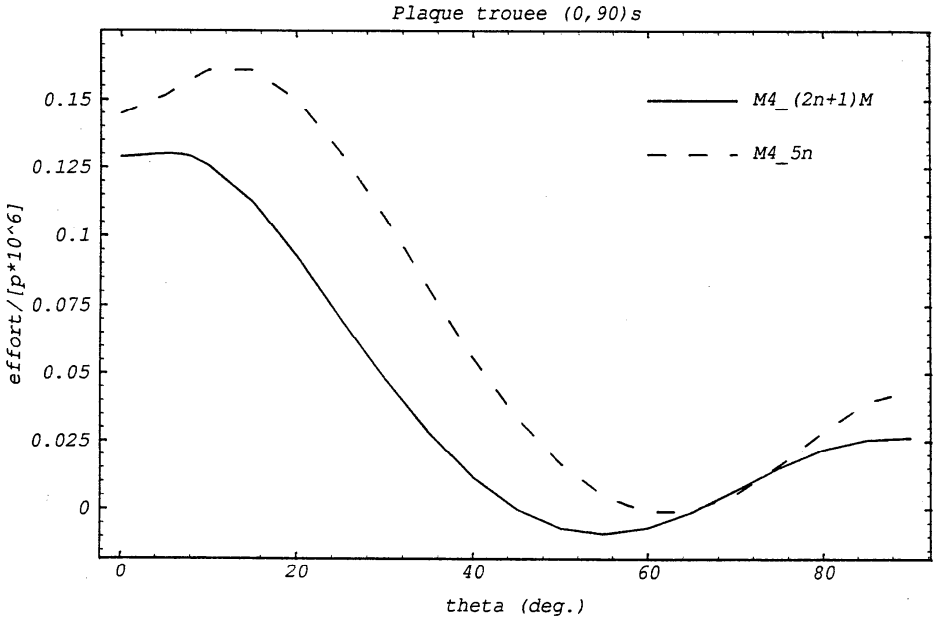


Fig. VI.4.3.2: Comparaison de l'arrachement $v^{2.3}$ du modèle M4_5n et de la force linéique correspondante divisée par e du modèle M4_(2n+1)M à l'interface 90°/90° en fonction de θ de la plaque $(0°,90°)_s$ trouée

L'allure générale de ces courbes est senblable à celles que l'on trouve dans la littérature (exemple de la figure 5a p136 de [Labossière & Al., 1988]).

Comparons la force linéique concentrée d'arrachement prévue par le modèle M4_(2n+1)M dans le plan de symétrie au voisinage du bord et la distribution de l'effort d'arrachement $v^{2.3}$ prévue par le modèle M4_5n.

Pour cela, dessinons ci-dessous la courbe donnant l'effort linéique d'arrachement du modèle M4_(2n+1)M divisée par e (pour des raisons d'homogénéité) et la distribution de $v^{2.3}$ pour les rayons $R+\frac{e}{10}; R+\frac{e}{2}$

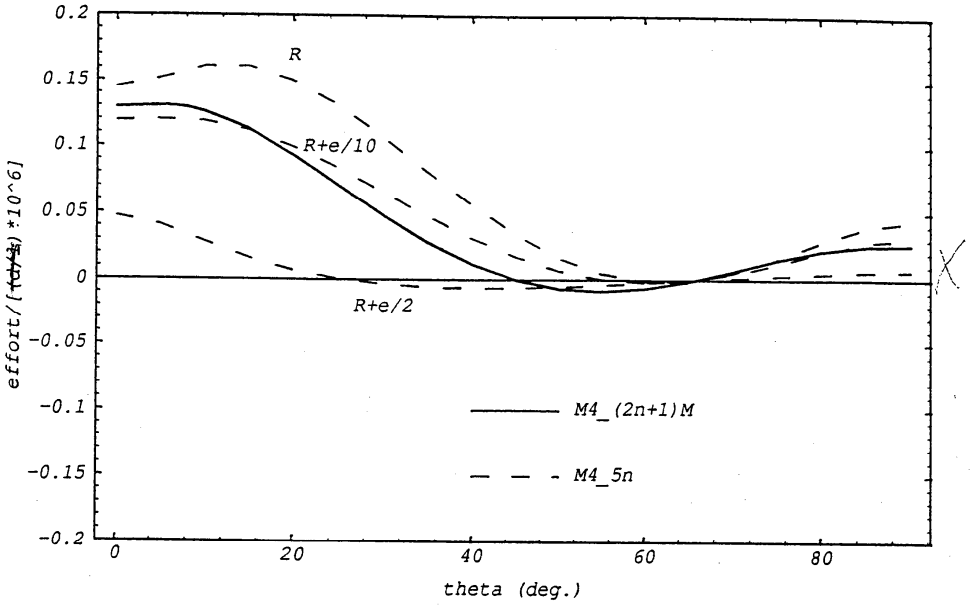


Fig. VI.4.3.3: Effort linéique d'arrachement divisé par e du modèle M4_(2n+1)M et distribution de $v^{2.3}$ du M4_5n pour les rayons R, $R+\frac{e}{10}$; $R+\frac{e}{2}$ à l'interface 90°/90°de la plaque $(0°,90°)_s$ trouée

On constate sur ces courbes que si l'on souhaite avoir un critère de délaminage portant sur la valeur moyenne des efforts d'arrachements 3D à l'interface sur une certaine distance, il peut probablement être remplacé par l'effort linéique d'arrachement au bord déterminé par le modèle M4_(2n+1)M.

