



HAL
open science

Observation de paires d'atomes corrélés au travers de la collision de deux condensats de Bose-Einstein

Aurélien Perrin

► **To cite this version:**

Aurélien Perrin. Observation de paires d'atomes corrélés au travers de la collision de deux condensats de Bose-Einstein. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. Français. NNT: . tel-00244641

HAL Id: tel-00244641

<https://pastel.hal.science/tel-00244641>

Submitted on 7 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**INSTITUT D'OPTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE
LABORATOIRE CHARLES FABRY**

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PIERRE ET
MARIE CURIE**

Spécialité : Physique quantique

Présentée par

M. Aurélien PERRIN

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet :

**OBSERVATION DE PAIRES D'ATOMES CORRÉLÉS
AU TRAVERS DE LA COLLISION DE DEUX
CONDENSATS DE BOSE-EINSTEIN**

Soutenue le 29 novembre 2007 devant le jury composé de :

Mr. C. WESTBROOK	Directeur de thèse
Mr. A. LEVENSON	Rapporteur
Mr. C. SALOMON	Rapporteur
Mr. J.M. RAIMOND	Président
Mr. K. MØLMER	Membre invité
Mr. D. BOIRON	Membre invité

A Louis Mathieu, Paul Alexis et Marie Philippine...

A mes parents...

A Mamirite...

Remerciements

Ces travaux ont été réalisés au sein du Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique. Je remercie son directeur Pierre CHAVEL de m'y avoir accueilli et d'avoir toujours su témoigner son soutien envers toutes les entreprises de notre groupe.

Je remercie Alain ASPECT et Christoph WESTBROOK de m'avoir accueilli dans le groupe d'Optique Atomique pour réaliser mes travaux de thèse. Alain a su nous transmettre son expérience lors de l'écriture des différents papiers sur lesquels nous avons eu l'occasion de travailler au sein de l'équipe Hélium Métastable. Je le remercie particulièrement pour avoir pris de son temps pour me guider dans mes recherches lors de l'analyse des résultats des expériences de collision.

Chris a constamment cherché à tirer le meilleur de nous mêmes. Je le remercie pour son enthousiasme, son optimisme ainsi que son soutien qu'il a su me communiquer au fur et à mesure de mon doctorat. Les nombreuses discussions que nous avons partagées dans son bureau ont largement contribué à ma formation et à mon épanouissement dans le groupe. Ses intuitions physiques m'ont à la fois souvent impressionné et ont en même temps largement contribué à me permettre de prendre du recul sur les expériences que nous réalisons.

Ariel LEVENSON et Christophe SALOMON ont accepté de rapporter ce manuscrit. Je les remercie pour le temps qu'ils y ont consacré et pour leurs remarques et commentaires fructueux qui ont contribué à donner plus de poids à ce travail. En particulier, je suis reconnaissant pour le temps que Christophe m'a accordé pour discuter de différents aspects du manuscrit. Je tiens à remercier également Jean Michel RAIMOND et Klaus MØLMER pour avoir accepté de participer au jury.

Denis BOIRON est certainement, parmi tous les membres du groupe d'Optique Atomique, celui dont j'ai le plus appris. Dans les bons moments comme dans les moins bons, il a su nous faire part de ses idées et ses connaissances, il a eu la patience de nous écouter et a toujours pris le parti de nous obliger à garder un regard critique sur nos résultats et notre méthodologie. Je pense que tous les doctorants de l'équipe Hélium Métastable lui doivent beaucoup... Je tiens à le remercier pour tout cela.

Durant les trois années passés à travailler au sein de cette équipe, j'ai eu la chance de pouvoir partager beaucoup avec les différents doctorants qui se sont succédés sur l'expérience. Je remercie Signe SEIDELIN, Jose VIANA GOMES, Rodolphe HOPPELER et Martijn SCHELLEKENS pour leur accueil chaleureux au sein de l'équipe. Martijn et moi avons eu l'occasion de passer beaucoup de temps à travailler ensemble sur l'expérience. Je le remercie pour son enthousiasme, sa bonne humeur et sa tenacité qui ont largement facilité mes premiers pas dans le monde des atomes froids. Hong CHANG est venu nous rejoindre lors de la mise en place de l'expérience des collisions. Ses qualités d'opticien ont largement contribué aux résultats rapportés dans ce manuscrit. Je le remercie pour sa gentillesse, son calme et sa patience. Valentina KRACHMALNICOFF, arrivée en même temps que Hong, s'est rapidement

affirmée au sein de l'équipe. Sa persévérance, sa rigueur ainsi que ses nombreuses qualités humaines ont représenté, j'en suis convaincu, un apport déterminant pour le groupe. Je tiens à la remercier pour les nombreuses discussions, de physique entre autres mais pas seulement (!), que nous avons eu l'occasion de partager... Un grand merci aussi à Antoine BROWAEYS qui bien qu'occupé par de nouveaux projets nous a toujours accordé du temps pour nous transmettre son expérience du dispositif expérimental. Je tiens sinon à souhaiter bon courage à Vanessa LEUNG, arrivée plus récemment dans l'équipe et Jean Christophe JASKULA, qui vient de commencer son doctorat. Enfin, je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères à Frédéric MORON et André VILLING, qui ont permis à l'expérience, grâce à leurs immenses compétences en électronique, de fonctionner et d'avancer...

Je tiens d'autre part à remercier tous les autres membres du groupe d'Optique Atomique pour leur bonne humeur et leur soutien durant ces trois ans... Un grand merci donc (et dans le désordre) à Thorsten, Jérôme, Jocelyn, Marie, Yann, Mathilde, Jean Félix, Philippe, Nathalie, Isabelle, David C., Andrés, Gaël, Jean Baptiste, William, Laurent, Karen, Pierre, Ronald, Robert, Jean François, Jean Philippe, Karim, David D., Thomas, Vincent, Juliette, Carlos, Francesca (que je me permet d'inclure ici...) et Sébastien... Sans eux la vie à l'Institut n'aurait pas été aussi sympathique... ! Un de mes plus grands regrets restera d'avoir quitté le groupe avant la fin de la coupe du monde de Rugby... Je garderai aussi de bons souvenirs du temps passé avec les membres du comité d'organisation de la conférence YAO. Enfin, merci à Gaël VAROQUAUX pour cette belle figure 3D de la sphère de collision...

Dans le cadre de différentes collaborations, j'ai eu l'occasion de découvrir d'autres groupes de recherche et de m'enrichir un peu plus à leur contact. Je tiens ainsi à remercier Michaël BESLEY et Jose (précédemment cité...) de l'Universidade do Minho pour leur accueil et les nombreuses discussions que nous avons pu partager, Denis et moi, avec eux à Braga. Je tiens à remercier Wim VASSEN, Tom JELTES et John McNAMARA pour la semaine passée à Amsterdam lors des mesures de corrélation sur l' $^3\text{He}^*$. J'en profite pour féliciter une nouvelle fois Valentina pour avoir conduit ce projet de bout en bout. Je tiens aussi à remercier chaleureusement Karen KHERUNTSYAN et Peter DRUMMOND pour l'accueil qu'ils m'ont réservé lors de mon séjour à Brisbane. Merci en particulier à Karen pour toute l'attention qu'il a su me porter pour me permettre de mener à bien ce projet. Enfin, je tiens à remercier Marek TRIPPENBACH et de nouveau Klaus MØLMER pour toute l'aide qu'ils nous ont apportée lors de l'interprétation des résultats de nos expériences.

Je tiens aussi à remercier tout le personnel de l'Institut d'Optique, dont l'efficacité a permis à notre groupe de recherche d'avancer plus sereinement : en particulier les membres du service achat, de l'atelier mécanique, de l'atelier d'optique, des services techniques ainsi que des TPs. Je tiens aussi à remercier Pierre FOURNET pour avoir réalisé les plans qui ont permis la mise en place de miroirs dans notre enceinte à vide. Dans le cadre de mon monitoring, j'ai aussi pu profiter de l'expérience d'Hervé SAUER, de Jean Michel JONATHAN et Franck DELMOTTE à qui je tiens à exprimer toute ma reconnaissance. Merci à Jérôme BEUGNON, Magali ASTIC, Aurélien DANTAN, Mathilde HUGBART et Alpha GAËTAN pour tous les bons moments que nous avons passés ensemble à préparer nos TDs.

Je tiens enfin à remercier les invisibles, ceux qui m'ont soutenu et supporté pendant ces trois ans sans mettre un pied à l'Institut... Ma famille et mes amis dont le soutien a représenté une aide inestimable... Merci à Xavier et Morgan de m'avoir supporté au jour le jour même dans les pires moments... Merci à Julien BECT pour l'aide qu'il m'a apporté lors de mon étude de la réduction des fluctuations du nombre d'atomes. Merci à Leila pour avoir été là... parfois...

Table des matières

Introduction	1
1 De l'optique quantique à l'optique atomique	5
1.1 Cohérence d'une source de particules	6
1.1.1 Notion de cohérence	6
1.1.2 Cohérence du premier ordre	8
1.1.3 Cohérence du second ordre	11
1.1.4 Mesures de corrélation du second ordre dans les gaz froids	15
1.2 Processus d'amplification paramétrique	18
1.2.1 Cadre général	19
1.2.2 Limite spontanée : émergence de paires individuelles corrélées	22
1.2.3 Etats squeezés	26
1.3 Processus de collisions élastiques avec des atomes froids	27
1.3.1 Description des collisions	28
1.3.2 Réalisation expérimentale	30
1.4 Conclusion	32
2 Condensats de Bose-Einstein d'hélium métastable	33
2.1 Considérations préalables sur l'hélium métastable	34
2.2 Refroidissement atomique et condensation de Bose-Einstein	36
2.2.1 Préparation d'un jet d'atomes ralentis d'He*	37
2.2.2 Piégeage et refroidissement d'un gaz dilué d'He*	41

2.3	Un système de détection original	46
2.3.1	Principe de fonctionnement d'une galette de micro-canaux	47
2.3.2	Lignes à retard	49
2.3.3	Montage expérimental	50
2.3.4	Caractéristiques expérimentales du détecteur	53
2.4	Signaux de temps de vol et caractéristiques des condensats produits	59
2.4.1	Chute libre d'un paquet d'onde sans interaction	59
2.4.2	Prise en compte des interactions : cas particulier du condensat de Bose-Einstein	60
2.4.3	Caractéristiques typiques des condensats de Bose-Einstein d'He* produits	61
2.5	Conclusion	62
3	Transitions Raman stimulées : vers la génération de collisions entre deux condensats de Bose-Einstein	63
3.1	Transitions Raman stimulés : principe général	64
3.1.1	Diffusion Raman : Point de vue microscopique	64
3.1.2	Dynamique d'un transfert Raman stimulé	65
3.1.3	Cas de l'He*	68
3.2	Phénomènes collectifs, superradiance	72
3.2.1	Principe	72
3.2.2	Observation de phénomènes de superradiance	74
3.3	Réalisation du transfert Raman d'un condensat de Bose-Einstein d'hélium métastable	77
3.3.1	Montage expérimental	78
3.3.2	Réalisation d'un transfert Raman	83
3.3.3	Séparation et extraction de condensats d'impulsions opposées	87
3.4	Conclusion	89
4	Observation de paires atomiques corrélées	91

4.1	Analyse des propriétés de la sphère de diffusion	92
4.1.1	Modèle classique de collision	92
4.1.2	Traitement des données des collisions	95
4.1.3	Nombre d'atomes dans la sphère de diffusion	100
4.2	Analyse des corrélations sur la sphère de collision	104
4.2.1	Position du problème	104
4.2.2	Détail de la procédure	105
4.2.3	Résultats obtenus	108
4.3	Mesure équivalente du volume d'un mode de diffusion	113
4.3.1	Principe de la mesure des tailles d'un mode de diffusion	114
4.3.2	Résultats	115
4.4	Réduction des fluctuations du nombre d'atomes	118
4.4.1	Principe de la mesure	119
4.4.2	Résultats des mesures	124
4.5	Conclusion	129
5	Aspects théoriques des collisions de deux condensats de Bose-Einstein	131
5.1	Approche perturbative	132
5.1.1	Décomposition de Bogoliubov du système	132
5.1.2	Collisions de deux ondes planes	133
5.1.3	Collisions de condensats inhomogènes	135
5.2	Simulations stochastiques de la collision de deux condensats	139
5.2.1	Calcul des conditions initiales du problème	139
5.2.2	Collisions de deux condensats d'He*	141
5.2.3	Sources anisotropes, diffusion guidée des paires atomiques	152
5.3	Conclusion	154
	Conclusion	157

A	Algorithme de reconstruction des positions et temps d'arrivée des atomes	159
A.1	Philosophie de la reconstruction	160
A.2	Carte de gradient associée au détecteur	160
A.2.1	Algorithme naïf de reconstruction	160
A.2.2	Résultat expérimental	161
A.3	Procédure de reconstruction	162
B	Passage dans l'espace des impulsions	167
B.1	Position du problème	167
B.2	Ajustements des paramètres expérimentaux sur la sphère de diffusion	170
B.2.1	Un modèle de collision de particules classiques	170
B.2.2	Ajustement des paramètres expérimentaux	171
C	La représentation <i>Positive P</i>	175
C.1	Discrétisation de l'espace	176
C.2	Représentation de la matrice densité	177
C.3	Interprétation stochastique de la distribution	178
C.3.1	Estimation d'observables	178
C.3.2	Evolution des différents échantillons	179
D	Articles	181

Introduction

A la suite des travaux d'A. Einstein sur l'effet photoélectrique en 1905 [1], que l'on peut voir comme une des premières indications de la nature corpusculaire de la lumière, L. de Broglie formule en 1924 l'hypothèse que les particules peuvent présenter un comportement ondulatoire [2]. A toute particule d'impulsion \mathbf{p} , il associe une onde, de longueur d'onde

$$\lambda_{dB} = h/p$$

Cette hypothèse marque les débuts de l'édification de la théorie de la mécanique quantique au sein de laquelle la distinction classique entre ondes et particules disparaît pour être remplacé par une description des phénomènes physiques en termes d'amplitudes de probabilité. Malgré les succès précoces de cette nouvelle théorie pour expliquer bon nombre de résultats expérimentaux, parmi lesquels on peut mentionner par exemple les expériences de Davisson et Germer en 1927 qui correspondent à la première démonstration expérimentale du comportement ondulatoire des électrons [3], la mise en évidence du caractère quantique de la lumière ainsi que l'étude du comportement ondulatoire des atomes ne furent réalisées que bien plus tard du point de vue expérimental.

En optique, l'immense majorité des expériences réalisées à ce jour peuvent être décrites de façon adéquate en utilisant la théorie classique de l'électromagnétisme qui est basée sur les équations de Maxwell. Les prédictions quantiques aboutissent généralement aux mêmes résultats. Il en est ainsi de l'expérience des trous d'Young, pour laquelle l'interprétation classique basée sur l'interférence des amplitudes des champs électriques et la version quantique en termes d'interférences d'amplitudes de probabilité coïncident. Les premières divergences entre les prédictions classiques et quantiques n'apparaissent en fait que pour des interférences d'ordre plus élevé. Les expériences des deux radio-astronomes R. Hanbury Brown et R.Q. Twiss sur les corrélations d'intensité de la lumière thermique motivent ainsi la naissance de l'optique quantique moderne [4]. Bien que le résultat de ces expériences soit parfaitement compris classiquement comme un excès de bruit des sources thermiques, l'interprétation quantique qui impose d'introduire la notion de groupement de photons issus d'une source chaotique n'a pas manqué de choquer une grande partie de la communauté scientifique. Il faut attendre les travaux de Fano [5], puis ceux de R.J. Glauber en 1963 sur la formulation quantique de la théorie de la cohérence optique pour réconcilier ces deux approches [6]. La notion d'anti-groupement de photons prédit par cette nouvelle théorie, se présente alors comme un premier élément de contradiction avec la théorie classique. Elle ne sera démontrée expérimentalement qu'en 1976 dans le groupe de L. Mandel [7]. A partir de cette époque, le développement de nouvelles sources de lumière et des techniques de comptage individuel de photons permettent l'étude de nouveaux effets prédits dans le cadre de la mécanique quantique. La réduction des fluctuations quantiques est ainsi démontrée pour la première fois en 1985 par R.E. Slusher au

travers d'expériences de mélanges à quatre ondes [8]. Des inégalités classiques portant sur les amplitudes des champs électriques sont violées quelques années plus tard par l'intermédiaire de sources de photons jumeaux [9]. Le point d'orgue de cette aventure reste très certainement la mise en évidence de corrélations quantiques du type Einstein-Podolsky-Rosen sur des paires de photons [10, 11, 12, 13]. La violation des inégalités de Bell impose dès lors une description nécessairement quantique des phénomènes optiques.

Parallèlement au développement de l'optique quantique, de nouvelles techniques de piégeage et de refroidissement atomique sont introduites et récompensées en 1995 par l'obtention du premier condensat de Bose-Einstein [14]. Cette observation marque un tournant important de la physique moderne, récompensé par plusieurs prix Nobel [15, 16, 17, 18, 19]. Elle donne ainsi directement accès au comportement ondulatoire des atomes et correspond aux premiers pas de l'optique atomique, un nouveau domaine de recherche au sein duquel les gaz étudiés peuvent être décrits comme des ondes de matière. La réalisation du premier laser à atomes en 1997 [20] ainsi qu'une multitude d'expériences dédiées à la mise en évidence des propriétés de cohérence des sources atomiques permettent d'appuyer l'analogie qui s'impose entre ce domaine récent et l'optique quantique. A l'heure actuelle différentes techniques de contrôle et de détection de gaz froids permettent de reproduire avec des ondes de matière une grande partie des expériences historiques de l'optique quantique. La grande diversité des propriétés des atomes permet d'imaginer l'importante richesse et l'intérêt fondamental de l'optique atomique. Il serait ici trop ambitieux de tenter de donner une description exhaustive de l'ensemble des possibilités d'étude offertes dans ce cadre. Nous nous permettons malgré tout d'en mentionner certains traits de caractère propres qui motivent son développement en parallèle de celui de l'optique quantique. Contrairement aux photons qui suivent tous par essence une statistique bosonique, on peut trouver parmi les différentes espèces atomiques à la fois des fermions et des bosons, ce qui enrichit considérablement la physique ainsi accessible. D'autre part, du fait des interactions interatomiques, absentes pour des photons, de nombreux effets non-linéaires apparaissent naturellement dans le comportement des ondes de matière et élargissent l'étendue des phénomènes observés. Enfin, une des motivations fondamentales du développement de l'optique atomique vient du fait que l'interférométrie atomique se présente comme un candidat de choix en vue du dépassement des limites des techniques actuelles de mesure de précision [21, 22].

Le groupe d'Optique Atomique du laboratoire Charles Fabry de l'institut d'optique, que j'ai rejoint pour réaliser mes travaux de thèse, a pris le parti de fonder une grande partie de ses problématiques de recherche dans la continuité des avancées réalisées en optique quantique. Parmi les sept expériences que compte le groupe actuellement, cinq sont principalement dédiées à l'étude des propriétés au sens large de condensats de Bose-Einstein tandis qu'une autre tente de réaliser un mélange de gaz dégénérés de fermions et de bosons. De la production d'un laser à atomes guidé [23] à la réalisation de mesures d'interférométrie atomique, les différents sujets d'étude couvrent une large partie du domaine des atomes froids. L'expérience d'hélium métastable (He^*) sur laquelle mes travaux de thèse se concentrent, est aujourd'hui principalement consacrée à l'étude des corrélations atomiques. L'obtention d'un condensat de Bose-Einstein en 2001 [24] puis le développement d'un détecteur d'atomes uniques capable de reconstruire les positions des atomes dans les trois dimensions de l'espace a permis récemment la réalisation de mesures de corrélations sur des gaz thermiques en complète analogie avec les expériences de R. Hanbury Brown et R.Q. Twiss sur des sources thermiques de photons [25].

La mise en évidence du phénomène de groupement des atomes issus d'un gaz thermique d'hélium métastable bosonique, rapportée dans le manuscrit de thèse de M. Schellekens, constitue mes premiers pas en optique atomique. Le groupe, supervisé par D. Boiron, A. Aspect et C. Westbrook s'est ensuite intéressé à deux problématiques différentes. V. Kramalnicoff et M. Schellekens se sont principalement investis dans une collaboration avec le groupe de W. Vassen à Amsterdam pour réaliser des mesures de corrélations analogues aux précédentes mais sur des gaz de Fermi. Une telle étude, sans précédent dans le domaine des gaz dilués, s'intègre parfaitement dans le cadre tracé par le théorie de la cohérence quantique de R.J. Glauber et a permis d'en confirmer les prédictions théoriques [26]. En parallèle et dans la continuité des premières expériences d'optique atomique non-linéaire réalisées dans le groupe de W.D. Philipps sur des mélanges à quatre ondes atomiques, H. Chang et moi avons consacré nos efforts à la mise en place et l'étude d'une source de paires d'atomes corrélées [27, 28].

Le travail présenté dans ce manuscrit rapporte l'observation de paires d'atomes d'impulsions opposées produites lors de la collision de deux condensats de Bose-Einstein d'hélium métastable. La collision est initiée par l'intermédiaire d'un transfert Raman nécessitant trois faisceaux laser. L'utilisation d'un détecteur résolu en temps et en position nous permet de reconstruire la distribution d'impulsion des atomes diffusés en trois dimensions : cette dernière se présente sous la forme d'une sphère dans l'espace des impulsions. Ce même détecteur nous donne d'autre part accès à la forme de la fonction de corrélation à deux particules. Au travers de son étude, nous sommes capables de démontrer l'existence de corrélations entre atomes diffusés, d'impulsions opposées. Un tel résultat peut s'interpréter comme un phénomène spontané de mélange à quatre ondes de matière. Les paires atomiques détectées peuvent alors être vues comme un analogue atomique des paires de *photons jumeaux* produites dans des cristaux optiques non-linéaires. Nous montrons que les largeurs des corrélations mesurées peuvent être reliées aux largeurs en impulsion des condensats, elles-mêmes définies par le principe d'incertitude de Heisenberg. Cette interprétation est confirmée par l'étude de corrélations de forme analogue concernant les atomes diffusés dans une même direction de l'espace. Ces corrélations peuvent être vues comme une autre manifestation de l'effet Hanbury Brown et Twiss. Au travers de leur étude nous sommes capables de déterminer les tailles du volume de cohérence de ce que l'on peut voir comme une source d'atomes. Ces dernières sont directement reliées aux largeurs spatiales des condensats. Tout comme leurs analogues optiques, une telle source d'atomes jumeaux constitue un premier pas vers l'étude de phénomènes quantiques plus complexes parmi lesquels on peut par exemple mentionner la réduction de fluctuations quantiques ou encore la mise en évidence de corrélations du type Einstein-Podolski-Rosen.

Plan du mémoire

Le mémoire est organisé en cinq chapitres.

Le premier chapitre se présente comme un chapitre introductif où l'on se propose d'introduire le vocabulaire et les concepts développés en optique quantique afin de pouvoir les appliquer dans le cadre de l'optique atomique. Un certain nombre de parallèles sont faits entre les expériences réalisées dans les deux domaines. En étudiant plus particulièrement les propriétés des sources de paires de photons jumeaux, on peut ainsi donner une première idée des résultats que l'on s'attend à observer.

Au cours du second chapitre nous décrivons le dispositif expérimental que nous avons eu l'occasion d'utiliser. La majeure partie du dispositif a été développée par mes prédécesseurs. Nous nous concentrons particulièrement sur l'étude du détecteur d'atomes uniques par l'intermédiaire duquel toutes nos mesures expérimentales ont été réalisées.

Dans le troisième chapitre nous décrivons la mise en place d'un montage capable de réaliser le transfert Raman d'un condensat d' He^* retenu dans un piège magnétique vers un état non piégeant. Nous montrons comment un tel transfert peut être utilisé pour réaliser la collision de deux condensats de Bose-Einstein. C'est au sein de telles collisions que les paires d'atomes corrélées que nous cherchons à mettre en évidence sont émises.

Le quatrième chapitre constitue le coeur de ce manuscrit. Nous décrivons les mesures de corrélation que nous avons réalisées afin de permettre la mise en évidence de paires atomiques corrélées. Nous introduisons d'autre part les premiers travaux réalisés en vue de l'observation de la réduction de fluctuations quantiques.

Le cinquième chapitre donne une approche théorique des collisions de condensats de Bose-Einstein. Une étude perturbative nous permet dans un premier temps de dériver un certain nombre de résultats analytiques concernant l'allure des corrélations qui relient les paires atomiques. Nous présentons ensuite les résultats de calculs numériques effectués dans le cadre d'une collaboration avec K. Kheruntsyan de l'université de Queensland en Australie. Les résultats théoriques sont systématiquement comparés aux résultats observés expérimentalement.

De l'optique quantique à l'optique atomique

Le domaine de l'optique atomique tire son inspiration de l'ensemble des expériences et des concepts théoriques développés en optique quantique dans la deuxième moitié du vingtième siècle. Initiée par le développement des techniques de contrôle et de refroidissement atomiques, elle s'attache actuellement en grande partie à reproduire avec des atomes des expériences initialement réalisées par l'intermédiaire de faisceaux lumineux. Au travers de son développement la nature ondulatoire des atomes a pu être démontrée et activement étudiée. Une des grandes distinctions que l'on peut tracer entre l'optique atomique et l'optique quantique vient de propriétés propres aux atomes. Ainsi, contrairement aux photons, les atomes interagissent entre eux et peuvent être décrits selon l'espèce étudiée par deux statistiques différentes : celle de Bose-Einstein et celle de Fermi-Dirac. Ces différences permettent l'étude de phénomènes physiques inédits et souvent inaccessibles au moyen de photons.

Dans ce chapitre nous commençons par introduire les concepts physiques développées par R.J. Glauber dans le cadre de la théorie quantique de la cohérence, récompensée en grande partie au travers du prix Nobel qui lui fut décerné en 2005 [29]. Le vocabulaire et les différents éléments de cette théorie sont directement applicable dans le cadre de l'optique atomique. Nous nous attachons à faire systématiquement le lien entre quelques expériences historiques réalisées au moyen de faisceaux lumineux et celles plus récentes réalisées à l'aide de gaz froids.

Nous nous concentrons ensuite sur la description du phénomène d'amplification paramétrique. Un tel processus permet de générer des sources de photons jumeaux dont les propriétés ont profondément contribué à l'étude de phénomènes purement quantiques, inexplicables dans le cadre de la théorie classique de l'optique. Le travail réalisé pour mettre en évidence des paires atomiques corrélées, qui sera décrit au fur et à mesure des chapitres suivants, s'inspire largement des expériences réalisées dans ce cadre. La richesse des phénomènes évoqués dans cette partie donne d'autre part une motivation supplémentaire à l'étude d'une source atomique analogue.

Enfin, nous terminons ce chapitre en montrant comment au travers des interactions atomiques, on peut réaliser des sources atomiques aux propriétés analogues à celles des sources de photons jumeaux. La réalisation de mélange à quatre ondes atomiques étudiée pour la première fois en 1999 dans le groupe de W.D. Philipps [30] marque les débuts de l'optique atomique non-linéaire. La source de paires atomiques corrélées que nous avons développée s'inspire largement des techniques mises en place dans cette expérience. Cette étude permet

d'autre part de délimiter les ambitions des travaux décrits dans ce manuscrit.

1.1 Cohérence d'une source de particules

En optique traditionnelle, la description ondulatoire de la lumière rend accessible la compréhension des processus d'interférences. Deux champs électro-magnétiques de fréquence donnée peuvent ainsi interférer constructivement ou destructivement l'un avec l'autre. La notion de cohérence d'une source lumineuse est introduite pour permettre de décrire la forme des interférences observées. En optique quantique, le rayonnement est quantifié et les photons en constituent les excitations élémentaires. Formellement, on ne parle plus de champ lumineux classique \mathcal{E} , décrit comme une fonction complexe, mais on introduit les opérateurs $\hat{E}^{(-)}$ et $\hat{E}^{(+)}$, correspondant respectivement aux opérateurs de création et d'annihilation du champ électro-magnétique [31]. Les travaux de R. J. Glauber permettent de généraliser la notion de cohérence dans ce nouveau cadre [6]. Ces derniers se généralisent naturellement aux nouvelles sources de particules atomiques, en remplaçant formellement les champs $\hat{E}^{(-)}$ et $\hat{E}^{(+)}$ par les champs $\hat{\Psi}^\dagger$ et $\hat{\Psi}$ qui décrivent traditionnellement les gaz dilués. Nous nous proposons dans cette partie de rendre compte des travaux de R.J. Glauber et de montrer leurs répercussions dans le cadre de l'optique quantique et l'optique atomique. Le vocabulaire et les concepts développés ici sont directement applicables aux expériences que nous décrivons dans la suite de ce manuscrit.

1.1.1 Notion de cohérence

Fonctions de corrélations La possibilité de réaliser des mesures de coïncidences pour étudier la statistique d'une source de particules constitue le point de départ des travaux de R. J. Glauber publiés en 1963 [6]. Ces mesures nécessitent l'introduction de nouvelles observables dont les propriétés mathématiques ont influencé la majeure partie des expériences réalisées dans le cadre de l'optique quantique : les fonctions de corrélations. Nous revenons ici sur leurs définitions et propriétés.

Les fonctions de corrélation d'ordre n , $G^{(n)}$, sont définies par l'expression suivante

$$G^{(n)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n+1}, \dots, \mathbf{r}_{2n}; t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{2n}) = \text{tr} \left[\rho \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_n, t_n) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_{n+1}, t_{n+1}) \dots \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_{2n}, t_{2n}) \right] \quad (1.1)$$

Dans cette expression ρ correspond à la matrice densité du système quantique considéré. Il est en général commode de poser $\mathbf{x}_i = (\mathbf{r}_i, t_i)$ pour simplifier les écritures. D'autre part, il convient aussi d'introduire ici la forme normalisée des fonctions de corrélation, qui permet de comparer les propriétés de cohérence de deux sources de particules

$$g^{(n)}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{2n}) = G^{(n)}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{2n}) / \prod_{j=1}^{2n} \left[G^{(1)}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j) \right]^{1/2} \quad (1.2)$$

Si $t_{n+j} = t_i$ et $\mathbf{r}_{n+i} = r_i$ pour tout i , on peut interpréter la fonction de corrélation $G^{(n)}$ comme une mesure de la probabilité qu'un photon soit détecté à chaque position \mathbf{r}_i , aux instants t_i

pour la source de particules considérée. Par exemple, $G^{(1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)$ correspond à une mesure de l'intensité moyenne de la source, tandis que $G^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$ correspond à la mesure du taux de coïncidences de détection aux positions \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 . Ces quantités sont intrinsèquement positives et ce résultat se généralise à tout ordre.

Cette dernière remarque peut en fait se généraliser un peu plus : il suffit de noter que $\hat{\rho}$ est un opérateur hermitien. Pour tout opérateur \hat{A} , on peut alors écrire

$$\text{tr} \left[\hat{\rho} \hat{A}^\dagger \hat{A} \right] \geq 0 \quad (1.3)$$

En définissant \hat{A} de manière approprié, on peut ainsi obtenir une multitude d'inégalités vérifiées par les fonctions de corrélations. Par exemple, on peut montrer que pour tout n

$$|G^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_{2n})|^2 \leq G^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n, \dots, \mathbf{x}_1) G^{(n)}(\mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_{2n}, \mathbf{x}_{2n}, \dots, \mathbf{x}_{n+1}) \quad (1.4)$$

Pour $n = 1$ par exemple, cela revient à écrire que $|g^{(1)}(x_1, x_2)|^2 \leq 1$. Le fait qu'en mécanique quantique les opérateurs $\hat{E}^{(+)}$ et $\hat{E}^{(-)}$ ne commutent pas en général rend ces inégalités fondamentalement différentes de celle que l'on peut obtenir avec des champs \mathcal{E} classiques. Un exemple sur lequel nous aurons l'occasion de revenir correspond à la situation suivante [32, 33]. On peut montrer que l'intensité $I(\mathbf{r}, t)$ d'un champ électrique classique vérifie les inégalités de Cauchy-Schwartz suivante

$$|\langle I(\mathbf{r}, t) I(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle|^2 \leq \langle I^2(\mathbf{r}, t) \rangle \langle I^2(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle \quad (1.5)$$

Cette inégalité n'a pas d'équivalent en mécanique quantique. Formellement elle correspondrait à l'inégalité suivante

$$|\langle : \hat{I}(\mathbf{r}, t) \hat{I}(\mathbf{r}, t + \tau) : \rangle|^2 \leq \langle : \hat{I}^2(\mathbf{r}, t) : \rangle \langle : \hat{I}^2(\mathbf{r}, t + \tau) : \rangle \quad (1.6)$$

dans laquelle $::$ correspond à l'ordre normal. Pour une partie des sources de particules usuelles, l'inégalité 1.6 est tout de même vérifiée, bien qu'elle ne le soit pas en général. Pour un système stationnaire ¹ par exemple, elle peut se réécrire sous la forme

$$g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0) \quad (1.7)$$

Une partie des expériences d'optique quantique réalisées dans la seconde partie du 20^{ème} siècle a consisté à mettre en évidence des systèmes pour lesquels cette inégalité n'est plus vérifiée, ce qui revient en d'autres termes à démontrer l'existence de sources de particules que l'optique ondulatoire ne peut décrire. Le dégroupement de photons correspond par exemple à une telle situation [7, 34]. Dans ces expériences, les expérimentateurs ont observé que $:g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$. On parle alors de source de photons sub-poissonienne ². Ce type d'expériences a montré les limites d'une description purement classique des phénomènes physiques et confirmé la validité de la description quantique. Nous reviendrons sur ce point par la suite à plusieurs reprises.

¹Dans cette situation $g^{(2)}(t, t + \tau)$ est indépendant de t .

²Cette définition s'oppose aux sources poissoniennes pour lesquelles $g^{(2)}(0) = g^{(2)}(\tau)$ et super-poissoniennes pour lesquelles $g^{(2)}(0) > g^{(2)}(\tau)$.

Cohérence À partir de la définition des fonctions de corrélation, R. J. Glauber a proposé une nouvelle définition de la cohérence dans le cadre de la mécanique quantique. Un système est dit cohérent dès que

$$g^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2n}) = 1 \quad (1.8)$$

pour tout n . En physique classique, la notion de cohérence correspond finalement à une cohérence du premier ordre par rapport à cette définition. Il est possible de trouver des états quantiques vérifiant de telles égalités : les états cohérents [35]. Ils correspondent aux vecteurs propres des opérateurs d'annihilation d'un mode du champ électromagnétique et peuvent s'écrire dans la base des états de Fock sous la forme

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} |n\rangle \quad (1.9)$$

où α correspond à un nombre complexe arbitraire. Ce type d'état permet de décrire en très bonne approximation, un faisceau laser d'intensité $|\alpha|^2$. Par ailleurs, ces états ne sont pas orthogonaux entre eux mais vérifient une relation de fermeture

$$\int d\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \hat{1} \quad (1.10)$$

très utile d'un point de vue formel. Différentes méthodes stochastiques sont ainsi basées sur une décomposition de la matrice densité du système considéré sur de tels états (voir le paragraphe 5.2 et l'annexe C).

1.1.2 Cohérence du premier ordre

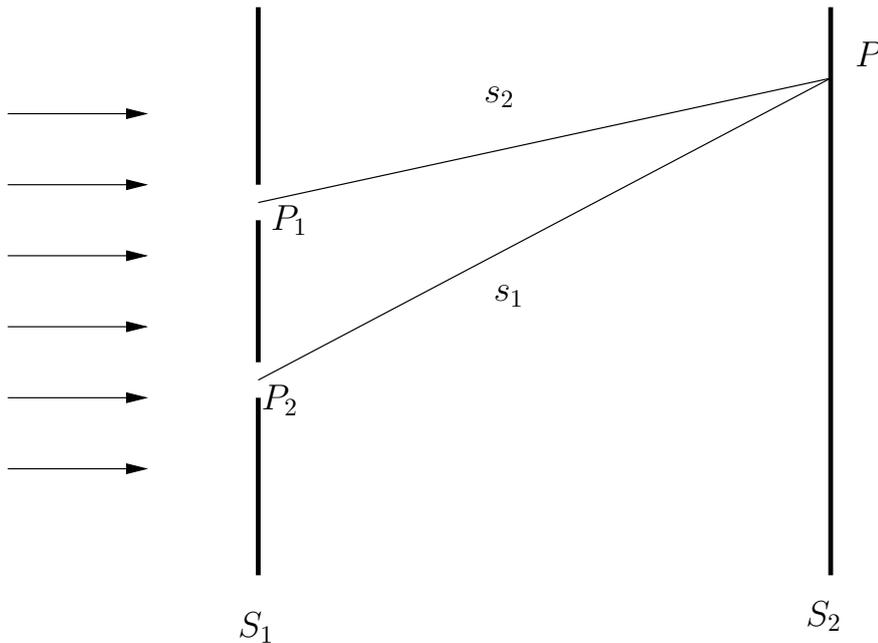


FIG. 1.1 – Diagramme schématisé d'une expérience idéale de trous d'Young.

L'expérience des trous d'Young Historiquement l'apparition de la notion de cohérence du premier ordre d'une source de particules correspond à la célèbre expérience des trous d'Young. Dans cette dernière, un champ lumineux quasi-monochromatique issu d'une source ponctuelle est envoyé sur un écran percé de deux trous très fins (la distance entre la source et l'écran est suffisamment grande pour que sur l'écran S_1 , l'onde incidente puisse être considéré comme une onde plane). L'image obtenue sur un écran S_2 placé après les deux trous correspond à une figure d'interférence où l'intensité lumineuse mesurée dépend de la position de détection. La figure 1.1 donne une représentation schématique du dispositif expérimental. Au point P sur l'écran S_2 et à l'instant t , la partie de fréquence positive de l'opérateur champ se décompose sous la forme d'une superposition linéaire des opérateurs champ aux points P_1 et P_2 à un instant précédent

$$\widehat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = K_1 \widehat{E}_1^{(+)}(\mathbf{r}_1, t - t_1) + K_2 \widehat{E}_2^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - t_2) \quad (1.11)$$

avec $t_i = s_i/c$ le temps nécessaire à la lumière pour se rendre du trou P_i au point P . Les coefficients K_1 et K_2 dépendent de la géométrie et de la taille des trous. Si l'on regarde maintenant l'intensité mesurée par un photodétecteur placé au point P , on peut écrire que

$$\begin{aligned} \langle \widehat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle \widehat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \widehat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= |K_1|^2 \langle \widehat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t - t_1) \widehat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t - t_1) \rangle + |K_2|^2 \langle \widehat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t - t_2) \widehat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle \\ &\quad + 2\text{Re} \left[K_1 * K_2 \langle \widehat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t - t_1) \widehat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

En introduisant les intensités moyennes des contributions issues des points P_1 et P_2 ,

$$\langle \widehat{I}^{(i)}(\mathbf{r}, t - t_i) \rangle = |K_i|^2 \langle \widehat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_i, t - t_i) \widehat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_i, t - t_i) \rangle \quad (1.13)$$

et en tenant compte du fait que le système est stationnaire, soit $\widehat{I}^{(i)}(\mathbf{r}_i, t - t_i) = \widehat{I}^{(i)}(\mathbf{r}_i)$, on peut réécrire l'égalité 1.12, en fonction de la fonction de corrélation d'ordre 1,

$$\langle \widehat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \widehat{I}^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle + \langle \widehat{I}^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle + 2\sqrt{\langle \widehat{I}^{(1)}(\mathbf{r}) \rangle \langle \widehat{I}^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle} \text{Re}[g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)] \quad (1.14)$$

où $\tau = t_1 - t_2$. Pour une source quasi-monochromatique, on peut écrire

$$g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = |g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| e^{i(\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) - \nu_0 \tau)} \quad (1.15)$$

où la fonction $\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)$ varie lentement par rapport à la position sur l'écran. En revanche le terme $\nu_0 \tau = \nu_0(s_1 - s_2)/c$ entraîne une variation rapide du terme de phase et $g^{(1)}$ est donc responsable de variations sinusoïdale de l'intensité du champ sur l'écran [33]. D'autre part, pour des champs issus de P_1 et P_2 de même intensité, la visibilité des franges d'interférences est égale à $|g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)|$. On sait d'après la relation 1.4, que l'on a nécessairement

$$|g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)|^2 \leq 1 \quad (1.16)$$

Quand $|g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| = 1$, la visibilité des franges est maximale et les deux champs lumineux qui arrivent en P sont mutuellement cohérents. Pour les cas intermédiaires, $0 < |g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| < 1$, on parle de cohérence partielle. L'expérience des trous d'Young revient en fait à une mesure de la forme de la fonction de corrélation d'ordre 1, qui est une mesure directe de la cohérence de la source. Une des propriétés fondamentales de cette fonction peut être énoncée au travers du théorème de Wiener-Khintchine [36], qui relie la transformée de

Fourier de la fonction de corrélation d'ordre 1 à la densité spectrale de puissance $S(\mathbf{r}, \nu)$ du champs considéré ³

$$S(\mathbf{r}, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\tau G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \tau) e^{i\nu\tau} \quad (1.17)$$

Le spectre d'une source thermique par exemple peut être décrit par une gaussienne centrée autour d'une fréquence $\nu = \nu_0$ donnée et de largeur à $1/\sqrt{e}$ définie par $1/\tau_c$. Ce temps est appelé le temps de cohérence du champs lumineux du fait de la relation 1.17, qui impose $|g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau)| = e^{-\tau^2/2\tau_c^2}$ et définit donc le temps de propagation typique pour lequel les franges d'interférence de l'expérience des trous d'Young restent visibles. On parle de cohérence temporelle. Une remarque intéressante vient du fait que tous les calculs effectués ici donnent un résultat identique dans le cadre de l'optique ondulatoire classique. Les mesures de cohérence du premier ordre en optique ne permettent donc pas de mettre en évidence le caractère corpusculaire de la lumière mais représentent bien une mise en évidence de son caractère ondulatoire.

Cohérence d'une source incohérente et étendue On considère maintenant une source incohérente quasi-monochromatique ayant une certaine extension spatiale et dont les tailles transverses restent petites devant la distance entre la source et l'écran S_1 . Le théorème de van Cittert - Zernike permet d'écrire la forme de la fonction de corrélation du premier ordre dans une telle situation. Il relie directement la fonction $g^{(1)}$ au module la transformée de Fourier de la fonction d'intensité de la source [36].

$$|g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)| = \left| \frac{\int_\sigma d^2\mathbf{r} I(\mathbf{r}) e^{-i\frac{4\pi}{\lambda|\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2|} \mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}}{\int_\sigma d^2\mathbf{r} I(\mathbf{r})} \right| \quad (1.18)$$

Dans cette expression, λ correspond à la longueur d'onde de la source, et σ à la surface de la source vue de l'écran S_1 . Classiquement, tout se passe donc comme si la contribution du champ au point P_i est la somme des amplitudes des champs émis de manière incohérente par chaque élément de surface $d\sigma$ de la source. Quand la séparation entre les points P_1 et P_2 augmente, le degré de cohérence entre les champs aux points P_1 et P_2 mesuré par la fonction $g^{(1)}$ diminue. Ceci permet de définir la longueur de corrélation l_c qui caractérise la longueur typique pour laquelle les champs P_1 et P_2 restent cohérents. Pour une source de taille angulaire θ vue de l'écran S_1 , on peut écrire

$$l_c = \frac{\lambda}{\theta} \quad (1.19)$$

La longueur de corrélation définit ainsi la cohérence spatiale d'une source.

Cohérence d'un condensat de Bose-Einstein La dualité onde-corpuscule, introduite par Louis de Broglie en 1924, établit pour la première fois, le caractère ondulatoire des particules matérielles. On peut ainsi associer à toute particule matérielle, une longueur d'onde inversement proportionnelle à son impulsion p .

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} \quad (1.20)$$

³Une telle propriété n'est applicable que pour une source stationnaire.

où h est la constante de Planck. Il est ainsi possible d'observer des phénomènes d'interférence entre gaz dilués. Expérimentalement, rendre de tels phénomènes observables nécessite de travailler avec des gaz de très basse température, pour lesquels la longueur d'onde de de Broglie devient accessible pour les instruments de mesure couramment utilisés. Le développement de techniques de refroidissement de gaz dilués, qui a été récompensé par le prix Nobel en 1997 et 2001, a permis la réalisation de telles observations. Un des plus grands accomplissements de ce domaine de recherche est la possibilité de générer des condensats de Bose-Einstein, que l'on peut voir comme l'analogue atomique d'un laser⁴. Plusieurs expériences ont été réalisées pour mesurer les propriétés de cohérence d'un condensat. Une des plus spectaculaires date de 1997 et a été réalisée dans le groupe de W. Ketterle au MIT [37]. La figure 1.2 (1) donne l'image obtenue par cette équipe dans le cas d'une interférence entre deux condensats de Bose-Einstein indépendants. Le très bon contraste des franges d'interférence obtenues sur toute l'étendue de l'interférogramme est une démonstration des propriétés de cohérence à longue portée d'un condensat de Bose-Einstein, en complète analogie avec celles d'un faisceau laser. Des mesures quantitatives de la longueur de corrélation l_c ont aussi pu être réalisées dans le même groupe, par l'intermédiaire de mesure de la distribution d'impulsion du condensat [38]. La largeur en impulsion d'un condensat est directement reliée à sa taille du fait du principe d'incertitude de Heisenberg. En analogie avec le théorème de van Cittert-Zernike on peut d'autre part la relier à la longueur de corrélation du condensat : on peut ainsi montrer que $l_c \sim \hbar/\Delta p$. La cohérence spatiale d'un condensat a par ailleurs été étudiée au travers de mesures interférométriques dans le groupe de W. D. Phillips [39]. Deux copies d'un même condensat sont recombinaées à l'aide d'impulsions Bragg. Les figures d'interférences obtenues appuient l'hypothèse d'une phase uniforme sur toute l'extension du condensat.

Une autre série d'expériences réalisées dans le groupe de T. Hänsch et T. Esslinger a permis d'observer l'établissement de la cohérence pour un gaz dilué proche de la température critique de condensation [40]. La figure 1.2 (2) donne les images obtenues dans le cas d'un battement de deux lasers à atomes pour différentes températures. Les figures montrent très clairement l'augmentation du contraste des franges d'interférences au fur et à mesure que la cohérence à longue portée s'établit sur l'étendue du gaz au passage de la température critique de condensation. Des expériences plus récentes ont pu mesurer la cinétique de l'établissement de cette cohérence [41, 42].

1.1.3 Cohérence du second ordre

Les premières mesures de corrélation de photo-courants réalisées par les physiciens Hanbury Brown et Twiss, puis la possibilité de compter les photons un par un au moyen de photodétecteurs ont permis de s'intéresser aux propriétés de cohérence du deuxième ordre des sources de photons. La fonction $G^{(2)}$ permet ainsi de rendre compte de phénomènes d'interférences faisant intervenir deux photons. C'est au travers de son étude que les prédictions quantiques et classiques ont pu être opposées et qu'une nouvelle vision des phénomènes physiques impliqués a pu voir le jour.

⁴Nous reviendrons au cours du deuxième chapitre sur les propriétés de ces condensats.

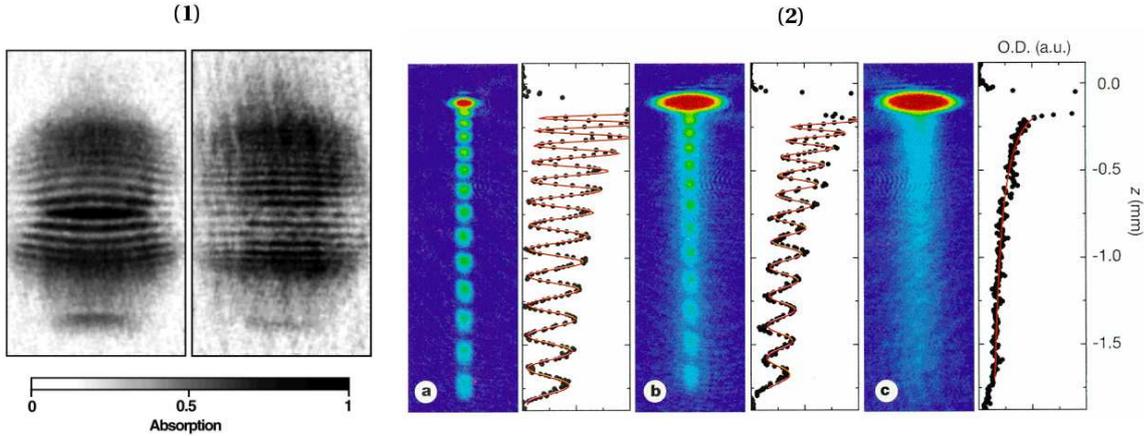


FIG. 1.2 – Mesures de cohérence du premier ordre pour des condensats de Bose-Einstein (1) Figure d'interférences obtenue à l'aide de deux condensats indépendants. Elle s'étale sur toute l'extension spatiale de la zone de recouvrement des condensats [37]. (2) Battements entre deux lasers à atomes extraits d'un même condensat de Bose-Einstein à différentes hauteurs. Les figures (a), (b) et (c) correspondent à trois températures différentes du gaz. (a) condensat pur, (b) nuage partiellement condensé et (c) nuage thermique. À droite de chaque image, on peut observer le profil des interférences et en déduire le contraste des franges [40].

Point de vue classique sur les expériences d'Hanbury Brown et Twiss En optique ondulatoire, l'étude des fluctuations d'intensité d'une source thermique, comme par exemple la lumière issue d'une étoile ou d'une lampe à sodium, a permis de mettre en évidence l'existence de tavelures. L'intensité provenant d'une source thermique n'est en effet pas uniforme. Les fluctuations observées sont même très grandes et on peut montrer que

$$\langle I(\mathbf{r}, t)^2 \rangle = 2\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle^2 \quad (1.21)$$

En d'autres termes, l'amplitude des fluctuations d'intensité est de l'ordre de la valeur moyenne de l'intensité mesurée. Ce résultat est très bien compris si l'on considère la source comme une assemblée de sources ponctuelles émettant des ondes classiques complètement décorélées les unes des autres. La taille des grains de tavelure sur un écran d'observation est défini par la cohérence spatiale de la source. La cohérence temporelle de la source définit de son côté le temps typique pendant lequel les grains sont observables. La figure de tavelure évolue en effet constamment au cours du temps. Mesurer les fluctuations d'intensité d'une source thermique permet ainsi de remonter à ses propriétés de cohérence.

Les expériences de Hanbury Brown et Twiss ont été à l'origine motivées par les limitations de l'interféromètre stellaire de Michelson. Ce célèbre dispositif est en effet largement perturbé par les fluctuations d'indice de l'atmosphère. Bien avant les progrès de l'optique adaptative qui ont permis de compenser cette limitation, les deux physiciens Hanbury Brown et Twiss ont mis en place un nouveau type d'interféromètre capable de réaliser des mesures de fluctuations d'intensité sur la lumière provenant d'une étoile. Cette technique a l'avantage d'être totalement insensible aux fluctuations atmosphériques [33] et permet tout autant que l'interféromètre stellaire de Michelson d'obtenir les propriétés de cohérence de la source étudiée. D'abord limité au domaine des radio-fréquences, ils prouvèrent la validité de la technique

dans le domaine du visible [4], avant de l'appliquer pour mesurer le diamètre angulaire de l'étoile Sirius [43]. Si l'on réinterprète le résultat observé par Hanbury Brown et Twiss dans le cadre du formalisme quantique, on aboutit à un résultat qui n'a pas manqué d'étonner la communauté scientifique de l'époque. En effet, mesurer des fluctuations d'intensité revient à mesurer la fonction $G^{(2)}$. Et l'équation 1.21 signifie tout simplement que $g^{(2)}(0) = 2$. Hanbury Brown et Twiss ont pu vérifier ce résultat et montrer d'autre part que $g^{(2)}(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow 1$. En d'autres termes, deux photons émis par une étoile ont plus de chances d'être détectés simultanément que séparés l'un de l'autre. L'observation d'une telle corrélation entre des photons a priori complètement décorrélés a déclenché de vifs débats sur l'interprétation que l'on pouvait en donner dans le cadre de la mécanique quantique. Il a fallu attendre 1961 et un modèle dû à Fano pour en comprendre les fondements [5]. Nous décrivons ce modèle dans le paragraphe suivant.

L'effet Hanbury Brown et Twiss Si l'on considère l'état $|\psi\rangle = |1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}'}\rangle$ correspondant à un état à deux photons de vecteurs d'onde respectifs \mathbf{k} et \mathbf{k}' , on peut écrire la fonction de corrélation du second ordre correspondante

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t, t) = \langle 1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}'} | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) | 1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}'} \rangle \quad (1.22)$$

En utilisant la relation de fermeture de la base des états de Fock, on peut décomposer l'expression précédente sous la forme du produit de deux contributions

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t, t) = \langle 1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}'} | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t) | 0 \rangle \times \langle 0 | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) | 1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}'} \rangle \quad (1.23)$$

Or, $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_i, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i - i\omega_{\mathbf{k}}t}$ ⁵ et ainsi, on peut écrire

$$\langle 0 | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t) | 1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{k}'} \rangle = \mathcal{E}_{\mathbf{k}}^2 e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1 + i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_2} + e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_1 + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2} \right) \quad (1.24)$$

Ce dernier terme est schématisé sur la figure 1.3 et correspond à l'expression de deux chemins de détection différents : chacun des deux photons peut être détecté par l'un des deux détecteurs. Une interférence quantique a lieu entre ces deux chemins de détection et on peut écrire

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t, t) = 2\mathcal{E}_{\mathbf{k}}^4 [1 + \cos [(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]] \quad (1.25)$$

Deux photons indépendants ont donc plus de chances d'être détectés simultanément du fait de ce terme d'interférence. Le fait que les interférences soient constructives est essentiellement dû au caractère bosonique des photons. L'avantage de ce modèle réside dans le fait qu'il peut s'étendre simplement à d'autres situations. Dans le cas d'un laser monomode par exemple, tous les photons sont dans le même mode et le terme d'interférence disparaît. Il n'y a donc pas d'effet Hanbury Brown et Twiss dans le cas d'un faisceau laser. Enfin, on peut aisément montrer que pour deux fermions, on observe aussi un terme d'interférence mais destructif cette fois-ci. Deux fermions ont donc moins de chances d'être détectés simultanément que séparés l'un de l'autre. Ce résultat est en complet accord avec le principe d'exclusion de Pauli.

⁵On suppose ici que les champs sont polarisés linéairement.

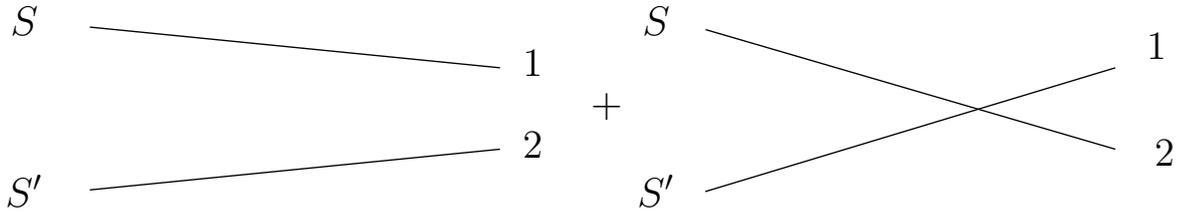


FIG. 1.3 – *Interprétation des termes de l'équation 1.24 en termes de chemins de détection. Le photon issu de S peut être détecté par le détecteur 1 tandis que celui issu de S' est détecté par le détecteur 2. Un processus de détection équivalent correspond au cas où les deux chemins de détection sont échangés. Si les deux processus de détection sont indiscernables, ils interfèrent entre eux. L'interférence est constructive pour des bosons.*

Cas d'une source chaotique Les sources thermiques peuvent être décrites comme des sources chaotiques. Il est en fait possible de montrer que leur opérateur densité peut se décomposer sur la base des états de Fock sous la forme [29]

$$\hat{\rho} = \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right)^m |m\rangle \langle m| \quad (1.26)$$

où $\langle n \rangle = (e^{h\nu/k_B T} - 1)^{-1}$ en accord avec la distribution de Planck. A partir de l'expression 1.26, il est possible d'exprimer toutes les fonctions de corrélations d'ordre n en termes de fonctions de corrélation du premier ordre $G^{(1)}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ [44]. En particulier, dans la situation de l'expérience des physiciens Hanbury Brown et Twiss, le taux de coïncidences de détection peut s'écrire sous la forme

$$G^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = G^{(1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)G^{(1)}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) + G^{(1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)G^{(1)}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \quad (1.27)$$

Les deux premiers termes de cette expression correspondent aux taux de détection qui seraient mesurés en \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 en l'absence d'interférences. Le deuxième terme quant à lui, représente la contribution des interférences à deux photons décrits au paragraphe précédent, au taux de coïncidences de détection. Si on considère que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, correspondant à la situation où il n'y a aucun délai entre les détections, on obtient

$$G^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = 2G^{(1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)^2 \quad (1.28)$$

Autrement dit, le taux de coïncidences pour un délai proche de zéro est le double de ce qu'il devrait être s'il n'était dû qu'à des coïncidences accidentelles. D'autre part, si l'on s'intéresse maintenant aux fonctions de corrélation normalisées on peut voir que

$$g^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1 + g^{(1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^2 \quad (1.29)$$

Le volume de l'espace temps à l'intérieur duquel on peut observer une augmentation des coïncidences de détection est donc bien défini par les propriétés de cohérence de la source, décrit par la fonction $g^{(1)}$. En mesurant ce volume, on peut donc bien avoir accès au temps de cohérence τ_c ainsi qu'aux longueurs de cohérence l_c de la source.

Une autre façon de comprendre ces résultats consiste à imaginer l'expérience suivante [29]. Si l'on s'intéresse à la probabilité de détecter n photons en provenance d'une source chaotique

et détectés par un photodétecteur pendant une durée fixée t , on obtient la distribution suivante

$$p_n(t) = \frac{1}{1 + wt} \left(\frac{wt}{1 + wt} \right)^n \quad (1.30)$$

dans laquelle $\langle n \rangle = wt$. Imaginons maintenant que l'on désire mesurer à partir d'un instant arbitraire, la distribution des temps d'arrivée du premier photon sur le détecteur. On peut montrer que cette distribution prend la forme suivante

$$W_{ch}(t) = \frac{w}{(1 + wt)^2} \quad (1.31)$$

Cette distribution est relativement différente de celle que l'on peut obtenir dans le cas d'un faisceau laser, qui correspond en fait à une loi de poisson

$$W_{coh}(t) = we^{-wt} \quad (1.32)$$

Imaginons maintenant que l'on réalise une nouvelle expérience, dans laquelle à partir de l'instant de détection d'un premier photon, on s'intéresse à la distribution des temps de détection d'un deuxième photon. Dans le cas d'une source chaotique, cette distribution prend la forme suivante

$$W_{ch}(1|t) = \frac{2w}{(1 + wt)^3} \quad (1.33)$$

Cette distribution est deux fois plus grande que $W_{ch}(t)$ en $t = 0$. On retrouve donc bien ici le facteur 2 d'augmentation du taux de coïncidences de détection observé dans les expériences d'Hanbury Brown et Twiss. On peut parler d'un effet de groupement : les photons ont plus de chances d'arriver par paire que séparés les uns des autres. Pour un faisceau laser, les choses sont assez différentes et on obtient de nouveau la même loi de poisson que dans la première situation

$$W_{coh}(1|t) = we^{-wt} \quad (1.34)$$

Cette propriété marque donc bien l'indépendance statistique des photons d'un faisceau laser.

1.1.4 Mesures de corrélation du second ordre dans les gaz froids

Cas d'un gaz thermique La première mesure d'une fonction de corrélation du second ordre pour un gaz froid correspond aux expériences du groupe de F. Shimizu, réalisées en 1995 à partir d'un jet refroidi de néon métastable. Le néon est un boson et les mesures réalisées ont permis de mettre en évidence l'effet de groupement précédemment décrit [45] : les signaux expérimentaux montrent très clairement que pour $\tau > 0$, $g^{(2)}(0) > g^{(2)}(\tau)$, autrement dit, que les atomes de néon ont plus de chances d'arriver groupés que séparés sur le détecteur.

Dans le cadre de mon travail de thèse, j'ai eu l'occasion de mesurer cette même fonction de corrélation pour un gaz thermique d'hélium métastable : $^4\text{He}^*$. Il s'agit d'un boson. Les expériences réalisées ont été décrites dans le manuscrit de thèse de M. Schellekens [46] de manière approfondie et nous aurons l'occasion de revenir dans les chapitres suivants sur les aspects expérimentaux qui ont permis une telle mesure. L'une des avancées majeures de cette expérience vient du fait que le détecteur utilisé donne accès à une mesure tri-dimensionnelle

de la fonction $g^{(2)}$. Pour réaliser les mesures, un gaz thermique d'hélium métastable est piégé et refroidi à l'intérieur d'un piège harmonique. A l'issue de la phase de refroidissement, la température du gaz est de l'ordre du μK et on peut exprimer sa taille suivant une direction de l'espace donnée i , en fonction de la fréquence d'oscillation du piège harmonique correspondante

$$s_i = \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_i^2}} \quad (1.35)$$

Le piège magnétique est ensuite coupé et les atomes tombent sous l'effet de la gravité sur un détecteur capable d'enregistrer les temps et positions d'arrivée des atomes. A partir de ces données, il est possible d'exprimer la fonction $g^{(2)}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ correspondant à la probabilité de détection simultanée de deux atomes dont les positions respectives \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 vérifient : $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Les détails de la procédure suivie seront donnés au chapitre 4. La figure 1.4 donne les résultats obtenus pour différentes tailles de la source, correspondant à différentes températures[25]. Pour des atomes très proches, les mesures indiquent clairement une augmentation du taux de coïncidence de détection. Ces mesures confirment donc les résultats obtenus dans le groupe de Shimizu et sont aussi une preuve de la nature ondulatoire des particules massiques. On peut ainsi parler d'effet Hanbury Brown et Twiss atomique.

Pour un gaz idéal de bosons sans interaction, Narachewski et Glauber ont pu montrer que l'on retrouvait bien des résultats analogues à ceux obtenus dans le cas d'une source thermique de photons [47]. En particulier, la formule 1.29 est encore valable dans cette situation. Mesurer la fonction de corrélation d'ordre 2 revient donc à mesurer les propriétés de cohérence de la source. En particulier, on peut ainsi mesurer les longueurs de corrélation qui définissent le volume de cohérence associé à la source. Pour un gaz idéal de bosons en expansion, il est possible de trouver l'expression analytique de ces longueurs de corrélation [48]

$$l_i = \frac{\hbar t}{ms_i} \quad (1.36)$$

Les résultats expérimentaux de la figure 1.4 sont en parfait accord avec cette expression ⁶.

Mentionnons ici que d'autres mesures de la fonction $g^{(2)}$ ont pu être réalisées dans d'autres situations sur des bosons. Ainsi, une mesure *in situ* a pu être réalisée au moyen d'un système d'imagerie par absorption sur un gaz quasi-unidimensionnel de rubidium [49]. Dans le groupe d'I. Bloch, une mesure de $g^{(2)}(0)$ a pu être effectuée sur la phase isolante de Mott d'un gaz de rubidium [50].

Condensat de Bose-Einstein Nous avons mentionné précédemment que les photons d'un faisceau laser sont statistiquement indépendants. Il n'existe donc pas d'effet Hanbury Brown et Twiss pour de telles sources. En analogie avec ce résultat, les atomes qui composent un condensat de Bose-Einstein sont de la même manière statistiquement indépendants. Ce résultat a pu être vérifié sur notre dispositif expérimental : La figure 1.4 permet ainsi de comparer

⁶Suivant la direction \mathbf{x} , la résolution du détecteur est plus grande que la longueur de corrélation attendue. La longueur mesurée correspond donc en fait à une mesure de la résolution du détecteur. Cette limitation est d'autre part responsable du fait que $g^{(2)}(0) < 2$. Nous aurons l'occasion de revenir en détail sur ces considérations dans la suite.

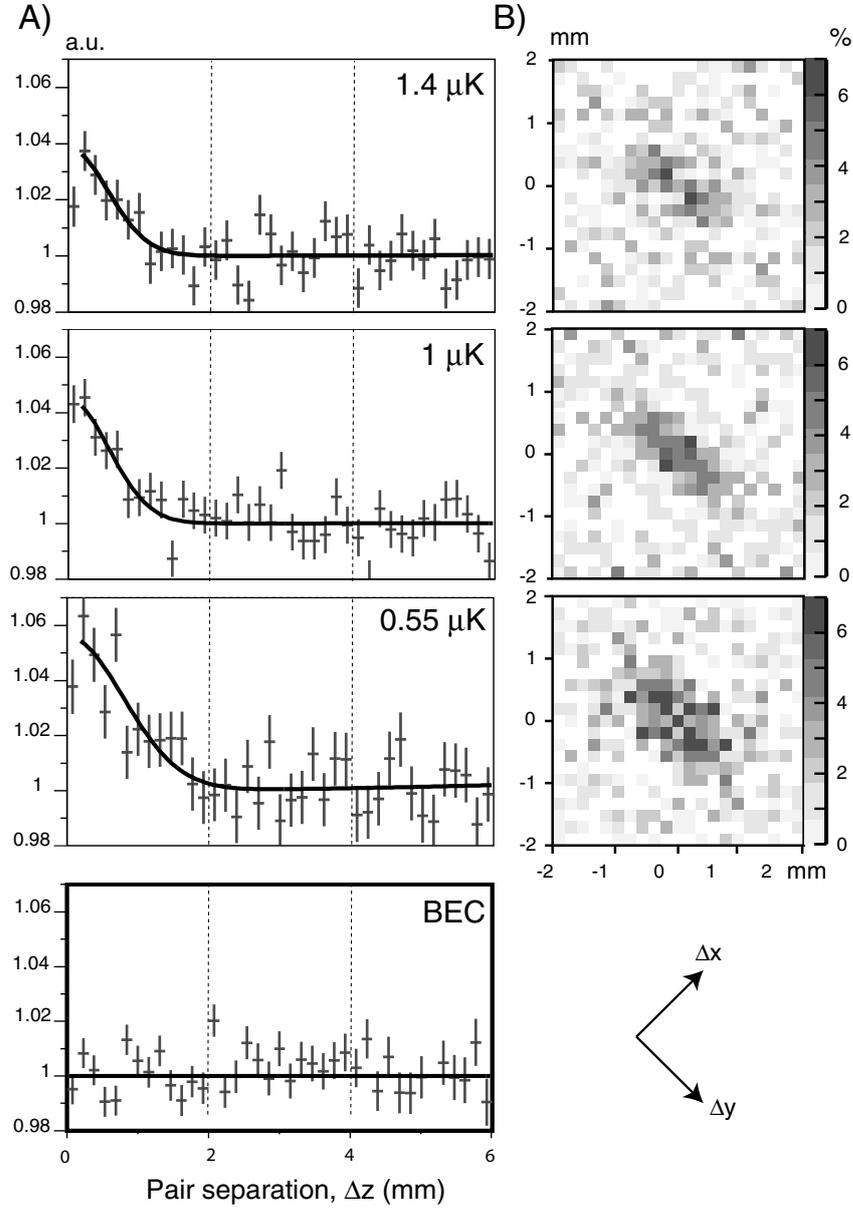


FIG. 1.4 – Mesure de la fonction de corrélation d'ordre 2 $g^{(2)}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ pour un gaz thermique en chute libre. L'axe z correspond à la direction de la gravité. (A) Mesure de $g^{(2)}(0, 0, \Delta z)$ pour différentes températures de la source. Modifier la température de la source revient à changer la taille du gaz dans le piège et modifie en conséquence les longueurs de corrélation conformément aux équations 1.35 et 1.36. Pour une température inférieure au seuil de la condensation de Bose-Einstein, les mesures confirment l'indépendance statistique des atomes. (B) Mesure de $g^{(2)}(\Delta x, \Delta y, 0)$ pour différentes températures de la source. La résolution du détecteur limite la mesure de la longueur de corrélation suivant l'axe x et a pour conséquence de diminuer $g^{(2)}(0)$. Cet aspect sera traité en détail dans la suite du manuscrit.

la fonction $g^{(2)}$ obtenue pour des gaz thermiques et des condensats de Bose-Einstein. Les résultats expérimentaux démontrent bien l'indépendance statistique des atomes qui composent le condensat. Ce résultat a pu être confirmé par des mesures réalisées dans le groupe de T. Esslinger [51].

Source thermique de fermions Plus récemment, dans le cadre d'une collaboration avec l'équipe de W. Vassen à Amsterdam, nous avons été en mesure de comparer sur le même dispositif expérimental, la fonction de corrélation d'ordre 2 obtenue pour un gaz thermique bosonique et celle d'un gaz thermique fermionique [26]. Les mesures ont été réalisées sur deux isotopes de l'hélium : $^4\text{He}^*$, qui est un boson et $^3\text{He}^*$ qui est un fermion. La figure 1.5 donne la forme de la fonction $g^{(2)}(0, 0, \Delta z)$ obtenue expérimentalement dans les deux situations. Comme indiqué précédemment, les interférences quantiques à l'origine de l'effet Hanbury Brown et Twiss sont constructives pour des bosons et destructives pour des fermions. Ceci se traduit respectivement par une augmentation du taux de coïncidences de détection pour les bosons, et par une diminution du taux de coïncidences de détection pour les fermions, dès que la séparation Δz est plus petite que la longueur de corrélation correspondante. L'expression de la longueur de corrélation indiquée précédemment, 1.36, dépend explicitement de la masse des particules. Pour une même température des gaz d' $^4\text{He}^*$ et d' $^3\text{He}^*$, on s'attend donc à ce que le rapport des longueurs de corrélation mesurées pour les bosons et les fermions soit de l'ordre de 4/3. Les résultats de la figure 1.5 confirment ce résultat.

Comme indiqué au début de ce chapitre pour le phénomène de dégroupement de photons, le fait que pour des fermions $g^{(2)}(0) < g^{(2)}(0, 0, \Delta z)$ viole ouvertement les inégalités de Cauchy-Schwartz obtenues pour des champs classiques 1.5. Une telle mesure est donc une preuve indirecte du caractère quantique des corrélations observées. Aucun modèle conventionnel d'onde classique ne permet d'expliquer un tel comportement. Mentionnons ici qu'un tel phénomène a pu aussi être observé pour un nuage de fermions dégénérés relâché d'un réseau optique [52].

1.2 Processus d'amplification paramétrique

Les sources de lumière disponibles à l'état naturel correspondent essentiellement à des sources thermiques. L'invention du maser en 1953 par Charles S. Townes puis celle du laser en 1960 par Theodore H. Maiman, a donné accès à de nouveaux états du rayonnement : les états cohérents. La théorie quantique du rayonnement prédit l'existence d'une multitude d'autres états physiques aux propriétés non conventionnelles : états de Fock, paires de photons intriqués, états squeezés... Un des challenges de l'optique quantique moderne consiste à générer des sources de photons capables de produire de tels états de manière à pouvoir en étudier les propriétés. L'optique non-linéaire s'est imposée comme l'une des voies de recherche les plus fructueuses en vue de la réalisation de telles sources. Nous nous proposons dans cette partie de nous intéresser plus particulièrement au processus d'amplification paramétrique. Cette étude nous permet de donner une vision générale des avancées de ce domaine.

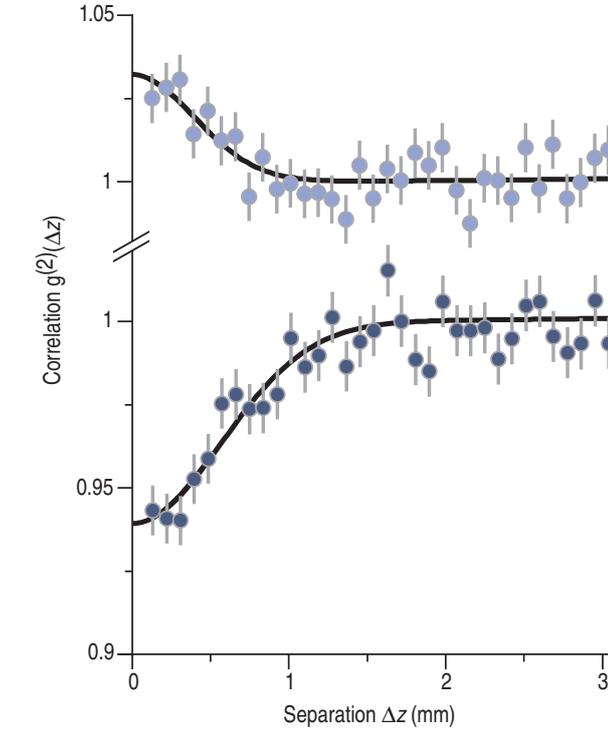


FIG. 1.5 – Mesures de la fonction $g^{(2)}(0,0,\Delta z)$. La courbe du haut correspond à un gaz thermique bosonique d' ${}^4\text{He}^*$, tandis que celle du bas à un gaz thermique fermionique d' ${}^3\text{He}^*$. Les températures des gaz sont de $0.5 \mu\text{K}$. On peut observer clairement la différence entre les statistiques des deux gaz. Le rapport des masses des deux isotopes intervient si l'on cherche à comparer directement les longueurs de corrélations observées dans les deux situations [26].

1.2.1 Cadre général

Dans les milieux non linéaires qui possèdent une susceptibilité non linéaire d'ordre 2, $\chi^{(2)}$, non nulle, il est possible de transformer un photon de fréquence 2ω en une paire de photons de fréquence ω_1 et ω_2 , vérifiant : $2\omega = \omega_1 + \omega_2$. Il s'agit du phénomène de fluorescence paramétrique. Les vecteurs d'onde des photons produits lors d'une telle conversion vérifient une condition d'accord de phase qui impose :

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 2\mathbf{k} \quad (1.37)$$

où $2\mathbf{k}$, \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 correspondent respectivement aux vecteurs d'onde du photon incident et des deux photons produits. La combinaison de la condition 1.37 et de la conservation de l'énergie imposent aux photons produits de se propager à l'intérieur de deux cônes de rayons respectifs $|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}|$ et $|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}|$. La figure 1.6 donne un exemple typique d'un résultat expérimental dans le cas d'un faisceau laser incident (traditionnellement appelée pompe) de longueur d'onde $\lambda_P = 400 \text{ nm}$. Sur l'image, on observe sur un écran une section du cône de lumière formée d'un des deux types de photons produits de longueur d'onde $\lambda_S = 630 \text{ nm}$ (Le faisceau constitué par ces photons est traditionnellement appelé le signal). Le fait que sur l'image la section du cône ne soit pas un cercle est dû aux caractéristiques géométriques du cristal. Le

deuxième cône de lumière constitué du deuxième type de photons produits n'est pas visible sur l'image, du fait de la longueur d'onde de ces photons $\lambda_I = 1095$ nm qui se trouve dans le proche infra-rouge (Ce dernier faisceau est appelée l'*idler*).

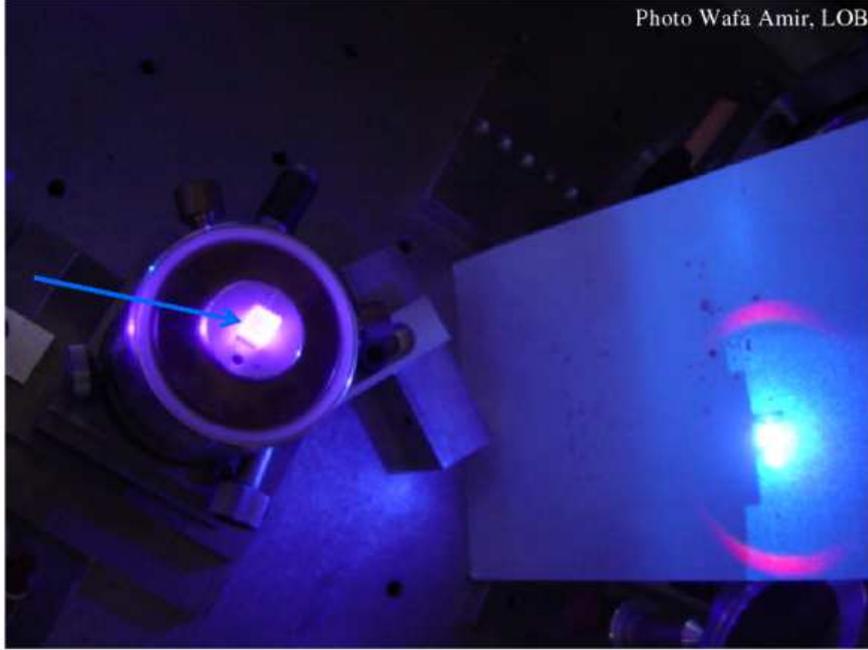


FIG. 1.6 – Mise en évidence expérimentale du phénomène de fluorescence paramétrique. Un faisceau pompe de longueur d'onde $\lambda_P = 400$ nm est envoyé à l'intérieur d'un cristal de susceptibilité non linéaire d'ordre 2 non nulle. Sur un écran placé après le cristal, on peut observer la tache du faisceau pompe qui a traversé le cristal (en bleu). L'interaction non linéaire entre la pompe et le cristal est à l'origine de la section de cône visible sur l'écran autour de la tache du faisceau pompe ($\lambda_S = 630$ nm, en rouge sur l'écran). Un deuxième cône de lumière, invisible sur l'écran puisque composé de photons de longueur d'onde $\lambda_I = 1095$ nm, est aussi produit du fait de l'interaction avec le cristal.

Chacun des cônes de lumière ainsi produit est en fait constitué d'une multitude de modes définis par des vecteurs d'onde de même module mais de directions différentes. Afin de modéliser simplement le phénomène, on peut se restreindre à l'étude de l'un de ces modes correspondant à une direction donnée de propagation \mathbf{k}_S du signal. Du fait de la condition d'accord de phase 1.37, ce mode n'est couplé qu'à une seule direction \mathbf{k}_I de l'*idler*. On peut ainsi écrire un hamiltonien simplifié ne tenant compte que du mode du faisceau incident et de ces deux modes. Le faisceau incident étant généralement un faisceau laser puissant, on peut en première approximation l'assimiler à un champ classique en négligeant ses fluctuations. Les deux autres champs sont décrits par leurs opérateurs d'annihilation respectifs \hat{a}_1 et \hat{a}_2 . Finalement, on peut écrire [31]

$$\hat{H} = \hbar\omega_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hbar\omega_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + i\hbar\chi\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger e^{-2i\omega t} - \hat{a}_1\hat{a}_2 e^{2i\omega t}\right) \quad (1.38)$$

La constante de couplage χ est proportionnelle à la susceptibilité du second ordre du milieu et à l'amplitude de la pompe.

En représentation d'interaction, la résolution des équations de Heisenberg déduite d'un tel hamiltonien, est analytique et leurs solutions s'écrivent

$$\begin{aligned}\hat{a}_1(t) &= \hat{a}_1(0) \cosh \chi t + \hat{a}_2^\dagger(0) \sinh \chi t \\ \hat{a}_2(t) &= \hat{a}_2(0) \cosh \chi t + \hat{a}_1^\dagger(0) \sinh \chi t\end{aligned}\quad (1.39)$$

Imaginons que les deux modes sont initialement vides, on peut exprimer l'évolution temporelle des populations $\hat{n}_1(t)$ et $\hat{n}_2(t)$ des deux modes sous la forme

$$\begin{aligned}\langle \hat{n}_1(t) \rangle &= \langle \hat{a}_1^\dagger(t) \hat{a}_1(t) \rangle = \sinh^2 \chi t \\ \langle \hat{n}_2(t) \rangle &= \langle \hat{a}_2^\dagger(t) \hat{a}_2(t) \rangle = \cosh^2 \chi t\end{aligned}\quad (1.40)$$

Le processus considéré correspond donc bien à une amplification des populations des modes 1 et 2. Celles-ci croissent exponentiellement au cours du temps. On peut aussi s'intéresser à la forme de l'état quantique ainsi généré. En représentation d'interaction, on peut mettre l'opérateur d'évolution sous la forme

$$\hat{U}(t) = \exp \left[\chi t \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \right) \right] \quad (1.41)$$

Pour construire l'état quantique produit au cours de l'amplification paramétrique, il faut réussir à décomposer l'opérateur d'évolution sous une forme plus adaptée. Ceci nécessite un peu de travail mathématique dont les différentes étapes sont bien décrites dans [53]. On peut aboutir à

$$\hat{U}(t) = (\cosh \chi t)^{-1} e^{\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \tanh \chi t} e^{-\left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 1\right) \ln(\cosh \chi t)} e^{-\hat{a}_1 \hat{a}_2 \tanh \chi t} \quad (1.42)$$

Pour un système initialement dans l'état vide $|0\rangle$, la forme 1.42 de l'opérateur évolution permet d'écrire l'état du système $|\Psi(t)\rangle$ à un instant donné sous la forme d'une superposition d'états nombre :

$$|\Psi(t)\rangle = (\cosh \chi t)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh \chi t)^n |n, n\rangle \quad (1.43)$$

où $|n, p\rangle$ est un état nombre contenant n photons dans le mode 1 et p photons dans le mode 2. Le système considéré évolue donc vers une superposition d'états qui contiennent un nombre égal de photons dans chacun des deux modes amplifiés. Il y a donc une corrélation parfaite entre le nombre de photons dans chaque mode. Nous verrons plus loin une mesure expérimentale mettant en valeur un tel effet. On peut aussi s'intéresser à l'état réduit correspondant à l'un des deux modes

$$\hat{\rho}_i(t) = \text{Tr}_i \{ |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)| \} = (\cosh \chi t)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh \chi t)^{2n} |n\rangle \langle n| \quad (1.44)$$

Il s'agit d'un état thermique avec un nombre moyen de photons $\langle n \rangle = \sinh^2 \chi t$ (voir l'analogie avec la discussion discutée à partir de la formule 1.30). On s'attend donc à pouvoir observer l'effet Hanbury Brown et Twiss sur de tels états.

Une autre propriété intéressante de ces états, correspond au fait que les corrélations quantiques qui relient les modes du signal et de l'*idler*, entraînent une réduction des fluctuations

des quadratures de phase des champs ⁷. On parle aussi de *squeezing* [31]. Dans le cas d'un amplificateur paramétrique dégénéré, c'est à dire pour lequel $\hat{a}_1 = \hat{a}_2 = \hat{a}$, cet effet apparaît clairement si l'on s'intéresse aux fluctuations des quadratures définies par

$$\begin{aligned}\hat{X}_1 &= \hat{a} + \hat{a}^\dagger \\ \hat{X}_2 &= \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i}\end{aligned}\quad (1.45)$$

A partir de l'évolution temporelle des opérateurs \hat{a} et \hat{a}^\dagger , on peut écrire que les fluctuations de \hat{X}_1 et \hat{X}_2 s'écrivent

$$\begin{aligned}\langle \Delta \hat{X}_1 \rangle &= e^{2\chi t} \\ \langle \Delta \hat{X}_2 \rangle &= e^{-2\chi t}\end{aligned}\quad (1.46)$$

Le produit des variances satisfait bien les relations d'incertitude de Heisenberg mais l'une des deux quadratures voit son bruit quantique réduit bien en dessous de celui du vide. Plus le temps d'interaction et le couplage sont grand, plus le *squeezing* observé est fort. On peut écrire des relations similaires dans le cas d'un amplificateur paramétrique non-dégénéré [31]. Cette réduction des fluctuations présentent un intérêt fondamental par rapport aux mesures de précision que l'on peut être amenée à réaliser. Réduire ces fluctuations permet théoriquement de diminuer la limite fondamentale de la précision que l'on peut obtenir, imposée par les relations de Heisenberg.

Enfin, si l'on s'intéresse à la limite où $\chi t \ll 1$, l'état quantique produit correspond approximativement à une paire individuelle de photons corrélées : $|\Psi(t)\rangle \sim \alpha|0\rangle + (1 - \alpha)|1, 1\rangle$ avec α une constante de normalisation. L'amplificateur paramétrique peut alors être vu comme une source de paires spontanées de photons corrélées. Ce type d'état présente un intérêt fondamental en vue de la réalisation de tests fondamentaux de mécanique quantique. Nous approfondissons cette remarque dans les paragraphes suivants.

1.2.2 Limite spontanée : émergence de paires individuelles corrélées

Mise en évidence des corrélations Afin de vérifier l'existence des paires corrélées produites durant le processus d'amplification paramétrique, des mesures de corrélation ont été réalisées. La figure 1.7 (a) précise le dispositif expérimental utilisé par Burnham et Weinberg pour démontrer l'existence des paires [55]. Un faisceau laser monomode de longueur d'onde $\lambda_P = 347$ nm et de faible puissance est envoyé sur un cristal d'ADP. L'interaction non-linéaire à l'intérieur du cristal crée à partir d'un photon incident, une paire de photons de longueur d'onde $\lambda_1 = 633$ nm et $\lambda_2 = 668$ nm. Ces photons sont diffusés à l'intérieur d'un cône dont les paramètres sont définis par les conditions imposées par la conservation de l'énergie et de l'impulsion (conditions d'accord de phase). Un détecteur de photon unique est placé sur une des directions d'émission des photons. Un autre est placé de façon arbitraire. Ce dernier est mobile et peut être déplacé dans le plan transverse au cône de diffusion. Au moyen de ce système de détection, les auteurs de [55] ont pu mesurer le taux de coïncidences de détection R_C sur les deux détecteurs. Ce taux a été étudié en fonction de la position du détecteur

⁷Ces quadratures peuvent être mesurées par l'intermédiaire d'un système de détection homodyne [54].

mobile. Une partie des résultats est présentée sur la figure 1.7 (b). Cette figure correspond au cas d'un déplacement du détecteur suivant l'axe y . Cet axe est orthogonal au plan de la figure 1.7 (a). Le taux R_C est piquée autour d'une position donnée du détecteur. L'origine de cet excès de coïncidences de détection peut être attribué au fait que les photons sont émis par paires vérifiant les conditions d'accord de phase. On ne peut pas en effet attribuer cette augmentation à la forme spatiale du profil d'intensité du cône de lumière. Le taux R_1 , correspondant au taux de détection sur le détecteur mobile, reste en fait constant sur toute la plage de mesure. Cette mesure constitue donc bien une preuve de l'existence de paires de photons corrélés. La largeur du pic de corrélation donne une indication de l'extension sur laquelle deux photons émis par l'intermédiaire du processus d'amplification paramétrique restent corrélés. Les mesures effectuées suivant la direction x sont elles limitées par la largeur du profil d'intensité du cône.

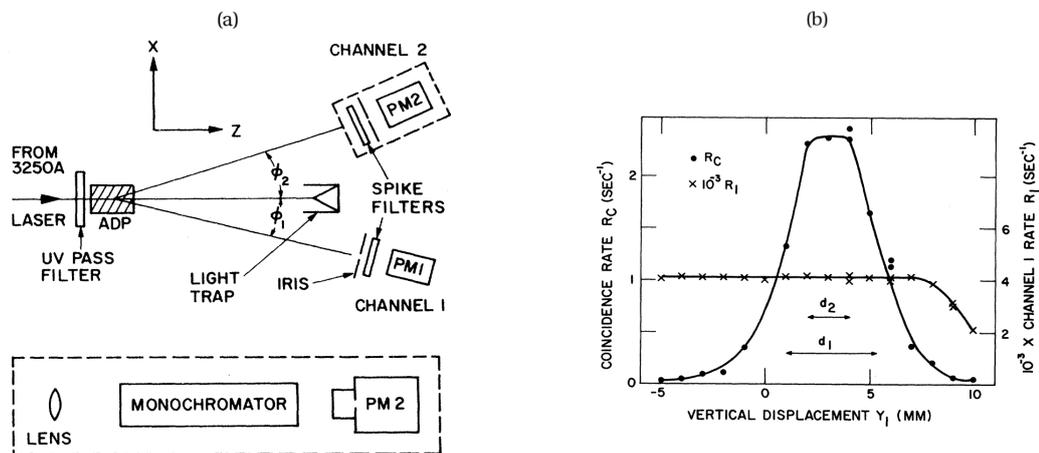


FIG. 1.7 – Mesure de corrélations sur les faisceaux issus d'un amplificateur paramétrique optique. Les figures sont issues de [55]. (a) Dispositif expérimental utilisé pour rendre compte de la production de paires corrélées de photons. Un faisceau laser est envoyé dans un cristal d'ADP. L'interaction non linéaire dans le cristal est responsable de la génération d'un cône de lumière formée de paires de photons corrélés. Deux photodétecteurs, dont un mobile, permettent de mesurer les coïncidences de détection des photons produits, en fonction des positions respectives des deux détecteurs. (b) Mesures de corrélation entre les paires de photons produits par le dispositif. R_C correspond au taux de coïncidences de détection sur les deux détecteurs. R_1 correspond au taux de détection de photons sur le détecteur mobile. Y_1 correspond à la position du détecteur mobile suivant l'axe y .

Une autre question intéressante que ce sont posées les auteurs de [55] concerne la simultanéité de création des deux photons lors de la conversion du photon incident à l'intérieur du cristal. En ajustant un délai sur leur électronique de comptage, les auteurs ont pu vérifier que, à la précision de leur électronique, la création des deux photons était simultanée. D'autres mesures plus récentes ont donné accès à la valeur précise de la largeur du pic de corrélation temporelle [56]. Comme attendu, un photon ne peut pas être mieux localisé en temps que l'inverse de sa largeur en fréquence, qui constitue la limite fondamentale de ce phénomène. L'extension de la corrélation dans le plan $x - y$ est étroitement relié à l'extension spatiale des modes de diffusion.

Toutes les mesures réalisées par Burnham et Weinberg sont des mesures de coïncidences de détection. Elles reviennent donc à des mesures de fonctions de corrélation du second ordre $G^{(2)}$. Les mesures de corrélations spatiales réalisées reviennent par exemple à mesurer $G^{(2)}(\mathbf{r}_1, \tau; \mathbf{r}_2, \tau)$ où \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 correspondent aux positions des deux détecteurs.

Dissociation de molécules froides Un très bon exemple d'analogie atomique du processus d'amplification paramétrique optique correspond à la dissociation de molécules froides : en se dissociant, une molécule d'énergie et d'impulsion données entraîne l'émergence de deux atomes vérifiant les conditions de conservation de l'énergie et de l'impulsion imposées par le processus. Cette image est l'analogie directe de l'image du paragraphe précédent où un photon de fréquence et de vecteur d'onde donnés est converti en deux photons à l'intérieur d'un cristal. Comme pour les photons, on s'attend à pouvoir mesurer les corrélations qui relient les deux atomes ainsi produits. L'équipe de D. Jin au JILA a réussi à démontrer de telles corrélations en observant la dissociation de molécules de ^{40}K [57]. La figure 1.8 décrit les résultats ainsi obtenus. L'immense majorité des équipes expérimentales qui travaillent avec des atomes réalisent leurs mesures au moyen d'un système d'imagerie par absorption : un laser proche de la résonance atomique illumine le gaz étudié. L'intensité lumineuse qui parvient à traverser le nuage est simultanément mesurée au moyen d'une caméra. Le résultat obtenu correspond à une photographie de l'ombre portée du gaz sur la caméra. La figure 1.8 (a) donne un résultat typique de ce type de mesure. Contrairement aux photo-détecteurs pour lesquels la mesure de coïncidences est presque naturelle, extraire un signal de corrélation d'images obtenues par l'intermédiaire d'un système d'imagerie par absorption nécessite un peu de travail. Altmann *et al.* ont proposé une méthode astucieuse [58] qui a permis à D. Jin et son équipe d'obtenir les résultats présentés sur la figure 1.8 (b). Les corrélations observées correspondent à une mesure de $G^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$. Pour $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$, on observe un pic qui correspond à une augmentation du taux de détection de coïncidences atomiques, en complet accord avec l'image de paires d'atomes corrélés. Contrairement aux mesures équivalentes de Burnham et Weinberg en optique quantique, la résolution du système de détection ne permet pas de rendre compte des largeurs du pic de corrélation. D'autre part, la dissociation des molécules donne naissance à une sphère sur laquelle se répartissent les atomes dissociés. L'imagerie par absorption ne donne qu'une image de la projection de cette sphère sur un plan et limite donc l'étude des corrélations qui sont naturellement tridimensionnelles. Toujours est-il que cette étude a permis de démontrer sans équivoque l'existence d'atomes corrélés et constitue une avancée majeure dans le domaine de l'optique atomique.

De la violation d'inégalités classiques au paradoxe EPR Imaginons qu'il soit possible de décrire les champs \hat{a}_1 et \hat{a}_2 qui décrivent deux modes couplés d'un amplificateur paramétrique optique comme des champs classiques. On peut alors dériver pour de tels champs [31], une inégalité de Cauchy-Schwartz similaire à la formule 1.5

$$\langle a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 \rangle \leq \left[\langle (a_1^\dagger)^2 a_1^2 \rangle \langle (a_2^\dagger)^2 a_2^2 \rangle \right]^{1/2} \quad (1.47)$$

Si les deux modes sont symétriques, comme dans le cas d'un amplificateur paramétrique dégénéré, l'inégalité se simplifie sous la forme

$$\langle a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 \rangle \leq \langle (a_1^\dagger)^2 a_1^2 \rangle \quad (1.48)$$

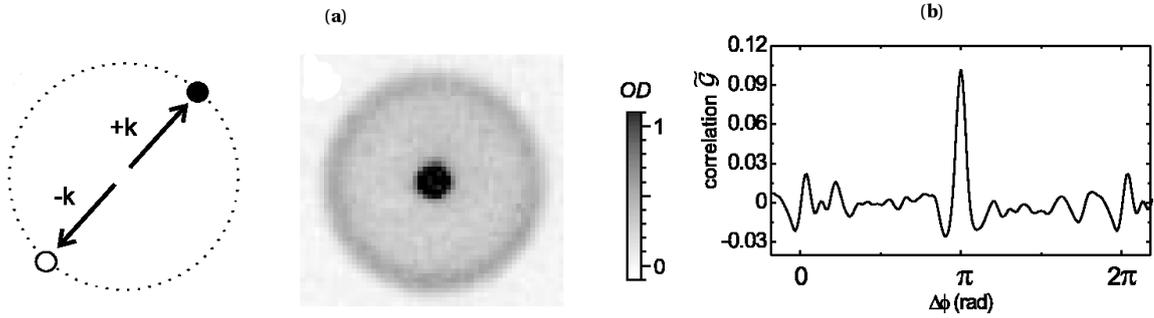


FIG. 1.8 – Mesure de corrélations dans la dissociation de molécules froides. Les images sont issues de [57]. (a) Image en absorption du nuage issu de la dissociation des molécules. La distribution en impulsion des molécules produites expérimentalement a une largeur définie par la température initiale du gaz de molécules, de l'ordre du μK . Lors de la dissociation, l'énergie de liaison des molécules est convertie en impulsion et répartie de façon égale entre les deux atomes dissociés du fait de la conservation de l'impulsion. Les atomes dissociés se répartissent donc sur une coquille sphérique dans l'espace des impulsions. (b) Mesures de la fonction de corrélation du second ordre $G^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ démontrant l'existence de paires d'atomes corrélés. La fonction est tracée en fonction de l'angle $\Delta\phi$ défini par les directions des vecteurs \mathbf{k} et \mathbf{k}' . Le module de ces vecteurs est égal au rayon de la sphère formée par les atomes issus de la dissociation des molécules.

En mécanique quantique, l'inégalité appropriée pour deux opérateurs qui ne commutent pas s'écrit (voir 1.4)

$$\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle^2 \leq \langle (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1)^2 \rangle \langle (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2)^2 \rangle \quad (1.49)$$

Pour des systèmes symétriques, cela implique

$$\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle \leq \langle (\hat{a}_1^\dagger)^2 \hat{a}_1^2 \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle \quad (1.50)$$

Or, à partir de l'évolution des modes de l'amplificateur paramétrique dérivée précédemment (voir 1.43), on peut écrire que

$$\hat{n}_1(t) - \hat{n}_2(t) = \hat{n}_1(0) - \hat{n}_2(0) \quad (1.51)$$

où $\hat{n}_i(t) = \hat{a}_i^\dagger(t) \hat{a}_i(t)$ ⁸. Pour des modes initialement vides, cette dernière relation implique que

$$\langle \hat{a}_1^\dagger(t) \hat{a}_1(t) \hat{a}_2^\dagger(t) \hat{a}_2(t) \rangle = \langle (\hat{a}_1^\dagger(t))^2 \hat{a}_1(t)^2 \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger(t) \hat{a}_1(t) \rangle \quad (1.52)$$

Cela correspond à la violation maximale de l'inégalité de Cauchy-Schwartz classique, autorisée par la mécanique quantique. Une mesure expérimentale est venue confirmer ce résultat [9]. Ce résultat marque donc bien le caractère quantique du processus d'amplification paramétrique.

Malgré les succès de la mécanique quantique pour décrire de tels phénomènes non classiques, la nature de la *réalité* que nous pouvons attribuer aux objets physiques qu'elle décrit a été remis en question dès ses débuts. Le fait que la mécanique quantique décrive des objets

⁸Cette loi de conservation est d'ailleurs responsable d'un effet de *squeezing* sur les fluctuations de la différence du nombre de photons des deux modes. Nous en discutons un exemple expérimental un peu plus loin.

qui peuvent se trouver dans une superposition d'états bien distincts du point de vue du résultat observé à l'issue d'une mesure expérimentale a posé problème au sein de la communauté scientifique. Ainsi, si nous considérons l'état $|\psi\rangle = \sum_j c_j |\psi_j\rangle$, un processus de mesure va *choisir* parmi cette superposition un unique état $|\psi_i\rangle$ pour décrire l'évolution ultérieure du système physique considéré (réduction du paquet d'onde). Le problème qui se pose réside dans l'interprétation que l'on peut donner au mécanisme qui *décide* quel état va être *choisi* parmi tous les autres. Une des conséquences du formalisme quantique tient dans le fait qu'il ne semble pas possible de mettre en évidence une description *locale* de ce mécanisme de mesure. En effet, un paradoxe soulevé par Einstein, Podolsky et Rosen les amena à considérer la mécanique quantique comme incomplète [59]. Le point de départ de leur paradoxe revient à considérer un système physique constitué de deux sous-systèmes : une paire de photons corrélés par exemple. Il est alors possible de réaliser sur chacun des deux sous-systèmes une mesure arbitraire. Le point central de l'argumentation des trois physiciens revient à considérer que si les deux systèmes sont séparés dans l'espace, une mesure effectuée sur l'un des deux sous-systèmes n'a aucune raison de perturber l'autre sous-système. A partir de cette hypothèse, on peut démontrer qu'il est possible de connaître précisément le résultat de la mesure de deux quantités physiques définies par des opérateurs qui ne commutent pas [33]. Ce résultat viole ouvertement les inégalités imposées par le principe de Heisenberg. La conclusion de ce paradoxe revient à considérer que : soit l'hypothèse d'Einstein, Podolsky et Rosen est fautive et donc la notion de *localité* doit être abandonnée, soit la mécanique quantique doit être remise en question. En 1964, J.S. Bell mit en évidence des inégalités devant être vérifiées dans le cadre de toutes les théories satisfaisant l'hypothèse d'Einstein, Podolsky et Rosen. L'intérêt de telles inégalités réside dans le fait qu'elles peuvent être violées par certains systèmes physiques décrits en mécanique quantique. En particulier, à partir des états physiques produits par l'intermédiaire du processus d'amplification paramétrique, la violation des inégalités de Bell a pu être démontrée expérimentalement [13]⁹. La violation des inégalités de Bell constitue un des grands succès de la mécanique quantique dont les prédictions n'ont jamais été mises en défaut jusqu'à aujourd'hui. On comprend bien au travers de cet exemple l'intérêt fondamental que constituent des sources telles que l'amplificateur paramétrique optique.

1.2.3 Etats squeezés

La sensibilité des mesures effectuées au moyen d'un faisceau laser est limitée par le bruit de grenaille. Les fluctuations d'intensité d'un laser idéal sont ainsi de l'ordre de la racine carrée de l'intensité moyenne du faisceau. Les corrélations d'intensité des faisceaux produits par l'intermédiaire du processus d'amplification paramétrique optique¹⁰ donnent la possibilité de produire des faisceaux laser possédant des fluctuations d'intensité bien inférieure à la limite imposée par le bruit de grenaille. On peut ainsi imaginer mesurer les fluctuations d'intensité d'un des deux faisceaux produits pour rétroagir sur le faisceau corrélée et limiter ses fluctuations d'intensité. Une des grandes limitations du processus d'amplification paramétrique vient du fait que l'intensité des faisceaux produits n'est jamais très grande, le temps d'interaction dans le milieu non-linéaire étant très court du fait de la grande vitesse de pro-

⁹D'autres démonstrations de la violation des inégalités de Bell ont été réalisées par A. Aspect et son équipe au moyen de paires de photons issues d'une cascade radiative du Calcium [10, 11, 12].

¹⁰On parle couramment de faisceaux *jumeaux* pour rendre compte de ces corrélations.

pagation de la lumière. Une manière de s'affranchir de cette limitation est de placer le milieu non-linéaire à l'intérieure d'une cavité optique. C'est le principe de l'oscillateur paramétrique optique (OPO) [33]. A partir d'un tel dispositif, il a été possible de mettre en évidence les corrélations d'intensité du signal et de l'*idler* produits à l'intérieur de l'OPO[60]. La figure 1.9 donne un schéma du dispositif expérimental utilisée pour démontrer la réduction des fluctuations d'intensité sous la limite du bruit de grenaille.

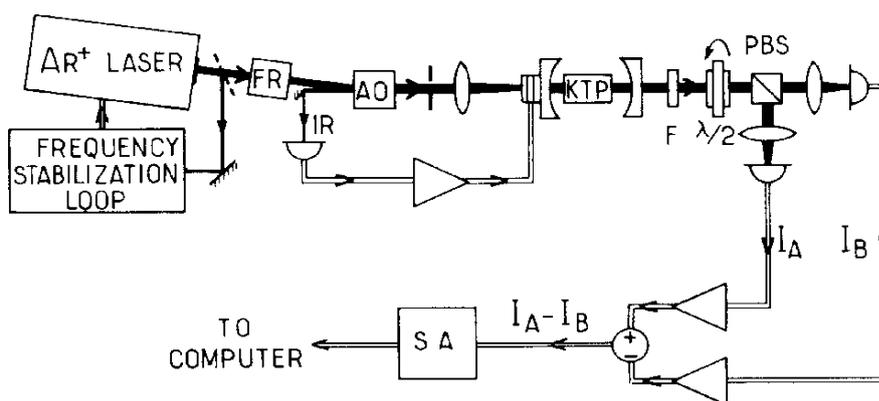


FIG. 1.9 – Dispositif expérimental utilisé par les auteurs de la référence [60] pour démontrer la réduction des fluctuations d'intensité observées sur deux faisceaux jumeaux produits par l'intermédiaire d'un amplificateur paramétrique optique. En fonction de la position d'une lame $\lambda/2$, les intensités I_A et I_B représentent soit respectivement l'intensité du signal et celle de l'*idler* soit une combinaison linéaire des deux faisceaux. Dans la première situation, les auteurs de [60] ont pu observer une réduction des fluctuations de $I_A - I_B$ environ 30% en dessous de la limite imposée par le bruit de grenaille.

1.3 Processus de collisions élastiques avec des atomes froids

L'interaction d'un faisceau lumineux à l'intérieur d'un milieu non linéaire peut être responsable de l'apparition de faisceaux lumineux exhibant des corrélations non classiques. Les photons n'interagissant pas entre eux, cette interaction non-linéaire se doit d'être portée par un milieu solide extérieur. Pour des ondes de matière, les phénomènes non linéaires apparaissent naturellement du fait des interactions induites par les collisions élastiques entre les particules massiques. En tirant partie de ces effets, il est possible de reproduire avec des ondes de matière, le comportement d'un faisceau lumineux interagissant dans un milieu non-linéaire. Nous introduisons dans cette partie les éléments nécessaires à la description des collisions inter-atomiques et donnons un aperçu des expériences réalisées dans le cadre de ce que l'on pourrait appeler l'optique atomique non-linéaire. Ce domaine de recherche est encore très récent mais tend à reproduire les expériences qui ont fait le succès de l'optique quantique.

1.3.1 Description des collisions

L'hamiltonien à N corps décrivant l'interaction de bosons dans l'espace libre peut se mettre en seconde quantification sous la forme

$$\hat{H} = - \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \quad (1.53)$$

Dans cette expression, $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ et $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ sont respectivement les opérateurs champ de création et d'annihilation d'une particule en \mathbf{r} et vérifient les relations de commutation bosonique

$$\begin{aligned} \left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \right] &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.54)$$

Le potentiel d'interaction V est en général très complexe et ne peut s'exprimer facilement sous forme analytique. Pour tenter de comprendre un peu plus précisément les propriétés de ce potentiel, de manière à en trouver une forme approchée pertinente, nous allons tout d'abord nous intéresser aux résultats de la théorie de la diffusion atomique avant de définir le pseudo-potentiel que nous allons utiliser par la suite pour décrire les interactions.

La théorie de la diffusion De façon générale, deux particules de masse m interagissent dans l'espace libre par l'intermédiaire d'un potentiel $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ qui ne dépend que de la position relative des deux particules $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Le centre de masse du système est donc découplé du mouvement relatif des deux particules, dont l'évolution est régie par l'hamiltonien :

$$\hat{H}_{\text{rel}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + V(\mathbf{r}) \quad (1.55)$$

où $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)/2$ est l'impulsion relative du système et $\mu = m/2$ la masse réduite. Il est généralement pertinent d'assumer que $V(\mathbf{r})$ est négligeable quand $\mathbf{r} \rightarrow \infty$.

Les états propres de \hat{H}_{rel} représentent les états de diffusion $\psi(\mathbf{r})$ du mouvement relatif des deux particules d'énergie E positive. De façon générale, on peut mettre l'équation aux valeurs propres sous forme d'intégrale,

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) - \frac{2\mu}{4\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \quad (1.56)$$

Dans cette expression $\psi_0(\mathbf{r})$ correspond à l'onde incidente qu'on peut considérer comme une onde plane pour simplifier

$$\psi_0(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.57)$$

Le reste de l'expression correspond donc simplement à l'onde diffusée par le potentiel. Dans le cas où le potentiel est de portée finie b , ce qui est le cas de la majeure partie des potentiels d'interaction, il est intéressant d'écrire la forme des états de diffusion dans le régime asymptotique

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq \psi_0(\mathbf{r}) + \frac{e^{ikr}}{r} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{n}) \quad (1.58)$$

Dans cette dernière expression $f_{\mathbf{k}}$, l'amplitude de diffusion, ne dépend pas de la distance r mais uniquement de la direction de la diffusion $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Dans la limite des faibles énergies de collision, c'est à dire pour $kb \ll 1$, $f_{\mathbf{k}}$ est indépendant de la direction de diffusion \mathbf{n} . On dit que la diffusion a lieu dans l'onde s uniquement. A la limite $k \rightarrow 0$, l'amplitude de diffusion tend vers une constante,

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{n}) \rightarrow -a \quad (1.59)$$

appelée la longueur de diffusion. Si la distance moyenne interparticule (de l'ordre de $n^{1/3}$) dans le gaz est grande devant la portée du potentiel, l'effet des interactions à deux corps ne dépend que de a et plus des détails du potentiel de diffusion. Cette remarque est la clé de voûte du traitement des interactions dans la limite des faibles densités et des faibles énergies. La connaissance de a permet de connaître de manière très précise l'effet des interactions dans un gaz dilué.

Notion de pseudo-potentiel Comme mentionné au début de cette partie, le calcul de V est très difficile en pratique. D'autre part, une petite erreur sur V peut entraîner une grande erreur sur le calcul de la longueur de diffusion a . En pratique on préfère remplacer le vrai potentiel V par un potentiel approché ayant une longueur de diffusion bien définie. Cette longueur de diffusion peut par exemple être déduite de mesures expérimentales. Le pseudo-potentiel introduit par E. Fermi remplit toutes ces conditions [61]

$$V(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r}) \quad (1.60)$$

où la constante de couplage

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a \quad (1.61)$$

contient la valeur exacte de la longueur de diffusion.

Collisions de deux condensats de Bose-Einstein Lors de la collision de deux condensats de Bose-Einstein, des quasi-particules sont excitées [62]. Dès que la vitesse de collisions est supérieure à la vitesse du son, $c_s = \sqrt{\mu/m}$, ces quasi-particules peuvent être considérées comme des particules libres. Dans cette limite, la collision de deux condensats de Bose-Einstein est formellement équivalente au processus d'amplification paramétrique. On peut en effet montrer, en considérant les deux condensats qui rentrent en collision comme des ondes planes classiques qui se propagent en sens inverse, que la dynamique des modes de diffusion $\hat{a}_{\mathbf{q}}$ impliqués dans la collision est régie par l'hamiltonien suivant ¹¹

$$\hat{H}(t) = \sum_{\mathbf{q}} \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{q}}(t) + \frac{gn}{2} e^{-i\hbar(Q^2/m)t} \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger(t) \hat{a}_{-\mathbf{q}}^\dagger(t) + h.c. \right) \quad (1.62)$$

¹¹Nous reviendrons en détail sur la dérivation de cet hamiltonien dans le cinquième chapitre de ce manuscrit.

où \mathbf{q} est l'impulsion d'un mode de diffusion, n est la densité moyenne des condensats, Q est l'impulsion des condensats qui rentrent en collision, m la masse des atomes et g est la constante de couplage définie par l'équation 1.61. Si l'on se restreint à deux modes d'impulsions opposées $\pm\mathbf{q}$, l'hamiltonien qui décrit l'évolution des deux modes est formellement équivalent à l'hamiltonien défini par la formule 1.38. Durant la collision, des modes initialement vides voient donc leur population augmenter exponentiellement en analogie avec les modes *jumeaux* de l'amplificateur paramétrique optique. La constante χ du couplage non-linéaire de l'amplificateur est ici remplacée par $gn/2$. On peut donc parler d'amplificateur d'onde de matière. Un des grands intérêts des atomes, vient du fait que la durée de l'interaction entre particules peut être extrêmement longue comparée à leur analogie optique. On peut donc espérer observer avec des atomes une réduction des fluctuations des quadratures des champs encore plus spectaculaire que celle étudiée avec la lumière (voir la relation 1.46).

Il existe en fait une meilleure analogie dans le domaine de l'optique quantique pour décrire la collision de deux condensats de Bose-Einstein : il s'agit des processus non-linéaires impliquant une susceptibilité non-linéaire d'ordre 3. Dans ce type de processus, deux faisceaux laser interagissent à l'intérieur d'un milieu non-linéaire et donnent naissance à des paires de faisceaux *jumeaux* vérifiant les conditions d'accord de phase imposées par le processus. On parle alors de mélange à quatre ondes. L'hamiltonien qui décrit un tel phénomène est formellement équivalent à celui de l'amplificateur paramétrique décrit précédemment. Nous présentons dans le paragraphe suivant le résultat d'expériences de mélanges à quatre ondes de matière.

1.3.2 Réalisation expérimentale

Mélange à quatre ondes La première mise en évidence du phénomène de mélange à quatre ondes en optique atomique correspond aux expériences réalisées au NIST dans le groupe de W.D. Phillips [30]. L'équipe a été capable de réaliser la collision de deux condensats de Bose-Einstein et a pu vérifier l'apparition d'un halo correspondant aux particules diffusées pendant la collision. Pour mettre en évidence le phénomène d'amplification, l'équipe a couplé une petite partie d'un des deux condensats vers l'un des modes de diffusion. Pour une population initiale non nulle, l'évolution des solutions de l'hamiltonien 1.62 sont légèrement différentes. On peut montrer que le facteur d'amplification dépend de la population initiale du mode : plus un mode est peuplé initialement, plus son amplification est rapide [62]. Cet effet peut être vu comme un effet de stimulation bosonique. Comme la différence du nombre d'atome entre deux modes *jumeaux* est constante durant l'évolution du processus (voir la relation 1.51), les populations des deux modes couplés augmentent à la même vitesse. Le mode peuplé initialement force donc la population du mode auquel il est couplé à augmenter plus vite que dans le cas de deux modes *jumeaux* initialement vides. Expérimentalement on voit donc apparaître une quatrième onde de matière nettement plus peuplée que tous les autres modes initialement vides. Le facteur d'amplification observé par l'équipe de W.D. Phillips est de l'ordre de 1.5. Dans une série d'expériences plus récentes, W. Ketterle et son équipe ont réussi à observer des facteurs d'amplification de l'ordre de 40 [63, 64]. L'image 1.10 présente un des résultats typiques qu'ils ont obtenus. Leur étude leur a aussi permis de tester les limites de cette amplification : au fur et à mesure de la collision les deux condensats qui collisionnent voient leur population diminuer rapidement (l'amplification des modes de diffusion étant exponentielle). Quand la

population des deux condensats devient trop faible, le processus d'amplification s'arrête.

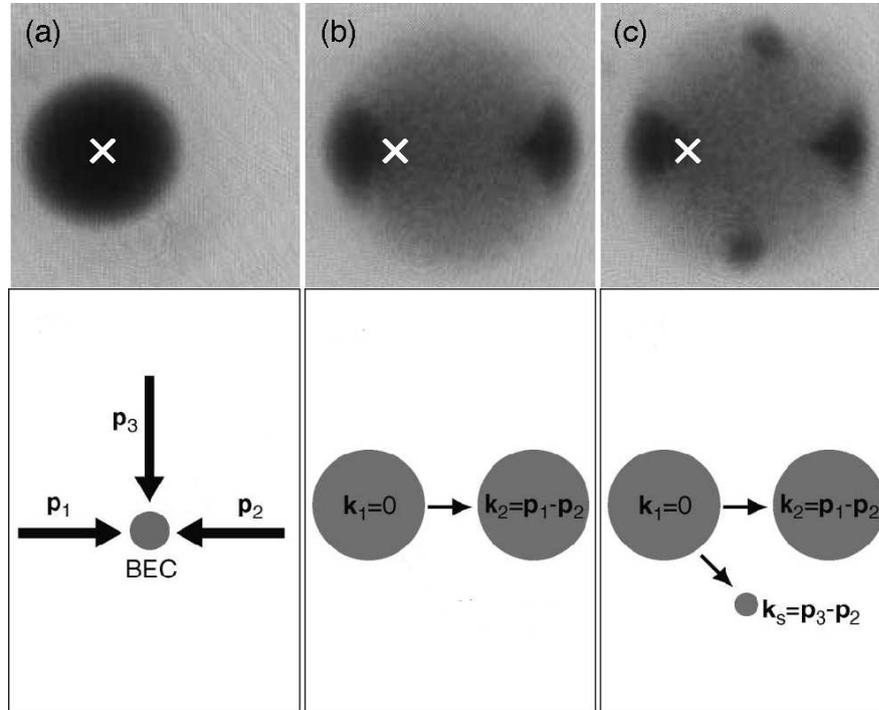


FIG. 1.10 – Mélange à quatre ondes réalisés à partir de la collision de deux condensats de Bose-Einstein de ^{87}Rb . Un condensat piégé initialement dans un piège magnétique est séparé en deux parties d'impulsions différentes au moyen d'une impulsion Bragg (faisceaux p_1 et p_2). Le faisceau p_3 est utilisé pour coupler une petite partie du condensat initialement piégé vers un des modes de diffusion de la collision. (a) Temps de vol observé en l'absence d'impulsions Bragg. La croix indique la position du piège magnétique où le condensat est piégé. (b) Temps de vol observé à l'issue de l'impulsion Bragg réalisée par l'intermédiaire des faisceaux p_1 et p_2 . On observe clairement les deux condensats qui ont collisionné. Le halo qui entoure les deux condensats correspond aux atomes diffusés spontanément pendant la collision. (c) Temps de vol observé après une impulsion Bragg incluant les trois faisceaux p_1 , p_2 et p_3 . Le faisceau p_3 couple une partie des atomes du condensat piégé vers un des modes de diffusion de la collision. La population de ce mode est amplifiée pendant la collision de la même manière que son mode jumeau. On voit clairement sur la figure les deux modes jumeaux amplifiés. Les figures sont tirées de la référence [63].

Contrairement aux mesures réalisées par Burnham et Weinberg en optique quantique et à celles de D. Jin lors de la dissociation de molécules, aucune de ces expériences n'a permis de vérifier la production de paires corrélées au fur et à mesure de la collision. La réduction des fluctuations de la différence du nombre d'atomes des deux modes *jumeaux* de la figure 1.10 n'a pas non plus été pour l'heure étudiée.

Collisions contrôlées d'atomes froids Avant d'être réinterprété en termes de mélanges à quatre ondes de matière, les collision de gaz froids ont été activement étudiées. Nous mentionnons ici les principales études réalisées. De tels travaux permettent de caractériser les

différents régimes du couplage interatomique ainsi que sa forme. La première observation d'un halo de collision lors de la collision de deux nuages froids remonte à 1995 où R. Legere et son équipe ont réussi à mesurer la distribution de vitesse des atomes diffusés lors d'une collision [65]. Comme mentionné précédemment, les condensats de Bose-Einstein étant des objets superfluides, la vitesse relative des deux condensats qui rentrent en collision doit être plus grande que la vitesse du son pour que les particules diffusés lors de la collision puissent être considérées comme des particules libre. Quand la vitesse relative des deux condensats est inférieure à la vitesse du son, la collision provoque l'excitation de quasi-particules qui se propagent à l'intérieur du condensat. Une vérification de ce phénomène a été réalisée dans le groupe de W. Ketterle [66]. La relaxation de ces quasi-particules a été étudiée dans le groupe de N. Davidson [67]. Plus récemment, des montages expérimentaux ont pu réaliser des collisions de condensats de Bose-Einstein à très haute énergie pour lesquels la théorie de la diffusion prédit une diffusion anisotrope des particules qui rentrent en collision : on parle de diffusion dans l'onde p ou dans l'onde d par opposition aux collisions de basse énergie qui ont lieu dans l'onde s [68, 69, 70]. Enfin, l'amplification paramétrique d'ondes de matière a pu être observé lors de la collision de condensats de Bose-Einstein piégés dans des réseaux optiques [71].

1.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de poser le cadre de ce travail de thèse. Nous avons introduit le vocabulaire et les concepts dont nous aurons besoin pour analyser la plupart des expériences décrites dans ce manuscrit. La plupart de ces notions ont été dérivées dans le cadre de l'optique quantique. Aujourd'hui avec le développement des techniques de contrôle et de refroidissement atomiques, de tels phénomènes sont accessibles à l'aide des gaz froids. Dans le cadre de ce que l'on appelle maintenant l'optique atomique, une grande partie des phénomènes observés sur la lumière a pu être observé par l'intermédiaire d'ondes de matière. Dans la suite du manuscrit, nous nous inspirons des expériences de mélanges à quatre ondes atomiques décrites à la fin de ce chapitre, pour mettre en place une source de paires atomiques corrélés. Nous avons pu montrer l'analogie que l'on peut faire entre les processus d'amplification paramétrique et les collisions de deux condensats de Bose-Einstein. Pour mettre en évidence l'émission de paires atomiques corrélés, nous pouvons dès lors nous inspirer de l'expérience de Burnham et Weinberg décrite précédemment. Réaliser une telle expérience nécessite la mise en place d'un détecteur d'atome unique que nous décrivons au cours du chapitre suivant. Enfin, ce chapitre a aussi permis d'introduire des effets quantiques importants qui ont pu être observés par l'intermédiaire des sources de photons jumeaux. Cette étude permet de motiver l'étude de ces phénomènes au niveau atomique et rend d'autant plus intéressant la mise en place et l'étude d'une source de paires atomiques corrélées.

