HAL
open science

Vers une maîtrise des incertitudes en calculs des structures composites

Yannis Rollet

To cite this version:

Yannis Rollet. Vers une maîtrise des incertitudes en calculs des structures composites. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Polytechnique X, 2007. Français. NNT : . tel-00257371

HAL Id: tel-00257371

https://pastel.hal.science/tel-00257371

Submitted on 19 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE présentée pour l'obtention du grade

de Docteur de l'Ecole Polytechnique

Discipline : Mécanique et Matériaux

VERS UNE MAITRISE DES INCERTITUDES EN CALCULS DES STRUCTURES COMPOSITES

Yannis ROLLET

Laboratoire d'accueil :

Unité Loi de Comportement et Mécanique de l'endommagement, ONERA, Châtillon

Soutenue le 26 Septembre 2007 devant le jury composé de :

M. Maurice LEMAIRE,	IFMA Clermont-Ferrand	président du jury
M. Lamine BOUBAKAR,	LMARC Besançon	rapporteur
M. Laurent GUILLAUMAT,	LAMEFIP Bordeaux	rapporteur
M. Franck SEIGNEURET,	AIRBUS France	examinateur
M. Marc BONNET,	LMS Ecole Polytechnique	directeur de thèse
M. Nicolas CARRERE,	ONERA Châtillon	encadrant ONERA

THESE présentée pour l'obtention du grade

de Docteur de l'Ecole Polytechnique

Discipline : Mécanique et Matériaux

VERS UNE MAITRISE DES INCERTITUDES EN CALCULS DES STRUCTURES COMPOSITES

Yannis ROLLET

Laboratoire d'accueil :

Unité Loi de Comportement et Mécanique de l'endommagement, ONERA, Châtillon

Soutenue le 26 Septembre 2007 devant le jury composé de :

M. Maurice LEMAIRE,	IFMA Clermont-Ferrand	président du jury
M. Lamine BOUBAKAR,	LMARC Besançon	rapporteur
M. Laurent GUILLAUMAT,	LAMEFIP Bordeaux	rapporteur
M. Franck SEIGNEURET,	AIRBUS France	examinateur
M. Marc BONNET,	LMS Ecole Polytechnique	directeur de thèse
M. Nicolas CARRERE,	ONERA Châtillon	encadrant ONERA

Remerciements

Au cours de ces trois (et quelques mois de plus) dernières années, je me suis souvent demandé si l'écriture de cette partie du mémoire, synonyme de fin définitive de la thèse, finirait par arriver. Ceux qui m'ont côtoyé pendant cette période savent que les doutes ont été nombreux. Toutefois, avec un peu de recul, cette thèse apparaît finalement comme une période de relative liberté dans le travail et la réflexion, qui m'a de plus donné l'occasion de rencontrer nombre de gens intéressants.

Parmi eux, je voudrais tout d'abord remercier les personnes à l'origine de ce travail, Jean-François Maire et François-Henri Leroy, qui m'ont accueilli et encadré à l'ONERA, d'abord en stage de DEA puis durant toute cette thèse : leurs conseils et leur soutien m'ont toujours (ou presque) été précieux.

Je tiens également à remercier mon directeur de thèse, monsieur Marc Bonnet, d'abord pour avoir accepté de suivre ce travail, pour ses conseils apportés avec un œil neuf et pertinent, et enfin pour sa disponibilité.

Merci également aux différents membres du jury, messieurs Lemaire, Boubakar, Guillaumat et Seigneuret, pour avoir bien voulu consacrer du temps à l'évaluation de ce travail, et pour leurs appréciations.

Ces remerciements ne sauraient non plus oublier un encadrant officieux, Nicolas Carrère, sans l'investissement duquel ce travail n'aurait pas été le même (et sans l'humour et la culture filmographique duquel ce travail… n'aurait pas été non plus le même).

Les relations avec les membres restants de l'équipe Américo de l'ONERA font également parties des bons souvenirs : David, Frédéric, Cédric, se fut sympa.

Pour leur accueil et la bonne ambiance de travail, je tiens aussi à remercier toute l'équipe de mon laboratoire d'accueil, l'unité Loi de Comportement et Mécanique de l'Endommagement de l'ONERA Châtillon, avec (sans notion de préséance) Pascale, Marie-Line, Dominique, Jean-louis, Daniel, Serge, Franck, Arjen, Vincent, ainsi que le labo (avec notamment Didier, Pascal et Vincent).

Une petite pensée également pour toute l'équipe du judo menée par Laurent (« le poids ça compte pas » …mon œil !).

Merci enfin à toute la bande de doctorants qui a contribué à soutenir mon moral au moyen de parties de belotte, repas et autre (toujours après le travail bien sûr, on est sérieux) : Eva (la blonde), Myriam (la brune), Norbert (la brute : grande, rouge et un peu berger allemand sur les bords), Jean-Luc (qui veut faire l'américano), Jean-Didier (sympa ton jardin), François-Xavier (F-X, le pire d'entre nous), Anaïs (aïe… mais j'ai rien fait !), sans oublier Lionel, Yann (le postdoc ami des chats), Didier, Gilles, Aurélien et Simon.

Ultimes remerciements à mes parents pour m'avoir supporté (à tous les sens du terme) durant toutes mes années d'études : voilà normalement c'est fini.

Avant - Propos

En mécanique, la simulation numérique prend aujourd'hui une place grandissante dans la chaîne de conception des structures. Alors que les notions d'erreurs et d'incertitudes se sont imposées dans le domaine expérimental, les calculs eux ne fournissent généralement qu'un seul résultat considéré comme certain. Or de petites variations affectent les paramètres d'une pièce à l'autre, et les conditions réelles de chargement sont rarement parfaitement connues. Assurer la sécurité du dimensionnement, ou améliorer l'identification des modèles à partir des essais, suppose donc d'intégrer d'une manière ou d'une autre la notion d'incertitude. Pour une meilleure confrontation avec la réalité, il apparaît donc important d'être en mesure de fournir une notion de confiance dans les modèles ou dans les simulations, par exemple sous la forme d'un encadrement des réponses. De cette confiance dans les outils numériques dépend la place des simulations dans l'industrie.

Ce travail vise donc à proposer une méthode, adaptée au calcul de structures, et permettant de prendre en compte les effets des différentes sources d'incertitudes dans les calculs, en particuliers éléments finis. La comparaison entre la réalité et les simulations basées sur des modèles, pourra ainsi intégrer non seulement la dispersion des résultats expérimentaux, mais aussi les incertitudes de calcul. Cela pourrait à terme permettre de réduire les coûts expérimentaux, ce qui est un des objectifs de recherche du Programme d'Etudes Amont AMERICO (« Analyse MultiEchelles Recherche Innovante pour les matériaux COmposites », Figure 0) financé par la DGA et dans lequel s'inscrit cette thèse.

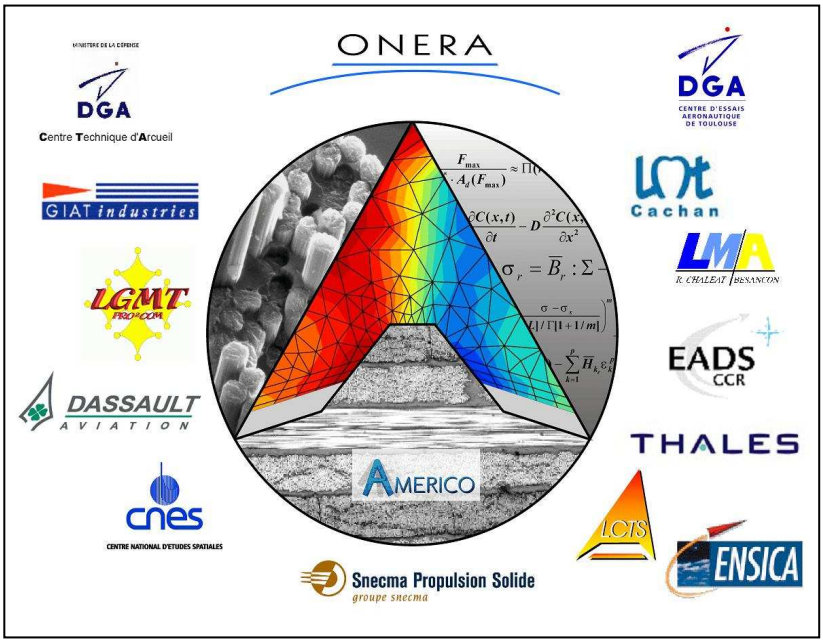


Figure 0. Programme AMERIC0 : laboratoires participants et industriels partenaires.

Dans un premier temps, le lecteur trouvera une description complète du contexte de ce travail. En particulier, l'interaction entre matériaux composites et incertitudes est détaillée, ainsi que la façon dont ces incertitudes influencent le dimensionnement des structures dans le secteur aéronautique. Au final, cela permet de définir un ensemble de critères qui ont servi de guide au développement de la méthodologie proposée.

Ces critères sont ensuite utilisés pour orienter l'étude bibliographique sur le transport d'incertitudes présentée dans le second chapitre. Le contenu conséquent de cette

partie du mémoire s'explique à la fois par le grand nombre d'approches développées pour traiter les problèmes d'incertitudes et par le caractère nouveau de ce travail au sein de mon laboratoire d'accueil. Ce dernier point demandait nécessairement d'étudier les différentes possibilités qui s'offraient à nous. Au final ce chapitre permet, en se basant sur les critères définis au chapitre précédent, de sélectionner parmi les diverses méthodes examinées celles qui sont mises en œuvre dans la suite de cette étude.

Pour le traitement des incertitudes, la démarche développée se présente comme une véritable stratégie que le chapitre III s'attache à décrire et à analyser point par point. Une première validation sur des exemples mathématiques y est également proposée.

La question de la validation de la démarche est traitée plus précisément dans le quatrième chapitre, sur des cas propres à la mécanique. Même si une validation exhaustive est hors de portée, les exemples analytiques étudiés mettent en évidence les bonnes performances de la stratégie proposée.

Celle-ci ayant été construite dans l'objectif de traiter des calculs de structures, le cinquième chapitre est consacré à son application sur des exemples de calculs par éléments finis de complexité croissante.

Enfin, après avoir traité le problème de l'évaluation des effets des incertitudes, la question de leur réduction est abordée dans le sixième chapitre. Trois points sont en particulier discutés : une estimation au plus juste du niveau des incertitudes en entrée des calculs par une meilleure analyse des bases de données, l'utilisation des corrélations entre paramètres, et pour finir, le rôle de la qualité des modèles sur les effets des incertitudes. Ce travail s'intéressant à des problèmes variés, les termes anglophones ont par la suite systématiquement été rappelés afin de faciliter l'usage de ce travail pour une recherche bibliographique.

Sommaire

Chapitre I Présentation générale 1

I.1. Contexte et enjeux 3
I.2. Spécificités liées aux composites 4
I.2.1. Hétérogénéité, anisotropie : des caractéristiques accentuant l'incertitude 6
I.2.2. Des matériaux multiéchelles 7
I.2.3. Influence clé du processus de fabrication sur les incertitudes 8
I.3. Un point sur la démarche industrielle 10
I.4. Objectifs et limites de ce travail : définition d'un cadre pour le problème de traitement des incertitudes. 13
I.4.1. Quelques définitions adaptées à cette étude 14
I.4.2. Quelques remarques sur le dimensionnement : incertitudes et notion de conception robuste 18
I.4.3. Cadre défini pour ce travail 19

Chapitre II Sélection des méthodes de transports des incertitudes 21

Introduction 23
II.1. Bref historique sur les incertitudes en physique 23
II.2. Représentation des incertitudes 25
II.2.1. Approche probabiliste 25
II.2.2. Arithmétique des intervalles 28
II.2.3. Ensembles flous et logique floue 29
II.2.4. Approche non- paramétrique 31
II.2.5. Théorie des méconnaissances 32
II.3. Approche Industrielle en aéronautique 33
II.4. Méthode de Monte-Carlo 36
II.5. Transport d'incertitudes par décomposition de la fonction de transfert en séries de Taylor 37
II.5.1. Principe 37
II.5.2. Limite de validité 39
II.6. Analyse de sensibilité 39
II.7. Surface de réponse 40
II.7.1. A l'origine : les plans d'expériences 40
II.7.2. Des méthodes de surfaces de réponse 42
II.7.3. Utilisation du chaos polynomial 43
II.7.4. Krigeage pour surface de réponse 47
II.7.5. Autres formes de métamodèles 48
II.8. Méthode fiabiliste 49
II.8.1. Principe 49
II.8.2. Relations avec la méthode des surfaces de réponse 51
II.9. Eléments finis stochastiques 52
II.9.1. Méthode par perturbation 52
II.9.2. Méthode spectrale 53
Conclusion 55

Chapitre III Construction d'une stratégie adaptée au traitement des incertitudes en calcul de structures..... 57

Introduction 59
III.1. Proposition d'une démarche progressive du transport d'incertitudes 59
III.1.1. Principe d'une approche classique de type « Surface de réponse» (Response Surface Method - RSM) 60
III.1.2. Amélioration par l'introduction d'estimateur de la qualité du transport d'incertitude 61
III.1.3. Description de la stratégie progressive d'Analyse de la Variabilité 62
III.2. Présentation d'une approche classique de type « Surface de Réponses » 64
III.2.1. Normalisation des paramètres 65
III.2.2. Sélection des points d'identification 66
III.2.3. Calculs des valeurs des fonctions objectifs 67
III.2.4. Choix et identification du métamodèle 67
III.2.5. Exploitation du métamodèle : estimation de l'effet des incertitudes 68
III.3. Apport d'une phase de vérification dans une approche de type RSM 69
III.3.1. Présentation des méthodes de validation croisée 69
III.3.2. Conséquences sur l'étape de sélection des points d'identification..... 74
III.3.3. Phase de vérification du métamodèle 75
III.3.4. Obtention d'un intervalle de confiance sur les indicateurs statistiques calculés au travers de la démarche 81
III.4. Intérêts d'une stratégie progressive d'Analyse de la Variabilité 81
III.4.1. Optimisation de la sélection des points d'identification du métamodèle d'ordre un 82
III.4.2. Stratégie adoptée en cas de détection d'une défaillance du métamodèle : progressivité de la démarche..... 84
III.5. Mise en œuvre et premières validations de la démarche d'Analyse de la Variabilité (AdV) 87
III.5.1. Principe de la validation 87
III.5.2. Synthèse des résultats obtenus 87
III.5.3. Quelques remarques sur les cas « fortement » non linéaires 88
III.5.4. Deux exemples de tests 89
Conclusion 93

Chapitre IV Validation de la stratégie développée sur des problèmes mécaniques représentatifs des particularités composites..... 95

Introduction 97
IV.1. Calcul de structures composites et procédure de validation de la démarche. 97
IV.2. Etude complète d'un cas correspondant à un fonctionnement « optimal » de notre stratégie. 100
IV.2.1. Argument pour le choix de l'exemple de la poutre stratifiée en flexion.... 100
IV.2.2. Présentation du cas traité 102
IV.2.3. Sélection du plan d'expérience et identification des métamodèles ... 103
IV.2.4. Utilisation des réponses du métamodèle aux points d'identification comme premier indicateur de qualité 104
IV.2.5. Estimation de la qualité du métamodèle par méthode de validation croisée 106
IV.2.6. Exploitation des résultats de la démarche..... 108

IV.2.7. Confrontation des résultats avec ceux issus d'une méthode de Monte-Carlo 111
IV.2.8. Etude « probabiliste » de la rupture 113
IV.3. Exemple de stratégies de résolution pour diverses situations potentiellement problématiques. 121
IV.3.1. Grand nombre de variables présentant chacune une faible incertitude 121
IV.3.2. Nombre réduit de variables présentant chacune une forte incertitude 124
IV.3.3. Application à un comportement non-linéaire : prise en compte de la viscosité..... 128
IV.4. Etude d'un cas de réponse bimodale : flambement d'une plaque composite..... 132
IV.4.1. Présentation de l'exemple..... 132
IV.4.2. Mise en œuvre de l'étude des effets des incertitudes 134
Conclusion 138

Chapitre V Mise en évidence des multiples apports de la stratégie développée pour l'analyse de structures composites 139

Introduction 141
V.1. Etude d'un cas au coût de calcul réduit, l'éprouvette chapeau..... 141
V.1.1. Retour sur la validation dans le cas de calcul de structures..... 141
V.1.2. Mise en œuvre de la méthode d'analyse de la variabilité (AdV) dans le contexte du calcul de structure..... 145
V.2. Apport des incertitudes pour le dimensionnement d'un détail mécanique : cas des plaques multiperforées. 150
V.2.1. Analyse par Eléments Finis d'une plaque multiperforée en présence d'incertitudes 150
V.2.2. Exemple d'application : estimation de la robustesse d'une approche de prévision de la rupture de structures à forts gradients..... 153
V.3. Etude d'un assemblage mécanique. 157
V.4. Etude d'une loi d'endommagement non- linéaire : cas d'une cornière composite..... 164
V.4.1. Etude du comportement global 165
V.4.2. Approche « probabiliste »de la rupture de la cornière..... 167
V.5. Application à l'étude de la rupture des sandwichs..... 170
V.5.1. Présentation de la démarche pour l'étude de la rupture des sandwichs 170
V.5.2. Analyse en données incertaines de la rupture de sandwich en flexion 3 points 171
Conclusion 175

Synthèse sur la méthode d'analyse de la variabilité proposée 177

Chapitre VI Méthodes pour la réduction des effets des incertitudes..... 179

Introduction 181
VI.1. Réduction des incertitudes sur les paramètres d'entrée, relation efforts fournis/gains possibles..... 182
VI.1.1. Réduction des effets des incertitudes par une augmentation « réfléchie » du nombre des essais..... 182
VI.1.2. Intérêt d'une amélioration de l'analyse statistique..... 186

VI.2. Importance de la prise en compte des corrélations entre paramètres d'entrée 187
VI.3. Un exemple de l'influence des corrélations entre paramètres : la consolidation multiéchelle 189
VI.3.1. Mise en évidence du problème d'amplification des incertitudes au travers des changements d'échelle 190
VI.3.2. Principe de la méthode de consolidation de base de données: exploitation du caractère multiéchelle des composites 192
VI.3.3. Exemple de mise en œuvre dans le cas micro-méso 195
VI.3.4. Exemples du gain obtenu dans l'analyse d'une structure 198
VI.3.5. Introduction de la notion probabiliste dans la consolidation 201
Conclusion 203

CONCLUSIONS 205

GLOSSAIRE : 211

ANNEXE 1 Obtention des coefficients d'abattement k_A et k_B pour le calcul des valeurs A et des valeurs B sous hypothèse de loi normale 215

A1.1. Prérequis : 215
A1.1.1. Loi du χ^2 215
A1.1.2. Loi de Student (ou loi T) 215
A1.2. Obtention de k_A et k_B 215

ANNEXE 2 Difficultés relatives aux espaces à grande dimension 217

A2.1. Hypercube et hypersphère 217
A2.2. Occupation de la surface d'une sphère 219
A2.3. Tirages aléatoires en grandes dimensions 220
A2.4. Mesure d'uniformité d'un échantillonnage 221

ANNEXE 3 Théorie classique et généralisée des stratifiés 223

ANNEXE 4 Modèle viscoélastique spectral non -linéaire pour la prise en compte de la viscosité dans les composites à matrice organique 227

ANNEXE 5 Modèle d'endommagement ODM et multicritère de rupture pour les Composites à Matrice Céramique 229

A5.1. Présentation du modèle d'endommagement ODM 229
A5.1.1. Equations constitutives des lois de comportement et d'endommagement 230
A5.1.2. Forces thermodynamiques 230
A5.1.3. Lois d'évolution 231
A5.2. Présentation du multicritère de rupture 231

BIBLIOGRAPHIE 233

Chapitre I
Présentation générale

I.1. Contexte et enjeux 3

I.2. Spécificités liées aux composites 4

I.2.1. Hétérogénéité, anisotropie : des caractéristiques accentuant l'incertitude 6
I.2.2. Des matériaux multiéchelles 7
I.2.3. Influence clé du processus de fabrication sur les incertitudes 8

I.3. Un point sur la démarche industrielle 10

I.4. Objectifs et limites de ce travail : définition d'un cadre pour le problème de traitement des incertitudes. 13

I.4.1. Quelques définitions adaptées à cette étude 14
I.4.2. Quelques remarques sur le dimensionnement : incertitudes et notion de conception robuste 18
I.4.3. Cadre défini pour ce travail 19

I.1. Contexte et enjeux

Le secteur aéronautique est aujourd'hui engagé dans une course à la réduction des coûts, tant de développement que de fonctionnement, des appareils. Parmi les divers domaines pour lesquels un gain conséquent est attendu [Noor, 00], l'aspect structures apparaît prépondérant (Figure I-1).

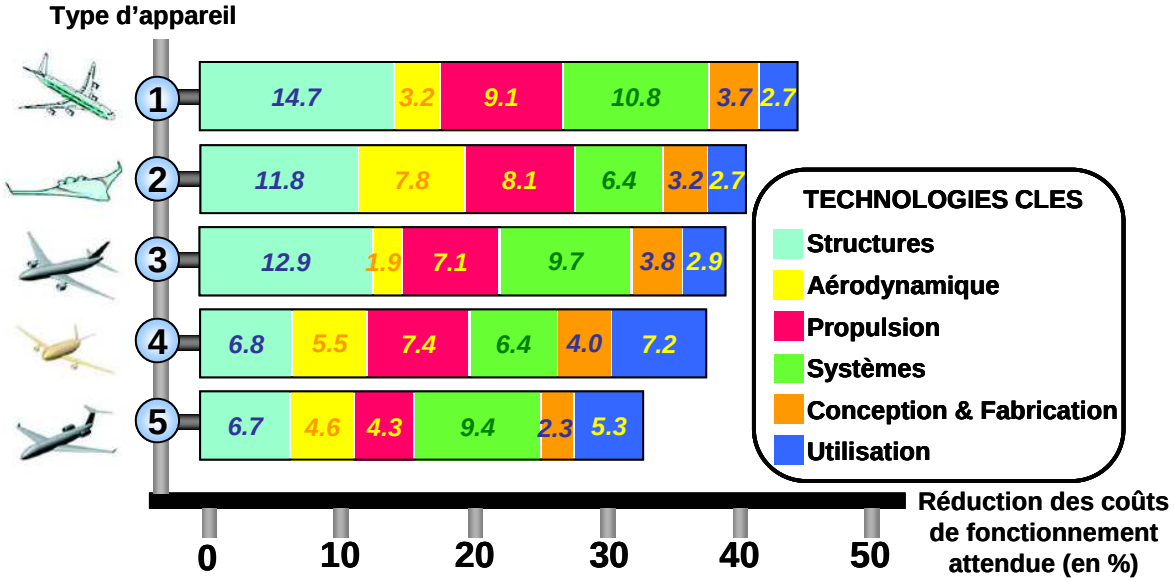


Figure I-1. Projections de la réduction des coûts de fonctionnement en 2020 pour le transport aérien subsonique résultant du déploiement de nouvelles technologies. (1) Long courrier gros porteur conventionnel, (2) « aile-volante », (3) long courrier conventionnel, (4) moyen courrier intracontinental, (5) avion régional, d'après ([Noor, 00]).

En terme de coût de fonctionnement, l'influence du paramètre masse sur la consommation de carburant est bien sûr à l'origine de l'intérêt porté à l'aspect structural, et l'objectif du poids minimum pour les appareils conduit les constructeurs à deux démarches. D'une part, l'utilisation de matériaux plus performants est généralisée, permettant ainsi d'accéder au même niveau de résistance avec des pièces plus légères. Concrètement, cela s'est traduit dans toute l'industrie aérospatiale par le développement des matériaux composites dont les propriétés spécifiques sont supérieures à celles des métaux et alliages classiques. D'autre part, un dimensionnement au plus juste est recherché et tout poids superflu est traqué. Ce point reste cependant encore problématique. Le dimensionnement, tout en respectant les contraintes de formes dues aux considérations aérodynamiques et de fonctionnalité, consiste en effet à déterminer les quelques caractéristiques modifiables d'une structure (épaisseur, nombre et position des renforts/raidisseurs…) afin que celle-ci supporte les efforts maximaux rencontrés dans son domaine de fonctionnement. Or, des incertitudes existent sur la valeur des charges limites, sur les propriétés des matériaux employés, et sur les modèles mécaniques utilisés. Celles-ci conduisent à appliquer divers coefficients de sécurité ou d'abattement forfaitaires afin d'obtenir une confiance suffisante dans la sécurité du dimensionnement. Par ailleurs, la complexité des structures aéronautiques conduit à décomposer le processus de dimensionnement en plusieurs étapes. Au final, il est alors difficile de dire, pour la structure calculée, si l'accumulation des diverses marges de sécurité est ou non excessive. Réduire la masse sans sacrifier la sécurité

passe donc par une meilleure connaissance des marges réellement appliquées. Pour cela, il semble primordial de mieux estimer les différentes sources d'incertitudes, et surtout de quantifier leurs effets afin de maintenir, voire d'améliorer, la confiance actuelle dans le processus de dimensionnement.

Mieux estimer les effets des incertitudes structurales intéresse également les industriels pour réduire les coûts de fonctionnement des appareils en prolongeant leur durée de vie. Les différentes altérations d'une structure, dues au vieillissement, au phénomène de fatigue ou d'endommagement, sont en effet particulièrement aléatoires et peuvent se traiter sous la forme de fluctuations sur les valeurs prises par les divers paramètres définissant les performances de la pièce. Une démarche consistant à intégrer ces incertitudes dans le calcul, pour montrer que leur influence est au final acceptable sur la réponse globale de la structure, permettrait donc d'allonger la durée d'utilisation de certaines pièces. En terme de coût, le gain résulterait alors des économies réalisées sur les opérations de maintenance (grâce à leur meilleure définition) mais aussi sur le recyclage des matériaux, via des règles de remplacement plus adaptées.

Cependant avant de chercher à estimer les effets des incertitudes, il convient d'abord de les quantifier. Une estimation plus précise de la variabilité, sur les propriétés matériaux notamment, pourrait permettre de justifier l'usage de coefficients de sécurité plus faibles. Toutefois, cela nécessiterait un nombre d'essais plus important, difficilement compatible avec un objectif de réduction des coûts de développement. D'autant que cet objectif s'accompagne d'une volonté de réduire les délais de conception dans les projets, là encore incompatible avec une augmentation du nombre d'essais, généralement grands consommateurs de temps. La solution semble donc passer par une utilisation accrue de la simulation numérique, dans le but non pas de supprimer totalement la part expérimentale, mais au contraire d'améliorer le dialogue essais/calculs. L'objectif est notamment d'extraire plus d'informations d'un même essai ou encore de pouvoir faire le lien entre des essais différents afin de confronter les données recueillies. Une telle démarche pourrait permettre à terme de supprimer un certain nombre de validations expérimentales en les rendant superflues pour l'obtention d'un niveau de confiance donné. Le gain obtenu pourrait alors être conséquent au vu du montant actuel des validations expérimentales, qui à titre d'exemple se sont élevées à 1,4 milliard d'euros sur le programme A380 d'Airbus, dont 680 millions d'euros uniquement pour la partie structure. Dans l'autre sens, en supposant que la réduction du nombre d'essais ne soit pas l'objectif, une meilleure confrontation essais/ simulation pourrait permettre, à nombre égal d'expériences, d'augmenter le niveau de confiance. L'attention serait alors portée sur la robustesse du dimensionnement, c'est-à-dire sa capacité à conserver un niveau de performance acceptable (en terme de sécurité et de moindre coût) vis-à-vis de variations (modérées) des paramètres le définissant. L'amélioration de la robustesse serait réalisée en tirant parti de la redondance de certains essais pour préciser le niveau des incertitudes.

I.2. Spécificités liées aux composites

Augmenter la robustesse du dimensionnement est d'autant plus nécessaire que l'emploi des matériaux composites se généralise dans tout le secteur aérospatial. En effet, si ces matériaux permettent comme il a été dit un gain en masse grâce à leurs excellentes propriétés mécaniques spécifiques, leur nature et le manque de recul résultant de leur utilisation encore récente les rendent encore peu fiables pour les

industriels. De ce fait, les différentes marges et coefficients de sécurité, exigés par les organismes de certification aéronautiques, sont généralement beaucoup plus élevés dans le cas de matériaux composites que dans le cas de matériaux métalliques. Le développement de solutions composites innovantes est ainsi freiné par les méconnaissances et le manque de robustesse/fiabilité des méthodes de dimensionnement spécifiques à ces matériaux.

Ceci est d'autant plus critique que les matériaux composites sont parfois les seules solutions possibles pour répondre à de nouveaux objectifs de performances. A titre d'exemple, citons l'aube composite FAN (Figure I-2a) développée par SNECMA où le gain de masse permet, en réduisant les efforts liés à la force centrifuge, de faire tourner à une même vitesse des soufflantes de turboréacteurs de plus grande dimension. Les programmes de recherche en cours sur le développement de risers composites (Figure I-2b) visent de même à exploiter des champs pétrolifères situés à plus grande profondeur tout en utilisant les plateformes actuelles grâce à la réduction des efforts de liaison fond-surface résultant du gain de masse de la solution composite. Cet allègement est également bien mis en évidence pour la cloison étanche de l'A380 (pièce à l'extrémité de la cabine supportant les efforts dus à la pressurisation) qui ne pèse que 250 kg (Figure I-2c).

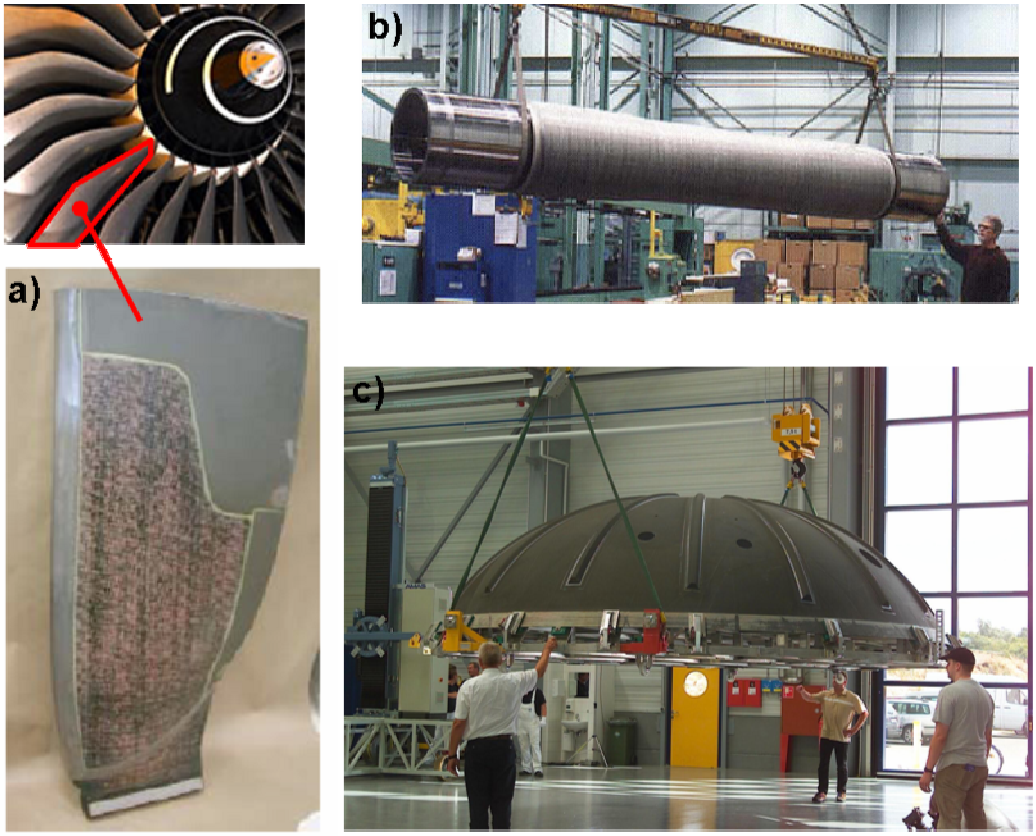


Figure I-2. Divers exemples d'applications innovantes pour les matériaux composites : a) aube FAN réalisée par procédé RTM (source SNECMA), b) portion de riser de forage en composite avec joint d'interface métallique (d'après [Ochoa, 05]), c) cloison étanche de l'A380 (source EADS).

I.2.1. Hétérogénéité, anisotropie : des caractéristiques accentuant l'incertitude

Les incertitudes sur le comportement des composites sont d'autant plus importantes que leurs sources sont multiples. Tout d'abord, l'hétérogénéité de ces matériaux est un facteur essentiel. Le terme de composite désigne en effet un solide composé d'au moins deux phases, individualisées tant au début qu'à la fin du processus de fabrication, et dont la combinaison présente un avantage significatif par rapport à leur utilisation séparée. Ces phases sont généralement classées en trois catégories : renforts, matrice (ou liant) et charges, suivant que leur rôle soit respectivement de reprendre l'essentiel des sollicitations, d'assurer le lien et le transfert des efforts entre les divers constituants, ou que leur présence dans l'ensemble soit dictée par l'amélioration de propriétés particulières (conductivité, tenue aux chocs,…). L'hétérogénéité de ces matériaux est notamment à l'origine de l'anisotropie qu'ils présentent généralement et qui oblige à un effort d'identification plus important. Par rapport à des matériaux métalliques isotropes décrits simplement par deux coefficients en élasticité, le nombre de paramètres nécessaires pour décrire le comportement d'un composite peut ainsi aller de cinq à neuf suivant qu'il soit considéré isotrope transverse ou orthotrope. Ces hypothèses sont largement utilisées pour les composites à renforts à fibres longues, les plus utilisés par l'industrie aéronautique. Par ailleurs, la différence de nature entre fibres et matrice donne une grande importance à des effets habituellement considérés uniquement à l'échelle des structures, comme le flambement qui influence les propriétés à rupture. Ce problème de micro-flambement des fibres conduit ainsi à une différence de comportement en traction et en compression, qui augmente encore le nombre de paramètres à considérer dans les modèles. L'hétérogénéité des composites et l'influence de la microstructure se manifestent également avec l'effet de réalignement des fibres. En effet, au moment de la mise en forme, celles-ci peuvent être légèrement ondulées, et se tendre lors de l'application d'un chargement de traction, entraînant ainsi un comportement non-linéaire dans un domaine où celui-ci aurait dû être purement élastique. Cet effet est encore accentué avec les nouvelles nuances de matrice comme la M21. Dans celle-ci, l'incorporation de nodules thermoplastiques, afin d'améliorer la résistance à l'impact, contraint le positionnement des fibres et, de ce fait, est sans doute à l'origine de leur ondulation. Enfin, notons le rôle important des interfaces (fibres/matrice, ou entre plis) dont les effets sur le comportement et l'endommagement sont primordiaux, et dont les propriétés sont extrêmement sensibles aux conditions d'élaboration.

Identifier les paramètres d'un composite demande donc différentes configurations d'essais (longitudinal, transverse, de cisaillement,…), ce qui multiplie d'autant le nombre d'essais nécessaires pour estimer précisément leur variabilité. Conserver un nombre d'essais modéré implique donc une méconnaissance plus forte sur les divers paramètres. Par ailleurs même avec des incertitudes modérées sur ces divers paramètres, une méconnaissance existe toujours sur la façon dont elles se combinent entre elles au niveau structural, notamment pour déterminer si de multiples incertitudes d'amplitudes limitées conduisent à une grande incertitude. Un besoin existe donc pour des méthodes permettant de prévoir comment ces incertitudes se propagent. De plus, les propriétés sont généralement mesurées séparément et sur des éprouvettes différentes (par exemple le module longitudinal du pli sur l'éprouvette unidirectionnelle 0°, le module transverse sur éprouvette 90°,…). Les propriétés sont donc considérées comme indépendantes, ce qui exclut

toute corrélation entre elles, corrélations évidemment présentes par les relations microstructurales (cet aspect sera détaillé dans la suite de ce mémoire chapitre VI).

I.2.2. Des matériaux multiéchelles

Le besoin de méthodes permettant d'estimer la propagation des incertitudes apparaît d'autant plus important en raison de la nature multiéchelle des composites, en particulier ceux à matrice organique (ou CMO). Ce type de composite est actuellement le plus utilisé dans l'industrie pour tous les usages à température modérée (<300°C). Pour des applications plus spécif iques et à températures plus élevées (pièces situées en partie chaude de turbomachine), les composites à matrice métallique (CMM) ou céramique (CMC) prennent le relais (Figure I-3), bien que leur coût de fabrication soit plus élevé. Des exemples d'application, comme le disque de compresseur en CMM à technologie ANAM (anneau aubagé monobloc), ou les volets de tuyère en CMC, sont cités dans [Dambrine, 05].

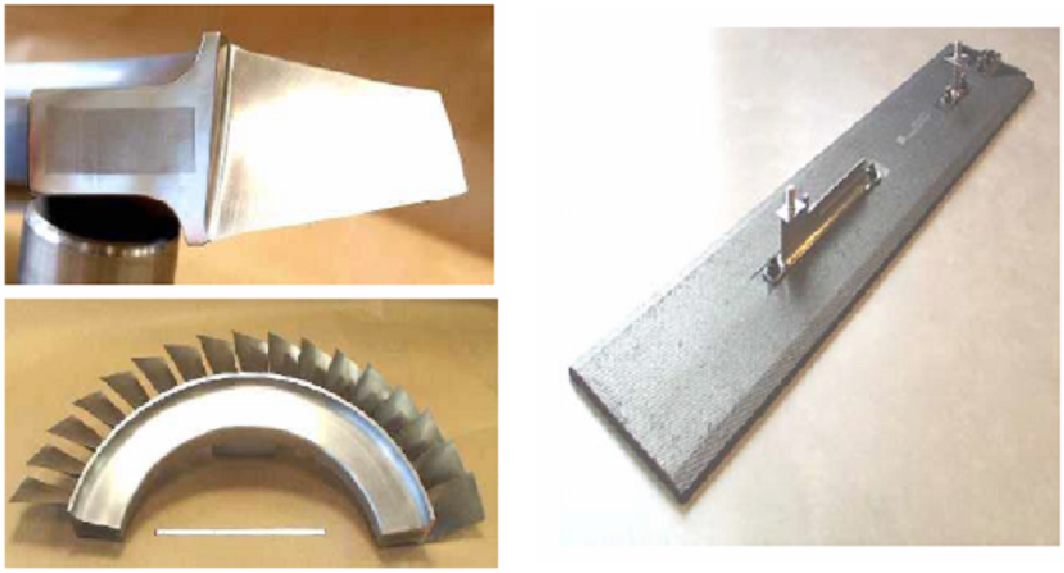


Figure I-3. Anneau aubagé monobloc en CMM (SiC-Ti) et volet chaud de tuyère en CMC (SiCSiC) (source SNECMA moteurs).

Au sein des CMO, des distinctions peuvent également être faites suivant le type de matrice (thermoplastique, thermodurcissable) ou de renforts (tissés, unidirectionnels, fibre courtes) employés. Parmi les deux types de matrice, les thermodurcissables, pour lesquels l'état solide de la matrice est irréversible après cuisson, sont actuellement les plus utilisées. Toutefois un intérêt grandissant est porté aux thermoplastiques du fait notamment de leur capacité à être mise en forme plusieurs fois de suite. Cette propriété permet en effet l'utilisation de procédés de fabrication en continu (comme l'empilement avec soudage et consolidation) économiquement plus performants que la cuisson en autoclave. En ce qui concerne les renforts, dans les tissés les fibres sont, comme le nom l'indique, assemblées sous la forme de tissus (satin, taffetas,…etc.) qui sont ensuite imprégnés de résine. D'utilisation commode pour la réalisation de pièces de surfaces non développables, ils présentent également une sensibilité plus faible au délaminage (décohésion entre deux plis contigus) ainsi qu'à la fissuration transverse (fissure traversant un pli dans la direction de stratification). Toutefois, les composites à renforts unidirectionnels, aux propriétés mécaniques plus élevées, leur sont encore souvent préférés. Les CMO à fibres courtes sont quant à eux utilisés pour des applications où la tenue de la pièce

doit être renforcée sans qu'il soit toutefois nécessaire d'obtenir un haut niveau de performance. La disposition aléatoire des renforts permet une utilisation aisée via des procédés par injection.

De par leur mode de fabrication, les CMO à renforts unidirectionnels peuvent s'étudier à trois échelles distinctes (Figure I-4). La première, dite microscopique, concerne les constituants fibres et matrice, avec un rôle important joué par l'interface qui les relie. La deuxième, dite mésoscopique, concerne le pli unidirectionnel formé de l'assemblage des constituants. Enfin, l'empilement de plis suivant différentes orientations de fibres conduit à l'échelle macroscopique du stratifié. Les composites visent ainsi à être des matériaux sur-mesure, adaptant leur rigidité ou leur résistance aux sollicitations rencontrées par la structure. Or, face à la diversité des choix de fibre et de matrice, des valeurs de taux de fibre ou des empilements possibles pour les stratifiés, faire les choix pertinents sans modèle prédictif apparaît impossible. Cet état de fait a conduit à développer un ensemble de méthodes dites de la mécanique multiéchelle permettant de faire le lien entre le comportement observé à une échelle et celui constaté aux échelles supérieures.

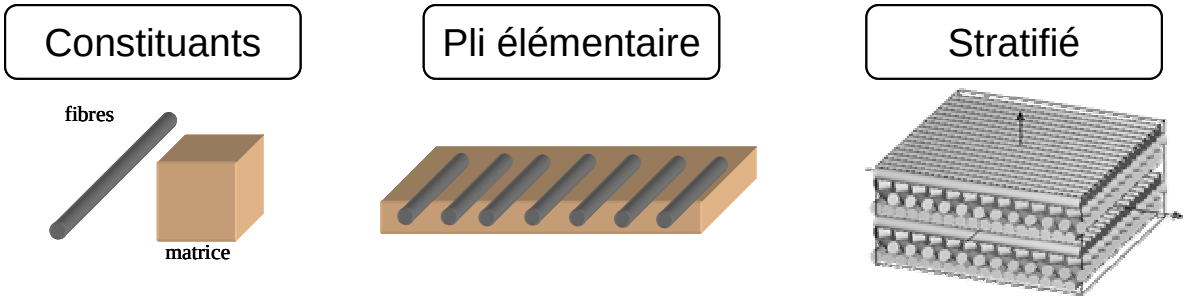


Figure I-4. Différentes échelles considérées dans la mécanique multiéchelle des composites à matrice organique (CMO). De gauche à droite, microscopique, mésoscopique et macroscopique.

Sur le plan des incertitudes, l'aspect multiéchelle des CMO permet de mieux comprendre la forte variabilité présentée par ces matériaux par rapport aux métalliques. Dans le cas des mécanismes de dégradation, en particulier d'endommagement et de rupture, les phénomènes influents se situent en effet aux trois échelles et interagissent, ce qui rend plus complexe la compréhension et la modélisation précise des phénomènes. Ainsi, les altérations qui commencent à l'échelle micro par des décohésions fibres-matrice peuvent se propager dans le pli pour créer de la microfissuration pouvant elle-même aboutir à du délaminage (décohésion de deux plis contigus) au niveau du stratifié. Par ailleurs une bonne description de la rupture du pli ne permet pas encore de prévoir aisément la rupture du stratifié [Hinton, 04]. De même, l'état actuel des connaissances ne permet pas de prévoir les propriétés à rupture du pli unidirectionnel à partir des seules propriétés des constituants.

I.2.3. Influence clé du processus de fabrication sur les incertitudes

Tout cela explique la complexité de la prévision de la rupture des CMO, et l'utilisation d'importantes marges de sécurité du fait des incertitudes sur les modèles. D'autant que les propriétés des composites sont également influencées par d'autres paramètres incertains liés à leur mode de fabrication. Or, la multiplication des étapes, dont certaines manuelles et donc de reproductibilité douteuse, rend les matériaux composites particulièrement sensibles à leur processus d'élaboration. Une incertitude sur le taux de fibre, liée à la fois au taux de fibre des préimprégnés et à la

perte de matrice au moment de la cuisson, affecte ainsi l'ensemble des propriétés mécaniques du stratifié. Il en va de même pour les incertitudes sur les propriétés de la matrice, fortement influencées par le cycle de cuisson. Lors du passage de l'échelle du pli au stratifié, le facteur de méconnaissance principal est cette fois lié aux valeurs des angles de l'empilement qui dépendent des erreurs de positionnement lors du drapage. Cela est d'autant plus vrai pour des pièces complexes, notamment celles de surface non-développable, pour lesquelles il est parfois difficile de savoir comment sont réellement orientées les fibres dans certaines zones. Les empilements industriels pouvant comporter plusieurs dizaines de plis, le nombre de paramètres incertains apparaît clairement des plus conséquents, surtout si l'on ajoute les incertitudes sur les propriétés mécaniques (coefficients élastiques, paramètres des modèles de comportement non-linéaire, d'endommagement, de rupture,…) et sur les paramètres géométriques.

Dans l'objectif de réaliser un dimensionnement robuste, la prise en compte de toutes les incertitudes ayant un rôle significatif sur le résultat est bien sûr nécessaire. Il est donc important d'être en mesure de pouvoir déterminer l'ensemble des sources d'incertitudes et de les hiérarchiser. Cependant pour réaliser le meilleur dimensionnement possible, l'ingénieur doit pouvoir faire son choix parmi une gamme relativement large de nuances de fibres et de matrices. Cela suppose donc de pouvoir évaluer la propagation des incertitudes entre les échelles. Mais la sensibilité des matériaux composites au processus d'élaboration peut également l'amener à devoir choisir entre plusieurs procédés. Le critère de sélection pour un dimensionnement robuste sera alors tout autant l'adéquation du procédé au type de pièce fabriqué que le niveau de propriété mécanique que celui-ci permet d'obtenir, en tenant compte de sa reproductibilité. Une telle différence de niveau de propriété et de reproductibilité entre procédés est illustrée Figure I-5 pour le taux de restitution d'énergie critique en mode I (G_{Ic}) quantifiant la sensibilité du matériau à la propagation de fissure. Le type de procédé RTM (*Resin Transfer Moulding*) ou autoclave conditionne la nuance de matrice employée.

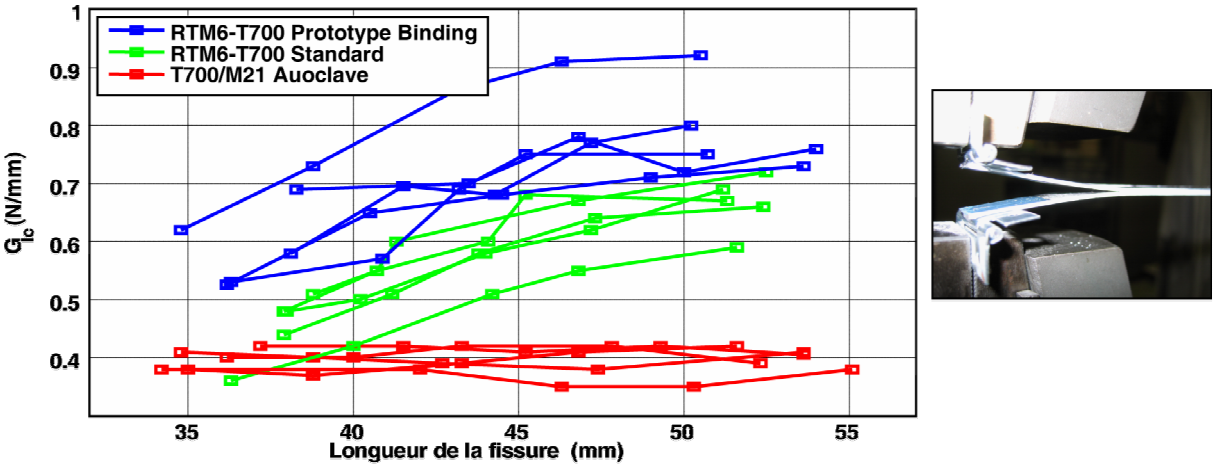


Figure I-5: Taux de restitution d'énergie en mode I (G_{Ic}) en fonction de la longueur de fissure pour 3 séries de 5 spécimens fabriqués suivant différents procédés: RTM6-T700 Standard, RTM6-T700 Prototype Binding, T700/M21 Autoclave ([Mulle, 05]). RTM6 et M21 désignent les nuances de matrice, et T700 le type de fibre de carbone. RTM est l'abréviation du procédé Resin Transfer Moulding. Les deux procédés RTM diffèrent par l'ajout dans le cas du Prototype Binding d'un film de résine thermoplastique sur les fibres avant l'injection de matrice.

Si l'on se fie uniquement au niveau de propriété moyen, le procédé choisi sera le RTM6-T700 Prototype Binding. Par contre en tenant compte du niveau de variabilité observé sur les cinq essais réalisés pour chaque procédé, l'ingénieur aura sans doute intérêt, comme nous le verrons plus loin, à choisir le procédé par autoclave, beaucoup plus stable, et finalement moins pénalisant.

I.3. Un point sur la démarche industrielle

Dans le cas précédent (Figure I-5), l'ingénieur sera vraisemblablement amené à conserver le procédé par autoclave pour tenir compte du niveau de variabilité observé. Ceci est intimement lié aux méthodes actuelles de prise en compte des dispersions dans le dimensionnement, préconisées par les exigences réglementaires FAR (pour Federal Aviation Regulations) et JAR (pour Joint Aviation Requirements). Leur formulation est l'œuvre des deux principales autorités en matière de contrôle : la *Federal Aviation Administration* (FAA) américaine et la *Joint Aviation Authority* (JAA) européenne. Une mise à jour régulière est faite par l'intermédiaire des circulaires ACJ (*Advisory Circular Joint*) en Europe et AC aux Etats-Unis. La conception des avions de ligne est notamment régie par la norme JAR 25 dont la partie C s'attache au dimensionnement des structures. Pour bien comprendre l'accumulation des marges de sécurité, nous allons détailler dans les grandes lignes les règles préconisées.

Tout d'abord deux niveaux de charges sont définis (JAR 25.301) :

- les charges limites correspondant aux charges maximales attendues sur la structure en service et qu'elle doit pouvoir supporter sans que des dégradations préjudiciables apparaissent (déformations permanentes, fissures…).
- les charges extrêmes, correspondant aux charges limites multipliées par un coefficient de sécurité, généralement fixé à 1.5 (JAR 25.303), et que la structure doit pouvoir supporter sans rompre.

Le dimensionnement s'effectue donc généralement en charges extrêmes. Par ailleurs, la partie D de la JAR 25 consacrée aux problèmes de conception et de construction (*design and construction*) impose un certain nombre de règles supplémentaires. Il est tout d'abord précisé que « les appareils ne doivent pas comporter de caractéristiques ou de détails de conception que l'expérience a montré être risqués ou peu fiables ». Des essais sont donc requis pour démontrer la résistance de chaque pièce. L'adéquation et la durabilité des matériaux (JAR 25.603) doivent notamment être établies au moyen d'essais, et prendre en compte les effets des conditions environnementales, comme la température et l'humidité. Elles doivent de plus être conformes aux spécifications (industrielles, militaires ou relevant de normes techniques) déjà établies. Cela explique que les méthodes industrielles s'appuient souvent sur les règles définies dans les Military Handbooks pour les matériaux métalliques (MIL-HDBK5) et composites (MIL-HDBK17).

De même, il existe des réglementations sur la prise en compte des incertitudes (variabilité, dispersion ou méconnaissance, cf. Figure I-8). Ainsi, le paragraphe JAR 25.613 requiert de choisir les valeurs de résistance à rupture et de dimensionnement, appelées *allowables*, suivant les principes statistiques de valeurs A ou B. Ces valeurs contiennent deux notions importantes : d'une part, elles représentent la valeur minimale atteinte par un certain pourcentage des valeurs « *possibles* », d'autre part leur valeur doit être déterminée avec un certain niveau de

confiance. Le choix d'utiliser l'une ou l'autre de ces valeurs dépend du niveau de criticité de la pièce. Si ce niveau de criticité est tel que la rupture de la pièce conduirait à une perte totale d'intégrité de la structure, le dimensionnement s'effectue en valeur A. Pour les pièces de moindre criticité (pièces dont la rupture entraîne un report de charge acceptable sur les composants voisins), le choix portera sur l'utilisation de valeurs B, moins exigeantes.

$$Valeur\ A = \overline{\mu} - k_A.\overline{\sigma} \qquad \text{(Eq. I-1)} \qquad Valeur\ B = \overline{\mu} - k_B.\overline{\sigma} \qquad \text{(Eq. I-2)}$$

Ces notions de valeur A ou B sont intimement liées à une approche statistique, tant pour la notion de confiance qu'elles comportent, que pour le pourcentage de valeurs qu'elles doivent excéder. En pratique, sous hypothèse de loi normale, elles sont calculées à partir des moyennes $\overline{\mu}$ et écarts-types $\overline{\sigma}$ estimés sur le (faible) nombre d'essais réalisés (Eq. I-1 et I-2).

Ces estimations statistiques pouvant ne pas être assez précises du fait du trop faible nombre de données disponibles, un coefficient, k_A ou k_B, dépendant du nombre d'essais[1] est introduit afin d'obtenir le niveau de confiance voulu. A titre d'exemple, reprenons le cas de la Figure I-5. Compte tenu de la dispersion constatée sur le G_{Ic} pour les trois matériaux, pour une longueur de fissure de 45mm, le calcul des valeurs A et B donne les résultats du Tableau I-1 (cinq échantillons pour chaque matériau).

	T700/M21 Autoclave	RTM6-T700 standard	RTM6-T700 prototype binding
Moyenne $\overline{\mu}$ (N/mm)	0.40	0.58	0.73
Ecart-type $\overline{\sigma}$ (N/mm)	0.02	0.05	0.07
Valeur A (N/mm)	0.30	0.31	0.30
Valeur B (N/mm)	0.34	0.42	0.48

Tableau I-1. Valeurs A et B obtenue pour une longueur de fissure de 45mm pour les différents matériaux compte tenu de la dispersion constatée Figure I-5 (5 échantillons pour chaque couple matériau/procédé).

Pour un dimensionnement en valeur A, il apparaît que les trois matériaux sont considérés pratiquement équivalents. Le dimensionnement en valeur B conduit bien au choix du RTM6-T700 Prototype Binding, mais la valeur employée est nettement inférieure à la valeur moyenne du RTM6-T700 standard. Pour la comparaison entre T700/M21 Autoclave et RTM6-T700 Prototype Binding, la Figure I-6 montre bien comment se positionnent ces *allowables* par rapport aux informations statistiques classiques (moyenne, moyenne moins écart-type).

Ces valeurs de dimensionnement apparaissent donc trop exigeantes et ne permettent pas de dire où l'on se situe en terme de risque de surdimensionnement. Leur détermination, sans lien avec les modèles employés, est également un autre facteur à prendre en compte pour évaluer le risque de sur- ou de sous-dimensionnement. Les simplifications qu'ils comportent peuvent en effet affecter les

[1] Pour n=2 essais, k_B=20.58, n=4 k_B=4.162, n=6 k_B=3.006, n=10 k_B=2.355 ...etc (cf. §II.3)

marges. Si les sous-dimensionnements sont inacceptables du fait d'une prise de risque intolérable qu'ils comportent,il est également de plus en plus difficile d'accepter les sur-dimensionnements excessifs qui entraînent une perte de compétitivité.

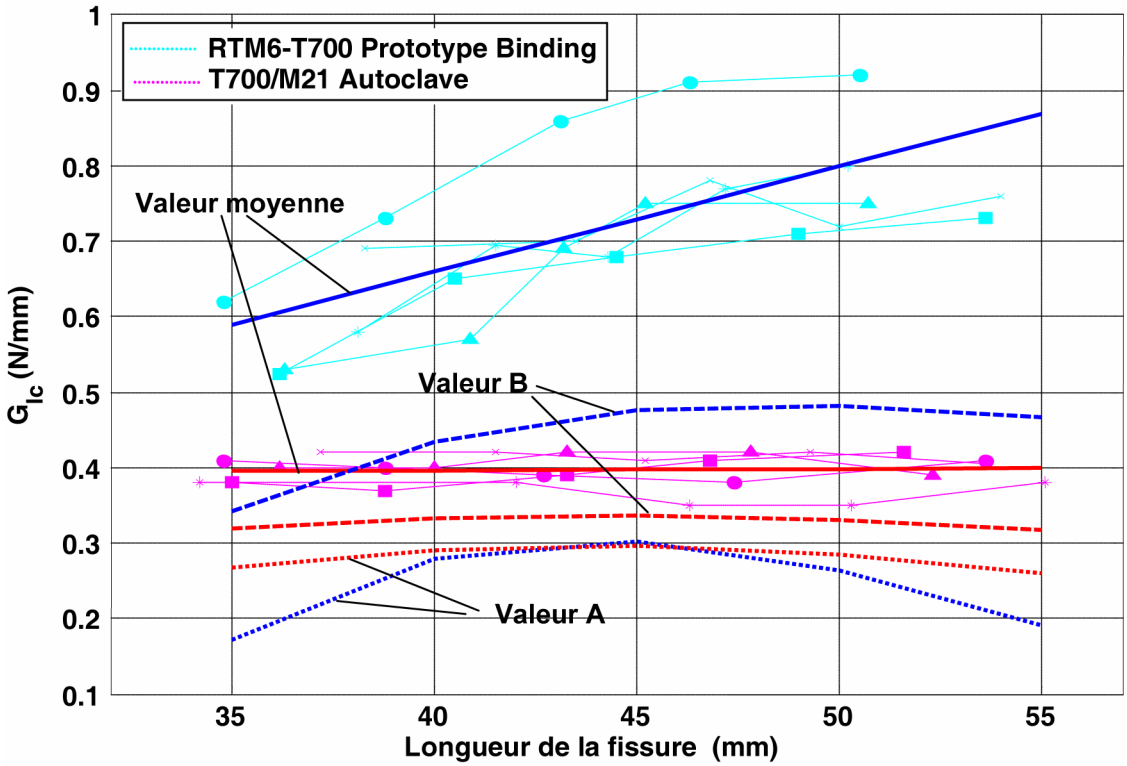


Figure I-6. Analyse statistique de la dispersion observée sur le taux de restitution d'énergie en mode I (G_{Ic}) lors des essais sur RTM6-T700 Prototype Binding et T700/M21 Autoclave.

Pour remédier à ces risques, la démarche actuelle, que les industriels aimeraient faire évoluer, consiste donc à multiplier les essais. Ceux-ci sont généralement représentés par une pyramide (Figure I-7) dont chaque tronçon correspond à un niveau de complexité structural. La largeur de chaque tronçon est alors proportionnelle à la quantité d'essais réalisés au cours des différentes étapes conduisant à la certification. Le processus débute ainsi par un grand nombre d'essais sur des éprouvettes de complexité réduite. Le but principal est alors de déterminer les diverses propriétés matériaux à l'échelle du stratifié au moyen d'essais de traction, compression ou flexion. La sensibilité à l'impact ou encore l'influence de paramètres tels que l'humidité ou la température est ainsi quantifiée par ces essais de qualification matériaux. Au niveau suivant, les essais visent mettre en évidence le comportement particulier du matériau en présence de détails structuraux. Des essais sur plaques trouées, sur des panneaux raidis ou des cornières sont ainsi réalisés. Les résultats expérimentaux, confrontés aux prévisions issues des calculs, amènent alors à des recalages sur les valeurs des propriétés matériaux utilisées lors des simulations. Les valeurs de calculs sont ainsi définies par les ingénieurs afin d'assurer la cohérence entre essais et calculs. Cette utilisation du recalage peut être vue comme une manière détournée de prendre en compte les insuffisances de la modélisation. Les informations acquises sur les détails structuraux permettent ensuite de passer à des simulations sur des sous-ensembles complets, comme des panneaux courbés, combinant ces détails en nombre conséquent, et enfin à des démonstrateurs représentatifs d'un tronçon de fuselage par exemple. Les résultats des essais pour ces différents niveaux sont inclus dans le dossier de justification

structurale pour la certification de l'appareil. Pour finir au sommet de la pyramide se trouvent les deux essais réalisés sur l'avion complet. Ces essais exigés par les normes aéronautiques sont incontournables pour l'obtention du certificat de navigabilité de l'appareil.

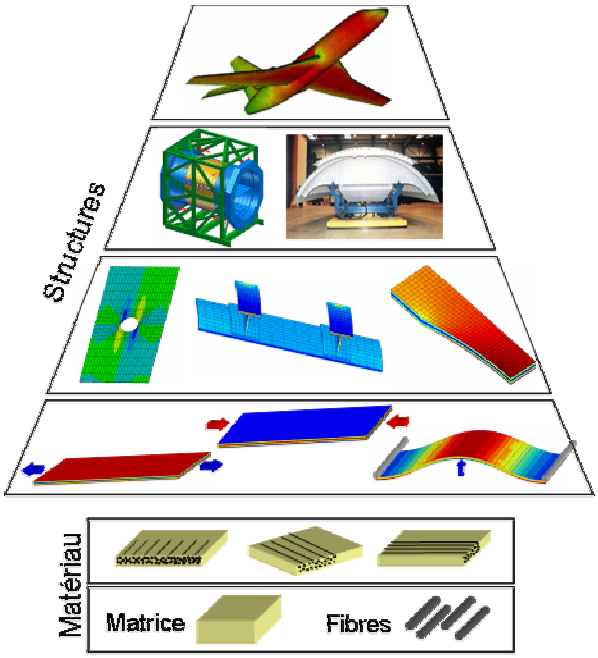


Figure I-7. Pyramide des essais réalisés dans le processus de dimensionnement industriel. La base de chaque tronçon est proportionnelle au nombre d'essais réalisés (d'après [Laurin, 05]).

Le programme A380 en a dernièrement fourni un exemple puisque les deux premiers exemplaires construit, dénommés A380-ES et A380-EF, ont été testés jusqu'à rupture lors de la réalisation des essais de résistance statique et en fatigue. Au niveau expérimental, quand on remonte les échelons de la pyramide, la complexité accrue des structures testées se traduit donc par une réduction du nombre d'essais, rendue nécessaire par leur coût croissant.

La demande industrielle actuelle serait donc de réduire le nombre d'essais réalisés, notamment pour les plus coûteux situés dans les parties hautes de la pyramide. Un gain important pour les constructeurs serait en particulier de pouvoir tester un seul appareil complet, sans distinction entre essais statiques et de fatigue. L'objectif principal étant en fait une réduction des coûts (et des délais), les industriels seraient en pratique favorable à une réduction du nombre des essais de la partie haute de la pyramide, remplacés par la simulation numérique, nourrie par les données issues d'un accroissement des essais plus élémentaires. Un tel objectif nécessite toutefois une certaine confiance dans toute la partie modélisation, qui passe notamment par une meilleure prise en compte des incertitudes.

I.4. Objectifs et limites de ce travail : définition d'un cadre pour le problème de traitement des incertitudes.

Le panel de méthodes développées pour traiter les problèmes d'incertitudes est extrêmement large comme l'a montré une première étude bibliographique. Les états de l'art publiés ([Schuëller, 97], [Schuëller, 01]) compilent aussi bien des techniques de simulations par tirages plus ou moins aléatoires (Monte-Carlo), des techniques de développement en séries mathématiques (Taylor, Neumann, Karhunen-Loève…) des

processus aléatoires et leur application à des méthodes numériques particulières comme les éléments finis, ou d'autre techniques d'approximation (modèles non-gaussien, krigeage, ondelettes…). Les thèse récentes se concentrent sur des problèmes particuliers (dispersion du comportement de structure vibrantes dans [Ouisse, 02]), l'utilisation de techniques particulières (comme les surfaces de réponse par chaos polynomial dans [Isukapalli, 99], Berveiller, 05]), ou le développement d'une nouvelle technique (comme la théorie des méconnaissance dans [Puel, 04]). Choisir les méthodes pertinentes nécessitait donc de bien préciser les ambitions de cette thèse. C'est pourquoi ce paragraphe va être consacré à définir et préciser les objectifs et les contraintes que nous nous sommes fixés pour ce travail, afin de construire un cahier des charges qui nous permettra, par la suite, de faire un tri sélectif des différentes méthodes.

En effet, le traitement des incertitudes s'appuie évidemment sur des notions statistiques communes mais les outils développés sont différents d'un domaine à l'autre (de la météorologie à la finance en passant par la mécanique, l'océanographie,…).

La thématique de l'incertain présentant un vocabulaire particulier, il me parait important de tout d'abord préciser un certain nombre de termes qui seront employés, avant de détailler les grandes lignes qui ont servies de guide à cette étude.

I.4.1. Quelques définitions adaptées à cette étude

Les concepts et définitions donnés ici sont le reflet d'une vision personnelle du traitement des incertitudes pour le calcul des structures, et visent principalement à faciliter la compréhension de ce mémoire de thèse. C'est pourquoi, le sens des termes peut éventuellement présenter des différences avec le vocabulaire des spécialistes des thématiques stochastiques et assimilées.

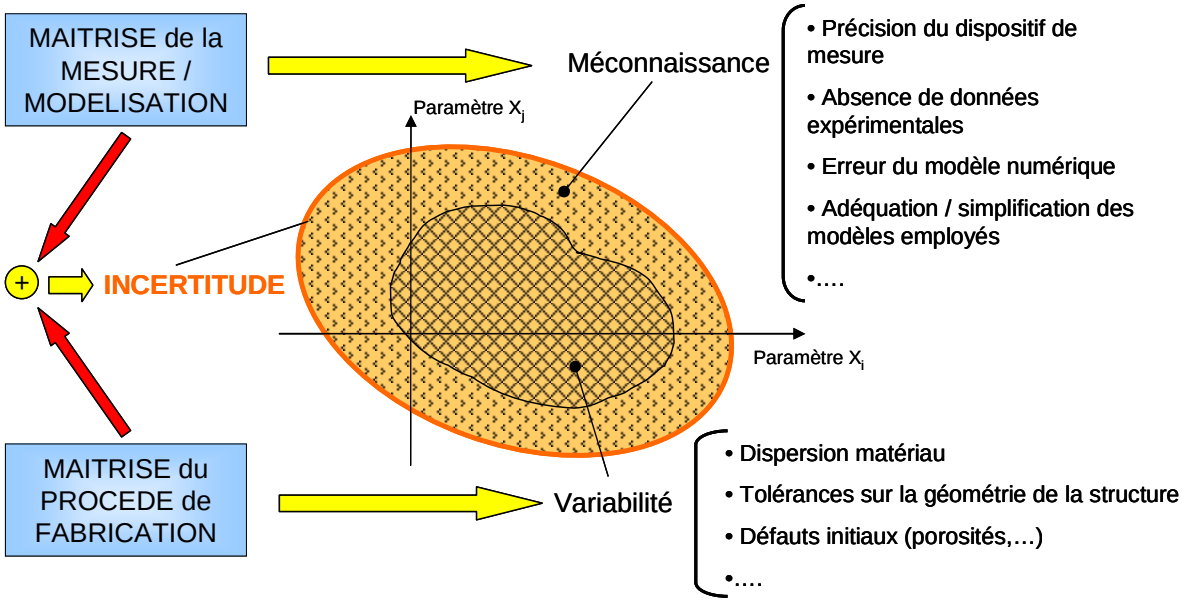


Figure I-8. Notre vision du lien entre les concepts d'incertitude, méconnaissance et variabilité.

Pour commencer, il convient de définir le terme ***incertitude*** à la base de ce travail et que nous avons déjà amplement utilisé. Il désigne pour moi le doute existant sur les valeurs d'un ou plusieurs paramètres, et par extension le domaine dans lequel elles peuvent se trouver. En premier lieu, ce doute peut provenir, pour tout ou partie, d'un problème d'estimation (problème de mesure, limite de précision d'un dispositif ou

encore nombre insuffisant d'essais pour des paramètres statistiques), ou de modélisation (dans une loi simplifiée, le fait de négliger certains termes peut fausser l'identification de certains paramètres). Nous associons à ces sources de doute le concept de ***méconnaissance***. Mais les incertitudes trouvent également leur source dans la variation « naturelle » des valeurs des paramètres (due par exemple à un manque de reproductibilité du processus de fabrication), que nous désignons par le terme ***variabilité*** (ou encore ***dispersion***). Le concept d'incertitude est donc le plus général puisqu'il regroupe l'influence de la méconnaissance et de la variabilité (Figure I-8). En supposant l'estimation infiniment précise et les modèles parfaits, la méconnaissance devient nulle et l'incertitude se ramène à la variabilité. Inversement, une élaboration parfaite supprimera la part variabilité de l'incertitude, qui sera alors réduite à la méconnaissance. En pratique, celle-ci étant difficile à déterminer, sa prise en compte s'effectue en amplifiant la variabilité.

Le terme ***erreur(s)*** est également souvent associé ou employé comme synonyme du terme incertitude(s). Compte tenu de la distinction que nous venons de faire, le terme erreur désigne en fait, pour nous, une part de la méconnaissance. La similitude entre erreur(s) et incertitude(s) vient principalement de l'angle sous lequel nous abordons ce problème : celui de la propagation des incertitudes au travers d'un système, décrit par une fonction de transfert, et pour lequel nous voulons obtenir une estimation de la confiance dans les réponses.

Par ***fonction de transfert***, nous désignons toute fonction, ou dans notre domaine tout modèle, analytique ou numérique, reliant la valeur d'un ou plusieurs indicateurs (réponses ou sorties) à divers paramètres (les entrées). Il s'agira souvent pour nous d'un ensemble de modèles mis bout à bout (par exemple, changement d'échelle + calcul éléments finis + critère(s) de rupture).

L'étude de la ***propagation des incertitudes*** ([Helton, 03]) au travers d'une fonction de transfert (Figure I-9) consiste à appréhender la façon dont une modification des entrées entraîne une modification de la ou des sorties. La différence entre les concepts (i) erreur(s) et (ii) incertitude(s) vient alors de la valeur, et de la confiance, accordées au résultat. Dans le premier cas, (i) il s'agit d'une solution erronée qui s'écarte de façon plus ou moins importante d'une solution exacte, alors que dans le second cas, (ii) il s'agit d'une des nombreuses solutions correctes pouvant être obtenue du fait des variations aléatoires des paramètres d'entrée.

Pour résoudre ce problème de propagation des incertitudes, il s'agit en fait de savoir comment s'effectue leur ***transport*** des entrées vers les sorties. Pour cela, une première solution peut consister à analyser la fonction de transfert sous sa forme analytique. Cela peut se révéler rapidement très complexe et n'est pas toujours possible. Etudier le ***transport des incertitudes*** nécessite alors de pouvoir réaliser un grand nombre de simulations de la fonction de transfert, correspondant à l'introduction en entrée de multiples jeux de paramètres décrivant l'incertitude.

Du point de vue numérique, les méthodes employées pour la prise en compte des incertitudes peuvent être classées en deux catégories, ***intrusives*** et ***non-intrusives*** ([Sudret, 05]), suivant qu'elles nécessitent ou non une modification du code de calcul (éléments finis). L'utilisation de méthodes non-intrusives se ramène à l'application d'un post-traitement à la fin des calculs.

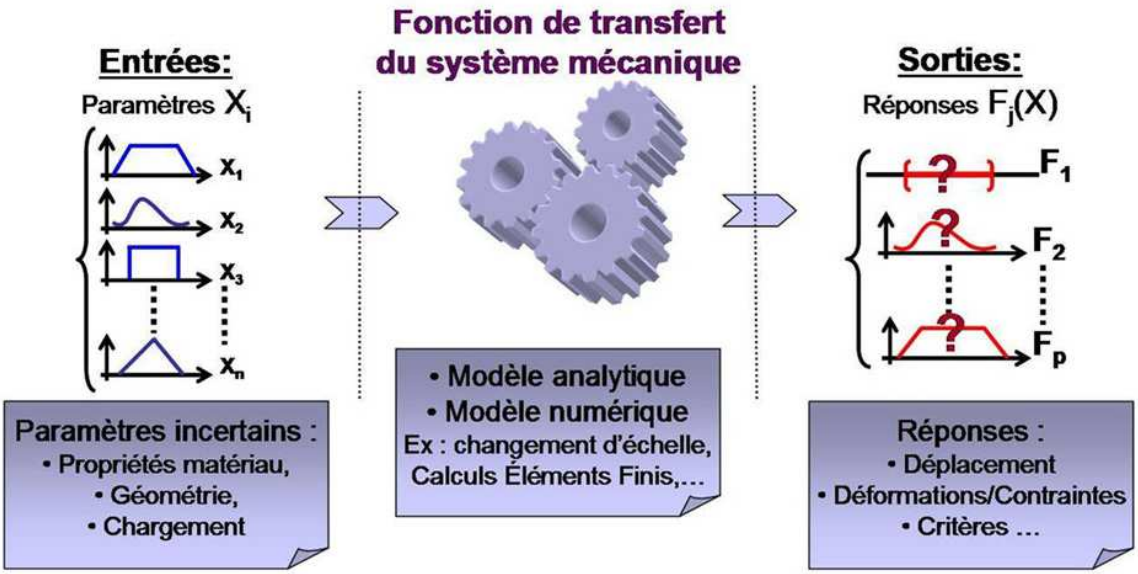


Figure I-9. Principe schématique de la propagation d'incertitudes au travers d'une fonction de transfert

Si la fonction de transfert est trop coûteuse à évaluer une solution consiste à la remplacer par un ***métamodèle***. Ce terme désigne pour nous de façon générale la méthode utilisée pour remplacer le processus réel par un modèle (beaucoup) plus rapide. Nous utiliserons pour synonymes *approximation* et *forme approchée*. Le préfixe *méta-*, signifiant normalement au-dessus ou au-delà, est utilisé ici pour en fait désigner le fait que l'on construit des modèles de modèles. Pour désigner un métamodèle de type analytique (par exemple une approximation polynomiale), nous emploierons également l'expression ***surface de réponse***. Dans [Meckesheiner, 02], les auteurs font la distinction entre métamodèle et modèle de substitution (*surrogate model*), qui désigne pour eux un modèle physique présentant une faible fidélité, comme par exemple un modèle simplifié ou dégradé pour des raisons de temps de calcul. Nous ne rentrerons cependant pas dans de tels détails et considèrerons comme équivalent les expressions métamodèle et modèle de substitution.

Les paramètres incertains que nous considérons en entrée, aussi bien de la fonction de transfert exacte que des métamodèles, peuvent être classés en deux catégories (Figure I-10) : d'une part, ceux associés à une incertitude que nous qualifions de ***réductible*** ou **compressible**, et d'autre part, ceux associés à une incertitude qualifiée d'***irréductible*** ou incompressible ([Wojtkiewicz, 01]). Dans cette dernière catégorie se trouvent les propriétés matériaux affectées par la dispersion (variabilité), les variations géométriques liées aux tolérances de fabrication, l'imprécision sur les conditions aux limites et le chargement. La maîtrise complète d'un processus de fabrication ayant des limites si le paramètre coût doit être conservé à un niveau raisonnable, un déterminisme absolu ne pourra jamais être atteint sur ces aspects et un niveau de doute subsistera toujours, c'est pourquoi nous les qualifions de partiellement ***incompressible***. A l'inverse, nous considérons qu'un travail approprié peut permettre de ramener à un niveau d'influence négligeable, les erreurs liées aux problèmes numériques (discrétisation appropriée, finesse de maillage, algorithmes,…) comme aux modèles matériau utilisés (loi de comportement, description des phénomènes d'endommagement et de rupture,…). C'est pourquoi nous qualifions les incertitudes qui leur sont liées de ***compressibles***. Nous considérons en particulier que, par rapport aux autres sources d'incertitudes, ces problèmes ont une influence secondaire (quand ils sont correctement gérés).

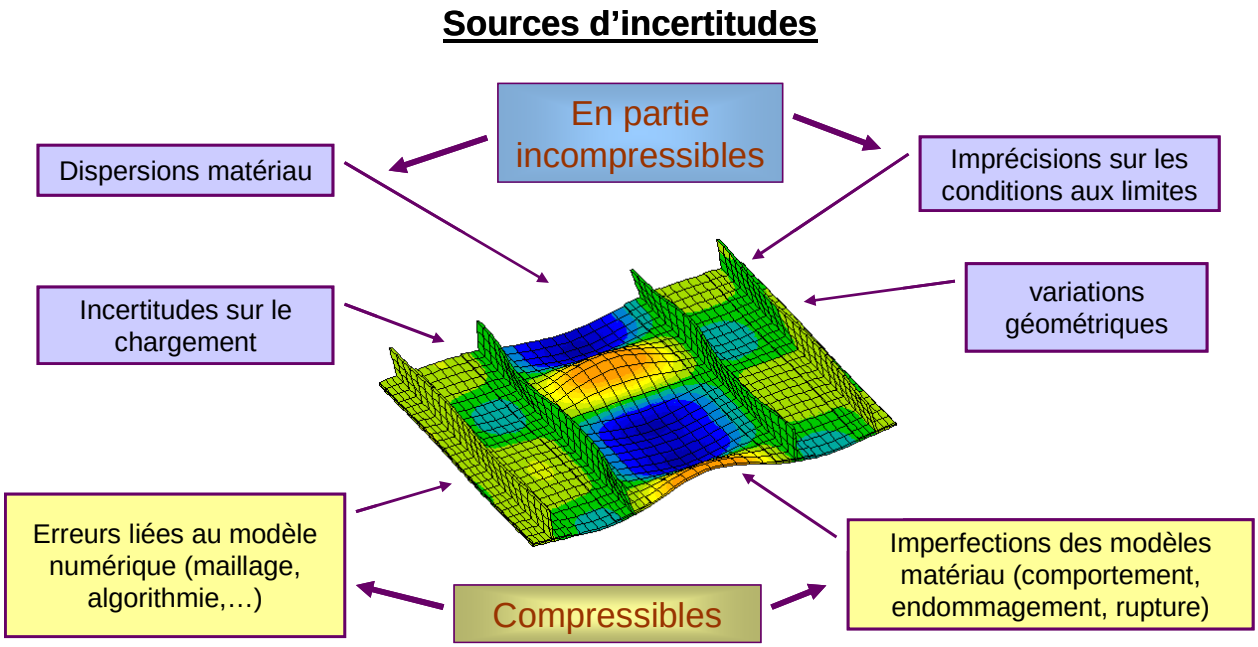


Figure I-10. Différentes sources d'incertitudes considérées et distinction entre part compressible et incompressible.

Concernant les propriétés matériau, et dans une moindre mesure les paramètres de la géométrie, des conditions aux limites et du chargement, l'incertitude peut être considérée de trois façons. Tout d'abord, les problèmes d'***incertitude uniforme***, consistent, pour une structure donnée fabriquée en série, à ne s'intéresser qu'aux variations de réponses constatées d'une pièce à l'autre et dues à des variations globales des paramètres sur les pièces (variation de la longueur totale, de l'épaisseur, d'un module d'élasticité,.. etc. de façon identique sur toute la pièce). Mais il est également possible de considérer des problèmes ***d'incertitude localisée spatialement***, dans le cas où les pièces présentent, pour diverses raisons (processus de fabrication…), des variations de propriétés non-négligeables, mais limitées à des zones précises, et surtout connues, de la structure. A titre d'exemple, il peut s'agir de zones où l'agencement des plis, et par conséquent les angles de stratification, sont incertains du fait de la forme de la pièce, ou encore de zones où la présence de défauts se retrouve fréquemment (ruptures de fibres liées au perçage, porosités liées à la cuisson). Ce type de problème est prolongé et généralisé par ce que nous appelons l'***incertitude spatialement aléatoire***. Il s'agit alors du cas où, au sein d'une même pièce, les diverses propriétés fluctuent de manière aléatoire, en fonction de la position considérée, c'est-à-dire dans le cas où il existe une variabilité spatiale.

Dans le domaine de la conception et du dimensionnement des structures composites, qui est notre centre d'intérêt, le problème est en fait de savoir comment ces diverses sources d'incertitudes affectent la robustesse ou la fiabilité.

La ***robustesse*** d'un dimensionnement est définie pour nous par la capacité de la pièce à supporter des situations qui s'écartent du domaine pour lequel elle a été conçue. Une fonction de transfert est donc dit ***robuste*** s'il est peu sensible à de petits écarts sur les hypothèses pour lesquelles il a été optimisé. Deux sens peuvent être donnés au terme « petit »: de petites variations sur toutes les données, ou des écarts plus importants mais sur un petit nombre de données. Ce deuxième aspect est sans doute le plus mal pris en compte par les approches classiques.

La ***fiabilité*** d'un dimensionnement recoupe cette notion de robustesse mais son estimation réfère généralement à une démarche bien précise : celle des méthodes fiabilistes. Leur approche est clairement probabiliste et vise à estimer la probabilité de défaillance connaissant la distribution de probabilité sur les paramètres d'entrée. La défaillance est définie comme l'instant où la structure n'est plus à même de remplir la fonction souhaitée.

Mais réaliser un dimensionnement robuste suppose également d'être en mesure d'évaluer la ***confiance*** à accorder aux modèles et méthodes utilisées. Nous traduisons celle-ci sous la forme d'une incertitude supplémentaire sur les valeurs obtenues en sortie de la fonction de transfert. Evidemment, plus la confiance est grande et plus cet intervalle est réduit. Celui-ci est en fait une zone de doute correspondant à la zone dans lequel peut se trouver la réponse exacte par rapport à la réponse prévue. Dans le domaine des probabilités, cet intervalle est classiquement défini en probabilité d'y trouver la valeur réelle. Ainsi un intervalle à 95% de confiance signifie que sur 100 valeurs, en moyenne 95 se trouveront dans l'intervalle.

I.4.2. Quelques remarques sur le dimensionnement : incertitudes et notion de conception robuste

La conception d'une pièce se limite souvent dans un premier temps à trouver les caractéristiques en accord avec le cahier des charges. La solution peut ensuite être optimisée. Néanmoins, le niveau de performance du produit pourrait éventuellement varier en fonction de perturbations non maîtrisées (dispersions de matériaux ou de fabrication, variations d'environnement, des sollicitations,...), ce qui peut s'avérer pénalisant.

L'objet d'une conception robuste est donc d'optimiser en même temps les performances du produit et de minimiser la sensibilité à ces perturbations.

En fait dans une conception, il est possible de distinguer trois types de solution :

- **Solution nominale** : <u>une solution</u> qui respecte le cahier des charges est recherchée. On ne cherche pas a priori à maximiser un critère. Cette étape est souvent faite par tâtonnement.
- **Solution optimisée** (optimisant la performance) : <u>parmi plusieurs solutions</u>, celle permettant de maximiser les critères de performance est recherchée. Pour cela, plusieurs itérations combinant phases de conception (en faisant varier les paramètres de conception) et phases d'évaluation des performances (suivant les critères retenus, éventuellement combinés) sont réalisées.
- **Solution fiable** (optimisant la robustesse) : <u>parmi plusieurs solutions</u>, celle qui soit optimisée en robustesse est recherchée. Pour cela, la robustesse doit évidemment être évaluée afin d'établir la solution la plus sûre (ou le plus souvent la moins risquée).

A ces trois solutions peut évidemment être ajoutée la **solution robuste optimale,** consistant à trouver le meilleur compromis entre performance et robustesse.

Bien sûr, la prise en compte des incertitudes et l'estimation de leurs effets est pour nous une étape primordiale vers cette conception robuste. En effet, le concepteur peut jouer sur les tolérances géométriques, sur les valeurs admissibles des caractéristiques « matériau », sur les marges de sécurité pour assurer la fiabilité de son dimensionnement et limiter les variations. Néanmoins, une telle approche

présente évidemment des limites s'il ne souhaite pas augmenter le coût des pièces, ou réduire leurs performances, de manière inconsidérée.

Cette approche de la conception rejoint le problème de la validation du dimensionnement : comment s'assurer de la performance finale du produit et la garantir dans les conditions réelles d'emploi. Pour cela, on peut se baser sur l'expertise des ingénieurs, les essais physiques ou les validations numériques. La conception robuste généralise cette dernière approche, et va dans le sens de la réduction des essais physiques et donc de la réduction des coûts expérimentaux.

I.4.3. Cadre défini pour ce travail

L'objectif principal de ce travail de thèse est donc de développer un ensemble d'outils permettant de définir et d'évaluer la robustesse d'un dimensionnement afin de constituer un pas vers la conception robuste. En particulier, nous voulons être en mesure de fournir, dans les études basées sur la simulation numérique, des barres d'erreurs ou d'autres indicateurs équivalents (zone de doute), permettant de quantifier la confiance pouvant être accordée aux résultats. Cette notion de confiance, incluse dans les résultats d'essais au travers notamment de la précision des appareils de mesure, est en effet pour le moment absente en simulation numérique. Cet état de fait gène la confrontation des résultats expérimentaux et numériques et pénalise en particulier le développement de la simulation dans l'objectif d'un dialogue amélioré entre essais, modèles et calculs de structures. La prise en compte des diverses sources d'incertitudes est pour nous un moyen d'aller en ce sens. C'est pourquoi nous nous intéresserons dans ce travail au problème du transport des incertitudes, afin d'estimer comment les doutes sur les paramètres d'entrées, tant des modèles mécaniques que des simulations numériques, affectent les résultats obtenus. En effet, l'amplitude des incertitudes en entrée n'est pas, en elle-même, un critère déterminant. De fortes incertitudes sur des variables ayant un impact négligeable sur les indicateurs considérés en sortie peuvent ainsi être moins problématiques que de faibles incertitudes sur des variables très influentes. Nous nous limiterons principalement aux problèmes d'incertitudes connues spatialement et négligerons les incertitudes compressibles, qui, bien gérées, ont selon nous une influence secondaire. L'objectif est de bâtir une véritable stratégie permettant d'aborder ce problème. Les principaux critères que nous avons établis sont résumés dans le Tableau I-2.

Le but étant vraiment une application au calcul de structures, nous faisons le choix d'employer des méthodes non-intrusives ne dépendant pas d'un code éléments finis spécifique, et s'appliquant aux diverses sources d'incertitudes considérées, quelle que soit la façon de les représenter (intervalles, distribution de probabilité, ensemble flous…). L'influence du choix de telle ou telle représentation doit également pouvoir être estimée, et des « garde-fous » avertissant de la défaillance de la méthode doivent être inclus dans la démarche. Cette caractéristique est d'autant plus importante que toute validation expérimentale est illusoire compte tenu du nombre d'essais qu'il faudrait réaliser et du coût associé. La volonté de traiter, à terme, des calculs de pièces industrielles nécessite que le coût de calcul reste raisonnable (notion de parcimonie dans les simulations éléments finis). Notre stratégie doit, de plus, pouvoir s'appliquer à des problèmes comportant un grand nombre de variables incertaines, comme c'est souvent le cas avec les matériaux composites pour les raisons évoquées précédemment (cf. section I.2). Enfin, dans l'objectif de limiter l'amplitude des incertitudes utilisées en entrée de notre stratégie, il nous semble

important de développer une méthodologie permettant, dans le cas particulier des composites, de tirer profit des divers modèles et connaissances disponibles pour réduire cette part de méconnaissance.

Souhaits	Conséquences
Capacité à prendre en compte les diverses sources d'incertitudes : matériau, géométrie, condition aux limites et chargement	Méthode relativement générale
Capacité à prendre en compte la connaissance précise ou non des distributions statistiques des paramètres incertains	
Indépendance vis-à-vis du code de calcul	Méthode non-intrusive
Capacité à traiter des problèmes présentant un nombre de variables important	Besoin d'outils pour optimiser et limiter les points de calculs (parcimonie)
Capacité à estimer le niveau de performance de la méthode et à détecter une possible défaillance	Besoin d'outils pour estimer la qualité de la méthode de transport des incertitudes
En cas de défaillance constatée, capacité à proposer des solutions alternatives à partir d'une analyse des résultats obtenus	Méthode à démarche progressive
Capacité à réduire les sources d'incertitudes	Méthode tirant profit des spécificités de la mécanique des matériaux composites et des connaissances existantes (modèles)

Tableau I-2. Bilan des exigences initiales de ce travail et conséquences associées.

Nous allons maintenant présenter dans le chapitre II une bibliographie extensive des méthodes de transport des incertitudes, avant de détailler dans le chapitre III la méthodologie développée. Une validation de cette démarche est ensuite proposée dans le chapitre IV en s'appuyant sur divers exemples analytiques. Cette étape franchie, le chapitre V est consacré à l'illustration des performances de la méthodologie sur divers exemples de structures nécessitant un calcul éléments finis. Pour finir, le chapitre VI s'intéresse aux moyens de réduire les effets des incertitudes.

Chapitre II
Sélection des méthodes de transports des incertitudes

Introduction **23**

II.1. Bref historique sur les incertitudes en physique **23**

II.2. Représentation des incertitudes **25**

II.2.1. Approche probabiliste 25
II.2.2. Arithmétique des intervalles 28
II.2.3. Ensembles flous et logique floue 29
II.2.4. Approche non- paramétrique 31
II.2.5. Théorie des méconnaissances 32

II.3. Approche Industrielle en aéronautique **33**

II.4. Méthode de Monte-Carlo **36**

II.5. Transport d'incertitudes par décomposition du processus en séries de Taylor **37**

II.5.1. Principe 37
II.5.2. Limite de validité 39

II.6. Analyse de sensibilité **39**

II.7. Surface de réponse **40**

II.7.1. A l'origine : les plans d'expériences 40
II.7.2. Des méthodes de surfaces de réponse 42
II.7.3. Utilisation du chaos polynomial 43
II.7.4. Krigeage pour surface de réponse 47
II.7.5. Autres formes de métamodèles 48

II.8. Méthode fiabiliste **49**

II.8.1. Principe 49
II.8.2. Relations avec la méthode des surfaces de réponse 51

II.9. Eléments finis stochastiques **52**

II.9.1. Méthode par perturbation 52
II.9.2. Méthode spectrale 53

Conclusion **55**

Introduction

La prise en compte des incertitudes affectant les diverses variables d'entrée des systèmes physiques n'est pas un problème nouveau. La difficulté consiste principalement en l'étude de leur répercussion en sortie des fonctions définissant ces systèmes. La littérature désigne généralement ce sujet par problème de propagation d'erreurs ou de transport des incertitudes. Des domaines très divers (biologie, chimie, météorologie, océanographie …) ont eu à s'intéresser à cette thématique. Dans le domaine de la mécanique, c'est en dynamique des structures que les premiers travaux ont été réalisés. Cette précocité vient sans nul doute du caractère aléatoire des sollicitations rencontrées (vent, houle, séisme, …). En mécanique statique, l'essor de l'informatique et des moyens de calculs, associés à la méthode des éléments finis, a permis d'aboutir dans le cadre déterministe à des résultats en très bonne adéquation avec l'expérience. Prendre en compte les différentes sources d'incertitudes, afin d'améliorer la robustesse du dimensionnement des structures, et lui donner plus de sens, est donc l'étape suivante à envisager. Le nombre de méthodes proposées, tant pour définir un cadre de représentation des incertitudes, que pour traiter le problème de leur propagation, étant des plus conséquents, ce chapitre ne vise pas à établir un état de l'art exhaustif, mais plutôt à présenter les principales méthodes actuellement employées. L'objectif est également de justifier le choix de celles que nous avons retenues pour bâtir notre méthodologie.

II.1. Bref historique sur les incertitudes en physique

Jusqu'au milieu du XIXème siècle, la science s'est limitée à un cadre déterministe, sans doute plus rassurant et plus propice à son développement. La seule exception concerne en fait l'étude des jeux de hasard, pour laquelle la prise en compte de l'aléa était incontournable. Pourtant, la théorie des probabilités qui en est issue ne fut formalisée qu'en 1933 par [Kolmogorov, 33], alors que son étude avait commencé avec Pascal et Bernoulli (XVIIème siècle), s'était prolongé avec Bayes et Laplace (XVIIIème siècle), puis Poincaré (XIXème). Cet état de fait est sans doute dû à l'influence prédominante de la physique, alors en pleine découverte et élaboration des lois fondamentales (principe fondamental de la dynamique et théorie de la gravitation de Newton, équation de Maxwell pour l'électromagnétisme,…). En 1814, Laplace, dans l'introduction de *Essai philosophique sur les probabilités,* écrivait d'ailleurs en s'appuyant sur les progrès de l'astronomie :

« *Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ses données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux* ».

Il faudra en fait attendre la découverte du mouvement brownien en 1827 ([Brown, 1828]) pour voir apparaître les notions de chaos et de processus stochastiques en physique. En observant le mouvement de grains de pollen à la surface de l'eau, Brown constata en effet l'aspect aléatoire de leurs trajectoires. Cette découverte fut appliquée par la suite à la cinétique des gaz, formalisée à la fin du XIXème siècle, où le mouvement brownien permet de décrire la trajectoire des molécules qui s'entrechoquent. La cinétique des gaz fut un prélude de la physique statistique introduite par la suite, notamment par Boltzmann. Les notions de chaos et d'incertitudes se sont ensuite rapidement développées. Poincaré, notamment,

découvrit la nature chaotique du système solaire. La sensibilité aux conditions initiales lui fit ainsi rédiger, dans son introduction de *Calcul des probabilités*, un passage présentant une vision différente de celle de Laplace environ un siècle plus tôt :

« Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit. »

La mécanique quantique poursuivit dans ce sens avec le fameux principe d'incertitude d'Heisenberg, postulant qu'il est impossible de connaître simultanément de façon parfaite la position et quantité de mouvement d'une particule. Cet aspect déplaisait en particulier à Einstein et l'opposa à Bohr. Les scientifiques réalisent alors que toute mesure introduit une perturbation de la quantité mesurée. Toute la question est en fait de savoir si cette perturbation est ou non négligeable.

La prise en compte de l'incertain se heurtait encore aux coûts de calcul importants que nécessitait souvent l'estimation de fonction en un grand nombre de valeurs. La simulation informatique se développant, ce problème est progressivement résolu. Un des premiers exemples est l'utilisation, en 1943 dans le cadre du *projet Manhattan,* de la méthode de Monte-Carlo pour la résolution des intégrales apparaissant dans le calcul des réactions en chaîne. Cette méthode, consistant à calculer la valeur d'une fonction pour un jeu de tirages aléatoires, fut appliquée au laboratoire de Los Alamos, qui disposait d'un des premiers « calculateurs », sous l'impulsion de Ulam et von Neumann notamment.

Dans la deuxième partie du XXème siècle, l'étude de l'incertain, jusque là très liée aux probabilités, s'en est quelque peu démarquée avec l'apparition de nouvelles théories comme les ensembles (et la logique) flous [Zadeh, 65]. Les notions de chaos et de processus stochastiques, enrichies par les études en traitement du signal, se sont développées dans de nombreuses sciences, notamment en économie. Des échanges ont conduit à l'apparition de nouvelles disciplines comme les mathématiques financières. En mathématiques, l'étude de fonctions chaotiques et des *attracteurs étranges* a notamment débouché sur la découverte des fractales.

L'étude de la stabilité des systèmes dynamiques ayant conduit à la notion de chaos, ceci peut expliquer que le domaine de la dynamique des structures ait été en pointe pour la prise en compte des incertitudes. Cette thématique est toujours en plein développement comme le montre la Figure II-1. Celle-ci présente l'évolution dans la base de donnée ScienceDirect d'Elsevier, du nombre d'articles comportant le mot *uncertainty* depuis 1980. La distinction entre une recherche sur toutes les sciences, sur la mécanique et finalement sur la mécanique pour les matériaux composites, montre la contribution, faible mais croissante, des travaux dans ce domaine par rapport à l'ensemble.

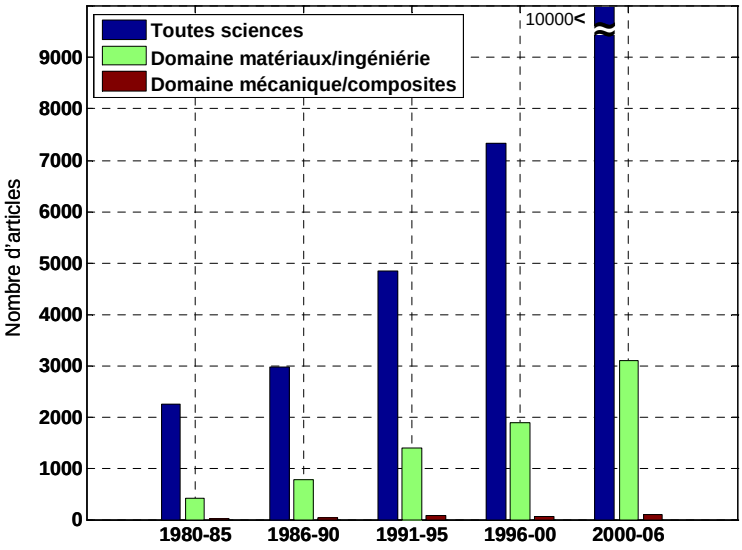


Figure II-1. Evolution du nombre d'articles publiés comportant le mot « uncertainty » dans leur titre, leur résumé ou leurs mots-clés. Recherche effectuée dans la base ScienceDirect d'Elsevier, avec pour domaine « all science », «engineering » et « material science » sans terme supplémentaire, puis avec « mechanics » ou « composite material ».

II.2. Représentation des incertitudes

Incertitudes, méconnaissances, variabilité, tous ces mots servent couramment à indiquer que l'information disponible sur bon nombre de données n'est pas parfaitement connue. Plutôt que de considérer comme dans le cas déterministe une seule valeur pour les paramètres étudiés, il est donc nécessaire de pouvoir prendre en compte l'occurrence possible d'un ensemble ou d'une plage de valeurs données. Pour cela, les mathématiques ont fournis tout un ensemble de théories dont nous rappelons ici quelques une des plus importantes.

II.2.1. Approche probabiliste

L'approche probabiliste a été la première développée et est toujours de loin la plus utilisée. Certains comme [Puel, 04] font d'ailleurs la distinction entre les méthodes, dites stochastiques, basées sur cette théorie et toutes les autres qui ont pu être développées. Le développement de la théorie des probabilités a commencé au début du XVIIIème siècle avec les travaux de Bayes, Bernoulli, et Laplace. Ceux-ci portaient notamment sur l'étude des jeux de hasard. Le formalisme actuellement utilisé pour le calcul des probabilités ne fut cependant établi que vers 1930 par Kolmogorov.

II.2.1.1 Concepts généraux

Le résultat d'un évènement E quelconque soumis à l'influence du hasard pouvant prendre diverses valeurs E_i, la modélisation probabiliste vise à associer à chacune une probabilité $P(E_i)$. Celle-ci est définie par (Eq. II-1), où N est le nombre de réalisations de l'évènement E, et $n(E_i)$ le nombre d'occurrences de la valeur E_i. La valeur de $P(E_i)$ est donc comprise entre 0, pour un évènement impossible n'ayant jamais lieu, et 1 pour un évènement certain (en supposant l'ensemble $\{E_i\}$ de dimension finie ce qui est généralement le cas).

$$P(E_i) = \lim_{N \to \infty} \frac{n(E_i)}{N} \qquad \text{(Eq. II-1)}$$

En pratique le calcul des probabilités est souvent basé sur une étape de dénombrement des différentes possibilités de réalisation d'un évènement.

Un autre résultat intéressant est la règle de Bayes (Eq. II-2) permettant de calculer la probabilité $P(E_1|E_2)$ d'observer un évènement E_1 sachant que l'évènement E_2 a déjà été observé, et connaissant les probabilités respectives, $P(E_1)$ et $P(E_2)$, des évènements E_1 et E_2.

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_2|E_1).P(E_1)}{P(E_2)} \qquad \text{(Eq. II-2)}$$

Cette règle est la base de l'approche bayésienne qui a été développée ces dernières années notamment pour l'identification de coefficients ou de paramètres dans les problèmes inverses ou dans les approches par réseaux de neurones.

La plupart du temps cependant, l'approche probabiliste est basé sur des données statistiques. La répétition d'une expérience (la mesure d'un module d'Young par exemple) permet de tracer des histogrammes des valeurs possibles et de les comparer à diverses distributions de probabilités afin de choisir la plus adéquate. Généralement ce choix se fait parmi quelques distributions bien connues, notamment les lois normales, lognormales ou weibuliennes. Toutefois, ce choix n'est pas toujours évident du fait des distorsions introduites, en particulier si le nombre des données collectées est faible. Pour plus de détails sur la façon de procéder et les tests d'adéquation, le lecteur se reportera au chapitre VI (§VI.1.2).

La notion de distribution de probabilité dont nous avons fait mention amène ici à quelques précisions. Afin de définir la probabilité d'obtenir certaines valeurs plutôt que d'autre, des lois mathématiques sont utilisées. Celles-ci peuvent être à valeurs discrètes (loi de Poisson, loi binomiale…) ou continues. En mécanique, ce sont principalement ces dernières qui sont utilisées. Ces lois peuvent être décrites de façon équivalente par la fonction densité de probabilité *f* ou la fonction de répartition *F* (également appelée fonction densité de probabilité cumulée). Cette dernière se définit facilement comme la probabilité $P(E \leq x)$ d'obtenir, pour la variable aléatoire *E* étudiée, une valeur inférieure à la valeur x considérée. Dans le cas scalaire, la fonction densité de probabilité *f* est alors la dérivée de la fonction de densité de probabilité cumulée *F*. De façon plus générale, *f* vérifie (Eq. II-3).

$$\text{Pour } X = (x_1, x_2, ..., x_n),\ P(X \in A \subset \Re^n) = \int_A f(X)dX \qquad \text{(Eq. II-3)}$$

II.2.1.2 Un point sur la loi de Laplace-Gauss (ou loi normale)

Parmi toutes les distributions de probabilités existantes, la plus utilisée est sans nul doute celle suivant la loi de Laplace-Gauss. Son importance est telle que cette loi a d'ailleurs été appelée *loi normale*. La densité de probabilité *f* d'une variable aléatoire *x* obéissant à cette loi est donnée par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}} \qquad \text{(Eq. II-4)}$$

L'importance de cette loi vient d'un résultat fondamental de la théorie des probabilités : le **théorème central limite**. Celui-ci indique que la somme de *n* variables aléatoires indépendantes de lois de probabilités quelconques tend vers la loi normale quand *n* tend vers l'infini. A un niveau macroscopique, les incertitudes dérivant d'une multitude de causes, il est donc souvent légitime de les modéliser ainsi. L'utilisation massive de cette loi est également due à sa simplicté puisqu'elle est définie par seulement deux paramètres, la moyenne μ et l'écart-type σ, aisés à déterminer statistiquement. Notons enfin que pour $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on parle de loi ou variable gaussienne centrée réduite.

II.2.1.3 Notion de moments statistiques

Plutôt que de décrire précisément les lois de probabilité complexes que suivent les paramètres de sortie des modèles, l'approche probabiliste se contente souvent de calculer leurs moments statistiques en se limitant généralement aux quatre premiers : moyenne (ou espérance), variance ou écart-type, skewness et kurtosis.

