



HAL
open science

Milieux fibreux tissés : modélisation et simulation de la mise en forme des CFRTP à géométrie non développable

M. Youssef

► **To cite this version:**

M. Youssef. Milieux fibreux tissés : modélisation et simulation de la mise en forme des CFRTP à géométrie non développable. Mécanique [physics.med-ph]. Polytech'Orléans / ENSAM Paris, 2005. Français. NNT: . tel-00278343

HAL Id: tel-00278343

<https://pastel.hal.science/tel-00278343>

Submitted on 17 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITE D'ORLEANS

THESE

présentée à l'Université d'Orléans
pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE D'ORLEANS

Discipline : Mécanique des solides, GMP, Transport, Génie Civil

par

Majed YOUSSEF

MILIEUX FIBREUX TISSES : MODELISATION ET SIMULATION DE LA MISE EN FORME DES CFRTP A GEOMETRIE NON DEVELOPPABLE

Soutenue le 7 décembre 2005

MEMBRES DU JURY

M. J.	RENARD	Professeur, Université d'Orléans	Président du jury
M. A.	CHEROUAT	Professeur, UTT Troyes	Rapporteur
M. J.	BREARD	Professeur, Université du Havre	Rapporteur
M. Ph.	BOISSE	Professeur, INSA Lyon	Directeur de thèse
M. S.	CHATEL	Ingénieur de recherche, EADS CCR Suresnes	Examinateur
M. D.	SOULAT	Maître de conférences, Polytech'Orléans	Examinateur

Table des matières

Remerciements	iv
Introduction	xiv
I Modélisation des milieux fibreux tissés	1
1 Approche discrète	2
1.1 Drapage géométrique	2
1.1.1 Méthode analytique	3
1.1.2 Méthode numérique	6
1.2 Modèles à particules	10
1.2.1 Fonctionnelle d'énergie potentielle	10
1.2.2 Fonctionnelle d'effort	11
1.3 Modèles masses/ressorts	13
1.4 Modèles à barres	14
1.5 Conclusion	16
2 Approche continue	18
2.1 Comportement découplé/multicomposants	18
2.1.1 Comportement du renfort	19
2.1.1.1 Cisaillement intraplis	19
2.1.1.2 Comportement en tension	35
2.1.1.3 Flexion	37
2.1.1.4 Glissement interplis	41
2.1.2 Comportement de la matrice	43
2.1.2.1 Modèles visqueux	43
2.1.2.2 Autres types de modèles	44
2.2 Comportement homogénéisé et approches multi-échelles	47
2.2.1 Comportement élastique et thermoélastique orthotrope	47
2.2.1.1 Détermination de la matrice de comportement	48
2.2.1.2 Actualisation des propriétés matérielles	51
2.2.2 Comportement visqueux	55
2.3 Conclusion	58

II	Analyse expérimentale et simulation	59
3	Analyse expérimentale de la mise en forme par emboutissage	60
3.1	Préformage	60
3.1.1	Descriptif du dispositif expérimental	60
3.1.2	Préparation des renforts	61
3.1.3	Validation de la machine	62
3.1.3.1	Influence de l'imprégnation	62
3.1.3.2	Répétabilité des tests	62
3.1.3.3	Influence des paramètres de mise en forme	63
3.1.4	Exploitation des résultats	64
3.1.4.1	Acquisition	64
3.1.4.2	Traitement	65
3.1.4.3	Résultats	66
3.1.5	Perspectives	67
3.2	Thermoformage	67
3.2.1	Dispositif expérimental	67
3.2.2	Utilisation d'un serre-flan chauffant	69
3.2.3	Matériaux utilisés	69
3.2.3.1	Le PP Twintex	70
3.2.3.2	L'Hexform	70
3.2.3.3	Le Cetex	71
3.2.4	Campagne d'essais	71
3.2.4.1	Cycle de mise en forme	71
3.2.4.2	Cycle de température	71
3.2.5	Déformées obtenues	74
3.2.6	Perspectives	75
4	Simulation numérique de la mise en forme	76
4.1	Approche en dynamique explicite	77
4.2	Modélisation de la structure	78
4.2.1	Repère utilisé	79
4.2.2	Cinématique de l'élément	79
4.2.3	Discrétisation éléments finis	80
4.2.4	Calcul des contraintes	82
4.3	Loi de comportement	82
4.3.1	Comportement global du monoplî	83
4.3.2	Comportement viscoélastique de la résine	84
4.3.3	Comportement élastique dans les fibres	86
4.3.3.1	Déformations dans les directions matérielles	86
4.3.3.2	Résultats	89
4.3.3.3	Réorientation et système de coordonnées lié à la direction des fibres	91
4.4	Tests effectués sur la loi de comportement utilisée	92
4.4.1	Préformage	92
4.4.1.1	Caractéristiques matériau	93
4.4.1.2	Conditions aux limites	94
4.4.1.3	Analyse de sensibilité	96

4.4.1.4	Comparaison simulation / analyse expérimentale	98
4.4.2	Essai de cadre déformable	103
4.4.3	Thermoformage	106
4.5	Développement d'une loi visqueuse pour un renfort bidirectionnel	109
4.5.1	Contraintes planes	114
4.5.2	Formulation incrémentale	115
Conclusion générale et perspectives		117
Bibliographie		131
Annexes		131
Annexe A		132
Annexe .A	Solutions analytiques en $\ln(\mathbf{U})$ et en $\ln(\mathbf{V})$	132
.A.1	Cisaillement simple	132
.A.1.1	Déformation en $\ln(\mathbf{U})$	132
.A.1.2	Déformation en $\ln(\mathbf{V})$	133
.A.2	Extension simple	133
.A.3	Cisaillement puis extension	133
.A.3.1	Déformation en $\ln(\mathbf{U})$	135
.A.3.2	Déformation en $\ln(\mathbf{V})$	135
Annexe B		137
Annexe .B	Flexion d'une poutre console	137
.B.1	Influence du facteur de flexion B_f	137
.B.2	Influence de la viscosité	137

Table des figures

1.1	Traçage d'un réseau de Tchebychev.	3
1.2	Configuration de référence et configuration déformée.	4
1.3	Déformation de treillis	4
1.4	Calcul des points dans un problème d'intersection.	6
1.5	Illustration de l'algorithme du filet : (a) exemple de grille définie par le tissu, (b) construction d'un élément sur une surface paramétrique.	7
1.6	Correction de la distance noeud à noeud.	7
1.7	Illustration du drapage par l'algorithme du filet.	8
1.8	Glissement entre mèches.	9
1.9	Modèle à particules en terme de fonctionnelles d'énergie potentielle.	10
1.10	Chaîne modélisée par : (a) uniquement des efforts de tension, (b) des efforts de tension et de contraintes cinématiques.	11
1.11	Modèle à particules : (a) efforts de tension, (b) efforts de cisaillement, (c) efforts de flexion.	12
1.12	Système masse/ressorts [Pro95].	13
1.13	Système masse-ressort (ne sont représentés que les ressorts de biais liés à la masse P).	14
1.14	Modèle en treillis du tissu.	15
1.15	(a) Élément de volume pour le modèle de damier, (b) les deux types de connectivité entre éléments poutres et modèle de transition.	15
1.16	Représentation de la cellule élémentaire (modèles à barres) (a) : un ressort sur la diagonale, (b) : deux ressorts sur la diagonale.	15
2.1	Comportement en cisaillement typique d'un composite à renfort tissé.	19
2.2	(a) Etat initial, (b) pendant le cisaillement, (c) blocage et (d) apparition de plis après blocage.	20
2.3	Test de cisaillement selon KES-F.	21
2.4	Essai du cadre déformable.	21
2.5	Influence de la vitesse de déplacement sur le taux de cisaillement.	23
2.6	Echantillon idéalisé soumis à un essai d'extension bias.	24
2.7	Lignes de chargement au sein du matériau dans le système de coordonnées global (N_x et N_y) et dans le système de coordonnées matériel (N_L et N_S).	24
2.8	Schéma de deux essais de cadre déformable de dimensions différentes (renfort est maintenu sur tout le bord) [HCL04].	26
2.9	Schéma de deux essais de cadre déformable de dimensions différentes (renfort maintenu sur une partie du bord) [PCC+04, PXC+02].	27
2.10	Comparaison entre l'essai de cadre déformable et l'extension bias.	28

2.11	Cinématique de l'essai de cadre déformable et construction de la base covariante normée $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ [YHL05].	30
2.12	Cinématique du cisaillement avant (a) et après déformation (b) [PC97].	31
2.13	Macropores de tailles différentes (tissu déséquilibré) [RBM00].	32
2.14	Décomposition, au niveau des mèches, de l'effort en composantes de tension et de cisaillement [NHP99].	33
2.15	Dimensions de la maille élémentaire dans le cas d'un tissu déséquilibré.	33
2.16	(a) Section dans la direction chaîne ou trame. (b) Mèche ondulée soumise à un effort f [SP05].	35
2.17	Schématisation d'une courbe de traction d'un renfort tissé	36
2.18	Comportement en hysteresis constaté par l'essai de flexion du Système d'Evaluation de Kawabata.	38
2.19	Modèle de flexion de Grosberg [GP66].	40
2.20	Modèle analytique de flexion de tissus [LH04].	40
2.21	Flexion pure d'une poutre [YZP ⁺ 05].	41
2.22	Distribution de la contrainte dans la section de la poutre, (a) cas symétrique, (b) cas asymétrique [YZP ⁺ 05].	41
2.23	Dispositif expérimental d'étude du glissement interplis [MRM93].	42
2.24	Courbe typique du glissement interplis.	43
2.25	(a) Renfort unidirectionnel, (b) Renfort bidirectionnel.	43
2.26	Modèle de Maxwell avec éléments de matrice et de fibres.	45
2.27	Différentes échelles au sein d'un renfort tissé.	48
2.28	Volume élémentaire représentatif d'un renfort tissé.	49
2.29	Approximation analytique basée sur la théorie classique des stratifiés.	49
2.30	Approche micromécanique.	50
2.31	Analyse éléments finis.	50
2.32	Positionnement du référentiel pour la loi de comportement évolutive [BB95].	51
2.33	Déformation en cisaillement impliquant tous les référentiels utilisés dans l'étude [YPC ⁺ 02].	52
2.34	Déformation en cisaillement impliquant tous les référentiels utilisés dans l'étude [XPC03].	53
2.35	Composantes de contraintes dans le repère local.	53
2.36	Élément de volume et section droite D-D.	54
2.37	(a) Algorithme du filet pour l'obtention de la direction des fibres, (b) algorithme du filet étendu pour le calcul des propriétés effectives du composite, (c) simulation EF avec un maillage superposé au filet [HVK01].	56
2.38	Élément de volume de la structure composite périodique [HK99].	56
2.39	Réorientation des directions des fibres dans un maillage éléments finis global après déformation [HK99].	57
3.1	(a) Ensemble poinçon/matrice/serre-flan, système de mise en pression, système d'acquisition de données. (b) Echantillon embouti avec serre flan relevé.	61
3.2	Validation du dispositif expérimental (P=20 bars, V=1 mm/s, D=75mm).	61
3.3	Flan embouti : (à gauche) sans imprégnation, (à droite) avec imprégnation.	62
3.4	Courbes effort / déplacement dans le cas d'un renfort sec et imprégné.	63
3.5	Répétabilité des essais.	63

3.6	Types de tissus utilisés.	64
3.7	Quadrillage utilisé pour la mesure des variations angulaires après déformation.	65
3.8	Déformation du quadrillage après emboutissage.	65
3.9	Ordre du pointage des points.	65
3.10	Variations angulaires au sein du renfort pour différentes profondeurs d'emboutissage.	66
3.11	Variations angulaires, tissu à -45/45.	67
3.12	Banc d'essai de thermoformage.	68
3.13	Disposition des thermocouples sur le flan étudié.	69
3.14	Outillages utilisés.	69
3.15	Relevé de pression obtenu avec le banc d'acquisition correspondant à la consigne : 2,5 bars/min, 5 bars/min, 7,5 bars/min, 10 bars/min.	70
3.16	Serre-flan chauffant raccordé au thermorégulateur.	70
3.17	Différentes étapes de mise en forme.	72
3.18	Evolution de la température au cours de la mise en forme (Twintex, flan carré).	72
3.19	Evolution de la température au cours de la mise en forme (Twintex, flan circulaire).	73
3.20	Types de défauts constatés.	73
3.21	Evolution de la température après isolation de la phase de transfert (Twintex).	74
3.22	Etapes de mise en forme modifiées.	74
3.23	Déformées obtenues pour les différents matériaux utilisés.	75
4.1	Construction du repère corotationnel.	79
4.2	Elément 140 de PAM FORM.	83
4.3	Modèle de Maxwell.	84
4.4	Cinématique du cisaillement simple.	86
4.5	Cinématique de l'extension.	87
4.6	Cinématique du cisaillement suivi d'une extension.	88
4.7	Déformations obtenues en extension simple (0/90).	90
4.8	Déformations obtenues en cisaillement simple (30).	90
4.9	Cisaillement puis extension (a=3).	91
4.10	Système de coordonnées lié à la direction d'une fibre.	91
4.11	Cisaillement simple (fibres à 0 et 90).	92
4.12	Cisaillement simple (fibres à +45 et à -45).	92
4.13	Montage du dispositif d'emboutissage.	93
4.14	Maillage des différentes parties du dispositif expérimental.	93
4.15	Courbe de cisaillement du taffetas de fibres de verre T6 et approximations linéaires.	94
4.16	Positionnement des outillages par rapport au flan.	95
4.17	Répartition de l'épaisseur du flan en fin de course.	95
4.18	Répartition de la variation angulaire des fibres en fin de course.	95
4.19	Energies cinétique et de déformation en fonction du temps pour une densité de $1.6 \cdot 10^{-3} \text{ ton/mm}^3$	96
4.20	Efforts de contact entre poinçon et flan pour différentes tailles du maillage.	97

4.21	Comparaison des déformées obtenues (a) expérimentalement et (b) numériquement, pour une orientation (0/90). (b) Position des sections et des lignes servant à la comparaison.	98
4.22	Profil de l'avalement suivant (a) la bordure 1, (b) bordure 2 (0/90).	99
4.23	Déplacement suivant (a) la section 1, (b) la section 2 (0/90).	99
4.24	Distorsions angulaires après emboutissage pour une orientation à 0/90, (a) simulation, (b) expérimental.	100
4.25	Comparaison des efforts de contact Poinçon/Flan (0/90).	100
4.26	Comparaison des déformées obtenues, (a) expérimentalement et (b) numériquement, pour une orientation à (-45/+45).	101
4.27	Profil de l'avalement suivant, (a) la bordure 1, (b) la bordure 2 (-45/+45).	101
4.28	Déplacement suivant, (a) la section 1, (b) la section 2 (-45/+45).	102
4.29	Distorsions angulaires après emboutissage pour une orientation à -45/+45, (a) simulation, (b) expérimental.	103
4.30	Comparaison des efforts de contact Poinçon/Flan (-45/+45).	103
4.31	Maillage utilisé pour la simulation de la cinématique du cadre.	104
4.32	Variations angulaires au sein de l'échantillon testé.	104
4.33	Premières contraintes principales viscoélastiques.	105
4.34	Deuxièmes contraintes principales viscoélastiques.	105
4.35	Contraintes principales viscoélastiques.	106
4.36	Courbes effort / déplacement (cisaillement +, cisaillement -).	106
4.37	Montage et maillage des différents outillages.	107
4.38	Comparaison des déformées obtenues expérimentalement et numériquement, pour une orientation (0/90).	107
4.39	Distorsions angulaires en fin de simulation.	108
4.40	Contraintes principales Totales (flan carré).	108
4.41	Contraintes principales viscoélastiques (flan circulaire).	109
4.42	Contraintes principales viscoélastiques (flan carré).	109
4.43	Contraintes principales viscoélastiques (flan circulaire).	110
4.44	Réponse du modèle visqueux à deux directions de fibres dans un essai de cadre déformable ($V = 100\text{mm}/\text{mn}$, $\eta_{\dots} = 0.05 \div 0.2 \text{ MPa.s}$, $L_{Bar} = 150\text{mm}$).	114
45	Influence du facteur de flexion sur la flèche obtenue.	138
46	Influence de la viscosité sur la flèche obtenue.	138

Introduction

Le développement des matériaux composites est né de la volonté d'allier les qualités techniques (haute résistance, capacité à amortir les vibrations, résistance à la corrosion, etc.) au besoin d'allègement dans un même matériau. Un matériau composite résulte de l'association d'au moins deux matériaux différents, aussi bien par leur forme, que par leurs propriétés mécaniques ou chimiques, pour tenter d'accroître leurs performances. Les performances macroscopiques sont conditionnées non seulement par les propriétés intrinsèques des constituants, mais aussi par leur liaison.

Les matériaux composites existent déjà à l'état de nature, et sont depuis longtemps utilisés pour résoudre différents problèmes technologiques. Cependant, à partir des années 1960, l'introduction des composites à base de polymères ouvre une nouvelle phase de développement industriel. Ainsi, ces matériaux sont progressivement utilisés davantage et cela, surtout à partir des années 1980 où ils remplacent de plus en plus les matériaux métalliques, dans diverses applications et domaines : conception et fabrication de composantes automobiles, articles de sports, pièces navales et aéronautiques, etc.

Dans le domaine aéronautique, le marché actuel requiert de nouveaux avions, à grande portée et à forte capacité d'accueil. L'exemple le plus frappant est celui de l'A380, avec lequel Airbus prévoit un marché de 1300 avions pendant les 20 ans à venir [PH01]. L'introduction de nouvelles tailles et de nouvelles conditions de mise en service exige un choix approprié des matériaux pour chaque application spécifique. L'objectif principal demeure toujours le même : allègement de la structure et réduction des coûts. La part accordée aux pièces fabriquées en matériaux composites est en augmentation à chaque projet, notamment dans le cas des programmes AIRBUS A340/500-600 et A380. Elle atteint 20% sur les avions commerciaux. Par exemple, sur l'A320, les pièces de structure réalisées en composite sont principalement [Cin03] : les radômes (pièces qui protègent les instruments de navigation de l'appareil contre les chocs) ; toutes les parties mobiles de la voilure ; la dérive et les plans horizontaux arrières, réalisés à partir de pré-imprégnés à renfort unidirectionnel ou tissé de carbone dans une matrice Epoxy ainsi que les nervures d'aile qui sont fabriquées en composites monolithiques avec des renforts de fibres de verre dans une matrice thermoplastique polysulfure de phénylène (PPS) composants de l'A340-500/600.

Différents procédés de mise en forme des composites sont utilisés : parmi ceux-ci, le LCM (Liquid Composite Modeling), la mise en forme sous autoclave, la mise en forme sous presse (thermoformage). La plupart d'entre eux dans le cas d'une matrice thermodurcissable sont assez lents et très coûteux : le temps de cycle de cuisson est généralement de plusieurs heures. Dans ce cas, l'utilisation des composites à matrices thermoplastique et à fibres continues (CFRTP) permet de réduire considérablement les coûts et les temps de production du fait de leur cycle de mise en forme plus court, de leur facilité de stockage. Dans le cas du thermoformage (emboutissage de préimprégnés préalablement

chauffés) des CFRTP, le renfort se présente soit sous forme de mats continus, nappe distribuée de façon unidirectionnelle, pour la production de formes développables, soit sous forme de tissés, entrecroisement de réseaux de fibres, pour la production de formes non-développables. Ce procédé s'avère alors pertinent d'un point de vue industriel puisqu'il permet l'obtention de pièces structurales à géométrie complexe en une seule opération et en des temps de cycle relativement courts.

La théorie concernant la mise en forme des composites à formes développables a fait l'objet de nombreuses études [Eur92, PQDH95, DJL+96], parmi les plus récentes on peut citer celle d'A. Cheruet [Che01, ACP02]. C'est pourquoi nous nous intéressons, dans ce travail, à la mise en forme des formes non-développables, où plusieurs mécanismes spécifiques de déformation entrent alors en jeu, ou sont activés de façon plus sévère, tels que la réorientation et la réorganisation des réseaux de fibres, le cisaillement intra-pli, le plissement et le flambement local des fibres.

Objectifs et plan de la thèse

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre le LMSP, le centre commun de recherche d'EADS et ESI GROUP : l'outil de simulation mis à disposition est le solveur PAM FORM. Notre thèse répond alors à un double objectif, qui correspond aux deux grandes parties de la thèse.

La première partie présente les principaux travaux portant sur la modélisation des milieux fibreux tissés. Ceux-ci sont nombreux et très divers quant à la nature du modèle choisi pour représenter le comportement du milieu. Ainsi, nous verrons que ces modèles se distinguent essentiellement selon qu'ils adoptent une approche discrète (chapitre 1) ou une approche continue (chapitre 2). En effet, l'approche discrète est généralement utilisée dans la modélisation des préformes non imprégnées ou des tissus : on s'intéresse alors à chacun des constituants du milieu fibreux (fil, maille, fibre. . .), le milieu continu n'existe pas en tant que tel, et la structure fibreuse est donnée par l'ensemble des constituants à l'échelle microscopique ou mésoscopique en interaction.

L'approche continue, quant-à-elle, considère le milieu comme continu ; son comportement macroscopique intègre des spécificités qui traduisent le comportement particulier lié à sa composition fibreuse à l'échelle microscopique. Cette approche est souvent utilisée parce qu'elle permet de mieux prendre en considération les mécanismes de déformation intervenant dans la mise en forme des composites. Toutefois, la multiplicité des modèles proposée révèle la difficulté à prendre en compte de manière simultanée les différents types de mécanismes ; on verra que la combinaison de différents modèles distincts permet de pallier cette difficulté.

L'objectif de cette première partie est donc de proposer une synthèse organisée, même si celle-ci ne prétend pas à l'exhaustivité, des différentes approches utilisées dans la modélisation des milieux fibreux tissés.

La seconde partie propose un travail d'analyse expérimentale, puis de simulation de la mise en forme de pièces à géométries non-développables par emboutissage. L'analyse expérimentale (chapitre 3) porte sur deux types de tests : le préformage et le thermoformage réalisés respectivement sur des renforts tissés non imprégnés et sur des composites à matrice thermoplastique. L'objectif est, dans le premier cas, d'observer les mécanismes de déformation en jeu et de mesurer quelques grandeurs caractéristiques, et dans le se-

cond cas, de se rapprocher des conditions réelles de mise en forme par emboutissage des CFRTP à l'échelle industrielle.

Le chapitre 4 s'intéresse à la simulation numérique du procédé de mise en forme, et en particulier, à la loi de comportement utilisée dans le solveur PAM FORM. Plusieurs tests sont effectués dans ce cadre : ils nous permettront notamment de comparer les résultats obtenus par simulation avec ceux obtenus expérimentalement. La formulation utilisée ayant fait ses preuves dans le cas de la mise en forme de composites à renforts unidirectionnels, nous proposons, en guise de conclusion, quelques pistes pour construire une autre loi de comportement pour des composites à renforts tissés.

Première partie

**Modélisation des milieux fibreux
tissés**

Approche discrète

De nombreux modèles peuvent être classés dans l'approche discrète. Afin de les présenter de manière claire, nous avons choisi de les distinguer de deux manières : une distinction peut être opérée entre d'une part, les modèles dits géométriques, et d'autre part, les modèles dits mécaniques. Les premiers s'appuient, comme leur nom l'indique, sur des calculs géométriques et en particulier sur l'algorithme du filet (§ 1.1.1.). Par opposition, les seconds font appel à une modélisation mécanique de leurs composants. Trois types de modèles sont classiquement regroupés sous cette appellation : les modèles à particules (§ 1.1.2.), les modèles masses/ressorts (§ 1.1.3) et les modèles à barres (§ 1.1.4.). Pour les modèles à particules et les modèles masses/ressorts, la modélisation fait entrer en jeu des ressorts ainsi que le poids des particules. Ce qui différencie cependant ces modèles, c'est le fait que, dans les modèles masses/ressorts, tous les mécanismes de déformation sont représentés par des ressorts. Au contraire, dans les modèles à particules, les différents comportements en tension et en cisaillement sont en général couplés. Les modèles à barres, quant à eux, proposent en général une modélisation éléments finis de la structure. Le comportement des mèches est modélisé par des éléments poutres ou des barres rigides qui sont superposées dans certains cas à une couche de coque censée traduire soit les interactions entre les mèches, soit le comportement de la résine.

1.1 Drapage géométrique

On distingue deux méthodes pour la résolution du problème du formage par drapage géométrique. La première est analytique, plus adaptée à des pièces de géométrie simple, et dans laquelle on suppose que l'expression analytique de la surface à draper est connue. La deuxième est numérique ; elle est applicable à des géométries plus complexes et suppose d'une part que le domaine de définition des fibres est modélisé par un quadrillage régulier et, d'autre part, qu'un maillage géométrique (représentant une bonne approximation) de la surface est connu et peut être ainsi utilisé à la place de l'expression analytique de la surface. L'avantage est qu'aucune restriction de zone n'est imposée à la surface à draper [BC03].

1.1.1 Méthode analytique

Les recherches sur le drapage des tissus ont été initiées en 1956 par Mark et Taylor [MT56] (modèle similaire au réseau de Tchebytchev). Ils ont résolu analytiquement la redistribution des fibres d'un tissu orienté sur la circonférence de surfaces de révolution : cones, sphères et sphéroïdes. La réorientation résultante a été déduite comme étant une fonction de la coordonnée constante de la hauteur de la circonférence.

Dans cette approche, une expression analytique de la surface à draper est nécessaire à la formulation du problème. On considère que les mèches sont distribuées de façon continue dans le tissu. Les réseaux chaîne et trame sont en contact à leur entrecroisement en formant des pivots de façon à permettre une libre rotation des mèches. Et de ce fait uniquement la rotation sans glissement des mèches est prise en compte. La méthode s'apparente à celle de la construction d'un réseau de Tchebytchev sur une surface paramétrique proposée à la fin du XIXème siècle par Tchebytchev [Tch78].

Dans ce modèle, les points d'intersection des réseaux chaîne et trame de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) , $(x_1 + dx_1, x_2)$ et $(x_1, x_2 + dx_2)$ se transforment dans un espace paramétrique au niveau de la surface à draper en (S_α, S_β) , $(S_\alpha + \frac{\partial S_\alpha}{\partial x} dx, S_\beta + \frac{\partial S_\beta}{\partial x} dx)$ et $(S_\alpha + \frac{\partial S_\alpha}{\partial x_2} dx_2, S_\beta + \frac{\partial S_\beta}{\partial x_2} dx_2)$ (figure 1.1).

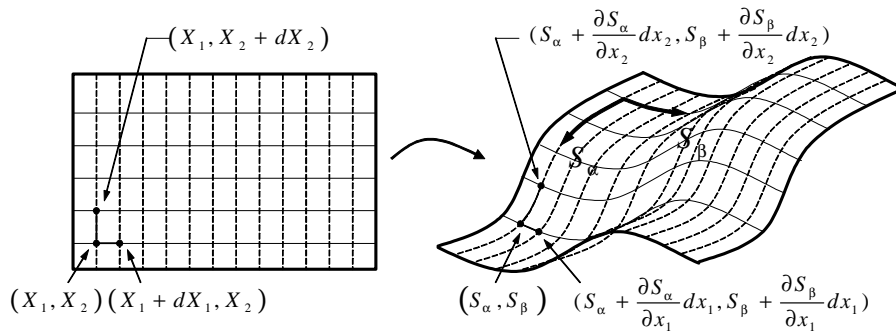


FIG. 1.1: Tracé d'un réseau de Tchebytchev.

En faisant l'hypothèse que les fibres sont inextensibles (la distance entre (S_α, S_β) et $(S_\alpha + \frac{\partial S_\alpha}{\partial x_1} dx_1, S_\beta + \frac{\partial S_\beta}{\partial x_1} dx_1)$ doit être égale à dx_1 et la distance entre (S_α, S_β) et $(S_\alpha + \frac{\partial S_\alpha}{\partial x_2} dx_2, S_\beta + \frac{\partial S_\beta}{\partial x_2} dx_2)$ doit être égale à dx_2) et que l'équation de la surface est infiniment différentiable, on obtient le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_\beta}{\partial x_1}\right)^2 = 1 \quad (1.1a)$$

$$\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_\beta}{\partial x_2}\right)^2 = 1 \quad (1.1b)$$

Deux positions dans la configuration de référence séparées par (dX_1, dX_2, dX_3) , vont être séparées par une distance ds dans la configuration déformée appelée longueur d'arc. La figure 1.2 montre le passage entre la configuration de référence et la configuration déformée.

La surface à draper peut être alors décrite dans le système de coordonnées curvilignes (S_α, S_β) exprimée en fonction du système de coordonnées cartésien (x_1, x_2, x_3) de la

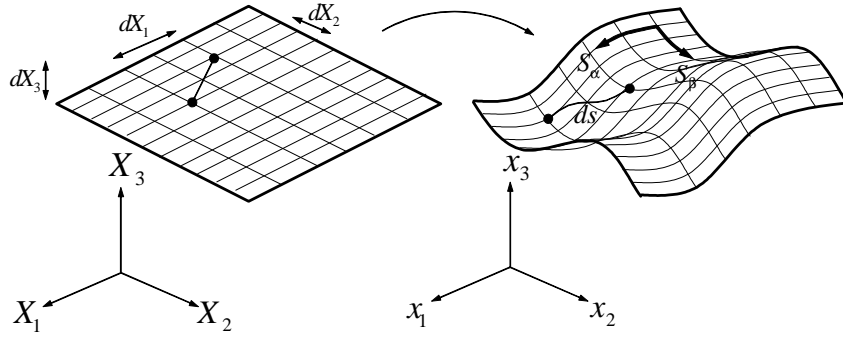


FIG. 1.2: Configuration de référence et configuration déformée.

configuration déformée (figure 1.2) :

$$x_1 = x_1(S_\alpha, S_\beta) \quad (1.2a)$$

$$x_2 = x_2(S_\alpha, S_\beta) \quad (1.2b)$$

$$x_3 = x_3(S_\alpha, S_\beta) \quad (1.2c)$$

Les composites tissés se déforment principalement par cisaillement intra-plies (déformation de treillis : figure 1.3). La distance entre deux réseaux parallèles diminue, l'incompressibilité matérielle implique un épaissement dû à la perte en superficie du tissu.

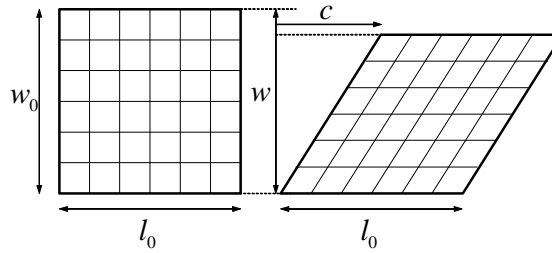


FIG. 1.3: Déformation de treillis

Si la variation de la distance entre deux points de contact est donnée par le tenseur de dilatation λ_{ij} , la longueur d'arc est définie alors par :

$$ds^2 = dx_k dx_k = \left[\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \right] dX_i dX_j \quad (1.3a)$$

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial S_\alpha}{\partial X_i} \frac{\partial S_\beta}{\partial X_j} \quad (1.3b)$$

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_k}{\partial S_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial S_\beta} \quad (1.3c)$$

pour un tissé, le tenseur d'élongation a la forme suivante [LR02] :

$$\lambda_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \gamma^2)^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{avec } \gamma = \frac{c}{w_0} \quad (1.4)$$

On obtient finalement le système d'équations aux dérivées partielles 1.1 qui, avec le système d'équations 1.5, définissent le problème de drapage qui peut être résolu pour les coordonnées curvilignes (S_α, S_β) et le cisaillement γ en terme des coordonnées de la configuration non déformée (X_1, X_2)

$$\lambda_{11} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial S_\alpha}{\partial X_1} \frac{\partial S_\beta}{\partial X_1} = 1 \quad (1.5a)$$

$$\lambda_{12} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial S_\alpha}{\partial X_1} \frac{\partial S_\beta}{\partial X_2} = \gamma \quad (1.5b)$$

$$\lambda_{22} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial S_\alpha}{\partial X_2} \frac{\partial S_\beta}{\partial X_2} = 1 \quad (1.5c)$$

$$\lambda_{33} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial S_\alpha}{\partial X_3} \frac{\partial S_\beta}{\partial X_3} = (1 - \gamma^2)^{-1} \quad (1.5d)$$

Heisey et Haller [HH88] sont les premiers à avoir tenté de résoudre numériquement ce système d'équations aux dérivées partielles. Aono et *al.* [Aon96] ont aussi proposé un modèle se basant sur cette approche. Cependant, l'algorithme résultant s'avérant très coûteux, ils ont dû simplifier le problème en un problème d'intersection entre deux sphères et la surface à draper.

Problème d'intersection

Robertson et *al.* [RHSY81] et Van West et *al.* [VWKP89] ont réduit le système d'équations aux dérivées partielles, décrit dans le précédent paragraphe, à un problème de calcul d'intersection entre deux sphères et la surface à draper.

Le tissu est représenté par un quadrillage rectangulaire où les côtés d'une maille représentent les directions chaîne et trame reliées par des noeuds représentant les points de croisement des mèches dans le tissu. Chaque noeud (i, j) , est calculé alors par l'intersection entre deux sphères d'origine $(i-1, j)$ et $(i, j-1)$ de rayon a et b respectivement et la surface à draper (figure 1.4) en respectant les deux conditions suivantes :

1. la distance entre le point calculé et le point précédent dans la direction chaîne et trame est égale à l'espacement entre mèches dans les deux directions respectivement.
2. les coordonnées des points doivent satisfaire l'équation de la surface.

Pour déterminer l'ensemble des noeuds formant le drapé de tissu, il suffit de résoudre le système d'équations suivant :

$$(x_{ij} - x_{i-1,j})^2 + (y_{ij} - y_{i-1,j})^2 + (z_{ij} - z_{i-1,j})^2 = a^2 \quad (1.6a)$$

$$(x_{ij} - x_{i,j-1})^2 + (y_{ij} - y_{i,j-1})^2 + (z_{ij} - z_{i,j-1})^2 = b^2 \quad (1.6b)$$

$$F(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) = 0 \quad (1.6c)$$

où $F(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ est l'équation paramétrique de la surface.

Cette approche analytique présente trois inconvénients majeurs : elle ne peut pas être appliquée à des surfaces de formes libres ; l'expression analytique de la surface à draper limite son application à des surfaces de géométrie simples [Lar91] ; enfin, elle présente un manque de flexibilité dans la spécification des conditions initiales. C'est pourquoi cette approche a été assez vite délaissée au profit de la méthode numérique.

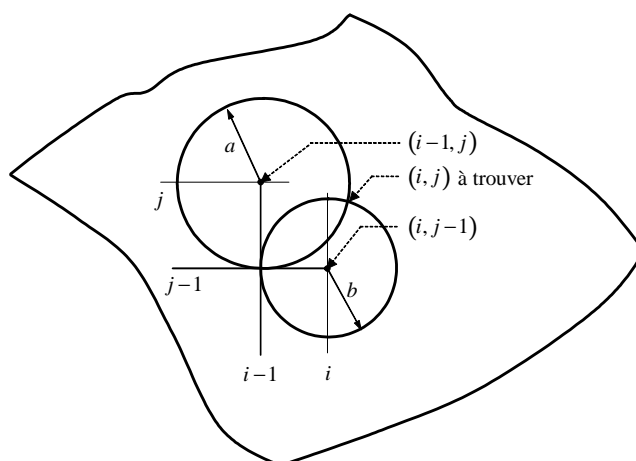


FIG. 1.4: Calcul des points dans un problème d'intersection.

1.1.2 Méthode numérique

Une surface à draper de géométrie complexe peut être discrétisée pour avoir une expression algébrique plus appropriée à un calcul numérique [VWKP89, Ber93]. Le drapage est alors basé sur l'hypothèse que le tissu se déforme principalement par cisaillement et que l'extension des fibres et la présence de la résine peuvent être négligées [KNK73]. Le tissu reste dans une position fixe sur la surface drapée après modélisation.

L'algorithme du filet se résume aussi à un problème d'intersection. Après indication d'un point d'impact et deux directions initiales de fibres, des points supplémentaires sont générés à une distance similaire des points précédents créant ainsi un maillage quadrangulaire. Trochu et *al.* [THB96] ont montré que l'avantage, en combinant l'algorithme du filet avec une paramétrisation de la surface, consiste en la construction d'un modèle de surface continu et différentiable, évitant les difficultés qui surviennent quand le plan tangent ou la courbure locale de la surface sont discontinus à travers les éléments de surfaces.

L'algorithme reçoit en entrée : l'équation de la surface paramétrique, l'équation analytique de deux plans ($P1$) et ($P2$) et les longueurs a et b (distance respectivement entre mèches du sens chaîne et mèches du sens trame). La taille du maillage (n, m) est déterminée à partir de la longueur chaîne et trame L_{wp} et L_{wt} le long des axes principaux par $n = L_{wp}/a$ et $m = L_{wt}/b$. Les axes principaux du tissu ainsi que le point d'impact sont définis par l'intersection des deux plans avec la surface paramétrique (figure 1.5).

On commence par draper l'un d'eux à partir du point $(0, 0)$. Les arcs entre ce point et les frontières respectives de la surface sont divisés le long du sens chaîne et du sens trame selon les longueurs spécifiées a et b . Ces longueurs élémentaires définissent la taille de la grille qui sera générée sur la surface. L'étape suivante consiste en la résolution du système d'équations 1.6a, en générant rangée par rangée les noeuds du maillage.

La spécification d'une distance directe entre les noeuds (a ou b) a pour conséquence une plus grande surface de couverture que ce qu'il en est réellement puisque la portion des fibres excluant les noeuds reste effectivement sous la surface de l'outil [RHY84, VWKP89]. On peut être tenté de réduire l'intervalle du filet (distance entre les noeuds) : ce qui peut impliquer une erreur sur le drapage voulu. Un meilleur moyen serait de

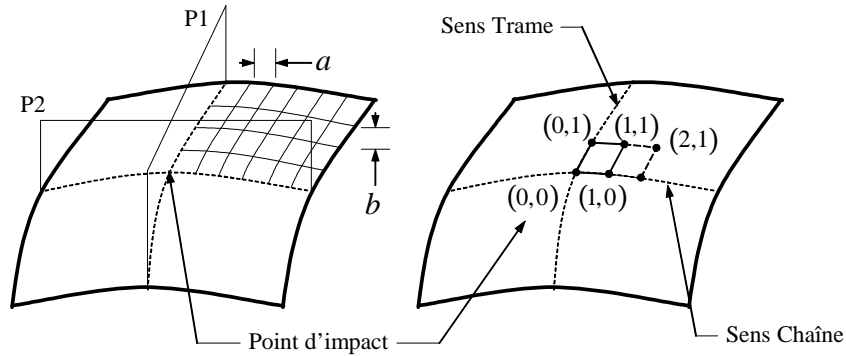


FIG. 1.5: Illustration de l'algorithme du filet : (a) exemple de grille définie par le tissu, (b) construction d'un élément sur une surface paramétrique.

mesurer la distance des fibres voisines de a sur la surface courbée, comme indiqué dans les travaux de Robertson et *al.* [RHSY81]. Cela implique une distance directe entre les nœuds, a' de la forme

$$a' = 2R \sin\left(\frac{a}{2R}\right) \quad (1.7)$$

où R fait référence à la courbure locale de la surface à draper comme indiqué sur la figure 1.6.

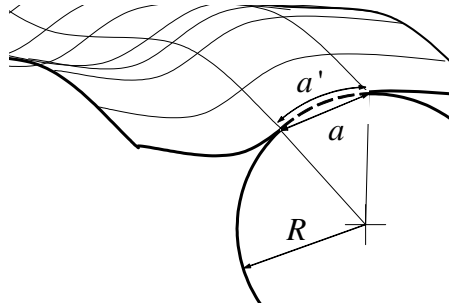


FIG. 1.6: Correction de la distance noeud à noeud.

Plusieurs raffinements ont été proposés en imposant la condition que le chemin fibreux entre deux nœuds soit géodésique [HH88, LR94, Wee91], sous l'hypothèse que le frottement entre le tissu et la surface à draper soit négligé.

En traçant les trajectoires à partir du noeud $(i-1, j)$ et $(i, j-1)$ le long de la surface, une solution peut être déterminée où la distance géodésique entre le couplet (i, j) et respectivement $(i-1, j)$ et $(i, j-1)$ est égale à a .

La discrétisation de la surface peut être faite soit au moyen d'éléments courbes [VWKP89], soit au moyen d'éléments à facette plane [Wee91, LR94] réduisant considérablement le temps de calcul par la donnée d'un système linéaire à résoudre. Dans ce contexte, Smiley et *al.* [SP88] ont introduit des éléments courbes bi-dimensionnels spline cubiques et des surfaces de Coons. Van West et *al.* [VWKP89] et Long et *al.* [LR94] ont présenté une méthode de drapage de surfaces tri-dimensionnelles basée sur des éléments respectivement bicubiques et bilinéaires.

Plus récemment, Borouchaki et *al.* [BCBdL01] ont proposé un algorithme utilisant un maillage géométrique de la surface qui peut être obtenu par une technique de maillage adaptatif. Les lignes géodésiques obtenues sont approximées par des polygones tracées sur la surface. Plus tard [BC03], ils ont proposé un algorithme d'optimisation permettant de définir à partir de la donnée de trois sommets de la maille tracée sur la surface, son quatrième sommet.

Il n'existe pas de solution unique pour la méthode de drapage géométrique. La géométrie des surfaces à draper utilisée dans la plupart des articles publiés est telle que quand la position d'une paire de croisement de mèches est spécifiée, le drapage est déterminé de façon unique. Bergsma [Ber95] a introduit des stratégies afin de trouver des solutions pour l'algorithme de drapage sans prédéfinir les chemins initiaux. Il a aussi introduit un mécanisme basique pour incorporer le phénomène de blocage dans sa simulation.

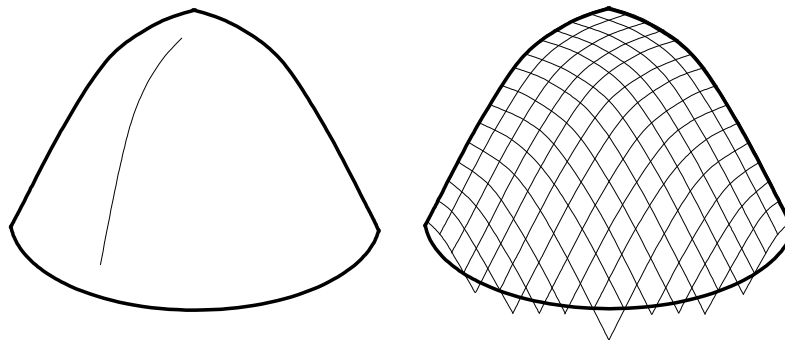


FIG. 1.7: Illustration du drapage par l'algorithme du filet.

Alternativement aux modèles du filet, Van Der Weeën [Wee91] a présenté une méthode énergétique de drapage assez efficace en 1991. Au lieu de créer une nouvelle maille sur des bases géométriques, celle-ci est tracée sur la surface en minimisant son énergie élastique et en ne se basant que sur l'énergie de déformation pour tracer les noeuds. A partir de 3 noeuds, le quatrième est obtenu en minimisant l'énergie de déformation le long de la surface élémentaire :

$$U = \frac{1}{2} \int \int_{\text{élément}} \left[(\lambda_{11} - 1)^2 + (\lambda_{22} - 1)^2 \right] dX_1 dX_2 \quad (1.8)$$

λ_{11} et λ_{22} sont respectivement les dilatations dans la direction chaîne et trame. L'équation 1.8 considère l'énergie de déformation due à la tension des mèches dans le sens chaîne et trame uniquement, tandis que l'énergie de déformation en cisaillement n'est pas considérée. La précision du modèle est acceptable dans l'hypothèse où la résine près de sa température de transition vitreuse n'apporte pas de déformations en cisaillement importantes. Cette approche tente de modéliser l'élongation des fibres alors que celle-ci est négligée dans le modèle du filet.

Entre autres, Van Der Weeën [Wee91] a présenté et comparé trois algorithmes de drapage géométrique : l'algorithme du minimum d'énergie élastique décrit précédemment, l'algorithme du filet et l'algorithme de mosaïque. L'algorithme de mosaïque est une version simplifiée de l'algorithme du filet, basée sur la représentation de la surface par des éléments de facettes triangulaires. Un nombre important d'éléments est nécessaire pour

une meilleure précision de l'approximation de la courbure de la surface. L'algorithme du minimum d'énergie élastique paraît assez efficace, mais nécessite plus de raffinement pour une meilleure précision. Les trois modèles sont assez sensibles à l'équation de surface utilisée et le choix de la contrainte de drapage dicte le modèle drapant.

Bergsma et Huisman [BH88, Ber93] ont eux aussi proposé une approche énergétique pour la modélisation du drapage. Pour chaque maille tracée, on minimise la somme des déformations angulaires, l'énergie de déformation en cisaillement étant proportionnelle à la déformation angulaire. Quelques recommandations, bien que très limitées, ont été signalées : pour les pièces ayant une symétrie matérielle, le point d'impact doit être placé dans le plan de symétrie [BH88, Ber93], pour les pièces obtenues par formage, le point le plus haut est suggéré comme point d'impact [Ber93]. McBride et *al.* [MCL97] ont considéré la géométrie détaillée d'une mèche pour la modélisation de la préforme. Ils ont identifié un élément de volume et décrit sa configuration par un ensemble de 4 courbes sinusoïdales. La géométrie de l'élément de volume a été formulée comme étant fonction de l'épaisseur, de la largeur de la mèche, de l'espacement entre mèches et l'angle entre réseaux chaîne et trame. L'épaisseur du tissu et l'espacement entre les mèches ont été supposés indépendants de l'angle; cependant la largeur des mèches est supposée dépendante. En connaissant l'angle, la géométrie peut être déduite. Cette formulation est combiné avec l'algorithme du filet pour prédire l'orientation du tissu et sa géométrie après déformation.

Dans le modèle du filet, on suppose que la distance entre noeuds reste constante alors qu'en réalité, on est en présence d'un phénomène de glissement et de compaction latérale des mèches qui causent un changement significatif de cette distance (figure 1.8). Ceci peut

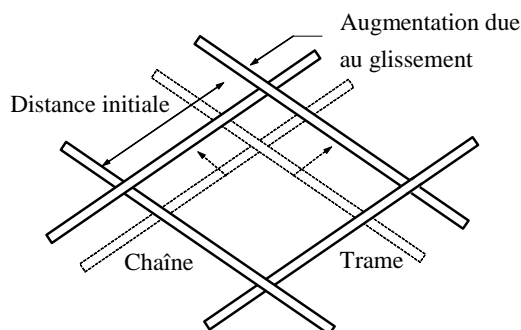


FIG. 1.8: Glissement entre mèches.

être évité en introduisant une variation de distance dans le modèle du filet. Un glissement entre les mèches peut induire une erreur de prédiction, ou, tout simplement, rendre le modèle invalide. Des chercheurs de Materials Science Corporation [Cor86] ont proposé un modèle de glissement, fonction de l'angle de déformation :

$$a = a_0 \left[1 + S \left(1 - \frac{\theta}{90^\circ} \right) \right] \quad (1.9)$$

a étant l'espacement entre mèches du pli déformé, fonction de la distance initiale a_0 du pli non déformé, l'angle de cisaillement θ et un paramètre matériel de glissement qui peut être déterminé expérimentalement.

1.2 Modèles à particules

Les systèmes à particules ont été utilisés au départ à des fins d'animation graphique sur ordinateur par Reeves et *al.* [Ree83]. Ils ont défini un modèle à particules qu'ils ont appelé "nuage de particules primitives", qu'ils ont développé ultérieurement pour la visualisation de plusieurs types d'animation. Le premier modèle à particules utilisé pour la simulation du drapage de tissus était celui de Weil [Wei86] qui a utilisé une procédure géométrique à deux pas pour simuler le drapage d'un tissu rectangulaire à partir de plusieurs points contraints. Le tissu est généralement représenté sous forme d'un ensemble d'éléments structuraux micro-mécaniques qui peuvent être transposés dans le cas de composites tissés. Ces éléments, appelés aussi particules, interagissent et doivent être choisis assez fins pour mieux représenter le comportement du tissage.

Parmi ces modèles à particules, deux types de modélisation, que nous présentons successivement, peuvent être distinguées selon la manière dont sont définies les interactions entre particules.

1.2.1 Fonctionnelle d'énergie potentielle

Dans ce type de modélisation, les interactions entre particules sont définies par des fonctionnelles d'énergie potentielle. La contribution énergétique de chaque particule consiste en la somme des énergies potentielles dues à la compression/tension, la flexion, le cisaillement du fil et la gravité. L'énergie totale de tissu est tout simplement la somme des énergies de toutes les particules. Un modèle à particules a été développé par Breen et *al.* [BHG91, BHW94, BHW95] qui définit le tissu comme étant un réseau de particules représentant le croisement des réseaux chaîne et trame (figure 1.9). La modélisation basée sur ce système de particules est en général indépendante du temps. Dans le premier pas de temps, on calcule l'effet de la gravité et la collision entre le tissu, la surface à draper et les objets l'environnant. Dans le pas d'après, on utilise une technique stochastique de minimisation d'énergie pour trouver un minimum d'énergie locale du tissu et pour renforcer les contraintes entre particules. Finalement, on introduit des perturbations pour produire une configuration finale asymétrique. Les fonctionnelles d'énergie sont données par un recalage des données expérimentales obtenues, par exemple, par le Système d'Evaluation de Kawabata (KES) [Kaw80a] en négligeant l'effet d'hystérésis qui sera expliqué dans la suite du chapitre.

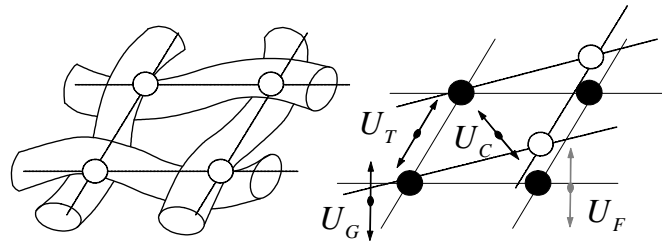


FIG. 1.9: Modèle à particules en terme de fonctionnelles d'énergie potentielle.

Les différentes contraintes et interactions sont représentées au niveau du fil par des fonctionnelles d'énergie potentielle qui captent les relations géométriques simples

entre particules dans un voisinage proche. C'est une application du concept du renforcement des contraintes géométriques sur des surfaces paramétriques par des fonctionnelles d'énergie de Witkin et *al.* [WFB87]. L'énergie potentielle totale d'un tissu est la somme des différentes énergies mises en jeu (équation) :

$$U_{Totale} = U_R + U_T + U_F + U_T + U_G \quad (1.10)$$

U_{Totale} est l'énergie totale de la particule, U_R est une énergie artificielle de répulsion, qui tient les particules à un minimum de distance entre elles, U_T est l'énergie de tension qui connecte chaque particule avec les quatre particules voisines, U_F est une énergie due à la flexion du fil dans le plan du tissu, U_C est une énergie de cisaillement due à la flexion autour d'une mèche dans le plan, U_G est une énergie potentielle due à la distribution de masse de la particule. L'énergie de tension, souvent petite, peut être négligée si le drapage est uniquement dû au poids du tissu.

Pour une meilleure représentation du comportement réel du tissu, un modèle équivalent contraint a été proposé par House et *al.* [HDB96]. A l'équation de l'énergie potentielle totale, ils ont rajouté une fonctionnelle qui contraint la particule à rester à une distance fixe entre deux mèches (figure 1.10). Les fonctionnelles sont ensuite différenciées par respect au système de coordonnées utilisé pour produire des efforts non-linéaires fonction du déplacement de la particule.

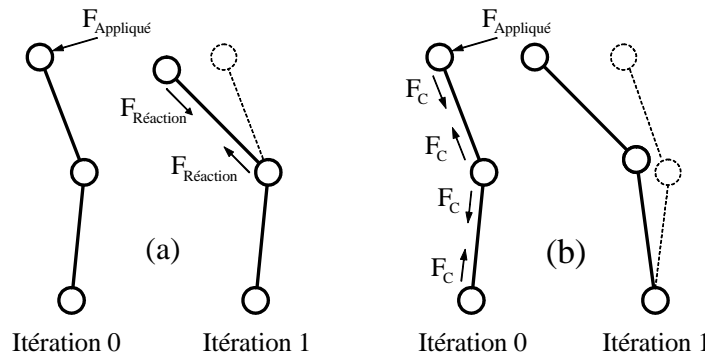


FIG. 1.10: Chaîne modélisée par : (a) uniquement des efforts de tension, (b) des efforts de tension et de contraintes cinématiques.

Sagar et *al.* [SPH03] ont proposé une méthode énergétique pour trouver une configuration géométrique déformée d'une maille élémentaire de tissu utilisant le même principe que la méthode à particules. On détermine l'énergie totale potentielle d'une cellule élémentaire pour les états de déformation en tension, flexion et compression, qu'on minimise par rapport aux variables géométriques pour trouver un état d'énergie potentielle stationnaire.

