



**HAL**  
open science

# Application d'une formulation explicite en vitesse à la modélisation numérique du forgeage

Mihaela Teodorescu

► **To cite this version:**

Mihaela Teodorescu. Application d'une formulation explicite en vitesse à la modélisation numérique du forgeage. Mécanique [physics.med-ph]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2002. Français. NNT : 2002ENMP1086 . tel-00274705

**HAL Id: tel-00274705**

**<https://pastel.hal.science/tel-00274705>**

Submitted on 21 Apr 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE DES MINES  
DE PARIS  
Collège doctoral

*N° attribué par la bibliothèque*

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

# THESE

pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'Ecole des Mines de Paris**  
Spécialité "Mécanique numérique"

présentée et soutenue publiquement par  
**Mihaela TEODORESCU**

le 3 mai 2002

---

**APPLICATION D'UNE FORMULATION EXPLICITE EN  
VITESSE A LA MODELISATION NUMERIQUE DU  
FORGEAGE**

---

*Directeur de thèse : Jean-Loup CHENOT*

Jury

M. Serge PIPERNO	Rapporteur
M. Yves DEMAY	Rapporteur
M. Richard DUCLOUX	Examineur
M. Lionel FOURMENT	Examineur



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Les méthodes implicites et explicites en mise en forme des matériaux</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction	5
1.2 Position du problème	6
1.2.1 Le problème mécanique	9
1.3 Formulations en déplacement	9
1.3.1 Discrétisation spatiale	10
1.3.2 Discrétisation temporelle	11
a) Méthodes implicites	11
b) Méthodes explicites	15
1.4 Formulations en vitesse	18
1.4.1 Discrétisation spatiale	19
1.4.2 Discrétisation temporelle	19
a) Méthodes implicites	19
b) Méthodes explicites	21
1.5 Formulations mixtes	21
1.5.1 Discrétisation spatiale	22
1.5.2 Discrétisation temporelle	23
a) Méthodes implicites	23
b) Méthodes explicites	24
1.6 Conclusion concernant les méthodes implicites et explicites	25
1.7 Résultats issus de la littérature	26
1.7.1 L'emboutissage	26
1.7.2 L'hydro-formage	30
1.7.3 Usinage	33
1.7.4 Flambage	35
1.7.5 Gonflage	36
1.7.6 Déformation plastique au cours d'un "crash"	36

1.7.7	Forgeage . . . . .	38
1.8	Conclusion . . . . .	41
<b>2</b>	<b>Formulations implicites (vitesse/pression) pour la simulation numérique du forgeage</b>	<b>43</b>
2.1	Introduction . . . . .	43
2.2	Présentation du problème de forgeage . . . . .	43
2.3	Présentation d'une formulation quasi-statique . . . . .	45
2.3.1	Discrétisation spatiale . . . . .	45
2.3.2	Discrétisation temporelle . . . . .	47
2.4	Présentation des formulations dynamiques . . . . .	49
2.4.1	Première formulation dynamique . . . . .	49
a)	Discrétisation spatiale . . . . .	49
b)	Discrétisation temporelle . . . . .	50
2.4.2	Formulation de type trapèze . . . . .	51
a)	Discrétisation spatiale . . . . .	52
b)	Discrétisation temporelle . . . . .	53
2.4.3	Première approximation . . . . .	55
a)	Discrétisation spatiale . . . . .	55
b)	Discrétisation temporelle . . . . .	55
2.4.4	Deuxième approximation . . . . .	56
a)	Discrétisation spatiale . . . . .	56
b)	Discrétisation temporelle . . . . .	57
2.5	Gestion du contact . . . . .	58
2.6	Exemples numériques . . . . .	60
2.6.1	Test de compression . . . . .	60
2.6.2	Test de traction . . . . .	66
2.6.3	Forgeage . . . . .	68
a)	Premier exemple . . . . .	68
b)	Deuxième exemple . . . . .	69
2.7	Conclusion . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Présentation d'une formulation partiellement explicite</b>	<b>73</b>
3.1	Introduction . . . . .	73
3.2	Formulation mixte accélération/pression pour un matériau viscoplastique .	73
3.2.1	Formulation mécanique . . . . .	73
3.2.2	Discrétisation en éléments finis . . . . .	74
3.2.3	Traitement de la bulle . . . . .	76

3.2.4	La propriété d'orthogonalité de la bulle . . . . .	78
	a) Cadre axisymétrique . . . . .	79
	b) Autres termes négligés . . . . .	80
3.2.5	L'élimination de la bulle . . . . .	80
3.2.6	Condensation de la matrice de masse . . . . .	81
3.2.7	Intégration temporelle : . . . . .	82
3.2.8	La gestion du contact . . . . .	83
3.2.9	Premiers résultats . . . . .	84
	a) Calcul (analytique/numérique) de la pression . . . . .	84
	b) Test de traction . . . . .	89
	c) Test de compression - Contact collant . . . . .	90
	d) Test de compression - Frottement . . . . .	92
	e) Test de compression. Variation de la vitesse. Extrapolation à vitesse plus faible . . . . .	97
	f) Test de compression - Poinçonnement . . . . .	99
	g) Test de compression - Outil sphérique . . . . .	101
3.3	Formulation mixte accélération/pression pour un matériau élasto-viscoplastique	103
3.3.1	Première approche. Élasticité déviatorique incrémentale . . . . .	103
3.3.2	Deuxième approche. Élasto-viscoplasticité . . . . .	104
	a) Loi de comportement . . . . .	104
	b) L'incompressibilité plastique . . . . .	105
3.3.3	Résultats . . . . .	107
	a) Compression de cylindre. Cas élasto-viscoplastique . . . . .	107
3.4	Résolution en pression . . . . .	110
3.4.1	Formulation générale explicite en accélération et implicite en pression	110
	a) Élimination de l'accélération dans les EDP . . . . .	110
	b) Résolution implicite en accélération et pression . . . . .	111
	c) Élimination de l'accélération après discrétisation . . . . .	112
3.4.2	Estimation du coût des formulations : DI, DPE, DPE-simplifiée . . . . .	112
	a) Cas 2D . . . . .	113
	b) Cas 3D . . . . .	116
3.5	Conclusion . . . . .	118
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>119</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>121</b>
<b>Annexe</b>		<b>127</b>



# Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier ma famille dont le soutien a toujours été sans limites et sans lequel je ne serai pas arrivée là aujourd'hui.

Je remercie l'École des Mines de Paris et sa direction ainsi que la direction du Centre de Mise en Forme des Matériaux pour son accueil au sein du laboratoire et de la formation doctorale.

Cette thèse s'est déroulée en collaboration avec la société Transvalor, dans le cadre du projet européen FORSYS, et a été financée par le Ministère de l'Éducation Nationale, de la Recherche et de la Technologie que je tiens à remercier.

Mes remerciements vont également aux membres du jury : M. Serge Piperno, M. Yves Demay, M. Lionel Fourment, M. Richard Ducloux et M. Jean-Loup Chenot qui ont accepté de consacrer du temps et de la patience à la lecture et à l'analyse de ce travail.

J'exprime toute ma gratitude à M. Jean-Loup Chenot, mon directeur de thèse. Merci pour toutes les discussions très enrichissantes menées durant ces trois années de thèse, pour toutes les remarques et les conseils toujours pertinents et constructifs, pour sa patience et sa disponibilité.

Je remercie Patrick Coels pour son soutien et pour sa volonté d'aider les thésards pour le moindre souci.

Un grand merci à Marie-Françoise pour son sourire et ses petits mots toujours encourageants. Merci d'avoir été à mes côtés dans tous les moments (heureux et, surtout, moins heureux), que j'ai vécue pendant ces années.

Merci Flo, Viviane et Genevieve pour votre bonne humeur et votre gentillesse.

Un grand merci à Katia également pour tout son soutien moral et scientifique.

Je remercie beaucoup tous ceux que j'ai connus en arrivant au Cemef et qui m'ont énormément aidé pour m'intégrer dans le monde "cemefien", scientifique ainsi que non scientifique. Merci Etiennito pour la patience dont il a fait preuve, pour son aide, ses conseils et ses encouragements. Merci Karim, Hugo et Erwan pour avoir toujours essayé de trouver des réponses à mes questions, pour votre disponibilité et pour votre amitié.

Je n'oublierai pas non plus les collègues de ma promotion et tous ceux qui intègrent la grande équipe "cemefienne".

Enfin, j'exprime ma reconnaissance à mes collègues de bureau : Sergio, Julien, Romain, Roland et Robert. Je leur remercie pour leur patience, pour leur humour et pour leur amitié.





# Introduction

Ces dernières années, de nombreux progrès ont été enregistrés sur le plan de l'analyse des processus de mise en forme des matériaux. Les premières contributions concernant la modélisation de la mise en forme ont vu le jour dans les années 70 [14], [32], [71].

Depuis, la simulation numérique est devenue un outil très important pour l'étude des processus industriels de formage. Les logiciels commercialisés doivent utiliser des algorithmes fiables, en mesure de résoudre des problèmes complexes issus de la réalité industrielle. Dans ce contexte, nous mentionnons l'existence de deux familles importantes de codes de calcul.

Les codes élément finis statiques et dynamiques implicites (Abaqus implicit, Marc implicit, Forge2<sup>®</sup>, Forge3<sup>®</sup>, etc.), constituent des outils reconnus pour leur efficacité [63]. Toutefois, pour le traitement de problèmes très complexes, le temps de calcul peut augmenter de manière significative. Suite à de nombreuses études les méthodes implicites atteignent des possibilités de simulation élevées, en particulier grâce à des développements concernant : l'analyse de schémas d'intégration temporelle plus précis [8], la modélisation du forgeage en 3D [58], l'estimation de l'erreur et le remaillage adaptatif [76], le remaillage automatique en 3D [16], [15]. Les logiciels implicites sont adaptés pour la modélisation de tout type de matériaux : viscoplastique, élastoplastique, ainsi qu'élasto-viscoplastique.

Les codes dynamiques explicites (Abaqus explicit, Marc explicit, Ls-Dyna3D, Pamstamp, Optris, MSC Superforge, Stampack, etc.) forment la seconde famille importante de codes de simulation numérique. De manière générale, une simulation explicite ne demande aucune résolution de système d'équations, ce qui représente la caractéristique principale de ces méthodes. L'algorithme correspondant à ces méthodes est simple et, en général, demande peu de mémoire. Toutefois, ces mêmes méthodes sont conditionnellement stables ce qui implique une limitation du pas de temps [65], [28]. De plus, elles sont parfois moins fiables que les méthodes implicites à cause des modifications artificielles effectuées sur les paramètres physiques des processus, dans le but d'augmenter le pas de temps [63], [35].

Les méthodes explicites ont été d'abord adoptées pour simuler la mise en forme des pièces minces [25], [41], [43], [64]. Très rapidement elles ont trouvé des applications pour l'analyse des comportements des matériaux lors des processus de "crash" de voiture [7]. Plus tard, leur application a été étendue à la modélisation du formage des pièces massives [39], [49], [47]. Récemment, dans le cadre des méthodes explicites, les efforts se sont concentrés sur le développement de techniques permettant de traiter certains phénomènes délicats qui peuvent apparaître en mise en forme (le retour élastique [33], [31], [28], l'apparition des plis [45], l'influence des paramètres - vitesse ou densité du matériau - sur les résultats obtenus [36], [35]).

Les méthodes explicites sont employées principalement pour l'analyse des matériaux élasto-

plastiques [67], [29]. La mise en oeuvre d'une procédure viscoplastique complètement explicite semble peu probable, à cause de l'incompressibilité qui doit être imposée dans ce cas de figure. Ce problème peut se résoudre par une méthode de pénalisation, mais il reste difficile quand une formulation mixte est envisagée.

Il est important d'établir dans quelles conditions les codes implicites et explicites peuvent être utilisés pour des applications industrielles. Pour l'instant, le débat reste ouvert [55], [51], [28], [63] en ce qui concerne l'évaluation des méthodes explicites et implicites en termes d'efficacité, de précision ou de temps de calcul.

Dans ce contexte, notre travail a pour objet principal d'explorer une approche partiellement explicite (explicite en vitesse et implicite en pression) pour la modélisation dynamique du forgeage à chaud (matériaux viscoplastiques).

Le premier chapitre présente les principales caractéristiques des méthodes explicites et implicites à partir de leur description théorique et des résultats numériques présents dans la littérature.

Le deuxième chapitre se concentre sur la présentation de plusieurs formulations implicites quasi-statiques et dynamiques : deux d'entre elles sont à la base des versions standards de Forge2<sup>®</sup> et nous en proposons trois autres, qui seront analysées en terme de précision numérique et de leur aptitude à mieux traiter l'incompressibilité.

La formulation dynamique partiellement explicite que nous proposons fait l'objet du troisième chapitre. Dans un premier temps, une approche viscoplastique en accélération/pression est présentée, analysée et comparée avec les formulations implicites exposée dans le deuxième chapitre. Cette formulation est ensuite étendue aux cas élasto-viscoplastiques. Enfin, en vu de la simplifier, une nouvelle approche est proposée. Cette dernière permet de résoudre le problème dynamique uniquement en pression, l'accélération étant calculée explicitement par la suite.

# Chapitre 1

## Les méthodes implicites et explicites en mise en forme des matériaux

---

### 1.1 Introduction

Les méthodes explicites et implicites représentent des outils importants pour les méthodes numériques utilisées dans la résolution des problèmes mécaniques.

Initialement, leur application est signalée dans le cadre de l'ingénierie civile pour des analyses concernant le calcul des structures.

Dans ce contexte, il existe des nombreux ouvrages [19], [75], [6], [4] qui portent sur la description et l'analyse des méthodes explicites et implicites. Les différents types de schémas appartenant à chaque famille de méthodes, leurs caractéristiques générales, ainsi que leurs particularités et applications ont fait l'objet de nombreux travaux.

Avec l'évolution des méthodes numériques et, plus particulièrement, celle des éléments finis [30] à laquelle nous faisons référence, les schémas explicites et implicites ont trouvé des applications pour l'étude de phénomènes plus complexes, comme la mise en forme des matériaux [62].

Les procédés de mise en forme comportent des difficultés (comme le traitement de la condition d'incompressibilité, de contact, de l'apparition des plis, du retour élastique, les grandes déformations de la pièce, etc...), qui ne sont pas toujours faciles à prendre en compte.

Dans cette optique, les chercheurs n'ont cessé d'analyser et de développer les algorithmes implicites et explicites et leurs applications à la modélisation de processus précis de mise en forme. Il existe plusieurs formulations éléments finis pour la modélisation des procédés de mise en forme :

- les formulations en déplacement, les premières développées, issues du calcul des structures élastiques,
- les formulations en vitesse, adaptées plus particulièrement aux comportements viscoplastiques, élasto-viscoplastiques,
- les formulations mixtes, adoptées de plus en plus dans les dernières années grâce à leur

flexibilité pour traiter les contraintes.

Ce premier chapitre a pour but de donner une présentation générale des méthodes explicites et implicites, couramment utilisées dans le cadre de la mise en forme.

A cet effet, le problème mécanique général sera énoncé dans le contexte des matériaux élastoplastiques, viscoplastiques ou élasto-viscoplastiques. La méthode des éléments finis sera ensuite appliquée pour réaliser la discrétisation spatiale et ainsi apparaîtra la question de l'utilisation des schémas d'intégration numérique. Une présentation des méthodes explicites et implicites suivra dans le cadre de formulations en déplacement, en vitesse ou encore mixtes. Leurs caractéristiques, ainsi que leurs avantages et inconvénients seront mis en évidence par plusieurs exemples.

Pour pouvoir contribuer à évaluer l'applicabilité des ces deux classes de méthodes à la mise en forme des matériaux, des résultats numériques seront exposés et discutés dans la dernière partie du chapitre.

## 1.2 Position du problème

Tout d'abord, nous rappelons les notions de base et les notations nécessaires pour décrire les principaux comportements des matériaux utilisés en mise en forme.

On introduit le tenseur des déformations  $E$ , défini comme étant :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.1)$$

où  $u$  représente le champ de déplacement et  $x$  les coordonnées.

Dans le cas des petites déformations, le dernier terme est du deuxième ordre et peut donc être négligé. On retrouve alors les expressions linéarisées de la déformation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.2)$$

Dans le cadre simple de l'élasticité linéaire, le tenseur des contraintes  $\sigma$  est relié à celui des déformations  $\varepsilon$  par la loi de Hooke :

$$\sigma = D^e \varepsilon \quad (1.3)$$

où  $D^e$  représente la matrice d'élasticité.

Écrite par composantes, la relation (1.3) prend la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} D_{ijkl}^e \varepsilon_{kl} \quad (1.4)$$

Pour le cas simple d'un matériau isotrope, la matrice  $D$  prend la forme particulière :

$$D_{ijkl}^e = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.5)$$

où  $\delta_{ij}$  c'est le symbole de Kroneker et  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé.

Pour la mise en forme d'un métal à chaud, qui correspond à un comportement viscoplastique, la loi de Norton-Hoff est souvent utilisée :

$$s(v) = 2K(\sqrt{3}\dot{\bar{\varepsilon}})^{m-1}\dot{\varepsilon}(v) \quad (1.6)$$

où  $v$  est le champ de vitesse,  $s$  est le tenseur déviateur des contraintes,  $\dot{\varepsilon}$  est le tenseur des vitesses de déformation défini par :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.7)$$

$K$  est la consistance du matériau et  $m$  représente la sensibilité à la vitesse de déformation. La vitesse de déformation généralisée  $\dot{\bar{\varepsilon}}$ , intervenant dans (1.6), est définie par :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \left( \frac{2}{3} \sum_{i,j} \dot{\varepsilon}_{ij}^2(v) \right)^{1/2}. \quad (1.8)$$

La contribution élastique peut être rajoutée en utilisant une simple décomposition du tenseur vitesse de déformation, ce qui se traduit par :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \quad (1.9)$$

où  $\dot{\varepsilon}^e$  représente la contribution élastique et  $\dot{\varepsilon}^p$  celle plastique ou viscoplastique.

Prenant en compte la dérivée objective de Jaumann (notée  $\frac{d_J \sigma}{dt}$ ), nous pouvons écrire :

$$\frac{d_J \sigma}{dt} = \dot{\sigma} - \dot{\omega} \sigma + \sigma \dot{\omega} = \lambda \text{trace}(\dot{\varepsilon}^e) I + 2\mu \dot{\varepsilon}^e = D^e \dot{\varepsilon}^e, \quad (1.10)$$

où  $I$  est le tenseur unité,  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé et  $\dot{\omega}$  est défini par la relation :

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.11)$$

En décomposant la partie élastique du tenseur des vitesses de déformation en une partie sphérique :

$$\dot{\theta} = \text{trace}(\dot{\varepsilon}^e), \quad (1.12)$$

et une partie déviatorique :

$$\dot{e}^e = \dot{\varepsilon}^e - \frac{1}{3}\dot{\theta}I, \quad (1.13)$$

nous en déduisons les relations suivantes :

$$\dot{s} = 2\mu\dot{e}^e - \dot{\omega}\sigma + \sigma\dot{\omega} \quad (1.14)$$

et

$$\frac{1}{3}\text{trace}(\dot{\sigma}) = -\dot{p} = \kappa \text{trace}(\dot{\varepsilon}), \quad (1.15)$$

où  $\kappa$  représente le coefficient de compressibilité donné par l'expression :

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (1.16)$$

En mise en forme d'un métal à froid on utilise une approximation élastoplastique décrite par les équations (1.17), (1.18) en terme d'un critère de plasticité  $f$ .

Nous pouvons distinguer les cas suivants :

- la déformation est seulement élastique si le critère de plasticité est négatif, c'est à dire :

$$\dot{\varepsilon}^p = 0 \text{ si } f(\sigma, \bar{\varepsilon}^p) < 0 \text{ ou si } \left[ f(\sigma, \bar{\varepsilon}^p) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} < 0 \right] \quad (1.17)$$

- la déformation est élastoplastique si le critère de plasticité  $f$  vaut zéro, autrement dit :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}^p \frac{\partial f}{\partial \sigma} \text{ si } \left[ f(\sigma, \bar{\varepsilon}^p) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} \geq 0 \right]. \quad (1.18)$$

où la déformation plastique équivalente  $\bar{\varepsilon}^p$  est définie pas l'expression suivante :

$$\bar{\varepsilon}^p = \int \dot{\bar{\varepsilon}}^p dt \quad (1.19)$$

Dans ce dernier cas, le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}^p$  est positif et l'équation suivante est vérifiée :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}} \dot{\bar{\varepsilon}} = 0. \quad (1.20)$$

Pour les comportements élasto-viscoplastiques, nous pouvons écrire :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial \varphi'}{\partial \sigma}, \quad (1.21)$$

où  $\varphi'$  est le potentiel viscoplastique complémentaire, défini souvent par l'équation :

$$\varphi'(\sigma) = \frac{m}{m+1} K \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R}{K} \right\rangle^{\frac{m+1}{m}}, \quad (1.22)$$

où  $\sigma_{eq}$  est la contrainte équivalente définie par :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} s : s} \quad (1.23)$$

Dans ce cas,  $R$  représente le critère de viscoplasticité qui est une fonction de  $\bar{\varepsilon}$  (pour les matériaux écrouissables) .

Dans la relation (1.22),  $\langle \rangle$  représente la partie positive de l'expression et est défini comme :

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

### 1.2.1 Le problème mécanique

Pour un problème mécanique général, défini dans un domaine  $\Omega$ , l'équation d'équilibre dynamique s'écrit :

$$\operatorname{div}(\sigma) + \rho(g - \gamma) = 0 \quad (1.25)$$

où  $g$  est la gravité,  $\rho$  la densité,  $\gamma$  l'accélération.

La méthode générale pour résoudre ce problème est clairement décrite dans la littérature [6], [3], [62]. Nous nous proposons ici de faire un résumé sur les points importants concernant la résolution d'un tel problème et de mettre en évidence les différentes situations que nous pouvons rencontrer. Les formulations en déplacement, en vitesse et mixtes seront exposées par la suite.

## 1.3 Formulations en déplacement

Dans le cas des formulations en déplacement, la loi de comportement s'écrit sous une forme qui fait apparaître le déplacement ou l'incrément de déplacement, soit :  $\sigma(\Delta u)$ . En appliquant le principe des travaux virtuels correspondant à (1.25), quelque soit le champ virtuel de déplacement  $\delta u$ , on obtient la formulation intégrale du problème :



$$\int_{\Omega} \rho \gamma . \delta u d \omega - \int_{\partial \Omega} \sigma n . \delta u d S - \int_{\Omega} \rho g . \delta u d \omega + \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\delta u) d \omega = 0 \quad (1.26)$$

Pour arriver à ce résultat, la Formule de Green est utilisée :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma) . \delta u d \omega = \int_{\partial \Omega} \sigma n . \delta u d S - \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\delta u) d \omega \quad (1.27)$$

### 1.3.1 Discrétisation spatiale

La procédure de "semi-discrétisation" (i.e. la discrétisation spatiale) éléments finis consiste, en général, à diviser le domaine  $\Omega$  en éléments  $\Omega_e$ . Ensuite, sur chaque élément, les champs des vecteurs qui nous intéressent sont approximés à l'aide des fonctions de forme  $N_n(\xi)$  et des valeurs nodales.

Suivant ce principe, dans la suite, nous allons considérer la forme discrétisée  $x_h$  du vecteur des coordonnées  $x$  :

$$x_h = \sum_{n=1}^{Nbnoe} X_n N_n, \quad (1.28)$$

en notant  $N_n(\xi)$  et  $X_n(t)$  par  $N_n$  et  $X_n$ , pour des raisons de lisibilité.

En utilisant des éléments finis isoparamétriques [20], [30], [62] le vecteur déplacement peut s'écrire :

$$u_h = \sum_{n=1}^{Nbnoe} U_n N_n, \quad (1.29)$$

Nous nous plaçons dans le cadre d'une représentation lagrangienne, alors la vitesse d'un point matériel n'est autre que la vitesse de déplacement, c'est à dire :

$$\frac{du(x, t)}{dt} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = v(x, t) \quad (1.30)$$

Dans ce contexte, les vecteurs vitesse et accélération peuvent s'écrire :

$$v_h = \sum_{n=1}^{Nbnoe} V_n N_n \quad (1.31)$$

$$\gamma_h = \sum_{n=1}^{Nbnoe} \Gamma_n N_n \quad (1.32)$$

Dans ce même contexte, le tenseur des déformations linéarisé s'écrit sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}(u_h) = \sum_{n=1}^{Nbnoe} U_n B_n \quad (1.33)$$

où  $B_n$  est défini par l'expression :

$$B_{ijkn} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_n}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial N_n}{\partial x_i} \delta_{jk} \right). \quad (1.34)$$

Avec cette discrétisation l'équation (1.26) devient :

$$\int_{\Omega} \rho \gamma_h N_n d\omega - \int_{\partial\Omega} \sigma_h n N_n dS - \int_{\Omega} \rho g N_n d\omega + \int_{\Omega} \sigma_h : B_n d\omega = 0 \quad (1.35)$$

Cette dernière équation peut s'écrire sous la forme symbolique :

$$C\Gamma - F^{ext} + F^{int} = 0 \quad (1.36)$$

où  $C$  représente la matrice de masse dont les composantes sont définies par :

$$C_{jmin} = \delta_{ij} \int_{\Omega} \rho N_m N_n d\omega,$$

$$F^{ext} = \int_{\partial\Omega} \sigma_h n N_n dS + \int_{\Omega} \rho g N_n d\omega \text{ représente la force extérieure et}$$

$$F^{int} = \int_{\Omega} \sigma_h : B_n d\omega \text{ représente la force intérieure.}$$

### 1.3.2 Discrétisation temporelle

Jusqu'à maintenant nous avons décrit le problème mécanique, ainsi que des premières étapes de la méthode des éléments finis appliquée à la résolution de ce problème.

Nous sommes arrivés à un système d'équations différentielles ordinaires en temps (1.36).

Pour le résoudre, le temps sera divisé en intervalles  $\Delta t$  (supposés constants ici) et sur chaque intervalle les variations des coordonnées, des vitesses et des accélérations vont être définies à l'aide des schémas numériques.

Nous pouvons mentionner qu'il existe de nombreux schémas d'intégration numérique [19], [6], [3]. Dans la suite, nous allons montrer quelques exemples appliqués dans le cadre de la mise en forme.

#### a) Méthodes implicites

##### Cas quasi-statique

La plupart des procédés de mise en forme de matériaux appartiennent à la catégorie des processus quasi-statiques. Autrement dit, l'inertie peut être négligée sachant qu'elle apporte une contribution à l'énergie du système inférieure à 1%.

Dans ces cas de figure, le problème peut s'écrire à  $t + \Delta t$  sous la forme symbolique (1.37) résultant de (1.36) :

$$R(U^{t+\Delta t}, X^{t+\Delta t}) = 0 \quad (1.37)$$

Dans le cadre de la mise en forme, le système (1.37) est, en général, non-linéaire. La méthode est donc dite implicite car la résolution d'un système est nécessaire. La méthode de Newton-Raphson est souvent utilisée pour la résolution.

Pour le calcul de la vitesse un schéma implicite d'intégration temporelle [19], [6], [3] peut être considéré :

$$V^{t+\Delta t} = \frac{U^{t+\Delta t} - U^t}{\Delta t} \quad (1.38)$$

Dans le cadre des *petits déplacements, petites déformations*, la configuration spatiale est supposée rester toujours la même, donc il n'est pas question de réactualisation des coordonnées. Par contre, la mise en forme, à laquelle nous nous intéressons, concerne des grands déplacements et des grandes déformations, et, par conséquent, il est nécessaire de réactualiser les coordonnées à chaque incrément.

La réactualisation des coordonnées sera faite selon la relation :

$$X^{t+\Delta t} = X^t + U^{t+\Delta t} \quad (1.39)$$

où par  $U^{t+\Delta t}$  est noté le déplacement entre  $t$  et  $t + \Delta t$ .

Dans ce cas, le problème (1.37) est plus complexe :

$$R(X^t + U^{t+\Delta t}, U^{t+\Delta t}) = 0 \quad (1.40)$$

Une possibilité pour résoudre (1.40) consiste à supposer que la configuration reste la même pendant tout l'incrément  $(t, t + \Delta t)$ . Dans ce cas, le problème devient :

$$R(X^t, U^{t+\Delta t}) = 0 \quad (1.41)$$

et les non-linéarités dues à la géométrie sont évitées. Par contre, la précision diminue.

Pour une approche plus précise nous pouvons supposer que la configuration change au cours de l'incrément, mais qu'elle reste la même pendant chaque itération de Newton-Raphson. En conséquence, la réactualisation des coordonnées sera faite au début de chaque itération  $k$  de Newton-Raphson selon :

$$(X^{t+\Delta t})^{(k)} = X^t + (U^{t+\Delta t})^{(k-1)} \quad (1.42)$$

Cette approximation présente l'inconvénient de pouvoir ralentir la convergence de la méthode Newton-Raphson.

Pour une résolution précise, il faudrait calculer des dérivées de domaine, procédé qui rend la méthode compliquée.

## Cas dynamique

Quand l'inertie est prise en compte, cas associés aux procédés de mise en forme à grande vitesse (le "crash", qui peut être assimilé à un procédé de mise en forme, entre bien dans cette catégorie), le problème s'écrit sous la forme symbolique :

$$C(X^{t+\Delta t})\Gamma^{t+\Delta t} + R(U^{t+\Delta t}, X^{t+\Delta t}) = 0 \quad (1.43)$$

Un schéma de type Newmark peut être appliqué :

$$U^{t+\Delta t} = U^t + \Delta t V^t + \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - b \right) \Gamma^t + b \Gamma^{t+\Delta t} \quad (1.44)$$

$$V^{t+\Delta t} = V^t + \Delta t \left( (1 - a) \Gamma^t + a \Gamma^{t+\Delta t} \right) \quad (1.45)$$

où  $a$  et  $b$  sont des paramètres numériques.

Ces schémas sont d'ordre 2 si est seulement si le paramètre  $a = \frac{1}{2}$  [6].

Plusieurs schémas bien connus dans la littérature appartiennent à la famille de schémas Newmark. Parmi ceux-ci nous mentionnons :

### a. le schéma de type accélération moyenne

Ce schéma correspond aux valeurs  $a = \frac{1}{2}$  et  $b = \frac{1}{4}$ . C'est un schéma implicite et conditionnellement stable [19], [6], [3]. C'est un des schémas les plus souvent utilisés dans le calcul des structures.

### b. le schéma de type accélération linéaire

Dans ce cas,  $a = \frac{1}{2}$  et  $b = \frac{1}{6}$ . C'est un schéma implicite et conditionnellement stable [19], [6], [3].

### c. le schéma de type Fox-Goodwin

Cette méthode considère  $a = \frac{1}{2}$  et  $b = \frac{1}{12}$ . C'est un schéma implicite et conditionnellement stable. Appliquée au problème (1.36) cette méthode est d'ordre 4 [6].

Nous remarquons que les méthodes correspondant aux cas **b** et **c** sont implicites et conditionnellement stables, ce qui paraît un inconvénient (en terme de temps de calcul) par rapport aux méthodes implicites inconditionnellement stables.

Pour illustrer l'application de ce schéma au problème (1.36), considérons le cas des méthodes en accélération moyenne. Alors, les équations (1.44) et (1.45) deviennent :

$$U^{t+\Delta t} = U^t + \Delta t V^t + \frac{1}{4} \Delta t^2 (\Gamma^t + \Gamma^{t+\Delta t}) \quad (1.46)$$

$$V^{t+\Delta t} = V^t + \frac{1}{2} \Delta t (\Gamma^t + \Gamma^{t+\Delta t}) \quad (1.47)$$

De ces relations, on déduit :

$$U^{t+\Delta t} = U^t + \frac{1}{2} \Delta t (V^t + V^{t+\Delta t}) \quad (1.48)$$

Dans ce contexte, nous allons écrire l'équation (1.36) à l'instant  $t + \Delta t$  :

$$C(X^{t+\Delta t}) \Gamma^{t+\Delta t} + R(X^{t+\Delta t}, U^{t+\Delta t}) = 0 \quad (1.49)$$

Dans cette dernière équation, en remplaçant  $\Gamma^{t+\Delta t}$  par la valeur résultant de l'expression (1.46), on obtient le système :

$$\frac{4}{\Delta t^2} C(X^{t+\Delta t}) U^{t+\Delta t} + R(X^{t+\Delta t}, U^{t+\Delta t}) - C(X^{t+\Delta t}) \left( \frac{4}{\Delta t^2} U^t + \frac{4}{\Delta t} V^t + \Gamma^t \right) = 0 \quad (1.50)$$

Comme dans le cas quasi-statique, il est nécessaire de réactualiser les coordonnées à chaque incrément. La réactualisation des coordonnées sera faite alors selon le relation (1.39).

Cette réactualisation pose le même genre de problèmes que dans le cas quasi-statique, donc nous pouvons faire les mêmes remarques concernant la résolution du problème dans cette situations plus complexe.

Un autre exemple de schéma implicite est le schéma de type Houbolt, c'est un schéma d'ordre 2 [6], [4]. Dans ce schéma, l'accélération et la vitesse sont approchées en terme de déplacement, par les expressions :

$$\Gamma^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2U^{t+\Delta t} - 5U^t + 4U^{t-\Delta t} - U^{t-2\Delta t}) \quad (1.51)$$

$$V^{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (11U^{t+\Delta t} - 18U^t + 9U^{t-\Delta t} - 2U^{t-2\Delta t}) \quad (1.52)$$

Pour obtenir la solution à  $t + \Delta t$  il faut considérer l'équation (1.36) à l'instant  $t + \Delta t$ , ce qui nous conduit à :

$$\frac{2}{\Delta t^2}C(X^{t+\Delta t})U^{t+\Delta t} + R(X^{t+\Delta t}, U^{t+\Delta t}) - \frac{1}{\Delta t^2}C(X^{t+\Delta t})(5U^t - 4U^{t-\Delta t} + U^{t-2\Delta t}) \quad (1.53)$$

Nous remarquons que pour déterminer la solution  $U^{t+\Delta t}$  il est nécessaire de connaître  $U^t$ ,  $U^{t-\Delta t}$  et  $U^{t-2\Delta t}$ . En connaissant  $U^0$ ,  $V^0$  et  $\Gamma^0$ ,  $U^{\Delta t}$  et  $U^{2\Delta t}$  peuvent être calculés utilisant des procédures particulières. L'application d'une méthode explicite pour ce calcul d'initialisation est une possibilité [3].

### b) Méthodes explicites

De manière générale, quand une méthode explicite est utilisée, l'équation (1.36) est écrite à l'instant  $t$  et on cherche à trouver la solution sans avoir à résoudre aucun système. Dans ce but, la matrice de masse  $C$  est rendue diagonale par des procédures que nous décrivons brièvement ci-dessous et, en conséquence, le calcul de l'accélération est immédiat.

Cette procédure sera résumée par la suite.

Le schéma le plus souvent utilisée pour la résolution de (1.36) est la méthode des différences finies centrées.

On remarque que si dans le cas général des schémas de type Newmark nous prenons  $b = 0$  et  $a = \frac{1}{2}$ , alors nous retrouvons le schéma des différences finies centrées. Pour ce schéma l'accélération est considérée comme étant :

$$\Gamma^t = \frac{V^{t+\frac{\Delta t}{2}} - V^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} \quad (1.54)$$

où  $V^{t+\frac{\Delta t}{2}}$  et  $V^{t-\frac{\Delta t}{2}}$  sont définis, en fonction des déplacements, par les expressions :

$$V^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \frac{U^{t+\Delta t} - U^t}{\Delta t} \quad (1.55)$$

$$V^{t-\frac{\Delta t}{2}} = \frac{U^t - U^{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad (1.56)$$

ce qui sert à établir une relation entre l'accélération et le déplacement :

$$\Gamma^t = \frac{U^{t+\Delta t} - 2U^t + U^{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \quad (1.57)$$

Si pour la vitesse  $V^t$  est adoptée l'expression :

$$V^t = \frac{V^{t+\frac{\Delta t}{2}} + V^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{2} \quad (1.58)$$

alors, en utilisant encore une fois les relations (1.55) et (1.56), on obtient :

$$V^t = \frac{U^{t+\Delta t} - U^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (1.59)$$

En introduisant l'expression (1.57) dans la forme (1.36) du problème nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\Delta t^2} C U^{t+\Delta t} + R(X^t, U^t) - \frac{1}{\Delta t^2} C(2U^t - U^{t-\Delta t}) = 0 \quad (1.60)$$

Dans ces conditions, à chaque instant  $t$ , nous pouvons calculer  $U^{t+\Delta t}$  :

$$U^{t+\Delta t} = \Delta t^2 C^{-1} R(X^t, U^t) + 2U^t - U^{t-\Delta t} \quad (1.61)$$

La matrice de masse est diagonalisée, ce qui rend la résolution de l'équation (1.61) encore plus facile.

On observe que, à chaque instant  $t$ , le calcul du terme  $U^{t+\Delta t}$  implique la connaissance de  $U^t$  et de  $U^{t-\Delta t}$ . Par conséquent, cette méthode demande une procédure particulière pour les initialisations. Si l'on suppose connus  $U^0$  et  $V^0$ , alors  $\Gamma^0$  résulte directement de l'équation (1.36). Ensuite, en utilisant les relations (1.57) et (1.59) nous allons en déduire :

$$U^{-\Delta t} = U^0 - \Delta t V^0 + \frac{\Delta t^2}{2} \Gamma^0 \quad (1.62)$$

Concernant la réactualisation des coordonnées, on utilise les mêmes formules, (1.39), que pour les méthodes implicites. Par contre, dans cette situation nous ne rencontrerons pas les mêmes difficultés, car le problème est considéré à l'instant  $t$ , pour lequel la configuration est connue. Donc, aucune complication liée à la réactualisation des coordonnées n'apparaît.

En général, les méthodes explicites sont conditionnellement stables, ce qui signifie que le pas de temps  $\Delta t$  ne peut pas dépasser une certaine limite, notée habituellement  $\Delta t_{cr}$ .

Quelques notions générales concernant la condition de stabilité seront exposées dans la suite.

Le fait que le pas de temps doive être inférieur à une certaine valeur implique l'utilisation de pas de temps assez petits lors de la résolution. En conséquence, la solution du problème est trouvée après un grand nombre d'incrémentes.

Dans la suite, nous discuterons certaines particularités des méthodes explicites.

### La condensation de la matrice de masse ("Mass lumping")

Il existe plusieurs techniques utilisées dans ce sens [11]. D'abord, nous allons exposer la procédure classiquement employée.

Soit  $C = (C_{imjn})$  la matrice de masse associée au problème. En sommant les éléments de chaque ligne et en remplaçant le terme diagonal par le résultat, on obtient une matrice  ${}^L C$  dite *condensée*, qui a la forme suivante :

$${}^L C_{imjn} = \delta_{nm} \delta_{ij} \sum_{q=1}^{Nbnoe} C_{imjq} \quad (1.63)$$

où l'indice  $L$  vient du mot anglais "lumping" qui signifie condensation.

Une autre technique de diagonalisation est résumée par les deux relations qui suivent :

$${}^L C_{imim} = C_{imim} \alpha \quad (1.64)$$

où  $\alpha$  est donné par la formule :

$$\alpha = \frac{\sum_{imjq} C_{imjq}}{\sum_{im} C_{imim}} \quad (1.65)$$

L'utilisation d'une telle méthode pour diagonaliser la matrice de masse du problème est une caractéristique des codes basés sur les méthodes explicites.

### La condition de stabilité

Les schémas explicites sont, en général, conditionnellement stables [4], [54], [73], [44]. La condition de stabilité porte sur le pas de temps qui est imposé inférieur à une valeur dite "critique"  $\Delta t_{cr}$ .

Le temps critique  $\Delta t_{cr}$  est lié à la vitesse de propagation du son  $c$  et à la taille de maille  $\Delta x$  par la formule générale de Courant - Friedrichs - Lewy [21] :

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{\Delta x}{c} . \quad (1.66)$$

Pour un matériau élastoplastique ou élasto-viscoplastique la formule précédente devient [65] :

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad (1.67)$$

où  $E$  est le module d'Young du matériau considéré et  $\rho$  la masse volumique. Cette dernière formule est issue de la théorie de propagation d'ondes élastiques dans un matériau (dans un cas de choc, par exemple).

Pour donner un exemple, nous considérons un acier à froid avec  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$  et  $E = 200 \text{ GPa}$ . Si la taille de maille est de  $\Delta x = 0.01 \text{ m}$  alors  $\Delta t_{cr} \approx 2 \cdot 10^{-6}$  ce qui implique un grand nombre d'incrémentes (5000) lors de la simulation numérique pour un problème de type mise en forme où le temps de l'opération est de l'ordre de  $0.01 \text{ s}$ .



Dans le but de diminuer le nombre d'incrément, deux stratégies peuvent être utilisées. La première consiste à modifier la physique du matériau [63], en augmentant la masse volumique du matériau. La deuxième technique propose d'accélérer artificiellement le procédé, en imposant à l'outil une vitesse plus grande [55], [63].

Une augmentation de deux ordres de grandeur pour la densité ( $\rho \times 100$ ) accélère le processus d'un ordre de grandeur ( $v \times 10$ ).

Généralement, les chercheurs considèrent que ces modifications n'influencent pas significativement la validité de la solution [36], [35], [50] mais cela n'est pas toujours conforme à la réalité [63].

### L'effet sablier

Dans l'implémentation de presque toutes les méthodes éléments finis, les intégrales définissant la matrice de rigidité sont évaluées en utilisant des formules numériques de quadrature.

Au cours des dernières années, les méthodes de sous-intégration (i.e. intégration numérique à l'aide d'un seul point d'intégration) ont été utilisées pour réduire le temps de calcul nécessaire à la détermination de la solution numérique d'un problème dynamique non linéaire.

Les méthodes de sous-intégration présentent l'inconvénient d'introduire des matrices de rigidité singulières [34]. Cela correspond à la juxtaposition de modes parasites sur le mode de mouvement de corps rigides. On peut en effet générer des modes d'énergie nulle provoquant un phénomène appelé l'effet sablier [27] terme graphique lié aux oscillations produites sur la solution. Pour éliminer ces difficultés une possibilité est de calculer la matrice de rigidité par sous-intégration [22], [6]. Ensuite, une matrice de stabilisation éliminant totalement les instabilités est rajoutée .

## 1.4 Formulations en vitesse

Les formulations en vitesse sont apparues dans le contexte des matériaux newtoniens ou viscoplastiques où le tenseur des contraintes est exprimé en fonction de la vitesse. Au départ, elles étaient appliquées pour des problèmes stationnaires [13], [53], [71], mais ensuite ont été étendues à des problèmes instationnaires, comme le forgeage [32], [10], [46].

Ces approches ont été généralisées par la suite aux cas élasto-viscoplastiques [38], [40].

En appliquant le principe des puissances virtuelles correspondant à (1.25), quelque soit le champ virtuel de vitesse  $v^*$ , on obtient la formulation intégrale du problème :

$$\int_{\Omega} \rho \gamma . v^* d\omega - \int_{\partial\Omega} \sigma n . v^* dS - \int_{\Omega} \rho g . v^* d\omega + \int_{\Omega} \sigma : \dot{\epsilon}(v^*) d\omega = 0 \quad (1.68)$$

Une formule équivalente à (1.27) est aussi utilisée dans ce cas.

### 1.4.1 Discrétisation spatiale

Dans le cadre des formulations en vitesse les coordonnées, les vitesses et les accélérations sont discrétisées selon les formules (1.28), (1.31), (1.32). Le tenseur des vitesses de déformation s'écrit sous la forme :

$$\dot{\epsilon}(v_h) = \sum_{n=1}^{Nbnoe} V_n B_n \quad (1.69)$$

où  $B_n$  est défini par (1.34).

Avec cette discrétisation le problème dynamique prend une forme équivalente à (1.35), avec  $\sigma$  adéquat au cas actuel. La résolution suit le même algorithme général déjà vu dans le cas des formulations en déplacement.

### 1.4.2 Discrétisation temporelle

Pour la discrétisation temporelle des schémas implicites et explicites peuvent être utilisés. Quelques exemples seront présentés par la suite.

#### a) Méthodes implicites

##### Cas quasi-statique

Notre attention sera concentrée d'abord sur les problèmes quasi-statiques. Dans ces cas de figure, le problème peut s'écrire , à  $t + \Delta t$ , sous la forme symbolique :

$$R(X^{t+\Delta t}, V^{t+\Delta t}) = 0 \quad (1.70)$$

Le calcul du vecteur vitesse  $V^{t+\Delta t}$  demande la résolution d'un système (linéaire ou non linéaire) résultant de (1.70), la méthode est donc implicite.

Pour la réactualisation des coordonnées, dont nous avons besoin dans la mise en forme, nous pouvons utiliser, par exemple, un schéma d'Euler explicite [62] :

$$X^{t+\Delta t} = X^t + \Delta t V^t \quad (1.71)$$

Si, maintenant, nous considérons un schéma implicite pour la réactualisation des coordonnées :

$$X^{t+\Delta t} = X^t + \Delta t V^{t+\Delta t} \quad (1.72)$$

alors, le problème devient plus compliqué [11] :

$$R(X^t + \Delta t V^{t+\Delta t}, V^{t+\Delta t}) = 0 \quad (1.73)$$

Dans ce cas nous retrouvons la même situation rencontrée dans le cadre des formulations en déplacement.

Une première possibilité est de considérer que la configuration reste la même pendant tout un incrément. Cela est équivalent au cas (1.71).

Une deuxième possibilité est de supposer que :

$$X^{t+\Delta t(k)} = X^t + \Delta t V^{t+\Delta t(k-1)} \quad (1.74)$$

pour chaque itération  $k$  de la méthode de Newton-Raphson [8].

C'est une approximation qui peut déterminer une convergence moins rapide de la méthode Newton-Raphson.

Pour une meilleure précision, il faudrait calculer une dérivée de domaine ce qui compliquera la résolution et augmentera le temps de calcul .

Bien évidemment, il existe plusieurs schémas proposés dans la littérature pour l'analyse implicite des processus de mise en forme quasi-statiques. Nous avons montré ci-dessus deux exemples assez classiques mettant en évidence des aspects qui caractérisent les méthodes implicites utilisées pour les formulations en vitesse.