Condensats de Bose-Einstein d'hélium métastable

L'étude de paires atomiques corrélées nécessite la mise en place d'une source de paires. Nous avons évoqué au chapitre précédent la possibilité de produire de telles paires par l'intermédiaire de collisions élastiques entre atomes froids. Au delà de ses propriétés de cohérence dont nous ne parlerons que très peu à l'intérieur de ce manuscrit, un condensat de Bose-Einstein possède généralement une densité importante et une petite taille. La collision de deux condensats de Bose-Einstein engendre donc un grand nombre de collisions pourvu que la vitesse de collision soit suffisamment grande. Il se présente donc comme une source efficace en vue de produire des paires atomiques corrélées. L'obtention d'un condensat de Bose-Einstein nécessite principalement d'être capable de refroidir un gaz atomique à très basse température. De nombreuses techniques ont été mises au point pour arriver à cette fin, et les études réalisées ont conduit leurs auteurs à recevoir le prix Nobel en 1997 et 2001. Le refroidissement par laser et le refroidissement évaporatif constituent encore aujourd'hui les deux piliers permettant l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein.

Dans ce chapitre nous allons passer en revue les techniques permettant d'obtenir un condensat de Bose-Einstein d'hélium métastable. Après avoir mis en relief les principales caractéristiques de l'hélium métastable et le travail à effectuer en vue d'obtenir un condensat, nous nous concentrerons sur le dispositif expérimental. Ce dernier, que l'on peut qualifier d'historique à présent, a quelque peu évolué depuis l'obtention du premier condensat en 2001 [24]. Malgré tout, le fonctionnement de cette expérience reste en très grande partie basé sur le travail de mes prédécesseurs, dont les thèses représentent une mine d'informations pour qui désire un jour obtenir un condensat de Bose-Einstein d'hélium métastable ¹. Nous tenterons tout de même de mettre en avant les évolutions de l'expérience et d'en dégager les fondements. Une des principales modifications réside dans l'installation d'un détecteur capable de reconstruire les positions des atomes détectés en trois dimensions. M. Schellekens [46] est à l'origine de sa mise en place et a détaillé le fonctionnement d'un tel dispositif dans son manuscrit de thèse. Nous verrons comment cet instrument s'impose pour l'étude des corrélations atomiques et tenterons d'en dégager les principales caractéristiques ainsi que les limitations et les évolutions récentes.

¹A. Browaeys a dessiné et réalisé le montage expérimental original [72]. Les travaux d'A. Robert [73] et d'O. Sirjean [74] complètent ce travail. D'autres travaux de thèse s'intéressant plus spécifiquement à certains aspects du dispositif expérimental sont mentionnés plus loin.

2.1 Considérations préalables sur l'hélium métastable

Toutes les espèces atomiques ne présentent pas forcément les caractéristiques indispensables à leur manipulation expérimentale. Ces limitations sont essentiellement dues aux techniques expérimentales développées pour contrôler et refroidir les atomes, qui font appel la majeure partie du temps, à des propriétés bien spécifiques que ne partagent pas toutes les espèces atomiques. Le développement de techniques de refroidissement atomique a permis d'obtenir les premiers condensats de Bose-Einstein en 1995, en tirant partie des mécanismes de l'interaction entre les atomes et la lumière combinés aux techniques de refroidissement évaporatif. Seules une dizaine d'espèce à ce jour ont pu atteindre cet état et l'hélium métastable en fait partie [24]. Avant de détailler les techniques utilisées pour la détection et le refroidissement de cet atome, nous allons voir ici quelles sont ses caractéristiques et spécificités.

Généralités L' ^4He est un boson léger ($m = 6.67 \times 10^{-27}$ kg) dont le noyau ne possède pas de moment cinétique. Il ne possède donc pas de structure hyperfine. Le diagramme des premiers niveaux d'énergie de ce dernier est représenté sur la figure 2.1. Le niveau 2^3S_1 est le premier niveau excité de l' ^4He . Cet état présente la particularité d'avoir à la fois une très grande durée de vie ~ 9000 s (métastable) [75, 76] et une énergie interne importante (19.8 eV), qui comme nous allons le voir s'avère particulièrement intéressante en vue de sa détection. Il est possible d'interagir avec cet état par l'intermédiaire d'une transition optique $2^3S_1 \rightarrow 2^3P_{0,1,2}$ située dans le proche infra-rouge ($\lambda = 1083$ nm). Cette transition est pratiquement fermée ² et est accessible expérimentalement au moyen de diodes laser commerciales. Nous avons eu l'occasion d'utiliser des diodes lasers DBR (SDL 6702-H1) délivrant 50 mW de puissance, de largeur en fréquence 3 MHz et que l'on peut facilement asservir sur la transition optique au moyen d'un montage d'absorption saturée. Ces dernières permettent de réaliser l'ensemble des mécanismes du refroidissement atomique par laser sans limitation majeure : la largeur de la transition est de 1.6 MHz³ et son intensité de saturation est de 0.16 mW/cm².

Spécificités Les processus de refroidissement évaporatif nécessitent comme nous allons le voir un taux élevé de collisions élastiques entre les atomes qui composent le gaz, pour permettre à ce dernier d'atteindre rapidement l'équilibre thermodynamique. Un des paramètres important pour mesurer ce taux est la longueur de diffusion a . Dans le cas de l'hélium métastable, cette dernière est particulièrement grande comparée aux espèces "traditionnellement" utilisées dans les expériences de physique atomique (Rb, Na,...) Elle a été mesurée très précisément récemment dans des expériences de photo-association pour des atomes d'hélium métastable polarisés (2^3S_1 , $m_x = 1$ où x est l'axe de quantification du moment cinétique de spin des atomes) : $a_{1-1} = 7.512$ nm [78]. Cette longueur de diffusion est moins bien connue

²Il existe une raie d'intercombinaison vers le fondamental 1^1S_0 , avec un taux de transition théorique de 3 s. Cette transition est peu probable car elle doit modifier le spin de l'atome et conserver son moment cinétique orbital, ce qui est interdit pour une transition dipolaire électrique. Elle reste néanmoins possible via une interaction dipolaire magnétique ou une interaction à deux photons [77].

³Cette valeur est un peu faible en regard de la largeur de raie de nos diodes et nous travaillons actuellement à un montage laser en cavité étendue pour diminuer cette largeur expérimentale et interagir plus efficacement avec les atomes.

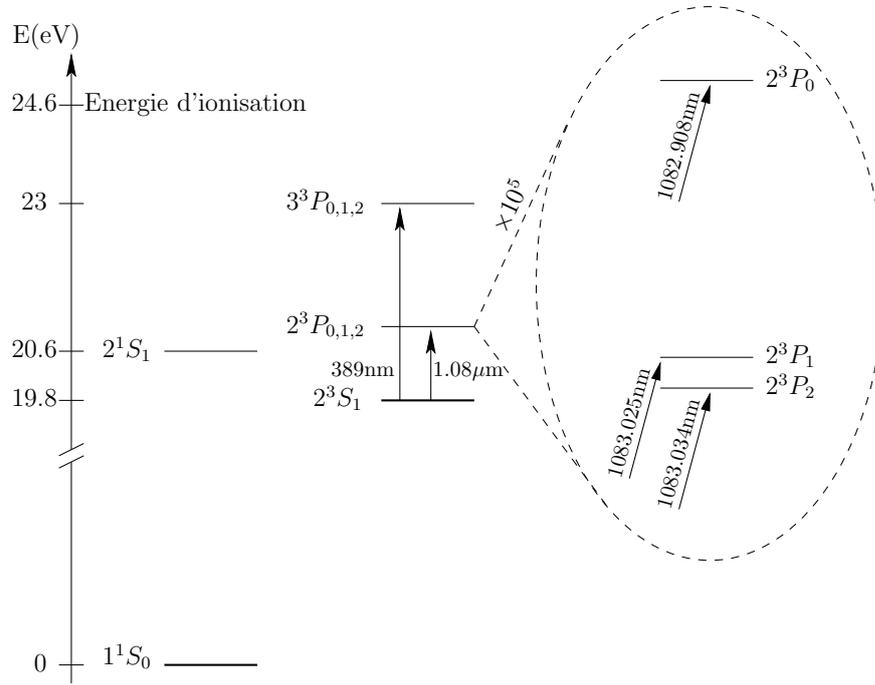
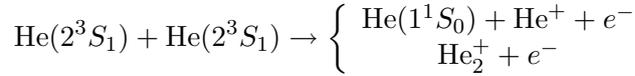


FIG. 2.1 – Niveaux d'énergie de l' ^4He . Le niveau 2^3S_1 est un niveau métastable de très grande durée de vie. On peut interagir avec des atomes d' ^4He dans cet état par l'intermédiaire d'une transition optique située dans le proche infra-rouge : $2^3S_1 \rightarrow 2^3P_{0,1,2}$.

quand les atomes se trouvent dans d'autres sous-niveaux. On peut malgré tout en obtenir un bon ordre de grandeur en suivant une approche théorique décrite dans [79]. Une incertitude de quelques pourcents sur la connaissance des potentiels moléculaires de deux atomes d'hélium métastable entraîne une incertitude sur la connaissance de la longueur de diffusion. Les figures 2. et 3. de la référence [79] donnent les variations des différentes longueurs de diffusion d'un gaz d'hélium polarisé en fonction des variations d'un des potentiels moléculaires qui intervient dans la mesure de la longueur de diffusion (les autres potentiels sont bien connus et c'est essentiellement les variations de ce dernier qui empêchent un calcul des longueurs de diffusion). La valeur a_{1-1} étant connue dorénavant, on peut en déduire la valeur de la variation du potentiel à laquelle elle correspond sur la Fig. 2. En utilisant cette valeur dans la Fig. 3, on en déduit par exemple la valeur de $a_{0-0} \cong 5.3$ nm, correspondant à la longueur de diffusion pour deux atomes dont la projection du moment cinétique de spin vaut 0. Nous utiliserons cette valeur par la suite.

Une des autres spécificités du niveau 2^3S_1 réside dans son importante énergie interne qui permet aux atomes d'hélium d'ioniser les particules avec lesquels ils collisionnent. Cet aspect est largement exploité dans notre système de détection que nous décrivons dans la partie 2.3. Dans l'enceinte à vide dans laquelle nos atomes peuvent être piégés, le vide est suffisamment bon pour limiter la pression du gaz résiduel à des valeurs quasiment négligeables (de l'ordre de 10^{-11} mbar) et donc le processus d'ionisation le plus courant a lieu entre deux atomes d'hélium. Ce processus est appelé collision Penning et correspond à la réaction suivante :



Ce processus de collision inélastique peut s'avérer très limitant dans le cadre du refroidissement évaporatif, puisqu'il correspond à une perte de particules. Cet aspect a été largement étudié à la fois théoriquement et expérimentalement. Ces études ont permis de montrer que le taux de collisions Penning d'un mélange formé d'atomes d' ^4He de spins différents est nettement plus grand que celui d'un gaz composé d'atomes d' ^4He maximales polarisés [80]. Le ratio des taux de collisions Penning dans les des situations est de l'ordre de 10^4 [74]. Une telle différence est suffisante pour permettre un refroidissement évaporatif efficace d'un gaz d' ^4He confinés dans un piège magnétique (voir le paragraphe 2.2.2). Ce processus de collision inélastique peut par ailleurs permettre de suivre en direct l'évolution de la densité du gaz atomique que l'on est en train de refroidir, dans la mesure où les ions produits lors des collisions Penning peuvent ensuite être détectés. Cet aspect est décrit en détail dans les thèses de doctorat de mes prédecesseurs [74, 81, 82].

2.2 Refroidissement atomique et condensation de Bose-Einstein

En 1925, Einstein a mis en évidence en étudiant un système de N bosons sans interaction dans une boîte de volume L^3 , l'existence d'une transition de phase à la limite thermodynamique, intervenant à la température T_C définie par :

$$n\lambda_{dB}^3(T_C) = \zeta(3/2) \simeq 2.612 \quad (2.1)$$

Dans cette relation, n est la densité (homogène) du système et $\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$ est la longueur d'onde de *de Broglie* du gaz à l'équilibre thermodynamique à la température T . En dessous de la température critique, le système est caractérisé par une occupation macroscopique de son état fondamental (la population des états excités est saturée). La mise en évidence expérimentale d'un tel phénomène est très difficile à obtenir de façon générale dans la mesure où quasiment toutes les espèces atomiques sont à l'état solide pour les densités et températures nécessaires, ou alors les interactions entre particules dans le système ne sont plus négligeables et limitent les effets de la condensation. Une solution qui s'est avérée payante consiste à refroidir des gaz très dilués pour lesquels la condensation de Bose-Einstein correspond à un état métastable dont la durée de vie est suffisante pour permettre une observation expérimentale du phénomène. La relation 2.1 impose alors des températures extrêmement basses pour observer la transition (généralement de l'ordre du μK). Cette quête de la condensation de Bose-Einstein a donc été le moteur du développement de techniques de refroidissement des gaz dilués. Deux axes de recherche se sont développés, l'un misant sur l'interaction entre les atomes et la lumière, l'autre consistant à piéger les atomes dans des pièges très confinants et à diminuer la température du système obtenu en évaporant les particules les plus chaudes. Il a fallu attendre 1995 et l'utilisation combinée de ces deux techniques pour obtenir le premier condensat de Bose-Einstein de rubidium. La condensation de l'hélium métastable a été un peu plus longue à obtenir mais a été concrétisée en 2001 [24, 83]. Dans cette partie nous passons en revue les différentes techniques qui ont permis sa réalisation ainsi que certaines innovations qui ont été mises en place plus récemment.

Le dispositif expérimental que nous avons utilisé pour réaliser toutes les expériences décrites dans ce manuscrit est représenté sur la figure 2.2. Il peut se diviser en deux parties : la première et la plus longue va de la source à la sortie du ralentisseur Zeeman et permet de préparer un faisceau collimaté et refroidi d'hélium métastable. La seconde partie est l'enceinte à vide qui se trouve au bout du dispositif dans laquelle nous sommes capables de piéger et refroidir jusqu'à la température critique de condensation un gaz dilué d' He^* . Cette dernière enceinte comporte aussi le système de détection que nous décrirons dans la partie 2.3.

2.2.1 Préparation d'un jet d'atomes ralentis d' He^*

Source L'hélium 4 à l'état fondamental subit une détente à l'entrée du dispositif (Fig. 2.2) entre un gicleur de petit diamètre (0.25mm) et refroidi à l'azote liquide (77 K) et un écorceur situé environ 2.5 cm plus loin et percé d'un trou de diamètre 1 mm. A la sortie de ce dispositif, les collisions entre atomes sont négligeables et l'on a à notre disposition un jet supersonique. L'excitation des atomes dans l'état 2^3S_1 est assurée à l'aide d'une décharge entre une pointe soumise à une tension d'environ -1 kV et l'écorceur, à la masse (Fig. 2.3). Environ 0.1% des atomes se retrouvent dans l'état métastable à l'issue du processus. La stabilité de la décharge est assurée par une résistance de 200 k Ω et l'intensité qui circule entre la pointe et l'écorceur est fixée en condition normale autour de 10 mA. Juste après l'écorceur, le flux total d'hélium est de 5×10^{15} atomes/s, soit un flux de métastable de l'ordre de 10^{12} at/s. La vitesse moyenne longitudinale du faisceau est de 1200 m/s et sa divergence est de 40 mrad [72]. Le refroidissement de la source au moyen d'azote liquide, qui permet de réduire le vitesse initiale des atomes d'hélium est critique pour le bon fonctionnement de la suite du dispositif expérimental. Ce flux, en circuit ouvert, est assuré au moyen d'une bouteille d'azote liquide mise sous pression. A l'intérieure de l'enceinte la pression est de l'ordre de 2×10^4 mbar, maintenue par une pompe à diffusion (3000 L/s).

Collimation transverse du faisceau atomique La petite taille du diamètre interne de l'écorceur (1 mm) permet d'assurer une conductance faible entre les deux premières parties de l'enceinte. Une deuxième pompe à diffusion ⁴, assure un vide de 10^{-7} mbar, même lorsque le jet d'atomes est en fonctionnement. Deux paires de hublots traités anti-reflet pour le proche infra-rouge permettent un accès optique à l'intérieure de l'enceinte. Deux faisceaux lasers rétro-réfléchis assurent la collimation du faisceau d'hélium métastable dans le plan transverse (Oxz) (phase de mélasse à deux dimensions Fig.2.4). Ces derniers sont asservis en fréquence sur la transition $2^3S_1 - 2^3P_2$ et leur front d'onde est courbé de manière à ce que l'interaction avec les atomes ait lieu sur une large gamme de vitesses transverses [84]. Afin d'augmenter le temps d'interaction, les faisceaux sont très allongés suivant la direction de l'axe y (environ 7cm pour 0.5 cm en largeur). Cette étape de collimation s'avère critique sur notre montage du fait de la longueur du ralentisseur Zeeman (3 m). Sans cette phase de mélasse transverse, l'intensité du jet d' He^* est de l'ordre de 5 fois plus petit ⁵. D'autre part, par l'intermédiaire d'un diaphragme de diamètre 4 mm situé juste après les faisceaux de la mélasse transverse,

⁴La partie supérieure de cette pompe est refroidi à l'azote liquide pour éviter les remontées d'huile dans l'enceinte.

⁵Ceci correspond à une diminution d'un facteur de l'ordre de 10 sur le nombre d'atomes piégés dans le piège magnétique optique (voir le paragraphe 2.2.2).

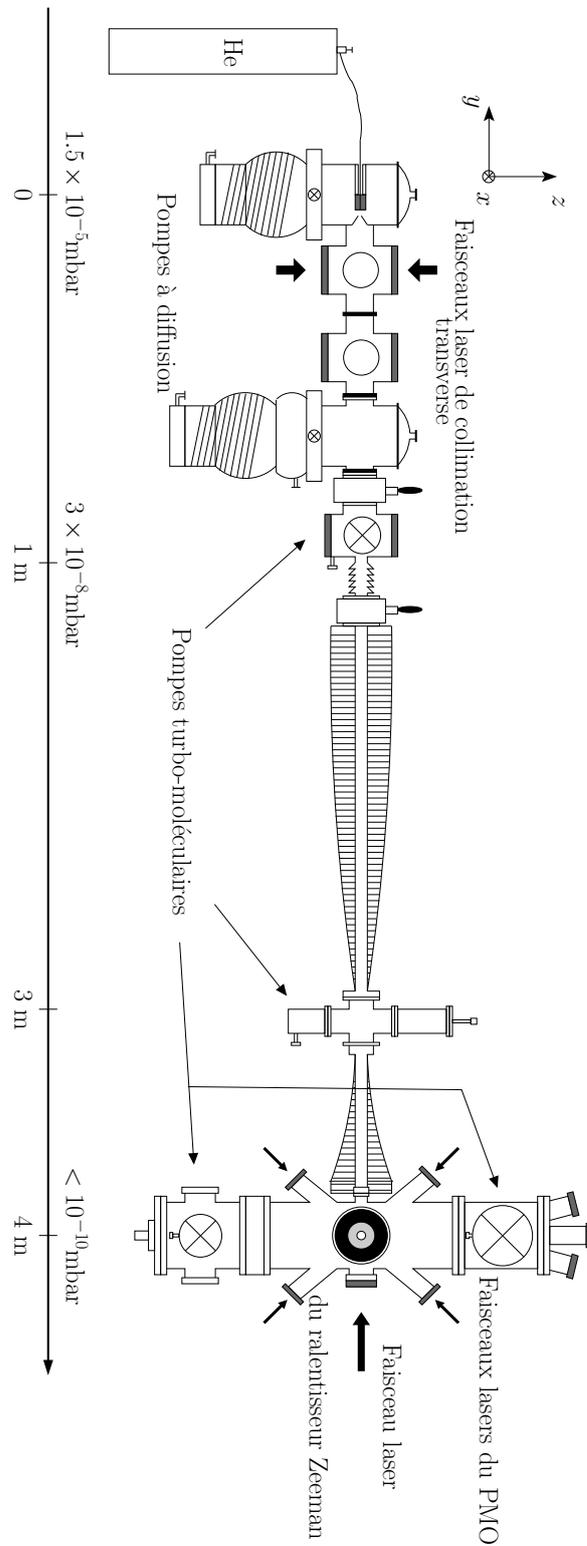


FIG. 2.2 – Schéma du montage expérimental. Les directions des principaux faisceaux laser utilisés pour le refroidissement de l' He^* sont indiqués : seuls les faisceaux dont les directions sont orthogonales au plan (Oyz) ne sont pas apparents. La qualité du vide est indiquée pour les différentes parties du dispositif.

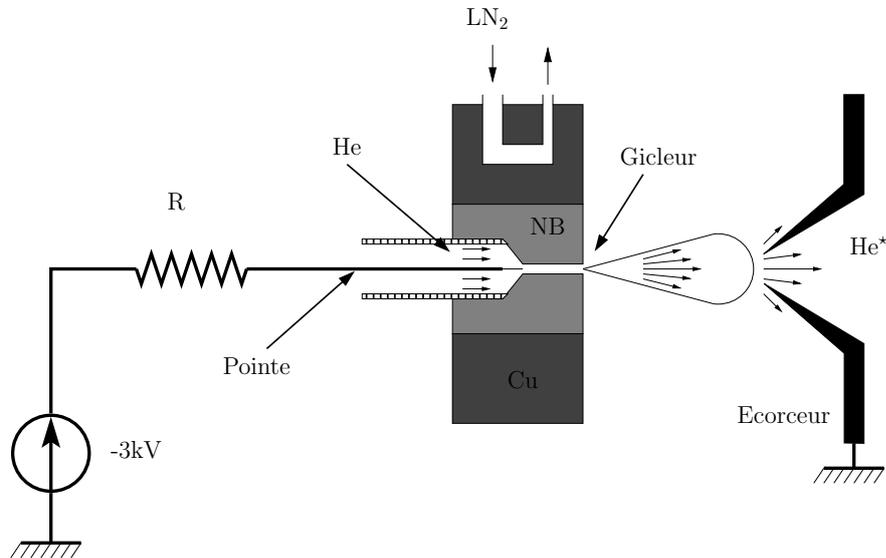


FIG. 2.3 – Principe de fonctionnement de la source à décharge.

il est possible d'éliminer la majeure partie des atomes d'hélium dans l'état fondamental. Ces atomes ne ressentant pas l'effet des faisceaux laser, la divergence du faisceau correspondant est suffisante pour que la majeure partie des atomes ne passent pas à l'intérieur du diaphragme⁶. Un obturateur mécanique placé en amont du diaphragme permet de couper complètement le faisceau atomique. On le ferme à l'issue du chargement du piège magnéto-optique (voir le paragraphe 2.2.2) de manière à ce que le jet d'hélium ne perturbe pas les atomes piégés.

Après cette étape de collimation, le flux d'atomes métastable est de $\simeq 2 \times 10^{11}$ at/s et la divergence du jet n'est plus que de 2 mrad. Cela correspond à une augmentation d'un facteur 70 de l'intensité du faisceau d'atomes métastables [73]. La mise en place d'un "Faraday Cup", une plaque de métal que l'on peut translater verticalement pour la placer face au faisceau atomique, permet d'optimiser le flux d'atomes d' He^* [87] : les atomes d' He^* sont capables d'arracher un e^- en percutant la surface métallique et il est possible de mesurer la charge ainsi déposée. Cette charge correspond à une tension de quelques centaines de μV et peut être mesurée au moyen d'un système de détection synchrone en modulant l'intensité des faisceaux de la mélasse transverse. Le flux d'atomes est optimisé en jouant sur les directions des faisceaux de collimation transverse. On obtient typiquement 1 mV. L'avantage de ce dispositif est qu'il est extrêmement simple d'utilisation (le réglage ne prend que quelques minutes) et qu'il permet d'optimiser le flux en régime continu. Il est situé au niveau de la croix qui se trouve au milieu du ralentisseur Zeeman (Fig. 2.2).

Ralentisseur Zeeman Le ralentissement Zeeman est un des outils standards du refroidissement atomique [17]. Afin de ralentir longitudinalement le faisceau d' He^* , un laser désaccordé

⁶Malgré tous ces efforts la proportion d'atomes dans l'état fondamental est toujours plus importante (facteur de l'ordre de 150) que celle dans l'état métastable à la sortie du ralentisseur Zeeman. Des expériences similaires comportent une phase de déflexion optique pour s'affranchir complètement de ce désavantage [85, 86].

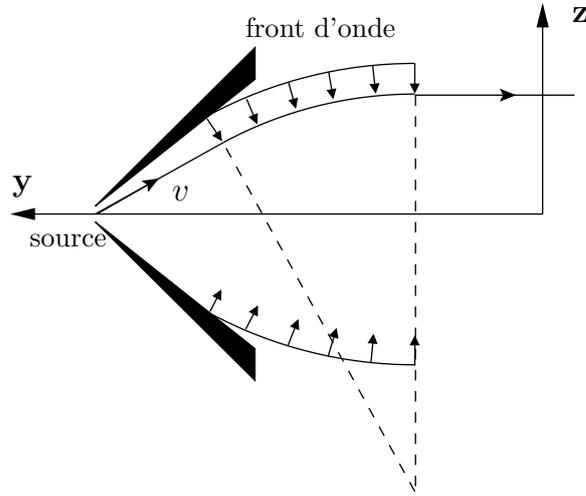


FIG. 2.4 – Principe de fonctionnement de la mélasse transverse. Les fronts d'onde des lasers sont courbés assurant une meilleure plage de capture. Les trajectoires des atomes capturés suivent les front d'onde des lasers. On peut ainsi limiter la divergence transverse du jet d' He^* .

de 400 MHz⁷ par rapport à la transition $2^3\text{S}_1 - 2^3\text{P}_2$ se propage selon \mathbf{y} en sens inverse des atomes. Le long de leur propagation, les atomes d' He^* sont maintenus à résonance avec le faisceau laser au moyen de bobines de champs magnétique : la forme des bobines est calculée de façon à ce que le déplacement induit par effet Zeeman compense exactement l'effet Doppler sur tout le parcours des atomes. Le faisceau laser est polarisé σ^+ de façon à ce que les atomes soient pompés sur une transition cyclante et interagissent constamment avec le faisceau. La pression de radiation permet de ramener la vitesse longitudinale des atomes d' He^* à une valeur de 100 m/s au bout du ralentisseur. Dans le même temps, le flux d'atomes est réduit à $\sim 5 \times 10^9$ at/s et la taille du faisceau atomique augmente sous l'influence de l'émission spontanée pour atteindre un diamètre de l'ordre de 4 cm au bout du ralentisseur.

Une des typicité de notre dispositif expérimental vient de la longueur insolite du ralentisseur Zeeman ($\sim 2.5\text{m}$). Cette longueur dépend essentiellement de la vitesse initiale v des atomes et des caractéristiques de la transition lumineuse sur laquelle le faisceau laser est asservi et peut se mettre sous la forme suivante [72] :

$$L = \frac{mv^2}{\hbar k \Gamma} \propto \frac{k_B T}{\hbar k \Gamma}$$

La température initiale du faisceau fixe la valeur de la vitesse des atomes. On voit donc par cette relation, que la longueur du ralentisseur Zeeman est essentiellement reliée à la norme du vecteur d'onde de la transition optique $k = 2\pi/\lambda$ et à la durée de vie de l'état excité Γ . Si l'on compare ces valeurs avec d'autres espèces atomiques couramment utilisées dans le domaine des atomes froids (par exemple le rubidium), on s'aperçoit que c'est essentiellement la durée de vie de l'état excité qui est beaucoup plus grande dans le cas de l' He^* . Pour absorber un

⁷Cette valeur élevée du désaccord permet d'éviter de perturber le piège magnéto-optique qui se trouve sur le parcours du faisceau à la sortie du ralentisseur Zeeman.

même nombre de photons que les autres espèces, les atomes d'He* ont donc le temps de se propager sur une plus grande distance.

2.2.2 Piégeage et refroidissement d'un gaz dilué d'He*

Piège magnéto-optique et mélasse optique tri-dimensionnelle Le faisceau d'atomes refroidis précédemment décrit permet de charger un piège magnéto-optique (PMO). Ce piège est constitué de 3 faisceaux laser rétro-réfléchis et d'un gradient de champs magnétique (Fig. 2.2. La paire de faisceaux suivant l'axe x n'est pas représentée). Afin d'augmenter la plage de capture des atomes qui sortent du ralentisseur Zeeman, le diamètre des faisceaux est large : de l'ordre de 2.5 cm de diamètre. Leur puissance est de 3 mW, ce qui équivaut à $\frac{I}{I_{\text{sat}}} \simeq 19$, et ils sont désaccordés vers le rouge de la transition $2^3S_1 \rightarrow 2^3P_2$ de l'ordre de $25\Gamma \sim 40$ MHz. Cette valeur élevée du désaccord ne correspond malheureusement pas à l'optimum du refroidissement des atomes du PMO [81]. Un tel réglage permet en fait de limiter l'effet des pertes dues aux collisions assistées par la lumière. Le nombre de collisions Penning a en effet tendance à augmenter sous l'influence d'un faisceau laser proche de résonance : Le taux de collisions est plus grand quand une fraction non négligeable de la population atomique est dans l'état excitée (2^3P_2) [88]. La valeur du désaccord des faisceaux résulte donc d'un compromis entre le nombre d'atomes piégés et la température du PMO. De façon à compenser la diminution de la force de piégeage du PMO résultant de cette valeur élevée du désaccord, on augmente la valeur du gradient de champ magnétique à une valeur de 50 G/cm suivant l'axe x et de 25 G/cm suivant les deux autres axes. L'optimum de réglage du PMO correspond à un nombre maximum d'atomes chargés dans le piège, que l'on estime de l'ordre de 5×10^8 ⁸. La température des atomes du PMO est de l'ordre de 1 mK et son temps de chargement est de 5 s.

Pour atteindre le seuil de la condensation de Bose-Einstein, il faut encore diminuer la température des atomes d'He* de 3 ordres de grandeur. Pour ce faire, les atomes vont être transférés dans un piège magnétique pour y subir de nouvelles étapes de refroidissement. Le transfert direct du PMO au piège magnétique s'avère malheureusement peu efficace car la température des atomes du PMO n'est pas bien adaptée à la profondeur du piège magnétique. Afin d'optimiser ce transfert, on applique donc une phase de mélasse tri-dimensionnelle aux atomes du PMO : le gradient de champs magnétique est coupé brusquement (temps de coupure de 1 ms) et dans le même temps, le désaccord des faisceaux lasers est diminué jusqu'à atteindre quelques Γ par l'intermédiaire d'un modulateur acousto-optique. La puissance des faisceaux diminue dans le même temps de près d'un ordre de grandeur. Pour compenser les champs magnétique résiduels ainsi que la gravité, des paires de bobines génèrent des champs homogènes suivant les trois axes de l'espace. Ces derniers sont réglés de manière à optimiser le chargement du piège. La durée de la mélasse est optimisée de façon à limiter les pertes par collision Penning et à minimiser la température du nuage. La durée typique est de l'ordre de 5 ms et on obtient pour finir un nuage froid d'environ 10^8 atomes et de température de l'ordre de 300 μK .

⁸Cette valeur correspond à une mesure effectuée il y a plusieurs années. Actuellement, notre système de détection ne nous permet pas de calibrer le nombre d'atomes dans le PMO de manière efficace. La mise en place d'un système d'imagerie, soit par fluorescence, soit par absorption est discutée actuellement pour surmonter cette limitation.

Piège magnétique et refroidissement Doppler 1D Le piégeage magnétique est basé sur l'interaction entre le moment magnétique permanent μ des atomes et un champ magnétique externe et inhomogène $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. L'énergie d'interaction de ce couplage peut se mettre sous la forme suivante $U(\mathbf{r}) = -\mu \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \hbar\omega_L$, où la pulsation de Larmor ω_L définit la fréquence de la précession du moment magnétique autour du champs magnétique. Pour un atome de moment angulaire total \mathbf{J} , le moment magnétique peut être écrit $\mu = -g_J \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{J}$, où g_J est le facteur de Landé et μ_B est le magnéton de Bohr. Si la pulsation de Larmor est grande devant la fréquence typique des variations du champs magnétique, le moment magnétique suit adiabatiquement le champs magnétique externe et on peut écrire le potentiel d'interaction de façon simplifié :

$$U(\mathbf{r}) = g_J \frac{\mu_B}{\hbar} m_J B(\mathbf{r}) \quad (2.2)$$

où $B(\mathbf{r})$ est le module du champ magnétique externe et m_J la valeur de la projection du moment magnétique suivant l'axe de quantification. La condition d'adiabaticité est toujours remplie dans les conditions expérimentales car le champ magnétique est toujours non nul. Comme le théorème de Gauss interdit les maxima locaux du champ magnétique, les atomes seront piégés aux minima du module du champs magnétique. La relation 2.2 impose donc aux atomes piégés la condition $g_J m_J > 0$. Pour l' He^* (2^3S_1), cette condition n'est remplie que pour les atomes dans le sous-niveau Zeeman $m_J = +1$ dans la mesure où $g_J = +2$. La figure 2.5 donne l'allure des différentes composantes de l'interaction dans le cas d'un piège harmonique.

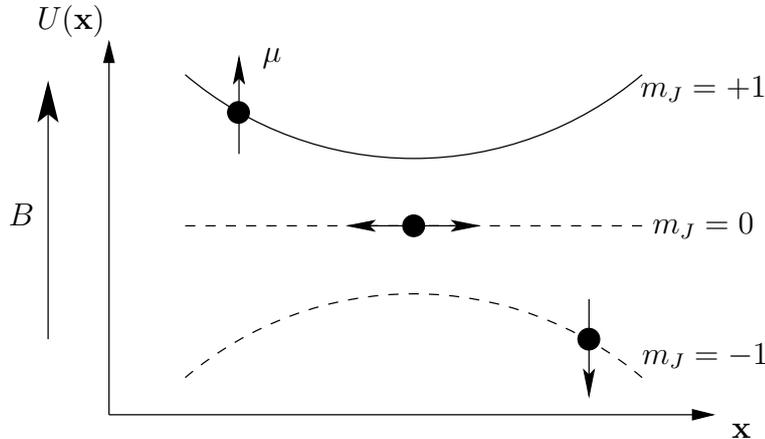


FIG. 2.5 – Potentiel d'interaction généré par l'interaction entre le moment magnétique μ de l'atome et un champs magnétique externe B . Si la projection du moment cinétique de l'atome m_J est positive (l'axe \mathbf{x} est ici l'axe de quantification du moment magnétique), le potentiel vu par l'atome présente un minimum et ce dernier peut donc être piégé. Si $m_J = 0$, l'atome ne ressent pas la présence du champs magnétique (son moment magnétique est perpendiculaire au champs magnétique externe) et enfin si $m_J = -1$ le potentiel est antipiégeant.

Expérimentalement, le piège magnétique est un piège de Ioffe-Pritchard en configuration de feuille de trèfle [89, 72]. Il est généré par l'intermédiaire de 12 bobines de champs magnétique qui ont été disposées le plus près possible du centre de l'enceinte à vide (Fig. 2.2) dans l'espace disponible des brides rentrantes installées suivant l'axe \mathbf{x} . Cette géométrie a l'avantage d'imposer un module de champs magnétique non nul au centre du piège de façon

à éviter les transitions non adiabatiques vers des états non piégeants. De façon générale, on peut mettre l'expression du champ magnétique dans une telle configuration sous la forme suivante⁹ :

$$\mathbf{B}(x, y, z) \simeq \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + B' \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} + B'' \begin{pmatrix} x^2 - \frac{1}{2}(y^2 + z^2) \\ xy \\ -xz \end{pmatrix}$$

Dans cette expression B_0 est le champs du biais et correspond à la valeur du module du champ magnétique au centre du piège. B' correspond au gradient de champ généré par les quadripôles et B'' est la courbure du champ généré par les dipôles. A basse température¹⁰, les atomes n'explorent plus que le fond du piège magnétique et on peut écrire l'expression approximative du module du champ correspondant sous la forme :

$$B(x, y, z) \simeq B_0 + \left(\frac{B'^2}{2B_0} - \frac{B''}{2} \right) (y^2 + z^2) + B'' x^2 \quad (2.3)$$

Le fond du piège peut donc être considéré comme harmonique et l'on peut remarquer qu'une façon simple d'augmenter le confinement transverse est de diminuer la valeur du biais. Les valeurs de B_0 , B' et B'' peuvent être ajustées par l'intermédiaire de deux alimentations stabilisées en courant. On a fait le choix d'utiliser des bobines de champ magnétique comportant peu de tours, ce qui impose de travailler avec de grandes intensités, typiquement de l'ordre de 100 à 200 A.

Juste après la fin de la phase de mélasse tri-dimensionnelle, le champ magnétique est mis en place et pendant la montée de ce dernier, on illumine le nuage au moyen d'un faisceau laser rétro-réfléchi, polarisé σ^+ et proche de la résonance avec la transition $2^3S_1 \rightarrow 2^3P_2$ pendant une durée de l'ordre d'1 μs . La puissance du faisceau est de 10 mW pour un diamètre à $1/e^2$ de l'ordre de 1.5 cm et sa direction fait un petit angle de l'ordre de 5° avec l'axe \mathbf{x} . Cette étape permet de pomper la majeure partie des atomes dans le sous-niveau Zeeman $m_x = 1$. On peut ainsi gagner un facteur 3 sur le nombre d'atomes piégés. La durée du pompage est optimisée de façon à maximiser le nombre d'atomes transférés dans le piège magnétique. Durant le chargement, le biais du champ magnétique est très élevé $B_0 \sim 190$ G de manière à ouvrir le piège le plus possible et augmenter l'efficacité du transfert : on a ainsi $B' \sim 85$ G/cm et $B'' \sim 25$ G/cm². Le piège est ensuite comprimé en deux étapes (B' et B'' restent fixés). La première fixe le biais a une valeur de 20 G. On procède alors à une phase de refroidissement Doppler 1D. On utilise le même faisceau laser que celui qui a permis de réaliser le pompage optique en ajustant sa puissance ($\sim 500\mu\text{W}/\text{cm}^2$) et son désaccord¹¹ par l'intermédiaire d'un modulateur acousto-optique. Ces deux derniers paramètres sont réglés de façon à optimiser conjointement le refroidissement et le nombre d'atomes à l'issue du processus. Cette étape du refroidissement a l'avantage de diminuer de façon conséquente la

⁹Traditionnellement, l'axe de quantification du moment cinétique de l'atome est l'axe \mathbf{z} . Ici, on a pris le parti de définir une fois pour toute le système d'axes de l'expérience et de tout exprimer par rapport à ce choix. Ici l'axe de quantification correspond à l'axe \mathbf{x} .

¹⁰Cette condition peut être écrite de façon formelle et correspond à des températures de nuage telles que : $k_B T \ll 2\mu_B B_0$ [81].

¹¹L'effet Zeeman déplace les niveaux d'énergie des états $2^3S_1, m_J = 1$ et $2^3P_2, m = 2$. En tenant compte de ces déplacements, le laser est désaccordé vers le rouge à environ 28 MHz de la résonance.

température du nuage en limitant les pertes atomiques. Le refroidissement du nuage dans les axes transverses au faisceau peut être expliqué par des processus de réabsorption de photons émis spontanément [90]. Pour que le refroidissement soit efficace, il faut donc que la densité du nuage soit suffisamment grande. Malgré tous nos efforts, nous n'avons pas réussi à diminuer la température du nuage jusqu'aux températures $T \sim 140 \mu\text{K}$ qui ont été atteintes dans des conditions similaires par d'autres groupes [91]. D'autre part la durée de notre refroidissement est aussi plus longue (~ 5 s) que celle indiquée par les auteurs de [91]. Ceci tend à prouver que la densité de notre nuage n'est pas suffisamment grande. Toujours est il que le processus reste efficace et nous sommes capable de refroidir le nuage jusqu'à une température de $250 \mu\text{K}$ sans pratiquement perdre d'atomes. A l'issue du processus, le piège est de nouveau comprimé jusqu'à un biais de 0.25 G.

Le refroidissement évaporatif Pour poursuivre le refroidissement du nuage d'He* jusqu'au seuil de la condensation de Bose-Einstein, on pratique pour finir une phase d'évaporation forcée. La condition pour que le processus soit efficace réside dans le taux de collisions des atomes γ : pour qu'à chaque instant le nuage froid ait le temps d'atteindre l'équilibre thermique, il faut que ce taux ne diminue pas durant l'évaporation. Si cette condition est remplie, on parle d'emballement de l'évaporation. Une des limitations de ce processus vient de la durée de vie τ_v des atomes dans le piège qui fixe une borne supérieure sur la durée de la phase d'évaporation. En conséquence, le taux de collision doit être grand devant le taux de perte $1/\tau_v$. Pour un nuage de température T donnée, le taux de collision s'écrit : $\gamma \propto n_0 \sigma v$, où $v = \sqrt{k_B T/m}$, n_0 est la densité moyenne des atomes dans le piège et σ est la section efficace de collision des atomes. Dans le piège harmonique dans lequel nos atomes sont piégés, la densité est reliée directement aux fréquences d'oscillation du piège. Ces considérations justifient les deux étapes de compression du piège décrites précédemment qui ont permis d'augmenter la densité du nuage et donc le taux de collision.

Pour extraire les atomes du piège on utilise un couteau radio-fréquence (RF) comme décrit sur la figure 2.6. La condition de résonance U_l est fixée par la valeur de la fréquence de la RF. Tous les atomes qui ont une énergie suffisamment grande pour que leur trajectoire traverse cette limite sont couplés par la RF vers un état non-piégeant et sont donc expulsés du piège. Le paramètre $\eta = U_l/k_B T$ doit être maintenu autour de 6 pour que le critère d'emballement soit respecté. Au début de l'évaporation, $k_B T/h \sim 6$ MHz, on fixe donc ν_{RF} autour de 40 MHz. On diminue ensuite continuellement ν_{RF} en ajustant la vitesse de la rampe de fréquence de façon à ce que η soit toujours de l'ordre de 6. En pratique cela consiste à faire deux rampes de fréquence, linéaires, de vitesses respectives 3 MHz/s et 100 kHz/s. On coupe la RF quand on a atteint la température désirée. En pratique, la température critique de condensation est de l'ordre de $1 \mu\text{K}$. La durée de la phase de refroidissement évaporatif est de l'ordre de 20 s.

Forme du piège magnétique à basse température A ce stade, le potentiel magnétique ressenti par les atomes peut se mettre d'après 2.3 sous la forme suivante :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_{\parallel}^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2 (y^2 + z^2) \quad (2.4)$$

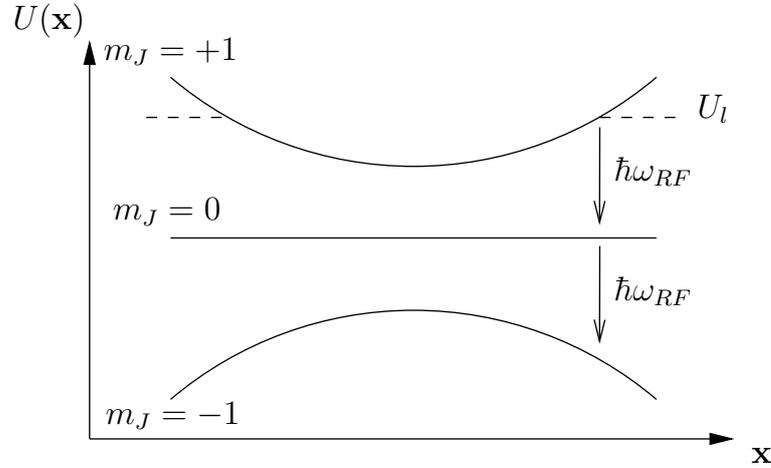


FIG. 2.6 – Principe du refroidissement évaporatif. Les atomes les plus chauds ont des trajectoires qui traversent le couteau radio-fréquence correspondant à l'énergie U_l . Ces atomes sont alors transférés vers un sous-niveaux Zeeman non piégeant. Ils sont donc perdus et l'énergie du nuage diminue. En se rethermalisant, les atomes restant voient leur température diminuer. On peut ainsi atteindre la température critique de condensation.

où ω_{\parallel} et ω_{\perp} sont respectivement les fréquences d'oscillation longitudinale et transverse du piège harmonique. On peut les mesurer en utilisant le principe du chauffage paramétrique : on perturbe le piège au moyen d'une modulation de fréquence donnée. Le chauffage du nuage entraîné par cette modulation est maximal lorsque, sa fréquence est égale à deux fois la fréquence d'oscillation du piège dans la direction considérée. On trouve ainsi pour $B_0 = 0.25$ G :

$$\omega_{\parallel} = 2\pi \times 1150 \text{ Hz et } \omega_{\perp} = 2\pi \times 47 \text{ Hz.} \quad (2.5)$$

Comme indiquée dans la première partie de ce chapitre, le taux de collisions Penning est largement réduit du fait de la polarisation des atomes d' He^* . La durée de vie des atomes dans le piège est de l'ordre de 60 s et est principalement limitée par la pression du gaz résiduel. La mesure de cette pression est limitée par la précision de nos jauges qui ne peuvent pas descendre en dessous d'une pression de 10^{-10} mbar. La pression est semble-t-il au moins un ordre de grandeur en dessous de cette valeur. Une autre cause de pertes atomiques du piège magnétique vient d'une lumière parasite proche de résonance qui réussit à atteindre le centre du piège magnétique : Notre système laser a été isolé au maximum du reste de l'expérience mais malgré tout, une petite partie de la lumière produite réussit à atteindre l'enceinte à vide et vient perturber les atomes du piège. La diffusion des photons de cette lumière parasite peut entraîner un changement de polarisation des atomes du piège qui ne sont alors plus piégés. En coupant les lasers une fois les atomes confinés dans le piège magnétique, on peut observer une augmentation de la durée de vie de l'ordre de 10 s.

Coupage du piège magnétique et détection A l'issue du processus de refroidissement évaporatif, les champs magnétiques de piègeage sont brutalement coupés. Une étude détaillée de cette coupure a été rapportée dans le manuscrit de thèse d'A. Robert [73]. Il s'avère que le champ magnétique n'est pas coupé instantanément : dans une première phase, le biais

B_0 devient négatif pour une durée de l'ordre de 150 μs . Les valeurs atteintes sont d'autant plus fortes que le biais est initialement proche de 0 G. Ensuite, sur une durée plus longue, de l'ordre de 1 à 2 ms, le biais revient à 0. Le fait que le champ s'annule au moment de la coupure est responsable du basculement du spin d'une partie non négligeable des atomes. On a ainsi pu estimer que de l'ordre de 10% des atomes d'un condensat de Bose-Einstein passent dans le sous niveau Zeeman $m_x = 0$. Ces atomes tombent ensuite sous l'effet de la gravité sans ressentir l'effet du champ magnétique résiduel. Il n'en est pas de même pour les atomes des deux autres sous-niveaux Zeeman, qui sont expulsés en direction des parois de l'enceinte en raison des forts gradients de champ magnétique générés au moment de la coupure du piège magnétique.

Le détecteur que nous utilisons pour détecter les nuages relâchés du piège magnétique est placé 46.8 cm en dessous du centre du piège. Cette grande distance correspond à un temps de vol de l'ordre de 308.9 ms pour un atome sans vitesse initiale. Il s'avère que seuls les atomes qui ont basculé dans le sous niveau Zeeman $m_x = 0$ atteignent le détecteur. Les autres sont perdus à la coupure du piège. Nous ne détectons ainsi qu'une fraction du nuage piégé initialement. Au chapitre suivant, nous verrons qu'il est possible de transférer efficacement les atomes d'un condensat de Bose-Einstein du sous-niveau $m_x = 1$ vers le sous niveau $m_x = 0$ par l'intermédiaire de transitions Raman à deux photons. Ce type de transfert permet de s'affranchir des limitations occasionnées par la coupure brutale du piège magnétique.

2.3 Un système de détection original

Un atome d'hélium métastable possède une énergie interne suffisante pour être capable d'arracher un électron d'une surface métallique en se desexcitant. Cette propriété peut être mise à profit pour détecter ces atomes un par un : c'est le principe des galettes de micro-canaux ¹². Il s'agit en fait de l'analogie atomique du photo-multiplicateur qui, à partir d'un unique photon est capable de produire un signal électrique macroscopique que l'on peut ensuite détecter. Ce type de détecteur a été en l'occurrence le moteur de la majeure partie des expériences destinées à la compréhension des corrélations en optique quantique. Sa mise en oeuvre dans le cas des atomes constitue donc un intérêt en soi si l'on désire mesurer des corrélations atomiques.

Le groupe de recherche que j'ai rejoint utilise depuis presque dix ans des MCP pour détecter les atomes d'hélium métastable produits expérimentalement. Ce n'est que récemment qu'un nouveau système de détection, toujours basé sur l'utilisation de MCP mais permettant une reconstruction tri-dimensionnelle des événements enregistrés, a été développé. Ce nouveau détecteur a été caractérisé de façon détaillée dans la thèse de doctorat de M. Schellekens [46]. La partie suivante s'inspire de ce travail pour résumer les principes du fonctionnement d'un tel détecteur et mentionne quelques unes des caractéristiques de ce dernier, mises en évidence plus récemment. On notera d'autre part, qu'une étude approfondie de l'ancienne version du détecteur se trouve dans la thèse de doctorat d'Oliver Sirjean [74].

¹²Micro Channel Plate (MCP) en anglais. Nous utiliserons très souvent cette abréviation dans la suite du manuscrit.

2.3.1 Principe de fonctionnement d'une galette de micro-canaux

Description générale Les galettes de micro-canaux sont constituées d'un réseau de tubes de verre très résistifs accolés les uns aux autres. Le diamètre des tubes et leur espacement est variable mais reste proche de la dizaine de microns ¹³. L'épaisseur des galettes est elle aussi variable mais mesure en pratique plusieurs centaines de μm . La figure 2.7 donne une vue schématique d'une galette typique et détaille son principe de fonctionnement : une particule excitée qui arrive à la surface d'un MCP est capable d'arracher un électron en se desexcitant. Sous l'effet de la haute tension à laquelle sont soumises les faces de la galette (de l'ordre du kV), l'électron est accéléré et percute la surface interne d'un tube, arrachant d'autres électrons, qui à leur tour vont répéter ce processus. A la sortie du canal, le nombre d'électrons secondaires varie généralement de 10^3 à 10^4 en fonction de la valeur de la haute tension et des caractéristiques de la galette. La durée typique d'un tel processus d'amplification est de 100 ps [92].

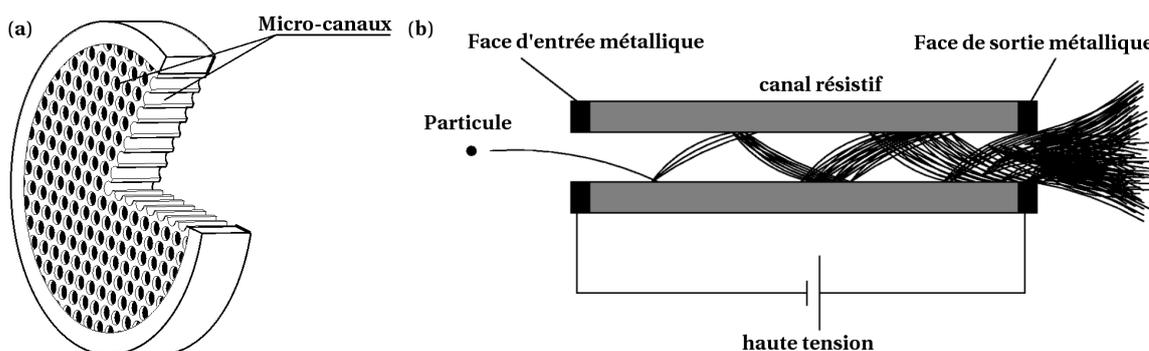


FIG. 2.7 – (a) Vue schématique d'une galette de micro-canaux. (b) Vue en coupe d'un canal d'un MCP. Une particule d'énergie suffisamment grande est capable d'arracher un électron de la surface du MCP. La haute tension (typiquement de l'ordre du kV) à laquelle est soumise la galette accélère l'électron, lui permettant à son tour d'arracher d'autres électrons des parois d'un canal. Les parois des canaux sont traitées pour augmenter la probabilité d'extraction d'électrons secondaires. Le nombre d'électrons secondaires produits augmentent exponentiellement le long des canaux : on peut parler d'avalanche.

Pour initier un processus d'avalanche, l'énergie de la particule incidente doit être suffisamment élevée pour permettre l'extraction du premier électron qui va démarrer le processus d'amplification : les MCP sont donc généralement utilisés pour détecter des photons de haute énergie (UV), des ions, des particules alpha ou encore des atomes métastables. D'autre part, il est indispensable de se placer sous vide pour utiliser un MCP, de façon à limiter au maximum le déclenchement spontané d'une avalanche, par l'intermédiaire du gaz environnant par exemple. Ceci permet aussi de limiter l'apparition d'arcs électriques qui peuvent sérieusement endommager la galette. En pratique, on ne peut totalement supprimer ces processus spontanés mais leur taux est faible ($\lesssim 1 \text{ cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$) et permet donc une utilisation sur des durées relativement longues sans risque de brouiller le signal que l'on désire mesurer.

¹³En comparaison, un cheveu a généralement un diamètre compris entre 60 et 80 μm .

Montage de plusieurs MCP en série Les galettes de micro-canaux sont généralement montées en série pour augmenter le gain d'amplification et ainsi permettre la détection d'événement unique. D'autre part, pour que les particules incidentes viennent frapper la paroi des canaux le plus près possible de leur entrée et assurer ainsi un gain maximum, l'axe des canaux est généralement tourné de quelques degrés (voir Fig. 2.8). Cette configuration permet aussi de limiter les effets d'un phénomène parasite qui a tendance à diminuer le gain de l'amplification : au niveau de la sortie de la galette, des atomes peuvent être desorbés et ionisés sous l'influence du bombardement électronique. Accéléré vers l'entrée de la galette, ils peuvent déclencher de nouvelles avalanches et perturber ainsi le fonctionnement du canal d'amplification. En plaçant les galettes en chevron comme sur la Fig. 2.8, on empêche ces ions de remonter jusqu'à la face d'entrée de la galette et leur effet est nettement diminué. D'autre part, comme le laisse aussi penser la figure, les signaux électroniques générés par les canaux du premier MCP arrosent plusieurs canaux du deuxième MCP, ce qui permet d'augmenter d'autant plus le gain de l'amplification. Avec un tel montage on peut atteindre un gain d'environ 10^7 à 10^8 ce qui est suffisant pour réaliser un comptage d'événements uniques.

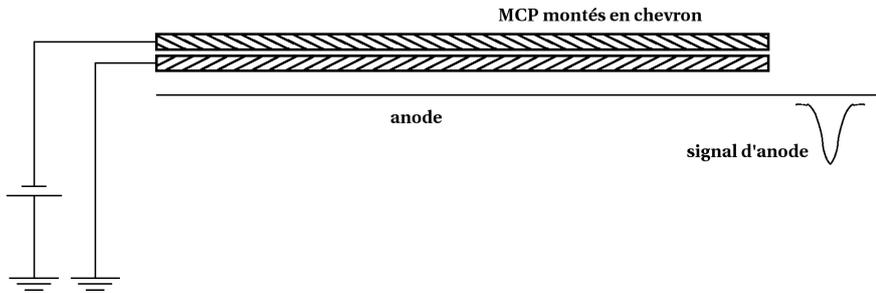


FIG. 2.8 – Configuration standard des galettes de micro-canaux. Les axes des canaux de deux MCP n'ont pas les mêmes directions : on parle de configuration en chevron. Les signaux électroniques générés par les différents canaux sont récupérés sur une anode. On peut ainsi compter les impulsions.

En fonction de la valeur de la haute tension appliquée aux bornes des galettes, on peut distinguer deux régimes d'amplification : un régime de faible gain où la distribution des hauteurs d'impulsion mesurée sur l'anode est large et confondue avec le bruit électronique résiduel et un régime où le gain est dit saturé et où la distribution des hauteurs d'impulsion est cette fois-ci piquée. La saturation du gain intervient quand la densité des nuages électroniques générés à l'intérieur des canaux est suffisante pour écranter le champ électrique extérieur et limiter ainsi l'amplification. En augmentant la haute tension il est possible de passer d'un régime à l'autre. Saturer le gain du MCP est une manière appropriée de réaliser le comptage des impulsions dans la mesure où dans ce régime, il est relativement aisé de discriminer entre le bruit électronique résiduel et les impulsions correspondant à la détection d'une particule. On peut placer un seuil de détection pour ces impulsions, dont la valeur est relativement facile à définir, dans la mesure où la distribution des hauteurs d'impulsion est piquée.

Une autre forme de saturation peut intervenir quand le flux de particules incidentes est trop grand (typiquement quand il dépasse quelques centaines de kat./s). Le courant qui circule entre les faces arrière et avant des galettes n'est alors plus suffisant pour recharger les canaux entre deux détections. Le gain a donc tendance à diminuer au cours du temps et la détection des particules devient de moins en moins efficace.

2.3.2 Lignes à retard

Comme mentionné précédemment, on utilise généralement une anode placée sous les gallettes pour récupérer les signaux générés. La principale limitation de cette méthode est la perte de la connaissance de la position d'arrivée de la particule sur le détecteur. La manière la plus simple de ne pas perdre cette information est d'utiliser une ligne à retard. Son principe est détaillée sur la Fig. 2.9 : une impulsion électronique générée par le MCP est captée par la ligne à retard à l'instant t_0 . L'impulsion se scinde alors en deux parties contra-propageantes dont les temps d'arrivée t_1 et t_2 en bout de ligne peuvent être mesurés. Connaissant la vitesse de propagation v_d des signaux ainsi que la longueur l_d de la ligne, on peut aisément écrire que $t_1 = t_0 + (l_d/2 + x)/v_d$ et $t_2 = t_0 + (l_d/2 - x)/v_d$ où t_0 est le temps d'arrivée de l'impulsion sur la ligne. Ainsi :

$$x = \frac{1}{2}(t_1 - t_2) \times v_d \text{ et } t_0 = \frac{1}{2} \left(t_1 + t_2 - \frac{l_d}{v_d} \right)$$

Mesurer t_1 et t_2 permet donc de connaître à la fois le temps d'arrivée de la particule sur le détecteur et la position de cette dernière le long de l'axe x .

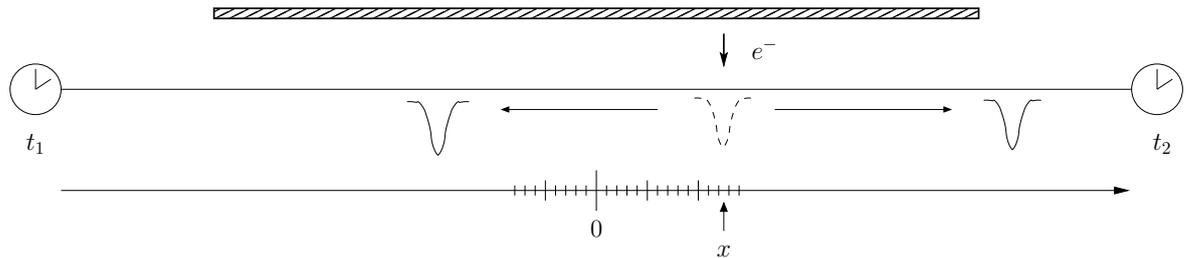


FIG. 2.9 – Schéma de principe d'une ligne à retard. Une impulsion issue du MCP se scinde en deux parties contra-propageantes à son arrivée sur la ligne. Les temps d'arrivée t_1 et t_2 des deux impulsions en bout de ligne permettent de remonter à la position initiale x de l'impulsion sur le MCP.

Cette description simpliste cache cependant une limitation de taille : le pas de codage ou *pixel* temporel sur la mesure des temps d'arrivée des impulsions. Les valeurs usuelles de ce pas de codage sont en général de l'ordre de quelques centaines de ps. Or la vitesse v_d est de l'ordre de $c/3$, où c est la vitesse de la lumière. Ceci correspond donc approximativement à un pas de codage spatial le long de la ligne de ~ 1 cm... Le diamètre d'un MCP est généralement de quelques centimètres et avec cette technique on ne peut donc espérer mesurer précisément la position d'arrivée de la particule initiale.

Un moyen de s'affranchir de cette limitation consiste à diminuer artificiellement la vitesse de propagation de l'impulsion. En enroulant la ligne à retard sous le MCP (voir Fig. 2.10), la vitesse effective de l'impulsion dans la direction considérée est divisé par le nombre de tours de la ligne à retard. Une centaine de tours suffit déjà à ramener la taille d'un pixel spatial à des valeurs de l'ordre de la centaine de μm . Pour un MCP de quelques centimètres de diamètre, cela correspond déjà à plusieurs centaines de pixels spatiaux dans la direction considérée.

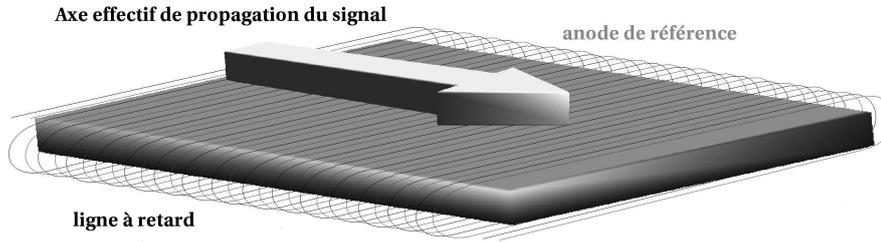


FIG. 2.10 – Montage d'une ligne à retard destiné à augmenter la précision de codage de la position d'une impulsion sur le MCP. La ligne à retard est enroulée sous le MCP. Ceci tend à diminuer la vitesse effective de propagation de l'impulsion dans la direction considérée et augmente mécaniquement la précision de codage de la position initiale de l'impulsion.

En enroulant de la même façon une seconde ligne à retard¹⁴, sous la première et suivant l'axe y de la galette, on obtient donc un détecteur tri-dimensionnel, capable de résoudre à la fois le temps d'arrivée des particules sur la galette à quelques centaines de ps près et leurs positions dans le plan $x - y$ à quelques centaines de μm près.

2.3.3 Montage expérimental

La figure 2.11 donne une vue générale du montage expérimental utilisé pour détecter les atomes d'hélium métastable. Il s'agit en fait d'un montage commercial développé par la société Roentdek. Ce montage comprend toute la mécanique nécessaire à la mise sous vide des MCP ainsi qu'un système de lignes à retard et une partie de l'électronique nécessaire au fonctionnement du détecteur. Sur le montage, deux MCP sont installés en configuration chevron. Il s'agit de galettes fabriquées par la société *Burle*, de 7.5 cm de diamètre et de 700 μm d'épaisseur. Les micro-canaux ont un diamètre de 12 μm et sont espacés de 15 μm les uns des autres. L'angle de ces derniers avec la normale du détecteur est de 8° . Plus récemment, ces galettes ont été remplacées par un modèle équivalent de la société *Hamamatsu*. Ce changement a été motivé par un certain nombre de limitations mises en évidence pour cette première génération de galettes[46]. Nous reviendrons sur cet aspect par la suite.

Chaîne électronique de détection L'électronique utilisée pour mettre en forme et détecter les temps d'arrivée des signaux issues des lignes à retard est sûrement une des parties les plus critiques de ce montage. Le processus de détection comprend 3 étages distincts. Dans un premier temps, le boîtier DLATR6 de la société Roentdek extrait et amplifie les signaux qui proviennent des lignes à retard. Ces derniers sont ensuite mis sous la forme d'un signal logique NIM à l'aide d'un CFD (Constant Fraction Discriminator). Enfin, un TDC (Time to Digital Converter) est capable d'encoder sous la forme d'un mot binaire le temps d'arrivée de l'impulsion logique. Le mot est envoyé à un ordinateur qui peut l'enregistrer et le traiter.

¹⁴Il faut bien noter ici que les réglages des tensions appliquées sur les deux lignes à retard sont importants : il faut naturellement faire en sorte que les impulsions issues de la galette se répartissent de façon égale sur les deux lignes.



FIG. 2.11 – *Vue du montage expérimental. Les MCP sont maintenus par deux anneaux de céramique. Les différents fils visibles sur le montage permettent la mise sous tension des galettes et des lignes à retard. Ils permettent aussi de récupérer les impulsions électriques générées lors de la détection d'une particule. Les lignes à retard se trouvent juste en dessous des galettes. On peut entrapercevoir les bobinages dans l'un des coins du montage.*

Il faut bien voir ici, que les 4 voies des lignes à retard ¹⁵ sont traitées en parallèle. Deux générations de TDC se sont succédées. Le CTNM4 développé par une équipe de l'Institut de Physique Nucléaire a un pas de codage de 400 ps ce qui correspond à environ 400 pixels spatiaux suivant chaque direction de l'espace. Il a été utilisé pour la majeure partie des expériences décrites dans ce manuscrit. Malheureusement, il n'est pas capable de travailler pour des flux de particules détectées trop élevés. On a donc fait appel à la société IsiTech pour réaliser une nouvelle version sur mesure du TDC. Le pas de codage n'est plus que de 275 ps dans cette version (600 pixels spatiaux). Les réglages de ce nouveau TDC ne sont malheureusement pas à la hauteur de nos attentes et n'ont pas permis d'améliorer significativement les performances du détecteur. En revanche, nous ne sommes plus limités au niveau du flux de particules détectées.

Le réglage des différentes parties du montage électronique est critique quant aux performances du détecteur [46]. D'autre part, ce système est très sensible au bruit électronique environnant. Un soin particulier a donc été apporté sur l'isolement des boîtiers de détection et des différents câbles qui les relient. De nouvelles améliorations, comprenant par exemple une cage de Faraday destinée à isoler totalement les différents boîtiers électroniques des champs électro-magnétiques environnants est en construction actuellement.

¹⁵Chaque ligne à retard comporte deux sorties et nous utilisons deux lignes à retard pour être capable de connaître la position des atomes détectés dans le plan du détecteur, comme mentionné précédemment.

Reconstruction des positions des atomes dans le plan du détecteur Au moment où les temps d'arrivée des impulsions sont enregistrées par l'ordinateur de traitement, nous ne savons pas encore à quel atome cette impulsion correspond et même plus, nous ne savons pas si cette impulsion correspond vraiment à un atome détecté. En fonction du type d'expériences réalisées, le nombre d'impulsions détectées sur les différentes voies des lignes à retard peut varier de quelques dizaines de milliers à plusieurs centaines de milliers. D'autre part, le détecteur n'étant pas parfait, certains signaux peuvent être perdus et du bruit électronique peut aussi générer des impulsions parasites. Reconstruire les positions des atomes détectés nécessitent donc un traitement a posteriori dont nous décrivons ici succinctement le principe¹⁶.

Il est assez conventionnel d'appeler les 4 temps d'arrivée d'une impulsion générée par le MCP aux bornes des deux paires de ligne à retard t_{x_1} , t_{x_2} et t_{y_1} , t_{y_2} . On peut alors relier ces temps à la position (x, y) d'arrivée de la particule sur le détecteur et à son temps d'arrivée t (voir plus haut, l_d^x et l_d^y correspondent aux longueurs respectives des lignes à retard suivant l'axe x et l'axe y) :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(t_{x_1} - t_{x_2}) \times v_d \\ y &= \frac{1}{2}(t_{y_1} - t_{y_2}) \times v_d \\ t &= \frac{1}{2} \left(t_{x_1} + t_{x_2} - \frac{l_d^x}{v_d} \right) \\ t &= \frac{1}{2} \left(t_{y_1} + t_{y_2} - \frac{l_d^y}{v_d} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les deux premières relations permettent de déterminer la position des particules détectées sur le détecteur et les deux dernières sont redondantes mais permettent toutes les deux de déterminer le temps d'arrivée de l'atome sur le détecteur. On s'aperçoit donc ici qu'idéalement, la mesure de trois temps parmi t_{x_1} , t_{x_2} , t_{y_1} et t_{y_2} suffit à reconstruire la position et le temps d'arrivée d'un atome (nous avons 4 équations et seulement 3 inconnues). Nous excluons dans la suite ce dernier cas de figure, dans la mesure où rien ne nous permet alors de vérifier le résultat trouvé : comme le détecteur n'est pas parfait, plus le nombre de conditions imposées à la reconstruction d'un atome est grand, plus on est sûr que ce que l'on a reconstruit provient bien d'un processus de détection, et pas d'un bruit électronique quelconque¹⁷. Pour qu'un atome soit reconstruit, on cherche parmi les différents signaux détectés sur les différentes voies, lesquels satisfont ces équations. La probabilité que 4 signaux issus d'un bruit électronique résiduel vérifient ces relations étant quasiment négligeable, nous n'imposons pas de conditions supplémentaires à la reconstruction d'un atome. Une description plus complète de la procédure de reconstruction peut être trouvée en annexe B.

Cette procédure s'avère relativement efficace et nous sommes capables de reconstruire de 60% à plus de 90% des signaux détectés. La performance de la reconstruction dépend

¹⁶La reconstruction des atomes est aussi traitée dans [46]. L'approche détaillée ici est différente et peut être plus intuitive.

¹⁷Notons ici qu'il existe potentiellement une 5^{ième} équation dans la mesure où il est aussi possible de récupérer un signal électrique provenant de la face avant de la galette et indiquant le temps d'arrivée d'un atome sur le détecteur. Nous n'évoquons cependant pas cette situation ici dans la mesure où nous n'avons pas pu utiliser en pratique cette information. Le bruit électronique est en effet beaucoup trop important sur cette voie pour permettre son utilisation.

essentiellement de la qualité de la galette utilisée ainsi que du bruit électronique environnant.

2.3.4 Caractéristiques expérimentales du détecteur

Dans tout ce paragraphe, nous nous concentrons sur l'étude du comportement du détecteur dans une configuration expérimentale donnée. Les galettes sont soumises à une tension de -2.3 kV ¹⁸ et les différents réglages électroniques sont détaillés dans le manuscrit de thèse de M. Schellekens [46].

Efficacité de détection La mesure de l'efficacité du système de détection représente un véritable défi dans la mesure où sa connaissance peut aider grandement à la compréhension de bon nombres d'observations expérimentales. Tel que le détecteur a été installé, nous ne pouvons a priori connaître cette valeur, qui dépend d'un nombre trop important de paramètres expérimentaux tous très difficiles à mesurer avec précision : efficacité de l'amplification générée par les MCP, efficacité électronique de comptage des impulsions, efficacité de l'algorithme de reconstruction des atomes... Pour l'heure, la seule mesure expérimentale de l'efficacité de détection de notre système a été réalisée dans le cadre d'une collaboration avec le groupe de W. Vassen à Amsterdam. Cette équipe possède deux systèmes de détection indépendants. L'un est basé sur un système d'imagerie par absorption. On peut relativement aisément au moyen de cette technique, connaître avec une bonne précision absolue le nombre d'atomes d'un gaz froid dilué. En comparant cette mesure à la détection du même gaz froid au moyen d'un MCP, ils ont ainsi pu calibrer l'efficacité de détection de leur MCP. Dans le cadre de notre collaboration [26], nous avons été amené à installer notre système de détection sur leur montage expérimental, et nous avons pu réaliser à notre tour la détection d'un même gaz froid au moyen de notre système puis du leur. Suite à cette étude comparative, nous avons estimé que l'efficacité moyenne de notre système de détection est de l'ordre de 11.3% ¹⁹. Cette valeur a permis de donner un bon ordre de grandeur de l'efficacité de détection de notre système mais ne correspond qu'à une configuration donnée de ce dernier. Il conviendrait d'étudier un peu plus en profondeur son comportement et ses variations en fonction des différents paramètres que nous avons à notre disposition. Cette remarque est d'autant plus motivée par le fait que le matériel utilisé pour notre détecteur a évolué sensiblement depuis sa première version et que nous savons que cette détectivité a tendance à diminuer avec l'âge des MCP. L'installation prochaine d'un système d'imagerie comparable à celui de l'équipe de W. Vassen devrait aider à surmonter cette limitation.

Homogénéité de détection Pour mesurer l'efficacité de détection locale du détecteur, on a relâché sur le détecteur, un flux homogène d'atomes d'hélium métastables issu d'un PMO²⁰.

¹⁸Cette valeur correspond à la tension maximale que l'on peut appliquer aux galettes *Burle*. Pour les galettes *Hamamatsu*, cette valeur est de -2.1 kV .

¹⁹Cette valeur correspond aux galettes *Burle*. Nous n'avons pas pu pour l'instant réaliser le même type d'expérience avec la paire de galette *Hamamatsu*.

²⁰La température du nuage atomique ($\sim 300 \mu\text{K}$) est suffisamment grande pour que l'on puisse considérer le flux d'atomes comme homogène au niveau du détecteur.

La comparaison du nombre d'atomes détectés²¹ dans les différentes zones des galettes permet de tracer une carte de détectivité pour cette dernière. La figure 2.12 présente le résultat de deux mesures différentes de cette carte en utilisant respectivement les galettes *Burle* et les galettes *Hamamatsu*. Dans les deux situations, le TDC utilisé correspond au CTNM4. Cette méthode de mesure de la détectivité locale tient compte à la fois des caractéristiques des galettes mais aussi de la qualité de l'électronique de comptage des impulsions ainsi que de l'algorithme de reconstruction des positions des atomes.

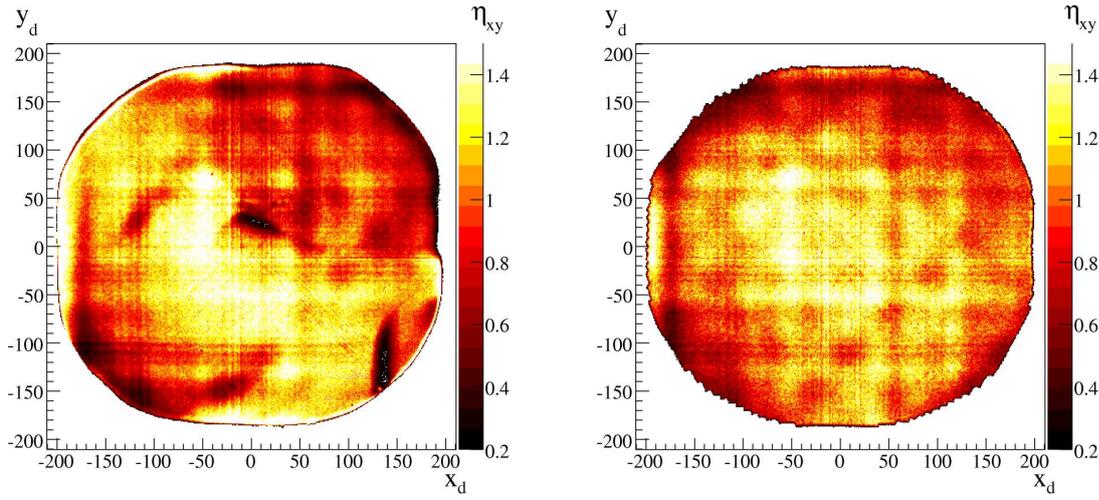


FIG. 2.12 – Carte de détectivité pour deux types de galette de micro-canaux. 200 PMO ont été relâchés sur le détecteur. On a ensuite sommé pour chaque pixel spatial, le nombre d'atomes détectés pour chacun des PMOs (chaque PMO correspond à environ 50000 atomes détectés sur la surface du détecteur. Les tailles des PMO sont quasiment constantes. Les fluctuations du nombre total d'atomes détectés sont de l'ordre de 5%). Cette somme est ensuite divisée par le nombre moyen d'atomes détectés par pixel (de l'ordre de 100 en moyenne) : on obtient ainsi η_{xy} . Cette normalisation permet de comparer les deux cartes obtenues pour deux galettes différentes. Le couple (x_d, y_d) correspond aux coordonnées d'un pixel du détecteur. Un pixel a une surface d'environ $200 \times 200 \mu\text{m}^2$. (a) Galettes *Burle*. L'amplitude moyenne des variations de la détectivité est de l'ordre de 30% de la détectivité moyenne. (b) Galettes *Hamamatsu*. L'amplitude moyenne des variations de la détectivité est de l'ordre de 30% de la détectivité moyenne. Ces galettes ont l'avantage de ne pas présenter de zones de détectivité quasi-nulle.

Tout d'abord, on peut remarquer sur la figure 2.12, que la détectivité n'est pas homogène sur l'ensemble du détecteur. Ceci s'applique pour les deux types de galette. L'effet est plus prononcé sur la version *Burle* où l'on peut même remarquer une zone de détectivité quasiment nulle au centre de la galette. Les inhomogénéités peuvent donc être très grandes d'une zone à l'autre (de l'ordre de 30% en moyenne.). On a pu mettre en évidence une des origines des ces inhomogénéités : les contraintes mécaniques appliqués sur les galettes peuvent considérablement influencer sur la détectivité relative d'une zone à l'autre. En changeant ces contraintes, nous avons pu constater des différences notables dans les cartes de détectivité obtenus. Il semble aussi que certains défauts des galettes peuvent être responsables d'une partie de ces inhomogénéités.

²¹Un atome détecté est en fait ici assimilé à un atome dont la position a été reconstruite grâce à l'algorithme décrit précédemment.

généités : les vendeurs *Burle* et *Hamamatsu* proposent ainsi plusieurs qualités différentes de galette, relatives à leur homogénéité de détection. Les galettes que nous avons utilisées ont la qualité la plus basse disponible. On peut éventuellement s'attendre à ce qu'une partie de ces problèmes s'atténuent en utilisant une meilleure qualité de galette.

Sur les galettes *Burle* on a aussi pu mettre en évidence un certain nombre de *points chauds* : Certaines zones de cette galette, pour une raison difficilement identifiable, génèrent un nombre élevé d'avalanches spontanées. Ces zones sont généralement situées sur les bords de la galette et nous pouvons une nouvelle fois avancer des arguments mécaniques pour en expliquer l'origine : ces points chauds ont d'ailleurs tendance à ne pas toujours se trouver à la même place si l'on change les contraintes mécaniques appliquées sur la galette. En partie à cause de cela, le taux d'avalanches spontanées détectées sur la galette *Burle* est bien plus élevé que les spécifications avancées par le constructeur. Le problème est complètement absent sur le modèle *Hamamatsu*, ce qui facilite quelque peu le travail, dans la mesure où pour les galettes *Burle* ces zones instables ont dû être systématiquement exclues a posteriori des données enregistrées. Notons que la reconstruction des atomes n'était que de l'ordre de 60% avec le MCP *Burle* alors qu'elle est de l'ordre de 90% avec la galette *Hamamatsu*. Cette différence peut s'expliquer justement par l'absence de points chauds sur le détecteur et donc a priori d'un bruit de fond beaucoup moins important.

Enfin, en observant attentivement les deux images, on peut apercevoir un certain nombre de stries verticales et horizontales. Pour expliquer ces stries, on peut avancer une limitation induite par l'électronique de comptage. Le TDC comporte en effet une horloge de fréquence fixe que l'on utilise pour mesurer les temps d'arrivée des impulsions. Pour diminuer un peu plus la taille des pixels temporels et augmenter la sensibilité du dispositif, on subdivise de façon électronique, chaque période de l'horloge en un nombre donné de sous-période (4 pour le CTNM4 par exemple). Or cette subdivision peut ne pas être parfaite. La probabilité qu'une impulsion soit détectée dans l'une ou l'autre des subdivisions n'est alors plus forcément égale. Cet effet appelé non-linéarité différentielle pourrait éventuellement expliquer ces stries [46]. Le fait que l'on retrouve ces stries sur les deux types de galettes confirment le fait que leur origine est indépendante des galettes.

Résolution spatiale et temporelle du détecteur Les résolutions spatiales et temporelles du détecteur, ne doivent pas être confondues avec les tailles des pixels spatiaux et temporels. Les imperfections du système électronique peuvent en effet entraîner une incertitude sur la mesure des temps d'arrivée des impulsions détectés sur les différentes lignes à retard. La résolution du détecteur correspond à la mesure de cette incertitude qui s'avère en pratique toujours plus grande que la taille d'un pixel. Parler de résolution spatiale ou résolution temporelle désigne en fait une seule et même chose dans la mesure où le système utilisé ne mesure que des temps, que l'on peut ensuite traduire en terme de positions comme précédemment mentionné.

Traditionnellement, pour connaître la résolution d'un détecteur, on fait l'image d'un objet donné de taille connue sur le détecteur et on mesure l'incertitude sur les tailles de l'objet sur l'image obtenue. Cette méthode s'avère concluante tant que la résolution est relativement homogène sur la surface du détecteur. La figure 2.13 montre l'image d'une croix que nous avons obtenu en installant sous vide au dessus des MCP, une plaque métallique percée d'une

croix. La largeur de la croix est de 2 mm. Un flux homogène d'atomes relâché sur la croix nous a permis de réaliser l'image de celle-ci sur notre détecteur. Afin de s'affranchir des inhomogénéités locales de la détectivité, l'image a été normalisée au moyen d'une carte de la détectivité préalablement obtenue dans les mêmes conditions expérimentales mais sans la croix. Cette étude nous a permis de mettre en évidence des inhomogénéités locales de la résolution spatiale du détecteur. On peut en effet remarquer sur la figure 2.13 que la largeur des deux axes de la croix n'est pas constante sur toute la longueur des axes. D'autre part, malgré la normalisation effectuée, des inhomogénéités de la détectivité sont toujours apparentes, semblant indiquer que le fait de placer une croix au dessus du détecteur perturbe l'efficacité du processus de détection. Cette dernière observation reste pour l'heure assez mal comprise. Cette méthode s'avère donc pour l'instant relativement inefficace pour mesurer la résolution du détecteur.

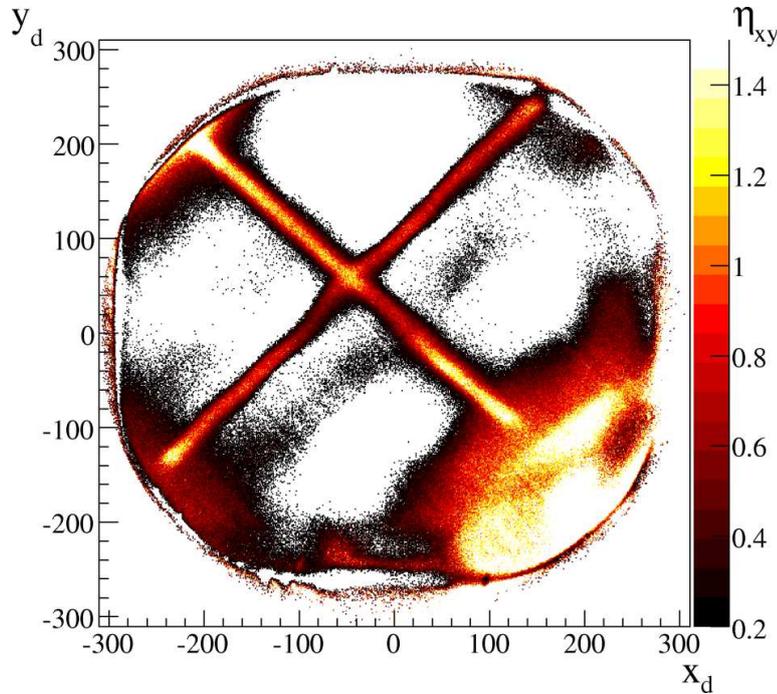


FIG. 2.13 – Image d'une croix, percée à l'intérieur d'une plaque métallique. L'image obtenue a été normalisée de manière à s'affranchir des inhomogénéités spatiales de détection. La largeur de la croix sur l'image est inhomogène sur la surface du détecteur, indiquant des inhomogénéités de la résolution spatiale du détecteur. Malgré la procédure de normalisation, l'efficacité de détection reste inhomogène, indiquant une perturbation nette du processus de détection due à la mise en place de la plaque métallique percée. Il n'a pas été possible d'exploiter cette image pour obtenir une mesure de la résolution spatiale du détecteur.

Une méthode alternative consiste à tracer la distribution des temps $\delta S_{xy} = (t_{x_1} + t_{x_2}) - (t_{y_1} + t_{y_2})$. Si notre mesure des temps est infiniment précise, on s'attend à ce que cette distribution soit infiniment piquée autour d'une constante, dans la mesure où l'on s'attend théoriquement à ce que $t_{x_1} + t_{x_2} = l_d^x/v_d$ et $t_{y_1} + t_{y_2} = l_d^y/v_d$. Ce n'est malheureusement pas le cas et en pratique la largeur RMS de cette distribution est de l'ordre de 0.6 ns, ce qui correspond à une résolution spatiale de l'ordre de 300 μm . Cette valeur correspond à une mesure

réalisée avec le CTNM4²² et les galettes *Burle*. Ce qu'il est intéressant de regarder maintenant, c'est l'allure de cette distribution localement : on se restreint donc à une zone donnée du détecteur (de l'ordre de 10×10 pixels spatiaux). On peut alors extraire localement la largeur RMS de cette distribution. Ceci permet d'obtenir une carte de la résolution locale du détecteur que l'on a tracé sur la figure 2.14. On peut remarquer sur cette dernière de grandes disparités locales de la résolution. Cette dernière peut varier de $150 \mu\text{m}$ RMS à plus de $400 \mu\text{m}$ RMS. En comparant cette figure à la carte de la détectivité précédemment présentée (Fig. 2.12 (a)), on peut remarquer que les zones de bas gain ont tendance à avoir une résolution plus faible. Ceci peut être relié à la forme de la distribution des hauteurs des impulsions que nous avons discuté précédemment. Quand le gain de la galette n'est pas saturé, la hauteur des impulsions fluctue sur une gamme relativement large et ceci peut entraîner une perte de précision dans la mesure des temps d'arrivée des impulsions sur les lignes à retard. Ceci a pour conséquence d'élargir la distribution des δS_{xy} .

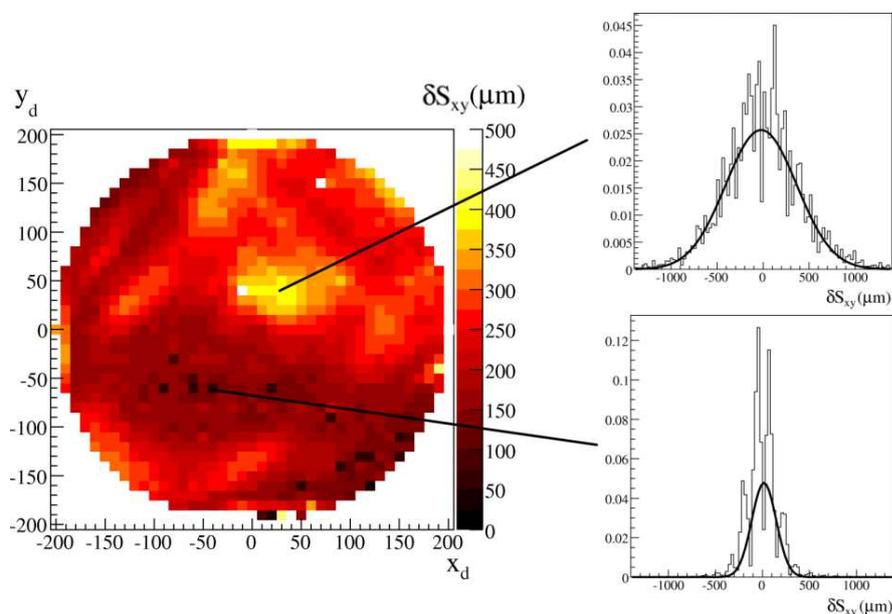


FIG. 2.14 – Carte de la résolution locale du détecteur obtenue en mesurant localement la largeur de la distribution des temps δS_{xy} (Ces valeurs ont été traduites en terme de distances exprimées en μm). On a indiqué la forme de cette distribution pour deux zones du détecteur. On peut observer de grandes disparités dans la résolution locale du détecteur. En comparant ce résultat à la figure 2.12(a), on peut remarquer que les zones de faible détectivité ont une résolution plus faible. Ce résultat a été obtenu pour les galettes *Burle* et le CTNM4.

Quand on moyenne sur tous les pixels spatiaux du MCP les différentes distributions δS_{xy} , on obtient une estimation de la valeur moyenne de la résolution sur le détecteur. La largeur RMS de la distribution obtenue est d'environ $300 \mu\text{m}$. Cette valeur peut sembler très grande devant la taille des nuages atomiques étudiés. Le fait d'observer ces nuages après de longs

²²Les valeurs obtenues avec le TDC de la société IsiTech sont en fait du même ordre de grandeur malgré une taille de pixel temporel plus petite (275 ps contre 400 ps). Cela correspond à l'une des limitations de ce TDC. La raison de cette performance médiocre est vraisemblablement reliée à des problèmes de réglage de l'électronique du TDC. Nous n'avons pas pu pour l'instant améliorer cette performance.

temps de vol permet de ne pas trop souffrir de cette limitation. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe 2.4.

Cette distribution a été tracée de la même façon pour la nouvelle galette *Hamamatsu* et l'on a pu voir qu'une meilleure homogénéité du détecteur entraînait une meilleure homogénéité de la résolution sur la galette. Sur cette dernière la résolution varie de $200 \mu\text{m}$ à $280 \mu\text{m}$ pour une valeur moyenne autour de $220 \mu\text{m}$. Mentionnons aussi ici, que la mesure de la résolution peut être très affectée par un bruit électronique. Comme précédemment mentionné, un champ électro-magnétique résiduel peut entraîner une modulation des impulsions détectées sur les lignes à retard, ce qui a tendance à élargir localement les distributions δS_{xy} . Cet effet a pu être observé récemment avec les galettes *Hamamatsu*. Les cellules d'hélium que nous utilisons pour l'asservissement de nos lasers génèrent un champ électro-magnétique de fréquence 27 MHz dont nous avons pu retrouver la trace sur la carte de la résolution de la galette (Fig. 2.15). Cet effet est plus fort avec TDC de la société *IsiTech*. Le fait de placer l'électronique de comptage à l'intérieur d'une cage de Faraday devrait permettre de limiter sensiblement ces effets.

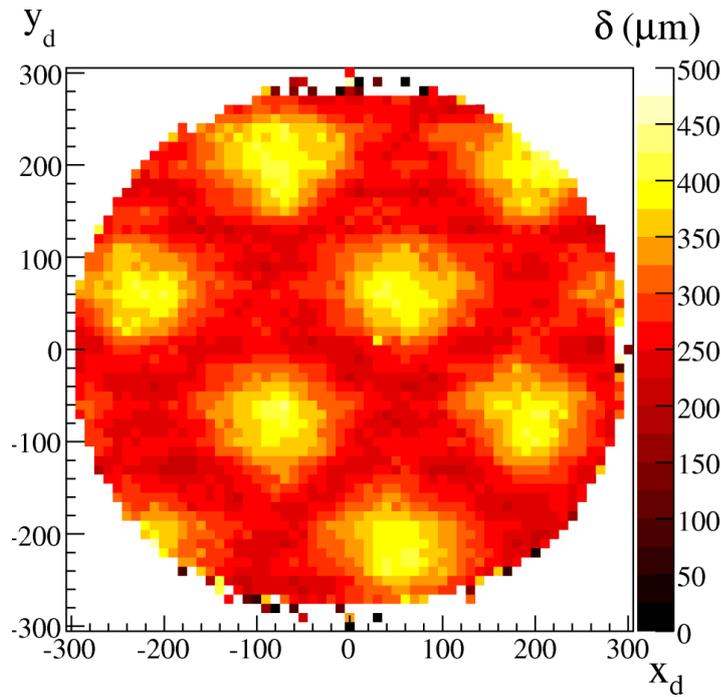


FIG. 2.15 – Carte de la résolution locale des galettes *Hamamatsu* obtenue à l'aide du TDC de la société *IsiTech*. Les inhomogénéités locales de la résolution peuvent être attribuées à un bruit électronique résiduel : un champ électromagnétique de fréquence 27 MHz perturbe la mesure des temps d'arrivée des impulsions sur les lignes à retard. On observe une modulation de la résolution locale du détecteur. La période spatiale de cette modulation correspond bien à la fréquence de 27 MHz du champ électromagnétique.

Cette étude du détecteur pose un certain nombre de questions auxquelles nous n'avons pas encore réussi à répondre. La possibilité d'avoir deux systèmes de détection indépendants devraient permettre une meilleure compréhension du détecteur et d'en comprendre mieux le comportement dans différentes situations. Il n'empêche que cette étude a permis une première

calibration du système de détection dont nous avons pu tenir compte pour analyser nos résultats expérimentaux.

2.4 Signaux de temps de vol et caractéristiques des condensats produits

Après la coupure du piège magnétique, les atomes couplés dans le sous niveau Zeeman $m_x = 0$ tombent sous l'effet de la gravité vers le détecteur. La chute libre a lieu sur 46.8 cm, ce qui correspond à une durée de temps de vol de l'ordre de 308.9 ms. Nous allons dans cette partie traiter un peu plus précisément cette phase de la séquence expérimentale. Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la phase de chute libre, ce qui va nous permettre de mettre en relief les observables auxquelles nous avons accès au moment de la détection. Dans un deuxième temps, nous traiterons le cas particulier des condensats de Bose-Einstein produit à l'issue du refroidissement évaporatif et tenterons d'en exprimer les caractéristiques typiques.

2.4.1 Chute libre d'un paquet d'onde sans interaction

L'objet de ce paragraphe est de donner une description simple de la phase de chute libre à laquelle les atomes sont soumis avant d'être détectés. La fonction d'onde d'un nuage froid piégé contient toute l'information nécessaire à la description du gaz quantique considéré : à partir de cette dernière, on peut exprimer la densité du nuage, ainsi que sa distribution de vitesse. Que reste-t-il de ces informations après la chute libre du nuage sur le détecteur et la phase de détection ? Le détecteur que nous avons décrit, permet d'enregistrer les positions des particules qui arrivent sur le détecteur, ce qui correspond essentiellement à 3 informations. Classiquement, une particule possède six degrés de liberté : trois composantes décrivent sa position à un instant donné $\mathbf{x}(t)$ et trois autres sa vitesse au même instant $\mathbf{v}(t)$. Connaissant initialement ces six informations, \mathbf{x}_0 et \mathbf{v}_0 , on peut calculer la nouvelle position de la particule et sa vitesse à un instant ultérieur en faisant appel aux lois de la mécanique classique, développées par Newton. Dans le cas d'une chute libre dans le champ de pesanteur terrestre, la particule est uniformément accélérée selon la verticale : g , l'accélération de la pesanteur, vaut à Paris 9.81 m/s^{-2} . On peut donc écrire pour finir :

$$\mathbf{v}(t) = gt + \mathbf{v}_0 \quad (2.7)$$

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}gt^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{x}_0 \quad (2.8)$$

A partir de ces équations, on peut distinguer deux régimes : dans le cas d'un temps de vol très court, autrement dit pour $t_{\text{dv}} \ll |\mathbf{x}_0|/|\mathbf{v}_0|$, la position de la particule est essentiellement gouvernée par sa position initiale : $\mathbf{x}(t) \sim \mathbf{x}_0$. Dans la limite inverse, la position de la particule est déterminée par sa vitesse initiale et on perd l'information sur sa position initiale : $\mathbf{x}(t) \sim \frac{1}{2}gt^2 + \mathbf{v}_0t$.

Dans le cadre de la mécanique quantique les relations d'incertitude de Heisenberg empêchent de décrire une particule au moyen des six paramètres précédents. En revanche, le

raisonnement effectué trouve un analogue direct si l'on s'intéresse cette fois-ci à la valeur moyenne de la position d'une particule $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$ et à sa vitesse moyenne $\langle \mathbf{v}(t) \rangle$. Les lois de Newton restent valides pour ces valeurs moyennes et le traitement précédent peut donc être adapté sans difficulté. Pour un nuage froid, il convient aussi de traiter l'évolution de son extension spatiale. Une assemblée d'atomes à l'équilibre thermodynamique est décrit par une statistique particulière qui va fixer ses propriétés, en l'occurrence sa taille et sa distribution de vitesse. Dans la situation où les interactions peuvent être négligées et suffisamment loin du seuil de condensation, la statistique d'un gaz atomique est essentiellement décrite par les lois de Maxwell-Boltzmann : l'occupation d'un niveau d'énergie E_i est relié au facteur $e^{-E_i/k_B T}$. Les propriétés du gaz dépendent alors essentiellement de sa température. Pour un gaz confiné dans un piège harmonique, il est possible de calculer les fonctions propres du système de manière analytique. Connaissant la température du nuage et donc sa statistique, il est possible de calculer son extension moyenne $\langle x_0^2 \rangle$ et la largeur RMS de sa distribution de vitesse $\langle v_0^2 \rangle$. Ces deux paramètres sont en fait reliés aux fréquences d'oscillation ω_α du piège. La coupure du piège et l'expansion libre du nuage va entraîner une modification de ces deux paramètres. J. Gomes a détaillé dans son manuscrit de thèse l'évolution d'un tel système [82]. Il a montré que pour des temps de vol long, typiquement dès que $\omega_\alpha t_{tdv} \gg 1$, et pour une coupure quasi-instantanée du piège magnétique, $\sqrt{\langle x^2(t) \rangle} \sim \sqrt{\langle v_0^2 \rangle} t_{tdv}$, ce qui revient à dire qu'au moment de la détection, l'extension initiale du nuage peut être négligée et toute l'information est contenue dans sa distribution initiale de vitesse.

Ce traitement a donc permis de faire apparaître les observables que mesurent notre détecteur. Toute l'information que nous pouvons extraire des événements détectés, correspond à la distribution initiale de vitesse des nuages piégés. La source atomique peut donc être considéré comme une source ponctuelle dès lors que $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} \gg 1$, ce qui pour nous est tout à fait vérifié : $\bar{\omega} \sim 2400$ rad/s.

2.4.2 Prise en compte des interactions : cas particulier du condensat de Bose-Einstein

Dans le cas d'un condensat de Bose-Einstein, on ne peut plus négliger les interactions pendant l'expansion du condensat. L'énergie d'interaction, qui peut éventuellement prédominer sur l'énergie cinétique dans le piège, va en fait être transformé en énergie cinétique durant les premiers instants de la chute libre des atomes. La taille du condensat au moment de la détection est en fait largement dominée par cet effet. Un traitement complet a été effectué de façon très approfondie dans un cadre plus général décrit dans [93, 94]. Pour un condensat dans le régime de Thomas-Fermi, c'est à dire pour lequel l'énergie cinétique des atomes du condensat est négligeable devant l'énergie d'interaction, on peut écrire l'évolution de la distribution spatiale du condensat au fur et à mesure de la chute libre de manière analytique. A $t = 0$, la fonction d'onde du condensat est une parabole inversée,

$$\Phi_{\text{TF}}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\mu - U(\mathbf{r})}{gN} \right)^{1/2} \quad (2.9)$$

où μ est le potentiel chimique du condensat, N le nombre d'atomes et $U(\mathbf{r})$ est le potentiel de piégeage que l'on a exprimé précédemment en fonction des fréquences d'oscillation du piège

magnétique. Cette dernière formule est vraie tant que $\mu \geq U(\mathbf{r})$; partout ailleurs, $\Phi_{\text{TF}}(\mathbf{r}) = 0$. μ remplit la condition de normalisation de la fonction d'onde et peut se mettre sous la forme :

$$\mu = \frac{1}{2} \hbar \bar{\omega} \left(15 N a \sqrt{\frac{m \bar{\omega}}{\hbar}} \right)^{2/5} \quad (2.10)$$

L'évolution de la fonction d'onde au cours du temps s'exprime sous la forme d'une loi d'échelle et on a :

$$N |\Phi_{\text{TF}}(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{\mu - \frac{1}{2} m \left[\omega_{\parallel}^2 x^2 / \lambda_{\parallel}(t)^2 + \omega_{\perp}^2 (y^2 + z^2) / \lambda_{\perp}(t)^2 \right]}{g \lambda_{\parallel}(t) \lambda_{\perp}^2(t)} \quad (2.11)$$

Les coefficients de la loi d'échelle peuvent être exprimés de manière approchée pour un condensat très anisotrope $\epsilon = \omega_{\parallel} / \omega_{\perp} \ll 1$ et en posant $\tau = \omega_{\perp} t$, on peut montrer que :

$$\lambda_{\perp}(\tau) \simeq \sqrt{1 + \tau^2} \quad (2.12)$$

$$\lambda_{\parallel}(\tau) \simeq 1 + \epsilon^2 \left(\tau \arctan(\tau) - \ln \sqrt{1 + \tau^2} \right) \quad (2.13)$$

En mesurant la taille après temps de vol du condensat, on peut donc aisément remonter au moyen de ces coefficients à la taille initiale du condensat. Dans le régime de Thomas-Fermi, la taille du condensat est essentiellement reliée à son potentiel chimique. Connaissant le potentiel chimique, on peut en déduire le nombre d'atomes N à partir de la longueur de diffusion a . Ainsi, être capable de mesurer la taille d'un condensat après temps de vol, donne la possibilité d'extraire toutes les informations nécessaires à sa description. L'information acquise par l'intermédiaire de notre détecteur devrait en principe nous permettre d'extraire ces informations. Nous verrons au paragraphe suivant que cela n'est pas si simple en raison des limitations du détecteur.

2.4.3 Caractéristiques typiques des condensats de Bose-Einstein d'He* produits

L'étude précédente pousse à traduire les positions des atomes détectés sur le MCP en terme de vitesse initiale de la particule. Nous détaillons en annexe la procédure que nous avons suivie pour être capable d'obtenir les figures de temps de vol décrites dans ce manuscrit qui correspondent à une image dans l'espace des impulsions de la distribution atomique détectée. La figure 2.16 donne le résultat typique obtenu après le temps de vol de condensats de Bose-Einstein. De façon à améliorer la qualité des images, on a moyenné le résultat sur une centaine de temps de vol. Au premier abord, le résultat obtenu laisse perplexe. Après temps de vol, le condensat est censé ressembler à une crêpe d'axes longs \mathbf{y} et \mathbf{z} du fait de l'anisotropie du piège magnétique. Sur les figures 2.16, le condensat ressemble vaguement à une crêpe trouée dont on aurait raccourci l'une des directions. Cette image donne une idée un peu plus précise des limitations du détecteur. Dans le plan $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, la forme de la distribution observée suit essentiellement la carte de détectivité du MCP (Fig. 2.12) : on a vu que la détectivité du MCP est quasiment nul au centre de la galette, on retrouve malheureusement cette propriété sur la figure. Dans le plan $\mathbf{x} - \mathbf{z}$, le condensat semble beaucoup plus long dans la direction des z négatif que dans la direction opposée. Cette image est en fait un bon

exemple de la saturation du détecteur au fur à mesure de la chute des atomes : les densités atomiques du condensat étant très grandes, la détectivité du MCP chute brutalement au cours du temps. Cet effet est nettement moins important sur le nuage thermique résiduel qui encercle le condensat.

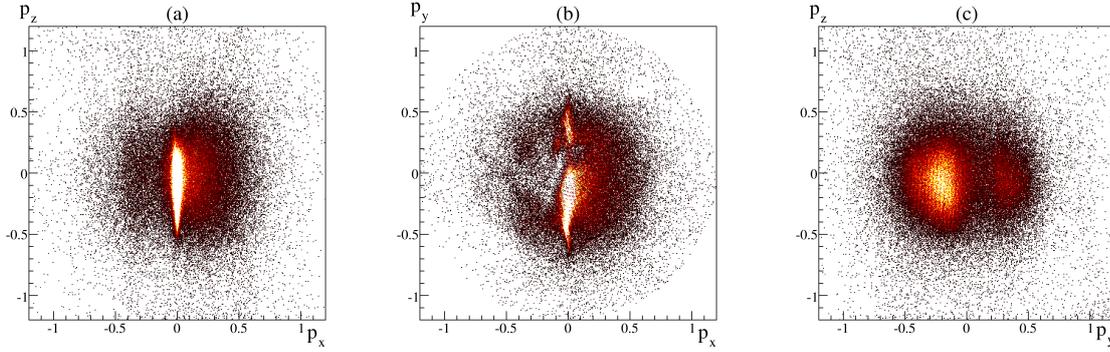


FIG. 2.16 – Temps de vol reconstruits dans l'espace des impulsions (voir l'annexe B). L'unité est le recul d'un photon $\hbar k_{\text{rec}}/m$. (a) Projection sur le plan $(p_x p_z)$. (b) Projection sur le plan $(p_x p_y)$. (c) Projection sur le plan $(p_y p_z)$.

On peut estimer la taille du condensat de manière grossière par l'intermédiaire des formules du paragraphes précédents. Le rayon de TF $R_{\perp}(t_{tdv})$ est de l'ordre de $0.5 \hbar k_{\text{rec}}$ sur la figure 2.16²³. La durée du temps de vol 308.9 ms ainsi que les fréquences d'oscillation précédemment mesurées permettent d'estimer $\lambda_{\perp} \sim 2000$ et $\lambda_{\parallel} \sim 7$. A partir de là, on peut remonter aux tailles initiales du condensat et déduire le nombre d'atomes ainsi que le potentiel chimique. Pour la taille perpendiculaire grossièrement mesurée, on trouve $N \sim 4 \times 10^5$. Il faut bien voir que ce nombre correspond à une borne supérieur sur le nombre d'atome dans le piège dans la mesure où notre raisonnement prend en compte une hypothèse qu'il est difficile de tester rigoureusement : on considère que les atomes qui sont couplés dans $m_x = 0$ au moment de la coupure du piège reflètent bien les propriétés du nuage, c'est à dire que le temps de séparation des atomes dans les différents sous-niveaux Zeeman est bien plus court que la durée typique pendant laquelle l'énergie d'interaction est transformée en énergie cinétique.

2.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de décrire le dispositif expérimental que l'on utilise pour produire des condensats de Bose-Einstein d'He*. Le détecteur que nous utilisons permet de reconstruire les positions des atomes en trois dimensions et malgré certaines limitations que nous avons eu l'occasion d'évoquer, se présente comme un outil intéressant pour l'observation des corrélations atomiques. Enfin nous avons pu discuter des propriétés des condensats produits expérimentalement de façon à bien caractériser la source que nous allons utiliser dans les chapitres suivants pour produire et mettre en évidence des paires d'atomes corrélées.

²³L'unité utilisée dans la figure peut paraître hors de propos à cet endroit mais nous allons voir qu'elle va s'imposer comme l'unité de référence dans la suite du manuscrit. Le choix d'une telle unité permet de comparer les différentes images que nous présentons au fur et à mesure dans le manuscrit.

Transitions Raman stimulées : vers la génération de collisions entre deux condensats de Bose-Einstein

Les transitions Raman correspondent à un schéma d'interaction entre la lumière et la matière lors duquel les atomes illuminés changent d'état interne. Différentes applications ont pu être démontrées au fur et à mesure que la compréhension des phénomènes impliqués dans l'interaction lumière-matière a progressé. Différents processus de refroidissement atomique ont ainsi pu être mis en évidence par l'intermédiaire de transitions Raman à deux photons, permettant d'atteindre des températures inférieures aux limites fixées par la température Doppler et la température de recul [95, 96]. De telles transitions ont aussi activement été utilisées pour développer des méthodes de spectroscopie d'impulsion d'un gaz froid au dessus et en dessous du seuil de la condensation de Bose-Einstein. Une méthode équivalente, la spectroscopie de Bragg, basée elle aussi sur une transition à deux photons mais sans changement d'état interne, a par exemple été l'un des instruments principaux dans la compréhension de condensats de Bose-Einstein uni-dimensionnel [97]. Plus récemment, les transitions Raman ont pu être utilisées pour coupler des atomes en dehors d'un piège magnétique et générer ainsi des lasers à atomes quasi-continus [98, 99]. Nous nous proposons dans ce chapitre de décrire une application similaire des transitions Raman.

Nous avons vu à la fin du deuxième chapitre de ce manuscrit que la coupure de notre piège magnétique reste relativement chaotique et empêche la majeure partie des atomes piégés d'atteindre le détecteur. Une solution pour cette limitation du dispositif expérimental consiste à utiliser une transition Raman à deux photons par l'intermédiaire de laquelle les atomes retenus dans le piège magnétique sont couplés efficacement vers un état non-piégeant. Une telle procédure permet de contrôler l'extraction des atomes du piège magnétique et permet à la majeure partie des atomes piégés d'atteindre la zone de détection. Une tel transfert fonctionne relativement bien avec des condensats de Bose-Einstein. Dans le cadre de ce travail de thèse, le dispositif de transfert Raman que nous avons mis en place a essentiellement permis de générer les deux condensats de Bose-Einstein dont nous cherchons à étudier la dynamique de collision. Pour réaliser un tel transfert, l'action conjointe de trois faisceaux laser est nécessaire.

Dans ce chapitre nous commençons par faire un bref rappel du principe des transitions Raman et montrons dans quelle mesure un tel processus peut être appliqué expérimentalement au transfert des atomes d' He^* vers un état non-piégeant : on parle alors de transfert Raman. Dans le cas d'un condensat de Bose-Einstein, des phénomènes de diffusion collective peuvent

interférer avec le processus dominant et limiter l'efficacité du transfert. Nous décrivons dans un deuxième temps la portée de tels effets et leurs conséquences expérimentales. Nous expliquons ensuite comment nous avons réalisé expérimentalement des transferts Raman et essayons d'en déterminer les principales caractéristiques. Enfin, nous terminons ce chapitre en expliquant comment induire la collision de deux condensats de Bose-Einstein à partir de notre dispositif de transfert Raman. C'est par l'intermédiaire d'un tel procédé que nous avons été capable d'étudier les processus impliqués dans la collision de deux condensats de Bose-Einstein. Ces derniers seront traités en détail au chapitre suivant.

3.1 Transitions Raman stimulés : principe général

3.1.1 Diffusion Raman : Point de vue microscopique

La diffusion Raman correspond à un processus de diffusion inélastique où un photon d'énergie $\hbar\omega$ est diffusé par un atome qui sous l'effet de l'interaction change d'état interne ($|g_1\rangle \rightarrow |g_2\rangle$). Les lois de conservation de l'énergie impose à la fréquence du photon diffusé ω' de venir compenser l'écart d'énergie $\hbar\Delta_{1-2}$ entre les deux niveaux d'énergie de l'atome. On a ainsi la relation : $\hbar\omega' = \hbar\omega + \hbar\Delta_{1-2}$ [100]. Dans la situation où les modes ω et ω' sont initialement peuplés, le processus est réversible et la diffusion des photons peut être stimulée : l'émission d'un photon dans un mode donné est en effet d'autant plus probable si le mode est déjà occupé. Cette stimulation est due au caractère bosonique des photons.

Si maintenant on prend en compte les degrés de liberté externes de l'atome, on peut réécrire cette relation en faisant explicitement apparaître les transferts d'impulsion entre l'atome et les photons. Considérons un atome d'impulsion \mathbf{p} et initialement dans le niveau $|g_1\rangle$, illuminé par deux faisceaux lasers de fréquence respectives ω et ω' et de vecteurs d'onde respectifs \mathbf{k} et \mathbf{k}' . L'atome peut alors absorber un photon de fréquence ω et émettre de façon stimulée un photon de fréquence ω' . La diffusion Raman va aussi s'accompagner d'un transfert d'impulsion du point de vue de l'atome : $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{k}'$. L'expression de la conservation de l'énergie peut alors se mettre sous la forme ¹ :

$$\hbar\omega' + \hbar\omega_2 + \frac{(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{k}')^2}{2m} = \hbar\omega + \hbar\omega_1 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad (3.1)$$

où $\hbar\omega_1$ et $\hbar\omega_2$ représentent respectivement l'énergie interne de l'atome dans les états $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$. On voit donc explicitement apparaître ici la dépendance de la condition de résonance du transfert de l'état $|g_1\rangle$ à l'état $|g_2\rangle$ par rapport à l'impulsion \mathbf{p} de l'atome. On peut par ailleurs réécrire la relation 3.1 de manière à explicitement faire ressortir cette dépendance, due à l'effet Doppler

$$\delta_{\text{Dop}} = \omega' - \omega + \omega_2 - \omega_1 + \frac{\hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}{2m} = \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot (\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \quad (3.2)$$

¹On suppose ici que les puissances des deux faisceaux laser sont égales de manière à ce que les déplacements lumineux des niveaux $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$ soient égaux. Ceci nous évite d'en mentionner l'effet ici et simplifie la discussion. Ils seront en fait introduits dans le paragraphe suivant.

Ce désaccord peut aisément être annulé si les deux faisceaux laser sont copropageants et de vecteurs d'onde égaux. Dans le cas contraire, on reste sensible à l'impulsion initiale de l'atome. C'est en tirant partie de cet effet, que la spectroscopie d'un condensat de Bose-Einstein a pu être réalisée [38]², en ajustant les fréquences des lasers de façon à n'être résonnant que pour une classe d'impulsion bien déterminée. Nous allons tenter dans la suite de décrire plus précisément la dynamique des transferts Raman de façon à bien faire ressortir les conditions qui permettent au contraire de réaliser un transfert Raman efficace sur une large gamme d'impulsions dans la situation où les deux faisceaux laser ne sont pas copropageants.

3.1.2 Dynamique d'un transfert Raman stimulé

Cas idéal Pour décrire la dynamique d'un transfert Raman, il faut expliciter le couplage qui intervient entre l'atome et les faisceaux lumineux. De façon générale, l'hamiltonien d'interaction entre un atome et un champ électromagnétique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (3.3)$$

où \mathbf{d} est le moment dipolaire électrique de l'atome. Pour un champ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + c.c$ donné, la pulsation de Rabi est défini comme

$$\Omega = -\langle a | \frac{\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}}{\hbar} | b \rangle \quad (3.4)$$

et donne la force du couplage entre deux niveaux d'énergie $|a\rangle$ et $|b\rangle$ donnés de l'atome. Dans le cas d'un transfert Raman, on peut généralement ne considérer que trois niveaux d'énergie de l'atome : les états $|g_1\rangle$, $|g_2\rangle$ précédemment décrit et un état excité $|e\rangle$ par l'intermédiaire duquel le transfert va avoir lieu. Tous les autres couplages sont considérés suffisamment non résonnant pour être négligés. Les deux composantes du champ électromagnétique de fréquences respectives ω et ω' vont coupler les états $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$ à l'état $|e\rangle$ et l'hamiltonien d'interaction s'écrit alors :

$$\hat{H}_{\text{int}} = \Omega e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} |e\rangle\langle g_1| + \Omega' e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-\omega' t)} |e\rangle\langle g_2| + h.c. \quad (3.5)$$

La relation de substitution $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \int d\mathbf{p} |\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle\langle\mathbf{p}|$ permet de faire explicitement apparaître les degrés de liberté externes de l'atome et ramène l'étude à trois niveaux d'énergie de l'atome d'impulsion bien définie, représentés sur la figure 3.1. La conservation de l'impulsion durant le processus, précédemment discutée, apparaît donc clairement ici.

A la limite où le désaccord Δ est très grand devant les pulsations de Rabi $|\Omega|$ et $|\Omega'|$ et devant δ , le couplage vers l'état excité est fortement non-résonant et on peut alors négliger la population de cet état durant toute la durée du processus [101]. Ceci justifie d'autre part que l'on ne tienne pas compte d'éventuels processus d'émission spontané. Tout se passe donc comme si le couplage avait lieu directement entre les niveaux $|g_1, \mathbf{p}\rangle$ et $|g_2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{k}'\rangle$ avec pour intensité la pulsation de Rabi à deux photons définie par $\Omega_{\text{Rabi}}^2 = 4|\Omega|^2|\Omega'|^2/\Delta^2$. La résolution des équations d'évolution des populations des niveaux $|g_1, \mathbf{p}\rangle$ et $|g_2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{k}'\rangle$

²Il s'agit en fait dans cet article d'un transfert Bragg dans lequel l'état interne de l'atome ne change pas. La description reste cependant analogue à l'étude réalisée ici.

donne lieu à une oscillation des populations, dites de Rabi, de fréquence effective donnée par [101] :

$$\Omega_{\text{eff}}^2 = \left(\frac{|\Omega|^2}{\Delta} - \frac{|\Omega'|^2}{\Delta} - \delta_{\text{Dop}} \right)^2 + 4 \frac{|\Omega|^2 |\Omega'|^2}{\Delta^2} \quad (3.6)$$

Dans cette expression, le terme de droite correspond au carré de la pulsation de Rabi à deux photons. Le terme de gauche correspond au désaccord δ ³ et prend en compte les déplacements lumineux des niveaux $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$ ainsi que δ_{Dop} qui correspond au désaccord dû à l'effet Doppler mentionné au paragraphe précédent et qui dépend explicitement de l'impulsion \mathbf{p} . D'autre part, l'amplitude des variations de la population des niveaux $|g_1, \mathbf{p}\rangle$ et $|g_2, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{k}'\rangle$ s'écrit : $4|\Omega|^2|\Omega'|^2/\Delta^2\Omega_{\text{eff}}^2$.

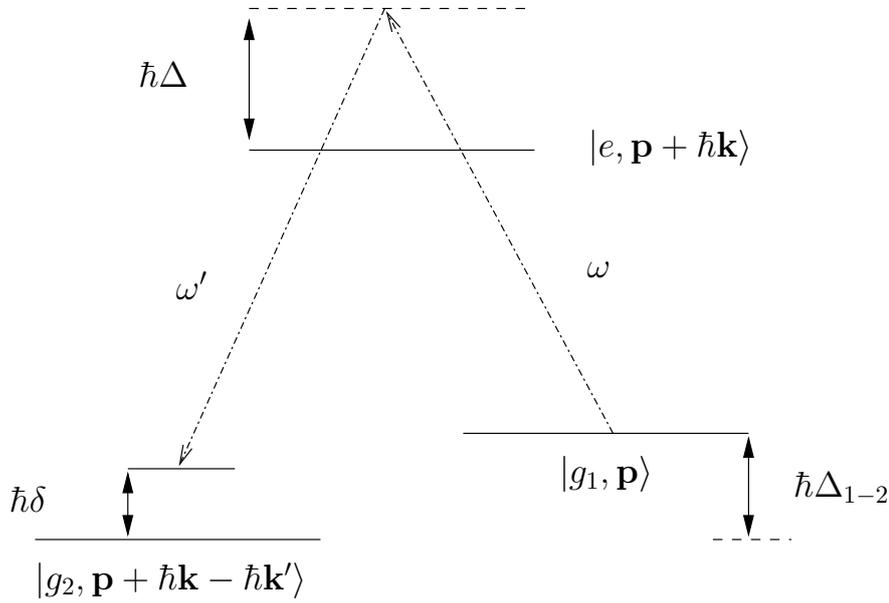


FIG. 3.1 – Principe de la diffusion Raman. La population d'un niveau d'énergie $|g_1\rangle$ est couplé au niveau $|g_2\rangle$ par l'intermédiaire d'un niveau excité $|e\rangle$. Deux faisceaux de fréquence ω et ω' réalisent le couplage. Le désaccord Δ permet de négliger les phénomènes d'émission spontanée et rend négligeable la population du niveau excité au fur et à mesure du transfert. L'effet Doppler impose de tenir compte des degrés de liberté externe de l'atome : une classe de vitesse du niveau $|g_1\rangle$ n'est couplé en pratique qu'à une classe de vitesse donnée du niveau $|g_2\rangle$.