1.2.2 Fonctionnelle d'effort

De façon similaire aux fonctionnelles d'énergie, des fonctionnelles d'efforts ont été développées pour représenter l'interaction entre particules par Terzopoulos et *al.* [TF88] et Eischen et *al.* [EDC96]. Les noeuds sont associés à des éléments carrés sur la surface qui, pendant la déformation du tissu, sont autorisés à se déformer dans le plan du tissu et dans la direction transverse [Eis98].

Pour calculer les contraintes internes, les noeuds du réseau sont supposés être connectés par des ressorts linéaires qui simulent les propriétés élastiques du tissu. Les rigidités de ces ressorts sont reliées aux propriétés physiques et matérielles du tissu par la donnée du module élastique, du module de cisaillement, du coefficient de poisson et de l'épaisseur.

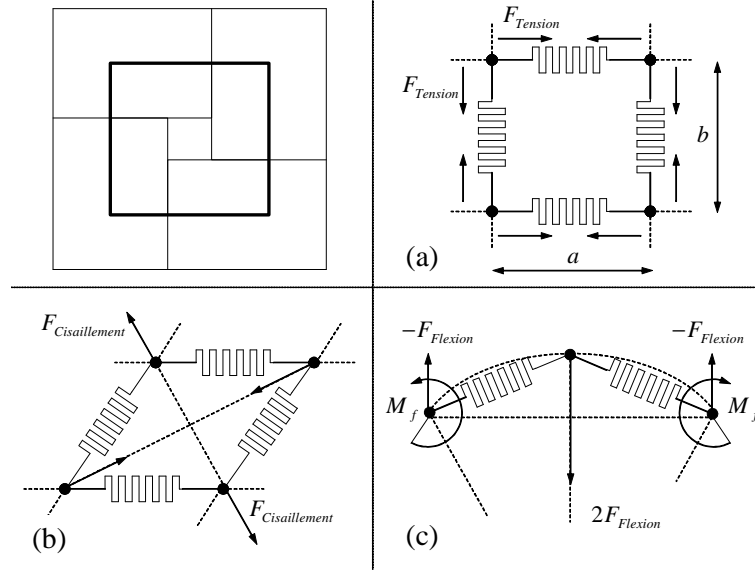


FIG. 1.11: Modèle à particules : (a) efforts de tension, (b) efforts de cisaillement, (c) efforts de flexion.

L'équilibre des efforts agissant sur une particule (i, j) est renforcé à chaque point nodal et peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$P + F_{Cout} + F_{Ext} + F_{Tens} + F_{Cis} + F_{Fle} = 0 \quad (1.11a)$$

$$\text{avec } F_{Cis} = \sqrt{2}/2 F_{Tens} \quad (1.11b)$$

où P est le poids de la particule, F_{Cout} est une force d'assemblage de plusieurs surfaces de tissu avant drapage et F_{Ext} est une force d'interaction avec les surfaces externes (potentiel de collision).

Par le biais de ce modèle, Cordier et Magnena-Thalman [\[CMT02\]](#) ont simulé le comportement du tissu et son drapage sur une maquette virtuelle d'humain. Ils ont proposé un algorithme hybride de drapage combinant les avantages de la méthode à particule et des déformations géométriques évitant ainsi les coûts de calcul excessifs de la détection de collision en segmentant le tissu en trois sections dans leur simulation. La méthode est, par exemple, utilisée pour représenter le port d'habits dans l'industrie du prêt à porter et requiert les propriétés mécaniques du tissu et la forme du produit final comme entrée. Le but principal n'est pas d'avoir un état de déformation ou de contraintes mais plutôt la forme générale du produit final. C'est probablement pour cette raison qu'on ne trouve pas d'applications adaptées à cette méthode dans l'industrie mécanique.

1.3 Modèles masses/ressorts

Dans les systèmes masses/ressorts [Pro95, HP98], toutes les contributions énergétiques du tissu sont modélisées en terme de masses ponctuelles représentant les points de contacts entre chaîne et trame et des ressorts qui définissent les principaux mécanismes de déformation du tissu : tension, flexion et cisaillement (figure 1.12).

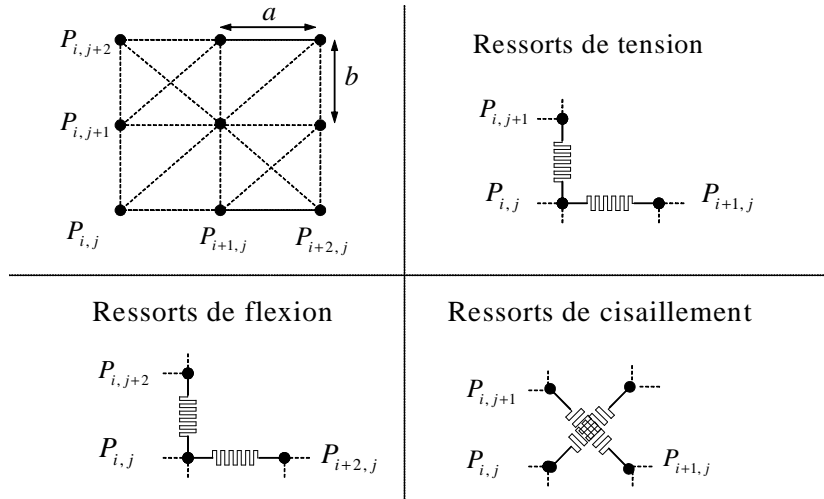


FIG. 1.12: Système masse/ressorts [Pro95].

En combinant les avantages des méthodes géométriques et les modèles physiques, quelques chercheurs ont présenté des modèles hybrides. Rudomin [Rud90] a utilisé une de ces méthodes mixtes. Il a développé une technique géométrique pour créer une estimation grossière de la forme générale du tissu pendant par plusieurs points contraints. La technique produit un ensemble de polygones en 3D. Il a suggéré que sa méthode pouvait servir de configuration initiale pour un modèle physique du tissu. Plusieurs auteurs ont proposé par la suite des extensions et des améliorations par des techniques de remaillage [HPH96, Vil02].

Zhang et al. [ZY01] ont proposé une technique de maillage multi-niveaux afin de produire une simulation plus réaliste du drapé de tissu. La masse n'est plus en interaction uniquement avec ses voisins immédiats, mais aussi avec toutes les masses avoisinantes (figure 1.13). Le lien entre les différentes masses est soumis aux règles suivantes :

- Les ressorts de tension lient les masses directement connectées entre elles. Ils sont responsables des plus fortes tensions internes en traction et en compression.
- Les ressorts en biais sont sur la diagonale et lient deux masses qui sont sur deux triangles partageant une arête. Ces mêmes ressorts servent aussi à représenter la flexion.

Magno et al. [MG01] ont rédigé une note pour la modélisation mésoscopique en grandes perturbations de matériaux textiles. Ils ont formulé à l'échelle de l'ondulation d'un fil une loi de comportement micropolaire en grandes perturbations dans laquelle on modélise le matériau par un treillis de poutres ondulées périodiques ; par passage à la limite sur la taille de la cellule de base, on obtient une loi de comportement micropolaire d'un matériau continu équivalent au matériau discret initial. La microrotation décrit les effets locaux de rotation des fils sur l'échelle d'ondulation d'un fil.

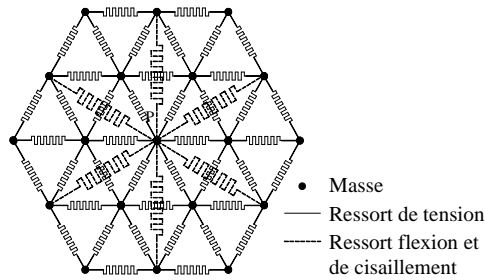


FIG. 1.13: Système masse-ressort (ne sont représentés que les ressorts de biais liés à la masse P).

Ben Boubaker et *al.* [BBHG02] ont proposé un modèle du type Provot [Pro95]. L'énergie potentielle totale est la somme des énergies potentielles de tension, de flexion et de cisaillement plan auxquels ils ont rajouté une énergie qui décrit la torsion du tissu. Dans un travail plus récent, ils ont essayé d'introduire l'effet des couplages entre les directions chaîne et trame [BHG03].

1.4 Modèles à barres

Dans ce type de modèles, les fibres dans une maille élémentaire sont représentées par des éléments finis de type poutre ou barre rigide. Les interactions entre ces derniers, comme le cisaillement, la compaction et le blocage en cisaillement, sont généralement modélisés par des ressorts.

Dans ce contexte, Ascough et *al.* [ABB96] ont utilisé un modèle d'élément poutre en grand déplacement pour la simulation du drapage d'un tissu. Le comportement en flexion est gouverné par la rigidité des éléments poutres. L'objectif était de prédire la forme générale du tissu du drapé de tissu plutôt que l'investigation de la réorientation des fibres. Cependant, une représentation plus réaliste du drapé de tissu demande un raffinement du maillage de la structure et, par conséquent, augmente considérablement le temps de calcul.

Un modèle plus fin a été proposé par Kato et *al.* [KYM99] : ils utilisent une représentation en maille élémentaire basée sur un modèle en treillis du tissu. Une maille du tissu (Figure 1.14) est représentée par des barres (Fils chaîne et trame), des ressorts de tension dans les directions des fils (B et C), des ressorts dans la direction bias (D) et des barres dans la direction transverse (E), une couche enduite comptant pour le cisaillement pouvant être représentée par une plaque (R).

Sidhu et *al.* [SARP01] ont présenté un modèle où les fibres sont représentées par des éléments poutres et où les différentes interactions sont, cette fois, représentées par des éléments coques. Les éléments poutres sont utilisés pour modéliser les mèches et les éléments coques (matériau fictif) pour modéliser le frottement et les autres interactions entre les mèches. Le matériau fictif constituant les éléments coques est appelé milieu de transition.

L'élément coque possède des mèches connectées à chacun de ces noeuds. L'uniformité entre les éléments est obtenue, dans le modèle complet, par le fait que chaque élément coque diffère d'un autre par simple rotation. Les éléments représentant les mèches ne sont pas connectés entre eux, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de noeuds communs de façon

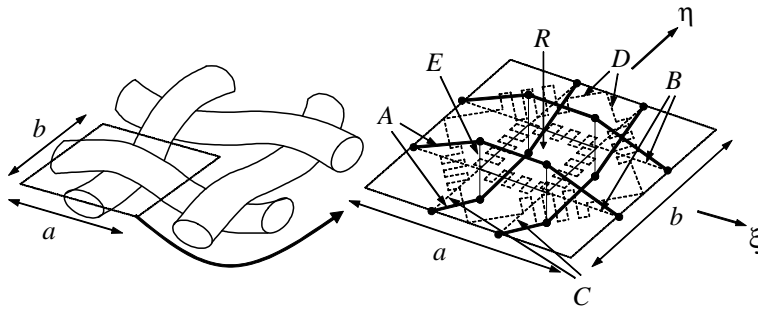


FIG. 1.14: Modèle en treillis du tissu.

à introduire un certain glissement dans le modèle. A cause de l'absence de symétrie due à l'emploi d'une connectivité non conventionnelle, les éléments coques se déforment dans un mode cyclique non-uniforme. C'est pour cette raison que les mêmes auteurs ont proposé un nouveau modèle appelé modèle de damier où la symétrie dans la direction de chargement et celle des mèches ont été traitées (figure 1.15).

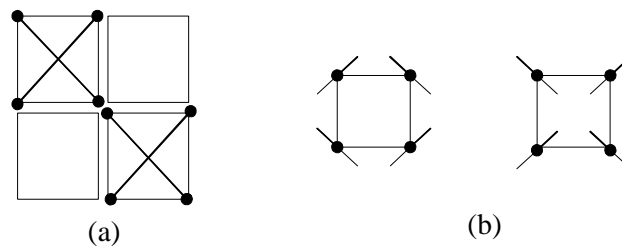


FIG. 1.15: (a) Élément de volume pour le modèle de damier, (b) les deux types de connectivité entre éléments poutres et modèle de transition.

Tanov et *al.* [TB03] ont utilisé ce type de modélisation pour simuler le gonflement d'un airbag latéral de voiture par éléments finis. Les mèches du tissu sont définies par des barres rigides inter-connectées avec deux ressorts sur les diagonales de la maille élémentaire (figure 1.16).

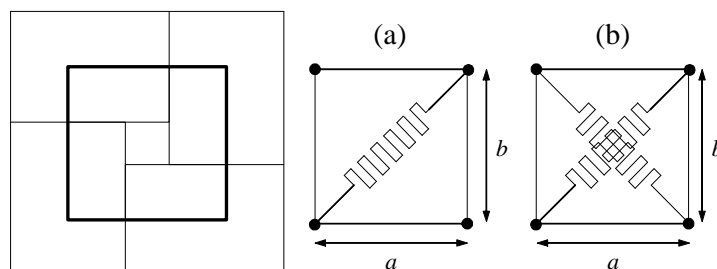


FIG. 1.16: Représentation de la cellule élémentaire (modèles à barres) (a) : un ressort sur la diagonale, (b) : deux ressorts sur la diagonale.

Sharma et Sutcliffe [SS04] ont représenté une maille élémentaire dans un réseau de

barres inter-connectées. Pour introduire une rigidité de cisaillement dans la maille élémentaire, un ressort est ajouté sur la diagonale. Un calcul éléments finis permet la prédiction du drapage.

King et *al.* [KJS05] ont adopté une représentation plus fine se basant sur le modèle analytique de Kawabata [KNK73]. Les mèches sont représentées par un réseau de barres, souples en tension et infiniment rigides en flexion, articulées à leurs extrémités. Les effets de la flexion des mèches sont modélisés par des ressorts tandis que la disposition des éléments est située hors plan pour prendre en compte l'effet d'aplatissement du tissu.

1.5 Conclusion

Les procédures de drapage géométrique sont assez simples dans leurs applications et leur implémentation ne requiert pas de puissants moyens de calcul. Les résultats sont relativement concordants avec la réalité si la forme du produit est convexe. Les solutions obtenues peuvent être assez médiocres quand l'apparition des plis ou le glissement sont observés. La méthode ne prend pas en compte les conditions de mise en forme et ne peut représenter les propriétés du composite. L'hypothèse de rigidité de cisaillement nulle dans le plan peut, elle aussi, conduire à des erreurs de prédiction dans le cas de tissus denses. L'approche peut s'avérer impossible avec l'existence de discontinuités ou de trous dans le produit à draper.

Les modèles du type mécanique (particules, masses/ressorts et à barres) procurent, par l'absence d'un nombre important de paramètres d'entrée, une certaine simplicité d'utilisation et une relative facilité de construction. Ils traduisent bien la particularité de la structure interne au niveau microscopique ou mésoscopique. La difficulté, cependant, réside dans le très grand nombre de composants représentés à l'échelle locale et la simulation peut être très coûteuse dans le cas d'une géométrie complexe. Peu de travaux se sont intéressés à l'intégration du comportement de la résine dans le cas de tissus imprégnés.

Approche continue

Les procédés de formage des composites incluent de larges déplacements, de grandes rotations et de grands cisaillements intra-plis qui peuvent avoir un effet significatif à la fois sur le procédé et sur les propriétés structurales du produit fini. La formabilité d'un composite pré-imprégné se trouve limitée par l'architecture du renfort, par ses propriétés mécaniques (comportement de la résine entre autres) et par la géométrie des outils. Plusieurs mécanismes de déformation entrent en jeu : une grande déformation et un blocage en cisaillement ; l'extension des fibres et leur rupture au-delà d'une certaine limite ; la flexion et le glissement entre fibres dus aux déplacements des mèches dans le plan et hors-plan ; enfin, la compression des mèches et les flambements locaux des fibres.

L'approche continue peut être classée en deux catégories. La première regroupe les modèles qui proposent une formulation de la loi de comportement globale à partir de la modélisation séparée des mécanismes de déformation régissant le milieu : on parlera de comportement découplé /multicomposants (§ 2.1.). La seconde catégorie renvoie aux modèles qui supposent un comportement unique, qui est généralement modélisé par un comportement orthotrope initial qui peut évoluer au cours de la mise en forme. L'équation constitutive prend, en général, en considération les interactions entre la matrice et le renfort grâce à différentes méthodes d'homogénéisation (§ 2.2.).

2.1 Comportement découplé/multicomposants

Les modèles multi-composants consistent en une combinaison de plusieurs modèles de comportement, chacun décrivant un mécanisme de déformation spécifique à un chargement donné. Dans ces derniers, les fibres sont assez souvent représentées par un comportement élastique linéaire. Les mécanismes de déformation donnant lieu à une modélisation découplée sont principalement : le comportement visqueux de la résine, la réorientation des fibres, le cisaillement intraplis, la flexion.

De nombreux travaux sont consacrés à l'étude de ces mécanismes de déformations. Dans les sections qui suivent, nous présenterons ces différents mécanismes subis par le matériau au cours de sa mise en forme, ainsi que les approches liées à leur modélisation. Les comportements de la matrice, puis ceux du renfort sont traités séparément.

2.1.1 Comportement du renfort

2.1.1.1 Cisaillement intraplis

Le cisaillement intraplis est le principal mécanisme de déformation dans la mise en forme des composites [TG89]. L'apparition des plis survient généralement quand le cisaillement nécessaire à former une pièce d'une géométrie particulière est trop élevé.

La sollicitation en cisaillement implique dans l'éprouvette des variations d'orientation entre les réseaux chaîne et trame, on parle d'effet "treillis" : durant le cisaillement, des changements importants apparaissent dans la géométrie de la maille élémentaire qui engendrent des non-linéarités de type géométrique à l'échelle mésoscopique liées aux réarrangements des mèches et à leur écrasement latéral. La forme des sections ainsi que les paramètres d'agencement du tissu s'en trouvent modifiés.

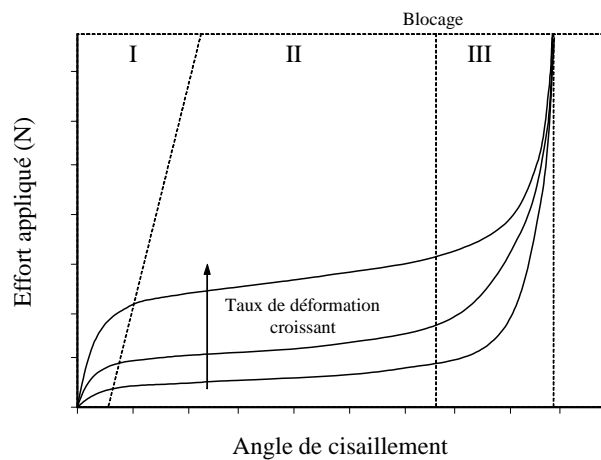


FIG. 2.1: Comportement en cisaillement typique d'un composite à renfort tissé.

Les essais de cisaillement plan pratiqués sur des renforts tissés montrent que ces derniers exhibent typiquement trois phases principales de cisaillement reportés sur la figure 2.1. La première (I) correspond à un comportement élastique de faible rigidité où le cisaillement est dû à une flexion dans le plan des mèches. La deuxième (II) correspond à une linéarité du comportement suivie d'une rigidification progressive due à la rotation avec frottement des réseaux de fibres : les mailles élémentaires n'étant pas toutes rigoureusement identiques, ces contacts n'interviennent pas tous au même moment.

Le début de la dernière zone (III) correspond à la fin de cette rigidification lorsque toutes les mèches parallèles sont en contact. Tous les interstices dans le tissu sont alors fermés ; le tissu est dit "bloqué", les contraintes au sein du renfort deviennent très élevées, les rotations supplémentaires sont limitées par la compressibilité latérale des mèches qui explique la forte rigidité observée. Par conséquent, les efforts de cisaillement et de compression établis à cette limite sont compensés par le plissement du tissu et un flambement local des mèches qui créent des plis dans le renfort. Comme le tissu subit ces trois phases de déformation, l'architecture du renfort change de manière à s'y accommoder [GLP68].

L'angle de cisaillement entre réseaux chaîne et trame peut alors être utilisé comme mesure de la déformation de cisaillement [PC97]. Avant qu'une déformation ne survienne, cet angle est de 90° (figure 2.2.a) pour les composites tissés. Plus le tissu est cisailé,

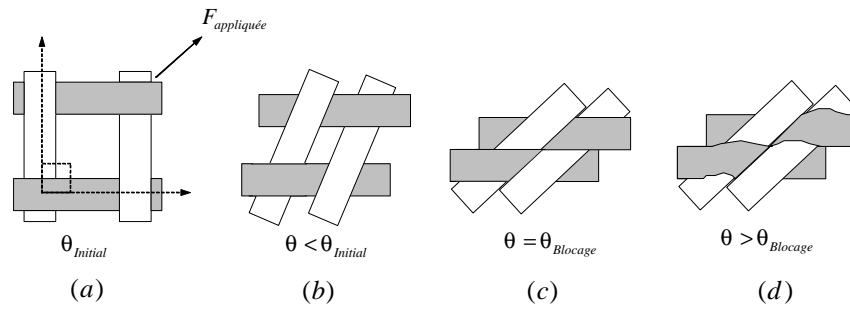


FIG. 2.2: (a) Etat initial, (b) pendant le cisaillement, (c) blocage et (d) apparition de plis après blocage.

plus la densité des mèches dans le sens chaîne et le sens trame augmente, et ce jusqu'à ce que l'angle de cisaillement critique soit atteint (figure 2.2.c).

L'angle de blocage est défini comme étant l'angle avant lequel le tissu flambe. Il peut être utilisé comme unité caractéristique décrivant le potentiel d'un tissu à être conforme à une surface particulière. Si la géométrie de la pièce à reproduire ainsi que l'angle de blocage sont connus *a priori*, on peut alors prévoir si le tissu en considération aura des plissements ou non.

La réponse en cisaillement peut toutefois être modifiée. Le changement dans l'espacement entre les mèches résulte d'un glissement autour des zones de contact ou d'un changement de la géométrie des mèches. Ce type de déformation dépend des efforts agissant dans le plan et peuvent ainsi modifier cette réponse. Sharma et al. [SSCL01] ont mesuré la géométrie des mèches et ont trouvé que le glissement survient même à de faibles taux de cisaillement et qu'il est significatif dans les zones où l'effort de drapage était appliqué dans une direction asymétrique du renfort. Wang et al. [WPP99] ont mesuré le glissement et ont reporté la même sensibilité directionnelle. Le glissement dépend alors du type de renfort et de la géométrie des constituants.

2.1.1.1.1 Tests de caractérisation Plusieurs travaux ont été conduits sur le développement de tests pour la détermination des propriétés de cisaillement des tissus. Ces méthodes de caractérisation sont choisies de manière à faire varier les efforts dans le plan ; elles permettent de comprendre comment les contraintes dans le plan influencent la réponse du matériau au cours de sa mise en forme.

i. *KES-F (Kawabata Evaluation System for Fabrics)*

C'est un ensemble d'équipements de mesure qui sert à caractériser le comportement d'un tissu sous un faible chargement de flexion, de cisaillement et de traction et qui permet, entre autres, la détermination de sa rugosité et de sa compressibilité [Kaw80b].

La procédure de caractérisation du cisaillement plan consiste à bloquer un échantillon de tissu le long de deux bords opposés et à l'étirer par application d'une tension souvent de 10 N/m sur l'un des bords (figure 2.3). Ce type de test est similaire à un test de cisaillement manuel qui est souvent appliqué pour déterminer qualitativement l'angle de blocage.

Hu et Zhang [HZ97] ont analysé les contraintes générées dans ce type de test. Ils ont conclu que, du fait de la présence de coins et de la présence simultanée de tension et

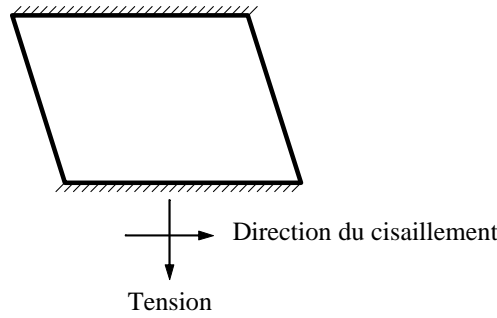


FIG. 2.3: Test de cisaillement selon KES-F.

de cisaillement, l'échantillon (de dimension 200×50 mm) n'est pas tout à fait sujet à un cisaillement pur.

ii. *Cadre déformable*

L'essai du cadre déformable (Picture Frame Test) est le test le plus utilisé actuellement dans la caractérisation du cisaillement plan d'un renfort donné. Il inclut le cisaillement d'un échantillon (de dimension souvent 200×200 mm) où deux coins diagonalement opposés du cadre sont écartés à une vitesse de déplacement constante. Si les fibres sont supposées inextensibles, le renfort est soumis typiquement à un cisaillement pur avant qu'il y ait apparition de plis. Pour éviter tout effet de bord, l'échantillon doit être posé minutieusement et bloqué sur les côtés sans pré-contraindre le renfort. Il peut être soit épingle, soit maintenu par des barres [MB97].

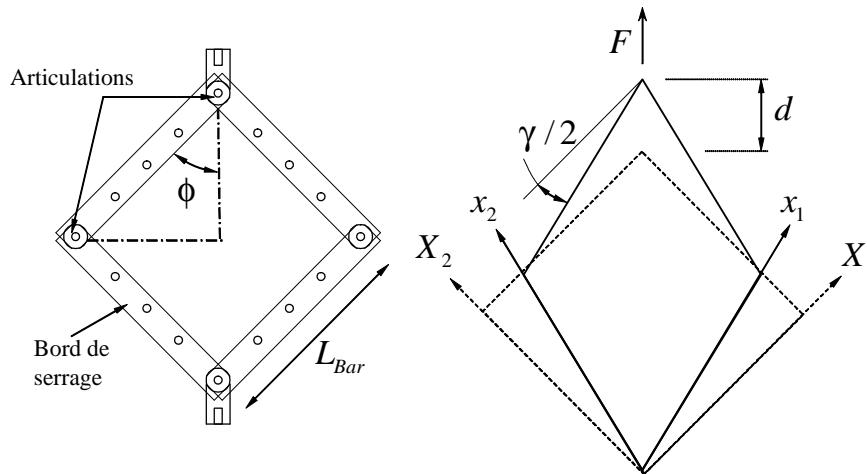


FIG. 2.4: Essai du cadre déformable.

La procédure est simple et les résultats obtenus sont raisonnablement reproductibles [Dum03a]. Puisque la déformation du matériau est essentiellement homogène au sein de l'échantillon (en négligeant les effets de bords), la cinématique du test est aisément calculable, facilitant ainsi une analyse rhéologique des résultats dans le cas de composites

à matrice polymère. L'avantage majeur de ce test est que l'angle de cisaillement ainsi que le taux de cisaillement sont directement reliés au déplacement et au taux de déplacement de l'articulation [HCL04].

La figure 2.4 montre la déformation à laquelle est sujet le matériau testé. La relation entre le système de coordonnées de référence X_i et le système de coordonnées lié à la matière x_i est donné par

$$\begin{cases} X_1 = \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right) x_1 + \left(\sin \frac{\gamma}{2}\right) x_2 \\ X_2 = \left(\sin \frac{\gamma}{2}\right) x_1 + \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right) x_2 \\ X_3 = \left(\frac{1}{\cos \gamma}\right) x_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 = \left(\frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma}\right) X_1 + \left(\frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma}\right) X_2 \\ x_2 = -\left(\frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma}\right) X_1 + \left(\frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \gamma}\right) X_2 \\ x_3 = (\cos \gamma) X_3 \end{cases} \quad (2.1)$$

Le tenseur taux de déformation ainsi que la quantité invariante $D_{ij}D_{ij}$ utilisée dans la représentation de la dépendance de la réponse de la matière au taux de cisaillement peuvent alors être calculés et valent

$$D_{ij} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{bmatrix} -\tan \gamma & \sec \gamma & 0 \\ \sec \gamma & -\tan \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 2 \tan \gamma \end{bmatrix}; \quad D_{ij}D_{ij} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^2 \left(\frac{1 + 3 \sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma} \right) \quad (2.2)$$

La longueur de chaque côté de l'échantillon carré est généralement de 200 mm tandis que l'épaisseur varie selon le renfort testé. La longueur du côté du cadre est notée L_{Bar} . L'expression reliant le déplacement de l'articulation à l'angle γ est

$$d = (2L_{Bar}) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) - \sqrt{2}L_{Bar} \quad (2.3)$$

et la relation reliant le taux de déplacement \dot{d} au taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est

$$\dot{d} = L_{Bar} \dot{\gamma} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) \quad (2.4)$$

Dans une étude expérimentale, la vitesse de déplacement de l'articulation est généralement choisie constante, ce qui implique une variation du taux de cisaillement pour des valeurs différentes du taux de déplacement (figure 2.5).

Ce type de test fournit aussi un excellent moyen de validation de modèles théoriques utilisés dans la prédiction du comportement rhéologique d'un matériau composite donné [MB97]. Etant donnée la courbe force déplacement obtenue expérimentalement, il suffit d'égaliser l'énergie de déformation relative à la loi de comportement utilisée à l'énergie fournit au cadre

$$F\dot{d} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} D_{ij} d\Omega \quad (2.5)$$

Pour minimiser l'effet de la viscosité, les essais sont généralement conduits à une vitesse de 5 mm/mn. Typiquement dans l'essai du cadre déformable, la vitesse est de 10 mm/mn [NHP99]. Le fait de réduire cette dernière n'altère pas significativement la caractérisation matérielle du cisaillement. Cette spéculation a été reportée par Wang [WPP99] qui a montré que la variation minimale du module de cisaillement est obtenue pour une plage de vitesse allant de 1 à 10 mm/mn.

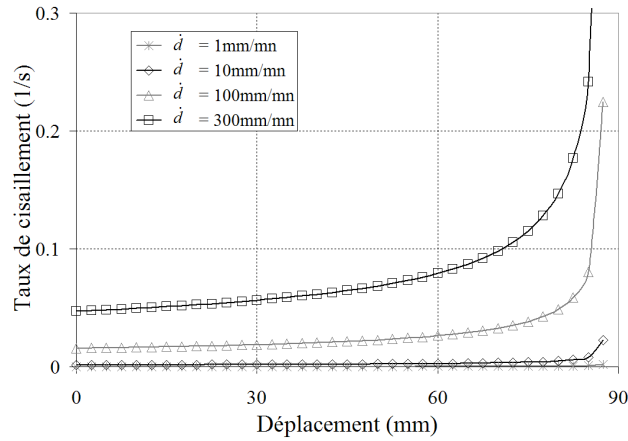


FIG. 2.5: Influence de la vitesse de déplacement sur le taux de cisaillement.

Une loi de comportement élastique est souvent utilisée pour la modélisation du cisaillement avant plissement. Plusieurs auteurs utilisent ce test pour déterminer la rigidité de cisaillement du tissu. Le module de cisaillement calculé est utilisé comme donnée d'entrée dans la simulation de la mise en forme des renforts secs ou pré-imprégnés. Même si l'essai de cadre déformable a toujours besoin d'une campagne d'essai intensive, il reste toujours le test le plus utilisé pour la caractérisation des propriétés mécaniques du tissu et reste un outil indispensable.

iii. *Extension bias*

Ce test peut être effectué selon deux procédures possibles. La première suit le système FAST (Fabric Assurance by Simple Testing) : elle est développée par CSIRO [Min95] pour le contrôle et l'assurance qualité d'un tissu. Elle consiste en une série d'instruments et de méthodes de tests relativement moins robustes et plus simples d'utilisation que ceux du KES. Ce test est très semblable à ce dernier pour ce qui est de la caractérisation des rigidités de flexion, de cisaillement et de tension sauf qu'il permet, en plus, de spécifier la stabilité dimensionnelle d'un tissu.

Ce test emploie principalement l'extension bias comme mesure du cisaillement. La procédure suit aussi la norme ASTM D1774-93 qui consiste à étirer un échantillon rectangulaire de longueur 200 mm pour 75 mm de largeur. Ce dernier, dont les directions chaîne et trame sont orientées à $\pm 45^\circ$ par rapport à la direction de chargement, est maintenu par des mors de façon à prévenir un éventuel glissement.

La figure 2.6 montre les zones remarquables sollicitées dans ce test : la zone A est soumise à un cisaillement pur, alors que la zone C reste non déformée. La zone B est soumise à la combinaison d'un glissement et d'un cisaillement. On peut montrer que l'angle de cisaillement dans la zone B est la moitié de l'angle de cisaillement total.

Le matériau peut être caractérisé par le rapport de la longueur et la largeur du tissu où la longueur doit être au moins deux fois la largeur du tissu. L'angle de cisaillement dans ce cas est mesuré à partir de la grille initiale constituée par les fibres, et donné par

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} \frac{w}{l} \quad (2.6)$$

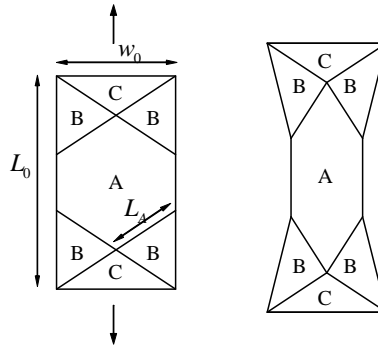


FIG. 2.6: Echantillon idéalisé soumis à un essai d'extension bias.

De façon similaire à l'essai du cadre déformable, l'extension bias est de principe simple à produire et fournit aussi des résultats relativement reproductibles [Pot79, Ske76, PW00, RBM00]. Le test peut aussi servir dans la détermination de l'angle de blocage. Contrairement à l'essai de cadre déformable, l'échantillon dans ce test est moins sensible aux effets de bords et la fusion de la résine autour des barres de maintien, durant des essais à hautes températures, a moins d'influence que dans le précédent test.

Par contre, l'analyse des résultats passe principalement par une analyse optique compliquée des échantillons qui peut l'être encore plus dans le cas de test à hautes températures. Le champ de déformation n'est pas homogène (combinaison de cisaillement pur et de glissement) et ne permet pas une analyse rhéologique précise des échantillons [JC95] [MB97].

iv. Analyse des efforts

Parce qu'on ne peut pas mesurer précisément l'épaisseur du tissu au cours de la déformation, l'estimation des contraintes locales est assez difficile, voire impossible [SSC03]. Dans ce cas, un effort par unité de longueur N est utilisé pour l'analyse des résultats expérimentaux.

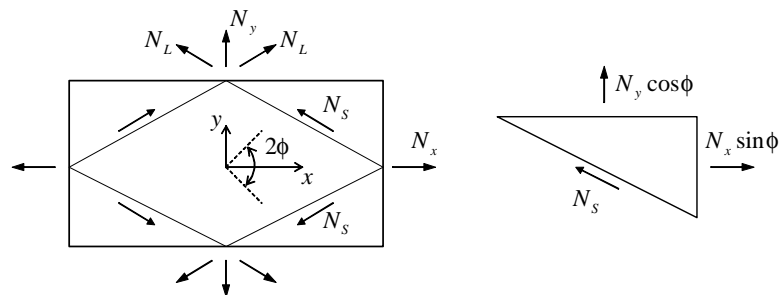


FIG. 2.7: Lignes de chargement au sein du matériau dans le système de coordonnées global (N_x et N_y) et dans le système de coordonnées matériel (N_L et N_S).

Dans le cas de l'extension bias, les efforts sont obtenus par l'hypothèse d'une distribution uniforme le long de la largeur et par le rapport de la force mesurée F_x et de la

largeur W à l'emplacement de la jauge.

$$N_x = \frac{F_x}{W} \quad (2.7)$$

Pour la traction biaxiale, on suppose une distribution uniforme autour de la section au voisinage de la jauge centrale donnée par $W \times L$, de façon à exprimer les efforts par unité de longueur comme suit

$$N_x = \frac{F_x}{W}, \quad N_y = \frac{F_y}{W} \quad (2.8)$$

Pour mieux comprendre et modéliser les mécanismes de déformation, il est utile de décomposer l'effort en composantes de tension N_L le long des mèches et des composantes de cisaillement N_S agissant parallèlement à la direction des mèches (figure 3b). Les conditions d'équilibre donnent

$$N_x \sin \phi = N_S \cos \phi + N_L \sin 2\phi \cos \phi \quad (2.9)$$

$$N_y \cos \phi = N_S \sin \phi + N_L \sin 2\phi \sin \phi \quad (2.10)$$

où $\phi = \pi/4 - \theta/2$ est l'angle entre les mèches et l'axe x . Ces efforts sont alors obtenus comme suit

$$N_L = \frac{N_x \sin^2 \phi + N_y \cos^2 \phi}{4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \quad (2.11)$$

$$N_S = \frac{N_x \sin^2 \phi - N_y \cos^2 \phi}{4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \quad (2.12)$$

pour l'extension bias, les équations suivantes peuvent être utilisées en mettant à $N_y = 0$. Pour l'essai du cadre déformable, les efforts par unité de longueur sont reliés à l'effort appliqué F par

$$N_S = \frac{F}{2L \cos(\pi/4 - \theta/2)} \quad (2.13)$$

Il n'est pas possible de déduire avec précision les efforts agissant le long de la direction des mèches. Ceci dépend de la pré-contrainte dans le matériau et du changement de la géométrie durant la déformation.

v. Normalisation de l'effort

Le problème majeur dans l'utilisation du cadre déformable est que les résultats diffèrent substantiellement d'une étude expérimentale à une autre bien que les conditions du test pour un échantillon donné soient les mêmes. Une question peut alors être soulevée : "comment corréler et comparer les données expérimentales obtenues dans les différents laboratoires ? Doit-on normaliser l'effort de réaction du cadre déformable par rapport à longueur ou la surface de l'échantillon testé ?" [PXC+02].

Plusieurs travaux, notamment celui de Harrison et al. [HCL04], ont suggéré que l'effort de cisaillement ou l'effort axial produit par les composites tissés devraient être normalisés par rapport à la taille de la surface de l'échantillon en admettant que l'effort mesuré est directement proportionnel au nombre de zones de contact subissant la déformation. La procédure suggère que l'argument de normalisation soit la longueur des côtés plutôt que la surface.

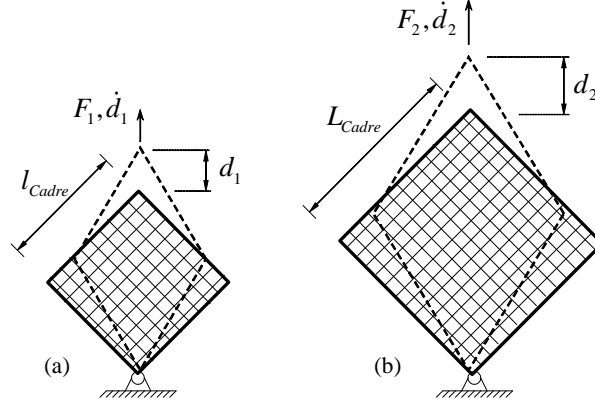


FIG. 2.8: Schéma de deux essais de cadre déformable de dimensions différentes (renfort est maintenu sur tout le bord) [HCL04].

La figure 2.8 montre deux essais de tailles différentes où le renfort est maintenu sur tout le bord du cadre. L'énergie nécessaire pour déplacer le coin est

$$P_i = F_i \dot{d}_i \quad (2.14)$$

$i = 1$ ou 2 représente respectivement le premier essai ou le deuxième. F_i sont les efforts mesurés et \dot{d}_i sont les taux de déplacement des articulations. On note que

$$\dot{d}_i = \dot{\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) L_i \quad (2.15)$$

Si le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est le même dans les deux tests (figures 2.8.a et 2.8.b) et le matériau est cisailé d'un même angle, alors la dernière équation peut s'écrire

$$\dot{d}_i = k L_i \quad (2.16)$$

où k est la même constante dans les deux équations et on a

$$P_i = k F_i L_i \quad (2.17)$$

Si l'énergie dissipée par un matériau incompressible donné à une déformation donnée et un taux de déformation donné, augmente de façon linéaire avec le volume du matériau déformé, alors, pour une épaisseur initiale constante, l'énergie de contrainte générée en cisaillement dans le cadre, à un angle et à un taux de cisaillement donnés, va croître linéairement avec l'aire de l'échantillon.

Cet argument est donné sous l'hypothèse que le matériau est homogène indépendamment de la taille de l'échantillon et donc

$$P \propto V \propto A_0 \propto L^2 \quad (2.18)$$

où V est le volume du matériau et A_0 est l'aire initiale. Ceci peut être écrit

$$P_i = c T L_i^2 \quad (2.19)$$

où T est l'épaisseur du matériau et c la dissipation d'énergie par unité de volume qui est constante à n'importe quel angle et taux de cisaillement donnés. L'équation est substituée à 2.14 pour donner

$$cTL_i = kF_i \quad (2.20)$$

et qui peut être utilisée pour montrer que

$$\frac{cT}{k} = \frac{F_1}{L_1} = \frac{F_2}{L_2} \quad (2.21)$$

où $\frac{cT}{k}$ est une constante pour un angle et un taux de cisaillement donnés. On peut alors, en considérant l'énergie nécessaire pour étirer le cadre, montrer que deux cadres de dimensions différentes vont donner un même rapport entre l'effort et la longueur de côté quand ils sont cisailés du même angle. Ce résultat est implicite en utilisant une approche de la mécanique des milieux continus.

Peng et al. [PCC+04, PXC+02] ont proposé une procédure de normalisation plus générale que la précédente dans le sens où deux types d'échantillons y sont considérés, un renfort rectangulaire maintenu sur tout le bord (figure 2.8) et un autre maintenu uniquement sur une partie du bord limitant ainsi la surface utile à l'étude (figure 2.9).

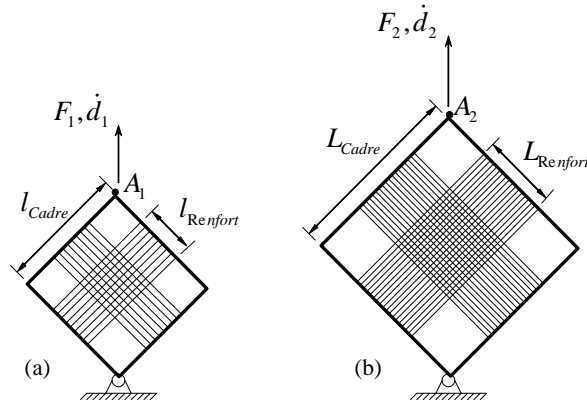


FIG. 2.9: Schéma de deux essais de cadre déformable de dimensions différentes (renfort maintenu sur une partie du bord) [PCC+04, PXC+02].

La normalisation est, de façon similaire, effectuée par une analyse énergétique des deux types d'essai où elle est dépendante de la configuration de ce dernier, l'argument de normalisation étant la longueur. La normalisation se réduit à un rapport de longueur défini par l'équation suivante

$$\frac{\bar{F}_2}{\bar{F}_1} = \frac{L_{Renfort}^2 / L_{Cadre}}{l_{Renfort}^2 / l_{Cadre}} \quad (2.22)$$

\bar{F}_2 et \bar{F}_1 sont les efforts atteints en fin de course par les points A_1 et A_2 . L'équation précédente se simplifie dans le cas du premier échantillon de la figure 2.8 en mettant $L_{Renfort} = L_{Cadre}$ et $l_{Renfort} = l_{Cadre}$.

Les arguments utilisés dans la normalisation de l'essai du cadre déformable s'appliquent aussi au test d'extension biaxiale. Les résultats peuvent alors être normalisés par l'utilisation d'une longueur caractéristique pour une comparaison de ces derniers

conduits à un même taux de cisaillement ou à une même vitesse de déplacement. Par contre, une méthode de normalisation de l'extension biais pour une comparaison avec l'essai de cadre déformable est moins évidente à cause de la nature différente des déformations dans les deux cas.

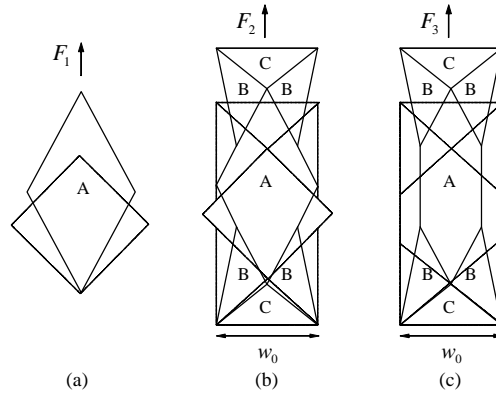


FIG. 2.10: Comparaison entre l'essai de cadre déformable et l'extension biais.

Harrison et *al.* [HCL02] ont comparé les réponses de l'essai du cadre déformable et l'essai d'extension biais pour la détermination du facteur $\frac{\epsilon_T}{k}$ calculé auparavant dans le cas de l'essai du cadre déformable. Ce facteur peut être utilisé pour la normalisation des données des tests d'extension biais par comparaison avec les données de l'essai de cadre équivalent normalisé.

En utilisant un modèle assez simple de déformation et en incluant la contribution relative des zones A et B à l'énergie de déformation dans l'essai d'extension biais pour normaliser l'effort appliqué, ils ont trouvé une bonne concordance entre les résultats analytiques et expérimentaux. La figure 2.10 montre trois géométries différentes des deux tests : (a) cadre avant et après déformation, (b) une géométrie hypothétique avant et après déformation utilisée pour le développement des arguments de la normalisation et de comparaison des résultats produits par les deux tests et (c) un test typique d'extension biais.

2.1.1.1.2 Modélisation de la contrainte de cisaillement Généralement et pour des fins de simplification et de réduction de coût des simulations numériques de la mise en forme d'un renfort sec ou pré-imprégné, la contrainte de cisaillement est prise en compte par le biais de la loi de Hooke où un module de cisaillement est à spécifier. Toutes les études se basent principalement sur la cinématique du cadre déformable pour la détermination du module de cisaillement avant et après blocage. Une combinaison de l'étude d'équilibre et du modèle de l'essai de cadre déformable constitue une bonne prédiction des propriétés du tissu.

Les équations d'équilibre de la maille élémentaire sont utilisées pour prédire les propriétés du tissu théoriquement. La contrainte de cisaillement est obtenue par interpolation des courbes expérimentales de l'essai de cadre déformable, le module de cisaillement étant le rapport de cette contrainte par la déformation de cisaillement [LCLS05]

$$G_{Ci_s} = \frac{\sigma_{Ci_s}}{\epsilon_{Ci_s}} \quad (2.23)$$

Il est difficile de mesurer ou de décrire un état de contrainte dans un renfort tissé, c'est pour cela qu'on utilise plutôt une formulation en effort par unité de longueur divisée en composantes de tension et composantes de cisaillement le long de la direction des mèches ainsi que celle de cisaillement.

Sharma et *al.* [SS04] ont représenté le cisaillement par un comportement élastique non linéaire traduit par l'utilisation d'éléments élastiques sur la diagonale des éléments utilisés. Ces derniers possèdent une réponse non-linéaire en contrainte fonction de la déformation de cisaillement $\sigma_{Cis} = f(\epsilon_{Cis})$. Elle a été implémentée en utilisant les courbes de contraintes/déformations $N_x = f_1(\epsilon_x)$ dans l'option élastique plastique de solveur MARC.

Cette courbe est obtenue à partir des essais de cisaillement en extension bias. En égalisant l'effort extérieur appliqué à l'élément de volume de largeur initiale $\sqrt{2}L_{elt}$ avec l'effort de cisaillement dans l'élément, ce qui donne

$$N_x \sqrt{2}L_{elt} = A\sigma_{Cis} \quad (2.24)$$

ainsi la réponse de l'élément $\sigma_{Cis} = f(\epsilon_{Cis})$ est reliée à la réponse de la matière $N_x = f_1(\epsilon_x)$ par un simple facteur d'échelle $\frac{\sqrt{2}L_{elt}}{A}$.

Dans le cas de quelques composites à matrice thermodurcissable, les modèles de type IFRF présentés (§ 3.2.1.1.1) échouent à eux seuls à représenter les données expérimentales lors d'un essai de cadre déformable. Des données expérimentales montrent que la plasticité est plus appropriée que la loi élastique pour la simulation de la rigidité de cisaillement (indépendante du taux de déformation) [YZM03].

Dans les travaux de Yu et *al.* [YZM03], le modèle IFRF a été modifié par l'ajout d'un matériau viscoplastique à écrouissage isotrope. Pour refléter le fait que la viscosité du modèle est une viscosité équivalente du composite, le modèle de cisaillement est écrit sous une forme générale

$$\text{Cisaillement intraplis} = f(\text{taux de déformation, structure fibres/matrice}) \quad (2.25)$$

où le profil de la déformation dans le plan est dominé par les déformations de treillis. Deux modèles peuvent être utilisés pour une implémentation EF, un modèle élasto-plastique pour modéliser le cisaillement intraplis à travers le moment dans le plan agissant contre la variation d'angle des fibres. La loi de comportement de l'articulation peut être écrite sous la forme ou par le biais une loi d'écrouissage isotrope dont le profil de déformation est contraint par la déformation de treillis.

$$M = f_M(\dot{\theta}, \theta) \text{ ou } \sigma = f_\sigma(\dot{\epsilon}, \epsilon) \quad (2.26)$$

où f_M et f_σ sont déterminées plutôt expérimentalement.

Quelques matériaux présentent un comportement différent en cisaillement par rapport à la direction de chargement [YHL05]. Dans ce cas, la contrainte de cisaillement peut être déterminée par l'utilisation d'un système non orthogonal et par l'utilisation d'une base de vecteurs covariants dans un essai de cadre déformable (figure 2.11).

L'effort résultant lié au cisaillement est le suivant :

$$F_s = \frac{F_R(\gamma)}{2 \cos(\pi/4 - \gamma/2)} \quad (2.27)$$

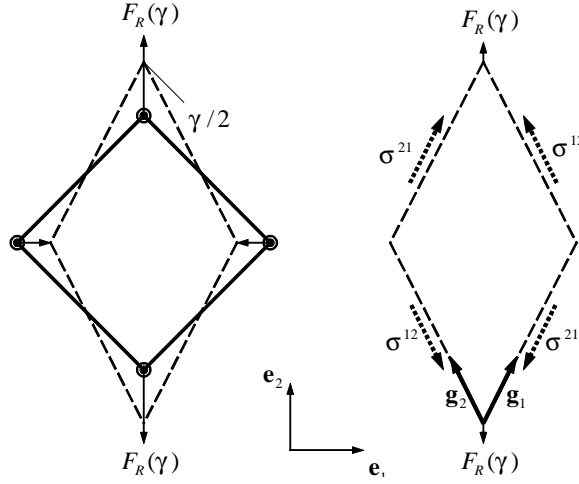


FIG. 2.11: Cinématique de l'essai de cadre déformable et construction de la base covariante normée $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ [YHL05].

Les contraintes actuelles agissant sur le spécimen peuvent être exprimées en se basant sur le système de vecteurs non-orthogonal $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$

$$\mathbf{g}_1 = g_1^1 \mathbf{e}_1 + g_1^2 \mathbf{e}_2, \quad \sqrt{(g_1^1)^2 + (g_1^2)^2} = 1 \quad (2.28)$$

$$\mathbf{g}_2 = g_2^1 \mathbf{e}_1 + g_2^2 \mathbf{e}_2, \quad \sqrt{(g_2^1)^2 + (g_2^2)^2} = 1 \quad (2.29)$$

où $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ représentent un système de coordonnées fixe durant le cisaillement du cadre. La contrainte instantanée dans le spécimen pendant le cisaillement peut être exprimée à l'aide du système de coordonnées non-orthogonal comme indiqué sur la figure

$$\sigma = \sigma^{12} \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 + \sigma^{21} \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1 \quad (2.30)$$

$$= \frac{F_s}{lc} \left(\sqrt{g^{11}} \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 + \sqrt{g^{22}} \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1 \right) \quad (2.31)$$

La rigidité du matériau peut être déterminée par la différentiation de l'équation par respect à l'angle γ dans la configuration déformée, ce qui donne

$$\frac{d\sigma}{d\gamma} = G_1 \begin{bmatrix} 2g_1^1 g_2^1 & g_1^1 g_2^2 + g_2^1 g_1^2 \\ g_1^1 g_2^2 + g_2^1 g_1^2 & 2g_1^2 g_2^2 \end{bmatrix} + G_2 \begin{bmatrix} g_1^1 g_2^2 - g_2^1 g_1^2 & 0 \\ 0 & g_1^1 g_2^2 - g_2^1 g_1^2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

où $G_1 = \frac{1}{lc} \left\{ \frac{dF_s}{d\gamma} \sqrt{g^{11}} + F_s \sqrt{g^{11}(g^{11} - 1)} \right\}$ et $G_2 = \left(\frac{F_s}{lc} \right) \sqrt{g^{11}}$.