VI.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons établi les solutions analytiques d'une plaque $(\theta_1,\ldots,\theta_m)_s$ en traction, dans le cas particulier $(\theta_1,\theta_2)_s$ avec $G_{TN} = G_{LN}$ pour le modèle M4_5n et dans le cas général pour le modèle M4_(2n+1)M. Nous rappelons que nous donnons dans l'annexe VII le détail des calculs.
Les comparaisons des efforts d'interface obtenus par ces deux modèles ont été menées à l'aide de courbes tracées par le logiciel de calcul formel MATHEMATICA et la retranscription de points de courbes tirées de la littérature.
L'analyse du $(\pm 45)_s$, appartenant à la fois à la famille des $(\pm\theta)_s$ et des $(\theta,\theta-90°)_s$, nous a permis de trouver un bon accord des résultats avec ceux de la littérature. Sur l'interface 45°/-45°, la

contrainte de cisaillement τ_{xz} est prédominante par rapport à la contrainte de cisaillement τ_{yz}. Sur cette même interface l'effort d'arrachement est nul pour le modèle M4_(2n+1)M et est faiblement en compression au bord puis devient plus loin faiblement positif pour le modèle M4_5n. A l'interface -45°/-45°, le modèle M4_5n prédit au bord un effort d'arrachement légèrement positif. Ces résultats sont conformes à ceux de la littérature. Le délaminage est piloté par la contrainte de cisaillement τ_{xz} à l'interface 45°/-45°.

Dans les empilements $(\pm\theta)_s$ la contrainte la plus importante à l'interface $\theta/-\theta$ est aussi la contrainte de cisaillement τ_{xz} à l'interface. Les courbes obtenues pour différents matériaux sont en bonne corrélation avec celles tirées de la littérature. Notamment τ_{xz} est maximum pour l'empilement $(\pm 15)_s$.

L'étude des empilements $(\theta,\theta-90°)_s$ par les modèles M4_(2n+1)M et M4_5n, montre encore l'importance du cisaillement τ_{xz} au bord à l'interface θ/θ -90°, dès que l'on s'éloigne des angles à 0° et à 90°. Un pic de ces contraintes est obtenu pour les angles à 15° et 75°. Les contraintes d'interface sont correctement prédites par le modèle M4_5n. La comparaison de l'effort d'arrachement du modèle M4_5n et de l'effort linéique d'arrachement du modèle M4_(2n+1)M semble contradictoire sur l'interface θ -90°/θ -90° pour un angle compris entre 15°et 45°. Nous pensons que le modèle M4_(2n+1)M tout en ne prédisant pas fidèlement les champs de contraintes 3D, donne cependant une information plus synthétique sur les efforts responsables du délaminage. C'est pourquoi, nous pensons que c'est un bon indicateur de l'information essentielle à retenir lors d'une analyse du délaminage. Ce point de vue n'est qu'ébauché et mériterait d'être confirmé par une analyse plus approfondie sur des exemples plus variés.

L'analyse des empilements $(\theta,\theta-90°)_s$, à l'aide de l'approximation quasi 3D proposée par [Raju & Crews, 1982], nous permet de donner des indications sur les efforts d'interface de la plaque trouée $(0°, 90°)_s$ en traction pour les modèles M4_5n et M4_(2n+1)M. Pour la contrainte de cisaillement prédominante $\sigma_{z\theta}$, les résultats quasi analytiques de nos modèles sont en accord avec l'analyse éléments finis de [Raju & Crews, 1982]. Ils prévoient un pic de cisaillement aux alentours de 75° par rapport à la direction de traction. L'allure des courbes d'arrachement est semblable à celle de la littérature.

CONCLUSION PARTIE II

Dans cette seconde partie, nous avons analysé, dans le chapitre V, une plaque stratifiée $(0°, 90°)_s$ en traction par quatre différents modèles multiparticulaires (M4_7n, M4_5n, M4_3nM et M4_(2n+1)M). La comparaison des prévisions de ces différents modèles entre eux et avec les résultats de la littérature ([Pagano, 1978] et [Wang & Crossman, 1977]) nous permettent d'en recommander deux principalement.