L'espérance d'une variable aléatoire réelle *X* suivant une densité *f(X)* est définie par :

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} X.f(X)dX \qquad \text{(Eq. II-5)}$$

A partir de là, les moments centrés d'ordre *n* sont définis (quand ils existent) par :

$$\mu_n = E[(X-\mu)^n] \qquad \text{(Eq. II-6)}$$

La variance est ainsi le moment centré d'ordre 2. Sa racine carrée, l'écart-type σ traduit l'écart moyen des valeurs prises par la variable aléatoire *X* par rapport à la moyenne.

Skewness $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ (Eq. II-7) *Kurtosis* $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$ (Eq. II-8)

Le coefficient de dissymétrie (Eq. II-7), ou *skewness,* est lié au moment centré d'ordre 3. Comme son nom l'indique, ce coefficient donne des informations sur la symétrie de la distribution. Une valeur négative indique ainsi un poids prépondérant des valeurs inférieures à la moyenne. Inversement une valeur positive indique que les valeurs supérieures à la moyenne sont les plus probables alors qu'une valeur nulle indique une distribution symétrique.

Le coefficient d'aplatissement (Eq. II-8), ou *kurtosis*, est lié quant à lui au moment centré d'ordre 4. Sa valeur reflète l'importance des valeurs situées dans les queues de distribution. Il est à noter que le kurtosis est parfois défini par $\bar{\gamma}_2 = \gamma_2 - 3$ de manière à ce que sa valeur soit nulle pour une loi normale.

Le plus souvent, les situations considérées en mécanique comportent plusieurs paramètres incertains. Suivant le niveau de modélisation plus ou moins fin considéré, l'hypothèse de leur indépendance peut être plus ou moins justifiée. Toutefois, si ce n'est pas le cas il est alors important de s'attacher à la façon dont les valeurs des uns et de autres sont reliées. Pour cela, la covariance σ_{XY} ou encore le coefficient

de corrélation ρ_{XY} sont utilisés. Pour deux paramètres *X* et *Y*, ceux-ci sont définis respectivement par (Eq. II-9) et (Eq. II-10), avec σ_X et σ_Y les écarts-types respectifs de *X* et *Y*.

$$\sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \quad \text{(Eq. II-9)} \qquad \rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X.\sigma_Y} \quad \text{(Eq. II-10)}$$

L'approche probabiliste nécessite donc pour être employée une quantité importante d'informations notamment pour la définition des lois de probabilité caractérisées par un nombre plus ou moins élevé de paramètres, en plus de leurs intervalles de définition (ou support). Par ailleurs les résultats qui sont recherchés supposent que les processus aléatoires ou les variables étudiés appartiennent à certains espaces mathématiques. En particulier, afin de pouvoir définir leur variance, l'hypothèse est souvent faite que les réponses du processus considéré appartiennent à l'espace L_2 des variables aléatoires réelles de second moment fini.

Afin de pouvoir traiter les cas pour lesquels de telles informations ne sont pas disponibles, diverses autres méthodes ont été développées pour représenter les incertitudes.

II.2.2. Arithmétique des intervalles

L'utilisation d'intervalles est une façon usuelle et commode de représenter les incertitudes, qui a conduit au développement d'une des premières approches non-probabilistes : l'arithmétique des intervalles ([Moore, 66]). Cette méthode traite à vrai dire plus de la propagation des incertitudes que de leur seule représentation. Le fait qu'elle ait servi de base à la logique floue m'a toutefois fait choisir de la présenter dans cette partie du mémoire. Dans cette méthode, les incertitudes ne sont considérées qu'au travers de leurs bornes hautes et basses. Le niveau de description est plus simple que pour l'approche probabiliste puisque aucune loi de probabilité n'est considérée sur l'intervalle ainsi défini. Par rapport à d'autres théories, comme les probabilités, qui s'intéressent à la fréquence d'apparition d'une valeur, cette approche est donc plutôt dédiée à l'étude des comportements extrêmes d'un système. Le but de l'arithmétique des intervalles est de réaliser le transport d'incertitude au moyen des opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication et division) redéfinies pour tenir compte non plus d'une seule valeur, mais des deux valeurs définissant les bornes de l'intervalle. En sortie, le résultat du transport d'incertitude est alors un nouvel intervalle. Pour deux variables incertaines ***x*** et ***y*** appartenant aux intervalles $[x_{inf}, x_{sup}]$ et $[y_{inf}, y_{sup}]$, l'arithmétique redéfinie donne ainsi :

- $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in [x_{inf}+y_{inf}, x_{sup}+y_{sup}]$
- $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \in [x_{inf}-y_{sup}, x_{sup}-y_{inf}]$
- $\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y} \in \begin{matrix}[min(x_{inf}y_{inf}, x_{inf}y_{sup}, x_{sup}y_{inf}, x_{sup}y_{sup}), \\ max(x_{inf}y_{inf}, x_{inf}y_{sup}, x_{sup}y_{inf}, x_{sup}y_{sup})]\end{matrix}$
- $1/\boldsymbol{x} \in [1/x_{sup}, 1/x_{inf}]$ pour $0 \notin [x_{inf}, x_{sup}]$
- $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y} \in \begin{matrix}[min(x_{inf}/y_{sup}, x_{inf}/y_{inf}, x_{sup}/y_{sup}, x_{sup}/y_{inf}), \\ max(x_{inf}/y_{sup}, x_{inf}/y_{inf}, x_{sup}/y_{sup}, x_{sup}/y_{inf})]\end{matrix}$ pour $0 \notin [y_{inf}, y_{sup}]$

Toutefois l'intervalle obtenu en sortie par cette méthode de transport est parfois très nettement surestimé. Considérons ainsi la fonction $f : x \mapsto 3x - 2x$. Au final, celle-ci a pour valeur *x*. Pour $x = [b,h]$, on s'attend donc à trouver le même intervalle en sortie. Or l'arithmétique des intervalles, suivant les opérations définies ci-dessus, donne au contraire $f(x) = [3b - 2h, 3h - 2b]$. En fait, il est démontré que pour obtenir la solution exacte, une variable ne doit avoir qu'une seule occurrence dans la fonction définissant le transport. Cette condition est évidemment impossible à obtenir pour des problèmes de grande complexité, et conduit à des résultats différents entre forme factorisée et développée. Par exemple, comme le montre (Eq. II-11), la propagation d'incertitude pour la fonction *g* ne conduit pas au même résultat quand on considère sa forme factorisée g_f.

$$\text{Pour } \begin{matrix} x = [2,3] \\ y = [-4,5] \end{matrix}, \quad \begin{matrix} g(x,y) = \dfrac{x-y}{x} \Rightarrow [-3/2, 7/2] \\ g_f(x,y) = 1 - \dfrac{y}{x} \Rightarrow [-1/2, 3] \end{matrix} \quad \text{alors que } g(x,y) = g_f(x,y) \qquad \text{(Eq. II-11)}$$

Dans le cadre de la dynamique des structures, une application est présentée dans [Dessombz, 01]. En adaptant la méthode des éléments finis pour la manipulation d'intervalles, les auteurs obtiennent des résultats intéressants (enveloppe de réponses) pour la prévision des valeurs de la fonction de transfert de divers cas analytiques et éléments finis (système masses-ressorts, plaque encastrée et hélice). En particulier l'effet de surestimation est limité grâce à l'emploi d'un algorithme itératif. Cette méthode ne pouvant prendre en compte qu'un nombre limité de paramètres incertains, son application à des cas industriels en comportant plusieurs dizaines nécessite cependant de l'améliorer encore. Des développements sont encore en cours ([Massa, 07]) combinant l'approche par intervalle à d'autre techniques (algorithmes génétiques, sensibilité).

II.2.3. Ensembles flous et logique floue

La théorie des ensembles flous développés par [Zadeh, 65] est en apparence assez proche de la théorie des probabilités. La fonction densité de probabilité sur un ensemble *A* est remplacée par une fonction d'appartenance (en anglais *membership function,* aussi appelée fonction de participation) μ_A à valeur dans *[0, 1]*. Pour un élément *x*, $\mu_A(x) = 0$ signifie que *x* n'appartient pas à *A,* et inversement $\mu_A(x) = 1$ que *x* est un élément de *A (*Figure II-2*)*. Toutes les valeurs intermédiaires correspondent donc à une zone « floue » pour laquelle un doute plus ou moins important existe quant à cette assertion d'appartenance à *A*.

Par rapport à la théorie des probabilités, certains axiomes sont remis en cause. Par exemple, dans un ensemble de référence *F*, pour un évènement *E* donné de probabilité *P(E)*, la probabilité de l'évènement contraire $\overline{E}$ est *1-P(E). De plus* $E \cap \overline{E} = \varnothing$ *et* $E \cup \overline{E} = F$*.* Cela n'est plus vrai pour un ensemble flou *F*. En effet, si l'on considère un sous-ensemble *E* et son contraire $\neg E$, on vérifie certes bien $\mu_{\neg E} = 1 - \mu_E$, mais par contre $E \cap \neg E \neq \varnothing$ et $E \cup \neg E \neq F$. Ce concept est intéressant et s'est particulièrement développé dans les domaines mettant en œuvre des interfaces homme-machine, comme l'automatique. Ils permettent notamment de traduire des notions qui peuvent varier d'une personne à l'autre et présenter des recoupements, comme petit et grand ou encore près et loin. Le problème de

combinaison de plusieurs ensembles flous a donné naissance à la logique floue indiquant comment définir la fonction d'appartenance du résultat final.

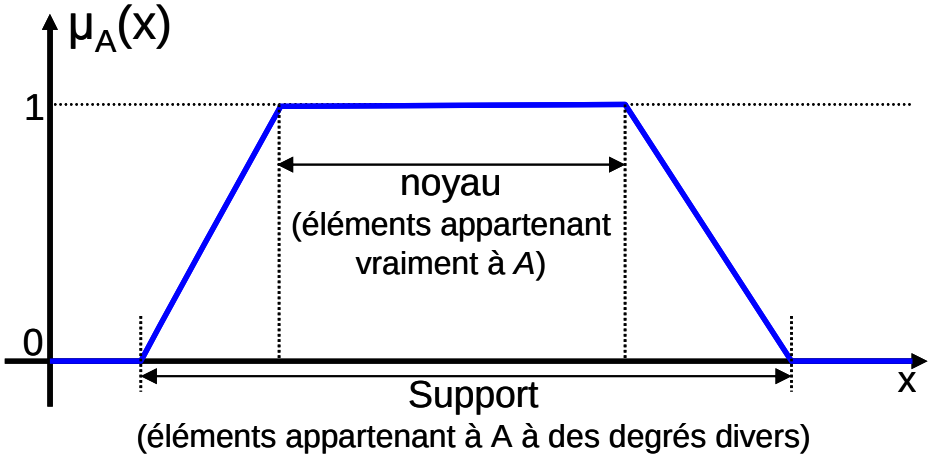


Figure II-2. Exemple de fonction d'appartenance d'un ensemble flou.

Ces approches connaissent un certain intérêt pour la représentation des incertitudes en mécanique. Toutefois, la question de la différence réelle avec une approche probabiliste peut être posée. L'utilisation de fonction d'appartenance triangulaire (Figure II-3) ne suffit en effet pas à justifier pleinement l'utilisation de la logique floue, et des fonctions densité de probabilité identiques pourraient être utilisées. Une première justification est, pour certains paramètres, l'absence de résultat expérimentaux, et donc de statistiques, pouvant servir de fondement à une approche probabiliste. Mais il est également possible de considérer que certaines incertitudes, comme celles liées à l'imprécision des modèles, ne sont pas de nature stochastiques. Les paramètres des modèles ne sont alors pas en lien avec la réalité physique et la dispersion qui en découle, mais proviennent d'une représentation humaine de la réalité dont l'imprécision pourrait être modélisée en logique floue.

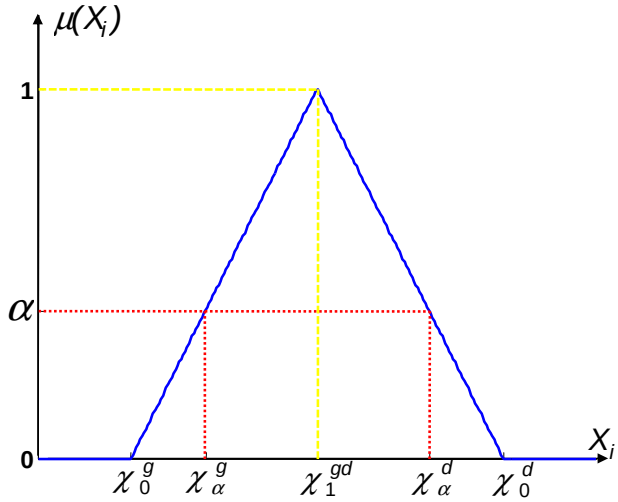


Figure II-3. Fonction d'appartenance triangulaire pour les paramètres incertains (flous) et α -coupes.

Des exemples intéressants d'application sont disponibles dans [Abdel-Tawab, 99] et [Noor, 01] pour les matériaux métalliques et composites. Dans le premier cas, les auteurs étudient des éprouvettes entaillées en alliage de titane au moyen d'une loi élasto-viscoplastique prenant en compte l'endommagement par cavitation. L'incertitude sur les paramètres d'entrée est modélisée au moyen de fonction

d'appartenance triangulaire, puis transportée sur les indicateurs de sortie par la méthode des sommets (*vertex method* [Dong, 87]). Considérant N paramètres X_i de fonction d'appartenance μ_{X_i}, cette méthode consiste à utiliser des α-coupes (α-*cut*), c'est-à-dire les intervalles $[\chi_\alpha^g, \chi_\alpha^d]$ pour lesquels μ_{X_i} est supérieur à la valeur α (Figure II-3). L'utilisateur choisi d'abord le nombre m d'α-coupes employées, puis pour chacune forme toutes les combinaisons possibles C_α des bornes hautes et basses. Ces combinaisons sont bien sûr au nombre de 2^N si $0 \leq \alpha < 1$. Pour chaque N-uplet $C_{\alpha j}$ de C_α, un calcul est ensuite réalisé. L'α-coupe $[\rho_\alpha^g, \rho_\alpha^d]$ pour l'indicateur de sortie correspond au final au plus large intervalle obtenu à l'issu des 2^N calculs.

La méthode se révèle en définitive assez coûteuse puisqu'elle nécessite au total $m \times 2^N$ calculs, dont finalement seul un petit nombre est réellement utile pour déterminer une approximation de la fonction d'appartenance de l'indicateur de sortie. Pour quatre paramètres incertains, les auteurs se limitent d'ailleurs à 2 α-coupes, plus le calcul aux valeurs nominales (χ_0^{gd}) correspondant au cas déterministe.

Dans le second cas, la même démarche est appliquée par les auteurs pour l'étude du flambement d'un panneau raidi composite galbé. La loi de comportement utilisée est thermo-élastique et des configurations différentes (type de perforation, nombre de raidisseurs) sont comparées. L'étude comporte également des considérations multiéchelles, avec le calcul d'une sensibilité à l'angle d'orientation des fibres, aux paramètres élastiques effectifs du pli, et à des paramètres micromécaniques comme le taux de fibre ou les propriétés élastiques des fibres et de la matrice. L'ensemble du travail est particulièrement intéressant de notre point de vue car il correspond pleinement à nos objectifs et regroupe des thématiques (incertitudes, calcul de structure et mécanique multiéchelles) rarement abordées conjointement.

Le même type de démarche utilisant les α-coupes a également été employé pour l'étude modale d'une poutre caissonnée par [Massa, 05] qui ajoute une technique d'étude de sensibilité par développement de Taylor afin de parer à d'éventuels problèmes d'extrema non associés aux bornes.

La théorie des ensembles flous a finalement ouvert la voie à d'autres théories qui s'écartent elles aussi de l'approche probabiliste. Citons par exemple la théorie des preuves (*evidence theory*) dérivant des travaux de Dempster [Dempster, 68] et Shafer [Shafer, 76], ou les modèles convexes d'incertitudes développés par Ben-Haim [Ben-Haim, 95].

II.2.4. Approche non- paramétrique

Le problème de la prise en compte des incertitudes de modèle, dues notamment aux simplifications effectuées, a conduit au développement d'une approche dite non-paramétrique. Celle-ci a été proposée par Soize ([Soize, 02]) dans le cadre de la dynamique des structures, suite au constat que la modélisation probabiliste paramétrique classique ne suffit pas à décrire complètement l'écart entre la réponse prévue et la réponse expérimentale. Par exemple, une telle approche ne permet pas de décrire, au travers du modèle, l'ensemble des valeurs positives des fréquences propres ([Soize, 05]). Pour remédier à cela, l'approche non-paramétrique utilise des versions aléatoires des matrices de masse, de rigidité et d'amortissement intervenant dans les équations de dynamique. Les densités de probabilités de ces matrices

aléatoires sont construites suivant le principe du maximum d'entropie ([Soize, 00]). L'estimation des paramètres de dispersion en se basant sur les données expérimentales, peut ensuite être réalisée au moyen du principe du maximum de vraisemblance.

Des exemples d'applications de cette méthode sont disponibles dans [Chen, 06], pour l'étude dynamique d'un panneau sandwich modélisé par la théorie classique des stratifiés, et dans [Capiez, 06] pour l'étude des déplacements dus aux vibrations de lancement d'un satellite sur Ariane 5. Dans ce dernier article, une confrontation des approches paramétrique probabiliste et non-paramétrique est menée, et conduit parfois à des résultats différents. L'explication avancée par les auteurs repose sur la différence dans le type d'incertitudes considérées par chacune des approches. Ils concluent toutefois que les deux approches sont complémentaires, la démarche paramétrique étant utile pour estimer la robustesse par rapport aux incertitudes sur les données. L'approche non-paramétrique donne quant à elle une meilleure idée de la robustesse en prenant en plus en compte les incertitudes du modèle. Des travaux récents ([Arnst, 07]) ont également combiné cette méthode à des approches inverses afin d'identifier des modèles probabilistes prédisant le comportement dynamique de structures.

II.2.5. Théorie des méconnaissances

Dernièrement une nouvelle approche a été proposée par [Puel, 04] et appliquée au problème de la variabilité des rigidités structurales dans le cadre de la dynamique des structures. L'auteur introduit la notion de famille de structures et sous-structures « *semblables mais non rigoureusement identiques* » du fait des diverses sources d'incertitudes affectant leur fabrication. Pour une sous-structure *E*, les effets de ces diverses incertitudes (aussi bien ce que nous avons appelé variabilité que méconnaissance) sont considérés de manière globale au travers de l'énergie de déformation $e_E(U) = \frac{1}{2} U^t K_E U$, où U est le champ de déplacement du problème et K_E la rigidité de la structure. Du fait des incertitudes, notamment celles portant sur la pertinence du modèle, un doute existe sur la valeur de l'énergie de déformation de la structure réelle $e_E(U)$ par rapport à l'énergie de déformation calculée $\bar{e}_E(U)$, ce que l'auteur traduit par :

$$(1+m_E^-)\bar{e}_E(U) \leq (1+m)\bar{e}_E(U) = e_E(U) \leq (1+m_E^+)\bar{e}_E(U) \qquad \text{(Eq. II-12)}$$

L'énergie de déformation de chaque structure est donc associée à une quantité *m*, appelée *méconnaissance*, dont on ne sait rien si ce n'est qu'elle appartient avec certitude à l'intervalle $[m_E^-, m_E^+]$. Ces deux bornes forcément positives, appelées *méconnaissances de base*, sont la clé de voûte de cette approche. Celle-ci ressemble alors à la théorie des intervalles. Afin de limiter, dans le transport des incertitudes, l'effet de surestimation propre à cette théorie, l'auteur définit ces bornes comme des variables aléatoires obéissant à des lois de probabilités données (en particulier des lois normales tronquées). La propagation de l'incertitude modélisée par cette approche s'effectue ensuite soit par simulation de Monte-Carlo, soit en utilisant des transformées de Fourier rapides pour convoluer les densités de probabilité des méconnaissances de base. La deuxième méthode est moins coûteuse à performance égale, mais nécessite toutefois que l'on soit en présence de combinaison linéaire des variables aléatoires. De ce fait, les cas traités concernent

principalement de faibles méconnaissances, même si une solution pour les fortes méconnaissances est proposée. A partir des méconnaissances définies sur les sous-structures, l'auteur obtient ainsi des distributions de probabilité pour les bornes inférieures et supérieures des indicateurs considérés sur la structure complète. En particulier, des intervalles d'incertitudes à 70% et 99% sont obtenus pour les valeurs des modes et pulsations propres. Cette approche semble intéressante pour l'analyse des problèmes de dynamique. Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter à [Ladevèze, 06a] ou [Ladevèze, 06b]. Néanmoins, il nous a été difficile de voir réellement l'apport de cette méthode par rapport à des approches plus traditionnelles pour traiter nos problèmes.

II.3. Approche Industrielle en aéronautique

Comme cela a été dit précédemment dans la présentation générale, la démarche industrielle actuelle repose sur l'utilisation des valeurs A ou B. Dans les Military Handbook ([MIL-HDBK17], [MIL-HDBK5]), celles-ci sont définies comme il suit. Une valeur de propriété qui, compte tenu de la dispersion présentée par le matériau, est inférieure à 99% des valeurs possibles, est appelée valeur A si elle a été déterminée avec une confiance de 95%. Une valeur B suit la même définition mais est inférieure à seulement 90% des valeurs possibles. Ces notions statistiques de valeur A ou B sont bien sûr intimement liées à une approche probabiliste, tant pour la notion de confiance qu'elles comportent, que pour le pourcentage de valeurs qu'elles doivent excéder. Cela entraîne qu'un certain nombre d'hypothèses doit être fait, notamment sur le type de loi de probabilité suivi par la propriété du matériau considérée. Dans le cas d'une loi normale, la position des valeurs A et B dans la queue de la distribution est présentée Figure II-4a. La Figure II-4b montre quant à elle comment retrouver leurs valeurs à partir de la fonction de densité de probabilité cumulée.

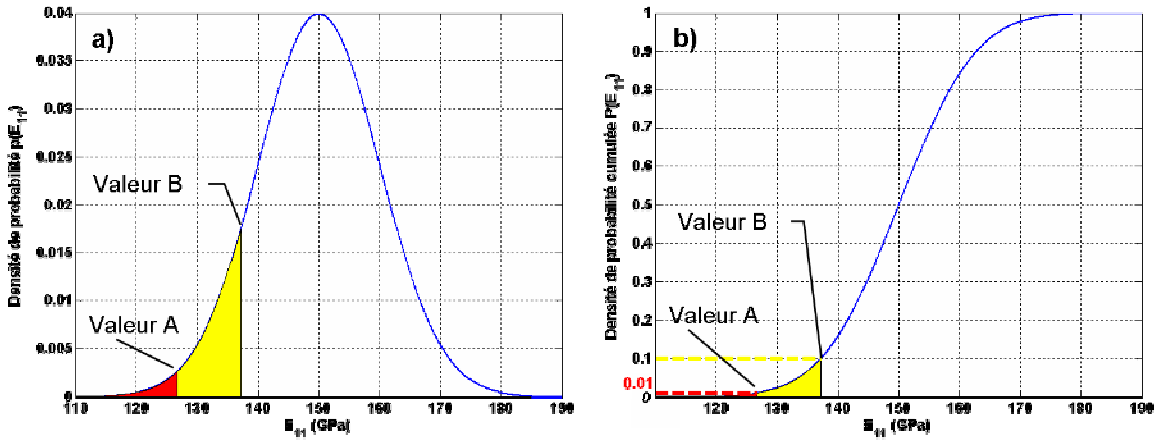


Figure II-4. Signification de la valeur A et de la valeur B pour une loi normale parfaitement connue de moyenne $\mu = 150\ GPa$ et d'écart-type $\sigma = 10\ GPa$, avec la courbe (a) de densité de probabilité et (b) de densité de probabilité cumulée.

Les différences de valeurs prises par les valeurs A ou B suivant la loi de probabilité choisie sont illustrées par la Figure II-5. Il est donc bien évident qu'une validation des hypothèses sur les lois de probabilité employées est nécessaire, ce qui requiert la réalisation d'un grand nombre d'essais. Un des principaux inconvénients de cette méthode se révèle alors : les coûts expérimentaux induits tant sur le plan financier qu'en terme de délais de réalisation.

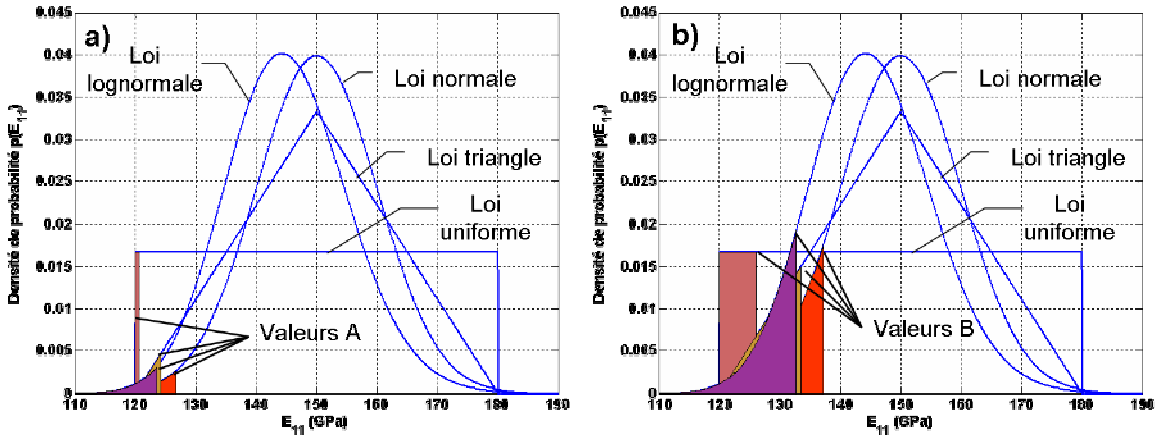


Figure II-5. Influence du type de distribution (a) sur la valeur A et (b) sur la valeur B.

Le nombre infini d'expériences nécessaires pour définir parfaitement la loi de probabilité est bien sûr irréalisable. Les industriels, en n'effectuant qu'un nombre limité d'essais, acceptent donc une certaine part de méconnaissance. Or celle-ci peut être incompatible avec la notion de confiance contenue dans la définition des valeurs A ou B. Les amplitudes de ces valeurs statistiques de dimensionnement présentées Figure II-5 sont en effet basées sur une parfaite connaissance de la loi de probabilité. Si maintenant une incertitude affecte les paramètres de celle-ci, il est nécessaire d'introduire un coefficient d'abattement dépendant du nombre d'essais réalisés pour les estimer. Dans le cas d'une loi normale, le Tableau II-1 indique la valeur de ces coefficients d'abattement pour calculer la valeur A et la valeur B, avec une confiance de 95%, à partir des estimations de la moyenne $\overline{\mu}$ et de l'écart –type $\overline{\sigma}$ de la distribution. Il est à noter que, à l'infini, on retrouve les coefficients utilisés pour une loi parfaitement identifiée. La méthode d'obtention de ces coefficients est présentée en annexe 1.

nb essais n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	∞
k_A	37,09	10,55	7,042	5,741	5,062	4,642	4,354	4,143	3,981	3,295	3.064	2,326
k_B	20,58	6,155	4,162	3,407	3,006	2,755	2,582	2,454	2,355	1,926	1,777	1,282

Tableau II-1. Dans l'hypothèse d'une loi normale, valeur des coefficients d'abattement permettant de calculer les valeurs A et B à partir de la moyenne $\overline{\mu}$ et de l'écart -type $\overline{\sigma}$ estimés:

Valeur $A = \overline{\mu} - k_A.\overline{\sigma}$ *et Valeur* $B = \overline{\mu} - k_B.\overline{\sigma}$.

L'ingénieur a donc le choix soit d'augmenter le nombre d'essais (et donc le coût), soit de prendre un facteur d'abattement grand (et par conséquent de pénaliser les performances réelles). Nous allons essayer de montrer cet aspect à travers un exemple. Comme l'indique la Figure II-6, ces coefficients k_A et k_B permettent bien de s'assurer que la notion de confiance à 95% est respectée. Ainsi sur les histogrammes présentés, les valeurs B calculées pour 10^5 échantillons ne dépassent pas la valeur B exacte dans plus de 5% des cas.

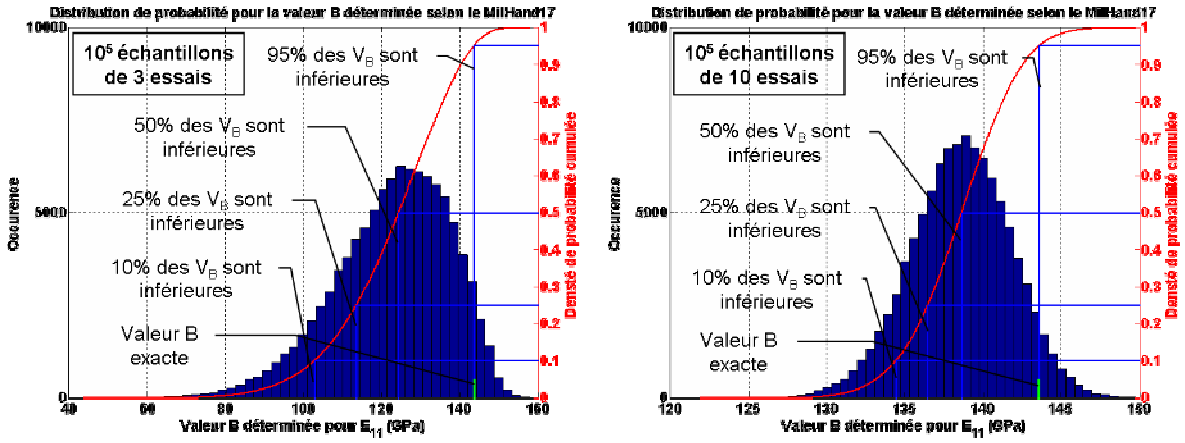


Figure II-6. Histogrammes des répartitions des valeurs B obtenues par la méthode du Military Handbook 17 pour 10^5 échantillons de (a) 3 et (b) 10 essais tirés suivant une loi normale de moyenne μ =150 GPa et d'écart-type σ =5 GPa.

Toutefois, dans un certain nombre de cas la valeur B déterminée sera beaucoup trop sévère. En effet, étant donné la loi normale choisie, la probabilité d'obtenir des valeurs inférieures à 135 GPa est de 0.5%. Or il apparaît que la valeur B déterminée aura une valeur inférieure un nombre non-négligeable de fois, surtout dans le cas où les échantillons ne comportent que trois essais (Tableau II-2). Dans ce cas, des valeurs B inférieures de moitié à la moyenne réelle pourraient même être choisies.

	10^5 échantillons de 3 essais	10^5 échantillons de 10 essais
Dans 10% des cas, V_B est	inférieure à 102.7 GPa	inférieure à 134.4 GPa
Dans 25% des cas, V_B est	inférieure à 113.5 GPa	inférieure à 136.4 GPa
Dans 50% des cas, V_B est	inférieure à 124.3 GPa	inférieure à 138.6 GPa
Dans 95% des cas, V_B est	inférieure à 143.6 GPa	inférieure à 143.6 GPa
Valeur B exacte	143.6 GPa	

Tableau II-2. Divers quantiles de la distribution de la valeur B déterminée selon le Military Handbook 17 pour 10^5 échantillons de 3 et 10 tirages selon la loi normale de moyenne μ =150 GPa et d'écart-type σ =5 GPa.

Ces valeurs de dimensionnement apparaissent donc trop exigeantes et ne permettent pas de dire où l'on se situe en terme de risque de surdimensionnement. De plus, les formes de distributions postulées, dont certaines comme les lois normales définies sur $]-\infty,\infty[$, sont inadaptées en terme de sens physique (un module d'élasticité ne peut être négatif). La probabilité de ces valeurs aberrantes est certes extrêmement faible mais la définition même de ces lois dans ces zones influe sur la notion de confiance liée aux valeurs A et B. Par ailleurs, cette méthode ne permet pas de prendre en compte les corrélations entre les différents coefficients matériaux. Ces liens, découlant des considérations multiéchelles, permettraient pourtant de réduire le nombre d'expériences nécessaires en combinant les informations issues d'essais différents. De plus, pour être rigoureux l'utilisation des valeurs A ou B nécessite a priori une étude de sensibilité. Le choix d'utiliser une valeur B telle que définie jusqu'à présent (c'est-à-dire inférieur à 90% des valeurs possibles, avec une confiance de 95%) peut en effet sembler évident pour des

propriétés à rupture, mais l'est nettement moins pour un paramètre comme le coefficient de Poisson dont le mode d'influence est parfois difficile à prévoir. Par ailleurs, du fait des interactions entre paramètres, ce choix peut ne pas être aussi aisé qu'il y parait, même sur une propriété à rupture (l'état de contrainte étant influencé par la valeur des paramètres élastiques ou visqueux du modèle). Enfin, la détermination de la valeur B sans lien avec les modèles employés est un autre facteur à prendre en compte pour évaluer le risque de sur- ou de sous-dimensionnement. Les simplifications qu'ils comportent peuvent en effet affecter les marges.

II.4. Méthode de Monte-Carlo

La première méthode employée pour déterminer l'effet des incertitudes tire son nom de la ville célèbre pour ses jeux de hasard : Monte-Carlo. Son principe est évident, et consiste à tirer aléatoirement suivant la ou les distributions de probabilité choisies des jeux de valeurs des paramètres incertains. Ceux-ci sont ensuite utilisés en entrée du modèle considéré, et la ou les valeurs des réponses font ensuite l'objet d'un traitement statistique. Cette méthode, de par sa simplicité, est bien sûr la première envisagée par quiconque s'intéresse pour la première fois au problème de l'estimation des effets des incertitudes. Sa mise en œuvre aisée la rend applicable à tout type de problème, quelque soit le domaine considéré. Toutefois elle présente l'inconvénient majeur d'être extrêmement coûteuse en temps de calcul. En effet, plusieurs milliers de tirages aléatoires et donc d'évaluation du modèle sont nécessaires afin d'obtenir une précision convenable sur la distribution de probabilité des paramètres considérés en sortie. Cela est d'autant plus vrai que les zones d'intérêt (pouvant conduire à la défaillance) sont généralement située dans les queues des distributions, et donc de faible probabilité d'occurrence Suivant la complexité du modèle considéré, la méthode de Monte-Carlo nécessite donc plus ou moins de temps. Sa vitesse de convergence (dans le cas unidimensionnel) en $1/\sqrt{n}$ avec n le nombre de tirage ne la classe d'ailleurs pas dans les méthodes les plus performantes. Toutefois, sa robustesse en fait une référence pour l'évaluation de nouvelles méthodes. Elle reste par ailleurs un choix acceptable dans les cas où le coût d'évaluation du modèle n'est pas rédhibitoire. Cela implique souvent des modèles relativement simple et comportant peu de paramètres. Par ailleurs, l'augmentation de la puissance de calcul (cluster d'ordinateurs, …) et la parallélisation immédiate de la méthode contribuent de plus en plus à estomper cet inconvénient. Il convient également de souligner que diverses méthodes telles que les techniques de réduction de variance et les tirages d'importance, parmi lesquels la méthode de l'hypercube latin (*latin hypercube sampling*) ont été développées afin de réduire le nombre de tirages nécessaires pour estimer correctement la distribution de probabilité de la réponse considérée. Notons enfin que la méthode de Monte-Carlo est également employée afin d'évaluer des intégrales multidimensionnelles complexes. Elle est notamment à la base de l'algorithme de Métropolis-Hasting.

II.5. Transport d'incertitudes par décomposition de la fonction de transfert en séries de Taylor

En mécanique, le terme de propagation des incertitudes est utilisé pour prendre en compte les dispersions constatées sur les propriétés des matériaux utilisés pour fabriquer les structures. Dans d'autres domaines comme l'automatique ou l'électronique où les variables d'entrée des processus sont définies plus précisément, le terme de propagation d'erreur est employé et divers résultats sont disponibles. Une approche basée sur la décomposition du processus physique considéré en série de Taylor est notamment utilisée ([Arras, 98], [Winkler, 98]). La Figure II-7 montre ainsi comment transporter en sortie sur le paramètre Y l'incertitude existant sur le paramètre d'entrée X pour une plage de valeurs voisines de la moyenne. Cette méthode bien qu'approximative fournit un certain nombre de résultats théoriques.

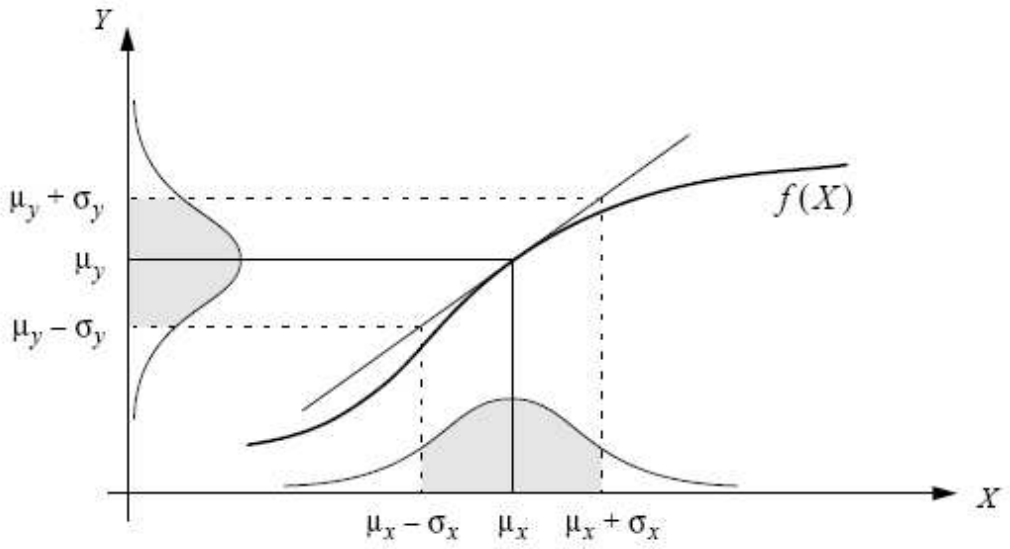


Figure II-7. Exemple dans le cas unidimensionnel de propagation des incertitudes par décomposition en série de Taylor du 1er ordre (d'après [Arras, 98]).

II.5.1. Principe

Pour un processus physique *f(.)* dépendant du vecteur $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ des *n* paramètres incertains, la décomposition en série de Taylor du 1er ordre au voisinage de la moyenne $\mu_X = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ conduit à :

$$f(X) = f(\mu_X) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mu_X) \right)(x_i - \mu_i) + o(\|X - \mu_X\|) \qquad \text{(Eq. II-13)}$$

A partir de là il est possible de déduire la moyenne μ_Y et l'écart-type σ_Y pour la variable de sortie *Y*, image de *X* au travers du processus *f(.)*. En effet :

$$\begin{aligned} \mu_Y = E[Y] \quad &= E[f(\mu_X) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mu_X) \right)(x_i - \mu_i) + o(\|X - \mu_X\|)] \\ &\approx f(\mu_X) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\mu_X} .(E[x_i] - E[\mu_i]) \end{aligned} \qquad \text{(Eq. II-14)}$$

En remarquant que $E[x_i] = \mu_i$ et $E[\mu_i] = \mu_i$, on obtient finalement (Eq. II-15).

$$\boxed{\mu_Y \approx f(\mu_X)} \qquad \text{(Eq. II-15)}$$

L'écart-type σ_Y est donné quant à lui par (Eq. II-16). L'identification dans cette expression des termes correspondant aux écart-types σ_i et aux covariances σ_{ij} des divers paramètres d'entrée conduit finalement à (Eq. II-17). Cette relation se simplifie grandement dans le cas où les variables d'entrée x_i sont indépendantes puisque alors $\sigma_{ij} = 0$.

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= E[(Y-\mu_Y)^2] \approx E[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i-\mu_i)\right)^2] \\ &\approx E[\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x_i-\mu_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_i\, a_j(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)]\end{aligned} \quad \text{avec } a_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{\mu_X} \qquad \text{(Eq. II-16)}$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 .\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\sigma_{ij} \qquad \text{(Eq. II-17)}$$

La généralisation de ces relations à plusieurs paramètres de sortie $\mathrm{Y_k}$ chacun relié aux paramètres d'entrée x_i par un processus f_k, permet finalement d'obtenir la loi de propagation d'erreur s'exprimant sous la forme matricielle par (Eq. II-18), où C_Y est la matrice de covariance des paramètres de sortie de dimension $p \times p$, C_X est la matrice de covariance des paramètres d'entrée de dimension $n \times n$, et F_X la matrice jacobienne des processus f_k de dimension $p \times n$. Cette relation permet notamment d'obtenir, au travers des termes de covariance $\sigma_{Y_iY_j}$, une indication sur la façon dont sont reliés deux paramètres de sortie Y_i et Y_j dépendant des mêmes variables d'entrée.

$$C_Y = F_X.C_X.F_X^t \qquad \text{(Eq. II-18)}$$

$$\text{avec : } C_Y = \begin{bmatrix} \sigma_{Y_1}^2 & \sigma_{Y_1Y_2} & \cdots & \sigma_{Y_1Y_p} \\ \sigma_{Y_2Y_1} & \sigma_{Y_2}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \sigma_{Y_{p-1}Y_p} \\ \sigma_{Y_pY_1} & \cdots & \sigma_{Y_pY_{p-1}} & \sigma_{Y_p}^2 \end{bmatrix},\ C_X = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2} & \cdots & \sigma_{x_1x_n} \\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \sigma_{x_{n-1}x_n} \\ \sigma_{x_nx_1} & \cdots & \sigma_{x_nx_{n-1}} & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } F_X = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

II.5.2. Limite de validité

Comme il a été dit cette méthode est basée sur une approximation par série de Taylor au 1er ordre. Il convient donc d'être prudent pour s'assurer de la validité des résultats obtenus. Ainsi sur la Figure II-7, il est clair que la distribution obtenue en sortie sur le paramètre *Y* n'est pas exactement celle qui aurait été obtenue en utilisant la forme exacte du processus *f*. Cet écart est bien sûr d'autant plus grand que la relation physique étudiée est non-linéaire au voisinage de la moyenne. L'écart du processus approché vis-à-vis d'un modèle (multi-)linéaire est donc un 1er critère. Toutefois, ce critère, qui correspond à la qualité avec laquelle un hyperplan de coefficients directeurs $\frac{\partial f}{\partial X_i}(\mu_1 \cdots \mu_n)$ approxime le processus réel, est pondéré par la taille du domaine d'incertitude, c'est-à-dire par les valeurs σ_{X_i}. Plus celles-ci sont faible et plus l'erreur commise sur σ_Y sera restreinte. Or cette situation est souvent celle rencontrée et différencie les problèmes de prise en compte des incertitudes des problèmes d'optimisation où le domaine de variation des paramètres est beaucoup plus conséquent.

Cette approche ne fournit toutefois des informations que sur les deux 1ers moments statistiques de la distribution de sortie. Or ceux-ci ne sont généralement pas suffisants pour caractériser complètement cette distribution, sauf situation particulière comme l'hypothèse d'une loi normale sur les paramètres de sortie.

II.6. Analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité est utilisée en ingénierie pour déterminer comment les paramètres d'entrée influencent la ou les réponses du problème considéré. Elle est notamment utilisée à des fins d'optimisation pour rechercher les valeurs améliorant les performances du système. En terme de propagation des incertitudes, l'analyse de sensibilité est utile pour déterminer les paramètres les plus influents pour lesquels une incertitude même limitée peut avoir le plus de conséquence. Compte tenu de la complexité des problèmes mécaniques, du nombre de paramètres incertains qui peuvent être considérés, et de la difficulté rencontrée par les méthodes de prise en compte des incertitudes à traiter des problèmes à grand nombre de paramètres, la connaissance des coefficients de sensibilité permet donc de sélectionner les variables à inclure en priorité dans l'approche.

Les coefficients de sensibilité sont déterminés en calculant les dérivées partielles de la fonction d'état considérée vis-à-vis des divers paramètres d'entrée. Ces dérivées sont obtenues à partir des équations fondamentales du problème, ou par simple dérivation de la forme analytique si celle-ci est disponible, ce qui est plus rarement le cas. Cette méthodologie présente l'avantage d'être applicable à toutes les méthodes numériques de discrétisation (éléments de frontière, différences finies, éléments finis).

L'analyse de sensibilité pour la conception de structures utilise principalement les méthodes suivantes : la méthode de différenciation directe, la méthode de la variable adjointe appliquée avec l'approche par dérivées du matériau (*material derivative approach*) ou par paramétrisation du domaine.

Un exemple d'utilisation de l'analyse de sensibilité à un problème d'homogénéisation des composites est disponible dans [Kaminski, 03]. La méthode est appliquée à l'élasticité linéaire et l'article précise sans toutefois traiter le cas qu'elle peut être

étendue sans difficulté au cas de constituants élasto-viscoplastiques dans un contexte probabiliste.

Dans [Noor, 98] des cartes sont présentées, montrant la répartition spatiale des coefficients de sensibilité calculés sur des éprouvettes entaillées. Le matériau considéré est un acier viscoplastique comportant des porosités et soumis à un chargement dynamique. Les coefficients de sensibilité jusqu'à l'ordre 2 sont obtenus par la méthode de différenciation directe au moyen d'une procédure numérique automatique, ce qui permet d'identifier les paramètres ayant le plus d'influence sur le taux de porosité. Les auteurs précisent sans le détailler que ces coefficients de sensibilité peuvent être utilisés pour générer des séries de Taylor de la réponse des éprouvettes pour des paramètres matériaux voisins. Trois utilisations possibles des coefficients de sensibilité étaient données en introduction :

- évaluer l'influence sur les mesures macroscopiques (phénoménologiques) des paramètres utilisés pour décrire la microstructure du matériau, ceci pouvant conduire à des modèles plus fins et à la conception de matériaux plus performants.

- évaluer les effets sur la réponse dynamique et la rupture des structures (métalliques) des incertitudes affectant les paramètres matériaux.

- prévoir pour la réponse des structures les changements dus aux modifications des paramètres matériaux.

Une approche identique est présentée dans [Song, 03] pour l'étude de la sensibilité des joints de soudure (et notamment des contraintes résiduelles) vis-à-vis des divers paramètres matériaux.

II.7. Surface de réponse

La méthode des surfaces de réponse est largement utilisée en mécanique et peut répondre à des objectifs aussi variés que des problèmes de compréhension des facteurs influents dans un modèle complexe, d'optimisation ([Lee, 02], [Lee&Lin, 03]) ou de prise en compte des incertitudes ([Rutherford, 04]). Elle consiste à remplacer un modèle analytique ou numérique, généralement coûteux à évaluer, à la fois en temps de calcul et en ressources nécessaires, par un modèle approché analytique beaucoup plus simple. La plupart du temps, des polynômes de degré réduit sont choisis comme modèles approchés, mais d'autres approches ont également été développées ces dernières années. L'appellation surface de réponse vient du cas où le problème ne dépend que de deux paramètres. En effet, la valeur de l'indicateur considéré (la réponse) tracée en fonction des valeurs des paramètres définit alors une surface. Une analyse graphique permet alors de déterminer les aspects importants du problème considéré (extrema, zone où les valeurs vérifient un certain critère…).

II.7.1. A l'origine : les plans d'expériences

La méthode des surfaces de réponse (*response surface methodology* ou *RSM*) peut être vue comme une extension de la méthode des plans d'expériences. Développée initialement par et pour les expérimentateurs dans les domaines de l'agronomie et surtout de la chimie, les plans d'expériences (*design of experiment* ou *DOE*) sont conçus pour étudier de manière approchée des phénomènes pour lesquels un nombre important de paramètres intervient ([Goupy, 91]). Par exemple, en chimie, il peut s'agir de la recherche des valeurs de concentration des différentes espèces pour lesquelles le rendement de la réaction est maximal. En mécanique, il peut s'agir

de la recherche des réglages d'une machine, pour obtenir les propriétés voulues à l'issue de la fabrication. Le but est alors d'essayer de limiter le nombre d'expériences réalisées, mais aussi de sélectionner ces expériences de manière à ce que le résultat final obtenu soit le moins sensible possible aux éventuelles erreurs ou incertitudes expérimentales. Le problème de la limitation du nombre d'expériences est traité en identifiant un modèle approché polynomial (Eq. II-19), n'excédant pas l'ordre 2, permettant d'obtenir une estimation de la quantité que l'on cherche à déterminer.

$$\begin{aligned} y &= a_0 + \sum_i^n a_i.x_i + \sum_i^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij}.x_i.x_j + \sum_i^n c_i.x_i^2 \\ &= X.[a_0\ a_1...a_n\ b_{12}...b_{(n-1)n}\ c_1...c_n]^t \end{aligned} \qquad \text{(Eq. II-19)}$$

La question de la minimisation de l'influence d'éventuelles erreurs expérimentales est quant à elle traitée en sélectionnant les expériences de manière à minimiser la variance de la réponse en sortie. Un plan des expériences à réaliser est ainsi obtenu, d'où le nom de la méthode. Les statisticiens ont établis que l'erreur sur les coefficients était fournie par la formule (Eq. II-20), reliant la variance des coefficients du modèle $Var(\hat{a}_i)$ à la variance $\sigma_{Y_i}^2$ observée sur les réponses expérimentales.

$$Var(\hat{a}_i) = \sigma_{Y_i}^2 (X^t.X)^{-1} \qquad \text{(Eq. II-20)}$$

Il apparaît donc que cette variance dépend également de la matrice X liée aux coordonnées des points d'identification et au choix du modèle d'approximation. La variance des réponses dépendant de la précision de mesure n'étant pas un facteur aisément modifiable, la solution pour améliorer la qualité de l'approximation en diminuant sa sensibilité aux erreurs expérimentales est donc de choisir de façon appropriée les points d'identification. Pour cela, divers critères d'optimalité sont utilisés. La O-optimalité demande ainsi que la matrice X soit une matrice orthogonale d'Hadamard, c'est dire une matrice $A = (u_1,...,u_n)$ de termes ±1, vérifiant l'inégalité $|det(A)| \leq |u_1|...|u_n|$. $(X^t.X)^{-1}$ est alors une matrice diagonale dont il est démontré que les termes ne peuvent être plus petits, ce qui implique d'obtenir la variance minimale pour les coefficients. La construction d'une telle matrice n'est cependant possible que les valeurs de $n = 1, 2\ ou\ 4k$. L'obtention d'une matrice orthogonale, ou encore l'utilisation de plus de deux niveaux de valeur par paramètre peut cependant rendre impossible l'utilisation de telles matrices. Divers autres critères sont donc utilisés comme l'indique le Tableau II-3.

Nom du critère	Expression du critère d'optimalité
D-optimalité	maximisation de det($(X^t.X)^{-1}$)
A-optimalité	minimisation de trace($(X^t.X)^{-1}$)
G-optimalité	minimisation de max($Var(\hat{a}_i)$)

Tableau II-3. Principaux critères d'optimalité et expression associée.

Plutôt que de plans O-optimaux, les ouvrages de plan d'expérience parlent plutôt de plans factoriels 2^k. Pour chaque paramètre, deux valeurs différentes, également

appelées niveaux, sont sélectionnées, puis associés à la valeur 1 pour le plus grand et -1 pour le plus petit. L'espace d'incertitude est ainsi normé. Le plan d'expérience est ensuite construit en générant toutes les combinaisons possibles de ces deux niveaux. Si le cas traité comporte *n* paramètres, le plan comportera donc 2^n expériences distinctes d'où le nom de ce plan factoriel. L'inconvénient de cette méthode est bien sûr le nombre de calculs très important qu'elle demande. C'est pourquoi d'autres plans factoriels, dits fractionnaires 2^{n-k} ont été développés. Le nombre d'équation est alors inférieur au nombre de coefficients dans le modèle. Pour résoudre le problème d'identification, certains effets (les a_i et b_{ij} dans (Eq. II-19) sont regroupés pour former les aliases. Pour plus de précision, le lecteur pourra se reporter à [Goupy, 97].

La méthode des plans d'expériences regroupe donc dans une même technique deux problèmes différents : l'échantillonnage et l'approximation d'un phénomène complexe. Ces deux problèmes sont évidemment en partie liés. En effet, le nombre de coefficients à identifier dans le modèle approché ainsi que le mode d'identification retenu conditionne en partie le nombre de données nécessaires. Le lecteur trouvera un exemple d'application de la méthode à l'étude de la robustesse des composites sous impact dans [Guillaumat, 00].

II.7.2. Des méthodes de surfaces de réponse

Alors que la méthodologie des plans d'expériences repose sur une approximation polynomiale du phénomène, les surfaces de réponse sont plus générales. Si les premiers travaux sur le sujet reposent également sur une approche polynomiale [Faravelli, 89] dérivant d'une approximation par série de Taylor, des travaux plus récents montrent une plus grande variété de métamodèles employés. Si certains introduisent ainsi les fonctions splines qui font encore appel à une modélisation polynomiale, d'autres s'en écartent résolument en choisissant par exemple d'utiliser des réseaux de neurones, des bases radiales ou encore le Krigeage.

Le lien entre surface de réponse et métamodèle est très fort. Dans [Kleijnen, 00] un métamodèle est défini comme « une approximation de la transformation entrée-sortie impliquée par le modèle de simulation ». Il est ensuite ajouté que « le modèle de type boite-noire qui en résulte est aussi connu sous le terme surface de réponse ».

Dans [Kleijnen, 00] les auteurs distinguent quatre objectifs motivant généralement l'identification et l'emploi d'une surface de réponse :

- La compréhension du problème
- La prévision des valeurs des sorties
- La réalisation d'une optimisation
- Faciliter la vérification et la validation d'une simulation

Notre travail s'inscrit pleinement dans ces objectifs même si l'aspect optimisation relève encore pour nous des perspectives. L'identification des paramètres incertains les plus influents correspond ainsi au premier point et l'obtention de l'effet des incertitudes sur la réponse de la structure au second. Enfin, le dernier point est pour nous en lien avec le contrôle de la robustesse du dimensionnement, telle que définie en section I.4.2.

Les surfaces de réponses polynomiales reprennent le principe présenté dans la partie sur les plans d'expériences. La réponse considérée est approchée par un

polynôme comme dans l'équation (Eq. II-19). Des polynômes de degré supérieur à 2 peuvent toutefois être utilisés. L'identification des coefficients s'effectue ensuite au sens des moindres carrés. Dans [Rikards, 04] une telle approche est utilisée pour optimiser le comportement en flambement d'un panneau raidi composite. La réponse force-déplacement du panneau est modélisée par une loi non-linéaire à seuil, dont les divers coefficients sont reliés aux paramètres variables par une surface de réponse polynomiale de degré 2.

II.7.3. Utilisation du chaos polynomial

Le chaos polynomial s'est développé en mécanique avec les travaux de Ghanem. Combiné avec les développements de Karhunen–Loève, il a notamment abouti à une méthode des éléments finis stochastiques ([Ghanem, 91]) sur laquelle nous reviendrons (cf. II.9.2). Après avoir détaillé le principe du développement sur chaos polynomial, nous nous intéresserons à son utilisation en tant que surface de réponse.

II.7.3.1 Principe

Comme cela est indiqué dans [Field, 04], les représentations par chaos polynomial de variables aléatoires non-gaussiennes Y ou de processus aléatoires sont des séries infinies (cf. (Eq. II-21) de polynômes d'Hermite multidimensionnels Ψ_i de variables aléatoires gaussiennes $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$. Toutefois, pour une manipulation plus commode, seules des troncatures $\tilde{Y}$ de ces séries sont utilisées en pratique et désignées sous le nom *d'approximations par chaos polynomial* (cf. (Eq. II-22).

$$Y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \Psi_i(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \quad \text{(Eq. II-21)} \qquad Y \approx \tilde{Y} = \sum_{i=0}^{n} c_i \Psi_i(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \quad \text{(Eq. II-22)}$$

Le principe de la méthode, assez largement décrit dans la littérature, repose sur la projection de la réponse considérée sur une base de polynômes deux à deux orthogonaux. L'espace de travail considéré ici étant un espace de Hilbert de fonction, le produit scalaire permettant de définir l'orthogonalité est une intégrale : $\langle f, g \rangle = \int_D f(\xi).g(\xi) W(\xi, p_i) d\xi$ où D est le domaine de définition de f et g, et $W(\xi, p_i)$ est une fonction de pondération dépendant des paramètres p_i caractérisant la loi de probabilité suivie par les variables aléatoires ξ du chaos.

Mais en influant sur la valeur du produit scalaire, $W(\xi, p_i)$ conditionne également le type de polynômes vérifiant la relation d'orthogonalité $\langle f, g \rangle = 0$ au sens de ce produit scalaire. Par opposition au chaos polynomial introduit par Ghanem, qui ne considérait que des variables aléatoires gaussiennes associées aux polynômes d'Hermite, cette vision du chaos est appelée chaos polynomial généralisée [Xiu, 01]. Elle reprend les polynômes orthogonaux définis par le schéma de Askey et divers exemples de correspondances entre variables aléatoires et polynômes sont donnés Tableau II-4.

Variable aléatoire ξ	Type de polynômes orthogonaux	Fonction poids $W(\xi, p_i)$	Support
uniforme	Legendre	1	*[-1,1]*
gaussienne centrée réduite	Hermite	$e^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi}$	$[-\infty, +\infty[$
loi gamma de paramètres (α, β)	Laguerre	pour $\beta = 1$, $\frac{\xi^{\alpha} e^{-\xi}}{\Gamma(\alpha+1)}$	$[0, +\infty[$
loi bêta de paramètres (α, β)	Jacobi	$\frac{(1-\xi)^{\alpha}(1+\xi)^{\beta}}{2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1)}$	*[-1,1]*

Tableau II-4. Quatre exemples de correspondance entre la loi de probabilité suivie par les variables aléatoires du chaos polynomial, le type de polynômes orthogonaux utilisés pour l'engendrer et la fonction poids associée du produit scalaire.

Pour des raisons de commodité d'utilisation, les paramètres des lois suivies par les variables aléatoires sont généralement fixés à des valeurs particulières. Ainsi pour une loi uniforme, l'intervalle *[-1,1]* sera préférentiellement choisi comme support. De même, les variables aléatoires gaussiennes sont choisies centrée réduites c'est-à-dire à moyenne nulle et écart-type unitaire. L'usage des deux autres lois citées ici étant peu courant, les pratiques ne sont pas très explicites quand à l'utilisation de valeurs normées pour les paramètres (α, β).

Une fois le type de lois de probabilité choisi pour les variables aléatoires, le chaos polynomial s'écrit comme une combinaison linéaire des polynômes orthogonaux correspondants. La somme a priori infinie est bien sûr tronquée à un certain ordre *n*. Pour une seule variable ξ l'approximation par chaos polynomial de la réponse considérée s'écrit donc suivant (Eq. II-23), où P_i sont les polynômes orthogonaux d'ordre *i* du type choisi.

$$Y = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i(\xi) \qquad \text{(Eq. II-23)}$$

Dans le cas de polynômes de Legendre et d'Hermite, les P_i sont donnés jusqu'à l'ordre 5 dans le Tableau II-5.

Pour un nombre de variables $m \geq 2$, il s'agit alors de construire un chaos polynomial multidimensionnel, comme présenté (Eq. II-24).

$$\begin{aligned} Y = a_0 &+ \sum_{i=1}^{m} a_{1i} P_1(\xi_i) + \sum_{i=1}^{m} a_{2i} P_2(\xi_i) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} a_{2ij} P_1(\xi_i) P_1(\xi_j) + \sum_{i=1}^{m} a_{3i} P_3(\xi_i) + \\ &\sum_{i=1}^{m-2} \sum_{j=i+1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} a_{3ijk} P_1(\xi_i) P_1(\xi_j) P_1(\xi_k) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} a_{3ij} P_1(\xi_i) P_2(\xi_j) + \ldots \end{aligned} \qquad \text{(Eq. II-24)}$$

Ordre du polynôme	Polynômes de Legendre	Polynômes d'Hermite
ordre 0	1	1
ordre 1	ξ	ξ
ordre 2	$\xi^2 - \frac{1}{3}$	$\xi^2 - 1$
ordre 3	$\xi^3 - \frac{3}{5}\xi$	$\xi^3 - 3\xi$
ordre 4	$\xi^4 - \frac{6}{7}\xi^2 + \frac{3}{35}$	$\xi^4 - 6\xi^2 + 3$
ordre 5	$\xi^5 - \frac{10}{9}\xi^3 + \frac{5}{21}\xi$	$\xi^5 - 10\xi^3 + 15\xi$

Tableau II-5. Polynômes orthogonaux de Legendre et d'Hermite d'ordre 1 à 5 utilisés pour générer le chaos polynomial.

Afin de simplifier l'écriture, le chaos est généralement écrit sous la forme de (Eq. II-22). Les polynômes orthogonaux multidimensionnels $\Psi_i(\xi_1,\xi_2...,\xi_m)$ sont alors les produits de polynômes unidimensionnels P_i de différents ordres, tels que au final l'ordre de leur produit n'excède pas l'ordre souhaité.

$$N_{c_i} = \sum_{k=0}^{p} C_{M+k-1}^{k} = \frac{(M+p)!}{M!\,p!} \qquad \text{(Eq. II-25)}$$

Le nombre total de polynômes Ψ_i et donc de coefficients c_i est donné par (Eq. II-25) où m est le nombre de variables du chaos et p le degré maximal des polynômes. Le Tableau II-6 donne un aperçu du nombre de coefficients.

m \ p	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=10
p=1	2	3	4	5	6	7	11
p=2	3	6	10	15	21	28	66
p=3	4	10	20	35	56	84	286
p=4	5	15	35	70	126	210	1001

Tableau II-6. Nombre de polynômes et de coefficients du chaos, avec m le nombre de variables impliquées et p le degré du chaos.

II.7.3.2 Application pour la démarche de surface de réponse

Le chaos polynomial permettant de décrire n'importe quelle variable aléatoire, divers auteurs ([Isukapalli, 99], [Berveiller, 05]) ont proposé de l'utiliser comme modèle reliant entrées et sorties dans une approche par surface de réponse. La première étape consiste à transformer les variables réelles en variables adaptées au type de

polynômes choisis. L'identification des coefficients peut ensuite se faire de diverses façons, à partir d'un nombre plus ou moins important d'évaluations de la réponse considérée. Cette approche intéressante nous semblant correspondre à nos critères, nous avons décidé de la retenir. En particulier, nous utiliserons la méthode dite de projection pour identifier les coefficients du chaos. Pour plus de précision sur les autres méthodes (collocation, régression…) le lecteur est invité à consulter les références citées précédemment.

La méthode de projection consiste à tirer parti des propriétés d'orthogonalité des polynômes du chaos pour identifier les divers coefficients. En particulier si une réponse S est développée suivant le chaos polynomial, le coefficient c_i du polynôme Ψ_i est donné par la relation :

$$c_i = \frac{< S.\Psi_i >}{< \Psi_i.\Psi_i >} = \frac{\iint\ldots\int S.\Psi_i\,.W\,d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_m}{\iint\ldots\int \Psi_i.\Psi_i.W\,d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_m} \qquad \text{(Eq. II-26)}$$

Si l'intégrale du dénominateur peut se calculer analytiquement, l'évaluation de l'intégrale multidimensionnelle du numérateur est plus problématique. Divers auteurs utilisent une méthode de Monte-Carlo pour ce calcul. Il s'agit alors de prendre garde au coût de calcul et à la précision de l'estimation, notamment en grande dimension. Une autre solution consiste à utiliser une méthode de quadrature, par exemple de type Gauss. La valeur de l'intégrale est alors approchée (cf. (Eq. II-27) par une somme pondérée des valeurs de la fonction en différents points χ_k, appelés points d'intégration. Les poids correspondant ω_k sont appelés poids d'intégration.

$$\int_a^b f(x)W(x)dx \cong \sum_{k=1}^{N} \omega_k f(\chi_k) \qquad \text{(Eq. II-27)}$$

Le nombre de points d'intégration défini l'ordre de la méthode et sa précision. Une méthode de Gauss à N points est conçue pour être exacte pour des polynômes jusqu'à l'ordre $2N-1$ inclus. Les poids et les points sont tabulés ou peuvent être calculés à partir du polynôme P_i. En particulier, les points d'intégrations à l'ordre N sont les racines du polynôme orthogonal P_N.

Pour évaluer une intégrale multidimensionnelle, par cette méthode, la solution la plus simple consiste à utiliser toutes les combinaisons possibles des points d'intégration. Cependant, les polynômes étant des produits des polynômes P_0 à P_p, pour éviter que certains coefficients c_i ne soient nuls, il est nécessaire d'employer une méthode de quadrature d'ordre au moins $p+1$, avec p le degré du chaos. Pour m variables, le nombre total de points d'intégration est alors $(p+1)^m$. L'inconvénient est bien sûr le nombre important de calcul de S à réaliser au total. Notons bien sûr l'existence d'autres méthodes d'intégrations, un peu moins coûteuses.

II.7.3.3 Exploitation statistique du chaos polynomial

Une fois le chaos polynomial construit, l'analyse statistique de la réponse peut être conduite au moyen de simulations de Monte-Carlo. Mais le chaos permet également de calculer directement les premiers moments statistiques qui, s'ils ne suffisent pas à fournir des bornes sur la réponse, donnent néanmoins des informations

intéressantes sur la forme de sa distribution. En particulier la moyenne, la variance, le skewness et le kurtosis sont donnés par :

$$\text{moyenne } <Y>= c_0 \qquad \text{(Eq. II-28)}$$

$$\text{variance } var(Y) = \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 . <\Psi_i^2> \qquad \text{(Eq. II-29)}$$

$$\text{skewness } \gamma_1(Y) = \frac{1}{\sigma_Y^3} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_i.c_j.c_k. <\Psi_i\Psi_j\Psi_k> \qquad \text{(Eq. II-30)}$$

$$\text{kurtosis } \gamma_2(Y) = \frac{1}{\sigma_Y^4} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_i.c_j.c_k.c_l. <\Psi_i\Psi_j\Psi_k\Psi_l> \qquad \text{(Eq. II-31)}$$

II.7.4. Krigeage pour surface de réponse

Parmi les diverses méthodes employées pour la réalisation de surface de réponse suivant l'approche de plan d'expériences numériques, le krigeage (ou kriging) est devenu relativement populaire. Sacks ([Sacks, 89]) fut le premier à l'utiliser comme méta-modèle en mécanique, mais le krigeage est à l'origine une méthode utilisée en géostatistique. Elle doit son nom à l'ingénieur minier sud-africain D.G. Krige qui la développa dans les années 50 pour estimer les concentrations spatiales de minerai à partir d'un nombre limité de forages. La formulation mathématique fut par la suite développée par Matheron ([Matheron, 63]) qui montra les liens avec les estimateurs linéaires de Gauss-Markov. Le krigeage est ainsi qualifié de meilleur estimateur linéaire sans biais (ou *BLUE* en anglais pour *Best Linear Unbiased Estimator*)

La méthode consiste tout d'abord à modéliser la réponse *Y* considérée, dépendant de paramètres *x*, au moyen d'une régression s'exprimant sous la forme :

$$Y(x) = \sum_i \beta_i . f_i(x) + Z(x) = f(x).\beta^t + Z(x) \qquad \text{(Eq. II-32)}$$

avec $f(x) = [f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)]$ le vecteur des *n* fonctions servant de base au modèle de régression et $\beta = [\beta_1,...\beta_n]$ le vecteur des coefficients. Généralement des polynômes d'ordre limité sont utilisés et donc $f(x) = [1, x, x^2,...x^{n-1}]$.

Le terme *Z(x)* représente le résidu, c'est à dire l'écart entre le modèle de régression et la réponse réelle. Le krigeage fait alors l'hypothèse que ce résidu est un processus à moyenne nulle, de variance donnée σ^2 et surtout stationnaire. Cela signifie que connaissant sa valeur en un point *P*, sa valeur en un autre point *M* ne dépend que de la distance entre *M* et *P*, ce qui permet d'écrire:

$$Cov_Z(x_i, x_j) = \sigma^2.R(|x_i - x_j|) \qquad \text{(Eq. II-33)}$$

Z est donc construit comme une somme pondérée du résidu aux *m* points d'identification $x_{id} = [x_1, x_2,..., x_m]$ que l'on exprime par :

$$Z(u) = \alpha(u).(Y(x_{id}) - f(x_{id}).\beta^t) \qquad \text{(Eq. II-34)}$$

où $\alpha(u)$ représente les poids qui sont fonction de la position du point considéré u par rapport aux points d'identification x_{id}. Cette dépendance est modélisée par l'emploi d'une fonction de corrélation qui dépend seulement de la distance entre les points. La plus usitée est apparemment la fonction de corrélation gaussienne :

$$R(x_i, x_j) = R(x_i - x_j) = exp\left(\sum_k \theta_k \left|x_i^k - x_j^k\right|^2\right) \qquad \text{(Eq. II-35)}$$

avec x_i^k la $k^{\text{ème}}$ composante des coordonnées du point x_i et θ_k les paramètres définissant la fonction de corrélation (nécessitant d'être identifiés). Finalement les poids $\alpha(u)$ au point u sont obtenus par :

$$R.\alpha(u) = r(u) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R(x_1,x_1) & \cdots & R(x_1,x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(x_m,x_1) & \cdots & R(x_m,x_m) \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \alpha_1(u) \\ \vdots \\ \alpha_m(u) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R(u,x_1) \\ \vdots \\ R(u,x_m) \end{Bmatrix} \qquad \text{(Eq. II-36)}$$

Pour définir complètement le modèle de krigeage, il est donc nécessaire d'identifier les coefficients β de la partie régression et θ_k de la fonction de corrélation, ainsi que la variance σ^2. Cette identification peut être faite au sens du maximum de vraisemblance ([Welch, 92]), ce qui correspond alors à minimiser :

$$\frac{1}{2}(m.ln\,\sigma^2 + ln\,det\,R) \qquad \text{(Eq. II-37)}$$

L'approche par krigeage présente l'avantage de bien décrire certains comportements non-linéaires et constitue donc une alternative aux régressions polynomiales d'ordre élevé. Par ailleurs, le krigeage est une approche interpolante et ses performances s'améliorent avec l'augmentation du nombre de points d'identification, ce qui n'est pas forcément le cas d'une méthode de régression.

Pour un exemple d'application du kriging en surface de réponse, et une comparaison à d'autre forme de surface de réponse, le lecteur pourra se reporter à [Romero, 04]. Son utilisation pour l'analyse de sensibilité est également détaillée dans [Kleijnen, 05], et un exemple de son application à un problème d'optimisation est présentée dans [Sakata, 03].

II.7.5. Autres formes de métamodèles

Au fil des ses développement, la méthode des surfaces de réponse a considéré diverses autres formes d'approximations. Le terme de métamodèles a notamment été introduit pour désigner ces approximations, conçues pour remplacer, sur un domaine plus ou moins étendu, une relation issue du modèle initial. Le terme métamodèle indique alors clairement qu'un deuxième niveau de modélisation est superposé à un premier.

Parmi les méthodes qui se sont le plus développées, les réseaux de neurones figurent au premier plan. Il s'agit en fait de systèmes experts inspirés du fonctionnement du système nerveux humain, et dont les principes rappèlent fortement l'automatique. Un neurone est alors une fonction de transfert d'une forme donnée qui à partir de valeurs de multiples paramètres d'entrée fournit la valeur d'une réponse en sortie. Plusieurs de ces neurones peuvent être combinés en parallèle et/ou en série, ce qui explique l'utilisation du terme réseau

Parmi les autres méthodes rencontrées dans la littérature, citons encore les splines, les bases radiales ou encore l'analyse en composantes principales, dont les développements de Karhumen-Loève (présentés II.9.2.1) constituent une forme particulière.

II.8. Méthode fiabiliste

La notion d'incertitude est intimement liée à celle de la robustesse ou de la fiabilité du dimensionnement, c'est-à-dire à la façon dont celui-ci peut être remis en cause si les valeurs de divers paramètres ne sont pas exactement celles prévues. La fiabilité ([Lemaire, 05]) s'intéresse en particulier à la probabilité qu'une structure connaisse une défaillance. Ce terme désigne tout un ensemble de situation dont le point commun est que la structure ne remplit plus le rôle pour lequel elle avait été conçue. L'utilisation de modélisation en série et/ou en parallèle permet alors de traiter des cas complexes faisant intervenir plusieurs éléments différents (étages successifs d'un circuit électronique, structure composée d'un assemblage de sous-structures…). Cette notion de défaillance regroupe en particulier des aspects que la mécanique des structures classique traite séparément. Ainsi outre la rupture de la pièce, des scénarios comme son endommagement (des fissures font perdre l'étanchéité d'une canalisation…), ou encore son vieillissement (une pièce s'allonge excessivement du fait d'une perte de rigidité et entre en collision avec une autre…) peuvent être considérés pour constituer ce qui est appelé le couplage mécano-fiabiliste. Ce type d'approche commence se développer dans le domaine des composites ([Boubakar, 05], [Carbillet, 05], [Guillaumat, 05]).

II.8.1. Principe

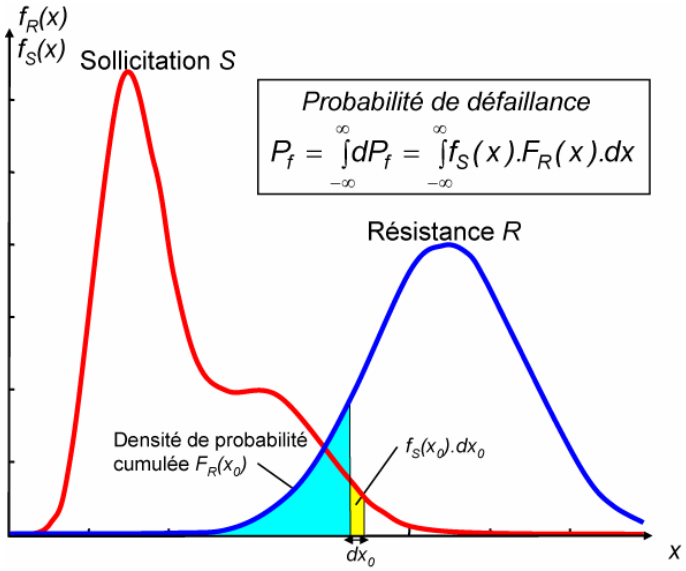


Figure II-8. Principe de la fiabilité : confrontation résistance-sollicitation pour la détermination de la probabilité de défaillance

Les méthodes de fiabilité considèrent deux quantités stochastiques : d'une part la résistance de la structure R de densité de probabilité f_R, et d'autre part la sollicitation imposée S, ayant pour densité f_S. Pour que la structure ne connaisse pas de défaillance, il faut bien évidemment vérifier : R-S>0. Le but est d'estimer la probabilité de défaillance P_f de la structure, c'est-à-dire la probabilité du domaine de l'espace D_f={R-S<0}. En considérant comme indépendantes la résistance R et la sollicitation S, P_f peut alors se calculer comme présenté Figure II-8.

Dans le cas multidimensionnel, quand un grand nombre de variables intervient, les densités de probabilité f_S et f_R deviennent en pratique très difficiles à obtenir ce qui compromet le calcul de P_f suivant ces définitions. En particulier, pour des situations à faible probabilité de défaillance, l'erreur des formules de quadrature est du même ordre que P_f. Pour contourner le problème, les méthodes fiabiliste se ramène à la recherche d'une seule valeur : l'indice de fiabilité β de Hasofer et Lind. Pour cela, une transformation isoprobabiliste est appliquée afin de se ramener dans un espace normé dans lequel les variables sont indépendantes et gaussiennes centrées réduites. L'intérêt est que la forme de la densité de probabilité conjointe est alors connue (gaussienne multidimensionnelle) et isotrope. En particulier, les isovaleurs de probabilité sont des cercles centrés sur l'origine, et la densité de probabilité cumulée, dans une direction donnée de l'espace, est celle d'une gaussienne unidimensionnelle (Figure II-9). L'attention se porte ensuite sur le domaine de l'espace, appelé état-limite, où R=S. Posons u le vecteur des variables dans l'espace normé, et $H(u)$=$R(u)$-$S(u)$. L'indice β est alors défini par (Eq. II-38) comme la distance de l'origine au plus proche point appartenant à l'état-limite. Ce point, désigné par P^*, est généralement appelé point de défaillance le plus probable (*Most Probable Failure Point* ou *MPFP*). Sans rentrer dans les détails, notons que cette appellation est considérée comme abusive. Certains auteurs, en se plaçant dans la logique du dimensionnement, préfèrent donc parler de point de conception.

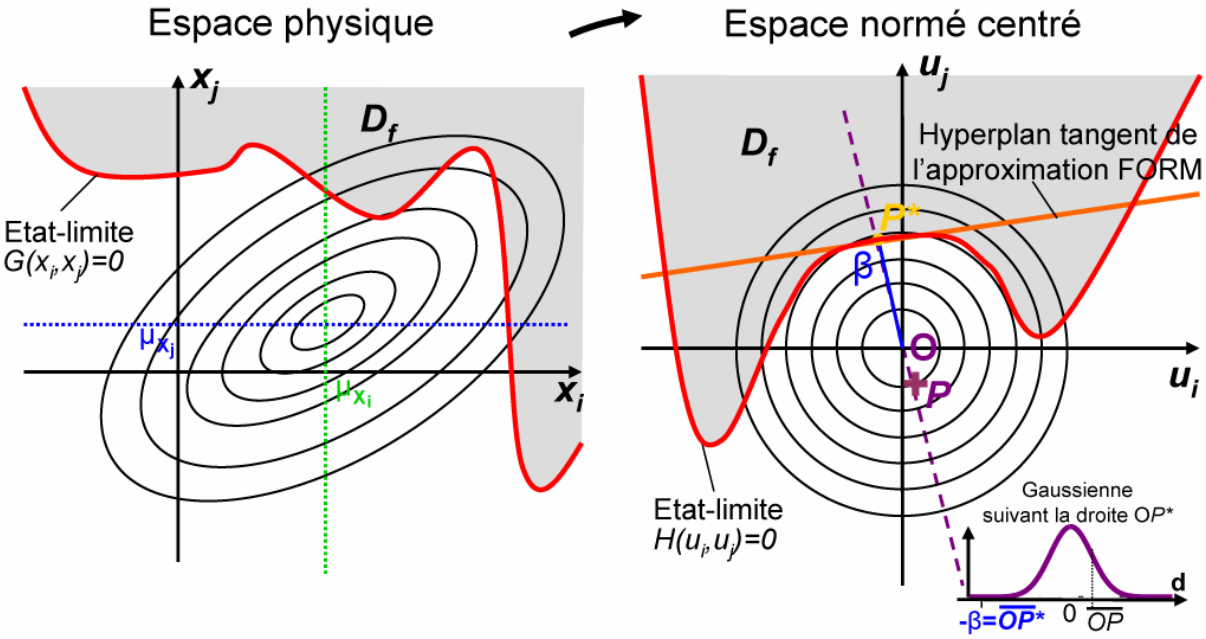


Figure II-9. Approche fiabiliste : changement d'espace, recherche du point de conception P et de l'indice de fiabilité β, approximation FORM pour la probabilité de défaillance (d'après [Lemaire, 05]).*

L'équation (Eq. II-38) montre bien que la résolution du problème de fiabilité se ramène à un problème d'optimisation. D'autres méthodes peuvent toutefois être

utilisées, en particulier des simulations de Monte-Carlo, directes ou conditionnées pour accélérer la convergence. Notons également que la résolution de ce problème peut aboutir à des points de conception multiples.

$$\beta = min(\sqrt{u.u^t}), \forall\ u \text{ tel que } H(u) \leq 0 \qquad \text{(Eq. II-38)}$$

La détermination de β permet ensuite de se ramener au calcul de la probabilité de défaillance grâce aux approximations FORM ou SORM pour *first* et *second order reliability method*. L'approximation FORM remplace ainsi l'état-limite par son hyperplan tangent au point de conception *P** (Figure II-9). Compte tenu du fait que la densité de probabilité suivant une direction donnée, par exemple *OP** suit une loi normale, cela permet d'écrire :

$$P_f = \Phi(-\beta) \text{ avec } \Phi \text{ la fonction de répartition de la loi normale} \qquad \text{(Eq. II-39)}$$

Cette approximation est justifiée par le fait que dans le cas d'un nombre important de variables, la densité de probabilité décroît très rapidement dés que l'on s'éloigne de l'origine. Les domaines de l'espace situés à une distance de l'origine supérieur à β ont donc, en théorie, une influence négligeable sur la probabilité de défaillance. Toutefois des contre-exemples existent, notamment dans le cas de fonctions présentant une courbure importante au voisinage de l'état-limite (paraboloïdes). En effet, des portions de D_f très proches de *P** sont alors comptabilisées dans D_S. Pour remédier à ce problème la méthode SORM «asymptotique » a été proposée. L'état limite au voisinage de P* est alors approximé par une hypersurface de degré 2. La probabilité de défaillance se calcule alors par (Eq. II-40), où κ_j est la courbure de l'état-limite suivant la $j^{ème}$ variable. Cette méthode présente toutefois un coût plus important, puisque le calcul de la courbure demande de connaître les dérivées partielles de l'état-limite au voisinage de P*. Par ailleurs, elle ne garantit pas un meilleur résultat que SORM.

$$P_f = \Phi(-\beta)\left(\prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+\beta\,\kappa_j}}\right) \qquad \text{(Eq. II-40)}$$

La détermination du point de conception permet également à l'approche fiabiliste d'obtenir des informations équivalentes à une analyse de sensibilité, grâce aux cosinus directeurs α_i de la droite *OP** définis par (Eq. II-41), où u_i^* est la $i^{ème}$ coordonnée du point *P**.

$$\alpha_i = -\frac{u_i^*}{\beta} \qquad \text{(Eq. II-41)}$$

II.8.2. Relations avec la méthode des surfaces de réponse

L'application de l'approche fiabiliste n'est pas en contradiction avec la méthode des surfaces de réponse, bien au contraire ([Gayton, 03]). L'état-limite étant difficile à

définir, celui-ci est souvent approché par une surface de réponse, notamment quand il s'agit de coupler l'analyse de fiabilité à un code de calcul. Des plans d'expériences successifs, pilotés par les résultats de fiabilité, sont alors employés. La surface de réponse est ainsi modifiée au fur et à mesure, de façon à obtenir la meilleure description possible au voisinage du point de conception « exact ». [Kaymaz, 05] présente ainsi un exemple d'utilisation du krigeage pour approcher l'état-limite.

II.9. Eléments finis stochastiques

Afin de prendre en compte les incertitudes dans les calculs de structures, des méthodes dites d'éléments finis stochastiques ont été développées ces dernières années afin d'inclure directement dans le calcul numérique les aspects aléatoires constatés expérimentalement. Celles-ci reposent sur des développements en série de quantités stochastiques (telles que des matrices de rigidités, des déplacements nodaux…) dépendant de paramètres incertains comme les propriétés matériaux. Deux approches sont utilisées :

- la méthode classique développée la première dont les différentes formes emploient des développements de Taylor, une méthode de perturbation ou encore des développements en série de Neumann ([Elishakoff, 95])
- la méthode spectrale développée par Ghanem et Spanos ([Ghanem, 91]) combinant chaos polynomial et développements de Karhunen-Loève.

II.9.1. Méthode par perturbation

La méthode des perturbations ([Elishakoff, 95]) est considérée comme une méthode à champ aléatoire discrétisé et s'applique directement à une modélisation éléments finis. Prenons le cas (Eq. II-42), où *K* est la matrice de rigidité globale obtenue par assemblage des matrice de rigidité des éléments, *u* le vecteur des déplacements inconnus, et *F* le vecteur des forces extérieures nodales équivalentes.

$$K.u = F \qquad \text{(Eq. II-42)}$$

Son principe suppose que l'aléa peut être représenté par une faible variation autour d'une valeur moyenne. Les paramètres incertains X_i sont remplacés par des variables centrées $\alpha_i = X_i - \mu_{X_i}$ et un développement en série de Taylor est effectué sur la relation (Eq. II-42). En général, on se limite à un développement au plus à l'ordre 2, et pour *W*=*K*, *u* ou *F*, on obtient alors (Eq. II-43).

$$\begin{aligned} &\textit{Pour } W\text{=}K,\ u \text{ ou } F,\ W = W^0 + \sum_{k=1}^{n} W_k^1 \alpha_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} W_{kl}^2 \alpha_k \alpha_l \\ &\textit{avec } W^0 = W(\alpha = 0),\ W_k^1 = \left.\frac{\partial W}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha=0} \textit{ et } W_{kl}^2 = \left.\frac{\partial W}{\partial \alpha_k \partial \alpha_l}\right|_{\alpha=0} \end{aligned} \qquad \text{(Eq. II-43)}$$

En injectant ces relations dans (Eq. II-42), le système (Eq. II-44) est obtenu. Par les relations classiques de la méthode des éléments finis, il conduit ensuite aux expressions des déformations et des contraintes.

$$\begin{aligned} u^0 &= (K^0)^{-1}F^0 \\ u_k^I &= (K^0)^{-1}(F_k^1 - K_k^1 u^0) \\ u_{kl}^{II} &= (K^0)^{-1}\left(F_{kl}^2 - (K_k^1 u_l^1 + K_l^1 u_k^1 + K_{kl}^2 u^0)\right) \end{aligned} \qquad \text{(Eq. II-44)}$$

Sur le plan statistique, la moyenne et les premiers moments de *u* ou d'autres quantités sont obtenues comme indiqué Tableau II-7.

	Ordre 1	Ordre 2
Moyenne	$E^1[u] = E[u^0] = u^0$	$E^2[u] = u^0 + \frac{1}{2}\sum_i^n \sum_j^n u_{ij}^2 E[\alpha_i \alpha_j]$
Ecart-type	$cov^1[u,u] = \sum_i^n \sum_j^n u_i^1 (u_j^1)^t E[\alpha_i \alpha_j]$	$cov^2[u,u] = cov^1[u,u] + \frac{1}{4}\sum_i^n \sum_j^n \sum_k^n \sum_l^n u_{ji}^2 (u_{kl}^2)^t \times \left(E[\alpha_i \alpha_l]E[\alpha_j \alpha_k] + E[\alpha_i \alpha_k]E[\alpha_j \alpha_l]\right)$

Tableau II-7. Moyenne et écart-type issus de la méthode des perturbations à l'ordre 1 et 2.

Divers exemples d'utilisation dans le domaine des composites sont disponibles comme l'étude des vibrations de plaques ([Onkar, 05]) ou de panneaux cylindriques ([Singh, 02]) vis-à-vis des variations des paramètres élastiques. Le cas d'un chargement statique est étudié dans [Yang, 05] pour des plaques stratifiées métal-céramique.

On constate cependant que la méthode demande le calcul des dérivées partielles de la matrice de rigidité et du vecteur des forces nodales par rapport aux paramètres incertains. Même si elle s'applique à une discrétisation éléments finis existantes, il s'agit donc d'une méthode intrusive. Pour cela, nous ne la retiendrons pas.

II.9.2. Méthode spectrale

Alors que la méthode des perturbations se base sur la discrétisation éléments finis pour effectuer les développements en série de Taylor (notamment sur *K*), la méthode spectrale des éléments finis s'intéresse à la modélisation des champs aléatoires en amont de la discrétisation. On parle ainsi parfois de méthode à champ aléatoire continu. Cette modélisation combine notamment le chaos polynomial, déjà présenté en section II.7.3, et les développements de Karhunen-Loève.

II.9.2.1 Développement de Karhunen-Loève

La méthode des développements de Karhunen-Loève s'applique à tout processus ou variable aléatoire. Toutefois l'utilisation qu'elle fait de la fonction de covariance la rend particulièrement intéressante pour la modélisation de champs stochastiques.

Le développement de Karhunen-Loève décompose une réponse aléatoire *Y* (variable, champ, processus), en une partie déterministe, la moyenne $\mu(x,t)$, et une partie aléatoire représentée sous la forme d'une somme infinie telle que :

$$Y(x,t,\theta) = \mu(x,t) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\,\xi_i(\theta) f_i(p,t) \qquad \text{(Eq. II-45)}$$

où :

- les $\xi_i(\theta)$ indiquent les coordonnées de la réalisation de Y et forment une famille de variables aléatoires orthonormales vis-à-vis du produit scalaire.
- les λ_i et f_i sont les valeurs et vecteurs propres de la fonction d'autocovariance de Y, solutions du problème aux valeurs propres :

$$\int C_{YY}(x_1,t_1,x_2,t_2)f_i(x_2,t_2)dx_1dt_1 = \lambda_i f_i(x_2,t_2) \qquad \text{(Eq. II-46)}$$

De par les propriétés adéquates de la fonction d'autocovariance, les fonctions f_i forment une base orthogonale complète de l'espace des fonctions de carré sommable L. Bien évidement une troncature de l'équation est systématiquement utilisée. Elle est justifiée par le fait que les valeurs propres peuvent être classées en une suite décroissante convergeant vers 0.

Le problème est bien sûr de disposer de la fonction d'autocovariance du processus, ce qui n'est pas toujours évident. Souvent, celui-ci est donc considéré comme gaussien.

II.9.2.2 Méthode spectrale des éléments finis SSFEM

Cette méthode est largement détaillée dans la littérature ([Ghanem, 99]). Elle a par exemple été utilisée dans le cadre de l'élasticité linéaire ([Ghanem, 91]), en grandes déformations ([Acharjee, 06]) et dans bien d'autres domaines encore. Considérant que les propriétés fluctuent spatialement sur la pièce, la matrice de rigidité D du matériau peut être exprimée sous la forme d'un développement de Karhunen-Loève (Eq. II-47), ou encore sur le chaos polynomial.

$$[D(x,\theta)] = [\overline{D}(x)] + [\hat{D}]\sum_{i=0}^{N_{KL}} \xi_i(\theta)\sqrt{\lambda_i} f_i(x) \text{ avec } [\overline{D}(x)] = <[D(x,\theta)]> \qquad \text{(Eq. II-47)}$$

$$\{u(x,\theta)\} = \sum_{j=0}^{N_p} \{u_j(x)\}\Psi_j(\xi) \qquad \text{(Eq. II-48)}$$

Les déplacements sont ensuite développés sur la base du chaos polynomial (Eq. II-48). Si les sollicitations sont considérées comme aléatoires, elles peuvent aussi être exprimées de cette façon. On aboutit alors à un système défini par (Eq. II-49).

$$\sum_{i=0}^{N_{KL}}\sum_{j=0}^{N_P} <\xi_i \Psi_j(\xi)\Psi_k(\xi)> [K_k]\{u_j\} = \sum_{i=0}^{N_{KL}} <F\Psi_k(\xi)>$$
$$\text{avec } [K_k] = \int_V B^t.\hat{D}.B\sqrt{\lambda_k} f_k(x)dV(x) \qquad \text{(Eq. II-49)}$$

Un exemple d'applications pour les matériaux composites est disponible dans [Ngah, 07], sur un panneau modélisé très simplement. La comparaison avec des simulations de Monte-Carlo montre de bons résultats pour l'obtention de la densité de probabilité de la déformation. Les auteurs notent cependant la nécessité de prendre en compte

des champs aléatoire non-gaussiens pour les propriétés matériau. Dans [Acharjee, 06], le problème de l'alignement des fibres est étudié sur l'exemple d'un volet de tuyère. La moyenne stochastique de la déformée se révèle différente de la réponse déterministe.

Cette méthode est donc intrusive, et plutôt dédiée à l'étude de ce que nous avons appelé variabilité spatiale dans le chapitre I. C'est pourquoi nous ne l'avons pas retenue pour notre travail. Elle est cependant intéressante, notamment pour les suites à donner à cette thèse.

Conclusion

Un grand nombre d'approches ont été développées pour résoudre les problèmes de représentation et de transport des incertitudes. Notre intérêt se limitant au domaine de la mécanique des structures, ce chapitre nous a permis de présenter les méthodes soit les plus fréquemment utilisées, soit ayant fait l'objet de travaux récents. Sur la question de la description, ne souhaitant pas préjuger de la forme des incertitudes, nous retenons pour l'instant les représentations probabiliste, floue et par intervalle. Par la suite, nous essaierons notamment d'évaluer l'impact du choix de telle ou telle représentation sur les incertitudes des réponses. Pour traiter le problème de la propagation, afin de vérifier les critères présentés dans le chapitre I, nous avons opté pour une approche par surface de réponse. Nous avons toutefois retenu plusieurs façon de construire le métamodèle : polynômes, chaos polynomial et krigeage. Il s'agit maintenant de savoir dans quelle situation utiliser l'une ou l'autre de ces méthodes, et de vérifier leurs performances respectives. Cela suppose notamment de disposer d'indicateurs de qualité pour notre surface de réponse. Ces diverses questions vont maintenant être abordées dans le chapitre III, présentant la stratégie que nous avons développée.

Chapitre III
Construction d'une stratégie adaptée au traitement des incertitudes en calcul de structures

Introduction **59**

III.1. Proposition d'une démarche progressive du transport d'incertitudes **59**

III.1.1. Principe d'une approche classique de type « Surface de réponse» (Response Surface Method - RSM) 60
III.1.2. Amélioration par l'introduction d'estimateur de la qualité du transport d'incertitude 61
III.1.3. Description de la stratégie progressive d'Analyse de la Variabilité 62

III.2. Présentation d'une approche classique de type « Surface de Réponses » **64**

III.2.1. Normalisation des paramètres 65
III.2.2. Sélection des points d'identification 66
III.2.3. Calculs des valeurs des fonctions objectifs 67
III.2.4. Choix et identification du métamodèle 67
III.2.5. Exploitation du métamodèle : estimation de l'effet des incertitudes 68

III.3. Apport d'une phase de vérification dans une approche de type RSM **69**

III.3.1. Présentation des méthodes de validation croisée 69
III.3.2. Conséquences sur l'étape de sélection des points d'identification 74
III.3.3. Phase de vérification du métamodèle 75
III.3.4. Obtention d'un intervalle de confiance sur les indicateurs statistiques calculés au travers de la démarche 81

III.4. Intérêts d'une stratégie progressive d'Analyse de la Variabilité **81**

III.4.1. Optimisation de la sélection des points d'identification du métamodèle d'ordre un 82
III.4.2. Stratégie adoptée en cas de détection d'une défaillance du métamodèle : progressivité de la démarche 84

III.5. Mise en œuvre et premières validations de la démarche d'Analyse de la Variabilité (AdV) **87**

III.5.1. Principe de la validation 87
III.5.2. Synthèse des résultats obtenus 87
III.5.3. Quelques remarques sur les cas « fortement » non linéaires 88

Conclusion **93**

Introduction

L'étude bibliographique présentée au chapitre II a montré la diversité des méthodes existantes, permettant de traiter les problèmes d'incertitudes. Cette étude avait pourtant cherché à se réduire au cadre précis de notre travail à l'aide des objectifs et limites définis dans la présentation générale de ce mémoire. Néanmoins, malgré la multitude des méthodes, aucune ne m'est apparue totalement satisfaisante, c'est-à-dire à la fois non-intrusive, raisonnablement parcimonieuse, et fournissant un indicateur sur la confiance des informations fournies. C'est pourquoi j'ai peu à peu mis en place une stratégie complète qui va maintenant être détaillée dans ce chapitre. Trois points semblaient nécessiter plus spécialement une réponse :

- comment faire un choix parmi les diverses méthodes rencontrées dans la littérature et en particulier doit-on employer une ou plusieurs méthodes ?
- comment assurer un juste coût à la méthode (équilibre entre temps de calcul et qualité des résultats) ?
- comment estimer la qualité du résultat obtenu, pour lui associer une notion de confiance et si nécessaire comment améliorer ce résultat ?

Après une présentation globale de la démarche mise en place, nous présenterons plus en détail chacune de ses étapes. Des illustrations de la démarche et une première forme de validation sera proposée dans ce chapitre en étudiant des fonctions mathématiques judicieusement choisies faisant office de processus à approximer. Diverses autres validations sur des situations mécaniques seront proposées dans les chapitres suivants.

III.1. Proposition d'une démarche progressive du transport d'incertitudes

Dans la présentation générale, il a été défini pour notre étude un cadre précis qui a déjà permis de préciser le champ de notre recherche bibliographique. Dans ce cadre, des critères importants ont été définis :

- capacité à prendre en compte tout type de paramètres incertains (décrivant le matériau, la géométrie, les conditions aux limites ou le chargement).
- applicabilité à des modèles aussi bien analytiques que numériques
- non- intrusivité pour ne pas être dépendant d'un code de calcul
- outils pour déceler une déficience inacceptable de la méthode

Afin de répondre à ces critères, la stratégie qui a été mise en en place pour traiter les problèmes de propagation d'incertitudes est du type « plan d'expériences numériques ». Elle consiste à effectuer le transport d'incertitude au travers d'une surface de réponses (ou autre métamodèle) au coût de calcul réduit. Toute la difficulté est alors de construire une approximation satisfaisante du processus considéré, d'évaluer la confiance qui peut être accordée à ce métamodèle, et de gérer intelligemment la complexité des méthodes mises en œuvre pour l'obtenir. Pour répondre à ces questions, il a été nécessaire d'enrichir progressivement la méthode standard des surfaces de réponses, comme cela va maintenant être détaillé.

III.1.1. Principe d'une approche classique de type « Surface de réponse» (Response Surface Method - RSM)

Une telle méthode consiste à remplacer le modèle du processus physique considéré, généralement coûteux en temps et ressources de calcul, par un modèle plus simple et plus rapide à évaluer. Dans la suite l'usage de l'appellation *surface de réponse* sera réservé à des modèles polynomiaux, tandis que le terme *métamodèle* désignera plus généralement tout modèle approché (tel le krigeage, les réseaux de neurones…etc) remplaçant un processus plus complexe. Le schéma de principe du fonctionnement d'une telle approche ([Shiratori, 04]) est présenté Figure III-1.

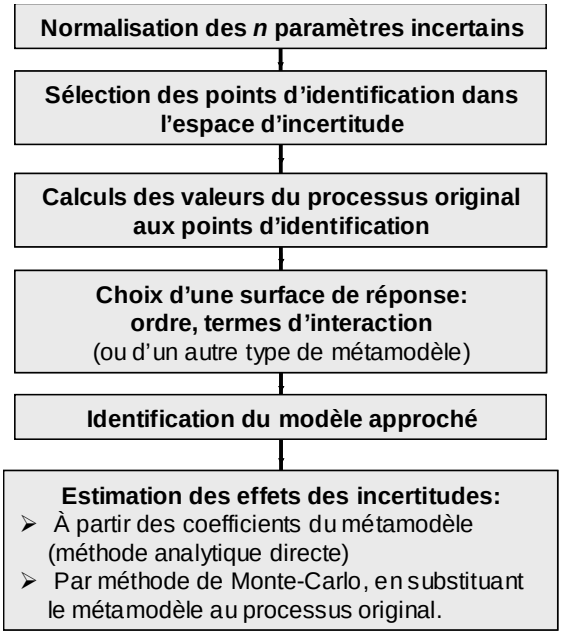


Figure III-1. Schéma de fonctionnement d'une démarche standard de type plan d'expériences numériques pour l'évaluation des effets des incertitudes.

Elle nécessite tout d'abord de sélectionner dans l'espace d'incertitude[1] un nombre limité de points (en réalité des *n*-uplets, combinaison de différentes valeurs des multiples paramètres incertains) en lesquels seront réalisés les calculs. Pour cela, la méthode la plus simple consiste à réaliser des tirages aléatoires dans l'espace à n dimensions des variables incertaines.

Une fois le type de surface de réponses ou de métamodèle choisi pour la forme approchée, il est alors nécessaire de calculer, aux points d'identification, les valeurs « exactes » des réponses (ou sorties) considérées, au moyen du processus original. Cette phase est généralement (et souvent de loin) l'étape la plus coûteuse en temps du calcul dans ce genre de méthode. L'identification du métamodèle se fait ensuite en utilisant une technique appropriée (interpolation, régression,…).

La construction de cette approximation achevée, il est possible de l'utiliser afin d'estimer les effets des incertitudes. L'analyse directe des coefficients du métamodèle peut dans certains cas, notamment quand il s'agit de polynômes, renseigner sur l'influence et l'importance de chaque paramètre incertain. L'information obtenue est alors similaire à celle d'une étude de sensibilité, mais sur

[1] Partie de $\Re^n$ définie par les intervalles de variation des *n* paramètres incertains.

toute une portion de l'espace et non pas seulement au voisinage d'un point (Figure III-2a). Des métamodèles plus ou moins complexes permettent de capter plus ou moins bien la tendance générale du processus sur le domaine d'incertitude (Figure III-2b). Les informations statistiques voulues peuvent ensuite être déduites soit directement à partir des coefficients du métamodèle quand cela est possible, soit de simulations de Monte-Carlo, désormais facilement et rapidement réalisables au travers du métamodèle.

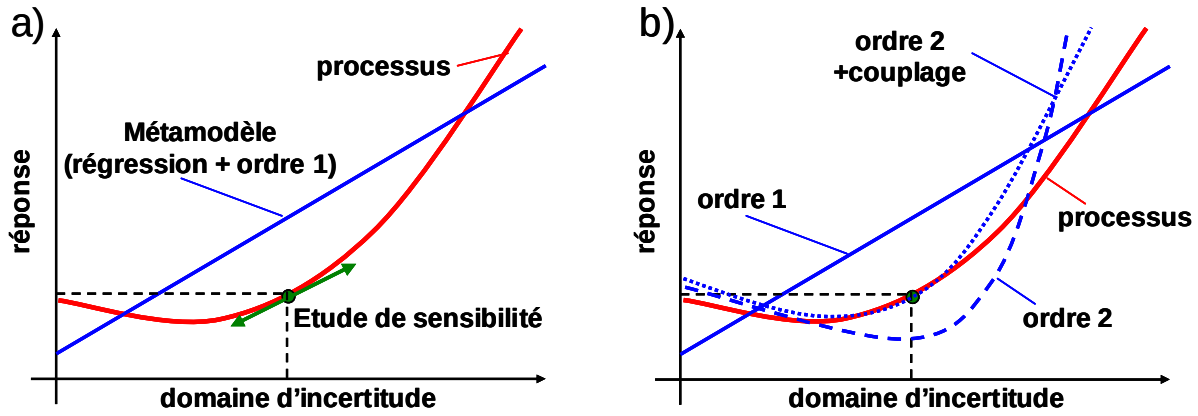


Figure III-2. Différence entre notre approche et une étude de sensibilité (a) et influence des ordres d'approximation sur l'approximation des tendances du processus sur le domaine d'incertitude (b).