On obtient finalement l'incrément de contrainte, contribution du cisaillement, en fonction de l'incrément d'angle de cisaillement par la relation

$$\Delta \sigma = \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_{xx} \\ \Delta \sigma_{yy} \\ \Delta \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2G_1 g_1^1 g_2^1 + G_2 (g_1^1 g_2^2 - g_2^1 g_1^2) \\ 0 & 0 & 2G_1 g_1^2 g_2^2 + G_2 (g_1^1 g_2^2 - g_2^1 g_1^2) \\ 0 & 0 & G_1 (g_1^1 g_2^2 - g_2^1 g_1^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

relation qui peut être ajoutée au calcul des contraintes par exemple dans le cas des modèles IFRF où la rigidité de cisaillement est nulle à un taux de déformation nul.

1. *Modèles tenant compte de la mesostructure et détermination analytique de l'angle de blocage*

Un nombre important de modèles analytiques basés sur la mesostructure du tissu ont été développés pour l'étude de son comportement. Ces modèles peuvent être utilisés pour quantifier les propriétés mécaniques d'un milieu continu tissé [HGB69]. Le plus souvent utilisé est celui de Peirce [Pei37], qui fournit un cadre mathématique pour relier les paramètres qui décrivent la configuration d'un tissé par des mèches circulaires.

Beaucoup d'articles ont employé une version modifiée du modèle géométrique de Peirce où la section est rapprochée à la forme réelle des mèches (non-circulaire). Warren [War92] a utilisé ce type de formulation pour prédire la réponse du tissu dans le cas d'un test de tension uni et bi-axiale le long des directions des mèches. Il s'est basé dans son étude sur la théorie des poutres en couplant la tension des mèches avec les effets de flexion hors-plan. Sagar et al. [SPH03] ont aussi utilisé un modèle modifié de Peirce pour déterminer la configuration du tissu par rapport à un chargement donné. Cependant, tous les modèles analytiques ne sont valides que dans le cas de chargement spécifique. Par exemple, les modèles de Warren et Sagar supposent une distribution orthogonale des familles de fibres et donc aucun de ces modèles ne permet une prise en compte de la déformation de cisaillement.

Un des premiers modèles proposés dans la littérature, est celui de Prodromou et Chen [PC97] qui ont proposé un modèle cinématique simple. Leurs calculs sont effectués sur la maille illustrée figure (2.12). Par cisaillement, la valeur initiale est à 45° de l'angle diminue jusqu'à ce qu'elle atteigne la moitié de l'angle de blocage.

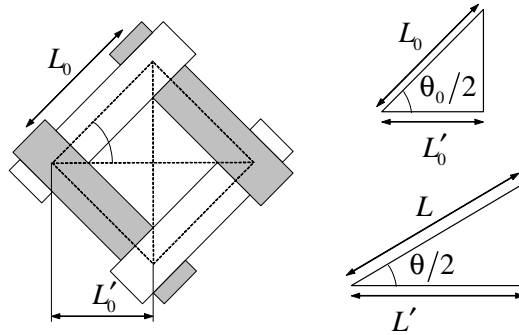


FIG. 2.12: Cinématique du cisaillement avant (a) et après déformation (b) [PC97].

La magnitude de l'angle de cisaillement fonction du déplacement va varier selon le type de renfort en fonction de l'espacement entre deux mèches successives

$$\cos \theta = \cos \theta_0(1 + \varepsilon_l) \text{ avec } \varepsilon_l = \frac{L' - L'_0}{L'_0} = \frac{L \cos \theta - L_0 \cos \theta_0}{L_0 \cos \theta_0} \quad (2.34)$$

L représente l'espacement entre les mèches et L' la moitié de la diagonale de la maille élémentaire. Prodromou et Chen ont supposé que la valeur minimale de l'angle de blocage survient quand la distance entre réseaux chaînes et trame est nulle, ce qui correspond à la relation suivante

$$\theta_B = \arcsin \frac{t}{L} \quad (2.35)$$

Par le biais de ce modèle, on peut montrer que l'angle de blocage dépend uniquement du rapport largeur de mèche et espacement entre celles-ci (appelé facteur d'espacement) :

$$SF = \frac{\text{taille de la mèche}}{\text{espacement entre les mèches}} = \frac{t}{L} \quad (2.36)$$

Dans la plupart des cas, les directions chaîne et trame ne sont pas forcément équivalentes. Dans le cas d'un tissu non équilibré où la largeur de la mèche dans le sens chaîne est différente de celle dans le sens trame, il est possible de relier l'angle de blocage avec les dimensions des macropores où l'angle maximal atteint en cisaillement est associé avec la disparition de ces derniers [MLDB00].

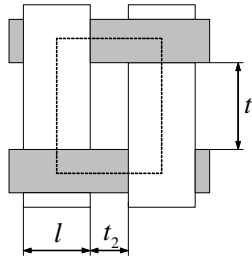


FIG. 2.13: Macropores de tailles différentes (tissu déséquilibré) [RBM00].

Rozant et *al.* [RBM00] ont proposé une modification du modèle de Prodromou pour l'adapter à des géométries de mèches non identiques comme indiqué sur la figure 2.13 où la largeur des mèches dans le sens trame t_1 est plus grande que celle dans le sens chaîne t_2 . Quand la distance entre les mèches dans une direction donnée est nulle, la distance entre le centre de deux mèches est égale à la largeur de la mèche. Puisque la distance entre deux centres de rotation autour des zones de contact entre les mèches est constante d'un point de vue géométrique, l'angle de blocage, θ_B , est donné par

$$\theta_B = \arcsin \frac{t_2}{t_2 + l} \quad (2.37)$$

où le quotient $\frac{t_2}{t_2 + l}$ définit le facteur d'espacement cette fois.

Des modèles plus évolués qui tiennent compte de la morphologie de la microstructure du renfort ont été également proposés. Grosberg et Park [GP66, GLP68] ont présenté un modèle qui prend en compte l'ondulation des fibres, ignorée auparavant pour éviter les complications mathématiques que cela engendre. Ils ont montré que les modes de déformation du tissu incluent plusieurs formes dépendantes du degré de cisaillement : une déformation due à l'intersection rigide quand l'effort de cisaillement est très faible pour avoir un frottement, un glissement des mèches aux points de contact (ceci prend effet avec l'apparition de frottement dans les zones de contact), une déformation élastique à la fin du glissement et finalement, plissement du renfort.

La figure 2.14 montre une représentation du cadre déformé. Quand le renfort est cisailé, les efforts agissant sur les mèches peuvent être divisés en efforts de cisaillement et efforts de tension agissant perpendiculairement et parallèlement à la direction de la mèche. A des faibles angles de cisaillement ($0^\circ \rightarrow 2^\circ$), les efforts de tension ont un effet négligeable et peuvent ainsi être ignorés [KC99]. Par conséquent et pour cette plage de

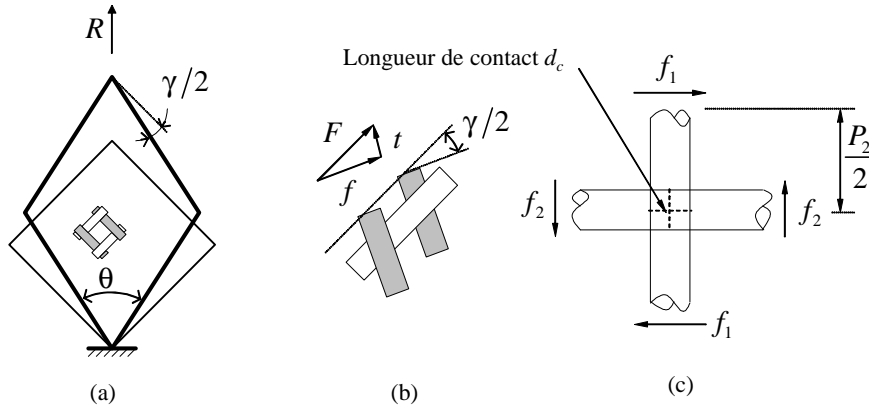


FIG. 2.14: Décomposition, au niveau des mèches, de l'effort en composantes de tension et de cisaillement [NHP99].

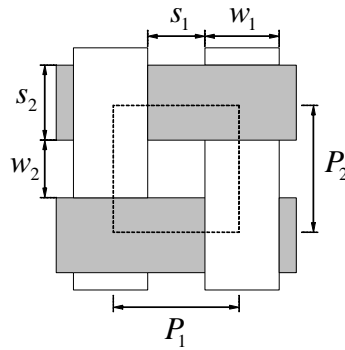


FIG. 2.15: Dimensions de la maille élémentaire dans le cas d'un tissu déséquilibré.

déformation (appelée zone de glissement initiale), le renfort peut être considéré dans un état de cisaillement pur.

Il est nécessaire de comprendre comment le modèle de cette zone initiale a été déterminé, puisque son principe est fondamental dans la détermination des modèles des propriétés thermoélastiques du milieu présentés dans la section ().

Cette zone de déformation a été bien étudiée par Grosberg et Park [GLP68] à travers quatre principales hypothèses : elle existe uniquement que pour une faible variation de l'angle de cisaillement où les efforts de cisaillement élémentaires sont décrits par

$$f_1 = \frac{FP_1}{L}, \quad f_2 = \frac{FP_2}{L} \quad (2.38)$$

les longueurs de contact d_c entre les mèches sont les mêmes dans les deux directions, les mèches sont inextensibles pendant la déformation de cisaillement, et la déformation des mèches est due uniquement à leur flexion.

Page et al. [PW00, PW02] ont analysé d'un point de vue mésoscopique les mécanismes de cisaillement et de glissement des mèches dans un renfort fibreux sur la base d'un travail expérimental antérieur. Une série de test a été conduite pour la caractérisation des propriétés des mèches et du renfort. L'analyse est divisée en deux parties : établissement

de la relation force déplacement par la considération d'un état de cisaillement uniforme et la considération d'un état de cisaillement non-uniforme causé par la variation de l'angle de cisaillement. Ils ont montré que pour un renfort ayant une grande rigidité de flexion, le glissement en question peut être significatif.

En reformulant la solution présentée par Grosberg et Park [GLP68], Nguyen et *al.* [NHP99] ont apporté deux principales modifications. La première étant la redéfinition de l'effort normal V créé par la pression exercée par les mèches aux points de contact et qui de suite induit une résistance au cisaillement par frottement. La deuxième étant la révision de la solution donnée par les premiers auteurs.

La définition de cet effort normal a été initialement donnée à travers le travail théorique et expérimental de Peirce [Pei37]. Une approche possible est de considérer les mèches comme étant des barres rigides dont l'extrémité encastree pour la prédiction des efforts normaux de contact [KNK73]. Cependant, si les barres sont rigides et si la déflexion se produit au centre par application d'un effort normal, l'hypothèse d'inextensibilité n'est plus valable. Pour remédier à ce problème, l'encastrement est respectivement remplacé par une liaison pivot et une liaison pivot glissante à chaque extrémité [NHP99]. Dans ce cas, l'effort normal est donné par

$$V = \frac{48EIh}{P_{1,2}^3} \quad (2.39)$$

où P_1 ou P_2 la longueur des mèches dans la direction chaîne et trame respectivement (figure 2.15) et la solution révisée incorporant l'effort normal est exprimée comme suit :

$$\gamma = \frac{F}{8EIL} (P_2 + P_1) \left[L - d_c \left(1 - \frac{a_s}{d_c} \right) \right]^2 \quad (2.40)$$

$$F = \frac{\mu \frac{V d_c}{24} \left(\frac{a_s}{d_c} \right)^2 \left(3 - 2 \frac{a_s}{d_c} \right)}{\frac{1}{4L} (P_2 + P_1) \left[L - d_c \left(1 - \frac{a_s}{d_c} \right) \right]} \quad (2.41)$$

$$\gamma : 0 \longrightarrow \frac{a_s}{d_c} = 1 \quad (2.42)$$

γ est l'angle de cisaillement dans le renfort et F est l'effort de cisaillement résultant.

Dans la suite de l'analyse, on maintient le même élément de volume mais les mécanismes de déformations en cisaillement diffèrent. Les surfaces de contact entre des mèches adjacentes augmentent avec la rotation de celles-ci. Cette résistance de contact est considérée maintenant comme un mécanisme dominant plus que le frottement aux points de contact. L'idéalisation de ce mécanisme de contact les a ramenés à proposer un modèle élastique de rigidité k situé dans la zone de contact à travers une longueur de contact d_c .

L'angle maximal de cisaillement, résultat des déformations en tension et de cisaillement le long de la direction chaîne et trame, peut alors être décrit par

$$\gamma = \frac{1}{P_2} \frac{\lambda \left[\frac{-f_2 P_1}{k d_c} + \frac{f_2 d_c}{2 t_1} \left(\frac{P_1 - d_c}{2} \right) \right] \left(\cot \frac{\lambda d_c}{2} + \cot \lambda \left(\frac{P_1 - d_c}{2} \right) \right) + \left[-\frac{f_2}{t_1} \left(\frac{P_1}{d_c} - 2 \right) \right]}{\lambda \left(1 - \frac{2 t_1}{k d_c} \right) \left(\cot \frac{\lambda d_c}{2} + \cot \lambda \left(\frac{P_1 - d_c}{2} \right) \right) - \frac{2}{d_c}} \quad (2.43)$$

Sun et *al.* [SP05] ont proposé, dans la même lignée, un modèle mécanique basé sur les modes de déformation de Grosberg et Park [GLP68]. Leur apport par rapport à ces

derniers est la correction de la formule erronée du moment de friction entre les réseaux chaîne et trame localisée sur les zones de contacts. Le modèle mécanique développé donne une meilleure approximation analytique que le modèle de Nguyen et al. [NHP99].

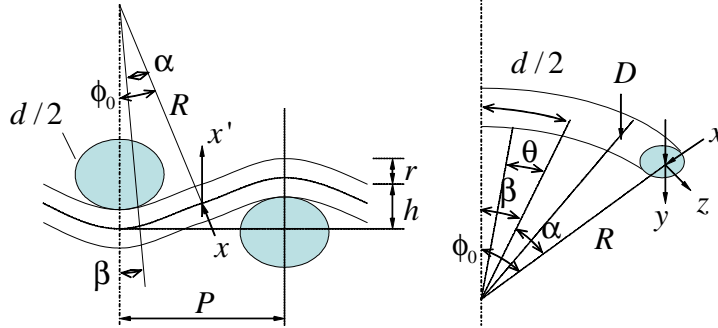


FIG. 2.16: (a) Section dans la direction chaîne ou trame. (b) Mèche ondulée soumise à un effort f [SP05].

Les hypothèses restent les mêmes que celles données précédemment, la structure courbe de la mèche étant représentée entièrement avec deux différentes courbures dans le sens chaîne et dans le sens trame. En considérant l'équilibre de glissement, l'angle de cisaillement est finalement donné par

$$\gamma = \frac{F}{L} \left\{ P_2 R_1^2 \cos \phi_{01} \left[\frac{\sin^2(\alpha_1 + \theta')}{2E_1 I_{x1}} + \frac{[1 - \cos(\alpha_1 + \theta')]^2}{2C_1} \right] + \right. \quad (2.44)$$

$$\left. P_1 R_2^2 \cos \phi_{02} \left[\frac{\sin^2(\alpha_2 + \theta')}{2E_2 I_{x2}} + \frac{[1 - \cos(\alpha_2 + \theta')]^2}{2C_2} \right] \right\} \quad (2.45)$$

Les paramètres portant l'indice 1 et 2 se réfèrent respectivement à la direction chaîne et trame selon la figure 2.16. puisque le glissement prend place graduellement, θ' varie entre 0 et β dans la formule précédente.

2.1.1.2 Comportement en tension

Du fait même du tissage et de l'alternance des fils, le tissu présente une ondulation naturelle de ses mèches. Lorsque l'on exerce une traction dans une direction, les fils sollicités vont avoir tendance à devenir rectilignes. Dans le cas où l'une des directions est libre et l'autre sollicitée en traction, on observe alors que la direction sollicitée est rectiligne tandis que l'autre est fortement ondulée. Pour d'autres cas intermédiaires, un état d'équilibre est atteint, où les deux directions ont subi des variations d'ondulation. Généralement ce comportement biaxial se produit à de très faibles déformations ($< 1\%$) [BGH01, Boi97]. La rigidité est donc très faible en début de sollicitation, puis retrouve une valeur identique à celle des mèches (figure 2.17). A partir d'une certaine valeur de déformation, le matériau subit un endommagement pur qui se traduit par une fissuration successive de l'ensemble des fibres.

La mesure des modules d'Young chaîne et trame permet la mise en évidence de la désondulation des fibres et l'influence que la résine peut avoir sur ce phénomène. En effet,

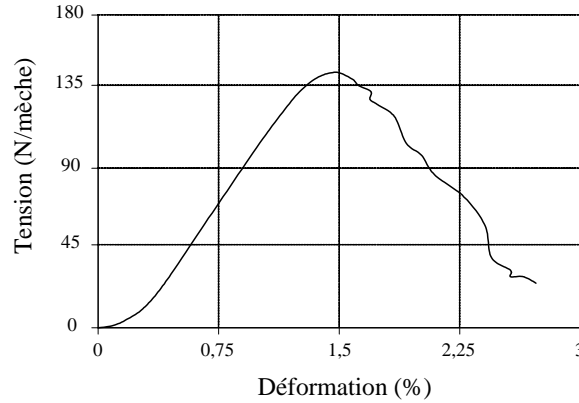


FIG. 2.17: Schématisation d'une courbe de traction d'un renfort tissé

dans le cas de tissu sec, le contact entre les fibres est un contact parfait carbone/carbone. Dans le cas imprégné, il existe de la résine entre les fibres ce qui crée une certaine adhérence et modifie la nature du glissement puisqu'il y a, dans un premier temps, un écrasement de la résine et dans un second temps un écrasement des mèches.

Boisse et *al.* [BCGS95, Boi97] ont défini un modèle qui compte uniquement des tensions dans la direction des mèches avec prise en compte de l'effet biaxial. Pour une implémentation éléments finis, les directions des mèches sont confondues avec le repère local de l'élément, le tenseur des tensions est donné par

$$\mathbf{T} = T^{11}\mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}_1 + T^{22}\mathbf{h}_2 \otimes \mathbf{h}_2 \text{ avec } T^{ii} = \int_S \sigma^{ii} dS \quad (2.46)$$

\mathbf{h}_1 et \mathbf{h}_2 étant respectivement la direction des mèches dans le sens chaîne et trame, S étant la section d'une mèche et la contrainte σ^{ii} est obtenue par le biais de la loi unidimensionnelle élastique linéaire de Hooke, T^{11} et T^{22} peuvent être fonction des déformations axiales ε_{11} et ε_{22} pour refléter le comportement biaxial en petites déformations.

Dans un travail plus récent [BZG05], ils ont pris en compte l'effet de cisaillement par l'intermédiaire d'une relation linéaire entre le couple de cisaillement et l'angle entre les mèches appliqué à l'entrecroisement de celles-ci, la rigidité de cisaillement possédant une valeur plus élevée lorsque l'angle de blocage est atteint.

Mohammed et *al.* [MLDB00] ont proposé une analyse mathématique sur la base de la théorie d'élasticité en grandes déformations de cisaillement. Le tenseur de Cauchy associé à la configuration initiale est donné par l'équation :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon} + \sum T_i \mathbf{F}\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{F}\mathbf{i}_i \quad (2.47)$$

où p est une pression hydrostatique arbitraire pour satisfaire la condition d'incompressibilité, \mathbf{E} est la matrice de rigidité. Le dernier terme définit la condition d'inextensibilité des fibres. Qui et Pence [QP97] ont écrit le dernier terme comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon} + \sum t_i f'(C_{11}) \mathbf{F}\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{F}\mathbf{i}_i \quad (2.48)$$

où t_i est un paramètre matériau pour chaque direction ($t_i = 0$ correspond à un matériau néo-Hookéen et $t_i \rightarrow \infty$ correspond à une complète inextensibilité des fibres). $(C_{11})^{\frac{1}{2}}$ est

l'élongation (dilatation, extension) dans la direction des fibres $\mathbf{F}\mathbf{i}_i$ et C_{11} élément de la matrice représentant le tenseur de dilatations $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$. $f'(C_{11})$ est la dérivée première de $f(C_{11})$ où $f(C_{11}) = \frac{1}{2}(C_{11} - 1)^2$. Ces équations ont été utilisées afin d'analyser les courbes de cisaillement. Cette analyse a été appliquée avant la limite de blocage en cisaillement et l'apparition de plis dans le tissu.

Une analyse de régression a été faite pour déterminer E_{11} , E_{12} et t_i à partir des données de σ_{12} et σ_{11} en fonction de γ . Les valeurs des paramètres déterminés couvrent une large plage de données de cisaillement avec blocage et il n'y a pas que les petites déformations qui sont données par le module sécant à une déformation de 1%. La nature non linéaire des données expérimentales et des courbes de prédiction est due essentiellement au changement d'angle entre les directions de fibres au cours du cisaillement.

Cherouat et al. [CB01] ont proposé, un modèle qui peut être classé dans l'approche discrète et qui a le mérite de deux familles complémentaires d'éléments : des éléments membranaires pour la représentation de la résine et des éléments poutres pour la représentation de la déformation chaîne et trame. Un comportement viscoélastique isotrope est attribué à la résine, celui des fibres est considéré isotrope non-linéaire et résulte de trois mécanismes de déformation : cisaillement (avec effet de treillis), élongation en tension et rotation relative.

En utilisant le tenseur de contraintes objectif de Green-Naghdi, le taux de contraintes tourné dans la direction des fibres $\dot{\hat{\sigma}}_f$, dépend de la dilatation $\hat{\mathbf{D}}_f$ dans la même direction et peut être écrit en chaque pas de temps par

$$\dot{\hat{\sigma}}_f = E_f(\lambda_f) \hat{\mathbf{D}}_f \quad (2.49)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_f = \frac{\dot{\lambda}_f}{\lambda_f} N_i^f \otimes N_i^f; \quad E_f(\lambda_f) = \bar{E}_f(1 - e^{-\dot{\lambda}_f/\lambda_f \epsilon_{sh}}) \quad (2.50)$$

λ_f étant la dilatation des fibres dans la direction N_i^f . La loi de comportement des fibres est non-linéaire et écrite en fonction du module longitudinal d'élongation $E_f(\lambda_f)$. Ce dernier est fonction de la dilatation principale λ_f , du module élastique des fibres \bar{E}_f et du facteur d'ondulation ϵ_{sh} .

2.1.1.3 Flexion

De manière générale, les lois de comportement des composites à renforts tissés sont formulées dans le plan du tissu en considérant, pour une implémentation éléments finis, une hypothèse de contraintes planes dans la majorité des cas. Pour ce qui est des propriétés hors-plan, elles sont souvent considérées indépendantes des propriétés matérielles dans le plan. Les lois de comportement sont intégrées dans l'épaisseur afin d'obtenir la rigidité de flexion ou de torsion du renfort par exemple.

Cette façon de faire est assez avantageuse surtout dans le cas de la formulation en contraintes planes. En conséquence, moins d'attention a été apportée à la relation entre les propriétés dans le plan et les propriétés en flexion du tissu. Kang et al. [KYC95] ont montré qu'il existe une différence significative entre la rigidité de flexion calculée à partir des lois de comportement formulées dans le plan et les valeurs obtenues expérimentalement : la différence se traduit généralement par une rigidité anormalement plus élevée que celle obtenue expérimentalement et donc étroitement dépendante de la loi de comportement dans le plan choisi.

Puisque les renforts tissés sont très flexibles et aussi sensibles à de petites variations de chargements, la mesure de la rigidité requiert une instrumentation plus ou moins sophistiquée. Plusieurs études expérimentales ont été menées sur la flexion dans le domaine de la recherche textile. La recherche sur la flexion des tissus étant devenue très importante par l'automatisation des processus de fabrication incluant des manipulations hors plan du tissu, plusieurs types de tests standard décrits dans (§ 2.1.1.1.1.) ont été mis au point : le KES [Kaw80b], FAST [Min95] et ASTM [AST87].

La caractérisation de la flexion des tissus reste un problème non résolu dans le sens où il n'existe pas de test assez fiable qui permet d'établir un ensemble de valeurs qui définissent de façon unique un modèle de matériau. Le Système d'Evaluation de Kawabata [Kaw80b], est souvent le test le plus utilisé pour la détermination de la rigidité de flexion d'un tissu. Dans ce test, le tissu est monté verticalement pour éviter les effets de la gravité et les moments de flexion sont mesurés au fur et à mesure que le tissu fléchit à un taux constant de $5 \text{ cm}^{-1}/\text{s}$ vers l'avant et vers l'arrière. Dans les tests standards ASTM [AST87] pour la mesure des rigidités de flexion, une longueur de flexion est définie par la longueur horizontale du tissu quand l'angle que fait le tissu avec l'horizontale fait 45° . La rigidité de flexion est approchée alors par

$$B = w \left(\frac{L}{2} \right)^3 \quad (2.51)$$

où L est la longueur de flexion et w est le poids par unité de surface. Ce qui suppose que B soit une constante, ce qui n'est pas forcément le cas pour plusieurs types de renforts.

Les résultats obtenus par le KES ont montré que les courbes de flexion présentent une forme d'hystérésis représentée par un recouvrement lors d'un essai cyclique de charge décharge observé dans les essais types de KES. Il est à noter que ces effets d'hystérésis sont dus principalement au frottement entre les mèches, à l'apparition des plis et à la compaction hors plan des mèches qui en résulte.

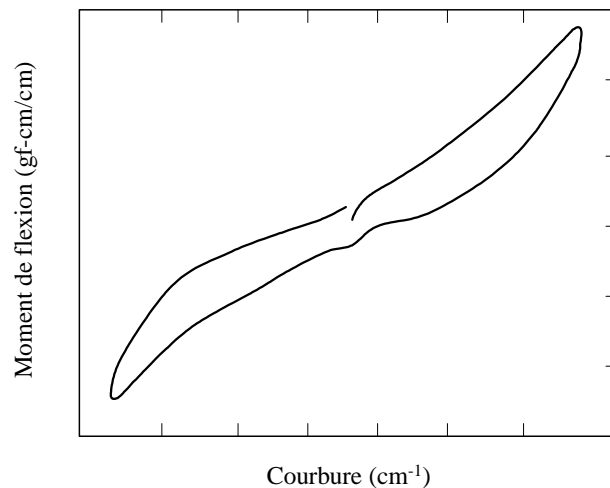


FIG. 2.18: Comportement en hystérésis constaté par l'essai de flexion du Système d'Evaluation de Kawabata.

Il existe plusieurs mécanismes qui exercent une influence sur le comportement en

flexion des renforts. Les effets d'hystérésis peuvent s'expliquer par des contributions élastiques non linéaires au début du test, visqueuses et de frottements de Coulomb dans les zones courbes du résultat du KES-F. La détermination du drapage du renfort dépend étroitement de la représentation de ces effets [HC98, JP98] et n'importe quel modèle à développer doit alors en permettre la reproduction.

La plupart des modèles s'appuie sur une approximation des courbes obtenues par le biais des différents tests évoqués auparavant, soit sur des approches de type théorie des poutres ou autres. La modélisation de la flexion des tissus a été introduite par Peirce [Pei30] qui a appliqué la théorie des poutres pour l'analyse des tissus flexibles. Griesse et Taylor [GT96] ont décrit une approche énergétique pour trouver la forme finale d'un tissu fléchi. Les énergies potentielles et de flexion stockées dans le tissu sont formulées en se basant sur une théorie de friction. Ils ont cherché une approximation analytique de la forme d'un tissu encastré à une extrémité et fléchi sous l'effet de son propre poids. Cette fonction analytique peut être utile pour calculer la rigidité de flexion ainsi que l'énergie potentielle et de flexion du tissu fléchi à partir des données expérimentales.

Alternativement, pour une rigidité de flexion donnée et un poids par unité de surface, la forme du tissu fléchi peut être calculée par une fonction analytique. Jiang et *al.* [JHK99] et Lomov et *al.* [LBB⁺02, LVBL03] ont utilisé le Système d'Evaluation de Kawabata pour la caractérisation des propriétés de flexion des NCF (Non Crimp Fabric) et ont présenté un modèle prédictif pour le calcul de la rigidité de flexion. Pour estimer les propriétés isotropes de flexion, la rigidité tient compte de la différence de courbure des mèches différemment orientées sous un chargement de flexion. L'interaction entre les plis et la couture pouvant être négligée, la rigidité de flexion d'un renfort multiplis peut être donnée alors par

$$B_{fabric} = \sum B_i \cos^2 \alpha \quad (2.52)$$

où B_i est la rigidité de flexion d'un pli et α l'angle entre la direction du pli et la direction de flexion.

Les modèles analytiques basés sur un recalage des données expérimentales recueillies par des essais de KES possèdent généralement trois composantes; une composante élastique linéaire ou non-linéaire, une composante d'amortissement et une composante de frottement. Grosberg [GP66] a tenté d'introduire un modèle de frottement comme indiqué sur la figure 2.19 pour une représentation linéaire assez grossière de l'hystérésis. Un moment de friction s'installe dans la zone de contact et d'intersection entre les réseaux de fibres. Quand la résistance à ce moment est dépassée, le tissu peut fléchir et la flexion est alors modélisée par une relation linéaire moment-courbure.

Plus récemment Lahey [Lah02, LH04] a présenté un modèle s'appuyant sur une représentation analytique de la courbe moment-courbure capable de simuler le comportement du tissu et d'extrapoler les courbes obtenues au zones non couvertes par les essais de KES (figure 2.20). Le modèle suit les techniques de modélisation proposées par Bliman et Sorine [BS93] résultant en une équation différentielle de second ordre en la courbure du tissu.

Le modèle en question a été implémenté, mais ne permet pas d'avoir des résultats satisfaisants à cause de l'impossibilité de couplage des déformations hors plan et celles dans le plan du tissu [Lah02]. Aucune méthode satisfaisante n'a été trouvée pour traiter ce problème et donc le modèle était incapable de simuler correctement le drapage de tissus.

Yu et *al.* [YZP⁺05], quant à eux, ont proposé une analyse de la flexion de renforts

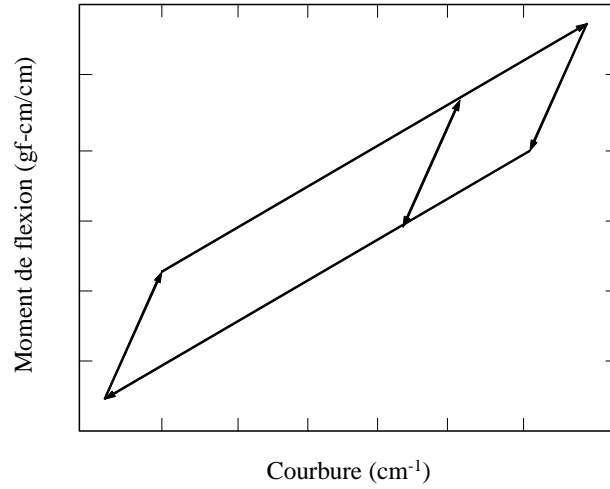


FIG. 2.19: Modèle de flexion de Grosberg [GP66].

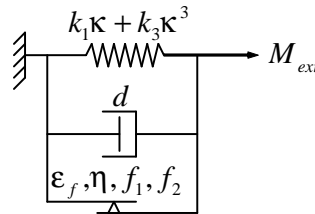


FIG. 2.20: Modèle analytique de flexion de tissu [LH04].

tissés par le biais de la théorie des poutres. La rigidité de flexion est donnée dans le cas d'un module axial asymétrique. Pour bien représenter la rigidité réelle du tissu, un comportement bilinéaire en flexion est supposé pour une certaine plage de tension et de compression de façon à réduire la rigidité obtenue.

Par asymétrique, on sous-entend que les modules respectifs en compression et en traction sont différents. Ces modules sont déterminés par une méthode assez simple, l'équation d'équilibre étant donnée par

$$M = \int_A \sigma_x y dA \quad (2.53)$$

Les déformations ϵ_x peuvent être définies en se basant sur la cinématique de tension de flexion indiquée sur la figure 2.22. Les contraintes de compression et de traction, pour une déformation de flexion, sont données par

$$\begin{cases} \sigma = E_t \epsilon, & \epsilon > 0 \\ \sigma = E_c \epsilon, & \epsilon < 0 \end{cases} ; \quad \epsilon_x = \frac{y - \zeta}{R} \quad (2.54)$$

où ζ est la distance de la ligne centrale à l'axe neutre. E_c et E_t sont respectivement les modules élastiques en compression et en traction.

Ils ont considéré une poutre de section rectangulaire pour l'analyse de l'effet du module asymétrique sur la rigidité de flexion (largeur b et hauteur h). La rigidité de

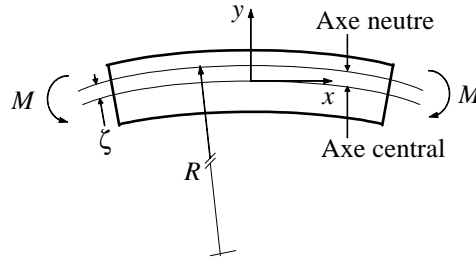


FIG. 2.21: Flexion pure d'une poutre [YZP+05].

flexion de la poutre résultante s'écrit alors

$$M = B_f \kappa = E_t I \kappa \Psi(\xi) \quad (2.55a)$$

$$B_f = E_t \left(\frac{bc^3}{12} \right) \left\{ \frac{\xi}{2} (1 + \eta)^2 (1 - \frac{\eta}{4}) + \frac{1}{2} (1 - \eta)^2 (1 - \frac{7}{4} \eta) \right\} \quad (2.55b)$$

$$\Psi(\xi) = \left\{ \frac{\xi}{2} (1 + \eta)^2 (1 - \frac{\eta}{4}) + \frac{1}{2} (1 - \eta)^2 (1 - \frac{7}{4} \eta) \right\}, \quad I = \left(\frac{bc^3}{12} \right), \quad \kappa = \frac{1}{R} \quad (2.55c)$$

où $\eta = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}$, $\xi = E_c / E_t$ et $\zeta = \eta \frac{c}{2}$.

Pour les modules symétriques ($\xi = 1$, $E_c = E_t$), $\Psi = 1$ et donc l'équation 2.55a est équivalente à la formule générale de flexion $M = EI\kappa$. La relation entre le facteur asymétrique ξ et le facteur de flexion Ψ montre une réduction non-linéaire de la rigidité de flexion quand on considère un module asymétrique.

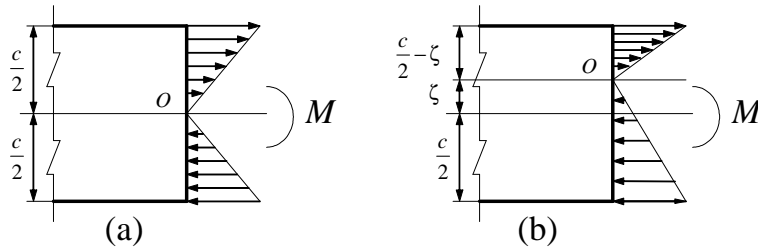


FIG. 2.22: Distribution de la contrainte dans la section de la poutre, (a) cas symétrique, (b) cas asymétrique [YZP+05].

Quand le module de compression est égal à la moitié du module en traction, la rigidité de flexion devient à hauteur de 57% de la rigidité du module symétrique ($E_c = E_t$). On note que le facteur ξ est utilisé pour simuler proprement le comportement en flexion d'une préforme (de l'ordre de 0.015 d'après les tests expérimentaux).

2.1.1.4 Glissement interplis

Lors de la mise en forme d'un composite à plusieurs empilements de plis sur des géométries à simple ou à double courbure, un glissement aux interfaces communes de deux plis consécutifs survient. Pour étudier ce phénomène, un dispositif de traction à

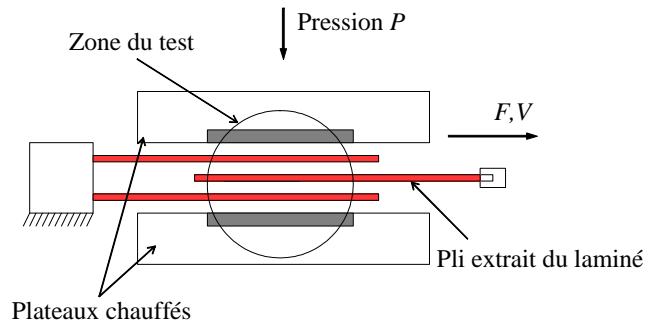


FIG. 2.23: Dispositif expérimental d'étude du glissement interplis [MRM93].

chaud sous pression d'un monopli dans un laminé a été développé par deux équipes différentes [MRM93, MM95], [MS94].

La figure 2.23 représente le schéma de principe de ce dispositif qui permet d'étudier les effets de la température d'utilisation, de la pression normale, de la vitesse de glissement et de la séquence d'empilement. La vitesse de traction est déterminée en spécifiant le temps durant lequel le mors de traction a parcouru une distance préalablement fixée. L'effort de traction est quant à lui donné par une mesure directe.

La contrainte de cisaillement à l'interface est alors déterminée en utilisant la surface cisailée aux interfaces ainsi que l'effort nécessaire pour maintenir constante la vitesse de traction :

$$\tau = \frac{F(t)}{2l(L - Vt)} \quad (2.56)$$

où L et l sont la longueur et la largeur du monopli, F est l'effort de traction, τ est la contrainte de cisaillement transverse et V la vitesse de l'essai.

La figure 2.24 montre une courbe typique obtenue à partir de ce test [MS94]. La partie précédant le premier pic est assimilée à un comportement élastique. Les mesures de l'effort et du déplacement engendré permettent la détermination de la contrainte élastique de glissement. En dessous de cette contrainte, aucun glissement n'est constaté ; au-delà de cette contrainte, le glissement est possible et irréversible. La deuxième partie de la courbe correspond à la stabilisation de l'effort et permet déterminer la contrainte de cisaillement transverse.

Afin de démontrer que le glissement interpli est gouverné par le film de résine constituant l'interface entre deux monoplis, un film polymérique de même nature que la matrice du composite est introduit entre les monoplis avant la pré-consolidation du laminé [MM95]. Dans ce cas, des efforts moins importants de cisaillement transverse sont mesurés attestant ainsi d'une meilleure lubrification du mécanisme de glissement.

Dans les deux cas d'étude, les auteurs relèvent la même influence de chacun des paramètres étudiés : une augmentation de la température permet un abaissement de la viscosité et une diminution de l'effort de traction. L'effort de traction est plus important dans le cas d'un empilement à orientations identiques que dans le cas d'un empilement à orientations alternées. Ceci est dû au fait que les fibres de chaque monopli successif orienté à 0° s'interpénètrent et créent ainsi des interactions entre elles.

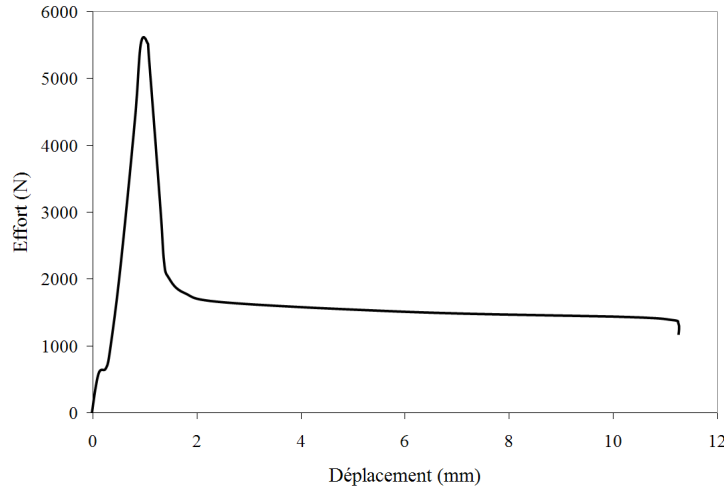


FIG. 2.24: Courbe typique du glissement interplis.

2.1.2 Comportement de la matrice

2.1.2.1 Modèles visqueux

La façon la plus simple est de traiter la matrice comme un fluide purement visqueux en faisant l'hypothèse que les fibres y sont distribuées de façon continue. Les directions locales des fibres sont notées par le vecteur unitaire \mathbf{a} pour un renfort unidirectionnel et par les vecteurs unités \mathbf{a} et \mathbf{b} pour un renfort bidirectionnel. Ces derniers sont dits mécaniquement équivalents si la réponse du milieu n'est pas affectée en échangeant \mathbf{a} et \mathbf{b} .

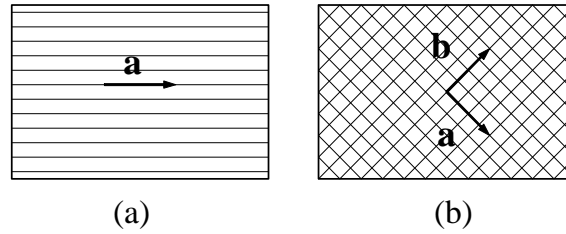


FIG. 2.25: (a) Renfort unidirectionnel, (b) Renfort bidirectionnel.

Les modèles continus visqueux unidirectionnels découlent des modèles élastiques linéaires à renforts fibreux établis par Spencer en 1972 [Spe72, Spe84] qui peuvent être appliqués aux matériaux visqueux et viscoélastiques. Le cas le plus simple est celui d'un composite dans lequel le renfort est constitué d'une seule famille de fibres où la contrainte de Cauchy s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + T\mathbf{A} + 2\mu_T\mathbf{E} + 2(\mu_T + \mu_L)(\mathbf{A}\mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{A}) \quad (2.57)$$

p étant une contrainte hydrostatique, T une tension dans la direction des fibres, $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$, et \mathbf{E} le tenseur de déformation de Green-Lagrange.

Pour l'obtention de l'équation 2.57, deux approximations sont généralement faites : l'incompressibilité ($tr\mathbf{E} = 0$) du matériau d'une part ; et l'inextensibilité ($tr\mathbf{AE} = 0$) des fibres, d'autre part.

Dans ce cas, le passage à une réponse viscoélastique caractérisant un milieu polymère se fait par application du principe de correspondance viscoélastique de Christensen [Chr79] : ainsi les solutions des problèmes élastiques peuvent être étendues afin de donner des solutions au problème viscoélastique équivalent. Dans ce cas, un matériau visqueux isotrope transverse représentant un composite à renfort unidirectionnel peut être décrit par

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + T\mathbf{A} + 2\eta_T\mathbf{D} + 2(\eta_T + \eta_L)(\mathbf{AD} + \mathbf{DA}) \quad (2.58)$$

\mathbf{D} étant le tenseur taux de déformation, η_T et η_L sont respectivement les viscosités transversale et longitudinale du fluide.

Ce modèle, établi par Rogers en 1989 [Rog89] et qui porte le nom de "matériau à renfort fibreux idéalisé" (IFRF), a bien fait ses preuves en ce qui concerne la simulation de mise en forme de pré-imprégnés unidirectionnels [PQDLH92] [MOB98].

A partir de ce dernier, McGuinness et *al.* [MB98, MB97] ont proposé d'intégrer une loi puissance pour prendre en compte la non-linéarité de la viscosité à la température de mise en forme. Cette loi munie du modèle visqueux, à faible taux de cisaillement, s'avère pertinente pour représenter le comportement d'un unidirectionnel, à certaines températures de thermoformage, spécialement le APC-2. A des températures plus élevées, le matériau peut suivre des lois plus compliquées que celle-ci ; dans ce cas, le modèle de carreau de Shuler et d'Advani [SA96] suit mieux la prédiction des essais expérimentaux.

La particularité des travaux de McGuinness et *al.* reste celle de l'essai du cadre déformable (cf. § 2.1.1.1.1.i.) pour la mesure des viscosités le long et transversalement à la direction des fibres du modèle théorique. L'avantage est que l'essai du cadre reproduit fidèlement les conditions pratiques de mise en forme, à savoir des forces directes dans le plan pour produire de grandes déformations en cisaillement, contrairement au viscosimètre où la déformation de cisaillement est produite par un chargement de petites amplitudes à la surface.

2.1.2.2 Autres types de modèles

Pour les composites à renfort unidirectionnel [LR02], on peut supposer que, à la température de mise en forme, le glissement entre les fibres parallèles n'est pas limité et que la nature du milieu nécessite que les contraintes ne soient pas uniquement liées au taux de déformation mais principalement à la déformation elle-même.

Cette constatation suppose alors que le composite soit considéré comme solide élastique plus que fluide. La température de formage se situant entre la température ambiante (T_{amb}) et la température de fusion (T_{fus}) de la matrice, on peut alors supposer des propriétés élastiques de la matrice comme suit

$$E_m(T) = \alpha_T E_m(T_{amb}) + (1 - \alpha_T) E_m(T_{fus}) \quad \text{pour } T_{amb} \leq T \leq T_{fus} \quad (2.59)$$

$$v_m(T) = \alpha_T v_m(T_{amb}) + (1 - \alpha_T) v_m(T_{fus}) \quad \text{pour } T_{amb} \leq T \leq T_{fus} \quad (2.60)$$

où α_T représente un taux entre 0 (température de fusion) et 1 (température ambiante). Pour une première approximation, on peut prendre $\alpha_T = 0.5$. Les propriétés d'un composite à renfort unidirectionnel peuvent alors être obtenues comme étant celles d'un

solide élastique isotrope transverse en utilisant tout simplement la loi du mélange

$$E_L = V_f E_{fL} + (1 - V_f) E_m; \quad E_T = \frac{E_m}{1 - V_f(1 - E_m/E_{fT})} \quad (2.61)$$

$$G_{LT} = \frac{G_m}{1 - V_f(1 - G_m/G_{fLT})}; \quad G_{TT} = \frac{G_m}{1 - V_f(1 - G_m/G_{fTT})} \quad (2.62)$$

$$v_{LT} = V_f v_{fLT} + (1 - V_f) v_m; \quad v_{TT} = \frac{E_T}{2G_{TT}} - 1; \quad v_{TL} = \frac{E_T}{E_L} v_{LT} \quad (2.63)$$

où les exposants L et T représentent respectivement les directions longitudinales et transversales du composite.

Wiersma et *al.* [WPA98] ont montré que les stratifiés en composites à renfort unidirectionnel à matrice thermodurcissable cuits à haute température peuvent exhiber un phénomène de retour élastique.

Dans leurs travaux, ils ont proposé un modèle thermoélastique pour le calcul des déformations et des contraintes résiduelles qui surviennent au cours du refroidissement entre la cuisson et la sortie à température ambiante. Les équations micro-mécaniques de Sharperry ont été utilisées pour le calcul des coefficients d'expansion thermique en fonction de la fraction volumique des fibres

$$\alpha_L = \frac{E_{f,L} \alpha_{f,L} V_f + E_m \alpha_m (1 - V_f)}{E_{f,L} V_f + E_m (1 - V_f)} \quad (2.64)$$

$$\alpha_T = (1 + v_m) \alpha_m (1 - V_f) + (1 + v_{f,LT}) \alpha_{f,L} V_f - \alpha_L v_{LT} \quad (2.65)$$

Les indices L et T représentent respectivement la direction des fibres et la direction transverse.

Le modèle thermoélastique prend uniquement en considération les phénomènes élastiques réversibles et ne peut, à lui seul, expliquer le phénomène de retour élastique constaté expérimentalement. Le composite, étant constitué de matrice viscoélastique et de fibres élastiques, la matrice apporte plus de contribution dans le changement des modules élastiques et la viscosité comparée à celle des fibres. L'épaisseur d'une couche est considérée comme étant homogène par rapport à la distributions des fibres et de la matrice. Le comportement viscoélastique du composite est décrit par la caractérisation des fibres comme étant des ressorts élastiques et la matrice comme étant un élément de Maxwell composé d'un ressort élastique et d'un amortisseur visqueux (travaillant uniquement en déformations déviatoriques).

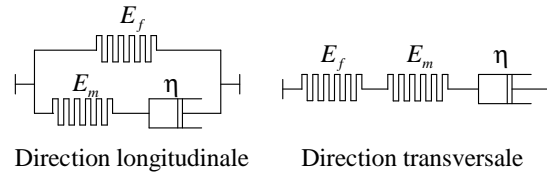


FIG. 2.26: Modèle de Maxwell avec éléments de matrice et de fibres.

Les déformations au sein des fibres et la matrice sont exprimées respectivement comme suit

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f \equiv \mathbf{E}_f^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_f \quad (\text{fibres}) \quad (2.66)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m \equiv \mathbf{E}_m^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_m + \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_m \quad (\text{matrice}) \quad (2.67)$$

où \mathbf{E} et \mathbf{C} sont respectivement le tenseur d'élasticité et de fluage de quatrième ordre respectivement. Un modèle plus raffiné a été proposé par Adolf et Martin [AM96] où la connection entre les deux composantes se fait par la loi du mélange en considérant que les déformations sont les mêmes dans la direction des fibres et que les contraintes sont les mêmes dans la direction transverse.

$$\sigma_1 = V_f \sigma_{f,1} + (1 - V_f) \sigma_{m,1} \quad (2.68)$$

$$\dot{\epsilon}_2 = V_f \dot{\epsilon}_{f,2} + (1 - V_f) \dot{\epsilon}_{m,2} \quad (2.69)$$

Une couche d'UD est donc modélisée par une combinaison de ressorts élastiques et d'un élément de maxwell. La figure 2.26 montre une représentation simplifiée (en négligeant les effets de Poisson) de la combinaison de ces éléments pour la direction longitudinale et la direction transversale de la couche UD. La relation contraintes-déformations peut être écrite en notation de Voigt comme suit :

$$\left\{ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \right\} = - [\mathbf{E}] \cdot [\mathbf{C}] \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} + [\mathbf{E}] \cdot \{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\} - [\mathbf{E}] \cdot [\mathbf{R}] \cdot \{\boldsymbol{\epsilon}\} \quad (2.70)$$

$[\mathbf{E}]$ étant la matrice de rigidité, pour matériaux orthotropes, $[\mathbf{C}]$ une matrice non-symétrique représentant le fluage et $[\mathbf{R}]$ une matrice de retardement liée la matrice de fluage. Les propriétés élastiques sont maintenues constantes pendant le cycle de cuisson et la viscosité est supposée être proportionnelle au temps de relaxation [BA94].

Cherouat et al. [CB01] ont proposé un comportement viscoélastique isotrope de la résine, celui des fibres étant considéré isotrope non-linéaire. Ce comportement est formulé dans le domaine temporel en utilisant le temps de relaxation τ_k et le tenseur de relaxation de quatrième ordre C_{ij}^{mk} comme paramètre matériel. En approximant les fonctions de fluage par des séries de Prony, la dérivée de la contrainte viscoélastique de la résine dans le repère lié à la matière s'écrit

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{mR} = \mathbf{C}^m(\tau) : \hat{\mathbf{D}}^{mR} \text{ résine} \quad (2.71)$$

$$C_{ij}^m(t) = C_{ij}^{m\infty} + \sum_l^k C_{ij}^{ml} e^{-t/\tau_l} \quad (2.72)$$

où $C_{ij}^{m\infty}$, C_{ij}^{mk} , et τ_k sont des données expérimentales de la résine.

Holzapfel et Gasser [HG02] ont proposé un modèle viscoélastique en grandes déformations. Le modèle est basé sur une formulation hyper-élastique auquel on rajoute des invariants supplémentaires pour définir une énergie potentielle de déformation tenant compte de la structure fibreuse. Les matériaux présentant une isotropie, une isotropie transverse ou une orthotropie avec ou sans dissipation, sont traités comme étant des cas particulier du modèle global.

Cependant, quelques constatations expérimentales non exhaustives [Cog92] suggèrent que quelques composites à renfort fibreux exhibent un comportement plastique et viscoplastique. Une théorie continue de plasticité concernant les matériaux renforcés par une seule famille de fibres a été proposée par Mulhern et al. [MRS69] et a été étendue dans le cas de deux familles de fibres par Smith et Spencer [SS70].

Dans un souci de généralité, Spencer a formulé une théorie de viscoplasticité [Spe01] qui contribue à une meilleure compréhension du comportement de ce type de matériau à nature anisotrope (comportement plus approprié que la plasticité seule dans le cas des composites à matrice polymère).

2.2 Comportement homogénéisé et approches multi-échelles

Les propriétés élastiques et thermiques des composites dépendent étroitement de l'orientation des fibres. La technique de modélisation largement utilisée pour la prédiction de ces propriétés pour les stratifiés composés de plis unidirectionnels est la théorie classique des stratifiés (Classical laminate theory - CLT) qui est appliquée au niveau des plis où la distribution et l'arrangement des fibres est supposé homogène [Lam04].

Dans ce type d'études on conserve l'orthotropie initiale durant la phase de déformation au cours de la mise en forme. Cette technique ne peut pas être appliquée directement pour les renforts tissés puisqu'il existe un changement significatif de l'angle et, par conséquent, une nature non homogène de la distribution des mèches et de leur ondulation. Les propriétés thermoélastiques du composite doivent donc être incluses dans le modèle afin de pouvoir prédire les distortions induites lors du formage du produit et le modèle doit définir ses propres variables internes pour tenir compte de ces évolutions structurales majeures.