Le modèle M4_5n tout d'abord, car il se présente comme un simple empilement de plaques de Reissner-Mindlin couplées à l'aide d'une énergie faisant intervenir les efforts des différentes interfaces. Ce modèle semble capable d'approcher de manière très convenable les efforts intérieurs aux interfaces.

Le modèle M4_(2n+1)M ensuite, car, bien qu'il ne permette pas une prédiction très fidèle des efforts 3D, il conduit à un concept d'effort linéique d'arrachage au bord à l'interface, qui semble directement relié au taux de relaxation d'énergie dans un éventuel phénomène de délaminage. Ce modèle, dont la très grande simplicité est attirante, permet des solutions analytiques variées et se prête bien à l'écriture de critères de délaminage simples et physiquement assez semblables à ceux de [Whitney & Nuismer, 1974] [Kim & Soni, 1984].

Dans le chapitre VI, nous avons analysé une plaque stratifiée $(\theta_1,...,\theta_m)_s$ avec les deux modèles multiparticulaires M4_5n et M4_(2n+1)M. Pour différents types d'empilements $[\pm\theta]_s$ et $[\theta,\theta-90°]_s$ nos modèles mettent bien en évidence l'importance, en général, de la contrainte τ_{xz} à l'interface (1, 2) au bord, résultat déjà bien connu dans la littérature [Pipes, 1972] [Wang & Crossman, 1977] [Pagano, 1978] [Herakovich, 1981] [Raju & Crews, 1981] [Wang & Choi, 1982] [Anquez & Al., 1985] [Robbins & Reddy 1992 et 1993] [Flanagan, 1994].

Le modèle M4_5n donne ici encore une prédiction très convenable des contraintes 3D aux interfaces conforme à celles donnés dans la littérature. Dans cette direction de recherche, l'étape suivante nous semble être: le développement de l'outil permettant le couplage adéquat de différentes coques de Reissner empilées (modèle M4_5n) dans un code éléments finis industriel de calcul de structure (SAMCEF par exemple); et la comparaison, dans des cas complexes, des prévisions de notre modèle M4_5n avec des calculs éléments finis 3D très fins.

En revanche, les prévisions du modèle M4_(2n+1)M semblent souvent éloignées des contraintes 3D. Cependant, à notre avis, les efforts intérieurs prédits par le modèle M4_(2n+1)M, notamment les efforts linéiques d'arrachement au bord des interfaces, nous semblent être très directement en rapport, ici encore, avec les

phénomènes de délaminage et les taux de relaxation d'énergie associés. Nous ne pouvons malheureusement pas considérer que notre opinion est prouvée dans ce travail, le nombre d'exemples abordés étant trop restreint. Notre conviction est, malgré cela, déjà très forte sur l'intérêt de poursuivre les investigations dans cette direction. Le modèle M4_(2n+1)M semble avoir beaucoup des qualités que l'on prête généralement aux bons modèles de type RdM, pour l'analyse des structures, en bureaux d'études.

Ce travail passe bien sûr par l'analyse de plus d'exemples, le développement d'outils numériques spécifiques [Smaoui, 1996] et la comparaison avec les nombreux résultats expérimentaux de la littérature. La question principale est alors: "Peut-on proposer un critère de délaminage, sous la forme d'une valeur critique de la force linéique d'arrachement au bord de l'interface caractéristique du matériau, qui soit en accord avec les observations expérimentales sur l'initiation du délaminage?" Le fait que les auteurs utilisent souvent des critères, en contrainte d'arrachement moyenne, sur une distance caractéristique, nous donne bon espoir pour une réponse positive à cette question.

Si les travaux en cours à l'ENPC [Carreira, 1997] [Hadj-Ahmed, 1997] confirmaient notre point de vue, l'objectif initial de la thèse nous semblerait atteint et nous pourrions ainsi avoir l'espoir d'avoir fait un travail utile pour les ingénieurs en charge des calculs de structure en matériaux composites.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALLIX O.,*"Modélisation du comportement des composites stratifié: application à l'analyse du délaminage"*. Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, février **1989.**

ALLIX O.,*"Une nouvelle méthode d'analyse du délaminage"*. Thèse d'habilitation, février **1992.**

ALLIX O., LADEVEZE P. & CORIGLIANO,*"Modélisation et prévision du délaminage dans les composites stratifiés"*. Comptes-Rendus des 8èmes Journées Nationales sur les Composites/JNC8, **1992.**

ANQUEZ L., GILLETTA DE SAINT JOSEPH D., JEGGY Th., RENARD J., ROUDOLFF F. & NEVERS Th., *"Study of the Delamination of a Composite Bar: Comparison between Various Computation Methods"*. Eur. J. Mech., A/Solids, 9, N° 4, pp. 283-311, **1990**.

ANQUEZ L. & NATAF F., *"Délaminage d'un barreau composite soumis à une traction uniforme"*. Journal de Mécanique théorique et appliquée, Vol. 6, N° 3, pp. 335-350, **1987**.