III.1.2. Amélioration par l'introduction d'estimateur de la qualité du transport d'incertitude

Il m'est rapidement apparu indispensable d'articuler la méthode de transport d'incertitudes autour de la notion de surface de réponses, à la fois à cause du coût unitaire d'estimation du processus et du nombre de variables incertaines. Le fait également que les processus étudiés représentent des modélisations mécaniques caractérisées par une certaine régularité, nous a laissé penser qu'il devait souvent être possible d'approcher la surface de réponses par des modèles simples.

De manière évidente, l'usage d'une telle méthodologie conduit à se poser les deux questions suivantes.

1. Comment s'assurer que le type de surface de réponses ou de métamodèle choisi approxime correctement le processus réel ?
2. Quel est le biais introduit sur les estimations des indicateurs statistiques par la substitution du processus complet par une forme approchée ?

L'approche que je propose, et dont le schéma de fonctionnement est présenté Figure III-3, a été enrichie par ces points qui semblent (trop) souvent négligés. Par rapport à une démarche standard, il a donc été ajouté des étapes de vérification de la qualité de l'approximation fournie par le métamodèle et d'estimation de la confiance sur les résultats obtenus.

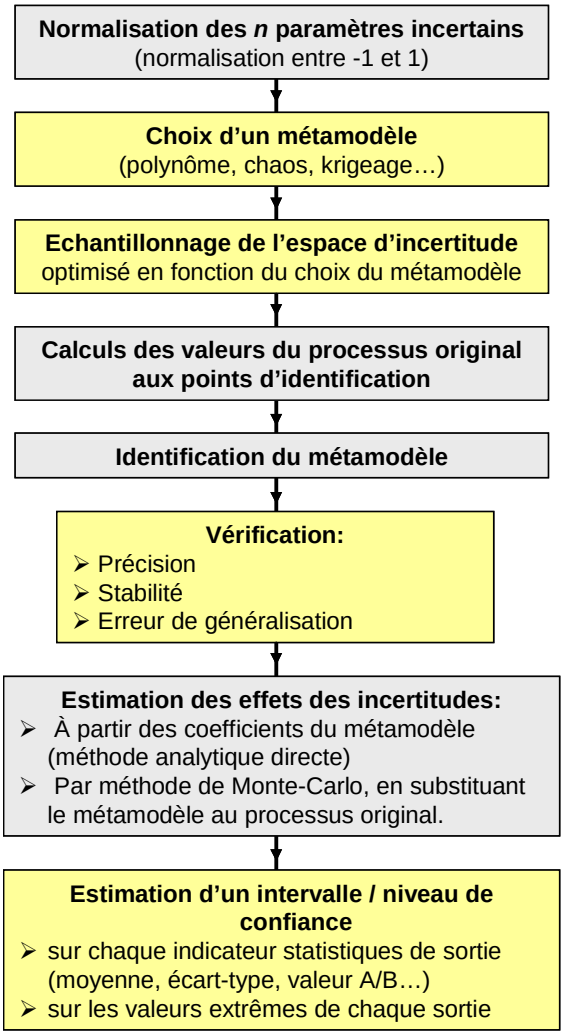


Figure III-3. Schéma de fonctionnement de l'approche proposée avec la mise en place des étapes de vérification.

Concernant le choix du métamodèle, quatre « formes » ont été retenues : les modèles polynomiaux (surfaces de réponse), une approche multilinéaire combinant plusieurs polynômes de degré un, le chaos polynomial et le krigeage. Une attention a également été portée au choix des points d'identification avec l'étude de différentes méthodes d'échantillonnage et de leur adaptation à chaque type de métamodèle. Pour les étapes de vérification de la qualité de la métamodélisation et d'estimation de la confiance, des techniques de validation-croisée ont été utilisées. Ces deux étapes sont pour nous un point essentiel de la stratégie mise en place, notamment pour faire le lien avec la méthodologie de dimensionnement des structures actuellement en usage dans l'industrie. Ces points seront détaillés dans le paragraphe §III.3.

III.1.3. Description de la stratégie progressive d'Analyse de la Variabilité

La difficulté majeure de la démarche présentée précédemment (Figure III-3) est le choix du métamodèle. Du choix de ce métamodèle dépend évidemment le nombre de points nécessaires à son identification et donc du nombre d'évaluation du processus complet à réaliser. Il n'est jamais simple de savoir a priori si les relations entre les réponses du processus et les variations des variables d'entrées dans leurs intervalle d'incertitude peuvent ou non être approchées par un modèle simple (par

exemple linéaire). Préjuger de la complexité minimale du métamodèle sans informations préalables nous est donc apparu hasardeux.

C'est pourquoi une idée simple consistant à tout d'abord approcher le processus par la surface de réponse la plus élémentaire (forme linéaire) a été retenue. Si ce métamodèle s'avère insuffisant, la construction de la surface de réponse est relancée et, en s'appuyant sur les informations obtenues lors des étapes précédentes, fait progressivement appel à des formes plus complexes.

Le schéma de fonctionnement de l'approche a donc été modifié pour aboutir à la démarche présentée Figure III-4, et présentant un caractère progressif. Cette notion de progressivité est nécessaire pour mettre en œuvre l'idée d'un cheminement partant du plus simple (et du plus parcimonieux), avec un modèle polynomial de degré un sans terme de couplages, pour aller si nécessaire vers des métamodèles plus complexes.

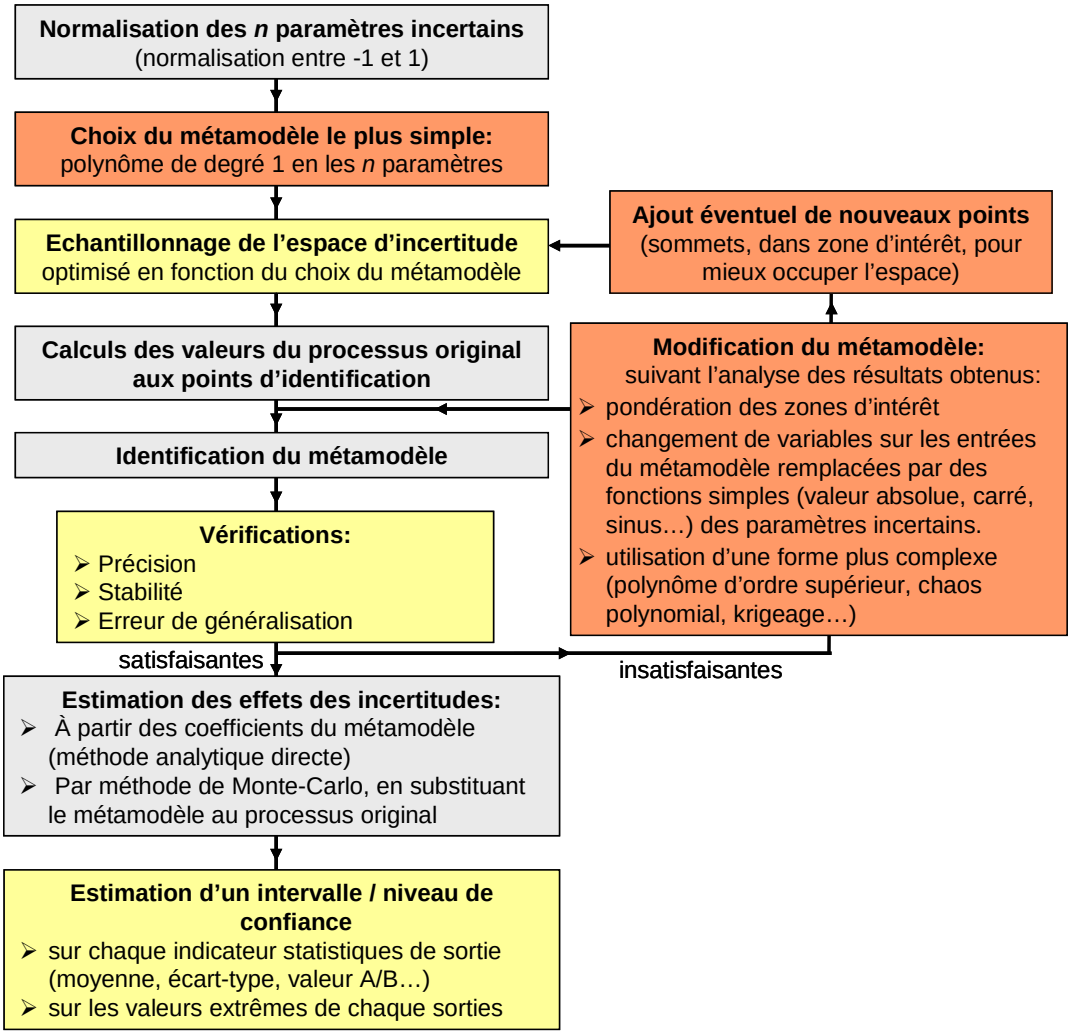


Figure III-4. Schéma de fonctionnement complet de la démarche d'évaluation des effets des incertitudes avec aspect progressif.

Cette approche, en planifiant les méthodes employées et l'ordre de leur mise en œuvre, constitue au final une véritable stratégie pour le traitement de l'effet des incertitudes au moyen de métamodèles dans les problèmes de calcul de structures. Elle vise notamment à répondre aux questions concernant la façon de modifier le

métamodèle employé initialement si celui s'est révélé insuffisant, et d'ajouter au plan d'expériences les points potentiellement nécessaires à la nouvelle identification.

III.2. Présentation d'une approche classique de type « Surface de Réponses »

La démarche développée repose sur la notion de surface de réponses c'est-à-dire d'effectuer le transport des incertitudes au travers d'un métamodèle. Une analogie est possible avec les plans d'expérience utilisés pour l'analyse de résultats expérimentaux et notre démarche pourrait aussi être qualifiée de « plan d'expérience numérique».

Cette méthode présente notamment l'avantage de s'affranchir dans un premier temps du choix de la forme des incertitudes. Le travail d'identification du métamodèle nécessitant de coûteuses évaluations du processus peut en effet se faire sans postuler d'information, stochastiques ou autres, sur les entrées. Il convient simplement de vérifier que l'approximation construite est suffisamment juste sur le domaine de variation des aléas (espace d'incertitudes). La connaissance (même approximative) de l'amplitude des fluctuations de chaque paramètre, définie au moyen de bornes hautes et basses, nous est donc suffisante. Cela permet d'une part de se limiter à un domaine d'étude précis, et d'autre part d'éviter de travailler avec des valeurs aberrantes sur le plan physique (modules d'élasticité négatifs qui peuvent être obtenus en utilisant des gaussiennes…). Cette notion de domaine d'étude est également importante vis-à-vis des métamodèles, tant pour leur construction que pour leur utilisation. Le premier point renvoie à des notions d'échantillonnages : les métamodèles que nous utilisons sont en effet identifiés à partir d'un nombre limité de combinaisons de valeurs des paramètres (points) décrivant au mieux l'espace d'incertitude. Maintenant, sur le plan de l'utilisation, il convient de ne pas oublier que les métamodèles constituent une approximation (et en général une simplification) d'un processus plus complexe. Par conséquent, leur usage ne s'avère généralement satisfaisant que sur un domaine précis et relativement restreint. Cette notion n'est cependant pas en contradiction avec le traitement des incertitudes tels que nous l'envisageons, qui en se concentrant sur des problématiques industrielles doit faire face à des niveaux de variation relativement modérés. En effet, les industriels consacrent beaucoup de moyens au contrôle des processus afin de les rendre les plus répétitifs possible. Au final, cela conduit souvent, non pas à un contrôle parfait mais à des variations raisonnables des sources d'incertitudes. Beaucoup des problèmes que nous envisageons de traiter peuvent être décrits par des variables en nombre élevé, mais présentant en général des variations limitées.

Les étapes d'une démarche classique de type « plan d'expériences numériques » pour l'estimation des effets des incertitudes sont les suivantes :

- Normalisation des paramètres
- Sélection des points d'identification dans l'espace des paramètres incertains
- Calcul des valeurs « exactes » des réponses aux points d'identification
- Choix et identification du métamodèle
- Transports d'incertitude au travers du métamodèle

III.2.1. Normalisation des paramètres

En prélude à l'étape de sélection des points d'identification, il est généralement procédé à la normalisation des paramètres incertains. Cette étape vise à ne plus être gêné par les différences d'ordre de grandeur entre les valeurs des différents paramètres, comme par exemple entre un module d'élasticité et un coefficient de Poisson. Cette normalisation présente également des avantages sur le plan numérique en fournissant un meilleur conditionnement des matrices pour les régressions au sens des moindres carrés, ou un cheminement non biaisé de l'optimisation nécessaire à l'identification du krigeage (qui risque sinon de se focaliser sur les paramètres ayant un ordre de grandeur important). Par ailleurs, tous les paramètres matériaux ayant alors le même poids, l'étude des valeurs des coefficients de certains métamodèles, comme les approximations polynomiales ou le krigeage, permet alors de détecter aisément les paramètres les plus influents.

Pour réaliser la normalisation des paramètres, diverses façons de procéder existent (Tableau III-1). Sur le processus original F, dépendant des paramètres incertains x_i, elles consistent à faire le changement de variable :

$$\varphi : \quad x_i \mapsto \xi_i = \varphi(x_i) \text{ tel que } F(x_1,\ldots,x_n) = F(\varphi^{-1}(\xi_1),\ldots,\varphi^{-1}(\xi_n)) \qquad \text{(Eq. III-1)}$$

	$\varphi(x)$	$\varphi^{-1}(\xi)$
Normalisation en variable centrée réduite	$\xi = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$	$x = \sigma.\xi + \mu$
Normalisation par rapport à la moyenne	$\xi = \dfrac{x-\mu}{\mu}$	$x = \mu(\xi + 1)$
Normalisation d'un intervalle [b, h] dans un autre [m, M]	$\xi = \dfrac{M.(x-b) - m.(x-h)}{h-b}$	$x = \dfrac{h.(\xi - M) - b.(\xi - m)}{M-m}$

Tableau III-1. Différentes possibilités pour réaliser le changement de variable nécessaire à la normalisation des paramètres.

Une démarche courante consiste à transformer les paramètres en variables centrées-réduites, c'est-à-dire de moyenne nulle et d'écart-type unitaire, ce qui suppose de connaître pour chacun des paramètres soit ces deux premiers moments statistiques, soit la loi de probabilité qu'ils suivent. Les méthodes fiabilistes, qui considèrent dés le début un type de distribution donné sur les paramètres incertains, vont quant à elles jusqu'à transformer les paramètres en variables normales centrées-réduites, qui suivent une loi de Laplace-Gauss. Il est également possible de ne raisonner que par rapport à la moyenne μ ou simplement de se ramener dans un intervalle donné, par exemple *[0, 1]* ou *[-1, 1]*. Aucun de ces choix ne semble a priori meilleur qu'un autre. Toutefois, pour rester le plus général possible et ne faire aucun postulat sur la forme des incertitudes des paramètres incertains, les moyennes et écarts-types ne doivent pas être définis (on ne connaît en général qu'une estimation de ces grandeurs). Il a donc été choisi de privilégier la méthode consistant à se ramener dans un intervalle (en général, *[-1, 1])*.

III.2.2. Sélection des points d'identification

Une fois effectuée la normalisation des *n* paramètres, différentes méthodes sont disponibles pour la sélection des points d'identification, la plus simple consistant bien sûr à faire un tirage aléatoire pour échantillonner l'espace d'incertitude.

Parmi l'ensemble des autres méthodes, les plus employées sont sans doute les techniques de plans d'expériences. Rapidement, l'objectif de traiter des cas complexes, présentant un grand nombre de paramètres incertains, a conduit à écarter les plan factoriels de type 2^k, consistant à sélectionner tous les sommets possibles. Si *n* est le nombre de paramètres le nombre de points d'identification est en effet de 2^n comme leur nom l'indique, ce qui se révèle rapidement bien trop coûteux. Par ailleurs, le cadre de notre travail se focalisant sur la simulation numérique, cela crée des différences vis-à-vis de l'approche traditionnelle des plans d'expériences. Ceux-ci visent en effet à minimiser l'effet sur l'identification du modèle de l'erreur expérimentale (cf. II.7.1), qui se manifeste notamment par la dispersion obtenue pour un même point de mesure. Or, dans le cas des simulations numériques étudiées ici, l'erreur expérimentale est nulle. La répétition d'un calcul numérique donne en effet toujours le même résultat. La seule erreur restante pour les métamodèles est donc le manque d'ajustement (*lack of fit*) qui caractérise la pertinence de la description du phénomène ainsi réalisée. Concernant le nombre et la répartition des points « expérimentaux », l'objectif est alors de privilégier une description correcte du processus dans sa globalité.

Le choix de points d'identification constituant un plan d'expériences performant, adapté à un type de métamodèle et à la simulation numérique, apparaît donc comme un vrai problème. Cette thématique fait d'ailleurs l'objet de travaux de thèse en mathématiques appliquées ([Jourdan, 00]). Je me suis contenté de rechercher parmi les méthodes existantes celles qui paraissent les mieux adaptées à nos problèmes de mécanique des composites.

A ce niveau de développement de la démarche de transport d'incertitudes, il a été adopté une stratégie classique consistant à privilégier une répartition régulière des points dans l'espace d'incertitude de façon à l'occuper au mieux. Les techniques des tirages stratifiés et de l'hypercube latin se rangent dans cette catégorie. Pour chacun des *n* paramètres incertains, l'intervalle d'incertitude est découpé en *m* sous-intervalles d'égale probabilité, où *m* est le nombre total de points de calcul que l'utilisateur s'est fixé. Pour chacune des *n* variables, une valeur est ensuite tirée aléatoirement dans chacun des *m* intervalles et les *m* points de calculs sont finalement générés en associant aléatoirement ces valeurs. C'est certainement la démarche la plus simple pour répartir au mieux *m* points dans un espace à *n* dimensions. La Figure III-5 montre un exemple de la répartition des points ainsi obtenus.

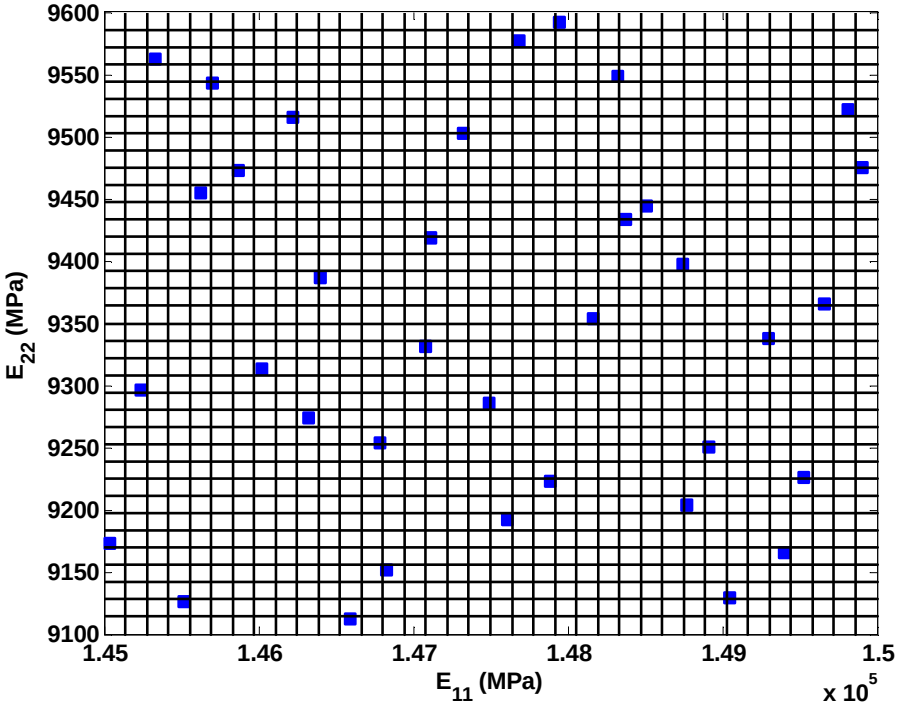


Figure III-5. Exemple de répartition des points par hypercube latin dans l'espace d'incertitude (E_{11},E_{22})

III.2.3. Calculs des valeurs des fonctions objectifs

Une fois les points d'identification sélectionnés, l'étape suivante consiste à réaliser les simulations numériques correspondant à ces points afin de disposer des valeurs des fonctions objectifs nécessaires à l'identification du métamodèle. Dans la plupart des cas, cette étape concentre à elle seule l'essentiel du coût de calcul nécessaire à la méthode. Le temps de calcul des simulations éléments finis, particulièrement pour les structures industrielles, est en effet bien plus grand que celui nécessaire à toutes les autres étapes. Notons cependant que le fait de disposer d'importants moyens de calcul (cluster) permet de réduire fortement le temps de calcul nécessaire, en lançant simultanément chaque calcul sur une machine différente. La méthode proposée est donc particulièrement bien adaptée aux calculs distribués.

III.2.4. Choix et identification du métamodèle

Les métamodèles employés à l'origine dans la méthode des surfaces de réponse sont des polynômes de degré limité. Il sont encore aujourd'hui les types d'approximation les plus employées, même si d'autres formes ont été introduites par la suite (chaos polynomial, krigeage, bases radiales, réseaux de neurones,…). Le choix du métamodèle revient alors à déterminer d'une part le degré du polynôme (n'excédant généralement pas deux), et d'autre part s'il est ou non souhaitable de prendre en compte les termes d'interaction (en $x_i.x_j$). Ce choix peut se faire seulement à cette étape, toutefois, l'emplacement et le nombre de points d'identification ayant souvent un effet non négligeable sur la qualité de l'approximation, il est conseillé d'y avoir réfléchi dés l'étape de sélection du plan d'expériences. Ceci est également valable pour les autres types de métamodèle.

La phase d'identification repose sur différentes techniques suivant le métamodèle utilisé. Dans le cas où le choix a été fait de mettre en oeuvre des surfaces de

réponse (métamodèles polynomiaux), nous avons privilégié la méthode classique de régression au sens des moindres carrés. Celle-ci présente l'avantage d'être rapide et déjà implémentée de façon optimisée dans la plupart des bibliothèques de calcul.

III.2.5. Exploitation du métamodèle : estimation de l'effet des incertitudes

Une fois la construction du métamodèle achevée, il est alors possible d'obtenir pour chaque réponse considérée en sortie toute une série d'informations comme les valeurs extrêmes (valeurs minimales et maximales possibles pour les paramètres d'entrée pris dans leur intervalle d'incertitude), les moyennes, les écarts-types ou toute autre information statistique (moments d'ordres supérieurs, valeurs A ou B…). La recherche des valeurs extrêmes se fait généralement au moyen d'une méthode d'optimisation. Suivant le métamodèle, le fait de disposer aisément du gradient permet d'effectuer efficacement ce travail au moyen d'une méthode de descente. Si le gradient n'est pas disponible, le temps de calcul réduit du métamodèle permet de mettre en œuvre toute autre méthode avec un résultat satisfaisant.

L'obtention des informations statistiques peut se faire de différentes manières. Tout d'abord si la surface de réponse utilisée est un polynôme de degré un, les formules présentées II.5 permettent de calculer la moyenne et l'écart-type de la réponse à partir des seuls coefficients du métamodèle, moyennes et écarts-types des paramètres. Par ailleurs, dans ce cas aucune approximation n'est faite, et il est même possible de considérer des corrélations entre paramètres en utilisant la formule générale (Eq. II-19). Pour des polynômes d'ordre plus élevé, il s'agit de revenir aux définitions des statistiques désirées. Le calcul de celles-ci nécessite alors d'intégrer sur le domaine d'incertitude une fonction dépendant du polynôme du métamodèle $F(X_1,X_2,..,X_n)$. Par exemple, étant donné la normalisation effectuée entre -1 et 1, la variance est donnée par (Eq. III-2), où μ_F est la moyenne de la réponse du métamodèle et $\Phi(X_1,..,X_n)$ la densité de probabilité conjointe des variables incertaines X_1, X_2, …, X_n. Si ces variables sont indépendantes, on a bien sûr $\Phi(X_1,..,X_n) = \varphi(X_1)\varphi(X_2)...\varphi(X_n)$.

$$\sigma_F^2 = \int_{-1}^{1}...\int_{1}^{-1}\left(F(X_1,X_2,...X_n) - \mu_F\right)^2 \Phi(X_1,..,X_n)\, dX_1...dX_n$$

$$\text{avec } \mu_F = \int_{-1}^{1}...\int_{1}^{-1} F(X_1,X_2,...X_n)\, \Phi(X_1,..,X_n)\, dX_1...dX_n \qquad \text{(Eq. III-2)}$$

Mais la méthode nécessitant a priori le moins de réflexion consiste sans doute à employer des simulations de Monte-Carlo au travers du métamodèle pour bâtir une approximation de la distribution de probabilité de la réponse et en extraire les informations statistiques voulues. Là encore, l'utilisation d'une telle méthode est rendue possible grâce au coût de calcul réduit du métamodèle, mais attention, quand la dimension du problème devient importante, la méthode de Monte-Carlo peut introduire une approximation supplémentaire non négligeable liée au nombre obligatoirement limité de tirages.

III.3. Apport d'une phase de vérification dans une approche de type RSM

La construction du métamodèle a pour finalité de fournir un moyen plus rapide que le processus original d'évaluer l'effet des incertitudes d'entrée sur la réponse en sortie. Toutefois, il convient de ne pas oublier que le métamodèle n'est qu'une approximation, et donc qu'il introduit une erreur par rapport au résultat que fournirait le processus original. Cette erreur affecte bien évidemment les prévisions qui sont faites sur l'effet des incertitudes d'entrées. Il convient donc d'être en mesure d'estimer cette erreur, tant pour chercher à la minimiser, que pour être capable d'évaluer la confiance qui peut être accordée aux résultats obtenus à travers le métamodèle, et se ramener ainsi d'une certaine manière à la démarche industrielle.

Classiquement, les vérifications faites ne concernent au mieux que les points d'identification. Le manque d'ajustement est généralement estimé par le calcul de l'erreur quadratique moyenne aux points d'identifications (Eq. III-3) :

$$EQM = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i^{meta} - y_i^{processus}) \qquad \text{(Eq. III-3)}$$

Or, d'une part ces points sont en nombre limité, et d'autre part la méthode d'identification du métamodèle consiste souvent à minimiser l'erreur commise en leur position. Si une erreur importante aux points d'identification est donc bien révélatrice d'une insuffisance du métamodèle, une erreur faible ne permet pas pour autant de conclure à un métamodèle satisfaisant. Par ailleurs, pour des méthodes interpolantes, ce calcul n'a plus de sens puisque l'erreur est forcément nulle aux points d'identification et ne fournit donc aucune d'indication sur les écarts potentiels en dehors de ces points. Pour résoudre ce problème, nous nous sommes donc intéressés aux méthodes de validation croisée, présentées ci-après. Leur introduction dans la démarche classique nous a amenés à modifier où introduire les étapes suivantes

- Sélection des points d'identification par une méthode adaptée à notre démarche (le nombre de points nécessaire est plus important que sans vérification)
- Ajout d'une phase de vérification de la qualité du métamodèle
- Ajout d'une phase d'estimation de la confiance sur les résultats de la propagation d'incertitudes

Ces points vont maintenant être détaillé après une présentation du principe des méthodes de validation croisée.

III.3.1. Présentation des méthodes de validation croisée

Telle qu'envisagée, la démarche de transport d'incertitudes nécessitait clairement de rechercher des méthodes permettant d'évaluer la qualité d'approximation des métamodèles et l'erreur qui leur est associée, tout en limitant le nombre de nouvelles évaluations du processus étudié. C'est pour cette raison que je me suis orienté vers les méthodes dites de validation croisée (*cross validation methods*), reposant notamment sur des techniques de rééchantillonnage (*resampling methods*). Ces techniques, que ce soit le *jackknife*, le *leave-k-out* ou encore le *bootstrap* sont toutes très similaires.

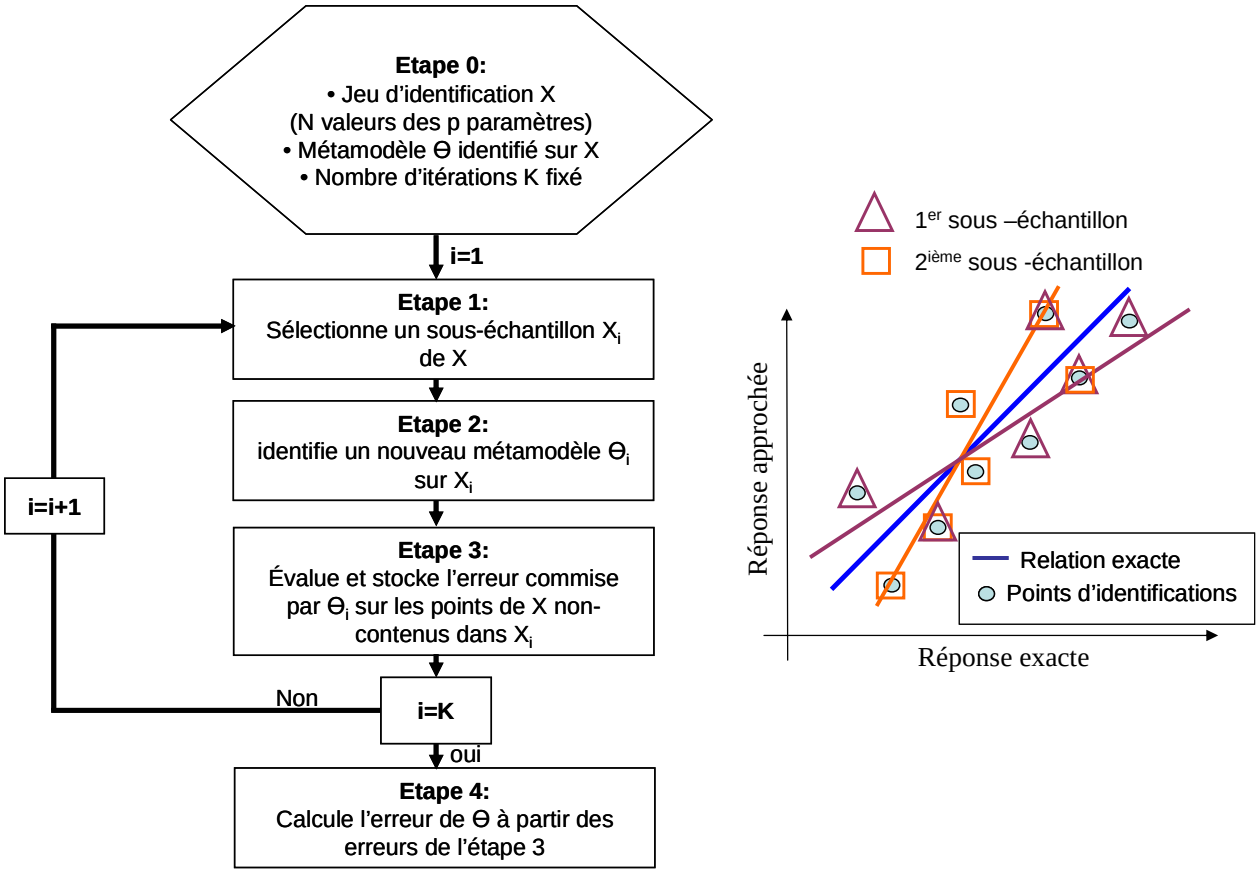


Figure III-6. Principe général des méthodes de validation croisée.

Elles ont initialement été développées dans le domaine de la statistique pour évaluer la pertinence d'un modèle de distribution vis-à-vis d'un jeu de données et fournir des intervalles de confiance sur les principaux paramètres statistiques (moyenne, écart-type,…). Par rapport aux tests classiques, elles présentent l'avantage de ne pas faire d'hypothèses a priori sur le type de distribution. Etendue à l'évaluation de modèles physiques, elles consistent à utiliser, pour la phase de validation, les points d'identification pour lesquels le calcul du processus exact a été effectué. Les méthodes de validation croisée permettent notamment d'estimer l'erreur de généralisation d'un modèle, c'est-à-dire l'erreur commise en dehors des points d'identification. Il est important d'insister sur le fait que nos problèmes ayant un nombre élevé (plusieurs dizaines) de variables incertaines, les points d'identification seront de toute façon très « dilués » dans l'espace à *N* dimensions.

La démarche générale est toujours identique (Figure III-6). Les différences entre les méthodes se trouvent essentiellement aux étapes 1 et 4 sur la façon de sélectionner un sous-échantillon des points d'identification, puis d'estimer l'erreur commise par le métamodèle que l'on décide d'utiliser au final.

Plusieurs choix sont en effet possibles pour celui-ci. Il pourrait ainsi s'agir du métamodèle issu des rééchantillonnages (identifié sur un des jeux de points rééchantillonnés) présentant la plus faible erreur, ou encore le métamodèle dont les coefficients sont les moyennes des coefficients des métamodèles issus des rééchantillonnages. En l'occurrence le choix a été fait d'utiliser le métamodèle défini initialement et identifié sur l'ensemble des points d'identification.

III.3.1.1 Méthodes du jackknife et du leave-K-out

Une des premières méthodes développées fut celle du *jackknife* ([Quenouille, 48]), dont le principe est quasi identique à celui de la méthode de validation croisée du *leave-1-out*. Toutes deux consistent en effet à construire les sous-échantillons en enlevant systématiquement un des points d'identification. Pour un jeu d'identification initial X comportant N points, N sous-échantillons X_i de taille $N-1$ sont ainsi construits. Le *jackknife* est cependant plutôt dévolu à l'estimation de biais et d'erreur sur des paramètres statistiques, permettant ainsi la détermination d'intervalles de confiance avec un minimum d'hypothèses, alors que le *leave-1-out* a pour but le calcul de l'erreur de généralisation pour un modèle. La définition de cette erreur part du constat que les métamodèles employés sont toujours définis à partir d'un nombre (très) limité de points, puis ensuite mis en œuvre sur des domaines qui en comportent une infinité. Une approximation de cette erreur de généralisation est obtenue en identifiant un certain nombre de métamodèles sur des sous-ensembles du jeu d'identification, puis en calculant la moyenne des erreurs commises par ces modèles « appauvris » sur l'ensemble des points d'identification.

Le *leave-1-out* se généralise aisément en *leave-K-out* où les sous-échantillons comportent $N-k$ points. Cette méthode est une extension des méthodes de validation croisée dite à p-plis (*p-fold cross validation*) consistant à découper le jeu de point d'identification initial en p sous-ensemble exhaustifs et s'excluant mutuellement. Le métamodèle est ensuite réidentifié p fois, en éliminant à chaque fois un sous ensemble différent. Dans le cas d'un *leave-K-out* exhaustif, les réidentifications du métamodèle sont par contre au nombre de C_N^K, puisqu'il s'agit d'utiliser tous les sous-ensembles possibles comportant K points parmi N. Toutefois ce nombre pouvant vite devenir élevé, une variante consiste à ne générer de façon aléatoire que M sous-ensembles de taille $N-K$, où M est fixé a priori. Cette approche est étudié dans [Meckesheiner, 02] pour trois types de métamodèles (polynômes d'ordre réduit, krigeage et base radiale). Les auteurs montrent notamment que le *leave-1-out* est bien approprié à l'évaluation de la qualité de métamodèles de type polynomial ou en base radiale. L'évaluation de qualité du krigeage nécessite par contre une approche par *leave-K-out*, avec $K = 0.1N$ ou $K = \sqrt{N}$, qui elle-même ne convient pas du tout à l'évaluation des deux métamodèles cités précédemment.

III.3.1.2 Méthode du bootstrap

La méthode du *bootstrap*[2] est très similaire au *leave-K-out*. Développé initialement par Efron [Efron, 79] pour l'évaluation de paramètres statistiques, elle permet de ne pas faire d'hypothèse a priori, notamment sur le type de distribution. Partant d'un échantillon initial de taille N (jeu de points d'identification pour un modèle ou jeu d'observations dont une statistiques doit être tirée), le *bootstrap* consiste à faire à partir de cet échantillon des tirages aléatoires avec remise de N valeurs, pour générer des sous-échantillons encore appelés bases rééchantillonnées par *bootstrap*. Par rapport, au *leave-K-out*, il n'y a pas ici besoin de définir le nombre de points K qui sont écartés. Alors que dans le jeu d'identification initial, tous les points

[2] Le nom de bootstrap vient de la phrase *to pull oneself up by one's bootstrap* extraite d'un passage des aventures du baron de Münchhausen, où celui-ci tombé au fond d'un profond lac parvient à remonter à la surface en se hissant seul au moyen d'une traction sur les lanières de ses bottes. Cette image vise à souligner la caractéristique du bootstrap qui ne nécessite pas pour la phase d'évaluation de données autres que celles utilisées pour l'identification.

sont différents, les bases rééchantillonnées comportent généralement, du fait du caractère aléatoire des tirages avec remise, un certain nombre de points en double ou plus. La taille des sous-échantillons étant identique à la taille de l'échantillon initial, cela implique également que certains points de l'échantillon initial sont absents des sous-échantillons. Généralement, près d'un tiers des points sont répétés. En effet, la probabilité pour qu'une valeur x_j donnée du jeu de point initial ne soit pas présente parmi les $x_i, i = 1...N$ valeurs d'une base rééchantillonnée comportant N valeurs est donnée par :

$$P(x_j \neq x_i, i = 1...N) = (1 - \frac{1}{N})^N \text{ et } \lim_{N \to \infty} P(x_j \neq x_i, i = 1...N) = e^{-1} \approx 0.37 \qquad \text{(Eq. III-4)}$$

Le calcul d'intervalles de confiance par la technique du *bootstrap* peut se faire de quatre manières différentes proposées par Efron, Gong [Efron, 83] et Tibshirani, [Efron, 86]. La première méthode donne l'intervalle de confiance classique (*standard bootstrap confidence interval*) à partir de la moyenne $\overline{Y^*}$ et de l'écart-type S_Y^* sur les bases rééchantillonnées de l'indicateur Y considéré. Ainsi avec Y_i^* la valeur de Y obtenue à partir de la $i^{\text{ème}}$ base, $\overline{Y^*}$ et S_Y^* sont définis par :

$$\overline{Y^*} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i^* \qquad \text{(Eq. III-5)}$$

et :

$$S_Y^* = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (Y_i^* - \overline{Y^*})^2 \qquad \text{(Eq. III-6)}$$

ce qui permet d'obtenir l'intervalle de confiance classique à 95% par : $\overline{Y^*} \pm 1{,}96\, S_Y^*$, où $\pm 1.96 = \Phi^{-1}(0.5 \pm 0.475)$ avec la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

Une façon plus intuitive de définir un intervalle de confiance par *bootstrap* est celle du pourcentile (*percentile bootstrap confidence interval*). Les valeurs Y_i^* sont ainsi classées par ordre croissant et avec par exemple un nombre de base rééchantillonnées N=1000, l'intervalle de confiance à 95% est défini par : $[Y_{25}^*, \quad Y_{975}^*]$ (95% des valeurs obtenues appartiennent à cet intervalle).

Cette deuxième façon de faire pouvant être biaisée par le nombre de rééchantillonnages effectués, une troisième méthode dite du pourcentile avec correction du biais (*biased-corrected percentile bootstrap confidence interval*) a été développée. A partir de la fonction de répartition empirique de Y^*, la probabilité $p_0 = Pr[Y^* \leq \hat{Y}]$ que Y^* soit inférieure à la valeur $\hat{Y}$ obtenue sur l'échantillon initial est calculée. Par la suite, on définit : $z_0 = \Phi^{-1}(p_0)$, $P_L = \Phi(2z_0 - 1.96)$ et $P_U = \Phi(2z_0 + 1.96)$. L'intervalle de confiance à 95% est finalement donné par :

$$[Y^*_{N \times P_L}, Y^*_{N \times P_U}]$$

Afin d'améliorer les performances de cette dernières méthode, Efron et Tibshirani [Efron, 93] en ont développé une variante dite de l'intervalle de confiance accéléré avec correction du biais (*biased-corrected and accelerated confidence interval*). Les valeurs P_L et P_U sont remplacées par :

$$P_{AL} = \Phi\left(z_0 + \frac{z_0 - 1.96}{1 - a\,(z_0 - 1.96)}\right) \; et \; P_{AU} = \Phi\left(z_0 + \frac{z_0 + 1.96}{1 - a\,(z_0 + 1.96)}\right) \qquad \text{(Eq. III-7)}$$

où z_0 est la correction du biais et a l'accélération pouvant être définie comme la valeur de jackknife de la statistique :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\overline{Y_J^*} - \hat{Y}_i)^3}{6\left\{\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{Y_J^*} - \hat{Y}_i\right)^2\right\}^{3/2}} \; avec \; \overline{Y}_J^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{Y}_i \qquad \text{(Eq. III-8)}$$

$\hat{Y}_i$ étant l'estimation par *leave-one-out* de Y calculée à partir de l'échantillon initial en éliminant le $i^{ème}$ point.

III.3.1.3 Notion d'erreur de généralisation

Outre ces intervalles de confiance, le *bootstrap* vise également à fournir une indication globale de l'erreur commise par le modèle. Initiée dans le domaine des réseaux de neurones pour évaluer l'influence du jeu d'apprentissage, **l'erreur de généralisation** est l'erreur quadratique moyenne (EQM) du modèle calculée sur un jeu de validation de taille infinie :

$$E_{gen} = \lim_{M \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{M}(f(x_i) - y_i)^2}{M} \qquad \text{(Eq. III-9)}$$

avec f le modèle considéré que l'on valide sur le jeu de M points x_i correspondant à M valeurs de réponses y_i.

Le problème de cette définition est bien sûr que le jeu de validation de taille infinie (ou même très grande) n'est pas accessible dans des temps de calcul « raisonnables ». Le *bootstrap*, comme d'autres méthodes de validation croisée (*leave-one-out*…), permet de dépasser ce problème et fournit une approximation de cette erreur de généralisation.

La définition de l'erreur de généralisation qui vient d'être donnée, son calcul par *bootstrap* ainsi qu'un résumé des propriétés asymptotique des différentes méthodes de validation croisée utilisée sont disponibles dans [Lendasse, 05]. Le *leave-one-out* est peu biaisé mais demande un grand nombre de données pour être fiable. Les méthodes de validation croisées (à p-plis par exemple) sont presque sans biais et consistantes (elles convergent vers l'erreur de généralisation quand la taille des tirages augmente) si la taille du jeu de validation croit plus vite que celle du jeu d'identification. Cette dernière condition est d'ailleurs difficile à obtenir en pratique. Enfin, le *bootstrap* est biaisé par défaut (tendance à la sous-estimation) mais présente une faible variance. Cette dernière propriété signifie notamment que d'un *bootstrap* à l'autre, bien que les mêmes sous-échantillons n'aient pas été générés, le

résultat sur l'erreur de généralisation varie peu. En réalité le *bootstrap* n'estime pas directement l'erreur de généralisation, mais calcule en fait l'optimisme, c'est-à-dire la différence ente l'erreur de généralisation et l'erreur d'apprentissage (*training error*) définie ci-après. Le calcul se déroule suivant les étapes suivantes :

- Partant du jeu initial de données S de taille N, M sous-échantillons S_j sont générés par *bootstrap* et sur chacun d'entre eux le modèle considéré est réidentifié. On obtient ainsi M variantes f_j de notre modèle initial f.
- Pour chaque modèle f_j les erreurs d'apprentissage E_{app} et de validation E_{val} sont calculées. E_{app} se calcule sur le sous-échantillon S_j ayant servi à l'identification alors que E_{val} se calcule sur le jeu de données complet S :

$$E_{app}(f_j) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(f_j(x_i^{S_j}) - y_i^{S_j})^2 \qquad \text{(Eq. III-10)}$$

$$E_{val}(f_j) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(f_j(x_i^{S}) - y_i^{S})^2 \qquad \text{(Eq. III-11)}$$

où $x_i^{S_j}$ représente le $i^{\text{ème}}$ point du sous-échantillon S_j et $y_i^{S_j}$ la valeur de la réponse associée.

- Pour chaque variante f_j du modèle, l'optimisme [Efron, 93] $optimism_j$ est ensuite calculé, puis une estimation globale $\overline{optimism}$ en est faite en les moyennant :

$$\overline{optimism} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} optimism_j \;\; avec \;\; optimism_j = E_{val}(f_j) - E_{app}(f_j) \qquad \text{(Eq. III-12)}$$

- L'erreur d'apprentissage du modèle f (identifié et validé sur S) est ensuite calculée et une approximation de l'erreur de généralisation est finalement donnée par :

$$\hat{E}_{gen}(f) = E_{app}(f) + \overline{optimism} \;\; avec \;\; E_{app}(f) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(f(x_i^{S}) - y_i^{S})^2 \qquad \text{(Eq. III-13)}$$

Notre façon d'utiliser les méthodes de rééchantillonnage peut rappeler les méthodes de *bagging* (pour *bootsrap aggregating*) et *boosting* ([Breiman, 96], [Freund, 97]), visant à utiliser le *bootstrap* pour définir de meilleurs modèles ou approximations. Ces méthodes qui prolongent le *bootstrap* ont été développées pour une utilisation plus performante des réseaux de neurones ou de classificateurs[3] (utilisés en reconnaissance d'images par exemple).

III.3.2. Conséquences sur l'étape de sélection des points d'identification

L'incorporation de ces méthodes de validation croisée dans notre démarche nous a amenés à modifier certaines étapes. Concernant l'étape de sélection des points d'identification, les méthodes du *bootstrap* ou du *leave-k-out* impliquent notamment de disposer d'un nombre de points supérieur au nombre minimum nécessaire à

[3] Fonctions qui à tout point d'un domaine associent une étiquette de classe (valeur, nom…) prise parmi un jeu prédéfini.

l'identification. Si n est le nombre de points juste nécessaire à l'identification du métamodèle, $4/3\,n$ est une taille minimale pour le plan d'expérience si l'on souhaite utiliser le *bootstrap*, cette méthode répétant en moyenne un tiers des points. Pour le *leave-k-out*, $n+k$ apparaît bien sûr comme un nombre minimum.

Néanmoins dans la pratique, si l'on souhaite à la fois améliorer la précision du métamodèle et augmenter la confiance qui peut lui être accordée, le nombre de points d'identification doit être supérieur à ce nombre minimal (nous reviendrons sur cet aspect dans la suite de ce mémoire).

III.3.3. Phase de vérification du métamodèle

Comme il été dit précédemment, le métamodèle n'étant qu'une approximation d'un processus plus complexe, les résultats fournis sont entachés d'une certaine erreur, et il est nécessaire de prendre certaines précautions. Disposer d'indicateurs de qualité est donc une nécessité, d'autant plus que nous sommes parfaitement conscient de la possible défaillance des méthodes employées. Cela est d'autant plus vrai que la diversité des cas pouvant être rencontrés rend illusoire la définition d'une méthode parfaite. Pour chacune de celles retenues, la construction d'un contre-exemple la mettant en défaut est notamment possible. Cet état de fait doit donc être compensé par des avertisseurs indiquant les situations pour lesquelles la confiance dans la réponse du métamodèle est trop réduite. L'introduction de cette notion de confiance provient du fait que, comme dans le cas des définitions des valeurs A et B industrielles, les valeurs obtenues ne sont que des estimations de la valeur exacte. Au final, l'objectif n'est pas de disposer d'une démarche infaillible mais bien d'une démarche qui indique à coup sûr quand elle se trouve mise en défaut. Pour cela, deux méthodes de validation croisée ont été retenues : le *bootstrap* et le *leave-k-out*. Celles-ci permettent de déterminer si un métamodèle est acceptable en examinant deux critères :

- La précision des réponses fournies par rapport au processus original
- La stabilité de l'approximation identifiée

Le premier point revient à calculer l'erreur commise par le métamodèle non seulement aux points d'identification, mais sur l'ensemble du domaine d'étude, ce qui passe par le calcul de l'erreur de généralisation (moyenne ou maximale). Le second point revient à examiner l'influence des points du plan d'expérience dans la phase d'identification, c'est-à-dire sur la détermination des valeurs des différents coefficients du métamodèle. Une confiance satisfaisante passe par la vérification de ces deux critères, car s'il est bien sûr évident de rejeter une approximation présentant une incertitude trop forte sur ses réponses, il est tout aussi logique de rejeter un métamodèle dont la précision semble bonne, si la stabilité de l'identification de celui-ci n'est pas établie. En effet, cela signifie que les influences des différents paramètres n'ont pas été bien « captées », et donc que la détermination des termes prépondérant au travers du modèle approché n'est pas fiable.

En pratique, afin de faciliter l'examen de ces résultats, diverses visualisations graphiques sont employées.

La première d'entre elle consiste à tracer le diagramme de dispersion (Figure III-7) correspondant à la métamodélisation de la réponse considérée. Le principe de cette figure est de tracer, pour des jeux de paramètres donnés, les valeurs approchées de la réponse obtenues au moyen du métamodèle, en fonction des valeurs exactes de

la réponse, données par le processus étudié. Une modélisation parfaite conduirait alors à des points parfaitement alignés sur la droite identité. La déviation des points par rapport à cette droite donne donc une indication qualitative de la qualité de l'approximation. Il est par ailleurs aisé de fixer des bandes d'erreurs admissibles et de vérifier que les points représentés appartiennent bien à cet espace. Le but de notre démarche étant principalement de prévoir l'amplitude d'incertitude sur la réponse considérée, l'erreur commise sur celle-ci se doit d'être la plus réduite possible. C'est pourquoi le choix a été fait d'employer une bande d'erreur admissible, rapportées à la variation totale $\Delta = max(y) - min(y)$ observée pour la réponse y du système sur le domaine d'étude. Les droites délimitant la bande d'erreur acceptable ont alors pour équation $y = V_{exacte} \pm X\% * \Delta$, avec $X=0.05$ ou $X=0.1$. Cette méthode présente l'avantage de s'assurer que l'erreur due au caractère approché du métamodèle est bien largement inférieure à la variabilité de la réponse due aux variations des paramètres, particulièrement dans les cas où cette variabilité est relativement faible.

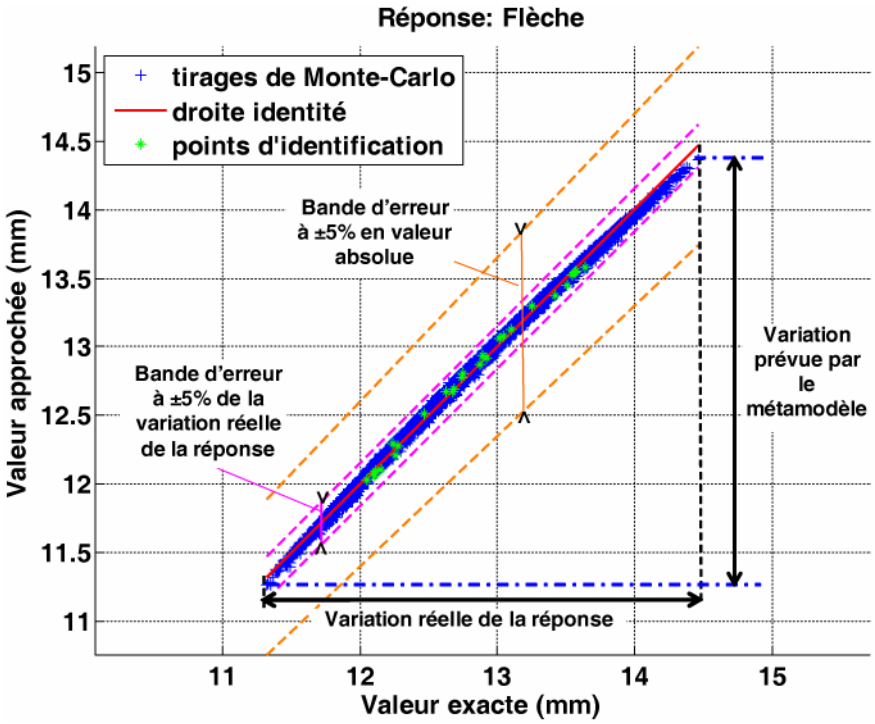


Figure III-7. Exemple de diagramme de dispersion et indications pour sa lecture.

Le tracé du diagramme de dispersion nécessitant de disposer de la valeur exacte de la réponse, il ne peut en général se faire qu'aux points d'identifications, à moins de se donner par exemple un deuxième jeu de valeurs de paramètres dédié uniquement à la validation. Ce jeu peut être construit de manière à occuper dans l'espace des paramètres incertains les positions les plus complémentaires (différentes) possibles du jeu de paramètres utilisé pour l'identification, ce qui permet de limiter le nombre de nouveaux calculs à réaliser. Une alternative pour les modèles peu coûteux à évaluer est bien sûr d'utiliser des tirages aléatoires et une simulation de Monte-Carlo. Si réaliser de nouveaux calculs est inacceptable car trop coûteux, l'analyse doit donc se contenter des points d'identification. Cependant, si une déviation importante de ces points par rapport à la droite identité permet bien de détecter une approximation de qualité inacceptable, l'inverse ne permet pas pour autant de conclure. En effet, par construction, le métamodèle cherche à décrire au mieux la réponse aux points

d'identification, et une description adéquate à ces positions ne garantit pas d'obtenir la même qualité en d'autre secteurs du domaine d'étude. Cela est particulièrement vrai pour les méthodes interpolantes.

C'est pourquoi il est intéressant de reporter sur ce type de figure les résultats de la validation croisée. En particulier, après avoir mis en œuvre une méthode de *bootstrap* ou de *leave-k-out*, du fait des multiples réidentifications du métamodèle sur les rééchantillonnages du plan d'expérience initial, de multiples valeurs de la réponse sont disponibles en chaque point d'identification. De ces données, nous pouvons extraire en chacun des points les valeurs minimale et maximale de la réponse, puis en déduire l'amplitude de variation. Il est également possible d'obtenir diverses informations statistiques comme la moyenne, l'écart-type, les valeur A et B, voire même si le nombre de rééchantillonnages (boots) est suffisamment important, une estimation de la distribution de la réponse. Pour cela, un nombre de boots égal à 100 est généralement adopté. Dans un premier temps, le plus intéressant est généralement de tracer sur le diagramme de dispersion l'amplitude de variation de la réponse en chaque point d'identification, critère le plus pessimiste mais qui donne une bonne estimation de la précision et de la stabilité du métamodèle. La Figure III-8 présente, avec une situation satisfaisante et une situation problématique, deux exemples de cette représentation graphique.

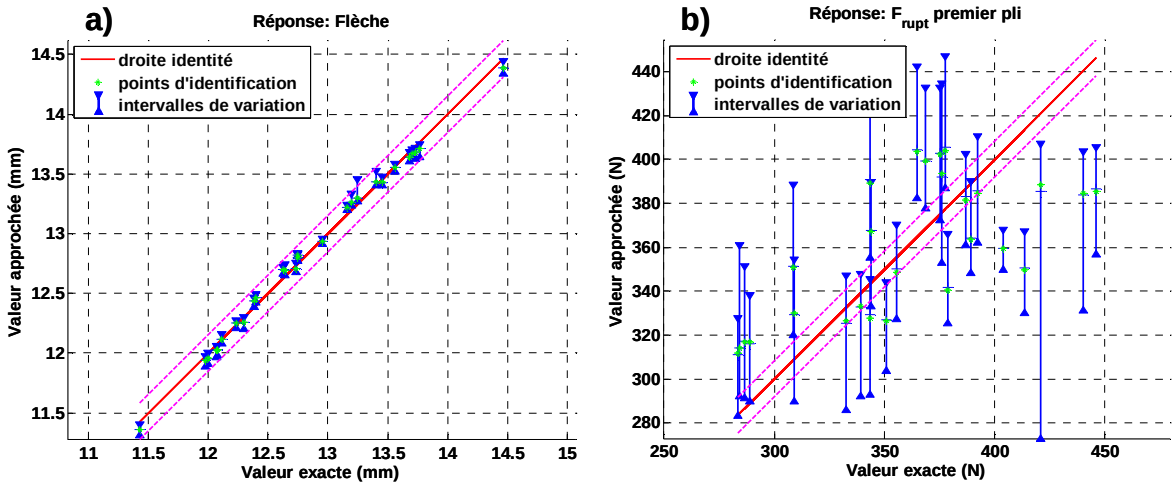


Figure III-8. Diagramme de dispersion avec amplitude de variation observée en chaque point d'identification à l'issu de la validation croisée. (a) Exemple de situation satisfaisante, (b) exemple de situation problématique.

Mais n'oublions pas que le but est d'extraire de la validation croisée une zone de confiance pour le métamodèle. Celle-ci doit indiquer en tenant compte de l'erreur d'approximation commise où se situent les valeurs approchées de la réponse par rapport aux valeurs « exactes » que donnerait le processus original. Par rapport, à la relation identité du diagramme de dispersion, nous pouvons notamment définir l'intervalle à $\pm\hat{E}_{gen}$, avec $\hat{E}_{gen}$ l'erreur de généralisation calculée suivant (Eq. III-13). Toutefois cet indicateur ayant une signification d'erreur moyenne, l'intervalle d'erreur ainsi défini se révèle généralement trop restreint pour une confiance à 95%. Une deuxième possibilité consiste à utiliser l'intervalle de variation défini par la moyenne des variations maximales en chaque point d'identification, mais il là encore lil a été constaté que a définition en moyenne ne permet pas de garantir les 95% de confiance exigés au sens des valeurs A et B. Finalement, la solution retenue a donc été l'utilisation de la bande d'erreur définie par les variations extrêmes (minimales et

maximales) observées sur l'ensemble des points d'identification. Cette solution, la plus pessimiste possible, présente l'avantage, au vu de l'expérience acquise, d'encadrer quasiment systématiquement l'essentiel des réponses des tirages de Monte-Carlo. L'estimation non-paramétrique[4] garantie d'ailleurs, à partir d'une trentaine de boots, que ces valeurs aient une signification de valeur B avec une confiance supérieure ou équivalente à 95%. Cette bande d'erreur en variation extrême est présentée sur la Figure III-9, sous la forme de la bande jaune. Sur cet exemple, les 10^5 tirages de Monte-Carlo se situent bien à l'intérieur de cette bande. A chaque fois nous la comparons à la bande d'erreur à ±5% de la variation observée (telle que nous l'avons définie en décrivant le diagramme de dispersion.), représentée par les pointillés mauves, et qui constitue notre critère de référence. La plupart du temps, le métamodèle sera considéré comme acceptable si la bande d'erreur issue de la validation croisée est très proche ou, idéalement, incluse dans la bande à ±5% de la variation observée (bande jaune à l'intérieur des pointillés mauves).

Concernant la stabilité du métamodèle, qui est le deuxième critère à vérifier, les méthodes du *bootstrap* ou du *leave-k-out* permettent de l'estimer en examinant la variation des valeurs des différents coefficients du métamodèle au fil des réidentifications sur les rééchantillonnages du plan d'expérience initial. La seule question qui se pose alors est de définir un critère simple et fiable, c'est-à-dire qui ne soit pas alarmant sans raison, et qui à terme ne nécessite pas un choix de l'utilisateur. Pour cela, la solution adoptée consiste à calculer la variation en valeur relative, pondérée par l'importance relative du coefficient dans le métamodèle. L'indicateur « importance relative » se calcule suivant (Eq. III-14), où a_k est le coefficient du métamodèle associé au $k^{\text{ème}}$ monôme. Il permet ainsi de tenir compte de l'aspect significatif du coefficient considéré mais aussi, pour un métamodèle de degré 1 du paramètre. Notons que dans le cas du krigeage, il est nécessaire de

---

[4] Le principe de celle-ci repose par exemple sur la réponse à la question : sur une série de *n* essais quelle confiance a-t-on pour que la $r^{ième}$ plus petite valeur soit inférieure à la valeur A ou B exacte ? Par définition, si *p* est la probabilité qu'une mesure soit supérieure à la valeur B exacte $V_{Bexacte}$ ($p=0.9$), la probabilité P_r d'avoir exactement *r* mesures inférieures à $V_{Bexacte}$ est donnée par une loi binomiale $P_r = C_n^r (1-p)^r p^{n-r}$.

De là, la probabilité d'avoir au moins *r* résultats inférieurs à la valeur B exacte se calcule simplement suivant : $P_r = \sum_{k=r}^{n} C_n^k (1-p)^k p^{n-k}$

Cette probabilité peut être interprétée comme la confiance existante pour que la $r^{ième}$ plus petite valeur x_r soit inférieure à la valeur B exacte, ce qui répond à la question initiale. Au sens de la définition industrielle de V_B, on recherche bien sûr *r* tel que $Conf(x_r)=0,95$.

Le Military Handbook 17 [MIL-HDBK17] utilise par exemple ce principe pour déterminer que suivant l'approche non paramétrique, il est nécessaire de disposer d'au moins n=29 essais pour déterminer une valeur B sans hypothèse sur la distribution suivie par le paramètre. Dans ce cas, la valeur B est alors la plus petite valeur observée (r=1).

Il est également possible de calculer à partir de la formule donnant P_r la probabilité *p* que la $r^{ème}$ plus basse valeur de *n* essais minore l'ensemble des valeurs possibles, avec un niveau de confiance *Conf* fixé. Cette formule présente toutefois l'inconvénient d'être difficilement utilisable pour des valeurs élevées de *n* (la limite de précision machine est atteinte pour le calcul des coefficients C_n^k).

séparer le calcul des importances relatives des coefficients associés à la partie régression et de ceux de la fonction de corrélation.

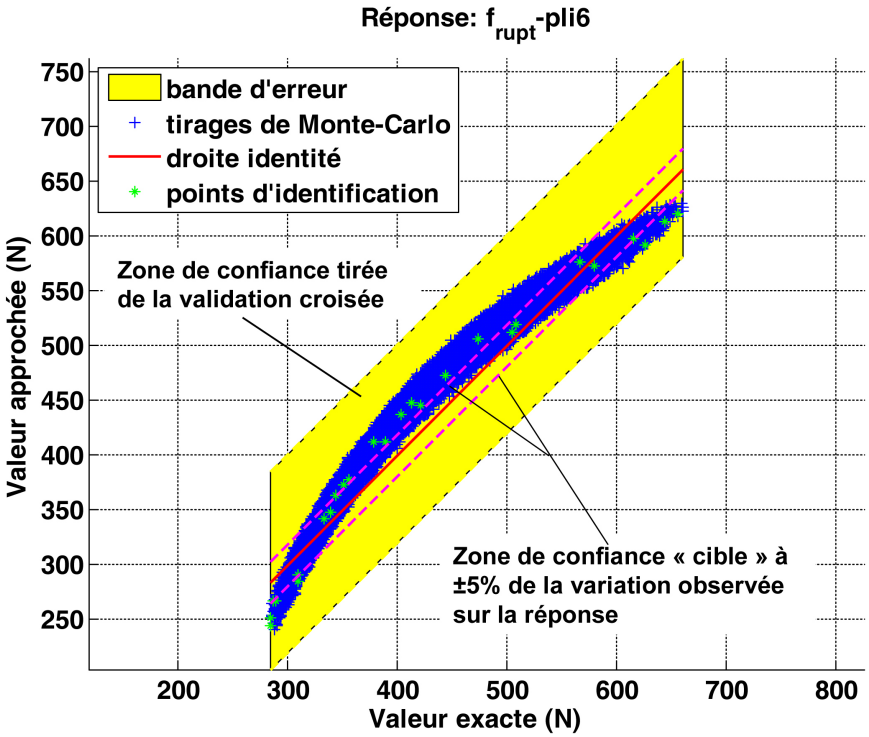


Figure III-9. Exemple de bande d'erreur tirée de la validation croisée et comparaison avec un tirage de Monte-Carlo à 10^5 points.

Les résultats sur l'importance relative de chaque coefficient, ainsi que sur la variation maximale les affectant au fil des réidentifications dans la validation croisée peuvent être affichés ensemble comme sur la Figure III-10. Cette représentation permet ainsi de rapporter l'incertitude sur un coefficient à son importance dans le métamodèle. Le critère de stabilité généralement retenu est une variation maximale des valeurs des coefficients pondérés par leur importance relative n'excédant pas 5%.

$$I_{rel}(a_k) = 100 \times \frac{a_k}{\sum_{i=1}^{n} |a_i|} \qquad \text{(Eq. III-14)}$$

Comme pour les valeurs des réponses, il est également possible de s'intéresser aux informations statistiques concernant la variation des coefficients vis-à-vis du jeu de points d'identification. Des critères moins exigeants que la fluctuation maximale pourraient ainsi être définis à partir de ces données, mais ce n'est pas le choix que nous avons fait. Toutefois, nous disposons d'une visualisation graphique (Figure III-11) permettant d'examiner ces informations. Il est ainsi possible de savoir, en comparant l'amplitude de la variation à $\pm\sigma$ (zone jaune) par rapport à l'amplitude de variation totale (cadre noir), si la distribution de probabilité des valeurs du coefficient est plutôt resserrée (écart-type faible) ou au contraire étalée. En général, une centaine de rééchantillonnages de la base d'identification sont réalisés, ce qui permet notamment d'obtenir un intervalle de variation à 95% de confiance (bornes vertes) au moyen d'une approche par pourcentile (cf. III.3.1.2), ou bien une estimation non-paramétrique. Les valeurs A et B, hautes et basses de chaque coefficient peuvent également être calculée. Leur utilisation pour définir un

métamodèle en valeur A ou B ne semble cependant pas pertinente, du fait des corrélations entre les valeurs des coefficients.

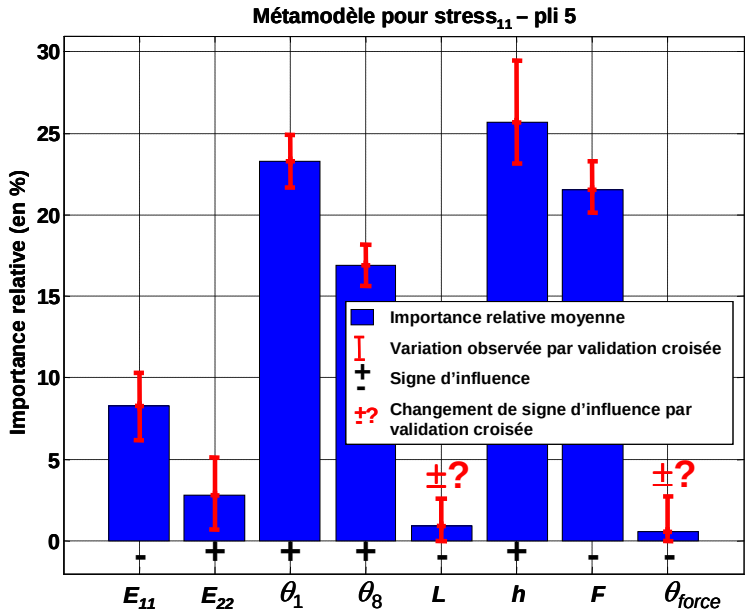


Figure III-10. Exemple de visualisation de la variation en valeur relative des coefficients du métamodèle obtenue par validation croisée.

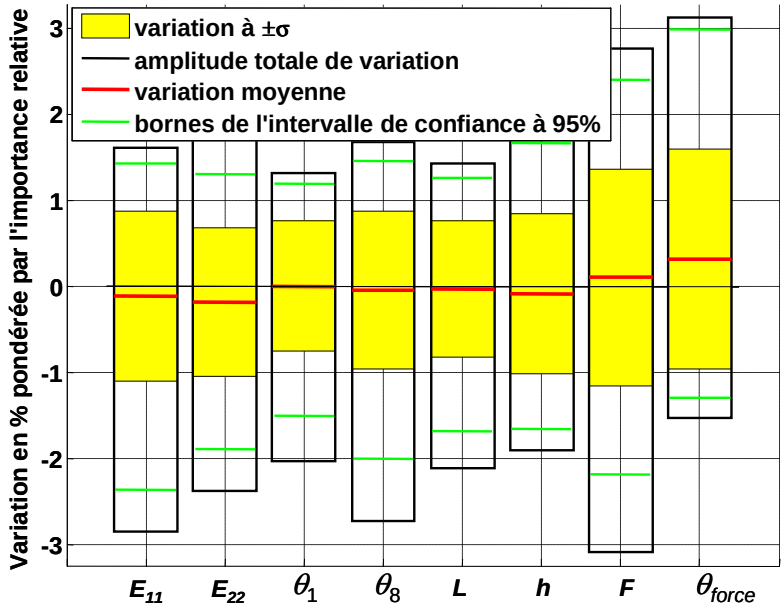


Figure III-11. Exemple de visualisation graphique des informations statistiques sur la variation des valeurs des coefficients obtenue par validation croisée.

Reste encore à examiner la question du choix entre *bootstrap* et *leave-k-out* . Un des critères adopté pour le développement de notre démarche est la parcimonie, qui requiert notamment un coût de calcul réduit (et donc un plan d'expérience d'une taille la plus réduite possible). Or dans ces cas là, le *bootstrap* en répétant en moyenne un tiers des points dans la phase de rééchantillonnage dégrade très fortement la qualité des réponses des métamodèles réidentifiés. Généralement, cette méthode s'avère donc trop sévère en renvoyant de larges zones de confiance ou amplitudes de fluctuation des coefficients du métamodèle, aboutissant au rejet du métamodèle.

Pour cette raison, la technique du *leave-k-out* est privilégiée avec *k* égal à environ 10% du nombre de points du plan d'expérience initial.

III.3.4. Obtention d'un intervalle de confiance sur les indicateurs statistiques calculés au travers de la démarche

Les informations statistiques obtenues au travers du métamodèle sont bien sûr entachées d'une certaine incertitude liée à l'erreur d'approximation de celui-ci. Il est donc nécessaire de l'estimer pour rejoindre la logique des valeurs de calculs utilisées dans l'industrie. Pour cela, les données obtenues au moment de la phase de validation du métamodèle sont une nouvelle fois utilisées, et en particulier, les métamodèles identifiés sur des jeux de points légèrement différents. Pour chacun de ces métamodèles il est en effet possible de calculer les valeurs des informations statistiques voulues. Si celles-ci ont été obtenues par analyse des coefficients, l'étape reste rapide. Elle devient par contre un peu plus longue si une estimation par Monte-Carlo a été employée. Le temps de calculs réduit de chaque métamodèle maintient cependant souvent ce coût dans le domaine de l'acceptable.

Une solution plus simple et moins rigoureuse peut consister à simplement augmenter ou diminuer chaque indicateur de l'erreur maximale du métamodèle de manière à être conservatif vis-à-vis du problème traité, c'est-à-dire aller dans le sens du maximum de sécurité.

III.4. Intérêts d'une stratégie progressive d'Analyse de la Variabilité

L'ajout des étapes de vérification de la qualité du métamodèle dans la démarche a été une avancée importante pour la construction de notre stratégie. Cependant, cet apport a soulevé une nouvelle question : Comment choisir a priori le bon métamodèle ?

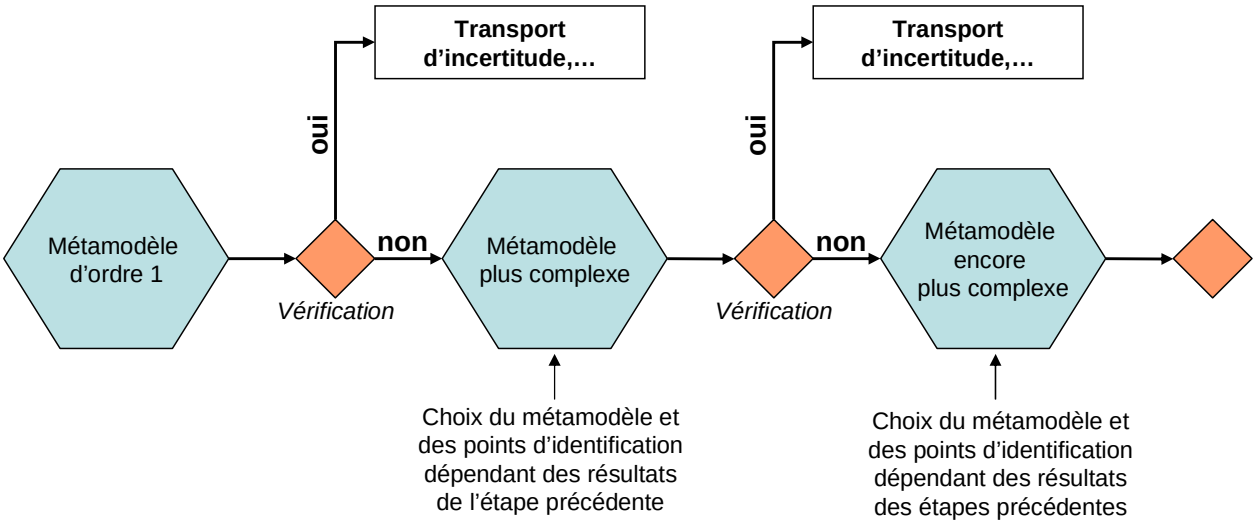


Figure III-12. Principe de notre démarche progressive d'Analyse de la Variabilité.

Le double constat de l'existence de réponses simples à cette question, mais aussi de la difficulté à déterminer a priori la complexité minimale que doit posséder ce métamodèle, nous a poussé à adopter une stratégie progressive (ou itérative) afin d'essayer de respecter un critère de moindre coût. Cela suppose notamment une utilisation raisonnée (Figure III-12) des différents types de métamodèle n'introduisant pas de complexité inutile. La démarche mise en place commencera donc par l'emploi

d'un métamodèle polynomial d'ordre un, dont l'acceptation, le remplacement ou la modification sera déterminé et guidé par les résultats de la phase de validation. Ces aspects vont maintenant être détaillés.

III.4.1. Optimisation de la sélection des points d'identification du métamodèle d'ordre un

Le fait de commencer systématiquement par construire un métamodèle polynomial de degré un en les différents paramètres ont conduit à définir la méthode suivante pour sélectionner les points du plan d'expérience. Si n est le nombre de paramètres incertains et n_c le nombre de coefficients du modèle polynomial, nous cherchons à répartir $2\times(n+1)+n_c$ points dans l'espace. Dans le cas d'un métamodèle polynomial de degré un, $3\times(n+1)$ points d'identifications sont ainsi retenus. Ce nombre, trois fois plus élevé que celui nécessaire à une identification interpolante minimale, permet notamment de disposer d'une base plus riche pour l'utilisation de méthodes de validation croisée permettant d'évaluer la confiance.

Afin de chercher à détecter les comportements extrêmes, environ deux tiers de ces points sont choisis proches des sommets de l'hypercube. Le nombre total de sommets croissant rapidement (en 2^n) avec le nombre de paramètres, à partir de la dimension dix-neuf, $3.10^6/\mathrm{n}$ sommets sont générés aléatoirement. Un premier sommet est ensuite sélectionné au hasard dans cette base, et ajouté, avec son opposé, à la liste des points d'identification. Parmi la base initiale, le sommet le plus éloigné de tous les points déjà sélectionnés est ensuite recherché et ajouté, ainsi que son opposé, à la liste des points retenus. Ce processus est répété jusqu'à ce que le nombre voulu de points ait été sélectionné. Une petite perturbation aléatoire, d'au maximum -5% de la largeur de l'intervalle d'incertitude sur chaque variable, est ensuite introduite afin que les valeurs soient toutes différentes. Dés qu'un sommet est sélectionné, l'ajout systématique de son opposé dans le plan d'expérience permet ainsi de connaître le comportement du processus à l'autre extrémité de l'espace d'incertitude et, si ce processus est linéaire, de disposer des informations nécessaires pour le décrire au mieux. A ce stade, 1/3 des points reste encore à sélectionner. Pour cela, la technique de l'hypercube latin est employée, afin de répartir les points au centre de l'espace d'incertitude, c'est-à-dire en coordonnées normées, dans l'hypercube $[-0.75, 0.75]^n$. Finalement, un dernier point est ajouté, correspondant au seul calcul qui aurait été réalisé dans le cas déterministe, et positionné au centre de l'espace d'incertitude ou au niveau des valeurs les plus probables. La Figure III-13 présente un exemple de répartition des points dans l'espace d'incertitude par cette méthode, appelée sommetcentre.

Pour des cas plus spécifiques d'autres méthodes ont également été retenues. Pour échantillonner des espaces complexes ne correspondant pas à des hypercubes, une technique basée sur les réseaux de neurones auto- adaptatifs [Kohonen, 95] a ainsi été utilisée pour répartir au mieux les points dans l'espace. En pratique, celui-ci est tout d'abord décrit par un tirage de Monte-carlo. Les points d'identification (neurones) sont ensuite attirés par chacun de ces points, et se répartissent ainsi au centre des zones les plus probables de l'espace d'incertitude. Une version modifiée permet de donner plus de poids aux extrémités du domaine.

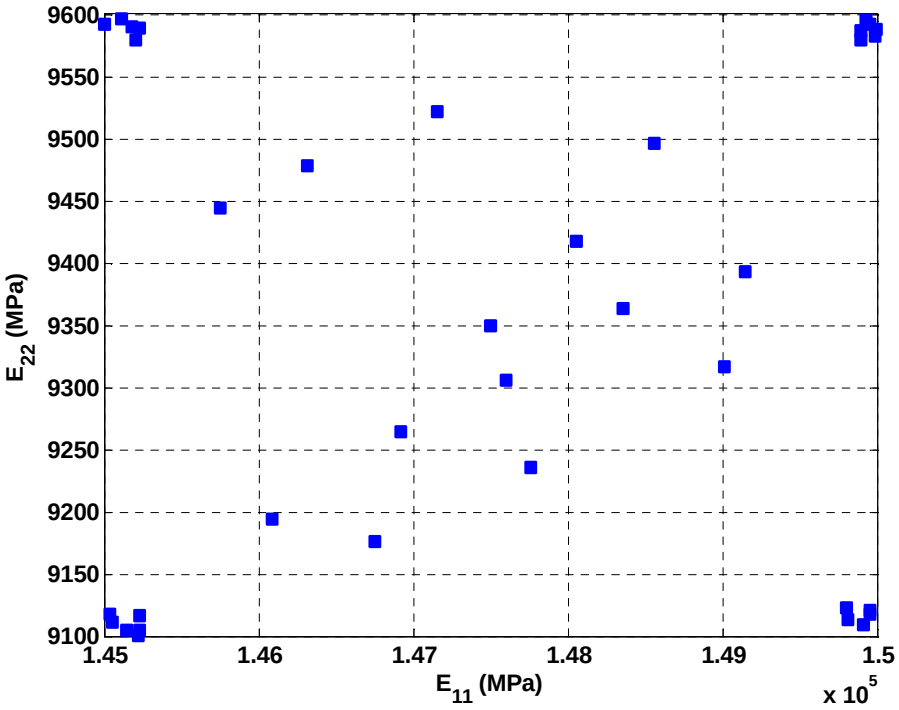


Figure III-13. Exemple de répartition des points par notre méthode sommetcentre dans l'espace d'incertitude (E_{11},E_{22})

Une autre méthode consiste à utiliser les algorithmes de séquences à faible divergence LDS (*Low Discrepancy Sampling* [Bratley, 92]) Faure (classique et « généralisée »), Sobol, ou Niederreiter ([Niederreiter, 87] et [Niederreiter, 92]) pour ne citer que les plus reconnues. Ces techniques essentiellement développées pour l'occupation de l'hypercube, permettent d'obtenir des vitesses de convergence améliorées pour les problèmes d'intégration / optimisation / régression ([Kucherenko, 05] pour l'optimisation par exemple). Elles se révèlent notamment supérieures aux méthodes purement stochastiques et dérivées (hypercube latin, …). Ces méthodes doivent leur nom au fait qu'elles cherchent à minimiser la mesure d'hétérogénéité, ou plus exactement de divergence (*discrepancy*), par rapport à la densité uniforme, utilisée pour quantifier l'uniformité de l'occupation de l'espace. Cette mesure, introduite dans [Statnikov, 02], est définie comme le maximum de la différence en valeur absolue entre le volume de la « boite » et la fraction des échantillons qui se trouvent à l'intérieur, pour tous les « boites » parallélépipédiques possibles incluses dans l'hypercube étudié et ayant en commun l'un de ses coins (classiquement *{-1,-1, …,-1}*). Du fait de leur caractère déterministe - ces méthodes donnent en effet toujours les mêmes points -, elles sont également qualifiées de *Quasi-Monte-Carlo* (QMC). Ce caractère déterministe se révèle particulièrement intéressant dans l'optique d'une stratégie progressive où le nombre de point d'identification est peu à peu augmenté jusqu'à obtenir un niveau de qualité satisfaisant pour le métamodèle. En effet, avec ces tirages LDS, les nouveaux points sont directement ajoutés au plan d'expérience précédent et le nouveau plan obtenu reste optimal.

III.4.2. Stratégie adoptée en cas de détection d'une défaillance du métamodèle : progressivité de la démarche

Les véritables difficultés commencent dans le cas où la phase de vérification de l'approximation n'a pas été concluante. Il s'agit alors de déterminer les modifications à apporter au métamodèle de degré 1 afin d'améliorer sa qualité d'approximation.

III.4.2.1 Cheminement systématique

Suivant le principe de progressivité de la démarche, la première idée est classiquement d'augmenter le degré du métamodèle. Le premier ajout est alors celui des termes de couplages entre les différents paramètres, puis si cela n'est pas suffisant les termes de degré 2 sont ajoutés, puis les termes de couplages correspondant, et ainsi de suite. Toutefois si une telle approche finit le plus souvent par améliorer la qualité d'approximation du métamodèle, ce n'est généralement pas le cas pour la confiance. Le nombre de terme augmente en effet très rapidement, et si le nombre de points d'identification n'est pas lui aussi augmenté de manière significative l'application des méthodes de validation croisée conduit à des variations fortes (manque de stabilité) du métamodèle et donc à une confiance faible. C'est pourquoi en section III.4.1, j'avais défini le nombre de points d'identification en faisant intervenir le nombre de coefficients du métamodèle.

Si la non-linéarité semble forte mais que le nombre de paramètres incertains reste modéré (inférieur ou égal à 5 pour ne pas devoir réalisé plus d'un millier de calculs pour identifier un chaos d'ordre 3 avec une méthode de quadrature de Gauss), une solution intéressante peut être le passage direct au chaos polynomial. Le coût n'est cependant pas anodin puisqu'il est alors nécessaire de refaire les calculs correspondant aux nouveaux points d'identification. Les points identifications initiaux servent alors à évaluer la qualité d'approximation du chaos puisque la méthode d'identification de celui-ci ne permet pas l'utilisation de la validation croisée. Le nombre de point d'identification étant lié à l'ordre du chaos, il faut également être conscient qu'en cas de résultat insatisfaisant, l'identification d'un chaos d'ordre supérieur demandera de refaire la grande majorité des calculs d'identification[5]. Ce choix écarte donc quelque peut l'utilisateur de la démarche progressive.

L'ajout ou la modification de points d'identification, contraire au principe de parcimonie, est en général la dernière solution à laquelle l'utilisateur souhaite recourir. C'est pourquoi plutôt que la démarche systématique de l'augmentation du degré du métamodèle, nous préférons en général recourir soit à des polynômes insaturés (en minimisant le nombre de monômes supplémentaires), soit au krigeage.

Par polynômes insaturés (ou creux), nous désignons des polynômes ne comportant pas tous les termes possibles correspondant à leur degré. Le raffinement du métamodèle ne porte alors que sur les termes les plus influents et/ou instables afin d'éviter des raffinements inutiles se traduisant par des coefficients négligeables. Pour cela, il est nécessaire de pouvoir classer les termes par ordre d'influence par des techniques comme les descripteurs sondes ([Stoppiglia, 03]). Cette méthode consiste à utiliser une procédure d'orthogonalisation de type Gram-Schmidt combiné à un critère d'arrêt par test statistique afin de classer les termes $(x_k, x_k^2, x_k x_l, x_l^3 ...)$

[5] Rappelons qu'identifier un chaos d'ordre *p* avec *n* paramètres incertains nécessite $(p+1)^n$ points imposés par la méthode de quadrature (cf. section II.3.7.2).

d'un modèle par ordre d'influence, c'est-à-dire suivant leur capacité à expliquer la relation entre la réponse considérée et les paramètres incertains $(x_1, x_2, .., x_k, ..., x_n)$. En pratique, nous avons choisi de ne pas utiliser le critère d'arrêt statistique, mais de terminer la recherche une fois sélectionné le nombre de monômes voulus. Outre la constante, les termes du polynôme insaturé sont choisis parmi les $3n + n(n-1)/2$ possibilités offertes par les termes linéaires (x_k), quadratiques (x_k^2) et cubiques (x_k^3) complétés par les termes de couplage $x_k.x_l$. Pour les m points d'identification $p_j = (x_1^j, x_2^j, ..., x_n^j)$, m valeurs de réponse y_j sont disponibles. Il s'agit alors de calculer le cosinus de l'angle entre les vecteurs t^i des termes testés (par exemple $t^{m+3} = \left((x_3^1)^2, (x_3^2)^2, ..., (x_3^m)^2\right)$) et le vecteur des réponses y_p. Plus le cosinus est grand plus la colinéarité est forte entre y_p et t^i. Pour les $3n + n(n-1)/2$ vecteurs t^i, on calcule ainsi :

$$cos^2(t^i, y_p) = \frac{(t^i.y_p)^2}{\left\|t^i\right\|^2 \left\|y_p\right\|^2} \qquad \textit{(Eq. III-15)}$$

Le terme correspondant à la plus grande valeur de cosinus est alors sélectionné, puis, après avoir retranché des réponses y_j la part expliquée par ce terme, la procédure est répétée jusqu'à ce que le nombre de termes choisis ait été atteint. Dans certains cas, choisir par avance un nombre de termes conduit à éliminer abusivement certaines variables, moins influentes que d'autres mais pas pour autant insignifiante. Il peut alors être préférable de choisir un nombre de terme à ajouter aux termes de degré 1. Comme mentionné précédemment, il est alors préférable d'ajouter des points d'identification pour obtenir une confiance satisfaisante

Si l'utilisation des polynômes insaturés ne se révèle pas satisfaisante, l'utilisateur peut ensuite construire un métamodèle basé sur le krigeage. La question est alors de déterminer les paramètres de la méthode, c'est-à-dire l'ordre de la partie régression et le type de fonction de corrélation. Dans les outils programmés et largement inspirés de la « boite-à-outils » libre DACE ([Lophaven, 02]), je dispose principalement de trois fonctions de corrélation (gaussienne, exponentielle et linéaire) et de quatre type de modèle de régression (constant, linéaire ou degré deux sans et avec couplages). Le choix du paramétrage relève encore malheureusement d'une démarche essai-erreur. L'expérience m'a cependant montré qu'il était souhaitable de commencer par utiliser la fonction de corrélation gaussienne et une régression constante, puis si cela n'est toujours pas satisfaisant, d'augmenter l'ordre de la régression avant de recommencer la démarche avec les fonctions de corrélation exponentielles et enfin linéaire.

A ce stade, il est possible que les résultats ne soient toujours pas satisfaisants. Si effectuer des nouveaux calculs pour ajouter des points d'identification ne semble pas réaliste, il faut malheureusement reconnaître que les limites de la démarche ont été atteintes et que pour un coût acceptable nous ne sommes pas en mesure d'estimer l'effet des incertitudes de façon suffisamment précise. Sinon le passage par une étape d'ajout de points d'identification est obligatoire. Ce peut être une solution intéressante notamment combinée avec l'utilisation du krigeage puisque ce type de métamodèle présente une garantie d'amélioration quand un plus grand nombre de données d'entrée lui est fourni (contrairement aux méthodes d'approximations

polynomiales par régression qui finissent par présenter un effet de « saturation »). Il convient alors d'essayer de répartir au mieux les nouveaux points d'identification. Les résultats obtenus sur le dernier métamodèle identifié peuvent alors être utiles pour guider l'ajout de points. Une stratégie intéressante peut notamment être de combiner successivement des ajouts de points sélectionnés pour correspondre :

- aux bornes de la réponse du métamodèle si celles-ci sont trop éloignées des valeurs de réponse associées aux points d'identification déjà retenus ;
- aux zones de l'intervalle de variation de la réponse correspondant à peu ou pas de points d'identification ;
- aux zones de l'intervalle de variation de la réponse correspondant à une faible confiance dans le métamodèle (importante amplitude de variation des réponses aux points d'identification estimée par validation croisée).

Ces ajouts font appel à une démarche d'optimisation sur le dernier métamodèle identifié. Toutefois si celui-ci est vraiment trop erroné, les calculs exacts réalisés en ces nouveaux points risquent fort de conduire à des valeurs de réponse très éloignées de celles ciblées. Il est également important d'essayer de sélectionner les points respectant un des 3 trois critères énoncés et différents le plus possible (par leurs coordonnées dans l'espace d'incertitude des points d'identification déjà retenus).

III.4.2.2 Démarches particulières

En cas de défaillance constatée après la première étape de notre démarche, nous disposons donc de ces deux méthodes générales que sont les polynômes insaturés et le krigeage. Cependant dans certains cas, l'analyse de l'erreur commise par le métamodèle comme l'analyse de la signification mécanique des variations des paramètres peuvent nous guider dans le choix d'une nouvelle forme de métamodèle. La progressivité de la démarche ne suit alors pas une démarche systématique mais vise à s'adapter au mieux au cas traité.

C'est notamment le cas pour la mise en place d'un changement de variable dans le métamodèle polynomial de degré 1 initial. En effet, il est parfois possible de prévoir comment certains paramètres contribuent à la réponse étudiée. Dans le domaine des composites c'est notamment le cas avec les angles de stratifications. Par exemple, pour un stratifié $[0° 90°]_S$, les variations des angles en plus ou en moins autour de leur valeur cible contribue de façon identique à diminuer (pour les angles à 0°) ou à augmenter (pour les angles à 90°) la raideur suivant la direction 1. Il est alors logique d'introduire dans le métamodèle non pas le paramètre lui-même mais sa valeur absolue, son carré ou son cosinus.

Le changement de variable peut aussi être motivé par la détection d'une forte non-linéarité principalement associée à un petit nombre de variables bien identifié (grâce à l'analyse de l'erreur ou de la stabilité du métamodèle initial). Dans un tel cas, il est bien sûr possible de résoudre la difficulté par l'utilisation de métamodèle par polynôme insaturé. Cependant, l'utilisateur connaissant les variables à l'origine des difficultés peut alors préférer modifier lui-même de polynôme de degré 1 en remplaçant pour ses variables les termes de degré 1 par des termes de degré supérieur (carré, cube).

Au final, nous pouvons dire que la progressivité de la démarche (caractérisée par la disponibilité de diverses méthodes de complexité croissante) ne signifie pas encore « automatisation » complète. L'intervention de l'utilisateur est encore souvent nécessaire pour choisir la manière d'enrichir le métamodèle. Nous voulons surtout souligner qu'il existe des alternatives à une complexification systématique de la surface de réponse.

III.5. Mise en œuvre et premières validations de la démarche d'Analyse de la Variabilité (AdV)

Durant tout le travail de développement et de mise au point de notre méthode, nous avons testé un certain nombre d'exemples « mathématiques » afin de nous forger une conviction sur les avantages/inconvénients des différents choix effectués. Nous allons essayer de résumer les différentes conclusions dans les paragraphes suivants.

III.5.1. Principe de la validation

Nous avons tout d'abord réfléchi au choix de ces exemples mathématiques qui devaient vérifier certaines caractéristiques. Nous avons donc cherché des fonctions mathématiques qui permettent :

- Un nombre de dimensions paramétrable
- Un contrôle de la non linéarité
- Une évaluation quasi-instantanée
- Si possible, une détermination analytique des grandeurs statistiques (moyenne, écart-type, valeurs extrêmes,…)

A titre d'exemples, nous avons retenu entre autres les fonctions suivantes :

$$F_I = b_o\left(\prod_{i=1}^{N} e^{b_i X_i}\right) \qquad F_{III} = a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_i X_i + \sum_{i,j} b_{ij} X_i X_j$$

$$F_{II} = a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_i \left(1 - e^{b_i X_i}\right) \qquad F_{IV} = a_0 + \left(\sum_{i=1}^{N} a_i X_i\right) . \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i . X_i}{1.5 + X_{i+1}}\right) \qquad \text{(Eq. III-16)}$$

Ces fonctions respectent les contraintes qui ont été fixées et en particulier le fait d'être applicable quelque soit le nombre de variables. Néanmoins, il nous a semblé important de faire quelques mises en garde vis-à-vis des espaces à grandes dimensions. A cet effet, l'annexe 2 décrit la notion de volume d'un espace à *N* dimensions ainsi que la notion de mesure de l'occupation de l'espace. Le lecteur y trouvera également l'évolution de l'occupation de l'espace lors d'un tirage de Monte-Carlo en fonction de la dimension. Le résultat peut être le plus intéressant est que, lorsque le nombre de variables est très important (plusieurs dizaines), il est quasi impossible d'obtenir des valeurs très proches des sommets (toutes les valeurs simultanément proches de -1 ou 1).

III.5.2. Synthèse des résultats obtenus

Il n'est pas facile d'illustrer simplement l'ensemble des résultats obtenus sur les fonctions mathématiques surtout qu'il est parfois difficile de quantifier des résultats autrement qu'en terme « cela marche un peu mieux ou un peu plus souvent ». Il est

donc évident que les conclusions suivantes sont plus du domaine de la vérification empirique que de la démonstration mathématique.

III.5.2.1 Sur la qualité du transport d'incertitude

La qualité du transport pour une fonction donnée, une fois la surface de réponse choisie dépend uniquement du nombre de points d'identification et de leur répartition (nous n'avons pas cherché à remettre en cause la méthode d'identification elle-même et nous avons toujours utilisé une méthode de régression au sens des moindres carrés). Concernant le nombre de points, lors de l'usage d'une surface de réponses polynomiale d'ordre 1, le choix de $3\times(N+1)$ points nous parait le plus pertinent. Concernant la répartition des points, la méthode sommet-centre s'est avérée souvent la meilleure.

III.5.2.2 Sur la qualité de l'estimation de la confiance dans le transport d'incertitudes.

Au-delà de la qualité du métamodèle, nous avons vu que nous avons accordé beaucoup d'importance aux techniques qui permettent de détecter des anomalies dans la méthode de transport d'incertitudes.

Nous avons surtout cherché à comparer les méthodes de validations croisées de type *bootstrap* et *leave-k-out* (en cherchant également à déterminer le *k* le plus approprié). Nos conclusions sont que le *leave-k-out* parait mieux adapté à nos problèmes, en particulier pour estimer l'erreur de généralisation qui nous semble être le meilleur indicateur pour caractériser la confiance dans le transport d'incertitudes.

Afin de vérifier la pertinence du métamodèle, il nous est apparu nécessaire de fournir plusieurs indicateurs : l'erreur quadratique moyenne, l'erreur de généralisation, la stabilité des coefficients,…

Notons que le graphe de dispersion est un excellent outil pour visualiser l'adéquation du métamodèle.

III.5.3. Quelques remarques sur les cas « fortement » non linéaires

Lorsque la non linéarité du transport est trop forte (ce qui peut être lié soit au processus lui-même, soit aux fluctuations présentées par les paramètres incertains) et donc que le métamodèle d'ordre 1 n'est plus suffisant, il est alors possible d'adopter différentes stratégies :

1. **Augmenter le nombre de points** : *c'est une solution peu efficace si le métamodèle utilisé est inadapté, l'augmentation du nombre de points procurant alors une amélioration très limitée (effet de saturation) ;*
2. **Augmenter le degré du métamodèle** (cas d'une surface de réponse polynomiale) peut *améliorer significativement la qualité des réponses mais attention à la forte augmentation des points d'identification nécessaires (et au problème d'oscillation) ;*
3. **Choisir une solution particulière** : *il est parfois possible d'obtenir simplement des améliorations soit parce que l'on a des besoins spécifiques (souvent seules certaines zones sont réellement intéressantes : on s'efforcera de trouver un métamodèle correct uniquement pour ces zones d'intérêts) ou bien parce que l'on a une idée sur la façon d'enrichir le métamodèle (l'analyse mécanique nous indique, par exemple, comment modifier le métamodèle) ;*

4. **Choisir un métamodèle parcimonieux** : *il est possible de complexifier intelligemment le métamodèle. Par exemple, dans le cas de surfaces de réponses polynomiales, il est possible de choisir des polynômes insaturés en sélectionnant astucieusement les monômes pertinents (par analyse des erreurs ou de la sensibilité, par analyse discriminante de Gram Schmidt,…) ;*
5. **Choisir des métamodèles plus performants** : *comme le kriging ou les réseaux de neurones mais attention souvent leur usage requiert un vrai savoir-faire.*

Nous verrons dans les chapitres suivants des exemples de cas « trop » non linéaires.

III.5.4. Deux exemples de tests

III.5.4.1 Cas où la linéarité est essentiellement due à une variable

A partir de la forme de la fonction test F_{II}, une fonction comportant 4 paramètres variants dans [-1 ; 1] est définie. Les valeurs des coefficients sont données dans le Tableau III-2. La non-linéarité est alors essentiellement due au 4ème paramètre x_4.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4
100	5	3	4	10	0.1	0.15	0.2	1.8

Tableau III-2. Coefficients de la fonction test (type F_{II}) pour une non-linéarité essentiellement due à x_4.

Après identification du métamodèle polynomial de degré 1, le tracé du diagramme de dispersion pour les points d'identification (Figure III-14a) montre une répartition non-aléatoire avec une certaine courbure par rapport à la droite identité. Cette tendance est confirmée par un tirage de Monte-Carlo.

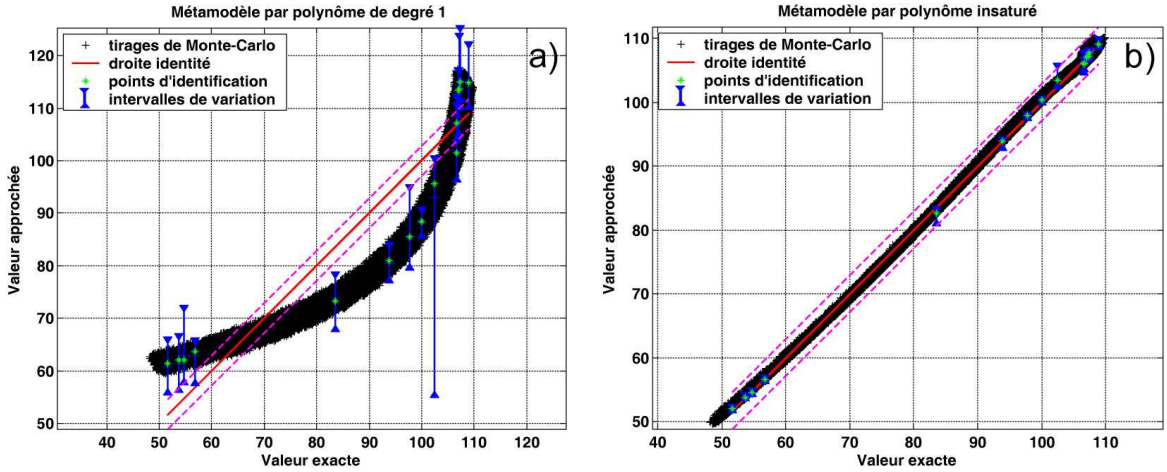


Figure III-14. Diagrammes de dispersion avec intervalles de variation aux points d'identification (obtenu par leave-2-out) : a) pour le métamodèle polynomial de degré 1, b) pour le métamodèle par polynôme insaturé avec 4 termes.

Une telle courbure est en général le signe d'une non-linéarité due à un petit nombre de variables. L'usage des polynômes insaturés et la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt peut alors permettre à la fois de détecter les variables problématiques et de résoudre les difficultés en introduisant directement des termes d'ordres élevés (carré, cube,..) dans le métamodèle. En choisissant de n'employer que 4 termes, on obtient ainsi le résultat de la Figure III-14b) mettant en évidence une amélioration

significative. Le métamodèle sur cet exemple fait alors intervenir les termes : $x_4, x_4^3, x_1.x_2, x_4^2$. Le 4ème paramètre a donc bien été identifié comme le plus influent. Dans ce cas la non-linéarité est telle que dans le métamodèle initial un simple changement de variable de x_4 en $(x_4)^2$ ou $(x_4)^3$ n'est pas suffisant. L'approche par polynôme insaturé se révèle donc préférable.

Une réflexion de l'utilisateur peut également permettre d'identifier la variable problématique. Sur cet exemple, pour le métamodèle polynomial de degré 1, une analyse de l'importance relative des différents paramètres fait ainsi apparaître le caractère prépondérant du 4ème paramètre. Une autre solution consiste à tracer l'erreur commise aux points d'identification en fonction des valeurs des paramètres. Pour les paramètres x_1, x_2 et x_3, ce tracé (Figure III-15a) ne met pas en évidence de relation précise, alors que pour le paramètre x_4 les points semblent suivre une courbe particulière (Figure III-15b). Pour des raisons de lisibilités le nombre de points d'identification a ici été augmenté à 30. Le faible nombre de points d'identification peut en effet rendre la tâche délicate.

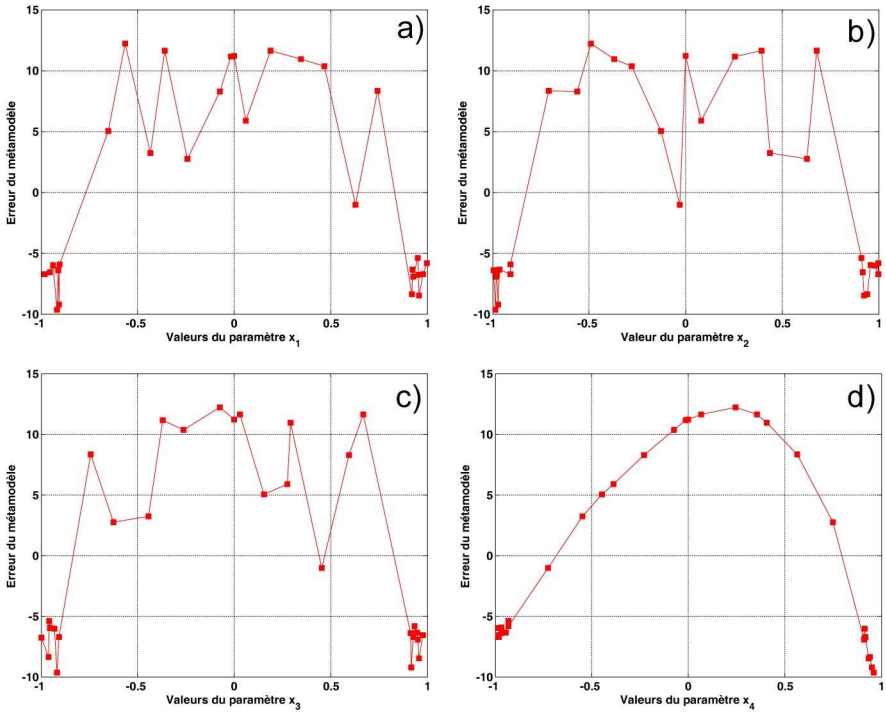


Figure III-15. Tracés de l'erreur du métamodèle suivant les valeurs des variables : a) pour les paramètres x_1,x_2,x_3 et b) pour le paramètre x_4.