Deux populations d'impulsions différentes n'oscillent donc pas nécessairement à la même fréquence entre les niveaux g_1 et g_2 du fait de l'effet Doppler. Cet effet est d'autant plus fort si δ_{Dop} est plus grand ou du même ordre de grandeur que la pulsation de Rabi à deux photons. Une façon de rendre cet effet négligeable est donc de travailler avec des champs lumineux suffisamment intenses pour pouvoir vérifier la condition :

$$2 \frac{|\Omega||\Omega'|}{\Delta} \gg |\delta_{\text{Dop}}| \quad (3.7)$$

sur toute la gamme d'impulsion \mathbf{p} que l'on désire transférer. Cette condition impose alors de porter un soin particulier à ce que les pulsations de Rabi Ω et Ω' relatives aux deux

³On suppose ici que $\omega' - \omega + \omega_2 - \omega_1 = 0$.

champs lumineux soient bien égales, de manière à éviter tout désaccord supplémentaire dû aux déplacements lumineux des niveaux d'énergie de l'atome, ce qui aurait tendance à diminuer l'efficacité du transfert. La figure 3.2 donne quelques exemples de situations typiques permettant de mettre en relief ces effets.

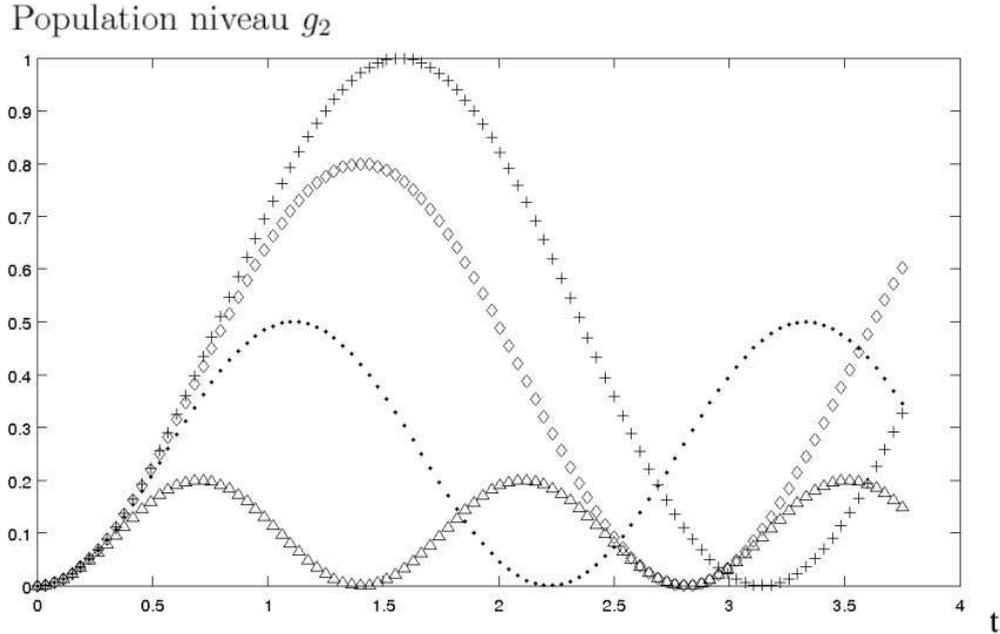


FIG. 3.2 – Evolution des populations atomiques du niveau g_2 pour différents désaccords Doppler. De haut en bas, $+$: $|\delta_{Dop}| = 0$, \diamond : $|\delta_{Dop}| = \Omega\Omega'/\Delta$, \cdot : $|\delta_{Dop}| = 2\Omega\Omega'/\Delta$, \triangle : $|\delta_{Dop}| = 4\Omega\Omega'/\Delta$. L'efficacité et la durée du transfert sont donc fortement dépendants du désaccord Doppler.

Transfert Raman d'un condensat de Bose-Einstein Tous les atomes d'un condensat de Bose-Einstein sont dans le même état quantique et peuvent être décrits par une fonction d'onde $\phi(\mathbf{r}, t)$, solution de l'équation de Gross-Pitaevskii. Dans un piège magnétique, les atomes du condensat sont confinés au fond du piège. Du fait des interactions, l'extension spatiale du condensat est plus large que celle du niveau fondamental du piège. Inversement la distribution d'impulsion d'un condensat est d'autant plus fine que les interactions sont importantes. La largeur en impulsion d'un condensat est en fait proportionnelle à \hbar/R , où R correspond à l'extension spatiale du condensat. Si l'on veut réaliser un transfert Raman efficace d'un condensat piégé, il faut donc faire en sorte de coupler de manière uniforme toute sa distribution d'impulsions. Par rapport à la discussion précédente, cela revient à faire en sorte que la pulsation de Rabi à deux photons soit grande devant les désaccords Doppler correspondants à cette distribution d'impulsions. Nous verrons que dans les situations expérimentales typiques dans lesquelles nous nous sommes placés, cette condition n'est pas trop contraignante : les désaccords Doppler s'étalent sur une gamme de fréquence de largeur de l'ordre du kHz pour des fréquences de Rabi à deux photons de l'ordre du MHz.

Ce raisonnement est encore valide si l'on s'intéresse au cas d'un nuage thermique piégé. Cette fois-ci la largeur en impulsion du nuage thermique dépend de sa température. Les

désaccords Doppler correspondants s'étalent cette fois-ci sur une gamme de fréquence dont la largeur dépend de la température du gaz. Expérimentalement, cette largeur peut facilement atteindre plusieurs centaines de kHz pour des températures de l'ordre de quelques μK et rend le transfert Raman très difficile à réaliser pour les fréquences de Rabi à deux photons avec lesquelles nous avons pu travailler. Ce constat limite donc la portée de cette méthode de transfert.

Influence de couplages parasites La situation décrite par la figure 3.1 est une situation idéale, où l'on peut restreindre l'effet des faisceaux lumineux à seulement 3 niveaux d'énergie de l'atome et où d'autre part chacun des faisceaux ne couple que deux de ces niveaux. En pratique, cette situation n'est pas toujours vérifiée et l'évolution du système peut être perturbée par des couplages parasites. Comme mentionné précédemment, l'intensité du couplage d'un champ entre deux niveaux d'un atome est relié à la fréquence de Rabi qui dépend essentiellement de l'intensité du champ et du moment dipolaire électrique de l'atome. Expérimentalement, si les faisceaux ont la bonne polarisation, ils ne couplent que deux niveaux donnés de l'atome. Malheureusement, des défauts de polarisation sont toujours présents en raison des défauts des optiques utilisées ou de la géométrie des faisceaux. Ces limitations peuvent engendrer des couplages parasites dont les effets ne sont pas négligeables.

Un exemple sur lequel nous aurons l'occasion de revenir plus tard correspond à la situation suivante : imaginons qu'un faisceau laser de fréquence ω couple les niveaux $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$ au niveau $|e\rangle$ comme sur la figure 3.1 (cela signifie que le faisceau possède deux composantes de polarisation différentes). Ce faisceau est donc capable à lui seul de réaliser un transfert de population du niveau $|g_1\rangle$ au niveau $|g_2\rangle$. Ce processus est non-résonnant du fait de la différence d'énergie entre les deux niveaux : $\hbar\delta = \hbar\Delta_{1-2}$. Si cette différence est faible et que la pulsation de Rabi à deux photons est suffisamment grande, le transfert Raman pourra tout de même avoir lieu de manière importante. Un tel transfert ne s'accompagne d'aucun transfert d'impulsion.

3.1.3 Cas de l'He*

La mise en place de faisceaux Raman sur notre dispositif expérimental s'est imposée comme une solution élégante pour le contrôle de l'extraction des atomes d'He* du piège magnétique. Les atomes sont piégés dans le sous niveau Zeeman $m_x = 1$. En utilisant un transfert Raman, nous pouvons envisager de les transférer dans le sous niveau $m_x = 0$: une fois dans cet état, les atomes ne sont plus sensibles aux champs magnétiques de piégeage et tombent sous l'effet de la gravité vers le détecteur. Pour que le transfert Raman n'affecte pas le nuage ou le condensat atomique extrait, un certain nombre de conditions doit être respecté. D'une part, il faut que la durée du transfert soit suffisamment courte : on veut en effet un transfert quasi-instantané. En d'autres termes, il faut que la fréquence effective du transfert soit grande devant les fréquences d'oscillation du piège. D'autre part, on veut un transfert efficace et sans pertes : ceci impose de choisir une transition qui ne sera pas perturbée par d'autres effets parasites éventuels. Enfin, on veut que le condensat ou le nuage thermique extrait tombe sur le détecteur. Il ne faut donc pas que le transfert d'impulsion éventuellement communiqué aux atomes pendant le transfert Raman pousse le nuage en dehors des galettes

de détection. Nous discutons ici les différentes possibilités qui se présentent pour la réalisation du transfert et essayons d'en dégager les avantages et inconvénients.

Choix de la transition Le niveau 2^3P est scindé en trois niveaux fins de moment cinétique total différent : $J = 0, 1, 2$. Du fait de l'effet Zeeman, chacun de ces niveaux se décompose en différents sous-niveaux non dégénérés de moment magnétique bien défini. Nous pouvons envisager de réaliser un transfert Raman du sous-niveau $2^3S_1, m_x = 1$ vers le sous-niveau $m_x = 0$ par l'intermédiaire de chacun des 3 niveaux 2^3P . La figure 3.3 donne des exemples de transitions envisageables dans chacune de ces situations.

La transition vers le niveau 2^3P_2 se présente comme la transition la moins propice en vue de la réalisation d'un transfert efficace. Dans la configuration de la figure 3.3 (a) les faisceaux Raman L_1 et L_2 couplent certes les niveaux $2^3S_1, m_x = 1$ et $2^3S_1, m_x = 0$, cependant et ceci reste vrai quelles que soient les polarisations des faisceaux Raman, on ne peut empêcher les niveaux $2^3S_1, m_x = 0$ et $2^3S_1, m_x = -1$ d'être simultanément couplés avec la même efficacité. Si la transition est résonante pour la première paire de sous-niveaux, elle l'est aussi pour l'autre. Dans une telle configuration, les atomes seront donc nécessairement transférés vers le niveau $2^3S_1, m_x = -1$. L'efficacité du transfert Raman vers le niveau $2^3S_1, m_x = 0$ ne sera donc jamais grande, même théoriquement. Cette première configuration ne présente donc que peu d'intérêt et a été rapidement abandonnée.

Les transitions vers les niveaux 2^3P_1 et 2^3P_0 sont de ce point de vue là pratiquement identiques. Le fait que la transition du niveau $2^3P_1, m_x = 0$ vers le niveau $2^3S_1, m_x = 0$ soit interdite par les règles de sélection évite aux atomes d'être pompés vers le niveau $2^3S_1, m_x = -1$, comme dans le cas de la transition vers le niveau 2^3P_2 . Pour distinguer laquelle de ces deux transitions est la plus propice à la réalisation d'un transfert Raman efficace, il faut donc aller un peu plus loin et s'intéresser à l'influence d'autres phénomènes parasites. Expérimentalement, il est très difficile de travailler avec des faisceaux laser parfaitement polarisé : les polariseurs utilisés transmettent toujours en partie la composante de polarisation dont on désire s'affranchir⁴. Dans le cas de la figure 3.3 (b) par exemple, on aimerait que le faisceau L_1 soit parfaitement polarisé π . Expérimentalement, ceci est difficile à réaliser et on doit s'attendre à ce qu'une partie de la puissance du faisceau L_1 soit polarisée σ . On peut alors imaginer réaliser un transfert Raman uniquement avec le faisceau L_1 . On peut alors s'attendre à des fuites de la population atomique vers le sous niveau $m_x = -1$: dans ce cas, le transfert n'est pas résonnant du fait du désaccord Zeeman et la fréquence de Rabi effective du transfert qui est proportionnelle à l'intensité des deux faisceaux sera généralement nettement plus faible (de l'ordre de 1 à deux ordres de grandeur en fonction de la qualité de la polarisation) qu'un transfert avec deux faisceaux L_1 et L_2 d'intensités comparables. Cet effet est donc censé rester faible, même à l'échelle de nos expériences. Le fait que la transition vers le niveau 2^3P_1 permet d'imaginer plus de transferts parasites que dans le cas du niveau 2^3P_0 ne constitue donc a priori pas un argument de choix légitime.

Un argument peut être un peu plus pertinent vient de la comparaison des coefficients de Clebsch-Gordan qui interviennent pour ces deux transitions. Ces derniers sont plus favorables

⁴Nous reviendrons sur cet aspect dans la partie expérimentale. Pour mémoire, le taux d'extinction d'un cube séparateur de polarisation standard est de l'ordre de 1 pour 20. Quelques pourcents de la puissance du faisceau incident sont donc systématiquement transmis avec une polarisation indésirable.

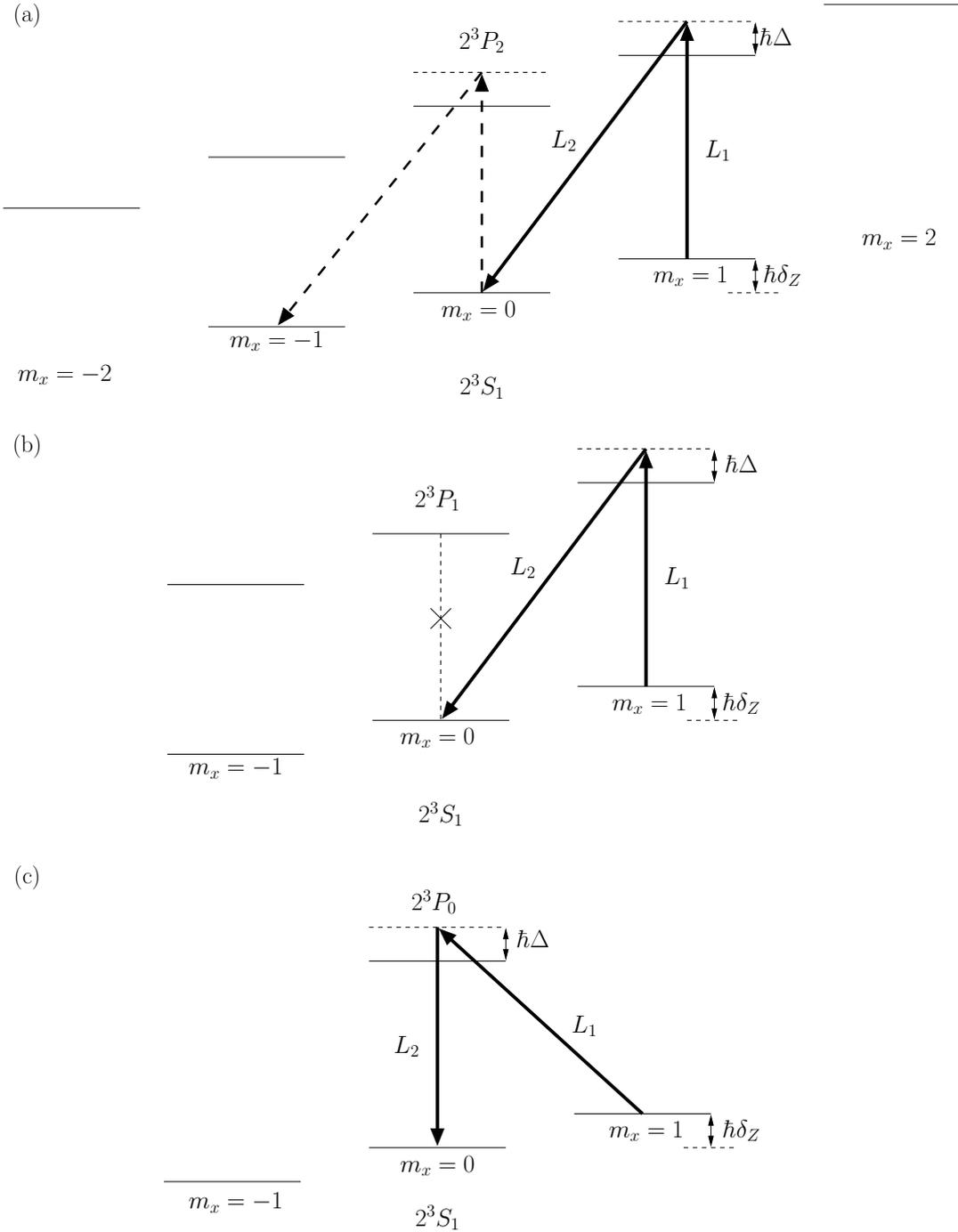


FIG. 3.3 – Schéma des différentes transitions Raman envisageables en fonction du niveau excité par l'intermédiaire duquel le transfert Raman est réalisé. On suppose ici que les polarisations des faisceaux L_1 et L_2 parfaitement définies. Le désaccord δ_Z est ici dû à l'effet Zeeman. (a) Niveau 2^3P_2 . (b) Niveau 2^3P_1 . La transition du niveau 2^3S_1 , $m_x = 0$ vers le niveau 2^3P_1 , $m_x = 0$ est interdite du fait des règles de sélection (c) Niveau 2^3P_0 .

dans le cas de la transition vers le niveau 2^3P_1 . A intensité des faisceaux égales, on s'attend donc à pouvoir obtenir des fréquences de Rabi plus grandes dans le cas de la transition vers le niveau 2^3P_1 que celle vers le niveau 2^3P_0 . Ceci a constitué notre critère de choix et nous avons donc tenté de réaliser des transitions Raman dans la configuration de la figure 3.3 (b) dans un premier temps. La mise en évidence d'autres effets parasites que nous étudions dans la partie suivante a cependant motivé l'utilisation d'un transfert vers le niveau 2^3P_0 qui a constitué notre choix final.

Considérations géométriques Les polarisations des faisceaux L_1 et L_2 sont déterminées à la fois par leur direction de propagation et par la direction du champ du biais B_0 qui définit l'axe de quantification des sous-niveaux Zeeman. Cette dernière correspond à celle de l'axe \mathbf{x} sur la figure 2.2. Pour la configuration de la figure 3.3 (b) par exemple, on souhaite que le faisceau L_1 soit polarisé π tandis que le faisceau L_2 doit être polarisé σ^- . Dans la mesure où l'on souhaite travailler avec les polarisations les plus pures possibles, la direction du faisceau L_1 doit nécessairement être perpendiculaire à l'axe \mathbf{x} tandis que L_2 doit se propager suivant l'axe \mathbf{x} . Expérimentalement, la première condition est aisément réalisable dans la mesure où elle n'est pas très contraignante : il suffit en effet que la direction du faisceau L_1 appartiennent au plan (Oyz) . La deuxième condition est déjà nettement plus difficile à réaliser dans la mesure où l'axe \mathbf{x} est déjà occupé par un des faisceau du PMO. Expérimentalement nous ne sommes donc pas capables d'obtenir des faisceaux parfaitement polarisés circulairement du fait de cette contrainte. En tournant légèrement la direction du faisceau dans le plan (Oxy) , on peut tout de même réussir à obtenir un résultat relativement correct : dans une telle configuration le faisceau aura malheureusement toujours une petite composante polarisée π et une autre polarisée σ^+ . Du moment que l'angle θ , défini par l'axe \mathbf{x} et l'axe de propagation du faisceau, reste petit ces deux contributions restent assez faibles. Pour un angle θ de l'ordre de 5° ⁵, la contribution de polarisation π représente de l'ordre de 1% de la puissance totale du faisceau tandis que la contribution de polarisation σ^+ est presque totalement négligeable. L'effet de ces contributions devraient donc rester assez faible.

Un autre effet qu'il convient de mentionner correspond au fait que la direction du champ du biais B_0 ne correspond en fait à l'axe \mathbf{x} qu'au centre du piège magnétique. Sur le volume occupé par les atomes dans le piège magnétique, cette direction peut varier de l'ordre de quelques degrés. On s'attend donc à ce que l'effet des faisceaux Raman soit inhomogène sur ce volume. Ceci peut avoir tendance à perturber le transfert Raman localement. Une façon de s'affranchir de cette perturbation consiste à augmenter le module de B_0 de manière à travailler avec un piège moins comprimé. L'augmentation de B_0 doit cependant survenir après la phase de refroidissement évaporatif de manière à ne pas perturber l'efficacité de cette étape. Nous reviendrons sur ce point au moment de l'étude des résultats expérimentaux.

Un dernier aspect géométrique qu'il convient de mentionner correspond à la chute libre des atomes vers le détecteur. Nous avons vu que si les faisceaux L_1 et L_2 ne sont pas copropageants, le transfert Raman s'accompagne d'un transfert d'impulsion. La vitesse de recul d'un photon à la longueur d'onde de notre transition correspond à $v_{\text{rec}} = 9.15 \text{ cm/s}$. Cette vitesse est relativement élevée du fait de la petite masse des atomes d'hélium. Le rayon du détecteur

⁵Cet angle correspond en fait à l'angle du faisceau dans le montage expérimental. Nous donnerons plus de détails sur cette configuration dans le paragraphe 3.3.1.

étant de l'ordre de 4 cm, il faut bien faire attention à ce que le transfert d'impulsion ne pousse pas les atomes à l'extérieur du détecteur à l'issue de la chute libre. Pour des temps de vol de l'ordre de 300 ms, ceci impose que le transfert de vitesse ne soit pas plus grand que v_{rec} dans le plan \mathbf{xy} . Une telle condition n'est pas trop limitante dans la mesure où au maximum le transfert de vitesse correspond à $2v_{\text{rec}}$ dans le cas de deux faisceaux contrapropageants. Nous reviendrons sur ce point au moment de l'étude des résultats expérimentaux.

3.2 Phénomènes collectifs, superradiance

La mise en place de faisceaux laser en vue de la réalisation du transfert Raman d'un condensat de Bose-Einstein a permis la mise en évidence de phénomènes de diffusion superradiante. Bien que nous n'ayons pas étudié ces effets en détail, nous revenons ici sur leur origine. Leur compréhension nous a permis d'en limiter les effets en vue de la réalisation d'un transfert Raman efficace.

3.2.1 Principe

Dans une expérience de fluorescence typique, les atomes d'un gaz préparés dans un état excité émettent spontanément des photons afin de rejoindre leur état fondamental. Si le gaz est suffisamment dilué, les différents processus d'émission spontanée peuvent être considérés indépendants et le diagramme de rayonnement du gaz est isotrope. De plus la probabilité d'émission d'un photon suit une loi exponentiellement décroissante dont le temps caractéristique est défini par la durée de vie de l'état excité de l'atome. Dès que le nombre d'atomes dans le gaz devient suffisamment grand, de telles propriétés peuvent être profondément modifiées. L'émission des photons est alors beaucoup plus rapide et plus intense. D'autre part, le diagramme de rayonnement du gaz dépend alors fortement de sa propre géométrie. Un tel phénomène est appelé superradiance et a été prédit dès 1954 par Dicke [102]. La physique qui permet de décrire un tel effet est en fait très proche de la physique de l'émission laser : la superradiance est en effet relié au fait que les dipôles d'émission des atomes du milieu se mettent spontanément à osciller en phase en analogie avec les différentes composantes du milieu amplificateur d'un laser qui émettent des photons de manière cohérente. Pour plus de détails sur ces phénomènes nous conseillons la lecture d'un article dû à M. Gross et S. Haroche [103].

La superradiance a pu être observée expérimentalement au travers de l'étude du comportement d'un condensat de Bose-Einstein en présence d'un faisceau laser intense (faisceau pompe) [104]. Dans une telle configuration on peut observer la naissance de deux faisceaux lumineux qui se propagent suivant l'axe long du condensat, les *end-fire modes*, comme représenté sur la figure 3.4. Selon la polarisation du faisceau pompe, on peut en fait distinguer différents schémas de superradiance. La direction du biais du champ magnétique étant parallèle à l'axe long du condensat, les photons des *end-fire modes* sont nécessairement polarisés circulairement. Lorsque la pompe est polarisé π , les atomes du condensat changent alors nécessairement d'état interne au moment où ils diffusent des photons dans les *end-fire modes*. On parle alors de superradiance Raman [105, 106]. Dans le cas contraire, on parle de super-

radiance Rayleigh [104].

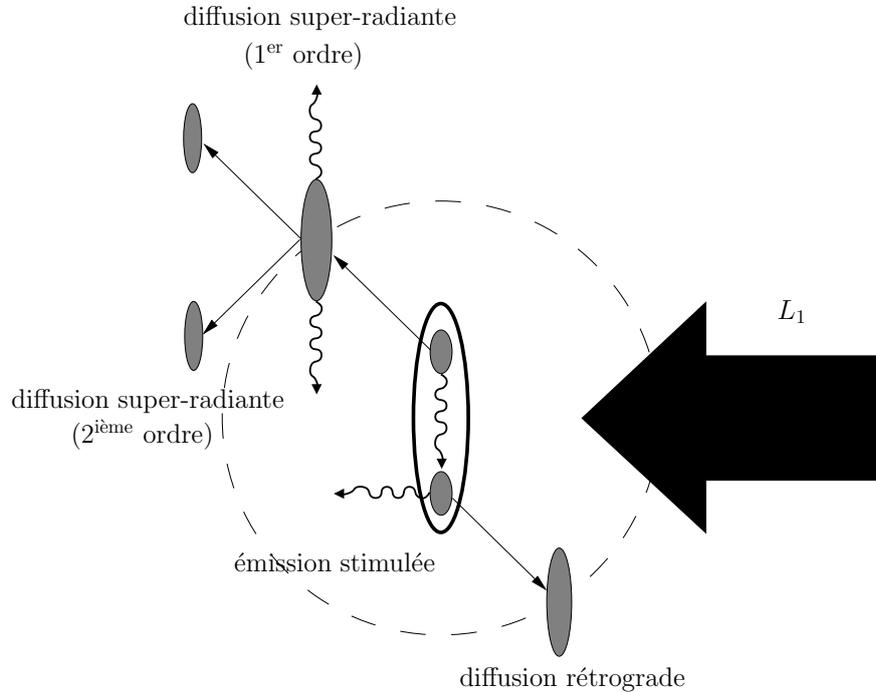


FIG. 3.4 – Schéma de principe de processus de superradiance observés par l'intermédiaire d'un condensat de Bose-Einstein. Le faisceau L_1 correspond au faisceau pompe. La diffusion des photons du faisceau pompe est stimulée suivant l'axe long du condensat. Les end-fire modes correspondent aux modes amplifiés. Les atomes qui diffusent les photons de la pompe vers les end-fire modes acquièrent une vitesse et sont diffusés en dehors du condensat initial. En raison de processus de diffusion d'ordre supérieur, on peut voir apparaître une multitude d'ondes de matière issues du condensat initial. Pour des durées d'impulsion lumineuse suffisamment courtes, des photons diffusés dans les end-fire modes peuvent être absorbés par les atomes du condensat et réémis de façon stimulée dans le faisceau pompe. C'est le régime de Kapitza-Dirac pour lequel la conservation de l'énergie est violée. Ce processus engendre la formation d'ondes de matière qui se propagent en sens inverse du sens de propagation de la pompe.

La conservation de l'impulsion lors des processus de superradiance impose la mise en mouvement des atomes qui diffusent des photons dans les *end-fire modes*. Deux ondes de matière d'impulsions opposées sont donc extraits de façon cohérente du condensat initial. Dans le cas de la superradiance Rayleigh, selon la durée et la puissance de l'impulsion lumineuse de pompage, le processus peut se répéter pour les ondes de matière extraites, entraînant la création d'une multitude d'ondes de matière d'ordres supérieurs [104]. L'efficacité du processus diminue à mesure que le nombre d'atomes du condensat initial diminue. Il est donc difficile d'extraire au moyen d'une telle méthode l'ensemble des atomes d'un condensat. Cet effet peut d'autre part perturber de façon importante la réalisation ou l'efficacité d'un transfert Raman comme nous allons le voir.

Pour comprendre un peu plus profondément l'amplification des *end-fire modes* au cours du processus, une image physique intéressante peut être développée dans le cas de la su-

perradiance Rayleigh : les propriétés de cohérence du condensat sont en fait à l'origine de phénomènes d'interférences entre les particules du condensat initial au repos et les particules mises en mouvement lors de la diffusion des photons de la pompe dans les *end-fire modes*. On peut donc interpréter la superradiance Rayleigh comme une diffraction du faisceau pompe sur un réseau de densité généré par les interférences entre le condensat au repos et les ondes de matière diffusées. Une telle image permet d'autre part de comprendre comment le processus s'auto-amplifie : en effet, plus le nombre d'atomes diffusés augmente, plus le contraste des franges d'interférences augmente et plus la diffraction par le réseau est efficace. D'autres images similaires peuvent être développées dans le cas de la superradiance Raman [105, 107].

Pour des impulsions de durée très courte, on peut d'autre part observer l'apparition d'ondes de matière contrapropageantes (voir 3.4). L'apparition de tels effets correspond au processus suivant : un atome du condensat peut diffuser un photon issu des *end-fire modes* vers le faisceau pompe. Ce processus viole les lois de conservation de l'énergie de 4 énergies de recul, imposant de travailler avec des impulsions lumineuses de très courtes durées de façon à ce que l'incertitude sur l'énergie du système soit suffisamment grande pour compenser cet écart. On parle du régime de Kapitza-Dirac. La mise en évidence d'un tel effet a provoqué un véritable engouement de la communauté scientifique dans la mesure où les processus impliqués peuvent s'interpréter comme un mélange à 4 ondes entremêlant photons et atomes. On peut donc s'attendre à la formation de paires atome-photon intriqués qui présentent un intérêt indéniable en vue de la réalisation d'expériences d'information quantique [108].

3.2.2 Observation de phénomènes de superradiance

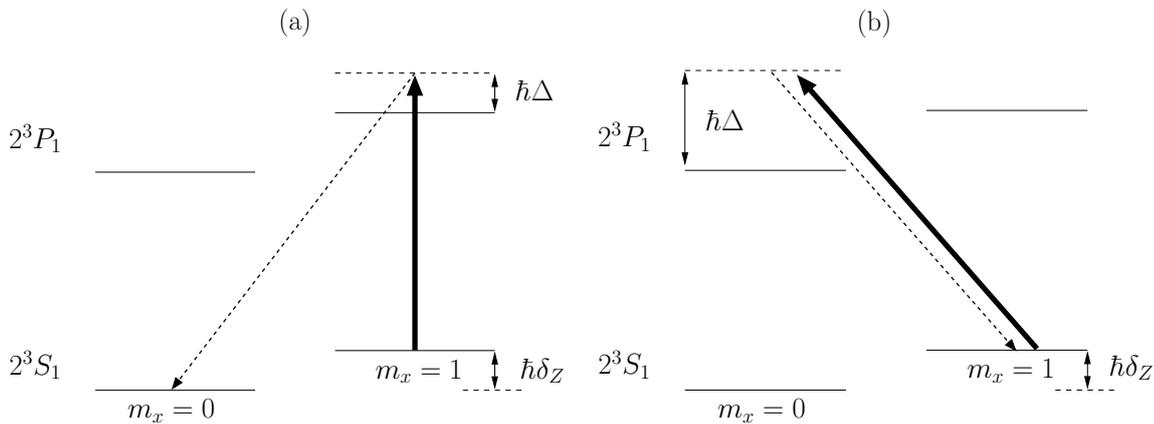


FIG. 3.5 – Transitions impliquées lors de l'étude d'effets de superradiance sur les condensats d' He^* . Les faisceaux laser sont asservis sur la transition vers le niveau 2^3P_1 et désaccordés de $\Delta=400$ MHz de la résonance. Les atomes sont initialement piégés dans le sous niveau Zeeman $m_x = 1$. Le désaccord Zeeman δ_Z vaut 700 kHz. La pompe est représenté en trait plein. Les end-fire modes en trait tireté. (a) Diffusion Raman. Le faisceau pompe est polarisé π . Les atomes sont transférés vers le sous niveau Zeeman $m_x = 0$. (b) Diffusion Rayleigh. Le faisceau pompe est polarisé circulairement. Les atomes ne changent pas d'état interne.

La mise en place de faisceaux laser en vue de la réalisation d'un transfert Raman des

condensats d'He* piégés expérimentalement a permis la mise en évidence de phénomènes de superradiance. Afin de tester l'effet de nos faisceaux sur le condensat de manière indépendante, nous avons alors cherché à illuminer un condensat de Bose-Einstein au moyen d'un faisceau laser légèrement tourné par rapport à l'axe \mathbf{z} dans le plan $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ du dispositif expérimental ($\sim 7^\circ$, voir la figure 3.7(b)) et désaccordé de 400 MHz vers le bleu de la transition $2^3S_1 \rightarrow 2^3P_1$. La largeur du faisceau à $1/e^2$, de 0.5 cm, permet de répartir de façon homogène la puissance du faisceau sur toute la surface du condensat. La puissance du faisceau est d'environ 80 mW/cm²⁶. En variant la durée des impulsions ainsi que la polarisation du faisceau pompe, nous avons eu l'occasion d'observer différents régimes de superradiance. La figure 3.6 donne un aperçu de quelques situations typiques dans lesquelles nous avons pu nous placer. Le piège magnétique n'étant pas coupé pendant l'expérience, seuls les atomes qui sont transférés dans le sous-niveau Zeeman $m_x = 0$ sont observés après le temps de vol.

La figure 3.6 (a) correspond à une situation où le faisceau pompe est polarisé parallèlement à l'axe \mathbf{x} . Une telle configuration est un exemple conventionnel de superradiance Raman : les atomes initialement piégés peuvent diffuser un photon de la pompe dans les *end-fire modes* (Fig. 3.5 (b)). Cette diffusion s'accompagne d'un changement de l'état interne des atomes qui se retrouvent alors dans l'état non piégé $m_x = 0$. On observe d'autre part que la durée de l'impulsion est suffisamment courte pour permettre une diffusion superradiante propre au régime de Kapitza-Dirac : on observe en effet deux ondes de matière d'impulsions de sens opposé à celui du faisceau pompe. Les deux condensats d'impulsion $\hbar k_{\text{rec}}(-3\mathbf{z} \pm \mathbf{x})$ peuvent quant à eux être attribués à des processus d'ordre supérieur tirant parti du fait que le faisceau pompe n'est pas parfaitement polarisé π . Ce défaut de polarisation est vraisemblablement dû aux cubes séparateur de polarisation que nous avons utilisé et dont les taux d'extinction ne sont que de l'ordre de 5%. Parmi tous les processus envisageables, il est difficile de savoir lequel est le plus efficace. Un dernier point intéressant correspond au fait que l'on peut observer des halos entre les différents condensats extraits : ces halos peuvent être attribués à des processus de collision élastique faisant intervenir des atomes d'impulsions différentes (voir le chapitre 4).

Pour les figures 3.6 (b) et (c), la polarisation du faisceau est maintenant orthogonale à l'axe \mathbf{x} (le faisceau est donc polarisé σ). Dans une telle situation, on ne s'attend pas à observer d'atomes dans les temps de vol : le processus de diffusion superradiante le plus probable (Rayleigh) correspond en effet à la diffusion d'un photon du faisceau pompe vers un des *end-fire modes* (Fig. 3.5 (b)). L'atome concerné ne change pas d'état interne et reste piégé. Pour comprendre les figures 3.6 (b),(c), il faut donc prendre en compte d'autres processus d'ordre supérieur. Pour une durée de l'impulsion lumineuse d'1 μs (Fig. 3.6 (b)), le condensat initial est couplé majoritairement vers le niveau $m_x = 0$ sans transfert d'impulsion. Deux processus moins efficaces couplent une partie du condensat initial vers le niveau $m_x = 0$ avec un transfert d'impulsion de $\pm 2\hbar k_{\text{rec}}$ suivant la direction du faisceau incident. Une façon de comprendre ce temps de vol est de considérer qu'une petite partie du faisceau incident est polarisé π . Bien que non-résonant, il est en fait possible d'imaginer un processus Raman à deux photons réalisant le transfert des atomes du condensat du niveau $m_x = 1$ vers le niveau $m_x = 0$ par l'intermédiaire du niveau 2^3P_1 et sans transfert d'impulsion : un atome du condensat absorbe alors un photon de la pompe polarisé π et réémet de façon stimulée un photon polarisé circulairement dans la pompe. On peut aussi imaginer un processus similaire

⁶Nous verrons dans la partie 3.3.1 les détails expérimentaux concernant la mise en place de ce faisceau.

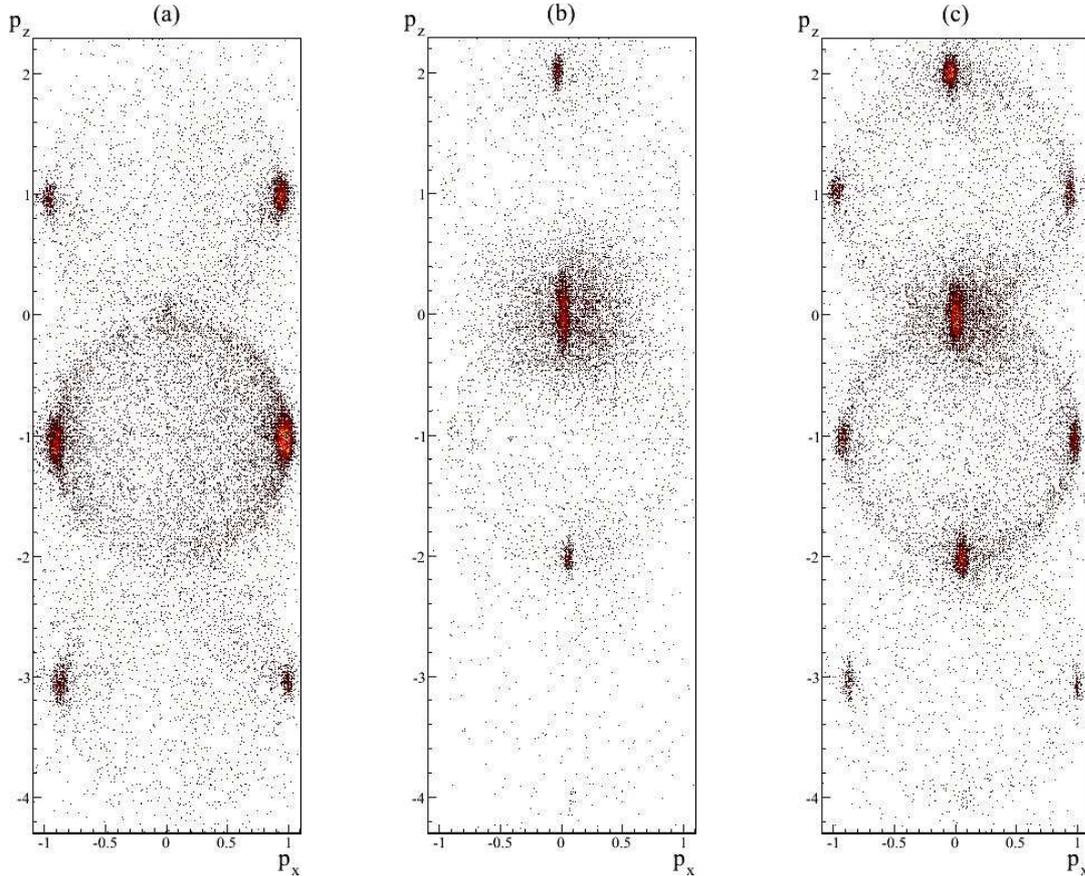


FIG. 3.6 – Temps de vol reconstruits dans l'espace des impulsions. L'unité est l'impulsion de recul d'un photon $\hbar k_{\text{rec}}$. La situation expérimentale correspond au montage décrit dans la figure 3.4. (a) Impulsion de $5 \mu\text{s}$ d'un faisceau polarisé linéairement selon l'axe \mathbf{x} . La superradiance Raman est le processus dominant ici. Les atomes du condensats sont essentiellement diffusés dans deux ondes de matière d'impulsions $\hbar k_{\text{rec}}(\pm \mathbf{x} - \mathbf{z})$. Les condensats d'impulsion $\hbar k_{\text{rec}}(\pm \mathbf{x} + \mathbf{z})$ rentrent dans le cadre du régime de Kapitza-Dirac, dans lequel la conservation de l'énergie peut être violée du fait de la très courte durée de l'impulsion lumineuse. Les autres effets sont expliqués dans le corps du texte. (b) et (c) Impulsions de respectivement 1 et 2 μs d'un faisceau de polarisation linéaire, orthogonale à l'axe \mathbf{x} . D'après la figure 3.5, le processus dominant est un effet de superradiance Rayleigh, pour lequel les atomes restent piégés. On ne s'attend donc pas à détecter des atomes durant le temps de vol. Les atomes détectés proviennent de processus parasites reliés à la polarisation imparfaite des faisceaux. L'évolution entre les figures (b) et (c) n'est pas vraiment comprise.

par l'intermédiaire du niveau 2^3P_2 mais qui s'avère bien moins favorable en raison du grand désaccord des faisceaux par rapport à la transition ⁷. Pour comprendre les deux ondes de matière d'impulsion $\pm 2\hbar k_{\text{rec}}$ il faut prendre en compte des processus d'ordre supérieur dont il est difficile de déterminer la nature précisément. Le fait que la durée de l'impulsion soit très courte permet aussi d'imaginer des processus qui violent la conservation de l'énergie (régime de Kapitza-Dirac). Une telle figure reste donc difficile à interpréter en détail. La figure 3.6 (c) correspond à la même situation mais pour une durée d'impulsion de $2 \mu\text{s}$. On peut observer un grand nombre de petits condensats d'impulsions différentes pouvant être attribués à différents processus de superradiance dont il est encore plus difficile ici de déterminer précisément la nature.

Cette étude a permis de mettre en relief à la fois la complexité des processus de superradiance mais aussi la difficulté du contrôle que l'on peut avoir sur ce genre d'effets. La compétition entre les différents processus envisageables en rend l'étude d'autant plus dure. Le fait de n'avoir accès qu'aux atomes ayant été transférés dans le sous niveau non piégeant $m_x = 0$ limite aussi l'étendue du contrôle que l'on a sur de tels processus. A l'échelle de notre expérience et dans l'optique de la réalisation d'un transfert Raman efficace, nous avons donc cherché à limiter les effets de la superradiance. Une façon de procéder consiste à se placer sur la transition $2^3S_1 \rightarrow 2^3P_0$. Cette dernière est située à 30 GHz des niveaux 2^3P_1 et 2^3P_2 . On peut donc espérer dans une telle configuration limiter l'amplitude des couplages vers ces niveaux. Une fois asservi sur la transition, si l'on répète les expériences précédentes, on n'observe plus de phénomènes de superradiance : ceci peut se comprendre dans la mesure où il n'est pas possible d'imaginer dans une telle situation des processus de diffusion superradiante Raman permettant de transférer les atomes piégés dans le sous niveau $m_x = 1$ vers le sous-niveau $m_x = 0$ et ceci quelle que soit la polarisation du faisceau pompe. Ceci peut s'expliquer par le fait que les *end-fire modes* sont nécessairement polarisés circulairement. Nous nous sommes placés dans une telle situation dans la suite ⁸.

3.3 Réalisation du transfert Raman d'un condensat de Bose-Einstein d'hélium métastable

Dans cette partie nous nous concentrons sur les détails expérimentaux relatifs à la mise en place des faisceaux laser que nous avons utilisés pour réaliser le transfert Raman d'un condensat de Bose-Einstein d'hélium métastable. Nous nous intéresserons ensuite à l'efficacité du processus et à sa caractérisation. Enfin, nous expliquons la démarche que nous avons suivie pour réaliser le transfert simultané de deux condensats d'impulsions différentes.

⁷Les niveaux 2^3P_1 et 2^3P_2 sont séparés de 3 GHz (voir Fig. 2.1). Le niveau 2^3P_0 , situé à environ 30 GHz peut a priori être négligé.

⁸Il faut bien voir qu'une telle configuration n'empêche pas les effets de superradiance Rayleigh qui peuvent éventuellement perturber les atomes piégés. Son seul avantage est de limiter l'extraction de condensats parasites pendant le transfert Raman.

3.3.1 Montage expérimental

Amplificateur à fibre optique De manière à pouvoir travailler sur une large gamme de puissance optique, un amplificateur à fibre optique de la société Keopsys a été installé sur le dispositif expérimental. Le coeur de ce type de fibre est dopé au moyen d'ions Ytterbium. Ces ions présentent l'avantage d'avoir une bande large dans leur spectre d'absorption (situé autour de 915nm) nettement séparée d'une bande large de leur spectre d'émission (située autour de 1050 nm). Les ions sont pompés dans leur état excité au moyen d'une diode de puissance, réalisant ainsi une inversion de population. Le coeur de la fibre se comporte ainsi comme un milieu amplificateur pour le signal qui se propage à l'intérieur. Ce type d'amplificateur est idéal pour travailler à la longueur d'onde utile de l' He^* , 1083 nm, dans la mesure où cette longueur d'onde est très peu absorbée par le milieu amplificateur. La fibre est généralement suffisamment longue pour que toute la puissance de la pompe soit absorbée. Le faisceau pompe et le signal sont généralement contra-propageants à l'intérieur de la fibre. Il est ainsi possible d'amplifier un signal de l'ordre de 1 mW jusqu'à des puissances de plusieurs W. Le gain d'amplification dépend essentiellement de la puissance du faisceau pompe lui même. Sur notre montage, l'amplificateur est injecté par un faisceau issu directement d'une diode laser DBR du même type que le modèle décrit au chapitre précédent. Le faisceau pompe éteint, on arrive généralement à injecter de l'ordre de 2 mW dans la fibre. Le réglage de l'injection est assez critique par rapport à la stabilité du faisceau de sortie et doit être fait avec beaucoup de soin. Le nettoyage de la sortie de la fibre doit d'autre part être effectué avec beaucoup d'attention pour éviter que d'éventuelles poussières ne brûlent sous la puissance du faisceau et dégrade la fibre. L'amplificateur permet, au gain maximum, une puissance de sortie d'1 W.

Un certain nombre de processus peuvent limiter la qualité de ce type d'amplificateur : l'émission spontanée de photons par les ions Ytterbium peut elle même être amplifiée le long de la fibre. Ceci peut entraîner l'élargissement du spectre du faisceau de sortie. Pour limiter au maximum cet effet, il faut que la puissance du faisceau signal soit d'au moins 1 mW (donnée constructeur) pour écraser la compétition avec les autres modes. Nous avons eu l'occasion de réaliser des battements entre le signal à l'entrée de l'amplificateur et à sa sortie pour vérifier la qualité du spectre du faisceau de sortie ⁹. Il apparaît que les phénomènes d'émission spontanée amplifiée sont négligeable à la précision près de l'analyseur de spectre que nous avons utilisé : la puissance des composantes d'émission spontanée amplifiée est au moins 20 dB plus faible que celle du signal utile ¹⁰. Cette mesure a été confirmée en observant l'effet du faisceau de sortie de l'amplificateur sur des nuages froids piégés : après avoir désaccordé le faisceau de 400 MHz vers le bleu de la transition vers le niveau 2^3P_0 , nous avons illuminé le nuage pendant plusieurs ms. La température du nuage après temps de vol reste la même que le faisceau soit allumé ou non. Nous avons eu aussi l'occasion de tester la stabilité en puissance et en polarisation du faisceau de sortie. Les variations observées sur la puissance correspondent au maximum à environ 5% de la puissance moyenne du faisceau. D'autre part, l'échelle de temps des variations est de plusieurs secondes voire même de quelques minutes. Cette stabilité n'est atteinte qu'après avoir attendu environ une demi heure après l'allumage de l'amplificateur

⁹Cette méthode ne permet pas de mesurer la largeur de raie du faisceau en sortie dans la mesure où la cohérence spatiale du signal est bien plus grande que la longueur de la fibre. Cette technique permet en revanche d'observer l'élargissement du spectre en fréquence du faisceau de sortie dû aux phénomènes d'émission spontanée amplifiée.

¹⁰Cette valeur correspond au minimum de sensibilité de l'analyseur de spectre.

et le réglage de son gain. Il n'est donc pas possible de modifier rapidement la puissance du faisceau de sortie en jouant sur le gain de l'amplificateur. La stabilité de la polarisation du faisceau de sortie est assurée au moyen d'une fibre à maintien de polarisation. Cette stabilité est tout de même nettement affectée par d'éventuelles instabilités mécaniques sur la fibre elle-même qu'il convient de limiter au maximum. En situation normale d'utilisation, cette stabilité est du même ordre de grandeur que la stabilité sur la puissance du faisceau de sortie avec un temps caractéristique de variation équivalent.

L'amplification de l'émission spontanée n'est pas directionnelle et d'autre part le changement d'indice au passage d'une fibre conventionnelle à une fibre dopée par des ions Ytterbium peut induire une petite réflexion à l'intérieur de la fibre. Tout ceci conditionne l'émergence d'un faisceau contra-propageant de puissance non négligeable (plusieurs mW) qui peut venir perturber la diode d'injection. Dans notre montage expérimental, cette composante contra-propageante vient essentiellement perturber l'asservissement par absorption saturée que nous avons mis en place sur ce faisceau. L'utilisation de deux isolateurs optiques, un pour protéger la diode elle-même, et un autre pour protéger le montage d'absorption saturée, de -30dBm d'isolation chacun, a largement amélioré la stabilité de l'asservissement du laser. Un autre isolateur optique placé en sortie de fibre, permet d'éviter le retour dans l'amplificateur d'une partie du signal de sortie. Cet isolateur est critique pour le bon fonctionnement et surtout la stabilité de l'amplificateur à fibre optique.

Séparation des faisceaux et contrôle des impulsions Raman La réalisation d'un transfert Raman nécessite, comme nous l'avons vu au cours de la première partie de ce chapitre, la mise en place de deux faisceaux laser de fréquences et de polarisations différentes. Le faisceau laser à la sortie de l'amplificateur a donc été séparé en deux parties. La figure 3.7 (a) donne le schéma du montage optique réalisé pour le contrôle et la mise en forme des faisceaux du transfert Raman. Le ratio de puissance dans les deux bras des faisceaux Raman est réglé au moyen d'une lame $\lambda/2$ et d'un cube séparateur de polarisation. Un modulateur acousto-optique (A.O.M.) en simple passage a été placé sur chaque bras et permet de désaccorder les faisceaux de 200 MHz. A sortie de la fibre, le faisceau est désaccordé de 200 MHz vers le bleu de la transition $2^3S_1 \rightarrow 2^3P_0^{11}$. Grâce aux A.O.M., les deux faisceaux sont désaccordés de 400 MHz par rapport à cette transition. Les A.O.M. permettent à la fois un contrôle fin du désaccord entre les deux faisceaux et d'autre part un contrôle de la puissance du faisceau. Les A.O.M. sont pilotés par des synthétiseurs de fréquence dont la précision absolue de l'ordre du Hz va bien au delà de ce dont nous avons besoin pour réaliser le transfert Raman. En changeant les fréquences et les puissances des signaux issus des synthétiseurs de fréquence, on change la puissance et la fréquence du faisceau diffracté. Cette version du montage souffre malgré tout d'une limitation. A chaque fois que les fréquences des synthétiseurs sont modifiées, les directions des faisceaux diffractés dans l'A.O.M. changent légèrement imposant un nouveau réglage des chemins optiques des faisceaux. La nouvelle génération du montage, mise en place récemment ne souffre plus d'une telle limitation (Fig. 3.7 (b)). Environ 65% de la puissance optique à l'entrée d'un A.O.M. est diffractée dans l'ordre qui nous intéresse.

Pour générer les impulsions, on utilise deux switch radiofréquence (RF) qui permettent

¹¹Ce désaccord est dû au montage d'absorption saturée qui permet d'asservir la diode que l'on utilise pour injecter l'amplificateur à fibre. Un A.O.M. a en fait été placé entre la diode et la cellule d'hélium métastable.

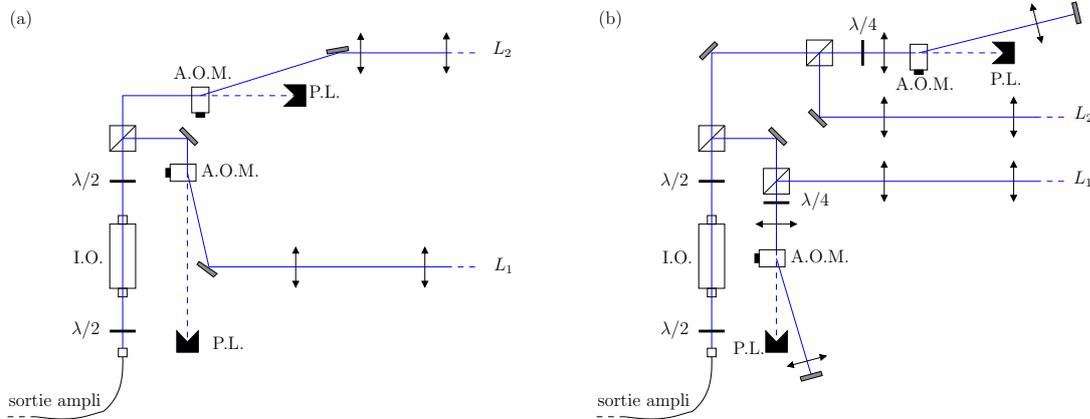


FIG. 3.7 – Montage optique des faisceaux Raman. Les sigles A.O.M., I.O. et P.L. correspondent respectivement à modulateur acousto-optique, isolateur optique et puit de lumière. (a) Première génération du montage. Toutes les expériences présentées dans ce manuscrit ont été réalisées avec ce montage. (b) Deuxième génération. Les A.O.M. ont été mis en double passage de manière à permettre un meilleur contrôle de la direction des faisceaux : la configuration en "œil de chat" permet de fixer les directions des faisceaux même lorsque l'on modifie la fréquence des synthétiseurs.

de couper et allumer rapidement¹² les signaux issues des synthétiseurs de fréquence. On peut ainsi générer des impulsions lumineuses très courtes : la principale limitation vient en fait des A.O.M. eux-mêmes dont le temps de montée est de l'ordre de 100 ns. On peut donc difficilement contrôler des impulsions de durée inférieure à 500 ns. De façon à pouvoir régler le recouvrement temporelle des faisceaux, un petit délai peut être défini entre les coupures des switches. Ce délai peut varier entre 10 ns et 1 μ s. Pour contrôler que les faisceaux sont bien allumés en même temps, on a vérifié au moyen d'une photodiode rapide l'allure des impulsions (bande passante de 1 GHz). La figure 3.8 (b) présente un résultat typique obtenu en sortie de la photodiode pour des impulsions d'1 μ s. On voit que la forme des impulsions donne aussi accès au temps de montée des A.O.M. Cette étude nous a d'autre part permis de mettre en évidence une limitation des A.O.M. Pour que la répétabilité des impulsions au fur et à mesure des séquences soit bien acquise, il faut laisser les A.O.M allumés la majeure partie du temps (pour des raisons de stabilité thermique a priori). Dans le cas contraire, la puissance des impulsions lumineuses n'est pas stable d'une séquence à l'autre. Pour solutionner ce problème, nous avons donc mis en place des obturateurs mécaniques en aluminium capables de couper les faisceaux de façon à les empêcher d'atteindre l'enceinte à vide. Juste avant que l'impulsion soit allumée, on coupe les A.O.M. au moyen des switch RF et on ouvre les obturateurs pour quelques ms. Pendant l'intervalle de temps où les obturateurs sont ouverts, les switch RF sont coupés de manière à réaliser les impulsions désirées. Après la fermeture des obturateurs, on rallume les A.O.M (Fig. 3.8 (a)). Cette séquence permet de garantir la stabilité des impulsions lumineuses au fur et à mesure des séquences. Il a en revanche fallu beaucoup travailler pour empêcher les réflexions de lumière parasite de perturber le nuage piégé dans l'enceinte. La lumière diffusée par les obturateurs a donc été confinée sur la table

¹²le temps de montée du switch est de l'ordre de la ns.

optique au moyen de caches absorbants. La durée de vie du nuage thermique est à peine perturbée grâce à ces efforts (diminution de quelques secondes).

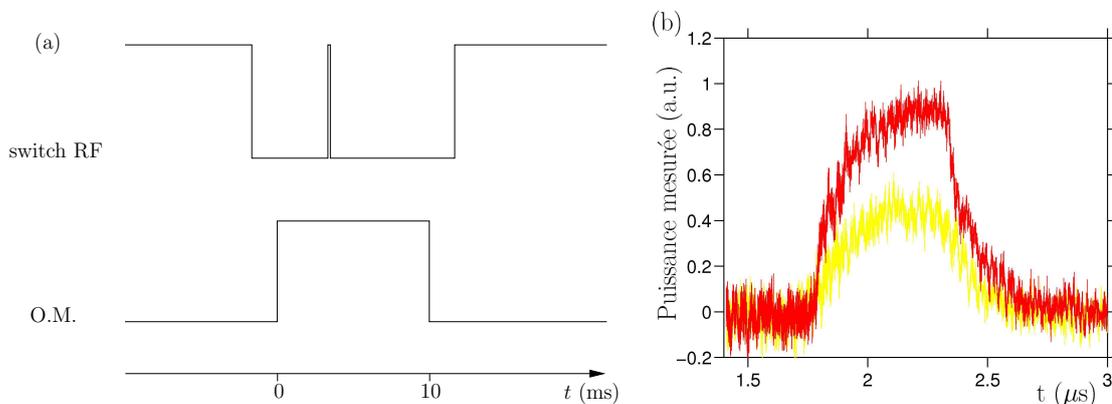


FIG. 3.8 – (a) Séquence électronique utilisée pour générer les impulsions lumineuses nécessaires au transfert Raman. Au moment où les switch RF sont coupés, les obturateurs mécaniques (O.M.) sont ouverts. Les switches RF sont ensuite allumés pendant un bref instant de manière à générer les impulsions lumineuses. Au moment où les O.M. sont coupés, les switch RF sont rouverts. (b) Allure des impulsions lumineuses du transfert Raman. De bas en haut, L_1 , L_2 .

A la sortie de la fibre optique, le faisceau laser est collimaté et de largeur à $1/e^2$ de l'ordre de 0.5 mm. De manière à être capable d'illuminer les condensats de Bose-Einstein à l'intérieur de l'enceinte de façon homogène, nous avons installé un télescope de grandissement 4 sur le parcours de chacun des faisceaux. La mesure précise des largeurs à $1/e^2$ des faisceaux à la sortie des télescopes donne : 2 mm pour le faisceau horizontal et 2.5 mm pour le faisceau vertical. La puissance maximale des faisceaux est de 80 mW/cm².

Mise en place des faisceaux sur l'enceinte à vide La figure 3.9 donne la configuration géométrique des deux faisceaux lasers par rapport à l'enceinte à vide dans laquelle sont piégés les atomes que l'on désire transférer. Deux miroirs situés juste avant l'enceinte permettent de régler la direction des faisceaux sur la position du centre du piège magnétique. Les directions des faisceaux ont été choisies de manière à ce que les faisceaux possèdent des polarisations quasi-pures. Le faisceau horizontal est majoritairement polarisé σ^- ¹³ : le faisceau n'étant pas exactement sur l'axe du biais du champ magnétique, la polarisation n'est malheureusement pas exactement pure. Les composantes π et σ^+ résiduelles sont faibles (de l'ordre de quelques pourcents de la puissance totale) mais peuvent perturber légèrement le processus de transfert Raman comme nous allons le voir. Une lame $\lambda/4$ située juste avant l'entrée de l'enceinte permet d'optimiser cette polarisation. Les hublots des brides rentrantes, que traverse le faisceau horizontal ne sont pas traités anti-reflet ce qui se traduit par une perte nette par réflexion de 4% de la puissance du faisceau à chaque interface.

Le faisceau vertical peut lui être polarisé π aussi précisément que l'on le désire. Cette

¹³Le choix de la polarisation des faisceaux correspond à la configuration de la figure 3.3 (c) pour le transfert Raman.

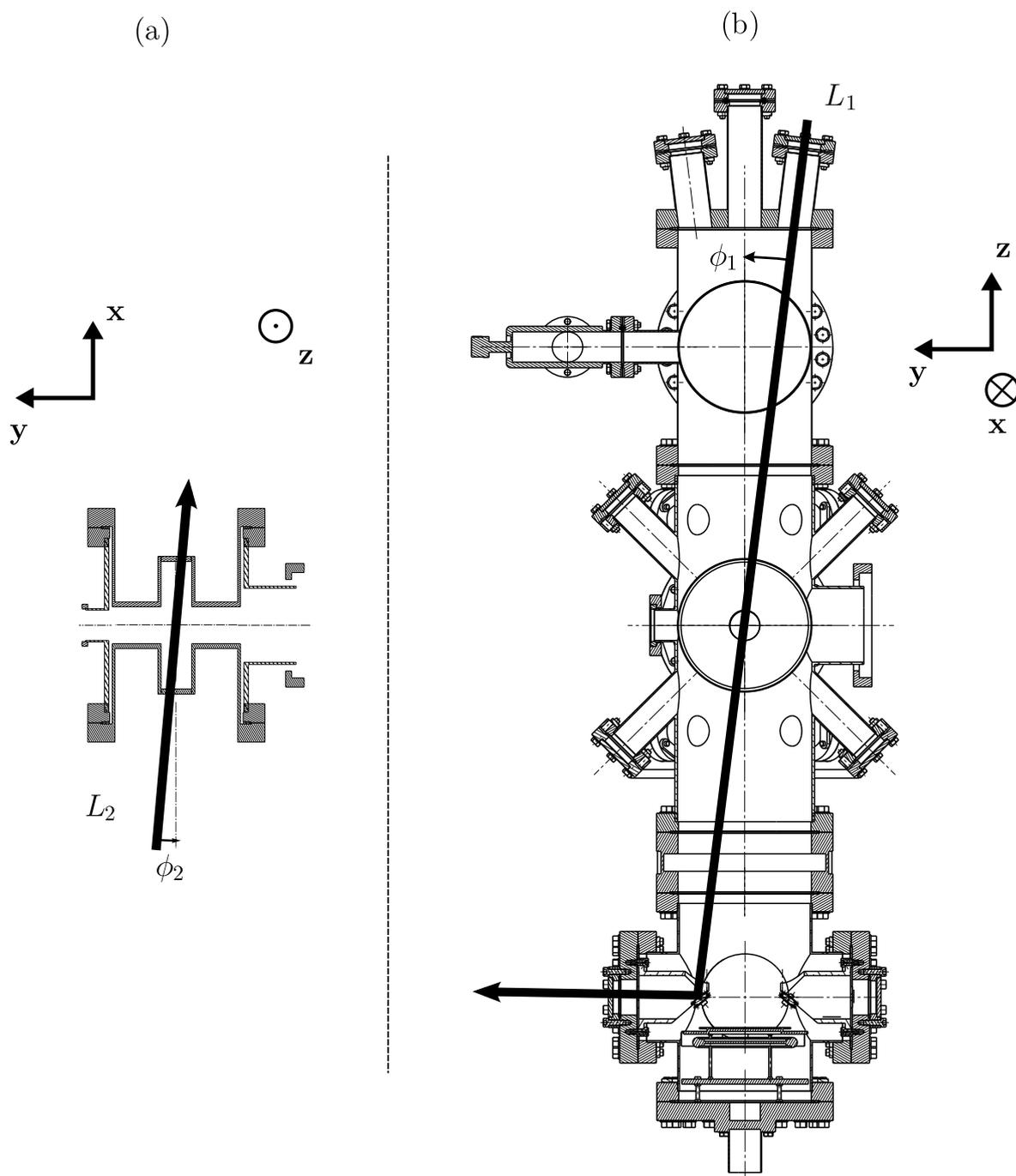


FIG. 3.9 – Géométrie des faisceaux Raman. (a) Faisceau horizontal polarisé σ^- . Expérimentalement $\phi_2 \simeq 5^\circ$. (b) Faisceau vertical polarisé π . Expérimentalement $\phi_1 \simeq 8^\circ$.

précision est limitée par la définition de la direction du champ du biais magnétique ¹⁴ et par la qualité des cubes séparateurs de polarisation. Les taux d'extinction de la polarisation indésirable sont de l'ordre de 1 pour 20 pour un cube standard. Nous avons mis en place récemment des cubes polariseurs de Glan pour augmenter cette valeur à 1 pour 100000. Pour permettre la sortie du faisceau à l'extérieure de l'enceinte à vide et éviter de multiples réflexions sur les parois de l'enceinte, un miroir sous vide a été récemment installé. Les hublots sur le trajet du faisceau sont tous traités anti-reflet, limitant la puissance réfléchie au passage des interfaces. A la sortie de l'enceinte, le faisceau fait d'autre part un angle de 1° avec la normale au hublot, limitant le retour du résidu de réflexion sur les atomes piégés ¹⁵.

Pendant le transfert Raman, les atomes subissent un transfert d'impulsion égal à $\hbar k_{\text{rec}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ pour une telle configuration des faisceaux. Les vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 sont définis par la direction des faisceaux L_1 et L_2 . D'après la figure 3.9, ils peuvent se mettre sous la forme suivante ¹⁶

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \cos \phi_1 \mathbf{z} - \sin \phi_1 \mathbf{y} \\ \mathbf{e}_2 &= \cos \phi_2 \mathbf{x} - \sin \phi_2 \mathbf{y}\end{aligned}\tag{3.8}$$

A la suite du transfert, les atomes s'éloignent donc du centre du piège magnétique avec une impulsion de l'ordre de $\hbar k_{\text{rec}}(\mathbf{z} + \mathbf{x})$ avant d'être accéléré par la gravité. Un tel transfert n'empêche pas les condensats extraits d'être détectés sur le MCP (voir le paragraphe 3.1.3). Un tel transfert d'impulsion s'avère d'autre part indispensable si l'on désire réaliser la collision de deux condensats.

3.3.2 Réalisation d'un transfert Raman

Résultats bruts A partir du montage expérimental que nous venons de décrire, nous avons pu réaliser une série d'expériences de transfert Raman. Les puissances et désaccords des faisceaux L_1 et L_2 ont été optimisés de manière à maximiser l'efficacité du transfert pour une durée des impulsions lumineuses de 500 ns. La figure 3.10 donne une idée des résultats obtenus à l'issue du temps de vol des atomes. Les résultats sont présentés dans l'espace des impulsions : la procédure de reconstruction est présentée en annexe B ¹⁷. On notera que les impulsions des atomes ont été calculées à partir de leurs positions dans un référentiel mobile de vitesse initiale $v_{\text{rec}}\mathbf{z}$ et accéléré verticalement sous l'effet de la gravité. Le piège magnétique n'étant pas coupé avant la fin du temps de vol des atomes, seuls les atomes dans le sous-niveau $m_x = 0$ sont détectés. Le résultat obtenu est en accord avec la géométrie des faisceaux Raman. Sur les différentes projections des temps de vol, on peut en effet observer un condensat d'impulsion $\hbar k_{\text{rec}}\mathbf{x}$ qui correspond bien à un transfert Raman des atomes piégés par l'intermédiaire des faisceaux L_1 et L_2 (I sur la figure 3.10). La taille du condensat détecté

¹⁴Nous avons mentionné cet effet au paragraphe 3.1.3.

¹⁵Le miroir sous vide ainsi que les cubes polariseurs de Glan ont été installés après la réalisation des expériences décrites dans ce manuscrit.

¹⁶Pendant le transfert, les atomes absorbent un photon dans le faisceau L_2 qu'ils réémettent dans le faisceau L_1 .

¹⁷Les paramètres utilisés pour reconstruire les impulsions des atomes ont été optimisés dans le cadre de l'expérience de collision des condensats que nous décrivons à la fin de ce chapitre. Les directions des faisceaux n'ayant pas été modifiées pour réaliser les expériences de collision, les mêmes paramètres peuvent être utilisés dans le cadre de l'expérience présentée ici.

est compatible avec un nombre d'atomes de l'ordre de 10^4 (voir l'approche développée au paragraphe 2.4.3). Le nombre d'atomes détectés dans ce condensat est de l'ordre de 2000 avec des variations qui peuvent atteindre plus de 50% d'un temps de vol à l'autre. Ces instabilités peuvent être majoritairement attribuées aux instabilités du nombre d'atomes piégés à la fin du refroidissement évaporatif.

Moyenner le résultat de plusieurs temps de vol permet de mettre en relief un certain nombre d'effets parasites que nous avons cherché à limiter. Tout d'abord un certain nombre d'atomes sont extraits vers le niveau $m_x = 0$ mais sans transfert d'impulsion (II sur la figure 3.10). Ceci correspond à un transfert Raman non-résonnant dû aux défauts de polarisation des faisceaux. Cet effet reste cependant très minoritaire dans la mesure où en moyenne, on détecte 100 fois plus d'atomes dans le condensat I. La mise en place très récente de polariseurs de Glan semble avoir largement contribué à limiter encore plus cet effet. Une étude plus complète de cette amélioration devrait être trouvée dans la thèse de mes successeurs, coupés dans leur élan par le déménagement du montage expérimental. Une autre façon de limiter ce problème serait de travailler avec un biais de champ magnétique plus élevé. Nous avons donc cherché à réaliser une rampe de courant permettant cette augmentation et survenant juste après l'obtention d'un condensat. L'instabilité de la rampe, inconnue pour l'instant, a malheureusement contribué à la perte de la majorité des atomes du piège et nous n'avons jamais réussi à observer un transfert efficace dans une telle configuration.

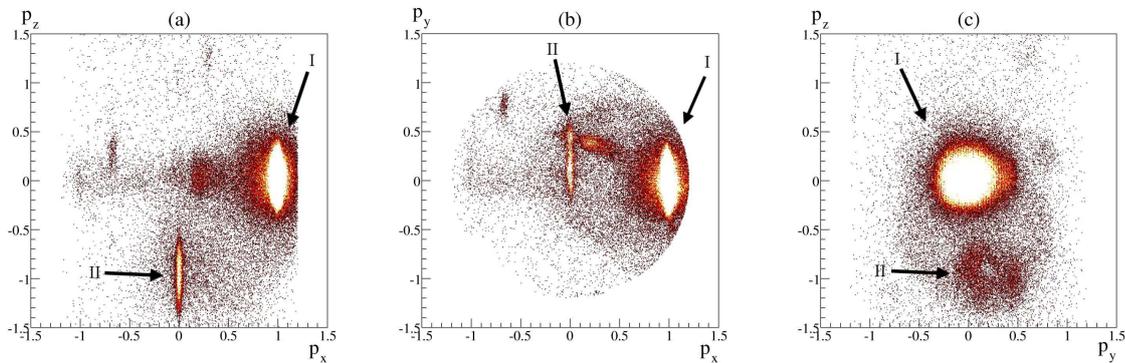


FIG. 3.10 – *Projections des temps de vol observés à l'issue du transfert Raman. Le résultat est moyenné sur 150 temps de vol. Les impulsions des atomes ont été reconstruites conformément au traitement développé en annexe B. Toutes les impulsions sont exprimées en unité de $\hbar k_{\text{rec}}$. Les atomes sont majoritairement couplés dans le condensat I. Le condensat II est dû à l'imperfection des polarisations des faisceaux. L'origine des autres effets parasites est expliqué dans le corps du texte. (a) Projection sur le plan $(p_x p_z)$. (b) Projection sur le plan $(p_x p_y)$. (c) Projection sur le plan $(p_y p_z)$.*

Une observation un peu plus attentive des images obtenues montre d'autre part, l'existence d'un halo de collision entre les condensats I et II. Ce halo apparaît sous la forme d'un disque dans le plan $(p_y p_z)$. La mise en évidence de processus non-linéaires complique l'étude des résultats obtenus : il semble que ces processus soient aussi responsables de l'apparition de condensats, ou groupement d'atomes parasites. Dans le plan $(p_x p_z)$, on peut ainsi deviner deux condensats microscopiques d'impulsions pratiquement opposées aux deux principaux condensats. Malgré quelques efforts, nous n'avons pas vraiment réussi à identifier l'origine de

ces condensats. Le plus étonnant est la présence d'un grand nombre d'atomes au centre du référentiel. Ce groupement s'étale du centre du référentiel à la position du condensat I : le fait qu'une partie des atomes restent piégés à l'issue du transfert peut vraisemblablement être à l'origine d'un tel effet : on peut en effet imaginer des processus non-linéaires impliquant le condensat piégé et les condensats extraits permettant d'expliquer un tel effet (collision élastique...). Après l'installation récente des miroirs sous vide nous n'avons plus été en mesure d'observer un tel phénomène. Ceci tendrait donc plutôt à prouver que cet effet est dû à la lumière parasite réfléchiée par les parois de l'enceinte. Toujours est il que le transfert Raman a été réalisé avec succès et que ces processus sont pratiquement négligeables devant le principal processus Raman. Il a en effet fallu moyenniser les résultats sur un grand nombre de réalisations pour être capable de les observer. Cette étude donne ainsi une idée de l'avantage conféré par notre détecteur. La reconstruction tridimensionnel donne vraiment une latitude formidable en vue de la compréhension de phénomènes non-linéaires complexes, même lorsque ces processus sont largement inefficaces.

Oscillations de Rabi Nous avons cherché à mesurer l'efficacité du transfert en réalisant des oscillation de Rabi. Nous avons donc réalisé une série d'expériences de transfert Raman en faisant varier la durée des impulsions. Mesurer l'efficacité du transfert s'avère malheureusement difficile dans une telle configuration. Dans la mesure où les atomes qui ne sont pas transférés vers le sous-niveau $m_x = 0$ restent piégés¹⁸, on peut les détecter et comparer leur nombre à ceux du condensat extrait. Malheureusement, la coupure du piège, discutée au paragraphe 2.2.2, ne transfère qu'une faible partie des atomes dans le sous-niveau $m_x = 0$ au moment de la coupure. D'autre part, nous ne sommes pas capable de savoir si la proportion d'atomes extraits est constante d'une réalisation à l'autre. De façon à s'affranchir au maximum de cet effet, nous avons pris le parti de réaliser deux impulsions Raman séparés de 50 ms. La durée entre les impulsions permet aux deux condensats d'être suffisamment séparés pour que la seconde impulsion n'affecte pas les atomes extraits par la première. En comparant le nombre d'atomes extrait lors de la première impulsion au nombre total d'atomes détectés pendant la séquence¹⁹, on a pu obtenir la figure 3.11. Le ratio mesuré peut difficilement être directement comparé à l'efficacité absolue du processus mais donne tout de même une bonne idée de son amplitude. Sur le graphique, on peut clairement observer des oscillations. Cette étude permet d'estimer $\Omega_{\text{eff}} \sim 2\pi \times 1.2$ MHz. Une telle valeur rentre tout à fait dans le cadre des approximations décrites au cours de l'étude du début de ce chapitre. Pour des durées d'impulsion proche de 600 ns, le transfert est optimal dans la mesure où l'immense majorité des atomes sont transférés vers l'état $m_x = 0$ à l'issue de la première impulsion. Sur la figure, on peut tout de même se rendre compte que le processus n'est pas très stable dans la mesure où plusieurs réalisations successives du transfert peuvent donner des efficacités assez différentes. Pour des durées d'impulsions fixées à 600 ns, on peut ainsi voir que l'efficacité varie de 0.8 à plus de 0.9. Cette instabilité apparente provient principalement de la saturation du détecteur au moment de la détection du condensat. Comme discuté dans le chapitre précédent,

¹⁸On peut éventuellement supposer qu'une partie des atomes sont transférés vers le sous niveau anti-piégeant $m_x = -1$ du fait des défauts de polarisation des faisceaux. Les atomes qui s'échappent vers cet état sont perdus et nous ne pouvons pas les détecter. On peut tout de même supposer que leur population est plus petite que la population du condensat I qui elle même est déjà faible devant celle du condensat II.

¹⁹Cela correspond en fait aux atomes extraits par les deux impulsions plus ceux qui tombent à la coupure du piège magnétique.

pour un condensat, le flux d'atomes sur le détecteur peut atteindre des valeurs plus grandes que 1 Mparticules/s. Le détecteur n'a plus le temps de se recharger localement entre deux détections, et on ne peut détecter avec la même efficacité tous les atomes qui tombent sur le détecteur. Le ratio calculé sur la figure 3.11, peut donc varier de façon importante d'une réalisation à l'autre. Un moyen de s'affranchir de cet effet serait de réussir à produire avec une bonne répétabilité, un condensat avec un nombre d'atomes fixés à l'avance. Nous n'avons pas réussi à stabiliser suffisamment le dispositif expérimental pour réaliser une telle mesure.

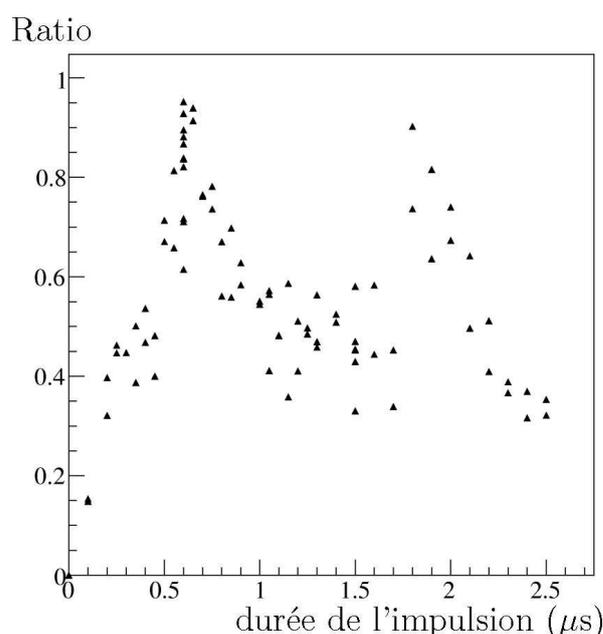


FIG. 3.11 – *Mesure de l'efficacité du transfert Raman. Le ratio mesuré correspond au quotient du nombre d'atomes détectés lors de la première impulsion sur le nombre total d'atomes détectés pendant la séquence. Une telle étude permet de mettre en évidence les oscillations et peut permettre une optimisation du transfert. Les instabilités expérimentales rendent malgré tout une telle étude difficile à réaliser.*

Afin de connaître un peu mieux l'efficacité du processus de transfert Raman et sa stabilité, nous avons cherché à minimiser l'effet de la saturation du MCP en diminuant la tension appliquée aux bornes des galettes. Dans une telle configuration, nous ne pouvons malheureusement pas réaliser un comptage des atomes, et nous sommes donc obligés d'intégrer les signaux de temps de vol au moyen d'un filtre. C'est le principe du système de détection analogique décrit dans le manuscrit d'O. Sirjean [74]. Grâce à cette étude, nous avons eu l'occasion de vérifier la bonne stabilité de l'efficacité du processus malgré une grande instabilité sur le nombre absolu d'atomes détectés. En comparant les nombres d'atomes détectés pour chacun des deux impulsions Raman, nous avons pu établir que l'efficacité du processus était supérieure à 80% pour une configuration optimale des paramètres expérimentaux. Notre détecteur et le dispositif expérimental ne permet malheureusement pas d'aller beaucoup plus loin qu'une telle estimation. La mise en place d'un système d'imagerie par absorption pourrait éventuellement permettre de mesurer plus précisément une telle efficacité. Une telle amélioration est discutée à l'heure actuelle.

Dans la mesure où l'optimisation du transfert Raman dépend d'un grand nombre de paramètres, nous avons fini par adopter la procédure suivante. Chaque modification des paramètres tendant à changer la valeur de Ω_{eff} , nous avons pris le parti de fixer la durée des impulsions à 500 ns et de ne jouer que sur les valeurs des autres paramètres (essentiellement les puissances des deux faisceaux et leurs désaccords respectifs). Il s'avère que le désaccord entre les deux faisceaux n'a que très peu d'effet sur l'efficacité du transfert. Ceci peut se comprendre dans la mesure où la durée des impulsions est très courte et l'incertitude sur les énergies du problème est donc grande. Cette valeur a donc été fixée par la mesure de la valeur du biais du champ magnétique $2\mu_B B_0 \sim 700$ kHz. Le fait de fixer cette valeur permet d'autre part de ne plus être sensible aux déplacements des faisceaux Raman à chaque modification de la fréquence des synthétiseurs qui pilotent les A.O.M. (voir la figure 3.7 (a)). L'optimisation du transfert Raman a donc essentiellement consisté à modifier les puissances respectives des deux faisceaux. Pour un choix de paramètres optimal, la puissance du faisceau horizontal est légèrement plus grande que celle du faisceau vertical : ceci vient du fait que afin d'annuler les déplacements lumineux des deux sous-niveaux Zeeman impliqués dans le transfert, il faut que les puissances des deux faisceaux sur le condensat soient égales. Le fait que le coefficient de réflexion des hublots des brides rentrantes est non négligeable impose au faisceau horizontal d'être légèrement plus puissant. Typiquement, la puissance du faisceau vertical est de 80 mW et celle du faisceau horizontal est de 90 mW.

3.3.3 Séparation et extraction de condensats d'impulsions opposées

Extraction simultanée de plusieurs condensats Lors d'un transfert Raman, la géométrie des faisceaux permet de définir la direction et le sens de l'impulsion qui est éventuellement communiquée aux atomes. En modifiant la géométrie de nos faisceaux, on pourrait donc aisément changer l'impulsion du condensat extrait sans modifier la dynamique du transfert ²⁰. D'autre part, en séparant un des deux faisceaux en deux composantes de direction et/ou de sens différents, on peut ainsi imaginer séparer le condensat extrait en deux parties d'impulsions différentes. Dans l'optique de la réalisation de collisions entre deux condensats de Bose-Einstein, un tel montage s'avère donc particulièrement astucieux. Pour mettre en oeuvre une telle idée, nous avons placé sur le parcours du faisceau L_2 un miroir de rétro-réflexion. En réalisant le transfert Raman dans une telle configuration, le condensat extrait se retrouve donc dans une superposition formée de deux composantes d'impulsions différentes : $\hbar k_{\text{rec}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ et $\hbar k_{\text{rec}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$. La figure 3.12 présente le résultat des temps de vol obtenus pour une telle situation. On observe bien sur la figure les deux composantes I et II du condensat extrait. Le condensat III peut lui être attribué aux défauts de polarisation des faisceaux et correspond à un transfert Raman sans transfert de vitesse. Les ratios des nombres d'atomes des différentes composantes du condensat extrait sont directement proportionnel aux ratios des intensités différentes composantes des faisceaux laser à l'origine de chacun des condensats. Si jamais le faisceau L_2 est parfaitement rétro-réfléchi on s'attend donc à ce que les condensats I et II contiennent le même nombre d'atomes. De ce point de vue, le condensat III est censé être négligeable.

La collision entre les deux principales composantes du condensat extraits est à l'origine de

²⁰Il ne faut pas oublier que les polarisations des faisceaux imposent malgré tout un certain nombre de contraintes.

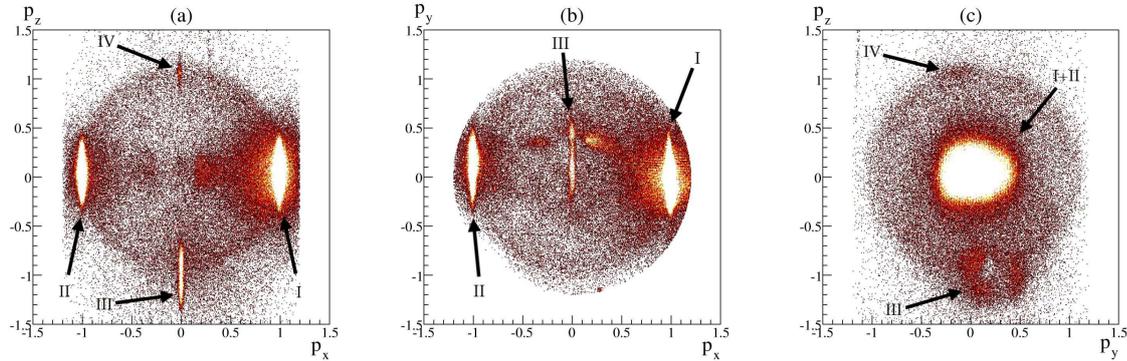


FIG. 3.12 – Projections des temps de vol observés à l’issue du transfert Raman dans la configuration où le faisceau L_2 est rétrofléchi. Le résultat est moyenné sur 150 temps de vol. Les impulsions des atomes ont été reconstruites conformément au traitement développé en annexe B. Toutes les impulsions sont exprimées en unité de $\hbar k_{\text{rec}}$. Les atomes sont majoritairement couplés dans les condensats I et II. Le condensat III est dû à l’imperfection des polarisations des faisceaux. Le condensat IV peut être attribué à un effet de mélange à quatre ondes impliquant les condensats I, II et III. L’origine des autres effets parasites est expliqué dans le corps du texte. (a) Projection sur le plan $(p_x p_z)$. (b) Projection sur le plan $(p_x p_y)$. (c) Projection sur le plan $(p_y p_z)$.

la formation d’un halo clairement visible sur la projection 3.12 (c) sous la forme d’un disque de rayon $\hbar k_{\text{rec}}$. Nous avons eu l’occasion de mentionner un tel phénomène au paragraphe 1.3.2 à l’occasion de la discussion sur les expériences de mélange à quatre ondes atomiques. Nous approfondirons l’étude de ce halo au chapitre suivant. L’origine du condensat IV peut dans le même esprit être attribué à un phénomène de mélange à quatre ondes impliquant les condensats I, II et III. La taille de ce dernier condensat est nettement plus faible que celles des trois autres indiquant que les phénomènes d’amplification à l’origine de son existence restent relativement peu efficace.

Comme dans le cas du transfert Raman décrit au cours du paragraphe précédent, un certain nombre d’effets parasites sont aussi visibles sur la figure. Sur la figure 3.12 (b) on peut ainsi observer une traînée atomique située entre les condensats I et III. L’origine précise de cette traînée reste pour l’heure inconnue. Depuis la mise en place d’un miroir sous vide sur le trajet du faisceau L_1 , nous n’avons plus eu l’occasion d’observer un tel effet. Une traînée un peu moins intense peut aussi être observée entre les condensats II et III.

Efficacité du processus De la même manière que pour le transfert Raman sans réflexion, les instabilités expérimentales du nombre d’atome dans le condensat piégé ainsi que la saturation du détecteur ont rendu difficile l’étude des oscillations de Rabi et l’optimisation du processus. On a tout de même été capable de vérifier que le transfert est moins efficace que dans l’autre configuration. On estime à environ 60% l’efficacité du transfert Raman. Un tel ratio a pu être déduit d’une série d’expériences où l’on a directement cherché à comparer le nombre d’atomes extraits dans les deux configurations. La saturation et les inhomogénéités de gain du détecteur limitent cependant la précision d’une telle étude. Les zones du détecteur sur

lesquelles les condensats tombent sont en effet assez différentes dans les deux situations. Pour optimiser le transfert, nous avons de nouveau joué sur les puissances respectives des faisceaux. Les paramètres optimaux correspondent à une puissance de 55 mW pour le faisceau L_2 et de 80 mW pour le faisceau L_1 . Le faisceau L_2 étant rétro-réfléchi, nous avons donc essentiellement dû diminuer sa puissance par rapport à la configuration précédente de manière à annuler les déplacements lumineux des deux sous-niveaux Zeeman impliqués dans le transfert. La différence d'efficacité entre les deux configurations reste malgré tout imparfaitement comprise.

Sur les figures 3.12, on peut s'apercevoir que le condensat II est plus petit que le condensat I. On peut avancer deux explications pour comprendre un tel effet. D'une part, la zone du MCP sur laquelle le condensat II est détecté possède une efficacité de détection plus faible que celle du condensat I. Cette différence est de l'ordre de 20%. D'autre part, les interfaces en verre sur le parcours du faisceau L_2 diminuent l'intensité de la composante réfléchie : ces interfaces n'étant pas traitées anti-reflet on s'attend à une différence de 16% entre l'intensité du faisceau directe et celle du faisceau réfléchi. Une telle différence est responsable d'un déséquilibre entre les deux composantes du condensat extrait. Ce déséquilibre reste difficile à mesurer avec précision. Nous reviendrons sur ce point au cours du chapitre suivant.

3.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons eu l'occasion d'étudier la mise en place de faisceaux laser destinés à la réalisation d'un transfert Raman du condensat piégé vers le sous-niveau Zeeman $m_x = 0$. Une telle procédure permet de contrôler l'extraction des atomes piégés de manière plus précise que lors d'une coupure violente des champs magnétiques de piégeage. Un certain nombre d'effets parasites ont pu être mis en évidence lors de l'étude d'un tel transfert. En asservissant les faisceaux laser sur la transition vers le niveau 2^3P_0 , la majeure partie de ces effets a pu être évité. Bien que la mesure de l'efficacité du transfert n'ait pas pu être réalisée avec précision du fait des inhomogénéités de détection et des problèmes de saturation du détecteur, l'utilisation d'un tel transfert a malgré tout permis la réalisation de collisions entre deux condensats de Bose-Einstein. L'étude précise des phénomènes impliqués lors de la collision des condensats est décrite au cours du chapitre suivant.

Observation de paires atomiques corrélées

Lors de la collision de deux condensats de Bose-Einstein, une partie des atomes des condensats est diffusée spontanément dans un halo sphérique. La formation d'une telle structure peut s'interpréter simplement comme le résultat de collisions élastiques impliquant un atome de chacun des deux condensats. Cette image classique nous autorise à voir la sphère de diffusion comme formée de multiples paires d'atomes dont les impulsions sont corrélées du fait des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion. Dans ce chapitre, nous nous proposons de démontrer l'existence de ces paires par l'intermédiaire de l'étude de la statistique de la distribution des impulsions des atomes diffusés. Notre travail constitue de ce point de vue l'analogie atomique des expériences de D.C. Burnham et D.L. Weinberg décrites au premier chapitre, qui ont permis la mise en évidence de paires de photons corrélées produites par l'intermédiaire d'un amplificateur paramétrique optique.

Dans un premier temps, nous nous concentrons sur la structure de la sphère de collision observée à la fin du chapitre précédent et tentons d'en expliquer les principales caractéristiques par l'intermédiaire d'un petit modèle classique de collision de nuages de particules ponctuelles. Les données expérimentales, analysées sous cet angle, permettent une première étude quantitative de l'efficacité de la diffusion des atomes pendant la collision des deux condensats. Le modèle développé permet d'interpréter simplement les résultats obtenus. Une étude théorique plus complète, basée sur des modèles complètement quantiques sera développée dans le dernier chapitre de ce manuscrit, permettant de compléter ces prédictions classiques préliminaires.

Ensuite, nous décrivons la façon dont nous avons traité les données expérimentales pour permettre la mise en évidence de corrélations entre les atomes de la sphère de diffusion. Cette étude permet de montrer que nous nous trouvons bien dans un régime où les paires d'atomes sont diffusées spontanément et que nous ne sommes donc que très peu sensibles aux processus d'amplification d'ondes de matière décrits à la fin du premier chapitre. Les paires observées peuvent donc être vues comme des paires d'atomes individuels et se présentent comme de très bons candidats pour l'étude future de phénomènes d'intrication quantique. D'autre part, d'un point de vue quantique, les atomes sont diffusés à l'intérieur de différents modes lors de la collision des deux condensats. Comme pour un oscillateur paramétrique optique, la statistique des atomes dans ces modes est chaotique. Afin de mesurer l'extension de ces modes dans l'espace des impulsions, on peut donc observer les corrélations locales qui relient les atomes de la sphère de diffusion dans l'esprit des mesures d'interférométrie d'intensité réalisées par les

physiciens R. Hanbury Brown et R.Q. Twiss. Cette mesure permet de comparer le volume de cohérence des atomes de la sphère de diffusion au volume de corrélation des paires d'atomes corrélés et d'en déduire plus quantitativement les propriétés de cohérence des atomes de la sphère.

Enfin, nous nous intéressons à l'étude de la réduction des fluctuations de la différence du nombre d'atomes de deux modes de la sphère de diffusion définis par des impulsions opposées. Cette étude est l'analogie atomique des expériences réalisées sur le *squeezing* des faisceaux optiques produits à l'intérieur d'un oscillateur paramétrique optique. Nous proposons une méthode par l'intermédiaire de laquelle une telle réduction des fluctuations peut être mise en évidence. Bien qu'un tel traitement ne permette pas l'observation claire d'un tel effet sur nos données expérimentales, les résultats obtenus restent encourageants et motivent la réalisation de nouvelles expériences.

4.1 Analyse des propriétés de la sphère de diffusion

A la fin du chapitre précédent, nous avons pu observer la présence d'un halo de collision entre les deux condensats de Bose-Einstein extraits par l'intermédiaire des transferts Raman. La figure 4.1 donne ainsi une bonne idée de la structure de ce halo. Avant de regarder ses caractéristiques expérimentales, nous allons développer un petit modèle classique de collision par l'intermédiaire duquel on peut donner une vision simple pour rendre compte de la formation d'une telle structure. Les résultats de ce modèle peuvent ensuite être comparés aux résultats de mesures expérimentales de façon à donner une description plus quantitative des processus impliqués. Au chapitre 5 deux modèles théoriques complètement quantiques sont développés et viennent compléter cette approche classique.

4.1.1 Modèle classique de collision

Deux condensats de Bose-Einstein qui rentrent en collision peuvent être modélisés simplement de façon classique comme deux nuages de particules ponctuelles soumis à des processus de collisions élastiques. Il faut bien voir que cette image est très simpliste et qu'elle ne permet pas de rendre compte de l'ensemble de la dynamique de collision. Les modèles théoriques développés au chapitre 5 permettront de compléter cette approche et d'estimer l'amplitude des effets négligés dans ce petit modèle. Pour l'heure, nous nous en tenons à ce modèle simple qui fournit malgré tout une bonne vision des phénomènes impliqués et par l'intermédiaire duquel on peut aisément obtenir un jeu de données directement comparable aux données expérimentales. Nous développons dans la suite les principaux résultats que l'on peut déduire de cette approche.

A l'issue du transfert Raman, les deux condensats se recouvrent et se déplacent avec des vitesses opposées $\pm \hbar k_{\text{rec}}/m$ dans le référentiel attaché au centre de la collision. Une particule du premier condensat, d'impulsion $\hbar k_{\text{rec}}$, peut subir une collision élastique avec une particule de l'autre condensat, d'impulsion $-\hbar k_{\text{rec}}$. Classiquement, les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion permettent de déterminer les équations auxquelles sont soumises

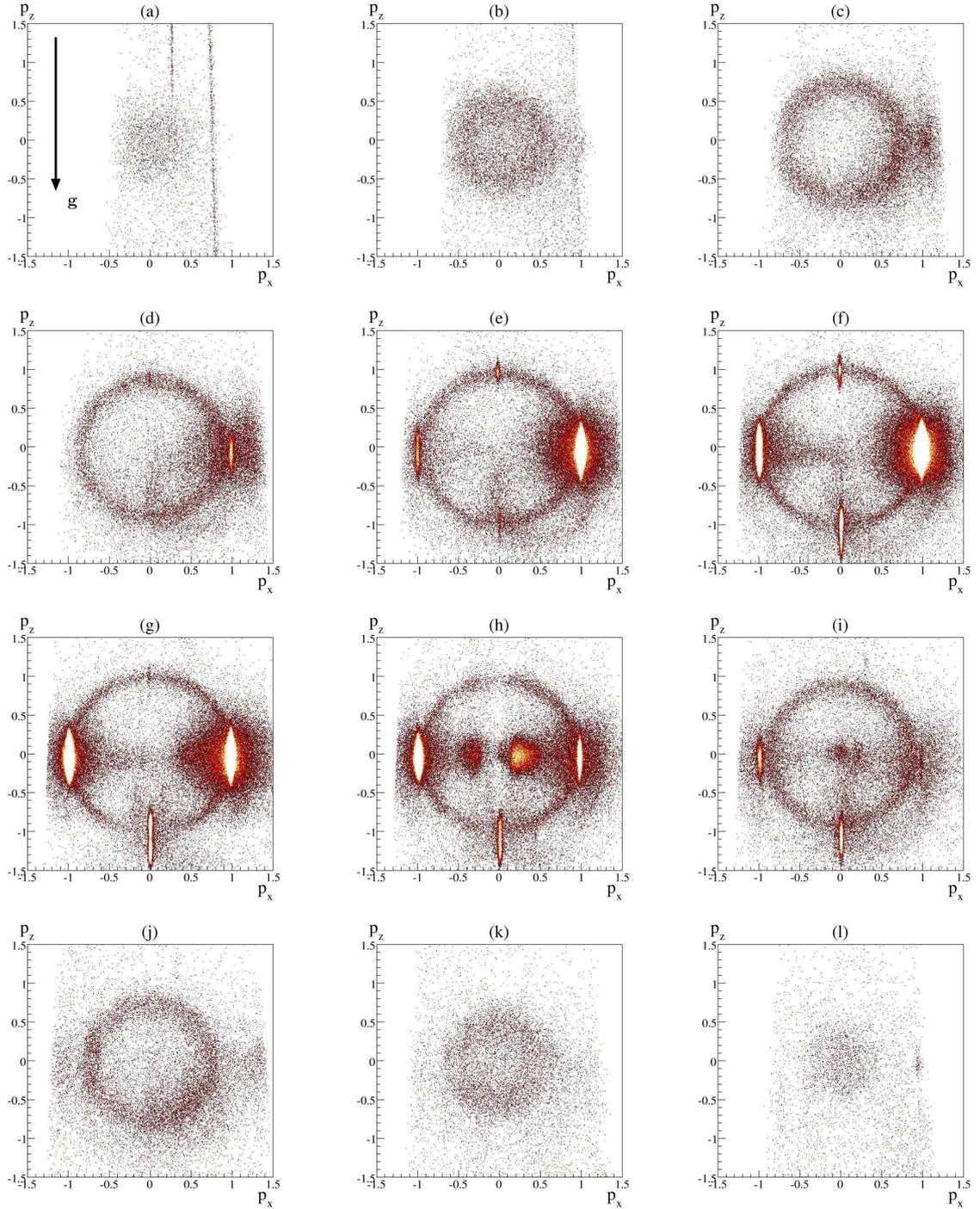


FIG. 4.1 – *Projections de tranches de la sphère de diffusion dans l'espace des impulsions. Pour obtenir de telles images, on a d'abord reconstruit les impulsions des atomes en suivant la méthode décrite dans l'annexe B. Chaque tranche de la sphère correspond à un intervalle de largeur $0.2\hbar k_{\text{rec}}$ suivant l'axe p_y . Les figures de (a) à (l) correspondent à des tranches d'égalles épaisseurs comprises entre $-1.2\hbar k_{\text{rec}}$ et $1.2\hbar k_{\text{rec}}$. Dans le plan $(p_x p_z)$ les impulsions ont été exprimées en unité de $\hbar k_{\text{rec}}$. On a moyenné les résultats sur 350 temps de vol. Le sens de la gravité est indiqué sur la figure (a).*

les impulsions finales des deux particules \mathbf{p}_{1f} et \mathbf{p}_{2f} . On peut en effet écrire que

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f} &= \mathbf{0} \\ \frac{p_{1f}^2}{2m} + \frac{p_{2f}^2}{2m} &= \frac{\hbar^2 k_{rec}^2}{m} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ces équations impliquent que les impulsions \mathbf{p}_{1f} et \mathbf{p}_{2f} sont de modules égaux, $\hbar k_{rec}$, mais de sens opposés. Les atomes qui rentrent en collision se répartissent donc sur une sphère de rayon $\hbar k_{rec}$ dans l'espace des impulsions. Ce raisonnement simple permet de comprendre l'apparition du halo sphérique de collision autour des deux condensats observés à la fin du chapitre 3.

Pour aller un peu plus loin, on peut tenir compte de la largeur initiale de la distribution d'impulsion des atomes des deux condensats. En effet, du fait du principe d'incertitude de Heisenberg, la largeur en impulsion d'un condensat de Bose-Einstein est inversement proportionnel à son extension spatiale. Cet effet va avoir pour conséquence d'élargir la sphère de diffusion, formée des atomes des deux condensats qui sont rentrés en collision. Dans notre cas, les condensats sont anisotropes. Un modèle simple revient à considérer les distributions d'impulsion n_{\pm} des deux condensats de forme gaussienne. On suppose qu'on peut donc les mettre sous la forme suivante

$$n_{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_{yz}^2} e^{-\frac{(p_x \pm p_{rec})^2}{2\sigma_x^2} - \frac{p_y^2 + p_z^2}{2\sigma_{yz}^2}} \quad (4.2)$$

où l'indice \pm repère le sens de propagation du condensat considéré. Pour l'instant, cette forme peut paraître complètement arbitraire. Malgré tout, un calcul numérique complet de la distribution d'impulsion des condensats typiques avec lesquels nous avons travaillé montre qu'une telle forme correspond assez bien à la réalité. Un tel calcul est développé au paragraphe 5.2.1. A partir d'une telle méthode, on peut montrer que les largeurs σ_x et σ_{yz} peuvent s'exprimer en fonction des tailles R_x et R_{yz} des condensats. On verra que pour les tailles typiques des condensats impliqués dans les collisions, on peut écrire que

$$\begin{aligned} \sigma_x &\simeq 2 \frac{\hbar}{R_x} \\ \sigma_{yz} &\simeq 2 \frac{\hbar}{R_{yz}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

La collision des deux condensats de Bose-Einstein peut donc être maintenant modélisée de la façon suivante : les impulsions de deux atomes peuvent être choisies aléatoirement en suivant les distributions d'impulsion des deux condensats. Ce choix correspond à un choix aléatoire des particules qui rentrent en collision pendant le déplacement des deux condensats. Connaissant ces impulsions, on peut écrire les équations de conservation de l'énergie et de l'impulsion sous une forme similaire à celle des équations 4.1. Ces équations permettent de déterminer les caractéristiques de la sphère dans laquelle les deux particules sont diffusées à l'issue de la collision. Il ne reste plus qu'à décider aléatoirement la direction selon laquelle les particules sont diffusées. On obtient ainsi les impulsions finales des deux particules. En répétant ce processus un grand nombre de fois, on peut obtenir une structure approchée de la distribution d'impulsions des atomes diffusés à l'issue de la séparation des condensats, c'est à dire au moment où les processus de collision s'arrêtent.

Un tel modèle néglige un certain nombre d'effets dont nous aurons l'occasion de reparler. D'une part, on considère que toutes les collisions ont lieu au centre du piège magnétique. Cela revient en fait à négliger les extensions spatiales des condensats. Une telle approximation est légitime expérimentalement dans la mesure où nous observons les particules après de longs temps de vol. L'extension initiale des nuages a donc un effet négligeable sur la distribution finale des positions des particules comme nous avons pu le voir au paragraphe 2.4.1¹. D'autre part, nous négligeons les effets du champ moyen pendant l'expansion des condensats. Une telle approximation n'est pas rigoureusement valide. La conversion de l'énergie d'interaction en énergie cinétique pendant l'expansion des condensats va avoir tendance à élargir les distributions n_{\pm} . Nous risquons donc avec un tel modèle de sous-estimer la largeur effective des distributions d'impulsion des condensats. D'un autre côté, en même temps que les nuages s'étendent, la densité des condensats diminue. Comme le nombre de collisions entre atomes est directement relié aux densités des condensats, le taux de collision diminue au cours du temps. Cet effet est donc balancé et on peut donc être tenté de considérer que la majeure partie des collisions ont lieu au début de l'expansion. Pour ne pas alourdir le modèle, nous ne tiendrons pas compte ici des effets du champ moyen pendant l'expansion des condensats. Nous nous contenterons d'en estimer les effets le moment venu (voir le paragraphe 4.1.3).

Ce petit modèle nous permet finalement de simuler très simplement la collision de deux condensats de Bose-Einstein. Dans toute la suite, nous allons systématiquement comparer les résultats expérimentaux aux résultats de ce petit modèle, pour les différentes quantités que nous avons cherché à mesurer. Nous verrons que ce petit modèle permet d'interpréter simplement la majeure partie des résultats obtenus.

4.1.2 Traitement des données des collisions

Exclusion des atomes des condensats Les atomes détectés à l'issue de la collision des deux condensats de Bose-Einstein ne correspondent pas tous à des atomes diffusés lors de la collision : dans la figure 4.1 les données contiennent en effet à la fois les différents condensats de Bose-Einstein que nous avons eu l'occasion de mentionner au paragraphe 3.3.3 ainsi que la sphère de diffusion que nous cherchons à étudier. Le fait d'avoir une information tridimensionnelle sur les atomes détectés permet d'exclure a posteriori les atomes qui appartiennent aux condensats et de définir le volume de la sphère que l'on souhaite conserver dans la suite pour réaliser les différents traitements de données présentés dans ce chapitre. Dans la logique de la procédure décrite en annexe B, nous avons développé une méthode graphique permettant de discriminer entre les différentes populations atomiques. La logique de la procédure est la suivante. A partir des différents paramètres géométriques de l'expérience, on peut connaître a priori la position du centre des différents condensats. En définissant des ellipsoïdes autour de ces différentes positions, on peut choisir parmi les atomes détectés lesquels correspondent à chacun des condensats détectés. Ces données peuvent ensuite être exclues. D'autre part, les mêmes paramètres géométriques permettent de définir la forme de la sphère de collision. Le seul paramètre qui nous reste inconnu pour l'instant et que l'on pourra ajuster dans la suite correspond à la largeur de la sphère que l'on désire conserver. Nous avons en effet men-

¹Nous verrons au paragraphe 4.1.3 que l'extension des condensats doit être prise en compte lorsque l'on cherche à définir la durée de la collision. L'approximation réalisée ici n'est donc valide que du point de vue des positions des particules diffusées après de longs temps de vol.

tionné au paragraphe précédent que la largeur en impulsion des condensats est responsable d'un élargissement du halo sphérique de diffusion dans l'espace des impulsions. En ajustant le paramètre qui permet de définir la largeur du halo de collision que l'on conserve, on peut donc prendre en compte une largeur plus ou moins grande de la sphère de diffusion. Le résultat d'une telle procédure graphique est présenté sur la figure 4.2 pour laquelle les différents paramètres des ellipsoïdes ainsi que le paramètre définissant la largeur de la sphère de diffusion ont été ajustés de manière à ce que sur la figure la sphère de collision apparaisse la plus homogène possible ². Les inhomogénéités résiduelles peuvent être majoritairement attribuées aux inhomogénéités locales de détectivité des MCP. Les gaz thermiques résiduels qui entourent les condensats ainsi que les collisions intervenant entre les condensats parasites du transfert Raman (III et IV sur la figure 3.12) et les condensats principaux (I et II sur la figure 3.12) peuvent éventuellement perturber localement la densité des atomes dans le halo de diffusion. Ces effets ont été négligés de manière à ne pas réduire trop drastiquement le volume de la sphère de collision considérée. Un équilibre a donc dû être trouvé entre les données conservées et les données rejetées. Les résultats présentés dans la suite correspondent donc à une configuration donnée de la procédure d'exclusion.

Largeur de la sphère La méthode graphique précédemment décrite ne permet pas de déterminer efficacement la largeur effective de la sphère de collision. Afin d'obtenir une meilleure estimation de cette valeur, on peut tracer à partir des données reconstruites dans l'espace des impulsions, la distribution du module des impulsions des atomes de la sphère de diffusion. On trace cette distribution après avoir préalablement exclu les atomes qui se trouvent dans les ellipsoïdes que l'on a définies autour des différents condensats visibles sur la sphère de diffusion. La figure 4.3 (a) présente le résultat obtenu en moyennant les données accumulées lors de 350 temps de vol. La distribution obtenue est clairement piquée autour d'une valeur moyenne d'environ $\hbar k_{\text{rec}}$ qui correspond à l'impulsion de recul d'un photon. Cette valeur moyenne correspond bien au rayon de la sphère de diffusion que l'on a pu déterminer à l'aide d'un petit modèle classique. On peut ensuite estimer la largeur de la distribution à l'aide d'un ajustement par une gaussienne. L'ajustement fonctionne correctement en dehors des ailes de la distribution que l'on a dû exclure pour améliorer la qualité du résultat. On réalise l'ajustement dans l'intervalle $0.92 \hbar k_{\text{rec}} \leq p \leq 1.12 \hbar k_{\text{rec}}$. On peut ainsi déterminer une valeur de la largeur de $0.074 \hbar k_{\text{rec}}$. Nous essayerons d'interpréter cette valeur dans la suite. Une autre information intéressante que l'on peut extraire de l'ajustement est la position du centre de la distribution. On trouve que le centre du pic se trouve au niveau de $1.02 \hbar k_{\text{rec}}$. Ce déplacement peut éventuellement être due à la méthode graphique de reconstruction des impulsions : cela reste malgré tout peu probable dans la mesure où on utilise la position du centre des condensats pour définir la largeur $\hbar k_{\text{rec}}$ de la sphère de diffusion. Une erreur de 2% sur la position du centre des condensats serait clairement visible sur les images de l'annexe B. D'autres raisons peuvent aussi être invoquées pour comprendre un tel déplacement : effet de champ moyen, bruit de fond... Nous reviendrons dans la suite sur de tels effets.

²Les paramètres de la collision des deux condensats nous permettent en effet de considérer que la diffusion des atomes a lieu dans l'onde s comme dans les expériences de mélange à quatre ondes atomiques décrites au paragraphe 1.3.2. La diffusion est donc isotrope et on s'attend à ce que la densité des atomes à l'intérieur du halo de collision soit homogène. On verra au paragraphe 5.2.3 que des effets de stimulation bosonique peuvent éventuellement briser cette symétrie. Dans la configuration dans laquelle notre expérience a été réalisée, nous ne sommes a priori pas sensibles à de tels effets.

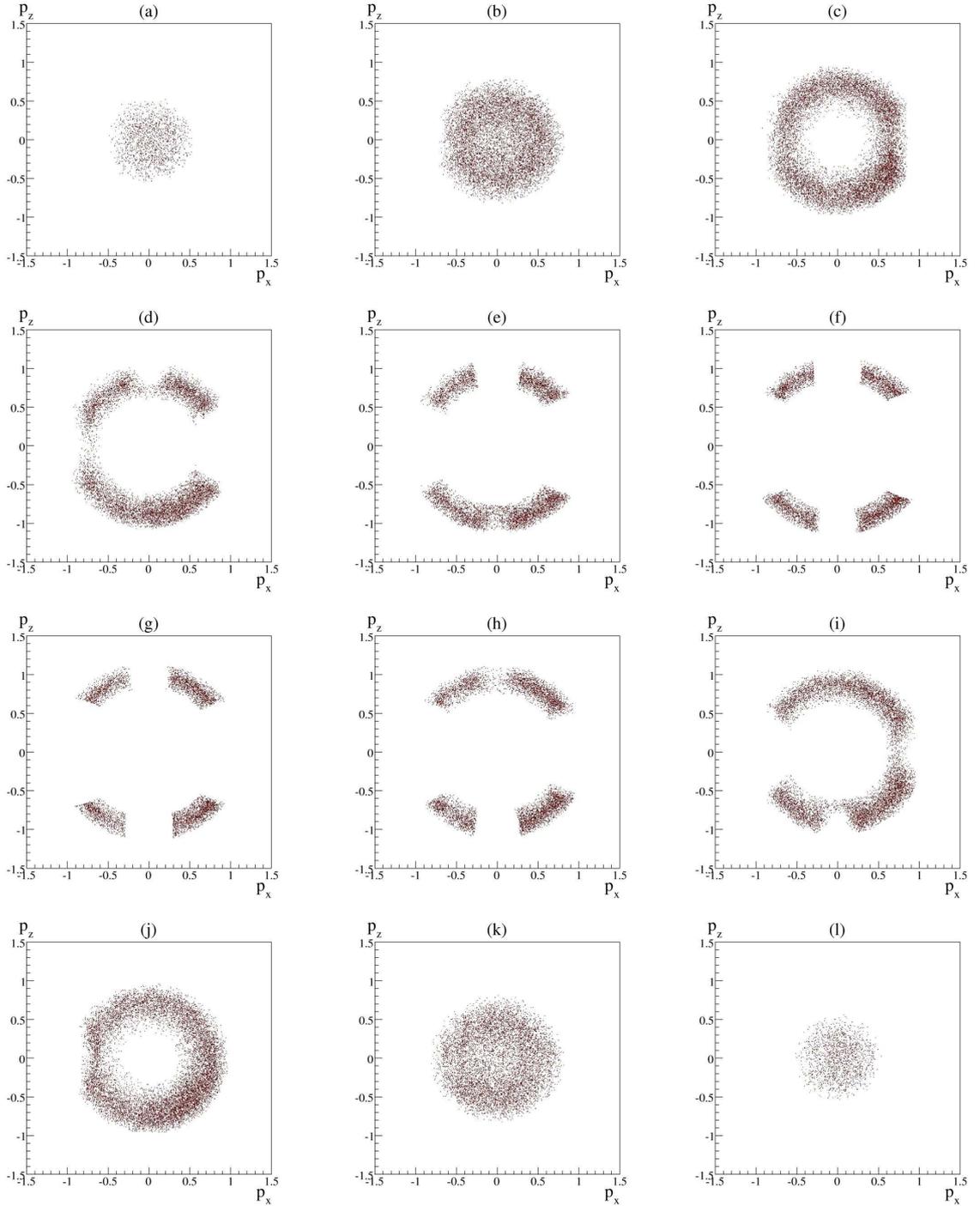


FIG. 4.2 – Projections de tranches de la sphère de diffusion dans l'espace des impulsions. Les données correspondant aux condensats ont été exclues. Une largeur correspondant à $0.15\hbar k_{\text{rec}}$ a été conservée de part et d'autre de la sphère de diffusion. Chaque tranche de la sphère correspond à un intervalle de largeur $0.2\hbar k_{\text{rec}}$ suivant l'axe p_y . Les figures de (a) à (l) correspondent à des tranches d'égalles épaisseurs comprises entre $-1.2\hbar k_{\text{rec}}$ et $1.2\hbar k_{\text{rec}}$. Dans le plan $(p_x p_z)$ les impulsions ont été exprimées en unité de $\hbar k_{\text{rec}}$. On a moyenné les résultats sur 350 temps de vol.

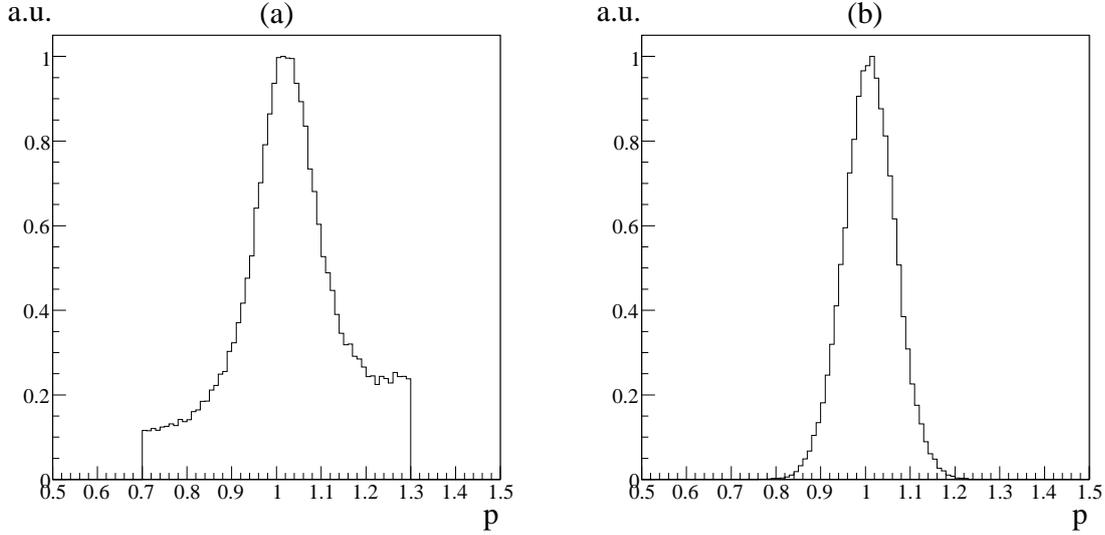


FIG. 4.3 – *Distribution des modules des impulsions des atomes de la sphère de diffusion. Le résultat a été moyenné sur 350 temps de vol contenant en moyenne 150 atomes. Les impulsions sont exprimées en unité de $\hbar k_{\text{rec}}$. La distribution a été arbitrairement normalisée. (a) Données expérimentales. (b) Données obtenues à partir du petit modèle classique de collision.*

On peut comparer ce résultat au petit modèle classique que l'on a développé dans le paragraphe précédent. Pour déterminer les valeurs de σ_x et σ_{yz} , on doit d'abord estimer la forme de la distribution d'impulsion des condensats qui collisionnent. Pour ce faire, on peut utiliser l'approche développée au paragraphe 2.4.2. Les tailles transverses des condensats après temps de vol sont de l'ordre de $0.3 \hbar k_{\text{rec}}$ ce qui correspond approximativement à un nombre d'atomes de 3×10^4 ³. A partir de ce nombre on peut calculer les tailles initiales des condensats et en utilisant la relation 4.3, on peut en déduire les largeurs σ_x et σ_{yz} . On trouve finalement

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 0.0044 \hbar k_{\text{rec}} \\ \sigma_{yz} &= 0.091 \hbar k_{\text{rec}}\end{aligned}\quad (4.4)$$

Une remarque importante ici est due au fait que la résolution moyenne δ du détecteur suivant les axes \mathbf{x} et \mathbf{y} est bien plus grande que σ_x . On a en effet $\delta \simeq 0.01 \hbar k_{\text{rec}}$. Sur le détecteur la distribution des impulsions des atomes après temps de vol est donc élargie du fait de la résolution. On peut voir cet effet comme la convolution de la distribution des impulsions des atomes détectés par la fonction de résolution du détecteur. Pour tenir compte de cet effet sur les données obtenues par l'intermédiaire des simulations classiques, on peut convoluer la distribution d'impulsions obtenue par une gaussienne de largeur définie par δ . Cette gaussienne joue alors le rôle de la fonction de résolution du détecteur.