ANQUEZ L., BERN A. & RENARD J., *"Etude numérique des effets de bord libre dans les composites stratifiés"*. La recherche aérospatiales, No 1, p. 29-40, **1985**.

BAR-YOSEPH P. & PIAN T. H. H.,*"Calculation of Interlaminar Stress Concentration in Composite Laminates"*. J. Composite Materials, Vol. 15, p.225-238, **1981.**

BERTHELOT J. Y.,*"Matériaux Composites - Comportement mécanique et analyse des structures"*. Ed. Masson, **1992.**

BIOT M. A.,*"General Theory of Three Dimensionnal Consolidation"*. Journal of Applied Physics, **1941.**

BOGY D. B.,*"Edge-Bonded Dissimilar Orthogonal Elastic Wedges Under Normal and Shear Loading*. Journal of Applied Mechanics, Vol. 35, p.460, **1968.**

BUI H. D.,*"Mécanique de la rupture fragile"*. Ed. Masson, **1970.**

CARON J. F., *"Modélisation de la cinétique de fissuration transverse en fatigue dans les stratifiés"*. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Novembre **1993.**

CARON J. F. & EHRLACHER A., *"Modelling the Kinetics of Transverse Cracking in Composite Laminates"*. Article à paraître dans Composites Sciences and Technology, **1997.**

CARREIRA P. & CARON J. F. C., *"Détermination de la raideur d'interface d'un stratifié $(0°, 90°)_s$"*. Rapport interne du CERAM (ENPC), **1996.**

CARREIRA P., *"Cinétique de fissuration transverse et initiation du délaminage dans les stratifiés sous sollicitation de type plaque"*. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées en cours, **1997.**

CHABOT A. & EHRLACHER A., *"Récapitulatif des modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (modèles M4).* Rapport interne du CERAM (ENPC), Février **1997.**

CLEON L. M., *"Allégement des structures de caisse: faisabilité de structures en matériaux*

composites". Comptes-rendus du Congrès Mondial de la Recherche Ferroviaire 94 (WCRR94), Vol. 2, pp. 673-680, **1994.**

COX H. L., *"The Elasticity ans Strength of Paper and Other Fibrous Materials"*. British Journal of Applied Physics. Vol. 3, pp. 72-79, Aug. **1951.**

CROSSMAN F. W. & WANG A. S. D., *"The Dependence of Transverse Cracking and Delamination on Ply Thickness in Graphite/Epoxy Laminates"*. "Damage in Composite Materials". ASTM STP 775, K. L. Reifsnider, Ed., American Society for Testing and Materials, p. 118-139, **1982.**

DANIELSON D. A., *"Improved Error Estimates in the Linear Theory of Thin Elastic Shells"*. Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. B74, p. 294-300, **1970.**

DAUDEVILLE L., *"Une méthode simplifiée pour l'analyse du délaminage des structures composites stratifiées"*. Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, février **1992.**

DAVET J. L. & DESTUYNDER Ph., *"Singularités logarithmiques dans les effets de bord d'une plaque en matériaux composites"*. Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Vol. 4, N°3, pp. 357-373, **1985.**

DESTUYNDER P., *"Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques"*. Thèse d'état de l'Université Pierre et Marie Curie, **1980.**

DONG S. B. & GOETSCHEL D. B., *"Edge Effects in Laminated Composite Plates"*. Journal of Applied Mechanics, vol. 49, p.129-135, march **1982.**

DUMONTET H., *"Homogénéisation et effets de bord"*. Actes du Troisième Colloque Tendance Actuelle en Calcul de Structures, Bastia, p. 1025-1043, novembre **1985.**

DUMONTET H., *"Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites"*. Thèse d'état de l'Université Pierre et Marie Curie, **1990.**

DUVAUT G., *"Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus. Application à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique. Homogénéisation"*. Theorical and Applied Mechanics, W. T. Koiter, ed. North-Holland Publisching Compagny, p. 119-132, **1976.**

ENGRAND D., *"Effets de bords libres dans les plaques composites symétriques chargées dans leur plan"*. Recherche aérospatiale n°1982-1, janvier-février **1982a.**

ENGRAND D., *"Calcul des contraintes de bords libres dans les plaques composites symétriques avec ou sans trou, comparaison avec l'expérience"*. Comptes Rendus des Troisièmes Journées Nationales sur les Composites, JNC3, p. 289-297, septembre **1982b.**

EHRLACHER A., DOUCOT E., NACIRI T. & VIAU A., *"Modélisation multiphasique des plaques composites en flexion"*. 1er Congrès National de Mécanique, Rabat, avril **1993.**

EHRLACHER A., CHABOT A. & NACIRI T., *"Prévision de l'initiation du délaminage"*. Convention SNECMA-AENPC N°486, **1994.**