III.5.4.2 Cas où toutes les variables contribuent une non-linéarité conséquente

La fonction test F_{IV} est paramétrée pour comporter quatre variables variant là encore dans [-1 ; 1]. Les coefficients utilisés sont listés dans le Tableau III-3 et ont été choisis pour assurer une influence équivalente des quatre variables.

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3
30	3.5	2.7	-1.9	2.3	-0.6	0.89	-0.76

Tableau III-3. Coefficients de la fonction test de type F_{IV} (toutes les variables contribuent de façon équivalente à la non-linéarité).

La phase 1 de la démarche proposée, consistant à identifier un métamodèle polynomial de degré 1 conduit à des résultats clairement inacceptables (Figure III-16a). $5x10^4$ tirages de Monte-Carlo ont été effectués afin de visualiser plus précisément le comportement du métamodèle. La phase de validation croisée par *leave-2-out* conduit à des variations très importantes des réponses aux points d'identifications mettant en évidence une très mauvaise confiance. Ce résultat était prévisible compte tenu des erreurs obtenues aux points d'identification.

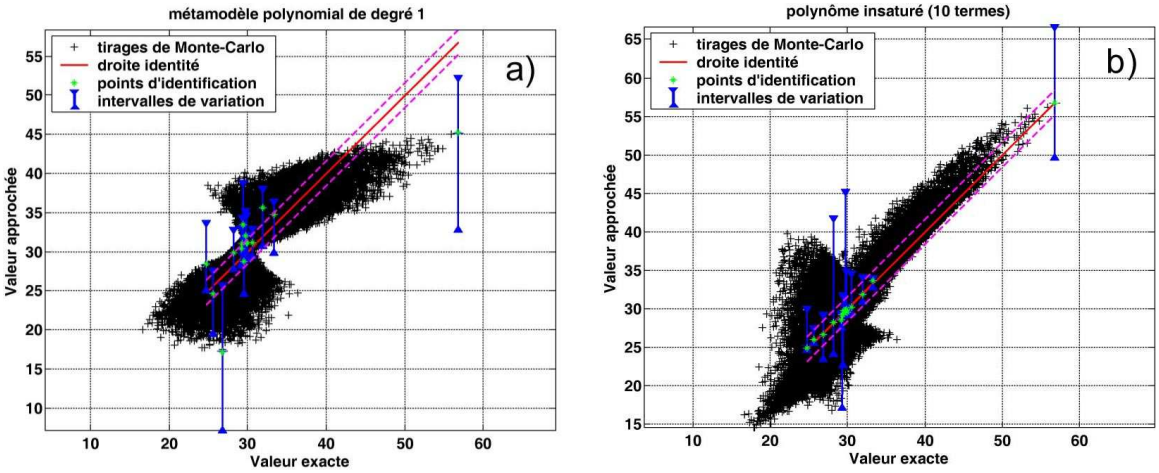
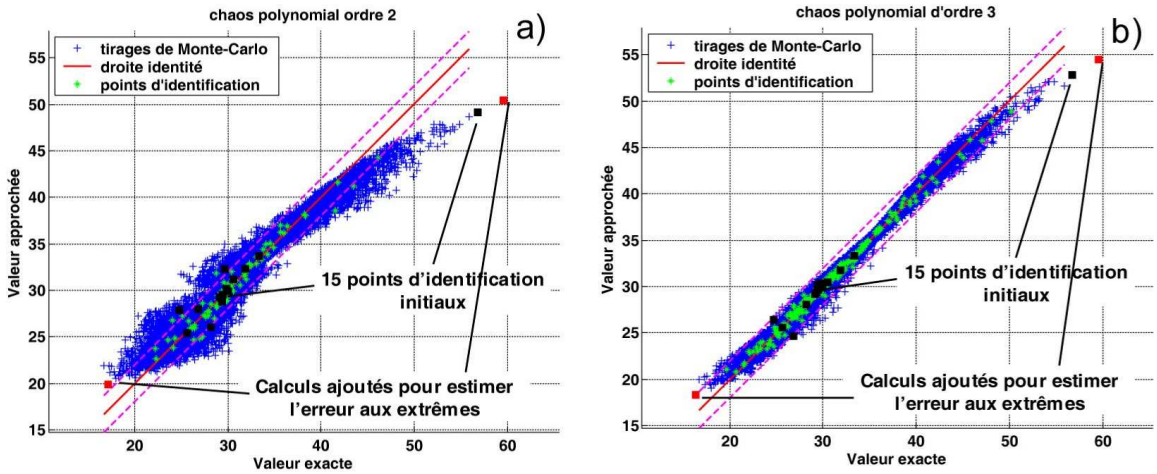


Figure III-16. Diagramme de dispersion et intervalles de variation des réponses aux points d'identification obtenus par leave-2-out pour un métamodèle a) polynomial de degré 1 et b) par polynômes insaturés à 10 termes.

Les tentatives faisant appels à des métamodèles polynomiaux d'ordre supérieur ou par polynômes insaturés (Figure III-16b) ne permettant pas d'améliorer les résultats, il apparaît nécessaire d'ajouter ou de modifier les points d'identification.

Le nombre de variables (4) étant modéré et la non-linéarité apparaissant conséquente, ce cas semble bien se prêter à l'utilisation du chaos polynomial. Cela suppose bien sûr de modifier totalement le jeu de point d'identification. Le jeu initial (ayant servi à identifier le métamodèle polynomial d'ordre 1) est conservé pour évaluer la qualité du chaos puisque celui-ci ne peut être utilisé avec des méthodes de validation croisée (quand il a été identifié par la méthode dite de projection). Les chaos testés (Figure III-17) sont d'ordre 2 et 3 et nécessitent respectivement 81 et 256 points d'identification. Cette méthode permet une amélioration significative des résultats. A l'ordre 2, moins de 5% des tirages de Monte-Carlo s'écartent de la bande d'erreur de référence (à 5% de la variation observée sur la réponse), et à l'ordre 3 cette proportion descend même à moins de 0.5%. Rappelons cependant que sur le plan de la progressivité de la démarche le chaos est pénalisant. Les 256 points d'identification utilisés à l'ordre 3 ne reprennent en effet pas les 81 points d'identification de l'ordre 2.

Sur cet exemple les points d'identifications initiaux donnent une bonne idée de la qualité du métamodèle. Toutefois cela n'étant pas toujours le cas, il est plus prudent de déterminer par optimisation du métamodèle les extrêmes de la réponse et de refaire le calcul exact en ces deux points afin d'estimer la qualité de l'approximation dans ces zones extrêmes. Comme souvent, on constate ici qu'il s'agit des zones ou l'erreur du métamodèle est la plus grande.



81 points d'identification 256 points d'identification

Figure III-17. Diagramme de dispersion pour les métamodèles par chaos polynomial a) à l'ordre 2 et b) à l'ordre 2. Outre les points d'identification du chaos sont tracés les réponses aux 15 points d'identification initiaux et pour une simulation de Monte-Carlo à 5.10^5 tirages.

Si le chaos permet de résoudre les difficultés de ce cas test, le nombre de points d'identification requis est néanmoins loin de satisfaire la règle de parcimonie que nous nous sommes fixé. Afin d'essayer de remédier à cela, un métamodèle par krigeage est mis en œuvre en utilisant une régression linéaire et une fonction de corrélation gaussienne. En n'utilisant que les 15 points d'identifications initiaux, le résultat n'est pas satisfaisant comme le montre la Figure III-18a). Les différents types de métamodèles retenus ayant été essayés, l'ajout de points d'identification semble maintenant indispensable. Les nouveaux points sont sélectionnés suivant la stratégie mise en place (cf. section III.4.2.1). Ils visent donc à correspondre soit aux extrêmes de la réponse du métamodèle, soit à des zones de l'intervalle de variation de la réponse inexplorées ou correspondant à une faible confiance dans le métamodèle.

Combinée au krigeage qui présente la propriété de s'améliorer avec l'ajout de points d'identification, cette stratégie fournit un moyen de résoudre les difficultés rencontres tout en ajoutant le moins de points possible. Sur cet exemple sept itérations ont été effectuées. A chaque fois entre 5 et 7 points sont ajoutés. Les figures III-18.b), c) et d) présentent les résultats obtenus à la troisième, cinquième et septième itération. Au final 38 points d'identification ont été ajoutés et le résultat est de qualité comparable à celui obtenu par le chaos polynomial à l'ordre 2 pour un total de 53 points d'identifications contre 81. Dés que le nombre de points d'identification devient suffisant, ces exemples montrent également une bonne concordance entre l'amplitude de variation des réponses obtenue par validation croisée et l'erreur du métamodèle visualisée par simulation de Monte-Carlo.

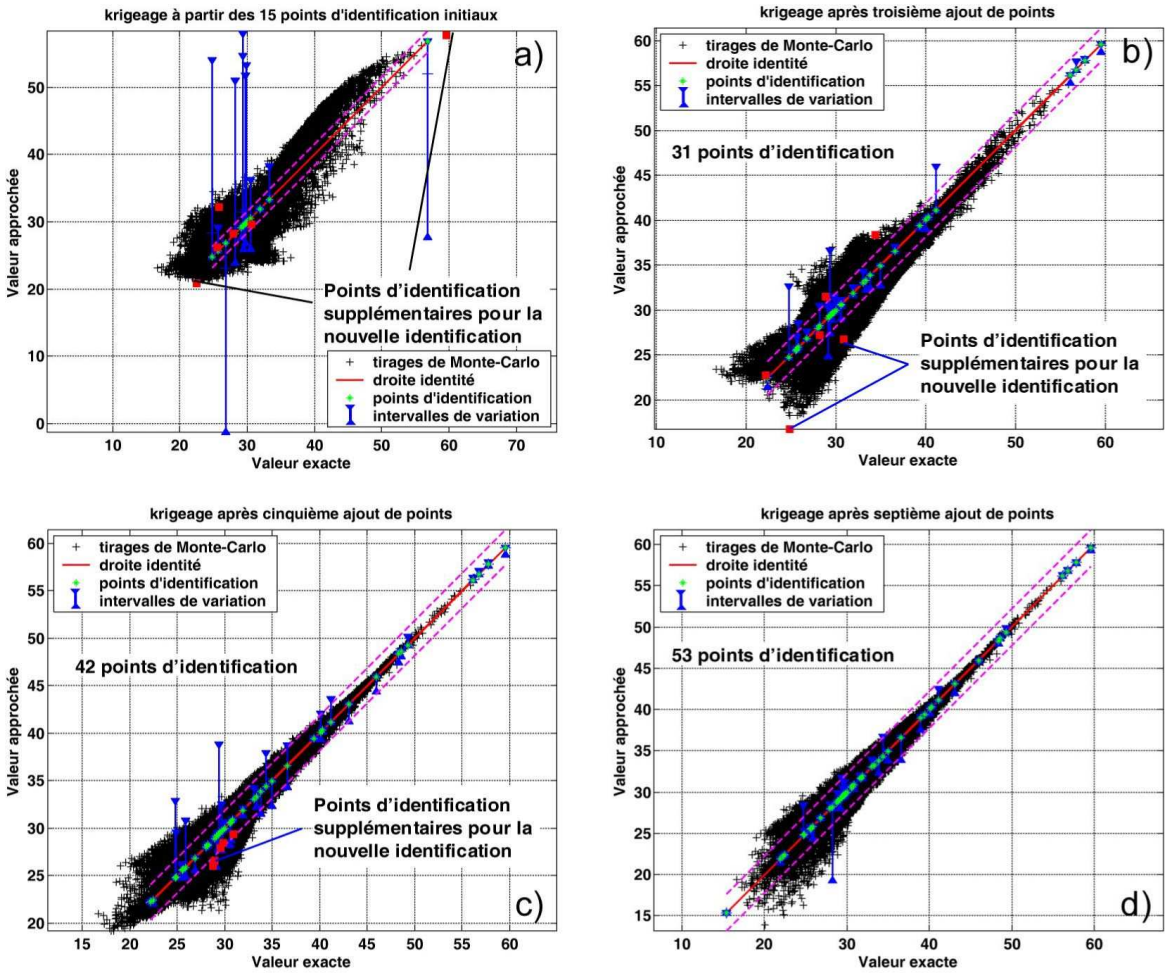


Figure III-18. Diagramme de dispersion et amplitude de variation des réponses aux points d'identification pour un métamodèle par krigeage (régression linéaire et fonction de corrélation gaussienne) avec a) 15, b) 31, c) 42 et d) 53 points d'identification.

Conclusion

Afin d'estimer les effets des incertitudes affectant les paramètres d'entrées d'un processus, nous avons adopté une approche de type plan d'expériences numériques. Celle-ci met en œuvre différents types de surfaces de réponse ou métamodèles. Par rapport à une démarche classique nos efforts ont porté sur l'évaluation de la confiance qui peut être accordée au métamodèle. Pour cela, nous nous sommes intéressés à diverses méthodes de validation croisée et avons finalement adoptée la technique du *leave-k-out*. L'introduction de cette étape de vérification dans la démarche répond au double besoin d'être en mesure d'une part de changer d'approximation si celle-ci s'avère insuffisante, et d'autre part de donner un intervalle de confiance sur les résultats (statistiques) caractérisant la propagation d'incertitude au travers du processus étudié. Cette phase de vérification nous a également conduit à modifier le schéma de fonctionnement de notre approche pour la rendre progressive (ou itérative). Elle répond ainsi à l'exigence de maîtrise des coûts de calculs nécessaires en permettant l'utilisation raisonnée des différentes méthodes retenues pour la construction du métamodèle au travers duquel est effectuée le transport d'incertitude. Après la présentation succincte en fin de chapitre des exemples mathématiques que nous avons traités pour acquérir la confiance nécessaire dans notre méthodologie, nous présentons par la suite la validation que nous avons réalisée sur des exemples analytiques de « mécanique ».

Chapitre IV
Validation de la stratégie développée sur des problèmes mécaniques représentatifs des particularités composites

Introduction **97**

IV.1. Calcul de structures composites et procédure de validation de la démarche. **97**

IV.2. Etude complète d'un cas correspondant à un fonctionnement « optimal » de notre stratégie. **100**

IV.2.1. Argument pour le choix de l'exemple de la poutre stratifiée en flexion 100
IV.2.2. Présentation du cas traité 102
IV.2.3. Sélection du plan d'expérience et identification des métamodèles 103
IV.2.4. Utilisation des réponses du métamodèle aux points d'identification comme premier indicateur de qualité 104
IV.2.5. Estimation de la qualité du métamodèle par méthode de validation croisée 106
IV.2.6. Exploitation des résultats de la démarche 108
IV.2.6.1 Analyse de sensibilité *108*
IV.2.6.2 Analyse en valeurs extrêmes *109*
IV.2.6.3 Analyse statistique des réponses considérées *110*
IV.2.7. Confrontation des résultats avec ceux issus d'une méthode de Monte-Carlo 111
IV.2.8. Etude « probabiliste » de la rupture 113
IV.2.8.1 Comparaison Monte-Carlo direct / Monte-Carlo sur métamodèle *117*
IV.2.8.2 Effet du choix des distributions des entrées sur la probabilité de rupture *119*

IV.3. Exemple de stratégies de résolution pour diverses situations potentiellement problématiques. **121**

IV.3.1. Grand nombre de variables présentant chacune une faible incertitude 121
IV.3.2. Nombre réduit de variables présentant chacune une forte incertitude 124
IV.3.3. Application à un comportement non-linéaire : prise en compte de la viscosité. 128

IV.4. Etude d'un cas de réponse bimodale : flambement d'une plaque composite **132**

IV.4.1. Présentation de l'exemple 132
IV.4.2. Mise en œuvre de l'étude des effets des incertitudes 134

Conclusion **138**

Introduction

Le chapitre III a été consacré à la présentation et au détail de la stratégie mise en place pour le traitement des incertitudes. En particulier, le caractère progressif de la démarche a été souligné, et une première ébauche de validation a également été proposée en se basant sur des exemples mathématiques, représentatifs de situations potentiellement problématiques. Il nous apparaît maintenant important de présenter le fonctionnement de notre stratégie, ainsi que les résultats qu'elle permet d'obtenir, dans le cadre pour lequel elle a été développée, c'est-à-dire le calcul des structures composites. Comme pour tous les travaux dans la thématique des incertitudes, il est nécessaire de vérifier la robustesse de notre démarche. Toute validation expérimentale est cependant illusoire de par le nombre d'expériences (problème de temps et de coûts) qu'elle nécessiterait, notamment pour obtenir une description correcte des distributions de probabilité. Celle-ci ne peut donc se faire que sur le plan de la simulation, et un soin attentif doit y être apporté.

Après avoir indiqué le déroulement de la démarche de validation de la stratégie, ce chapitre s'attachera à présenter les résultats qu'elle délivre. Nous chercherons notamment à justifier les principes de la méthode développée sur divers cas mécaniques. Ces cas seront tout d'abord de nature analytique pour obtenir une validation acceptable, puis correspondront dans le chapitre suivant à des situations plus complexes (calculs éléments finis).

IV.1. Calcul de structures composites et procédure de validation de la démarche.

La stratégie mise en place vise à s'appliquer au calcul des structures composites. Celui-ci peut être vu comme un ensemble de modèles se succédant pour former une véritable chaîne de calculs, comme indiqué sur la Figure IV-1. Les paramètres initiaux nécessaires pour parcourir cette chaîne de calcul dépendent d'une part de l'échelle de départ choisie pour l'étude, et d'autre part des choix effectués pour la modélisation du comportement du matériau. De par la nature multiéchelle des matériaux composites (cf. I.2), l'ingénieur peut choisir de partir soit de l'échelle des constituants, soit du pli ou encore du stratifié pour réaliser ses simulations. En pratique, l'échelle la plus utilisée dans l'industrie est celle du stratifié, ce qui permet de réduire notablement le coût de calcul en utilisant un matériau homogène équivalent. L'utilisation de l'échelle du pli a néanmoins tendance à se généraliser car elle offre un bon compromis entre coût de calcul et finesse de modélisation. Un grand nombre de modèles mécaniques (endommagement, fissuration, rupture…) a en effet été développé à cette échelle ([Ladevèze, 02], Huchette, 05]). Les paramètres de stratification sont alors des variables du modèle, ce qui le rend applicable à tout type de stratifié et permet ainsi de réduire les coûts d'identification. Ces modèles ouvrent également la voie à l'optimisation en offrant la possibilité de rechercher la stratification répondant au mieux aux exigences du chargement rencontré (matériau «sur-mesure »).

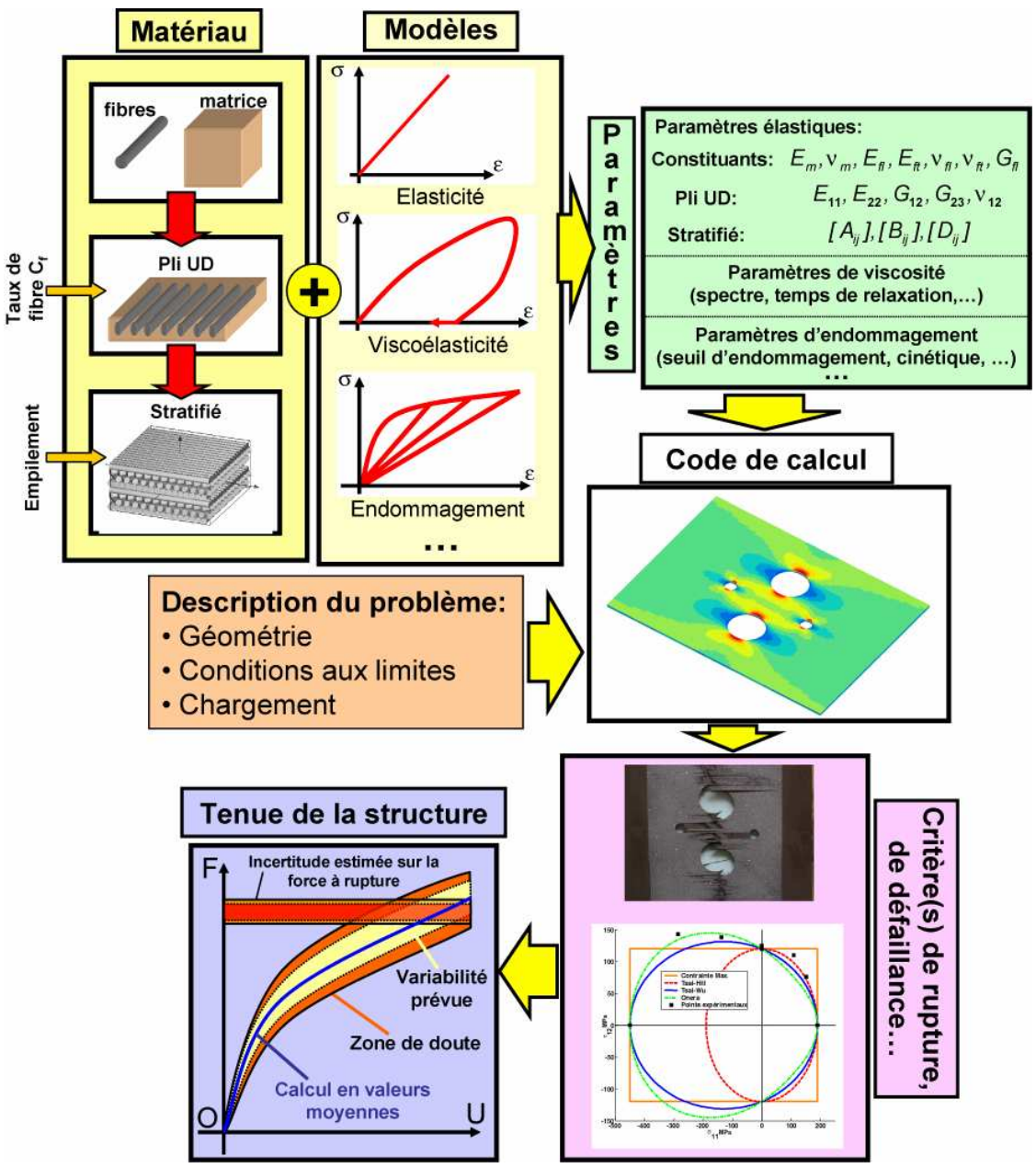


Figure IV-1. Chaîne de calcul pour l'analyse et le dimensionnement des structures composites : échelles possibles pour débuter l'étude et modèles principalement utilisés servant d'entrées pour le code de calcul qui associé à des critères en post-traitement permet de prévoir la tenue de la structure.

Partir de l'échelle la plus basse possible permet donc d'effectuer une modélisation au plus près de la réalité matériau, au détriment d'un coût de calcul plus important, mais aussi d'une perte de précision. La perte de confiance due à la propagation (et surtout l'amplification) des incertitudes au travers des changements d'échelle n'incite en effet pas à leur utilisation. En particulier, la considération de l'échelle micro apparaît souvent dans l'industrie comme une approche trop pointue et inutile. Elle est pourtant essentielle dans une stratégie de réduction des coûts expérimentaux au moyen de la simulation numérique, notamment pour estimer les effets d'un changement de nuance de matrice, de cycle de cuisson ou encore de type de fibres. Dans notre cas, un tel niveau de détail est incontournable pour estimer les effets des incertitudes sur certains paramètres, comme le taux de fibre ou encore les propriétés des fibres ou de la matrice. En effet, l'utilisation d'échelles plus hautes à parfois tendance à

accroître l'incertitude finale sur le comportement de la structure en négligeant les corrélations entre paramètres (voir chapitre VI).

La plupart des paramètres mécaniques définis à ces différentes échelles dépendent bien sûr des choix de modélisation effectués, notamment en ce qui concerne la loi de comportement du matériau. Généralement des modèles de comportement élastiques sont utilisés par les industriels, mais parfois ceux-ci recourent aussi à des modèles plus raffinés pour des pièces critiques. En particulier, on rencontre dans la littérature des modèles élastiques endommageables ([Allix, 94]), viscoélastiques ([Findley, 67)], [Schapery, 66], [Schapery, 69]), viscoélastiques endommageables ([Maire, 92]), viscoélastiques et viscoplastiques ([Vinet, 97]) ou encore viscoélastique – viscoplastique -endommageable ([Thiébaud, 94]). Un certain nombre ont également été développés afin de prendre en compte des phénomènes particuliers comme le vieillissement ([Schieffer, 03]).

Implantés dans des codes de calculs (notamment éléments finis), ces modèles conduisent à une prévision de la réponse des structures. Combinés avec des critères de défaillance (fissuration, flambement, rupture…) appliqués en post-traitement, ces résultats de simulation permettent alors de définir la tenue de la structure et ainsi de s'assurer de la sécurité du dimensionnement.

Contrairement à une approche classique (déterministe, valeur A ou B, …) débouchant sur une courbe de comportement et une valeur de défaillance, notre approche de prise en compte des incertitudes conduit à des enveloppes de réponses tant sur le comportement de la structure que sur l'instant de rupture. Ces enveloppes se décomposent en une part centrale, due à l'estimation des effets de la variabilité des différents paramètres et une part supplémentaire, élargissant l'enveloppe de variabilité. Celle-ci est due au fait que nous cherchons à tenir compte des erreurs éventuelles de la méthode utilisée (imprécision des métamodèles,…).

Le but de ce chapitre est de faire la démonstration de tels résultats, mais aussi et surtout de valider l'ensemble de la stratégie mise en place au chapitre III. Comme nous l'avons dit, une validation expérimentale est illusoire du fait du coût prohibitif qu'elle nécessiterait. Il s'agit donc de faire appel à la simulation numérique pour tester la robustesse de notre stratégie. Par rapport à une validation expérimentale, cette approche présente par ailleurs l'avantage de s'affranchir des incertitudes liées à la pertinence du modèle, qui sont généralement prises en compte par un accroissement de la variabilité des divers paramètres.

Dans ce chapitre, nous chercherons donc à montrer de manière numérique que :

- L'erreur du métamodèle est la plupart du temps acceptable, quand les indicateurs de qualité sont favorables ;
- Les méthodes de validation croisée permettent d'estimer cette erreur de façon satisfaisante ;
- Les indicateurs de la phase de vérification détectent convenablement les cas problématiques ;
- La stratégie mise en place comporte les outils permettant la résolution de la plupart des cas problématiques.

Pour cela, nous avons donc décidé de comparer les résultats de notre méthode à ceux obtenus par l'application d'une méthode de Monte-Carlo sur le processus exact. Les informations statistiques et leur confiance (estimée à l'aide des méthodes de

rééchantillonnages) sont ensuite comparées aux résultats fournis par notre démarche. Cette façon de procéder est classique, Monte-Carlo étant la méthode de référence pour tous les problèmes d'incertitudes. Sa mise en œuvre nécessite cependant un nombre très important de calculs. Afin de pouvoir effectuer d'une centaine de milliers à un million d'évaluations du processus « exact », le temps de calcul de celui-ci doit être relativement restreint. Pour cela, nous remplacerons donc, dans la chaîne de calcul, le code de calcul par un modèle analytique très rapide à évaluer.

IV.2. Etude complète d'un cas correspondant à un fonctionnement « optimal » de notre stratégie.

Il est possible avec un peu d'expérience de choisir un exemple dont le traitement par notre démarche ne nécessite pas de recourir aux outils les plus complexes (nombre limité de variables, intervalles de variation restreints,…). Considérons donc dans un premier temps un cas réaliste, sans non-linéarité flagrante, et au temps de calcul suffisamment court pour qu'il soit possible d'effectuer plusieurs milliers de simulations par la méthode de Monte-Carlo. Le but est bien sûr d'obtenir un aperçu complet des résultats fournis par notre méthode, ainsi que leur validation.

IV.2.1. Argument pour le choix de l'exemple de la poutre stratifiée en flexion

La poutre stratifiée considérée est pour nous un véritable générateur d'exemples, dans la mesure où le nombre et le type des paramètres peuvent être aisément adaptée aux besoins de la démonstration. Le temps de calcul très réduit, puisqu'il est possible d'effectuer plusieurs milliers de simulations à la seconde, est un autre intérêt de ce cas-test.

La poutre composite étudiée (Figure IV-2), est encastrée à une extrémité et sollicitée par une force dont l'angle d'application est incertain. Les angles de stratification, comme le nombre de plis *n*, seront adaptés aux besoins de nos validations. Les calculs sont réalisés au moyen de la théorie classique des stratifiés (voir Annexe 3) et donc sous les hypothèses de la théorie des plaques de Kirchhoff-Love.

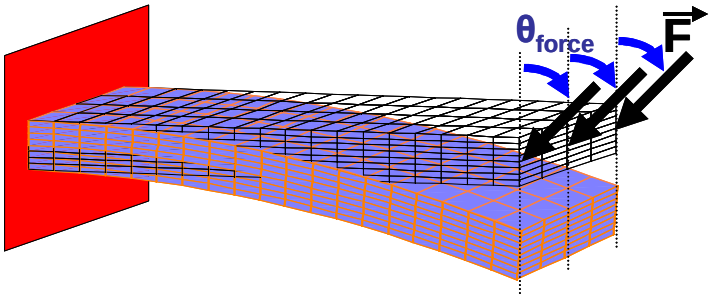


Figure IV-2. Cas-test analytique servant de générateur d'exemple : poutre composite en flexion

Les paramètres incertains qui peuvent être considérés sont :

- les propriétés mécaniques du matériau, qui dépendent de l'échelle de modélisation considérée, de la loi de comportement adoptée, ainsi que du post-traitement effectué (critère de rupture..) ;
- les propriétés géométriques de la poutre, c'est-à-dire ses dimensions : longueur, épaisseur totale (et largeur) ;
- les caractéristiques de l'empilement : nombre et épaisseur des différents plis, angles de la stratification ;
- les paramètres du chargement, à savoir l'intensité F de la force et l'angle de déviation par rapport à la verticale θ_{force}.

Du fait de l'aspect multiéchelles des composites, divers choix sont possibles pour les propriétés matériaux. Nous donnons ici un aperçu des paramètres incertains possibles dans le cas d'un comportement élastique :

- A l'échelle des constituants, et en considérant la matrice isotrope et les fibres isotropes transverses, huit paramètres sont nécessaires : E_m et ν_m le module et le coefficient de Poisson de la matrice, E_{fl}, E_{ft}, ν_{fl} ν_{ft} les modules et coefficients de Poisson longitudinaux et transverses de la fibre, G_{fl} le module de cisaillement de la fibre, et C_f le taux de fibre.
- A l'échelle du pli considéré comme isotrope transverse, dans notre cas, quatre paramètres sont influents[1] : les modules longitudinal E_{11}, transverse E_{22} et de cisaillement G_{12}, ainsi que le coefficient de Poisson ν_{12}.
- en se plaçant à l'échelle du stratifié, l'incertitude peut être considérée directement sur les coefficients A_{ij}, D_{ij} et B_{ij} des matrices de rigidité en membrane et flexion, et de couplage membrane- flexion- torsion, de la théorie classique des stratifiés. Au total, compte tenu des symétries dans les matrices [A], [B] et [D] jusqu'à $3\times(3+3)=18$ paramètres[2] peuvent intervenir.

La considération de l'une ou l'autre de ces échelles permet donc un choix plus étendu quand au nombre de paramètres incertains considérés. Ce nombre peut également être augmenté en considérant que toute ou partie de ces propriétés matériaux fluctuent d'un pli à l'autre, ce qui peut multiplier le nombre de paramètres incertains par le nombre total de plis.

A ces propriétés mécaniques caractérisant le comportement du matériau s'ajoutent également les propriétés à rupture, nécessaires pour estimer la tenue de la structure. Parmi les principaux critères utilisés nous pouvons citer le critère de contrainte-max, le critère de Tsai-Wu ou encore celui de Hashin. Le plus souvent, ces critères s'emploient à l'échelle du pli. Toutefois, ils sont parfois utilisés directement à l'échelle du stratifié ce qui nécessite alors la détermination des propriétés à rupture à cette échelle, et donc une identification des paramètres pour chaque empilement. Au total, en distinguant les propriétés en traction et en compression, cinq paramètres incertains supplémentaires peuvent donc être pris en compte : les contraintes à rupture sens fibre en traction X_t et en compression Y_t, les contraintes sens transverse

[1] Du fait de l'hypothèse de contraintes planes présente dans la théorie classique des stratifiés, le module de cisaillement G_{23} n'intervient pas.

[2] Attention ces 18 coefficients ne sont pas tous indépendants.

X_c et Y_c, et la contrainte à rupture en cisaillement S_t. Par ailleurs, ces paramètres peuvent être considérés pli par pli (ce qui multiplie encore le nombre de situation pouvant être traitées), ou identiques pour tous les plis.

Sur cet exemple, les réponses pouvant être étudiées sont nombreuses. Comme indicateurs globaux peuvent être retenus la flèche de la poutre, sa raideur, la force nécessaire pour la faire rompre, ou encore la distorsion due au couplage flexion torsion, révélatrice de la perte d'orthotropie. Mais il est aussi possible de se focaliser sur des indicateurs plus locaux, définis dans chaque pli, comme les contraintes, la valeur du critère de rupture ou encore la force de rupture.

IV.2.2. Présentation du cas traité

Comme l'indique le schéma de calcul (Figure IV-3), sur cet exemple l'étude se fait à partir de l'échelle du pli, et les données matériaux utilisées correspondent au matériau T700-M21[3].

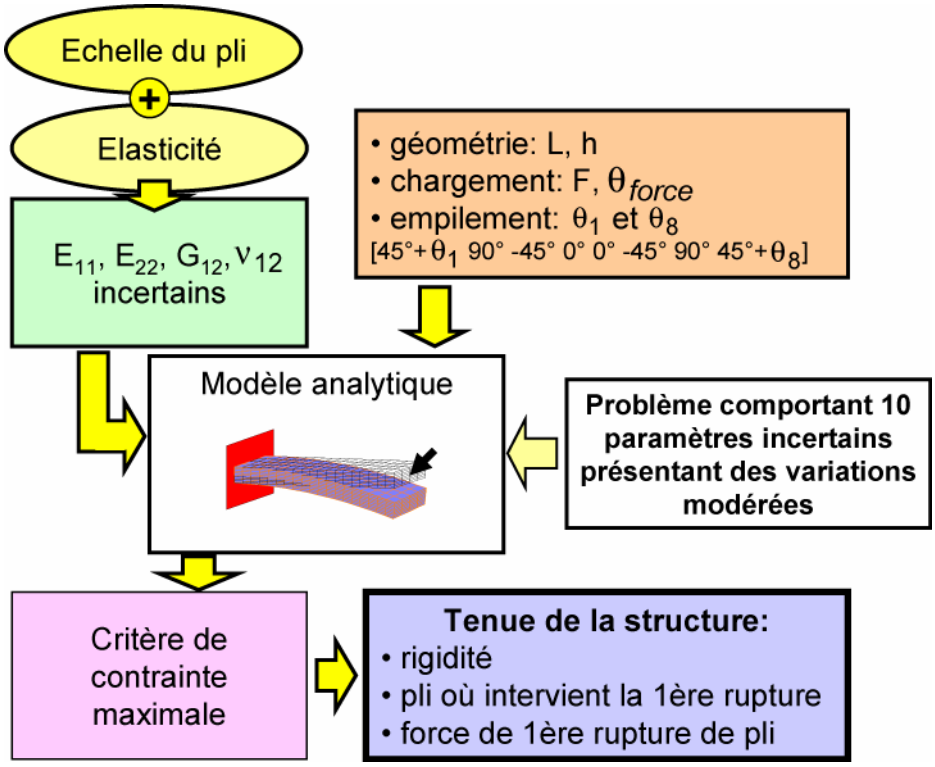


Figure IV-3. Schéma de calcul de la première situation de variabilité sur le générateur d'exemple.

Dix paramètres incertains sont considérés et le Tableau IV-1 présente les intervalles d'incertitude qui leurs sont associés. E_{11} et E_{22} sont les modules d'élasticité longitudinaux et transverses du pli unidirectionnel, G_{12} et ν_{12} le module de cisaillement et le coefficient de Poisson. Les quatre paramètres élastiques nécessaires sous hypothèse de contraintes planes sont donc considérés comme incertains. La stratification choisie, voisine d'un quasi-isotrope, est donnée par [45°+ θ_1 90° -45° 0° 0°-45° 90 45°+ θ_8]. L'incertitude se manifeste ici au travers des désorientations θ_1 et θ_8 pouvant affecter les plis extérieurs[4]. L et h sont

[3] Matériau composite à fibre de carbone et matrice époxy de nouvelle génération incluant des nodules thermoplastiques utilisé pour le caisson central de l'A380 ([Huchette, 05]).

[4] Dans cet exemple l'influence des plis extérieurs est normalement la plus importante.

respectivement la longueur et l'épaisseur de la poutre, et enfin F et θ_{force} l'intensité et la désorientation de la force appliquée.

Paramètres incertains	Valeur moyenne	Fluctuation	Amplitude d'incertitude
E_{11}	142.00 GPa	±4.97 GPa	± 3.5%
E_{22}	8400 MPa	±420MPa	± 5%
G_{12}	4600 MPa	±322 MPa	± 7%
ν_{12}	0.33	±0.02	± 6.1%
θ_1	0°	± 2°	± 2.2% [a]
θ_8	0°	± 2°	± 2.2% [a]
L	200.0 mm	±0.2mm	±0.1%
h	5.0 mm	±0.1mm	±2%
force F	150.0 N	± 5N	±3.3%
θ_{force}	0°	± 2°	± 2.2% [a]
Total :	10 paramètres		

Tableau IV-1. Paramètres incertains et incertitude associée pour l'étude du premier cas ([a] amplitude d'incertitude en pourcent par rapport à 90°).

Les différentes sources d'incertitudes (matériau, géométrie, chargement) sont donc toutes représentées par au moins deux paramètres. Nous considérons les angles de la stratification comme des paramètres matériaux du fait de leur influence sur les propriétés mécaniques du stratifié.

Divers indicateurs peuvent être considérés en sortie. Dans un premier temps, afin de présenter l'ensemble du fonctionnement de la démarche, j'ai choisi d'étudier seulement la flèche de la poutre qui constitue un indicateur macroscopique simple.

IV.2.3. Sélection du plan d'expérience et identification des métamodèles

Puisque le problème comporte N=10 paramètres incertains, suivant le déroulement de la méthode détaillée au chapitre précédent, $n = 3 \times (N+1) = 33$ points d'identification sont sélectionnés par la méthode sommets-centre. La Figure IV-4 présente un exemple de visualisation possible de leur position dans les différents plans de l'espace d'incertitude.

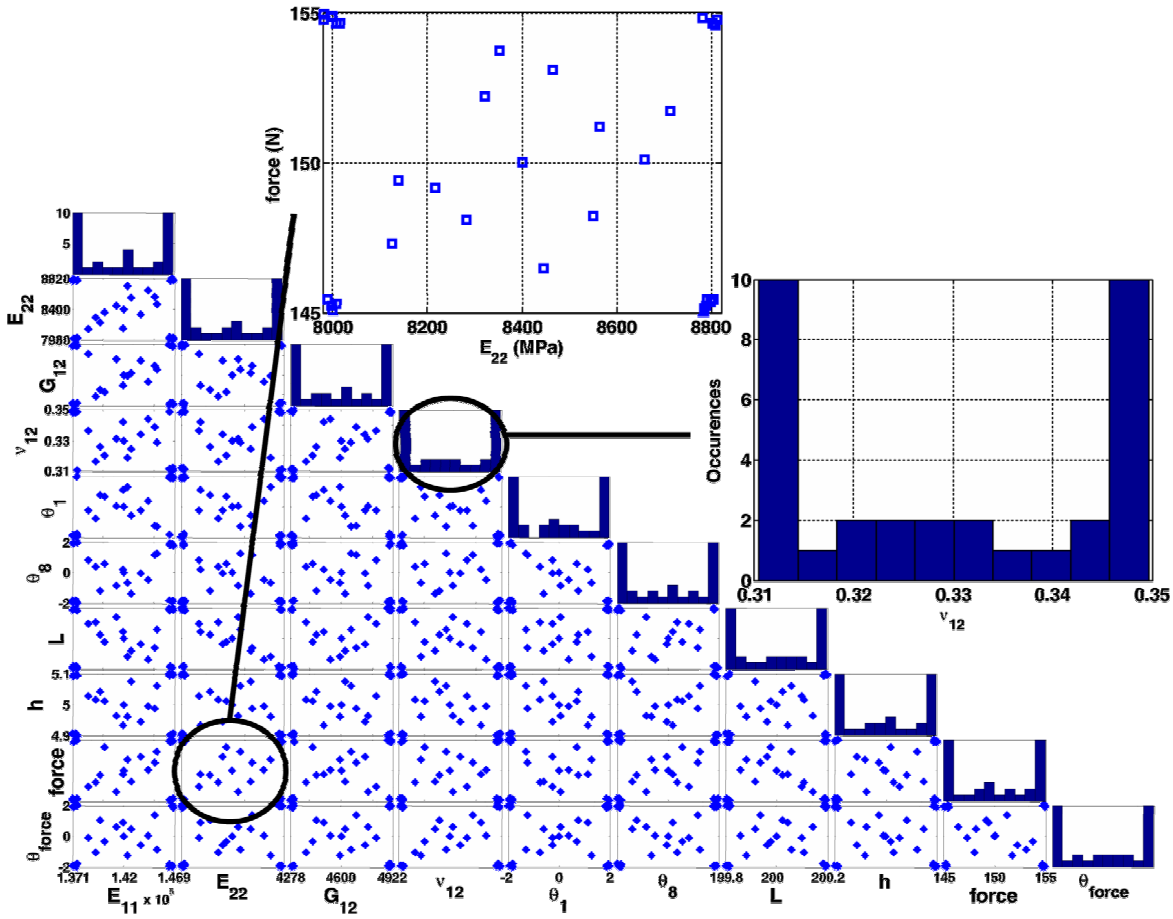


Figure IV-4. Répartition des points d'identification dans l'espace (physique) : exemple de solution pour visualiser tous les plan possibles.

Certains points pouvant sembler très proches les uns des autres (notamment dans les coins du fait des tirages renforcés dans ces zones), il ne faut pas oublier qu'il s'agit d'une impression due à la projection. Du fait de combinaisons de valeurs différentes sur les paramètres incertains autres que les deux du plan de projection, ces points sont en réalité très éloignés les uns des autres. Sur les histogrammes, l'importance accrue donnée aux sommets de l'espace d'incertitude est mise en évidence, ainsi que le poids équivalent donné aux bornes hautes et basses de chaque paramètre.

Les valeurs de la flèche sont ensuite calculées pour l'ensemble des points d'identification, et un métamodèle polynomial de degré un est identifié par régression au sens des moindres carrés.

IV.2.4. Utilisation des réponses du métamodèle aux points d'identification comme premier indicateur de qualité

Aux points d'identification, la confrontation des valeurs données par le processus original avec celles prévues par le métamodèle donne déjà une première estimation de la qualité de celui-ci. En particulier, la détection d'une erreur trop significative dès cette étape implique que le métamodèle est inapproprié. Les étapes de vérification par validation croisée doivent alors être menées dans l'idée précise de rechercher des indices éventuels sur les raisons de ce manque de performance (paramètre prépondérant…).

Le calcul de l'erreur moyenne donne une indication globale de la qualité du métamodèle sur le domaine d'incertitude. Afin de compenser l'effet de lissage dû au passage à la moyenne dans cet indicateur, celui-ci est complété par le calcul sur l'ensemble des points d'identification du maximum de l'erreur absolue. Le but de notre démarche étant d'estimer le plus précisément la variation des réponses considérées sous l'effet des incertitudes, l'erreur commise par notre métamodèle se doit d'être faible par rapport à cette variation. C'est pourquoi il est intéressant de calculer un troisième indicateur, défini par le ratio de l'erreur absolue du métamodèle sur la variation de la réponse observée sur les points d'identification. Le Tableau IV-2 présente les valeurs obtenues pour ces différents indicateurs pour la flèche de la poutre.

	Erreur moyenne $\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(f_{app}^{i}-f_{exact}^{i})^2}$	$max\left\|f_{app}-f_{exact}\right\|$	$100\times max\left(\frac{\left\|f_{app}-f_{exact}\right\|}{\Delta f_{observée}}\right)$
Flèche *f* (déterministe : 2.08 mm)	> 0.01 mm	0.02 mm	2.8%

Tableau IV-2. Pour la réponse flèche de la poutre, valeur des indicateurs de qualité disponible après identification du métamodèle : erreur quadratique moyenne, maximum de l'erreur absolue et maximum de l'erreur absolue ramenée à la variation observée sur la réponse $\Delta f_{observée}$.

Pour cet exemple, le métamodèle défini semble donc d'une qualité tout à fait satisfaisante à la vue des résultats aux points d'identification. Ramenée à la variation observée sur la réponse, l'erreur commise par le métamodèle est ainsi inférieure à 2.8%. La qualité de la métamodélisation proposée peut également être évaluée graphiquement sur le diagramme de dispersion (Figure IV-5).

La bande d'erreur tracée pour ces différents cas est à ±5% de la variation constatée sur la réponse. Elle est notamment à rapprocher du troisième indicateur calculé au Tableau IV-2. Si la valeur de celui-ci excède 5%, sur le diagramme de dispersion un point sera positionné en dehors de cette bande. Sur cet exemple, il apparaît logiquement que tous les points d'identification sont situés dans cette zone qui constitue notre critère d'acceptation.

L'étude de la qualité du métamodèle aux points d'identification donne donc une première idée de la qualité de l'approximation. Si à ce stade les indicateurs calculés sont déjà alarmants, le rejet du métamodèle est certain. Passer à l'étape suivante de notre démarche pourrait alors sembler inutile, mais ce serait oublier que les informations collectées par la suite guident les modifications apportées au métamodèle. Dans le cas présent, les indicateurs sont tous favorables. Toutefois, il est encore trop tôt pour affirmer que les métamodèles sont acceptables. Pour cela, il est nécessaire d'estimer l'erreur commise sur l'ensemble du domaine d'incertitude (c'est-à-dire principalement en dehors des points d'identification). Comme nous l'avons vu au chapitre III, nous utilisons alors les techniques de validation croisée qui fournissent une estimation de l'erreur de généralisation.

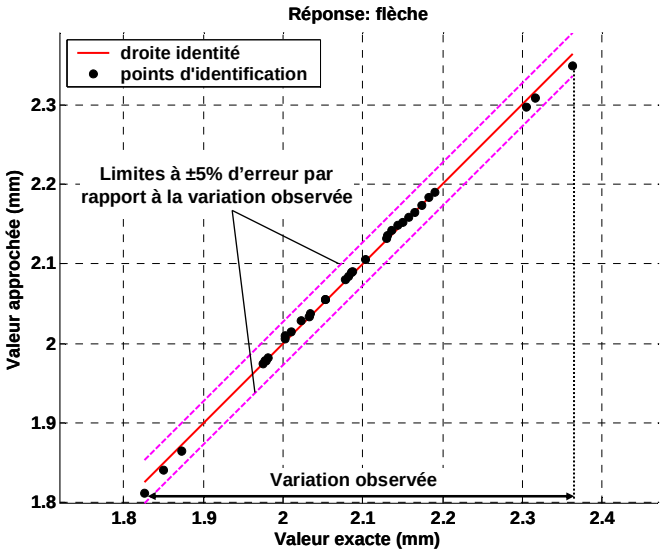


Figure IV-5. Diagramme de dispersion aux points d'identification pour la réponse flèche de la poutre.

IV.2.5. Estimation de la qualité du métamodèle par méthode de validation croisée

Les méthodes de validation croisée (cf. chapitre III) postulent que l'erreur commise sur l'ensemble des points d'identification disponibles par un métamodèle identifié sur un sous-ensemble de ces points, est représentative de l'erreur commise sur le domaine d'étude par le métamodèle identifié au moyen de tous les points d'identification.

Le chapitre précédent a conclu à l'emploi du *leave-k-out*, avec $k=0.1n$. Ici n=33, la méthode est donc utilisée avec k=3.

Une centaine de rééchantillonnages est effectuée, nombre pouvant sembler important, mais en réalité très faible par rapport aux $C_{33}^{3} = 5456$ possibilités. La Figure IV-6 présente, pour la réponse flèche de la poutre, les intervalles de variation obtenus en chaque point d'identification et la bande d'erreur en variations extrêmes qui en est déduite (zone jaune). Celle-ci s'avère tout à fait raisonnable puisqu'elle reste incluse dans la bande du critère d'acceptation délimitée par les lignes pointillées violettes.

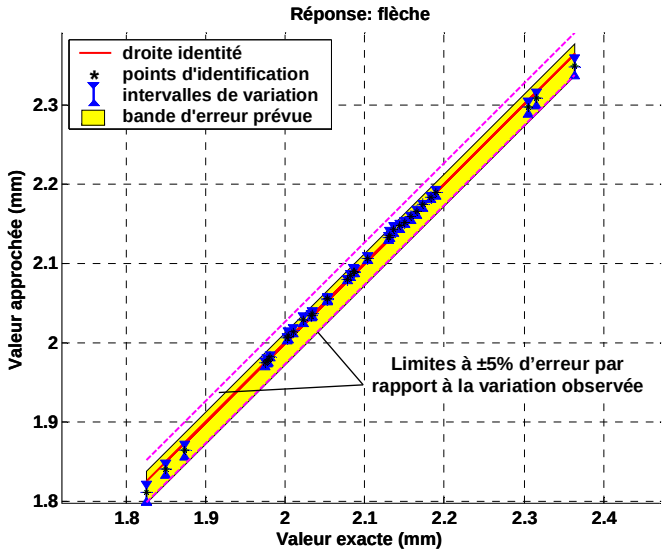


Figure IV-6. Diagramme de dispersion pour la réponse flèche de la poutre avec intervalles de variation aux points d'identification (issus de la phase de leave-3-out) et bande d'erreur déduite (zone jaune).

Outre ces intervalles de confiance, le *leave-3-out* fournit des informations sur la qualité de l'approximation des métamodèles en s'intéressant à la stabilité de leurs coefficients. En effet, plus un métamodèle est proche du processus exact et plus il capte bien les influences des divers paramètres. Ses coefficients vont donc avoir tendance à moins varier si la surface de réponse est identifiée sur des jeux de points différents. En l'occurrence, les jeux de points sont ici obtenus à partir du plan d'expériences initial par la procédure de *leave-3-out*. Pour la réponse flèche de la poutre, la Figure IV-7 présente à la fois l'importance relative de chaque coefficient (cf. chapitre III) et la variation ces coefficients au cours des rééchantillonnages.

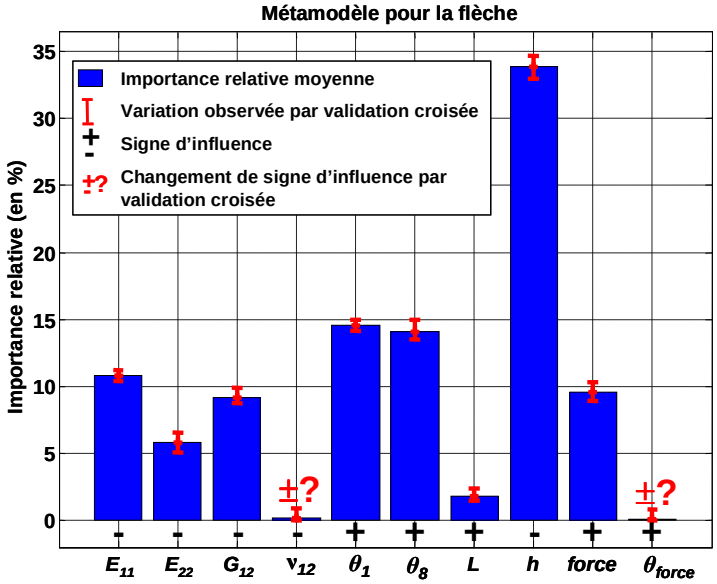


Figure IV-7. Pour le métamodèle approchant la flèche de la poutre, importance relative des coefficients associés aux dix paramètres incertains et amplitude de variation détectée à l'issu des 100 réidentifications par leave-3-out.

Pour être ramenée à l'échelle de l'importance relative, cette variation est divisée par la somme totale des coefficients du métamodèle (en considérant celui identifié sur l'ensemble des points d'identification). Cette variation de valeur du coefficient définie pour nous l'incertitude liée à son identification. Sur l'exemple du métamodèle approchant la flèche de la poutre (Figure IV-7), la stabilité des huit coefficients les plus influents est parfaitement assurée (les variations sont inférieure à ±2% en importance relative). Pour les coefficients associés aux paramètres ν_{12} et θ_{force}, l'amplitude de variation entraîne certes une incertitude sur leur signe d'influence, mais ces paramètres ayant peu d'impact sur la réponse, cela est tout à fait acceptable.

Dans le cas présent, les indicateurs de défaillance mis en place, que ce soit pour estimer l'erreur commise par le métamodèle ou pour estimer sa stabilité, sont ainsi tous au vert. Il n'y a donc aucune raison pour chercher à complexifier l'approximation définie. Sur cet exemple, nous en resterons donc à l'utilisation d'une surface de réponse polynomiale de degré un.

IV.2.6. Exploitation des résultats de la démarche

La construction et la validation des métamodèles achevées, il s'agit maintenant d'extraire les diverses informations sur les réponses caractérisant la propagation des incertitudes au travers du « système » mécanique considéré. Trois catégories d'information nous intéressent : influence des différents paramètres d'entrée, informations statistiques sur les sorties, et enfin valeurs extrêmes pouvant être rencontrées.

IV.2.6.1 Analyse de sensibilité

Pour chaque réponse considérée, la détermination des paramètres incertains d'entrée les plus influents est une information aisée à obtenir dans la démarche mise en place. L'intérêt est notamment de déterminer si l'éventuel processus de contrôle mis en place pour limiter ou évaluer l'incertitude sur un paramètre est adapté à son importance. Pour cela, nous utilisons l'importance relative des différents coefficients. Cet indicateur est présenté sur la Figure IV-7 et permet, sur un cas simple comme celui-ci, de vérifier la cohérence mécanique des résultats obtenus. Par exemple, l'épaisseur de la poutre et la force appliquée apparaissent logiquement comme les deux paramètres les plus influents expliquant à eux deux plus de 45% de la réponse. Leur signe d'influence est également conforme au sens mécanique puisque une augmentation d'épaisseur tend à rigidifier la poutre et donc à diminuer la flèche tandis qu'une augmentation de la force appliquée contribue à l'accentuer. Un résultat moins évident est que les mésalignements des plis extérieurs apparaissent, avec environ 13% d'importance relative chacun, plus influents que les incertitudes sur les modules élastiques E_{11}, E_{22} et G_{12} qui totalisent moins de 25% d'importance relative. Les incertitudes sur les paramètres ν_{12} et θ_{force} apparaissent enfin négligeables.

Sur des exemples plus complexes, il est facile de se rendre compte de l'intérêt de cette démarche qui fournit non seulement une indication qualitative sur l'influence des paramètres incertains mais également des informations quantitatives sur leur importance relative. Ainsi, cette démarche peut être utilisée par exemple pour fixer raisonnablement les tolérances géométriques ou les incertitudes acceptables sur les propriétés matériaux.

IV.2.6.2 Analyse en valeurs extrêmes

L'étude de l'influence des divers paramètres incertains doit bien sûr être reliée à la détermination de l'incertitude sur la réponse considérée. En effet, si cette incertitude est très limitée, ce qui implique que la propagation des incertitudes se fasse dans le sens de la réduction, les paramètres, même les plus influents, n'ont finalement que peu d'importance. La détermination des valeurs extrêmes de la réponse donnant l'amplitude totale d'incertitude sur la réponse est donc une information importante.

Cette recherche des réponses extrêmes peut s'effectuer au travers d'un processus d'optimisation, dont la faisabilité est facilitée par le faible coût de calcul des métamodèles mis en place. Mais, dans le cas présent, où le métamodèle polynomial de degré un dans les paramètres incertains s'est révélé satisfaisant, cette recherche est encore simplifiée. Les valeurs extrêmes de la réponse sont alors données par une combinaison des valeurs extrêmes (minimales ou maximales) des entrées, tenant compte du signe des coefficients du métamodèle, comme indiqué Figure IV-8.

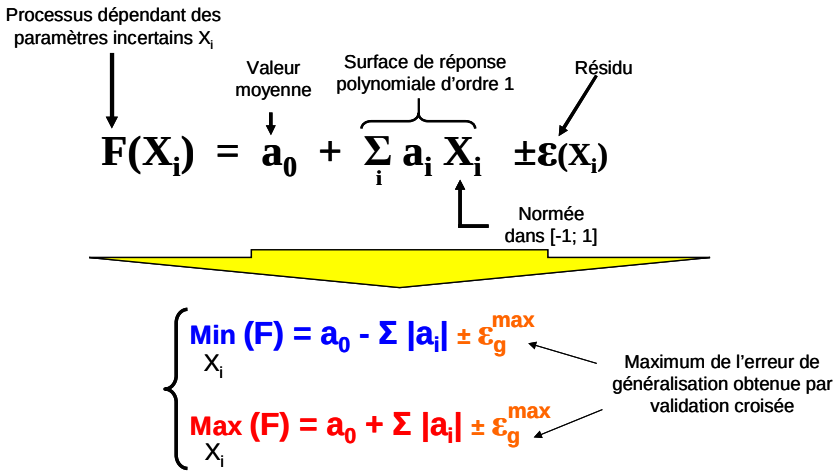


Figure IV-8. Méthode d'obtention des valeurs extrêmes minimales et maximales à partir d'un métamodèle polynomial d'ordre un. Les paramètres incertains sont considérés bornés dans l'espace d'incertitude.

L'application de cette démarche conduit aux résultats du Tableau IV-3. Les deux points (10-uplets) correspondants à ces valeurs extrêmes (minimales et maximales) de la flèche ne faisaient pas partie du jeu d'identification initial. La comparaison entre les valeurs extrêmes prévues par le métamodèle et les valeurs recalculées aux points extrêmes à l'aide du processus original montre une erreur plus importante que celle prévue par la validation croisée. Cela n'est pas surprenant puisque le métamodèle est utilisé ici en extrapolation aux limites du domaine d'incertitude, là où sa qualité se dégrade. Néanmoins en dépit de cette erreur, les points déterminés correspondent bien à des comportements extrêmes ce qui permet d'affirmer que le métamodèle a globalement bien capté la tendance d'influence des divers paramètres.

	Minimum		Maximum	
	métamodèle	recalculé par le processus original	métamodèle	recalculé par le processus original
Flèche (mm)	1.71 [1.68 ; 1.72]	1.74	2.45 [2.42 ; 2.46]	2.48

Tableau IV-3. Valeurs extrêmes de la flèche de la poutre, déterminées à partir de l'analyse du métamodèle et comparaison par rapport aux valeurs données par le processus original.

IV.2.6.3 Analyse statistique des réponses considérées

Outre la détermination de ces cas extrêmes, il est également possible de calculer diverses informations sur la statistique des réponses. La première façon de procéder consiste à utiliser le métamodèle et l'approche par développement en série de Taylor présentée en section II.5 afin de déterminer les valeurs de la moyenne et de l'écart-type. En plus de ces deux premiers moments, d'autres indications statistiques peuvent également être calculées par l'intermédiaire d'une méthode de Monte-Carlo, appliquée au travers des métamodèles définis pour chacune des réponses. Par exemple, il est possible de calculer le skewness et le kurtosis de la distribution de chaque réponse, ainsi que l'intervalle d'incertitude qui lui est associé comme le montre les résultats du Tableau IV-4. Ces intervalles d'incertitudes sont obtenus au moyen des métamodèles réidentifiés lors de la phase de validation croisée.

	Moyenne	Ecart-type	Skewness	Kurtosis
Flèche	2.08 mm *[2.05 ; 2.07]*	0.107 mm *[0.106 ; 0.108]*	-3.3×10^{-3} *[-4.0 ; -2.7] x 10^{-3}*	2.5 *[2.49 ; 2.52]*

Tableau IV-4. Quatre premiers moments statistiques calculés avec leur intervalle d'incertitude au travers du métamodèle (calcul direct pour la moyenne et l'écart-tpe, méthode de Monte-Carlo avec 10^5 tirages pour le skewness et le kurtosis).

Si le but à atteindre est le dimensionnement de la structure, la démarche permet également de déterminer les valeurs A ou B de la réponse considérée. Les résultats pour la flèche de la poutre sont présentés dans le Tableau IV-5.

	valeur A- de la réponse	valeur A+ de la réponse	valeur B- de la réponse	valeur B+ de la réponse
Flèche (mm)	1.88 *± 0.07*	2.28 *± 0.06*	1.96 *± 0.07*	2.20 *± 0.03*

Tableau IV-5. Détermination au moyen de la démarche par métamodèle des valeurs caractéristiques pour le dimensionnement en valeur A pour la réponse flèche de la poutre.

Enfin, il est possible de s'intéresser à la façon dont les modifications de la répartition statistique des paramètres d'entrée peuvent affecter la réponse étudiée en sortie du métamodèle. Le Tableau IV-6 présente par exemple les résultats obtenus sur la moyenne des deux réponses considérées, en supposant les moyennes des paramètres d'entrées positionnées de différentes façons dans l'intervalle d'incertitude. Contrairement à d'autres approches intégrant dés le départ les caractéristiques statistiques des paramètres, la démarche mise en place permet donc d'estimer aisément comment des indicateurs statistiques (comme la moyenne) sont affectés par un changement des hypothèses sur les entrées. Il serait possible d'aller encore plus loin en examinant l'impact d'autres types de distributions statistiques. La rapidité d'exécution du métamodèle permet à ce stade de s'intéresser à une multitude de situations.

Moyenne des paramètres par rapport au centre de l'intervalle d'incertitude	Centrée	Décentrée de -25%	Décentrée de -10%	Décentrée de 10%	Décentrée de 25%
flèche moyenne et son intervalle de confiance	2.08 mm	2.12 mm	2.09 mm	2.07 mm	2.04 mm
	[-0.03 ; +0.01] mm				

Tableau IV-6. Flèches moyennes de la poutre déterminées par analyse du métamodèle, pour différentes hypothèses de position des moyennes des paramètres dans leur intervalle d'incertitude.

IV.2.7. Confrontation des résultats avec ceux issus d'une méthode de Monte-Carlo

Ce chapitre visant à valider toute la démarche mise en place, un tirage de Monte-Carlo avec cent mille points est réalisé, afin de tester la qualité des bandes de confiance obtenues par validation croisée. La Figure IV-9 confronte ainsi, sur le diagramme de dispersion, les valeurs de ces 10^5 points calculés avec le processus exact à la bande d'erreur définie par le *leave-3-out* sur le métamodèle (identifié à partir des 33 évaluations du processus).

La méthode que nous avons mise en place conduit à un très bon résultat puisque l'amplitude de dispersion des 10^5 tirages de Monte-Carlo est quasi-identique à l'amplitude de la bande d'erreur du *leave-3-out*. La confiance qui peut être accordée au métamodèle a donc été bien estimée. Le Tableau IV-7 compare les valeurs des indicateurs statistiques calculées au travers du métamodèle ou par une méthode de Monte-Carlo sur le processus exact. Mis à part pour le skewness, les résultats sont en bon accord. Les incertitudes affichées sur les valeurs obtenues au travers du métamodèle traduisent l'incertitude liée à l'approximation introduite par celui-ci alors que les incertitudes affichées sur les valeurs obtenues au travers du processus exact traduisent l'incertitude liée au nombre de tirage de Monte-Carlo.

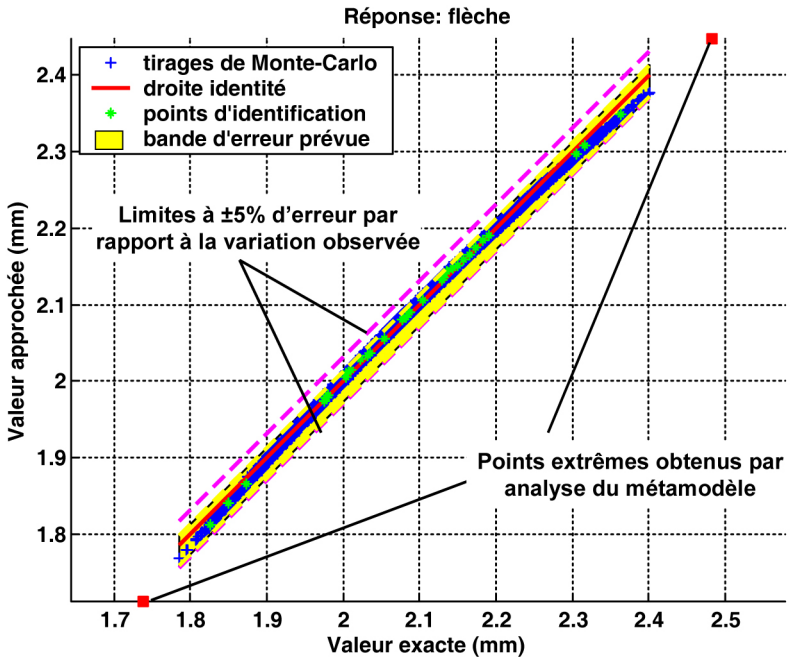


Figure IV-9. Pour la réponse flèche de la poutre, comparaison entre la zone de doute obtenue par le leave-3-out et celle définie par 10^5 tirages de Monte-Carlo.

	Obtenus à partir du métamodèle	Tirages de Monte-Carlo sur le processus exact		
		10^3 tirages	10^4 tirages	10^5 tirages
Moyenne (mm)	2.08 *[2.05 ; 2.07]*	2.08 *± 0.007*	2.08 *± 0.003*	2.08 *± 0.001*
Ecart-type (mm)	0.107 *[0.106 ; 0.108]*	0.091 *± 0.005*	0.093 *± 0.002*	0.093 *± 5 x 10^{-4}*
Skewness	-3.3 x 10^{-3} *[-4.0 ; -2.7] x 10^{-3}*	0.116 *± 0.179*	0.093 *± 0.041*	0.105 *± 0.015*
Kurtosis	2.5 *[2.49 ; 2.52]*	2.497 *± 0.227*	2.504 *± 0.074*	2.528 *± 0.024*

Tableau IV-7. Par la méthode de Monte-Carlo sur le processus original de la réponse flèche de la poutre, valeur et intervalle d'incertitude donné par bootstrap (avec 100 rééchantillonnages) pour divers indicateurs statistiques en fonction du nombre de tirages. Les valeurs obtenues à partir du seul métamodèle sont rappelées dans la première colonne.

IV.2.8. Etude « probabiliste » de la rupture

Outre les indicateurs macroscopiques comme la flèche caractérisant le comportement d'ensemble de la poutre, il est également possible de s'intéresser à des indicateurs plus locaux. C'est pourquoi j'ai choisi dans un second temps d'étudier l'état de contraintes (σ_{11}, σ_{22} et σ_{12}) dans les huit différents plis de la stratification. La force appliquée est augmentée avec F=205N en conservant ΔF=±5N. A partir d'un nouveau jeu de 33 points d'identification, 3x8=24 nouvelles surfaces de réponse (polynomiales de degré un) sont identifiées. Suivant le déroulement de la démarche mise en place, la confiance pouvant raisonnablement être accordée à ces métamodèles et leur stabilité sont estimées par *leave-3-out* (avec cent rééchantillonnages). Cette phase de vérification conduit aux Figure IV-10 et Figure IV-11 présentant respectivement les diagrammes de dispersion aux points d'identification et l'importance relative des paramètres pour les douze métamodèles décrivant les trois contraintes dans les quatre plis extérieurs (pli 1, 2, 7 et 8). La Figure IV-10 met en évidence l'erreur limitée de ces métamodèles. La bande d'erreur (zone jaune) prévue par validation croisée est ainsi systématiquement à l'intérieur de la bande d'erreur souhaitée (à ±5% de la variation observée). La stabilité des coefficients de ces métamodèles (présentée Figure IV-11) est également bonne. L'importance relative des paramètres incertains qui est affichée sur cette même figure montre des similitudes entre les plis 1 et 8 et entre les plis 2 et 7. Cela est tout à fait conforme au sens mécanique puisque ces plis présentent la même orientation (à une incertitude près pour les plis 1 et 8). Les signes d'influence opposés constatés pour les paramètres élastiques par exemple s'expliquent parfaitement par le signe opposé présenté par les contraintes (partie inférieure de la poutre en compression et partie supérieure en traction). Diverses autres constatations (E_{22} plus influent que E_{11} pour les approximations de σ_{22}, désorientation θ_1 sur l'orientation du pli 1 plus influente que θ_8 pour l'approximation des contraintes dans le pli 1) confirment encore cette cohérence vis-à-vis du sens mécanique qui montre que les métamodèles ont bien saisi les tendances d'influence générales des paramètres incertains.

La phase de vérification ne donnant aucune raison de rejeter les métamodèles définis, nous en restons une nouvelle fois à l'utilisation de surfaces de réponse polynomiale de degré un.

A partir de ces résultats, l'analyse mécanique a été poussée plus avant afin de s'intéresser à la rupture de la poutre. La Figure IV-12 présente dans l'espace des contraintes (σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}) à la fois l'enveloppe du critère de Tsai-Wu (défini à partir des propriétés moyennes du Tableau IV-8) et la position de l'état de contrainte dans les différents plis, en tenant compte de l'incertitude due aux variations des dix paramètres étudiés. Les plis 7 et 8 paraissent les plus proches de la rupture.

	X_t (σ_{11t})	Y_t (σ_{22t})	X_c (σ_{11c})	Y_c (σ_{22c})	S_t (σ_{12})
Moyenne (MPa)	2282	64,7	1409	260	97
Ecart-type (MPa)	78	4,0	69	6,8	4,0

Tableau IV-8. Propriétés à rupture et dispersion expérimentale constatée exprimée en écart-type.

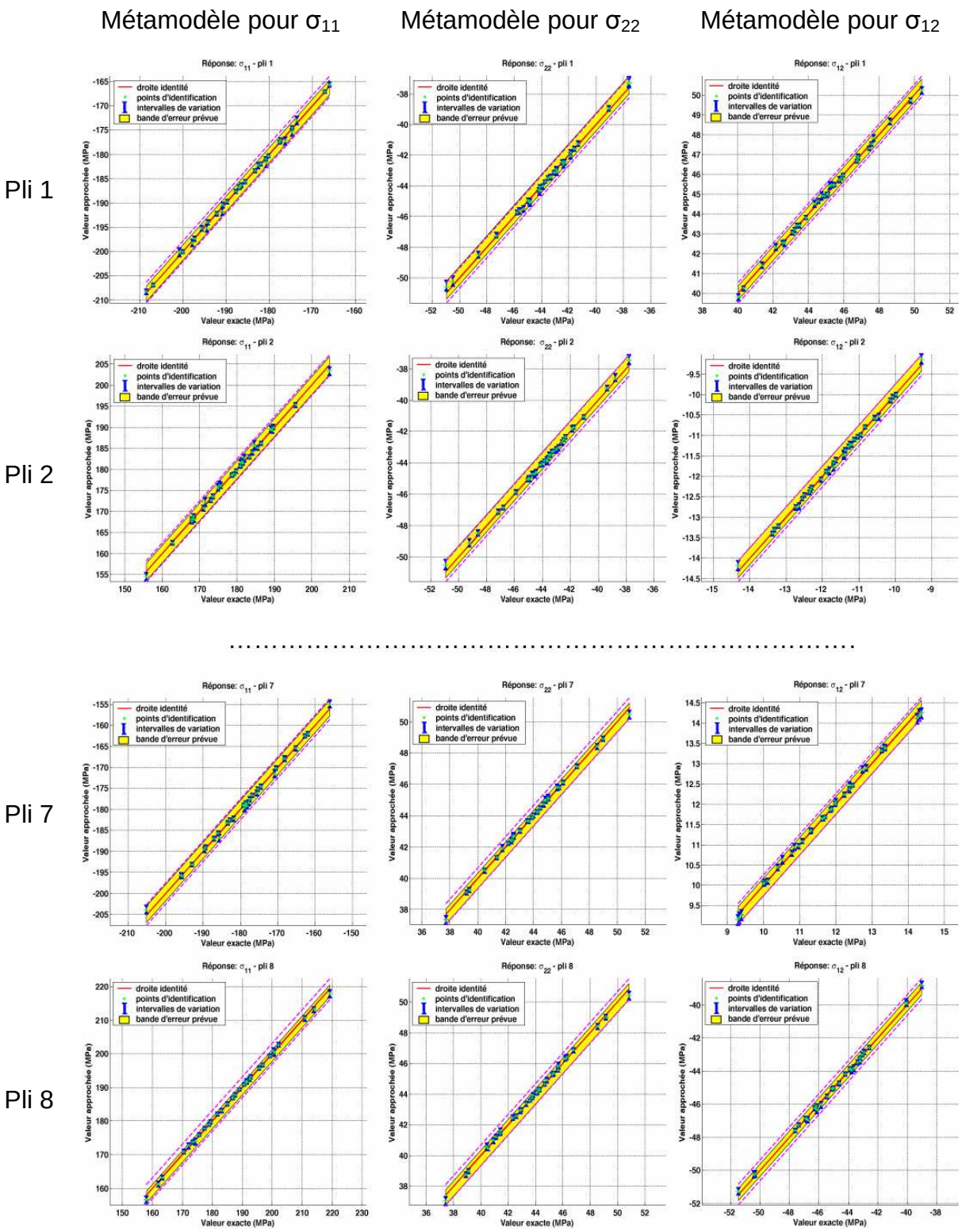


Figure IV-10. Diagrammes de dispersion avec bande d'erreur estimée par validation croisée (leave-3-out avec 100 rééchantillonnages) pour les métamodèles approchant les contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{12} dans les différents plis de la stratification. Les métamodèles pour les plis internes (3, 4, 5 et 6) sont calculés mais non représentés.

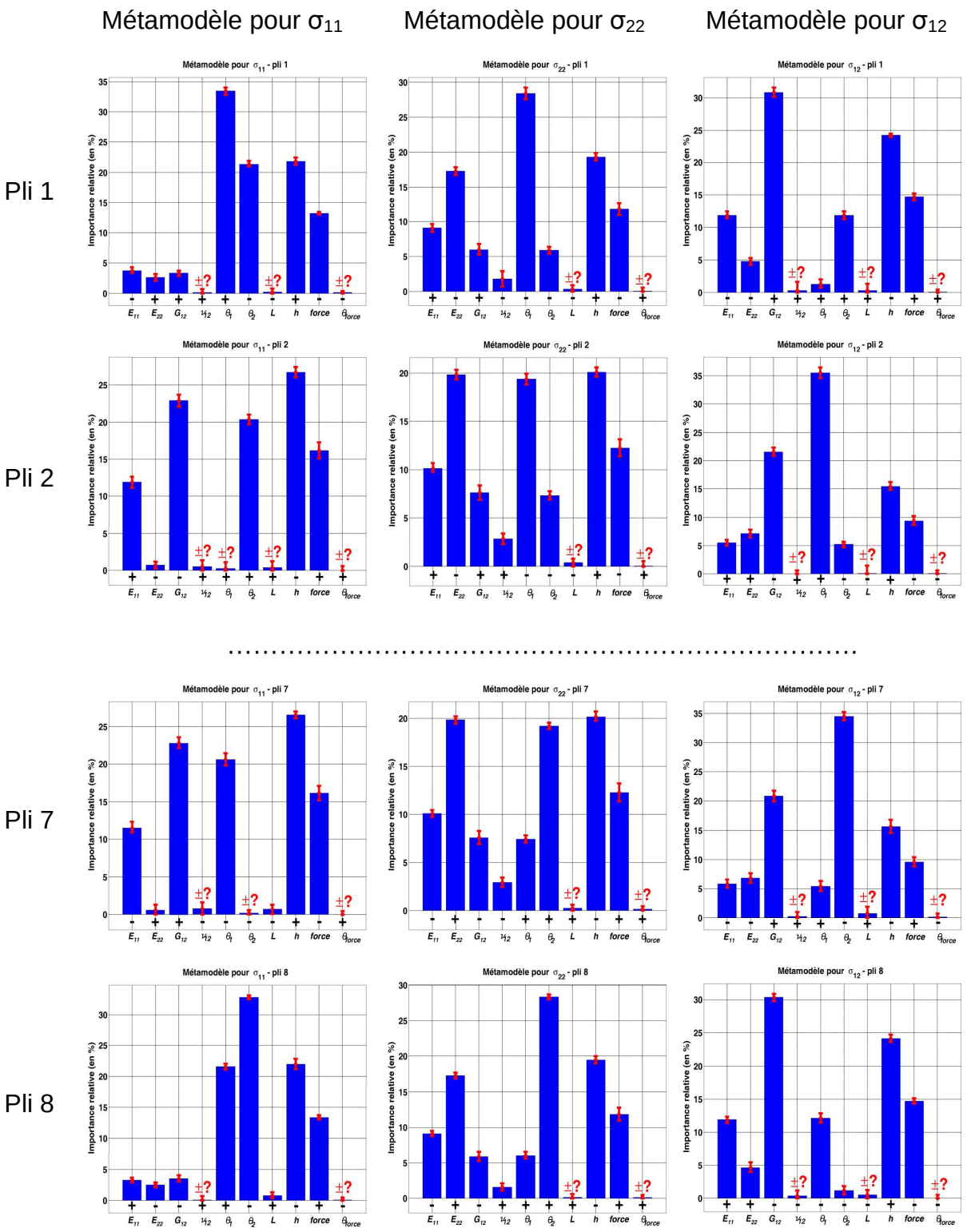


Figure IV-11. Importance relative et stabilité des coefficients pour les métamodèles approchant les contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{12} dans les différents plis de la stratification. Les informations concernant les métamodèles pour les plis internes (3, 4, 5 et 6) sont calculés mais non représentées.

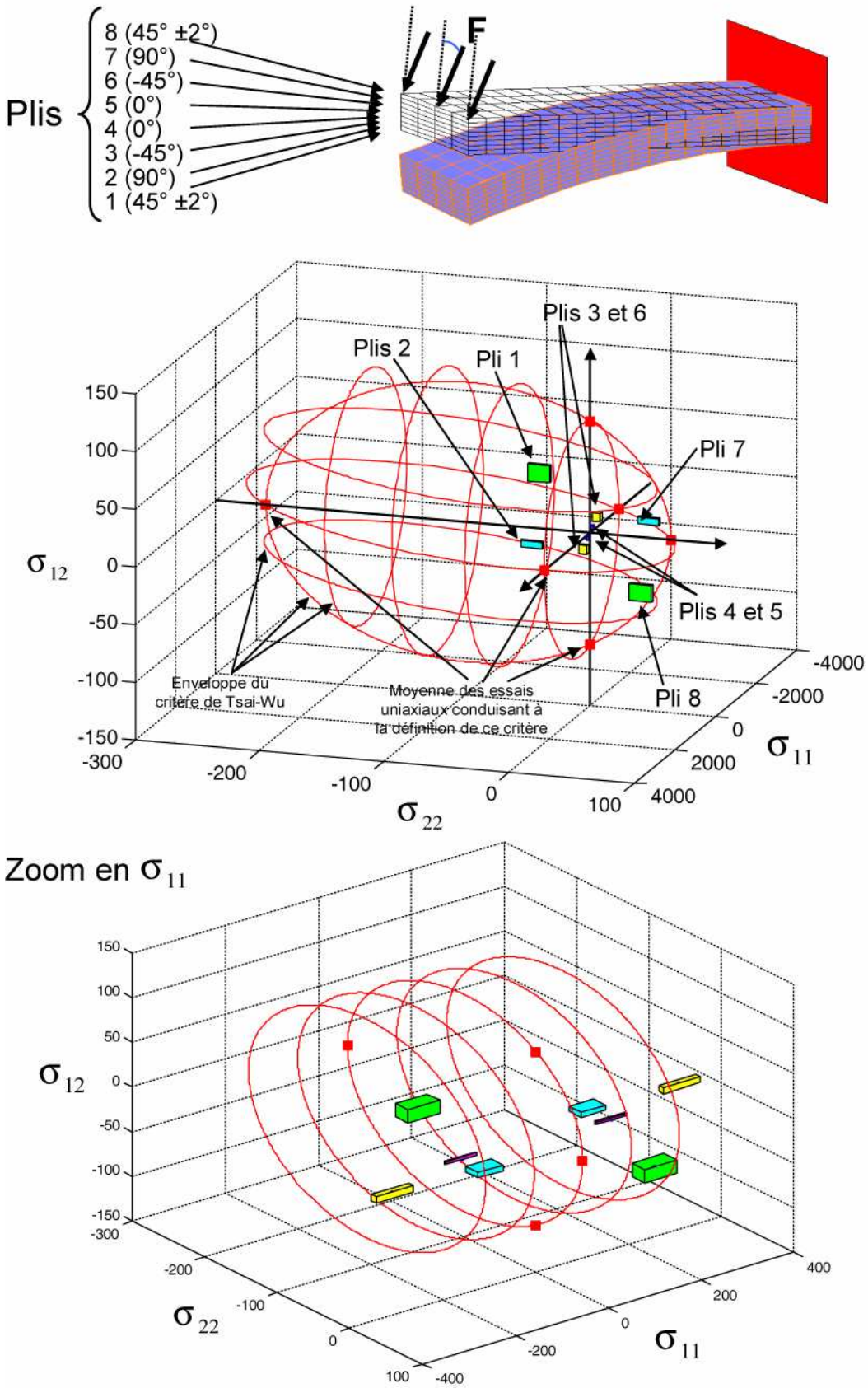


Figure IV-12. Enveloppe du critère de rupture de Tsai-Wu (défini à partir des propriétés moyennes du Tableau IV-8) et position des valeurs de contraintes dans les différents plis avec l'incertitude associée aux variations des dix paramètres incertains considérés.

Une figure comme la Figure IV-12 n'est toutefois pas adaptée à une véritable analyse de la rupture, en particulier si le caractère probabiliste de la défaillance doit être pris en compte. C'est pourquoi, j'ai adopté la démarche dont la Figure IV-13 résume le fonctionnement. Cette démarche est assez similaire à celle employée dans ([Guillaumat, 06]) pour l'étude de la rupture en bord de trous dans des composites stratifiés. A partir des états de contraintes dans les différents plis fournis par les métamodèles, le critère de rupture de Tsai-Wu est calculé en tirant aléatoirement les propriétés à rupture. La répétition de ce cheminement pour un grand nombre de tirages de Monte-carlo permet d'obtenir une estimation de la probabilité de rupture. Afin d'estimer l'incertitude sur cette probabilité de rupture, des rééchantillonnages des tirages de Monte-Carlo peuvent ensuite être effectués (*bootstrap*). Dans cette démarche, les propriétés de comportement sont supposées décorrélées des propriétés à rupture. Cela n'est pas si évident car il est par exemple possible pour des propriétés élastiques « hautes » d'être plus ou moins corrélées à des propriétés à rupture hautes (notamment si toutes les deux sont liées à une fraction volumique de fibres élevée). Notons que cette approche n'est qu'un premier pas vers la fiabilité. Le cas test présenté ici a été traité dans une optique fiabiliste par l'équipe du LMARC Besançon dans le cadre du PEA Americo.

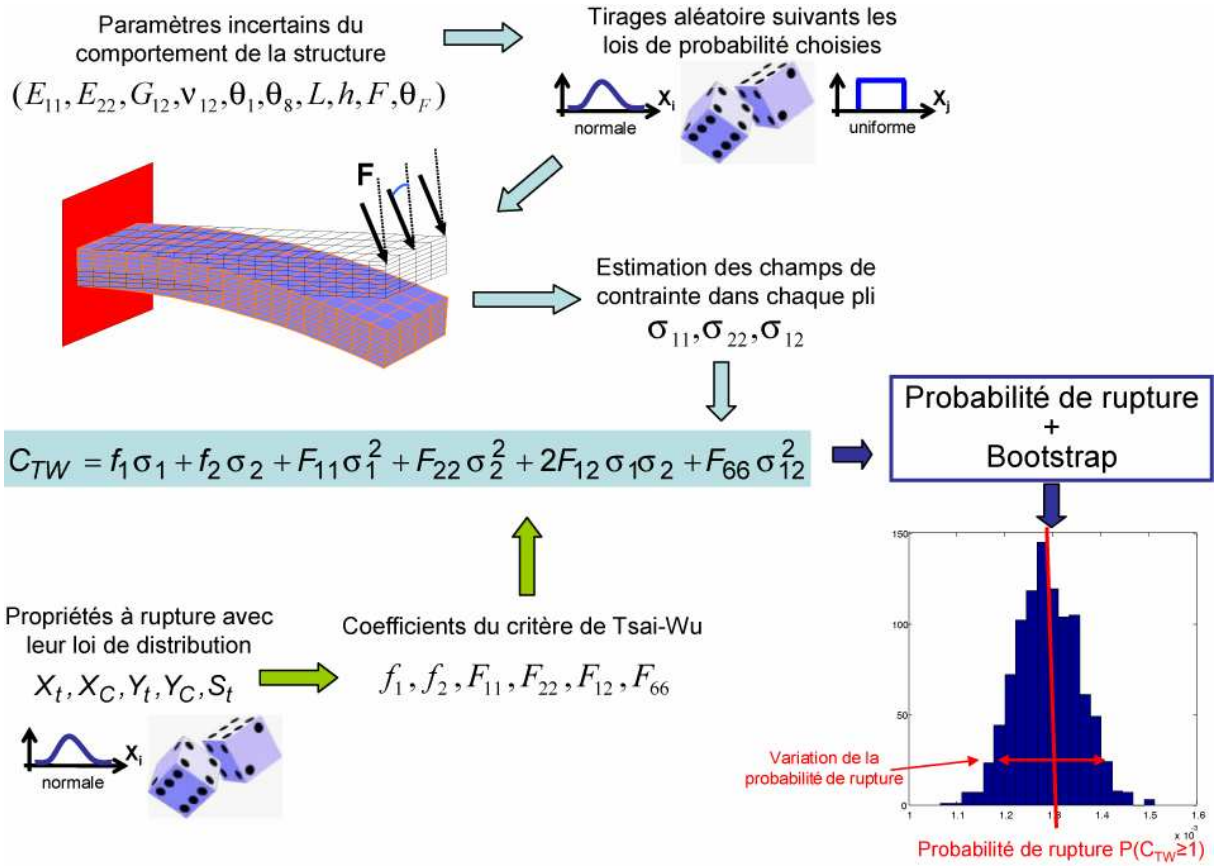


Figure IV-13. Principe de la démarche d'étude probabiliste de la rupture mise en place à partir des métamodèles définis précédemment.

IV.2.8.1 Comparaison Monte-Carlo direct / Monte-Carlo sur métamodèle

Afin de valider notre démarche, 3×10^5 tirages de Monte-Carlo sont effectués et les calculs sont ensuite réalisés avec le processus exact. Cela fournit donc 3×10^5 états de contrainte $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$ dans chacun des huit plis. Pour chacun des 3×10^5 tirages, un tirage des propriétés à rupture du matériau est effectué afin de déterminer les

coefficients correspondants du critère de Tsai-Wu. Une évaluation de la rupture est alors effectuée à partir des états de contrainte et de ces coefficients du critère.

Dans un deuxième temps, la même façon de procéder est appliquée en remplaçant le processus initial par les métamodèles (un métamodèle par contrainte et par pli).

Les résultats montrent que seuls les plis 7 et 8 peuvent casser (la rupture des autres plis arrivant bien après ces deux plis). Le Tableau IV-9 met en évidence des résultats identiques sur le premier chiffre significatif entre l'utilisation des métamodèles et du processus exact.

	Probabilité de rupture du pli 7	Probabilité de rupture du pli 8	Pli le plus critique
MC directe Distribution **uniforme** pour les paramètres de **comportement** de la structure Distribution **normale** pour les propriétés à **rupture** du matériau	2.27×10^{-4} $\pm 0.3 \times 10^{-4}$	1.52×10^{-3} $\pm 0.15 \times 10^{-3}$	Pli 7 : 14.9 % Pli 8 : 85.1 %
Par les méta-modèles Distribution **uniforme** pour les paramètres de **comportement** de la structure Distribution **normale** pour les propriétés à **rupture** du matériau	2.5×10^{-4} $\pm 0.3 \times 10^{-4}$	1.29×10^{-3} $\pm 0.15 \times 10^{-3}$	Pli 7 : 15 % Pli 8 : 85 %
MC directe Distribution **uniforme** pour les paramètres de **comportement** de la structure Distribution **uniforme** pour les propriétés à **rupture** du matériau	$< 10^{-5}$	0.84×10^{-3} $\pm 0.1 \times 10^{-3}$	Pli 7 : 17.2 % Pli 8 : 82.8 %
Par les méta-modèles Distribution **uniforme** pour les paramètres de **comportement** de la structure Distribution **uniforme** pour les propriétés à **rupture** du matériau	$< 10^{-5}$	0.71×10^{-3} $\pm 0.1 \times 10^{-3}$	Pli 7 : 17.4 % Pli 8 : 82.6 %

Tableau IV-9. Estimation par Monte-Carlo direct et au travers des métamodèles des probabilités de rupture pour les plis 7 et 8 les plus critiques. La dernière colonne présente les pourcentages respectifs de 1ère rupture pour ces deux plis. Deux hypothèses sont comparées : distribution uniformes pour les paramètres de comportement de la structure et normale pour les propriétés à rupture, ou distribution uniforme pour ces deux types de paramètres.

Les incertitudes données sur les probabilités de rupture ont été obtenues par *bootstrap* (Figure IV-14) et se révèlent identiques pour les deux façons de procéder (processus exact et métamodèles). Ces incertitudes sont d'ailleurs faibles puisqu'elles ne portent que sur le deuxième chiffre significatif. Les résultats du Tableau IV-9 montrent également l'influence du type de distribution appliqué aux paramètres d'entrée.

Deux situations différentes ont été examinées :

- distribution uniforme pour les paramètres de comportement (les dix paramètres incertains initiaux) et normale pour les propriétés à rupture ;
- distribution uniforme pour les paramètres de comportement et les propriétés à rupture.

Un tel changement affecte la probabilité de rupture d'un facteur deux (passage de 1.5×10^{-3} à 8.4×10^{-4} pour la probabilité de rupture du pli 8). La façon dont la première rupture se répartie entre les plis 7 et 8 est par contre faiblement affectée par ces changements.

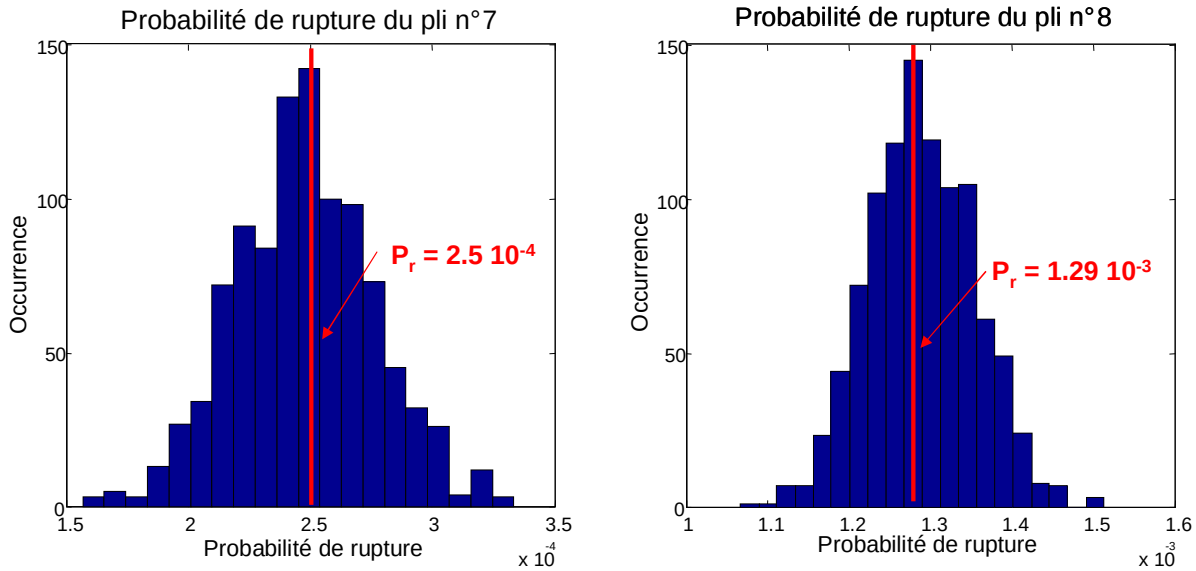


Figure IV-14. Incertitude sur la probabilité de rupture des plis 7 et 8. Ces histogrammes sont obtenus par bootstrap (avec 1000 rééchantillonnages) sur une base de 3.10^5 tirages de Monte-Carlo.

IV.2.8.2 Effet du choix des distributions des entrées sur la probabilité de rupture

Comme à travers les métamodèles, il est possible d'obtenir une estimation très rapide de la probabilité de rupture, nous avons décidé d'analyser plus précisément les effets du choix des distributions statistiques. La distinction porte comme précédemment sur le type de distribution appliqué d'une part aux paramètres du comportement (comportement matériau, géométrie et chargement) et d'autre part aux propriétés à rupture. La Figure IV-15 montre les deux types de distributions normalisées utilisées. Le Tableau IV-10 donne l'estimation à travers les métamodèles, des probabilités de rupture en changeant les distributions (normale ou uniforme). Les incertitudes données sur les probabilités de rupture ont cette fois été obtenues en utilisant les différents métamodèles fournis par la phase de validation croisée (100 rééchantillonnages par *leave-3-out*) et traduisant donc l'erreur liée au métamodèle (et non l'erreur liée au nombre limité de tirage de Monte-Carlo comme dans le Tableau IV-9.

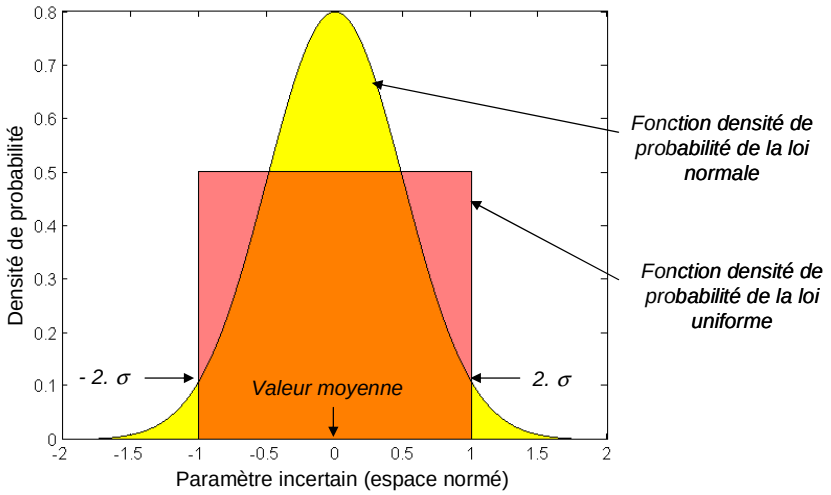


Figure IV-15. Comparaison d'une distribution uniforme (à support dans [-1,1]) et d'une distribution normale de moyenne nulle et d'écart-type 0.5. (Le domaine [-1,1] correspond à l'espace normé pour les paramètres incertains).

Par les méta-modèles	Probabilité de rupture du pli 7	Probabilité de rupture du pli 8	Pli le plus critique
Distribution normale **pour les paramètres de** comportement **de la structure** **Distribution** normale **pour les propriétés à** rupture **du matériau**	1.6×10^{-4} $\pm 0.1 \times 10^{-4}$	0.84×10^{-3} $\pm 0.03 \times 10^{-3}$	Pli 7 : 13.2 % Pli 8 : 86.8 %
Distribution uniforme **pour les paramètres de** comportement **de la structure** **Distribution** normale **pour les propriétés à** rupture **du matériau**	2.36×10^{-4} $\pm 0.15 \times 10^{-4}$	1.31×10^{-3} $\pm 0.05 \times 10^{-3}$	Pli 7 : 15.0 % Pli 8 : 80.0 %
Distribution normale **pour les paramètres de** comportement **de la structure** **Distribution** uniforme **pour les propriétés à** rupture **du matériau**	$< 10^{-5}$	0.35×10^{-3} $\pm 0.03 \times 10^{-3}$	Pli 7 : 16.1 % Pli 8 : 83.9 %
Distribution uniforme **pour les paramètres de** comportement **de la structure** **Distribution** uniforme **pour les propriétés à** rupture **du matériau**	$< 10^{-5}$	0.7×10^{-3} $\pm 0.05 \times 10^{-3}$	Pli 7 : 17.4 % Pli 8 : 82.6 %

Tableau IV-10. Par méthode de Monte-Carlo au travers du métamodèle (avec 3.10^5 tirages), mise en évidence de l'influence des distributions choisies sur les paramètres d'entrée (paramètres du comportement et propriétés à rupture) au moyen de quatre cas différents : distribution uniforme ou normale sur les deux types de paramètres, distribution uniforme pour les paramètres de comportement et normale pour les propriétés à rupture, et inversement.

IV.3. Exemple de stratégies de résolution pour diverses situations potentiellement problématiques.

Nous allons maintenant examiner diverses situations pouvant a priori présenter plus de difficultés et nécessiter de pousser plus loin le fonctionnement de la stratégie mise en place. La validation de la démarche est poursuivie en confrontant les résultats obtenus à ceux de simulations de Monte-Carlo réalisées au travers du processus exact.

IV.3.1. Grand nombre de variables présentant chacune une faible incertitude

Par rapport au premier cas examiné, un des points potentiellement problématique est la prise en compte d'un grand nombre de variables incertaines. Cet aspect est particulièrement important dans l'étude des composites dont la caractérisation peut rapidement mettre en œuvre un grand nombre de paramètres. Afin d'illustrer cette situation, nous reprenons l'étude de notre premier générateur d'exemples. Afin d'augmenter le nombre de paramètres incertains, nous considérons une stratification à quarante plis dont les angles et les épaisseurs sont incertains. Les propriétés élastiques de chaque pli sont prises indépendantes ce qui augmente également le nombre de paramètres incertains. Les intervalles d'incertitude des divers paramètres, au nombre de 243, sont précisés dans le Tableau IV-11.

Paramètres incertains		Valeur moyenne	Fluctuation	Amplitude d'incertitude
E_{11} *pli k*	x 40	112.00 GPa	± 3.36 GPa	± 3%
E_{22} *pli k*	x 40	8000 MPa	± 240 MPa	± 3%
G_{12} *pli k*	x 40	4500 MPa	± 135 MPa	± 3%
ν_{12} *pli k*	x 40	0.28	± 0.0084	± 3%
θ_k	x 40	dépend de la position *k* dans l'empilement	± 3°	± 3.3% [a]
ep_k	x 40	0.200 mm	± 0.006 mm	± 3%
L	x 1	200.0 mm	± 1mm	± 0.5%
F	x 1	500.0 N	± 15N	±3%
θ_{force}	x 1	0°	± 3°	± 3.3% [a]
Total :	243 paramètres			

Tableau IV-11. Paramètres incertains et incertitude associée pour l'étude du premier cas ([a] amplitude d'incertitude en pourcent par rapport à 90°).

Notre stratégie nécessitant $3x(n+1)$ points d'identifications, cela implique ici de réaliser 732 calculs du processus original. Après avoir identifier le métamodèle correspondant à la flèche de la poutre, la phase de validation croisée donne les résultats de la Figure IV-16. La qualité d'approximation obtenue est tout à fait satisfaisante puisque les critères d'acceptation sont vérifiés, en particulier celui de

l'erreur inférieure à ±5% de la variation observée Le nombre important de paramètres n'apparaît donc pas ici comme un élément pénalisant.

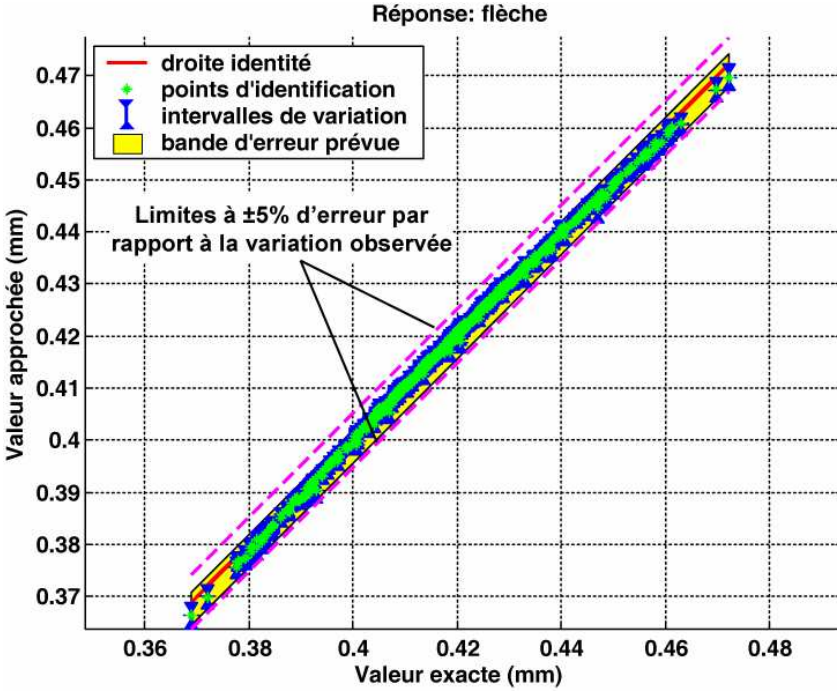


Figure IV-16. Diagramme de dispersion et intervalles de variation des réponses aux points d'identification obtenus par un leave-73-out à 100 rééchantillonnages pour le métamodèle décrivant la flèche de la poutre.

La vérification au moyen de 10^5 tirages de Monte-Carlo confirme ces résultats comme le montre la Figure IV-17. Celle-ci met également en lumière un résultat important, à rapprocher de l'annexe 2 sur les espaces à grande dimension : les tirages de Monte-Carlo, même avec 10^5 points, ne parviennent pas à se rapprocher des valeurs extrêmes, contrairement à notre méthode. L'interprétation probabiliste est bien sûr que les cas détectés sont de probabilité très faible. La conséquence sur l'amplitude de variation détectée sur la réponse peut être importante (plus d'un facteur deux) comme l'indique le Tableau IV-12.