Beaucoup de recherches ont été consacrées à l'emploi des méthodes d'homogénéisation pour définir l'évolution des paramètres microstructuraux, tels que la variation d'angle, et prédire la forme de la pièce. La méthode consiste généralement en la modélisation d'un élément de volume assez représentatif du milieu et de résoudre un ensemble d'équations gouvernantes pour obtenir les propriétés mécaniques homogénéisées du milieu équivalent en se basant sur une description géométrique de l'élément de volume [HK99, TUKZ99].

Dans cette section, on décrit les lois de comportement issues principalement de la méthode d'homogénéisation et ses dérivées. La première partie consiste à supposer un comportement orthotrope évolutif ou non et à déterminer les propriétés thermoélastiques globales ou macroscopiques du composite. La deuxième partie se consacre plutôt au comportement visqueux basés sur les modèles de Rogers [Rog89] et l'obtention du modèle global par homogénéisation.

2.2.1 Comportement élastique et thermoélastique orthotrope

Contrairement à la section précédente où les modèles sont généralement schématisés par un nombre de modes de déformation découplés, le comportement du milieu fibreux ici, sous l'hypothèse de propriétés matérielles homogènes, est modélisé en utilisant la théorie bien défini d'un comportement élastique linéaire ou non linéaire orthotrope.

Les méthodes d'homogénéisation peuvent prendre en compte la forme de la section et le profil curviligne des mèches, ainsi que les caractéristiques matérielles et géométriques du renfort et de la résine. Comparées aux méthodes numériques, les méthodes analytiques sont plus efficaces même si elles introduisent plusieurs hypothèses dans la détermination des propriétés mécaniques du composite. La plupart des méthodes ont été proposées pour des composites consolidés en service [WDG92, SS01] applicables sous l'hypothèse de petites déformations.

Beaucoup de recherches ont été consacrées à l'emploi des méthodes d'homogénéisation pour définir l'évolution des paramètres microstructuraux, tels que la variation d'angle, et prédire la forme de la pièce. La méthode consiste généralement en la modélisation d'un élément de volume assez représentatif du milieu et de résoudre un ensemble d'équations gouvernantes pour obtenir les propriétés mécaniques homogénéisées du milieu équivalent en se basant sur une description géométrique de l'élément de volume [HK99, TUKZ99].

2.2.1.1 Détermination de la matrice de comportement

Le modèle de comportement global des composites textiles dans ce type d'analyse est généralement celui d'un matériau homogène anisotrope et préférablement orthotrope de façon à simplifier les codes de calcul utilisés pour le thermoformage ou le comportement en service de ces structures [TY02].

A l'échelle locale, le comportement est décrit par une loi thermoélastique orthotrope donnée par l'équation suivante

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^l \\ \sigma_{yy}^l \\ \sigma_{zz}^l \\ \tau_{yz}^l \\ \tau_{zx}^l \\ \tau_{xy}^l \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^l & C_{12}^l & C_{13}^l & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}^l & C_{22}^l & C_{23}^l & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}^l & C_{32}^l & C_{33}^l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^l \\ \epsilon_{yy}^l \\ \epsilon_{zz}^l \\ \gamma_{yz}^l \\ \gamma_{zx}^l \\ \gamma_{xy}^l \end{pmatrix} - \Delta T \begin{pmatrix} \alpha_{xx}^l \\ \alpha_{yy}^l \\ \alpha_{zz}^l \\ \alpha_{yz}^l \\ \alpha_{zx}^l \\ \alpha_{xy}^l \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

où $\{\sigma^l\}$ et $\{\epsilon^l\}$ sont les contraintes et les déformations locales respectivement ; $\{\alpha^l\}$ sont les coefficients d'expansion thermiques locaux et $[C^l]$ la matrice d'élasticité orthotrope locale ; ΔT est le gradient de température uniforme dans l'élément de volume calculé à partir d'un état de référence non contraint. L'obtention du comportement global est déduit à partir de transformations usuelles (une homogénéisation périodique dans la plupart des cas), ce qui conduit généralement à une matrice de rigidité globale pleine de la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^G \\ \sigma_{yy}^G \\ \sigma_{zz}^G \\ \tau_{yz}^G \\ \tau_{zx}^G \\ \tau_{xy}^G \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^G & C_{12}^G & C_{13}^G & C_{14}^G & C_{15}^G & C_{16}^G \\ C_{21}^G & C_{22}^G & C_{23}^G & C_{24}^G & C_{25}^G & C_{26}^G \\ C_{31}^G & C_{32}^G & C_{33}^G & C_{34}^G & C_{35}^G & C_{36}^G \\ C_{41}^G & C_{42}^G & C_{43}^G & C_{44}^G & C_{45}^G & C_{46}^G \\ C_{51}^G & C_{52}^G & C_{53}^G & C_{54}^G & C_{55}^G & C_{56}^G \\ C_{61}^G & C_{62}^G & C_{63}^G & C_{64}^G & C_{65}^G & C_{66}^G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^G \\ \epsilon_{yy}^G \\ \epsilon_{zz}^G \\ \gamma_{yz}^G \\ \gamma_{zx}^G \\ \gamma_{xy}^G \end{pmatrix} - \Delta T \begin{pmatrix} \alpha_{xx}^G \\ \alpha_{yy}^G \\ \alpha_{zz}^G \\ \alpha_{yz}^G \\ \alpha_{zx}^G \\ \alpha_{xy}^G \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

Les propriétés effectives macroscopiques sont directement extraites à partir des caractéristiques des constituants à différentes échelles du composite. Ceci est possible dans la mesure où on spécifie un volume élémentaire représentatif ou un élément de volume répétitif au sein du matériau, ce qui est assez trivial dans le cas des composites textiles étant donnée sa structure maillée obtenue grâce à des technologies de tissage permettant l'obtention d'un motif assez précis.

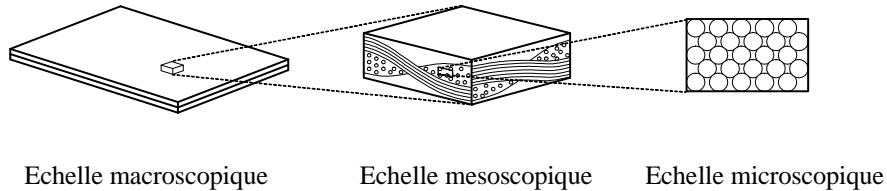


FIG. 2.27: Différentes échelles au sein d'un renfort tissé.

Ce type d'analyse est alors indispensable pour l'évaluation des effets de plusieurs paramètres d'échelles sur le comportement global de la structure composite : poids et

architecture du renfort, état de la résine, fraction volumique des fibres, ondulation et morphologie des mèches ainsi que les propriétés mécaniques de chaque constituant. Les principales échelles utilisées dans l'étude sont illustrées dans la figure 2.27 et définies par : l'échelle macroscopique (celle du stratifié ou du plis), l'échelle mesoscopique (de la maille ou de l'élément de volume) et l'échelle microscopique (celle des fibres).

Les modèles de prédiction des propriétés mécaniques et thermomécaniques des composites tissés à l'état non déformé pour une analyse des structures en service ont reçu une attention particulière pendant les quinze dernières années. Ils peuvent être classés en trois catégories différentes ; les modèles analytiques, les modèles micromécaniques et les modèles numériques. Un choix possible de l'élément de volume est indiqué sur la figure 2.28.

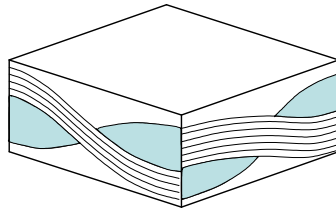


FIG. 2.28: Volume élémentaire représentatif d'un renfort tissé.

Modèles analytiques

Les modèles analytiques s'appuient essentiellement sur la théorie classique des stratifiés [Red04]. L'approche la plus simple est de substituer l'élément répétitif d'un pli par quatre couches successives comme indiqué figure 2.29. Les deux directions des fibres sont représentées par des couches unidirectionnelles équivalentes. Pour calculer la réduction de rigidité de la mèche à l'apparition de plissements, on suppose un état de contrainte uniforme dans les deux directions de fibres, la résine étant représentée par les deux couches supérieure et inférieure.

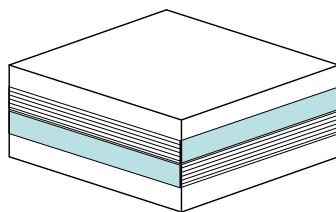


FIG. 2.29: Approximation analytique basée sur la théorie classique des stratifiés.

Toutes les propriétés thermoélastiques du stratifié nécessaires pour l'application de la théorie classique des stratifiés sont ensuite obtenues par différentes techniques d'homogénéisation [CI91, NS92a, NS92b, Nai94, BJPV98]. L'idée principale est d'introduire un paramètre d'échelle (longueur caractéristique) pour décrire la finesse de la microstructure de façon à avoir une séquence de problèmes à résoudre pour chaque choix de ce paramètre. En le faisant tendre vers 0, on obtient un problème limite qui sert à la détermination des propriétés macroscopiques thermoélastiques effectives du matériau.

Les rigidités obtenues sont généralement assez conformes aux résultats obtenus expérimentalement [Ste95].

Modèles micromécaniques

Des modèles plus sophistiqués basés sur des approches énergétiques [CF97] et micromécaniques ont été présentés par plusieurs auteurs [Has83, Cha83, BH97, VIV98][BH97]. L'idée principale consiste en la minimisation de l'énergie de l'assemblage définie comme énergie moyenne dans chaque élément de volume. Ces modèles prédisent les états de contraintes et de déformation tridimensionnels à l'intérieur de sous-éléments obtenus par décomposition multi-échelles comme le montre la figure 2.30 qui consiste en des couches équivalentes de mèches ou de résine [WM90, SM97].

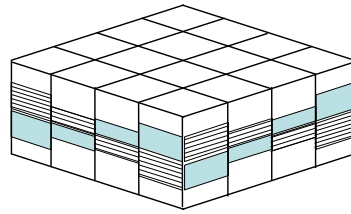


FIG. 2.30: Approche micromécanique.

Les hypothèses simples d'un état de déformation et de contrainte uniforme (isodéformation et isocontraintes), comme le stipule, entre autres, la loi du mélange [Sch68], sont largement appliquées même si elles sont connues pour leur sous-estimation des propriétés transverses du composite. Parmi ces modèles, on peut distinguer les modèles qui prédisent les propriétés élastiques [JTS00, TT01, TY02] et ceux qui prédisent les coefficients thermiques [RH70, Cha89] à partir de l'échelle micro, généralement basés sur les mêmes hypothèses.

Modèles numériques

Les modèles numériques consistent en l'analyse éléments finis tridimensionnelle du comportement thermo-élastique des composites tissés (figure 2.31). Leur principal avantage est de permettre une construction de la structure avec tous les niveaux de complexité possibles [DAB96].

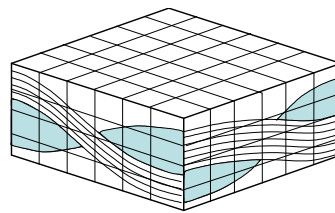


FIG. 2.31: Analyse éléments finis.

En général, cette méthode requiert le développement d'un modèle EF détaillé de l'architecture du renfort. Son principal inconvénient est le coût excessif de la construction de la géométrie et le nombre de degrés de liberté extrêmement élevé nécessaire à la représentation de tous les détails (plus d'un millier de ddl pour un seul élément de volume) [ZH90, WSC95, SWC97].

2.2.1.2 Actualisation des propriétés matérielles

Moins d'attention a été accordé à l'influence du thermoformage sur les propriétés élastiques et thermoélastiques des composites à renfort tissé. Le thermoformage induit des déformations significatives dans la structure du composite et affecte considérablement ses propriétés. Les composites pré-imprégnés utilisés dans la mise en forme par thermoformage sont différents des composites conventionnels consolidés dans le sens où ils présentent un potentiel de déformation largement plus grand que les premiers.

Dans ce type d'approche, les modèles sont généralement construits sur la base d'un système de coordonnées non-orthogonal. Ils possèdent généralement une orthotropie initiale qui sera actualisée par la prise en considération de la réorganisation des réseaux de mèches, les propriétés élastiques du milieu sont déduites généralement par homogénéisation.

Dans ce cadre, Blanlot et Billoët [BB95] ont proposé une approche mécanique dans laquelle le comportement est considéré orthotrope évolutif (dans la direction qui coïncide avec la bissectrice des directions de fibres). La formulation numérique peut caractériser l'évolution d'une loi hypoélastique orthogonale par l'actualisation des bissectrices. La

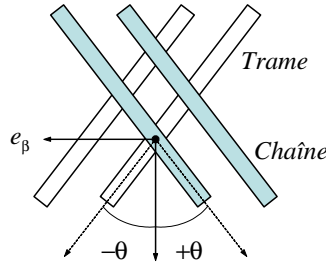


FIG. 2.32: Positionnement du référentiel pour la loi de comportement évolutive [BB95].

loi de comportement est obtenue en intégrant dans l'épaisseur le comportement local, supposé indépendant, des deux réseaux chaîne et trame, par la relation :

$$\bar{C}_{\alpha\beta} = \frac{1}{h} \int_h \left[C_{\alpha\beta}^{Chaîne}(-\theta) + C_{\alpha\beta}^{Trame}(\theta) \right] dz \quad (2.75)$$

où $C_{\alpha\beta}^{Chaîne}(-\theta)$ et $C_{\alpha\beta}^{Trame}(\theta)$ sont les lois de comportement initiales homogénéisées des réseaux chaîne et trame, exprimées dans les bases tournées respectivement de $-\theta$ et de $+\theta$. Cependant, le calcul des propriétés matérielles dans le référentiel tournant n'a pas été spécifié.

Lim et al. [SSR00] ont proposé un modèle élastique qui considère l'extension et le réarrangement des fibres pour n'importe quel type de composite textile par l'imposition d'une série d'états de déformation à une maille élémentaire. L'actualisation des coordonnées nodales de l'élément de volume permet la prise en compte de l'arrangement des fibres pour l'état de déformation suivant. Les matrices générées sont alors stockées en constituant une base de données des propriétés du matériau pour la simulation du formage.

Une formulation basée sur un système de coordonnées local considérant que l'axe x' le long de la direction des fibres et l'axe y' sont orthogonaux (figure 2.33) a été proposé par Yu et al. [YPC+02]. Sous l'hypothèse de petites déformations, l'effort agissant sur la

structure est obtenu par la considération de la cinématique et des propriétés des mèches. Leur travail utilise un élément de volume d'un tissé et une méthode d'homogénéisation pour extraire les propriétés mécaniques par dérivation analytique des propriétés matérielles. L'actualisation des directions de fibres est faite par le tenseur gradient de déformations.

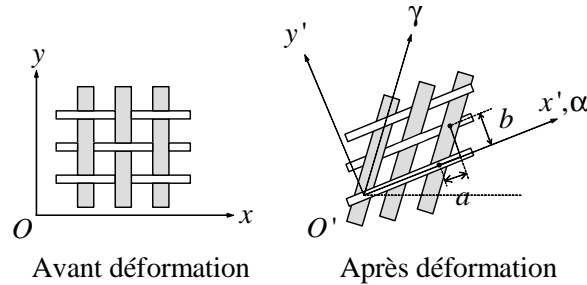


FIG. 2.33: Déformation en cisaillement impliquant tous les référentiels utilisés dans l'étude [YPC+02].

Par la prédiction de l'évolution de l'orientation des fibres, le modèle peut prendre en compte l'effet de l'orientation sur l'anisotropie ainsi que les effets de la différence de rigidité des fibres.

Les mêmes auteurs [YZP+03], dans le cadre de la simulation de la mise en forme par hydroformage et par le biais de la même loi de comportement, ont pris en compte la rigidité de cisaillement où les directions des fibres sont actualisées à partir des déformations qui permettent de calculer la rotation des mèches autour de leurs points de contacts. Pour définir un système de coordonnées local, la bissectrice des directions chaîne et trame est utilisée. Un des axes du système de coordonnées va être situé à 45° dans le sens trigonométrique et l'autre à 45° dans le sens des aiguilles d'une montre, à partir de la bissectrice. La contrainte de cisaillement censée agir dans ce système de coordonnées orthogonal est transformée dans le système de coordonnées lié à la matière ; puis elle est ajoutée à la loi de comportement comme rigidité de cisaillement.

Une autre approche, en considérant un système de coordonnées non orthogonal, est proposée par Xue et *al.* [XPC03] où le tissu en considération est supposé avoir un plan de symétrie qui coïncide avec la surface moyenne du tissu. Dans cette formulation, un ensemble de trois systèmes de coordonnées est choisi. Le premier est le système de coordonnées orthogonal global d'axes x et y fixés dans l'espace. Le deuxième est le système de coordonnées local d'axes x' et y' orthogonaux. L'axe x' coïncide avec la direction actuelle de la direction chaîne.

Le troisième est le système de coordonnées matériel, $O\xi\eta$, où ξ et η sont choisis de façon à coïncider respectivement avec les directions chaîne et trame. Les axes ξ et η sont orthogonaux dans la configuration initiale mais ne le restent pas pendant la déformation de cisaillement comme indiqué sur la figure 2.34. La déformation est divisée en deux modes principaux, le cisaillement intraplis et la tension/compression dans la direction des fibres.

Pour le premier mode, un élément de volume est isolé figure 2.35. Puisque le système de coordonnées $O\xi\eta$ n'est pas orthogonal, les propriétés complémentaires des contraintes de cisaillement ne sont pas nécessairement valables. Elles sont remplacées par deux com-

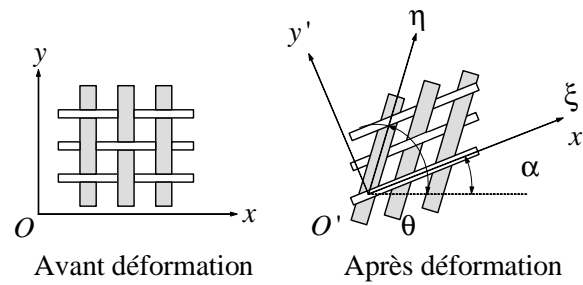


FIG. 2.34: Déformation en cisaillement impliquant tous les référentiels utilisés dans l'étude [XPC03].

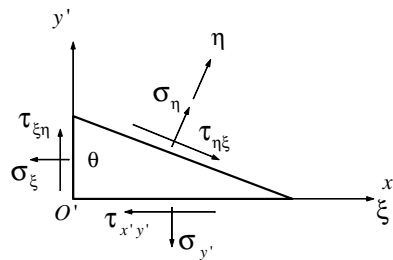


FIG. 2.35: Composantes de contraintes dans le repère local.

posantes dépendantes de contraintes, $\tau_{\xi\eta}$ et $\tau_{\eta\xi}$.

Puisque les composites tissés ne peuvent supporter des efforts en compression, les déformations négatives ne possèdent pas de contribution dans la capacité du matériau à résister à ce type de chargement. Une déformation effective le long de chaque direction de fibres a été définie et les propriétés du matériau sont obtenues par recalage sur des courbes de traction biaxiale en fonction de cette dernière [CXPK03].

En 2005, Xue et *al.* [XCC05] ont développé un modèle constitutif intégrant les spécificités micro-macro pendant la déformation, basé sur les propriétés géométriques des fibres selon le modèle (figure 2.36) de McBride et Chen [MC97], des mèches et de la maille élémentaire, des constantes matérielles des constituants du composite et de l'orientation des mèches. La stratégie de modélisation débute par une description géométrique des mèches et de l'élément de volume pendant la déformation de cisaillement. Ensuite une analyse mécanique de l'élément de volume est faite pour obtenir les matrices de rigidité et de souplesse associées aux modèles géométriques, suivi de la détermination des propriétés en cisaillement à utiliser avec le modèle décrit précédemment. Une technique simple combinant la loi de mélange pour les composites unidirectionnels est utilisée pour prédire les propriétés en tension du composite.

Dans le même ordre d'idées, Peng et *al.* [PC05] ont utilisé un modèle non-orthogonal où un système de coordonnées convecté, dont les axes dans le plan coïncident avec les directions chaîne et trame du tissu (figure 2.2.1.2), est fixé à un élément coque pour modéliser le composite.

Les composantes contravariantes et covariantes respectivement des tenseurs de contraintes et des déformations sont introduites dans le système de coordonnées convecté. La transformation entre les composantes contravariantes et covariantes et le système de coordon-

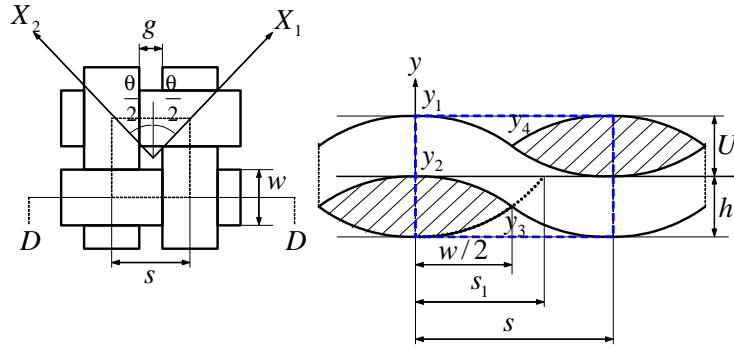
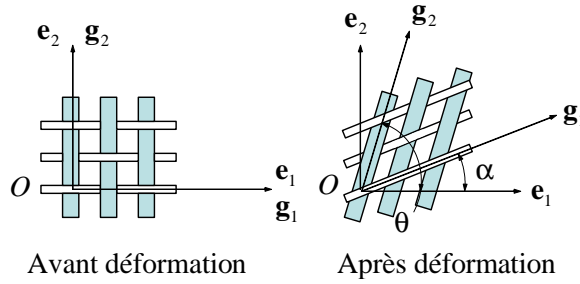


FIG. 2.36: Elément de volume et section droite D-D.

nées cartésien des tenseurs de contraintes sont nécessaires dans le développement de la loi de comportement non-orthogonale. Les propriétés effectives non-linéaires du matériau dans la loi de comportement non-orthogonale sont obtenues par recalage direct sur des essais de traction uniaxiale et biaxiale du tissu.



Le tenseur de déformation en un point matériel est exprimé dans la base contravariante $\{\mathbf{g}^i\}$ et dans le système de coordonnées cartésien $\{\mathbf{e}_i\}$ respectivement par

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = P_i^m P_j^n \varepsilon_{mn} \quad (2.76)$$

Le tenseur de comportement \mathbf{C} de 4 ème ordre dans la base covariante $\{\mathbf{g}_i\}$ s'écrit

$$\mathbf{C} = \tilde{C}^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad \text{où} \quad \tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} \quad (2.77)$$

$$\mathbf{g}_i = P_j^i \mathbf{e}_j; \quad \mathbf{e}_i = Q_j^i \mathbf{g}_j; \quad P_i^j Q_j^k = \delta_i^k = P_j^k Q_i^j \quad (2.78)$$

où \tilde{C}^{ijkl} sont reliées aux composantes cartésiennes C^{mnop} par

$$\tilde{C}^{ijkl} = Q_m^i Q_n^j Q_o^k Q_p^l C^{mnop} \quad (2.79)$$

Ces équations donnent la transformation de la matrice de comportement du système de coordonnées non-orthogonal au système de coordonnées cartésien et *vice versa*. La matrice de comportement dans le système de coordonnées cartésien $[C(\varepsilon)]$ peut être transformée à partir de celle contravariante $[\tilde{C}(\varepsilon)]$ dans le système de coordonnées convecté par

$$[C(\varepsilon)] = [T_1]^T [\tilde{C}(\varepsilon)] [T_1] \quad (2.80)$$

et par conséquent

$$\{d\sigma\} = [T_1]^T \left[\tilde{C}(\epsilon) \right] [T_1] \{d\epsilon\} \quad (2.81)$$

Il s'agit donc de déterminer cette matrice dans le système de coordonnées non-orthogonal et ensuite de le transformer dans le système de coordonnées catésien.

Zhang *et al.* [ZF00, ZHL04] proposent d'intégrer la compaction latérale des fibres dans le modèle de comportement orthotrope classique suivant le même choix de construction du système de coordonnées non-orthogonal.

Dans ces types d'analyses [ZF00, YPC⁺02, XPC03, PC05], pour refléter la réorientation des fibres, un système de coordonnées cartésien local est fixé dans l'élément où un système de coordonnées non-orthogonal coïncide respectivement avec les directions chaîne et trame. Le système de coordonnées local coïncide initialement avec le système de coordonnées global dans la configuration initiale. Après déformation, le système de coordonnées va subir une rotation de corps rigide par le tenseur de rotation. On obtient, ensuite, directement les relations suivantes pour les directions de fibres actualisées qui sont transformées par le tenseur gradient de déformation.

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{f}'_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{f}_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.82)$$

où \mathbf{f}_i est la direction de la fibre i .

Une autre approche, pour la prédiction des propriétés thermoélastiques du composite, par le biais d'un modèle de réorientation des réseaux de fibres, consiste en l'utilisation de l'algorithme du filet. Vu-Khan [VKL95] a montré, par son modèle de "sous-plis" (4 plis fictifs d'unidirectionnels) combiné avec la théorie classique des stratifiés, que ce dernier peut être utilisé pour prédire les caractéristiques thermo-mécaniques équivalents des renforts déformés en tournant les plis fictifs du modèle dans la direction correspondant à la nouvelle direction des mèches après déformation. Les paramètres requis pour le calcul sont les constantes thermo-élastiques des plis fictifs.

Hofstee *et al.* [HVK00] ont présenté deux modèles pour l'analyse de la rigidité élastique d'un composite thermoplastique à renfort tissé après déformation de thermoformage. Leur approche est une extension des méthodes proposés par Vu Khan [VKL95] et Smith [SRL97] dans le sens où la géométrie après extension et cisaillement est reflétée dans le modèle. L'aplatissement est défini en fonction de la longueur de l'ondulation, la hauteur de la mèche et la dimension dans le plan de la zone d'entrecroisement. Un volume élémentaire représentatif pour chaque pli du stratifié est modélisé de manière à prendre en compte la réorientation dans le plan des réseaux de chaîne et trame. Un état d'isocontraintes ou d'isodéformations dans l'élément de volume est imposé afin de tenir compte de l'aplatissement. Une analyse paramétrique est ensuite effectuée pour établir les effets des grandes déformations lors du thermoformage sur la rigidité du stratifié. La cinématique proposée est, entre autres, un intermédiaire entre les modèles de drapage géométrique (algorithme du filet étendu [HVK01]) donnant une prédiction de l'orientation locale des fibres après cisaillement et une analyse structurale éléments finis obtenue par l'imposition d'un maillage sur le drapage obtenu (figure 2.37).

2.2.2 Comportement visqueux

Une approche alternative dans l'utilisation de la méthode d'homogénéisation pour la simulation numérique de la mise en forme des composites est présentée dans les travaux

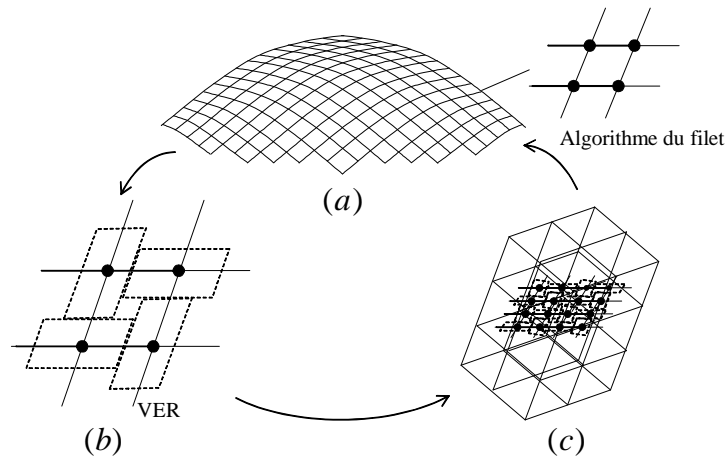


FIG. 2.37: (a) Algorithme du filet pour l'obtention de la direction des fibres, (b) algorithme du filet étendu pour le calcul des propriétés effectives du composite, (c) simulation EF avec un maillage superposé au filet [HVK01].

de Hsiao et Kikuchi [HK97, HK99] où un modèle d'orientation des fibres par le tenseur gradient de déformation a été utilisé pour représenter l'évolution de la microstructure du renfort pendant la mise en forme.

D'après les travaux de Spencer et Rogers [Spe72, Rog89], la caractérisation rhéologique des composites à fibres continues ne considère aucune analyse de l'effet de la microstructure provenant de l'interaction entre fibres individuelles et la matrice. En se basant sur l'hypothèse que les fibres demeurent rigides et qu'elles sont noyées dans un fluide visqueux non-Newtonien, les propriétés matérielles, sont obtenus par homogénéisation et sont tabulés dans une base de données par l'intermédiaire d'une loi de comportement macroscopique.

La loi de comportement, basée sur le concept de coque visqueuse d'Onate et Zienkiewicz [OZ83], dépend du taux de déformation et de la température à l'échelle de l'élément de volume choisi. Le problème thermique couplé est inclut dans la formulation implicite par la résolution simultanée de l'écoulement et du transfert de chaleur. Pour capturer le changement de la microstructure, un modèle de réorientation des fibres a été implémenté pour prédire l'angle entre les directions chaîne et trame.

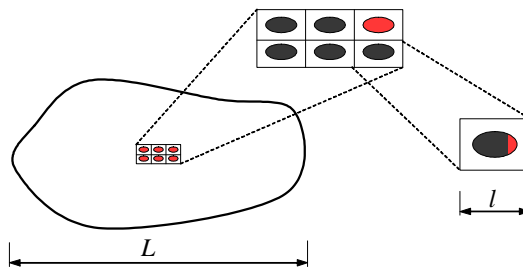


FIG. 2.38: Élément de volume de la structure composite périodique [HK99].

Un développement asymptotique de premier ordre des champs principaux permet de capturer les effets d'échelles dans la loi de comportement. En appliquant le résultat de ce développement à l'équation d'équilibre sous sa forme faible, on obtient l'expression de la loi de comportement homogénéisée tenant compte de la suspension des fibres dans un fluide visqueux

$$\sigma_{ij}^{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = -P(\mathbf{x})\delta_{ij} + F(\mathbf{x})a_i a_j + \mu D_{ijkl}^{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) \cdot e_{kl}^x(\mathbf{v}^0) \quad (2.83)$$

où $\mathbf{D}^{\mathbf{H}}$ est le tenseur des coefficients d'écoulement homogénéisé, P la pression hydrostatique et F la tension dans les directions des fibres.

Un développement asymptotique similaire de la température permet d'effectuer une analyse du transfert thermique du processus de thermoformage. Une équation microscopique gouverne la conduction thermique dans les éléments de volume. L'équation macroscopique qui gouverne le problème de transfert thermique du stratifié est couplée avec l'équation d'écoulement homogénéisée précédente par l'intermédiaire de la viscosité.

Les orientations locales des directions chaîne et trame sont notées par les vecteurs unitaires \mathbf{a} et \mathbf{b} respectivement. Pour simplifier l'écriture (figure 2.39), la première direction est choisie de façon à coïncider avec la direction chaîne.

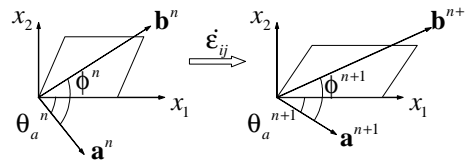


FIG. 2.39: Réorientation des directions des fibres dans un maillage éléments finis global après déformation [HK99].

Les composantes des directions chaîne et trame sont actualisées par

$$t_n \longrightarrow t_n + \Delta t \quad (2.84)$$

$$a_1^{n+1} = \cos \theta_a^n + \cos \theta_a^n \dot{\epsilon}_{11} \Delta t + \cos \theta_a^n \dot{\epsilon}_{12} \Delta t \quad (2.85)$$

$$a_2^{n+1} = \cos \theta_a^n + \cos \theta_a^n \dot{\epsilon}_{12} \Delta t + \cos \theta_a^n \dot{\epsilon}_{22} \Delta t \quad (2.86)$$

$$b_1^{n+1} = \cos \theta_b^n + \cos \theta_b^n \dot{\epsilon}_{11} \Delta t + \cos \theta_b^n \dot{\epsilon}_{12} \Delta t \quad (2.87)$$

$$b_2^{n+1} = \cos \theta_b^n + \cos \theta_b^n \dot{\epsilon}_{12} \Delta t + \cos \theta_b^n \dot{\epsilon}_{22} \Delta t \quad (2.88)$$

où $\dot{\epsilon}_{ij}$ est le taux de déformation élémentaire de la membrane obtenu par une analyse éléments finis globale et a_i^n et b_i^n sont les i ème composantes des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} à l'instant t_n . θ est l'angle entre les vecteurs fibres et l'axe élémentaire x_1 de façon à ce que l'orientation des fibres soit calculée et actualisée élément par élément en utilisant ces relations.

Dans cette même perspective, Thevenin et al. [TP96] ont développé un modèle de prédiction des différentes valeurs de viscosité pour un fluide bi-phasique par homogénéisation, pour la simulation de l'écoulement de la résine lors de sa mise en forme. Son approche se base notamment sur les travaux de Spencer et Rogers [Spe72, Rog89]. Les fibres sont remplacées par des inclusions isotropes et purement visqueuses. Ils ont comparé les viscosités transversales et longitudinales pour un fluide visqueux qui ont déjà fait l'objet d'investigation dans les travaux de Christensen [Chr93] et de Coffin et al. [CP95] où elles sont évaluées respectivement par des méthodes énergétiques et cinématiques.

2.3 Conclusion

Pour les composites tissés, les modèles basés sur l'approche continue sont préférés à ceux relevant de l'approche discrète, pour la richesse d'informations qu'ils peuvent procurer pendant la phase de mise en forme en terme d'analyse des contraintes et des déformations. En général, pour ce type de modélisation, le matériau peut être traité comme homogène ou non-homogène.

L'avantage de l'utilisation de la méthode d'homogénéisation est sa capacité à localiser les déformations microscopiques au sein du composite. Quand les taux de déformations sont obtenus par un calcul global, les déformations locales sont calculées par une étape de localisation. Les propriétés homogénéisées instantanées sont ensuite déterminées par interpolation. Cette approche peut prendre en compte toutes les caractéristiques géométriques et mécaniques associées au renfort et à la résine. Cependant, elle reste très coûteuse en terme de temps de calcul et très compliquée à mettre en oeuvre d'un point de vue développement.

Les modèles découplés/multicomposants sont plus efficaces dans le traitement des problèmes aux limites et facilement intégrables dans un code de calcul industriel. Par la prise en compte des différents mécanismes de déformation du milieu fibreux tissé de façon découplée, on accède à une meilleure caractérisation expérimentale de chaque comportement séparément. On peut alors effectuer un choix au niveau de la complexité de la modélisation par le biais du nombre de paramètres décrivant le comportement du milieu. Cependant, et dans un objectif de simulation de la mise en forme des composites, il y aura toujours un équilibre à trouver entre précision des modèles choisis et temps de calcul.

On s'intéresse dans ce cadre aux modèles de comportement visqueux qui s'apparentent à ceux présentés (cf. § 4.3.2.), comme modèles de comportement de la matrice implémentée dans le solveur PAM FORM. Les hypothèses liées à leur formulation (inextensibilité des fibres et incompressibilité de la matrice) fournissent une certaine cohérence avec la nature anisotrope du milieu et une prise en compte des deux constituants à la température de mise en forme. Une attention particulière sera donnée au développement d'un modèle fluide visqueux à deux directions de fibres correspondant au comportement d'un composite à renfort tissé.

Deuxième partie

**Analyse expérimentale et
simulation**

Analyse expérimentale de la mise en forme par emboutissage

Afin de préparer la phase de simulation du procédé, il est nécessaire de disposer de connaissances de nature expérimentale relatives à l'état de la structure au cours d'un cycle complet de mise en forme par emboutissage. Pour cette raison, nous avons conduit deux types de tests expérimentaux portant sur des pièces présentant une forme non-développable.

Le premier concerne les tissus non imprégnés et consiste en la mise en forme de renforts tissés pour l'obtention de préformes sèches (§ 3.1.). L'objectif est alors d'observer les mécanismes de déformation en jeu et de mesurer quelques grandeurs caractéristiques, telles que les variations angulaires, entre direction chaîne et trame du renfort.

Le second type de test consiste en une série d'essais de thermoformage de composites à matrice thermoplastique (§ 3.2.). L'objectif est de se rapprocher des conditions réelles de mise en forme à l'échelle industrielle.

3.1 Préformage

Cette première partie consiste en la mise au point d'un montage d'essais de mise en forme de renforts non imprégnés et son instrumentation. L'objectif de cette étude est l'obtention de formes finales de renforts embouties pour une comparaison simulation/essais, les grandeurs mesurées seront du type cinématique (champs de déplacement, variations d'angles), mais aussi efforts sur les outils (poinçon, serre-flan). Le travail est effectué dans le cadre d'un projet de fin d'étude au LMSP (ENSAM Paris) [SD03].

3.1.1 Descriptif du dispositif expérimental

On dispose d'une machine d'emboutissage à froid représentée par la figure 3.1. Elle est formée d'une matrice, d'un serre-flan et d'un poinçon qui viennent se greffer sur une machine de traction/compression MTS située au LMSP. Celle-ci se compose d'une table comprenant 6 rainures en T réparties régulièrement et d'une traverse montée sur 4 colonnes sur laquelle est positionné un vérin hydraulique.

Une cellule de force peut être montée en tête du vérin muni également un capteur de déplacement. La machine peut être pilotée à la fois en déplacement ou en effort. La vitesse

du poinçon peut varier entre 5 et 50 mm/s. La pression exercée par le serre-flan est de l'ordre de 0.5 Mpa. Ce dernier possède la particularité d'être monté par l'intermédiaire de 3 bielles spécialement disposées pour former une glissière permettant l'obtention d'une pression uniforme sur le tissu.

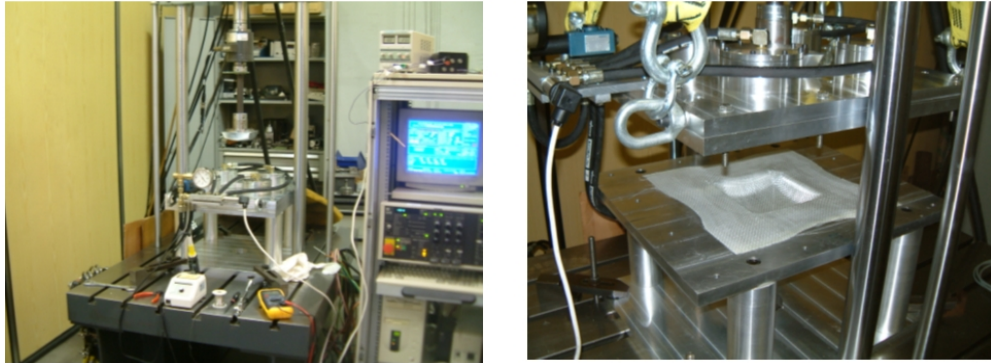


FIG. 3.1: (a) Ensemble poinçon/matrice/serre-flan, système de mise en pression, système d'acquisition de données. (b) Echantillon embouti avec serre flan relevé.

La matrice est débouchante afin de permettre l'observation du tissu une fois embouti, et l'ensemble est posé sur quatre pieds cylindriques usinés. Un manomètre permet de visualiser grossièrement la pression en première approche, puis une mesure précise est réalisée grâce à un système d'acquisition des mesures.

3.1.2 Préparation des renforts

Etant données les dimensions de la machine (serre-flan : 400×400 mm), les échantillons à mettre en forme doivent être des carrés de dimensions 390×390 mm, ce qui évite au tissu de dépasser du serre-flan. L'échantillon utilisé est un taffetas en fibres de verre équilibré. La tenue du tissu une fois découpé étant faible, il est nécessaire de le maintenir correctement le plus longtemps possible. Il faut donc découper le tissu une première fois pour obtenir un échantillon légèrement plus grand que l'échantillon désiré avec des bandes de scotch sur sa périphérie pour délimiter la taille finale de l'échantillon. On procèdera à une seconde opération de découpe de ces morceaux juste avant l'emboutissage.

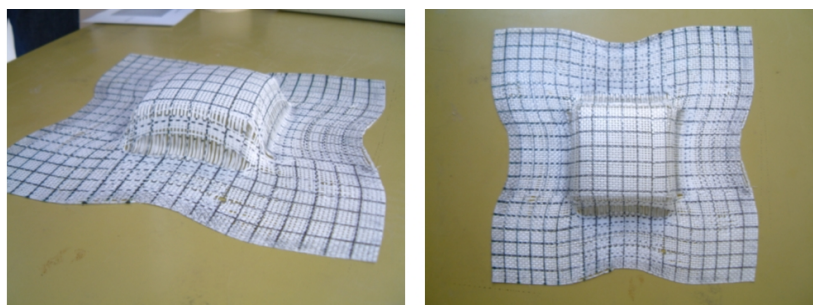


FIG. 3.2: Validation du dispositif expérimental ($P=20$ bars, $V=1$ mm/s, $D=75$ mm).

Etant donné que le tissu est non imprégné, la pièce produite est inexploitable à cause de sa grande souplesse qui fait qu'elle ne conserve pas sa forme finale. Il faut donc enduire le tissu à l'aide d'un agent figeant (type colle ou résine) qui, en séchant, conservera la forme obtenue tout en minimisant son effet sur le procédé.

3.1.3 Validation de la machine

Une première série d'essais a été réalisée afin de valider le dispositif expérimental précédemment décrit. L'échantillon embouti possède bien la forme souhaitée. Le décollement entre le poinçon et l'échantillon embouti s'effectue sans problème. Cependant, à cause de la course élevée du poinçon, le tissu présente des discontinuités dans la répartition des mèches qui se tassent au niveau des bords de la matrice (figure 3.2, P étant la pression au niveau des vérins, V la vitesse de déplacement du poinçon et D le déplacement).

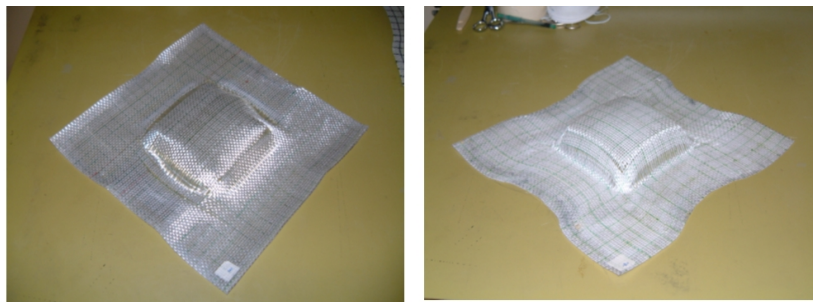


FIG. 3.3: Flan embouti : (à gauche) sans imprégnation, (à droite) avec imprégnation.

Deux autres essais ont été réalisés afin de déterminer l'influence de l'imprégnation par une colle (figure 3.3), le premier tissu est embouti tel quel, le deuxième est enduit d'une colle. Les conditions de mises en forme sont les mêmes que pour le précédent essai en réduisant cette fois de 15 mm le déplacement du poinçon.

3.1.3.1 Influence de l'imprégnation

La figure 3.4 montre les courbes force/déplacement dans les deux cas. Le contact entre le poinçon et le tissu s'effectue à partir de 10mm de déplacement (valeur à partir de laquelle l'effort sur le poinçon n'est plus nul). On distingue ensuite 2 zones ; partir d'un déplacement de 32 mm, l'effort exercé sur le poinçon dans le cas du tissu imprégné devient plus important. Cette valeur correspond au début de la désolidarisation des fibres entre elles.

Il est cependant difficile de conclure sur l'influence néfaste de la préimprégnation dans la mesure où l'on s'intéresse aux déformations des échantillons. De plus, nous verrons par la suite que nous ne pouvons pas accéder aux déformations si la colle est enduite après l'opération d'emboutissage car cela modifie fortement la position des fibres. La suite des essais s'effectuera donc en encollant les échantillons avant emboutissage.

3.1.3.2 Répétabilité des tests

On a vérifié la répétabilité des essais sur trois renforts emboutis dans les mêmes conditions ($P=20$ bars, $V=1$ mm/s, $D=40$ mm). Au vu des courbes force/déplacement,

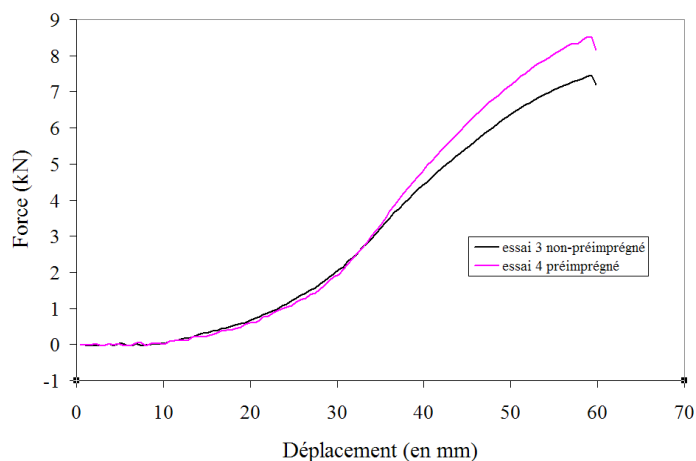


FIG. 3.4: Courbes effort / déplacement dans le cas d'un renfort sec et imprégné.

les trois tissus semblent se comporter de la même manière, avec toutefois un écart de l'ordre de 10% après 40 mm de déplacement du poinçon (figure 3.5).

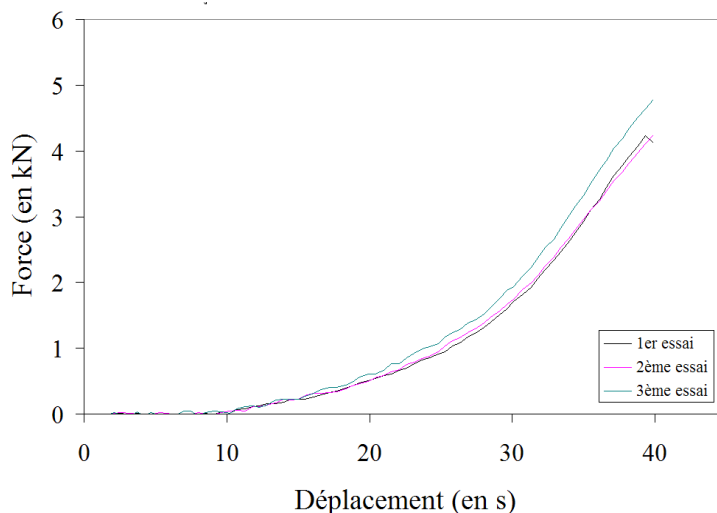


FIG. 3.5: Répétabilité des essais.

3.1.3.3 Influence des paramètres de mise en forme

Profondeur d'emboutissage A ce stade des essais les pièces produites présentait souvent des discontinuités au niveau des fibres, pour une profondeur d'emboutissage > 40 mm, Afin de réduire, le nombre de paramètres influants d'apparition de défauts, la suite des essais est réalisée avec cette profondeur.

Pression du serre-flan Nos différents essais nous ont montrés qu'il fallait exercer une pression juste suffisante pour éviter des plis mais également suffisamment faible pour

laisser le tissu travailler.

Nous sommes donc parvenus à obtenir des pièces satisfaisantes en libérant le serre-flan et en isolant le circuit hydraulique.

Les tissus Trois types de tissus à base de fibres de verre ont été testés. Le premier est un taffetas structural relativement équilibré, à fibres continues et à mailles de 4mm. La majorité de nos essais ont été effectués avec ce premier tissu car c'est celui dont nous disposons en grande quantité. Nous avons ensuite effectué nos tests sur un tissu à fibres discontinues et à mailles légèrement plus fines. Enfin, nous avons effectué quelques essais avec un tissu très différent qui n'a pas forcément vocation à être utilisé comme tissu structural. Mais il nous semblait tout de même intéressant d'analyser le comportement d'un tel tissu (figure 3.6).

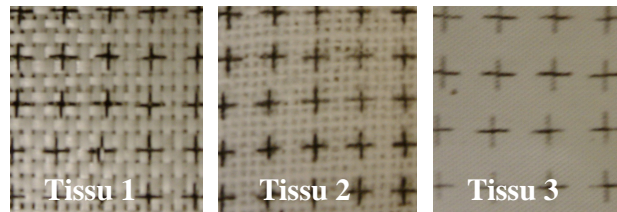


FIG. 3.6: Types de tissus utilisés.

Imprégnation Il est extrêmement délicat de déposer suffisamment de colle sans endommager le tissu. L'espace dont nous disposons dans la partie supérieure de la machine nous contraint à utiliser un pinceau mais qui avait tendance à réarranger la disposition des fibres et ainsi à modifier la forme finale du tissu. Cependant, vu la nature souple du renfort, il est impossible d'obtenir des pièces exploitables en fin d'emboutissage sans imprégnation du renfort.

3.1.4 Exploitation des résultats

3.1.4.1 Acquisition

La méthode consiste à quadriller les échantillons de renfort avant emboutissage et à observer la manière dont le quadrillage se déforme (figure 3.7). On relève les coordonnées de chaque point du quadrillage avant et après déformation, ce qui permet de calculer les variations angulaires ainsi que les variations de longueur au sein du renfort. Le quadrillage doit être suffisamment fin pour avoir une représentation fine des champs de déplacements.

Ce quadrillage est effectué à l'aide d'un pochoir réalisé dans une plaque d'acier aux dimensions des échantillons à emboutir (390×390 mm) dans laquelle ont été découpées des croix correspondant aux intersections des lignes du quadrillage désiré. Il suffit alors de déposer le pochoir sur un échantillon et de déposer de la peinture sur le pochoir.

L'acquisition des coordonnées est effectuée par un système Zébris composé d'un stylo de pointage muni de deux émetteurs ultrasons qui transmettent la position du stylo vers un récepteur. Le pointage se fait manuellement, la précision restant satisfaisante pour une première approche.

3.1.4.3 Résultats

Pour chaque essai, nous disposons de toutes les variations angulaires et de toutes variations de longueur longitudinales (selon la chaîne) et transversales (selon la trame). Pour parvenir à représenter ces variations, nous avons choisi de les représenter de la manière suivante : les variations angulaires sont définies à partir des points obtenus : un produit scalaire entre les vecteurs construits entre les noeuds du quadrillage définit le cosinus de l'angle, et un produit vectoriel en définit le signe. Les variations de longueurs sont obtenues à partir de la moyenne de la variation de distance entre deux noeuds consécutifs, dans le sens longitudinal et transversal de l'échantillon.

3.1.4.3.1 Tissu à $0^\circ/90^\circ$ La distance entre les noeuds du quadrillage garde relativement la même valeur au cours de la déformation (le tissu dans le cas général est sujet à des petites déformations $< 1\%$), le mécanisme prépondérant étant l'effet de treillis), on a choisit de représenter, dans ce cas, que les variations angulaires.

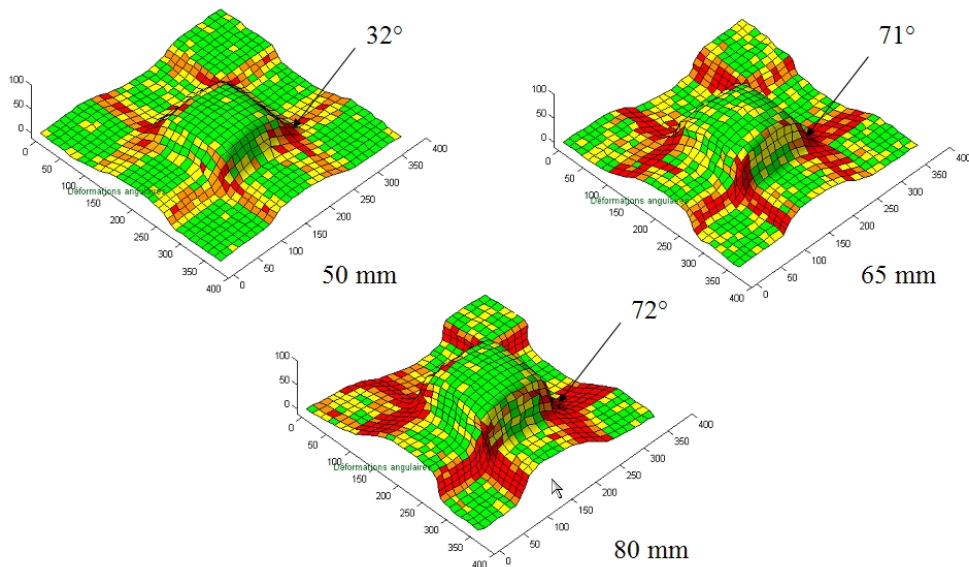


FIG. 3.10: Variations angulaires au sein du renfort pour différentes profondeurs d'emboutissage.

La figure 3.10 montre les variations angulaires obtenus pour différentes profondeurs d'emboutissage. La variation angulaire maximale passe de 32° pour une profondeur de 50 mm à 72° pour une profondeur de 80 mm. Cette dernière est la valeur maximale que peut atteindre le renfort au cours des essais et représente l'angle de blocage du tissu avant flambement et apparition des plis. Les coins du tissu restent globalement peu affectés par cet augmentation (figure 3.8). L'angle de blocage est fonction généralement de la structure du renfort et de l'espacement entre les mèches avant chevauchement (cf. § 2.1.2.1.2.1.).