EHRLACHER A., NACIRI T., CHABOT A. & CARON J. F. C., *"Analyse des efforts d'interface à l'aide de la modélisation multiphasique des matériaux multicouches (M4)*. Comptes rendus des JNC9, **1994.**

EHRLACHER A., *"Matériaux composites à fibres longues"*. Cours d'enseignement

d'approfondissement. Ecole Polytechnique, **1995.**

FISH J. & MARKOLEFAS S.,*"The s-Version of Finite Element Method For Laminated Laminates"*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 33, p. 1081-1105, **1992.**

FLANAGAN G.,*"An Efficient Stress Function Approximatio for the Free-Edge Stresses in laminate"*. Int. J. Solids Structures, Vol. 31, No.7, p. 941-952, **1994.**

FORET G., *"Effets d'echelle dans la rupture des composites unidirectionnels"*. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Octobre **1995.**

FOYE R. L. & D. J. BAKER, *"Design of Orthotropic Laminates"*. 11th Annual AIAA Conf. on Structures, Structural Dynamics, and Materials, Denver, CO, April **1970**.

FREDRICHS K. O. & DRESSLER R. F.,*"A Boundary Layer Theory for Elastic Plates"*. Comm. on Pure Applied Mathematics, vol. 14, p. 1-33, **1961.**

GARETT K. W. & BAILEY J. E., *"Multiple Transverse Fracture in 90° Cross-ply Laminates of a Glass Fibre-Reinforced Polyester"*. J. Mat. Scien., vol. 12, **1977**.

GAY D., *"Matériaux Composites"*. Ed. Hermes, 2nd édition, **1989.**

GERMAIN P. & MULLER P., *"Introduction à la mécanique des milieux continus"*. Ed. Masson, **1986**.

GRESZCZUK L. B., *"Stress Concentrations and Failure Criteria for Orthotropic and Anisotropic Plates with Circular Openings"*. Composite materials: Testing and Design (2nd Conference), ASTM STP 497, pp. 363-381, **1972.**

HADJ-AHMED R., EHRLACHER A., FORET G.,*"Simulation and Optimization of the Strength of an Adhesive Joint"*. EUROMECH 358, Nevers-France, September 3-5, **1997.**

HADJ-AHMED R.,*"Analyse des joints de colle dans les matériaux composites"*. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées en cours, **1997.**

HAYASHI T.,*"Analytical Study of Interlaminar Shear Stresses in a Laminate Composite Plate"*. Trans. Jpn. Aeron & Space Sci., 10 (17), pp.43-48, **1967.**

HEDGEPETH J. M.,*"Stress Concentrations in Filamentary Structures"*. NASA TN D-882, Langley Research Center, **1961.**

HESS M. S.,*"The End Problem for a Laminated Elastic Strip-II. Differential Expansion Stresses"*. J. Composite Materals, Vol. 3, p. 630, **1969.**

KAIL R.,*"Modélisation asymptotique et numérique de plaques et coques stratifiées"*. Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, **1994.**

KASSAPOGLOU C. & LAGACE P. A.,*"An Efficient Method for the Calculation of Interlaminar Stresses in Composite Materials"*. Journal of Applied Machanics, vol.53, pp. 774-750, Décembre **1986**.

KIM R. Y. & SONI S. R.,*"Experimental and Analytical Studies On the Onset of Delamination in Laminated Composites"*. Journal of Composite Materials, vol. 18, pp. 70-80, January **1984**.

KIRCHHOFF G.,*"Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischen Scheibe"*. Journal für reine und angewandte Mathematik, vol. 40, p.51-88, **1850.**

KOITER W. T. ,*"On the Foundations of the LinearTheory of Thin Elastic Schells"*. Notes of a lecture presented at the International Congress of Mathematicians, Nice, France, September 1-10 **1970.**

KOITER W. T. ET SIMMONDS J. G.,*"Foundations of Shell Theory"*. Report n°473, Laboratory of Engineering Mechanics - Melkeveg 2. Delft, **1972.**

LABOSSIERE P. & NEALE K. W., NEGLO K.,*"Damage Cumulation in Fibre-Reinforced Composite Laminates"*. Transactions of the CSME, Vol. 12, No. 3, **1988.**

LADEVEZE P., *"Justification de la théorie linéaire des coques élastiques"*. Journal de Mécanique, Vol. 15, N°5, **1976.**

LADEVEZE P., *"On the Validity of Linear Shell Theories"*. W. T. Koiter and G. K. Mikhailov, Eds, Theory of shells. North-Holland Publishing Compagny, p. 369-391, **1980.**

LADEVEZE P., *"Une nouvelle version de la théorie de Reissner-Mindlin pour les plaques homogènes orthotropes"*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, série II, p. 1033-1036, **1987.**

LADEVEZE P. & PECASTAING F., *"The Optimal Version of Reissner's Theory"*. Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, pp. 413-418, June **1988.**