	Par analyse du métamodèle	Méthode de Monte-Carlo
Valeurs extrêmes prévues *(et amplitude de variation Δ)*	[0.32 ; 0.51] mm *Δ= 0.19 mm*	[0.38 ; 0.46] mm *Δ= 0.08 mm*

Tableau IV-12. Pour la flèche de la poutre, valeurs extrêmes et amplitude de variation détectées suivant que la méthode employée est une analyse du métamodèle ou une simulation de Monte-Carlo (ici avec 10^5 tirages).

Par ailleurs, même sur un cas comportant autant de paramètres incertains il est possible de déterminer les paramètres les plus influents, comme le montre la Figure IV-18. Dans le cas présent, les trois paramètres les plus influents que sont la force, la longueur de la poutre et le module E_{11} du pli supérieur (pli 40) contribue pour plus de 30% à la variation de la réponse. Cette proportion monte à 50% avec les dix paramètres les plus influents, puis à 98% avec les 90 paramètres prépondérants. Sur cet exemple, la conclusion qui peut être tirée est finalement que 153 paramètres sur les 243 étudiés ont une influence négligeable et pourraient être omis.

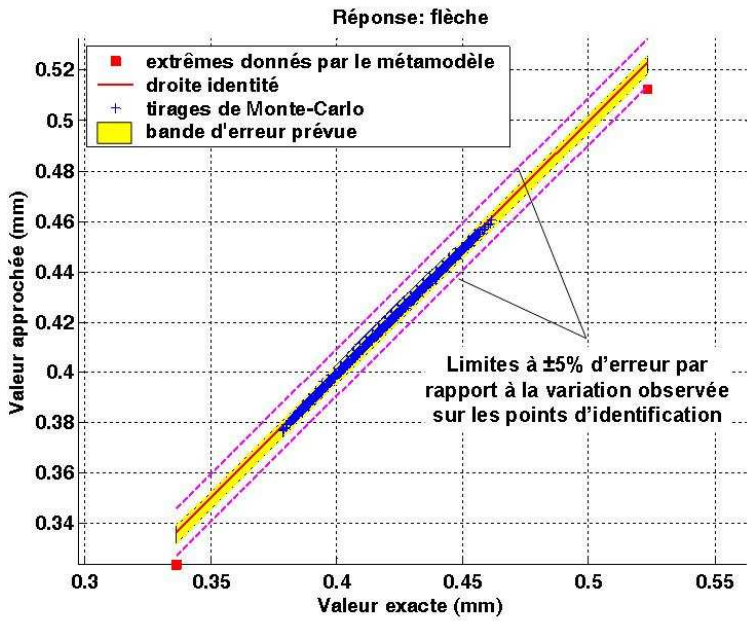


Figure IV-17. Pour la réponse flèche de la poutre, diagramme de dispersion des 10^5 tirages de Monte-Carlo et comparaison par rapport à la bande d'erreur prévue par la validation croisée.

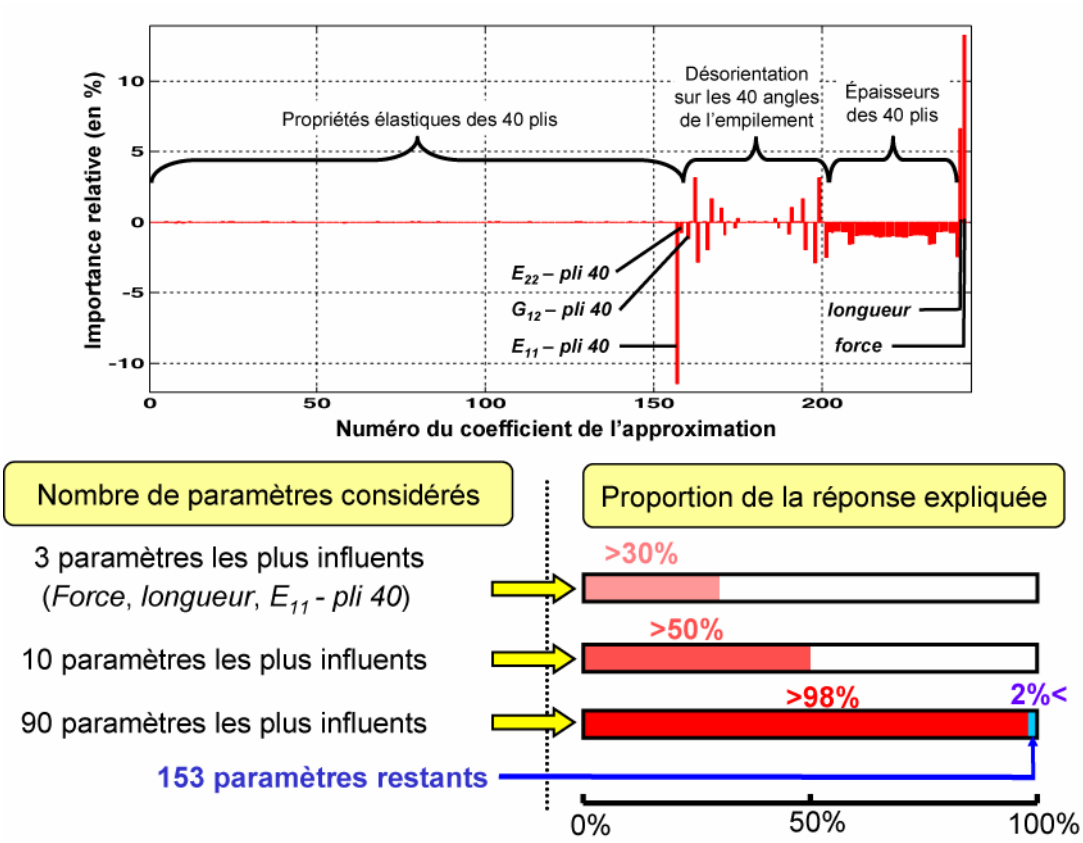


Figure IV-18. Exemple d'exploitation du métamodèle pour la détermination des paramètres les plus influents.

IV.3.2. Nombre réduit de variables présentant chacune une forte incertitude

L'exemple de la poutre composite en flexion est une ici fois repris pour étudier la situation d'un nombre réduit de variables présentant chacune une forte incertitude. Ce cas est normalement à la limite des possibilités de la démarche mise en place. Cette fois, la poutre est considérée constituée de huit plis d'épaisseur 0.5 mm, pour une longueur de 200 mm et une largeur de 20 mm, avec un empilement devant vérifier $[0°\,45°\,90°\,\text{-}45°]_S$. Les modules d'élasticité longitudinal et transverse des plis ont pour valeur respectivement E_{11}=112 GPa et E_{22}=8 GPa. Comme l'indique le Tableau IV-13, le problème comporte six paramètres incertains : le module de cisaillement G_{12} des plis, le coefficient de Poisson ν_{12} des plis, les désorientations θ_1 et θ_8 sur les plis extérieurs et enfin les épaisseurs e_1 et e_8 de ces mêmes plis. Les amplitudes d'incertitudes appliquées excèdent toutes 10%. De tels niveaux d'incertitudes sont utilisés pour les besoins de la démonstration bien qu'ils soient peu réalistes. Les réponses considérées en sortie de ce problème sont la raideur de la poutre et les critères de rupture en contrainte maximale dans les différents plis. A partir de ces critères de rupture par pli, la force à rupture de la poutre est reconstruite en prenant un critère de première rupture de pli.

Paramètres incertains		Valeur moyenne	Fluctuation	Amplitude d'incertitude
G_{12}	x 1	4000 MPa	± 1200 MPa	± 30%
ν_{12}	x 1	0.28	± 0.05	± 17.9 %
désorientation θ_1 du 1er pli	x 1	0°	± 10°	± 11.1%
désorientation θ_8 du 8ème pli	x 1	0°	± 10°	± 11.1%
épaisseur e_1 du 1er pli	x 1	0.5 mm	± 0.1 mm	± 20%
épaisseur e_8 du 8ème pli	x 1	0.5 mm	± 0.1 mm	± 20%
Total :	6 paramètres incertains			

Tableau IV-13. Paramètres incertains et niveaux de variation utilisés sur l'exemple de la poutre composite en flexion pour l'étude d'une situation à faible nombre de paramètres présentant une forte incertitude.

Suivant les préconisations de la stratégie développée, 21 calculs sont réalisés à partir du processus « exact » afin de disposer des points d'identifications nécessaires à la construction et à la validation des polynômes de degré un utilisés en guise de métamodèles. Cela conduit aux résultats de la Figure IV-19. Sur ces diagrammes de dispersion tracés pour les réponses raideur et force à rupture (F_{rupt}) les bandes d'erreur prévues par validation croisée indiquent une confiance médiocre en les résultats du métamodèle, et sont en bon accord avec la simulation de Monte-Carlo à 10^4 points. Ainsi, dans les deux cas, moins de 5% des points se trouvent en dehors des bandes d'erreur estimée. Concernant la prévision des comportements extrêmes, les résultats sont satisfaisants pour la réponse raideur. Par contre, la prévision de la force à rupture maximale est très erronée, du fait notamment du mauvais balayage

de l'espace d'incertitude par les points d'identifications. L'extrapolation demandée au métamodèle est du coup trop importante ce qui entraîne une piètre qualité.

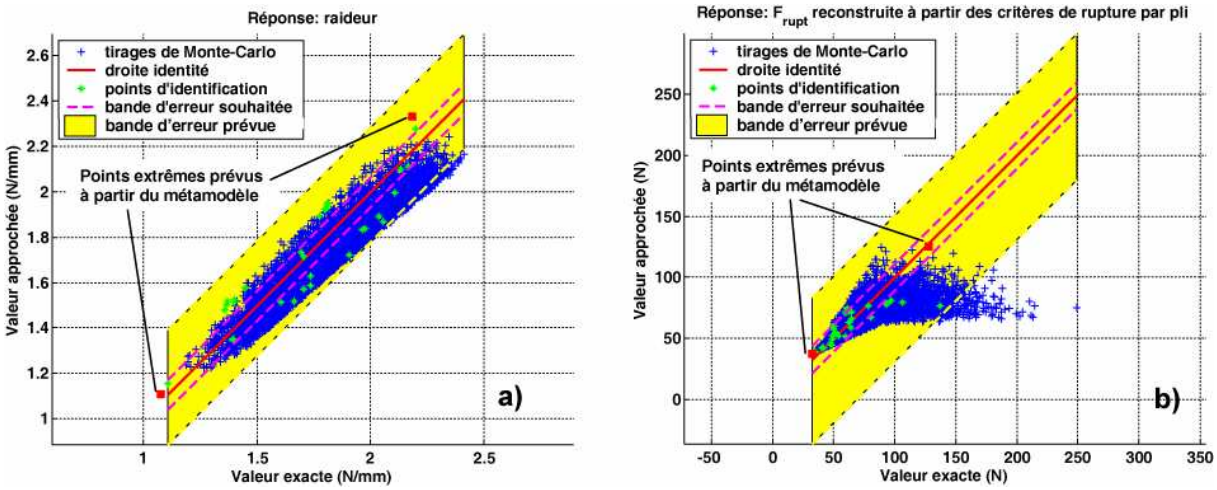


Figure IV-19. Diagrammes de dispersion pour les réponses a) raideurs et b) force à rupture de la poutre obtenus au moyen de surfaces de réponse polynomiales de degré un. Outre les points d'identifications et les bandes d'erreurs estimées par validation croisée, les figures présentent les résultats d'une simulation de Monte-carlo à 10^4 points.

Une des solutions que nous envisageons pour traiter ce genre de problème comportant un faible nombre de paramètres mais soumis à une très forte incertitude est le chaos polynomial. Même si cela requiert un nouvel ensemble de points d'identification (puisque le chaos est identifié par la méthode de projection), le jeu de point d'identification utilisé initialement va permettre d'évaluer la qualité d'approximation du chaos. Le chaos à l'ordre un n'apportant rien par rapport à un métamodèle polynomial d'ordre un, un ordre deux a été employé (avec prise en compte des couplages puisque cela ne demande pas plus de points d'identification). Les résultats obtenus sont présentés Figure IV-20.

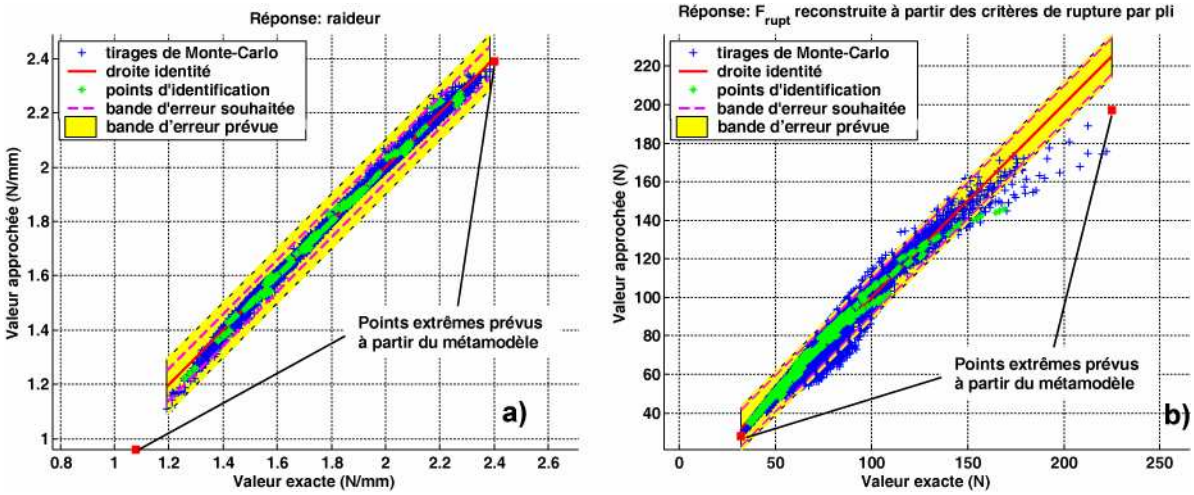


Figure IV-20. Diagramme de dispersion pour les réponses a) raideurs et b) force à rupture de la poutre obtenus au moyen d'approximation par chaos polynomial à l'ordre deux. Les simulations de Monte-Carlo associées comportent 10^4 points.

La qualité du métamodèle est nettement meilleure pour les deux indicateurs. En particulier, les 21 points employés initialement (pour l'identification des métamodèles polynomiaux d'ordre un) permettent d'obtenir des bandes d'erreur satisfaisantes sur les réponses du chaos polynomial. Le nombre de points d'identification requis par

celui-ci est par contre prohibitif (729) et sans doute difficilement réalisable dans un cas plus coûteux que cet exemple analytique.

Afin de vérifier si un résultat de qualité au moins équivalente peut être obtenu pour un nombre de points d'identification moindre, un métamodèle de type krigeage a été identifié. La taille du jeu d'identification initial est doublée, et 21 nouveaux points sont ainsi ajoutés (pris les plus éloignés possibles des 21 premiers points afin d'améliorer l'occupation de l'espace d'incertitude). La fonction de corrélation du krigeage est choisie gaussienne et la partie régression simplement constante, ce qui conduit aux résultats de la Figure IV-21.

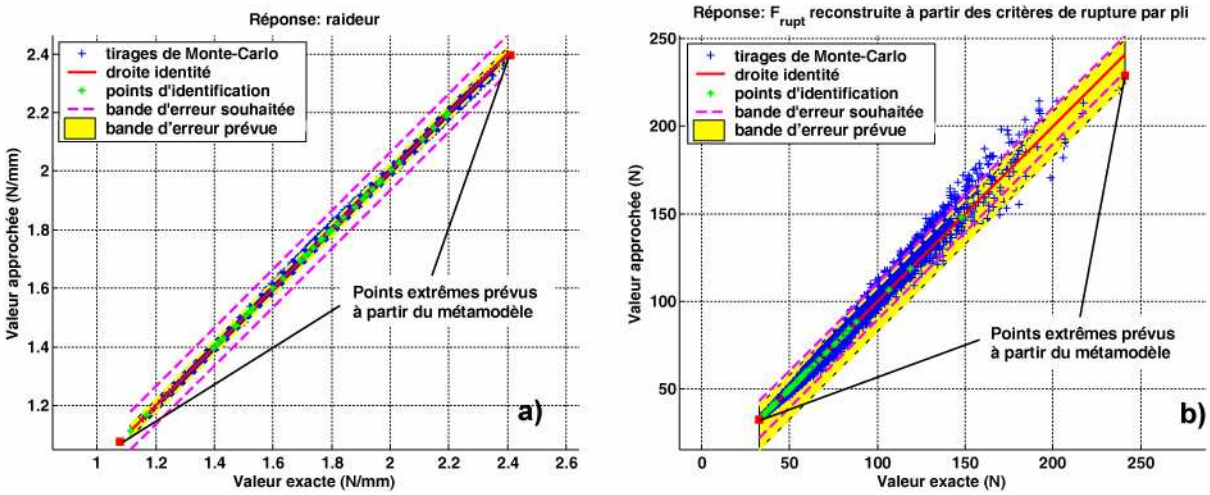


Figure IV-21. Diagramme de dispersion pour les réponses a) raideurs et b) force à rupture de la poutre obtenus par utilisation du krigeage avec fonction de corrélation gaussienne et régression constante. 42 points d'identification ont été employés et les simulations de Monte-carlo comportent 10^4 tirages.

Avec nettement moins de points que le chaos polynomial, la qualité d'approximation obtenue pour la réponse raideur est quasi parfaite et les tirages de Monte-carlo concordent bien avec la bande d'erreur prévue. Dans le cas de la force à rupture, la qualité d'approximation est moins bonne mais toutefois équivalente à celle du chaos. Le résultats est meilleur sur la prévision de la force à rupture maximale qu se trouve cette fois-ci à l'intérieur de la bande d'erreur prévue par validation croisée. Moins de 3,5% des tirages de Monte-Carlo s'écartent de cette bande d'erreur.

Ces résultats sont plutôt satisfaisants compte tenu notamment de la mauvaise occupation de l'espace d'incertitude par les points d'identification. L'ajout de dix points d'identification supplémentaires dans la partie haute du domaine d'incertitude améliore encore la métamodélisation comme le montre la Figure IV-22. Ces points sont constitués du point correspondant au maximum de la force à rupture et de neuf autres points sélectionnés à partir d'un tirage de Monte-Carlo en tenant compte uniquement de la valeur de la réponse du métamodèle (et non de la valeur exacte qui dans un cas plus complexe resterait inconnue).

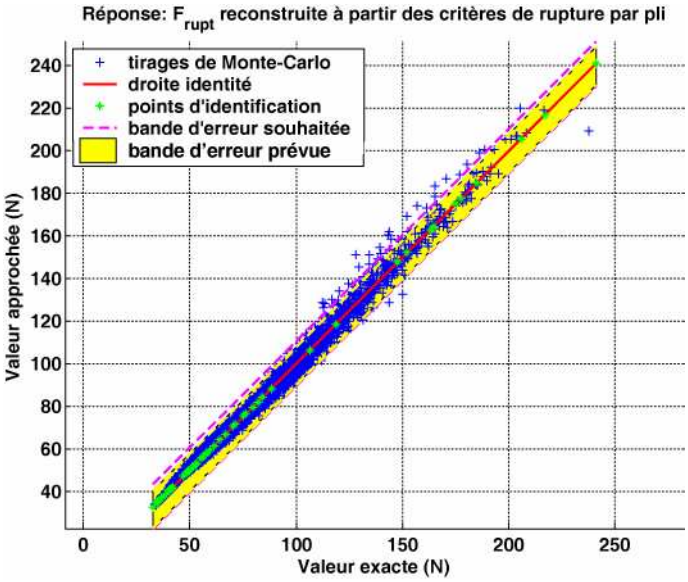


Figure IV-22. Diagramme de dispersion pour la réponse force à rupture obtenue au moyen d'un métamodèle basé sur le krigeage avec 52 points d'identification. Les 42 premiers sont identiques à ceux de la Figure IV-21b) et les dix suivants ont été ajoutés afin d'occuper la partie supérieure de l'espace d'incertitude qui était jusque là mal décrite. La simulation de Monte-Carlo comporte 10^4 nouveaux tirages.

IV.3.3. Application à un comportement non-linéaire : prise en compte de la viscosité.

Afin de démontrer que la démarche mise en place est applicable à l'étude de comportements non-linéaires, considérons maintenant l'exemple simple d'un essai de traction sur une plaque composite dont le comportement est modélisé par une loi viscoélastique spectrale [Maire, 92]. Afin de permettre une influence significative des mécanismes visqueux, l'empilement retenu est proche de $[45°\text{-}45°]_S$ et la vitesse de chargement est relativement lente (0.1 MPa/s). La situation étudiée comporte au total dix-huit paramètres incertains, listés dans le Tableau IV-14. Outre les quatre paramètres élastiques habituels (E_{11}, E_{22}, G_{12} et ν_{12}), l'incertitude affecte l'épaisseur de chaque pli ainsi que les angles de l'empilement dont la désorientation peut atteindre 2°. Les six incertitudes restantes touchent les paramètres de la loi viscoélastique (β_{22}, β_{66}, γ, n_0, n_c et pv). Pour plus de précision, le lecteur pourra se reporter à l'annexe 4.

Paramètres incertains		Valeur moyenne	Fluctuation	Amplitude d'incertitude
E_{11}	x 1	150 GPa	± 5 Gpa	± 3.3%
E_{22}	x 1	7500 MPa	± 200 MPa	± 2.7%
G_{12}	x 1	3950 MPa	± 150 MPa	± 3.8%
ν_{12}	x 1	0.30	± 0.02	± 6.7%
β_{22}	x 1	0.45	± 0.02	± 4.4%
β_{66}	x 1	0.90	± 0.05	± 5.6%
γ	x 1	0.575	± 0.025	± 4.3%
pv	x 1	1.00	± 0.02	± 2%
n_0	x 1	7.0	± 0.2	± 2.9%
n_c	x 1	6.5	± 0.1	± 1.5%
désorientation θ_k sur l'angle du pli k	x 4	0° (empilement cible $[45°\text{-}45°]_S$)	± 2°	± 2.2% par rapport à 90°
ep_k	x 4	0.25 mm	± 0.02 mm	± 8%
Total:	18 paramètres incertains			

Tableau IV-14. Valeurs moyennes et incertitudes affectant les paramètres incertains pour l'étude du comportement visqueux d'une plaque composite en traction.

Les réponses considérées sont ici les valeurs de déformation macroscopique pour dix niveaux de charge différents, échantillonnés sur l'intervalle de chargement. Suivant les préconisations de la démarche, 57 calculs sont effectués dans un premier temps et des polynômes de degré un sont utilisés pour approcher chacune de ces dix réponses. La Figure IV-23 présente les résultats obtenus à l'issu de cette

étape. Il s'agit tout d'abord du comportement moyen (Figure IV-23a *courbe noire*), auquel sont superposées d'une part les amplitudes de variation due à l'incertitude sur les différents paramètres *(barres bleues)* et d'autre part les amplitudes d'incertitudes dues à la confiance imparfaite sur les métamodèles *(barres rouges)*. La confiance dans les divers métamodèles apparaît clairement insuffisante, ce que confirme l'étude de la stabilité des coefficients montrant que celle-ci n'est pas assurée (Figure IV-23b). Toutefois, il est intéressant de souligner que les calculs exacts supplémentaires réalisés aux cas extrêmes détectés par l'analyse de ces premiers métamodèles conduisent bien à des extrêmes de comportement (courbes rouges sur la Figure IV-23a). L'erreur entre les valeurs prévues par les métamodèles et les valeurs exactes obtenues est de plus bien compatible avec les barres de confiance affichées sur les réponses. Les métamodèles identifiés aux différentes valeurs de charges ne conduisant pas tous aux mêmes cas extrêmes, il s'agissait de tester six candidats au titre de comportement « maximal » et « minimal ». Ceux-ci se sont finalement révélés équivalent ce qui explique que la Figure IV-23 donne l'illusion que seuls deux calculs (pour le minimum et le maximum) ont été réalisés. L'équivalence entre ces calculs laisse supposer que certains paramètres ont une influence négligeable ou que l'augmentation d'un paramètre peut être compensée par la diminution d'un autre.

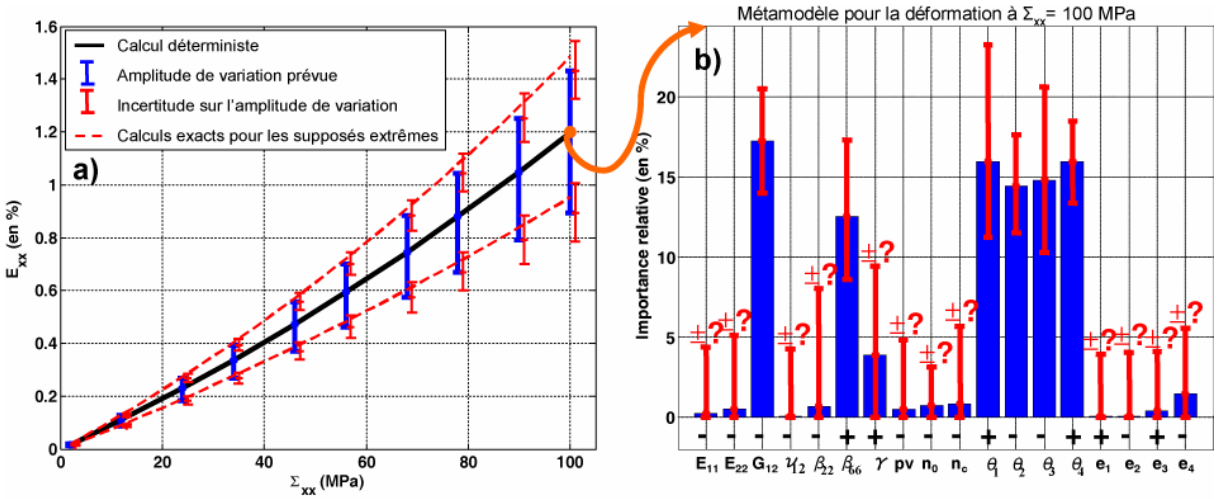


Figure IV-23. Résultats après utilisation de métamodèles polynomiaux de degré un : a) courbe contrainte /déformation macroscopique moyenne avec amplitude de variation prévue et incertitude associée, b) importance relative et stabilité des coefficients du métamodèle décrivant la déformation pour un chargement de 100 MPa.

Afin de remédier à ces difficultés, la démarche mise en place offre divers outils. Au vu de la différence d'importance relative détectée entre les divers paramètres, j'ai dans un premier temps choisi de réidentifier des polynômes linéaires en ne conservant que les paramètres à première vue les plus significatifs, à savoir G_{12}, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \beta_{66}$ et γ. Toutefois si la stabilité des coefficients de ces nouvelles surfaces de réponse s'en trouve améliorée, la confiance sur les valeurs des réponses reste toujours insuffisante. Dans un deuxième temps, suivant le principe d'une complexification progressive, j'ai donc choisi de remplacer les polynômes de degré un par des polynômes insaturés au nombre de termes identiques (dix-huit plus la constante). Cela conduit aux résultats de la Figure IV-24. La confiance sur les valeurs des réponses aux dix pas de charge est désormais très satisfaisante puisqu'elle avoisine 90%. Les combinaisons de valeurs de paramètres détectées comme correspondant à des cas extrêmes vérifient bien cette assertion et

globalement l'erreur commise par les métamodèles en ces points est compatible avec les (petites) barres d'incertitudes affichées. La stabilité des métamodèles est également vérifiée (Figure IV-24b). Le seul bémol est la détection imparfaite des termes prépondérants pour certaines réponses, comme par exemple celle présentée. Les termes E_{11}^3 et ν_{12}^3 se révèlent ainsi négligeables alors que la méthode de classement par orthogonalisation les avait détectés comme prépondérants.

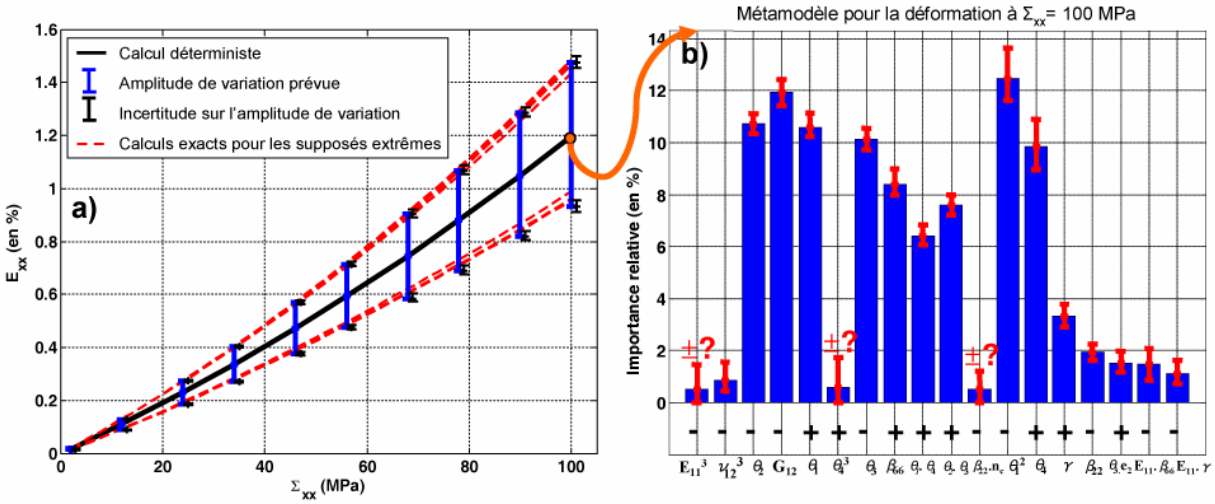


Figure IV-24. Résultats après utilisation de métamodèles construits à partir de polynômes insaturés : a) courbe contrainte /déformation macroscopique moyenne avec amplitude de variation prévue et incertitude associée, b) importance relative et stabilité des coefficients du métamodèle décrivant la déformation pour un chargement de 100 MPa.

Afin de confirmer ces résultats, un tirage de Monte-Carlo comportant 10^4 points est effectué et les courbes de comportement exactes correspondant à ces tirages sont calculées. En considérant comme réponse la déformation à Σ_{XX}=100 MPa, les résultats de la Figure IV-25 sont obtenus. Dans le cas de l'utilisation des polynômes de degré un en guise de métamodèle, la bande d'erreur prévue par validation croisée est un peu surestimée. Dans le cas de l'utilisation de polynômes insaturés, il s'agit par contre d'une sous-estimation. La confiance dans la bande d'erreur prévue reste toutefois acceptable puisque moins de 7% des tirages de Monte-Carlo s'en écartent.

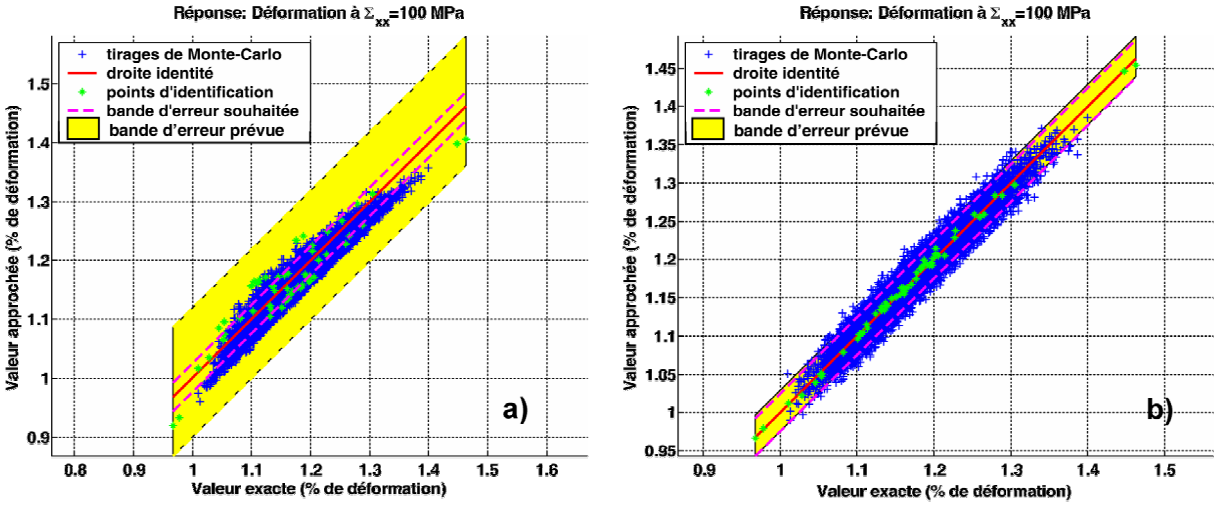


Figure IV-25. Pour un tirage de Monte-Carlo comportant 10^4 points, diagramme de dispersion pour la déformation à Σ_{xx}=100 MPa dans le cas d'un métamodèle basé sur a) un polynôme d'ordre un dans les paramètres incertains, où sur b) un polynôme insaturé.

La qualité de l'approximation étant vérifiée, une application possible de la démarche est l'analyse statistique par tirages de Monte-Carlo. Deux séries de 10^6 simulations sont réalisées, cette fois-ci uniquement au travers des métamodèles. Deux cas sont considérés suivant que tous les paramètres suivent respectivement des distributions uniformes ou bien gaussiennes. Les résultats de la Figure IV-26 sont ainsi obtenus.

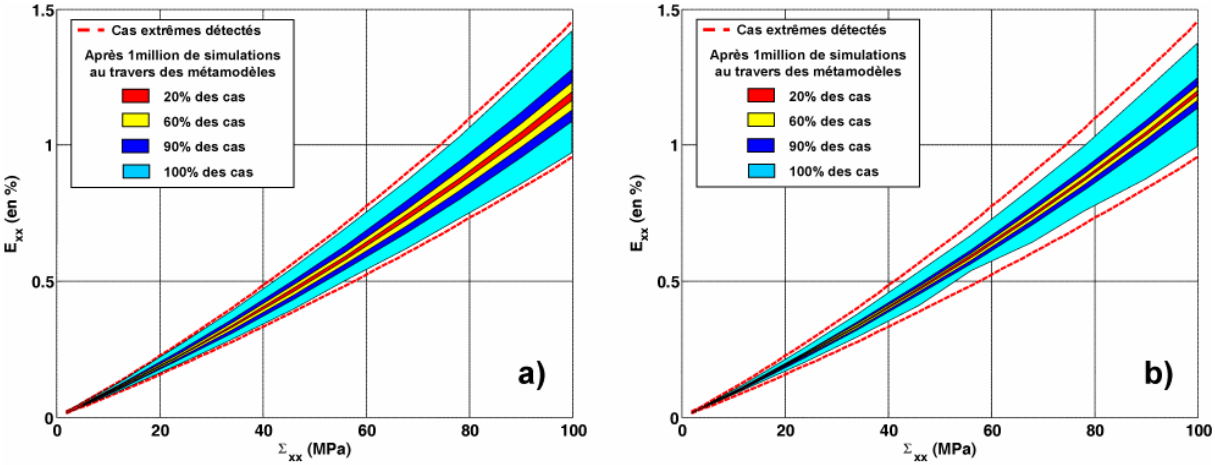


Figure IV-26. Pour 10^6 simulations au travers des métamodèles, statistique de répartition des comportements suivant que les 18 paramètres incertains suivent une distribution a) uniforme ou b) gaussienne.

Classiquement les comportements extrêmes détectés précédemment apparaissent de très faible probabilité puisque les tirages de Monte-Carlo ne parviennent pas à les atteindre. Dans le cas uniforme, l'amplitude de variation pour 90% des cas n'est que du tiers de l'amplitude de variation totale estimée. Cette proportion est encore plus réduite dans le cas gaussien pour lequel la plupart des comportements se concentrent encore plus au centre du domaine possible. Dans une démarche de dimensionnement fiabiliste, ce type d'information est précieux et l'intérêt de pouvoir tester, au travers de la démarche développée, plusieurs hypothèses de distribution statistique sur les paramètres incertains apparaît clairement.

Notons enfin qu'il est également facile en utilisant l'analyse de l'influence des coefficients de mettre en place un Monte-Carlo conditionné de manière à obtenir l'essentiel des solutions dans la zone d'intérêt (par exemple autour des valeurs minimales).

IV.4. Etude d'un cas de réponse bimodale : flambement d'une plaque composite

Afin de disposer d'un cas non-linéaire, potentiellement plus problématique, mais sans pour autant introduire un modèle plus complexe que l'élasticité, nous avons choisi comme second cas-test analytique l'exemple du flambement d'une plaque composite orthotrope. Comme nous le verrons par la suite, ce cas est particulièrement intéressant de par son aspect multi-modal (suivant les paramètres incertains, il est possible de basculer d'un mode de flambement à l'autre).

IV.4.1. Présentation de l'exemple

La plaque composite orthotrope est considérée comme étant en appuis simples sur ses quatre côtés et soumise à une compression biaxiale. Les charges N_x et N_y appliquées sur chacun des côtés sont considérées comme uniforme avec $N_x = -N_0$ et $N_y = -\alpha N_0$. L'allure des deux premiers modes de flambement est présentée sur la Figure IV-27.

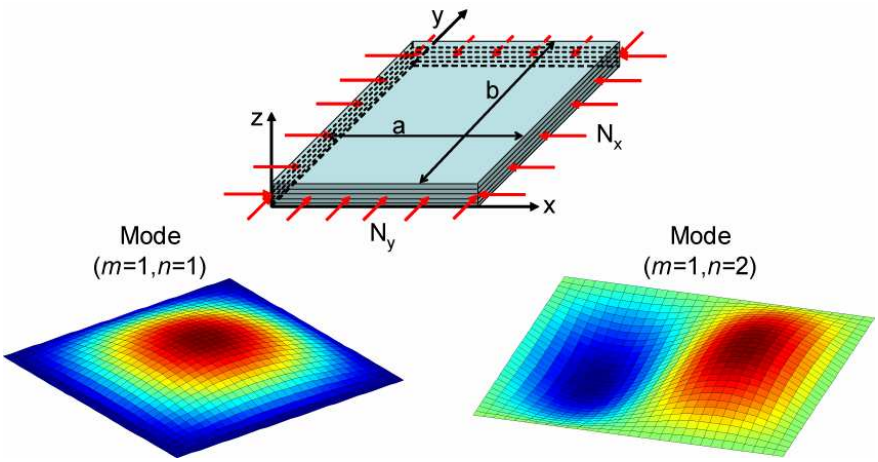


Figure IV-27. Allure des deux premiers modes de flambement de la plaque composite.

La formule analytique (Eq. IV-1) permet de calculer ([Berthelot, 92]) les forces de flambement des différents modes possibles. Ceux-ci sont déterminés par la combinaison des paramètres *m* et *n* correspondant aux modes dans les directions longitudinale et transverse. Dans les formules suivantes *a* et *b* sont les dimensions (longueur et largeur) de la plaque, et D_{11}, D_{22}, D_{12} et D_{66} les termes de la matrice de rigidité en flexion-torsion de la théorie classique des stratifiés. La valeur de ces termes D_{ij} est bien sûr liée aux valeurs des propriétés élastiques des plis ainsi qu'à leur épaisseur et leur orientation. La force critique de flambement est ensuite donnée par la combinaison des valeurs *m* et *n* conduisant à la plus faible valeur de N_0.

$$N_0 = \frac{\pi^2 (D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 R^2 + D_{22} n^4 R^4)}{a^2 (m^2 + \alpha n^2 R^2)} \quad avec \ R = \frac{a}{b} \qquad (Eq.\ IV\text{-}1)$$

Comme l'indique la Figure IV-28, le flambement de la plaque est ici étudié à partir de l'échelle du pli et l'empilement choisi est un $[0° \ 0° \ 90° \ 90°]_S$ (stratifié croisé vérifiant les propriétés d'orthotropie) Les 23 paramètres incertains considérés sont précisés dans le Tableau IV-15.

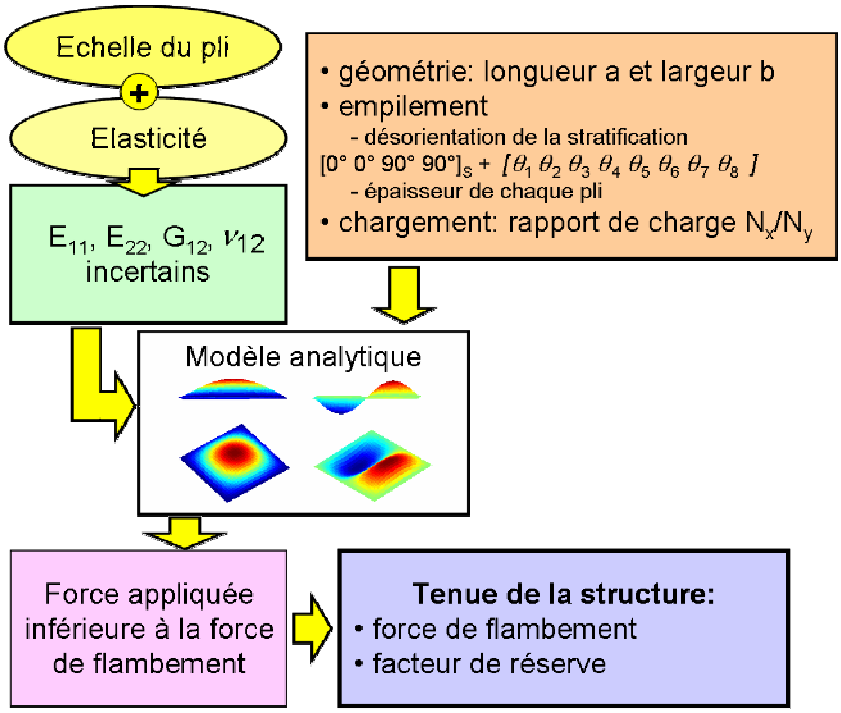


Figure IV-28. Schéma de calcul de l'étude d'une situation de brusque changement de la réponse considérée.

Paramètres incertains		valeurs moyennes	Fluctuations	Pourcentages d'incertitude
E_{11}	x 1	145.00 MPa	± 5.00 MPa	± 3.45%
E_{22}	x 1	8400 MPa	± 400 MPa	± 4.76%
G_{12}	x 1	4600 MPa	±500 MPa	± 10.87%
ν_{12}	x 1	0.31	± 0.01	± 3.23%
θ_k	x 8	0° pour les plis 1,2, 7 et 8 90° pour les plis 3,4, 5 et 6	± 2°	± 2.2%
e_k épaisseur du pli k	x 8	0.125 mm	± 0.01 mm	± 8.0%
largeur a	x 1	275.0 mm	± 0.5 mm	± 0.18%
longueur b	x 1	328.0 mm	± 0.5 mm	± 0.15%
rapport de charge $\alpha = \frac{N_x}{N_y}$	x 1	1.5	± 0.1	± 6.7%
Total :	23 paramètres incertains			

Tableau IV-15. Paramètres incertains et incertitude associée pour l'étude du changement de mode de flambement d'une plaque composite sous l'effet des incertitudes.

Dans un premier temps, l'étude porte directement sur les deux réponses globales que sont la force de flambement F_{crit} de la plaque et son facteur de réserve *RF*. La force de flambement se calcule suivant le cheminement présenté Figure IV-29. Le facteur de réserve s'obtient lui à partir de (Eq. IV-2) où F_{fct} la force appliquée en fonctionnement normal. Nous considérons que la plaque a été dimensionnée dans sa configuration moyenne et donc que F_{crit}=1.5 F_{fct} Le calcul déterministe (aux valeurs moyennes) donne F_{fct}=151,81 N.

$$RF = \frac{F_{crit}}{F_{fct}} - 1 \qquad \text{(Eq. IV-2)}$$

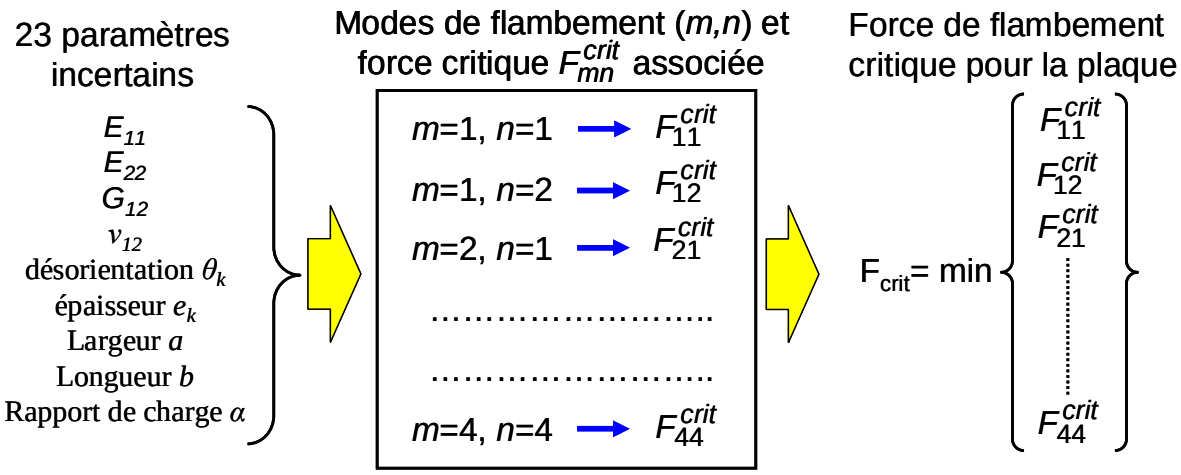


Figure IV-29. Principe de calcul de la force critique de flambement de la plaque.

IV.4.2. Mise en œuvre de l'étude des effets des incertitudes

L'identification puis la validation croisée du métamodèle linéaire à partir des 73 points d'identifications initiaux conduit aux figures IV-30 et IV-31. Il apparaît donc que, pour les deux réponses globales que nous étudions (force de flambement et facteur de réserve), les métamodèles ne satisfont pas le critère d'acceptation à ±5% de la variation observée. La confiance qui peut leur être accordée est donc insuffisante et la question est de savoir quels changements effectuer dans notre démarche pour pouvoir atteindre un niveau de confiance acceptable.

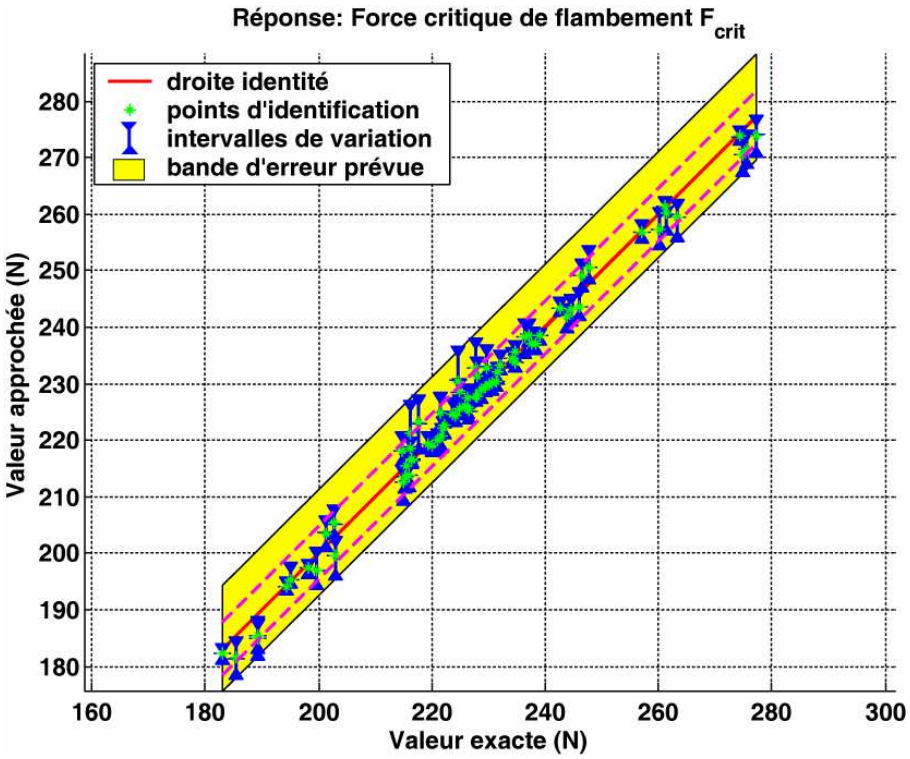


Figure IV-30. Pour la force critique de flambement de la plaque, erreur du métamodèle prévue par un leave-7-out à 100 rééchantillonnages.

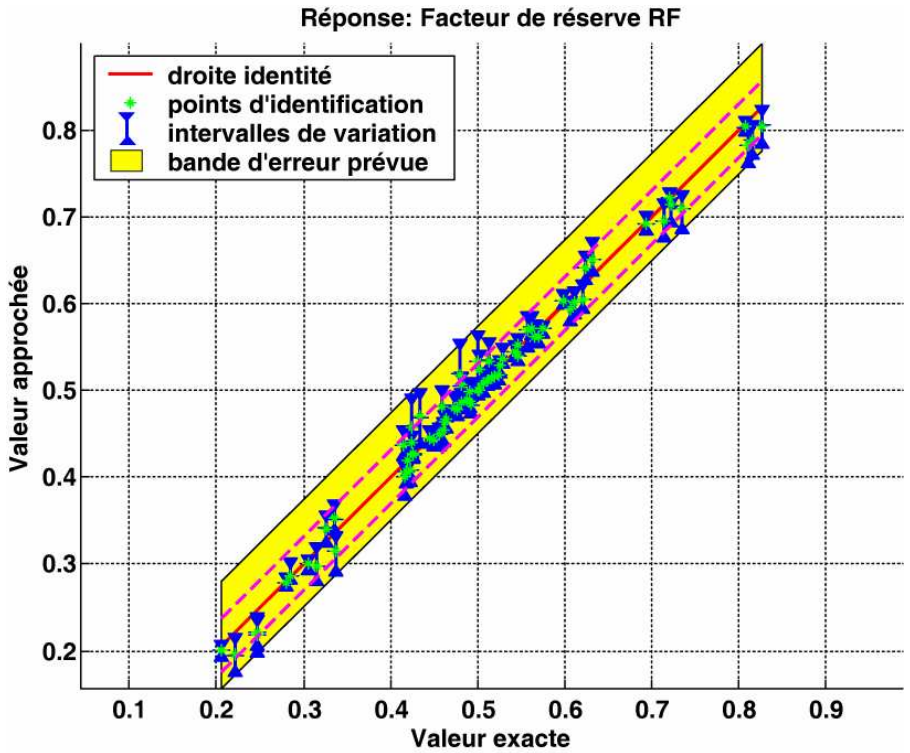


Figure IV-31. Pour le facteur de réserve de la plaque, erreur du métamodèle prévue par un leave-7-out à 100 rééchantillonnages.

Avant de chercher à complexifier le métamodèle, il est ici intéressant de recourir à une analyse mécanique. La force critique de flambement que nous considérons comme réponse est en fait le minimum des forces de flambement associées aux différents modes actifs. Une rapide analyse mécanique montre que ces modes ne sont qu'au nombre de deux : (m=1, n=1) et (m=1, n=2). Plutôt que d'approximer directement cette force critique en établissant un métamodèle global (sur F_{crit}), il peut donc être intéressant (1) d'identifier un métamodèle correspondant à ces deux modes actifs $(F_{11}^{crit}, F_{22}^{crit})$ et (2) de déterminer la force critique en prenant la valeur minimale donnée par les deux métamodèles ($F_{crit}=min(F_{11}^{crit}, F_{22}^{crit})$). Cette façon de procéder conduit aux Figure IV-32 et Figure IV-33. L'amélioration obtenue sur la zone d'erreur est proche d'un facteur deux, ce qui est remarquable étant donné qu'absolument aucun calcul supplémentaire n'a été effectué et que qui plus est, les mêmes points d'identification ont été utilisés.

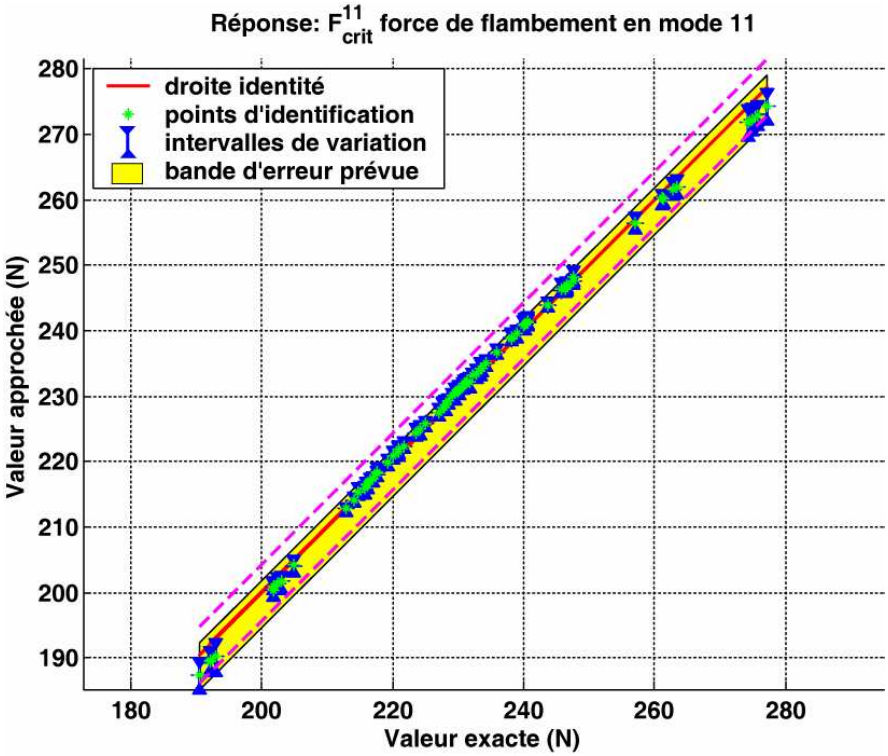


Figure IV-32. Pour la force de flambement en mode m=1 n=1, erreur du métamodèle prévue par un leave-7-out à 100 boots.

Une telle démarche est parfaitement applicable dans le cas d'une approche industrielle où la force de flambement est déterminée en résolvant un problème aux valeurs propres. Les modes actifs sont alors déterminés à partir des résultats sur les points d'identification. Pour chaque calcul réalisé l'intérêt ne se focalise alors plus seulement sur la plus petite valeur propre mais sur toutes celles associés à des modes actifs dans l'espace d'incertitude (c'est-à-dire correspondant à la plus faible valeur propre pour d'autres calculs du jeu d'identification). A partir de ces résultats, il est ensuite possible d'identifier un métamodèle pour chaque mode, comme dans cet exemple.

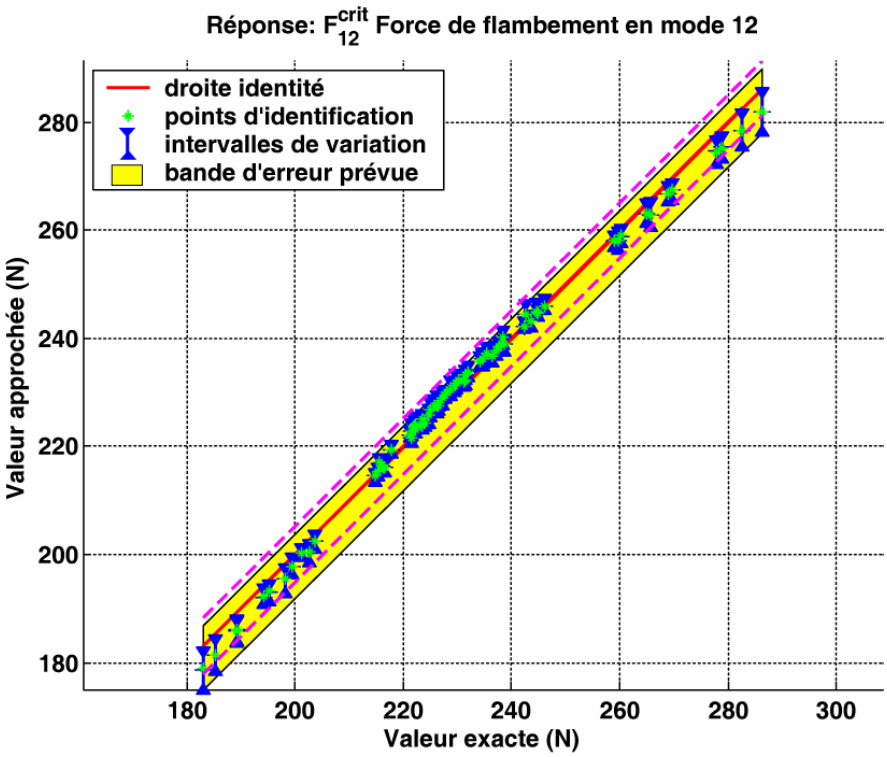


Figure IV-33. Pour la force de flambement en mode m=1 n=2, erreur du métamodèle prévue par un leave-7-out à 100 boots.

La force de flambement F_{crit}, comme le facteur de réserve *RF*, sont ensuite déduit à partir des résultats fournis par les deux métamodèles approchant F_{11}^{crit} et F_{22}^{crit}. Pour F_{crit} il s'agit simplement du minimum des deux métamodèles. *RF* s'obtient lui à partir de (Eq. IV-2) en prenant là encore le minimum obtenu sur les deux modes. Cela conduit aux résultats présentés Figure IV-34a) et b). La vérification au moyen d'une simulation de Monte-Carlo comportant 10^5 tirages montre sur ces figures une très bonne adéquation de la méthode.

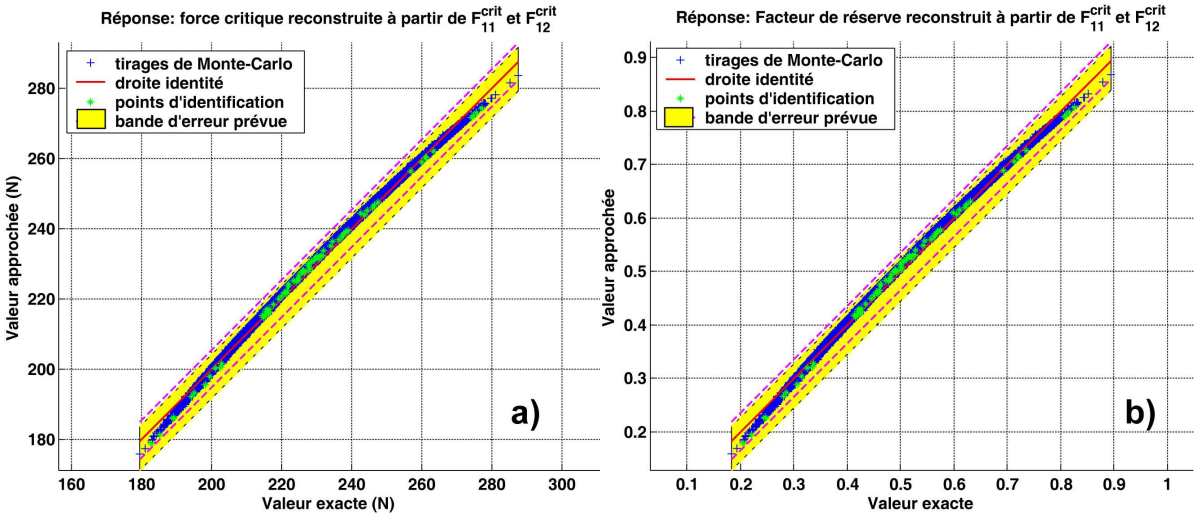


Figure IV-34. Diagrammes de dispersion pour a) la force critique de flambement de la plaque, et pour b) le facteur de réserve, tous les deux reconstruits à partir des forces de flambement en mode 11 et en mode 12. Les simulations de Monte-Carlo superposées comportent 10^5 tirages.

Conclusion

La stratégie mise en place permet donc de traiter une grande diversité de cas avec des résultats assez satisfaisants comme l'ont montré les simulations de Monte-Carlo. Le premier exemple a montré la grande diversité des résultats qui pouvaient être obtenus tant en ce qui concerne les cas extrêmes que les autres indicateurs statistiques. Actuellement, notre utilisation de la démarche ne va pas jusqu'à l'analyse fiabiliste mais nous avons pu voir que son extension paraît possible. L'obtention de résultats suffisamment satisfaisants nécessite parfois le recours successif à différents métamodèles de complexité croissante, suivant le caractère progressif introduit dans la stratégie. Ces itérations demandent encore un certain « flair » ou savoir-faire de l'utilisateur. Mais ce qui nous apparaît intéressant est de voir que souvent le sens mécanique peut éviter un grand nombre de pièges et donner les solutions pour surmonter les difficultés. Pour une utilisation de la démarche proposée en « boîte noire », il est nécessaire de disposer d'une grande variété de métamodèles afin de s'adapter aux différents problèmes mécaniques. Néanmoins à partir de métamodèles relativement simples associés à une analyse mécanique pertinente, il est souvent possible d'obtenir d'excellents résultats.

Nous avons montré dans ce chapitre un nombre significatif d'exemples qui doivent être associés à une multitude d'autres situations que nous avons traités et qui nous ont conduit à être convaincu d'une certaine efficacité de notre approche. Il est temps maintenant de la mettre en œuvre sur des calculs de structures plus proches de la réalité industrielle.

Chapitre V
Mise en évidence des multiples apports de la stratégie développée pour l'analyse de structures composites

Introduction **141**

V.1. Etude d'un cas au coût de calcul réduit, l'éprouvette chapeau. **141**

V.1.1. Retour sur la validation dans le cas de calcul de structures 141
V.1.2. Mise en œuvre de la méthode d'analyse de la variabilité (AdV) dans le contexte du calcul de structure 145

V.2. Apport des incertitudes pour le dimensionnement d'un détail mécanique : cas des plaques multiperforées. **150**

V.2.1. Analyse par Eléments Finis d'une plaque multiperforée en présence d'incertitudes 150
V.2.2. Exemple d'application : estimation de la robustesse d'une approche de prévision de la rupture de structures à forts gradients 153

V.3. Etude d'un assemblage mécanique. **157**

V.4. Etude d'une loi d'endommagement non- linéaire : cas d'une cornière composite **164**

V.5. Application à l'étude de la rupture des sandwichs **170**

V.5.1. Présentation de la démarche pour l'étude de la rupture des sandwichs 170
V.5.2. Analyse en données incertaines de la rupture de sandwich en flexion 3 points 171

Conclusion **175**

Introduction

Les apports de la stratégie développée pour la prise en compte des incertitudes ont jusque-là été illustrés sur des exemples analytiques. Ce chapitre va maintenant être consacré à sa mise en œuvre dans le cas de calculs éléments finis ([Bonnet, 07]). Il s'agit en effet de l'objectif principal qui avait été fixé au début du développement de la méthode, et qui a conditionné certains des choix effectués pour la sélection des « outils » retenus. L'objectif est de montrer qu'au prix d'un effort de calcul supplémentaire « acceptable[1] », il est possible d'estimer l'impact des incertitudes de façon satisfaisante et donc de fournir un dimensionnement plus robuste pouvant permettre à terme de limiter le recours aux marges de sécurité arbitraires. Des exemples de résultats tant en termes de champs de variables que de comportement global vont être présentés par la suite sur diverses structures représentatives de situations (assemblages, lois de comportement non-linéaires, prévision de rupture) couramment étudiées en mécanique.

V.1. Etude d'un cas au coût de calcul réduit, l'éprouvette chapeau.

L'éprouvette chapeau est une pièce générique développée initialement par SNECMA pour l'étude du comportement hors-plan dans les composites à matrice céramique (CMC). Son temps de calcul réduit (moins de 30 secondes[2]) et sa géométrie originale en font un cas test approprié pour l'étude de la méthode mise en place. Elle permet notamment la réalisation de milliers de calculs.

V.1.1. Retour sur la validation dans le cas de calcul de structures

Dans un premier temps, la configuration présentée Figure V-1 a été utilisée pour continuer la validation de notre méthode dans le cadre de son extension au cas du calcul de structures. Ce maillage comporte 80 éléments multicouches (8 points de Gauss par pli).

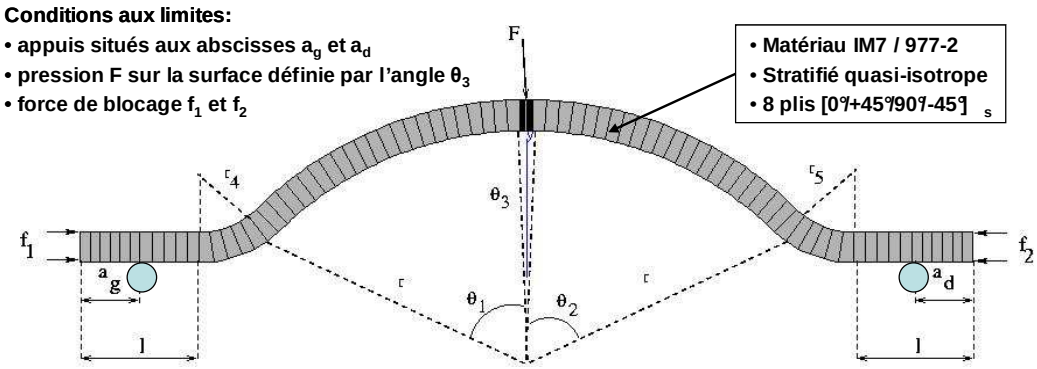


Figure V-1. Présentation de la géométrie de la pièce chapeau.

Des variations dimensionnelles (géométrie de la structure) ainsi que des imprécisions sur l'application des efforts et des conditions aux limites sont étudiées.

[1] Multiplier par 30 ou 50 les temps de calculs n'est pas toujours acceptable aujourd'hui mais la rapide augmentation de la puissance de calcul est de bon augure pour la faisabilité future.

[2] La stratégie de transport d'incertitude permet évidemment de profiter des avantages du calcul distribué. Ainsi la plupart des calculs de structures présentés dans ce chapitre ont été réalisés sur un cluster de 4 processeurs double-cœur Opteron à 2.2GHz disposant de 32 Go de mémoire.

Au total le problème comporte neuf paramètres (θ_1, θ_2, θ_3, r, l, a_g, a_d, r_4 et r_5) sur lesquels sont appliqués des fluctuations pouvant aller jusqu'à ±10%.

Tout d'abord, 1024 calculs de structure choisis aléatoirement (Monte-Carlo avec distribution uniforme sur chaque entrée) ont été réalisés en élasticité à flèche imposée et nous nous sommes intéressés à plusieurs indicateurs parmi lesquels la force, les différentes contraintes et déformations maximales dans la pièce ainsi que les valeurs de plusieurs critères (critère d'endommagement, critère de rupture de fibre,…).

La Figure V-2 présente l'ensemble des 1024 courbes force/déplacement obtenues grâce aux 1024 calculs. La première constatation, qui peut sembler contraire à l'intuition, est que l'on obtient une distribution des réponses Éléments Finis « acceptablement » gaussienne à partir de tirages pourtant uniformes sur chacune des variables d'entrée (résultat à relier au théorème central limite).

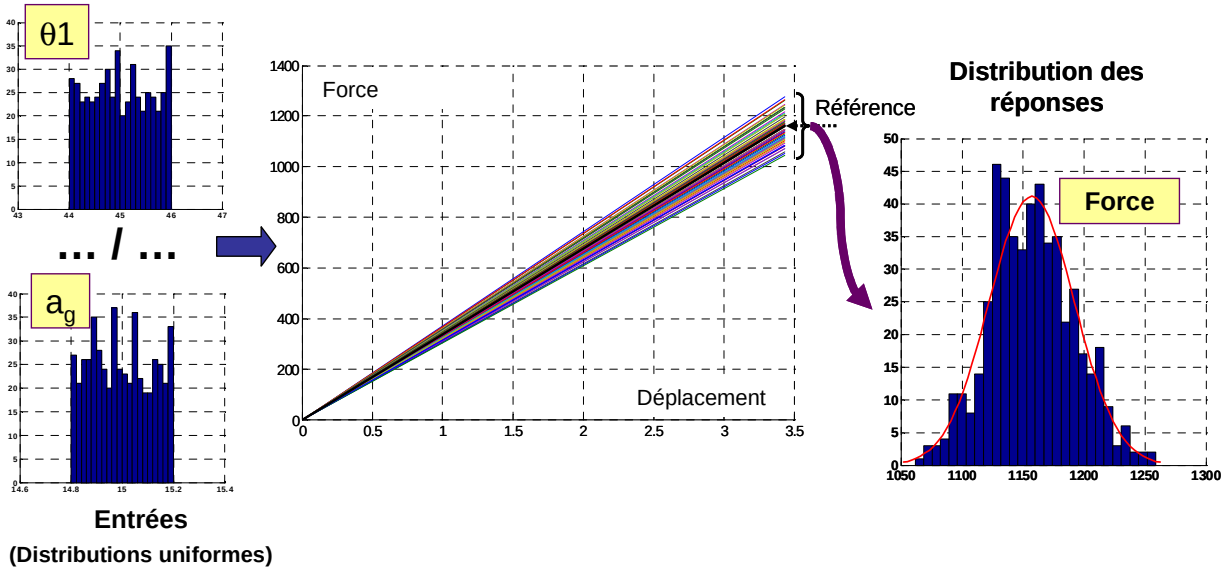


Figure V-2. Ensemble des 1024 courbes force/déplacement et distribution des données brutes.

Par la suite, nous avons retenu quatre indicateurs : la force, la raideur de la pièce (rapport force/déplacement), un critère de déformation admissible des fibres et enfin un critère d'endommagement (critère quadratique en contrainte). Les deux premiers sont de nature globale, les deux autres sont obtenus en cherchant, pour chaque calcul, la valeur maximale sur l'ensemble de la structure. Le Tableau V-1 synthétise les résultats bruts obtenus (valeur moyenne et écart-type des 1024 calculs ainsi que les valeurs minimale et maximale) à partir d'analyses statistiques classiques.

	Moyenne	Écart-type	Valeur minimale	Valeur maximale
Force (N)	1158	36	1015	1280
Raideur (N/mm)	335.8	14.2	298.9	379.5
Déformation fibres (%)	1.46	0.04	1,35	1.58
Critère de Hill (MPa)	127.5	3.85	117.1	139.9

Tableau V-1. Valeurs brutes obtenues à partir de l'ensemble des calculs (simulations de Monte-Carlo).

Bien que déterminées sur un nombre important de calculs, la qualité (confiance) des valeurs fournies au Tableau V-1 reste a priori à déterminer. Pour cela, la méthode du *bootstrap* ([Efron, 93]), utilisée en statistique descriptive, est bien adaptée. Elle consiste, comme expliqué chapitre III, à des rééchantillonnages des données et fournit des indications sur la confiance à accorder aux valeurs. Nous avons reporté, dans le Tableau V-2, les résultats obtenus par cette technique pour des échantillons de 50, 200, 512 et 1024 calculs. Les résultats obtenus montrent que quelque soit le nombre de calculs (*N*) la valeur moyenne obtenue varie peu mais que son incertitude associée diminue lorsque *N* augmente.

Raideur (N/mm)	*N*	Moyenne	Écart-type	Valeur mini	Valeur maxi
Bootstrap	50	336,5 ± 6,0	14,9 ± 6,2	304,7 ± 9,8	375,6 ± 15,8
	200	335,4 ± 2,9	14,6 ± 2,7	300,3 ± 5,7	377,7 ± 6,8
	512	335,2 ± 1,9	13,8 ± 1,8	299,7 ± 2,8	377,0 ± 4,5
	1024	335,7 ± 1,5	14,1 ± 1,1	299,5 ± 2,0	378,9 ± 2,7

Tableau V-2: Valeurs obtenues à partir de rééchantillonnages de l'ensemble des calculs

Par la suite, nous avons mis en œuvre notre méthode d'analyse de la variabilité (AdV) définie au chapitre III en sélectionnant de manière pertinente 20, 30 puis 60 calculs pour réaliser l'approximation de la fonction de transport (méthode sommet/centre). Dans la première ligne du Tableau V-3, sont indiqués les valeurs moyennes et les écarts obtenus pour la raideur, lorsque la méthode est réitérée 100 fois à partir de jeux de calculs différents. Les résultats soulignent la bonne robustesse de la méthode. Enfin, nous montrons qu'à partir d'un seul jeu de calculs (20, 30 ou 60), il est possible d'obtenir des résultats équivalents en utilisant des techniques de validation croisée (ici la méthode utilisée est de type *leave-k-out*, *k* étant égal respectivement à 2, 3 puis 6).

Raideur (N/mm)	*N*	Moyenne	Écart-type	Valeur mini	Valeur maxi
100 répétitions	20	336,2 ± 0,8	14,5 ± 0,9	295,7 ± 4.6	376,6 ± 4,3
	30	336,2 ± 0,4	14,2 ± 0,5	298,8 ± 1,5	375,6 ± 2,3
	60	336,1 ± 0,3	14,2 ± 0,3	298,6 ± 1,0	375,6 ± 1,2
Validation croisée	20	336,1 ± 1,8	15,4 ± 1,4	287,8 ± 8,6	384,4 ± 9,3
	30	335,9 ± 0,3	14,2 ± 0,4	297,9 ± 1,4	376,0 ± 2,5
	60	336,0 ± 0,2	14,2 ± 0,3	298,5 ± 0,8	376,5 ± 1,0

Tableau V-3. Valeurs obtenues par la méthode AdV à partir de 20, 30 et 60 calculs EF.

La Figure V-3 et la Figure V-4 comparent l'évolution des estimations de la moyenne et de l'écart type ainsi que du niveau de confiance respectivement en fonction du nombre de tirages de la méthode de Monte-Carlo et du nombre de points utilisés pour l'identification de la surface de réponse. La comparaison de ces deux figures contribue d'une certaine manière à la validation de notre démarche mais illustre également ses avantages par rapport à la méthode de Monte-Carlo.

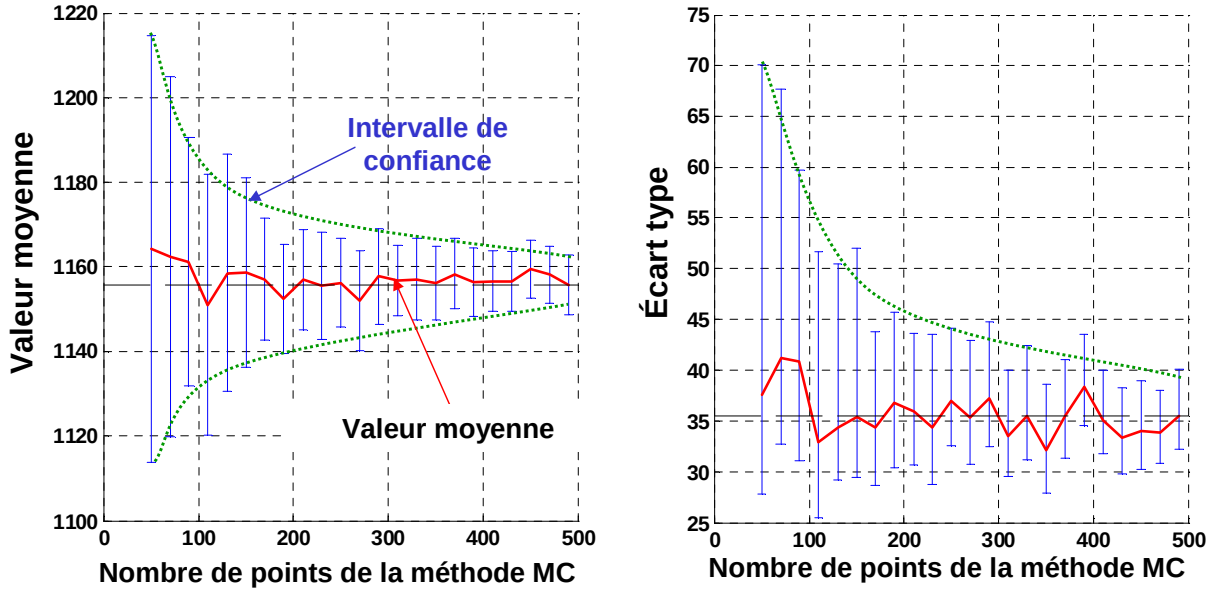


Figure V-3. Evolution de l'estimation de la valeur moyenne et de l'écart-type de la force ainsi que du niveau de confiance en fonction du nombre de tirages utilisés dans la méthode de Monte-Carlo.

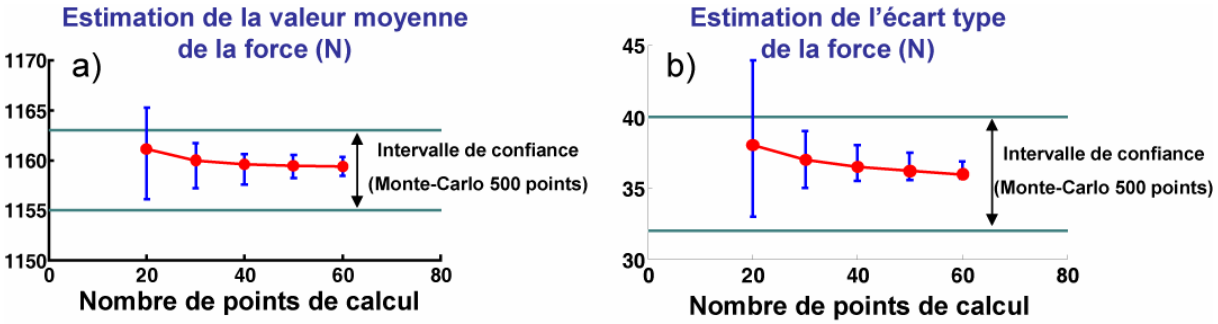


Figure V-4. Evolution de l'estimation a) de la valeur moyenne et b) de l'écart type ainsi que du niveau de confiance en fonction du nombre de points utilisés pour l'identification de la surface de réponse.

Le niveau de confiance affiché sur les valeurs du Tableau V-3 dépend évidemment de la qualité de l'approximation (linéaire dans ce cas). Dans le cas où ce niveau serait inacceptable, nous pouvons employé la méthode de construction de polynômes insaturés (cf. section III.4.2.1) ne comportant que les monômes d'ordre supérieur les plus importants ([Stoppiglia, 03]). La Figure V-5 représente la réduction de l'erreur quadratique moyenne (estimée sur l'ensemble des 1024 calculs) pour le critère de déformation admissible des fibres. Les polynômes insaturés sont construits en « piochant » les monômes les plus influents parmi tous les monômes possibles pour un polynôme de degré 3 complet. Sur cette figure, le fait que le polynôme d'ordre 2 complet présente une erreur supérieure à celle des polynômes insaturés (identifiés par régression sur 60 ou 1024 calculs) montre qu'il existe des polynômes comportant moins de termes et capables d'une meilleure approximation. La construction de métamodèles polynomiaux comportant systématiquement tous les monômes associés au degré choisi n'apparaît donc pas comme la meilleure méthode.

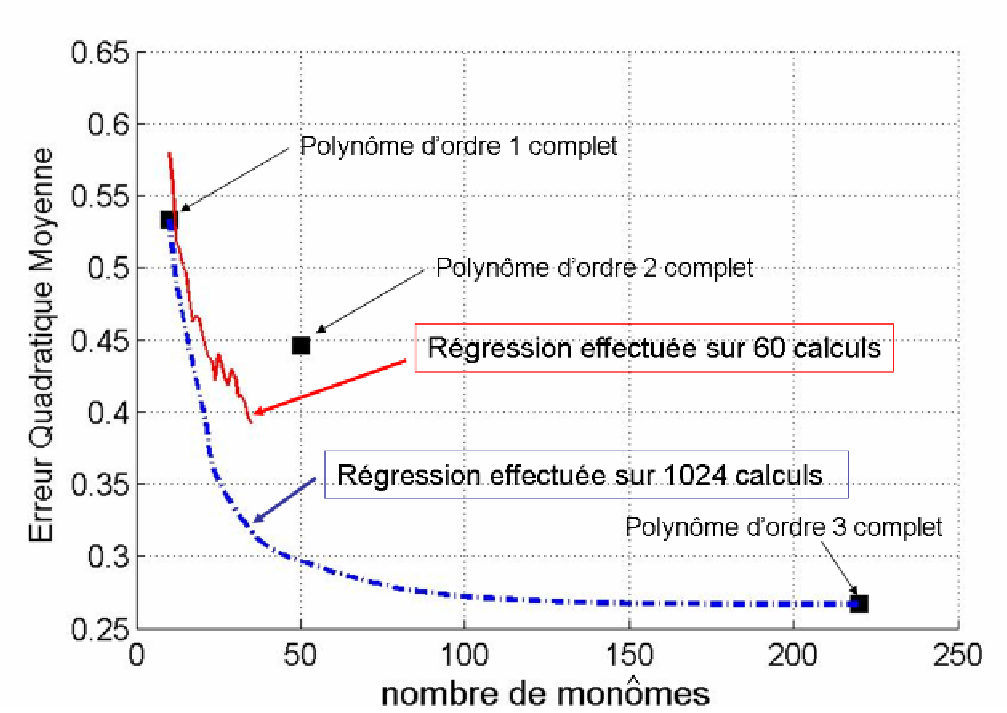


Figure V-5. Réduction de l'erreur quadratique moyenne par ajout des monômes les plus influents

V.1.2. Mise en œuvre de la méthode d'analyse de la variabilité (AdV) dans le contexte du calcul de structure

L'exemple de l'éprouvette chapeau est maintenant repris pour illustrer le fonctionnement de la méthode AdV dans le contexte du calcul de structures. La situation correspondant à la Figure V-6 est étudiée. Ce maillage plus réaliste que celui du cas précédent comprend 700 éléments multicouches de type pavé (à 27 points de Gauss par pli). Le Tableau V-4 répertorie les 29 paramètres incertains considérés et leurs amplitudes de variation. Ces paramètres sont représentatifs des différentes sources d'incertitudes pouvant affecter la pièce, avec notamment l'influence des propriétés élastiques, des désorientations pouvant affecter l'empilement, des tolérances sur la géométrie et des doutes sur la sollicitation appliquée. L'empilement vise à se rapprocher d'un stratifié quasi-isotrope $[0°\,45°\,90°\,-45°]_S$.

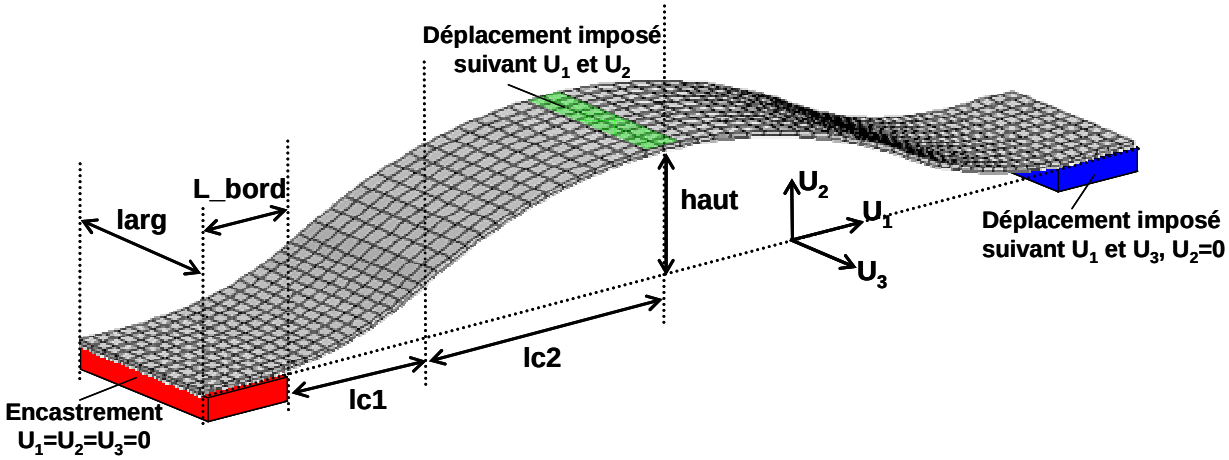


Figure V-6. Maillage de l'éprouvette chapeau, paramètres géométriques principaux et chargement imposé.

Paramètres incertains		Valeurs moyennes	Fluctuations	Amplitudes d'incertitude
E_{11}	x1	142.00 GPa	± 4.97 GPa	± 3.5 %
E_{22}	x1	8400 MPa	± 420 MPa	± 5.0 %
G_{12}	x1	4600 MPa	± 322 MPa	± 7.0 %
ν_{12}	x1	0.33	± 0.02	± 6%
ν_{23}	x1	0.40	± 0.02	± 5%
mésalignement θ_k sur le $k^{ème}$ pli de la stratification	x8	0°	± 2°	± 2.2% (par rapport à 90°)
épaisseur e_k du $k^{ème}$ pli	x8	0.125 mm	± 0.010 mm	± 8%
lc1	x1	40 mm	± 0.05 mm	± 0.125%
lc2	x1	60 mm	± 0.05 mm	± 0.08 %
haut	x1	25 mm	± 0.1 mm	± 0.4%
larg	x1	40 mm	± 0.1 mm	± 0.25%
norme du déplacement appliquée au sommet d_{sup}	x1	-1.0 mm	± 0.2 mm	± 20%
désorientation du déplacement appliqué au sommet θ_{sup}	x1	0°	± 5°	± 5.6% (par rapport à 90°)
norme du déplacement appliqué sur le bord droit d_{bord}	x1	-0.2 mm	± 0.05 mm	± 25%
désorientation du déplacement appliqué au bord θ_{bord}	x1	0°	± 5°	± 5.6% (par rapport à 90°)
Total :	29 paramètres incertains			

Tableau V-4. Paramètres incertains et niveau d'incertitude pour l'exemple de l'éprouvette chapeau.

L'application de la démarche développée conduit à effectuer 90 calculs éléments finis afin de disposer des données nécessaires à l'identification des métamodèles. Des indicateurs globaux (raideur de l'éprouvette, réactions,…) peuvent bien sûr être étudiés. Cependant, dans ce cas, j'ai choisi de privilégier des indicateurs locaux, comme par exemple le champ de contrainte σ_{11} dans les axes matériaux du pli supérieur (pli 8). Un métamodèle est alors défini pour décrire chaque composante du tenseur des contraintes de chaque point de Gauss. En l'occurrence cela conduit à identifier 6300 métamodèles pour chaque contrainte et pour chaque pli. La phase de vérification se déroule classiquement mais à l'analyse graphique est substituée pour chaque métamodèle le calcul d'indicateurs de qualité scalaire : rapport de la largeur de la zone de confiance à la variation observé, et, pour la stabilité, fluctuation maximale observée sur les coefficients du métamodèle (éventuellement raménée à l'importance relative de la variable concernée).

Cette étape effectuée, il est alors possible, pour les calculs ayant servis à l'identification, de comparer les prévisions du métamodèle aux résultats du calcul élément finis. Par exemple pour le calcul correspondant aux valeurs moyennes des paramètres (calcul déterministe faisant partie des calculs effectués pour l'identification), cela conduit à la Figure V-7 montrant une excellente adéquation.

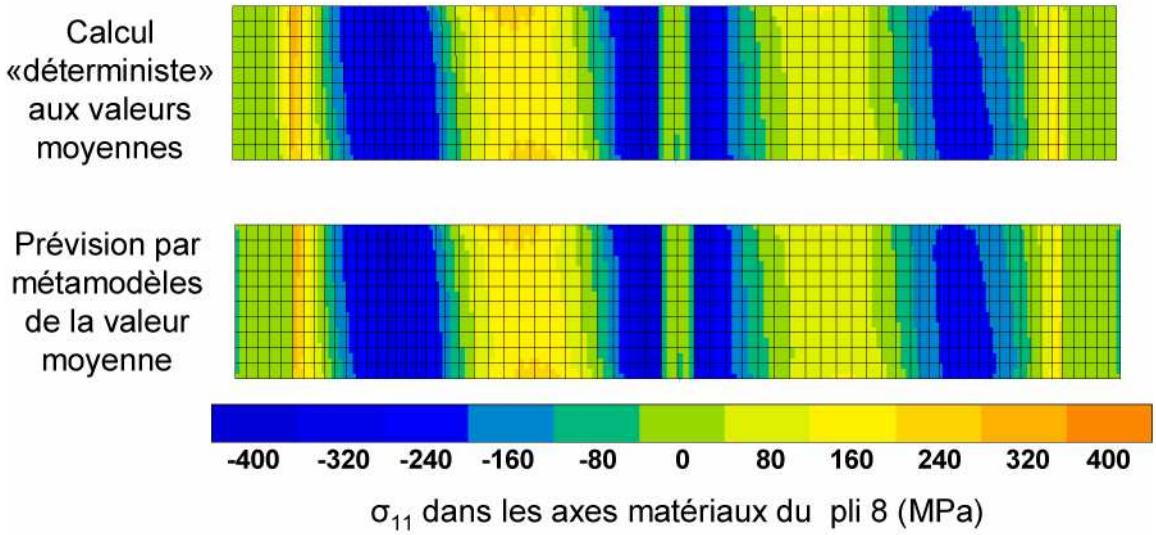


Figure V-7. Comparaison entre le calcul moyen déterministe et la prévision des métamodèles pour les paramètres moyens toutes les valeurs à 0 en espace normé).

La définition des métamodèles permet également de s'intéresser aux variations de l'indicateur étudié, par exemple en traçant la carte de l'écart-type. La mise en œuvre sur la contrainte σ_{11} dans les axes matériaux du pli supérieur conduit à la Figure V-8.

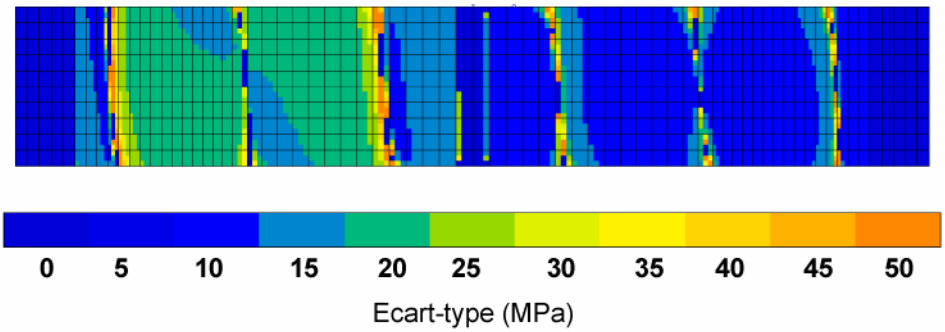


Figure V-8. Carte pour l'écart-type de la contrainte σ_{11} dans les axes matériaux du pli 8 (estimé à partir des métamodèles).

Dans un cas comme celui-ci où les métamodèles sont des polynômes de degré un, il est ensuite aisé de déterminer l'influence respective des divers paramètres incertains sur les variations de la réponse étudiée. En considérant toujours la contrainte σ_{11} dans les axes matériaux du pli supérieur, on obtient ainsi les cartes d'importance relative présentées sur la Figure V-9. Les résultats présentent une bonne cohérence mécanique puisque parmi les propriétés élastiques E_{11} apparaît être le paramètre le plus influent. Les désorientations θ_1 et θ_8 sur les angles des plis extérieurs ont une influence significative mais dans des zones plus localisées. Les paramètres les plus influents sont la norme du déplacement d_{sup} imposé au sommet de l'éprouvette et la désorientation θ_{sup} qui lui est appliquée. Il est à noter que l'influence de la désorientation θ_{bord} sur le déplacement imposé sur le bord droit n'est significative que dans la partie droite de l'éprouvette.

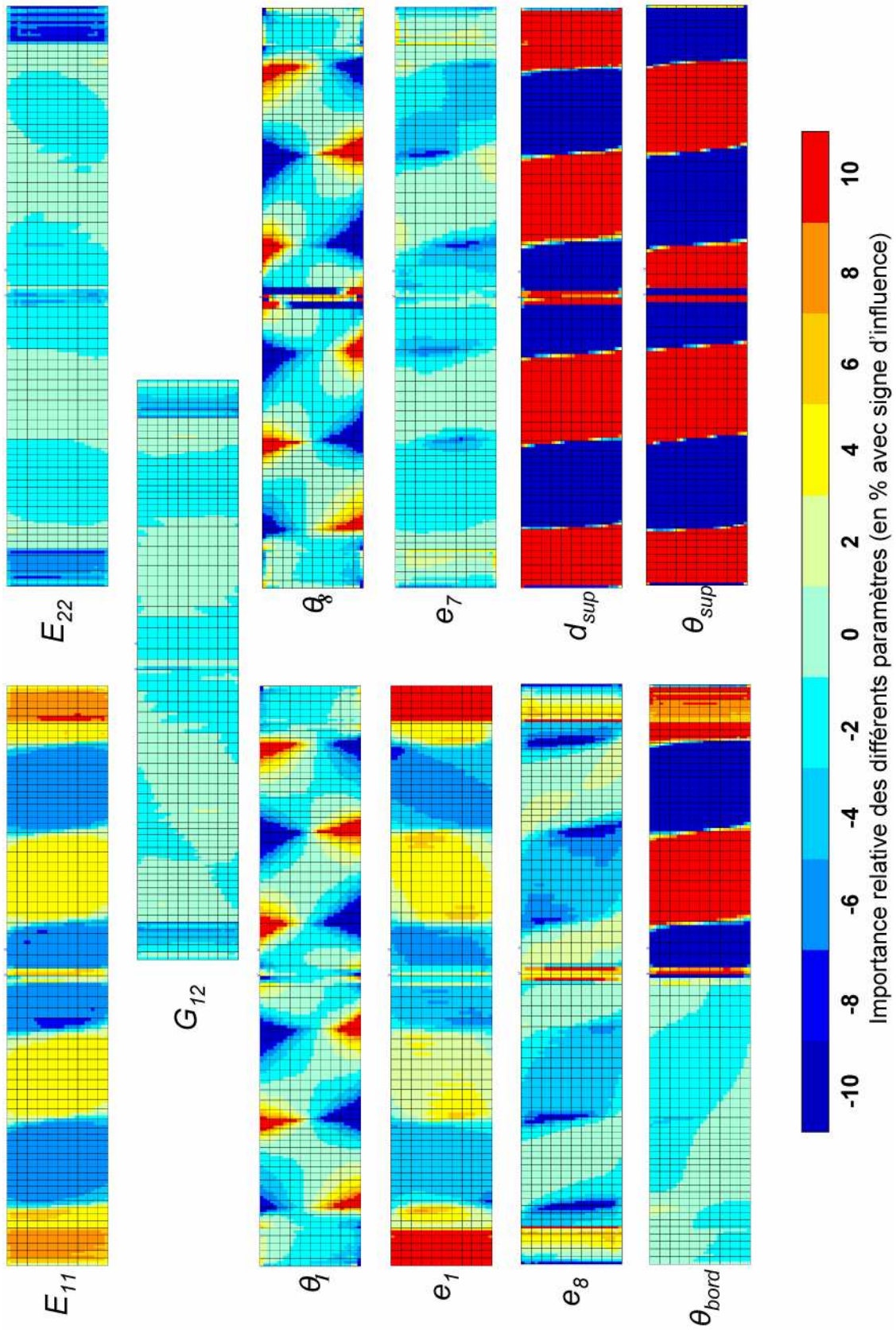


Figure V-9. Pour les métamodèles approchant la contrainte σ_{11} dans les axes matériaux du pli 8, cartes de la sensibilité aux différents paramètres incertains.

Même sur un tel exemple, la phase de vérification par validation croisée reste toujours possible, et nous l'employons de manière quasi-systématique. Un *leave-9-out* sur chaque métamodèle permet par exemple de visualiser une carte de la confiance (Figure V-10) qui peut être accordée aux divers métamodèles. Cette confiance est définie par la relation (Eq. V-1), où Δ est l'amplitude de variation sur la réponse constatée par validation croisée et *M* et *m* les valeurs extrêmes (respectivement le maximum et le minimum) prévues par le métamodèle. Mis à part sur la zone d'application du chargement (en déplacement) la confiance dans les métamodèles est relativement satisfaisante, puisqu'elle est comprise pour l'essentiel entre 70 et 80% (on considère qu'une confiance supérieure à 90% est complètement satisfaisante). Le cas traité ici est « un peu limite » pour l'approche purement linéaire (polynômes de degré un) ce qui n'est pas surprenant au vu du nombre de variable étudiées et de certaines des amplitudes de variation considérées.

$$Confiance = 100 * \left(1 - \frac{\Delta}{M - m}\right) \qquad \text{(Eq. V-1)}$$

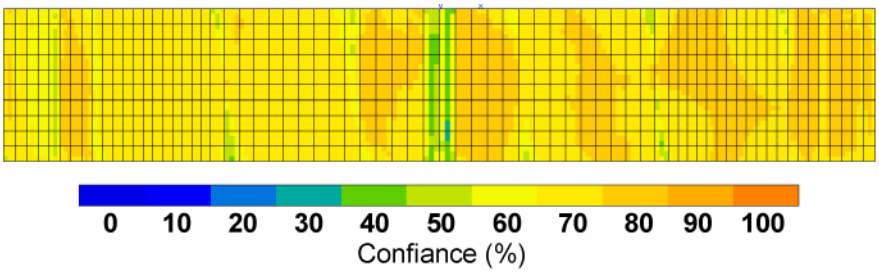


Figure V-10. Carte de la confiance pouvant être accordée aux métamodèles approchant σ_{11} dans les axes matériaux du pli 8.

Pour finir, il est possible de s'intéresser au cas extrêmes. Dans un cas comme celui-ci où plusieurs métamodèles sont nécessaires pour décrire le même champ, l'obtention de ces cas extrêmes peut se faire d'au moins trois façons :

1) En choisissant d'utiliser le métamodèle associé à un endroit significatif, et présentant par ailleurs une bonne confiance, puis de déterminer les valeurs X_i de chaque paramètre incertain conduisant respectivement aux valeurs minimale et maximale de ce métamodèle,
2) En choisissant d'utiliser le métamodèle associé à un indicateur global (par exemple la flèche) pour déterminer les X_i maximisant (et minimisant) les valeurs de cet indicateur,
3) En choisissant « globalement » les X_i^{min} et les X_i^{max} permettant de maximiser ou minimiser la réponse du plus grand nombre de métamodèles

Dans le cas de surface de réponse de degré un, les valeurs extrêmes sont bien sûr données par deux vecteurs X_{min} et X_{max} combinaisons de -1 et 1 (dépendant du signe des coefficients de la surface de réponse). Pour cet exemple, nous avons choisit la première méthode. La réalisation des deux calculs éléments finis correspondant et la comparaison des champs ainsi obtenus à ceux donnés par les métamodèles permet ensuite d'obtenir les résultats de la Figure V-11. Celle-ci montre cette fois encore une très bonne adéquation entre les prévisions du métamodèle et les résultats des calculs éléments finis. Cette adéquation est d'autant plus intéressante que les deux calculs extrêmes ne faisaient pas partie des calculs ayant servis à l'identification.

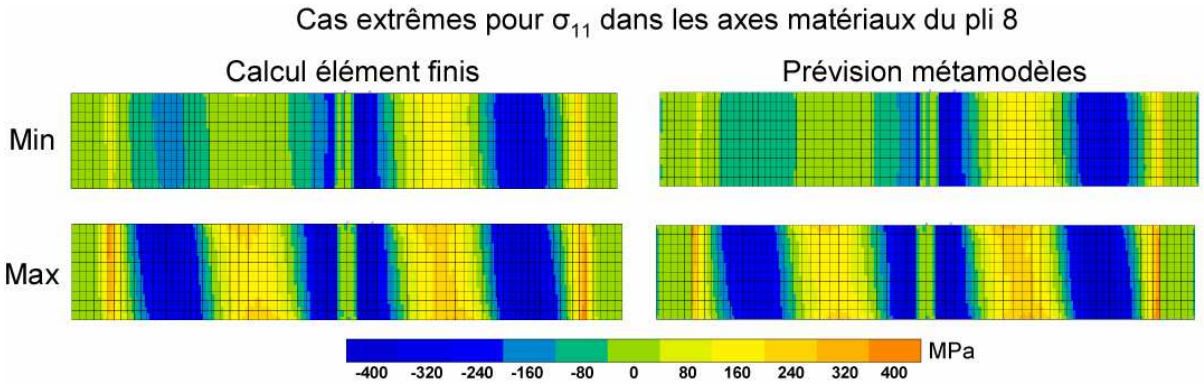


Figure V-11. Pour la contrainte σ_{11} dans les axes matériaux du pli 8, comparaison des cartes de champ données en utilisant les métamodèles et en effectuant les calculs éléments finis correspondants.

V.2. Apport des incertitudes pour le dimensionnement d'un détail mécanique : cas des plaques multiperforées.

Dans le cadre du programme de recherche Américo, un certain nombre d'essais sur plaques multiperforées a été réalisé pour différentes configurations de perforation et de stratification (les résultats d'essais peuvent être trouvées dans [Lévêque, 04] La présence de singularités telles que des trous est souvent critique pour les matériaux composites et a fait l'objet de nombreuses études ces dernières années.

V.2.1. Analyse par Eléments Finis d'une plaque multiperforée en présence d'incertitudes

Dans ce premier exemple, nous traitons le cas d'une plaque multiperforée (Figure V-12) stratifiée quasi-isotrope $[0°/45°/-45°/90°]_s$ en T300/914 soumise à un essai de traction. Le maillage comporte 816 éléments multicouches (à 8 points de Gauss par pli).

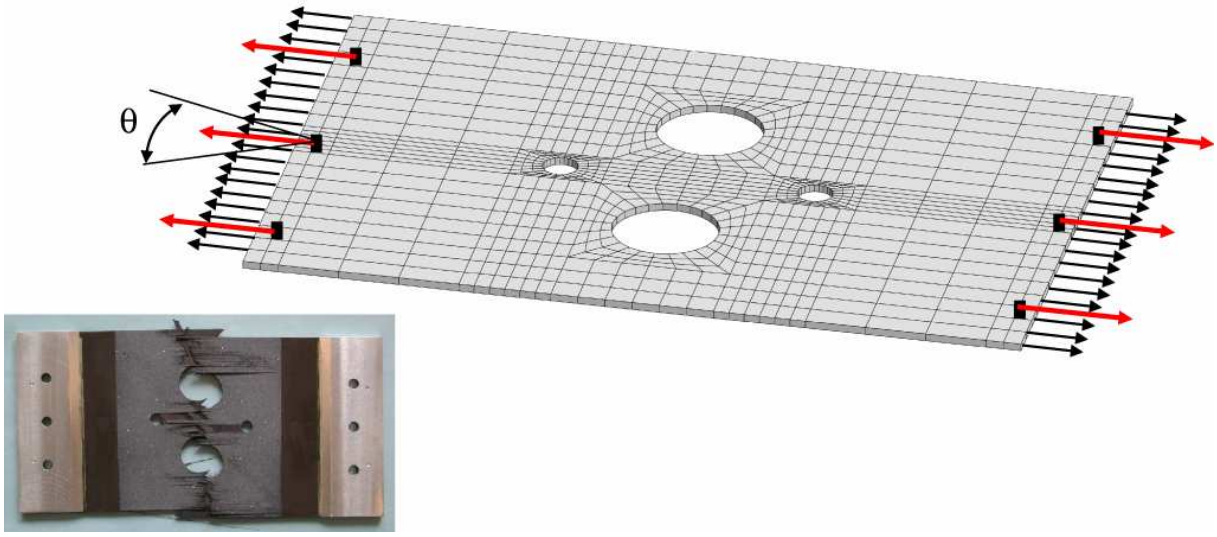


Figure V-12 : étude en variabilité de la plaque multiperforée 4 trous.