La figure 4.3 (b) donne le résultat obtenu pour des simulations classiques. Afin de se

³Il faut bien faire attention ici au fait que ce nombre ne correspond pas au nombre d'atomes des condensats qui ont été transféré par les faisceaux Raman mais au nombre total d'atomes dans le piège magnétique. On fait donc l'hypothèse ici que l'énergie de champ moyen a le temps d'être transférée aux atomes avant la séparation des condensats. On verra au paragraphe 4.1.3 qu'une telle hypothèse n'est pas absurde.

placer dans les mêmes conditions que les données expérimentales, on exclut des données les atomes qui se trouvent dans les domaines d'exclusion définis pour les données expérimentales. D'autre part, on s'arrange pour que le nombre total d'atomes obtenus à la fin des simulations corresponde à celui des données expérimentales. En comparant le nombre d'atomes qui appartiennent aux domaines exclus au nombre total d'atomes simulés, on peut déterminer qu'environ 40% des atomes sont exclus du traitement de données. Enfin, sur la figure, on ne tient pas compte des effets dus à la résolution du détecteur. En réalisant le même ajustement que celui réalisé sur les données expérimentales, on trouve une largeur de la distribution de $0.058 \hbar k_{\text{rec}}$. La distribution est bien centrée autour de $\hbar k_{\text{rec}}$. La valeur déterminée au moyen de ce modèle classique pour la largeur en impulsion de la sphère de diffusion correspond qualitativement à celle obtenue par l'intermédiaire des données expérimentales. De plus la valeur déterminée est de l'ordre de grandeur de la largeur σ_{yz} de la distribution d'impulsion des condensats, ce qui tend à prouver que la largeur de la sphère est principalement gouvernée par cette quantité. On peut malgré tout chercher à comprendre l'origine de la différence résiduelle qui subsiste entre les données expérimentales et les résultats des simulations. Si l'on tient compte des effets de résolution du détecteur, la distribution d'impulsion obtenue à l'aide des simulations classiques est de l'ordre de 1% plus large ce qui ne permet pas d'expliquer cette différence. On peut en fait avancer ici comme hypothèse que la différence entre le petit modèle classique et le résultat obtenu expérimentalement est relié aux effets de champ moyen dont on a pas tenu compte ici. Nous allons chercher dans la suite à quantifier un tel effet.

Tenir compte des effets de champ moyen dans le petit modèle classique que l'on a développé complique nettement les choses dans la mesure où cela nous forcerait à prendre en compte les positions spatiales des particules au cours du temps dans la mesure où le potentiel exercé sur les atomes par le champ moyen est inhomogène. On peut tout de même donner un bon ordre de grandeur de son effet sur les atomes sans avoir besoin de réaliser de simulations. A l'issue du transfert Raman, l'énergie cinétique des atomes du condensat est donnée par $\hbar^2 k_{\text{rec}}^2 / 2m$. L'énergie associée au champ moyen est définie par le potentiel chimique du condensat μ . En posant

$$\frac{p_{\text{eff}}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_{\text{rec}}^2}{2m} + \mu \quad (4.5)$$

et en calculant la valeur de μ pour un condensat de 3×10^4 atomes, on obtient que $p_{\text{eff}} \simeq 1.03 \hbar k_{\text{rec}}$. La contribution du champ moyen correspond donc à un élargissement de l'ordre de 3% de la distribution initiale des impulsions des atomes diffusés. Cet effet peut d'ailleurs être éventuellement à l'origine du déplacement du centre de la distribution des impulsions des atomes obtenue expérimentalement ($1.02 \hbar k_{\text{rec}}$, voir plus haut). Les effets de champ moyen expliquent donc en partie la largeur de la distribution d'impulsion observée.

Un dernier effet qui peut éventuellement être responsable d'un élargissement de la distribution des impulsions correspond au bruit résiduel qui apparaît sous la forme d'ailerons dans les données expérimentales. Ces ailerons peuvent être majoritairement attribués aux nuages thermiques résiduels ⁴ qui entourent les différents condensats mais aussi éventuellement à

⁴Les collisions ont été réalisées avec des condensats quasi-purs. Malgré tout, il semble que le transfert Raman soit responsable de la formation d'une phase thermique autour des condensats. Le transfert entraîne donc vraisemblablement un léger chauffage des nuages piégés. D'autre part, les instabilités sur le nombre d'atomes piégés peuvent aussi contribuer à cet effet dans la mesure où l'importance de la phase non condensée varie d'une réalisation à l'autre en raison de ces instabilités.

d'autres effets complexes dus à la dynamique des collisions (collisions entre les condensats principaux et les condensats parasites...) A en croire les images, on a l'impression que de l'ordre de 10% des atomes détectés contribuent à ce bruit. L'origine de ce bruit étant difficile à déterminer précisément, nous n'avons pas été capable de quantifier l'amplitude de leur contribution au pic central de la distribution des impulsions : les nuages thermiques résiduels étant nettement moins dense que les condensats, on peut raisonnablement penser que les atomes qui contribuent à ce pic sont essentiellement issus de collisions entre atomes de la phase condensée. Dans la suite on impose toutefois aux atomes d'avoir une impulsion comprise entre $0.92\hbar k_{\text{rec}} \leq p \leq 1.12\hbar k_{\text{rec}}$ de façon à limiter au maximum les effets de ce bruit sur les traitements ultérieurs.

On a pu montrer ici à l'aide d'un petit modèle classique que la largeur de la distribution d'impulsion des atomes de la sphère est assez bien reliée à la largeur de la distribution d'impulsion initiale des condensats, imposée elle même par le principe d'incertitude de Heisenberg. Les effets de champ moyen totalement négligés dans notre approche classique des collisions sont en partie à l'origine des différences observées entre les données expérimentales et le modèle. Les différences résiduelles peuvent éventuellement être attribuées aux nuages thermiques qui entourent les condensats impliqués dans la collision.

4.1.3 Nombre d'atomes dans la sphère de diffusion

Dans les paragraphes précédents nous avons pu définir le domaine de l'espace des impulsions à l'intérieur duquel on peut considérer que les atomes détectés correspondent très majoritairement aux atomes diffusés par l'intermédiaire de la collision des deux condensats. Ici nous allons vérifier que le nombre d'atomes détectés dans cet espace reste cohérent avec les paramètres expérimentaux des condensats étudiés. On peut en effet prédire à l'aide d'un petit modèle de collision le nombre d'atomes diffusés lors de la collision de deux condensats de taille donnée. Après avoir explicité un tel modèle, nous pourrons confronter les données expérimentales aux résultats prédits.

Modèle de collision Nous avons mentionné au paragraphe 1.3.1 qu'en dessous de la vitesse du son $c_s = \sqrt{\mu/m}$, les excitations générées par une impureté qui traverse un condensat entraînent la formation de quasi-particules qui se propagent à l'intérieur du condensat. Pour que les excitations générées correspondent à la formation de particules libres, il faut que la vitesse de collision soit plus grande que la vitesse du son. Dans notre situation, la vitesse relative des deux condensats qui rentrent en collision, $2\hbar k_{\text{rec}}/m$, est de l'ordre de 8 fois plus grande que la vitesse du son associée aux tailles typiques de nos condensats⁵. On se trouve donc bien dans un régime d'excitation de particules libres. On peut à partir de là déduire la probabilité qu'un atome d'un des deux condensats rentre en collision avec un atome de l'autre condensat. Une approche basée sur [66] permet d'écrire que le taux de collision Γ d'un atome peut se mettre sous la forme

$$\Gamma = n\sigma_0 v \tag{4.6}$$

⁵On prend ici comme référence des condensats de 3×10^4 atomes.

où n est la densité du condensat avec lequel l'atome rentre en collision, σ_0 est la section efficace de diffusion et $v = 2\hbar k_{\text{rec}}/m$ est la vitesse relative des deux condensats. Pour des particules indiscernables, $\sigma_0 = 8\pi a_{0-0}^2$, où a_{0-0} est la longueur de diffusion associée aux atomes dans le sous niveau $m_x = 0$ ⁶. Pour des condensats de l'ordre de 10^4 atomes, la densité est de l'ordre de 10^{18} m^{-3} , et on peut alors estimer que Γ est de l'ordre de 500 collisions par seconde. Pour éviter les problèmes de collisions multiples, il faut vérifier que l'on se trouve bien dans une situation où $\Gamma t_{\text{coll}} \ll 1$, où t_{coll} est la durée de la collision, de manière à ce qu'un atome ne subisse au maximum qu'une seule collision pendant la séparation des condensats. Nous estimons dans la suite la durée de la collision.

Afin de déterminer le nombre total d'atomes diffusés pendant la collision des condensats, on peut se baser sur une approche décrite dans [109]. Les auteurs de cet article ont montré qu'une bonne estimation du nombre $N_{\text{coll}}(t)$ d'atomes diffusés pendant la collision de deux condensats de Bose-Einstein de densité $n_1(\mathbf{r}, t)$ et $n_2(\mathbf{r}, t)$ peut se mettre sous la forme suivante

$$N_{\text{coll}}(t) = 2 \int_0^t dt' \int d\mathbf{r} \sigma_0 \frac{2\hbar k_{\text{rec}}}{m} n_1(\mathbf{r}, t') n_2(\mathbf{r}, t') \quad (4.7)$$

où le facteur 2 tient compte du fait que 2 atomes sont diffusés à chaque collision. Les densités n_1 et n_2 dépendent du temps ce qui permet de prendre en compte deux effets distincts : d'une part les condensats ayant une vitesse relative de $2\hbar k_{\text{rec}}/m$, le recouvrement des condensats évolue au cours du temps. Après une certaine durée, les condensats sont clairement séparés dans l'espace libre et il n'y a plus de collisions. La séparation des condensats ayant lieu expérimentalement suivant leur axe long, on peut estimer que pour les tailles typiques de nos condensats cette séparation intervient au bout de 1 ms. Le deuxième effet que l'on peut prendre en compte correspond à l'expansion des nuages. Sous l'effet du champ moyen, les nuages explosent essentiellement transversalement. La dynamique d'une telle explosion a été étudiée au paragraphe 2.4.2. On peut tenir compte de cet effet pour déterminer l'évolution des densités n_1 et n_2 .

La figure 4.4 (a) présente le résultat obtenu pour la collision de deux condensats de 10^4 atomes. On peut remarquer qu'après $150 \mu\text{s}$, la majeure partie des collisions a eu lieu. Ceci signifie que l'expansion des condensats est le facteur qui limite la durée de la collision. Ainsi, on peut considérer que la collision des condensats est terminée avant leur séparation spatiale. Ceci permet d'estimer que $t_{\text{coll}} \sim 150 \mu\text{s}$ et donc que le nombre de collisions par atome est bien inférieur à 1. D'autre part, environ 10% des atomes des deux condensats sont diffusés par collision. Le transfert Raman à trois faisceaux ayant une efficacité de l'ordre de 60%, ceci correspond à environ 5% des atomes initialement piégés. La figure 4.4 (b) donne le nombre total d'atomes diffusés en fonction du nombre d'atomes N de chacun des deux condensats qui rentrent en collision. Le ratio du nombre d'atomes diffusés sur le nombre d'atomes initial des condensats a tendance à augmenter. Il faut faire attention ici que le modèle ne tient pas compte de la déplétion des condensats au cours de la collision. Ceci aura tendance à diminuer le nombre d'atomes diffusés. Tant que le nombre d'atomes diffusés n'est pas trop grand par rapport au nombre d'atomes des condensats, un tel effet reste faible : pour des condensats de l'ordre de 10^4 atomes, ce modèle ne pose pas de problèmes. D'autre part, ce modèle ne tient

⁶Cette formule est vérifiée pour des collisions de basse énergie, c'est à dire tant que $ka_{0-0} \ll 1$, où k est le vecteur d'onde associé à un atome. On peut vérifier ici que $k_{\text{rec}} a \sim 0.03$, ce qui valide l'expression utilisée pour la section efficace.

pas compte non plus des effets de stimulation bosonique. Tant que le nombre d'occupation des différents modes de diffusion de la collision est plus petit que 1, de tels effets doivent rester faibles. Dans la mesure où un tel effet est difficilement quantifiable pour l'instant, on va considérer ici que les nombres prédits par ce modèle correspondent malgré tout au bon ordre de grandeur du nombre d'atomes réellement diffusés dans le halo de collision. Une telle hypothèse sera confirmée dans la partie suivante, où l'on sera capable d'estimer le nombre d'occupation des modes de la sphère de diffusion.

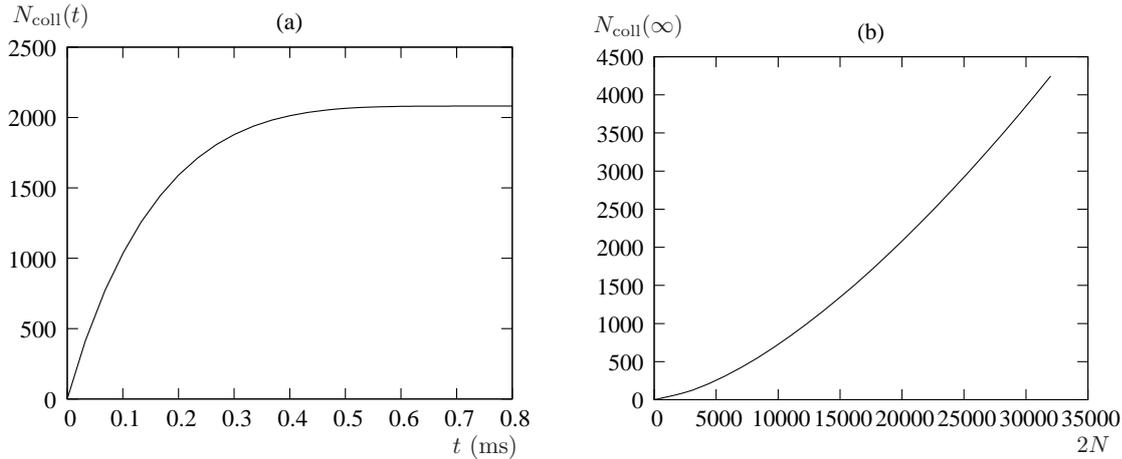


FIG. 4.4 – (a) Nombre d'atomes diffusés N_{coll} en fonction du temps lors de la collision de deux condensats de 10^4 atomes. (b) Nombre total d'atomes diffusés après la collision en fonction du nombre N d'atomes dans chacun des deux condensats.

Distribution du nombre de coups détectés dans la coquille de diffusion On peut s'intéresser maintenant à la statistique du nombre d'atomes détectés au fur et à mesure des 1108 réalisations de l'expérience de collision et comparer les résultats obtenus aux prédictions du modèle du paragraphe précédent. Après avoir exclu les atomes des condensats ainsi que tous les atomes dont les impulsions ne vérifient pas $0.92\hbar k_{\text{rec}} \leq p \leq 1.12\hbar k_{\text{rec}}$, on peut tracer l'histogramme du nombre N_d d'atomes détectés au cours des différentes réalisations de l'expérience. La figure 4.5 (a) présente le résultat obtenu. Le nombre moyen d'atomes détectés est de 140. On se rend compte ici que ce nombre fluctue de façon importante d'une réalisation à l'autre : la distribution s'étale d'environ 30 à 300 atomes détectés. Dans la mesure où on exclue de l'ordre de 40% de la sphère et que la détectivité du détecteur est en moyenne de 10%, on peut estimer que l'on a en moyenne 2300 atomes dans la sphère de diffusion. Dans le modèle du paragraphe précédent, un tel chiffre correspond à la collision de deux condensats de 10^4 atomes ce qui reste cohérent avec les estimations effectuées précédemment.

La figure 4.5 (b) présente la distribution du nombre d'atomes détectés pour le condensat d'impulsion $p_x = \hbar k_{\text{rec}}$. Pour tracer cette distribution, on a défini une ellipsoïde centrée sur la position du condensat et dont les rayons correspondent aux rayons de Thomas-Fermi d'un condensat de 3×10^4 atomes ⁷. On peut ensuite compter les atomes détectés à l'intérieur

⁷Suivant l'axe \mathbf{x} , le rayon de Thomas-Fermi calculé est bien plus court que la résolution δ du détecteur. Le rayon de l'ellipsoïde suivant cet axe a donc été fixé à la valeur de $\delta = 0.01\hbar k_{\text{rec}}$.

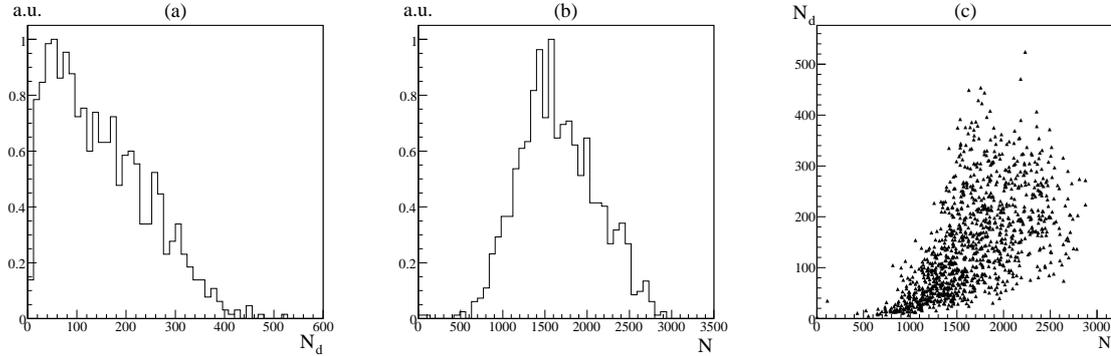


FIG. 4.5 – (a) Distribution du nombre N_d d’atomes détectés dans la sphère de diffusion. (b) Distribution du nombre N d’atomes détectés dans le condensat d’impulsion $p_x = \hbar k_{\text{rec}}$. (c) Graphique bidimensionnel où l’on a placé pour chaque réalisation de l’expérience le point de coordonnées (N, N_d) .

de l’ellipsoïde pour chaque réalisation. Le nombre moyen d’atomes détectés est d’environ 1500. D’autre part les fluctuations sur ce nombre sont du même ordre de grandeur que celles mesurées pour le nombre d’atomes dans la sphère de diffusion. En prenant en compte les 10% d’efficacité de détection des MCP, on peut estimer qu’on a en moyenne de l’ordre de 1.5×10^4 atomes dans ce condensat. Ce chiffre ne tient pas du tout compte de l’éventuelle saturation du détecteur. Le nombre d’atomes estimé est donc a priori sous-évalué. Il est en revanche difficile de donner une meilleure estimation de ce nombre sans une connaissance plus profonde des effets de saturation locaux du détecteur. La taille du condensat détecté étant cohérente avec un nombre d’atomes de 10^4 , on peut donc faire l’hypothèse que les effets de saturation ne sont pas trop importants à l’endroit où tombe ce condensat. Si l’on s’intéresse maintenant à la distribution du nombre de coups dans le deuxième condensat, on obtient sensiblement le même résultat, si ce n’est que le nombre moyen d’atomes détectés est plutôt de l’ordre de 750. On sait que l’efficacité du transfert Raman pour ce condensat est un peu moins bonne que pour l’autre mais ceci n’explique pas entièrement le facteur 2 mesuré entre les nombres d’atomes détectés pour les deux condensats. On s’attendrait plutôt à des effets de l’ordre de 20%. Les inhomogénéités spatiales de l’efficacité de détection des MCP peuvent être responsables de la différence résiduelle. Si l’on compare l’efficacité relative des zones où les deux condensats sont détectés, on s’attend en fait plutôt à des différences de l’ordre de 20% dans le bon sens : la détectivité de la zone du plus petit des deux condensats est en moyenne plus faible que l’autre. Les différences résiduelles doivent donc être liées à la saturation du détecteur qui est en général plus forte dans les zones où la détectivité est la moins bonne. De cette étude il ressort qu’on peut confirmer que le nombre d’atomes des condensats qui collisionnent est bien en moyenne de l’ordre de 10^4 atomes. D’autre part, les fluctuations sur ce nombre sont importantes : les nombres d’atomes des condensats doivent vraisemblablement s’étaler de quelques 10^3 à plusieurs 10^4 atomes.

Enfin, pour vérifier que le nombre d’atomes des condensats et le nombre d’atomes détectés dans la sphère de diffusion sont bien corrélés, on a tracé en figure 4.5 (c), le nombre d’atomes détectés dans la sphère, N_d , en fonction du nombre d’atomes détectés dans le plus gros des deux condensats, N . La dépendance de N_d par rapport à N apparaît assez clairement. On

s'attend d'après le modèle du paragraphe précédent à ce que N_d soit proportionnel à N^2 . Même si les données ne permettent pas de démontrer clairement un tel résultat, le graphique obtenu est cohérent avec ce modèle.

4.2 Analyse des corrélations sur la sphère de collision

Comme indiqué à la fin du premier chapitre de ce manuscrit, les atomes diffusés dans la sphère de collision sont fortement corrélés. On s'attend en fait à pouvoir démontrer l'existence de paires corrélées formées de deux atomes ayant des vitesses relatives opposées dans le référentiel de la collision, en analogie avec les expériences réalisées par D.C. Burnham et D.L. Weinberg pour un amplificateur paramétrique optique. Pour ce faire, notre optique a été de mesurer des coïncidences des détection. Cette mesure revient à étudier les propriétés de la fonction de corrélation du second ordre $g^{(2)}$. Nous détaillons ici la procédure d'analyse que nous avons suivie pour arriver à nos fins. Cette procédure s'inspire largement de la procédure de mesure des corrélations décrite dans le manuscrit de M. Schellekens [46].

4.2.1 Position du problème

Une fois les atomes reconstruits dans le référentiel de la collision, nous avons individuellement accès à leur impulsion \mathbf{p} . Ces données nous permettent aisément de mesurer pour chaque réalisation de l'expérience le nombre de coïncidences de détection d'atomes d'impulsions \mathbf{p} et $\mathbf{p}' : n_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$. En moyennant ce nombre sur différentes réalisations, on a alors accès au nombre moyen de coïncidences de détection d'atomes d'impulsion \mathbf{p} et $\mathbf{p}' : \bar{n}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$. On peut de la même manière mesurer le nombre moyen d'atomes détectés d'impulsion $\mathbf{p} : \bar{n}_{\mathbf{p}}$. Le produit $\bar{n}_{\mathbf{p}}\bar{n}_{\mathbf{p}'}$ nous renseigne alors sur le nombre moyen de coïncidences de détection fortuites. Ce nombre correspond au nombre de coïncidences que l'on obtiendrait en l'absence de corrélation entre les atomes d'impulsion \mathbf{p} et \mathbf{p}' , ou autrement dit en considérant tous les atomes de la sphère complètement indépendants les uns des autres. Comparer le taux mesuré $\bar{n}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ au produit $\bar{n}_{\mathbf{p}}\bar{n}_{\mathbf{p}'}$ nous permet alors de mettre en évidence les corrélations éventuelles qui relient les atomes de la sphère de collision. Cette comparaison revient en fait à calculer la fonction $g^{(2)}$ dont l'expression peut se mettre sous la forme

$$g^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{\bar{n}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}}{\bar{n}_{\mathbf{p}}\bar{n}_{\mathbf{p}'}} \quad (4.8)$$

dans laquelle $\bar{n}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ représente en fait $G^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$. Nous savons déjà qu'une fonction $g^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ différente de 1 est la signature indéniable de l'existence de corrélations entre les atomes d'impulsion \mathbf{p} et \mathbf{p}' . L'image classique des collisions atomiques impose que pour chaque atome d'impulsion \mathbf{p} détecté, il existe dans la sphère de collision un atome d'impulsion $-\mathbf{p}$ du fait de la conservation de l'énergie et de l'impulsion lors d'une collision. On s'attend donc à ce que $g^{(2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p})$ soit plus grand que 1 du fait de ces corrélations. Nous avons donc cherché à observer un tel phénomène sur nos données expérimentales.

Le fait que le nombre d'atomes détectés à chaque réalisation soit relativement petit nous empêche cependant d'obtenir une statistique suffisante pour réaliser la mesure de $g^{(2)}$ pour

tous les couples d'impulsions \mathbf{p} et \mathbf{p}' . Nous avons donc été forcé de mesurer une moyenne de la fonction $g^{(2)}$. Le point de départ de notre mesure consiste à s'intéresser à la fonction

$$\overline{G}^{(2)}(\delta\mathbf{p}) = \int d^3\mathbf{p} G^{(2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}) \quad (4.9)$$

où l'intégrale est effectuée sur un volume correspondant à celui de la sphère de diffusion. On considère donc ici que toutes les paires \mathbf{p} et $-\mathbf{p}$ sont corrélées de la même façon, autrement dit que $G^{(2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} + \delta\mathbf{p})$ est indépendant de \mathbf{p} . Cette hypothèse n'est en fait pas rigoureusement vérifiée. On aura l'occasion au chapitre 5 de détailler un peu plus précisément les effets d'un tel moyennage. La logique de la méthode suivie reste cependant valide et n'affecte pas les conclusions de ce chapitre. On peut aussi définir une forme normalisée de cette fonction sous la forme

$$\overline{g}^{(2)}(\delta\mathbf{p}) = \frac{\int d^3\mathbf{p} G^{(2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} + \delta\mathbf{p})}{\int d^3\mathbf{p} \overline{n}_{\mathbf{p}} \overline{n}_{-\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}}} \quad (4.10)$$

La fonction $\overline{g}^{(2)}$ permet de rendre de compte globalement des propriétés de corrélation de la sphère de collision. Pour $\delta\mathbf{p}$ proche de zéro, on s'attend à ce que $\overline{g}^{(2)}$ soit strictement plus grande que 1 permettant de conclure à un excès de coïncidences de détection correspondant à l'existence de paires d'atomes corrélés d'impulsions opposées.

4.2.2 Détail de la procédure

Histogramme des coïncidences de détection La première étape de la procédure de mesure des corrélations consiste à construire un histogramme tridimensionnel (3D) de la somme des impulsions de toutes les paires atomiques détectées lors d'une réalisation de l'expérience de collision. Concrètement, cela consiste à calculer pour chaque paires d'atomes détectés lors d'un temps de vol la somme $\delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ de leurs impulsions respectives et d'incrémenter de 1 la case correspondante de l'histogramme. Chaque case de l'histogramme correspond à un volume cubique de l'espace des impulsions. On peut ensuite sommer tous les histogrammes correspondant à différentes réalisations de l'expérience. Pour un grand nombre de réalisations, la distribution obtenue tend vers $\overline{G}^{(2)}(\delta\mathbf{p})$. Un point important ici correspond au fait que l'on n'affecte pas de poids aux différents histogrammes sommés malgré les différences de nombre d'atomes détectés à chaque réalisation. Cette procédure permet une maximisation du rapport signal sur bruit [46]. Chaque paire détectée a donc autant de poids dans l'histogramme final. Nous discuterons des effets liés à ce choix au moment de l'analyse des résultats.

Pour que le bruit sur la mesure ne soit pas trop important, la taille des cases de l'histogramme doit être suffisamment grande de manière à ce que le nombre moyen de paires par case soit grand devant 1. Il ne faut cependant pas que les cases soient grandes devant la largeur de la corrélation que l'on s'attend à observer. Idéalement cette taille doit être aussi plus petite ou au moins de l'ordre de la résolution du détecteur. Un bon compromis a été de choisir des cases d'arête $0.02\hbar k_{rec}$.

La figure 4.6 présente le résultat obtenu pour $\overline{G}^{(2)}(\delta\mathbf{p})$ lors du moyennage de 1108 réalisations de l'expérience de collision. Dans la mesure où le tracé d'un histogramme 3D est impossible, nous avons tracé des projections bidimensionnelles calculées à partir de l'histogramme complet. La forme des distributions obtenues est essentiellement reliée à la forme

de la sphère elle-même, qui est d'ailleurs relativement complexe dans la mesure où l'on a dû en retirer certaines parties pour s'affranchir des condensats. En d'autres termes, de telles distributions rendent compte à la fois des corrélations des paires d'atomes que l'on cherche à mettre en évidence mais aussi et très certainement majoritairement, des coïncidences fortuites de deux atomes. On s'attend donc à ce que ces projections rendent compte aussi de la forme de $\int d^3\mathbf{p} \bar{n}_{\mathbf{p}}\bar{n}_{-\mathbf{p}+\delta\mathbf{p}}$. Cette dernière contribution est en fait majoritaire. Pour s'en rendre compte on peut faire le raisonnement suivant : dans un volume donné de l'histogramme, le nombre de coïncidences fortuites va comme le carré du nombre d'atomes détectés dans la sphère au cours d'une réalisation (il s'agit en fait du facteur $n_{\mathbf{p}}n_{\mathbf{p}'}$). En revanche le nombre de coïncidences correspondant à des paires d'atomes qui ont subi une collision l'un avec l'autre est juste proportionnel au nombre d'atomes de la sphère de diffusion. Leur contribution est donc largement minoritaire dès que $n_{\mathbf{p}}$ est plus grand que 1. Pour s'affranchir de cet effet et faire ressortir les corrélations que l'on désire démontrer, on doit donc normaliser la distribution ⁸.

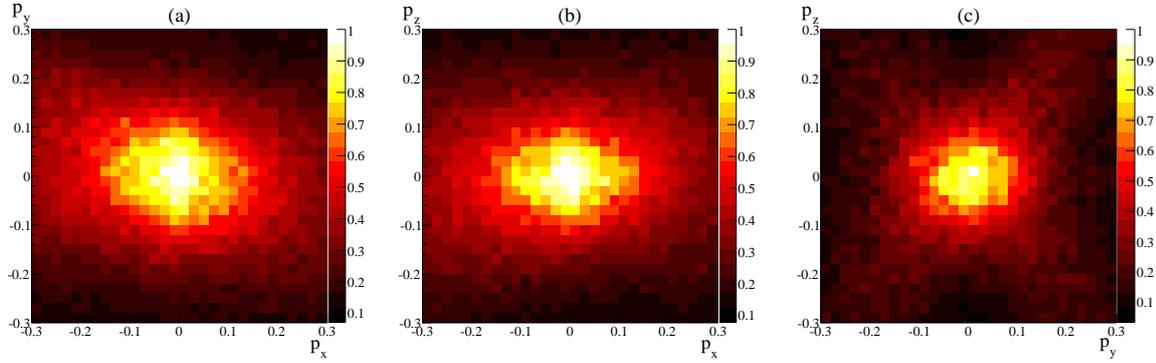


FIG. 4.6 – Projections de la fonction $\bar{G}^{(2)}(\delta\mathbf{p})$. La fonction est intégrée entre $-0.1\hbar k_{\text{rec}}$ et $0.1\hbar k_{\text{rec}}$ suivant la direction orthogonale au plan de projection. (a) Projection sur le plan $(p_x p_y)$. (b) Projection sur le plan $(p_x p_z)$. (c) Projection sur le plan $(p_y p_z)$.

Normalisation de l'histogramme des corrélations Afin d'obtenir la fonction $\bar{g}^{(2)}$, il nous reste à estimer le facteur de normalisation défini comme le dénominateur de l'expression 4.10. Calculer un tel facteur revient à estimer le nombre de coïncidences d'une sphère de collision ayant la même densité que les sphères obtenues expérimentalement mais composée d'atomes indépendants les uns des autres, autrement dit complètement décorrélés. Une façon de créer une telle sphère consiste à sommer tous les temps de vol obtenus. Les différentes réalisations de l'expérience étant complètement indépendantes les unes des autres, les atomes qui les composent le sont aussi.

Cette dernière remarque n'est cependant pas tout à fait vraie dans la mesure où au sein de chaque réalisation les atomes détectés ne sont pas indépendants. On peut en fait estimer l'influence de ces corrélations résiduelles. Si l'on appelle N_i le nombre d'atomes détectés dans

⁸Lors de l'étude de l'effet Hanbury Brown et Twiss rapportée dans le manuscrit de M. Schellekens [46], la forme de la fonction $G^{(2)}$ mesurée est essentiellement due à la distribution spatiale des atomes des nuages thermiques. Une procédure de normalisation a donc aussi dû être mise en place de façon à bien faire ressortir l'effet des corrélations. La normalisation est d'autant plus indispensable ici dans la mesure où nous verrons que la largeur des corrélations est du même ordre de grandeur que la largeur de la fonction $G^{(2)}$, ce qui n'était pas le cas dans les expériences rapportées dans [46]

la sphère lors de la $i^{\text{ème}}$ réalisation de l'expérience, le nombre de coïncidences de détection correspondant va comme le carré de N_i . En sommant sur toutes les réalisations, on peut ainsi déduire que le nombre total de coïncidences, correspondant en fait au nombre de fois que l'on a incrémenté l'histogramme du paragraphe précédent, va comme $\sum_i N_i^2$. On peut comparer cette expression au nombre de coïncidences de la sphère qui contient tous les temps de vol. Ce dernier va dans ce cas comme $(\sum_i N_i)^2$. En appelant \bar{N} le nombre moyen d'atomes détectés pour une réalisation et D le nombre total de réalisation on a

$$\frac{\sum_i N_i^2}{(\sum_i N_i)^2} \sim \frac{D\bar{N}^2}{D^2\bar{N}^2} = \frac{1}{D} \quad (4.11)$$

Pour un grand nombre de réalisation, l'influence des corrélations résiduelles peut donc être rendue complètement négligeable. Dans notre situation, nous avons moyenné sur 1108 temps de vol et cette méthode ne devrait donc pas souffrir de cette limitation⁹.

Une fois que l'on a sommé les différents temps de vol réalisés, on peut donc calculer sur cette sphère la fonction $\bar{G}_{\text{tot}}^{(2)}(\delta\mathbf{p})$ en utilisant la même méthode que celle qui est décrite au paragraphe précédent. L'histogramme obtenu peut donc être utilisé pour obtenir la fonction $\bar{g}^{(2)}$ moyennant un facteur de renormalisation qui tient compte du ratio du nombre de coïncidences de détection des fonctions $\bar{G}^{(2)}(\delta\mathbf{p})$ et $\bar{G}_{\text{tot}}^{(2)}(\delta\mathbf{p})$:

$$\bar{g}^{(2)}(\delta\mathbf{p}) = \frac{\bar{G}^{(2)}(\delta\mathbf{p})}{\bar{G}_{\text{tot}}^{(2)}(\delta\mathbf{p})} \times \frac{(\sum_i N_i)^2}{\sum_i N_i^2} \quad (4.12)$$

Un de avantages de cette méthode de normalisation vient du fait qu'elle est peu sensible aux inhomogénéités spatiales de la détectivité des MCP. Pour montrer cela, on peut faire le raisonnement suivant. En notant $\epsilon_{\mathbf{p}}$ la détectivité associée à la zone des MCP qui détecte les atomes d'impulsions \mathbf{p} , on peut écrire que

$$G^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \epsilon_{\mathbf{p}}\epsilon_{\mathbf{p}'}\bar{n}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \quad (4.13)$$

où on va considérer ici que $\bar{n}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ est le taux de coïncidences d'atomes d'impulsions \mathbf{p} et \mathbf{p}' d'un détecteur possédant une efficacité de détection de 100%. Le moyennage que l'on réalise pour calculer $\bar{G}^{(2)}$ revient en fait à considérer que $\bar{n}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ ne dépend que de $\delta\mathbf{p} = \mathbf{p} + \mathbf{p}'$. Comme précédemment mentionné, cette hypothèse n'est vraie que dans une certaine mesure. On va supposer ici qu'elle est parfaitement vérifiée. Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} \bar{G}^{(2)}(\delta\mathbf{p}) &= \int d^3\mathbf{p} \epsilon_{\mathbf{p}}\epsilon_{\mathbf{p}'}\bar{n}_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \\ &= \bar{n}_{\delta\mathbf{p}} \int d^3\mathbf{p} \epsilon_{\mathbf{p}}\epsilon_{\mathbf{p}'} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Le même raisonnement étant vrai aussi pour $\bar{G}_{\text{tot}}^{(2)}$, au moment de la normalisation les intégrales dépendant de la détectivité locale des MCP se simplifient. Le résultat final est donc indépendant de $\epsilon_{\mathbf{p}}$.

⁹Il existe en fait une autre méthode pour s'affranchir de cet effet. Elle consiste à ne pas tenir compte des coïncidences correspondant à deux atomes d'un même temps de vol. Ainsi, on ne s'intéresse vraiment qu'aux coïncidences d'atomes complètement indépendants. Le fait que les corrélations résiduelles n'ont que peu d'effet sur le résultat final n'améliore en fait pas sensiblement le résultat.

4.2.3 Résultats obtenus

Le résultat du traitement des corrélations est présenté sur la figure 4.7. A partir de l'histogramme normalisé calculé à l'aide des données de 1108 temps de vol, on a tracé différentes projections de la fonction $\bar{g}^{(2)}$ suivant les différents axes propres de l'expérience. Sur la figure, on observe clairement un pic de corrélation en $\delta\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Ce pic peut s'interpréter comme une preuve de l'existence de paires d'atomes corrélés d'impulsions opposées. En effet, $\bar{g}^{(2)}(\mathbf{0}) > 1$, ce qui correspond à un excès de coïncidences de détection. Cet excès ne peut se comprendre que du fait de l'existence de paires d'atomes corrélés. Les projections de l'histogramme 3D suivant les différents axes de l'expérience ont des formes relativement différentes. Suivant x , le pic est fin tandis que suivant les deux autres axes, la corrélation semble nettement plus large. Au moyen de notre système de détection 3D nous avons donc accès quantitativement à la forme complète de la corrélation qui relie les paires d'atomes. Ceci motive une étude approfondie de la forme observée que nous nous proposons de développer maintenant.

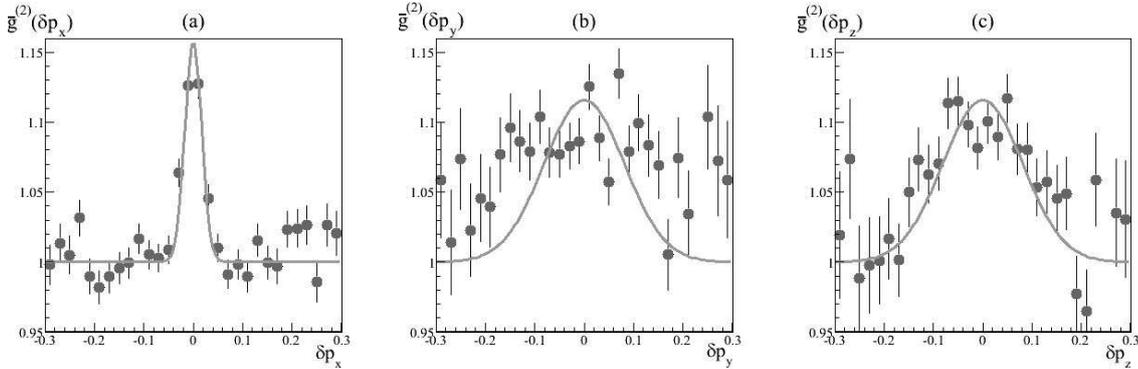


FIG. 4.7 – Projections suivant les axes δp_x , δp_y et δp_z de l'histogramme 3D de la fonction $\bar{g}^{(2)}$. Chaque point des différents graphiques correspond à une moyenne de l'histogramme 3D dans le plan transverse à l'axe considéré. Les traits pleins correspondent à un ajustement gaussien par la fonction $1 + A_l e^{-u^2/2\xi_l^2}$, dont le seul paramètre libre est A_l , avec $l = x$ ou yz . La largeur ξ_l est fixée par le résultat d'un ajustement 3D sur l'histogramme complet décrit au paragraphe 4.2.3. (a) Projection suivant l'axe δp_x . L'histogramme 3D est moyenné sur un carré de taille 0.2×0.2 dans le plan $\delta p_y \delta p_z$. (b) Projection suivant l'axe δp_y . L'histogramme 3D est moyenné sur un rectangle de taille 0.02×0.2 dans le plan $\delta p_x \delta p_z$. (c) Projection suivant l'axe δp_z . L'histogramme 3D est moyenné sur un rectangle de taille 0.02×0.2 dans le plan $\delta p_x \delta p_y$. Toutes les impulsions sont exprimées en unité de $\hbar k_{\text{rec}}$.

Détermination du volume de corrélation L'existence de paires d'atomes corrélées entraîne l'apparition d'un pic dans l'histogramme 3D de la fonction $g^{(2)}$ (voir la figure 4.7). Un tel pic définit donc un certain volume dans l'espace des impulsions qui rend compte de l'extension sur laquelle deux particules de la sphère formant une paire d'atomes d'impulsions opposées peuvent être considérées comme corrélées. Si l'on revient à l'image classique des collisions de nuages de particules ponctuelles, et que l'on considère les distributions d'impulsions des deux nuages infiniment piquées autour de respectivement $+\hbar k_{\text{rec}}$ et $-\hbar k_{\text{rec}}$, on peut s'attendre à ce que la fonction $\bar{g}^{(2)}$ soit infiniment piquée autour de $\delta\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Dès que les

distributions d'impulsions ont une certaine largeur, on imagine bien que cette largeur va se répercuter sur la largeur de la corrélation. Autrement dit, l'incertitude que l'on possède sur l'impulsion des particules est responsable d'une incertitude des positions relatives des deux paires dans l'espace des impulsions. Connaissant l'impulsion d'une particule, on peut définir un certain volume de l'espace des impulsions à l'intérieur duquel la paire associée à cet atome se trouve forcément. Le volume défini par le pic de la fonction $\bar{g}^{(2)}$ correspond directement à ce volume. Une telle image permet de comprendre qualitativement la forme des projections du pic de corrélation observées sur la figure 4.7. La distribution d'impulsion des condensats qui rentrent en collision est anisotrope du fait de l'anisotropie du potentiel de piégeage : la distribution d'impulsion d'un condensat piégé est en fait nettement plus large suivant les axes p_y et p_z (axes courts du condensat) que suivant l'axe p_x (axe long du condensat). On retrouve cette anisotropie dans la forme de la corrélation.

Afin de rendre compte un peu plus quantitativement de ces différentes largeurs, on a réalisé un ajustement gaussien de l'histogramme 3D de la fonction $\bar{g}^{(2)}$. La fonction réalisant l'ajustement est définie par

$$\bar{g}^{(2)}(\delta\mathbf{p}) = 1 + \bar{\eta} \exp\left(-\frac{\delta p_x^2}{2\bar{\xi}_x^2} - \frac{\delta p_y^2 + \delta p_z^2}{2\bar{\xi}_{yz}^2}\right) \quad (4.15)$$

où les paramètres $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}_x$ et $\bar{\xi}_{yz}$ correspondent aux trois paramètres de l'ajustement. On impose une symétrie cylindrique à la fonction d'ajustement. Ce choix est raisonnable du fait de la symétrie cylindrique de la distribution des impulsions des condensats initiaux. On trouve finalement $\bar{\eta} = 0.19 \pm 0.02$, $\bar{\xi}_x = 0.017 \pm 0.002 \hbar k_{\text{rec}}$ et $\bar{\xi}_{yz} = 0.081 \pm 0.004 \hbar k_{\text{rec}}$. Ces résultats ont été reportés sur la figure 4.7. Il faut faire attention ici que le moyennage de l'histogramme 3D dans le plan transverse à l'axe de projection entraîne une diminution de la hauteur absolue du pic de corrélation. On a donc ajusté la hauteur de la fonction d'ajustement de manière à bien tenir compte de cet effet. Le résultat obtenu permet raisonnablement de conclure à une bonne qualité d'ajustement, au moins suivant les axes p_x et p_z . Suivant l'axe p_y , la largeur de la corrélation semble moins bien estimée et ceci tend à remettre en question l'hypothèse de symétrie cylindrique imposée à la fonction d'ajustement. Notre optique étant de trouver de bons ordres de grandeur pour les largeurs et la hauteur de la corrélation, la logique de l'ajustement 3D ainsi que les hypothèses formulées à partir d'un petit modèle classique sur les symétries du problème restent malgré tout valides. Le découpage de la sphère, effectué de manière à s'affranchir des différents condensats impliqués dans la collision, brise cependant la symétrie cylindrique imposée. Ainsi, les projections suivant les axes p_y et p_z n'ont pas de raisons d'avoir exactement la même forme. La véritable question qui se pose maintenant consiste à déterminer quelles conclusions physiques nous pouvons tirer d'un tel ajustement. La valeur $\bar{\xi}_{yz}$ estimée est très proche de la largeur σ_{yz} de la distribution d'impulsion des condensats, elle même comptable avec l'épaisseur du halo de collision que l'on a déterminé au paragraphe 4.1.2. Ceci tend à prouver que la largeur du volume de corrélation des paires atomiques dans les directions p_y et p_z est de l'ordre de l'épaisseur de la sphère de collision. On peut donc bien maintenant comprendre pourquoi la forme de $\bar{g}^{(2)}$ dans les directions p_y et p_z est si difficile à mesurer expérimentalement. Le nombre de coïncidences de détection au fur et à mesure que l'on s'éloigne de $\delta\mathbf{p} = \mathbf{0}$ diminue du fait de la largeur finie du halo de diffusion. Au delà de la limite fixée par σ_{yz} , le nombre de coïncidences de détection devient très faible que ce soit pour le numérateur et le dénominateur de la fonction $\bar{g}^{(2)}$. Le bruit sur la mesure de

$\bar{g}^{(2)}$ augmente donc à mesure que l'on s'éloigne de $\delta\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Cet effet apparaît très clairement sur la figure 4.7. Les conclusions que l'on peut tirer de l'ajustement 3D doivent donc rester qualitatives. Pour conclure à ce stade on peut avancer que, l'étude de l'histogramme de la fonction $\bar{g}^{(2)}$ a permis la mise en évidence d'une anisotropie dans les corrélations observées, en adéquation avec l'anisotropie des distributions d'impulsions des deux condensats qui rentrent en collision. Bien que limitée par la largeur du halo de diffusion, on peut tout de même estimer par l'intermédiaire d'un ajustement 3D que la largeur du pic de corrélation suivant δp_y et δp_z est compatible avec la largeur σ_{yz} de la distribution d'impulsion des condensats. Nous aurons l'occasion de confirmer ce résultat au chapitre 5 par l'intermédiaire de modèles théoriques de la collision.

Si l'on s'intéresse maintenant à la largeur du pic de corrélation suivant l'axe δp_x , on voit immédiatement que la valeur mesurée est compatible avec la taille d'une case de l'histogramme ($0.02\hbar k_{\text{rec}}$), elle-même proche de la résolution du détecteur ($\sim 0.01\hbar k_{\text{rec}}$). Cette mesure permet donc de fixer une borne supérieure sur la valeur réelle de la largeur du pic de corrélation. Avec les données expérimentales auxquelles nous avons accès¹⁰, on peut difficilement diminuer la taille des cases de l'histogramme 3D sans augmenter de façon conséquente le bruit sur le résultat des corrélations. On ne peut donc avoir accès à une mesure plus précise de la largeur de la corrélation suivant l'axe δp_x . En considérant que cette largeur de corrélation est définie par la largeur σ_x de la distribution d'impulsion des condensats¹¹, en analogie avec la mesure réalisée suivant les axes δp_y et δp_z , on peut s'apercevoir ici que la mesure de la largeur de corrélation réelle suivant l'axe δp_x est de toute manière limitée par la résolution du détecteur : on a en effet $\sigma_x < \delta = 0.01 \hbar k_{\text{rec}}$. Ainsi, même en augmentant largement le nombre de données obtenues en réalisant expérimentalement la collision des condensats, on ne peut espérer mesurer la largeur réelle de la corrélation.

Comparaison avec le modèle classique de collision Afin de comparer nos résultats avec un jeu de données équivalent, nous avons réutilisé la même procédure de calcul de la fonction $\bar{g}^{(2)}$ sur des données obtenues à l'aide du petit modèle de collision classique défini au paragraphe 4.1.1. Pour ces simulations les largeurs des distributions d'impulsions des deux nuages de particules ponctuelles sont définies par les relations 4.4 et on a aussi pris en compte les effets de la résolution du détecteur. Afin de tenir compte de l'efficacité de détection des MCP, nous n'avons gardé que 10% des données simulées. Le choix des données conservées est totalement aléatoire, ainsi une particule et la paire qui lui est associée ont autant de chances d'être conservées à l'issue du traitement. On a moyenné le résultat sur 900 simulations contenant chacune 2300 particules aléatoirement tirées. A l'issue de ce traitement, on a retiré des données toutes les particules dont les impulsions se trouvent dans le même volume d'exclusion que celui défini pour les données expérimentales. Finalement, de l'ordre de 150 particules contribuent à l'histogramme 3D pour chacune des 900 simulations réalisées. Ce nombre est compatible avec le nombre moyen d'atomes détectés expérimentalement dans la sphère de

¹⁰Les données présentées ont été obtenues en avril 2006. Des problèmes techniques ont empêché l'expérience de fonctionner jusqu'au déménagement du détecteur à Amsterdam en juillet de la même année. Après le retour du détecteur, de nouveaux problèmes techniques sont survenus et le dispositif expérimental n'a pas pu être stabilisé jusqu'au déménagement du dispositif expérimental en mai 2007 dans les nouveaux locaux de l'Institut d'Optique à Palaiseau.

¹¹Une telle hypothèse sera en fait confirmée au chapitre 5 à partir de simulations stochastiques de la collision de deux condensats.

diffusion. La figure 4.8 donne le résultat obtenu à l'issue du traitement. Cette figure est directement comparable à la figure 4.7 : les formes des différentes projections observées ici et celles obtenues à partir des données expérimentales sont bien similaires. On observe clairement un pic de corrélation suivant l'axe δp_x . Suivant les deux autres axes, la largeur de la corrélation est difficilement mesurable pour les mêmes raisons que celles avancées lors de l'analyse des données expérimentales. En augmentant le nombre de données simulées et en supprimant les effets de la résolution du détecteur dans les simulations, on peut malgré tout vérifier que les largeurs des corrélations restent comptatibles avec les arguments avancés lors de l'analyse des résultats expérimentaux : les largeurs des corrélations sont bien de l'ordre de grandeur des largeurs de la distribution d'impulsion des condensats. Cette étude permet de valider notre procédure de traitement de données et démontre d'autre part que l'approche classique, développée ici, fournit une bonne vision de la dynamique des collisions des condensats. Une telle méthode ne permet cependant pas une étude quantitative des résultats obtenus. Pour aller plus loin, il faut faire appel à des modèles complètement quantiques. Nous présentons au chapitre 5 le résultat de simulations stochastiques de la collision de deux condensats. De telles simulations donnent une idée plus précise des largeurs de corrélation que l'on s'attend à observer expérimentalement, dans la mesure où elles tiennent compte d'effets négligés dans notre approche classique (voir le paragraphe 5.2.2).

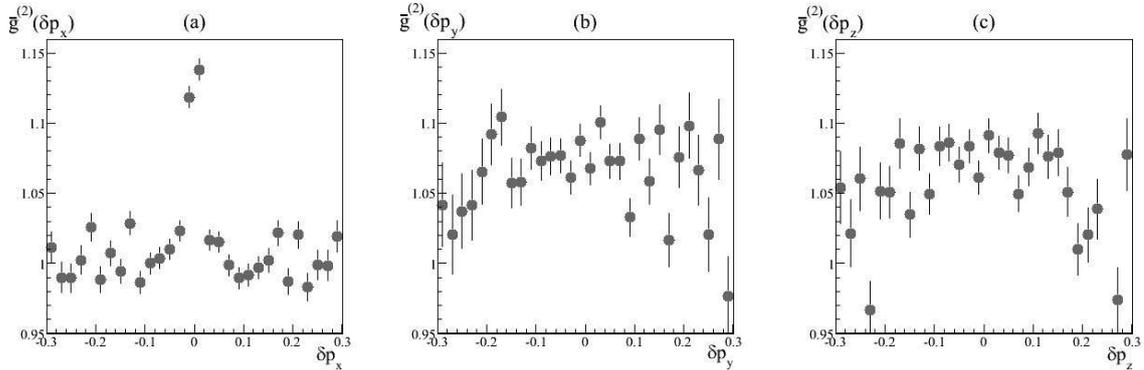


FIG. 4.8 – Projections suivant les axes δp_x , δp_y et δp_z de l'histogramme 3D de la fonction $\bar{g}^{(2)}$ obtenues à partir de données simulées à partir d'un petit modèle de collision classique. Chaque point des différents graphiques correspond à une moyenne de l'histogramme 3D dans le plan transverse à l'axe considéré. (a) Projection suivant l'axe δp_x . L'histogramme 3D est moyenné sur un carré de taille 0.2×0.2 dans le plan $\delta p_y \delta p_z$. (b) Projection suivant l'axe δp_y . L'histogramme 3D est moyenné sur un rectangle de taille 0.02×0.2 dans le plan $\delta p_x \delta p_z$. (c) Projection suivant l'axe δp_z . L'histogramme 3D est moyenné sur un rectangle de taille 0.02×0.2 dans le plan $\delta p_x \delta p_y$. Toutes les impulsions sont exprimées en unité de $\hbar k_{\text{rec}}$.

Interprétation de la hauteur de la corrélation Dans ce paragraphe, on va tenter de commenter la hauteur du pic de corrélation observée à partir des données expérimentales. Pour ce faire, on va commencer par considérer un atome d'impulsion \mathbf{p} dans la sphère de diffusion. Les atomes étant émis par paire d'impulsion opposée pendant la collision des condensats, on sait qu'autour de $-\mathbf{p}$ dans l'espace des impulsions, il existe forcément un autre atome corrélé au premier. Le volume de corrélation dont on a estimé la taille dans le paragraphe précédent correspond en fait au volume moyen à l'intérieur duquel on doit chercher autour de $-\mathbf{p}$ pour

trouver l'atome en question. Dans le même temps, à l'intérieur du même volume ΔV autour de $-\mathbf{p}$, on trouve en moyenne $N\Delta V/V$ atomes, où N correspond au nombre moyen d'atomes diffusés à chaque réalisation et V au volume total de la sphère de diffusion. Parmi tous ces atomes on ne peut décider lequel est vraiment rentré en collision avec l'atome d'impulsion \mathbf{p} . La mesure de corrélation que nous avons réalisée permet toutefois de faire ressortir la présence de cet atome malgré l'existence dans le volume ΔV d'autres atomes complètement indépendants de l'atome d'impulsion \mathbf{p} . Dans une telle configuration, on va en fait incrémenter $N\Delta V/V$ fois l'histogramme 3D qui comptabilise les coïncidences de détection. Parmi toutes les paires incrémentées, une seule correspond à une *vraie* paire tandis que toutes les autres sont ce que l'on appelle des paires *fortuites*. Ainsi, en moyenne, dans un volume ΔV de l'espace des $\delta\mathbf{p}$, le ratio du nombre de coïncidences correspondant à de *vraies* paires sur le nombre de coïncidences correspondant à des paires *fortuites* peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\text{vraie}}{\text{fortuite}} = \frac{V}{N\Delta V} \quad (4.16)$$

La hauteur de la corrélation que nous avons mesuré correspond directement à ce ratio. Nous avons maintenant tous les éléments pour comprendre cette idée : si les cases de l'histogramme 3D qui comptabilise les coïncidences de détection ont pour volume ΔV , le ratio $n_{\mathbf{p}-\mathbf{p}}/n_{\mathbf{p}n-\mathbf{p}}$ peut se mettre sous la forme suivante

$$\frac{n_{\mathbf{p}-\mathbf{p}}}{n_{\mathbf{p}n-\mathbf{p}}} = \frac{\text{vraie} + \text{fortuite}}{\text{fortuite}} = 1 + \frac{V}{N\Delta V} \quad (4.17)$$

La fonction $\bar{g}^{(2)}$ en $\delta\mathbf{p} = \mathbf{0}$ est une mesure de la moyenne de ces ratios sur toutes les impulsions \mathbf{p} des atomes de la sphère de diffusion. Sa hauteur est donc bien égale à $1 + V/N\Delta V$. Il ne reste maintenant plus qu'à en estimer l'amplitude dans notre situation expérimentale.

Le nombre N a été estimé précédemment lorsque l'on a cherché à reproduire les résultats de l'expérience de collision à l'aide d'un petit modèle classique de collision. Il s'agit du nombre d'atomes moyen dans la sphère de collision avant détection. Ce nombre a alors été estimé de l'ordre de 2300. Pour estimer le volume V de la sphère de diffusion, il faut au préalable faire une hypothèse sur sa forme. Dans l'esprit des résultats du petit modèle classique de collision, on a fait l'hypothèse que la distribution d'impulsion des atomes diffusés a la forme suivante

$$n(\mathbf{p}) = \frac{1}{V} \exp\left(-\frac{(|\mathbf{p}| - \hbar k_{\text{rec}})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.18)$$

où $\sigma = 0.074 \hbar k_{\text{rec}}$ correspond à la largeur de la sphère de diffusion que l'on a mesuré précédemment. A partir de l'équation 4.18, on peut aisément évaluer numériquement la valeur de V , qui correspond à la constante de normalisation de la distribution. On obtient $V = 2.34 (\hbar k_{\text{rec}})^3$. Enfin, pour estimer le volume ΔV , on peut dans l'esprit des mesures expérimentales réalisées, considérer qu'il est entièrement déterminé par les largeurs $\bar{\xi}_x$ et $\bar{\xi}_{yz}$. On peut ainsi écrire que

$$\Delta V = \int d^3\mathbf{u} \exp\left(-\frac{u_x^2}{2\bar{\xi}_x^2} - \frac{u_y^2 + u_z^2}{2\bar{\xi}_{yz}^2}\right) \quad (4.19)$$

En faisant le calcul à partir des valeurs expérimentales, on trouve $\Delta V = 0.0018 (\hbar k_{\text{rec}})^3$. Avec ce petit modèle, on peut donc prédire la valeur de $\bar{\eta}$ que l'on s'attendrait à mesurer avec les

données expérimentales. On trouve

$$\bar{\eta} = \frac{V}{N\Delta V} \simeq 0.6 \quad (4.20)$$

La valeur prédite est supérieure à la valeur mesurée mais correspond au bon ordre de grandeur. Le facteur 3 de différence peut vraisemblablement être attribué à une estimation imprécise des paramètres V , N et ΔV ou à la simplicité du petit modèle développé ici. D'autre part, nous avons mentionné lors de l'analyse de la largeur de la distribution d'impulsion de la sphère de diffusion, la présence d'un bruit formée d'atomes issus des nuages thermiques entourant les condensats. Ce bruit a aussi tendance à diminuer la hauteur de la corrélation. Ne connaissant pas l'amplitude de ce bruit, on peut malheureusement difficilement en estimer l'impact. Enfin, un dernier effet qui peut avoir tendance à limiter la hauteur du pic de corrélation correspond au fait que l'on donne le même poids aux différentes coïncidences détectées¹². Conformément au modèle développé ici, plus N est grand, moins une coïncidence correspondant à une *vraie* paire n'a de poids. En mettant toutes les coïncidences de détection au même niveau, on ne tient pas du tout compte de cet effet. Une façon d'améliorer nos résultats consiste donc à recalculer l'histogramme de corrélation sur des jeux de données comportant le même nombre d'atomes. C'est l'esprit de la figure 4.9 pour laquelle on a trié les données en 3 catégories comportant des nombres d'atomes moyens les plus semblables possibles. On observe très clairement sur la figure une dépendance de la hauteur des corrélations $\bar{\eta}$ par rapport à N , confirmant les différences de poids respectives des différentes coïncidences de détection mesurées dans l'esprit de la formule 4.16. Cette observation reste malheureusement qualitative dans la mesure où nous n'avons pas pu réaliser d'ajustement 3D sur ces données : suivant les axes p_y et p_z , les données sont en fait suffisamment bruitées pour limiter la convergence de l'algorithme d'ajustement. Toujours est il que cette observation renforce les arguments développés dans ce petit modèle et confirme la validité de notre approche.

4.3 Mesure équivalente du volume d'un mode de diffusion

Dans toute la partie précédente, nous avons basé notre analyse des données sur un petit modèle classique de collision. Un tel modèle a permis d'établir un certain nombre de résultats intéressants dont nous avons pu tirer parti pour valider notre traitement de données. Il faut bien voir que ce modèle donne une vision approchée des phénomènes en jeu dans la mesure où il cache complètement les phénomènes ondulatoires qui peuvent prendre place au cours de la collision. A la fin du premier chapitre de cette thèse, nous avons fait état d'un certain nombre d'expériences qui ont permis de mettre en évidence une partie de ces effets (voir le paragraphe 1.3). Nous avons d'autre part mentionné que les collisions de deux condensats de Bose-Einstein présentent la même dynamique que celle d'un amplificateur paramétrique optique. Les photons jumeaux émis spontanément à l'intérieur du cristal de l'amplificateur correspondent aux paires atomiques corrélées que nous avons été capables d'observer expérimentalement. Cette analogie permet de prédire l'existence d'une forme de corrélations que l'on peut attribuer au caractère ondulatoire des paires d'atomes émis.

¹²Tous les histogrammes 3D ont en effet été sommés avec des poids égaux pour l'ensemble des données analysées.

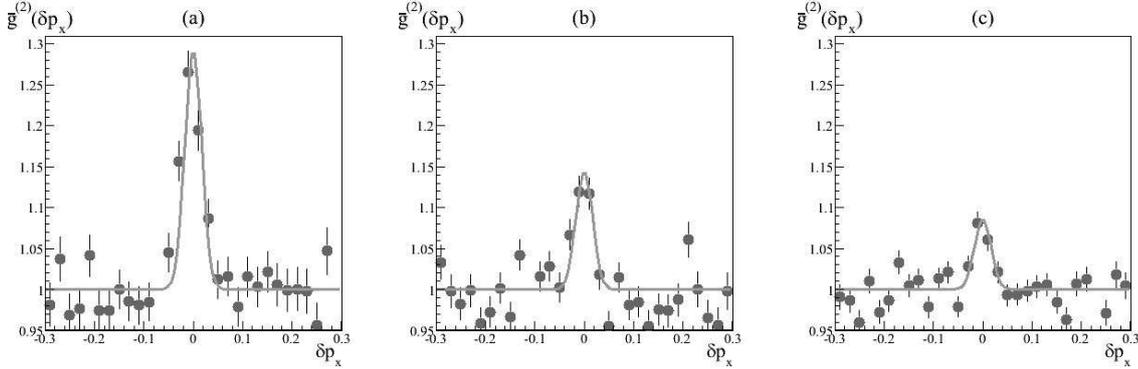


FIG. 4.9 – Projections suivant l’axe δp_x de l’histogramme 3D de la fonction $\bar{g}^{(2)}$ correspondant à 3 jeux de données comportant des nombres d’atomes moyens dans la sphère de diffusion différents. Chaque point des différents graphiques correspond à une moyenne de l’histogramme 3D sur un carré de taille 0.2×0.2 dans le plan $(\delta p_y \delta p_z)$. Les traits pleins correspondent à un ajustement gaussien par la fonction $1 + A_x e^{-u^2/2\bar{\xi}_x^2}$. A_x est le seul paramètre libre, $\bar{\xi}_x$ étant fixé à la valeur $\bar{\xi}_x = 0.017\hbar k_{\text{rec}}$ mesurée avec l’ensemble des données. (a) $N = 70$ atomes. (b) $N = 140$ atomes. (c) $N = 220$ atomes. Toutes les impulsions sont exprimées en unité de $\hbar k_{\text{rec}}$.

Les paires de photons émis par un amplificateur paramétrique optique peuplent différents modes du champ électromagnétique définis par le vecteur d’onde de propagation des photons. Les extensions spatiales et temporelles des modes sont définies par les propriétés de cohérence de la source des paires de photons qui est constituée à la fois du faisceau pompe et du cristal qui réalise l’amplification paramétrique. Au sein de chacun des différents modes de diffusion, la statistique du nombre de photons correspond à celle d’un champ thermique comme nous avons pu le voir au travers de la formule 1.44. Si nous nous concentrons sur un mode donné, on s’attend donc à pouvoir observer l’effet Hanbury Brown et Twiss en étudiant la statistique des photons détectés. Du fait de l’analogie que l’on peut établir entre un amplificateur paramétrique optique et la collision de deux condensats (voir le paragraphe 1.3.1), nous avons cherché à observer l’effet Hanbury Brown Twiss sur les atomes que nous avons détectés dans la sphère de diffusion. Une telle mesure nous permet d’estimer la taille d’un mode de diffusion, que l’on peut identifier au volume de cohérence de la source et que nous pourrions alors comparer à la taille du volume de corrélation que nous avons déterminé dans la partie précédente. Une telle mesure nous permet de confirmer les résultats observés dans la partie précédente. De plus nous en profiterons pour estimer le nombre d’occupation des différents modes de diffusion du halo de collision.

4.3.1 Principe de la mesure des tailles d’un mode de diffusion

Mesurer les tailles du volume des modes de diffusion revient à mesurer la taille du volume de cohérence de la source qui émet les paires d’atomes corrélées. Et, comme nous l’avons vu au premier chapitre de ce manuscrit (voir la partie 1.1.4), la mesure du volume de cohérence de la source nécessite une mesure de la fonction $g^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})$ pour $\Delta\mathbf{p}$ proche de zéro et \mathbf{p} donné. On va donc maintenant s’intéresser à la mesure des corrélations locales des atomes

de la sphère de diffusion. La procédure décrite dans la partie 4.2.2 peut aisément s'étendre à l'étude des corrélations locales. On va chercher ici à obtenir une mesure de la fonction $\tilde{G}^{(2)}$ définie par

$$\tilde{G}^{(2)}(\Delta\mathbf{p}) = \int d^3\mathbf{p} G^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) \quad (4.21)$$

De la même façon que pour la mesure de la fonction $\overline{G}^{(2)}$, on commence par construire un histogramme 3D que l'on incrémente avec les coïncidences locales de détection observées expérimentalement. Afin d'obtenir une normalisation de cet histogramme, on réalise une mesure de la fonction $\tilde{G}_{\text{tot}}^{(2)}$: cette fonction est définie de façon analogue à la fonction $\overline{G}_{\text{tot}}^{(2)}$ (voir le paragraphe 4.2.2). On obtient pour finir une mesure de la fonction $\tilde{g}^{(2)}$ à partir de laquelle on va pouvoir estimer le volume de cohérence de la source.

Contrairement aux coïncidences d'atomes d'impulsions opposées, il n'est pas possible ici d'établir un petit modèle de collision classique pour simuler l'effet Hanbury Brown et Twiss sur des particules ponctuelles, cet effet étant intrinsèquement ondulatoire. On peut tout de même se servir de ce modèle comme d'une référence pour l'effet que l'on cherche à observer. En effet, on ne s'attend pas à observer de corrélations particulières, localement, sur la sphère de diffusion simulée. On peut donc tester la méthode appliquée pour vérifier que la procédure d'analyse utilisée n'est pas responsable d'effets parasites qui produiraient artificiellement un signal de corrélation localement. La figure 4.10 présente le résultat d'une mesure témoin réalisée à l'aide d'un jeu de données obtenues à partir du modèle classique de collision. On peut aisément vérifier que la fonction $\tilde{g}^{(2)}$ est uniformément compatible avec 1 sur tout le domaine observé. Cette observation permet de valider la méthode utilisée et confirme dans le même temps les résultats présentés dans la partie précédente.

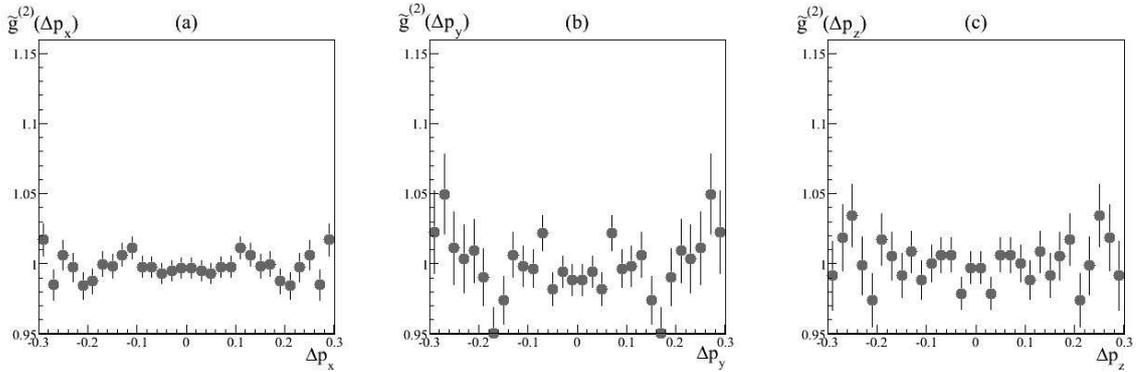


FIG. 4.10 – Projections suivant les axes Δp_x , Δp_y et Δp_z de l'histogramme 3D de la fonction $\tilde{g}^{(2)}$ obtenues à partir de données simulées à partir d'un petit modèle de collision classique. Il s'agit des mêmes données que celles que l'on a utilisées pour obtenir la figure 4.8. Les projections ont été réalisées de la même manière que celles de la figure 4.8.

4.3.2 Résultats

Dans cette partie, on présente les résultats de la mesure des corrélations locales des atomes diffusés dans la halo de collision, réalisés à partir d'une mesure de la fonction $\tilde{g}^{(2)}$. Une

telle mesure nous permet d'estimer les tailles du volume de cohérence associé à la source de paires atomiques corrélées. En comparant la hauteur des corrélations locales à la hauteur des corrélations des paires atomiques d'impulsions opposées, on peut ensuite estimer le nombre d'occupation des modes de diffusion de la sphère de collision.

Estimation du volume de cohérence de la source Les résultats de la mesure de la fonction $\tilde{g}^{(2)}$ sont présentés sur la figure 4.11. Tout comme pour la mesure de la fonction $\bar{g}^{(2)}$, présentée au travers de la figure 4.7, on observe très clairement sur la figure 4.11, un pic de corrélation centré en $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Un tel pic peut être vu comme l'expression de l'effet Hanbury Brown et Twiss pour les atomes diffusés dans le halo de collision. Cet effet, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.1.3, est une signature du caractère ondulatoire des particules diffusées pendant la collision des deux condensats et peut être attribué à des effets d'interférences quantiques. On peut le voir aussi simplement comme une preuve du caractère bosonique des particules diffusées : deux atomes diffusés ont une probabilité plus grande d'être détectés dans le même mode de diffusion que dans des modes différents.

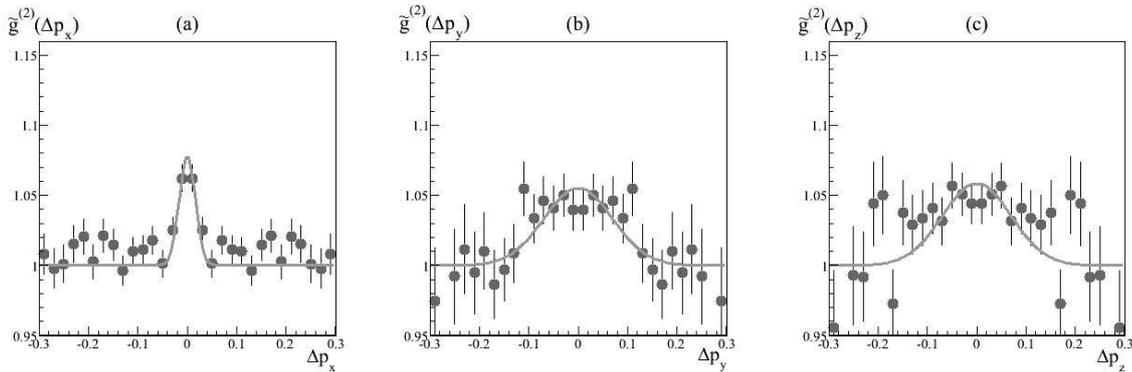


FIG. 4.11 – Projections suivant les axes Δp_x , Δp_y et Δp_z de l'histogramme 3D de la fonction $\tilde{g}^{(2)}$. Chaque point des différents graphiques correspond à une moyenne de l'histogramme 3D dans le plan transverse à l'axe considéré. Les traits pleins correspondent à un ajustement gaussien par la fonction $1 + A_l e^{-u^2/2\xi_l^2}$, dont le seul paramètre libre est A_l , avec $l = x$ ou yz . La largeur ξ_l est fixée par le résultat d'un ajustement 3D sur l'histogramme complet. (a) Projection suivant l'axe Δp_x . L'histogramme 3D est moyenné sur un carré de taille 0.2×0.2 dans le plan $\Delta p_y \Delta p_z$. (b) Projection suivant l'axe Δp_y . L'histogramme 3D est moyenné sur un rectangle de taille 0.02×0.2 dans le plan $\Delta p_x \Delta p_z$. (c) Projection suivant l'axe Δp_z . L'histogramme 3D est moyenné sur un rectangle de taille 0.02×0.2 dans le plan $\Delta p_x \Delta p_y$. Toutes les impulsions sont exprimées en unité de $\hbar k_{\text{rec}}$.

Si l'on cherche maintenant à donner une idée plus quantitative de la forme de la corrélation observée, on peut commencer par remarquer que l'allure du pic de corrélation est assez semblable à celui observé pour les paires d'atomes d'impulsions opposées : le pic est clairement anisotrope, la largeur de la corrélation suivant l'axe Δp_x étant nettement plus petite que celles suivant les axes Δp_y et Δp_z . Pour mettre des chiffres sur ces différentes largeurs, on a réalisé un ajustement 3D de l'histogramme de la fonction $\tilde{g}^{(2)}$ à partir de la fonction d'ajustement

suivante

$$\tilde{g}^{(2)}(\Delta\mathbf{p}) = 1 + \tilde{\eta} \exp\left(-\frac{\Delta p_x^2}{2\tilde{\xi}_x^2} - \frac{\Delta p_y^2 + \Delta p_z^2}{2\tilde{\xi}_{yz}^2}\right) \quad (4.22)$$

Les résultats de l'ajustement donnent $\tilde{\eta} = 0.1 \pm 0.02$, $\tilde{\xi}_x = 0.016 \pm 0.003 \hbar k_{\text{rec}}$ et $\tilde{\xi}_{yz} = 0.069 \pm 0.008 \hbar k_{\text{rec}}$. Les résultats des mesures des largeurs des corrélations correspondent assez bien à celles réalisées pour les corrélations des paires d'atomes d'impulsions opposées (voir le paragraphe 4.2.3). Ceci tend donc à prouver que le volume de cohérence de la source de paires atomiques est du même ordre de grandeur que le volume de corrélation des paires que l'on a estimé dans la partie précédente. Nous avons d'ailleurs remarqué à ce moment là que les largeurs mesurées étaient très proches des largeurs de la distribution d'impulsion des condensats qui rentrent en collision, elles mêmes définies par le principe d'incertitude de Heisenberg. Cette dernière observation est confirmée par la mesure du volume de cohérence de la source dans la mesure où l'on a vu au paragraphe 1.1.4 qu'il y avait un lien direct entre les largeurs du volume de cohérence de la source et la taille initiale de la source. Or du fait du principe d'incertitude d'Heisenberg, tailles de la source et largeurs de la distribution d'impulsion des particules de la source sont directement reliées. Ainsi, la mesure réalisée ici permet de confirmer en partie les intuitions que nous avons évoqué dans la partie précédente. Nous verrons au chapitre 5 que l'équivalence entre volume de cohérence et volume de corrélation des paires d'impulsions opposées est confirmée par le résultat de simulations stochastiques des collisions de deux condensats.

Nombre d'occupation des modes de diffusion Un des avantages de la mesure des corrélations locales correspond au fait que l'on peut s'en servir comme d'une référence pour interpréter la hauteur des pics de corrélation. On s'attend en effet à observer avec un détecteur de résolution infiniment précise $\tilde{g}^{(2)}(\mathbf{0}) = 2$. Le fait que la mesure de $\tilde{\eta}$ soit de l'ordre de $1/10^{\text{ème}}$ de la valeur théoriquement attendue peut donc être attribué au moins en partie à la résolution δ du détecteur. La taille d'une case de l'histogramme 3D suivant l'axe p_x étant de 2δ , tout se passe donc comme si nous avions limité la résolution du détecteur à 2δ . En considérant que le volume de corrélation réel est défini par les largeurs σ_x et σ_{yz} de la distribution de vitesse des condensats et en estimant le volume correspondant de la même façon qu'au paragraphe 4.2.3, on peut obtenir une estimation complémentaire de $\tilde{\eta}$ comme le ratio du volume réel de cohérence sur le volume expérimentalement mesuré. On peut alors s'apercevoir que

$$\tilde{\eta} \approx \frac{\sigma_x}{\tilde{\xi}_x} \simeq 0.3 \quad (4.23)$$

Une telle estimation fournit le bon ordre de grandeur pour la hauteur des corrélations expérimentalement observées. La différence résiduelle peut être attribuée aux mêmes raisons que celles avancées lors de l'estimation de la hauteur des corrélations entre les paires atomiques d'impulsions opposées (voir le paragraphe 4.2.3).

En se servant de la mesure de la hauteur des corrélations locales comme d'une référence, on peut estimer la "valeur réelle" de la hauteur des corrélations des paires d'atomes d'impulsions opposées. Cette dernière est de l'ordre de deux fois plus grande que celle des corrélations locales : $g^{(2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) - 1 \simeq 2 \times (g^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) - 1)$. On s'attend donc à ce que $g^{(2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) \simeq 1 + 2 = 3$, soit que $\bar{\eta} \simeq 2$. Une telle valeur permet de remonter au nombre d'occupation des modes

de diffusion. En effet, on a vu au paragraphe 4.2.3, que l'on pouvait donner une bonne interprétation de la hauteur des corrélations des paires atomiques d'impulsions opposées en calculant le ratio $V/N\Delta V$. Or $V/\Delta V$ peut s'interpréter comme une bonne estimation du nombre de modes de la sphère de diffusion. En se basant sur notre estimation de la hauteur réelle des corrélations des paires atomiques d'impulsions opposées, on peut ainsi déduire que

$$N = \frac{1}{\bar{\eta}} \frac{V}{\Delta V} \simeq 0.5 \frac{V}{\Delta V} \quad (4.24)$$

Ainsi le nombre d'occupation moyen des modes de la sphère de diffusion est de l'ordre de $1/2$. En moyenne les paires d'atomes émises correspondent donc à des paires d'atomes individuels. Malgré l'incertitude que nous avons sur la valeur réelle de $\bar{\eta}$, cette dernière remarque est confirmée par nos mesures expérimentales : une hauteur des corrélations locales inférieure à celle des corrélations de paires atomiques d'impulsions opposées implique forcément un nombre d'occupation des modes strictement plus petit que 1 et confirme que les paires d'atomes peuvent être considérées comme des paires d'atomes individuels dans la sphère de diffusion. Il faut bien voir que ceci n'est plus vrai dès lors que les volumes de cohérence et de corrélation des paires atomiques sont très différents. Toute notre argumentation repose donc sur le fait que l'on considère ces deux volumes très proches. Cette idée sera confirmée au chapitre 5 par l'intermédiaire des simulations théoriques réalisées pour l'expérience de collision.

A partir de cette estimation, on peut obtenir un ordre de grandeur du nombre réel de modes dans la sphère de diffusion. On a vu que le nombre moyen d'atomes dans la sphère de diffusion N est de l'ordre de 2200, ce qui implique un nombre de modes de l'ordre de 4400. Il ne faut pas perdre de vue ici que cette estimation dépend largement de notre estimation de N qui dépend elle-même fortement de la connaissance de la détectivité des MCP. Notre mesure du nombre de modes est donc loin d'être précise mais permet au moins de donner le bon ordre de grandeur.

4.4 Réduction des fluctuations du nombre d'atomes

Au cours du paragraphe 1.2.3 du premier chapitre de ce manuscrit, nous avons pu décrire une des propriétés intéressantes des faisceaux jumeaux produits au sein d'un oscillateur paramétrique optique. Les photons issus du processus d'amplification paramétrique étant émis par paire dont chacune des deux composantes peuple l'un des deux modes jumeaux, on s'attend à ce que les nombres de photons de chacun des deux modes jumeaux soient fortement corrélés. Nous avons mentionné à ce propos une démonstration expérimentale de cette propriété [60]. Dans notre situation expérimentale, les processus d'émission des paires d'atomes sont analogues. On s'attend donc à pouvoir observer le même genre de propriétés. Pour des atomes, la réduction de fluctuations d'intensité correspond à une réduction des fluctuations sur les nombres d'atomes de la sphère de diffusion : concrètement, on s'attend à ce que les fluctuations de la différence du nombre d'atomes de deux modes de la sphère de diffusion définis par des impulsions opposées soient fortement réduites.

Un des intérêts d'une telle propriété est qu'elle ne dépend pas du nombre d'occupation moyen des modes de diffusion, contrairement aux fonctions de corrélation. En effet, nous

avons vu dans la partie précédente que la hauteur du pic des corrélations qui relie les paires d'atomes d'impulsions opposées est directement reliée au nombre d'occupation des modes de diffusion. Dès que les modes contiennent en moyenne un grand nombre d'atomes, la hauteur du pic de corrélation s'en trouve fortement réduite et devient difficilement observable expérimentalement. Cette propriété est essentiellement liée au fait qu'on ne peut plus décrire la sphère de diffusion comme une superposition de paires d'atomes individuels d'impulsions opposées : on parle alors plutôt d'états squeezés [110]. La distinction entre les paires d'atomes individuels d'impulsions corrélées et les états squeezés reste qualitative dans la mesure où il n'existe pas de frontière physique claire entre les deux régimes. Le régime des paires d'atomes individuels décrit simplement une limite pour laquelle le nombre d'occupation des modes est plus petit que 1.

Dans cette partie nous allons présenter une méthode de traitement de données permettant de démontrer la réduction des fluctuations de la différence du nombre d'atomes de deux modes d'impulsions opposées de la sphère de diffusion. On montrera qu'une telle méthode s'avère particulièrement robuste et qu'il est possible de l'adapter de manière à la rendre compatible avec un certain nombre de limitations du dispositif de mesure que nous utilisons expérimentalement. La méthode est testée dans différentes configurations à l'aide du petit modèle de collision classique présentée dans la partie précédente. Nous verrons enfin les résultats que nous sommes capables d'obtenir par l'intermédiaire d'une telle méthode à partir de nos données expérimentales. Bien que ces résultats ne permettent pas de conclure de manière univoque à l'observation d'une réduction des fluctuations de la différence du nombre d'atomes de deux modes d'impulsions opposées de la sphère de diffusion, ils restent encourageants et motivent la réalisation de nouvelles expériences de collisions.

4.4.1 Principe de la mesure

Idée naïve Afin de comprendre l'esprit dans lequel nous allons chercher à observer une réduction des fluctuations de la différence de nombres d'atomes de deux modes d'impulsions opposées de la sphère de diffusion, nous nous replaçons dans la suite dans le cadre du petit modèle de collision classique. Imaginons maintenant que nous coupons la sphère de diffusion en deux parties de volumes respectifs V_1 et V_2 et que nous nous intéressons à la différence du nombre de particules détectées dans les deux parties : $\Delta N = N_1 - N_2$. On peut supposer par exemple que N_1 comptabilise le nombre de particules détectées dans la partie supérieure de la sphère de diffusion, c'est à dire correspondant aux particules dont les impulsions vérifient $p_z > 0$. N_2 correspond alors au nombre de particules détectées dont les impulsions vérifient $p_z < 0$. Pour un détecteur de détectivité parfaite, on s'attend à ce que, à chaque réalisation, $\Delta N = 0$: les particules étant émises par paires d'impulsions opposées, on peut en effet s'attendre à ce qu'il y en ait autant dans V_1 et V_2 ¹³. Dès lors que la détectivité n'est plus de 100%, cette propriété n'est plus vraie et on s'attend au contraire à ce que ΔN fluctue à chaque réalisation. Pour mesurer l'amplitude de ces fluctuations, on peut évaluer l'écart-type de ΔN , qu'on appellera $\sigma_{\Delta N}$, sur un grand nombre de réalisations de l'expérience de collision.

¹³Tel que le petit modèle de collision a été construit cela n'est pas tout à fait vrai dans la mesure où la largeur en vitesse des nuages initiaux ainsi que la prise en compte des problèmes de résolution du détecteur peuvent légèrement perturber ce résultat. On néglige ici de tels effets de manière à simplifier la présentation de la méthode d'analyse.

Pour conclure à une réduction des fluctuations de ΔN , il faut pouvoir comparer l'écart-type $\sigma_{\Delta N}$ à une autre quantité. Comme dans l'étude des corrélations, on peut comparer le résultat à une situation où les différents atomes de la sphère ne sont pas corrélés, autrement dit où ils sont émis aléatoirement dans le volume de la sphère de collision. Dans une telle situation, qu'on indiquera à l'aide du sigle (AL) dans la suite, on peut estimer l'écart-type $\sigma_{\Delta N}$ très simplement. En effet, chaque atome a une probabilité $1/2$ d'être diffusé dans l'un des deux volumes définis précédemment. Les variables aléatoires qui décrivent la répartition des particules dans les volumes V_1 et V_2 suivent donc une loi binomiale. D'autre part, pour une efficacité de détection η uniforme, les processus de détection suivent eux aussi une loi binomiale. A partir de là, on peut chercher à calculer la valeur moyenne et l'écart-type de ΔN , en fonction du nombre N de particules diffusées dans la sphère de collision et de η . On peut tout d'abord aisément se convaincre que le nombre moyen de particules détectées dans les deux volumes est ηN . Sachant qu'en moyenne ces particules se répartissent de façon égale entre les deux volumes V_1 et V_2 , on a

$$\langle N_1 \rangle = \langle N_2 \rangle = \eta \frac{N}{2} \quad (4.25)$$

où $\langle \rangle$ désigne la moyenne statistique sur un grand nombre de réalisations. On voit ainsi que $\langle \Delta N \rangle = 0$. Estimer $\sigma_{\Delta N}$ revient en fait à calculer $\sqrt{\langle \Delta N^2 \rangle - \langle \Delta N \rangle^2}$. On peut en fait montrer que ¹⁴

$$\sigma_{\Delta N}^{(AL)} = \sqrt{\eta N} \quad (4.26)$$

Une largeur $\sigma_{\Delta N}$ strictement inférieure à $\sqrt{\eta N}$ permet donc de conclure à une réduction des fluctuations de ΔN et donc à l'existence de corrélations dans le processus d'émission des atomes.

Au travers du même petit modèle et en considérant les émissions des paires parfaitement corrélées (CR), c'est à dire en considérant que si une particule est émise dans V_1 , une autre est obligatoirement émise dans V_2 , on peut en fait montrer que

$$\sigma_{\Delta N}^{(CR)} = \sqrt{1 - \eta} \sqrt{\eta N} \quad (4.27)$$

La réduction des fluctuations est donc entièrement déterminée par l'efficacité de détection du détecteur. Notre détectivité étant expérimentalement de l'ordre de 10%, on s'attend donc à des effets de l'ordre de 5% sur la largeur de la distribution des ΔN .

Tests d'hypothèse Les formules 4.26 et 4.27 correspondent aux limites de $\sigma_{\Delta N}^{(AL)}$ et $\sigma_{\Delta N}^{(CR)}$ pour un nombre infini de réalisations de l'expérience de collision. Expérimentalement, si l'on estime $\sigma_{\Delta N}$ à partir d'un nombre fini M de réalisations de l'expérience de collision, les valeurs de $\sigma_{\Delta N}$ mesurées vont suivre une certaine distribution statistique centrée autour de la valeur moyenne de $\sigma_{\Delta N}$ (voir la figure 4.12). Pour pouvoir distinguer si la statistique de nos données suit plutôt la loi (CR) que la loi (AL), nous nous devons de réaliser un test d'hypothèse [111], dont nous nous proposons de décrire les détails ici.

Nous savons qu'en moyenne, $\sigma_{\Delta N}^{(CR)}$ est plus petit que $\sigma_{\Delta N}^{(AL)}$. Pour discriminer entre les deux lois statistiques, on peut donc imaginer fixer un seuil σ_0 de telle façon que si l'écart-type $\sigma_{\Delta N}$ estimé sur M réalisations de l'expérience est plus petit que σ_0 , on va conclure

¹⁴Le calcul correspond à un petit problème de combinatoire qui ne pose pas de problèmes particuliers.

que la statistique de nos données est définie par la loi (CR) : une telle procédure s'appelle un test d'hypothèse dans le langage des statistiques. Il convient maintenant d'estimer la probabilité que l'on a de se tromper en formulant une telle conclusion. Il existe en fait deux types d'erreurs. L'erreur de première espèce e_1 correspond à la probabilité que l'on conclue à tort que nos données suivent la loi (CR). L'erreur de seconde espèce e_2 correspond à la probabilité que l'on conclue à tort que nos données suivent la loi (AL). Nous allons dans la suite chercher à estimer ces deux erreurs en fonction des paramètres expérimentaux et du seuil σ_0 que l'on a fixé. Le test d'hypothèse sera efficace dès que l'on peut trouver un seuil σ_0 qui permette d'avoir à la fois e_1 et e_2 faible.

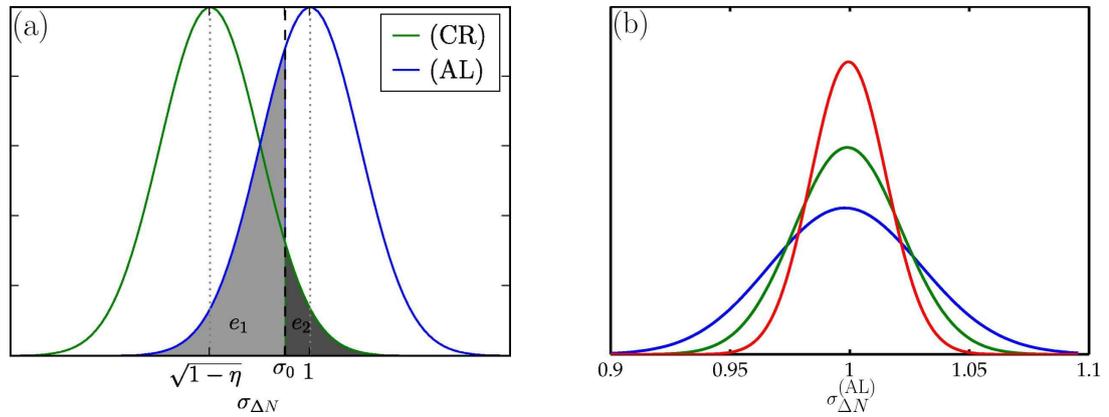


FIG. 4.12 – (a) Distributions des écart-types $\sigma_{\Delta N}^{(CR)}$ et $\sigma_{\Delta N}^{(AL)}$ obtenues lors de la réalisation d'un nombre fini, M , d'expériences de collisions. Les largeurs ont été normalisées par $\sqrt{\eta N}$. Les distributions sont centrées respectivement en $\sqrt{1-\eta}$ et en 1. En fixant un seuil σ_0 donné, les aires des parties grisées sur la figure correspondent directement aux erreurs de première et de seconde espèce. (b) Allure de la distribution de l'écart type $\sigma_{\Delta N}^{(AL)}$ normalisé par $\sqrt{\eta N}$ pour différentes valeurs de M . De bas en haut, $M = 2000$, $M = 1000$ et $M = 500$. La largeur de la distribution a tendance à diminuer au fur et à mesure que M augmente (les distributions ont été tracées à l'aide de la fonction `chipdf` du package `statistics` du programme `Matlab`).

Concrètement, nous avons accès expérimentalement à M variables aléatoires ΔN_i , qui suivent la même loi de probabilité et que nous pouvons considérer indépendantes. D'autre part, nous savons que ces variables sont de moyenne nulle et d'écart-type $\sigma_{\Delta N}$ donné et inconnu. D'après le théorème de la limite centrale, si M est suffisamment grand, les sommes $S_M = \sum_i \Delta N_i / \sqrt{M} \sigma_{\Delta N}$ tendent vers une loi normale centrée et d'écart-type 1. Si les ΔN_i suivent la loi (AL), la quantité

$$T = \sum_{i=0}^M \left(\frac{\Delta N_i}{\sqrt{\eta N}} \right)^2 \quad (4.28)$$

suit alors une loi du χ^2 à M degrés de liberté. On appellera $F^{(AL)}$, la fonction de répartition correspondante¹⁵. Si les ΔN_i suivent la loi (CR), c'est la quantité $T' = T/(1-\eta)$ qui suit une loi du χ^2 à M degrés de liberté. A partir de ces considérations, on peut exprimer l'erreur

¹⁵Cette fonction est connue et peut s'exprimer analytiquement dans une telle situation.

de première espèce e_1 et de seconde espèce e_2 en fonction du seuil $T_0 = M\sigma_0^2$. On a

$$\begin{aligned} e_1 &= F^{(\text{AL})}(T_0) \\ e_2 &= 1 - F^{(\text{CR})}(T_0) \end{aligned} \quad (4.29)$$

En s'autorisant une erreur de première espèce de 5% et en supposant que η vaut 10% et $M = 1000$ ¹⁶, on peut alors déterminer que $e_2 = 24.4\%$ et $\sigma_0 = 0.96$. Ainsi, en mesurant la valeur expérimentale de $\sigma_{\Delta N}$ et en la comparant au seuil σ_0 on est capable de conclure avec une assez bonne précision que la loi qui régit l'émission des particules correspond plutôt à la loi (CR) ou à la loi (AL). Pour comprendre un peu mieux le comportement de ces différentes quantités, on peut se référer au graphique 4.12 qui donne la forme des distributions des largeurs $\sigma_{\Delta N}^{(\text{CR})}$ et $\sigma_{\Delta N}^{(\text{AL})}$ pour un nombre M d'expériences de collisions. Il est intéressant de noter ici qu'en augmentant M , les largeurs de ces deux distributions vont diminuer. Le graphique permet d'autre part de comprendre la forme des erreurs de première et de seconde espèce en fonction du seuil σ_0 que l'on souhaite imposer. On voit donc directement ici que diminuer la valeur du seuil σ_0 permet de diminuer la valeur de l'erreur de première espèce mais augmente mécaniquement l'erreur de seconde espèce. Pour se placer dans des conditions favorables pour la réalisation d'un test d'hypothèse et pour une valeur de η fixée, on comprend ici qu'il est nécessaire d'augmenter M de manière à rendre plus disjointes les deux distributions. Ainsi, dans notre situation, si $M = 2000$, avec un seuil σ_0 de 0.97, on a $e_1 = e_2 = 5\%$, ce qui rend le test d'hypothèse nettement plus favorable.

Au travers de ce modèle, nous avons pu présenter l'esprit de la méthode que l'on désire appliquer sur nos données expérimentales pour mettre en évidence une éventuelle réduction des fluctuations de la différence ΔN . Ce modèle correspond cependant à un cas idéal et la méthode doit être adaptée pour permettre de tenir compte d'un certain nombre de limitations expérimentales que nous présentons dans la suite.

Limitations expérimentales Tout d'abord, dans le modèle précédent, nous n'avons pas considéré les zones d'exclusion des condensats. A priori, l'exclusion des zones de la sphère de diffusion ne devrait pas avoir de conséquences dramatiques sur le résultat final du moment que les zones exclues contribuent à une réduction égale des volumes V_1 et V_2 . Une telle réduction peut s'interpréter comme une diminution artificielle de l'efficacité de détection du détecteur dont l'amplitude dépend du ratio du volume exclu sur le volume conservée. Dans notre situation expérimentale, la zone exclue représentant de l'ordre de 40% de la sphère de diffusion, cet effet est donc non négligeable sur l'amplitude de la réduction des fluctuations que l'on s'attend à observer. Nous estimerons dans la partie suivante l'amplitude d'un tel effet à partir de simulations.

D'autre part, nous n'avons pas pris en compte les fluctuations du nombre d'atomes dans la sphère de diffusion. D'après la formule 4.27, on sait que l'écart-type de ΔN dépend du nombre total d'atomes diffusés pendant la collision. Moyenner sur des temps de vol comportant des nombres d'atomes différents revient donc à moyenner différentes distributions ΔN possédant des écart-type différents. Cela revient donc en fait à brouiller le signal que l'on cherche à

¹⁶De tels paramètres correspondent respectivement à la détectivité moyenne du détecteur et au nombre de données auxquelles on a accès.

observer. Pour s'affranchir de ce problème, on peut normaliser ΔN à chaque réalisation de l'expérience au moyen de la racine du nombre total d'atomes détectés $\sqrt{N_1 + N_2}$. Cela revient donc en fait à normaliser l'écart-type de ΔN à une valeur constante et permet de rendre tous les temps de vol comparables. Nous vérifierons dans la partie suivante qu'une telle procédure ne remet pas en cause les hypothèses que nous avons formulées pour construire un test d'hypothèse permettant de prouver une réduction des fluctuations de ΔN .

Une dernière limitation expérimentale correspond aux inhomogénéités de la détectivité des MCP. Une façon simple de prendre en compte un tel facteur consiste à supposer que les détectivités moyennes sur les volumes V_1 et V_2 sont différentes¹⁷. On les appellera η_1 et η_2 et on supposera $\eta_1 \neq \eta_2$. Dans le traitement précédent, un certain nombre de paramètres doivent être modifiés pour prendre en compte les inhomogénéités de détection dans les deux zones. D'une part, $\langle N_1 \rangle$ et $\langle N_2 \rangle$ sont différents entraînant un déplacement du centre de la distribution des ΔN . On a en effet, que l'émission des particules soit corrélée ou non,

$$\langle N_1 \rangle = \eta_1 \frac{N}{2} \neq \langle N_2 \rangle = \eta_2 \frac{N}{2} \quad (4.30)$$

Dans le cas d'une émission totalement aléatoire des atomes, on peut montrer d'autre part que

$$\sigma_{\Delta N}^{(AL)} = \sqrt{\eta_1 + \eta_2} \sqrt{\frac{N}{2}} \quad (4.31)$$

Et, si les émissions des particules sont parfaitement corrélées, on s'attend en fait à ce que

$$\sigma_{\Delta N}^{(CR)} = \sqrt{\eta_1(1 - \eta_1) + \eta_2(1 - \eta_2)} \sqrt{\frac{N}{2}} \quad (4.32)$$

Au travers de la mesure de l'écart-type de ΔN , la mise en évidence du caractère corrélé de l'émission des particules est donc encore possible malgré cette limitation. Un problème qui subsiste correspond au fait que si N fluctue à chaque réalisation, la procédure de normalisation que l'on a décrite précédemment, ne fonctionne plus : la moyenne de ΔN dépendant du nombre de particules émises à chaque réalisation de l'expérience, on ne peut plus espérer mesurer $\sigma_{\Delta N}$ correctement. Pour tenter de s'affranchir d'un tel effet, on peut recentrer ΔN à chaque réalisation de l'expérience de manière à pouvoir continuer à utiliser la procédure de normalisation sans changement important des conclusions que l'on peut tirer de l'observation des résultats. On va donc maintenant s'intéresser à la quantité suivante

$$\langle \tilde{\Delta N} \rangle = \langle \Delta N - \alpha(N_1 + N_2) \rangle = (\eta_1 - \eta_2) \frac{N}{2} - \alpha(\eta_1 + \eta_2) \frac{N}{2} \quad (4.33)$$

Si $\alpha = (\eta_1 - \eta_2)/(\eta_1 + \eta_2)$ on s'aperçoit que cette dernière quantité est nulle quel que soit le nombre de particules diffusées. Une telle correction permet donc bien de recentrer la distribution normalisée des ΔN . Si l'on s'intéresse maintenant à l'écart-type de $\tilde{\Delta N}$, on peut

¹⁷Tel que l'on coupe la sphère de diffusion, on pourrait s'attendre à ce que cet effet soit faible dans la mesure où les deux zones correspondent à la même surface sur le détecteur. En revanche, les problèmes de saturation des MCP peuvent éventuellement contribuer à une diminution de la détectivité des MCP au fur et à mesure de la chute de la sphère de diffusion sur le détecteur. Cette saturation est essentiellement due aux deux condensats. Si cette dernière ne s'exprimait que localement, le fait d'exclure les zones de détection des condensats devrait suffire à résoudre cette limitation. On verra que ce n'est pas suffisant sur les données expérimentales, ce qui constitue une bonne indication du caractère non local de la saturation des galettes.

montrer que dans le cas d'une émission aléatoire des atomes,

$$\sigma_{\Delta N}^{(\text{AL})} = \sqrt{\frac{4\eta_1\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^2}} \sqrt{\eta_1 + \eta_2} \sqrt{\frac{N}{2}} \quad (4.34)$$

tandis que si les émissions des atomes sont parfaitement corrélées, cette même largeur peut se mettre sous la forme suivante

$$\sigma_{\Delta N}^{(\text{CR})} = \sqrt{\frac{4\eta_1\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^2}} \sqrt{\eta_1(1 - \eta_2) + \eta_2(1 - \eta_1)} \sqrt{\frac{N}{2}} \quad (4.35)$$

Les résultats étant différents dans les deux situations, on s'attend donc toujours à pouvoir démontrer l'existence de corrélations dans l'émission des atomes, et cette méthode de recentrage s'avère bien compatible avec la méthode de normalisation décrite précédemment. Il convient de noter ici que le facteur $\sqrt{4\eta_1\eta_2/(\eta_1 + \eta_2)^2}$ est de façon générale plus petit que 1 et va donc contribuer à une réduction des deux écart-types. Un autre point intéressant est relié au fait que dans notre situation expérimentale, on peut imaginer évaluer le facteur α directement à partir des données expérimentales en mesurant la valeur moyenne de $\Delta N/(N_1 + N_2)$ sur un grand nombre de réalisations de l'expérience.

4.4.2 Résultats des mesures

Résultats préliminaires du petit modèle de collision classique Afin de se convaincre un peu plus concrètement de la validité de la procédure de mise en évidence de la réduction des fluctuations de ΔN , on peut commencer par tester les différentes méthodes décrites à l'aide du petit modèle classique de collision. Dans un premier temps, on ne tiendra compte dans les simulations que des volumes exclus dans la sphère de diffusion et des fluctuations du nombre d'atomes diffusés pendant la collision. Pour simplifier, on supposera que les caractéristiques des distributions d'impulsion des deux nuages sont définies par les largeurs en impulsion estimées pour un condensat de 3×10^4 atomes (voir les formules 4.4). On supposera d'autre part que la détectivité du détecteur est uniforme sur les deux volumes de détection et vaut 10%, et on prendra en compte les effets de la résolution du détecteur (voir le paragraphe 4.1.1 qui décrit le petit modèle classique de collision). Afin de tenir compte des fluctuations du nombre de particules dans la sphère de diffusion, on supposera que ce nombre est aléatoirement réparti dans l'intervalle [500; 3000]¹⁸. On peut ensuite réaliser différentes estimations de $\sigma_{\Delta N}$ dans les deux situations précédentes : soit dans le cas d'une émission complètement aléatoire des particules (AL), soit dans le cas d'une émission corrélée des particules (CR). Dans le premier cas, on simule à l'aide du petit modèle de collision classique la collision de deux condensats et on ne conserve à l'issue du traitement de chacune des collisions qu'une seule des deux particules. Tout se passe donc bien comme si les particules étaient aléatoirement diffusées dans la sphère de diffusion¹⁹. Dans le second cas, on conserve les deux particules

¹⁸Un tel choix ne reproduit pas fidèlement la distribution des nombres d'atomes détectés présentée dans la figure 4.5. La distribution choisie devrait en revanche permettre d'observer correctement les effets éventuels des fluctuations du nombre d'atomes détectés sur les résultats de la méthode de traitement présentée. On veut juste ici vérifier que notre méthode de normalisation donne des résultats cohérents.

¹⁹Pour que le nombre d'atomes dans la sphère de diffusion reste cohérent avec le cas (CR), on simule deux fois plus de collisions dans ce cas là.

pour chacune des collisions ²⁰. La figure 4.13 donne le résultat typique de distributions normalisées obtenues dans les deux situations. Sur une telle figure il est assez difficile d'observer une différence notable entre les largeurs des deux distributions. Si l'on s'intéresse maintenant aux estimations de $\sigma_{\Delta N}$, on obtient en moyenne

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta N}^{(AL)} &\simeq 0.997 \pm 0.004 \\ \sigma_{\Delta N}^{(CR)} &\simeq 0.954 \pm 0.005\end{aligned}\quad (4.36)$$

pour, à chaque estimation, 1000 réalisations de l'expérience de collisions. Experimentalement, pour conclure sur l'observation d'une réduction des fluctuations de ΔN dans une situation similaire, on peut réaliser un test d'hypothèse en suivant une procédure similaire à celle décrit au paragraphe 4.4.1. A partir des simulations décrites ici, on peut obtenir la forme des fonction de répartition $F^{(AL)}$ et $F^{(CR)}$. Connaissant la forme de ces fonctions, on peut déterminer les erreurs de première et seconde espèce du test d'hypothèse, en fonction du seuil σ_0 que l'on veut imposer. Dans la situation présentée ici, pour un seuil fixé à 0.97, l'erreur de première espèce est d'environ 5% tandis que l'erreur de seconde espèce est d'environ 10%. En augmentant le nombre de réalisations de l'expérience, on peut réussir à diminuer les valeurs de ces erreurs.

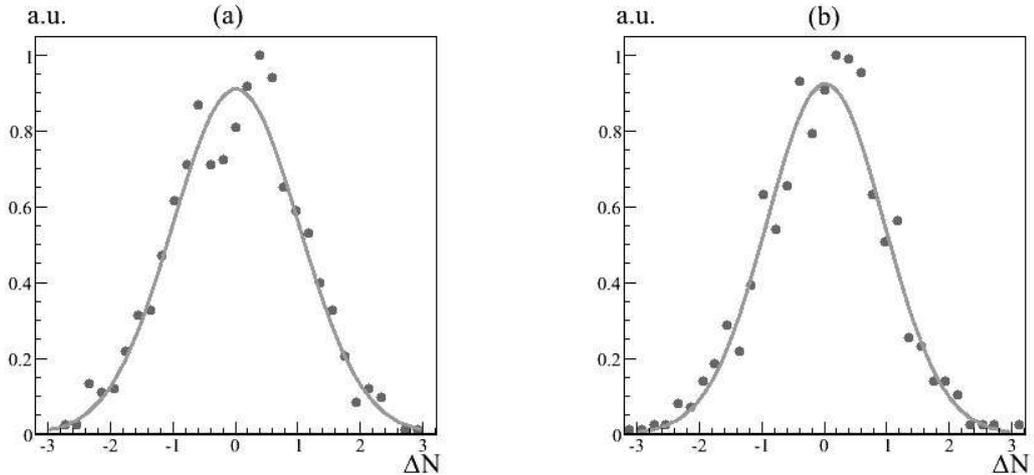


FIG. 4.13 – Distributions de ΔN normalisées obtenues à partir de 1000 simulations de l'expérience de collisions. Les différents effets pris en compte dans les simulations sont indiqués dans le corps du texte. Les courbes en trait plein correspondent à des ajustements gaussien des distributions. Elles servent essentiellement de guide pour estimer la forme des distributions. (a) Emission aléatoire des particules. Pour cette estimation, $\sigma_{\Delta N}^{(AL)} = 0.991$. (b) Emission corrélée des particules. Pour cette estimation, $\sigma_{\Delta N}^{(CR)} = 0.953$.

Si l'on regarde maintenant comment ces valeurs évoluent en fonction de l'efficacité de détection du système, on s'aperçoit que même dans le cas d'une émission parfaitement corrélée des particules et pour $\eta = 1$, l'écart-type $\sigma_{\Delta N}^{(CR)}$ est de l'ordre de 0.45 et donc on ne s'attend

²⁰Il faut bien faire attention ici que les cas (AL) et (CR) décrits ici prennent en compte la largeur en impulsion des condensats que l'on avait négligée auparavant pour simplifier les calculs présentés dans les paragraphes précédents.

pas à observer une réduction parfaite des fluctuations. On peut trouver deux origines (qui ne sont d'ailleurs pas indépendantes) pour cet effet résiduel : d'une part, les zones d'exclusion des condensats contribuent à ajouter une incertitude sur la différence ΔN . D'autre part, la largeur en impulsion de la source, ainsi que les effets de la résolution du détecteur contribuent eux aussi à augmenter $\sigma_{\Delta N}$. Deux atomes formant une paire d'atomes d'impulsions opposées peuvent alors être détectés dans le même volume V_i de la sphère de diffusion. On peut aussi imaginer que l'un soit détecté tandis que l'autre tombe dans un volume d'exclusion. Toutes ces situations correspondent finalement à des effets de bord qui contribuent malgré tout de façon conséquente à l'augmentation de la valeur de l'écart-type $\sigma_{\Delta N}$. Dans le cas d'une émission complètement aléatoire des particules, l'écart-type observée est lui toujours compatible avec 1.

Pour prendre en compte les inhomogénéités de détectivité de nos MCP dans les simulations, nous avons commencé par construire une carte de la détectivité pour les simulations. Afin de tenir compte à la fois des inhomogénéités spatiales de détection et de la saturation du détecteur, cette carte est tridimensionnelle. Les volumes V_1 et V_2 ont été découpés en $400 \times 400 \times 200$ volumes égaux à l'intérieur desquels la détectivité a été aléatoirement déterminé dans l'intervalle $[\eta_i - 0.1, \eta_i + 0.1]$ ²¹. L'indice i désigne ici la zone considérée. D'autre part $\eta_1 = 0.2$ et $\eta_2 = 0.1$ de manière à ce que les deux zones aient en moyenne des détectivités différentes. Un tel choix rend relativement bien compte des inhomogénéités locales du détecteur ainsi que des effets de la saturation. On a quelque peu exagéré la différence entre les inhomogénéités moyennes des deux zones afin de bien faire ressortir les éventuels défauts de notre méthode d'analyse. Dans une telle situation, le facteur α défini précédemment vaut 0.33. La figure 4.14 donne les résultats typiques des simulations quand on prend en compte les inhomogénéités locales de détectivité. Tous les autres paramètres sont fixés de la même façon que pour les simulations de la figure 4.13. On s'aperçoit tout d'abord que la méthode permettant de calculer $\tilde{\Delta N}$ engendre une réduction artificielle de l'écart-type de la distribution. Cet effet apparaît clairement sur les formules 4.34 et 4.35 par l'intermédiaire du facteur $\sqrt{4\eta_1\eta_2/(\eta_1 + \eta_2)^2}$. Dans notre situation ce facteur vaut environ 0.94 et correspond assez bien à la valeur moyenne de $\sigma_{\tilde{\Delta N}}^{(AL)}$ déterminée à partir de 20 estimations (1 estimation correspond à 1000 simulations de l'expérience de collision). On a en effet pu déterminer que

$$\begin{aligned}\sigma_{\tilde{\Delta N}}^{(AL)} &\simeq 0.936 \pm 0.007 \\ \sigma_{\tilde{\Delta N}}^{(CR)} &\simeq 0.883 \pm 0.006\end{aligned}\tag{4.37}$$

La réduction des fluctuations est donc encore observable dans une telle situation même si cela nécessite une bonne connaissance des détectivités relatives des deux zones de détection. La mise en place d'un test d'hypothèse dans une telle situation reste malgré tout envisageable : en réalisant un grand nombre d'estimations de $\sigma_{\tilde{\Delta N}}^{(AL)}$ et $\sigma_{\tilde{\Delta N}}^{(CR)}$, on peut déterminer la forme de leur distribution statistique. A partir de cette forme et dans l'esprit de la figure 4.12, on peut déterminer graphiquement la valeur des erreurs e_1 et e_2 en fonction du seuil σ_0 que l'on souhaite imposer.

²¹Des simulations similaires ont été réalisées à partir de la carte de gain du détecteur mesurée expérimentalement. Les résultats obtenus sont tout à fait comparables à ceux présentés. Construire une nouvelle carte de gain permet d'amplifier les effets des inhomogénéités pour tester de façon plus robuste la validité de la méthode présentée.

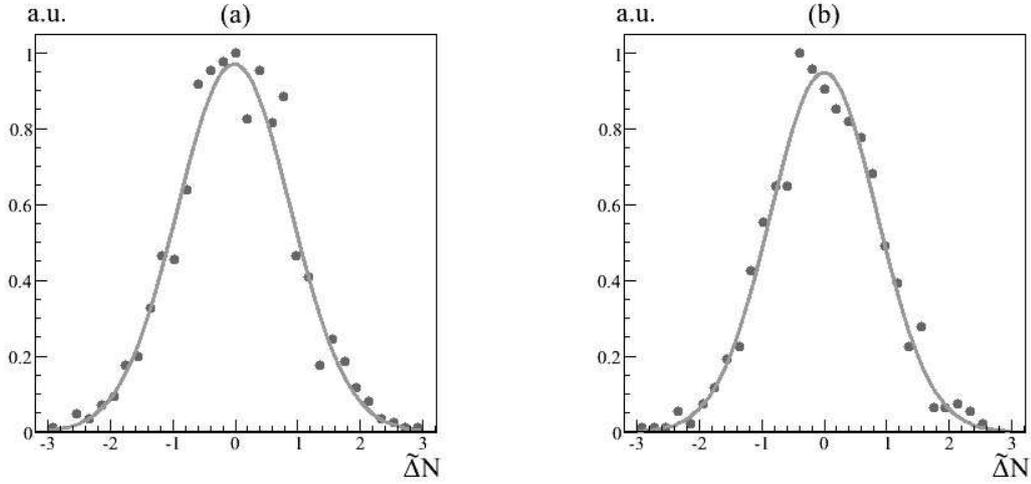


FIG. 4.14 – Distributions de $\tilde{\Delta N}$ normalisées obtenues à partir de 1000 simulations de l'expérience de collisions. Dans les simulations on prend en compte les inhomogénéités locales de détection des MCP. Les courbes en trait plein correspondent à des ajustements gaussien des distributions. (a) Emission aléatoire des particules. Pour cette estimation, $\sigma_{\tilde{\Delta N}}^{(AL)} = 0.927$. (b) Emission corrélée des particules. Pour cette estimation, $\sigma_{\tilde{\Delta N}}^{(CR)} = 0.874$.

Résultats expérimentaux Nous présentons ici les résultats préliminaires obtenus à partir de nos données expérimentales²². La figure 4.15 (a) présente la forme de la distribution des $\tilde{\Delta N}$ obtenue en définissant les zones d'exclusion sur la sphère de diffusion de la même façon que lors de l'étude des corrélations (voir le paragraphe 4.1.2). L'écart-type $\sigma_{\tilde{\Delta N}}$ mesuré est de 1.2. Cette valeur est nettement plus grande que 1 et tend donc à remettre en question l'indépendance des différentes réalisations de l'expérience ainsi que les hypothèses nécessaires à l'utilisation du théorème de la limite centrale. A partir de l'ajustement gaussien réalisé sur la distribution, on peut se rendre compte de l'existence d'ailes non-gaussiennes sur la partie d'abscisse négative de la distribution. Une telle observation confirme l'existence d'un bruit qui vient majoritairement perturber le volume V_2 de la sphère de diffusion : l'origine d'un tel bruit peut être expliquée par l'intermédiaire des collisions secondaires qui ont lieu entre les condensats principaux et les condensats parasites (voir le paragraphe 4.1.2 et la figure 4.1). On peut éventuellement aussi avancer ici que les phases thermiques qui entourent les condensats peuvent contribuer de façon disymétrique aux populations des volumes V_1 et V_2 : le condensat I de la figure 3.12 contient en effet plus d'atomes que le condensat III. De tels effets sont donc responsables d'une erreur systématique sur les résultats présentés qui rend la méthode de traitement de données utilisée ici inadéquate.

Pour améliorer le résultat, nous avons tenté d'augmenter la taille des volumes d'exclusion de la sphère de diffusion pour essayer de limiter au maximum l'effet des phénomènes parasites. Le résultat obtenu correspond à la figure 4.15 (b). La valeur de $\sigma_{\tilde{\Delta N}}$ est alors de l'ordre de 0.96. Cette valeur est à comparer au facteur $\sqrt{4\eta_1\eta_2/(\eta_1 + \eta_2)^2}$ qui est de l'ordre de 0.999 dans une telle situation. La valeur déterminée expérimentalement est donc compatible avec

²²On exclut dans ce traitement les réalisations de l'expérience qui contiennent un nombre d'atomes inférieur à 40.

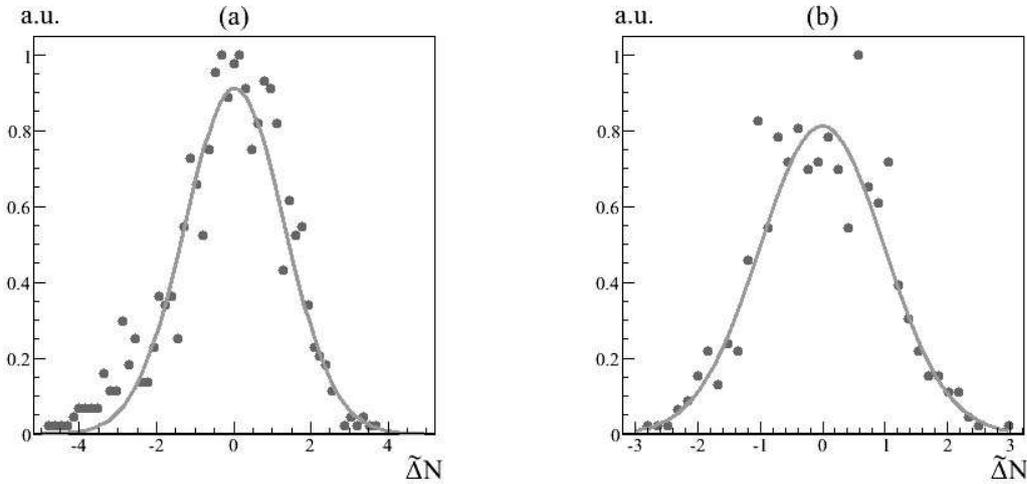


FIG. 4.15 – Distributions de $\tilde{\Delta N}$ normalisées obtenues à partir de M réalisations de l'expérience de collision de condensats de Bose-Einstein. Seuls les temps de vol contenant plus de 40 atomes détectés sont conservés pour l'estimation de $\sigma_{\tilde{\Delta N}}$. (a) Pour cette figure $M = 1100$, $\alpha = 0.1$ et les zones d'exclusion correspondent à celle que l'on a utilisées pour l'étude des corrélations des atomes de la sphère de diffusion. On trouve dans une telle situation $\sigma_{\tilde{\Delta N}} = 1.2$. (b) Pour cette figure $M = 617$, $\alpha = 0.04$ et les zones d'exclusion sont de l'ordre de 30% plus grandes (environ 50 % du halo de diffusion est exclu). Pour cette estimation, $\sigma_{\tilde{\Delta N}} = 0.96$.

l'observation d'une réduction des fluctuations de la différence de nombre d'atomes de deux modes d'impulsions opposés de la sphère de diffusion. Pour évaluer les erreurs de première et de seconde espèce dans une telle situation, on peut faire appel aux simulations présentées dans le paragraphe précédent. En utilisant la carte de la détectivité mesurée expérimentalement et en simulant la saturation du détecteur de manière à retrouver un facteur α de l'ordre de 0.04, on peut trouver la forme des distributions $\sigma_{\tilde{\Delta N}}^{(AL)}$ et $\sigma_{\tilde{\Delta N}}^{(CR)}$ (on fait l'hypothèse que la détectivité moyenne du détecteur est de l'ordre de 10%²³). On retrouve alors des résultats comparables à ceux des relations 4.36. En revanche les largeurs des deux distributions sont nettement plus importantes dans la mesure où l'on moyenne sur un nombre plus petit de réalisations et on peut estimer que l'erreur de première espèce pour un seuil σ_0 fixé à 0.96 est de l'ordre de 10%. Un tel résultat est pour le moins encourageant. Malheureusement, on peut s'apercevoir que la valeur déterminée pour $\sigma_{\tilde{\Delta N}}$ dépend très fortement des paramètres choisis pour définir les zones d'exclusion. Ainsi, pour différents jeux de paramètres relativement proches, les valeurs de l'écart-type mesuré s'évaluent entre 0.96 et 1.01²⁴. Dans le même temps, la valeur de α peut varier de 0.04 à 0.08. De telles observations limitent donc la portée des résultats présentés ici.