LADEVEZE P., *"Les modèles classiques et leurs extensions pour le calcul des plaques"*. Pluralis Vol.2, "Calcul de Structures et Intelligence Artificielle", **1988.**

LADEVEZE P., *"Une nouvelle version de la théorie des plaques de Kirchhoff-Love"*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 312, série II, pp. 151-156, **1991.**

LADEVEZE P. & SIMMONDS J., *"De nouveaux concepts en théorie des poutres pour des charges et géométries quelconques"*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 322, série II b, pp. 455-462, **1996.**

LARDEUR P. & BATOZ J. L., *"Eléments finis de plaque incluant les effets de cisaillement transversal"* . "Développement et évaluation de deux nouveaux éléments finis de plaques composites avec influence du cisaillement transversal". Rapport intermédiaire. Convention n°88.64.182.00.470.75.01, Août **1990.**

LE BORGNE G., *"Les composites chez PSA PEUGEOT-CITRÖEN"*. AMAC Infos, N°7, Décembre **1996.**

LECUYER F., *"Recherche sur les matériaux composites. Thème étudié: effets de bords"*. Mémoire de DEA de l'Université de Paris 6, **1987.**

LECUYER F., ENGRAND D. & DUMONTET H.,*"Comparaison de méthodes de couche limite pour l'analyse des effets de bords dans les matériaux composites"*. Annales des composites, "Effets de bords et singularités dans les matériaux composites", vol. 1, p. 51-64, **1987.**

LECUYER F., *"Les problèmes de couches limites dans les plaques et coques composites. Applications aux plaques et coques trouées et aux bords chargés"*. Note technique N°90 Ci 20. Bertin, mai **1990.**

LECUYER F., *"Etude des effets de bord dans les Structures minces multicouches"*. Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, décembre **1991.**

LECUYER F. & ENGRAND D., *"Recherche d'un critère de délaminage (présentation d'une méthodologie d'identification)"*. Marché CNES n°840/CNES/91/1108/00-lot n°3, note BERTIN

n°NT91Ci.47, novembre **1991**.

LECUYER F. & ENGRAND D., *"Présentation d'une méthodologie d'identification d'un critère d'initiation du délaminage".* Comptes-Rendus des JNC8, **1992**.

LEGUILLON D. & SANCHEZ-PALENCIA E., *"Méthodes numériques appliquées à la mécanique. Une méthode numérique pour l'étude des singularités de bord dans les composites".* C. R. Acad. Sc., t. 301, Série II, No 18, **1985.**

LEGUILLON D. & SANCHEZ-PALENCIA E., *"Calcul des singularités de bord dans les composites".* Comptes-Rendus des 8èmes Journées Nationales sur les Composites/JNC5, **1986.**

LEGUILLON D., *"Calcul du taux de restitution de l'énergie au voisinage d'une singularité".* Comptes-Rendus Acad. Sci. Paris, t. 309, Série II, pp. 945-950, **1989.**

LEKHNITSKII S. G., *"Anisotropic Plates".* Gordon and Breach, Science Publishers, **1968.**

LENE F., *"Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement".* Thèse d'Etat de l'Université Pierre et Marie Curie, **1984.**

LEVY M., *"Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes".* Journal Math. Pures Appl., 30, pp. 219-306, **1877.**

LIAO C.-L. & TSAI J.-S.,*"Partial Mixed 3-D Element for the Analysis of Thick Laminated Composite Structures"* . International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol. 35, p. 1521-1539, **1992.**

LO K. H., CHRISTENSEN R. M. & WU E. M.,*"A High-Order Theory of Plate Deformation. Part I: Homogeneous Plates"* .Journal of Applied Mechanics, p. 663-668, December **1977.**

LO K. H., CHRISTENSEN R. M. & WU E. M.,*"A High-Order Theory of Plate Deformation. Part II: Laminated Plates"* .Journal of Applied Mechanics, p. 669-676, December **1977.**

LOVE A. E. H., *" A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity".* Cambridge at the University Press, 4ème édition, **1934.**

MACQUIRE B., PETITPAS E. & VALENTIN D., *"Experimental and Theorical Damage Accumulation in Glass-Epoxy Tubes Under Torsion Loading".* Composites Polymers, vol. 5, N°3, **1992.**

MINDLIN R. D.,*"Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates..* Journal of Applied Mechanics, 32-38, March **1951.**

NACIRI T., EHRLACHER A. & CHABOT A.,*"Interlaminar Stress Analysis with a new Multiparticle Modelisation of Multilayered Materials (M4)".* Article à paraître dans Composites Sciences and Technology, **1997.**

NAYROLES B.,*"Théorie des plaques et méthode du déplacement complémentaire".* Note du Laboratoire de Mécanique de Rouen (proposée à Int. J. of Sol. and Struct.), 14 septembre **1996** .