Les variations considérées portent sur le chargement (angle d'application des force ±2°, rapport en résultante de 0 à 2 entre forces po nctuelles et forces réparties) et sur les propriétés élastiques. Dans un premier temps, les calculs sont effectués à

l'échelle macroscopique à l'aide de propriétés homogènes équivalentes du stratifiés déduites d'une analyse multiéchelle avec des variations de ±20 % sur chacun des paramètres C_{ij} du tenseur de rigidité.

Nous allons montrer à partir de cet exemple que la méthode développée permet également de s'intéresser aux champs des grandeurs locales. Le problème considéré comporte 7 paramètres incertains et conformément à ce que nous avons écrit précédemment 24 calculs éléments finis ont été réalisés. Le stratifié choisi pouvant être considéré comme isotrope dans le plan, un critère de déformation maximale est évalué suivant la relation (Eq. V-2), où $\varepsilon_p^+, \varepsilon_p^-$ sont respectivement la plus grande et la plus petite des déformations principales en chaque point de calcul. $\varepsilon_t^R, \varepsilon_c^R$ correspondent quant à eux à la déformation à rupture du matériau respectivement en traction et en compression ($\varepsilon_t^R = 0.98\%$, $\varepsilon_c^R = -0.55\%$).

$$\zeta = max(\frac{\varepsilon_p^+}{\varepsilon_t^R}, \frac{\varepsilon_p^-}{\varepsilon_c^R}) \qquad \text{(Eq. V-2)}$$

Comme indiqué sur la Figure V-13, nous ne nous intéressons qu'à la partie centrale de l'éprouvette constituée de 22.10^3 points de Gauss. Après un seuillage permettant de ne retenir que les points de Gauss associés à une valeur significative du critère (>0.5), il ne reste finalement que 11.10^3 points à analyser. Pour chacun des points, une surface de réponse linéaire est construite (pour l'ensemble des 11.10^3 points cela ne demande que quelques dizaines de secondes).

La valeur moyenne du critère est alors représentée sur la Figure V-13.

Le coefficient de variation local du critère (Figure V-14) est calculé en chaque point de Gauss en faisant le rapport de l'amplitude de variation du critère (déterminée sur le domaine d'incertitude au travers du métamodèle) sur la valeur moyenne. Il est également possible de calculer la part qui peut être attribuée aux variations du module longitudinal (ΔC_{11}). Le métamodèle utilisé étant linéaire, il s'agit juste d'utiliser l'importance relative du coefficient associé à C_{11}. Il en résulte que le critère de rupture est localement très influencé par le module longitudinal (C_{11}), ce qui parait assez cohérent.

Nous avons également cherché à tracer les valeurs des critères de rupture en chaque point de Gauss pour le cas le plus favorable (jeu de paramètres incertains conduisant à la force à rupture la plus forte) et le cas le plus défavorable (jeu de paramètres incertains conduisant à la force à rupture la plus faible)[3]. L'approche AdV nous a ainsi permis de déterminer les jeux de paramètres des variables d'entrée conduisant à ces deux extrêmes. En choisissant ensuite comme fonction indicatrice la valeur du critère en chaque point de Gauss (soit plus de 10000 fonctions indicatrices à traiter !), il est possible de tracer ces cartographies (Figure V-15). Nous avons également reporté sur cette figure les valeurs exactes obtenues en réalisant les 2 calculs par EF correspondants. Ces figures montrent que la méthode AdV

[3] Dans ce cas, nous avons chosi la solution 3 (cf. page 149) pour choisir les valeus extrêmes (c'est-à-dire le X qui respectivement maximise/minimise la valeur du critère de façon majoritaire sur l'ensemble de la pièce).

permet de traiter en même temps un grand nombre de fonctions indicatrices et peut prévoir de façon très satisfaisante des champs locaux (contrainte ou déformation par exemple).

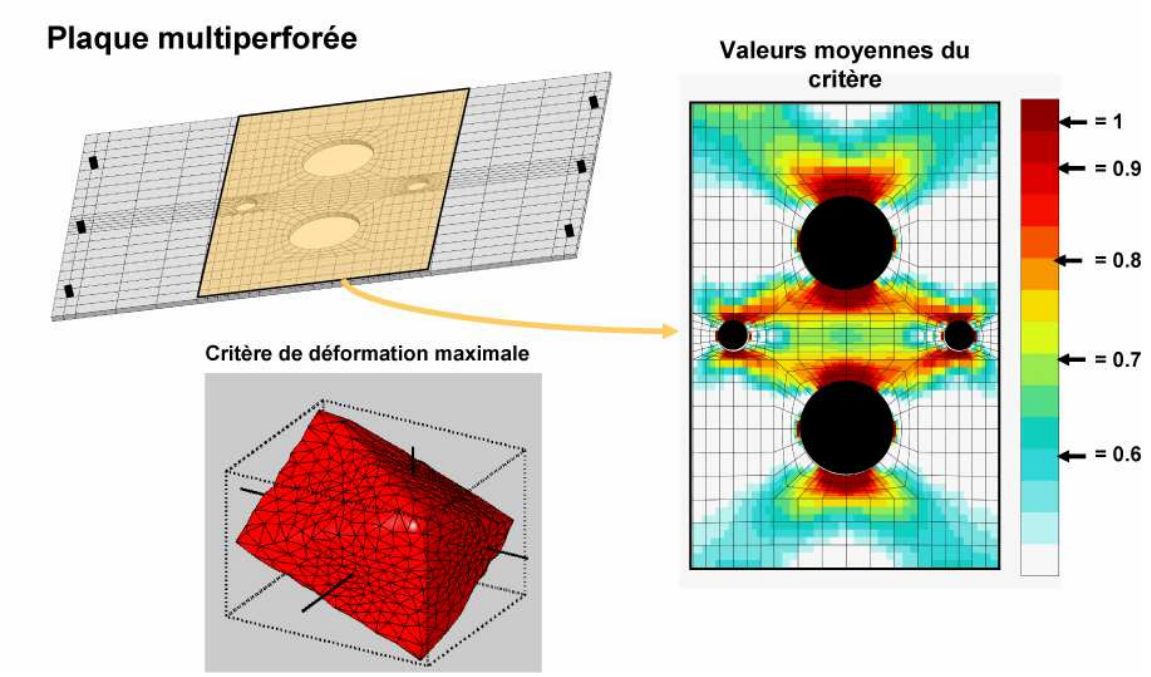


Figure V-13 : Valeurs du critère de rupture dans la zone d'intérêt de la plaque multiperforée 4 trous.

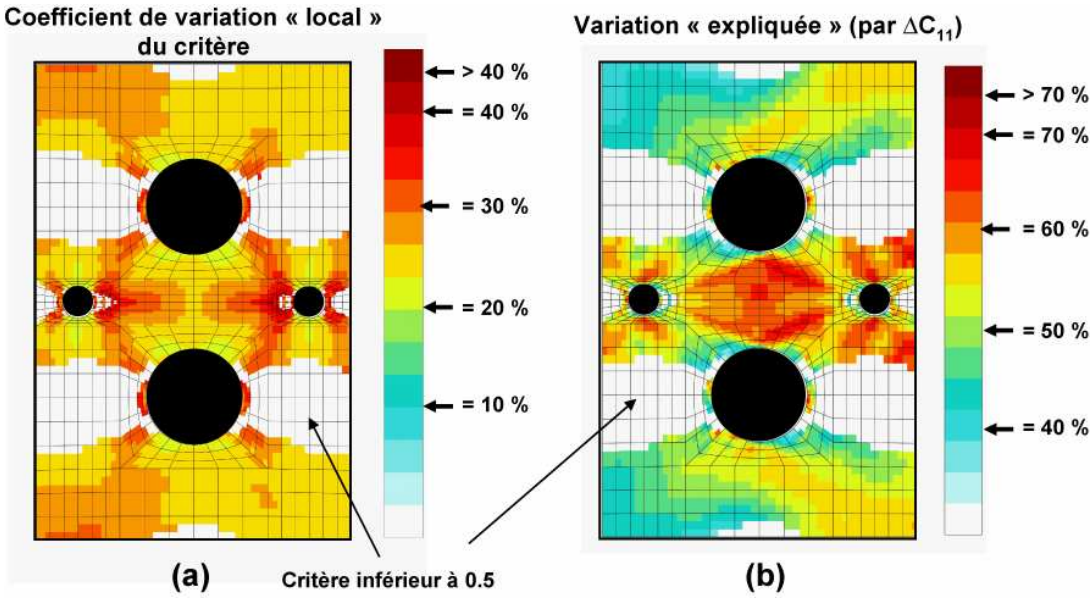


Figure V-14: Coefficient de variation local du critère de rupture (a) et part due à la variation (ΔC_{11}) du module longitudinal (b).

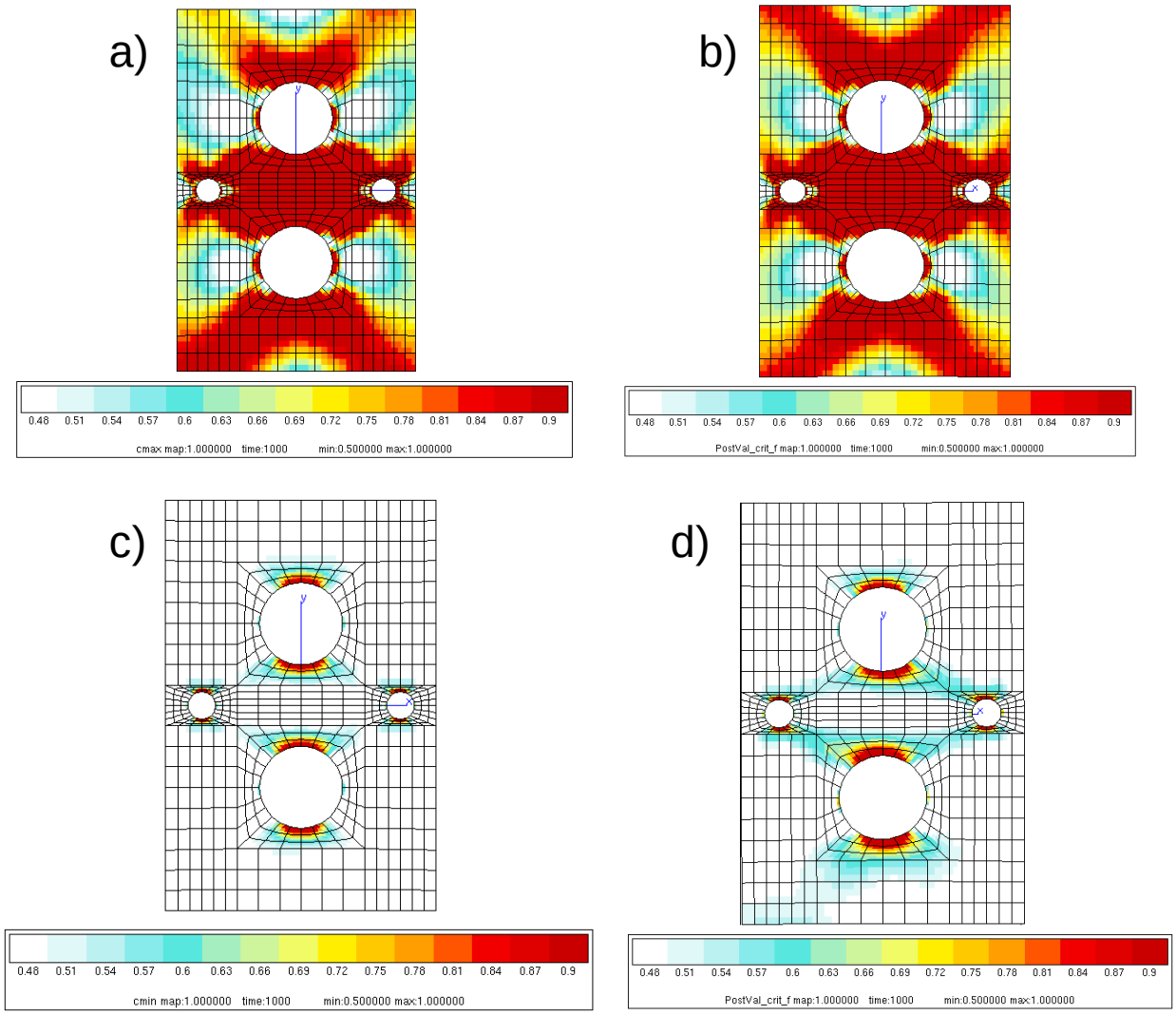


Figure V-15: Valeurs des critères locaux prévues par AdV pour le cas le plus défavorable (a) et le cas le plus favorable (c). Vérification par EF correspondantes (b) et (d)

V.2.2. Exemple d'application : estimation de la robustesse d'une approche de prévision de la rupture de structures à forts gradients

Cette application concerne la modélisation de la rupture de plaques multi-perforées (empilements quasi-isotropes en T300/914) soumises à des essais de traction uniaxiales. Différentes configurations géométriques sont étudiées (taille des trous, position des trous). Dans cette exemple, la démarche mise en place est utilisée afin d'estimer la confiance que l'on peut accorder aux résultats obtenus par une approche de prévision de la rupture.

Des incertitudes sur les 5 propriétés élastiques (±5%) et sur les 5 résistances des plis (±10%) ont été prises en compte. Au total 33 calculs ont été effectués pour chaque configuration géométrique afin d'identifier un méta-modèle linéaire. Les indicateurs auxquels nous nous intéressons dans un premier temps sont : la rigidité et la force de 1ère rupture de pli. L'ensemble des réponses obtenues est présenté Figure V-16.

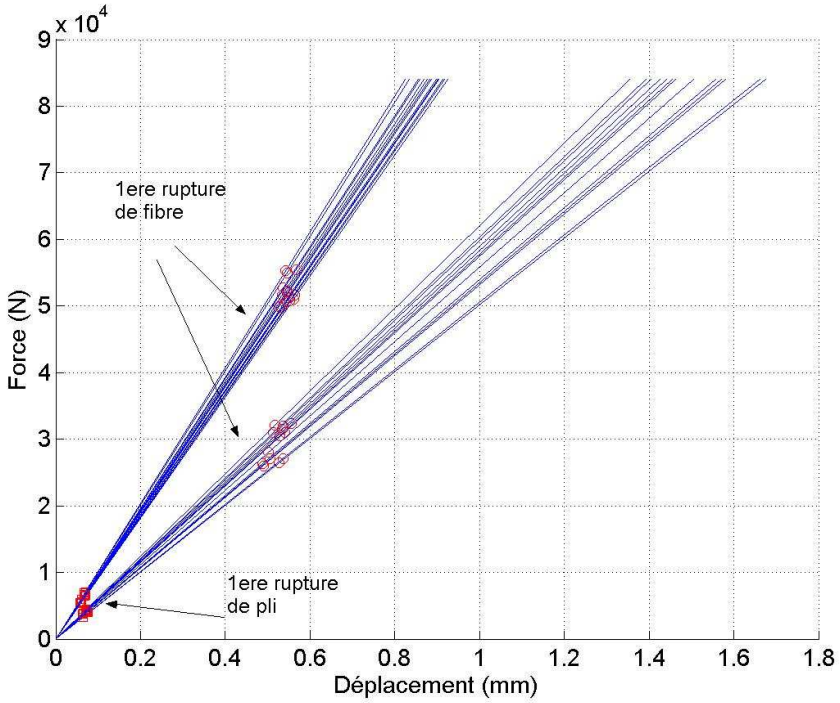


Figure V-16. ensemble des réponses obtenues pour la modélisation

En appliquant les concepts présentés précédemment (les diagrammes de dispersion et les écarts obtenus par validation croisée montrent que quelque soit l'indicateur, l'approximation polynomiale d'ordre un est suffisante), il est possible d'obtenir une estimation du domaine des réponses et les valeurs extrêmes (avec leur intervalle d'incertitude) (Figure V-17).

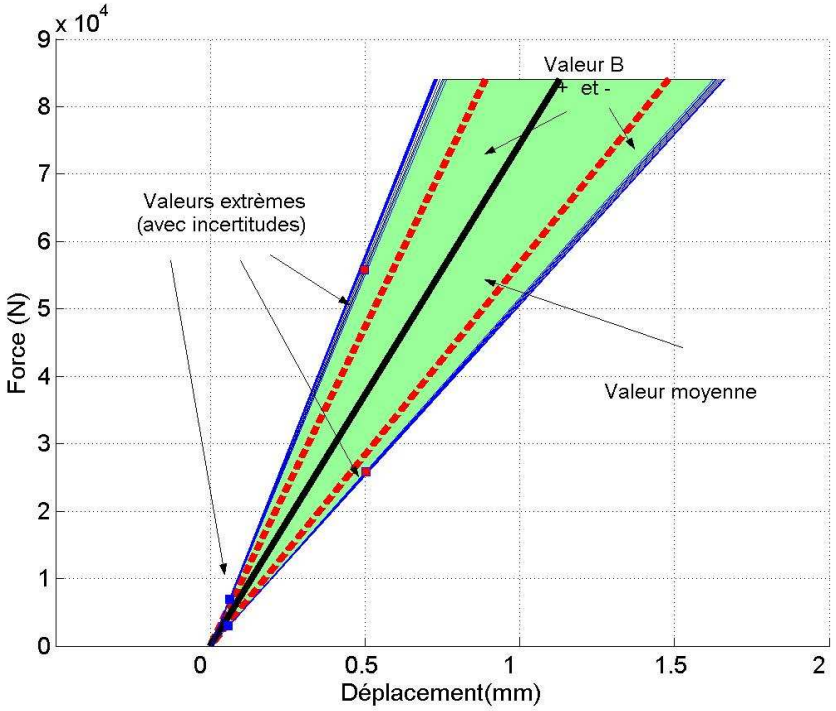


Figure V-17. Domaine des réponses de l'éprouvette multiperforée en traction simple.

Les résultats présentés sur cette figure sont très dispersés aussi bien d'un point de vue raideur que d'un point de vue force à premier endommagement ou à première rupture de fibre. En fait, ces deux points sont liés. En effet, d'un point de vue macroscopique, le critère pour les stratifiés quasi-isotropes correspond à un critère de déformation maximale. Le critère structural correspondant est un critère de déplacement maximum. Quels que soient les jeux de variables d'entrée choisis, les déplacements de premier endommagement et première rupture de fibre sont donc identiques (voir Figures V-16 et V-17); en revanche, la rigidité étant modifiée par la valeur des paramètres d'entrée, les forces correspondantes varient de façon très importante.

Pour les structures à forts gradients, l'application directe d'un critère de rupture conduit à sous-estimer de façon très importante la charge à rupture (Tableau V-5). Afin de pallier ce problème, les industriels utilisent des méthodes de recalage consistant à calculer le critère de rupture avec une contrainte « recalée » afin d'être en bon accord avec les données expérimentales. Lorsque le critère en mode fibre, obtenue avec cette contrainte, est vérifié, la structure est supposée rompue.

La méthode du point stress ([Nuismer, 75]) consiste à appliquer le critère de rupture (en mode fibre) sur un ensemble de points situés à une certaine distance d_0 de la singularité (par exemple au bord du trou dans le cas d'une plaque trouée). En pratique, elle revient à calculer, en post-traitement d'un calcul éléments finis, le critère de rupture en mode fibre à partir des contraintes (dans le repère d'orthotropie du pli) aux points de Gauss situés sur un cercle concentrique au trou de rayon d_0 (Figure V-18). L'identification de la distance d_0 est réalisée en utilisant un (des) essai(s) sur plaque trouée, telle que, à la distance critique d_0, la contrainte soit égale à la résistance du pli UD en traction longitudinale pour la force à rupture expérimentale.

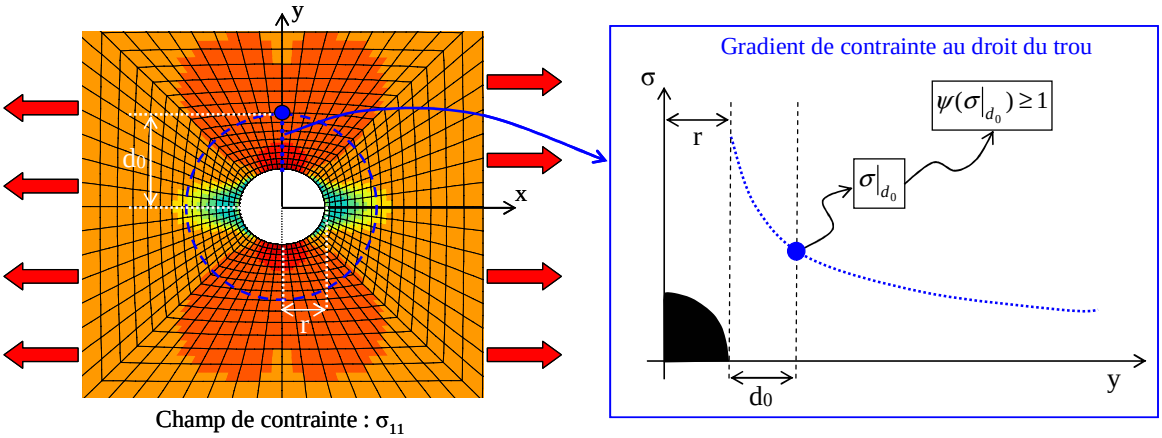


Figure V-18. Principe de la méthode du point stress.

Pour les essais présentés Tableau V-5 (un essai par plaque), des calculs par éléments finis ont été réalisés en utilisant un modèle élastique linéaire pour décrire le comportement des plis. La longueur critique d_0 a été identifiée à partir des résultats obtenus sur l'essai (3) en prenant en compte les incertitudes sur les propriétés élastiques (±5%) et sur la résistance des plis (±10%). Grâce à la méthodologie présentée précédemment, et en utilisant un métamodèle de type polynôme d'ordre un (suffisant dans ce cas), il est possible d'identifier non pas une longueur critique, mais un intervalle de variation de cette longueur qui est ensuite utilisé pour estimer un intervalle de variation pour la force à rupture sur les autres éprouvettes.

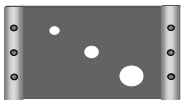
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Rupture finale					
	$[45_2/0_2/-45_2/90_2]_s$	$[0_2/45_2/-45_2/90_2]_s$	$[0_2/45_2/-45_2/90_2]_s$	$[0_2/45_2/-45_2/90_2]_s$	$[45_2/0_2/-45_2/90_2]_s$
Charge à rupture par application directe d'un critère de rupture	30 kN	62 kN	55 kN	52 kN	25 kN
Charge à rupture mesurée	110 kN (Rupture dans les mors)	120 kN	84 kN	109 kN	78 kN

Tableau V-5. Comparaison des charges à rupture prévues par le modèle (première rupture de pli en mode fibre) et la charge à rupture expérimentale. Les plaques présentent différents empilements quasi-isotropes et différentes géométries (taille et position des trous).Dans la suite, l'essai 1 ne sera pas utilisé, la rupture ayant eu lieu dans les mors.

Les résultats obtenus sont présentés Tableau V-6. L'identification de la longueur critique, réalisée sur l'essai (3) en prenant en compte les incertitudes, conduit à un intervalle de variation d_0=[1.5 ;5]mm. L'utilisation de cet intervalle de variation pour d_0 conduit à des forces à rupture très dispersées (de l'ordre de ±30% par rapport aux résultats expérimentaux). Ces résultats montrent que, dans une démarche de calcul, prendre en compte les incertitudes et méconnaissances permet d'estimer la confiance dans une modélisation et sa robustesse. Dans le cas étudié, il a été montré que la méthode du point stress, pourtant très utilisée industriellement, est extrêmement sensible aux aléas et donc très peu robuste.

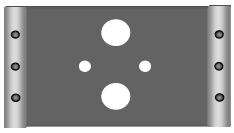
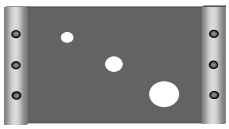
	Intervalle de variation de la longueur critique : d_0= [1.5 ; 5] mm	Force à rupture expérimentale : 84 kN
	Intervalle de variation de la longueur critique : d_0= [1.5 ; 5] mm	Force à rupture prévue : [93 ;142] kN [-30% ; +20%]
	Intervalle de variation de la longueur critique : d_0= [1.5 ; 5] mm	Force à rupture prévue : [88 ; 120] kN [-23% ; +10%]
	Intervalle de variation de la longueur critique : d_0= [1.5 ; 5] mm	Force à rupture prévue : [68 ; 107] kN [-12% ; +30%]

Tableau V-6. Résultats obtenus par une approche non déterministe du Point Stress. La première ligne présente l'identification de l'intervalle de variation de d_0 réalisée sur l'essai (3). Les lignes suivantes présentent l'intervalle de variation obtenu sur la force à rupture prévue et les écarts par rapport à la force à rupture expérimentale.

V.3. Etude d'un assemblage mécanique.

La généralisation de l'utilisation des matériaux composites dans l'industrie aéronautique n'étant pas totale, de nombreuses zones de raccord existent avec les pièces métalliques. Ces raccords s'effectuent généralement par rivetage et l'étude des différents modes de rupture (traction, cisaillement, matage) pouvant survenir est un problème important pour les ingénieurs. L'assemblage considéré (dont la Figure V-19 présente le maillage et les conditions aux limites) est représentatif d'une telle situation.

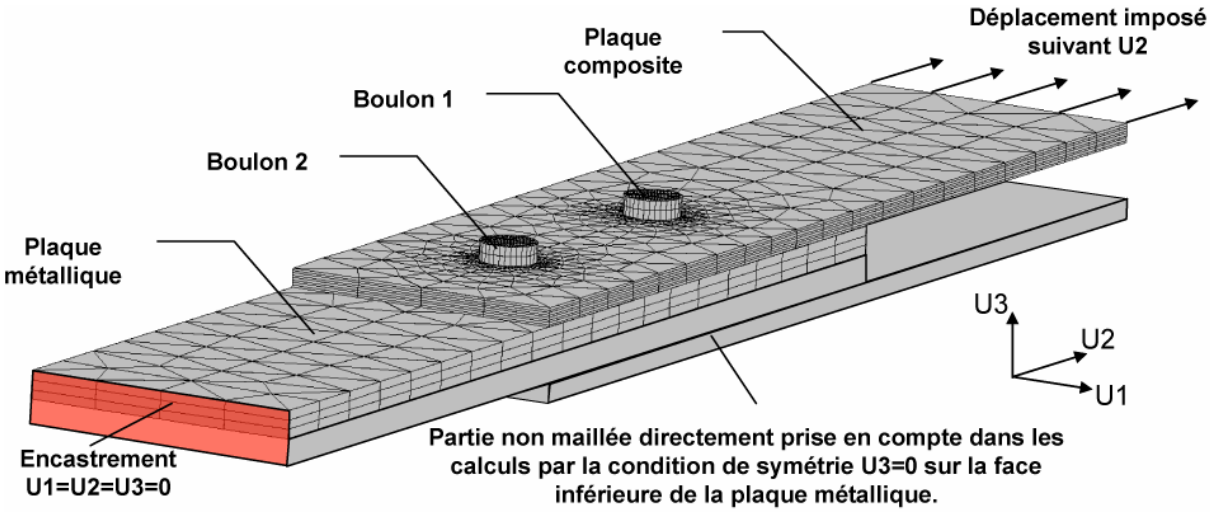


Figure V-19. Maillage de l'assemblage composite -métallique étudié et conditions aux limites appliquées.

Celui-ci est constitué d'une plaque métallique prise en sandwich par deux plaques composites à matrice organique et reliée à elles par deux boulons, représentés de façon simplifiée par deux pions. La symétrie du problème permet de n'étudier que la moitié de l'assemblage en imposant sur la face inférieure de la plaque métallique un déplacement nul suivant la direction 3. Des zones de contact sont définies entre les deux plaques, et entre les pions et la plaque composite. La liaison entre les boulons et la plaque métallique étant considérée parfaite, les pions sont solidaires de la partie métallique. Un comportement élastique isotrope est utilisé pour modéliser les parties métalliques (pions, plaque métallique). Les propriétés employées sont celles d'un acier avec E=200 GPa et $\nu = 0.3$. L'incertitude les affectant est négligée. Le comportement des huit plis de la plaque composite est pris élastique isotrope transverse et l'empilement (quasi-isotrope) cible employé est un $[0°, 45°, 90°, -45°]_S$. Nous considérons par ailleurs que les propriétés élastiques des plis sont incertaines et que les angles de stratification peuvent être affectés par une certaine désorientation. Les valeurs moyennes et les amplitudes de variations sont présentées Tableau V-7.

Le modèle élément finis utilisé comporte 11656 éléments prismes à 6 nœuds avec prise en compte du contact au niveau du boulon et entre les deux plaques par une méthode de pénalité. Le frottement est modélisé par une loi de Coulomb.

Paramètres incertains		Valeurs moyennes	Fluctuations	Amplitudes d'incertitude
E_{11}	x1	142.00 GPa	± 4.97 GPa	± 3.5 %
E_{22}	x1	8400 MPa	± 420 MPa	± 5.0 %
G_{12}	x1	4600 MPa	± 322 MPa	± 7.0 %
ν_{12}	x1	0.33	± 0.02	± 6%
ν_{23}	x1	0.40	± 0.02	± 5%
désorientation des angles de la stratification θ_k	x8	0°	± 2°	± 2.2% (par rapport à 90°)
f_1 coefficient de frottement entre les deux plaques	x1	0.1	± 0.1	± 100%
f_2 coefficient de frottement entre les pions et la plaque composite	x1	0.2	± 0.1	± 50%
d_1 variation du diamètre du trou 1	x1	0.05 mm	± 0.05 mm	± 0.8% (par rapport aux 6 mm de diamètre des pions)
d_2 variation du diamètre du trou 2	x1	0.05 mm	± 0.05 mm	± 0.8% (par rapport aux 6 mm de diamètre des pions)
Total :	17 paramètres incertains			

Tableau V-7. Paramètres incertains et niveau d'incertitude utilisés sur l'exemple de l'assemblage composite –métallique.

Ces paramètres incertains sont complétés par les coefficients de frottement f_1 et f_2 respectivement entre les deux plaques, et entre les pions et la plaque composite. Pour finir, afin de créer deux jeux entre les pions et la plaque composite, nous considérons que des variations d_1 et d_2 comprises entre 0 mm et 0.1 mm affectent les diamètres des deux trous. Le problème comporte donc au total 17 paramètres incertains.

L'application de la démarche mise en place demande initialement la réalisation de 54 calculs. Ceux-ci ont été répartis sur neuf processeurs, ce qui a permis de les effectuer en un peu plus d'une nuit même si individuellement chacun prend environ trois heures. Les données obtenues représentent au final une cinquantaine de gigaoctets.

Mon intérêt s'est tout d'abord porté sur la réponse globale de la structure. La Figure V-20a) présente les courbes réaction -déplacement des 54 calculs effectués. L'effet du frottement entre les deux plaques avant la mise en en contact d'un des boulons

ne contribuant pas à une croissance significative de la réaction, un recalage des courbes est effectué en considérant comme nouvelle origine des déplacements la valeur du plus petit jeu des boulons, ce qui conduit à la Figure V-20b).

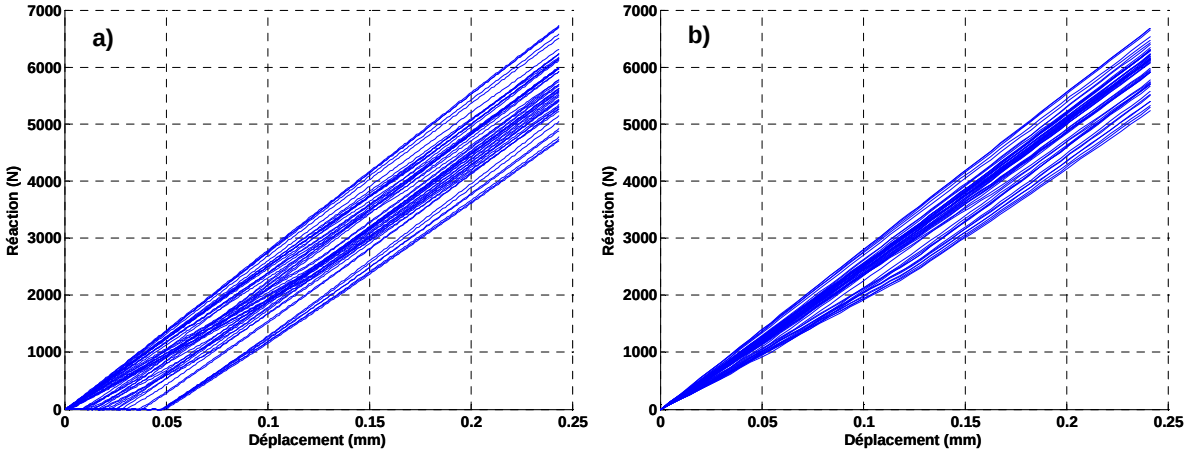


Figure V-20. Courbes réaction- déplacement des 54 calculs effectués pour traiter le problème d'incertitude sur l'assemblage a) sans recalage sur les déplacements, b) en recalant l'origine à la valeur du plus petit jeu affectant les boulons.

Afin d'étudier comment les incertitudes sur les différents paramètres retenus modifient la réponse globale de l'assemblage, nous examinons les valeurs des réactions pour différentes valeurs de déplacement fixées par avance. La réponse complète est ensuite reconstruite par interpolation, à partir de ces valeurs communes à tous les calculs[4].

Une fois ce travail effectué, la stratégie mise en place préconise d'identifier pour chacune des réponses un polynôme de degré un en les paramètres incertains. Sur cet exemple, vingt niveaux de déplacement ont été retenus. Les vingt réponses sont donc les valeurs de la réaction à ces vingt niveaux de déplacement. La recherche des cas extrêmes pour chaque niveau de déplacement, combinée à la détermination d'une zone de confiance par *leave-5-out* conduit à la Figure V-21. Cette figure présente le comportement du calcul moyen (donc avec les valeurs moyennes des paramètres incertains), seul calcul qui aurait été effectué dans le cas déterministe, avec en plus, pour chaque valeur de déplacement retenue, l'amplitude de variation de la réaction due aux incertitudes sur les 17 paramètres du problème (intervalle bleu). La phase de vérification par validation croisée permet d'y ajouter l'incertitude due à l'utilisation des approximations polynomiales (intervalle rouge). Il apparaît clairement que la confiance sur les valeurs des réponses fournies par les approximations est insuffisante. Comme pour les exemples du chapitre IV, il est bien sûr possible de s'intéresser à la stabilité des coefficients des approximations polynomiales décrivant chaque réponse. La Figure V-21 présente par exemple l'importance relative et la stabilité des coefficients pour la dernière sortie (0.24 mm de déplacement). Les amplitudes de variation pour chacun des coefficients comme les changements de signe d'influence observé pour la plupart d'entre eux confirme clairement un manque de stabilité de l'approximation.

[4] En effet, les sorties (ou cartes) du calcul éléments finis pour un calcul non-linéaire dépendent du cheminement de l'algorithme de résolution (division du pas de temps en cas d'échec des itérations).

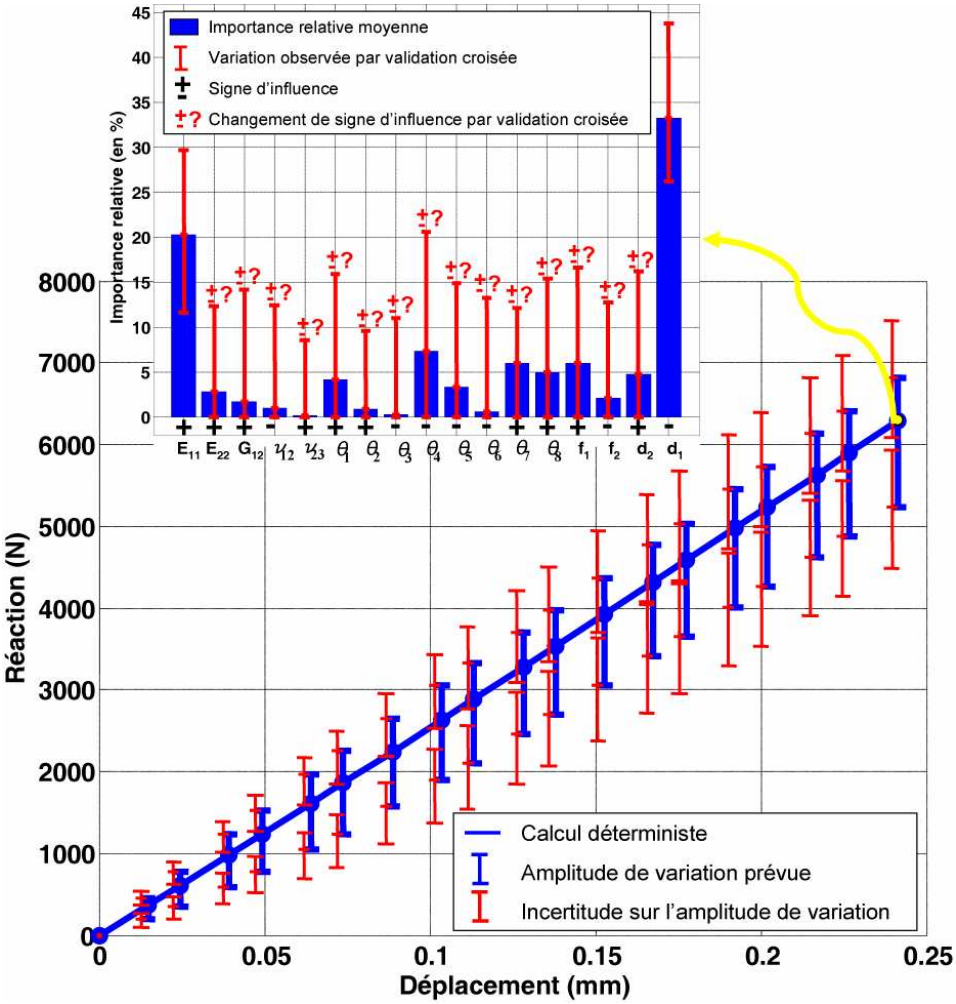


Figure V-21. Comportement moyen de l'assemblage, amplitudes de variation dues aux effets des paramètres incertains et incertitudes résultant de l'utilisation des approximations polynomiales de degré un. Le manque de confiance apparent est confirmé par l'instabilité sur les valeurs des coefficients de l'approximation pour la dernière réponse.

La confiance sur les résultats obtenus n'étant pas acceptable, il s'agit de sélectionner dans la stratégie mise en place un métamodèle plus évolué que les polynômes de degré un permettant de dépasser ces difficultés. L'analyse de l'erreur commise par les premières approximations ne fournissant pas d'éléments significatifs, j'ai décidé dans cette situation de recourir à des polynômes insaturés, en sélectionnant les termes les plus influents à l'aide des descripteurs sondes. J'ai ici choisi de conserver dans les polynômes le même nombre de termes que dans le cas linéaire. Les polynômes insaturés comprennent donc dix-sept coefficients choisis parmi les plus significatifs parmi les termes linéaires, quadratiques, cubiques et de couplage simple. Les nouveaux résultats obtenus sont présentés Figure V-22.

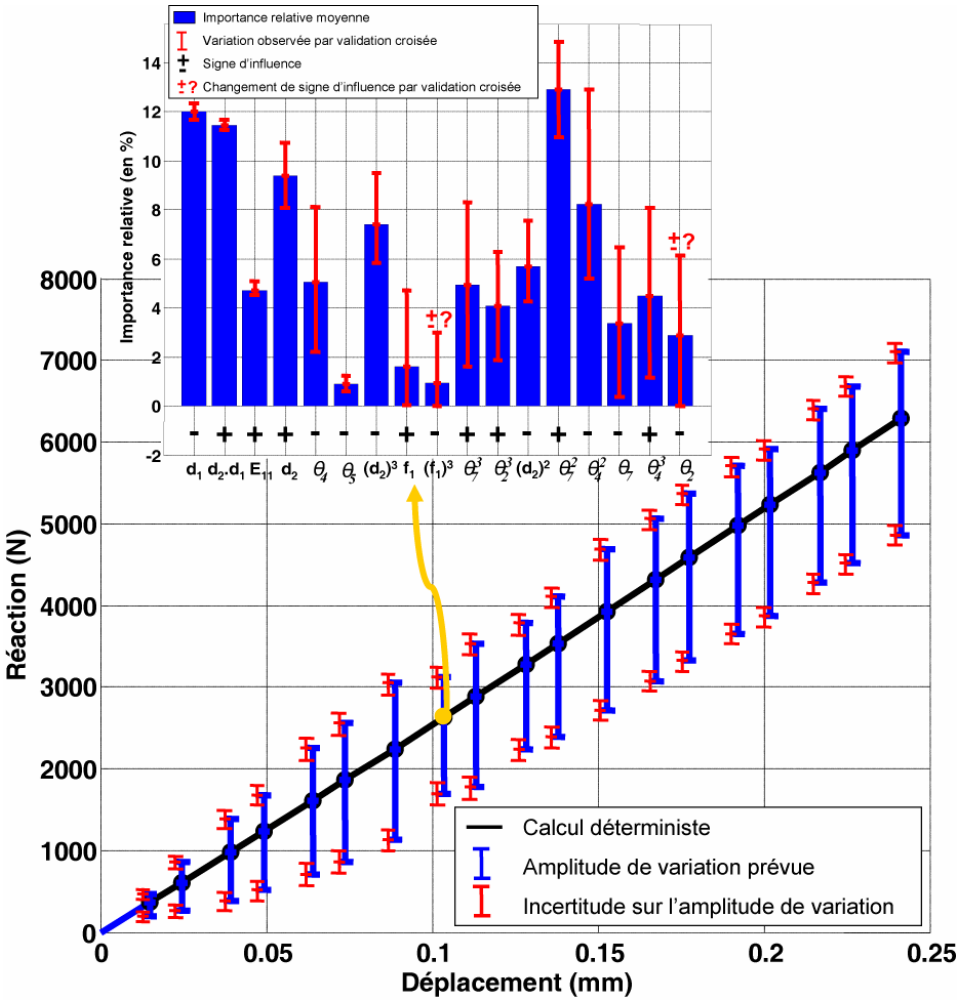


Figure V-22. Comportement moyen de l'assemblage, amplitudes de variation dues aux effets des paramètres incertains et incertitudes résultant de l'utilisation de polynômes insaturés en guise de métamodèles. La confiance obtenue est nuancée par l'instabilité des coefficients des métamodèles.

La détermination de la confiance par *leave-k-out* (avec k=5 et 100 rééchantillonnages) montre une amélioration nette par rapport à l'utilisation des polynômes de degré un, même si le critère d'une incertitude sur la réponse inférieure à ±5% de l'amplitude maximale de variation prévue n'est pas encore atteint. La stabilité des coefficients laisse par ailleurs encore à désirer. Le classement d'influence prépondérante par descripteurs sondes est également loin d'être pleinement vérifié après identification. Le fait qu'un paramètre comme $\boldsymbol{\theta}_7^2$ apparaissent après identification comme plus important que les jeux sur les boulons peut aussi faire douter. Néanmoins des informations intéressantes sont mises en évidences par ce choix de métamodèle. En particulier, parmi les trois paramètres les plus influents, les termes d_1, $d_1.d_2$ et E_{11} sont systématiquement présents pour les différentes réponses. Cette détection d'une influence importante du couplage entre les jeux d_1 et d_2 a motivé une analyse plus fine du comportement mécanique de l'assemblage. J'ai ainsi remarqué une différence de comportement (Figure V-23) suivant que le pion 1 ou 2 entre en contact en premier avec la plaque composite, ce qui m'a incité à distinguer les deux cas.

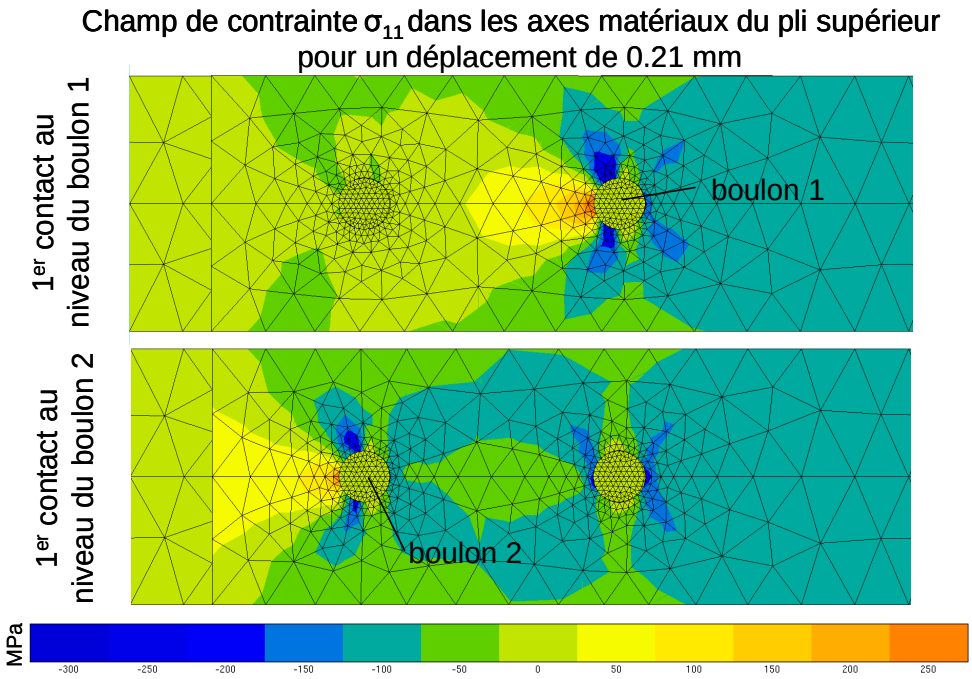


Figure V-23. Pour un déplacement de 0.21 mm, différence sur le champ de contrainte σ_{11} dans les axes matériaux suivant que le premier contact entre la plaque composite et les boulons se fasse au niveau du pion 1 ou du pion 2.

En diminuant la non linéarité de la relation paramètres incertains–réponses considérées (ici les réactions pour diverses valeurs de déplacement) cette distinction en deux cas permet de n'utiliser à nouveau que des polynômes de degré un en guise de métamodèles. Comme le montre la Figure V-24 cela permet de gagner en confiance sur la fin de la courbe de comportement. Par contre la confiance comme la stabilité des coefficients ne sont pas encore satisfaisante en début de courbe. Une explication plausible étant que seule la moitié des calculs initiaux sont désormais utilisables pour identifier chaque métamodèle, j'ai décidé de refaire une série de calculs. Pour cela les 54 jeux de paramètres (17-uplets) initiaux ont été repris en inversant les valeurs prises pour d_1 et d_2.

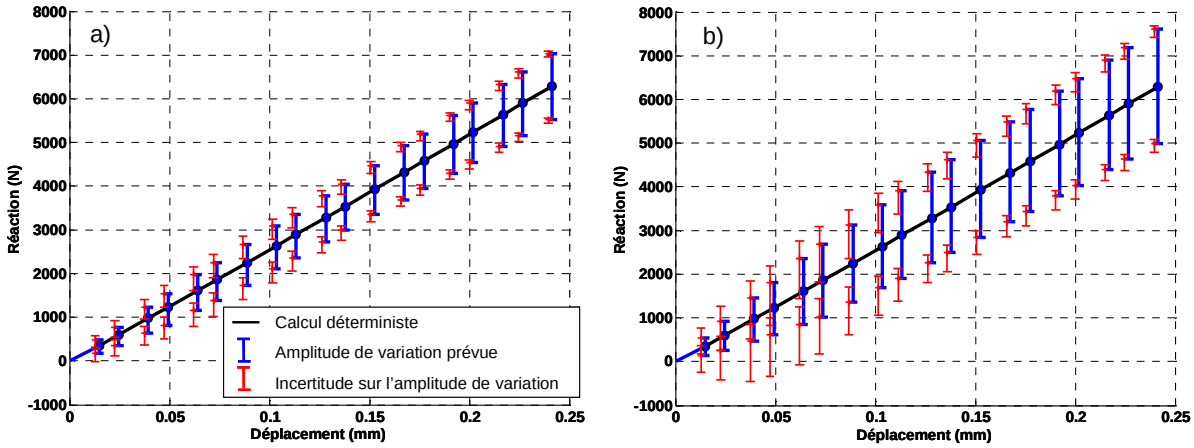


Figure V-24. Comportement moyen, amplitude de variation due aux paramètres incertains considérée et incertitude de prévision résultant de l'utilisation de polynômes de degré un en guise de métamodèle pour les cas où le premier contact avec la plaque composite est associé au (a) boulon 1 ou au (b) boulon 2.

Pour chacun des deux cas considérés, cette nouvelle série de 54 calculs permet de disposer d'un total de 54 calculs pour l'identification de chaque métamodèle. Une nouvelle utilisation de métamodèles polynomiaux de degré un conduit aux résultats de la Figure V-25. Le cas correspondant à un premier contact au niveau du boulon 2 présente une plus grande sensibilité aux incertitudes que le cas où le contact s'effectue d'abord sur le boulon 1.

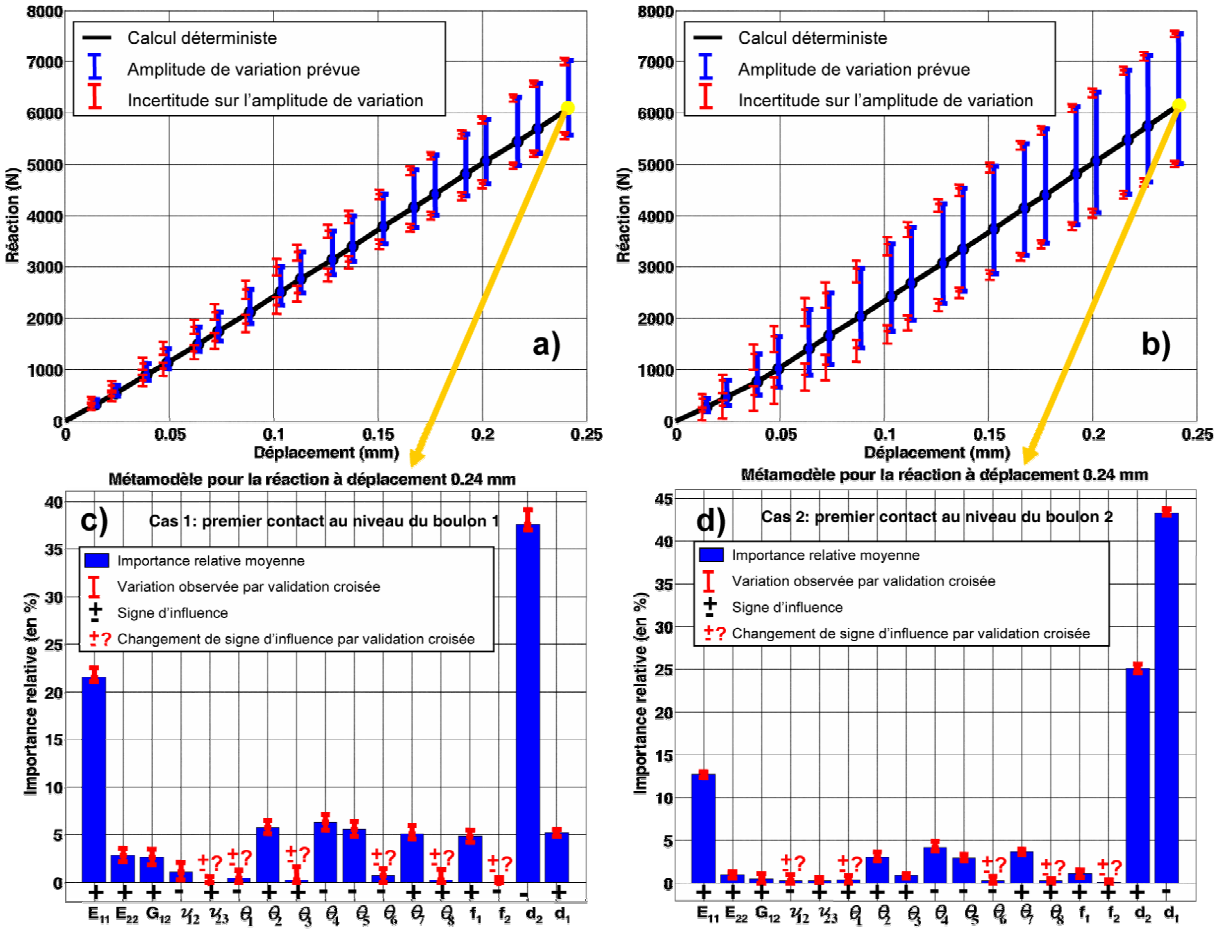


Figure V-25. Courbe de comportement de l'assemblage avec amplitude de variation maximale due aux effets des paramètres incertains et incertitude de prédiction résultant de l'utilisation de métamodèles polynomiaux de degré un. L'importance relative des différents paramètres et la stabilité des coefficients associés dans le métamodèle est également présenté pour la réaction à déplacement 0.24 mm. Les figures (a) et (c) correspondent au cas boulon 1 en contact en premier, tandis que (b) et (d) au cas boulon 2 en contact en premier.

Pour les deux cas, une distinction doit être faite entre début et fin de la courbe de comportement. Le début de la courbe pose toujours des problèmes avec une confiance insatisfaisante sur la prédiction des valeurs de réaction, associée à une instabilité marquée des métamodèles définis. Les effets des mises en contact progressives des deux boulons rendent le comportement de l'assemblage dans cette zone difficile à décrire par les métamodèles. Une analyse mécanique plus fine associée à une augmentation du nombre de calculs se focalisant sur ce domaine de comportement serait sans doute nécessaire pour arriver à des résultats pleinement satisfaisants. Sur la fin de la courbe de comportement par contre, la confiance obtenue vérifie bien 95% de l'amplitude maximale de variation prévue. La stabilité des coefficients des métamodèles est assurée et l'importance relative des différents paramètres satisfait une certaine logique mécanique. Le module E_{11} des plis de la plaque composite est ainsi détecté comme paramètre influent ce qui est logique

puisque abstraction faite de l'effet des boulons il s'agit d'un essai de traction où l'essentiel des efforts est repris par les plis à 0° de l'empilement. Des importances relatives semblables sont également obtenues pour les angles de stratifications présentant la même valeur moyenne, comme par exemple θ_4 et θ_5. Mais surtout, dans le cas où le boulon 1 entre en contact en premier, le paramètre d_2 pilotant le jeu sur le deuxième boulon apparaît bien comme prépondérant par rapport au paramètre d_1, et inversement quand le premier contact se fait au niveau du boulon 2. En dépit de la distinction en deux cas, les deux paramètres d_1 et d_2 continuent à jouer dans les métamodèles. Les essais effectués pour réduire le problème à seize paramètres incertains en remplaçant d_1 et d_2 par un unique paramètre d_1-d_2 ou d_2–d_1 n'ont pas été concluants, la confiance se trouvant diminuée. En effet, si les paramètres d_1 et d_2 servent à introduire un jeu entre les boulons et la plaque composite, ils le font en modifiant le diamètre des trous de la plaque (modifiant ainsi la surface de contact).

V.4. Etude d'une loi d'endommagement non- linéaire : cas d'une cornière composite

Considérons maintenant l'exemple d'une cornière composite (Figure V-26). Cette pièce générique est souvent utilisée pour étudier les effets hors plan dans le matériau. De façon assez schématique, cet exemple est représentatif de l'attache de volets de post-combustion du moteur M88 produit par SNECMA et équipant le Rafale. La cornière fait la liaison entre une partie composite est une partie métallique. L'assemblage est supposé parfait, ce qui fait qu'aucune zone de contact n'est utilisée dans le maillage et que les parties composite et métallique sont solidaires. Comme indiqué sur la Figure V-26, un déplacement est imposé sur une ligne de nœuds afin de faire fléchir la partie droite de la cornière. Le maillage comporte au total 4872 éléments (pavés à 8 nœuds) dont 1248 dans la partie composite. La zone d'intérêt du coude compte elle 288 éléments.

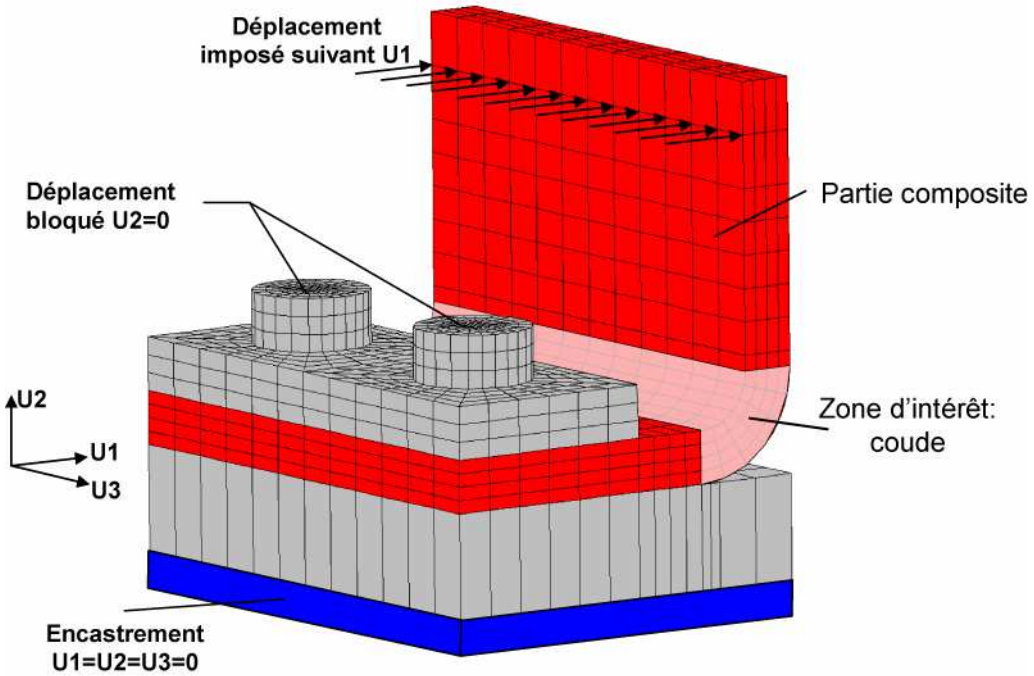


Figure V-26. Maillage et conditions aux limites de la liaison cornière composite – partie métallique.

Le but est ici d'étudier l'effet des incertitudes sur la loi de comportement du matériau. Le modèle de comportement considéré est une loi endommageable développée à l'ONERA (modèle ODM pour ONERA Damage Model détaillé dans [Marcin, 07] et présenté rapidement en annexe 5). Celle-ci présente la caractéristique de pouvoir décrire l'ensemble des variations de comportement observée au moment de l'identification en faisant simplement varier les coefficients d'élasticité de la loi. Le matériau utilisé étant un composite tissé orthotrope, les paramètres incertains considérés sont donc les six coefficients E_1, E_3, G_{12}, G_{23}, ν_{12}, ν_{23}. Le Tableau V-8 présente les valeurs moyennes et les amplitudes d'incertitudes utilisées. Les données matériaux employées correspondent au CERASEP 347 (composite SiC/SiC tissé équilibré).

Paramètres incertains		Valeurs moyennes	Fluctuations	Amplitudes d'incertitude
E_1	x1	230.0 GPa	± 5.0 GPa	± 2.2 %
E_3	x1	80.0 GPa	± 20.0 GPa	± 25 %
G_{12}	x1	80.0 GPa	± 20.0 GPa	± 25 %
G_{23}	x1	40.0 GPa	± 20.0 GPa	± 50 %
ν_{12}	x1	0.130	± 0.015	± 11.5 %
ν_{23}	x1	0.26	± 0.02	± 7.7 %
Total :	6 paramètres incertains			

Tableau V-8. Paramètres incertains et niveau d'incertitude utilisés sur l'exemple de la cornière composite.

V.4.1. Etude du comportement global

Partant des six paramètres incertains considérés, l'application de la stratégie mise en place demande initialement la réalisation de 21 calculs. La même procédure que dans le cas de l'assemblage boulonné est ensuite appliquée. L'identification de métamodèles polynomiaux de degré un conduit en terme d'amplitude de variation sur les réponses et de confiance associée aux résultats de la Figure V-27. La confiance obtenue n'est que de 70% environ, ce qui est peu satisfaisant, tout comme la médiocre stabilité obtenue sur les coefficients. Toutefois l'incertitude sur les réponses qui en résulte n'excédant pas ±35 N, je considère que cela est acceptable, surtout au vu du niveau d'incertitude très important appliqué à certains paramètres. Le paramètre détecté comme le plus influent est le G_{23} ce qui s'explique à la fois par l'importance des effets hors-plan et par la forte amplitude de fluctuation qui lui est appliquée.

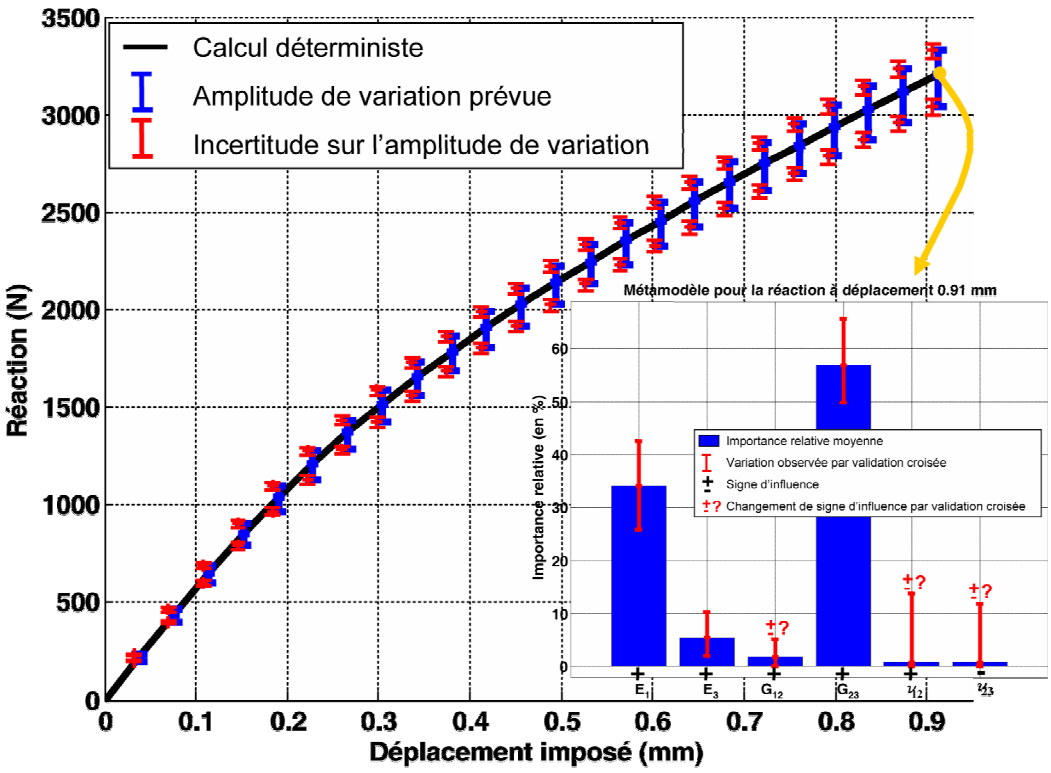


Figure V-27. Courbe de comportement de la cornière avec amplitude de variation maximale due aux effets des paramètres incertains et incertitude de prédiction résultant de l'utilisation de métamodèles polynomiaux de degré un. La stabilité des coefficients est présentée pour le métamodèle décrivant la réaction pour un déplacement de 0.91 mm.

En effectuant les calculs correspondant aux cas extrêmes, on obtient la Figure V-28 présentant les différences entre ces deux cas pour la contrainte hors-plan σ_{33} dans les axes matériaux.

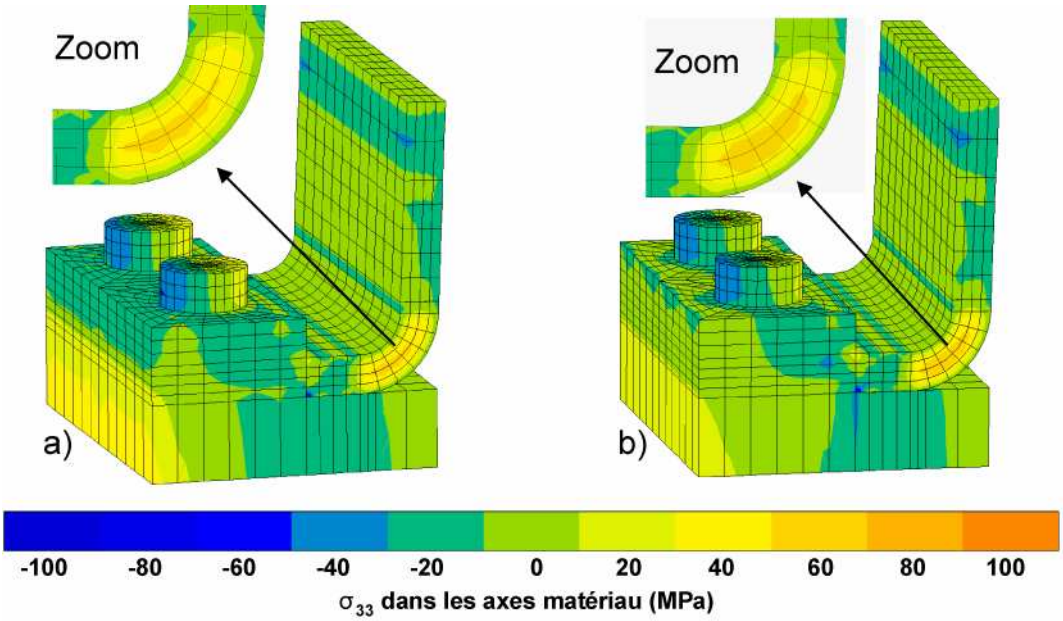


Figure V-28. Pour la contrainte hors-plan σ_{33} dans les axes matériaux, différences sur le champ de contrainte entre les calculs correspondants a) au comportement minimum et b) maximum.

Ici les valeurs extrêmes sont choisies de manière à maximiser (minimiser) l'indicateur global qu'est la réaction (cf. méthode 3 p.149). La différence n'apparaît pas très

importante, ce que pouvait laisser prévoir la faible amplitude de variation présentée par la courbe de comportement.

V.4.2. Approche « probabiliste »de la rupture de la cornière

Afin d'étudier la rupture de la cornière nous employons la même approche que celle présentée IV.2.8. La Figure V-29 rappelle le principe de cette approche. Nous concentrons notre intérêt sur la zone critique que représente le coude de la cornière. A partir des calculs déjà réalisés, pour chacune des trois contraintes σ_{11}, σ_{22} et σ_{12} en chacun des 7760 points de Gauss de la cornière une surface de réponse de degré un est identifiée. Après vérification de leur bonne qualité d'approximation, ces surfaces de réponse sont ensuite utilisées dans des simulations de Monte-Carlo afin de déterminer l'état de contrainte en chaque point de Gauss. Cet état de contrainte est ensuite injecté dans le critère de rupture utilisé afin de déterminer si il y a défaillance. La répétition de ces étapes sur l'ensemble des simulations de Monte-carlo permet finalement d'en déduire la probabilité de rupture.

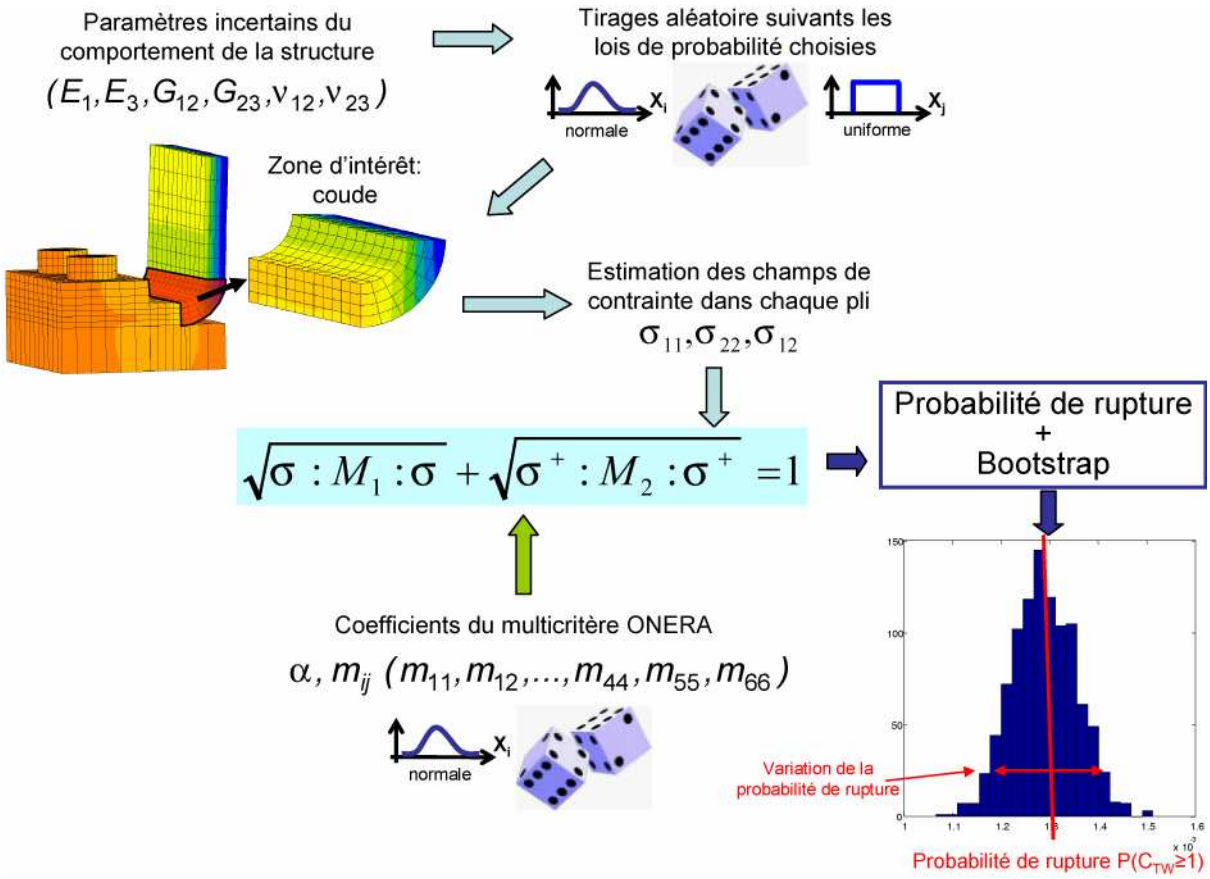


Figure V-29. Principe de la démarche d'étude probabiliste de la rupture mise en place à partir des surfaces de réponse définies sur les contraintes en chaque point de Gauss.

Sur ce cas, le critère de rupture employé est le multicritère ONERA présenté en annexe 5. La Figure V-30 présente les enveloppes du critère dans les plan (σ_{11}, σ_{22}) et (σ_{11}, σ_{12}). Les données des essais disponibles conduisent aux enveloppes tracées en noir. La notion probabiliste est ensuite ajoutée à ce critère en réalisant des simulations de Monte-Carlo faisant varier ses coefficients. Une loi normale est utilisée, de moyenne décentrée de façon à ce que les valeurs à « plus 2 fois l'écart-type » correspondent aux coefficients identifiés à partir des essais. Une telle approche conserve évidemment un caractère arbitraire mais permet de tenir compte du fait que la rupture ayant été observée sur les essais peut l'être de façon plus

« précoce ». Par ailleurs, il est difficile de procéder autrement sur un matériau comme celui-ci pour lequel très peu d'essais sont disponibles (une quinzaine, ce qui est déjà beaucoup) et sans répétitions (le matériau considéré étant très coûteux avec un coût unitaire des éprouvettes tubulaires utilisées de 10000 euros).

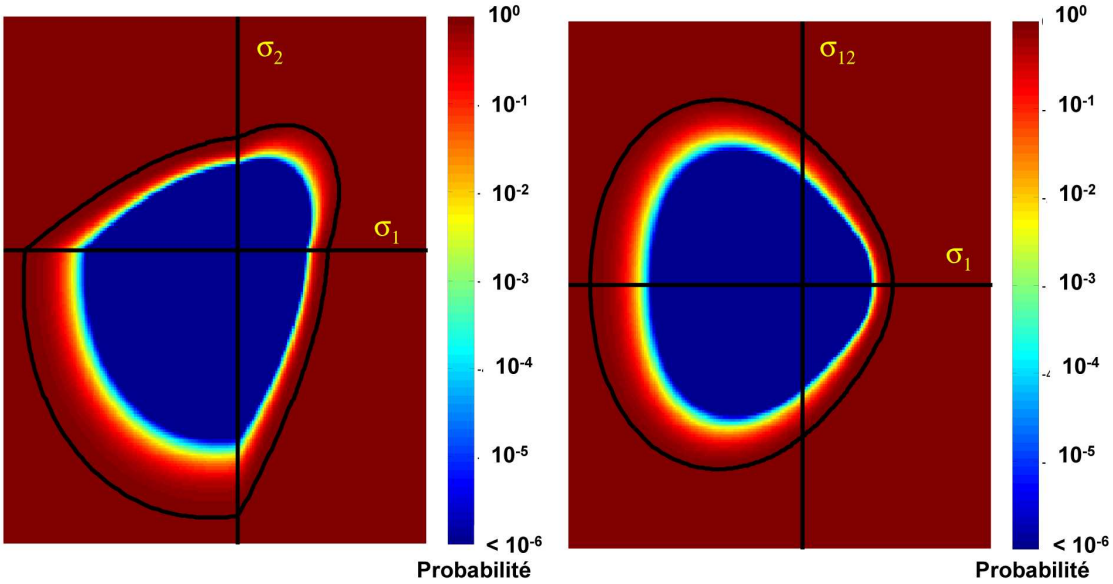


Figure V-30. Enveloppe du multicritère de rupture ONERA pour les points d'identification disponibles (courbe noire) et probabilité de rupture associée obtenue par simulations de Monte-Carlo.

L'utilisation des valeurs moyennes du critère de rupture et de l'état de contrainte moyen pour les 7760 points de Gauss retenus conduit à l'histogramme de la Figure V-31.

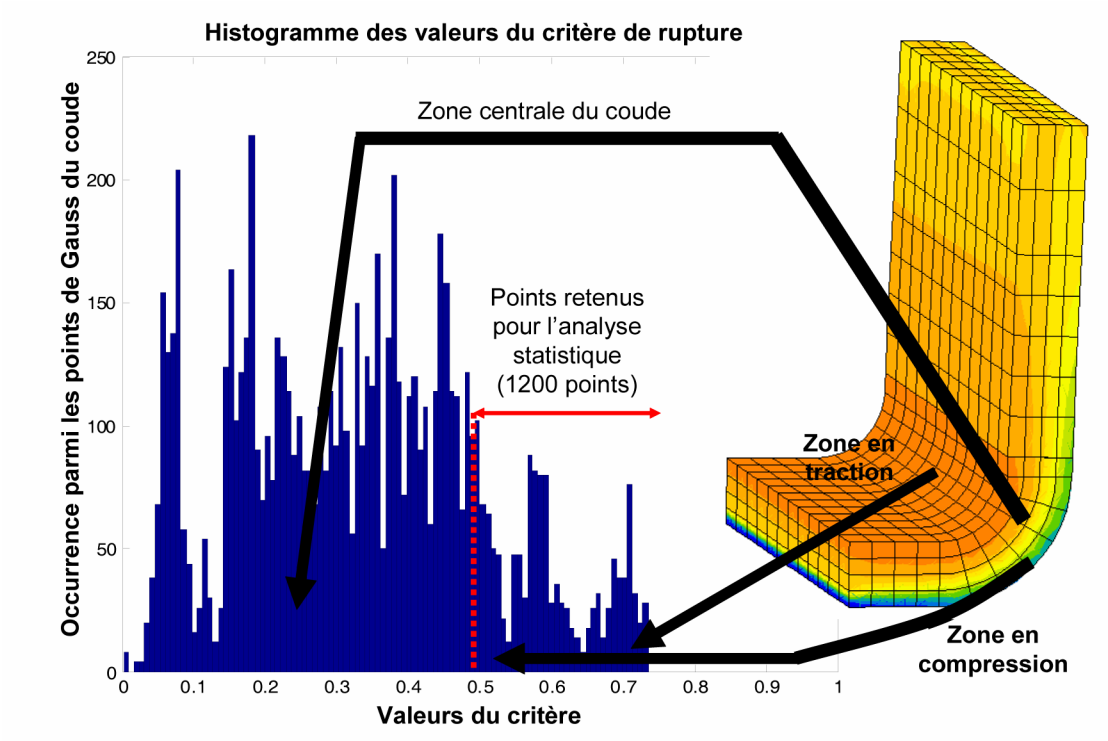


Figure V-31. Histogramme de la répartition des valeurs du critère au 7760 points de Gauss.

Afin de diminuer les temps de calculs pour l'analyse probabiliste, nous avons choisi de ne retenir que les 1200 points de Gauss les plus significatifs, associés à des valeurs du critère supérieure à 0.5. Cette valeur (0.5) a été choisie afin de retenir à la fois des points dans la zone en traction et en compression du coude. La Figure V-32 présente les valeurs du critère en fonction de l'état de contrainte, les états de contrainte correspondant à tous les points de Gauss du coude et enfin les points sélectionnés pour l'analyse statistique.

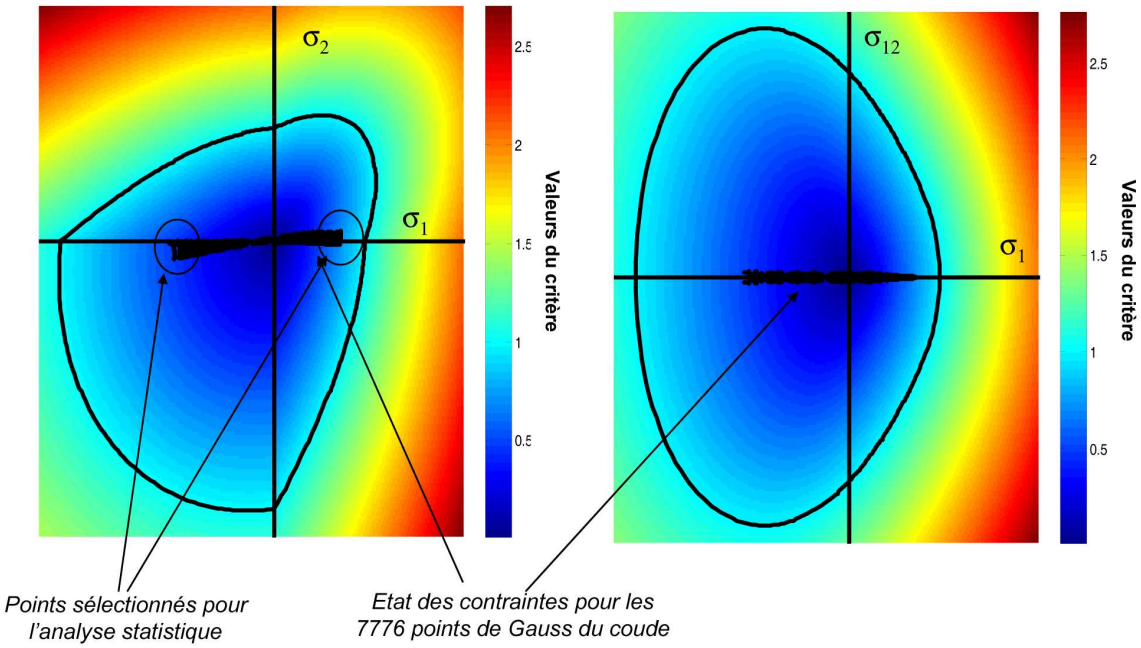


Figure V-32. Isovaleurs du critère de rupture utilisé pour l'analyse probabiliste.

Nous avons ensuite appliqué la procédure décrite par la Figure V-29 pour ces 1278 points et obtenus ainsi les 1278 probabilités de rupture associées qui se répartissent comme données par le Tableau suivant.

Analyse sur 1278 points de Gauss se répartissant comme suit :

980	présentent une probabilité de rupture P_r :	$P_r < 10^{-5}$
30		$10^{-5} < P_r < 10^{-4}$
104		$10^{-4} < P_r < 10^{-3}$
146		$10^{-3} < P_r < 10^{-2}$
10		$10^{-2} < P_r$

Tableau V-9. Résultat de l'analyse probabiliste de la rupture sur les 1200 points de Gauss les plus significatifs (une simulation de Monte-carlo à 300 000 tirages a été utilisée).

On peut ensuite s'intéresser à discriminer les probabilité suivant leur localisation. Un résultat intéressant est alors que tous les points en compression présentent une probabilité de rupture inférieure à 10^{-5} (étant donné le nombre de calculs effectués - 3.10^5 – une probabilité de 10^{-5} est à l'extrême limite de ce qui peut être détecté).

V.5. Application à l'étude de la rupture des sandwichs

Les matériaux sandwichs sont composés de deux éléments : les peaux et l'âme. Les peaux, généralement fines, assurent les propriétés mécaniques et sont fabriquées en matériaux CMO stratifiés unidirectionnels ou tissés. L'âme est plus épaisse mais de faible densité et ses propriétés mécaniques sont généralement assez faibles. Son rôle est de solidariser les peaux et de leur transmettre les efforts de cisaillement.

V.5.1. Présentation de la démarche pour l'étude de la rupture des sandwichs

La structure particulière des matériaux sandwichs induit des mécanismes de ruine particuliers pouvant être classés suivant deux catégories :

- La première concerne les aspects pouvant être modélisés par les outils utilisés pour les stratifiés. Dans ce cas, les sollicitations ne font intervenir que des ruptures « classiques » (rupture dans les peaux, flambement global de la structure, décollement interplis). D'un point de vue modélisation, le sandwich peut-être considéré comme un stratifié dont l'un des plis est plus épais et a un comportement différent des autres plis.
- Le second concerne les aspects nécessitant le développement d'outils particuliers. Sous chargement de compression, des flambements locaux (de l'âme ou des peaux) peuvent survenir entraînant la ruine finale de la structure. Dans ce cas, le sandwich ne peut plus être représenté comme un simple composite, mais doit être vu comme une structure particulière avec ses propres modes de défaillance qu'il convient de modéliser. La Figure V-33 présente les différents mécanismes de ruine spécifiques aux matériaux sandwichs.

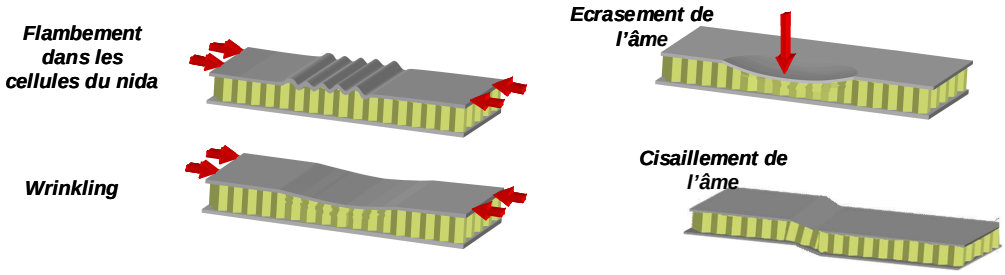


Figure V-33. Présentation des différents modes de ruine spécifiques aux matériaux sandwichs.

Nous nous intéressons ici à l'aspect rupture « sandwich » en nous appuyons sur les résultats expérimentaux de ([Petras, 99]). Le matériau étudié est un sandwich constitué d'une âme en Nomex (d'épaisseur 9,4mm) et de peaux en stratifié de peaux d'UD verre/epoxy (empilement $[0,45,-45,90]_s$ d'épaisseur 0,38mm) soumis à des essais de flexion 3 points (Figure V-34). Différents types d'âme (masse volumique de 29 à 128 $kg.m^{-3}$) et différentes géométries (longueur entre couteaux variant de 50 à 500 mm) sont testés induisant des modes de ruine variables.

Le modèle éléments finis utilisé pour décrire ces essais est défini par :

- Un élément brique quadratique est utilisé pour les peaux dont le comportement est représenté par un modèle élastique écrit à l'échelle du stratifié ([Petras, 99]),

- Plusieurs éléments quadratiques sont utilisés dans l'épaisseur de l'âme afin de capter les cisaillements hors-plan. Le comportement est élastique anisotrope (μ=0, modules nuls dans le plan, ([Gornet, 06]).

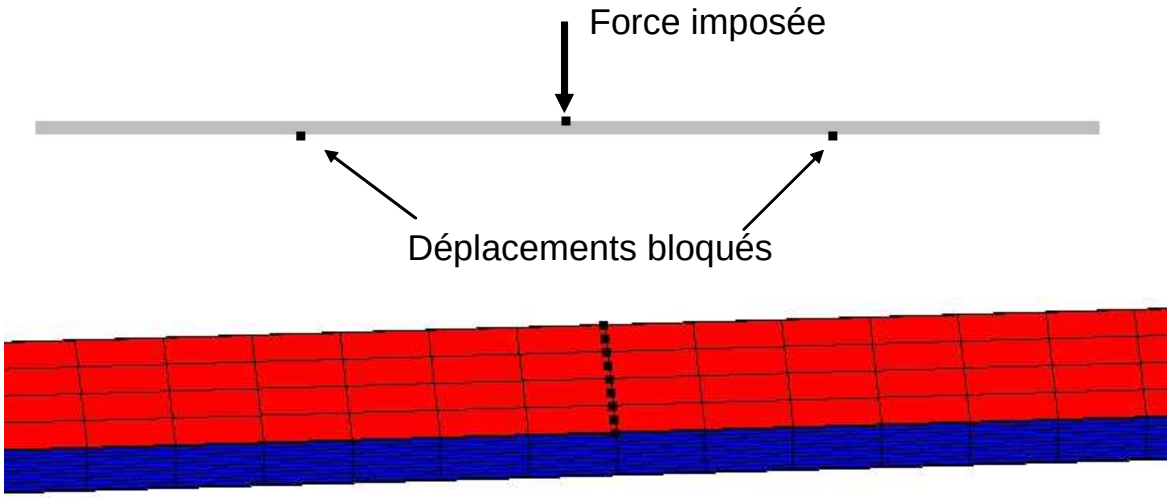


Figure V-34. Maillage et conditions aux limites pour la modélisation d'un essai de flexion 3 points sur une structure sandwich. Les peaux sont représentées en rouge et l'âme en bleu.

La ruine est déterminée en utilisant des limites à rupture, propre à chaque mode de rupture. Pour les mécanismes dans l'âme, ces critères sont déterminés expérimentalement ([Euro, 07]) ou numériquement ([Gornet, 06]). Pour les mécanismes dans les peaux, ils sont déterminées à l'aide de formules analytiques ou de fines modélisations éléments finis faisant intervenir la géométrie et les propriétés élastiques des constituants ([Ley, 99]). Le mode de rupture final sera celui caractérisé par la force à rupture la plus faible.

V.5.2. Analyse en données incertaines de la rupture de sandwich en flexion 3 points

Le but de cette partie est de prévoir la force à rupture (et son intervalle de variation) ainsi que le mode de ruine pour une éprouvette constituée d'une âme de densité 48kg.m^{-3}, soumise à des essais de flexion 3 points (5 conditions expérimentales correspondant à des longueurs entre appuis de 500, 380, 220, 130 et 60 mm). Cette densité a été choisie car elle induit un changement de mode de rupture en fonction de la longueur entre appuis. L'analyse de la rupture est effectuée en prenant en compte les incertitudes géométriques (longueur entre appuis, épaisseurs de l'âme et des plis) et matériaux (propriétés élastique et à rupture de l'âme). Les amplitudes de variation de chacun des paramètres sont données

Nom du paramètre	Valeurs moyennes	Fluctuations	Amplitudes d'incertitude
Module dans le sens de l'épaisseur de l'âme E_z	138.0 MPa	± 13.8 Mpa	± 10 %
Module de cisaillement hors-plan de l'âme G_{13}	48.0 MPa	± 9.6 MPa	± 20 %
Module de cisaillement hors-plan de l'âme G_{23}	24.0 MPa	± 4.8 MPa	± 20 %
Résistance en cisaillement hors-plan de l'âme *Sc*	0.760 MPa	0.152 MPa	± 20 %
Epaisseur de l'âme *c*	9.4 mm	± 0.2 mm	± 2.1%
Epaisseur des peaux *t*	0.38 mm	± 0.02 mm	± 5.3%
Longueur entre appuis *L*	500, 380, 220, 130 ou 60mm	± 5 mm	±1%, ±1.3%, ±2.3%, ±3.9%, ±8.3%
Total:	7 paramètres incertains		

Tableau V-10. Paramètres incertains et niveau d'incertitude utilisés pour l'étude de la rupture d'une éprouvette sandwich soumise à un essai de flexion 3 points.

Deux modes de ruines sont pris en compte : le *wrinkling* et la ruine par cisaillement de l'âme.

- Pour le mode de rupture par cisaillement de l'âme, un critère de contrainte maximale appliqué à la moyenne des contraintes de cisaillement dans l'âme est utilisé (la valeur de la contrainte maximale admissible est un paramètre incertain : voir Tableau V-10).
- Pour le mode de ruine par *wrinkling*, un critère de contrainte maximale appliqué à la moyenne des contraintes longitudinale dans l'âme est utilisé (la valeur de la contrainte maximale admissible est calculée par la relation (Eq. V-3) où E_c est le module homogénéisé des peaux (isotropes dans le plan).

$$\sigma_w = \frac{1}{2}(min(G_{13}, G_{23}) * E_C * E_3)^{1/3} \qquad \text{(Eq. V-3)}$$

A chaque condition expérimentale, un métamodèle (de type polynôme de degré un) par mode de rupture est construit reliant force à rupture et variation des données incertaines.

La qualité de l'approximation (pour une longueur entre appuis de 500 mm et pour le mode de rupture par *wrinkling*) est présentée Figure V-35. Les résultats obtenus montrent que dans ce cas (et comme souvent) une approximation polynomiale de degré un est suffisante : les points d'identification sont proches de la droite unitaire, qui représente une approximation parfaite, de plus, l'erreur de généralisation (présentée sous forme de barres d'erreurs aux points d'identification) montre que l'identification est stable.

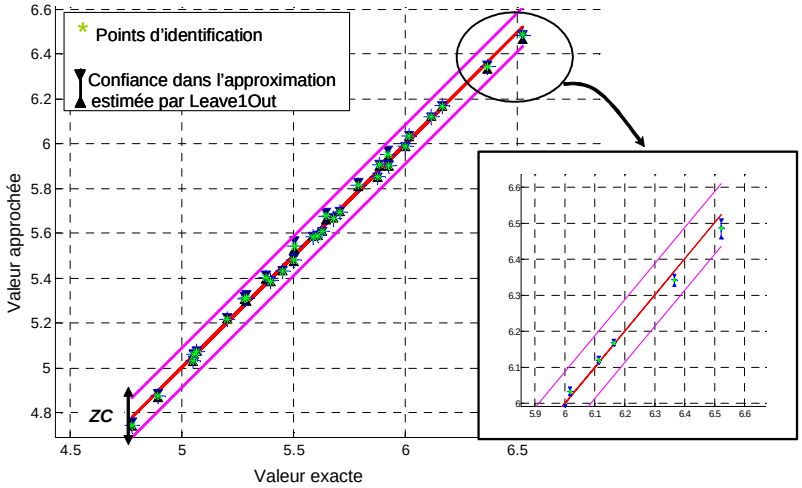


Figure V-35. Résultats obtenus, représentés sous la forme d'un diagramme de dispersion par un métamodèle polynomial de degré un. La zone de confiance à 5% (ZC) est reportée. L'erreur de généralisation, estimée par la méthode du Leave-1-out, est présentée avec des barres d'erreurs aux points d'identification.

La Figure V-36 présente l'enveloppe des forces à rupture d'une éprouvette sandwich soumise à un essai de flexion 3 points en fonction de la longueur entre appuis pour une rupture par *wrinkiling* ou par cisaillement de l'âme. Il est intéressant de remarquer que les résultats sont beaucoup plus dispersés pour le mode par cisaillement que pour le mode par *wrinkling*.

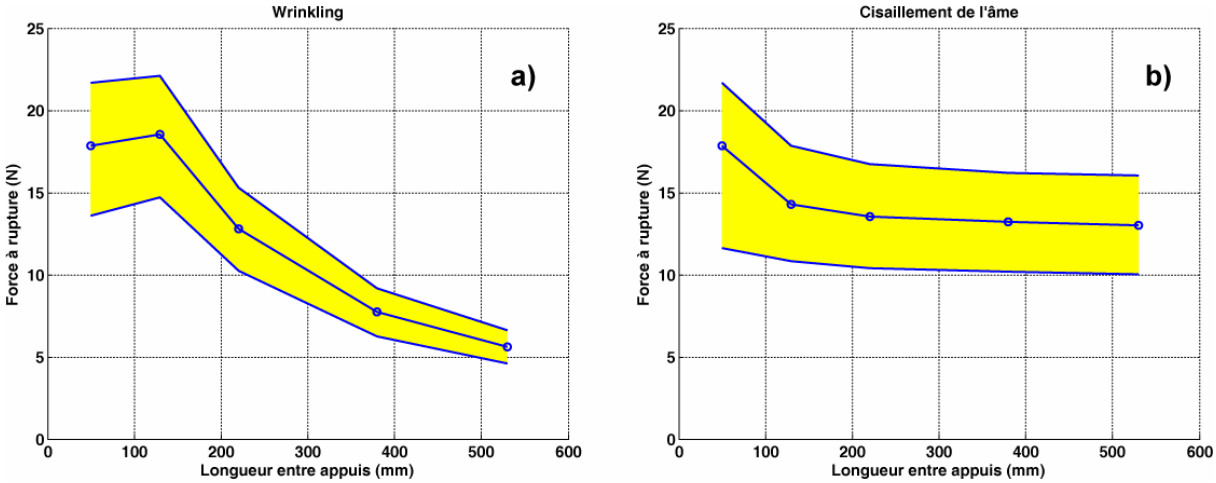


Figure V-36 : Enveloppe des forces à rupture d'une éprouvette sandwich soumise à un essai de flexion 3 points en fonction de la longueur entre appuis pour une rupture par wrinkiling (a) ou par cisaillement de l'âme (b). Les points indiquent le résultat en utilisant la valeur moyenne des paramètres incertains.

L'importance relative des différents paramètres sur la réponse permet d'expliquer ce point (voir Figure V-37). En effet, le *wrinkling* est principalement sensible à trois paramètres : module de cisaillement hors-plan de l'âme (G_{23}), module d'Young de l'âme dans le sens se l'épaisseur (E_z), et épaisseur des peaux (t). Deux de ces paramètres ont un intervalle de variation faible (E_z et t). A l'inverse, la rupture par cisaillement est principalement sensible à *Sc* dont l'intervalle de variation est très important (20%).

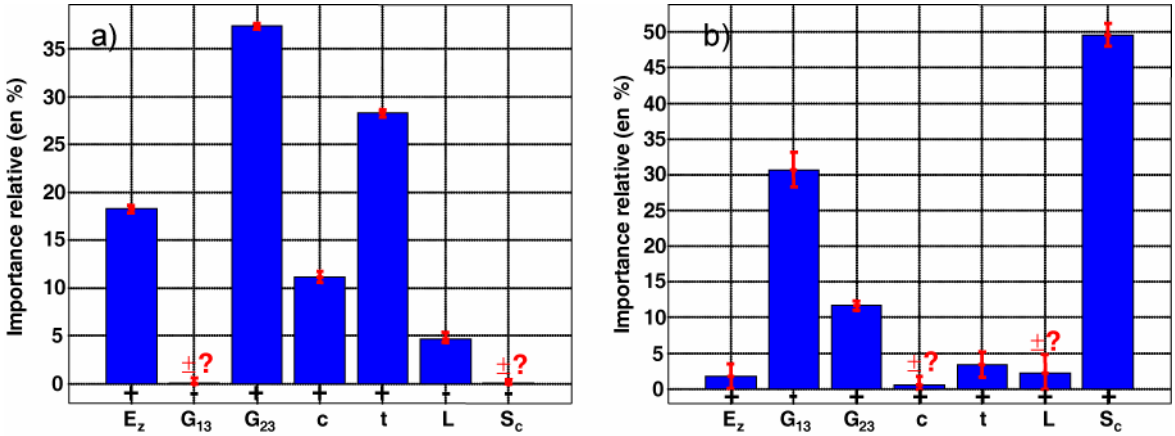


Figure V-37 : Influence relative des différents paramètres incertains sur la prévision de la force à rupture en wrinkling (a) et en cisaillement de l'âme (b).

L'analyse proposée ici permet de déduire les modes de rupture les plus probables et l'intervalle final de force à rupture en distinguant deux cas :

1. Soit les intervalles associés aux différents modes sont distincts, le mode de rupture correspond à celui auquel est associé l'intervalle de force minimal,
2. Soit les intervalles sont partiellement recouvrant, il existe alors une incertitude sur le mode de ruine.

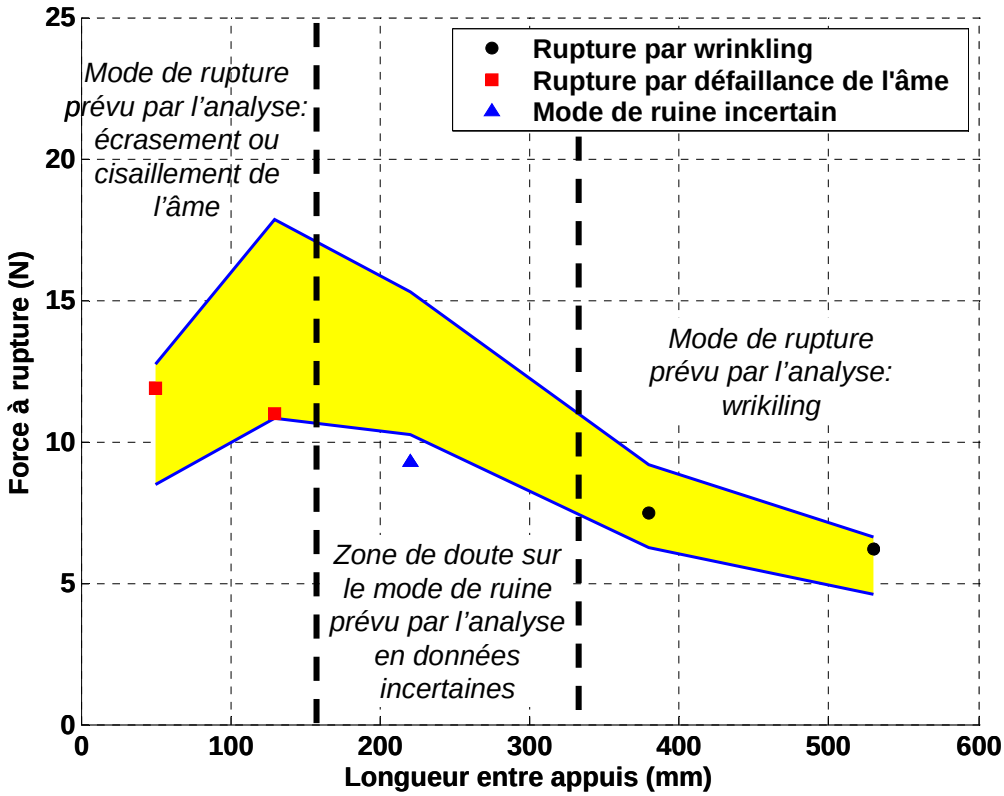


Figure V-38. Comparaison entre expériences (représentées par des points dont le symbole indique le mode de ruine) et l'analyse proposée, en terme de forces à rupture (présentées sous la forme d'un intervalle en jaune), et de mode de ruine.

La comparaison entre résultats expérimentaux et l'analyse en données incertaines proposée dans ce travail est très satisfaisante aussi bien en terme de force à rupture qu'en terme de mode de ruine (Figure V-38). On remarquera en particulier que pour une longueur entre appuis de 220 mm, il a été impossible d'identifier expérimentalement un mode de ruine ; ce point appartient à la zone (située ente 140 et 320 mm) où les intervalles des différents modes de ruine sont confondus (zone de doute sur les modes de ruine). A l'aide d'une méthode de Monte-Carlo au travers des surfaces de réponse, il est toutefois possible de montrer que la probabilité d'obtenir une rupture par *wrinkling* est supérieure à 63% (en considérant une distribution uniforme des paramètres incertains).

Conclusion

Les divers exemples présentés dans ce chapitre ont donc montré l'applicabilité de notre démarche sur des structures (dont certaines se rapprochent des cas industriels) nécessitant le recours au calcul éléments finis. Le caractère linéaire ou non-linéaire des cas considérés ne constitue pas un obstacle à la mise en œuvre de la méthode tout comme la présence de zones singulières (perforations, assemblage…). L'analyse peut aussi bien porter sur des indicateurs globaux (tels que les courbes de comportement ou des paramètres comme la raideur) que sur des indicateurs locaux comme les champs de contraintes. Les apports sont multiples, depuis l'obtention sur les indicateurs étudiés de barres d'incertitudes intégrant la notion de confiance dans l'approche utilisée, jusqu'à la recherche des cas « extrêmes », en passant par la détermination de l'influence des divers paramètres incertains. L'exemple des sandwichs a montré qu'il était notamment possible d'obtenir par la prise en compte des incertitudes des changements de mode de ruine conforment à l'observation expérimentale. Cela souligne l'intérêt de la prise en compte des incertitudes qui permet de rapprocher la modélisation numérique de la réalité. Cet aspect est particulièrement important dans un contexte où le calcul numérique est perçu comme un moyen de réduire le nombre d'essais afin de réduire les coûts et les délais des phases de conception. En acceptant un coût de calcul multiplié par un facteur 10 à 100 par rapport à une approche classique (déterministe) il est possible d'imaginer que ce type de démarche soit complètement intégré à terme dans les codes de calculs de structures afin de prévoir systématiquement un indicateur sur la qualité /confiance à accorder aux calculs. Si cela peut paraître encore déraisonnable aujourd'hui, il ne faut pas perdre de vue que la rapide augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs joue en notre faveur.