La conclusion d'une telle étude est à la fois encourageante, dans la mesure où nous avons réussi à nous placer dans des conditions favorables à l'observation d'une réduction des fluctuations de ΔN , et légèrement décevante, dans la mesure où nous n'avons pas réussi à observer de façon suffisamment claire le résultat escompté. La méthode développée pour analyser les

²³Il est important ici d'insister sur le fait qu'une bonne connaissance de la détectivité moyenne du détecteur s'avère indispensable pour pouvoir se permettre de comparer le résultat des simulations aux résultats expérimentaux.

²⁴Nous avons en fait présenté ici la situation la plus favorable...

résultats ainsi que les simulations réalisées ont tout de même permis de se convaincre qu'une telle méthode d'analyse pourrait fonctionner. On pourrait donc avoir envie de reproduire de nouvelles expériences de collisions en essayant de limiter au maximum tous les effets qui peuvent perturber le résultat de la mesure : améliorer la stabilité de l'expérience pour travailler en permanence avec des condensats les plus purs possibles et limiter ainsi l'effet des nuages thermiques résiduels, améliorer la qualité du transfert Raman pour éviter un couplage vers les condensats parasites... D'autre part, il ressort des différents modèles étudiés qu'une augmentation de la détectivité moyenne des MCP devraient largement faciliter l'étude de la réduction des fluctuations de nombre d'atomes. Un tel changement paraît malheureusement difficilement réalisable dans la mesure où nos conditions d'utilisation placent déjà les MCP dans des conditions optimales de détectivité. On peut éventuellement penser ajouter une troisième galette pour augmenter encore un peu plus la détectivité du système de détection. Une telle configuration reste néanmoins très sensible aux problèmes de saturation. Pour les limiter, on peut éventuellement penser à placer des caches à l'endroit où les condensats sont censés tomber sur le détecteur. Différentes possibilités restent donc accessibles pour améliorer cette étude.

4.5 Conclusion

Ce chapitre constitue le coeur de ce manuscrit. Nous avons eu l'occasion de montrer au travers de l'étude de la forme de la fonction de corrélation $g^{(2)}$ que les atomes diffusés lors de la collision de deux condensats ne sont pas indépendants les uns des autres. D'une part, les atomes sont émis par paire au fur et à mesure de la collision. Du fait des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion, les deux composantes de chaque paire ont des impulsions opposées dans la sphère de diffusion. Par l'intermédiaire de l'information tridimensionnelle que l'on obtient pour chaque atome détecté à l'aide des MCP, on est aussi capable de mesurer les tailles du volume de la corrélation qui caractérise les paires d'atomes d'impulsions opposées. Ces dernières peuvent être reliées aux largeurs en impulsion des condensats qui collisionnent. Ces largeurs sont définies par les tailles spatiales des condensats du fait de la relation d'incertitude de Heisenberg. Cette observation est confirmée au travers de la mesure des tailles du volume de cohérence de la source de paires d'atomes corrélés auxquelles on a accès en étudiant les corrélations locales sur la sphère de diffusion. Ces corrélations correspondent à une autre manifestation de l'effet Hanbury Brown Twiss et leur observation confirme la nature chaotique des différents modes de diffusion de la sphère de diffusion. Une telle étude nous permet d'autre part de vérifier que le nombre d'occupation de ces modes est plus petit que 1. Nous pouvons donc considérer les paires produites pendant la collision des condensats comme des paires d'atomes individuels. De tels états se présentent comme de bons candidats pour l'étude future de phénomènes d'intrication quantique dans l'esprit des expériences réalisées par Rarity et Tapster sur des paires de photons intriqués [13].

Nous avons d'autre part cherché à observer une réduction des fluctuations de la différence du nombre d'atomes de deux modes définis par des impulsions opposées. La méthode présentée a été validée au travers de différentes simulations prenant en compte les particularités du dispositif expérimental. Bien que les résultats obtenus expérimentalement ne permettent pas de conclure de façon univoque à l'observation de la réduction des fluctuations de la différence

du nombre d'atomes de deux modes d'impulsions opposées de la sphère de diffusion, ils restent encourageants et motivent la réalisation de nouvelles expériences de collisions pour lesquelles les différentes limitations de l'expérience seraient mieux contrôlées.

Aspects théoriques des collisions de deux condensats de Bose-Einstein

Le traitement théorique de la collision de deux condensats de Bose-Einstein s'avère être un exercice très difficile. Ceci provient essentiellement du grand nombre de modes à prendre en compte pour réaliser le traitement complet des processus impliqués. Initialement, les deux condensats occupent des modes bien définis. Les processus de collisions peuvent être vus comme un phénomène d'émission spontanée qui va peupler des modes initialement vides. Selon les caractéristiques de la source, ce nombre de modes peut être extrêmement grand, $\sim 10^4$ typiquement dans les expériences réalisées sur notre dispositif expérimental. Dans le cas particulier des expériences de mélange à quatre ondes atomiques [30, 63, 64], on peut restreindre l'étude à un petit nombre de modes, en l'occurrence ceux qui sont macroscopiquement occupés à l'issue des processus de collisions [112]. Tous les autres modes sont alors traités comme des pertes du système. Dans notre situation expérimentale, nous ne pouvons pas exclure ces modes dans la mesure où nous cherchons justement à en décrire les propriétés statistiques. Différentes voies de recherche permettent cependant de traiter une telle situation. Une approche perturbative permet ainsi de dégager un certain nombre de propriétés de la dynamique de la collision de façon analytique [62, 113, 114, 109]. D'autres méthodes, basées sur des simulations stochastiques de la collision permettent de calculer numériquement l'évolution du système et donnent accès à une étude quantitative du comportement ainsi que des propriétés de corrélation des particules diffusées lors de la collision [115, 116, 117]. Ces deux méthodes correspondent à deux approches complémentaires du traitement de la collision de deux condensats de Bose-Einstein.

Dans ce chapitre, nous nous proposons dans un premier temps de présenter le cadre général du traitement perturbatif de la collision de deux condensats de Bose-Einstein. Cette étude permet de montrer l'équivalence formelle qui existe entre la collision de deux condensats et la dynamique d'un amplificateur paramétrique optique ¹. Les processus élémentaires qui gouvernent la dynamique de la collision peuvent dans le même temps être mis en évidence, et un certain nombre de résultats analytiques sont établis pour la forme des fonctions de corrélation étudiées expérimentalement. Nous nous concentrons ensuite sur l'analyse des résultats de simulations stochastiques obtenus dans le cadre d'une collaboration avec l'équipe de P. Drummond. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats expérimentaux présentés au chapitre 4. Cette étude permet de confirmer les différentes interprétations avancées pour expliquer la forme des corrélations observées expérimentalement.

¹Nous avons mentionné cette propriété dans le premier chapitre de ce manuscrit.

5.1 Approche perturbative

5.1.1 Décomposition de Bogoliubov du système

Un système de bosons interagissant par l'intermédiaire du potentiel de contact peut être décrit par l'hamiltonien suivant (voir le paragraphe 1.3.1) :

$$\hat{H} = - \int dr^3 \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) + \frac{g}{2} \int dr^3 \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \quad (5.1)$$

Dans la mesure où l'hamiltonien 5.1 est d'ordre 4 en $\hat{\Psi}$, l'équation de Heisenberg qui gouverne l'évolution du champ

$$i\hbar \partial_t \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) + g \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \quad (5.2)$$

est non linéaire et de manière générale insoluble analytiquement. Cependant, pour certains problèmes physiques, il est possible de réaliser une approximation de type Bogoliubov, qui permet de linéariser l'équation de Heisenberg. L'idée sous-jacente dans ce type d'approximation consiste à décomposer la fonction d'onde du système en deux parties : ψ et $\hat{\delta}$. Le premier terme décrit les modes du système qui sont macroscopiquement occupés et dont les fluctuations sont généralement petites. On peut alors négliger ces fluctuations et traiter ces modes semi-classiquement par l'intermédiaire de fonctions complexes. Dans notre cas, ψ va décrire les condensats de Bose-Einstein qui rentrent en collision. La forme de la fonction ψ peut être déterminée numériquement à partir d'une résolution de l'équation de Gross-Pitaevskii (voir le paragraphe 5.2.1). On peut aussi utiliser différents *ansatz* simples pour décrire la fonction ψ . Ceci permet généralement de simplifier les calculs et d'aboutir à un certain nombre de résultats analytiques qui donnent une bonne image des phénomènes physiques impliqués. On verra plusieurs exemples dans les paragraphes suivants.

Le deuxième terme, $\hat{\delta}$, décrit les modes du champ dont les fluctuations sont importantes et qui doivent donc être traités de façon complètement quantique. Ce terme est généralement petit et peut donc être traité perturbativement. Dans notre cas, ce terme concerne les modes de diffusion qui sont peuplés au fur et à mesure de la collision par des paires atomiques corrélées. La population de ces modes étant faible, le traitement perturbatif est bien justifié dans ce cas ². Pour décrire la collision de deux condensats de Bose-Einstein, on peut alors décomposer le champ Ψ sous la forme suivante [114] :

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \psi_Q(\mathbf{r}, t) + \psi_{-Q}(\mathbf{r}, t) + \hat{\delta}(\mathbf{r}, t) \quad (5.3)$$

où $\pm Q$ est proportionnel à l'impulsion moyenne des condensats qui rentrent en collision ($Q = k_{\text{rec}}$ dans l'expérience décrite au chapitre 4). Les fonctions $\psi_Q(\mathbf{r}, t)$ et $\psi_{-Q}(\mathbf{r}, t)$ sont des fonctions complexes qui décrivent la forme des deux condensats. En insérant l'Eq.5.3 dans l'équation de Heisenberg 5.2, on obtient une série de terme parmi lesquels on ne garde que

²Cette remarque permet de dégager les limites du modèle que l'on s'apprête à décrire. Dès que la population des modes de diffusion est grande, les effets d'amplification ne sont plus négligeables et le traitement décrit n'est alors plus adapté.

ceux du premier ordre en $\widehat{\delta}$, dans l'esprit de l'approximation de Bogoliubov,

$$i\hbar\partial_t\widehat{\delta}(\mathbf{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + 2g|\psi_Q(\mathbf{r},t)|^2 + 2g|\psi_{-Q}(\mathbf{r},t)|^2 + 2g\psi_Q^*(\mathbf{r},t)\psi_{-Q}(\mathbf{r},t) \right. \\ \left. + 2g\psi_{-Q}^*(\mathbf{r},t)\psi_Q(\mathbf{r},t) \right] \widehat{\delta}(\mathbf{r},t) + g \left[2\psi_Q(\mathbf{r},t)\psi_{-Q}(\mathbf{r},t) + \psi_Q^2(\mathbf{r},t) + \psi_{-Q}^2(\mathbf{r},t) \right] \widehat{\delta}^\dagger(\mathbf{r},t) \quad (5.4)$$

Cette dernière équation peut être largement simplifiée. D'une part l'énergie cinétique des atomes diffusés, $\hbar^2Q^2/2m$ est généralement grande devant l'énergie d'interaction gn , où n est la densité moyenne des atomes dans le condensat³. Le terme de champ moyen $\left[2g|\psi_Q(\mathbf{r},t)|^2 + 2g|\psi_{-Q}(\mathbf{r},t)|^2 + 2g\psi_Q^*(\mathbf{r},t)\psi_{-Q}(\mathbf{r},t) + 2g\psi_{-Q}^*(\mathbf{r},t)\psi_Q(\mathbf{r},t) \right]$ peut donc être négligé. D'autre part, le terme $g \left[2\psi_Q(\mathbf{r},t)\psi_{-Q}(\mathbf{r},t) + \psi_Q^2(\mathbf{r},t) + \psi_{-Q}^2(\mathbf{r},t) \right] \widehat{\delta}^\dagger(\mathbf{r},t)$ correspond aux trois processus élémentaires schématisés sur la figure 5.1. Parmi ces processus, seul celui pour lequel un atome de chacun des deux condensats est détruit, donnant naissance à une paire d'atomes d'impulsions opposées conserve à la fois l'énergie et l'impulsion. Les deux autres processus décrivent le phénomène suivant : deux atomes d'un même condensat rentrent en collision et engendrent une paire d'atomes dont les impulsions vérifient la conservation de l'impulsion. Un tel processus violant la conservation de l'énergie, il est non résonant et peut être considéré comme négligeable dans la suite de ce traitement⁴. Pour finir l'équation de Heisenberg décrivant la dynamique du système peut s'écrire sous la forme simplifiée suivante

$$i\hbar\partial_t\widehat{\delta}(\mathbf{r},t) = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\widehat{\delta}(\mathbf{r},t) + 2g\psi_Q(\mathbf{r},t)\psi_{-Q}(\mathbf{r},t)\widehat{\delta}^\dagger(\mathbf{r},t) \quad (5.5)$$

5.1.2 Collisions de deux ondes planes

Le cas le plus simple que l'on puisse considérer dans le cadre de ce traitement est la collision de deux ondes planes contra-propageantes. Cela revient à considérer que la forme des condensats est définie par

$$\psi_{\pm Q}(\mathbf{r},t) = \sqrt{n_{\pm Q}} e^{\mp i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\hbar(Q^2/2m)t} \quad (5.6)$$

où $n_{\pm Q}$ correspond à la densité respective des condensats. On suppose dans la suite que $n_{\pm Q} = n$. Dans une boîte de taille L , on peut décomposer l'opérateur décrivant les atomes diffusés sur la base des ondes planes

$$\widehat{\delta}(\mathbf{r},t) = L^{-3/2} \sum_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \widehat{a}_{\mathbf{q}}(t) \quad (5.7)$$

³Comme nous l'avons mentionné au paragraphe 1.3.1, pour que les particules diffusées lors de la collision de deux condensats puissent être considérées comme des particules libres, il faut que la vitesse relative des deux condensats soit plus grande que la vitesse du son des condensats. Ceci revient à dire que l'énergie de collision est plus grande que le potentiel chimique du condensat qui représente l'énergie d'interaction du condensat.

⁴Lors de l'analyse des simulations stochastiques, nous nous sommes rendus compte qu'un de ces processus reste malgré tout favorable du fait des effets de la stimulation bosonique (voir le paragraphe 5.2.2). L'approximation réalisée ici reste malgré tout pertinente.

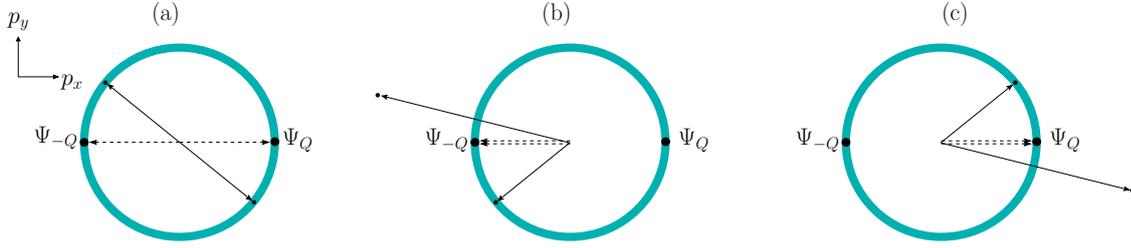


FIG. 5.1 – Processus élémentaires impliqués dans la collision de deux condensats de Bose-Einstein. (a) Terme $g\psi_Q(\mathbf{r},t)\psi_{-Q}(\mathbf{r},t)\hat{\delta}^\dagger(\mathbf{r},t)$. Un atome est annihilé dans chacun des deux condensats. Ceci donne naissance à une paire d'atomes vérifiant les conditions de conservation de l'énergie et de l'impulsion. Ces atomes sont répartis sur une sphère dans l'espace des impulsions. (b) Terme $g\psi_{-Q}^2\hat{\delta}^\dagger(\mathbf{r},t)$. Deux atomes sont annihilés dans le condensat de vecteur d'onde $-Q$. Une paire atomique vérifiant les conditions de conservation l'impulsion est alors émise. Ce processus ne conserve pas l'énergie. (c) Terme $g\psi_Q^2\hat{\delta}^\dagger(\mathbf{r},t)$. Même chose que (b) pour le condensat de vecteur d'onde Q .

Dans cette expression, les opérateurs $\hat{a}_{\mathbf{q}}(t)$ sont les opérateurs d'annihilation d'un atome de vecteur d'onde \mathbf{q} . Dans ce cadre l'hamiltonien du système peut s'écrire sous la forme suivante [109] :

$$H = \sum_{\mathbf{q}} \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{q}} + \frac{gn}{2} e^{-i\hbar(Q^2/m)t} \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger(t) \hat{a}_{-\mathbf{q}}^\dagger + h.c. \right) \quad (5.8)$$

Cet hamiltonien correspond exactement à celui que nous avons considéré au paragraphe 1.2.1 pour décrire la dynamique d'un amplificateur paramétrique optique. Les deux phénomènes sont donc étroitement reliés et peuvent être décrits par le même opérateur évolution. Nous avons eu l'occasion de mentionner cette propriété au paragraphe 1.3.1.

L'hamiltonien 5.8 conserve l'impulsion : l'annihilation de deux particules d'impulsions respectives $\hbar Q$ et $-\hbar Q$ donnent naissance à deux particules d'impulsion $\hbar q$ et $-\hbar q$. On peut, dans cette situation simple, écrire et résoudre analytiquement les équations de Heisenberg qui décrivent l'évolution des opérateurs $\hat{a}_{\mathbf{q}}(t)$:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}(t) = e^{-i\hbar(Q^2/2m)t} \left[F_1(p, t) \hat{a}_{\mathbf{p}}(0) - F_2(p, t) \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger(0) \right] \quad (5.9)$$

où les fonctions F_1 et F_2 s'écrivent

$$F_1(p, t) = \cosh[\sqrt{\Delta(p)}t] - i\hbar \frac{p^2 - Q^2}{2m} \frac{\sinh[\sqrt{\Delta(p)}t]}{\sqrt{\Delta(p)}} \quad (5.10)$$

$$F_2(p, t) = i \frac{gn}{\hbar} \frac{\sinh[\sqrt{\Delta(p)}t]}{\sqrt{\Delta(p)}} \quad (5.11)$$

et $\Delta(p) = (gn/\hbar)^2 - \hbar[p^2 - Q^2/2m]^2$. On peut alors distinguer deux types de modes par rapport à l'évolution de leurs populations. Ceux qui vérifient les lois de conservation de l'énergie, c'est à dire ceux pour lesquels la différence entre l'énergie cinétique des atomes

diffusés et incidents est plus petite que l'énergie de champ moyen

$$\left(\frac{\hbar^2 p^2 - Q^2}{2m}\right)^2 < (gn)^2 \quad (5.12)$$

voient leur population augmenter exponentiellement avec le temps. Les autres modes voient leur population osciller autour de valeurs de l'ordre de 1.

La relation 5.12 peut être vue ici comme un équivalent de l'équation de la sphère de diffusion que nous avons observée expérimentalement. La largeur de la sphère est ici directement reliée au potentiel chimique des condensats : expérimentalement, la largeur de la sphère semblait plutôt reliée aux largeurs des distributions d'impulsion des condensats. Le fait de modéliser les condensats comme des ondes planes revient à considérer que leur distribution de vitesse est infiniment piquée. Cela revient donc à négliger la largeur de leur distribution d'impulsion et explique pourquoi cet effet n'apparaît pas dans ces calculs. Pour tenir compte de ces effets de taille finie, il faut modifier les fonctions ψ_Q et ψ_{-Q} pour les rendre plus proches de ce qu'elles sont réellement ⁵. Dans le paragraphe suivant, nous allons modéliser les fonctions d'onde des condensats à l'aide de gaussiennes de façon à pouvoir rendre compte de ces effets.

5.1.3 Collisions de condensats inhomogènes

Approche perturbative De façon à mettre en évidence les effets de taille finie dans la dynamique de collision de deux condensats de Bose-Einstein, on peut approximer leurs fonctions d'onde par des gaussiennes de symétrie cylindriques ⁶ :

$$\psi_{\pm Q}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{N}{2\pi^{3/2}\sigma_r^2\sigma_x}} \exp\left(\mp iQx - \frac{i\hbar Q^2 t}{2m}\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_r^2}(y^2 + z^2) - \frac{1}{2\sigma_x^2}\left(x \mp \frac{\hbar Qt}{m}\right)^2\right) \quad (5.13)$$

Dans cette expression, les largeurs σ_r et σ_x correspondent aux largeurs spatiales des condensats. On peut alors réécrire l'équation 5.5 sous la forme suivante

$$i\hbar\partial_t\hat{\delta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\hat{\delta}(\mathbf{r}, t) + \frac{gN}{\pi^{3/2}\sigma_r^2\sigma_x} e^{-\frac{i\hbar Q^2 t}{m}} e^{-\frac{\hbar^2 Q^2 t^2}{m^2\sigma_x^2}} e^{-\frac{1}{\sigma_r^2}(y^2+z^2)} e^{-\frac{1}{\sigma_x^2}x^2}\hat{\delta}^\dagger(\mathbf{r}, t) \quad (5.14)$$

Cette dernière équation peut être écrite de façon analogue dans l'espace de Fourier. En re-normalisant les différentes variables et opérateurs du problème de la manière suivante,

$$\frac{\hbar Q}{m\sigma_x}t \rightarrow t \quad \mathbf{r}/\sigma_x \rightarrow \mathbf{r} \quad \frac{1}{\sigma_x^{3/2}}\hat{\delta}^\dagger(\mathbf{r}, t) \rightarrow \hat{\delta}^\dagger(\mathbf{r}, t) \quad (5.15)$$

et en posant,

$$\alpha = \frac{mgN}{\gamma\sigma_r\sqrt{\pi}} \quad \beta = Q\sigma_x \quad \gamma = \sigma_r/\sigma_x \quad (5.16)$$

⁵Ceci permet de dégager les limites du modèle ondes planes. Ce dernier fonctionne bien pour traiter la dynamique d'un amplificateur paramétrique optique mais reste limité pour décrire la collision des condensats que nous sommes capables de produire expérimentalement.

⁶Expérimentalement nos condensats ne possèdent pas une telle forme. Le fait d'utiliser des gaussiennes permet cependant de rendre la majeure partie des calculs analytiques. Dans les simulations stochastiques présentées dans la partie suivante, la forme initiale des condensats est définie de façon plus précise et permet de rendre les résultats présentés plus proches de la réalité.

on peut définir la transformée de Fourier de l'opérateur $\widehat{\delta}(\mathbf{r}, t)$ de la façon suivante

$$\widehat{\delta}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{3/2} \int d^3\mathbf{k} e^{i\beta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\beta k^2 t/2} \widehat{\delta}^\dagger(\mathbf{k}, t) \quad (5.17)$$

et réécrire l'équation 5.14 sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \partial_t \widehat{\delta}(\mathbf{k}, t) = -i \frac{\alpha\beta^2\gamma^2}{8\pi^{3/2}} e^{-i\beta t} e^{-t^2} \int d^3\mathbf{k}' \exp\left(\frac{i\beta}{2}(k^2 + k'^2)t - \frac{\gamma^2\beta^2}{4}(\mathbf{k}_r + \mathbf{k}'_r)^2 \right. \\ \left. - \frac{\beta^2}{4}(k_x + k'_x)^2\right) \widehat{\delta}^\dagger(\mathbf{k}', t) \end{aligned} \quad (5.18)$$

On peut maintenant tenter de résoudre cette dernière équation perturbativement. On commence par décomposer l'opérateur $\widehat{\delta}(\mathbf{k}, t)$ sous la forme d'une série perturbative

$$\widehat{\delta}(\mathbf{k}, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{\delta}^{(i)}(\mathbf{k}, t) \quad (5.19)$$

On peut ensuite calculer la solution de l'équation 5.18 à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations [109]

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}, t) = -i \frac{\alpha\beta^2\gamma^2}{8\pi^{3/2}} \int_0^t d\tau e^{-i\beta\tau} e^{-\tau^2} \times \\ \int d^3\mathbf{k}' \exp\left(\frac{i\beta}{2}(k^2 + k'^2)\tau - \frac{\gamma^2\beta^2}{4}(\mathbf{k}_r + \mathbf{k}'_r)^2 - \frac{\beta^2}{4}(k_x + k'_x)^2\right) \widehat{\delta}^{(0)\dagger}(\mathbf{k}', \tau) \end{aligned} \quad (5.20)$$

A partir de cette expression, on est capable d'estimer la forme de la densité de la sphère de diffusion ainsi que la celle des fonctions de corrélation qui caractérisent les paires atomiques.

Densité de la sphère de diffusion Au premier ordre de la théorie des perturbations, la densité de la sphère de diffusion peut se mettre sous la forme ⁷

$$\rho(\mathbf{k}) = \langle \widehat{\delta}^{(1)\dagger}(\mathbf{k}, t) \widehat{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}, t) \rangle \quad (5.21)$$

A partir de la relation 5.20, il est possible de déterminer analytiquement la forme de ρ . Pour simplifier la forme obtenue, on peut faire un certains nombres d'approximations supplémentaires compatibles avec nos paramètres expérimentaux. Ainsi, dans la situation où

$$\beta \gg 1, \quad \frac{\gamma}{|\mathbf{e}_r|} \ll 1, \quad \frac{\gamma}{|\mathbf{e}_r|\beta\gamma^2} \ll 1, \quad (5.22)$$

avec $\mathbf{e} = \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_x$ un vecteur unité d'axe \mathbf{k} , la densité de la sphère de diffusion peut se mettre sous la forme suivante

$$\rho(\mathbf{k}) \simeq \frac{\alpha^2\beta\gamma^3\sqrt{\pi}}{32\pi\sqrt{2}|\mathbf{e}_r|} \exp\left[-\frac{\beta^2\gamma^2(k^2 - 1)^2}{2|\mathbf{e}_r|^2}\right] \quad (5.23)$$

⁷Tous les résultats présentés dans la suite sont analogues à ceux présentés dans la référence [109] qui traite spécifiquement le cas où $\sigma_r = \sigma_x$. Ils ont été établis par P. Ziñ qui travaille dans le groupe de M. Trippenbach. A l'heure où ces lignes sont écrites, un article présentant le détail des calculs est en cours de rédaction.

Dans notre situation expérimentale on a $\alpha \simeq 2.1$, $\beta \simeq 330$, $\gamma \simeq 0.04$ et $\beta\gamma^2 \simeq 0.53$. La forme 5.23 de la densité de la sphère de diffusion peut donc être utilisée sur une large gamme de \mathbf{e}_r . La zone où l'approximation n'est plus valide correspond en fait à la zone où sont détectés les deux condensats qui collisionnent. Cette zone étant de fait exclue de notre traitement de données, cette approximation n'est donc que peu limitante.

La forme 5.23 de la densité de la sphère de diffusion est une gaussienne centrée en $k = 1$ et de largeur caractéristique $|\mathbf{e}_r|/\beta\gamma$. Cette largeur est directement liée à la largeur de la distribution de vitesse du condensat : ceci confirme l'interprétation avancée au chapitre 4 pour expliquer la largeur de la sphère de diffusion. Pour $|\mathbf{e}_r| = 1$, on a $1/\beta\gamma \simeq 0.075$ ce qui correspond relativement bien à la valeur mesurée expérimentalement⁸ (voir le paragraphe 4.1.2). Dans la mesure où la largeur de la sphère dépend de $|\mathbf{e}_r|$, ce calcul perturbatif prédit d'autre part une anisotropie dans le profil de densité de la sphère de diffusion : plus l'on se rapproche de l'axe de la collision, qui correspond à l'axe long du condensat, et plus la sphère est fine.

Forme des fonctions de corrélation Dans le cadre de ce traitement perturbatif, on peut calculer analytiquement la forme de la fonction $G^{(2)}$. En suivant la même approche que celle décrite dans [109], on peut tout d'abord décomposer cette fonction sous la forme suivante

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t) &= \langle \widehat{\delta}^\dagger(\mathbf{k}_1, t) \widehat{\delta}^\dagger(\mathbf{k}_2, t) \widehat{\delta}(\mathbf{k}_1, t) \widehat{\delta}(\mathbf{k}_2, t) \rangle \\ &= G^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1; t) G^{(1)}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2; t) + |G^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t)|^2 + |m(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t)|^2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

avec au premier ordre de la théorie des perturbations

$$m(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t) = \langle \widehat{\delta}^{(0)\dagger}(\mathbf{k}_1, t) \widehat{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_2, t) \rangle \quad (5.25)$$

$$G^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t) = \langle \widehat{\delta}^{(1)\dagger}(\mathbf{k}_1, t) \widehat{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}_2, t) \rangle \quad (5.26)$$

Dans l'expression 5.24, le terme $m(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t)$ va décrire spécifiquement les corrélations intervenant entre les paires d'atomes d'impulsions opposées, $\mathbf{k}_1 \simeq -\mathbf{k}_2$. La fonction $G^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t)$ décrit de son côté, les corrélations locales sur la sphère de diffusion, $\mathbf{k}_1 \simeq \mathbf{k}_2$, dues à l'effet Hanbury Brown et Twiss. On va dans la suite expliciter chacun de ces termes au premier ordre de la théorie des perturbations.

On va s'intéresser dans un premier temps au terme $m(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t)$. Pour $t \gg 1$, le calcul est analytique et on peut mettre le résultat sous la forme suivante,

$$\begin{aligned} m(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \infty) &= -i \frac{\alpha \beta^2 \gamma^2}{16\pi} \exp\left(-\frac{\gamma^2 \beta^2}{4} (\mathbf{k}_{1,r} + \mathbf{k}_{2,r})^2 - \frac{\beta^2}{4} (k_{1,x} + k_{2,x})^2 - \frac{\Delta^2}{4}\right) \times \\ &\quad \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{i\Delta}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

avec $\Delta = \beta(1 - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2})$. Dans cette expression, on peut identifier deux contributions. D'une part, le facteur $\exp\left(-\frac{\gamma^2 \beta^2}{4} (\mathbf{k}_{1,r} + \mathbf{k}_{2,r})^2 - \frac{\beta^2}{4} (k_{1,x} + k_{2,x})^2\right)$ est le terme qui impose la conservation de l'impulsion dans les processus de collision. Il est non-négligeable dès que $\mathbf{k}_1 \simeq -\mathbf{k}_2$

⁸Dans la mesure où toutes nos variables ont été renormalisées, ce résultat est ici sans unité. En faisant réapparaître les constantes de normalisation, on peut montrer qu'il s'exprime en fait en unité de Q .

et décroît exponentiellement avec pour largeurs caractéristiques $2/\gamma\beta$ ou $2/\beta$ selon la direction de l'espace considérée. On retrouve au travers de ce comportement l'anisotropie observée expérimentalement sur les largeurs des corrélations des paires atomiques d'impulsions opposées. De plus les largeurs $2/\gamma\beta$ et $2/\beta$ sont bien reliées aux largeurs de la distribution d'impulsion des condensats et confirment l'interprétation avancée au moment de l'analyse des résultats expérimentaux. Le facteur $\exp\left(-\frac{\Delta^2}{4}\right) \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{i\Delta}{2}\right)\right)$ impose quant à lui la conservation de l'énergie dans les processus de collision. Il est proche de 1 dès que $k_1 \sim k_2 \sim 1$ et décroît exponentiellement avec pour largeur caractéristique $2/\beta$. Dans la mesure où $2/\beta \ll 2/\gamma\beta$, ce facteur se présente ici comme le terme limitant la largeur des corrélations : ce modèle prédit alors une corrélation quasi-isotrope contrairement à ce que nous avons observé expérimentalement.

Dans ce modèle cependant, la durée de la collision est fixée par le temps de séparation des condensats. Au paragraphe 4.1.3, nous avons vu qu'expérimentalement la durée de la collision est plutôt fixée par le temps caractéristique d'expansion des condensats qui est environ 10 fois plus court que la durée de séparation des condensats. Ce modèle ne s'applique donc pas particulièrement bien à nos données dans la mesure où il a en fait tendance à sous-estimer la largeur caractéristique du facteur qui impose la conservation de l'énergie : plus la collision est courte, et plus on s'attend en effet à ce que l'incertitude sur l'énergie du système soit grande du fait du principe de Heisenberg. Dans le même temps, le facteur qui impose la conservation de l'énergie doit être d'autant moins limitant. Nous reviendrons sur cette idée à partir des résultats des simulations stochastiques présentées dans la partie suivante.

Dans la situation où les relations 5.22 sont vérifiées et pour $t \gg 1$, on peut montrer que

$$G^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \infty) \simeq \frac{\alpha^2 \beta \gamma^3 \sqrt{\pi}}{32\pi \sqrt{2} |\mathbf{e}_r|} \exp\left(-\frac{\gamma^2 \beta^2}{8} \Delta \mathbf{k}_r^2 - \frac{\beta^2}{8} \Delta k_x^2\right) \times \\ \exp\left(-\frac{\beta^2}{8} (\mathbf{e} \cdot \Delta \mathbf{k})^2\right) \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{i\beta \mathbf{e} \cdot \Delta \mathbf{k}}{2\sqrt{2}}\right)\right) \exp\left(-\frac{2\beta^2 \gamma^2 \Delta K^2}{\mathbf{e}_r^2}\right) \quad (5.28)$$

avec $\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ et $\frac{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|}{2} = 1 + \Delta K$. De façon analogue à $m(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \infty)$, on peut décomposer $G^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \infty)$ en deux contributions. D'une part, le facteur $\exp\left(-\frac{\gamma^2 \beta^2}{8} \Delta \mathbf{k}_r^2 - \frac{\beta^2}{8} \Delta k_x^2\right)$ permet d'imposer la conservation de l'impulsion. Il ne contribue que pour $\mathbf{k}_1 \simeq \mathbf{k}_2$ et décroît exponentiellement avec pour largeurs $4/\gamma\beta$ ou $4/\beta$ selon la direction de l'espace considérée⁹. On retrouve de nouveau ici l'origine de l'anisotropie observée sur les corrélations observées expérimentalement. Les trois autres facteurs sont dus à la conservation de l'énergie. De la même façon que pour le terme $m(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; t)$, la largeur de ces 3 derniers facteurs est sous-évaluée dans ce modèle par rapport à notre situation expérimentale et ceci rend la comparaison directe entre le modèle perturbatif et nos données expérimentales difficiles.

Malgré un certain nombre de limitations, ce modèle perturbatif nous a permis d'identifier l'origine des quantités qui définissent les largeurs des fonctions de corrélation que nous avons

⁹On peut remarquer que ces largeurs sont deux fois plus grandes que celles qui concernent les corrélations des paires d'impulsion opposées. Cela ne correspond pas vraiment à ce que nous avons observé expérimentalement. Ce facteur 2 peut en fait être attribué à la forme gaussienne choisie pour les condensats. On verra dans la partie suivante que ce facteur est très proche de 1 pour des condensats possédant une forme plus proche de la réalité.

mesurées expérimentalement. La méthode s'avère cependant lourde et certaines approximations du modèle utilisé rendent difficile une comparaison directe et quantitative des résultats observés expérimentalement et des résultats dérivés dans ce paragraphe. Ceci motive d'autant plus les calculs stochastiques présentés dans la partie suivante pour lesquels de telles limitations n'apparaissent plus.

5.2 Simulations stochastiques de la collision de deux condensats

Dans le cadre d'un séjour dans le groupe de P. Drummond de l'université de Queensland en Australie, j'ai eu l'occasion de réaliser des simulations stochastiques de la collision de deux condensats de Bose-Einstein. Cette collaboration a été principalement supervisée par K. Kheruntsyan. En adaptant les valeurs des paramètres du traitement numérique aux valeurs expérimentales, cette méthode permet de comparer en partie les résultats obtenus expérimentalement à ceux des simulations : nous verrons en effet que du fait de certaines limitations de la méthode de calcul, seuls les premiers instants de la collision ont pu être simulés. Les résultats obtenus doivent donc être extrapolés à temps long. Cette méthode permet en revanche d'observer les variations des effets étudiés dans différentes configurations bien plus aisément que l'on peut espérer le faire expérimentalement : un certain nombre de paramètres sont en effet fixés de part la nature même des atomes ou en raison des contraintes du dispositif expérimental. Enfin, contrairement au traitement perturbatif décrit précédemment, un nombre minimum d'approximations sont nécessaires. Dans les résultats présentés, les effets de champ moyen sont ainsi toujours pris en compte. Des détails théoriques sur le principe des calculs réalisés sont donnés en annexe C.

Dans cette partie, nous commençons par décrire une méthode permettant de calculer le fondamental des solutions de l'équation de Gross-Pitaevskii, qui décrit en très bonne approximation la fonction d'onde d'un condensat piégé dans un potentiel donné. La solution déterminée est ensuite utilisée comme condition initiale des équations stochastiques dérivées dans l'annexe C. Nous sommes alors capables à l'aide de cette méthode de calculer la dynamique de la collision de deux condensats d' He^* . A partir de ce traitement nous calculons la forme des corrélations des paires atomiques et celle des corrélations locales et les comparons aux résultats expérimentaux. Nous nous intéressons enfin à d'autres configurations permettant d'obtenir une vision plus globale des processus étudiés. Tous les calculs présentés dans cette partie ont été réalisés à l'aide du logiciel XMDS [118].

5.2.1 Calcul des conditions initiales du problème

Afin de résoudre numériquement les équations stochastiques C.24, il faut au préalable être capable de calculer l'état initial du système. Autrement dit, on doit être capable de déterminer les valeurs de $\alpha_{\mathbf{n}}$ et $\beta_{\mathbf{n}}$ sur l'ensemble des positions définies par le réseau tridimensionnel sur lequel on souhaite réaliser les simulations. Dans le cas d'une collision de deux condensats de Bose-Einstein, ceci impose de connaître la forme des condensats au début de la collision. Dans notre situation expérimentale, la forme du condensat est définie par les paramètres du piège

magnétique dans lequel les atomes sont initialement piégés. De façon générale, calculer la fonction d'onde d'un condensat est un problème à N corps complexe et difficilement soluble sans approximations du fait des interactions entre particules. En traitant ces interactions comme un effet de champ moyen, le problème peut se ramener à la résolution d'une équation différentielle non-linéaire portant sur la fonction d'onde du condensat $\psi(\mathbf{r})$, appelée équation de Gross-Pitaevskii [61, 119]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r}) + N_0 g |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (5.29)$$

Dans cette équation $U(\mathbf{r})$ correspond au potentiel qui définit le piège magnétique (voir l'équation 2.4 pour notre situation expérimentale) et N_0 est le nombre total d'atome du condensat piégé. Le terme $N_0 g |\psi(\mathbf{r})|^2$ correspond directement aux effets de champ moyen présents du fait des interactions. Tout se passe donc comme si l'état du système était défini par l'hamiltonien effectif suivant

$$\hat{H}_{\text{gp}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r}) + N_0 g |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (5.30)$$

qui dépend explicitement de la forme du condensat. La fonction d'onde du condensat correspond à l'état fondamental du système défini par l'hamiltonien 5.30.

Il existe différentes méthodes permettant de déterminer une solution approchée de l'équation 5.29. Dans le régime où les interactions dominent, c'est à dire si

$$\mu \gg \hbar\bar{\omega} \quad (5.31)$$

il est possible de négliger le terme d'énergie cinétique dans l'hamiltonien \hat{H}_{gp} et la résolution de l'équation ne pose plus aucun problème. On parle du régime de Thomas-Fermi. La forme spatiale du condensat correspond alors à une parabole inversée dont l'extension dépend directement des paramètres du piège magnétique. Dans notre situation expérimentale et pour des condensats comprenant de l'ordre de 10^4 atomes ou plus, cette approximation est relativement bien vérifiée (voir la figure 5.2). On pourrait donc utiliser cette solution pour déterminer les conditions initiales du problème stochastique. Malheureusement cette solution approchée impose des discontinuités sur les bords de la distribution spatiale de la densité du condensat. Dans l'espace des impulsions ces discontinuités se traduisent par une déformation de la distribution des impulsions des atomes du condensat. Cet effet est suffisamment fort pour largement perturber l'interprétation des résultats des simulations stochastiques. Nous avons donc été amené à résoudre numériquement l'équation 5.29 pour s'affranchir de cette limitation. Nous nous proposons maintenant de présenter le principe de la méthode suivie.

De façon générale, l'évolution temporelle d'une fonction d'onde donnée est définie par l'opérateur évolution que l'on peut écrire à partir de l'hamiltonien du système. On a

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{it\hat{H}}{\hbar}} |\psi(0)\rangle \quad (5.32)$$

En développant $|\psi(0)\rangle$ sur la base des états propres $|\phi_i\rangle$ de \hat{H}

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i |\phi_i\rangle \quad (5.33)$$

on peut réécrire l'équation 5.32 sous la forme

$$\langle \mathbf{r} | \psi(t) \rangle = \psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i e^{-\frac{it\epsilon_i}{\hbar}} \phi_i(\mathbf{r}) \quad (5.34)$$

dans laquelle les ϵ_i sont les énergies propres de \hat{H} . Si l'on pose maintenant $\tau = it$, les coefficients dépendants du temps de l'équation 5.34 se réécrivent sous la forme $e^{-\tau\epsilon_i/\hbar}$. A temps long, ces coefficients tendent vers 0. Dans la situation où le fondamental du système n'est pas dégénéré, ϵ_0 est plus petit que toutes les autres énergies propres du système, et pour un temps τ_0 suffisamment long, on peut écrire,

$$\psi(\mathbf{r}, \tau_0) \approx c_0 e^{-\tau_0\epsilon_0/\hbar} \phi_0(\mathbf{r}) \quad (5.35)$$

A partir d'une forme donnée de la fonction d'onde initiale du système et en calculant son évolution en temps imaginaire, on peut donc réussir à déterminer la fonction d'onde de l'état fondamental du système. Dans notre cas, l'hamiltonien du système est défini par la relation 5.30. On peut d'autre part, utiliser pour définir $\psi(\mathbf{r}, 0)$ la solution approximative de l'équation de Gross-pitaevskii obtenue dans le régime de Thomas-Fermi. Il ne reste ensuite plus qu'à propager cette fonction en temps imaginaire. Un tel traitement ne pose pas de problèmes particuliers numériquement ¹⁰. La figure 5.2 donne le résultat typique des profils de densité obtenus à partir de la solution déterminée pour un condensat de 10^4 atomes.

5.2.2 Collisions de deux condensats d'He*

Mise en place des calculs Afin de comparer nos résultats expérimentaux aux prédictions théoriques, nous avons cherché à reproduire la collision de deux condensats de Bose-Einstein à partir des équations stochastiques présentés dans l'annexe C et en utilisant des paramètres proches de ceux des réalisations expérimentales. Ce type de calculs étant relativement lourd, un soin particulier doit être apporté pour définir convenablement le réseau tridimensionnel sur lequel le calcul est réalisé ainsi que les valeurs moyennes d'observables que l'on souhaite déterminer (voir l'annexe C).

Spatialement, les limites du réseau tridimensionnel doivent être plus grandes que l'extension des condensats durant toute l'évolution de la collision. Ces tailles dépendent alors directement de la durée du calcul dans la mesure où la forme et la position des condensats évoluent au cours du temps sous l'effet du champ moyen et du fait de l'impulsion initiale des atomes. Pour deux condensats de 10^4 atomes, nous avons eu l'occasion de mentionner que la durée de la collision est d'environ $150 \mu s$ (voir le paragraphe 4.1.3). Pendant une telle durée, les condensats parcourent environ $13 \mu m$ le long de l'axe de la collision, ce qui correspond à environ 10% de leur taille radiale ¹¹. Dans le même temps, leurs tailles transverses augmentent

¹⁰La méthode la plus naturelle consiste à propager en temps imaginaire la fonction d'onde initiale pendant une durée relativement courte puis de renormaliser la solution trouvée. La propagation en temps imaginaire entraîne une diminution de la norme de la fonction d'onde qu'il convient de corriger. Cette norme définit en effet le nombre d'atomes contenus dans le condensat. La renormalisation permet de garder le nombre d'atomes quasiment constant au fur et à mesure de la propagation. La convergence de cette méthode étant exponentielle, un petit nombre d'étapes de propagation suivie d'une renormalisation suffisent à obtenir le résultat escompté.

¹¹Les tailles des condensats peuvent être déterminées à partir des calculs présentés dans le paragraphe précédent.

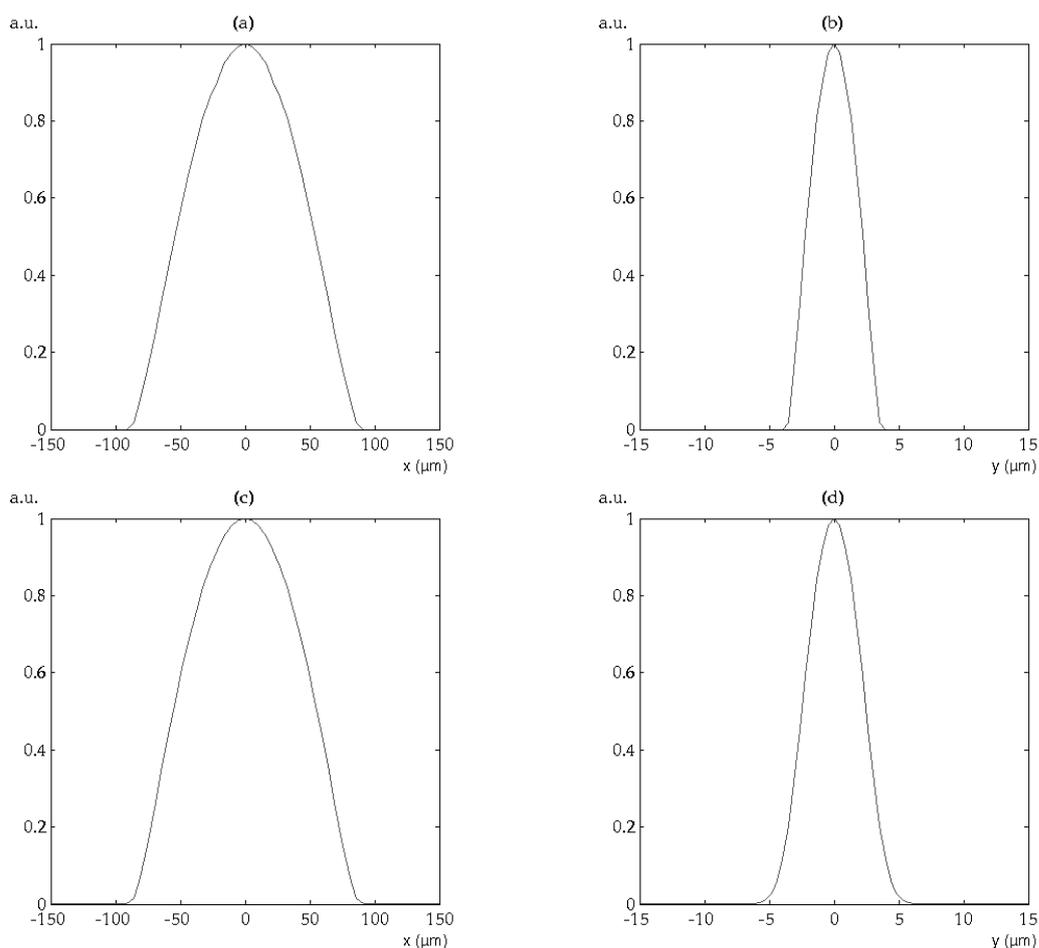


FIG. 5.2 – Profils de densité obtenus pour un condensat de 10^4 atomes confiné dans le piège harmonique expérimental. (a) régime de Thomas-Fermi, profil de densité suivant l'axe long (x) (b) régime de Thomas-Fermi, profil de densité suivant l'axe court (y) (c) solution de l'équation de Gross-Pitaevskii obtenue par propagation en temps imaginaire, profil de densité suivant l'axe long (x) (d) solution de l'équation de Gross-Pitaevskii obtenue par propagation en temps imaginaire, profil de densité suivant l'axe court (y). Les profils sont moyennés suivant les 2 autres axes. En comparant les différents profils, on peut s'apercevoir de l'existence d'ailes dans le profil de densité (d). Ces ailes sont absentes du profil dans le régime de Thomas-Fermi (b).

d'un facteur 1.5 sous l'effet du champ moyen ¹². A l'issue de la collision, les deux condensats sont donc inscrits à l'intérieur d'un parallélépipède de taille $\kappa_x R_x \times \kappa_y R_y \times \kappa_z R_z$, où R_x , R_y et R_z correspondent aux rayons initiaux des condensats et les facteurs κ_i mesurent l'augmentation des différentes tailles des condensats. Dans les situations typiques où ces calculs ont été réalisés, ces facteurs sont toujours compris entre 1 et 2.

Maintenant que les dimensions minimales de l'espace dans lequel on souhaite réaliser nos calculs stochastiques sont définies, il ne reste plus qu'à décider comment discrétiser cet espace. Pour ce faire il convient au préalable définir les barrières k_u^{\max} que l'on souhaite imposer dans l'espace des impulsions ¹³ (voir l'annexe C). Dans notre situation expérimentale, on sait que ces barrières peuvent être définies à partir de la valeur de l'impulsion de recul d'un photon $\hbar k_{\text{rec}}$. Le transfert Raman confèrent aux atomes des deux condensats des impulsions de $\pm \hbar k_{\text{rec}}$. En tenant compte des largeurs de la distribution des impulsions des atomes des condensats, on peut alors imposer des barrières définies par

$$k_u^{\max} = \xi_u k_{\text{rec}} \quad (5.36)$$

avec $\xi_u > 1$. Dans les situations typiques dans lesquelles les calculs ont été réalisés, ξ_u est toujours de l'ordre de 1.2 dans les directions \mathbf{y} et \mathbf{z} . Suivant l'axe \mathbf{x} , qui correspond à la direction de la collision, il faut en pratique tenir compte des processus non-résonants de la figure 5.1. Deux atomes d'un même condensat peuvent en effet être diffusés par collision. Nous avons vu que ce type de processus vérifie les conditions imposées par la conservation de l'impulsion mais viole celles qui sont imposées par la conservation de l'énergie. Ils sont donc non-résonants. Cependant, le fait que les modes des deux condensats soient macroscopiquement occupés est à l'origine d'une amplification de ces processus dès lors que l'un des deux atomes est diffusé dans l'un des deux condensats. En réalisant les simulations stochastiques, nous avons eu l'occasion d'observer l'apparition de deux amas atomiques d'impulsions $\pm 3\hbar k_{\text{rec}}$ le long de l'axe de la collision. Ces deux amas ne peuvent se comprendre qu'en tenant compte des processus non-résonants de la figure 5.1. La densité de ces deux amas étant non négligeable devant la densité de la sphère de diffusion, nous avons dû en tenir compte dans toutes nos simulations et de ce fait imposer $\xi_x > 3$.

Dans l'annexe C nous verrons que les pas de discrétisation spatiaux suivant les différentes directions du réseau, Δu , sont définis de la manière suivante

$$\Delta u = \frac{L_u}{M_u} \quad (5.37)$$

où ici, $L_u = \kappa_u R_u$ et M_u est l'entier le plus proche de $L_u k_u^{\max} / 2\pi$. Dans l'espace des impulsions cette discrétisation se traduit par des pas Δk_u défini par

$$\Delta k_u = \frac{k_u^{\max}}{M_u} \quad (5.38)$$

De manière à pouvoir estimer correctement les largeurs des fonctions de corrélation que l'on désire mesurer au travers de ce traitement stochastique, il faut imposer des pas Δk_u plus

¹²On peut estimer ce facteur à partir des paramètres du piège magnétique et du traitement développé dans les références [93, 94].

¹³Les vecteurs d'onde k sont reliés aux impulsions p des atomes par la relation $p = \hbar k$.

petits que les largeurs des corrélations. Or les seuls paramètres ajustables pour définir la valeur des Δk_u sont les L_u . Les valeurs des κ_u ont donc systématiquement été réajustés de manière à rendre une mesure des largeurs de corrélation accessible par l'intermédiaire de ce traitement. De ce fait, les valeurs des κ_u définies plus haut ont été typiquement multipliées par 2 voire 3.

En pratique, avant de lancer un calcul, les valeurs des différents paramètres définis dans ce paragraphe ont été déterminés en tenant compte des arguments précédents mais aussi de manière à limiter au maximum les valeurs des M_u afin de ne pas surcharger la mémoire vive des ordinateurs de calcul. La résolution des équations stochastiques permet de calculer les deux vecteurs α et β qui comportent chacun $M_x M_y M_z$ éléments. Chaque élément correspond à un nombre complexe codé en double précision¹⁴. La mémoire vive typique d'un ordinateur de calcul étant de l'ordre du Go le produit $M_x M_y M_z$ ne doit pas dépasser 10^7 pour que le calcul puisse aboutir¹⁵.

Limitations du traitement stochastique pour l'He* Plusieurs essais infructueux de calcul de l'évolution de la sphère de diffusion au fur et à mesure de la collision ont d'abord été réalisés à l'aide de cette méthode de simulation stochastique. Deux principales limitations ont alors pu être mises en évidence. D'une part, pour des durées de calcul plus longues que quelques dizaines de μs certains échantillons α , β divergent au fur et à mesure des calculs et rendent une estimation correcte des observables que l'on désire calculer impossible. Ce type de divergence pour cette méthode stochastique est assez bien connu et pour l'instant aucune solution n'a permis de résoudre ce problème de façon générale. Des travaux sont en cours à l'heure actuelle pour imposer une jauge sur la distribution calculée permettant de contrôler l'évolution des différents échantillons et interdire ceux qui présentent des divergences sans pour autant empêcher une estimation correcte des observables du système (voir en particulier [120]). Une telle limitation nous a donc empêché de calculer l'intégralité de la dynamique de l'évolution du système au fur de la collision. Nous n'avons obtenu des résultats qu'à temps court, correspondant généralement à 15% de la durée totale de la collision. Nous avons d'autre part pu remarquer que ce type de divergence apparaît d'autant plus tôt que le terme décrivant les interactions entre particules dans l'hamiltonien du système est grand. De ce point de vue, l'He* n'est pas un atome spécialement favorable pour ce type de calcul dans la mesure où il possède à la fois une longueur de diffusion relativement grande et une petite masse. Ces deux caractéristiques ont en effet tendance à augmenter l'amplitude du terme d'interaction (voir le paragraphe 1.3.1).

Une autre limitation que nous avons eu l'occasion de mettre en évidence est reliée au nombre d'échantillons qu'il convient de calculer pour permettre une estimation correcte des observables que l'on souhaite calculer. La densité de la sphère de diffusion étant faible devant celle des condensats et la durée du calcul étant limitée, de façon à ne pas avoir à moyenner sur un nombre trop important d'échantillons pour obtenir une erreur correcte sur la valeur des observables calculées (voir l'annexe C), nous n'avons pas pu traiter l'évolution des collisions pour des condensats contenant un nombre trop faible d'atomes. La dynamique de la collision

¹⁴Un nombre complexe codé en double précision correspond à 128 bits d'utilisation mémoire.

¹⁵Une telle valeur peut être aisément atteinte. Dans les situations typiques dans lesquelles nous nous sommes placés pour les simulations décrites dans la suite de ce chapitre, le produit $M_x M_y M_z$ est de l'ordre de 5×10^6 .

a donc toujours été calculée pour deux condensats comportant au moins 5×10^4 atomes. Pour une telle situation, de l'ordre de 2000 échantillons ont dû être moyennés pour obtenir des résultats interprétables. Cela correspond à 5 jours complets de calcul sur 20 processeurs montés en parallèle.

Densité de la sphère de diffusion La dynamique de la collision a dans un premier temps été calculée pour deux condensats composés de 5×10^4 atomes. Pour les données présentées dans ce paragraphe seules les 25.5 premières μs de la collision ont été calculées, ce qui correspond à environ 15% de la durée totale de la collision. En appelant ψ_0 la fonction d'onde d'un condensat comportant 10^5 atomes ¹⁶, on peut mettre la fonction d'onde initiale du système sous la forme

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{ik_{\text{rec}}x} + e^{-ik_{\text{rec}}x} \right] \psi_0(\mathbf{r}) \quad (5.39)$$

Les valeurs initiales des vecteurs α et β peuvent alors être écrites de la façon suivante

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{n}} &= \psi(\mathbf{r}_{\mathbf{n}}, 0) \\ \beta_{\mathbf{n}} &= \psi^*(\mathbf{r}_{\mathbf{n}}, 0) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Pour cette simulation, la discrétisation de l'espace est définie par un réseau de taille $1400 \times 50 \times 70$ et dont les limites spatiales s'écrivent

$$\begin{aligned} L_x &= 252 \mu\text{m} \\ L_y &= 20.52 \mu\text{m} \\ L_z &= 30.76 \mu\text{m} \end{aligned} \quad (5.41)$$

De tels paramètres ont été adaptés de manière à ce que le pas du réseau suivant les différentes directions de l'espace des impulsions soient plus petite que les largeurs initiales de la distribution d'impulsion des condensats ¹⁷. Les équations stochastiques C.24 ont enfin été résolues par l'intermédiaire de 128 itérations temporelles de pas $dt = 0.2 \mu\text{s}$.

En moyennant les résultats obtenus sur 2048 échantillons, nous avons pu obtenir une image de la distribution d'impulsion des atomes dans les trois dimensions de l'espace après 25.5 μs de collision. La figure 5.3 présente différentes tranches de la densité atomique dans l'espace des impulsions. Cette figure est directement comparable à la figure 4.2 qui présente des résultats similaires obtenus expérimentalement. On peut clairement observer sur les différentes figures les deux condensats qui collisionnent. Leurs distributions d'impulsions sont centrées respectivement en $\hbar k_{\text{rec}}\mathbf{x}$ et $-\hbar k_{\text{rec}}\mathbf{x}$. D'autre part la sphère de diffusion apparaît sous la forme de différents cercles épais de rayons variés. Une estimation de sa largeur donne $0.09 \hbar k_{\text{rec}}$. Comme nous avons pu le montrer au chapitre 4 sur nos données expérimentales, ce chiffre est à comparer aux largeurs de la distribution d'impulsion des condensats $\sigma_x \simeq 0.004 \hbar k_{\text{rec}}$ et $\sigma_{yz} \simeq 0.082 \hbar k_{\text{rec}}$. La largeur σ_{yz} est ici la contribution dominante et explique assez bien la largeur observée de la sphère. La différence résiduelle peut s'expliquer par l'intermédiaire de deux contributions. D'une part, les effets du champ moyen vont avoir tendance à élargir quelque

¹⁶La forme de cette fonction d'onde a été déterminée à partir de la méthode décrite au paragraphe 5.2.1.

¹⁷Le fait que L_z soit plus grand que L_y permet d'obtenir une meilleure résolution sur la forme des corrélations suivant l'axe \mathbf{z} . Les résultats obtenus sont présentés au paragraphe suivant.

peu la distribution. A temps court, cette contribution reste faible : nous avons en effet vu au paragraphe 4.1.2 que la conversion de l'énergie d'interaction en énergie cinétique correspond à un élargissement de la distribution des impulsions de la sphère de diffusion de l'ordre de $0.03 \hbar k_{\text{rec}}$ pour un condensat de 3×10^4 atomes. Pour un condensat de 10^5 atomes cette contribution est plutôt de l'ordre de $0.06 \hbar k_{\text{rec}}$. A temps court seule une fraction de l'énergie d'interaction a eu le temps d'être transformé en énergie cinétique. Ici $25.5 \mu\text{s}$ correspond à environ 15% de la durée totale de la collision. Les effets de champ moyen ne contribuent en définitive que très peu à la largeur en impulsion de la sphère de diffusion.

Un autre effet qui peut être à l'origine de la différence entre σ_{yz} et la largeur de la sphère estimée est relié au principe d'incertitude de Heisenberg. Pour une durée de collision très courte, l'incertitude sur l'énergie du système peut être relativement grande. On peut écrire

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\Delta t} \quad (5.42)$$

Pour $\Delta t = 25.5 \mu\text{s}$, on a que $\Delta E \simeq 1.5\mu$ où μ est le potentiel chimique du condensat initialement piégé. En suivant le même raisonnement que celui poursuivi pour estimer les effets du champ moyen, on peut donc estimer que l'élargissement sur la distribution des impulsions de la sphère de diffusion dû au principe d'incertitude de Heisenberg est d'environ $0.1 \hbar k_{\text{rec}}$. C'est donc ici le processus dominant et celui qui définit la largeur de la sphère de diffusion : la valeur estimée est en accord avec ce raisonnement. Ceci permet d'expliquer d'autre part pourquoi la largeur en impulsion de la sphère de diffusion est homogène sur l'ensemble du volume occupé par la sphère. On s'attendrait effectivement plutôt à observer une anisotropie entraînée par la différence entre σ_x et σ_{yz} : la largeur de la sphère devrait en effet être nettement plus fine autour des deux condensats que dans le plan (Oyz) . Cet effet est masqué par les effets dus à l'incertitude sur l'énergie du système. Ce résultat est confirmé par des simulations à temps plus court, $12.5 \mu\text{s}$: dans une telle situation, la largeur mesurée pour la sphère de collision est environ le double de celle que l'on a mesurée pour $25.5 \mu\text{s}$.

En éliminant les zones où se trouvent les deux condensats, on peut réussir à déterminer le nombre d'atomes qui a été diffusé pendant les premières $25.5 \mu\text{s}$ de la collision. Ce nombre est d'environ 1600 pour les données présentées. En utilisant le modèle décrit au paragraphe 4.1.3, on trouve un résultat similaire, confirmant par ailleurs la validité de ce modèle.

Mesure des corrélations des paires atomiques Le traitement stochastique présenté dans l'annexe C permettant de calculer la valeur moyenne d'un opérateur quelconque, nous avons tenté de déterminer la forme des corrélations reliant les paires d'atomes d'impulsions opposées en calculant les variations de la fonction $\bar{g}^{(2)}(\delta\mathbf{p})$ suivant différentes directions de l'espace. Pour ce faire nous avons suivi une procédure similaire à la procédure utilisée pour les données expérimentales (voir le paragraphe 4.2). Nous avons dans un premier temps moyenné sur les 2048 échantillons les valeurs de $G^{(2)}(\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_{n'})$ pour tous les couples de positions $(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ du réseau tridimensionnel qui vérifient :

$$\mathbf{p}_{n'} = -\mathbf{p}_n + m\hbar\Delta k_z \mathbf{z} \quad (5.43)$$

avec $m = 0, \dots, 5$. Il faut bien voir que ces valeurs représentent une quantité considérable de données. Pour chaque valeur de m , on enregistre ainsi de l'ordre de 130 Mo de données. En

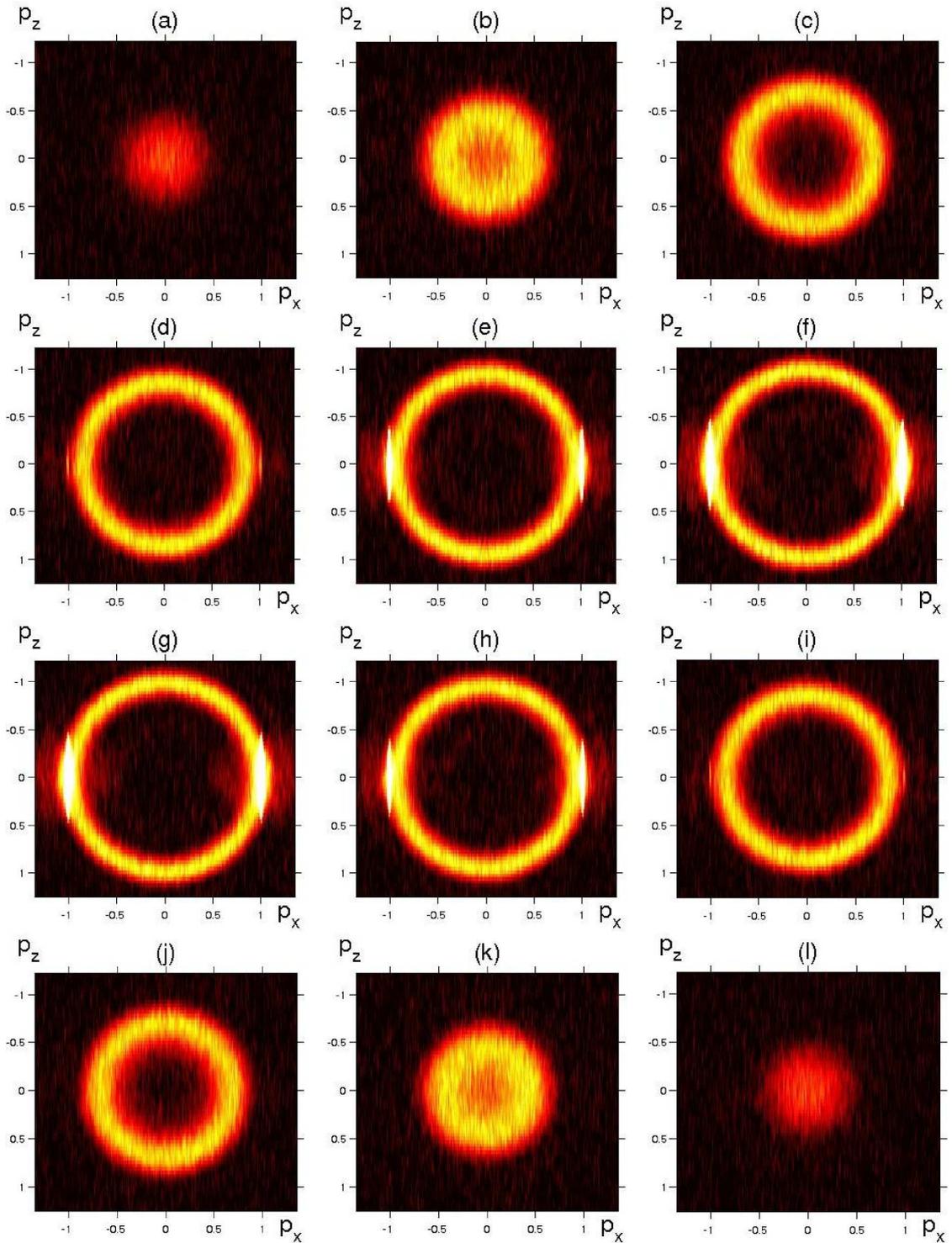


FIG. 5.3 – Projections de tranches de la sphère de diffusion dans l'espace des impulsions après $25.5 \mu\text{s}$ de collision. Les résultats ont été obtenus à partir de simulations stochastiques de la collision. Chaque tranche de la sphère correspond à un intervalle de largeur $0.2\hbar k_{\text{rec}}$ suivant l'axe p_y . Les figures de (a) à (l) correspondent à des tranches d'égalles épaisseurs comprises entre $-1.2\hbar k_{\text{rec}}$ et $1.2\hbar k_{\text{rec}}$. Dans le plan $(p_x p_z)$ les impulsions ont été exprimées en unité de $\hbar k_{\text{rec}}$.

ajoutant les données correspondants à la distribution de densité des atomes sur le réseau que l'on a présenté au paragraphe précédent, c'est presque 1 Go de données qui sont sauvegardés à l'issue des calculs ¹⁸. A partir de là, on peut calculer

$$\bar{g}^{(2)}(m\hbar\Delta k_z) = \frac{\sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} G^{(2)}(\mathbf{p}_{\mathbf{n}}, \mathbf{p}_{\mathbf{n}'})}{\sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} n_{\mathbf{p}_{\mathbf{n}}} n_{\mathbf{p}_{\mathbf{n}'}}} \quad (5.44)$$

qui correspond à une version discrétisée de la formule 4.10. Dans cette expression, $n_{\mathbf{p}_{\mathbf{n}}}$ correspond à la valeur moyenne de la densité atomique autour de l'impulsion $\mathbf{p}_{\mathbf{n}}$ dans l'espace des impulsions [121]

$$\begin{aligned} n_{\mathbf{p}_{\mathbf{n}}} &= \left\langle \int_{v(\mathbf{p}_{\mathbf{n}})} d^3\mathbf{p} \hat{n}(\mathbf{p}) \right\rangle \\ &\simeq \langle \hat{n}(\mathbf{p}_{\mathbf{n}}) \rangle \hbar^3 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \end{aligned} \quad (5.45)$$

où le volume $v(\mathbf{p}_{\mathbf{n}})$ correspond à un volume élémentaire du réseau tridimensionnel centré en $\mathbf{p}_{\mathbf{n}}$. Les deux sommes dans 5.44 sont restreintes aux couples de positions $(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ vérifiant 5.43 et pour lesquels \mathbf{n} appartient au volume de la sphère de collision (les deux condensats sont ainsi exclus). Nous avons suivi une procédure équivalente pour déterminer les variations de $\bar{g}^{(2)}$ suivant la direction \mathbf{x} (axe long des condensats). Seuls les paramètres du réseau ont été modifiés ¹⁹ : la valeur de Δk_x est dans ce cas plus petite permettant une meilleure résolution des variations de $\bar{g}^{(2)}$. Nous n'avons pas fait de calculs suivant la direction \mathbf{y} : du fait de la symétrie cylindrique du problème on s'attend à trouver les mêmes résultats que suivant l'axe \mathbf{z} .

La figure 5.4 donne les résultats obtenus dans les deux situations. La largeur de la corrélation suivant l'axe long du condensat est nettement plus courte que celle suivant l'axe \mathbf{z} . On retrouve donc bien sur ces simulations l'anisotropie observée sur les résultats expérimentaux. Des ajustements gaussiens des deux formes observées conduisent à

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_z &\simeq 0.0785 \pm 0.0005 \hbar k_{\text{rec}} \\ \bar{\xi}_x &\simeq 0.0029 \pm 0.0001 \hbar k_{\text{rec}} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Ces valeurs sont directement comparables aux largeurs de la distribution d'impulsion initiale des condensats (voir le paragraphe précédent). Ces résultats confirment donc l'interprétation avancée au chapitre 4 lors de l'étude des données expérimentales : les tailles du volume de corrélation correspondant aux paires atomiques sont définies par les largeurs initiales de la distribution d'impulsion des condensats qui sont elles mêmes limitées par le principe d'incertitude de Heisenberg. Ces valeurs sont de l'ordre de 10% plus petites après $12.5\mu\text{s}$ de collision. A partir de ces résultats il est malheureusement difficile d'extrapoler la valeur de ces largeurs à l'issue de la collision. On peut malgré tout raisonnablement penser que ses largeurs ne seront pas profondément modifiées. Au fur et à mesure de l'expansion des condensats, on peut s'attendre à ce que la largeur de la sphère de diffusion soit de plus en plus limitée par les largeurs de la distribution d'impulsion initiale des condensats ainsi que par les effets du

¹⁸Ceci explique pourquoi nous avons séparé les calculs des variations de la fonction $\bar{g}^{(2)}$ en plusieurs parties. Chaque direction de l'espace a en fait été traitée indépendamment.

¹⁹Dans cette situation, on a considéré un réseau comportant $4200 \times 40 \times 40$ positions spatiales. D'autre part, $L_x = 763 \mu\text{m}$ et $L_y = L_z = 15.38 \mu\text{m}$.

champ moyen. Ceci aura tendance à déformer les ailes de la fonction $\bar{g}^{(2)}$: dès que la largeur des corrélations est de l'ordre de la largeur de la phère de diffusion, des effets de bord peuvent avoir lieu comme nous avons pu l'observer à l'aide de simulations classiques de la collision (voir le paragraphe 4.2.3).

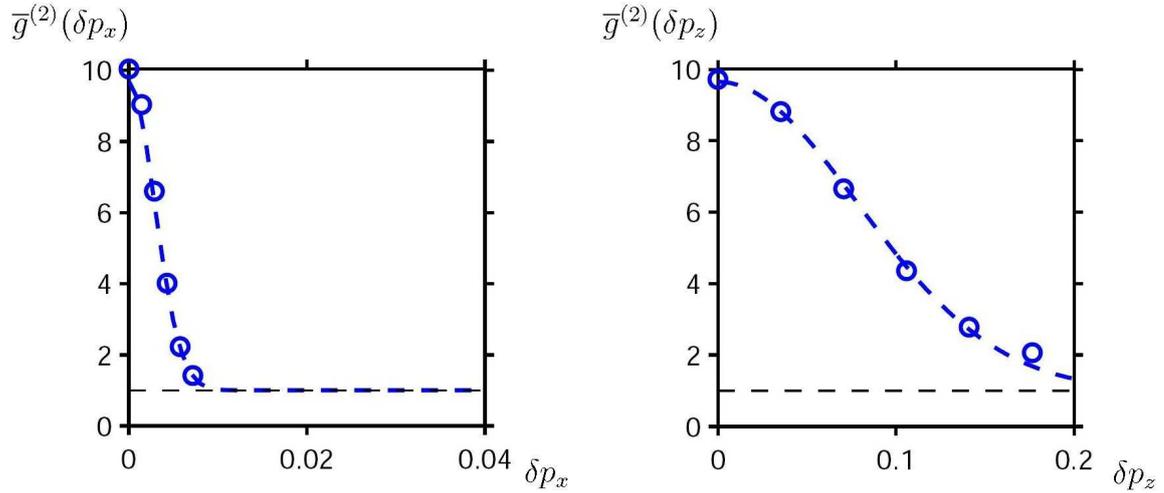


FIG. 5.4 – Projections suivant les axes δp_x et δp_z de la fonction $\bar{g}^{(2)}$ déterminée à l'aide de simulations stochastiques. Les traits tiretés correspondent à un ajustement gaussien par la fonction $1 + 9.7 e^{-u^2/2\xi^2}$. Suivant l'axe δp_x , on trouve $\bar{\xi}_x \simeq 0.0029 \hbar k_{\text{rec}}$. Cette même largeur correspond à $\bar{\xi}_z \simeq 0.0785 \hbar k_{\text{rec}}$ suivant l'axe δp_z . Sur les deux figures, les impulsions sont exprimées en unité de $\hbar k_{\text{rec}}$.

En reprenant l'étude réalisée au paragraphe 4.2.3, on peut maintenant interpréter la hauteur de la fonction $\bar{g}^{(2)}$ de manière à déterminer le nombre d'occupation moyen des modes de diffusion de la collision. D'après la hauteur mesurée de la corrélation, le nombre d'occupation est de l'ordre de 10% : la sphère de diffusion est donc formée de 1600 atomes répartis dans 16000 modes de diffusion. Le calcul naïf de $V/\Delta V$ réalisé de la même manière qu'au paragraphe 4.2.3 donne plutôt un résultat de 10000, qui correspond au bon ordre de grandeur et confirme la validité des estimations réalisées lors de l'étude des résultats expérimentaux. A partir de la formule 4.7, il est possible d'extrapoler la hauteur de la fonction de corrélation à temps long, autrement à l'issue de la collision des condensats. On trouve que de l'ordre de 20000 atomes doivent être diffusés en moyenne au cours de la collision. Ce nombre est relativement important comparé au nombre d'atomes initiaux des condensats : 5×10^4 . On peut donc raisonnablement penser que la déplétion des deux condensats va limiter le nombre total d'atomes diffusés. En tenant compte du fait que les atomes sont répartis sur environ 16000 modes de diffusion, on peut donc légitimement penser que le nombre d'occupation des différents modes de diffusion sera de l'ordre de 1 à l'issue de la collision. Les effets de stimulation bosonique lors de la collision restent donc a priori relativement faible.

Corrélations locales De la même façon que pour les résultats expérimentaux présentés au chapitre 4, on peut comparer les résultats observés pour les largeurs de corrélation des paires atomiques d'impulsions opposées, aux largeurs des corrélations locales, dues à l'effet Hanbury Brown et Twiss. Cette mesure donne accès aux tailles du volume de cohérence de la

source d'atomes diffusés pendant la collision. De la même façon qu'au paragraphe précédent, on peut définir une version discrétisée de la fonction $\tilde{g}^{(2)}$ définie au paragraphe 4.3.1. Un ajustement gaussien des largeurs des distributions observées suivant les différentes directions de l'espace donne (voir la figure 5.5)

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_z &\simeq 0.0863 \pm 0.0005 \hbar k_{\text{rec}} \\ \tilde{\xi}_x &\simeq 0.0032 \pm 0.0001 \hbar k_{\text{rec}}\end{aligned}\quad (5.47)$$

Ces valeurs sont proches des largeurs mesurées pour les largeurs des corrélations des paires atomiques d'impulsions opposées. Cette étude permet de confirmer les arguments avancés dans la partie 4.3 : la mesure du volume de cohérence de la source de paires atomiques correspond à une mesure équivalente du volume de corrélation des paires atomiques d'impulsions opposées. Suivant l'axe \mathbf{z} , la valeur mesurée correspond d'autre part relativement bien à l'estimation réalisée sur les données expérimentales²⁰.

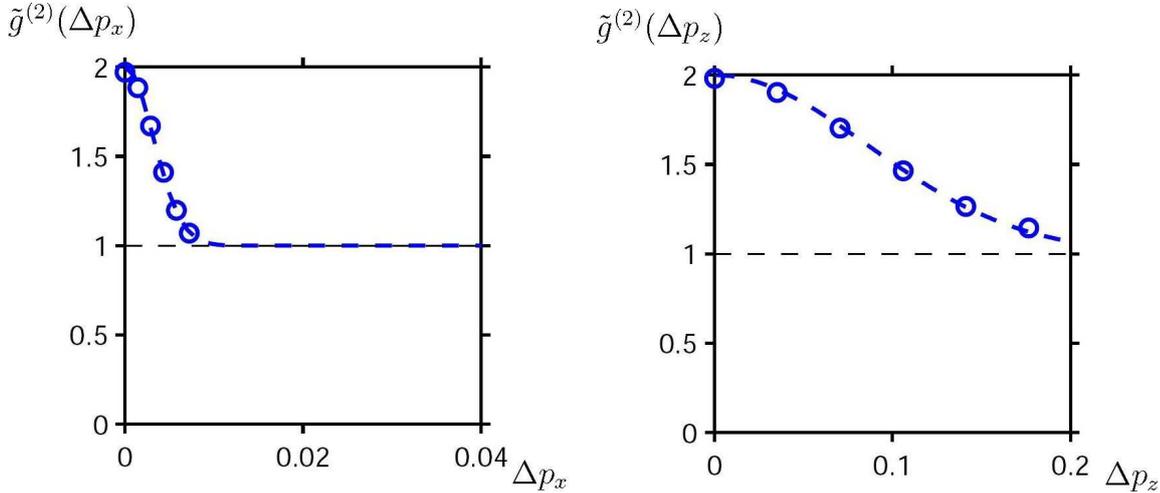


FIG. 5.5 – Projections suivant les axes Δp_x et Δp_z de la fonction $\tilde{g}^{(2)}$ déterminée à l'aide de simulations stochastiques. Les traits tiretés correspondent à un ajustement gaussien par la fonction $1 + e^{-u^2/2\xi^2}$. Suivant l'axe Δp_x , on trouve $\tilde{\xi}_x \simeq 0.0032 \hbar k_{\text{rec}}$. Cette même largeur correspond à $\tilde{\xi}_z \simeq 0.0863 \hbar k_{\text{rec}}$ suivant l'axe Δp_z . Sur les deux figures, les impulsions sont exprimées en unité de $\hbar k_{\text{rec}}$.

Conformément à l'étude de l'effet Hanbury Brown et Twiss présentée dans le premier chapitre de ce manuscrit (voir le paragraphe 1.1.3), la hauteur de la corrélation est 2, confirmant ainsi que la statistique des modes de diffusion pris individuellement correspond bien à celle d'un champ thermique. Ceci permet d'autre part de vérifier que la résolution du réseau sur lequel les calculs ont été réalisés est suffisante pour donner accès à la véritable hauteur des corrélations : expérimentalement nous avons en effet eu l'occasion de voir que la résolution du détecteur limitait la hauteur des corrélations (voir le paragraphe 4.3.2).

Réduction des fluctuations atomiques Contrairement à la mesure expérimentale des fluctuations de nombre d'atomes dans deux moitiés de la sphère de diffusion, qui correspond

²⁰On rappelle ici que l'estimation expérimentale de la largeur suivant l'axe \mathbf{x} est limitée par la résolution du détecteur.

à une mesure de la largeur de la distribution des différences de nombre de particules détectées dans les deux moitiés de la sphère et nécessite un grand nombre de réalisations de l'expérience de collision, on peut par l'intermédiaire des simulations stochastiques de la collision directement accéder à l'amplitude de ces fluctuations en mesurant la valeur moyenne de l'observable suivante [121]

$$\begin{aligned} V(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) &= 1 + \frac{\langle : \{\Delta[\hat{n}_{\mathbf{p}} - \hat{n}_{-\mathbf{p}}]\}^2 : \rangle}{\langle \hat{n}_{\mathbf{p}} \rangle + \langle \hat{n}_{-\mathbf{p}} \rangle} \\ &= 1 - n_{\mathbf{p}}[g^{(2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) - g^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p})] \end{aligned} \quad (5.48)$$

$V(\mathbf{p}, -\mathbf{p})$ correspond à une mesure de l'amplitude normalisée des fluctuations de la différence de nombre d'atomes dans deux modes d'impulsions opposées de la sphère de diffusion. En moyennant le résultat sur différents modes de diffusion, la définition de V coïncide avec la version normalisée de $\sigma_{\Delta N}$ introduite au paragraphe 4.4.1. En désignant par les indices 1 et 2 les deux moitiés de la sphère de diffusion, on a en fait,

$$\sigma_{\Delta N} = V_{1-2} = 1 + \frac{\langle : \{\Delta[\hat{N}_1 - \hat{N}_2]\}^2 : \rangle}{\langle \hat{N}_1 \rangle + \langle \hat{N}_2 \rangle} \quad (5.49)$$

avec

$$\hat{N}_i = \int_{v_i} d^3\mathbf{p} \hat{n}(\mathbf{p}) \quad (5.50)$$

où v_i correspond au volume de la moitié de la sphère de diffusion d'indice i . Comme les atomes sont diffusés par paire d'impulsions opposées, on s'attend à mesurer une valeur de V_{1-2} strictement inférieure à 1 par l'intermédiaire des simulations stochastiques de la collision, impliquant des fluctuations réduites du nombre d'atomes dans les deux moitiés de la sphère.

Pour rendre compte de cette réduction des fluctuations à partir des simulations stochastiques, on peut aussi imaginer découper la sphère en quatre parties de volumes égaux comme indiqué sur la figure 5.6 et regarder les différences de nombre d'atomes dans différents couples de quartiers de sphère. L'avantage d'une telle méthode correspond au fait que l'on peut directement comparer des couples de quartiers pour lesquels on s'attend à observer une réduction des fluctuations de la différence de leur nombre d'atomes²¹ (A-C et B-D) et d'autres dont les nombres d'atomes respectifs sont totalement décorrélés (A-B, A-D, B-C et C-D). La figure 5.6 donne les résultats de simulations stochastiques réalisées pour V_{A-C} , V_{B-D} , V_{A-B} et V_{C-D} à différents instants au cours de collision. Les différentes valeurs observées confirment une réduction des fluctuations du nombre d'atomes pour les paires A-C et B-D. On a en moyenne $V_{A-C} \sim V_{B-D} \sim 0.2$. Ce résultat est en accord avec l'image physique développée au chapitre 4 pour décrire la collision de deux condensats de Bose-Einstein. Tout se passe comme si on pouvait décrire les deux condensats qui collisionnent comme une source de paires de particules d'impulsions opposées. On observe d'autre part $V_{A-B} \sim V_{C-D} \sim 1$. L'émission des paires d'atomes étant quasiment isotrope sur le volume de la sphère de diffusion, les nombres d'atomes dans les parties A et B sont totalement décorrélés et la fluctuation de la différence ΔN_{A-B} sont de l'ordre de la valeur moyenne de la racine carré de $N_A + N_B$ en accord avec le petit modèle développé au paragraphe 4.4.1 pour une émission aléatoire des particules.

²¹Pour la paire A-C par exemple, ceci correspond au fait qu'un atome diffusé dans le volume A a forcément sa paire dans le volume C si l'on néglige tout effet de bord.

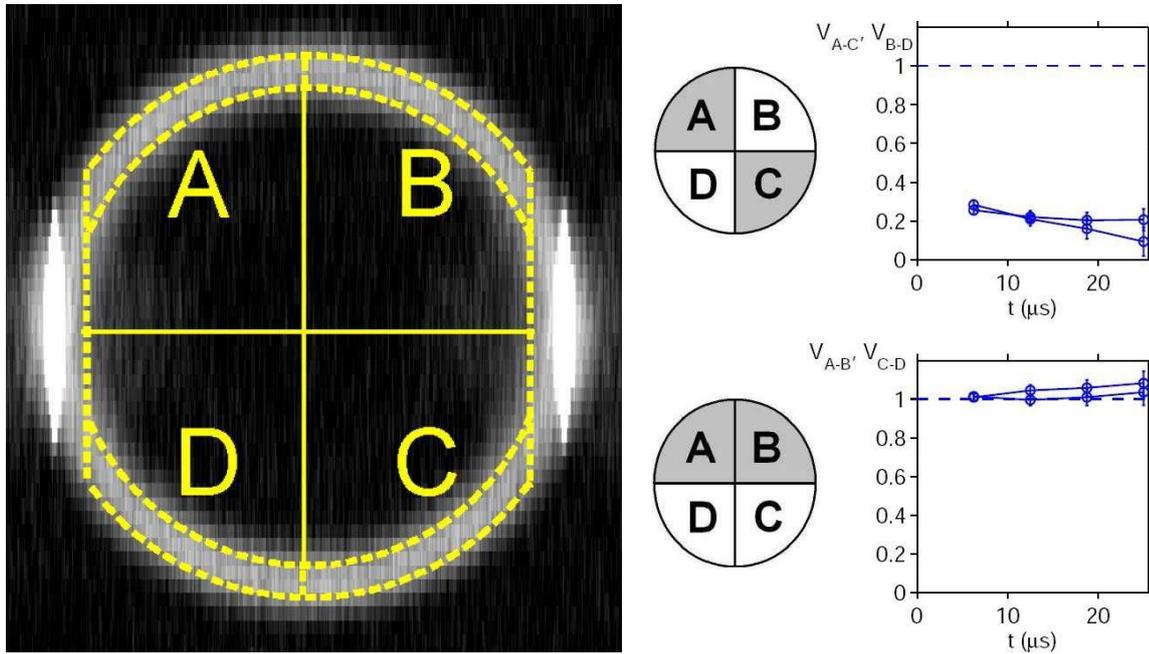


FIG. 5.6 – *Mesure normalisée des fluctuations des différences de nombre d’atomes de différentes paires de quartier de la sphère de diffusion obtenue par l’intermédiaire de simulations stochastiques de la collision de deux condensats d’He*.* La géométrie du découpage des parties A, B, C et D est indiquée sur la figure de droite. À gauche, on donne l’évolution des quantités V_{A-C} , V_{B-D} , V_{A-B} et V_{C-D} au fur et à mesure de la collision. La réduction des fluctuations observées pour les paires A – C et B – D est une indication claire que la collision des condensats peut être décrite comme une source de paires d’atomes d’impulsions opposées.

Le fait que les valeurs mesurées pour V_{A-C} et V_{B-D} soient strictement plus grandes que 0 est dû au fait que la source de paires possède une certaine extension dans l’espace des impulsions imposée par le principe d’incertitude de Heisenberg : ainsi, de ce fait, deux atomes ayant subi une collision élastique ne se trouvent pas nécessairement dans deux volumes opposés de la sphère de diffusion. Ceci correspond à un effet de bord qui va dépendre de la façon dont la sphère a été découpée et de la géométrie des modes de diffusion. Même si la réduction observée pour les fluctuations des différences de nombre d’atomes n’est pas parfaite, les valeurs de V_{A-C} et V_{B-D} sont suffisamment proches de 0 pour que cet effet puisse être observé expérimentalement. Malgré l’échec des mesures expérimentales réalisées pour l’heure, cette étude motive d’autant plus de nouvelles réalisations de l’expérience de collision pour mettre en évidence un tel effet.

5.2.3 Sources anisotropes, diffusion guidée des paires atomiques

Nous avons mentionné au paragraphe 1.2.3 la possibilité de produire une paire de faisceaux laser *jumeaux* au sein d’une cavité optique. L’utilisation de la cavité permet à la fois

d'augmenter le temps d'interaction entre le faisceau pompe et le milieu non-linéaire ²² mais aussi de favoriser l'amplification des seuls modes vérifiant les conditions d'accord de phase imposées par la géométrie de la cavité. Un effet similaire peut être observé lors de la collision de deux condensats de Bose-Einstein anisotrope : la géométrie du condensat peut avoir en effet tendance à favoriser l'émission des paires atomiques produites au fur et à mesure de la collision suivant l'axe long du condensat. Un tel phénomène a été étudié dans un cadre analogue par H. Pu et P. Meystre [122]. Ces derniers ont montré que le gain d'amplification de la population des modes de diffusion d'un processus similaire au processus d'amplification paramétrique dépend fortement de la géométrie de la source. Pour une source anisotrope la distribution de gain est aussi anisotrope favorisant les modes émis suivant les axes longs des condensats ²³.

Expérimentalement, un tel effet n'est pas accessible sur nos données dans la mesure où les deux condensats qui rentrent en collision ont des impulsions dirigées suivant leurs axes longs. Pour observer ce phénomène, il faudrait être capable de modifier les impulsions initiales des deux condensats, de façon à ce que la collision ait lieu suivant un de leurs axes courts. On pourrait par exemple imaginer réaliser un transfert Raman du condensat piégé sans transfert d'impulsion, en modifiant la géométrie des faisceaux, puis scinder le condensat en deux parties à l'aide d'une impulsion Bragg [38]. En modifiant la géométrie des faisceaux Bragg, on peut ainsi contrôler à la fois la direction et la vitesse de la collision. Si la collision a lieu suivant un axe court des condensats, la séparation des condensats est très rapide ²⁴ et ceci limite le nombre de paires atomiques produites pendant la collision. En contrôlant la vitesse de collision on peut augmenter la durée de la collision pour ne plus être limité par le temps de séparation des condensats. Augmenter la durée de la collision permet d'être d'autant plus sensible aux effets d'amplification des modes de diffusion.

De façon à mieux comprendre ces effets et d'en évaluer l'amplitude, nous avons réalisé des simulations stochastiques de la collision de deux condensats. L'état initial du système a été modifié de manière à ce que la collision ait lieu suivant l'axe \mathbf{z} du condensat (qui correspond à un des axes courts du condensat dans notre situation expérimentale). La fonction d'onde initiale du système s'écrit donc maintenant (voir la relation 5.39)

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{ik_{\text{rec}}z} + e^{-ik_{\text{rec}}z} \right] \psi_0(\mathbf{r}) \quad (5.51)$$

La figure 5.7 présente deux profils de densité dans l'espace des impulsions obtenus pour deux géométries de condensat différentes. Dans la mesure où les simulations sont très lourdes avec les paramètres de l'He*, ces simulations ont été réalisées avec des condensats de ²³Na ²⁵. Un tel atome possède une longueur de diffusion plus faible (2.75 nm) et une masse plus grande (3.82×10^{-26} kg). Ceci a pour principale conséquence de diminuer l'amplitude du terme d'interaction dans les équations stochastiques de la collision C.24 et permet de suivre

²²On rappelle ici que plus le temps d'interaction entre la pompe et le cristal non-linéaire est grand et plus la réduction des fluctuations de la différence d'intensité des modes *jumeaux* est importante. Les deux faisceaux sont d'autre part plus intenses dans la mesure où la durée de l'amplification est plus grande.

²³Un tel effet peut être vu comme un analogue atomique du phénomène de superradiance décrit au paragraphe 3.2.

²⁴Environ 50 μs pour les condensats d'He* typiquement produit expérimentalement.

²⁵Ces résultats correspondent en fait à des résultats préliminaires. Une étude plus précise est en cours actuellement pour l'He*.

l'évolution de la collision pendant des durées plus longues ²⁶ (environ 600 μ s). La vitesse des condensats a d'autre part été diminuée de manière à augmenter la durée de la collision ($v_{\text{rec}} = \hbar k_{\text{rec}}/m \simeq 9.82$ mm/s).

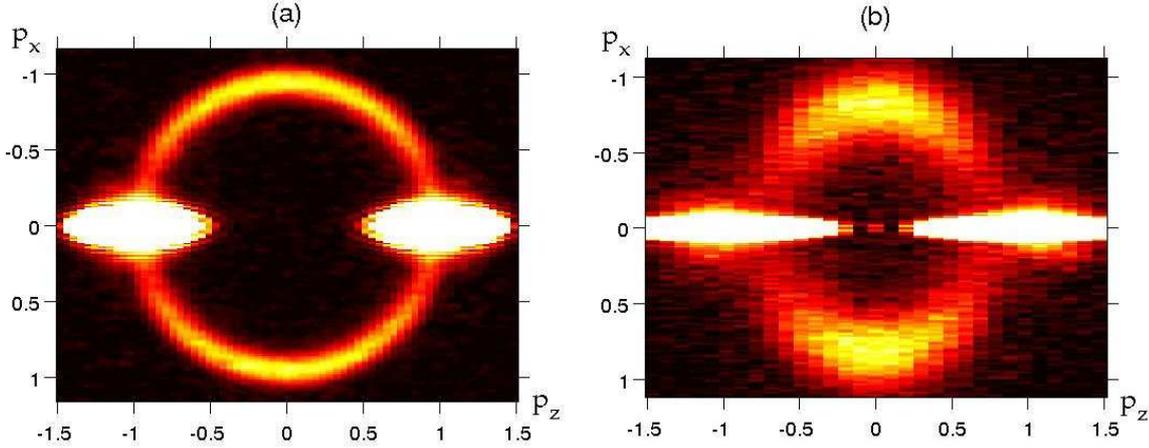


FIG. 5.7 – Profils de densité dans le plan $(Op_x p_z)$ obtenus par l'intermédiaire de simulations stochastiques de la collision deux condensats de 5×10^4 atomes de ^{23}Na suivant l'axe \mathbf{z} . Toutes les impulsions sont exprimées en fonction de l'impulsion de recul $\hbar k_{\text{rec}}$. (a) La fonction d'onde ψ_0 correspond ici à celle d'un condensat piégé dans un piège harmonique de fréquences d'oscillations $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 20$ Hz et $\omega_{\perp} = 2\pi \times 80$ Hz. (b) Même chose avec $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 20$ Hz et $\omega_{\perp} = 2\pi \times 400$ Hz.

On observe très clairement sur la figure 5.7 une anisotropie dans les profils de densité de la sphère de diffusion. La densité est environ 5 fois plus forte suivant l'axe p_x que suivant les autres directions de diffusion. Cet effet est d'autant plus fort que le rapport d'aspect du condensat $\omega_{\perp}/\omega_{\parallel}$ est grand. On peut imaginer tirer parti d'un tel effet pour produire une source directionnelle d'ondes de matière dont les fluctuations de la différence de leur nombre d'atomes respectifs sont réduites. De telles sources seraient d'un intérêt considérables pour réaliser des mesures de précision dans des dispositifs d'interférométrie atomique.

5.3 Conclusion

Nous avons pu au travers des deux approches théoriques présentés dans ce chapitre donner une vision d'ensemble de la dynamique de la collision de deux condensats de Bose-Einstein. D'un côté, le modèle perturbatif de la collision a permis de mettre en relief l'origine de la forme de la sphère de collision ainsi que celle des corrélations que nous avons été capable de mesurer expérimentalement. Bien que ce modèle ne permette pas une comparaison directe des résultats analytiques obtenus et des résultats des mesures expérimentales, son étude a permis de révéler la complexité des phénomènes impliqués dans la collision de deux condensats et de confirmer les interprétations avancées au chapitre 4 quant à l'influence des largeurs de la

²⁶Comme indiqué au début de cette partie, les problèmes de divergence qui peuvent survenir lors de la résolution des équations stochastiques dépendent fortement de l'amplitude du terme non-linéaire des équations stochastiques de la collision.

distribution d'impulsion des condensats, imposées par le principe d'incertitude de Heisenberg sur les largeurs des corrélations observées. Il est d'autre part intéressant de remarquer que les corrélations de type Hanbury Brown et Twiss émergent naturellement de ce modèle qui complète la vision simpliste apportée par le petit modèle classique de collision utilisé au chapitre 4 pour interpréter les données expérimentales.

D'un autre côté les simulations stochastiques de la collision de deux condensats réalisées durant mon séjour dans le groupe de P. Drummond viennent compléter ce travail. Bien que les résultats des calculs présentés soient limités aux premiers instants de la collision, un certain nombre d'effets ont malgré tout pu être mis en évidence. D'une part, pour des durées de collision très courtes, on a pu vérifier l'influence du principe d'incertitude sur l'énergie du système, effet qui s'exprime directement au travers de la largeur de la sphère de collision. Un tel effet, absent du modèle perturbatif a très certainement une influence non négligeable sur la forme de la sphère de diffusion observée expérimentalement. D'autre part, la forme des corrélations calculée par l'intermédiaire de ces simulations vient confirmer les observations expérimentales réalisées sur les mêmes quantités. Bien qu'une extrapolation des résultats trouvés à temps long s'avère difficile, une telle étude renforce malgré tout les interprétations avancées lors de l'analyse des résultats expérimentaux. Enfin, l'étude de la réduction des fluctuations du nombre d'atomes des modes d'impulsion opposée de la sphère de diffusion accessible par l'intermédiaire des simulations, permet de motiver encore un peu plus la réalisation de nouvelles expériences de collision, en vue de mettre en évidence cet effet à partir de notre dispositif expérimental. Il est à noter qu'à l'heure actuelle de nouvelles simulations stochastiques sont en cours de réalisation dans le but de comprendre un peu mieux les effets de la diffusion guidée et voir dans quelle mesure un tel effet peut être mis en évidence expérimentalement.

Conclusion

L'observation de paires d'atomes corrélés au travers de la collision de deux condensats de Bose-Einstein, décrite au cours de ce manuscrit, s'inscrit dans la continuité des avancées de l'optique atomique amorcée avec l'obtention des premiers condensats de Bose-Einstein en 1995. Une telle expérience, qui reproduit avec des atomes les expériences réalisées par Burnham et Weinberg à partir de faisceaux lumineux, permet de renforcer encore un peu plus l'analogie qui s'impose entre la physique atomique et l'optique quantique. Il est intéressant de remarquer qu'au travers d'une telle observation à la fois la nature ondulatoire et le caractère corpusculaire des atomes étudiés sont mis en relief : les paires d'atomes d'impulsions opposées produites lors de la collision peuvent en effet aisément être interprétées comme le résultat de collisions élastiques impliquant un atome de chacun des deux condensats. Cette observation permet de marquer la nature corpusculaire des particules étudiées. Dans le même temps, la mise en évidence de corrélations de type Hanbury Brown et Twiss impose une interprétation nécessairement ondulatoire du phénomène étudié. Ces expériences constituent de ce point de vue une nouvelle preuve de la notion de dualité onde-corpuscule qui s'impose pour la description des particules dans le cadre de la mécanique quantique. Ne décrire les condensats de Bose-Einstein qu'en termes d'ondes de matière, masque donc un de leurs aspects intrinsèques de la même façon que la description classique des faisceaux lumineux conduit à des contradictions lorsque l'on s'intéresse à la dynamique d'un amplificateur paramétrique optique.

La possibilité d'utiliser un détecteur d'atome unique permettant de reconstruire la distribution d'impulsion des particules diffusées lors de la collision des condensats constitue très certainement un des points forts de cette expérience et démontre l'intérêt particulier de l'hélium métastable par rapport aux autres espèces atomiques. Un tel détecteur permet la mesure de la fonction de corrélation à deux particules des atomes diffusés lors de la collision dans les trois dimensions de l'espace, donnant ainsi accès aux caractéristiques physiques de la source de paires d'atomes corrélées mises en place : géométrie des modes de diffusion de la source, nombre d'occupation moyen des modes, largeurs du volume de corrélation des paires d'atomes corrélées... Un tel diagnostic permet d'interpréter la forme des corrélations observées à partir du principe d'incertitude de Heisenberg qui fixe les limites fondamentales de l'extension des phénomènes étudiés. Une telle observation marque bien l'intérêt ainsi que l'efficacité de notre dispositif de mesure pour l'étude des corrélations des gaz froids. On peut même souhaiter qu'un tel dispositif conduise aux mêmes succès dans le domaine des atomes froids que les détecteurs de photons uniques dans la compréhension des propriétés de la lumière.

La mise en place d'une source de paires d'atomes corrélés constitue le premier pas indispensable en vue de la réalisation d'expériences d'optique atomique où l'intrication des paires

produites pourra être démontrée et éventuellement utilisée pour effectuer des tests fondamentaux de la mécanique quantique. De ce point de vue, une des expériences ultimes serait d'observer la violation des inégalités de Bell au moyen des paires atomiques produites sur notre dispositif. Une telle observation constitue un défi technique dont nous pouvons tenter ici de délimiter les objectifs. Les paires d'atomes d'impulsions opposées produites lors de la collision des deux condensats de Bose-Einstein se trouvent dans une superposition d'états du fait de l'isotropie du processus d'émission des paires. En analogie avec les expériences de Rarity et Tapster réalisées sur des paires de photons intriqués [13], on peut restreindre la mesure des quantités nécessaires à la mise en évidence de la violation des inégalités de Bell à deux paires de modes *jumeaux*. Un des principaux défis d'une telle expérience consiste à être capable de recombinaison des paires d'atomes sur une lame séparatrice 50% – 50% tout en faisant varier indépendamment la phase de chacune des deux paires. Malgré tout, même si l'on réussit à imaginer un jeu complexe d'impulsions Bragg permettant de recombinaison des paires et de jouer le rôle de la lame séparatrice, ce qui constitue déjà un véritable tour de force, il faut aussi réussir à augmenter le taux de répétabilité de notre expérience de manière à rendre la mesure des taux moyens de coïncidences de détection nécessaire à la démonstration de la violation des inégalités de Bell, accessible en un temps limité et raisonnable. Ces difficultés qui j'espère pourront être surmontées avec le temps, ne permettent malheureusement pas de considérer une telle expérience faisable sur le court terme. Un tel projet constitue malgré tout un objectif particulièrement motivant qui, je le souhaite, guidera les efforts de l'équipe dans les années qui viennent.

A plus court terme, le groupe de recherche dont je fais partie s'est donné comme objectif de mettre en évidence la réduction des fluctuations de la différence du nombre d'atomes de deux modes d'impulsions opposées de la sphère de diffusion. Malgré les difficultés d'une telle mesure, évoquées dans ce manuscrit, une telle expérience reste largement à la portée du dispositif expérimental actuel. Les simulations stochastiques de la collision de deux condensats d'hélium métastable, réalisée en collaboration avec le groupe de P. Drummond dans les locaux de l'université de Queensland en Australie, ont permis de donner une bonne idée de la qualité de la réduction que l'on peut s'attendre à observer expérimentalement. D'autre part, les petites simulations classiques décrites dans ce manuscrit ont permis de tester la validité du processus de mesure que l'on désire mettre en place pour réaliser une telle expérience. En améliorant la qualité des transferts Raman qui permettent d'initier la collision des condensats et en réussissant à stabiliser au maximum le nombre d'atomes des condensats lors des différentes réalisations de l'expérience, de telles mesures devraient se révéler nettement plus aisées à obtenir. En changeant la disposition des faisceaux Raman, différentes géométries de collisions peuvent d'autre part être étudiées, permettant éventuellement de vérifier le phénomène de diffusion guidée des paires atomiques mis en évidence au travers des simulations stochastiques de la collision.

Le dispositif expérimental qui a été déménagé au mois de mai dans les nouveaux locaux du laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique est aujourd'hui entièrement remonté grâce au travail efficace des étudiants actuellement en charge de l'expérience : V. Krachmalnicoff et J. C. Jaskula assistés dans leurs efforts par V. Leung et les membres permanents du groupe d'Optique Atomique. J'espère qu'ils réussiront très vite à remettre en place la source de paires d'atomes corrélés et leur souhaite bonne chance pour toutes leurs entreprises futures.

Algorithme de reconstruction des positions et temps d'arrivée des atomes

Nous nous proposons ici de décrire en détail l'algorithme qui permet de reconstruire les positions et temps d'arrivée des atomes sur le détecteur à partir des données enregistrées par le TDC. Il s'agit en fait d'une méthode alternative par rapport à celle que M. Schellekens a présenté dans son manuscrit de thèse [46]. Les performances des deux algorithmes sont sensiblement équivalentes et ils présentent chacun leurs avantages et leurs inconvénients.

L'écriture de cet algorithme a été motivée par les mesures de corrélations que nous décrivons au chapitre 4. Les temps de vol observés après la collision de deux condensats de Bose-Einstein peuvent se décomposer en deux parties : d'une part des condensats contenant un grand nombre d'atomes (de l'ordre de 1000 atomes détectés) et de densité importante qui ont tendance à saturer le détecteur localement et d'autre part une sphère de collision composée d'un faible nombre d'atomes (de l'ordre de quelques centaines) et de densité quasiment négligeable. En vue de la mesure des corrélations, la reconstruction des positions des atomes sur le détecteur est d'une importance extrême. La philosophie de cet algorithme réside dans l'ajout, en comparaison de l'algorithme développé par M. Schellekens, d'un certain nombre de tests qui permettent de valider la reconstruction d'un atome. Il permet essentiellement d'éviter que la saturation du détecteur n'affecte la reconstruction des atomes comme cela a pu être observé sur certains temps de vol avec l'autre algorithme. D'autre part il permet aussi de reconstruire les positions des atomes dans certaines situations complexes où les signaux électriques codant les arrivées des atomes sont enchevêtrés. Pour un même temps de vol, l'algorithme présenté ici reconstruit les positions d'un peu moins d'atomes que celui de M. Schellekens et demande un peu plus de temps de calcul. En revanche, les positions reconstruites sont testées de façon systématique de manière à éviter tous les artefacts qui pourraient déformer la forme de la distribution de densité des atomes détectés.

Comme mentionné dans la partie 2.3.3, lors d'un temps de vol, des milliers d'atomes peuvent arriver sur le détecteur en quelques dizaines de ms. Chaque atome détecté est responsable de la propagation de 4 impulsions électriques sur les lignes à retard. A l'issue de la détection, l'ordinateur a enregistré les temps d'arrivée de plusieurs milliers d'impulsions électriques. L'algorithme permet de trier ces impulsions et de reconnaître lesquelles correspondent à la détection d'un atome. Dans toute cette partie, t_{x_1} , t_{x_2} et t_{y_1} , t_{y_2} désignent les sorties des deux lignes à retard.

A.1 Philosophie de la reconstruction

Lors d'un temps de vol, les temps d'arrivée de plusieurs milliers d'impulsions électriques sont enregistrées par le TDC : $t_{x_1,i}$, $t_{x_2,j}$, $t_{y_1,k}$ et $t_{y_2,l}$. Ces différentes impulsions sont générées lors de la détection d'atomes par les galettes de micro-canaux (voir la partie 2.3). Pour reconstruire la position et le temps d'arrivée d'un atome (voir le paragraphe 2.3.3), il faut réussir à déterminer les indices i , j , k et l des différents temps d'arrivée des impulsions qui correspondent à la détection d'un même atome. Pour ce faire, on doit d'abord commencer par trouver pour chaque temps d'arrivée d'une impulsion sur une ligne donnée, quelles sont les temps d'arrivée d'impulsions sur les trois autres lignes qui lui correspondent : en d'autres termes, on cherche tous les quadruplets formés de 4 temps d'arrivée d'impulsions, répartis sur chacune des sorties des deux lignes à retard, qui peuvent permettre de reconstruire la position et le temps d'arrivée d'un atome. A partir du temps d'arrivée d'une impulsion sur une sortie donnée d'une des lignes à retard, on peut imaginer déterminer plusieurs quadruplets différents dans la mesure où les signaux correspondant à deux ou plusieurs atomes différents peuvent être enchevêtrés. Pour choisir parmi ces quadruplets lequel correspond vraiment à un atome, un certain nombre de tests doit être réalisé. Maintenant, dans la situation où seul un quadruplet a été déterminé, il faut aussi être capable de vérifier que les 4 temps d'arrivée d'impulsion permettent de reconstruire correctement la position et le temps d'arrivée de l'atome correspondant. Dans la suite, nous allons expliquer quels sont les tests qui nous ont permis de déterminer quels quadruplets correspondaient bien à la détection d'un atome avant de détailler les différentes étapes de l'algorithme de reconstruction.

A.2 Carte de gradient associée au détecteur

A.2.1 Algorithme naïf de reconstruction

La quantité $\delta S_{xy} = t_{x_1} + t_{x_2} - t_{y_1} + t_{y_2}$ (voir les notations du paragraphe 2.3.4), pour t_{x_1} , t_{x_2} , t_{y_1} et t_{y_2} correspondants au même atome, est censée être uniforme sur l'ensemble du détecteur. On s'attend en effet à ce que δS_{xy} soit égale à $(l_d^x - l_d^y)/v_d$, où l_d^x et l_d^y sont les longueurs respectives des deux lignes à retard et v_d est la vitesse de propagation d'une impulsion sur une ligne¹. Pour une raison difficile à identifier, ce n'est pas exactement le cas [46]. On peut éventuellement avancer que les forts champs électriques présents au niveau du détecteur peuvent perturber localement la propagation des impulsions électriques. Cette hypothèse reste malgré tout difficile à tester et nous n'avons pas pour l'heure réalisé de mesures en ce sens.

Pour déterminer la carte des δS_{xy} sur la surface du détecteur, désignée comme la carte de gradient dans la suite, nous avons programmé un algorithme de reconstruction naïf destiné à analyser des temps de vol de pièges magnéto-optiques (PMO). Son principe est le suivant : il prend une par une les données correspondant aux temps d'arrivée d'une impulsion sur

¹Dans notre cas, le constructeur indique que la durée de propagation d'une impulsion sur une ligne à retard est de l'ordre de 80 ns. La vitesse des impulsions électriques le long des lignes est proche de la vitesse de la lumière dans le vide. La longueur des lignes à retard est donc de l'ordre de 20 m.

la sortie 1 de la ligne à retard d'axe \mathbf{x} , $t_{x_1,i}$. Pour chacun de ces temps là, il parcourt les données des autres lignes $t_{x_2,j}$, $t_{y_1,k}$ et $t_{y_2,l}$, à la recherche d'impulsions qui correspondent à $t_{x_1,i}$. Le critère de choix est le suivant : les temps $t_{x_1,i}$ et $t_{x_2,j}$ peuvent correspondre à un même atome si $|t_{x_1,i} - t_{x_2,j}| \leq l_d^x/v_d + \epsilon_x$, ce qui signifie tout simplement que deux impulsions qui correspondent au même atome ne peuvent mettre plus de temps à se propager sur la ligne, que la durée de propagation définie par la longueur de la ligne. Ici ϵ_x désigne une tolérance que l'on peut fixer arbitrairement. Elle est nécessaire du fait de l'incertitude que l'on a sur la valeur de l_d^x/v_d . Sa valeur est de l'ordre de la résolution temporelle du détecteur (de l'ordre de 1 ns). De la même façon, les temps $t_{x_1,i}$ et $t_{y_1,k}$ peuvent correspondre à un même atome si $|t_{x_1,i} - t_{y_1,k}| \leq \max(l_d^x/v_d + \epsilon_x + \epsilon_{xy}, l_d^y/v_d + \epsilon_y + \epsilon_{xy})$. Ici ϵ_{xy} désigne une tolérance correspondant à l'amplitude des fluctuations de δS_{xy} à l'échelle du détecteur. Nous reviendrons sur sa valeur au paragraphe suivant. On procède de même pour les temps $t_{y_2,l}$. A chaque fois que l'algorithme tombe sur une situation où le temps $t_{x_1,i}$ correspond à un et un seul temps sur chacune des autres lignes, il reconstruit la position de l'atome correspondant à ces 4 temps et supprime les données correspondantes de la mémoire ². L'efficacité de cette méthode de reconstruction est déjà très bonne dans la mesure où elle reconstruit les positions de l'ordre de 80% des atomes que l'on peut reconstruire avec un algorithme plus performant. Ceci tient au fait que l'écart moyen des temps d'arrivée des atomes sur le détecteur est plus grand que la durée de propagation d'une impulsion sur une ligne à retard : en d'autres termes, le flux d'atomes est faible pour des temps de vol de PMO. Les 4 impulsions correspondant à la détection d'un atome ont donc plutôt tendance à se trouver groupées plutôt qu'enchevêtrées avec d'autres impulsions correspondant à d'autres atomes. On remarquera ici que l'on impose aucune autre condition sur la reconstruction de la position d'un atome. Ceci tient au fait que la probabilité de se trouver dans une telle situation, 4 impulsions se correspondant et réparties sur chacune des lignes à retard, n'est pas très grande : les détections fortuites d'atomes sont en effet assez rares ³. On peut donc faire l'hypothèse que cette condition est suffisamment robuste.

A.2.2 Résultat expérimental

Pour chaque atome, l'algorithme naïf enregistre aussi la valeur de δS_{xy} correspondant aux temps d'arrivée des 4 impulsions. En moyennant sur plusieurs temps de vol, on peut ainsi obtenir pour chaque pixel spatial, la distribution locale des δS_{xy} . On peut alors calculer localement sa valeur moyenne : $\langle \delta S_{xy} \rangle$. La figure A.1 donne une idée du résultat obtenu en moyennant le résultat sur 250 temps de vol de PMO. Chaque pixel de l'image correspond à la valeur locale de ΔS_{xy} défini par

$$\Delta S_{xy} = \langle \delta S_{xy} \rangle - (l_d^x - l_d^y)/v_d \quad (\text{A.1})$$

La carte des ΔS_{xy} permet ainsi de mesurer l'écart à la moyenne, définie par les données du constructeur $(l_d^x - l_d^y)/v_d$, de la valeur moyenne de la distribution des δS_{xy} . Notons d'autre part, que nous pouvons utiliser la largeur locale de cette distribution pour définir la résolution locale

²On obtient ainsi les coordonnées (x,y) de l'atome sur le détecteur avec $x = (t_{x_1} - t_{x_2})v_d/2$ et $y = (t_{y_1} - t_{y_2})v_d/2$

³On détecte en temps normal de l'ordre de 400 atomes fortuits par seconde, ce qui ne représente que peu de choses comparé aux 50000 atomes détectés pour un PMO sur 500 ms ou au 1000 coups détectés en 10 ms pour un condensat de Bose-Einstein.

du détecteur (voir le paragraphe 2.3.4). L'amplitude des écarts mesurée sur cette carte est de l'ordre de 40 pixels temporels, ce qui correspond à environ $1.6 \mu\text{s}$ soit 8 mm. L'incertitude ϵ_{xy} définie au paragraphe précédent a donc été fixée à une valeur correspondant à 20 pixels temporels. Les inhomogénéités de ΔS_{xy} sont donc non négligeables à l'échelle du détecteur. A partir de la carte obtenue, nous allons pouvoir reconstruire efficacement les positions d'arrivée des atomes sur le détecteur. Il faut bien noter ici que, tout autant que la carte d'inhomogénéité de gain du détecteur, la carte des ΔS_{xy} dépend fortement de la configuration mécanique des MCP, ainsi que du type de galettes utilisé. A chaque configuration correspond donc une carte de gradient.

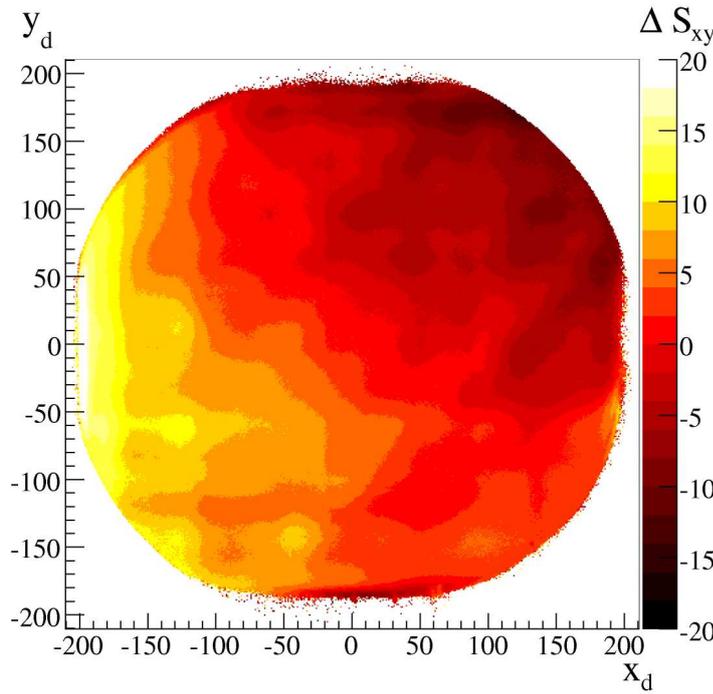


FIG. A.1 – Carte des ΔS_{xy} locaux obtenue à l'aide de 250 temps de vol de PMO sur la galette Burle et au moyen du TDC CTNM4. Sur la figure les positions sur les axes x_d et y_d sont exprimés en unité de la taille d'un pixel spatial (environ $200 \mu\text{m}$). ΔS_{xy} est exprimé en unité de pixel temporel (400 ps).

A.3 Procédure de reconstruction

Une fois que la carte de gradient associée au détecteur a été enregistrée, nous pouvons nous en servir pour reconstruire les positions des atomes. A chaque couple ($\{t_{x_1} - t_{x_2}\}, \{t_{y_1} - t_{y_2}\}$) correspond une unique valeur de $\langle \delta S_{xy} \rangle$ sur la carte mesurée. On peut donc maintenant utiliser cette valeur comme une condition pour la reconstruction de la position d'un atome. Nous détaillons ici les différentes étapes de la reconstruction.

Etape 1 : regroupement des temps d'arrivée des impulsions La première étape de l'algorithme de reconstruction vise à regrouper ensemble dans un tableau les temps d'arrivée des impulsions qui peuvent correspondre à la reconstruction d'un même atome. On commence par prendre comme référence un des temps $t_{x_1,i}$. Ces temps sont pris dans l'ordre croissant au fur et à mesure de l'algorithme. Ensuite on regarde dans une fenêtre de temps donnée, correspondant en fait à $\max(l_d^x/v_d + \epsilon_x + \epsilon_{xy}, l_d^y/v_d + \epsilon_y + \epsilon_{xy})$ tous les temps d'arrivée des impulsions présents quelle que soit la ligne (la fenêtre de temps est symétrique autour de la référence t_{x_1}). Ces temps d'arrivée sont enregistrées dans un tableau. On peut donc avoir plusieurs temps $t_{x_1,i}$, $t_{x_2,j}$, $t_{y_1,k}$ et $t_{y_2,l}$ dans le tableau.

Cette phase de regroupement est assez rapide dans la mesure où la majeure partie du temps on ne trouve qu'une seule impulsion sur chacune des lignes à retard. Le tableau ne contient donc en général que 4 éléments. Au maximum, on peut trouver des situations où le tableau contient une dizaine d'éléments.

