





# REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord remercier le CEMEF et PSA-Peugeot-Citroën pour m'avoir proposé ce sujet de recherche innovant et motivant, et pour m'avoir accueillis.

Je désire exprimer toute ma gratitude à mes directeurs de thèse : François BAY et Yvan CHASTEL. Merci à François pour avoir suivi avec attention mon travail, avoir su se montrer disponible et motivé et surtout pour sa bonne humeur et sa sympathie. Merci également à Yvan pour m'avoir fait confiance et avoir suivi mon travail avec pertinence bien que se fut avec un peu plus de distance. Ce fut un immense plaisir pour moi de travailler ces quelques années avec vous, années pendant lesquelles j'ai beaucoup appris, autant d'un point de vue scientifique que relationnel.

Je souhaite également exprimer ma reconnaissance à Julien FERAILLE, mon directeur industriel, pour m'avoir toujours fait confiance, m'avoir donné autant de son temps que possible et pour sa sympathie.

Je remercie très sincèrement Yves FAUTRELLE, Koen VAN REUSEL et Jean-Claude GELIN pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. C'est un honneur pour moi que vous ayez jugé mon travail.

Je tiens également à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à avancer dans mon travail. Je pense principalement à « l'équipe TABOO » et notamment à Lionel FREIRE, Simon BECKER, Gilbert FIORUCCI, Yoann DAHAN, Francis FOURNIER et Alain LE FLOC'H. Je pense également à Bernard TRIGER, Suzanne JACOMET et Michel-Yves PERRIN pour leur aide en micrographie, et enfin, à Marc BOUYSSOU et Erick BROTONS pour l'usinage des éprouvettes. Merci également à toutes les personnes de PSA à Belchamp et de EFD Induction à Grenoble qui m'ont aidé lors des campagnes d'essai.

Merci aux stagiaires que j'ai pu encadrer, Jérôme, Larbi et Christophe, pour le travail qu'ils ont réalisé et leur sympathie.

Merci à Marc, Olivier et Elie pour la bonne ambiance, la bonne humeur et la convivialité qui régnait au bureau DE 16 (the best).

Je souhaite témoigner mon amitié à tous les doctorants avec qui j'ai passé de formidables moments au laboratoire et en dehors. Je pense particulièrement à Alice qui est partie trop tôt, Fab pour ses blagues orientées, Greg avec qui j'ai partagé d'intenses moments d'aventure, Marco pour sa camaraderie et ses craquages devant son PC, Mathilde pour les moments partagés, Grand-Seb pour son flegme et Petit-Seb pour son humour.

J'envoie également une pensée à mes parents sans qui rien n'aurait été.

Et, une tendre pensée à Julie...



# TABLE DES MATIERES

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>CH 1 : Contexte industriel et scientifique</b>	<b>5</b>
<b>1.1. Contexte industriel</b>	<b>6</b>
1.1.1. Objectifs	6
1.1.2. La pièce étudiée	6
1.1.3. Etudes antérieures	8
<b>1.2. Les 4 phases du procédé industriel</b>	<b>9</b>
1.2.1. Le bridage	9
1.2.2. Le chauffage par induction	9
1.2.3. La trempe	9
1.2.4. Le débridage	10
<b>1.3. Un problème multiphysique couplé</b>	<b>11</b>
1.3.1. Composantes électromagnétiques	11
1.3.2. Composantes thermiques	15
1.3.3. Composantes métallurgiques	18
1.3.4. Composantes mécaniques – Les distorsions et contraintes résiduelles	24
<b>Bibliographie</b>	<b>26</b>
<b>CH 2 : Essais expérimentaux : démonstrateur industriel et cas semi-industriel</b>	<b>31</b>
<b>2.1. Essais sur démonstrateur industriel</b>	<b>32</b>
2.1.1. Objectifs	32
2.1.2. Moyens	33
2.1.3. Résultats des essais avec les paramètres de référence	36
2.1.4. Influence des paramètres de chauffage	38
2.1.5. Influence des paramètres de bridage	41
2.1.6. Conclusions sur les essais sur démonstrateur industriel	43
<b>2.2. Mise au point d'essais sur une configuration simplifiée</b>	<b>44</b>
2.2.1. Présentation du cas d'étude	44
2.2.2. Plan d'expériences	45
2.2.3. Résultats thermiques	46
2.2.4. Résultats métallurgiques	49
2.2.5. Résultats mécaniques	52
2.2.6. Conclusions	54
<b>Bibliographie</b>	<b>55</b>
<b>CH 3 : Simulation thermo-électromagnétique</b>	<b>59</b>
<b>3.1. Simulation électromagnétique</b>	<b>61</b>
3.1.1. Equations de Maxwell	61
3.1.2. Formulation potentiel vecteur / potentiel scalaire	62
3.1.3. Approximation harmonique	66
3.1.4. Calcul du courant source	66
3.1.5. Calcul du champ potentiel magnétique	69
3.1.6. Le ferromagnétisme	72

<b>3.2.</b>	<b>Simulation thermique</b>	<b>76</b>
3.2.1.	Equation de la chaleur	76
3.2.2.	Résolution numérique	76
3.2.3.	Problèmes liés aux traitements thermiques	79
<b>3.3.</b>	<b>Couplages entre électromagnétisme et thermique</b>	<b>81</b>
3.3.1.	Le couplage « ultra faible »	81
3.3.2.	Effets du champ magnétique sur la température	81
3.3.3.	Effets de la température sur la résolution électromagnétique	83
3.3.4.	Procédure du couplage thermo électromagnétique	85
<b>3.4.</b>	<b>Application au procédé semi-industriel</b>	<b>87</b>
3.4.1.	Paramètres électromagnétiques	87
3.4.2.	Paramètres thermophysiques	88
3.4.3.	Résultats de calcul	94
	<b>Bibliographie</b>	<b>96</b>
<b>CH 4 :</b>	<b>Modélisation du couplage thermomécanique</b>	<b>101</b>
<b>4.1.</b>	<b>Modélisation du problème mécanique</b>	<b>102</b>
4.1.1.	Rappels sur les tenseurs de contraintes et déformations	102
4.1.2.	Expression locale du problème mécanique	103
4.1.3.	Expression globale et discrétisation du problème mécanique	105
<b>4.2.</b>	<b>Loi rhéologique, comportement THEVP</b>	<b>110</b>
4.2.1.	Equation de Prandtl-Reuss, domaines élastique et inélastique	110
4.2.2.	Loi rhéologique (THEVP)	111
4.2.3.	Résolution numérique des équations de Prandtl-Reuss	114
<b>4.3.</b>	<b>Couplage thermomécanique</b>	<b>121</b>
<b>4.4.</b>	<b>Application au procédé semi-industriel</b>	<b>123</b>
4.4.1.	Mesure du coefficient linéique de dilatation	123
4.4.2.	Modules de Young et de Poisson	124
4.4.3.	Résultats de calcul	124
	<b>Bibliographie</b>	<b>126</b>
<b>CH 5 :</b>	<b>Modélisation couplée thermomécanique et métallurgie</b>	<b>131</b>
<b>5.1.</b>	<b>Cinétiques de transformation de phases en trempe</b>	<b>133</b>
5.1.1.	Modèle de cinétiques de transformation de phases	133
5.1.2.	Approche des cinétiques anisothermes par le formalisme d'Avrami	134
5.1.3.	Calcul de la transformation d'austénite en ferrite, perlite, bainite et martensite	137
<b>5.2.</b>	<b>Transformations de phases au cours du chauffage rapide</b>	<b>140</b>
5.2.1.	Processus de l'austénitisation	140
5.2.2.	Effets du chauffage rapide sur la trempe	143
5.2.3.	Modélisation des cinétiques d'austénitisation	144
<b>5.3.</b>	<b>Calcul thermomécanique multiphasée</b>	<b>146</b>
5.3.1.	Les déformations métallurgiques	146
5.3.2.	Loi rhéologique THEVP multiphasée	147
5.3.3.	Effets des contraintes sur les temps de transformation	150
5.3.4.	Couplage thermo métallurgique	151
5.3.5.	Diagramme des couplages thermomécaniques et métallurgiques	152
<b>5.4.</b>	<b>Conclusions et hypothèses sur les couplages multiphysiques</b>	<b>154</b>
<b>5.5.</b>	<b>Application au procédé semi-industriel</b>	<b>157</b>
5.5.1.	Etudes antérieures sur le HR45	157
5.5.2.	Paramètres de la loi THEVP	158
5.5.3.	Diagrammes TTA, TTT et paramètres des couplages métallurgiques	166
5.5.4.	Résultats de calcul	172
	<b>Bibliographie</b>	<b>173</b>

<b>CH 6 : Simulation numérique du procédé semi-industriel</b>	<b>181</b>
<b>6.1. Mise en données du code de calcul</b>	<b>182</b>
<b>6.2. Plan d'expérience numérique</b>	<b>182</b>
<b>6.3. Comparaison des résultats numériques à l'expérience</b>	<b>185</b>
6.3.1. Simulation du bridage de la tôle emboutie	185
6.3.2. Résultats en température	186
6.3.3. Etude métallurgique	189
6.3.4. Prédiction de la géométrie finale	190
<b>6.4. Etude des distorsions mécaniques au cours du procédé</b>	<b>193</b>
6.4.1. Elongation des pièces	193
6.4.2. Ouverture de la forme en « U »	194
6.4.3. Etats de contraintes et déformations	195
<b>6.5. Conclusion sur les résultats numériques</b>	<b>197</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>198</b>
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>199</b>
<b>Conclusions</b>	<b>199</b>
<b>Perspectives</b>	<b>201</b>
<b>Annexes</b>	<b>203</b>
<b>Annexe 1 : Le ferromagnétisme</b>	<b>204</b>
<b>Annexe 2 : Plan du support de bridage</b>	<b>206</b>
<b>Annexe 3 : Attaque chimique en vue de l'observation microscopique</b>	<b>207</b>
<b>Annexe 4 : Approximation des régimes quasi-permanents</b>	<b>208</b>
<b>Annexe 5 : Etude du solveur et préconditionneur du système linéaire</b>	<b>210</b>
<b>Bibliographie des annexes</b>	<b>220</b>





---

# INTRODUCTION

Le travail présenté dans ce rapport s'inscrit dans le cadre d'un projet de recherche mené par PSA Peugeot Citroën, sur le traitement thermique localisé de tôles minces. L'objectif est d'augmenter la résistance mécanique du matériau dans des zones ciblées des pièces de caisse en blanc grâce à l'induction magnétique, dans le but de renforcer la structure globale et ainsi augmenter les prestations de sécurité d'un véhicule tout en l'allégeant et en diminuant les coûts de matière et de production.

De cet objectif ambitieux résulte la nécessité de maîtriser un nouveau procédé et d'avoir un appui numérique. C'est pourquoi PSA Peugeot Citroën a motivé une collaboration sous la forme d'une convention CIFRE, avec le CEMEF, laboratoire spécialisé dans le domaine des procédés liés à la mise en forme. L'aspect expérimental du travail demande la mise au point d'essais à l'échelle industrielle ou semi-industrielle, et donc de s'entourer de spécialistes de la trempe par induction. Le travail présenté dans ce rapport se situe ainsi au cœur d'un réseau de partenaires et de sous-traitants présenté en Figure 1 :

- EFD Induction : concepteur de générateurs et de machines automatisées dédiées au chauffage par induction basé à Grenoble. Concepteur du démonstrateur industriel pour les essais expérimentaux.
- Inducto-Outillage : fabricant d'inducteurs de forme basé à Saint-Étienne. Fournisseur des inducteurs sur mesures pour les essais expérimentaux.
- PCI : concepteur mécanique basé à Rennes. Concepteur et fabricant d'un support pour le bridage pour les pièces du démonstrateur.
- CRITT METAL-2T de Nancy : caractérisations thermiques et métallurgiques du matériau.

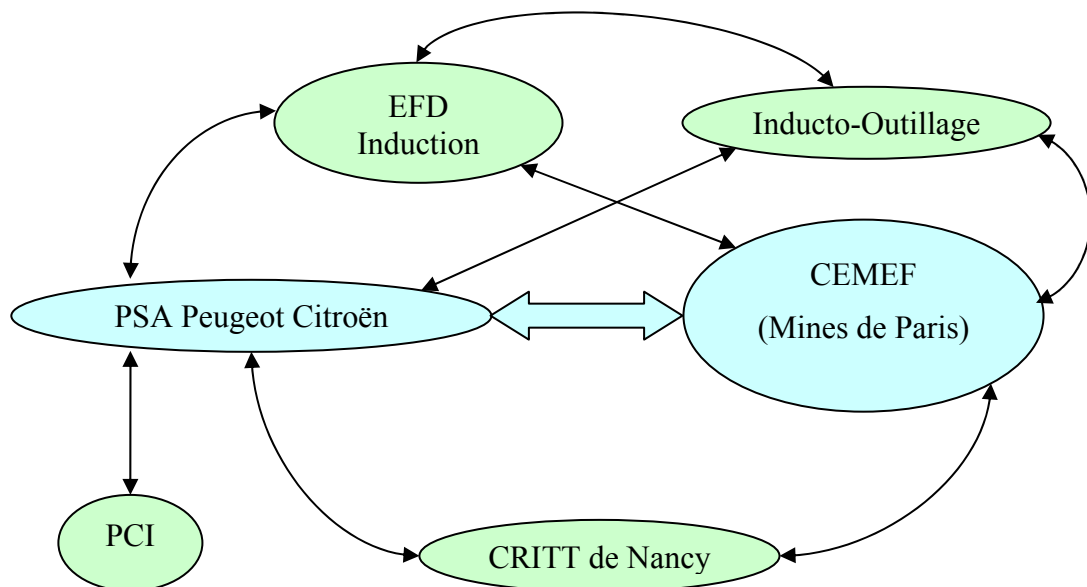


Figure 1 : Schéma représentant les interactions entre PSA et le Cemef, les deux partenaires de la thèse, et l'ensemble des sous-traitants.

---

Ce rapport est divisé en 6 chapitres qui exposent le travail réalisé dans le cadre de ce projet :

Le premier chapitre détaille dans une première partie, le contexte du projet, ses objectifs et son histoire. Une seconde partie détaille plus particulièrement le procédé industriel, ses différentes phases et ses différentes physiques. La troisième et dernière partie est une introduction à chacun des 4 domaines physiques rencontrés dans le procédé : électromagnétisme, thermique, métallurgie et mécanique.

Le chapitre suivant portera en premier lieu, sur la présentation du cas industriel, les objectifs expérimentaux, les moyens mis en œuvre et les campagnes d'essais qui ont été réalisées sur le démonstrateur industriel. Les premiers résultats et les premières conclusions sur le procédé qui sont donnés nous conduiront à la seconde partie de ce chapitre, qui traite d'un cas d'étude semi-industriel simplifié. Les essais réalisés sur ce cas ainsi que les résultats et les conclusions feront référence pour la suite de l'étude. Ce chapitre souligne la complexité du procédé et souligne l'intérêt que peut apporter la simulation numérique.

Les chapitres 3, 4 et 5 exposent les différents choix de modèles, les hypothèses et les développements qui ont été réalisés en vue de la simulation numérique du procédé. Le chapitre 3 traite de la simulation électromagnétique, de la simulation thermique et de leurs couplages. Les hypothèses sur les données électromagnétiques et la caractérisation des données thermophysiques sont présentées, et un exemple de calcul est donné.

Le chapitre 4 présente le modèle thermomécanique. Une première partie présente le modèle mécanique seul. Une seconde partie présente le modèle rhéologique retenu et sa méthode de résolution. Puis, une troisième partie traite des couplages entre le modèle mécanique et le modèle thermique. Enfin, une dernière partie propose des hypothèses sur le comportement élastique du matériau et présente la caractérisation du comportement thermo-élastique. Un exemple de calcul thermomécanique couplé est donné.

Le chapitre 5, dernier chapitre exposant le modèle numérique, porte sur les couplages avec la métallurgie. Il se divise en quatre parties : les deux premières présentent le modèle métallurgique (trempe et austénitisation), la troisième présente les couplages en thermomécanique multiphasée, et la dernière discute les paramètres d'entrée du code, qu'ils concernent le procédé ou le matériau, et présente des résultats de calcul.

Une étude plus approfondie et une discussion des résultats numériques sur le procédé semi-industriel se trouvent dans le chapitre 6. Ce dernier chapitre est scindé en 2 parties. L'une fait une comparaison avec les relevés expérimentaux et analyse les différences. L'autre étudie ce que nous apportent les résultats numériques, en plus de ce que l'expérience peut nous apprendre.

# CHAPITRE 1



---

# Chapitre 1

## CONTEXTE INDUSTRIEL ET SCIENTIFIQUE

<b>1.1.Contexte industriel</b>	<b>6</b>
1.1.1. Objectifs	6
1.1.2. La pièce étudiée	6
1.1.3. Etudes antérieures	8
<b>1.2.Les 4 phases du procédé industriel</b>	<b>9</b>
1.2.1. Le bridage	9
1.2.2. Le chauffage par induction	9
1.2.3. La trempe	9
1.2.4. Le débridage	10
<b>1.3.Un problème multiphysique couplé</b>	<b>11</b>
1.3.1. Composantes électromagnétiques	11
1.3.1.1. Le chauffage par induction	11
1.3.1.2. Spécificités techniques	11
1.3.2. Composantes thermiques	15
1.3.2.1. Transfert de chaleur par conduction	15
1.3.2.2. Transfert de chaleur par convection	16
1.3.2.3. Transfert de chaleur par radiation	16
1.3.2.4. La trempe dans les liquides	16
1.3.3. Composantes métallurgiques	18
1.3.3.1. Contexte	18
1.3.3.2. Rappels de base en métallurgie	18
1.3.3.3. Les diagrammes de changements de phase	22
1.3.4. Composantes mécaniques – Les distorsions et contraintes résiduelles	24
1.3.4.1. Notion de contraintes résiduelles	24
1.3.4.2. Conséquences des contraintes résiduelles	25
<b>Bibliographie</b>	<b>26</b>

## 1.1. CONTEXTE INDUSTRIEL

### 1.1.1. Objectifs

L'industrie automobile est confrontée à de constants objectifs d'amélioration tant au niveau de la protection des passagers que pour la diminution de la consommation. On voit depuis plusieurs années augmenter le poids des véhicules du fait de la présence d'airbags, de renforts anti-intrusion pour avoir de meilleures prestations en cas de choc, et d'une amélioration générale du confort des utilisateurs. Tout ceci nuit à la diminution de la consommation des véhicules et par conséquent à l'écologie. Il est donc important de trouver d'autres matériaux ou d'autres technologies permettant de diminuer la quantité de matière de certaines pièces voire même de supprimer certains renforts.

PSA Peugeot Citroën s'attelle à cette tâche en développant de nouveaux procédés de fabrication permettant d'augmenter les propriétés mécaniques de certaines parties de caisse en blanc (pièces embouties) sans ajouter de matière ni même modifier le type d'acier utilisé. Dans cette optique, le choix d'un traitement thermique local permet un bon compromis entre bonnes propriétés mécanique finales et ductilité initiale acceptable du matériau avant traitement thermique.

Le chauffage par induction est une technologie parfaitement appropriée au traitement thermique local de l'acier grâce à sa faculté de maîtriser précisément les zones affectées thermiquement (ZAT).

### 1.1.2. La pièce étudiée

Nous nous intéresserons dans cette étude du procédé à une pièce choisie par PSA Peugeot Citroën mettant en évidence le gain que le traitement thermique apporte en terme de masse et de coût de revient du procédé. Il s'agit d'un pied milieu type A7, c'est-à-dire le montant que l'on retrouve entre les portières avant et arrière d'une Peugeot 207 cinq portes (Figure 2).

Cette pièce emboutie possède une géométrie tridimensionnelle complexe de par sa forme que nous nommerons « en U », son galbe tout le long de la zone traitée thermiquement et ses perçages, notamment les trous de fixation de la ceinture de sécurité (plan de la pièce Figure 3). Le système de coordonnées donné en Figure 3 est le référentiel véhicule. Nous utiliserons tout au long de ce mémoire l'axe Z pour l'axe vertical par rapport au véhicule, l'axe X pour l'axe allant de l'avant à l'arrière du véhicule et enfin l'axe Y de façon à compléter le référentiel orthonormal.

Le pied milieu est obtenu à partir d'une tôle d'acier de 2mm d'épaisseur en acier référencé HR45 ferritique (acier hypoeutectoïde au manganèse de type C15). Cette tôle est dans un premier temps emboutie puis dans un second temps, détournée au laser. La structure obtenue suit un cahier des charges strict d'un point de vue des dispersions géométriques afin de pouvoir être fixée en chaîne de montage automatique, par point de soudure, avec les autres éléments de la caisse en blanc. Elle comporte en fin de mise en forme un champ de contrainte interne qui devra être pris en compte pour modéliser précisément les distorsions lors du traitement thermique.



Figure 2 : Pied milieu d'une Peugeot 207

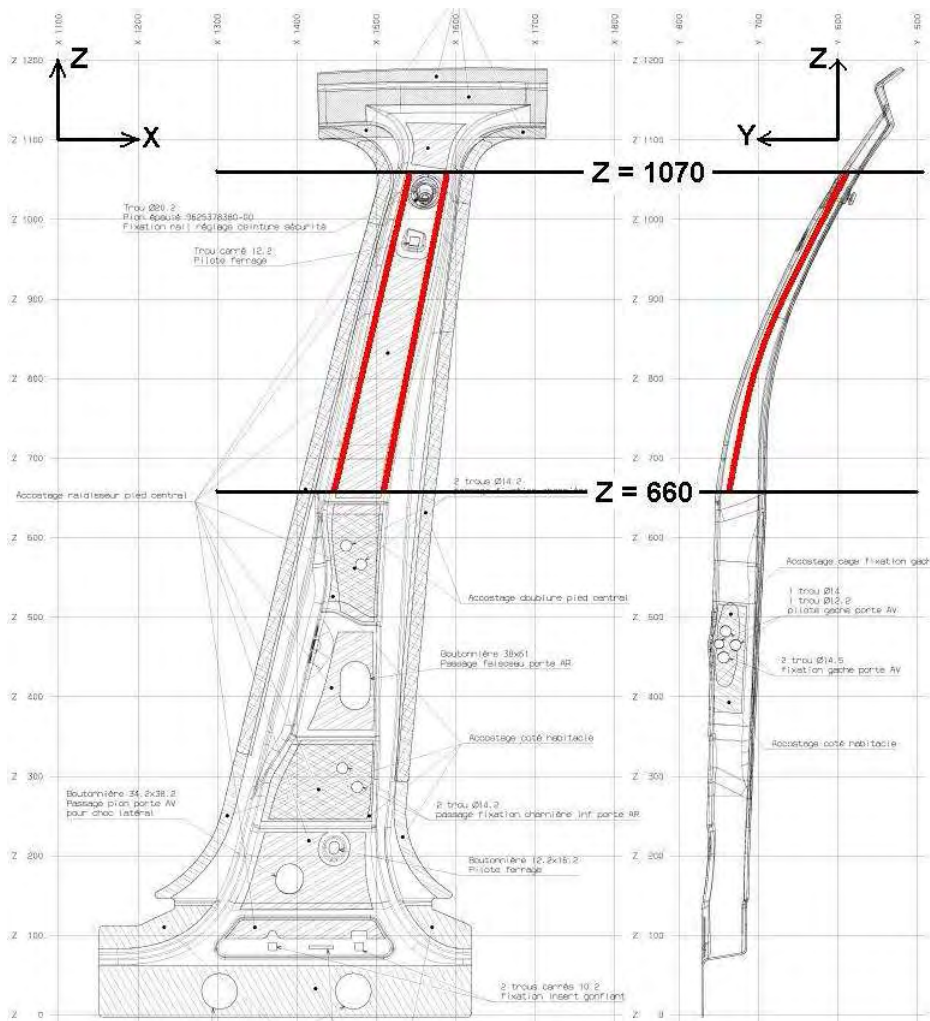


Figure 3 : Plan d'un pied milieu type A7 et zone de traitement thermique

### 1.1.3. Etudes antérieures

Le procédé de traitement thermique local de tôles embouties est à l'étude depuis plusieurs années chez PSA Peugeot Citroën. Tout d'abord, une étude technico-économique s'est portée sur les pieds milieux car cette pièce est actuellement soit doublée d'un renfort, soit raboutée (une tôle est soudée bout à bout à la première avant emboutissage) d'un acier à haute résistance mécanique. La trempe locale permet donc de réduire le poids de la pièce en supprimant la présence d'acier (plus dense), et de réduire les coûts de productions dues soit à l'emboutissage et soudage d'un renfort, soit au raboutage et emboutissage d'un flanc avec soudure. En 2000, une estimation des gains a été faite sur un renfort de pied central de Peugeot 306 : 750g par pièce et coût de production diminué de plus de 40% [GASPAR-2000].

Suite à cette étude économique encourageante, des études de risques ont été effectuées sur différents points comme la tenue de la peinture sur l'acier, les risques d'oxydation, la soudabilité, etc.... Finalement, un risque a été levé sur la géométrie de la pièce. En effet, il a été remarqué empiriquement une forte dispersion des distorsions lors du traitement thermique. C'est alors que l'idée de brider la pièce lors du traitement thermique fut proposée et testée. Ces essais ont permis de corriger les déformations après trempe de façon très significative par rapport aux essais sans précontraintes [ZANETTI-2001].

En complément de ces essais expérimentaux, une étude de la prestation en chocs du pied milieu de 306 sans renfort a été menée. La Figure 4 présente deux pièces, une traitée et l'autre non traitée, suite au même test anti-intrusion. Le but de ce test est de visualiser la propriété de la pièce à protéger la tête des passagers lors d'un choc latéral.

Le procédé de traitement thermique par induction de tôles embouties étant un procédé complexe (couplant phénomènes thermiques, mécaniques, métallurgiques et électromagnétiques), les études empiriques ne sont pas aisées. C'est pourquoi nous nous intéressons aujourd'hui à une meilleure compréhension des phénomènes à l'aide de la simulation numérique.



**Figure 4 : Test anti-intrusion en cas de choc latéral sur un pied milieu de 306 avant et après traitement thermique. La pièce traitée résiste au test alors que l'autre pièce présente un risque pour le passager**



## 1.2. LES 4 PHASES DU PROCEDE INDUSTRIEL

Le procédé de traitement thermique a pour but de s'insérer dans la chaîne de fabrication juste après l'emboutissage. Il peut être décomposé en quatre étapes : un bridage de la pièce sur un support, un chauffage local par induction électromagnétique, une trempe par immersion en bain d'eau et un débridage de la pièce.

### 1.2.1. Le bridage

La tôle emboutie est placée sur un support doté d'outils de bridage permettant d'imposer un déplacement à des points définis de la pièce. Cette étape a pour but de créer un champ de contraintes internes dans la pièce superposé au champ de contraintes résiduelles dû à l'emboutissage. Ces contraintes du domaine élastique ou élasto-plastique pourront être indirectement sources d'un champ de déformations plastiques en fin de traitement thermique.

Une bonne maîtrise du bridage nous permettra d'obtenir après traitement, un champs de déformation plastique total (contraintes résiduelles d'emboutissage + bridage + gradients thermiques et métallurgiques + plasticité de transformation etc...) n'impliquant aucun changement de la géométrie globale de la pièce. Cette étape, associée à une bonne estimation des distorsions lors du traitement thermique, est capitale dans la maîtrise de la géométrie finale de la pièce traitée, et donc dans la possibilité de montage de la pièce sur l'ensemble de la caisse en blanc.

### 1.2.2. Le chauffage par induction

La pièce et son support de bridage se placent sous un inducteur de forme. La conception de l'inducteur et son entrefer avec la pièce définiront précisément les zones chauffées et par conséquent les zones trempées à l'étape suivante (Zone Affectée Thermiquement : ZAT).

Pour une température maximale à atteindre (donc une énergie donnée fournie au système), le couple entre la puissance fournie par le générateur et le temps de chauffage va déterminer les effets respectifs de la puissance dissipée par effet Joule par rapport à l'effet de la diffusion thermique. Dans le domaine des couples puissance - temps de chauffage acceptables par l'installation, il vaut mieux privilégier les temps de chauffage les plus courts pour une meilleure précision de la ZAT.

### 1.2.3. La trempe

Simultanément à l'arrêt du générateur, la pièce bridée sur son support est plongée dans un bain d'eau à température ambiante. Le fort coefficient d'échange thermique entre l'eau et l'acier associé à la faible épaisseur des tôles de caisse en blanc (jusqu'à 2mm) provoque une chute brutale de la température du matériau dans l'ensemble de la pièce.

L'austénite, instable en dessous de la température  $A_{C1}$ , va se transformer en une phase thermo-dynamiquement hors équilibre. La phase résultante de la trempe dépendra des propriétés métallurgiques du matériau et de la vitesse de refroidissement. On obtiendra, pour des vitesses de refroidissement croissantes, de la ferrite (transformation proche de l'équilibre), de la perlite (ferrite +  $Fe_3C$ ), une bainite, de la martensite, ou un mélange de plusieurs de ces phases (voir paragraphe 1.3.3 de ce chapitre).

L'apparition d'une nouvelle phase, telle que l'austénite au chauffage, impliquera un changement de densité volumique dans la ZAT. De plus, au refroidissement, une déformation plastique spécifique aux changements de phase sous contraintes (même très inférieures au

seuil de plasticité) appelée plasticité de transformation peut intervenir. Ces phénomènes généreront un champ de contrainte qui doit être équilibré par les outils de bridage.

### 1.2.4. Le débridage

Une fois la pièce traitée descendue à la température du fluide de trempe, l'ensemble pièce plus support de bridage sont sortis du bain et la pièce est relâchée. Lors de cette opération le champ de contraintes internes s'équilibre, les contraintes résiduelles se développent en générant des distorsions (voir paragraphe 1.3.4) et la géométrie de la pièce peut en être fortement affectée.

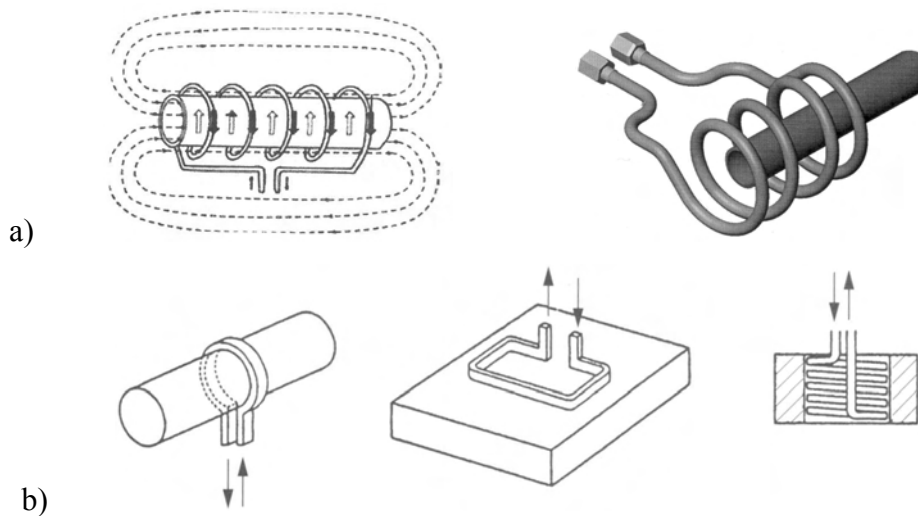


Figure 5 : Systèmes de chauffage par induction : (a) chauffage dans la masse et (b) chauffage localisé

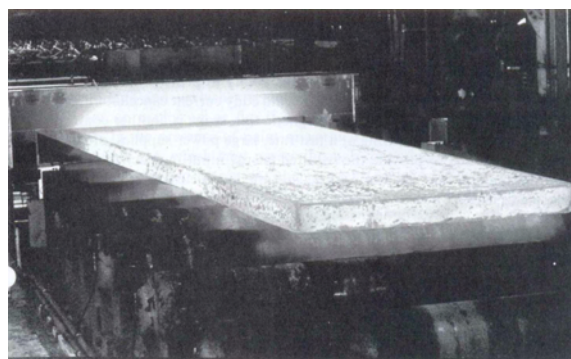


Figure 6 : Tôle d'acier en sortie de four à induction en fin de procédé de laminage

## 1.3. UN PROBLEME MULTIPHYSIQUE COUPLE

### 1.3.1. Composantes électromagnétiques

#### 1.3.1.1. Le chauffage par induction

L'industrie cherche toujours à tirer les meilleurs avantages des traitements thermiques. C'est pourquoi on s'intéresse aujourd'hui de plus en plus au traitement thermique obtenu entre autres avec le chauffage par induction [BARRERE-1992 ; NICLAS-1998 ; PASCAL-2003].

Le chauffage par induction est très utilisé dans les procédés industriels de traitement thermique des métaux comme la trempe, le durcissement en surface, le brasage, la chauffe avant forgeage, les applications de revêtements, ou la fusion en creusets et auto-creusets [RUDNEV-2003]. Les principaux avantages des procédés de chauffage par induction sont une augmentation de température très rapide (forte productivité), un chauffage local et précis (traitement superficiel ou en masse), une très faible inertie du système (économie d'énergie), la facilité de contrôle et d'automatisation, la propreté inhérente à son mode de fonctionnement, et une très bonne reproductibilité.

Les premiers systèmes de chauffage par induction sont apparus au cours des années 1920 avec la mise en place de convertisseurs pouvant fournir la puissance électrique nécessaire. A la fin des années 1960, des équipements de chauffage rapide ont été développés. Aujourd'hui, avec l'évolution de la technologie, les systèmes électromagnétiques de chauffage par induction sont devenus très complexes et très courants. Dès les années 1980, le recours aux techniques de simulations numériques a permis de substituer le calcul à une large part des essais.

Les installations de chauffage par induction comprennent généralement :

- ❖ un ou plusieurs inducteurs de chauffage,
- ❖ une source à basse ou moyenne fréquence associant un convertisseur de fréquence (générateur ou onduleur) à un coffret d'adaptation et de compensation par batterie de condensateur (circuit RLC),
- ❖ un système de refroidissement par eau de la source de puissance, du coffret d'adaptation et de l'inducteur,
- ❖ un système de manutention des pièces à chauffer,
- ❖ éventuellement un ensemble de commande-contrôle de l'installation.

Suivant le type d'application recherchée (trempe dans la masse, superficielle ou localisée), différents types d'inducteurs seront choisis. Par exemple, les bobines solénoïdes inductrices (Figure 5.a) seront préférées pour des trempes dans la masse alors que les inducteurs de forme (Figure 5.b) seront mieux adaptés aux trempes superficielles ou localisées. D'autres types d'inducteurs existent, comme les bobinages rectangulaires très utilisés lors des procédés de laminage (Figure 6).

#### 1.3.1.2. Spécificités techniques

Le chauffage par induction est une application directe de deux lois fondamentales de la physique : la loi de Lenz et l'effet Joule. En alimentant un inducteur en courant alternatif à une fréquence donnée (souvent entre 50Hz et quelques centaines de kHz), un champ électromagnétique est créé au voisinage de cet inducteur. Quand un corps conducteur est plongé dans ces champs, il est traversé par un flux magnétique dont les variations induisent,

d'après la loi de Lenz, une force électromotrice donnant naissance à des courants de Foucault [GIÉ-1985]. Ces courants induits produisent de la chaleur par effet Joule, et le corps s'échauffe. Ce mécanisme est l'unique source de production de chaleur pour les matériaux non magnétiques ou paramagnétiques (ex. : aluminium, cuivre, aciers de température supérieure à leur température de Curie). En ce qui concerne les matériaux ferromagnétiques, de la chaleur est également produite par présence d'un effet d'hystérésis dans la courbe d'aimantation (induction magnétique  $B$  en fonction du champ magnétique  $H$ ). Ce second mécanisme est généralement d'effet beaucoup plus faible que le premier ; le rapport reste difficile à quantifier car il s'avère très dépendant du matériau et des paramètres.

❖ Ferromagnétisme et perméabilité magnétique relative :

Etant donné qu'une charge électrique en mouvement engendre un champ magnétique autour d'elle-même, les électrons qui tournent sur eux-mêmes (spin) et autour du noyau (orbitale) forment de petits dipôles magnétiques [DORLOT-1986]. Ces dipôles réagissent à l'application d'un champ magnétique extérieur  $H$  et cette réaction du matériau est caractérisée par l'induction magnétique  $B$ . En effet, les moments magnétiques des atomes tendent à s'aligner avec le champ extérieur et à le renforcer de leur propre champ.  $B$  représente alors l'intensité du champ magnétique extérieur  $H$ , à l'intérieur du matériau.

Lorsqu'une substance (gazeuse, liquide ou solide) est placée dans un champ magnétique, celui-ci garde la même valeur qu'en absence de la substance. Toutefois, l'induction magnétique dans ce matériau devient proportionnelle à la somme du champ extérieur et du moment magnétique induit dans la substance :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad \text{avec } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Wb} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \quad (1)$$

$\mu_0$  est une constante appelée perméabilité magnétique du vide et le vecteur  $M$  est appelé magnétisation du matériau. Il représente le moment magnétique dipolaire résultant (par unité de volume) aligné avec le champ  $H$ . Pour de nombreuses substances,  $M$  est relié à  $H$  par la susceptibilité magnétique  $\chi$ .

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (2)$$

On peut alors écrire à partir des relations (1) et (2), l'expression d'une perméabilité magnétique  $\mu$  propre au matériau mais on préfère généralement caractériser le comportement magnétique d'un matériau par sa perméabilité relative  $\mu_r$ , qui exprime son comportement par rapport au vide :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{avec } \mu = \mu_0 (1 + \chi) = \mu_0 \mu_r \quad (3)$$

Dans une modélisation macroscopique du comportement magnétique, on représente alors la réaction du matériau (mesurée par  $B$ ) à l'application d'un champ magnétique  $H$  de façon proportionnelle à la réaction du vide au même champ  $H$ .

$$\text{Dans le vide : } \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H} \quad \text{avec } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Wb} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \quad (4)$$

$$\text{Dans le matériau : } \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{avec } \mu = \mu_0 \mu_r \quad (5)$$

Les matériaux ferromagnétiques (Fe, Co, Ni, Gd, Dy, Ho, Tm, etc.) sont ceux pour lesquels  $\mu_r$  est très supérieure à 1. La Figure 7 présente la courbe d'aimantation de différents aciers ferromagnétiques. On peut y constater que l'induction magnétique  $B$  évolue de façon non linéaire par rapport au champ magnétique  $H$ . Ceci est dû à l'alignement de la magnétisation du matériau avec le champ magnétique. Sous l'effet d'une agitation thermique suffisamment importante (due à une augmentation de température), les moments magnétiques se désorganisent et la perméabilité magnétique relative chute à 1 : le matériau devient paramagnétique. Ce phénomène apparaît avant une température donnée appelée température de Curie (ou point de Curie) représentée en Figure 8. Pour le lecteur intéressé, de plus amples détails sont donnés en annexe 1 sur les aspects physiques du ferromagnétisme.

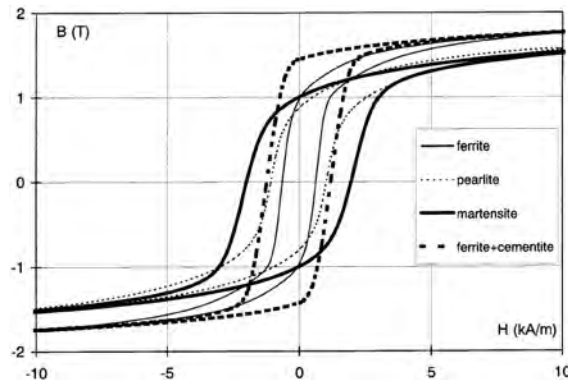


Figure 7 : Boucle d'hystérésis de la courbe d'aimantation pour un acier ferritique (XC10), perlitique (XC80), martensitique (XC55), et martensitique recuit (XC55) [SAQUET-1999]

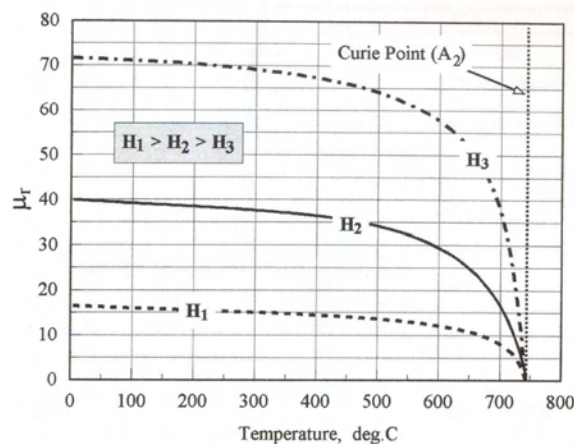


Figure 8 : Effet de la température sur la perméabilité magnétique relative d'un acier au carbone [RUDNEV-2003]

❖ Effet de peau :

Lorsqu'un courant alternatif traverse un conducteur, la distribution du courant sur la section traversée n'est pas uniforme. La valeur maximum de la densité de courant est toujours située à la surface du conducteur et décroît à l'intérieur du conducteur. Ce phénomène de non-uniformité de la distribution de courant au travers d'une section du conducteur est appelé effet de peau. On voit ici toute l'originalité du chauffage par induction puisque par ces effets, une grande partie de la puissance induite est concentrée sur une fine épaisseur en surface de la pièce (Figure 9). Une grandeur caractéristique appelée 'épaisseur de peau' ou 'profondeur de pénétration' et notée  $\delta$  permet de quantifier l'importance de ce phénomène qui dépend des propriétés électromagnétiques du matériau et de la fréquence de la source de courant :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot f \cdot \sigma \cdot \mu}} \quad (6)$$

Il est très important dans un système de chauffage par induction, qu'il soit conçu à des fins de trempe superficielle ou de chauffage dans la masse, de maîtriser ce paramètre, principalement en modulant la fréquence du courant source par une batterie de condensateurs adaptés. Certains systèmes vont encore plus loin dans la maîtrise de ce paramètre, en superposant deux épaisseurs de peau différentes par l'application d'un courant multi-fréquence à l'inducteur.

❖ Effet de bord et de bout :

L'hétérogénéité en température dans une pièce chauffée par induction est due d'une part à l'effet de peau pour les gradients entre surface et cœur, et d'autre part aux effets de bord et de bout pour les gradients en surface.

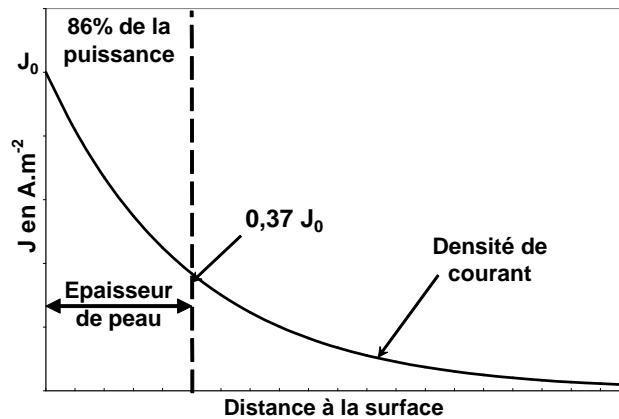


Figure 9 : Représentation de la profondeur de peau

Si on considère une pièce cylindrique plongée dans un champ homogène (comme à l'intérieur d'un inducteur solénoïde long) la présence de la pièce conductrice induit une distorsion du champ électromagnétique (Figure 10). Ces distorsions de champ, entraînant des variations de distributions de densité de courant induit et de puissances, sont qualifiées d'effet de bord.

Dans la réalité des cas industriels, les inducteurs solénoïdes peuvent rarement être considérés comme infiniment longs. Dans ces conditions, on observe à chaque extrémité un écartement des lignes de champ : l'effet de bout.

Les effets de bout et de bord étant très similaires et ils influent souvent l'un sur l'autre ; on distingue rarement l'un de l'autre. Ils sont essentiellement gouvernés par quatre variables : l'effet de peau, la profondeur jusqu'à laquelle va la pièce dans l'inducteur (si elle ne traverse pas totalement l'inducteur), le rapport du diamètre intérieur de l'inducteur et du diamètre de la pièce, et le facteur d'espacement des spires. Ce dernier facteur représente le rapport entre l'espace séparant deux spires et la largeur d'une spire. Dans le cas d'un inducteur monospire, le facteur est égal à 1. Une combinaison de ces quatre facteurs incorrecte peut entraîner un sur-chauffage ou un sous-chauffage de l'extrémité de la pièce. Il est donc nécessaire de bien les maîtriser afin d'observer un champ de température homogène, ou dans le cas de chauffage localisés, de contrôler les gradients de température en surface.

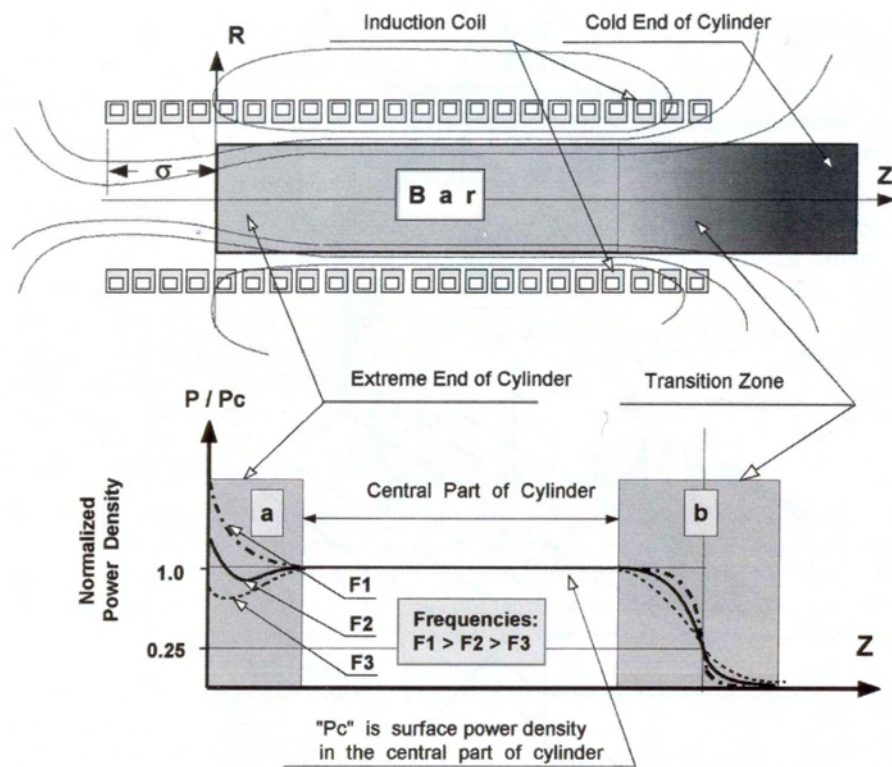


Figure 10 : Lignes de champ et distribution de puissance le long d'un cylindre plongé dans un champ magnétique créé par un inducteur solénoïde [RUDNEV-2003]

### 1.3.2. Composantes thermiques

La thermique est une science bien connue dans l'étude des milieux continus mais peut devenir un véritable problème lors d'interactions entre plusieurs milieux. Elle est gouvernée par les premier et second principes de la thermodynamique qui se traduisent sous la forme de l'équation de la chaleur :

$$\rho C \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \vec{q} + \dot{W} \quad (7)$$

T est la température,  $\rho$  la densité volumique du milieu, C sa chaleur spécifique, W le travail mécanique (ou tout autre terme de couplage source de chaleur interne) et q le flux de chaleur. Le flux de chaleur a pour origine un transfert thermique qui peut se faire sous 3 modes, ou toute combinaison de ces 3 modes : conduction, convection et radiation.

#### 1.3.2.1. Transfert de chaleur par conduction

Il s'agit d'un échange d'énergie spontané par contact d'une région de température élevée vers une région de température plus basse. Dans un gaz ou un liquide, l'énergie se propage par contact direct entre molécules sans déplacement notable de molécules. Dans un solide, la vibration des atomes autour de leur position (agitation thermique) se transmet de proche en proche. Dans le cas des matériaux cristallins, les vibrations du réseau interagissent avec les électrons libres, ce qui explique que la conductivité thermique et électrique soient liées (nous présentons la loi de Wiedemann-Franz dans le chapitre 3, paragraphe 3.3.3.2).

Ce mode de transfert obéit à la loi de Fourier qui lie le flux de chaleur au gradient thermique dans la matière, via un paramètre matériau : la conductivité thermique k.

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T \quad (8)$$

### 1.3.2.2. Transfert de chaleur par convection

Ce mode de transfert apparaît en présence d'un fluide en mouvement, ce mouvement pouvant être naturel ou forcé. C'est le mode de transfert de chaleur le plus important dans les échanges d'énergie d'une pièce trempée vers l'extérieur. Nous traiterons les problèmes liés à la trempe dans un liquide au paragraphe 1.3.2.4. Le flux de chaleur sortant de la pièce par convection à travers sa surface suit la loi :

$$\phi_{\text{sortant}} = -\vec{q} \cdot \vec{n} = h(T - T_{\text{ext}}) \quad (9)$$

Le coefficient d'échange thermique  $h$  dépend du couple matériau/fluide mais aussi de la vitesse relative du fluide par rapport au matériau au niveau de leur interface. C'est pourquoi on distingue la convection naturelle de la convection forcée :

1. la convection naturelle est due au mouvement créé par la différence de densité volumique entre le fluide chaud au contact de la pièce et le fluide moins chaud autour. La convection naturelle apparaît spontanément lorsque la poussée d'Archimède dépasse une limite dépendante du matériau (nombre de Rayleigh).
2. la convection forcée est due à un mouvement imposé par un système mécanique extérieur. Le coefficient d'échange thermique est alors beaucoup plus élevé.

### 1.3.2.3. Transfert de chaleur par radiation

Le transfert de chaleur par radiation ou rayonnement est un transfert d'énergie sans contact. En effet, il existe aussi dans le vide comme, par exemple, le rayonnement solaire. Le transfert d'énergie s'effectue alors par voie électromagnétique à très hautes fréquences (env.  $4 \cdot 10^{14}$  Hz pour les infrarouges proches). Le flux de chaleur sortant d'un milieu à travers sa surface suit alors la loi de Stefan-Boltzmann :

$$\phi_{\text{sortant}} = -\vec{q} \cdot \vec{n} = \epsilon \sigma_{SB} (T^4 - T_{\text{ext}}^4) \quad (10)$$

$\sigma_{SB}$  est la constante de Stefan-Boltzmann et  $\epsilon$  l'émissivité du matériau rayonnant.  $\epsilon = 1$  pour les corps noirs (corps absorbant toutes les fréquences électromagnétiques) et diminue vers 0 avec la rugosité de la surface. Pour les aciers, on les considère généralement comme des corps noirs (toutes les fréquences de rayonnement contribuent à l'équilibre thermique) d'émissivité égale à 0.88.

### 1.3.2.4. La trempe dans les liquides

Nous avons vu que le mode de transfert de chaleur prédominant dans les échanges avec l'extérieur lors de la trempe d'un acier est la convection. Selon les procédés, on peut effectuer des trempes à l'air, à l'eau, à l'huile, avec ou sans agitation (convection forcée). Dans les cas sans agitation principalement, l'étude des échanges thermiques devient vite problématique. En effet, J.G. Leidenfrost [LEIDENFROST-1966] montre que la durée de vie d'une goutte d'eau sur une plaque chaude (au dessus de la température d'ébullition de l'eau) dépend de la température de la plaque. Ce phénomène est du à l'effet Leidenfrost qui met la goutte en « lévitation » au dessus de la plaque par génération d'une couche de vapeur entre la plaque et l'eau. C'est cette couche de vapeur, agissant comme un isolant thermique entre la plaque chaude et l'eau froide, qui augmente la durée de vie de la goutte d'eau.



Dans le cas de la trempe des aciers, différents phénomènes peuvent apparaître selon la différence de température entre la surface chaude et la vaporisation du liquide de trempe [BELL-1984].

Au début de la trempe, la surface du solide est très chaude et est alors totalement recouverte d'une couche de vapeur. Il s'agit de la caléfaction (film boiling). Le mode de transfert est principalement radiatif voire conductif (coefficient de transfert faible et quasi-constant) et le flux de chaleur diminue avec la température (Figure 11).

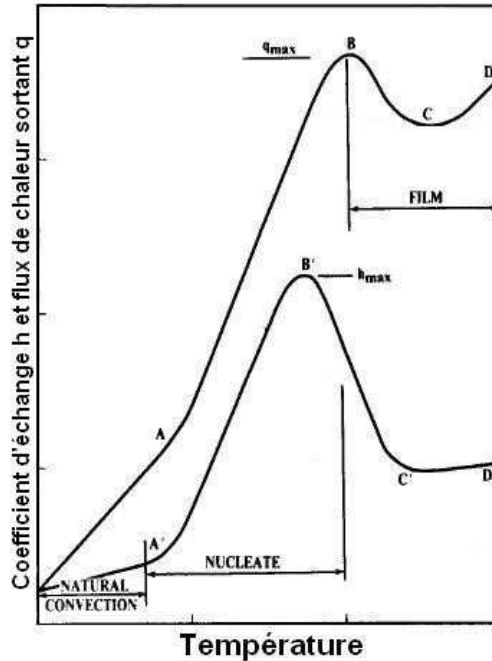


Figure 11 : Courbes typiques de flux de chaleur et de coefficient d'échange thermique pour un solide chaud plongé dans un bain liquide [BELL-1984]

Lorsque la différence de température entre la surface du solide et la vaporisation du liquide atteint une valeur critique, la formation de vapeur n'est plus continue et des colonnes de vapeur se forment au dessus des lieux de nucléation. Le liquide reprend alors contact avec la pièce et est activé d'une très grande vitesse de convection due au déplacement des particules de vapeur. Il s'agit de l'ébullition nucléée (nucleate boiling). C'est au point critique qui sépare la caléfaction de l'ébullition nucléée que le coefficient de transfert de chaleur est le plus élevé (points B et B'). Le flux thermique sortant de la pièce est alors important et la température de surface du solide diminue rapidement. Par conséquent, la vaporisation du liquide diminue, réduisant ainsi la convection en surface de la pièce. Le coefficient d'échange thermique diminue alors.

Ces observations nous font comprendre que la caractérisation du coefficient d'échange de chaleur lors de la trempe n'est pas aisée. Notons qu'il existe des méthodes d'analyse inverse (par exemple [BUCZEK-2004]) pour s'attaquer à ces problèmes. L'étude de ses phénomènes ne fera pas le sujet de ce travail mais il est important d'être conscient des hypothèses que nous ferons alors. Le sujet des transferts thermiques en trempe est actuellement très actif dans la recherche. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de Jérôme Gilles et Brahim Bourouga pour plus de détails [BOUROUGA-2007 ; GILLES-2004].

### 1.3.3. Composantes métallurgiques

#### 1.3.3.1. Contexte

A l'Age du Bronze, la qualité des produits métalliques dépendait surtout du savoir-faire des fondeurs par la composition obtenue en phase liquide. Avec l'Age du Fer, le savoir-faire a gagné l'art du forgeron avec une certaine maîtrise de la thermique en phase solide. C'est quelques siècles avant notre ère qu'apparaissent les premiers durcissements par trempe suite à un chauffage du métal dans du charbon de bois. Dans le but d'améliorer les propriétés des alliages ferreux, seules certaines régions d'Europe centrale particulièrement riches en minerais de manganèses (donc avec une certaine marge de trempabilité) pratiquaient ces tours de main plus ou moins heureux. Les techniques de la forge évoluent peu jusqu'aux premiers travaux scientifiques sur les traitements thermiques au 18<sup>ème</sup> siècle, notamment avec *l'Art de convertir le fer forgé en acier et l'art d'adoucir le fer fondu* de Réaumur, en 1722.

Aujourd'hui, nous connaissons et maîtrisons les phénomènes métallurgiques responsables des changements de propriétés et on ne parle de traitement thermique que lorsque le cycle thermique en phase solide est réalisé à des fins structurales précises.

Nous pouvons citer différents types de traitements thermiques comme le recuit, la trempe, les revenus, les vieillissements, les traitements thermochimiques, .... Le principal intérêt de l'industrie pour ces procédés est de permettre une mise en œuvre aisée techniquement et/ou économiquement de la pièce métallique, puis de lui conférer des propriétés d'emploi optimales. A titre d'exemple, une trempe permet de notablement augmenter la résistance et donc d'améliorer la tenue en service d'une pièce de carrosserie automobile qui a été précédemment emboutie. L'emboutissage n'aurait pu être réalisé sur le matériau durci.

On distingue différents types de trempes : les trempes dans la masse, les trempes superficielles et les trempes localisées. Dans cette thèse, nous nous intéressons uniquement aux trempes localisées. Les installations permettant leur réalisation nécessitent des moyens de chauffage et de refroidissement très rapide pour limiter la diffusion thermique. Les sources de chaleur à densité de puissance suffisante sont principalement les chalumeaux (de moins en moins utilisés), les inducteurs à moyenne et haute fréquence (selon la profondeur de trempe souhaitée), les faisceaux laser CO<sub>2</sub> ou YAG (quelques kW), les faisceaux d'électrons, les torches à plasma, .... Le chauffage est généralement suivi d'une trempe sévère comme une douche d'eau [DESALOS-2003].

#### 1.3.3.2. Rappels de base en métallurgie

Afin de comprendre les principes de la trempe des aciers, il est nécessaire de s'intéresser à la microstructure du fer. Aux températures usuelles, le fer peut présenter différentes structures cristallines. On peut classer ces structures solides par température croissante à l'aide d'un diagramme d'équilibre (Figure 12) : le fer- $\alpha$  (ferrite), le fer- $\gamma$  (austénite) et le fer- $\delta$ . Le fer- $\delta$  n'existant dans les aciers qu'à très faible teneur en carbone (inférieur à 0,5%) et à très haute température (supérieure à 1394°C), nous ne nous intéresserons qu'à la ferrite et l'austénite.

Pour le fer pur, la forme la plus stable à haute température est une forme cubique centrée (fer- $\delta$ ) et devient cubique face centrée (austénite) en passant au dessous de 1394°C (Figure 13), mais en refroidissant davantage (inférieur à 912°C), il reprend une forme cubique centrée (ferrite). Le lecteur intéressé par l'aspect thermodynamique des domaines de stabilité et des températures de changement de phase peut se référer à [FOCT-1997].

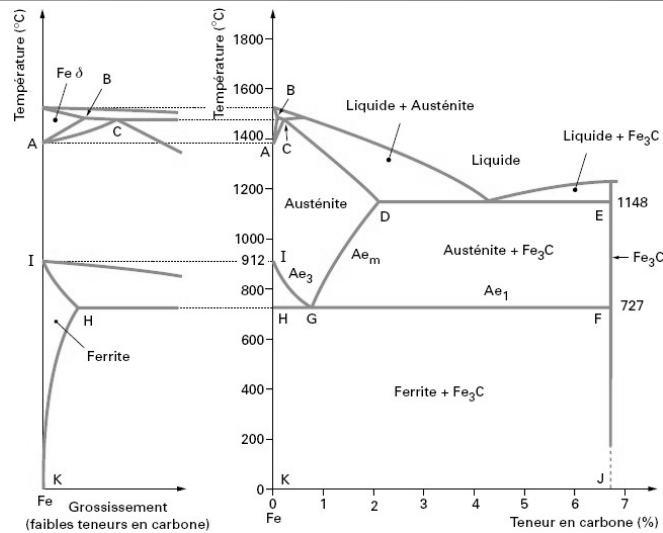


Figure 12 : Schéma du diagramme d'équilibre de phase binaire Fe-Fe<sub>3</sub>C [MURRY-1998]

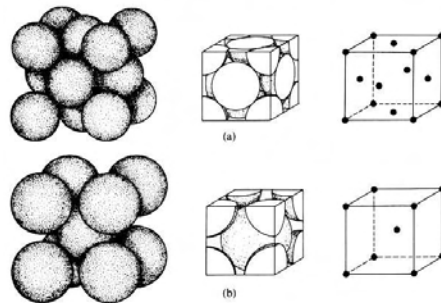


Figure 13 : Structure cubique face centré c.f.c et cubique centré c.c [DORLOT-1986]

De par le volume des sites interstitiels octaédriques de ces deux types de maille, les éléments d'alliages comme le carbone sont plus solubles dans l'austénite (Tableau 1). Pour des teneurs en carbone supérieures à la solubilité dans le fer, un précipité métastable apparaît : la cémentite Fe<sub>3</sub>C.

	Température (°C)	Solubilité	
		Masse %	Atomique %
C dans Fe $\gamma$	1150	2,04	8,8
	723	0,80	3,6
C dans Fe $\alpha$	723	0,02	0,095
	20	$< 5.10^{-5}$	$< 1,2.10^{-4}$

Tableau 1 : Solubilité du carbone dans l'austénite et la ferrite [BÉRANGER-1997]

Le principe des traitements thermiques de durcissement est de piéger les atomes de carbone dissous dans la matrice de fer lors sa transformation  $\gamma \rightarrow \alpha$  par un refroidissement brutal ne laissant pas le temps aux atomes de carbone de diffuser sur de grandes distances. D'un point de vue métallurgique, on appelle alors « trempe » les procédés de transformation d'austénite en martensite ou bainite (la perlite étant une structure arrangée Fe + Fe<sub>3</sub>C pouvant se trouver dans un état proche de l'équilibre).

❖ La martensite :

Lors de trempes très rapides, le carbone en solution dans l'austénite peut ne pas avoir le temps de diffuser d'une distance supérieure à la distance inter atomique. Dans ce cas, on obtient un constituant ferritique sursaturé en carbone, la martensite (fer  $\alpha'$ ), de structure cristalline quadratique centrée. Cette maille martensitique se déduit de la maille cubique à faces centrées de l'austénite par une déformation de cisaillement couplée à une légère distorsion : transformation de Bain (Figure 14). Cette transformation induit un changement de volume qui conduit à l'apparition de contraintes internes autour des zones transformées. Il est à noter qu'une martensite hexagonale  $\epsilon$  peut aussi exister, d'autant plus facilement en présence d'éléments d'alliage stabilisant la forme hexagonale du fer (Co, Mn, N, ...).

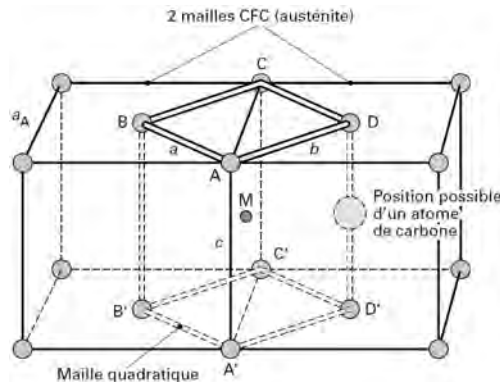


Figure 14 : Origine de la maille quadratique centrée  $\alpha'$  selon Bain [MURRY-1998]

La transformation martensitique étant une transformation displacive donc sans diffusion, sa cinétique est quasiment indépendante du temps. Elle débute lorsque l'austénite instable passe en dessous d'une température seuil  $M_S$  (Martensite Start) et évolue uniquement en fonction de la température atteinte. L'austénite est entièrement transformée en martensite à la température  $M_f$ . Si la température ambiante est comprise entre  $M_S$  et  $M_f$ , il subsiste une certaine fraction d'austénite dite « résiduelle ». Pour certains matériaux, la température  $M_S$  peut être inférieure à l'ambiante. Dans ce cas, on ne peut obtenir de la martensite qu'en refroidissant la pièce traitée à très basse température et la martensite subira un revenu dès le retour de la pièce à la température ambiante.

La métallographie montre que la martensite présente des microstructures variées avec deux morphologies dominantes : en lattes ou en aiguilles (Figure 15).

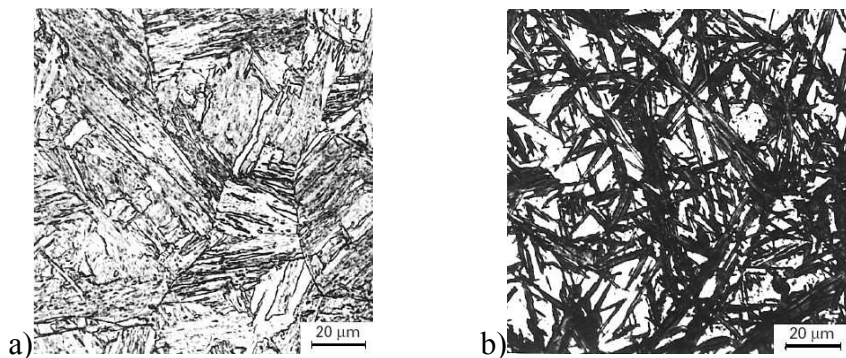


Figure 15 : Micrographie de structures martensitiques en a) lattes et b) en plaquettes [THOMAS-2002]

## ❖ Les bainites :

La bainite est produite lors de refroidissements à vitesse légèrement plus faibles ou par maintien isotherme supérieur à  $M_S$  et inférieur à la limite de la transformation perlitique. Cette transformation est le résultat d'une succession de phénomènes displacifs (comme pour la martensite) et diffusifs (comme pour la perlite). L'importance de chacun de ces deux mécanismes conduit à une grande variété de microstructures, d'où le terme bainites au pluriel.