### Cas dynamique

Quand l'inertie est prise en compte, on peut écrire les équations à la fin de l'incrément, soit :

$$C\Gamma^{t+\Delta t} + R(X^{t+\Delta t}, V^{t+\Delta t}) = 0 . \quad (1.75)$$

Une procédure qui peut s'appliquer pour résoudre le problème (1.75) consiste à prendre en compte un schéma de type Newmark, (1.45) pour les vitesses et (1.44) pour les coordonnées [11].

Ce schéma est complètement implicite, car les coordonnées et les vitesses sont exprimées en fonction de l'inconnue  $\Gamma^{t+\Delta t}$ . L'utilisation d'un tel schéma implique certaines complications, de même type que celles qui apparaissent dans le deuxième schéma quasi-statique présenté antérieurement.

Un schéma de ce type pour  $a = \frac{1}{2}$  et  $b = \frac{1}{6}$  a été utilisé pour l'analyse des cas viscoplastiques [1].

Un autre exemple de schéma implicite qui peut s'appliquer pour résoudre le problème dynamique est le schéma de type Houbolt. A partir des formules (1.51), (1.52) écrites pour  $X$  à la place de  $U$ , nous pouvons en déduire les expressions :

$$X^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t^2}{2} \Gamma^{t+\Delta t} + 5X^t - 2X^{t-\Delta t} + \frac{1}{2} X^{t-2\Delta t} \quad (1.76)$$

$$V^{t+\Delta t} = \frac{\Delta t}{3} \Gamma^{t+\Delta t} + \frac{1}{6\Delta t} (7X^{t+\Delta t} - 8X^t + X^{t-\Delta t}) \quad (1.77)$$

afin de résoudre le problème (1.75). Nous rencontrons le même type de complications liées à la réactualisation du domaine.

### b) Méthodes explicites

Pour le cas des formulations en vitesse l'équation (1.36) est considérée, à l'instar de la plupart des méthodes explicites, à l'instant  $t$  [62]. La matrice de masse  $C$  est diagonalisée, ce qui implique le calcul de l'accélération est immédiat, conformément à la relation :

$$\Gamma^t = -C^{-1}R(X^t, V^t) \quad (1.78)$$

en supposant connues les coordonnées  $X^t$  et les vitesses  $V^t$ .

Pour leur réactualisation, ainsi que pour celle des vitesses sont appliqués des schémas explicites. Un exemple de schéma explicite qui peut être appliqué au problème (1.78) est introduit par les expressions suivantes :

$$X^{t+\Delta t} = X^t + \Delta t V^t + \frac{\Delta t^2}{2} \Gamma^t \quad (1.79)$$

$$V^{t+\Delta t} = V^t + \Delta t \Gamma^t \quad (1.80)$$

## 1.5 Formulations mixtes

Les approches en déplacement ou en vitesse étaient les plus souvent utilisées dans le passé pour des applications pratiques, pour la simple raison qu'elles étaient plus économiques. Néanmoins, les formulations mixtes sont plus précises [72], [4], [62] que les méthodes de pénalisation pour la prise en compte de contraintes (incompressibilité, contact, par exemple).

Si une formulation mixte est envisagée, alors, les inconnues seront, par exemple, le déplacement et le tenseur des contraintes. Nous ne présenterons pas ce type de formulation dans le cadre de cette étude. Le lecteur intéressé trouvera une description de ces approches dans [4], [62].

Quand nous nous plaçons dans le cas des matériaux viscoplastiques, pour lesquels nous devons imposer une condition d'incompressibilité ou de quasi-incompressibilité, alors, nous considérons une formulation mixte en vitesse et pression.

Si nous considérons le cadre des formulations en déplacement, nous pouvons mentionner l'existence des approches mixtes  $\mathbf{u}/\mathbf{p}$  (déplacement/pression) [72]. D'un autre côté, à partir des formulations en vitesse, nous trouvons les formulations mixtes  $\mathbf{v}/\mathbf{p}$  (vitesse/pression). Ces dernières feront le sujet de notre présentation.

Dans le problème mécanique (1.25), nous prenons en compte la décomposition du tenseur des contraintes en tenseur déviateur des contraintes  $s$  et en pression  $p$ , conformément à la relation :

$$\sigma = s - pI \quad (1.81)$$

où la pression est définie par :

$$p = -\frac{1}{3}\text{trace}(\sigma) \quad (1.82)$$

La condition d'incompressibilité est exprimée par :

$$\text{div}(v) = 0 \quad (1.83)$$

Dans le cas quasi-statique le problème s'écrit sous la forme intégrale suivante :

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot v^* dS - \int_{\Omega} s : \dot{\varepsilon}(v^*) d\omega + \int_{\Omega} p \cdot \text{div}(v^*) d\omega = 0 \\ \int_{\Omega} \text{div}(v) \cdot p^* d\omega = 0 \end{cases} \quad (1.84)$$

quelque soient les champs de vitesse et de pression  $v^*$  et  $p^*$ .

Si le cas dynamique est considéré, alors l'incompressibilité peut s'exprimer en fonction de l'accélération selon la formule :

$$\text{div}(\gamma) - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (1.85)$$

Cette formule est obtenue à partir (1.83) en la différentiant par rapport au temps (détails en Annexe B).

La forme intégrale du problème dynamique correspond à :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho \gamma \cdot v^* d\omega - \int_{\partial\Omega} \sigma n \cdot v^* dS - \int_{\Omega} \rho g \cdot v^* d\omega + \int_{\Omega} s : \dot{\varepsilon}(v^*) d\omega - \int_{\Omega} p \cdot \text{div}(v^*) d\omega = 0 \\ \int_{\Omega} \text{div}(\gamma) \cdot p^* d\omega - \int_{\Omega} \text{trace} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot p^* d\omega = 0. \end{cases} \quad (1.86)$$

### 1.5.1 Discrétisation spatiale

Les coordonnées, les vitesses et les accélérations, ainsi que le tenseur des vitesses de déformation sont discrétisées avec les formules (1.28), (1.31), (1.32), (1.69) et les pressions sont approximées par :

$$p_h = \sum_{n=1}^{Nbnoe} P_n M_n. \quad (1.87)$$

où  $M_n$  est une fonction d'interpolation compatible.

Alors, le problème devient :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho \gamma_h \cdot N_n d\omega + \int_{\Omega} s(v_h) : B_n d\omega - \int_{\partial\Omega_C} \tau_h \cdot N_n dS - \int_{\Omega} p_h \cdot \text{tr}(B_n) d\omega = 0 \\ - \int_{\Omega} \text{div}(\gamma_h) \cdot M_m d\omega + \int_{\Omega} \text{trace} \left( \frac{\partial v_h}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_h}{\partial x} \right) \cdot M_m d\omega = 0. \end{cases} \quad (1.88)$$

La forme symbolique s'écrit :

$$\begin{cases} C(X)\Gamma + R_{\Gamma}(X, V) + D(X)P = 0 \\ {}^T D(X)\Gamma + R_P(X, V) = 0. \end{cases} \quad (1.89)$$

### 1.5.2 Discrétisation temporelle

Dans le cas des formulation mixtes, la résolution du problème peut employer les méthodes implicites aussi bien que celles explicites. Par la suite, une présentation des deux types de méthodes est proposée.

#### a) Méthodes implicites

##### Cas quasi-statique

Considérons, d'abord le cas quasi-statique :

$$\begin{cases} R_{\Gamma}(X, V) + D(X)P = 0 \\ {}^T D(X)V = 0. \end{cases} \quad (1.90)$$

alors, le raisonnement fait pour la formulation en vitesse est le même que dans le cas de la formulation mixte. Nous considérerons le même type de schémas. Ensuite, la méthode de Newton-Raphson est employée pour résoudre le système en vitesse et pression. Les difficultés rencontrées dans le cas de la formulation en vitesse pour le schéma (1.72) seront retrouvées dans la formulation mixte correspondante.

##### Cas dynamique

Pour le cas dynamique (1.89) nous remarquons l'existence de trois inconnues : la vitesse, la pression et l'accélération. Alors, il est nécessaire d'utiliser une relation entre l'accélération et la vitesse.

Une possibilité est d'exprimer l'accélération à l'aide d'un schéma du type suivant :

$$\gamma^t \cong \frac{v^t - v^{t-\Delta t}}{\Delta t}. \quad (1.91)$$

De cette manière, le problème aura comme inconnues seulement la vitesse et la pression :

$$\begin{cases} C(X^t) \left( \frac{V^t - V^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) + R_\Gamma(X^t, V^t) + D(X^t)P^t = 0 \\ {}^T D(X^t)V^t = 0. \end{cases} \quad (1.92)$$

Pour la réactualisation des coordonnées nous pouvons considérer un schéma de type (1.79).

La solution du problème est trouvée en résolvant un système. Pour cette raison la méthode proposée est implicite. D'autres schémas seront présentés dans le chapitre 2.

## b) Méthodes explicites

Nous mentionnons, que l'état actuel des techniques, ne permet guère d'envisager une résolution complètement explicite du problème (1.89). En effet, pour une telle résolution il faudrait diagonaliser non seulement la matrice de masse  $C$ , mais aussi la matrice  $D$  issue de la condition d'incompressibilité. Dans ce cas de figure, l'incompressibilité ne serait plus correctement imposée.

Une formulation partiellement explicite est proposée dans un premier temps [60]. Dans ce sens l'équation d'incompressibilité est exprimée en fonction de l'accélération, conformément à la relation (1.85).

Utilisant le raisonnement habituel, avec les formules de discrétisation (1.28), (1.31), (1.32) et (1.87) pour les coordonnées, les vitesses, les accélérations et les pressions, nous trouvons la forme symbolique :

$$\begin{cases} C(X^t)\Gamma^t + D(X^t)P^t = -R_\Gamma(X^t, V^t) \\ {}^T D(X^t)\Gamma^t = -R_P(X^t, V^t). \end{cases} \quad (1.93)$$

La réactualisation des coordonnées et des vitesses sera faite selon les schémas explicites (1.79), (1.80).

Ce nouveau problème est résolu en accélération et pression. L'avantage par rapport aux méthodes implicites, présentées avant, est que dans ce cas le système à résoudre est linéaire, donc la méthode de Newton-Raphson n'est pas utilisée. Cette méthode sera présentée en détail dans le chapitre 3.

Une façon encore "plus explicite" de calculer la solution du problème (1.93) peut se résumer en trois grandes étapes :

- de la première équation de (1.93), où la matrice de masse  $C$  est diagonalisée, l'accélération est calculée en fonction de la pression :

$$\Gamma^t = -{}^L C^{-1}[R_\Gamma(X^t, V^t) + D(X^t)P^t] \quad (1.94)$$

– la relation (1.94) est introduite dans la deuxième équation de (1.93) et un système symétrique en pression est obtenu :

$${}^T D^L C^{-1} D(X^t)P^t + {}^T D^L C^{-1} R_\Gamma(X^t, V^t) - R_P(X^t, V^t) = 0 \quad (1.95)$$

– une fois le système (1.95) résolu, l'accélération est calculée par (1.94)

Pour la réactualisation des variables nous prendrons en compte les mêmes formules que dans le cas précédent.

## 1.6 Conclusion concernant les méthodes implicites et explicites

Pour donner une approche plus générale des idées présentées antérieurement, nous allons résumer un quelques lignes les caractéristiques les plus importantes des méthodes explicites et implicites.

### Les méthodes explicites :

1. Le schéma d'intégration temporelle est **explicite**. L'état du problème à la fin de l'incrément est calculé seulement à l'aide de celui du début de l'incrément ou des incréments précédents.
2. La résolution du problème à chaque pas de temps est **peu coûteuse** (aucune résolution de système n'est nécessaire quand la matrice de masse est condensée).
3. La méthode est conditionnellement stable, ce qui implique l'utilisation de pas de temps assez petits.

### Remarques

- a. En général, les méthodes explicites sont rapides à implémenter, grâce à la simplicité de l'algorithme.
- b. Les méthodes explicites demandent moins de place mémoire et disque, en comparaison aux méthodes implicites.
- c. Les modifications des paramètres concernant la condition de stabilité peuvent influencer fortement les résultats. Des perturbations non souhaitées apparaissent quand les paramètres sont trop modifiés.

### Les méthodes implicites :

1. Le schéma d'intégration temporelle est **implicite**. L'état du problème à la fin de l'incrément est calculé non seulement à l'aide de celui du début de l'incrément ou des incréments précédents mais aussi de l'état à la fin de l'incrément, qui est inconnu.
2. La résolution du problème est **coûteuse** car elle implique la résolution d'un système.
3. La méthode est inconditionnellement stable (le pas de temps est limité seulement par des considérations liées à la précision de la méthode).



## Remarques

- a. Le temps de calcul pour les méthodes implicites est souvent plus élevé, par rapport à celui des méthodes explicites (quand, il n'y a pas de complexité particulière qui peut inverser la situation).
- b. Il n'est pas nécessaire de modifier des paramètres physiques, il n'y a donc pas de perturbation des résultats.

Dans les paragraphes précédents nous avons passé en revue les aspects théoriques concernant les méthodes explicites, ainsi que celles implicites. Les avantages et les inconvénients des unes et des autres ont été brièvement mis en évidence dans le contexte théorique.

Par la suite, nous allons présenter et analyser des résultats obtenus en mise en forme avec des codes de calcul explicites et implicites. Nous tenterons d'évaluer l'efficacité des deux familles des codes à partir des résultats issus de la littérature.

## 1.7 Résultats issus de la littérature

Un des points important de la recherche des dernières années est d'établir dans quelles conditions les codes explicites et implicites peuvent s'appliquer pour des cas industriels.

Pour l'instant, le débat est encore ouvert [41], [55], [28], [51] et il n'y a pas de consensus pour décider si les deux méthodes doivent être évaluées par rapport à leur précision, fiabilité ou temps de calcul.

Une étude bibliographique portant sur le sujet sera présentée par la suite.

### 1.7.1 L'emboutissage

a) La description du comportement du matériau lors de la mise en forme des tôles a suscité de nombreux développements.

Il existe des codes éléments finis aussi bien implicites qu'explicites pour simuler le formage des tôles et les phénomènes qui interviennent dans ces procédés, comme le retour élastique, par exemple.

Une analyse de l'emboutissage d'un rail en S avec le code explicite Stampack est réalisée par J.Rojec et al. [51].

Le processus d'estampage sans l'analyse du retour élastique, pour une tôle d'acier IF (interstitial free, i.e. un acier à très faible teneur en carbone) a été correctement simulé avec le code explicite.

Pour l'étude du phénomène de retour élastique, qui est assez difficile à modéliser, ils proposent deux solutions. Après la simulation explicite du processus d'estampage, une possibilité est d'utiliser le même code explicite pour analyser le retour élastique. La deuxième possibilité est d'effectuer la modélisation du retour élastique avec une méthode implicite.

En comparant les résultats obtenus avec ces deux procédures, J.Rojec et al. ont remarqué que le phénomène est correctement modélisé par les deux codes. La forme finale dans les deux cas est pratiquement la même. Dans la figure (1.1) nous pouvons voir le résultat final après le retour élastique. Le phénomène de flambement apparaît dans la partie supérieure. On observe une bonne prédiction du flambement (1.2(b)) quand le résultat est comparé

avec le cas réel (1.2(a)).

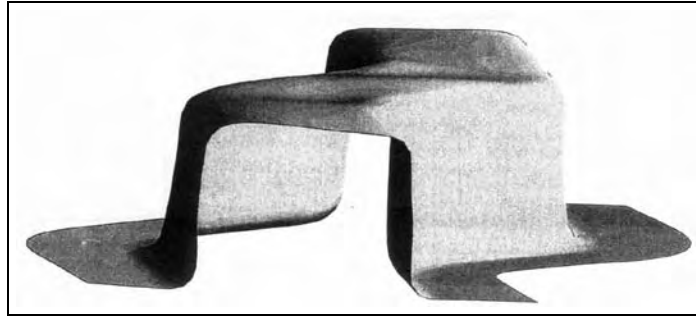


FIG. 1.1 – La forme finale de la pièce après le retour élastique

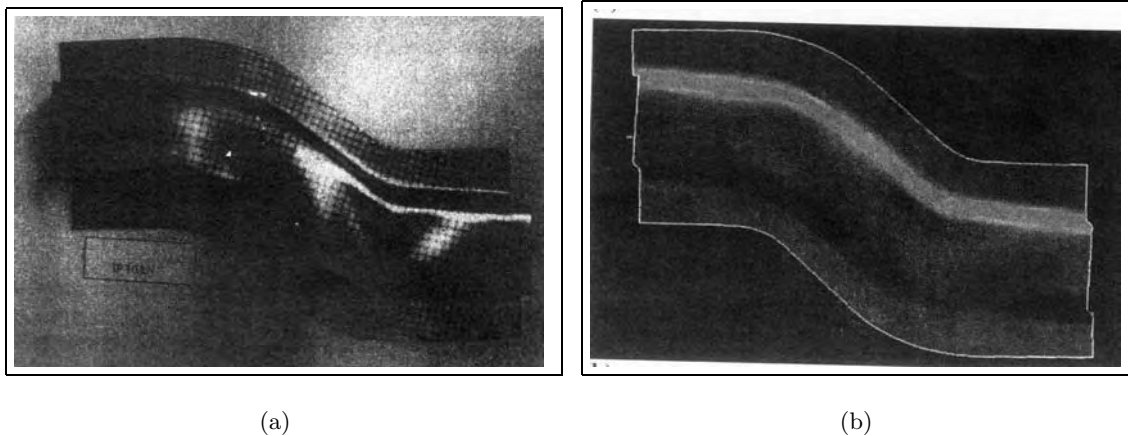


FIG. 1.2 – Comparaison expérience/ simulation : la partie supérieure de la pièce déformée - apparition du flambement

Le temps de calcul, par contre, varie fortement. En effet, le temps de calcul pour le code explicite a été presque le même que celui obtenu pour réaliser la simulation de la mise en forme (i.e. 10 h), donc, très long. En revanche, le temps de calcul obtenu avec le code implicite est seulement de quelques minutes.

En analysant cet exemple, on peut dire que la modélisation numérique du phénomène de retour élastique avec un logiciel explicite n'est pas très efficace en terme de temps CPU (au moins pour le cas considéré).

**b)** M. Kawka et al.[31] proposent une analyse d'un processus d'estampage en quatre passes pour le cas du formage d'un disque de roue. Chaque étape est suivie d'une analyse du retour élastique.

La simulation de ce procédé a été faite avec le code explicite ITAS3D (la matrice de rigidité qui, dans les codes statiques, est une source de non linéarité, est supposée constante par incrément).

Pour faire une meilleure analyse du processus, ils se sont posé des questions sur le type d'éléments finis à utiliser. Dans ce sens, ils ont utilisé des éléments de coque mince (shell element) et aussi des éléments volumiques. Les éléments surfaciques impliquent moins de

degrés de liberté que les éléments volumiques. Néanmoins, pour des déformations plus compliquées, les éléments volumiques sont préférables.

Pour les deux types d'éléments, une comparaison est faite sur les résultats de l'analyse du retour élastique.

Après le premier estampage, les différences entre les résultats obtenus dans les deux cas ne sont pas importantes. Par contre, après le deuxième estampage, ils ont déjà obtenu des différences énormes : la géométrie du retour élastique simulée avec des éléments de coque mince est très loin de la géométrie expérimentale, alors que la géométrie qui résulte de la simulation avec des éléments volumiques est conforme à la réalité.

Dans ce cas, on remarque une bonne concordance entre le résultat de la simulation numérique et celui expérimental, ce qui peut se voir dans la figure (1.3).

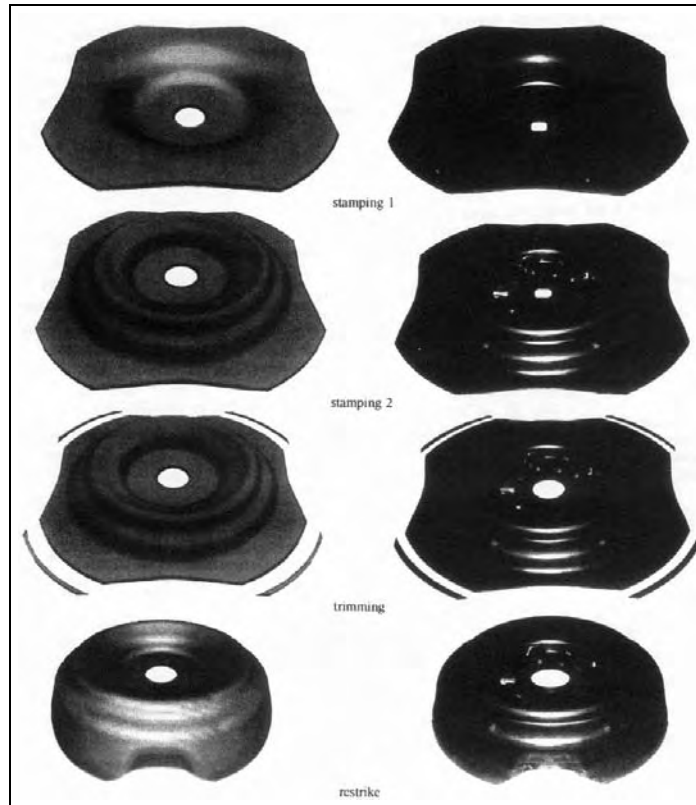


FIG. 1.3 – Résultats du processus d'estampage en 4 passes : numérique/ expérience

c) Les méthodes explicites sont conditionnellement stables, comme nous venons de le préciser dans la partie précédente de ce chapitre. Des modifications des paramètres liés au procédé à étudier sont, en général, effectuées dans le but d'améliorer la condition de stabilité et ainsi de pouvoir utiliser un pas de temps plus grand.

Ces modifications peuvent influencer les résultats des simulations, c'est la conclusion déduite par S.P.WANG et al. [63]. Dans ce sens une étude est faite pour le cas de l'emboutissage d'une boîte. La simulation est réalisée avec le code MARC en version explicite, mais aussi implicite.

Pour la modélisation explicite, la densité est multipliée par un facteur  $10^5$  et la vitesse est augmentée de  $3 \text{ mm/s}$  à  $100 \text{ mm/s}$ , ce qui est équivalent à augmenter la vitesse du processus à  $10.54 \text{ m/s}$  (i.e. une multiplication de la vitesse d'un facteur  $3.51 \cdot 10^3$ ).

Pour ce cas, le résultat explicite est pratiquement identique à celui implicite, comme nous pouvons remarquer dans la figure (1.4), où la variation de l'épaisseur est représentée à la fin de la simulation. Par contre, la simulation implicite a été réalisée en 104 incréments, tandis que la simulation explicite a été réalisée en 21000 incréments.

Pour analyser l'influence des modifications effectuées sur les paramètres, un autre cas est considéré, la vitesse de l'outil étant cette fois-ci de  $400 \text{ mm/s}$ . En conséquence, un amincissement significatif sur les parois et aux coins de la pièce est remarqué, ce qui ne correspond pas à la réalité.

Ces résultats montrent que les modifications des paramètres peuvent perturber la solution finale, dans le cas des codes explicites.

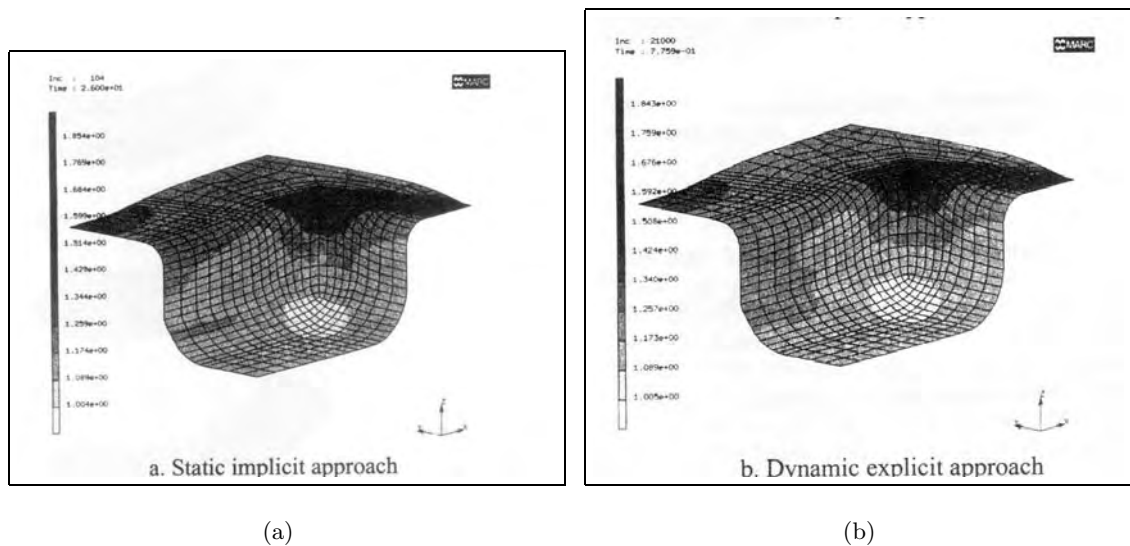


FIG. 1.4 – Comparaison des résultats pour l'emboutissage d'une boîte

**d)** Pour étudier l'effet des caractéristiques du matériau et du formage sur le modèle élément fini, A.G.Mamalis, D.E.Manolakos et A.K. Baldoukas [36] ont fait des simulations numériques avec le code explicite non-linéaire DYNA3D dans le cas de l'emboutissage d'un godet cylindrique.

Ils ont analysé l'influence de la densité simulée du matériau  $\rho_{sim}$ , de la vitesse de l'outil  $u_{sim}$ , du coefficient du frottement de Coulomb  $\mu$  sur le temps de calcul.

Les tests sont faits pour plusieurs matériaux (plusieurs types d'acier, aluminium pur) et pour trois géométries différentes de godets axisymétriques.

Pour tous les cas considérés, leur analyse montre que les meilleures simulations (en terme de temps de calcul et précision des résultats) correspondent aux situations où la densité simulée varie entre  $\rho \times 10^{-1}$  et  $\rho \times 10^{-3}$  (où  $\rho$  est la vraie densité du matériau), la vitesse du poinçon varie entre  $u \times 10^3$  et  $u \times 10^4$  (où  $u$  est la vraie vitesse) et le coefficient de frottement de Coulomb entre 0.03 et 0.15.

L'analyse porte aussi sur le type d'élément fini utilisé, alors l'application des éléments surfaciques et volumiques est étudiée pour tous les cas précédents.

Le groupe de paramètres pour lesquels les meilleurs résultats (en terme de précision et de temps de calcul) sont obtenus avec les deux types d'éléments est  $\rho_{sim} = \rho \times 10^{-3}$ ,  $u_{sim} = u \times 10^4$ ,  $\mu = 0.03$ .

La répartition de la déformation dans l'épaisseur et la représentation de la force par rapport au déplacement, pour le cas de "low-carbon steel" et le groupe de paramètres ci-dessus, sont représentées dans la figure (1.5).

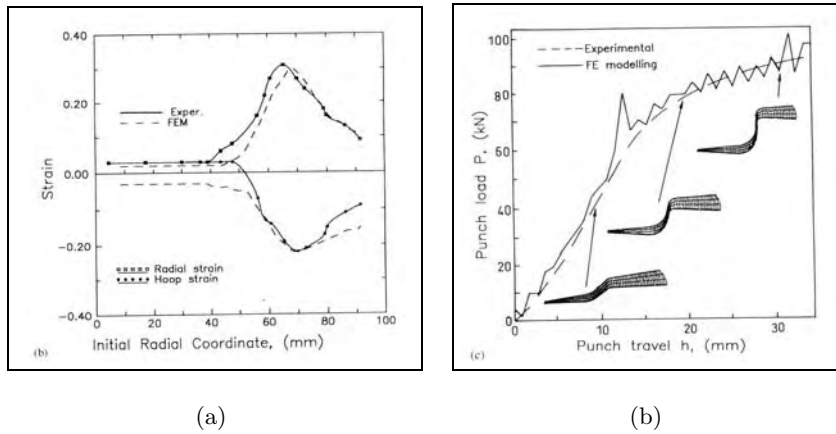


FIG. 1.5 – Répartition de la déformation dans l'épaisseur / Représentation de la force par rapport au déplacement

Ces distributions sont bien prédites pour les deux cas (des éléments de coque mince et volumiques), mais une réduction de 50% sur le CPU est notée pour le cas des éléments de coque mince.

Cette première étude est ensuite approfondie pour le cas de l'emboutissage d'une boîte carrée [35]. Pour une vitesse de l'outil de  $u \times 10^3$  et une densité de matériau de  $\rho \times 10^{-3}$  le temps de calcul résultant est 10 fois plus grand, donc la simulation numérique pour ce type des cas ne présente pas d'intérêt.

D'autre part, pour des grandes vitesses de déformation comme  $u \times 10^4$  et densités de matériau de type  $\rho \times 10^{-1}$ , le temps de calcul est relativement petit. Cependant, une grande différence est trouvée entre les résultats simulés et ceux expérimentaux.

La conclusion de cette étude est que les paramètres les plus efficaces pour ce deuxième cas sont :  $\rho_{sim} = \rho \times 10^{-3}$ ,  $u_{sim} = u \times 10^4$ ,  $\mu = 0.03$ , les mêmes que ceux obtenus dans [36].

Pour ce groupe de paramètres, la répartition de la déformation dans l'épaisseur, ainsi que l'évolution de la force en fonction du déplacement sont correctement simulées, conformément aux résultats expérimentaux.

Les exemples présentés montrent que, pour la modélisation de l'emboutissage, les méthodes explicites peuvent être utilisées dans le but d'obtenir des simulations plus rapides dans les situations où l'inertie est suffisamment importante, c'est à dire lorsqu'il n'est pas nécessaire de trop l'augmenter artificiellement. Des modifications importantes sur les paramètres physiques ou de formage sont susceptibles de perturber les résultats.

### 1.7.2 L'hydro-formage

a) L'hydro-formage est un processus pour le formage des tôles. Dans le cas d'hydro-formage, le retour élastique ainsi que la formation des plis au long de la déformation représentent des phénomènes difficiles à modéliser.

Pour le cas de l'hydro-formage d'un flan, S.P.WANG et al. [63] ont analysé les résultats obtenus avec le code MARC explicite et implicite. Le retour élastique, ainsi que la formation

des plis sont pris en compte dans leur étude. L'influence des modifications des paramètres (comme la densité du matériau et la vitesse du procédé) sur les résultats des simulations est évaluée.

La simulation numérique du processus par le code implicite a convergé vers une solution cohérente en 516 min.

La figure (1.6(a)) montre quelques étapes intermédiaires de la simulation implicite. L'apparition des plis est remarquée pendant la déformation, mais le chargement très important fait disparaître le phénomène au final.

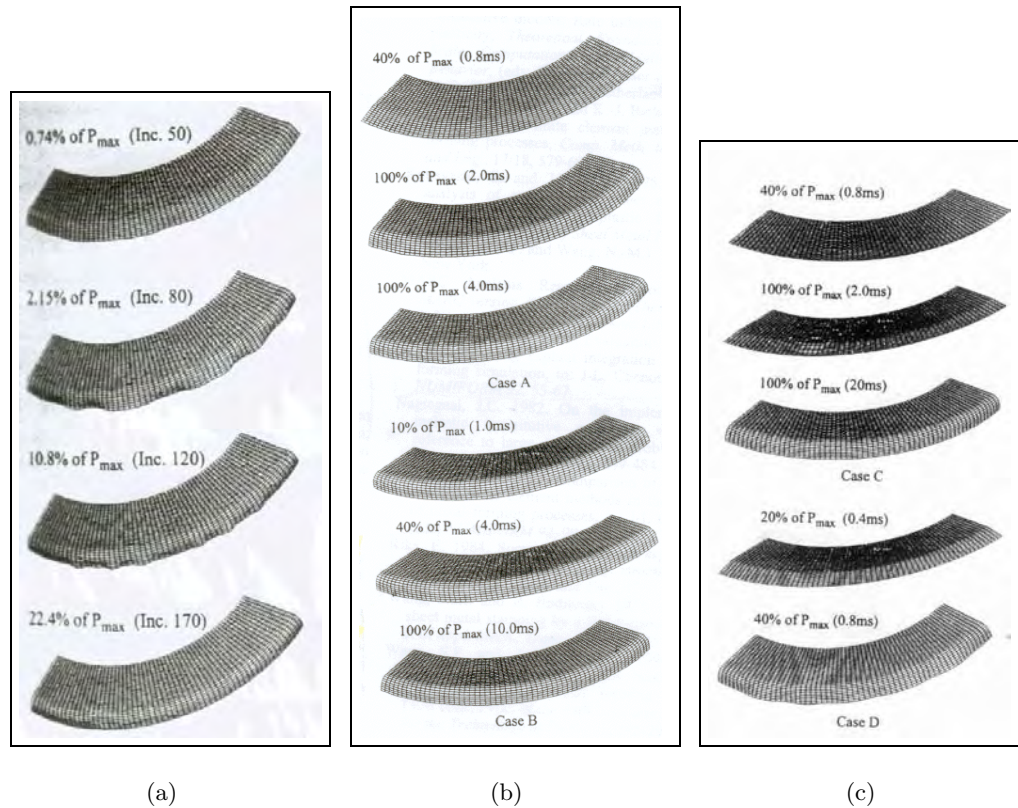


FIG. 1.6 – Implicite(a) / Explicite (b,c)

Pour l'analyse explicite quatre cas ont été considérés, correspondant à différentes valeurs de la densité du matériau et de la vitesse de chargement. Les auteurs ont essayé de modifier la densité et la vitesse de déformation pour améliorer la condition de stabilité et voir l'influence de ces mêmes modifications sur le processus étudié. Les facteurs multiplicatifs concernant la densité pour les cas A, B, C, D considérés sont 1.0, 1.0, 100 et 0.01, respectivement. Les temps nécessaires pour atteindre la pression maximale  $P_{max}$  pour les quatre cas analysés sont 2, 10, 2 et 2 ms, respectivement.

Dans le cas D nous observons que la densité est diminuée, tandis que le chargement ne présente aucune modification. C'est une situation rarement rencontrée dans la littérature, car, en général, la densité est multipliée par un facteur variant entre 10 et  $10^6$ . Il est possible de trouver une diminution de la densité quand la vitesse est artificiellement augmentée d'un facteur suffisamment élevé pour déterminer une inertie très importante (par exemple, la vitesse est multipliée par plus de  $10^3$  [36], [35]).

Les temps de calcul pour les cas A, B, C sont 167, 857 et 16 minutes. Dans le cas D le

temps de calcul pour effectuer la simulation jusqu'à 40% de chargement est de 641 minutes. Ce dernier cas n'a pas été terminé à cause de l'instabilité du contact conséquence de la diminution de la densité.

Nous observons, dans les figures (1.6(b)), (1.6(c)), des différences significatives entre les géométries obtenues par le code explicite et celles obtenues par le code implicite. Dans les cas explicites A, B, C on ne voit pas l'apparition des plis. Dans le cas D, seulement, le phénomène apparaît et est comparable au résultat obtenu dans le cas implicite. L'apparition des plis pour le cas D est due à une faible inertie résultant de la diminution de la densité.

Une comparaison des cas A et C met en évidence l'effet de l'inertie sur les résultats. Les deux cas sont réalisés avec la même vitesse de chargement. Par contre, la densité est multipliée par un facteur de 100 dans le cas C. En conséquence, la déformation de la pièce dans le cas C dure plus longtemps à cause de l'inertie qui est plus importante.

En regardant les cas A et C nous observons que, au moment ( $2.0\text{ ms}$ ) où le chargement total est appliqué, la géométrie obtenue n'est pas celle attendue. Alors, les calculs doivent être poursuivis, ce qui montre que, dans le cas considéré, l'augmentation de la densité ne réduit pas le temps de calcul.

Pour le cas étudié ci-dessus on constate que les méthodes implicites se montrent plus efficaces que celles explicites pour la prédiction de l'apparition des plis pendant la déformation et pour la modélisation du processus en général. L'effet d'inertie dans les analyses explicites influence significativement les résultats des simulations numériques.

**b)** Dans l'analyse précédente on a vu que la formation des plis n'est pas facile à détecter en utilisant les méthodes explicites. Et pourtant, il est très important de détecter la formation des plis depuis le début par une procédure courte pour être en mesure d'arrêter la simulation et de recommencer le calcul avec un autre modèle.

Per Nordlund et al. [45] présentent un algorithme capable d'indiquer l'apparition des plis. Leur algorithme est prévu pour être utilisé avec l'intégration explicite de la formulation éléments finis. Il est implémenté dans le code explicite DYNA-3D. Leur théorie est testée sur quelques exemples. Un de ces exemples représente la simulation du formage d'un godet à partir d'une tôle circulaire avec un poinçon et une pression d'huile.

La façon d'imposer cette pression au poinçon joue un rôle important dans la formation des plis [69], alors, il est intéressant d'obtenir, assez rapidement, des informations sur la formation des plis correspondant à différents chargements, afin de trouver le plus convenable.

En général, les plis sont visibles tardivement pendant une simulation, ce qui pose un problème en terme de temps.

L'indicateur proposé par Per Nordlund et al. met en évidence la formation des plis suffisamment tôt.

Le fait de savoir où et quand les plis apparaissent donne la possibilité de raffiner le maillage dans les régions concernées, afin de saisir plus précisément les plis si nécessaire.

La figure (1.7) montre deux étapes de la déformation où les plis sont illustrés, en noir, par l'indicateur implémenté dans le code. Les images fournissent une claire apparition des plis.

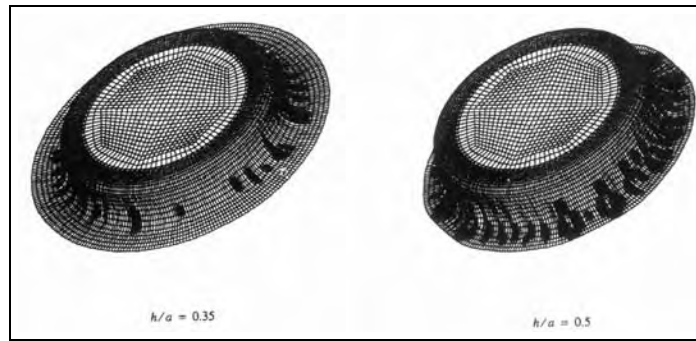


FIG. 1.7 – Évolution des plis lors de la déformation

### 1.7.3 Usinage

a) L'usinage est un autre processus qui pose beaucoup de problèmes à cause de la complexité des paramètres qui interviennent :

- pour l'outil : la géométrie (parfois compliquée), la vitesse élevée, le gradient thermique ;
- pour la pièce : la géométrie du copeau, la localisation du cisaillement dans une bande très étroite, le frottement.

La simulation numérique du procédé permet de réduire considérablement le nombre d'essais expérimentaux qui sont assez coûteux. En conséquence, le développement de codes capables de modéliser correctement le processus d'usinage représente un autre centre d'intérêt pour la recherche.

T.D.Maruside et M.Ortiz [39] proposent une analyse du processus d'usinage à grande vitesse. Leur étude est basée sur les résultats obtenus avec un code explicite. Le pas de temps critique (issu de la condition de stabilité) est calculé au niveau de l'élément selon un algorithme (dit "subcycling") proposé par Belytschko [6], [5]. Cette technique permet d'éviter l'utilisation d'un pas de temps global trop petit. Pour le traitement du contact, une méthode "predictor-corrector" proposée par Taylor et Flanagan [59] est utilisée.

Les résultats obtenus montrent une bonne description de la morphologie du copeau, les résultats de la simulation sont donnés sur la figure (1.8).

b) Les problèmes liés à l'usinage orthogonal à grande vitesse comme les phénomènes thermomécaniques complexes, le contact, la localisation du copeau sont étudiés par R.Rakotomalala et P.Joyot [49]. Une formulation ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) explicite du code RADIOSS est présentée et appliquée pour modéliser ce procédé.

Les résultats obtenus montrent l'efficacité de cette version de code explicite pour le cas analysé.

La figure (1.9) présente la répartition des contraintes à la fin de la simulation. On remarque l'existence de la valeur maximale dans la région dite "primary shear zone".

c) Une autre formulation ALE explicite est présentée par R.Rakotomalala, M. Touratier et al. [47] pour analyser les processus d'usinage orthogonal et oblique. Leur résultats sont conformes à la réalité, mais les cas considérés sont des cas particuliers d'usinage. Le sujet devrait être approfondi en considérant des situations plus complexes afin de vraiment conclure sur l'efficacité de cette méthode.



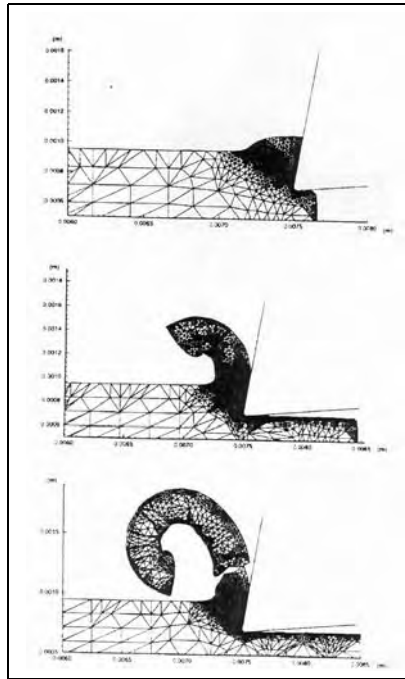


FIG. 1.8 – La morphologie du copeau

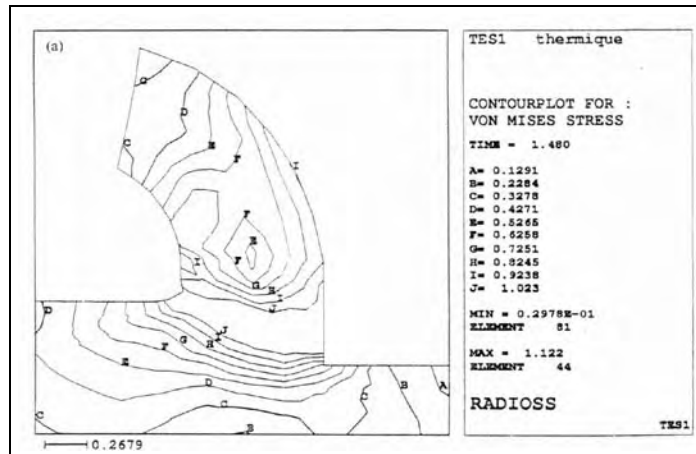


FIG. 1.9 – Répartition des contraintes à la fin de la simulation

### 1.7.4 Flambage

Un processus de flambage est analysé par Per Nordlund et al.[45]. Ce processus correspond à un test d'étirage d'une plaque carrée le long d'une des ses diagonales, conformément à la figure (1.10).

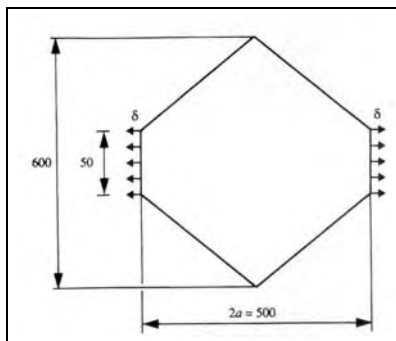


FIG. 1.10 – Définition du processus de flambage

Ce test implique une géométrie compliquée, avec formation de plis. Leur apparition est détectée avec un indicateur proposé par Per Nordlund et al.

La figure (1.11) montre, à différentes étapes, le développement des plis au cours de la déformation.

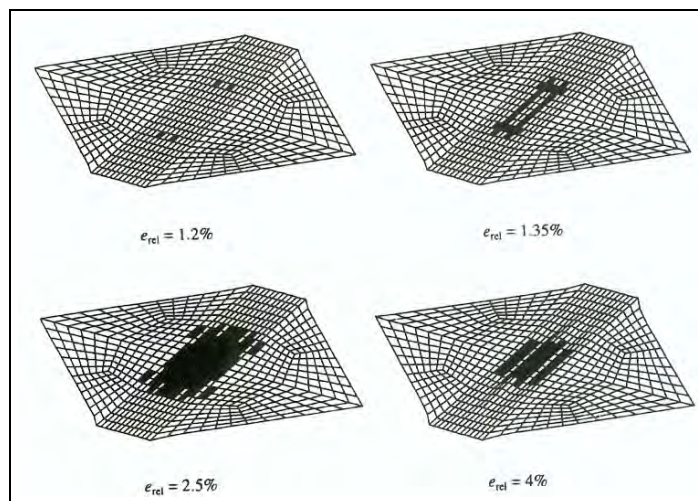


FIG. 1.11 – Évolution des plis lors de la déformation

Le traitement des plis est un problème délicat pour les codes des simulation numérique en général. Per Nordlund et al. proposent une solution qui donne des résultats prometteurs. Cette procédure est intégrée dans le code explicite DYNA-3D pour des raisons de rapidité concernant l'obtention des résultats. Elle peut être aussi bien testée dans le cas des codes implicites.

### 1.7.5 Gonflage

La distribution des contraintes, les contraintes résiduelles, la distribution des déformations qui interviennent dans le formage d'une coque double-couche par gonflage représentent des points d'intérêt pour la recherche, d'autant plus que les résultats expérimentaux ne sont pas faciles à obtenir à cause des mesures qui sont, parfois, difficiles à réaliser.

Pour obtenir des informations suffisantes concernant la distribution des contraintes, des déformations ou autres, des simulations éléments finis sont nécessaires.

S.H.Zang et al. [70] proposent une analyse du procédé avec le code explicite LS-DYNA3D (aucune modification de paramètre n'est mentionnée). Leurs résultats montrent une bonne approche de la réalité pour le formage d'une coque à double-couche dans une coque à double-couche sphérique. La distribution des contraintes obtenue par simulation donne des informations utiles sur l'apparition possible d'une fracture dans la couche interne.

### 1.7.6 Déformation plastique au cours d'un "crash"

Le "crash" est considéré comme étant très proche de la mise en forme. C'est pour cette raison que nous nous intéressons à l'analyse de ce processus.

a) Dans l'industrie automobile les questions sur la sécurité des passagers sont cruciales. Comme les tests avec des prototypes sont très coûteux, les simulations numériques représentent une nécessité économique.