Etape 2 : Choix des meilleurs quadruplets dans le tableau La deuxième étape revient à considérer tous les quadruplets $(t_{x_1,i}, t_{x_2,j}, t_{y_1,k}, t_{y_2,l})$ possibles et à rechercher quels sont les meilleurs candidats pour la reconstruction d'un atome. Chaque quadruplet doit remplir un certain nombre de conditions. D'une part, on doit avoir $|t_{x_1,i} - t_{x_2,j}| \leq l_d^x/v_d + \epsilon_x$ et $|t_{y_1,k} - t_{y_2,l}| \leq l_d^y/v_d + \epsilon_y$. D'autre part, les positions $(\{t_{x_1,i} - t_{x_2,j}\}, \{t_{y_1,k} - t_{y_2,l}\})$ doivent se trouver à l'intérieur d'un disque défini par le rayon des galettes. Cette condition n'est pas très restrictive mais permet d'éviter la reconstruction d'un atome en dehors de la surface physique de la galette. Enfin, on impose que

$$\langle \delta S_{xy} \rangle - (t_{x_1,i} + t_{x_2,j} - t_{y_1,k} + t_{y_2,l}) \leq \max(\epsilon_x, \epsilon_y)$$

La valeur de $\langle \delta S_{xy} \rangle$ correspondant à la position $(\{t_{x_1,i} - t_{x_2,j}\}, \{t_{y_1,k} - t_{y_2,l}\})$ est fixée par la carte de gradient du détecteur calculée au moyen de l'algorithme naïf. Cette condition impose donc une carte de gradient aux atomes reconstruits. Elle évite d'éventuelles distorsions des images dues à la saturation du détecteur quand un grand nombre de coups sont détectés sur un laps de temps réduit. La majeure partie du temps, à la fin de cette étape, il ne reste qu'un seul quadruplet satisfaisant toutes les conditions imposées. Dans le cas particulier où aucun quadruplet ne satisfait les conditions attendues, l'algorithme retourne à l'étape 1.

Etape 3 : Finale Cette étape va choisir parmi les candidats retenus à l'étape 2, le meilleur candidat. Quand il n'y a qu'un seul candidat, cette étape est rapide et conduit automatiquement à la reconstruction d'un atome. Dans la situation où plusieurs candidats se présentent, on prend tout simplement celui pour lequel la quantité $\langle \delta S_{xy} \rangle - (t_{x_1,i} + t_{x_2,j} - t_{y_1,k} + t_{y_2,l})$ est la plus petite. Les temps $(t_{x_1,i}, t_{x_2,j}, t_{y_1,k}, t_{y_2,l})$ correspondants sont ensuite supprimés pour éviter qu'ils ne soient ré-utilisés ultérieurement. L'algorithme retourne ensuite à l'étape 1 et continue la reconstruction.

Bilan Une fois que cette procédure a été entièrement réalisée une première fois, on la relance sur les données restantes. Certains nouveaux atomes peuvent alors être reconstruits. Par exemple lorsque 2 atomes sont arrivés quasiment au même moment sur le détecteur et que

leurs différentes impulsions sont enchevêtrées, il peut arriver que l'on en reconstruise qu'un seul des deux. Relancer la procédure permet de reconstruire le deuxième. Ce cas de figure est très rare et l'immense majorité du temps l'algorithme fait deux itérations puis s'arrête. Dans le cas contraire, on relance la procédure tant qu'elle permet de reconstruire des atomes. L'algorithme n'a pour l'instant jamais fait plus de trois itérations.

Cet algorithme reconstruit en général les positions d'un peu moins d'atomes que celui développé par M. Schellekens (de l'ordre de quelques pourcents). Ceci est essentiellement relié aux différentes conditions imposées à la reconstruction de la position d'un atome qui ne sont pas imposés dans l'autre algorithme. D'autre part, cet algorithme est aussi plus lent. Lorsqu'un temps de vol contient un très grand nombre de coups détectés (pour des temps de vol de PMO par exemple), la reconstruction peut prendre plusieurs secondes. En comparaison, l'algorithme de M. Schellekens est instantané. Le seul véritable avantage de cet algorithme est qu'il permet une reconstruction propre et sûre des positions des atomes en raison des nombreux tests qu'il effectue. La figure A.2 permet ainsi une comparaison directe des deux algorithmes. Il s'agit en fait d'une reproduction de la figure 4.1 pour laquelle on a reconstruit les positions des atomes avec l'algorithme développé par M. Schellekens. On peut se rendre compte d'un certain nombre d'artefacts dus à la procédure de reconstruction. Ces artefacts peuvent être reliés au fait qu'un très grand nombre d'atomes tombent en même temps sur le détecteur au moment de la détection des condensats. Une étude plus précise de ce phénomène peut être trouvée dans les annexes de [46].

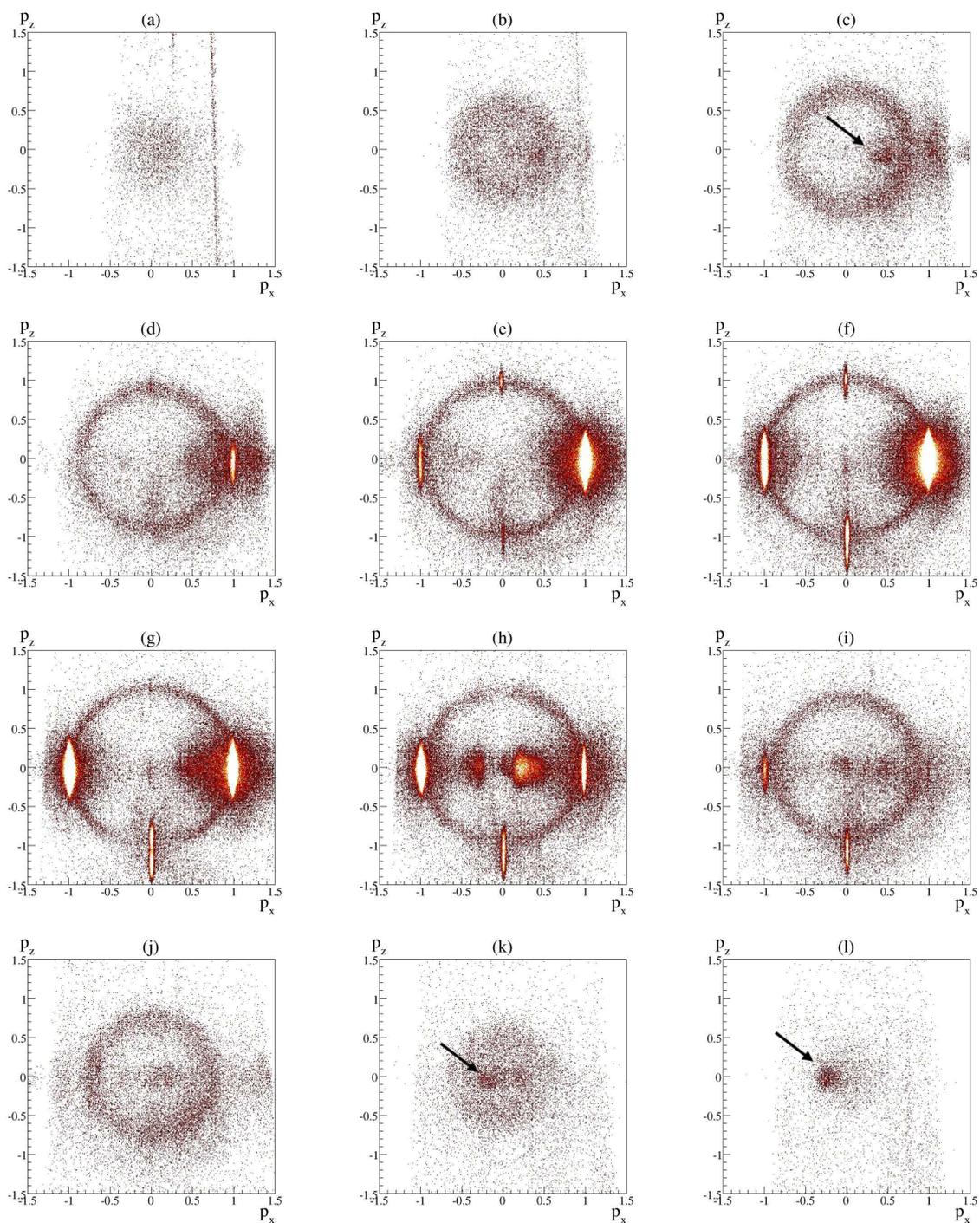


FIG. A.2 – Coupe de la sphère de collision dans l'espace des impulsions. Les positions des atomes ont été reconstruites avec l'algorithme développé par M. Schellekens. Il s'agit des mêmes données que celles de la figure 4.1. Pour permettre une comparaison directe des deux figures, cette dernière est reproduite à la page suivante. On peut ici remarquer la présence d'un certain nombre d'artefacts dus à la procédure de reconstruction. On a indiqué les plus visibles à l'aide d'une flèche.

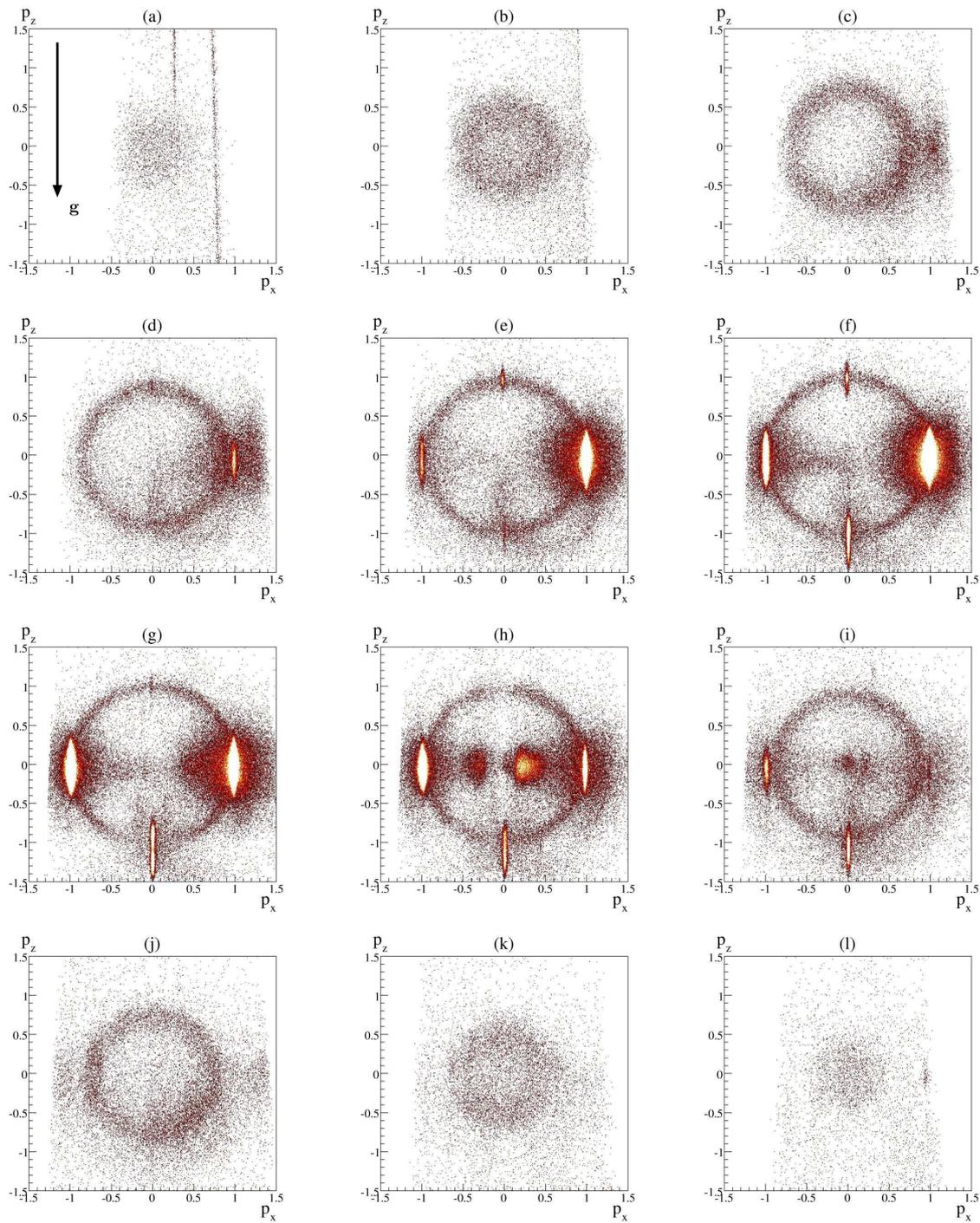


FIG. A.3 – *Reproduction de la figure 4.1.*

Passage dans l'espace des impulsions

A l'issue du traitement des signaux de détection, nous avons accès à la fois à la position (x_d, y_d) des atomes dans le plan du détecteur mais aussi à leur temps d'arrivée t_f (voir la partie 2.3.3). Nous avons vu au paragraphe 2.4, que ces 3 coordonnées correspondent à une mesure indirecte de l'impulsion des particules au moment de leur détection. Connaissant la position finale d'une particule libre, on peut en effet aisément remonter à son impulsion initiale, connaissant sa position initiale. En mesurant les positions et temps d'arrivée d'un nuage froid, on peut ainsi remonter à sa distribution d'impulsion dans le piège. Ceci reste vrai tant que les interactions entre particules jouent un rôle négligeable pendant le temps de vol. Au cas où les interactions ne sont plus négligeables, la même méthode fournit une distribution d'impulsion effective de laquelle de nombreuses informations sur le gaz étudié peuvent être extraites. Dans le cas des collisions de condensats de Bose-Einstein, cette procédure permet de reconstruire la distribution d'impulsion des atomes de la sphère de collision. Toutes les figures de temps de vol présentées dans ce manuscrit sont basées sur cette méthode. Nous nous proposons ici de décrire la procédure que nous avons suivie pour reconstruire l'impulsion initiale des gaz froids que nous avons étudié. Dans toute cette partie, les axes \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} correspondent aux axes du piège magnétique.

B.1 Position du problème

Chute libre d'une particule classique Imaginons que l'on souhaite reconstruire l'impulsion initiale d'une particule classique que l'on a relâchée du centre du piège magnétique à l'instant t_0 . La première étape consiste à écrire les équations du mouvement de la particule. N'étant soumise qu'au champ de pesanteur terrestre, on peut aisément écrire les équations qui régissent l'évolution de ses coordonnées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ au cours du temps en utilisant les lois de Newton.

$$\begin{aligned}x(t) &= v_{0x}(t - t_0) \\y(t) &= v_{0y}(t - t_0) \\z(t) &= -\frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_{0z}(t - t_0)\end{aligned}\tag{B.1}$$

Dans ces relations, v_{0x} , v_{0y} et v_{0z} sont les composantes de la vitesse initiale de la particule que l'on cherche à déterminer, et g est l'accélération de la pesanteur. On a pris le centre du

piège magnétique comme origine du repère. On appelle h la distance entre le centre du piège magnétique et le détecteur. De ces relations, on peut déduire les composantes de la vitesse initiale de la particule en fonction de son temps d'arrivée t_f et de sa position $(x(t_f), y(t_f))$ sur le détecteur

$$\begin{aligned} v_{0x} &= \frac{x(t_f)}{t_f - t_0} \\ v_{0y} &= \frac{y(t_f)}{t_f - t_0} \\ v_{0z} &= \frac{1}{2}g(t_f - t_0) + \frac{h}{t_f - t_0} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Un point important ici, correspond au fait que les axes \mathbf{x}_d et \mathbf{y}_d du détecteur sont tournés de l'ordre de 130° par rapport aux axes du repère considéré ici (les axes \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} correspondent en fait aux axes du dispositif expérimental définis sur la figure 2.2). D'autre part, le centre du détecteur est légèrement décentré par rapport au centre du piège magnétique. La figure B.1 donne une idée de la configuration des deux systèmes d'axes. Le détecteur est capable de mesurer le temps d'arrivée t_f de la particule ainsi que ses coordonnées x_d et y_d dans le repère associé. On peut écrire les relations qui relient $x(t_f)$ et $y(t_f)$ à x_d et y_d sous la forme

$$\begin{aligned} x(t_f) &= x_{0d} + x_d \cos \theta_d - y_d \sin \theta_d \\ y(t_f) &= y_{0d} + x_d \sin \theta_d + y_d \cos \theta_d \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

où x_{0d} et y_{0d} sont les coordonnées du centre du détecteur et θ_d est l'angle défini sur la figure B.1.

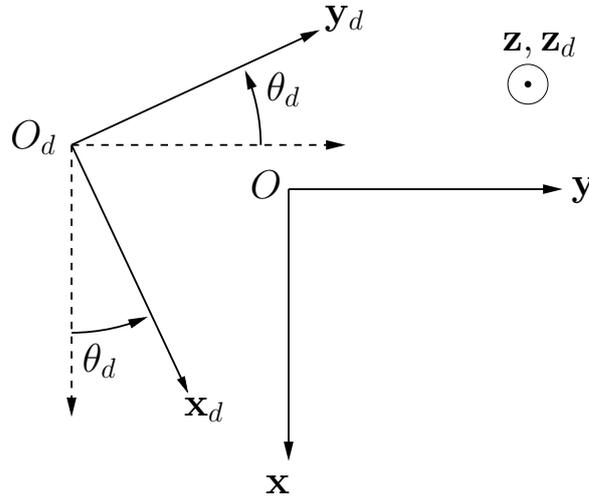


FIG. B.1 – Correspondance entre le référentiel expérimental ($Oxyz$) et le référentiel du détecteur ($Ox_d y_d z_d$). Expérimentalement, l'angle θ_d est de l'ordre de 130° et la distance OO_d est de l'ordre de 2 mm.

Un autre point important, correspond au fait que le détecteur ne mesure pas directement les positions x_d et y_d . Ces dernières sont déduites des temps d'arrivée des impulsions électriques aux différentes sorties des lignes à retard. Or nous n'avons qu'une connaissance

approchée de la correspondance entre les différences des temps d'arrivée des impulsions sur une ligne et la distance correspondante sur le détecteur dans la mesure où nous ne connaissons pas parfaitement la vitesse de propagation des impulsions sur les lignes, ni la longueur des lignes. De plus, le pas de codage temporel du détecteur étant fini, x_d et y_d seront toujours égaux à nombre entier de fois la taille du pixel spatial du détecteur. Cette taille n'est d'ailleurs pas exactement la même suivant \mathbf{x}_d et \mathbf{y}_d . Nous sommes en revanche capables d'estimer cette taille indirectement ou à l'aide des données du constructeur. Elle est de l'ordre de $200\mu\text{m}$. On peut donc écrire que

$$\begin{aligned}x_d &= n_x d_x \\y_d &= n_y d_y\end{aligned}\tag{B.4}$$

où d_x et d_y sont les tailles des pixels suivant les axes correspondants et n_x et n_y des entiers relatifs.

Les relations B.2 nous permettent donc de calculer la vitesse initiale de la particule moyennant la connaissance de 6 paramètres expérimentaux : h , x_{0d} , y_{0d} , θ_d , d_x et d_y . Il ne reste finalement maintenant plus qu'à déterminer les valeurs de ces 6 paramètres.

Principe de la mesure des paramètres inconnus Parmi ces paramètres inconnus, h est sûrement le plus aisément accessible. Pour le déterminer, il suffit d'observer le temps de vol d'un nuage froid au dessus du seuil de condensation. A très basse température (de l'ordre du μK) le temps d'arrivée moyen des particules correspond à la durée de la chute libre d'une particule classique sans vitesse initiale [72] : $\sqrt{2h/g}$. En réalisant un ajustement de la distribution des temps d'arrivée des atomes sur la galette, on peut donc estimer cette valeur avec une bonne précision. Cette mesure est d'autant plus précise que le nombre de coups détectés est grand. En moyennant la distribution sur plusieurs temps de vol, on peut donc améliorer la mesure. Cette dernière n'est par ailleurs pas sensiblement affectée par les problèmes de saturation des MCP parce que les nuages sont suffisamment dilués. D'autre part, les inhomogénéités spatiales de la détectivité des MCP peuvent être normalisées à partir d'une carte de la détectivité obtenue à partir de temps de vol de PMO. Seules les zones de détectivité quasi-nulle peuvent entraîner une erreur systématique sur le résultat obtenu. La mesure a été réalisée à plusieurs températures fournissant à chaque fois des résultats similaires $h \simeq 47$ cm que nous avons conservé comme une mesure de référence.

L'estimation des 5 autres paramètres est moins évidente mais peut être réalisée de façon similaire. On peut estimer θ_d à partir du temps de vol d'un condensat de Bose-Einstein. Le temps de vol étant anisotrope on peut aisément distinguer les axes \mathbf{x} et \mathbf{y} . La forte saturation de la galette ainsi que les inhomogénéités de gain du détecteur induisent cependant une incertitude assez grande sur le résultat obtenu (de l'ordre de quelques $^\circ$). On a ainsi pu estimer que $\theta_d \simeq 139^\circ$. La mesure de x_{0d} et y_{0d} peut être réalisée en cherchant à déterminer le centre d'un nuage froid dans le plan du détecteur. En normalisant les inhomogénéités spatiales de la détectivité, on a ainsi pu estimer que x_d et y_d sont de l'ordre de 2 à 4 mm. Enfin, pour déterminer d_x et d_y , on peut commencer par mesurer la largeur de la distribution des temps d'arrivée des atomes d'un nuage froid. Ceci permet de remonter à la température T du nuage. A partir de cette dernière, on peut déterminer l'extension transverse du nuage froid au niveau du détecteur connaissant la hauteur de chute (on ne considère ici que des gaz

suffisamment dilués de manière à pouvoir négliger tout effet hydrodynamique). En comparant cette valeur à l'extension mesurée par le détecteur suivant les axes \mathbf{x}_d et \mathbf{y}_d , on peut donc obtenir une estimation de d_x et d_y . Les inhomogénéités de détection rendent cependant la mesure relativement imprécise. Les valeurs trouvées sont malgré tout compatibles avec les $200 \mu\text{m}$ déterminés au moyen des données fournies par le constructeur.

Malgré l'incertitude des mesures réalisées, l'estimation de ces différents paramètres n'a jamais été un facteur limitant pour l'expérience jusqu'à la réalisation de collisions de condensats de Bose-Einstein. Pour ces dernières, nous devons être capable de mesurer aussi précisément que possible l'impulsion des particules détectées dans la sphère de collision. En effet, sans une connaissance précise des impulsions des particules, nous ne pouvons espérer mettre en évidence des paires d'atomes d'impulsions de sens opposées (voir le chapitre 4). Par chance, les données accumulées pour cette expérience ont permis de nouvelles estimations des différents paramètres de l'expérience. Nous décrivons la méthode adoptée dans la partie suivante.

B.2 Ajustements des paramètres expérimentaux sur la sphère de diffusion

Pour déterminer les impulsions des particules diffusées lors de la collision de deux condensats de Bose-Einstein (voir le chapitre 4), nous avons besoin de connaître leur dynamique. A partir d'un modèle de collision classique nous pouvons déterminer les paramètres qui régissent l'évolution de la sphère de collision. Connaissant cette dynamique, on peut ajuster la valeur de ces paramètres pour vérifier leur pertinence sur les données expérimentales.

B.2.1 Un modèle de collision de particules classiques

Ce paragraphe a pour objet de déterminer l'équation d'évolution de la sphère de collision au cours de sa chute libre. Pour simplifier le problème, on va considérer la collision de deux particules classiques ayant pour vitesses initiales, \mathbf{v}_{1i} et \mathbf{v}_{2i} les vitesses communiquées aux deux condensats lors du transfert Raman. Les axes des faisceaux Raman sont définis par les vecteurs \mathbf{e}_σ et \mathbf{e}_π dont on peut exprimer les composantes dans le repère ($Oxyz$) (voir Fig.3.9) ¹.

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\pi &= \cos \phi_1 \mathbf{z} - \sin \phi_1 \mathbf{y} \\ \mathbf{e}_\sigma &= \cos \phi_2 \mathbf{x} + \sin \phi_2 \mathbf{y}\end{aligned}\tag{B.5}$$

Les vitesses des deux particules peuvent par ailleurs se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{1i} &= v_{\text{rec}} (\mathbf{e}_\sigma + \mathbf{e}_\pi) \\ \mathbf{v}_{2i} &= v_{\text{rec}} (-\mathbf{e}_\sigma + \mathbf{e}_\pi)\end{aligned}\tag{B.6}$$

¹On néglige les composantes du faisceau L_1 suivant \mathbf{x} et celle de L_2 suivant \mathbf{z} . Ces hypothèses ont pu être vérifiées expérimentalement.

Pour une collision élastique, les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion permettent de relier les vitesses initiales des particules à leurs vitesses à l'issue de la collision, \mathbf{v}_{1f} et \mathbf{v}_{2f}

$$\begin{aligned} m\mathbf{v}_{1i} + m\mathbf{v}_{2i} &= m\mathbf{v}_{1f} + m\mathbf{v}_{2f} \\ \frac{1}{2}m\mathbf{v}_{1i}^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_{2i}^2 &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}_{1f}^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_{2f}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

De ces relations, on peut déduire l'équation de la sphère de collision dans laquelle les particules sont diffusées après la collision.

$$v_x^2 + (v_y + v_{\text{rec}} \sin \phi_1)^2 + (v_z - v_{\text{rec}} \cos \phi_1)^2 = v_{\text{rec}}^2 \quad (\text{B.8})$$

où v_x , v_y et v_z représentent indifféremment les composantes de \mathbf{v}_{1f} et \mathbf{v}_{2f} . Cette dernière équation définit par ailleurs la vitesse initiale du centre de la collision dans le repère ($Oxyz$). On peut en déduire l'évolution de ses coordonnées $x_c(t)$, $y_c(t)$ et $z_c(t)$ au cours du temps.

$$\begin{aligned} x_c(t) &= 0 \\ y_c(t) &= -v_{\text{rec}} \sin \phi_1 (t - t_0) \\ z_c(t) &= -\frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_{\text{rec}} \cos \phi_1 (t - t_0) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

D'autre part, le rayon r_s de la sphère de collision évolue au cours du temps en suivant la relation

$$r_s(t) = v_{\text{rec}}(t - t_0) \quad (\text{B.10})$$

On fera l'hypothèse dans la suite que, malgré la simplicité du modèle utilisé, les équations B.9 restent valables pour la collision de deux condensats de Bose-Einstein et définissent bien le centre de la sphère de collision observée expérimentalement².

Connaissant la position et le temps d'arrivée des atomes sur le détecteur, on peut déduire des relations B.9 la vitesse d'une particule dans le référentiel mobile d'axes \mathbf{x} \mathbf{y} et \mathbf{z} et d'origine définie par le centre de la collision. En plus des 6 paramètres définis dans la partie précédente, un tel calcul nécessite aussi une bonne connaissance de l'angle ϕ_1 . Il ne reste maintenant plus qu'à ajuster les valeurs de ces 7 paramètres.

B.2.2 Ajustement des paramètres expérimentaux

A partir des résultats obtenus au moyen des procédures décrites dans la première partie de cette annexe, nous avons une connaissance a priori de la plupart des 7 paramètres nécessaires au calcul de la vitesse des atomes dans le référentiel attaché au centre de la collision. D'autre part, expérimentalement, la position géométrique du faisceau L_1 permet aussi une estimation de la valeur de $\phi_1 \sim 7^\circ$. On peut donc à partir de ces valeurs reconstruire la sphère de collision dans l'espace des impulsions et observer le résultat obtenu en réalisant différentes

²Cette hypothèse est difficile à tester rigoureusement sans un traitement complet de la dynamique de la collision. On pourrait démontrer une telle hypothèse au moyen d'arguments basés sur les symétries du problème mais les différences de nombre d'atomes des deux condensats rendent de tels arguments obsolètes. Les effets du champ moyen peuvent en effet éventuellement briser ces symétries. L'observation de corrélations démontrée au chapitre 4 de ce manuscrit permettent néanmoins de légitimer la méthode.

coupes de la sphère. On peut a posteriori ajuster à vue les valeurs des différents paramètres afin d'améliorer la qualité de la reconstruction. La figure B.2 présente le résultat obtenu après quelques ajustements sur différentes coupes de la sphère reconstruite. Les cercles blancs indiquent la position de la sphère tel que prédit par les 7 paramètres. Les ronds blancs ont la même finalité pour la position du centre des différents condensats impliqués dans la collision.

Une telle méthode ne permet pas d'obtenir des résultats infiniment précis et peut paraître hasardeuse dans la mesure où elle dépend ouvertement de la qualité d'observation de la personne qui ajuste les paramètres. Malheureusement d'autres méthodes basées sur la minimisation d'une fonction définie à partir des données expérimentalement induisent inévitablement des erreurs systématiques dues soit à la saturation du détecteur, soit aux inhomogénéités spatiales de détectivité des MCP. Malgré tout, les résultats obtenus n'ont pas empêché l'observation de corrélations entre les atomes de la sphère. De plus, les ajustements effectués n'ont pas profondément modifié les valeurs des paramètres en comparaison de leurs valeurs initiales. Voici les valeurs obtenues à l'issue des ajustements

$$\begin{aligned}
 d_x &= 208 \pm 5 \mu\text{m} \\
 d_y &= 192 \pm 5 \mu\text{m} \\
 x_{0d} &= 15 \pm 2 d_x \\
 y_{0d} &= 15 \pm 2 d_y \\
 h &= 46.8 \pm 0.1 \text{ cm} \\
 \theta_d &= 135 \pm 1^\circ \\
 \phi_1 &= 8 \pm 1^\circ \\
 \phi_2 &= 5 \pm 1^\circ
 \end{aligned}
 \tag{B.11}$$

où les incertitudes indiquées correspondent à l'intervalle de valeurs pour lequel la méthode graphique utilisée ne permet pas d'observer de différences significatives sur la qualité de l'ajustement.

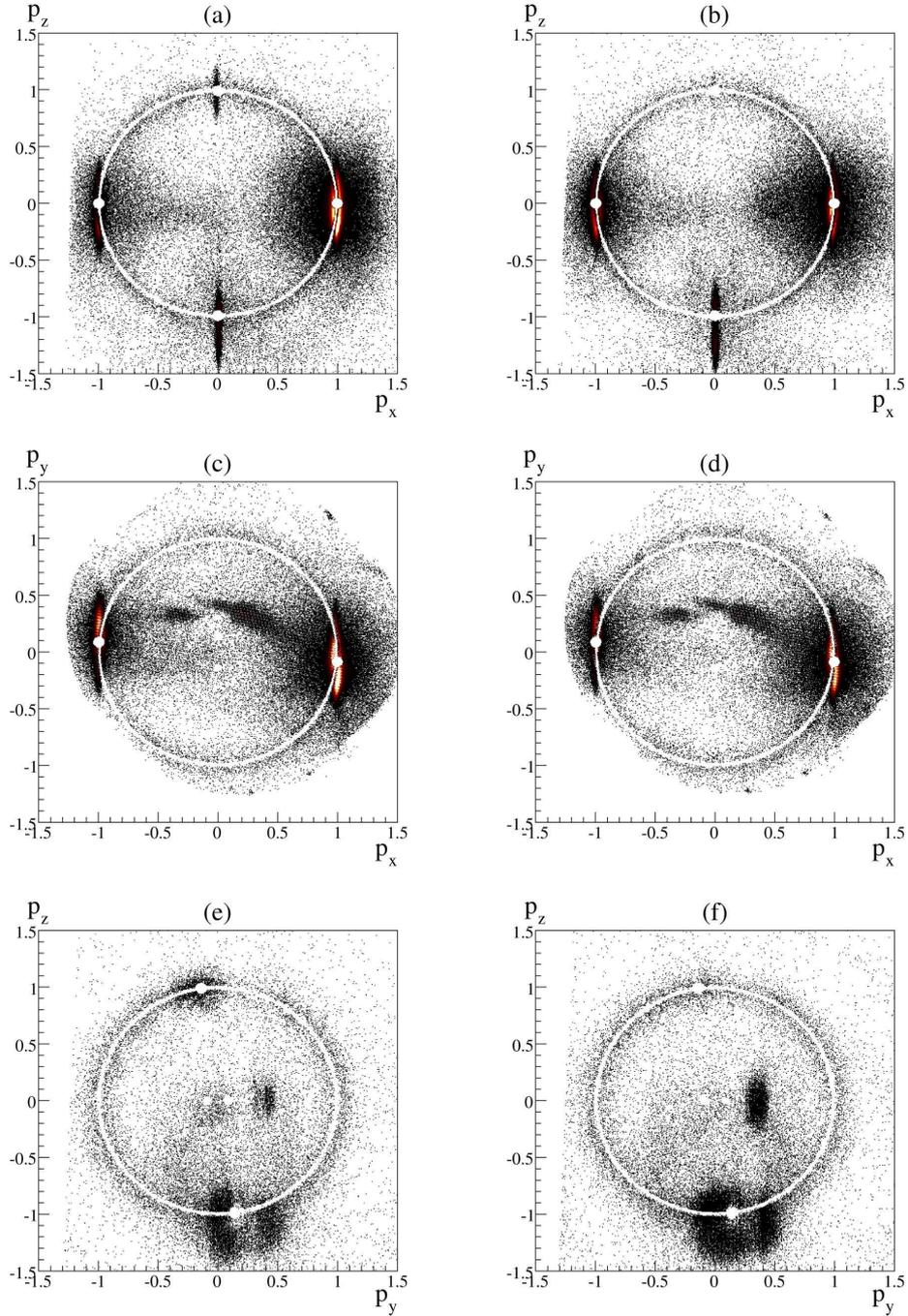


FIG. B.2 – *Reconstruction de tranches de la sphère de collision dans l'espace des impulsions. En notant w la direction de l'axe orthogonal au plan de la coupe, (a), (c) et (d) correspondent à une coupe intégrée sur l'intervalle $-0.2 \leq p_w \leq 0$ tandis que (b), (d) et (e) correspondent à une coupe intégrée sur l'intervalle $0 \leq p_w \leq 0.2$. Toutes les impulsions sont exprimées en unité de l'impulsion de recul d'un photon $\hbar k_{\text{rec}}$.*

La représentation *Positive P*

En mécanique quantique, le calcul complet de la dynamique d'un système comportant un grand nombre de particules devient rapidement irréaliste à l'échelle des ressources dont on dispose à l'heure actuelle tant la dimension D de l'espace de Hilbert dans lequel les vecteurs d'état du système prennent leurs valeurs est grande. Ainsi, si l'on souhaite décrire la dynamique de N atomes répartis dans M modes donnés, on peut aisément se convaincre que $D \sim M^N$. Dans le cas de notre expérience de collisions par exemple, ce nombre est déjà astronomique : $D \sim 10^{10000}$. Ce type de considérations a d'ailleurs conduit R. Feynman à aboutir à la conclusion suivante [123]

“Can a quantum system be probabilistically simulated by a classical universal computer ? ... The answer is certainly, No !”

En remplaçant les équations de la dynamique de l'opérateur d'évolution du système par un jeu d'équations différentielles stochastiques portant sur des fonctions et non plus des opérateurs [124], P. Drummond et C. Gardiner ont ouvert la voie à une méthode originale de calcul numérique par l'intermédiaire de laquelle un grand nombre de problèmes physiques sont maintenant accessibles [125]¹. Des calculs récents, basés sur une telle approche, ont ainsi permis de suivre la dynamique de la collision de deux condensats de Bose-Einstein [117]. La grande force d'une telle approche est qu'elle permet l'étude de systèmes en dehors de l'équilibre thermodynamique, là où la majeure partie des traitements théoriques courants ne sont plus opérants. Elle permet d'autre part de prendre en compte des effets non-linéaires que l'on doit souvent négliger dans des traitements plus conventionnels.

Dans cette annexe nous nous proposons de décrire succinctement les bases nécessaires à la compréhension d'une telle méthode, de manière à rendre plus abordables les résultats présentés dans la partie 5.2. Pour plus de détails sur un tel traitement, nous renvoyons aux références [126, 127, 120] sur lesquelles cette annexe est en grande partie basée. Les limitations de cette méthode sont discutées au travers des calculs présentés dans la partie 5.2. Dans la suite, nous focalisons notre étude sur la description des collisions de condensats de Bose-Einstein.

¹Il existe en fait différentes méthodes de représentation dans l'espace des phases. Nous nous intéressons ici uniquement à l'une d'entre elle.

C.1 Discrétisation de l'espace

Afin de rendre la dynamique d'un système de bosons en interaction accessible par l'intermédiaire de calculs numériques, il faut dans un premier temps être capable de limiter l'espace d'étude à un volume de taille fini. D'autre part cet espace doit être discrétisé. Pour la majeure partie des expériences, les particules étant confinées dans un certain volume d'observation, cette étape n'impose pas de limitations particulières. Prenons le cas d'un système de bosons en interaction. Nous avons mentionné au paragraphe 1.3.1, la forme générale de l'hamiltonien \hat{H} qui décrit la dynamique des particules. On va considérer dans la suite que le système se trouve dans un régime dans lequel les interactions peuvent être décrites par l'intermédiaire du pseudo-potential 1.60. On peut ainsi écrire que

$$\hat{H} = - \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} g \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \quad (\text{C.1})$$

Dans cette expression, l'espace sur lequel les intégrales sont définies est considéré comme infini et continu. En limiter les dimensions revient à définir des limites spatiales L_u dans les trois directions de l'espace mais aussi des barrières k_u^{\max} sur les impulsions accessibles dans l'espace de Fourier ². D'autre part, afin de se ramener à un problème dans un espace discret, on peut commencer par approximer toute fonction $f(\mathbf{r})$ à partir d'un nombre fini de ses composantes dans l'espace de Fourier

$$f(\mathbf{r}) \rightarrow f_{\text{cut}}(\mathbf{r}) = \frac{(2\pi)^3}{L_x L_y L_z} \sum_{\tilde{\mathbf{n}}} \tilde{f}_{\tilde{\mathbf{n}}} e^{i\tilde{\mathbf{k}}_{\tilde{\mathbf{n}}}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{C.2})$$

où le vecteur $\tilde{\mathbf{n}} = (\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, \tilde{n}_z)$ a des composantes entières dont les valeurs absolues sont comprises entre 0 et les limites imposées par $L_u k_u^{\max}/2\pi$. On définit ainsi un réseau tridimensionnel (dans l'espace réciproque ainsi que dans l'espace réel) sur laquelle un nombre fini de valeurs de la fonction f peut être calculé : $f(\mathbf{r}_{\mathbf{n}})$ avec $\mathbf{r}_{\mathbf{n}} = (x(n_x), y(n_y), z(n_z))$. Les composantes de $\mathbf{r}_{\mathbf{n}}$ peuvent se mettre sous la forme suivante

$$u(n_u) = n_u \Delta u \quad (\text{C.3})$$

avec $\Delta u = L_u/M_u$, $M_u = \max(|n_u|)$ et $u = x, y$ ou z . Pour qu'une telle discrétisation soit efficace et permette de décrire correctement le problème physique posé, deux conditions doivent absolument être vérifiées. D'une part, il faut que le volume défini par les longueurs L_u soit suffisamment grand. On ne veut pas en effet qu'une partie de la dynamique du phénomène étudié ait lieu à l'extérieur de ce volume. D'autre part, il faut que les composantes de Fourier que l'on a tronquées dans la définition de f_{cut} soient bien négligeables à l'échelle de précision à laquelle on désire travailler. En d'autres termes, l'échelle spatiale des phénomènes physiques étudiés doit être nettement plus grande que Δu .

En appliquant cette procédure de discrétisation à l'hamiltonien C.1, on peut réussir à écrire que

$$\hat{H} \rightarrow \sum_{\mathbf{nm}} \hbar\omega_{\mathbf{nm}} \hat{a}_{\mathbf{n}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{m}} + \hbar\chi \sum_{\mathbf{n}} \hat{a}_{\mathbf{n}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{n}} (\hat{a}_{\mathbf{n}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{n}} - 1) \quad (\text{C.4})$$

²Les limites L_u vont en fait aussi fixer les valeurs des pas de discrétisation des différentes directions de l'espace de Fourier tandis que les k_u^{\max} jouent le même rôle pour les pas de discrétisation dans l'espace réel.

Dans cette expression, les opérateurs d'annihilation $\hat{a}_{\mathbf{n}}$ sont définis à partir des composantes de Fourier de l'opérateur champ du système

$$\hat{a}_{\mathbf{n}} = \hat{\Psi}_{\mathbf{n}} \sqrt{\Delta x \Delta y \Delta z} \quad (\text{C.5})$$

D'autre part, les pulsations $\omega_{\mathbf{nm}}$ peuvent se mettre sous la forme suivante

$$\omega_{\mathbf{nm}} = \omega_{\mathbf{mn}}^* = \frac{\hbar \Delta x \Delta y \Delta z}{2m(2\pi)^{3/2}} K_{\mathbf{n}-\mathbf{m}}^{(2)} \quad (\text{C.6})$$

où $K^{(2)}$ est la transformée de Fourier discrète de $|\mathbf{k}|^2$. Autrement dit,

$$K_{\mathbf{n}}^{(2)} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{L_x L_y L_z} \sum_{\tilde{\mathbf{n}}} |\mathbf{k}_{\tilde{\mathbf{n}}}|^2 e^{i\mathbf{k}_{\tilde{\mathbf{n}}} \cdot \mathbf{r}_{\mathbf{n}}} \quad (\text{C.7})$$

Enfin, la constante de couplage χ peut se mettre sous la forme

$$\chi = \frac{g}{2\hbar \Delta x \Delta y \Delta z} \quad (\text{C.8})$$

Dans la suite, nous allons chercher à réécrire les équations décrivant la dynamique du système en termes des quantités discrètes introduites ici.

C.2 Représentation de la matrice densité

L'idée centrale de la représentation dans l'espace des phases *Positive P* consiste à décomposer l'opérateur densité du système étudié sur une famille génératrice formée d'états cohérents³. Il a ainsi été démontré que n'importe quel opérateur densité $\hat{\rho}$ peut s'écrire sous la forme [124]

$$\hat{\rho} = \int d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\beta} P_+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \hat{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad (\text{C.9})$$

où $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ sont des vecteurs de nombres complexes. Ainsi $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_Z\}$, où Z correspond aux nombres de points du réseau tridimensionnel du paragraphe précédent. Chaque point du réseau correspond donc à un mode spatial. L'opérateur densité est ainsi décomposé sur l'ensemble formé par ces différents modes spatiaux. D'autre part, dans l'expression C.9, les opérateurs $\hat{\Lambda}$ correspondent à des projecteurs sur des états cohérents normalisés

$$\hat{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = |\boldsymbol{\alpha}\rangle \langle \boldsymbol{\beta}| e^{(-\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{2} |\boldsymbol{\alpha}|^2 + \frac{1}{2} |\boldsymbol{\beta}|^2)} \quad (\text{C.10})$$

où

$$|\boldsymbol{\alpha}\rangle = \bigotimes_{k=1}^Z |\alpha_k\rangle \quad (\text{C.11})$$

et

$$|\alpha_k\rangle = e^{\alpha_k \hat{a}_k^\dagger + \frac{1}{2} |\alpha_k|^2} |0_k\rangle \quad (\text{C.12})$$

³Cette propriété peut être déduite de la relation de fermeture que l'on peut écrire pour des états cohérents. Voir le paragraphe 1.1.1.

Dans cette dernière expression, $|0_k\rangle$ correspond à l'état vide dans le mode spatial d'indice k . Enfin, la distribution P_+ s'écrit

$$P_+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{(4\pi^2)^Z} e^{(-\frac{1}{4}|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}^*|^2)} \left\langle \frac{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^*}{2} \left| \hat{\rho} \right| \frac{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^*}{2} \right\rangle \quad (\text{C.13})$$

Cette distribution a l'avantage d'être réelle, positive, normalisable et de ne pas présenter de singularités, quelle que soit la matrice densité considérée. On peut donc l'interpréter comme une loi de probabilité. Cette propriété permet d'évaluer l'opérateur densité à partir d'un nombre donné S d'échantillons $\hat{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}^{(j)}, \boldsymbol{\beta}^{(j)})$. On peut en fait écrire que

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^S \hat{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}^{(j)}, \boldsymbol{\beta}^{(j)}) = \hat{\rho} \quad (\text{C.14})$$

On peut ainsi directement faire correspondre la loi P_+ à la matrice densité ρ : la donnée de S échantillons définis par $\boldsymbol{\alpha}^{(j)}$ et $\boldsymbol{\beta}^{(j)}$ et répartis suivant la loi P_+ permet en effet de reconstruire $\hat{\rho}$.

C.3 Interprétation stochastique de la distribution

C.3.1 Estimation d'observables

Le grand intérêt de la représentation *Positive P* devient évident quand on cherche à estimer des observables par son intermédiaire. De façon générale, on sait qu'on peut obtenir la valeur moyenne de toute observable \hat{O} à partir de l'opérateur densité du système étudié

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} [\hat{O} \hat{\rho}] \quad (\text{C.15})$$

A partir de l'équation C.9, on peut alors écrire que

$$\langle \hat{O} \rangle = \int d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\beta} P_+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \text{Tr} [\hat{O} \hat{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})] \quad (\text{C.16})$$

En tenant compte de la nature hermitienne de \hat{O} et $\hat{\rho}$, cette dernière équation peut être réécrite sous la forme suivante

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{1}{2} \int d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\beta} P_+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \left(\text{Tr} [\hat{O} \hat{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})] + \text{Tr} [\hat{O} \hat{\Lambda}^\dagger(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)] \right) \quad (\text{C.17})$$

A partir d'échantillons $\hat{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}^{(j)}, \boldsymbol{\beta}^{(j)})$, on peut maintenant obtenir une estimation de la valeur moyenne d'un opérateur donné

$$\bar{O} = \frac{1}{2} \left(\left\langle \text{Re} \left\{ \text{Tr} [\hat{O} \hat{\Lambda}] \right\} \right\rangle_{\text{stoch}} + \left\langle \text{Re} \left\{ \text{Tr} [\hat{O} \hat{\Lambda}^\dagger] \right\} \right\rangle_{\text{stoch}} \right) \quad (\text{C.18})$$

où les moyennes stochastiques sont indiqués par $\langle \cdot \rangle_{\text{stoch}}$. A la limite d'un grand nombre d'échantillons, on a

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \bar{O} = \langle \hat{O} \rangle \quad (\text{C.19})$$

Dans la mesure où les différents échantillons peuvent être considérés comme indépendants, le théorème de la limite centrale nous permet d'estimer que la convergence est en $\sqrt{\mathcal{S}}$. D'autre part, on peut aisément à partir d'une telle méthode estimer l'incertitude sur l'estimation réalisée [120].

De façon générale, on sait que tout opérateur peut s'écrire comme le produit d'opérateurs locaux de création et d'annihilation $\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_k$. Ainsi pour évaluer une observable quelconque il suffit de connaître la valeur moyenne d'un produit de la forme $\otimes_j \hat{a}_{L_j}^\dagger \otimes_k \hat{a}_{L'_k}$ (L et L' sont ici deux sous-ensembles de positions sur le réseau tridimensionnel et j et k les indices de ces différents positions). Les états cohérents étant les vecteurs propres des opérateurs d'annihilation, on peut obtenir que

$$\langle \otimes_j \hat{a}_{L_j}^\dagger \otimes_k \hat{a}_{L'_k} \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \prod_j \beta_{L_j} \prod_k \alpha_{L'_k} + \prod_j \alpha_{L_j}^* \prod_k \beta_{L'_k}^* \right\rangle_{\text{stoch}} \quad (\text{C.20})$$

C.3.2 Evolution des différents échantillons

A partir de l'équation maîtresse qui gouverne l'évolution de la matrice densité du système il est possible de dériver une équation de type Fokker-Planck pour l'évolution de la distribution P_+ . Cette équation peut ensuite être traduite sous la forme d'un système d'équations stochastiques à partir desquelles différents échantillons $\boldsymbol{\alpha}^{(j)}, \boldsymbol{\beta}^{(j)}$ vont pouvoir être calculés numériquement. Nous ne donnons ici que les principales équations nécessaires à la compréhension de l'enchaînement des différentes étapes de la dérivation. Pour plus de détails, nous conseillons la lecture de [127, 120].

De façon générale on sait que l'évolution de l'opérateur densité d'un système est régie par

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (\text{C.21})$$

A partir de l'équation C.9, on peut réécrire cette dernière expression sous la forme suivante

$$i\hbar \int d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\beta} \frac{\partial}{\partial t} P_+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \hat{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \int d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\beta} P_+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) [\hat{H}, \hat{\Lambda}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})] \quad (\text{C.22})$$

En tirant partie de la forme C.4 de l'hamiltonien du système on peut maintenant écrire que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = & -i \sum_{\mathbf{n}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_{\mathbf{n}}} \left[\sum_{\mathbf{n}'} \omega_{\mathbf{n}\mathbf{n}'} \alpha_{\mathbf{n}'} + 2\chi \alpha_{\mathbf{n}}^2 \beta_{\mathbf{n}} \right] + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{\mathbf{n}}^2} \chi \alpha_{\mathbf{n}}^2 \right\} P_+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \\ & + i \sum_{\mathbf{n}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_{\mathbf{n}}} \left[\sum_{\mathbf{n}'} \omega_{\mathbf{n}'\mathbf{n}} \beta_{\mathbf{n}'} + 2\chi \alpha_{\mathbf{n}} \beta_{\mathbf{n}}^2 \right] + \frac{\partial^2}{\partial \beta_{\mathbf{n}}^2} \chi \beta_{\mathbf{n}}^2 \right\} P_+(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Il s'agit d'une équation de Fokker-Planck sur la distribution P_+ . Ce type d'équation est formellement équivalent à un système d'équations stochastiques de Langevin [126, 127] dont

on peut expliciter l'une des formes, dite de Ito ⁴,

$$\begin{aligned} d\alpha_{\mathbf{n}} &= -i \sum_{\mathbf{n}'} \omega_{\mathbf{nn}'} \alpha_{\mathbf{n}'} dt - 2i\chi \alpha_{\mathbf{n}}^2 \beta_{\mathbf{n}} dt + i\alpha_{\mathbf{n}} \sqrt{2i\chi} dW_{\mathbf{n}}(t) \\ d\beta_{\mathbf{n}} &= i \sum_{\mathbf{n}'} \omega_{\mathbf{n}'\mathbf{n}} \beta_{\mathbf{n}'} dt + 2i\chi \alpha_{\mathbf{n}} \beta_{\mathbf{n}}^2 dt + \beta_{\mathbf{n}} \sqrt{2i\chi} d\tilde{W}_{\mathbf{n}}(t) \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Dans ce système, les $dW_{\mathbf{n}}(t)$ et $d\tilde{W}_{\mathbf{n}}(t)$ correspondent à des bruits blancs indépendants

$$\begin{aligned} \langle dW_{\mathbf{n}}(t) \rangle_{\text{stoch}} &= 0 \\ \langle dW_{\mathbf{n}}(t) dW_{\mathbf{n}'}(t') \rangle_{\text{stoch}} &= \delta_{\mathbf{nn}'} \delta(t - t') dt^2 \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

A partir d'une condition initiale donnée, les équations C.24 peuvent être résolues numériquement. Chaque solution trouvée va correspondre à un échantillon $\alpha^{(j)}, \beta^{(j)}$. En moyennant les résultats sur un grand nombre d'échantillons, on peut ainsi avoir accès à l'évolution de toutes les observables d'un système au cours du temps (voir l'équation C.20). A l'heure actuelle, par l'intermédiaire de *clusters* il est possible de calculer différents échantillons en parallèle. La durée des calculs peut donc ainsi être fortement réduite ⁵.

⁴Il s'agit très certainement de l'étape la plus difficile à appréhender dans ce traitement : l'équivalence entre les deux types d'équations est loin d'être évident, les premières portant sur l'évolution d'une loi de probabilité et les autres sur l'évolution d'un échantillon particulier. Ce qu'il faut voir, c'est qu'en résolvant les équations stochastiques un grand nombre de fois, on obtient une distribution d'échantillons qui suivent la loi P_+ . L'équivalence a en fait lieu à ce niveau là.

⁵La durée typique des calculs sur un exemple concret est indiquée au paragraphe 5.2.

Articles

Hanbury Brown Twiss Effect for Ultracold Quantum Gases

Référence [25]

Theory for a Hanbury Brown Twiss experiment with a ballistically expanding cloud of cold atoms

Référence [48]

Comparison of the Hanbury Brown-Twiss effect for bosons and fermions

Référence [26]

Observation of Atom Pairs in Spontaneous Four-Wave Mixing of Two Colliding Bose-Einstein Condensates

Référence [28]

Hanbury Brown and Twiss correlations in atoms scattered from colliding condensates

Référence [128]

Atomic four-wave mixing via condensate collisions

Référence [129]

overexpressed oncogene by QPCR in prostate cancer, with 72.0% of cases overexpressing *ERG* (21). By using a combination of assays, we found evidence of fusion with *TMPRSS2* in 20 of 22 (>90%) cases that overexpressed *ERG* or *ETV1*, suggesting that the fusion is the most likely cause for the overexpression. FISH analysis on a set of 29 prostate cancer cases selected independently of any knowledge of *ERG* or *ETV1* expression indicates that 23 of 29 (79%) had *TMPRSS2:ETV1* fusions or *ERG* rearrangement. It is possible that this cohort is not representative of all prostate cancer samples and that this may be an overestimate of the prevalence of *TMPRSS2* fusions with ETS family members, because our split-signal approach can detect additional rearrangements involving *ERG*. However, the reported frequencies of *ERG* or *ETV1* overexpression in prostate cancer with our fusion transcript and FISH results suggest that *TMPRSS2* fusions with *ETV1* or *ERG* occur in the majority of prostate cancer cases. Coupled with the high incidence of prostate cancer [an estimated 232,090 new cases will be diagnosed in the United States in 2005 (22)], the *TMPRSS2* fusion with ETS family members is likely to be the most common rearrangement yet identified in human malignancies and the only rearrangement present in the majority of one of the most prevalent carcinomas.

Future efforts will be directed at characterizing the expressed protein products, including

the effects of N-terminal truncation of *ERG* and *ETV1*, and identifying downstream targets and the functional role of the fusions in prostate cancer development. Importantly, the existence of *TMPRSS2* fusions with ETS family members in prostate cancer suggests that causal gene rearrangements may exist in common epithelial cancers but may be masked by the multiple nonspecific chromosomal rearrangements that occur during tumor progression.

References and Notes

1. J. D. Rowley, *Nat. Rev. Cancer* **1**, 245 (2001).
2. T. H. Rabbitts, *Nature* **372**, 143 (1994).
3. J. D. Rowley, *Nature* **243**, 290 (1973).
4. A. de Klein et al., *Nature* **300**, 765 (1982).
5. M. Deininger, E. Buchdunger, B. J. Druker, *Blood* **105**, 2640 (2005).
6. F. Mitelman, *Mutat. Res.* **462**, 247 (2000).
7. Materials and methods are available as supporting material on Science Online.
8. D. R. Rhodes et al., *Neoplasia* **6**, 1 (2004).
9. P. A. Futreal et al., *Nat. Rev. Cancer* **4**, 177 (2004).
10. Detailed results from the application of COPA to Oncomine data sets can be explored at www.oncomine.org.
11. T. Oikawa, T. Yamada, *Gene* **303**, 11 (2003).
12. T. Hsu, M. Trojanowska, D. K. Watson, *J. Cell. Biochem.* **91**, 896 (2004).
13. I. S. Jeon et al., *Oncogene* **10**, 1229 (1995).
14. P. H. Sorensen et al., *Nat. Genet.* **6**, 146 (1994).
15. J. Lapointe et al., *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **101**, 811 (2004).
16. G. V. Glinsky, A. B. Glinskii, A. J. Stephenson, R. M. Hoffman, W. L. Gerald, *J. Clin. Invest.* **113**, 913 (2004).
17. R. Fonseca et al., *Cancer Res.* **64**, 1546 (2004).
18. B. Lin et al., *Cancer Res.* **59**, 4180 (1999).
19. D. E. Afar et al., *Cancer Res.* **61**, 1686 (2001).
20. E. Jacquinet et al., *Eur. J. Biochem.* **268**, 2687 (2001).
21. G. Petrovics et al., *Oncogene* **24**, 3847 (2005).
22. A. Jemal et al., *CA Cancer J. Clin.* **55**, 10 (2005).

23. P. J. Valk et al., *N. Engl. J. Med.* **350**, 1617 (2004).
24. J. R. Vasselli et al., *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **100**, 6958 (2003).
25. M. E. Ross et al., *Blood* **102**, 2951 (2003).
26. E. Tian et al., *N. Engl. J. Med.* **349**, 2483 (2003).
27. S. M. Dhanasekaran et al., *FASEB J.* **19**, 243 (2005).
28. J. B. Welsh et al., *Cancer Res.* **61**, 5974 (2001).
29. F. Zhan et al., *Blood* **99**, 1745 (2002).
30. S. M. Dhanasekaran et al., *Nature* **412**, 822 (2001).
31. E. Huang et al., *Lancet* **361**, 1590 (2003).
32. C. Sotiropoulos et al., *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **100**, 10393 (2003).
33. T. O. Nielsen et al., *Lancet* **359**, 1301 (2002).
34. Y. P. Yu et al., *J. Clin. Oncol.* **22**, 2790 (2004).
35. We thank D. Roulston and E. Fearon for helpful discussions, D. Robins and K. Burnstein for the PC3+AR cells, and R. Deshpande and C. Creighton for technical assistance. Supported by the Early Detection Research Network Biomarker Developmental Lab UO1 CA111275-01 (to A.M.C.); NIH Prostate specialized program of research excellence (SPORE) P50CA69568 (to K.J.P.), RO1 CA97063 (to A.M.C.), and RO1AG21404 (to M.A.R.); American Cancer Society RSG-02-179-MGO (to A.M.C.); Department of Defense (PC040517 to R.M. and PC020322 to A.M.C.); and the Cancer Center Bioinformatics Core (support grant 5P30 CA46592). D.R.R. is supported by the Cancer Biology Training Program. K.J.P. is an American Cancer Society Clinical Research Professor. A.M.C. is a Pew Biomedical Scholar, and S.A.T. and D.R.R. are Fellows of the Medical Scientist Training Program. Nucleotide sequences for the *TMPRSS2:ETS* fusions have been deposited at GenBank with accession numbers DQ204770 to DQ04773.

Supporting Online Material

www.sciencemag.org/cgi/content/full/310/5748/644/DC1

Materials and Methods

Figs. S1 to S8

Tables S1 and S2

20 July 2005; accepted 22 September 2005
10.1126/science.1117679

REPORTS

Hanbury Brown Twiss Effect for Ultracold Quantum Gases

M. Schellekens,¹ R. Hoppeler,¹ A. Perrin,¹ J. Viana Gomes,^{1,2}
D. Boiron,¹ A. Aspect,¹ C. I. Westbrook^{1*}

We have studied two-body correlations of atoms in an expanding cloud above and below the Bose-Einstein condensation threshold. The observed correlation function for a thermal cloud shows a bunching behavior, whereas the correlation is flat for a coherent sample. These quantum correlations are the atomic analog of the Hanbury Brown Twiss effect. We observed the effect in three dimensions and studied its dependence on cloud size.

Nearly half a century ago, Hanbury Brown and Twiss (HBT) performed a landmark experiment on light from a gaseous discharge (1). The experiment demonstrated strong cor-

¹Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, UMR 8501 du CNRS, Centre Scientifique d'Orsay, Bâtiment 503, 91403 Orsay CEDEX, France. ²Departamento de Física, Universidade do Minho, 4710-057 Braga, Portugal.

*To whom correspondence should be addressed. E-mail: christoph.westbrook@iota.u-psud.fr

relations in the intensity fluctuations at two nearby points in space despite the random or chaotic nature of the source. Although the effect was easily understood in the context of classical statistical wave optics, the result was surprising when viewed in terms of the quantum theory. It implied that photons coming from widely separated points in a source such as a star were "bunched." On the other hand, photons in a laser were not bunched (2, 3).

The quest to understand the observations stimulated the birth of modern quantum optics (4). The HBT effect has since found applications in many other fields from particle physics (5) to fluid dynamics (6).

Atom or photon bunching can be understood as a two-particle interference effect (7). Experimentally, one measures the joint probability for two particles emitted from two separated source points, *A* and *B*, to be detected at two detection points, *C* and *D*. One must consider the quantum mechanical amplitude for the process *A*→*C* and *B*→*D* as well as that for *A*→*D* and *B*→*C*. If the two processes are indistinguishable, the amplitudes interfere. For bosons, the interference is constructive, resulting in a joint detection probability that is enhanced compared with that of two statistically independent detection events, whereas for fermions the joint probability is lowered. As the detector separation is increased, the phase difference between the two amplitudes grows large enough that an average over all possible source points *A* and *B* washes out the interference, and one recovers the sit-

uation for uncorrelated detection events. This fact was used by HBT to measure the angular size of a star (8), but another major consequence of the observation was to draw attention to the importance of two-photon amplitudes and how their interference can lead to surprising effects. These quantum amplitudes must not be confused with classical electromagnetic field amplitudes (3). Two-photon states subsequently led to many other striking examples of “quantum weirdness” (9). In contrast to a chaotic source, all photons in a single mode laser are in the same quantum state. Hence, there is only one physical process and no bunching effect. A similar effect is expected for atoms in a Bose-Einstein condensate (BEC).

Two-particle correlations have been observed both for cold neutral atoms (10–12) and for electrons (13–15), and three-particle correlations (16–18) at zero distance have also been used to study atomic gases. But the full three-dimensional effect and its dependence on the size and degeneracy of a sample has yet to be demonstrated for massive particles. Here, we demonstrate the effect for a trapped cloud of atoms close to the BEC transition temperature released onto a detector capable of individual particle detection. We extract, for varying cloud sizes, a three-dimensional picture of the correlations between identical particles produced by quantum interference. We also show that a BEC shows no such correlations. The results are in agreement with an ideal gas model and show the power of single particle detection techniques applied to the study of degenerate quantum gases.

The calculation of the phase difference of the possible two-particle detection amplitudes given in (7) can be adapted to the case of particles of mass m traveling to a detector in a time t . One can show that the correlation length observed at the detectors, that is, the typical detector separation for which interference survives, is $l_i = \frac{\hbar t}{ms_i}$, where s_i is the source size along the direction i , \hbar is the reduced Planck’s constant, and we have assumed that the size of the cloud at the detector is much larger than the initial size. The optical analog of this expression, for a source of size s and wavelength λ at a distance L from the observation plane, is $l = L\lambda/2\pi s$. This is the length scale of the associated speckle pattern. The formula can be recovered for the case of atoms traveling at constant velocity v toward a detector at distance L if one identifies \hbar/mv with the deBroglie wavelength corresponding to velocity v . The formula we give is also valid for atoms accelerated by gravity, and the interpretation of l as the atomic speckle size remains valid. A pioneering experiment on atom correlations used a continuous beam of atoms (10). For a continuous beam, the correlation time, or equivalently, the longitudinal correlation length, de-

pends on the velocity width of the source and not on the source size. Thus, the longitudinal and transverse directions are qualitatively different. By contrast, our measurements are performed on a cloud of atoms released suddenly from a magnetic trap. In this case, the three dimensions can all be treated equivalently, and the relation above applies in all three. Because the trap is anisotropic, the correlation function is as well, with an inverted ellipticity. Our sample is a magnetically trapped cloud of metastable helium atoms evaporatively cooled close to the BEC transition temperature (19) (about 0.5 μ K for our conditions). Our source is thus very small, and together with a long time of flight (308 ms) and helium’s small mass, we achieve a large speckle size or correlation volume (30 μ m by 800 μ m by 800 μ m), which simplifies the detection problem. For example, the observations are much less sensitive to the tilt of the detector than in (10).

To detect the atoms, we use an 8-cm-diameter microchannel plate detector (MCP). It is placed 47 cm below the center of the magnetic trap. A delay line anode permits position-sensitive detection of individual particles in the plane of the detector (20) (Fig. 1). Atoms are released from the trap by suddenly turning off the magnetic field. About 10% of these atoms are transferred to the magnetic field-insensitive $m = 0$ state by nonadiabatic transitions (19) and fall freely to the detector. The remaining atoms are removed by applying additional magnetic field gradients during the time of flight. For each detected atom, we record the in-plane coordinates x and y and the time of detection t . The atoms hit the detector at 3 m/s with a velocity spread below 1%, and so we convert t into a vertical position z . The observed root mean square (rms) resolution is $d \sim 250 \mu$ m in x and y and 2 nm in z . These

data allow us to construct a three-dimensional histogram of pair separations (Δx , Δy , and Δz) for all particles detected in a single cloud. The histograms are summed over the entire atomic distribution and over many shots, typically 1000 (21).

Because of our good resolution along z , we begin by concentrating on the correlation function along this axis. Normalized correlation functions for various experimental conditions are shown in Fig. 2A. To compute the normalized correlation function, we divide the pair separation histogram by the autoconvolution of the average single particle distribution along z . We also normalize the correlation function to unity for large separations. This amounts to dividing, for each elementary pixel of our detector, the joint detection probability by the product of the individual detection probabilities at the two pixels. This gives us the usual normalized correlation function $g^{(2)}(\Delta x = 0, \Delta y = 0, \Delta z)$. The HBT bunching effect corresponds to the bump in the top three graphs of Fig. 2A. The fourth graph shows the result for a BEC. No correlation is observed. [A detector saturation effect in the BEC data required a modified analysis procedure (21).] We have also recorded data for a cloud with a 2-mm radius and 1-mK temperature for which the correlation length is so small that the bunching effect is washed out by the in-plane detector resolution. Experimentally, the normalized correlation function in this case is indeed flat to within less than 1%.

We plot (Fig. 2B) the normalized correlation functions in the $\Delta x - \Delta y$ plane and for $\Delta z = 0$ for the same three data sets. The data in Fig. 2B show the asymmetry in the correlation function arising from the difference in the two transverse dimensions of the trapped cloud. The long axis of the correlation function is orthogonal to that of the magnetic trap.

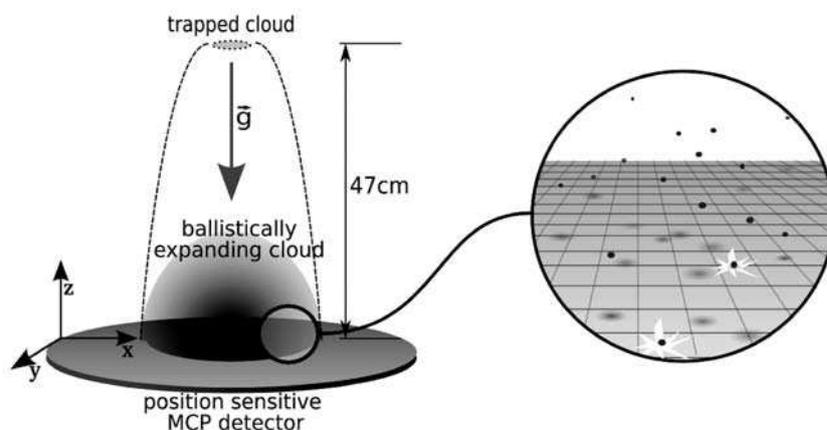


Fig. 1. Schematic of the apparatus. The trapped cloud has a cylindrical symmetry with oscillation frequencies of $\omega_x/2\pi = 47$ Hz and $\omega_y/2\pi = \omega_z/2\pi = 1150$ Hz. During its free fall toward the detector, a thermal cloud acquires a spherical shape. A 1- μ K temperature yields a cloud with an rms radius of about 3 cm at the detector. Single particle detection of the neutral atoms is possible because of each atom’s 20-eV internal energy that is released at contact with the MCP. Position sensitivity is obtained through a delay-line anode at the rear side of the MCP.

REPORTS

Fig. 2. (A) Normalized correlation functions along the vertical (z) axis for thermal gases at three different temperatures and for a BEC. For the thermal clouds, each plot corresponds to the average of a large number of clouds at the same temperature. Error bars correspond to the square root of the number of pairs. a.u., arbitrary units. (B) Normalized correlation functions in the $\Delta x - \Delta y$ plane for the three thermal gas runs. The arrows at the bottom show the 45° rotation of our coordinate system with respect to the axes of the detector. The inverted ellipticity of the correlation function relative to the trapped cloud is visible.

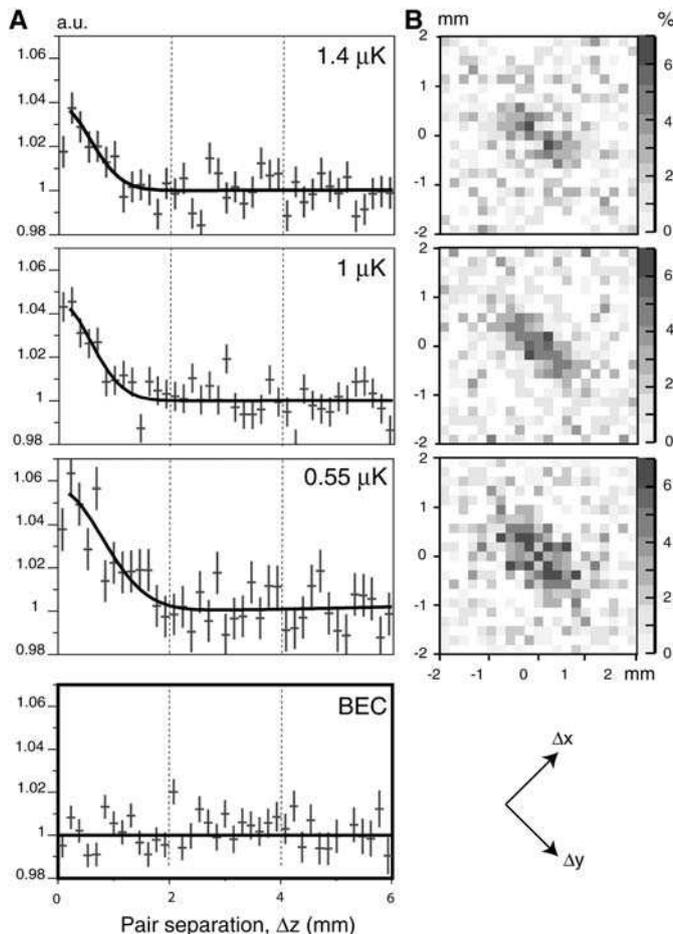
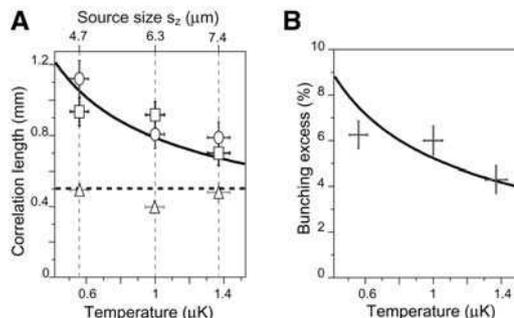


Fig. 3. Results of fits to the data in Fig. 2, A and B. (A) Fitted correlation lengths l_x , l_y , and l_z along the three axes (triangles, squares, and circles) as a function of temperature. The upper axis shows the corresponding source size s_z . Vertical error bars are from the fits. Horizontal error bars correspond to the standard deviation of the measured temperature. Along the x axis, the measurement is entirely limited by the detector resolution. The dotted horizontal line is the result of an independent estimate of the resolution. The result for the y axis has been corrected for the finite detector resolution as characterized by the fitted value of l_x . The z axis suffers from no such resolution limit. The solid curve corresponds to $\hbar t/m_s$. (B) Fitted contrast η of the correlation function for the three temperatures used. The solid line corresponds to the same non-interacting gas model as the line in (A) (27) and includes the finite detector resolution.



We expect the experimental normalized correlation function for a thermal bosonic gas to be described by

$$g_{\text{th}}^{(2)}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = 1 + \eta \exp\left(-\left[\left(\frac{\Delta x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{l_z}\right)^2\right]\right) \quad (1)$$

We have assumed here that the gas is non-interacting and that the velocity and density distribution remain roughly Gaussian even

close to the BEC transition temperature. Numerical simulations indicate that this is a good approximation when the correlation function is averaged over the entire cloud (22). As discussed above, the correlation lengths should be inversely proportional to the sizes, s_i , of the sample. In a harmonic trap with trapping frequency ω_i along the i direction, one has $s_i = \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_i^2}}$, where k_B is Boltzmann's constant and T is the temperature of the atoms. Because T is derived directly from the time of flight spectrum, we shall plot our data as a

function of T rather than of s . The parameter η would be unity for a detector whose resolution width d is small compared with the correlation length. Our d is smaller than l_y , but larger than l_x , and in this case the convolution by the detector resolution results in an η given roughly by $l_x/2d \sim 5\%$. We use Eq. 1 to fit the data by using η and the l_i as fit parameters and compare the results to the ideal gas model (21).

The results for l_x , l_y , and l_z for our three temperatures are plotted in Fig. 3A. The fitted values of l_x are $\sim 450 \mu\text{m}$ and are determined by the detector resolution rather than the true coherence length along x . The value of l_y has been corrected for the finite spatial resolution of the detector. The fitted value of l_z requires no correction, because in the vertical direction the resolution of the detector is much better. l_y and l_z are consistent and agree with the prediction using the known trap frequencies and temperatures. Figure 3B shows the fitted value of η versus temperature, along with the prediction of the same ideal gas model as in Fig. 3A, using the measured detector resolution. The data are in reasonable agreement with the model, although we may be seeing too little contrast at the lowest temperature. The run at $0.55 \mu\text{K}$ was above, but very close to, the BEC transition temperature. (We know this because, when taking data at $0.55 \mu\text{K}$, about one-third of the shots contained small BECs; these runs were eliminated before plotting Fig. 2.) Future work will include examining whether the effect of the repulsive interactions between atoms or finite atom number must be taken into account.

The results reported here show the power of single particle detection in the study of quantum gases. The correlations we have observed are among the simplest that should be present. Two recent experiments have shown correlations in a Mott insulator (11) as well as in atoms produced from the breakup of molecules near a Feshbach resonance (12). Improved observations of these effects may be possible with individual particle detection. Other atom pair production mechanisms, such as four-wave mixing (23, 24), can be investigated. A fermionic analog to this experiment using ^3He would also be (25) of great interest.

References and Notes

1. R. Hanbury Brown, R. Q. Twiss, *Nature* **177**, 27 (1956).
2. F. T. Arecchi, E. Gatti, A. Sona, *Phys. Lett.* **20**, 27 (1966).
3. R. J. Glauber, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 84 (1963).
4. R. J. Glauber, *Quantum Optics and Electronics*, C. DeWitt, A. Blandin, C. Cohen-Tannoudji, Eds. (Gordon and Breach, New York, 1965), p. 63.
5. G. Baym, *Acta Phys. Pol. B* **29**, 1839 (1998).
6. B. Berne, R. Pecora, *Dynamic Light Scattering* (Dover, New York, 2000).
7. U. Fano, *Am. J. Phys.* **29**, 539 (1961).
8. R. Hanbury Brown, R. Twiss, *Nature* **178**, 1046 (1956).
9. J. S. Bell, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, ed. 2, 2004).
10. M. Yasuda, F. Shimizu, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3090 (1996).
11. S. Fölling et al., *Nature* **434**, 481 (2005).

12. M. Greiner, C. A. Regal, J. T. Stewart, D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 110401 (2005).
13. M. Henny *et al.*, *Science* **284**, 296 (1999).
14. W. D. Oliver, J. Kim, R. C. Liu, Y. Yamamoto, *Science* **284**, 299 (1999).
15. H. Kiesel, A. Renz, F. Hasselbach, *Nature* **418**, 392 (2002).
16. Y. Kagan, B. V. Svistunov, G. V. Shlyapnikov, *Sov. Phys. JETP* **42**, 209 (1985).
17. E. A. Burt *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 337 (1997).
18. B. Laburthe Tolra *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 190401 (2004).
19. A. Robert *et al.*, *Science* **292**, 461 (2001); published online 22 March 2001 (10.1126/science.1060622).
20. O. Jagutzki *et al.*, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **477**, 244 (2004).
21. See supporting online materials on *Science* Online for details.
22. M. Naraschewski, R. Glauber, *Phys. Rev. A* **59**, 4595 (1999).
23. L. Deng *et al.*, *Nature* **398**, 218 (1999).
24. J. Vogels, K. Xu, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 020401 (2002).
25. R. Stas, J. McNamara, W. Hogervorst, W. Vassen, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 053001 (2004).
26. A. Öttl, S. Ritter, M. Köhl, T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090404 (2005).
27. After submission of this manuscript, we became aware of a related experiment concerning atom correlations in an atom laser (26). We thank R. Sellem of the Détection Temps, Position Image Technology Division

(supported by the Mission Ressources et Compétences Technologiques–CNRS Federation FR2764 and by the Université Paris-Sud) for a decisive role in the development of the time-to-digital converter, and O. Jagutzki for advice on delay lines.

Supporting Online Material
www.sciencemag.org/cgi/content/full/1118024/DC1
SOM Text

27 July 2005; accepted 5 September 2005

Published online 15 September 2005;

10.1126/science.1118024

Include this information when citing this paper.

Quantum Coherence in an Optical Modulator

S. G. Carter,^{1*} V. Birkedal,^{1†} C. S. Wang,² L. A. Coldren,²
A. V. Maslov,³ D. S. Citrin,^{4,5} M. S. Sherwin^{1‡}

Semiconductor quantum well electroabsorption modulators are widely used to modulate near-infrared (NIR) radiation at frequencies below 0.1 terahertz (THz). Here, the NIR absorption of undoped quantum wells was modulated by strong electric fields with frequencies between 1.5 and 3.9 THz. The THz field coupled two excited states (excitons) of the quantum wells, as manifested by a new THz frequency- and power-dependent NIR absorption line. Nonperturbative theory and experiment indicate that the THz field generated a coherent quantum superposition of an absorbing and a nonabsorbing exciton. This quantum coherence may yield new applications for quantum well modulators in optical communications.

Quantum three-state systems in which two of the states are strongly coupled by an intense laser field have been widely studied in atomic and molecular systems (1). The energies of the quantum states are altered as they are “dressed” by the strong light-matter interaction. Such dressed states were first observed by Autler and Townes (AT) in a molecular system driven by a strong radio-frequency field and probed by weak microwaves (2). When a radio-frequency resonance occurred, the microwave absorption line split in two. In three-state systems with weak coupling to the environment, AT splitting can evolve into electromagnetically induced transparency (EIT), in which a strong coupling beam induces transparency at a resonance at which the undriven system is opaque (3). This transparency is due to quantum interference between the dressed states.

EIT is the basis for slow (4) and stopped light (5, 6) in atomic systems.

A variety of quantum systems similar to atomic three-state systems can be engineered in semiconductor quantum wells (QWs). A QW is a layer of one semiconductor grown between semiconductors with larger band gaps (7). The layer with the smaller gap is sufficiently thin that well-defined sets of quantized states, or subbands, are associated with electron motion parallel to the growth direction. Within each subband, there is a continuum of states associated with different momenta parallel to the plane of the QW (perpendicular to the growth direction). AT-like splitting (8), quantum interference (9, 10), and EIT (11, 12) have been reported in QWs, but their observation has been more difficult than in atoms and molecules. This is in part because of much larger absorption linewidths, which result from disorder, from stronger coupling to the environment, or from scattering between subbands.

We have fabricated a particularly simple three-level system in undoped QWs (Fig. 1). The excitation with the lowest frequency occurs at about 350 THz (wavelength 857 nm or energy 1.46 eV) when an electron is promoted from the filled valence subband of highest energy (labeled h1) to the empty conduction subband of lowest energy (labeled e1). The excited electron binds with the hole it left behind to form an exciton with a hydrogen-like wave function in the QW plane. Transitions between different in-plane states (e.g., the 1s

and 2p states) are allowed only for in-plane THz polarizations (13, 14), which are not present in the experiments discussed here. The lowest exciton state is labeled h1X. The next exciton state, h2X, consists of an electron from e1 and a hole from the second highest valence subband, h2. NIR transitions between the crystal ground state and h2X are not allowed because of quantum mechanical selection rules. However, intersubband transitions from h1X to h2X are allowed for THz radiation polarized in the growth direction. The three states analogous to those in an AT picture are the crystal ground state, the lowest exciton h1X, and the second exciton h2X (15).

This report explores the NIR absorption of undoped QWs at low temperatures (~10 K) when they are driven by strong electric fields polarized in the growth direction with frequencies between 1.5 and 3.9 THz. Because the frequency of the THz laser is about 1% of that required to create an exciton, the strong laser field does not alter the populations of the quantum states of the system. Near 3.4 THz, the drive frequency is resonant with the transition between the two lowest exciton states. The AT splitting of excitons driven by strong intersubband radiation is experimentally observed, and theoretical predictions (16, 17) are confirmed.

The sample consists of 10 In_{0.06}Ga_{0.94}As QWs (each 143 Å) separated by Al_{0.3}Ga_{0.7}As barriers (300 Å). InGaAs QWs were used instead of GaAs QWs so that the GaAs substrate was transparent for NIR light near the exciton energies. A 100-nm layer of aluminum was deposited on the surface of the sample on which the QWs were grown. The metallic boundary condition improved THz coupling and ensured that the THz field at the QWs was polarized almost perfectly in the growth direction (18). The interband absorption was probed using broadband, incoherent, NIR light from an 850-nm light-emitting diode focused onto the sample backside to a spot size ~250 μm in diameter. The NIR intensity was less than 0.3 W/cm². As illustrated in Fig. 1, the NIR beam was transmitted through the transparent substrate, interacted with the QWs, was reflected off of the Al layer, and was then collected and sent to a monochromator with an intensified charge-coupled device detector. The reflected NIR beam was measured during the 1 to 1.5 μs at the peak of the THz

¹Physics Department and Institute for Quantum and Complex Dynamics (iQCD), Broida Hall Building 572, Room 3410, ²Electrical and Computer Engineering Department, University of California, Santa Barbara, CA 93106, USA. ³Center for Nanotechnology, NASA Ames Research Center, MS 229-1, Moffett Field, CA 94035, USA. ⁴Electrical and Computer Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332, USA. ⁵Georgia Tech Lorraine, Metz Technopole, 2-3 rue Marconi, 57070 Metz, France.

*Present address: JILA, University of Colorado, 440 UCB, Boulder, CO 80309, USA.

†née Ciulin. Present address: Department of Chemistry, University of Aarhus, Langelandsgade 140, DK-8000 Århus C, Denmark.

‡To whom correspondence should be addressed. E-mail: sherwin@physics.ucsb.edu

Supplementary online material

Histogram along z : In computing the vertical separation histogram (the unnormalized correlation function), our averaging procedure is as follows. Let the index (i, j) denote a particular detector pixel in the $x - y$ plane. We compute the histogram $h_{i,j}$, corresponding to vertical separations of the pairs of atoms detected in the pixel (i, j) as well as the histogram $h_{i,j;k,l}$, corresponding to the separations of pairs of atoms one of which was in pixel (i, j) and the other in pixel (k, l) . To relate pixel index to position we use the $200 \mu\text{m}$ pixel size (not the same as the resolution d) and the fact that the axes of the detector are at 45° to the trap axes. This gives $\frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta x + \Delta y) = (k - i) \times 200 \mu\text{m}$ and $\frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta x - \Delta y) = (l - j) \times 200 \mu\text{m}$. To improve the signal to noise ratio in the correlation function along the z axis we form the sum:

$$h_{i,j} + \sum_{a,b} h_{i,j;i+a,j+b} \quad (2)$$

in which $(a, b) = \{(0, -1), (1, 0), (1, -1), (1, -2), (2, -1), (2, -2), (2, -3), (3, -2), (3, -3)\}$. This procedure allows us to include more pairs along the y axis for which the correlation length is longer. The histogram is symmetric under inversion by construction. Our choice of pixels for the sum avoids double counting. The resulting histogram is then summed over all pixels (i, j) and all the cloud realizations and is plotted in Fig. 2A. After averaging, a $150 \mu\text{m}$ vertical pixel contains typically 2×10^4 pairs. This averaging procedure is not used in Fig. 2B (see below).

The analysis of the BEC presented an additional complication because the high density of the sample, even after expansion, appeared to induce saturation effects in the detector. When observing a BEC with about 1000 detected atoms, the second half of the cloud was detected with much reduced efficiency. This effect was of course more pronounced at the center of the BEC, leading to "banana" shaped rather than circular profiles in the $y - z$ plane. The saturation effect caused a high sensitivity of the apparent shape of a cloud to the number of atoms in it.

Since our averaging and normalization procedure assume that all shots have the same spatio-temporal shape, the cloud shapes must be corrected before averaging (*i.e.* the "bananas" must be straightened out - or at least all be given the same curvature). This correction was done, on a shot by shot basis, by finding the location of the maximum of the arrival time distribution (recall that the z axis is the temporal axis) as a function of y . These maxima were fit to a polynomial and this polynomial was then subtracted from the z coordinate of all detection events thus yielding an approximately ellipsoidal shape. Atom pairs which are close together remain close under such a transformation despite the distortion produced in the overall shape in the cloud. Thus the correlations, if present, should be substantially preserved.

Fitting procedure : Instead of fitting the data directly to the function $g_{\text{th}}^{(2)}$, we use a three step procedure that exploits the Gaussian nature of $g_{\text{th}}^{(2)}$. First, since our resolution is best along the z direction, we fit the data of Fig. 2A to $g_{\text{th}}^{(2)}(0, 0, \Delta z)$ to extract l_z . The assumption of a Gaussian $g_{\text{th}}^{(2)}$ ensures that the averaging over pixels as described in Eq. 2 improves the uncertainty in the fitted value of l_z only at the cost of a lowered value of η . Then, we fit the normalized experimental correlation function for a given value of $(\Delta x, \Delta y)$ without the average over pixels in Eq. 2 to $1 + \eta' \exp[-(\Delta z/l_z)^2]$ and fixing the value of the parameter l_z to that extracted in the previous step. This gives the value of $\eta' = \eta \exp(-[(\Delta x/l_x)^2 + (\Delta y/l_y)^2])$ as a function of $(\Delta x, \Delta y)$ which we plot in Fig. 2B. We then fit the data in Fig. 2B to $g_{\text{th}}^{(2)}(\Delta x, \Delta y, 0)$ to find l_x and l_y and η .

Effect of the detector resolution on the correlation function : In the $x - y$ plane, the detector has a Gaussian resolution of rms width d . Thus a two-particle detection probability has a rms resolution of $\sqrt{2}d = 350 \mu\text{m}$. Taking this into account, the normalized two-body correlation function has a contrast of

$$\eta = 1/\sqrt{(1 + 4d^2/l_x^2)(1 + 4d^2/l_y^2)} \sim l_x/(2d)$$

This function is plotted as a solid line in Fig. 3B. The finite detector resolution also means that the fitted value of l_x should be $\sqrt{2} \times \sqrt{2}d = 2d = 500 \mu\text{m}$ (l_x is not defined as a rms width).

Theory for a Hanbury Brown Twiss experiment with a ballistically expanding cloud of cold atoms

J. Viana Gomes,^{1,2} A. Perrin,¹ M. Schellekens,¹ D. Boiron,^{1,*} C. I. Westbrook,¹ and M. Belsley²

¹*Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, UMR 8501 du CNRS et Université Paris 11, 91403 Orsay Cedex, France*

²*Departamento de Física, Universidade do Minho, Campus de Gualtar, 4710-057 Braga, Portugal*

(Received 19 June 2006; published 7 November 2006)

We have studied one-body and two-body correlation functions in a ballistically expanding, noninteracting atomic cloud in the presence of gravity. We find that the correlation functions are equivalent to those at thermal equilibrium in the trap with an appropriate rescaling of the coordinates. We derive simple expressions for the correlation lengths and give some physical interpretations. Finally a simple model to take into account finite detector resolution is discussed.

DOI: [10.1103/PhysRevA.74.053607](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.053607)

PACS number(s): 03.75.Hh, 05.30.Jp

I. INTRODUCTION

Whether a source emits photons or massive particles, if it is to be used in an interferometric experiment, an essential property is its coherence. The study of coherence in optics has shown that more than one kind of coherence can be defined [1]. The most familiar type of coherence is known as first order coherence and is related to the visibility of interference fringes in an interferometer. It is proportional to the value of the correlation function of the associated field. Second order coherence is less intuitive and corresponds to the correlation function of the intensity or squared modulus of the field. From a particle point of view, second order coherence is a way of quantifying density correlations and is related to the probability of finding one particle at a certain location given that another particle is present at some other location. Particle correlations can arise simply from exchange symmetry effects and exist even when there is no interaction between the particles. This fact was clearly demonstrated in the celebrated Hanbury Brown Twiss experiment which showed a second order correlation for photons coming from widely separated points in a thermal source such as a star [2].

Analogous correlations in massive particles have also been studied, particularly in the field of nuclear physics [3–7]. Spatial correlations using low energy electrons have also been studied [8,9]. The advent of laser and evaporative cooling techniques has also made it possible to look for correlations between neutral atoms and recently a wide variety of different situations have been studied [10–16]. Correlation phenomena are generally richer when using massive particles because they can be either bosons or fermions, they often have a more complex internal structure and a large range of possible interactions with each other. In the field of ultracold atoms, the many theoretical papers to date have included treatments of bosons in a simple three-dimensional (3D) harmonic trap [17,18], a one-dimensional (1D) bosonic cloud in the Thomas-Fermi regime and Tonks-Girardeau limit [19–21], the Mott insulator or superfluid phase for atoms

trapped in optical lattices [22] and the two-dimensional (2D) gas [23].

Almost all these theoretical treatments have dealt with atomic clouds at thermal equilibrium. On the other hand, all the experiments so far except Ref. [16] have measured correlations in clouds released from a trap which expand under the influence of gravity and possibly interatomic interactions. It is generally not trivial to know how the correlation properties evolve during expansion. Moreover, matter waves have different dispersion characteristics than light. All this raises interesting questions concerning the value of the correlation lengths during the atomic cloud expansion. In particular we would like to know how to use the results of Ref. [17] to analyze the experimental results of Ref. [15], a conceptually simple experiment in which second order correlations were measured in a freely expanding cloud of metastable helium atoms. The correlation length was defined as the characteristic length of the normalized second order correlation function. We will use the same definition in this paper (see Sec. II A for details).

To illustrate a more general question that comes up in thinking about the coherence of de Broglie waves, consider a beam of particles with mean velocity v hitting a detector. Two obvious length scales come immediately to mind, the de Broglie wavelength $\hbar/(m\Delta v)$ associated with the velocity spread Δv and the length associated with the inverse of the energy spread of the source $\hbar v/m(\Delta v)^2$. These two scales are obviously very different if v is large compared to the velocity spread. In this paper, we will show that in an experiment such as Ref. [15], the correlation length corresponds to neither of the above length scales, although they can be relevant in other situations. We find that the correlation length after an expansion time t of a cloud of initial size s is $\hbar t/ms$. This result is the atom optical analog of the van Cittert-Zernike theorem [24]. It has also been stated in a different form in Ref. [25]. For the special case of an ideal gas in a harmonic trap of oscillation frequency ω , the correlation length can be recast as $\lambda\omega t$ where λ is the thermal de Broglie wavelength. Hence the correlation length after expansion is simply dilated compared to that at equilibrium with the same scaling factor as the spatial extent of the cloud itself.

We will confine ourselves here to the case of a cloud of noninteracting atoms released suddenly from a harmonic

*Electronic address: denis.boiron@institutoptique.fr; <http://www.atomoptic.fr>

trap. The paper is organized as follows. We will begin in Sec. II with some simple definitions and general results about the correlation properties of a noninteracting cloud both at thermal equilibrium in a trapping potential and after a ballistic expansion. Without making any assumptions about the form of the trapping potential, we can only find simple analytical results in the limit of a nondegenerate gas. Next we will make a more exact and careful treatment by specializing to the very important case of a harmonic potential. We introduce the flux operator [26] involved in the experimental electronic detection with metastable helium and then calculate the correlation function of the flux. We will summarize the results and give a physical interpretation in Sec. IV. This interpretation will allow us to comment on the rather different case of a continuous beam as in the experiments of Refs. [7,10,14]. In Sec. V we will use our results to analyze the experimentally important problem of finite detector resolution. Finally, the Appendix adds some detailed calculations concerning the expressions found in Sec. III B.

II. GENERAL RESULTS ON CORRELATION FUNCTIONS OF NONINTERACTING GASES

Here we recall some basic results concerning the density and first and second order correlation functions for a cloud of noninteracting bosons at thermal equilibrium. A more detailed analysis can be found in Ref. [17]. Theoretical treatments that take into account interatomic interactions can be found in Refs. [17,18,27]. We also give some approximate results for a noninteracting gas after it has expanded from a trap.

A. Definitions

Consider a cloud of N atoms at thermal equilibrium at a temperature T , confined in a trapping potential. This potential is characterized by $\{\epsilon_j, \psi_j^0(\mathbf{r})\}$ the energy and wave function of level j (here supposed nondegenerate for simplicity). In second quantization, one defines the field operators

$$\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_j \psi_j^*(\mathbf{r}) \hat{a}_j^\dagger, \quad \hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_j \psi_j(\mathbf{r}) \hat{a}_j.$$

The operator \hat{a}_j^\dagger creates and \hat{a}_j annihilates one particle in state $|\psi_j\rangle$ whereas $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ creates and $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ annihilates a particle at position \mathbf{r} .

Correlation functions and the atomic density are statistical averages of such field operators. We use the Bose-Einstein distribution, $\langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \rangle = \delta_{jk} (e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} - 1)^{-1}$ where $\beta = 1/(k_B T)$, k_B is the Boltzmann constant and μ is the chemical potential. The value of μ ensures the normalization $\sum_j \langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle = N$. We can then define

(a) the first order correlation function $G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle$,

(b) the second order correlation function $G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle$,

(c) and the density $\rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \rangle = G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r})$.

Several other first and second order correlation functions can be defined (see below) but these are the most common

ones. The first order correlation function appears in interference experiments whereas second order correlation functions are related to intensity interference or density fluctuation. First and second order correlation functions are connected for thermal noninteracting atomic clouds. The $G^{(2)}$ function contains a statistical average of the type $\langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_n \rangle$ which can be calculated through the thermal averaging procedure (Wick theorem [28]). One finds $\langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_n \rangle = \langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle \times (\delta_{jl} \delta_{kn} + \delta_{jn} \delta_{kl}) + \langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle \delta_{kl} \delta_{jn}$, which leads to

$$G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}) \rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}') + |G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 + \rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

The last term is the so-called shot-noise term. It will be neglected in the following because it is proportional to N whereas the others are proportional to N^2 .

It is convenient to define a normalized second order correlation function

$$g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}) \rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}')}.$$

If the cloud has a finite correlation length, then for distances larger than this length the first order correlation function vanishes. Then $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 2$ and $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow 1$ when $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$. This means that the probability of finding two particles close to each other is enhanced by a factor of 2, compared to the situation where they are far apart. This is the famous bunching effect first observed by Hanbury Brown and Twiss with light [2].

The above expression of the $G^{(2)}$ function cannot be applied in the vicinity and below the Bose-Einstein transition temperature. The calculation of $\langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_n \rangle$ is performed in the grand canonical ensemble which assumes the existence of a particle reservoir that does not exist for the condensate. It is well known [29] that this gives unphysically large fluctuations of the condensate at low enough temperature. This pathology disappears at the thermodynamic limit if there is an interatomic interaction [29]. It has also been shown that it cancels for a finite number of noninteracting particles if one uses the more realistic canonical ensemble [30]. One way to keep using the grand canonical ensemble is to add the canonical result for the ground state [17]. This approach is validated by the results in Ref. [30] and will be used in the following. The largest deviation is expected to occur near the transition temperature [30]. The contribution of the ground state is $-\langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle^2 \delta_{j0} \delta_{k0} \delta_{l0} \delta_{n0}$. Then, with ρ_0 the ground-state density, it follows that,

$$G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}) \rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}') + |G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 - \rho_0(\mathbf{r}) \rho_0(\mathbf{r}'). \quad (1)$$

The normalized second-order then becomes

$$g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1 + \frac{|G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2}{\rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}) \rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}')} - \frac{\rho_0(\mathbf{r}) \rho_0(\mathbf{r}')}{\rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}) \rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}')}.$$

Because the ground state density is negligible for a thermal cloud, the normalized correlation function $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ still goes from 2 to 1 as the separation of \mathbf{r} and \mathbf{r}' increases. On the other hand, for a BEC at $T=0$, only the ground state is occupied. Then $|G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 = \rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}) \rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}') = \rho_0(\mathbf{r}) \rho_0(\mathbf{r}')$ and

$g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')=1$. The amount of particle bunching present in the second order correlation function can be quantified as $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')-1$ and this typically decays exponentially as the modulus squared of the separation between the two points increases. We define the correlation length to be the characteristic length over which the amount of particle bunching decays, that is the distance over which $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')-1$ decays to $1/e$ of its maximum value. The correlation length of a BEC is infinite. Such a system is said to exhibit bunching at high temperature over the correlation length and no bunching in the condensed phase.

B. Correlations in an expanding cloud

In most experiments, particle correlations and other characteristics are not directly measured in the atom cloud, (Ref. [16] is an exception). Rather, the cloud is released from a trap and allowed to expand during a “time of flight” before detection. For a sufficiently long time of flight, and neglecting interactions between the atoms, the positions one measures at a detector reflect the initial momenta of the particles. The results of Sec. II A concerning the correlation functions in position space all have analogs in momentum space. In fact the correlation functions in the two reciprocal spaces are closely related. At equilibrium, i.e., inside the trap, the following relationships can be easily derived:

$$\int d\mathbf{p}G^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} = \int d\mathbf{R}G^{(1)}(\mathbf{R} - \mathbf{r}/2, \mathbf{R} + \mathbf{r}/2),$$

$$\int d\mathbf{r}G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} = \int d\mathbf{P}G^{(1)}(\mathbf{P} - \mathbf{q}/2, \mathbf{P} + \mathbf{q}/2).$$

In other words, the spatial correlation length is related to the width of the momentum distribution and the momentum correlation length is related to the width of the spatial distribution, i.e., the size of the cloud. No equally simple and general relationship holds for the second order correlation functions. This is because, close to the BEC transition temperature, and at points where the ground state wave function is not negligible, the special contribution of the ground state, the last term in Eq. (1) must be included, and this contribution depends on the details of the confining potential. On the other hand, for an ideal gas far from the transition temperature one can neglect the ground state density, make the approximation that the correlation length is very short, neglect commutators such as $[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}]$, and then write the thermal density operator as $\hat{\sigma} = e^{-\beta(\hat{\mathbf{P}}^2/2m)}e^{-\beta V(\hat{\mathbf{r}})}$. These approximations lead to

$$G^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \rho_{\text{eq}}(\mathbf{p})\rho_{\text{eq}}(\mathbf{p}') + |G^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')|^2$$

and

$$G^{(1)}(\mathbf{P} - \mathbf{q}/2, \mathbf{P} + \mathbf{q}/2) \sim e^{-\beta(\mathbf{P}^2/2m)} \int d\mathbf{r}e^{-\beta V(\mathbf{r})}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar}.$$

One sees that in this limit, the interesting part of $G^{(2)}$ in momentum space is proportional to the square of the Fourier transform of the density distribution and independent of the

mean momentum \mathbf{P} . This result is the analog of the van Cittert-Zernike theorem [24]. For a trapped cloud of size s_α in the α direction, one has a momentum correlation “length” given by

$$l_\alpha^{(\text{coh})} = \frac{\hbar}{s_\alpha}. \quad (2)$$

If atoms are suddenly released from a trap and allowed to freely evolve for a sufficiently long time t , the positions of the particles reflect their initial momenta and the spatial correlation length at a detector is given by

$$l_\alpha^{(d)} = \frac{p_\alpha^{(\text{coh})}}{m}t = \frac{\hbar t}{ms_\alpha}. \quad (3)$$

The normalized second order correlation function is then a Gaussian of rms width $l^{(d)}/\sqrt{2}$. This result was experimentally confirmed in Ref. [15]. One wonders however, to what extent the approximations we have made are valid. The clouds used in Ref. [15] were in fact very close to the transition temperature so that effects due to the Bose nature of the density matrix may be important. Although the time of flight was very long, it is useful to quantify the extent to which identifying the momentum correlation length in the trap with the spatial correlation length at the detector is accurate. Finally, the effect of gravity on the falling atoms never appears in the above approximate treatment, and we would like to clarify the role it plays. In order to answer these questions we undertake a more careful calculation. We will confine ourselves to atoms initially confined in a harmonic trap, a good approximation to the potential used in most experiments, and happily, one for which the eigenstates and energies are known exactly.

III. DENSITY AND CORRELATION FUNCTIONS FOR A HARMONIC TRAP

A. At equilibrium in the trap

The eigenfunctions for a three-dimensional harmonic potential of oscillation frequency ω_α in the α direction, are given by

$$\psi_j^0(\mathbf{r}) = \prod_{\alpha=x,y,z} A_{j_\alpha} e^{-r_\alpha^2/2\sigma_\alpha^2} H_{j_\alpha}(r_\alpha/\sigma_\alpha).$$

Here $\sigma_\alpha = \sqrt{\hbar/m\omega_\alpha}$ is the harmonic oscillator ground-state size, H_{j_α} is the Hermite polynomial of order j_α and $A_{j_\alpha} = [\sqrt{\pi}\sigma_\alpha 2^{j_\alpha}(j_\alpha!)]^{-1/2}$. The eigenenergies are given by $\epsilon_j = \sum_{\alpha=x,y,z} \hbar\omega_\alpha(j_\alpha + 1/2)$. Then [17,29], with $\tau_\alpha = \beta\hbar\omega_\alpha$ and $\bar{\mu} = \mu - \hbar\sum\omega_\alpha/2$, one finds

$$\rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \sum_{l=1}^{\infty} e^{\beta l \bar{\mu}} \prod_{\alpha} \frac{1}{\sigma_\alpha \sqrt{1 - e^{-2\tau_\alpha l}}} e^{-\tanh(\tau_\alpha l/2)(r_\alpha^2/\sigma_\alpha^2)}$$

and

$$G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\pi^{3/2}} \sum_{l=1}^{\infty} e^{\beta l \bar{\mu}} \prod_{\alpha} \frac{1}{\sigma_{\alpha} \sqrt{1 - e^{-2\tau_{\alpha} l}}} \exp \left[-\tanh \left(\frac{\tau_{\alpha} l}{2} \right) \times \left(\frac{r_{\alpha} + r'_{\alpha}}{2\sigma_{\alpha}} \right)^2 - \coth \left(\frac{\tau_{\alpha} l}{2} \right) \left(\frac{r_{\alpha} - r'_{\alpha}}{2\sigma_{\alpha}} \right)^2 \right].$$

The above expressions can be transformed into more familiar forms in limiting cases:

(i) For high temperature, $\mu \rightarrow -\infty$ and one recovers the Maxwell-Boltzmann distribution. The density is $\rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}) = \frac{N}{\lambda^3} \prod_{\alpha} \tau_{\alpha} e^{-(\tau_{\alpha} l/2)(r_{\alpha}^2/\sigma_{\alpha}^2)}$ with $\lambda = \hbar \sqrt{2\pi} / \sqrt{mk_B T}$ the thermal de Broglie wavelength. The size of the cloud is $s_{\alpha} = \sigma_{\alpha} / \sqrt{\tau_{\alpha}}$ $= \sqrt{k_B T / m \omega_{\alpha}^2}$. The first order correlation function is

$$G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{N}{\lambda^3} \prod_{\alpha} \tau_{\alpha} e^{-(\tau_{\alpha} l/2)((r_{\alpha} + r'_{\alpha})/2\sigma_{\alpha})^2} e^{-\pi((r_{\alpha} - r'_{\alpha})/\lambda)^2}. \quad (4)$$

Using our definition, the correlation length is $l^{(i)} = \lambda / \sqrt{2\pi}$.

(ii) For a temperature close to but above the Bose-Einstein transition temperature, one must keep the summation over the index l . The density is $\rho_{\text{eq}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(e^{\beta \bar{\mu}} \prod_{\alpha} e^{-(\tau_{\alpha} l/2)(r_{\alpha}^2/\sigma_{\alpha}^2)})$, where $g_{\alpha}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} x^l / l^{\alpha}$ is a Bose function. The first order correlation function is

$$G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{l\beta \bar{\mu}}}{l^{3/2}} \times \prod_{\alpha} e^{-(\tau_{\alpha} l/2)((r_{\alpha} + r'_{\alpha})/2\sigma_{\alpha})^2} e^{-(\pi l)((r_{\alpha} - r'_{\alpha})/\lambda)^2}.$$

As the temperature decreases, the number of values of l that contribute significantly to the sum increases. It is then clear from the above expression for $G^{(1)}$ that the correlation length near the center of the trap will increase and that the normalized correlation function is no longer Gaussian. Far from the center, only the $l=1$ term is important and the correlation function remains Gaussian. Thus close to degeneracy the correlation length is position dependent (for an explicit example see Sec. III B 5).

(iii) Near and below the transition temperature, the second order correlation function is given by Eq. (1) with $\rho_0(\mathbf{r}) = \frac{e^{\beta \bar{\mu}}}{1 - e^{\beta \bar{\mu}}} \prod_{\alpha} \frac{e^{-r_{\alpha}^2/\sigma_{\alpha}^2}}{(\sqrt{\pi} \sigma_{\alpha})^3}$. As the temperature decreases, the correlation at zero distance, $g^{(2)}(0, 0)$ decreases from 2 to 1 and the correlation length increases. Around the transition temperature, $g^{(2)}(0, 0)$ is already significantly different from 2 since the condensate peak density is already very large for a noninteracting harmonically trapped cloud [31]. At $T=0$, the correlation length is infinite and $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1$.

B. Correlations in a harmonically trapped cloud after expansion

Here we consider the cloud after expansion. First we discuss two classes of detection methods which must be distinguished before calculating correlation functions.

1. Detection

We assume that the trapping potential is switched off instantaneously at $t=0$. The cloud expands and falls due to gravity. Two types of detection can be performed:

(a) *Snap shot*. An image is taken of the entire cloud at $t=t_0$. We have then access to

$$G_{\text{im}}^{(2)}(\mathbf{r}, t_0; \mathbf{r}', t_0) = \langle \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}, t_0) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t_0) \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}', t_0) \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t_0) \rangle.$$

The usual imaging technique is absorption, and so one has access to the above correlation functions integrated along the imaging beam axis. This was used for the experiments of Refs. [12,13].

(b) *Flux measurement*. The atoms are detected when they cross a given plane. We will only consider the situation in which this plane is horizontal at $z=H$. One has access to

$$G_{\text{fl}}^{(2)}(\mathbf{r} = \{x, y, z = H\}, t; \mathbf{r}' = \{x', y', z' = H\}, t') = \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \hat{I}(\mathbf{r}', t') \rangle,$$

where \hat{I} is the flux operator defined below. The detection systems required for such experiments correspond most closely to those of Refs. [10,15], in which a microchannel plate, situated below the trapped cloud, recorded the arrival times and in one case the positions of the atoms. It also corresponds closely to imaging a cloud that crosses a thin sheet of light [32], or to the experiment of Ref. [14], in which the transmission of a high finesse optical cavity records atoms as they cross the beam.

These two correlation functions are different, but if the detection is performed after a long time of flight, they are in fact nearly equivalent. This equivalence will be discussed in the following.

The flux operator is defined quantum mechanically by

$$\hat{I}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \text{Im}[\hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \partial_z \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)] = \frac{\hbar}{2mi} [\hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \partial_z \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) - \partial_z \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)].$$

The flux has thus the dimensions of a density times a velocity. We will give the explicit expression of this velocity in the Sec. III B 4. Here, the atomic field operators $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ depend on space coordinates as well as on time. They represent the time evolution of the atomic field during the flight of the atoms, falling from the trap. The field operators for the falling cloud can be easily derived if we assume that there are no interactions between the atoms and that the occupation number in each mode is constant (as in free expansion). In this case, these operators can be defined as

$$\hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{j}}^*(\mathbf{r}, t) \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger}, \quad \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) \hat{a}_{\mathbf{j}},$$

where the spatiotemporal dependence is carried by the wave function and the statistical occupation by the creation and annihilation operators.

2. Ballistic expansion of a harmonic oscillator stationary state

After switching off the trap, the harmonic oscillator wave functions noted $\psi_{\mathbf{j}}^0$ are no longer stationary states. There are

two ways to calculate the correlation after expansion: propagation of wave functions or propagation of the density matrix (the Schrödinger or the Heisenberg picture). In the following we will use the first approach which is physically more transparent (see Ref. [33] for the Heisenberg picture).

The ballistic expansion of a cloud is easy to calculate with the appropriate Green function. The Green function K is defined as

$$\psi_{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}_0 K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) \psi_{\mathbf{j}}^0(\mathbf{r}_0, t_0).$$

As the $\psi_{\mathbf{j}}^0$ functions are stationary states for $t < 0$, we can take $t_0 = 0$ in the following. The Green function for particles in an arbitrarily time-varying quadratic potential is known [34]. After expansion, the potential is only due to gravity and the Green function is then

$$K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0) = \left(\frac{m}{2i\pi\hbar t} \right)^{3/2} e^{ia(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2} e^{ib(z+z_0)} e^{-ic}$$

with $a = \frac{m}{2\hbar t}$, $b = \frac{mgt}{2\hbar}$, and $c = \frac{mg^2 t^3}{24\hbar}$.

One can then derive an analytical expression of $\psi_{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t)$ [35,36],

$$\psi_{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) = e^{i\phi(\mathbf{r}, t)} \prod_{\alpha} \frac{e^{ij_{\alpha}(\delta_{\alpha} + 3\pi/2)}}{\sqrt{\omega_{\alpha} t - i}} \psi_{\mathbf{j}}^0(\tilde{\mathbf{r}}), \quad (5)$$

where $\delta_{\alpha} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega_{\alpha} t}\right)$,

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{m}{2\hbar t} \left[(\tilde{x}\omega_x t)^2 + (\tilde{y}\omega_y t)^2 + (\tilde{z}\omega_z t)^2 + 2gt^2 \left(z - \frac{1}{8}gt^2 \right) \right] - c - \frac{3\pi}{4} \quad (6)$$

and, with $\tilde{\mathbf{r}} = \{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$,

$$\tilde{x} = \frac{x}{\sqrt{1 + \omega_x^2 t^2}}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{\sqrt{1 + \omega_y^2 t^2}}, \quad \tilde{z} = \frac{H - \frac{1}{2}gt^2}{\sqrt{1 + \omega_z^2 t^2}}. \quad (7)$$

In the case of flux measurement, the position of the detector is fixed at $z = H$. The phase $\phi(\tilde{x}, \tilde{y}, t)$ is global as it does not depend on the index \mathbf{j} ; it will cancel in second order correlation measurements. This is in contrast to interferometric measurements where it is this phase that gives rise to fringes. The above results show that after release, the wave function is identical to that in the trap except for a phase factor and a scaling factor in the positions [37]. This scaling is obviously a property of a harmonic potential, and it considerably simplifies the expression of the correlation functions as we will see below.

3. Flux operator

Using $\partial_z H_n(z) = 2nH_{n-1}(z)$, the spatial derivative of the wave function can be written

$$\begin{aligned} \partial_z \psi_{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{m}{\hbar} [(iv_2 - v_1) \psi_{j_z}(z, t) \\ &\quad - iv_3 \sqrt{j_z} \psi_{j_z-1}(z, t)] \psi_{j_x}(x, t) \psi_{j_y}(y, t), \end{aligned}$$

where the velocities v_1 , v_2 , and v_3 are time dependent and are given by

$$v_1(t) = \omega_z \frac{H - \frac{1}{2}gt^2}{1 + \omega_z^2 t^2}, \quad (8)$$

$$v_2(t) = \frac{1}{t} \left(H + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{H - \frac{1}{2}gt^2}{1 + \omega_z^2 t^2} \right), \quad (9)$$

$$v_3(t) = \frac{\sqrt{2}\omega_z \sigma_z}{\sqrt{1 + \omega_z^2 t^2}} e^{i\delta_z}. \quad (10)$$

The velocity v_2 is usually much larger than the other two and will give the dominant contribution for the mean flux and the second order correlation function. An atom with zero initial velocity will acquire after a time t a velocity gt which is close to $v_2(t)$. The flux operator is

$$\hat{I}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} \left(v_2 \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2} (v_3 \sqrt{k} \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{k}-\mathbf{1}_z} + v_3^* \sqrt{j} \psi_{\mathbf{j}-\mathbf{1}_z}^* \psi_{\mathbf{k}}) \right) \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}, \quad (11)$$

where $\mathbf{j}-\mathbf{1}_z$ is the vector (j_x, j_y, j_z-1) and where we write $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$.

4. Mean density and mean flux

We will first calculate the mean density $\rho(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$. Using Eq. (5), one finds easily that $\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\prod_{\alpha} \sqrt{1 + \omega_{\alpha}^2 t^2}} \rho_{\text{eq}}(\tilde{\mathbf{r}})$. This means that the density has the same form during expansion up to an anisotropic scale factor given by Eq. (7) [37,38]. The statistical average of Eq. (11) leads to

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \sum_{\mathbf{j}} \left(v_2 |\psi_{\mathbf{j}}|^2 - \frac{\sqrt{j_z}}{2} (v_3 \psi_{j_z}^* \psi_{j_z-1} + v_3^* \psi_{j_z} \psi_{j_z-1}^*) |\psi_{j_x} \psi_{j_y}|^2 \right) \\ &\quad \times \langle \hat{a}_{\mathbf{j}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{j}} \rangle. \end{aligned}$$

Because $v_3 \psi_{j_z}^* \psi_{j_z-1} = i \frac{|v_3|}{\sqrt{1 + \omega_z^2 t^2}} \psi_{j_z}^0(\tilde{z}) \psi_{j_z-1}^0(\tilde{z}) = -v_3^* \psi_{j_z} \psi_{j_z-1}^*$, the second term cancels out. Then, without any approximation,

$$\langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{v_2(t)}{\prod_{\alpha} \sqrt{1 + \omega_{\alpha}^2 t^2}} \rho_{\text{eq}}(\tilde{\mathbf{r}}) = v_2(t) \rho(\mathbf{r}, t).$$

The flux is proportional to the density of a cloud at thermal equilibrium with rescaled coordinates. This means that the mean flux of an expanding noninteracting cloud is proportional to the atomic density without any approximation. This result holds with and without gravity taken into account.

5. Second order correlation

Here we calculate the correlation functions. A discussion is given in the next section. The snap-shot correlation function is

$$G_{im}^{(2)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t) = \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{n}} \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{l}}^* \psi_{\mathbf{n}}' \langle \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{n}} \rangle.$$

Using Eq. (5), one finds, without any approximation (except the neglect of the shot-noise term):

$$G_{im}^{(2)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t) = \frac{1}{\prod_{\alpha} (1 + \omega_{\alpha}^2 t^2)} \times [\rho_{\text{eq}}(\tilde{\mathbf{r}}) \rho_{\text{eq}}(\tilde{\mathbf{r}}') + |G^{(1)}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{r}}')|^2 - \rho_0(\tilde{\mathbf{r}}) \rho_0(\tilde{\mathbf{r}}')].$$

As in the case of the mean density, the snap-shot correlation function has the same form as in the trap except for an anisotropic scale factor.

The calculation of $G_{fi}^{(2)}$ is similar,

$$\langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \hat{I}(\mathbf{r}', t') \rangle = - \left(\frac{\hbar}{2m} \right)^2 \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{n}} [\psi_{\mathbf{j}}^* (\partial_z \psi_{\mathbf{k}}) - (\partial_z \psi_{\mathbf{j}}^*) \psi_{\mathbf{k}}] \times [\psi_{\mathbf{l}}^* (\partial_z \psi_{\mathbf{n}}) - (\partial_z \psi_{\mathbf{l}}^*) \psi_{\mathbf{n}}] \langle \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{n}} \rangle.$$

Two major differences appear compared to the mean flux calculation: the terms in v_3 and the phase factor $\delta_{\alpha} + 3\pi/2$ in Eq. (5) do not cancel. This makes the exact calculation very tedious. It is postponed to the Appendix.

Experiments are usually performed in situations satisfying two conditions: (1) the width of the cloud after expansion is much larger than that of the trapped cloud, and (2) the mean velocity acquired during free fall is much larger than the velocity spread of the trapped cloud. The first condition means that $\omega_{\alpha} t \gg 1$ and the second one that $gt \gg \sqrt{k_B T/m}$. The latter condition also means that the mean arrival time, $t_0 = \sqrt{2H/g}$, is much larger than the time width $\sqrt{k_B T/mg^2}$ of the expanding cloud. With these approximations the scale factors become quite simple. $\tilde{x} \sim \frac{x}{\omega_{\alpha} t_0}$, $\tilde{y} \sim \frac{y}{\omega_{\alpha} t_0}$ and $\tilde{z} \sim \frac{H - (1/2)gt^2}{\omega_{\alpha} t_0} \sim \frac{g(t_0 - t)}{\omega_{\alpha}}$. In particular, the coordinate \tilde{z} is proportional to the arrival time t . This means that in experiments that measure arrival times, the results have the same form when expressed as a function of vertical position.

In the correlation function of the flux, the above approximations also lead to $v_2 \approx \sqrt{2gH}$ and $|\sqrt{j_z} v_3 / v_2| \approx \sqrt{\frac{k_B T}{\hbar \omega_{\alpha}} \frac{\sigma_z}{\sqrt{2}H}} = \frac{s_z}{\sqrt{2}H}$ where s_z is the width of the cloud inside the trap and where the typical value of the occupied trap level, j_z , is $\sim \frac{k_B T}{\hbar \omega_{\alpha}}$. The term containing v_3 is then very small compared to the one proportional v_2 . In Ref. [15] for instance the above ratio is $\sim 10^{-5}$. We will neglect terms containing v_3 in the following. The phase factors δ_{α} in Eq. (5) are also very small since $\omega_{\alpha} t \gg 1$ and can be neglected (see the Appendix).

Under all these approximations, one finds

$$G_{fi}^{(2)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{v_2 v_2'}{\prod_{\alpha} \sqrt{(1 + \omega_{\alpha}^2 t^2)(1 + \omega_{\alpha}^2 t'^2)}} [\rho_{\text{eq}}(\tilde{\mathbf{r}}) \rho_{\text{eq}}(\tilde{\mathbf{r}}') + |G^{(1)}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{r}}')|^2 - \rho_0(\tilde{\mathbf{r}}) \rho_0(\tilde{\mathbf{r}}')].$$

We again find the same correlation function as in the trap, rescaled by a slightly different factor compared to $G_{im}^{(2)}$. This factor simply reflects the expansion of the cloud between the times t and t' .

The scaling laws for the harmonic potential result in a very simple expression for the correlation lengths at the detector,

$$l_{\alpha}^{(d)} = l^{(t)} \sqrt{1 + (\omega_{\alpha} t)^2}. \quad (12)$$

Where $l_{\alpha}^{(d)}$ is the correlation length along the α direction at the detector and $l_{\alpha}^{(t)}$ is the correlation length in the trap. If the gas is far from degeneracy $l^{(t)} = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}$, and we recover the result of Eq. (3). Close to degeneracy the correlation length is position dependent. In the case of a pulse of atoms as in Ref. [15], this formula applies along all three space axes. In addition, when making a flux measurement, one often expresses the longitudinal correlation length as a correlation time. For a pulse of atoms from a harmonic trap, with a mean velocity v at the detector, the correlation time is

$$t^{(\text{coh})} = \frac{l_z^{(d)}}{v} = l^{(t)} \frac{\omega_z}{g}. \quad (13)$$

It is independent of the propagation time as long as $\omega_{\alpha} t \gg 1$.