NWOKOYE D. O. & LEXCELLENT C.,*"Calcul tridimensionnel de plaques composites stratifiées sollicitées élastiquement en flexion".* Strucome 88, Vol. 1, pp. 537-552, **1988.**

O'BRIEN T. K.*"Characterization of Delamination Onset and Growth in a Composite Laminate".* Damage in Composite Materials, ASTM STP 775, K. L. Reifsnider, Ed., American Society for Testing and Materials, pp. 140-167, **1982.**

PAGANO N. J., *"Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending".* J. Composite Materials. Vol. 8, p.308-411, July **1969**.

PAGANO N. J., *"Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates".* J. Composite Materials. Vol. 4, p.20-34, January **1970a**.

PAGANO N. J., " Influence of Shear Coupling in Cylindrical Bending of Anisotropic Laminates". J. Composite Materials. Vol. 4, p.330-343, July **1970b**.

PAGANO N. J. & PIPES R. B., *"The Influence of Stacking Sequence on Laminate Srength".* J. Composite Materials. Vol. 5, p.50-57, January **1971**.

PAGANO N. J. & PIPES R. B., *"Some Observations on the Interlaminar Strength of Composite Laminates".* Int. J. Mech. Sci.. Pergamon Press. Vol. 15, p.679-688, **1973**.

PAGANO N. J., *"On the Calculation of Interlaminar normal stress in composite laminate".* J. Composite Materials. Vol. 8 p.65-81, January **1974**.

PAGANO N. J., *"Stress fields in Composite Laminates".* Int. J. Solids Structures. Vol. 14, p.385-400, **1978**.

PAGANO N. J. & SONI S. R., *"Global-local variational model".* Int. J. Solids Structures. Vol. 19, No 3, 207-228, **1983** .

PAGANO N. J. , *"Interlaminar Response of Composite Materials".* Composite Materials Series, 5. Series Editor R. B. Pipes, Elsevier, **1989**.

PAGANO N. J. & SONI S. R., *"Free edge delamination prevention in composite laminates".* "Debonding/Delamination of Composites (le décollement et le délaminage des matériaux composites)" Agard Conference Proceedings 530, 74th Meeting of AGARD Structures and Materials Panel, held in Patras, Greece 24th-29th May 1992, p.1-1 1-11, december **1992**.

PECASTAINGS F.,*"Sur le Principe de Saint Venant".* Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, juin **1985.**

PECASTAINGS F.,*"Approximation au second ordre des déplacements et des contraintes dans une plaque épaisse en flexion".* Journal of Applied Mathematics and Physics. Vol. 38, novembre **1987.**

PHILIPPE M. H.*"Etudes de quelques modélisations de structures à haute rigidité en flexion".* Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, avril **1997.**

PIPES R. B. & PAGANO N. J., *"Interlaminar Stresses in Composite Laminates under Uniform Axial Extension".* J. Composite Materials. Vol. 4, p.538-548, October **1970**.

PIPES R. B. , *"Solution of certain Problems in the Theory of Elasticity for Laminated Anisotropic Systems".* Thèse de Doctorat de l'Université d'Arlington (Texas), Mars **1972**.

PUPO A. H. & EVENSEN H. A., *"Interlaminar Shear in Laminated Composites Under Generalized Plane Stress".* J. of Composite Materials, Vol. 4, p. 204-220, **1970**.

RAJU I. S. & CREWS J. H., *"Tnterlaminar Stress Singularities at a Sraight Free Edge in Composite Laminates".* Computer & Structures, Vol. 14, No. 1-2, p. 21-28, **1981**.

RAJU I. S. & CREWS J. H., Jr.,*"Three-Dimensional Analysis of $(0/90)_s$ and $(90/0)_s$ Laminates with a Central Circular Hole".* Composites Technology Review, vol. 4, N° 4, pp. 116-124, **1982.**

REDDY J. N., *"A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite plates"*. Journal of Applied Mechanics, p. 745-752, December **1984.**

REDDY J. N., *"A Generalisation of two-dimensional Theories of Laminated Composite Plates"*. Commun. Appl. Numer. Meth. 3, pp. 173-180, **1987.**

REDDYJ. N., *"On the Generalization of Displacement-based Laminates Theories"* . Appl. Mech. Rev., Vol.42, No. 11, Part 2 **1989.**

REISSNER E., *"The Effect of Transverse Shear Deformation on The bending of Elastic Plates"*. Journal of Applied Mechanics, A-69;A-77, June **1945.**

REISSNER E., *"On a Variational Theorem in Elasticity"*. J. Math. Phys., 29, pp. 90-95, **1950.**

REISSNER E., *"On Transverse Bending of Plates Including the effect of Transverse Shear Deformation"*. Int. J. Solids Structures, Vol. 11, pp. 569-573, **1975.**

REN J. G., *"A New Theory of Lminated Plate"*. Composite Science and Technology, No 26, p. 225-239, **1986.**