L'industrie d'automobile a adopté rapidement les analyses avec des codes explicites dès l'apparition des versions commerciales des codes DYNA3D, PAMCRASH et RADIOSS.

La pratique montre que les méthodes explicites éléments finis peuvent simuler les phénomènes complexes et difficiles qui interviennent dans un "crash" grâce aux petits incréments de temps demandés.

Dans la suite deux exemples de tests de "crash" seront présentés à partir des résultats obtenus par S.R.Wu et J.Cheng [66] pour la firme FORD, avec le code explicite FCRASH.

#### a1) *La simulation d'un "crash" frontal*

L'impact frontal produit de très grandes déformations. Le phénomène de flambement apparaît également, la tôle ayant un comportement comparable à celui d'un papier que l'on froisse. La simulation d'un tel processus ne semble donc pas évidente.

En analysant un "crash" frontal avec le code FCRASH, S.R.Wu et J.Cheng réussissent à prédire une distance maximale de "crash" dans l'intervalle de 3% d'écart par rapport aux tests physiques. Des résultats cohérents sont obtenus concernant la décélération, ce qui sert à étudier la possible lésion de l'occupant.

La figure (1.12) montre les géométries initiale et finale après 70 ms d'impact.

La déformation est entièrement frontale et la partie concernée est diminuée de 1/3 à 1/2.

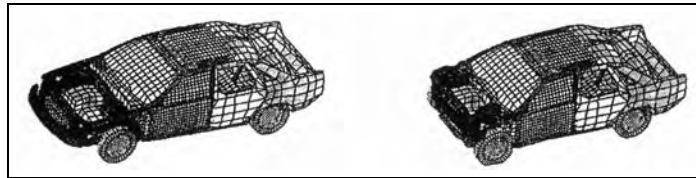


FIG. 1.12 – Géométries initiale et finale pour un "crash" frontal

**a2) La simulation d'un "crash" latéral**

Les automobiles sont plus sensibles sur la partie latérale, donc les simulations pour l'impact latéral présentent aussi un grand intérêt.

Pour ce cas la décélération est correctement simulée, ce qui permet d'analyser l'effet de l'impact sur l'occupant de la voiture.

La simulation nous sert à trouver quel modèle se comporte mieux au "crash" latéral.

**b) L'impact d'une boîte avec un mur représente aussi un exemple de "crash", qui implique des phénomènes complexes (très grandes déformations, flambement) et génère beaucoup de difficultés pour la simulation numérique.**

T. Belytschko et al.[7] ont fait des analyses pour réaliser une meilleure simulation du processus. Ils ont rajouté au code explicite WHAMS des méthodes de  $h$ -raffinement compatibles avec les méthodes explicites pour réaliser des maillages plus fins dans les endroits où une déformation sévère apparaît, par exemple.

La figure (1.13) montre l'évolution du  $h$ -raffinement pendant la déformation.

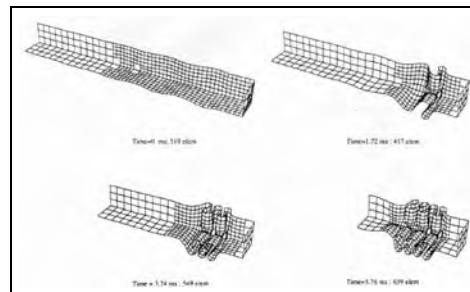
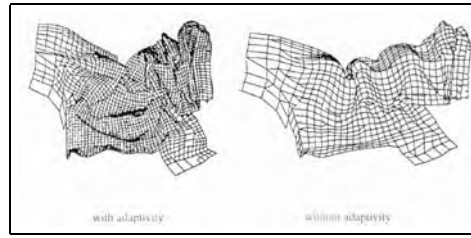


FIG. 1.13 – Déformation de la boîte (différentes étapes)

La méthode de  $h$ -raffinement implique l'utilisation d'éléments plus petits. En conséquence, le pas de temps critique est diminué. Pour éviter l'utilisation d'un pas de temps plus petit, un algorithme de "subcycling" (le pas de temps critique est calculé au niveau de l'élément) est utilisé.

La figure (1.14) met en évidence la différence entre les résultats obtenus pour la déformation d'une partie latérale d'une voiture avec et sans  $h$ -raffinement.

FIG. 1.14 – Déformation avec et sans  $h$ -raffinement

### 1.7.7 Forgeage

La simulation du processus de forgeage est réalisée, classiquement, avec des codes implicites, mais l'application des codes explicites représente une alternative analysée par plusieurs chercheurs.

a) Une comparaison entre les résultats obtenus avec les deux types de méthodes est présentée par A.J.L. Crook et al [17].

Ils analysent, dans un premier temps, l'écrasement de lopin élastoplastique. Les résultats obtenus avec des approches explicites et implicites sont comparés avec des résultats expérimentaux montrant une bonne concordance dans les deux cas. On note aussi que le temps de calcul est comparable.

Par contre, pour le cas du formage d'une nervure, même si les résultats obtenus par les deux méthodes sont conformes à la réalité, ceux issus du codes explicites sont fournis 4 fois plus rapidement.

Un autre exemple considéré concerne le forgeage d'un lopin axisymétrique d'aluminium en une pièce de géométrie complexe. La déformation est réalisée en une seule frappe. Le code implicite n'arrive pas à finir la simulation du procédé à cause des problèmes de convergence. En revanche, des résultats cohérents sont obtenus en une heure avec le code explicite.

Cette étude particulière montre une meilleure adaptation des codes explicites pour la modélisation des processus considérés.

b) Une étude concernant le processus de forgeage (multi-passe) par impact est proposée par Y.H.Yoo et al. [68], en utilisant des méthodes éléments finis explicites pour le cas des matériaux élastoplastiques.

Les résultats obtenus pour les cas d'un cylindre et d'un parallélépipède en acier à chaud et à froid sont conformes à l'expérience. La figure (1.15) présente les déformations à chaud pour les deux pièces considérées, à chaque pas.

Leur étude montre que le processus de forgeage (multi-passe) a pu être correctement simulé avec des méthodes explicites. Des résultats cohérents sont obtenus concernant les distributions des déformations, des températures, ainsi que sur l'évolution de la force de forgeage le long de la déformation.

La figure (1.16) présente l'évolution de la force de forgeage pour les deux cas présentés sur la figure (1.15), la valeur maximale pour le cas du parallélépipède étant comparable une valeur prédite théoriquement.

c) J. Rojek, O. C. Zienkiewicz et al. [52] proposent une analyse du processus de forgeage utilisant le code explicite Stampack. Un algorithme de splitting est appliqué pour permettre

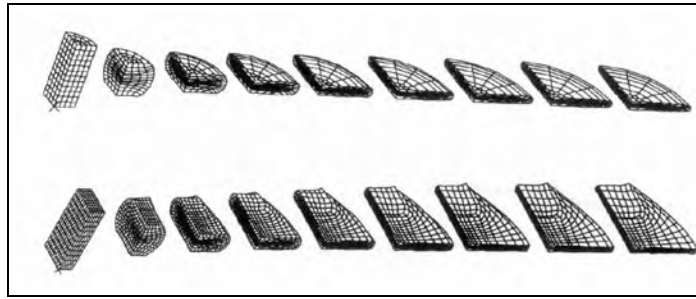


FIG. 1.15 – La déformation à chaud des pièces considérées

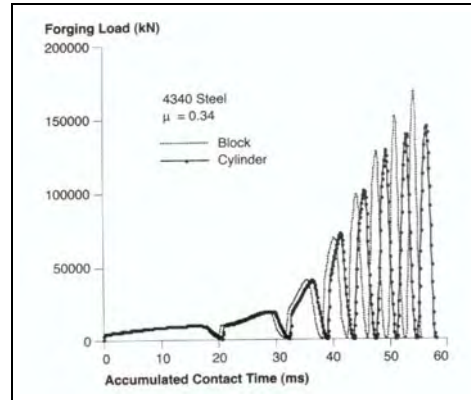


FIG. 1.16 – La déformations à chaud des pièces considérées

d'utiliser des éléments triangulaires et tétraédriques à la place des éléments Q1/P0 pour une analyse thermomécanique.

Les résultats obtenus pour la compression d'un cylindre jusqu'au 60%, par exemple, montre l'efficacité de la méthode proposée. Ces résultats sont comparés avec ceux issus d'une simulation avec le code ABAQUS implicite. Le matériau considéré (élastoplastique) a quasiment les mêmes propriétés que dans le cas ABAQUS de référence. La vitesse du processus n'est mentionnée pour aucun cas. Une comparaison est présentée dans la figure (1.17).

On remarque une bonne concordance des résultats sur l'évolution de la température. En revanche, nous ne trouvons pas des informations concernant l'évolution des contraintes, des déformations ou autre.

**d)** Tous les résultats présentés précédemment pour l'analyse du forgeage concernent des matériaux élastoplastiques. Toutefois, le forgeage à chaud est assimilé à des matériaux viscoplastiques. Les codes Forge2<sup>®</sup> et Forge3<sup>®</sup>, développés au CEMEF depuis la fin des années 80 et commercialisés par la société de valorisation TRANSVALOR, représentent un outil pour la simulation implicite du forgeage à chaud, aussi bien qu'à froid pour des matériaux viscoplastiques, élastoplastiques ou élasto-viscoplastiques.

Par la suite, nous présentons les résultats obtenus avec Forge2<sup>®</sup> dans le cas du forgeage à chaud en trois passes d'une roue d'avion en aluminium. L'histoire des déformations du matériaux est conservée d'une passe à l'autre et un remaillage automatique est utilisé.

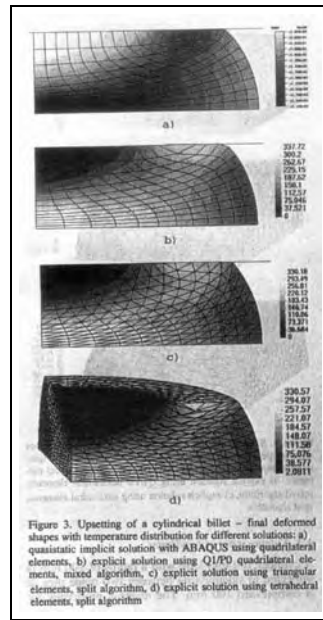
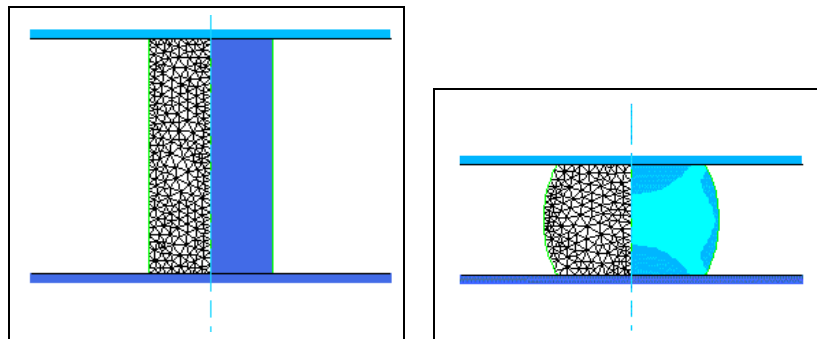


FIG. 1.17 – Compression d'un cylindre (60%) Distribution de la température : a) quasi-statique implicite ABAQUS b) solution explicite (Q1/P0) c) solution explicite (triangles, algorithme de splitting) d) solution explicite (tétraédres, algorithme de splitting)



(a) Géométrie initiale

(b) Répartition de la déformation équivalente à la fin de la première passe

FIG. 1.18 – Géométrie initiale et fin de la première passe

Les figures (1.18) et (1.19) montrent les étapes importantes de la déformation, ainsi que la distribution de la déformation équivalente et l'évolution du maillage. Les résultats obtenus sont très cohérents.

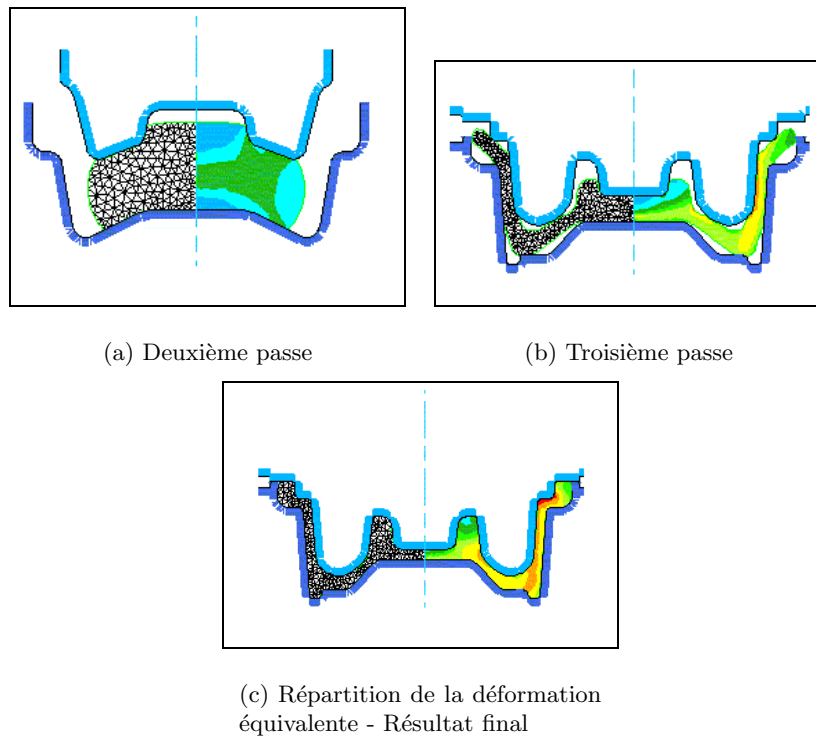


FIG. 1.19 – Évolution de la déformation équivalente au cours de la simulation

## 1.8 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons analysé les aspects les plus significatifs concernant l'approche théorique des méthodes implicites et explicites, surtout dans le contexte de la mise en forme de matériaux. En outre, des résultats issus de la littérature ont souligné les caractéristiques principales de chaque méthode concernant l'étude de divers processus de formage. Ainsi, nous avons pu constater que, en général, les méthodes explicites ont l'avantage d'être plus rapides par rapport aux méthodes implicites, mais que dans certains cas (le retour élastique, la formation des plis, etc.) les méthodes implicites semblent plus adaptées. De plus, les méthodes implicites sont prédictives alors que l'introduction de paramètres non physiques dans les codes explicites impose souvent de connaître le résultat pour le "prédire".

Chaque méthode présente des avantages et des inconvénients reconnus par la littérature, mais aussi d'autres qui apparaissent dans des situations bien particulières pour lesquelles les opinions sont partagées. Le débat est toujours ouvert dans le contexte des matériaux élastoplastiques.

Par la suite, nous proposons une comparaison entre les résultats obtenus avec les deux méthodes dans le cadre du processus de forgeage à chaud. Notre travail porte surtout sur les matériaux viscoplastiques, pour lesquels l'incompressibilité est prise en compte. Dans ce but, plusieurs façon de traiter cette contrainte seront exposées dans les chapitres suivants, dans le cadre des formulations mixtes vitesse/pression.

Quelques formulations implicites feront le sujet du deuxième chapitre.

Des formulations mixtes explicites pour traiter l'incompressibilité n'ont pas encore été développées. Nous proposons, par la suite, une formulation partiellement-explicite pour l'analyse du forgeage.





## Chapitre 2

# Formulations implicites (vitesse/pression) pour la simulation numérique du forgeage

---

### 2.1 Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons décrit brièvement les méthodes éléments finis explicites et implicites et leurs applications.

Pour l'analyse du processus de forgeage auquel nous nous intéressons, les méthodes implicites sont les plus souvent utilisées dans les codes de calcul.

Dans ce cadre, au CEMEF sont développés deux logiciels de forgeage : Forge2<sup>®</sup> en 2D ou axisymétrique et Forge3<sup>®</sup> en 3D, basés sur des méthodes implicites.

Ce chapitre a pour but de présenter plusieurs formulations implicites 2D, applicable au forgeage : d'un côté, les formulations quasi-statique et dynamique correspondant aux versions Forge2 développées aux CEMEF et, d'un autre côté, trois autres formulations dynamiques dont une a été implémentée avec succès dans une version du logiciel Forge2 dans le cadre de ce travail.

Quelques exemples seront également présentés afin de comparer les résultats obtenus avec la formulation proposée et ceux issus des formulations déjà existantes.

### 2.2 Présentation du problème de forgeage

Pour le cas du forgeage des métaux à chaud le matériau est souvent considéré comme purement viscoplastique, les déformations élastiques étant négligées devant les déformations irréversibles. Dans ce cas, la loi de Norton-Hoff (1.6) est généralement utilisée pour décrire le comportement du matériau.

Quand l'érouissage est pris en compte, la consistance du matériau, intervenant dans la loi (1.6), peut s'exprimer par :

$$K(\bar{\varepsilon}) = K_0(\bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon})^n \quad (2.1)$$

Soit  $\Omega$  le domaine représentant la pièce. L'équilibre dynamique correspond alors à (1.25). Le matériau est supposé incompressible et, dans ces conditions, la contrainte (1.83) s'impose.

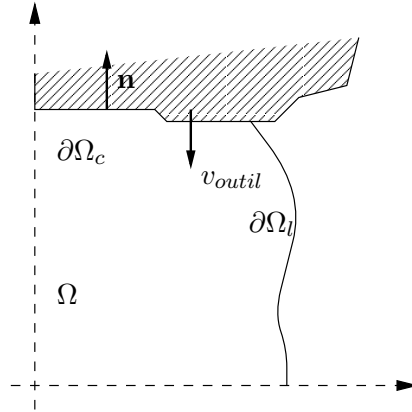


FIG. 2.1 – Notations pour le problème de forgeage

Les conditions aux frontières correspondent à :

- la surface libre  $\partial\Omega_l$ , d'un côté :

$$\sigma \mathbf{n} = 0 \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{n}$  représente le vecteur normal à la surface, conformément à la figure (2.1) ;

- l'interface pièce-outil  $\partial\Omega_c$ , d'un autre côté, pour laquelle une condition de non-pénétration des noeuds de la pièce dans l'outil, correspondant à un contact unilatéral, est imposée :

$$\left\{ \begin{array}{l} (v - v_{outil}) \cdot \mathbf{n} = v_s \cdot \mathbf{n} \leq 0 \text{ non pénétration} \\ \sigma_n \leq 0 \\ ((v - v_{outil}) \cdot \mathbf{n}) \sigma_n = 0 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

où  $v_{outil}$  est la vitesse de l'outil,  $v_s$  est la vitesse de glissement et  $\sigma_n = \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$  est la pression de contact.

Une loi de frottement de type Norton est utilisée et, dans ces conditions, la cission de frottement  $\tau$  est exprimée par la relation suivante :

$$\tau = -\alpha_f K |v_s|^{q-1} v_s \quad (2.4)$$

où

$$\tau = \sigma \mathbf{n} - (\sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad (2.5)$$

$\alpha_f$  est le coefficient de frottement et  $q$  est la sensibilité à la vitesse de glissement (habituellement on choisit  $q = m$ ).

## 2.3 Présentation d'une formulation quasi-statique

Pour le processus de forgeage, l'accélération et la gravité sont souvent négligées. Par conséquent, le problème (1.25) devient quasi-statique .

L'analyse d'un tel problème est présentée par la suite. L'incompressibilité étant imposée, équation (1.83), pour une meilleure précision des résultats [3], une formulation mixte vitesse/pression est adoptée. La description de cette formulation suit les directions générales présentées dans le premier chapitre.

Le tenseur des contraintes est décomposé en tenseur déviateur des contraintes  $s$  et en pression  $p$ , selon la relation (1.81).

Le problème à résoudre s'écrit alors sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(s) - \operatorname{grad}(p) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \operatorname{div}(v) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \sigma_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_l \\ (v - v_{outil}) \cdot \mathbf{n} = v_s \cdot \mathbf{n} \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega_c \\ \tau = -\alpha_f K |v_s|^{q-1} v_s \text{ sur } \partial\Omega_c \end{array} \right. \quad (2.6)$$

La forme faible du problème est équivalente à (1.84) en rajoutant les termes correspondant au frottement. La forme symbolique de ce problème est équivalente à (1.90).

### 2.3.1 Discrétisation spatiale

Pour la discrétisation spatiale de la formulation mixte vitesse/pression on choisit des éléments finis compatibles. Un élément fini est dit compatible s'il satisfait la condition *inf-sup* de compatibilité de Brezzi-Babuska [2], [24], [9].

L'élément mixte compatible de plus petit degré d'interpolation est le MINI-élément (figure (2.2)).

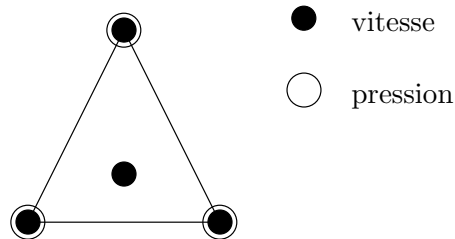


FIG. 2.2 – Le MINI-élément

Il a été introduit par Arnold, Brezzi et Fortin [2] dans le cas des écoulements de Stokes incompressible. C'est un élément triangulaire linéaire pour lequel les champs de vitesse et de pression sont définis comme suit :

- la pression est linéaire et continue,

- la vitesse se décompose de façon unique en une partie linéaire  $v^l$  et une partie  $v^b$  correspondant à l'ajout d'un degré de liberté interne : la *bulle*.

La composante *bulle* de la vitesse est introduite essentiellement pour contrôler la condition d'incompressibilité. Elle est interpolée par une fonction *bulle* valant 1 au centre de l'élément et 0 sur sa frontière, donc par un polynôme de degré 3. Cette augmentation du degré d'interpolation peut être source de problèmes d'intégration numérique. Pour cette raison, une fonction *bulle* hiérarchique est introduite. L'introduction de cette fonction *bulle* nécessite une partition des éléments en sous-triangles (figure (2.3)).

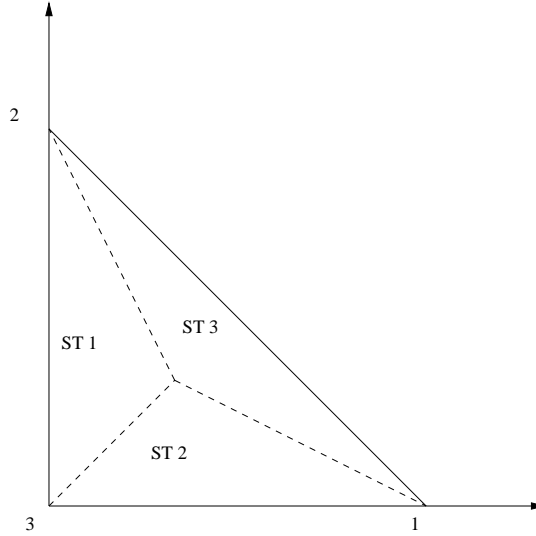


FIG. 2.3 – Partition d'un élément triangulaire de référence en sous-triangles

Cette fonction est continue par triangle et linéaire par sous-triangles.

Pour un élément de référence, la fonction *bulle* hiérarchique est exprimée par :

$$\varphi_e = 3\xi 1_{ST_1} + 3\eta 1_{ST_2} + 3(1-\xi-\eta) 1_{ST_3} \quad (2.7)$$

où

- $\varphi_e$  est la fonction de forme associée à la *bulle* sur chaque élément
- $1_{ST_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in ST_i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$  et  $ST_i$  représente un sous-triangle,  $i = 1, 3$ .

Dans ce contexte, les coordonnées sont discrétisées utilisant les formules (1.28).

La pression discrète est définie par la relation suivante :

$$p_h = \sum_{n=1}^{Nbnoe} P_n N_n. \quad (2.8)$$

Pour la vitesse, le terme correspondant à la *bulle*  $v_h^b$  est rajouté au terme linéaire  $v_h^l$  selon les expressions :

$$v_h = v_h^l + v_h^b = \sum_{n=1}^{Nbnoe} V_n N_n + \sum_{e=1}^{Nbel} V_e^b \varphi_e \quad (2.9)$$

où  $Nbel$  représente le nombre total d'éléments du maillage et  $V_e^b$  est la vitesse de la *bulle*. Le tenseur des vitesses de déformation est alors calculé par la relation :

$$\dot{\varepsilon}(v_h) = \sum_{n=1}^{Nbnoe} V_n B_n + \sum_{e=1}^{Nbel} V_e^b B_e^b \quad (2.10)$$

avec  $B_n$  défini par la relation (1.34) et  $B_e^b$  donné par la relation :

$$B_{ijke}^b = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_i} \delta_{jk} \right). \quad (2.11)$$

La vitesse virtuelle  $v^*$  et la pression virtuelle  $p^*$  sont discrétisées de façon analogue par :

$$v_h^* = v_h^{l*} + v_h^{b*} = \sum_{n=1}^{Nbnoe} V_n^* N_n + \sum_{e=1}^{Nbel} V_e^{b*} \varphi_e \quad (2.12)$$

$$p_h^* = \sum_{m=1}^{Nbnoe} P_m^* N_m \quad (2.13)$$

Utilisant cette discrétisation le problème quasi-statique s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} s(v_h^l + v_h^b) : B_n d\omega + \int_{\partial\Omega_C} \tau(v_h^l) \cdot N_n dS - \int_{\Omega} p_h \cdot tr(B_n) d\omega = 0 \\ \int_{\Omega} s(v_h^l + v_h^b) : B_e^b d\omega - \int_{\Omega} p_h \cdot tr(B_e^b) d\omega = 0 \\ - \int_{\Omega} div(v_h^l + v_h^b) N_m d\omega = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Ce type de formulation a été analysée et implémentée dans une version axisymétrique du code FORGE2 par Stéphane Marie et Etienne Perchat [48]. Nous en présentons ici seulement les caractéristiques générales.

### 2.3.2 Discrétisation temporelle

A chaque instant  $t$ ,  $X^t$  et  $\bar{\varepsilon}^t$  sont supposés connus et  $V^t$  et  $P^t$  sont obtenus en résolvant le système (2.14).

Pour la résolution de ce système, la méthode de Newton-Raphson est utilisée. Ainsi, pour chaque itération  $k$ , nous obtenons la forme matricielle du système (2.14) :

$$\begin{pmatrix} K_{VV}^{t(k)} & K_{Vb}^{t(k)} & D_{VP}^{t(k)} \\ K_{bV}^{t(k)} & K_{bb}^{t(k)} & D_{bP}^{t(k)} \\ D_{PV}^{t(k)} & D_{Pb}^{t(k)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Delta V)^{t(k)} \\ (\Delta V^b)^{t(k)} \\ (\Delta P)^{t(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_V^{t(k)} \\ R_{V^b}^{t(k)} \\ R_P^{t(k)} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Après l'élimination de la bulle, de manière classique,  $(\Delta V)^t$  et  $(\Delta P)^t$  résultent du système (2.15).

Conformément à la méthode de Newton-Raphson, la vitesse et la pression sont réactualisées selon les expressions suivantes :

$$V^{t(k)} = V^{t(k-1)} + (\Delta V)^{t(k)} \quad (2.16)$$

et

$$P^{t(k)} = P^{t(k-1)} + (\Delta P)^{t(k)}. \quad (2.17)$$

Pour la première itération  $k = 1$ , on initialise  $V^{t(0)}$  et  $P^{t(0)}$ , qui interviennent dans les équations (2.16) et (2.17), en prenant les valeurs de  $V^{t-\Delta t}$  et de  $P^{t-\Delta t}$ .

À  $t = 0$ , la vitesse utilisée pour la première itération est considérée comme étant nulle.

Les équations d'évolution sont décrites par les équations :

$$\begin{aligned} \frac{dX^t}{dt} &= V^t \\ \frac{d\bar{\varepsilon}^t}{dt} &= \dot{\bar{\varepsilon}}^t. \end{aligned} \quad (2.18)$$

La réactualisation des variables est faite conformément à des schémas de type Euler explicite :

$$X^{t+\Delta t} = X^t + \Delta t V^t \quad (2.19)$$

$$\bar{\varepsilon}^{t+\Delta t} = \bar{\varepsilon}^t + \Delta t \dot{\bar{\varepsilon}}^t. \quad (2.20)$$

L'algorithme de cette approche peut se résumer par :

- *Lecture de données*
- *Initialisations*
- *Calcul incrémental (boucle sur le pas de temps)*
  - 1 *Calcul du champ de vitesse et de pression (boucle d'itération de Newton-Raphson)*  
tant que  $\|R\| > \varepsilon_{prec}$ 
    - 1.1 *Calcul matrice (Hessien quasi-statique :  $H^{t(k)}$ ), le membre de gauche de (2.15) après l'élimination de la bulle*
    - 1.2 *Calcul résidu (Gradient quasi-statique :  $R^{t(k)}$ ), le membre de droite de (2.15) après l'élimination de la bulle*
    - 1.3 *Résolution (Solveur)*

$$\left\{ \begin{array}{l} H^{t(k)}(\Delta V)^{t(k)} = -R^{t(k)}, (\Delta V)^{t(k)} = \begin{pmatrix} (\Delta V)^{t(k)} \\ (\Delta P)^{t(k)} \end{pmatrix} \\ V^{t(k)} \leftarrow V^{t(k-1)} + (\Delta V)^{t(k)}, P^{t(k)} \leftarrow P^{t(k-1)} + \Delta P^{t(k)} \end{array} \right.$$
    - 1.4 *Recherche linéaire (Calcul de  $\lambda$  qui minimise  $\|R(V + \lambda\Delta V)\|$ )*
    - 1.5 *Actualisation du contact*  
*fin tant que*
  - 2 *Calcul des variables :  $\bar{\varepsilon}$ , ...*
  - 3 *Réactualisation selon (2.19) et (2.20)*
  - 4 *Remaillage (test)*

## 2.4 Présentation des formulations dynamiques

Si l'inertie est prise en compte (cas des processus à grande vitesse), alors, le problème à traiter est celui décrit en (1.86).

Deux formulations dynamiques vitesse/pression font l'objet de notre analyse par la suite.

### 2.4.1 Première formulation dynamique

Dans le cadre d'une formulation dynamique vitesse/pression, l'accélération intervenant dans l'équation d'équilibre doit être exprimée en fonction de la vitesse. Une possibilité consiste à utiliser le schéma décrit dans (1.91) [18]. Ainsi le problème prend la forme symbolique (1.92).

#### a) Discrétisation spatiale

Pour la discrétisation spatiale de ce problème, le MINI-élément est également employé. Les expressions (1.69), (1.87), (2.9) et (2.10) sont considérées pour approximer les coordonnées, la pression, la vitesse et le tenseur des vitesses de déformation.

La forme discrète du système correspondant à cette approche s'écrit alors :



$$\left\{ \begin{array}{l}
 \int_{\Omega^t} \rho \left( \frac{v_h^t - v_h^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) \cdot N_n d\omega + \int_{\Omega^t} s \left( (v_h^t)^l + (v_h^t)^b \right) : B_n d\omega + \int_{(\partial\Omega_C)^t} \tau \left( (v_h^t)^l \right) \cdot N_n dS - \\
 \int_{\Omega^t} p_h \cdot \text{tr}(B_n) d\omega = 0 \\
 \int_{\Omega^t} \rho \left( \frac{v_h^t - v_h^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) \cdot \varphi_e d\omega + \int_{\Omega^t} s \left( (v_h^t)^l + (v_h^t)^b \right) : B_e^b d\omega - \int_{\Omega^t} p_h \cdot \text{tr}(B_e^b) d\omega = 0 \\
 - \int_{\Omega^t} \text{div} \left( (v_h^t)^l + (v_h^t)^b \right) N_m d\omega = 0.
 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

### b) Discrétisation temporelle

Dans le cas considéré, à chaque instant  $t$ ,  $X^t$  et  $V^{t-\Delta t}$  sont supposés connus et  $V^t$  et  $P^t$  résultent du système (2.21) en appliquant la méthode de Newton-Raphson. Ainsi, à chaque itération  $k$ , un système de type (2.22) doit être résolu.

$$\begin{pmatrix} K_{VV}^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{VV}^{t(k)} & K_{Vb}^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{Vb}^{t(k)} & D_{VP}^{t(k)} \\ K_{bV}^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{bV}^{t(k)} & K_{bb}^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{bb}^{t(k)} & D_{bP}^{t(k)} \\ D_{PV}^{t(k)} & D_{Pb}^{t(k)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Delta V)^{t(k)} \\ (\Delta V^b)^{t(k)} \\ (\Delta P)^{t(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_V^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} (R'_V)^{t(k)}(V^t, V^{t-\Delta t}) \\ R_{Vb}^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} (R'_{Vb})^{t(k)}(V^t, V^{t-\Delta t}) \\ R_P^{t(k)} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

où

$$(R'_V)^{t(k)}(V^t, V^{t-\Delta t}) = \int_{\Omega_t} \rho [(v_h^t)^{(k-1)} - v_h^{t-\Delta t}] \cdot N_n d\omega \quad (2.23)$$

et

$$(R'_{Vb})^{t(k)}(V^t, V^{t-\Delta t}) = \int_{\Omega_t} \rho [(v_h^t)^{(k-1)} - v_h^{t-\Delta t}] \cdot \varphi_e d\omega \quad (2.24)$$

Pour la résolution, la bulle est d'abord éliminée,  $(\Delta V)^{t(k)}$  et  $(\Delta P)^{t(k)}$  étant ensuite calculés à partir du système résultant.

Les équation d'évolution et les formules de réactualisation sont les mêmes que celles exposées dans le cas quasi-statique présenté précédemment.

Quand  $t = 0$ ,  $X^0$  et  $V^0$  doivent être connus,  $V^{-1}$  peut être considéré comme étant zéro. L'algorithme correspondant à cette formulation dynamique se présente sous la forme :

- *Lecture de données*
- *Initialisations*
- *Calcul incrémental (boucle sur le pas de temps)*
  - 1 *Calcul du champ de vitesse et de pression (boucle d'itération de Newton-Raphson) tant que  $\| R \| > \varepsilon_{prec}$* 
    - 1.1 *Calcul matrice (Hessien :  $H_1^{t(k)} = H^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} C^{t(k)}$ ), le membre de gauche de (2.22) après l'élimination de la bulle*
    - 1.2 *Calcul résidu (Gradient :  $R_1^{t(k)} = R^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} (R')^{t(k)}$ ), le membre de droite de (2.22) après l'élimination de la bulle*
    - 1.3 *Résolution (Solveur)*

$$\begin{cases} H_1^{t(k)} (\Delta V)^{t(k)} = -R_1^{t(k)}, (\Delta V)^{t(k)} = \begin{pmatrix} (\Delta V)^{t(k)} \\ (\Delta P)^{t(k)} \end{pmatrix}, \\ V^{t(k)} \leftarrow V^{t(k-1)} + (\Delta V)^{t(k)}, P \leftarrow P + \Delta P \end{cases}$$

- 1.4 *Recherche linéaire (Calcul de  $\lambda$  qui minimise  $\| R(V + \lambda \Delta V) \|$ )*
- 1.5 *Actualisation du contact*  
*fin tant que*
- 2 *Calcul des variables :  $\bar{\varepsilon}$ , ...*
- 3 *Réactualisation selon (2.19) et (2.20)*
- 4 *Remaillage (test)*

Cette formulation dynamique a été implémentée par Laurent D'alvise [18], à partir de la version quasi-statique du code Forge2, pour le cas du soudage inertiel. Ce travail a été adapté au cas du forgeage et intégré dans une version du code Forge2<sup>®</sup> par Transvalor S.A.

## 2.4.2 Formulation de type trapèze

Une autre possibilité pour traiter le problème dynamique consiste à exprimer l'accélération de la manière suivante :

$$\gamma^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \frac{v^{t+\Delta t} - v^t}{\Delta t}. \quad (2.25)$$

Cette expression est issue de la théorie des différences finies centrées [6], [23], [3] et offre une meilleure approximation pour l'accélération que la relation (1.91).

Dans le cas de cette approche, le problème dynamique est écrit sur le domaine  $\Omega^{t+\frac{\Delta t}{2}}$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega^{t+\frac{\Delta t}{2}}} \rho \left( \frac{v^{t+\Delta t} - v^t}{\Delta t} \right) \cdot v^* d\omega + \int_{\Omega^{t+\frac{\Delta t}{2}}} s(v^{t+\frac{\Delta t}{2}}) : \dot{\varepsilon}(v^*) d\omega + \\ \int_{\partial\Omega_C^{t+\frac{\Delta t}{2}}} \tau(v^{t+\frac{\Delta t}{2}}) \cdot v^* dS - \int_{\Omega^{t+\frac{\Delta t}{2}}} p \cdot \text{div}(v^*) d\omega = 0 \\ - \int_{\Omega^{t+\frac{\Delta t}{2}}} \text{div}(v^{t+\frac{\Delta t}{2}}) p^* d\omega = 0. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

où la vitesse au centre de l'intervalle  $(t, t + \Delta t)$  est considérée comme étant la vitesse moyenne définie par :

$$v^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \frac{v^{t+\Delta t} + v^t}{2} \quad (2.27)$$

En conséquence, le problème (2.26) prend la forme symbolique :

$$\left\{ \begin{array}{l} C(X^{t+\frac{\Delta t}{2}}) \left( \frac{V^{t+\Delta t} - V^t}{\Delta t} \right) + R(X^{t+\frac{\Delta t}{2}}, V^{t+\frac{\Delta t}{2}}) + D(X^{t+\frac{\Delta t}{2}}) P^{t+\Delta t} = 0 \\ {}^T D(X^{t+\frac{\Delta t}{2}}) \left( \frac{V^t + V^{t+\Delta t}}{2} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Une autre approximation est celle que nous adapterons par la suite : elle consiste à considérer le tenseur déviateur des contraintes  $s(v^{t+\frac{\Delta t}{2}})$  défini par le même type de formule que la vitesse :

$$s(v^{t+\frac{\Delta t}{2}}) = \frac{s(v^{t+\Delta t}) + s(v^t)}{2} \quad (2.29)$$

De la même manière, la cission de frottement  $\tau(v^{t+\frac{\Delta t}{2}})$  est approximée par :

$$\tau(v^{t+\frac{\Delta t}{2}}) = \frac{\tau(v^{t+\Delta t}) + \tau(v^t)}{2} \quad (2.30)$$

### a) Discrétisation spatiale

Pour cette formulation le MINI-élément est également à la base de la discrétisation spatiale. Par conséquent, les formules utilisées pour la discrétisation des coordonnées, des champs de vitesse et pression, ainsi que celle concernant le tenseur des vitesses de déformation sont les mêmes que celles présentées dans l'approche dynamique précédente.

Dans ce cadre, tenant compte des relations (2.29) et (2.30), le système (2.26) prend la forme symbolique :

$$\begin{cases} C(X^{t+\frac{\Delta t}{2}}) \left( \frac{V^{t+\Delta t} - V^t}{\Delta t} \right) + \frac{1}{2} R(X^{t+\frac{\Delta t}{2}}, V^{t+\Delta t}) + \\ \frac{1}{2} R(X^{t+\frac{\Delta t}{2}}, V^t) + D(X^{t+\frac{\Delta t}{2}}) P^{t+\Delta t} = 0 \\ {}^T D(X^{t+\frac{\Delta t}{2}}) \left( \frac{V^t + V^{t+\Delta t}}{2} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

### b) Discrétisation temporelle

Pour la résolution du système (2.31) nous nous plaçons à  $t + \frac{\Delta t}{2}$  et nous devons déterminer  $V^{t+\Delta t}$  et  $P^{t+\Delta t}$  en connaissant  $X^t$  et  $V^t$ .

La méthode de Newton-Raphson doit être également appliquée, dans le cas de cette approche, pour trouver la solution du problème. Ainsi, à chaque itération, il faut résoudre un système de type suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} K_{VV}^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{VV}^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} & K_{Vb}^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{Vb}^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} & D_{VP}^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} \\ K_{bV}^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{bV}^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} & K_{bb}^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{bb}^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} & D_{bP}^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} \\ D_{PV}^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} & D_{Pb}^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Delta V)^{t+\Delta t(k)} \\ (\Delta V^b)^{t+\Delta t(k)} \\ (\Delta P)^{t+\Delta t(k)} \end{pmatrix} =$$

$$- \begin{pmatrix} \frac{1}{2} R_V^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} + \frac{1}{\Delta t} (R'_V)^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} (V^{t+\Delta t}, V^t) \\ \frac{1}{2} R_{Vb}^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} + \frac{1}{\Delta t} (R'_{Vb})^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} (V^{t+\Delta t}, V^t) \\ R_P^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

où

$$(R'_V)^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} (V^{t+\Delta t}, V^t) = \int_{\Omega^{t+\frac{\Delta t}{2}}} \rho [(v_h^{t+\Delta t})^{(k-1)} - v_h^t] \cdot N_n d\omega \quad (2.33)$$

et

$$(R'_{Vb})^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} (V^{t+\Delta t}, V^t) = \int_{\Omega^{t+\frac{\Delta t}{2}}} \rho [(v_h^{t+\Delta t})^{(k-1)} - v_h^t] \cdot \varphi_e d\omega \quad (2.34)$$

Dans ce cadre,  $X^{t+\frac{\Delta t}{2}}$  est calculé selon la formule :

$$X^{t+\frac{\Delta t}{2}} = X^t + \frac{\Delta t}{2} V^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\Delta t^2}{8} \Gamma^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad (2.35)$$

où  $V^{t+\frac{\Delta t}{2}}$  et  $\Gamma^{t+\frac{\Delta t}{2}}$  sont inconnus, ce qui implique un calcul des dérivées de domaine ou, par exemple, une approximation de la formule (2.35), à chaque itération, selon :

$$X^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} = X^t + \frac{\Delta t}{2}V^{t+\Delta t(k-1)} + \frac{\Delta t^2}{8}\Gamma^{t+\frac{\Delta t}{2}(k-1)} \quad (2.36)$$

La bulle est ensuite éliminée du système résultant et  $(\Delta V)^{t+\Delta t(k)}$  et  $(\Delta P)^{t+\Delta t(k)}$  sont calculés.

La réactualisation des coordonnées est fournie par la relation (1.79).

L'algorithme correspondant à cette formulation dynamique se présente sous la forme :

- *Lecture de données*
- *Initialisations*
- *Calcul incrémental (boucle sur le pas de temps)*
  - 1 *Calcul du champ de vitesse et de pression (boucle d'itération de Newton-Raphson) tant que  $\|R\| > \varepsilon_{prec}$* 
    - 1.0 *Calcul de  $X^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)}$*
    - 1.1 *Calcul matrice (Hessien :  $H_2^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} = \frac{1}{2}H^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} + \frac{1}{\Delta t}C^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)}$ ), membre de gauche de (2.32) après l'élimination de la bulle*
    - 1.2 *Calcul résidu (Gradient :  $R_2^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} = \frac{1}{2}R^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)} + \frac{1}{\Delta t}(R')^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)}$ ), membre de droite de (2.32) après l'élimination de la bulle*
    - 1.3 *Résolution (Solveur)*
$$\left\{ \begin{array}{l} H_2^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)}(\Delta'V)^{t+\Delta t(k)} = -R_2^{t+\frac{\Delta t}{2}(k)}, (\Delta'V)^{t+\Delta t(k)} = \begin{pmatrix} (\Delta V)^{t+\Delta t(k)} \\ (\Delta P)^{t+\Delta t(k)} \end{pmatrix}, \\ V^{t+\Delta t(k)} \leftarrow V^{t+\Delta t(k-1)} + (\Delta V)^{t+\Delta t(k)}, P^{t+\Delta t(k)} \leftarrow P^{t+\Delta t(k-1)} + (\Delta P)^{t+\Delta t(k)} \end{array} \right.$$
    - 1.4 *Recherche linéaire (Calcul de  $\lambda$  qui minimise  $\|R(V + \lambda\Delta V)\|$ )*
    - 1.5 *Actualisation du contact*
  - fin tant que*
  - 2 *Calcul des variables :  $\bar{\varepsilon}$ , ...*
  - 3 *Réactualisation selon (1.79) et (2.20)*
  - 4 *Remaillage (test)*

Cette formulation d'ordre 2 est en principe plus précise que celle exposée précédemment, par contre, sa mise en oeuvre est plus coûteuse. En effet, la relation (2.35) demande un calcul de dérivées de domaine ou une approximation (i.e. supposer que la configuration ne change pas au cours d'une itération de la méthode de Newton-Raphson) ce qui peut devenir trop coûteux. Par ailleurs, le tenseur déviateur des contraintes doit être pris en compte à  $t + \frac{\Delta t}{2}$ , ainsi que le calcul du frottement, générateur des nouveaux termes dans le système par rapport à la formulation précédente.

Pour faciliter le calcul, une première approximation peut être considérée.

### 2.4.3 Première approximation

Pour éviter les complications qui apparaissent quand les intégrales du système sont calculées sur le domaine  $\Omega^{t+\frac{\Delta t}{2}}$ , nous pouvons faire une approximation en calculant tout sur  $\Omega^t$ .

#### a) Discrétisation spatiale

Dans ce cadre, en utilisant le MINI-élément, le système (2.26) prend la forme symbolique suivante :

$$\begin{cases} C(X^t) \left( \frac{V^{t+\Delta t} - V^t}{\Delta t} \right) + \frac{1}{2} R(X^t, V^{t+\Delta t}) \\ \frac{1}{2} R(X^t, V^t) + D(X^t) P^{t+\Delta t} = 0 \\ {}^T D(X^t) \left( \frac{V^t + V^{t+\Delta t}}{2} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

#### b) Discrétisation temporelle

A chaque instant  $t$ , en connaissant  $X^t$  et  $V^t$  il faut en déduire  $V^{t+\Delta t}$  et  $P^{t+\Delta t}$ .

Dans le cas présent il n'est pas nécessaire de calculer des dérivées de domaine, comme dans le cas précédent.