These calculations are illustrated in the following figures. For simplicity we have used an isotropic trapping potential. As pointed out above, the normalized second-order correlation functions $g_{im}^{(2)}$ and $g_{fi}^{(2)}$ are virtually identical with typical parameters (see the Appendix) and we will use the shorter notation $g^{(2)}$. In Fig. 1 we show the normalized correlation function $g^{(2)}(\tilde{r}, 0)$ as a function of $\tilde{r} \sim r/\omega t$ for various temperatures in the vicinity the Bose-Einstein phase transition T^* . We use the saturation of the excited state population to define T^* [31]. This is the correlation function *at the center of the cloud*. One sees that at $T = T^*$ (the thick dashed line in the figure), the correlation function at zero distance is already significantly diminished compared to higher temperatures. The correlation length, on the other hand, is larger than $\lambda \omega t / \sqrt{2\pi}$. Also, one sees that the correlation function is almost flat for temperatures a few percent below T^* .

In many experiments of course, one does not measure the local correlation function, but the correlation function averaged over all points in the sample [15]. The effect of this averaging is shown in Fig. 2. We plot $g_m^{(2)}(\tilde{r}) = \frac{\int d\mathbf{R} G^{(2)}(\mathbf{R} + \tilde{r}\mathbf{e}, \mathbf{R})}{\int d\mathbf{R} G^{(1)}(\mathbf{R} + \tilde{r}\mathbf{e}, \mathbf{R} + \tilde{r}\mathbf{e}) G^{(1)}(\mathbf{R}, \mathbf{R})}$, where the vector \mathbf{e} is a unit vector in some direction. One sees that the amplitude of the correlation function decreases more slowly, and that after averaging, the correlation length hardly varies as one passes T^* .

To illustrate how local the effects which distinguish Figs. 1 and 2 are, we also plot in Fig. 3 the value of $g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{r})$, the zero distance correlation function as a function of \tilde{r} in the vicinity of the cloud center. One sees that even below T^* , the

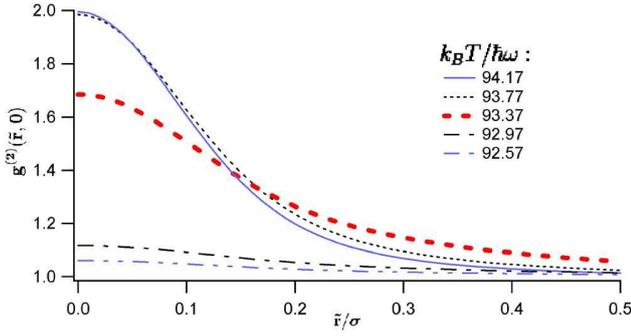


FIG. 1. (Color online) Two-body normalized correlation function at the trap center, $g^{(2)}(\tilde{r}, 0)$ for 10^6 atoms as a function of the position $\tilde{r} = r/\omega t$ for various temperatures around transition temperature. The horizontal axis is labelled in units of the size of the harmonic oscillator wave function σ . The thick dashed line corresponds to the transition temperature T^* defined in Ref. [31] and is $93.37\hbar\omega/k_B$ for 10^6 atoms. The temperature step is $0.4\hbar\omega/k_B$. The thermal de Broglie wavelength is $\sim 0.26\sigma$. The effect of the ground state population is clearly visible in the reduction of $g^{(2)}(0, 0)$, and in the rapid flattening out of the correlation function slightly below T^* .

correlator is close to 2 at a rescaled distance of a few times the harmonic oscillator length scale. We can simply interpret this effect by observing that at \tilde{r} the effective chemical potential is $\mu - V(\tilde{r})$. Away from the center, the effective chemical potential is small and this part of the cloud can be described as a Boltzmann cloud.

Before interpreting these results further, we recall some of our assumptions and their possible violation. First, we obtain Eq. (12) if we make a semiclassical approximation assuming that $k_B T$ greatly exceeds the energy spacing in the trap in each dimension of space. In an anisotropic trap, this condition can be violated in one or two dimensions and then correlation length along these directions will be larger and can become infinite for a small enough temperature. Second, we have assumed a noninteracting gas throughout.

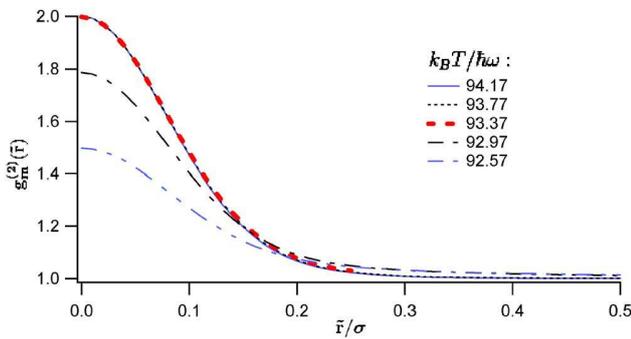


FIG. 2. (Color online) Two-body normalized correlation function $g_m^{(2)}(\tilde{r})$ for 10^6 atoms as a function of \tilde{r} . This function is an average of the two-body correlation function over the cloud. The conditions are the same conditions as for Fig. 1. Unlike Fig. 1, the shape is always almost Gaussian and converges more slowly to a flat correlation for low temperatures. This is because only a small region around $\tilde{r}=0$ is fully sensitive to the quantum atomic distribution.

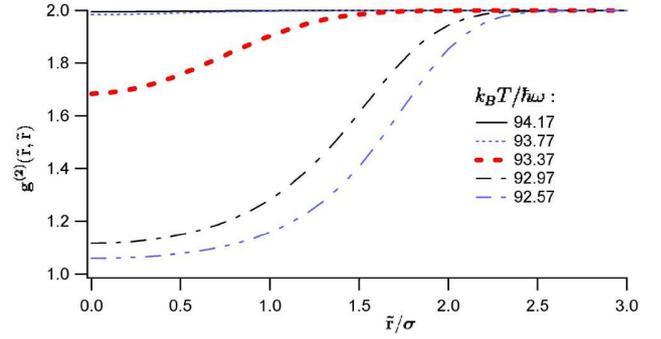


FIG. 3. (Color online) Two-body normalized correlation function $g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{r})$ for 10^6 atoms as a function of \tilde{r} . The conditions are the same as for Fig. 1. Even for $T < T^*$ the correlation goes to 2 far from the center. This is due to the finite spatial extent of the condensate. It can also be understood in terms of the chemical potential $\mu(\tilde{r})$ which, in a local density approximation, decreases as \tilde{r} increases and thus the correlation is equivalent to that of a hotter cloud.

Repulsive interactions inflate the trapped cloud, and thus reduce the length $l^{(d)}$ at the detector. We expect this to be the main effect for atomic clouds above the Bose-Einstein transition threshold, where the effects of atomic interactions are typically small. The reduction is typically a few percent. Even slightly below T^* , the condensate density is quite high, expelling the thermal atoms from the center of the trap. The effects of interactions inside the trap and during the cloud's expansion cannot be neglected. Taking them into account is then complex and beyond the scope of this paper.

IV. PHYSICAL INTERPRETATIONS

The main result of this paper is that in an experiment which averages over a detector in the sense of Fig. 2, even at $T=T^*$, the correlation lengths at the detector are well approximated by

$$l_\alpha^{(d)} = l^{(t)} \omega_\alpha t.$$

The correlation length increases linearly with the time of flight. A simple way to understand this result is to consider the analogy with optical speckle. Increasing the time of flight corresponds to increasing the propagation distance to the observation plane in the optical analog. The speckle size, i.e., the correlation length, obviously increases linearly with the propagation distance. Another way to understand the time dependence is to remark that after release, the atomic cloud is free and the phase space density should be constant. Since the density decreases with time as $\Pi_\alpha(\omega_\alpha t)$ and the spread of the velocity distribution is constant, the correlation volume must increase by the same factor [25].

Yet another way to look at the correlation length is to observe that, far from degeneracy, the correlation length inside the trap is the thermal de Broglie wavelength, that is, $\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} = \hbar/\Delta p$ where $\Delta p = m\Delta v$ is the momentum width of the cloud. By analogy, after expansion, the correlation length is $\hbar/(\Delta p)_{\text{loc}}$, where $(\Delta p)_{\text{loc}}$ is the ‘‘local’’ width of the momen-

tum distribution. As the pulse of atoms propagates, fast and slow atoms separate, so that at a given point in space the width in momentum is reduced by a factor $\frac{s_\alpha}{\Delta v_T}$.

For a continuous beam, the formula (12) only applies in the transverse directions. In the longitudinal direction, an argument in terms of a local thermal de Broglie wavelength can be used to find the coherence length or time. If the atoms travel at velocity v without acceleration, the momentum spread and correlation length remain constant. Defining the energy width of the beam as $\Delta E = mv\Delta v$, one finds a correlation time $\lambda/v = \hbar/\Delta E$ [7]. In the presence of an acceleration such as gravity, the momentum spread of the beam decreases (the energy spread at any point ΔE is constant), which increases the correlation length. The correlation time, however, remains $\hbar/\Delta E$ [10].

The result that the coherence length of a cloud of atoms can vary with the distance of propagation, is in apparent contradiction with the results of Refs. [39,40]. Those papers give convincing reasons, both experimental and theoretical, for why the dispersion associated with the propagation of massive particles should *not* result in an increase of the coherence length. The contradiction is resolved by noting that the Mach-Zender interferometer considered in that work is sensitive to the function $f(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{R} G^{(1)}(\mathbf{R}, t; \mathbf{R} + \mathbf{r}, t)$. If the Hamiltonian commutes with the momentum operator, i.e., if plane waves are stationary states, one can easily demonstrate that the function f and hence its width are independent of the time t . The experiments we analyze are sensitive to the *modulus* of $G^{(1)}$ whose width will always increase with time. Thus the coherence length can depend on the interferometer as well as the source.

The role of the acceleration of gravity in these experiments is minor. It governs the propagation time and the speed of the particles when they reach the detector. In a pulsed beam, gravity has no effect on the correlation length, although it does affect the correlation time. It also renders the rescaling of the z coordinate linear for large times so that the correlation function in position z and time have the same form. Without gravity (cancellation with a magnetic field gradient for example), a pulse of atoms would take longer to reach the detector, thereby giving the correlation length more time to dilate, and in addition they would hit the detector at a lower velocity. The correlation time would then increase with time and its order of magnitude would be $\frac{\lambda\omega t_0}{v_T} = \frac{\hbar\omega}{k_B T} t_0$ where $v_T = \sqrt{k_B T/m}$ is the thermal velocity and $t_0 = v_T/H$ is the time of flight to the detector.

V. EFFECT OF FINITE DETECTOR RESOLUTION

In the preceding sections, the detector was considered ideal, i.e., with arbitrarily good spatial and temporal resolution. Here we will consider a model of a more realistic detector, in which we suppose that the spatial resolution in the x - y plane is Gaussian. This is often the case due to smearing in pixels [13,16] and is also approximately true in Ref. [15]. To simplify the discussion we will restrict our analysis to the case $T \gg T^*$ and use a Maxwell-Boltzmann distribution rather than Bose-Einstein distribution. In this case, each direction

of space is independent and we will only consider one direction at a time in the following.

There are three different scales in the problem: the size of the cloud at the detector $s(t) \approx \sqrt{\frac{k_B T}{m}} t$, the correlation length at the detector $l^{(d)}$ and the rms width of the detector resolution function d . The definition of the resolution function is that for a density $\rho(x) = A e^{-x^2/2s(t)^2}$, the observed density is given by a convolution

$$\begin{aligned} \rho_{\text{obs}}(x) &= \int dx_0 \rho(x_0) \frac{e^{-(1/2)[(x-x_0)/d]^2}}{\sqrt{2\pi}d} \\ &= \frac{A}{\sqrt{1+d^2/s(t)^2}} e^{-x^2/2[s(t)^2+d^2]}. \end{aligned}$$

Similarly if $G^{(1)}(x, x') = A e^{i\phi} e^{-(x+x')^2/2(2s)^2} e^{-(x-x')^2/2(l^{(d)})^2}$ is the first order correlation function and $G_{\text{obs}}^{(1)}(x, x')$ the observed one, we have

$$\begin{aligned} |G_{\text{obs}}^{(1)}(x, x')|^2 &= \int dx_0 dx'_0 |G^{(1)}(x_0, x'_0)|^2 \\ &\quad \times \frac{e^{-(1/2)[(x-x_0)/d]^2}}{\sqrt{2\pi}d} \frac{e^{-(1/2)[(x'-x'_0)/d]^2}}{\sqrt{2\pi}d} \quad (14) \\ &= \frac{|A|^2}{\sqrt{[1+d^2/s^2(t)][1+4d^2/(l^{(d)})^2]}} \\ &\quad \times e^{-\{(x+x')^2/4[s(t)^2+d^2]\}} e^{-\{(x-x')^2/[l^{(d)}]^2+4d^2\}} \quad (15) \end{aligned}$$

Consequently, with $\alpha = x, y$ and z :

(i) The amplitude of the normalized correlation function becomes

$$g_{\text{obs}}^{(2)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \left(\frac{G_{\text{obs}}^{(1)}(\mathbf{0}, \mathbf{0})}{\rho_{\text{obs}}(\mathbf{0})} \right)^2 = 1 + \prod_{\alpha} \sqrt{\frac{1+d_{\alpha}^2/s_{\alpha}^2(t)}{1+4d_{\alpha}^2/(l_{\alpha}^{(d)})^2}}.$$

(ii) The observed widths of the cloud are $s_{\alpha}(t) \rightarrow \sqrt{s_{\alpha}^2(t) + d_{\alpha}^2}$.

(iii) The observed correlation lengths are $l_{\alpha}^{(d)} \rightarrow \sqrt{(l_{\alpha}^{(d)})^2 + (2d_{\alpha})^2}$. The factor 2 can be understood as $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ where the first term comes from the fact that d_{α} is defined for one particle and not for a pair of particles and the second one comes from the fact that the correlation length is not defined as an rms width.

In the experiment of Ref. [15] the trapped cloud had a cigar shape. At the detector the cloud was spherical but the correlation volume was anisotropic with $l_x^{(d)} \ll d \approx l_y^{(d)}/4$. In the third (vertical) direction, the resolution width was much smaller than any other length scale. The observed contrast of the correlation function was therefore approximately, $\frac{l_x^{(d)}}{2d}$.

VI. CONCLUSION

The most important conclusion of this paper is that the expansion of a noninteracting cloud from a harmonic trap in

thermal equilibrium, admits a rather simple, analytical treatment of the time variation of the density and the correlation functions. In such a pulse of atoms, correlation lengths scale in the same way as the size of the density profile. The agreement with experiment indicates that the neglect of interactions is a good approximation above the BEC transition temperature. An important next step however, is to examine interaction effects so that the next generation of experiments, which will be more precise and better resolved, can be fully interpreted.

ACKNOWLEDGMENTS

The Atom Optics group of LCFIO is member of the Institut Francilien de Recherche sur les Atomes Froids (IFRAF) and of the Fédération LUMAT of the CNRS (FR2764). This work is supported by the PESSOA Program 07988NJ, by the Atom Chips network MCRTN-CT-2003-505032, and the ANR under Contract No. 05-NANO-008-01.

APPENDIX

Explicit expression of the flux correlation function

We found in Sec. III B, the following expression for the flux operator:

$$\hat{I}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} \left(v_2 \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2} (v_3 \sqrt{k} \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{k}-1_z} + v_3 \sqrt{j} \psi_{\mathbf{j}-1_z}^* \psi_{\mathbf{k}}) \right) \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}},$$

where $\mathbf{j}-1_z$ is the vector (j_x, j_y, j_z-1) and where we write $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$.

The second order correlation function for the flux is then,

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \hat{I}(\mathbf{r}', t') \rangle &= \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{n}} \left(v_2 \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2} (v_3 \sqrt{k} \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{k}-1_z} \right. \\ &\quad \left. + v_3 \sqrt{j} \psi_{\mathbf{j}-1_z}^* \psi_{\mathbf{k}}) \right) \\ &\quad \times \left(v_2' \psi_{\mathbf{l}}^* \psi_{\mathbf{n}}' - \frac{1}{2} (v_3' \sqrt{n} \psi_{\mathbf{l}}^* \psi_{\mathbf{n}-1_z}' \right. \\ &\quad \left. + v_3' \sqrt{l} \psi_{\mathbf{l}-1_z}^* \psi_{\mathbf{n}}') \right) \\ &\quad \times \langle \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{n}} \rangle. \end{aligned}$$

Neglecting the shot-noise and ground-state contributions, this leads to

$$\langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \hat{I}(\mathbf{r}', t') \rangle = \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \hat{I}(\mathbf{r}', t') \rangle + \text{Re}(A)$$

with

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{l}} \left(v_2 v_2' \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{l}}' \psi_{\mathbf{l}} \psi_{\mathbf{j}}'^* + \frac{1}{2} v_3 v_3' \sqrt{j_z l_z} \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{j}-1_z}' \psi_{\mathbf{l}-1_z} \psi_{\mathbf{l}}'^* \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} v_3 v_3' \sqrt{l_z} \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{j}-1_z}' \psi_{\mathbf{l}-1_z} \psi_{\mathbf{l}}'^* - v_2 v_3' \sqrt{j_z} \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{j}-1_z}' \psi_{\mathbf{l}} \psi_{\mathbf{l}}'^* \right. \\ &\quad \left. - v_2' v_3 \sqrt{l_z} \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{j}-1_z}' \psi_{\mathbf{l}-1_z} \psi_{\mathbf{l}}'^* \right) \langle \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{j}} \rangle \langle \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{l}} \rangle. \end{aligned}$$

We write $A = \sum_{i=1}^5 T_i$ where the T_i terms can be recast, using $\tan \delta_\alpha = 1/\omega_\alpha t$, $\tan \delta'_\alpha = 1/\omega'_\alpha t'$, $\Delta_\alpha = \delta'_\alpha - \delta_\alpha$, $\sum_{\alpha} j_\alpha (\delta'_\alpha - \delta_\alpha) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{\Delta}$, $\psi_{\mathbf{j}}^0 = \psi_{\mathbf{j}}^0(\bar{\mathbf{r}})$, and $\psi_{\mathbf{l}}'^0 = \psi_{\mathbf{l}}'^0(\bar{\mathbf{r}}')$,

$$T_1 = v_2 v_2' \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{l}} \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{l}}' \psi_{\mathbf{l}} \psi_{\mathbf{j}}'^* \langle \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{j}} \rangle \langle \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{l}} \rangle = \frac{v_2 v_2'}{\prod_{\alpha} \sqrt{(1 + \omega_\alpha^2 t^2)(1 + \omega'_\alpha{}^2 t'^2)}} \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{l}} \psi_{\mathbf{j}}^0 \psi_{\mathbf{j}}'^0 \psi_{\mathbf{l}}^0 \psi_{\mathbf{l}}'^0 e^{i \sum_{\alpha} (j_\alpha - l_\alpha) (\delta'_\alpha - \delta_\alpha)} \langle \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{j}} \rangle \langle \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{l}} \rangle$$

$$= \frac{v_2 v_2'}{\prod_{\alpha} \sqrt{(1 + \omega_\alpha^2 t^2)(1 + \omega'_\alpha{}^2 t'^2)}} \left| \sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{j}}^0 \psi_{\mathbf{j}}'^0 e^{i \mathbf{j} \cdot \mathbf{\Delta}} \langle \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{j}} \rangle \right|^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} v_3 v_3' \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{l}} \sqrt{j_z l_z} \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{j}-1_z}' \psi_{\mathbf{l}-1_z} \psi_{\mathbf{l}}'^* \langle \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{j}} \rangle \langle \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{l}} \rangle =$$

$$- \frac{1}{2} \frac{|v_3 v_3'|}{\prod_{\alpha} \sqrt{(1 + \omega_\alpha^2 t^2)(1 + \omega'_\alpha{}^2 t'^2)}} \left(\sum_{\mathbf{j}} \sqrt{j_z} \psi_{\mathbf{j}}^0 \psi_{\mathbf{j}-1_z}' e^{i \mathbf{j} \cdot \mathbf{\Delta}} \langle \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{j}} \rangle \right) \left(\sum_{\mathbf{l}} \sqrt{l_z} \psi_{\mathbf{l}-1_z}^0 \psi_{\mathbf{l}}'^0 e^{-i \mathbf{l} \cdot \mathbf{\Delta}} \langle \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{l}} \rangle \right),$$

$$T_3 = \frac{1}{2} v_3 v_3' \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{l}} l_z \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{j}-1_z}' \psi_{\mathbf{l}-1_z} \psi_{\mathbf{l}}'^* \langle \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{j}} \rangle \langle \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{l}} \rangle = \frac{1}{2} \frac{|v_3 v_3'|}{\prod_{\alpha} \sqrt{(1 + \omega_\alpha^2 t^2)(1 + \omega'_\alpha{}^2 t'^2)}} \left(\sum_{\mathbf{j}} \psi_{\mathbf{j}}^0 \psi_{\mathbf{j}}'^0 e^{i \mathbf{j} \cdot \mathbf{\Delta}} \langle \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{j}} \rangle \right) \left(\sum_{\mathbf{l}} l_z \psi_{\mathbf{l}-1_z}^0 \psi_{\mathbf{l}}'^0 e^{-i \mathbf{l} \cdot \mathbf{\Delta}} \langle \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{l}} \rangle \right),$$

$$T_4 = -v_2 v_3' \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{l}} \sqrt{j_z} \psi_{\mathbf{j}}^* \psi_{\mathbf{j}-1_z}' \psi_{\mathbf{l}} \psi_{\mathbf{l}}'^* \langle \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{j}} \rangle \langle \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{l}} \rangle = -i \frac{v_2 |v_3'|}{\prod_{\alpha} \sqrt{(1 + \omega_\alpha^2 t^2)(1 + \omega'_\alpha{}^2 t'^2)}} \left(\sum_{\mathbf{j}} \sqrt{j_z} \psi_{\mathbf{j}}^0 \psi_{\mathbf{j}-1_z}' e^{i \mathbf{j} \cdot \mathbf{\Delta}} \langle \hat{a}_{\mathbf{j}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{j}} \rangle \right) \left(\sum_{\mathbf{l}} \psi_{\mathbf{l}}^0 \psi_{\mathbf{l}}'^0 e^{-i \mathbf{l} \cdot \mathbf{\Delta}} \langle \hat{a}_{\mathbf{l}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{l}} \rangle \right),$$

$$T_5 = -v_2 v_3 \sum_{j,1} \sqrt{v_z} \psi_j^* \psi_{j-1}^* \psi_1^* \langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle = -i \frac{v_2' v_3'}{\prod_{\alpha} \sqrt{(1 + \omega_{\alpha}^2 t^2)(1 + \omega_{\alpha}^2 t'^2)}} \left(\sum_j \psi_j^0 \psi_j^0 e^{i\mathbf{j} \cdot \Delta} \langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle \right) \left(\sum_1 \sqrt{v_z} \psi_{1-1}^0 \psi_1^0 e^{-i\mathbf{l} \cdot \Delta} \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle \right).$$

The term T_1 is a real number which is not the case for T_2 , T_3 , T_4 , and T_5 .

Calculation for harmonic oscillator stationary states

All the above terms can be calculated analytically. All the series are identical in the direction x and y . We are then left with the calculation of three series in only one direction,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} \psi_{n-1}^0(\bar{z}) \psi_n^0(\bar{z}') e^{-nu}, \\ & \sum_{n=0}^{\infty} n \psi_{n-1}^0(\bar{z}) \psi_{n-1}^0(\bar{z}') e^{-nu}, \\ & \sum_{n=0}^{\infty} n \psi_{n-1}^0(\bar{z}) \psi_{n-1}^0(\bar{z}') e^{-nu}. \end{aligned}$$

The function $g_u(\bar{z}, \bar{z}') = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{n-1}^0(\bar{z}) \psi_n^0(\bar{z}') e^{-nu}$ is known [17,29] and its expression is

$$g_u(\bar{z}, \bar{z}') = \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi(1 - e^{-2u})}} \exp \left[-\tanh\left(\frac{u}{2}\right) \left(\frac{\bar{z} + \bar{z}'}{2\sigma}\right)^2 - \coth\left(\frac{u}{2}\right) \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}'}{2\sigma}\right)^2 \right].$$

Using

$$\bar{z} \psi_n^0(\bar{z}) = \frac{\sigma}{2} (\bar{z} \hat{a} + \hat{a}^\dagger) \psi_n^0 = \frac{\sigma}{2} [\sqrt{n} \psi_{n-1}^0(\bar{z}) + \sqrt{n+1} \psi_{n+1}^0(\bar{z})],$$

one finds

$$\begin{aligned} \bar{z} g_u(\bar{z}, \bar{z}') &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left(\sum \sqrt{n} \psi_{n-1}^0(\bar{z}) \psi_n^0(\bar{z}') e^{-nu} \right. \\ & \left. + e^u \sum \sqrt{n} \psi_n^0(\bar{z}) \psi_{n-1}^0(\bar{z}') e^{-nu} \right). \end{aligned}$$

It follows easily that

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} \psi_{n-1}^0(\bar{z}) \psi_n^0(\bar{z}') e^{-nu} &= \frac{\sqrt{2} \bar{z} - e^u \bar{z}'}{\sigma (1 - e^{-2u})} g_u(\bar{z}, \bar{z}'), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} \psi_n^0(\bar{z}) \psi_{n-1}^0(\bar{z}') e^{-nu} &= \frac{\sqrt{2} \bar{z}' - e^u \bar{z}}{\sigma (1 - e^{-2u})} g_u(\bar{z}, \bar{z}'). \end{aligned}$$

Moreover,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \psi_{n-1}^0(\bar{z}) \psi_{n-1}^0(\bar{z}') e^{-nu} = e^{-u} [g_u(\bar{z}, \bar{z}') - \partial_u g_u(\bar{z}, \bar{z}')].$$

Then,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n \psi_{n-1}^0(\bar{z}) \psi_{n-1}^0(\bar{z}') e^{-nu} &= \left[\frac{1}{1 - e^{-2u}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{z} + \bar{z}'}{2\sigma \cosh \frac{u}{2}} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}'}{2\sigma \sinh \frac{u}{2}} \right)^2 \right] e^{-u} g_u(\bar{z}, \bar{z}'). \end{aligned}$$

Explicit expression of the flux correlation function—Part II

We define $G_B^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{n}} \psi_{\mathbf{n}}^0(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{n}}^0(\mathbf{r}') e^{-\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}}$. This function, the 3D equivalent of the function g_u , is connected to the one-body correlation function by $G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=1}^{\infty} e^{\beta l \bar{\mu}} G_B^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', l\boldsymbol{\tau})$ with $\tau_{\alpha} = \beta \hbar \omega_{\alpha}$.

Then,

$$T_1 = \frac{v_2 v_2'}{\prod_{\alpha} \sqrt{(1 + \omega_{\alpha}^2 t^2)(1 + \omega_{\alpha}^2 t'^2)}} \left| \sum_l e^{\beta l \bar{\mu}} G_B^{(1)}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{r}}', l\boldsymbol{\tau} - i\boldsymbol{\Delta}) \right|^2,$$

$$\begin{aligned} T_2 &= -\frac{1}{2} \frac{|v_3 v_3'|}{\prod_{\alpha} \sqrt{(1 + \omega_{\alpha}^2 t^2)(1 + \omega_{\alpha}^2 t'^2)}} \left(\sum_l e^{\beta l \bar{\mu}} \frac{\sqrt{2} \bar{z} - e^{l\tau_z - i\Delta_z} \bar{z}'}{\sigma (1 - e^{2(l\tau_z - i\Delta_z)})} G_B^{(1)}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{r}}', l\boldsymbol{\tau} - i\boldsymbol{\Delta}) \right) \\ & \times \left(\sum_k e^{\beta k \bar{\mu}} \frac{\sqrt{2} \bar{z}' - e^{k\tau_z + i\Delta_z} \bar{z}}{\sigma (1 - e^{2(k\tau_z + i\Delta_z)})} G_B^{(1)}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{r}}', k\boldsymbol{\tau} + i\boldsymbol{\Delta}) \right), \end{aligned}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \frac{|v_3 v_3'|}{\prod_{\alpha} \sqrt{(1 + \omega_{\alpha}^2 t^2)(1 + \omega_{\alpha}^2 t'^2)}} \left(\sum_l e^{\beta l \bar{\mu}} G_B^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}', l\boldsymbol{\tau} - i\boldsymbol{\Delta}) \right) \times \left\{ \sum_k e^{\beta k \bar{\mu}} \left[\frac{1}{1 - e^{-2(k\tau_z + i\Delta_z)}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{z} + \tilde{z}'}{2\sigma \cosh \frac{k\tau_z + i\Delta_z}{2}} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{z} - \tilde{z}'}{2\sigma \sinh \frac{k\tau_z + i\Delta_z}{2}} \right)^2 \right] e^{-(k\tau_z + i\Delta_z)} G_B^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}', k\boldsymbol{\tau} + i\boldsymbol{\Delta}) \right\},$$

$$T_4 = -i \frac{v_2 |v_3'|}{\prod_{\alpha} \sqrt{(1 + \omega_{\alpha}^2 t^2)(1 + \omega_{\alpha}^2 t'^2)}} \left(\sum_l e^{\beta l \bar{\mu}} \frac{\sqrt{2} \tilde{z} - e^{l\tau_z - i\Delta_z} \tilde{z}'}{\sigma 1 - e^{2(l\tau_z - i\Delta_z)}} G_B^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}', l\boldsymbol{\tau} - i\boldsymbol{\Delta}) \right) \times \left(\sum_k e^{\beta k \bar{\mu}} G_B^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}', k\boldsymbol{\tau} + i\boldsymbol{\Delta}) \right),$$

$$T_5 = -i \frac{|v_3| v_2'}{\prod_{\alpha} \sqrt{(1 + \omega_{\alpha}^2 t^2)(1 + \omega_{\alpha}^2 t'^2)}} \left(\sum_l e^{\beta l \bar{\mu}} G_B^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}', l\boldsymbol{\tau} - i\boldsymbol{\Delta}) \right) \times \left(\sum_k e^{\beta k \bar{\mu}} \frac{\sqrt{2} \tilde{z}' - e^{k\tau_z + i\Delta_z} \tilde{z}}{\sigma 1 - e^{2(k\tau_z + i\Delta_z)}} G_B^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}', k\boldsymbol{\tau} + i\boldsymbol{\Delta}) \right).$$

The dominant term is T_1 and is the one used in Sec. III B 5.

Contribution of neglected terms in the correlation of the flux

Here we evaluate the neglected terms T_2 to T_5 and the shot-noise contribution. They will be evaluated in the case of clouds far above BEC threshold. Under this assumption, all the functions are separable in the variables x, y , and t and the summation over the index l in the preceding equations reduces to the single term $l=1$.

Shot-noise contribution

Using the above analysis one can show that the main term is still proportional to $v_2 v_2'$. The additional term is then,

$$\frac{v_2 v_2'}{\prod_{\alpha} \sqrt{(1 + \omega_{\alpha}^2 t^2)(1 + \omega_{\alpha}^2 t'^2)}} e^{\beta \bar{\mu}} G_B^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}', \boldsymbol{\tau} - i\boldsymbol{\Delta}) G_B^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}', i\boldsymbol{\Delta}).$$

For $t=t'$, $\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{0}$ and $G_B^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}', \mathbf{0}) = \delta(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}')$. The shot-noise term is then

$$\frac{v_2^2}{\prod_{\alpha} (1 + \omega_{\alpha}^2 t^2)} \rho_{\text{eq}}(\bar{\mathbf{r}}) \delta(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}').$$

As expected, this term corresponds also to the one at equilibrium with rescaled coordinates.

T_2 - T_5 contribution

We have $G_{fl}^{(2)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \hat{I}(\mathbf{r}', t') \rangle = \langle \hat{I}(\mathbf{r}, t) \times \langle \hat{I}(\mathbf{r}', t') \rangle \rangle + \text{Re}(A)$ where $A = \sum_{i=1}^5 T_i$.

Case $t=t'$:

$$(a) \quad \boldsymbol{\Delta}=\mathbf{0}, \quad \text{then} \quad T_1 = \frac{v_2 v_2'}{\prod_{\alpha} \sqrt{(1 + \omega_{\alpha}^2 t^2)(1 + \omega_{\alpha}^2 t'^2)}} |G^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')|^2, \quad T_2$$

and T_3 are real number and $\text{Re}(T_4) = \text{Re}(T_5) = 0$.

(b) One finds, to leading orders, $g^{(2)}(0, 0, t; 0, 0, t) - 2 \approx \frac{1}{8} \left(\frac{s_z}{H} \right)^2 \left(1 - 2 \frac{t-t_0}{t_0} \right) \left(1 - \frac{\tau_z^2}{6} \right)$ where s_z is the initial size of the cloud in the vertical direction and $t_0 = \sqrt{2H/g}$.

(c) The deviation from 2 is extremely small in the experimental conditions of Ref. [15] ($\sim 10^{-11}$) but shows that the bunching is strictly speaking not 2 at the center. This behavior is expected for any flux correlation function of dispersive waves [41].

(d) The correlation lengths at the detector are not modified by the additional terms.

Case $t \neq t'$:

(a) The correlation function can be written as

$$g^{(2)}(0, 0, t; 0, 0, t') = 1 + \frac{|G_B^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}', \boldsymbol{\tau} + i\boldsymbol{\Delta})|^2}{G_B^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\tau}) G_B^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}', \bar{\mathbf{r}}', \boldsymbol{\tau})} (1 + \epsilon).$$

(b) where

$$\frac{|G_B^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}', \boldsymbol{\tau} + i\boldsymbol{\Delta})|^2}{G_B^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\tau}) G_B^{(1)}(\bar{\mathbf{r}}', \bar{\mathbf{r}}', \boldsymbol{\tau})} \approx e^{-[(t-t')/t^{(\text{coh})}]^2 [1 - (\tau_z^2/6) 1 - [(t+t') - 2t_0]/t_0]}$$

and

(c)

$$\epsilon \approx \frac{1}{8} \left(\frac{w_z}{H} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{t+t' - 2t_0}{t_0} \right) \right] \left(1 - \frac{\tau_z^2}{6} \right) - \frac{3}{2(\omega_z t_0 \tau_z)^2} \left(\frac{t-t'}{t_0} \right)^2 \left(1 + \frac{\tau_z}{3} \right).$$

We have neglected terms in $\tau_z, (t-t_0)^3, (t'-t_0)^3, (t-t_0)^2(t'-t_0), (t-t_0)(t'-t_0)^2$, and higher orders.

(d) The value of ϵ is extremely small ($\sim 10^{-10}$) using Ref. [15]. The deviation from $e^{-[(t-t')/t^{(\text{coh})}]^2}$ is mainly due to the mean time $(t+t')/2$ contribution and changes the value of the correlation time in the wings of the time of flight by $\sim 3\%$. The effect of the phase factor $\boldsymbol{\Delta}$ is negligible.

- [1] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [2] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Nature (London)* **177**, 27 (1956).
- [3] G. Baym, *Acta Phys. Pol. B* **29**, 1839 (1998).
- [4] D. H. Boal, C.-K. Gelbke, and B. K. Jennings, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 553 (1990).
- [5] U. Heinz and B. V. Jacak, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **49**, 529 (1999).
- [6] C.-Y. Wong, *Introduction to High-Energy Heavy-Ion Collisions* (World Scientific, Singapore, 1994).
- [7] M. Iannuzzi, A. Orecchini, F. Sacchetti, P. Facchi, and S. Pascazio, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 080402 (2006).
- [8] M. Henny, S. Oberholzer, C. Strunk, T. Heinzel, K. Ensslin, M. Holland, and C. Schonenberger, *Science* **284**, 296 (1999).
- [9] W. D. Oliver, J. Kim, R. C. Liu, and Y. Yamamoto, *Science* **284**, 299 (1999).
- [10] M. Yasuda and F. Shimizu, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3090 (1996).
- [11] D. Hellweg, L. Cacciapuoti, M. Kottke, T. Schulte, K. Sengstock, W. Ertmer, and J. J. Arlt, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010406 (2003).
- [12] M. Greiner, C. A. Regal, J. T. Stewart, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 110401 (2005).
- [13] S. Fölling, F. Gerbier, A. Widera, O. Mandel, T. Gericke, and I. Bloch, *Nature (London)* **434**, 481 (2005).
- [14] A. Öttl, S. Ritter, M. Köhl, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090404 (2005).
- [15] M. Schellekens, R. Hoppeler, A. Perrin, J. Viana Gomes, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook, *Science* **310**, 648 (2005).
- [16] J. Esteve, J.-B. Trebbia, T. Schumm, A. Aspect, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 130403 (2006).
- [17] M. Naraschewski and R. J. Glauber, *Phys. Rev. A* **59**, 4595 (1999).
- [18] M. Holzmann and Y. Castin, *Eur. Phys. J. D* **7**, 425 (1999).
- [19] K. V. Kheruntsyan, D. M. Gangardt, P. D. Drummond, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 040403 (2003).
- [20] C. Mora and Y. Castin, *Phys. Rev. A* **67**, 053615 (2003).
- [21] M. A. Cazalilla, *J. Phys. B* **37**, 1 (2004).
- [22] E. Altman, E. Demler, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. A* **70**, 013603 (2004).
- [23] C. Gies and D. A. W. Hutchinson, *Phys. Rev. A* **70**, 043606 (2004).
- [24] M. Born and E. Wolf, *Optics*, 6th ed. (Pergamon, Oxford 1980), Chap. 10.4.
- [25] D. E. Miller, J. R. Anglin, J. R. Abo-Shaer, K. Xu, J. K. Chin, and W. Ketterle, *Phys. Rev. A* **71**, 043615 (2005).
- [26] N. K. Whitlock, S. M. Barnett, and J. Jeffers, *J. Phys. B* **36**, 1273 (2003).
- [27] W. Krauth, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3695 (1996).
- [28] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Wiley, New York, 1973).
- [29] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics* (Butterworth, London, 1996).
- [30] H. D. Politzer, *Phys. Rev. A* **54**, 5048 (1996).
- [31] R. Hoppeler, J. C. Viana Gomes, and D. Boiron, *Eur. Phys. J. D* (to be published).
- [32] A. G. Sinclair and M. A. Kasevich, *Rev. Sci. Instrum.* **68**, 1657 (1997).
- [33] C. Cohen-Tannoudji, lecture notes at the Collège de France (1992) available at <http://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/1992-93/1992-93.htm>
- [34] R. P. Feynmann and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [35] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic, London, 1980).
- [36] M. Naraschewski, H. Wallis, A. Schenzle, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **54**, 2185 (1996).
- [37] Y. Castin and R. Dum, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).
- [38] Y. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* **54**, R1753 (1996).
- [39] H. Kaiser, S. A. Werner, and E. A. George, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 560 (1983).
- [40] A. G. Klein, G. I. Opat, and W. A. Hamilton, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 563 (1983).
- [41] A. Perrin, D. Boiron, and M. Belsley (unpublished).

LETTERS

Comparison of the Hanbury Brown–Twiss effect for bosons and fermions

T. Jelten¹, J. M. McNamara¹, W. Hogervorst¹, W. Vassen¹, V. Krachmalnicoff², M. Schellekens², A. Perrin², H. Chang², D. Boiron², A. Aspect² & C. I. Westbrook²

Fifty years ago, Hanbury Brown and Twiss (HBT) discovered photon bunching in light emitted by a chaotic source¹, highlighting the importance of two-photon correlations² and stimulating the development of modern quantum optics³. The quantum interpretation of bunching relies on the constructive interference between amplitudes involving two indistinguishable photons, and its additive character is intimately linked to the Bose nature of photons. Advances in atom cooling and detection have led to the observation and full characterization of the atomic analogue of the HBT effect with bosonic atoms^{4–6}. By contrast, fermions should reveal an antibunching effect (a tendency to avoid each other). Antibunching of fermions is associated with destructive two-particle interference, and is related to the Pauli principle forbidding more than one identical fermion to occupy the same quantum state. Here we report an experimental comparison of the fermionic and bosonic HBT effects in the same apparatus, using two different isotopes of helium: ³He (a fermion) and ⁴He (a boson). Ordinary attractive or repulsive interactions between atoms are negligible; therefore, the contrasting bunching and antibunching behaviour that we observe can be fully attributed to the different quantum statistics of each atomic species. Our results show how atom–atom correlation measurements can be used to reveal details in the spatial density^{7,8} or momentum correlations⁹ in an atomic ensemble. They also enable the direct observation of phase effects linked to the quantum statistics of a many-body system, which may facilitate the study of more exotic situations¹⁰.

Two-particle correlation analysis is an increasingly important method for studying complex quantum phases of ultracold atoms^{7–13}. It goes back to the discovery, by Hanbury Brown and Twiss¹, that photons emitted by a chaotic (incoherent) light source tend to be bunched: the joint detection probability is enhanced, compared to that of statistically independent particles, when the two detectors are close together. Although the effect is easily understood in the context of classical wave optics¹⁴, it took some time to find a clear quantum interpretation^{3,15}. The explanation relies on interference between the quantum amplitude for two particles, emitted from two source points S_1 and S_2 , to be detected at two detection points D_1 and D_2 (see Fig. 1). For bosons, the two amplitudes $\langle D_1|S_1\rangle\langle D_2|S_2\rangle$ and $\langle D_1|S_2\rangle\langle D_2|S_1\rangle$ must be added, which yields a factor of 2 excess in the joint detection probability, if the two amplitudes have the same phase. The sum over all pairs (S_1, S_2) of source points washes out the interference, unless the distance between the detectors is small enough that the phase difference between the amplitudes is less than one radian, or equivalently if the two detectors are separated by a distance less than the coherence length. Study of the joint detection rates versus detector separation along the i direction then

reveals a ‘bump’ whose width l_i is the coherence length along that axis^{1,5,16–19}. For a source size s_i (defined as the half width at $e^{-1/2}$ of a gaussian density profile) along the i direction, the bump has a half width at e^{-1} of $l_i = \hbar t / (2\pi m s_i)$, where m is the mass of the particle, t the time of flight from the source to the detector, and \hbar Planck’s constant. This formula is the analogue of the formula $l_i = L\lambda / (2\pi s_i)$ for photons, if $\lambda = \hbar / (mv)$ is identified with the de Broglie wavelength for particles travelling at velocity $v = L/t$ from the source to the detector.

For indistinguishable fermions, the two-body wavefunction is antisymmetric, and the two amplitudes must be subtracted, yielding a null probability for joint detection in the same coherence volume. In the language of particles, it means that two fermions cannot have momenta and positions belonging to the same elementary cell of

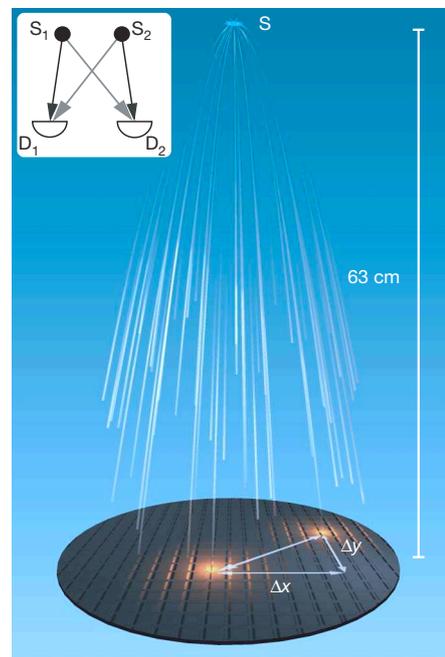


Figure 1 | The experimental set-up. A cold cloud of metastable helium atoms is released at the switch-off of a magnetic trap. The cloud expands and falls under the effect of gravity onto a time-resolved and position-sensitive detector (microchannel plate and delay-line anode) that detects single atoms. The horizontal components of the pair separation Δr are denoted Δx and Δy . The inset shows conceptually the two 2-particle amplitudes (in black or grey) that interfere to give bunching or antibunching: S_1 and S_2 refer to the initial positions of two identical atoms jointly detected at D_1 and D_2 .

¹Laser Centre Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam, The Netherlands. ²Laboratoire Charles Fabry de l’Institut d’Optique, CNRS, Univ. Paris-sud, Campus Polytechnique RD 128, 91127 Palaiseau Cedex, France.

phase space. As a result, for fermions the joint detection rate versus detector separation is expected to exhibit a dip around the null separation. Such a dip for a fermion ensemble must not be confused with the antibunching dip that one can observe with a single particle (boson or fermion) quantum state—for example, resonance fluorescence photons emitted by an individual quantum emitter²⁰. In contrast to the HBT effect for bosons, the fermion analogue cannot be interpreted by any classical model, either wave or particle, and extensive efforts have been directed towards an experimental demonstration. Experiments have been performed with electrons in solids^{21,22} and in a free beam²³, and with a beam of neutrons²⁴, but none has allowed a detailed study and a comparison of the pure fermionic and bosonic HBT effects for an ideal gas. A recent experiment using fermions in an optical lattice²⁵, however, does permit such a study and is closely related to our work.

Here we present an experiment in which we study the fermionic HBT effect for a sample of polarized, metastable $^3\text{He}^*$ atoms ($^3\text{He}^*$), and we compare it to the bosonic HBT effect for a sample of polarized, but not Bose condensed, metastable $^4\text{He}^*$ atoms ($^4\text{He}^*$) produced in the same apparatus at the same temperature. We have combined the position- and time-resolved detector, previously used^{5,26} for $^4\text{He}^*$, with an apparatus with which ultracold samples of $^3\text{He}^*$ or $^4\text{He}^*$ have recently been produced²⁷. Fermions or bosons at thermal equilibrium in a magnetic trap are released onto the detector, which counts individual atoms (see Fig. 1) with an efficiency of approximately 10%. The detector allows us to construct the normalized correlation function $g^{(2)}(\Delta\mathbf{r})$, that is, the probability of joint detection at two points separated by $\Delta\mathbf{r}$, divided by the product of the single detection probabilities at each point. Statistically independent detection events result in a value of 1 for $g^{(2)}(\Delta\mathbf{r})$. A value larger than 1 indicates bunching, while a value less than 1 is evidence of antibunching.

We produce gases of pure $^3\text{He}^*$ or pure $^4\text{He}^*$ by a combination of evaporative and sympathetic cooling in an anisotropic magnetic trap (see Methods). Both isotopes are in pure magnetic substates, with nearly identical magnetic moments and therefore nearly identical trapping potentials, so that trapped non-degenerate and non-interacting samples have the same size at the same temperature. The temperatures of the samples yielding the results of Fig. 2, as measured by the spectrum of flight times to the detector, are $0.53 \pm 0.03 \mu\text{K}$ and $0.52 \pm 0.05 \mu\text{K}$ for $^3\text{He}^*$ and $^4\text{He}^*$, respectively. The uncertainties correspond to the standard deviation of each ensemble. In a single realization, we typically produce 7×10^4 atoms of both $^3\text{He}^*$ and $^4\text{He}^*$. The atom number permits an estimate of the Fermi and Bose–Einstein condensation temperatures of approximately $0.9 \mu\text{K}$ and $0.4 \mu\text{K}$, respectively. Consequently, Fermi pressure in the trapped $^3\text{He}^*$ sample has a negligible (3%) effect on the trap size, and repulsive interactions in the $^4\text{He}^*$ sample have a similarly small effect. The trapped samples are therefore approximately gaussian ellipsoids elongated along the x axis with an r.m.s. size of about $110 \times 12 \times 12 \mu\text{m}^3$. To release the atoms, we turn off the current in the trapping coils and atoms fall under the influence of gravity. The detector, placed 63 cm below the trap centre (see Fig. 1), then records the x – y position and arrival time of each detected atom.

The normalized correlation functions $g^{(2)}(0,0,\Delta z)$ along the z (vertical) axis, for $^3\text{He}^*$ and $^4\text{He}^*$ gases at the same temperature, are shown in Fig. 2. Each correlation function is obtained by analysing the data from about 1,000 separate clouds for each isotope (see Methods). Results analogous to those of Fig. 2 are obtained for correlation functions along the y axis, but the resolution of the detector in the x – y plane (about $500 \mu\text{m}$ half width at e^{-1} for pair separation) broadens the signals. Along the x axis (the long axis of the trapped clouds), the expected widths of the HBT structures are one order of magnitude smaller than the resolution of the detector and are therefore not resolved.

Figure 2 shows clearly the contrasting behaviours of bosons and fermions. In both cases we observe a clear departure from statistical

independence at small separation. Around zero separation, the fermion signal is lower than unity (antibunching) while the boson signal is higher (bunching). Because the sizes of the $^3\text{He}^*$ and $^4\text{He}^*$ clouds at the same temperature are the same, as are the times of flight (pure free fall), the ratio of the correlation lengths is expected to be equal to the inverse of the mass ratio, $4/3$. The observed ratio of the correlation lengths along the z axis in the data shown is 1.3 ± 0.2 . The individual correlation lengths are also in good agreement with the formula $l_z = ht/(2\pi ms_z)$, where s_z is the source size along z . Owing to the finite resolution, the contrast in the signal, which should ideally go to 0 or 2, is reduced by a factor of order ten. The amount of contrast reduction is slightly different for bosons and fermions, and the ratio should be about 1.5. The measured ratio is 2.4 ± 0.2 . This discrepancy has several possible explanations. First, the magnetic field switch-off is not sudden (timescale ~ 1 ms), and this could affect bosons and fermions differently. Second, systematic errors may be present in our estimate of the resolution function. The resolution, however, does not affect the widths of the observed correlation functions along z , and thus we place the strongest emphasis on this ratio as a test of our understanding of boson and fermion correlations in an ideal gas. More information on uncertainties and systematic errors, as well as a more complete summary of the data, are given in Supplementary Information.

Improved detector resolution would allow a more detailed study of the correlation function, and is thus highly desirable. The effect of the resolution could be circumvented by using a diverging atom lens to demagnify the source⁴. According to the formula $l = ht/(2\pi ms)$, a smaller effective source size gives a larger correlation length. We have tried such a scheme by creating an atomic lens with a blue-detuned, vertically propagating, laser beam, forcing the atoms away from its axis (see Methods). The laser waist was not large compared to the cloud size, and therefore our 'lens' suffered from strong aberrations, but a crude estimate of the demagnification, neglecting aberrations, gives about 2 in the x – y plane. Figure 3 shows a comparison of

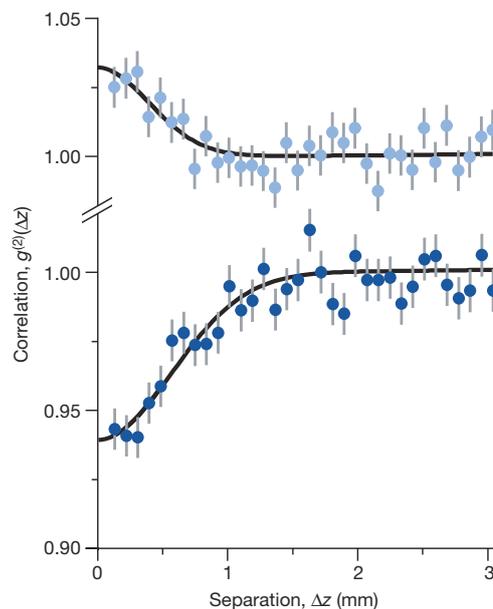


Figure 2 | Normalized correlation functions for $^4\text{He}^*$ (bosons) in the upper plot, and $^3\text{He}^*$ (fermions) in the lower plot. Both functions are measured at the same cloud temperature ($0.5 \mu\text{K}$), and with identical trap parameters. Error bars correspond to the square root of the number of pairs in each bin. The line is a fit to a gaussian function. The bosons show a bunching effect, and the fermions show antibunching. The correlation length for $^3\text{He}^*$ is expected to be 33% larger than that for $^4\text{He}^*$ owing to the smaller mass. We find $1/e$ values for the correlation lengths of 0.75 ± 0.07 mm and 0.56 ± 0.08 mm for fermions and bosons, respectively.

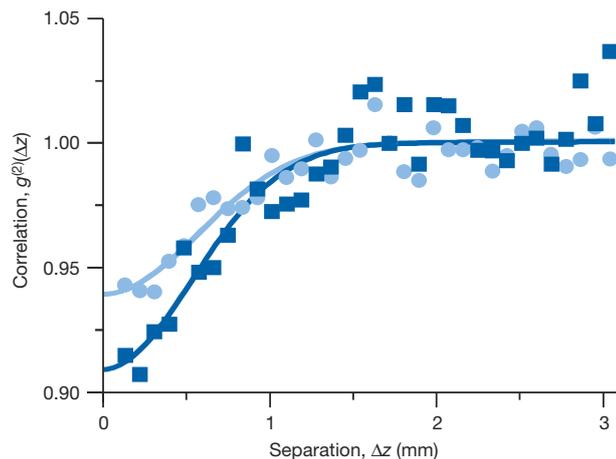


Figure 3 | Effect of demagnifying the source size. We show normalized correlation functions along the z (vertical) axis for $^3\text{He}^*$, with (dark blue squares) and without (light blue circles) a diverging atomic lens in the x - y plane. The dip is deeper with the lens, because the increase of the correlation lengths in the x - y plane leads to less reduction of contrast when convolved with the resolution function in that plane.

$g^{(2)}(\Delta z)$ for fermions with and without the defocusing lens. We clearly see a greater antibunching depth, consistent with larger correlation lengths in the x - y plane (we have checked that l_y is indeed increased) and therefore yielding a smaller reduction of the contrast when convolved with the detector resolution function. As expected, the correlation length in the z direction is unaffected by the lens in the x - y plane. Although our atomic lens was far from ideal, the experiment shows that it is possible to modify the HBT signal by optical means.

To conclude, we emphasize that we have used samples of neutral atoms at a moderate density in which interactions do not play any significant role. Care was taken to manipulate bosons and fermions in conditions as similar as possible. Thus the observed differences can be understood as a purely quantum effect associated with the exchange symmetries of wavefunctions of indistinguishable particles.

The possibility of having access to the sign of phase factors in a many-body wavefunction opens fascinating perspectives for the investigation of intriguing analogues of condensed-matter systems, which can now be realized with cold atoms. For instance, one could compare the many-body state of cold fermions and that of 'fermionized' bosons in a one-dimensional sample^{28,29}. Our successful manipulation of the HBT signal by interaction with a laser suggests that other lens configurations could allow measurements in position space (by forming an image of the cloud at the detector) or in any combination of momentum and spatial coordinates.

METHODS

Experimental sequence. Clouds of cold $^4\text{He}^*$ are produced by evaporative cooling of a pure $^4\text{He}^*$ sample, loaded into a Ioffe-Pritchard magnetic trap³⁰. The trapped state is 2^3S_1 , $m_j = 1$, and the trap frequency values are 47 Hz and 440 Hz for axial and radial confinement, respectively. The bias field is 0.75 G, corresponding to a frequency of 2.1 MHz for a transition between the $m_j = 1$ and $m_j = 0$ states at the bottom of the trap. After evaporative cooling, we keep the radio frequency evaporation field ('r.f. knife') on at constant frequency for 500 ms, then wait for 100 ms before switching off the trap. In contrast to the experiments of ref. 5, atoms are released in a magnetic-field-sensitive state.

To prepare $^3\text{He}^*$ clouds, we simultaneously load $^3\text{He}^*$ and $^4\text{He}^*$ atoms in the magnetic trap²⁷. The trapping state for $^3\text{He}^*$ is 2^3S_1 , $F = 3/2$, $m_F = 3/2$, and axial and radial trap frequencies are 54 Hz and 506 Hz—the difference compared to $^4\text{He}^*$ is only due to the mass. The two gases are in thermal equilibrium in the trap, so that $^3\text{He}^*$ is sympathetically cooled with $^4\text{He}^*$ during the evaporative cooling stage. Once the desired temperature is reached, we selectively eliminate $^4\text{He}^*$ atoms from the trap using the r.f. knife. The gyromagnetic ratios for $^4\text{He}^*$ and $^3\text{He}^*$ are 2 and $4/3$ respectively, so that the resonant frequency of the $m = 1$ to

$m = 0$ transition for $^4\text{He}^*$ is $3/2$ times larger than the $m = 3/2$ to $m = 1/2$ transition for $^3\text{He}^*$. An r.f. ramp from 3 MHz to 1.9 MHz expels all the $^4\text{He}^*$ atoms from the trap without affecting $^3\text{He}^*$. We then use the same trap switch-off procedure to release the $^3\text{He}^*$ atoms (also in a magnetic-field-sensitive state) onto the detector. We can apply magnetic field gradients to check the degree of spin polarization of either species.

Correlation function. The detailed procedure leading to this correlation is given in ref. 5. Briefly, we convert arrival times to z positions, and then use the three-dimensional positions of each atom to construct a histogram of pair separations Δr in a particular cloud. We then sum the pair distribution histograms for 1,000 successive runs at the same temperature. For separations much larger than the correlation length, this histogram reflects the gaussian spatial distribution of the cloud. To remove this large-scale shape and obtain the normalized correlation function, we divide the histogram by the autoconvolution of the sum of the 1,000 single-particle distributions.

Atom lens experiment. A 300 mW laser beam with an elliptical waist of approximately $100 \times 150 \mu\text{m}^2$ propagates vertically through the trap. The laser frequency is detuned by 300 GHz from the 2^3S_1 to 2^3P_2 transition. After turning off the magnetic trap, and waiting 500 μs for magnetic transients to die away, the defocusing laser is turned on for 500 μs .

Received 15 November; accepted 7 December 2006.

- Hanbury Brown, R. & Twiss, R. Q. Correlation between photons in two coherent beams of light. *Nature* **177**, 27–29 (1956).
- Scully, M. O. & Zubairy, M. S. *Quantum Optics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1997).
- Glauber, R. J. in *Quantum Optics and Electronics* (eds DeWitt, C., Blandin, A. & Cohen-Tannoudji, C.) 63–185 (Gordon and Breach, New York, 1965).
- Yasuda, M. & Shimizu, F. Observation of two-atom correlation of an ultracold neon atomic beam. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3090–3093 (1996).
- Schellekens, M. *et al.* Hanbury Brown Twiss effect for ultracold quantum gases. *Science* **310**, 648–651 (2005); published online 15 September 2005 (doi:10.1126/science.1118024).
- Öttl, A., Ritter, S., Köhl, M. & Esslinger, T. Correlations and counting statistics on an atom laser. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090404 (2005).
- Fölling, S. *et al.* Spatial quantum noise interferometry in expanding condensates. *Nature* **434**, 481–484 (2005).
- Spielman, I. B., Phillips, W. D. & Porto, J. V. The Mott insulator transition in two dimensions. Preprint at (<http://arxiv.org/cond-mat/0606216>) (2006).
- Greiner, M., Regal, C. A., Stewart, J. T. & Jin, D. S. Probing pair-correlated fermionic atoms through correlations in atom shot noise. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 110401 (2005).
- Altman, E., Demler, E. & Lukin, M. D. Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations. *Phys. Rev. A* **70**, 013603 (2004).
- Grondalski, J., Alsing, P. M. & Deutsch, I. H. Spatial correlation diagnostics for atoms in optical lattices. *Opt. Express* **5**, 249–261 (1999).
- Hellweg, D. *et al.* Measurement of the spatial correlation function of phase fluctuating Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010406 (2003).
- Estève, J. *et al.* Observations of density fluctuations in an elongated Bose gas: ideal gas and quasicondensate regimes. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 130403 (2006).
- Loudon, R. *The Quantum Theory of Light* 3rd edn (Oxford Univ. Press, Oxford, 2000).
- Fano, U. Quantum theory of interference effects in the mixing of light from phase independent sources. *Am. J. Phys.* **29**, 539–545 (1961).
- Hanbury Brown, R. & Twiss, R. Q. A test of a new stellar interferometer on Sirius. *Nature* **178**, 1046–1048 (1956).
- Baym, G. The physics of Hanbury Brown-Twiss intensity interferometry: From stars to nuclear collisions. *Acta Phys. Pol.* **B 29**, 1839–1884 (1998).
- Boal, D. H., Gelbke, C.-K. & Jennings, B. K. Intensity interferometry in subatomic physics. *Rev. Mod. Phys.* **62**, 553–602 (1990).
- Viana Gomes, J. *et al.* Theory for a Hanbury Brown Twiss experiment with a ballistically expanding cloud of cold atoms. *Phys. Rev. A* **74**, 053607 (2006).
- Kimble, H. J., Dagenais, M. & Mandel, L. Photon antibunching in resonance fluorescence. *Phys. Rev. Lett.* **39**, 691–695 (1978).
- Henny, M. *et al.* The fermionic Hanbury Brown and Twiss experiment. *Science* **284**, 296–298 (1999).
- Oliver, W. D., Kim, J., Liu, R. C. & Yamamoto, Y. Hanbury Brown and Twiss-type experiment with electrons. *Science* **284**, 299–301 (1999).
- Kiesel, H., Renz, A. & Hasselbach, F. Observation of Hanbury Brown-Twiss anticorrelations for free electrons. *Nature* **418**, 392–394 (2002).
- Iannuzzi, M., Orecchini, A., Sacchetti, F., Facchi, P. & Pascazio, S. Direct experimental evidence of free-fermion antibunching. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 080402 (2006).
- Rom, T. *et al.* Free fermion antibunching in a degenerate atomic Fermi gas released from an optical lattice. *Nature* **444**, 733–736 (2006).
- Jagutzki, O. *et al.* A broad-application microchannel-plate detector system for advanced particle or photon detection tasks: Large area imaging, precise multi-hit timing information and high detection rate. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **477**, 244–249 (2002).

27. McNamara, J. M., Jelts, T., Tychkov, A. S., Hogervorst, W. & Vassen, W. Degenerate Bose-Fermi mixture of metastable atoms. *Phys. Rev. Lett.* **97**, 080404 (2006).
28. Girardeau, M. Relationship between systems of impenetrable bosons and fermions in one dimension. *J. Math. Phys. (NY)* **1**, 516–523 (1960).
29. Olshanii, M. Atomic scattering in the presence of an external confinement and a gas of impenetrable bosons. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 938–941 (1998).
30. Tychkov, A. S. *et al.* Metastable helium Bose-Einstein condensate with a large number of atoms. *Phys. Rev. A* **73**, 031603(R) (2006).

Supplementary Information is linked to the online version of the paper at www.nature.com/nature.

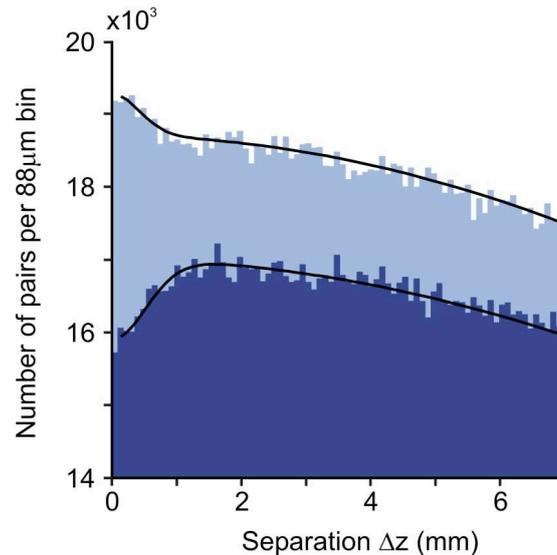
Acknowledgements This work was supported by the access programme of Laserlab Europe. The LCVU group in Amsterdam is supported by the 'Cold Atoms' programme of the Dutch Foundation for Fundamental Research on Matter (FOM) and by the Space Research Organization Netherlands (SRON). The Atom Optics group of LCFO is a member of the IFRAF institute and of the Fédération LUMAT of the CNRS, and is supported by the French ANR and by the SCALA programme of the European Union.

Author Information Reprints and permissions information is available at www.nature.com/reprints. The authors declare no competing financial interests. Correspondence and requests for materials should be addressed to C.I.W. (christoph.westbrook@institutoptique.fr) or W.V. (w.vassen@few.vu.nl).

Supplementary material for "Hanbury Brown Twiss effect for bosons versus fermions"

1. Unnormalised pair histogram

In order to give the reader an idea of the "raw" data, we show in Supplementary figure 1 some unnormalised pair histograms. The data correspond to the normalised plots shown in Fig. 2 in the main text. In addition to the bunching and antibunching feature for separations below 1 mm, the histogram also shows a broad structure which is due to the approximately Gaussian shape of the cloud. The broad structure is eliminated by the normalisation procedure described in Ref. 5 of the main text and summarised in Methods.



Supplementary figure. 1. Unnormalised pair histograms for bosons (light blue) and fermions (dark blue). The black lines represent a fit to the sum of two Gaussian functions.

2. Fit results

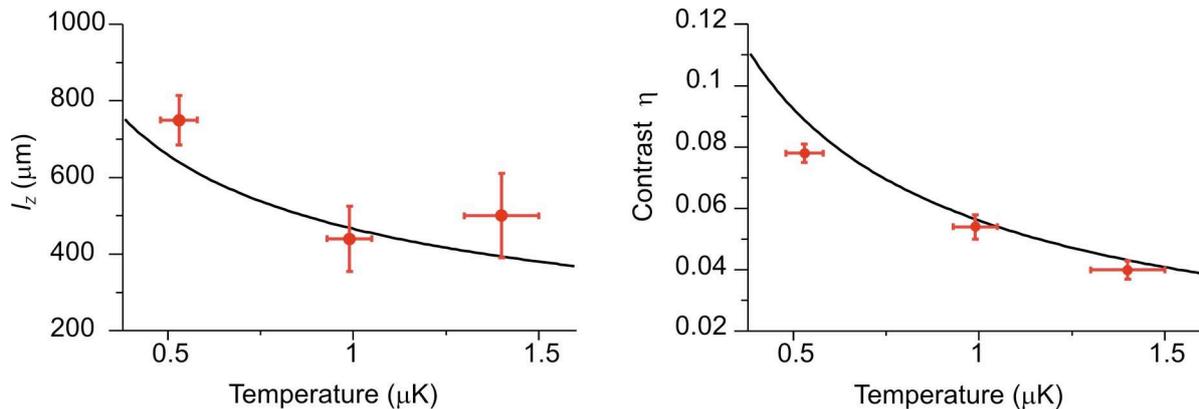
If one neglects finite resolution effects, the normalised correlation function should be well described by a Gaussian function:

$$g^{(2)}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = 1 \pm \exp\left(-\left[\left(\frac{\Delta x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{l_z}\right)^2\right]\right), \quad (1)$$

where the + sign refers to bosons and the – sign to fermions. We denote the correlation lengths in the 3 different spatial directions i , by l_i . In practice this function must be convolved with the resolution function of the detector. The resolution function is determined by the method discussed in Ref. 26. The resolution along the z direction is approximately 3 nm and is neglected. The convolution in the x - y plane is described in Ref. 19 for the case of a Gaussian resolution function. Careful measurements have revealed that the wings of the resolution function are broader than those of a Gaussian and we thus use an empirically determined analytical function to approximate the pair resolution function. Its $1/e$ halfwidth is about 500 μm . Since the correlation length in the x direction is more than an order of magnitude smaller than the resolution, we set $l_x = 0$. The convolution also affects the height of

the signal so that $g^{(2)}(0,0,0) = 1 \pm \eta$. The parameter η is referred to as the contrast. The fit parameters are thus l_y , l_z and η .

Data were taken for fermions ($^3\text{He}^*$) at 0.5 μK , 1.0 μK and 1.4 μK . The corresponding fit results for l_z and η are plotted in Supplementary Figure 2. In addition, we have data for two other situations, one using $^4\text{He}^*$ at 0.5 μK , and another using $^3\text{He}^*$ at 0.5 μK and a diverging lens. All 5 runs are summarised in table 1. In the graphs, we have plotted the formula $l_z = \hbar t / 2\pi m s_z$, extracting the size s_z from the measured temperature, trap oscillation frequency and assuming the cloud is an ideal gas. For the contrast η , we plot the expected variation based on the measured resolution function.



Supplementary figure. 2. Summary of data taken for $^3\text{He}^*$ clouds at three different temperatures. The solid lines show the expected results (see text).

Run	l_z (μm)	l_y (μm)	η
$^3\text{He}^*$, 0.5 μK	750 ± 70	570 ± 50	0.078 ± 0.003
$^3\text{He}^*$, 1 μK	440 ± 90	360 ± 90	0.054 ± 0.004
$^3\text{He}^*$, 1.4 μK	500 ± 110	0 *	0.040 ± 0.003
$^4\text{He}^*$, 0.5 μK	560 ± 80	570 ± 100	0.033 ± 0.003
$^3\text{He}^*$, 0.5 μK , with lens	750 ± 80	810 ± 40	0.108 ± 0.003

*In this run, the fitted width of the correlation function along y is actually smaller than the resolution.

Thus no reasonable value can be extracted for l_y .

Supplementary table 1. Summary of fit results for all data sets

Generally the data are in good agreement with the predictions of the ideal gas model. In the run with the lens, we have made no quantitative comparison with a calculation because it would involve taking into account the severe aberrations of the lens. Qualitatively however, we see that, as expected, the correlation length along z is unchanged while that along y , as well as the contrast, are increased. The fitted values of η do not correspond to those one would deduce from the data in Figs. 2 and 3 in the main text. This is because, as in Ref. 5, we computed the correlation function along the z axis over an area slightly larger than the width of the resolution function. This procedure improves the signal to noise ratio and preserves the form and the width of the correlation function but slightly modifies its height.

We observe three small anomalies: first, the contrast η for both bosons and fermions at 0.5 μK is below the prediction and the ratio, after correction for the resolution, is 2.4 ± 0.2 instead of the expected value 1.5. Second, the correlation length l_y for fermions at 0.5 μK seems quite low resulting in a ratio of fermions to bosons of 1.0 ± 0.2 instead of 1.3. Third, the width of the antibunching dip in the normalised pair separation histogram along y for fermions at 1.4 μK is *smaller* than the width of the measured resolution function, meaning that the fitted value of l_y is consistent with zero.

A systematic error may be present in the estimation of the detector resolution. After moving the detector from Orsay to Amsterdam, we noticed that the detector resolution, differed by up to 30% from day to day. A systematic error in the resolution has approximately the same relative effect on the value of η . It would also have an effect on the value of l_y . Uncontrolled variations in the resolution may thus account for the above anomalies. The correlation length in the vertical direction l_z however, should not be affected by an imprecise knowledge of the resolution in the x - y plane. The good agreement we find with our expectations along this axis is the strongest argument that the correlations we observe are consistent with the ideal gas model.

A second possible source of systematic error is related to the switch-off of the magnetic trap. Eddy currents cause a typical time scale of 1 ms in this turn-off³⁰. Since, unlike in Ref. 5, the released atoms are in a magnetic field sensitive state, partially adiabatic effects or focussing by residual curvatures could affect our measurement of the temperature or of the effective source size viewed from the detector. We have no independent estimate of the magnitude of these effects and can simply conclude that the reasonable agreement with our model means that these effects are not very large.

Observation of Atom Pairs in Spontaneous Four-Wave Mixing of Two Colliding Bose-Einstein Condensates

A. Perrin, H. Chang, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook*

Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, CNRS, Univ Paris-Sud, Campus Polytechnique, RD128, 91127 Palaiseau cedex, France

(Received 23 April 2007; published 12 October 2007)

We study atom scattering from two colliding Bose-Einstein condensates using a position sensitive, time resolved, single atom detector. In analogy to quantum optics, the process can also be thought of as spontaneous, degenerate four-wave mixing of de Broglie waves. We find a clear correlation between atoms with opposite momenta, demonstrating pair production in the scattering process. We also observe a Hanbury Brown–Twiss correlation for collinear momenta, which permits an independent measurement of the size of the pair production source and thus the size of the spatial mode. The back-to-back pairs occupy very nearly two oppositely directed spatial modes, a promising feature for future quantum optics experiments.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.99.150405](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.150405)

PACS numbers: 03.75.Nt, 34.50.-s

Recent years have seen the emergence of “quantum atom optics”, that is the extension of the many analogies between atom optics and traditional optics to the quantum optical domain in which phenomena like vacuum fluctuations and entanglement play a central role. In optics, the advent of correlated photon pairs [1] has provided a fruitful avenue of investigation, with examples including single photon sources and entangled states [2]. Partly inspired by this work, there have been many proposals concerning atom pairs, especially the production and observation of entanglement [3–7]. Many authors have also theoretically investigated other aspects of the pair production mechanism in both atomic collisions and in the breakup of diatomic molecules [7–13].

As emphasized in Ref. [4], pair production can be studied in two limits. If many atoms are created in a single mode, stimulated emission of atoms is important, and one can speak of two mode squeezing in analogy with Ref. [14]. The opposite limit, in which the occupation number of the modes is much less than unity, corresponds to the spontaneous production of atom pairs, entangled either in spin or momentum in analogy with Refs. [15,16]. Experiments on stimulated atomic four-wave mixing [17–19] and on parametric amplification in an optical lattice [20,21] are in the first limit, and pairs of “daughter BEC’s” with opposite velocities have been clearly observed. Experiments in the regime of individual atom pairs include the many experiments investigating the scattered halo in collisions of cold atoms either in the *s*-wave regime [22–24] or for higher partial waves [25,26]. None of these experiments, however, has demonstrated correlated pairs. The only evidence of atom pair production with cold atoms has been reported in absorption images of atoms from the breakup of molecules near a Feshbach resonance [27].

Here, we report on the observation of individual atom pairs with opposite velocities produced in the collision of

two condensates. A time and position resolved, single atom detector [28] permits us to reconstruct the three dimensional distribution of the scattered atoms: a spherical shell in velocity space. We also reconstruct the two-particle correlation function in 3D and find a strong correlation between atoms emitted back to back. This process can be interpreted as a spontaneous four-wave mixing process constrained by a phase matching condition as in the non linear optical analog which produces twin photons [2]. It can also be seen as the result of pairwise elastic collisions between atoms, constrained by momentum conservation. We measure the width of the velocity correlation function for a back to back atom pair and show that it corresponds very nearly to the uncertainty limited momentum spread of the colliding BECs.

This interpretation is confirmed by the observation of the velocity correlation function for two atoms scattered in the *same* direction. This latter effect, predicted in Refs. [7,10,13], is another manifestation of the Hanbury Brown–Twiss effect (HBT). As in high energy collisions [29], the effect allows us to measure the size of the collision volume.

The fact that the width of the HBT peak is close to that of the back-to-back correlation confirms that for a given atom on the collision sphere, its partner is scattered into a single mode of the matter wave field. This observation is crucial for future experiments in which one would like to bring pairs back together in order to confirm their entanglement in the spirit of Ref. [16] or observe other quantum effects [30].

We produce condensates of 10^4 – 10^5 atoms in the $m_x = 1$ sublevel of the 2^3S_1 state of metastable helium (He^*). The condensates are stored in a cylindrically symmetric magnetic trap with axial and radial trapping frequencies of 47 and 1150 Hz, respectively. The bias field is 0.25 G in the *x* direction (see Fig. 1), and defines the quantization axis. The uncertainty limited velocity spread of the colliding

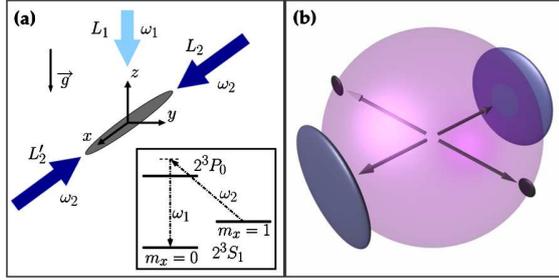


FIG. 1 (color online). (a) View of the magnetically trapped condensate (in the $m_x = 1$ state) and the three laser beams which create two cigar shaped counterpropagating free condensates (in the $m_x = 0$ state) by σ^-/π Raman transfers induced by $L_1 - L_2$ and $L_1 - L'_2$, respectively (see inset). L_1 is π -polarized (along x) while L_2 and L'_2 are σ^- -polarized. (b) Representation in velocity space of the expected atomic density after the collision. The scattered atoms are on a sphere and the remaining condensates, pancake-shaped after expansion, lie on the edge of the sphere along the x axis. A collision process involving an atom of each condensate is also represented. The shape of the scattering modes is related to the uncertainty limited momentum spread of the condensates.

atoms is thus anisotropic and we calculate it numerically using the Gross-Pitaevskii equation [31]. For a condensate with 3×10^4 atoms, we find rms axial and radial velocity spreads of $v_x^{\text{rms}} = 0.0044v_{\text{rec}}$ and $v_{yz}^{\text{rms}} = 0.091v_{\text{rec}}$, where $v_{\text{rec}} = 9.2$ cm/s is the single photon recoil velocity, $\hbar k/m$ where k is the photon wave vector and m is the atomic mass. The spread in these values due to the spread in condensate number is about $\pm 20\%$.

To generate two colliding Bose-Einstein condensates, we use two stimulated Raman transitions with different momentum transfers, produced by phase coherent laser beams L_1 , L_2 , and L'_2 , as shown in Fig. 1 [31]. These transitions have two purposes: first they transfer atoms to the magnetic field insensitive state $m_x = 0$ so that they freely fall to the detector and second, they separate the condensate into two components with velocities $v_{\text{rec}}(\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2)$, where \mathbf{e}_1 and \mathbf{e}_2 are the unit vectors along the propagation axes of the laser beams L_1 and L_2 respectively. The beams are pulsed on for a duration of ~ 500 ns and couple about 60% of the atoms to the $m_x = 0$ state. We do not switch off the magnetic trap, therefore atoms remaining in $m_x = 1$ stay trapped. The two colliding condensates travel with a relative velocity of $2v_{\text{rec}}$, at least 8 times larger than the speed of sound in the initial condensate. This ensures that elementary excitations of the condensate correspond to free particles. Since they are no longer trapped, the two colliding condensates expand radially, reducing the collision rate. A numerical model [8], assuming an expansion identical to that of a single condensate with the same total number of atoms, shows a roughly exponential decrease in the pair production rate with a time constant of ~ 150 μs .

After the collision, atoms fall onto a 8 cm microchannel plate detector placed 46.5 cm below the trap center. This

detector measures the arrival time of the atoms and their positions in the x - y plane [28,32]. Figure 2 shows successive 2.4 ms time slices showing the atom positions as they cross the detector plane. The time of flight for the center of mass to reach the detector is 320 ms. Since this time of flight is large compared to the collision duration, and the observed patterns are large compared to the collision volume, the observed 3D atom positions accurately reflect the velocity distribution after collision. In the following, we will only refer to the velocities of the detected atoms.

In Fig. 2, one clearly sees a spherical shell of radius of v_{rec} , represented by circles of varying diameter [see also Fig. 1(b)]. In the midplane of the sphere one can see the unscattered, pancake-shaped condensates I, II which locally saturate the detector. Other features are also visible in Fig. 2. In frames (a),(b) one sees a condensate, III, which underwent no momentum transfer, possibly due to the imperfect polarization of the Raman beams which can produce an off resonant, single beam Raman transition [31]. A fourth condensate, IV, probably resulting from four-wave mixing [17] of condensate III and the main unscattered condensates I, II is visible in frames (h),(i). Frames (b),(c) show a collision sphere due to the collision of I with atoms remaining trapped in $m_x = 1$ and with condensate III. The two spots within the sphere in frames (d)–(f) are not understood.

To avoid effects of local saturation of the detector in our analysis, we exclude regions around the 4 condensates, representing about 40% of the sphere. On the remaining area of the sphere we detect between 30 and 300 atoms on

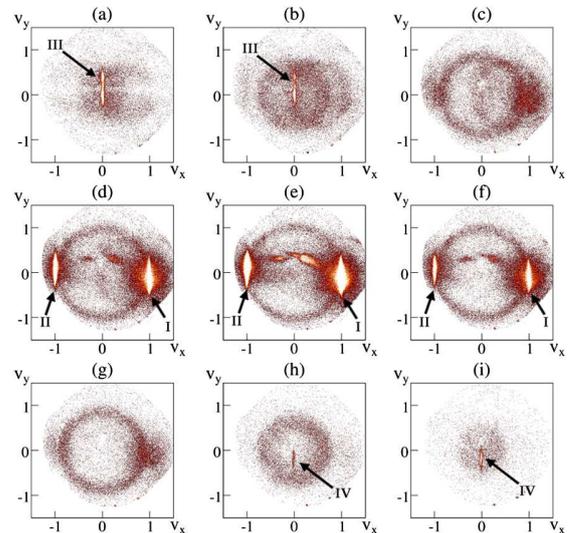


FIG. 2 (color online). (a)–(i) Images of the collision of two condensates. Each frame represents a 2.4 ms time slice of the atomic cloud as it passes the plane of the detector (x - y). 150 shots have been averaged to obtain these images. The two colliding condensates I, II and the collision sphere are clearly visible. Other features visible in the images are discussed in the text. The axes are marked in units of the recoil velocity.

each shot, with an average of about 100 per shot. Assuming a detection efficiency of 10% [32], this means that $\sim 5\%$ of the atoms are scattered from the two condensates. This number is consistent with the expected s -wave cross section [33] and the estimated evolution of the density during the collision.

We examine the pair correlation function for atoms in back to back directions by constructing, within the set of all the scattered atoms in one shot, a three-dimensional histogram containing all the pairs with a velocity sum $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ close to zero. We then sum the histograms over 1100 shots. Another histogram containing all the pairs of the sum of all shots gives the accidental coincidence rate for uncorrelated atoms and is used as a normalization. We thus recover the normalized second order correlation function, averaged over the sphere [31], $g^{(2)}(\mathbf{V})$ of the distribution of relative velocities of atom pairs on the sphere. Figure 3(a) shows the behavior of $g^{(2)}(\mathbf{V})$ around $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ projected along the three space axes. The peak indicates that, given the detection of an atom on the sphere, there is an enhanced probability of detecting a second one on the opposite side. Cartesian coordinates are best suited to plotting the data because of the competing spherical symmetry of the scattering process and the cylindrical symmetry of the source.

To analyze these results further, we perform a three-dimensional Gaussian fit to the normalized histogram:

$$g^{(2)}(V_x, V_y, V_z) = 1 + \eta e^{-[(V_x^2/2\sigma_x^2) - (V_y + V_z)^2/(2\sigma_{yz}^2)]}. \quad (1)$$

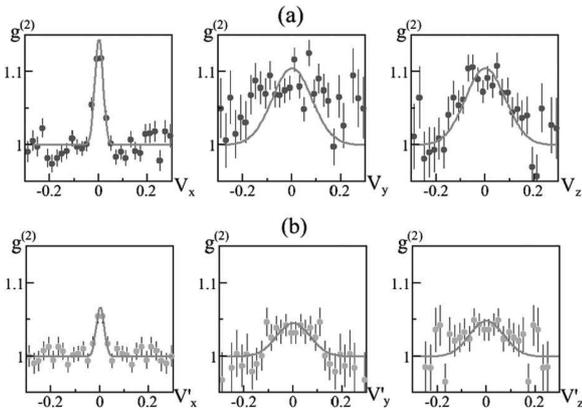


FIG. 3. Back-to-back [panel (a)] and collinear [panel (b)] correlation peaks. (a) Projection of $g^{(2)}(\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)$ along the different axes of the experiment and around $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. The projection consists in averaging the correlation in the two other directions over a surface equal to the products of the corresponding correlation lengths. This averaging makes the height smaller than the 3D fitted value $\eta^{\text{BB}} = 0.19 \pm 0.02$. The peak is the signature for correlated atoms with opposite velocities. (b) Projection of $g^{(2)}(\mathbf{V}' = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)$ along the different axes of the experiment. This peak is due to the Hanbury Brown–Twiss bunching effect. All velocities are expressed in units of the recoil velocity.

The fit gives $\eta^{\text{BB}} = 0.19 \pm 0.02$, $\sigma_x^{\text{BB}} = 0.017 \pm 0.002v_{\text{rec}}$, and $\sigma_{yz}^{\text{BB}} = 0.081 \pm 0.004v_{\text{rec}}$. The observed width in the x direction is limited by the rms pair resolution of the detector, $0.14v_{\text{rec}}$ [31,36]. In the y and z directions, the observed width is close to the uncertainty limited velocity scale v_{yz}^{rms} discussed above. It is therefore reasonable to conclude that the anisotropy in the correlation function is closely related to the anisotropy of the momentum distribution in the source. Detailed modeling accounting accurately for this width is in progress, but for purposes of this Letter, we will simply compare the width with that of the correlation function for collinear atoms as described below.

The procedure to construct the correlation function for nearly collinear velocities (the HBT effect) is the same as that for the back-to-back correlation function. Defining the relative velocity $\mathbf{V}' = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$, we show in Fig. 3(b) the correlation function $g^{(2)}(\mathbf{V}')$ around $\mathbf{V}' = \mathbf{0}$. Using the fitting function, Eq. (1), we find: $\eta^{\text{CL}} = 0.10 \pm 0.02$, $\sigma_x^{\text{CL}} = 0.016 \pm 0.003v_{\text{rec}}$, and $\sigma_{yz}^{\text{CL}} = 0.069 \pm 0.008v_{\text{rec}}$. As in the back to back case, the width in the x direction is limited by the resolution while in the y - z plane it is close to v_{yz}^{rms} . If we think of the HBT effect as giving a measure of the size of the pair production source, the width of the collinear correlation function defines the size of a mode of the scattered matter wave field. The fact that the back-to-back and collinear widths are so close, at least in the directions we can resolve, is further, strong evidence that, at least in the directions we resolve, the pairs we produce are in oppositely directed modes.

We now turn to the height of the peaks η . In the collinear case we expect the value of η^{CL} to be unity for a detector resolution much smaller than the peak width. Since in the x direction the width is clearly limited by the resolution, a crude estimate for η^{CL} is the ratio of the ideal width to the observed one: $\eta^{\text{CL}} \approx v_x^{\text{rms}}/\sigma_x = 0.3$. The discrepancy with the fitted value may have to do with our crude estimate of the effective source size along x and therefore of v_x^{rms} .

In the back-to-back case, the height of the peak is not limited to unity. A simple model of the peak height compares the number of true pairs to random coincidences in a volume ΔV defined by the widths observed in Fig. 3:

$$1 + \eta^{\text{BB}} = \frac{\text{true} + \text{random}}{\text{random}} = 1 + \frac{V}{N\Delta V}. \quad (2)$$

Here N is the number of atoms scattered on a single shot (but not necessarily detected) and V is the volume of the scattering shell. A rough estimate of $\Delta V/V$ is $1/1400$. As mentioned above, we detect on average 100 atoms on the analyzed 60% of the sphere. Assuming again a quantum efficiency of 10%, a rough estimate of the average number N is 1700 so that we find $\eta^{\text{BB}} \approx 0.8$ which gives the correct order of magnitude. We emphasize that ΔV is limited by the detector resolution in the x direction and is therefore about 10 times larger than the volume corresponding to a single mode. Thus, as stated in the introduc-

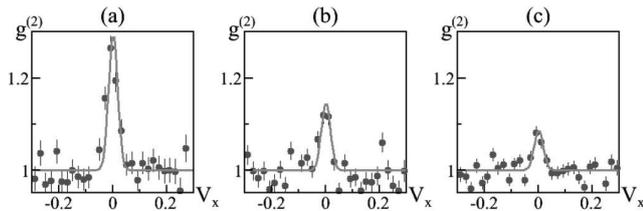


FIG. 4. Projections of $g^{(2)}(V)$ along the x axis and around $V = 0$. Bin of mean number of detected atoms of (a) 50, (b) 125, and (c) 190.

tion, the number of scattered atoms per mode is small compared to unity, and we are in the separated entangled pair production regime. We can verify the $1/N$ dependence of Eq. (2) by binning the data according to the number of scattered atoms per shot. Dividing the 1100 shots into 3 bins of different atom numbers we do observe the expected trend as shown in Fig. 4.

A detailed model of the pair production process must include a more careful description of the collision geometry of colliding and expanding condensates as well as the effect of the condensates' mean field on the scattered atoms, something which is neglected in the above discussion. A rough estimate of the mean field effect is found by adding the chemical potential to the kinetic energy of a scattered atom. This gives an additional velocity broadening of order $0.03v_{\text{rec}}$, not entirely negligible compared to the observed widths. Several workers are developing such models. The correlation functions we observe lend themselves to an investigation of Cauchy-Schwartz inequalities [2]. A cross correlation (back-to-back) greater than an autocorrelation (collinear) violates a Cauchy-Schwartz inequality for classical fields. Sub-Poissonian number differences between opposite directions should also be present [7]. A future publication will discuss these aspects of the experiment.

We acknowledge valuable discussions with K. Kheruntsyan, K. Mølmer, and M. Trippenbach. Our group is a member of the IFRAF institute, and is supported by the french ANR, the QUDEDIS program, and the SCALA program of the European Union.

*christoph.westbrook@institutoptique.fr

- [1] D. C. Burnham and D. L. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **25**, 84 (1970).
 [2] See, for example, D. Walls and G. Milburn, *Quantum Optics* (Springer, New York, 1991).
 [3] H. Pu and P. Meystre, Phys. Rev. Lett. **85**, 3987 (2000).
 [4] L.-M. Duan, A. Sørensen, J. I. Cirac, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. **85**, 3991 (2000).

- [5] K. V. Kheruntsyan, M. K. Olsen, and P. D. Drummond, Phys. Rev. Lett. **95**, 150405 (2005).
 [6] T. Opatrný and G. Kurizki, Phys. Rev. Lett. **86**, 3180 (2001).
 [7] C. M. Savage, P. E. Schwenn, and K. V. Kheruntsyan, Phys. Rev. A **74**, 033620 (2006).
 [8] Y. B. Band, M. Trippenbach, J. P. Burke, and P. S. Julienne, Phys. Rev. Lett. **84**, 5462 (2000).
 [9] P. Naidon and F. Masnou-Seeuws, Phys. Rev. A **68**, 033612 (2003).
 [10] P. Ziń *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94**, 200401 (2005).
 [11] P. Ziń, J. Chwedeńczuk, and M. Trippenbach, Phys. Rev. A **73**, 033602 (2006).
 [12] A. A. Norrie, R. J. Ballagh, and C. W. Gardiner, Phys. Rev. A **73**, 043617 (2006).
 [13] P. Deuar and P. D. Drummond, Phys. Rev. Lett. **98**, 120402 (2007).
 [14] A. Heidmann *et al.*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2555 (1987).
 [15] Z. Y. Ou and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **61**, 50 (1988); Y. H. Shih and C. O. Alley, Phys. Rev. Lett. **61**, 2921 (1988).
 [16] M. A. Horne, A. Shimony, and A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. **62**, 2209 (1989); J. G. Rarity and P. R. Tapster, Phys. Rev. Lett. **64**, 2495 (1990).
 [17] L. Deng *et al.*, Nature (London) **398**, 218 (1999).
 [18] J. M. Vogels, K. Xu, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **89**, 020401 (2002).
 [19] J. M. Vogels, J. K. Chin, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **90**, 030403 (2003).
 [20] N. Gemelke *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 170404 (2005).
 [21] G. K. Campbell *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96**, 020406 (2006).
 [22] A. P. Chikkatur *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 483 (2000).
 [23] K. Gibble, S. Chang, and R. Legere, Phys. Rev. Lett. **75**, 2666 (1995).
 [24] N. Katz, E. Rowen, R. Ozeri, and N. Davidson, Phys. Rev. Lett. **95**, 220403 (2005).
 [25] C. Buggle, J. Leonard, W. von Klitzing, and J. T. M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **93**, 173202 (2004).
 [26] N. R. Thomas, N. Kjærgaard, P. S. Julienne, and A. C. Wilson, Phys. Rev. Lett. **93**, 173201 (2004).
 [27] M. Greiner, C. A. Regal, J. T. Stewart, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **94**, 110401 (2005).
 [28] M. Schellekens *et al.*, Science **310**, 648 (2005).
 [29] G. Baym, Acta Phys. Pol. B **29**, 1839 (1998).
 [30] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **59**, 2044 (1987).
 [31] See EPAPS Document No. E-PRLTAO-99-043742 for the experimental details for interested readers. For more information on EPAPS, see <http://www.aip.org/pubservs/epaps.html>.
 [32] T. Jeltsov *et al.*, Nature (London) **445**, 402 (2007).
 [33] We extrapolate from [34,35] a value of 5.3 nm for the scattering length between $m = 0$ atoms.
 [34] S. Moal *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96**, 023203 (2006).
 [35] P. J. Leo, V. Venturi, I. B. Whittingham, and J. F. Babb, Phys. Rev. A **64**, 042710 (2001).
 [36] J. Viana Gomes *et al.*, Phys. Rev. A **74**, 053607 (2006).

Observation of atom pairs in spontaneous four wave mixing of two colliding Bose-Einstein Condensates: supplementary information

A. Perrin, H. Chang, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, D. Boiron, A. Aspect
and C. I. Westbrook

Here we give some additional technical details concerning the experiment for interested readers.

Raman laser beams: Figure 1 shows the approximate geometry of the Raman laser beams which generate the two colliding condensates. More precisely, an approximately vertical beam propagates in the direction defined by $\mathbf{e}_1 = \cos\theta\mathbf{e}_z + \sin\theta\mathbf{e}_y$ with $\theta \approx 7^\circ$, and where \mathbf{e} represents a unit vector. This beam is π -polarized (parallel to the x -axis). A second, horizontal beam propagates in the direction defined by $\mathbf{e}_2 = \cos\phi\mathbf{e}_x + \sin\phi\mathbf{e}_y$ with $\phi \approx 5^\circ$. The polarization is circular and corresponds nearly to σ^- . Perfect σ^- polarization with respect to the x axis is not possible unless $\phi = 0$. The laser beams are blue-detuned by 400 MHz from the $2^3S_1 - 2^3P_0$ transition (wavelength 1083 nm) and have a relative detuning of about 700 kHz to match the Raman resonance between the two Zeeman sublevels. The horizontal beam is retro-reflected. The intensity of laser L_1 is 100 mW/cm² whereas the intensities of laser L_2 and L'_2 are 50 mW/cm². The waist of these beams is 2.8 mm so that the intensity over the condensate is approximately constant.

The Raman detuning, 700 kHz is not very large compared to the Fourier limited width of the pulses. If in addition, the polarization of one beam is not exactly π or σ , a single beam (L_1 , L_2 or L'_2) can drive a Raman transition with no momentum transfer. This is the likely mechanism for the production of the condensate III in Fig. 2. In subsequent experiments we have observed that a better polarizer for L_1 substantially reduces the number of atoms in condensate III.

Detector resolution: In earlier work, we showed that the single particle resolution was of order 300 μm corresponding to a velocity resolution of 0.1 v_{rec} . The two particle resolution is a factor of $\sqrt{2}$ larger.

Size of the condensate: In the Thomas Fermi limit and for 3×10^4 atoms the chemical potential is $\mu/h = 3.5$ kHz. The Thomas-Fermi radii R are 90 μm and 3.5 μm in the axial and radial directions. Since the number of atoms is not large, the Thomas Fermi approximation is questionable. To go beyond that approximation we calculate the BEC profiles numerically, by solving the Gross-Pitaevskii equation. The deduced profile only differs from the Thomas-Fermi one by the appearance of wings in the profile along the radial axes. This makes the velocity distribution of the condensates slightly different. Our numerically estimated rms ve-

locities given in the main text are about $2\hbar/mR$.

In addition to governing the width of the correlation functions, the quantity v^{rms} should determine the thickness of the scattering sphere. We observe an rms width of 0.08 v_{rec} averaged over the detected part of the sphere, close to the value of v_{yz}^{rms} (0.091 v_{rec}). Along the x direction the thickness of the sphere should be smaller corresponding to v_x^{rms} (0.0044 v_{rec}), but the presence of the unscattered condensates renders that direction inaccessible. Thus the measured thickness of the sphere corroborates our estimate of the size and velocity distribution of the source.

Definition of $g^{(2)}(\mathbf{V})$: Our histogramming procedure to find the correlation function for back to back pairs corresponds to first calculating the averaged unnormalized correlation function $\overline{G^{(2)}}$:

$$\overline{G^{(2)}}(\mathbf{V}) = \int d^3\mathbf{V}_1 G^{(2)}(\mathbf{V}_1, -\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}) \quad (1)$$

For collinear pairs we compute

$$\overline{G^{(2)}}(\mathbf{V}') = \int d^3\mathbf{V}_1 G^{(2)}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}') \quad (2)$$

These results are normalized as explained in the main text to obtain $g^{(2)}(\mathbf{V})$ and $g^{(2)}(\mathbf{V}')$.

Comment on Fig. 3: The figure plots a projected and averaged correlation function. This procedure tends to reduce the peak heights. The plotted curve in each panel is a Gaussian with a width determined by the 3D fit and a height determined by fitting the height of the averaged and projected data.

In the second panel of Fig. 3 a (the y axis), the points lie systematically above the line. This may be due to the fact that because of our elimination of the areas around the condensates, most of the data for the y direction comes from points close to the $y - z$ plane. This means that the main contribution to the correlation data along y comes from different points along the radius of the sphere. Since the thickness of the sphere is of similar shape and size as the correlation function itself, the normalization has the same shape as the correlation data rendering the normalization of the wings of the curve very sensitive to noise. Thus the correlation functions along x and z give a better view of the quality of the data. The fit however makes use of all the data points at once and suffers less from this problem.

Hanbury Brown and Twiss correlations in atoms scattered from colliding condensates

Klaus Mølmer

*Lundbeck Foundation Theoretical Center for Quantum System Research,
Department of Physics and Astronomy, University of Aarhus, DK-8000 Århus C, Denmark*

A. Perrin, V. Krachmalnicoff, V. Leung, D. Boiron, A. Aspect, C.I. Westbrook

*Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, CNRS, Univ Paris-sud
Campus Polytechnique, RD128, 91127 Palaiseau, France*

(Dated: October 1, 2007)

Low energy elastic scattering between clouds of Bose condensed atoms leads to the well known s-wave halo with atoms emerging in all directions from the collision zone. In this paper we discuss the emergence of Hanbury Brown and Twiss coincidences between atoms scattered in nearly parallel directions. We develop a simple model that explains the observations in terms of an interference involving two pairs of atoms each associated with the elementary s wave scattering process.

PACS numbers: 03.75 Gg, 34.50-s

I. INTRODUCTION

In a number of experiments, Bose-Einstein condensates have been prepared to collide with each other with well defined collision energies and momenta. At the microscopic level, when two particles with equal mass and opposite velocities collide in an s-wave collision, the collision partners will propagate away from each other with the same probability amplitude in all directions, but their individual momenta are correlated in opposite directions, as their total center-of-mass momentum is conserved in the collision process. In experiments with colliding condensates, the scattering into all directions has been clearly observed as a so-called s-wave halo of scattered particles[1]. The observation of pair correlations of particle leaving the collision region back-to-back, see Fig. 1, requires efficient detection of all momentum components of individual atoms, and this correlation has recently been observed as a significant coincidence signal in a collision experiment with Bose-Einstein condensates of metastable atomic helium [2]. The same experiment also observed an increased coincidence of particles scattered into *the same* direction. This phenomenon is due to the bosonic nature of the particles and to the fact that several independent scattering processes occur simultaneously.

We shall present a theoretical analysis of this Hanbury Brown and Twiss correlation phenomenon, aiming at a simple model which explains its qualitative and quantitative character in experiments. It is important to emphasize that the appearance of atoms moving in the same direction is not compatible with momentum conservation in a single collision process of two counterpropagating atoms, and our discussion will, indeed, refer to effects that rely on a many-body treatment of the collision of larger ensembles. In order to get physical insight, we will separate the problem in two: first, we treat independent pairwise collisions in which the collisional interaction gives rise to pairs of scattered atoms, and second, we treat the evolution of the many-body state describing the ensemble of scattered atoms neglecting the interactions

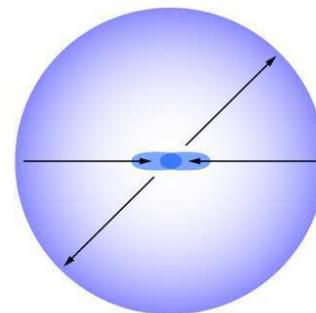


FIG. 1: Diagrammatic representation of two condensates colliding and giving rise to an s-wave halo of scattered particles. Particles are scattered pairwise back-to-back.

in order to apply analytic methods. The validity of this separation and means to improve the theory, if necessary, will be discussed.

In Sec. II, we present a full second quantized description of the collision of a large number of identical bosons. We shall write down the second quantized many-body Hamiltonian, and discuss how the elementary processes of interest relate to the different terms in this Hamiltonian. We treat the case where all the atoms initially populate two counter propagating single particle states which are only weakly depleted by the collisions, and which will hence serve as c-number field sources for creation of pairs This is in analogy with the quantum optics

treatment of spontaneous four-wave mixing, where photon pairs are generated from the interaction of two incident laser beams, described by classical electromagnetic waves. In Sec. III, we discuss the Bogoliubov transformation which provides a very accurate approximation to the time evolution of the system. We shall not, however, apply this transformation in a quantitative treatment, but rather show that its formal structure already predicts the collinear (Hanbury Brown and Twiss) correlation and motivates a quite general analytical Ansatz for the quantum state of the scattered atoms. In Sec. IV, we shall consider the leading two- and four-atom terms in an expansion of the quantum state of scattered atoms, and show that they hold the key to the observed Hanbury Brown and Twiss correlations. In Sec. V, we shall use energy conservation and phase matching considerations to motivate a simple analytical model, from which we show that the coincidence of scattered particles in the same direction, though a many-body effect, can be understood quantitatively from the properties of the simple two-atom scattering wave function. Sec. VI concludes the paper with a discussion of the insights offered by our analysis.

II. COLLIDING BOSE-EINSTEIN CONDENSATES

The Hamiltonian,

$$H = \int d\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) + \frac{g}{2} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \right) \hat{\Psi}(\vec{r}), \quad (1)$$

with field operators obeying the bosonic commutator relations $[\Psi(\vec{r}), \Psi^\dagger(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, gives a good description of bosons interacting at low collision energies via a short range potential. The interaction is represented by a delta-function interaction term with strength g , proportional to the s-wave scattering length. The atoms may be subject to a wide range of trapping or guiding potentials $V(\vec{r})$, or they may propagate freely ($V = 0$), and the initial state of the system may be specified according to experimental preparation procedures to describe for example a single condensate or several macroscopically populated components. We are interested in the situation, where two condensates with well defined opposite momenta, and hence with relatively large spatial extent propagate towards each other. The conventional second quantized Hamiltonian fully describes the problem, and a Monte-Carlo type simulation of the dynamics [3, 4, 5], and perhaps even simpler simulation approaches based on truncated Wigner function expansions [6, 7], may solve this problem in full generality by full 3D propagation of stochastic Schrödinger type equations.

We assume that elastic collisions occur with a sufficiently small cross section that the colliding condensates are only weakly depleted due to the collision term in (1). The Hamiltonian has terms describing the kinetic energy

and the potential energy of atoms moving in the external potential and finally, a term describing the mean field repulsive or attractive potential due to the other atoms of the colliding condensates. But the product of two creation and two annihilation operators in the interaction term does not only read as density dependent correction to the potential energy in the Gross-Pitaevskii equation: the product of two creation operators may also cause the creation of a pair of atoms with momenta entirely different from the incident ones, extracted consistently from the condensates by the product of annihilation operators. The pairs of atoms “created” in the scattering process are the ones that are detected as the s-wave halo around the condensate collision region in Fig. 1.

We can think of each point in the collision zone as a point source for a pair of initially close atoms (atoms only collide at short range), which are subsequently separated by free propagation, perturbed by the interaction with the condensate components. This propagation, together with the coherent addition of pair amplitudes originating from the entire collision zone leads to a complicated many-body entangled state, but energy conservation, imposed after sufficiently long interaction time, and momentum conservation, imposed by phase matching, serves to justify our simpler model, described below.

III. BOGOLIUBOV APPROXIMATION

If the original condensates are only weakly depleted by the scattering, we may expand the Hamiltonian to second order in operator terms and get linear Heisenberg equations of motion that may be solved and tell precisely which Bogoliubov transformation exactly solves the problem. This approach was followed in Refs. [8, 9, 10]. The Bogoliubov solution yields an expression for the atomic annihilation operators at any given time, expressed as a linear combination of the annihilation and creation operators at time zero, where the initial state is assumed to be known (incident condensate wave functions, no scattered atoms). The mean atom number and any higher order correlation function of the field can therefore be expressed algebraically in terms of the expansion coefficients of the Bogoliubov transformation and the known vacuum expectation values of field operator products.

Even though the full many problem has thus been reduced to partial differential equations of a complexity comparable to the single particle Schrödinger equation, one still has to solve time dependent wave equations in three spatial dimensions. Here we shall demonstrate some properties of the solution that follow by purely analytical arguments, i.e., without access to the precise solution.

Although obviously related, the use of the Bogoliubov transformation here is different from the Bogoliubov approximation used to identify low-lying, collective excitation modes in a condensate. The analysis rather follows the philosophy of squeezed light generation with opti-

cal parametric oscillators in quantum optics, where the Bogoliubov method is used to diagonalize a multi-mode Hamiltonian with pair creation and annihilation operators [11], see also [14, 15].

Since the initial state of the atomic scattering modes (momentum components) of interest is the vacuum state, which has a Gaussian (Wigner) probability distribution for the multi-mode field variables, and the Bogoliubov transformation is linear in field operators, the state will, independently of the precise form of the transformation, at all later times be a Gaussian with vanishing mean field expectation value [16]. If we restrict the analysis to a single final momentum state (mode), by a partial trace over all other modes, the state of this mode is also a Gaussian state with vanishing mean amplitude. It is thus fully characterized by the second moments of the hermitian linear combinations $q_{\vec{k}} \equiv (\hat{\Psi}^\dagger(\vec{k}) + \hat{\Psi}(\vec{k}))/\sqrt{2}$, $p_{\vec{k}} = i(\hat{\Psi}^\dagger(\vec{k}) - \hat{\Psi}(\vec{k}))/\sqrt{2}$ of the field operators. We now wish to establish that our Gaussian distribution is symmetric, *i.e.*, $\text{Var}(q_{\vec{k}}) = \text{Var}(p_{\vec{k}})$. This indeed follows if the "anomalous" moments $\langle \hat{\Psi}^\dagger(\vec{k})^2 \rangle = \langle \hat{\Psi}(\vec{k})^2 \rangle = 0$, *i.e.*, if there is no coherence between states differing by two atoms propagating in the given direction. We now apply the physical argument, that the collisional Hamiltonian does not produce such coherence, since the collision process can only produce pairs of atoms propagating in opposite directions, and states, e.g. with zero and two atoms with momentum \vec{k} must also contain zero and two atoms with momentum around $-\vec{k}$. The anomalous moments vanish due to the orthogonality of these parts of the wave function.

It is well known in quantum optics, that a symmetric Gaussian state is equivalent to an incoherent mixture of number states with exponential number distribution, also known as a thermal state with the density matrix [11],

$$\rho_1 = (1 - |t|^2) \sum |t^2|^n |n\rangle \langle n|. \quad (2)$$

The state conditioned upon detection, and annihilation, of a single particle reads,

$$\rho_c = \nu \hat{a} \rho_1 \hat{a}^\dagger = \frac{(1 - |t|^2)^2}{|t|^2} \sum_n |t^2|^n n |n-1\rangle \langle n-1|, \quad (3)$$

where ν is a normalization constant. A straightforward calculation shows that this state has precisely twice as many bosons on average as (2), and hence that the probability to detect two bosons by a low efficiency detector is twice the square of the single quantum detection probability. It thus follows that the coincidence counting rate for observing two atoms leaving the collision zone in the same, narrowly defined, direction, $\langle \hat{\Psi}^\dagger(\vec{k}) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{k}) \hat{\Psi}(\vec{k}) \hat{\Psi}(\vec{k}) \rangle$ is twice the square of the mean counting rate, and twice the coincidence rate for seeing atoms in two unrelated directions.

Without performing any calculations, we therefore understand qualitatively the observed coincidences observed in the experiments [2] as the direct consequence

of the thermal counting statistics (Gaussian quadrature distribution) of the output flux in all scattering directions. This is the famous Hanbury Brown and Twiss effect [17, 18, 19, 20] observed originally as photon bunching in chaotic light resulting from the addition of the contributions of many incoherent emitters. In order to provide a natural estimate of the HBT momentum correlation function, one could develop the field correlations by solution of the linear Bogoliubov-de-Gennes equations for the problem [8, 9, 10] which by the corresponding linear transformation of operators provides the first and second order momentum correlation functions and hence the momentum range within which the bunching effect takes place. Here, we will rather keep track of the binary scattering states, and in particular of the counterpropagating partners, which will give us an alternative and very useful physical interpretation of the effect.

The Bogoliubov transformation of field operators is equivalent to a multi-mode unitary squeezing operation [11], which is indeed nothing but the time evolution operator of a Hamiltonian with quadratic terms in field creation and annihilation operators. Such an operator can be ordered as a product of three exponentials [12, 13]: one involving a sum of products of pairs of creation operators, one involving a sum of products of creation and annihilation operators and one involving a sum of products of pairs of annihilation operators. When acting on the initial vacuum state vector, only the unit term of the series expansion of the latter two exponentials contribute, and the state can therefore be written in terms of a quadratic form of creation operators of atoms, e.g., in the momentum space representation,

$$|\Psi\rangle = N_\Psi \exp\left(\int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{k}_1) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{k}_2)\right) |vac\rangle. \quad (4)$$

The function $\psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ generally depends in a complex manner on the dynamical evolution. It is of course related to the scattering wave function of a single pair of atoms, and we shall come back to this relationship in connection with the model studied in Sec. V of the paper. The use of second quantization automatically yields the bosonic symmetry of our state, but in addition we can require that the pair amplitude function obey the explicit exchange symmetry $\psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \psi(\vec{k}_2, \vec{k}_1)$. For now, let us assume, that the propensity for atoms to be scattered into opposite direction also implies that $\psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ takes non-vanishing values for all directions of the scattered particles, but only if $\vec{k}_1 \sim -\vec{k}_2$. The function $\psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ is not a normalized wave function: the larger its amplitude the more particle pairs are created, and higher order terms of the exponential play more and more important roles. The many-body state $|\Psi\rangle$ is normalized by the prefactor N_Ψ in (4).

We now proceed to determine the density-density correlations of atoms detected in two different directions, labeled by momentum states (\vec{k}, \vec{k}') , *i.e.*, the expectation

value

$$F(\vec{k}, \vec{k}') \propto \langle \hat{\Psi}^+(\vec{k}) \hat{\Psi}^+(\vec{k}') \hat{\Psi}(\vec{k}') \hat{\Psi}(\vec{k}) \rangle \quad (5)$$

The state (4) is a Gaussian state, and by Wick's theorem [21] this expectation value can be written down in terms of only pair-expectation values. We shall address the contribution from the four-atom component in the expansion of the exponential in (4), as this provides a straightforward interpretation of the origin and the behavior of the atomic Hanbury Brown and Twiss correlations.

IV. TWO-ATOM AND FOUR-ATOM STATES

The state (4) can be written explicitly,

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= N_{\Psi} |vac\rangle \\ &+ \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \hat{\Psi}^+(\vec{k}_1) \hat{\Psi}^+(\vec{k}_2) |vac\rangle \\ &+ \frac{1}{2} \left(\int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \hat{\Psi}^+(\vec{k}_1) \hat{\Psi}^+(\vec{k}_2) \right)^2 |vac\rangle \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (6)$$

The zero order term is the vacuum state. The first order term is a two-atom state of atoms propagating back-to-back, and the second order term of the series expansion of (4) is the four-atom state

$$|\Psi_4\rangle \equiv \left(\int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \hat{\Psi}^+(\vec{k}_1) \hat{\Psi}^+(\vec{k}_2) \right)^2 |vac\rangle, \quad (7)$$

which we will show accounts for the observed HBT effect. The squared pair creation operator in (7) can be expanded as a four-fold integral. To obtain the correlation function (5), we have to apply the product of the two annihilation operators on $|\Psi_4\rangle$ and determine the squared norm of the resulting state,

$$F(\vec{k}, \vec{k}') \propto \|\hat{\Psi}(\vec{k}) \hat{\Psi}(\vec{k}') |\Psi_4\rangle\|^2. \quad (8)$$

Using the field commutator relations, we can shift the annihilation operators to the right of all creation operators in (8). This yields a total of 12 terms, which by relabeling and use of the exchange symmetry can be reduced to a sum of three different contributions,

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\vec{k}) \hat{\Psi}(\vec{k}') |\Psi_4\rangle &\propto \\ \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \{ &\psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \psi(\vec{k}, \vec{k}') + \psi(\vec{k}_1, \vec{k}) \psi(\vec{k}_2, \vec{k}') \\ &+ \psi(\vec{k}_1, \vec{k}') \psi(\vec{k}_2, \vec{k}) \} \hat{\Psi}^+(\vec{k}_1) \hat{\Psi}^+(\vec{k}_2) |vac\rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

and thus its squared norm:

$$\begin{aligned} F(\vec{k}, \vec{k}') &\propto \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 |\psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \psi(\vec{k}, \vec{k}') \\ &+ \psi(\vec{k}_1, \vec{k}) \psi(\vec{k}_2, \vec{k}') + \psi(\vec{k}_1, \vec{k}') \psi(\vec{k}_2, \vec{k})|^2 \end{aligned} \quad (10)$$

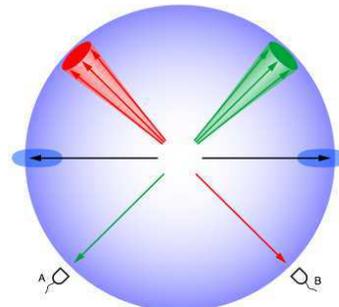


FIG. 2: State of four atoms, scattered pairwise back-to-back. Atoms detected by detectors A and B in an arbitrary pair of directions have partners recoiling in the opposite directions within a certain width imposed by the uncertainty on total and relative momentum of the atoms. The quantum state of the detected pair is obtained by a partial trace over the recoiling momentum components, and the coincidence counting yield in the detectors is just the product of the single detector count signals

This is the main result of the paper. Dealing explicitly with the four atom component it is easy to see what happens. In Fig. 2. we illustrate the case of detection of a particle pair in random directions. Because, as noted below Eq. (4), $\psi(\vec{k}, \vec{k}')$ vanishes unless \vec{k} and \vec{k}' are anti-parallel, the first term in Eq. (10) only contributes if the detectors correspond to opposite directions. For opposite or random directions such as in Fig. 2, there is also no cross term between the second two terms because one vanishes whenever the other is finite. If (\vec{k}, \vec{k}') are nearly parallel, as illustrated in Fig. 3, the last two terms evaluate the two different ψ -terms at the detector directions and at the direction specified by the integration variables. This means that values of the integration variables \vec{k}_1, \vec{k}_2 exist (opposite to the detector directions), where both of the last terms in (10) contribute, namely if \vec{k}_1 and \vec{k}_2 are within the “recoil cone” of both detection directions \vec{k} and \vec{k}' . For identical \vec{k} and \vec{k}' this interference give precisely the factor 2 increase of coincidences compared to the case of random directions. We also note that the enhanced coincidences occur within a solid angle specified precisely by this ”recoil cone”. The next section develops our model one step further and carries out the calculation for the special choice of a Gaussian Ansatz for the function $\psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$.

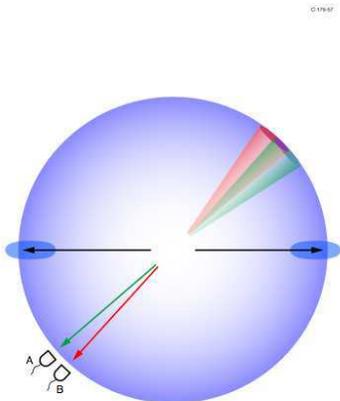


FIG. 3: State of four atoms, with two atoms detected in nearly parallel directions. The detected atoms are not unambiguously identified with their recoiling partners if their momentum distributions are wide enough to overlap. This leads to an interference term in the coincidence counting yield in detectors A and B as expressed by the formal expression (10).

V. RESULT FOR A SIMPLE ANSATZ FOR $\psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$

As stated above, the Bogoliubov approximation to the actual state can be found numerically by solution of linear wave equations. In this section, we shall rather take a simpler approach by making an Ansatz for the shape of the function ψ by appealing to the dynamics and the conservation laws valid in the bipartite collision dynamics.

Energy conservation, which is effectively enforced during the temporal solution of the Schrödinger equation, suggests that the atomic pair state $\psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ describes particles with the same energy as the incident condensate particles. Momentum conservation suggests that they also have the same total momentum as the colliding pair. Due to the finite size of the colliding clouds, this does not strictly imply that the two atoms must have exactly opposite momenta. The finite size of the collision zone implies a quantum mechanical momentum uncertainty, and if contributions from small regions (with correspondingly large total momentum uncertainty) are added coherently the resulting phase matching condition is not sharp if the entire collision zone has finite size. There are therefore quantum fluctuations of both the modulus and direction of the momenta. When the particles escape from the collision zone as illustrated in Fig. 1., they are also repelled by the mean field interaction with the two condensate

components. Here we will not try to describe accurately the effect of this interaction, which is in any case small when atoms leave a condensate after receiving an initial kinetic energy large compared to the chemical potential [22]. Note, however, that such mean field repulsion has in fact turned out to be tractable in the atom laser output from a condensate, where a generalized ABCD matrix formalism yields an analytical description of the propagation [23].

Define coordinates such that the nearly parallel \vec{k}, \vec{k}' of interest are close to the negative z -direction. Their partners at \vec{k}_1, \vec{k}_2 must both be close to the positive z -direction, and we shall assume the z -coordinates to be equal and opposite and only look at their x and y components. Their widths are related to the wave functions of the colliding condensates, both due to the amplitude of collisions out of these condensates and due to the mean field repulsion, and they are thus in general anisotropic. We restrict for simplicity the integration to one transverse coordinate (putting vector arrows on the arguments will yield the 2D result), and we assume that a single pair is described by a wave function, where the wave function amplitude for the recoiling partner has a bell shaped profile, that we for simplicity approximate by a Gaussian, centered at minus the coordinates of the detected particle. The width of this wave function is parametrized by a momentum width K which thus represents both the momentum width of the colliding condensate particles and the acceleration due to the mean field.

Assuming thus the last two terms in (10) to be of such Gaussian shape, and ignoring the first term which vanishes for the geometry studied, we can explicitly calculate the coincidence signal:

$$\begin{aligned}
 F(\vec{k}, \vec{k}') &\propto \int dk_1 dk_2 \\
 & \quad \left| \exp(-((k_1 + k)^2 + (k_2 + k')^2)/2K^2) \right. \\
 & \quad \left. + \exp(-((k_1 + k')^2 + (k_2 + k)^2)/2K^2) \right|^2 \\
 &\propto 1 + \exp(-(k - k')^2/2K^2), \quad (11)
 \end{aligned}$$

where we recall that k and k' here refer to (small) transverse coordinates of the detector directions with respect to a given axis, i.e. $(k - k')$ is the radial momentum of the outgoing particles multiplied with their mutual (small) angle in radians.