Synthèse sur la méthode d'analyse de la variabilité proposée

La méthode d'analyse de la variabilité proposée suit le schéma de fonctionnement présenté Figure III-4. Elle se base sur le remplacement de la fonction de transfert du système physique, généralement coûteuse à évaluer, par un métamodèle permettant la réalisation rapide d'un grand nombre de calculs nécessaire à l'estimation des effets des incertitudes.

La méthode se veut à la fois pragmatique et progressive, en commençant par l'identification et le test du type de métamodèle le plus simple : les approximations polynomiales de degré un. Celles-ci se révèlent généralement satisfaisante si la fonction de transfert ne s'écarte que faiblement du modèle linéaire, ce qui dépend à la fois de la complexité du cas étudié (non-linéarité intrinsèque de la fonction de transfert exacte) et de l'étendue du domaine d'incertitude considérée (plus les variables sont nombreuses et leur fluctuation conséquente et plus la situation est délicate). Par rapport à une approche déterministe classique, le nombre d'évaluations de la fonction de transfert (calcul sur un modèle élément fini…) nécessaires est bien sûr accru de façon conséquente La règle adoptée de $3\times(n+1)$ évaluations de la fonction de transfert (avec *n* est le nombre de paramètres incertains) se base sur le fait que *(n+1)* jeux de coordonnées sont initialement nécessaires pour identifier de façon exacte une approximation polynomiale de degré un (comportant *(n+1)* coefficients). En augmentant ce nombre minimum, il devient possible d'évaluer l'effet du jeu de points d'identification sur le métamodèle. Dans cet optique, la règle du triplement nous est apparu un bon compromis entre parcimonie des calculs et estimation pertinente de la confiance qui peut être accordée au métamodèle.

Afin de vérifier la qualité du métamodèle construit, il a été choisi d'utiliser la méthode de validation croisée du leave-*k*-out, faisant appel à des rééchantillonnages du jeu de points d'identification et ne nécessitant donc aucune évaluation supplémentaire de la fonction de transfert. Le paramètre *k* a été fixé d'après la bibliographie à environ 10% des points d'identification disponibles, et une centaine de rééchantillonnages est apparu, après essais, comme un compromis satisfaisant. Cette étape de vérification conduit à la construction de deux indicateurs portant sur la précision de l'approximation (largeur de la bande d'erreur du métamodèle) et sur sa stabilité (variation des coefficients du métamodèle lors de la validation croisée).

Si cette étape conclut à l'acceptabilité du métamodèle, celui-ci peut ensuite être employé en remplacement de la fonction de transfert pour estimer l'effet des incertitudes, soit quand cela est possible, en tirant des informations statistiques des coefficients du métamodèle lui-même, soit en l'employant dans des approches de type Monte-Carlo. Notons que à cette étape certains résultats de la validation croisée (comme la base des métamodèles réidentifiés sur les jeux de points d'identification rééchantillonnés) peuvent être réemployés.

Dans le cas où la phase de vérification ne conduit pas à un résultat satisfaisant, une modification du métamodèle est nécessaire. Si nous préconisons l'utilisation des

résultats de la phase de vérification afin d'orienter ces modifications, il faut malheureusement reconnaître qu'il est assez difficile de donner des règles générales et qu'il s'agit souvent d'une approche itérative de type essai-erreur. Voici toutefois quelques pistes tirées de notre expérience afin de faire le tri parmi les métamodèles retenus dans l'approche proposée. Dans le cas où le problème traité concerne les composites et comporte parmi les paramètres traités des angles de stratification, il peut être intéressant de procéder pour ces paramètres à un changement de variable en valeur absolue ou en sinus/cosinus. En suivant un critère de moindre complexité, nous avons souvent choisi de tester les métamdoèles dans l'ordre suivant : polynômes insaturés, polynômes complet jusqu'au degré 3, et enfin krigeage. Pour les polynômes complet, il faut toutefois être bien conscient que l'augmentation de degré sans augmentation du nombre de points nuit généralement à la stabilité du métamodèle. Le chaos polynomial peut être une bonne solution pour des cas présentant une non-linéarité conséquente et un nombre modérés de paramètres incertains (au plus 8). Le krigeage demande souvent de tester différente forme pour la fonction de corrélation employée (tester en priorité les formes gaussienne et exponentielle) ce qui complique l'identification. Il s'est révélé efficace notamment pour des cas modérément non-linéaires avec un nombre important de paramètres. Rappelons qu'un des avantages du krigeage est la garantie d'amélioration par augmentation du nombre de points d'identification. SI l'utilisation de cette méthode est envisagée dés le début, il peut être intéressant de choisir comme méthode de sélection des points d'identification la méthode des séquences à faible divergence (*Low discrepancy sequence*) qui nous a semblé faciliter la phase d'identification (qui fait appel à une procédure d'optimisation). En dernier recours une partition du domaine d'incertitude pour les paramètres influents les plus instables peut être envisagée : on identifie alors plusieurs métamodèles, chacun sur un domaine d'incertitude distinct et plus réduit (ce qui en théorie réduit la non-linéarité de la relation entrée-sortie, et donc la difficulté d'approximation).

L

Chapitre VI
Méthodes pour la réduction des effets des incertitudes

Introduction **181**

VI.1. Réduction des incertitudes sur les paramètres d'entrée, relation efforts fournis/gains possibles **182**

VI.1.1. Réduction par une augmentation « réfléchie » du nombre des essais 182

VI.1.1.1 Définition de l'espace d'incertitude à partir de la notion de confiance requise dans l'approche industrielle *183*

VI.1.1.2 Influence des coefficients d'abattements *184*

VI.1.2. Intérêt d'une amélioration de l'analyse statistique 186

VI.2. Importance de la prise en compte des corrélations entre paramètres d'entrée **187**

VI.3. Un exemple de l'influence des corrélations entre paramètres : la consolidation multiéchelle **189**

VI.3.1. Mise en évidence du problème d'amplification des incertitudes au travers des changements d'échelle 190

VI.3.1.1 Cas du passage micro-meso (utilisation directe ou « ascendante ») *190*

VI.3.1.2 Cas du passage méso-micro (utilisation inverse ou « descendante ») *191*

VI.3.2. Principe de la méthode de consolidation de base de données: exploitation du caractère multiéchelle des composites 192

VI.3.3. Exemple de mise en œuvre dans le cas micro-méso 195

VI.3.4. Exemples du gain obtenu dans l'analyse d'une structure 198

VI.3.4.1 Cas de l'éprouvette chapeau *198*

VI.3.4.2 Exemple de la réponse en flambement d'une plaque perforée *200*

VI.3.5. Introduction de la notion probabiliste dans la consolidation 201

Conclusion **203**

Introduction

Les chapitres précédents se sont focalisés sur l'étude de la propagation des incertitudes dans une chaîne de calcul pour le dimensionnement mécanique de structures. Les divers exemples présentés ont montré que dans de nombreuses situations la démarche mise en place permet, pour un coût de calcul rationalisé et pour une confiance donnée, d'estimer plus ou moins précisément l'incertitude affectant les réponses des structures considérées. Un dimensionnement déterministe classique estime généralement la réponse F correspondant au respect du cahier des charges. En comparaison, nous sommes en mesure d'associer une amplitude de variation ΔF (probabilisée ou non) tenant compte à la fois des imperfections sur les divers paramètres d'entrée et d'une certaine manière de l'imprécision de la méthode de calcul. Dans le prolongement de cette démarche, il est maintenant logique de se demander s'il est possible de réduire ce ΔF, afin notamment d'effectuer un dimensionnement plus robuste (tel que défini au chapitre I). Ce chapitre vise donc à proposer quelques solutions pour réduire l'effet des incertitudes sur les réponses. Cette démarche nous semble possible puisque l'incertitude ΔX_i affectant chaque paramètre d'entrée (et dont ΔF découle) se compose d'une part variabilité et d'une part méconnaissance. Si la part variabilité ne peut être réduite qu'au moyen d'un travail de maîtrise accrue des processus d'élaboration des matériaux ou de fabrication de la structure (qui sortent du champ d'application de ce travail), des actions peuvent toutefois être menées pour réduire la part méconnaissance. Dans le même esprit, il est envisageable, pour un même niveau de variation des données d'entrée de limiter l'amplification des incertitudes en proposant un processus plus robuste qui s'appuierait par exemple sur des modèles plus fiables. Comme l'indique la Figure VI-1, cette amplification procède de plusieurs causes.

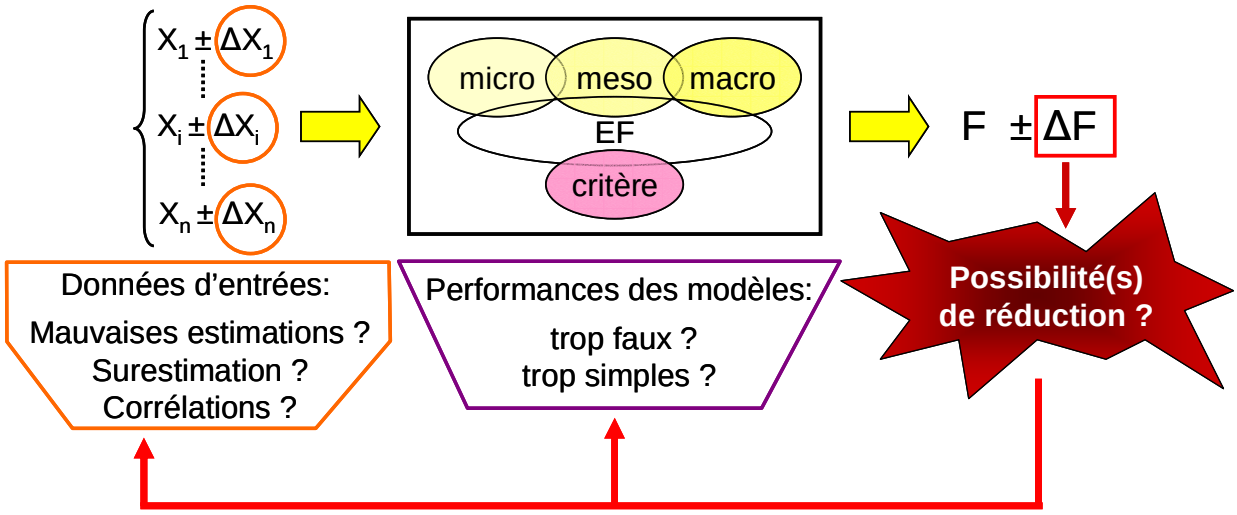


Figure VI-1. Points sur lesquels des améliorations peuvent être apportées afin de réduire les incertitudes sur les réponses en sortie.

Tout d'abord, les incertitudes ΔX_i sur les paramètres d'entrées sont le plus souvent mal déterminées (nombres d'essais insuffisants par exemple), ce qui conduit généralement à les surestimer du fait des exigences de confiance présentes dans les règles de dimensionnement.

Par ailleurs, les divers paramètres d'entrée sont généralement mesurés séparément et considérés comme indépendants. Par exemple, les propriétés longitudinales des matériaux unidirectionnels sont mesurées sur des éprouvettes découpées à 0° dans

une plaque, les propriétés transverses sur des éprouvettes découpées à 90° dans une autre plaque, et les propriétés de cisaillement proviennent quant à elle le plus souvent de mesure sur des stratifiés [±45°] (donc d 'une autre plaque). Il est donc très difficile de par la procédure expérimentale d'exacerber des corrélations entre ces paramètres. Or, les corrélations entre paramètres peuvent être de nature à modifier les incertitudes finales sur la réponse de façon non-négligeable. Cela est d'autant plus vrai dans le cas de matériaux de nature multiéchelles comme les composites, où tous les paramètres à une échelle découlent d'un même ensemble de paramètres d'une échelle inférieure.

Enfin, la surestimation des incertitudes sur les paramètres d'entrée est encore amplifiée par les doutes concernant l'utilisation des divers modèles mis en jeu dans le processus de dimensionnement. Un modèle est par nature imparfait, et ne constitue que la description approximative d'un phénomène. Ses prévisions peuvent donc être plus ou moins éloignées de la réalité suivant qu'il en est une représentation trop simplifiée ou trop erronée (hypothèses de base inadéquates, construction au moyen d'une forme mathématique inappropriée,…). Afin de compenser les difficultés d'ajustement d'un modèle, une variabilité des paramètres plus grande que celle identifiée est souvent utilisée.

Ces diverses pistes vont être abordées dans ce chapitre afin de montrer qu'il est possible dans une certaine mesure de réduire les effets des incertitudes sur les réponses.

VI.1. Réduction des incertitudes sur les paramètres d'entrée, relation efforts fournis/gains possibles

Pour réduire au niveau des réponses de sortie les effets des incertitudes sur les paramètres d'entrée, la première idée est bien sûr de chercher à diminuer ces incertitudes d'entrée. Pour cela, il est nécessaire de considérer deux cas de figure. Si l'on suppose tout d'abord que l'estimation faite des incertitudes d'entrée est parfaite, c'est-à-dire réduite à la seule part variabilité, le seul moyen de réduire ces incertitudes est d'améliorer le contrôle de la qualité de fabrication afin d'assurer une meilleure reproductibilité à l'identique. Ce premier cas de figure sort toutefois du cadre de notre travail. Si par contre on suppose que les incertitudes qui nous sont fournies sont mal estimées et en particulier surestimées du fait par exemple du nombre d'essais limité, des possibilités de réduction existent sans qu'il soit nécessaire de considérer la qualité des processus de fabrication.

VI.1.1. Réduction des effets des incertitudes par une augmentation « réfléchie » du nombre des essais

Une des principales difficultés rencontrées dans les problèmes d'incertitudes vient souvent de la qualité et de la quantité des données disponibles pour analyser et décrire ces incertitudes. Du fait du coût et du temps qu'ils nécessitent, les essais permettant d'identifier la plage de variation d'une variable sont souvent réalisés en nombre limité. Cet état de fait a au final deux conséquences. D'une part, si l'on souhaite s'engager dans une approche probabiliste, il est difficile d'identifier avec précision la forme de la distribution. En particulier, les tests d'hypothèse donnent souvent des chances de correspondance égales à différentes distributions. D'autre part, le nombre réduit d'essais implique une chance non-négligeable de n'avoir balayé qu'une portion limitée de l'espace d'incertitude. Pour tenir compte de cela, la plage de variation de la variable est généralement prise plus large que ne le

montrent les essais, en particulier si cette plage de variation est définie à partir des valeurs de pourcentiles statistiques tels que les valeurs A ou B.

VI.1.1.1 Définition de l'espace d'incertitude à partir de la notion de confiance requise dans l'approche industrielle

A ce stade, il convient de préciser un point important : il est souvent question de valeur A et B utilisées dans le dimensionnement industriel, mais comment les relier à la démarche mise en place (c'est-à-dire à un domaine d'incertitude pour chacun des paramètres d'entrée) ? C'est en effet une des difficultés de ce travail, qui vise à améliorer la démarche industrielle tout en conservant les données qu'elle utilise habituellement. Tout d'abord, si l'objet de l'étude porte principalement sur la recherche des cas extrêmes et qu'aucune distribution n'est considérée, l'intervalle d'incertitude nécessaire peut être défini en prenant comme bornes les valeurs A+ et A- (ou les valeurs B+ ou B-). Le domaine d'incertitude ainsi défini englobe alors celui d'une approche industrielle classique, et le complète même puisque l'étude ne porte pas que sur les valeurs les plus faibles et permet de prendre en compte le sens d'influence de chaque paramètre incertain.

Maintenant dans le cas où l'on désire adopter une approche probabiliste, les distributions de probabilité peuvent être définies de différentes façons. Tout d'abord si les valeurs A ou B ont été obtenues en posant l'hypothèse de l'une ou l'autre des distributions weibulienne, normale ou lognormale (comme procèdent les logiciels dévolus à cette tâche tel que Stat17), la distribution à adopter pour le paramètre incertain doit bien sûr être du même type. Au final une distribution corrigée est utilisée. Par exemple pour une loi normale, en conservant la moyenne déterminée à partir des essais, la cohérence vis-à-vis des valeurs A ou B amène alors à définir un écart-type $\sigma_{mod\,el}$ suivant les relations données par (Eq. VI- 1) (les valeurs numériques correspondent aux coefficients permettant de déterminer les valeurs A ou B à partir de la moyenne et de l'écart-type dans le cas idéal d'une confiance infinie).

$$\sigma_{mod\,el} = \frac{\overline{\mu} - valeur\ A}{2.326} = \frac{k_A \overline{\sigma}}{2.326} \text{ ou } \sigma_{mod\,el} = \frac{\overline{\mu} - valeur\ B}{1.282} = \frac{k_B \overline{\sigma}}{1.282} \qquad \text{(Eq. VI- 1)}$$

Pour une utilisation de la loi normale se pose le problème de la troncature de la distribution. Celle-ci a en effet comme support $]-\infty,+\infty[$, ce qui peut être physiquement inacceptable et souvent irréaliste. Pour des distributions weibulienne ou lognormale, la question de la troncature est moins problématique pour les valeurs basses puisque ces distributions sont bornées en zéro, ce qui respecte le plus souvent le sens physique, mais peut parfois paraître trop pessimiste. Par contre, leur support s'étend jusqu'à $+\infty$. Une troncature intéressante peut donc être de se limiter au domaine [valeur A-, valeur A+].

Dans un certain nombre de cas cependant, aucune des trois distributions citées précédemment ne semblent décrire convenablement l'incertitude que montrent les données d'essais et l'approche dite non-paramètrique est alors employée (voir paragraphe suivant). La définition d'une distribution pour une approche probabiliste est alors entièrement libre. Dans un tel cas nous proposons d'employer une distribution trapézoïdale définie comme sur la Figure VI-2 à partir des valeurs A ou B calculées. Cela permet notamment de considérer comme équiprobable les valeurs

comprise dans l'intervalle [valeur B-, valeur B+] et de tenir compte d'une moins grande probabilité des valeurs inférieures à valeur B- ou supérieures à valeur B+ tout en ne bornant pas le domaine d'incertitude trop loin de ces valeurs.

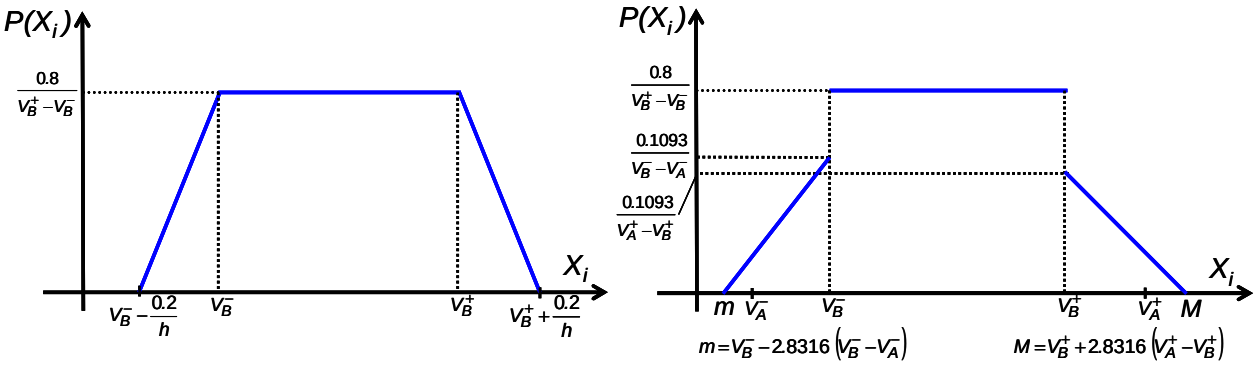


Figure VI-2. Distributions de probabilité trapézoïdales définies à partir des valeurs B et/ou A déterminées par une approche non-paramétrique (les valeurs numériques particulières sont obtenues une fois la forme de la distribution choisie en imposant une aire égale à 1).

VI.1.1.2 Influence des coefficients d'abattements

Comme nous l'avons déjà dit, les valeurs A et B sont classiquement utilisées dans les approches industrielles afin de tenir compte des incertitudes existantes sans toutefois se livrer à une analyse détaillée de leurs effets. L'utilisation de ces valeurs abattues, plus l'ajout de marge de sécurité, permet en effet d'assurer la sécurité du dimensionnement sans devoir multiplier les calculs. Les logiciels industriels tels que Stat17, déterminent les valeurs A ou B à partir d'un ou plusieurs jeu (batch) de résultats d'essais en cherchant si la distribution peut être qualifiée de weibulienne, normale ou lognormale. Si c'est le cas, le calcul de ces valeurs met en jeu, comme l'indique les équations du Tableau VI-1, les estimations des paramètres de la distribution (paramètre d'échelle $\hat{\alpha}$ et de forme $\hat{\beta}$ pour la loi de Weibull, moyenne $\bar{\mu}$ et écart-type $\bar{\sigma}$ pour la loi normale) et un coefficient d'abattement (k_A ou k_B pour la normale, W_A ou W_B pour la loi de Weibull) dépendant du nombre d'essais effectués.

Distribution	Valeur A	Valeur B
Weibulienne (paramètre d'échelle $\hat{\alpha}$ et paramètre de forme $\hat{\beta}$)	$q_A \exp\left(\frac{-W_A}{\hat{\beta}\sqrt{n}}\right)$ avec $q_A = \hat{\alpha}(0.01005)^{1/\hat{\beta}}$	$q_B \exp\left(\frac{-W_B}{\hat{\beta}\sqrt{n}}\right)$ avec $q_B = \hat{\alpha}(0.10536)^{1/\hat{\beta}}$
Normale (moyenne $\bar{\mu}$ et écart-type $\bar{\sigma}$)	$\bar{\mu} - k_A.\bar{\sigma}$	$\bar{\mu} - k_B.\bar{\sigma}$
Lognormale	utilisation des formules de la loi normale après transformation adéquate de la variable	

Tableau VI-1. Formules utilisées pour le calcul des valeurs A et B suivant le type de distribution détectée par les tests statistiques.

Ce coefficient permet d'atteindre le niveau de confiance de 95% requis par la définition de valeur A ou B. Plus le nombre d'essais est faible et plus ce coefficient est élevé (ce qui conduit la plupart du temps à des valeurs A ou B trop pessimistes).

Si aucune des trois distributions normale, weibulienne ou lognormale n'a été détectée comme adéquate, une approche dite non-paramétrique est employée. Si le nombre d'essai est suffisant (au moins 29 pour la valeur B, et 299 pour la valeur A), les valeurs A et B sont alors calculées en prenant la $r^{i\text{ème}}$ plus petite valeur issue des essais, où la valeur du rang r ($r \geq 1$) est tabulée et dépend du nombre d'essai. Si le nombre d'essai est plus petit, la méthode employée reprend l'emploi d'un coefficient d'abattement et fait intervenir les plus grandes et plus petite valeurs observées.

En supposant que l'augmentation du nombre d'essais ne modifie pas l'estimation ni de la moyenne ni de l'écart-type, le Tableau VI-2 présente pour une hypothèse de loi normale les gains pouvant être obtenus

	passage de 2 à 4 essais	passage de 5 à 10 essais	passage de 10 à 20 essais	passage de 20 à 30 essais
Réduction pouvant être espérée sur la valeur A	427%	44%	21%	7.5%
Réduction pouvant être espérée sur la valeur B	402%	45%	22%	8.4%

Tableau VI-2. Pour la valeur A et la valeur B sous hypothèse de loi normale, réduction pouvant être espérée en augmentant le nombre d'essais, si l'on suppose les estimations de la moyenne et de l'écart-type inchangées.

Cette réduction des incertitudes d'entrée n'est toutefois pas garantie. Elle suppose en effet que les données nécessaires au calcul des valeurs A ou B (paramètres statistiques ou valeurs extrêmes) identifiées sur le premier jeu d'essais ne soient pas excessivement modifiées par les essais ajoutés. Ceci est un gain moyen. Il est possible d'espérer gagner plus (avec de la chance) mais des gains moindres risquent également d'être obtenus.

L'utilité de la démarche mise en place précédemment trouve donc ici pleinement sa place. En permettant d'estimer numériquement les effets d'une potentielle réduction de l'incertitude affectant chaque paramètre d'entrée, elle offre la possibilité de choisir les paramètres pour lesquels il est vraiment intéressant de refaire des essais. Généralement il s'agit bien sûr des paramètres les plus influents. Mais souvent des efforts importants ont déjà été faits pour estimer précisément l'incertitude qui les affecte (nombre d'essais conséquent). Le coefficient d'abattement utilisés pour déterminer les valeurs A ou B de ces paramètres ne peut donc être que faiblement réduit. Il s'en suit que la réduction d'incertitude qui peut être espérée est elle aussi faible. La démarche par surface de réponse permet alors d'estimer si, en sortie, l'effet de cette faible réduction justifie les coûts expérimentaux supplémentaires. Si ce n'est pas le cas, une réduction de l'incertitude d'autres paramètres peut être testée jusqu'à trouver le compromis le plus intéressant.

Cette démarche peut en fait être utilisée de deux façons. Tout d'abord, en se plaçant à un coût donné, elle permet comme nous venons de le dire de déterminer pour

quel(s) paramètre(s) il est le plus intéressant de refaire des essais. Par exemple, pour déterminer si les efforts doivent se concentrer sur un seul paramètre afin d'augmenter au maximum la confiance en l'estimation de son incertitude, ou s'il est plus judicieux d'augmenter un peu la confiance sur divers paramètres. Mais cette démarche peut également permettre de déterminer de combien il est nécessaire de réduire l'incertitude de certains paramètres pour atteindre un niveau d'incertitude donné sur la réponse en sortie. Cette deuxième utilisation possible est en fait un problème inverse, et par conséquent complexe ([Bonnet, 05]). L'emploi d'une procédure d'optimisation est un moyen de déterminer quels paramètres doivent être réduits et de combien pour atteindre l'objectif d'incertitude fixé en sortie. Plusieurs solutions équivalentes ou très proches sont susceptibles d'exister, et une part de la difficulté consiste à les trouver toutes. Cette façon de procéder peut donc être très coûteuse en temps de calcul, et ne peut être envisagée que grâce à l'existence de la surface de réponse reliant paramètres d'entrée incertains et réponse de sortie.

VI.1.2. Intérêt d'une amélioration de l'analyse statistique

Outre le problème de l'utilisation des coefficients d'abattement dans la détermination des valeurs A et B servant à définir l'incertitude affectant chaque paramètre, se pose également la question de l'analyse statistique pour obtenir une meilleure description des distributions de probabilité des paramètres d'entrée.

Les tests statistiques communément employés sont bien loin d'être infaillibles sur la détermination du type de distribution de probabilité suivi par les données des essais. Le Tableau VI-3 montre ainsi pour 300 simulations de 30 valeurs tirées suivant les distributions de probabilité Gaussienne, lognormale et Weibullienne, comment les tests statistiques identifient l'échantillon. Le test présentant le niveau d'adéquation le plus fort est considéré comme donnant l'hypothèse de distribution à retenir. Le résultat est loin d'une performance parfaite. Si les échantillons d'une loi de Weibull sont bien plus souvent identifiés comme provenant bien de ce type de distribution que d'une des deux autres, ceux provenant d'une loi Gaussienne sont par contre le plus souvent associé à une loi lognormale. Par ailleurs, ces échantillons issus d'une loi Gaussienne sont identifiés quasiment aussi souvent comme appartenant à l'une ou l'autre des trois distributions. Ce type de défaillance justifie une fois de plus la démarche de surface de réponse mise en place. Celle-ci permet en effet d'estimer les effets des doutes sur la nature (forme) de la distribution des entrées dans l'analyse de l'incertitude de la réponse en sortie, sans que le coût de la démarche ne soit modifié.

Distribution / Identifiée comme	Gaussienne	Lognormale	Weibullienne
Gaussienne	34%	38%	28%
Lognormale	32%	44%	24%
Weibullienne	22%	17%	61%

Tableau VI-3. Pourcentage de reconnaissance des 3 types de distribution par les tests d'hypothèse sur chacune des 300 simulations de 30 essais réalisées par type de distribution (d'après [Leroy, 05]).

Au sein du programme Americo ([Leroy, 06]), les efforts sur l'amélioration de l'analyse statistique ont amenés notamment à l'utilisation de modèles de mélanges de Gaussiennes qui combinent plusieurs loi normales de moyenne et d'écart-type différents. La difficulté consiste à adapter ces paramètres de façon que la distribution obtenue corresponde le mieux aux données d'essais disponibles. L'objectif de cette approche est notamment de réduire le risque de surestimation de la valeur A ou B, ce qui est bien réalisé par cette approche. Toutefois, la contrepartie est une diminution de la confiance qui ne vérifie plus les 95% exigés.

Il est donc intéressant de tester numériquement au travers de la démarche de surface de réponse l'influence d'une augmentation ou d'une réduction de l'incertitude des paramètres d'entrée. En effet, suivant leur influence sur les valeurs (A, B ou extrême) de la réponse en sortie, et compte tenu des marges supplémentaires appliquées par la suite, l'ingénieur est alors plus à même de déterminer si une telle diminution de confiance constitue ou non une prise de risque acceptable.

VI.2. Importance de la prise en compte des corrélations entre paramètres d'entrée

La réduction des incertitudes d'entrée n'est pas le seul moyen permettant de réduire les incertitudes sur les réponses d'un processus. Une autre possibilité consiste à améliorer la connaissance de la statistique des entrées en cherchant à prendre en compte les éventuelles corrélations existant entre les valeurs des différents paramètres.

Généralement, la plupart des paramètres d'entrée d'un problème sont considérés comme indépendants, et cela pour deux raisons. D'une part, l'hypothèse d'indépendance entre paramètres apporte certaines simplifications dans le calcul des probabilités et évite le maniement complexe des distributions de probabilités conjointes. Mais surtout, les corrélations sont difficilement mesurables car cela nécessite la conception et la réalisation d'essais permettant de déterminer simultanément au moins deux (voire plus) propriétés, ce qui n'est pas l'usage actuellement. Par exemple, pour les propriétés matériaux, paramètres qui nous intéressent le plus en mécanique, des essais de traction uniaxiaux sont réalisés dans les différentes directions pour déterminer les modules élastiques, les résistances à ruptures ou les coefficients de Poisson. Et ceux-ci ne permettent pas de déterminer si la valeur de la résistance à rupture en sens transverse est par exemple corrélée à la valeur de la résistance à rupture (ou au module élastique) dans le sens longitudinal. Par contre, il doit être possible de déterminer si, dans une direction donnée, les valeurs du module élastique et de la résistance à rupture sont liées étant donné que ces paramètres sont déterminés à partir du même essai. Cela n'est pourtant jamais réalisé, à la fois parce que l'intérêt n'en semble pas évident (si les outils adéquats ne sont pas disponibles), et que la détermination précise d'une distribution de probabilité conjointe nécessiterait un plus grand nombre d'essais. Sur ce dernier point, dans le cadre d'une approche multiéchelle le paragraphe suivant propose une approche permettant de résoudre partiellement ce problème. Reste la question de l'apport de la prise en compte des corrélations pour la réduction des incertitudes sur les réponses en sortie d'un processus.

S'il apparaît que la réduction des intervalles d'incertitudes sur les divers paramètres d'entrée a été poussée à son maximum et qu'aucune méconnaissance ne subsiste, s'intéresser aux corrélations entre paramètres peut être un moyen supplémentaire de

réduire les effets de la propagation des incertitudes. Pour illustrer cela, considérons la Figure VI-3. En considérant les deux paramètres comme étant indépendant, l'ensemble des combinaisons de leur valeur correspond au rectangle rouge. Si maintenant, sans réduire les intervalles d'incertitude de ces deux paramètres, nous considérons que leurs valeurs sont corrélées, l'ensemble des combinaisons possibles se réduit. Par exemple, une corrélation linéaire entre ces deux paramètres se traduit par le fait qu'une faible valeur de l'un implique une faible valeur de l'autre. L'ensemble des combinaisons de valeurs possibles en tenant compte de la corrélation se ramène alors à la bande bleue qui, comparée au rectangle rouge, exclut bon nombre de combinaisons a priori possibles.

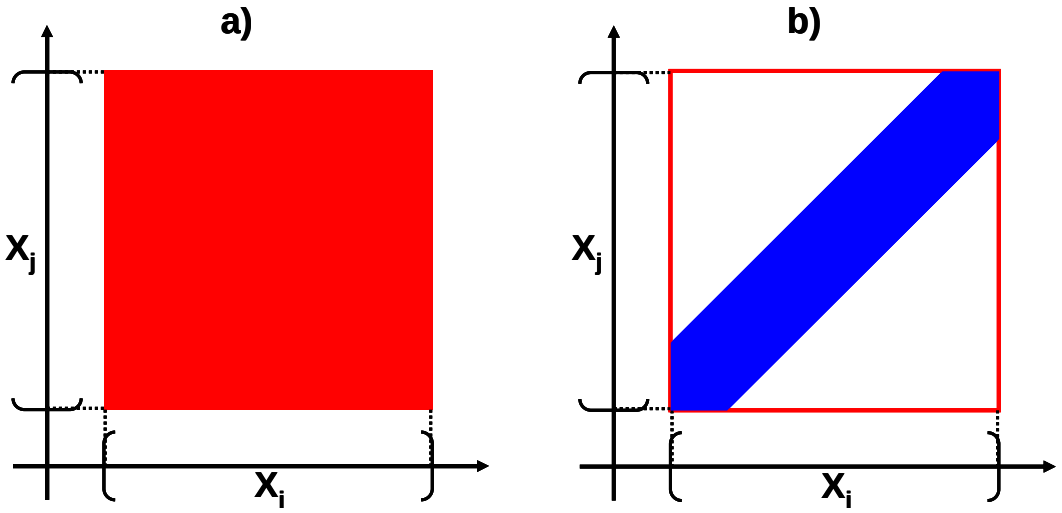


Figure VI-3. Espace d'incertitude pour deux paramètres (a) indépendants et (b) corrélés linéairement.

En limitant le nombre de combinaisons de valeurs possibles entre paramètres, les corrélations réduisent donc l'espace d'incertitude sur les entrées. Cet effet est d'ailleurs amplifié quand le nombre de dimensions augmente. En ne considérant plus seulement une corrélation entre deux paramètres mais entre *n*, la fraction de l'espace d'incertitude initial qui se révèle pertinente a de bonne chance d'être encore plus réduite.

Cette réduction de l'espace d'incertitude en entrée peut donc laisser espérer une réduction des incertitudes en sortie après passage au travers du processus considéré. Mais, l'expression « laisser espérer » n'est pas ici employée par hasard. En effet, rien ne garantit que cette prise en compte des corrélations conduise à la réduction attendue sur les incertitudes de sortie. Cet espace d'incertitude en sortie, en tant qu'image de l'espace d'incertitude d'entrée, dépend en effet du processus. Si les combinaisons de valeurs des paramètres d'entrée conduisant (au travers du processus) aux valeurs extrêmes en sortie ne sont pas exclues par la prise en compte des corrélations, l'intervalle d'incertitude de la réponse étudiée ne sera pas modifié. Par contre, la probabilité d'obtenir ces cas extrêmes peut être diminuée du fait de l'exclusion de zones de l'espace d'incertitude d'entrée contribuant à ces valeurs. La définition de l'espace d'incertitude en terme de valeurs A ou B peut alors être réduite mais ce n'est pas garanti. La Figure VI-4 illustre ces propos avec l'exemple de l'influence, sur la flèche d'une poutre stratifiée, de corrélation entre les modules E_{11} et E_{22} du pli élémentaire. Sans corrélation l'espace d'incertitude est un carré (en rouge). La corrélation considérée élimine les coins (zones rayées de jaune) dont la contribution à la densité de probabilité de la flèche est tracée en jaune. Avec

la corrélation une densité de probabilité (en bleue) moins proche d'une densité uniforme est obtenue. La valeur A reste identique (à 3.08 mm) tandis que la valeur B est légèrement modifiée passant de 3.09 mm à 3.1 mm.

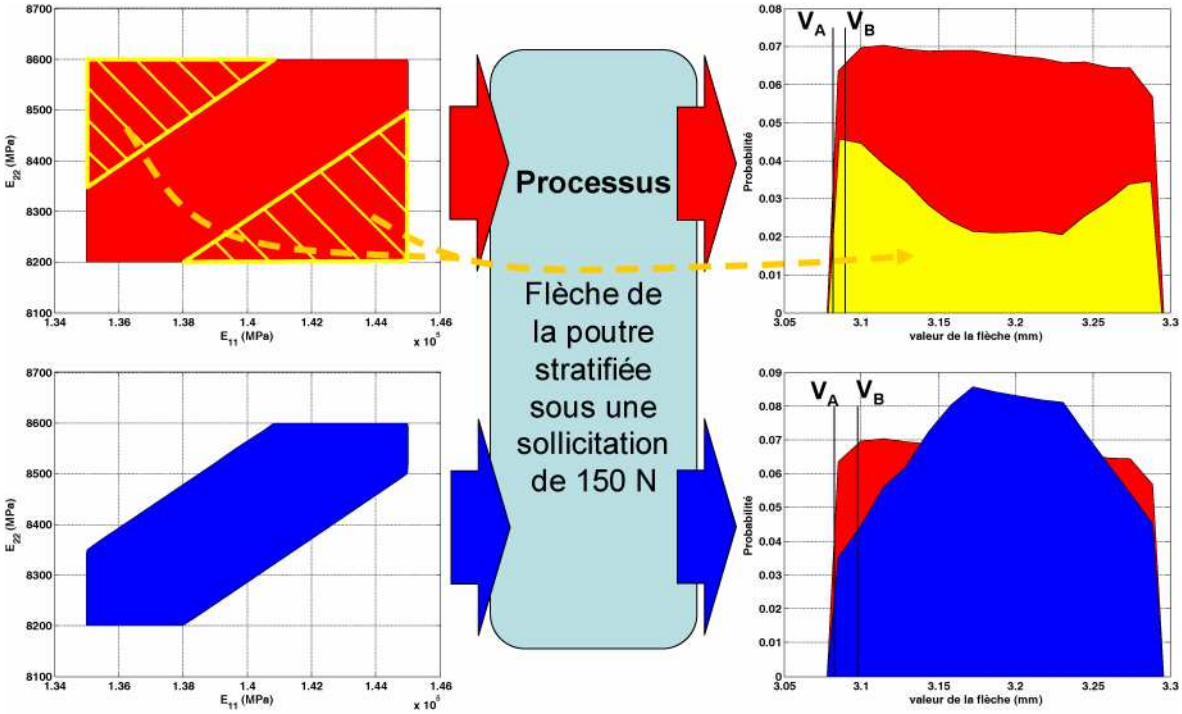


Figure VI-4. Exemple d'influence des corrélations sur la probabilité finale de la réponse en sortie du processus.

VI.3. Un exemple de l'influence des corrélations entre paramètres : la consolidation multiéchelle

Vis-à-vis du problème de l'estimation de l'effet des incertitudes et de leur propagation, les matériaux « multiéchelles » présentent un caractère particulier. En effet, partir de l'échelle la plus basse possible permet en théorie de prévoir plus efficacement les propriétés finales du matériau. Cette capacité prédictive est toutefois entachée par les difficultés à obtenir les valeurs des paramètres caractéristiques aux échelles basses du fait notamment des problèmes de mesure (par exemple mesurer le module transverse d'une fibre de 5 µm). Ceux-ci se traduisent à la fois par une certaine pauvreté des bases de données (valeurs en nombre limité ou absentes), et par une incertitude non négligeable sur les mesures disponibles. La conséquence est généralement l'estimation des propriétés aux échelles supérieures avec une incertitude plus importante que si des mesures y avaient été effectuées, ce qui bien sûr est pénalisant pour la réalisation d'un dimensionnement.

Cela est particulièrement vrai pour les composites à matrice organique, les plus utilisés actuellement. D'un côté les multiples nuances de fibres et de matrice, ainsi que leur évolution continue confèrent un intérêt indéniable aux méthodes multiéchelles, notamment pour limiter le nombre d'essais et faciliter la qualification du matériau. Mais cet intérêt est contrarié par le manque de confiance lié à ces méthodes, en opposition aux exigences du dimensionnement aéronautique. Ainsi, parmi les trois échelles d'étude possibles, du point de vue industriel seul le niveau du stratifié est considéré, ou au mieux celui du pli.

Pour remédier à cela, l'idée que nous avons développée consiste au contraire à tirer profit de ce caractère multiéchelle des matériaux composites. La consolidation de bases de données vise en effet à améliorer la connaissance des propriétés matériaux aux différentes échelles en les confrontant au travers des modèles pour les rendre cohérentes entre elles.

VI.3.1. Mise en évidence du problème d'amplification des incertitudes au travers des changements d'échelle

L'intérêt des changements d'échelle développés ces dernières années (que ce soit la théorie classique des stratifiés pour le passage méso-macro ou les méthodes d'homogénéisation pour celui des constituants au pli), réside dans leur caractère prédictif qui induit une réduction des coûts lors de la phase de conception d'une structure. En effet, par leur utilisation, les conséquences d'un changement de propriété des fibres ou de la matrice, ou d'une modification dans l'empilement du stratifié sont déterminées et le redimensionnement de la structure ne nécessite pas (ou peu) de nouveaux essais. Cependant l'utilisation de ces changements d'échelles est souvent limitée par le manque de confiance associé aux incertitudes.

VI.3.1.1 Cas du passage micro-meso (utilisation directe ou « ascendante »)

Le cas étudié est celui du passage micro-méso au moyen du modèle de Mori-Tanaka ([Mori-Tanaka, 73]). Le composite est considéré constitué d'une matrice isotrope de propriétés (E_m, ν_m), renforcée par des fibres longues supposées isotropes transverses de propriétés (E_{fl}, E_{ft}, ν_{fl}, ν_{ft}, G_{fl}) et de fraction volumique C_f (ceci correspond à l'essentiel des composites à matrice organique utilisés dans le domaine aéronautique). En considérant ±10% d'incertitude sur les propriétés matériaux de ces constituants, les paramètres matériau au niveau du pli affichent les incertitudes présentées Figure VI-5. Ces valeurs sont obtenues par une méthode de recherche d'extremums dans les intervalles admissibles des paramètres des constituants (optimisation sous contraintes).

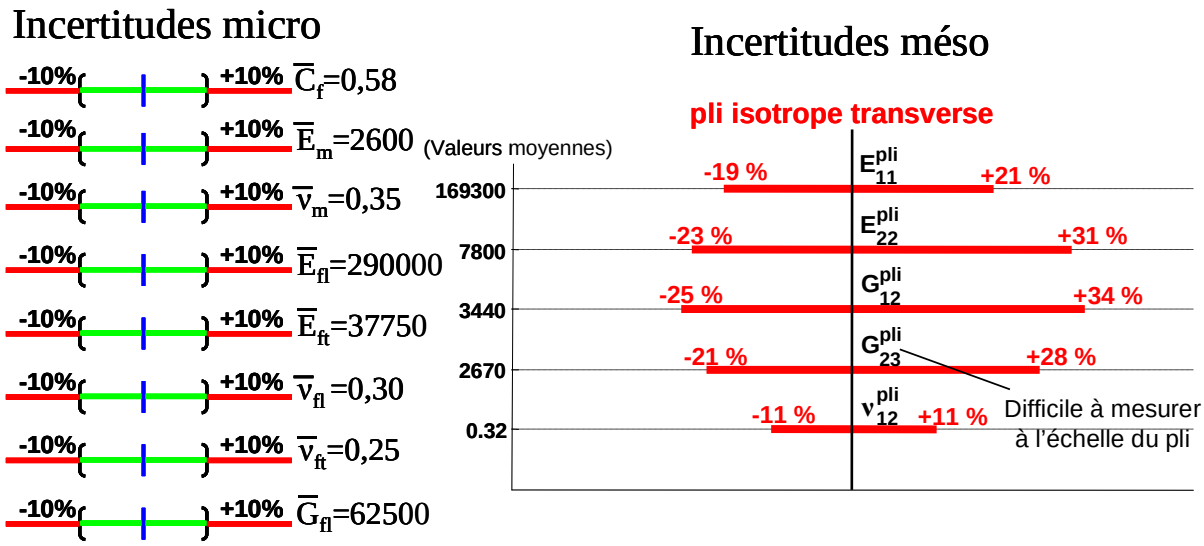


Figure VI-5. Amplification des incertitudes matériaux lors du passage micro-méso

Cet exemple souligne nettement la forte amplification des incertitudes lors du changement d'échelle. Les incertitudes sur les propriétés du pli se révèlent ainsi deux à trois fois supérieures à celles sur les paramètres des constituants élémentaires. Mais d'un autre côté, cette amplification des incertitudes ne

correspond pas à un cumul total (facteur huit), ce qui dénote un mécanisme plus complexe qu'un simple cumul linéaire des imprécisions.

VI.3.1.2 Cas du passage méso-micro (utilisation inverse ou « descendante »)

Les modèles de changement d'échelle peuvent également être utilisés de façon « descendante » (passage d'une échelle supérieure à une échelle inférieure). En effet, il s'agit souvent du seul moyen de déterminer une propriété matériau difficilement mesurable directement. C'est par exemple le cas de la plupart des caractéristiques transverses de la fibre qui peuvent être estimées indirectement à partir des propriétés du pli élémentaire. La question des incertitudes se pose alors de manière accrue car les méthodes inverses qu'il peut être nécessaire d'appliquer sont réputées pour être fortement sensibles aux variations des paramètres d'entrée.

Afin d'illustrer cette situation, le cas de la détermination du module transverse E_{ft} de la fibre a été considéré. Ce paramètre est difficilement mesurable et sa plage de variation importante (le rapport module longitudinal sur module transverse peut être proche de 1, mais aussi supérieur à 20 pour certaines fibres). Comme sa valeur influence grandement les propriétés thermo-élastiques du pli la détermination de ce module présente un réel intérêt. Une solution classique consiste à la déterminer par une démarche inverse, en utilisant un modèle d'homogénéisation tel que celui proposé par Mori-Tanaka ([Mori-Tanaka, 73]) et la valeur du module transverse du pli E_{22}^{pli}. Pour les besoins de l'exemple, la mesure de celui-ci est supposée avoir fourni (7500 ±100 MPa).

Dans un premier temps, l'incertitude sur E_{22}^{pli} est négligée. Par ailleurs, les valeurs des propriétés des constituants (autres que E_{ft}) sont supposées connues et fixées aux valeurs moyennes précisées (Figure VI-5). Dans ces conditions (Figure VI-6a), la connaissance au travers du modèle de Mori-Tanaka de la relation liant E_{ft} et E_{22}^{pli} permet bien évidemment d'obtenir une seule valeur de E_{ft}.

L'étape suivante consiste à prendre en compte l'incertitude sur la mesure de E_{22}^{pli} (Figure VI-6b), et ne soulève guère plus de difficulté. La propagation de l'erreur reste raisonnable pour une démarche inverse. Notons toutefois que de ±1.3% d'incertitude sur E_{22}^{pli} on passe à [-6.5% ;+7.6%] sur E_{ft}. La non-linéarité de la relation micro/méso implique que la valeur moyenne estimée sur le module méso (E_{ft}) ne correspond pas à la valeur obtenue à partir de la moyenne des modules du pli (E_{22}^{pli}).

Afin d'être plus réaliste, la prise en compte de l'incertitude sur un paramètre des constituants est ajoutée à la démarche (Figure VI-6c). Avec un coefficient de Poisson de la matrice incertain (ν_m =0,35±0,02) la relation liant E_{ft} et E_{22}^{pli} devient elle aussi incertaine, et se présente comme une enveloppe de courbes (zone en jaune). L'effet sur l'incertitude dans la détermination du E_{ft} n'en devient que plus important, l'intervalle d'incertitude étant alors [-15.7% ; +20.4%].

Cet effet devient finalement catastrophique quand la prise en compte de l'imprécision est étendue à d'autres paramètres des constituants (Figure VI-6d). Avec en plus des valeurs douteuses pour le taux de fibres (C_f=0,58±0,02) et le module de la matrice (E_m=2600±200 MPa), l'incertitude dépasse ainsi 200% pour la valeur haute et 35% pour la valeur basse. L'imprécision obtenue au final est donc extrêmement importante, surtout au regard de la faible incertitude retenue sur les différents paramètres d'entrée.

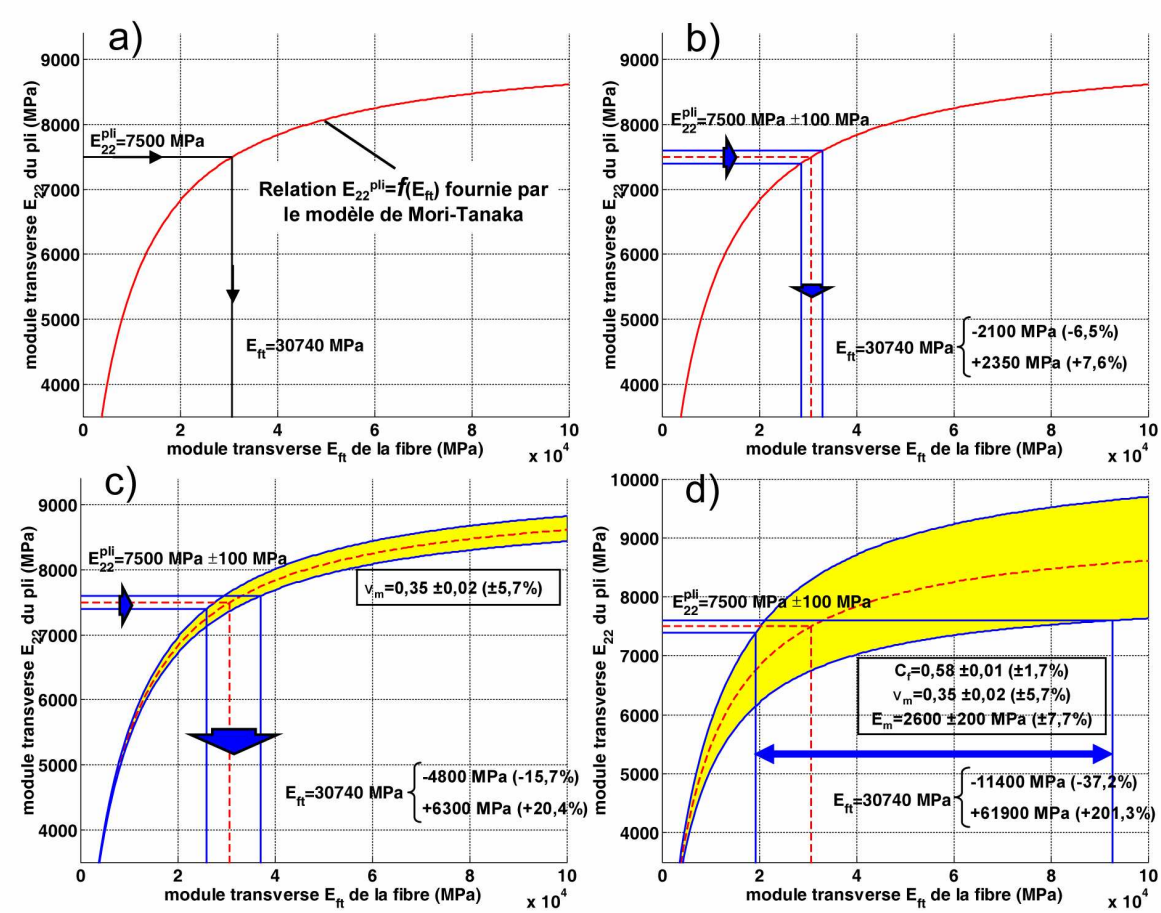


Figure VI-6. Effets de la prise en compte des incertitudes matériaux dans la détermination inverse du module transverse E_{ft} de la fibre.

VI.3.2. Principe de la méthode de consolidation de base de données: exploitation du caractère multiéchelle des composites

Le paragraphe précédent a bien montré combien la propagation des incertitudes au travers des modèles multiéchelles pouvait constituer une limite à leur caractère prédictif. La Figure VI-7 présente une comparaison entre les mesures effectuées directement à l'échelle du pli et les valeurs obtenues à cette échelle par l'intermédiaire du changement d'échelle (modèle de Mori-Tanaka) utilisant les valeurs de propriétés des constituants[1].

Les données employées sont celles disponibles sur l'IM7/977-2 ([Schieffer, 03]). Il apparaît ainsi que les intervalles d'incertitudes sur les paramètres du pli obtenus par changement d'échelle sont beaucoup trop larges par rapport à ceux déterminés expérimentalement. Une réduction des intervalles d'incertitudes des propriétés (au moins à l'échelle fibre/matrice) semble donc possible, par exemple en imposant la cohérence entre les résultats du modèle multiéchelle et les données expérimentales mésoscopiques.

[1] Les valeurs des constituants correspondent aux valeurs de la Figure VI-5 mais avec des variations plus réalistes (et non plus arbitrairement ±10%).

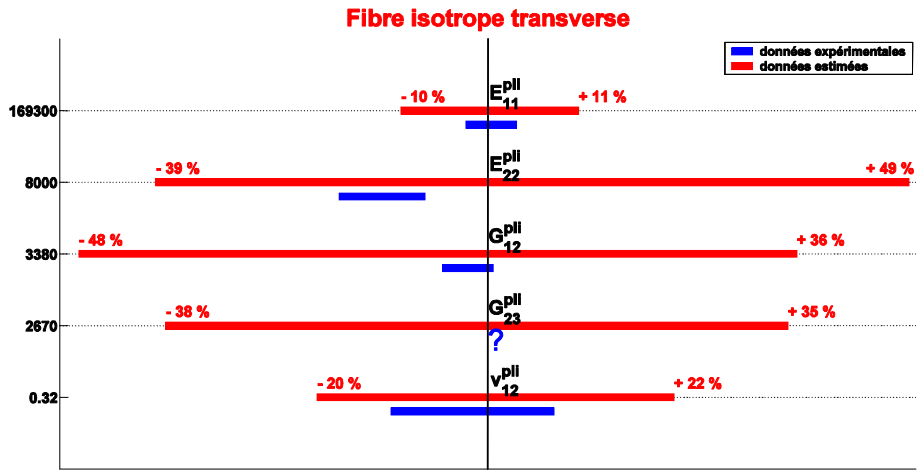


Figure VI-7. Différences entre les intervalles d'incertitudes mesurés et prédits par changement d'échelle

Pour cela, une démarche appelée consolidation de base de données a été développée suivant le principe exposé ci-après. Disposant d'un ensemble de valeurs de propriétés matériau aux différentes échelles (Figure VI-8a) et de modèles de changement d'échelle associés (approches d'homogénéisation pour le passage micro-méso, théorie des stratifiés pour le passage méso-macro, calcul « éléments finis » pour déterminer les propriétés de la structure à partir du stratifié), il est possible de prévoir le comportement d'une structure à partir de celui des constituants élémentaires. Toutefois, si les incertitudes sur les propriétés des constituants élémentaires sont prises en compte (ce qui n'est malheureusement jamais le cas dans la majorité des données rencontrées dans la littérature), il apparaît une accumulation conduisant à des barres d'erreurs qui ne sont pas forcément cohérentes avec les informations issues des mesures à cette échelle (Figure VI-8b).

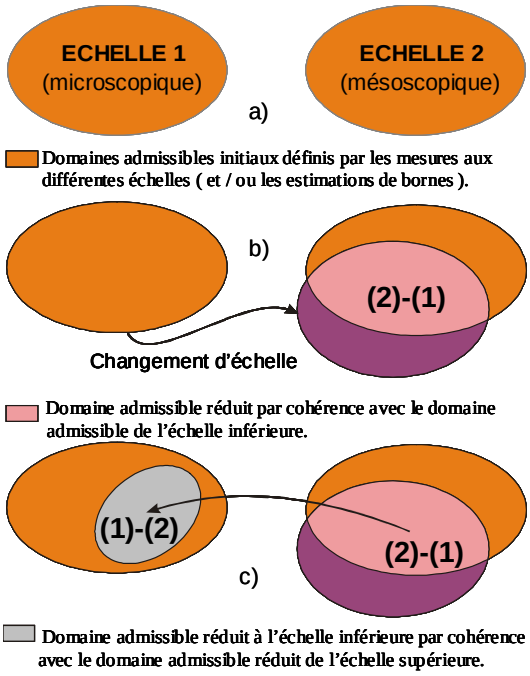


Figure VI-8. Principe général de la consolidation de base de données

La démarche que nous proposons de mettre en œuvre, dans un premier temps à deux échelles, consiste donc à réduire les domaines admissibles ou domaines

d'incertitudes tant à l'échelle basse qu'à l'échelle haute (ici au niveau des constituants puis au niveau du pli).

Comme premier exemple d'application, considérons dans un but pédagogique le passage des constituants au pli avec seulement deux propriétés incertaines au niveau micro, le taux de fibre et le module transverse de la fibre (Figure VI-8c). Les autres sont fixées à leur valeur moyenne. Il est alors possible de tracer la valeur de chaque paramètre du pli en fonction de ces deux paramètres micro sous la forme d'une surface (Figure VI-9). Les zones rouges représentent la prédiction des différentes propriétés du pli en fonction des deux propriétés incertaines micro. Les zones jaunes représentent quant à elles l'incertitude obtenue expérimentalement sur ces propriétés méso. La prise en compte simultanée de ces incertitudes permet alors une réduction importante (zone bleue) de l'espace d'incertitude tant au niveau micro que méso (la zone bleue est finalement définie par la conjontion des résultats d'admissibilité - zones jaunes - sur les 2 paramètres méso E_{11}^{pli} et E_{22}^{pli} et leur répercution au travers du modèle sur les 2 paramètres des constituants).

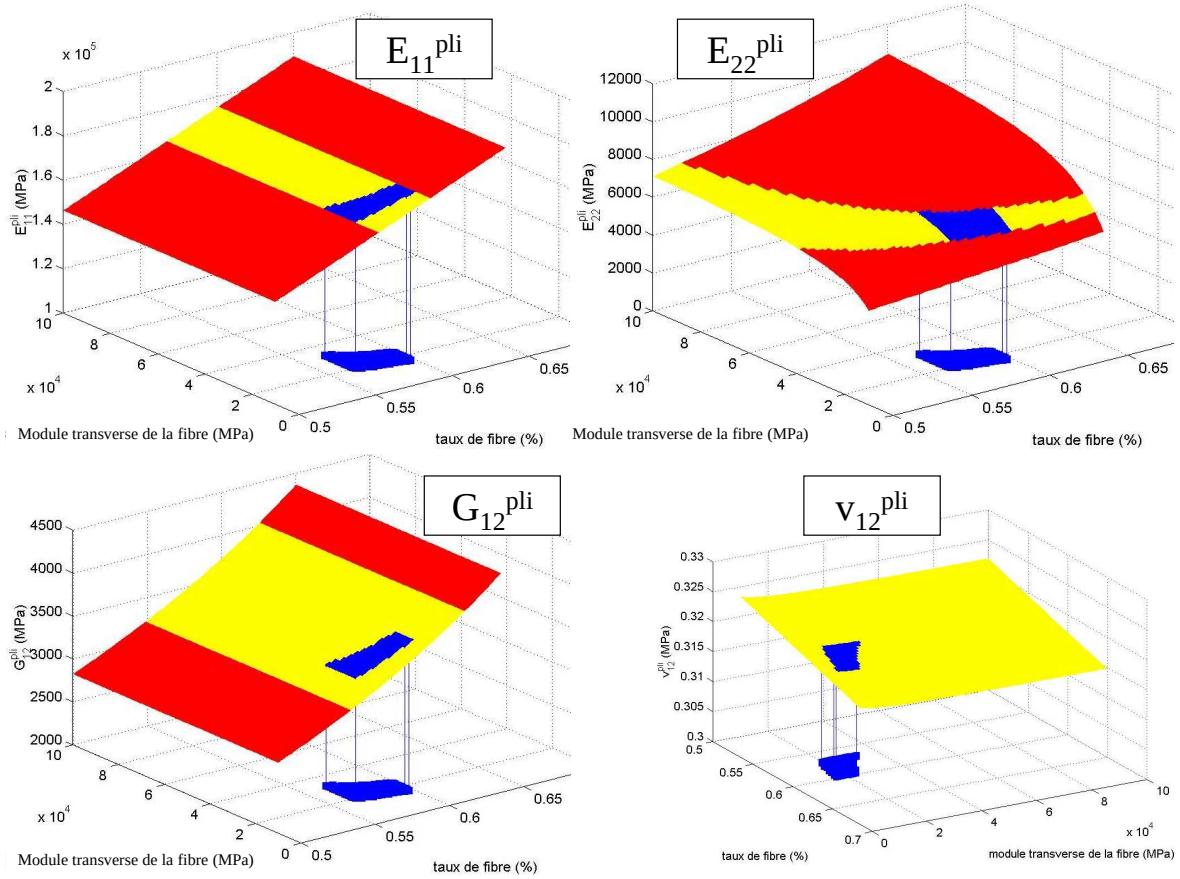


Figure VI-9. Exemple de consolidation de données dans un cas simplifié où seuls deux paramètres sont incertains à l'échelle des constituants.

Ce premier exemple simplifié ayant permis de mettre en évidence l'intérêt et la faisabilité de la méthode, j'ai ensuite cherché à appliquer le principe de consolidation à l'ensemble des paramètres matériaux que le modèle d'homogénéisation retenu (Mori-Tanaka) prend en compte aux échelles microscopiques et macroscopiques. Une approche « graphique » était cette fois impossible du fait des huit paramètres à prendre en compte simultanément à l'échelle des constituants.

Devant la difficulté à gérer le grand nombre de paramètres en entrée et les contraintes imposées sur les valeurs des propriétés méso en sortie, je me suis

orienté vers une méthode dite d'échantillonnage-sélection à base de tirages (obtenus par une méthode de grille ou par Monte-Carlo). L'idée consiste à tirer au hasard les valeurs des 8 paramètres micro afin de former des 8-uplets, puis de vérifier que les valeurs correspondantes (au travers d'une méthode de changement d'échelle type Mori-Tanaka) des paramètres du pli se situent bien dans les intervalles admissibles définis préalablement. Dans ce cas le 8-uplet est considéré micro-méso admissible (Figure VI-10). Si, par contre, pour au moins une des propriétés du pli, la valeur correspondante sort de l'intervalle admissible le 8-uplet est rejeté car non méso-admissible.

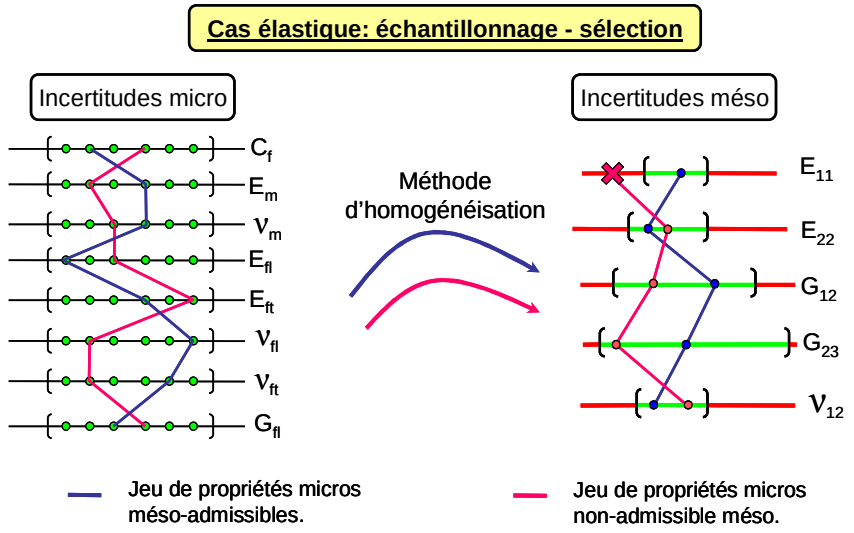


Figure VI-10. Principe de l'échantillonnage – sélection

VI.3.3. Exemple de mise en œuvre dans le cas micro-méso

L'application de cette démarche, en utilisant les données de l'IM7/977-2 présentées aux tableaux VI-4 et VI-5, conduit à une réduction importante de l'espace des valeurs admissibles au niveau des constituants. En effet, avec un échantillonnage régulier à six niveaux de valeurs pour chaque propriété micro, soit au total 6^8=1 679 616 8-uplets testés au travers du modèle de Mori-Tanaka, 12006 seulement se sont révélés admissibles. De même, avec un échantillonnage aléatoire à base de 10^5 8-uplets, seuls 1250 en moyenne vérifient les critères au niveau du pli et sont au final conservés. Les 8-uplets considérés micro-méso admissibles ne représentent donc qu'environ 1% des 8-uplets testés et cela tant dans le cas d'un échantillonnage régulier que d'un échantillonnage aléatoire.

		Minimum	Maximum
	C_f	0.56	0.60
Matrice (isotrope)	E_m (MPa)	2100	3100
	ν_m	0.30	0.45
Fibre (isotrope transverse)	E_{fl} (MPa)	270000	310000
	E_{ft} (MPa)	13500	62000
	ν_{fl}	0.23	0.33
	ν_{ft}	0.00	0.50
	G_{fl} (MPa)	5000	120000

Tableau VI-4. Intervalles d'incertitudes des paramètres des constituants.

	Minimum	Maximum
E_{11} (MPa)	165 000	175 000
E_{22} (MPa)	6600	7400
ν_{12}	0.28	0.34
G_{12} (MPa)	3200	3400
G_{23} (MPa)	2000	4000

Tableau VI-5. Intervalles d'incertitudes des paramètres du pli.

Notons cependant que cette réduction de l'espace admissible ne contribue que faiblement à resserrer les bornes de l'intervalle d'incertitude sur chacune des propriétés micro prises individuellement. La Figure VI-11 présente l'ensemble des points testés (formant le rectangle rouge), et en bleu les points micro-méso admissibles. Il est évident que chercher à décrire la zone bleue en terme d'intervalle sur les deux paramètres conduit à un carré qui décrit très mal la zone admissible.

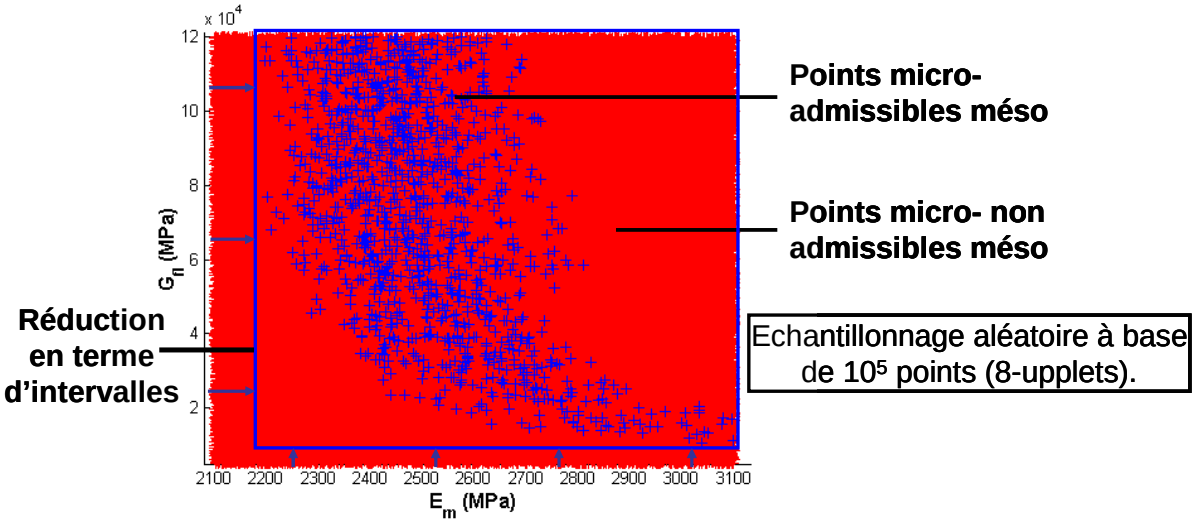


Figure VI-11. Espace micro-méso réduit pour le couple (E_m,G_{fl})

L'explication de la faible proportion de point micro-méso admissibles est donc à chercher ailleurs et plus précisément dans les couplages, ou colinéarités, introduits entre les propriétés des constituants par le modèle. Ces colinéarités mettent en évidence que, par tirage aléatoire, lorsqu'une propriété micro est fixée à une certaine valeur, cela implique que les autres ne peuvent plus se situer que dans une région plus restreinte de leur intervalle d'incertitude afin de respecter au final les bornes fixées sur les propriétés du pli.

Il apparaît également sur la Figure VI-11 que des points micro non méso-admissibles se situent à l'intérieur de l'espace micro-méso consolidé. Pour l'expliquer, il ne faut pas perdre de vue que cette figure ne constitue qu'une projection sur le plan (E_m, G_{fl}) d'un espace à huit dimensions, dont il est difficile de déterminer les frontières exactes. Ces points non admissibles correspondent donc à des 8-uplets dont les valeurs d'autres paramètres micro (tels le taux de fibre ou le module longitudinal de la fibre...) entraînent une violation des conditions sur au moins un des paramètres du pli.

Au niveau méso par contre, avec les intervalles considérés, la réduction sur les propriétés E_{11}, E_{22}, G_{12} et ν_{12} est assez faible car les bornes étaient relativement rapprochées. Par contre, une réduction importante existe sur l'intervalle admissible du G_{23}, initialement large car très difficilement accessible par la mesure.

Pour récapituler, les mesures sur les propriétés planes (E_{11}, E_{22}, G_{12} et ν_{12}) du pli entraînent donc au travers du modèle une réduction de l'espace d'incertitude sur les propriétés des constituants, principalement en induisant des couplages entre propriétés au niveau micro. Cette réduction se traduit ensuite au niveau méso par une réduction importante de l'intervalle d'incertitude sur la propriété hors-plan, généralement inconnue, qu'est le G_{23} (Figure VI-12). Les paramètres E_{22} et G_{23} semblent également légèrement corrélés.

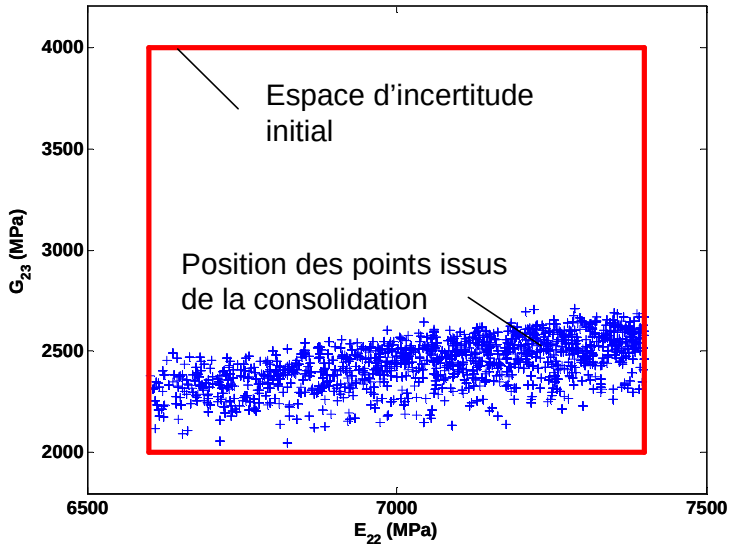


Figure VI-12. Au travers de la projection dans le plan (E_{22}, G_{23}),mise en évidence de la réduction de l'incertitude sur le G_{23} du pli issue de la consolidation.

Le lecteur attentif aura sans doute remarqué que le terme de « couplage » et non de « corrélation » a été employé pour désigner les relations entre les paramètres de l'échelle des constituants. En effet, les relations fortes, induisant une réduction de l'espace admissible ont été obtenus entre des paramètres comme le taux de fibre et le module longitudinal de la fibre, ou encore le module de la matrice et le module de cisaillement de la fibre (Figure VI-11). Or ces paramètres sont du point de vue statistique (et physique) indépendants l'un de l'autre. Le terme corrélation n'est donc pas approprié. En poussant plus avant ce raisonnement sur les corrélations, il apparaît qu'une réduction plus importante est possible.

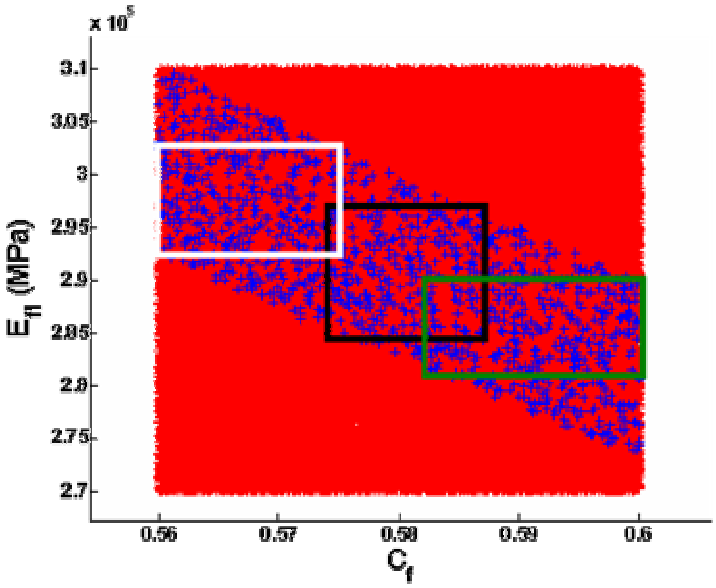


Figure VI-13. Exemple de la possible utilisation de l'indépendance de deux paramètres pour réduire encore l'espace d'incertitude.

En effet si les paramètres sont indépendants, leur espace d'incertitude conjoint doit être un rectangle. Le problème est alors de choisir le rectangle définissant l'espace d'incertitude approprié parmi tous ceux possibles. Par exemple sur la Figure VI-13,

les rectangles blanc, noir et vert définissent chacun un espace d'incertitude a priori valable, respectant à la fois l'hypothèse d'indépendance des paramètres et le couplage mis en évidence par la consolidation. Une solution peut être de choisir le plus grand possible centré sur les valeurs moyennes des paramètres. Cela suppose toutefois de faire confiance à l'estimation de la moyenne, et que le couplage n'entraîne pas une incompatibilité avec un tel choix. Par exemple, sur la Figure VI-13, si les moyennes pour C_f et E_{fl} étaient respectivement 0.57 et 275 GPa le rectangle que l'on se propose de définir ne correspondrait pas du tout à la zone admissible tirée de la consolidation. Une telle situation serait le signe soit d'un modèle inapproprié, soit de mesures erronées sur au moins l'un des paramètres.

VI.3.4. Exemples du gain obtenu dans l'analyse d'une structure

La méthode de consolidation proposée éliminant un grand nombre de combinaisons de valeurs de propriétés, il était légitime de se demander si cela se traduisait par un gain en précision sur les intervalles d'incertitudes au niveau du calcul de structure.

VI.3.4.1 Cas de l'éprouvette chapeau

Dans un premier temps, nous avons considéré le cas de l'éprouvette chapeau soumise à un chargement de flexion. Cette structure présente l'avantage d'être sensible aux propriétés hors plan et de présenter des champs de contraintes complexes, semblables à ceux que l'on peut retrouver dans les pièces industrielles dans leur environnement de fonctionnement, tout en ne demandant pas un effort de calcul trop important, ce qui permet de réaliser un grand nombre de simulations.

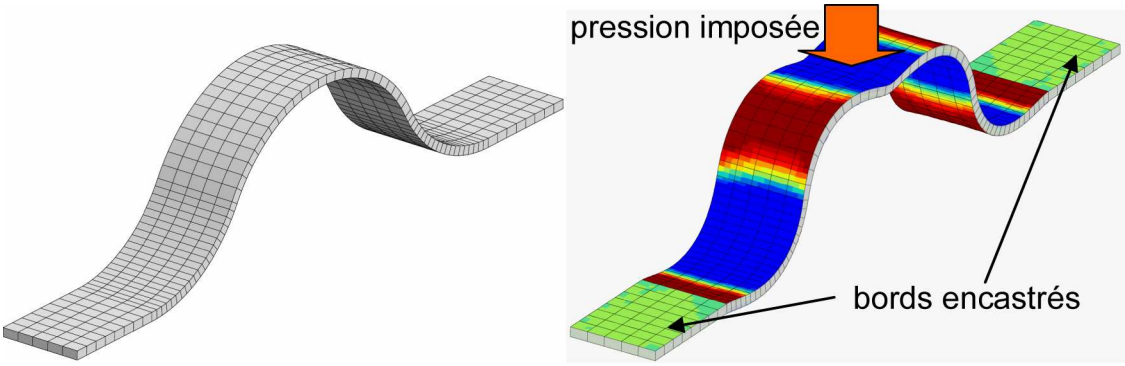


Figure VI-14. Eprouvette chapeau (maillage non déformé / champ de contrainte et conditions aux limites)

Afin de démontrer un éventuel gain de la méthode de consolidation au niveau structural nous avons donc testé trois jeux de propriétés matériaux au niveau méso. Le premier, dit micro-brut consistait en mille 8-uplets micro tirés aléatoirement dans l'espace d'incertitude (défini au niveau des constituants) et transformés en 5-uplets méso au moyen du modèle de Mori-Tanaka. Le second, dit micro-consolidé, consistait en environ 1200 5-uplets méso correspondant aux 8-uplets micro-méso admissibles tirés de la consolidation. Enfin le troisième jeu de propriétés était constitué de 1000 5-uplets méso tirés aléatoirement dans l'espace d'incertitude défini au niveau du pli.

Le résultat de ces 3 jeux de calculs (Tableau VI-6 : colonnes 2 à 4) met en évidence une réduction importante de l'incertitude sur l'indicateur qu'est la rigidité en flexion de la structure. On passe ainsi de 30% d'incertitude avec les données issues du micro brut, à 15% avec le méso brut pour finir à 7,6% avec les propriétés micro-méso consolidées. L'incertitude est donc successivement divisée par 2. Si l'on pouvait

s'attendre à ce que la série de calculs réalisée à partir des incertitudes directes sur les propriétés du pli donnent un intervalle de confiance plus restreint que la série réalisée à partir des incertitudes sur les constituants, il est plus surprenant de constater une diminution aussi large de cet intervalle entre la série méso brut et micro consolidé. En effet, les seules conditions imposées lors de la consolidation étaient de vérifier les intervalles admissibles au niveau du pli. On aurait donc pu s'attendre à ce que les jeux de propriétés micro consolidé et méso brut donnent des résultats équivalents. Cependant en ce qui concerne le jeu de propriété méso brut l'incertitude est importante sur le G_{23}, alors que comme nous l'avons signalé précédemment, la consolidation contribue grandement à réduire l'intervalle dans lequel varient les valeurs de cette propriété.

	Méso brut (tirages aléatoires et EF)	Micro brut (tirages aléatoires et EF)	Consolidé (tirages aléatoires et EF)	Méso brut (bornes et EF)	Micro brut (bornes et EF)	Consolidé (algo génétique et EF)
Rigidité max (MPa)	1517	1578	1422	1453	1662	1429
Rigidité min (MPa)	1306	1159	1316	1137	1073	1304
Incertitude (MPa)	211	420	106	316	590	125
Incertitude relative	15,1%	30,0%	7,6%	22,6%	42,1%	9,0%

Tableau VI-6. Intervalle d'incertitude de la rigidité de l'éprouvette chapeau suivant le jeu de propriétés matériau utilisé.

Ces résultats sont cependant issus de tirages aléatoires, et rien ne garantit que la largeur des intervalles d'incertitude obtenus ait été maximisée. Or, c'est pourtant l'information nécessaire dans l'objectif d'utiliser cette méthode pour dimensionner des structures. Nous avons donc refait trois séries de calcul. L'obtention de bornes plus larges était relativement aisée pour les jeux de propriétés micro brut et méso brut. En effet, la définition surface de réponse (polynomiale de degré un) reliant la rigidité de l'éprouvette aux propriétés matériaux du pli s'étant avérée satisfaisante (faible écart entre les valeurs prédites par l'approximation et par le calcul élément fini), il suffisait de tester toutes les combinaisons possibles des bornes des différentes propriétés. La difficulté était plus importante en ce qui concerne l'espace micro consolidé. En effet celui-ci n'était pas défini en terme d'intervalle admissible sur chaque propriété mais seulement de manière discrète. Nous avons donc utiliser un algorithme génétique pour piloter la méthode d'échantillonnage- sélection, afin de déterminer de nouveaux 8-upplets à la fois micro-méso admissibles et maximisant (ou minimisant) la rigidité de l'éprouvette.

Les nouveaux intervalles d'incertitude obtenus (Tableau VI-6 : colonnes 5 à 7) par ces méthodes, bien que plus larges, ne modifient pas les conclusions initiales. Il est à noter toutefois que si pour les jeux de calculs micro brut et méso brut, il est certain que les bornes trouvées soient les bornes extrêmes, il n'en va pas de même pour le micro consolidé. L'algorithme génétique ne garantit en effet pas l'obtention des extrema absolus mais seulement de s'en rapprocher.

VI.3.4.2 Exemple de la réponse en flambement d'une plaque perforée

Nous nous sommes ensuite attachés à appliquer cette méthode au cas d'une plaque trouée en compression, présentant donc des effets de non- linéarité géométrique dus au flambement. L'objectif de cet exemple est de montrer qu'il est possible, à partir de la même base de données, de réduire nettement les incertitudes sur la force de flambement (et par conséquence les marges de sécurité)

Le maillage de la pièce et les conditions aux limites sont présentés Figure VI-15. Les calculs sont effectués à l'échelle du pli et des éléments multicouches ont été utilisés. Le matériaux employé est l' IM7/ 977-2, et la stratification retenue $[45°/0°/90°/-45°]_S$.

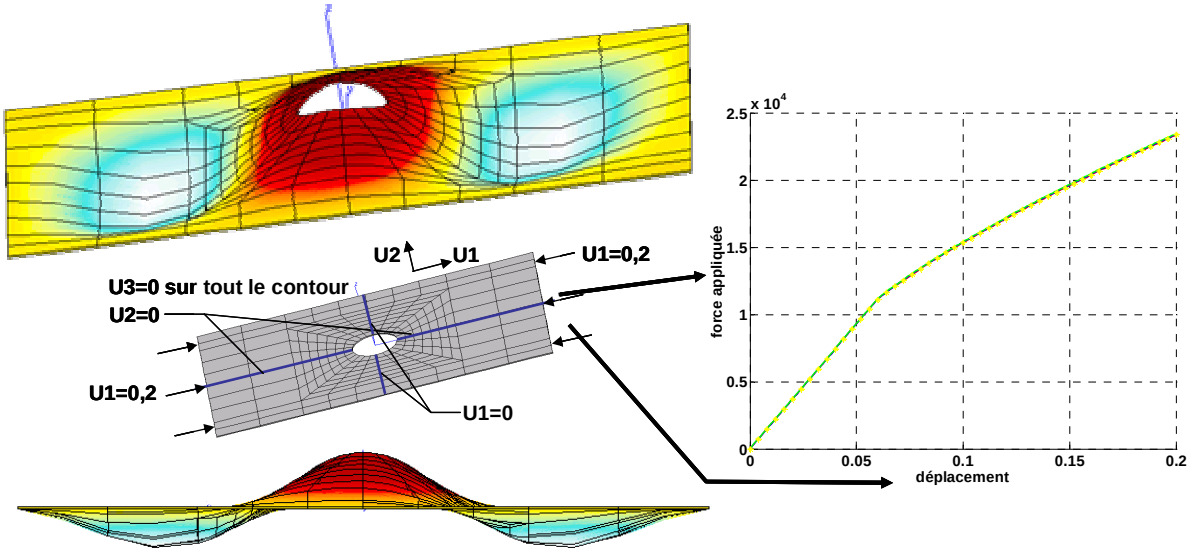


Figure VI-15. Déformée et courbe de réponse pour la plaque trouée en flambement.

Sur cet exemple nous avons repris le principe de fonctionnement de la démarche d'analyse de variabilité. Le coût unitaire du calcul de cette structure ne nous permettant pas d'effectuer des milliers de calculs, nous avons sélectionné 32 jeux de valeurs micro-méso admissibles dont les valeurs correspondantes au niveau du pli sont proches des bornes de l'espace méso. Quatre autres points proches du centre de cet espace ont ensuite été ajoutés afin de disposer des données nécessaires à un total de 36 ($2\times3\,(n+1)$ avec n=5) calculs.

L'allure du diagramme force/ déplacement pour un calcul donné est présentée sur la courbe de la Figure VI-15. Cette courbe peut être décrite par un modèle à quatre paramètres. Suivant la démarche de prise en compte des incertitudes, à partir des 35 calculs réalisés une surface de réponse polynomiale de degré un est définie pour approximer chacun des quatre coefficients de ce modèle, afin de les relier aux paramètres méso du pli. L'erreur de régression et la stabilité de modèle estimée par validation croisée s'avérant raisonnable, les surfaces de réponses sont utilisées afin de modéliser les réponses des jeux de paramètres micro bruts, méso bruts et micro-méso consolidés déjà utilisés dans l'exemple précédent. Nous obtenons alors la Figure VI-16 Une fois encore, l'utilisation de la méthode de consolidation de base de données conduit à un gain important.

	Micro brut	Méso brut	Consolidé
Force de flambement maximale	12687 N	11597 N	11542 N
Force de flambement minimale	9947 N	8866 N	10450 N
Incertitude	**24,3%**	**24,2%**	**9,7%**

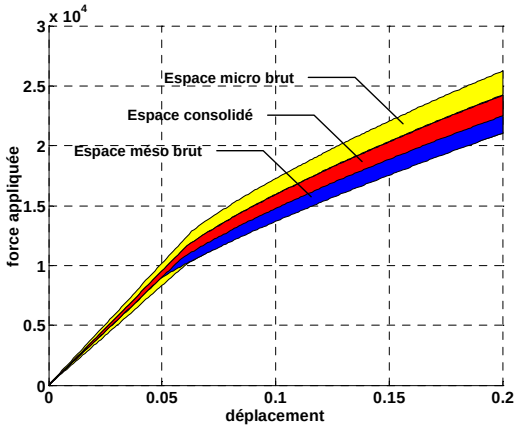


Figure VI-16. Variabilité de la réponse de la plaque suivant le jeu de paramètres employés.

L'incertitude sur cet exemple est définie comme le rapport de la largeur de l'intervalle d'incertitude sur la valeur de référence du calcul déterministe. Une faible différence de l'incertitude est constatée entre le cas « micro brut » et le cas « méso brut ». Celle-ci est due comme on peut le voir à des intervalles d'incertitudes de largeur quasi-équivalente mais décalés. Le fait que puisse être obtenue une valeur minimale plus basse dans le cas « méso brut » que dans le cas « micro brut » s'explique par les corrélations introduites par l'utilisation du changement d'échelle dans le cas « micro brut ». En effet dans ce cas, il est impossible d'obtenir simultanément un module G_{12} haut et un module G_{23} bas par exemple.

VI.3.5. Introduction de la notion probabiliste dans la consolidation

Les projections de l'espace décrit par les 8 propriétés micro sur des plans à deux dimensions (Figure VI-11) montrant une répartition non uniforme des points micro-méso admissibles, il est apparu intéressant de chercher à traduire le phénomène de consolidation suivant les zones de l'espace en terme de probabilité.

Pour cela un échantillonnage régulier a été utilisé : 6 niveaux de valeurs ont ainsi été choisis, régulièrement espacés, dans l'intervalle admissible de chacune des 8 propriétés micros. Les 6^8 8-uplets correspondant à l'ensemble des combinaisons possibles de ces niveaux de valeurs ont ensuite été générés et testés pour déterminer ceux micro-méso admissibles. La Figure VI-17 montre alors qu'en se restreignant à un couple de propriétés, tel (E_m,G_{fl}), il apparaît que toutes les combinaisons de valeurs ne sont pas aussi souvent micro-méso admissibles.

Pour certaines, jusqu'à 3% des points testés se sont ainsi révélés admissibles alors que pour d'autres cette proportion chute à moins de 1%. Cela s'explique notamment par l'effet des colinéarités induites par la consolidation. La Figure VI-17 montre par exemple que suivant la zone considérée, l'intervalle admissible correspondant pour le E_{ft} est plus ou moins large, ce qui influe sur le nombre de point rejetés.

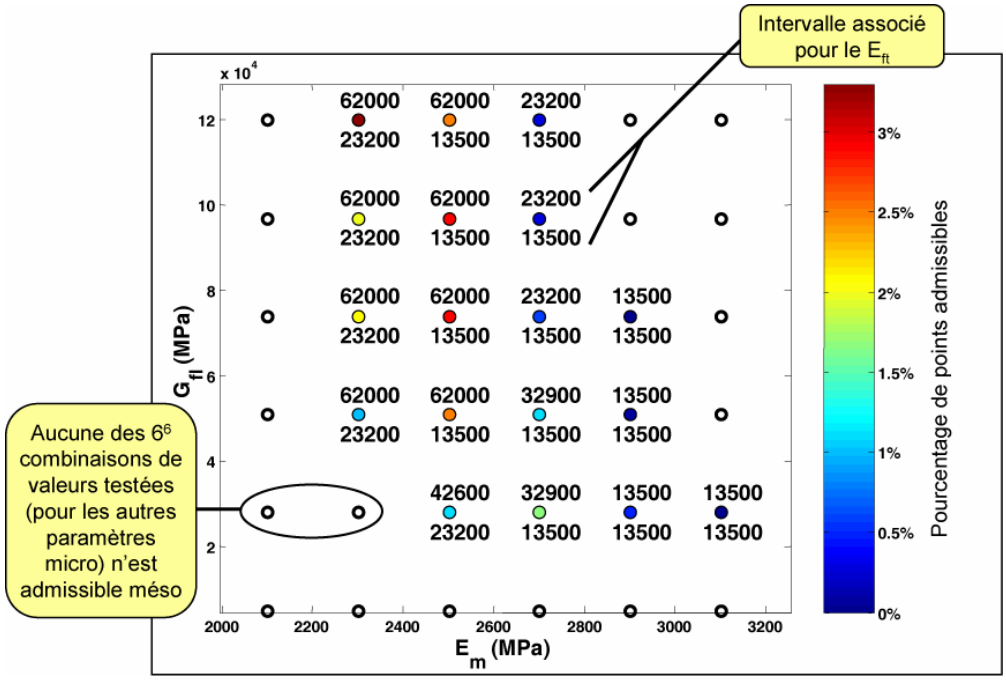


Figure VI-17. Consolidation par échantillonnage aléatoire : points admissibles dans le plan (E_m,G_{fl}). Chaque point affiché sur la figure correspond en réalité au calcul de 6^6(≈46 650) combinaisons de paramètres

De la description probabiliste discrète de l'espace micro-méso admissible, il est possible au moyen d'une interpolation linéaire de passer à une description continue. Il en résulte alors la Figure VI-18 qui donne une image de la distribution des probabilités des paramètres micro cohérents avec les mesures méso.

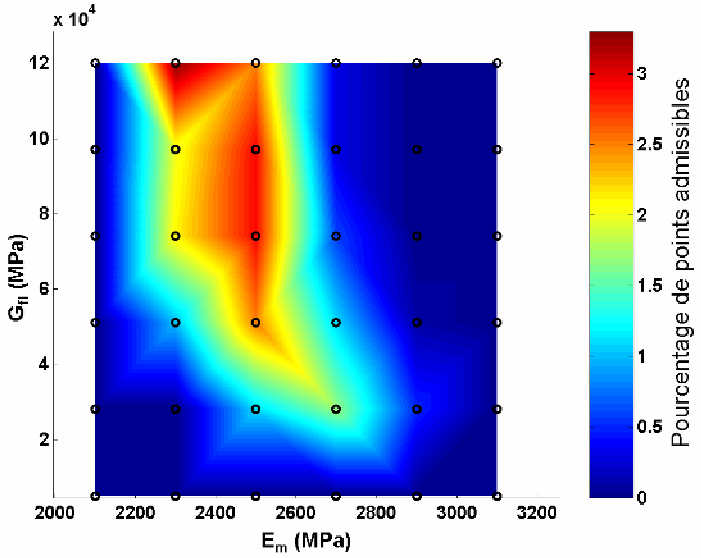


Figure VI-18. Probabilité de micro-méso admissibilité pour les couples (E_m,G_{fl}) quelque soit les valeurs des autres paramètres micro.

Toutefois, il s'agit de prendre garde au fait que cette description en terme de probabilité n'a de sens que tant que l'on considère moins de paramètres que nécessaires au fonctionnement du modèle. En effet, la consolidation se fait au travers du modèle de Mori-Tanaka qui est purement déterministe (à un jeu de propriétés micro il fait correspondre un jeu de propriétés méso). Si toutes les propriétés au niveau micro sont déterminées, il est alors aisé de dire avec certitude si

le jeu de propriétés est, ou non, micro -méso admissible. Par contre, à partir du moment ou une propriété au moins n'est pas connue, la notion probabiliste prend tout son sens. En effet, la question de l'admissibilité de ce point dépend alors de la valeur prise par la propriété inconnue. On dira ainsi que, la $i^{ème}$ propriété pouvant prendre n'importe quelle valeur dans son intervalle admissible, le 7-upplet a x% de chance d'être admissible.

Une approche probabiliste de la consolidation peut également être conduite en considérant, comme c'est souvent le cas en pratique, des probabilités de distribution sur les valeurs des propriétés. L'application de cette démarche aux propriétés micro, en considérant une distribution gaussienne sur chacune, conduit à explorer le même espace qu'avec une distribution uniforme mais en tirant proportionnellement plus de point au centre de l'espace. Le résultat final n'est globalement pas modifié.

Toutefois cette démarche n'est pas la plus adaptée. En effet une prise en compte réaliste des distributions de probabilités se doit plutôt de les imposer sur les propriétés du pli (échelle où ce type d'information est le plus disponible), ainsi que sur le taux de fibre et éventuellement le module de la matrice, qui sont les seules propriétés micros pour lesquelles une statistique peut être déterminée directement. Intégrer ensuite ces lois de probabilité dans la démarche de consolidation se révèle cependant difficile. L'échantillonnage –sélection est en effet incapable d'assurer la cohérence entre les distributions imposées aux différentes échelles. La méthode ne permet en effet d'imposer aisément les distributions qu'au niveau micro, et le transport de celles-ci au niveau méso ne vérifie généralement pas les lois de probabilités imposées à cette échelle. Sans oublier le principe de consolidation qui, en éliminant des points, vient finalement perturber les distributions au niveau micro. Pourtant il serait souhaitable de pouvoir développer ces notions probabiliste notamment pour faire le lien avec les valeurs A ou B industrielles. Pour cela l'utilisation des méthodes inverses et notamment de l'approche développée par Tarantola ([Tarantola, 05]) est une piste ardue mais prometteuse qu'il serait regrettable de ne pas explorer.

Conclusion

Il paraissait important de s'intéresser à la réduction des incertitudes et de leurs effets. Ce chapitre a montré qu'il était possible d'obtenir des réductions. Cependant un travail important reste encore à accomplir dans cette voie. En particulier, un travail sur les modèles eux-mêmes pourrait contribuer à la réduction des effets des incertitudes.

L'attention a été jusque-là portée sur les incertitudes d'entrée et les efforts qu'il peut être souhaitable de fournir sur leur estimation. L'objectif de réduction des incertitudes des réponses de sortie demande maintenant que soit examinée une autre composante essentielle de la propagation des incertitudes : le modèle mécanique mis en œuvre. L'imperfection du modèle, inhérente à sa nature, est en effet susceptible d'affecter les résultats du transport d'incertitudes.

Les modèles reposent la plupart du temps sur une simplification des phénomènes physiques à l'origine des réponses mécaniques des matériaux et des structures, simplifications qui peuvent parfois être trop importantes. Les hypothèses de base ayant servi à la construction du modèle peuvent par ailleurs se révéler inadéquates. Il n'est donc pas rare de constater des écarts entre les valeurs prévues par ces modèles et celles obtenues expérimentalement. Pour gérer ces insuffisances, un

moyen simple et largement répandu consiste à amplifier artificiellement les incertitudes des paramètres d'entrée afin d'obtenir du modèle des valeurs qui encadrent les réponses observées. La Figure VI-19 présente un tel cas en reprenant l'exemple du critère de rupture utilisé dans le chapitre V pour l'étude de la cornière (matériau Composite à Matrice Céramique). Le caractère inapproprié des critères en contrainte maximale amènerait à former une zone d'incertitude plus grande que si les essais avaient été multipliés pour chaque point.

Le problème soulevé ici est celui de l'identification des modèles, et en particulier comment faire la distinction dans cette phase entre ce qui relève de la variabilité inhérente au matériau ou de l'insuffisance du modèle. Les corrélations entre les divers paramètres du modèle sont une fois encore très importantes. Cela est particulièrement vrai pour des modèles complexes comprenant un nombre élevé de paramètres d'ajustement. Souvent les effets de l'un peuvent être compensés par les effets d'un ou plusieurs autres. Les plages de variation de chaque paramètre peuvent donc être larges, mais pour définir l'ensemble des modèles possibles il ne s'agit pas de balayer l'ensemble de l'hypercube défini par cet espace d'incertitude. L'oubli des corrélations entre paramètres qui résulteraient d'une telle démarche conduirait en effet à des résultats bien trop pessimistes. Il s'agit donc de mettre en place des procédures d'identification en données incertaines, consistant à trouver l'ensemble des jeux de valeurs des différents paramètres présentant une adéquation (sensiblement) identique vis des données expérimentales disponibles. Ces procédures peuvent se révéler assez coûteuses et leur formulation peut se ramener à un ou plusieurs problèmes d'optimisation.

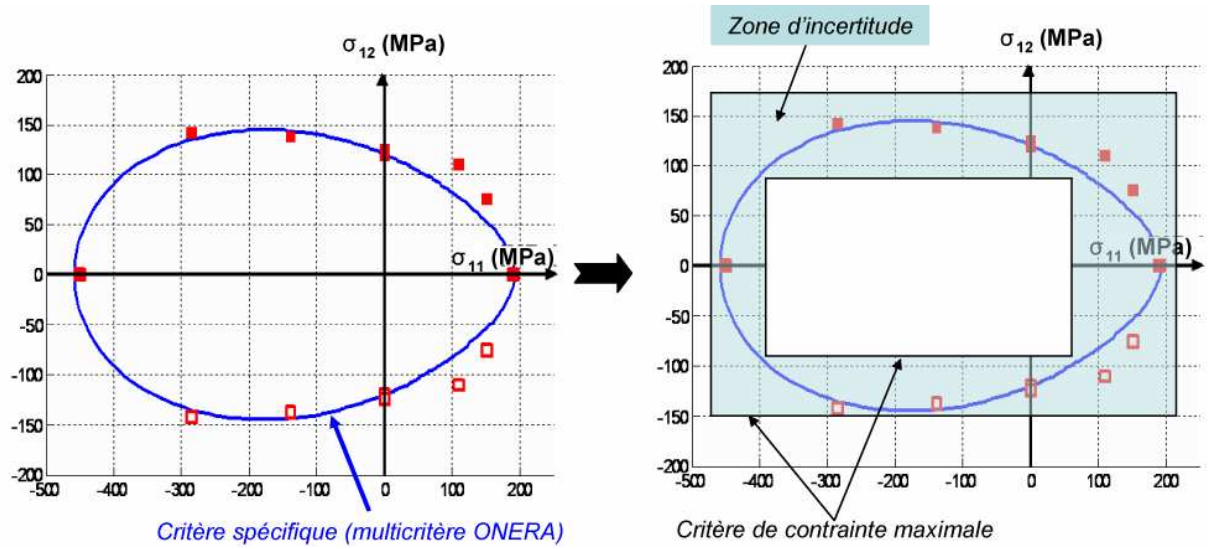


Figure VI-19. Exemple de gestion de l'utilisation d'un critère de rupture inapproprié (critère de contrainte maximale) par augmentation des incertitudes sur les propriétés à rupture et donc sur la zone de rupture (essais de traction-torsion sur un matériau composite CMC : SiC/SiC - Cerasep 347).

CONCLUSIONS

L'objectif de ce travail de thèse était de mettre en place une démarche permettant l'évaluation des effets des incertitudes dans les calculs mécaniques appliqués aux matériaux composites à matrice organique. Ces matériaux étant plus soumis que d'autres, en particulier les métalliques, aux problèmes d'incertitudes, il s'agissait pour nous de trouver un moyen de s'assurer de la robustesse d'un résultat (par exemple d'un dimensionnement) de façon plus raisonnée que la simple utilisation de coefficients d'abattement ou de sécurité forfaitaires.

Pour traiter ce sujet, le premier effort a été de sélectionner les outils adaptés à notre problème parmi la multitude de techniques existantes. Pour répondre aux critères (non-intrusivité, parcimonie,…) qui avaient été fixés dans la présentation générale, je me suis rapidement orienté vers l'utilisation de la méthode des surfaces de réponse. Toutefois certaines insuffisances m'ont ensuite conduit à placer cette méthode dans une perspective plus large. En introduisant les méthodes de validation croisée (pour vérifier la qualité d'approximation) et le concept plus étendu de métamodèle (autres formes d'approximation pour remédier à d'éventuelles insuffisances des surfaces de réponse polynomiales), une véritable stratégie a finalement été construite. Celle-ci est caractérisée par sa progressivité, comme l'indique le résumé de son fonctionnement :

1) Construction d'un surface de réponse basée sur des polynômes de degré un : l'utilisation de cette approximation (la plus simple possible) permet de ne pas introduire de complexité inutile et ne préjuge pas de la complexité du problème. Cette étape consiste en pratique en un choix optimal des points d'identification, puis à l'évaluation du processus en ces points ce qui fournit les données nécessaires à l'identification de la surface de réponse.

2) Phase de validation de l'approximation : évaluation de la qualité au moyen de méthodes de validation croisée (*bootstrap* ou plus généralement *leave-k-out*) ;

3) Si la qualité d'approximation est satisfaisante nous passons à l'étape 4, sinon il faut modifier l'approximation. Cela consiste généralement en une modification du type de métamodèle, accompagnée si nécessaire d'un ajout réfléchi de points d'identification. Les métamodèles utilisés que nous avons principalement utilisés sont des polynômes de degré 1 à 3 (ne comportant si possible que les monômes les plus influents), le chaos polynomial et le krigeage ;

4) Exploitation du métamodèle pour caractériser l'influence des incertitudes (recherche des situations extrêmes, caractéristiques statistiques,…).

Les outils employés dans ce mémoire me semblent permettre de résoudre la plupart des cas pouvant être rencontrés. Leur regroupement dans une « boite-à-outils » Matlab® permet d'en faire une utilisation relativement aisée et laisse la possibilité d'enrichir encore la démarche développée, en particulier pour ce qui concerne les types de métamodèles employés. Un tel enrichissement des métamodèles est un domaine en soi et les développements actuels, concernant en particulier le krigeage ou les réseaux de neurones, pourront par la suite être ajoutés, au fur et à mesure

des besoins des utilisateurs. Par ailleurs rappelons que la stratégie développée ne prétend pas être infaillible mais fournit un cadre méthodologique complet permettant d'aboutir à un résultat satisfaisant dans la plupart des cas. Pour les cas restants, nos efforts ont consistés plus particulièrement à définir divers indicateurs permettant de détecter l'échec de la méthode.