3.1.4.3.2 Tissu à $-45^\circ/45^\circ$ Des mesures ont également été effectuées sur un tissu découpé à 45° (figure 3.11). La forme obtenue est caractéristique : on observe un avale-

ment du renfort dans les coins (alors que celui-ci avait lieu au milieu des côtés pour un tissu à 90°).

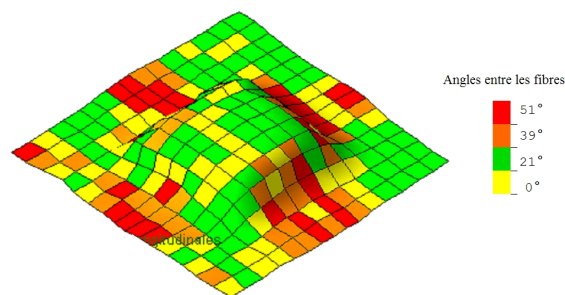


FIG. 3.11: Variations angulaires, tissu à $-45/45$.

Seul un échantillon, dont les dimensions sont légèrement inférieure à celles de l'échantillon standard, a été embouti dans de bonnes conditions.

3.1.5 Perspectives

Une analyse plus approfondie est menée par la technique de stéréovision au sein du LMSP qui permet de mesurer l'évolution de la forme 3D d'un objet en enregistrant plusieurs paires stéréoscopiques relatives à différents états de déformation du renfort. Le but est la mesure champ de déplacements et des déformations de la surface du renfort

L'étude peut être aussi étendue à d'autres types de renforts ou à plusieurs séquences d'empilement pour en déterminer entre autres les différents angles de blocage ainsi que l'évolution de l'angle de cisaillement.

3.2 Thermoformage

La présente étude a été effectuée dans le Laboratoire de Matériaux Composites de l'ENSAM Lille. Son objectif a été principalement la reproduction des conditions réelles de mise en forme sur une presse conçue à cet effet.

Elle a pour objectif principal la réalisation d'une campagne d'essais de thermoformage de divers types de composites en maîtrisant l'ensemble du cycle de fabrication.

3.2.1 Dispositif expérimental

La figure 3.12 représente une vue d'ensemble du banc d'essai avec ses trois parties . La première est constituée d'un convoyeur qui va permettre le transfert, selon deux configurations décrites un peu plus loin, du flan dans le bloc de chauffage. La deuxième est un bloc de chauffage composé de deux rampes infra-rouges, fournissant chacun une puissance calorifique de 10 kW et permettant de réchauffer le flan jusqu'à une température de 450°C . La précision en température est de $\pm 3^\circ\text{C}$ pour des températures allant jusqu'à 250°C , et pour des températures supérieures à 250°C , l'erreur avoisine $\pm 5^\circ\text{C}$. La troisième est une presse hydraulique de fermeture maximale de 50 T munie

d'outillages préalablement chauffé selon le matériau à emboutir. La figure 3.14 illustre la géométrie des outillages utilisés.

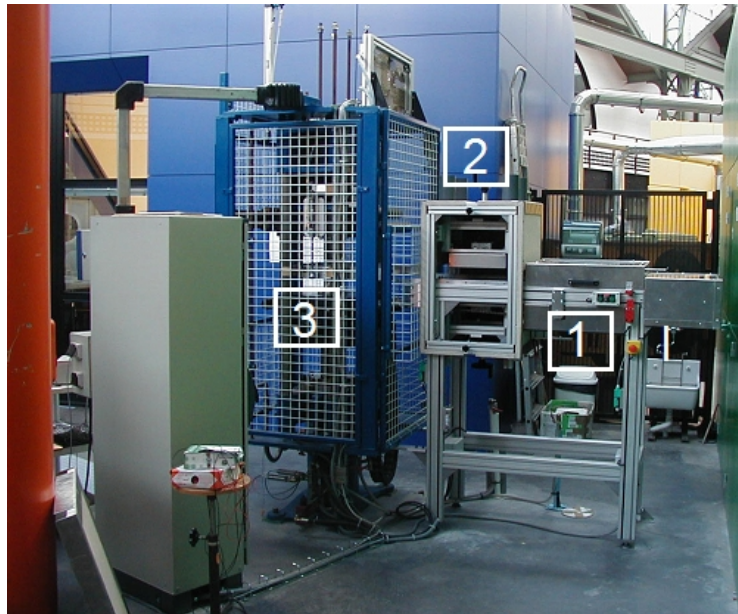


FIG. 3.12: Banc d'essai de thermoformage.

L'ensemble du cycle de thermoformage est contrôlé en mode automatique par supervision de tous les actionneurs. Il est possible d'y régler :

- la pression fournie au vérin de la presse
- le temps de maintien de cette pression lors de l'emboutissage et en fin de cycle
- la température des outils
- le temps de montée, de maintien et de descente de cette température
- la hauteur d'emboutissage dans le cas d'un emboutissage calé
- la température de flan désirée

La pression fournie aux vérins actionnant la fourchette qui permet de monter et descendre l'ensemble serre-flan ou serre flan/pose flan, est régulée indépendamment du reste de la presse. Celui-ci possède son propre dispositif de réglage et permet de faire varier la pression fournie à chacun des deux vérins de 1 à 6 bars.

Comme nous le verrons par la suite, quelques modifications de la presse ont dû être effectuées pour permettre une répartition homogène de la température dans le flan chauffé, jusqu'à présent non-atteinte. Ces modifications sont essentiellement : l'implantation d'un serre-flan chauffant muni d'un thermorégulateur, d'une part. D'autre part, l'utilisation d'un ensemble permettant la réalisation de pièces à hautes températures de mise en forme, l'objectif principal étant l'amélioration du cycle de température de thermoformage.

Deux bancs d'acquisition de données sont disponibles. L'un permet d'obtenir les températures du serre-flan et du flan tout au long du cycle de thermoformage d'une pièce, l'autre permet d'avoir la pression fournie au vérin de la presse par l'intermédiaire de l'armoire de commande. Le banc d'acquisition des températures est constitué d'un boîtier sur lequel douze thermocouples de diamètre 0,5 mm peuvent être branchés. Il est relié



FIG. 3.13: Disposition des thermocouples sur le flan étudié.

à un PC permettant de visualiser les données acquises au fur et à mesure de l'évolution du cycle de thermoformage.

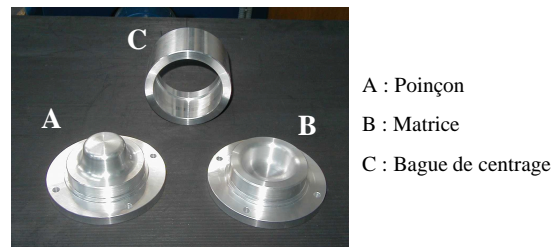


FIG. 3.14: Outillages utilisés.

La pression réelle fournie au vérin s'est avérée être constante et égale à 13,5 bars quelle que soit la consigne donnée (figure 3.13). Le passage, initialement prévu lors de la conception de la machine, entre le pilotage en effort et le pilotage en déplacement est assez délicat à manier : tous les essais ont donc été réalisés avec une pression fournie au vérin de 13,5 bars environ.

3.2.2 Utilisation d'un serre-flan chauffant

Dans les précédentes campagnes d'essais réalisées sur la presse, les pièces produites présentaient de nombreux défauts dus à une répartition non uniforme de la température à la sortie des fours IR. Cette dernière était principalement causée par le serre-flan qui, en étant intercalé entre le flan et les fours IR, gênait le rayonnement d'atteindre toute la surface du flan. Un serre-flan chauffant a été conçu à cet effet, son l'objectif est l'amélioration du cycle de température de la mise en forme. Le principe est de faire circuler un fluide caloporteur dans le circuit prévu à cet effet à l'aide d'un thermorégulateur.

Tout un ensemble de problèmes est apparu dès lors que le serre-flan associé aux tuyaux de raccordement au thermorégulateur a été mis en place. La presse n'ayant pas été conçue pour ce type de procédé, il a donc fallu apporter un ensemble de modifications afin de palier tous les problèmes rencontrés.

3.2.3 Matériaux utilisés

Trois types de matériaux ont été utilisés dans la campagne d'essais :

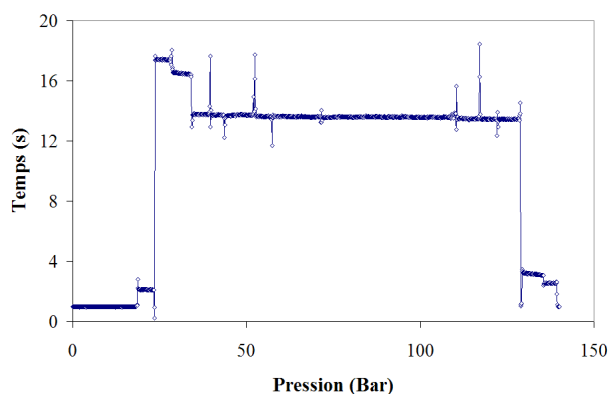


FIG. 3.15: Relevé de pression obtenu avec le banc d'acquisition correspondant à la consigne : 2,5 bars/min, 5 bars/min, 7,5 bars/min, 10 bars/min.

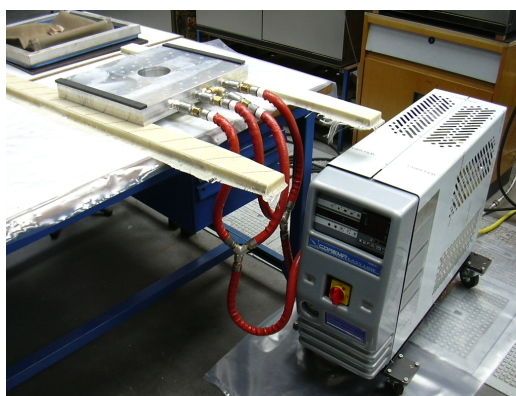


FIG. 3.16: Serre-flan chauffant raccordé au thermorégulateur.

3.2.3.1 Le PP Twintex

Le Twintex de Saint-Gobain Vetrotex est un matériau utilisé dans de nombreuses applications et notamment dans les transports (automobile et marine). C'est un composite thermoplastique à matrice polypropylène (PP) renforcé par des fibres de verre. Il offre une très grande résistance aux chocs (Choc Charpy sans entaille ISO 179 : de 220 à 445 kJ/m²). Il a, de plus, un excellent comportement en présence d'eau. Sa température de mise en forme se situe entre 160 et 190° C et varie en fonction des conditions de chauffage et de la fraction volumique de fibres.

Deux épaisseurs de plaques ont été utilisées : 1 et 2,5 mm, de densités respectives de 745 et 2980 g/m². La structure du renfort étant du sergé 2/2.

3.2.3.2 L'Hexform

L'Hexform fabriqué par Hexcel Composites est un matériau à hautes caractéristiques mécaniques. Il possède une matrice époxy spéciale renforcée par un tissu en fibres de verre ou de carbone. Sa température de mise en forme se situe entre 150 et 180° C. Le renfort utilisé présente une structure tissée équilibrée.

3.2.3.3 Le Cetex

Le Cetex fourni par la société hollandaise Ten Cate Advanced Composites est l'un des thermoplastiques les plus étudiés à l'heure actuelle dans le milieu de l'aéronautique et de l'espace notamment pour EADS. La raison principale de cet intérêt particulier est que ce matériau possède des caractéristiques mécaniques et thermiques supérieures à la plupart des composites de sa catégorie. La matrice est en Polyphénylène Sulfide (PPS) associée à 60 % de fibres de carbones. Sa température de mise en forme se situe entre 280 et 320° C et nécessite un outillage permettant d'atteindre ces températures.

Plusieurs plaques ont été prévues pour la présente étude dont les références sont les suivantes

Pour le jeu de poinçon-matrice d'entrefer 2,5 mm
Référence 1 CFO 286-007 : Carbone CD 286, 7 plis (0/45/0/45/0/45/0).
Référence 2 CFO 286-006 : Carbone CD 286, 6 plis (0/45/0/0/45/0).
Référence 3 CFO 206-009 : Carbone CD 206, 9 plis (0/45/0/45/0/45/0/45/0).
Pour le jeu poinçon-matrice d'entrefer 1 mm
Référence 1 CFO 206-002 : Carbone CD 206, 2 plis (0/0).
Référence 2 CFO 286-002 : Carbone CD 286, 2 plis (0/0).

TAB. 3.1: Références des plaques Cetex utilisés dans la campagne d'essais

Nous verrons par la suite que l'utilisation du serre-flan chauffant ne permet pas d'atteindre la température de mise en forme de ce matériau. On proposera, pour pallier cette difficulté, l'utilisation d'un film thermalimide fixé à un pose flan convoyé conçu à cet effet.

3.2.4 Campagne d'essais

3.2.4.1 Cycle de mise en forme

La première étape de mise en forme consiste à positionner le flan sur le serre-flan (ou pose-flan) et à ramener l'ensemble entre les deux rampes infrarouges. Il est alors chauffé au-delà de sa température de fusion et transféré sous presse où, après emboutissage il sera maintenu sous pression afin de permettre sa reconsolidation (figure 3.17). La pièce obtenue est ensuite refroidie à température ambiante. L'ensemble poinçon/matrice est facilement interchangeable, et se monte sur les plateaux de la presse. Deux configurations de poinçon/matrice sont possibles, permettant d'emboutir des pièces d'épaisseurs de 1 et 2.5 mm. Il est aussi possible d'intercaler entre la matrice et le poinçon une couche de silicone.

3.2.4.2 Cycle de température

Les premiers essais ont été effectués sur le Twintex, et l'Hexform par le biais du serre-flan chauffant.

Twintex et hexform Les figures 3.18 et 3.19 montrent les relevés de températures comparés à une courbe "idéale" de température de mise en forme pour les flans en Twintex et Hexform. Quatre phases peuvent être distinguées, la première partie (I) correspond à la phase de chauffage au four infrarouge, ce qui précède étant le temps

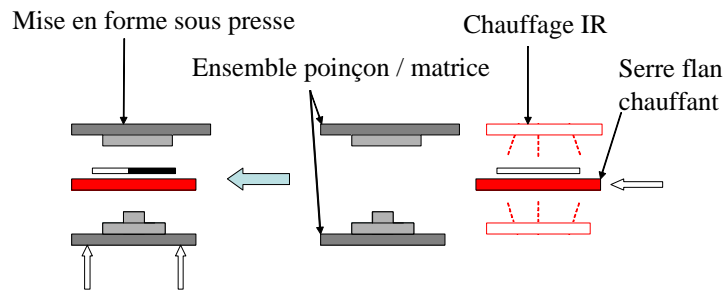


FIG. 3.17: Différentes étapes de mise en forme.

nécessaire à la montée en température du serre-flan chauffant. La deuxième partie (II) correspond à la phase de transfert du flan sur les outillages. La troisième (III) correspond à la fermeture de la presse et au maintien sous pression de l'ensemble. La dernière (IV) correspond au démoulage.

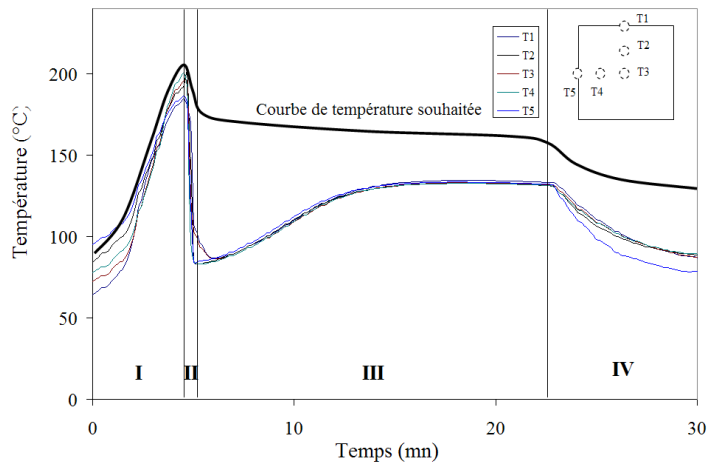


FIG. 3.18: Evolution de la température au cours de la mise en forme (Twintex, flan carré).

Après la phase de transfert et lorsque le flan est positionné sur les outillages, ce dernier doit avoir une température correspondant à sa plage de température de mise en forme ($160 \div 190^\circ \text{C}$ pour le Twintex, $150 \div 180^\circ \text{C}$ pour l'Hexform). Des thermocouples ont été positionnés le long du diamètre ou la largeur du flan (flan cylindrique ou circulaire) afin de suivre le cycle en température étape par étape, ceci n'était faisable que pour le Twintex puisque la température n'avait pas trop d'influence sur la tenue des bandes adhésives utilisées pour maintenir les thermocouples à la surface de la pièce (figure 3.13).

Les premières analyses ont révélé une chute importante de la température à la fin de la phase de chauffage et au cours de la phase de transfert à la presse, ce qui causait l'apparition de plusieurs défauts de type irrégularité de la surface utile de la pièce, flambements locaux des fibres et absence locale de résine (zones sèches) (figure 3.20).

Le procédé de mise en forme utilisé a été amélioré au fur et à mesure de l'évolution de la maîtrise de l'ensemble des paramètres, la consigne donnée aux rampes infra rouges et

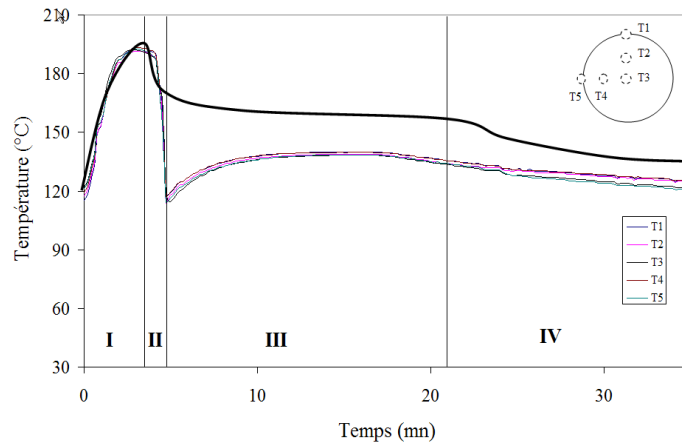


FIG. 3.19: Evolution de la température au cours de la mise en forme (Twintex, flan circulaire).

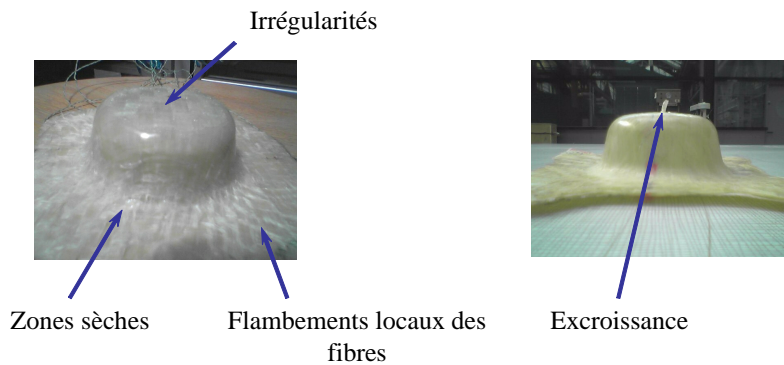


FIG. 3.20: Types de défauts constatés.

au thermorégulateur ainsi que par l'isolation thermique du boîtier couvrant la partie de transfert. La figure 3.21 montre l'amélioration du cycle en température entre les premiers tests sur le Twintex et ceux obtenus en fin de campagne.

On note une grande amélioration quant à la qualité de la pièce finale. Les pièces obtenues présentent généralement un bon état de surface et la résine est uniformément répartie sur toute la géométrie.

Cetex Ce matériau nécessitant une montée en température proche des 300° C pour permettre sa mise en forme, il n'était pas possible d'utiliser le serre-flan-chauffant puisque le thermorégulateur est limité à une température de fonctionnement de 200°C. Nous avons conçu, à cet effet, un ensemble permettant d'étendre un film thermalimide, sur lequel on vient placer le flan. Ce dernier est ensuite convoyé de la même manière que précédemment, et vient se poser sur le serre-flan (figure 3.22) avant la montée sous presse. Cette solution a permis d'obtenir directement une bonne répartition de la température le long du flan.

Il n'était pas possible de faire des relevés de température sur le flan directement,

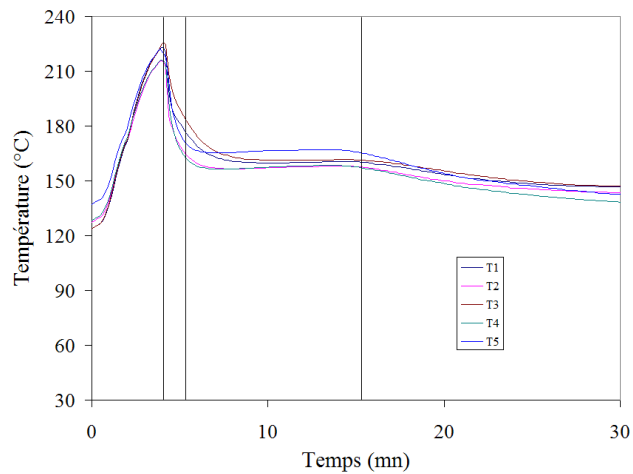


FIG. 3.21: Evolution de la température après isolation de la phase de transfert (Twintex).

c'est pourquoi aucune courbe d'évolution de la température au cours du cycle de mise en forme n'a pu être obtenue. Le seul indicateur est un capteur infrarouge situé à la sortie de la phase de transfert qui permet de savoir si le flan est à la bonne température ou pas.

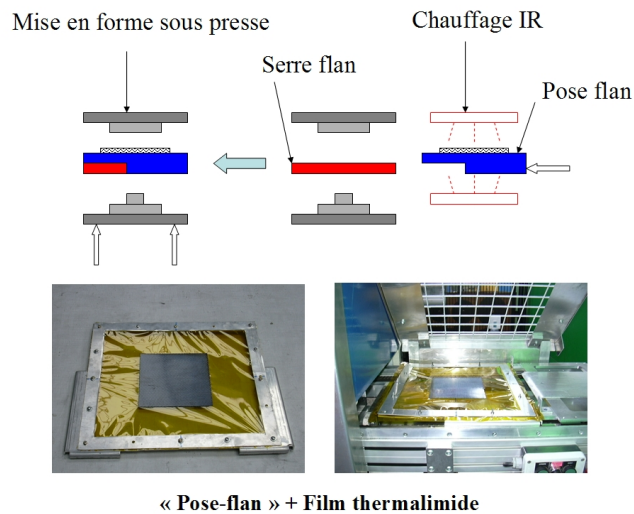


FIG. 3.22: Etapes de mise en forme modifiées.

3.2.5 Déformées obtenues

La figure 3.23 montre des exemples de matériaux emboutis après obtention d'un cycle adéquat de mise en forme. Les pièces obtenues présentent généralement un état de surface satisfaisant et une bonne répartition des mèches sur la zone utile du renfort. Des micrographies ont été effectuées sur quelques échantillons pour vérifier l'absence de

porosités sur deux sections perpendiculaires du flan [Bot04].

3.2.6 Perspectives

Cette première phase d'exploitation de la machine a permis de relever quelques difficultés liées au thermoformage des composites à matrice thermoplastique à l'échelle du laboratoire. Elle peut être étendue à d'autres essais ayant pour but l'optimisation des conditions de mise en forme et l'influence d'autres paramètres tels que la forme du flan, la séquence d'empilement du stratifié et son épaisseur et la géométrie des outillages sur le produit final. L'état de déformation dans le renfort peut être étudié, comme c'était le cas pour les tissus secs, par mesure directe des coordonnées d'un quadrillage tracé préalablement ou par stéréovision. On peut aussi s'intéresser à l'évolution de l'état de la structure au cours du formage par l'obtention de pièces non complètement embouties en intercalant des butées pour différentes courses du poinçon.

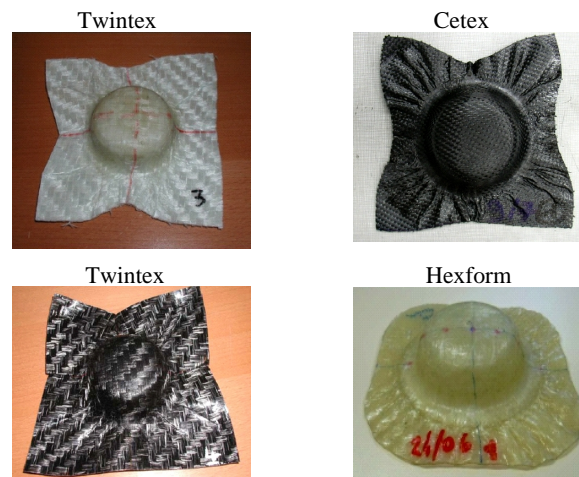


FIG. 3.23: Déformées obtenues pour les différents matériaux utilisés.

Simulation numérique de la mise en forme

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la loi de comportement implémentée dans le solveur PAM FORM sous la référence « matériau 140 ». Après une présentation de l'approche en dynamique explicite caractéristique du solveur (§ 4.1.), nous décrivons quelques spécificités liées à la modélisation de la structure (§ 4.2.).

La loi de comportement est ensuite présentée en deux temps (§ 4.3.). Dans une première étape, puisque nous ne disposons d'aucune information sur la loi de comportement, nous avons conduit différents tests élémentaires afin de déterminer l'influence des différents paramètres et de caractériser, au moins grossièrement, cette loi. Dans la seconde phase, nous avons eu accès, de manière partielle, aux codes sources du matériau 140. Nous avons alors pu vérifier la validité des tests réalisés précédemment, et surtout expliciter d'autres parties de la loi de comportement, soit de manière directe avec les informations dont nous disposions, soit à l'aide de tests complémentaires.

Puis, nous présentons, parmi les tests réalisés, les trois principaux (§ 4.4.). Le premier vise à simuler la mise en forme par emboutissage d'un renfort non imprégné ; les résultats obtenus sont comparés avec ceux de l'analyse expérimentale du chapitre 3 (cf. § 3.1.). Le second présente la simulation numérique de l'essai de cadre déformable à partir duquel nous montrons que les variations des contraintes principales viscoélastiques ne sont pas liées aux variations angulaires. Alors que l'essai de cadre déformable fait intervenir uniquement une déformation de nature homogène de cisaillement, l'intérêt du troisième test est de faire intervenir simultanément plusieurs types de déformation de nature non homogène : ce test porte sur la mise en forme par emboutissage d'un composite à matrice thermoplastique. Cela nous permettra alors d'analyser le comportement viscoélastique de la résine dans l'échantillon soumis à plusieurs types de déformations de manière simultanée. Nous comparerons ensuite les résultats avec ceux obtenus expérimentalement dans le chapitre 3 (cf. § 3.2.).

Enfin, nous proposerons quelques pistes pour construire une autre loi de comportement prenant en compte la nature tissée du renfort, à la différence du matériau 140 (§ 4.5.).

4.1 Approche en dynamique explicite

L'approche explicite est une approche qui s'est avérée souvent plus simple et efficace que à mettre en œuvre que l'approche implicite. Traditionnellement utilisée pour résoudre des problèmes de dynamique (impact/crash), elle apparaît, actuellement, comme une méthode alternative pour simuler les problèmes de mise en forme.

Méthode des différences centrales

La méthode des différences centrales fait partie des schémas d'intégration temporels les plus utilisés. Elle est développée à partir des formules de différences centrales pour la vitesse et l'accélération où elle est appliquée ici dans le cas d'un maillage Lagrangien.

Le temps de la simulation noté par t_S est divisé en pas de temps Δt^n , $n = 1$ à n_{PT} où n_{PT} désigne le nombre de pas de temps. Les exposants indiquent le pas de temps : t^n et $\mathbf{d}^n = \mathbf{d}(t^n)$ sont le temps et le déplacement, respectivement, au pas de temps n .

L'algorithme utilisé est à pas de temps variable. Cela est en effet nécessaire pour des calculs pratiques puisque le pas de temps stable change avec la déformation du maillage et la vitesse de propagation de l'onde change avec les contraintes. Pour cela, les incréments temporels sont définis par

$$\Delta t^{n+\frac{1}{2}} = t^{n+1} - t^n, \quad t^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (t^{n+1} + t^n), \quad \Delta t^n = t^{n+\frac{1}{2}} - t^{n-\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

La formule des différences centrales pour la vitesse est alors donnée par

$$\dot{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} \equiv \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{t^{n+1} - t^n} = \frac{1}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) \quad (4.2)$$

Elle peut être convertie à une formule d'intégration en réarrangeant les termes comme suit

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

L'accélération et sa formule correspondante sont données alors par

$$\ddot{\mathbf{u}}^n \equiv \mathbf{a}^n = \frac{\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}}}{t^{n+\frac{1}{2}} - t^{n-\frac{1}{2}}}, \quad \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t^n \mathbf{a}^n \quad (4.4)$$

On observe que les précédentes formules sont définies aux points centraux des intervalles de temps qui sont appelés demi-pas. Par substitution de 4.3 dans 4.4, l'accélération peut être exprimée directement à partir des déplacements

$$\ddot{\mathbf{u}}^n \equiv \mathbf{a}^n = \frac{\Delta t^{n-\frac{1}{2}} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) - \Delta t^{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^n \Delta t^{n-\frac{1}{2}}} \quad (4.5)$$

Dans le cas de pas de temps similaires, l'expression de l'accélération se réduit à

$$\ddot{\mathbf{u}}^n \equiv \mathbf{a}^n = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{(\Delta t^n)^2} \quad (4.6)$$

L'équation du mouvement à un pas de temps n s'écrit

$$\mathbf{M}\mathbf{a}^n = \mathbf{f}^n = \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}^n, t^n) - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}^n, t^n) \quad (4.7)$$

et est sujette à

$$g_I(\mathbf{u}^n) = 0, \quad I = 1..n_C \quad (4.8)$$

qui est une représentation généralisée des n_C conditions aux limites en déplacements et autres contraintes sur le modèle qui peuvent être des fonctions algébriques linéaires ou non linéaires des déplacements nodaux.

Les équations pour actualiser les vitesses et les déplacements sont obtenues en substituant 4.7 à 4.4, ce qui donne

$$\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t^n \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}^n \quad (4.9)$$

A chaque pas de temps n , les déplacements sont connus. Les forces nodales sont déterminées à partir de la relation entre les déplacements et la mesure de déformation utilisée (qui dans notre cas sera le taux de déformation \mathbf{D}) et de la loi de comportement reliant les contraintes à cette mesure de déformation.

L'actualisation des vitesses et des déplacements nodaux peut être accomplie sans résolution d'aucune équation pourvu que la matrice masse \mathbf{M} soit diagonale. C'est l'une des caractéristiques saillantes de la méthode explicite.

L'amortissement est modélisé par une force linéaire visqueuse $\mathbf{f}^A = \mathbf{C}^A \mathbf{v}$ de façon à ce que la force totale soit $\mathbf{f} - \mathbf{C}^A \mathbf{v}$.

L'inconvénient majeur de cette méthode reste sa stabilité conditionnelle. Si le pas de temps dépasse une certaine valeur critique Δt_{crit} , la solution diverge. Ce pas de temps critique, appelé aussi pas de temps stable, pour un maillage où les éléments sont constants en déformation est donné par

$$\Delta t = \alpha \Delta t_{crit}, \quad \Delta t_{crit} = \frac{2}{\omega_{max}} \leq \min_{e,I} \frac{2}{\omega_I^e} = \min_e \frac{l_e}{c_e} \quad (4.10)$$

où ω_{max} est la fréquence maximale du système linéarisé, l_e est la longueur caractéristique d'un élément, c_e est la vitesse de propagation de l'onde dans l'élément e et α un facteur de réduction des effets de non-linéarités (compris généralement entre 0.8 et 0.98).

Cette condition s'appelle condition de Courant [CFL28] et le taux α est appelé le nombre de courant. Le coût d'une simulation en dynamique explicite est indépendante de la plage de fréquence d'intérêt et dépend uniquement de la taille du modèle et du nombre des pas de temps. Le pas de temps critique diminue avec le raffinement du maillage et l'augmentation de la rigidité du matériau.

4.2 Modélisation de la structure

Pour la modélisation du laminé, on utilise un empilement d'éléments coques. L'élément utilisé est un élément quadrangle à quatre noeuds et à intégration réduite développé par Belytschko et Tsay [BL84]. La formulation utilisée est une formulation corotationnelle en vitesse de déformation. Les effets de rotation de corps rigide du matériau sont traités par la fixation d'un système de coordonnées à l'élément. Ceci fournit un moyen simple d'éviter les complexités de la mécanique non linéaire du fait de l'objectivité des relations décrites dans ce système.

4.2.1 Repère utilisé

Pour une simulation éléments finis, le problème de formage impose une formulation incrémentale en grande déformation. Une attention particulière doit être faite dans l'utilisation des systèmes de coordonnées choisis pour décrire le comportement du matériau.

Le repère local tournant avec la matière est défini à partir des coordonnées nodales de l'élément. Le vecteur $\hat{\mathbf{e}}_3$ est supposé être normal aux vecteurs \mathbf{r}_{13} et \mathbf{r}_{24} qui relient respectivement les noeuds 1 et 3, 2 et 4. Ses composantes sont données par

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \frac{\mathbf{r}_{13} \times \mathbf{r}_{24}}{\|\mathbf{r}_{13} \times \mathbf{r}_{24}\|} \quad (4.11)$$

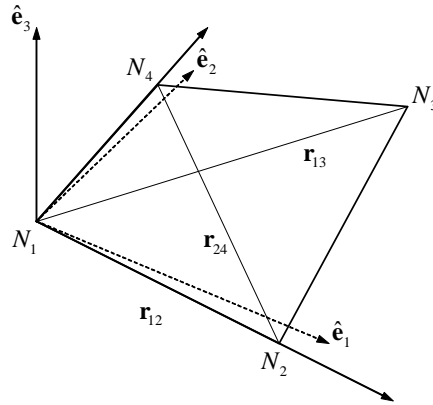


FIG. 4.1: Construction du repère corotationnel.

L'axe $\hat{\mathbf{e}}_1$ est défini à partir du vecteur \mathbf{r}_{12} en renforçant la condition de normalité puisque cette direction n'est pas perpendiculaire à $\hat{\mathbf{e}}_3$. L'erreur est faible si les déformations de cisaillement transverses sont inférieures à 10%.

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{r}_{12} - (\mathbf{r}_{12}^T \hat{\mathbf{e}}_3) \hat{\mathbf{e}}_3}{\|\mathbf{r}_{12} - (\mathbf{r}_{12}^T \hat{\mathbf{e}}_3) \hat{\mathbf{e}}_3\|} \quad (4.12)$$

Le dernier axe est obtenu par $\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1$.

4.2.2 Cinématique de l'élément

La géométrie de l'élément est définie par sa surface de référence ou surface moyenne, et son épaisseur h . La vitesse d'un point de la coque est définie par la vitesse de la surface de référence \mathbf{v}^m et la vitesse angulaire $\boldsymbol{\theta}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^m - z\mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\theta} \quad (4.13)$$

Les composantes co-rotationnelles du tenseur taux de déformation, défini dans le repère décrit précédemment, sont :

$$\hat{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) \quad (4.14)$$

en substituant 4.14 dans 4.13, on a

$$\hat{D}_{11} = \frac{\partial \hat{v}_1^m}{\partial \hat{x}_1} + \hat{z} \frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial \hat{x}_1}; \quad \hat{D}_{22} = \frac{\partial \hat{v}_2^m}{\partial \hat{x}_2} + \hat{z} \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial \hat{x}_2} \quad (4.15)$$

$$2\hat{D}_{12} = \frac{\partial \hat{v}_1^m}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial \hat{v}_2^m}{\partial \hat{x}_1} + \hat{z} \left(\frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial \hat{x}_2} - \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial \hat{x}_1} \right) \quad (4.16)$$

$$2\hat{D}_{23} = \frac{\partial \hat{v}_3^m}{\partial \hat{x}_2} - \hat{\theta}_1; \quad 2\hat{D}_{13} = \frac{\partial \hat{v}_3^m}{\partial \hat{x}_1} - \hat{\theta}_2 \quad (4.17)$$

Les composantes du tenseur taux de déformation et du tenseur de contraintes de Cauchy sont notées par

$$\hat{D} = [\hat{D}_{11} \quad \hat{D}_{22} \quad 2\hat{D}_{12} \quad 2\hat{D}_{13} \quad 2\hat{D}_{23}] \quad (4.18)$$

$$\hat{\sigma} = [\hat{\sigma}_{11} \quad \hat{\sigma}_{22} \quad \hat{\sigma}_{12} \quad \hat{\sigma}_{13} \quad \hat{\sigma}_{23}] \quad (4.19)$$

Les deux matrices sont conjuguées dans le sens où le travail interne par unité de volume est :

$$W = \hat{D}^T \hat{\sigma} \quad (4.20)$$

On considère que la coque est en état de contraintes planes de façon à décomposer la contrainte, en contraintes dans le plan et en contraintes de cisaillement transverse comme suit

$$\hat{\sigma} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma' \\ \sigma'' \end{array} \right\}, \quad \sigma'^T = [\hat{\sigma}_{11} \quad \hat{\sigma}_{22} \quad \hat{\sigma}_{12}], \quad \sigma''^T = [\hat{\sigma}_{13} \quad \hat{\sigma}_{23}] \quad (4.21)$$

\hat{D}_{33} est calculée à partir de $\hat{\sigma}_{33} = 0$.

4.2.3 Discrétisation éléments finis

L'équation du mouvement à un pas de temps n s'écrit

$$\mathbf{M}\mathbf{a}^n = \mathbf{f}^n = \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{u}^n, t^n) - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}^n, t^n) \quad (4.22)$$

L'équation du mouvement est donné par un opérateur topologique adéquat

$$\mathbf{f}^{int} = \mathbf{A} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f}^e \\ \mathbf{m}^e \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

où les forces nodales \mathbf{f}^e et les moments \mathbf{m}^e sont donnés par le principe des puissances virtuelles :

$$\delta \boldsymbol{\theta}_I^{et} \mathbf{m}_I^e + \delta \mathbf{v}_I^{et} \mathbf{f}_I^e = \delta \hat{\boldsymbol{\theta}}_I^{et} \hat{\mathbf{m}}_I^e + \delta \hat{\mathbf{v}}_I^{et} \hat{\mathbf{f}}_I^e = \int_{V^e} \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} dV \quad (4.24)$$

où V^e est le volume de l'élément e , la répétition d'indices indique une sommation sur les noeuds de l'élément et \mathbf{m}_I^e et \mathbf{f}_I^e sont donnés par

$$\mathbf{f}^e = \left\{ \begin{array}{c} f_{xI} \\ f_{yI} \\ f_{zI} \end{array} \right\}, \quad \mathbf{m}^e = \left\{ \begin{array}{c} m_{xI} \\ m_{yI} \\ m_{zI} \end{array} \right\} \quad (4.25)$$

La surface de référence de l'élément est approximée dans la configuration de référence et dans la configuration déformée par des fonctions d'interpolation

$$\begin{Bmatrix} x^m \\ y^m \\ z^m \end{Bmatrix} = N_I(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

où x_I , y_I et z_I sont les coordonnées de l'élément I .

L'élément utilisé est un quadrangle à quatre noeuds bilinéaires de fonctions d'interpolation :

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (4.27)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (4.28)$$

La vitesse de la surface de référence ainsi que sa vitesse angulaire sont approximées par les mêmes fonctions d'interpolation

$$\mathbf{v}^m = N_I(\xi, \eta) \mathbf{v}_I \quad (4.29)$$

$$\boldsymbol{\theta} = N_I(\xi, \eta) \boldsymbol{\theta}_I \quad (4.30)$$

La vitesse de déformation est donnée par

$$\hat{D}_{11} = B_{1I}\hat{v}_{1I} + \hat{z}B_{1I}\hat{\theta}_{2I}; \quad \hat{D}_{22} = B_{2I}\hat{v}_{2I} + \hat{z}B_{2I}\hat{\theta}_{1I} \quad (4.31)$$

$$2\hat{D}_{12} = B_{1I}\hat{v}_{2I} + B_{2I}\hat{v}_{1I} + \hat{z}(B_{2I}\hat{\theta}_{2I} - B_{1I}\hat{\theta}_{1I}) \quad (4.32)$$

$$2\hat{D}_{23} = B_{1I}\hat{v}_{3I} + N_I\hat{\theta}_{2I}; \quad 2\hat{D}_{13} = B_{2I}\hat{v}_{3I} - N_I\hat{\theta}_{1I} \quad (4.33)$$

et peut être décomposée en composantes membranaires, de flexion et de cisaillement transverse

$$\begin{Bmatrix} \hat{D}_{11} \\ \hat{D}_{22} \\ 2\hat{D}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{2I} & 0 & 0 & 0 \\ B_{2I} & B_{1I} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_{1I} \\ \hat{v}_{2I} \\ \hat{v}_{3I} \\ \hat{\theta}_{1I} \\ \hat{\theta}_{2I} \end{Bmatrix} + \hat{z} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & B_{1I} \\ 0 & 0 & 0 & B_{2I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{1I} & B_{2I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_{1I} \\ \hat{v}_{2I} \\ \hat{\theta}_{1I} \\ \hat{\theta}_{2I} \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\begin{Bmatrix} 2\hat{D}_{13} \\ 2\hat{D}_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{1I} & 0 & N_I \\ 0 & 0 & B_{2I} & -N_I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_{1I} \\ \hat{v}_{2I} \\ \hat{v}_{3I} \\ \hat{\theta}_{1I} \\ \hat{\theta}_{2I} \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

qu'on peut écrire

$$\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{D}}_{Mem} + \hat{\mathbf{D}}_{Flex} \quad (4.36)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_{CisT} = \hat{\mathbf{D}}_{CisT} \quad (4.37)$$

où $\hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{D}}_{Mem}$, $\hat{\mathbf{D}}_{Flex}$ et $\hat{\mathbf{D}}_{CisT}$ sont les déformations dans le plan, membranaires, de flexion et de cisaillement transverse respectivement.

En utilisant la partition de la vitesse de déformation et de la contrainte, on aura alors

$$\delta\boldsymbol{\theta}_I^{et}\mathbf{m}_I^e + \delta\mathbf{v}_I^{et}\mathbf{f}_I^e = \int_{V^e} \left(\hat{\mathbf{D}}'^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}' + \bar{\kappa} \hat{\mathbf{D}}''^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}'' \right) dV \quad (4.38)$$

où $\bar{\kappa}$ est facteur de pénalisation qui sert à renforcer la condition de normalité de Kirchhoff quand la coque devient mince.

Les efforts nodaux, en se référant à [BL84] sont obtenus par

$$\hat{f}_{1I} = A(B_{1I}f_{11} + B_{2I}f_{12}) + \gamma_I Q_1^M \quad (4.39)$$

$$\hat{f}_{2I} = A(B_{2I}f_{22} + B_{1I}f_{12}) + \gamma_I Q_2^M \quad (4.40)$$

$$\hat{f}_{3I} = A(B_{1I}f_{11} + B_{2I}f_{12}) + \gamma_I Q_3^B \quad (4.41)$$

$$\hat{m}_{1I} = A \left(B_{2I}m_{22} + B_{1I}m_{12} - \frac{1}{4}\bar{\kappa}f_{23} \right) + \gamma_I Q_1^B \quad (4.42)$$

$$\hat{m}_{2I} = A \left(-B_{1I}m_{11} + B_{2I}m_{12} - \frac{1}{4}\bar{\kappa}f_{13} \right) + \gamma_I Q_2^B \quad (4.43)$$

$$\hat{m}_{3I} = 0 \quad (4.44)$$

où $f_{\alpha\beta} = \int \hat{\sigma}_{\alpha\beta} d\hat{z}$ et $m_{\alpha\beta} = - \int \hat{z} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} d\hat{z}$.

4.2.4 Calcul des contraintes

Les contraintes sont calculées à partir de la loi de comportement en contraintes planes. Les composantes du tenseur des contraintes $\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}\}^n$ sont calculées dans le repère local $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)^n$, les composantes du tenseur de déformation $\{\hat{\mathbf{D}}\}^{n+\frac{1}{2}}$ sont, elles, calculés dans le repère $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)^{n+1}$.

Le système de coordonnées $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)^{n+1}$ est obtenu par une rotation $\Delta\mathbf{Q}$ lié au spin \mathbf{W} de $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)^n$.

$$\Delta\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}^{n+\frac{1}{2}}}{\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W}^{n+\frac{1}{2}}} \quad (4.45)$$

La formule de Hughes-Winget [HW80] est la version discrétisée de l'intégration rotationnelle. C'est elle qui, dans notre cas, est utilisée numériquement pour réaliser le cumul tensoriel dans le repère local de l'élément.

$$\{\hat{\boldsymbol{\sigma}}\}^{n+1} = \{\hat{\boldsymbol{\sigma}}\}^n + [\mathbf{C}] \{\hat{\mathbf{D}}\}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.46)$$

[C] étant la matrice de comportement du milieu.

4.3 Loi de comportement

Le matériau de type 140 définit un élément coque de matériau composite bi-phase. Ce modèle de matériau est illustré par la figure suivante (figure 4.2) et consiste en la combinaison de trois comportements : un modèle de comportement élastique global de la coque, un modèle viscoélastique pour la résine et un modèle de comportement élastique pour les fibres.

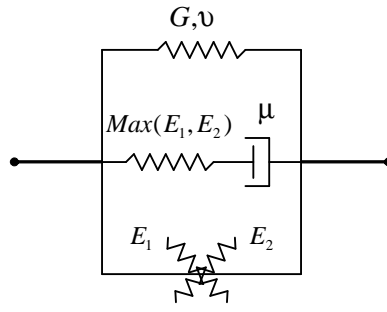


FIG. 4.2: Élément 140 de PAM FORM.

La contrainte est calculée à partir de la somme des trois composantes de contraintes liées à chaque modèle

$$\{\hat{\sigma}\}^{n+1} = \{\hat{\sigma}\}^n + \{\Delta\hat{\sigma}^{Tot}\} \quad (4.47)$$

$$\{\Delta\hat{\sigma}^{Tot}\} = \{\Delta\hat{\sigma}^{Glob}\} + \{\Delta\hat{\sigma}^{VE}\} + \{\Delta\hat{\sigma}_i^{Fib}\}, \quad i = 1, 2 \quad (4.48)$$

où $\{\Delta\hat{\sigma}^{Glob}\}$, $\{\Delta\hat{\sigma}^{VE}\}$ et $\{\Delta\hat{\sigma}_i^{Fib}\}$ sont respectivement les incréments de contrainte du modèle global, de la contrainte viscoélastique et de la contrainte élastique dans chaque direction de fibres.

Cet élément a été explicité à travers plusieurs tests qui ont permis de déterminer la nature de son implémentation. Les sections qui vont suivre donnent les détails de sa composition.

4.3.1 Comportement global du monopli

Ce constituant a un comportement élastique linéaire. Les propriétés à fournir en entrée sont le module de cisaillement dans le plan G et le coefficient de Poisson ν . Le module de cisaillement peut être fourni soit par une constante, soit par une courbe en fonction de l'angle entre les fibres. Ce constituant a été introduit pour contrôler les instabilités numériques et pour stabiliser les calculs.

On peut spécifier dans les données un angle de blocage θ_{Bl} à partir duquel le module de cisaillement G est substitué par un module de cisaillement « après blocage » G_{Bl} .

L'incrément de contrainte lié au comportement global est donné par

$$\{\Delta\hat{\sigma}^{Glob}\} = [\mathbf{C}^{Glob}] \{\hat{\mathbf{D}}\}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.49)$$

avec

$$[\mathbf{C}^{Glob}] = \frac{E^{Glob}}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 0 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\frac{\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad E^{Glob} = 2G(1+\nu) \quad (4.50)$$

4.3.2 Comportement viscoélastique de la résine

Le comportement de la résine est considéré viscoélastique (un ressort et un amortisseur en série). La rigidité du ressort est définie comme le maximum des modules d'Young des fibres, son coefficient de Poisson est fixé à 0.5 afin de modéliser l'incompressibilité de la matrice.

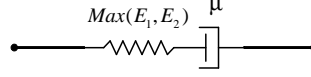


FIG. 4.3: Modèle de Maxwell.

L'incrément de déformation dans ce modèle est la somme des incréments de déformation élastiques et visqueux

$$\{\hat{\mathbf{D}}\}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} = \{\hat{\mathbf{D}}^r\}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \{\hat{\mathbf{D}}^a\}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.51)$$

La contrainte visqueuse s'écrit selon le modèle fluide idéalisé pour un fluide visqueux à une seule famille de fibres présentée § 2.1.2.1., d'expression

$$\boldsymbol{\sigma}^{Vis} = 2\eta_T \mathbf{D} + 2(\eta_L - \eta_T)(\mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A}) \quad (4.52)$$

Les directions des fibres sont supposées être initialement droites et parallèles dans le repère local de l'élément ($\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$). Elles restent dans le plan 1-2, avec un angle initial θ par rapport à $\hat{\mathbf{e}}_1$.

En notation de Voigt, la contrainte visqueuse s'écrit comme suit

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^V & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{16}^V \\ 0 & C_{22}^V & 0 & 0 & 0 & C_{26}^V \\ 0 & 0 & C_{33}^V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^V & C_{45}^V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54}^V & C_{55}^V & 0 \\ C_{16}^V & C_{26}^V & 0 & 0 & 0 & C_{66}^V \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{33} \\ 2D_{23} \\ 2D_{13} \\ 2D_{12} \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

avec

$$C_{11}^V = 2\mu_T (1 - 2m^2) + 4\mu_L m^2 \quad (4.54)$$

$$C_{22}^V = 2\mu_T (1 - 2n^2) + 4\mu_L n^2 \quad (4.55)$$

$$C_{33}^V = 2\mu_T \quad (4.56)$$

$$C_{44}^V = \mu_T (1 - n^2) + \mu_L n^2 \quad (4.57)$$

$$C_{45}^V = C_{54}^V = (\mu_L - \mu_T) mn \quad (4.58)$$

$$C_{55}^V = \mu_T (1 - m^2) + \mu_L m^2 \quad (4.59)$$

$$C_{66}^V = \mu_L \quad (4.60)$$

$$C_{16}^V = C_{26}^V = 2(\mu_L - \mu_T) mn \quad (4.61)$$

où $m = \cos \theta$ et $n = \sin \theta$. En contraintes planes et en supposant que la résine possède la même viscosité dans le sens longitudinal et transversal, la relation 4.52 s'écrit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^V + C_{33}^V & C_{33}^V & C_{16}^V \\ C_{33}^V & C_{22}^V + C_{33}^V & C_{26}^V \\ C_{16}^V & C_{26}^V & C_{66}^V \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ 2D_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\mu & 2\mu & 0 \\ 2\mu & 4\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ 2D_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

La contrainte viscoélastique dans le cas de la figure 4.3 est donné alors par

$$\{\boldsymbol{\sigma}^{VE}\}^{n+1} = [\mathbf{C}^V] \{\hat{\mathbf{D}}^a\}^{n+\frac{1}{2}} = \{\boldsymbol{\sigma}^{VE}\}^n + [\mathbf{C}^{Mat}] \{\hat{\mathbf{D}}^r\}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.63)$$

tandis que l'incrément de contrainte viscoélastique $\{\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{VE}\}$ s'écrit

$$\{\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{VE}\} = [\mathbf{C}^{Mat}] \{\hat{\mathbf{D}}^r\}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.64)$$

avec $[\mathbf{I}]$ est la matrice identité, $[\mathbf{D}]$ étant la matrice de viscosité pour une seule direction de fibre tirée de la loi de comportement pour un fluide visqueux renforcé avec une direction de fibres

$$[\mathbf{C}^{Mat}] = \frac{E^{Mat}}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 0 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\frac{\nu}{2} \end{bmatrix}; E^{Mat} = \text{Max}(E_1, E_2) \quad (4.65)$$

$$[\mathbf{C}^V] = \begin{bmatrix} 4\mu & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu & 4\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$\{\hat{\mathbf{D}}^r\}^{n+\frac{1}{2}}$ est calculé à partir de la relation suivante

$$\{\hat{\mathbf{D}}^r\}^{n+\frac{1}{2}} = \left[[\mathbf{I}] + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} [\mathbf{C}^V]^{-1} [\mathbf{C}^{Mat}] \right]^{-1} \left[\{\hat{\mathbf{D}}\}^{n+\frac{1}{2}} - [\mathbf{C}^V]^{-1} \{\boldsymbol{\sigma}^{VE}\}^n \right] \quad (4.67)$$

dont la démonstration est

$$\{\boldsymbol{\sigma}^{VE}\}^{n+1} = [\mathbf{C}^V] \{\hat{\mathbf{D}}^a\}^{n+\frac{1}{2}} = \{\boldsymbol{\sigma}^{VE}\}^n + [\mathbf{C}^{Mat}] \{\hat{\mathbf{D}}^r\}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.68a)$$

$$\{\hat{\mathbf{D}}^a\}^{n+\frac{1}{2}} = [\mathbf{C}^V]^{-1} \{\boldsymbol{\sigma}^{VE}\}^n + [\mathbf{C}^V]^{-1} [\mathbf{C}^{Mat}] \{\hat{\mathbf{D}}^r\}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.68b)$$

$$\{\hat{\mathbf{D}}\}^{n+\frac{1}{2}} - \{\hat{\mathbf{D}}^r\}^{n+\frac{1}{2}} = [\mathbf{C}^V]^{-1} \{\boldsymbol{\sigma}^{VE}\}^n + [\mathbf{C}^V]^{-1} [\mathbf{C}^{Mat}] \{\hat{\mathbf{D}}^r\}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.68c)$$

$$\{\hat{\mathbf{D}}\}^{n+\frac{1}{2}} - [\mathbf{C}^V]^{-1} \{\boldsymbol{\sigma}^{VE}\}^n = \left[[\mathbf{I}] + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} [\mathbf{C}^V]^{-1} [\mathbf{C}^{Mat}] \right] \{\hat{\mathbf{D}}^r\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.68d)$$

$$\{\hat{\mathbf{D}}^r\}^{n+\frac{1}{2}} = \left[[\mathbf{I}] + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} [\mathbf{C}^V]^{-1} [\mathbf{C}^{Mat}] \right]^{-1} \left[\{\hat{\mathbf{D}}\}^{n+\frac{1}{2}} - [\mathbf{C}^V]^{-1} \{\boldsymbol{\sigma}^{VE}\}^n \right] \quad (4.68e)$$

Or, d'après les tests de flexion d'un cantilever réalisés en annexe B, on en conclut que la viscosité n'a aucune influence sur la flèche. Dans la formulation viscoélastique, seules les déformations membranaires sont prises en compte. Cela nous amène à réécrire l'ensemble de ces relations, en considérant l'équation 4.36 et en remplaçant $\{\hat{\mathbf{D}}\}$ par $\{\hat{\mathbf{D}}_{Mem}\}$ dans la relation 4.51.