De par les phénomènes diffusifs, la transformation bainitique est dépendante du temps et nécessite un temps de germination. D'un autre côté, les phénomènes displacifs imposent une plage de température en dehors de laquelle la bainite ne pourra se former. Cette plage de température débute à la température  $B_S$  (environ  $500^\circ\text{C}$  dans les aciers au carbone) qui diminue avec la teneur en éléments d'alliage (C, Mn, Ni, Cr, Mo), et la température  $B_f$  proche de  $M_S$ .

De manière générale, les bainites sont constituées d'un fin mélange macroscopiquement non lamellaire de ferrite, carbure et/ou austénite. On distingue couramment deux arrangements typiques de bainite selon les températures de transformation : la bainite supérieure pour les températures les plus élevées, et la bainite inférieure pour des températures plus basses. Notons néanmoins qu'il existe d'autres types de bainites auxquelles nous ne nous intéresserons pas dans ce mémoire comme la ferrite aciculaire (microstructure chaotique plus susceptible d'éviter la propagation des fissures) ou la bainite granulaire (microstructure dépourvue de carbures) [BRAMFITT-1990 ; HONGSHENG-1986].

De façon générale, la transformation bainitique débute par la germination displacive d'une entité ferritique au niveau des joints de grains de l'austénite mère. Dans un second temps apparaît la diffusion du carbone par précipitation de carbures. Celle-ci s'opère dans ou au contact de l'environnement austénitique enrichi par le carbone des germes.

La bainite supérieure se présente sous forme de groupement de lattes de ferrite parallèles et d'orientation cristallographiques voisines, séparées de particules allongées de cémentite et/ou d'austénite retenue. La bainite inférieure est constituée de plaquettes de ferrite et de petits carbures inter ou intra plaquette. Les particules de cémentite intra plaquettes sont de très petites dimensions (épaisseur de quelques nanomètres) [FOCT-1997]. La Figure 16 proposée par Foct et Taillard représente la formation morphologique de ces deux bainites et la Figure 17 représente deux micrographies de bainites d'aciers différents.

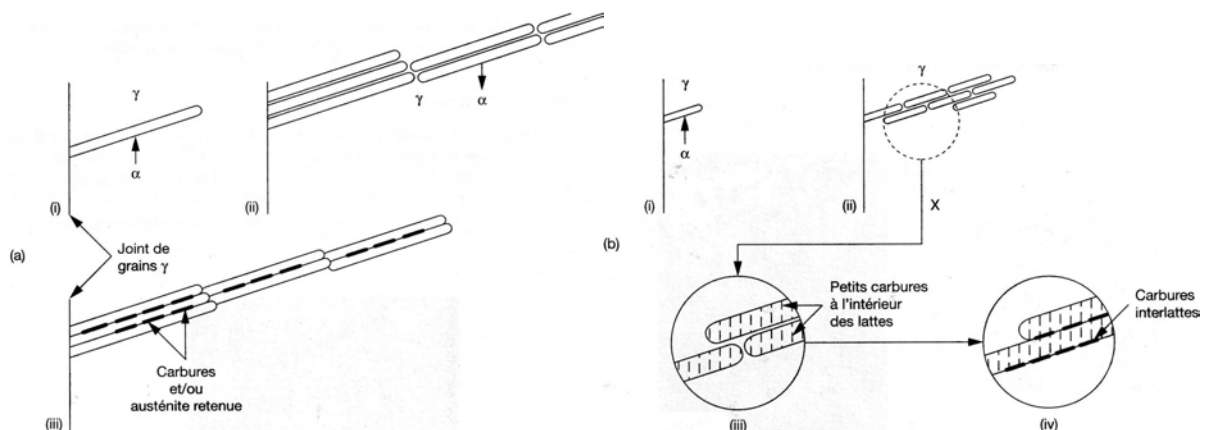


Figure 16 : Morphologie et chronologie de formation (i, ii, iii, iv) de la bainite a) supérieure et b) inférieure [FOCT-1997]

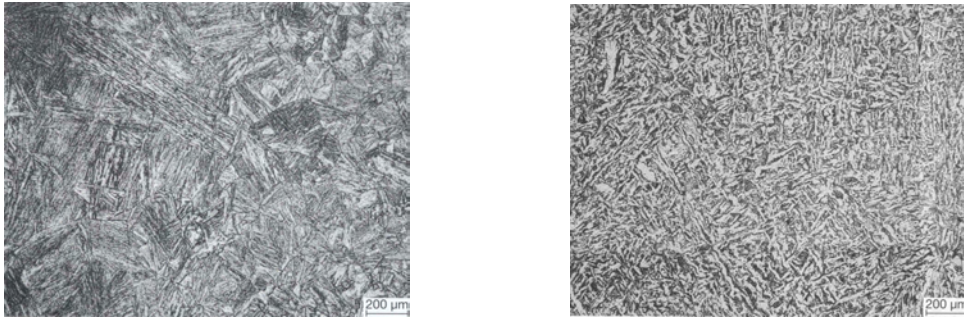


Figure 17 : Structures bainitiques d'un acier a) 6MnCrB5 trempé à l'eau et b) 35MnV7 trempé à l'air [AUCLAIR-1997]

1.3.3.3. Les diagrammes de changements de phase

Dans les conditions de refroidissement sévère de la trempe, le métallurgiste ne peut plus s'appuyer sur des abaques tels que les diagrammes de phase représentant un état d'équilibre (Figure 12). Il est alors nécessaire de construire d'autres diagrammes représentant les domaines de transformation de l'austénite en ferrite, perlite, bainite ou martensite, dépendant de l'alliage observé, des conditions de refroidissements, des conditions d'austénitisation préalable, de la taille des grains austénitiques, etc....

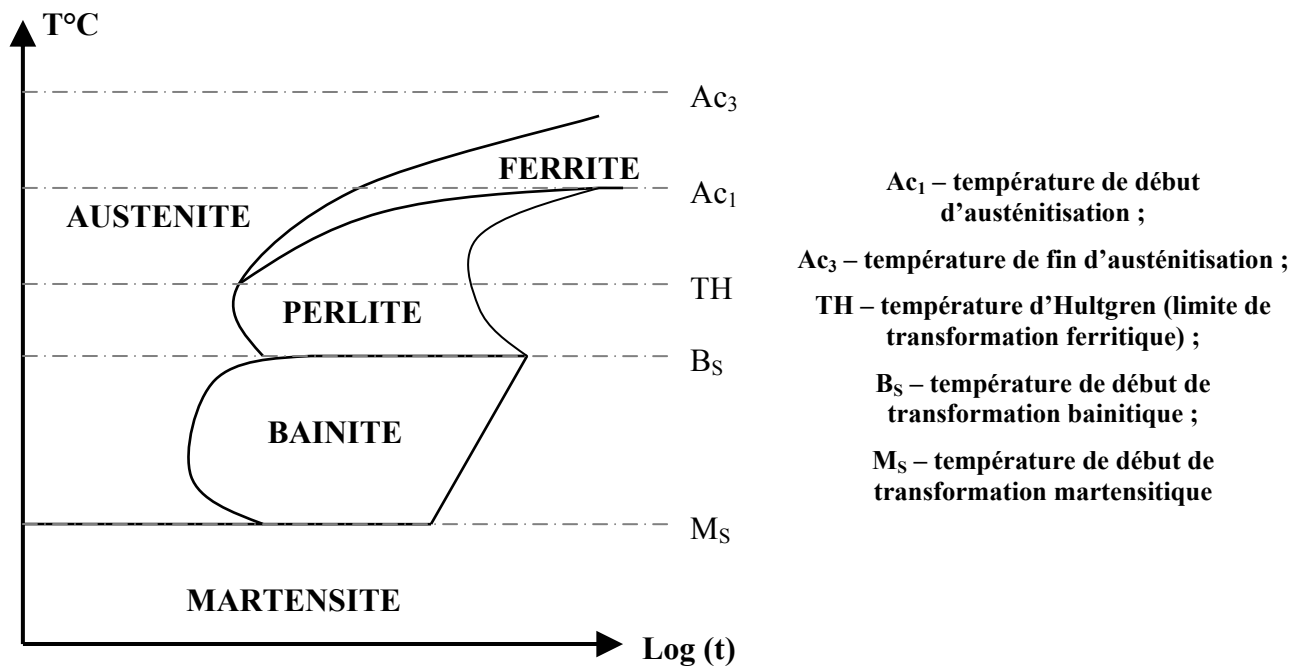


Figure 18 : Schéma de diagramme TTT avec domaines de transformation

Dans les années 20, E.C. Bain imagine une étude de la transformation de l'austénite en conditions isothermes permettant de décrire avec précision le ou les constituants caractéristiques de la transformation isotherme à une température donnée. Le principe est dans un premier temps de porter un échantillon à haute température pour obtenir de l'austénite homogène. Cet échantillon est ensuite trempé dans un bain maintenu à température constante. L'austénite est ainsi refroidie très rapidement à la température de maintien et la progression de sa transformation est étudiée lors de ce maintien. On constate généralement que la transformation ne débute qu'après un certain temps appelé « temps d'incubation ». Les

observations de transformation de phase sont alors reportées sur un diagramme TTT (Transformation – Temps – Température), ayant pour abscisse le logarithme du temps et pour ordonnée la température (Figure 18). On trouve généralement sur ce diagramme des courbes  $T(t)$  représentant le début et la fin des transformations. La présence d'une ou plusieurs autres courbes (comme la transformation à 50% par exemple) sont des indications supplémentaires sur les cinétiques de transformation.

Les diagrammes TTT peuvent être difficiles à caractériser dans le cas des aciers dont le temps d'incubation est très faible. En effet, le temps de descente en température jusqu'au maintien doit être très faible, voire négligeable devant le temps d'incubation afin de pouvoir considérer une transformation isotherme.

Un autre diagramme caractéristique des transformations de l'austénite en trempe a été mis au point pour les refroidissements continus. Le diagramme TRC (Transformations en Refroidissement Continu) est établi en refroidissant à différentes vitesses un échantillon préalablement austénitisé. On peut voir sur la Figure 19 que la forme des courbes  $T(t)$  définissant les zones de transformation ressemblent aux diagrammes TTT (Figure 18). Néanmoins, il faut bien distinguer ces deux types de diagrammes qui ne représentent pas les mêmes conditions de trempe. On peut aisément approximer un diagramme TRC à partir d'un diagramme TTT à l'aide du formalisme de Johnson-Mehl-Avrami [JOHNSON-1939], du principe d'additivité et de la somme de Scheil (voir Chapitre 5).

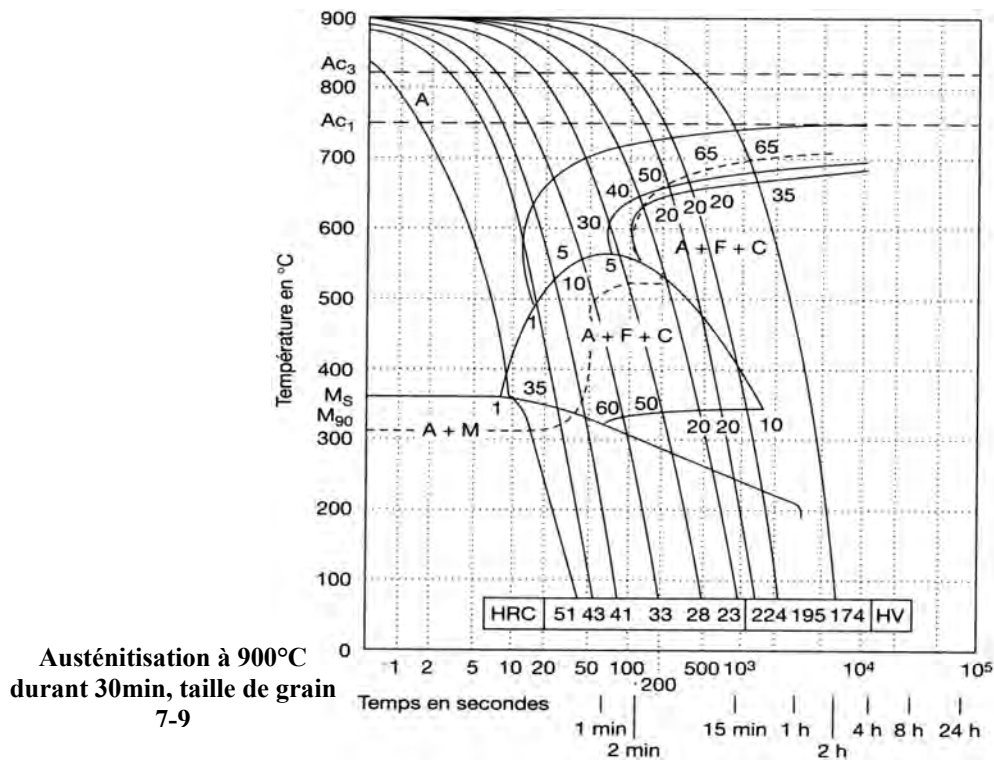


Figure 19 : Diagramme TRC d'un acier 25CrMo4 [BÉGUINOT-1997]

Il existe également le même type de diagrammes lorsqu'il s'agit de la transformation austénitique au chauffage (Figure 20). Nous appellerons diagramme TTA (Temps – Température – Austénitisation) les diagrammes établis en conditions isothermes (Figure 20a) et TCC (Transformation en Chauffage Continu) les diagrammes établis avec des vitesses de chauffages données (Figure 20b).

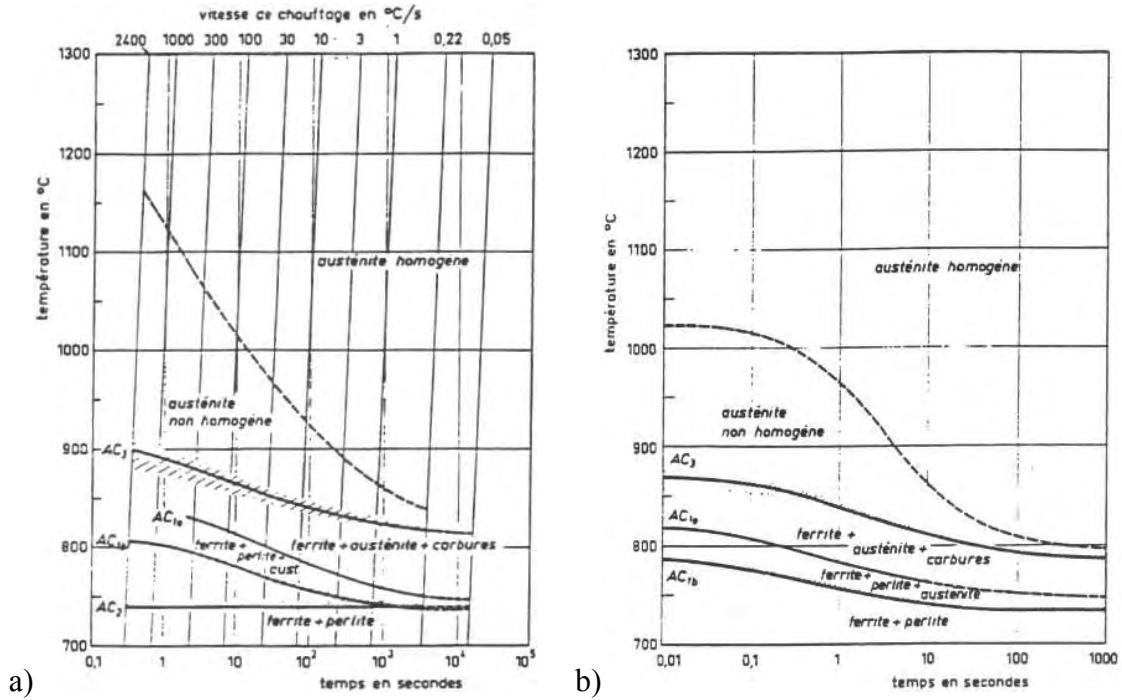


Figure 20 : Diagramme de transformation d'un acier 34CrMo4 a) au chauffage continu et b) en chauffage isotherme [FARIAS-1991]

### 1.3.4. Composantes mécaniques – Les distorsions et contraintes résiduelles

#### 1.3.4.1. Notion de contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles sont des contraintes auto-équilibrées qui existent dans un matériau pris à température uniforme et qui n'est soumis à aucune sollicitation mécanique extérieure. Ces contraintes résiduelles apparaissent lorsqu'il existe dans le matériau des hétérogénéités de déformations permanentes qui conduisent à des incompatibilités de déformations [SIMON-1997].

Usuellement, les contraintes résiduelles sont classifiées selon l'échelle à laquelle est traitée l'hétérogénéité de déformation : échelle macroscopique de l'ordre du mm (premier ordre  $\sigma_I$ ), échelle microscopique de l'ordre de la taille du grain (second ordre  $\sigma_{II}$ ), échelle submicroscopique de l'ordre de quelques distances interatomiques ou défauts de structure (troisième ordre  $\sigma_{III}$ ) (Figure 21).

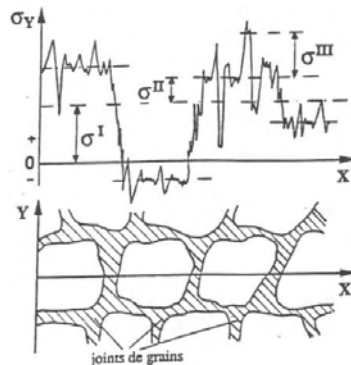


Figure 21 : Superposition des trois ordres de grandeur de contraintes [MAEDER-1990]



Dans cette étude, nous nous intéresserons uniquement aux hétérogénéités à l'échelle de la structure donc aux contraintes résiduelles du premier ordre. La Figure 22 schématise la traction uniaxiale d'une éprouvette hétérogène en comportement mécanique (partie 1) suivie d'un retour à l'état d'équilibre (partie 2). La Figure 22c montre que le matériau est alors sous contraintes de traction et compression équilibrées (partie 3). Sur cet exemple, c'est une sollicitation mécanique qui a entraîné la plastification du matériau.

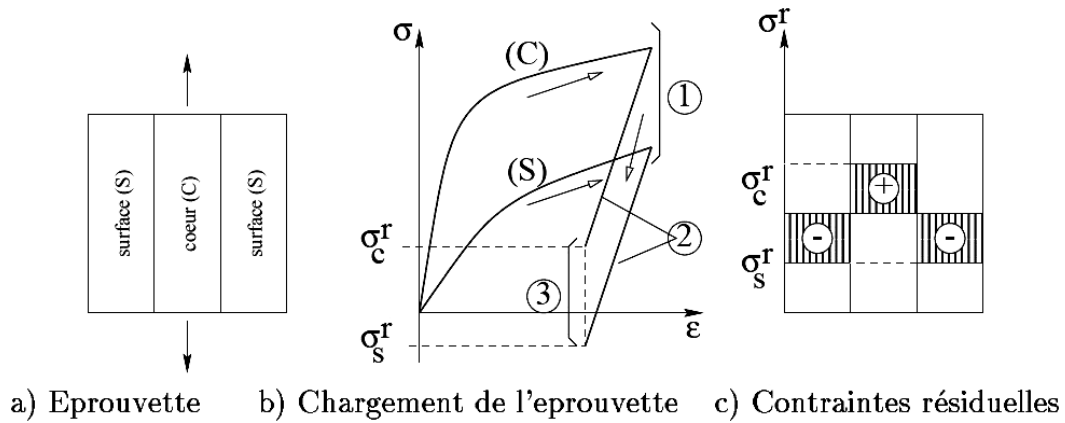


Figure 22 : Cas de la déformation par traction uni axiale d'une éprouvette dont les caractéristiques mécaniques à cœur et en peau sont différentes [ALIAGA-2000]

Lors de traitements thermiques de trempe localisée, les contraintes internes peuvent être générées par les gradients thermiques, les dilatations ou contractions lors des changements de phase, les gradients métallurgiques qui induisent des gradients de propriétés mécaniques, la plasticité de transformation ou toute combinaison de ces phénomènes.

#### 1.3.4.2. Conséquences des contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles ont deux conséquences majeures. La première se porte sur le comportement mécanique du matériau et de la pièce du fait que localement, la sollicitation subie est une superposition des contraintes appliquées et des contraintes résiduelles. La seconde conséquence est une modification géométrique de la pièce provenant des déformations et défauts générés par les contraintes résiduelles et toute l'histoire de la genèse des contraintes internes. C'est par cette altération de la géométrie d'une structure que nous entendons le terme de distorsion.

Les distorsions sont importantes à maîtriser car elles peuvent nuire à l'utilisation industrielle d'une pièce traitée qui sortirait des côtes autorisées dans le cahier des charges, ou dans le pire des cas, conduire à une rupture locale de la pièce par apparition de fissures. Une manifestation spectaculaire de cet effet peut se rencontrer lors de la trempe des aciers avec l'apparition de tapures [BODSON-1975].

## BIBLIOGRAPHIE

- [ALIAGA-2000] - Aliaga C., Simulation numérique par éléments finis 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'aciers : application à la trempe de pièces forgées ou coulées, Thèse de doctorat, ENSMP, 2000.
- [AUCLAIR-1997] - Auclair G., Badard A., Béguinot J. *et al*, "Les grandes familles d'aciers spéciaux", Les Aciers Spéciaux, , Lavoisier - Techniques et Documentation, p. 21-74, 1997.
- [BARRERE-1992] - Barrere E., Contribution à la modélisation des contraintes résiduelles lors de la trempe superficielle au défilé après un chauffage par induction, Thèse de doctorat, ENSAM Bordeaux, 1992.
- [BÉGUINOT-1997] - Béguinot J., Bellus J., Gautier E. *et al*, "Principes de base du traitement thermique des aciers spéciaux", Les Aciers Spéciaux, Lavoisier - Techniques et Documentation, p. 205-264, 1997.
- [BELL-1984] - Bell K.J., Mueller A.C., *Wolverine engineering data book*, Wolverine Division of UOP inc., vol. 2, p. 305, 1984.
- [BÉRANGER-1997] - Béranger G., Schmitt J., "Structures cristallographiques et diagrammes d'équilibre", Les Aciers Spéciaux, Lavoisier - Techniques et Documentation, p. 79-117, 1997.
- [BODSON-1975] - Bodson , Flahaut , Fremot *et al*, "Detection des tapures de trempe par émission acoustique", *Revue pratique du contrôle industriel*, n° 73, 1975.
- [BOUROUGA-2007] - Bourouga B., Gilles J., "The Transition From Nucleate Boiling Towards the Convection: Application to the Quenching of Metallic Massive Parts", *AIP Conf. Proc.*, vol. 907, p. 1217-1220, 2007.
- [BRAMFITT-1990] - Bramfitt B., Speer J., "A perspective on the morphology of bainite", *Metallurgical and Materials Transactions A*, vol. 21, n° 3, p. 817-829, 1990.
- [BUCZEK-2004] - Buczek A., Telejko T., "Inverse determination of boundary conditions during boiling water heat transfer in quenching operation", *J.Mater.Process.Technol.*, vol. 155-156, p. 1324-1329, 2004.
- [DESALOS-2003] - Desalos Y., "Introduction aux traitements thermiques des métaux et alliages", *Techniques de l'Ingénieur - traité Matériaux métalliques*, n° M1105, 2003.
- [DORLOT-1986] - Dorlot J., Baïlon J., Masounave J., *Des Matériaux 2ème édition*, Edition de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 1986.
- [FARIAS-1991] - Farias D., Traitement thermique laser de l'acier XC42 et modélisation des transformations de phases en cycles rapides au chauffage et au refroidissement, Thèse de doctorat, INPL, 1991.
- [FOCT-1997] - Foct J., Taillard R., "Changements de phases à l'état solide", Les Aciers Spéciaux, Lavoisier - Techniques et Documentation, p. 174-203, 1997.

- [GASPAR-2000] - Gaspar V., Evaluation économique du renfort de pied central de T51 traité par induction, note interne DRIA/PPIQ/ASL/ARRP/VV/VG00NT068, PSA Peugeot Citroën, 2000.
- [GIÉ-1985] - Gié H., Sarmant J., *Electromagnétisme*, Lavoisier - Techniques et Documentation, vol. 1 et 2, 1985.
- [GILLES-2004] - Gilles J., Bourouga B., Sorin A., "Quenching operation of aluminium alloys: measurements and numerical simulations", *Revue de Métallurgie*, vol. 9, p. 695-703, 2004.
- [HONGSHENG-1986] - Hongsheng F., Yankang Z., Bingzhe B., "The formation and morphology of granular bainite and granular structure", *HSLA Steels: Metallurgy and Applications*, vol. 1986, p. 359-367, 1986.
- [JOHNSON-1939] - Johnson W.A., Mehl R.F., "Reaction kinetics in processes of nucleation and growth", *trans. AIMME*, vol. 135, p. 416, 1939.
- [LEIDENFROST-1966] - Leidenfrost J.G., "On the fixation of water in diverse fire", *Int.J.Heat Mass Transfer*, vol. 9, n° 11, p. 1153-1166, 1966.
- [MAEDER-1990] - Maeder G., Lebrun J.L., Sprauel J.M., "Détermination par diffraction des rayons X des contraintes internes. Aspect macro- et microscopique", *Physique et mécanique de la mise en forme des métaux - Ecole d'été d'Oléron*, Presse du CNRS/IRSID, p. 135-155, 1990.
- [MURRY-1998] - Murry G., "Transformation dans les aciers", *Techniques de l'Ingénieur - traité Matériaux métalliques*, n° M1115, 1998.
- [NICLAS-1998] - Niclas A., Prise en compte des gradients de propriétés liés au traitement thermique dans le dimensionnement des pièces mécaniques, Thèse de doctorat, ENSAM Paris, 1998.
- [PASCAL-2003] - Pascal R., Modélisation du traitement thermique superficiel par induction, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- [RUDNEV-2003] - Rudnev V., Loveless D., Cook R. *et al*, *Handbook of Induction Heating*, Marcel Dekker, 2003.
- [SAQUET-1999] - Saquet O., Chicois J., Vincent A., "Barkhausen noise from plain carbon steels: analysis of the influence of microstructure", *Mat. Sc. And Eng.*, vol. 269, n° 1, p. 73-82, 1999.
- [SIMON-1997] - Simon A., "Introduction au thème contraintes résiduelles", *La Revue de Métallurgie-CIT/Science et Génie des matériaux*, p. 151-156, 1997.
- [THOMAS-2002] - Thomas B., Schmitt J., "Durcissement des aciers – Rôle de la microstructure", *Techniques de l'Ingénieur - traité Matériaux métalliques*, n° M4341, 2002.
- [ZANETTI-2001] - Zanetti T., Reinhardt A., Zandona M., Traitement thermique par induction sur tôles minces embouties, note interne DMOV/MXP/CEB/MMF/n°01.VY.01, PSA Peugeot Citroën, 2001.

---

---

# CHAPITRE 2

---

---

## Chapitre 2

### ESSAIS EXPERIMENTAUX : DEMONSTRATEUR INDUSTRIEL ET CAS SEMI-INDUSTRIEL

<b>2.1. Essais sur démonstrateur industriel</b>	<b>32</b>
2.1.1. Objectifs	32
2.1.2. Moyens	33
2.1.2.1. Support de bridage et moyen de serrage	33
2.1.2.2. Support de contrôle	35
2.1.3. Résultats des essais avec les paramètres de référence	36
2.1.4. Influence des paramètres de chauffage	38
2.1.4.1. Paramètres de chauffage : 17s / 60kW	38
2.1.4.2. Paramètres de chauffage : 11s / 69kW	39
2.1.4.3. Paramètres de chauffage : 15s / 53kW	39
2.1.4.4. Conclusion sur les paramètres du générateur	40
2.1.5. Influence des paramètres de bridage	41
2.1.5.1. Différentiation des touches d'appui avant et arrière	41
2.1.5.2. Augmentation du galbe (déplacement de 17mm)	41
2.1.5.3. Augmentation du galbe et de la torsion	42
2.1.5.4. Conclusion sur les paramètres de bridage	43
2.1.6. Conclusions sur les essais sur démonstrateur industriel	43
<b>2.2. Mise au point d'essais sur une configuration simplifiée</b>	<b>44</b>
2.2.1. Présentation du cas d'étude	44
2.2.2. Plan d'expériences	45
2.2.3. Résultats thermiques	46
2.2.3.1. Chauffage dans les rayons poinçon	47
2.2.3.2. Effet d'un perçage sur la température	48
2.2.4. Résultats métallurgiques	49
2.2.4.1. Etude préliminaire de la métallurgie du matériau	49
2.2.4.2. Etude d'une éprouvette semi-industrielle	50
2.2.5. Résultats mécaniques	52
2.2.6. Conclusions	54
<b>Bibliographie</b>	<b>55</b>

## 2.1. ESSAIS SUR DEMONSTRATEUR INDUSTRIEL

### 2.1.1. Objectifs

Le démonstrateur industriel est un prototype instrumenté du procédé réel utilisé en chaîne de production (schéma en Figure 23). Le but de ces essais est d'observer les évolutions thermiques, mécaniques et métallurgiques dans un pied milieu (RPC A7) lors du traitement thermique localisé et de comprendre quels sont les mécanismes les plus influents sur la géométrie finale de la pièce (après équilibrage des contraintes lors du débridage).

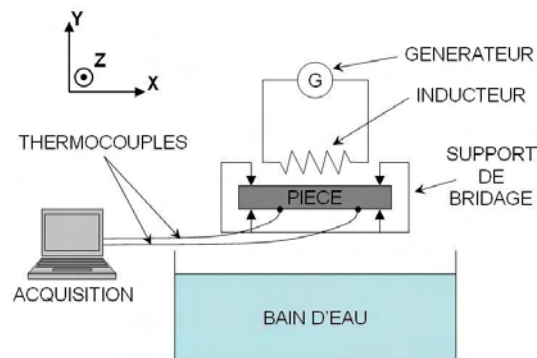


Figure 23 : Schéma du système démonstrateur. Une machine à commande numérique actionne et coupe le générateur, puis descend l'ensemble pièce + support de bridage dans le bain

Les essais seront réalisés à conditions de refroidissement identiques (température de bain à l'ambiante, temps de trempé jusqu'à refroidissement complet de la pièce, sans agitation). Dans un premier temps, nous étudierons l'influence des paramètres du générateur alimentant l'inducteur sur les distorsions des pièces. Quatre couples puissance / temps de chauffage seront testés (pour 2 apports d'énergie différents, 800kJ et 1030kJ, et chacun pendant des temps différents - Figure 24) pour des conditions de bridage données, fixes. La fréquence du courant fourni à l'inducteur est fixée à 7,4kHz afin d'avoir une épaisseur de peau (env. 3 mm) supérieure à l'épaisseur de tôle (2 mm) selon les possibilités qu'offrent les batteries de condensateur du générateur. Dans un second temps, nous modifierons les paramètres de bridage afin de minimiser les distorsions avec des paramètres de chauffage (puissance fournie et temps de chauffage) fixes.

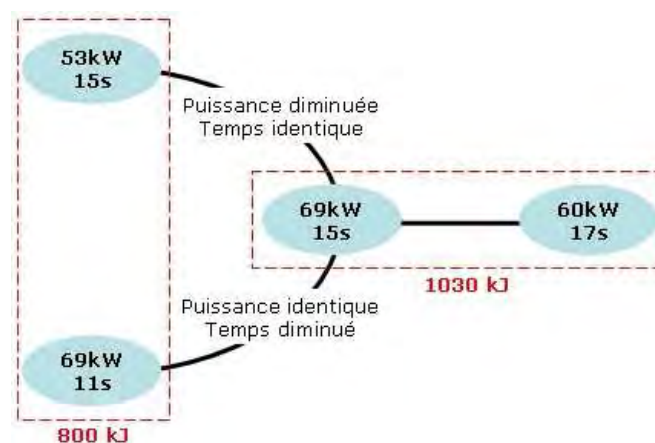


Figure 24 : Schéma des différentes configurations de chauffage testée



Les photos en Figure 25 montrent un pied milieu avant et après le traitement thermique.

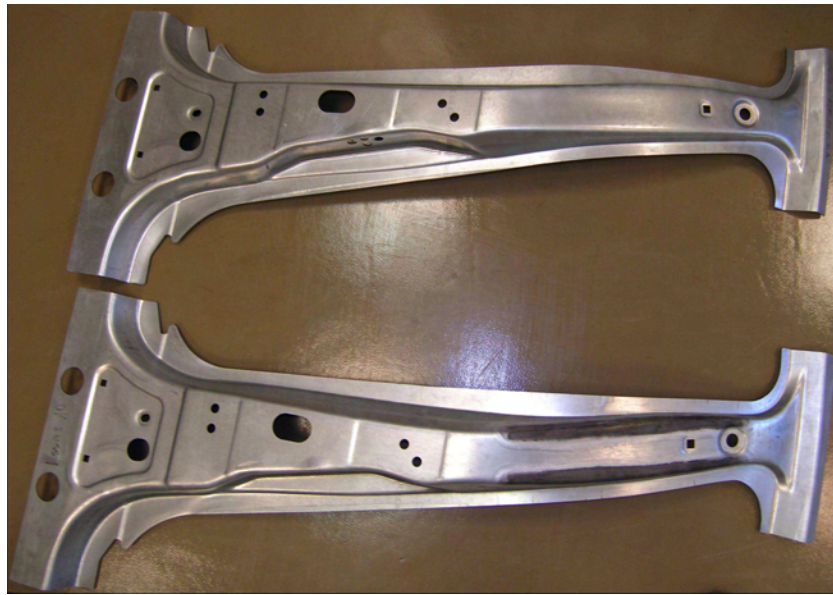


Figure 25 : Pied milieu RPC A7 avant et après traitement thermique

### 2.1.2. Moyens

Pour cette campagne d'essais sur cas industriel nous disposons de 40 prototypes de pieds milieux issus de la même série. Ces pieds milieux ont été emboutis à partir de flans découpés dans le même approvisionnement de matière, puis détournés au laser. Nous disposons également du système démonstrateur présenté en Figure 23, de thermocouples de type K et d'une carte d'acquisition reliée à un ordinateur, d'un support de bridage réglable, d'un système de mise en place de la pièce sur le support de bridage pour une bonne reproductibilité du serrage et du desserrage et d'un support de contrôle de la géométrie.

Pour tous les essais réalisés, la répétabilité des chauffages est vérifiée par l'évolution de température enregistrée en 7 points différents.

#### 2.1.2.1. Support de bridage et moyen de serrage

Le support de bridage (plan en annexe 2) est composé de 18 touches d'appui réglables en hauteur sur l'axe transverse Y, chacune pouvant être décrite cinématiquement par un appui rectiligne linéaire. Ces touches d'appui sont disposées deux par deux sur des sections de plan (X ; Y) pour bloquer en rotation sur l'axe Z et en translation sur l'axe Y les feuillures du pied milieu. La Figure 26 présente une touche d'appui et leur emplacement sur la pièce. La partie haute de la touche d'appui est serrée de façon à bloquer la translation des feuillures sur Y avec un léger jeu afin de ne pas bloquer par frottement les translations en X et en Z. Chaque touche étant réglable en hauteur, elles peuvent être utilisées pour augmenter ou diminuer le galbe comme pour imposer une torsion sur l'axe longitudinal de la pièce.

L'inducteur, également réglable, a été mis en place de manière à garder un entrefer constant lorsque la pièce est bridée. Pour chaque modification du bridage, une nouvelle mise au point de l'inducteur est nécessaire. La conception et le réglage d'un tel inducteur n'étant pas aisée, l'entrefer avec la pièce peut légèrement varier d'un endroit à un autre mais reste identique à chaque essai.

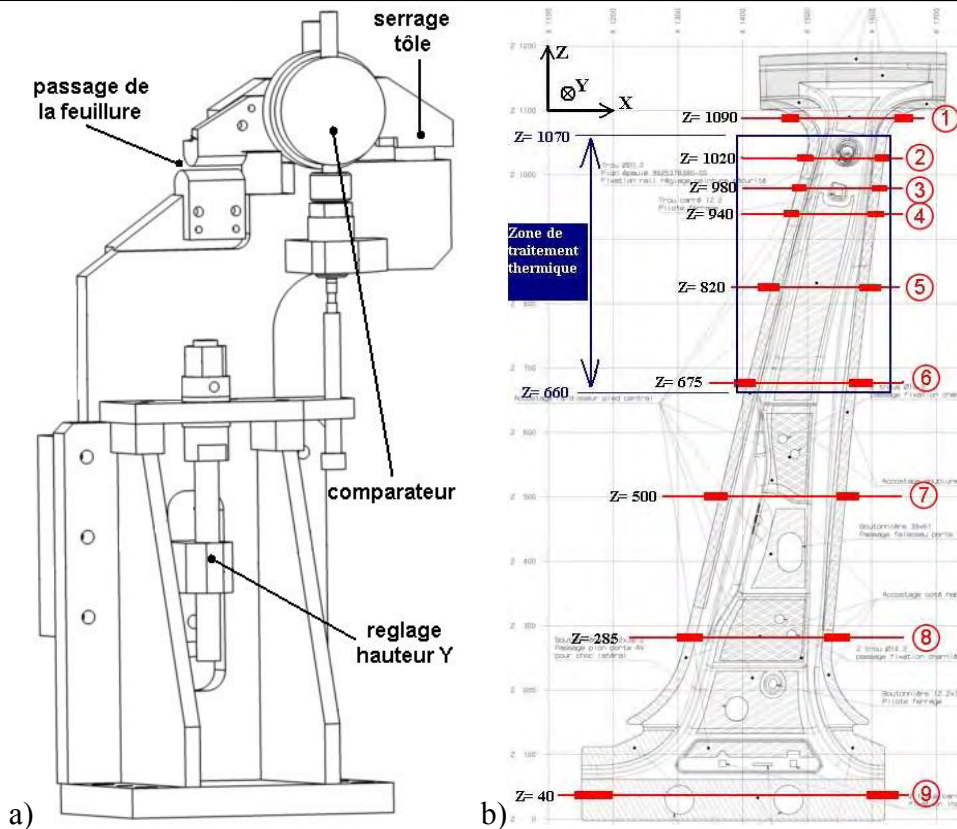


Figure 26 : système de bridage des pieds milieu en vue du traitement thermique : a) schéma d'une touche d'appui réglable et b) position des sections où sont placées les touches d'appui 2 par 2 sur les feuillures

Afin que le serrage de la pièce se fasse de manière homogène et répétable, le pied milieu est dans un premier temps placé sur le support, puis galbé par un système de volant appliquant une pression normale à la surface (Figure 27). La partie supérieure des touches d'appui est mise en place une fois la pièce maintenue par le dispositif. Ce volant servira également lors du débridage dans le but de rester répétable dans les interventions manuelles.

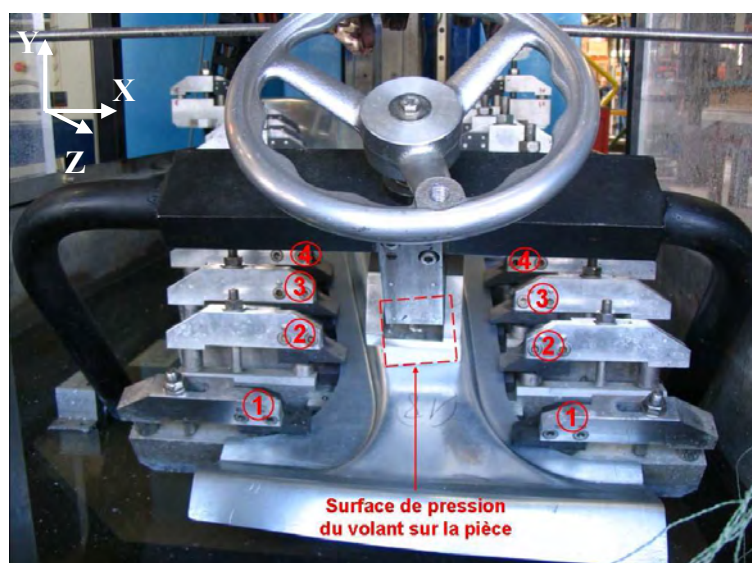


Figure 27 : Système de serrage : la pièce est plaquée contre les parties basses touches d'appui à l'aide d'un volant puis maintenue dans cette position à l'aide des parties hautes.

2.1.2.2. Support de contrôle

Un système de contrôle a été conçu afin de pouvoir comparer certaines côtes avant et après traitement thermique. Ce support permet de mesurer la coordonnée Y en des points très précis de la pièce et à l'aide d'un comparateur. Nous avons choisi 15 points de mesure dont l'emplacement correspond aux zones les plus sensibles dans le cahier des charges en terme de tolérance des côtes : le dessus des feuillures pour le soudage de la pièce avec l'ensemble de la caisse en blanc. La Figure 28 présente une pièce dans le support de contrôle et les emplacements numérotés de 1 à 15 des points de mesure.

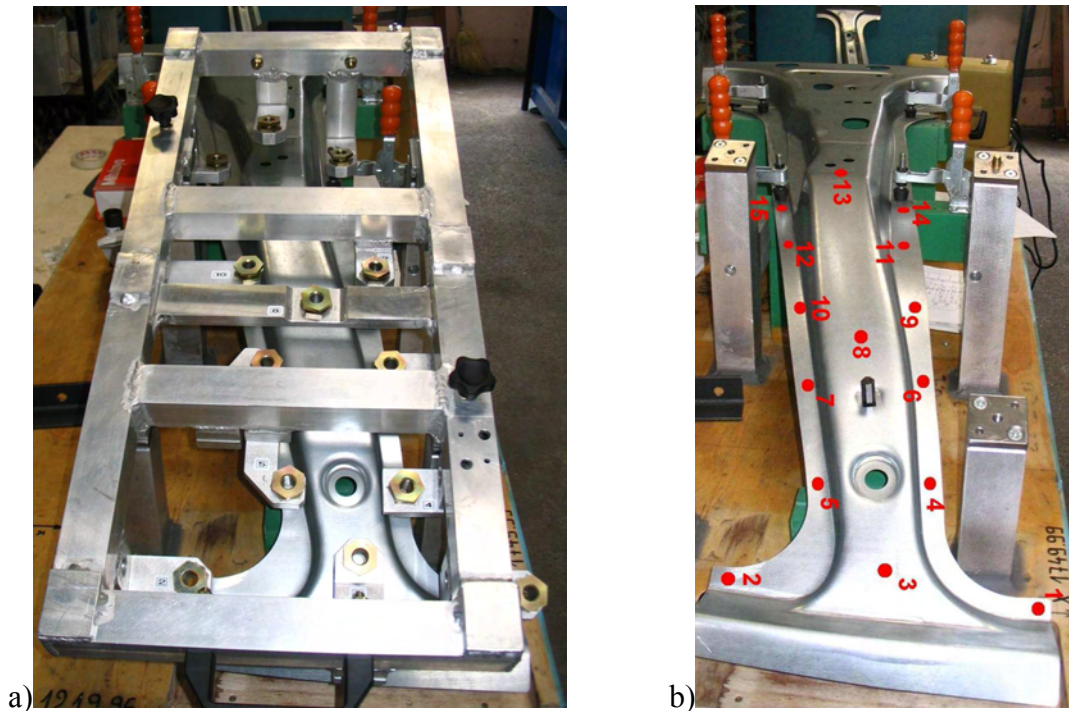


Figure 28 : Support de contrôle : a) support et trous de maintien du comparateur, b) emplacement des 15 points numérotés

Les points 3, 8 et 13 nous donnent le galbe général de la pièce. Les points 1 et 2 étant très écartés du point 3, vont nous permettre d'observer d'éventuelles distorsions en torsion autour de l'axe Z. Tous les autres points nous donneront à la fois une évolution précise du galbe et, en comparaison avec les points 3, 8 et 13, nous donneront une idée de l'augmentation ou de la diminution des rayons poinçon (rayon traités thermiquement).

Chaque prototype de pied milieu sera mesuré à l'aide du support avant et après chaque traitement thermique.

32 prototypes de pied milieu ont été mesurés avant le traitement thermique. Les résultats du Tableau 2 donnent l'écart moyen en mm par rapport au nominal sur la coordonnée Y pour chaque point et l'écart type des mesures.

Ce tableau montre que les prototypes ont des géométries dispersées qui peuvent être éloignées de la géométrie nominale. Les résultats que nous donnerons dans ce chapitre seront des moyennes des écarts de dimension entre les mesures avant traitement thermique et après traitement thermique, calculée sur l'ensemble des pièces ayant subi le même traitement.

Point de mesure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Moyenne	-3.2	-2.9	-3.4	-2.3	-2.1	-0.9	-1.0	-0.2	0.7	-0.4	1.0	-0.2	-0.2	0.2	0.0
Ecart type	0.3	0.3	0.3	0.2	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2	0.6	0.3	0.2	0.1	0.1	0.0

Tableau 2 : Différence en coordonnée Y par rapport au nominal sur le support de contrôle

### 2.1.3. Résultats des essais avec les paramètres de référence

Les paramètres de chauffage (puissance fournie par le générateur et temps de chauffage) que nous avons utilisé pour cette série d'essais ont été choisis grâce à l'expérience acquise lors des études précédentes sur pieds milieux [ZANETTI-2000] ; ils ont ensuite été affiné de manière empirique, le but étant d'avoir un bon contrôle de la ZAT en minimisant le temps de diffusion thermique tout en contrôlant parfaitement la température maximum atteinte (env. 1200°C), proche de la température de fusion. Nous avons retenu un chauffage de 15 secondes avec une puissance fournie par le générateur de 69 kilowatts, configuration qui nous paraît être proche de la configuration optimale.

Les paramètres de bridage ont été choisis de façon à augmenter le galbe de la pièce. Les touches des sections 5 à 9 (voir Figure 26) sont réglées de manière à maintenir les feuillures à leur côte nominale sur l'axe Y. Ce sont les touches des section 4, 3, 2 et 1 qui augmentent le galbe de la pièce en imposant des déplacements sur l'axe Y respectivement de -3mm, -5mm, -7mm et -10mm.

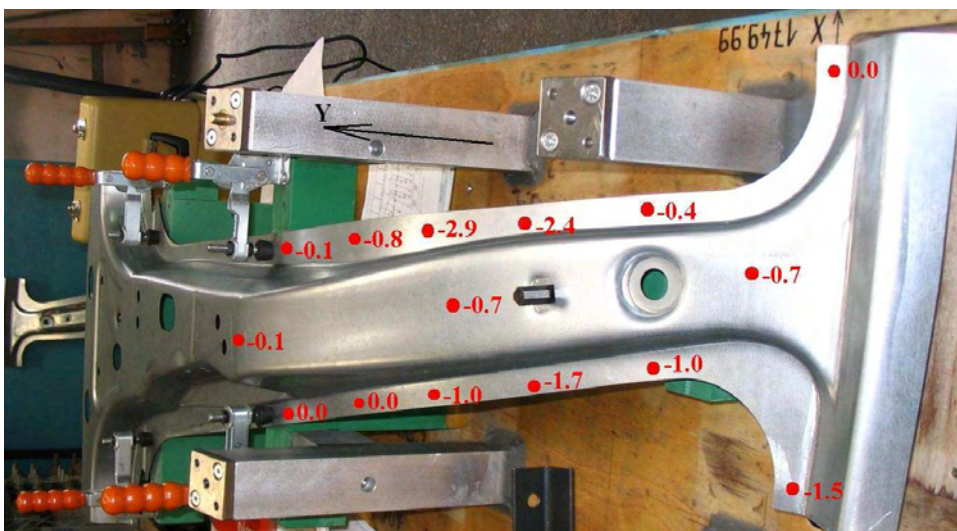


Figure 29 : Déplacement selon Y des points de mesure après un traitement thermique dont le chauffage a été effectué en 15s avec une puissance de 69kW

Les résultats donnés en Figure 29 sont une moyenne observée sur 10 prototypes de pieds milieux. La première chose que nous pouvons constater sont les déplacements de -2.9 et -2.4 mm respectivement aux points 9 et 6. Ces points de mesure se trouvent entre les bridages 4 et

5, c'est-à-dire entre le dernier bridage imposant un déplacement et le premier se trouvant à la côte nominale de la pièce. Cette constatation peut amener à deux conclusions : soit le galbage de la pièce n'est pas assez progressif dans cette zone, soit il faudrait imposer des déplacements différenciés entre la partie avant (plus petite coordonnée X) et la partie arrière (plus grande coordonnée X) de la pièce. Le fait que nous observons des déplacements beaucoup plus faibles aux points 7 et 10 (respectivement -1.7 et -1.0 mm) tend à confirmer la seconde hypothèse mais ne nous permet pas d'exclure une combinaison des deux hypothèses.

La Figure 30 montre 2 zooms sur les points d'appui du 5<sup>ème</sup> bridage (1<sup>er</sup> bridage à la côte nominale de la pièce). Nous observons que la pièce est marquée par le bridage sur sa partie avant et encore d'avantage sur sa partie arrière. Cela semble signifier que l'augmentation du galbe est trop brusque entre les brides 4 et 5 et qu'il faut différencier l'avant de l'arrière de la pièce lors du réglage du support de bridage. Nous modifierons les paramètres de bridage dans la campagne d'essai visant à étudier leur influence (paragraphe 2.1.5).

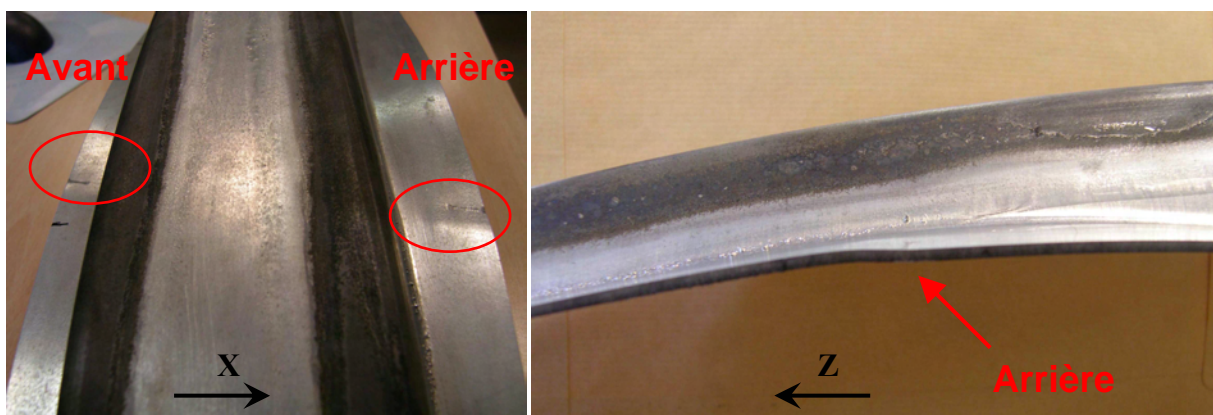


Figure 30 : Génération du « pli » au niveau du 5<sup>ème</sup> bridage du pied milieu

Intéressons nous maintenant aux points centraux 3, 8 et 13 (respectivement -0.7mm, -0.7mm et -0.1mm). Ils nous montrent que le galbe de la pièce est augmenté lors du traitement thermique bridé. Ce phénomène n'étant pas désiré, on peut être amené à penser d'un premier abord qu'une augmentation du galbe correspondant à 10mm de déplacement à la première bride est trop importante.

Enfin, le dernier point intéressant de cette première série d'essai est le résultat des points de mesure 1, 2, et 3 (respectivement 0.0, -0.7 et -1.5 mm) qui fait apparaître des distorsions en torsion autour de l'axe longitudinal de la pièce. Ce phénomène est difficilement explicable de prime abord mais nous pouvons imaginer qu'une augmentation ou diminution des rayons poinçon de la pièce (ouverture ou fermeture de la forme en « U ») peut expliquer, par le caractère très tridimensionnel de la pièce, la torsion observée. Cette hypothèse est confortée par le fait qu'on observe, en moyenne, des valeurs de déplacement plus élevées sur les feuillures qu'au centre de la pièce, ceci pouvant être le résultat d'une fermeture de la forme en « U ». De plus, nous pouvons aisément imaginer qu'un phénomène de fermeture (ou d'ouverture) de la forme en « U » serait étroitement lié à une augmentation ou une diminution globale du galbe de la pièce suite à un phénomène de flambage des flans (Figure 31).

Toutes ces observations sur la déformation globale de la pièce au traitement thermique sont issues d'une combinaison complexe de phénomènes de distorsions locales s'influençant mutuellement.

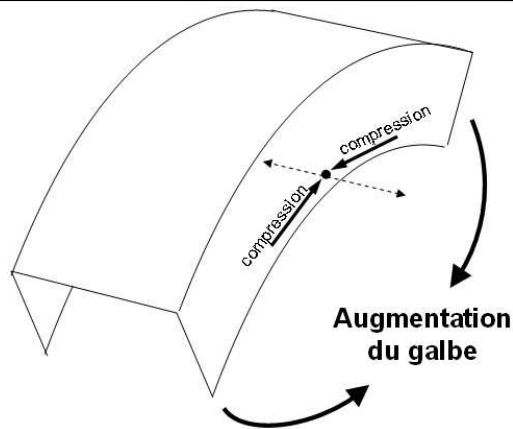


Figure 31 : Schéma du mécanisme de flambage qui apparaît sur les flans lorsqu'on augmente le galbe.

### 2.1.4. Influence des paramètres de chauffage

Afin d'étudier l'influence des paramètres du générateur sur les distorsions de la pièce, nous comparerons les résultats de 4 jeux de paramètres différents (Figure 24), avec pour résultat de référence une puissance de chauffage de 69kW pendant une durée de 15s.

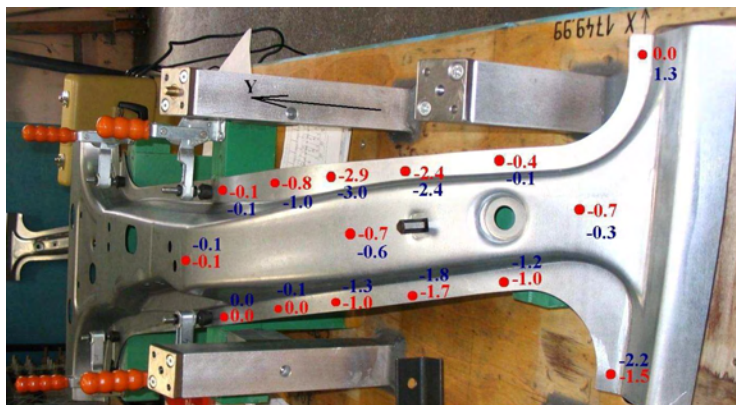


Figure 32 : Comparaison des résultats de déplacements après des traitements thermiques dont les paramètres de chauffage sont 17s / 60kW (bleu) et 15s / 69kW (rouge)

#### 2.1.4.1. Paramètres de chauffage : 17s / 60kW

La Figure 32 présente les déplacements sur la coordonnée Y des points de mesure après la trempe dans les conditions de chauffage de référence (15s / 69kW) en rouge et dans le cas d'un chauffage plus long avec le même apport d'énergie (17s / 60kW → 1030kJ) en bleu.

On remarque que les résultats sont similaires dans la partie basse du pied milieu (points de mesure 6 à 15) et que très légèrement différents au niveau des points 4 et 5. C'est dans la tête de la pièce (points 1, 2 et 3) que la différence entre les deux chauffages devient réellement significative et bien que le galbe paraisse légèrement différent, c'est surtout au niveau de la torsion que l'on observe un changement. En effet, les 3 pièces ayant subi le chauffage de 17 secondes avant trempe présentent une distorsion de rotation autour de l'axe longitudinal de la pièce beaucoup plus prononcée que ce qu'on peut observer sur les 10 pièces chauffées dans un temps plus court. Le temps de chauffage étant plus long, la diffusion thermique prend une place plus importante dans le procédé. Par conséquent, la ZAT est plus grande et les cinétiques de transformation de phase accomplies sur une zone plus large. Ceci paraît affecter

les distorsions en torsion, certainement de manière indirect, par une plus grande fermeture ou ouverture de la forme en « U » (non visible sur les résultats) ou par une répartition différente des modifications du galbe de la pièce (résultats identiques au points 13 et 8 mais pas au point 3).

Pour le moment, gardons présent à l'esprit qu'une même énergie fournie dans un temps plus long accroît l'effet des déformations locales sur une torsion globale de la pièce.

#### 2.1.4.2. Paramètres de chauffage : 11s / 69kW

Cet essai correspond à un essai où la trempe serait réalisée avant complétion du chauffage (par rapport à la référence de 69kW pendant 15s). L'énergie fournie par le générateur est dans ce cas de 800kJ. La ZAT est alors plus petite que dans le cas de référence et les températures atteintes étant de 1150°C (au lieu de 1220°C), nous pouvons considérer que l'austénitisation est complète dans les zones proche de l'inducteur.

La Figure 33 présente les déplacements aux points de mesure comparés au cas de référence. La principale constatation ne porte pas cette fois ci sur les distorsions en torsion (même ordre de grandeur dans la différence entre le déplacement au point 1 et au point 2) mais sur l'évolution du galbe de la pièce. En effet, dans la première partie de la pièce (entre les points 13 et 8) le traitement thermique augmente légèrement moins le galbe que dans le cas de référence et dans la seconde partie (entre 8 et 3) il est plus faible que dans l'état d'origine de la pièce.

Nous retiendrons que la diminution d'apport d'énergie pour une même puissance fournie par le générateur entraîne une forte diminution du galbe dans la partie haute du pied milieu.

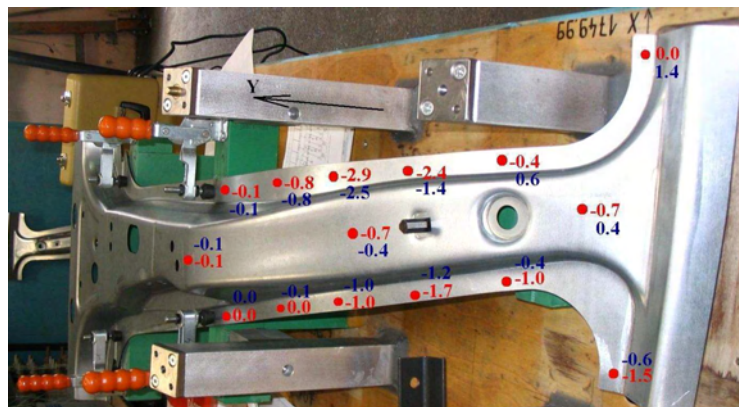


Figure 33 : Comparaison des résultats de déplacements après des traitements thermiques dont les paramètres de chauffage sont 11s / 69kW (bleu) et 15s / 69kW (rouge)

#### 2.1.4.3. Paramètres de chauffage : 15s / 53kW

Dans ce jeu de paramètres, nous conservons la même énergie que dans le cas précédent mais nous diminuons la puissance fournie. La Figure 34 nous montre la comparaisons entre 11s / 69kW (bleu) et 15s / 53kW (vert). Nous pouvons constater, comme dans le paragraphe 2.1.4.1, une augmentation de la torsion de la pièce sans changement significatif de l'évolution du galbe. Ces résultats nous confirment qu'une même énergie fournie dans un temps plus long accroît la torsion constatée sur la pièce.

Ce cas peut aussi être vu par rapport au cas de référence comme l'addition des deux précédents : une diminution de puissance en conservant la même énergie (ce serait 19s / 53kW), plus une diminution de l'énergie par diminution du temps (ce qui nous amène à 15s /

53kW). Dans cette hypothèse, nous devrions constater, par rapport au cas de référence, une rotation de la tête de la pièce autour de son axe longitudinal plus marquée (points de mesure 1 et 2) ainsi qu'une augmentation du galbe plus faible dans la partie basse du pied milieu (entre les points 8 et 13), et surtout une diminution du galbe dans la partie haute (entre les points 3 et 8). C'est ce que nous montre la Figure 35 présentant les déplacements en coordonnée Y des points de mesure lors du traitement de trempé comportant un chauffage de 15 secondes avec une puissance fournie par le générateur de 69kW en comparaison aux mêmes résultats dans le cas d'une puissance fournie par le générateur de 53kW.

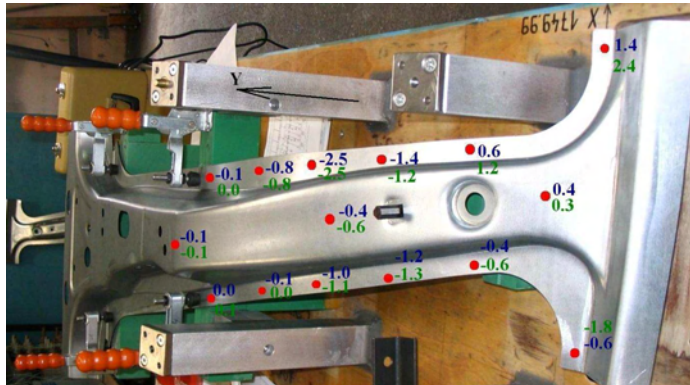


Figure 34 : Comparaison des résultats de déplacements après des traitements thermiques dont les paramètres de chauffage sont 11s / 69kW (bleu) et 15s / 53kW (vert)

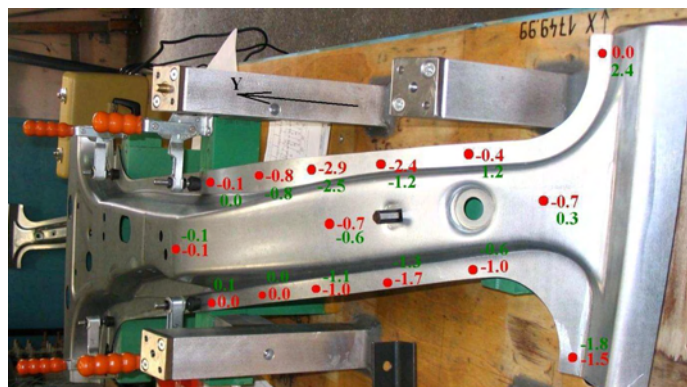


Figure 35 : Comparaison des résultats de déplacements après des traitements thermiques dont les paramètres de chauffage sont 15s / 53kW (vert) et 15s / 69kW (rouge)

#### 2.1.4.4. Conclusion sur les paramètres du générateur

Des 4 configurations de paramètres du générateur, on constate deux tendances majeures :

1. si on augmente le temps de chauffage tout en fournissant une même énergie, on observe un phénomène de torsion plus prononcé dans le haut de la pièce,
2. si on interrompt le chauffage plus tôt, le galbe de la pièce à la fin du traitement sera plus faible.

La première constatation peut être interprétée comme l'influence de la diffusion thermique et de l'élargissement de la ZAT, mais elle ne nous permet pas de faire le lien direct entre les causes et la conséquence. La seconde constatation semble signifier que la fin du chauffage ou la complétion de l'austénitisation dans certaines zones en marge de la ZAT a un effet déterminant sur le galbe final de la pièce.



### 2.1.5. Influence des paramètres de bridage

Lors de cette campagne d'essai, nous allons utiliser les paramètres de chauffage qui nous ont servi de référence dans la campagne précédente et nous allons modifier les paramètres de bridage. De la même manière que précédemment, les résultats que nous donnerons seront un déplacement suivant l'axe Y des points de mesure du support de contrôle lors du traitement thermique. Nous allons tester deux bridages différents et pour chacun d'eux, nous moyennerons les résultats sur 5 essais. Les écarts types atteignent un maximum de 1mm sur les points 1 et 2.

#### 2.1.5.1. Différentiation des touches d'appui avant et arrière

Nous avons vu précédemment (paragraphe 2.1.3) que le bridage utilisé imposait un galbe qui n'était pas « naturel » pour la pièce, c'est-à-dire qu'il imposait des déformations très localisées en certaines zones comme vers les points de mesure 6 et 9. Dans cette campagne d'essai, nous mettons en place une pièce sur le support de bridage et lui imposons un déplacement donné au niveau du bridage 1 (Figure 26). Le réglage des autres touches de bridage (de 2 à 9) est fait de manière à ce que la pièce soit en contact sur chacune d'elle lorsqu'elle est maintenue par les brides 1 et 5. En réglant ainsi les touches de bridage une par une, nous constatons que nous devons différencier celles maintenant les feuillures avant (plus petites coordonnées en X) et celles maintenant les feuillures arrières (plus grandes coordonnées en X) du pied milieu. Une fois le support de bridage réglé, il est nécessaire de refaire le réglage de l'entrefer avec l'inducteur. Nous imposons un entrefer de 6mm comme il l'était dans la 1<sup>ère</sup> campagne d'essais.