Utilisant la méthode de Newton-Raphson, à chaque itération, un système de type (2.38) est résolu :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} K_{VV}^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{VV}^{t(k)} & \frac{1}{2} K_{Vb}^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{Vb}^{t(k)} & D_{VP}^{t(k)} \\ \frac{1}{2} K_{bV}^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{bV}^{t(k)} & \frac{1}{2} K_{bb}^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{bb}^{t(k)} & D_{bP}^{t(k)} \\ D_{PV}^{t(k)} & D_{Pb}^{t(k)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Delta V)^{t+\Delta t(k)} \\ (\Delta V^b)^{t+\Delta t(k)} \\ (\Delta P)^{t+\Delta t(k)} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} R_V^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} (R'_V)^{t(k)}(V^{t+\Delta t}, V^t) \\ \frac{1}{2} R_{Vb}^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} (R'_{Vb})^{t(k)}(V^{t+\Delta t}, V^t) \\ R_P^{t(k)} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

la bulle étant éliminée de manière classique.

Le réactualisation de coordonnées se fait de la même manière, en utilisant la relation (1.79).

L'algorithme correspondant à cette approche change par rapport à celui de l'approche présenté dans le paragraphe 2.4.2, b), comme suit :

- l'étape **1.0** n'est plus calculée
- l'étape **1.1** devient :  
Calcul matrice (Hessien :  $H_{21}^{t(k)} = \frac{1}{2}H^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t}C^{t(k)}$ ), le membre de gauche de (2.38) après l'élimination de la bulle
- l'étape **1.2** devient :  
Calcul résidu (Gradient :  $R_{21}^{t(k)} = \frac{1}{2}R^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t}(R')^{t(k)}$ ), le membre de droite de (2.38) après l'élimination de la bulle

Par conséquent, l'implémentation de cette approche est plus facile par rapport à celle précédente et le calcul est moins coûteux.

Dans le but de simplifier encore la formulation (2.26), une deuxième approximation peut être considérée.

#### 2.4.4 Deuxième approximation

Cette approximation consiste à considérer  $s(v^{t+\Delta t})$  à la place de  $s(v^{t+\frac{\Delta t}{2}})$  et  $\tau(v^{t+\Delta t})$  à la place de  $\tau(v^{t+\frac{\Delta t}{2}})$ .

##### a) Discrétisation spatiale

Pour la discrétisation spatiale le MINI-élément est toujours préservé. Ainsi nous obtenons la forme symbolique (2.39) du problème résultant de (2.26) pour l'approximation présente.

$$\begin{cases} C(X^t) \left( \frac{V^{t+\Delta t} - V^t}{\Delta t} \right) + R(X^t, V^{t+\Delta t}) + D(X^t)P^{t+\Delta t} = 0 \\ {}^T D(X^t)V^{t+\Delta t} = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

En ce qui concerne la condition d'incompressibilité, nous remarquons que l'approximation faite pour simplifier le problème nous mène à calculer  $div_{X^t}(v^{t+\Delta t})$ .

En réalité, l'incompressibilité est imposée à la vitesse cherchée comme solution du problème, autrement dit, à la vitesse  $v^{t+\Delta t}$ . Alors, pour imposer la condition d'incompressibilité avec plus de précision il faudrait calculer la divergence de la vitesse cherchée par rapport aux coordonnées correspondantes  $X^{t+\Delta t}$ .

Cela implique une correction concernant la condition d'incompressibilité.

##### Correction de l'incompressibilité :

Cette correction se fait selon l'expression :

$$div_{X^t}(V^{t+\Delta t}) = div_{X^{t+\Delta t}}(V^{t+\Delta t}) - C_r \quad (2.40)$$

où

$$C_r \cong -\Delta t \text{ trace} \left( \frac{\partial V^t}{\partial X^t} \cdot \frac{\partial V^t}{\partial X^t} \right) \quad (2.41)$$

Plus d'explications concernant le calcul de cette correction se trouvent en Annexe C.

Tenant compte de toutes ces considérations le système (2.26) prend la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} K_{VV}^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{VV}^{t(k)} & K_{Vb}^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{Vb}^{t(k)} & D_{VP}^{t(k)} \\ K_{bV}^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{bV}^{t(k)} & K_{bb}^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} C_{bb}^{t(k)} & D_{bP}^{t(k)} \\ D_{PV}^{t(k)} & D_{Pb}^{t(k)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Delta V)^{t+\Delta t(k)} \\ (\Delta V^b)^{t+\Delta t(k)} \\ (\Delta P)^{t+\Delta t(k)} \end{pmatrix} =$$

$$- \begin{pmatrix} R_V^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} (R'_V)^{t(k)}(V^{t+\Delta t}, V^t) \\ R_{Vb}^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} (R'_{Vb})^{t(k)}(V^{t+\Delta t}, V^t) \\ R_P^{t(k)} + E^{t(k)} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

où

$$E^{t(k)} = -\Delta t \int_{\Omega^t} \text{trace} \left( \frac{\partial V^t}{\partial X^t} \frac{\partial V^t}{\partial X^t} \right) \cdot N_m d\omega \quad (2.43)$$

La bulle est éliminée également afin de calculer  $(\Delta V)^{t+\Delta t}$  et  $(\Delta P)^{t+\Delta t}$  à chaque itération de Newton-Raphson.

## b) Discrétisation temporelle

Dans le cas actuel,  $V^{t+\Delta t}$  et  $P^{t+\Delta t}$  sont obtenus comme solution du système (2.42) en connaissant  $X^t$  et  $V^t$ .

Les termes de comportement et de frottement en  $V^t$ , ainsi que les termes en  $V^t$  concernant l'incompressibilité ne doivent plus être calculés dans cette approche, l'implémentation de cette dernière étant alors plus rapide à mettre en oeuvre.

La réactualisation des coordonnées suit, comme dans le cas précédent, le schéma d'ordre 2, (1.79).

L'algorithme de cette approche diffère du précédent par les étapes **1.1** et **1.2** qui deviennent :

**1.1** Calcul matrice (Hessien :  $H_{22}^{t(k)} = H^{t(k)} + \frac{1}{\Delta t} C^{t(k)}$ ), le membre de gauche de (2.42) après l'élimination de la bulle

**1.2** Calcul résidu (Gradient :  $R_{22}^{t(k)} = R^{t(k)} + \left\{ \frac{1}{\Delta t} (R')^{t(k)} \right\}_{E^{t(k)}}$ ), le membre de droite de (2.42) après l'élimination de la bulle

L'implémentation de cette formulation a été réalisée en collaboration avec Sorin Popa pendant son stage effectué au CEMEF. Ce travail a été réalisé en utilisant comme base une version quasi-statique axisymétrique du logiciel Forge2.



Dans ce sens, les modifications apportées au code sont, premièrement, au niveau local et concernent la contribution de la matrice de masse au hessien comme indiqué dans l'algorithme présenté précédemment. Le second membre correspondant au cas quasi-statique est également modifié en lui rajoutant les contributions de l'inertie, ainsi que les contributions résultant de la correction de la condition d'incompressibilité. La réactualisation des coordonnées est ensuite adaptée à cette nouvelle formulation. Le terme de second ordre, concernant l'accélération (relation (1.79)), est pris en compte, dans le cas présent.

Au niveau de la programmation, cette dernière formulation diffère de la formulation exposée dans le paragraphe 2.4.1 par la façon plus précise d'imposer l'incompressibilité, ainsi que par la réactualisation des coordonnées.

## 2.5 Gestion du contact

Les interactions entre les outils et la matière influencent directement la déformation du matériau. Par conséquent, l'analyse du contact pièce-outil représente un point important dans la résolution du problème mécanique.

Dans ce paragraphe, nous proposons une brève description de l'algorithme utilisé dans Forge2<sup>®</sup> pour le traitement du contact. Ainsi, le contact est géré de manière incrémentale par une méthode de pénalisation.

Une fonction distance,  $d$ , entre un noeud de la frontière, noté  $nfr$ , et l'outil est définie :

- $d > 0$ , si  $nfr$  est extérieur à l'outil,
- $d = 0$ , si  $nfr$  est sur l'outil,
- $d < 0$ , si  $nfr$  est dans l'outil.

conformément à la figure (2.4).

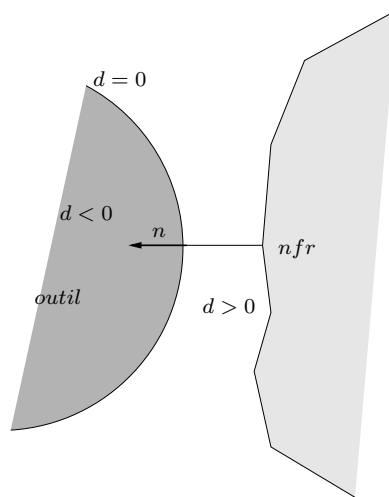


FIG. 2.4 – Définition de la fonction distance

À chaque instant  $t$ , la condition de non-pénétration est écrite de manière nodale et elle est équivalente à :

$$d^t \geq 0. \quad (2.44)$$

L'analyse de contact se fait pour les noeuds frontières qui se trouvent a une distance inférieure à  $d_{pen}$  de l'outil (2.5).

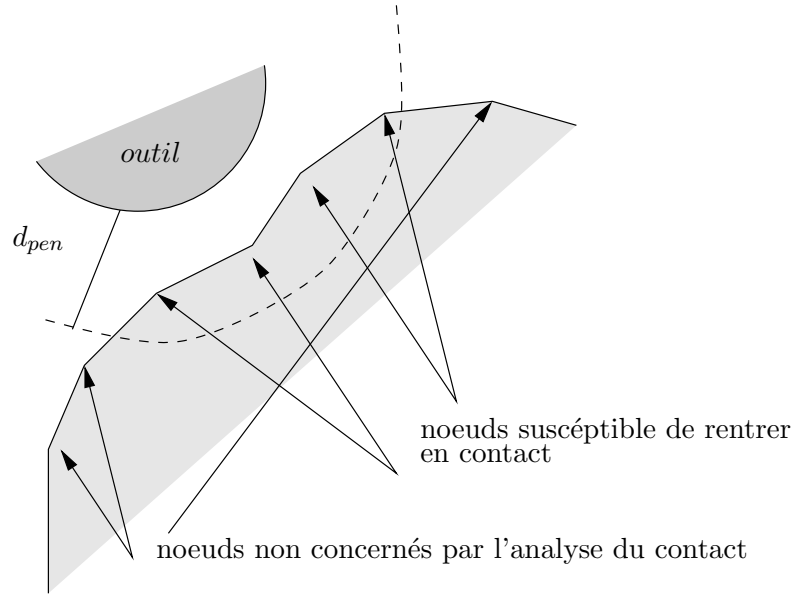


FIG. 2.5 – Analyse du contact

Le déplacement des noeuds en contact, au cours d'un incrément de calcul, peut déterminer des pénétrations dans l'outil à la fin de l'incrément. C'est pour cette raison qu'au début de chaque intervalle  $(t, t + \Delta t)$  il faut imposer que la condition de contact soit vérifiée à la fin de l'incrément. C'est-à-dire, à  $t$ , il est nécessaire d'imposer que :

$$d^{t+\Delta t} \geq 0. \quad (2.45)$$

Cette relation est linéarisée comme suit :

$$d^{t+\Delta t} = d^t + \frac{d(d^t)}{dt} \Delta t. \quad (2.46)$$

En se plaçant dans un contexte où les outils sont non déformables et en translation, la condition de contact unilatéral (2.45) devient, conformément au calcul présenté dans [42] :

$$(v^t - v_{outil}^t) \cdot \mathbf{n} - \frac{d^t}{\Delta t} \leq 0 \quad (2.47)$$

L'algorithme de contact teste si cette relation est vérifiée et, si c'est le cas, un terme de pénalisation est introduit dans l'équation d'équilibre, pour les noeuds susceptibles de pénétrer dans l'outil. Cela se traduit en écrivant que l'équation dynamique de la manière suivante :

$$\int_{\Omega} \rho \gamma^t \cdot v^* d\omega + \int_{\Omega} s^t : \dot{\varepsilon}^* d\omega - \int_{\Omega} p^t \cdot \text{div}(v^*) d\omega - \int_{\partial\Omega_c} \tau \cdot v^* dS + \beta \int_{\partial\Omega_c} [(v^t - v_{outil}^t) \cdot \mathbf{n} - \frac{dt}{\Delta t}]^+ \mathbf{n} \cdot v^* dS = 0 \quad (2.48)$$

où  $\beta$  est le coefficient de pénalisation et  $[x]^+ = \frac{x + |x|}{2}$ .

Le contact est géré au niveau local en chacun des noeuds frontière du maillage.

Par la suite, quelques applications numériques sont présentées, afin de valider la formulation proposée.

## 2.6 Exemples numériques

Trois formulations seront comparées :

- la formulation quasi-statique (QS) décrite dans (2.3)
- la formulation dynamique (DI) décrite dans (2.4.1)
- la formulation dynamique (DI1) décrite dans (2.4.4)

### 2.6.1 Test de compression

Le premier test auquel nous faisons référence est un test de compression d'un cylindre en acier de rayon  $100 \text{ mm}$  et de hauteur de  $200 \text{ mm}$ . Le maillage correspondant à un quart de pièce (la pièce étant symétrique) est composé de 909 noeuds et 1672 éléments.

Le processus est effectué à une vitesse constante de  $100 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Les propriétés du matériau sont définies dans le tableau (2.1)

consistance $K$ ( $\text{MPa} \cdot \text{s}^m$ )	densité $\rho$ ( $\text{Kg}/\text{m}^3$ )	sensibilité à la vitesse de déf. index $m$
$K = 16.1$	$\rho = 7600$	$m = 0.139$

TAB. 2.1 – Propriétés du matériau

Le contact considéré est bilatéral collant. Le calcul est effectué avec chaque version de logiciel pour trois pas de temps différents :  $dt = 10^{-2}$ ,  $dt = 10^{-3}$  et  $dt = 10^{-4}$ .

Dans le cas  $dt = 10^{-2}$  les distributions des contraintes équivalentes issues des trois simulations, après 50% de déformation, sont d'une qualité équivalente (figures 2.6(b), 2.6(c), 2.6(d)).

Le tableau (2.2) montre une bonne concordance des résultats obtenus avec les trois versions de logiciels. Les notations suivantes sont faites : v.l. est la perte de volume, X(top) est la coordonnée du point extérieur en contact avec l'outil, X(bottom) est la coordonnée du point extérieur appartenant à l'axe des abscisses, F est la force et  $\sigma_{eq}^{max}$ ,  $V^{max}$ ,  $P^{max}$ ,  $\varepsilon_{eq}^{max}$  sont les valeurs maximales de la contrainte équivalente, de la vitesse, de la pression, ainsi que de la déformation équivalente.

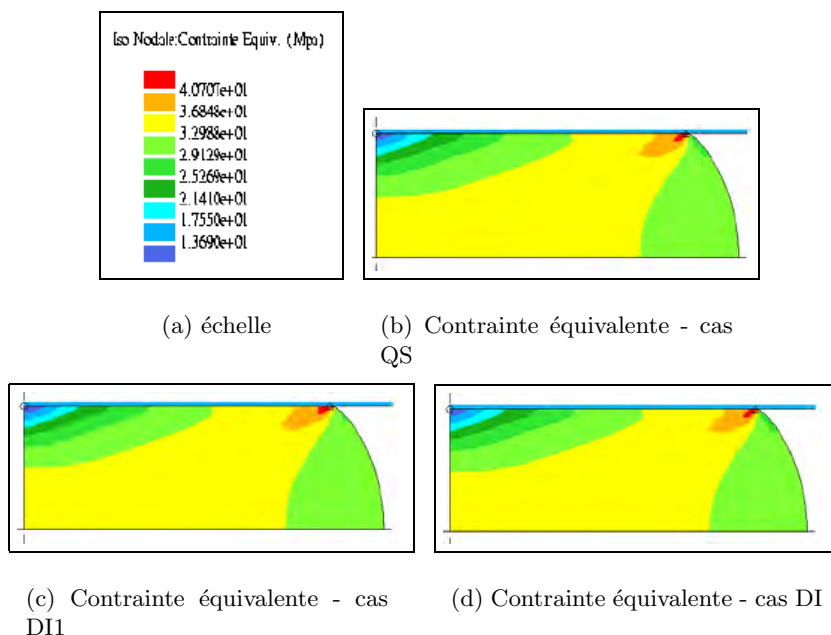


FIG. 2.6 – Contraintes équivalentes -QS, DI1, DI

	v.l.	X(top)	X(bottom)	$\sigma_{eq}^{max}$	$V^{max}$	$P^{max}$	F	$\varepsilon_{eq}^{max}$
QS	0.456%	125.39	146.85	44.56	150.36	57.68	238.49	1.64
DI	0.415%	125.48	146.86	44.54	148.28	57.74	239.76	1.65
DI1	0.65%	124.47	146.76	44.28	150.27	57.82	236.71	1.68
DI1/DI		0.991	0.99931	0.994	1.014	1.0013	0.98	1.03
DI1/QS		0.992	0.99938	0.993	1.002	1.002	0.99	1.036
DI/QS		1.0007	1.00006	0.994	0.986	1.00104	1.005	1.006

TAB. 2.2 – Résultats pour  $dt = 10^{-2}$ 

La vitesse du processus n'étant pas très importante, l'inertie n'a pas un effet très visible sur les résultats, ceux-ci étant presque les mêmes dans le cas quasi-statique et dans les deux cas dynamiques, pour cet exemple.

En ce qui concerne l'incompressibilité nous remarquons une différence assez importante à la fin du processus. Le cas effectué avec la formulation dynamique DI1, devrait aboutir à une perte de volume moins importante que pour les deux autres formulations. Les résultats obtenus montrent le contraire à la fin de la simulation.

L'évolution de la perte de volume au cours de chaque simulation est analysée dans la figure (2.7). Dans les deux cas QS et DI les courbes sont voisines, la perte de volume étant uniformément répartie le long de la simulation.

Dans le cas dynamique DI1, une perte importante de volume est enregistrée au premier incrément, tandis que par la suite l'intervalle de variation de la perte de volume est inférieur à celui correspondant aux cas QS et DI. Cela montre que, globalement, la formulation DI1 préserve mieux l'incompressibilité.

Le saut qui apparaît au premier incrément s'explique par le fait que, dans cette formulation, l'accélération intervient dans la réactualisation des coordonnées et elle a une valeur considérable au début du calcul.

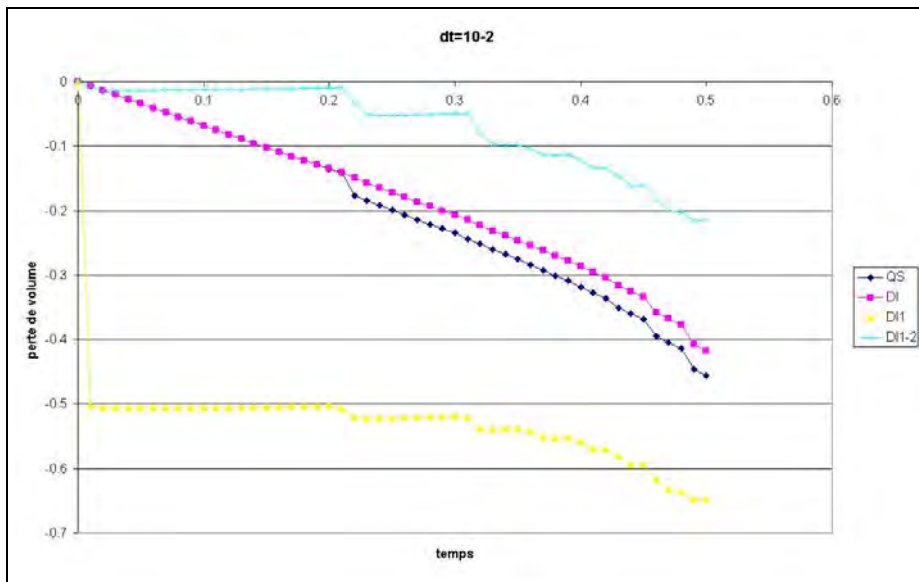


FIG. 2.7 – Variation de la perte de volume en fonction de temps (pour  $dt = 10^{-2}$ )

Pour éviter ce phénomène, une correction est apportée à la formulation DI1 : au premier incrément seulement, l'accélération ne sera plus prise en compte dans la réactualisation des coordonnées, celle-ci étant faite selon la relation (1.71).

L'évolution de la perte de volume pour ce dernier cas est représentée dans la figure (2.7) par la courbe notée DI1-2. Nous remarquons effectivement une amélioration concernant le premier incrément et, implicitement, une amélioration du résultat final.

Ce résultat prouve que l'incompressibilité est mieux préservée dans le cas de la formulation décrite dans le paragraphe 2.4.4 - formulation corrigée au premier pas.

La figure (2.8) met en évidence l'évolution de la force de forgeage en fonction de temps. Une bonne similitude des résultats est trouvée.

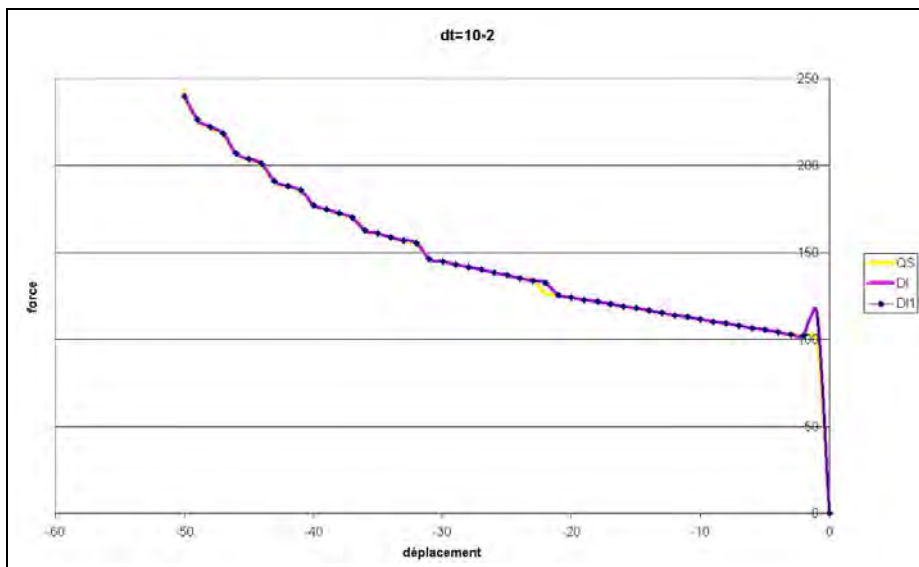


FIG. 2.8 – Évolution de la force de forgeage en fonction de temps (pour  $dt = 10^{-2}$ )

Dans les cas dynamiques DI et DI1 une croissance de la force est enregistrée au premier incrément par rapport au cas quasi-statique QS, dans ce dernier, l'accélération étant importante au départ.

En diminuant le pas de temps par un facteur de 10 ( $dt = 10^{-3}$ ), la précision des résultats augmente, comme l'indique le tableau (2.3).

	v.l.	X(top)	X(bottom)	$\sigma_{eq}^{max}$	$V^{max}$	$P^{max}$	F	$\varepsilon_{eq}^{max}$
QS	0.046%	124.69	147.14	44.43	149.78	58.24	241.89	1.656
DI	0.045%	124.76	147.11	44.39	149.69	56.25	242.56	1.659
DI1	0.06%	124.72	147.10	44.43	149.91	58.30	242.44	1.661
DI1/DI		0.999	0.99999	1.0002	1.001	1.00085	0.999502	1.0012
DI1/QS		1.00024	0.99972	1	1.00086	1.00103	1.00227	1.003
DI/QS		1.00056	0.99979	0.999	0.9993	1.00017	1.0027	1.0018

TAB. 2.3 – Résultats pour  $dt = 10^{-3}$

Pour l'incompressibilité, le même phénomène remarqué pour  $dt = 10^{-2}$  apparaît dans le cas de la formulation notée DI1.

Les courbes concernant l'évolution de la perte de volume au cours du temps sont présentées dans la figure (2.9).

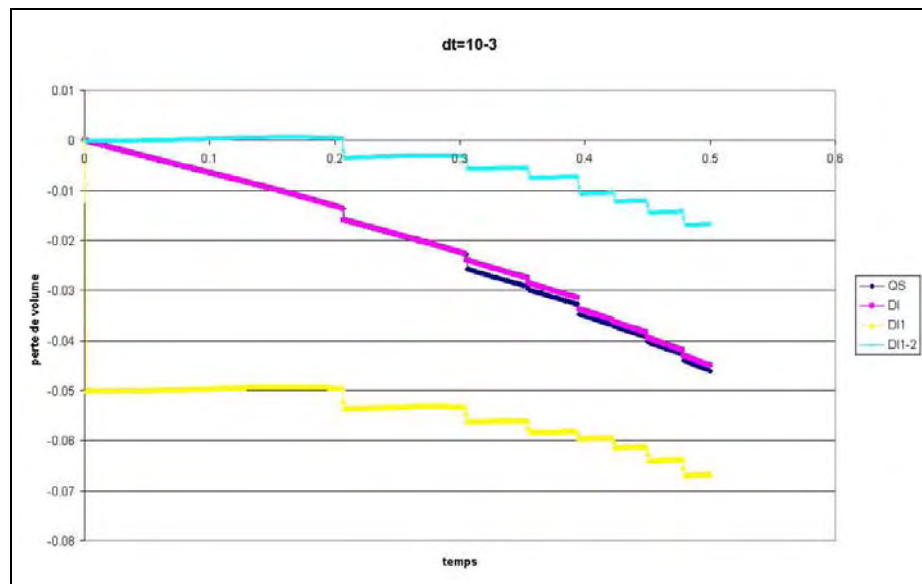
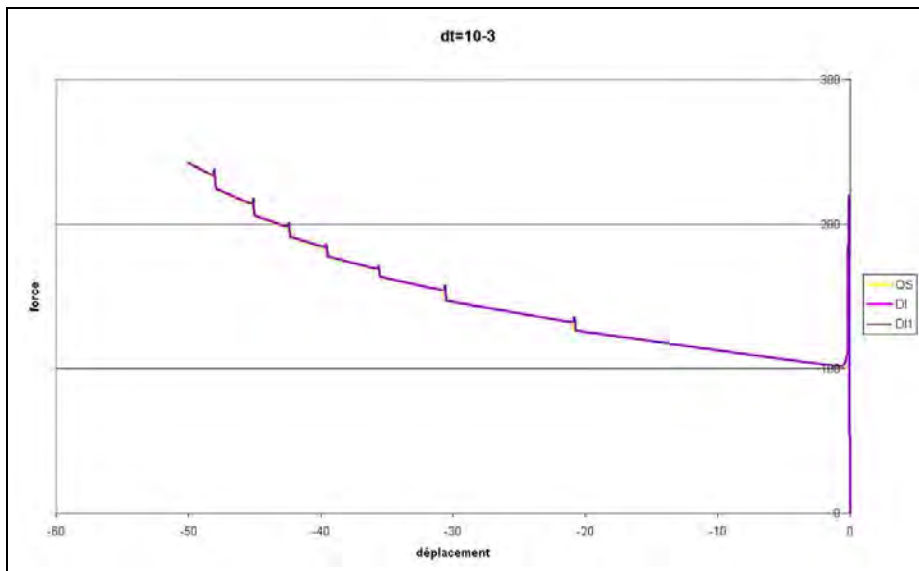


FIG. 2.9 – Variation de la perte de volume en fonction de temps (pour  $dt = 10^{-3}$ )

On retrouve également la courbe correspondant au cas DI1-2, cas pour lequel l'accélération n'est pas prise en compte pour dans la réactualisation des coordonnées au premier incrément. Dans ce cas, une amélioration est également remarquée.

La force de forgeage, dans chaque cas, varie au cours du temps selon les courbes présentées dans la figure (2.10).

Dans les deux cas dynamique DI et DI1, une différence importante est signalée au premier incrément par rapport au cas quasi-statique QS. Cette différence s'explique, comme dans le cas précédent, par la présence de l'accélération.

FIG. 2.10 – Évolution de la force de forgeage en fonction de temps (pour  $dt = 10^{-3}$ )

Pour le pas de temps de  $dt = 10^{-4}$ , les résultats obtenus dans les trois cas QS, DI et DI1 sont exposés dans le tableau (2.4).

	v.l.	X(top)	X(bottom)	$\sigma_{eq}^{max}$	$V^{max}$	$P^{max}$	F	$\varepsilon_{eq}^{max}$
QS	0.0036%	124.66	147.17	44.428	149.76	58.25	242.34	1.659
DI	0.0034%	124.73	147.147	44.42	149.85	58.27	243.02	1.659
DI1	0.006%	124.72	147.146	44.425	149.87	58.34	243.007	1.660
DI1/DI		0.999919	0.99999	1.00012	1.0001	1.0012	0.99994	1.0006
DI1/QS		1.0048	0.99979	0.9999	1.0007	1.0015	1.00275	1.0006
DI/QS		1.00056	0.99984	0.9998	1.0006	1.0003	1.0028	1

TAB. 2.4 – Résultats pour  $dt = 10^{-4}$ 

En ce qui concerne la perte de volume, les courbes d'évolution sont présentées sur la figure (2.11) et le même phénomène, rencontré dans les cas précédent, est remarqué.

Les forces de forgeage, résultant des trois formulations comparées ici, pour le cas de  $dt = 10^{-4}$ , sont représentées dans la figure (2.12). Une forte croissance au premier incrément, dans les deux cas dynamiques, est également retrouvée.

Avec la diminution du pas de temps, une diminution proportionnelle est trouvée pour la perte de volume finale, dans chacun des cas (figure (2.13)).

En conclusion, pour cet exemple, la formulation proposée (correspondant à DI1 et implicitement à DI1-2) fournit des résultats cohérents (en terme de force de forgeage, contraintes équivalentes, pression), très comparables à ceux issus des formulations notées QS et DI. En outre, cette nouvelle formulation (version DI1-2) préserve mieux l'incompressibilité.

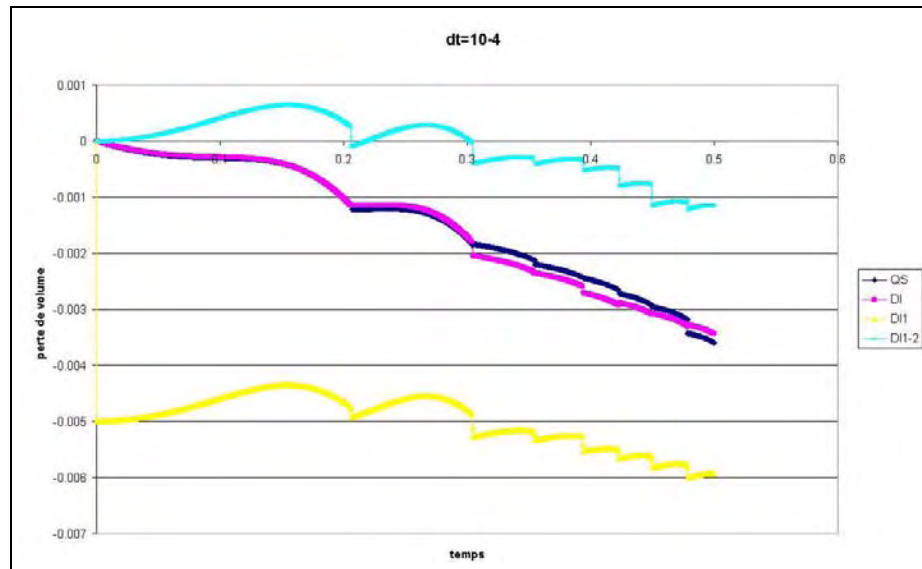


FIG. 2.11 – Variation de la perte de volume en fonction de temps (pour  $dt = 10^{-4}$ )

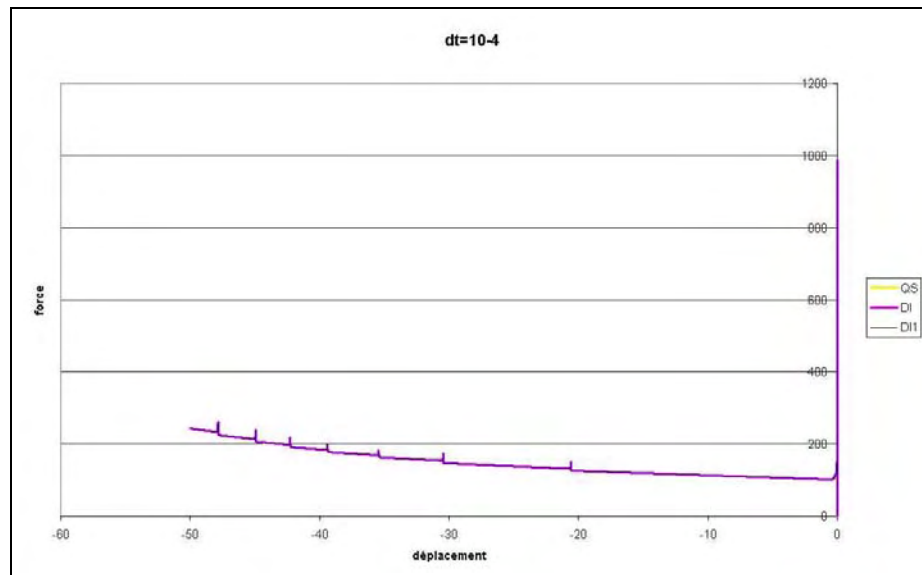


FIG. 2.12 – Évolution de la force de forgeage en fonction de temps (pour  $dt = 10^{-4}$ )



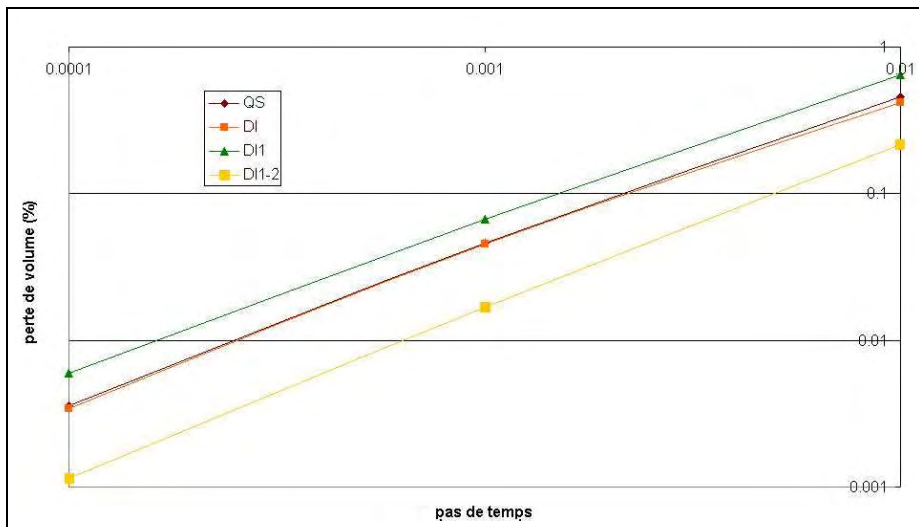


FIG. 2.13 – Répartition de la perte de volume en fonction du pas de temps

### 2.6.2 Test de traction

Un autre exemple est celui d'un essai de traction effectué sur une éprouvette axisymétrique dont la géométrie est présentée sur la figure (2.14). Les paramètres qui décrivent le matériau se trouvent dans le tableau (2.1).

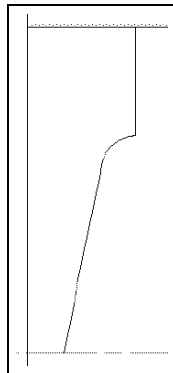


FIG. 2.14 – Géométrie de l'éprouvette initiale

Pour ce test, la vitesse du procédé est de  $1000 \text{ mm/s}$ , l'inertie est donc plus importante que dans le cas précédent, son effet étant très visible sur les résultats obtenus.

Dans le cas quasi-statique (figure 2.15(b)) il est observé une apparition très rapide de la striction. Dans les deux cas dynamiques considérés : le cas correspondant à la formulation notée DI (figure 2.15(c)) et celui correspondant à la formulation notée DI1-2 (figure 2.15(d)), l'inertie freine la déformation, ainsi la striction apparaît plus tardivement que dans le cas quasi-statique.

Cela explique la différence trouvée entre les géométries de l'éprouvette à approximativement 9% de déformation dans le cas quasi-statique et dans les cas dynamiques. Le diamètre de l'éprouvette au niveau de la striction est plus grand d'un facteur 1.9 dans les cas dynamiques.

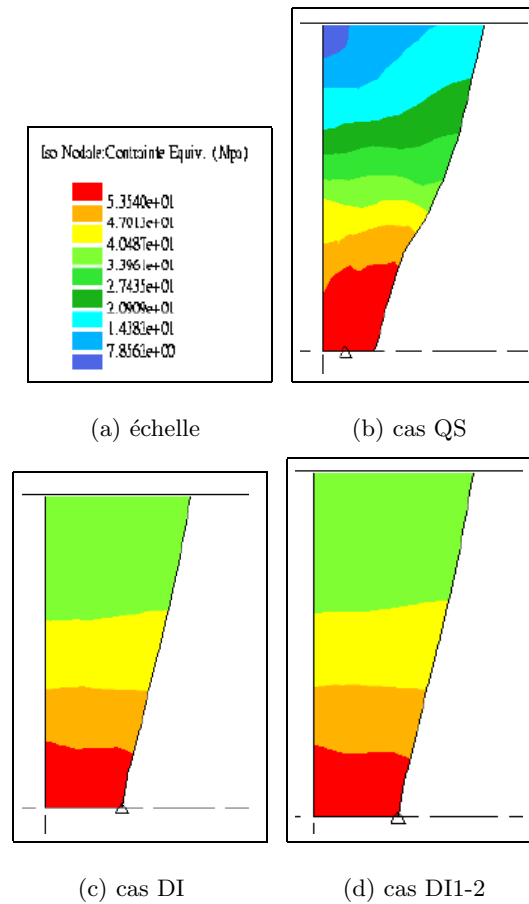
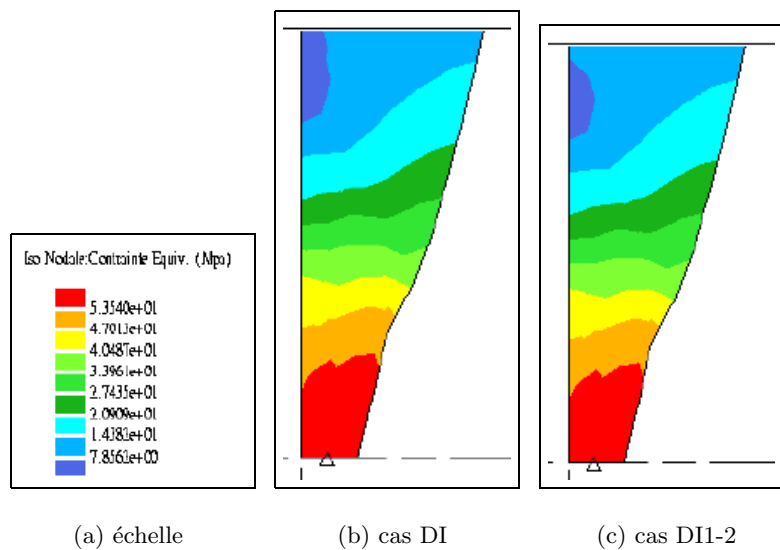


FIG. 2.15 – Contraintes équivalentes à 9% de déformation - QS, DI, DI1-2

Si dans les cas dynamiques nous nous plaçons à  $1.9 \times 9\%$  de déformation, alors nous retrouvons le même diamètre de striction que dans le cas quasi-statique et les isovaleurs des contraintes équivalentes sont très comparables (figures 2.15(b), 2.16(b), 2.16(c)).

FIG. 2.16 – Contraintes équivalentes à  $1.9 \times 9\%$  de déformation - DI, DI1-2

En ce qui concerne l'incompressibilité, nous remarquons, comme dans l'exemple précédent, que notre formulation fournit les meilleurs résultats :

	QS	DI	DI1-2
v.l.	0.0204 %	0.00816 %	0.00360 %

TAB. 2.5 – Perte de volume à 9% de déformation

### 2.6.3 Forgeage

Par la suite, deux exemples seront présentés dans le but de mettre en relief l'importance de l'inertie pour certains processus.

#### a) Premier exemple

Un autre exemple est considéré pour valider la formulation proposée, notée par DI1, respectivement DI1-2 tenant compte de la correction concernant la réactualisation des coordonnées au premier incrément.

Cet exemple est effectué avec la formulation corrigée, DI1-2, et correspond à un test de compression pour lequel l'outil présente une forme particulière (figure 2.17).

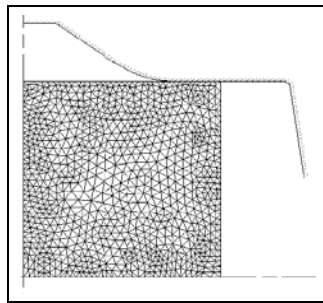


FIG. 2.17 – Géométrie initiale pièce-outil

La pièce est le même cylindre que celui utilisé pour le test précédent de compression. Le même maillage est pris en compte. Le matériau a les propriétés présentées dans le tableau (2.1).

La vitesse du processus correspond à  $1000 \text{ mm/s}$ . Un frottement de Norton est utilisé, le coefficient de frottement étant  $\alpha_f = 0.1$ . Le pas de temps est  $dt = 10^{-4} \text{ s}$ . Le remaillage automatique est utilisé.

Dans ce cas l'inertie joue un rôle important. La matrice de forgeage est rempli correctement, dans la partie haute, seulement pour les cas dynamiques. L'inertie freine l'écoulement de la matière, celle-ci étant implicitement poussée vers la partie centrale et haute de la pièce. De cette manière, la matière remplit plus rapidement la partie haute de la matrice de forgeage.

Ce phénomène est bien mis en évidence dans les figures (2.18(b)), (2.18(c)), (2.18(d)). Les isovaleurs des contraintes équivalentes présentées dans ces figures montrent une bonne concordance entre les résultats obtenus, surtout pour les cas dynamiques.

La perte de volume pour les trois formulations est présentée dans le tableau (2.6).

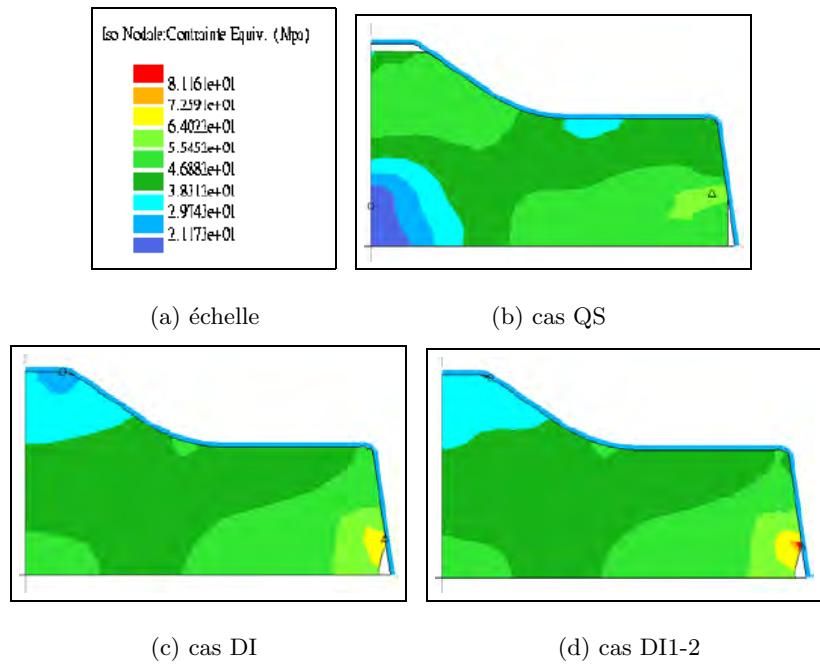


FIG. 2.18 – Contraintes équivalentes - QS, DI, DI1-2

	QS	DI	DI1-2
v.l.	0.19 %	0.22 %	0.1 %

TAB. 2.6 – Perte de volume pour le premier exemple de forgeage

On remarque une meilleure conservation du volume dans le cas de la formulation DI1-2. En revanche, cette approche est 30% moins rapide que les deux autres.

### b) Deuxième exemple

Ce deuxième test nous permettra d'observer plus clairement l'effet de l'inertie dans un cas de remplissage d'une matrice de forgeage.

Dans ce sens, nous considérons la géométrie pièce-outil suivante (figure 2.19).

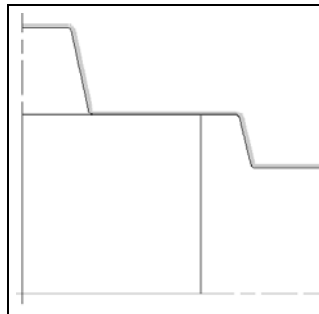


FIG. 2.19 – Géométrie initiale

Nous nous situons dans les mêmes conditions que dans l'exemple précédent, à la seule différence que le coefficient de frottement est de  $\alpha_f = 0.2$ .

Comme précédemment, la partie haute du moule n'est remplie que dans les cas dynamiques grâce à l'inertie. En outre, l'effet de l'inertie peut être remarqué sur les profils des bombés formés à la fin des simulations, pour les trois cas considérés, comme montre la figure (2.20).