4.3.3 Comportement élastique dans les fibres

Le comportement des fibres est considéré élastique linéaire. L'incrément de contraintes formulé dans la direction des fibres $\{\Delta\hat{\sigma}_i^{Fib}\}_f$ s'écrit comme suit

$$\{\Delta\hat{\sigma}_i^{Fib}\}_f = [\mathbf{C}_i^{Fib}] \{\hat{\mathbf{D}}_i^{Fib}\}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.69)$$

4.3.3.1 Déformations dans les directions matérielles

Quelques tests élémentaires ont été effectués afin de définir le cumul tensoriel des déformations dans les directions matérielles : Cisaillement simple, Extension simple et Extension suivi de cisaillement. Le post-traitement ne permettant pas l'accès aux déformations dans le système de coordonnées global, on compare trois mesures de déformations logarithmiques, $\ln(l/l_0)$, $\ln(\mathbf{U})$ et $\ln(\mathbf{V})$, pour différentes directions des fibres avec la solution donnée par l'élément 140. On donne les solutions analytiques en $\ln(l/l_0)$ pour les différents tests, les solutions analytiques en $\ln(\mathbf{U})$ et $\ln(\mathbf{V})$ sont données en Annexe A [Bi103].

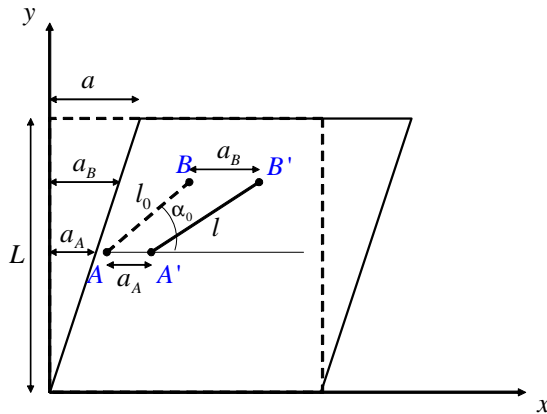


FIG. 4.4: Cinématique du cisaillement simple.

4.3.3.1.1 Cisaillement simple D'après la cinématique du cisaillement simple (figure 4.4), pour une direction quelconque d'une direction matérielle, la longueur initiale

de la fibre est calculée par

$$l_0^2 = \underbrace{(y_B - y_A)^2}_Y + \underbrace{(x_B - x_A)^2}_X \quad (4.70)$$

$$l^2 = \underbrace{(y_B - y_A)^2}_Y + (x_{B'} - x_{A'})^2 \quad (4.71)$$

$$\begin{cases} x_{A'} = x_A + y_A \frac{a}{L} \\ x_{B'} = x_B + y_B \frac{a}{L} \end{cases} \text{ avec } \frac{a}{L} = \frac{a_A}{y_A} = \frac{a_B}{y_B} \quad (4.72)$$

soit

$$l_0^2 = X^2 + Y^2 \quad l^2 = Y^2 + (x_A - x_B + \frac{a}{L}(y_B - y_A))^2 \quad (4.73)$$

$$l^2 = Y^2 + (X + \frac{a}{L}Y)^2 \quad (4.74)$$

ce qui donne

$$\frac{l^2}{l_0^2} = \frac{Y^2 + (X + \frac{a}{L}Y)^2}{X^2 + Y^2} \quad (4.75)$$

et

$$\text{Ln} \frac{l}{l_0} = \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\frac{Y^2 + (X + \frac{a}{L}Y)^2}{X^2 + Y^2} \right) \quad (4.76)$$

Finalement

$$\text{Ln} \frac{l}{l_0} = \frac{1}{2} \text{Ln} \left(1 + \frac{a}{L} \sin \alpha_0 \left(2 \cos \alpha_0 + \frac{a}{L} \sin \alpha_0 \right) \right) \quad (4.77)$$

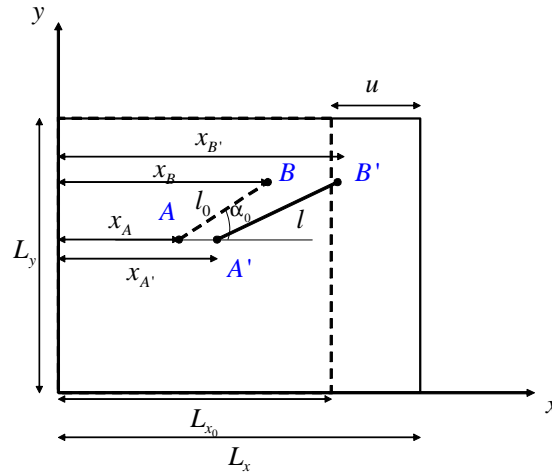


FIG. 4.5: Cinématique de l'extension.

4.3.3.1.2 Extension simple De la même manière et d'après la figure 4.5, la longueur initiale et actuelle de la fibre est donnée par

$$l_0^2 = \underbrace{(y_B - y_A)^2}_Y + \underbrace{(x_B - x_A)^2}_X \quad (4.78)$$

$$l^2 = \underbrace{(y_B - y_A)^2}_Y + (x_{B'} - x_{A'})^2 \quad (4.79)$$

On définit

$$Y = y_B - y_A = l_0 \sin \alpha_0 \quad (4.80)$$

$$X = x_B - x_A = l_0 \cos \alpha_0 \quad (4.81)$$

ce qui donne

$$l_0^2 = X^2 + Y^2 \quad (4.82)$$

$$l^2 = X^2 + \beta^2 Y^2 \quad (4.83)$$

avec $\beta = \frac{L_{x_0+u}}{L_{x_0}} = \frac{x_{A'}}{x_A} = \frac{x_{B'}}{x_B}$

Dans ce cas

$$\frac{l^2}{l_0^2} = \frac{X^2 + \beta^2 Y^2}{X^2 + Y^2} \text{ et } \text{Ln} \frac{l}{l_0} = \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\frac{X^2 + \beta^2 Y^2}{X^2 + Y^2} \right) \quad (4.84)$$

On obtient finalement

$$\text{Ln} \frac{l}{l_0} = \frac{1}{2} \text{Ln} (\sin^2 \alpha_0 + \beta^2 \cos^2 \alpha_0) \quad (4.85)$$

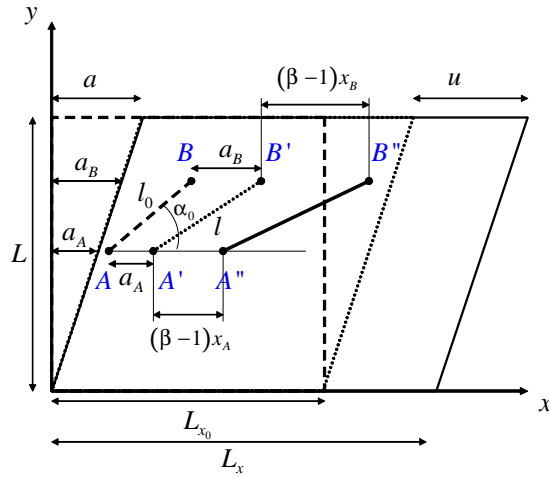


FIG. 4.6: Cinématique du cisaillement suivi d'une extension.

4.3.3.1.3 Cisaillement puis extension D'après la figure (4.6), les coordonnées des points A'' et B'' sont calculées à partir des coordonnées A' et B' en fin de cisaillement comme suit

$$x_{A''} - a_A = \beta (x_{A'} - a_A); \quad (4.86)$$

$$x_{B''} - a_B = \beta (x_{B'} - a_B) \quad (4.87)$$

$y_{A''} = y_{A'} = y_A$ et $y_{B''} = y_{B'} = y_B$. La longueur initiale de la fibre est donnée par

$$l_0^2 = \underbrace{(y_B - y_A)^2}_Y + \underbrace{(x_B - x_A)^2}_X \quad (4.88)$$

Pour calculer la longueur finale d'une fibre

$$x_{B''} - x_{A''} = \beta (x_{B'} - x_{A'}) + (a_B - a_A)(1 - \beta) \quad (4.89)$$

$$x_{B''} - x_{A''} = \beta (x_{B'} - x_{A'}) + \frac{a}{L} Y (1 - \beta) \quad (4.90)$$

avec $\beta = \frac{L_{x_0+u}}{L_{x_0}}$.

Les coordonnées A' et B' sont calculées à partir de la cinématique du cisaillement simple

$$x_{A'} = x_A + y_A \frac{a}{L} \quad (4.91)$$

$$x_{B'} = x_B + y_B \frac{a}{L} \quad (4.92)$$

Si

$$Y = y_B - y_A = l_0 \sin \alpha_0 \quad (4.93)$$

$$X = x_B - x_A = l_0 \cos \alpha_0 \quad (4.94)$$

on obtient

$$\text{Ln} \frac{l}{l_0} = \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\frac{Y^2 + (\beta X + \frac{a}{L} Y)^2}{X^2 + Y^2} \right) \quad (4.95)$$

et finalement

$$\text{Ln} \frac{l}{l_0} = \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\sin^2 \alpha_0 + \left(\beta \cos \alpha_0 + \frac{a}{L} \sin \alpha_0 \right)^2 \right) \quad (4.96)$$

En suivant le même raisonnement dans le cas, cette fois, d'une extension suivi de cisaillement, on obtient

$$\text{Ln} \frac{l}{l_0} = \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\sin^2 \alpha_0 + \left(\left(1 + \frac{u}{L_{x_0}} \right) \cos \alpha_0 + \frac{a}{L} \sin \alpha_0 \right)^2 \right) \quad (4.97)$$

4.3.3.2 Résultats

Dans le cas d'extension simple, les tenseurs de Cauchy-Green Gauche et Droit sont les mêmes pour une direction à 0° et 90° , ce qui fait que \mathbf{U} et \mathbf{V} possèdent les mêmes valeurs propres et vecteurs propres. Dans ce cas, les déformations $\ln \mathbf{U}$ et $\ln \mathbf{V}$ sont aussi les mêmes et égaux à $\ln(1+u)$ dans la direction d'extension et sa direction transverse (figure 4.7). Ce qui n'est pas le cas pour les autres directions.

On voit bien, après cette série de tests, que la déformation suit une loi en $\ln(l/l_0)$ dans le sens des fibres. Ce fait est dû à un cumul tensoriel des déformations de nature rotationnelle, on peut supposer que l'incrément de contraintes dans la direction des fibres s'écrit comme suit

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{C}] \int_0^t \{\mathbf{D}\} dt \quad (4.98)$$

Si la rotation est choisie de façon à suivre une direction matérielle (la direction des fibres \mathbf{f} suit par exemple une direction convectée par le tenseur gradient des déformations

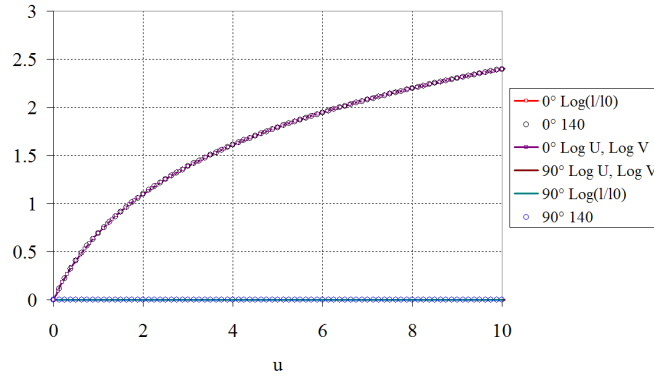


FIG. 4.7: Déformations obtenues en extension simple (0/90).

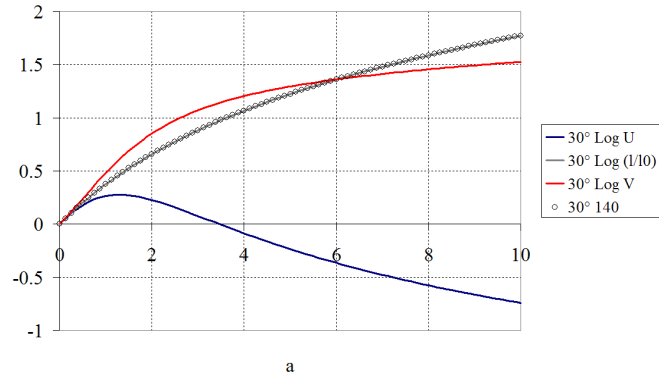


FIG. 4.8: Déformations obtenues en cisaillement simple (30).

F), la mesure de déformation dans cette direction est égale au logarithme de l'élongation λ de cette direction [Rou97]. Cela se traduit par

$$\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{fib} \cdot \mathbf{f} = \ln(\lambda^{fib}) = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (4.99)$$

Il n'est pas possible de cumuler des déformations logarithmiques de ce type dans d'autres directions matérielles à l'aide d'une intégrale rotationnelle. En effet, les axes constitutifs restent orthogonaux par définition et, pour que cela soit possible, il faudrait que les directions matérielles restent orthogonales au cours de la transformation [Rou97]. ce qui suppose l'utilisation d'un système de coordonnées orthogonal lié à chaque fibre (figure 4.10). On verra par la suite comment est construit ce système de coordonnées. cela nous amène à écrire l'incrément de contrainte dans le repère local de l'élément de la façon suivante

$$\{\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{Fib}\} = [\mathbf{P}_i^{Fib}] [\mathbf{C}_i^{Fib}] \{\hat{\mathbf{D}}_i^{Fib}\}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.100)$$

Reste maintenant à déterminer quels sont les systèmes de coordonnées utilisés et $[\mathbf{P}_i^{Fib}]$ résultante, pour la représentation des directions des fibres et les transformations

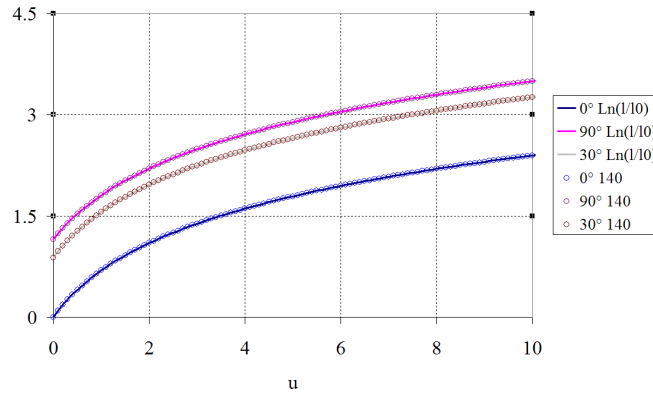
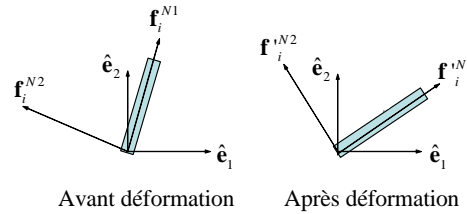
FIG. 4.9: Cisaillement puis extension ($a=3$).

FIG. 4.10: Système de coordonnées lié à la direction d'une fibre.

associées dans le système de coordonnées local de l'élément. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

4.3.3.3 Réorientation et système de coordonnées lié à la direction des fibres

Le suivi des directions matérielles en grandes déformations nécessite le suivi des directions de fibres, afin de mieux représenter l'anisotropie du milieu. L'objectif de cette section est de déterminer comment ces dernières sont actualisées et par rapport à quel système de coordonnées.

Pour cela, on possède comme seule donnée d'entrée deux paramètres R_i et S_i qui définissent les coordonnées de la fibre i . Le reste des données étant inaccessible, nous avons mené différents tests sur le matériau 140 pour savoir comment sont réactualisés ces paramètres ; puis, nous avons déterminé la formulation qui en découle, formulation qui a été enlevée pour des raisons de confidentialité exprimées par ESI.

Les figures 4.11 et 4.12 montrent quelques valeurs de R_i et S_i pour un essai de cisaillement simple.

Après consultation des déformations utilisées dans l'élément 140, il s'en suit que celles-ci s'expriment comme suit

$$\left\{ \hat{\mathbf{D}}_i^{Fib} \right\} = \left[\mathbf{P}_i^{Fib} \right]^{-1} \left\{ \hat{\mathbf{D}}_{Mem} + B_f \hat{\mathbf{D}}_{Flex} \right\} \left[\mathbf{P}_i^{Fib} \right] \quad (4.101)$$

où $\left[\mathbf{P}_i^{Fib} \right]$ étant la matrice de passage entre le système de coordonnées lié à la direction des fibres et le système de coordonnées local de l'élément et où B_f représente un facteur

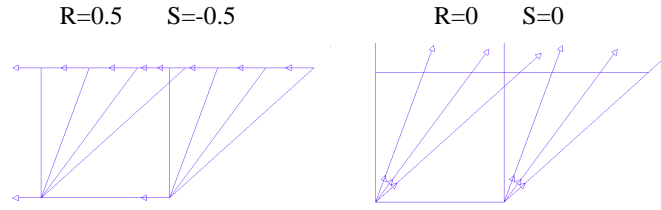
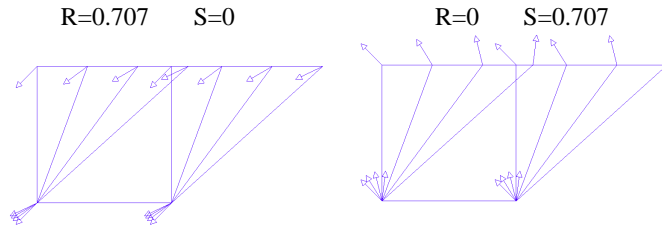


FIG. 4.11: Cisaillement simple (fibres à 0 et 90).

FIG. 4.12: Cisaillement simple (fibres à $+45$ et à -45).

de flexion qui sert à rendre compte de la structure fibreuse du milieu et donc de sa souplesse.

L'incrément de contraintes lié au repère local de l'élément, dans ce cas, est calculé à partir des déformations dans la direction des fibres par

$$\left[\Delta \hat{\sigma}_i^{Fib} \right] = \left[\mathbf{P}_i^{Fib} \right] \left(E_i \begin{bmatrix} \hat{D}_{xx_i}^{Fib} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} + G_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{D}_{xz_i}^{Fib} \\ 0 & 0 & 0 \\ \hat{D}_{xz_i}^{Fib} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \right) \left[\mathbf{P}_i^{Fib} \right]^{-1} \quad (4.102)$$

où E_i est le module d'Young de la fibre i et $G_i = \frac{E_i}{2}$.

L'influence du facteur de flexion B_f sur la flèche d'une poutre en flexion est indiquée (Annexe B). Il sert à diminuer la rigidité en flexion pour assouplir la structure. Ceci est équivalent aux travaux présentés § 2.1.2.3, où un facteur de flexion est déterminé à partir d'une analyse par la théorie des poutres [YZP⁺05]. Cependant, la complexité engendré au niveau du modèle global du milieu, comme par exemple dans les travaux de Lahey et al. [Lah02, LH04], nous impose un choix entre précision du modèle global et coût de calcul. D'un point de vue industriel, le choix se pose généralement sur le dernier critère.

4.4 Tests effectués sur la loi de comportement utilisée

4.4.1 Préformage

L'objectif de cette partie est la simulation numérique, à l'aide du solveur PAMFORM et de la loi de comportement décrite dans le paragraphe précédent, du préformage d'un renfort non-imprégné de résine sur une surface non développable. Dans un premier temps,

on établie la mise en données des différents paramètres régissant le comportement du matériau composite. Nous comparerons ensuite les résultats des simulations avec ceux obtenus expérimentalement et qui ont fait l'objet du chapitre précédent (cf. § 3.1.). Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un projet de fin d'études que j'ai encadré au LMSP (ENSAM Paris) [LV04].

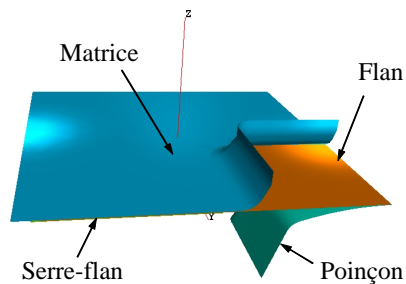


FIG. 4.13: Montage du dispositif d'emboutissage.

La géométrie des outillages et du flan a été modélisé sous Catia V5. L'ensemble des surfaces utiles intervenant dans la simulation est représenté sur la figure 4.13. Le poinçon est de forme pyramidale à base carrée d'angle au sommet 40° tronqué par une sphère de rayon 200 mm. Le problème admettant deux plans de symétrie, nous n'avons gardé qu'un quart de la géométrie.

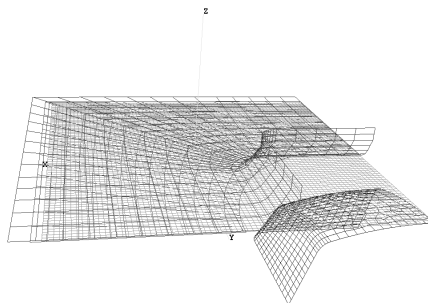


FIG. 4.14: Maillage des différentes parties du dispositif expérimental.

Le maillage des outils a été effectué sous Patran V2003 par transfert des fichiers IGES obtenus précédemment. Ces différents éléments sont finalement assemblés dans un même fichier. Leur positionnement relatif est réalisé à l'aide du post processeur PAM-GENERIS (figure 4.14), ainsi que la mise en données relative à leurs caractéristiques matériau et leurs conditions aux limites en efforts et en déplacement.

4.4.1.1 Caractéristiques matériau

4.4.1.1.1 Cisaillement intrapli Le tissu utilisé est le même que celui exposé au chapitre 2 (§ 2.1.) où nous en avons spécifié les caractéristiques, reste à spécifier ces dernières en cisaillement.

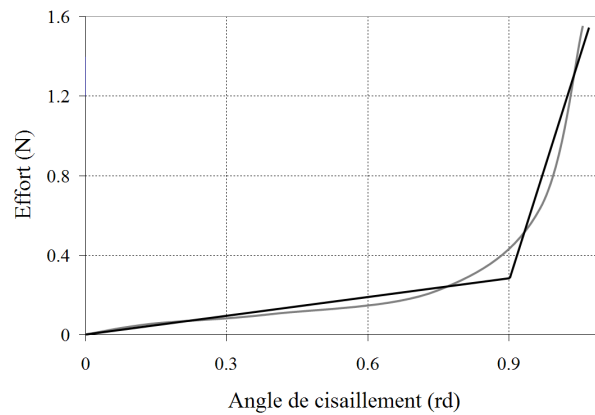


FIG. 4.15: Courbe de cisaillement du taffetas de fibres de verre T6 et approximations linéaires.

D'après [Dum03b], la courbe d'évolution de l'effort global en fonction de l'angle de cisaillement plan dans un essai de cadre déformable est représentée figure 4.15. L'angle de blocage identifié est de l'ordre de 0,9 rd, soit $51,5^\circ$. Les rigidités de cisaillement G et G_{Bl} , respectivement avant et après blocage, sont de 0,7 MPa et 15,27 MPa.

4.4.1.1.2 Matrice thermo-visco-élastique Dans le cadre de l'analyse expérimentale, nous avons utilisé des renforts enduits manuellement de colle à faible viscosité afin de figer la forme finale obtenue après emboutissage. Les données constructeurs fournissent une plage de viscosité de 13 kPa.s à 1 MPa.s. Nous avons fixé cette dernière à une valeur intermédiaire de 0.1 MPa, pour limiter l'influence de la colle.

4.4.1.1.3 Fibres élastiques Des tissus unidirectionnels ou bidirectionnels peuvent être représentés. L'angle initial des fibres est à spécifier par l'utilisateur. Les coefficients entrés, en fonction des essais de caractérisation expérimentaux effectués sur le site d'Orléans du LMSP, sont donnée tableau 4.1

Densité	$1,6 \cdot 10^{-9} \text{ ton/mm}^3$
Module d'Young des fibres	35400 MPa

TAB. 4.1: Caractéristiques du renfort

Le système d'unité qui correspond aux caractéristiques du problème est le millimètre, secondes. L'unité de masse est la tonne, ce qui permet de réduire considérablement le temps de calcul par l'entrée de faibles valeurs de densité. Toutes les grandeurs d'entrées lors de la mise en données du problème suivent ce système d'unités.

4.4.1.2 Conditions aux limites

4.4.1.2.1 En déplacement Le problème étant *a priori* symétrique (toute ondulation et/ou instabilité de forme est/sont exclue(s)), le flan est bloqué le long de ses bords où les axes de symétrie passent. La vitesse d'avance du poinçon lors des essais a été fixée à 1 mm/s.

Dans un premier temps, nous avons placé les différents éléments de l'outillage afin que les espaces entre eux et le flan soient égaux à la demi épaisseur du flan (figure 4.16.a).

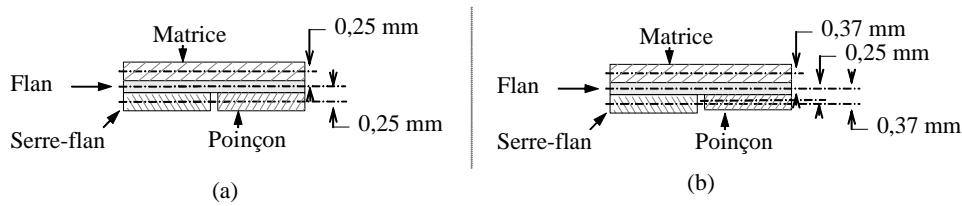


FIG. 4.16: Positionnement des outillages par rapport au flan.

Cependant, les efforts de contacts obtenus étaient très élevés par rapport à ceux obtenus expérimentalement (de l'ordre de 30 000 N). En effet, en observant l'épaisseur du flan en fin de course nous avons remarqué que celle-ci était plus grande que le jeu entre la matrice et le serre-flan.

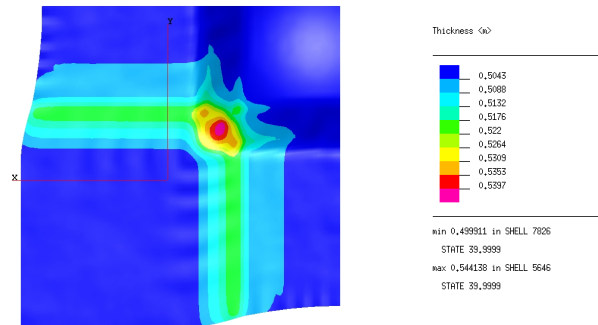


FIG. 4.17: Répartition de l'épaisseur du flan en fin de course.

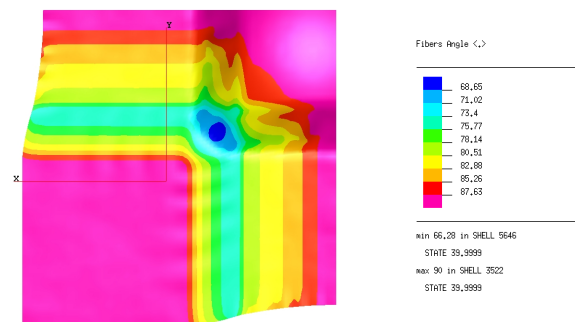


FIG. 4.18: Répartition de la variation angulaire des fibres en fin de course.

En effet, cette épaisseur est de l'ordre de 0.54 mm en fin de course dans la zone entre le serre-flan et la matrice, alors que le jeu entre ces deux outils n'est que de 0.5 mm. Le flan est donc bloqué entre la matrice et le serre-flan, ce qui engendre des efforts de contact

considérables. Cette variation d'épaisseur est fortement liée à la variation angulaire des fibres, comme l'illustre la répartition suivante.

Nous avons donc augmenté progressivement ce jeu afin que l'épaisseur du flan en fin de course soit inférieure à la distance Matrice/Serre-flan. Cette condition a été vérifiée pour un jeu de 0.7 mm entre la matrice et le serre-flan, soit 0.2 mm de plus que l'épaisseur initiale du flan.

La distance réelle entre la matrice et le serre-flan est de 0.74 mm. C'est le jeu que nous fixons pour le reste des simulations (figure 4.16.b).

4.4.1.2.2 En effort Les pistons ne fonctionnant pas correctement, les essais semblaient être réalisés sans qu'aucune pression ne leur soit appliquée. Le serre-flan dans ce cas exerce une légère pression qui sert uniquement à éviter le plissement du renfort en fin d'emboutissage.

Trois couples de surfaces pour chaque contact maître/esclave ont été définis. Les coefficients de frottement entrant en jeu dans ces contacts ont été fixés à 0.4 [ETM96, NL02].

4.4.1.3 Analyse de sensibilité

De nombreux paramètres entrent alors en jeu dans la simulation du procédé. Cette analyse va permettre d'effectuer des choix, quant au maillage du flan par exemple, et d'ajuster certains paramètres physiques. Différents résultats fournis sont analysés : les courbes d'énergies (énergies cinétique et de déformation), les courbes d'efforts de contact selon l'axe vertical de la machine (efforts de contact Flan/Matrice, Flan/Poinçon, Flan/Serre-flan), les déformées (avalement, ligne médiane) et les variations angulaires entre fibres.

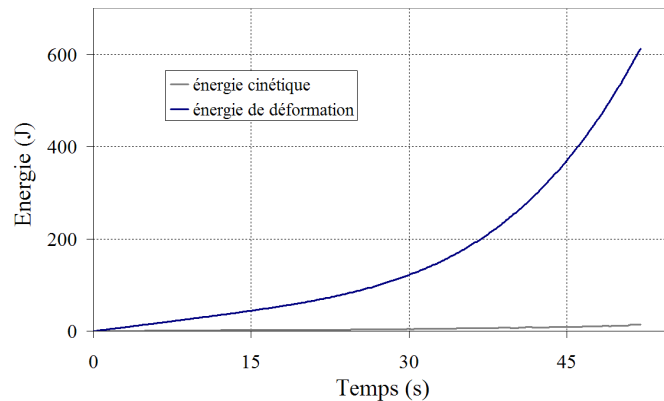


FIG. 4.19: Energies cinétique et de déformation en fonction du temps pour une densité de $1.6 \cdot 10^{-3} \text{ ton/mm}^3$.

4.4.1.3.1 Ajustement du pas de temps Dans un calcul explicite, le pas de temps n'est pas directement modifiable. Avec une vitesse de descente du poinçon de l'ordre de 1 mm/s, le temps de calcul est multiplié par 10^4 , ce qui n'est pas envisageable, dans la

mesure où l'espace de stockage du disque est limité. La solution la plus courante dans ce cas est de diminuer la densité du matériau afin d'augmenter la vitesse de calcul.

Cette pratique est couramment utilisée dans le domaine de la simulation numérique et ne perturbe pas les caractéristiques mécaniques de la structure si les modifications gardent le problème quasi-statique [WAN 98], [REB 92] et si les effets d'inertie de la structure restent négligeables.

Nous avons choisi d'effectuer nos simulations avec une densité artificielle de $1.6 \cdot 10^{-3}$ ton/mm³, au lieu des $1.6 \cdot 10^{-9}$ ton/mm³ réelles. Les courbes de comparaison de l'énergie cinétique avec celle de déformation permettent de vérifier que les effets d'inertie restent négligeables (figure 4.19).

4.4.1.3.2 Choix du maillage du flan Nous avons comparé quatre types de maillage uniformes dont les caractéristiques sont récapitulées dans le tableau ci-dessous afin de comparer les résultats et le coût du calcul par rapport à la finesse du maillage.

Flan	Nombre de ddl
1	7000
2	18000
3	28000
4	112500

Les courbes d'efforts obtenues, en l'absence d'amortissement, présentent plusieurs oscillations. Celles représentées dans la figure 4.20 sont leur interpolation par des polynômes de degré 6.

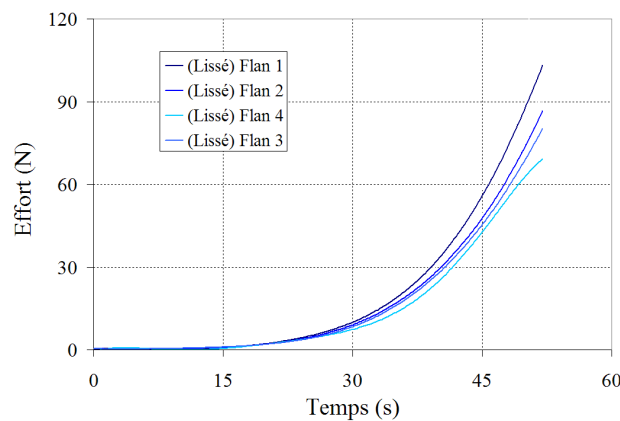


FIG. 4.20: Efforts de contact entre poinçon et flan pour différentes tailles du maillage.

On remarque que les efforts de contact diminuent avec la finesse du maillage. Cependant, on n'observe pas de stabilisation malgré la réduction de la taille des éléments. Au niveau des déformées, avalement et ligne médiane, aucune variation liée au maillage n'est constatée. Il semble donc que l'analyse de la géométrie n'offre pas un critère fiable de choix de la finesse du maillage.

Aux vues de ces résultats, nous choisissons de retenir le maillage intermédiaire de 28000 ddl comme compromis entre temps de calcul et précision des résultats.

4.4.1.4 Comparaison simulation / analyse expérimentale

Suite à la mise en données du problème et à l'analyse de sensibilité précédente, les résultats numériques obtenus par le modèle déterminé auparavant seront comparés aux résultats expérimentaux. Les principales caractéristiques de ce dernier sont récapitulées dans le tableau suivant

<i>Vitesse d'avance du poinçon</i>	1 mm/s
<i>Temps de simulation</i>	40 s
<i>Densité du flan</i>	$1,6 \cdot 10^{-3}$ ton/mm ³
<i>Module d'Young des fibres</i>	35400 MPa
<i>Rigidité de cisaillement</i>	0,7 MPa
<i>Angle de blocage</i>	51,5°
<i>Rigidité de cisaillement après blocage</i>	15,27 MPa
<i>Viscosité</i>	0,1 MPa
<i>Coefficient de frottement Flan/outillages</i>	0,4

TAB. 4.2: Caractéristiques de la simulation

Nous proposons de comparer ces résultats dans deux configurations : la première où l'orientation des fibres est à $0^\circ / 90^\circ$, la seconde où l'orientation des fibres est à $-45^\circ / +45^\circ$. Pour chacun de ces cas, la comparaison porte sur les 4 éléments suivants : le profil de l'avalement, le profil de la ligne médiane, les variations d'angles et les efforts de contacts.

4.4.1.4.1 Orientation des fibres à $0^\circ / 90^\circ$ La figure 4.21 montre que la simulation et l'analyse expérimentale donnent des résultats assez proches si l'on regarde le profil final obtenu.

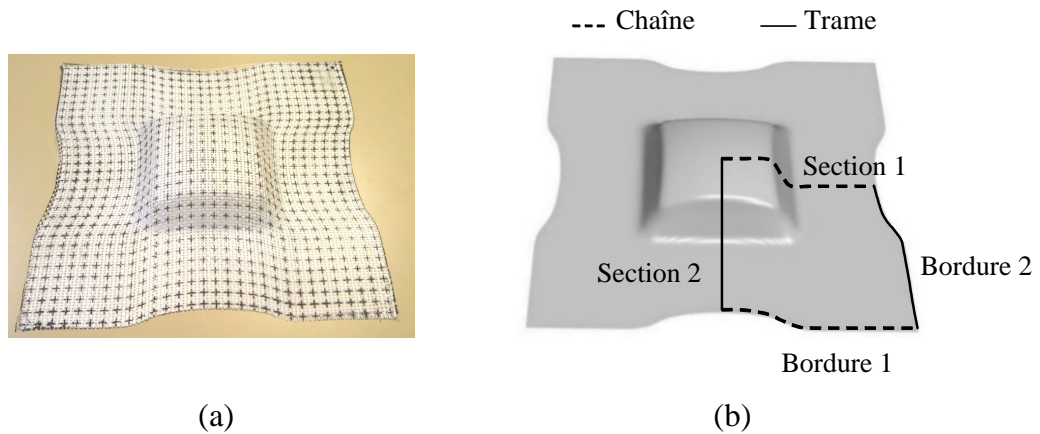


FIG. 4.21: Comparaison des déformées obtenues (a) expérimentalement et (b) numériquement, pour une orientation (0/90). (b) Position des sections et des lignes servant à la comparaison.

Afin de comparer de manière plus fine la géométrie obtenue, nous distinguons quatre profils remarquables : deux profils d'avalement (bordures 1 et 2) et deux profils de la

ligne médiane (sections 1 et 2) (figure 4.21.b).

Profils d'avalement et de la ligne médiane

Pour le profil d'avalement suivant la première bordure (figure 4.22.a), l'avalement du modèle numérique est quasiment identique à celui obtenu expérimentalement ce qui n'est pas le cas pour de la deuxième bordure (figure 4.22.b).

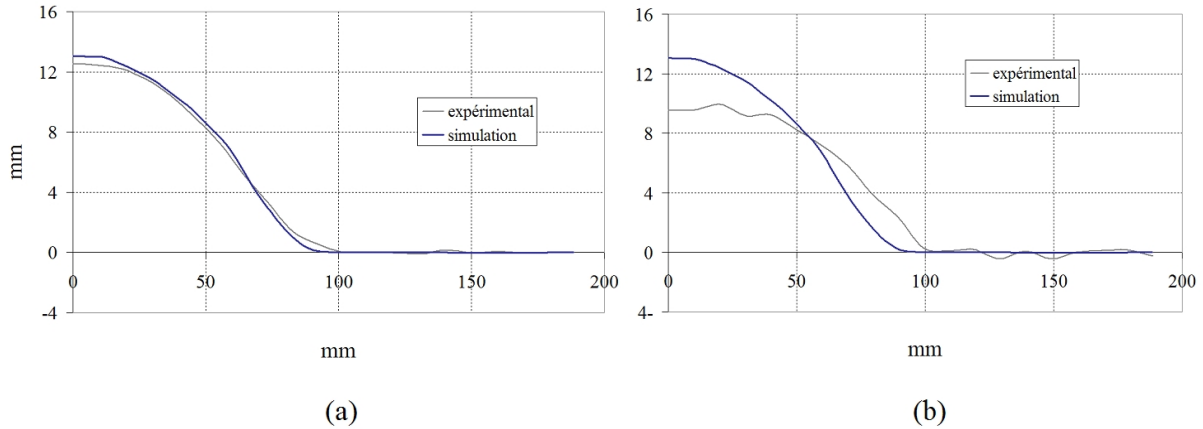


FIG. 4.22: Profil de l'avalement suivant (a) la bordure 1, (b) bordure 2 (0/90).

Cela est probablement lié aux conditions de découpe du renfort ou à un léger déséquilibre de ce dernier : les trames n'ont pas le même comportement que les chaînes. Il faudra aussi revoir l'orientation chaîne/trame du flan expérimental après découpage pour savoir de laquelle des deux configurations le modèle est le plus proche.

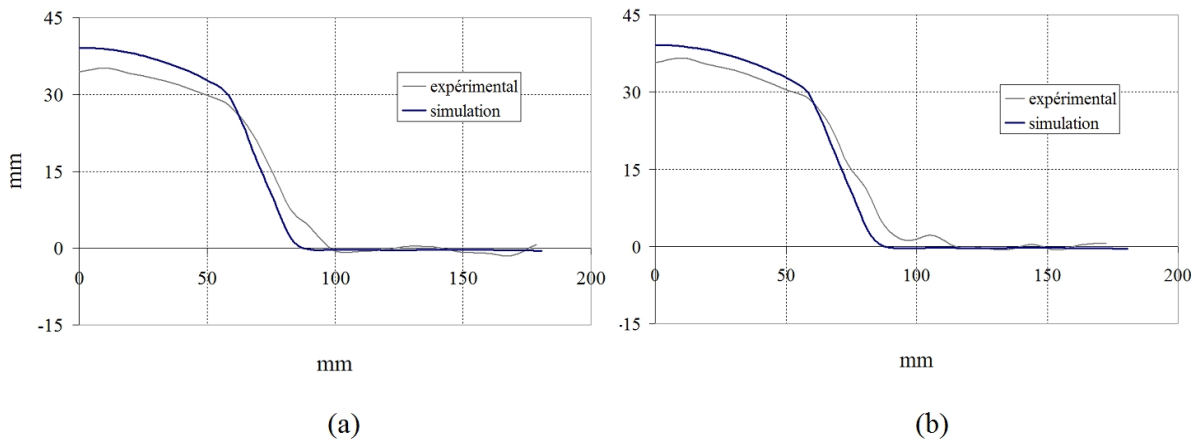


FIG. 4.23: Déplacement suivant (a) la section 1, (b) la section 2 (0/90).

Nous observons une différence dans le profil de la ligne médiane, entre simulation et expérience (figure 4.23). La hauteur de l'embouti expérimental est inférieure de 4 à 5 mm par rapport à la simulation. De plus, l'angle formé par la matrice au bas de l'embouti semble différent.

Il est difficile de distinguer clairement quel mécanisme entre en jeu dans l'obtention d'une telle différence. Cependant, lorsque le flan et la matrice sont enlevés, la colle enduisant le flan n'est pas tout à fait sèche, et nous sommes en présence d'un phénomène de retour élastique appauvri par l'utilisation de la colle, mais pas complètement résorbé.

Variations d'angles et efforts de contact

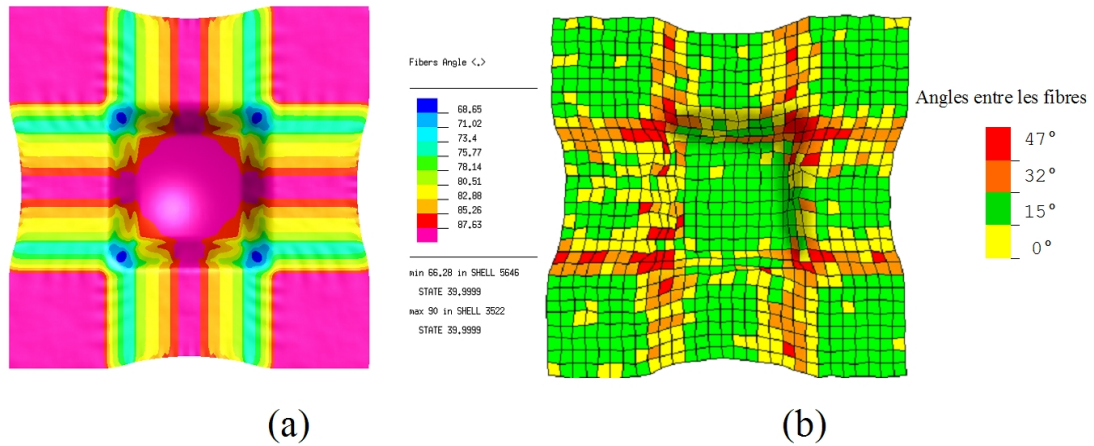


FIG. 4.24: Distorsions angulaires après emboutissage pour une orientation à 0/90, (a) simulation, (b) expérimental.

Il est difficile d'établir une comparaison entre les deux résultats. Il existe des similitudes mais toutes les zones repérables d'après la simulation, ne sont pas visibles sur les résultats expérimentaux (figure 4.24). L'angle minimum obtenu sur le modèle est de l'ordre de 68°. Expérimentalement, il est de 47°.

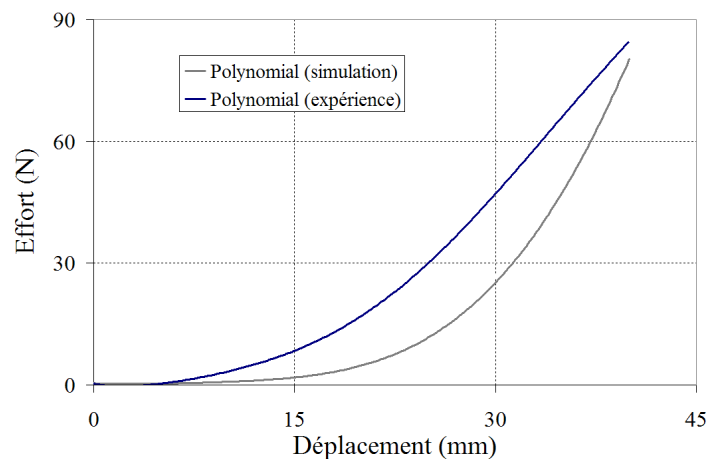


FIG. 4.25: Comparaison des efforts de contact Poinçon/Flan (0/90).

Les efforts de contact obtenus par le calcul sont plus faibles que ceux obtenus expérimentalement (figure 4.25). D'autre part, on ne sait pas ce qui se passe durant l'emboutissage expérimental. Le flan peut plisser et entrer en contact avec l'outillage, ce qui

impliqueraient des efforts supérieurs dus aux frottements. De plus, les surfaces des contacts sur la machine d'essai ne sont pas parfaitement lisses ce qui suggère qu'une investigation plus détaillée des effets de frottement serait pertinente.

On peut donc conclure que la simulation donne de bon résultats pour une orientation des fibres à $0^\circ / 90^\circ$. Les efforts de contact, sans être égaux, sont du même ordre de grandeur et les profils géométriques sont assez proches.

4.4.1.4.2 Orientation des fibres à $-45 / +45$ Là encore, de façon globale, le résultat de la simulation est très proche de l'expérience (figure 4.26). De la même manière, nous utilisons quatre profils, deux profils d'avalement (bordure 1 et 2) et deux profils de la ligne médiane (Section 1 et 2) (figure 4.21).

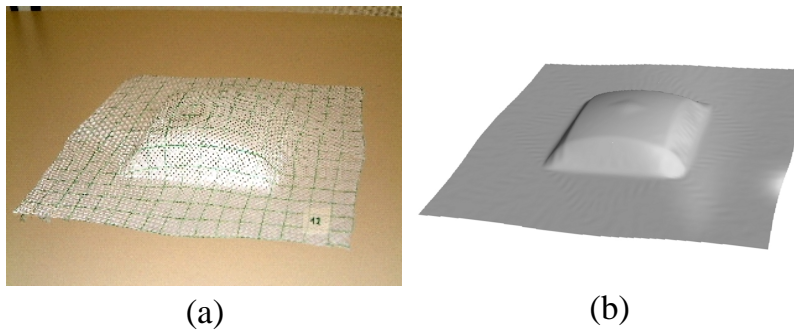


FIG. 4.26: Comparaison des déformées obtenues, (a) expérimentalement et (b) numériquement, pour une orientation à $(-45/+45)$.

Cette fois-ci, les résultats de la simulation diffèrent nettement des résultats expérimentaux pour une orientation des fibres à $0^\circ / 90^\circ$. L'allure reste globalement la même ; cependant, les différences augmentent d'autant plus qu'on se rapproche des bords pour ce qui est du profil de l'avalement suivant la première et la deuxième bordure (figures 4.27.a et 4.27.b).

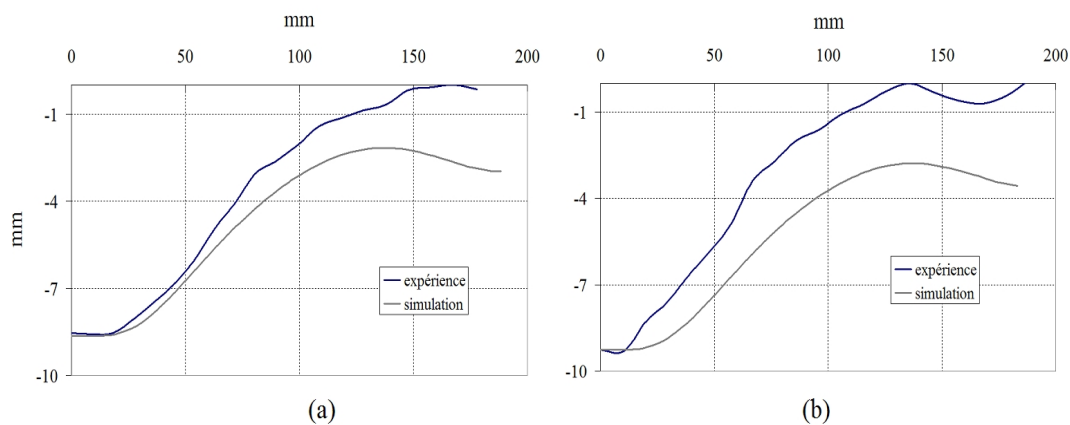


FIG. 4.27: Profil de l'avalement suivant, (a) la bordure 1, (b) la bordure 2 $(-45/+45)$.

Il est à noter que nous avons eu plusieurs difficultés pour l'obtention de tels profils

après emboutissage. Les bords du flan se déforment sur toute la longueur. Il ne reste donc plus de « ligne de référence » sur laquelle on peut aligner les deux profils. De plus, peu de tests étaient concluants pour cette orientation : des défauts de type décollement des fibres et de répartition non uniforme des mèches ont été constatés.

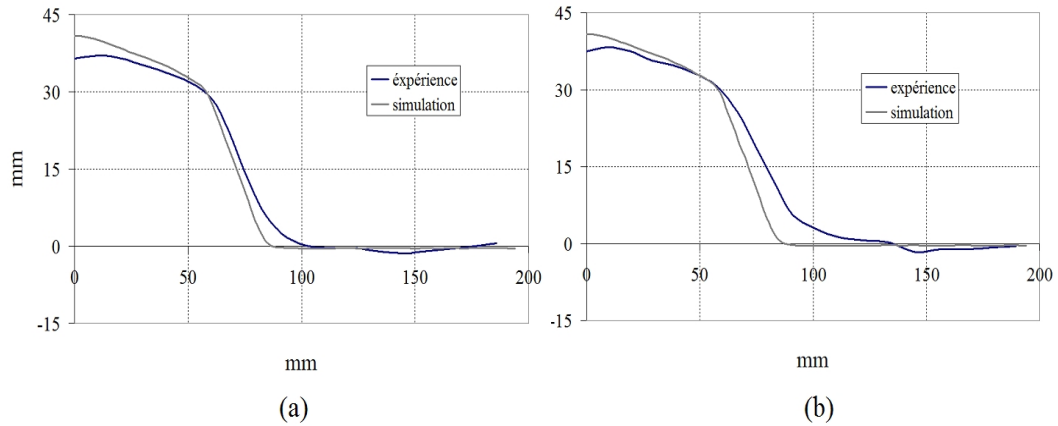


FIG. 4.28: Déplacement suivant, (a) la section 1, (b) la section 2 (-45/+45).

Pour la ligne médiane suivant les deux sections (figures 4.28.a et 4.28.b), le profil est quasi identique, l'allure du modèle reste très proche de l'analyse expérimentale. Les différences observées, allant jusqu'à 5 mm, peuvent être attribuées au retour élastique du renfort après emboutissage.

Variations d'angles et efforts de contact

Il n'y a pratiquement pas de variation en fin de course pour les résultats expérimentaux. Cependant, le résultat de la simulation donne une répartition assez différente (figure 4.29). A titre indicatif, l'angle minimum obtenu sur le modèle est de 72° . Expérimentalement, il est de 51° .