Section de bridage	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Avant	-17.4	-13.4	-10.8	-8.3	-4.5	-4.4	-5.4	-5.2	-9.0
arrière	-16.3	-13.1	-11.2	-8.9	-5.9	-1.8	-2.5	-0.9	0.0

Tableau 3 : Réglage de chaque touche de bridage pour 17mm de galbe supplémentaire

#### 2.1.5.2. Augmentation du galbe (déplacement de 17mm)

Le Tableau 3 présente le réglage de chaque touche de bridage par rapport au nominal des sections, dans le cas où nous souhaitons imposer environ 17mm de galbe supplémentaire par rapport au nominal. La Figure 36 montre en rouge les valeurs de déplacement mesurées lors de cet essai. Nous constatons dans un premier temps, qu'un bon réglage du bridage permet de supprimer le « pli » que nous avons observé lors des essais précédents (au niveau des points 6 et 9). Dans un second temps, nous pouvons confirmer l'hypothèse du paragraphe 2.1.3, qu'un déplacement imposé plus important en bout de pièce (bridage 1) pendant le traitement thermique donne un galbe plus marqué en fin de procédé. De plus, nous observons également la même rotation de la tête de la pièce grâce aux points 1, 2 et 3, mais légèrement plus marquée. Enfin, nous pouvons confirmer en regardant les points 6 à 10 que la forme en « U » a tendance à se refermer, bien que cette tendance ne paraisse pas vérifiée partout (points 13, 14 et 15).

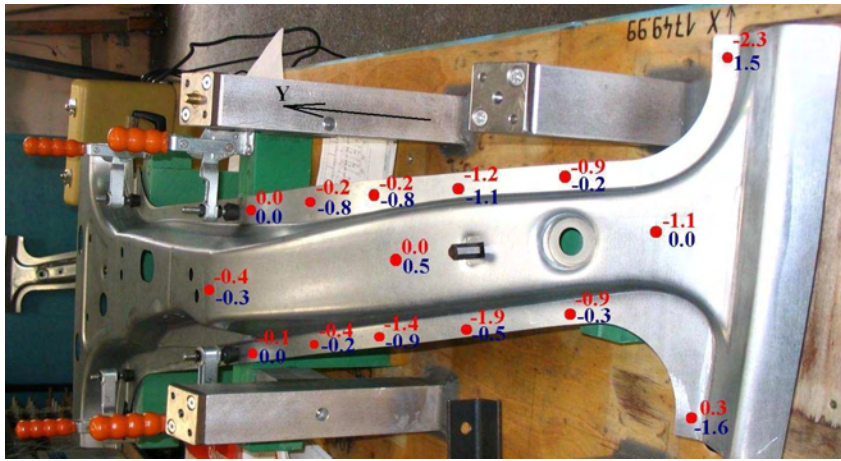


Figure 36 : Comparaison des résultats de déplacements pour deux conditions de bridage différentes : un galbe important (en rouge) et le même galbe global complété d'une rotation autour de l'axe longitudinal (bleu)

### 2.1.5.3. Augmentation du galbe et de la torsion

Une troisième condition de bridage a été testée. Il s'agit d'imposer un galbe équivalent au précédent mais cette fois ci en essayant de rattraper la rotation que l'on observe aux points 1 et 2. Pour ceci, nous déplaçons suivant Y la touche d'appui 1 à l'avant de la pièce de -1mm et touche d'appui 1 à l'arrière de +1mm. Ensuite, nous procédons de la même manière que dans le bridage précédent pour que la pièce se pose naturellement sur les touches 2 à 4 et 6 à 9. Le Tableau 4 donne le réglage de chaque touche d'appui et la Figure 36 permet de comparer les résultats de ce nouveau bridage (en bleu) par rapport au précédent (en rouge). Tout d'abord, d'un point de vue de la rotation, le léger décalage de 2mm que nous avons créé entre l'avant et l'arrière véhicule a pour conséquence une inversion du sens de rotation lors du traitement thermique. De plus, cette rotation a une influence très importante sur le galbe de la pièce qui est alors beaucoup plus faible et même plus faible que dans la géométrie initiale de la pièce entre les points 13 et 8. Les conséquences sont également visibles sur les déplacements observés aux feuillures. Ces résultats montrent d'une part toute la sensibilité du procédé au bridage et d'autre part le lien étroit entre les trois types de distorsions que nous avons observé tout au long de ce paragraphe : la modification globale du galbe, la rotation de la tête autour de l'axe longitudinal et la déformation de la forme d'embouti en « U ».

Section de bridage	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Avant	-16.2	-14.6	-11.8	-8.3	-5.0	-3.5	-4.4	-5.3	-9.2
arrière	-18.3	-14.0	-9.6	-8.9	-5.9	-7.0	-2.6	-0.9	0.0

Tableau 4 : Réglage de chaque touche de bridage pour 17mm de galbe moyen supplémentaire et une rotation de la tête de la pièce

#### 2.1.5.4. Conclusion sur les paramètres de bridage

Tout d'abord, nous avons montré l'importance d'imposer un galbe qui reste naturel par rapport à la géométrie de la pièce afin de ne pas créer de localisation des déformations et d'ainsi créer un pli. Ensuite, nous avons montré qu'en imposant un galbe plus marqué on peut arriver à garder un galbe suffisamment important en fin de traitement, mais en même temps, on augmente légèrement le phénomène de torsion et on modifie la forme en « U » de la pièce. Enfin, nous avons essayé d'anticiper les phénomènes de torsion en imposant une torsion inversée lors du traitement thermique. Cet essai nous montre l'extrême sensibilité du réglage sur la géométrie finale mais aussi qu'il est possible de rattraper les phénomènes de distorsion lors du traitement thermique en les anticipant par le bridage. Seulement, cette anticipation n'est pas aisée à cause des interactions mutuelles entre la forme du galbe, le phénomène de torsion et l'ouverture ou fermeture de la forme en « U ».

#### 2.1.6. Conclusions sur les essais sur démonstrateur industriel

Deux conclusions principales se dégagent de ces essais. La première concerne l'extrême sensibilité aux paramètres du procédé de la géométrie finale des pieds milieux, qu'il s'agisse des paramètres électromagnétiques ou mécaniques. La seconde est l'interaction des trois modes de déformation observés (galbe, rotation, et forme en « U »). Une étude empirique plus poussée du procédé dans le but de trouver un jeu de paramètres minimisant les distorsions de la pièce paraît alors délicate, d'autant plus que le caractère très tridimensionnel de la pièce s'ajoute à la complexité des phénomènes multi physiques du procédé. Il est important pour l'industrie de bien comprendre et bien sentir les mécanismes qui jouent sur les distorsions d'une tôle emboutie trempée après un chauffage par induction. Une pièce plus simple pourrait alors être étudiée et faire l'objet de simulations numériques avant d'aller plus en avant sur des cas industriels réels.

Nous avons donc décidé de mettre au point un cas semi industriel représentant au mieux le cas industriel et de géométrie simple. Pour cela, nous faisons l'hypothèse qu'un des 3 modes de déformation est à l'origine des deux autres, et qu'il s'agit de l'ouverture ou la fermeture de la forme en « U » de la pièce. Le choix de cette hypothèse est dirigé par le procédé de trempage lui-même qui se porte sur les rayons poinçon des pieds milieux. Il paraît alors légitime de penser que le traitement thermique ait un effet direct sur la forme de « U » plus que sur le galbe ou la rotation qui ne viendraient que dans un second plan. Le cas semi industriel est présenté au paragraphe suivant.

## 2.2. MISE AU POINT D'ESSAIS SUR UNE CONFIGURATION SIMPLIFIEE

### 2.2.1. Présentation du cas d'étude

Comme il a été vu précédemment, les distorsions observées sur le pied milieu, notamment au niveau du galbe de la pièce, sont considérées comme principalement gouvernées par une ouverture ou une fermeture de la forme emboutie en « U ». C'est pourquoi nous nous intéressons à l'étude du traitement thermique de tôles embouties en forme de « U » (Figure 37). Pour cette étude, un dispositif expérimental a été mis en place sur le site de PSA à Belchamp (Figure 38).

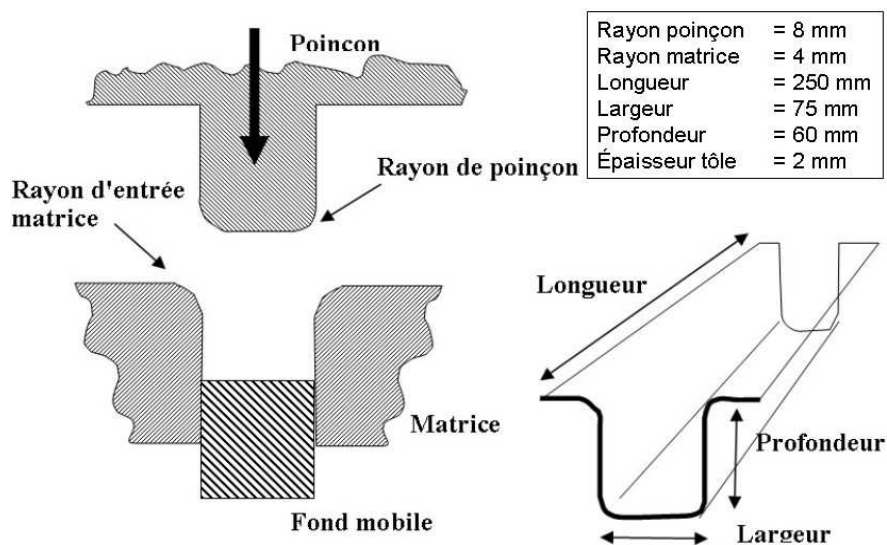


Figure 37 : Géométrie des échantillons semi industriels : emboutie en « U »

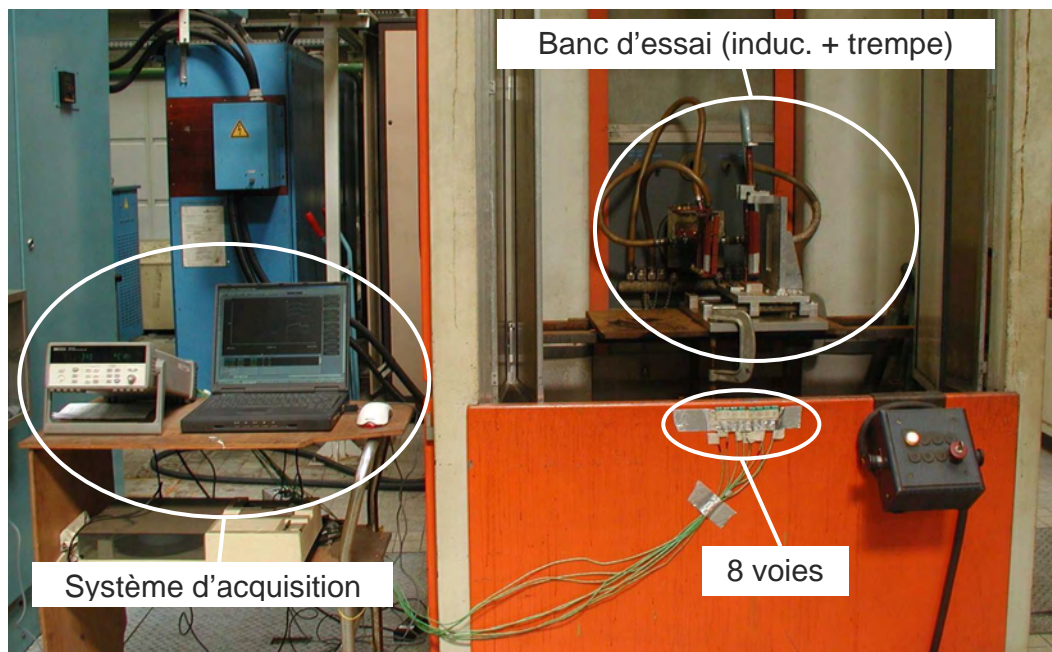


Figure 38 : Dispositif expérimental du banc d'essai en « U »

Le chauffage par induction est réalisé de la même manière que pour les essais sur le démonstrateur : un inducteur de forme est placé à environ 3mm d'entrefer de chaque coté de chacun des deux rayons poinçon. A contrario, pour des questions de commodité technique, la trempe sera réalisée différemment : système de douche recouvrant l'ensemble de la pièce. Entre le moment où l'alimentation de l'inducteur est coupée et le moment où la douche est mise en route, un temps de latence appelé « retard douche » représente le temps de descente de la pièce dans le bain du démonstrateur. L'inducteur mesure 150 mm de long et est placé au milieu de la longueur de la pièce.

Afin d'étudier l'influence du traitement thermique sur la forme de l'emboutie en « U », un nouveau système de maintien et de serrage de la pièce est mis en place (Figure 39). Un support ainsi qu'un appui supérieur et un appui inférieur permettent de maintenir la pièce en position (outils en rouge). Le système de maintien de l'embouti par ces 3 pièces est conçu de manière à bloquer tout mouvement de corps rigide suivant Y tout en permettant les dilatations sur l'axe Z. Deux pièces de serrage que nous appellerons serre-flans (outils en bleu) seront utilisées pour certains essais dans le but d'appliquer un champ de contrainte et déformation préalable.

Nous disposons de thermocouples K et d'une base d'acquisition pour contrôler que les chauffages soient répétables par comparaison des évolutions de températures.

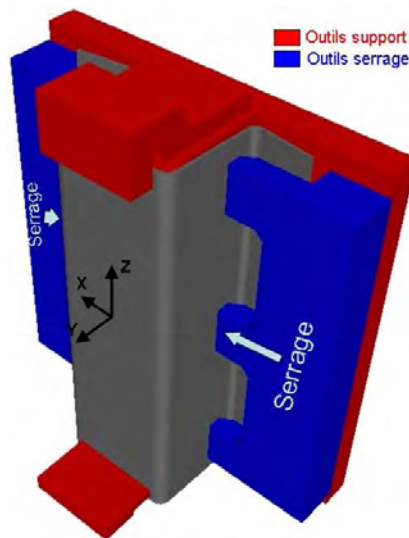


Figure 39 : Système de support et de serrage développé pour l'étude du cas semi industriel

### 2.2.2. Plan d'expériences

Le but de ces essais étant d'observer l'influence de différents paramètres du procédé sur les distorsions de la pièce après traitement thermique, nous allons tester deux configurations de bridage. La première consistera à laisser le « U » de la forme emboutie libre de s'ouvrir comme de se fermer (sans les serres flans). La seconde sera de mettre sous contrainte l'embouti en imposant un déplacement de 2mm au niveau de chaque serre flan.

Nous allons aussi tester l'influence de la diffusion thermique en utilisant deux temps de retard douche différents. Nous observerons un temps proche du temps nécessaire à la descente du démonstrateur dans le bain d'eau (1 seconde) ainsi qu'un temps plus long que celui du procédé (3 secondes).

Enfin, le troisième et dernier paramètre observé concerne la présence ou non d'un trou de perçage dans la pièce pour étudier, par exemple, si le trou de fixation de la ceinture de sécurité

peut être siège de contraintes élevées fragilisant la structure. Un trou de 20 mm de diamètre sera percé au centre de la pièce.

D'autres paramètres du procédé sont fixés pour tous les essais comme :

- la température de l'eau de trempe à 8°C,
- les paramètres du générateur (temps de chauffe de 10s, puissance de 41.25 kW et fréquence de 9500 Hz choisis en fonction des possibilités du générateur pour atteindre la même température maximum que dans le cas du démonstrateur),
- le temps de trempe (env. 2.5s) jusqu'à homogénéisation de la température de la pièce à celle du bain, variant peu d'un essai à l'autre.

Les paramètres du générateur sont sensiblement différents de ceux que nous avons utilisé pour le traitement thermique des pieds milieux. Ceci est dû d'une part au système pièce/inducteur qui est plus petit (énergie nécessaire plus faible) et qui, en parallèle avec une batterie de condensateurs, n'a pas la même fréquence de résonance. D'autre part, le générateur utilisé pour ces tests n'est pas le même que pour les pieds milieux. L'influence de la fréquence est amoindrie par le fait que l'épaisseur de peau (env. 3 mm) est très largement supérieure à l'épaisseur de la tôle (2 mm). Il faudrait une fréquence supérieure à 20kHz pour que l'épaisseur de peau devienne réellement influente (épaisseur de peau inférieure à 2 mm).

Nous réaliserons 6 essais différents, réalisés chacun 3 fois. Ces 6 essais sont répartis comme suit (Tableau 5) : le bridage libre (sans serres flans) ou serré (serres flans mis en appui puis déplacés de 2 mm sur l'axe X pour refermer le « U »), la pièce percée en son centre (trou) ou non (plein), le temps de retard douche de 1 seconde ou 3 secondes.

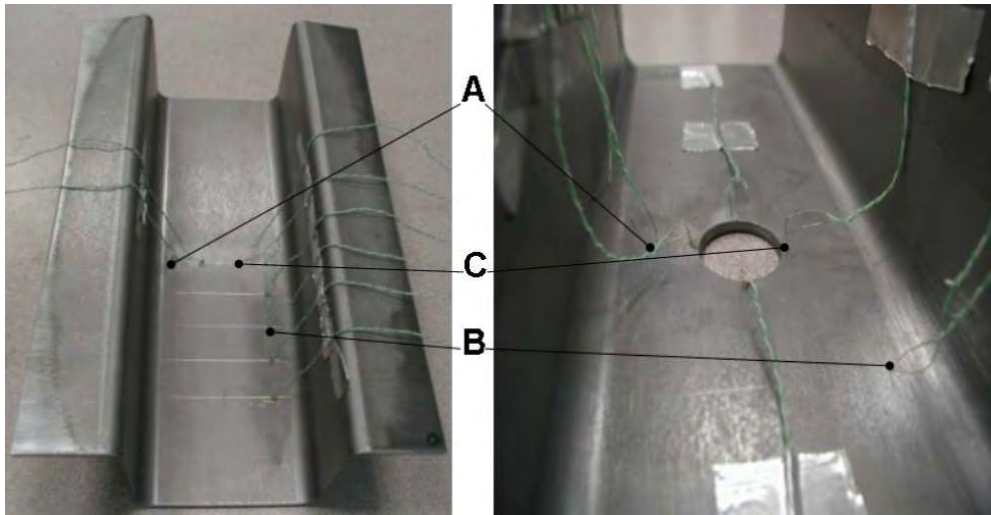
Bridage		Libre		Serré	
Perçage		Oui	Non	Oui	Non
Retard douche	1s	LT1	LP1	ST1	SP1
	3s	LT3	LP3	X	X

**Tableau 5 : Plan d'expérience et numéro des essais sur cas semi industriel**

### 2.2.3. Résultats thermiques

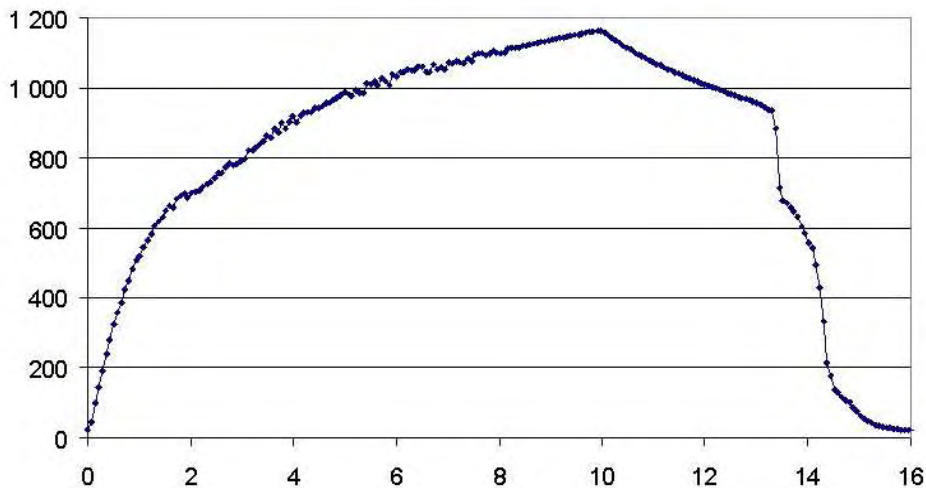
7 thermocouples K ( $\phi$  250 $\mu$ m) ont été soudés à la surface de chaque éprouvette. Afin d'avoir un maximum de renseignements sur le champ de température et son évolution au cours du temps, leur position est différente mis à part deux thermocouples fixes : un est à mi-hauteur de l'inducteur (A – Figure 40) et le second au quart de la hauteur (B – Figure 40).

En tenant compte de l'influence qu'un léger écart de position de la soudure peut avoir dans une zone à forts gradients thermiques, nous obtenons des résultats d'une bonne répétabilité. Sur un échantillon de 24 éprouvettes, le thermocouple A donne une température maximale (au bout des 10s de chauffage) moyenne de 1134°C avec un écart type de 41°C. On obtient le même ordre de grandeur de dispersions avec le thermocouple B qui donne des résultats moyen de 931°C avec un écart type de 32°C.



**Figure 40 : Instrumentation des éprouvettes de thermocouple et position des 2 thermocouples de référence A et B, et du thermocouple C en bord de trou**

La Figure 41 montre une évolution de température relevée par le thermocouple A lors du traitement thermique. Elle se décompose en 3 partie : le chauffage (10s), le retard douche (ici 3s) et la trempe. Les discontinuités de la courbe de mesure de température lors de la trempe sont probablement dues à l'écoulement turbulent de la douche qui met en contact les fils des thermocouples entre eux ou avec la tôle, la température d'apparition de ces discontinuités n'étant pas répétables.



**Figure 41 : Evolution dans le temps de la température mesurée par le thermocouple A lors du traitement thermique du U.**

### 2.2.3.1. Chauffage dans les rayons poinçon

En ce qui concerne l'évolution du champ de températures, nous pouvons nous apercevoir en regardant la Figure 42 que les rayons poinçon sont chauffés par diffusion thermique et non directement par effet Joule. Par conséquent, le chauffage est plus lent et la température n'atteint que 800°C. Nous verrons dans le paragraphe 2.2.4 que le chauffage ne permet pas une austénitisation complète de la zone des rayons poinçon.

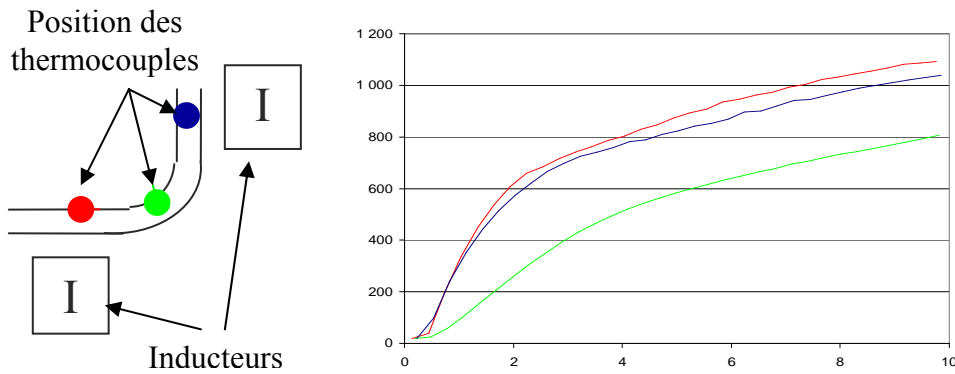


Figure 42 : Evolution des températures de chaque côté et au milieu d'un rayon poinçon

2.2.3.2. Effet d'un perçage sur la température

Nous avons évoqué dans le chapitre 1, un effet électromagnétique que nous avons appelé effet de bord. Nous pouvons l'observer dans cette étude en comparant une pièce qui a été percée avec une pièce qui ne l'a pas été après le traitement thermique (Figure 43). La Figure 44 donne l'évolution de la température aux thermocouples de référence A et B ainsi qu'au thermocouple C (Figure 40) pour les essais ST1 (tôle percée) et SP1 (tôle non percée). Dans le cas où la pièce est percée, la température monte d'environ 150°C de plus que s'il n'y a pas de trou. Cela est suffisant pour altérer le revêtement de Zinc (température de fusion d'environ 420°C) mais n'aura sûrement que peu de conséquences sur la métallurgie.



Figure 43 : Effet électromagnétique de bord (antagoniste à l'effet thermique) créé par un trou percé dans une pièce visible après traitement thermique

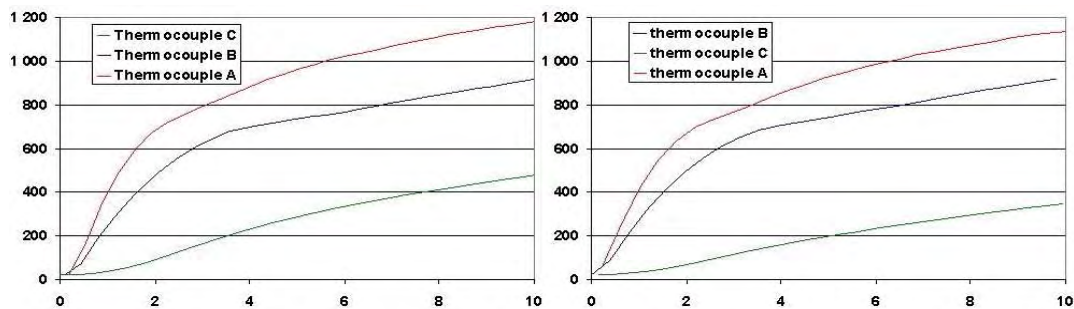


Figure 44 : Comparaison des évolutions de température dans le cas d'une éprouvette percée (gauche) et d'une éprouvette non percée (droite)



## 2.2.4. Résultats métallurgiques

### 2.2.4.1. Etude préliminaire de la métallurgie du matériau

Afin de bien identifier les structures que nous obtenons lors du traitement thermique des éprouvettes semi industrielles, nous avons d'abord réalisé une étude micrographique et de dureté sur des échantillons de matière. Pour chaque échantillon, nous faisons une première série d'opération de polissage jusqu'à un grain de  $120\mu\text{m}$  puis nous opérons des essais de microdureté. Il s'agit d'essais de dureté Vickers sous une masse de 100g réalisés avec un microduromètre Buehler. La diagonale de la trace laissée par la pointe de diamant est de  $30\mu\text{m}$  pour une dureté d'environ 150HV et  $20\mu\text{m}$  pour une dureté d'environ 450HV. 5 indentations aléatoires sont effectuées sur chaque échantillon et une moyenne est calculée. Ensuite, les échantillons sont repolis jusqu'à un grain de  $3\mu\text{m}$  puis attaqués dans un bain d'acide. Plusieurs bains d'acide ont été testés sur des échantillons à l'état de réception de la matière et à un état trempé à l'eau. Suite à ces tests, nous avons retenu un bain d'attaque de 5 secondes dans un mélange à 50% de Marshal et 50% de Villelal. Les compositions de ces deux acides sont données en annexe 3.

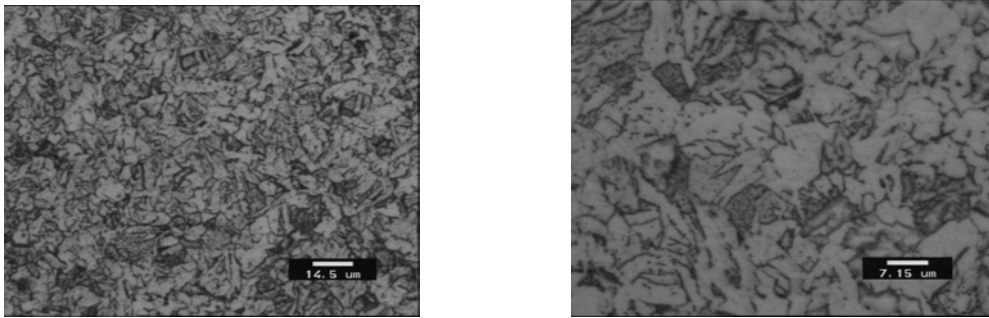


Figure 45 : Microscopie optique de l'état de réception (dureté 168HV) à deux échelles différentes

Les opérations ci-dessus ont été réalisées dans un premier temps sur des échantillons à l'état de réception. La Figure 45 montre des clichés de microscopie optique sur ces échantillons à deux échelles différentes. La dureté mesurée moyenne est de 168HV (écart type de 2HV). La structure ne peut être uniquement ferritique puisque la solubilité du carbone dans le fer  $\alpha$  est de 0.02% [BÉRRANGER-1997] alors que le HR45 contient environ 0.14% de carbone. Il semble tout de même que ce soit une structure très proche de la ferrite [BERGE-1998] avec des inclusions de carbure aux joints de grains voire pour certains grains en précipité ou en solution. Dans la suite de nos travaux nous attribuerons les propriétés thermiques, mécaniques et métallurgiques de l'état initial à de la ferrite.

L'étude de l'état initial a été effectuée dans le sens de laminage comme dans le sens transverse, dans le plans des tôles comme dans l'épaisseur, et rien ne nous a permis d'identifier une anisotropie due au laminage de la tôle.

Dans un second temps, nous avons découpé dans des tôles HR45 de 2 mm d'épaisseur, 6 éprouvettes de  $15 \times 80\text{ mm}^2$  sans faire distinction du sens de laminage. Les 6 éprouvettes ont été placées dans un four à  $950^\circ\text{C}$  puis retirées au bout de 5 min. Dès la sortie du four, 3 éprouvettes ont été immédiatement plongées dans un bain d'eau à température ambiante, tandis que les 3 autres ont été refroidies à l'air. La procédure d'étude décrite ci-dessus a été appliquée sur chacune des 6 éprouvettes.

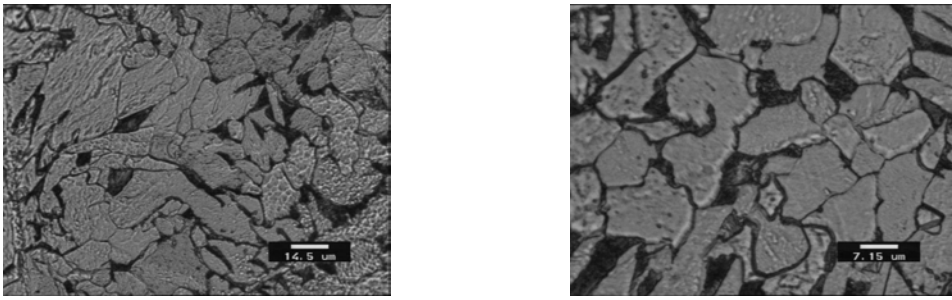


Figure 46 : Microscopie optique suite à une trempe à l'air (dureté 149HV) à deux échelles différentes

La Figure 46 présente deux micrographies à échelles différentes d'une éprouvette refroidie à l'air. La structure ressemble visuellement à celle de l'état initial bien que les carbures semblent plus concentrés dans de petits grains. La dureté moyenne est un peu plus faible puisqu'elle est en moyenne de 149HV (écart type 2HV) sur les 3 éprouvettes. Ne connaissant pas les procédés de fabrication des tôles HR45, il est difficile de donner une origine à cet écart de 20HV. Nous pouvons néanmoins en imaginer quelques unes comme un refroidissement après laminage à chaud plus rapide que celui de nos essais, un durcissement inhérent à la galvanisation des tôles ou simplement une légère différence de composition chimique entre deux tôles issues de coulées différentes.

L'étude des éprouvettes trempées à l'eau nous donnera une première idée de la structure que nous obtenons lors des procédés industriels et semi industriels. La Figure 47 en présente deux micrographies. La présence de lattes très distinctes laisse à penser qu'il s'agit d'une bainite ou de martensite. Le cliché à grossissement le plus faible montre que les lattes sont relativement bien organisées ressemblant à une bainite supérieure (Chapitre 1). La dureté de 381HV (écart type 37HV) élimine l'hypothèse de la martensite et semble confirmer celle d'une bainite peu dure. Nous nous trouvons certainement avec une structure entre bainite supérieure et inférieure, ce qui pourrait expliquer la dispersion des résultats de dureté.

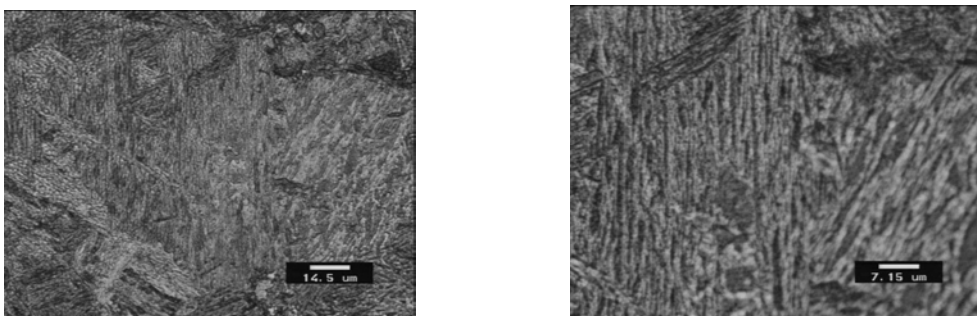


Figure 47 : Microscopie optique suite à une trempe à l'eau (dureté 381HV) à deux échelles différentes

#### 2.2.4.2. Etude d'une éprouvette semi-industrielle

Des échantillons d'éprouvettes semi industrielles trempées ont été observés de la même manière que lors des études préliminaires. La Figure 48 montre l'évolution de la dureté (homogène dans l'épaisseur de la tôle) dans le plan médian (X ; Y) d'une éprouvette de l'essai LP3. 5 points sont répertoriés sur ce graphique et 5 clichés de microscopie optique correspondants, montrent les microstructures différentes qu'on peut observer sur la pièce.

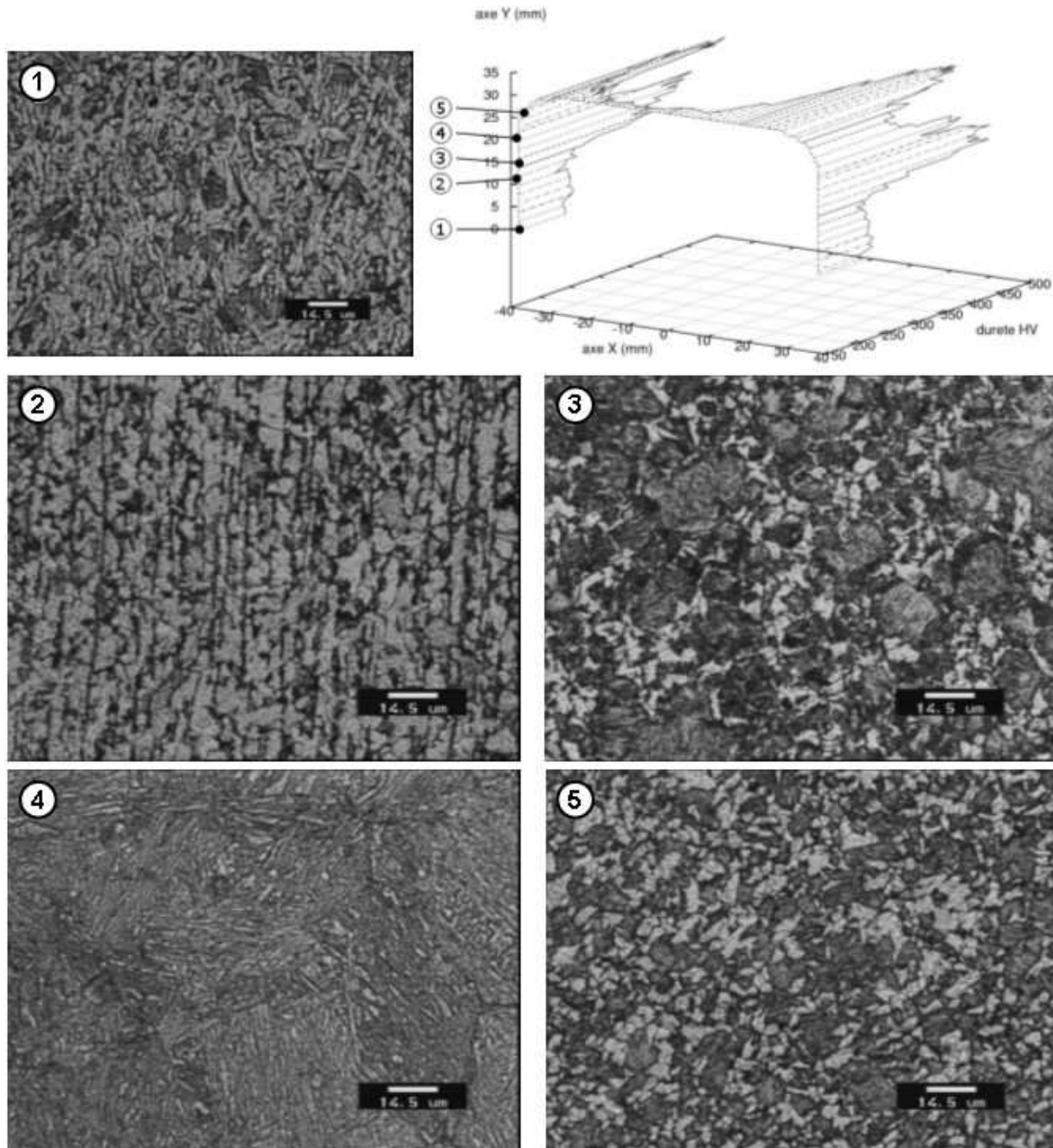


Figure 48 : Evolution de dureté Vickers sur le plan médian d'une éprouvette semi industrielle et microscopie optique de 5 zones différentes

Le point 1 correspond à une zone vierge de tout traitement puisque sa température reste proche de l'ambient. Malgré cela, sa dureté est plus élevée puisqu'elle atteint 250HV. Cela peut être dû au fait que la matière dans lesquels ont été emboutis les pièces est issue d'un autre approvisionnement du fournisseur. La composition chimique et l'état structural n'est donc peut-être pas rigoureusement identique. Mais la différence de dureté est importante et la déformation subie lors de l'emboutissage, notamment dans les flans du « U », peut expliquer l'augmentation de dureté.

Le point 4 correspond à une trempe à l'eau puisque, situé juste de l'autre côté de l'épaisseur de la tôle par rapport à l'inducteur, il s'agit donc de la zone où la température a été la plus élevée et où l'austénitisation a été complète. La structure obtenue est alors une bainite mais de dureté supérieur à l'étude précédente, sur échantillon. En effet, ici la dureté est d'environ 450HV avec des points à 500HV. Il s'agit certainement d'une bainite inférieure.

Les points 3 et 5 se trouvent dans des zones métallurgiques intermédiaires. Les micrographies montrent des grains de bainite dans une matrice ferritique. Ces grains sont la conséquence d'une austénitisation incomplète qui, suite à la germination et la faible croissance des grains austénitiques, a subi la trempe. L'austénite qui a été formée a alors été transformée en bainite, ce qui explique le gradient de dureté qui augmente avec la proportion de bainite par rapport à la ferrite autour du point 3. La température de ces zones se trouve comprise entre A1 et A3. Pour le point 5, il a été montré en Figure 42 que le rayon poinçon est moins chaud que les zones en face des inducteurs et qu'il n'atteint que 800°C. A3 est alors supérieur à 800°C et A1 est inférieur à cette température. Nous pouvons alors penser qu'en opérant la même étude sur une éprouvette d'un essai LP1, dont le temps de retard douche est plus court, nous observerions une structure encore moins dure et moins riche en bainite. Le test a été effectué et les résultats ne sont pas sensiblement différents.

Le point 2 est dans une très petite zone dont la température n'atteint pas la température de début d'austénitisation A1, mais semble suffire à opérer un recuit puisque la microstructure s'oriente de façon fibreuse suivant l'axe Y. La dureté n'en est pas affectée ce qui semble signifier qu'il s'agit uniquement d'une réorganisation des carbures et de la ferrite (dû aux contraintes ?) sans changement structural.

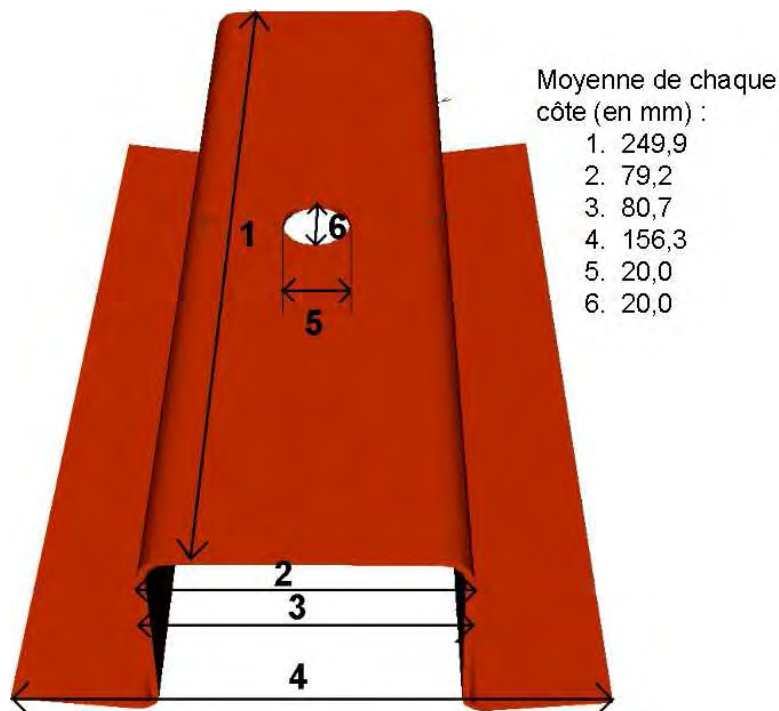


Figure 49 : Schéma d'une éprouvette semi industrielle et des 6 côtes mesurées

### 2.2.5. Résultats mécaniques

Afin de contrôler l'évolution géométrique que subissent les éprouvettes lors du traitement thermique, 6 côtes sont mesurées (Figure 49). La côte 1 nous permet de connaître l'évolution de la taille de la pièce sur l'axe Z, alors que les côtes 2, 3 et 4 nous donnent l'évolution de la forme en « U ». Les côtes 5 et 6, mesurées uniquement pour les essais LT1, LT3 et ST1, permettent d'identifier une éventuelle ovalisation du trou. Le Tableau 6 comporte la différence entre la mesure après TTH et avant TTH à chaque côte, pour chaque essai.

L'essai LP1 est un essai libre, sans perçage et avec le retard douche le plus court (Tableau 5). Il ne présente pas de déformation notable sur l'axe Z et juste une légère fermeture de la forme

en « U ». Nous relevons approximativement les mêmes résultats pour l'essai LT1 qui est réalisé dans les mêmes conditions mis à part que l'éprouvette est percée.

Dimension		1	2	3	4	5	6
Essai LP1	Moyenne	-0.1	0.0	-0.1	-0.5		
	Ecart type	0.1	0.1	0.3	0.1		
Essai LP3	Moyenne	-0.1	-0.1	-0.3	-0.9		
	Ecart type	0.1	0.0	0.1	0.2		
Essai LT1	Moyenne	0.0	0.0	-0.2	-0.6	0.1	0.0
	Ecart type	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Essai LT3	Moyenne	0.2	0.0	-0.3	-0.8	0.0	0.0
	Ecart type	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0
Essai ST1	Moyenne	-0.1	-0.3	-1.8	-4.2	0.1	-0.1
	Ecart type	0.1	0.0	0.2	0.4	0.0	0.0
Essai SP1	Moyenne	-0.1	-0.3	-1.7	-4.0		
	Ecart type	0.1	0.0	0.0	0.1		

**Tableau 6 : Ecart en mm des côtes mesurées entre la pièce trempée et la pièce avant TTH. Moyenne et écart type sur les 3 éprouvettes de chaque essai.**

L'essai LP3 et l'essai LT3 bénéficient d'un retard douche plus long (3s). Les constatations sont les mêmes que pour les essais LP1 et LT1, bien que la fermeture du « U » soit plus marquée. La présence du trou semble permettre une dilatation plus importante sur l'axe Z, mais le trou ne s'ovalise pas pour autant.

Les essais ST1 et SP1 ont été réalisés sous contraintes. Il est à noter que le bridage déforme la pièce de façon réversible du point de vue de la structure. C'est-à-dire qu'une pièce bridée puis débridée présente les mêmes valeurs aux côtes 2, 3 et 4 qu'avant le bridage, mais cela n'exclut pas la possibilité d'une faible déformation plastique localisée. Le Tableau 7 montre les déplacements imposés aux côtes 2, 3 et 4 lors du bridage. Le fait que ces déformations soient réversibles et qu'après traitement thermique une partie soit permanente (Tableau 6) montre qu'une réorganisation totale des contraintes s'opère lors du traitement thermique.

## ESSAIS EXPERIMENTAUX : DEMONSTRATEUR INDUSTRIEL ET CAS SEMI INDUSTRIEL

Côte	2	3	4
Moyenne	-0.4	-2.4	-6.5
Ecart type	0.1	0.2	0.7

Tableau 7 : Ecart moyen en mm des côtes entre les pièces avant bridage et bridées

En comparant les résultats des essais ST1 et SP1 avec ceux des essais LP1, LP3, LT1 et LT3, nous pouvons conclure que la présence du bridage imposé augmente considérablement les effets du traitement thermique sur la forme de « U ». Notons que lors des expériences, il était même difficile de sortir les pièces du support après qu'elles aient subi le traitement thermique en étant bridées. De même qu'il a été observé précédemment, l'influence d'un perçage n'est pas évidente d'un point de vue de la géométrie mais le trou a une légère tendance à s'ovaliser pour l'essai ST1.

### 2.2.6. Conclusions

Ces essais sur un cas semi industriel, de forme moins complexe que le démonstrateur industriel, nous ont permis de dégager certaines tendances des effets des paramètres du procédé sur les distorsions globales de la structure.

Par exemple, laisser plus de temps à la diffusion thermique implique des distorsions plus importantes puisque la ZAT sera plus grande et le rayon poinçon aura un plus grand taux de bainite.

D'autre part, la présence d'un perçage telle qu'elle a été testée lors de ces essais a une légère conséquence sur le champ de température mais non significative sur la métallurgie de la pièce ou les distorsions qu'elle subie. Le réarrangement des champs de contraintes et déformations semble alors principalement être dû aux transformations métallurgiques de la pièce qu'au champ thermique directement. Il aurait été intéressant de pouvoir prendre les mesures géométriques entre le chauffage et la douche afin de mieux connaître l'évolution de la géométrie dans le temps.

Enfin, un bridage imposant un champ de contraintes faibles (domaine élastique ou, localement, faiblement plastique) a un impact très net sur les distorsions. On peut distinguer encore une fois deux phases dans le procédé, le chauffage et la trempe, et se demander laquelle a le plus d'influence sur la réorganisation des contraintes. Au chauffage, l'apparition de l'austénite va relâcher les contraintes de la ZAT mais mettre sous contrainte les zones adjacentes par le changement de volume au changement de phase. Evidemment, la création d'un fort gradient thermique mettra aussi certaines zones en compression et d'autres en traction. Au refroidissement, les mêmes phénomènes de changement de volume au changement de phase apparaîtront mais cette fois ce sera une dilatation et non une contraction. De plus, des phénomènes propres à la trempe peuvent apparaître comme la plasticité de transformation. Cependant, la plasticité de transformation a été observée pour des refroidissements lents [DENIS-1987] mais il apparaît que la plasticité classique a une influence prépondérante dans le cas précis des refroidissements rapides [BARRERE-1992].

La simulation numérique nous donnera certainement plus d'éléments, notamment pour les phénomènes locaux et pour les évolutions dans le temps, nécessaires à une bonne compréhension de l'influence de chaque mécanisme physique sur la forme générale de la pièce. Pour ces calculs numériques, les essais expérimentaux sont la source d'une base de donnée très importante à la mise en donnée et la validation des calculs.

## BIBLIOGRAPHIE

- [BARRERE-1992] - Barrere E., Contribution à la modélisation des contraintes résiduelles lors de la trempe superficielle au défilé après un chauffage par induction, Thèse de doctorat, ENSAM Bordeaux, 1992.
- [BERGE-1998] - Berge D., Matériaux et procédés véhicule, note interne DVHL/MXP/CEB/MMF/n°98.VY.71, PSA Peugeot Citroën, 1998.
- [BÉRRANGER-1997] - Béranger G., Schmitt J., "Structures cristallographiques et diagrammes d'équilibre", Les Aciers Spéciaux, Lavoisier - Techniques et Documentation, p. 79-117, 1997.
- [DENIS-1987] - Denis S., Simon A., "Discussion on the Role of Transformation Plasticity in the Calculation of Quench Stresses in Steels", *Residual Stresses in Science and Technology*, vol. 2, 1987.
- [ZANETTI-2000] - Zanetti T., Reinhardt A., Trempe de tôle par induction : choix technologique et premiers résultats de la campagne d'essais préindustriels, note interne DVHL/MXP/CEB/MMF/n°2000.VY.29, PSA Peugeot Citroën, 2000.

---



---

# CHAPITRE 3

---

---

# Chapitre 3

## SIMULATION THERMO-ELECTROMAGNETIQUE

<b>3.1.</b>	<b>Simulation électromagnétique</b>	<b>61</b>
3.1.1.	Equations de Maxwell	61
3.1.2.	Formulation potentiel vecteur / potentiel scalaire	62
3.1.3.	Approximation harmonique	66
3.1.4.	Calcul du courant source	66
3.1.4.1.	Formulation faible	67
3.1.4.2.	Discretisation spatiale en éléments finis nodaux P1	68
3.1.5.	Calcul du champ potentiel magnétique	69
3.1.5.1.	Formulation faible	69
3.1.5.2.	Discretisation spatiale : les éléments finis d'arête	70
3.1.6.	Le ferromagnétisme	72
<b>3.2.</b>	<b>Simulation thermique</b>	<b>76</b>
3.2.1.	Equation de la chaleur	76
3.2.2.	Résolution numérique	76
3.2.2.1.	Discretisation spatiale	76
3.2.2.2.	Discretisation temporelle	77
3.2.2.3.	Linéarisation du système matriciel	78
3.2.3.	Problèmes liés aux traitements thermiques	79
3.2.3.1.	Le choc thermique	79
3.2.3.2.	La thermique asynchrone	79
3.2.3.3.	Cas tridimensionnel	80
<b>3.3.</b>	<b>Couplages entre électromagnétisme et thermique</b>	<b>81</b>
3.3.1.	Le couplage « ultra faible »	81
3.3.2.	Effets du champ magnétique sur la température	81
3.3.3.	Effets de la température sur la résolution électromagnétique	83
3.3.3.1.	Dépendance de la perméabilité magnétique à la température	83
3.3.3.2.	Dépendance de la conductivité électrique à la température	84
3.3.4.	Procédure du couplage thermo électromagnétique	85
<b>3.4.</b>	<b>Application au procédé semi-industriel</b>	<b>87</b>
3.4.1.	Paramètres électromagnétiques	87
3.4.2.	Paramètres thermophysiques	88
3.4.2.1.	Calcul de la masse volumique	88
3.4.2.2.	Mesure de la chaleur spécifique Cp par méthode DSC	89
3.4.2.3.	Mesure de la diffusivité thermique par méthode « flash » Laser	91
3.4.2.4.	Mise en données des paramètres thermophysiques dans le code de calcul	93

---

<b>3.4.3.</b>	<b>Résultats de calcul</b>	<b>94</b>
3.4.3.1.	Calcul électromagnétique	94
3.4.3.2.	Calcul thermique	95
<b>Bibliographie</b>		<b>96</b>

---

## 3.1. SIMULATION ELECTROMAGNETIQUE

### 3.1.1. Equations de Maxwell

Un système de 4 équations, les équations de Maxwell, permet de décrire la propagation d'ondes électromagnétiques dans un cas général. L'équation de Maxwell-Gauss (11) décrit le lien entre l'induction électrique et les charges électrique  $\rho$ . De la même manière, l'équation de Maxwell-Ampère (12) exprime le lien entre le champ magnétique et ses sources (densité de courant et déplacement électrique). L'équation de Maxwell-Faraday (13) formalise l'induction magnétique, et la loi de conservation du flux magnétiques (14) exprime le fait qu'on ne peut pas isoler de charges magnétiques.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (11)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (14)$$

Ce système d'équation est complété des équations des lois électromagnétiques constitutives des matériaux. La loi (15) donne la relation entre l'induction électrique et le champ électrique via la permittivité électrique  $\epsilon$  ; la loi (16) donne la relation entre l'induction magnétique et le champ magnétique (loi d'aimantation) via la perméabilité magnétique  $\mu$ . Ces deux lois sont accompagnées de la loi d'Ohm (17) exprimant la relation entre la densité de courant électrique et le champ électrique via la conductivité électrique  $\sigma$ .

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (15)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (16)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (17)$$

Dans le cadre du chauffage par induction pour lesquels les fréquences sont généralement comprises entre 50Hz et 1MHz, une hypothèse est couramment utilisée, l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP), qui consiste à négliger les courants de déplacement  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ . Cette hypothèse est discutée en annexe 4. Tenant compte de cette hypothèse, le problème magnétique s'écrit à l'aide de 5 égalités : Maxwell-Ampère (12) où le second terme du second membre est négligé, Maxwell-Faraday (13), la loi de conservation du flux magnétique (14), la loi d'aimantation (16) et la loi d'Ohm (17).

Dans le cadre de notre étude, comme nous allons travailler dans un domaine borné, nous devons compléter le système par des conditions aux limites. On trouve dans la littérature

[BIRO-1989], deux types de conditions aux limites : sur le champ  $\vec{H}$  et sur le champ  $\vec{B}$ , respectivement sur les frontières  $\Gamma_H$  et  $\Gamma_B$ .

$$\vec{H} \times \vec{n} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_H \quad (18)$$

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B \quad (19)$$

Sur  $\Gamma_H$  la composante tangentielle du champ magnétique est nulle alors que sur  $\Gamma_B$  la composante normale du flux magnétique est nulle.

### 3.1.2. Formulation potentiel vecteur / potentiel scalaire

Différentes méthodes sont utilisées dans les codes de calcul éléments finis pour résoudre les équations de Maxwell. La première méthode développée dans le but d'un calcul numérique fut la formulation  $A-V$  exposée par M.V.K. Chari [CHARI-1982] qui compare ses résultats numériques aux calculs analytiques. Cette méthode a ensuite été approfondie par Oszkàr Birò et Kurt Preis [BIRO-1989 ; BIRO-1990]. Etant très coûteuse d'un point de vue informatique (Figure 50), des formulations dérivées ont été proposées sur la base de conditions d'application plus restrictives : la formulation  $A^*-\Omega$  [EMSON-1983] et la formulation  $A-\phi-\Omega$  [BIRO-1989 ; KAMEARI-1988]. Enfin, C.J. Carpenter [CARPENTER-1977] a développé une méthode basée sur une toute autre formulation,  $T-\Omega$ , reprise ensuite par T. Nakata [NAKATA-1988b].

method	number of unknown variables	computer storage (MB)	CPU time (sec)
$A-\phi$	4712	5.5	751
$A-\phi-\Omega$	2788	3.9	253
$A^*-\Omega(E-\Omega)$	2208	3.2	68
$T-\Omega$	2208	3.3	63

computer : SX-1E (NEC supercomputer)

Figure 50 : Comparaison des quatre formulations pour le calcul des courants induits dans une plaque carrée plongée dans un champs magnétique la traversant dans son épaisseur (nombre d'éléments tétraédriques : 8586) [NAKATA-1988a].

Quelle que soit la formulation utilisée, certaines hypothèses sont récurrentes :

1. l'ARQP vue précédemment et discutée en annexe 4.
2. on considère généralement les propriétés électromagnétiques du matériau isotropes.
3. on néglige le cycle d'hystérésis des conducteurs ferromagnétiques et l'énergie dissipée par aimantation. Nous avons vu au chapitre 1 que ce n'est pas le mode de chauffage prépondérant mais l'hypothèse peut tout de même être discutable dans le cas de certains matériaux.
4. les courants auto-induits ne sont généralement pas calculés dans le circuit inducteur. L'hypothèse est justifiée dans le cas d'une intensité de courant imposée, par le fait que la présence de courants auto induits modifie uniquement la répartition des densités de courant et pas leur intégrale sur la section. En effet, comme l'énonce Lenz dans son théorème, le courant induit s'oppose, par ses effets, au courant qui est à son origine. D'un point de vue local, cela se traduit par un ralentissement du flux d'électrons qui

est ralenti par les efforts électromagnétiques générés par le champ électrique induit à la surface de l'inducteur,  $E_i$  (mais les électrons se déplaceront toujours d'une charge plus électronégative vers une charge moins électronégative). D'un point de vue global, le théorème de Lenz se traduit par une augmentation de la résistance de l'inducteur (partie réelle de l'impédance). En effet, le courant induit freinant le flux d'électrons, la section traversée par le courant totale est réduite (Figure 51). La résistance est alors augmentée. Ce phénomène peut néanmoins avoir une influence importante si on s'intéresse aux phénomènes touchant l'inducteur (fatigue thermomécanique par exemple) mais n'est pas significatif sur les résultats d'une pièce chauffée par induction.

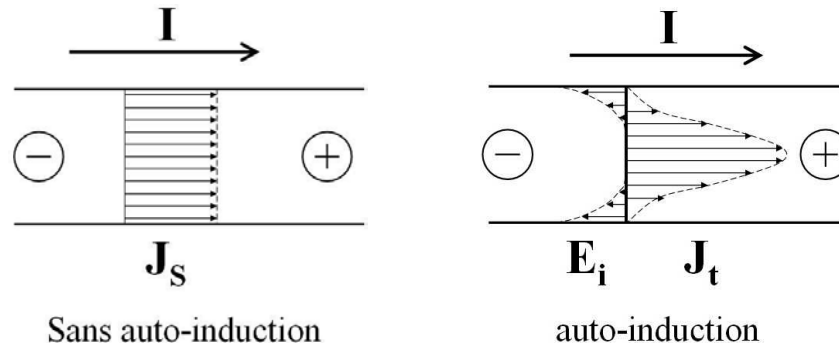


Figure 51 : Phénomènes d'auto-induction et répartition des densités de courant.

Dans ce paragraphe, nous présenterons uniquement la formulation que nous avons choisie : la formulation A-V. On peut déduire de la loi de conservation du flux magnétique (14) que le champ d'induction magnétique  $\vec{B}$  est un rotationnel. On définit alors le champ potentiel magnétique  $\vec{A}$  (20).

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (20)$$

Rappelons le système des équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (14)$$

Introduisons le potentiel magnétique dans les équation de Maxwell-Ampère (12) et Maxwell-Faraday (13) :

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (21)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (22)$$

En intégrant la relation (22) dans l'espace, on fait apparaître le gradient d'un scalaire qu'on appellera potentiel électrique :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}V \quad (23)$$

Le champ électrique est alors la somme d'une partie induite (dépendante du potentiel magnétique) et d'une partie créée par une différence de potentiel électrique (tension). Avant d'insérer les lois propres au matériau, rappelons les :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (16)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (17)$$

Des équation de Maxwell-Ampère (21) et Maxwell-Faraday (23) ainsi que des lois constitutives (16) et (17), on écrit le système électromagnétique :

$$\begin{cases} \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{J}_s \\ \vec{J}_s = -\sigma \vec{\nabla}V \end{cases} \quad (24)$$

Nous voyons alors que le problème peut être séparé en un système de deux équations séparant ainsi les deux inconnues, le champ potentiel magnétique et le potentiel électrique. Nous devons vérifier l'unicité de  $\vec{A}$ , qui définira automatiquement  $V$  à une constante près. Supposons maintenant que nous connaissons déjà un potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}_0$  défini par :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_0 \quad (25)$$

Le rotationnel d'un gradient étant nul, il existe un autre potentiel vecteur  $\vec{A}$  qui, pour un champ scalaire  $\varphi$  quelconque, s'écrit :

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{\nabla}\varphi \quad (26)$$

Cette indétermination du champ potentiel magnétique nous oblige à imposer une condition supplémentaire, appelée condition de jauge. On trouve plusieurs conditions de jauge dans la littérature dont celle de Lorentz (27) faisant intervenir une constante  $\lambda$  et celle de Coulomb (28) [BIRO-1990]. Les conditions de jauge n'ont aucune justification physique et nous choisissons d'utiliser, parmi toutes les relations qui permettent de lever l'indétermination exprimée en (26), la plus simple à traiter dans le modèle numérique.

$$V = -\lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (27)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (28)$$



La jauge la plus intéressante pour les calculs de magnétostatique est celle de Coulomb. Mais il reste à montrer qu'il est toujours possible de trouver un champ potentiel magnétique vérifiant cette équation.

Nous disposons d'un champ  $\vec{A}_0$  ne vérifiant pas (28) et nous cherchons un autre champ  $\vec{A}$  tel que  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ . Appliquons alors la jauge de Coulomb à l'équation (26) (transformation de jauge). On obtient la relation (29) mathématiquement identique à l'équation de Poisson que nous savons résoudre si nous astreignons la fonction  $\varphi$  à être nulle à l'infini.

$$\Delta\varphi = \nabla \cdot \vec{A}_0 \quad (29)$$

Il est à noter que la condition de jauge n'est pas suffisante à assurer l'unicité de  $\vec{A}$  et ce n'est d'ailleurs pas le cas en général (voir [GIÉ-1985]). Il est alors nécessaire d'intégrrer des conditions aux limites sur les frontières du domaine. Nous choisissons d'utiliser un seul type de conditions aux limites, particulièrement adapté aux cas que nous traitons :

$$\vec{A} \times \vec{n} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma \quad (30)$$

Cette condition correspondant à une condition de contact avec un conducteur parfait [HÖMBERG-2004], nous permet de considérer deux types de frontières sur notre domaine :

- Le système pièce / inducteur est noyé dans l'air et la frontière de l'air est considérée suffisamment éloignée de la source électromagnétique pour ne pas couper les lignes de champ ;
- Les systèmes géométrique et électromagnétique présentent un plan de symétrie, les lignes de champ magnétique sont alors tangentes dans le plan frontière.

De plus, cette condition appliquée à la totalité de la frontière du domaine nous garanti l'unicité de la solution.

Le système à résoudre est alors décrit par (31). [BIRO-1989] montre que l'ensemble des équations de Maxwell (a) et (b), la condition de jauge (c) et les conditions limites (d) et (e) assurent l'unicité du champ potentiel magnétique ( $V$  est défini à une constante près, il faut imposer sa valeur en un point pour avoir unicité).

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{J}_s \\ (b) \quad \vec{J}_s = -\sigma \vec{\nabla} V \\ (c) \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Omega \quad (31)$$

$$(d) \quad \vec{A} \times \vec{n} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma$$

### 3.1.3. Approximation harmonique

La source est alimentée en courant alternatif ce qui permet d'écrire le courant et le champ potentiel magnétique (sous réserve d'avoir de ne pas avoir d'harmoniques secondaires dues à l'aimantation) en harmonique (32).

$$\begin{cases} \vec{J}_s(\vec{x}, t) = \vec{J}_s(\vec{x})e^{j\omega t} \\ \vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x})e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases} \quad (32)$$

L'approximation harmonique permet de découpler les dépendances spatiale et temporelle. Pour cela, on réécrit les équations du problème en formulation A-V (24) dans l'espace complexe. Le système à résoudre est alors écrit en (33).

$$\begin{cases} \sigma \omega j \vec{A} e^{j\varphi} + \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} e^{j\varphi} = \vec{J}_s \\ \vec{J}_s = -\sigma \vec{\nabla} V \\ \nabla \cdot \vec{A} = 0 \\ \vec{A} \times \vec{n} = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (33)$$

### 3.1.4. Calcul du courant source

Dans un système de chauffage par induction, les informations que l'on a sur la source d'énergie peuvent être de deux types, selon que le système soit en série ou en parallèle (Figure 52). Pour un système en série, nous connaissons plus facilement le courant traversant l'inducteur tandis que pour un système parallèle, nous connaissons plus facilement la tension aux bornes de l'inducteur.

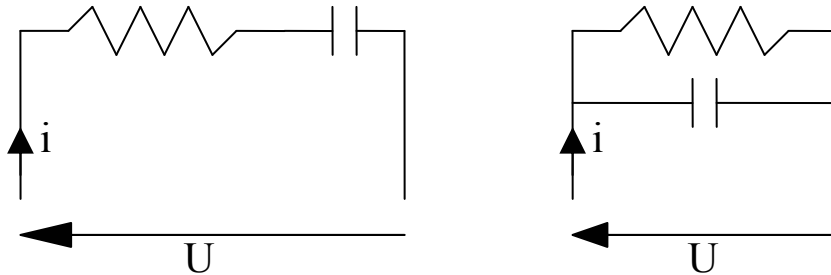


Figure 52 : Schématisation des valeurs de tension et courant fournies par le générateur dans le cas d'un système série (gauche) et parallèle (droite).

Nous avons besoin de pouvoir calculer  $\vec{J}_s(\vec{x})$  dans tout l'inducteur en fonction des données que nous avons en tension ou en courant afin de pouvoir ensuite l'utiliser dans la résolution du champ  $\vec{A}$ . Comme nous avons vu en (23) que le potentiel électrique est défini à une constante près, nous allons imposer  $V=0$  sur une des bornes de l'inducteur. Ensuite, selon que nous connaissons le courant ou la tension, nous imposerons soit  $\vec{J}_s$ , soit une différence de potentiel  $V$  (tel que la tension soit égale à la différence de potentiel) sur l'autre borne de l'inducteur.