ROBBINS D. H. & REDDY J. N., *"Global/Local Analysis of Laminated Composite plates Using Variable Kinematic Finite Elements"* . American Institue of Aeronautics and Astronautics (AIAA-92-2239-CP), p.142-147, **1992.**

ROBBINS D. H. & REDDY J. N., *"Modelling of Thick Composites Using a Layerwise Laminated Theory"* . International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol. 36, p. 655-677, **1993.**

ROHWER K., *"Application of Higher Order Theories to the Bending Analysis of Layered Composite plates"* . Int. J. Solids Structures, Vol. 29, No 1, p. 105-119, **1992.**

RYBICKI E. F., *"Approximate Three-Dimensional Solutions for Symmetric Laminates Under Inplane Loading"*. Journal of Composite Materials, vol. 5, p.354-360, july **1971.**

SAB K., *"Raideur d'une plaque multicouche"*. Cours de D.E.A., Solides Structures et Systèmes Mécaniques, Tronc Commun, Module E, Approches multi-échelles des structures composites, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), **1995.**

SANCHEZ-PALENCIA E., *"Problèmes mathématiques de la mécanique. Influence de l'anisotropie sur l'apparition de singularités de bord dans les problèmes aux limites relatifs aux matériaux composites"*. C. R. Acad. Sc., t. 300, Série I, No 1, **1985.**

SANCHEZ P. & RACINEUX G., *"Le concept de coefficient de cisaillement dans les théories des plaques"*. Mémoire de DEA. Laboratoire de Mécanique et Technologie (E.N.S. CACHAN / C.N.R.S. / Université Paris 6), juin **1995.**

SAXCE (de) G., GABRIC S., SCHILS P., LASCHET G., *"Un élément fini hybride métis à double singularité pour l'analyse des contraintes au voisinage d'une fissure de délaminage"*. Comptes rendus des neuvièmes journées nationales sur les composites /JNC9, Vol.1, St Etienne, **1994.**

SIMMONDS J. G., *"An Improved Estimate for the Error in the Classical Linear Theory of Plate Bending"*. Quart. Appl., Math. 29, pp. 439-447, **1972.**

SIMMONDS J. G. ET DUVA J., *"Thickness Effects are Minor in the Energy-Release Rate Integral for Bent Plates Containing Elliptic Holes or Cracks"*. Journal of Applied Mechanics, Vol.

48, pp. 320-326, juin **1981.**

SMAOUI M., *"Nouvelle modélisation multiparticulaire pour l'analyse des efforts dans les plaques composites multicouches impactées".* Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Novembre **1996.**

SPILKER R. L. & CHOU S. C., *"Edge Effects in Symmetric Composite Laminates: Importance of Satisfying the Traction-Free-Edge Condition".* Journal of Composite Materials, vol. 14, p.2-20, january **1980.**

TAHARI V. L., HENAFF-GARDIN C. & LAFARIE-FRENOT, *"Apparition et propagation des endommagements par fatigue dans les stratifiés carbone/epoxyde (0°/45°)".* Comptes-Rendus des JNC9, Vol. 1, 22-24, Novembre, **1994.**

TANG S., *"A Boundary Layer Theory - Part I: Laminated composites in plane stress".* J. Compos. Mater., 9, pp. 33-41, **1975.**

TSAI S. W. & HANN H. T., *"Introduction to Composite Materials".* Technonic Publisching co. **1980.**

VERCHERY G., *"Application aux structures minces élastiques de principes variationnels mixtes. Exemple de la poutre à cisaillement transversal"* . C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 278, pp. 571-574, **1974.**

WANG A. S. D. & CROSSMAN F. C., *"Some New Results on Edge Effect in Symmetric Composite Laminates".* Journal of Composite Materials, vol. 11, p.92-106, january **1977.**

WANG A. S. D. & CHOI I., *"Boundary-layer Effects in Composite Laminates. Free Edge Stress Solutions and Basic Characteristics".* Part. 1 and 2. Journal Appl. Mech. ASME, Vol. 49, pp.541-560, **1982.**

WHITNEY J. M. & PAGANO N. J., *"Shear Deformation in Heterogenous Anisotropic Plates".* Journal of Applied Mechanics, p.1031-1036, december **1970**.

WHITNEY J. M. & SUN C. T., *"A Higher Order Theory for Extensional Motion of Laminates Composites".* Journal of Sound and Vibration, vol. 30 (1), pp. 85-97, **1973**.

WHITNEY J. M. & NUISMER R. J., *"Stress Fracture Criteria for Laminated Composites Containing Stress Concentrations".* Journal of Composite Materials, vol. 8, pp. 253-265, **1974**.

YIN W. L., *"Free-Edge Effects in Anisotropic Laminated Under Extension, Bending and Twisting, Part I: A Stress-Function-Besed Variational Approach".* Journal of Applied Mechanics, vol. 61, pp. 410-715, Juin **1994**.