La différence entre les efforts de contact poinçon/flan pour une orientation des fibres à $-45^\circ/+45^\circ$ est, cette fois-ci, plus nette (figure 4.30). Cependant ces efforts restent du même ordre de grandeur et ont la même allure. Ce résultat peut, d'une part, s'expliquer par les difficultés rencontrées au niveau expérimental sur ce type de séquence (mesure et exploitation des résultats). D'autre part, le solveur ne gérant pas le tissage du flan, des divergences peuvent apparaître à $-45^\circ/+45^\circ$ alors qu'elles n'étaient que faiblement repérables à $0^\circ/90^\circ$ (composantes des directions de fibres nulles sur les diagonales de l'élément selon § 4.3.3.3. en début de simulation).

Conclusion

La comparaison est assez satisfaisante, les résultats que nous obtenons numériquement sont assez proches de ceux obtenus expérimentalement, pour une orientation des fibres à $0^\circ/90^\circ$, mais nettement moins pour une orientation à $-45^\circ/+45^\circ$, notamment au niveau des efforts de contact. Ce qui rend la comparaison délicate et difficile, sans lui enlever sa pertinence, c'est le fait que l'analyse expérimentale n'est pas parfaitement maîtrisée. Ainsi, les machines utilisées sont testées, et progressivement améliorées et validées, au fil des campagnes d'essais.

De plus, un certain nombre d'éléments liés à l'analyse expérimentale peuvent expli-

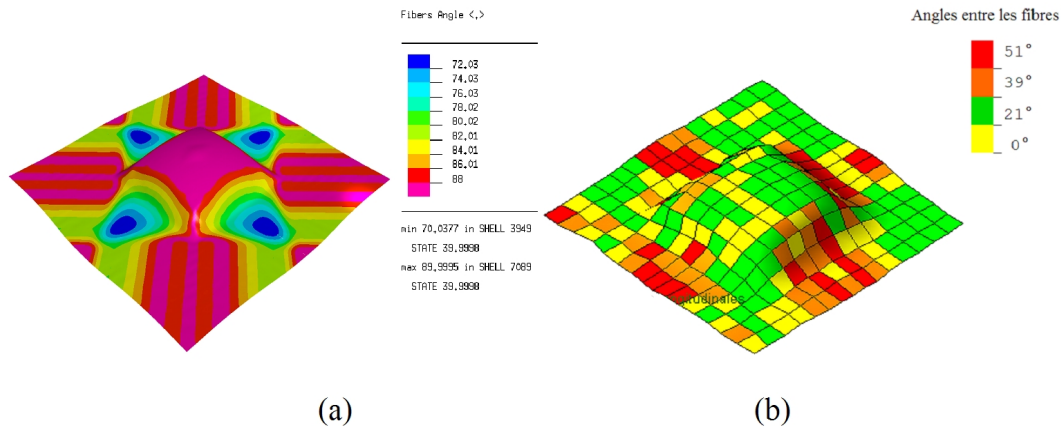


FIG. 4.29: Distorsions angulaires après emboutissage pour une orientation à $-45/+45$, (a) simulation, (b) expérimental.

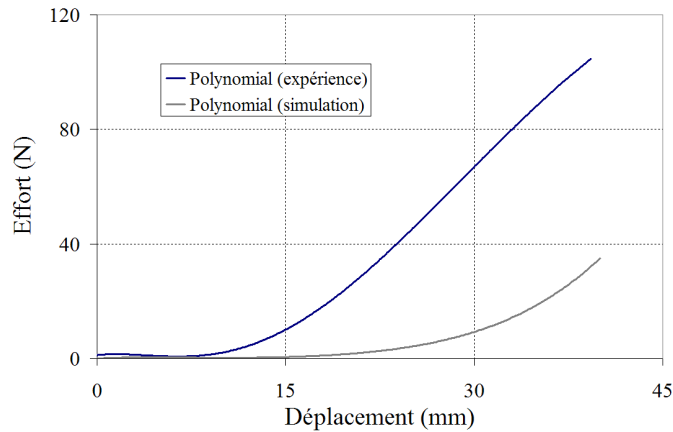


FIG. 4.30: Comparaison des efforts de contact Poinçon/Flan ($-45/+45$).

quer en partie les différences observées : quadrillage sur le flan plus grossier que dans le modèle numérique, manque de données sur le frottement entre outillages et flan, retrait élastique en fin de course, apparition de défauts, choix de la méthode et des appareils de mesure, etc...

4.4.2 Essai de cadre déformable

L'objectif de cette section est la simulation numérique de l'essai de cadre déformable (décrit § 2.1.1.1.1.ii.). Pour cela, on utilise un échantillon carré représentant le composite à sa température de mise en forme. Un cadre de dimension 200×200 mm est étiré au niveau de l'articulation supérieure à une vitesse de déplacement de 100 mm /mn. La mise en données de l'essai est donnée par la figure 4.31 et par le tableau 4.3.

Afin de bien représenter la cinématique du cadre, les conditions aux limites en déplacement sont définies comme suit :

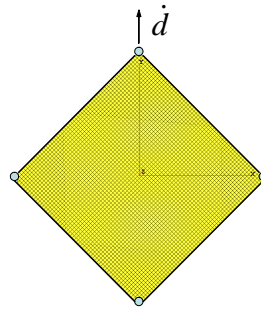


FIG. 4.31: Maillage utilisé pour la simulation de la cinématique du cadre.

- rotation de corps rigide des noeuds sur les côtés du cadre.
- rotation uniquement autour de l'axe z des noeuds des articulations.
- vitesse entrée selon l'axe y de l'articulation supérieure.

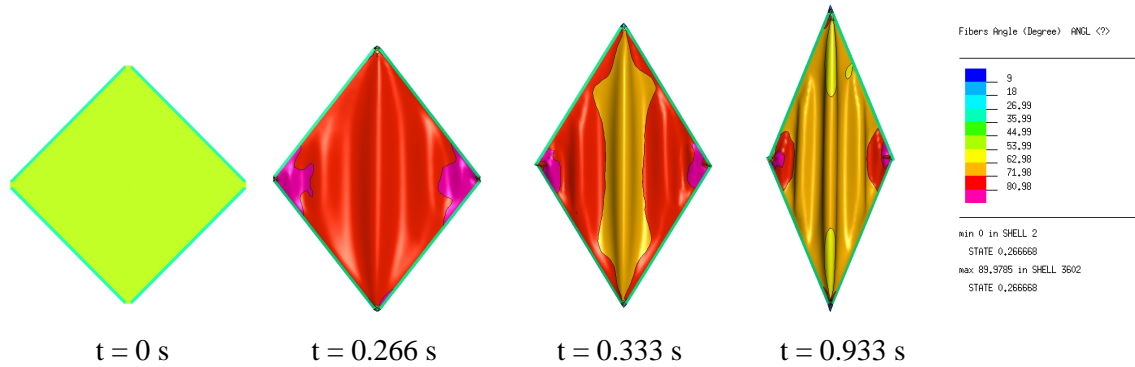


FIG. 4.32: Variations angulaires au sein de l'échantillon testé.

Le matériau représenté ici est le Cetex, composite à matrice en polyphénylène sulfide (PPS) et avec renfort en fibre de carbone. Il possède les caractéristiques suivantes :

Module d'Young des fibres	230 GPa
Module d'Young comportement global	22.95 GPa
Viscosité	25 MPa.s à 320°
Densité	$1.6 \cdot 10^{-9} \text{ kg/mm}^3$
Epaisseur	2.5 mm
Coefficient de Poisson	0.35
Tmps de simulation	60 s

TAB. 4.3: Données de la simulation

Dans cette simulation, on ne spécifie ni l'angle de blocage en cisaillement, ni la rigidité de cisaillement après blocage afin d'introduire de fortes variations angulaires. L'objectif est en effet d'expliquer le comportement viscoélastique et en particulier de mesurer l'impact de ces fortes variations sur ce type de comportement.

La figure 4.32 donne les variations angulaires entre les directions de fibres à différentes

étapes de la simulation. On remarque que cette variation commence sur les bords pour atteindre le centre de l'échantillon en fin de simulation. Ces variations sont d'un ordre élevé, entre 9° et 87° en fin de simulation, valeurs mesurées respectivement sur les bords du cadre et au centre de l'échantillon, les bords du cadre étant soumis aux variations les plus importantes.

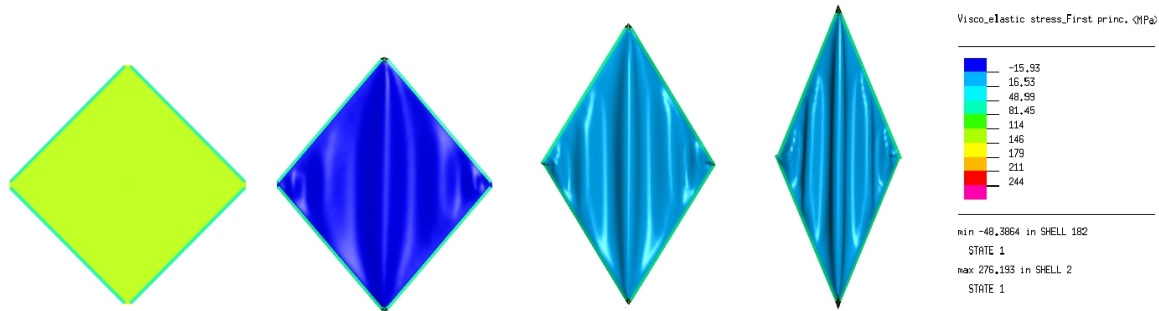


FIG. 4.33: Premières contraintes principales viscoélastiques.

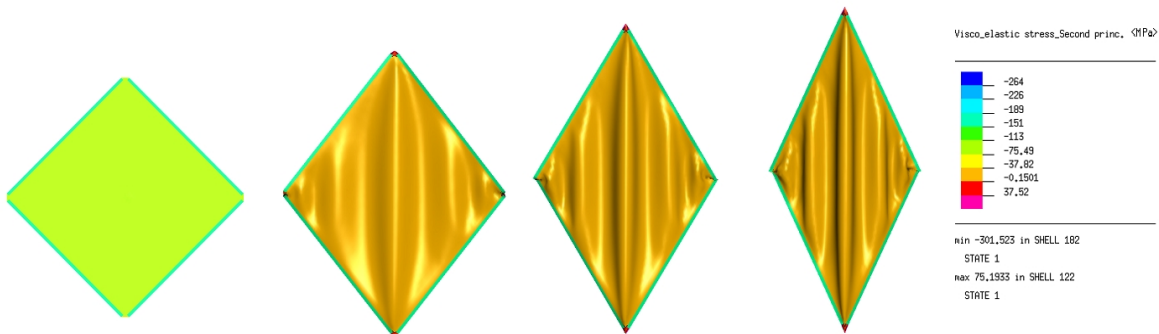


FIG. 4.34: Deuxièmes contraintes principales viscoélastiques.

D'après les figures 4.33 et 4.34 présentant les mêmes étapes de simulation, les contraintes principales viscoélastiques sont réparties de façon homogène sur toute la surface de l'échantillon.

Cela signifie que les variations des contraintes principales ne sont pas liées aux variations angulaires. D'ailleurs, c'est ce que montre également la figure 4.35 où on a choisi trois nœuds sur l'échantillon de façon à faire intervenir plusieurs zones sujettes à différentes variations angulaires. D'après les courbes obtenues par la simulation, la première contrainte principale viscoélastique reste pratiquement constante au cours de la déformation, et elle a une valeur très faible.

Or, étant donnée la loi de comportement en contraintes planes décrite section § 4.3.1. et étant donné que le renfort est soumis à un état de cisaillement pur, il en résulte que les contraintes principales de nature visqueuse se réduisent uniquement à une relation directe avec les contraintes de cisaillement. Cela explique la nature homogène de la

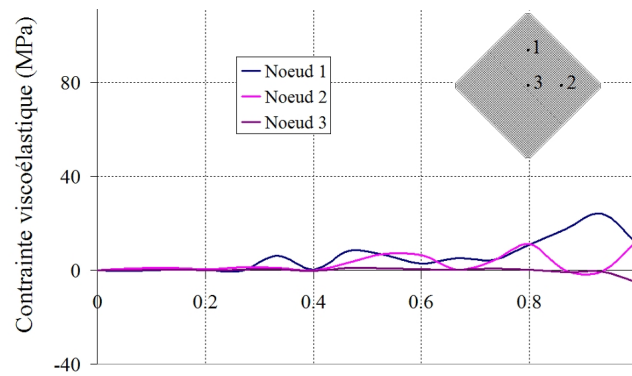


FIG. 4.35: Contraintes principales viscoélastiques.

répartition des contraintes.

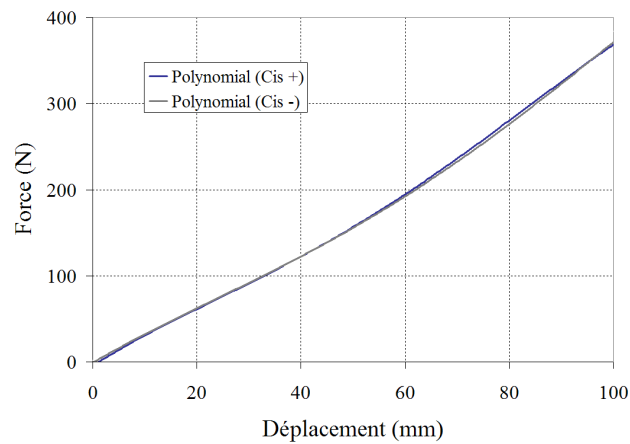


FIG. 4.36: Courbes effort / déplacement (cisaillement +, cisaillement -).

La figure 4.36 montre que la réponse du milieu reste inchangée, par rapport à deux directions de chargement différentes. Cela s'explique par la nature de la loi de comportement implémentée. En effet, sa formulation ne prend pas en compte l'influence de l'architecture du renfort.

4.4.3 Thermoformage

Alors que l'essai de cadre déformable fait intervenir uniquement une déformation de nature homogène de cisaillement, l'intérêt de la mise en forme par emboutissage est de faire intervenir simultanément plusieurs types de déformation, de nature non homogène. Cela nous permettra donc d'analyser le comportement viscoélastique de la résine dans l'échantillon soumis à plusieurs types de déformations de manière simultanée.

L'objectif de cette section est de simuler la mise en forme par emboutissage de composites thermoplastiques que nous avons analysée précédemment de façon expérimentale (cf. 3.2.). Ce travail de simulation a été mené avec deux matériaux distincts, chacun

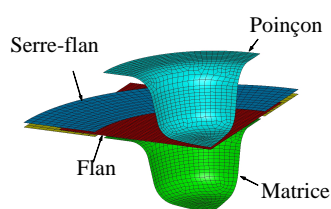


FIG. 4.37: Montage et maillage des différents outillages.

étant utilisé pour une forme différente.

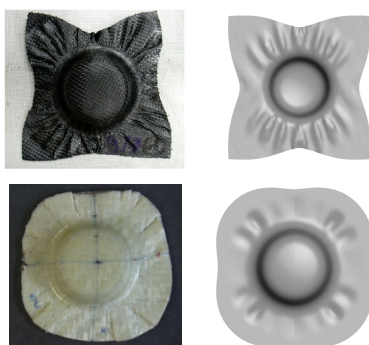


FIG. 4.38: Comparaison des déformées obtenues expérimentalement et numériquement, pour une orientation (0/90).

Dans le premier cas, le matériau représenté est le Cetex, à matrice pps et fibre de carbone ; le flan est à géométrie carrée, de dimensions 170 x 170 mm. Dans le second cas, le matériau représenté est le Twintex, à matrice polypropylène et fibres de verre ; le flan est de forme circulaire, de diamètre 170 mm.

	Cetex	Twintex
Module d'Young des fibres	230 GPa	50 GPa
Module d'Young global	22.95 GPa	22.95 GPa
Viscosité	25 MPa.s à 320°	5.400 MPa.s à 200°
Densité	$1.6 \cdot 10^{-9} \text{ kg/mm}^3$	$1.975 \cdot 10^{-9} \text{ kg/mm}^3$
Epaisseur	2.5 mm	2.5 mm
Coefficient de Poisson	0.35	0.25
Temps de simulation	4 s	4 s
Vitesse du poinçon	10 mm/s	10 mm/s

TAB. 4.4: Paramètres de la simulation

La figure 4.37 montre la géométrie des outillages utilisés dans la simulation : la direction initiale des fibres dans les deux cas est de 0°/90°. Etant donnée la nature symétrique du problème, on traitera uniquement un quart de la géométrie.

Les paramètres utilisés au cours de la simulation pour le Cetex et le Twintex sont récapitulés dans le tableau 4.4

La figure 4.38 présente les pièces obtenues, expérimentalement et par simulation, pour le flan carré et le flan circulaire.

La figure 4.39 donne une représentation des variations angulaires au sein de l'échantillon. On remarque que dans le cas du renfort à $0^\circ/90^\circ$, les variations angulaires les plus élevées sont concentrées sur la diagonale du flan.

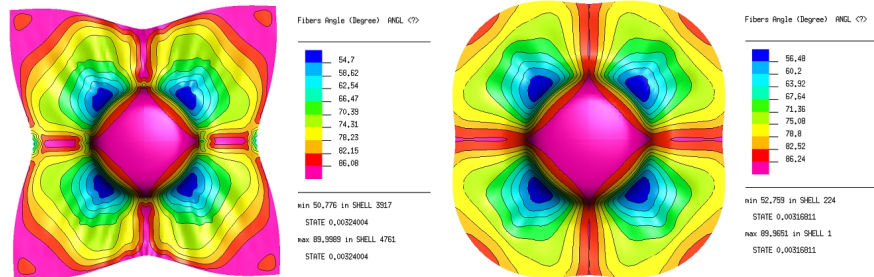


FIG. 4.39: Distorsions angulaires en fin de simulation.

Les figures 4.40 et 4.41 représentent les contraintes totales principales au sein du milieu pour les deux types de matériaux. Celles-ci sont très élevées par rapport aux contraintes principales viscoélastiques observées dans les figures 4.42 et 4.43.

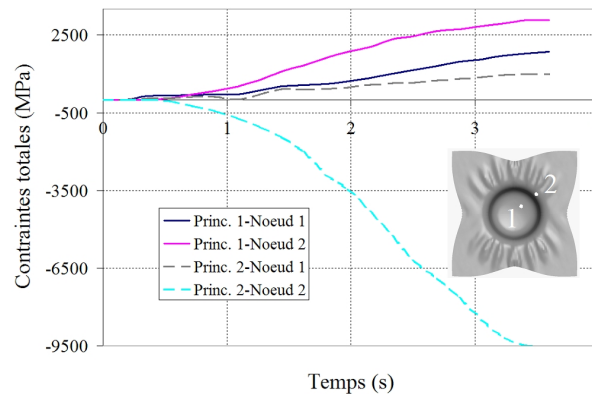


FIG. 4.40: Contraintes principales Totales (flan carré).

Etant donné que le comportement est régi par un comportement global élastique d'après la relation (5.49), le comportement total s'en trouve modifié et les contributions des contraintes élastiques globales et dans les directions des fibres priment sur le comportement viscoélastique.

Les figures 4.40, 4.41, 4.42 et 4.43 sont obtenues pour deux noeuds, choisis respectivement dans une zone non sujette à des déformations de cisaillement importantes, mais davantage à des déformations membranaires (noeud 1), et à l'inverse, dans une zone marquée par de fortes variations angulaires (noeud 2).

Contrairement à la différence observée entre les contraintes principales pour les deux noeuds, surtout en début et en fin de simulation, les contraintes principales viscoélastiques incluant toutes les contributions dans le plan et de cisaillement montrent ici une

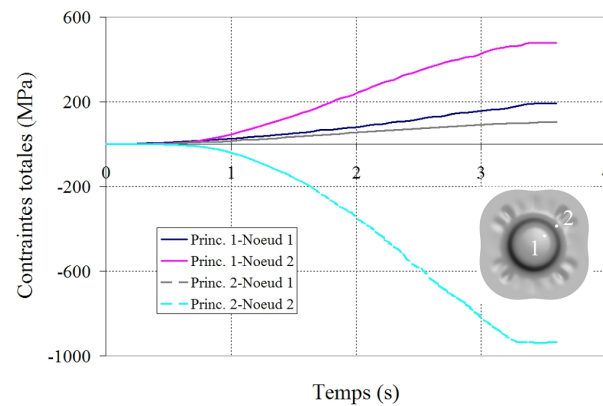


FIG. 4.41: Contraintes principales viscoélastiques (flan circulaire).

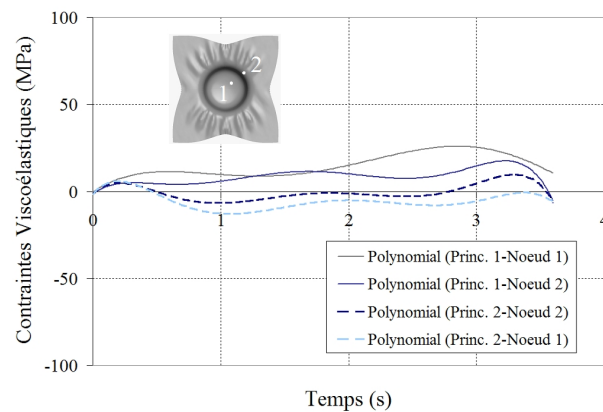


FIG. 4.42: Contraintes principales viscoélastiques (flan carré).

certaine similitude et restent pratiquement constantes au cours de la déformation et possèdent une valeur très faible.

Les résultats obtenus dans le cas de la simulation de la mise en forme par emboutissage sont similaires à ceux obtenus dans le cas de la simulation de l'essai de cadre déformable. Avec la loi de comportement viscoélastique utilisée ici, les variations angulaires ne sont pas prises en compte. En effet, ce modèle qui est un modèle utilisé dans le cas de renforts unidirectionnels n'offre aucun couplage entre les deux directions de fibres et de fait, ne reflète pas cette propriété normalement caractéristique du milieu fibreux tissé possédant de fortes directions d'anisotropie.

4.5 Développement d'une loi visqueuse pour un renfort bidirectionnel

Un composite à renfort tissé peut être vu comme fluide visqueux à la température de mise en forme (hypothèse assez viable compte tenu du fait que les fibres expérimentent de petites déformations et de grandes rotations dues à l'effet treillis). Sa réponse étant

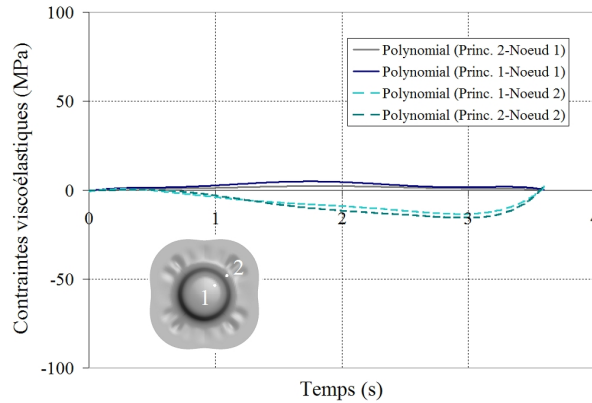


FIG. 4.43: Contraintes principales viscoélastiques (flan circulaire).

anisotrope et possédant des propriétés directionnelles, le tenseur des contraintes visqueuses doit refléter cette nature et de fait doit dépendre des principaux invariants des grandeurs mis en jeu à la température de mise en forme, non seulement ceux liés à \mathbf{D} , mais aussi ceux liés à \mathbf{a} et \mathbf{b} .

Dans ce type d'approche, le composite est modélisé par un fluide visqueux. La démarche est la même que celle effectuée pour la construction d'un modèle fluide visqueux isotrope ou isotrope transverse représentant un composite à renfort unidirectionnel. On cherche à identifier un modèle visqueux linéaire anisotrope, de façon à ce qu'il soit linéaire en \mathbf{D} . Cette restriction peut être retirée : la modélisation sera certes plus générale et plus complète, mais proportionnellement, son traitement sera plus compliqué et plus difficile à appliquer en pratique.

Dans la théorie de représentation des fonctions tensorielles [Boh86, Zhe94], La loi de comportement, dans le cas général, est construite (pour un nombre quelconque d'arguments tensoriels) à partir d'une liste de générateurs et des invariants fondamentaux de ces arguments, et représentée par une fonction à valeur tensorielle du second ordre. La théorie stipule que cette fonction, représentant la contrainte visqueuse, peut être écrite sous forme d'une combinaison linéaire comme suit

$$\boldsymbol{\tau} = \chi_i \mathbf{H}_i \quad (4.103)$$

$$I_i \text{ invariants principaux} \quad (4.104)$$

$$\mathbf{H}_i \text{ générateurs} \quad (4.105)$$

χ_i étant des fonctions des invariants principaux des champs séparément et de la combinaison des champs mis en jeu, \mathbf{H}_i représente la base tensorielle constituée de la même manière.

Ces résultats datent d'il y a trente ans et sont répertoriés dans des tableaux regroupant aussi les différents groupes de symétrie donnés pour un matériau donné et leur influence sur la représentation de la loi constitutive (généralement les symétries à l'échelle cristalline : monoclinie, triclinie, isotropie transverse et autres ...). On a choisi ici de traiter le problème indépendamment des symétries pour refléter la nature anisotrope du milieu considéré, l'hypothèse d'orthotropie n'est plus valable au cours de la transformation.

Dans le cas simple des fluides isotropes visqueux incompressibles, la contrainte ne dépend que du taux de déformation \mathbf{D} . L'incompressibilité implique que la contrainte soit décomposée en un terme sphérique qui correspond à une pression hydrostatique arbitraire et un terme déviateur qui correspond à la contrainte visqueuse du milieu

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \tag{4.106}$$

Dans ce cas, et par exemple pour les fluides de Reiner-Rivlin, la formulation de la contrainte visqueuse est donnée par

$$\boldsymbol{\tau} = fct(\mathbf{D}) \tag{4.107}$$

D'après la théorie de représentation des fonctions tensorielles et des tables données dans les travaux de Zheng [Zhe94], la contrainte visqueuse est une fonction tensorielle isotrope de ses arguments, la liste de ses invariants et de ses générateurs est

Liste des invariants	Liste des générateurs
$- \mapsto -$ $\mathbf{D} \mapsto tr\mathbf{D}, tr\mathbf{D}^2, tr\mathbf{D}^3$	$- \mapsto \mathbf{I}$ $\mathbf{D} \mapsto \mathbf{D}, \mathbf{D}^2$

dans ce cas la contrainte visqueuse s'écrit comme suit

$$\boldsymbol{\tau} = \chi_1\mathbf{I} + \chi_2\mathbf{D} + \chi_3\mathbf{D}^2 \tag{4.108}$$

où $\chi_i = f(tr\mathbf{D}, tr\mathbf{D}^2, tr\mathbf{D}^3)$.

En supposant une théorie du premier gradient, et tenant compte du fait que $\boldsymbol{\tau}$ doit être déviateur le tenseur des contraintes s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \tag{4.109}$$

Il est connu que le modèle de Reiner-Rivlin est très restrictif pour décrire le comportement des fluides non-newtoniens réels ; cependant il nous sert ici comme modèle utile et simple pour illustrer l'approche dans le cas des milieux anisotropes non-linéaires.

Mc Guinness et O Bradaigh [MB98, MB97] ont proposé une forme modifiée de ce dernier. Sa validité est restreinte à un seul type de matériau testé et sa reproductibilité n'est pas assurée pour d'autres.

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta\mathbf{D} + 2\beta\mathbf{E} \tag{4.110}$$

Dans le cas d'un fluide visqueux isotrope transverse représentant un composite à renfort unidirectionnel, sous hypothèse d'incompressibilité et d'inextensibilité des fibres, la contrainte n'est plus fonction uniquement du taux de déformation, mais aussi de la direction des fibres \mathbf{a}

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + T\mathbf{A} + \boldsymbol{\tau} \tag{4.111}$$

$$\boldsymbol{\tau} = fct(\mathbf{D}, \mathbf{a}) \tag{4.112}$$

où $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$ et la liste des invariants et des générateurs, dans ce cas est donnée par le tableau 4.5

Liste des invariants		Liste des générateurs	
–	\mapsto –	–	\mapsto \mathbf{I}
\mathbf{D}	\mapsto $tr\mathbf{D}, tr\mathbf{D}^2, tr\mathbf{D}^3$	\mathbf{D}	\mapsto \mathbf{D}, \mathbf{D}^2
\mathbf{a}	\mapsto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$	\mathbf{a}	\mapsto $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$
\mathbf{D}, \mathbf{a}	\mapsto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{D}\mathbf{a}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{D}^2\mathbf{a}$	\mathbf{D}, \mathbf{a}	\mapsto $[\mathbf{a} \otimes \mathbf{D}\mathbf{a}]_S, [\mathbf{a} \otimes \mathbf{D}^2\mathbf{a}]_S$

TAB. 4.5: Liste des invariants et des générateurs pour une loi à une direction matérielle préférentielle

avec $[\mathbf{G}]_s = \mathbf{G} + \mathbf{G}^T$ et $[\mathbf{G}]_A = \mathbf{G} - \mathbf{G}^T$, la contrainte visqueuse s'écrit alors comme suit

$$\boldsymbol{\tau} = \chi_1 \mathbf{D} + \chi_2 \mathbf{D}^2 + \chi_3 (\mathbf{AD} + \mathbf{DA}) + \chi_4 (\mathbf{AD}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{A}) \quad (4.113)$$

et les quatre paramètres χ_i sont fonctions uniquement de $tr\mathbf{D}^2$, $tr\mathbf{D}^3$ et $\mathbf{a} \cdot \mathbf{D}^2\mathbf{a}$ avec $tr\mathbf{D} = tr\mathbf{AD} = 0$.

En supposant une théorie linéaire en \mathbf{D} , l'expression finale du tenseur de contrainte dans le cas d'un fluide visqueux à une direction de fibres est donnée alors par

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + T\mathbf{A} + \chi_1 \mathbf{D} + \chi_3 (\mathbf{AD} + \mathbf{DA}) \quad (4.114)$$

Cette loi a été explicitée par Rogers [Rog89] sous la forme suivante

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + T\mathbf{A} + 2\eta_T \mathbf{D} + 2(\eta_T + \eta_L) (\mathbf{AD} + \mathbf{DA}) \quad (4.115)$$

où η_L et η_T sont respectivement les viscosités dans la direction longitudinale et transversale du milieu, et porte le nom de "matériau à renfort fibreux idéalisé" (IFRF).

Dans un but de généralisation du comportement visqueux à un milieu contenant deux familles de réseaux de fibres et pour refléter la nature anisotrope d'un composite à renfort tissé, on peut construire un modèle fluide visqueux en utilisant la même démarche.

On considère que, cette fois, les champs tensoriels mis en jeu lors de la mise en forme sont les taux de déformations \mathbf{D} et les deux directions de fibres \mathbf{a} et \mathbf{b} .

$$\boldsymbol{\tau} = fct(\mathbf{D}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (4.116)$$

Pour un milieu continu incompressible et inextensible à deux directions de fibres, l'expression de la contrainte de Cauchy s'écrit en fonction d'une pression arbitraire et des tensions dans la direction des fibres [Spe00] :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + T_A \mathbf{A} + T_B \mathbf{B} + \boldsymbol{\tau} \quad (4.117)$$

La contrainte est alors une fonction à valeur tensorielle symétrique du second ordre, dont la liste des invariants et des générateurs est donnée dans le tableau 4.6

La théorie générale est une théorie quadratique et la formulation dans ce cas est plus compliquée. En supposant une théorie linéaire en \mathbf{D} comme pour les fluides visqueux isotropes transverses, la contrainte visqueuse est écrite sous la forme suivante

$$\boldsymbol{\tau} = \chi_0 \mathbf{I} + \chi_1 \mathbf{A} + \chi_2 \mathbf{B} + \chi_3 \mathbf{D} + \chi_4 (\mathbf{C} + \mathbf{C}^T) + \chi_5 (\mathbf{AD} + \mathbf{DA}) \quad (4.118)$$

$$+ \chi_6 (\mathbf{BD} + \mathbf{DB}) + \chi_7 [(\mathbf{CD} + \mathbf{DC}) + (\mathbf{C}^T \mathbf{D} + \mathbf{DC}^T)] \quad (4.119)$$

$$\chi_i = fct(tr\mathbf{D}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, tr\mathbf{AD}, tr\mathbf{BD}, tr\mathbf{CD}) \quad (4.120)$$

Liste des invariants		Liste des générateurs	
–	\mapsto –	–	\mapsto \mathbf{I}
\mathbf{D}	\mapsto $tr\mathbf{D}, tr\mathbf{D}^2, tr\mathbf{D}^2$	\mathbf{D}	\mapsto \mathbf{D}, \mathbf{D}^2
\mathbf{a}	\mapsto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$	\mathbf{a}	\mapsto $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$
\mathbf{b}	\mapsto $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$	\mathbf{b}	\mapsto $\mathbf{b} \otimes \mathbf{b}$
\mathbf{D}, \mathbf{a}	\mapsto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{D}\mathbf{a}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{D}^2\mathbf{a}$	\mathbf{a}, \mathbf{b}	\mapsto $[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}]_s$
\mathbf{D}, \mathbf{b}	\mapsto $\mathbf{b} \cdot \mathbf{D}\mathbf{b}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{D}^2\mathbf{b}$	\mathbf{D}, \mathbf{a}	\mapsto $[\mathbf{a} \otimes \mathbf{D}\mathbf{a}]_S, [\mathbf{a} \otimes \mathbf{D}^2\mathbf{a}]_S$
$\mathbf{D}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$	\mapsto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{D}\mathbf{b}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{D}^2\mathbf{b}$	\mathbf{D}, \mathbf{b}	\mapsto $[\mathbf{b} \otimes \mathbf{D}\mathbf{b}]_S, [\mathbf{b} \otimes \mathbf{D}^2\mathbf{b}]_S$
$\mathbf{D}, \mathbf{b}, \mathbf{a}$	\mapsto $\mathbf{b} \cdot \mathbf{D}\mathbf{a}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{D}^2\mathbf{a}$	$\mathbf{D}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$	\mapsto $\mathbf{D}[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}]_A - \mathbf{D}[\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}]_A$

TAB. 4.6: Liste des invariants et des générateurs pour une loi à deux directions matérielles préférentielles

où $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$, $\mathbf{B} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{b}$ et $\mathbf{C} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

La contrainte visqueuse, traduisant ainsi la présence de la résine aux températures de formages, représente alors un intérêt particulier. La façon la plus simple est de modifier la formulation qui découle du comportement élastique linéaire anisotrope pour l'adapter au cas fluide [JC95],

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta\mathbf{D} + 2\eta_1(\mathbf{AD} + \mathbf{DA} + \mathbf{BD} + \mathbf{DB}) + 2\eta_2(\mathbf{CD} + \mathbf{DC}) \quad (4.121)$$

S'appuyant sur le fait que les deux directions de fibres sont équivalentes (hypothèse inappropriée pour plusieurs variétés d'architectures du renfort), cette démarche a été nuancée plus tard par Spencer 4.123. D'une part, aucune correspondance entre modèle élastique et visqueux n'a été explicitée; d'autre part, ce dernier avait une restriction liée à un potentiel élastique qui n'existe pas dans le cas visqueux.

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta\mathbf{D} + 2\eta_1(\mathbf{AD} + \mathbf{DA} + \mathbf{BD} + \mathbf{DB}) + 2\eta_2 tr(\mathbf{CD})(\mathbf{CD} + \mathbf{DC}) \quad (4.122)$$

Dans un souci de généralisation et de prise en compte de la réorientation des fibres ainsi que de l'architecture du renfort, le comportement de la résine peut finalement être décrit par [Spe00]

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta\mathbf{D} + 2\eta_1(\mathbf{AD} + \mathbf{DA}) + 2\eta_2(\mathbf{BD} + \mathbf{DB}) + 2\eta_3(\mathbf{CD} + \mathbf{DC}^T) + 2\eta_4(\mathbf{C}^T\mathbf{D} + \mathbf{DC}) \quad (4.123)$$

Si l'expression est certes compliquée, son intérêt réside cependant dans sa capacité à couvrir une large gamme de renforts et à prédire la réponse du milieu selon le type de chargement (figure 4.44). Elle met aussi en évidence un seul paramètre capable de simplifier la caractérisation du matériau via un essai de cadre déformable.

Si le matériau est équilibré, les deux directions de fibres sont inter-changeables on aura $\eta_1 = \eta_2$ et $\eta_3 = \eta_4$ ce qui ramène l'expression 4.123 à

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta\mathbf{D} + 2\eta_1(\mathbf{AD} + \mathbf{DA} + \mathbf{BD} + \mathbf{DB}) + 2\eta_2[(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T)\mathbf{D} + \mathbf{D}(\mathbf{C}^T + \mathbf{C})] \quad (4.124)$$

La non linéarité de la viscosité traduisant sa dépendance au taux de cisaillement et à la température peut être prise en compte soit par une loi de carreau, soit par une loi de puissance [SA96].

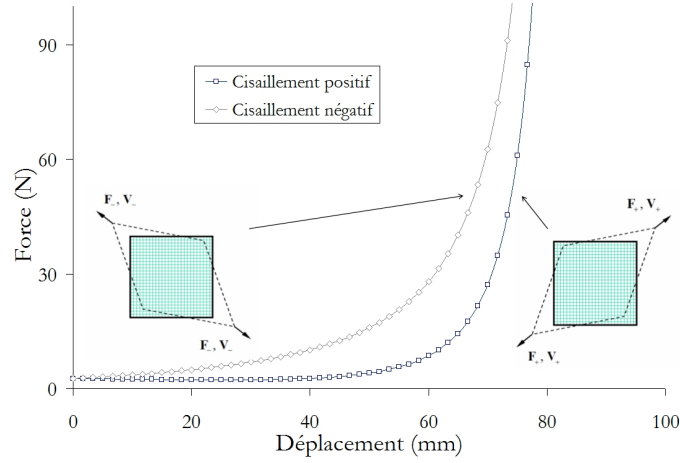


FIG. 4.44: Réponse du modèle visqueux à deux directions de fibres dans un essai de cadre déformable ($V = 100\text{mm/mn}$, $\eta_{\dots} = 0.05\div 0.2\text{ MPa.s}$, $L_{Bar} = 150\text{mm}$).

4.5.1 Contraintes planes

L'expression de la contrainte visqueuse décrite dans le précédent paragraphe est développée pour un composite représenté à l'état fluide pour un renfort tissé. Les paramètres η , η_1 , η_2 , η_3 et η_4 dans l'équation 4.123 sont les viscosités caractéristiques du milieu anisotrope et sont en général fonction de l'angle entre les deux directions de fibres \mathbf{a} et \mathbf{b} .

Cette relation est basée à la fois sur l'incompressibilité de la résine et l'inextensibilité de la résine. Dans le cas de l'élément 140, les contraintes dans les directions de fibres sont calculées à partir des déformations dans ces directions. Par conséquent, le tenseur taux de déformations \mathbf{D} ne vérifie plus la condition d'inextensibilité des fibres et un taux de déformation modifié \mathbf{D}^* doit être introduit afin de corriger cette lacune [Lam04]

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D} + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B} + c_3\mathbf{I} \quad (4.125)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \text{ et } \mathbf{B} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \quad (4.126)$$

où \mathbf{D}^* satisfait les conditions d'inextensibilité et d'incompressibilité : $\mathbf{A} : \mathbf{D}^* = 0$, $\mathbf{B} : \mathbf{D}^* = 0$ et $\mathbf{I} : \mathbf{D}^* = 0$.

Avec ces conditions, les constantes c_1 , c_2 , et c_3 sont

$$c_1 = \frac{1}{d} [(3g_B - I_B^2)(\mathbf{A} : \mathbf{D}) - (3g_B - I_A I_B)(\mathbf{B} : \mathbf{D}) + (g_{AB} I_B - I_{AGB}) I_D] \quad (4.127)$$

$$c_2 = \frac{1}{d} [(3g_B - I_A^2)(\mathbf{B} : \mathbf{D}) - (3g_B - I_A I_B)(\mathbf{A} : \mathbf{D}) + (g_{AB} I_A - I_{BGA}) I_D] \quad (4.128)$$

$$c_3 = \frac{1}{d} [(g_{AB} I_B - I_{AGB})(\mathbf{A} : \mathbf{D}) - (g_{AB} I_A - I_{BGA})(\mathbf{B} : \mathbf{D}) + (g_{AB}^2 - g_{AGB}) I_D] \quad (4.129)$$

où

$$d = g_A I_B^2 + 3g_{AB}^2 - 2g_{AB} + g_B - 3g_{AGB} \quad (4.130)$$

$$I_A = \mathbf{A} : \mathbf{I}, I_B = \mathbf{B} : \mathbf{I}, \text{ et } I_D = \mathbf{D} : \mathbf{I} \quad (4.131)$$

et

$$g_A = \mathbf{A} : \mathbf{A}, \quad g_B = \mathbf{B} : \mathbf{B}, \quad \text{et} \quad g_{AB} = \mathbf{A} : \mathbf{B} \quad (4.132)$$

Dans ce cas, en multipliant l'expression par la fraction volumique de la matrice afin de délimiter les contributions de chaque constituant du composite, les composantes du tenseur des contraintes visqueuses en contraintes planes sont données par

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & 2V_m D_{11}^* (\eta + 2\eta_1 a_1^2 + 2\eta_2 b_1^2 + 2(\eta_3 + \eta_4) a_1 b_1) \\ & + 4V_m D_{12}^* (\eta_1 a_1 a_2 + \eta_2 b_1 b_2 + \eta_3 a_1 b_2 + \eta_4 a_2 b_1) \\ & - 2V_m \eta D_{33}^* \end{aligned} \quad (4.133)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = & 2V_m D_{11}^* (\eta_1 a_1 a_2 + \eta_2 b_1 b_2 + \eta_3 a_2 b_1 + \eta_4 a_1 b_2) \\ & + 2V_m D_{22}^* (\eta_1 a_1 a_2 + \eta_2 b_1 b_2 + \eta_3 a_1 b_2 + \eta_4 a_2 b_1) \\ & + 2V_m D_{12}^* \left(\frac{1}{2}\eta + \eta_1 (a_1^2 + a_2^2) + \eta_2 (b_1^2 + B_2^2) + (\eta_3 + \eta_4) (a_1 b_1 + a_2 b_2) \right) \end{aligned} \quad (4.134)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & 2V_m D_{22}^* (\eta + 2\eta_1 a_2^2 + 2\eta_2 b_2^2 + 2(\eta_3 + \eta_4) a_2 b_2) \\ & + 4V_m D_{12}^* (\eta_1 a_1 a_2 + \eta_2 b_1 b_2 + \eta_3 a_2 b_1 + \eta_4 a_1 b_2) \end{aligned} \quad (4.135)$$

4.5.2 Formulation incrémentale

L'incrément de contrainte lié au comportement global est donné par

$$\left\{ \Delta \boldsymbol{\sigma}^{Glob} \right\} = \left[\mathbf{C}^{Glob} \right] \left\{ \hat{\mathbf{d}} \right\}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.136)$$

La contribution des fibres est conditionnée, cette fois-ci, par sa fraction volumique V_f . L'incrément de contraintes lié au repère local de l'élément, dans ce cas, est calculé à partir des déformations dans la direction des fibres par

$$\begin{aligned} \left[\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{Fib} \right] = & V_f \left[\mathbf{P}_i^{Fib} \right] \left(E_i \left[\begin{array}{ccc} \hat{d}_{xx_i}^{Fib} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + G_i \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \hat{d}_{xz_i}^{Fib} \\ 0 & 0 & 0 \\ \hat{d}_{xz_i}^{Fib} & 0 & 0 \end{array} \right]^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \right) \left[\mathbf{P}_i^{Fib} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.137)$$

avec

$$\left\{ \hat{\mathbf{d}}_i^{Fib} \right\} = \left[\mathbf{P}_i^{Fib} \right]^{-1} \left\{ \hat{\mathbf{d}}_{Mem} + B_f \hat{\mathbf{d}}_{Flex} \right\} \left[\mathbf{P}_i^{Fib} \right] \quad (4.138)$$

D'après § 4.3.3.3., la direction des fibres est actualisée par rapport au système de coordonnées local de l'élément par

$$\mathbf{f}_i^N = x_{\mathbf{f}_i}^N \hat{\mathbf{e}}_1 + y_{\mathbf{f}_i}^N \hat{\mathbf{e}}_2 \quad (4.139)$$

ce qui fait que pour les directions a et b

$$\mathbf{a} = a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2 \quad (4.140)$$

$$\mathbf{b} = b_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{e}}_2 \quad (4.141)$$

L'incrément de contrainte visqueux, dans le repère corotationnel, est dans ce cas

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11} = & \left[2V_m \hat{D}_{11}^* (\eta + 2\eta_1 a_1^2 + 2\eta_2 b_1^2 + 2(\eta_3 + \eta_4) a_1 b_1) \right. \\ & + 4V_m \hat{D}_{12}^* (\eta_1 a_1 a_2 + \eta_2 b_1 b_2 + \eta_3 a_1 b_2 + \eta_4 a_2 b_1) \\ & \left. - 2V_m \eta \hat{D}_{33}^* \right] \end{aligned} \quad (4.142)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{12} = & \left[2V \hat{D}_{11}^* (\eta_1 a_1 a_2 + \eta_2 b_1 b_2 + \eta_3 a_2 b_1 + \eta_4 a_1 b_2) \right. \\ & + 2V \hat{D}_{22}^* (\eta_1 a_1 a_2 + \eta_2 b_1 b_2 + \eta_3 a_1 b_2 + \eta_4 a_2 b_1) \\ & \left. + 2V_m \hat{D}_{12}^* \left(\frac{1}{2} \eta + \eta_1 (a_1^2 + a_2^2) + \eta_2 (b_1^2 + B_2^2) + (\eta_3 + \eta_4) (a_1 b_1 + a_2 b_2) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.143)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{22} = & \left[2V_m \hat{D}_{22}^* (\eta + 2\eta_1 a_2^2 + 2\eta_2 b_2^2 + 2(\eta_3 + \eta_4) a_2 b_2) \right. \\ & \left. + 4V_m \hat{D}_{12}^* (\eta_1 a_1 a_2 + \eta_2 b_1 b_2 + \eta_3 a_2 b_1 + \eta_4 a_1 b_2) \right] \end{aligned} \quad (4.144)$$

avec

$$\left\{ \hat{\mathbf{D}}^* \right\}^{n+\frac{1}{2}} = \left\{ \hat{\mathbf{D}} \right\}^{n+\frac{1}{2}} + c_1 \{ \mathbf{A} \}^{n+\frac{1}{2}} + c_2 \{ \mathbf{B} \}^{n+\frac{1}{2}} + c_3 \mathbf{I} \quad (4.145)$$

Cette loi de comportement peut être ainsi retenue pour enrichir la formulation actuelle où la contribution visqueuse est basée sur un modèle de Maxwell incluant une seule direction de fibre, comme indiqué (§ 4.3.2.).

Conclusion générale et perspectives

L'intérêt d'un outil de simulation du procédé est essentiel dans une perspective de réduction des coûts de la mise en forme des composites. Avant de procéder au travail de simulation, il est nécessaire d'avoir une bonne connaissance des modèles de comportement susceptibles d'être utilisés dans la simulation de la mise en forme des composites. Ainsi, nous avons dressé un panorama des principaux types de modèles de mise en forme des milieux fibreux tissés. Dans ce cadre, les modèles basés sur l'approche continue permettent de mieux caractériser les mécanismes de déformation au cours de la mise en forme et de mieux prendre en compte les évolutions structurales au sein du milieu, et ce, à différentes échelles. La prise en compte, de façon découplée, des différents mécanismes de déformation du milieu fibreux tissé permet d'obtenir une meilleure caractérisation expérimentale de chaque comportement séparément. Il reste alors à choisir le niveau de complexité de la modélisation, dépendant directement du nombre de paramètres décrivant le comportement du milieu, sachant que la précision du modèle se gagne souvent au détriment du temps de calcul.

Une phase d'analyse expérimentale a ensuite été menée afin de disposer de connaissances supplémentaires concernant l'état de la structure au cours d'un cycle de mise en forme par emboutissage, et afin d'avoir des données expérimentales pour proposer une comparaison simulation / essai. Un premier type d'essai a été réalisé sur la mise en forme de plusieurs types de tissus en fibres de verre. La déformation se fait prioritairement en cisaillement et inclut de grandes rotations des réseaux de mèches qui se traduisent par de fortes variations angulaires. Le tissu est soumis dans ce cas à de petites déformations, inférieures à 1% généralement. Une méthode simple d'analyse des données a été utilisée : elle consiste à relever les coordonnées de points répartis sur un quadrillage sur le tissu avant et après déformation. On représente alors les variations angulaires entre réseaux chaîne et trame. Cette méthode pourrait être étendue à d'autres types de renforts, et à plusieurs séquences d'empilement. Un second type d'essais a été effectué sur la mise en forme principalement de deux types de composites à matrice thermoplastique par thermoformage.

Etant données les difficultés de mise au point des protocoles expérimentaux concernant la mise en forme des renforts tissés, imprégnés ou non-imprégnés de résine, nous considérons avoir obtenu des résultats satisfaisants concernant la qualité des pièces produites (état satisfaisant de surface, bonne répartition des mèches sur les zones utiles

du renfort). Cela a été possible grâce au travail d'amélioration du procédé que nous avons mené simultanément : il s'agissait, d'essai en essai, de déterminer l'influence des différents paramètres (tels que, dans le premier cas, l'influence de la profondeur de l'emboutissage, la pression du serre-flan, ...) sur les mécanismes d'apparition des défauts. L'objectif a été d'optimiser le cycle de mise en forme, en modifiant, quand cela était possible, certains outillages de la machine : cela a par exemple été le cas pour la mise en forme de composites à matrice thermoplastique, et à usage industriel, tel que le Cétex, qui nécessitait un chauffage à haute température.

Parallèlement, nous avons mené un travail de simulation à partir de l'utilisation de la loi implémentée dans le solveur PAM FORM. Nous avons vu, à l'aide de tests, et à partir des éléments d'information obtenus, que cette loi, qui s'inscrit dans une approche continue, combine plusieurs modèles, permettant ainsi de prendre en compte différents types de mécanismes de déformations.

Nous avons procédé tout d'abord à des tests de simulation de l'emboutissage de renforts non-imprégnés afin de comparer les résultats avec l'analyse expérimentale. La comparaison a porté essentiellement sur les efforts de contact entre flan et poinçon, sur les variations angulaires au sein du renfort ainsi que sur des critères géométriques tel que l'avalement sur les bords du renfort. A partir de cette comparaison, on peut dire que la loi implémentée offre une approche convenable dans le cas des renforts non-imprégnés. Il est par contre difficile de conclure de manière définitive quant aux différences observées : en effet, nombre d'entre elles peuvent s'expliquer par certaines imperfections liées à la démarche expérimentale. Ainsi, cette dernière, qui reste encore assez peu développée, peut sans doute être nettement améliorée.

En présence de résine dans le cas des composites thermoplastiques, la loi de comportement implémentée est efficace pour représenter les comportements dans des renforts unidirectionnels. Cependant, dans le cas des renforts tissés, quelques tests montrent que le comportement visqueux ne reflète pas la nature anisotrope du milieu. C'est le cas de l'essai de cadre déformable et de la simulation du procédé de thermoformage qui ont été effectués : dans le premier cas, les déformations sont de nature homogènes, dans le second, elles interviennent simultanément dans le plan et hors plan.

Nous avons donc proposé quelques pistes pour construire une loi de comportement qui tiendrait mieux compte du caractère bidirectionnel des fibres. L'une des perspectives de recherche qui découle directement de ce travail consisterait à implémenter cette loi de comportement, et à la valider par différents types de tests.

Ce travail pourrait également être prolongé par une investigation comparée de plusieurs lois de comportement à l'aide d'un protocole de recherche expérimental basé par exemple sur un essai de cadre déformable pour caractériser le comportement du composite à sa température de mise en forme : cela permettrait de mieux mesurer l'intérêt de construire une nouvelle loi, intégrant un nouveau type de paramètre. Une autre perspective de recherche serait de prendre en compte les fortes épaisseurs. En effet, ce problème se pose déjà : par exemple, avec le programme de l'A380, les fortes épaisseurs mises en oeuvre font évoluer les règles de conception et de dimensionnement, ainsi que les méthodes et procédés. Sur les plans numérique et expérimental, il s'agirait alors d'adopter d'autres stratégies adaptées au grand nombre de plis.