Afin de calculer  $\vec{J}_s(\vec{x})$  dans l'inducteur, nous utiliserons la propriété de la divergence d'un courant :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{J}_s &= 0 \\ \Rightarrow \nabla \cdot (\sigma \vec{\nabla} V) &= 0\end{aligned}\quad (34)$$

Le système d'équations que nous avons alors à résoudre est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\sigma \vec{\nabla} V) = 0 \quad \text{dans l'inducteur} \\ \sigma \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \text{(Neumann) sur la frontière entre air et inducteur} \\ V = 0 \quad \text{(Dirichlet) sur la borne 1} \\ \left| \begin{array}{l} \sigma \frac{\partial V}{\partial n} = \vec{J}_s \cdot \vec{n} \quad \text{(série)} \\ V = p \quad \text{(parallèle)} \end{array} \right. \quad \text{sur la borne 2} \end{array} \right. \quad (35)$$

Pour la suite de la résolution du système (35) nous nous placerons dans le cas d'un système où l'inducteur et les condensateurs sont en série. La résolution du problème d'un système en parallèle se déroule de la même manière à la différence près que nous considérons des conditions limites de Dirichlet à la place des conditions aux limites de Neumann sur  $\Gamma_2$ .

#### 3.1.4.1. Formulation faible

Soit  $\Omega$  le domaine d'étude et  $\Omega_a$ ,  $\Omega_p$  et  $\Omega_i$  des sous domaines de  $\Omega$  représentant respectivement l'air environnant du système, la pièce chauffée et l'inducteur, tels que :

$$\Omega = \Omega_a \cup \Omega_p \cup \Omega_i \quad ; \quad \Omega_a \cap \Omega_p = \emptyset \quad ; \quad \Omega_a \cap \Omega_i = \emptyset \quad ; \quad \Omega_i \cap \Omega_p = \emptyset \quad (36)$$

Intéressons nous uniquement au domaine de frontière  $\Gamma_i$ . Soit  $\Gamma_i$  la frontière  $\Omega_i$  découpée en trois morceaux :  $\Gamma_0$  la frontière entre  $\Omega_i$  et  $\Omega_a$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , les 2 bornes de l'inducteur (Figure 53).

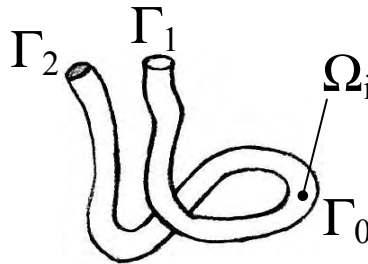


Figure 53 : Représentation d'un inducteur de forme quelconque et de ces 3 frontières :  $\Gamma_0$  et ces deux bornes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Soient l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega_i)$  et  $U$  un sous ensemble de cet espace définis tels que :

$$H^1(\Omega_i) = \left\{ \Psi \in L^2(\Omega_i) / \vec{\nabla} \Psi \in L^2(\Omega_i) \right\} \quad (37)$$

$$U = \{\Psi \in H^1(\Omega_i) / \Psi = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \quad (38)$$

Soit  $\Psi$  une fonction quelconque de l'espace  $U$ . Si nous multiplions par  $\Psi$  et que nous intégrons la première équation de (35), nous obtenons les équations (39) à l'aide de la formule de Green.

$$\int_{\Omega_i} \sigma \Delta V \Psi \, dv = \int_{\Omega_i} \sigma \bar{\nabla} V \cdot \bar{\nabla} \Psi \, dv - \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} g \Psi \, ds - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial V}{\partial n} \Psi \, ds = 0$$

$$\text{avec } g = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \vec{J}_s \cdot \vec{n} & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad \text{et } \Psi = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \quad (39)$$

Si on définit  $a(\cdot; \cdot)$  une forme bilinéaire de  $U$  et  $l(\cdot)$  une forme linéaire, le problème se résume à :

$$\text{Trouver } V \in U \text{ tel que } \forall \Psi \in U : a(V; \Psi) = l(\Psi)$$

$$\text{avec } \begin{cases} U = \{u \in H^1(\Omega_i) / u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \\ a(V; \Psi) = \int_{\Omega} \sigma \bar{\nabla} V \cdot \bar{\nabla} \Psi \\ l(\Psi) = \int_{\Gamma_2} (\vec{J}_s \cdot \vec{n}) \Psi \end{cases}$$

### 3.1.4.2. Discrétisation spatiale en éléments finis nodaux P1

Soit un domaine discrétisé  $\Omega_i^h$  borné des frontières  $\Gamma_0^h$ ,  $\Gamma_1^h$  et  $\Gamma_2^h$ . Soit  $U^h$  un sous ensemble de  $H^1(\Omega_i^h)$  tel que défini en (40).

$$U^h = \{u^h \in H^1(\Omega_i^h) / u^h = 0 \text{ sur } \Gamma_1^h\} \quad (40)$$

Soient  $\Psi^h$  une fonction quelconque de  $U^h$  et  $\varphi_i(\bar{x})$  une base complète de  $U^h$ . Soit  $V^h(\bar{x})$  un potentiel électrique solution du problème que nous pouvons discrétiser.

$$\text{si } V^h \in U^h \text{ alors } V^h(\bar{x}) = \sum_{\text{noeuds}} V_i^h \varphi_i^h(\bar{x})$$

$$\text{et } \begin{cases} a(V^h; \Psi^h) = l(\Psi^h) \quad \forall \Psi^h \\ \Leftrightarrow a(V^h; \varphi_i^h) = l(\varphi_i^h) \quad \forall \varphi_i^h \\ \Leftrightarrow a\left(\sum_{\text{noeud } j} V_j^h \varphi_j^h(\bar{x}); \varphi_i^h\right) = l(\varphi_i^h) \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{noeud } j} a(\varphi_j^h; \varphi_i^h) V_j^h = l(\varphi_i^h) \end{cases} \quad (41)$$

Nous pouvons résoudre l'équation à l'aide d'un système matriciel linéaire :

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} [K]_{ij} = a(\varphi_j^h; \varphi_i^h) = \sum_{elt} \int_{\Omega_{elt}} \sigma \vec{\nabla} \varphi_j^h \cdot \vec{\nabla} \varphi_i^h \\ \{F\}_i = l(\varphi_i^h) = \sum_{elt} \int_{\Gamma_2} (\vec{J}_S \cdot \vec{n}) \varphi_i^h \end{array} \right. \quad (42)$$

### 3.1.5. Calcul du champ potentiel magnétique

Une fois  $V$  calculé dans tout le domaine inducteur, nous pouvons imposer  $V=0$  dans le reste du domaine  $\Omega$  et ainsi connaître le second membre de l'équation des potentiels magnétiques en (33) dans l'ensemble du domaine d'étude. Ce second membre  $\vec{J}_S(\vec{x})$  peut être exprimé en fonction des potentiels électriques calculés aux nœuds comme ceci :

$$\begin{aligned} \vec{J}_S(\vec{x}) &= \sigma(\vec{x}) \vec{\nabla} V(\vec{x}) \\ &= \sum_{\substack{\text{nb nœuds} \\ \text{noe}=1}} \sigma(\vec{x}) V_{\text{noe}} \vec{\nabla} \varphi_{\text{noe}}(\vec{x}) \end{aligned} \quad (43)$$

Nous allons voir maintenant comment résoudre l'équation des potentiels magnétiques en utilisant des éléments finis d'arête.

#### 3.1.5.1. Formulation faible

Soient la frontière de  $\Omega$ ,  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$  telle que présentée en Figure 54. Définissons l'espace de Sobolev  $H_{rot}^1(\Omega)$  et un sous ensemble  $V$  tel que :

$$H_{rot}^1(\Omega) = \left\{ \vec{v} \in L^2(\Omega)^3 / \vec{\nabla} \times \vec{v} \in L^2(\Omega)^3 \right\} \quad (44)$$

$$V = \left\{ \vec{v} \in (H_{rot}^1(\Omega))^3 / \nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \vec{v} \times \vec{n} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma \right\} \quad (45)$$

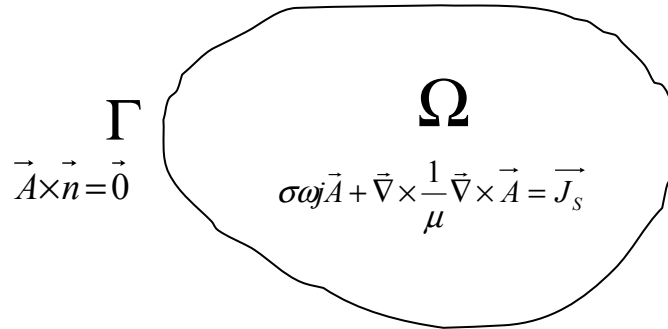


Figure 54 : Représentation du domaine d'étude  $\Omega$  et de ses frontière :  $\Gamma_0$  condition de Dirichlet ;  $\Gamma_1$  condition de Neumann

Soit  $\Psi$  une fonction quelconque de  $V$ . Intégrons l'équation (33) sur le domaine et multiplions par la fonction test  $\Psi$  :

$$\int_{\Omega} \sigma \omega j \vec{A} e^{j\varphi} \cdot \vec{\Psi} \, dv + \int_{\Omega} \left( \vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} e^{j\varphi} \right) \cdot \vec{\Psi} \, dv = \int_{\Omega} \vec{J}_S \cdot \vec{\Psi} \, dv \quad \forall \vec{\Psi} \in V \quad (46)$$

Nous pouvons réécrire l'équation (46) à l'aide de la formule de développement de la divergence d'un produit vectoriel (47) pour obtenir la relation (48).

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \times \vec{b} \quad (47)$$

$$\int_{\Omega} \sigma \omega j \vec{A} e^{j\varphi} \cdot \vec{\Psi} dv + \int_{\Omega} \left( \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} e^{j\varphi} \right) \cdot \vec{\Psi} dv = \int_{\Omega} \vec{J}_S \cdot \vec{\Psi} dv \quad \forall \vec{\Psi} \in V \quad (48)$$

Appliquons maintenant la formule d'Ostrogradski à la relation (48) pour obtenir (49) et utilisons les propriétés du produit mixte pour faire apparaître les conditions de Dirichlet (50) :

$$\int_{\Omega} \sigma \omega j \vec{A} e^{j\varphi} \cdot \vec{\Psi} + \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} e^{j\varphi} \cdot \nabla \times \vec{\Psi} = \int_{\Omega} \vec{J}_S \cdot \vec{\Psi} - \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} e^{j\varphi} \times \vec{\Psi} \right) \cdot \vec{n} \quad \forall \vec{\Psi} \in V \quad (49)$$

$$\int_{\Omega} \sigma \omega j \vec{A} e^{j\varphi} \cdot \vec{\Psi} + \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} e^{j\varphi} \cdot \nabla \times \vec{\Psi} = \int_{\Omega} \vec{J}_S \cdot \vec{\Psi} - \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu} \underbrace{(\vec{\Psi} \times \vec{n})}_{=0} \cdot \nabla \times \vec{A} e^{j\varphi} \quad (50)$$

De la même manière que pour le laplacien de V, on définit a(. ; .) une forme bilinéaire de V et b(.) une forme linéaire, le problème se résume à :

$$\text{Trouver } \vec{A} e^{j\varphi} \in V \text{ tel que } \forall \vec{\Psi} \in V : a(\vec{A} e^{j\varphi}; \vec{\Psi}) = l(\vec{\Psi})$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} V = \{ \vec{v} \in H_{rot}^1(\Omega)^3 / \nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \vec{v} \times \vec{n} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma \} \\ a(\vec{A}; \vec{\Psi}) = \int_{\Omega} \sigma \omega j \vec{A} e^{j\varphi} \cdot \vec{\Psi} + \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} e^{j\varphi} \cdot \nabla \times \vec{\Psi} \\ l(\vec{\Psi}) = \int_{\Omega} \vec{J}_S \cdot \vec{\Psi} \end{array} \right.$$

Remarque :

Il apparaît clairement dans l'écriture de la formulation faible ci-dessus, que la solution du problème est un vecteur complexe ( $\vec{A} e^{j\varphi} \Rightarrow \vec{A}[\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)]$ ) et que le second membre de l'équation est un vecteur réel ( $\vec{J}_S$ ).

### 3.1.5.2. Discretisation spatiale : les éléments finis d'arête

Les éléments finis d'arête tels qu'ils ont été introduits par Nédélec [NEDELEC-1980 ; NÉDÉLEC-1986] s'imposent comme un outil naturel pour la résolution des équations de Maxwell [BOSSAVIT-1993]. En effet, d'un point de vue mathématique, ils permettent de construire des espaces d'approximation conforme de l'espace  $H_{rot}^1$  qui intervient de façon naturelle dans la formulation variationnelle de ces équations. D'autre part, d'un point de vue physique et pratique, ils permettent par exemple de tenir compte des discontinuités des champs électromagnétiques aux interfaces entre différents matériaux mais aussi d'implémenter de façon simple des conditions aux limites de type conducteur parfait ou impédance de surface. Toutefois, si l'on s'intéresse à des problèmes en régime transitoire et en

géométrie complexe, ceux-ci imposent en principe l'utilisation de maillages triangulaires (2D) ou tétraédriques (3D) [ELMKIES-1996].

La principale particularité des éléments de Nédélec par rapport aux éléments traditionnels est d'avoir pour degrés de liberté la composante tangentielle de la variable aux arêtes des éléments (Figure 55).

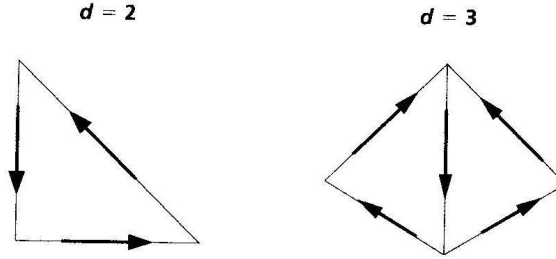


Figure 55 : Degrés de liberté pour un élément de Nédélec de dimension 2 ou 3 [ERN-2005]

Soit un domaine discrétisé  $\Omega^h$  borné des frontières  $\Gamma_0^h$  et  $\Gamma_1^h$ . Soit  $V^h$  un sous ensemble de  $H_{rot}^1(\Omega^h)$  tel que défini en (51).

$$V^h = \left\{ \vec{v}^h \in H_{rot}^1(\Omega^h)^3 / \nabla \cdot \vec{v}^h = 0 \text{ dans } \Omega^h \text{ et } \vec{v}^h \times \vec{n} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma^h \right\} \quad (51)$$

Soient  $\vec{\Psi}^h$  un vecteur quelconque de  $V^h$  et  $\vec{\varphi}_i(\vec{x})$  les vecteurs constituant une base complète de  $V^h$ . Si  $\vec{A}^h(\vec{x})$  est un champ vectoriel solution du problème, nous pouvons alors le discrétiser au sens de Nédélec :

$$\begin{aligned} \text{si } \vec{A}^h \in V^h \text{ alors } \vec{A}^h(\vec{x}) &= \sum_{\text{arêtes}} (\vec{A}_i^h \cdot \vec{t}_i) \vec{\varphi}_i^h(\vec{x}) \\ \text{et } \left\{ \begin{array}{l} a(\vec{A}^h; \vec{\Psi}^h) = l(\vec{\Psi}^h) \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{arêtes}} a(\vec{\varphi}_j^h; \vec{\varphi}_i^h) (\vec{A}_j^h \cdot \vec{t}_j) = l(\vec{\varphi}_i^h) \end{array} \right. & \quad (52) \end{aligned}$$

Remarque :

Lors de la présentation de la formulation faible au paragraphe précédente (paragraphe 3.1.5.1), nous avons souligné le fait que le vecteur solution du problème se trouve dans l'espace des complexes. La solution discrétisée  $\vec{A}^h$  est alors un vecteur complexe et sera implémenté en tant que tel dans le code de calcul.

Les vecteurs  $\vec{\varphi}_i(\vec{x})$  sont les fonctions de forme associées aux arêtes  $i$  des éléments de Nédélec.

Considérons un élément fini traditionnel type P1 pour lequel les degrés de liberté sont associés aux nœuds. Soit  $\phi_i(\vec{x})$  la fonction de forme associée au nœud  $i$ . Alors on peut écrire la fonction de forme associée à l'arête entre les nœuds  $i$  et  $j$  comme suit :

$$\vec{\varphi}_{i \rightarrow j} = (\vec{\nabla} \phi_j) \phi_i - \phi_j (\vec{\nabla} \phi_i) \quad (53)$$

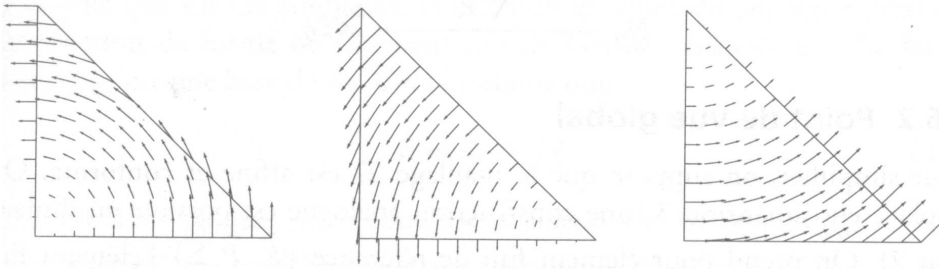


Figure 56 : Représentation graphique des fonctions de forme d'un élément triangulaire (2D) de Nédélec [ERN-2005]

La Figure 56 montre le mouvement de rotation que forment les fonctions de forme autour du nœud opposé à l'arrête associée. On peut alors en déduire que la divergence de chaque fonction de forme est nulle, ce qui est aisément vérifiable à l'aide de l'équation (53). On peut alors démontrer que l'espace  $V^h$  est bien conforme à l'espace  $V$ .

Connaissant les fonctions de forme  $\vec{\varphi}_i(\vec{x})$ , nous pouvons résoudre l'équation (52) à l'aide d'un système matriciel linéaire :

$$\begin{aligned}
 [K] \cdot \{u\} &= \{F\} \quad \text{avec} \\
 [K]_{ij} &= a(\vec{\varphi}_j^h; \vec{\varphi}_i^h) = \sum_{elt} \left[ \int_{\Omega_{elt}} \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{\varphi}_j^h \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\varphi}_i^h + \int_{\Omega_{elt}} j \sigma \omega (\vec{\varphi}_j^h \cdot \vec{\varphi}_i^h) \right] \\
 \{u\}_j &= \vec{A}_j^h \cdot \vec{t}_j \\
 \{F\}_i &= l(\vec{\varphi}_i^h) = \sum_{elt} \int_{\Omega_{elt}} \vec{J}_S \cdot \vec{\varphi}_i^h
 \end{aligned} \tag{54}$$

Remarque :

L'équation matricielle ci-dessus est définie dans l'espace des complexes. L'écriture de la matrice  $K$  souligne sa décomposition en une partie réelle et une partie imaginaire non nulles. Le vecteur solution  $u$  est également composé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire dont le rapport définit le déphasage avec le courant source. Par contre, le courant source en second membre,  $F$ , a une partie imaginaire nulle (déphase nul par rapport à lui-même).

### 3.1.6. Le ferromagnétisme

Nous avons vu au chapitre 1 que la susceptibilité magnétique est fortement dépendante du champ magnétique  $H$  et de la température. Nous ne pouvons tenir compte de la dépendance de la perméabilité magnétique au champ magnétique par une méthode itérative standard dans le cas d'une résolution harmonique. En effet le ferromagnétisme induit des harmoniques secondaires dans le signal. Des méthodes d'approche multi harmonique ont été développées afin de résoudre ce problème [WILLCOCK-1983]. Dans la perspective de développer ultérieurement le code avec un schéma de résolution temporel, le rendant ainsi applicable à une grande majorité des procédés électromagnétiques de basse et moyenne fréquences, nous n'aborderons pas les approches multi harmoniques dans ce mémoire.



Nous discuterons dans ce paragraphe la dépendance de la perméabilité magnétique au champ  $H$  en vue d'une résolution des équations de Maxwell avec discrétisation temporelle. La dépendance à la température ne dépendant pas du choix de modélisation harmonique ou temporelle, elle sera discutée au paragraphe 3.3.3.

Pour la modélisation numérique des phénomènes électromagnétiques, deux définitions de la perméabilité apparaissent dans la littérature. La plus commune des deux est de dire que  $\mu$  est le rapport de l'intensité de l'induction magnétique sur l'intensité du champ magnétique [CHABOUDEZ-1994 ; GARBULSKY-1997] comme l'équation (55) l'indique. L'autre définition de  $\mu$  pouvant être trouvée dans la littérature [BARRERE-1992 ; FAVENNEC-2002a] est la dérivée de l'induction magnétique en fonction du champ magnétique, exprimée en (56).

$$\mu = \frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{H}\|} = \mu_0 \cdot \mu_r = \mu_0 (1 + \chi) \quad (55)$$

$$\mu = \frac{\partial \|\vec{B}\|}{\partial \|\vec{H}\|} = \mu_0 \cdot \mu_r = \mu_0 \left[ 1 + \chi + \frac{\partial \chi}{\partial \|\vec{H}\|} \cdot \|\vec{H}\| \right] \quad (56)$$

La première relation définit un comportement linéaire alors que la seconde est plus précise. Mais quelle que soit la définition choisie, nous avons besoin d'une formulation de la susceptibilité magnétique valable dans le plus large domaine de matériaux et de procédés de chauffage par induction. Pour cela, une première étape de simplification du modèle est nécessaire : négliger le phénomène d'hystérésis. [GARBULSKY-1997] affirme que la puissance dissipée par l'effet d'hystérésis (proportionnelle à l'aire de la boucle) est négligeable par rapport à la puissance générée par effet Joule, dans le cas d'un acier plongé dans un champ supérieur à  $10^4 \text{ A.m}^{-1}$ . Néanmoins, comme le montre [SAQUET-1999], la diversité des courbes d'aimantation dans les aciers est très grande. Cette approximation est une faiblesse de tous les modèles d'évolution de perméabilité magnétique.

[SKOCZKOWSKI-1989] propose alors une formulation donnant le domaine de validité de cette approximation pour des aciers de teneur en carbone comprise entre 0,22 et 0,99 : si  $H > 10^4 \text{ A.m}^{-1}$  l'erreur due à l'approximation de  $\mu$  dans la gamme d'application donnée est inférieure à 2,5%. L'hypothèse sur la valeur de  $H$  est vérifiée dans la plus grande partie des installations de chauffage par induction. Par contre, l'utilisation de ce mode de chauffage ne s'applique pas uniquement à ce type d'aciers mais aussi aux aciers plus faiblement carbonés (comme le HR45) ou aux aciers alliés. [CHABOUDEZ-1994] et [FAVENNEC-2002a] proposent alors d'utiliser la relation de Frölich-Kenelly pouvant s'appliquer à une grande diversité de matériaux :

$$\vec{B} = \left( \mu_0 + \frac{\alpha}{\beta + \|\vec{H}\|} \right) \vec{H} \quad (57)$$

L'expression (57) nécessite de déterminer les coefficients constants intrinsèques au matériau  $\alpha$  et  $\beta$ . La détermination de façon directe en relevant les valeurs de  $B$  et de  $H$  à l'aide d'un flux-mètre est relativement difficile. Une autre méthode de détermination peut être l'analyse inverse [FAVENNEC-2002b]. [CHABOUDEZ-1994] donne les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  pour un acier ST 44-3 (environ 0,2%C ; 0,04%P ; 0,04%S) :  $\beta = 200 \text{ A.m}^{-1}$  et  $\alpha = 2000\mu_0\beta \approx 0.5 \text{ T}$ .

## SIMULATION THERMOELECTROMAGNETIQUE

Si nous considérons  $\mu$  défini par l'expression (56), on retrouve l'expression de la perméabilité magnétique et de la perméabilité magnétique relative en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  (58).

$$\mu(\|\vec{H}\|) = \mu_0 \mu_r = \mu_0 \left[ 1 + \frac{\alpha}{\mu_0(\beta + \|\vec{H}\|)} - \frac{\alpha \|\vec{H}\|}{\mu_0(\beta + \|\vec{H}\|)^2} \right] \quad (58)$$

Cette expression pourrait être suffisante à la résolution si nous connaissions H et nous cherchions B. Or, étant dans le cas contraire, nous avons besoin de la transformation inverse permettant ainsi le passage de B à H. François Bay [BAY-2003] propose la relation de second ordre suivante :

$$\|\vec{H}\| = \frac{1}{2\mu_0} \left( \|\vec{B}\| - \alpha - \mu_0 \beta + \sqrt{(\alpha + \mu_0 \beta - \|\vec{B}\|)^2 + 4\mu_0 \beta \|\vec{B}\|} \right) \quad (59)$$

De la relation (59), on peut mettre en place un algorithme permettant le calcul du système (54) en tenant compte de la dépendance de  $\mu$  au champ magnétique H. La Figure 57 présente un algorithme qui, à chaque itération, calculera les champs électromagnétiques à partir d'une perméabilité magnétique déduite du champ H à l'itération précédente. Le processus itère jusqu'à convergence des résultats. La condition de convergence portera sur la puissance dissipée par effet Joule sur chacun des éléments du maillage :

$$\frac{P_{em}^{i+1} - P_{em}^i}{P_{em}^i} < \varepsilon \quad (60)$$

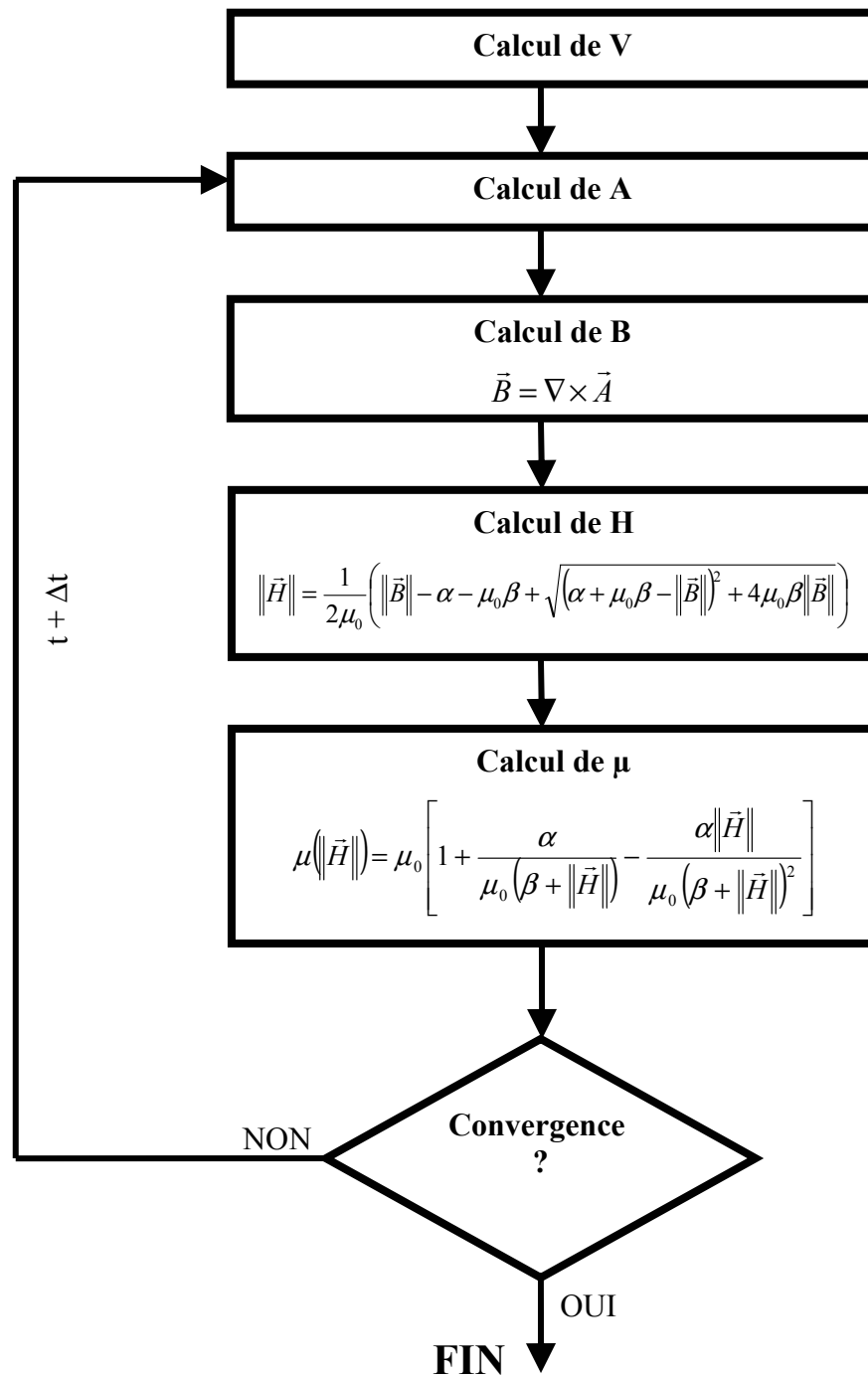


Figure 57 : Algorithme de résolution électromagnétique tenant compte de la dépendance de la perméabilité magnétique au champ magnétique

## 3.2. SIMULATION THERMIQUE

La simulation du chauffage par induction nécessite la résolution d'un problème thermique. Nous utiliserons dans notre code de calcul le solveur thermique du logiciel Forge3 développé au sein du laboratoire. Nous reprendrons dans cette partie les grandes lignes des méthodes et stratégies utilisées dans le code. Pour plus de détail sur la résolution du problème thermique, se reporter à la thèse de Nathalie Soyris [SOYRIS-1990].

### 3.2.1. Equation de la chaleur

Le problème thermique à traiter est instationnaire. Il est régi par l'équation de la chaleur et par les conditions aux limites sur les surfaces libres. En tout point de  $\Omega$ , on peut écrire la loi de conservation de l'énergie interne (61) qui lie l'évolution de température au flux de chaleur et aux sources internes de chaleur (terme de couplage). Associée un matériau obéissant à une loi de conduction isotrope (62), on obtient l'équation de la chaleur sous la forme proposée en (63).

$$\rho C \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \vec{q} + \dot{W} \quad (61)$$

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T \quad (62)$$

$$\rho C \dot{T} - \nabla \cdot (k \vec{\nabla} T) = \dot{W} \quad (63)$$

$\dot{W}$  est l'énergie interne venant de différents couplages comme la puissance dissipée par effet Joule pour l'électromagnétisme ou la dissipation des déformations pour la mécanique. Les conditions aux limites sur  $\Gamma$  peuvent être de 3 types : convection et rayonnement (linéarisé) sur  $\Gamma_0$  (64), température imposée (Dirichlet) sur  $\Gamma_1$  (65) et flux sortant imposé (Neumann) sur  $\Gamma_2$  (66).

$$-k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = h(T - T_{ext}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} h = h_{cv} + h_r \\ h_r = \varepsilon_r \sigma_r (T + T_{ext})(T^2 + T_{ext}^2) \end{cases} \quad (64)$$

$$T = T_{imp} \quad (65)$$

$$-k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \phi_{imp} \quad (66)$$

### 3.2.2. Résolution numérique

#### 3.2.2.1. Discrétisation spatiale

De la même manière que nous avons établi la formulation faible dans la résolution du laplacien du potentiel électrique  $V$  (paragraphe 3.1.4.1), nous pouvons écrire la formulation faible de l'équation de la chaleur (67). Après discrétisation en éléments finis de type P1, on obtient le système matriciel énoncé en (68).

$$\int_{\Omega} \rho C \dot{T} \Psi \, dv + \int_{\Omega} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} \Psi \, dv = \int_{\Omega} \dot{W} \Psi \, dv - \int_{\Gamma_1} h(T - T_{ext}) \Psi \, ds - \int_{\Gamma_3} \phi_{imp} \Psi \, ds \quad (67)$$

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{Q\} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} [C]_{ij} = \sum_{elt} \int_{\Omega_{elt}} \rho C \varphi_i^h \varphi_j^h dv \\ [K]_{ij} = \sum_{elt} \left[ \int_{\Omega_{elt}} k \vec{\nabla} \varphi_i^h \cdot \vec{\nabla} \varphi_j^h dv + \int_{\Gamma_1} h \varphi_i^h \varphi_j^h ds \right] \\ \{Q\}_i = \sum_{elt} \left[ \int_{\Omega_{elt}} \dot{W} \varphi_i^h dv + \int_{\Gamma_1} h T_{ext} \varphi_i^h ds - \int_{\Gamma_3} \phi_{imp} \varphi_i^h ds \right] \end{array} \right. \quad (68)$$

Par rapport au système (42) que nous avons vu au paragraphe 3.1.4.2, le système (68) fait apparaître 2 difficultés supplémentaires :

1. la résolution nécessite un schéma d'intégration temporel pour exprimer les dérivées de la température par rapport au temps,
2. les matrices  $[C]$ ,  $[K]$  et le vecteur  $\{Q\}$  dépendent de la température ce qui rend le système non linéaire.

### 3.2.2.2. Discrétisation temporelle

On partitionne le temps total en une série d'intervalles  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ . Le choix de cet intervalle de temps peut être important dans la résolution globale du système. Charles Aliaga [ALIAGA-2000] propose un algorithme de contrôle automatique du pas de temps par minimisation d'erreur, que nous ne discuterons pas ici.

Le choix du schéma de différentiation temporelle choisi par [SOYRIS-1990] est un schéma à 3 pas de temps. Si nous nous plaçons au temps  $t^*$  et en un point de température  $T^*$ , le temps et la température seront discrétisés comme écrit en (69) et la dérivée de la température sera écrite comme en (70).

$$t^* = \alpha_1 t_{i-1} + \alpha_2 t_i + \alpha_3 t_{i+1} \quad \text{et} \quad T^* = \alpha_1 T_{i-1} + \alpha_2 T_i + \alpha_3 T_{i+1} \quad (69)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta t_1 = t_i - t_{i-1} \\ \Delta t_2 = t_{i+1} - t_i \end{array} \right.$$

$$\dot{T}^* = (1 - \beta) \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta t_1} + \beta \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t_2} \quad (70)$$

Nous avons donc le choix sur les paramètres  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  et  $\beta$ . Toutefois, on souhaite que le schéma d'intégration temporelle soit inconditionnellement stable et consistant à un ordre le plus élevé possible. [SOYRIS-1990] montre que le schéma est consistant au second ordre si :

$$\text{cas general: } \Delta t_1 \neq \Delta t_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = 1 - \alpha_1 + \left( \frac{1}{2} - \alpha_1 \right) \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} - \frac{1}{2} \beta \left( 1 + \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \right) \\ \alpha_3 = \left( \alpha_1 - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} + \frac{1}{2} \beta \left( 1 + \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \right) \end{array} \right. \quad (71)$$

Le schéma est donc piloté par 2 paramètres :  $\alpha_1$  et  $\beta$ . La stabilité du schéma est assurée, pour un pas de temps fixe, dans les conditions énoncées en (72). Il sera admis qu'il en est de même pour des pas de temps différents.

$$\begin{cases} \beta \geq \frac{1}{2} \\ \alpha_1 > \frac{1}{2}(1-\beta) \end{cases} \quad (72)$$

Nous avons choisi un schéma de Dupont. L'initialisation se fait avec un schéma de Crank-Nicholson à un pas de temps.

$$\text{Dupont : } \alpha_1 = \frac{1}{4} \quad ; \quad \beta = 1 \quad (73)$$

$$\text{Crank - Nicholson : } \alpha_1 = 0 \quad ; \quad \beta = 1 \quad (74)$$

### 3.2.2.3. Linéarisation du système matriciel

Le système étant non linéaire, il peut être résolu par des méthodes itératives de type Newton-Raphson. Ces méthodes sont coûteuses en temps de calcul et la méthode retenue par [SOYRIS-1990] est la linéarisation des équations par la formule de Zlamal [ZLAMAL-1977] qui propose pour toute grandeur W la linéarisation :

$$W^* = C_0 W_{i-1} + C_1 W_i \quad (75)$$

Le système à résoudre s'écrit alors :

$$[C^*] \left\{ (1-\beta) \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta t_1} + \beta \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t_2} \right\} + [K^*] \{ \alpha_1 T_{i-1} + \alpha_2 T_i + \alpha_3 T_{i+1} \} = \{Q^*\} \quad (76)$$

La linéarisation peut être appliquée à la variable t qui doit également être cohérente avec la relation (69). On peut alors déterminer les expressions de  $C_0$  et  $C_1$  en fonction des paramètres de [SOYRIS-1990] (77).

$$\begin{aligned} t^* &= \alpha_1 (t - \Delta t_1) + \alpha_2 t + \alpha_3 (t + \Delta t_2) = C_0 (t - \Delta t_1) + C_1 t \\ \Leftrightarrow \begin{cases} C_0 = \alpha_1 - \alpha_3 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \\ C_1 = \alpha_2 - \alpha_3 \left( 1 + \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \right) \end{cases} \end{aligned} \quad (77)$$

La linéarisation de Zlamal appliquée aux matrices  $[C^*]$ ,  $[K^*]$  et au vecteur  $\{Q^*\}$  du système différentié (76) nous permet d'aboutir in fine à un système linéaire ayant pour inconnue la variable nodale  $T^*$  à l'instant  $t^*$ .

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} [A] = f(C_{i-1}; C_i; K_{i-1}; K_i; t_{i-1}; t_i; t_{i+1}; \alpha_1; \beta) \\ \{X\} = T^* \\ \{B\} = g(C_{i-1}; C_i; Q_{i-1}; Q_i; t_{i-1}; t_i; t_{i+1}; \alpha_1; \beta) \end{cases} \quad (78)$$

Connaissant le vecteur des valeurs nodales de  $T^*$ , on en déduit de l'équation (69), la valeur de  $T$  à l'instant  $i+1$  :

$$T_{i+1} = \frac{1}{\alpha_3} (T^* - \alpha_1 T_{i-1} - \alpha_2 T_i) \quad (79)$$

### 3.2.3. Problèmes liés aux traitements thermiques

#### 3.2.3.1. Le choc thermique

Le traitement thermique fait intervenir des vitesses de refroidissement très rapides. Cela peut entraîner en surface du matériau des chocs thermiques. Ce phénomène est lié à la distance  $d_p$ , définie comme étant la distance de la surface à laquelle l'essentiel du choc thermique est ressenti, et au temps de pénétration  $t_p$ , via la diffusivité thermique  $a = k/\rho C$ .

$$t_p = \frac{d_p^2}{4a} \quad (80)$$

Si on retranscrit cette notion physique dans un domaine discrétisé par éléments finis, la solution du choc thermique ne pourra être représentée correctement que lorsqu'une fraction du flux thermique aura atteint la première couche interne d'éléments. Soit  $d$  la longueur caractéristique d'un élément frontière. Le choc thermique sera ressenti sur tout l'élément à partir du temps caractéristique  $t_c$ .

$$t_c = \frac{d^2}{4a} \quad (81)$$

Cette relation nous permet de lier la discrétisation temporelle via le pas de temps à la discrétisation spatiale via la taille des éléments frontière. Yves Tronel [TRONEL-1993] montre que les oscillations thermiques ne sont pas dues à l'intégration temporelle mais bien à la discrétisation spatiale. Ainsi, pour une taille de maille  $d$  imposée, le pas de temps évitant les oscillations ne devra pas être plus petit que le temps critique  $t_c$ .

$$\Delta t \geq t_c \quad (82)$$

#### 3.2.3.2. La thermique asynchrone

Dans le cas de la forge à chaud, le phénomène du choc thermique peut également intervenir lors du contact des outils froids avec la pièce. Le logiciel Forge3 permet d'avoir des pas de temps inférieurs au temps critique  $\Delta t_c$  qui peuvent être imposé par la résolution mécanique ou, dans notre cas, par la métallurgie.

En effet, si le pas de temps désiré  $\Delta t$  ne correspond pas au critère du choc (82), la température solution  $T_{i+1}$  au temps  $t + \Delta t$  sera calculée à partir de la température  $T_{i+1}^{asyn}$ , solution au temps  $t + \Delta t_c$ .

$$T_{i+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta t_c}\right) T_i + \frac{\Delta t}{\Delta t_c} T_{i+1}^{asyn} \quad (83)$$

### 3.2.3.3. Cas tridimensionnel

L'application de la thermique asynchrone en 3 dimensions soulève la question de la détermination de la longueur caractéristique  $d$ , notamment pour des maillages tétraédriques non structuré, anisotrope et de taille hétérogène. Une mesure objective serait de déterminer  $d$  à partir de la taille des arêtes des éléments de surface projetés dans le sens du flux thermique. Une mesure moins coûteuse mais tout de même efficace est implémentée. Il s'agit de moyenner sur les éléments de frontière les carrés des distances entre 2 nœuds (vecteur arête  $\vec{t}$ ) du même élément, pondérés par un coefficient d'anisotropie (poids  $p$ ) et par l'inverse de la diffusivité thermodépendante. Le pas de temps critique est alors calculé ainsi :

$$\Delta t_c = \frac{\sum_{elt \in \Gamma} \sum_{arête \in elt} \frac{\|p\vec{t}_i\|^2}{a(T)}}{nb\ elt} \quad (84)$$

La solution thermique au temps  $t + \Delta t$  va alors se déterminer en trois étapes. Tout d'abord, nous utilisons le schéma d'intégration temporelle linéarisé (résolution de (78)) en imposant un pas de temps  $\Delta t_2$  (voir linéarisations (69) et (70)) comme étant le plus grand pas de temps entre le pas de temps critique et le pas de temps désiré :

$$\Delta t_2 = \max(\Delta t_c; \Delta t) \quad (85)$$

Nous en arrivons donc à la variable nodale solution  $T^*$  correspondant au temps  $t^*$ . La température asynchrone  $T_{i+1}^{asyn}$  peut alors s'écrire :

$$T_{i+1}^{asyn} = \frac{1}{\alpha_3} (T^* - \alpha_1 T_{i-1} - \alpha_2 T_i) \quad (86)$$

Ce qui finalement nous permet de connaître  $T_{i+1}$ , la variable nodale cherchée correspondant au temps  $t + \Delta t$  via les relation (83) et (86).



### 3.3. COUPLAGES ENTRE ELECTROMAGNETISME ET THERMIQUE

#### 3.3.1. Le couplage « ultra faible »

Le temps d'une période électromagnétique peut varier de  $10^{-2}$ s pour une fréquence de 100Hz à  $10^{-6}$ s pour une fréquence de 1MHz. En comparant à l'ordre de grandeur d'un pas de temps thermique (de l'ordre de la seconde), nous pouvons dire que le temps caractéristique de l'électromagnétisme est très petit devant le temps caractéristique de la thermique (Figure 58). Cette constatation va nous permettre d'émettre deux hypothèses nécessaires à une résolution harmonique de l'électromagnétisme :

1. le un champ de température reste constant pendant toute une période électromagnétique,
2. la puissance dissipée par effet Joule peut être moyennée sur une période électromagnétique

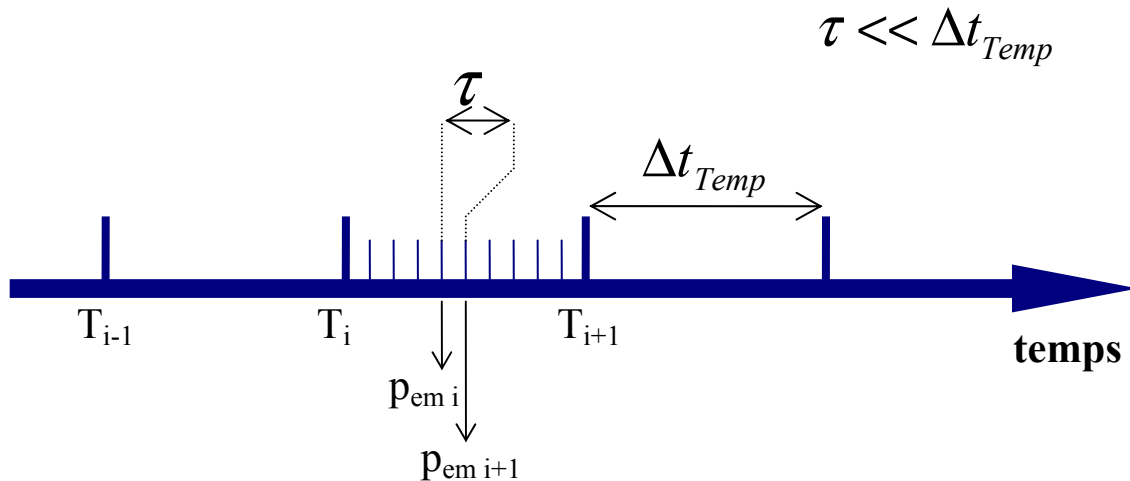


Figure 58 : Schématisation de la différence d'ordre de grandeur des temps caractéristiques de l'électromagnétisme et de la thermique

#### 3.3.2. Effets du champ magnétique sur la température

Nous avons vu au paragraphe 3.1 que le champ électromagnétique généré par les courants alternatifs traversant l'inducteur, crée un courant induit dans la pièce métallique. Ces courants de Foucault dissipent de la chaleur par effet Joule. La puissance active dissipée par effet Joule  $P_{em}$  est définie macroscopiquement par la relation (87). où  $I$  est le courant efficace traversant le conducteur et  $R$  est la résistance du conducteur :

$$P_{em} = RI^2 \quad (87)$$

Nous pouvons retranscrire la relation (87) en local afin d'exprimer la densité de puissance dissipée par effet Joule en fonction de la conductivité électrique et de la densité de courant

efficace (88) en chaque point matériel du domaine  $\Omega$ .  $\text{Re}[\ ]$  représente la partie réelle d'un complexe.

$$p_{em} = \frac{1}{\sigma} J^2 \quad \text{avec} \quad J^2 = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \left\| \text{Re}[\vec{J}(\vec{x}; t)] \right\|^2 dt \quad (88)$$

Cherchons d'abord à calculer la partie réelle de la densité de courant quelque soit l'endroit où on se trouve dans le domaine  $\Omega$  (pièce, air ou inducteur). Considérons alors le courant source comme une fonction en cosinus.

$$\begin{aligned} \text{Re}[J(\vec{x}; t)] &= \text{Re}[j\omega\sigma \vec{A}(\vec{x})e^{j(\omega t + \varphi)} + \vec{J}_s(\vec{x})e^{j\omega t}] \\ \text{Re}[J(\vec{x}; t)] &= -\omega\sigma \vec{A}(\vec{x})\sin(\omega t + \varphi) + \vec{J}_s(\vec{x})\cos(\omega t) \end{aligned} \quad (89)$$

La norme au carré de la partie réelle du vecteur densité de courant peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \left\| \text{Re}[\vec{J}(\vec{x}; t)] \right\|^2 &= (\omega\sigma)^2 \left\| \vec{A}(\vec{x}) \right\|^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ &\quad + \left\| \vec{J}_s(\vec{x}) \right\|^2 \cos^2(\omega t) \\ &\quad - 2\omega\sigma \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{J}_s(\vec{x}) \cos(\omega t) \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (90)$$

Rappelons que l'intégration sur une période d'un cosinus (ou sinus) au carré est égale à  $\frac{1}{2}$  et utilisons les formules d'addition et de l'angle double pour calculer l'intégrale du troisième terme de (90) :

$$\begin{aligned} \sin(\omega t + \varphi) &= \sin(\omega t)\cos(\varphi) + \cos(\omega t)\sin(\varphi) \\ \Rightarrow \int \cos(\omega t)\sin(\omega t + \varphi) &= \cos(\varphi) \int \sin(\omega t)\cos(\omega t) + \sin(\varphi) \int \cos^2(\omega t) \\ &= \frac{\cos(\varphi)}{2} \int \sin(2\omega t) + \sin(\varphi) \int \cos^2(\omega t) \end{aligned} \quad (91)$$

On obtient alors en moyennant (90) sur une période :

$$p_{em} = p_{totale} - p_{réactive} = \frac{\sigma\omega^2 \left\| \vec{A}(\vec{x}) \right\|^2 + \frac{1}{\sigma} \left\| \vec{J}_s(\vec{x}) \right\|^2}{2} - \omega \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{J}_s(\vec{x}) \sin(\varphi) \quad (92)$$

La puissance dissipée par effet Joule qui est une puissance active, est écrite comme la différence d'une puissance totale (puissance induite + puissance source) et d'une puissance réactive permettant d'entretenir le système oscillant via le déphasage  $\varphi$ . Nous avons précisé précédemment que nous nous plaçons en un point quelconque du domaine  $\Omega$  (air, pièce ou inducteur) mais il est à noter que par l'écriture (92) on ne peut définir la densité de puissance dans l'air qui est un matériau isolant ( $\sigma = 0$ ). La densité de courant source n'ayant une valeur non nulle que dans l'inducteur, on peut considérer  $p_{em} = 0$  dans l'air. Le couplage thermo électromagnétique se manifeste alors à travers le second membre de l'équation de la chaleur (63) :

$$\begin{aligned}
 \dot{W} &= 0 && \text{dans l'air} \\
 \dot{W} &= \frac{\sigma \omega^2}{2} \|\vec{A}(\vec{x})\|^2 && \text{dans la pièce traitée} \\
 \dot{W} &= \frac{\sigma \omega^2}{2} \|\vec{A}(\vec{x})\|^2 + \frac{1}{2\sigma} \|\vec{J}_s(\vec{x})\|^2 - \omega \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{J}_s(\vec{x}) \sin(\varphi) && \text{dans l'inducteur}
 \end{aligned} \tag{93}$$

Plaçons nous maintenant dans l'espace discrétisé  $\Omega^h$ . Nous calculerons les sources de chaleur dissipées par effet Joule avec une approximation de type P0, c'est-à-dire que nous calculerons sa valeur au barycentre de chaque élément et considèrerons que la valeur est constante dans le volume de chaque élément. Après réécriture dans l'espace discrétisé, on peut alors réécrire dans l'équation de la chaleur sous forme matricielle (68) :

$$\{Q\}_i = \sum_{elt} \sum_{k=1}^6 \left[ \frac{\sigma \omega^2}{2} (\vec{A}_k^h \cdot \vec{t}_k) + \frac{1}{2\sigma} (\vec{J}_{S_k}^h \cdot \vec{t}_k) - \omega (\vec{A}_k^h \cdot \vec{t}_k) (\vec{J}_{S_k}^h \cdot \vec{t}_k) \sin(\varphi) \right] \int_{\Omega_{elt}} \vec{\phi}_k^h(\vec{x}_b) \phi_i^h \tag{94}$$

k est l'indice du numéro des arêtes dans l'élément considéré,  $\vec{x}_b$  représente les coordonnées du barycentre de l'élément,  $\phi_i^h$  est la fonction de forme associée à l'élément et au nœud i, et  $\vec{\phi}_k^h$  est la fonction de forme vectorielle associée à l'arête d'indice k dans l'élément.

### 3.3.3. Effets de la température sur la résolution électromagnétique

#### 3.3.3.1. Dépendance de la perméabilité magnétique à la température

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, les moments magnétiques au sein du matériau sont fortement influencés par le champ magnétique et la température. On peut faire l'hypothèse d'un découplage des influences en écrivant la susceptibilité magnétique comme le produit d'une fonction de H et d'une fonction de T.

$$\chi(\|\vec{H}\|, T) = g(\|\vec{H}\|) f(T) \tag{95}$$

Nous sommes relativement libres sur le choix de la fonction f (tant qu'elle puisse être identifiable par l'expérience), le but étant de choisir une forme correspondant au mieux à une grande par des matériaux. Nous avons néanmoins des contraintes dont il faut tenir compte : f doit être égale à 1 pour un matériau ferromagnétique et brutalement décroître avec l'augmentation de température au voisinage de la température de Curie pour s'annuler à partir de celle-ci. Pour exprimer cela, écrivons les deux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} f(T = 0) = 1 \\ f(T = T_c) = 0 \end{cases} \tag{96}$$

Nous pouvons trouver différentes formes de l'expression de f(T) dans la littérature. Par exemple, Eric Barrère [BARRERE-1992] propose dans sa thèse une forme exponentielle (97), alors que [CHABOUDEZ-1994] propose une forme en racine carrée (98) et que [FAVENNEC-2002a] et [SKOCZKOWSKI-1989] proposent une forme en puissance de la température (99).

$$f(T) = 1 - \exp\left(\frac{T - T_C}{\tau_0}\right) \quad (97)$$

$$f(T) = \sqrt{\frac{T_C - T}{T_C}} \quad (98)$$

$$f(T) = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^\gamma \quad (99)$$

L'expression (98) de  $f(T)$  ne dépend que de la température de Curie et ne permet pas de choisir une vitesse de descente de la fonction avec l'augmentation de la température. Nous choisirons d'implémenter l'expression (99), équivalente à l'expression (97) et simple d'implémentation.

### 3.3.3.2. Dépendance de la conductivité électrique à la température

Nous avons vu que la formulation des équations de Maxwell en potentiels nous impose l'hypothèse d'une conductivité électrique constante, ce qui se justifie pendant une période électromagnétique avec le couplage ultra faible entre la thermique et l'électromagnétisme. Néanmoins nous devons pouvoir tenir compte de la dépendance de la conductivité électrique à la température. La Figure 59 montre deux comportements différents de la conductivité avec la température, pour deux aciers différents. L'acier inoxydable voit sa conductivité dépendre de sa phase métallurgique alors que l'acier HR45 ne paraît pas être dans le même cas.

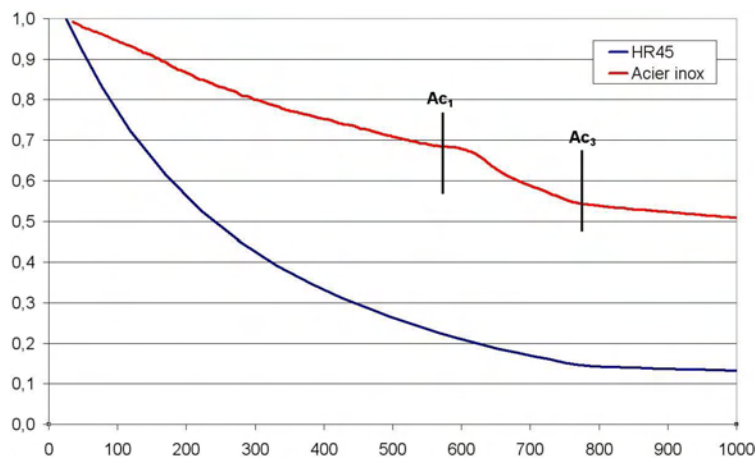


Figure 59 : Rapport de conductivité électrique de deux matériaux (HR45 faiblement allié et acier inoxydable fortement allié) par rapport à leur valeur à l'ambient.

Différentes expressions pour l'évolution de  $\sigma$  en fonction de  $T$  peuvent être trouvées dans la littérature. Par exemple, dans [CHABOUDEZ-1994] les auteurs proposent deux expressions différentes suivant qu'il s'agisse du cuivre ou d'un acier ST44-3. Le cuivre est approximé par une fonction polynomiale du 3<sup>ème</sup> degré alors que l'acier est approximé par une fonction affine dont les paramètres changent au passage de la température de Curie (100). [SKOCZKOWSKI-1989] propose également une fonction affine pour un acier mais sans changement de paramètres, ce qui paraît être une hypothèse assez forte lorsqu'on passe les températures de Curie et de changement de phase.

[BARRERE-1992] donne deux expressions plus complexes que la fonction affine qui permettent de représenter l'évolution de  $\sigma$  pour toutes les températures sans changement de paramètres. Tout d'abord, il propose une forme exponentielle décrite par un unique paramètre et la conductivité à la température ambiante (101). Cette expression peut poser problème lors de simulations à haute température mais permet d'éviter un passage à une valeur de conductivité négative. Ensuite, il propose également une fonction arctangente (102) particulièrement intéressante pour les simulations à haute température mais comportant 5 paramètres à identifier.

$$\sigma(T) = \sigma_{ref} - k(T - T_{ref}) \quad (100)$$

$$\sigma(T) = \sigma_{20^\circ C} \exp\left(-\frac{T}{\theta}\right) \quad (101)$$

$$\sigma(T) = \frac{\sigma_{20^\circ C}}{\frac{1 + \sigma_{20^\circ C} R}{2} - \frac{1 - \sigma_{20^\circ C} R}{\pi} \text{Arc tan}\left(\frac{T - T_0}{T_r}\right)} \quad (102)$$

Malheureusement, la mesure de la conductivité électrique n'est pas toujours aisée à mesurer et les paramètres à identifier, notamment à haute température. Dans le cas où ces données ne sont pas accessibles, la relation de Wiedemann-Franz permet de lier la conductivité électrique  $\sigma$  à la conductivité thermique  $k$  (103).

$$\frac{k}{\sigma} = 2,3 \cdot 10^8 T \quad (103)$$

Cette formule étant basée sur l'équation de Boltzmann et les énergies électroniques dans la matière, elle n'est valable que pour les métaux purs. Pour les métaux alliés, elle surestimera toujours la valeur de la conductivité électrique.

### 3.3.4. Procédure du couplage thermo électromagnétique

Le calcul thermo électromagnétique nécessite une procédure de couplage entre le module de calcul électromagnétique et le module de calcul thermique. Afin de mettre au point un tel algorithme, nous devons mettre au point un critère de retour du calcul thermique vers le calcul électromagnétique.

Le couplage ultra faible entre l'électromagnétisme et la thermique nous permet de faire l'hypothèse que le champ de température est constant pendant une période électromagnétique. Il nous permet aussi de supposer que le champ de température varie peu d'une période à une autre. Nous pouvons vérifier cela en calculant l'impact sur les paramètres  $\sigma$  et  $\mu$  du nouveau champ de température calculé. On peut même aller plus loin en disant qu'il n'est nécessaire de recalculer les densités de puissances dissipées par effet Joule que si l'impact de l'évolution de température sur les paramètres électromagnétiques est significatif. Cette réflexion nous amène à définir le critère de passage du calcul thermique au calcul électromagnétique :

$$\frac{\sigma(T_{\max}^{i+1}) - \sigma(T_{\max}^i)}{\sigma(T_{\max}^i)} > \varepsilon \quad \text{ou} \quad \frac{\mu(T_{\max}^{i+1}) - \mu(T_{\max}^i)}{\mu(T_{\max}^i)} > \varepsilon \quad (104)$$

## SIMULATION THERMOELECTROMAGNETIQUE

Notre critère est l'évolution des paramètres électromagnétiques la plus élevée sur l'ensemble des points d'intégration du maillage en fonction de la température.

Connaissant nos deux critères cités ci-dessus, nous pouvons maintenant proposer une procédure complète pour le couplage thermo électromagnétique. L'organigramme présenté en Figure 60 schématise cette procédure. Après initialisation du calcul, nous réalisons un premier calcul des champs électromagnétiques et des sources de chaleur dissipées. Nous refaisons ce calcul avec une perméabilité magnétique calculée à partir du champ H résultat et recommençons jusqu'à ce que les sources de chaleur n'évoluent plus. C'est alors que nous injectons leurs valeurs dans l'équation de la chaleur. Nous poursuivons le calcul thermique aussi longtemps que l'évolution des paramètres électromagnétique ne dépasse pas 5%. Nous relançons alors un nouveau calcul électromagnétique.

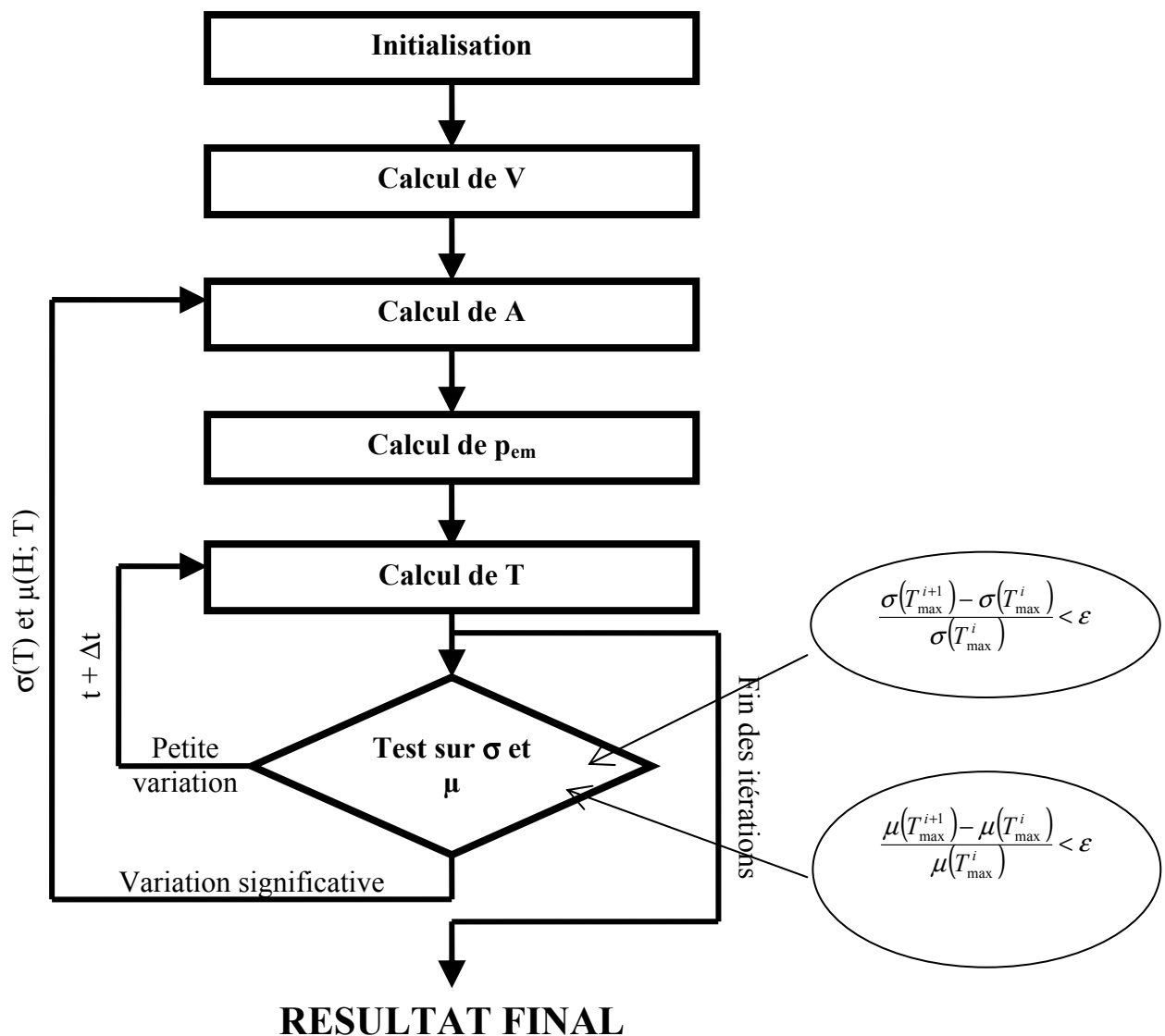


Figure 60 : Organigramme de la procédure de couplage entre électromagnétisme et thermique

### 3.4. APPLICATION AU PROCÉDE SEMI-INDUSTRIEL

#### 3.4.1. Paramètres électromagnétiques

D'un point de vue du matériau, le module de calcul électromagnétique nécessite la connaissance des conductivités électriques et des perméabilités magnétiques relatives de la pièce et de l'inducteur. L'air est isolant et non magnétique. Sa conductivité sera donc nulle et sa perméabilité magnétique égale à celle du vide  $\mu_0$ . L'inducteur, constitué de cuivre, est également non magnétique. Sa perméabilité magnétique est alors également  $\mu_0$ . Pour sa conductivité électrique, nous choisissons de prendre une valeur standard pour le cuivre, soit  $6.10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$ . Le cas de la pièce en acier est un peu plus compliqué car un acier ferritique en dessous de la température de Curie (env.  $750^\circ C$ ) est ferromagnétique. Nous considérerons dans une première approximation que l'acier est amagnétique ce qui implique une perméabilité magnétique égale à  $\mu_0$  pour toute température. Une estimation de l'épaisseur de peau montre qu'elle est nettement supérieure à l'épaisseur de la tôle (rapport d'environ 1,5), ce qui signifie que l'impact de notre hypothèse sur la profondeur de pénétration du champ magnétique sera moindre. Cette approximation influencera principalement la taille de la zone affectée thermiquement durant les 3 premières secondes du chauffage (le temps d'atteindre la température de Curie). Nous ferons également l'hypothèse que la température n'influence pas la conductivité électrique de l'acier et prendrons une valeur standard de  $3.10^6 \Omega^{-1}.m^{-1}$ . Le Tableau 8 résume les propriétés matériau que nous avons utilisées dans le calcul électromagnétique.