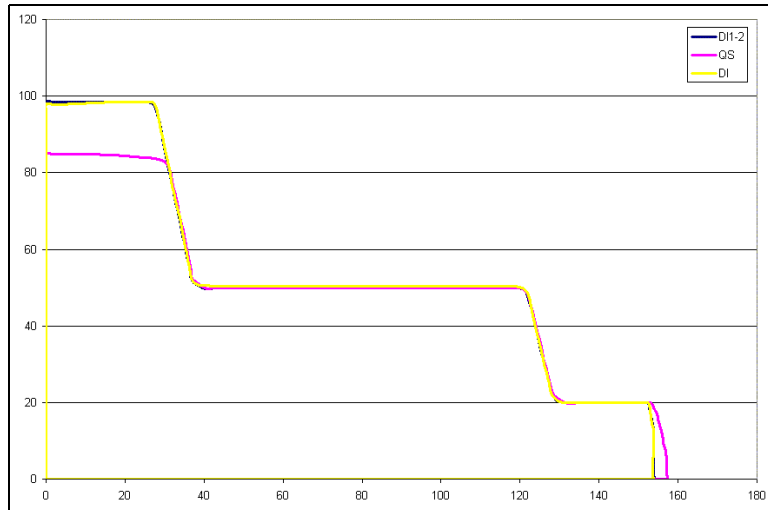
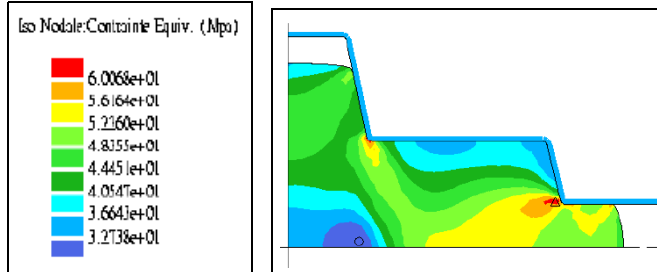


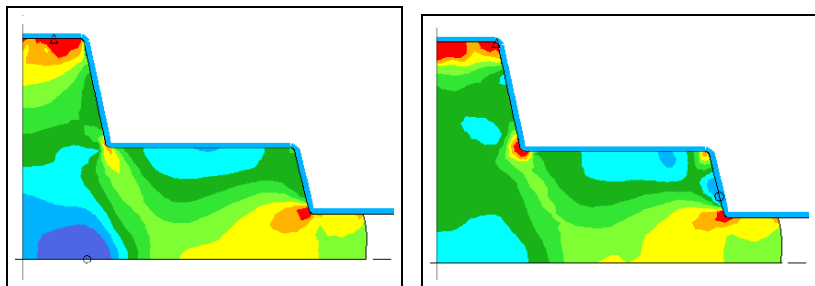
FIG. 2.20 – Comparaison des profils finaux

Les résultats issus des simulations dans les trois cas considérés sont très cohérents. Les figures (2.21(b)), (2.21(c)) et (2.21(d)) montrent les répartitions des contraintes équivalentes. Une bonne concordance est remarquée.



(a) échelle

(b) cas QS



(c) cas DI

(d) cas DI1-2

FIG. 2.21 – Contraintes équivalentes - QS, DI, DI1-2

Le tableau (2.7) présente les pertes de volume enregistrés dans tous les trois cas.

	QS	DI	DI1-2
v.l.	0.1 %	0.12 %	0.06 %

TAB. 2.7 – Perte de volume pour le deuxième exemple de forgeage

Une meilleure conservation du volume est constatée dans le cas de la formulation DI1-2. Comme dans le cas précédent, cette formulation est 20% moins rapide que les formulations standard.

## 2.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre plusieurs formulations implicites concernant la simulation numérique de processus de forgeage. Une formulation quasi-statique et une formulation dynamique à la base des deux versions du logiciel Forge2<sup>®</sup> sont brièvement décrites. Ce sont les versions de référence pour les trois autres formulations dynamiques que nous proposons. Dans ces nouvelles approches, l'accélération intervenant dans l'équation d'équilibre est exprimée en fonction de la vitesse par un schéma aux différences finies centrées sur chaque intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$ . Ceci entraîne la résolution du problème sur le domaine  $\Omega^{t+\frac{\Delta t}{2}}$  en tenant compte d'une vitesse  $v^{t+\frac{\Delta t}{2}}$  ainsi que d'un comportement et d'un frottement calculés au même moment  $t + \frac{\Delta t}{2}$ . Cette approche présente l'avantage d'être précise, mais, en même temps, a l'inconvénient d'être plus coûteuse.

Dans le but de la simplifier, deux approximations sont envisagées. La première concerne le domaine de résolution et permet d'éviter les dérivées de domaine qui compliquent le calcul. La deuxième (intégrée dans une version du logiciel Forge2) consiste à considérer la vitesse (et implicitement le comportement et le frottement) à la fin de l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$ . Dans ce contexte, une correction est proposée à la condition d'incompressibilité afin d'avoir une meilleure conservation du volume.

Les exemples numériques présentés et analysés, soulignent, d'un côté, l'amélioration apportée en terme d'incompressibilité et, d'un autre côté, le rôle joué par l'inertie lors d'un processus de forgeage plus complexe (ici, le cas d'un remplissage d'une matrice de forgeage).

La formulation dynamique proposée fournit des résultats satisfaisants en comparaison aux formulations déjà existantes, mais le temps de calcul augmente de 10% à 25%.



# Chapitre 3

## Présentation d'une formulation partiellement explicite

---

### 3.1 Introduction

Les codes implicites représentent un outil classique de calcul pour la simulation numérique du processus de forgeage. Toutefois, des travaux ont été réalisés utilisant des codes explicites. Ces travaux portent, en général, sur des matériaux élastoplastiques [29], [67]. Pour le cas des matériaux viscoplastiques aucune référence n'a été trouvée.

Notre travail a pour but principal l'analyse des méthodes explicites dans le contexte du forgeage à chaud à grande vitesse.

Dans l'état de l'art actuel, une résolution complètement explicite du problème de forgeage à chaud ne semble guère possible, à cause de l'incompressibilité qui s'impose dans ce cas de figure.

En conséquence, une formulation dynamique partiellement explicite en accélération/pression fait l'objet de notre travail. Cette approche est présentée et analysée dans ce chapitre.

La formulation proposée a été intégrée dans une version 2D axisymétrique du code Forge2<sup>®</sup>. Des exemples numériques mettront en évidence la validité de cette approche. Les résultats seront comparés avec ceux issus des formulations implicites quasi-statique et dynamiques (QS, DI et DI1-2) présentées dans le chapitre précédent.

### 3.2 Formulation mixte accélération/pression pour un matériau viscoplastique

#### 3.2.1 Formulation mécanique

Nous nous plaçons dans le cadre général présenté dans le paragraphe 2.2. Le comportement du matériau est décrit par la loi de Norton-Hoff (1.6). L'équilibre dynamique est défini par la relation (1.25).



Les conditions aux frontières correspondant à la surface libre et à l'interface pièce-outil sont exprimées par les relations (2.2) et (2.3). Un frottement de type Norton (2.4) est également utilisé.

Les inconnues de la formulation proposée étant l'accélération et la pression, les termes de rhéologies sont connus à l'instant  $t$  et le comportement du matériau n'introduit pas de non-linéarité, comme dans le cas des formulations vitesse/pression.

Dans le contexte d'une formulation accélération/pression, la condition d'incompressibilité doit être exprimée en termes d'accélération. En différentiant la condition d'incompressibilité classique (1.83) par rapport au temps, conformément à [11], [12], nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{div}(v)) = \sum_i \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i} - \sum_{i,j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \quad (3.1)$$

ce qui est équivalent à la relation en accélération (1.85). Les détails du calcul sont présentés en Annexe B.

Dans ces conditions le problème étudié devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\gamma - g) - \operatorname{div}(s) + \operatorname{grad}(p) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \operatorname{div}(\gamma) - \operatorname{tr} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \sigma_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_l \\ (v - v_{outil}) \cdot \mathbf{n} = v_s \cdot \mathbf{n} \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega_c \\ \tau = -\alpha_f K |v_s|^{q-1} v_s \text{ sur } \partial\Omega_c \end{array} \right. \quad (3.2)$$

En négligeant la gravité, la forme intégrale du problème dynamique correspond à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \rho \gamma \cdot v^* d\omega - \int_{\Omega} p \cdot \operatorname{div}(v^*) d\omega = - \int_{\Omega} s(v) : \dot{\varepsilon}(v^*) d\omega + \int_{\partial\Omega_c} \tau \cdot v^* dS \\ - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\gamma) \cdot p^* d\omega = - \int_{\Omega} \operatorname{tr} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot p^* d\omega. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

quels que soient  $v^*$  et  $p^*$ .

Ce système est symétrique en  $\gamma$  et  $p$ .

### 3.2.2 Discrétisation en éléments finis

Le MINI-élément est utilisé pour la discrétisation spatiale de cette formulation. Dans ce contexte, les coordonnées, les vitesses, les pressions et le tenseur des vitesses de déformation sont approximés conformément au paragraphe 2.3.1.

#### La discrétisation de l'accélération

Afin d'obtenir la discrétisation de l'accélération, la relation (2.9) est différenciée par rapport au temps, ce qui implique :

$$\frac{dv_h}{dt} = \gamma_h = \sum_{n=1}^{Nbnoe} \Gamma_n N_n + \sum_{e=1}^{Nbel} \Gamma_e^b \varphi_e + \sum_{e=1}^{Nbel} V_e^b \frac{d\varphi_e}{dt}. \quad (3.4)$$

Pour effectuer cette opération nous nous sommes placés dans un contexte ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) [12], [56], [61]. Dans ce cadre, la vitesse de la matière  $v_h$  est différente de celle du maillage  $v_g$ .

Ainsi, sur chaque élément  $\Omega_e$ , on considère (voir figure (3.1)) :

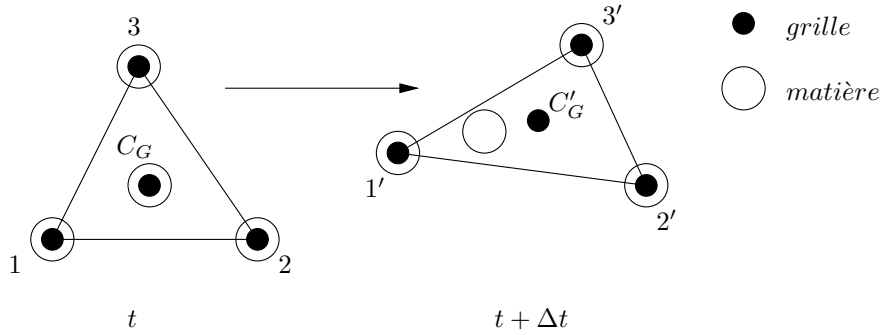


FIG. 3.1 – Cadre ALE défini sur un élément

– les noeuds 1, 2 et 3 sont liés à la matière, alors :

$$V_m^{mat} = V_m^g = V_m, \quad m = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

et ainsi :

$$\frac{dV_m}{dt} = \Gamma_m \quad (3.6)$$

– pour le noeud correspondant au centre de gravité  $C_G$ , la matière devrait se déplacer avec une vitesse  $V_{C_G}^{mat} \neq V_{C_G}^g$ , où

$$V_{C_G}^g = \frac{1}{3} (V_1 + V_2 + V_3) \quad (3.7)$$

et

$$V_{C_G}^{mat} = \frac{1}{3} (V_1 + V_2 + V_3) + V_e^b \quad (3.8)$$

Pour calculer le troisième terme de (3.4), pour chaque élément  $\Omega_e$ , la définition de la dérivée de grille (ALE) [26], [57] est prise en compte. Ainsi, on peut écrire :

$$\frac{d_g \varphi_e}{dt} = \frac{d\varphi_e}{dt} - \text{grad}(\varphi_e)(v_h - v_g) \quad (3.9)$$

où

$$v_g = \sum_{m=1}^3 V_m N_m. \quad (3.10)$$

Nous tenons compte du fait que  $\frac{d_g \varphi_e}{dt} = 0$ , ce qui implique :

$$\frac{d\varphi_e}{dt} = \text{grad}(\varphi_e) V_e^b \varphi_e. \quad (3.11)$$

Pour des raisons de simplicité, nous écrivons la relation (3.4) comme suit :

$$\gamma_h = \gamma_h^1 + \gamma_h^2 \quad (3.12)$$

avec

$$\gamma_h^1 = \sum_{n=1}^{Nbnoc} \Gamma_n N_n + \sum_{e=1}^{Nbel} \Gamma_e^b \varphi_e \quad (3.13)$$

et

$$\gamma_h^2 = \sum_{e=1}^{Nbel} V_e^b \frac{d\varphi_e}{dt}. \quad (3.14)$$

### 3.2.3 Traitement de la bulle

En séparant les différentes contributions, le système (3.3) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \rho \gamma_h \cdot v_h^{l*} d\omega - \int_{\Omega} p_h \cdot \text{div}(v_h^{l*}) d\omega = - \int_{\Omega} s(v_h^l + v_h^b) : \dot{\varepsilon}(v_h^{l*}) d\omega \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \int_{\partial\Omega_C} \tau_h^l \cdot v_h^{l*} dS \\ \int_{\Omega} \rho \gamma_h \cdot v_h^{b*} d\omega - \int_{\Omega} p_h \cdot \text{div}(v_h^{b*}) d\omega = - \int_{\Omega} s(v_h^l + v_h^b) : \dot{\varepsilon}(v_h^{b*}) d\omega \\ - \int_{\Omega} \text{div}(\gamma_h) p_h^* d\omega = - \int_{\Omega} \text{tr} \left( \frac{\partial(v_h^l + v_h^b)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(v_h^l + v_h^b)}{\partial x} \right) p_h^* d\omega, \end{array} \right. \quad (3.15)$$

quels que soient  $v_h^{l*}$ ,  $v_h^{b*}$  et  $p_h^*$ , où  $\tau(v_h^l)$  est noté  $\tau_h^l$ .

En utilisant les formules de discrétisation présentées ci-dessus, nous obtenons  $3Nbnoc + 2Nbel$  équations mixtes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \rho \gamma_h \cdot N_n d\omega - \int_{\Omega} p_h \cdot \text{tr}(B_n) d\omega = - \int_{\Omega} s(v_h^l + v_h^b) : B_n d\omega \\ \hspace{15em} - \int_{\partial\Omega_C} \tau_h^l \cdot N_n dS \\ \int_{\Omega} \rho \gamma_h \cdot \varphi_e d\omega - \int_{\Omega} p_h \cdot \text{tr}(B_e^b) d\omega = - \int_{\Omega} s(v_h^l + v_h^b) : B_e^b d\omega \\ - \int_{\Omega} \text{div}(\gamma_h) N_m d\omega = - \int_{\Omega} \text{tr} \left( \frac{\partial(v_h^l + v_h^b)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(v_h^l + v_h^b)}{\partial x} \right) N_m d\omega. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Dans cette dernière formulation, pour chaque élément, l'inertie intervient par les termes suivants :

$$\int_{\Omega_e} \gamma_h N_n d\omega = \int_{\Omega_e} \gamma_h^1 N_n d\omega + \int_{\Omega_e} \gamma_h^2 N_n d\omega \quad (3.17)$$

et

$$\int_{\Omega_e} \gamma_h \varphi_e d\omega = \int_{\Omega_e} \gamma_h^1 \varphi_e d\omega + \int_{\Omega_e} \gamma_h^2 \varphi_e d\omega. \quad (3.18)$$

Les termes concernant  $\gamma_h^1$  sont calculés classiquement, tandis que ceux concernant  $\gamma_h^2$  sont analysés par la suite (leur calcul détaillé est présenté en Annexe D).

Le deuxième terme de (3.17) donne :

$$\int_{\Omega_e} \gamma_h^2 N_n d\omega = -\frac{1}{12} V_e^b \text{grad}(N_n) V_e^b [\Omega_e] \quad (3.19)$$

où  $[\Omega_e]$  représente la surface du domaine  $\Omega_e$ . En supposant que  $V_e^b$  est suffisamment petit, ce terme peut-être négligé en première approximation.

Le deuxième terme de (3.18) est nul.

Considérons maintenant l'équation d'incompressibilité du système (3.16), les termes contenant l'accélération peuvent se réécrire comme :

$$\int_{\Omega_e} \text{div}(\gamma_h) N_m d\omega = \int_{\Omega_e} \text{div}(\gamma_h^1) N_m d\omega + \int_{\Omega_e} \text{div}(\gamma_h^2) N_m d\omega. \quad (3.20)$$

La dernière intégrale de (3.20) est nulle, selon les calculs exposés en Annexe D.

Cette analyse montre qu'un seul terme concernant  $\gamma_h^2$  est non nul. De plus, si  $V_e^b$  est suffisamment petit, la contribution de ce terme peut être négligée, comme  $V_e^b$  apparaît au carré dans (3.19). En conséquence, par la suite, nous retiendrons l'approximation suivante pour (3.4) :

$$\gamma_h \cong \gamma_h^l + \gamma_h^b = \sum_{n=1}^{Nbnoe} \Gamma_n N_n(\xi) + \sum_{e=1}^{Nbel} \Gamma_e^b \varphi_e = \gamma_h^1 \quad (3.21)$$

où  $\gamma_h^b$  représente l'accélération au centre de gravité de l'élément .

### 3.2.4 La propriété d'orthogonalité de la bulle

Pour chaque élément, la *propriété d'orthogonalité* de la bulle :

$$\int_{\Omega_e} T : \dot{\varepsilon}(v_h^b) d\omega = 0 \quad (3.22)$$

est satisfaite pour tout tenseur  $T$ , de composantes constantes dans  $\Omega_e$  ( $P^0(\Omega_e)$ ).

Pour démontrer (3.22), la formule de Green est appliquée :

$$\int_{\Omega_e} T : \dot{\varepsilon}(v_h^b) d\omega = - \int_{\Omega_e} \text{div}(T) v_h^b d\omega + \int_{\partial\Omega_e} T.n v_h^b dS. \quad (3.23)$$

Les composantes de  $T$  étant en  $P^0(\Omega_e)$ , nous en déduisons que  $\text{div}(T) = 0$ . En conséquence, la première intégrale du second membre de (3.23) est égale à zéro. Quant à la deuxième intégrale du second membre, sa valeur est également nulle, comme  $v_h^b$  s'annule sur la frontière de l'élément, par définition.

Cette propriété sert à simplifier le système (3.15). En remplaçant  $s$  par la loi de comportement (1.6) dans le système (3.15), nous obtenons :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} s(v_h^l + v_h^b) : \dot{\varepsilon}(v_h^{l*}) d\omega &= - \int_{\Omega} 2K \left( \sqrt{3} \dot{\varepsilon}(v_h^l + v_h^b) \right)^{m-1} \dot{\varepsilon}(v_h^l) : \dot{\varepsilon}(v_h^{l*}) d\omega \\ &- \int_{\Omega} 2K \left( \sqrt{3} \dot{\varepsilon}(v_h^l + v_h^b) \right)^{m-1} \dot{\varepsilon}(v_h^b) : \dot{\varepsilon}(v_h^{l*}) d\omega \end{aligned} \quad (3.24)$$

à partir de la première équation, et

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} s(v_h^l + v_h^b) : \dot{\varepsilon}(v_h^{b*}) d\omega &= - \int_{\Omega} 2K \left( \sqrt{3} \dot{\varepsilon}(v_h^l + v_h^b) \right)^{m-1} \dot{\varepsilon}(v_h^l) : \dot{\varepsilon}(v_h^{b*}) d\omega \\ &- \int_{\Omega} 2K \left( \sqrt{3} \dot{\varepsilon}(v_h^l + v_h^b) \right)^{m-1} \dot{\varepsilon}(v_h^b) : \dot{\varepsilon}(v_h^{b*}) d\omega \end{aligned} \quad (3.25)$$

à partir de la deuxième.

Dans chacune de ces équations un terme sera éliminés à l'aide de la *propriété d'orthogonalité*.

### Cas linéaire

Dans le cas newtonien ( $m = 1$ ), le terme  $T = 2K\dot{\varepsilon}(v_h^{l*})$  est constant sur  $\Omega_e$ . Par conséquent, la deuxième intégrale du second membre de (3.24) est égale à zéro, en vertu de la *propriété d'orthogonalité*.

Le même raisonnement appliqué pour  $T' = 2K\dot{\varepsilon}(v_h^l)$  nous mène à déduire que la première intégrale de (3.25) est également nulle.

### Cas non linéaire

Dans le cas non-linéaire ( $m \neq 1$ ), les termes  $T = 2K(\sqrt{3}\dot{\varepsilon}(v_h^l + v_h^b))^{m-1}\dot{\varepsilon}(v_h^{l*})$  et  $T' = 2K(\sqrt{3}\dot{\varepsilon}(v_h^l + v_h^b))^{m-1}\dot{\varepsilon}(v_h^l)$  ne vérifient plus la *propriété d'orthogonalité*, à cause de la contribution de la bulle dans la partie non linéaire de chacun.

Néanmoins, la deuxième intégrale de (3.24) et la première intégrale de (3.25) seront négligées par la suite.

Cette démarche s'appuie sur une analyse effectuée dans le cas quasi-statique [48], qui montre qu'une approximation de type :

$$\left(\sqrt{3}\dot{\varepsilon}(v_h^l + v_h^b)\right)^{m-1} \cong \left(\sqrt{3}\dot{\varepsilon}(v_h^l)\right)^{m-1} \quad (3.26)$$

est justifiée. De la sorte, la contribution de la bulle est éliminée des termes non linéaires, ce qui permet ensuite de raisonner comme dans le cas linéaire.

Cette approximation sera également utilisée dans tous nos calculs concernant les termes de comportement.

La *propriété d'orthogonalité* est vérifiée en formulation plane. Par contre, notre travail est réalisé dans un cadre axisymétrique. Pour cette raison, tous les aspects analysés ci-dessus seront discutés par la suite dans un cadre axisymétrique.

#### a) Cadre axisymétrique

En approximation 2D axisymétrique,  $(r,z)$  représentent les coordonnées spatiales, les composantes du vecteur vitesse sont  $v_r$  et  $v_z$ ,  $v_\theta$  étant considéré nul et les composantes du vecteur accélération sont  $\gamma_r$  et  $\gamma_z$ , respectivement.

Le tenseur vitesse de déformation s'écrit dans ce contexte :

$$\dot{\varepsilon}(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ 0 & \frac{v_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Dans ce cas, les composantes du tenseur  $\dot{\varepsilon}(v)$  ne sont pas toutes en  $P^0(\Omega_e)$ , ce qui implique que  $T$  et  $T'$  ne sont pas constants. Par conséquent, la *propriété d'orthogonalité* n'est pas satisfaite.

Néanmoins, dans [48], Etienne Perchat a analysé les résultats obtenus dans le cas quasi-statique axisymétriques avec et sans ces termes. Il a remarqué que numériquement les différences ne sont pas significatives.

A partir de son analyse, dans un premier temps, ces termes seront négligés.

### b) Autres termes négligés

Pour simplifier la formulation, dans une première version, nous introduisons l'approximation suivante :

$$-\int_{\Omega} \text{tr} \left( \frac{\partial v_h}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_h}{\partial x} \right) N_m d\omega \cong -\int_{\Omega} \text{tr} \left( \frac{\partial v_h^l}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_h^l}{\partial x} \right) N_m d\omega \quad (3.28)$$

supposant que  $v_h^b$  est suffisamment petit.

Prenant en compte toutes ces simplifications, nous déduisons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \rho \gamma_h^l \cdot N_n d\omega + \int_{\Omega} \rho \gamma_h^b \cdot N_n d\omega - \int_{\Omega} p_h \cdot \text{tr}(B_n) d\omega = \\ - \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\bar{\varepsilon}(v_h^l))^{m-1} \dot{\varepsilon}(v_h^l) : B_n d\omega - \int_{\partial\Omega_C} \tau_h^l \cdot N_n dS \\ \int_{\Omega} \rho \gamma_h^l \cdot \varphi_e d\omega + \int_{\Omega} \rho \gamma_h^b \cdot \varphi_e d\omega - \int_{\Omega} p_h \cdot \text{tr}(B_e^b) d\omega = \\ - \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\bar{\varepsilon}(v_h^l))^{m-1} \dot{\varepsilon}(v_h^b) : B_e^b d\omega \\ - \int_{\Omega} \text{div}(\gamma_h^l) N_m d\omega + \int_{\Omega} \text{div}(\gamma_h^b) N_m d\omega = - \int_{\Omega} \text{tr} \left( \frac{\partial v_h^l}{\partial x} \frac{\partial v_h^l}{\partial x} \right) N_m d\omega \end{array} \right. \quad (3.29)$$

à partir de (3.16).

Le détail des calculs concernant la construction du système linéaire (3.29) ainsi que des indications sur la programmation sont présentés en Annexe E.

### 3.2.5 L'élimination de la bulle

La formulation discrète (3.29) peut se réécrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} C_{\Gamma\Gamma} & C_{\Gamma b} & D_{\Gamma P} \\ C_{b\Gamma} & C_{bb} & D_{bP} \\ D_{P\Gamma} & D_{Pb} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma \\ \Gamma^b \\ P \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_{\Gamma} \\ R_{\Gamma^b} \\ R_P \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

où  $\Gamma$  est le vecteur accélération nodale,  $\Gamma^b$  est le vecteur accélération bulle et  $P$  est le vecteur pression nodale.

La bulle étant locale à chaque élément, dans le système (3.30) les termes qui lui sont associés sont éliminés au niveau de l'élément.

Premièrement,  $\Gamma^b$  est évalué en fonction de  $\Gamma$  et  $P$  :

$$\Gamma^b = -C_{bb}^{-1}(R_{\Gamma^b} + C_{b\Gamma}\Gamma + D_{bP}P) \quad (3.31)$$

à partir de la deuxième équation de (3.30).

Cette expression est ensuite introduite dans les deux autres équations du système (3.30) afin d'obtenir un système avec seulement  $\Gamma$  et  $P$  comme inconnues.

Ainsi, nous écrivons :

$$\begin{pmatrix} C'_{\Gamma\Gamma} & D'_{\Gamma P} \\ {}^T D'_{\Gamma P} & E_{PP} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma \\ P \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R'_{\Gamma} \\ R'_P \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

avec  $3Nbnoe$  inconnues, où :

$$\begin{cases} C'_{\Gamma\Gamma} = C_{\Gamma\Gamma} - C_{\Gamma b}C_{bb}^{-1}C_{b\Gamma} \\ D'_{\Gamma P} = D_{\Gamma P} - C_{\Gamma b}C_{bb}^{-1}D_{bP} \\ -R'_{\Gamma} = -R_{\Gamma} + C_{\Gamma b}C_{bb}^{-1}R_{\Gamma^b} \\ E_{PP} = -D_{Pb}C_{bb}^{-1}D_{bP} \\ -R'_P = -R_P + D_{Pb}C_{bb}^{-1}R_{\Gamma^b} . \end{cases} \quad (3.33)$$

Le système obtenu est linéaire et, en conséquence, ne nécessite pas l'utilisation d'un algorithme de Newton-Raphson.

### 3.2.6 Condensation de la matrice de masse

Pour résoudre le système (3.30) il est nécessaire d'inverser une matrice à chaque incrément.

Dans le cas des méthodes complètement explicites, la matrice à inverser n'étant pas diagonale, les méthodes dite de "mass lumping", présentées dans le premier chapitre, sont très attractives [11], [74]. Pour notre approche, une diagonalisation de la matrice globale du système (3.30) n'est pas possible, car la condition d'incompressibilité ne serait plus correctement imposée.

Par conséquent, les techniques de "mass lumping" peuvent être utilisées uniquement pour rendre diagonale la matrice de masse, mais cette démarche n'est pas indispensable.

Dans le cas où ces techniques sont employées pour notre formulation, il faut les appliquer au niveau de l'élément, après l'élimination de la bulle. Dans le cas contraire, la forme diagonale se perd après l'élimination de la bulle, conformément à la première équation de (3.33).



La méthode classique est employée :

$${}^L C_{ij} = \delta_{ij} \sum_k C_{ik}. \quad (3.34)$$

Des tests ont été effectués avec et sans cette condensation de la matrice de masse. On ne trouve pas de différences significatives entre les résultats.

### 3.2.7 Intégration temporelle :

A l'instant  $t$ , en supposant  $X^t$  et  $V^t$  connus, la résolution du système (3.32) permet de calculer  $\Gamma^t$  et  $P^t$ .

Les schémas classiques utilisés dans le cadre des méthodes explicites pour la réactualisation des variables à l'instant  $t + \Delta t$  sont :

$$V^{t+\frac{\Delta t}{2}} = V^{t-\frac{\Delta t}{2}} + \Delta t \Gamma^t \quad (3.35)$$

et

$$X^{t+\Delta t} = X^t + \Delta t V^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad (3.36)$$

Si l'on envisage d'appliquer ces schémas à notre formulation, alors, il faudrait exprimer  $V^t$  en fonction de  $V^{t-\frac{\Delta t}{2}}$  :

$$V^t = V^{t-\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \Gamma^t \quad (3.37)$$

Par ce type de schéma l'accélération (l'inconnue) apparaît dans les termes de comportement. Par conséquent, le système résultant n'est plus linéaire alors que le but de notre formulation en accélération est d'obtenir un système linéaire.

Ainsi, nous considérons que :

$$V^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \frac{1}{2} (V^t + V^{t+\Delta t}) \quad (3.38)$$

ce qui implique :

$$X^{t+\Delta t} = X^t + \frac{1}{2} \Delta t (V^t + V^{t+\Delta t}) = X^t + \Delta t V^t + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \Gamma^t \quad (3.39)$$

qui fournit un schéma d'ordre 2 pour les coordonnées.

Pour les vitesses et les déformations, les schémas d'ordre 1 suivants seront utilisés :

$$V^{t+\Delta t} = V^t + \Delta t \Gamma^t \quad (3.40)$$

$$\bar{\varepsilon}^{t+\Delta t} = \bar{\varepsilon}^t + \Delta t \dot{\bar{\varepsilon}}^t. \quad (3.41)$$

## L'algorithme de l'approche

L'algorithme de la formulation proposée se présente sous la forme :

- *Lecture de données*
- *Initialisations*
- *Calcul incrémental (boucle sur le pas de temps)*
  - 1.1 *Calcul matrice (Hessien :  $(C')_{\Gamma}^t, (D')_{\Gamma P}^t, E_{PP}^t$ ), le membre gauche de (3.32) après l'élimination de la bulle*
  - 1.2 *Calcul résidu (Gradient :  $(R')_{\Gamma}^t, (R')_P^t$ ), le membre droit de (3.32) après l'élimination de la bulle*
  - (1.3 *Condensation de la matrice de masse*)
  - 1.4 *Résolution (Solveur direct), calcul de  $\Gamma^t$  et  $P^t$*
  - 1.5 *Actualisation du contact*
  - 2 *Calcul des variables :  $\bar{\varepsilon}, \dots$*
  - 3 *Réactualisation selon (3.39), (3.40) et (3.41)*
  - 4 *Remaillage (test)*

### 3.2.8 La gestion du contact

Dans le cadre de la formulation présentée, le contact est traité également de manière incrémentale par une méthode de pénalisation. Le raisonnement décrit brièvement dans le chapitre 2 est appliqué dans le contexte actuel. Ainsi, à chaque instant  $t$  on impose la condition (2.45) pour la distance de contact  $d^{t+\Delta t}$  à la fin de l'incrément.

La différence vient du fait que cette condition est exprimée à l'aide d'un schéma d'ordre 2, comme suit :

$$d^{t+\Delta t} = d^t + \frac{d(d^t)}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2(d^t)}{dt^2} \Delta t^2 \quad (3.42)$$

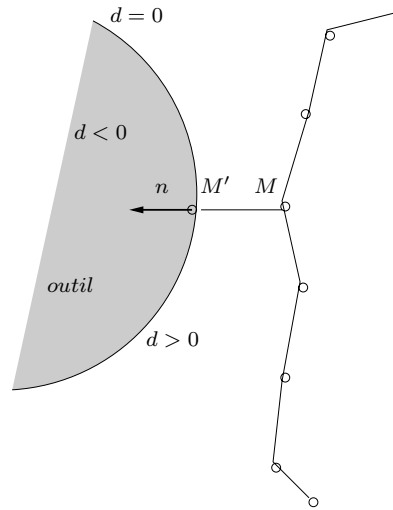
Considérant la distance définie par  $d = MM'.\mathbf{n}$  (voir figure (3.2)), la relation (3.42) prend la forme :

$$\begin{aligned} d^{t+\Delta t} &= d^t + \frac{d(MM'^t.\mathbf{n})}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2(MM'^t.\mathbf{n})}{dt^2} \Delta t^2 \\ &= d^t + \frac{d((M'^t - M^t).\mathbf{n})}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2((M'^t - M^t).\mathbf{n})}{dt^2} \Delta t^2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Comme nous travaillons dans un cadre où l'outil reste rigide et en translation, on peut considérer que  $\frac{dn}{dt}$ , qui résulte du calcul ci-dessus, est nul.

En conséquence, la condition de non-pénétration du deuxième ordre s'écrit :

$$(v^t - v_{outil}^t).\mathbf{n} + \left(\frac{\Delta t}{2} \gamma^t\right).\mathbf{n} - \frac{d^t}{\Delta t} \leq 0 \quad (3.44)$$


 FIG. 3.2 – Définition de la fonction distance  $d$ 

Dans ces conditions, l'équation dynamique se réécrit de la manière suivante, prenant en compte le terme lié au contact :

$$\int_{\Omega} \rho \gamma^t \cdot v^* d\omega + \int_{\Omega} s^t : \dot{\varepsilon}^* d\omega - \int_{\Omega} p^t \cdot \text{div}(v^*) d\omega - \int_{\partial\Omega_c} \tau \cdot v^* dS + \beta \int_{\partial\Omega_c} [(v^t - v_{outil}^t) \cdot \mathbf{n} + (\frac{\Delta t}{2} \gamma^t) \cdot \mathbf{n} - \frac{d^t}{\Delta t}]^+ \mathbf{n} \cdot v^* dS = 0 \quad (3.45)$$

quel que soit  $v^*$ , où  $\beta$  est le coefficient de pénalisation.

### 3.2.9 Premiers résultats

La formulation accélération/pression présentée précédemment a été implémentée dans une version viscoplastique axisymétrique du logiciel FORGE2<sup>®</sup>.

Nous comparons les résultats issus de la formulation accélération/pression proposée (notée ici DPE) avec ceux issus des versions FORGE2<sup>®</sup> quasi-statique (QS) et dynamique (DI), (DI1-2) présentées dans le chapitre 2.

Plusieurs exemples axisymétriques seront analysés par la suite :

- un test de traction,
- un test de compression - contact bilatéral collant,
- un test de compression - frottement.

pour des cas viscoplastiques.

#### a) Calcul (analytique/numérique) de la pression

Les cas quasi-statiques et dynamiques donnent des profils de pression différents.

L'étude de la compression uniaxiale d'un cylindre par un tas plat (sans frottement) illustre bien cette différence (figure (3.3)) .

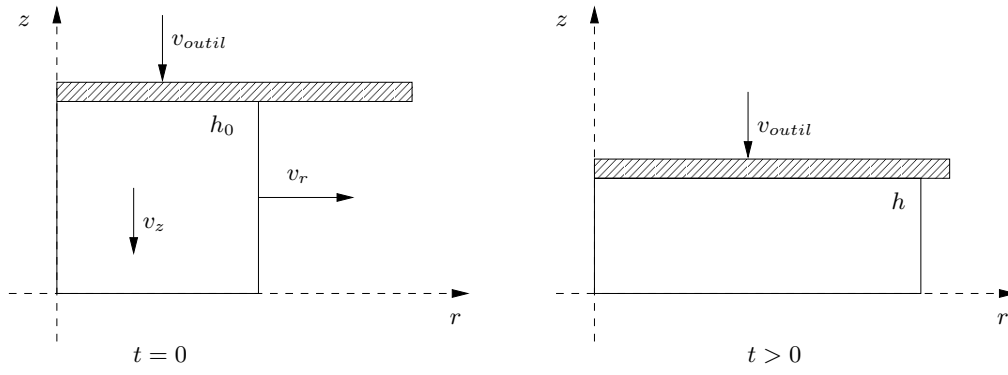


FIG. 3.3 – Test de compression - contact glissant (définition)

### Calcul analytique de la vitesse et de l'accélération

Tout d'abord, nous déduisons les expressions analytiques de la vitesse et de la pression.

Considérant la conservation du volume pour le cas de compression défini par la figure (3.3), on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} (\pi r^2 h) = 0 \quad (3.46)$$

ce qui entraîne

$$\pi r^2 (-v_{outil}) + 2\pi r h v_r = 0 \quad (3.47)$$

Sachant que  $h = h_0 - v_{outil}t$  on en déduit :

$$v_r = \frac{v_{outil}}{2} \frac{r}{h_0 - v_{outil}t} \quad (3.48)$$

Pour  $v_z$  on obtient l'expression suivante, tenant compte de sa linéarité :

$$v_z = -v_{outil} \frac{z}{h_0 - v_{outil}t} \quad (3.49)$$

En différentiant la relation (3.48) par rapport au temps, il vient :

$$\dot{\gamma}_r = \frac{3}{4} v_{outil}^2 \frac{r}{(h_0 - v_{outil}t)^2} \quad (3.50)$$

De la même manière, en différentiant l'équation (3.49) on en déduit que  $\dot{\gamma}_z$  est nul.

### Cas quasi-statique

Soit l'équation d'équilibre écrite comme suit :

$$\text{div}(s) - \text{grad}(p) = 0 \quad (3.51)$$

Pour un comportement newtonien, le tenseur déviateur des contraintes prend la forme :

$$s = 2\eta\dot{\epsilon} \quad (3.52)$$

La vitesse étant linéaire,  $\dot{\epsilon}$  est constant, ce qui implique  $\text{div}(s) = 0$  et, donc,  $\text{grad}(p) = 0$ . De ce résultat on en déduit que la pression est constante,  $p = p_0$ .

La valeur de  $p_0$  est déterminée à partir de la condition de surface libre, qui, dans le cadre axisymétrique, s'écrit :

$$\sigma_{rr} = 0 \quad (3.53)$$

Alors, à chaque instant, on calcule une pression :

$$p_0 = s_{rr} = 2\eta \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \quad (3.54)$$

Utilisant la relation (3.48) il résulte :

$$p_0 = \eta \frac{v_{outil}}{h_0 - v_{outil}t} \quad (3.55)$$

### Cas dynamique

Quand l'inertie intervient dans l'équation d'équilibre :

$$\rho\gamma = \text{div}(s) - \text{grad}(p) \quad (3.56)$$

avec le même raisonnement présenté ci-dessus, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\gamma_r = -\frac{\partial p}{\partial r} \\ \rho\gamma_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right. \quad (3.57)$$

Comme  $\gamma_z$  est nul, il résulte que la pression ne dépende pas de  $z$ . Il reste alors à déterminer une expression pour le calcul de la pression, à partir de la première équation de (3.57) et de (3.50)

$$p = p_0 - \frac{3}{8}\rho \frac{v_{outil}^2 r^2}{(h_0 - v_{outil}t)^2}, \quad (3.58)$$

pour  $r \in [0, r_{max}]$ , où  $r_{max}$  correspond à la surface libre.

Pour le calcul de  $p_0$ , la condition de surface libre est également utilisée et on en déduit :

$$p_0 = \frac{3}{8}\rho \frac{v_{outil}^2 r_{max}^2}{(h_0 - v_{outil}t)^2} + \eta \frac{v_{outil}}{h_0 - v_{outil}t} \quad (3.59)$$

On remarque que  $p = p_{max}$ , quand  $r = 0$  et que  $p = p_{min}$ , quand  $r = r_{max}$ .

Maintenant, nous appliquons ces formules à un cas concret de compression (contact glissant) d'un cylindre pour lequel  $h_0 = 100 \text{ mm}$ ,  $r_0 = 100 \text{ mm}$  et  $v_{outil} = 10^4 \text{ mm/s}$ . Le matériau est considéré newtonien.

Nous comparons les pressions analytiques et numériques pour les formulations notées QS, DI, DI1-2 et DPE. Le pas de temps utilisé pour la simulation numérique est de  $dt = 5 \times 10^{-5}$ . Le cylindre est déformé de 50%.

Les pressions à la fin de la déformation sont présentés dans le tableau (3.1) pour tous les cas considérés.

	$r_{max} \text{ (mm)}$	$P \text{ (MPa)}$
quasi-statique analytique	141,42	3220
dynamique analytique	141,42	max : 5499,95 min : 3220
QS	141,13	3188,1
DI	141,17	max : 5365,7 min : 3256,4
DI1-2	141,41	max : 5480 min : 3293,9
DPE	141,25	max : 5451,2 min : 3285,2

TAB. 3.1 – Comparaison : pression analytique/pression numérique

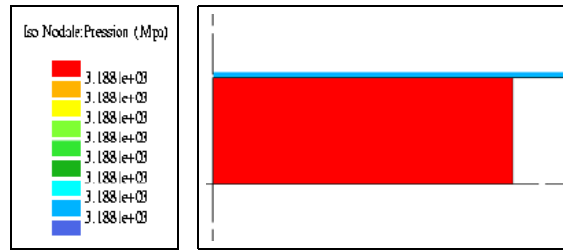
Les isovaleurs des pressions sont présentées dans la figure (3.4).

Le même calcul a été effectué pour  $dt = 10^{-5}$  et l'erreur relative entre la pression analytique et numérique a été évaluée pour chaque formulation et chaque  $dt$ . Les résultats sont exposés dans le tableau (3.2)

On note que les formulations DI1-2 et DPE fournissent des meilleurs résultats par rapport aux formulations QS et DI. En diminuant le pas de temps une amélioration est remarquée dans tous les cas.

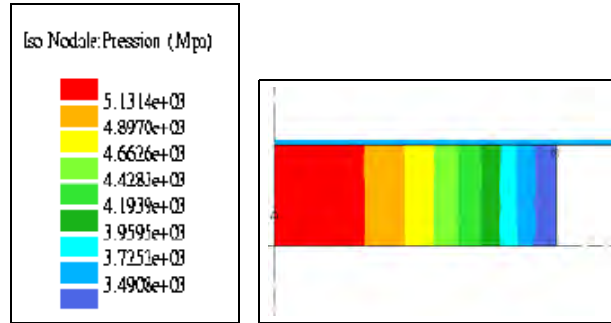
### Evaluation de la perte de volume en fonction du pas de temps

Pour le même cas de compression d'un cylindre avec un tas plat nous effectuons une analyse concernant l'évolution de la perte de volume en fonction du pas de temps. Les propriétés du matériau considéré pour cet exemple sont définies dans le tableau (3.3) :



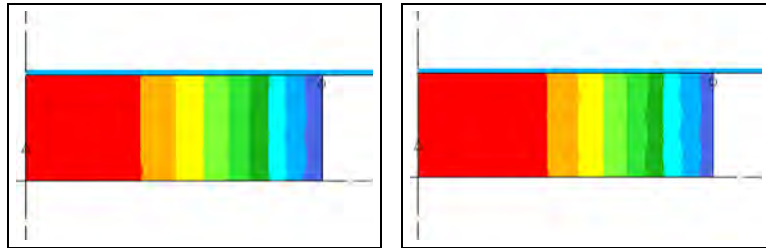
(a) Echelle-  
quasi-  
statique

(b) cas QS



(c) Echelle-  
dynamique

(d) cas DI



(e) cas DI1-2

(f) cas DPE

FIG. 3.4 – Pression - QS, DI, DI1-2, DPE

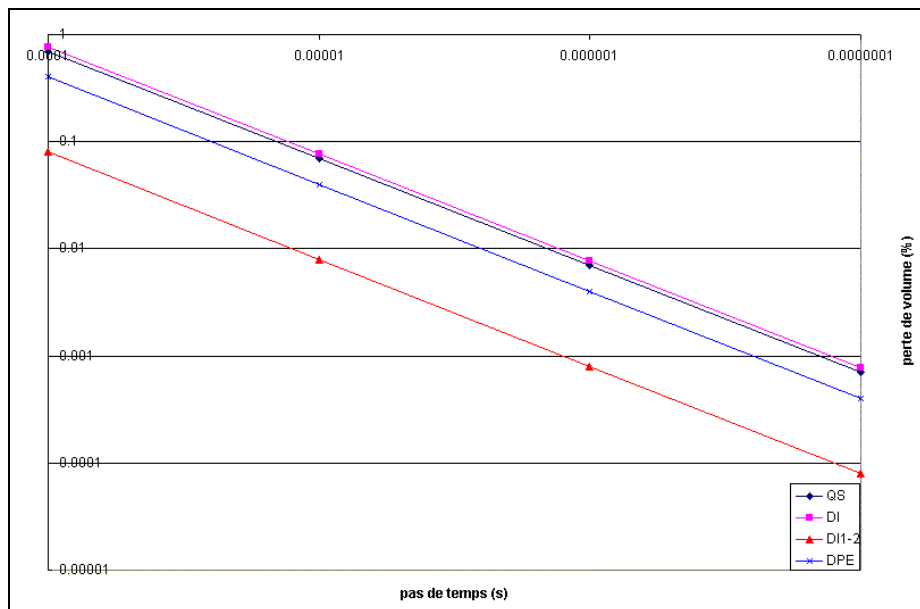
	$dt = 5 \times 10^{-5}$	$dt = 10^{-5}$
QS	0,012	0,0019
DI	max : 0,022 min : 0,013	max : 0,0038 min : 0,019
DI1-2	max : 0,0035 min : 0,026	max : 0,000081 min : 0,022
DPE	max : 0,008 min : 0,02	max : 0,002 min : 0,015

TAB. 3.2 – Erreur relative : pression analytique (max / min)/pression numérique (max / min)

La figure (3.5) présente l'évolution de la perte de volume en fonction du pas de temps, pour toutes les formulations comparées.

consistance $K$ ( $MPa \cdot s^m$ )	densité $\rho$ ( $Kg/m^3$ )	sensibilité à la vitesse de déformation $m$
$K = 16.1$	$\rho = 7600$	$m = 0.139$

TAB. 3.3 – Propriétés du matériau

FIG. 3.5 – Evolution de la perte de volume finale en fonction du pas de temps (pour  $dt = 5 \times 10^{-6} s$ )

### b) Test de traction

Un cylindre de hauteur  $200\text{ mm}$  et de rayon  $100\text{ mm}$  est considéré. Les propriétés du matériau (viscoplastique, dans notre cas) sont données dans le tableau (3.3).

On impose à l'outil une vitesse constante de  $10^4\text{ mm/s}$ , vitesse 10 à 100 fois supérieure à celle standard. Cette technique de multiplication de la vitesse du processus, par un facteur variant entre 10 et  $10^3$ , est souvent rencontrée dans la littérature [55], [63] quand des formulations explicites sont présentées.

triangulaires. La simulation est effectuée jusqu'à 50% de déformation.

Pour les calculs implicites (quasi-statique et dynamique, respectivement) le pas de temps est  $5 \times 10^{-5} s$ , tandis que pour le cas partiellement explicite le pas de temps est de  $5 \times 10^{-6} s$ .

Les résultats de l'analyse concernant la distribution des contraintes équivalentes, pour les trois cas comparés, sont présentés par les figures (3.6(b)), (3.6(c)), (3.6(d)) et (3.6(e)).