We recover the Hanbury Brown and Twiss correlations, and we observe that the correlations persist for final state momenta within a distance from each other of the order of the quantum mechanical uncertainty of the total momentum of the atom pair escaping the collision zone. This is in accord with our interpretation in terms of the interference between the indistinguishable components illustrated as the overlapping recoil cones in Fig.1 c), that leads to the last term in (11) depending on both k and k' , whereas the direct terms lose the k and k' dependence due to the Gaussian integrals.

It is interesting to note, that Eq.(11) follows from a two-state amplitude $\psi(k, k') \propto \exp(-(k + k')^2/2K^2)$

for transverse momentum components of atoms propagating in nearly opposite directions, and therefore the two atom component of Eq.(6) predicts a correlation of atoms in opposite directions with the dependence $|\psi(k, k')|^2 \propto \exp(-(k + k')^2/K^2)$. The Hanbury Brown and Twiss bunching thus occurs within a Gaussian width that is $\sqrt{2}$ times larger than the range of correlation of recoiling atomic momenta. This prediction for the Gaussian wave functions has been verified by more detailed analysis of the full 3D propagation, [5]. One way to understand the broadening is to recognize that the density dependence of the pair production mechanism results in a source which is spatially narrower than the condensates themselves.

Although we have based our analysis on the four-atom component of the full many body states, we have argued that a calculation based on the full state would yield the same results, and in particular that the HBT correlation amounts to a factor of two in parallel directions while the correlation in opposite directions is not limited by this factor. When multiple scattering is neglected, the complete many-body problem is solved by the Bogoliubov-deGennes equations, and the resulting Gaussian/thermal character of the many-body state is fully accounted for by the second moments. This does not imply, however, that one would get the same quantitative results for scattering of few and many atoms. If the normalized wave function for a single scattered pair in the case of a low scattering probability is denoted $\chi(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$, it may be reasonable to describe the collision process by the effective Hamiltonian $H = \kappa \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \chi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{k}_1) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{k}_2) + h.c.$, where κ is a coupling strength. The unitary time evolution operator is the exponential of this operator multiplied by $(t/i\hbar)$ or integrated over a suitable time interval. We note that this does not generally result in an expression for $\psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ in (4) which is proportional to $\chi(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$. In the case of single mode squeezing, it is known that one must evaluate the hyperbolic tangent function of the squeezing parameter to convert the squeezing operator to the normal order form [11], and in our general multimode case, normal ordering is accomplished by evaluating the *tanh* function of a matrix argument [12, 13]. For small arguments, in the perturbative regime of spontaneous four wave mixing, *tanh* is a linear function, and we get the same momentum dependence. Outside the perturbative regime, we retain the factor 2 bunching effect by our general argument, but the precise shape of the correlation peak may be modified.

VI. DISCUSSION

We have presented a simple interpretation of the observed Hanbury Brown and Twiss correlations observed in the elastic scattering of Bose-Einstein condensates. We emphasize, that in order to make quantitative predictions, it is necessary to make a more elaborate calculation of the pair formation and the propagation of the atoms

both in free space and in the regions where the mean field of the condensate components act as a perturbing potential. Such a description is offered by the Bogoliubov theory in Refs.[8, 9, 10], and we note that [10] as well as [4] also provide numerical evidence for the density correlations discussed in the present paper. Our interpretation relies on the structural property of the solutions to the Bogoliubov theory (4), but it proceeds by applying a different physical reasoning which recognizes that the two detected particles are accompanied by collision partners propagating in the opposite directions, and we hence observe part of a four-atom state. This is an appealing picture, in particular because the prediction of the coincidence signal, and in particular its width, relates to the transverse spreading of the pair wave functions of oppositely propagating atoms after the bipartite collisions.

As we discussed in the text, when observed from only one direction, the reduced density matrix of the expanding atomic cloud is similar to a thermal state. This density matrix is sufficient to predict the outcome of any measurement on the observed part of the system, and it explains the experimental findings as an analogue of the observed bunching of the photons from a thermal/chaotic light source. The optical Hanbury Brown and Twiss experiment has a characteristic transverse spatial scale over which the correlation falls to unity, related to the transverse momentum distribution of the photons impinging on the detector, and in a similar manner we have a finite transverse coherence length in the atomic scattering experiment. We discussed the isotropic s-wave scattering, with possible corrections due to anisotropy of the colliding clouds and spatial phase matching. In addition, one may apply a periodic background potential, which may alter the energy dependence on the momentum vector of moving atoms, and hence modify the scattering profile [24, 25], and with confinement to one dimension, it may lead to highly selective population of specific momentum states with strong, observable quantum correlations [26, 27].

It is interesting to recall that a mixed quantum state, i.e., a density matrix, can always be formally obtained as the reduced state of a larger quantum system which is in a pure state, and in particular any thermal quantum state of a bosonic degree of freedom can be modelled by a pure squeezed state in a doubled tensor space. This is known as the "thermofields" formulation [28], and for example the single mode thermal state (2) can be obtained as the trace over one of the modes of a non-degenerate two mode squeezed state, as obtained, e.g., from a non-degenerate optical parametric oscillator (OPO),

$$|\psi_{OPO}\rangle \propto \sum_n t^n |n, n\rangle. \quad (12)$$

In our four-atom analysis, the apparently thermal state arriving at nearby detectors, is precisely part of such a larger system. The advantage of this insight is that the spatial scale of the extended state, in our case the probability distribution of the total momentum of scattered

atoms, directly yields the density correlations in the reduced density matrix.

Finally, if the collision occurs between two different bosonic species, the same kind of correlations will occur for the density correlations of each species, but not for the cross correlation, where the recoiling atoms are distinguishable, and hence do not interfere. For collisions between bosons and fermions the situation is different. Electrons have been demonstrated to show anti-bunching related to their fermionic character [29], and anti-bunching has also been demonstrated for neutral fermionic atoms [30, 31]. Collisions between a Bose condensate and a degenerate Fermi gas, where all fermions initially occupy orthogonal states, but where Pauli blocking forbids more than one atom ending up in the same

final state should lead to observable anti-bunching effects in the scattered bosons.

Acknowledgments

The authors gratefully acknowledge discussions with Karen Kheruntsyan and financial support from the European Union integrated project SCALA and the ESF cold atom network QUEDDIS. The Atom Optics group of LCFIO is a member of the IFRAF institute, and is supported by the french ANR and by the Atom Chips program of the European Union.

-
- [1] J.M. Vogels, K. Xu, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **89**, 020401 (2002); A. P. Chikkatur et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 483 (2000); K. Gibble, S. Chang, and R. Legere, Phys. Rev. Lett. **75**, 2666 (1995); C. Buggle, J. Leonard, W. von Klitzing, and J. T. M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **93**, 173202 (2004); N. R. Thomas, N. Kjærgaard, P. S. Julienne, and A. C. Wilson, Phys. Rev. Lett. **93**, 173201 (2004).
 - [2] A. Perrin, H. Chang, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook, arXiv:0704.3047v1
 - [3] M. J. Steel, M. K. Olsen, L. I. Plimak, P. D. Drummond, S. M. Tan, M. J. Collett, D. F. Walls, and R. Graham, Phys. Rev. A **58**, 4824 (1998).
 - [4] P. Deuar and P. D. Drummond Phys. Rev. Lett. **98**, 120402 (2007).
 - [5] K. Kheruntsyan, private communication.
 - [6] A. Sinatra, C. Lobo, and Y. Castin, Phys. Rev. Lett. **87**, 210404 (2001).
 - [7] A. A. Norrie, R. J. Ballagh, and C. W. Gardiner, cond-mat/0602061
 - [8] P. Ziń, J. Chwedeńczuk, A. Veitia, K. Rzażewski, and M. Trippenbach Phys. Rev. Lett. **94**, 200401 (2005)
 - [9] J. Chwedeńczuk, P. Ziń, K. Rzażewski, and M. Trippenbach Phys. Rev. Lett. **97**, 170404 (2006)
 - [10] P. Ziń, J. Chwedeńczuk, and M. Trippenbach Phys. Rev. A **73**, 033602 (2006)
 - [11] C. M. Caves and B. L. Schumaker, Phys. Rev. A **31**, 3068 (1985).
 - [12] C. F. Lo, Phys. Rev. A **51**, 1706 - 1708 (1995)
 - [13] Hong-yi Fan, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **5**, R147 (2003)
 - [14] U. V. Poulsen and K. Mølmer Phys. Rev. A **63**, 023604 (2001)
 - [15] U. V. Poulsen and K. Mølmer, Phys. Rev. A **76**, 013614 (2007).
 - [16] A. K. Ekert and P. L. Knight, Phys. Rev. A **43**, 3934 (1991).
 - [17] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, Nature (London) **178**, 1046 (1956)
 - [18] R. Q. Twiss, A. G. Little, and R. Hanbury Brown, Nature (London) **180**, 324 (1957)
 - [19] G. A. Rebka and R. V. Pound, Nature (London) **180**, 324 (1957)
 - [20] B. L. Morgan and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **16**, 1012 (1966)
 - [21] W. H. Louisell, *Quantum Statistical properties of Radiation*, John Wiley and Sons, New York, 1973.
 - [22] N. P. Robins, C. Figl, S. A. Haine, A. K. Morrison, M. Jeppesen, J. J. Hope, and J. D. Close, Phys. Rev. Lett. **96**, 140403 (2006).
 - [23] Y. Le Coq, J. H. Thywissen, S. A. Rangwala, F. Gerbier, S. Richard, G. Delannoy, P. Bouyer, and A. Aspect, Phys. Rev. Lett. **87**, 170403 (2001); J.-F. Riou, W. Guerin, Y. Le Coq, M. Fauquembergue, V. Josse, P. Bouyer, and A. Aspect, Phys. Rev. Lett. **96**, 070404 (2006).
 - [24] N. Katz, E. Rowen, R. Ozeri, and N. Davidson, Phys. Rev. Lett. **95**, 220403 (2005)
 - [25] K. Mølmer, New J. Phys. **8**, 170 (2006)
 - [26] K. M. Hilligsøe and K. Mølmer, Phys. Rev. A **71**, 041602(R) (2005)
 - [27] G. K. Campbell, J. Mun, M. Boyd, E. W. Streed, W. Ketterle, and D. E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **96**, 020406 (2006)
 - [28] S. M. Barnett and P. L. Knight J. Opt. Soc. Am. B, **2**, 467 (1985)
 - [29] H. Kiesel, A. Renz and F. Hasselbach, Nature (London) **418**, 392, 2002
 - [30] T. Jelten, J. M. McNamara, W. Hogervorst, W. Vassen, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, A. Perrin, H. Chang, D. Boiron, A. Aspect and C. I. Westbrook, Nature (London) **445**, 402, (2007)
 - [31] T. Rom, Th. Best, D. van Oosten, U. Schneider, S. Flling, B. Paredes and I. Bloch, Nature (London) **444**, 733 (2006)

Atomic four-wave mixing via condensate collisions

A. Perrin¹, C. M. Savage², D. Boiron¹, V. Krachmalnicoff¹, C. I. Westbrook¹ and K.V. Kheruntsyan³

¹ Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, CNRS, Univ Paris-Sud, Campus Polytechnique, RD128, 91127 Palaiseau Cedex, France

² ARC Centre of Excellence for Quantum-Atom Optics, Department of Physics, Australian National University, Canberra ACT 0200, Australia

³ ARC Centre of Excellence for Quantum-Atom Optics, School of Physical Sciences, University of Queensland, Brisbane, QLD 4072, Australia

E-mail:

christoph.westbrook@institutoptique.fr, karen.kheruntsyan@uq.edu.au

Abstract. We perform a theoretical analysis of atomic four-wave mixing via a collision of two Bose-Einstein condensates of metastable helium atoms, and compare the results to a recent experiment. We calculate atom-atom pair correlations within the scattering halo produced spontaneously during the collision. We also examine the expected relative number squeezing of atoms on the sphere. The analysis includes first-principles quantum simulations using the positive P -representation method. We develop a unified description of the experimental and simulation results.

PACS numbers: 03.75.Kk, 34.50.-s, 03.75.Nt

Submitted to: *New J. Phys.*

1. Introduction

Recent years have seen the introduction of powerful new tools for studying degenerate quantum gases. For example, on the experimental side correlation measurements offer a new experimental probe of many-body effects [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. On the theoretical side, the challenges posed by the new experimental techniques are being met by quantum dynamical simulations of large numbers of interacting particles in realistic parameter regimes. These are becoming possible due to the advances in computational power and improvements in numerical algorithms (for recent examples, see [12, 13, 14]).

In this paper we study metastable helium ($^4\text{He}^*$), which is currently unique in *quantum atom optics* in that it permits a comparison of experimentally measured [15] and theoretically calculated quantum correlations. This is one of the first examples in which experimental measurements can be considered in the context of first-principles calculations. Our goal in this paper is to confront a theoretical analysis with the results of recent experiments on atomic four-wave mixing via a collision of two Bose-Einstein condensates (BECs) of metastable $^4\text{He}^*$ atoms [15]. Figure 1 is a schematic momentum space diagram of these experiments. Two condensates, whose atoms have approximately equal but opposite momenta, \mathbf{k}_1 and $\mathbf{k}_2 \simeq -\mathbf{k}_1$, interact by four-wave mixing, while they spatially overlap, to produce correlated atomic pairs with approximately equal but opposite momenta, \mathbf{k}_3 and \mathbf{k}_4 , satisfying momentum conservation, $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$. Figure 1 corresponds to the experimental data shown in figure 2 of [15], since after time-of-flight expansion, atomic momentum is mapped into atomic position.

We perform first-principles quantum simulations of the collision dynamics using the positive P -representation method [16, 17, 18]. The advantage of this method is that given the Hamiltonian of the interacting many-body system, no additional approximations are imposed to simulate the quantum dynamics governed by the Hamiltonian. The drawback on the other hand, is that it usually suffers from large sampling errors and the boundary term problem [19] as the simulation time t_{sim} increases, eventually leading to diverging results.

An empirically estimated upper bound for the positive- P simulation time (with controllable sampling error) of condensates with s -wave scattering interactions is given approximately by [20]

$$t_{\text{sim}} \lesssim 2.5m(\Delta V)^{1/3}/[4\pi\hbar a\rho_0^{2/3}], \quad (1)$$

where m is the atom mass, a is the s -wave scattering length, ρ_0 is the condensate peak density, and $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$ is the volume of the elementary cell of the computational lattice, with lattice spacings of Δx , Δy , and Δz . Applying this formula to metastable helium, we see that this is a particularly challenging case among commonly condensed atoms due to its small atomic mass and relatively large scattering length. Our simulations are restricted to short interaction times (typically $\lesssim 25 \mu\text{s}$), which are about 6 times shorter than the experimental interaction time of [15]. Despite this, our positive- P simulations provide useful insights into the experimental observations; in addition, they can serve as benchmarks for approximate theoretical methods (such

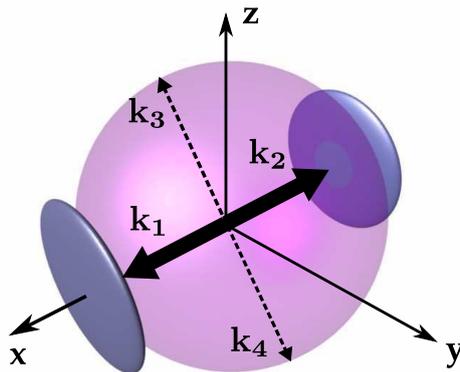


Figure 1. Schematic momentum space diagram of the atomic four-wave mixing interaction. Optical Raman pulses generate untrapped condensates with momenta \mathbf{k}_1 and $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$ parallel to the x -axis (dark disks). These undergo a four-wave mixing interaction to produce correlated atomic pairs on a spherical shell of radius k_1 .

as the Hartree-Fock-Bogoliubov method [21, 22, 23, 24]) to establish the range of their validity.

We calculate atom pair correlations within the scattering halo produced spontaneously during the collision (see figure 1). The scattering halo is a spherical shell in momentum space. In the limit of small occupation of the scattered modes, the s -wave nature of the collisions ensures an approximately uniform atom population over the halo. We consider the strength and the width of the correlation signal, as well as the momentum width of the halo. We also analyze relative atom number squeezing and the violation of the classical Cauchy-Schwartz inequality.

In Sec. 2 of this paper we will summarize the experimental results we wish to analyze. In Sec. 3 we discuss order of magnitude estimates. In Sec. 4 we describe simulations using the positive P -representation method, and in Sec. 5 we discuss the results of our simulations. Sec. 6 summarizes our work.

2. Summary of experimental results

2.1. Overview of the experiment

The starting point of the experiment is a $^4\text{He}^*$ condensate of 10^4 to 10^5 atoms confined in a magnetic trap whose frequencies are: $\omega_x/2\pi = 47$ Hz and $\omega_y/2\pi = \omega_z/2\pi = 1150$ Hz. A sudden Raman outcoupling drives the trapped $^4\text{He}^*$ from the $m_x = 1$ Zeeman sublevel into the magnetic field insensitive state $m_x = 0$. [15]. The Raman transition also splits the initial ($m_x = 1$) condensate into two roughly equally populated condensates with opposite velocities along the x direction. The magnitude of each velocity is equal to the recoil velocity $v_r = 9.2$ cm/s, defined by the momentum of the photons used to create the colliding condensates $\hbar k_r$, $k_r = 5.8 \times 10^6$ m $^{-1}$. The relative velocity $2v_r$ of the two condensates is about 8 times higher than the speed of sound $c_s = \sqrt{\mu/m}$ of the initial condensate, ensuring that elementary excitations of the condensates correspond to free

particles.

During the separation of the condensates, elastic collisions occurring between atoms with opposite velocities scatter a small fraction (5%) of the total initial atom number into the halo. The system is shown in three-dimensions in an accompanying video of the experimental results after a 320 ms time of flight ‡. For the purposes of this paper, the experiment consists in the acquisition of the three dimensional positions of the particles scattered into the collision halo after the time of flight. This information permits the reconstruction of the 3D momentum vectors of the individual particles after they have ceased interacting with each other.

2.2. Main results

Knowledge of the momentum vectors in turn permits the construction of two-particle correlation functions in momentum space. The correlation function shows features for particles traveling both back to back and collinearly. The back-to-back correlation results from binary, elastic collisions between atoms, whereas the collinear correlation is a two particle interference effect involving members of two different pairs: a Hanbury Brown-Twiss correlation [25]. Both correlation functions are anisotropic because of the anisotropy of the initial colliding condensates.

To quantify these correlations, we first introduce the unnormalized normally-ordered second-order correlation function between the densities at two points in momentum space,

$$G^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \langle : \hat{n}(\mathbf{k}_1) \hat{n}(\mathbf{k}_2) : \rangle. \quad (2)$$

Here, $\hat{n}(\mathbf{k}) = \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k})$ is the momentum density operator, $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$ and $\hat{a}(\mathbf{k})$ are the Fourier transforms of the field creation and annihilation operators $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x})$ and $\hat{\Psi}(\mathbf{x})$, and the colons $::$ stand for normal ordering of the operators according to which all creation operators stand to the left of the annihilation operators, so that

$$\langle : \hat{n}(\mathbf{k}_1) \hat{n}(\mathbf{k}_2) : \rangle = \langle \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2) \hat{a}(\mathbf{k}_2) \hat{a}(\mathbf{k}_1) \rangle. \quad (3)$$

Because of a low data rate, the correlation measurements must be averaged over the entire collision sphere to get statistically significant results. The average *collinear* (CL) second-order correlation as a function of the relative displacement Δk_i in the k_i -direction ($i = x, y, z$) is defined as

$$g_{CL}^{(2)}(\Delta k_i) = \frac{\int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{k} G^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{e}_i \Delta k_i)}{\int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{k} \langle \hat{n}(\mathbf{k}) \rangle \langle \hat{n}(\mathbf{k} + \mathbf{e}_i \Delta k_i) \rangle}, \quad (4)$$

‡ A 3 dimensional, animated rendition of the atomic positions 320 ms after release from the trap. The vertical positions are derived from the arrival times as described in [15]. Each point corresponds to the detection of one atom and the animation shows the sum of 50 separate runs. The ellipsoids at the sides are the colliding condensates. The ellipsoids at the top and bottom result from imperfect Raman polarizations and stimulated atomic 4 wave mixing (see [15]). The 4 condensates are excluded from the analysis given in the text.

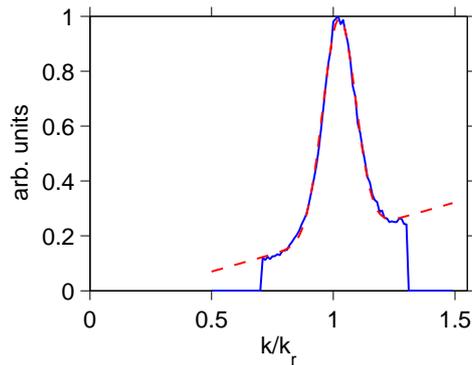


Figure 2. Cross section of the scattering halo. A sloped background is present due to thermal atoms in the trap. This background has been fit to a straight line and subtracted in order to estimate the rms width, $\delta k \simeq 0.067k_r$.

where \mathbf{e}_i is the unit vector in the k_i direction. The normalization of $g_{CL}^{(2)}(\Delta k_i)$ ensures that for uncorrelated densities $g_{CL}^{(2)}(\Delta k_i) = 1$. The integration domain \mathcal{D} in (4) selects a certain region of interest in momentum space and can be defined, for example, to contain only a narrow spherical shell and to eliminate the initial colliding condensates. Due to the averaging, the dependence of the correlation functions on the direction \mathbf{k} is lost.

The average *back-to-back* (BB) correlation function $g_{BB}^{(2)}(\Delta k_i)$ between two diametrically opposite points, one of which is additionally displaced by Δk_i in the k_i -direction, is defined similarly to $g_{CL}^{(2)}(\Delta k_i)$:

$$g_{BB}^{(2)}(\Delta k_i) = \frac{\int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{k} G^{(2)}(\mathbf{k}, -\mathbf{k} + \mathbf{e}_i \Delta k_i)}{\int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{k} \langle \hat{n}(\mathbf{k}) \rangle \langle \hat{n}(-\mathbf{k} + \mathbf{e}_i \Delta k_i) \rangle}. \quad (5)$$

The experimental observations can be summarized as follows. The width of both correlation functions along the axial direction of the condensate, the x -axis, is limited by the resolution of the detector and hence contains little information about the collision. In the radial direction (with respect to the symmetry of the colliding condensates), one observes a peak which can be fitted to a Gaussian function with rms widths $\sigma_{y,z}^{CL}$ and $\sigma_{y,z}^{BB}$ for collinear and back-to-back cases respectively. The experimental results are summarized in the following table

$\sigma_{y,z}^{BB}/k_r$	$\sigma_{y,z}^{CL}/k_r$	$\sigma_{y,z}^{CL}/\sigma_{y,z}^{BB}$
0.081 ± 0.004	0.069 ± 0.008	0.85 ± 0.15

(6)

One can also use the data to deduce the averaged radial width δk of the scattering halo. Figure 2 shows a cross section of the halo, averaged over all accessible scattering angles. The presence of the unscattered condensates prevents observation of the shell along the x -axis, but along the accessible directions we find $\delta k \simeq 0.067k_r$.

3. Qualitative analysis

In this section we discuss some simple, analytical estimates of the measured quantities. In later sections we will do more precise, numerical calculations which will verify the results of this section.

3.1. Width of the pair correlation functions

As discussed in [15], the width of the back-to-back and collinear correlation functions should be on the order of the momentum width of the initial condensate, which in turn is proportional to the inverse width of its spatial profile. For a Gaussian density profile of the initial condensate in position space $\rho(\mathbf{x}) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\Psi}(\mathbf{x}) \rangle = \rho_0 \exp[-\sum_{i=x,y,z} r_i^2/(2w_i^2)]$, and therefore a Gaussian density distribution in momentum space, $n(\mathbf{k}) = \langle \hat{n}(\mathbf{k}) \rangle \propto \exp[-\sum_{i=x,y,z} k_i^2/(2\sigma_i^2)]$, with $\sigma_i = 1/w_i$, an approximate theoretical treatment based on a simple ansatz for the pair wavefunction predicts a Gaussian dependence of the back-to-back (BB) and collinear (CL) correlation functions on the relative wavevectors Δk_i [25]:

$$G^{(2)}(\mathbf{k}, -\mathbf{k} + \mathbf{n}_i \Delta k_i) \propto \exp\left(-\frac{\Delta k_i^2}{2(\sigma_i^{BB})^2}\right), \quad (7)$$

$$G^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{n}_i \Delta k_i) \propto \exp\left(-\frac{\Delta k_i^2}{2(\sigma_i^{CL})^2}\right). \quad (8)$$

The widths of the back-to-back (σ_i^{BB}) and collinear (σ_i^{CL}) correlations are related to the momentum-space width σ_i of the initial (source) condensate via [25]

$$\sigma_i^{BB}/\sigma_i = \sqrt{2}, \quad (9)$$

$$\sigma_i^{CL}/\sigma_i = 2, \quad (10)$$

and therefore the width of the back-to-back correlation is $\sqrt{2}$ times smaller than the width of the collinear correlation.

In Sec. 5.1 the initial momentum-space widths are found to be $\sigma_x = 0.0025k_r$ and $\sigma_{y,z} = 0.055k_r$, assuming $N = 9.84 \times 10^4$ atoms. Expressing the experimentally measured widths in units of $\sigma_{y,z}$, we can rewrite (6) as

$\sigma_{y,z}^{BB}/\sigma_{y,z}$	$\sigma_{y,z}^{CL}/\sigma_{y,z}$	$\sigma_{y,z}^{CL}/\sigma_{y,z}^{BB}$	(11)
1.47 ± 0.07	1.25 ± 0.15	0.85 ± 0.15	

and therefore, (9) is in agreement with the measured width of the radial back-to-back correlation function, whereas (10) overestimates the width of the collinear correlation function by almost 60%. As we show below, first-principles simulations using the positive- P method and incorporating atom-atom interactions result in widths which are closer to the experimental values.

The discrepancy between the two theoretical approaches (which apparently is larger for the collinear correlations than for the back-to-back ones) comes mostly from the fact that the above calculation is made for a Gaussian shape of the initial BEC density profile, whereas in practice and in the positive- P simulations the spatial density of a

harmonically trapped condensate is closer to an inverted parabola (as in the Thomas-Fermi limit) rather than to a Gaussian. An alternative theoretical model [26], based on the undepleted source condensate approximation and a numerical solution to the linear operator equations of motion for scattered atoms, also confirms that for short times the momentum-space correlation widths are narrower if the source condensate has a parabolic spatial density profile, compared to the case of a Gaussian density profile.

3.2. Width of the scattered halo

A second, experimentally accessible quantity in a BEC collision is the width $\hbar\delta k_i$ in momentum space of the halo on which the scattered atoms are found. Clearly the momentum spread σ_i (in $i = x, y$ or z direction) of the colliding condensates imposes a minimum width

$$\delta k_i \gtrsim \sigma_i. \quad (12)$$

This limit suggests that the halo could be anisotropic. As noted above however, the experiment in [15] is not highly sensitive to such an anisotropy, and measures the width chiefly in the y, z -directions.

Other physical considerations also affect this width, and suggest that the halo should rather be isotropic, in which case we can drop the index from δk . Here we discuss two mechanisms that impose a finite radial width on the halo.

If the pairs are produced during a finite time interval Δt , the total energy of the pair is necessarily broadened by $\hbar/\Delta t$. This is true even if the relative momentum is well defined. For a mean k -vector k_r , the finite interaction time between the colliding BECs results in a broadening of

$$\delta k \simeq \frac{m}{\hbar k_r \Delta t}, \quad (13)$$

where we assumed $\delta k/k_r \ll 1$. In the experiment, the collision time is sufficiently long that the above effect does not impose a limitation on the width of the sphere. In the positive- P simulations however, numerical stability problems limit the maximum collision time that can be simulated, as discussed in Sec. 5, and this time does indeed impose a width on the halo. For short collision times, where the scattering is in the spontaneous regime, our numerical results for the width δk are in good agreement with the simple estimate of Equation (13).

For long collision times it can happen that so many atoms are scattered that Bose enhancement and stimulated effects become important. In this case the width of the scattering shell can be estimated by a slightly more involved approximate approach based on analytic solutions for the uniform system within the undepleted ‘‘pump’’ (source condensate) approximation [27]. Under this approximation, the present system is equivalent to the dissociation of a condensate of molecular dimers studied in detail in [13, 28, 29]. The latter system in turn is analogous to parametric down-conversion in optics [30]. The details of the approximate solutions, common to condensate collisions

and molecular dissociation, and the relationship between them are given in Appendix C. The resulting width of the halo found from this approach is

$$\delta k \simeq \frac{4\pi a \rho_0}{k_r}. \quad (14)$$

We see that in this regime, the width is proportional to the scattering length a and the peak density ρ_0 , but it no longer depends on the collision duration.

The physical interpretation of Equation (14) is that with the stronger effective coupling (or nonlinearity) $a\rho_0$, one can excite and amplify spectral components that are further detuned from the exact resonance condition $\hbar\Delta_k = 0$ (or further “phase mismatched”). The inverse dependence on collision momentum k_r can be understood via the quadratic dependence of the energy on momentum k : to get the same excitation at a given energy offset $\hbar\Delta_k$, (C.3), one requires smaller absolute momentum offset δk at larger k_r than at small k_r .

Positive- P simulations covering the transition from the spontaneous to stimulated regimes are available for ^{23}Na condensate collisions as in [14]. The numerical results in this case are in agreement with the simple analytic estimate of Equation (14). More specifically, we find that for collision durations between 300 μs and 640 μs the actual numerical results for the width of the spherical halo vary, respectively, between $\delta k/k_r \simeq 0.13$ and $\delta k/k_r \simeq 0.087$, whereas Equation (14) predicts $\delta k/k_r \simeq 0.096$.

For $^4\text{He}^*$, on the other hand, the small mass and the larger scattering length of $^4\text{He}^*$ atoms limit the maximum simulation time to $t_{\text{sim}} \lesssim 25 \mu\text{s}$. This is far from the stimulated regime and therefore we do not have a direct comparison of the numerical results with Equation (14). The experiment is also not in the stimulated regime. We are nevertheless tempted by the numerical ^{23}Na result to extrapolate Equation (14) to $^4\text{He}^*$ BEC collisions in the long time limit and we obtain $\delta k/k_r \simeq 0.05$. Adding this width in quadrature to the momentum width of the initial condensate, $\sigma_{y,z} \simeq 0.055k_r$, gives $\sqrt{(0.05k_r)^2 + (0.055k_r)^2} = 0.074k_r$, not far from the experimentally observed radial momentum width of $\delta k \simeq 0.067k_r$. We thus suggest that the mechanism leading to Equation (14) may play a role in the experiment.

4. Model

The effective field theory Hamiltonian governing the dynamics of the collision of BECs is given by

$$\hat{H} = \int d\mathbf{x} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \hat{\Psi}|^2 + \frac{\hbar U_0}{2} \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} \right\}, \quad (15)$$

where $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ is the field operator with the usual commutation relation $[\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, m is the atomic mass, the first term is the kinetic energy, and the second term describes the s -wave scattering interactions between the atoms. The trapping potential for preparing the initial condensate before the collision is omitted since we are only modeling the dynamics of the outcoupled condensates in free

space. The use of the effective delta function interaction potential $U(x-y) = U_0\delta(x-y)$ assumes a UV momentum cutoff k^{\max} . In our numerical simulations the momentum cutoff is imposed explicitly via the finite computational lattice. If the lattice spacings (Δx , Δy , Δz) in each spatial dimensions are chosen to be much larger than the s -wave scattering length a , then the respective momentum cutoffs satisfy $k_{x,y,z}^{\max} \ll 1/a$. In this case the coupling constant U_0 is given by the familiar expression $U_0 \simeq 4\pi\hbar a/m$ [31] without the need for explicit renormalization.

To model the dynamics of quantum fields describing the collision of two BECs, we use the positive P -representation approach [16]. In this approach the quantum field operators $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ and $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t)$ are represented by two complex stochastic c -number fields $\Psi(\mathbf{x}, t)$ and $\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ whose dynamics is governed by the following stochastic differential equations [14]:

$$\frac{\partial\Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\Psi - iU_0\tilde{\Psi}\Psi\Psi + \sqrt{-iU_0\Psi^2}\zeta_1(\mathbf{x}, t), \quad (16a)$$

$$\frac{\partial\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\tilde{\Psi} + iU_0\Psi\tilde{\Psi}\tilde{\Psi} + \sqrt{iU_0\tilde{\Psi}^2}\zeta_2(\mathbf{x}, t). \quad (16b)$$

Here, $\zeta_1(\mathbf{x}, t)$ and $\zeta_2(\mathbf{x}, t)$ are real independent noise sources with zero mean, $\langle\zeta_j(\mathbf{x}, t)\rangle = 0$, and the following nonzero correlation:

$$\langle\zeta_j(\mathbf{x}, t)\zeta_k(\mathbf{x}', t')\rangle = \delta_{jk}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t'). \quad (17)$$

The stochastic fields $\Psi(\mathbf{x}, t)$ and $\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ are independent of each other [$\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t) \neq \Psi^*(\mathbf{x}, t)$] except in the mean, $\langle\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t)\rangle = \langle\Psi^*(\mathbf{x}, t)\rangle$, where the brackets $\langle\dots\rangle$ refer to stochastic averages with respect to the positive P -distribution function. In numerical realizations, this is represented by an ensemble average over a large number of stochastic realizations (trajectories). Observables described by quantum mechanical ensemble averages over normally-ordered operator products have an exact correspondence with stochastic averages over the fields $\Psi(\mathbf{x}, t)$ and $\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t)$:

$$\langle[\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t)]^m[\hat{\Psi}(\mathbf{x}', t)]^n\rangle = \langle[\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t)]^m[\Psi(\mathbf{x}', t)]^n\rangle. \quad (18)$$

The initial condition for our simulations is a coherent state of a trapped condensate, modulated with a standing wave that imparts initial momenta $\pm k_r$ (where $k_r = mv_r/\hbar$ and v_r is the collision velocity) in the x direction,

$$\Psi(\mathbf{x}, 0) = \langle\hat{\Psi}(\mathbf{x}, 0)\rangle = \sqrt{\rho_0(\mathbf{x})/2}(e^{ik_r x} + e^{-ik_r x}), \quad (19)$$

with $\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, 0) = \Psi^*(\mathbf{x}, 0)$. Here, $\rho_0(\mathbf{x})$ is the density profile given by the ground state solution to the Gross-Pitaevskii equation in imaginary time. The above initial condition models a sudden Raman outcoupling of a BEC of trapped $^4\text{He}^*$ atoms in the $m_x = 1$ sublevel into the magnetic field insensitive state $m_x = 0$, using two horizontally counter-propagating lasers and a third vertical laser [15]. In this geometry, the Raman transitions split the initial ($m_x = 1$) condensate into two equally populated condensates and simultaneously impart velocities of $\pm v_r$ onto the two halves. As a result the two outcoupled condensates undergo a collision and expand in free space. Accordingly, in our dynamical simulations, the field $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ represents the atoms in the untrapped state

$m_x = 0$, having the s -wave scattering length of $a_{00} = 5.3$ nm ([15] and references therein), while the initial density profile $\rho_0(\mathbf{x})$ refers to that of the trapped atoms in the $m_x = 1$ state having the scattering length of $a_{11} = 7.51$ nm [32]. The same distinction in terms of the scattering length in question applies to the definition of the interaction strength $U_0 \simeq 4\pi\hbar a/m$, in which a has to be understood as a_{11} for the trapped condensate or as a_{00} for the outcoupled cloud.

In our simulations we assume for simplicity that the outcoupling from the trapped $m_x = 1$ state is 100% efficient, in which case the entire population is transferred into the $m_x = 0$ state and therefore we have to only model s -wave scattering interactions between the atoms in the $m_x = 0$ state. In the experiment, on the other hand, the transfer efficiency is only about 60% and therefore the collisions between the atoms in the $m_x = 0$ and $m_x = 1$ are not completely negligible and maybe responsible for some of the deviations between the present theoretical results and the experimental observations.

5. Results and discussion

5.1. Main numerical example

Here we present the results of positive- P numerical simulations of collisions of two condensates of $^4\text{He}^*$ atoms ($m \simeq 6.65 \times 10^{-27}$ kg) as in the experiment of [15]. The key parameters in our main numerical example are the collision velocity, $v_r = 9.2$ cm/s, and the peak density of the initial trapped condensate, $\rho_0 = 2.5 \times 10^{19}$ m $^{-3}$. The trap frequencies are matched exactly with the experimental values, $\omega_x/2\pi = 47$ Hz and $\omega_y/2\pi = \omega_z/2\pi = 1150$ Hz. The s -wave scattering length for the magnetically trapped atoms in the $m_x = 1$ sublevel is $a_{11} = 7.5$ nm; the s -wave scattering length for the outcoupled atoms in the $m_x = 0$ sublevel is $a_{00} = 5.3$ nm. Other simulation parameters are given in Appendix Appendix D.

The initial state of the trapped condensate is found via the solution of the Gross-Pitaevskii equation in imaginary time. Given the above trap frequencies and the peak density as a target, we find that the total number of atoms in the main example is $N = 9.84 \times 10^4$. With these parameters, the average kinetic energy of colliding atoms is $E_{kin}/k_B = mv_r^2/2k_B \simeq 2.0 \times 10^{-6}$ K, which is about 7.4 times larger than the mean-field energy of the initial condensate $E_{MF}/k_B = 4\pi\hbar^2 a_{11}\rho_0/mk_B \simeq 2.7 \times 10^{-7}$ K.

The duration of simulation in the main example is $t_f = 25$ μs . This is considerably smaller than the estimated duration of collision in the experiment, 140 μs (see Appendix A). The number of scattered atoms in our numerically simulated example at $t_f = 25$ μs is ~ 1750 , representing $\sim 1.8\%$ of the total number of atoms in the initial BEC. Operationally, the fraction of scattered atoms is determined as the total number of atoms contained within the scattering halo (see figure 3 showing two orthogonal slices through the momentum density distribution) after eliminating the regions of momentum space occupied by the two colliding condensates. We implement the elimination by

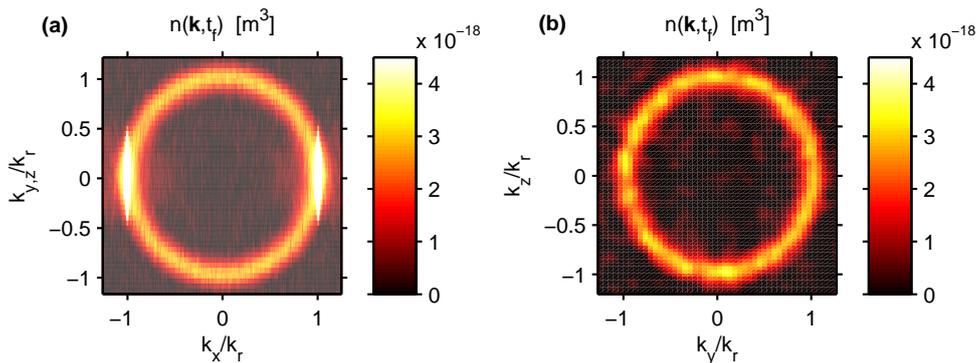


Figure 3. Slices through $k_z = 0$ (a) and $k_x = 0$ (b) of the 3D atomic density distribution in momentum space $n(\mathbf{k}, t_f)$ after $t_f = 25 \mu\text{s}$ collision time. Due to the symmetry in the transverse direction (orthogonal to x), the average density through $k_y = 0$ coincides with that of $k_z = 0$. The color scale is chosen to clearly show the halo of spontaneously scattered atoms and cuts off the high-density peaks of the two colliding condensates (shown in white on the left panel).

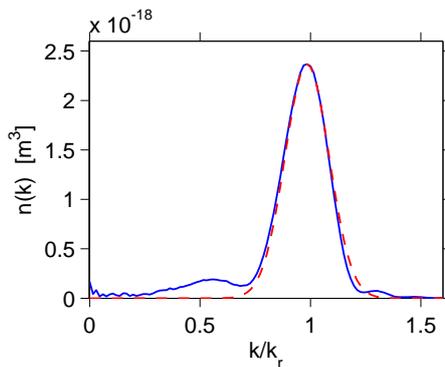


Figure 4. Angle averaged (radial) momentum distribution $n(k)$ of the scattered atoms (solid line) and a simple Gaussian fit (dashed line) used to define the radial width $\delta k = 0.10k_r$ of the halo around the peak momentum $k_0 = 0.98k_r$ (see text).

simply discarding the data points corresponding to $|k_x| > 0.99k_r$, which fully contain the colliding condensates. This cuts off a small fraction of the scattered atoms as well, but the procedure is simple to implement operationally and is unambiguous.

In order to compare our calculated fraction of scattered atoms at $t_f = 25 \mu\text{s}$ with the experimentally measured fraction of 5% at the end of collision at $\sim 140 \mu\text{s}$, we first note that these time scales are relatively short and correspond to the regime of spontaneous scattering. The number of scattered atoms increases approximately linearly with time, therefore our calculated fraction of 1.8% can be extrapolated to about 10% to correspond to the expected fraction at $\sim 140 \mu\text{s}$. Next, one has to scale this value by a factor 0.6^2 to account for the fact that in the experiment only 60% of the initial atom number was transferred to the $m_x = 0$ state of the colliding condensates. Accordingly, our theoretical estimate of 10% should be proportionally scaled down to 4% conversion, in good agreement with the experimentally estimated fraction of 5% (see also Appendix

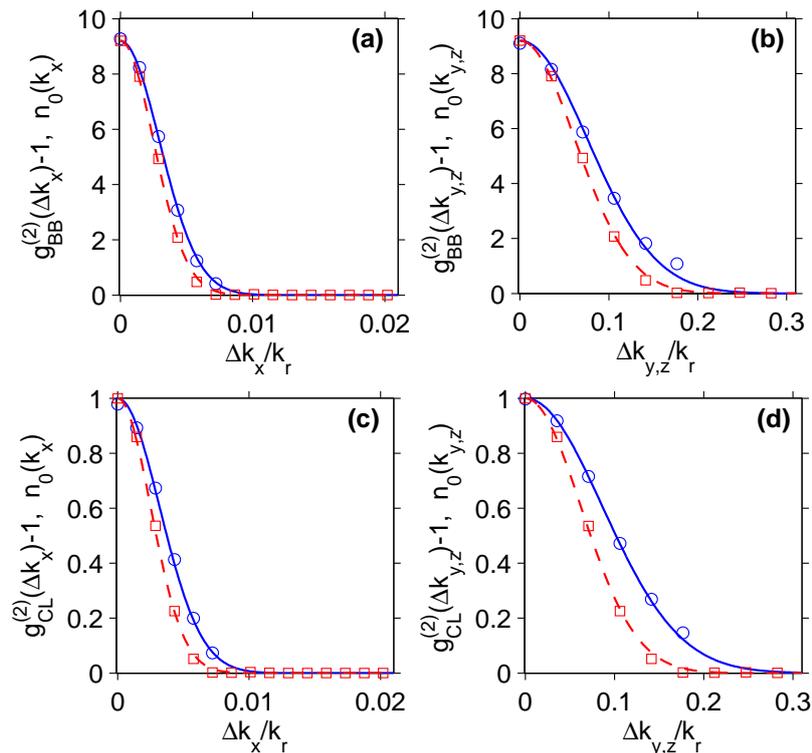


Figure 5. Back-to-back (BB) and collinear (CL) atom-atom pair correlation, $g_{BB/CL}^{(2)}(\Delta k_i) - 1$ as a function of the displacement Δk_i ($i = x, y, z$) in units of the collision momentum k_r , after $t_f = 25 \mu s$ collision time. The circles are the numerical results, angle-averaged over the halo of scattered atoms after elimination of the regions occupied by the two colliding condensates; the solid lines are simple Gaussian fits to guide the eye (see text). For comparison, we also plot the initial momentum distribution $n_0(k_i)$ of the colliding condensates; the actual data points are shown by the squares and are fitted by a dashed-line Gaussian.

A).

In figure 4 we plot the radial momentum distribution of scattered atoms (solid line), obtained after angle averaging of the full 3D distribution within the region $|k_x| \leq 0.8k_r$. The numerical result is fitted with a Gaussian $\propto \exp[-(k - k_0)^2/(2\delta k^2)]$ (dashed line), centered at $k_0 = 0.98k_r$ and having the radial width of $\delta k = 0.10k_r \simeq 5.8 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$, where $k = |\mathbf{k}|$. The fitted radial width of $\delta k = 0.10k_r$ of the numerical simulation is in reasonable agreement with the simple estimate of Equation (13), which gives $\delta k \simeq 0.075k_r$ for $\Delta t = 25 \mu s$.

Figure 5 shows the numerical results for the back-to-back and collinear correlations (solid lines with circles), defined in Equations (4) and (5). Due to the symmetry of the y and z directions, the results in these directions are practically the same. In order to verify the hypothesis that the shape and therefore the width of the pair correlation functions is governed by the width of the momentum distribution of the source condensate, we also plot the actual initial momentum distributions of the source condensate in the two orthogonal directions (with the understanding that the horizontal axis Δk_i now refers

to the actual wave-vector component k_i). The actual data points for the correlation functions and for the momentum distribution of the source are shown by the circles and squares, respectively, and are fitted with Gaussian curves for simplicity and to guide the eye. The Gaussian fits for the correlation functions (solid lines) give:

$$g_{BB}^{(2)}(\Delta k_i) - 1 = 9.2 \exp\{-\Delta k_i^2/[2(\sigma_i^{BB})^2]\}, \quad (20)$$

$$g_{CL}^{(2)}(\Delta k_i) - 1 = \exp\{-\Delta k_i^2/[2(\sigma_i^{CL})^2]\}, \quad (21)$$

where the correlation widths σ_i^{BB} and σ_i^{CL} are shown in the table (22) below. The Gaussian fits (dashed lines) for the slices of the initial momentum distribution $n_0(k_i) \propto \exp\{-k_i^2/[2(\sigma_i)^2]\}$ are scaled to the same peak value as $g_{BB/CL}^{(2)}(0) - 1$ and have $\sigma_x = 0.0025k_r$ and $\sigma_{y,z} = 0.055k_r$.

By comparing the solid and the dashed lines we see that the shape of the correlation functions indeed closely follow the shape of momentum distribution of the source. More specifically, we find that the following results provide the best fit to our numerical data:

σ_x^{BB}/σ_x	$\sigma_{y,z}^{BB}/\sigma_{y,z}$	σ_x^{CL}/σ_x	$\sigma_{y,z}^{CL}/\sigma_{yz}$	(22)
1.18	1.39	1.27	1.57	

The ratios between the collinear and back-to-back correlation widths are $\sigma_x^{CL}/\sigma_x^{BB} \simeq 1.08$ and $\sigma_{y,z}^{CL}/\sigma_{y,z}^{BB} \simeq 1.13$. The errors due to stochastic sampling on all quoted values of the correlation widths are smaller than 3%.

The values for $\sigma_{y,z}^{CL}/\sigma_{y,z}$ and $\sigma_{y,z}^{BB}/\sigma_{y,z}$ can be compared with the respective experimentally measured values of table (11) and we see reasonably good agreement, even though the numerical data are for a much shorter collision time. The remaining discrepancy between the numerical data at $t_f = 25 \mu\text{s}$ and the experimentally measured values after a $\sim 140 \mu\text{s}$ interaction time may be due to the evolution of the condensates past $25 \mu\text{s}$, not attainable within the positive- P method. The above numerical results for the correlation widths can be also compared with the simple analytic estimate based on the Gaussian Ansatz treatment of Equations (9) and (10). We find that the approximate analytic results overestimate the back-to-back and collinear widths by $\sim 20\%$ and 40% , respectively, in the present example.

The amplitude of the correlation functions can also be inferred by simple models. In fact, the collinear correlation function is a manifestation of the Hanbury Brown and Twiss effect since it involves pairs from two independent spontaneous scattering events and we expect an amplitude of $g_{CL}^{(2)}(0) = 2$ [25]. This is in agreement with the positive- P simulations. The back-to-back correlation amplitude, on the other hand, can be substantially higher and display super-bunching ($g_{BB}^{(2)}(0) \gg 1$) [13, 22] since the origin of this correlation is a simultaneous creation of a pair of particles in a single scattering event.

In a simple qualitative model [15], the amplitude of the back-to-back correlation can be linked to the inverse population of the atomic modes on the halo. As we show in Appendix B, this model follows the trends observed in our first-principles numerical simulations.

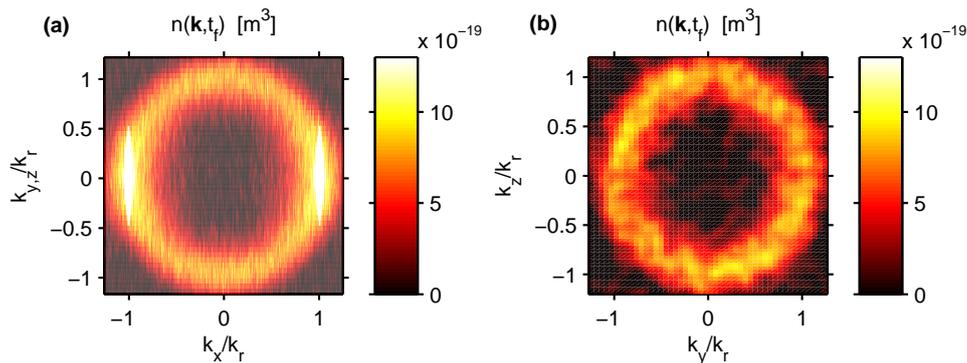


Figure 6. Same as in figure 3, except for $t_f = 12.5 \mu\text{s}$ collision time.

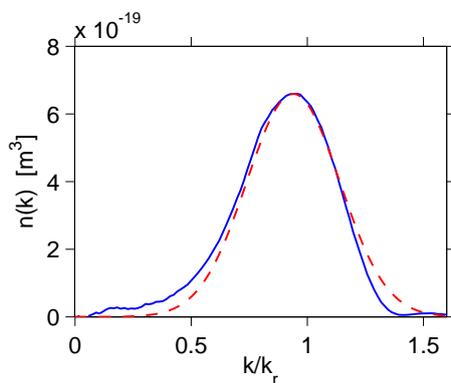


Figure 7. Same as in figure 4, except for $t_f = 12.5 \mu\text{s}$ collision time. The width and the peak of the fitted Gaussian here are: $\delta k = 0.20k_r$ and $k_0 = 0.95k_r$.

5.2. Shorter collision time

Here we present the results of numerical simulation for the same parameters as in our main numerical example from Sec. 5.1, except that the data are analyzed at $t_f = 12.5 \mu\text{s}$, which is half the previous interaction time. We found in Sec. 5.1 that σ_{yz}^{BB} , σ_{yz}^{CL} and the width of the halo δk are all nearly the same. In Sec. 3, however, we argue that the widths of the correlation functions and the halo are governed by different limits [Equations (10),(9) and (13) or (14), respectively]. The example in this section illustrates this point.

Figure 6 shows two orthogonal slices of the s -wave scattering sphere in momentum space (cf. figure 3), whereas figure 7 is the corresponding radial distribution after angle averaging. The most obvious feature of the distribution is that it is broader than at $t_f = 25 \mu\text{s}$ and the fitted Gaussian gives the radial width of $\delta k = 0.20k_r$. This is precisely twice the width in Figure 4 and is in agreement with the simple qualitative estimate of Equation (13).

The back-to-back and collinear correlation functions after $t_f = 12.5 \mu\text{s}$ collision time are qualitatively very similar to those shown in figure 5, except that the Gaussian

fits are

$$g_{BB}^{(2)}(\Delta k_i) - 1 = 35.6 \exp\{-\Delta k_i^2/[2(\sigma_i^{BB})^2]\}, \quad (23)$$

$$g_{CL}^{(2)}(\Delta k_i) - 1 = \exp\{-\Delta k_i^2/[2(\sigma_i^{CL})^2]\}, \quad (24)$$

with the correlation widths given by

σ_x^{BB}/σ_x	$\sigma_{y,z}^{BB}/\sigma_{y,z}$	σ_x^{CL}/σ_x	$\sigma_{y,z}^{CL}/\sigma_{y,z}$
1.16	1.28	1.27	1.48

(25)

The ratios between the widths are $\sigma_x^{CL}/\sigma_x^{BB} \simeq 1.09$ and $\sigma_{y,z}^{CL}/\sigma_{y,z}^{BB} \simeq 1.16$.

For the correlation functions, the main difference compared to the case for 25 μs is that the peak value of the back-to-back correlation is now larger, reflecting the lower atomic density on the scattering halo. The correlation widths, on the other hand, are practically unchanged, at least within the numerical sampling errors of the positive- P simulations; the errors are at the level of the third significant digit in the quoted values, which we suppress. The number of scattered atoms in this example is about 850, which is approximately half the number at 25 μs , confirming the approximately linear dependence on time in the spontaneous scattering regime.

5.3. Smaller collision velocity

In this example, we present the results of simulations in which the collision velocity is smaller by a factor $\sqrt{2}$ than before, $v_r' = 6.5$ cm/s ($k_r' = 4.1 \times 10^6$ m $^{-1}$), while all other parameters are unchanged. In practice, this can be achieved by changing the propagation directions of the Raman lasers that outcouple the atoms from the trapped state. As in the previous example, the halo width illustrates Equation (13).

The results of positive- P simulations for the momentum density distribution at $t_f = 25$ μs are shown in figures 8 and 9. The most obvious feature of the distribution is again the fact that it is now broader than in our main example of Sec. 5.1. The width of the Gaussian function fitted to the numerically calculated radial momentum distribution is given by $\delta k = 0.21k_r'$. This is again in excellent agreement with the simple analytic estimate of Equation (13), which predicts the broadening to be inversely proportional to the collision velocity. We also note that the peak momentum (relative to k_r') in the present example is slightly shifted towards the centre of the halo, $k_0 = 0.92k_r'$, which is a feature predicted in [27] to occur when the ratio of the kinetic energy to the interaction energy per particle is reduced.

The back-to-back and collinear correlation functions in this example are again qualitatively very similar to those shown in figure 5, except that the Gaussian fits are

$$g_{BB}^{(2)}(\Delta k_i) - 1 = 9.0 \exp\{-\Delta k_i^2/[2(\sigma_i^{BB})^2]\}, \quad (26)$$

$$g_{CL}^{(2)}(\Delta k_i) - 1 = \exp\{-\Delta k_i^2/[2(\sigma_i^{CL})^2]\}, \quad (27)$$

with the correlation widths given by

σ_x^{BB}/σ_x	$\sigma_{y,z}^{BB}/\sigma_{y,z}$	σ_x^{CL}/σ_x	$\sigma_{y,z}^{CL}/\sigma_{y,z}$
1.16	1.35	1.31	1.51

(28)

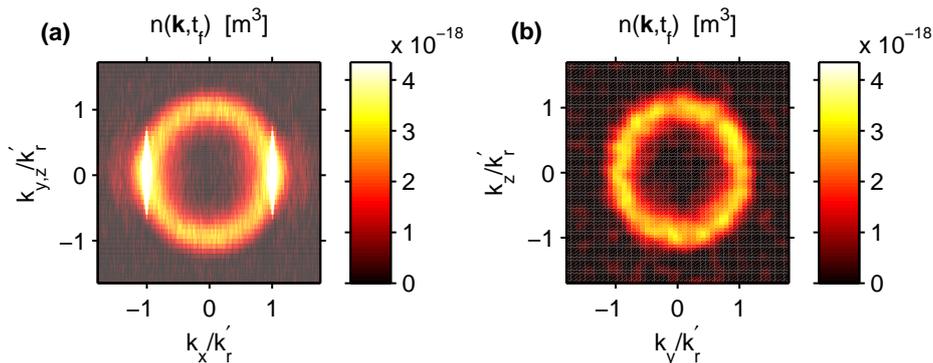


Figure 8. Same as in figure 3, except for $\sqrt{2}$ times smaller collision velocity, $v_r' = 6.46$ cm/s ($k_r' = 4.09 \times 10^6$ m $^{-1}$). The axis for the momentum components k_i ($i = x, y, z$) are in units of the smaller recoil momentum than in figure 3, and therefore the absolute radius of the s -wave scattering sphere is smaller in the present example.

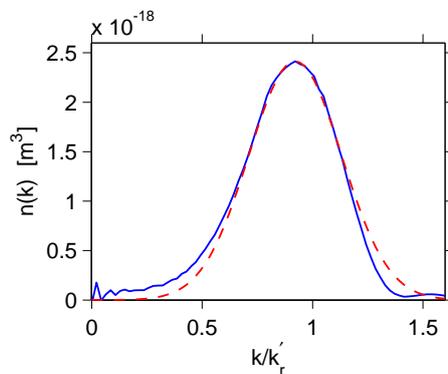


Figure 9. Same as in figure 4 except for $\sqrt{2}$ times smaller collision velocity v_r' ($k_r' = 4.1 \times 10^6$ m $^{-1}$). The width and the peak of the fitted Gaussian are $\delta k = 0.21k_r' = 8.6 \times 10^5$ m $^{-1}$; $k_0 = 0.92k_r'$.

where $\sigma_x/k_r' \simeq 0.0035$ and $\sigma_x/k_r' \simeq 0.078$. The ratios between the collinear and back-to-back correlation widths are $\sigma_x^{CL}/\sigma_x^{BB} \simeq 1.13$ and $\sigma_{y,z}^{CL}/\sigma_{y,z}^{BB} \simeq 1.12$.

As we see from these results, the absolute widths of the correlation functions are practically unchanged compared to the main numerical example (22). This provides further evidence that, at least for short collision times, the correlation widths are governed by the momentum width of the source condensate, which is unchanged in the present example compared to the case of Sec. 5.1.

The number of scattered atoms in this example is about 1270, which is approximately $\sqrt{2}$ times smaller than in Sec. 5.1 and corresponds to $\sim 1.3\%$ conversion. This scaling is in agreement with the rate equation approach [22], according to which the number of scattered atoms is proportional to the square root of the collision energy and hence to the collision momentum, which is $\sqrt{2}$ times smaller here.

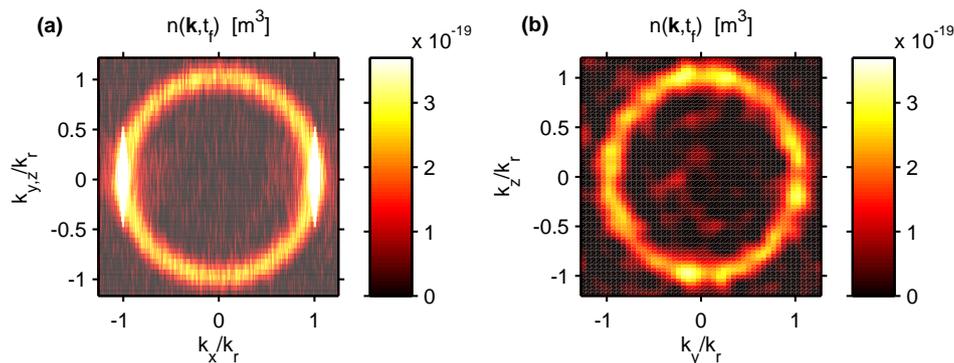


Figure 10. Same as in figure 3 except for the scattering lengths of $a_{00} = 2.65$ nm and $a_{11} = 3.75$ nm, which are twice smaller than before.

5.4. Smaller scattering length

Finally, we present the results of numerical simulations for the same parameters as in our main numerical example from Sec. 5.1, except that the scattering lengths a_{11} and a_{00} are artificially halved, i.e. $a_{00} = 2.65$ nm and $a_{11} = 3.75$ nm. The trap frequencies are unchanged and we modify the chemical potential to arrive at the same peak density of the initial BEC in the trap, $\rho_0 \simeq 2.5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$. The total number of atoms is now smaller, $N \simeq 3.5 \times 10^4$. One effect of changing the scattering length is that it changes the size and shape of the trapped cloud, and therefore also its momentum distribution. The shape is slightly closer to a Gaussian and therefore also to the treatment in [25].

Due to the smaller scattering length, the density distribution in position space of the initial trapped condensate is now narrower and conversely the momentum distribution of the colliding condensates is broader. On the other hand, the width of the halo (see figures 10 and 11 at $t_f = 25 \mu\text{s}$) of scattered atoms is practically unchanged compared to the example of figure 4, as it is governed by the energy-time uncertainty consideration (13), for the spontaneous scattering regime. The only quantitative difference is the lower peak density on the scattering sphere, which is due to the weaker strength of atom-atom interactions resulting in a slower scattering rate. The number of scattered atoms at $25 \mu\text{s}$ is ~ 180 , corresponding to 0.51% conversion of the initial total number $N \simeq 3.5 \times 10^4$. The fraction of 0.51% itself corresponds approximately to a scaling law of $\sim a^{3/2}$, which is the same as the scaling of the total initial number of trapped atoms in the Thomas-Fermi limit for a fixed peak density.

Since the widths of the correlation functions are governed by the width of the momentum distribution of the initial colliding condensates, we expect corresponding broadening of the correlation functions as well (see figure 12). To quantify this effect, we fit the momentum distribution of the initial BEC by a Gaussian $\propto \exp\{-k_i^2/[2(\sigma_i)^2]\}$, where $\sigma_x = 0.0036k_r$ and $\sigma_{y,z} = 0.068k_r$ (cf. with $\sigma_x = 0.0025k_r$ and $\sigma_{y,z} = 0.055k_r$ in figure 5, which are $\sim \sqrt{2}$ smaller). The Gaussian fits to the correlation functions in

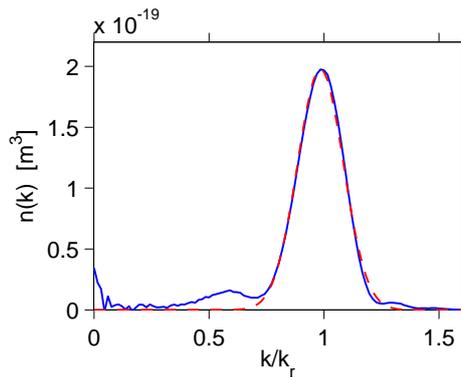


Figure 11. Same as in figure 4 except for twice smaller values of the scattering lengths a_{00} and a_{11} . The width and the peak of the fitted Gaussian are $\delta k = 0.10k_r$, and $k_0 = 0.98k_r$, which are the same as in figure 4.

figure 12 are

$$g_{BB}^{(2)}(\Delta k_i) - 1 = 49 \exp\{\Delta k_i^2/[2(\sigma_i^{BB})^2]\}, \quad (29)$$

$$g_{CL}^{(2)}(\Delta k_i) - 1 = 0.94 \exp\{\Delta k_i^2/[2(\sigma_i^{CL})^2]\}, \quad (30)$$

where the widths σ_i^{BB} and σ_i^{CL} are given by

σ_x^{BB}/σ_x	$\sigma_{y,z}^{BB}/\sigma_{y,z}$	σ_x^{CL}/σ_x	$\sigma_{y,z}^{CL}/\sigma_{y,z}$
1.18	1.53	1.42	1.81

(31)

We see that the relative widths are practically unchanged, implying that the absolute widths are broadened. The ratios between the collinear and back-to-back correlation widths are slightly increased and are given by $\sigma_x^{CL}/\sigma_x^{BB} \simeq 1.20$ and $\sigma_{y,z}^{CL}/\sigma_{y,z}^{BB} \simeq 1.18$.

These numerical results make the present example – with the diminished role of atom-atom interactions – somewhat closer to the simple analytic predictions of Equations (9) and (10) based on a Gaussian ansatz for noninteracting condensates.

5.5. Relative number squeezing and violation of Cauchy-Schwartz inequality

Another useful measure of atom-atom correlations is the normalized variance of the relative number fluctuations between atom numbers \hat{N}_i and \hat{N}_j in a pair of counting volume elements denoted via i and j ,

$$V_{i-j} = \frac{\langle [\Delta(\hat{N}_i - \hat{N}_j)]^2 \rangle}{\langle \hat{N}_i \rangle + \langle \hat{N}_j \rangle} = 1 + \frac{\langle : [\Delta(\hat{N}_i - \hat{N}_j)]^2 : \rangle}{\langle \hat{N}_i \rangle + \langle \hat{N}_j \rangle}, \quad (32)$$

where $\Delta\hat{X} = \hat{X} - \langle \hat{X} \rangle$ is the fluctuation. This definition uses the conventional normalization with respect to the shot-noise level characteristic of Poissonian statistics, such as for a coherent state, $\langle \hat{N}_i \rangle + \langle \hat{N}_j \rangle$. In this case the variance $V_{i-j} = 1$, which corresponds to the level of fluctuations in the absence of any correlation between \hat{N}_i and \hat{N}_j . Variance smaller than one, $V_{i-j} < 1$, implies reduction (or squeezing) of fluctuations below the shot-noise level and is due to quantum correlation between the

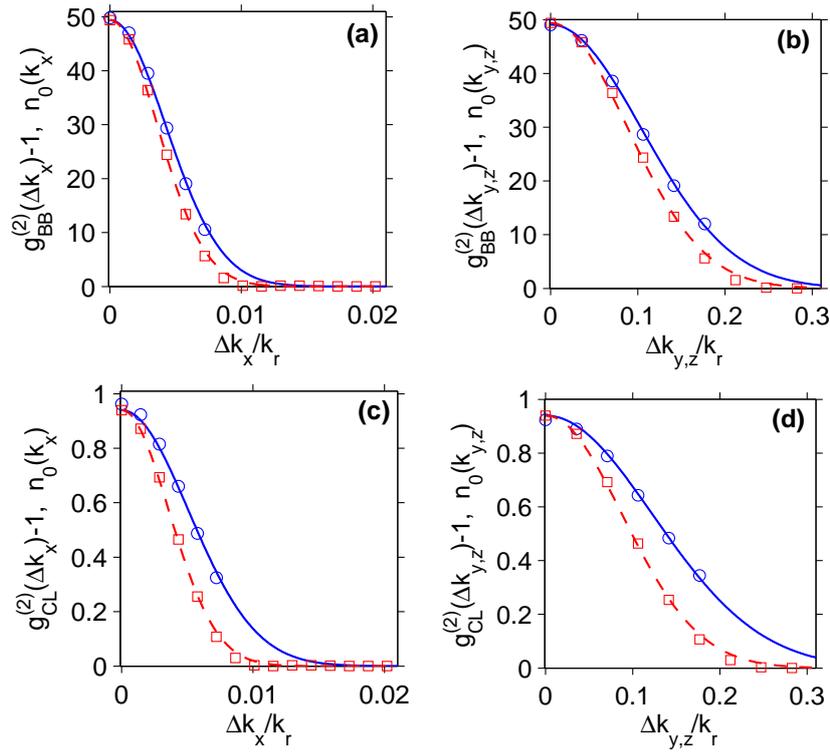


Figure 12. Same as in figure 5 except for twice smaller s -wave scattering lengths a_{11} and a_{00} .

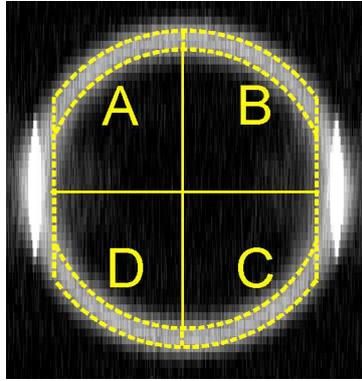


Figure 13. Illustration of the four regions of the momentum space density, forming the quadrants A , B , C , and D on the s -wave scattering sphere, on which we analyse the data for relative number squeezing.

particle number fluctuations in \hat{N}_i and \hat{N}_j . Perfect (100%) squeezing of the relative number fluctuations corresponds to $V_{i-j} = 0$.

In the context of the present model for the BEC collision experiment and possible correlation measurements between atom number fluctuations on diametrically opposite sides of the s -wave scattering sphere, we assign the indices $i, j = A, B, C, D$ in Equation (32) to one of the four quadrants as illustrated in figure 13. The total atom number operator \hat{N}_i in each quadrant \mathcal{D}_i within the s -wave scattering sphere is defined after

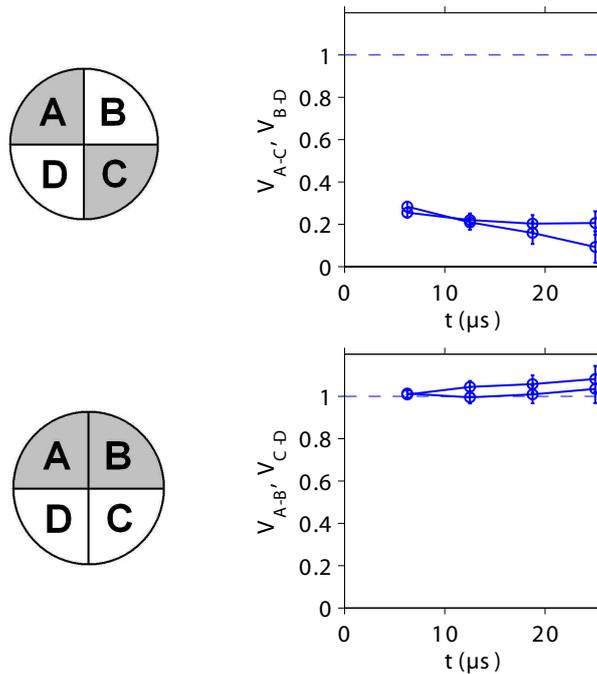


Figure 14. Relative number variance in the diametrically opposite and neighboring quadrants, $V_{A-C/B-D}$ and $V_{A-B/C-D}$, as a function of time.

elimination of the regions in momentum space occupied by the two colliding condensates

$$\hat{N}_i(t) = \int_{\mathcal{D}_i} dk_x dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \hat{n}(\mathbf{k}, t). \quad (33)$$

Operationally, this is implemented by discarding the data points beyond $|k_x| > 0.8k_r$. In addition, the quadrants \mathcal{D}_i are defined on a 2D plane after integrating the momentum distribution along the z -direction, which in turn only takes into account the 3D data points satisfying $|1 - k^2/k_r^2| < 0.28$, i.e. lying in the narrow spherical shell $k_r \pm \delta k$ with $\delta k \simeq 0.14k_r$. The elimination of the inner and outer regions of the halo is done to minimize the sampling error in our simulations, since these regions have vanishingly small population and produce large noise in the stochastic simulations.

The choice of the quadrants as above is a particular implementation of the procedure of binning, known to result in a stronger correlation signal and larger relative number squeezing [11, 33]. Due to strong back-to-back pair correlations, we expect the relative number fluctuations in the diametrically opposite quadrants to be squeezed, $V_{A-C}, V_{B-D} < 1$, while the relative number variance in the neighboring quadrants, such as V_{A-B} and V_{C-D} , is expected to be larger than, or equal to, one. The positive- P simulations confirm these expectations and are shown in figure 14, where we see strong ($\sim 80\%$) relative number squeezing for the diametrically opposite quadrants, $V_{A-C, B-D} \simeq 1 - 0.8 = 0.2$.

These results assume a uniform detection efficiency of $\eta = 1$, whereas if the efficiency is less than 100% ($\eta < 1$), then the second term in Equation (32) should be multiplied by η . This implies, that for $\eta = 0.1$ as an example, the above prediction of $\sim 80\%$ relative

number squeezing will be degraded down to a much smaller but still measurable value of $\sim 8\%$ squeezing ($V_{A-C,B-D} \simeq 1 - 0.08 = 0.92$). Even with perfect detection efficiency, our simulations do not lead to ideal (100%) squeezing. This can be understood in terms of a small fraction of collisions that take place with a center-of-mass momentum offset that is (nearly) parallel to one of the borders between the quadrants. As a result, the respective scattered pairs fail to appear in diametrically opposite quadrants during the (finite) propagation time (see also [33]).

For the symmetric case with $\langle \hat{N}_i \rangle = \langle \hat{N}_j \rangle$ and $\langle \hat{N}_i^2 \rangle = \langle \hat{N}_j^2 \rangle$, the variance V_{i-j} can be rewritten as

$$V_{i-j} = 1 + \langle \hat{N}_i \rangle [g_{ii}^{(2)} - g_{ij}^{(2)}], \quad (34)$$

where the second-order correlation function $g_{ij}^{(2)}$ is defined according to

$$g_{ij}^{(2)} = \frac{\langle : \hat{N}_i \hat{N}_j : \rangle}{\langle \hat{N}_i \rangle \langle \hat{N}_j \rangle}. \quad (35)$$

Equation (34) helps to relate the relative number squeezing, $V_{i-j} < 1$, to the violation of the classical Cauchy-Schwartz inequality $g_{12}^{(2)} > g_{11}^{(2)}$, studied extensively in quantum optics with photons [34, 30]. The analysis presented here (see also [33] on molecular dissociation) shows that the Cauchy-Schwartz inequality, and its violation, is a promising area of study in *quantum atom optics* as well.

6. Summary

An important conclusion that we can draw from the numerical simulations is that the predicted widths of the correlation functions are remarkably robust against the parameter variations we were able to explore (in Secs. 5.1 through 4). This gives us confidence in our physical interpretation of the width as being chiefly due to the initial momentum width of the condensate. The discrepancy with the analytical calculation of [25] seems to be primarily due to the different cloud shapes used. The width of the halo varies with the parameters we tested in a predictable way and also confirms the discussion in Sec. 3.

As for comparison with the experiment, the numerically calculated widths of the scattering halo and the correlation functions coincide with the experimental ones to within better than 20% in most cases. The main discrepancy with the experiment is in the *ratio* of the back to back and collinear correlation widths. From the experimental point of view, these ratios are more significant than the individual widths since some sources of uncertainty, such as the number of atoms and the size of the condensates, cancel. The discrepancy may mean that the collinear correlations are not sufficient to characterize the size and momentum distribution in the source at this level of accuracy. The discrepancies may of course also be due to the numerous experimental imperfections, especially the fact that the Raman outcoupling was only 60% efficient, and therefore an appreciable trapped $m_x = 1$ condensate was left behind. This defect may be remedied in future experiments. On the other hand, the current simulations neglect the unavoidable

interaction of the scattered atoms with unscattered, $m_x = 0$ condensates as they leave the interaction region. This interaction could alter the trajectories of the scattered atoms in a minor, but complicated way. Future numerical work must examine this possibility further.

Still, the overall message of this work is that a first principles quantum field theory approach can quantitatively account for experimental observations of atomic four-wave mixing experiments. This work represents the first time that this sort of numerical simulation has been carefully confronted with an experiment. An interesting extension would be to examine the regime of stimulated scattering. It has been predicted that a highly anisotropic BEC could lead to an anisotropic population of the scattering halo [35, 36]. This effect would be a kind of atomic analogue of superradiance observed when off-resonant light is shined on a condensate [37, 38]. In addition, our results may be useful beyond the cold atom community: theoretical descriptions of correlation measurements in heavy ion collisions [39] may benefit from some of our insights.

Acknowledgments

The authors acknowledge stimulating discussions with A. Aspect, K. Mølmer, M. Trippenbach, P. Deuar, and M. Davis, and thank the developers of the XMDS software [40]. CS and KK acknowledge support from the Australian Research Council and the Queensland State Government. Part of this work was done at the Institut Henri Poincaré – Centre Emile Borel; KK thanks the institute for hospitality and support. The atom optics group is supported by the SCALA program of the EU, and by the IFRAF institute.

Appendix A. Duration of the collision

In order to estimate the collision duration one can consider a simple classical model of the collision [22]. Denoting by $\rho_1(\mathbf{x}, t)$ and $\rho_2(\mathbf{x}, t)$ the density distributions of the two condensates, the number of scattered atoms $N_{\text{sc}}(t)$ at a given time can be written

$$N_{\text{sc}}(t) = 2 \int_0^t dt' \int d^3\mathbf{x} 2\sigma_0 v_r \rho_1(\mathbf{x}, t') \rho_2(\mathbf{x}, t') \quad (\text{A.1})$$

where $\sigma_0 = 8\pi a_{00}^2$ is the cross section for a collision of two particles. In this latter formula $a_{00} \simeq 5.3$ nm is the scattering length between $m_x = 0$ atoms [15].

The time-dependent density of the two condensates can be calculated from the expansion of a condensate in the Thomas-Fermi regime described in [41]. This approach suggests two different time scales for the collision duration. First, the separation of the two condensates occurs in a time defined by the ratio of the longitudinal size of the condensates and their relative velocity $t_{\text{sep}} = R_x/v_r$. Taking for R_x the Thomas-Fermi radius of the initial condensate, one can show that t_{sep} is on the order of 1 ms. At the same time, the condensates expand during their separation on a time scale $t_{\text{exp}} = 1/\omega_y = 1/\omega_z \simeq 140$ μs . This latter effect appears to be predominant in the

evaluation of Equation (A.1) and t_{exp} can be taken as a definition of the collision duration Δt . The numerical evaluation of Equation (A.1) gives $N_{\text{sc}}(\Delta t) \simeq 0.66N_{\text{sc}}(\infty)$ and the estimated total number of scattered atoms corresponds to the experimentally observed 5% of the initial total number of atoms in the trapped condensate.

Appendix B. Occupation number of the scattering modes and amplitude of the back-to-back correlation

In order to estimate the occupation number of the scattering modes one needs to compare the number of scattered atoms N_{sc} to the number of scattering modes N_m . To achieve this one has to first consider the volume of a scattering mode V_m , given by the first-order coherence volume (also dubbed as “phase grain” in [12, 14]). Such a volume corresponds in fact to the coherence volume of the source condensate, and in practice it can also be deduced from the measurement of the width of the collinear correlation function $g_{CL}^{(2)}(\Delta k_i)$ as one expects in a Hanbury Brown-Twiss experiment. For simplicity we match the scattering mode volume V_m to the coherence volume of the source condensate in momentum space,

$$V_m \simeq \beta \sigma_x (\sigma_{yz})^2, \quad (\text{B.1})$$

where β is a geometrical factor which depends on the geometry of the modes. Approximating the source condensate in momentum space by a Gaussian $\propto \exp[-x^2/(2\sigma_x^2) - (y^2 + z^2)/(2\sigma_{y,z}^2)]$, one has $\beta = (2\pi)^{3/2}$.

The number of scattering modes N_m can in turn be estimated from the knowledge of the total volume of the scattering shell V ,

$$N_m = \frac{V}{V_m}, \quad (\text{B.2})$$

where the volume V is determined from the value of the width of the scattering shell δk :

$$V = \int d^3\mathbf{k} \exp[-(k - k_r)^2/(2\delta k^2)] \quad (\text{B.3})$$

$$\simeq 4\pi\sqrt{2\pi}k_r^2\delta k, \quad (\text{B.4})$$

for $\delta k \ll k_r$. If we apply this estimate to the results of the main numerical example (see Sec. 5.1), we find $N_m \simeq 26400$. As $N_{\text{sc}} = 1750$, this implies an occupation number per mode of $N_{\text{sc}}/N_m \simeq 0.066$. Such an estimate confirms that the system is indeed in the spontaneous regime and that bosonic stimulation effects are negligible.

The simple model of [15] for the back-to-back correlation predicts that its height is given by

$$g_{BB}^{(2)}(0) = 1 + N_m/N_{\text{sc}} \quad (\text{B.5})$$

Using the above estimate of N_m and the actual value of N_{sc} found from the numerical simulations, we obtain that the height of the back-to-back correlation peak should be approximately given by ~ 16 . This compares favorably with the actual numerical result

of 10.2. Similarly, we obtain the back-to-back correlation peak of: ~ 62 in the example with the shorter collision time (compare with the numerical result of 36.6); ~ 18 in the example with the smaller collision velocity (compare with 10); and ~ 70 in the example with the smaller scattering length (compare with 50).

Appendix C. Width of the s -wave scattering sphere in the undepleted “pump” approximation

To estimate the width of the halo of scattered atoms beyond the spontaneous regime we use the analytic solutions for a uniform system in the so called undepleted “pump” approximation in which the number of atoms in the colliding condensates are assumed constant. This approximation is applicable to short collision times. Nevertheless, it formally describes the regime of stimulated scattering and can be used to estimate the width of the s -wave scattering sphere as we show here.

The problem of BEC collisions in the undepleted “pump” approximation was studied in [27]; the solutions for the momentum distribution of the s -wave scattered atoms are formally equivalent to those obtained for dissociation of a BEC of molecular dimers in the undepleted molecular condensate approximation [13, 28]. For a uniform system with periodic boundary conditions, one has the following analytic solution for momentum mode occupation numbers:

$$n_{\mathbf{k}}(t) = \frac{\bar{g}^2}{\bar{g}^2 - \Delta_k^2} \sinh^2 \left(\sqrt{\bar{g}^2 - \Delta_k^2} t \right). \quad (\text{C.1})$$

Here, the constant \bar{g} is given by

$$\bar{g} = 2U_0\rho_0 = \frac{8\pi\hbar a_{00}\rho_0}{m}, \quad (\text{C.2})$$

where $U_0 = 4\pi\hbar a_{00}/m$ corresponds to the coupling constant g/\hbar of [27], and we note that the results of [27] contain typographical errors and have to be corrected as follows [42]: given the Hamiltonian of (1), with $g = 4\pi\hbar^2 a/m$, the coupling g in (2), (7), (9), and (10), as well as in the definition of $\Delta(p)$ after (9), should be replaced by $2g$. In the problem of molecular dissociation, the constant \bar{g} corresponds to $\bar{g} = \chi\sqrt{\rho_0}$ [13], where χ is the atom-molecule coupling and ρ_0 is the molecular BEC density.

The parameter Δ_k in Equation (C.1) corresponds to the energy offset from the resonance condition

$$\hbar\Delta_k \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_r^2}{2m}, \quad (\text{C.3})$$

where $\hbar k_r$ is the collision momentum; in molecular dissociation, $\hbar^2 k_r^2/m$ corresponds to the effective dissociation energy $2\hbar|\Delta_{eff}|$, using the notations of [13].

From Equation (C.1) we see that modes with $\bar{g}^2 - \Delta_k^2 > 0$ experience Bose enhancement and grow exponentially with time, whereas the modes with $\bar{g}^2 - \Delta_k^2 < 0$ oscillate at the spontaneous noise level. The absolute momenta of the exponentially growing modes lie near the resonant momentum $\hbar k_r$, and therefore we can use the condition $\bar{g}^2 - \Delta_k^2 = 0$ to define the approximate width of the s -wave scattering sphere.

First we write $k = k_r + \Delta k$ and assume for simplicity that k_r is large enough so that $\Delta k \ll k_r$. Then the condition $\bar{g}^2 - \Delta k^2 = 0$ can be approximated by

$$1 - \left(\frac{\hbar k_r \Delta k}{m \bar{g}} \right)^2 \simeq 0. \quad (\text{C.4})$$

This can be solved for Δk and used to define the width $\delta k = \Delta k/2$ of the s -wave scattering sphere as

$$\frac{\delta k}{k_r} \simeq \frac{m \bar{g}}{2 \hbar k_r^2} = \frac{4 \pi a_{00} \rho_0}{k_r^2}. \quad (\text{C.5})$$

The reason for defining it as half of Δk is to make δk closer in definition to the half-width at half maximum and to the rms width around k_r .

The above simple analytic estimate (C.5) gives $\delta k/k_r \simeq 0.05$ for the present ${}^4\text{He}^*$ parameters. For comparison, the actual width of the analytic result (C.1) varies between $\delta k/k_r \simeq 0.12$ and $\delta k/k_r \simeq 0.027$ for durations between $\bar{g}t = 1$ and $\bar{g}t = 7$, corresponding, respectively, to $t \simeq 20 \mu\text{s}$ and $t \simeq 140 \mu\text{s}$ in the present ${}^4\text{He}^*$ example.

Appendix D. Positive- P simulation parameters

The positive- P simulations in our main numerical example of Sec. 5 are performed on a computational lattice with $1400 \times 50 \times 70$ points in the (x, y, z) -directions respectively. The length of the quantization box along each dimension is $L_x = 252 \mu\text{m}$, $L_y = 20.52 \mu\text{m}$, and $L_z = 30.76 \mu\text{m}$. The computational lattice in momentum space is reciprocal to the position space lattice and has the lattice spacing of $\Delta k_i = 2\pi/L_i$, giving $\Delta k_x = 2.49 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $\Delta k_y = 3.06 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$, and $\Delta k_z = 2.04 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$. The momentum cutoffs are $k_x^{(\text{max})} = 1.75 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, $k_y^{(\text{max})} = 7.66 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$, and $k_z^{(\text{max})} = 7.15 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$.

The momentum cutoff in the collision direction, $k_x^{(\text{max})}$, is more than 3 times larger than the collision momentum k_r , and hence it captures all relevant scattering processes of interest, including the energy non-conserving scatterings $(k_r) + (k_r) \rightarrow (3k_r) + (-k_r)$ and $(-k_r) + (-k_r) \rightarrow (-3k_r) + (k_r)$ [14]. In all our figures, the regions of momentum space covering $k_x \simeq \pm 3k_r$ are not shown for the clarity of presentation of the main halo. These scattering processes, which produce a weak but not negligible signal at $k_x \simeq \pm 3k_r$, i.e., outside the main halo are enhanced by Bose stimulation due to the large population of the colliding condensate components at $k_x \simeq \mp k_r$, respectively. In the remaining y and z directions, such processes are absent and therefore the number of lattice points and the momentum cutoffs can be smaller.

Since the momentum distribution of the initial condensate is the narrowest in the k_x -direction, one may question whether the resolution of $\Delta k_x = 2.49 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$ with 1400 lattice points is sufficient. We check this by repeating the simulations with $4200 \times 40 \times 40$ lattice points and quantization lengths of $L_x = 753 \mu\text{m}$ and $L_y = L_z = 15.4 \mu\text{m}$, which give smaller lattice spacing $\Delta k_x = 8.24 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$, together with $\Delta k_y = \Delta k_z = 4.08 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$, $k_x^{(\text{max})} = 1.75 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, and $k_y^{(\text{max})} = k_z^{(\text{max})} = 8.16 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$. Our results on the

new lattice reproduce the previous ones, within the sampling errors of the stochastic simulations. We typically average over 2800 stochastic trajectories, and take 128 time steps in the simulations over 25 μs collision time. A typical simulation of this size takes about 100 hours on 7 CPUs running in parallel at 3.6 GHz clock speed.

References

- [1] Jelten T *et al.* *Nature* 2007 **445** 402
- [2] Hellweg D, Cacciapuoti L, Kottke M, Schulte T, Sengstock K, Ertmer W, and Arlt J *J Phys. Rev. Lett.* 2003 **91** 010406
- [3] Esteve J, Trebbia J B, Schumm T, Aspect A, Westbrook C I, and Bouchoule I *Phys. Rev. Lett.* 2006 **96** 130403
- [4] Rom T, Best T, van Oosten D, Schneider U, Fölling S, Paredes B, and Bloch I *Nature* 2006 **444** 733
- [5] Öttl A, Ritter S, Köhl M, and Esslinger T *Phys. Rev. Lett.* 2005 **95** 090404
- [6] Ritter S, Öttl A, Donner T, Bourdel T, Köhl M, and Esslinger T *Phys. Rev. Lett.* 2007 **98** 090402
- [7] Hofferberth S, Lesanovsky I, Schumm T, Schmiedmayer J, Imambekov A, Gritsev V, and Demler E 2007 *Preprint* arXiv:0710.1575
- [8] Schellekens M, Hoppeler R, Perrin A, Viana Gomes J, Boiron D, Westbrook C I, and Aspect A *Science* 2005 **310** 648
- [9] Yasuda M and Shimizu F *Phys. Rev. Lett.* 1996 **77** 3090
- [10] Fölling S, Gerbier F, Widera A, Mandel O, Gericke T, and Bloch I *Nature* 2005 **434** 481
- [11] Greiner M, Regal C A, Stewart J T, and Jin D S *Phys. Rev. Lett.* 2005 **94** 110401
- [12] Norrie A A, Ballagh R J, and Gardiner C W *Phys. Rev. Lett.* 2005 **94** 040401
- [13] Savage C M, Schwenn P E, and Kheruntsyan K V *Phys. Rev. A* 2006 **74** 033620
- [14] Deuar P and Drummond P D *Phys. Rev. Lett.* 2007 **98** 120402
- [15] Perrin A, Chang H, Krachmalnicoff V, Schellekens M, Boiron D, Aspect A, and Westbrook C I *Phys. Rev. Lett.* 2007 **99** 150405
- [16] Drummond P and Gardiner C *J. Phys. A* 1980 **13** 2353
- [17] Steel M J, Olsen M K, Plimak L I, Drummond P D, Tan S M, Collett M J, Walls D F, and Graham R *Phys. Rev. A* 1998 **58** 4824
- [18] Drummond P D and Corney J F *Phys. Rev. A* 1999 **60** R2661
- [19] Gilchrist A, Gardiner C W, and Drummond P D *Phys. Rev. A* 1997 **55** 3014
- [20] Deuar P and Drummond P D *J. Phys. A: Math. Gen.* 2006 **39** 1163
- [21] Ziñ P, Chwedeñczuk J, Veitia A, Rzażewski K, and Trippenbach M *Phys. Rev. Lett.* 2005 **94** 200401
- [22] Ziñ P, Chwedeñczuk, and Trippenbach M *Phys. Rev. A* 2006 **73** 033602
- [23] Morgan S A, Rusch M, Hutchinson D A W, and Burnett K *Phys. Rev. Lett.* 2003 **91** 250403
- [24] Yurovsky V A *Phys. Rev. A* 2002 **65** 033605
- [25] Molmer K, Perrin A, Krachmalnicoff V, Leung V, Boiron D, Aspect A, and Westbrook C I 2007 *Preprint* arXiv:0710.0208v1
- [26] Ögren H M and Kheruntsyan K V (unpublished)
- [27] Bach R, Trippenbach M, and Rzażewski K *Phys. Rev. A* 2002 **65** 063605
- [28] Kheruntsyan K V and Drummond P D *Phys. Rev. A* 2002 **66** 031602
- [29] Davis M J, Thwaite S J, Olsen M K, and Kheruntsyan K V 2007 *Preprint* arXiv:0710.4257v1
- [30] Walls D and Milburn G 1991 *Quantum Optics* (New York: Springer)
- [31] Abrikosov A A, Gorkov L P, and Dzyaloshinski I E 1963 *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (New York, Dover: Springer)
- [32] Moal S, Portier M, Kim J, Dugué J, Rapol U D, Leduc M, and Cohen-Tannoudji C *Phys. Rev. Lett.* 2006 **96** 023203
- [33] Savage C M and Kheruntsyan K V *Phys. Rev. Lett.* 2007 **99** 220404

- [34] Zou X, Wang L, and Mandel L *Optics communications* 1991 **84** 351
- [35] Vardi A and Moore M G *Phys. Rev. Lett.* 2002 **89** 090403
- [36] Pu H and Meystre P *Phys. Rev. Lett.* 2000 **85** 3987
- [37] Inouye S, Chikkatur A, Stamper-Kurn D M, Stenger J, Pritchard D, and Ketterle W *Science* 1999 **285** 571
- [38] Gross M and Haroche S *Phys. Rep.* 1982 **93** 301
- [39] Wong C Y and Zhang W N *Phys. Rev. C* 2007 **76** 034905
- [40] Collecute G R and Drummond P D *Comp. Phys. Commun.* 2001 **142** 219
- [41] Castin Y and Dum R *Phys. Rev. Lett.* 1996 **77** 5315
- [42] Trippenbach M private communication

Bibliographie

- [1] A. EINSTEIN, “On a Heuristic Viewpoint Concerning the Production and Transformation of Light”, *Ann. Phys.* **17**, 132 (1905).
- [2] L. DE BROGLIE, *Recherches sur la théorie des quanta*, Thèse de Doctorat, Paris, 1924.
- [3] C. DAVISSON ET L. H. GERMER, “Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel”, *Phys. Rev.* **30**, 705 (1927).
- [4] R. HANBURY BROWN ET R. Q. TWISS, “Correlation between photons in two coherent beams of light”, *Nature* **177**, 27 (1956).
- [5] U. FANO, “Quantum theory of interference effects in the mixing of light from phase independent sources”, *Amer. J. Phys.* **29**, 539 (1961).
- [6] R. J. GLAUBER, “The Quantum Theory of Optical Coherence”, *Phys. Rev.* **130**, 2529 (1963).
- [7] H. J. KIMBLE, M. DAGENAIS, ET L. MANDEL, “Photon Antibunching in Resonance Fluorescence”, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 691 (1977).
- [8] R. E. SLUSHER, L. W. HOLLBERG, B. YURKE, J. C. MERTZ, ET J. F. VALLEY, “Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity”, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2409 (1985).
- [9] X. ZOU, L. WANG, ET L. MANDEL, “Violation of classical probability in parametric down-conversion”, *Optics communications* **84**, 351 (1991).
- [10] A. ASPECT, P. GRANGIER, ET G. ROGER, “Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell’s Theorem”, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981).
- [11] A. ASPECT, P. GRANGIER, ET G. ROGER, “Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : A New Violation of Bell’s Inequalities”, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91 (1982).
- [12] A. ASPECT, J. DALIBARD, ET G. ROGER, “Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers”, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982).
- [13] J. G. RARITY ET P. R. TAPSTER, “Experimental violation of Bell’s inequality based on phase and momentum”, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2495 (1990).
- [14] M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN, ET E. A. CORNELL, “Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor”, *Science* **269**, 198 (1995).
- [15] C. N. COHEN-TANNOUDJI, “Nobel Lecture : Manipulating atoms with photons”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 707 (1998).
- [16] S. CHU, “Nobel Lecture : The manipulation of neutral particles”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 685 (1998).

- [17] W. D. PHILLIPS, “Nobel Lecture : Laser cooling and trapping of neutral atoms”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 721 (1998).
- [18] W. KETTERLE, “Nobel lecture : When atoms behave as waves : Bose-Einstein condensation and the atom laser”, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 1131 (2002).
- [19] E. A. CORNELL ET C. E. WIEMAN, “Nobel Lecture : Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments”, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 875 (2002).
- [20] M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, D. M. KURN, D. S. DURFEE, C. G. TOWNSEND, ET W. KETTERLE, “Output Coupler for Bose-Einstein Condensed Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 582 (1997).
- [21] P. BOUYER ET M. A. KASEVICH, “Heisenberg-limited spectroscopy with degenerate Bose-Einstein gases”, *Phys. Rev. A* **56**, R1083 (1997).
- [22] P. BOUYER, *Interférométrie atomique : des sources d’atomes refroidies aux lasers à atomes* (Habilitation à diriger les recherches, Université Paris-Sud, 2005).
- [23] W. GUERIN, J.-F. RIOU, J. P. GAEBLER, V. JOSSE, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Guided Quasicontinuous Atom Laser”, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 200402 (2006).
- [24] A. ROBERT, O. SIRJEAN, A. BROWAEYS, J. POUPARD, S. NOWAK, C. I. BOIRON, D. WESTBROOK, ET A. ASPECT, “A Bose-Einstein condensate of metastable atoms”, *Science* **292**, 461 (2001).
- [25] M. SCHELLEKENS, R. HOPPELER, A. PERRIN, J. VIANA GOMES, C. I. BOIRON, D. WESTBROOK, ET A. ASPECT, “Hanbury Brown Twiss Effect for Ultracold Quantum Gases”, *Science* **310**, 648 (2005).
- [26] T. JELTES, J. M. MCNAMARA, W. HOGERVORST, W. VASSEN, V. KRACHMALNICOFF, M. SCHELLEKENS, A. PERRIN, H. CHANG, D. BOIRON, A. ASPECT, ET C. I. WESTBROOK, “Comparison of the Hanbury Brown-Twiss effect for bosons and fermions”, *Nature* **445**, 402 (2007).
- [27] C. I. WESTBROOK *et al.*, dans *Producing and Detecting Correlated Atoms*, ÉDITÉ PAR C. ROOS, H. HÄFFNER, ET R. BLATT (AIP, 2006), No. 1, pp. 181–187.
- [28] A. PERRIN, H. CHANG, V. KRACHMALNICOFF, M. SCHELLEKENS, D. BOIRON, A. ASPECT, ET C. I. WESTBROOK, “Observation of Atom Pairs in Spontaneous Four-Wave Mixing of Two Colliding Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 150405 (2007).
- [29] R. J. GLAUBER, “Nobel Lecture : One hundred years of light quanta”, *Reviews of Modern Physics* **78**, 1267 (2006).
- [30] L. DENG, E. HAGLEY, J. WEN, M. TRIPPENBACH, Y. BAND, P. JULIENNE, J. SIMSARIAN, K. HELMERSON, S. ROLSTON, ET W. PHILLIPS, “Four wave mixing with matter waves”, *Nature* **398**, 218 (1999).
- [31] D. WALLS ET G. MILBURN, *Quantum Optics* (Springer, New York, 1991).
- [32] M. D. REID ET D. F. WALLS, “Violations of classical inequalities in quantum optics”, *Phys. Rev. A* **34**, 1260 (1986).
- [33] M. O. SCULLY ET M. S. ZUBAIRY, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997).

- [34] F. DIEDRICH ET H. WALTHER, “Nonclassical radiation of a single stored ion”, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 203 (1987).
- [35] R. J. GLAUBER, “Coherent and Incoherent States of the Radiation Field”, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963).
- [36] M. BORN ET E. WOLF, *Principle of Optics* (Pergamon Press, London, 1959).
- [37] M. R. ANDREWS, C. G. TOWNSEND, H.-G. MIESNER, D. S. DURFEE, D. M. KURN, ET W. KETTERLE, “Observation of Interference Between Two Bose-Einstein Condensates”, *Science* **275**, 637 (1997).
- [38] J. STENGER, S. INOUE, A. P. CHIKKATUR, D. M. STAMPER-KURN, D. E. PRITCHARD, ET W. KETTERLE, “Bragg Spectroscopy of a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4569 (1999).
- [39] E. W. HAGLEY, L. DENG, M. KOZUMA, M. TRIPPENBACH, Y. B. BAND, M. EDWARDS, M. DOERY, P. S. JULIENNE, K. HELMERSON, S. L. ROLSTON, ET W. D. PHILLIPS, “Measurement of the Coherence of a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3112 (1999).
- [40] I. BLOCH, T. W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition”, *Nature* **403**, 166 (2000).
- [41] M. HUGBART, J. A. RETTER, A. F. VARON, P. BOUYER, A. ASPECT, ET M. J. DAVIS, “Population and phase coherence during the growth of an elongated Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. A* **75**, 011602 (2007).
- [42] S. RITTER, A. OTTL, T. DONNER, T. BOURDEL, M. KOHL, ET T. ESSLINGER, “Observing the Formation of Long-Range Order during Bose-Einstein Condensation”, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 090402 (2007).
- [43] R. HANBURY BROWN ET R. TWISS, “A test of a new type of stellar interferometer on Sirius”, *Nature* **178**, 1046 (1956).
- [44] R. J. GLAUBER, dans *Quantum Optics and Electronics*, ÉDITÉ PAR C. DE WITT, A. BLANDIN, ET C. COHEN-TANNOUJDI (Gordon and Breach, New York, 1965).
- [45] M. YASUDA ET F. SHIMIZU, “Observation of Two-Atom Correlation of an Ultracold Neon Atomic Beam”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3090 (1996).
- [46] M. SCHELLEKENS, *The Hanbury Brown and Twiss Effect for Cold Atoms*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, 2007.
- [47] M. NARASCHEWSKI ET R. J. GLAUBER, “Spatial coherence and density correlations of trapped Bose gases”, *Phys. Rev. A* **59**, 4595 (1999).
- [48] J. V. GOMES, A. PERRIN, M. SCHELLEKENS, D. BOIRON, C. I. WESTBROOK, ET M. BELSLEY, “Theory for a Hanbury Brown Twiss experiment with a ballistically expanding cloud of cold atoms”, *Phys. Rev. A* **74**, 053607 (2006).
- [49] J. ESTEVE, J.-B. TREBBIA, T. SCHUMM, A. ASPECT, C. I. WESTBROOK, ET I. BOUCHOULE, “Observations of Density Fluctuations in an Elongated Bose Gas : Ideal Gas and Quasicondensate Regimes”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 130403 (2006).
- [50] S. FÖLLING, F. GERBIER, A. WIDERA, O. MANDEL, T. GERIKE, ET I. BLOCH, “Spatial quantum noise interferometry in expanding condensates”, *Nature* **434**, 481 (2005).

- [51] A. ÖTTL, S. RITTER, M. KÖHL, ET T. ESSLINGER, “Correlations and Counting Statistics of an Atom Laser”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090404 (2005).
- [52] T. ROM, T. BEST, D. VAN OOSTEN, U. SCHNEIDER, S. FÖLLING, B. PAREDES, ET I. BLOCH, “Free fermion antibunching in a degenerate atomic Fermi gas released from an optical lattice”, *Nature* **444**, 733 (2006).
- [53] B. L. SCHUMAKER ET C. M. CAVES, “New formalism for two-photon quantum optics. II. Mathematical foundation and compact notation”, *Phys. Rev. A* **31**, 3093 (1985).
- [54] H.-A. BACHOR, *A Guide to Experiments in Quantum Optics* (WILEY-VCH, Berlin, 1998).
- [55] D. C. BURNHAM ET D. L. WEINBERG, “Observation of Simultaneity in Parametric Production of Optical Photon Pairs”, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 84 (1970).
- [56] S. FRIBERG, C. K. HONG, ET L. MANDEL, “Measurement of Time Delays in the Parametric Production of Photon Pairs”, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2011 (1985).
- [57] M. GREINER, C. A. REGAL, J. T. STEWART, ET D. S. JIN, “Probing Pair-Correlated Fermionic Atoms through Correlations in Atom Shot Noise”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 110401 (2005).
- [58] E. ALTMAN, E. DEMLER, ET M. D. LUKIN, “Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations”, *Phys. Rev. A* **70**, 013603 (2004).
- [59] A. EINSTEIN, B. PODOLSKY, ET N. ROSEN, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [60] A. HEIDMANN, R. J. HOROWICZ, S. REYNAUD, E. GIACOBINO, C. FABRE, ET G. CAMY, “Observation of Quantum Noise Reduction on Twin Laser Beams”, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2555 (1987).
- [61] Y. CASTIN, dans *Coherent atomic matter waves, Lecture Notes of Les Houches Summer School*, ÉDITÉ PAR C. W. R. KAISER ET F. DAVID (Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 2001).
- [62] V. A. YUROVSKY, “Quantum effects on dynamics of instabilities in Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **65**, 033605 (2002).
- [63] J. M. VOGELS, K. XU, ET W. KETTERLE, “Generation of Macroscopic Pair-Correlated Atomic Beams by Four-Wave Mixing in Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 020401 (2002).
- [64] J. M. VOGELS, J. K. CHIN, ET W. KETTERLE, “Coherent Collisions between Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 030403 (2003).
- [65] K. GIBBLE, S. CHANG, ET R. LEGERE, “Direct Observation of *s*-Wave Atomic Collisions”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2666 (1995).
- [66] A. P. CHIKKATUR, A. GÖRLITZ, D. M. STAMPER-KURN, S. INOUE, S. GUPTA, ET W. KETTERLE, “Suppression and Enhancement of Impurity Scattering in a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 483 (2000).
- [67] N. KATZ, J. STEINHAUER, R. OZERI, ET N. DAVIDSON, “Beliaev Damping of Quasiparticles in a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 220401 (2002).
- [68] N. R. THOMAS, N. KJAERGAARD, P. S. JULIENNE, ET A. C. WILSON, “Imaging of *s* and *d* Partial-Wave Interference in Quantum Scattering of Identical Bosonic Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 173201 (2004).

- [69] C. BUGGLE, J. LEONARD, W. VON KLITZING, ET J. T. M. WALRAVEN, “Interferometric Determination of the s and d-Wave Scattering Amplitudes in Rb”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 173202 (2004).
- [70] A. S. MELLISH, N. KJAERGAARD, P. S. JULIENNE, ET A. C. WILSON, “Quantum scattering of distinguishable bosons using an ultracold-atom collider”, *Phys. Rev. A* **75**, 020701 (2007).
- [71] N. GEMELKE, E. SARAJLIC, Y. BIDEL, S. HONG, ET S. CHU, “Parametric Amplification of Matter Waves in Periodically Translated Optical Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170404 (2005).
- [72] A. BROWAEYS, *Piégeage magnétique d’un gaz d’Hélium métastable : vers la condensation de Bose-Einstein*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, 2000.
- [73] A. ROBERT, *Réalisation d’un condensat de Bose-Einstein d’Hélium métastable*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, 2001.
- [74] O. SIRJEAN, *Collisions ionisantes : un nouveau diagnostic pour les condensats de Bose-Einstein d’hélium métastable*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, 2003.
- [75] G. W. F. DRAKE, “Theory of Relativistic Magnetic Dipole Transitions : Lifetime of the Metastable 2^3S State of the Heliumlike Ions”, *Phys. Rev. A* **3**, 908 (1971).
- [76] J. R. WOODWORTH ET H. W. MOOS, “Experimental determination of the single-photon transition rate between the 2^3S_1 and 1^1S_0 states of He I”, *Phys. Rev. A* **12**, 2455 (1975).
- [77] J. POUPARD, *Mesure de deux caractéristiques de l’hélium métastable importantes pour le refroidissement radiatif*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, 2000.
- [78] S. MOAL, M. PORTIER, J. KIM, J. DUGUÉ, U. D. RAPOL, M. LEDUC, ET C. COHEN-TANNOUJJI, “Accurate Determination of the Scattering Length of Metastable Helium Atoms Using Dark Resonances between Atoms and Exotic Molecules”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 023203 (2006).
- [79] P. J. LEO, V. VENTURI, I. B. WHITTINGHAM, ET J. F. BABB, “Ultracold collisions of metastable helium atoms”, *Phys. Rev. A* **64**, 042710 (2001).
- [80] P. O. FEDICHEV, M. W. REYNOLDS, U. M. RAHMANOV, ET G. V. SHLYAPNIKOV, “Inelastic decay processes in a gas of spin-polarized triplet helium”, *Phys. Rev. A* **53**, 1447 (1996).
- [81] S. SEIDELIN, *Collisions dans un gaz d’hélium métastable au voisinage de la dégénérescence quantique*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, 2004.
- [82] J. C. VIANA GOMES, *Thermométrie et propriétés de cohérence d’un gaz ultra-froid d’hélium métastable*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, 2007.
- [83] F. PEREIRA DOS SANTOS, J. LÉONARD, J. WANG, C. J. BARRELET, F. PERALES, E. RASEL, C. S. UNNIKRISHNAN, M. LEDUC, ET C. COHEN-TANNOUJJI, “Bose-Einstein Condensation of Metastable Helium”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3459 (2001).
- [84] G. LABEYRIE, *Deux outils pour l’optique atomique : Jet intense d’hélium métastable et Miroir à onde évanescente exaltée*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, 1998.
- [85] E. RASEL, F. PEREIRA DOS SANTOS, F. SAVERIO PAVONE, F. PERALES, C. UNNIKRISHNAN, ET M. LEDUC, “White light transverse cooling of a helium beam”, *Eur. Phys. J. D* **7**, 311 (1999).

- [86] W. ROOIJAKKERS, W. HOGERVORST, ET W. VASSEN, “An intense collimated beam of metastable helium atoms by two-dimensional laser cooling”, *Opt. Commun.* **123**, 321 (1996).
- [87] R. HOPPELER, *De la condensation de Bose-Einstein à l’effet Hanbury Brown & Twiss atomique de l’hélium métastable*, Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, 2004.
- [88] P. J. J. TOL, N. HERSCHBACH, E. A. HESSELS, W. HOGERVORST, ET W. VASSEN, “Large numbers of cold metastable helium atoms in a magneto-optical trap”, *Phys. Rev. A* **60**, R761 (1999).
- [89] D. E. PRITCHARD, “Cooling Neutral Atoms in a Magnetic Trap for Precision Spectroscopy”, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1336 (1983).
- [90] P. O. SCHMIDT, S. HENSLER, J. WERNER, T. BINHAMMER, A. GÖRLITZ, ET T. PFAU, “Doppler cooling of an optically dense cloud of magnetically trapped atoms”, *J. Opt. Soc. Amer. B* **20**, 960 (2003).
- [91] A. S. TYCHKOV, T. JELTES, J. M. MCNAMARA, P. J. J. TOL, N. HERSCHBACH, W. HOGERVORST, ET W. VASSEN, “Metastable helium Bose-Einstein condensate with a large number of atoms”, *Phys. Rev. A* **73**, 031603 (2006).
- [92] O. JAGUTZKI, V. MERGEL, K. ULLMANN-PFLEGER, L. SPIELBERGER, U. SPILLMANN, R. DÖRNER, ET H. SCHMIDT-BÖKING, “A Broad-Application Microchannel-Plate Detector System for Advanced Particle or Photon Detection Tasks : Large Area Imaging, Precise Multi-Hit Timing Information and High Detection Rate”, *Nucl. Inst. & Meth. in Phys. Res. A* **477**, 244 (2004).
- [93] Y. CASTIN ET R. DUM, “Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).
- [94] Y. KAGAN, E. L. SURKOV, ET G. V. SHLYAPNIKOV, “Evolution of a Bose gas in anisotropic time-dependent traps”, *Phys. Rev. A* **55**, R18 (1997).
- [95] A. ASPECT, E. ARIMONDO, R. KAISER, N. VANSTEENKISTE, ET C. COHEN-TANNOUDJI, “Laser Cooling below the One-Photon Recoil Energy by Velocity-Selective Coherent Population Trapping”, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 826 (1988).
- [96] M. KASEVICH ET S. CHU, “Laser cooling below a photon recoil with three-level atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1741 (1992).
- [97] F. GERBIER, *Condensats de Bose-Einstein dans un piège anisotrope*, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 2003.
- [98] E. HAGLEY, L. DENG, M. KOZUMA, J. WEN, K. HELMERSON, S. L. ROLSTON, ET W. D. PHILLIPS, “A Well-Collimated Quasi Continuous Atom Laser”, *Science* **283**, 1706 (1999).
- [99] N. P. ROBINS, C. FIGL, S. A. HAINE, A. K. MORRISON, M. JEPPESEN, J. J. HOPE, ET J. D. CLOSE, “Achieving Peak Brightness in an Atom Laser”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 140403 (2006).
- [100] C. COHEN-TANNOUDJI, J. DUPONT-ROC, ET G. GRYNBERG, *Processus d’interaction entre photons et atomes* (CNRS Editions, Paris, France, 2001).
- [101] K. MOLER, D. S. WEISS, M. KASEVICH, ET S. CHU, “Theoretical analysis of velocity-selective Raman transitions”, *Phys. Rev. A* **45**, 342 (1992).

- [102] R. H. DICKE, “Coherence in Spontaneous Radiation Processes”, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).
- [103] M. GROSS ET S. HAROCHE, “Superradiance : An essay on the theory of collective spontaneous emission”, *Phys. Rep.* **93**, 301 (1982).
- [104] S. INOUE, A. CHIKKATUR, D. M. STAMPER-KURN, J. STENGER, D. PRITCHARD, ET W. KETTERLE, “Superradiant Rayleigh Scattering from a Bose-Einstein Condensate”, *Science* **285**, 571 (1999).
- [105] D. SCHNEBLE, Y. TORII, M. BOYD, E. W. STREED, D. E. PRITCHARD, ET W. KETTERLE, “The Onset of Matter-Wave Amplification in a Superradiant Bose-Einstein Condensate”, *Science* **300**, 475 (2003).
- [106] Y. YOSHIKAWA, T. SUGIURA, Y. TORII, ET T. KUGA, “Observation of superradiant Raman scattering in a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. A* **69**, 041603 (2004).
- [107] D. SCHNEBLE, G. K. CAMPBELL, E. W. STREED, M. BOYD, D. E. PRITCHARD, ET W. KETTERLE, “Raman amplification of matter waves”, *Phys. Rev. A* **69**, 041601 (2004).
- [108] K. VAN DER STAM, R. MEPPELINK, J. VOGELS, J. THOMSEN, ET P. VAN DER STRATEN, “Resonant superradiant backward-scattering as a source for many-particle entanglement”, (2007), arXiv :0707.1465v1.
- [109] P. ZIŃ, CHWEDŃCZUK, ET M. TRIPPENBACH, “Elastic scattering losses from colliding Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **73**, 033602 (2006).
- [110] L.-M. DUAN, A. SØRENSEN, J. I. CIRAC, ET P. ZOLLER, “Squeezing and Entanglement of Atomic Beams”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3991 (2000).
- [111] E. L. LEHMANN, *Testing Statistical Hypothesis* (Springer, New York, 1997).
- [112] M. TRIPPENBACH, Y. B. BAND, ET P. S. JULIENNE, “Theory of four-wave mixing of matter waves from a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. A* **62**, 023608 (2000).
- [113] R. BACH, M. TRIPPENBACH, ET K. RZAŻEWSKI, “Spontaneous emission of atoms via collisions of Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **65**, 063605 (2002).
- [114] P. ZIŃ, J. CHWEDŃCZUK, A. VEITIA, K. RZAŻEWSKI, ET M. TRIPPENBACH, “Quantum Multimode Model of Elastic Scattering from Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 200401 (2005).
- [115] A. A. NORRIE, R. J. BALLAGH, ET C. W. GARDINER, “Quantum Turbulence in Condensate Collisions : An Application of the Classical Field Method”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 040401 (2005).
- [116] A. A. NORRIE, R. J. BALLAGH, ET C. W. GARDINER, “Quantum turbulence and correlations in Bose-Einstein condensate collisions”, *Phys. Rev. A* **73**, 043617 (2006).
- [117] P. DEUAR ET P. D. DRUMMOND, “Correlations in a BEC Collision : First-Principles Quantum Dynamics with 150 000 Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 120402 (2007).
- [118] G. COLLECUTT, *XMDS : eXtensible Multi-Dimensionnal Simulator* (www.xmnds.org, 2001), documentation logiciel.
- [119] F. DALFOVO, S. GIORGINI, L. P. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI, “Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases”, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).

-
- [120] P. DEUAR, *First-principles quantum simulations of many-mode open interacting Bose gases using stochastic gauge methods*, Thèse de Doctorat, The University of Queensland, Australie, 2005, arXiv :cond-mat/0507023v1.
- [121] C. M. SAVAGE, P. E. SCHWENN, ET K. V. KHERUNTSYAN, “First-principles quantum simulations of dissociation of molecular condensates : Atom correlations in momentum space”, *Phys. Rev. A* **74**, 033620 (2006).
- [122] H. PU ET P. MEYSTRE, “Creating Macroscopic Atomic Einstein-Podolsky-Rosen States from Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3987 (2000).
- [123] R. FEYNMAN, “Simulating physics with computers”, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467 (1982).
- [124] P. DRUMMOND ET C. GARDINER, “Generalised P-representations in quantum optics”, *J. Phys. A* **13**, 2353 (1980).
- [125] P. D. DRUMMOND, P. DEUAR, ET J. F. CORNEY, “Quantum many-body simulations using Gaussian phase-space representations”, (2006), arXiv :quant-ph/0608247v2.
- [126] C. GARDINER, *Handbook of Stochastic Methods : For Physics, Chemistry, and the Natural Sciences* (Springer-Verlag, Berlin, 1986).
- [127] C. GARDINER, *Quantum Noise* (Springer-Verlag, Berlin, 1991).
- [128] K. MOLMER, A. PERRIN, V. KRACHMALNICOFF, V. LEUNG, D. BOIRON, A. ASPECT, ET C. I. WESTBROOK, “Hanbury Brown and Twiss correlations in atoms scattered from colliding condensates”, (2007), arXiv :0710.0208v1, submitted to Phys. Rev. A.
- [129] A. PERRIN, C. M. SAVAGE, D. BOIRON, V. KRACHMALNICOFF, C. I. WESTBROOK, ET K. KHERUNTSYAN, “Atomic four-wave mixing via condensate collisions”, (2007), arXiv :0712.2145v1, submitted to New J. of Phys.

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous présentons les études réalisées pour permettre l'observation de paires d'atomes corrélés produites lors de la collision de deux condensats de Bose-Einstein d'hélium métastable. Un système basé sur l'utilisation de trois faisceaux laser permet la réalisation d'un transfert Raman qui extrait d'un piège magnétique et sépare en deux parties d'impulsions moyennes opposées le condensat produit expérimentalement. Des processus de collisions élastiques, intervenant pendant la propagation des condensats, sont à l'origine de la diffusion de paires d'atomes dont les impulsions satisfont aux lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion. La grande énergie interne des atomes d'hélium métastable rend possible l'utilisation d'un détecteur d'atome unique basé sur l'utilisation de galettes de microcanaux et sensible en position, donnant accès à une reconstruction tridimensionnelle des impulsions des atomes diffusés lors de la collision. L'étude de la statistique de ces impulsions permet la mise en évidence de corrélations entre les atomes diffusés, d'impulsions opposés. Le volume de corrélation mesuré peut être rapproché de l'extension de la distribution d'impulsion du condensat initial, elle-même limitée par le principe d'incertitude de Heisenberg. Cette interprétation est confirmée par l'observation de corrélations entre les atomes diffusés dans une même direction. Un tel effet correspond à une manifestation de l'effet Hanbury Brown et Twiss pour des bosons indiscernables. La mise en place d'une telle source de paires d'atomes corrélés constitue un premier pas vers la réalisation d'expériences où l'intrication des paires produites pourra être confirmée.

MOTS CLÉS

ATOMES FROIDS - OPTIQUE ATOMIQUE - CONDENSAT DE BOSE-EINSTEIN - MÉLANGE À QUATRE ONDES - COLLISIONS ÉLASTIQUES - EFFET HANBURY BROWN ET TWISS

ABSTRACT

In this thesis, we report on the observation of pairs of correlated atoms produced in the collision of two Bose-Einstein condensates of metastable helium. Three laser beams perform a Raman transfer which extracts the condensate from the magnetic trap and separates it into two parts with opposite mean momenta. While the condensates propagate, elastic scattering of pairs of atoms occurs, whose momenta satisfy energy and momentum conservation laws. Metastable helium atoms large internal energy allows the use of a position-sensitive, single-atom detector which permits a three-dimensional reconstruction of the scattered atoms' momenta. The statistics of these momenta show correlations for atoms with opposite momenta. The measured correlation volume can be understood from the uncertainty-limited momentum spread of the colliding condensates. This interpretation is confirmed by the observation of the momentum correlation function for two atoms scattered in the same direction. This latter effect is a manifestation of the Hanbury Brown-Twiss effect for indistinguishable bosons. Such a correlated-atom-pair source is a first step towards experiments in which one would like to confirm the pairs' entanglement.

KEY WORDS

COLD ATOMS - ATOM OPTICS - BOSE-EINSTEIN CONDENSATES - FOUR-WAVE MIXING - ELASTIC COLLISIONS - HANBURY BROWN-TWISS EFFECT