	Conductivité électrique	Perméabilité magnétique
Air	0	$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ $12,566.10^{-7} H.m^{-1}$
Inducteur	$6.10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$	
Pièce	$3.10^6 \Omega^{-1}.m^{-1}$	

Tableau 8 : Propriétés matériau pour le calcul électromagnétique

Le calcul électromagnétique nécessite également de connaître certaines propriétés du procédé. Il s'agit de la fréquence de la source d'alimentation de l'inducteur (courant ou tension) et de la valeur efficace de cette source. Dans notre cas, nous allons entrer l'énergie fournie à l'inducteur via la valeur efficace de la densité de courant. Cette donnée d'entrée est alors considérée comme un paramètre numérique que nous avons calé par analyse inverse en étudiant la température en un point de mesure lors des expériences. Nous ne développerons pas ici la procédure utilisée mais le lecteur intéressé peut se référer à [CARDINAUX-2007]. Cette méthode permet de diminuer l'influence de l'hypothèse d'un acier amagnétique.

La fréquence est donnée par le générateur lors des essais expérimentaux. C'est celle que nous entrons dans le code, constante tout au long du procédé :  $f = 9,5 \text{ kHz}$ .

### 3.4.2. Paramètres thermophysiques

Le calcul thermique est au cœur de la simulation. En effet, c'est la température qui génère les transformations de phases et son inhomogénéité qui génère la plastification du matériau. Il est alors très important de caractériser finement les paramètres thermo physiques. Au CEMEF, comme à PSA Peugeot Citroën, nous ne sommes pas équipés pour réaliser de tels essais de caractérisation. Nous avons donc choisi de faire appel à un organisme extérieur pour ces caractérisations (CRITT METALL 2T de Nancy). Il a été demandé par un cahier des charges [CARDINAUX-2005] d'effectuer des essais de mesures pour les chaleurs de transformation de phase  $\Delta H$  (chapitre 5), la chaleur spécifique  $C_p$ , la masse volumique  $\rho$ , la diffusivité thermique, et la conductivité thermique  $k$  de l'ambiante jusqu'à 1200°C. Ces mesures ont été effectuées à 3 reprises pour vérification de la reproductibilité.

Nous détaillerons dans ce paragraphe les modes opératoires mis en place pour la mesure de ces différents paramètres car une large gamme de systèmes de mesure existe, qui en parallèle de certaines différences de valeurs théoriques admises dans la littérature, doivent être expliquées. Nous présenterons également les résultats obtenus.

#### 3.4.2.1. Calcul de la masse volumique

La masse volumique est calculée à partir des valeurs des coefficients linéiques moyens de dilatation. Pour cela, on exprime tout d'abord la variation de volume de l'échantillon pour une certaine variation de température :

$$\Delta V = 3 \alpha \Delta T V \quad (105)$$

On peut alors exprimer la masse volumique par rapport à sa valeur à l'ambiante par la relation suivante :

$$\rho(T) = \frac{m}{V(T)} = \frac{\rho_0 V_0}{V_0 + \Delta V} = \frac{\rho_0}{1 + 3 \alpha \Delta T} \quad (106)$$

$\alpha$  est le coefficient linéique moyen de l'échantillon pour la température  $T$  telle que  $\Delta T = T - T_0$ . La masse volumique est alors calculée à partir de sa valeur à l'ambiante dont le calcul admet une marge d'erreur de 0,2% à 0,6% principalement due à la mesure de la masse de l'échantillon, à la forme qui est rarement parfaitement cylindrique, et sur le calcul des dimensions. La Figure 61 représente la moyenne calculée à partir des 3 échantillons avec les écarts entre cette moyenne et les valeurs minimum et maximum. Le changement de pente aux alentours de 800°C correspond au changement de phase de l'état de réception à l'état austénitique. Les vitesses de chauffage des échantillons sont suffisamment lentes pour s'assurer que la température est homogène sur tout l'échantillon.



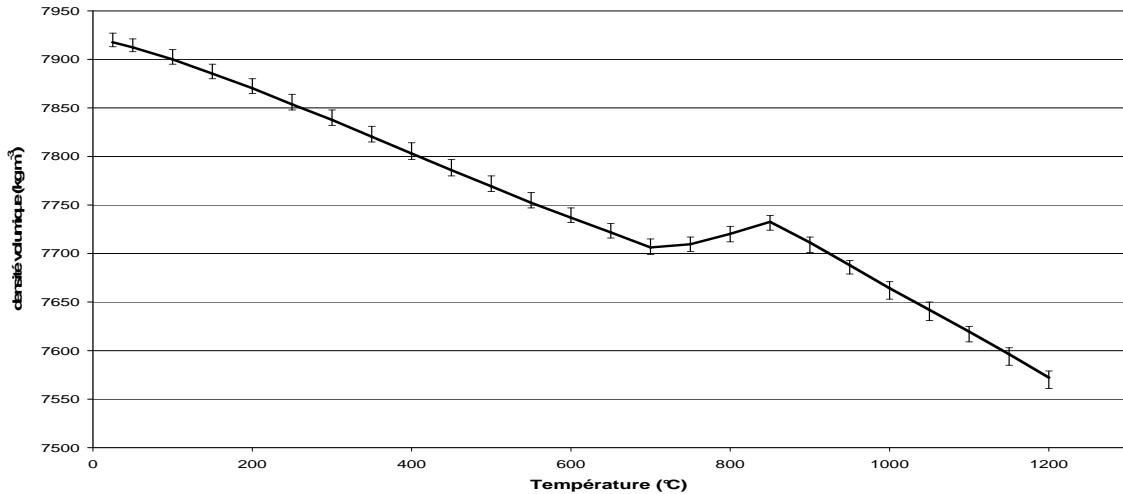
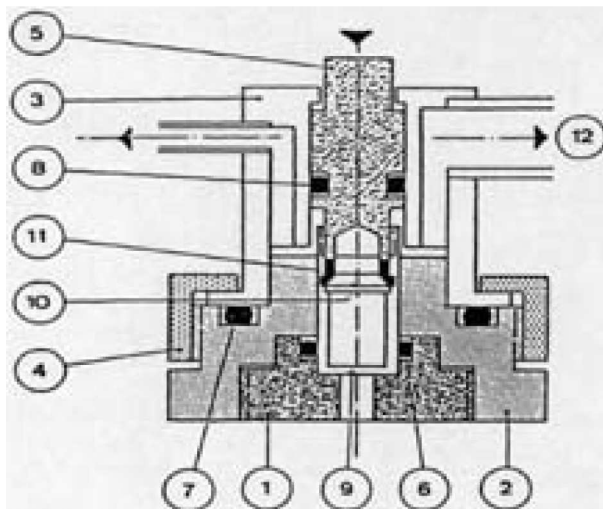


Figure 61 : Masse volumique du HR45 en fonction de la température

On déduit de ces valeurs une fonction affine de l'évolution de la masse volumique en fonction de la température pour l'état de réception et pour l'état austénitique :

$$\begin{aligned} \text{réception: } \rho(T) &= 7931,3 - 0,3216 T \quad \text{kg.m}^{-3} \\ \text{austénite: } \rho(T) &= 8123 - 0,4583 T \end{aligned} \quad (107)$$



1. Le siège (1) qui reçoit le creuset (9) à pressuriser. L'étanchéité est assurée par le joint torique (6).
2. Le socle de la matrice (2) sur lequel se visse le siège (1).
3. Le corps de la matrice (3) qui s'adapte sur le socle (2) comporte les tubulures de mise sous vide et de mise sous pression de l'enceinte.
4. L'écrou moleté (4) réunit le socle (2) et le corps (3) de la matrice. L'étanchéité à ce niveau est assurée par le joint torique (7).
5. Le poinçon (5) coulisse grâce au joint torique (8) dans le corps de la matrice.

Figure 62 : Principe de fonctionnement du dispositif de pressurisation des creusets

### 3.4.2.2. Mesure de la chaleur spécifique Cp par méthode DSC

Les méthodes de mesure de la capacité thermique d'un solide sont très nombreuses. Dans notre cas, c'est la méthode DSC (de l'anglais Differential Scanning Calorimetry) qui a été choisie. Le système est composé d'une cellule calorimétrique sous pression (Figure 62) équipée de 2 creusets porte-échantillon et reliée à son environnement par un fluxmètre de telle sorte que la température de l'ensemble tend à se stabiliser dans le temps. Le signal transmis par le fluxmètre est proportionnel au débit de chaleur transférée de la cellule de mesure à l'extérieur. La capacité thermique de la cellule est définie par :

$$C_p(T) = \frac{w}{\dot{T}} \quad (108)$$

où la puissance massique  $w$  est proportionnelle au signal du fluxmètre  $S(T)$  qui n'est jamais réellement connue. Il faut alors mettre en place une méthode de calibrage permettant de mesurer le facteur de proportionnalité  $K(T)$  entre  $S(T)$  et  $w$ . Deux méthodes existent : par enthalpie ou par balayage. La méthode par enthalpie est utilisée. Elle consiste à faire deux essais par augmentation de température étagée, dans des conditions identiques. Le premier est réalisé avec les deux creusets vides (essai blanc). Le second est réalisé avec un creuset vide et l'autre portant l'échantillon. L'énergie faisant passer la cellule d'un état 1 à un état 2 est alors calculée à travers l'intégrale du signal sur le thermogramme entre ses deux états, en fonction du temps (Figure 63). La différence entre les deux signaux peut alors être convertie en puissance thermique et la valeur de  $C_p$  peut être calculée par :

$$C_p^{moy}(T_i \rightarrow T_{i+1}) = \frac{\int_{T_i}^{T_{i+1}} S_{echant} dT - \int_{T_i}^{T_{i+1}} S_{blanc} dT}{sensibilité \left( \frac{T_i + T_{i+1}}{2} \right) \cdot m_{echant} \cdot (T_i - T_{i+1})} \quad (109)$$

$T_i$  et  $T_{i+1}$  correspondent aux températures de deux paliers, 'sensibilité' est la sensibilité de l'appareil, et  $S$  les signaux enregistrés (Figure 63).

L'incertitude admise est de 5% jusqu'à 800°C et 10% au dessus (un autre appareil est utilisé). La principale cause d'erreur est la sensibilité de l'appareil dont le système d'enregistrement du signal doit au moins avoir une aussi bonne sensibilité que le calorimètre lui-même. Les pesées sont aussi une source d'erreur.

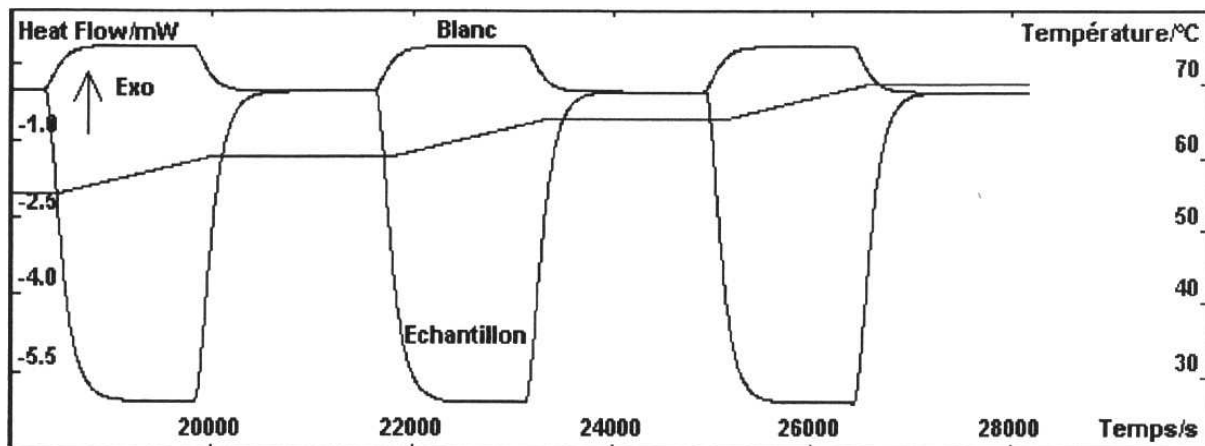


Figure 63 : Principe de calcul de  $C_p$  pour deux chauffages étagés des creusets à blanc et avec échantillon

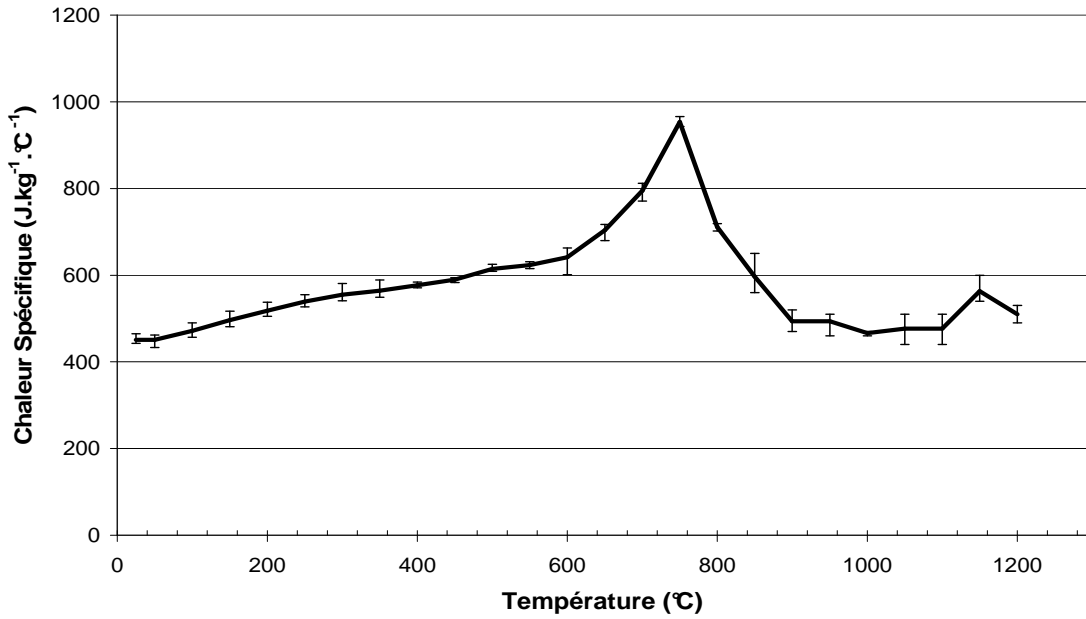


Figure 64 : Chaleur spécifique du HR45 en fonction de la température

La Figure 64 présente les résultats avec moyenne et écarts sur les 3 essais réalisés. Le pic dont le maximum se situe aux environs de 750°C correspond au changement de phase et à l'enthalpie de transformation.

On choisit de représenter la chaleur spécifique de l'état de réception par une fonction affine et celle de l'austénite par une constante :

$$\begin{aligned}
 \text{à réception : } C_p(T) &= 427,6 + 0,4126 T & J.kg^{-1}.°C^{-1} \\
 \text{austénite : } C_p &= 509,6 &
 \end{aligned}
 \tag{110}$$

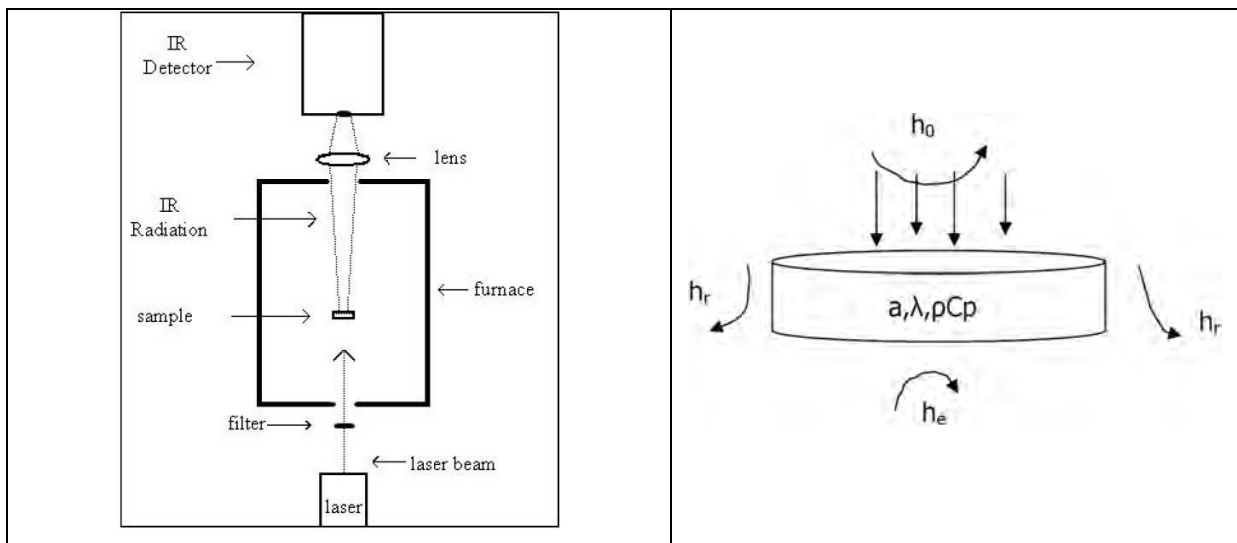


Figure 65 : Schéma d'une installation pour la méthode flash laser

3.4.2.3. Mesure de la diffusivité thermique par méthode « flash » Laser

La méthode flash laser a été initialement développée dans les années 60 par Parker [PARKER-1961]. Le principe est d’exciter une éprouvette cylindrique de faible épaisseur sur une face pré-sablée (pour minimiser les risques de réflexion) par de petites impulsions laser dont le faisceau est perpendiculaire à la face. On mesure la réponse de l’échantillon sur sa face arrière (Figure 65).

L’échantillon est supposé homogène, isotrope et opaque, et les propriétés thermo-physiques locales sont supposées constantes pendant une impulsion laser, bien qu’une légère et brève élévation de température apparaisse.

La moyenne des valeurs relevées sur les 3 échantillons ainsi que les écarts supérieurs et inférieurs sont donnés en Figure 66. Les principaux perturbateurs sur les mesures correspondent aux pertes thermiques entre le four et l’extérieur, et à la forte influence de l’épaisseur des éprouvettes sur les résultats.

On choisit, comme précédemment pour la chaleur spécifique, de représenter l’évolution de la diffusivité thermique avec la température par une droite à l’état de réception et une constante à l’état austénitique :

$$\begin{aligned} \text{à réception : } a(T) &= 14,9 \cdot 10^{-6} - 1,47 \cdot 10^{-8} T \quad m^2 \cdot s^{-1} \\ \text{austénite : } a &= 6,1 \cdot 10^{-6} \end{aligned} \quad (111)$$

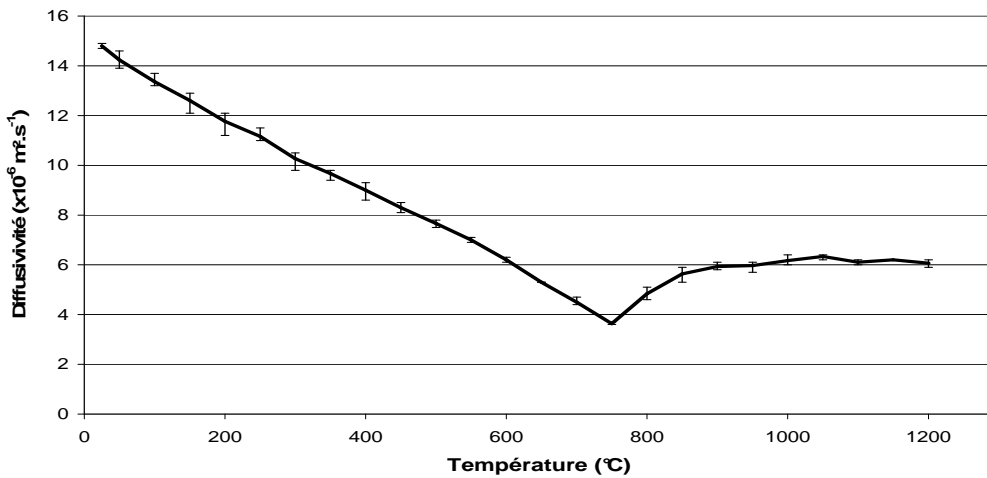


Figure 66 : Diffusivité thermique du HR45 en fonction de la température

Les mesures nous donnent l’évolution de la diffusivité thermique avec la température, or la donnée d’entrée demandée par le code de calcul est la conductivité thermique. Nous calculons alors ce paramètre en fonction de ceux que nous avons identifiés :

$$k = \rho \cdot C_p \cdot a \quad (112)$$

L’évolution de la conductivité thermique sera alors définie par un polynôme d’ordre 3 pour l’état de réception et une fonction affine pour l’état austénitique.

3.4.2.4. Mise en données des paramètres thermophysiques dans le code de calcul

Nous savons que notre simulation fera intervenir 3 phases métallurgiques : l'état de réception, l'austénite et la bainite. La bainite sera présente uniquement dans la ZAT et uniquement en fin de simulation. Nous faisons l'hypothèse que ces paramètres thermophysiques seront identiques à ceux de l'état de réception. A partir des approximations polynomiales qui ont été choisies, nous entrons les données points par points dans le code de calcul qui fera des interpolations linéaires entre ces points. La mise en données pour l'état de réception ainsi que pour la bainite est donnée par le Tableau 9, et la mise en données pour l'état austénitique est donnée par le Tableau 10.

Température (°C)	Masse volumique (kg.m <sup>-3</sup> )	Chaleur Spécifique (J.kg <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup> )	Conductivité thermique (W.m <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup> )
0	7931,3	427,6	50,5
100	7899,1	468,9	49,7
200	7867,0	510,1	48,0
300	7834,8	551,4	45,3
400	7802,7	592,6	41,7
500	7770,5	633,9	37,2
600	7738,3	675,2	31,8
700	7706,2	716,4	25,5
800	7674,0	757,7	18,3
900	7641,9	798,9	10,2

**Tableau 9 : Valeurs des paramètres thermophysiques de l'état de réception et de la bainite**

Température (°C)	Masse volumique (kg.m <sup>-3</sup> )	Chaleur Spécifique (J.kg <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup> )	Conductivité thermique (W.m <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup> )
400	7939,7	509,6	24,7
500	7893,9	509,6	24,5
600	7848,0	509,6	24,4
700	7802,2	509,6	24,3
800	7756,4	509,6	24,1
900	7710,5	509,6	24,0
1000	7664,7	509,6	23,8
1100	7618,9	509,6	23,7
1200	7573,0	509,6	23,5
1300	7527,2	509,6	23,4

**Tableau 10 : Valeurs des paramètres thermophysiques de l'état austénitique**

### 3.4.3. Résultats de calcul

#### 3.4.3.1. Calcul électromagnétique

Le calcul électromagnétique est lancé à partir d'un maillage global des trois domaines air (541409 éléments), inducteur (116641 éléments) et pièce (228142 éléments). Les nœuds et faces d'éléments aux frontières des domaines sont concordants. Les domaines sont définis par un numéro attribué à chaque élément qui pointe sur un jeu de propriétés matériau.

La pièce étudiée comprend 2 plans de symétrie mais un seul correspond également à l'inducteur. La Figure 67 présente le modèle physique du calcul électromagnétique avec le plan de symétrie pris en compte.

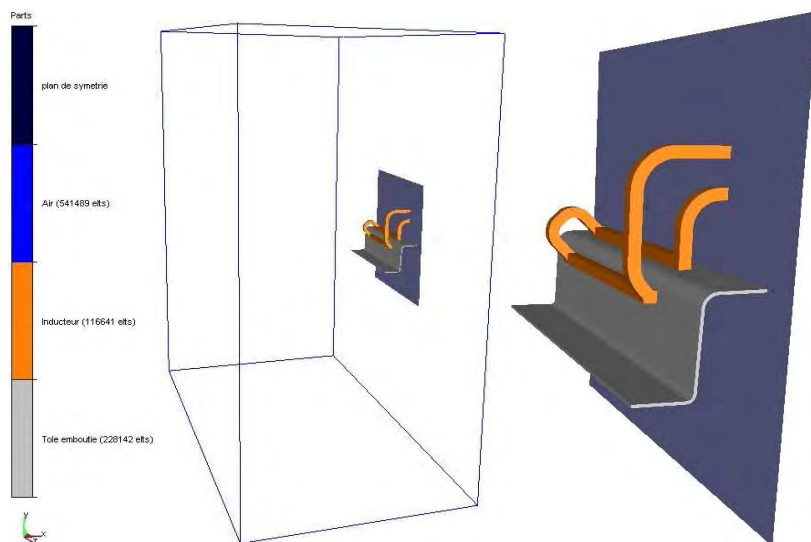


Figure 67 : Modèle électromagnétique composé de l'inducteur et de la pièce et de l'air (total de 886272 elts).

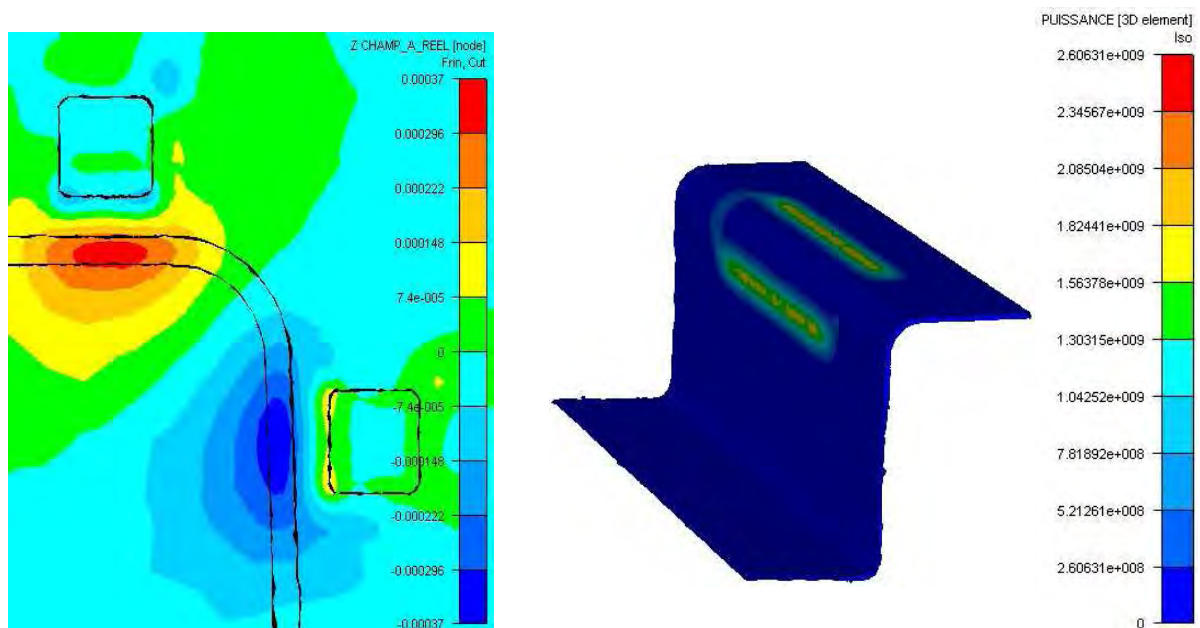


Figure 68 : A gauche, composante normale du champs A dans une coupe est à mi-longueur de la pièce ; A droite, la densité de puissance induite par effet Joules dans la pièce.

La Figure 68 montre la valeur normale du potentiel magnétique, sur une section au centre de la pièce (rappelons que le vecteur  $A$  est colinéaire et de valeur directement proportionnelle au champ électrique  $E$  :  $\vec{A} = j\omega\sigma\vec{E}$ ), et la densité de puissance thermique induite par effet Joule dans la pièce.

### 3.4.3.2. Calcul thermique

Le calcul thermique porte, dans le cadre de cette étude, uniquement sur la tôle emboutie. Le plan de symétrie utilisé pour le calcul électromagnétique est également présent dans le calcul thermique et le maillage de la pièce est le même que celui utilisé pour le calcul électromagnétique. Ainsi, aucun transfert de valeurs n'est effectué. La Figure 69 montre le champ de température à la fin du chauffage dans le cas des pièces pleines et des pièces avec un trou percé.

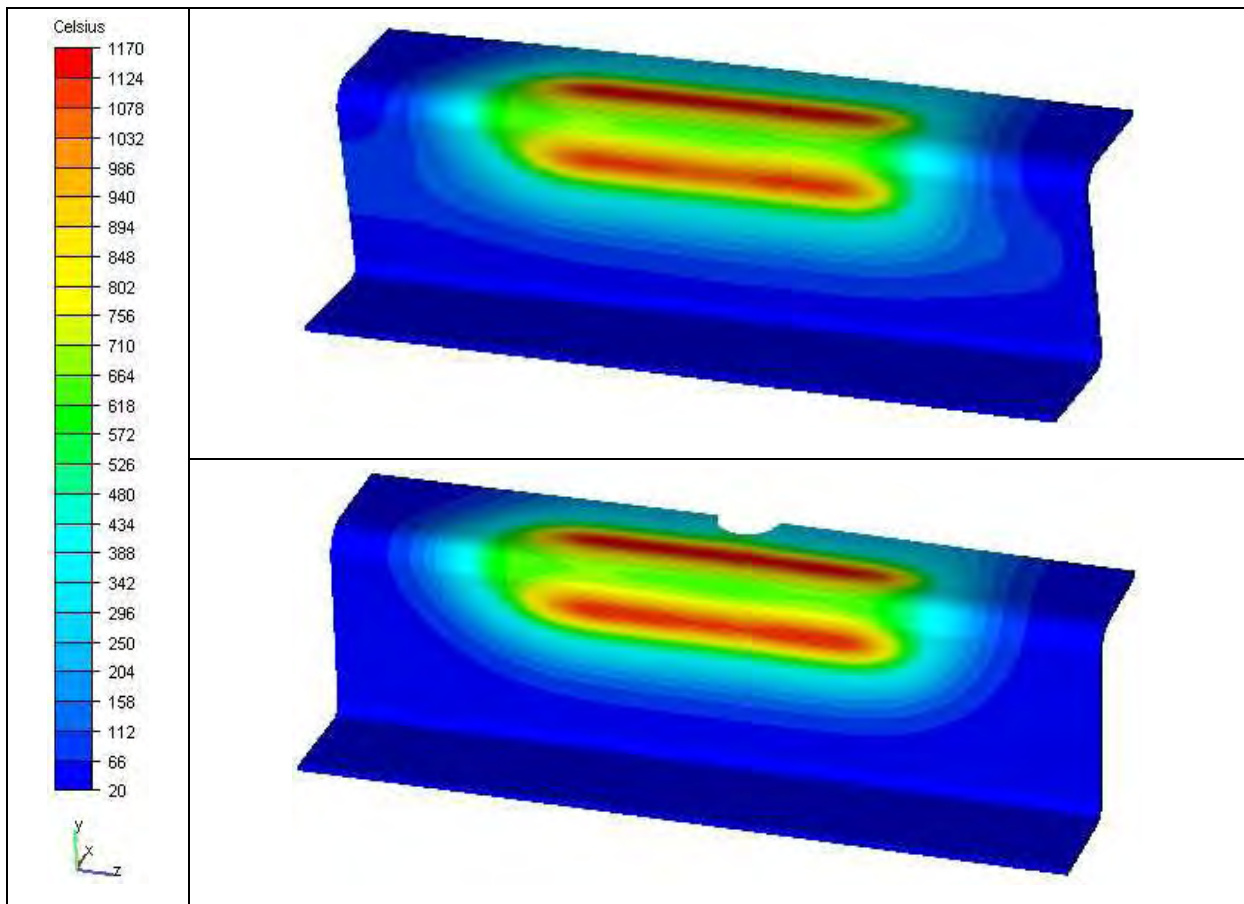


Figure 69 : Champ de température en fin de chauffage des tôles embouties pleines et avec trou.

## BIBLIOGRAPHIE

- [ALIAGA-2000] - Aliaga C., Simulation numérique par éléments finis 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'aciers : application à la trempe de pièces forgées ou coulées, Thèse de doctorat, ENSMP, 2000.
- [BARRERE-1992] - Barrere E., Contribution à la modélisation des contraintes résiduelles lors de la trempe superficielle au défilé après un chauffage par induction, Thèse de doctorat, ENSAM Bordeaux, 1992.
- [BAY-2003] - Bay F., Labbe V., Favennec Y. *et al*, "A numerical model for induction heating processes coupling electromagnetism and thermomechanics", *IJNME*, vol. 58, p. 839-867, 2003.
- [BIRO-1990] - Biro O., Preis K., "Finite element analysis of 3-D eddy currents", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 26, n° 2, p. 418-423, 1990.
- [BIRO-1989] - Biro O., Preis K., "On the use of the magnetic vector potential in the finite-element analysis of three-dimensional eddy currents", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 25, n° 4, p. 3145-3159, 1989.
- [BOSSAVIT-1993] - Bossavit A., *Electromagnétisme en vue de la modélisation*, Springer-Verlag, vol. 14, 1993.
- [CARDINAUX-2007] - Cardinaux D., Bay F., Vincent J. *et al*, "Coupled electromagnetic/thermal processes: Using a PID control approach in conjunction with a finite element model", *Proc. 13th Int. Symposium on applied Electromagnetics and Mechanics*, p. 61, 2007.
- [CARDINAUX-2005] - Cardinaux D., Féraille J., Demande de devis pour la caractérisation thermo-physique et métallurgique d'une tôle en HR45 d'épaisseur 2mm, Cahier des charges de consultation MXP\_CEB05\_0288, PSA Peugeot Citroën, 2005.
- [CARPENTER-1977] - Carpenter C.J., "Comparison of alternative formulations of 3-dimensional magnetic-field and eddy-current problems at power frequencies", *IEE Proc.*, vol. 124, n° 11, p. 1026-1034, 1977.
- [CHABOUDEZ-1994] - Chaboudez C., Clain S., Glardon R. *et al*, "Numerical modelling of induction heating of long workpieces", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 30, n° 6, p. 5028-5037, 1994.
- [CHARI-1982] - Chari M., Konrad A., Palmo M. *et al*, "Three-dimensional vector potential analysis for machine field problems", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 18, n° 2, p. 436-446, 1982.
- [ELMKIES-1996] - Elmkies A., Joly P., Eléments finis et condensation de masse pour les équations de Maxwell: le cas 2D, Rapport de recherche n°3035, INRIA, 1996.
- [EMSON-1983] - Emson C., Simkin J., "An optimal method for 3-D eddy currents", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 19, n° 6, p. 2450-2452, 1983.
- [ERN-2005] - Ern A., *Elements finis*, Dunod, 2005.



- [FAVENNEC-2002a] - Favennec Y., Modélisation numérique en chauffage par induction. Analyse inverse et optimisation, Thèse de doctorat, ENSMP, 2002a.
- [FAVENNEC-2002b] - Favennec Y., Labbe V., Tillier Y. *et al*, "Identification of magnetic parameters by inverse analysis coupled with finite-element modeling", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 38, n° 6, p. 3607-3619, 2002b.
- [GARBUSKY-1997] - Garbulsky G.D., Marino P., Pignotti A., "Numerical model of induction heating of steel-tube ends", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33, n° 1, p. 746-752, 1997.
- [GIÉ-1985] - Gié H., Sarmant J., *Electromagnétisme*, Lavoisier - Techniques et Documentation, vol. 1 et 2, 1985.
- [KAMEARI-1988] - Kameari A., "Three-dimensional eddy current calculation using finite element method with A-V in conductor and  $\Omega$  in vacuum", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 24, n° 1, p. 118-121, 1988.
- [HÖMBERG-2004] - Hömberg D., "A mathematical model for induction hardening including mechanical effects", *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 5, n° 1, p. 55-90, 2004.
- [NAKATA-1988a] - Nakata T., Takahashi N., Fujiwara K. *et al*, "Comparison of various methods for 3-D eddy current analysis", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 24, n° 6, p. 3159-3161, 1988a.
- [NAKATA-1988b] - Nakata T., Takahashi N., Fujiwara K. *et al*, "Improvements of the T- $\Omega$  method for 3-D eddy current analysis", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 24, n° 1, p. 94-97, 1988b.
- [NEDELEC-1980] - Nedelec J.C., "Mixed finite elements in IR<sup>3</sup>", *Numerische Mathematik*, vol. 35, n° 3, p. 315-341, 1980.
- [NÉDÉLEC-1986] - Nédélec J.C., "A new family of mixed finite elements in IR<sup>3</sup>", *Numer.Math.*, vol. 50, n° 1, p. 57-81, 1986.
- [PARKER-1961] - Parker W.J., Jenkins R.J., Butler C.P. *et al*, "Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity, and thermal conductivity", *J. Appl. Phys.*, vol. 32, n° 9, p. 1679-1684, 1961.
- [SAQUET-1999] - Saquet O., Chicois J., Vincent A., "Barkhausen noise from plain carbon steels: analysis of the influence of microstructure", *Mat. Sc. And Eng.*, vol. 269, n° 1, p. 73-82, 1999.
- [SKOCZKOWSKI-1989] - Skoczkowski T.P., Kalus M.F., "The mathematical model of induction heating of ferromagnetic pipes", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 25, n° 3, p. 2745-2750, 1989.
- [SOYRIS-1990] - Soyris N., Modélisation tridimensionnelle du couplage thermique en forgeage à chaud, Thèse de doctorat, ENSMP, 1990.
- [TRONEL-1993] - Tronel Y., *Contribution à la modélisation thermo-mécanique et physique du forgeage à chaud*, Thèse de doctorat, ENSMP, 1993.

## **SIMULATION THERMOELECTROMAGNETIQUE**

---

[WILLCOCK-1983] - Willcock S., Tanner B., "Harmonic analysis of B-H loops", *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 19, n° 5, p. 2265-2270, 1983.

[ZLAMAL-1977] - Zlamal M., "Finite element methodes for non linear parabolic equations", *RAIRO Numerical analysis*, vol. 11, n° 1, p. 93-107, 1977.

---

# CHAPITRE 4

---

---

# Chapitre 4

## MODELISATION DU COUPLAGE THERMOMECHANIQUE

<b>4.1.</b>	<b>Modélisation du problème mécanique</b>	<b>102</b>
4.1.1.	Rappels sur les tenseurs de contraintes et déformations	102
4.1.2.	Expression locale du problème mécanique	103
4.1.2.1.	Equation de l'équilibre dynamique	103
4.1.2.2.	Equation de compressibilité	103
4.1.2.3.	Les conditions aux limites	104
4.1.2.4.	Mise en équation du problème mécanique	105
4.1.3.	Expression globale et discrétisation du problème mécanique	105
4.1.3.1.	Formulation faible du problème	105
4.1.3.2.	Discrétisation éléments finis P1+/P1 – mini élément	106
<b>4.2.</b>	<b>Loi rhéologique, comportement THEVP</b>	<b>110</b>
4.2.1.	Equation de Prandtl-Reuss, domaines élastique et inélastique	110
4.2.2.	Loi rhéologique (THEVP)	111
4.2.2.1.	Les déformations réversibles thermo-élastiques	111
4.2.2.2.	Taux de déformations inélastiques non-réversibles	112
4.2.2.3.	Thermo-élasto-viscoplasticité (THEVP)	114
4.2.3.	Résolution numérique des équations de Prandtl-Reuss	114
4.2.3.1.	Discrétisation temporelle	115
4.2.3.2.	Résolution de la partie sphérique	116
4.2.3.3.	Résolution de la partie déviatorique	116
4.2.3.4.	Calcul des modules tangents discrets	118
<b>4.3.</b>	<b>Couplage thermomécanique</b>	<b>121</b>
<b>4.4.</b>	<b>Application au procédé semi-industriel</b>	<b>123</b>
4.4.1.	Mesure du coefficient linéique de dilatation	123
4.4.2.	Modules de Young et de Poisson	124
4.4.3.	Résultats de calcul	124
<b>Bibliographie</b>		<b>126</b>

## 4.1. MODELISATION DU PROBLEME MECANIQUE

Dans ce paragraphe nous présenterons les équations du problème mécanique et leur résolution numérique par éléments finis telle qu'elle est implémentée dans le code Forge3. Après un bref rappel sur les tenseurs de contraintes et déformations, nous mettrons en équation le problème global de mécanique tenant compte de nos hypothèses, puis nous exposerons la méthode de résolution exprimée en vitesse/pression.

A l'échelle macroscopique, on assimile la pièce à un milieu continu et homogène occupant un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ . Le modèle mathématique du problème mécanique sera donc basé sur l'équation de l'équilibre dynamique dans les milieux continus, l'équation de compressibilité et le chargement mécanique imposé à la surface  $\Gamma$  de  $\Omega$ .

### 4.1.1. Rappels sur les tenseurs de contraintes et déformations

Rappelons tout d'abord, que dans l'hypothèse des petites déformations, on peut écrire le tenseur des déformations de Green-Lagrange sous une forme linéarisée, fonction du vecteur déplacement  $u$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \overline{\nabla \bar{u}} + {}^T \overline{\nabla \bar{u}} \right) \quad (113)$$

Le tenseur des taux de déformation est défini en fonction du vecteur vitesse :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \overline{\nabla \bar{v}} + {}^T \overline{\nabla \bar{v}} \right) \Rightarrow Tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \nabla \cdot \bar{v} \quad (114)$$

On définit deux scalaires représentant l'état de déformation, la vitesse de déformation généralisée et la déformation équivalente :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (115)$$

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}} dt \quad (116)$$

Précisons que dans la suite nous noterons  $\dot{\bar{\varepsilon}}$  et  $\bar{\varepsilon}$  la vitesse de déformation inélastique généralisée et la déformation inélastique équivalente.

On peut exprimer les tenseurs sous une forme de somme d'une partie sphérique (dépendante de la trace du tenseur) et d'une partie déviatorique. Le tenseur des contraintes de Cauchy est alors exprimé par la somme du cisaillement (partie déviatorique  $s$ ) et de la pression (partie sphérique  $p$ ).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \frac{1}{3} Tr(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \quad \text{avec} \quad p = -\frac{1}{3} Tr(\boldsymbol{\sigma}) \quad (117)$$

Le tenseur des déformations linéarisé est exprimé par la somme des déformations inélastiques (partie déviatorique  $e$ ) et des déformations réversibles (partie sphérique).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \frac{1}{3} Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \quad (118)$$

La contrainte de Von Mises permet, dans le cadre de l'élasto-plasticité, d'exprimer le cisaillement à l'aide d'une variable scalaire. La contrainte équivalente s'exprime sous la forme :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} \quad (119)$$

#### 4.1.2. Expression locale du problème mécanique

##### 4.1.2.1. Equation de l'équilibre dynamique

Dans une description Lagrangienne, on écrit l'équation de conservation de la quantité de mouvement comme ci-dessous :

$$\bar{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{F}_V = \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \quad (120)$$

Considérons une pièce de hauteur  $h$  en acier que nous allons traiter thermiquement. Soit sa densité volumique de  $8.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et une contrainte d'écoulement  $\sigma_0$ , supérieure à la contrainte seuil  $\sigma_{00}$ , de 400 MPa. Pour une accélération de la pesanteur  $g$  d'environ  $10 \text{ m.s}^{-1}$  et pour que les forces volumiques de gravité qui ne soient que de l'ordre de 1% des efforts de la plasticité, la pièce doit être suffisamment massive pour avoir une hauteur  $h$  de 50m (121). L'hypothèse que les forces volumiques de gravité sont négligeables pour la simulation du traitement thermique est alors justifiée.

$$\frac{\rho g h}{\sigma_0} \leq 1\% \Leftrightarrow h \geq \frac{0.01 \sigma_0}{\rho g} \approx 50 \text{ m} \quad (121)$$

De la même manière on peut montrer que les forces d'inertie sont négligeables puisqu'il faudrait des vitesses de déplacement de l'ordre de  $20 \text{ m.s}^{-1}$  pour atteindre 1% des contraintes en jeu et  $70 \text{ m.s}^{-1}$  pour atteindre 10% des contraintes en jeu.

Ces deux hypothèses reviennent à dire qu'au cours du procédé de traitement thermique, les contraintes mécaniques ne sont dues qu'au maintien de la pièce par le système de bridage (les outils). L'équation de l'équilibre dynamique s'exprime alors uniquement à travers la divergence du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\bar{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{0} \quad (122)$$

Bien que le logiciel Forge3 permette la prise en compte des termes de gravité et d'inertie, au vu des constatations précédentes, nous ne traiterons pas ici de leur résolution.

##### 4.1.2.2. Equation de compressibilité

D'après la définition du tenseur des taux de déformation (114) nous écrivons :

$$\nabla \cdot \vec{v} - Tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 0 \quad (123)$$

L'hypothèse d'incompressibilité ( $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ) est souvent admise pour le cas de la forge à chaud où les matériaux sont considérés viscoplastique. Pour le traitement thermique, la part de l'élasticité et de la dilatation thermique ne peut être négligée dans le comportement du matériau. Le matériau sera alors compressible et son comportement devra vérifier l'équation (123).

#### 4.1.2.3. Les conditions aux limites

Afin que le problème formé des équations définies dans  $\Omega$  ((122) et (123)) soit correctement posé, nous devons introduire les équations relatives aux conditions aux limites sur la frontière  $\Gamma$ . Ces conditions peuvent être de deux types : la surface est libre ou est en contact avec un outil (système de bridage de la pièce). Soient  $\Gamma_0$  la surface libre et  $\Gamma_1$  la surface en contact avec un outil ( $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma$ ).

Sur la surface libre  $\Gamma_0$ , la pièce n'est soumise à aucun effort extérieur, ce qui se traduit par :

$$\boldsymbol{\sigma} \vec{n} = \vec{0} \quad (124)$$

Sur la surface  $\Gamma_1$  en contact avec un outil, on distingue deux types de conditions : une condition de contact qui exprime la non pénétration des nœuds dans l'outil (condition de Signorini) (125), et une condition de frottement qui exprime l'effort tangentiel de cisssion du frottement (126). Les conditions de Signorini expriment le fait que :

1. la pièce et l'outil en contact ne peuvent que s'éloigner ou rester en contact,
2. l'effort généré sur la surface de la pièce ne peut qu'être de compression ou nul,
3. soit on a contact, soit la surface est libre d'efforts.

$$\begin{cases} (\vec{v} - \vec{v}_{outil}) \cdot \vec{n} \leq 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \vec{n} \cdot \vec{n} \leq 0 \\ [(\vec{v} - \vec{v}_{outil}) \cdot \vec{n}](\boldsymbol{\sigma} \vec{n} \cdot \vec{n}) = 0 \end{cases} \quad (125)$$

$$\vec{c} = \boldsymbol{\sigma} \vec{n} - (\boldsymbol{\sigma} \vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (126)$$

Dans notre cas, le système de bridage est conçu de manière à minimiser les efforts de frottement et permettre le glissement de la pièce sur les outils, notamment pour la dilatation de la pièce sur l'axe Z (direction de la plus grande dimension de la pièce). Nous ne présenterons donc pas les différentes lois de frottement et considérerons un effort de cisssion nul. Les efforts de contact sur la surface  $\Gamma_1$  ne pourront donc qu'être normaux et les outils de bridage étant fixes, la vitesse des outils est nulle. Les conditions de Signorini se simplifient alors et se réexpriment par le système (127).

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{n} \leq 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \vec{n} \cdot \vec{n} \leq 0 \\ (\vec{v} \cdot \vec{n})(\boldsymbol{\sigma} \vec{n} \cdot \vec{n}) = 0 \end{cases} \quad (127)$$



4.1.2.4. Mise en équation du problème mécanique

En tenant compte des hypothèses énoncées précédemment, le problème mécanique s'exprime par le système suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{sur } \Omega & \begin{cases} \bar{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{0}} \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} - \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = 0 \end{cases} \\
 \text{sur } \Gamma_0 & \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{0}} \end{cases} \\
 \text{sur } \Gamma_1 & \begin{cases} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \leq 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{n}} \leq 0 \\ (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}})(\boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{0}} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{128}$$

4.1.3. **Expression globale et discrétisation du problème mécanique**

4.1.3.1. Formulation faible du problème

Les vitesses évoluent dans l'espace des vitesses cinématiquement admissibles  $V$ , les pressions dans l'espace  $P$  et les fonctions test dans l'espace des vitesses cinématiquement admissibles à 0  $V_0$  et l'espace des pression  $P$  tel que :

$$\begin{aligned}
 V &= \left\{ \bar{\mathbf{v}} \in H^1(\Omega)^3 / \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \leq 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\} \\
 V_0 &= \left\{ \bar{\mathbf{v}} \in H^1(\Omega)^3 / \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\} \\
 P &= \left\{ p \in L^2(\Omega) \right\} = L^2(\Omega)
 \end{aligned} \tag{129}$$

On intègre les équations d'équilibre et d'incompressibilité dans le domaine et on multiplie par les fonctions test :

$$\int_{\Omega} (\bar{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \bar{\mathbf{v}}^* = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} p^* - \int_{\Omega} \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) p^* = 0 \tag{130}$$

Ce qui nous donne après intégration par partie de la première égalité et utilisation de la formule d'Ostrogradski :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}}^* - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{v}}^*) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^* - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{v}}^* \cdot (\boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{n}}) = 0 \\
 \int_{\Omega} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} p^* - \int_{\Omega} \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) p^* &= 0
 \end{aligned} \tag{131}$$

Les outils de bridage étant fixes et indéformables nous pouvons avoir un effort sur  $\Gamma$ , uniquement si nous sommes dans l'espace des vitesses cinématiquement admissibles à 0. L'intégrale sur la frontière est donc nulle. Réécrivons alors le système en séparant les parties sphérique et déviatorique :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \mathbf{s} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^* - \int_{\Omega} p \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^*) &= 0 \\
 \int_{\Omega} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} p^* - \int_{\Omega} \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) p^* &= 0
 \end{aligned} \tag{132}$$

4.1.3.2. Discrétisation éléments finis P1+/P1 – mini élément

On introduit une triangulation  $\Pi^h$  de l'espace  $\Omega^h$  qui est une approximation discrète du domaine de calcul continu  $\Omega$  :

$$\Omega^h = \bigcup_{\omega^h \in \Pi^h} \omega^h \quad (133)$$

On définit  $\phi$  et  $\varphi$  les fonctions de base qui discrétisent la vitesse et la pression dans les approximations  $V^h$  et  $P^h$  de  $V$  et de  $P$ . On cherche dans ces espaces la solution discrète du problème  $(v^h ; p^h)$ . Les approximations des espace  $V$  et  $P$  doivent vérifier la condition de compatibilité de Brezzi-Babuska.

L'élément fini mixte compatible de plus petit degré d'interpolation est l'élément P1+/P1. La littérature sur ces éléments est abondante, nommons par exemple [ARNOLD-1984] pour les applications 2D, [COUPEZ-1994] pour les applications 3D et [BOUSSETTA-2005] pour le remaillage. Pour une discrétisation tridimensionnelle en tétraèdres, cette discrétisation consiste à exprimer la pression linéaire sur les tétraèdres, et la vitesse comme la somme d'une partie linéaire sur les tétraèdres et d'une partie linéaire sur les 4 sous tétraèdres formés par les sommets et le centre de gravité des éléments (partie bulle ou mini élément).

Soit pour un tétraèdre  $\Omega_{elt}$ ,  $\omega_k$  avec  $k=1$  à 4, les 4 sous tétraèdres ayant pour sommet le nœud central. La Figure 70 présente schématiquement cet élément fini.

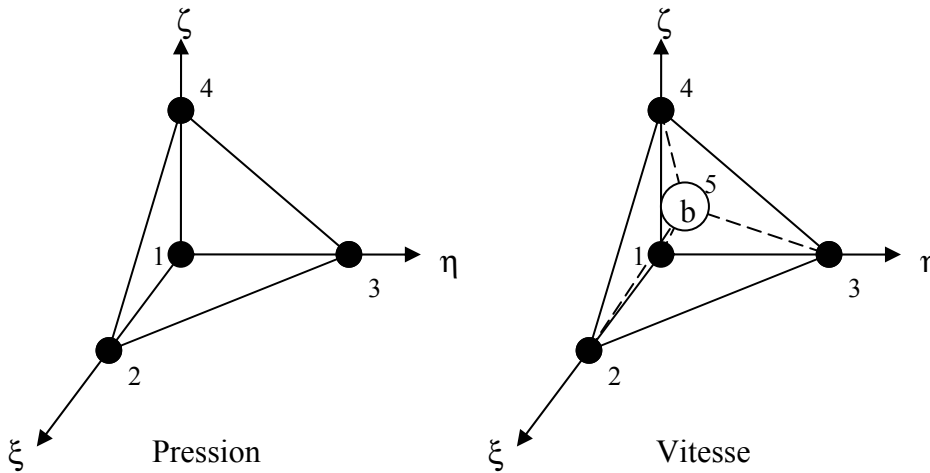


Figure 70 : Elément tétraédrique P1+/P1 de référence pour la vitesse et la pression

La vitesse et la pression ayant le même degré d'interpolation, les fonctions de base de la discrétisation  $\phi$  et  $\varphi$  sont la même,  $\varphi^l$  que nous appellerons fonction de base linéaire. Nous devons aussi définir la fonction de base bulle  $\varphi^b$  qui vaut 1 sur le nœud 5 et 0 sur les faces de l'élément principal (Figure 70). Elle est définie par morceau sur chaque sous élément et continue sur l'élément (notons néanmoins que son gradient est discontinu) :

$$\begin{aligned} \text{sur le tétraèdre } (1,3,4,5): \quad \varphi^b &= 4\xi \\ \text{sur le tétraèdre } (1,3,2,5): \quad \varphi^b &= 4\eta \\ \text{sur le tétraèdre } (1,2,3,5): \quad \varphi^b &= 4\zeta \\ \text{sur le tétraèdre } (2,4,3,5): \quad \varphi^b &= 4(1 - \xi - \eta - \zeta) \end{aligned} \quad (134)$$

Définissons alors espaces d'approximation :

$$\begin{aligned}
 P^h &= \{p^h \in C^0(\Omega^h) / \forall \omega^h \in \Pi^h, p^h \in P^1(\omega^h)\} \\
 L^h &= \{\bar{v}^h \in C^0(\Omega^h)^3; \bar{v}^h \cdot \bar{n} \leq 0 / \forall \omega^h \in \Pi^h, \bar{v}^h \in P^1(\omega^h)^3\} \\
 L_0^h &= \{\bar{v}^h \in C^0(\Omega^h)^3; \bar{v}^h \cdot \bar{n} = 0 / \forall \omega^h \in \Pi^h, \bar{v}^h \in P^1(\omega^h)^3\} \\
 B^h &= \{\bar{v}^h \in C^0(\Omega^h)^3 / \forall \omega^h \in \Pi^h, \bar{v}^h = \bar{0} \text{ sur } \Gamma^h \text{ et } \bar{v}^h \in P^1(\omega_k^h)^3, k=1,2,3,4\} \\
 V^h &= L^h \oplus B^h \\
 V_0^h &= L_0^h \oplus B^h
 \end{aligned} \tag{135}$$

Les champs de vitesse et de pression discrets s'écrivent en fonction des fonctions d'interpolation :

$$\begin{aligned}
 \bar{v}^h(\bar{x}) &= \bar{v}^l(\bar{x}) + \bar{v}^b(\bar{x}) = \sum_{\text{noeud}} \bar{v}_n^l \phi_n^l(\bar{x}) + \sum_{\text{elements}} \bar{v}_n^b \phi_n^b(\bar{x}) \\
 p^h(\bar{x}) &= \sum_{\text{noeud}} p_n^l \phi_n^l(\bar{x})
 \end{aligned} \tag{136}$$

Le problème discret s'écrit alors en fonction des variables discrètes dépendantes en coordonnées :

$$\begin{aligned}
 &\text{Trouver } (\bar{v}^h = \bar{v}^l + \bar{v}^b; p^h) \text{ tel que } \forall (\bar{v}^{*h}; p^{*h}) \in (V_0^h; P^h) \\
 &\left\{ \begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \mathbf{s}^h(\bar{v}^l) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*l} + \int_{\Omega} \mathbf{s}^h(\bar{v}^b) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*l} - \int_{\Omega} p^h \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*l}) = 0 \\
 &\int_{\Omega} \mathbf{s}^h(\bar{v}^l) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*b} + \int_{\Omega} \mathbf{s}^h(\bar{v}^b) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*b} - \int_{\Omega} p^h \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*b}) = 0 \\
 &\int_{\Omega} \nabla \cdot \bar{v}^l p^{*h} + \int_{\Omega} \nabla \cdot \bar{v}^b p^{*h} - \int_{\Omega} \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) p^{*h} = 0
 \end{aligned} \right. \tag{137}
 \end{aligned}$$

Remarquons que nous n'avons pas de terme d'efforts de contacts suite à nos hypothèses mais s'il y en avait un, ce terme serait présent dans la première égalité du problème et s'annulerait dans la deuxième par le fait que le terme bulle est nul sur les faces de chaque élément (donc sur la frontière du domaine). Les propriétés du terme bulle permettent encore de simplifier le système (137). En effet, le terme bulle étant nul sur les faces de l'élément, on peut montrer que son gradient s'annule sur un élément et par conséquent que le champ bulle est orthogonal à tout tenseur constant sur l'élément [JAOUEN-1999]. Le champ bulle est alors orthogonal au champ linéaire :

$$\int_{\Omega_e} \bar{\bar{\nabla}} \bar{v}^l : \bar{\bar{\nabla}} \bar{v}^b dV = 0 \tag{138}$$

En écrivant le système (137) au niveau de l'élément, la propriété (138) du champ bulle permet de simplifier le système d'équation en annulant les termes  $\int_{\Omega_{elt}} \mathbf{s}^h(\bar{v}^l) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*b}$  et  $\int_{\Omega_{elt}} \mathbf{s}^h(\bar{v}^b) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*l}$ .

Le système local à résoudre sur chaque élément s'écrit alors :

Trouver  $(\vec{v}^h = \vec{v}^l + \vec{v}^b; p^h)$  tel que  $\nabla(\vec{v}^{*h}; p^{*h}) \in (V_0^h; P^h)$

$$\begin{cases} A^{ll} + 0 + A^{pl} = 0 \\ 0 + A^{bb} + A^{pb} = 0 \\ A^{lp} + A^{bp} + A^{pp} = 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} A^{ll} &= \int_{\Omega_{elt}} \mathbf{s}^{hl} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*l} \quad ; \quad A^{pl} = - \int_{\Omega_{elt}} p^h Tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*l}) \\ A^{bb} &= \int_{\Omega_{elt}} \mathbf{s}^{hb} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*b} \quad ; \quad A^{pb} = - \int_{\Omega_{elt}} p^h Tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*b}) \\ A^{lp} &= \int_{\Omega_{elt}} \nabla \cdot \vec{v}^l p^{*h} \quad ; \quad A^{bp} = \int_{\Omega_{elt}} \nabla \cdot \vec{v}^b p^{*h} \quad ; \quad A^{pp} = - \int_{\Omega_{elt}} Tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) p^{*h} \end{aligned} \quad (139)$$

Le système d'équations non linéaires ci-dessus est résolu après assemblage par une méthode itérative de type Newton-Raphson. La matrice de raideur est assemblée à partir des matrices locales de la forme :

$$\mathbf{K}_e^{xy} = \frac{\partial A^{xy}}{\partial u} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} (x; y) \in (l; p)^2 \\ u \in (\vec{v}^l; \vec{v}^b; p^h) \end{cases} \quad (140)$$

Ce qui donne à chaque itération de Newton-Raphson le système linéaire à résoudre :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{ll} & 0 & \mathbf{K}_e^{pl} \\ 0 & \mathbf{K}_e^{bb} & \mathbf{K}_e^{pb} \\ {}^T \mathbf{K}_e^{pl} & {}^T \mathbf{K}_e^{pb} & \mathbf{K}_e^{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \vec{v}^l \\ \Delta \vec{v}^b \\ \Delta p^h \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} R^l \\ R^b \\ R^p \end{Bmatrix} \quad (141)$$

Le vecteur cherché est le vecteur des corrections entre chaque itération de Newton-Raphson. A l'itération n+1, on actualise les paramètres par :

$$\begin{Bmatrix} \vec{v}^l \\ \vec{v}^b \\ p^h \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} \vec{v}^l \\ \vec{v}^b \\ p^h \end{Bmatrix}_n + \begin{Bmatrix} \Delta \vec{v}^l \\ \Delta \vec{v}^b \\ \Delta p^h \end{Bmatrix} \quad (142)$$

En écrivant la deuxième ligne du système (141), on peut écrire le correcteur de vitesse bulle d'un élément par rapport au champ de pression dans le même élément, ce qui nous permet de le remplacer dans la troisième ligne et ainsi réduire le système. On fait ainsi disparaître le terme bulle de la résolution bien que sa contribution reste présente de manière sous-jacente par l'intermédiaire de sa raideur  $\mathbf{K}_e^{bb}$  comprise dans la matrice de condensation locale de la bulle  $\mathbf{C}_e$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{ll} & \mathbf{K}_e^{pl} \\ {}^T \mathbf{K}_e^{pl} & \mathbf{K}_e^{pp} - \mathbf{C}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \vec{v}^l \\ \Delta p^h \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} R^l \\ R^{pb} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{C}_e = {}^T \mathbf{K}_e^{pb} (\mathbf{K}_e^{bb})^{-1} \mathbf{K}_e^{pb} \\ R^{pb} = R^p + {}^T \mathbf{K}_e^{pb} (\mathbf{K}_e^{bb})^{-1} R^b \end{cases} \quad (143)$$

Si on écrit les valeurs des tenseurs symétriques sous forme de vecteurs à 6 composantes, les modules tangents déviatoriques seront des matrices 6x6. Soient  $N^l$  et  $N^b$  les vecteurs formés par les fonctions de forme  $\varphi^l$  et  $\varphi^b$  de l'élément, et  $E^l$  et  $E^b$  l'assemblage des matrices des dérivées spatiales des fonctions de forme.

$$\left\{ \begin{array}{l} \{N^l\}_n = \varphi_n^l \\ \{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{12} \end{Bmatrix} \\ \langle I \rangle = \langle 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \rangle \end{array} \right. \quad [E^l]_{mn} = \begin{bmatrix} \varphi_{n,x}^l & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n,y}^l & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{n,z}^l \\ 1/2 \varphi_{n,y}^l & 1/2 \varphi_{n,x}^l & 0 \\ 0 & 1/2 \varphi_{n,z}^l & 1/2 \varphi_{n,y}^l \\ 1/2 \varphi_{n,z}^l & 0 & 1/2 \varphi_{n,x}^l \end{bmatrix}$$

$n = 1, \dots, 4 \rightarrow$  numéro du noeud dans l'élément

Les matrices de raideur locales s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e^{ll} &= \int_{\Omega_{elt}} {}^T \mathbf{E}^l \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \dot{\boldsymbol{\epsilon}}} \mathbf{E}^l d\Omega_{elt} \quad ; \quad \mathbf{K}_e^{bb} = \int_{\Omega_{elt}} {}^T \mathbf{E}^b \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \dot{\boldsymbol{\epsilon}}} \mathbf{E}^b d\Omega_{elt} \\ \mathbf{K}_e^{pp} &= \int_{\Omega_{elt}} \frac{\partial Tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})}{\partial p} {}^T N^l N^l d\Omega_{elt} \\ \mathbf{K}_e^{pl} &= - \int_{\Omega_{elt}} {}^T \mathbf{E}^l I N^l d\Omega_{elt} \quad ; \quad \mathbf{K}_e^{pb} = - \int_{\Omega_{elt}} {}^T \mathbf{E}^b I N^l d\Omega_{elt} \end{aligned} \quad (144)$$

Pour résoudre le problème mécanique il est alors nécessaire de connaître la dérivée du déviateur des contraintes par rapport au taux de déformations à chaque point d'intégration. Cette dérivée est un tenseur d'ordre 4 qu'on appellera module tangent déviatorique local. Nous devons aussi connaître l'expression de la trace des taux de déformations compressibles par rapport à la pression. Cette dérivée est un scalaire qu'on appellera module tangent sphérique local. Ces relations nous sont données par la rhéologie du matériau. Il nous faut alors établir une loi de comportement représentant au mieux le comportement du matériau dans le procédé, la résoudre et en déduire les modules tangents locaux :

$$\text{déviatorique: } \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \dot{\boldsymbol{\epsilon}}} \quad ; \quad \text{sphérique: } \frac{\partial Tr(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})}{\partial p} \quad (145)$$

## 4.2. LOI RHEOLOGIQUE, COMPORTEMENT THEVP

Contrairement à la mise en forme, le traitement thermique reste généralement dans un domaine de petites déformations, dépassant de peu le domaine élastique. De plus, la gamme des températures couvertes par un tel procédé est très importante et la rhéologie du matériau en sera fortement influencée. Enfin, il nous faut choisir une loi de comportement permettant de représenter la rhéologie du matériau visqueux à haute température comme élasto-plastique à froid, voire avec retour élastique pour la fin du traitement. Une loi thermo-élasto-viscoplastique (THEVP) paraît alors la mieux appropriée.