En comparant les champs des vitesses, les contraintes équivalentes, surtout dans les cas dynamiques, nous ne remarquons aucune différence significative.

Le champ de pression dans le cas quasi-statique étant, théoriquement, différent de celui calculé dans les cas dynamiques, les différences de valeurs obtenus après les simulations sont justifiées. Les isovaleurs des pressions sont présentées dans les figures 3.7(b)), (3.7(d)), (3.7(e)) et (3.7(f)).



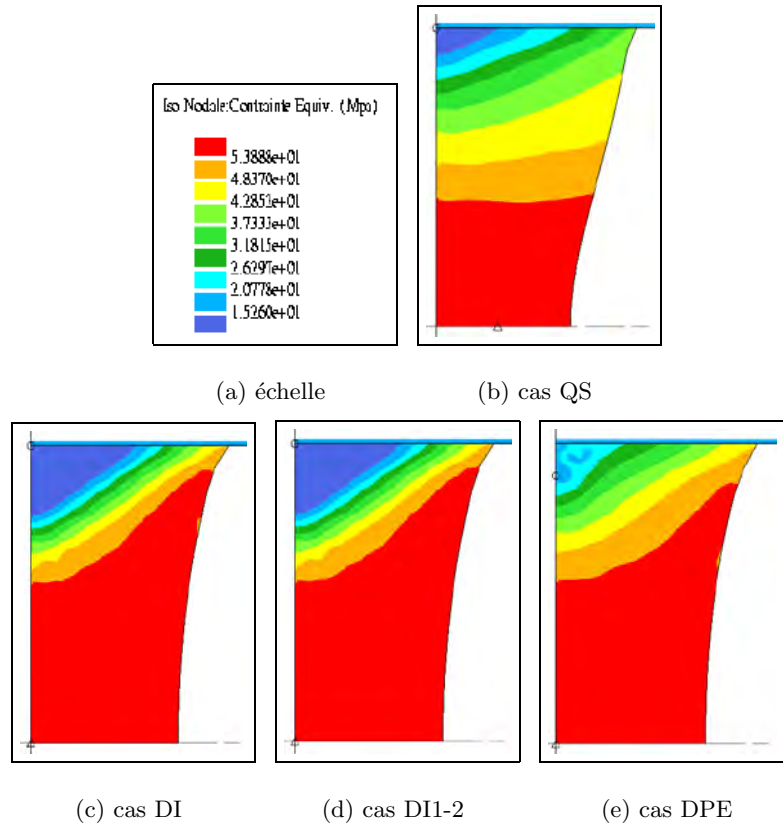


FIG. 3.6 – Contraintes équivalentes - QS, DI, DI1-2, DPE

On note une petite différence entre les profils des géométries finales du cas QS et des cas DI et DPE. Cette différence peut s'expliquer par l'effet de l'inertie existante dans les cas dynamiques.

Le tableau (3.4) montre la perte de volume (v.l. en %), les coordonnées des points extérieurs qui se trouvent sur l'axe des abscisses,  $X(\text{bottom})$  (en  $mm$ ), les contraintes équivalentes maximales  $\sigma_{eq}^{max}$  (en  $MPa$ ), ainsi que les vitesses maximales  $V^{max}$  (en  $mm/s$ ) et les pressions maximales  $P^{max}$  (en  $MPa$ ). Ces résultats mettent en relief une bonne concordance.

	v.l.	$X(\text{bottom})$	$\sigma_{eq}^{max}$	$V^{max}$	$P^{max}$
QS	-0.129 %	67.106	63.105	10000	8.73
DPE	0.101%	74.362	58.992	10005	145.39
DI	-0.103%	74.318	59.406	10000	165.44
DI1-2	0.08%	74.39	59.392	10000	162.79

TAB. 3.4 – Test de traction

### c) Test de compression - Contact collant

Ce test est effectué pour le même cylindre que celui du cas précédent, et pour un matériau ayant les mêmes propriétés. Le pas de temps pour le cas partiellement explicite est de  $10^{-6}$  s et de  $5 \times 10^{-5}$  s pour les cas implicites.

Un contact bilatéral collant est pris en compte. Le cylindre est déformé jusqu'au 50%.

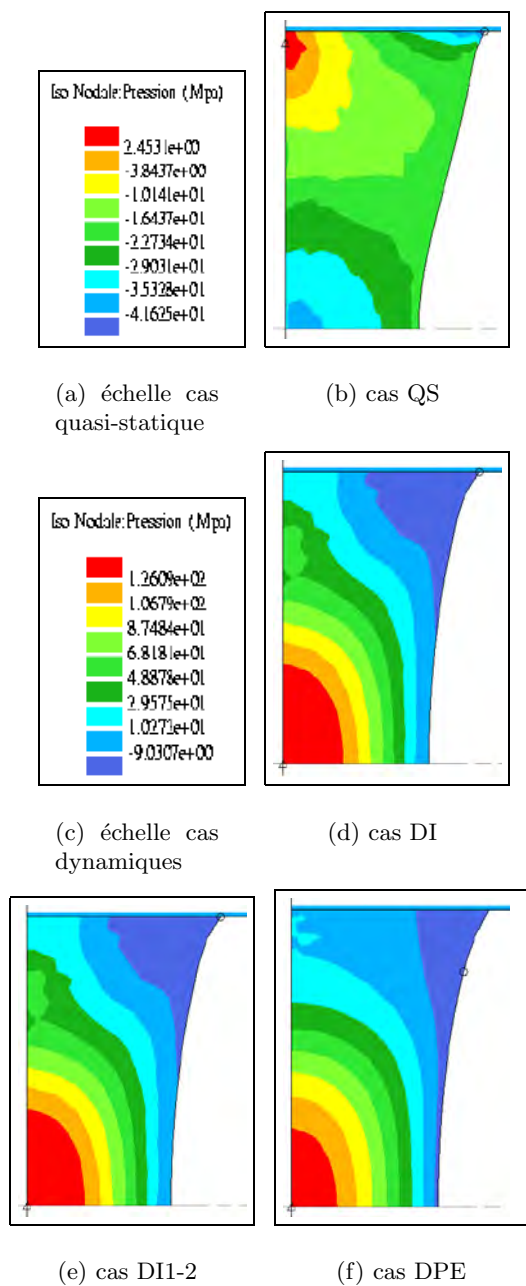


FIG. 3.7 – Pressions - QS, DI, DI1-2, DPE

Les figures (3.8(b)), (3.8(c)) et (3.8(d)) montrent les distributions des contraintes équivalentes finales pour les trois cas comparés.

Des différences sont remarquées entre les profils des géométries finales obtenus dans le cas quasi-statique et dans les cas dynamiques. Cela se justifie par l'effet de l'inertie.

Des comparaisons entre les résultats des trois procédures sont présentées dans le tableau (3.5).

Pour les cas dynamiques, les valeurs maximales des pressions et contraintes équivalentes sont en bonne corrélation. Pour les valeurs maximales des vitesses, atteintes à l'endroit où

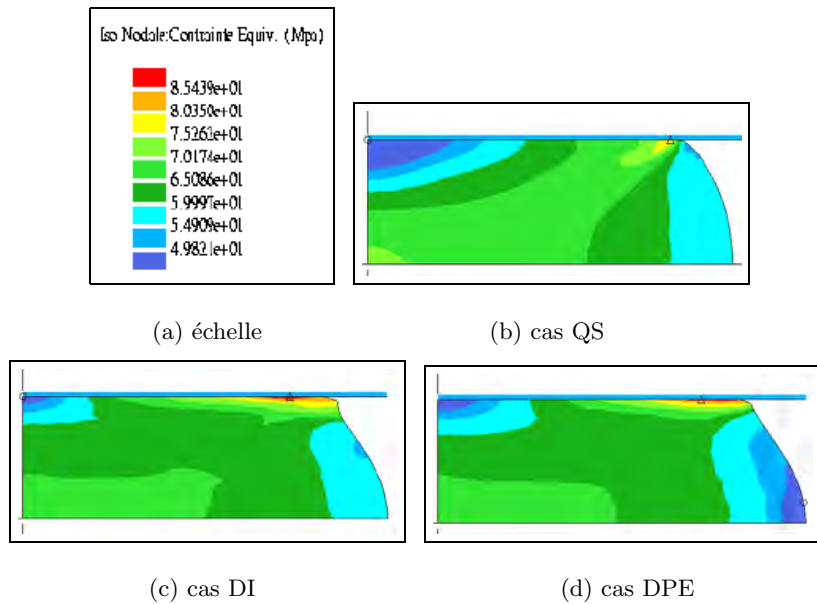


FIG. 3.8 – Contraintes équivalentes - QS, DI, DPE

	v.l.	X(top)	X(bottom)	$\sigma_{eq}^{max}$	$V^{max}$	$P^{max}$
QS	-0.227%	127.35	147.1	81.043	14797	111.73
DPE	-0.14%	122.8	149.93	92.211	12730	2238.8
DI	-0.275%	123.5	150.44	90.527	17360	2207

TAB. 3.5 – Test de compression - contact collant

la matière colle à l'outil, on note une différence. Cette dernière s'explique par la manière différente dont la matière colle à l'outil dans ces deux cas.

#### d) Test de compression - Frottement

Nous nous plaçons dans le même cadre que précédemment, la seule différence concernant le contact pièce-outil. A présent, nous avons un frottement défini par la loi de Norton, de coefficient  $\alpha_f = 0.2$  et le pas de temps considéré est de  $dt = 5 \times 10^{-5} s$ .

Les répartitions des contraintes équivalentes finales (à 50% de déformation) sont représentées dans les figures (3.9(b)), (3.9(c)), (3.9(d)) et (3.9(e)).

Les valeurs maximales indiquées par le tableau (3.6) montrent une bonne concordance dans les cas comparés.

	v.l.	X(top)	X(bottom)	$\sigma_{eq}^{max}$	$V^{max}$	$P^{max}$
QS	-0.34%	132.98	145.85	70.668	14679	93.85
DI	-0.36%	133.04	146.83	72.211	17681	2211
DI1-2	0.01%	132.72	146.41	72.308	17864	2210,4
DPE	-0.079%	134.48	145.53	75.799	18671	2210

TAB. 3.6 – Test de compression - frottement

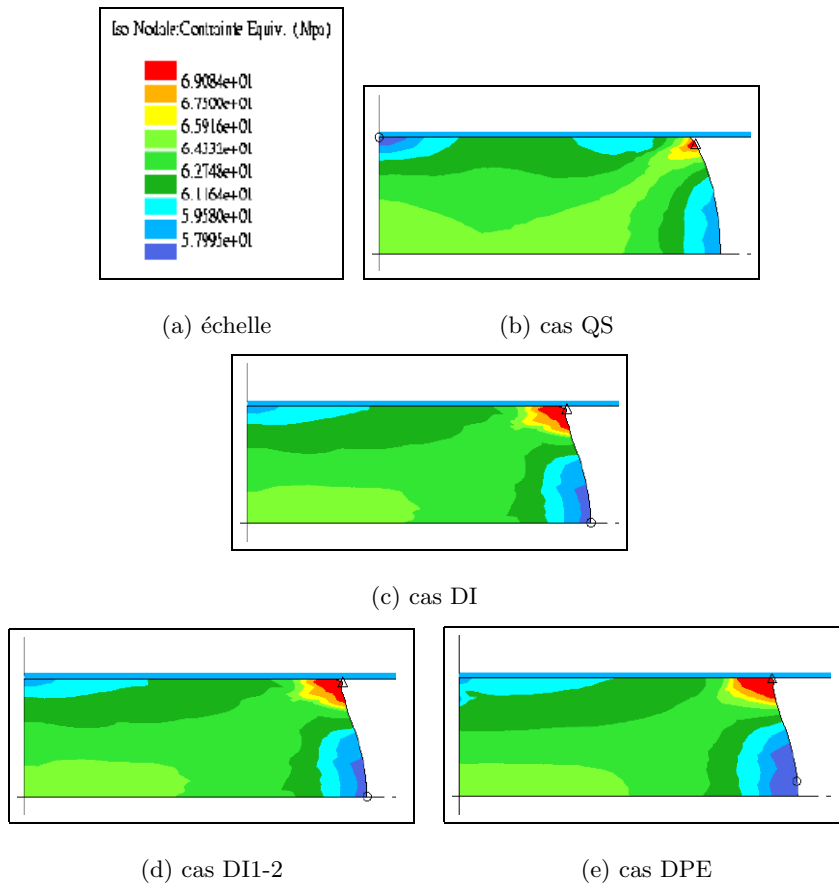


FIG. 3.9 – Contraintes équivalentes - QS, DI, DPE

Une comparaison des courbes décrivant l'évolution de la perte de volume en temps est présentée par la figure(3.10).

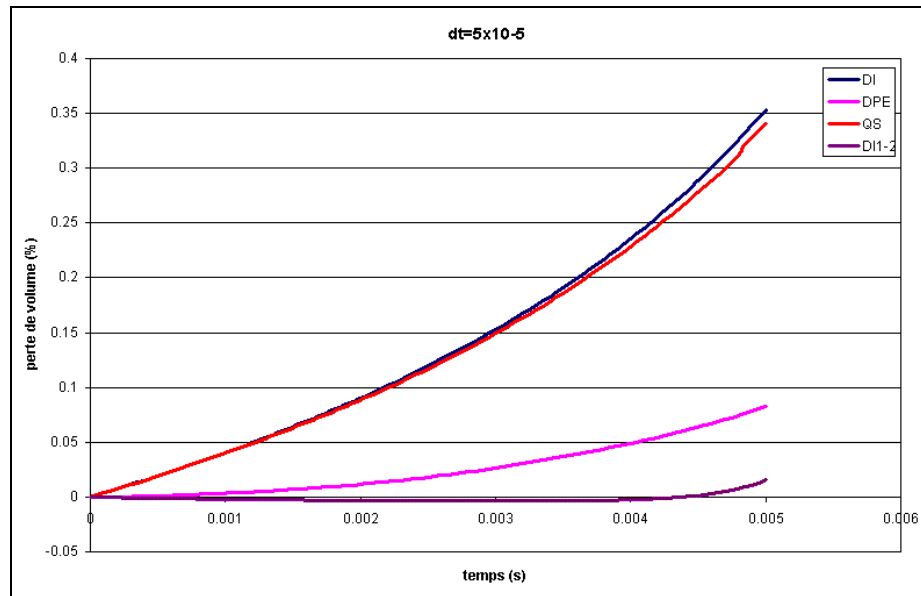


FIG. 3.10 – Variation de la perte de volume en fonction du temps (pour  $dt = 5 \times 10^{-5}$ )

Une meilleure préservation du volume est remarquée dans les cas DI1-2 et DPE par rapport aux cas QS et DI. Toutefois, une différence est notée entre la perte de volume enregistrée dans le cas DI1-2 et celle concernant le cas DPE. Cette différence peut venir du fait que les méthodes explicites sont moins précises que les méthodes implicites.

La figure (3.11) met en évidence l'évolution de la force de forgeage en fonction du déplacement, pour tous les cas considérés.

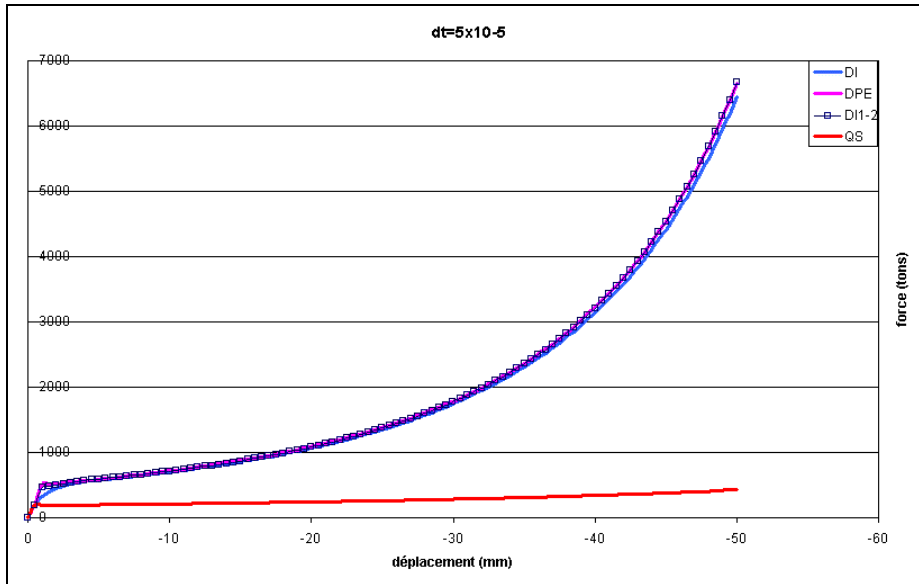


FIG. 3.11 – Évolution de la force de forgeage en fonction du temps (pour  $dt = 5 \times 10^{-5}$ )

Cette figure montre que, pour les cas dynamiques, l'évolution des forces de forgeage est similaire.

### L'influence de la variation du pas de temps sur les résultats

Dans le but d'analyser l'influence du pas de temps sur les résultats des simulations, deux séries de tests seront présentées.

La première série correspond à un pas de temps  $dt = 10^{-5} s$  pour le même essai de compression exposée ci-dessus.

Les résultats des simulations sont donnés dans le tableau (3.7).

	v.l.	X(top)	X(bottom)	$\sigma_{eq}^{max}$	$V^{max}$	$P^{max}$
QS	-0.069%	132.71	145.47	70.665	14572	93.84
DI	-0.071%	132.61	146.34	72.17	17463	2228
DI1-2	0.002%	132.68	146.39	72.192	17551	2240,9
DPE	0.015%	135.46	146.25	76.08	18856	2340.8

TAB. 3.7 – Test de compression - frottement,  $dt = 10^{-5}$

En ce qui concerne la conservation du volume, les courbes sont illustrées par la figure(3.12). Comme dans le cas précédent ( $dt = 5 \times 10^{-5} s$ ), on remarque que la conservation du

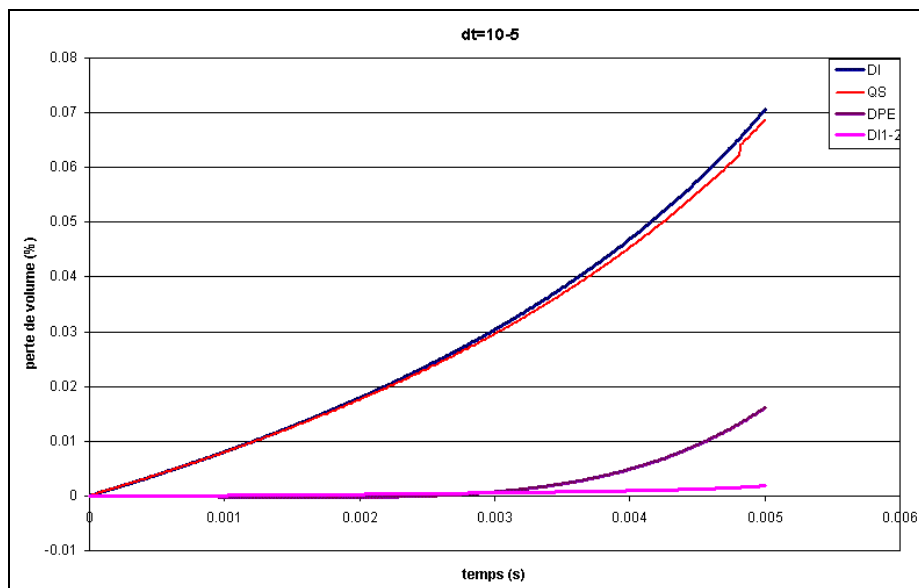


FIG. 3.12 – Variation de la perte de volume en fonction du temps (pour  $dt = 10^{-5}$ )

volume est mieux préservée par les formulations DPE et DI1-2.

L'évolution de la force de forgeage en fonction du déplacement est représentée dans la figure (3.13) pour chaque formulation considérée.

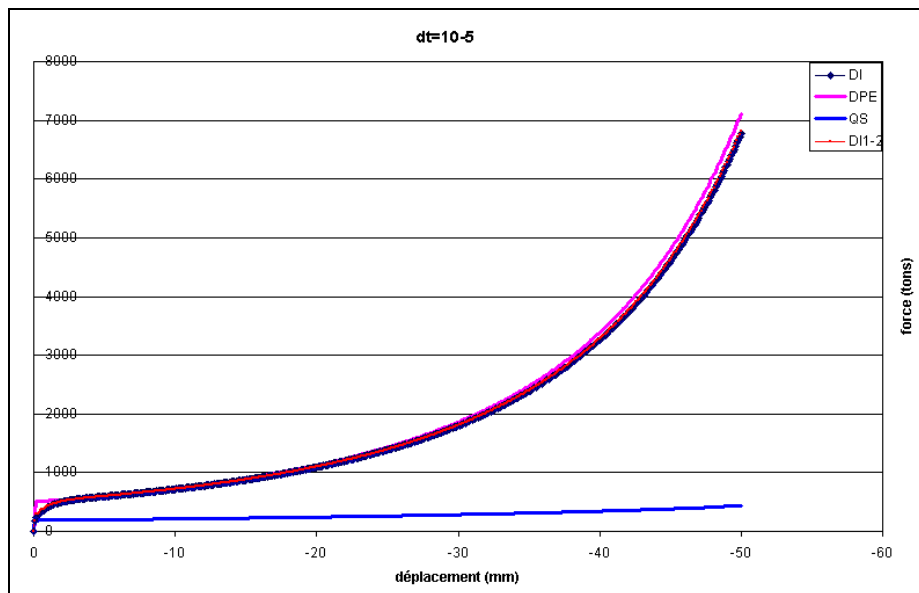


FIG. 3.13 – Évolution de la force de forgeage en fonction du temps (pour  $dt = 10^{-5}$  s)

Les courbes résultant des différentes formulations en dynamiques sont de qualité équivalente.

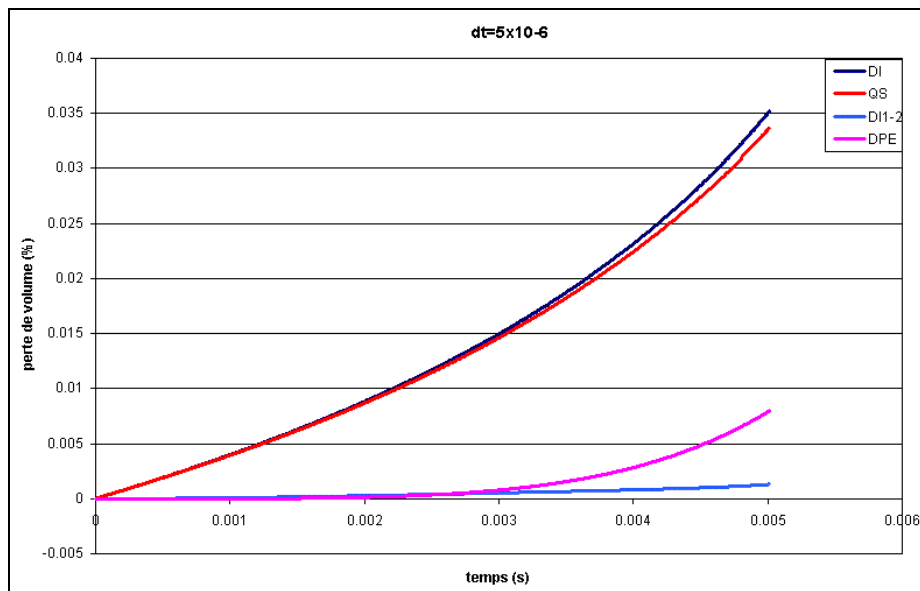
La deuxième série de tests correspond à un pas de temps de  $dt = 5 \times 10^{-6}$  s. Les résultats des simulations sont exposés dans le tableau (3.8).

Les courbes représentant l'évolution de la perte de volume, au cours de chaque simulation

	v.l.	X(top)	X(bottom)	$\sigma_{eq}^{max}$	$V^{max}$	$P^{max}$
QS	-0.033%	132.67	145.42	70.648	14559	93.8
DI	-0.035%	132.57	146.29	72.166	17442	2231,8
DI1-2	0.001%	132.67	146.39	72.179	17512	2244,7
DPE	0.0077%	135.4	146.19	76.071	18811	2342,5

TAB. 3.8 – Test de compression - frottement,  $dt = 5 \times 10^{-6}$  s

considérée, sont montrées dans la figure (3.14).

FIG. 3.14 – Variation de la perte de volume en fonction du temps (pour  $dt = 5 \times 10^{-6}$  s)

L'évolution des forces de forgeage, pour cette dernière série de tests, est présentée dans dans la figure (3.15).

Jusqu'à maintenant nous avons présenté les résultats issus de chaque série de tests.

Pour mieux illustrer l'influence de la variation du pas de temps, un bilan est effectué ci-dessous concernant les pertes de volume et les forces issues des simulations.

La figure (3.16) présente l'évolution de la perte de volume finale en fonction du pas de temps, pour toutes les formulations comparées.

L'évolution des forces de forgeage finales en fonction de pas de temps, pour les trois séries de tests comparées, est mise en évidence dans le tableau (3.9)

	$dt = 5 \times 10^{-5}$	$dt = 10^{-5}$	$dt = 5 \times 10^{-6}$
QS	432	437	438
DI	6443	6771	6813
DI1-2	6665	6819	6838
DPE	6661	7112	7172

TAB. 3.9 – Bilan des forces de forgeage  $dt = 5 \times 10^{-5}$ ,  $dt = 10^{-5}$ ,  $dt = 5 \times 10^{-6}$  s

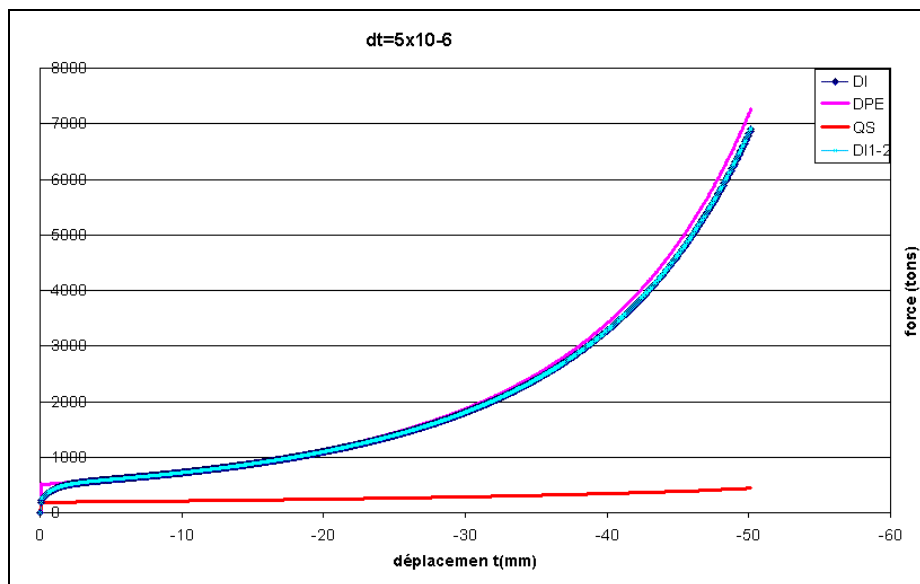
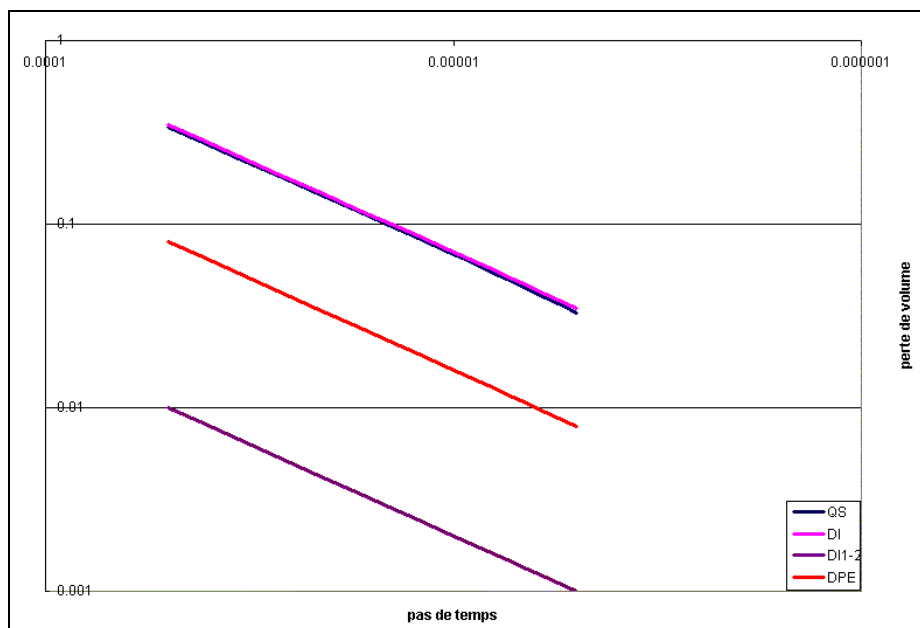
FIG. 3.15 – Évolution de la force de forgeage en fonction du temps (pour  $dt = 5 \times 10^{-6} s$ )

FIG. 3.16 – Évolution de la perte de volume finale en fonction du pas de temps

### e) Test de compression. Variation de la vitesse. Extrapolation à vitesse plus faible

L'essai de compression (avec frottement) présenté ci-dessus a été réalisé, comme précisé précédemment, à une vitesse de forgeage constante de  $10^4 mm/s$ , c'est-à-dire 10 fois la vitesse réelle du procédé. On peut alors envisager d'avoir des informations sur les résultats qui peuvent être obtenus avec la formulation DPE à vitesse de forgeage plus faible.

Dans cette optique, plusieurs simulations ont été effectuées utilisant des vitesses différentes, qui sont présentées dans le tableau (3.10).

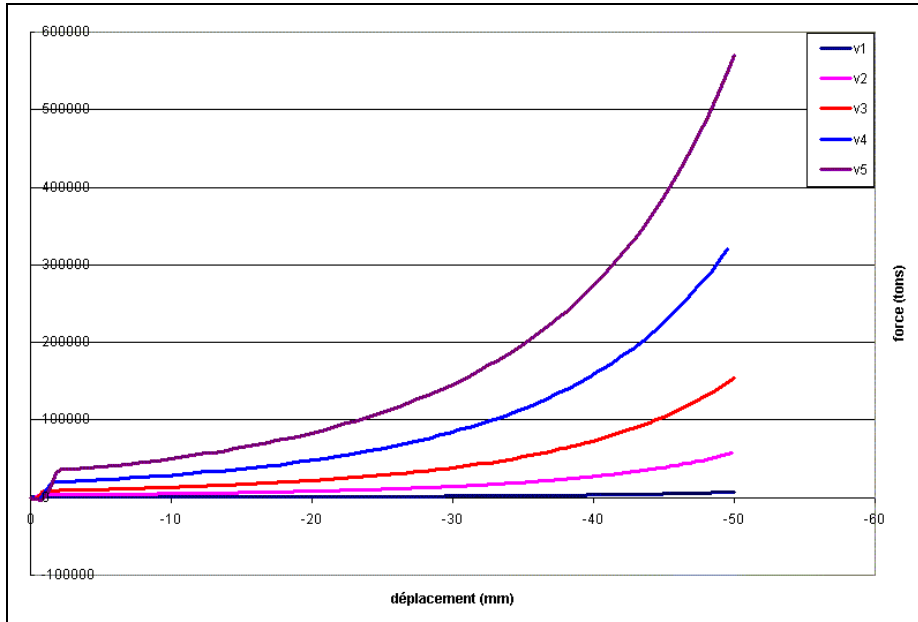


$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$10^4$	$3 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$7.5 \cdot 10^4$	$10^5$

TAB. 3.10 – Différentes vitesses utilisées (en  $mm/s$ )

En faisant une analyse des résultats obtenus pour chacune de ces vitesses, on peut envisager d'extrapoler ces résultats à une vitesse plus faible.

Nous prenons comme exemple l'évolution de la force de forgeage en fonction du déplacement. La figure (3.17) montre les variations des forces en fonction du déplacement pour les différentes vitesses considérées.

FIG. 3.17 – Évolution de la force en fonction du déplacement (pour toutes les vitesses de  $v_1$  à  $v_5$ )

Nous remarquons que les courbes ont la même allure pour toutes les vitesses. Par conséquent, nous pouvons en déduire qu'à vitesse plus faible, la courbe aura la même allure.

Dans le but d'obtenir plus d'informations concernant l'évolution de la force à une vitesse plus faible, on peut représenter la force en fonction des vitesses considérées, pour une valeur fixée du déplacement. Ainsi, en extrapolant à une vitesse plus faible nous pouvons, éventuellement, trouver une valeur de la force correspondant à la valeur du déplacement fixée.

Avec cette démarche, nous pouvons envisager de trouver des valeurs pour la force correspondant à différentes valeurs de déplacement et, ainsi, construire une courbe d'évolution de la force en fonction du déplacement, pour une vitesse plus faible.

Dans notre analyse, on considère comme valeurs fixées pour le déplacement les valeurs présentées dans le tableau (3.11).

La figure (3.18) présente l'évolution de la force en fonction de la vitesse pour chaque valeur de déplacement considérée. Chacun des points représentés sur la figure correspond à une valeur de la force pour chaque vitesse et pour chaque déplacement. Ces points doivent être

$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$d_7$
-0.1	-1	-10	-20	-30	-40	-50

TAB. 3.11 – Différentes valeurs de déplacement (en  $mm$ )

interpolées, afin de trouver des valeurs pour la force à vitesse plus faible, par extrapolation.

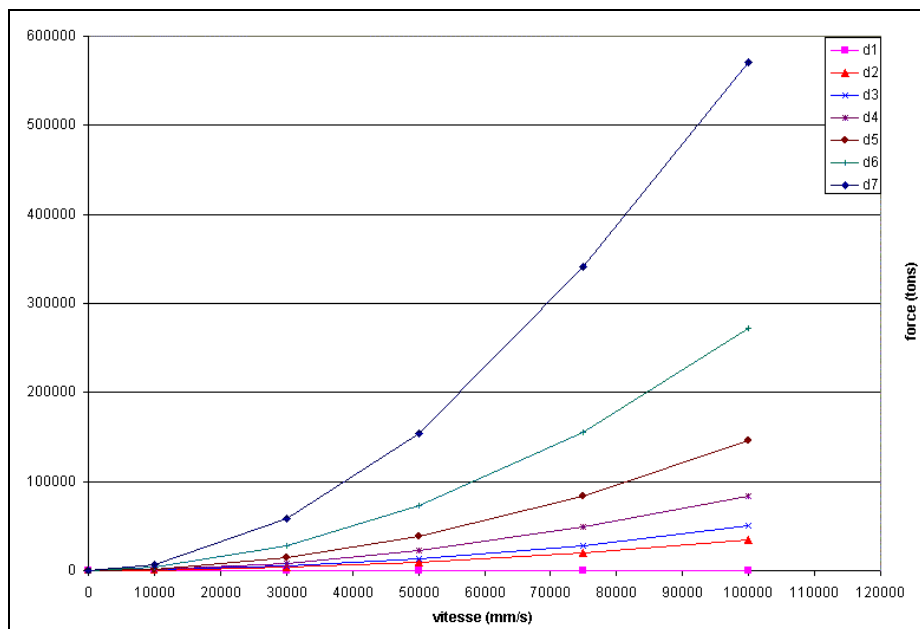


FIG. 3.18 – Évolution de la force en fonction de la vitesse, pour les valeurs de déplacement considérées

Par ce procédé on trouve une courbe représentant l'évolution de la force en fonction du déplacement, pour une vitesse de  $v = 1000 \text{ mm/s}$ . La figure (3.19) montre la courbe obtenue par extrapolation pour la formulation partiellement explicite DPE, ainsi que la courbe résultant d'une simulation avec la formulation dynamique implicite DI.

Le profil des courbes est très comparable. Par contre, une différence est notée entre les valeurs des deux courbes, différence qui apparaît à cause de l'interpolation des points de la figure (3.18)).

#### f) Test de compression - Poinçonnement

Nous considérons un autre test de compression utilisant un outil plus compliqué, qui entraînera une analyse de contact plus complexe. Les conditions de l'essai précédent sont préservées, sauf le coefficient de frottement prend la valeur de  $\alpha_f = 0.1$ . Le pas de temps considéré est de  $dt = 10^{-5}$ . Le remaillage automatique du Forge 2 est utilisé pour réaliser une simulation correcte dans le cas actuel.

Les distributions des contraintes équivalentes, pour toutes les formulations comparées, sont présentées dans la figure (3.20).

On remarque une différence de profil dans les cas dynamiques, à cause de l'inertie.

On note également que les résultats des simulations sont d'une qualité équivalente pour

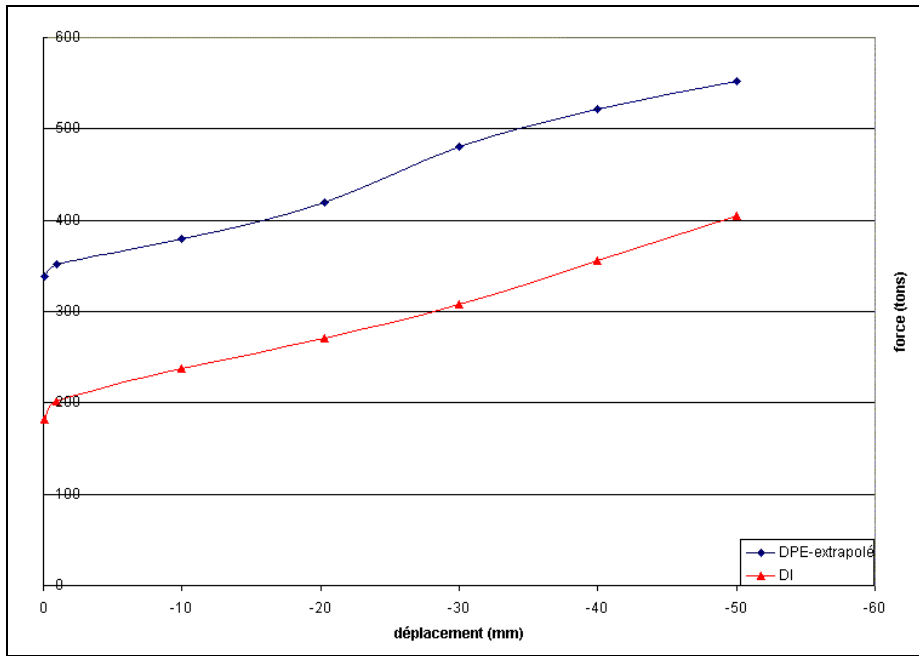


FIG. 3.19 – Évolution de la force en fonction du déplacement, pour une vitesse de  $v = 1000 \text{ mm/s}$

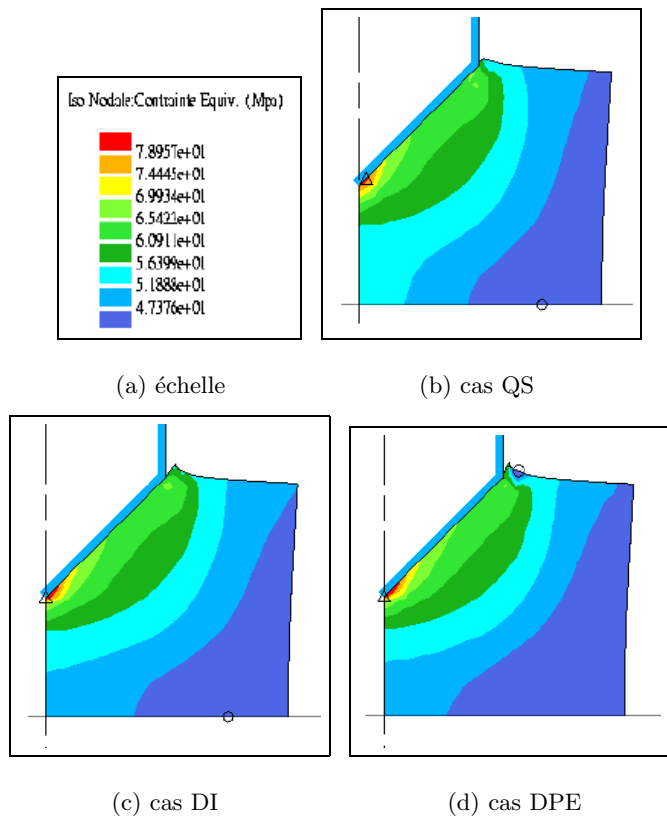


FIG. 3.20 – Distributions des contraintes equivalentes- QS, DI, DI1-2, DPE

les cas dynamiques. En terme de temps de calcul un gain de 25% est enregistré dans le cas

de la formulation DPE.

Le tableau (3.12) montre les valeurs enregistrées pour la perte de volume, la contrainte équivalente maximale, la vitesse maximale, ainsi que la pression, pour les approches considérées.

	v.l.	$\sigma_{eq}^{max}$	$V^{max}$	$P^{max}$
QS	0.03%	81.413	10000	86.906
DI	0.03%	83.469	10000	413.66
DPE	0.02%	84.814	93247	645.48

TAB. 3.12 – Test de compression - frottement

### g) Test de compression - Outil sphérique

Un autre exemple de compression est analysé par la suite, cette fois-ci l'outil étant de forme sphérique. On déforme toujours le même cylindre considéré antérieurement, utilisant un acier dont les paramètres sont donnés par le tableau (3.3). Un frottement très faible est appliqué, le coefficient étant de  $\alpha_f = 0.1$ . Le pas de temps considéré est de  $dt = 10^{-5}$ .

La difficulté de cet exemple résulte du contact, plus complexe à cause de la forme sphérique de l'outil. Le remaillleur automatique du Forge2 est utilisé afin d'obtenir un maillage fin sur la frontière, à chaque incrément.

La figure (3.21) présente les répartitions des contraintes équivalentes après 50% de déformation.

Les résultats issus des deux formulations dynamiques sont d'une qualité équivalente. Les géométries finales sont très comparables. La différence de profil géométrique remarquée entre le cas quasi-statique et les cas dynamiques est justifiée par l'inertie qui apparaît dans ces derniers.

Les résultats issus de ces calculs sont montrés dans le tableau (3.13) :

	v.l.	$\sigma_{eq}^{max}$	$V^{max}$	$P^{max}$
QS	-0.02%	67.422	10000	82
DI	0.05%	72.18	10463	532
DPE	0.01%	87.302	11205	584

TAB. 3.13 – Test de compression - frottement (outil sphérique)

Une différence est remarquée en terme de temps CPU pour les cas présentés. Dans le cas de la formulation DPE proposée on obtient un gain de 20% par rapport aux autres formulations.

En diminuant la vitesse de forgeage à  $5 \times 10^3 \text{ mm/s}$ , l'inertie est alors moins importante et, par conséquent, le profil de la géométrie finale pour les cas dynamiques tend vers le profil obtenu dans le cas quasi-statique.

La figure (3.22) présente les distributions des contraintes équivalentes pour les cas comparés.

Les valeurs issues des simulations, correspondant à la perte de volume, aux contraintes

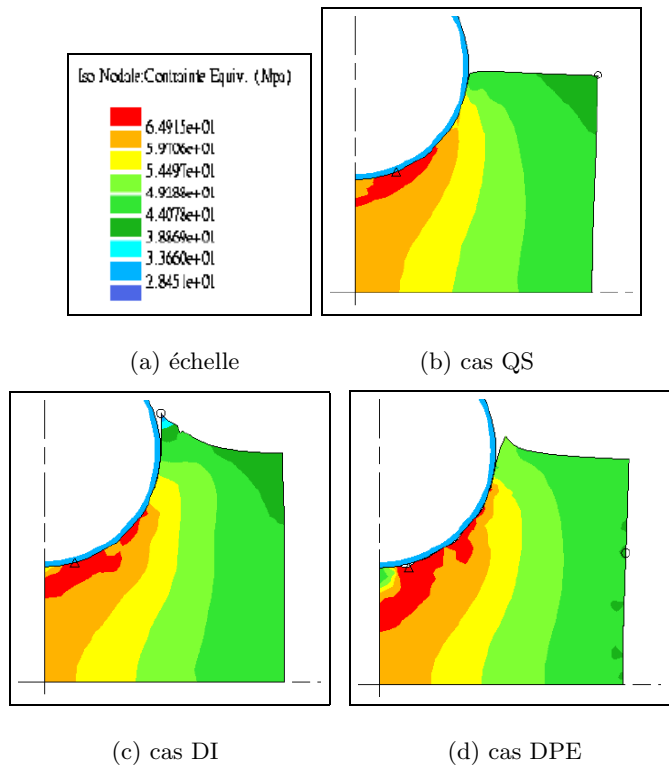


FIG. 3.21 – Contraintes équivalentes - QS, DI, DPE

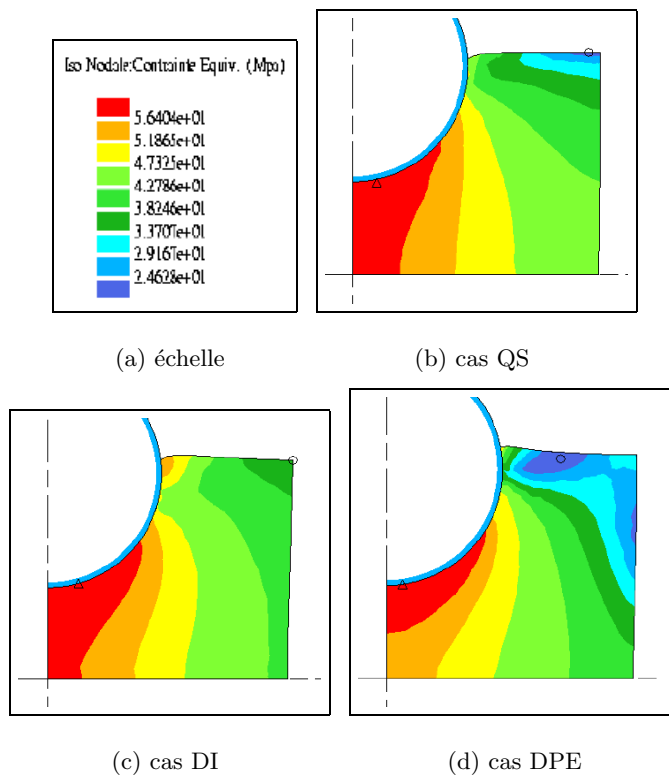


FIG. 3.22 – Contraintes équivalentes - QS, DI, DPE ( $v_{outil} = 5 \times 10^3 \text{ mm/s}$ )

équivalents maximales, aux vitesses maximales, ainsi qu'aux pressions maximales, sont présentées dans le tableau (3.14)

	v.l.	$\sigma_{eq}^{max}$	$V^{max}$	$P^{max}$
QS	0.04%	60.094	5000	74
DI	0.8%	65.393	5000	210
DPE	0.06%	62397	5000	188

TAB. 3.14 – Test de compression - frottement (outil sphérique,  $v_{outil} = 5 \times 10^3 \text{ mm/s}$ )

### 3.3 Formulation mixte accélération/pression pour un matériau élasto-viscoplastique

#### 3.3.1 Première approche. Élasticité déviatorique incrémentale

Dans le but de généraliser la formulation partiellement explicite accélération/pression présentée dans ce chapitre, nous étudions un comportement élasto-viscoplastique sans seuil.