Au final, nous disposons donc d'une méthode permettant non seulement d'évaluer les effets des incertitudes des paramètres d'entrées examinés, mais également de quantifier la confiance qui peut raisonnablement être accordée à ces estimations (en tenant compte du caractère approché du métamodèle qui a permis de les obtenir). Concrètement, cela signifie que sur un résultat de calcul de structures, il est ainsi possible d'obtenir des barres d'incertitudes liées aux fluctuations des paramètres incertains étudiés et d'y superposer l'incertitude introduite par la méthode elle-même. Ce résultat répond à l'essentiel des objectifs initialement fixés pour ce travail.

Si ces barres d'erreurs traduisent essentiellement les incertitudes en termes de valeurs extrêmes (minimale et maximale), la démarche mise en place peut également fournir des résultats statistiques au sens de valeur moyenne, d'écart-type, mais aussi de valeurs « quantiles » (inférieure ou supérieure à un certain pourcentage des valeurs possibles) tirées de la distribution. L'incertitude sur ces valeurs, que ce soit celles résultant de l'utilisation d'un métamodèle approché ou de l'usage de simulations de Monte-Carlo, peut bien sûr être évaluée, toujours au moyen des méthodes de validation croisée. En allant plus loin, nous avons pu montré qu'il était même possible d'évaluer l'influence - sur la réponse finale de la structure - du type de distribution choisi pour les paramètres incertains. L'utilisation de ces données pour la réalisation d'un dimensionnement reste ensuite à l'appréciation de l'ingénieur (choix de la distribution la plus vraisemblable ou la plus pessimiste,…).

L'usage des procédures actuelles de dimensionnement, en particulier l'usage de marges de sécurité, n'est pas pour autant rendu obsolète. Il convient d'ailleurs de rappeler que ce travail ne prétendait pas les supprimer, mais visait simplement à rendre leur usage plus raisonnable et motivé suivant les situations (réduction des marges forfaitaires ou d'ignorance). Cela me semble désormais possible et l'usage de cette méthode permet de redonner un sens « sécuritaire » à ces coefficients. La marge prise peut désormais être affichée comme une assurance par rapport aux cas extrêmes attendus, et non une façon de tenir compte grossièrement des incertitudes non-maîtrisées et non étudiées. La mise en œuvre concrète reviendra par contre aux ingénieurs concernés qui constateront (je l'espère), que cette nouvelle démarche met bien en évidence les surdimensionnements introduits par les méthodes actuelles.

La stratégie mise en place n'est pas non plus en contradiction avec l'approche fiabiliste et peut parfaitement être prolongée dans ce sens. Dans le domaine aéronautique, il convient toutefois de remarquer que ce n'est pas (encore ?) la façon de procéder préconisée par les ouvrages de référence (military handbook,…). Un effort doit donc être entrepris en amont afin de convaincre (i) les industriels que les surcoûts engendrés en termes de calculs sont compensés par une meilleure maîtrise du dimensionnement et (ii) les autorités certificatrices que les approches stochastiques et/ou fiabilistes conduisent bien dans tous les cas à des dimensionnements au moins conservatifs. Il s'agit également de convaincre les différents acteurs concernés que statistique et mécanique ne s'opposent pas et peuvent réellement se compléter.

Souvent dans le dimensionnement de structures (aéronautiques) complexes, l'intérêt porte principalement sur les « maillons faibles » (pièces critiques pouvant entraîner une défaillance d'ensemble de la structure). Bien sûr, les efforts qui se concentrent sur ces pièces visent à la fois à assurer la sécurité au moyen des marges nécessaires, tout en recherchant le dimensionnement « au plus juste ». Pour nous, rendre systématique l'approche variabiliste dans le calcul de structure pourrait tout à la fois garantir la sûreté du dimensionnement de telles pièces tout en révélant des surdimensionnements significatifs des approches actuelles (grâce à la prise en compte des effets de compensation entre les divers points de la structure par exemple).

Sur le plan physique, la prise en compte des incertitudes dans les calculs mécaniques permet de se rapprocher de la réalité, et sur des exemples particuliers tels la rupture ou le flambement, permet d'obtenir des résultats inaccessibles par la seule approche déterministe. Ainsi les changements de modes de flambement ou de rupture qui sont parfois constatés lors des essais peuvent désormais être prévus par les calculs. En prolongeant la démarche, il est même possible d'y associer des valeurs de probabilité respectives. De même, il est possible comme nous l'avons vu, de chercher dans une pièce toutes les défaillances statistiquement possibles et non plus seulement la plus probable. Une étude dans le prolongement de cette thèse consistant en la vérification de telles prévisions au moyen d'une large campagne d'essais ne paraît malheureusement pas raisonnable (coût inacceptable). Sur le long terme, le retour d'expérience (sur des milliers de pièces après des millions d'heure de vol) pourrait être une confirmation permettant de pallier le caractère irréaliste de cette validation expérimentale. Reste toutefois à intégrer à cette démarche la notion de durabilité ce qui ajoute une incertitude supplémentaire due à une diminution des propriétés mécaniques au cours du temps. Comme nous l'avons dit, ces difficultés nous ont conduit à chercher une validation numérique au moyen de simulations de Monte-Carlo sur de multiples cas, dont ceux présentés dans ce mémoire. Le bilan de notre démarche repose donc sur des performances satisfaisantes sur ces exemples numériques, qui peuvent toutefois être encore complétés.

La méthode permet actuellement de traiter ce que nous avons appelé les problèmes d'incertitudes uniformes, c'est-à-dire les problèmes portant sur des variations de caractéristiques d'une pièce à l'autre. Nous pourrions également parler de variabilité globale pour ce type de problème, par rapport à une variabilité spatiale ou localisée spatialement (c'est-à-dire au sein d'une même pièce ou limitée à un domaine précis d'une pièce). Mon intérêt s'est porté prioritairement sur le problème de l'incertitude uniforme car nous sommes convaincu que l'influence de ce type d'incertitude est du premier ordre et doit être résolu de manière satisfaisante avant de passer aux étapes suivantes.

L'adaptation de cette méthodologie ou le développement d'une nouvelle adaptée aux problèmes d'incertitudes spatiales reste encore à accomplir. Toutefois, il est là encore possible de s'appuyer sur bon nombre d'outils existants et qui ont commencé à faire leurs preuves. Citons par exemple les développements de Karhunen-Loève ou l'analyse en composantes principales qui en constitue une généralisation. La difficulté par rapport au travail accompli réside notamment dans le passage d'un vecteur (de taille limitée) de paramètres incertains à un champ complet de paramètres incertains. Les amplitudes d'incertitudes considérées sont par contre généralement encore plus modérées (pas de discontinuités énormes des propriétés élastiques par exemple). Par ailleurs dans le contexte qui nous intéresse, la notion

de variabilité spatiale nous paraît être avantageusement remplaçable par la notion de nocivité/criticité de défauts. C'est en partie la problématique d'une thèse en cours (L. Marcin[16]) visant sur une structure donnée à :

1) Inventorier les types de défauts et leur occurrence ;
2) Décrire « numériquement » les effets des défauts retenus (défauts majeurs) ;
3) Rechercher par optimisation les positionnements les plus critiques de ces défauts ;
4) Estimer la nocivité potentielle et proposer des critères d'admissibilités.

La question des incertitudes est le plus souvent liée à des problèmes de maîtrise des processus de fabrication, ce qui induit généralement des amplitudes de fluctuation des paramètres relativement faibles. Mais elle peut également être introduite par une certaine imprécision dans le cahier des charges. Les programmes de développement sont en effet relativement longs et doivent de plus en plus être réactifs face à de nouvelles exigences de fonctionnement. Il est donc possible de parler de variabilité du cahier des charges, ce qui peut impliquer des fluctuations plus larges des paramètres étudiés. Tenir compte de tels aspects conduirait à un dimensionnement moins optimal pour la situation présente mais robuste vis-à-vis des nouvelles exigences qui pourraient intervenir par la suite. Le choix doit alors être fait par les équipes d'ingénieurs suivant qu'ils privilégient la performance présente ou l'adaptabilité à de futures modifications. Cela pose également le problème de l'optimisation des pièces composites.

D'ailleurs, les méthodes, de type métamodèle, que nous avons employées pour traiter le problème d'estimation des effets des incertitudes sont également très présentes dans la bibliographie concernant les problèmes d'optimisation en mécanique. Cela confirme le lien entre problème d'optimisation et problème d'incertitudes tel que nous l'entendons. En effet, dans les deux cas il s'agit d'explorer un domaine de variation pour une combinaison de multiples paramètres. Dans les deux cas, les multiples évaluations d'un processus donné ont un coût tel qu'il est nécessaire de recourir à une forme approchée, plus rapide à évaluer. La différence réside par contre dans la taille du domaine à explorer. Dans le cas d'un problème d'incertitude celui-ci est généralement connu et restreint tandis que dans un problème d'optimisation, ce domaine est beaucoup plus large et peut conduire dans des zones qui ne sont pas forcément prédéterminées a priori. Une thèse en cours à l'ONERA (F-X Irisarri[17]) reprend en partie ces outils relatifs aux surfaces de réponse développés dans ma thèse pour les utiliser dans le cadre de l'optimisation des structures composites. Notons qu'une tendance actuelle est privilégier dans ce cadre les métamodèles de type krigeage ou réseaux de neurones.

Les deux démarches, optimisation et prise en compte des incertitudes, interviennent normalement l'une après l'autre dans la phase de conception. L'optimisation fournit,

[16] « Modélisation du comportement endommageable de composites tissés et analyse de la criticité des défauts initiaux et induits sur la tenue structurale. », thèse ONERA/DMSE -Université Bordeaux I, soutenance prévue fin 2009.

[17] « Méthodes d'optimisation multiobjectifs pour la conception de structures composites », thèse ONERA/DMSE - Université Toulouse III, soutenance prévue fin 2008.

après avoir balayé un large domaine, un ensemble de valeurs « idéales » de paramètres. Dans le processus de fabrication, ces valeurs ne vont pas être atteintes exactement et l'étude des incertitudes vise à en déterminer les conséquences. Cela peut au final conduire à l'utilisation de valeurs de paramètres légèrement différentes des « optimales » afin de se protéger d'un impact trop néfaste des incertitudes.

Dans un processus d'optimisation, la prise en compte des incertitudes peut au final conduire à retenir des solutions « équivalentes ». Il convient alors aux ingénieurs de faire le choix du compromis performances/robustesse (ou des solutions robustes optimales). Mais dans des cas d'optimisation complexes, pour lesquels plusieurs solutions peuvent être obtenues et pour lesquels plusieurs objectifs cherchent à être atteint, l'utilisation des incertitudes peut également permettre de trier des solutions apparemment équivalentes. Par exemple, en choisissant celle sur laquelle les incertitudes ont le moins d'impact. Ce type de démarche pourrait ainsi conduire à l'obtention de solution dite « robuste optimale ». Il convient de signaler que ce type de problématique est actuellement examiné dans la thèse de F-X. Irisarri.

Outre la prise en compte des effets des incertitudes, un deuxième aspect abordé par cette thèse a consisté en la recherche de méthodes permettant de réduire les effets des incertitudes. Comme cela a été mentionné à diverses reprises, la détermination des valeurs de calculs (prenant en compte la notion de dispersion) repose sur le nombre d'essais effectués. Le lien avec la méthode mise en place pour la prise en compte des effets de ces incertitudes est alors très fort. Il est désormais possible d'évaluer l'impact final que peut avoir l'augmentation ou la réduction de l'incertitude sur un paramètre donné. La première voie pour réduire les incertitudes consiste à utiliser ces informations en vue du développement de campagnes d'essais raisonnées qui se concentreront sur la détermination précise des fluctuations des paramètres les plus influents. Une telle approche pourrait également permettre de relier précisément un niveau de confiance sur le comportement d'une structure à une campagne d'essai amont, visant à déterminer les paramètres affectant sa réponse.

Sur le cas spécifique des composites à matrice organique, l'exploitation de leur caractère multiéchelle a permis de proposer une méthode dite de « consolidation de base de données » reposant sur la confrontation et la recherche de la cohérence entre les incertitudes aux différentes échelles (tirées des essais systématiquement réalisés à ces différentes échelles). L'application de cette démarche sur des exemples de structures a montré que cela induisait un gain significatif sur l'incertitude de la réponse étudiée, certaines combinaisons de valeurs de paramètres étant alors éliminées (corrélations). Cette méthode a été pour le moment essentiellement appliquée dans le cas linéaire. Son extension à des comportements non-linéaires est possible, notamment au travers des méthodes multiéchelles développées précédemment ([Pottier, 98], [Schieffer, 03]). La mise en pratique doit cependant être encore affinée et dépend très certainement du modèle de comportement étudié. Cela constitue des orientations pour les travaux futurs.

L'influence des corrélations existant entre les divers paramètres incertains est de façon générale un moyen de réduire les effets des incertitudes dont la consolidation de base de données est un aspect particulier. Dans ce travail, nous avons plusieurs fois cité le cas du lien qui peut être supposé entre propriétés élastiques et propriétés à rupture. La détermination précise de tels liens nécessiterait de repenser les essais actuellement réalisés pour passer de la mesure d'un unique paramètre (un module élastique par exemple) à la mesure simultanée de plusieurs paramètres. Un tel

changement nécessite sans doute de passer à la fois par une amélioration de la métrologie et par une modification des types d'essais eux-mêmes. Les techniques de mesures de champ qui ont été développées ces dernières années constituent sans doute une des pistes les plus prometteuses. Le problème des incertitudes risque néanmoins de se poser de façon encore plus prononcée au travers des techniques d'identification inverse qui doivent alors être employées. Il est également imaginable de combiner ces nouveaux moyens de mesure avec la réalisation de nouveaux essais dont les caractéristiques (forme des éprouvettes, position des capteurs ou des points d'application des efforts,…) auraient été optimisées afin d'exacerber les effets de tel ou tel paramètre. Leur mesure en serait ainsi facilitée et une telle amplification d'effet pourrait peut être permettre de réduire les niveaux d'incertitudes qui leurs sont affectés. Ceci constitue maintenant un axe de recherche important du département Matériaux et Systèmes Composites (DMSC) de l'ONERA.

GLOSSAIRE :

Voici une liste de définitions (parfois personnelles) des termes utilisés dans ce mémoire :

Allowables : au sens industriel, valeurs de propriétés permettant un dimensionnement sûr de la structure : en général les valeurs A ou B sont utilisées.

Base bootstrapée : ensemble de points d'identification non nécessairement tous différents deux à deux, généré par la méthode du *bootstrap*. Elle permet de calculer sur un support différent un indicateur statistique ou d'identifier sur une base d'identification différente un métamodèle.

Base d'identification : voir jeu d'identification

Boots : nombre de rééchantillonnages et donc de réidentifications du métamodèle dans la phase de validation croisée. Il est généralement fixé à 100 dans cette thèse.

Droite identité : sur le diagramme de dispersion, droite correspondant à un écart nul entre les solutions exactes et le métamodèle.

Diagramme de dispersion : représentation graphique consistant pour une réponse donnée, à tracer les valeurs calculées au moyen d'un métamodèle en fonction des valeurs exactes calculées par le processus original.

Entrées : données ou paramètres, incertains ou non, à fournir à un processus ou à un métamodèle pour obtenir les valeurs correspondantes des réponses ou sorties.

Erreur : quand la valeur exacte d'une quantité est connue ou peut être définie, écart entre cette valeur exacte et la valeur estimée (par une approximation, un métamodèle,…).

Espace d'incertitude : partie de $\Re^n$ définie par les intervalles de variation des n paramètres incertains.

Incertitude : variation pouvant affecter une quantité donnée, et regroupant à la fois les contributions de la méconnaissance et de la variabilité. Elle est généralement exprimée en pourcentage ou sous forme de bornes définissant un intervalle.

Jeu d'identification : ensemble des points ayant servi à identifier le métamodèle.

Méconnaissance : variation pouvant affecter une quantité donnée et que l'on ne parvient pas à expliquer par la part de variabilité. Elle est notamment due aux erreurs de mesures, souvent complétées par un manque de connaissances à la fois théoriques et expérimentales (hypothèses inadéquates, modèle inapproprié, trop simplifié, essais de caractérisation trop peu nombreux pour identifier correctement une statistique…).

Métamodèle (ou modèle de modèle) : modèle approchant un processus plus ou moins complexe. Par exemple : krigeage, surface de réponse…etc.

Points : souvent dans cette thèse, abus de langage pour désigner un n-upplet de valeurs pour un jeu de paramètres nécessaires à un processus ou métamodèle. Exemple : points d'identification.

Pourcentile : le $X^{\text{ème}}$ pourcentile d'une distribution de probabilité est la valeur supérieure à X% des valeurs possibles.

Processus : relation mathématique ou calcul numérique permettant d'obtenir les valeurs d'une ou plusieurs quantités (réponses) à partir des valeurs d'un nombre défini de paramètres.

Processus original : par opposition au métamodèle, processus considéré comme la relation exacte entre entrées et sorties. Le métamodèle est bâti sur ce processus et l'approxime avec plus ou moins d'erreur.

Relation exacte : relation mathématique reliant des entrées à des sorties, ces dernières étant considérées comme parfaites, c'est à dire non entachées d'erreur.

Réponses : quantités retournées par un processus ou métamodèle à partir des valeurs d'un jeu de paramètres d'entrées (ou entrées).

Sens d'influence : pour un paramètre donné d'un processus ou métamodèle, signe de la sensibilité du paramètre. Les autres paramètres étant fixés, si celui-ci est positif, augmentation de ce paramètre entraîne une valeur plus grande de la sortie. Inversement si celui-ci est négatif, une valeur plus grande du paramètre entraîne une valeur plus faible de la sortie.

Sensibilité : pour un paramètre donné d'un processus ou métamodèle, terme désignant à la fois l'amplitude avec laquelle ce paramètre influence les valeurs d'une sortie, et son sens d'influence.

Sorties : voir réponses.

Surface de réponse : nous appelons surface de réponse des métamodèles particuliers correspondant à une approximation polynomiale d'un processus plus ou moins complexe. Par extension, méthodologie employée pour définir cette approximation.

Valeur A : valeur inférieure à 99% des valeurs possibles et calculée avec une confiance de 95%. Par exemple, considérons que pour un paramètre donné d'un matériau, la valeur A (V_A) a été estimée à partir d'une base de n essais. Si 200 séries de 100 essais sont réalisés, la partie de la définition « inférieure à 99% des valeurs possibles » implique normalement que les 200 deuxièmes plus basses valeurs soient supérieures à V_A. La confiance limitée à 95% autorise cependant que au plus 10 ($=0.95\times200$) d'entre-elles lui soient inférieures.

Valeur A exacte ou valeur A vraie : valeur A calculée sur une distribution parfaitement connue. La confiance étant alors de 100%, il s'agit d'une autre désignation du 1er pourcentile de la distribution.

Valeur B : valeur inférieure à 90% des valeurs possibles et estimée avec une confiance de 95%. Par exemple, considérons que pour un paramètre donné d'un matériau, la valeur B V_B a été estimée à partir d'une base de n essais. Si 200 séries de 100 essais sont réalisés, la partie de la définition « inférieure à 90% des valeurs possibles » implique normalement que les 200 dixièmes plus basses valeurs soient supérieures à V_B, mais la confiance à 95% autorise que au plus 10 ($=0.95\times200$) d'entre-elles lui soient inférieures.

Valeur B exacte : valeur B calculée sur une distribution parfaitement connue. La confiance étant alors de 100%, il s'agit d'une autre désignation du 10ème pourcentile de la distribution.

Valeur B vraie : voir valeur B exacte

Validation croisée (méthode(s) de) : méthode(s) employée(s) pour estimer l'erreur d'une approximation ou d'un métamodèle à partir uniquement de ses points d'identification initiaux. Elle est basée sur des méthodes de rééchantillonnages comme le *bootstrap* ou le *leave-k-out*.

Variabilité : nous appelons variabilité la variation d'une quantité donnée expliquée par des modifications de certains paramètres bien identifiés. Par exemple, la variabilité matériau des composites s'explique par les différences dans le processus de fabrication (taux de fibre employé, drapage, cycle de cuisson, pression appliquée …) et dans les propriétés des constituants.

ANNEXE 1
Obtention des coefficients d'abattement k_A et k_B pour le calcul des valeurs A et des valeurs B sous hypothèse de loi normale

A1.1. Prérequis :

A1.1.1. Loi du χ^2

La loi de χ^2 à *n* degrés de liberté est la loi de la somme de *n* carrés de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales centrées réduites.

A1.1.2. Loi de Student (ou loi *T*)

La moyenne empirique centrée réduite de *n* variables aléatoires indépendantes et suivant une même loi normale, suit une loi de Student de paramètre *n*.

Cette loi fut introduite à la fin du XIXème siècle par William S. Gosset, chimiste pour la brasserie Guinness en Ecosse, qui la découvrit suite à des études sur le contrôle qualité. L'entreprise n'autorisant alors pas ses employés à publier, il utilisa le pseudonyme Student pour communiquer ses travaux.

La loi de Student intervient dans les cas suivants : si *X* est une variable normale centrée réduite (n.c.r), et si *Y* est une variable aléatoire, indépendante de *X*, suivant la loi du χ^2 à *n* degrés de liberté, alors $t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ suit une loi de Student T_n à *n* degrés de liberté. Elle a alors pour moyenne et variance :

$$E[T_n] = 0 \qquad \text{(Eq. A1-1)} \qquad \text{Si } n>2 \ var(T_n) = \frac{n}{n-2} \ \text{ sinon } var(T_n) = \infty \qquad \text{(Eq. A1-2)}$$

Si *X* ne suit plus une loi n.c.r mais une loi normale décentrée de moyenne δ et d'écart-type unitaire, alors *t* suit une loi de Student décentrée $T_{n,\delta}$, où δ est le paramètre de décentrage.

La loi de Student est très utilisée pour des cas où le nombre d'échantillons est limité, car quand *n* tend vers l'infini la loi de Student tend vers la loi normale centrée réduite. En pratique, pour $n \geq 30$, la normale *N(0,1)* est une bonne approximation de T_n.

A1.2. Obtention de k_A et k_B

Dans le cas d'une distribution supposée gaussienne, de moyenne μ et d'écart-type σ inconnus, les résultats théoriques suivant sont à notre disposition pour un échantillon $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de moyenne et variance empiriques $\overline{X}^2$ et S^2 :

- $Z_1 = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.
- $Z_2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ suit une loi de χ^2 de paramètres (n-1).

Donc par définition : $t = \frac{Z_1}{\sqrt{Z_2/n-1}} = \sqrt{\frac{n}{S^2}}(\overline{X}-\mu)$ suit une loi de Student à (n-1) degrés de liberté.

Si maintenant au lieu de considérer la moyenne exacte μ, on s'intéresse à une valeur μ_0, alors la variable $t_0 = \frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}-\mu_0)}{S}$ suit une loi de Student non-centrée à n-1 degrés de liberté et de paramètre de décentrage $\delta = \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Soit τ_{95} tel que $P[t_0 \le \tau_{95}] = 0.95$. Par définition, il y a 95% de chance pour que :

$$\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}-\mu_0)}{S} \le \tau_{95} \qquad \text{(Eq. A1-3)}$$

ou encore pour que *:*

$$\overline{X} - \frac{1}{\sqrt{n}}\tau_{95}S \le \mu_0 \qquad \text{(Eq. A1-4)}$$

Remplaçons alors μ_0 par la valeur du dixième percentile de la distribution considérée, supposée gaussienne. Pour une loi normale centrée réduite, cette valeur est $\tau_N(0.1) \approx -1{,}282$. La généralisation à tout type de loi normale donne :

$$\mu_0 = \mu + \tau_N(0.1).\sigma \qquad \text{(Eq. A1-5)}$$

La relation (Eq. A1-4) ci-dessus donne donc une estimation à 95% de confiance de ce dixième percentile, ce qui correspond à la définition de la valeur B du Military Handbook.

τ_{95} est alors défini comme la valeur en 0.95 de T^{-1}, l'inverse de la fonction de probabilité cumulée de la distribution de Student non-centrale de paramètres *n-1* et $\delta = -\tau_N(0.1)\sqrt{n}$.

On retrouve donc bien la méthode de calcul du Military HandBook 17 pour les coefficients k_B tels que : $V_B = \overline{X} - k_B.S$, où V_B est la valeur estimée à partir de l'échantillon d'essai.

Ces deux relations sont utilisées pour obtenir :

$$k_A = \frac{1}{\sqrt{n}} T^{-1}_{n-1,\,-\tau_N(0.01)\times\sqrt{n}}(0.95) \qquad \text{(Eq. A1-6)}$$

$$k_B = \frac{1}{\sqrt{n}} T^{-1}_{n-1,\,-\tau_N(0.1)\times\sqrt{n}}(0.95) \qquad \text{(Eq. A1-7)}$$

ANNEXE 2
Difficultés relatives aux espaces à grande dimension

Le but de cette annexe est de mettre en évidence les difficultés relatives aux espaces à grande dimension. En effet, nous avons indiqué dès les premières pages de ce mémoire de thèse que nos problèmes de transports des incertitudes pouvaient impliquer un nombre élevé de variables incertaines. Cela signifie que nous considérons des problèmes pour lesquels plusieurs dizaines voire plusieurs centaines de variables incertaines interviennent. Nous verrons que la topologie des espaces à grandes dimensions nécessite parfois d'oublier la schématisation que l'on pourrait faire à partir des espaces plus familiers de dimensions deux ou trois.

En particulier, cela a une importance évidente dans la manière de choisir les points d'échantillonnage dans la méthode d'analyse. Il est possible de distinguer trois types d'approches pour répartir les points d'évaluation :

1. Laisser faire le hasard : tirages aléatoires ;
2. Essayer de répartir les points de la manière la plus uniforme dans l'espace des variables;
3. Chercher le jeu de points le plus efficace.

A2.1. Hypercube et hypersphère

L'hypercube et l'hypersphère sont respectivement une généralisation du cube et de la sphère à un espace euclidien de dimension n (n>3).

L'espace des variations des *N* paramètres incertains peut être défini, après normalisation (les variables normées évoluant entre -1 et 1), comme un hypercube à *N* dimensions de côté 2 et de diagonal $2\sqrt{N}$ (plus grande distance entre 2 points du domaine). Le nombre de sommets de cet hypercube est égale à 2^N (c'est à dire 32 pour *N* =5, 1024 pour *N* = 10, plus d'un million pour *N* = 20 …).

On peut alors définir une hypersphère inscrite de rayon 1 et une hypersphère circonscrite de rayon $\sqrt{N}$ à cet hypercube.

Les volumes sont donnés par :

Pour un hypercube : $$V_N = 2^N$$

Pour une sphère de rayon R : $$V_N = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)} \cdot R^N$$

Un premier résultat, loin d'être évident, est que le volume d'une hypersphère de rayon 1 tend vers zéro lorsque la dimension de l'espace tend vers l'infini (le volume augmente jusqu'à *N*=5 puis diminue et tend vers zéros – Figure A2-1).

Il est également intéressant de comparer les volumes entre l'hypercube et les hypersphères inscrite et circonscrite (Figure A2-2), ce qui conduit au résultat :

Pour *N* = 10 : $V_{sphère_circonscrite} > 250 \times V_{hypercube} > 400 \times V_{sphère_inscrite}$

Pour *N* = 20 : $V_{sphère_circonscrite} > 2\ 10^5 \times V_{hypercube} > 4\ 10^7 \times V_{sphère_inscrite}$

Alors que pour les dimensions N = 2 et N = 3, les volumes sont comparables cela est rapidement faux lorsque N augmente.

On comprend alors mieux pourquoi les notions de volume et d'occupation de ce volume sont si délicates à appréhender pour des dimensions importantes (N>5).

Cela conduit évidemment à se poser des questions sur la manière d'occuper au mieux ces espaces à grandes dimensions mais également sur les méthodes permettant de donner une indication de la qualité du recouvrement de l'espace.

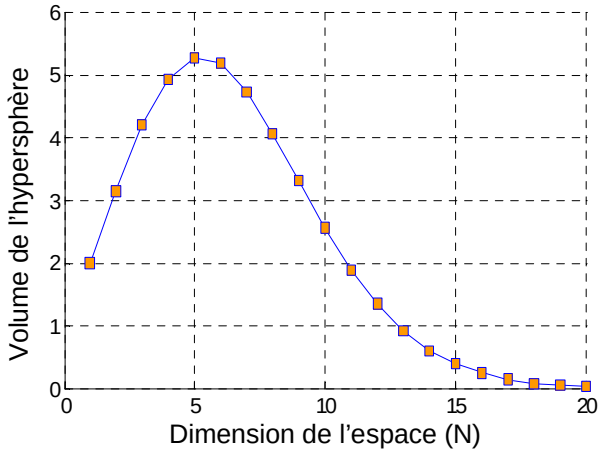


Figure A2-1. Volume d'une hypersphère de rayon un en fonction de la dimension N de l'espace

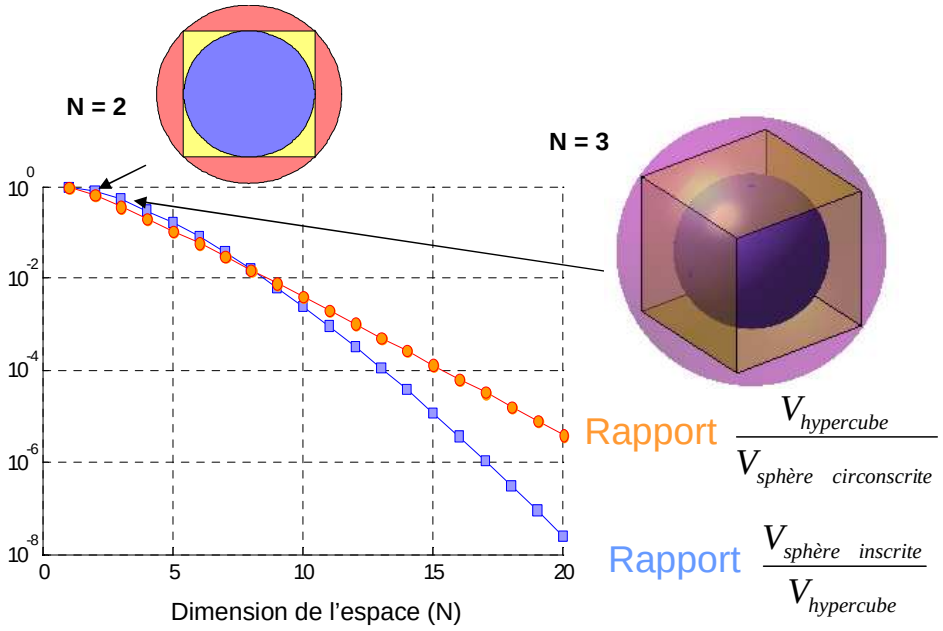


Figure A2-2. Variations comparées des volumes de l'hypercube et des sphères inscrite et circonscrite

A2.2. Occupation de la surface d'une sphère

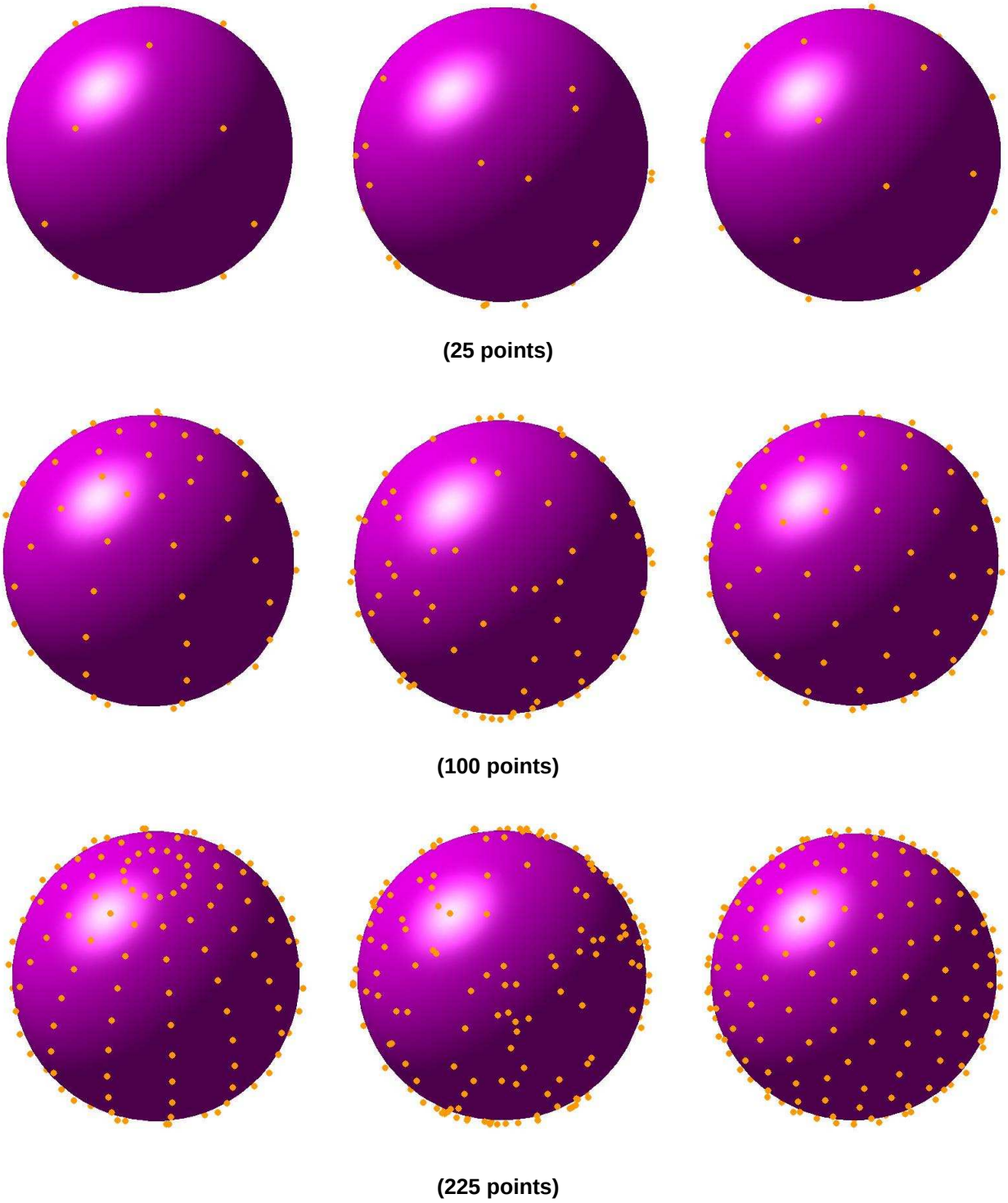


Figure A2-3. Répartition des points sur la surface d'une sphère : à gauche par une méthode de grille (sphérique), aléatoirement au centre et à droite par la méthode « Som ».

La démarche adoptée dans ce travail de thèse pour le transport d'incertitude nous a conduit à privilégier une vision de l'espace à *N* dimensions de type hypercube plutôt que de type hypersphère. Nous avons néanmoins regarder les différentes manières de recouvrir au mieux la surface d'une hypersphère ([Leroy, 05]). La Figure A2-3 montre la répartition d'un nombre fini de points (25, 100 puis 225) sur une sphère.

On peut facilement se convaincre par cette figure de l'apport de méthodes sophistiquée de répartition des points.

A2.3. Tirages aléatoires en grandes dimensions

Concernant les tirages aléatoires en grandes dimensions et donc la méthode de Monte-Carlo, nous présentons par la suite un résultat qui nous est apparu important. Prenons *N* variables et effectuons des tirages en considérant que chaque variable obéit à une loi normale. On pourrait s'attendre à une occupation à peu près uniforme de l'espace surtout lorsque le nombre de tirages augmente. Il est possible de démontrer que ce n'est pas du tout le cas mais qu'au contraire lorsque le nombre de dimension augmente (de variables) les « points » récupérés ne sont ni très proches de l'origine ni très proches des sommets. Les Figure A2-4 et Figure A2-5 montrent ainsi que les tirages se concentrent à une distance de $\sqrt{3}/3$ du centre de l'espace considéré. La Figure A2-5 permet également de remarquer qu'il y a moins d'une chance sur 10^4 d'être à moins de 20% d'un sommet ou du centre.

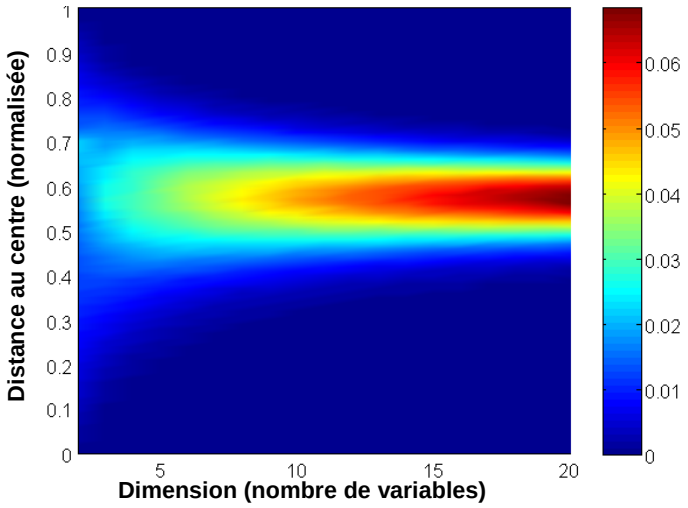


Figure A2-4. Distribution des probabilités de tirage en fonction du nombre de variables.

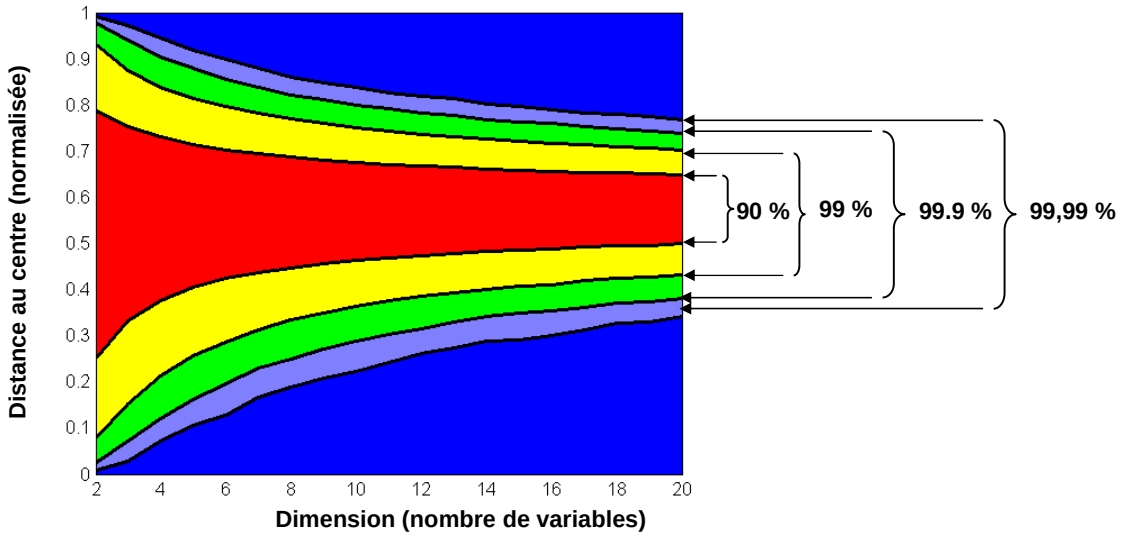


Figure A2-5. Répartition des points (distance par rapport au centre) en fonction de la dimension du problème

A2.4. Mesure d'uniformité d'un échantillonnage

Donner une estimation de la qualité du recouvrement d'un espace à partir d'une sélection d'un nombre de points fixé peut être vu comme une mesure de l'uniformité de l'échantillonnage constitué de ces points. Cette mesure d'uniformité est quasiment un thème de recherche en soi. Nous donnons par la suite très brièvement quelques pistes issues de la littérature pour obtenir cette mesure.

La *divergence* minimisée dans les LDS (Low Discrepancy Sequences) est une mesure quantitative de la déviation d'une distribution empirique (échantillon) par rapport à la distribution uniforme. Celle-ci présente une propriété sur l'hypercube unitaire que l'on utilise comme référence : la probabilité de se trouver dans un sous-hypercube quelconque est proportionnelle à son volume. Le choix de cette propriété est guidé par son lien fort avec la précision des applications d'intégration numérique. En pratique, on définit la déviation à cette propriété de la façon suivante introduite par Statnikov [Statnikov, 02] :

D^*(échantillonnage) = le maximum, pour tous les « boites » parallélépipédiques possibles incluses dans l'hypercube étudié et ayant en commun l'un de ses coins (classiquement {0,0, …, 0}), de la différence en valeur absolue entre le volume de la « boite » et la fraction des échantillons qui se trouvent à l'intérieur.

On parle de *star-discrepancy* en norme L_∞. Le problème est que le calcul de D^* est très difficile à implémenter numériquement de façon efficace : pour obtenir une précision acceptable, le temps de calcul explose avec la dimension *d* de l'hypercube considéré. Il n'est donc pas évident de comparer les performances de différentes techniques de LDS pour choisir la meilleure. C'est pour cela qu'il y a encore aujourd'hui beaucoup d'efforts de recherche pour tenter d'alléger le calcul de D^* ([Li, 00]). Les progrès étant pour l'instant limités, on préfère en pratique utiliser une définition de divergence voisine T^* mais plus facilement estimable : la norme L_∞ est remplacée par la norme L_2 (remplacer la notion d'écart maximum de la définition de D^* par la notion d'écart moyen au sens des moindres carrés). Il existe en effet une expression explicite de T^* moins coûteuse à implémenter [Heinrich, 96]:

$$(T^*)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{d}\left(1-\max(x_m^{(i)}, x_j^{(i)})\right) - \frac{2^{1-d}}{n}\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{d}\left(1-(x_j^{(i)})^2\right) + \frac{1}{3^d} \qquad \text{(Eq. A2- 1)}$$

où $x_k^{(i)}$ est la $i^{ème}$ coordonnée du point *k* de l'échantillonnage (*n* points). A titre de référence, on peut démontrer pour un échantillonnage purement aléatoire (Monte-Carlo) que l'on obtient en moyenne [Jäckel, 02]:

$$\overline{(T^*)^2} = \frac{2^{-d} - 3^{-d}}{n} \text{ (tirages purement aléatoires)} \qquad \text{(Eq. A2- 2)}$$

ANNEXE 3
Théorie classique et généralisée des stratifiés

La théorie classique des stratifiés ou *Classical Laminate Theorie* (CLT) est une technique de changement d'échelle qui permet d'estimer le comportement en membrane et en flexion plane d'un stratifié quelconque à partir de la connaissance du comportement du pli élémentaire. Cette technique est donc utilisée pour déterminer le comportement global du stratifié (raideurs) ou pour évaluer localement (c'est à dire dans chaque pli) les déformations et les contraintes afin de vérifier qu'elles conservent des valeurs admissibles. La CLT est maintenant très largement utilisée et de multiples ouvrages y font référence (par exemple [Berthelot, 92]).

L'analyse des structures composites nécessite d'avoir recours à une théorie considérant un milieu dont l'épaisseur est faible vis-à-vis des autres dimensions, et reste constante. Cela correspond en mécanique à la définition d'une théorie de plaque. Ces hypothèses permettent de ramener le problème réel à un problème à deux dimensions. Les contraintes dans chaque couche sont alors planes. Le stratifié est constitué d'un empilement de couches parfaitement liées les unes aux autres ce qui se traduit concrètement par l'égalité des déplacements de part et d'autre de l'interface et par la transmission des efforts au travers de cette interface. Classiquement, pour l'étude de plaques les hypothèses de Love-Kirchhoff sont postulées. Celles-ci expriment qu'une droite normale au plan moyen avant déformation reste une droite normale à ce plan pendant et après déformation (Figure A3-1).

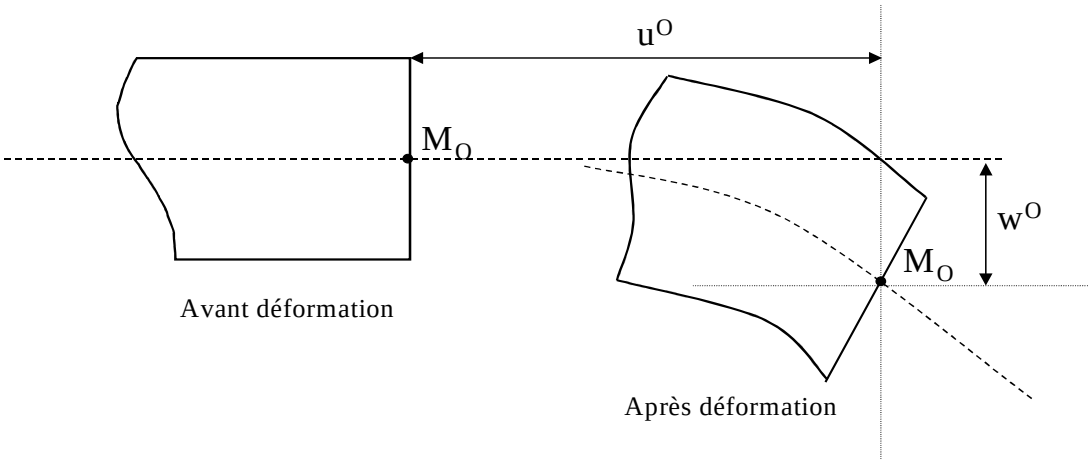


Figure A3-1. Hypothèses de Love-Kirchhoff.

Il est alors possible de proposer une cinématique du problème. Soit ω le plan moyen de la plaque défini par x_3=0 et M(x_1, x_2, x_3) un point de la plaque. La projection de M sur le plan ω est appelée M_o(x_1, x_2, x_3) avec $\overrightarrow{M_O M} = x_3 \cdot \vec{x}_3$ (Figure A3-2).

Le déplacement du point courant M est donné par la formule :

$$\vec{u}(M) = \vec{u}(M_O) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{M_O M} \qquad \text{(Eq. A3-1)}$$

où $\vec{\Omega}$ est le torseur de rotation qui, pour permettre à une droite normale au plan moyen de le rester, doit vérifier la propriété suivante:

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(x_1, x_2) = \Omega_1(x_1, x_2) \cdot \vec{x}_1 + \Omega_2(x_1, x_2) \cdot \vec{x}_2 \qquad \text{(Eq. A3-2)}$$

De même $\vec{u}(M_O)$ doit vérifier :

$$\vec{u}(M_O) = u^0(x_1, x_2) \cdot \vec{x}_1 + v^0(x_1, x_2) \cdot \vec{x}_2 + w^0(x_1, x_2) \cdot \vec{x}_3 \qquad \text{(Eq. A3-3)}$$

Il est possible d'obtenir le déplacement du point courant M :

$$\vec{u}(M) = \left(u^0 + x_3 \cdot \Omega_2\right) \cdot \vec{x}_1 + \left(v^0 - x_3 \cdot \Omega_1\right) \cdot \vec{x}_2 + w^0 \cdot \vec{x}_3 \qquad \text{(Eq. A3-4)}$$

En considérant l'hypothèse des petites déformations, on obtient les champs de déformations en posant $\Phi_1 = \Omega_2 \; et \; \Phi_2 = -\Omega_1$:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u^0}{\partial x_1} + x_3 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v^0}{\partial x_2} + x_3 \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \quad \varepsilon_3 = 0 \qquad \text{(Eq. A3-5)}$$

$$\varepsilon_6 = \frac{\partial u^0}{\partial x_1} + \frac{\partial u^0}{\partial x_2} + x_3 \cdot \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}\right) \quad \varepsilon_5 = \frac{\partial w^0}{\partial x_1} + \Phi_1 \quad \varepsilon_4 = \frac{\partial w^0}{\partial x_2} + \Phi_2$$

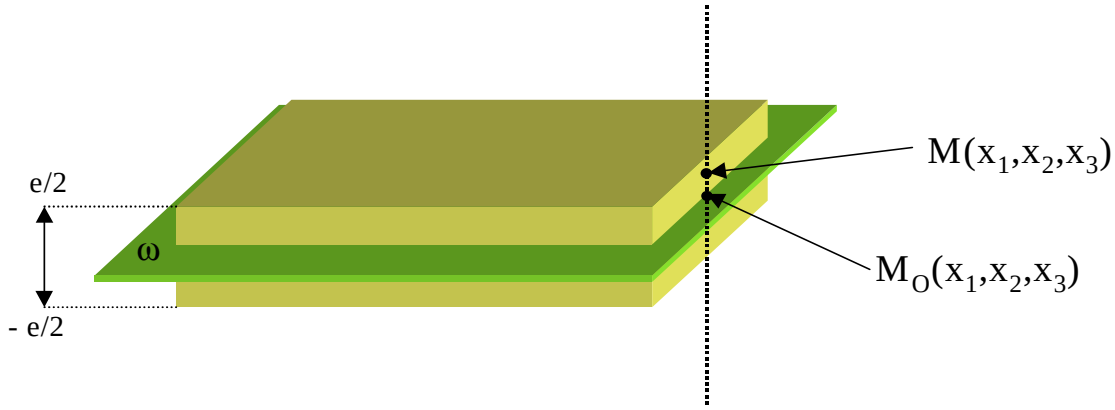


Figure A3-2. Définition de la plaque.

Puisqu'une conséquence des hypothèses de Love-Kirchhoff est que $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$, il est possible d'écrire :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_3^0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} = \varepsilon^0 + x_3 \cdot \rho \qquad \text{(Eq. A3-6)}$$

où ε^0 et ρ représentent respectivement les déformations et les courbures du plan moyen. Les déformations varient donc linéairement dans l'épaisseur du stratifié. Par conséquence, puisque les caractéristiques de chaque couche sont différentes, les contraintes vont subir des discontinuités. La valeur de ces contraintes dépend évidemment du choix de la loi de comportement de chaque pli.

Nous considérons maintenant que tous les plis ont un comportement élastique caractérisé par le tenseur des raideur $[Q]_k$. Il est évident que, pour la cohérence des formules suivantes, tous ces tenseurs doivent être exprimés dans le même système d'axes (en général, les axes de la plaque). Les contraintes du $k^{\text{ième}}$ pli se déduisent de *(Eq. A3-6)* par:

$$\sigma^k = [Q]_k : \varepsilon = [Q]_k : \left(\varepsilon^0 + z \cdot \rho\right) \qquad \text{(Eq. A3-7)}$$

Par définition, les efforts résultants s'écrivent :

$$\begin{aligned} N &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma(z) \cdot dz \quad (\textit{efforts linéiques}) \\ M &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma(z) \cdot z \cdot dz \quad (\textit{moments linéiques}) \end{aligned} \qquad \text{(Eq. A3-8)}$$

On déduit facilement des deux équations précédentes, les relations classiques de la théorie des stratifiés dans le cas de l'élasticité (les fameuses matrices *A*, *B* et *D*) :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \rho \end{bmatrix}$$

$$\textit{avec :} \begin{cases} A = \sum_k \left(z_k - z_{k-1}\right)[Q]_k \quad (\textit{rigidités de membrane}) \\ B = \sum_k \frac{1}{2}\left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right)[Q]_k \quad (\textit{rigidités de couplage}) \\ D = \sum_k \frac{1}{3}\left(z_k^3 - z_{k-1}^3\right)[Q]_k \quad (\textit{rigidités de flexion}) \end{cases} \qquad \text{(Eq. A3-9)}$$

Remarquons que la matrice B est nulle dans le cas de stratifiés symétriques. Le couplage du comportement en membrane et en flexion (matrice B non nulle) vient compliquer la loi reliant les efforts (*N*) et les moments (*M*) et entraîne des déformations non souhaitées. Mais cette caractéristique peut-être une opportunité par rapport aux matériaux isotropes et homogènes si elle est mise correctement à profit (informations complémentaires utilisables pour la caractérisation par exemple des contraintes thermiques, fonctionnalités supplémentaires,…).

ANNEXE 4
Modèle viscoélastique spectral non -linéaire pour la prise en compte de la viscosité dans les composites à matrice organique

Pour décrire le comportement viscoélastique non-linéaire des composites à matrice organique, mon choix s'est porté sur un modèle bien maîtrisé par mon laboratoire d'accueil (ONERA /DMSE). Il s'agit du modèle viscoélastique spectral non-linéaire développé par Maire ([Maire, 92]), puis repris dans [Petipas, 00] et [Schieffer, 03]. Ce modèle est bâti en s'appuyant sur le cadre thermodynamique classique, à partir du potentiel d'énergie libre (Eq. A4-1) et du potentiel de dissipation (Eq. A4-2).

$$2\rho\psi = (\varepsilon - \varepsilon_a) : L : (\varepsilon - \varepsilon_a) + \sum_i \frac{1}{\mu_i}(\xi_i : L_R : \xi_i) \qquad \text{(Eq. A4-1)}$$

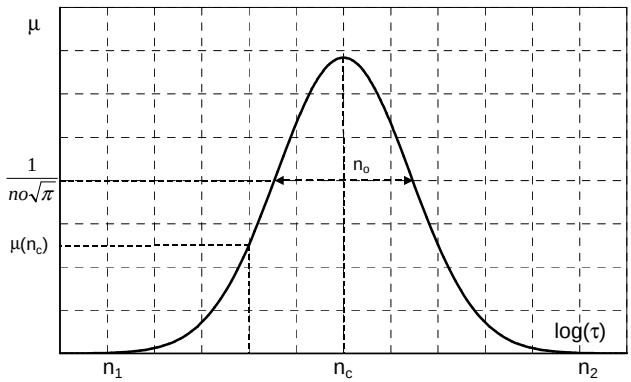
$$2\varphi^*(\omega_i) = \sum_i \frac{\mu_i}{\tau_i}(\omega_i : L_R^{-1} : \omega_i) \text{ avec } \omega_i = g\sigma_a + \chi_i \qquad \text{(Eq. A4-2)}$$

Dans ces équations, g est une fonction non-linéarisante et χ_i est la force thermodynamique associée au mécanisme visqueux élémentaire ξ_i. L et L_R sont quant à eux les tenseurs d'élasticité et de viscosité. L'utilisation des concepts classiques de la thermodynamique conduit ensuite aisément aux lois d'états et aux lois d'évolution présentées ci-dessous :

Lois d'état **:** $\sigma = \rho\dfrac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} = L : (\varepsilon - \varepsilon_a) \quad \sigma_a = \rho\dfrac{\partial\psi}{\partial\varepsilon_a} = -\sigma \quad \chi_i = \rho\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi_i} = \dfrac{1}{\mu_i}L_R : \xi_i$

Loi d'évolution : $\dot{\varepsilon}_a = -\dfrac{\partial\varphi^*}{\partial\sigma_a} = g\sum_i \dot{\xi}_i \quad \dot{\xi}_i = -\dfrac{\partial\varphi^*}{\partial\chi_i} = \dfrac{1}{\tau_i}(\mu_i\, g\, L_R^{-1} : \sigma - \xi_i)$

Pour ce modèle, le terme spectral provient du fait que chaque mécanisme visqueux élémentaire ξ_i est associé à un temps de relaxation τ_i pondéré par μ_i, l'ensemble des μ_i définissant une enveloppe de type gaussienne (Figure A4- 1) entièrement définie par les deux paramètres n_0 et n_c.



$$\begin{cases} \tau_n = \exp(n) \\ \mu_n = \dfrac{1}{n_0\sqrt{\pi}}\exp\left(-\left(\dfrac{n - n_c}{n_0}\right)^2\right) \end{cases}$$

$n \in [n_1, n_2]$

Figure A4- 1. Spectre gaussien (d'après [Schieffer, 03]).

n_1 et n_2 sont des bornes choisies de manière à ce qu'il soit possible de négliger le poids des mécanismes si $n<n_1$ ou $n>n_2$. Le nombre de temps de relaxation N doit être fixé afin d'obtenir un compromis entre temps de calcul et qualité de la réponse (en pratique, j'ai choisi N=50).

La forme adoptée pour la fonction non-linéarisante est donnée par (Eq. A4-3). *g* est donc choisie de forme quadratique en σ est dépend de deux paramètres caractérisant la non-linéarité : un coefficient multiplicatif γ ($\gamma = 0$ correspondant au cas linéaire) et l'exposant *pv*.

$$g(\sigma) = 1 + \gamma\left(\sqrt{\sigma : L_R^{-1} : \sigma}\right)^{pv} \qquad \text{(Eq. A4-3)}$$

Mon utilisation de ce modèle se limitant au cadre de la théorie classique des stratifiées, les tenseurs d'élasticité *L* et de viscosité L_R des plis dans leurs axes s'écrivent en contraintes planes suivant (Eq. A4-4) et (Eq. A4-5) respectivement.

$$(L)^{-1} = S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\upsilon_{12}}{E_{11}} & 0 \\ -\frac{\upsilon_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \qquad \text{(Eq. A4-4)}$$

$$(L_R)^{-1} = S_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22}S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{66}S_{66} \end{bmatrix} \qquad \text{(Eq. A4-5)}$$

Le tenseur de viscosité L_R s'obtient donc à partir du tenseur d'élasticité *L* en ne considérant aucun effet visqueux dans la direction 1 des fibres et deux coefficients adimensionnels β_{22} et β_{66}. Le plus souvent, dans le cas des composites à matrice organique, la viscosité en cisaillement est plus marquée qu'en sens transverse et donc $\beta_{22} << \beta_{66}$.

Au total, ce modèle est donc entièrement décrit par la donnée des dix paramètres suivant :

- propriétés élastiques du pli E_{11}, E_{22}, G_{12} et ν_{12} définissant le tenseur *L*
- paramètres β_{22} et β_{66} corrigeant la viscosité et permettant d'obtenir L_R
- paramètres γ et *pv* de la fonction non-linéarisante *g*
- paramètres n_0 et n_c définissant l'enveloppe gaussienne des mécanismes visqueux élémentaires ξ_i

ANNEXE 5
Modèle d'endommagement ODM et multicritère de rupture pour les Composites à Matrice Céramique

Le but de cette annexe est de présenter rapidement les modèles utilisés dans le chapitre sur l'application « cornière ».

A5.1. Présentation du modèle d'endommagement ODM

Le modèle ODM est un modèle macroscopique, phénoménologique, basé sur le modèle tensoriel développé par ([Maire, 97]). Le présent modèle est dit « pseudo tensoriel » car les résultats obtenus pour des chargement à 0°, 90° et +/- 45° sont équivalent à ceux obtenus avec une variable d'endommagement tensorielle d'ordre 2 (pour ces chargement, les fissures engendrées sont perpendiculaires à l'axe de chargement). Il permet de décrire (Figure A5-1) le comportement et les principaux mécanismes de dégradation observés sur les CMC ([Aubard, 92], [[Camus, 96]):

- des propriétés élastiques anisotropes, le matériau est, en général, initialement orthotrope symétrique (l'axe 1 est équivalent à l'axe 2),
- un fort effet de l'endommagement sur le comportement,
- un caractère unilatéral du dommage : en compression le matériau retrouve ses propriétés élastiques initiales,
- des déformations résiduelles liées à l'endommagement.

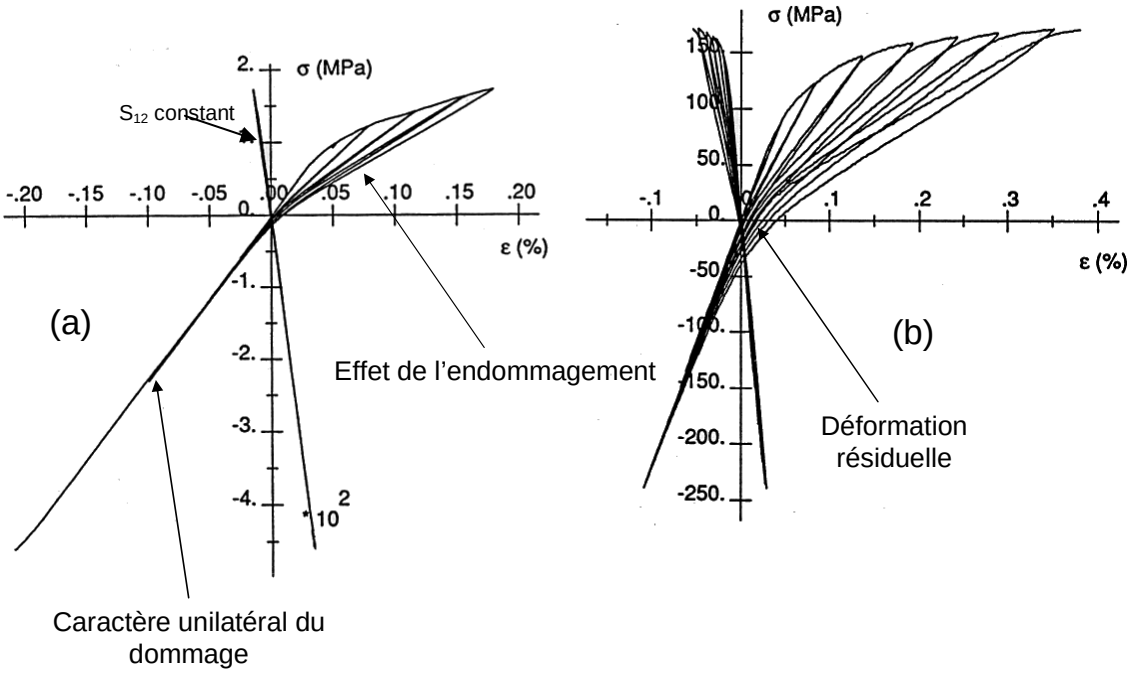


Figure A5-1. Comportement typique des SiC/SiC : (a) essai sens fibres. (b) essai hors axes.

La formulation générale de ce modèle est donnée par les équations présentées ci-après.

A5.1.1. Equations constitutives des lois de comportement et d'endommagement

$$\begin{gathered}\tilde{\sigma} = \tilde{\tilde{C}}^{eff} : \tilde{\varepsilon}^{e} \\ \tilde{\varepsilon}^{e} = \tilde{\varepsilon} - \tilde{\tilde{S}}^{eff} * \tilde{\tilde{C}}^{o} * (\tilde{\varepsilon}^{s} + \tilde{\varepsilon}^{r} - \tilde{\varepsilon}^{o}) - \tilde{\varepsilon}^{o} \\ \tilde{\tilde{C}}^{eff} = (\tilde{\tilde{S}}^{eff})^{-1} \text{ où } \tilde{\tilde{S}}^{eff} = \tilde{\tilde{S}}^{o} + \tilde{\tilde{H}}^{eff} = \tilde{\tilde{S}}^{o} + \sum_i \eta_i * d_i * \tilde{\tilde{H}}_i^{o}\end{gathered} \qquad \text{(Eq. A5-1)}$$

où d_i $(d_1, d_2, d_3, d_{+45}, d_{-45})$ est un ensemble de variable scalaire décrivant l'endommagement, $\tilde{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations totales, $\tilde{\varepsilon}^{e}$ est le tenseur des déformations élastiques, $\tilde{\varepsilon}^{o}$, homogène à un tenseur des déformations, définit le moment de fermeture. C'est un paramètre matériau qui permet, par exemple, de prendre en compte l'effet des contraintes résiduelles de fabrication.

$\tilde{\varepsilon}^{s}$ est le tenseur des déformations stockées. Il permet d'assurer la continuité de la réponse $(\tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon}^{e})$ au moment de la refermeture. Ce tenseur est défini par la loi d'évolution suivante :

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^{s} = -\tilde{\tilde{S}}^{o} : \left[\left(\sum_i \dot{\eta}_i d_i \tilde{\tilde{C}}^{eff} : \tilde{\tilde{H}}_i^{o} : \tilde{\tilde{C}}^{eff} \right) : \underline{\tilde{\varepsilon}} \right] avec\, \underline{\tilde{\varepsilon}} = \tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^{o} \qquad \text{(Eq. A5-2)}$$

$\tilde{\varepsilon}^{r}$ est le tenseur des déformations résiduelles induites par l'endommagement. Ce tenseur est déterminé à partir de la loi d'évolution (Eq. A5-3), avec $\tilde{\tilde{H}}_i^{o}$ tenseur des effets du dommage associé à la variable d_i, $\tilde{\tilde{S}}^{eff}$ tenseur des souplesses effectives, η_i index de désactivation du dommage décrivant l'état actif ou passif du dommage.

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^{r} = \tilde{S}^{o} : \left[\left(\sum_i \xi_i \eta_i \dot{d}_i \tilde{\tilde{C}}^{eff} : \tilde{\tilde{H}}_i^{o} : \tilde{\tilde{C}}^{eff} \right) : \underline{\tilde{\varepsilon}} \right] avec\, \underline{\tilde{\varepsilon}} = \tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^{o} \qquad \text{(Eq. A5-3)}$$

L'index de désactivation est défini de la façon suivante :

$$\begin{cases} \eta_i = 1 \quad si \quad \underline{\varepsilon}_i \geq \Delta\varepsilon_i^{f} \\ \eta_i = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(\dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{\underline{\varepsilon}_i + \Delta\varepsilon_i^{f}}{\Delta\varepsilon_i^{f}})) \quad si \quad -\Delta\varepsilon_i^{f} < \underline{\varepsilon}_i < +\Delta\varepsilon_i^{f} \\ \eta_i = 0 \quad si \quad -\Delta\varepsilon_i^{f} \leq \underline{\varepsilon}_i \end{cases}$$

avec $\Delta\varepsilon_i^{f} = (1 + a_i^{f} \cdot d_i) \cdot \Delta\varepsilon_i^{o}$, $\Delta\varepsilon_i^{o}$ et a_f^{i} étant des paramètres matériaux, ε_i défini dans chaque direction de dommage.

A5.1.2. Forces thermodynamiques

Les forces thermodynamiques associées aux cinq variables d'endommagement sont définies dans un cadre non standard (elles ne sont pas obtenues par dérivation du potentiel thermodynamique mais redéfinies afin de garder le caractère explicite de la formulation et la cohérence thermodynamique) :

$$y_0 = y_1 - |y_6| \quad y_{90} = y_2 - |y_6| \quad y_{+45} = \langle y_6 \rangle_+ \quad y_{-45} = \langle y_6 \rangle_-$$
$$y_3 = \frac{1}{2} \cdot (C_{33}^o \cdot \varepsilon_3^+ \cdot \varepsilon_3^+ + \mathrm{b}_3 \cdot C_{44}^o \cdot \varepsilon_4^+ \cdot \varepsilon_4^+ + \mathrm{b}_3 \cdot C_{55}^o \cdot \varepsilon_5^+ \cdot \varepsilon_5^+)$$

$$y_i = \frac{1}{2}(C_{ii}^0 \cdot \varepsilon_i^+ \cdot \varepsilon_i^+ + b_1 \cdot C_{66}^0 \cdot \varepsilon_6^+ \cdot \varepsilon_6^+ + b_2 \cdot C_{(6-i)(6-i)}^0 \cdot \varepsilon_{(6-i)(6-i)}^+ \cdot \varepsilon_{(6-i)(6-i)}^+) \, i \in \{1,2\} \quad \text{(Eq. A5-4)}$$
$$y_6 = \frac{1}{4}\left(C_{11}^0 \cdot \varepsilon_1^+ \cdot \varepsilon_6^+ + C_{22}^0 \cdot \varepsilon_2^+ \cdot \varepsilon_6^+ + b_1 \cdot C_{66}^0 \cdot \varepsilon_6^+ \cdot \left(\varepsilon_1^+ + \varepsilon_2^+\right)\right)$$

$\tilde{\varepsilon}^+$ étant le tenseur des déformations efficaces défini à partir de la décomposition spectrale du tenseur des déformations.

$$\tilde{\varepsilon}^+ = \tilde{P}.\langle \tilde{\varepsilon}_{diag} \rangle.\tilde{P}^T = \tilde{P}.\begin{pmatrix} <\varepsilon_I>_+ & 0 & 0 \\ 0 & <\varepsilon_{II}>_+ & 0 \\ 0 & 0 & <\varepsilon_{III}>_+ \end{pmatrix}.\tilde{P}^T \quad \text{(Eq. A5-5)}$$

A5.1.3. Lois d'évolution

Le potentiel des dissipations est identifié à la surface limitant le domaine de non endommagement (pour chaque variable scalaire d'endommagement) :

$$F_i(y_i, d_i) = g_i(y_i) - d_i \; avec \; g_i = \mathrm{d}_{c(i)} \cdot (1 - \exp - \left(\frac{<\sqrt{y_i} - \sqrt{\mathrm{y}_{o(i)}}>}{\sqrt{\mathrm{y}_{c(i)}}} \right)^{\mathrm{p}^i}) \quad \text{(Eq. A5-6)}$$

où $y_o(i)$ et $y_c(i)$ sont des paramètres matériaux à identifier.

A5.2. Présentation du multicritère de rupture

Le critère de rupture proposé par l'ONERA pour les CMC et utilisé dans cette thèse (cf. Chapitre V) s'écrit de la façon suivante :

$$\sqrt{\sigma : M_1 : \sigma} + \sqrt{\sigma^+ : M_2 : \sigma^+} = 1 \quad \text{(Eq. A5-7)}$$

où :

- σ^+ correspond à la partie positive du tenseur des contraintes (au sens de la décomposition spectrale),
- $M_1 = \alpha S^0$ avec S^0 le tenseur des souplesses du matériau à l'état vierge,
- $M_2 = \begin{pmatrix} m_{11}S_{11}^0 & m_{12}S_{12}^0 & m_{13}S_{13}^0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{12}S_{12}^0 & m_{22}S_{22}^0 & m_{23}S_{23}^0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{13}S_{13}^0 & m_{23}S_{23}^0 & m_{33}S_{33}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44}S_{44}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55}S_{55}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{66}S_{66}^0 \end{pmatrix}$

Les coefficients α et m_{ij} sont des paramètres matériau à déterminer.

Le premier terme, dans lequel figurent toutes les composantes du tenseur des contraintes, représente un mode de rupture isotrope et caractérise principalement la réponse du composite aux efforts de compression. Le deuxième terme dépend uniquement de la partie positive du tenseur des contraintes et traduit l'influence de l'endommagement du matériau sur la résistance aux efforts de traction. Les figures suivantes (Figure A5-2 et Figure A5-3) comparent ce critère à des critères usuels. Pour plus de détails sur ce critère, le lecteur pourra se rapporter aux rapports Américo ([Laurin, 03]).

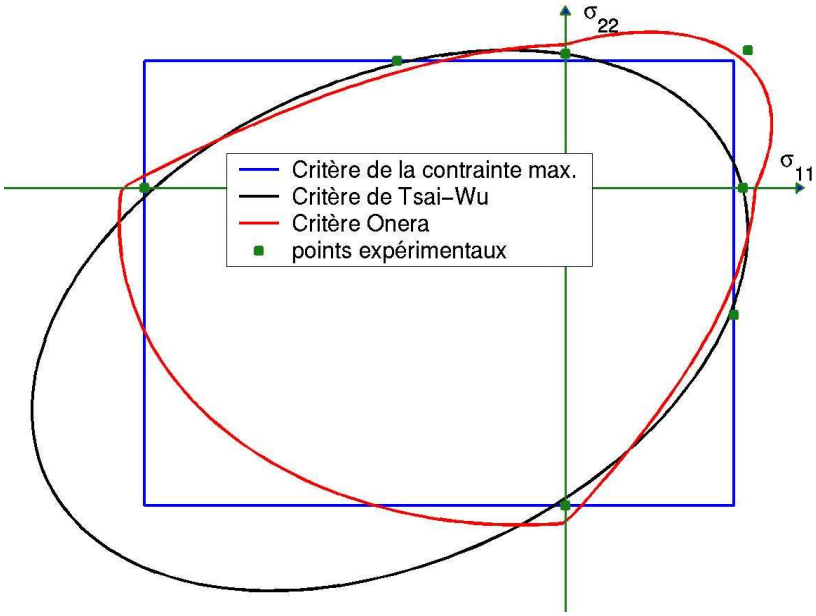


Figure A5-2. Comparaison de critères de rupture usuel avec le critère ONERA pour des résultats expérimentaux dans le plan ($\sigma 11,\sigma 22$) sur composite SiC/SiC (Cerasep 347).

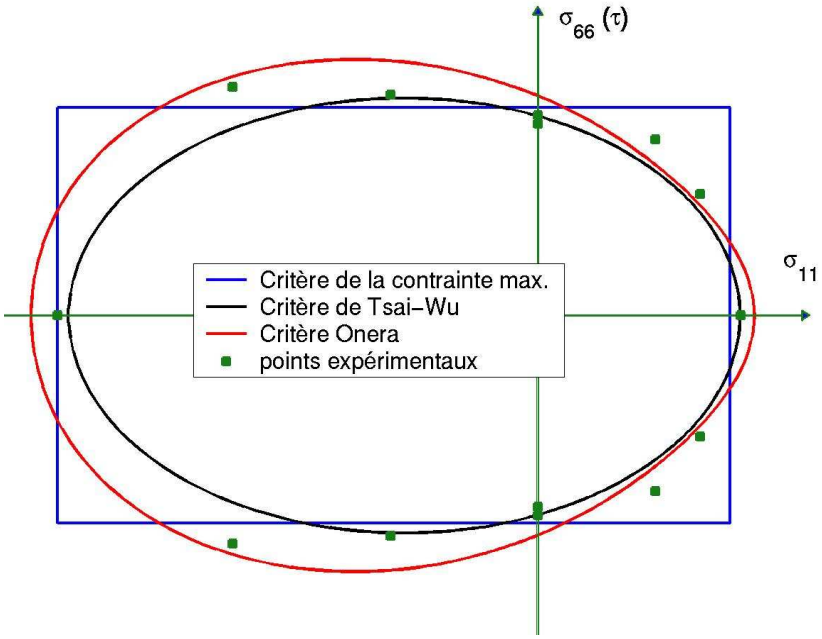


Figure A5-3. Comparaison de critères de rupture usuel avec le critère ONERA pour des résultats expérimentaux dans le plan ($\sigma 11,\sigma 66$) sur composite SiC/SiC (Cerasep 347).

BIBLIOGRAPHIE

[Allix, 94] Allix O., Bahlouli N., Cluzel C., Perret L., *Modélisation et identification du comportement mécanique en température du pli élémentaire d'un stratifié carbone-époxy*, JNC-9, Saint Etienne, **1994**.

[Abdel-Tawab, 99] Abdel-Tawab K., Noor A.K., *A fuzzy-set analysis for a dynamic thermo-elasto-viscoplastic damage response*, Computers and Structures, **1999**, v. 70, pp. 91-107.

[Acharjee, 06] Acharjee S, Zabaras N., *Uncertainty propagation in finite deformations - A spectral stochastic Lagrangian approach*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **2006**, v. 195, pp. 2289–2312.

[Arnst, 07] Arnst M., *Inversion of probabilistic structural models using measured transfer functions*, Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Paris, **2007**.

[Arras, 98] Arras K.O., *An Introduction To Error Propagation: Derivation, Meaning and Examples of Equation*, EPFL Autonomous Systems Lab, **1998,** Technical Report Nº EPFL-ASL-TR-98-01 R3.

[Aubard, 92] Aubard X., *Modélisation et identification du comportement mécanique des matériaux composites 2D SiC/SiC*, thèse de doctorat de l'université Paris VI, **1992**.

[Ben-Haim, 95] Ben-Haim Y., *A non probabilistic measure of reliability of linear systems based on expansion of convex models*, Structural Safety, **1995**, v. 17, pp. 91-109.

[Berveiller, 05] Berveiller M., *Eléments finis stochastiques : approches intrusive et non-intrusive pour des analyses de fiabilité*, Thèse de doctorat de l'université Blaise Pascal- Clermont II, **2005**.

[Berthelot, 92] Berthelot J.M., Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures, Editions Masson, **1992**.

[Böhm, 92] Böhm F., Brûckner-Foit A., *On criteria for accepting a response surface model*, Probabilistic Engineering Mechanics, **1992**, v. 7, pp. 183-190.

[Bonnet, 05] Bonnet M., Constantinescu A., *Inverse Problems in elasticity*, Inverse Problems, **2005**, v. 21, pp. 1-50.

[Bonnet, 07] Bonnet M., Frangi A., *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*, Editions de l'Ecole Polytechnique, **2007**.

[Boubakar, 05] Boubakar L., Modélisation mécano-fiabiliste pour une conception robuste de structures composites, *1ère Rencontre Internationale de Mécanique (RIM'05)*, Algeria , **2005**.

[Bratley, 92] Bratley P., Fox B.L., Niederreiter H., *Implementation and tests of low discrepancy sequences.* ACM transactions on modelling and computer simulation, **1992**. v. 2, pp. 195-213.

[Breiman, 96] Breiman L., *Bagging predictors*, Machine Learning, **1996**, v. 26, pp. 123-140.

[Brown, 1828] Brown R.; *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*., Philosophical Magazine, **1828**, v. 4, pp. 161-173.

[Camus, 96] Camus G., Guillaumat L., Baste S., *Development of damage in a 2D woven C/SiC composite under mechanical loading: I, mechanical characterization*, Composites Science and Technology, **1996**, v. 56, pp. 1363-1372.

[Capiez, 06] Capiez-Lernout E., Pellissetti M., Pradlwarter H., Schueller G.I., Soize C., *Data and model uncertainties in complex aerospace engineering systems*, Journal of Sound and Vibration, **2006**, v. 295, pp. 923-938.

[Carbillet, 05] Carbillet S., Richard F., Boubakar L., Reliability indicator for laminates with strongly non-linear behaviour, *8th Conference "Shell Structures : Theory and Application"* , Gdansk, **2005**.

[Chen, 06] Chen C., Duhamel D., Soize C., *Probabilistic approach for model and data uncertainties and its experimental identification in structural dynamics: Case of composite sandwich panels*, Journal of Sound and Vibration, **2006**, v. 294, pp. 64-81.

[Dambrine, 05] Dambrine B., *Quels matériaux composites dans les turboréacteurs de SNECMA moteurs*, Comptes rendus des 14èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC14) Compiègne, **2005**, v. 1, pp. I.3-I.10.

[Dempster, 68] Dempster A.P., *Upper and lower probabilities generated by a random interval*, Annals of Mathematical statistics, **1968**, v. 39, pp. 957-968.

[Dessombz, 01] Dessombz O., Thouverez F., Laîné J.P., Jézéquel L., *Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite element methods*, Journal of Sound and Vibration, **2001**, v. 239, pp. 949-968.

[Dong, 87] Dong W, Shah HC. *Vertex method for computing functions of fuzzy variables*, Fuzzy Sets and Systems, **1987**; v. 24, pp. 65-78.

[Efron, 79] Efron B., *Bootstrap methods: Another look at the jackknife.* The Annals of Statistics, **1979**, v. **7**, pp. 1-26.

[Efron, 83] Efron B., Gong G., *A leisurely look at the bootstrap, the jackknife, and cross-validation*, American Statistics, **1983**, v. 37, pp. 36–48.

[Efron, 86] Efron B., Tibshirani R.J., *Bootstrap methods for standard errors, confidence intervals, and other measures of statistical accuracy*, Statistical Sciences, **1986**, v. 1, pp. 54–77.

[Efron, 93] Efron B., Tibshirani R.J., *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman &Hall; **1993**.

[Elishakoff, 95] Elishakoff I., Ren Y.J., Shinozuka M., *Improved Finite Element Method for Stochastic Problems*, Chaos, Solitons & Fractals, **1995**, v. 5, pp. 883-846.

[Euro, 07] Euro-Composites, *Nids d'abeilles Nomex®*, http://www.euro-composites.com, **2007**.

[Faravelli, 89] L Faravelli, *Response surface approach for reliability analysis*, Journal of Engineering Mechanics, **1989**, v. 115, pp. 2763-2781.

[Field, 04] Field Jr R.V., Grigoriu M., *On the accuracy of the polynomial chaos approximation*, Probabilistic Engineering Mechanics, **2004**, v. 19, pp. 65–80.

[Findley, 67] Findley W .N., Lai J.S., *A modified superposition principe applied to creep of non-linear viscoelastic material under abrupt changes in state of combined stress*, Transactions of Society of Rheology, v. 11, **1967**.

[Freund, 97] Freund Y., Schapire R.E., *A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting*, Journal of Computer and System Sciences, **1997**, v. 55, pp. 119–139.

[Gayton, 03] Gayton N., Bourinet J.M, Lemaire M., *CQ2RS: a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis*, Structural Safety, **2003**, v. 25, pp. 99–121.

[Ghanem, 91] Ghanem R.G., Spanos P.D., *Stochastic Finite Elements: a spectral approach*, Springer-Verlag, 1991.

[Ghanem, 99] Ghanem R.G., *Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation*, Computer Methods in Applied Mechanic and Engineering, **1999**, v. 168, pp 19-34.

[Gornet, 06] Gornet L., Marguet S., Marckmann G., *Prediciton of Nomex® honeycomb core*, Proceedings of the 12th European Congress on Composite Materials, Biarritz, **2006.**

[Goupy, 91] Goupy J., Murray M., *Réduire les coûts de la simulation informatique grâce aux plans d'expérience : un exemple de calcul de procédé*, Revue de l'IFP, **1991**, v. 46, pp. 131-141.

[Goupy, 97] Goupy J., *Plans d'expériences*, Techniques de l'ingénieur, traité Analyse et Caractérisation, **1997**.

[Guillaumat, 00] Guillaumat L., *Reliability of composite structures -- impact loading*, Computers & Structures, **2000**, v. 76, pp. 163-172.

[Guillaumat, 05] Guillaumat L., *Fiabilité mécanique appliquée aux matériaux composites*, Habilitation à diriger des recherches, Université Bordeaux I, **2005**.

[Guillaumat, 06] Guillaumat L., Hamdoun Z., *Reliability model of drilled composite materials*, Composite Structures, **2006**, v. 74, pp. 467-474.

[Heinrich, 96] Heinrich S., *Efficient Algorithms for Computing the L_2-Discrepancy*, Mathematics of Computation, **1996,** v. 65, pp. 1621-1633.

[Helton, 03] Helton J.C., Davis F.J., *Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems*, Reliability Engineering and System Safety, **2003**, v. 81, pp. 23–69.

[Hinton, 04] Hinton M.J., Kaddour A.S., Soden P.D., *A further assessment of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates: comparison with experimental evidence*, Composites Science and Technology, **2004**, v. 64, pp. 549-588.

[Huchette, 05] Huchette C., *Sur la complémentarité des approches expérimentales et numériques pour la modélisation des mécanismes d'endommagement des composites stratifiés*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, **2005**.

[Isukapalli, 99] Isukapalli S.S., *Uncertainty analysis of transport transformation models*, Thèse de doctorat, The State University of New Jersey, **1999**.

[Jäckel, 02] Jäckel P., *Monte Carlo Methods in Finance*. J. Wiley & Sons Ltd., **2002.**

[Jourdan, 00] Jourdan A., *Analyse statistique et échantillonnage d'expériences simulées*, Thèse de doctorat de l'Université de Pau et Pays de l'Adour, **2000**.

[Kaminski, 03] Kaminski M., *Sensitivity analysis of homogenized characteristics for some elastic composites*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **2003**, v. 192, pp.1973–2005.

[Kaymaz, 05] Kaymaz I., *Application of kriging method to structural reliability problems*, Structural Safety, **2005**, v. 27, pp. 133-151.

[Kleijnen, 00] Kleijnen J.P.C., Sargent R.G., *A methodology for fitting and validating metamodels in simulation*, European Journal of Operational Research, **2000**, v. 120, pp. 14-29.

[Kleijnen, 05] Kleijnen J.P.C., *An overview of the design and analysis of simulation experiments for sensitivity analysis*, European Journal of Operational Research, **2005**, v. 164, pp. 287-300.

[Kohonen, 95] Kohonen T., *Self Organizing Maps*, Springer, **1995**.

[Kolmogorov, 33] Kolmogorov A.*, Grundbegriffe der Warscheinlichkeitsrechnung*, Springer, **1933** *(traduit en anglais par Morrison N., Foundations of the Theory of Probability, 1950, Chelsea).*

[Kucherenko, 05] Kucherenko S., Sytsko Y., *Application of Deterministic Low-Discrepancy Sequences in Global Optimization.* Computational Optimization and Applications, **2005**, v. 30: pp. 1-22.

[Ladevèze, 02] Ladevèze P., Lubineau G.*, An enhanced mesomodel for laminates based on micromechanics*, Composites Scicence and Technology, **2002**, v. 62, pp. 533-541.

[Ladevèze, 06a] Ladevèze P., Puel G., Romeuf T., *Lack of knowledge in structural model validation*, Computer methods in applied mechanics and engineering, **2006**, v. 195, pp.4697–4710.

[Ladevèze, 06b] Ladevèze P., Puel G., Romeuf T., *On a strategy for the reduction of the lack of knowledge (LOK) in model validation*, Reliability Engineering and System Safety, **2006**, v. 91, pp. 1452–1460.

[Laurin, 03] Laurin F., *Prévision multi-échelle de la rupture*, rapport Americo T2 A4.a , **2003**.

[Laurin, 05] Laurin F., *Approche multiéchelle des mécanismes de ruine progressive des matériaux stratifiés et analyse de la tenue de structures composites*, Thèse de doctorat de l'université de Franche-Comté, **2005**.

[Lee, 02] Lee S.H., Kim H.Y., Oh S.I., *Cylindrical tube optimization using response surface method based on stochastic process*, Journal of Materials Processing Technology, **2002**, v. 130-131, pp. 490-496.

[Lee&Lin, 03] Lee Y.J., Lin C.C., *Regression of the response surface of laminated composite structures*, Composite Structures, **2003**, v. 62, pp. 91–105.

[Lemaire, 05] Lemaire M., *Fiabilité des structures, couplage mécano-fiabiliste statique*, Lavoisier, **2005**.

[Lendasse, 05] Lendasse A., Simon G., Wertzc V., Verleysen M., *Fast bootstrap methodology for regression model selection*, Neurocomputing, **2005,** v. 64, pp.161–181.

[Leroy, 05] Leroy F.H, Mutzig C., Huchette C., Rollet Y., *Paramètres-clés et spécification matériau : Relation paramètres-clés et tenue structurale*, rapport programme Americo T2.3.1.B1.b, ONERA, **2005**.

[Leroy, 06] Leroy F.H., Gueit N., Rollet Y., *Qualification et expérimentations virtuelles : Consolidation des bases de données*, rapport programme Americo T3.2.4.C5.d, ONERA, **2006**.

[Lévêque, 04] Lévêque D., *Instrumentation multiéchelle et observations quantifiables*, Rapport Americo A1af, (ONERA), **2004**.

[Ley, 99] Ley R, Lin W., Mbanefo L., *Facesheet wrinckling in sandwich structures*, NASA Report, NASA/CR-1999-208994, **1999**.

[Li, 00] Li Yaohang, *The computational measure of uniformity*, thèse de doctorat, The Florida State University, **2000**.

[Lophaven, 02] Lophaven S.N., Nielsen H.B., Søndergaard J., *Aspects of the Matlab Toolbox DACE*. Report IMM-REP-2002-13, DTU, **2002**. http://www.imm.dtu.dk/~hbn/publ/TR0213.ps

[Maire, 92] Maire J.F*., Etudes théorique et expérimentale du comportement de matériaux composites en contraintes planes*, Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, **1992.**

[Maire, 97] Maire J.F., Chaboche J.L., *A new formulation of continuum damage mechanics (CDM) for composite materials*, Aerospace Science and Technology, **1997**, v. 1, pp. 247-257.

[Marcin, 07] Marcin L., Carrère N., Laurin F., Monet A., Martin E., Maire J.F., *Stratégie de calculs robustes pour l'étude de la tenue des structures CMC*, 15ème Journées Nationales des Composites, Marseille, **2007**.

[Massa, 05] Massa F., Lallemand B., Tison T., *Comportement statique et modal des structures en présence de variabilités paramétriques*, Actes du 6ème colloque national en calcul des structures, Giens, **2003**.

[Massa, 07] Massa F., Ruffin K., Lallemand B., Tison T., *Calcul de structures par approche intervalle*, Actes du 8ème colloque national en calcul des structures, Giens, **2007**.

[Matheron, 63] Matheron G., *Principles of geostatistics*, Economic Geology, **1963**, v. 58, pp. 1246-1266.

[Meckesheiner, 02] Meckesheimer M., Booker A.J., Barton R.R., Simpson T.W., *Computationnally inexpensive metamodel assesment strategies*, AIAA Journal, **2002**, v. 40, pp. 2053-2060.

[MIL-HDBK5] Military Handbook 5H, *Metallic materials and elements for aerospace vehicle structures*, USA department of defense, **1998**.

[MIL-HDBK17] Military Handbook 17, *Composite materials handbook volume 1 : Polymer matrix composites guidelines for characterization of structural materials,* USA department of defense, **2002**, v. 1F.

[Moore, 66] Moore R., *Interval Analysis*, Prentice-Hall, **1966**.

[Mori-Tanaka, 73] Mori T., Tanaka K., *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*, Acta Metallurgica, **1973**;v.21, pp. 571–4.

[Mulle, 05] Mulle M., Collombet F., Rabearison N., Grunevald Y.H., *Effet du changement de nuance sur l'état initial et la tenue mécanique d'éprouvettes suiveuses en fibres de carbone T700*, EUROMECH 473 Fracture of Composite Materials, **2005**, Porto, Portugal.

[Niederreiter, 87] Niederreiter H., *Point sets and sequences with small discrepancy,* Monatsh. Math., **1987**, v. 104, pp. 273-337.

[Niederreiter, 92] Niederreiter H., *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods.* SIAM, **1992**.

[Ngah, 07] M.F. Ngah and A. Young, *Application of the spectral stochastic finite element method for performance prediction of composite structures*, Composite Structures, **2007**, v. 78, pp. 447-456.

[Noor, 98] Noor A.K., Needleman A., Peters J.M., *Sensitivity analysis for failure and damage in dynamically loaded tensile bars*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **1998**, v. 151, pp.461-478.

[Noor, 00] Noor A.K., Venneri S.L., Paul D.B. et Hopkins M.A., *Structures technology for future aerospace systems*, Computers & Structures, **2000,** v. 74, n. 5, pp. 507-519.

[Noor, 01] Noor A.K., Starnes J.H. Jr, Peters J.M., *Uncertainty analysis of stiffened composite panels*, Composite Structures, **2001**, v. 51, pp.139-158.

[Nuismer, 75] Nuismer R.J., Whitney J.M., *Uniaxial failure of composite failure laminates containing stress concentrations*, Fracture mechanics of composites, ASTM STP 593, **1975**, pp. 117-142.

[Ochoa, 05] Ochoa O.O., Salama M.M., *Offshore composites: Transition barriers to an enabling technology*, Composites Science and Technology, **2005**, v. 65, pp. 2588–2596.

[Onkar, 05] Onkar A.K., Yadav D., *Forced nonlinear vibration of laminated composite plates with random material properties*, Composite Structures, **2005**, v. 70, pp. 334–342.

[Ouisse, 02] Ouisse M., *Dispersion du comportement de structures vibrantes* : *analyse et détection*, Thèse de doctorat de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, **2002**.

[Petipas, 00] Petipas C. *Analyse et prévision du comportement à long terme des composites fibres de carbone / matrice organique*, Thèse de doctorat de l'université de Franche-Comté, **2000**.

[Petras, 99] Petras A., Sutcliffe M.P.F., *Failure mode maps for honeycomb sandwich panels*, Computer and Structures, **1999**, v. 44, pp. 237-252.

[Pottier, 98] Pottier T., *Modélisation multiéchelledu comportement et de l'endommagement de composite à matrice métallique*, Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et chaussées, **1998**.

[Puel, 04] Puel G., *Sur une théorie des méconnaissances en dynamique des structures*, Thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, **2004**.

[Quenouille, 48] Quenouille M., *Approximate tests of correlation in time series*, Journal of the Royal Statistical Society, **1948**, v. B11, pp. 18-44.

[Rikards, 04] Rikards R., Abramovich H., Auzins J., Korjakins A., Ozolinsh O., Kalnins K., Green T., *Surrogate models for optimum design of stiffened composite shells*, Composite Structures, **2004**, v. 63, pp. 243–251.

[Romero, 04] Romero V.J., Swiler L.P., Giunta A.A., *Construction of response surfaces based on progressive lattice-sampling experimental designs with application to uncertainty propagation*, Structural Safety, **2004**, v. 26, pp. 201–219.

[Rutherford, 04] Rutherford B., *A response-modeling approach to characterization and propagation of uncertainty specified over intervals*, Reliability Engineering & System Safety, **2004**, v. 85, pp. 211-222.]

[Sacks, 89] Sacks J, Schiller SB, Welch WJ., *Design for computer experiment*, Technometrics; **1989**, v. 31, pp. 41–7.

[Sakata, 03] Sakata S., Ashida F., Zako M., *Structural optimization using Kriging approximation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2003**, v. 192 , pp. 923–939.

[Schapery, 66] Schapery, R.A.**,** *A theorie of non linear thermoelasticity based on irreversible thermodynamics*, Procedings of 5th U.S. National Congress of Applied Mechanic, ASME, pp. 551, **1966**.

[Schapery, 69] Schapery R.A**.,** *On the characterization of non linear viscoelastic materials*, Journal of Polymer Engineering Sciences, v. 9, pp. 295-310, **1969**.

[Schieffer, 03] Schieffer A., *Modélisation multiéchelle du comportement mécanique des composites à matrice organique et effets du vieillissement thermique*, thèse de doctorat de l'Université Technologique de Troyes, **2003**.

[Schuëller, 97] Schuëller G.I., Bergman L.A., Bucher C.G., Dasgupta G., Deodatis G., Ghanem R.G., Grigoriu M., Hoshiya M., Johnson E.A., Naes A., Pradlwarter H.J., Shinozuka M., Sobczyk K., Spanos P.D., Spencer Jr. B.F., Sutoh A., Takada T., Wedig W.V., Wojtkiewicz S.F., Yoshida I., Zeldin B.A., Zhang R., *A state-of the-art report on computational stochastic mechanics*, Probabilistic Engineering Mechanics, **1997**, v. 12, pp. 197-321.

[Schuëller, 01] Schuëller G.I., C*omputational stochastic mechanics –recent advances,* Computers and structures, **2001**, v. 79, pp. 2225-2234.

[Singh, 02] Singh B.N., Yadav D., Iyengar N.G.R., *Free vibration of composite cylindrical panels with random material properties*, Composite Structures, **2002** ,v. 58, pp. 435−442.

[Shafer, 76] Shafer G., *A mathematical theory of evidence*, Princeton, **1976**.

[Shiratori, 04] Shiratori M, Qiang Yu Q., *Development of statistical design support system and its applications to some industrial problems*, World Conference on Computational Mechanic VI, Sept. 5-10, **2004**, Beijing, China.

[Soize, 00] Soize C., *A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics*, Probabilistic Engineering Mechanics, **2000**, v. 15, pp. 277–294.

[Soize, 02] Soize C., *Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties in vibration analysis*, Journal of Sound and Vibration, **2003**, v. 263, pp. 893-916.

[Soize, 05] Soize C., *A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics*, Journal of Sound and Vibration, **2005**, v. 288, pp. 623-652.

[Song, 03] Song J., Peters J., Noor A., Michaleris P., *Sensitivity analysis of the thermomechanical response of welded joints*, International Journal of Solids and Structures, **2003**, v. 40, pp. 4167–4180.

[Statnikov, 02] Statnikov R.B., Matusov J.B., *Multicriteria Analysis in Engineering,* Kluwer Academic Publishers, **2002**.

[Stoppiglia, 03] Stoppiglia H., Dreyfus G., Dubois R., Oussar Y., "*Ranking a random feature for variable and feature selection*", Journal of Machine Learning Research, **2003**, v. 3, pp. 1399-1414.

[Sudret, 05] Sudret B., *Des éléments finis stochastiques spectraux aux surfaces de réponses stochastiques : une approche unifiée*, 17ème Congrès Français de Mécanique, **2005**, Troyes.

[Tarantola, 05] Tarantola A., *Inverse problem theory, and methods for model parameter estimation*, SIAM, Philadelphie, **2005**.

[Thiébaud, 94] Thiébaud F., *Modélisation du comportement global en sollicitations quasi-statiques d'un composite stratifié verre epoxy: aspects théorique et expérimental*, Thèse de doctorat de l'université de Franche Comté, **1994**.

[Vinet, 97] Vinet A., *Identification d'une loi de comportement viscoélastique-viscoplastique pour des stratifiés aéronautiques. Prévision du comportement à long terme à l'aide d'essais accélérés*, thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, **1997**.

[Welch, 92] Welch W.J., Buck R.J., Sacks J., Wynn H.P., Mitchell T.J., Moriss M.D., *Screening, predicting, and computer experiments,* Technometrics, **1992**, v. 34, pp.15-25.

[Winkler, 98] Winkler G., *On the Role of Covariances for Uncertainty Estimates in Radioactivity Measurements*, Applied Radiation and Isotopes, **1998**, v. 49, pp.1153-1157.

[Wojtkiewicz, 01] Wojtkiewicz S.F., Eldred M. S., Field R.V. Jr., Urbina A., Red-Horse J.R., *Uncertainty quantification in large computational engineering models*, 42nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, **2001**,Seattle.

[Xiu, 01] Xiu D., Lucor D., Su C.H., Karniadakis G.E., *Stochastic Modeling of Flow-Structure Interactions using Generalized Polynomial Chaos*, Journal of Fluids Engineering, **2001**, v. 125, pp. 51-59.

[Yang, 05] Yang J., Liew K.M., Kitipornchai S., *Stochastic analysis of compositionally graded plates with system randomness under static loading*, International Journal of Mechanical Sciences, **2005**, v. 47, pp. 1519-1541.

[Zadeh, 65] Zadeh L.A., *Fuzzy sets*, Information and control, **1965**, v. 8, pp. 338-353.

Vers une maîtrise des incertitudes en calcul des structures composites

Les exigences de sécurité dans le domaine aéronautique imposent de tenir compte des diverses incertitudes affectant les structures, notamment la variabilité matériau. Malgré son essor la simulation numérique considère actuellement cette problématique de façon simplifiée, par exemple en usant d'abattements sur les valeurs de propriétés utilisées dans les calculs. Mais l'emploi accru des matériaux composites, par nature plus sensibles aux incertitudes, demande l'introduction de méthodes plus précises afin d'assurer une meilleure robustesse du dimensionnement. Pour cela, il a été développé une nouvelle démarche dite d'Analyse de Variabilité respectant certaines contraintes de la simulation numérique telle l'indépendance vis-à-vis du code de calcul (non-intrusivité) et la parcimonie des calculs. Face à la grande diversité des techniques de transport d'incertitudes, le choix a été fait de construire une démarche en s'appuyant sur les techniques de surfaces de réponses. Afin d'exploiter au mieux les diverses formes retenues (polynômes en les paramètres incertains, chaos polynomial, krigeage) pour construire l'approximation, la démarche a été rendue progressive. Des méthodes de validation croisée (*leave-k-out*, *bootstrap*) ont été utilisées pour évaluer la qualité de l'approximation. Ainsi, il est possible d'afficher une estimation des effets des incertitudes (par exemple sous la forme de barres d'erreur) mais également de quantifier la confiance dans cette estimation. La validation de la démarche s'est tout d'abord appuyée sur des exemples mathématiques, puis sur des situations mécaniques simples et analytiques. Les résultats obtenus montrent notamment une bonne cohérence vis-à-vis des simulations de Monte-Carlo pour un coût de calcul nettement inférieur. Les incertitudes considérées portent aussi bien sur des paramètres géométriques que matériau, avec notamment des caractéristiques propres aux composites (angles d'empilement, épaisseur des plis). L'application de la démarche à divers exemples (plaque multiperforée, assemblage boulonné,…) de calcul de structures par la méthode des éléments finis a souligné son applicabilité pour un surcoût de calcul raisonnable. Pour finir, le problème de la réduction des effets des incertitudes a été abordé sous des angles classiques comme la réduction des incertitudes d'entrée ou l'amélioration de la qualité des modèles utilisés. Enfin, une méthode plus originale, dite de consolidation de bases de données, utilisant les corrélations entre paramètres mesurés aux diverses échelles des composites a été proposée.

Mots-clés : INCERTITUDES ; VARIABILITE ; MATERIAUX COMPOSITES ; CALCUL DE STRUCTURES ; SURFACES DE REPONSES ; CHAOS POLYNOMIAL ; KRIGEAGE ; CONSOLIDATION DE BASES DE DONNEES.

Toward a better management of uncertainties in calculations of composite structures

Security requirements in the aeronautic field require to take account of the various uncertainties affecting the structures, in particular the material variability. Despite their expansion, numerical simulations consider most of the time this topic in a simplify way, for example applying penalty to the material properties used in the calculations. But the increasing use of composite materials, intrinsically more sensitive to uncertainties, necessitates the development of sharper methods that could insure a better reliability of the design. Thus, the new Variability Analysis approach has been developed, to deal with numerical simulations constraints, such as computational code independence and limited number of calculations. Choice has been made to build an approach using response surface techniques. This approach is progressive for a better use of the various type of approximation selected (polynomials, polynomial chaos, kriging). Cross-validation techniques (leave-k-out, bootstrap) have been used to estimate the quality of the approximation. So that it is possible to display an assessment of the effects of uncertainties (with error bars) but also to evaluate the confidence of this assessment. Mathematical and analytic mechanical examples have permitted the validation of the approach which shows good agreements with Monte-Carlo simulations for a lower computation cost. Uncertain parameters used concern as well the geometry or the material properties as specific composite parameters (orientation and thickness of plies). Applied on various examples of finite elements calculations, the approach has shown good performances and a reasonable computing cost. Finally, the question of the reduction of the uncertainties effects has been considered. Solutions such as reduction of the uncertainties on the given parameters or improvement of models were investigated. In the end the new data basis improvement method, using correlation between parameters at the various scaled of composite materials, has been proposed.

Keywords: UNCERTAINTIES; VARIABILITY; COMPOSITE MATERIALS; STRUCTURAL CALCULATIONS; RESPONSE SURFACES; POLYNOMIAL CHAOS; KRIGING; DATA BASIS IMPROVEMENT.

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales
BP 72 – 29 Avenue de la Division Leclerc
92322 CHATILLON CEDEX
Tél. : +33 (01) 46 73 40 40 – Fax : + 33 (01) 46 73 41 41
http://www.onera.fr