### 4.2.1. Equation de Prandtl-Reuss, domaines élastique et inélastique

Dans l'hypothèse des petites déformations, on peut écrire le tenseur des déformations comme une somme de tenseurs indépendants. Nous pouvons alors écrire le tenseur des déformations mécaniques comme la somme d'une fraction élastiques réversible et d'une fraction inélastiques irréversible. Appliquons ce principe aux taux de déformation pour écrire l'équation de Prandtl-Reuss :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{méca} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{inel} \quad (146)$$

Dans le repère des contraintes principales ( $\sigma_I ; \sigma_{II} ; \sigma_{III}$ ), Von Mises définit un cylindre ayant pour axe la trisectrice du repère et pour rayon  $R = \sigma_0$ . Nous considérerons ici un écrouissage purement isotrope ce qui implique qu'il ne pourra qu'augmenter le rayon du cylindre et pas déplacer son axe. Un tout point du matériau, l'état de contrainte se trouvera soit à l'intérieur du cylindre (domaine élastique), soit sur sa surface (domaine élasto-plastique). Dans le cas d'un comportement élasto-viscoplastique l'état de contrainte peut momentanément sortir du domaine délimité par le cylindre. Soit  $f$  la fonction définissant la surface du cylindre dans le repère, appelée surface de charge :

$$f = (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 - 2\sigma_0^2$$

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{\sigma}; R) < 0 & \text{domaine élastique} \\ f(\boldsymbol{\sigma}; R) = 0 & \text{domaine élastoplastique} \end{cases} \quad (147)$$

En réécrivant  $f$  dans un repère quelconque et en utilisant la décomposition en partie sphérique et déviatorique (117), on obtient :

$$f(\mathbf{s}; R) = 3\mathbf{s} : \mathbf{s} - 2\sigma_0^2 \quad (148)$$

En utilisant la définition des contraintes équivalentes (119), on peut déduire le critère de plasticité :

$$\sigma_{eq} - \sigma_0 \leq 0 \quad \begin{cases} \sigma_{eq} - \sigma_0 < 0 & \text{comportement élastique } (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{inel} = 0) \\ \sigma_{eq} - \sigma_0 = 0 & \text{comportement élastoplastique} \end{cases} \quad (149)$$

### 4.2.2. Loi rhéologique (THEVP)

En utilisant l'additivité des taux de déformation (146), on peut écrire le tenseur des taux de déformation thermomécaniques comme la sommes des déformations thermiques et mécaniques :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{tm} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{th} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{inel} \quad (150)$$

#### 4.2.2.1. Les déformations réversibles thermo-élastiques

Les déformations thermiques comme les déformations élastiques répondent à un comportement linéaire réversible. Les déformations thermiques s'écrivent :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{th} = \boldsymbol{\alpha}T \quad (151)$$

$\boldsymbol{\alpha}$  est le tenseur diagonal (d'ordre 2) des coefficients de dilatation thermique. En négligeant l'évolution des coefficients de dilatation devant l'évolution de température et en considérant un matériau isotrope, on écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{th} = \boldsymbol{\alpha}\dot{T}\mathbf{I} \quad \text{et} \quad Tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{th}) = 3\boldsymbol{\alpha}\dot{T} \quad (152)$$

Le comportement mécanique élastique s'exprime par la loi de Hooke (153) ou le tenseur  $\mathbf{D}$  est fonction du module de Young et du module de Poisson, tous les deux thermodépendants. Dans le cadre d'un matériau anisotrope,  $\mathbf{D}$  serait un tenseur d'ordre 4 et s'exprimerait en fonction des différents modules de Young et Poisson selon leurs directions.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(T) : \boldsymbol{\varepsilon}_{el} \quad (153)$$

Dans le cadre d'un matériau isotrope, le tenseur  $\mathbf{D}$  d'ordre 2 est défini par les coefficients de Lamé  $\mu$  et  $\lambda$  tel que :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}_{el} + \lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon}_{el})\mathbf{I} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \quad (154)$$

La forme inverse de la loi de Hooke s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{el} = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}Tr(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \quad (155)$$

Par dérivation du tenseur des contraintes, on obtient le comportement thermo-élastique couplé :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{el} + \underbrace{\dot{T}\mathbf{D}^{-1} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial T}}_{\text{couplage thermique}} : \boldsymbol{\sigma} \quad (156)$$

On en déduit alors les parties sphériques et déviatoriques de la dérivée des contraintes :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{s}} = 2\mu \dot{\mathbf{e}}_{el} + \dot{T} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \mathbf{s} \\ \dot{p} = -\chi Tr(\dot{\mathbf{e}}_{el}) - \dot{T} \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial T} p \end{cases} \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{2\mu + 3\lambda}{3} \quad (157)$$

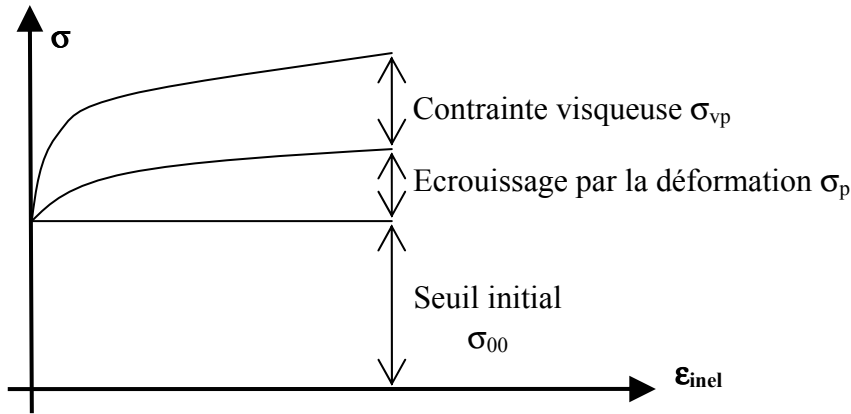


Figure 71 : Schématisation uniaxiale de la partition des contraintes dans l'approche par un modèle additif

#### 4.2.2.2. Taux de déformations inélastiques non-réversibles

Les déformations inélastique comprennent des déformations indépendantes du temps (déformations plastique) et des déformation viscoplastiques. Il existe deux approches pour rendre compte des vitesses de déformations inélastiques. Une première (une extension de l'hypothèse d'additivité des déformations) représente la déformation inélastiques par une somme d'une déformation plastique et d'une déformation visqueuse. Nous ne discuterons pas dans ce paragraphe cette approche mais le lecteur peut se reporter aux ouvrages de référence [DELOBELLE-1984 ; INOUE-1997 ; LEMAÎTRE-1988]. La seconde approche, appelée modèle unifié, représente la déformation inélastique uniquement par une déformation viscoplastique qui inclut la plasticité classique et le fluage. Cette approche repose sur le fait que les déformations ont pour origine commune la propagation des mouvements de dislocation. Lorsque la température est élevée, la propagation est thermiquement activée alors qu'à basse température, seul l'effet des contraintes internes permet le franchissement des obstacles. Ces modèles permettent de traiter les problèmes sur une large plage de température avec la dégénérescence d'un modèle de fluage à haute température à un modèle élastoplastique à basse température. [COLONNA-1992a] et [ALIAGA-2000] choisissent d'utiliser cette approche en définissant un écoulement où l'écrouissage par la déformation et la contrainte visqueuse sont définis de manière additive (158). Il est aussi possible d'envisager un écoulement où l'écrouissage par la déformation est contenu dans la contrainte visqueuse (loi multiplicative) (159). Dans ce cas, cependant, nous ne pouvons traiter correctement les transitions de comportement avec un domaine élastique évolutif. La Figure 71 présente une schématisation dans un cas uniaxial de la partition des contraintes par l'approche d'un modèle additif.

$$\sigma_0 = \sigma_{00}(T) + \sigma_p(\bar{\epsilon}, T) + \sigma_{vp}(\dot{\epsilon}, T) \quad (158)$$

$$\sigma_0 = \sigma_{00}(T) + \sigma_p(\bar{\epsilon}, T) \sigma_{vp}(\dot{\epsilon}, T) \quad (159)$$



Bien que nous choisissons de représenter les contraintes par un modèle additif, la déformation inélastique est unifiée, ce qui signifie que les phénomènes dissipatifs sont décrits à partir d'une seule variable interne traduisant l'état d'érouissage du matériau. La thermodynamique postule l'existence d'un potentiel mécanique de dissipation  $\Omega$  tel que :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{inel} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} = \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (160)$$

Pour en savoir plus sur l'aspect thermodynamique de la méthode, le lecteur est invité à se référer à [GERMAIN-1983]. Dans le cas du traitement thermique, [ALIAGA-2000] et [COLONNA-1992a] choisissent d'utiliser le potentiel de dissipation suivant :

$$\Omega = \frac{K(T)m(T)}{m(T)+1} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, T)}{K(T)} \right\rangle^{\frac{m(T)+1}{m(T)}} \quad (161)$$

R est la fonction d'érouissage. A partir de la définition (160), on dérive  $\Omega$  selon la règle de normalité pour obtenir le tenseur des vitesses de déformation viscoplastique :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\mathbf{s}}{\sigma_{eq}} \\ \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} &= \frac{3}{2\sigma_{eq}} \left[ \frac{\langle \sigma_{eq} - R \rangle}{K} \right]^{\frac{1}{m}} \mathbf{s} \end{aligned} \quad (162)$$

Deux situations sont alors possibles selon que la contrainte équivalente soit supérieure ou inférieure à la fonction d'érouissage :

$$\begin{aligned} \text{si } \sigma_{eq} - R(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) < 0 \quad \text{alors } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} &= 0 && \rightarrow \text{comportement élastique} \\ \text{si } \sigma_{eq} - R(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \geq 0 \quad \text{alors } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} &= \left[ \frac{\sigma_{eq} - R}{K} \right]^{\frac{1}{m}} && \rightarrow \text{élasto - viscoplastique} \end{aligned} \quad (163)$$

On reconnaît ici le critère de plasticité défini par Von Mises (149) ou la fonction d'érouissage devient le rayon du domaine élastique. Néanmoins, dans le cas viscoplastique, nous pouvons avoir un état de contrainte qui sort de la surface de charge (f positif).

Définissons le taux de déformation généralisé et la déformation équivalente par :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{eq}} = \left[ \frac{\sigma_{eq} - R}{K} \right]^{\frac{1}{m}} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \int_0^t \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} dt \end{aligned} \quad (164)$$

On en déduit alors, en présence d'une contrainte viscoplastique, l'expression (165) de la contrainte équivalente sous une forme additive comme envisagée en (158). Si nous définissons l'érouissage résultant des déformations plastiques comme une fonction puissance

de la déformation équivalente, on obtient la relation (166). La relation (166) est la loi de comportement que nous utiliserons pour modéliser le traitement thermique.

$$\sigma_{eq} = R + K\dot{\bar{\epsilon}}^m \quad \text{avec} \quad R = \sigma_{00} + \sigma_p \quad (165)$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_{00} + H\bar{\epsilon}^n + K\dot{\bar{\epsilon}}^m \quad (166)$$

H est le module d'écrouissage et n le coefficient d'écrouissage. Les paramètres rhéologiques  $\sigma_{00}$ , H, n, K et m thermodépendants permettent la dégénérescence du comportement viscoplastique à chaud, au comportement élasto-plastique à froid.

Les deux situations possibles énoncées en (163) permettent de séparer le domaine élastique du domaine des déformations irréversibles. Considérons nous dans le domaine inélastique et réécrivons la relation (162) à l'aide de la relation (164) :

$$\dot{\mathbf{\epsilon}}_{vp} = \frac{3}{2\sigma_{eq}} \dot{\bar{\epsilon}} \mathbf{s} \quad (167)$$

On peut alors définir un multiplicateur viscoplastique tel que :

$$\dot{\mathbf{\epsilon}}_{vp} = \dot{\lambda} \mathbf{s} \quad \text{avec} \quad \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\sigma_{eq}} \quad (168)$$

#### 4.2.2.3. Thermo-élasto-viscoplasticité (THEVP)

En tenant compte de l'incompressibilité de la viscoplasticité et du caractère élastique du taux de déformations thermiques (pas de partie déviatorique), on écrit :

$$\begin{aligned} Tr(\dot{\mathbf{\epsilon}}_{el}) &= Tr(\dot{\mathbf{\epsilon}}_{im}) - Tr(\dot{\mathbf{\epsilon}}_{th}) \\ \dot{\mathbf{\epsilon}}_{el} &= \dot{\mathbf{\epsilon}}_{im} + \dot{\mathbf{\epsilon}}_{th} \end{aligned} \quad (169)$$

La loi de comportement se résume au système d'équations de Prandtl-Reuss qui s'exprime :

$$\begin{aligned} (a) \quad \dot{\mathbf{s}} &= 2\mu(\dot{\mathbf{\epsilon}}_{im} - \dot{\lambda}\mathbf{s}) + \dot{T} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \mathbf{s} \\ (b) \quad \dot{\lambda} &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\sigma_{eq}} \\ (c) \quad \mathbf{s} : \mathbf{s} - \frac{2}{3} \sigma_{eq}^2 &= 0 \\ (d) \quad \dot{p} &= -\chi [Tr(\dot{\mathbf{\epsilon}}_{im}) - 3\alpha\dot{T}] - \dot{T} \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial T} p \end{aligned} \quad (170)$$

#### 4.2.3. Résolution numérique des équations de Prandtl-Reuss

Nous avons vu au paragraphe 4.1.3.2 que la résolution du problème mécanique demande la connaissance des modules tangents. Les modules tangents continus peuvent être déduit de (170)(a) et (d), mais [SIMO-1985] a mis en évidence l'importance d'utiliser des modules

tangents locaux cohérent avec le schéma d'intégration en temps afin de faciliter la convergence des itérations de Newton-Raphson (notamment dans le cas de grands pas de temps). On calculera alors des modules tangents discrets cohérents avec un schéma d'intégration choisi.

#### 4.2.3.1. Discrétisation temporelle

Nous nous intéressons donc dans ce paragraphe à la résolution du système (170) à l'aide d'un schéma d'intégration en temps. Il existe plusieurs méthodes comme Runge-Kutta, Euler ou point milieu généralisé. La méthode du point milieu généralisé (ou  $\theta$ -méthode) permet de choisir entre différents prédicteurs du déviateur des contraintes : tangent-retour radial, normale moyenne, élastique-retour radial. Christiane Gay [GAY-1995] présente succinctement ces différentes méthodes et choisit un schéma d'Euler implicite ( $\theta$ -méthode avec  $\theta = 1$ ), choisissant ainsi un estimateur élastique à retour radial (Figure 72). Ce schéma présente les avantages d'être inconditionnellement stable et d'avoir un module tangent discret cohérent et symétrique (ce qui n'est pas le cas du module tangent continu).

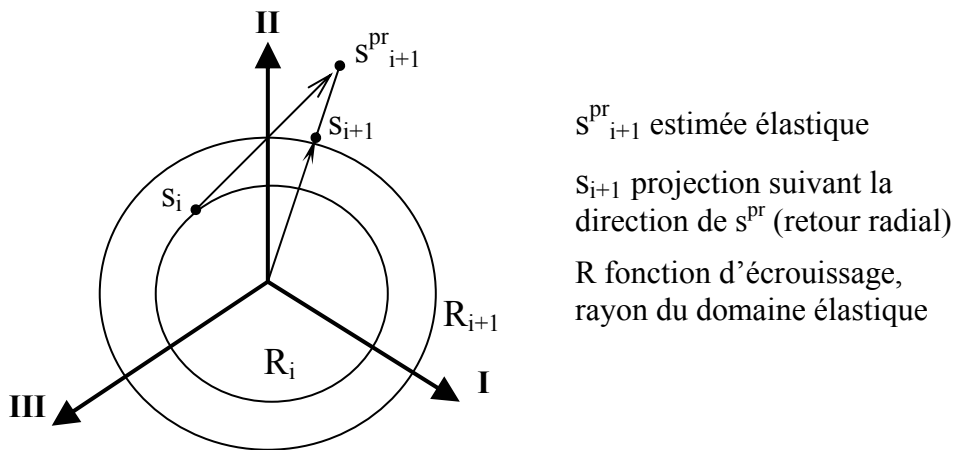


Figure 72 : Interprétation graphique de la méthode du prédicteur élastique-retour radial dans l'espace des déviateurs principaux

Les variables discrétisées se présente alors comme ceci :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_{i+1} &= \mathbf{s}_i + \Delta t \dot{\mathbf{s}}_{i+1} \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_i + \Delta t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1} \\
 \bar{\mathbf{x}}_{i+1} &= \bar{\mathbf{x}}_i + \Delta t \bar{\mathbf{v}}_{i+1} \\
 p_{i+1} &= p_i + \Delta t \dot{p}_{i+1}
 \end{aligned} \tag{171}$$

Lors d'un incrément de temps, on effectue les itérations de Newton-Raphson (143) dans lesquelles on considère les contraintes et déformations de l'instant  $i+1$ . A chaque itération de Newton-Raphson, on résout les équations de Prandtl-Reuss en considérant  $\mathbf{v}_{i+1}$  connu. On prendra pour valeur de  $\mathbf{v}_{i+1}$  la valeur  $\mathbf{v}_i + \Delta \mathbf{v}$  solution de l'itération précédente de Newton-Raphson. On considère les vitesses constantes pendant un incrément  $\Delta t$ .

En considérant les termes de couplage thermique en début d'incrément (couplage faible), le système des équations de Prandtl-Reuss s'écrit (pour simplifier l'écriture, nous notons  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  le déviateur des taux de déformation thermomécanique) :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \frac{\mathbf{s}_{i+1} - \mathbf{s}_i}{\Delta t} = 2\mu_{i+1} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1} - \dot{\lambda}_{i+1} \mathbf{s}_{i+1}) + \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_i \Delta t} \mathbf{s}_i \\
 (b) \quad & \dot{\lambda}_{i+1} = \frac{3}{2\Delta t} \frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i}{\sigma_{eq}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1})} \\
 (c) \quad & \mathbf{s}_{i+1} : \mathbf{s}_{i+1} - \frac{2}{3} \sigma_{eq}^2(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1}) = 0 \\
 (d) \quad & \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta t} = -\chi_{i+1} (Tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1}) - 3\alpha \dot{T}_{i+1}) - \frac{\chi_{i+1} - \chi_i}{\chi_i \Delta t} p_i
 \end{aligned} \tag{172}$$

#### 4.2.3.2. Résolution de la partie sphérique

Avec l'équation (172)(d), on obtient l'équation :

$$p_{i+1} = -\chi_{i+1} \Delta t [Tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1}) - 3\alpha \dot{T}_{i+1}] + \frac{\chi_{i+1}}{\chi_i} p_i \tag{173}$$

#### 4.2.3.3. Résolution de la partie déviatorique

Prenons maintenant les équations (172)(a) et (172)(c) pour obtenir le système suivant :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & (1 + 2\mu_{i+1} \Delta t \dot{\lambda}_{i+1}) \mathbf{s}_{i+1} = 2\mu_{i+1} \Delta t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1} + \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} \mathbf{s}_i \\
 (b) \quad & \mathbf{s}_{i+1} : \mathbf{s}_{i+1} - \frac{2}{3} \sigma_{eq}^2 = 0
 \end{aligned} \tag{174}$$

Pour simplifier la notation,  $\sigma_{eq}$  est noté sans indice d'incrément de temps. Remarquons que dans le cas élastique ( $\dot{\lambda} = 0$ ), l'équation (174) fait apparaître une expression de  $\mathbf{s}_{i+1}$  que nous appèlerons estimateur élastique et noterons  $\mathbf{s}_{i+1}^{pr}$  (Figure 72).

$$\mathbf{s}_{i+1}^{pr} = \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} \mathbf{s}_i + 2\mu_{i+1} \Delta t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1} \tag{175}$$

Définissons l'estimateur  $B_0$  suivant :

$$B_0 = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}_{i+1}^{pr} : \mathbf{s}_{i+1}^{pr}} \tag{176}$$

Nous allons maintenant résoudre le système d'équations (174). La méthode la plus répandue est d'injecter (a) dans (b), ce qui donne, en utilisant l'écriture de l'estimateur  $B_0$ , l'équation scalaire suivante :

$$F(\dot{\lambda}_{i+1}) = (1 + 2\mu_{i+1} \Delta t \dot{\lambda}_{i+1}) \sigma_{eq} - B_0 = 0 \tag{177}$$

Comme nous avons imposé le taux de déformation plastique constant lors d'un incrément de temps, nous pouvons écrire :

$$\Delta \bar{\epsilon} = \Delta t \dot{\bar{\epsilon}} \quad (178)$$

Notons également que la contrainte équivalente, bien que notée sans l'indice  $i+1$ , dépend de  $\bar{\epsilon}_{i+1}$  et peut donc être exprimé en fonction de  $\Delta \bar{\epsilon}$  et  $\bar{\epsilon}_i$  connu. Cela nous donne, en utilisant la définition du multiplicateur plastique (172)(b) dans la fonction (177) :

$$F(\Delta \bar{\epsilon}) = \sigma_{eq}(\Delta \bar{\epsilon}) - B_0 + 3\mu \Delta \bar{\epsilon} = 0 \quad (179)$$

Appliquons à la fonction  $F$  définie ci-dessus, le critère de plasticité énoncé en (163). Si nous sommes dans le domaine élastique, alors le prédicteur élastique  $\mathbf{s}_{i+1}^{pr}$  est solution du déviateur des contraintes à l'incrément  $i+1$ . Si nous sommes dans le domaine viscoplastique, alors l'incrément de déformation viscoplastique  $\Delta \bar{\epsilon}$ , solution de l'équation (179), nous donnera le déviateur des contraintes à l'incrément  $i+1$ .

$$\begin{aligned} \text{si } \sigma_{eq}(\Delta \bar{\epsilon}) - R(\bar{\epsilon}_i) < 0 \quad \text{alors } \mathbf{s}_{i+1} &= \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} \mathbf{s}_i + 2\mu_{i+1} \Delta t \dot{\bar{\epsilon}}_{i+1} \\ \text{si } \sigma_{eq}(\Delta \bar{\epsilon}) - R(\bar{\epsilon}_i) \geq 0 \quad \text{alors } F(\Delta \bar{\epsilon}) &= 0 \end{aligned} \quad (180)$$

Afin de démontrer l'existence et l'unicité d'une racine de la fonction  $F$ , il suffit d'étudier la fonction et sa dérivée. Cette étude est détaillée dans les travaux de thèse de François Colonna [COLONNA-1992a] et Jean-Jacques Brioist [BRIOIST-1995]. Cette étude nous amène aussi à choisir comme méthode pour trouver les racines de  $F$ , la une méthode de Newton. Néanmoins, cet algorithme itératif seul peut amener à trouver des solutions  $\Delta \bar{\epsilon}_{n+1}$  négatives (Figure 73). Dans ce cas, [BRIOIST-1995] montre que la solution  $\Delta \bar{\epsilon}_n / 2$  est plus proche de la racine que  $\Delta \bar{\epsilon}_n$ . Il est alors nécessaire de développer une méthode mixte Newton / dichotomie.

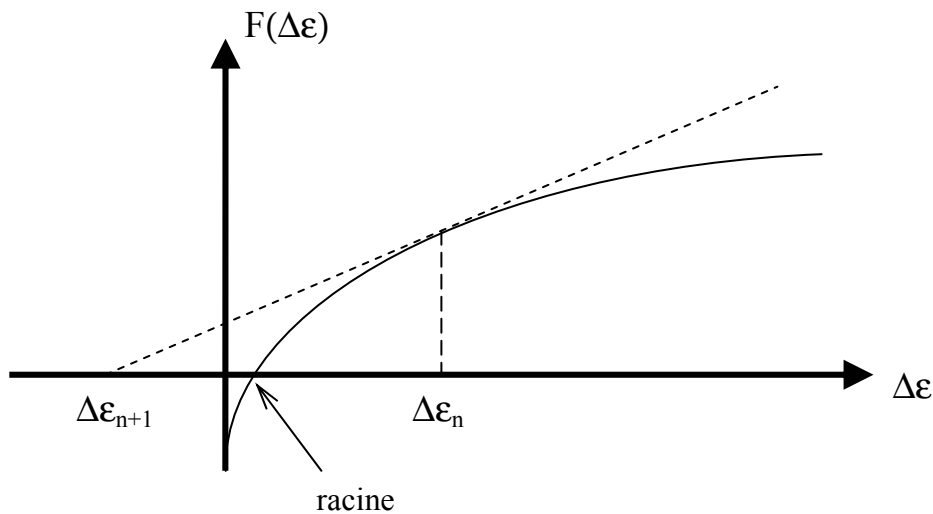


Figure 73 : Résolution par la méthode de Newton, difficulté liée aux valeurs négatives

Un diagramme schématisant la méthode de résolution est représenté Figure 74. En entrée de l'algorithme nous avons la valeur des variables  $s_i$ ,  $\bar{\epsilon}_i$  et  $\dot{\bar{\epsilon}}_i$  à l'instant  $t$ , et un champ de vitesses proposé pour l'instant  $t+\Delta t$  (champ duquel on déduit le déviateur des taux de déformation  $\dot{\epsilon}_{i+1}$ ). En sortie du diagramme, nous connaissons les valeurs des variables  $s_{i+1}$ ,  $\bar{\epsilon}_{i+1}$  et  $\dot{\bar{\epsilon}}_{i+1}$  répondants aux équations de Prandtl-Reuss pour le champ de vitesse proposé.

#### 4.2.3.4. Calcul des modules tangents discrets

Rappelons que pour la résolution de l'équation de Newton-Raphson (143), il est nécessaire de connaître deux différentielles que nous avons appelé modules tangents. En cohérence avec le schéma d'intégration choisi, nous cherchons les valeurs des modules tangents discrets sphérique et déviatorique :

$$\text{déviatorique: } \frac{\partial \mathbf{s}_{i+1}}{\partial \dot{\epsilon}_{i+1}} \quad ; \quad \text{sphérique: } \frac{\partial Tr(\dot{\epsilon}_{im})_{i+1}}{\partial p_{i+1}} \quad (181)$$

❖ Calcul du module tangent sphérique :

Nous déduisons des équations de Prandtl-Reuss discrétisées (172), l'expression de la trace des taux de déformation :

$$Tr(\dot{\epsilon}_{im})_{i+1} = -\frac{p_{i+1} - p_i}{\chi_{i+1} \Delta t} - \frac{\chi_{i+1} - \chi_i}{\chi_{i+1} \chi_i \Delta t} + 3\alpha \dot{T}_{i+1} \quad (182)$$

Le module tangent sphérique s'écrit alors :

$$\frac{\partial Tr(\dot{\epsilon}_{im})_{i+1}}{\partial p_{i+1}} = -\frac{1}{\chi_{i+1} \Delta t} \quad (183)$$

❖ Calcul du module tangent déviatorique :

Afin d'alléger l'écriture, nous mettons momentanément les indices  $i+1$  de côté. Les indices  $i$ ,  $j$ ,  $k$  et  $l$  représentent les indices de ligne et de colonne des tenseurs. Différentions la relation (174)(a) :

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} = \frac{2\mu \Delta t}{1 + 2\mu \Delta t \dot{\lambda}} \left( \frac{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}{\partial \dot{\epsilon}_{kl}} - \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \dot{\epsilon}_{kl}} s_{ij} \right) \quad (184)$$

avec  $\frac{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}{\partial \dot{\epsilon}_{kl}} = \frac{\partial (\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij})}{\partial \dot{\epsilon}_{kl}} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} = \mathbf{1} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$

$\mathbf{1} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \rightarrow$  tenseur unité d'ordre 4

Afin d'être cohérent avec la résolution incrémentale, on remplace le multiplicateur plastique par sa valeur introduite dans (177) :

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} = 2\mu \Delta t \frac{\sigma_{eq}}{B_0} (\mathbf{1} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) - 2\mu \Delta t \frac{\sigma_{eq}}{B_0} \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \dot{\epsilon}_{kl}} s_{ij} \quad (185)$$

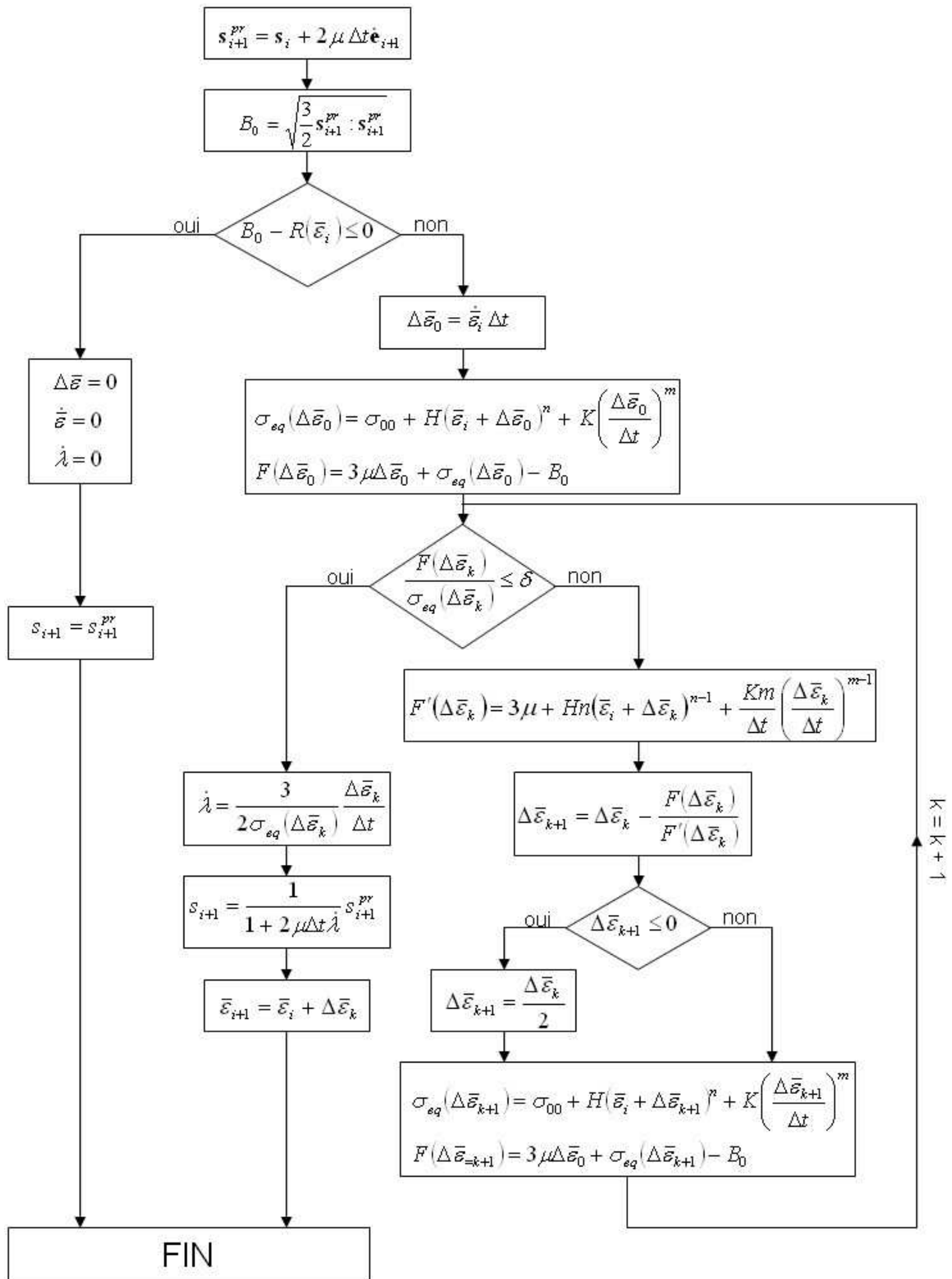


Figure 74 : Diagramme de résolution des équations de Prandtl-Reuss

Nous ne développerons pas ici le calcul de  $\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \dot{\epsilon}_{kl}}$ . Pour les détails, le lecteur pourra se référer à [SIMO-1985]. Après calcul, on obtient :

$$\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \dot{\epsilon}_{kl}} = \frac{3}{2} \frac{B_0}{\sigma_{eq}^3} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{3\mu} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \bar{\epsilon}}} + \frac{\sigma_{eq}}{B_0} - 1 \right) s_{kl} \quad (186)$$

Ce qui nous donne, après réinsertion des indices de temps :

$$\frac{\partial \mathbf{s}_{i+1}}{\partial \dot{\epsilon}_{i+1}} = 2\mu\Delta t \frac{\sigma_{eq}}{B_0} \left( \mathbf{1} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) - 2\mu\Delta t \frac{\mathbf{s}_{i+1} \otimes \mathbf{s}_{i+1}}{\frac{2}{3} \sigma_{eq} (\bar{\epsilon}_{i+1})^2} \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{3\mu} \left( \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \bar{\epsilon}} \right)_{i+1}} + \frac{\sigma_{eq}}{B_0} - 1 \right] \quad (187)$$



### 4.3. COUPLAGE THERMOMECHANIQUE

Nous avons mis en place, par une loi rhéologique THEVP, l'influence de la température sur le comportement mécanique considérant des termes de couplage. Afin de considérer un couplage complet, il faut aussi prendre en compte l'effet de la mécanique sur le champ de température. Nous allons alors considérer la chaleur dissipée par le travail mécanique :

$$\dot{W}_{meca} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (188)$$

La puissance mécanique est ainsi calculée à chaque point d'intégration de la discrétisation thermique et ajoutée à la puissance dissipée par effet Joule dans le second membre de l'équation de la chaleur (voir chapitre 3) :

$$\{Q\}_i = \sum_{elt} \left[ \sum_{k=1}^6 \dot{W}_{em}^k \int_{\Omega_{elt}} \bar{\phi}_k^h(\bar{x}_b) \phi_i^h + \sum_{k=1}^4 \dot{W}_{meca}^k \int_{\Omega_{elt}} \phi_k^h \phi_i^h \right] \quad (189)$$

La résolution numérique couplée du problème thermomécanique a été le sujet de nombreux travaux au Cemef. Citons par exemple [JAOUEN-1999] dans le cadre de la fonderie pour le logiciel Theracast, [SOYRIS-1990] dans le cadre de la forge pour le logiciel Forge3, et [COLONNA-1992b] dans le cadre du traitement thermique pour le logiciel RefProf. Leurs choix se sont portés sur un algorithme résolution par bloc plutôt qu'une résolution globale en un seul système matriciel augmentant fortement la taille des matrices et déconditionnant la matrice de raideur [ALIAGA-2000]. De plus, dans le cadre du traitement thermique (couplage avec la métallurgie), [HABRAKEN-1998] a montré que la résolution globale était très instable.

Le problème couplé est alors séparé en deux problèmes, un problème mécanique à température constante et un problème thermique à vitesse/pression constante. Le calcul est réalisé de manière alternée par incrément, utilisant le même pas de temps pour les deux problèmes. La thermique est alors calculée avec un incrément de retard par rapport à la vitesse/pression. L'algorithme de résolution est présenté Figure 75.

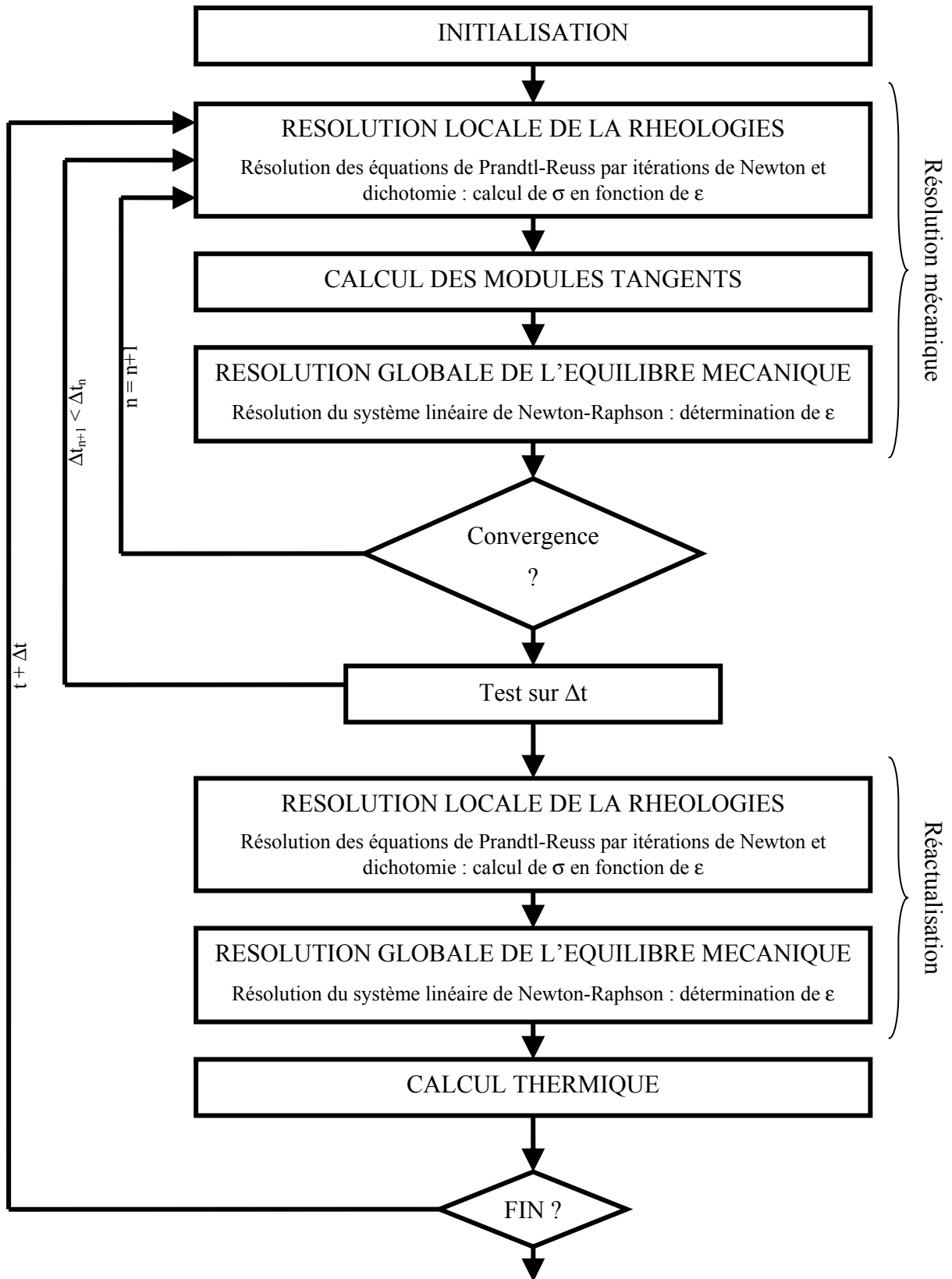


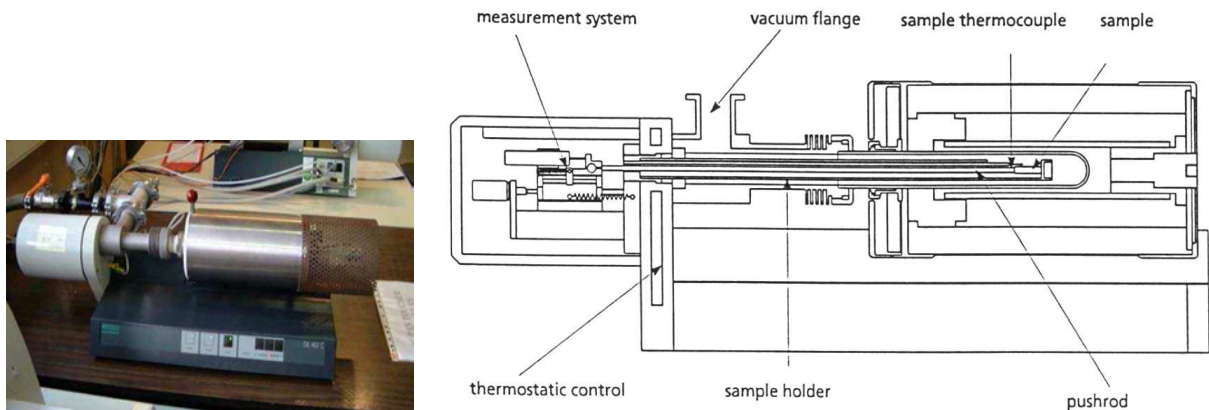
Figure 75 : Organigramme du couplage thermomécanique

## 4.4. APPLICATION AU PROCÉDE SEMI-INDUSTRIEL

### 4.4.1. Mesure du coefficient linéique de dilatation

Le système utilisé pour la mesure des variations de longueur est présenté Figure 76. Le principe consiste à transmettre la dilatation de l'échantillon à un système d'amplification situé à l'extérieur du four (measurement system) via une tige poussoir en alumine (pushrod). Le coefficient de dilatation de ces tiges étant faible et connu, la variation de longueur de l'échantillon en fonction de la température est mesurée par différence de longueur entre l'échantillon témoin en alumine et l'échantillon étudié (sample). La température est donnée par un thermocouple (sample thermocouple) logé dans l'enceinte du four à une distance de l'ordre de 3-4mm de l'échantillon, sous balayage d'Argon.

Afin d'éviter toute perte de contact entre l'échantillon et la tige poussoir, un effort de pression d'environ 20daN est exercée. Il est à noter que le système étant posé sur une table, cette pression n'est pas toujours suffisante pour éviter une variation de l'acquisition en cas de choc mécanique.



**Figure 76 : Mesure de dilatation à l'aide de tige poussoir en alumine. A gauche : photo du four fermé ; A droite : Schéma de principe de mesure et du système de positionnement.**

Le dilatomètre est étalonné avant chaque essai sur un échantillon d'alumine avec le même cycle thermique que pour l'essai. Il est communément admis qu'une variation de mesure de l'ordre de  $0,5$  à  $8 \cdot 10^{-5}$  est en général due d'une part aux différentes méthodes de mesure, à l'homogénéité chimique et microstructurale, à la massivité des éprouvettes et aux conditions de l'essai (sous atmosphère contrôlée, sensibilité du dilatomètre, etc...).

La Figure 77 présente la courbe des coefficients linéiques de dilatation calculés (190) par rapport à la longueur à l'ambient (coefficient de dilatation linéique moyen). Les valeurs de la courbe sont une moyenne sur les 3 échantillons, les barres d'erreur représentant l'écart par rapport à la valeur maximum et la valeur minimum sur les 3 essais.

$$\alpha_m(T) = \frac{L_T - L_{amb}}{L_{amb}(T - T_{amb})} \quad \text{avec } L_{amb} \text{ et } T_{amb} \text{ longueur et température à l'ambiante} \quad (190)$$

On en déduit les coefficients de dilatation absolus :

$$\alpha(T) = \frac{L_T - L_{T-\Delta T}}{L_{T-\Delta T} \Delta T} \quad \text{avec } \Delta T \text{ interval de mesure en température} \quad (191)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{réception : } 13,5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ \text{austénite : } 20,6 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \end{cases}$$

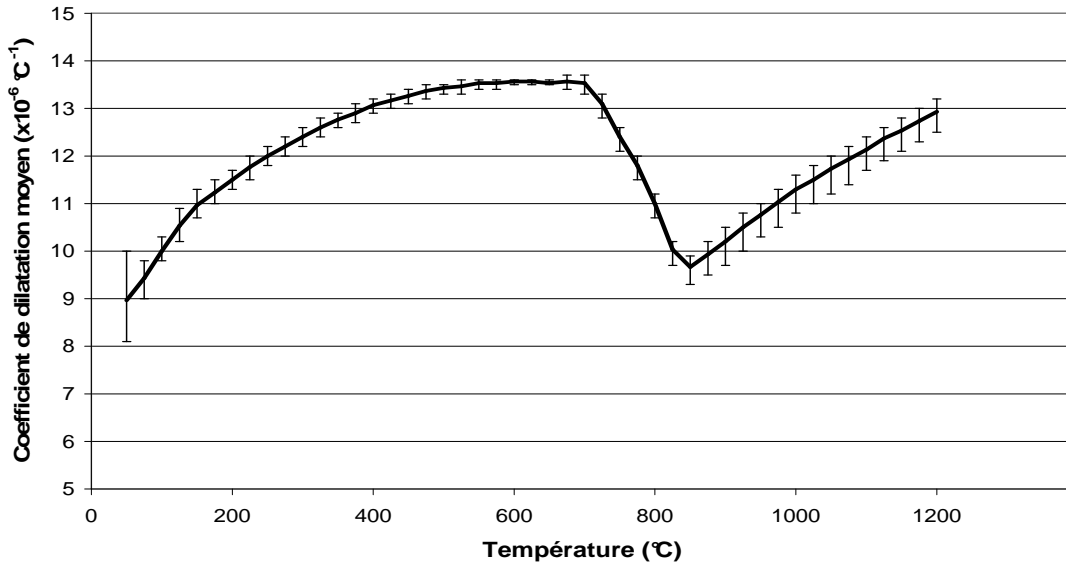


Figure 77 : Coefficient linéique de dilatation par rapport à l’ambiante

#### 4.4.2. Modules de Young et de Poisson

Nous prenons pour valeur du module de Poisson la valeur d’usage dans les aciers au carbone : 0.3. Pour le module de Young, nous utilisons également une valeur générique dépendante de la température. L’évolution choisie est une évolution linéaire allant de 200 GPa à température ambiante jusqu’à 100 GPa à 1100°C. Le taux de déformation élastique étant considéré très faible devant les déformations irréversibles, cette approximation aura un effet négligeable sur les distorsions calculées.

Température	Module de Young (MPa)	Coefficient de Poisson
0°C	200.10 <sup>3</sup>	0.3
1100°C	100.10 <sup>3</sup>	0.3

Tableau 11 : Valeurs des paramètres élastiques pour les 3 états du procédé

#### 4.4.3. Résultats de calcul

Le modèle physique utilisé pour le calcul thermomécanique comporte le système de maintien du procédé semi-industriel : support, appuis haut et bas, et éventuellement bridage pour les essais qui le nécessite. La Figure 78 montre ce modèle et donne le nombre d’éléments pour la pièce et chacun des outils.

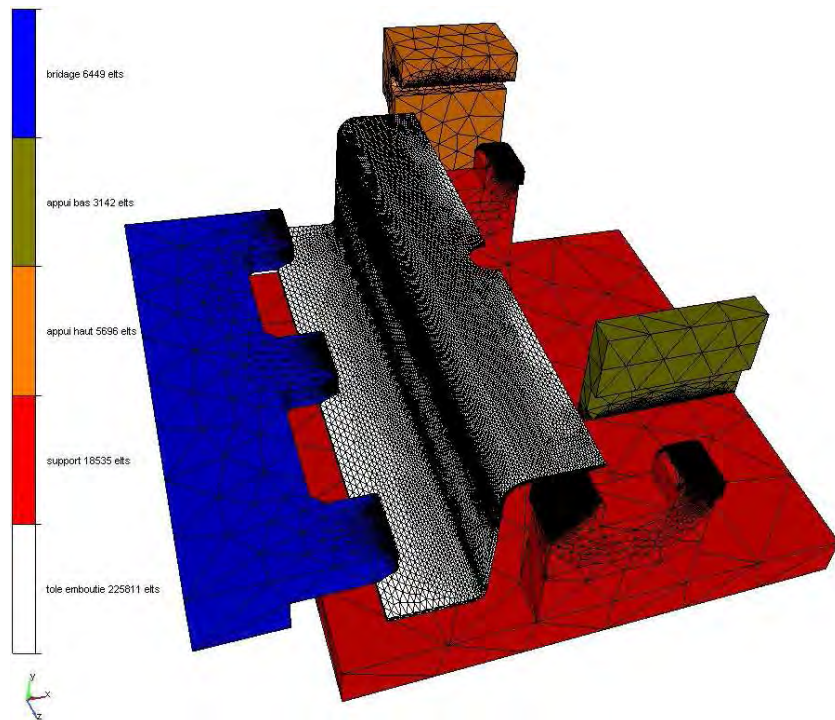


Figure 78 : Visualisation éclatée du modèle physique thermomécanique et du maillage de la pièce et des outils.

Nous pouvons voir à la Figure 79, les déplacements dus à la dilatation thermique dans la pièce, ainsi que la plastification qui a pour origine le bridage des outils et le caractère localisé du chauffage.

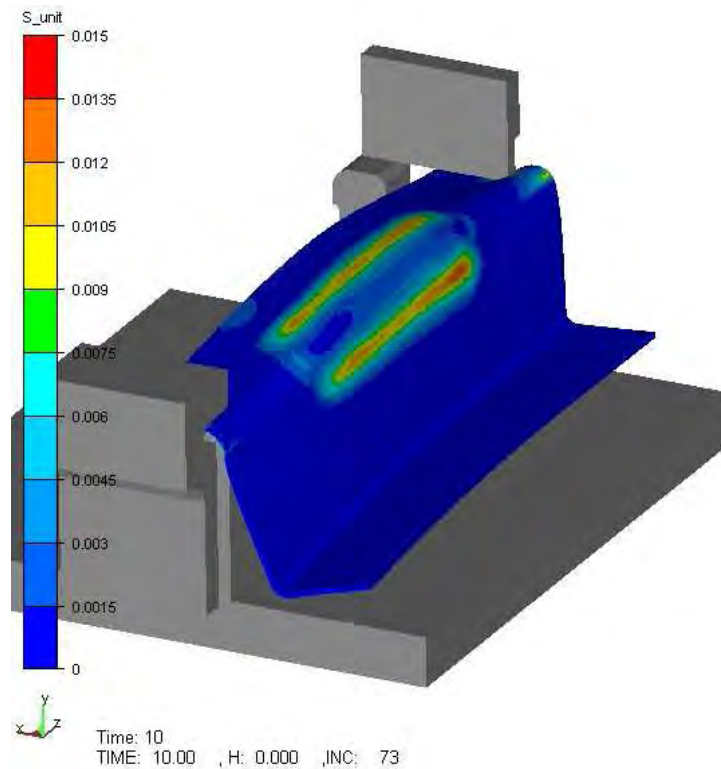


Figure 79 : Déformée (x10) et champ de déformation plastique générée par la dilatation thermique d'une pièce bridée et chauffée localement.

## BIBLIOGRAPHIE

- [ALIAGA-2000] - Aliaga C., Simulation numérique par éléments finis 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'aciers : application à la trempe de pièces forgées ou coulées, Thèse de doctorat, ENSMP, 2000.
- [ARNOLD-1984] - Arnold D., Brezzi F., Fortin M., "A stable finite element for the stokes equations", *Calcolo*, vol. 21, n° 4, p. 337-344, 1984.
- [BOUSSETTA-2005] - Boussetta R., Estimateur d'erreur et remaillage adaptatif: application à la simulation 3D des procédés de mise en forme des matériaux, Thèse de doctorat, ENSMP, 2005.
- [BRIOIST-1995] - Brioist J., Un modèle thermomécanique du refroidissement des pièces de fonderie, Thèse de doctorat, ENSMP, 1995.
- [COLONNA-1992a] - Colonna F., Modélisation numérique du refroidissement de rails, Thèse de doctorat, ENSMP, 1992a.
- [COLONNA-1992b] - Colonna F., Massoni E., Denis S. *et al*, "On thermo-elastic-viscoplastic analysis of cooling processes including phases changes", *J.Mater.Process.Technol.*, vol. 34, p. 525-532, 1992b.
- [COUPEZ-1994] - Coupez T., "A mesh improvement method for 3D automatic remeshing", *Proc. Numerical grid generation in computational fluid dynamics*, n° Weatherhill et al. eds, p. 615-625, 1994.
- [DELOBELLE-1984] - Delobelle P., Oytana C., "Experimental study of the flow rules of a 316 stainless steel at high and low stresses", *Nucl.Eng.Des.*, vol. 83, n° 3, p. 333-348, 1984.
- [GAY-1995] - Gay C., Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à froid, Thèse de doctorat, ENSMP, 1995.
- [GERMAIN-1983] - Germain P., *Mécanique*, Ecole Polytechnique, Ellipses, vol. 1 et 2, 1983.
- [HABRAKEN-1998] - Habraken A., Contribution à la modélisation du formage des métaux par la méthode des éléments finis, Thèse de doctorat, Université de Liège, 1998.
- [INOUE-1997] - Inoue T., Arimoto K., "Development and implementation of cae system hearts for heat treatment simulation based on metallo-thermo-mechanics", *Journal of Materials Engineering and Performance*, vol. 6, n° 1, p. 51-60, 1997.
- [JAOUEN-1999] - Jaouen O., Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermo-mécanique du refroidissement des pièces de fonderie, Thèse de doctorat, ENSMP, 1999.
- [LEMAÎTRE-1988] - Lemaître J., Chaboche J., *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 1988.
- [SIMO-1985] - Simo J.C., Taylor R.L., "Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity", *Comput. methods appl. mech. eng.*, vol. 48, n° 1, p. 101-118, 1985.

[SOYRIS-1990] - Soyris N., Modélisation tridimensionnelle du couplage thermique en forgeage à chaud, Thèse de doctorat, ENSMP, 1990.

---



---

# **CHAPITRE 5**

---

---

# Chapitre 5

## MODELISATION COUPLEE THERMOMECHANIQUE ET METALLURGIE

<b>5.1.</b>	<b>Cinétiques de transformation de phases en trempe</b>	<b>133</b>
<b>5.1.1.</b>	<b>Modèle de cinétiques de transformation de phases</b>	<b>133</b>
5.1.1.1.	Transformations displacives	133
5.1.1.2.	Transformations diffusives	133
<b>5.1.2.</b>	<b>Approche des cinétiques anisothermes par le formalisme d'Avrami</b>	<b>134</b>
<b>5.1.3.</b>	<b>Calcul de la transformation d'austénite en ferrite, perlite, bainite et martensite</b>	<b>137</b>
<b>5.2.</b>	<b>Transformations de phases au cours du chauffage rapide</b>	<b>140</b>
<b>5.2.1.</b>	<b>Processus de l'austénitisation</b>	<b>140</b>
5.2.1.1.	Formation de l'austénite	141
5.2.1.2.	Homogénéisation de l'austénite	142
5.2.1.3.	Croissance des grains austénitiques	142
<b>5.2.2.</b>	<b>Effets du chauffage rapide sur la trempe</b>	<b>143</b>
5.2.2.1.	Effet des hétérogénéités en carbone	143
5.2.2.2.	Effet de la taille du grain austénitique	144
<b>5.2.3.</b>	<b>Modélisation des cinétiques d'austénitisation</b>	<b>144</b>
5.2.3.1.	Cas des structures ferritiques et ferrito-perlitiques	144
5.2.3.2.	Prise en compte des cinétiques au chauffage dans Forge3	145
<b>5.3.</b>	<b>Calcul thermomécanique multiphasé</b>	<b>146</b>
<b>5.3.1.</b>	<b>Les déformations métallurgiques</b>	<b>146</b>
5.3.1.1.	Plasticité de transformation	146
5.3.1.2.	Changement de densité volumique en transformation de phase	147
<b>5.3.2.</b>	<b>Loi rhéologique THEVP multiphasée</b>	<b>147</b>
5.3.2.1.	Modèle d'homogénéisation	147
5.3.2.2.	Ecrouissage de chaque phase	148
5.3.2.3.	Le système d'équations de Prandtl-Reuss	149
<b>5.3.3.</b>	<b>Effets des contraintes sur les temps de transformation</b>	<b>150</b>
5.3.3.1.	Transformations diffusive	150
5.3.3.2.	Transformation martensitique	150
<b>5.3.4.</b>	<b>Couplage thermo métallurgique</b>	<b>151</b>
<b>5.3.5.</b>	<b>Diagramme des couplages thermomécaniques et métallurgiques</b>	<b>152</b>
<b>5.4.</b>	<b>Conclusions et hypothèses sur les couplages multiphysiques</b>	<b>154</b>
<b>5.5.</b>	<b>Application au procédé semi-industriel</b>	<b>157</b>
<b>5.5.1.</b>	<b>Etudes antérieures sur le HR45</b>	<b>157</b>

---

<b>5.5.2.</b>	<b>Paramètres de la loi THEVP</b>	<b>158</b>
5.5.2.1.	Modules de Young et de Poisson	158
5.5.2.2.	Rhéologie sur « mini-éprouvette » chauffée par effet Joule	158
5.5.2.3.	Préparation des éprouvettes	159
5.5.2.4.	Dilatometrie libre : températures d'austénitisation	160
5.5.2.5.	Caractérisation de la loi THEVP multiphasée	162
5.5.2.6.	Mise en données des paramètres rhéologiques dans le code de calcul	165
<b>5.5.3.</b>	<b>Diagrammes TTA, TTT et paramètres des couplages métallurgiques</b>	<b>166</b>
5.5.3.1.	Constitution d'un diagramme TTA	166
5.5.3.2.	Estimation d'un diagramme TTT	166
5.5.3.3.	Couplages entre mécanique et métallurgie	170
5.5.3.4.	Couplage thermo métallurgique : Enthalpies de transformation	171
<b>5.5.4.</b>	<b>Résultats de calcul</b>	<b>172</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>173</b>

---

## 5.1. CINÉTIQUES DE TRANSFORMATION DE PHASES EN TREMPE

### 5.1.1. Modèle de cinétiques de transformation de phases

Lors du traitement thermique les constituants formés lors du refroidissement sont hors équilibre thermodynamique. Il nous faut alors définir une cinétique de transformation qui décrira, hors équilibre, les vitesses de formation ainsi que les proportions respectives des nouvelles phases.

#### 5.1.1.1. Transformations displacives

Pour les transformations de phases indépendantes du temps comme pour la martensite, le taux de la nouvelle phase sera uniquement dépendant de la température. L'utilisation du terme cinétique est alors un abus de langage que nous utiliserons, considérant que la température dépend du temps. Dans la littérature, un unique modèle est utilisé. Il s'agit de la formule établie en 1959 par D.P. Koistinen et R.E. Marburger [KOISTINEN-1959] :

$$y_{\text{mart}} = y_{\text{aust}} \left[ 1 - \exp(-A_M \langle M_S - T \rangle) \right] \quad (192)$$

Les taux de phase  $y_{\text{mart}}$  et  $y_{\text{aust}}$  correspondent respectivement à la martensite et à l'austénite restante.  $A_M$  est un paramètre intrinsèque au matériau, ainsi que  $M_S$ , la température de début de transformation martensitique.

#### 5.1.1.2. Transformations diffusives

L'approche par le formalisme de W.A. Johnson, R.F. Mehl [JOHNSON-1939] et M. Avrami [AVRAMI-1939 ; AVRAMI-1940 ; AVRAMI-1941] pratiquement le seul utilisé dans la littérature. L'approche proposée par J.B. Leblond et J. Devaux [LEBLOND-1984] propose un formalisme anisotherme très différent de celui de Johnson-Mehl-Avrami bien que l'évolution des cinétiques en soit très proche. C. Aliaga [ALIAGA-2000] a développé dans le logiciel Forge3 la possibilité de simuler des opérations de trempe à partir de pièces chaudes entièrement austénitiques à l'aide du formalisme de Johnson-Mehl-Avrami. Ce choix a été guidé par les travaux concernant l'utilisation du formalisme d'Avrami tenant compte de l'effet des contraintes internes [FERNANDES-1985] et [DENIS-1987a], et de l'hétérogénéité en carbone [MEY-1997]. Ce formalisme implique différentes hypothèses :

1. hypothèse iso-cinétique : le rapport entre les vitesses de germination et de croissance ne varie pas avec la température ;
2. hypothèse de germination instantanée : lorsque les germes de la nouvelle phase apparaissent, ils créent une condition de saturation des sites ;
3. hypothèse du volume infini : le volume de la phase mère est considéré infini devant le volume de la phase naissante.

Avec la forme la plus générale d'Avrami (isotherme ou anisotherme en tenant compte des hypothèses ci-dessus), le taux  $y$  d'une phase s'écrit :

$$y = 1 - \exp[-b(T)\eta(t)^{n(T)}] \quad (193)$$

k et n sont les paramètres thermodépendants d'Avrami. n est également dépendant du mode de germination et de la forme du germe.  $\eta$  est le temps caractéristique d'Avrami défini par la probabilité qu'un germe soit activé. Soit q la probabilité par unité de temps d'activation d'un germe. Le temps caractéristique s'écrit alors sous la forme :

$$\eta(t) = \int_0^t q(\tau) d\tau \quad (194)$$

Les paramètres b et n sont issus de données isothermes et peuvent alors être déduites d'un diagramme TTT. Nous avons vu au chapitre 1 que l'obtention d'un tel diagramme n'est pas toujours aisée, selon le matériau observé. Néanmoins, des méthodes alternatives existent. D. Farias [FARIAS-1991] utilise une méthode itérative inverse ayant pour donnée d'entrée le diagramme TTT d'un matériau de composition chimique approchante. B. Buchmayr et J.S. Kirkaldy [BUCHMAYR-1990] proposent une approche fondée sur le principe d'additivité pour calculer les diagrammes TTT d'aciers faiblement alliés à partir de leur composition chimique et de la taille de grain austénitique.

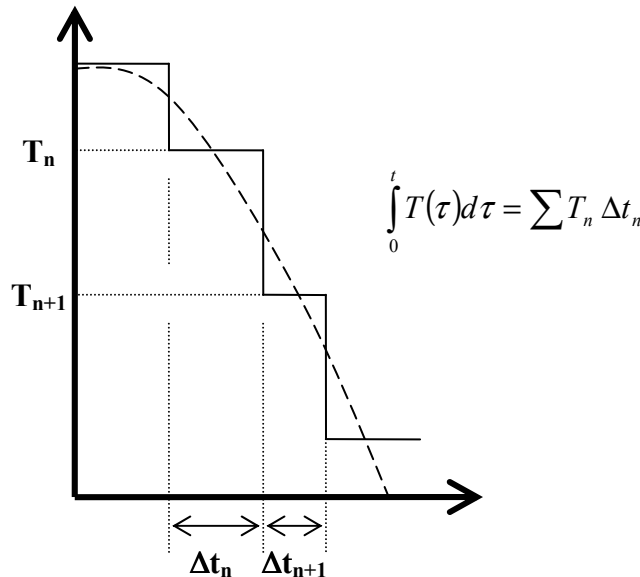


Figure 80 : Schéma du principe d'additivité : la courbe de refroidissement  $T(t)$  est partitionnée en une série d'étapes isothermes.

### 5.1.2. Approche des cinétiques anisothermes par le formalisme d'Avrami

Plusieurs approches existent et toutes sont fondées sur le principe d'additivité qui consiste à décomposer le processus thermique en étapes élémentaires (Figure 80). Elles permettent ainsi d'accéder aux cinétiques anisothermes à partir de données isothermes. Nous ne discuterons ici que la théorie introduite par W.I. Pumphrey et F.W. Jones [PUMPHREY-1948] et utilisée par C. Aliaga [ALIAGA-2000]. Cette approche dite « du temps fictif » sépare l'incubation de la croissance. La croissance débutera lorsque l'incubation déterminée par la méthode de Scheil sera terminée.

La méthode de Scheil consiste à déterminer le temps d'incubation  $t_{inc}$  auquel la somme de Scheil atteint l'unité :

$$\text{Trouver } t_{inc} \text{ tel que : } \int_0^{t_{inc}} \frac{dt}{t_{deb}(T)} = 1 \quad (195)$$

Le temps  $t_{deb}$  est le temps de début de transformation isotherme à la température  $T$ . Dans le cas isotherme, la somme est alors égale à 1 lorsque  $t_{inc}$  est égal à  $t_{deb}$ . En considérant le principe d'additivité tel qu'il est schématisé en Figure 80, soit  $S_n$  la somme de Scheil à la fin de l'incrément  $n$  :

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta t_i}{t_{deb}(T_i)} \quad (196)$$

Une fois la condition de Scheil atteinte ( $S_n \geq 1$ ), le germe commence à croître et une nouvelle phase apparaît. On connaît alors le temps d'incubation :

$$\begin{aligned} \text{si } S_n > 1 \text{ soit } \Delta t_{inc} \text{ tel que } S_{n-1} + \frac{\Delta t_{inc}}{t_{deb}(T_n)} = 1 \text{ alors } t_{inc} = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t_i + \Delta t_{inc} \\ \text{d'où } t_{inc} = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t_i + (1 - S_{n-1}) t_{deb}(T_n) \end{aligned} \quad (197)$$

La croissance débute alors pendant l'incrément  $n$  et à la température  $T_n$ , pendant un temps  $\Delta t_{crois}$  tel que :

$$\Delta t_{crois} = \Delta t - \Delta t_{inc} \quad (198)$$

L'équation d'Avrami (193) devient alors pour pour l'incrément  $n$  :

$$y_n = y_n^{\max} \left[ 1 - \exp(-b_n \Delta t_{crois}^{n_n}) \right] \quad (199)$$

$b_n$  et  $n_n$  sont les paramètres d'Avrami calculés à partir d'un diagramme TTT pour la température  $T_n$ ,  $y_n^{\max}$  est le taux qu'atteindra la nouvelle phase à la température  $T_n$  en un temps infini.