On considère un comportement défini par les équations suivantes :

$$s = 2K(\sqrt{3}\dot{\varepsilon})^{m-1}\dot{\varepsilon}(v) \quad (3.60)$$

$$\dot{s} = 2\mu\dot{\varepsilon}^e \quad (3.61)$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{vp} + \dot{\varepsilon}^e \quad (3.62)$$

ce qui implique que cette élasticité est incompressible.

Ainsi, à chaque instant  $t$ , on suppose connus  $X^t$ ,  $V^t$  (comme présenté antérieurement), et, également,  $s^t$  (calculé à l'instant d'avant). On obtient alors  $\Gamma^t$  et  $P^t$  par la procédure présentée dans ce chapitre, mais, en parallèle, on calcule  $\dot{s}^t$  avec la relation (3.61), afin de déterminer le tenseur déviateur des contraintes pour l'incrément suivant selon le schéma :

$$s^{t+\Delta t} = s^t + \dot{s}^t \Delta t \quad (3.63)$$

Dans ce contexte,  $(\dot{\varepsilon}^{vp})^t$  est calculé à partir de la relation suivante :

$$(\dot{\varepsilon}^{vp})^t = \frac{1}{2} \left( \frac{s^t : s^t}{2K^2} \right)^{\frac{1-m}{2m}} s^t. \quad (3.64)$$

Quand  $t = 0$ ,  $s^0$  est obtenu utilisant la loi de Norton-Hoff (1.6).

### 3.3.2 Deuxième approche. Élasto-viscoplasticité

#### a) Loi de comportement

Le comportement élasto-viscoplastique a déjà été décrit dans le premier chapitre, paragraphe 1.2. Ce paragraphe a pour but de présenter l'algorithme utilisé dans Forge2<sup>®</sup> pour modéliser ce type de comportement, algorithme que nous avons adapté à la formulation accélération/pression proposée.

A chaque instant  $t$ , l'état des contraintes  $\sigma^t$ , ainsi que les déformations viscoplastiques équivalentes  $(\bar{\varepsilon}^{vp})^t$  sont connus. Il faut alors déterminer les valeurs de ces variables à l'instant  $t + \Delta t$  selon les relations :

$$\begin{cases} \sigma^{t+\Delta t} = \sigma^t + \Delta\sigma \\ (\bar{\varepsilon}^{vp})^{t+\Delta t} = (\bar{\varepsilon}^{vp})^t + \Delta\bar{\varepsilon}^{vp} \end{cases} \quad (3.65)$$

où

$$\begin{cases} \Delta\sigma = \dot{\sigma}^t \Delta t \\ \Delta\bar{\varepsilon}^{vp} = \Delta\lambda \end{cases} \quad (3.66)$$

Sachant que

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{vp} + \dot{\varepsilon}^e \quad (3.67)$$

où, la loi de Hooke introduit :

$$\dot{\varepsilon}^e = (D^e)^{-1} \dot{\sigma} \quad (3.68)$$

et l'équation de normalité donne :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.69)$$

nous obtenons :

$$\sigma^{t+\Delta t} = \sigma^t + \Delta t (D^e) \dot{\varepsilon} - \Delta\lambda (D^e) \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.70)$$

Le tenseur des vitesses de déformation  $\dot{\varepsilon}^e$  est séparé en :

- une partie sphérique :  $\dot{\theta} = \text{trace}(\dot{\varepsilon}^e) = -\frac{\dot{p}}{\kappa}$  où le coefficient de compressibilité  $\kappa$  est défini par la relation (1.16)

– une partie déviatorique :  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e - \frac{1}{3}\dot{\theta}I$ .

Le critère de plasticité considéré est celui de Von Mises. La fonction critère de plasticité  $f$  est définie par :

$$f = \bar{\sigma} - \sigma_0 \quad (3.71)$$

où  $\sigma_0$  représente la contrainte nécessaire pour provoquer une déformation viscoplastique en traction uniaxiale et est défini par l'expression :

$$\sigma_0 = \sqrt{3}K_s + \sqrt{3}K(\sqrt{3}\dot{\epsilon}^{vp})^m. \quad (3.72)$$

On note :

$$(\sigma^e)^t = \sigma^t + \Delta t(D^e)\dot{\epsilon} \quad (3.73)$$

où  $(\sigma^e)^t$  est le **prédicteur élastique**.

Le terme  $\Delta\lambda(D^e)\frac{\partial f}{\partial \sigma}$  est le **correcteur plastique** (figure (3.23)).

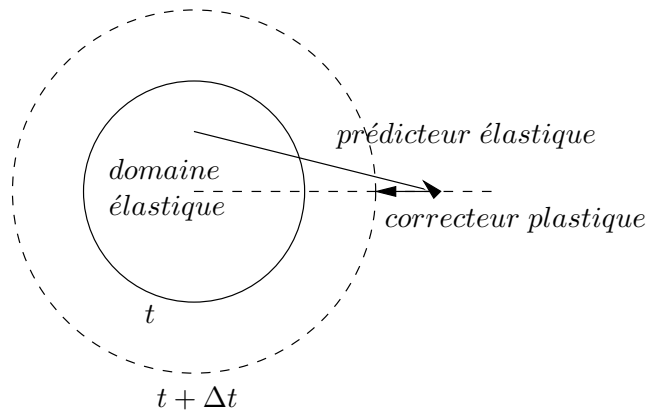


FIG. 3.23 – Prédicteur élastique - correcteur plastique

Dans le relation (3.70),  $\Delta\lambda$  est une inconnue. Pour la calculer on procède de la manière suivante :

- si  $f((\sigma^e)^t, (\bar{\epsilon}^{vp})^t) < 0$  alors  $\Delta\lambda = 0$
- dans le cas contraire, il faut résoudre :

$$f((\sigma^e)^t - \Delta\lambda(D^e)\frac{\partial f}{\partial \sigma}, (\bar{\epsilon}^{vp})^t + \Delta\lambda, \frac{\Delta\lambda}{\Delta t}) = 0 \quad (3.74)$$

pour obtenir  $\Delta\lambda$ . La méthode de Newton-Raphson est utilisée pour cette résolution.

### b) L'incompressibilité plastique

Dans le contexte actuel, on abouti à un problème du type :



$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho \gamma^t \cdot v^* d\omega + \int_{\Omega} s^t : \varepsilon^* d\omega - \int_{\Omega} p^t \cdot \text{div}(v^*) d\omega - \int_{\partial\Omega_c} \tau \cdot v^* dS = 0 \\ \int_{\Omega} \dot{p}^t \cdot \dot{p}^* d\omega + \kappa \int_{\Omega} \text{div}(v^t) \cdot \dot{p}^* d\omega = 0 \end{cases} \quad (3.75)$$

Afin d'introduire l'accélération dans la deuxième équation du système (3.75), l'expression (1.15) est dérivée par rapport au temps. Nous obtenons alors :

$$\dot{p}^t = -\kappa \left( \text{div}(\gamma^t) - \text{tr} \left( \frac{\partial v^t}{\partial x} \frac{\partial v^t}{\partial x} \right) \right) \quad (3.76)$$

Nous considérons également les schémas suivants

$$p^t = p^{t-\Delta t} + \dot{p}^{t-\frac{\Delta t}{2}} \Delta t \quad (3.77)$$

et

$$\dot{p}^t = \dot{p}^{t-\frac{\Delta t}{2}} + \ddot{p}^t \frac{\Delta t}{2} \quad (3.78)$$

Ainsi, le problème (3.75) devient :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho \gamma^t \cdot v^* d\omega + \int_{\Omega} s^t : \varepsilon^* d\omega - \Delta t \int_{\Omega} \dot{p}^{t-\frac{\Delta t}{2}} \cdot \text{div}(v^*) d\omega - \\ \int_{\Omega} p^{t-\Delta t} \cdot \text{div}(v^*) d\omega - \int_{\partial\Omega_c} \tau \cdot v^* dS = 0 \\ -\Delta t \int_{\Omega} \text{div}(\gamma^t) \cdot \dot{p}^* d\omega + \frac{2}{\kappa} \int_{\Omega} \dot{p}^{t-\frac{\Delta t}{2}} \cdot \dot{p}^* d\omega + \Delta t \int_{\Omega} \text{tr} \left( \frac{\partial v^t}{\partial x} \frac{\partial v^t}{\partial x} \right) \cdot \dot{p}^* d\omega + \\ 2 \int_{\Omega} \text{div}(v^t) \cdot \dot{p}^* d\omega = 0 \end{cases} \quad (3.79)$$

La forme symbolique de ce dernier correspond à :

$$\begin{cases} C(X^t) \Gamma^t + \Delta t D(X^t) \dot{P}^{t-\frac{\Delta t}{2}} + R_{\Gamma}(X^t, V^t) + D(X^t) P^{t-\Delta t} = 0 \\ \Delta t D(X^t) \Gamma^t + \frac{2}{\kappa} F(X^t) \dot{P}^{t-\frac{\Delta t}{2}} + \Delta t R_P(X^t, V^t) + 2^T D(X^t) V^t = 0 \end{cases} \quad (3.80)$$

Ainsi, à chaque instant  $t$ , en connaissant  $X^t$ ,  $V^t$  et  $P^{t-\Delta t}$  on calcule  $\Gamma^t$  et  $\dot{P}^{t-\frac{\Delta t}{2}}$ . La pression est ensuite déterminée à partir de l'expression (3.77).

Cette approche a été intégrée dans une version du logiciel Forge2.

### 3.3.3 Résultats

#### a) Compression de cylindre. Cas élasto-viscoplastique

##### Premier exemple

Cet exemple représente un test de compression d'un cylindre de hauteur  $150\text{ mm}$  et de rayon  $50\text{ mm}$ . Une comparaison est proposée entre des cas différents, mais concernant des comportements équivalents :

- les résultats viscoplastiques issus des formulations notée QS, DI et DPE,
- les résultats des mêmes formulations pour le cas élasto-viscoplastique sans seuil de plasticité,
- les résultats obtenus pour dans cas DPE - élastique (incompressible) viscoplastique.

Pour les cas viscoplastiques, les caractéristiques du matériau utilisé sont celle définies dans le tableau (3.3). Dans les cas pour lesquelles l'élasticité est prise en compte, nous considérons le Module d'Young de  $E = 200\text{ GPa}$  et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

Les pas de temps utilisés diffèrent selon le cas considéré. Ainsi, dans le cas viscoplastique  $dt = 10^{-5}$ , dans le cas élasto-viscoplastique sans seuil  $dt = 3 \times 10^{-5}$  et dans le cas d'élastique (incompressible) viscoplastique  $dt = 5 \times 10^{-5}$ . Cette dernière formulation permet l'utilisation du pas de temps le plus élevé.

Les figures (3.24) et (3.25) montrent les isovaleurs des contraintes équivalentes pour tous les cas analysés. Les résultats présentés sont très comparables ce qui était attendu puisque l'on utilise des comportements équivalents.

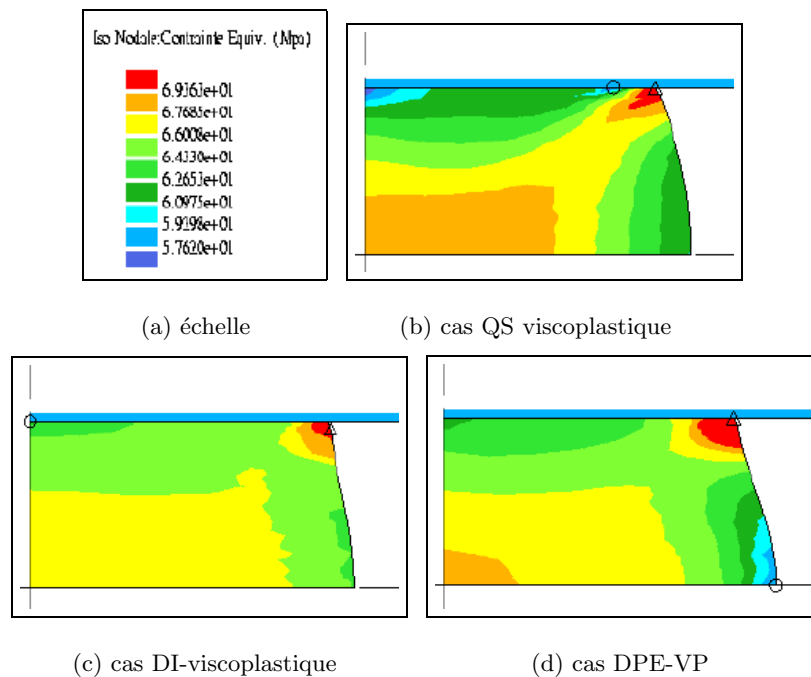


FIG. 3.24 – Contraintes équivalentes.Compression - frottement. - QS ,DI, DPE, DPE viscoplastique

Le tableau (3.15) met en évidence les résultats issus des formulations comparées :

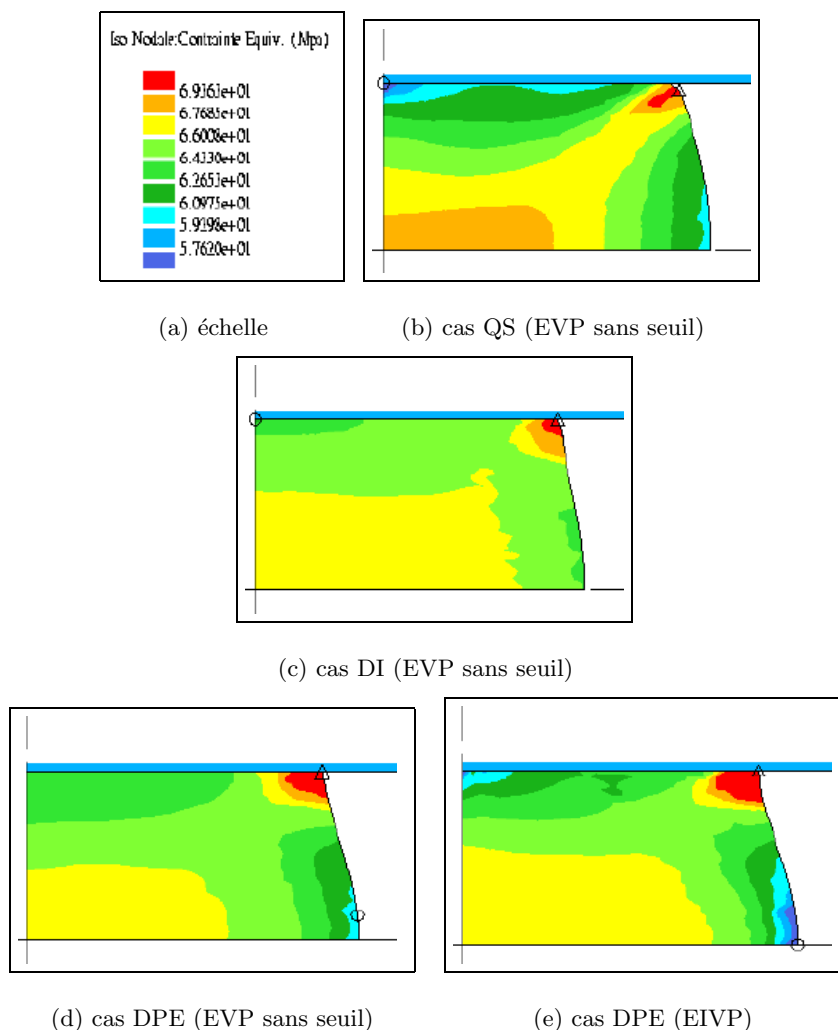


FIG. 3.25 – Contraintes équivalentes - QS (EVP sans seuil), DI (EVP sans seuil), DPE (EVP sans seuil), DPE (EIVP)

	v.l.	X(top)	X(bottom)	$\sigma_{eq}^{max}$	$V^{max}$	$P^{max}$
QS (VP)	-0.08 %	65.15	73.25	71.795	11190	149
DI (VP)	-0.1 %	66.82	73.07	71.118	13365	1016
DPE (VP)	-0.05 %	65.08	74.57	76.108	13533	1050
QS (EVP sans seuil)	-0.1%	64.12	73.29	71.041	11329	89.28
DI (EVP sans seuil)	-0.4%	65.71	74.22	71.063	13982	964
DPE (EVP sans seuil)	-0.3%	65.74	74.01	76.592	13811	1045
DPE (EIVP)	-0.04%	65.13	73.81	76.872	14251	964

TAB. 3.15 – Test de compression - frottement. (viscoplastique (VP), élasto-viscoplastique sans seuil (EVP sans seuil), élastique (incompressible) viscoplastique (EIVP) )

Nous remarquons que les résultats des formulations QS, DI et DPE pour des comportements élasto-viscoplastiques sans seuil sont très comparables à ceux correspondant aux comportements viscoplastiques. De la même manière, les résultats obtenus avec la formulation DPE élastique (incompressible) viscoplastique sont très proches de ceux viscoplas-

tiques.

### Deuxième exemple

Ce deuxième exemple concerne la même pièce et le même outil que le cas précédent. Les mêmes caractéristiques du matériau sont considérées pour le cas élasto-viscoplastique, un seuil de plasticité étant pris en compte  $\sigma_0 = 55 \text{ MPa}$ .

Une comparaison des résultats est proposée pour les formulations notées QS, DI, DI1-2, DPE.

Sur la figure (3.26) sont représentées les isovaleurs des contraintes équivalentes.

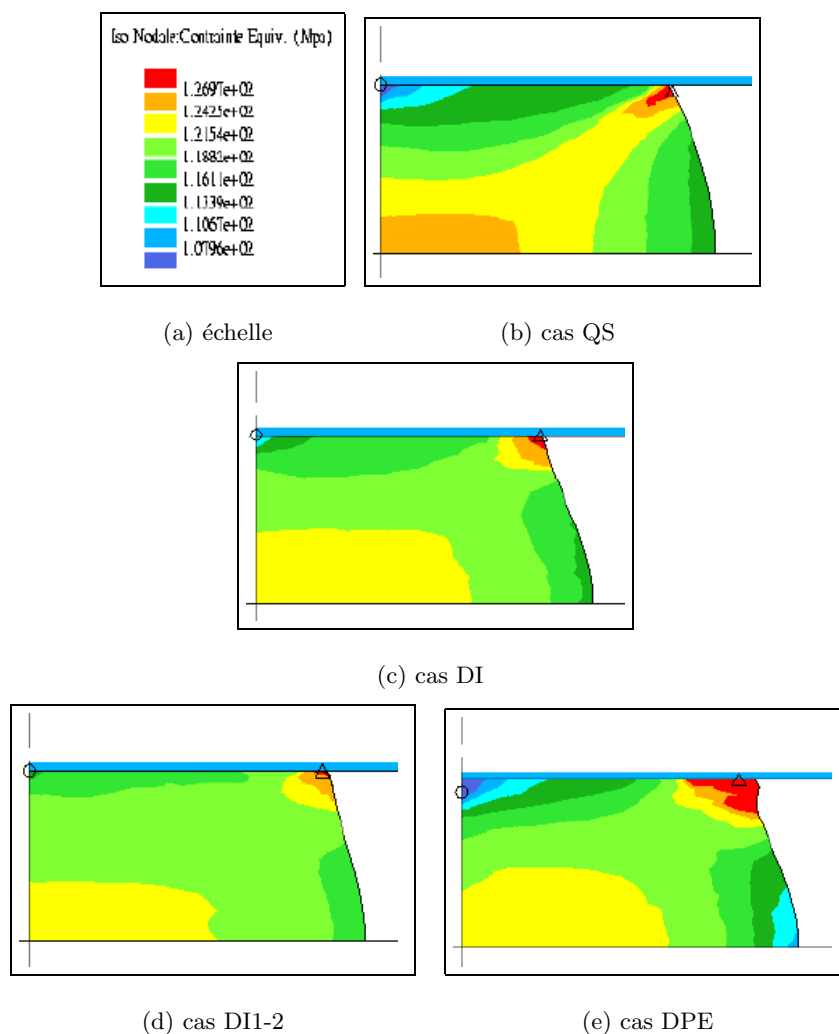


FIG. 3.26 – Contraintes équivalentes - QS, DI, DI1-2, DPE

Le tableau (3.16) montre les résultats élasto-viscoplastiques obtenus pour les cas considérés.

Nous remarquons que les résultats obtenus dans les cas dynamiques sont d'une qualité équivalente. Le seuil de plasticité est pris en compte pour que l'élasticité ne joue qu'un faible rôle. En conséquence, la perte de volume n'est pas significative.

	v.l.	X(top)	X(bottom)	$\sigma_{eq}^{max}$	$V^{max}$	$P^{max}$
QS	0.1 %	63.67	74.07	129.69	10828	162
DI	0.4 %	63.71	75.25	128.97	12501	1046
DI1-2	0.15%	64.66	74.01	128.25	12649	1055
DPE	0.3 %	65.59	74.24	153.83	12330	1162

TAB. 3.16 – Test de compression - frottement. (élasto-viscoplasticité )

### 3.4 Résolution en pression

Dans le but de simplifier la résolution du problème dynamique, une autre approche est évaluée. Cette approche fait l'objet de ce dernier paragraphe. La formulation partiellement explicite en accélération/pression présentée dans le chapitre précédent sera à la base de cette approche. Une manière différente de résoudre le système résultant de la formulation mixte précédente sera adoptée. Ainsi, la résolution mixte en accélération/pression se transforme en une résolution uniquement en pression, l'accélération étant ensuite calculée de manière explicite. La vitesse est exprimée également de manière explicite en fonction de l'accélération.

#### 3.4.1 Formulation générale explicite en accélération et implicite en pression

Soit le problème dynamique (1.25) où la gravité est négligée. Nous nous plaçons dans le contexte des matériaux viscoplastiques. Le comportement est défini par la loi de Norton-Hoff (1.6) et les conditions aux frontières sont décrites par les équations (2.2) et (2.3).

##### a) Élimination de l'accélération dans les EDP

Une possibilité pour résoudre le problème dynamique incompressible consiste à exprimer  $\gamma$  de la première équation du système, soit :

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(s - pI) \quad (3.81)$$

Ensuite, cette dernière est remplacée dans l'équation d'incompressibilité (1.85), ce qui fournit :

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(s - pI)\right) = \operatorname{trace}\left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (3.82)$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\operatorname{div}(s)) - \Delta p = \operatorname{trace}\left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (3.83)$$

Si on considère le cas le plus simple du fluide newtonien, où  $s = 2\eta\dot{\epsilon}$  l'équation (3.83) devient :

$$\Delta p = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\operatorname{div}(\eta(\operatorname{grad}(v) + (\operatorname{grad}(v))^t))) - \operatorname{trace} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3.84)$$

Dans la dernière équation, apparaissent des dérivés d'ordre 3. Si une telle résolution est envisagée, appliquant par la suite la méthode éléments finis pour l'équation (3.84), l'ordre 3 de la dérivation interdit l'utilisation de fonction linéaires  $C^0$ .

En effet, la forme intégrale s'écrit :

$$0 = - \int_{\Omega} \Delta p . w^* d\omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\operatorname{div}(\eta(\operatorname{grad}(v) + (\operatorname{grad}(v))^t))) w^* d\omega - \int_{\Omega} \operatorname{trace} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) w^* d\omega, \quad \forall w^* \quad (3.85)$$

soit après utilisation de la formule Green :

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad}(p) . \operatorname{grad}(w^*) d\omega + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\eta \dot{\varepsilon}) . \operatorname{grad}(w^*) d\omega - \int_{\Omega} \operatorname{trace} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) w^* d\omega - \int_{\partial\Omega_p} \operatorname{grad}(p) . n w^* dS - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\eta \dot{\varepsilon}) n w^* dS, \quad \forall w^* \quad (3.86)$$

Les dérivées secondes ne pouvant être éliminées, cette formulation demanderait un champ de vitesse  $C^1$ , ce que implique des calculs plus complexes.

Il est donc préférable de discrétiser le problème étudié, et ensuite seulement de résoudre le système résultant.

### b) Résolution implicite en accélération et pression

La formulation intégrale du problème dynamique s'écrit avec les relations (1.86).

Le problème est discrétisé en considérant le MINI-élément et les étapes présentées antérieurement, pour la formulation en accélération/pression (cas viscoplastique), sont suivies pour retrouver la forme symbolique :

$$\begin{cases} C'_{\Gamma\Gamma} \Gamma + R'_{\Gamma} + D'_{\Gamma P} P = 0 \\ {}^T D'_{\Gamma P} \Gamma + E_{PP} P + R'_P = 0 \end{cases} \quad (3.87)$$

où  $C'_{\Gamma\Gamma}$ ,  $D'_{\Gamma P}$ ,  $E_{PP}$ ,  $R'_{\Gamma}$  et  $R'_P$  sont issus des relations (3.33).

Ce dernier système a été résolu en  $\Gamma$  et  $P$  pour tous les exemples traités précédemment.

### c) Élimination de l'accélération après discrétisation

La matrice de masse  $C'_{\Gamma\Gamma}$  est remplacée par une matrice  ${}^L C'_{\Gamma\Gamma}$  condensée ("mass lumping") qui a une forme diagonale.

Avec cette nouvelle forme pour  $C'_{\Gamma\Gamma}$ , l'accélération  $\Gamma$  se calcule (explicitement) facilement à partir de la première équation du système (3.87), soit

$$\Gamma = -{}^L C'_{\Gamma\Gamma}{}^{-1}(R'_\Gamma + D'_{\Gamma P}P) \quad (3.88)$$

Ensuite, la formule (3.88) est introduite dans la deuxième équation du système (3.87) et on obtient la pression  $P$  (implicitement) :

$$(E_{PP} - {}^T D'_{\Gamma P} {}^L C'_{\Gamma\Gamma}{}^{-1} D'_{\Gamma P})P = -{}^T D'_{\Gamma P} {}^L C'_{\Gamma\Gamma}{}^{-1} R'_\Gamma + R'_P \quad (3.89)$$

La pression  $P$  étant déterminée, l'équation (3.88) fournit explicitement l'accélération  $\Gamma$ .

La méthode de résolution présentée ci-dessus (que l'on note DPE-simplifiée) nous amène à la résolution d'un système linéaire de  $Nbnoe$  inconnues, où  $Nbnoe$  représente le nombre de noeuds du maillage.

La résolution d'un système linéaire de  $Nbnoe$  est moins coûteuse que celle d'un système linéaire de  $3 \times Nbnoe$  inconnues, correspondant à la formulation DPE, et encore moins coûteuse que la résolution d'un système non linéaire de  $3 \times Nbnoe$  inconnues, correspondant à la formulation DI.

Par la suite, nous présentons une estimation du coût de chacune de ces méthodes : DI, DPE et DPE-simplifiée.

#### 3.4.2 Estimation du coût des formulations : DI, DPE, DPE-simplifiée

Les estimations exposées ci-dessous sont basées sur les études effectuées par Stéphane Marie [37] et par Etienne Perchat [48] concernant la résolution des systèmes linéaires.

##### Méthode directe

On rappelle l'ordre du nombre d'opérations nécessaire pour une résolution directe d'un système à  $(d + 1)$  degrés de liberté par noeud (où  $d$  est la dimension de l'espace) par une méthode de Crout :

– factorisation :  $\frac{(d + 1)^3 \times Nbnoe \times lbg^2}{2}$

– descente-remontée :  $2 \times (d + 1)^2 \times Nbnoe \times lbg$

où  $lbg$  est la largeur de bande géométrique du maillage.

##### Méthode itérative

Les opérations nécessaire à chaque itération de la méthode du résidu minimal sont :

– un produit matrice-vecteur (pour un stockage morse) dont le coût est de :

$$4 \times (d + 1)^2 \times v \times Nbnoe$$

– 4 produits scalaires de coût :

$$4 \times 2 \times (d + 1) \times Nbnoe$$

où  $v$  représente le nombre moyen de voisins d'un noeud du maillage.

On néglige les opérations dues au préconditionnement (négligeables pour les préconditionnements par blocs diagonaux [37]).

### a) Cas 2D

Généralement, en 2D, on estime que :

$$lbg \sim Nbnoe^{0.5}$$

et

$$v \sim 6$$

Si  $Nb_{it}$  est le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de la méthode, alors pour les préconditionneurs diagonaux et blocs diagonaux on estime :

$$Nb_{it} \sim \mathcal{O}(Nbnoe^{0.75})$$

### • Coût de la formulation DI

#### Résolution par une méthode directe

Le coût de la méthode DI en résolution directe est estimé [48] à :

$$(18 \times Nbnoe^{1.5} + 13.5 \times Nbnoe^2) \times Nb_{itNR},$$

où  $Nb_{itNR}$  représente le nombre d'itérations de la méthode de Newton-Raphson.

#### Résolution par une méthode itérative

Le coût approximatif de la méthode DI est :

$$240 \times Nbnoe^{1.75} \times Nb_{itNR}$$



**• Coût de la formulation DPE****Résolution par une méthode directe**

Le coût de la méthode DPE en résolution directe est de :

$$18 \times Nbnoe^{1.5} + 13.5 \times Nbnoe^2$$

puisque le système à résoudre dans ce cas est linéaire.

**Résolution par une méthode itérative**

Le coût de la méthode DPE en résolution itérative est de l'ordre :

$$240 \times Nbnoe^{1.75}$$

**• Coût de la formulation DPE-simplifiée**

Nous mentionnons que, dans le cas de cette formulation, le système à résoudre a uniquement 1 degré de liberté par noeud.

**Résolution par une méthode directe**

Pour la résolution directe du système résultant de la formulation notée DPE-simplifiée, le coût est de l'ordre :

$$4 \times Nbnoe^{1.5} + 2 \times Nbnoe^2,$$

compte tenu du fait que, dans le cas présent, la largeur de bande de la matrice  $E -^T D^L C^{-1} D$  est le double de celle correspondant au cas DPE au DI.

**Résolution par une méthode itérative**

Pour la formulation DPE-simplifiée, à chaque itération il est nécessaire d'effectuer un certain nombre d'opérations pour faire le passage d'un système en accélération/pression à un système uniquement en pression.

Ainsi,

- pour le calcul du  $\Gamma$ , conformément à la relation (3.88), le coût (correspondant à un produit matrice-vecteur  $DP$ ) est de :

$$2 \times Nbnoe \times 6.$$

- pour le calcul du produit matrice-vecteur  $^T D \Gamma$ , le coût estimé est :

$$2 \times Nbnoe \times 6.$$

– pour le calcul du produit matrice-vecteur  $EP$  on estime un coût de :

$$Nbnoe \times 6$$

Dans ce cas, le coût de la méthode itérative est de l'ordre de :

$$32 \times Nbnoe.$$

Avec cette estimation approximative, nous pouvons en déduire que l'on effectue, par itération, un nombre d'opérations  $Nb_{op}$  de :

$$Nb_{op} = 62 \times Nbnoe.$$

En conséquence, le coût total de la méthode est estimé à :

$$62 \times Nbnoe \times Nb_{it} \sim 62 \times Nbnoe^{1.75}.$$

### • Synthèse

◦ Quand un solveur direct est utilisé pour la résolution du système correspondant au problème mécanique étudié, le coût total (en nombre d'opérations) pour chacune des formulations DI, DPE et DPE-simplifiée est présenté dans le tableau (3.17).

DI (solveur direct)	$(18 \times Nbnoe^{1.5} + 13.5 \times Nbnoe^2) \times Nb_{itNR}$
DPE (solveur direct)	$18 \times Nbnoe^{1.5} + 13.5 \times Nbnoe^2$
DPE-simplifiée (solveur direct)	$4 \times Nbnoe^{1.5} + 2 \times Nbnoe^2$

TAB. 3.17 – Coût des formulations DI, DPE et DPE-simplifiée en résolution directe

On remarque un facteur dépendant de  $Nb_{itNR}$  entre les formulations implicite et partiellement explicite. Le nombre moyen d'itérations de Newton-Raphson par incrément est estimé à 3.

◦ Pour le cas d'une résolution itérative, les différents coûts correspondant à chaque formulation sont présentés dans le tableau (3.18).

DI (solveur itératif)	$240 \times Nbnoe^{1.75} \times Nb_{itNR}$
DPE ( solveur itératif)	$240 \times Nbnoe^{1.75}$
DPE-simplifiée ( solveur itératif)	$62 \times Nbnoe^{1.75}$

TAB. 3.18 – Coût des formulations DI, DPE et DPE-simplifiée en résolution itérative

Un facteur dépendant de  $Nb_{itNR}$  est également enregistré entre les formulations DI et DPE. Quant à la formulation DPE-simplifiée, elle apportera un gain approximatif d'un facteur  $4 \times Nb_{itNR}$  par rapport à la formulation DI.

◦ Les estimations présentées ci-dessus, ainsi que les travaux effectués par Etienne Perchat [48] montrent que, pour une formulation fixée, le passage d'un solveur direct à un solveur itératif, en 2D, n'est pas très favorable.

Par la suite, une évaluation du gain apporté par la formulation DPE-simplifiée (résolution directe, ainsi que résolution itérative) par rapport à la formulation DI (résolution directe) est proposée.

- **Estimation asymptotique**

- En comparant le coût des formulations **DPE-simplifiée** et **DI en résolution directe**, pour des maillages de 1000 noeuds à 10000 noeuds, un facteur de **20** est estimé pour le gain en temps de calcul.

- Le tableau (3.19) présente les gains en temps de calcul entre l'approche **DPE-simplifiée en résolution itérative** et l'approche **DI en résolution directe**.

<i>Nbnoe</i>	DI (directe)/DPE-simplifiée (itératif)
1000	3
2000	4
5000	5
10000	6

TAB. 3.19 – Gain entre l'approche DPE-simplifiée (résolution itérative) et l'approche DI (résolution directe)

Il semble donc qu'en 2D, l'utilisation de la formulation DPE-simplifiée avec un solveur direct soit la méthode la plus rapide.

De ces estimations nous pouvons conclure que l'approche DPE-simplifiée peut apporter des gains en temps de calcul assez importants quand les résolutions implicites et partiellement explicites sont effectuées avec le même pas de temps.

En revanche, quand la formulation partiellement explicite DPE-simplifiée doit utiliser des pas de temps inférieurs à ceux employés par la formulation implicite DI, le gain en temps de calcul résultant de la méthode proposée, peut être réduit par le grand nombre d'incrément.

### b) Cas 3D

En 3D, il apparaît clairement [37], [48] que le passage d'un solveur direct à un solveur itératif est plus favorable qu'en 2D.

Si l'on envisage une généralisation de notre travail en 3D, la formulation DPE-simplifiée semble alors apporter un gain important en temps de calcul.

Une estimation est présentée par la suite, en comparant le coût de la formulation DPE-simplifiée avec le coût de la formulation DI, en résolution itérative.

En 3D, on estime que :

$$v \sim 12$$

et

$$Nb_{it} \sim \mathcal{O}(Nbnoe^{0.5}).$$

- **Coût de la formulation DI**

Le coût approximatif de la formulation DI en résolution itérative est de

$$816 \times Nbnoe^{1.5} \times Nb_{itNR}.$$

- **Coût de la formulation DPE-simplifiée**

Pour la résolution itérative du système résultant de la formulation DPE-simplifiée, le coût par itération est estimé comme suit :

– pour le passage d'un système en accélération/pression à un système en pression :

$$180 \times Nbnoe$$

– pour la résolution :

$$60 \times Nbnoe$$

Ainsi, le coût approximatif total est de l'ordre :

$$240 \times Nbnoe \times Nb_{it} \sim 240 \times Nbnoe^{1.5}$$

- **Estimation du gain en temps de calcul pour une résolution itérative**

Nous considérons que  $Nb_{itNR}$  est égal à 3. En réalité,  $Nb_{itNR}$  dépend de plusieurs facteurs dont nous ne parlons pas ici (par exemple, la difficulté du cas analysé, le préconditionneur utilisé). A partir des estimations présentées ci-dessus, on constate un gain approximatif de **10** (i.e.  $3 \times 3.4$ ) entre les formulations **DPE-simplifiée** et **DI** en **résolution itérative**.

Selon les évaluations exposées précédemment un gain important peut être apporté également en 3D par la formulation DPE-simplifiée par rapport à la formulation DI lorsque le même pas de temps est utilisé.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une alternative pour l'étude d'un problème dynamique viscoplastique et élasto-viscoplastique. Nous proposons une approche axisymétrique en accélération et pression. L'équation d'équilibre et celle d'incompressibilité sont exprimées en fonction de  $\gamma$ , ce qui représente un des points originaux de notre formulation. Pour la discrétisation spatiale, le MINI-élément est introduit dans la formulation en accélération. La bulle est éliminée de manière classique, au niveau de chaque élément. Le système résultant est linéaire, ce qui évite l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson. Un schéma explicite d'ordre 2 est utilisé pour la réactualisation des coordonnées et des schémas explicites d'ordre 1 sont à la base des réactualisations des vitesses et des déformations équivalentes. La matrice de masse est diagonalisée.

Cette formulation a été implémentée dans une version du logiciel Forge2<sup>®</sup>. Les résultats obtenus pour différents tests (en traction et en compression) sont exposés et comparés avec ceux issus des formulations implicites quasi-statique et dynamiques présentées dans le chapitre précédent. En général, une bonne concordance est notée entre les résultats dynamiques. Les géométries finales diffèrent entre les cas dynamiques et quasi-statiques, à cause de l'inertie qui intervient dans les premiers. La conservation du volume est mieux assurée par l'approche partiellement explicite (pas de temps plus petits en général) par rapport aux formulations implicites QS et DI.

En vu de simplifier notre approche partiellement explicite, une autre méthode est proposée pour la résolution du système correspondant au problème étudié. Ainsi, un système uniquement en pression fait l'objet de la résolution, l'accélération résultant explicitement de la pression calculée. Par cette démarche, le nombre d'inconnues par noeuds passera de 3 à 1, ce qui apporterait un gain en temps de calcul lorsque le même pas de temps est utilisé. Dans le cas contraire, l'utilisations dans la formulation partiellement explicite d'un pas de temps inférieur à ceux nécessaires en implicites entraînera un grand nombre d'incrément, ce qui peut estomper le gain en temps de calcul résultant de la méthode proposée.

# Conclusion et perspectives

Les objectifs de notre travail ont été, d'une part, l'analyse et le développement de nouvelles approches implicites et, d'autre part, l'exploration d'une formulation mixte partiellement explicite pour la modélisation dynamique du forgeage à chaud.

Dans la première partie, trois formulations dynamiques implicites ont été proposées. La première consiste à exprimer l'accélération par un schéma aux différences centrées sur chaque intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$ . L'utilisation d'un tel schéma entraîne la résolution du problème sur le domaine correspondant au temps  $\frac{t+\Delta t}{2}$ , noté  $\Omega^{t+\frac{\Delta t}{2}}$ . Cette formulation s'est avérée complexe (dérivation de domaine, apparition des nouveaux termes dans l'assemblage de la matrice du système). Dans le but de la simplifier, nous avons considéré deux approximations successives. La première concerne le domaine de résolution qui est pris maintenant au début de l'intervalle. L'intérêt est d'éviter les dérivées de domaine. La deuxième, qui s'ajoute à la première, porte sur les variables. Celles-ci sont considérées à la fin de l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$  et non plus au centre, comme dans les deux premières approches. C'est cette dernière approche que nous avons retenue pour l'intégrer dans une version du logiciel Forge2. Pour la réactualisation des coordonnées, un schéma explicite d'ordre 2 remplace le schéma d'ordre 1 préexistant dans les versions standard du logiciel Forge2<sup>®</sup>. Une correction est apportée à la condition d'incompressibilité afin d'obtenir une meilleure conservation du volume lors des simulations numériques.

Les tests réalisés sur plusieurs exemples ont montré une bonne concordance entre les résultats issus de notre nouvelle version, et ceux issus de la version dynamique standard. Dans tous les cas, une amélioration est constatée en terme de conservation de volume. En revanche, la formulation proposée augmente le temps de calcul de 10% à 25%, en fonction de la complexité des cas simulés.

Dans la deuxième partie, une approche mixte viscoplastique accélération/pression (explicite en vitesse et implicite en pression, dite partiellement explicite) est proposée et développée. Dans ce cas, les inconnues étant l'accélération et la pression, le comportement du matériau n'introduit pas de non-linéarité comme dans le cas des formulations mixtes vitesse/pression. Par conséquent, le système résultant du problème est linéaire. Le MINI-élément déjà intégré dans le logiciel Forge2<sup>®</sup>, pour la formulation quasi-statique vitesse/pression, a été choisi pour la discrétisation spatiale. Son application à une formulation dynamique mixte accélération/pression est examinée et implémentée. La matrice de masse est condensée. Un schéma explicite d'ordre 2 est utilisé et implémenté pour la réactualisation des coordonnées. La gestion du contact et du frottement des versions standard de Forge2<sup>®</sup> est adaptée à la formulation en accélération.

Nous avons implémenté cette nouvelle approche dans une version 2D axisymétrique du code Forge2. La validation de cette approche a été effectuée à l'aide de la simulation de plusieurs tests de traction et de compression. Les résultats ont été comparés avec ceux issus des versions standards quasi-statique et dynamique du logiciel Forge2<sup>®</sup>. Une très bonne concordance est observée. Lorsque le même pas de temps est utilisé dans la formulation partiellement explicite et dans la formulation dynamique implicite, la formulation partiellement explicite apporte un gain en temps de calcul d'un peu plus de 20%.

Ainsi, la formulation partiellement explicite que nous proposons permet d'améliorer sensiblement le traitement de l'incompressibilité et de diminuer le temps de calcul. Cette formulation dynamique mixte partiellement explicite accélération/pression représente donc une alternative pour la modélisation numérique du processus de forgeage à chaud à grand vitesse.

Au vu de ces résultats, une généralisation de la méthode au cas élasto-viscoplastique a été étudiée et mise en oeuvre. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux des versions standards de Forge2<sup>®</sup>.

Enfin, dans le but d'améliorer encore le temps de calcul, une simplification de la résolution du problème dynamique en accélération/pression est explorée. La clé de cette simplification est une résolution en pression uniquement. L'accélération est alors calculée explicitement en fonction de la pression. Nos estimations de temps de calcul nous font envisager des gains de temps de calcul par rapport aux versions standards, d'un facteur **20** en 2D pour une résolution directe et d'un facteur **10** en 3D pour une résolution itérative.

Cela ouvre une nouvelle perspective de recherche, à savoir l'implémentation de cette dernière formulation au cas 2D. La généralisation de cette formulation aux cas 3D peut également être envisagée. Dans ce cas, l'utilisation d'un solveur itératif est indiquée. De plus, l'approche proposée devrait permettre la parallélisation du code.

# Bibliographie

- [1] M. Arminjon and J-L. Chenot. An implicit formulation for finite element analysis of dynamic plastic deformation in 2d-geometry. In G. N. Pande and J Middleton, editors, *Numerical Techniques for Engineering Analysis and Design*, pages 1–10, 1987.
- [2] D.N. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin. A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo*, (21) :337–344, 1984.
- [3] K-J. Bathe. *Finite element procedures*. PRENTICE HALL - New Jersey, 1996.
- [4] K. J. Bathe, O. Guillermin, and H-Y. Chen. Advances in nonlinear finite element analysis of automobiles. *Computers & Structures*, 64(5/6) :881–891, 1997.
- [5] T. Belytschko, P. Smolinski, and W. K. Liu. Stability of multi-time step partitioned integrators for first-order finite element systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49 :181–197, 1985.
- [6] T. Belytschko and T.J.R. Hughes, editors. *Explicit lagrangian finite-element methods*, volume 1 of *Computational Methods in Mechanics*, chapter 8, pages 361–413. Elsevier Science Publishers B.V., 1983.
- [7] T. Belytschko, S-O. Lee, I.S. Yeh, C.S. Tsay, and J.M.Kennedy. Adaptivity in crashworthiness calculations. *Crashworthiness and Occupant Protection in Transportation Systems ASME,AMD*, 169 :53–65, 1993.
- [8] C. Bohatier and J-L. Chenot. Finite element formulation for non-steady state large viscoplastic deformation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21 :1697–1708, 1985.
- [9] F. Brezzi and M.Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer - Verlag, 1991.
- [10] J-L. Chenot. A velocity approach to finite element calculation of elastoplastic and viscoplastic deformation processes. *Eng. Comput.*, 5 :2–9, march 1988.
- [11] J-L. Chenot and F. Bay. An overview of numerical modelling techniques. *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81 :8–15, 1998.
- [12] J-L. Chenot and M. Bellet. The ALE method for the numerical simulation of material forming processes. In S-F. Shen and P. Dawson, editors, *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications, NUMIFORM'95*, pages 39–48. Balkema, Rotterdam, 1995.
- [13] G. C. Cornfeld and R. H. Johnson. Theoretical prediction of plastic flow in hot-rolling including the effect of various temperature distribution. Technical Report ECRC/M 427, Electricity Council Research Center, 1971.
- [14] G. C. Cornfield and R. H. Johnson. Theoretical prediction of plastic flow in hot rolling including the effect of various temperature distribution. *J. Iron Steel Inst.*, 211 :567, 1973.