Bibliographie

- [ABB96] J. Ascough, H. E. Bez, and A. M. Bricis, *A simple beam element, large displacement model for finite element simulation of cloth drape*, J. Text. Inst. (1996), 87.
- [ACP02] P. Boisse E. Soccard A. Cheruet, D. Soulat and S. Maison-Le Poec, *Analysis of the interply porosities in thermoplastic composites forming processes*, International Journal of Forming Processes **5** (2002), 247–258.
- [AM96] D. Adolf and J. E. Martin, *Calculation of stresses in crosslinking polymers*, Journal of Composite Materials **30** (1996), 13.
- [Aon96] M. A. Aono, *Wrinkle propagation model for cloth*, Computer Graphics Around the World, 1996, pp. 95–115.
- [AST87] ASTM, *Annual book of standards, textiles-yarns, fabrics, general test methods, vol. 07.01*, 1987.
- [BA94] M. V. Brusckke and S. G. Advani, *A numerical approach to model non-isothermal viscous flow through fibrous media with free surfaces*, International Journal of Solids and Structures **19** (1994), 575.
- [BB95] R. Blanlot and J. L. Billoët, *Numerical formulation of the evolution anisotropic behavior of composite fabrics in order to simulation forming processes*, Proceedings of ICCM-10 (Whistler, BC, Canada), 1995, pp. 229–236.
- [BBHG02] B. Ben Boubaker, B. Haussy, and J. F. Ganghoffer, *Modèles discrets de structures tissées : Analyse de stabilité et de drapé*, C. R. Mecanique **330** (2002), 871–877.
- [BC03] H. Borouchaki and A. Cherouat, *Drapage géométrique des composites*, C. R. Mecanique **331** (2003), 437–442.
- [BCBdL01] H. Borouchaki, A. Cherouat, J.L. Billoët, and P. de Luca, *Integration of a new geometrical model for textile forming processes in the quickform software*, Proceedings of the Fourth International ESAFORM Conference on Material Forming (Liège), 2001, pp. 103–106.
- [BCGS95] P. Boisse, A. Cherouat, J. C. Gelin, and H. Sabhi, *Experimental study and finite element simulation of glass fiber fabric shaping process*, Polymer Composites **16** (1995), 83–95.

- [Ber93] O. K. Bergsma, *Computer simulation of 3d forming processes of fabric-reinforced plastics*, Proc. Of 9th International Conference on Composite Materials (ICCM/9), 1993, pp. 560–567.
- [Ber95] O. Bergsma, *Three-dimensional simulation of fabric draping*, Ph.D. thesis, Delft University of Technology, 1995.
- [BGH01] P. Boisse, A. Gasser, and G. Hivet, *Analyses of fabric tensile behaviour : determination of the biaxial tension-strain surfaces and their use in forming simulations*, Composite part A **32** (2001), 1395–1414.
- [BH88] O. K. Bergsma and J. Huisman, *Deep drawing of fabric - reinforced thermoplastics*, CadComp Conference (Southampton England), 1988.
- [BH97] D. Bigaud and P. Hamelin, *Mechanical properties prediction of textile-reinforced composite materials using a multiscale energetic approach*, Composite Structures **38** (1997), 361–71.
- [BHG91] D. E. Breen, D. H. House, and P. H. Getto, *A physically-based particle model of woven cloth*, The Visual Computer **56** (1991), 264–277.
- [BHG03] B. B. Boubaker, B. Haussy, and J. F. Ganghoffer, *Un modèle discret du couplage entre les fils dans une structure tissée*, C. R. Mécanique **331** (2003), 295–302.
- [BHW94] D. Breen, D. House, and M. Wozny, *A particle-based model for simulating the draping behaviour of woven cloth*, Textile Research Journal **64** (1994), 663–685.
- [BHW95] D. E. Breen, D. H. House, and M. J. Wozny, *Predicting the drape of woven cloth using interacting particules*, Tech. Report ECRC 94-16, European computer-industry research center, 1995.
- [Bil03] J. L. Billoët, *Contribution à la compréhension des problèmes en grandes transformations, cours de DEA S3M.*, Tech. Report v3, ENSAM Paris, 2003.
- [BJPV98] J. Byström, N. Jekabsons, L-E. Persson, and J. Varna, *Using reiterated homogenization for stiffness computation of woven composites*, Proceedings of ICCE/5 (Las Vegas), 1998, pp. 133–4.
- [BL84] T. Belytschko and J. I. Lin, *Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shells*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **42** (1984), 225–251.
- [Boh86] J. P. Bohler, *Application of tensor functions in solid mechanics*, CISM COURSES and Lectures (Berlin), no. 292, 1986.
- [Boi97] P. Boisse, *Comportement mécanique biaxial des renforts composites tissés*, Mécanique Industrielle des Matériaux (GAMI) **50** (1997), 140–144.
- [Bot04] Mathieu Bottin, *Thermoformage des composites thermoplastiques, stage technicien*, Tech. report, Polytech’Orléans, 2004.
- [BS93] P. A. Bliman and M. Sorine, *Friction modeling by hysteresis operators. application to dahl, sticktion, and stribeck effects, models of hysteresis*, Longman Scientific and Technical (1993).
- [BZG05] P. Boisse, B. Zouari, and A. Gasser, *A mesoscopic approach for the simulation of woven fibre composite forming*, Composites Science and Technology **65** (2005), 429–436.
-

- [CB01] A. Cherouat and J. L. Billoët, *Mechanical and numerical modelling of composite manufacturing processes deep-drawing and laying-up of thin pre-impregnated woven fabrics*, Journal of Materials Processing Technology **118** (2001), 460–471.
- [CF97] B. N. Cox and G. Flanagan, *Handbook of analytical methods for textile composites*, Tech. Report NASA CR 4570, NASA Langley Research Center, Virginia, USA, 1997.
- [CFL28] R. Courant, K. O. Friedrichs, and H. Lewy, *über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik*, Math. Ann. **100** (1928), 32.
- [Cha83] C. Chamis, *MEMO*, Tech. Report 8320, NASA, 1983.
- [Cha89] D. Chamberlin, *Prediction of coefficients of thermal expansion for unidirectional composites*, Journal of Composite Materials **23** (1989), 370–388.
- [Che01] A. Cheruet, *Etude et simulation numérique de la mise en forme des composites minces à matrice thermoplastiques et fibres longues*, Ph.D. thesis, Université d’Orléans, 2001.
- [Chr79] R. M. Christensen, *Mechanics of composite materials*, John Wiley and Sons, New York (1979).
- [Chr93] ———, *Effective viscous flow properties for fiber suspensions under concentrated conditions*, Journal of Rheology **37** (1993), 103–121.
- [CI91] T. Chou and T. Ishikawa, *Mechanics of composite materials*, Textile Structural Composites (1991), 31–37.
- [Cin03] J. Cinquin, *L’utilisation des composites en aérospatiale*, Comptes Rendus des JNC13 (Y. Remond and J. Lamon, eds.), vol. 1, mars 2003.
- [CMT02] F. Cordier and N. Magnenat-Thalmann, *Real-time animation of dressed virtual humans*, Eurographics **21** (2002), no. 3, 663–685.
- [Cog92] F. N. Cogswell, *Thermoplastic aromatic polymer composites*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1992.
- [Cor86] Materials Science Corporation, *Woven fabric reinforced composites for automotive applications*, Tech. Report MSC TFR 1605/8102, National Science Foundation, 1986.
- [CP95] D.W. Coffin and R.B. Pipes., *Constitutive relationships for aligned discontinuous fiber composites*, Composites Manufacturing **2** (1995), 141–146.
- [CXPK03] J. Cao, P. Xue, X. Peng, and N. Krishnan, *An approach in modeling the temperature effect in thermo-stamping of woven composites*, Composite Structures **61** (2003), 413–420.
- [DAB96] A. Dasgupta, R. K. Agarwal, and S. M. Bhandarkar, *Three dimensional modeling of woven fabric composites for effective thermo-mechanical and thermal properties*, Composites Science and Technology **56** (1996), 209–223.
- [DJL⁺96] P. DeLuca, A. F. Johnson, P. Lefebure, L. Mallon, C. O’Bradaigh, P. Sunderland, A. Vodermeier, and W. Werner, *Numerical techniques for the pre-heating and forming simulation of continuous fibre thermoplastics*, SAMPE Europe Conference and Exhibition (Basel, Swiss), 1996.
-

- [Dum03a] F. Dumont, *Contribution à l'expérimentation et à la modélisation du comportement mécanique de renforts de composites tissés*, Ph.D. thesis, Université d'Orléans, 2003.
- [Dum03b] ———, *Contribution à l'expérimentation et à la modélisation du comportement mécanique de renforts de composites tissés*, Ph.D. thesis, Université de Paris 6, 2003.
- [EDC96] J. W. Eischen, S. Dend, and T. Clapp, *Finite-element modelling and control of flexible fabric parts*, IEEE Comp. Graph. App. **16** (1996), 71–80.
- [Eis98] J. W. Eischen, *Technical issues, approaches and challenges*, Course 31-Cloth and Clothing in Computer Graphics, 25th SIGGRAPH Conference, 1998.
- [ETM96] N. S. M. El-Tayeb and I. M. Mostafa, *The effect of laminate orientations on friction and wear mechanisms of glass reinforced polyester composite*, Wear **195** (1996), 186–191.
- [Eur92] Brite Euram, *Industrial press forming of CFRTP sheets and developpement of numerical simulation tools*, Tech. Report Nř BE-5092, 1992.
- [GLP68] P. Grosberg, A. V. Leaf, and B. J. Park, *The mechanical properties of woven fabrics, part VI : The elastic shear modulus of plain-weave fabrics*, Textile Research Journal (1968), 1085–1100.
- [GP66] P. Grosberg and B. J. Park, *The mechanical properties of woven fabrics, part v : The initial modulus and the frictional restraint in shearing of plain weave fabrics*, Textile Research Journal (1966), 420–431.
- [GT96] M. T. Griesse and P. M. Taylor, *The bending behaviour of fabrics : An energy approach*, Mathematics and Computers in Simulation **41** (1996), 579–586.
- [Has83] Z. Hashin, *Analysis of composite materials - a survey*, Journal of Applied Mechanics **50** (1983), 481–505.
- [HC98] J. Hu and Y. F. Chan, *Effect of fabric mechanical properties on drape*, Textile Research Journal **68** (1998), 57–64.
- [HCL02] P. Harrison, M. J. Clifford, and A. C. Long, *Shear characterisation of woven textile composites*, Proceedings of the 10th European Conference on Composite Materials (ECCM-10) (Bruges), June 2002, p. 280.
- [HCL04] ———, *Shear characterisation of viscous woven textile composites : A comparison between picture frame and bias extension experiments*, Composites Science and Technology **64** (2004), 1453–1465.
- [HDB96] D. H. House, R. W. DeVaul, and D. E. Breen, *Towards simulating cloth dynamics using interacting particles*, International Journal of Clothing Science and Technology **8** (1996.), 75–94.
- [HG02] G. A. Holzapfel and T. C. Gasser, *A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains : Continuum basis, computational aspects and applications*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. **190** (2002), 4379–4403.
- [HGB69] J. W. S. Hearle, P. Grosberg, and S. Backer, *Structural mechanics of fibers, yarns, and fabrics*, Wiley-Interscience, New York, 1969.
- [HH88] F. Heisley and K. Haller, *Fitting woven fabric to surfaces in three dimensions*, Journal of Textile Institute **2** (1988), 250–263.
-

- [HK97] S. W. Hsiao and N. Kikuchi, *Numerical analysis of deep drawing process for thermoplastic composite laminates*, Journal of Engineering Material Technology **119** (1997), 314–318.
- [HK99] ———, *Numerical analysis and optimal design of composite thermoforming process.*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. **177** (1999), 314–318.
- [HP98] D. R. Haumann and R. E. Parent, *The behavioral test-bed : Obtaining complex behavior from simple rules*, The Visual Computer **4** (1998), 332–347.
- [HPH96] D. Hutchinson, M. Preston, and T. Hewitt, *Adaptative refinements for mass/spring simulations*, Eurographics Workshop on Animation and Simulation (Poitiers, France), 1996, pp. 31–45.
- [HVK00] J. Hofstee and F. Van Keulen, *Elastic stiffness analysis of a thermo-formed plain-weave fabric composite part II : Analytical models*, Composites Science and Technology **60** (2000), 1249–1261.
- [HVK01] J. Hofstee and F. Van-Keulen, *3-d geometric modeling of draped woven fabric*, Composite structures **54** (2001), 179–195.
- [HW80] T. J. R. Hughes and J. Winget, *Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis*, IJNME **15** (1980), 1862–1867.
- [HZ97] J. L. Hu and Y. T. Zhang, *The KES shear test for fabrics*, Textile research Journal **67** (1997), 654–664.
- [JC95] A. F. Johnson and E. Costalas, *Forming models for fabric reinforced thermoplastics*, ICAC 95 (Nottingham, UK), 1995, pp. 341–352.
- [JHK99] Y. Jiang, J. Hu, and F. Ko, *Characterizing and modeling bending properties of multiaxial warp knitted fabrics*, Textile Res J **69** (1999), 691–697.
- [JP98] Y. J. Jeong and D. G. Phillips, *A study of fabric-drape behaviour with image analysis part II : The effects of fabric structure and mechanical properties on fabric drape*, Journal of the Textile Institute **89** (1998), 70–79.
- [JTS00] Y. Jiang, A. Tabiei, and J. Simitse, *Mircomechanics-based plain weave fabric composites constitutive equations for local and global analysis*, Composite Science Technology **60** (2000), 1825–1833.
- [Kaw80a] S. Kawabata, *The standardization and analysis of hand evaluation*, 1980.
- [Kaw80b] ———, *The standardization and analysis of hand evaluation*, 1980.
- [KC99] J. L. Kuhn and P. G. Charalambides, *Modelling of plain weave fabric composite geometry*, Journal of Composite Materials **33** (1999), 188–220.
- [KJS05] M. J. King, P. Jearanaisilawong, and S. Socrate, *A continuum constitutive model for the mechanical behavior of woven fabrics*, International Journal of Solids and Structures **42** (2005), 3867–3896.
- [KNK73] S. Kawabata, M. Niwa, and H. Kawai, *The finite deformation theory of plain-weave fabrics, part i, part II and part III*, J. Text. Inst. **64** (1973), 21–83.
- [KYC95] T. J. Kang, W. R. Yu, and K. Chung, *Drape simulation of woven fabric by using the finite element method*, J. Text. Inst. **86** (1995), 635–648.
-

- [KYM99] S. Kato, T. Yoshino, and H. Minami, *Formulation of constitutive equations for fabric membranes based on the concept of fabric lattice model*, Engineering and Structures **21** (1999), 691–708.
- [Lah02] T. J. Lahey, *Modelling hysteresis in the bending of fabrics*, Ph.D. thesis, University of Waterloo, 2002.
- [Lam04] E. A. D. Lamers, *Shape distortion in fabric reinforced composite products due to processing induced fibre reorientation*, Ph.D. thesis, University of Twente, 2004.
- [Lar91] D. Laroche, *Prédiction des contraintes et déformations résiduelles obtenues lors du moulage de formes complexes en composite stratifié.*, Mmoire de Maîtrise En Sciences Appliquées. Département de Genie Mecanique, Ecole Polytechnique de Montreal, 1991.
- [LBB⁺02] S. V. Lomov, T. Belov, S. B. Bischoff, T. Ghosh, I. Truong-Chi, and I. Verpoest, *Carbon composites based on multiaxial multiply stitched preforms. part 1. geometry of the preform*, Composites : Part A **33** (2002), 1171–1183.
- [LCLS05] L. Liu, J. Chen, X. Li, and J. Sherwood, *Two-dimensional macro-mechanics shear models of woven fabrics*, Composites : Part A **36** (2005), 105–114.
- [LH04] T. J. Lahey and G. R. Heppler, *Mechanical modeling of fabrics in bending*, Journal of Applied Mechanics **71** (2004), 32–40.
- [LR94] A. Long and C. Rudd, *A simulation of reinforcement deformation during the production of preforms for liquid moulding process*, Journal of Engineering Manufacture, The institution of Mechanical Engineering **208** (1994), 269–278.
- [LR02] T.-C. Lim and S. Ramakrishna, *Modelling of composite sheet forming : A review*, Composites : Part A **33** (2002), 515–537.
- [LV04] H. Lusson and N. Vendeuvre, *Simulation numérique de la mise en forme de composites minces*, Tech. report, E.N.S.A.M. Paris, 2004.
- [LVBL03] S. V. Lomov, I. Verpoest, M. Barburski, and J. Laperre, *Carbon composites based on multiaxial multiply stitched preforms. part2. KES-f characterization of the deformability of the preforms at low loads.*, Composites Part A **34** (2003), 359–370.
- [MB97] C. B. McGuinness and C.M.O Bradaigh, *Development of rheological models for forming flows and picture-frame shear testing of fabric reinforced thermoplastic sheets*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics **73** (1997), 1–28.
- [MB98] ———, *Caractérisation of thermoplastic composite melts in rhombus-shear : the picture-frame experiment*, Composites Part A **29** (1998), 115–132.
- [MC97] T. M. McBride and J. Chen, *Unit cell geometry in plain weave fabrics during shear deformations*, Composites Science and Technology **51** (1997), 345–351.
- [MCL97] T. M. McBride, J. Chen, and L. Lam, *Effects of forming induced evolution of microstructure in plain-weave composites*, 12th Technical Conference. American Society for Composites, 1997, pp. 1063–1072.
-

- [MG01] M. Magno and J.-F. Ganghoffer, *Un modèle mésoscopique en grandes perturbations de matériaux textiles. application à l'armure toile*, C. R. Acad. Sci. t. **329**, Série II b (2001), 149–152.
- [Min95] P.G. Minazio, *Fabric assurance by simple testing*, International Journal of Clothing Science and Technology **7** (1995), 43–48.
- [MLDB00] U. Mohammed, C. Lekakou, L. Dong, and M. G. Bader, *Shear deformation and micromechanics of woven fabrics*, Composites : Part A **31** (2000), 299–308.
- [MM95] A. M. Murtagh and P. J. Mallon, *Shear characterisation of unidirectionnel and fabric reinforced thermoplastic composites for pressformong applications*, 10th ICCM Conference (Canada), 1995, pp. 373–380.
- [MOB98] S. P. McEntee and C. M. O-Bradaigh, *Large deformation finite element modelling of single-curvature composite sheet forming with tool contact*, Composites : Part A **29A** (1998), 207–213.
- [MRM93] A. M. Murtagh, Monaghan M. R., and P. J. Mallon, *Investigation of the interply slip process in continuous fibre thermoplastic composites*, ICCM9 (Madrid), 1993.
- [MRS69] J. F. Mulhern, T. G. Rogers, and A. J. M. Spencer, *A continuum theory of a plastic-elastic fibre-reinforced material*, International Journal of Engineering Science **7** (1969), 129–152.
- [MS94] S. R. Morris and C. T. Sun, *An investigation of interply slip behaviour in AS4/PEEK at forming temperatures*, Composites Manufacturing **5** (1994), 217–224.
- [MT56] C. Mack and H. Taylor, *The fitting of woven cloth to surfaces*, Journal of Textile Institute **47** (1956), 477–487.
- [Nai94] R. A. Naik, *Analysis of woven and braided fabric reinforced composites*, Tech. Report NASA CR-194930, National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC, 1994.
- [NHP99] M. Nguyen, I. Herszberg, and R. Paton, *The shear properties of woven carbon fabric*, Composite Structures **47** (1999), 767–779.
- [NL02] X. Ning and M. R. Lovell, *On the sliding friction characteristics of unidirectional continuous FRP composites*, Journal of Tribology **124** (2002), 5–13.
- [NS92a] N. Naik and P. Shembekar, *Elastic behaviour of woven fabric composites : I- laminate analysis*, Journal of Composite Materials **26** (1992), 2196–2225.
- [NS92b] ———, *Elastic behaviour of woven fabric composites : II- laminate analysis*, Journal of Composite Materials **26** (1992), 2227–2246.
- [OZ83] E. Onate and O. C. Zienkiewicz, *A viscous shell formulation for the analysis of thin sheet metal forming*, Int. J. Mech. Sci. **25** (1983), 305–335.
- [PC97] A. G. Prodromou and J. Chen, *On the relationship between shear angle and wrinkling of textile composite performs*, Composites : Part A **28A** (1997), 491–503.
- [PC05] X. Q. Peng and J. Cao, *A continuum mechanics-based non-orthogonal constitutive model for woven composite fabrics*, Composites : Part A **36** (2005), 859–874.
-

- [PCC⁺04] X.Q. Peng, J. Cao, J. Chen, P. Xue, D.S. Lussier, and L. Liu, *Experimental and numerical analysis on normalization of picture frame tests for composite materials*, Composites Science and Technology **64** (2004), 11–21.
- [Pei30] F.T. Peirce, *The handle of cloth as a measurable quantity*, J. Tex. Inst. **T 377** (1930), 21.
- [Pei37] F. T. Peirce, *The geometry of cloth structure*, Journal of the Textile Institute **28-T45** (1937).
- [PH01] J. Pora and J. Hinrichsen, Proceedings of the 22nd International SAMPE Europe conference, Paris, 2001, p. 123.
- [Pot79] K. D. Potter, *The influence of accurate stretch data for reinforcements on the production of complex structural mouldings. part i. deformation of aligned sheets and fabrics*, Composites (1979), 161–173.
- [PQDH95] A. K. Pickett, T. Queckbörner, P. Deluca, and E. Haug, *An explicit finite element solution for the forming prediction of continuous fibre-reinforced thermoplastic sheets*, Composites Manufacturing **6** (1995), 237–243.
- [PQDLH92] A. K. Pickett, T. Queckborner, P. De-Luca, and E. Hang, *An explicit finite element solution for the forming prediction of continuous fibre reinforced thermoplastic sheets*, Composites Manufacturing **6** (1992), 237–243.
- [Pro95] X. Provot, *Deformation constraint in a mass-spring model to describe rigid cloth behaviour*, Proceedings of Graphics Interface, 1995, pp. 147–154.
- [PW00] J. Page and J. Wang, *Prediction of shear force and an analysis of yarn slippage for a plain-weave carbon fabric in a bias extension state*, Composite Science Technology **60** (2000), 977–986.
- [PW02] ———, *Prediction of shear force using 3d non-linear FEM analyses for a plain weave carbon fabric in a bias extension state*, Finite Elements in Analysis and Design **38** (2002), 755–764.
- [PXC⁺02] X. Q. Peng, P. Xue, J. Cao, D. S. Lussier, and Chen J., *Normalization in the picture frame test of woven composites : Length or area ?*, Proceedings of the Fifth International ESAFORM Conference on Materials Forming (Krakot), 2002, pp. 13–17.
- [QP97] G. Y. Qiu and T. J. Pence, *Remarks on the behaviour of simple directionally reinforced incompressible non-linearly elastic solids*, Journal of Elasticity **49** (1997), 1–30.
- [RBM00] O. Rozant, P. E. Bourbon, and J. A. E. Manson, *Drapability of dry textile fabrics for stampable thermoplastic preforms*, Composites : Part A **31** (2000), 1167–1177.
- [Red04] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells : Theory and analysis*, CRC Press, Florida, 2004.
- [Ree83] W. T. Reeves, *Particule systems - a technique for modelling a class of fuzzy objects*, ACM transactions on graphics **2** (1983), 91–108.
- [RH70] B. W. Rosen and Z. Hashin, *Effective thermal expansion coefficients and specific heats of composite materials*, Journal of Composite Materials **8** (1970), 157–173.
-

- [RHSY81] R. E. Robertson, E. S. Hsiue, E. N. Sickafus, and G. S. Y. Yeh, *Fiber rearrangements during the moulding of continuous fiber composites : Part 1. flat cloth to a hemisphere*, Polymer composites **2** (1981), 126–131.
- [RHY84] R. Robertson, E. Hsiue, and G. Yeh, *Fibre rearrangements during the moulding of continuous fibre composites ii*, Polymer composites **5** (1984), 191–197.
- [Rog89] T.G. Rogers, *Rheological characterisation of anisotropic materials*, Composites **20** (1989), 21–27.
- [Rou97] P. Rougée, *Mécanique des grandes transformations*, Springer-Verlag, 1997.
- [Rud90] I. J. Rudomin, *Simulating cloth using a mixed geometricphysical method*, Ph.D. thesis, University of Pennsylvania, 1990.
- [SA96] S. Shuler and S. G. Advani, *Transverse squeeze flow of concentrated and aligned fibres en viscous fluids*, Journal of Non-Newtonien Fluid Mechanics (1996).
- [SARP01] R. M. J. S. Sidhu, R. C. Averill, M. Riaz, and F. Pourboghrat, *Finite element analysis of textile composite preform stamping*, Composite structures **52** (2001), 483–497.
- [Sch68] R. Schapery, *Thermal expansion coefficients of composite materials based on energy principles*, Journal of Composite Materials **2** (1968), 380–404.
- [SD03] C. Simon and J. Demeulemeester, *Mise au point d'un banc d'essai et d'un protocole de mesure pour la mise en forme des composites minces*, Tech. report, ENSAM Paris, 2002/2003.
- [Ske76] J. Skelton, *Fundamentals of fabric shear*, Textile Research Journal (1976), 862–829.
- [SM97] B. V. Sankar and R. V. Marrey, *Analytical method for micromechanics of textile composites*, Composites Science and Technology **S1** (1997), 703–713.
- [SP88] A. Smiley and R. Pipes, *Analysis of the diaphragm forming of continuous fiber reinforced thermoplastics*, Journal of Thermoplastic Composite Materials **1** (1988), 298–321.
- [SP05] H. Sun and N. Pan, *Shear deformation analysis for woven fabrics*, Composite Structures **67** (2005), 317–322.
- [Spe72] A. J. M. Spencer, *Deformation of fiber-reinforced materials*, Calendron Press, Oxford, 1972.
- [Spe84] A.J.M. Spencer, *Continuum theory the mechanics of fibre-reinforced composites*, CISM Courses and lectures, Vienna : Springer, 1984, (Chap. 1. No. 282).
- [Spe00] A.J.M Spencer, *Theory of fabric-reinforced viscous fluid*, Composites Part A **31** (2000), 1311–1321.
- [Spe01] A. J. M. Spencer, *A theory of viscoplasticity for fabric-reinforced composites*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids **49** (2001), 2667–2687.
- [SPH03] T. V. Sagar, P. Potluri, and J. W. S. Hearle, *Mesoscale modelling of interlaced fibre assemblies using energy method*, Computational Materials Science **28** (2003), 49–62.
-

- [SRL97] P. Smith, C. D. Rudd, and A. C. Long, *The effect of shear deformation on the processing and mechanical properties of aligned reinforcements*, Composites Science and Technology **57** (1997), 327–344.
- [SS70] G. E. Smith and A. J. M. Spencer, *A continuum theory of a rigid-plastic solid reinforced by two families of inextensible fibres*, Quart. J. Mech. Appl. Math **23** (1970), 489–504.
- [SS01] Z. S. Shang and V. H. Suong, *Three dimensional micro-mechanical modeling of woven fabric composites*, Journal of Composite Materials **35** (2001), 1701–1729.
- [SS04] S.B. Sharma and M.P.F. Sutcliffe, *A simplified finite element model for draping of woven material*, Composites : Part A **35** (2004), 637–643.
- [SSC03] S. B. Sharma, M. P. F. Sutcliffe, and S. H. Chang, *Characterisation of material properties for draping of dry woven composite material*, Composites : Part A **34** (2003), 1167–1175.
- [SSCL01] S. B. Sharma, M. P. F. Sutcliffe, M. J. Clifford, and A. C. Long, *Experimental investigation of tow deformation during draping of woven fabrics*, Proceedings of the Fourth International ESAFORM Conference on Materials Forming (Liège, Belgique) (Habraken AM, ed.), 2001.
- [SSR00] M. Zako S. Sakata, T.C. Lim and S. Ramakrishna, *Geometrical non-linearity of textile composites in large deformation*, Adv Compos Lett **16** (2000), 257–266.
- [Ste95] K. Stellbrink, *Micromechanics*, Carl-Hanser, Munchen, 1995.
- [SWC97] K. Srirengan, J. D. Whitcomb, and C. Chapman, *Model technique for three-dimensional Global/Local stress analysis of plainweave composites*, Composite Structures **39** (1997), 145–156.
- [TB03] R. R. Tanov and M. Brueggert, *Finite element modeling of non-orthogonal loosely woven fabrics in advanced occupant restraint systems*, Finite Elements in Analysis and Design **39** (2003), 357–367.
- [Tch78] P. L. Tchebychev, *Sur la coupe des vêtements*, Congrès de Paris, vol. ., Congr ‘es de Paris, 154-155, also available as §The Cutting out of Clothes,Ť Uspekhi matematicheskikh nauk, Vol. 1, No. 2, pp. 38-42 (1946).(1878),, 1878, pp. 154–155.
- [TF88] D. Terzopoulos and K. Fleischer, *Deformable models*, The Visual Computer **4** (1988), 306–331.
- [TG89] A. S. Tam and T. G. Gutowski, *Ply slip during the forming of thermoplastic composite parts*, Journal of Composite Materials **23** (1989), 587–600.
- [THB96] F. Trochu, A. Hammami, and Y. Benoit, *Prediction of fibre orientation and net shape definition of complex composite part*, Composites Part A **27** (1996), 319–328.
- [TP96] P. Thevenin and D. Perreux, *The use of homogenization methods for estimating anisotropic viscosities of composite melts*, Composites Science and Technology **56** (1996), 595–603.
- [TT01] R. Tanov and A. Tabiei, *Computationally efficient micro-mechanical woven fabric constitutive*, J. Models. Appl. Mech. **60** (2001), 553–560.
-

- [TUKZ99] N. Takano, Y. Uetsuji, Y. Kahiwagi, and M. Zako, *Hierarchical modeling of textile composite materials and structures by the homogenization method*, Mater. Sci. Engng. **7** (1999), 207–231.
- [TY02] A. Tabiei and W. Yi, *Comparative study of predictive methods for woven fabric composite elastic properties*, Composite Structures **58** (2002), 149–164.
- [Vil02] J. Villard, *Simulation numérique de tissus à l'aide de maillages adaptatifs*, Ph.D. thesis, Université de Technologie de Troyes, 2002.
- [VIV98] P. Vandeurzen, J. Ivens, and I. Verpoest, *Micro-stress analysis of woven fabric composites by multilevel decomposition*, Journal of Composite Materials **32** (1998), 623–51.
- [VKL95] T. Vu-Khanh and B. Liu, *Prediction of fibre rearrangement and thermal expansion behaviour of deformed woven-fabric laminates*, Composites Science and Technology **53** (1995), 183–191.
- [VWKP89] B. P. Van West, M. Keefe, and R.B. Pipes, *The draping of bidirectionnel fabric on three dimensional surfaces*, Proceedings of the American Society of Composites. Fourth Technical Conference, Technomic PA, 1989, pp. 463–472.
- [War92] W. Warren, *The large deformation elastic response of woven kevlar fabric*, Polymer Composites **13** (1992), 278–284.
- [WDG92] T. M. Wang, I. M. Daniel, and J. T. Gotro, *Thermoviscoelastic analysis of residual stresses and warpage in composite laminates*, Journal of Composite Materials **26** (1992), 883–899.
- [Wee91] F. V. D. Weeën, *Algorithms for draping fabric on doubly-curved surfaces*, International Journal For numerical Methods in Engineering **31** (1991), 1415–1426.
- [Wei86] J. Weil, *The synthesis of cloth objects*, Computer Graphics **20** (1986), 359–376.
- [WFB87] A. Witkin, K. Fleischer, and A. Barr, *Energy constraints on parametrized models*, Computer Graphics **21** (1987), 225–232.
- [WM90] J. Whitney and R. McCullough, *Micromechanical material modeling, vol 2 of delaware composites and design encyclopaedia*, Technomic, Lancaste PA, 1990.
- [WPA98] H. W. Wiersma, L. J. B. Peeters, and R. Akkerman, *Prediction of spring-forward in continuous-fibre/polymer l-shaped parts*, Composites : Part A **29A** (1998), 1333–1342.
- [WPP99] J. Wang, R. Paton, and R. Page, *The draping of woven fabric preforms and prepregs for production of polymer composite components*, Composites : Part A **30** (1999), 757–765.
- [WSC95] J. D. Whitcomb, K. Srirengan, and C. Chapman, *Evaluation of homogenization for global/local stress-analysis of textile composites*, Composite Structures **31** (1995), 137–49.
- [XCC05] P. Xue, J. Cao, and J. Chen, *Integrated micro/macro-mechanical model of woven fabric composites under large deformation*, Composite Structures **70** (2005), 69–80.
-

- [XPC03] P. Xue, X. Peng, and J. Cao, *A non-orthogonal constitutive model for characterizing woven composites*, *Composites : Part A* **34** (2003), 183–193.
- [YHL05] W. R. Yu, Ph. Harrison, and A. Long, *Finite element forming simulation for non-crimp fabrics using a non-orthogonal constitutive equation*, *Composites : Part A* **36** (2005), 1079–1093.
- [YPC⁺02] W. R. Yu, F. Pourboghraat, K. Chung, M. Zampaloni, and T. J. Kang, *Non-orthogonal constitutive equation for woven fabric reinforced thermoplastic composites*, *Composites : Part A* **33** (2002), 1095–1105.
- [YZM03] X. Yu, L. Zhang, and Z. Y. Mai, *Modelling and finite element treatment of intra-ply shearing of woven fabric*, *Journal of Materials Processing Technology* **138** (2003), 47–52.
- [YZP⁺03] W. R. Yu, M. Zampaloni, F. Pourboghraat, K. Chung, and T. J. Kang, *Sheet hydroforming of woven FRT composites : Non-orthogonal constitutive equation considering shear stiffness and undulation of woven structure*, *Composite Structures* **61** (2003), 353–362.
- [YZP⁺05] ———, *Analysis of flexible bending behavior of woven preform using non-orthogonal constitutive equation*, *Composites : Part A* **36** (2005), 839–850.
- [ZF00] Y. T. Zhang and Y. B. Fu, *A micromechanical model of woven fabric and its application to the analysis of buckling under uniaxial tension part 1 : The micromechanical model*, *International Journal of Engineering Science* **38** (2000), 1895–1906.
- [ZH90] Y. C. Zhang and J. Harding, *A numerical micromechanics analysis of the mechanical properties of a plain weave composite*, *Comput. Struct.* **36** (1990), 839–844.
- [Zhe94] Q. S. Zheng, *Theory of representations for tensor functions - a unified invariant approach to constitutive equations*, *Appl. Mech. Rev.* **47** (1994), 545–587.
- [ZHL04] Y. T. Zhang, Y. J. Hao, and C. Y. Li, *Incremental micro-mechanical model of plainwoven fabric*, *Acta Mechanica Solida Sinica (China)*, vol. 17, AMSS Press, June 2004, pp. 131–139.
- [ZY01] D. Zhang and M. M. F. Yuen, *Cloth simulation using multilevel meshes*, *Computers and Graphics* **25** (2001), 383–389.
-

Annexe A

Annexe .A Solutions analytiques en $\ln(\mathbf{U})$ et en $\ln(\mathbf{V})$

.A.1 Cisaillement simple

.A.1.1 Déformation en $\ln(\mathbf{U})$

Les indices $\{G\}$ et $\{Fibre\}$ définissent l'expression respectivement dans le système de coordonnées global et dans le système de coordonnées lié à une fibre.

Le tenseur des déformations est donné par

$$[\varepsilon]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{a}{2}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}} Ln \left(\frac{a}{2} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} \right) & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}} Ln \left(\frac{a}{2} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} \right) & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}} Ln \left(\frac{a}{2} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} \right) & \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}} Ln \left(\frac{a}{2} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (146)$$

Pour une direction des fibres, à un angle α_0 avec la première direction du système de coordonnées global

$$[\varepsilon]_{\{Fibre\}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_0 & \sin\alpha_0 & 0 \\ -\sin\alpha_0 & \cos\alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_0 & -\sin\alpha_0 & 0 \\ \sin\alpha_0 & \cos\alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La première composante de ce tenseur représente la déformation dans la direction des fibres

$$[\varepsilon]_{\{Fibre\}} = Ln \left(\frac{a}{2} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{4}}} \begin{bmatrix} -\cos 2\alpha_0 \frac{a}{2} + \sin 2\alpha_0 & \cos 2\alpha_0 + \frac{a}{2} \sin 2\alpha_0 & 0 \\ \cos 2\alpha_0 + \frac{a}{2} \sin 2\alpha_0 & \cos 2\alpha_0 \frac{a}{2} - \sin 2\alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (147)$$

.A.1.2 Déformation en $\ln(\mathbf{V})$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}} \text{Ln} \left(\frac{a}{2} + \sqrt{1+\frac{a^2}{4}} \right) & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}} \text{Ln} \left(\frac{a}{2} + \sqrt{1+\frac{a^2}{4}} \right) & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}} \text{Ln} \left(\frac{a}{2} + \sqrt{1+\frac{a^2}{4}} \right) & \frac{-\frac{a}{2}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}} \text{Ln} \left(\frac{a}{2} + \sqrt{1+\frac{a^2}{4}} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (148)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}} \text{Ln} \left(\frac{a}{2} + \sqrt{1+\frac{a^2}{4}} \right) \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (149)$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{\{Fibre\}} = \text{Ln} \left(\frac{a}{2} + \sqrt{1+\frac{a^2}{4}} \right) \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}} \begin{bmatrix} \cos 2\alpha_0 \frac{a}{2} + \sin 2\alpha_0 & \cos 2\alpha_0 - \frac{a}{2} \sin 2\alpha_0 & 0 \\ \cos 2\alpha_0 - \frac{a}{2} \sin 2\alpha_0 & -\cos 2\alpha_0 \frac{a}{2} - \sin 2\alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (150)$$

.A.2 Extension simple

Dans le cas d'extension simple, les tenseurs de Cauchy-Green Gauche et Droit sont les mêmes, ce qui fait que \mathbf{U} et \mathbf{V} possèdent les mêmes valeurs propres et vecteurs propres. Dans ce cas, les déformations $\ln \mathbf{U}$ et $\ln \mathbf{V}$ sont aussi les mêmes et égaux à $\ln(1+u)$ dans la direction d'extension et sa direction transverse, ce qui n'est pas le cas pour les autres directions.

.A.3 Cisaillement puis extension

- Gradient de la déformation :

$$[\mathbf{F}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 1+u & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (151)$$

- Cauchy-Green Droit

$$[\mathbf{C}]_{\{G\}} = [\mathbf{C}^T]_{\{G\}} [\mathbf{F}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} (1+u)^2 & a(1+u) & 0 \\ a(1+u) & 1+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (152)$$

- Cauchy-Green Gauche

$$[\mathbf{B}]_{\{G\}} = [\mathbf{F}]_{\{G\}} [\mathbf{F}^T]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} (1+u)^2 + a^2 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (153)$$

- Calcul des valeurs propres de \mathbf{C}

$$[\mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{I}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} (1+u)^2 - \lambda^2 & a(1+u) & 0 \\ a(1+u) & 1+a^2 - \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda^2 \end{bmatrix} \quad (154)$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} - \lambda^2 & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} - \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda^2 \end{bmatrix} \quad (155)$$

avec

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{u^2}{4} + u + \frac{a^2}{4} + 1} - \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{2} \quad (156)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{u^2}{4} + u + \frac{a^2}{4} + 1} + \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{2} \quad (157)$$

$$\lambda_3 = 1 \quad (158)$$

- Calcul des vecteurs propres de \mathbf{C}

$$(\mathbf{C} - \lambda_i^2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{N}_i = \underline{0} \quad (159)$$

$$[\mathbf{C} - \lambda_i^2 \mathbf{I}]_{\{G\}} [\mathbf{N}_i]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (160)$$

ce qui donne

$$[\mathbf{N}_1]_{\{G\}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_1^2 - (1+u)^2}{a(1+u)}\right)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1^2 - (1+u)^2}{a(1+u)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (161)$$

$$[\mathbf{N}_2]_{\{G\}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_2^2 - (1+u)^2}{a(1+u)}\right)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_2^2 - (1+u)^2}{a(1+u)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (162)$$

$$[\mathbf{N}_3]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (163)$$

Les valeurs Propres de B et C sont identiques :

- Calcul des vecteurs propres de \mathbf{B} :

$$[\mathbf{B} - \lambda_i^2 \mathbf{I}]_{\{G\}} [\mathbf{n}_i]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (164)$$

$$[\mathbf{n}_1]_{\{G\}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_1^2 - [(1+u)^2 + a^2]}{a}\right)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1^2 - [(1+u)^2 + a^2]}{a} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (165)$$

$$[\mathbf{n}_2]_{\{G\}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_2^2 - [(1+u)^2 + a^2]}{a}\right)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_2^2 - [(1+u)^2 + a^2]}{a} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (166)$$

$$[\mathbf{n}_3]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (167)$$

.A.3.1 Déformation en $\ln(\mathbf{U})$

L'indice $\{BP\}$ se réfère à un calcul en base propre.

$$[\mathbf{N}]_{\{G\}} = \left[[\mathbf{N}_1]_{\{G\}} \quad [\mathbf{N}_2]_{\{G\}} \quad [\mathbf{N}_3]_{\{G\}} \right] = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & 0 \\ N_{21} & N_{22} & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} \end{bmatrix} \quad (168)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{a(1+u)}{\sqrt{a^2(1+u)^2 + (\lambda_1^2 - (1+u)^2)^2}} & \frac{a(1+u)}{\sqrt{a^2(1+u)^2 + (\lambda_2^2 - (1+u)^2)^2}} & 0 \\ \frac{\lambda_1^2 - (1+u)^2}{\sqrt{a^2(1+u)^2 + (\lambda_1^2 - (1+u)^2)^2}} & \frac{\lambda_2^2 - (1+u)^2}{\sqrt{a^2(1+u)^2 + (\lambda_2^2 - (1+u)^2)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (169)$$

$$[\mathbf{U}]_{\{BP\}} = [\mathbf{N}]_{\{G\}}^T [\mathbf{U}]_{\{G\}} [\mathbf{N}]_{\{G\}} \quad (170)$$

ce qui nous permet de calculer \mathbf{U} en base globale

$$[\mathbf{U}]_{\{G\}} = [\mathbf{N}]_{\{G\}} [\mathbf{U}]_{\{BP\}} [\mathbf{N}]_{\{G\}}^T \quad (171)$$

avec

$$[\mathbf{U}]_{\{BP\}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (172)$$

et donc

$$[\mathbf{U}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} N_{11}^2 \lambda_1 + N_{12}^2 \lambda_2 & N_{21} N_{11} \lambda_1 + N_{22} N_{12} \lambda_2 & 0 \\ N_{21} N_{11} \lambda_1 + N_{12} N_{22} \lambda_2 & N_{21}^2 \lambda_1 + N_{22}^2 \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_{33}^2 \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (173)$$

ce qui donne finalement

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\varepsilon}]_{\{G\}} &= [\mathbf{N}]_{\{G\}} [Ln\mathbf{U}]_{\{BP\}} [\mathbf{N}]_{\{G\}}^T \quad (174) \\ &= \begin{bmatrix} N_{11}^2 Ln\lambda_1 + N_{12}^2 Ln\lambda_2 & N_{21} N_{11} Ln\lambda_1 + N_{12} N_{22} Ln\lambda_2 & 0 \\ N_{21} N_{11} Ln\lambda_1 + N_{12} N_{22} Ln\lambda_2 & N_{21}^2 Ln\lambda_1 + N_{22}^2 Ln\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_{33}^2 Ln\lambda_3 \end{bmatrix} \quad (175) \end{aligned}$$

.A.3.2 Déformation en $\ln(\mathbf{V})$

De la même manière, on calcule \mathbf{V}

$$[\mathbf{n}]_{\{G\}} = \left[[\mathbf{n}_1]_{\{G\}} \quad [\mathbf{n}_2]_{\{G\}} \quad [\mathbf{n}_3]_{\{G\}} \right] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & 0 \\ n_{21} & n_{22} & 0 \\ 0 & 0 & n_{33} \end{bmatrix} \quad (176)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_1^2 - B_{11}}{B_{12}}\right)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_2^2 - B_{11}}{B_{12}}\right)^2}} & 0 \\ \frac{\lambda_1^2 - B_{11}}{B_{12} \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_1^2 - B_{11}}{B_{12}}\right)^2}} & \frac{\lambda_2^2 - B_{11}}{B_{12} \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_2^2 - B_{11}}{B_{12}}\right)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (177)$$

$$[\mathbf{V}]_{\{BP\}} = [\mathbf{n}]_{\{G\}}^T [\mathbf{V}]_{\{G\}} [\mathbf{n}]_{\{G\}} \quad (178)$$

ce qui nous permet de calculer \mathbf{V} en base globale

$$[\mathbf{V}]_{\{G\}} = [\mathbf{n}]_{\{G\}} [\mathbf{V}]_{\{BP\}} [\mathbf{n}]_{\{G\}}^T \quad (179)$$

avec

$$[\mathbf{V}]_{\{BP\}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (180)$$

et donc

$$[\mathbf{V}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & 0 \\ n_{21} & n_{22} & 0 \\ 0 & 0 & n_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{21} & 0 \\ n_{12} & n_{22} & 0 \\ 0 & 0 & n_{33} \end{bmatrix} \quad (181)$$

$$= \begin{bmatrix} n_{11}^2 \lambda_1 + n_{12}^2 \lambda_2 & n_{21} n_{11} \lambda_1 + n_{12} n_{22} \lambda_2 & 0 \\ n_{21} n_{11} \lambda_1 + n_{22} n_{12} \lambda_2 & n_{21}^2 \lambda_1 + n_{22}^2 \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_{33}^2 \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (182)$$

ce qui donne finalement

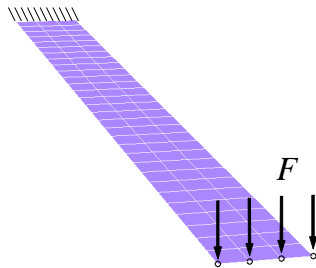
$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{\{G\}} = [\mathbf{n}]_{\{G\}} [Ln\mathbf{V}]_{\{BP\}} [\mathbf{n}]_{\{G\}}^T \quad (183)$$

$$= \begin{bmatrix} n_{11}^2 Ln\lambda_1 + n_{12}^2 Ln\lambda_2 & n_{21} n_{11} Ln\lambda_1 + n_{12} n_{22} Ln\lambda_2 & 0 \\ n_{21} n_{11} Ln\lambda_1 + n_{22} n_{12} Ln\lambda_2 & n_{21}^2 Ln\lambda_1 + n_{22}^2 Ln\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_{33}^2 Ln\lambda_3 \end{bmatrix} \quad (184)$$

Annexe B

Annexe .B Flexion d'une poutre console

Dans ce test, une poutre de longueur $L = 100$ mm et de largeur $l = 10$ mm est encastrée à une extrémité et est soumise à un effort F à son extrémité. Dans la première partie, on s'intéresse à l'influence de la viscosité sur la longueur de la flèche résultante, dans la deuxième, au facteur de flexion discuté § 4.3.3.3.



.B.1 Influence du facteur de flexion B_f

Dans cette partie l'effort est supposé constant et fixé à 3 N tandis que la rigidité de flexion varie par variation du facteur de flexion B_f (entre 1 et 0.00001). La figure (45) montre que ce facteur possède bien une influence sur la souplesse de la structure à travers les valeurs de flèches obtenues.

$$Ep = 5 \text{ mm}$$

$$E = 1 \text{ e}3 \text{ MPa}$$

$$v = 0.3$$

$$\rho = 1.6 \text{ e-}6 \text{ Kg/mm}^3$$

$$F = 3 \text{ N}$$

.B.2 Influence de la viscosité

Ce test est effectué avec les mêmes paramètres que le précédent pour une valeur de viscosité qui varie entre 1.10^{-25} et 1.10^{10} MPa.s. On constate bien que cette dernière ne

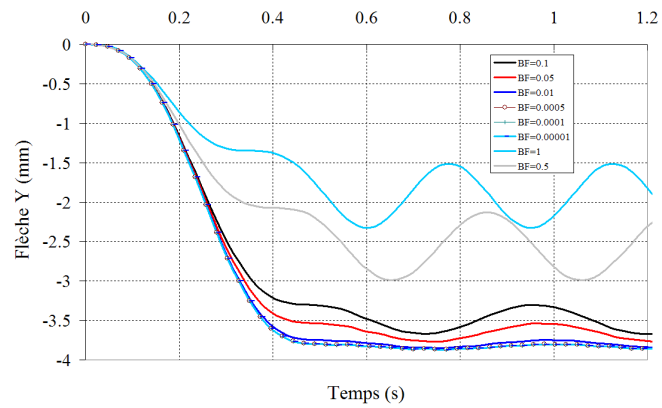


FIG. 45: Influence du facteur de flexion sur la flèche obtenue.

possède aucune influence sur la valeur de la flèche de la poutre (figure 46).

$$\begin{aligned}
 E_p &= 5 \text{ mm} \\
 E &= 1 \text{ e}3 \text{ MPa} \\
 \nu &= 0.3 \\
 \rho &= 1.6 \text{ e-}6 \text{ Kg/mm}^3 \\
 F &= 3 \text{ N} \\
 B_f &= 1
 \end{aligned}$$

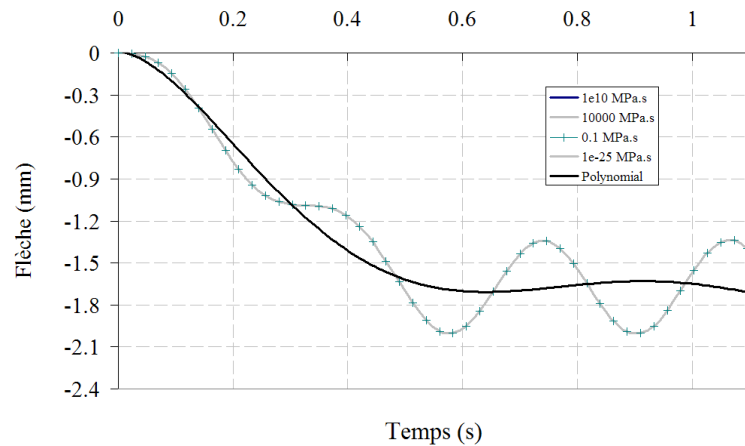


FIG. 46: Influence de la viscosité sur la flèche obtenue.

**MILIEUX FIBREUX TISSES : MODELISATION ET SIMULATION DE
LA MISE EN FORME DES CFRTP A GEOMETRIE NON DEVELOPPABLE**

Résumé :

Dans une perspective de réduction des coûts de la mise en forme des composites, il est essentiel de disposer d'un outil de simulation du procédé et donc d'une bonne connaissance des modèles de comportement susceptibles d'être utilisés. Plusieurs approches liées aux différentes échelles des milieux fibreux tissés sont analysées ; la constitution des lois de comportement de ces milieux dépend étroitement des propriétés directionnelles induites par chaque famille de fibres.

Une analyse expérimentale puis numérique de la mise en forme par emboutissage de pièces à géométrie non-développable a été menée. Elle porte sur le préformage et le thermoformage réalisés respectivement sur des renforts tissés non imprégnés et sur des composites à matrice thermoplastique. L'objectif est, dans le premier cas, d'observer les mécanismes de déformation en jeu et de mesurer quelques grandeurs caractéristiques, et dans le second cas, de se rapprocher des conditions réelles de mise en forme par thermoformage des CFRTP à l'échelle industrielle. Le solveur PAM FORM est utilisé pour la simulation du procédé.

Après avoir caractérisé la loi de comportement qui y est implémentée, nous avons effectué plusieurs tests à partir desquels une comparaison est proposée entre les résultats obtenus par simulation et ceux obtenus expérimentalement. La formulation utilisée ayant fait ses preuves dans le cas de la mise en forme de composites à renforts unidirectionnels, nous proposons quelques pistes pour construire une autre loi de comportement pour des composites à renforts tissés.

Mots clés : milieux fibreux tissés, mise en forme des composites minces, CFRTP, approche continue, modèles visqueux, simulation de la mise en forme.

**WOVEN FIBROUS MEDIUMS MODELLING :
MODELLING AND SIMULATION OF DOUBLE CURVATURE FIBER
REINFORCED THERMOPLASTIC COMPOSITES FORMING**

Abstract :

To tend to reduce costs of composites forming process, it is necessary to have at one's disposal a simulation tool and a good knowledge of the behavior models, likely to be used. Several approaches related to the various scales of the woven fibrous mediums are analyzed ; the construction of constitutive laws for these mediums depends closely on the directional properties induced by each family of fibers.

An experimental and a numerical analysis of doubly curved parts stamping are carried out : stamping of dry woven reinforcements and thermoforming of pre-impregnated thermoplastic composites are performed. The objective is, in the first case, to observe the deformation mechanisms concerned and to measure some characteristic sizes, and in the second case, to approach the real conditions of CFRTP thermoforming on an industrial level. Solver PAM FORM is used for the process simulation.

After characterizing the constitutive relation implemented, several tests are carried out and a comparison is proposed between results obtained by simulation and those obtained in experiments. The formulation used having proven reliability in the case of unidirectional reinforced composites, we propose some tracks to build a constitutive law for woven reinforced composites.

Keywords : woven fibrous mediums, sheet composite forming, CFRTP, continuum approach, viscous models, forming simulation.

**Laboratoire de Mécanique des Systèmes et des Procédés
UMR 8106 CNRS**

Polytech'Orléans
8 rue Léonard de Vinci
45072 ORLEANS Cedex 2

ENSAM Paris
151 Boulevard de l'Hôpital
75013 PARIS