D'une façon plus générale, pour tout incrément de temps, on écrira le taux de la nouvelle phase à l'instant  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$  sous la forme :

$$y_{i+1} = y_{i+1}^{\max} \left( 1 - \exp[-b_{i+1} (t_i^* + \Delta t)^{n_{i+1}}] \right) \quad (200)$$

Le temps  $t_i^*$  est un temps fictif tenant compte de l'histoire d'évolution thermique de la nouvelle phase. Il représente le temps qui aurait été nécessaire pour obtenir le taux de phase  $y_i$  si la transformation avait été isotherme à la température  $T_{i+1}$ . Le temps fictif de l'incrément est alors défini par :

$$y_i = y_{i+1}^{\max} \left( 1 - \exp[-b_{i+1} (t_i^*)^{n_{i+1}}] \right) \quad (201)$$

Ce qui donne pour expression de  $t_i^*$  :

$$t_i^* = \left[ \frac{-\ln\left(\frac{y_i}{y_{i+1}^{\max}}\right)}{b_{i+1}} \right]^{1/n_{i+1}} \quad (202)$$

Les paramètres  $b_{i+1}$  et  $n_{i+1}$  sont déterminés à partir du diagramme TTT du matériau. Pour une température donnée  $T_{i+1}$ , il est nécessaire de connaître les temps d'incubation et deux points de la courbe de cinétique de transformation pour déterminer les deux paramètres d'Avrami. Considérons que le diagramme TTT renseigne les courbes de fin d'incubation  $T(t_{deb})$  (ou transformation à 1% par exemple), de transformation à 10%  $T(t_{10\%})$  et de transformation à 90%  $T(t_{90\%})$  comme le montre la Figure 81.

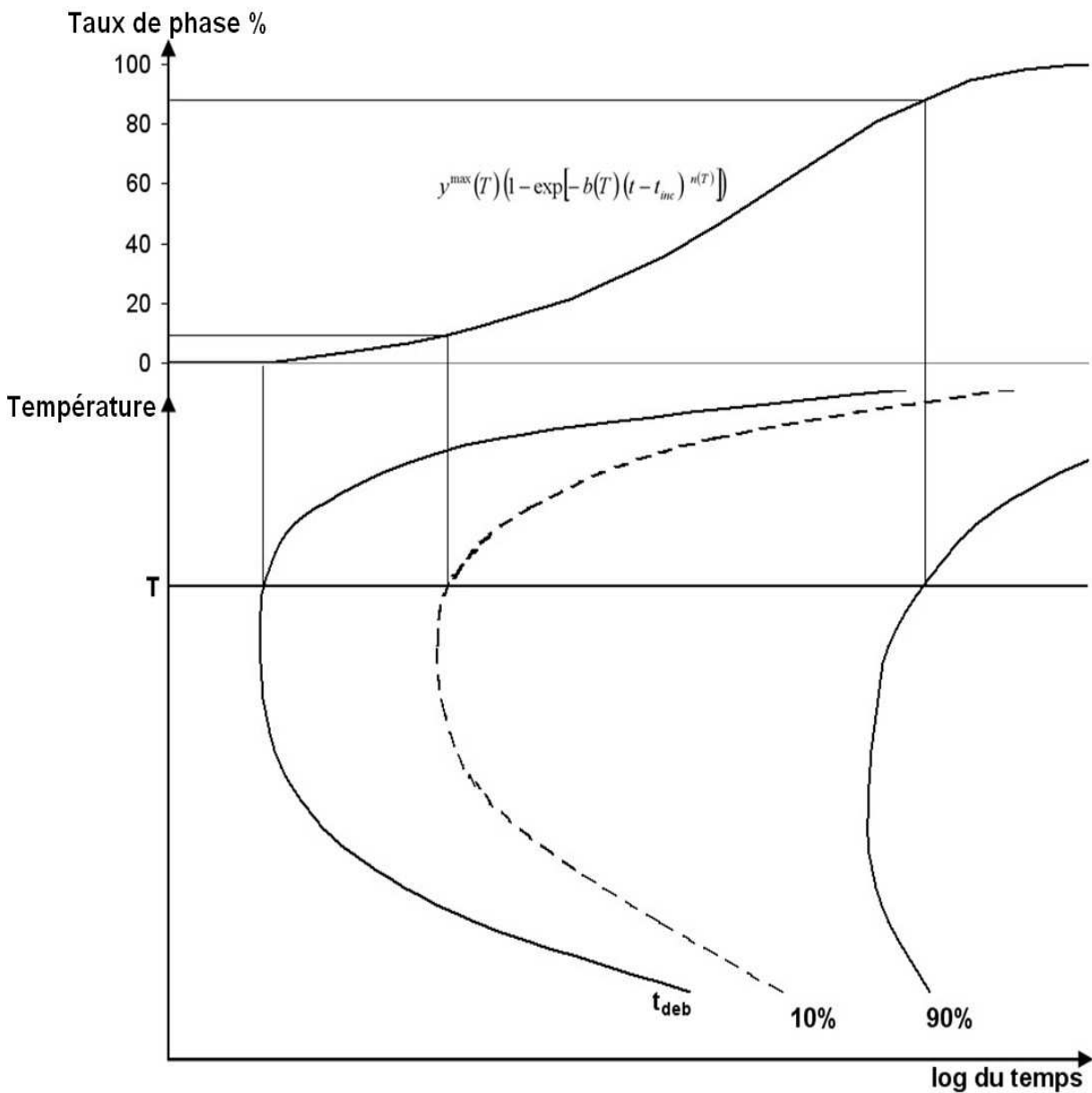


Figure 81 : Reconstruction schématisques des cinétiques et détermination des paramètres d'Avrami à partir d'un diagramme TTT



Les paramètres  $b(T)$  et  $n(T)$  seront alors calculés pour toute température  $T$  :

$$n(T) = \ln \left[ \frac{\ln \left( 1 - \frac{10\%}{y^{\max}(T)} \right)}{\ln \left( 1 - \frac{90\%}{y^{\max}(T)} \right)} \right] / \ln \left( \frac{t_{10\%}(T) - t_{deb}(T)}{t_{90\%}(T) - t_{deb}(T)} \right) \quad (203)$$

$$b(T) = - \frac{\ln \left( 1 - \frac{10\%}{y^{\max}(T)} \right)}{(t_{10\%}(T) - t_{deb}(T))^{n(T)}} = - \frac{\ln \left( 1 - \frac{90\%}{y^{\max}(T)} \right)}{(t_{90\%}(T) - t_{deb}(T))^{n(T)}}$$

### 5.1.3. Calcul de la transformation d'austénite en ferrite, perlite, bainite et martensite

La Figure 82 donne une représentation schématique du diagramme TTT tel qu'il est utilisé dans le modèle de transformation de phase [FERNANDES-1985]. Le diagramme TTT est séparé en différents domaines de transformation séparés par des températures caractéristiques du matériau :

- ❖  $A_3 - A_1$  : domaine de formation de la ferrite proeutectoïde ;
- ❖  $A_1 - TH$  : domaine de la transformation ferrito-perlitique ;
- ❖  $TH - B_S$  : domaine de formation de perlite seule ;
- ❖  $B_S - B_F$  : domaine de formation de bainite où la transformation pourra être incomplète (austénite résiduelle) ;
- ❖  $B_F - M_S$  : domaine de formation de bainite (transformation complète) ;
- ❖  $T < M_S$  : domaine de formation de martensite (transformation non diffusive).

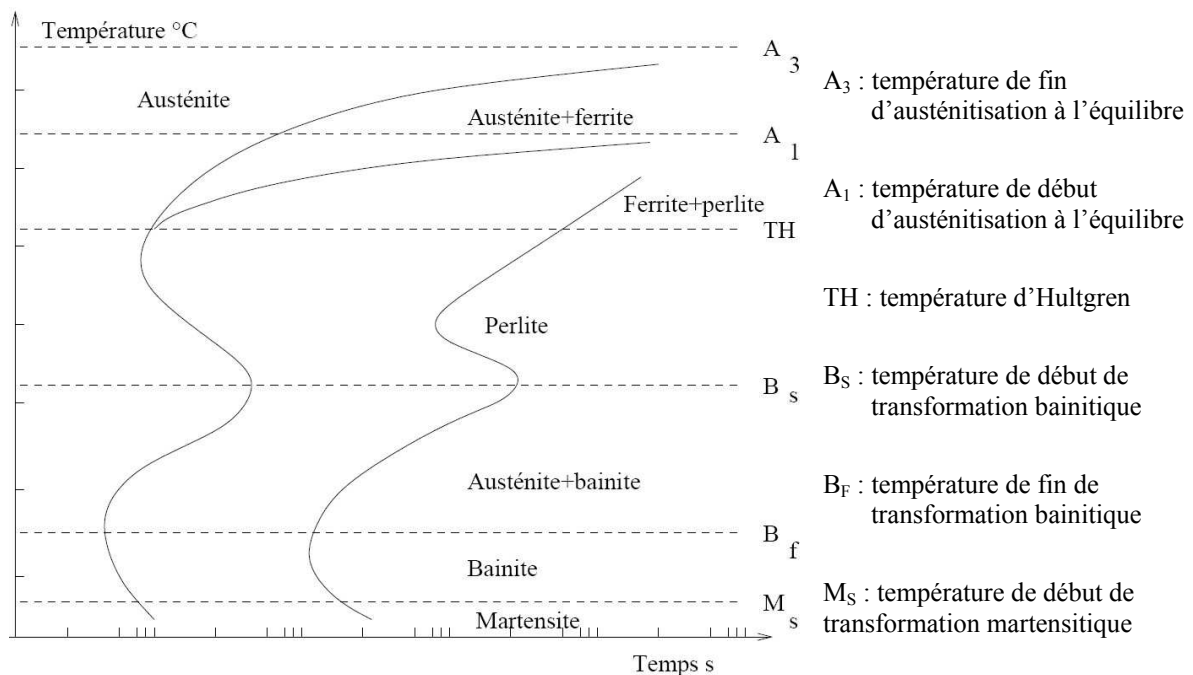


Figure 82 : Représentation schématique d'un diagramme TTT par le modèle de transformation de phase [ALIAGA-2000]

Généralement, la température  $B_S$  est très proche ou confondue avec  $TH$ , de même que  $B_F$  par rapport à  $M_S$ . Tenant compte du schéma Figure 82, le calcul des cinétiques de refroidissement se déroule comme présenté sur le diagramme en Figure 83. La variable  $k$  représente la phase qui sera calculée en fonction du domaine de température. Dans le cas d'un calcul ferrito-perlitique ( $A_1 > T > TH$ ) la somme de Scheil est calculée à partir du premier temps de début (ferrite). Les croissances sont ensuite calculées en commençant par la ferrite, puis la perlite si on entre dans son domaine de transformation (critère : le temps fictif de la ferrite est supérieur à la différence entre les temps de début de la ferrite et la perlite à la température du palier).

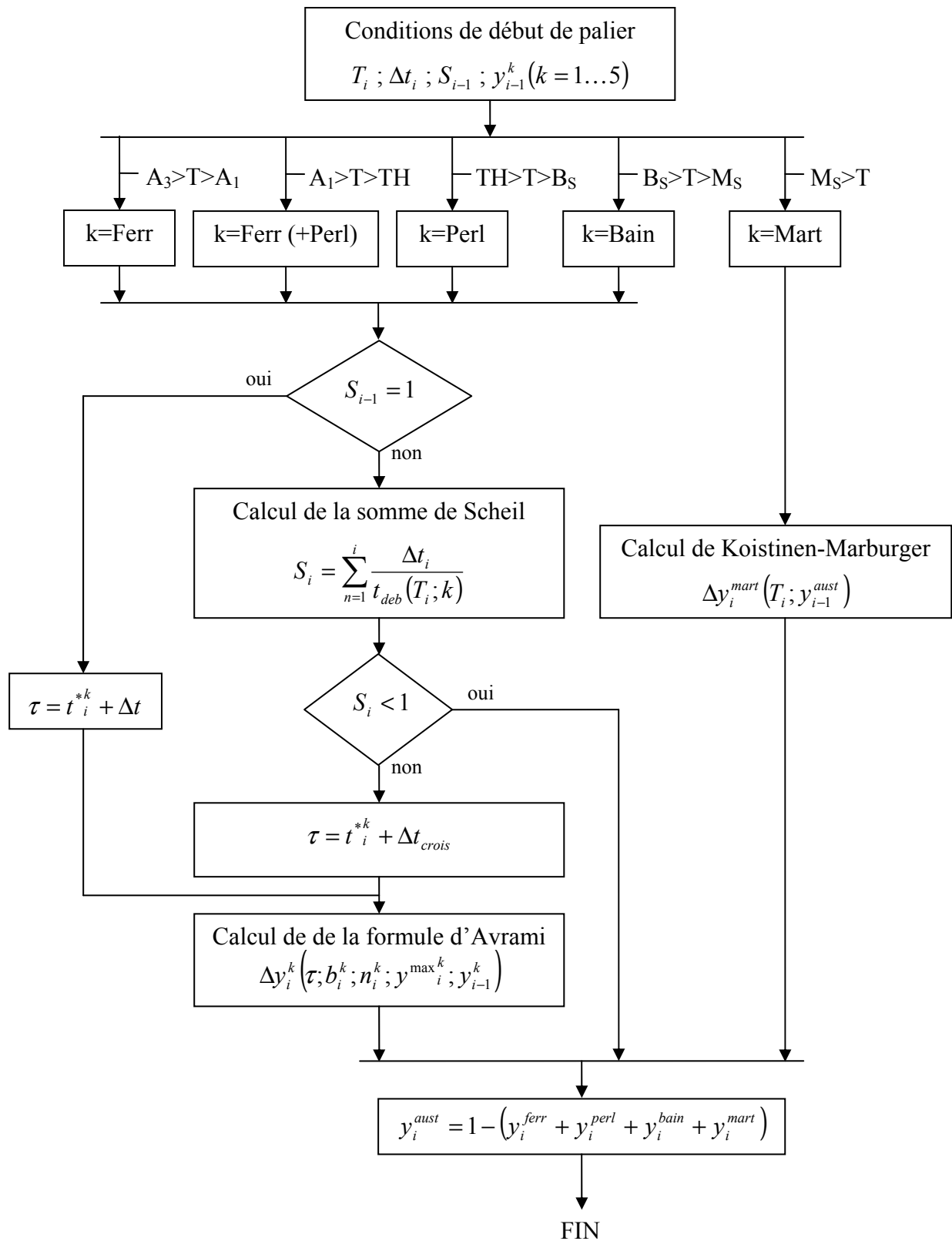


Figure 83 : Diagramme de résolution du calcul des cinétiques de transformation en trempe

## 5.2. TRANSFORMATIONS DE PHASES AU COURS DU CHAUFFAGE RAPIDE

Lors du chauffage des aciers, plusieurs phénomènes peuvent agir. Tout d'abord, considérons un échantillon martensitique. Pendant le chauffage, le carbone quitte les sites qu'il occupe dans les mailles quadratiques de la martensite et ségrège vers les défauts de réseau sous forme de carbure. La distorsion des mailles diminue et les carbures précipitent sous forme de cémentite  $Fe_3C$  jusqu'à un retour complet aux mailles cubiques centrée (fer  $\alpha$ ). On ne trouvera donc pas de martensite aux températures d'austénitisation (au dessus de  $A_1$ ). Dans le cas de la bainite, le processus est un peu plus complexe mais peut être considéré de la même manière [DESALOS-2003]. La modélisation des revenus n'étant pas l'objet de ce travail, nous ne considérerons que l'austénitisation d'aciers ferrito-perlitiques au dessus de la température  $A_1$ .

### 5.2.1. Processus de l'austénitisation

La Figure 84 donne une schématisation réalisée des phénomènes qui apparaissent lors du chauffage rapide d'une structure ferrito-perlitique au dessus de la température d'équilibre  $A_1$ , à partir des travaux de [FARIAS-1990], [MIKOVIC-2004] et [ROBERTS-1943]. L'austénitisation peut être séparée en 3 étapes :

1. la formation d'austénite qui apparaît à partir de  $A_1$ ,
2. l'homogénéisation de l'austénite par diffusion du carbone au dessus de  $A_{c3}$ ,
3. l'augmentation de la taille des grains à partir d'une température  $A_{c3} + \Delta T$

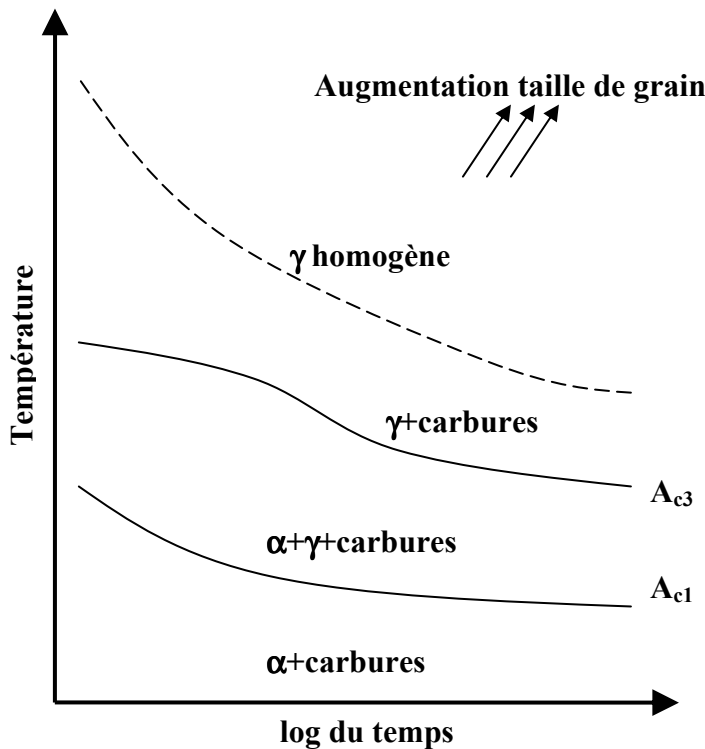


Figure 84 : Schématisation du chauffage au isotherme d'un acier ferrito-perlitique

La seconde et la troisième étape n'ont pas été implémentées dans notre modélisation et cela représente une importante hypothèse de cette première approche du procédé. Nous discuterons tout de même ces phénomènes et présenterons les choix de certains auteurs quand à leur modélisation numérique en vue d'une évolution du code, puis nous discuterons leur impact sur le refroidissement.

#### 5.2.1.1. Formation de l'austénite

Quelques années après ses travaux sur le formalisme aujourd'hui très utilisé sous le nom de formalisme de Johnson-Mehl-Avrami, R.F. Mehl s'intéresse aux mécanismes et aux taux de formation de l'austénite à partir d'agrégats de ferrite et cémentite, en collaboration avec G.A. Roberts [ROBERTS-1943]. Ils montrent que la formation de l'austénite se décompose en une phase de germination puis une phase de croissance avant que l'homogénéisation ne débute.

La notion de diagrammes TTA en conditions isothermes n'est réellement introduite qu'à partir de 1956 [ROSE-1956]. Les auteurs précisent que dans les premiers instant après l'incubation, la formation d'austénite se fait aux dépens de la perlite, la transformation de la ferrite se produisant à des vitesses beaucoup plus faibles.

La même année, G. Molinder [MOLINDER-1956] propose l'étude de l'austénitisation d'un acier au carbone (1.27%C) et montre que la période d'incubation est d'autant plus courte que la température augmente.

Quelques années plus tard, [GARCIA-1981] et [SPEICH-1981] proposent l'étude d'aciers au manganèse et à bas carbone. Ils arrivent aux mêmes conclusions en ce qui concerne les structures ferrito-perlitiques. La formation de l'austénite débute par une germination instantanée aux interfaces ferrite / perlite. Puis, s'opèrent d'une part la croissance très rapide de l'austénite dans la perlite (contrôlée par la diffusion du carbone sur de petites distances), et d'autre part, la croissance plus lente de l'austénite dans la ferrite (contrôlée, selon la température, par la diffusion du carbone ou du manganèse sur des distances plus longues). Enfin, l'austénite croît de manière très lente par diffusion du manganèse dans l'austénite.

Nous terminerons cette étude bibliographique en nommant les travaux de V.M. Zalkin [ZALKIN-1986] qui, lors d'une étude critique de la littérature soviétique sur le sujet, rejoint les conclusions des auteurs de [SPEICH-1981] sur l'instantanéité de la transformation de perlite en austénite, en considérant que le début de cette transformation se situe à une température très proche de  $A_1$ , quel que soit les vitesses de chauffage en jeu.

En conclusion de cette étude, on peut déduire une évolution schématique de la formation d'austénite à partir d'un acier ferrito-perlitique comme présenté en Figure 85. Cette figure est tirée d'un schéma présenté dans [FARIAS-1990] et [FARIAS-1991] complété à l'aide d'une figure de [ZALKIN-1986]. La droite  $A_1$  correspond à la température de début de transformation à l'équilibre et est indépendante du temps (germination instantanée de la perlite). La courbe  $A_{C3}$  représente le temps de fin de transformation. Au dessus de la température  $A_3$  elle correspond à une structure totalement austénitique, et à une température comprise entre  $A_1$  et  $A_3$ , elle correspond à la structure d'équilibre. Ainsi, pour les temps supérieurs à  $t_F$  la transformation est considérée à l'équilibre, ce qui donne une transformation instantanée de la perlite en austénite au dessus de  $A_1$  et une transformation de ferrite linéaire avec la température. Les temps  $t_p$  et  $t_F$  ne sont dépendants que de la structure initiale du matériau.

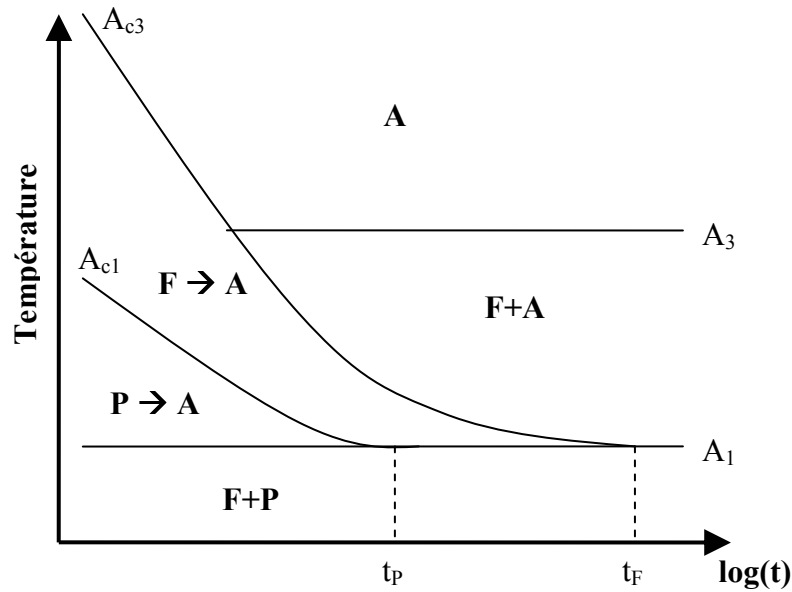


Figure 85: Représentation schématique d'un diagramme TTA d'un acier hypoeutectoïde

#### 5.2.1.2. Homogénéisation de l'austénite

On ne trouve que peu d'études expérimentales sur l'homogénéisation de l'austénite dans la littérature, dû à la difficulté d'observation de tels phénomènes. Néanmoins, citons deux références, [MULOT-1979] et [VAMVACOUSSIS-1975], qui observent les structures martensitiques après chauffage et trempe de structures ferrito-perlitiques. Ils mettent en évidence les zones riches en carbone (martensite claire) provenant des zones anciennement perlitiques et les zones pauvres en carbone (martensite sombre) provenant des zones initialement ferritiques.

Contrairement aux études expérimentales, on trouve une grande diversité de modèles théoriques d'homogénéisation, certains basés sur une résolution analytique des fonctions d'erreur [ASHBY-1984], d'autres sur des résolutions numériques par différences finies de problèmes de diffusion [INOUE-1987]. Nous ne présenterons pas plus en détail ces modèles et renvoyons le lecteur intéressé au manuscrit de thèse de David Farias [FARIAS-1991].

#### 5.2.1.3. Croissance des grains austénitiques

Une fois l'austénite formé et jusqu'à sa transformation en une autre phase lors du refroidissement, la taille de ses grains augmente. Certains auteurs utilisent la relation (204) proposée par [ALBERRY-1982] en considérant que l'augmentation de la taille des grains débute après homogénéisation [FARIAS-1991].

$$\frac{d(D^a)}{dt} = C \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \quad (204)$$

D est la taille du grain d'austénite, R est la constante des gaz parfaits, Q est l'énergie d'activation de l'augmentation de la taille des grains, et C et a sont des paramètres matériaux.

[LEBLOND-1984] propose une relation donnant l'évolution de taille moyenne du grain austénitique dans un élément de volume en fonction de la variation du taux d'austénite dans ce volume :

$$\begin{aligned} \dot{y} \geq 0 \quad \dot{D} &= C \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) - \frac{\dot{y}}{y} D^a \\ \dot{y} \leq 0 \quad \dot{D} &= C \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \end{aligned} \quad (205)$$

Ici,  $\dot{D}$  et  $D$  sont la vitesse de croissance et la taille des grains austénitiques moyennés dans le volume considéré,  $\dot{y}$  et  $y$  sont respectivement la vitesse d'apparition et le taux d'austénite. Cette relation permet de prendre en compte l'augmentation de la taille des grains dès le début de la croissance jusqu'à transformation complète au refroidissement.

D'un point de vue numérique, en intégrant la relation en temps et dans un schéma discret, on obtient la relation de la taille des grains à l'incrément  $n$  ( $\langle \cdot \rangle$  est la partie positive et  $D_0$  est la taille de grain initiale) :

$$D_n^a = C \sum_{i=1}^n \left[ \exp\left(-\frac{Q}{RT_i}\right) - \frac{\langle \dot{y}_i \rangle}{y_i} D_{i-1}^a \right] \Delta t_i + D_0^a \quad (206)$$

## 5.2.2. Effets du chauffage rapide sur la trempe

### 5.2.2.1. Effet des hétérogénéités en carbone

Lors du refroidissement des aciers, le gradient de taux de carbone affecte les cinétiques de transformation de phase. Une augmentation du taux de carbone ( $\gamma$ -gène) diminue les températures caractéristiques de changement de phase, augmente les temps d'incubation et ralentit les transformations.

Dans le cadre de la simulation numérique à l'aide de données isothermes, certains auteurs [WANG-1999] utilisent plusieurs diagrammes TTT afin de calculer toutes les cinétiques de transformation correspondant à la variation du taux de carbone dans la pièce. Cette approche basée sur l'interpolation des données est fastidieuse et nous préférons nous intéresser à l'approche utilisée par [MEY-1997] et [DENIS-1999]. Il s'agit de calculer de nouveaux TTT pour chaque concentration en carbone à partir d'un TTT de référence (TTT à la concentration de carbone la plus faible) et d'une loi théorique basée sur les travaux de [BUCHMAYR-1990]. Nous n'entrons pas dans le détail mais en présentons le principe.

Il s'agit dans un premier temps de recalculer les températures  $A_3$ ,  $T_H$ ,  $B_S$  et  $M_S$  ( $A_1$  n'est que très peu influencé), puis, dans un second temps, de calculer un coefficient de décalage des temps défini par :

$$D = \frac{t - t_{ref}}{t_{ref}} \quad (207)$$

Pour chaque phase la valeur de  $D$  sera calculée différemment et en fonction des taux de carbone (voire même d'autres éléments d'alliages). On peut alors retrouver les nouveaux paramètres d'Avrami à partir de ceux de référence et du coefficient de décalage.

Les taux de transformation maximum  $y^{\max}$  sont aussi influencés par la teneur en carbone. Afin de déterminer leur nouvelle valeur, on peut utiliser le diagramme de phases à l'équilibre et la méthode du bras de levier.

Pour plus d'informations sur cette méthode, nous invitons le lecteur à se reporter aux travaux de thèses de C. Aliaga [ALIAGA-2000] qui a implémenté cette méthode dans Forge3 en vue de la simulation de trempe de pièce cémentées.

### 5.2.2.2. Effet de la taille du grain austénitique

De manière générale, la croissance du grain austénitique stabilise l'austénite et par conséquent augmente le temps d'incubation des transformations avec diffusion. Ce phénomène s'explique en se rappelant que les sites de germination préférentiels sont situés aux joints de grains et qu'une conséquence de l'augmentation de la taille des grains est la diminution du nombre de joints, donc de sites de germination. En ce qui concerne les transformations non diffusives, les auteurs de [SASTRI-1965] concluent que les défauts de structure comme les dislocations, lacunes ou défauts d'empilements ont une influence prédominante par rapport à la taille du grain austénitique sur la température de début de transformation martensitique.

D'un point de vue de la simulation numérique, les auteurs de [UMEMOTO-1980] introduisent l'effet de la taille de grain austénitique dans la formulation de Johnson-Mehl-Avrami par un décalage des temps de transformation qui peut être défini comme en (207).

## 5.2.3. Modélisation des cinétiques d'austénitisation

### 5.2.3.1. Cas des structures ferritiques et ferrito-perlitiques

Nous avons implémenté dans le cadre de nos travaux, le calcul des cinétiques d'austénitisation. Afin d'être cohérent entre le calcul au chauffage et au refroidissement, nous avons choisi d'utiliser le formalisme de Johnson-Mehl-Avrami tel qu'il a été présenté au paragraphe 5.1. Néanmoins, dans le cas d'une structure ferrito-perlitique, nous faisons quelques hypothèses :

- ❖ La perlite germe instantanément en  $A_1$
- ❖ Le taux de croissance de l'austénite est continu et, afin de limiter le nombre de paramètres à identifier, il est modélisé par une seule équation de type Johnson-Mehl-Avrami. C'est-à-dire qu'au lieu d'être gouverné par une loi correspondant à la disparition de la perlite puis une loi correspondant à la disparition de la ferrite, une seule loi sera identifiée à partir de deux courbes  $T(t)$  du diagramme TTA isotherme (comme présentée aux relations (203)) pour modéliser la cinétique d'apparition de l'austénite. La conséquence de cette hypothèse sur la cinétique de formation de l'austénite est schématisée par la Figure 86.

Dans le cas de l'austénitisation d'une structure ferritique, la germination ne sera pas instantanée. Dans ce cas, le calcul de la cinétique de formation de l'austénite se réalise comme pour le calcul d'une cinétique au refroidissement, avec une somme de Scheil pour la germination et une loi de Johnson-Mehl-Avrami pour la croissance.



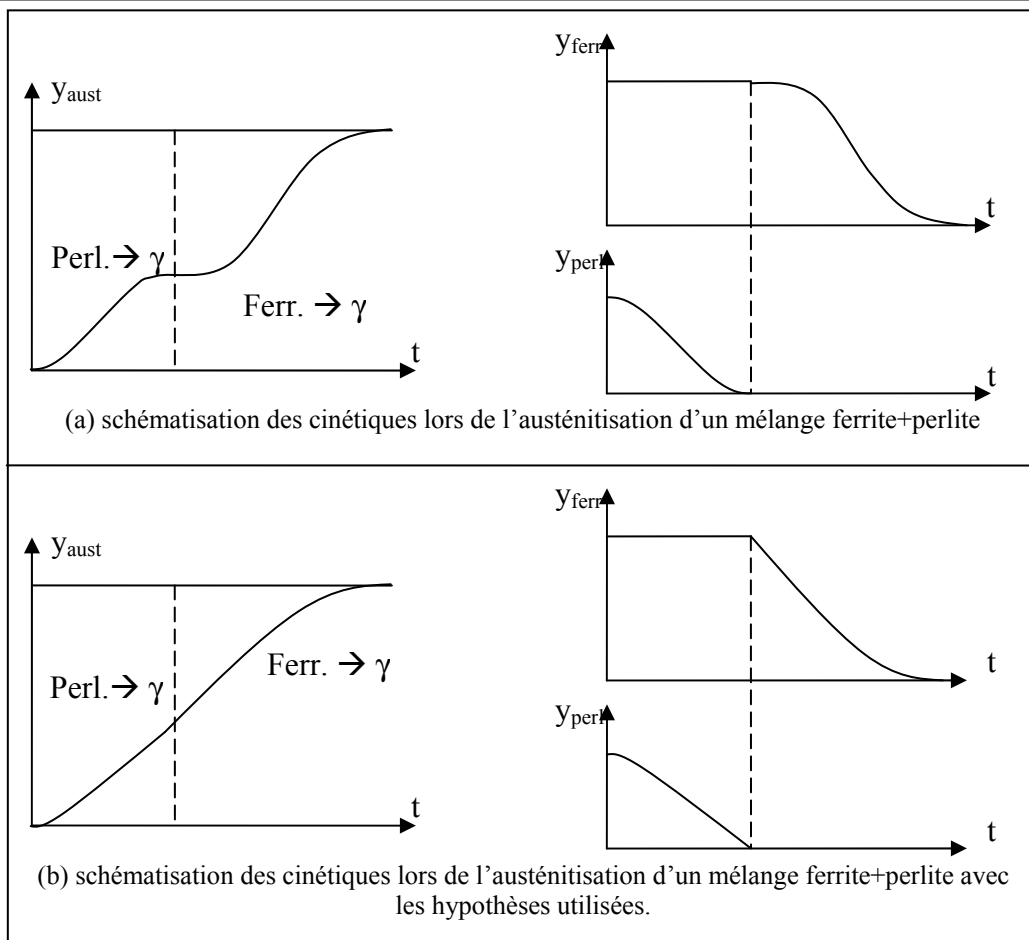


Figure 86 : Représentation schématique de la cinétique de formation de l'austénite pour un acier ferrito-perlitique : (a) d'après [FARIAS-1990] ; (b) avec nos hypothèses. La forme des courbes en (b) est calculée à partir de 2 points des courbes (a)

### 5.2.3.2. Prise en compte des cinétiques au chauffage dans Forge3

Certains auteurs comme [FARIAS-1991] choisissent de découpler le calcul de chauffage de celui de refroidissement en deux modules. A chaque point d'intégration, le programme principal appelle l'un ou l'autre des deux modules selon l'évolution de température (chauffage ou refroidissement). Les auteurs de [LEBLOND-1984] soulignent le fait que l'austénite peut continuer à se former lors du refroidissement si son taux reste inférieur au taux d'équilibre et que la température reste supérieure à  $A_1$ . De la même manière, lors de traitements thermiques cycliques de part et d'autre de  $A_1$ , selon les proportions des phases par rapport à l'équilibre, on peut observer des transformations  $\gamma \rightarrow \alpha$  alors que la température augmente. Les auteurs présentent alors les cinétiques de transformation de phase au cours de traitements thermiques cycliques comme une boucle en hystérésis. Dans notre cas, nous choisissons de tester à chaque point d'intégration le taux d'austénite par rapport à son taux d'équilibre  $y^{\max}(T_{int})$ ,  $T_{int}$  étant la température au point d'intégration comprise entre  $A_1$  et  $A_3$ . Si le taux d'austénite est inférieur à son taux d'équilibre, la procédure du calcul des cinétiques d'austénitisation est lancée. Si le taux d'austénite est supérieur à son taux d'équilibre, c'est la procédure du calcul des cinétiques de trempe qui est lancée. Pour les températures en dessous de  $A_1$ , le calcul des cinétiques d'austénitisation ne pourra être lancé, comme le calcul des cinétiques de trempe pour les températures en dessus de  $A_3$ .

## 5.3. CALCUL THERMOMECHANIQUE MULTIPHASEE

### 5.3.1. Les déformations métallurgiques

#### 5.3.1.1. Plasticité de transformation

On constate expérimentalement qu'une éprouvette trempée sous un chargement même très inférieur à la limite d'élasticité, présente une déformation résiduelle beaucoup plus importante que le simple changement de volume associé à la transformation. Cette déformation plastique additionnelle à celle générée par les changements de volume est appelée plasticité de transformation. Elle est aussi bien observée lors de transformations diffusives [GAUTIER-1987] que pour les transformations martensitiques [GAUTIER-1995].

Lors d'une transformation martensitiques, des lattes de martensite se créent, chacune dans une direction aléatoire et créent une déformation microscopique suivant cette direction. D'un point de vue macroscopique, la déformation est isotrope et correspond au changement de volume lors de la transformation. Si la même transformation est opérée sous chargement, même très faible, les lattes de martensites ont tendance à s'orienter (Figure 87a) dans la direction de sollicitation. Alors, en plus du changement de volume, cette orientation préférentielle crée une déformation macroscopique dans la direction de sollicitation.

De la même manière, pour une transformation diffuse, les germes ont tendance à s'orienter dans la direction de sollicitation (Figure 87b) induisant ainsi une déformation inélastique dans cette direction.

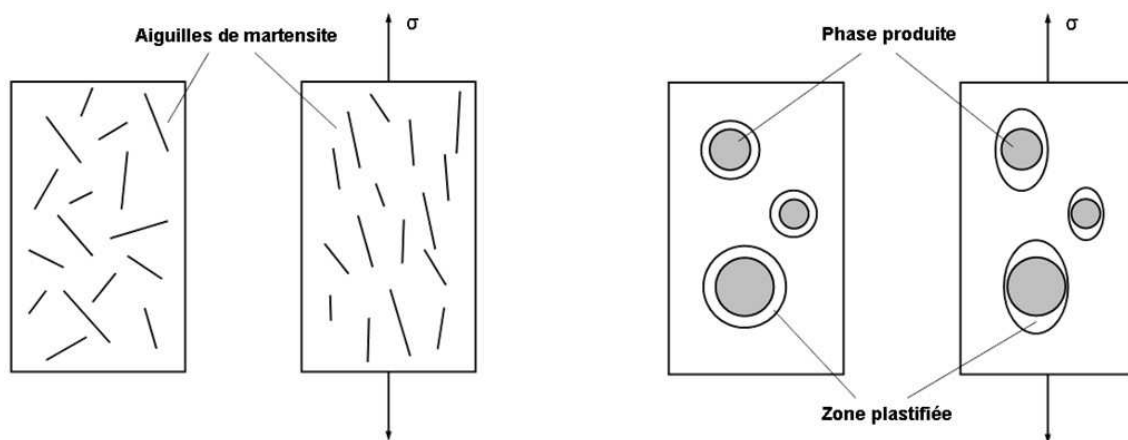


Figure 87 : Représentation schématique du mécanisme de plasticité de transformation lors de transformations martensitiques (mécanisme de Magee) (a) ou diffusives (mécanisme de Greenwood-Johnson) (b) [SIMON-1994]

La micromécanique essaye de simuler les phénomènes de plasticité de transformation par des approches éléments finis locales microscopiques. Dans un premier temps appliquées aux transformations martensitiques [DIANI-1992], ces approches de plus en plus performantes traitent aujourd'hui des transformations avec diffusion [BARBE-2007]. Une approche multi-échelle permettrait d'utiliser de tels modèles pour la simulation mécanique macroscopique, mais ces méthodes ne sont pas abouties à ce jour.

Les approches macroscopiques, moins rigoureuses mais plus réalistes en terme de faisabilité, permettent de modéliser le phénomène de plasticité de transformation sans faire référence aux phénomènes locaux responsables de la déformation. Greenwood et Johnson [GREENWOOD-

1965] ont établi en 1965 une relation liant la plasticité de transformation à la contrainte appliquée lors d'essais de traction uni axiale en transformation complète. Ils ont modélisé leurs observations par la théorie de la plasticité à l'échelle de l'inclusion et aboutissent à la relation :

$$\varepsilon_{pt} = \frac{5}{6} \frac{\Delta V}{V} \frac{\sigma}{\sigma_{00}} \quad (208)$$

V représente le volume de matière et  $\sigma_{00}$  la contrainte seuil. A partir de cette relation, un certain nombre d'auteurs ont développé d'autres approches pour aboutir à une forme multiaxiale tensorielle. On retiendra une forme aboutie utilisée par de nombreux auteurs [FISHER-2000 ; TALEB-2003 ; VIDEAU-1994] :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pt} = \frac{3}{2} K f'(y) \dot{y} \mathbf{s} \quad (209)$$

K est un paramètre matériau (de l'ordre de  $10^{-4}$  MPa<sup>-1</sup> d'après les auteurs de [LEBLOND-1989]), f(y) est une fonction croissante avec la proportion y de la phase croissante (cette fonction dépend de la phase) et s est le tenseur déviateur des contraintes macroscopique. Ce formalisme permet de modéliser le caractère directionnel de la plasticité de transformation en l'écrivant sous une forme proportionnelle au tenseur déviateur des contraintes, et est identique quelle que soit la phase prise en compte. Seule la fonction f sera différente selon la phase. On choisi pour l'expression de la fonction f [VIDEAU-1994] :

$$\begin{aligned} f(y) &= y && \text{pour les transformations ferritiques et perlitique} \\ f(y) &= y(2 - y) && \text{pour les transformations bianitiques et martensitique} \end{aligned} \quad (210)$$

Etant donné que le mécanisme plastique induit par les transformations de phase est de même type que le mécanisme « classique » (déplacement des dislocations) on peut définir de la même manière un multiplicateur plastique [ALIAGA-2000] :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pt} = \dot{\kappa}_{pt} \mathbf{s} \quad \text{avec} \quad \dot{\kappa}_{pt} = \frac{3}{2} K f'(y) \langle \dot{y} \rangle \quad (211)$$

### 5.3.1.2. Changement de densité volumique en transformation de phase

Chaque phase solide d'un acier a une densité propre pour une température donnée. Le changement de volume qui apparaît en conséquence pendant une transformation métallurgique induit une déformation sphérique qui s'écrit sous la forme [DENIS-1987b] :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{tr} = \dot{\kappa}_{tr} \mathbf{I} \quad \text{avec} \quad \dot{\kappa}_{tr} = \varepsilon_{tr}^0 \dot{y} \quad (212)$$

## 5.3.2. Loi rhéologique THEVP multiphasée

### 5.3.2.1. Modèle d'homogénéisation

Nous venons de définir les déformations induites par la transformation d'une phase mère en une autre phase en un point matériel. L'homogénéisation a pour objectif d'obtenir le comportement macroscopique d'un volume élémentaire (volume associé à un point

d'intégration dans le cas d'une résolution par éléments finis) intégrant l'ensemble des comportements microscopiques dans ce volume. Certains modèles d'homogénéisation performants sont basés sur un schéma auto-cohérent. L'application d'un modèle auto-cohérent thermo-élasto-viscoplastique sur un problème évolutif (fraction de chaque phase non constante dans le temps) en tenant compte du phénomène de plasticité de transformation pour tout type de transformation structurale solide/solide ne peut être résolue simplement. Il existe aujourd'hui des méthodes comme les matériaux digitaux visant à résoudre ce type de problème. Mais l'utilisation de telles techniques pour résoudre notre problème est pour le moment illusoire. Certains auteurs [ALIAGA-2000 ; DENIS-1987b ; VIDEAU-1994 ; WANG-2006] s'orientent alors vers un modèle plus simpliste basé sur une loi des mélanges linéaires. Nous appliquons cette loi à notre modèle tel que présenté ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \sum_{k=1}^{\text{nb phases}} [\alpha_k y_k] ; & E &= \sum_{k=1}^{\text{nb phases}} [E_k y_k] ; & v &= \sum_{k=1}^{\text{nb phases}} [v_k y_k] \\
 \sigma_{eq} &= \sum_{k=1}^{\text{nb phases}} [\sigma_{00}^k y_k + H_k \bar{\epsilon}^{n_k} y_k + K_k \dot{\bar{\epsilon}}^{m_k} y_k] \\
 \kappa_{pt} &= \sum_{k=1}^{\text{nb phases}} \left[ \frac{3}{2} K_k f'(y_k) \langle \dot{y}_k \rangle \right] \\
 \dot{\kappa}_{tr} &= \sum_{k=1}^{\text{nb phases}} [\epsilon_{tr k}^0 \dot{y}_k]
 \end{aligned}
 \quad \left| \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{\text{nb phases}} [y_k] = 1 \\ \sum_{k=1}^{\text{nb phases}} [\dot{y}_k] = 0 \end{cases} \quad (213)$$

### 5.3.2.2. Ecrouissage de chaque phase

Dans le cas d'une transformation dont la phase mère est écrouie, on peut se poser la question de savoir comment les dislocations vont évoluer lors du changement de phases. Selon le matériau observé, les dislocations peuvent être totalement restaurées (la nouvelle phase n'hérite pas de l'écrouissage de la phase mère), partiellement restaurées (une part des dislocations sont transmises de la phase mère à la phase fille), ou aucune restauration n'est observée (on parlera alors de mémoire totale). Il existe dans la littérature plusieurs modèles pour tenir compte de la quantité de dislocations restaurée par une transformation métallurgique dans un matériau [SJÖSTRÖM-1985 ; VIDEAU-1994]. Nous présenterons ici uniquement le modèle utilisé dans Forge3, le modèle de Sjöström [SJÖSTRÖM-1985], qui part du principe que toutes les phases plastifient à la même vitesse. S'il y a mémoire totale, la déformation subie par la phase k à un instant t+Δt sera la déformation cumulée depuis le temps initial.

$$\bar{\epsilon}_k(t + \Delta t) = \bar{\epsilon}(t + \Delta t) \quad (214)$$

S'il y a restauration totale, la phase k n'hérite d'aucune déformation antérieure à son apparition. Nous considérons alors la déformation à l'instant t+Δt comme une moyenne pondérée par les proportions de la phase k entre l'état de déformation à l'instant t (subie par la proportion à l'instant t) et la déformation subie entre les instants t et t+Δt (subie par toute la phase présente à l'instant t+Δt) :

$$\bar{\epsilon}_k(t + \Delta t) = \frac{y_k(t) \bar{\epsilon}_k(t) + [y_k(t) + \Delta y_k] \Delta \bar{\epsilon}}{y_k(t) + \Delta y_k} \quad (215)$$

Dans le cas d'une restauration partielle, nous introduisons un paramètre de mémoire  $\gamma$  tel que s'il est égal à zéro la restauration est totale, et s'il est égal à 1, la mémoire est totale. On écrit alors :

$$\bar{\epsilon}_k(t + \Delta t) = (1 - \gamma_k) \frac{y_k(t) \bar{\epsilon}_k(t) + [y_k(t) + \Delta y_k] \Delta \bar{\epsilon}}{y_k(t) + \Delta y_k} + \gamma_k \bar{\epsilon}(t + \Delta t) \quad (216)$$

Cette relation ne s'applique évidemment qu'aux phases croissantes et pas à la phase mère qui a subi toutes les déformations depuis l'instant initial.

La valeur de  $\gamma$  étant difficile à déterminer expérimentalement, on considère souvent une restauration totale.

### 5.3.2.3. Le système d'équations de Prandtl-Reuss

Comme nous l'avons fait au chapitre précédent, nous admettons l'additivité des taux de déformation. Le tenseur des taux de déformation total s'écrit alors comme la somme des taux de déformations d'origine thermique, mécanique et métallurgique :

$$\dot{\epsilon}_{tot} = \dot{\epsilon}_{th} + \dot{\epsilon}_{meca} + \dot{\epsilon}_{metal} \quad (217)$$

En séparant les parties sphérique et déviatorique du tenseur des taux de déformation métallurgique, on obtient :

$$\dot{\epsilon}_{metal} = \dot{\epsilon}_{metal} + \frac{1}{3} Tr(\dot{\epsilon}_{metal}) \quad (218)$$

La partie déviatorique est le tenseur des taux de plasticité de transformation ( $\dot{\epsilon}_{metal} = \dot{\epsilon}_{pt}$ ) défini par (211) et la partie sphérique est le tenseur relatif aux changements de densité volumique lors des transformations de phase ( $\frac{1}{3} Tr(\dot{\epsilon}_{metal}) = \dot{\epsilon}_{tr}$ ) défini par (212).

Les expressions du déviateur des contraintes et de la pression dans le système des équations de Prandtl-Reuss deviennent alors :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= 2\mu [\dot{\epsilon}_{im} - (\dot{\lambda} + \dot{\kappa}_{pl}) \mathbf{s}] + \dot{T} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \mathbf{s} \\ \dot{p} &= -\chi [Tr(\dot{\epsilon}_{im}) - 3\alpha \dot{T} - \dot{\kappa}_{tr}] - \dot{T} \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial T} p \end{aligned} \quad (219)$$

La résolution incrémentale itérative des équations de Prandtl-Reuss couplées à la métallurgie ne présente pas de difficulté supplémentaire par rapport au cas thermomécanique et la transition entre les domaines réversible et non réversibles sont gérés de la même manière. On notera cependant l'approximation qu'engendre la loi des mélanges : dans le mélange d'une phase dure à haut seuil d'élasticité et d'une phase douce, on peut observer une plastification de la phase dure alors que les contraintes sont inférieures à son seuil, ou à l'inverse, aucune plastification de la phase douce alors que l'état de contrainte dépasse son seuil. Cette hypothèse reste acceptable tant qu'on reste dans de petites déformations (de l'ordre du pourcent), ce qui est généralement le cas des procédés de traitement thermique.

### 5.3.3. Effets des contraintes sur les temps de transformation

Lors du traitement thermique local, les gradients thermiques sont très importants et engendrent un certain état mécanique dans la Zone Affectée Thermiquement. Les cinétiques de transformations sont influencées par cet état de contrainte et déformation qui généralement se traduit par des temps d'incubation et de croissance plus courts. Pour certains aciers très particuliers la déformation seule (sans trempe), peut engendrer des transformations de phase, souvent martensitiques. Nous ne prendrons pas en compte ici l'effet des déformations qui s'explique par le fait que la présence de défauts entraîne une augmentation du nombre de sites de germinations. Une approche plus locale est nécessaire pour la prise en compte de ces effets [UMEMOTO-1983].

#### 5.3.3.1. Transformations diffusive

Sur le diagramme TTT (ou TRC), la présence d'un état contraint se traduit par un décalage des courbes vers la gauche. Un modèle qui se traduit comme pour la prise en compte des hétérogénéités en carbone (voir paragraphe 5.2.2.1), développé par [DENIS-1987a], est implémenté dans Forge3. Un terme de décalage des temps défini par la différence entre un temps sous charge mécanique et un temps de référence (matériau libre de contraintes et déformations) est alors défini :

$$D_{meca} = \frac{t_{meca} - t_0}{t_0} \quad (220)$$

$D_{meca}$  est déterminé expérimentalement et approché par un polynôme de la contrainte équivalente. Le décalage en temps peut être introduit dans la somme de Scheil à travers un nouveau temps de début de transformation (ou de fin d'incubation) :

$$t_{deb}^{meca} = (1 + D_{meca}) t_{deb}^0 \quad (221)$$

Il peut également être introduit dans le formalisme de Johnson-Mehl-Avrami à travers le paramètre  $b$  :

$$b_{meca} = \frac{b_0}{(1 + D_{meca})} \quad (222)$$

On notera que les paramètres  $t_{deb}^0$  et  $b_0$  ne sont pas nécessairement les paramètres calculés à partir du diagramme TTT de référence mais peuvent déjà avoir été recalculés pour prendre en compte, par exemple, une hétérogénéité en carbone ou la taille du grain austénitique.

#### 5.3.3.2. Transformation martensitique

Dans le cas d'une transformation martensitique, la présence de contraintes se traduit par une augmentation de la température  $M_s$ . La température de début de transformation martensitique dépendra à la fois de l'état de contraintes de cisaillement ( $\sigma_{eq}$ ) que de la pression [DENIS-1987a] :

$$M_s = M_s^0 + A\sigma_{eq} + Bp \quad (223)$$

A et B sont des constantes du matériau exprimées en  $^{\circ}\text{C}.\text{Pa}^{-1}$ .

### 5.3.4. Couplage thermo métallurgique

L'énergie initiatrice de la transformation de phase est l'agitation thermique. Au chauffage, l'apport d'énergie initie une réaction endothermique correspondant à transformation de fer  $\alpha$  en fer  $\gamma$ . Au contraire, lors du refroidissement, c'est une réaction exothermique qui est initiée transformant le fer  $\gamma$  en fer  $\alpha$ . Alors si l'évolution de température engendre une transformation de phase, la transformation de phase a aussi un effet sur la température en générant une enthalpie de transformation (ou chaleur latente). De plus, les paramètres matériaux de l'équation de la chaleur dépendent de la métallurgie.

Il existe plusieurs méthodes pour prendre en compte les effets de la métallurgie sur la thermique comme la méthode en capacité et conductivité équivalente ou la méthode du terme source.

Pour la méthode en capacité et conductivité équivalente, l'enthalpie de transformation est considérée dans l'expression d'un  $\rho C$  équivalent ( $\rho$  densité volumique ;  $C$  : chaleur spécifique) et valable pour une transformation proche de l'équilibre (pas de cinétiques). Cette méthode assure une bonne stabilité du système lors des transformations de phases alors qu'il y a discontinuité des paramètres thermophysiques. Cette approche est particulièrement utilisée dans les calculs pour la fonderie [JAOUEN-1999] mais ne convient pas au traitement thermique où les transformations de phases sont très rapides alors qu'elle suppose que le dégagement de chaleur est indépendant de la vitesse de refroidissement (ou de la cinétique de transformation).

Nous utiliserons alors une méthode plus proche de la physique faisant intervenir une source de chaleur interne (positive ou négative selon que la transformation soit exothermique ou endothermique) traitant les transformations phase par phase et non plus par une approche globale. Néanmoins, cette méthode demande une loi d'homogénéisation pour les paramètres thermophysiques. Nous utiliserons de la même manière que pour le couplage avec la mécanique, une loi des mélanges linéaires :

$$\rho = \sum_{k=1}^{\text{nb phases}} [\rho_k y_k] ; \quad C = \sum_{k=1}^{\text{nb phases}} [C_k y_k] ; \quad k = \sum_{k=1}^{\text{nb phases}} [k_k y_k] \quad (224)$$

L'enthalpie de transformation est introduite comme une source interne de chaleur au même titre que la puissance mécanique ou la puissance dissipée par effet Joule :

$$\dot{W}_{tr} = \sum_{k=1}^{\text{nb phases}} [\Delta H_k(T) \dot{y}_k] \quad (225)$$

$\Delta H_k$  est la chaleur latente de la transformation d'austénite en phase  $k$ . On considère que lors du chauffage de la phase  $k$ , la chaleur latente de sa transformation sera  $-\Delta H_k$ .  $\Delta H_k$  est défini par (226) est approchée par un polynôme de  $T$ .

$$\Delta H(T) = \int_{T_0}^T \rho C dT \quad (226)$$

La résolution du problème thermique n'est en rien changée par rapport à ce qui a été présenté au chapitre 3, seule la forme de l'équation de la chaleur est modifiée :

$$\sum_{k=1}^{\text{nb phases}} [\rho_k y_k] \sum_{k=1}^{\text{nb phases}} [C_k y_k] \frac{dT}{dt} + \nabla \cdot \left( \sum_{k=1}^{\text{nb phases}} [k_k y_k] \vec{\nabla} T \right) = \dot{W}_{em} + \dot{W}_{meca} + \sum_{k=1}^{\text{nb phases}} [\Delta H_k(T) \dot{y}_k] \quad (227)$$

### 5.3.5. Diagramme des couplages thermomécaniques et métallurgiques

Dans son mémoire de thèse, Charles Aliaga [ALIAGA-2000] propose un couplage fort entre thermique et métallurgie assuré par un point fixe, et un couplage alterné par incrément avec la mécanique. Il s'avère qu'assurer un couplage plus fort entre thermique et métallurgie qu'entre mécanique et métallurgie donne de meilleurs résultats que l'inverse. Cependant, pour les besoins d'intégration du couplage métallurgique dans la structure Forge3, logiciel de mise en forme dont la structure est centrée sur le calcul la mécanique (objectif premier du code), nous utilisons un algorithme de couplage un peu différent. La Figure 88 présente le diagramme schématisant la résolution du problème couplé.



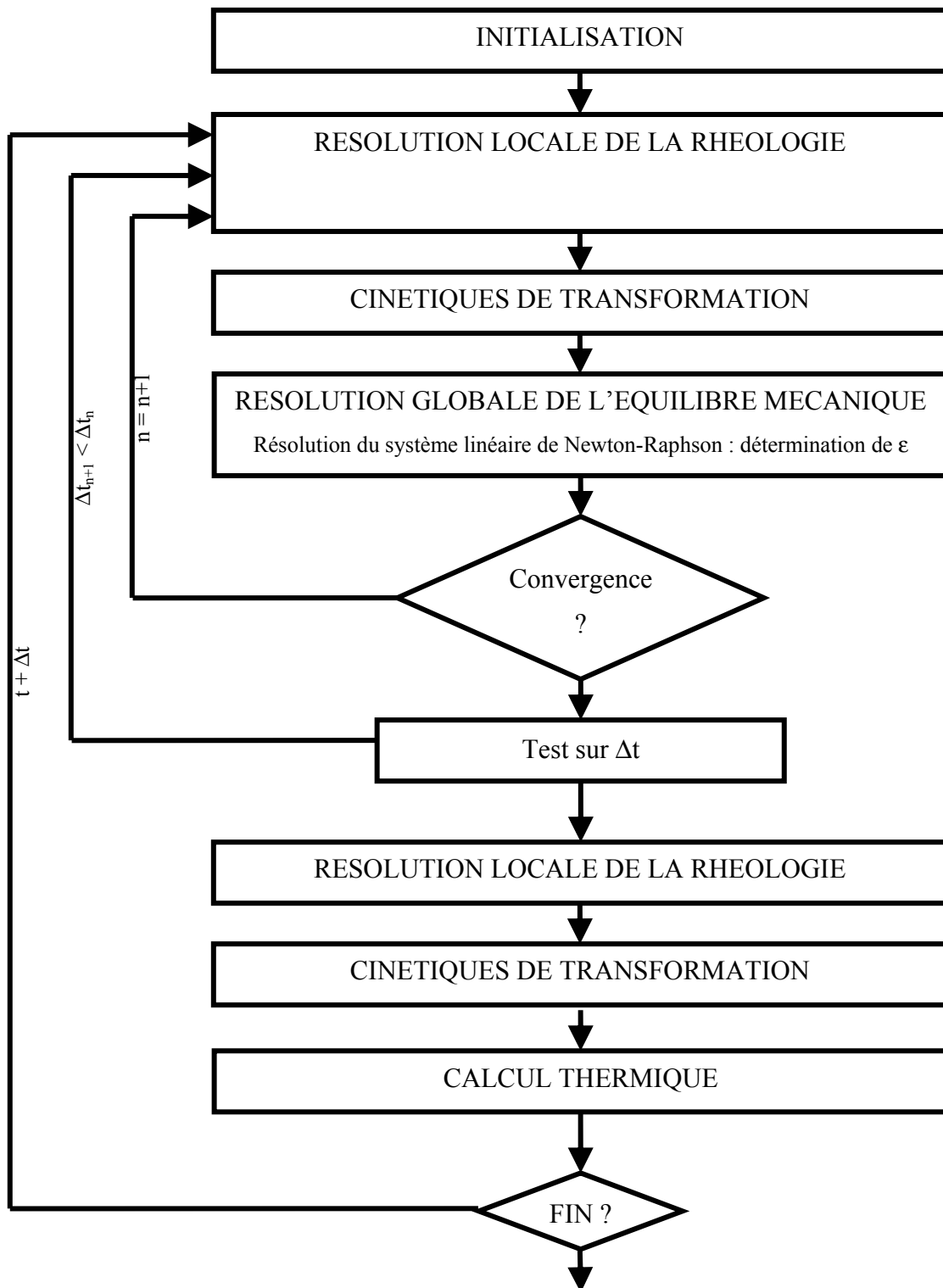


Figure 88 : Algorithme de résolution couplée du problème thermo-métallo-mécanique

## 5.4. CONCLUSIONS ET HYPOTHESES SUR LES COUPLAGES MULTIPHYSIQUES

La simulation de l'ensemble des phénomènes physiques durant le traitement thermique, autant au chauffage qu'au refroidissement, implique de bien connaître tous les phénomènes présents déjà beaucoup étudiés à ce jour. Il est plus compliqué de déterminer quelles sont les interactions qui lient ces phénomènes. En effets, ils ne se produisent pas indépendamment les uns des autres (si par exemple, la température a un effet sur la métallurgie, la réciproque est vraie) et à une échelle assez fine, il existe des couplages entre tous les phénomènes physiques.

Nous présentons en Figure 89 l'ensemble des couplages possibles. Les flèches en traits pleins représentent les couplages que nous avons déjà abordés et dont nous avons donné les pistes pour leur résolution numérique.

L'influence de certains couplages sur l'état global d'une pièce à l'échelle macroscopique est plus importante que pour d'autres. Pour réaliser une simulation dans un temps de calcul réaliste, il est nécessaire de négliger l'influence de certains couplages. Dans cette optique, il est important de porter attention à chacun des couplages de la Figure 89 et de distinguer ceux qui seront du premier ordre de ceux qui seront du second ordre.

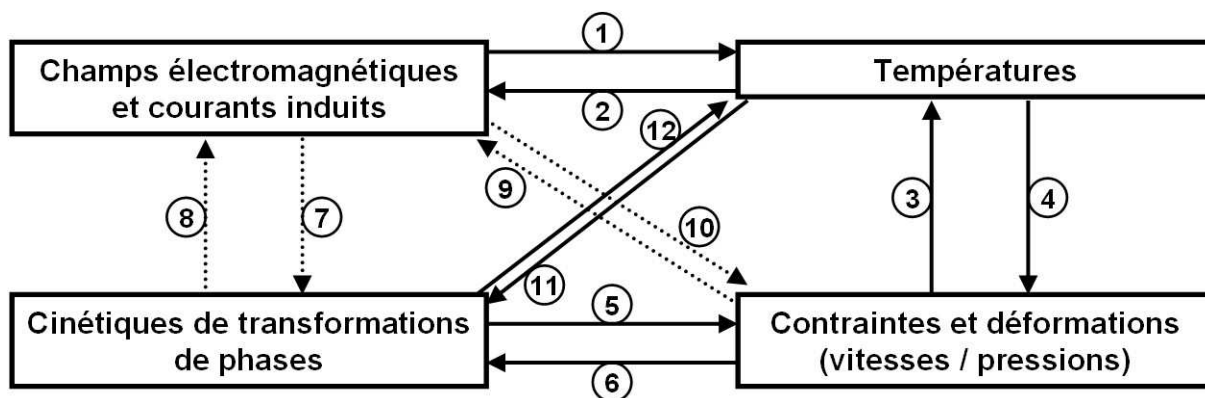


Figure 89 : Schéma représentatif des couplages multi-physiques pour la simulation d'un traitement thermique de trempé après chauffage par induction.

1. La relation entre le courant induit et les températures (effet Joule) est caractérisée par la loi d'Ohm (chapitre 3). Ce couplage permet le chauffage de la pièce.
2. La thermo dépendance des paramètres magnétiques peut être modélisée par différentes lois à déterminer expérimentalement selon le comportement du matériau (chapitre 3).
3. La puissance mécanique dissipée sous forme de chaleur est caractérisée par l'état de contrainte et les vitesses de déformation (chapitre 4). Dans le cadre du traitement thermique où les températures sont très élevées et les déformations faibles, ce couplage peut être considéré du second ordre. Néanmoins, son coût de calcul est faible et ne demande aucune caractérisation supplémentaire. Il sera donc pris en compte.
4. Nous avons vu au chapitre 4 l'importance de la thermo dépendance de la loi rhéologique. C'est un couplage que nous qualifierons de premier ordre. Il est pris en compte à la fois à travers la loi de Hooke et à la fois par une approximation polynomiale de l'évolution des paramètres de la loi THEVP en fonction de la température.

5. Etant donné les gradients métallurgiques qu'induisent les procédés de traitement thermique et plus spécialement les traitements locaux, la déformation induite par changement de volume lors des transformations de phase est considéré de premier ordre. Ce couplage est inséré dans l'expression de la pression dans les équations de Prandtl-Reuss (chapitre 5). La plasticité de transformation est plus discutable. En effet, elle est souvent négligée dans le cadre des transformations rapides [AUBRY-1998 ; NICLAS-1998] mais généralement martensitiques. Dans la simulation de notre procédé, nous savons que nous devons obtenir une bainite bien que nous puissions nous considérer dans le cadre d'une trempe très rapide (<3s). Nous ne savons pas pour le moment si son influence sur les distorsions est importante ou non. Nous prendrons alors ce couplage en compte.
6. Les contraintes restant faibles et proches de la limite d'élasticité dans notre procédé, l'effet des contraintes mécaniques sur les transformations métallurgiques (décalage des temps de transformation) sera négligé.
7. Rien n'a été trouvé dans la littérature sur l'effet des champs électromagnétiques ou du courant induit sur les transformations de phase. L'influence de ce couplage ne semblant pas avoir été soulevée, il sera négligé.
8. La dépendance des paramètres électromagnétiques aux phases présentes a été abordée au chapitre 3 par l'observation de l'évolution de la conductivité électrique d'un acier inoxydable. Mais nous avons également vu que la conductivité électrique de l'acier HR45 ne paraît pas dépendre directement de la cinétique de changement de phase. Ce couplage sera alors négligé dans nos simulations. Si nous étions dans le cas contraire, nous considérerions qu'elle peut être prise en compte à travers la température en postulant a priori les cinétiques d'austénitisation.
9. L'influence de l'état mécanique (lacunes, dislocations, etc....) sur le champ magnétique, les courants induits et les propriétés électromagnétiques, est exploitée pour certains contrôles non destructifs. Néanmoins elle n'est observable que dans certaines conditions très particulières n'entrant pas dans le cadre du chauffage par induction. Ce couplage ne sera donc pas considéré.
10. Les efforts induits par les champs magnétiques (forces de Lorentz) sont exploités dans le cadre de certains procédés de mise en forme comme le magnétoformage ou dans le cadre des moteurs électriques. Nous les négligerons dans le cadre du chauffage par induction car nous nous intéressons uniquement au chauffage de la pièce. Notons que si nous nous intéressions par exemple, à la durée de vie de l'inducteur, les forces de Lorentz seraient influentes sur le long terme (fatigue).
11. L'agitation thermique est dans notre cas, la source d'énergie générant les transformations métallurgiques. Ce couplage est pris en compte par les paramètres d'Avrami thermo dépendants, déduit d'un diagramme TTT.
12. L'enthalpie de transformation due au caractère endothermique ou exothermique des mécanismes métallurgiques est prise en compte et insérée dans le second membre de l'équation de la chaleur.