- 
- [15] T. Coupez and J-L. Chenot. Large deformation and automatic remeshing. In D.J.R. Owen and E. Oñate, editors, *Computational Plasticity*. Pineridge Press, 1992.
- [16] T. Coupez and J-L. Chenot. Mesh topology for mesh generation problems. In Chenot, Wood, and Zienkiewicz, editors, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*. Balkema, Rotterdam, 1992.
- [17] A.J.L. Crook, M. Dutko, and G.C. Huang. Adaptive strategies for implicit and explicit elastoplastic forming process. In *Computational Methods in Applied Sciences*, pages 566–572. John Wiley & Sons Ltd, 1996.
- [18] L. D’Alvise, E. Massoni, and S. J. Walloe. Finite element modelling of the inertial friction welding process. In *Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM 2001 Japan*, pages 1101–1106, 2001.
- [19] J. Donéa. *Advanced Structural Dynamics*. Applied Science Publishers. LTD London, 1978.
- [20] G. Dhatt et G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. MALOINE S.A., deuxième édition, 1984.
- [21] D. Euvrard. *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l’ingénieur. Différence finis, éléments finis, problème en domaine non borné*. MASSON, 3 édition, 1994.
- [22] D.P. Flanagan and T. Belytschko. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17 :679–706, 1981.
- [23] A. Fortin. *Analyse numérique pour ingénieurs*. Edition de l’Ecole Polytechnique de Montréal, 1995.
- [24] M. Fortin. Old and new finite elements for incompressible flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1 :347–364, 1981.
- [25] J.O. Hallquist and R.G. Whirley. *DYNA 3D : Nonlinear dynamic analysis of structures in three dimensions*. University of California. Lawrence Livermore National Laboratory, 1981.
- [26] J Huétin and P. N. Van Der Helm. On Euler-Lagrange finite element formulation in forming and fluid problems. In Chenot, Wood, and Zienkiewicz, editors, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, pages 45–54. Balkema, Rotterdam, 1992.
- [27] O-P. Jacquotte and J.T. Oden. Analysis and treatment of hourglass instabilities in underintegrated finite element methods. In W.K. Liu, T. Belytschko, and K.C. Park, editors, *Proceedings of the International Conference on Innovative Methods for Nonlinear Problems*, Swansea,U.K, 1984. Pineridge Press International Limited.
- [28] F. Jourdan, M. Jean, and P. Alart. An alternative method between implicit and explicit schemes devoted to frictional contact problems in deep drawing simulation. *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81 :257–262, 1998.
- [29] D. W. Jung and D. Y. Yang. Elastic-plastic finite element analysis of automotive body panel stamping processes using dynamic explicit integration scheme. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 8(6) :719–729, 1999.
- [30] H. Kardenstuncer and D. H. Norrie. *Finite element handbook*. McGraw-Hill Book Company, 1987.
- [31] M. Kawka, T. Kakita, and A. Makinouchi. Simulation of multi-step sheet metal forming process by a static explicit FEM code. *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81 :54–59, 1998.
-

- [32] C. H. Lee and S. Kobayashi. New solutions to rigid plastic deformation problems using a matrix method. *Journal of Engineering and Industry, ASME*, 95 :865, 1973.
- [33] S.W. Lee and D.Y. Yang. An assessment of numerical parameters influencing spring-back in explicit finite element analysis of sheet metal forming process. *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81 :60–67, 1998.
- [34] W.K. Liu, T. Belytschko, J.S.J. Ong, and S.E. Law. The use of stabilisation matrices in nonlinear analysis. In W.K. Liu, T. Belytschko, and K.C. Park, editors, *Proceedings of the International Conference on Innovative Methods for Nonlinear Problems*, Swansea,U.K, 1984. Pineridge Press International Limited.
- [35] A.G. Mamalis, D.E. Manolakos, and A.K. Baldoukas. Simulation of sheet metal forming using explicit finite-element techniques : effect of material and forming characteristics Part.2 Deep-drawing of square cups. *Journal of Materials Processing Technology*, 72 :110–116, 1997.
- [36] A.G. Mamalis, D.E. Manolakos, and A.K. Baldoukas. Simulation of sheet metal forming using explicit finite-element techniques : effect of material and forming characteristics Part.1 Deep-drawing of cylindrical cups. *Journal of Materials Processing Technology*, 72 :48–60, 1997.
- [37] S. Marie. Un modèle de parallélisation S.P.M.D. pour la simulation numérique de procédés de mise en forme de matériaux. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, CEMEF-Sophia Antipolis, 1997.
- [38] J. M. M. C. Marques and D. R. J. Owen. Implicit-explicit time integration in quasi-static elasto-visco-plasticity using finite and infinite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 42 :167–182, 1984.
- [39] T.D. Marusich and M. Ortiz. Modelling and simulation of high-speed machining. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 :3675–3694, 1995.
- [40] E. Massoni, M. Bellet, and M. Abouaf abd J-L. Chenot. Large displacement numerical calculation of 3-dimensional elastoplastic and elasto-viscoplastic membrane by the finite element method. In C. Taylor, D. R. J. Owen, E. Hilton, and F. B. Damjanic, editors, *Int. Conf. on Numerical Methods for Non-linear Problems*, pages 480–493, 1986.
- [41] K. Mattiasson, L. Bernspang, A. Honecker, E. Schedin, T. Hamman, and A. Melander. On the use of explicit time integration of finite element simulation in industrial sheets forming process. *VDI-Bericht 894 FE-Simulations of 3D Sheet Metal Forming Processes in Automotive Industry. Düsseldorf*, page 479, 1991.
- [42] K. Mocellin. Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à chaud : Etude du contact et calcul multigrille. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, CEMEF-Sophia Antipolis, 1999.
- [43] J. C. Nagtegaal and L. M. Taylor. Comparison of implicit and explicit finite element methods for analysis of sheet forming problems. *VDI-Bericht 894 FE-Simulations of 3D Sheet Metal Forming Processes in Automotive Industry. Düsseldorf*, pages 705–725, 1991.
- [44] A.K. Noor and J.M. Peters. Large deformation inelastic dynamic analysis of sheels of revolution via mixed finite element models. In W.K. Liu, T. Belytschko, and K.C. Park, editors, *Proceedings of the International Conference on Innovative Methods for Nonlinear Problems*, pages 187–215, Swansea,U.K, 1984.

- 
- [45] P. Nordlund and B. Häggblad. Prediction of wrinkle tendencies in explicit sheet metal-forming simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :4079–4095, 1997.
- [46] E. Oñate and C. Agelet de Saracibar. Alternatives for finite element analysis of sheet metal forming problems. In Wood Chenot and Zienkiewicz, editors, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM'92*, pages 79–88, 1992.
- [47] O. Pantale, M. Touratier, R. Rakotomalala, and N. Hakem. A three-dimensional numerical model of orthogonal and oblique metal cutting processes. *American Society of Mechanical Engineering*, 3, 1996.
- [48] E. Perchat. Mini-élément et factorisations incomplètes pour la parallélisation d'un solveur de Stokes 2D . Application au forgeage. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, CEMEF-Sophia Antipolis, 2000.
- [49] R. Rakotomalala and P. Joyot. Arbitrary Lagrangian-Eulerian thermomechanical finite-element model of material cutting. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9 :975–987, 1993.
- [50] N. Rebelo, J. C. Nagtegaal, and L. M. Taylor. Comparison of implicit and explicit finite element method in the simulation of metal forming processes. In Chenot, Wood, and Zienkiewicz, editors, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, pages 237–242. Balkema, Rotterdam, 1992.
- [51] J. Rojek, E. Oñate, and E. Postek. Application of explicit FE codes to simulation of sheet and bulk metal forming processes. *Journal of Materials Processing Technology*, 80-81 :620–627, 1998.
- [52] J. Rojek, O. C. Zienkiewicz, E. Oñate, and R. L. Taylor. Simulation of metal forming using new formulation of triangular and tetrahedral elements. In Pietrzyk et al., editor, *Metal Forming*, pages 149–155, 2000.
- [53] F. W. Sharman. Analysis of metal deformation-extrusion. Technical Report ECRC/M 537, Electricity Council Research Center, 1972.
- [54] P. Smolinski, S. Sleith, and T. Belytschko. Stability of an explicit multi-time step integration algorithm for linear structural dynamics equations. *Computational Mechanics*, 18 :236–244, 1996.
- [55] B. Soltani, K. Mattiasson, and A. Samuelsson. Implicit and explicit solutions of blade forging using the finite element method. *Journal of Materials Processing Technology*, 45 :69, 1994.
- [56] C. Stoker, C. Gay, F. Bay, and J-L. Chenot. A velocity approach for the ALE-method applied to 2D and 3D problems. In Huétin and Baaijens, editors, *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications*, pages 95–101. Balkema, Rotterdam, 1998.
- [57] H. C. Stoker. *Developements of the Arbitrary Lagrangian-Eulerian method in non-linear solid mechanics. Applications to forming processes*. PhD thesis, Universiteit Twente Enschede, 1999.
- [58] G. Surdon and J-L. Chenot. Finite element calculations of three-dimensional hot forming. In K. Mattiasson, editor, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM'86*, pages 287–292, 1986.
- [59] L. M. Taylor and D. P. Flanagan. Pronto 2d : a two dimensional transient solid dynamics program. Technical Report SAND86-0594, Sandia National Laboratories, 1987.
-

- [60] M. Teodorescu, K. Mocellin, R. Ducloux, and J-L. Chenot. A partely-explicit finite element formulation for the forging process. *International Journal of Computational Engineering Science*, 2(3) :425–452, 2001.
- [61] K. Traore. Simulation thermomécanique du laminage circulaire. Développement d’une formulation quasi-Eulérienne tridimensionnelle sur une architecture parallèle. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, CEMEF-Sophia Antipolis, 2001.
- [62] R. H. Wagoner and J-L. Chenot. *Metal forming analysis*. Cambridge University Press, first edition, 2001.
- [63] S.P. Wang, S. Choudhry, and T.B. Wertheimer. Comparison between the static implicit and dynamic explicit methods for FEM simulation of sheet forming process. In Huétink and Baaijens, editors, *Simulation of Material Processing : Theory, Methods and Applications*, pages 245–250. Balkema, Rotterdam, 1998.
- [64] R. G. Whirley, B. E. Engelman, and R. W. Logan. Some aspects of sheet forming simulations using explicit finite element techniques. *Numerical Methods for Simulation of Industrial Metal Forming Processes*, CED 5 AMD :156, 1992.
- [65] J.P. Wright. Numerical stability of a variable time step explicit method for Timoshenko and Mindlin type structures. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 14(81-86) :79–86, 1998.
- [66] S.R. Wu and J. Cheng. Advanced developement of explicit FEA in automotive applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, 149 :189–199, 1997.
- [67] Y. H. Yoo, D. Y. Yang, and D. T. Chung. Numerical simulation of multi-blow forging processes using the explicit time integration finite element method. *Engineering Computations*, 14(8) :901–925, 1997.
- [68] Y.H. Yoo, D.Y. Yang, and D.T. Chung. Numerical simulation of multi-blow forging process using the explicit time integration finite element method. *Engineering Computations*, 14(8) :901–925, 1997.
- [69] S. Yossifon and J. Tirosh. On suppression of plastic buckling in hydroforming processes. *Int. J. Mech. Sci.*, 26 :389–402, 1984.
- [70] S.H. Zhang, K.B. Nielsen, J. Danckert, and Z.R. Wang. Numerical simulation of the integral hydro-bulge forming of non-clearance double-layer spherical vessels : analysis of the stress state. *Journal of Materials Processing Technology*, 75 :212–221, 1998.
- [71] O. C. Zienkiewicz and K. Godbole. Flow of plastic and visco-plastic solids with special reference to extrusion and forming processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8 :3, 1974.
- [72] O. C. Zienkiewicz, P. C. Jain, and E. Oñate. Flow of solids during forming and extrusion : some aspects of numerical solutions. *Int. J. Solids Structures*, 14 :15–38, 1978.
- [73] O. C. Zienkiewicz, J. Szmelter, and J. Peraire. Compressible and incompressible flow ; an algorithm for all seasons. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 78 :105–121, 1990.
- [74] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The finite element method*, volume 1. London : McGraw Hill Book Company, 4 edition, 1988.
- [75] O. C. Zienkiewicz and J. L. Armand Trad. *La méthode des éléments finis*. Paris : McGraw-Hill, 1979.

- [76] O. C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, and G.C. Huang. Error estimation and adaptivity in flow formulation for forming problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 25 :23–42, 1988.

# Annexes

## Annexe A

### Annexe A1 : Calcul de l'opérateur $B$

L'opérateur  $B$  est obtenu par discrétisation de la relation (A.1) :

$$\text{div}(v^l) = \text{trace}(\dot{\varepsilon}(v^l)) \quad (\text{A.1})$$

Sachant que les composantes de la vitesse sont discrétisées selon :

$$v_i^l = \sum_{n=1}^{Nbnoe} V_{in} N_n . \quad (\text{A.2})$$

(où l'indice  $h$  est omis pour simplifier les notations)

nous pouvons écrire :

$$\dot{\varepsilon}(v^l)_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^l}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^l}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=1}^{Nbnoe} \left( V_{in} \frac{\partial N_n}{\partial x_j} + V_{jn} \frac{\partial N_n}{\partial x_i} \right) \right] \quad i = 1, 2 \quad (\text{A.3})$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(v^l)_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=1}^{Nbnoe} \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\partial N_n}{\partial x_j} \delta_{ik} V_{kn} + \frac{\partial N_n}{\partial x_i} \delta_{jk} V_{kn} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=1}^{Nbnoe} \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\partial N_n}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial N_n}{\partial x_i} \delta_{jk} \right) V_{kn} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{Nbnoe} \sum_{k=1}^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_n}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial N_n}{\partial x_i} \delta_{jk} \right) \right] V_{kn} \\ &= \sum_{n=1}^{Nbnoe} \sum_{k=1}^2 B_{ijkn} V_{kn} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

## Annexe A2 : Calcul de l'opérateur $B^b$

L'opérateur  $B^b$  est obtenu par discrétisation de la relation (A.5)

$$\text{div}(v^b) = \text{trace}(\dot{\varepsilon}(v^b)) \quad (\text{A.5})$$

et de la discrétisation de  $v^b$ ,

$$v^b = \sum_{e=1}^{Nbel} V_e^b \varphi_e; \quad (\text{A.6})$$

nous calculons :

$$\dot{\varepsilon}(v^b)_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^b}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^b}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{e=1}^{Nbel} \left( V_{ie}^b \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_j} + V_{je}^b \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_i} \right) \right] \quad (\text{A.7})$$

Suivant le raisonnement du calcul précédent, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(v^b)_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{e=1}^{Nbel} \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_j} \delta_{ik} V_{ke}^b + \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_i} \delta_{jk} V_{ke}^b \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{e=1}^{Nbel} \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_i} \delta_{jk} \right) V_{ke}^b \right] \\ &= \sum_{e=1}^{Nbel} \sum_{k=1}^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial \varphi_e}{\partial x_i} \delta_{jk} \right) \right] V_{ke}^b \\ &= \sum_{e=1}^{Nbel} \sum_{k=1}^2 B_{ijk e}^b V_{ke}^b \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

## Annexe A3 : Calcul des termes $\text{div}(\gamma^l)$ et $\text{div}(\gamma^b)$

Soit :

$$\dot{\varepsilon}(\gamma^l) = \frac{1}{2} (\text{grad}(\gamma^l) + (\text{grad}(\gamma^l))^t) \quad (\text{A.9})$$

et

$$\dot{\varepsilon}(\gamma^b) = \frac{1}{2} (\text{grad}(\gamma^b) + (\text{grad}(\gamma^b))^t) \quad (\text{A.10})$$

Comme les accélérations  $\gamma^l$  et  $\gamma^b$  sont discrétisées de la façon suivante :

$$\gamma^l = \sum_{n=1}^{Nbmoe} \Gamma_{in} N_n \quad (\text{A.11})$$

et

$$\gamma^b = \sum_{e=1}^{Nbel} \Gamma_e^b \varphi_e \quad (\text{A.12})$$

alors, utilisant le raisonnement des Annexes A1 et A2 nous en déduisons que les opérateurs  $B$  et  $B^b$  interviennent également dans les calculs des termes  $div(\gamma^l)$  et  $div(\gamma^b)$ .

### Annexe B : L'équation d'incompressibilité en accélération

Nous présentons ci-dessous la démonstration de la relation (1.85).

La relation d'incompressibilité s'écrit de façon générale sous la forme :

$$div(v) = 0 \quad (\text{A.13})$$

Nous nous proposons d'exprimer cette équation en fonction de l'accélération.

Dans ce but, la relation (A.13) est dérivée par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} (div(v)) = 0. \quad (\text{A.14})$$

Le calcul se réduit à l'évaluation du terme suivant :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right). \quad (\text{A.15})$$

Comme  $x_i$  dépend du temps, les opérations de dérivation ne peuvent pas être interverties. Alors, la stratégie de calcul est de considérer  $x_0$  correspondant à une configuration fixée, qui ne dépend donc pas du temps. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_{0k}} \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_k \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_{0k}} \right) \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_{0k}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_{0k}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$



Pour le calcul de  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_i} \right)$ , on part de la relation suivante :

$$\sum_l \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x_{0j}} = \delta_{kj} \quad (\text{A.17})$$

que l'on dérive par rapport au temps.

Ainsi, nous écrivons :

$$0 = \sum_l \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_l} \right) \frac{\partial x_l}{\partial x_{0j}} + \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_{0j}} \right] \quad (\text{A.18})$$

La dernière équation est multipliée par  $\frac{\partial x_{0k}}{\partial x_m}$  quel que soit  $m$  et on somme selon l'indice  $j$ , ce qui implique :

$$0 = \sum_l \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_l} \right) \left( \sum_j \frac{\partial x_l}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_{0j}}{\partial x_m} \right) + \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_l} \left( \sum_j \frac{\partial v_l}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_{0j}}{\partial x_m} \right) \right] \quad (\text{A.19})$$

ce qui est équivalent à :

$$0 = \sum_l \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_l} \right) \delta_{lm} + \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_m} \right] \quad (\text{A.20})$$

Pour  $l = m$ , il résulte :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_m} \right) = - \sum_l \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_m} \quad (\text{A.21})$$

En revenant au calcul du terme  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)$  et utilisant la relation (A.21) pour  $m = i$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i} - \sum_{k,l} \frac{\partial v_i}{\partial x_{0k}} \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i} - \sum_l \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Ainsi on obtient que :

$$\frac{d}{dt} (\text{div}(v)) = \text{div}(\gamma) - \text{trace} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{A.23})$$

## Annexe C : Correction sur le terme d'incompressibilité

Pour imposer avec plus de précision l'incompressibilité dans la formulation dynamique implicite présentée dans le chapitre 2, paragraphe 2.4.4, nous exprimons  $div(v)$  à la fin de l'incrément :

$$div_{x^{t+\Delta t}}(v^{t+\Delta t}) = \sum \frac{\partial v^{t+\Delta t}}{\partial x^{t+\Delta t}} \quad (\text{A.24})$$

Les coordonnées  $x^{t+\Delta t}$  étant inconnues, nous écrivons :

$$\frac{\partial v^{t+\Delta t}}{\partial x^{t+\Delta t}} = \frac{\partial v^{t+\Delta t}}{\partial x^t} \left( \frac{\partial x^{t+\Delta t}}{\partial x^t} \right)^{-1} \quad (\text{A.25})$$

Pour le calcul de  $\frac{\partial x^{t+\Delta t}}{\partial x^t}$  l'expression suivante est prise en compte :

$$x^{t+\Delta t} = x^t + \frac{\Delta t}{2} (v^t + v^{t+\Delta t}) , \quad (\text{A.26})$$

expression qui correspond au schéma d'intégration (1.79).

Il vient :

$$\frac{\partial x^{t+\Delta t}}{\partial x^t} = I + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial v^t}{\partial x^t} + \frac{\partial v^{t+\Delta t}}{\partial x^t} \right) \quad (\text{A.27})$$

Si le pas de temps  $\Delta t$  est suffisamment petit, une approximation de premier ordre peut être faite :

$$\left( I + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial v^t}{\partial x^t} + \frac{\partial v^{t+\Delta t}}{\partial x^t} \right) \right)^{-1} \cong I - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial v^t}{\partial x^t} + \frac{\partial v^{t+\Delta t}}{\partial x^t} \right) \quad (\text{A.28})$$

En utilisant (A.27) et (A.28), la relation (A.25) devient :

$$\frac{\partial v^{t+\Delta t}}{\partial x^{t+\Delta t}} = \frac{\partial v^{t+\Delta t}}{\partial x^t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial v^{t+\Delta t}}{\partial x^t} \left( \frac{\partial v^t}{\partial x^t} + \frac{\partial v^{t+\Delta t}}{\partial x^t} \right) \quad (\text{A.29})$$

En appliquant l'opérateur *trace* à la relation (A.29) nous obtenons :

$$div_{x^{t+\Delta t}}(v^{t+\Delta t}) = div_{x^t}(v^{t+\Delta t}) + C_r \quad (\text{A.30})$$

où  $C_r$  représente une correction donnée par l'expression :

$$C_r = -\frac{\Delta t}{2} \text{trace} \left( \frac{\partial v^{t+\Delta t}}{\partial x^t} \frac{\partial v^t}{\partial x^t} + \frac{\partial v^{t+\Delta t}}{\partial x^t} \frac{\partial v^{t+\Delta t}}{\partial x^t} \right) \quad (\text{A.31})$$

Tenant compte du fait que :

$$v^{t+\Delta t} = v^t + \Delta t \gamma^{t+\frac{\Delta t}{2}}, \quad (\text{A.32})$$

pour le calcul de la correction , nous pouvons faire une approximation d'ordre 1 :  $v^{t+\Delta t} \cong v^t$ , ce qui implique :

$$C_r = -\Delta t \text{trace} \left( \frac{\partial v^t}{\partial x^t} \frac{\partial v^t}{\partial x^t} \right) \quad (\text{A.33})$$

## Annexe D : Calcul des termes concernant l'accélération discrète

$\gamma_h^2$

Nous présentons par la suite les détails des calculs provenant des équations (3.17), (3.18) et (3.20) du paragraphe 3.2.3.

### Terme intervenant dans l'équation (3.17)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \gamma_h^2 N_n d\omega &= \int_{\Omega_e} V_e^b \varphi_e \text{grad}(\varphi_e) \cdot V_e^b N_n d\omega \\ &= \frac{1}{2} V_e^b \left( \int_{\Omega_e} \text{grad}(\varphi_e^2) N_n d\omega \right) \cdot V_e^b \\ &= \frac{1}{2} V_e^b \left( \int_{\partial\Omega_e} \varphi_e^2 \mathbf{n} N_n dS - \int_{\Omega_e} \varphi_e^2 \text{grad}(N_n) d\omega \right) \cdot V_e^b. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Compte tenu de la définition de la bulle, la première intégrale est égale à zéro. La deuxième intégrale peut se calculer facilement. Il vient :

$$-\frac{1}{2} V_e^b \int_{\Omega_e} \varphi_e^2 \text{grad}(N_n) \cdot V_e^b = -\frac{1}{12} V_e^b \text{grad}(N_n) V_e^b [\Omega_e] \quad (\text{A.35})$$

où  $[\Omega_e]$  représente la surface du domaine  $\Omega_e$ .

Nous obtenons alors :

$$\int_{\Omega_e} \gamma_h^2 N_n d\omega = -\frac{1}{12} V_e^b \text{grad}(N_n) V_e^b [\Omega_e] \quad (\text{A.36})$$

**Terme intervenant dans l'équation (3.18)**

Nous évaluons maintenant :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_e} \gamma_h^2 \varphi_e d\omega &= V_e^b \left( \int_{\Omega_e} \text{grad}(\varphi_e) \varphi_e^2 d\omega \right) \cdot V_e^b \\
&= \frac{1}{3} V_e^b \left( \int_{\Omega_e} \text{grad}(\varphi_e^3) d\omega \right) \cdot V_e^b \\
&= \frac{1}{3} V_e^b \left( \int_{\partial\Omega_e} \varphi_e^3 \mathbf{n} dS \right) \cdot V_e^b.
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Cette dernière intégrale est nulle par définition de la bulle. Nous en déduisons :

$$\int_{\Omega_e} \gamma_h^2 \varphi_e d\omega = 0. \tag{A.38}$$

**Terme intervenant dans l'équation (3.20)**

La dernière intégrale de (3.20) peut se calculer comme suit :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_e} \text{div}(\gamma_h^2) N_m d\omega &= \int_{\Omega_e} \text{div} \left( V_e^b \varphi_e \text{grad}(\varphi_e) \cdot V_e^b \right) N_m d\omega \\
&= \int_{\partial\Omega_e} \left( V_e^b \text{grad}(\varphi_e) \varphi_e \cdot V_e^b \right) \cdot \mathbf{n} N_m dS \\
&\quad - \int_{\Omega_e} V_e^b \cdot \varphi_e \text{grad}(\varphi_e) \cdot V_e^b \text{grad}(N_m) d\omega \\
&= -\text{grad}(N_m) \cdot V_e^b \left( \int_{\Omega_e} \varphi_e \text{grad}(\varphi_e) d\omega \right) \cdot V_e^b \\
&= -\frac{1}{2} \text{grad}(N_m) \cdot V_e^b \left( \int_{\Omega_e} \text{grad}(\varphi_e^2) d\omega \right) \cdot V_e^b \\
&= -\frac{1}{2} \text{grad}(N_m) \cdot V_e^b \left( \int_{\partial\Omega_e} \varphi_e^2 \mathbf{n} dS \right) \cdot V_e^b.
\end{aligned} \tag{A.39}$$

En utilisant également la définition de la bulle on en déduit que :

$$\int_{\Omega_e} \text{div}(\gamma_h^2) N_m d\omega = 0. \tag{A.40}$$

## Annexe E : Construction du système linéaire général

Nous avons exposé dans le chapitre 3 les principales caractéristiques de la formulation partiellement explicite proposée. L'objet de cette annexe est de justifier les calculs nécessaires pour obtenir la forme matricielle (3.30) à partir du système (3.15).

### Calculs des diverses composantes de la matrice de masse

Pour simplifier les notations, l'indice  $h$  sera omis, nous écrivons donc  $\gamma$ ,  $v$  et  $p$  au lieu de  $\gamma_h$ ,  $v_h$  et  $p_h$  respectivement.

La matrice de masse  $C$  comporte trois types de termes :

- terme en  $\gamma^l$  et  $v^{l*}$ ,
- terme en  $\gamma^b$  et  $v^{l*}$ , ainsi que le terme équivalent en  $\gamma^l$  et  $v^{b*}$ ,
- terme en  $\gamma^b$  et  $v^{b*}$

#### Terme en $\gamma^l$ et $v^{l*}$

Le premier terme de la matrice de masse correspond à :

$$\int_{\Omega} \rho \gamma_i^l v_j^{l*} \delta_{ij} d\omega = \int_{\Omega} \rho \left( \sum_{n=1}^{Nbnoe} \Gamma_{in} N_n \right) \left( \delta_{ij} \sum_{m=1}^{Nbnoe} V_{jm}^* N_m \right) d\omega, \quad \forall m, j \quad (\text{A.41})$$

ce qui nous conduit à :

$$\sum_{n=1}^{Nbnoe} \sum_{i=1}^2 \left( \delta_{ij} \int_{\Omega} \rho N_n N_m d\omega \right) \Gamma_{in} = \sum_{n=1}^{Nbnoe} \sum_{i=1}^2 (C_{\Gamma})_{jmin} \cdot \Gamma_{in} \quad (\text{A.42})$$

où  $i$  et  $j$  sont les indices correspondant aux composantes du vecteur vitesse ou accélération.

Localement, pour chaque élément  $\Omega_e$ , la matrice de masse a la forme suivante :

$$(C_{\Gamma})_{jmin}^e = \delta_{ij} \int_{\Omega_e} \rho N_m^e N_n^e d\omega \quad (\text{A.43})$$

#### Termes en $\gamma^b$ et $v^{l*}$ , et en $\gamma^l$ et $v^{b*}$ ,

- Une autre composante de la matrice de masse est déterminée par le terme :

$$\int_{\Omega} \rho \gamma_i^b v_j^{l*} \delta_{ij} d\omega = \int_{\Omega} \rho \left( \sum_{e=1}^{Nbel} \Gamma_{ie}^b \varphi_e \right) \left( \delta_{ij} \sum_{m=1}^{Nbnoe} V_{jm}^* N_m \right) d\omega, \quad \forall m, j \quad (\text{A.44})$$

ce qui conduit à :

$$\sum_{e=1}^{Nbel} \sum_{i=1}^2 \left( \delta_{ij} \int_{\Omega} \rho \varphi_e N_m d\omega \right) \Gamma_{ie}^b = \sum_{e=1}^{Nbel} \sum_{i=1}^2 (C_{\Gamma b})_{jmie} \Gamma_{ie}^b \quad (\text{A.45})$$

Alors, les composantes de cette matrice ont localement la forme suivante :

$$(C_{\Gamma b})_{jmie}^e = \delta_{ij} \int_{\Omega_e} \rho \varphi_e N_m^e d\omega \quad (\text{A.46})$$

• Ensuite, une autre composante de la matrice de masse est évaluée, à partir du premier terme de la deuxième équation du système (3.15).

$$\int_{\Omega} \rho \gamma_i^l v_j^{b*} \delta_{ij} d\omega = \int_{\Omega} \rho \left( \sum_{n=1}^{Nbnoe} \Gamma_{in} N_n \right) \left( \delta_{ij} \sum_{e=1}^{Nbel} V_{je}^{b*} \varphi_e \right) d\omega, \forall e, j \quad (\text{A.47})$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{Nbnoe} \sum_{i=1}^2 \left( \delta_{ij} \int_{\Omega} \rho N_n \varphi_e d\omega \right) \Gamma_{in} = \sum_{n=1}^{Nbnoe} \sum_{i=1}^2 (C_{b\Gamma})_{jein} \Gamma_{in} \quad (\text{A.48})$$

Ce qui nous intéresse est, alors, la composante locale :

$$(C_{b\Gamma})_{jein}^e = \delta_{ij} \int_{\Omega} \rho N_n^e \varphi_e d\omega \quad (\text{A.49})$$

qui est la transposée de la matrice  $(C_{\Gamma b})^e$  présentée juste avant.

**Terme en  $\gamma^b$  et  $v^{b*}$**

Une dernière contribution à la matrice de masse est :

$$\int_{\Omega} \rho \gamma_i^b v_j^{b*} \delta_{ij} d\omega = \int_{\Omega} \left( \sum_{e=1}^{Nbel} \varphi_e \Gamma_{ie}^b \right) \left( \delta_{ij} \sum_{e'=1}^{Nbel} V_{je'}^{b*} \varphi_{e'} \right) d\omega, \forall e', j \quad (\text{A.50})$$

et, ensuite, nous obtenons :

$$\sum_{e=1}^{Nbel} \sum_{i=1}^2 \left( \delta_{ij} \int_{\Omega} \rho \varphi_e \varphi_{e'} \right) \Gamma_{ie}^b = \sum_{e=1}^{Nbel} \sum_{i=1}^2 (C_{bb})_{je'ie} \Gamma_{ie}^b \quad (\text{A.51})$$

Ce calcul nous conduit, sur chaque élément, au résultat suivant :

$$(C_{bb})_{jeie}^e = \delta_{ij} \int_{\Omega_e} \rho \varphi_e^2 d\omega \quad (\text{A.52})$$

## Calcul des termes liés à la pression

- Le terme de la première équation du système (3.15), correspondant à la pression, nous conduit à :

$$\int_{\Omega} p.\text{div}(v^{l*})d\omega = \sum_{n=1}^{Nbnoe} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left( \sum_{m=1}^{Nbnoe} P_m N_m \right) \left( \sum_{k=1}^2 B_{kkin} \right) V_{in}^* d\omega \quad (\text{A.53})$$

ce qui implique :

$$\sum_{m=1}^{Nbnoe} \left[ \int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^2 B_{kkin} \right) N_m d\omega \right] P_m = \sum_{m=1}^{Nbnoe} (D_{\Gamma p})_{in m} \cdot P_m \quad (\text{A.54})$$

l'opérateur  $B$  étant défini en Annexe A1.

De cette façon on obtient localement :

$$(D_{\Gamma p})_{in m}^e = \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^2 B_{kkin}^e N_m^e d\omega. \quad (\text{A.55})$$

- Ensuite, utilisant l'Annexe A2, on évalue le terme en pression provenant de la deuxième équation du système (3.15) :

$$\int_{\Omega} p.\text{div}(v^{b*})d\omega \quad (\text{A.56})$$

ce qui donne :

$$\sum_{e=1}^{Nbel} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left( \sum_{m=1}^{Nbnoe} P_m N_m \right) \left( \sum_{k=1}^2 B_{kkie}^b \right) V_e^b d\omega. \quad (\text{A.57})$$

Il vient :

$$\sum_{m=1}^{Nbnoe} \left[ \int_{\Omega} N_m \left( \sum_{k=1}^2 B_{kkie}^b \right) d\omega \right] P_m = \sum_{m=1}^{Nbnoe} (D_{bp})_{ie m} P_m \quad (\text{A.58})$$

Le résultat est alors :

$$(D_{bp})_{ie m}^e = \int_{\Omega_e} N_m \left( \sum_{k=1}^2 B_{kkie}^{be} \right) d\omega, \quad (\text{A.59})$$

sur chaque élément

- En utilisant l'Annexe A3 nous allons déduire un autre terme lié à la pression.

$$\int_{\Omega} \text{div}(\gamma^t) \cdot p^* d\omega = \sum_{m=1}^{Nbnoe} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{Nbnoe} \int_{\Omega} \left( \sum_{k=1}^2 B_{kkin} \Gamma_{in} \right) N_m P_m^* d\omega. \quad (\text{A.60})$$

On en déduit alors :

$$\sum_{n=1}^{Nbnoe} \sum_{i=1}^2 \left( \int_{\Omega} \sum_{k=1}^2 B_{kkin} N_m d\omega \right) \Gamma_{in} = \sum_{n=1}^{Nbnoe} \sum_{i=1}^2 (D_{p\Gamma})_{min} \Gamma_{in} \quad (\text{A.61})$$

qui implique, localement :

$$(D_{p\Gamma})_{min}^e = \int_{\Omega_e} \left( \sum_{k=1}^2 B_{kkin}^e \right) N_m^e d\omega \quad (\text{A.62})$$

En tenant compte de la notation antérieure pour  $D$ , on observe que :  ${}^T D_{\Gamma p} = D_{p\Gamma}$

- Pour développer le terme  $\int_{\Omega} \text{div}(\gamma^b) \cdot p^* d\omega$  l'Annexe A3 est utilisée. Ainsi :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\gamma^b) \cdot p^* d\omega = \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{Nbnoe} \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{e=1}^{Nbel} \sum_{k=1}^2 B_{iike}^b \Gamma_{ke}^b \right) N_m P_m^* d\omega \quad (\text{A.63})$$

nous conduit à :

$$\sum_{e=1}^{Nbel} \sum_{k=1}^2 \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 B_{iike}^b N_m d\omega \right) \Gamma_{ke}^b = \sum_{e=1}^{Nbel} \sum_{k=1}^2 (D_{pb})_{mke} \Gamma_{ke} \quad (\text{A.64})$$

Cette dernière relation implique, sur chaque élément :

$$(D_{pb})_{mke}^e = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 B_{iike}^{be} N_m^e d\omega \quad (\text{A.65})$$

## Calcul des contributions du second membre

### Les termes de frottement et de comportement

- Les contributions du frottement et du comportement de la forme

$$\int_{\partial\Omega_c} \tau_i(v) v_i^l dS - \int_{\Omega} s_{jk}(v) \dot{\varepsilon}_{jk}(v^*) d\omega, \quad \forall v^* \quad (\text{A.66})$$



nous conduisent au second membre

$$(-R_\Gamma)_{im} = \int_{\partial\Omega_c} \tau_i(v) N_m dS - \int_{\Omega} s_{jk}(v) B_{jkim} d\omega . \quad (\text{A.67})$$

• Ensuite, les termes de la deuxième équation du système (3.15)

$$\int_{\partial\Omega_c} \tau_i(v) \cdot v_i^{b*} dS - \int_{\Omega} s_{jk}(v) : \dot{\varepsilon}_{jk}(v^{b*}) d\omega, \forall v^{b*} \quad (\text{A.68})$$

donnent le second membre :

$$(-R_b)_{ie} = - \int_{\Omega} s_{jk}(v) B_{jkie}^b d\omega . \quad (\text{A.69})$$

Pour ces deux composantes du second membre nous tenons compte du fait que les termes :

$$- \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\bar{\varepsilon}(v^l + v^b))^{m-1} \dot{\varepsilon}(v^b) : \dot{\varepsilon}(v^{l*}) d\omega \quad (\text{A.70})$$

et

$$- \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\bar{\varepsilon}(v^l + v^b))^{m-1} \dot{\varepsilon}(v^l) : \dot{\varepsilon}(v^{b*}) d\omega \quad (\text{A.71})$$

sont négligés conformément au paragraphe 3.2.4.

### La contribution de l'équation d'incompressibilité

Les termes provenant de l'équation d'incompressibilité du système (3.15)

$$\int_{\Omega} \text{tr} \left( \frac{\partial(v^l + v^b)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(v^l + v^b)}{\partial x} \right) \cdot p^* d\omega, \forall p^* \quad (\text{A.72})$$

gènèrent le second membre suivant :

$$(-R_P)_m = \int_{\Omega} \text{tr} \left( \frac{\partial v^l}{\partial x} \cdot \frac{\partial v^l}{\partial x} \right) N_m d\omega \quad (\text{A.73})$$

en considérant l'approximation faite dans le paragraphe 3.2.4, b).

## Détails de programmation

Ci-dessus nous avons présenté les composantes de la matrice et du second membre du système linéaire à résoudre. Le calcul de ces composantes est d'abord effectué au niveau de chaque élément (triangulaire) et ensuite un assemblage est réalisé afin d'obtenir la matrice et le second membre globaux du problème.

En revenant sur le calcul local, quelques détails sont présentés par la suite concernant les termes liés à la bulle. Prenons comme exemple l'évaluation des composantes de type  $C_{\Gamma b}$  (équation (A.46)), toutes les autres s'appuyant sur le même raisonnement.

Alors, pour le calcul de  $\int_{\Omega_e} \rho \varphi_e N_m^e d\omega$  la définition de la fonction de forme de la bulle est appliquée. Ainsi, dans le cadre axisymétrique nous écrivons :

$$\int_{\Omega_e} \rho \varphi_e N_m^e d\omega = 2\pi \sum_{i=1}^3 \int_{ST_i} \rho \varphi_e^{ST_i} N_m^e r dr dz \quad (\text{A.74})$$

où  $\{ST_i, i = 1, 2, 3\}$  est l'ensemble des sous-triangles de l'élément  $\Omega_e$ .

Il faut donc calculer, sur chaque sous-triangle, l'intégrale  $\int_{ST_i} \rho \varphi_e^{ST_i} N_m^e r dr dz$ , où  $N_m$  représente la fonction de base correspondant au noeud  $m$  ( $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ , ou  $\textcircled{3}$ ) du triangle courant  $\Omega_e$  (figure (A.1)).

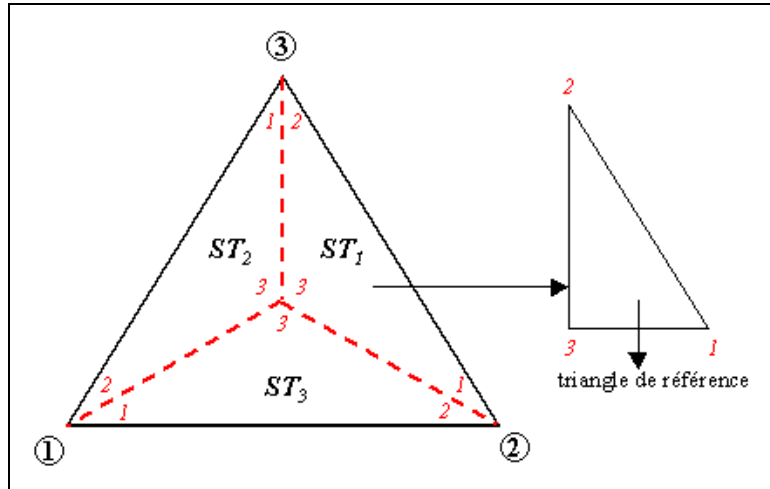


FIG. A.1 – Définition des sous-triangles

On utilise une numérotation locale au sous-triangle en réservant le numéro 3 pour la bulle. Une correspondance entre chaque sous-triangle  $ST$  et le triangle de référence nous permet d'obtenir les sous-fonctions de base  $N_1, N_2, N_3$  (figure (A.1)).

Pour le calcul de l'intégrale considérée nous avons besoin de la fonction de forme  $\varphi_e^{ST_i}$ , ainsi que les fonctions  $N_{\textcircled{1}}, N_{\textcircled{2}}, N_{\textcircled{3}}$  définies dans le grand triangle (i.e. dans l'élément) en fonction de  $N_1, N_2, N_3$ .

Comme  $N_3$  correspond à la bulle et vaut 1 au centre de l'élément (i.e. dans le troisième noeud du  $ST_1$ ) et  $N_{\textcircled{1}}$  est égal à 1 dans le noeud  $\textcircled{1}$  et  $\frac{1}{3}$  au centre de l'élément, nous

obtenons :

$$N_{\textcircled{1}} = \frac{1}{3} N_3. \quad (\text{A.75})$$

Pour le calcul de  $N_{\textcircled{2}}$  il faut tenir compte de la contribution de  $N_3$ , mais aussi de celle de  $N_1$ , ainsi

$$N_{\textcircled{2}} = \frac{1}{3} N_3 + N_1 \quad (\text{A.76})$$

De la même façon nous évaluons :

$$N_{\textcircled{3}} = \frac{1}{3} N_3 + N_2 \quad (\text{A.77})$$

Ce raisonnement est utilisé pour calculer tous les termes concernant la bulle exposés auparavant.

### Exemple

Revenons au calcul d'un terme de type  $\int_{\Omega_e} \rho \varphi_e N_m^e d\omega$ . Si  $m = \textcircled{1}$  alors, à partir de l'équation (A.74) nous écrivons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \rho \varphi_e N_{\textcircled{1}}^e d\omega &= 2\pi \sum_{i=1}^3 \int_{ST_i} \rho \varphi_e^{ST_i} N_{\textcircled{1}}^e r dr dz \\ &= 2\pi \rho \int_{ST_1} \frac{1}{3} N_3^2 r dr dz + 2\pi \rho \int_{ST_2} N_3 \left( \frac{1}{3} N_3 + N_2 \right) r dr dz \\ &= +2\pi \rho \int_{ST_3} N_3 \left( \frac{1}{3} N_3 + N_1 \right) r dr dz \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

---

## Résumé

Ce travail apporte une contribution à la modélisation numérique du forgeage à chaud à grande vitesse. Dans ce cadre, une formulation dynamique partiellement explicite en accélération/pression est proposée. Tout d'abord, plusieurs formulations implicites vitesse/pression (quasi-statique et dynamique) sont présentées et discutées. Leur solution est considérée comme référence par la suite. La formulation dynamique partiellement explicite est ensuite présentée dans le contexte viscoplastique. La vitesse courante étant supposée connue, le traitement du comportement non-linéaire du matériau est évité. Ainsi, le système associé au problème est linéaire. La discrétisation éléments finis est basée sur le mini-élément  $P1 + /P1$ . Son application à une approche dynamique mixte accélération/pression est examinée et quelques approximations sont effectuées afin de simplifier la formulation. Cette nouvelle approche a été implémentée avec succès dans une version du code FORGE2. Des comparaisons avec les approches implicites de référence ont été réalisées pour des tests de traction et de compression et prouvent la pertinence de notre approche. Une amélioration concernant la perte de volume est constatée. De plus, une réduction du CPU d'au moins 20% est obtenue lorsque le même pas de temps est utilisé dans les cas implicite et partiellement explicite. La procédure est généralisée au cas élasto-viscoplastique. Afin de simplifier la résolution du problème, une nouvelle stratégie est explorée. Elle consiste à résoudre un système linéaire uniquement en pression. L'accélération est calculée ensuite explicitement en fonction de la pression. Les estimations réalisées nous font envisager des gains significatifs de temps de calcul en 2D et en 3D. La formulation partiellement explicite proposée représente donc une alternative pour la simulation du forgeage à chaud.

**MOTS CLÉS :** éléments finis, formulation implicite, formulation partiellement explicite, comportement viscoplastique, comportement élasto-viscoplastique, Mini-élément

---

## The application of a velocity explicit formulation to the forging modelling

---

### Abstract

The present work is a contribution to the numerical modelling of high velocity hot forging processes. In this framework, a dynamic partly-explicit acceleration/pressure formulation is investigated. First of all, some velocity/pressure implicit formulations (quasi-static and dynamic) are presented and analysed in order to obtain a reference formulation for the partly-explicit formulation we propose. Second, the dynamic partly-explicit formulation is presented in a viscoplastic context. As the current velocity is supposed to be known, we do not have to deal with the non-linear feature of the material. Consequently, the system corresponding to our problem is linear. The mixed finite element discretisation is based on a simple triangular mini-element  $P1+/P1$ . Analysis concerning the bubble properties and its influences on the equation system were realized and some approximations were done in order to simplify the formulation. This new dynamic formulation has been successfully implemented in a version of the code FORGE2. Comparisons with implicit approaches, considered as references, have been performed for some numerical examples. This proves the relevance of our approach. An improvement concerning the volume loss is noted for the new procedure. Furthermore, a CPU time reduction of at least 20% is obtained, when the same time step is considered for the implicit simulations as well as for the partly-explicit simulations. The procedure is then extended to the elastic viscoplastic case. In order to simplify the problem resolution, a new strategy is exposed and analysed. It consists in solving a linear system with the pressure as a single unknown and then obtaining explicitly the acceleration as a pressure function. The estimations realised show that this technique would reduce significantly the computational time in 2D as well as in 3D. The partly-explicit dynamic formulation proposed could consequently be considered as an attractive alternative for the hot forging simulation.

**KEYWORDS :** finite element, implicit formulation, partly-explicit formulation, viscoplastic behaviour, elastic viscoplastic behaviour, Mini-element

---