Des hypothèses ci-dessus, nous représentons par la Figure 90 les couplages que nous prendrons en compte dans notre simulation.

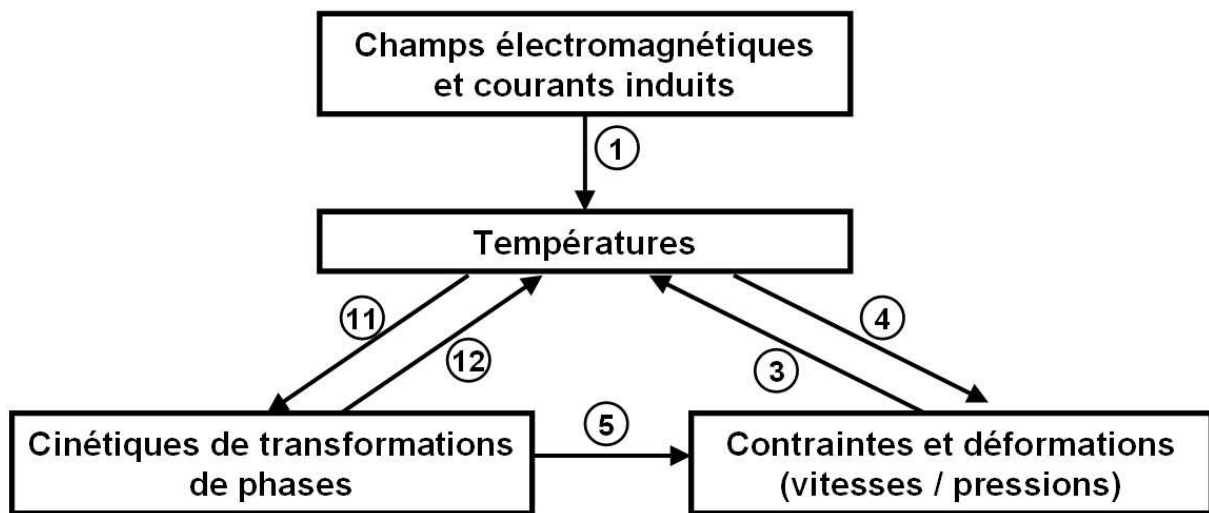


Figure 90 : Schéma représentatif des couplages multi-physiques dans le cadre de nos hypothèses

## 5.5. APPLICATION AU PROCÉDE SEMI-INDUSTRIEL

### 5.5.1. Etudes antérieures sur le HR45

Des campagnes de validation fournisseur ont été réalisées au sein de PSA-Peugeot-Citroën sur des tôles de 2mm d'épaisseur en acier haute résistance au manganèse HR45 [BERGE-2003]. Le Tableau 12 présente les tolérances de composition chimique ainsi que la composition caractérisée sur des échantillons d'approvisionnement.

	C en %	Mn en %	Si en %	S en %	Al en %
Tolérances	0.13 – 0.17	< 0.90	< 0.03	< 0.01	> 0.02
Relevés	0.143	0.777	0.014	0.005	0.044

Tableau 12 : Analyse chimique de l'acier HR45

Une caractérisation micrographique (Figure 91) révèle une grosseur de grain d'indice ASTM de 9.5 (env. 13.3 $\mu$ m) et une structure ferritique comportant des traces de bainite.

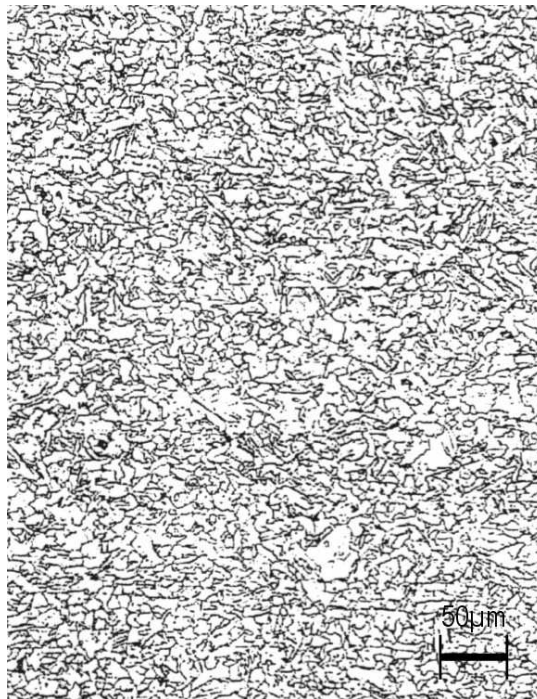


Figure 91 : Micrographie de la structure HR45 d'après [BERGE-2003]

### 5.5.2. Paramètres de la loi THEVP

#### 5.5.2.1. Modules de Young et de Poisson

Nous prenons pour valeur du module de Poisson la valeur d'usage dans les aciers au carbone : 0.3. Pour le module de Young, nous utilisons également une valeur générique dépendante de la température. L'évolution choisie est une évolution linéaire allant de 200 GPa à température ambiante jusqu'à 100 GPa à 1100°C. Le taux de déformation élastique étant considéré très faible devant les déformations irréversibles, cette approximation aura un effet négligeable sur les distorsions calculées.

#### 5.5.2.2. Rhéologie sur « mini-éprouvette » chauffée par effet Joule

Une machine d'essais de traction à chaud a été développée au sein du CEMEF afin de pouvoir caractériser une loi de type THEVP sur de petites éprouvettes (Figure 92). La forme des éprouvettes et des mors est particulièrement adaptée à la caractérisation de tôles. La largeur des têtes de l'éprouvette peut avoir un maximum de 15mm.

Cette machine de traction permet un asservissement de l'essai de traction soit en effort (permettant entre autre des essais de dilatométrie libre à effort nul), soit en déplacement ou vitesse de déplacement. De plus, les mors sont reliés à un générateur pouvant fournir un courant maximum de 250A. Ce courant traversant l'éprouvette génère de la chaleur par effet Joule. Un thermocouple K soudé au centre de l'éprouvette permet d'asservir le courant fourni par rapport à une consigne en température.

Un logiciel, également développé au CEMEF, permet l'acquisition simultanée par rapport au temps :

- ❖ du déplacement et de la vitesse de déplacement des mors,
- ❖ d'une mesure extensométrique,
- ❖ de l'intensité du courant et de la tension aux bornes de l'éprouvette,
- ❖ de la mesure de 3 thermocouples dont un thermocouple d'asservissement,
- ❖ de l'effort de traction.

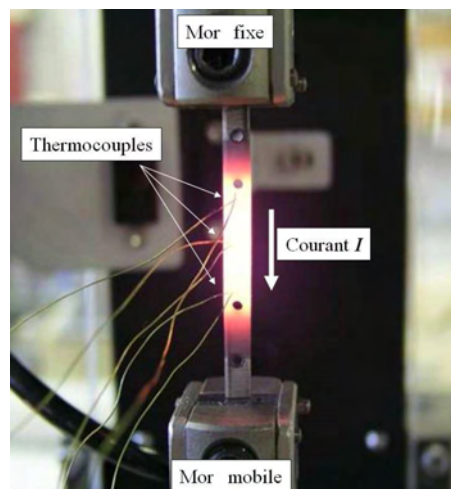


Figure 92 : Eprouvette de 5mm de large, 60mm de long en tôle d'épaisseur 2mm chauffée par effet Joule entre les 2 mors de la machine de traction développée au CEMEF

### 5.5.2.3. Préparation des éprouvettes

En plus des contraintes géométriques habituelles pour des essais de traction (par exemple, essais normalisé EN 10002-1), la géométrie des éprouvettes doit être adaptée à :

- ❖ la contrainte maximale à atteindre par rapport à l'effort maximal de la machine (250daN),
- ❖ la vitesse de chauffage lors de cycles thermiques par rapport au courant maximum du générateur (250A),
- ❖ le gradient thermique généré par le système de chauffage de la pièce et le système de refroidissement des mors (le gradient doit être quasi nul dans la zone utile de la pièce),
- ❖ le système de mesure de déplacement par extensomètre mécanique et son système de fixation sur la pièce (Figure 93).

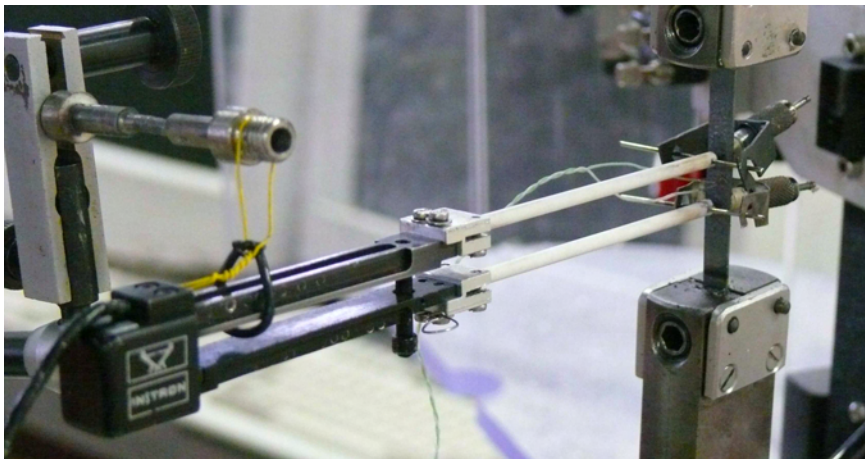


Figure 93 : système de mesure par extensomètre mécanique

Pour l'étude de l'état bainitique trempé à l'eau, nous avons besoin de reproduire le procédé de traitement thermique au laboratoire, au plus proche des conditions du procédé. Deux possibilités s'offrent à nous : tremper de la matière dans laquelle nous usinerons ensuite les éprouvettes ou usiner les éprouvettes avant d'opérer la trempe. La première idée pose des problèmes pour la phase d'usinage avec un matériau très dur. De plus, l'usinage d'une telle pièce risque de créer un échauffement et ainsi initier un revenu de la bainite. La seconde idée pose des problèmes sur la géométrie de l'éprouvette qui risque de subir des distorsions lors de la trempe qui ne pourront être rattrapées lors de l'usinage. Nous choisissons néanmoins cette seconde idée afin d'avoir une bainite la plus similaire possible à celle qu'on obtient lors du procédé industriel.

Les éprouvettes sont chauffées par lot de 10 dans un four à 950°C pendant 5 min puis trempées dans un bain d'eau. Le temps de chauffage et d'austénitisation est le plus rapide que nous puissions produire, et il est tout juste suffisant pour une austénitisation complète. Nous devons alors nous assurer que chaque éprouvette a été totalement austénitisée. Pour cela, une éprouvette par série servira à un contrôle de la bainite par microscopie optique. Lors de cette opération, nous vérifions qu'aucune trace de ferrite n'est présente. Ensuite, cette même éprouvette ainsi que toutes celles de l'échantillon subiront un contrôle de micro-dureté en 10 points aléatoires. Il s'agit d'essais Vickers sous de très faibles charges (100g). Nous vérifions que la dureté est bien homogène dans l'éprouvette et qu'elle correspond à celle obtenue lors d'un essai à l'échelle industrielle du procédé.

5.5.2.4. Dilatometrie libre : temperatures d'austénitisation

Afin d'étudier la rhéologie à différentes températures des 3 états métallurgiques qui nous intéressent (état de réception, état austénitique et état trempé), nous devons connaître les plages de températures dans lesquelles se trouvent chaque état. Pour ce faire, nous avons établi une campagne d'essais de dilatométrie libre pour étudier les températures de changement de phase dans les deux cas suivants :

- ❖ Etat de réception → austénite
- ❖ Bainite → austénite

Dans chacun de ces deux cas, on procède à des essais de dilatométrie libre pour deux vitesses de chauffage différentes (chaque essai est réalisé 3 fois de manière répétable) :

- ❖ Chauffage quasi-statique de 1°C/s
- ❖ Chauffage rapide de 100°C/s

Les essais en chauffage lent nous permettent d'observer les transformations de phase dans un état proche de l'équilibre. Pour les essais rapides, la vitesse de chauffage a été choisie pour être dans l'ordre de grandeur des vitesses mises en jeu dans le procédé industriel (env. 70°C/s) et semi-industriel (env. 120°C/s). La moyenne des 3 relevés de chaque essai ainsi que son écart avec la valeur maximum et la valeur minimum enregistrées sont représentés dans le Tableau 13.

Etat initial		Etat de réception	Etat trempé
1 °C/s	A <sub>C1</sub>	715 <sup>+15/-10</sup>	700 <sup>+10/-10</sup>
	A <sub>C3</sub>	817 <sup>+13/-12</sup>	810 <sup>+0/-0</sup>
100 °C/s	A <sub>C1</sub>	730 <sup>+15/-10</sup>	705 <sup>+10/-10</sup>
	A <sub>C3</sub>	838 <sup>+2/-3</sup>	815 <sup>+5/-5</sup>

**Tableau 13 : Températures (°C) de début et de fin de transformation austénitique pour deux états métallurgiques initiaux et à deux vitesses de chauffage : moyenne sur 3 essais, et écart max et min**

Les écarts de mesure d'une éprouvette à une autre sont principalement dus à la difficulté de lecture des essais de dilatométrie libre. Les relevés (Figure 94) sont très bruités, pour partie du fait que l'asservissement en effort oscille sur quelques Newtons.

Nous pouvons vérifier la validité de nos mesures en comparant le coefficient linéique de dilatation moyen par rapport aux relevés des essais réalisés au sein du CRITT de Nancy. La Figure 95 présente cette comparaison qui, bien que le bruit soit amplifié par la dérivation, reste très satisfaisante : les valeurs obtenues lors de nos essais sont très légèrement supérieures à celles obtenues par le CRITT.



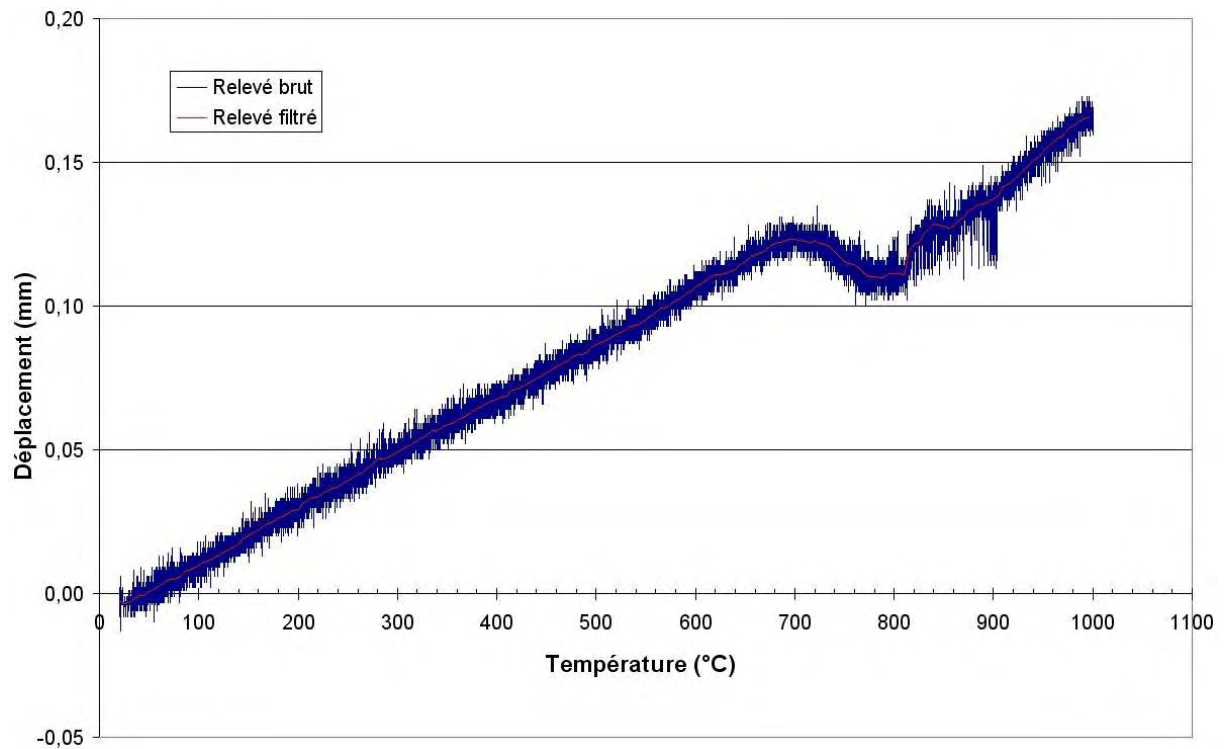


Figure 94 : Essai de dilatométrie libre du chauffage lent (1 °C/s) de l'état trempé (bainite) de l'ambient à 1000°C

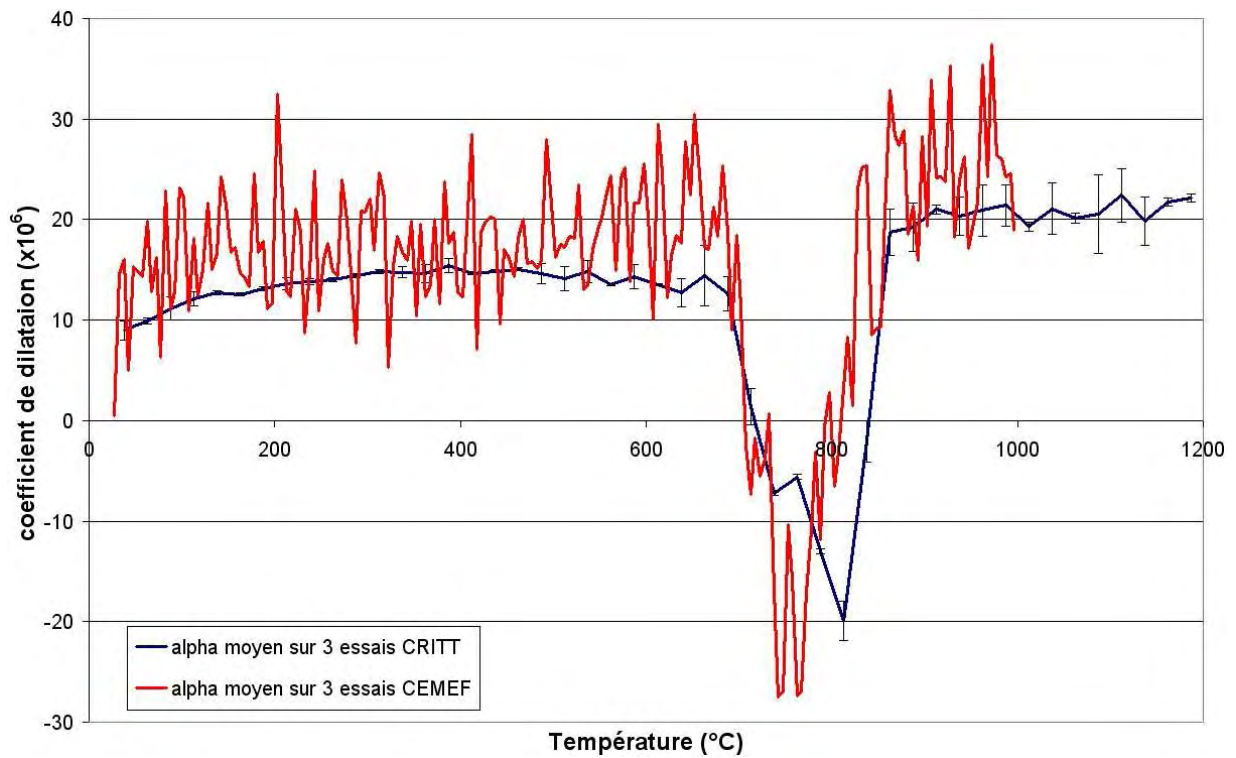


Figure 95 : Comparaison des résultats obtenus au CEMEF en dilatométrie libre avec le coefficient linéique de dilatation mesuré au CRITT de Nancy

5.5.2.5. Caractérisation de la loi THEVP multiphasée

• Etat de réception de l'ambiante à 700°C

Etant donné la résistance du matériau, la géométrie de l'éprouvette et l'effort maximum fourni par la machine (250daN), les essais à température ambiante ont été réalisés sur une machine de traction DARTEC HA250/300. Les essais ont pu être réalisés à chaud (sur la machine Taboo développée au CEMEF) à partir de 400°C.

Le plan d'expérience comprend des essais à 5 températures différentes, constantes et homogènes (+/- 10°C) pendant l'essai. Ces températures sont choisies suffisamment basses pour éviter tout changement de phase.

- ❖ Température ambiante (env.20°C)
- ❖ 400°C
- ❖ 500°C
- ❖ 600°C
- ❖ 690°C

Pour chacune de ces températures, 3 vitesses de déformation, constantes lors de l'essai, sont testées. La fenêtre d'étude des vitesses de déformation est définie par les résultats d'une première simulation numérique du procédé pour un acier C20 standard :

- ❖ 0.005 s<sup>-1</sup>
- ❖ 0.001 s<sup>-1</sup>
- ❖ 0.050 s<sup>-1</sup>

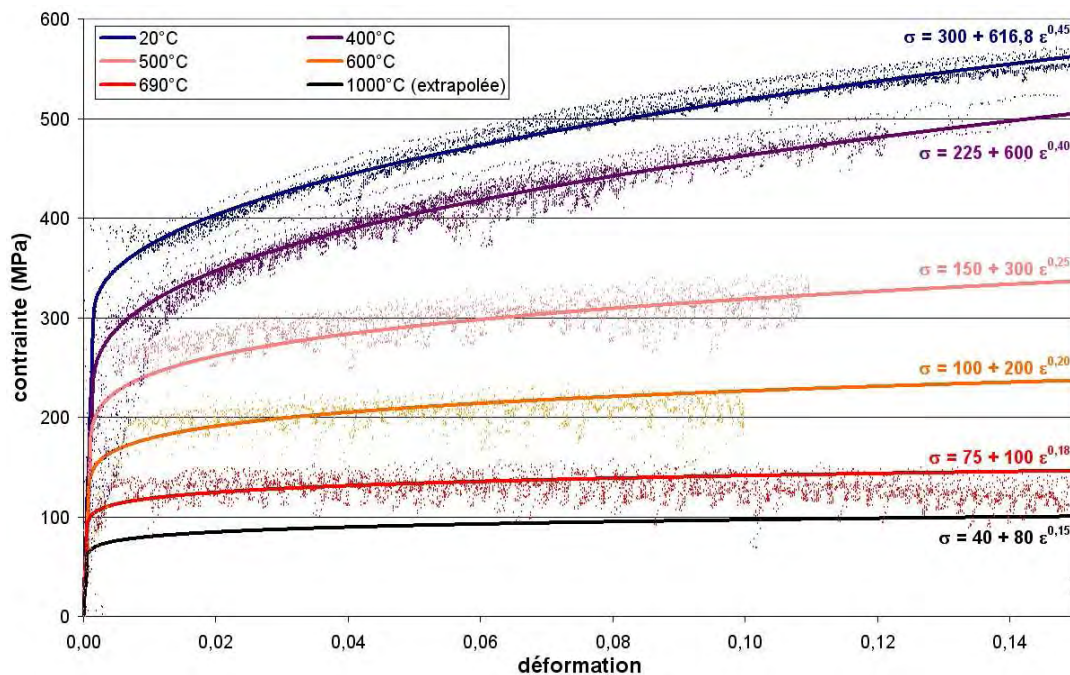


Figure 96 : Points expérimentaux et courbes rhéologiques de la loi THEVP à différentes températures pour l'état de réception

Chaque essai à une température donnée et une vitesse de déformation donnée est réalisé de manière répétable 3 fois. Nous n'observons pas de différence significative des nuages de points pour les différentes vitesses de déformation. La loi THEVP présentée au chapitre 4 sera alors simplifiée par un coefficient de consistance nul à toutes températures.

Afin de retrouver les paramètres de la loi THEVP à partir des nuages de points à chaque température, on utilise une méthode itérative de minimisation des gradients (au sens des moindres carrés) tout en veillant à respecter le sens physique de l'évolution des paramètres avec la température : la contrainte seuil, le module d'écroutissage et le coefficient d'écroutissage, sont décroissants quand on augmente la température. Les lois obtenues ainsi que les nuages de points expérimentaux sont représentés en Figure 96.

- Austénite au-dessus de la température  $A_3$

Nous opérons de la même manière que pour la caractérisation de l'état de réception mais nous observerons les trois vitesses de déformation différentes uniquement aux hautes températures. N'observant toujours pas de sensibilité à la vitesse de déformation dans notre fenêtre d'étude, une seule vitesse sera alors utilisée aux températures moins élevées ( $0.01 \text{ s}^{-1}$ ). La température  $A_3$  ayant été caractérisée à  $830^\circ\text{C}$ , nous commencerons nos essais à  $850^\circ\text{C}$  afin de conserver une marge d'erreur. De la même manière que pour l'état de réception, nous étudions le comportement du matériau à 5 températures différentes jusqu'à la température maximum que l'on peut atteindre lors du procédé,  $1200^\circ\text{C}$ .

- ❖  $850^\circ\text{C}$
- ❖  $900^\circ\text{C}$
- ❖  $950^\circ\text{C}$
- ❖  $1050^\circ\text{C}$
- ❖  $1200^\circ\text{C}$

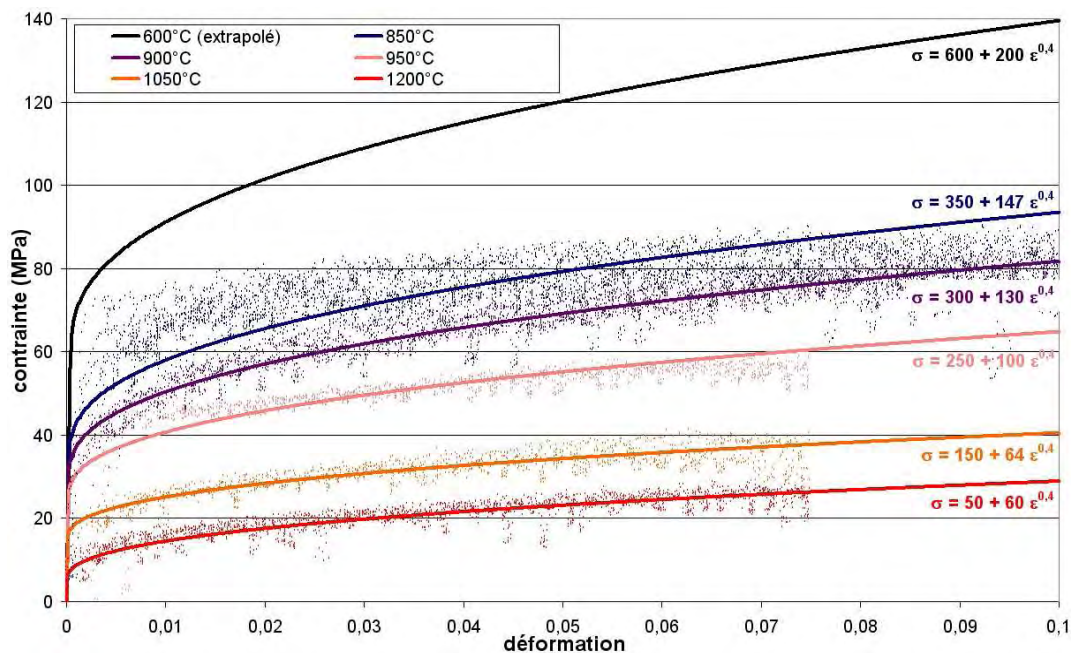


Figure 97 : Points expérimentaux et courbes rhéologiques de la loi THEVP à différentes températures pour l'état austénitique

La vitesse de montée en température n'étant pas influente sur la valeur de la température  $A_3$ , nous pouvons nous permettre de chauffer rapidement l'éprouvette afin d'être au plus proche des conditions du procédé (notamment en ce qui concerne l'homogénéité de l'austénite et la taille de grain). Toutefois, nous sommes limités par la puissance de la machine (courant max de 250A) et par un temps de maintien à température pour éviter les gradients dans la zone utile de l'éprouvette. Nous opérons alors un chauffage à 50°C/s jusqu'à la température de l'essai suivi d'un maintien à cette température pendant 3s.

- *Etat trempé en bain d'eau : bainite*

Les essais rhéologiques sur les éprouvettes trempés sont réalisés de la même manière que pour l'état de réception. Les essais à température ambiante sont réalisés sur la machine DARTEC. La machine Taboo développée au CEMEF, limitée par des efforts de traction de 250 daN, ne nous permet des essais à chaud qu'à partir de 600°C. Nous faisons donc un essai à 600°C et un à 650°C. De plus, nous considérerons la bainite comme purement plastique. C'est-à-dire que dans la loi THEVP proposée au chapitre 4, nous posons le terme  $\sigma_0$  (limite d'élasticité) égal à zéro.

De même que pour l'état de réception et que pour l'austénite, aucune sensibilité significative à la vitesse de déformation n'est constatée.

Afin d'éviter tout phénomène de revenu de la bainite, nous devons chauffer les éprouvettes le plus rapidement possible tout en garantissant une homogénéité en température dans la zone utile de l'éprouvette. Nous opérons alors la même montée en température que dans le cadre de l'étude de l'austénite (50°C/s puis 3s de maintien).

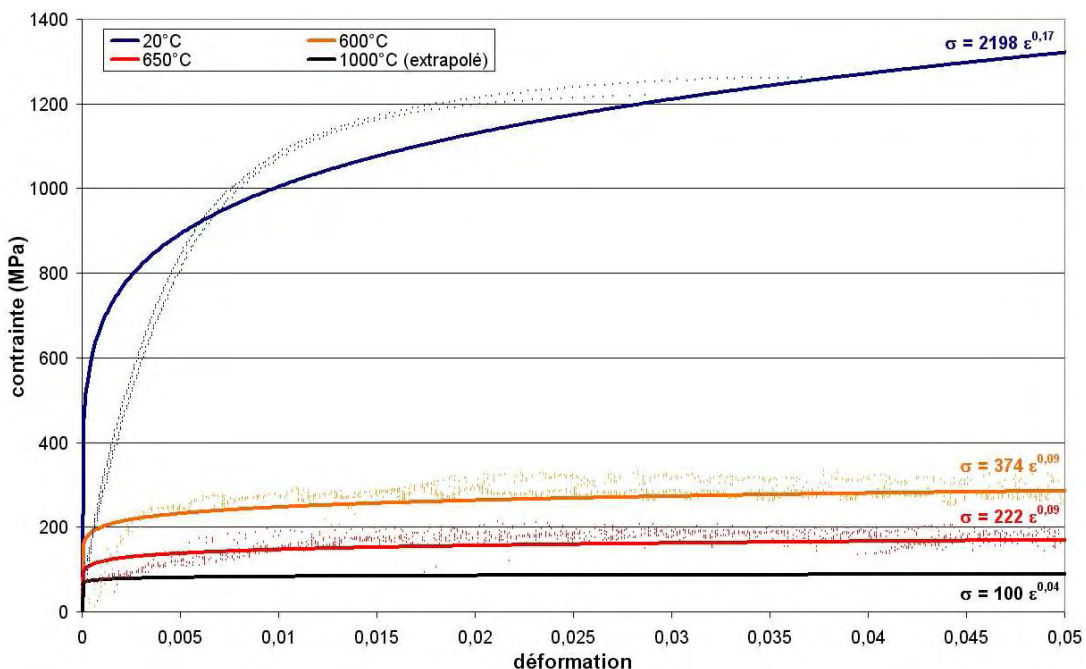


Figure 98 : Points expérimentaux et courbes rhéologiques de la loi THEVP à différentes températures pour l'état trempé (bainite)

On constate sur les résultats (Figure 98) qu'une loi puissance n'est pas bien adaptée au comportement à froid du matériau trempé. Néanmoins, l'approximation que nous faisons

n'aura que peu d'influence sur les résultats numériques en terme de déformation puisque par rapport aux autres phases, la bainite à température ambiante pourrait être considérée comme parfaitement rigide plastique.

5.5.2.6. Mise en données des paramètres rhéologiques dans le code de calcul

De la même manière que les paramètres thermophysiques, les paramètres rhéologiques sont entrés point par point dans un fichier de données. Le code de calcul effectue ensuite une interpolation linéaire entre deux points donnés. Cette méthode peut entraîner une approximation non négligeable à basse température puisque nous n'avons pas pu réaliser d'essais entre la température ambiante et 400°C en ce qui concerne l'état de réception et 600°C en ce qui concerne l'état bainitique.

Concernant les paramètres de la loi de Hooke (module de Young et de Poisson), les mêmes valeurs sont entrées pour chaque phase.

Chacune des 3 phases métallurgiques du procédé a son propre comportement rhéologique. La mise en données des paramètres de la loi THEVP se fait alors comme le présente le Tableau 14 pour l'état de réception, le Tableau 15 pour l'austénite et le Tableau 16 pour la bainite.

Température (°C)	Seuil d'élasticité $\sigma_0$ (MPa)	Consistance K (MPa.s <sup>m</sup> )	Coefficient de sensibilité à la vitesse m	Module d'écroutissage H (MPa)	Coefficient d'écroutissage n
20	300	0	1.0	616.8	0.45
400	225	0	1.0	600	0.40
500	150	0	1.0	300	0.25
600	100	0	1.0	200	0.20
690	75	0	1.0	100	0.18
1000	40	0	1.0	80	0.15

Tableau 14 : Mise en donnée des paramètres THEVP de l'état de réception

Température (°C)	Seuil d'élasticité $\sigma_0$ (MPa)	Consistance K (MPa.s <sup>m</sup> )	Coefficient de sensibilité à la vitesse m	Module d'écroutissage H (MPa)	Coefficient d'écroutissage n
600	600	0	1.0	200	0.40
850	350	0	1.0	147	0.40
900	300	0	1.0	130	0.40
950	250	0	1.0	100	0.40
1050	150	0	1.0	64	0.40
1200	50	0	1.0	60	0.40

Tableau 15 : Mise en donnée des paramètres THEVP de l'austénite

Température (°C)	Seuil d'élasticité $\sigma_0$ (MPa)	Consistance K (MPa.s <sup>m</sup> )	Coefficient de sensibilité à la vitesse m	Module d'érouissage H (MPa)	Coefficient d'érouissage n
20	0	0	1.0	2198	0.17
600	0	0	1.0	374	0.09
650	0	0	1.0	222	0.09
1000	0	0	1.0	100	0.04

Tableau 16 : Mise en donnée des paramètres THEVP de l'état trempé

### 5.5.3. Diagrammes TTA, TTT et paramètres des couplages métallurgiques

#### 5.5.3.1. Constitution d'un diagramme TTA

Nous avons vu dans ce chapitre que les diagrammes TTA et TTT sont utilisés dans le code de calcul sous une forme tabulée de 3 temps de transformation pour des températures données (le temps de fin d'incubation et par exemple les temps à 10% et 90% de transformation). De plus, nous devons renseigner le taux maximum (si le temps tend vers l'infini) de la phase apparente à chaque température.

Les essais préalables à la caractérisation rhéologique multiphasée (paragraphe 5.5.2.4) suffisent à considérer que l'austénitisation du HR45 pour des vitesses de chauffage autour de 100°C/s peut être considérée comme quasi statique. Nous entrerons alors des temps très courts (bien inférieurs au pas de temps thermique et supérieurs à la précision numérique) pour le temps d'incubation et les temps où 10% et 90% de la transformation sont réalisés. Le taux maximum de phase sera une évolution linéaire de 0 à 1 entre les températures  $A_{C1}$  et  $A_{C3}$ . La mise en données du diagramme TTA du HR45 sera alors la suivante :

Température (°C)	Temps d'incubation $t_{deb}$ (s)	$t_{10\%}$ (s)	$t_{90\%}$ (s)	$y_{max}$
730	$1.10^{-16}$	$2.10^{-16}$	$3.10^{-16}$	0.0
838	$1.10^{-16}$	$2.10^{-16}$	$3.10^{-16}$	1.0

Tableau 17 : Paramètres du diagramme TTA du HR45 pour des vitesses de chauffage jusqu'à 150°C/s

#### 5.5.3.2. Estimation d'un diagramme TTT

Le HR45 est, de par sa composition chimique, un acier de type C15. La Figure 99 présente une évaluation à titre indicatif de trempabilités de différents aciers d'après [MURRY-2002]. La notion de trempabilité représente la facilité de mise en œuvre d'une trempe permettant d'atteindre une dureté donnée (dépendante de l'utilisation future du matériau). Nous pouvons constater que les aciers de type C15 (comme le HR45) font partie de ceux que l'on considère 'très peu trempants'. En effet, si nous voulions déterminer expérimentalement la vitesse critique de trempe bainitique (courbe température-temps qui tangente le domaine bainitique

au niveau du ‘nez’), il faudrait mettre en jeu des vitesses de trempe extrêmement élevées, très difficiles à atteindre avec la technologie actuelle.

Une campagne d’essais au sein du CRITT de Nancy visant à construire un diagramme TRC ne nous a pas permis d’atteindre le domaine bainitique. En refroidissant l’échantillon de manière contrôlée à l’azote liquide (refroidissement local atteignant les 200°C/s), nous n’avons pas pu atteindre le domaine bainitique. Il est donc nécessaire d’estimer le diagramme TTT à partir de lois empiriques de la littérature.

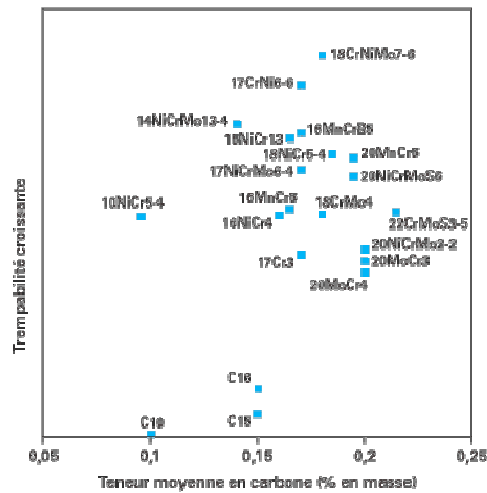


Figure 99 : Comparaison de trempabilité de différents aciers d’après [MURRY-2002]

Le pré-processeur du logiciel Forge3 TTT comporte un outil permettant de calculer un diagramme TTT à partir de la composition chimique et de la taille de grain du matériau. L’algorithme utilisé s’appuie, comme de nombreux autres outils de prédiction de cinétiques de transformation [GUO-2005 ; SAUNDERS-2004 ; ÅKERSTRÖM-2006], sur la méthode de Kirkaldy [BUCHMAYR-1990 ; KIRKALDY-1984].

En premier lieu, nous devons estimer les températures caractéristiques des changements de phases qui sont les températures  $A_{C1}$  et  $A_{C3}$  (températures de début et fin d’austénitisation à l’équilibre), la température de Hultgren  $TH$ , la température de début de transformation bainitique  $B_S$  et la température de début de transformation martensitique  $M_S$ . Les lois utilisées pour le calcul de ces températures sont des lois empiriques trouvées dans la littérature, établies à partir d’un grand nombre de nuances comprises dans un certain domaine de validité spécifié par l’auteur (généralement les aciers à faible carbone et peu alliés).

Considérons tout d’abord la température la plus élevée :  $A_{C3}$ . Le choix de modèles et les résultats qu’ils fournissent étant très variés dans la littérature, l’outil de calcul Forge utilise deux lois différentes et établit une moyenne sur ces deux résultats. Les deux modèles choisis sont ceux de Andrews [ANDREWS-1965] et de Kasatkin [KASATKIN-1984] :

Andrews : 828.2°C

$$A_{C_3} = 910 - 203\sqrt{C} - 15.2Ni + 44.7Si + 104V + 31.5Mo + 13.1W - 30Mn - 11Cr - 20Cu + 700P + 400Al + 120As + 400Ti \quad (\% \text{ masse})$$

Kasatkin : 849.9°C

$$A_{C_3} = 912 - 370C - 27.4Mn + 27.3Si - 6.35Cr - 37.2Ni + 95.2V + 190Ti + 72Al + 64.5Nb + 5.57W + 332S + 276P + 485N - 900B + 16.2C.Mn + 32.3C.Si + 15.4C.Cr + 48C.Ni + 4.32Si.Cr - 17.3Si.Mo - 18.6Si.Ni + 4.8Mn.Ni + 40.5Mo.V + 174C^2 + 2.46Mn^2 - 6.86Si^2 + 0.322Cr^2 + 9.9Mo^2 + 1.24Ni^2 - 60.2V^2 \quad (\% \text{ masse}) \quad (228)$$

La température  $A_{C_3}$  proposée par Forge est alors 839.1°C. Ces valeurs nous confortent vis-à-vis de nos essais expérimentaux et nous préférons alors imposer au logiciel la température que nous avons choisi d'utiliser suite à notre caractérisation expérimentale (paragraphe 5.5.3.1) : 838°C.

La température de début d'austénitisation  $A_{C_1}$  est très peu sensible à la teneur en carbone et les quelques modèles de la littérature donnent sensiblement les mêmes résultats dans le cadre des aciers faiblement alliés [MEY-1997]. Nous choisissons alors un seul modèle qui sera le modèle de Andrews.

Andrews : 715.1°C

$$A_{C_1} = 723 - 10.7Mn - 16.9Ni + 29.1Si + 16.9Cr + 6.38W + 290As \quad (\% \text{ masse}) \quad (229)$$

De la même manière que pour  $A_{C_3}$ , nous préférons imposer la valeur résultante de nos expériences : 730°C

La température de Hultgren TH est calculée, pour les aciers hypoeutectoïdes, par prolongation de la courbe de température  $A_{em}$  d'un diagramme d'équilibre, en dessous de  $A_{C_1}$ . Néanmoins, cette température ne peut être inférieure à la température de début de transformation bainitique  $B_S$ . La température TH est alors le maximum entre la température de Hultgren et  $B_S$ . Dans notre cas, il s'agira de la température  $B_S$  qui est calculée à partir du modèle de Kirkaldy [KIRKALDY-1984] :

Kirkaldy : 619.5°C

$$B_S = 656 - 57.7C - 35Mn - 75Si - 15.3Ni - 34Cr - 41.2Mo \quad (\% \text{ masse}) \quad (230)$$

Enfin, la dernière température caractéristique est la température de début de transformation martensitique  $M_S$ . Il s'agit de la température pour laquelle on trouve le plus de modèles dans la littérature [KUNG-1982]. Nous choisissons alors, comme pour  $A_{C_3}$ , d'utiliser deux modèles et d'établir une moyenne entre les deux : Haynes [STEVEN-1956] et Andrews [ANDREWS-1965].



Haynes: 467.6°C

$$M_s = 561 - 474C - 33Mn - 17Cr - 17Ni - 21Mo + 10Co - 7.5Si \quad (\% \text{ masse})$$

Andrews: 443.7°C

$$M_s = 512 - 452.8C - 16.92Ni + 14.97Cr - 9.5Mo - 71.44Mn.C - 67.62Cr.C + 216.9C^2 \quad (\% \text{ masse})$$

(231)

La température  $M_s$  obtenue est alors 455.7°C.

Une fois les domaines de formation des différentes phases délimités par les températures caractéristiques ci-dessus, nous pouvons établir un diagramme TTT à partir de la méthode de Kirkaldy. Cette méthode est basée sur une hypothèse de base que consiste à dire que les cinétiques de transformation diffusives peuvent s'écrire sous la forme d'un produit de 4 fonctions, chacune dépendante d'un des 4 paramètres suivants : taille de grain, composition chimique, température, taux de phases. La forme originale proposée par Kirkaldy s'écrit sous la forme :

$$\frac{dy_i}{dt} = f_1(G).f_2(C, Mn, Ni, Cr, Mo).f_3(T).f_4(y_i)$$

avec

$$\begin{cases} f_1(G) = 2^{(G-1)/2} \\ f_3(T) = \Delta T^n D \\ f_4(y_i) = \frac{(y_i)^{\frac{2(1-y_i)}{3}} (1-y_i)^{\frac{2y_i}{3}}}{X} \end{cases} \quad (232)$$

G est la valeur ASTM de la taille de grain ; C, Mn, Ni, Cr et Mo sont les pourcentages massiques des différents composés chimiques de l'alliage ; T est la température courante du matériau et  $\Delta T$  le sous-refroidissement par rapport à la température de début de transformation à l'équilibre ; n et D sont deux coefficients dépendant des transformations en cours (n dépend uniquement du type de mécanisme de diffusion et D dépend également de l'énergie d'activation de la diffusion) ;  $y_i$  est le taux courant de la phase apparente et X est un facteur de retard de la réaction (retard dû à la stabilisation de l'austénite dans la transformation bainitique).

En inversant cette équation et en intégrant, on peut obtenir le temps  $\tau_i$  nécessaire à la transformation d'une proportion y de la phase i, à une température T :

$$\tau_i(y, T) = \int_0^y \frac{dx}{f_1(G).f_2(C, Mn, Ni, Cr, Mo).f_3(T).f_4(x)} \quad (233)$$

L'identification empirique de la fonction  $f_2$  et des paramètres n, D et X sur un grand nombre de nuances permet l'établissement de diagrammes TTT pour une taille de grain austénitique et une composition chimique données. D'après les travaux de Kirkaldy, les temps de transformation ferritique, perlitique et bainitique sont définis par :

$$\tau_f(y, T) = \int_0^y \frac{59.6Mn + 1.45Ni + 67.7Cr + 244Mo}{2^{\frac{G-1}{2}} \Delta T^3 e^{\frac{-23500}{RT}} x^{\frac{2(1-x)}{3}} (1-x)^{\frac{2x}{3}}} dx$$

$$\tau_p(y, T) = \int_0^y \frac{[1.79 + 5.42(Cr + Mo + 4MoNi)] e^{\frac{-64500}{RT}}}{2^{\frac{G-1}{2}} \Delta T^3 \left( e^{\frac{-37000}{RT}} + (0.01Cr + 0.52Mo) e^{\frac{-27500}{RT}} \right) x^{\frac{2(1-x)}{3}} (1-x)^{\frac{2x}{3}}} dx \quad (234)$$

$$\tau_b(y, T) = \int_0^y \frac{X(2.34 + 10.1C + 3.8Cr + 19Mo) \cdot 10^{-4}}{2^{\frac{G-1}{2}} \Delta T^2 e^{\frac{-27500}{RT}} x^{\frac{2(1-x)}{3}} (1-x)^{\frac{2x}{3}}} dx$$

avec  $X = \exp[(1.9C + 2.5Mn + 0.9Ni + 1.7Cr + 4Mo - 2.6)x^2]$

Pour la nuance HR45 dont la composition chimique et la taille de grain sont données au paragraphe 5.5.1, le diagramme TTT obtenu par la méthode de Kirkaldy est représenté par la Figure 100.

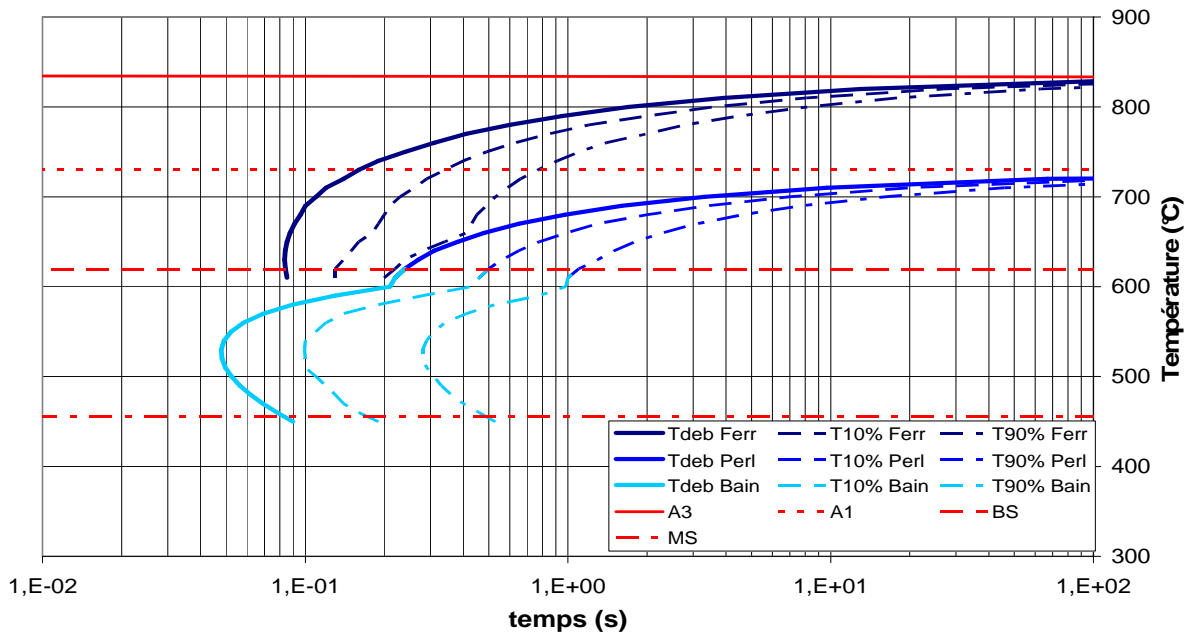


Figure 100 : Diagramme TTT calculé par la méthode de Kirkaldy pour une nuance HR45

### 5.5.3.3. Couplages entre mécanique et métallurgie

- Plasticité de transformation

Nous avons vu au chapitre 5 que la plasticité de transformation peut être modélisée à l'aide d'un paramètre matériau K :

$$\dot{\epsilon}_{pt} = \frac{3}{2} K f'(y) \dot{y} s \quad (235)$$

Ce paramètre peut être identifié par des essais de dilatométrie pour lesquels on applique une faible contrainte (inférieure à la limite d'élasticité) au début de la transformation métallurgique [TALEB-2001]. Concernant le procédé que nous souhaitons modéliser, il s'agit d'une transformation bainitique dont les vitesses de refroidissements très rapides sont celles du procédé. Or, nous avons évoqué au paragraphe précédent la difficulté de contrôler des essais dilatométriques impliquant un tel refroidissement. Nous ne pouvons alors caractériser le paramètre K dans des conditions convenables.

De plus, nous trouvons peu de résultats dans la littérature pour la plasticité lors de transformations bainitiques. Ceci est dû principalement au fait que les mécanismes métallurgiques en jeu diffèrent selon le type de bainite obtenue (voir chapitre 1) et donc qu'ils impactent sur la valeur de K. [LEBLOND-1989] donne un ordre de grandeur général du paramètre K : environ  $10^{-4} \text{ MPa}^{-1}$ . C'est alors la valeur que nous utiliserons dans nos simulations. Cette hypothèse est peut-être forte car nous verrons au chapitre suivant que la plasticité de transformation tient une place prépondérante dans les déformations finales du procédé.

- Variation volumique aux changements de phases

[DENIS-1987] propose le calcul d'une déformation résultante de la variation volumique au changement de phase, à une température de référence de  $0^\circ\text{C}$ . Dans ce cas, nous pouvons écrire le paramètre d'expansion  $\epsilon_{tr}^0$  en fonction des densités volumiques à  $0^\circ\text{C}$  :

$$\epsilon_{tr}^0 = \frac{1}{3} \frac{\rho_{recep}^{0^\circ\text{C}} - \rho_{aust}^{0^\circ\text{C}}}{\rho_{aust}^{0^\circ\text{C}}} \approx 8.10^{-3} \quad (236)$$

Généralement, le même paramètre est utilisé pour toutes les transformations de type  $\gamma \leftrightarrow \alpha$ . Nous utiliserons alors cette valeur autant pour la transformation de l'état de réception en austénite au chauffage que pour la transformation de l'austénite en bainite à la trempe. Pour les transformations martensitiques, la valeur de ce paramètre est en général légèrement plus élevée mais notre procédé ne nécessite pas le calcul de cette valeur.

#### 5.5.3.4. Couplage thermo métallurgique : Enthalpies de transformation

Nous avons vu Figure 64 que la courbe expérimentale de la chaleur spécifique en fonction de la température présente un « pic » au niveau du changement de phase. Ceci est la manifestation du caractère endothermique de la transformation métallurgique. L'énergie thermique alors consommée est appelée enthalpie de transformation (ou chaleur latente) et elle peut être calculée en mesurant l'aire du « pic » de la courbe du facteur  $\rho.C_p$  en fonction de la température :

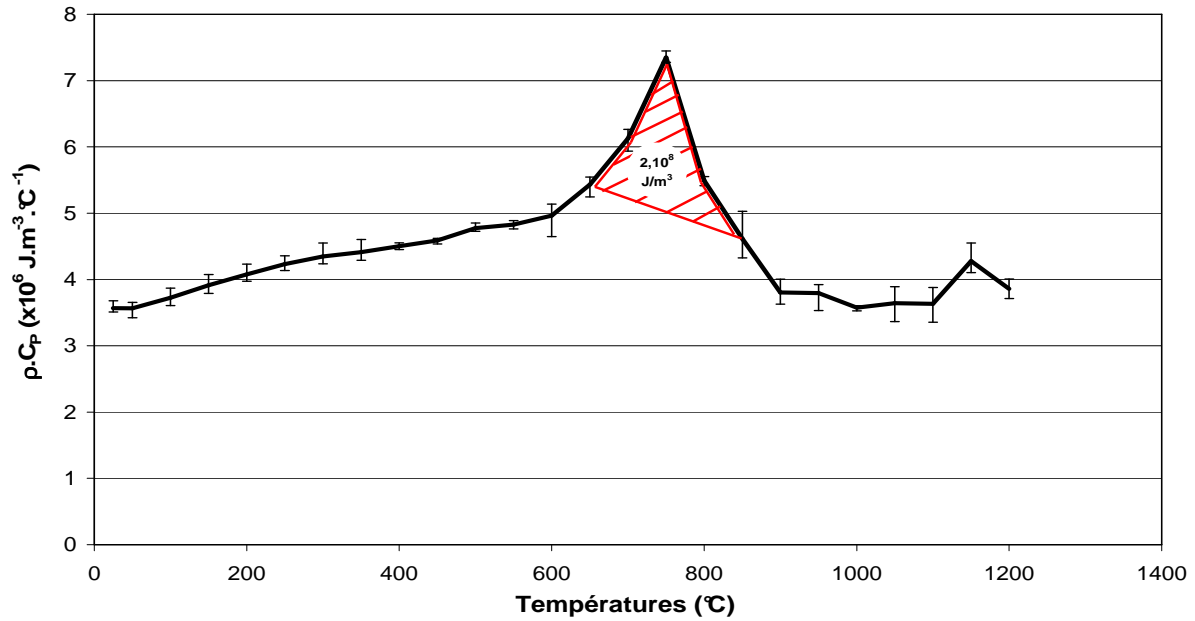


Figure 101 : Méthode graphique de mesure de l'enthalpie de transformation

Après calcul, nous obtenons une enthalpie de transformation de  $2.10^8 \text{ J.m}^{-3}$ .

#### 5.5.4. Résultats de calcul

Les résultats obtenus par la modélisation complète des couplages thermomécaniques, électromagnétiques et métallurgiques, dans le cadre du procédé semi industriel seront présentés et discutés au chapitre suivant. Dans ce paragraphe nous montrons uniquement les résultats de calcul d'austénitisation (Figure 102.a) et de déformation par couplage entre mécanique et métallurgie (plasticité de transformation) (Figure 102.b).

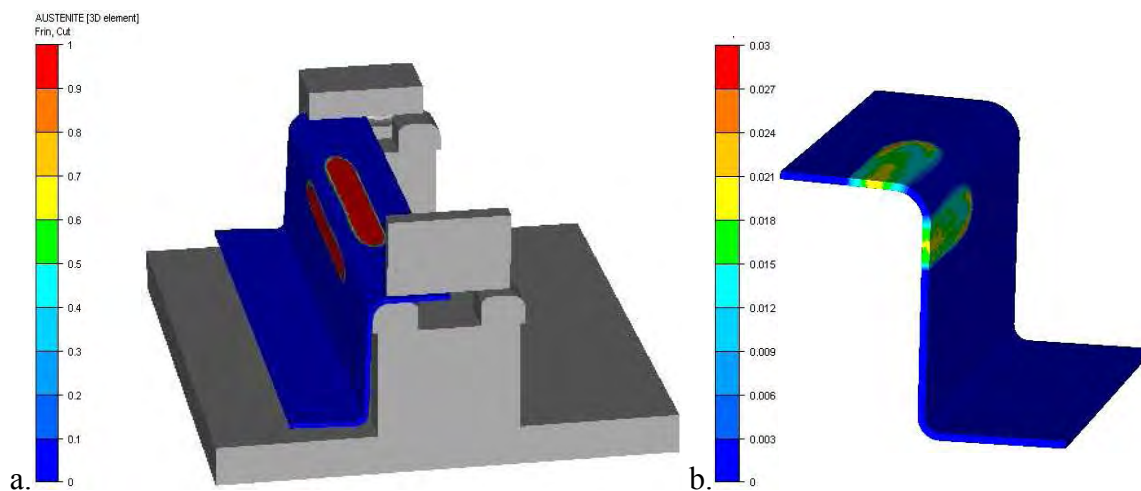


Figure 102 : Taux d'austénite en fin de chauffage (a) et déformation par plasticité de transformation en fin de trempe (b).

---

**BIBLIOGRAPHIE**

- [ÅKERSTRÖM-2006] - Åkerström P., Oldenburg M., "Austenite decomposition during press hardening of a boron steel—Computer simulation and test", *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 174, n° 1-3, p. 399-406, 2006.
- [ALBERRY-1982] - Alberry P.J., Jones W.C.K., "Computer model for prediction of heat affected zone microstructures in multipass weldment", *Metals Technology*, vol. 9, p. 419-426, 1982.
- [ALIAGA-2000] - Aliaga C., Simulation numérique par éléments finis 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'aciers : application à la trempe de pièces forgées ou coulées, Thèse de doctorat, ENSMP, 2000.
- [ANDREWS-1965] - Andrews K.W., "Empirical formulas for the calculation of some transformation temperatures", *JISI*, vol. 203, p. 721, 1965.
- [ASHBY-1984] - Ashby M.F., Easterling K.E., "The transformation hardening of steel surfaces by laser beams-I hypoeutectoid steels", *acta metall.*, vol. 32, n° 11, p. 1935-1948, 1984.
- [AUBRY-1998] - Aubry C., Modélisation et étude expérimentale des cinétiques de revenu/autorevenu d'aciers trempés; prévision des contraintes résiduelles de trempe dans un acier cémenté en incluant le revenu, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1998.
- [AVRAMI-1941] - Avrami M., "Kinetics of phase change III: Granulation, phase change and microstructure", *J. Chem. Phys.*, vol. 9, p. 177-184, 1941.
- [AVRAMI-1940] - Avrami M., "Kinetics of phase change II: transformation-time relations for random distribution nuclei", *J. Chem. Phys.*, vol. 8, p. 212-224, 1940.
- [AVRAMI-1939] - Avrami M., "Kinetics of phase change I: general theory", *J. Chem. Phys.*, vol. 7, p. 1103-1112, 1939.
- [BARBE-2007] - Barbe F., Quey R., Taleb L., "Numerical modelling of the plasticity induced during diffusive transformation. Case of a cubic array of nuclei", *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 26, n° 4, p. 611-625, 2007.
- [BERGE-2003] - Berge D., Approbation du R4G de la ligne ARCELOR Flémalle ligne V, note interne DMOV/MXP/CEB/MMF/n°03.VY.71, PSA Peugeot Citroën, 2003.
- [BUCHMAYR-1990] - Buchmayr B., Kirkaldy J.S., "Modeling of temperature field, transformation behavior, hardness and mechanical response of low alloys steel during cooling from the austenite region", *Jour. Heat Treat.*, vol. 8, n° 2, p. 127-136, 1990.
- [DENIS-1999] - Denis S., Archambault P., Aubry C. *et al*, "Modelling of phase transformation kinetics in steels and coupling with heat treatment residual stress predictions", *J. Phys. IV*, vol. 9, p. 323-332, 1999.
- [DENIS-1987a] - Denis S., Modélisation des interactions contrainte-transformation de phase et calcul par éléments finis de la genèse des contraintes internes au cours de la trempe des aciers, Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1987a.

- [DENIS-1987b] - Denis S., Sjöström S., Simon A., "Coupled temperature, stress, phase transformation calculation model. Numerical illustration of the internal stresses evolution during cooling of a eutectoid carbon steel cylinder", *Métall. Trans. A*, vol. 18, p. 1203-1212, 1987b.
- [DESALOS-2003] - Desalos Y., "Introduction aux traitements thermiques des métaux et alliages", *Techniques de l'Ingénieur - traité Matériaux métalliques*, n° M1105, 2003.
- [DIANI-1992] - Diani J.M., Sabar H., Berveiller M., "Micromechanical modelling of transformation induced plasticity (TRIP) phenomenon in steels", *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 33, n° 13, p. 1921-1934, 1992.
- [FARIAS-1991] - Farias D., Traitement thermique laser de l'acier XC42 et modélisation des transformations de phases en cycles rapides au chauffage et au refroidissement, Thèse de doctorat, INPL, 1991.
- [FARIAS-1990] - Farias D., Denis S., Simon A., "Les transformations de phases en cycle thermique rapide et leur modélisation. Cas d'un acier XC42", *Traitement thermique*, vol. 237, p. 63-70, 1990.
- [FERNANDES-1985] - Fernandes F.M., Modélisation et calcul de l'évolution de la température et de la microstructure au cours du refroidissement des aciers, Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1985.
- [FISHER-2000] - Fisher F.D., Reisner G., Werner E. *et al*, "A new view on transformation induced plasticity (TRIP)", *Int. J. Plast.*, vol. 16, p. 723-748, 2000.
- [GARCIA-1981] - Garcia C.I., Deardo A.J., "Formation of austenite in 1.5 Pct Mn Steels", *Métall. Trans. A*, vol. 12, p. 521-530, 1981.
- [GAUTIER-1995] - Gautier E., Zhang J.S., Zhang X.M., "Martensitic transformation under stress in ferrous alloys. Mechanical behavior and resulting morphologies", *J. Phys. IV, colloque C8, supplément au J. Phys. III*, vol. 5, p. 41-50, 1995.
- [GAUTIER-1987] - Gautier E., Simon A., Beck G., "Plasticité de transformation durant la transformation perlitique d'un acier eutectoïde", *acta metall.*, vol. 35, n° 6, p. 1367-1375, 1987.
- [GREENWOOD-1965] - Greenwood G.W., Johnson R.H., "The déformation of metal under small stresses during phase transformation", *Proc. Roy. Soc. A*, vol. 283, p. 403-422, 1965.
- [GUO-2005] - Guo Z., Schillé J.-., Saunders N. *et al*, "Modelling material properties leading to the prediction of distortion during heat treatment of steels for automotive applications", *2nd Int. Conf. on Heat Treatment and Surf. Eng. in Automotive Applications*, 2005.
- [INOUE-1987] - Inoue K., Ohmura E., Haruta K. *et al*, "Theoretical analysis of heat flow and structural changes during laser transformation hardening of hypoeutectoïdal steel", *Trans. of JWRI*, vol. 16, n° 2, p. 49-56, 1987.
- [JAOUEN-1999] - Jaouen O., Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermo-mécanique du refroidissement des pièces de fonderie, Thèse de doctorat, ENSMP, 1999.

- [JOHNSON-1939] - Johnson W.A., Mehl R.F., "Reaction kinetics in processes of nucleation and growth", *trans. AIMME*, vol. 135, p. 416, 1939.
- [KASATKIN-1984] - Kasatkin O.G., Vinokur B.B., Pilyushenko V.L., "Calculation models for determining the critical points of steel", *Metal Science and Heat Treatment*, vol. 26, n° 1, p. 27-31, 1984.
- [KIRKALDY-1984] - Kirkaldy J.S., Venugopalan D., "Prediction of microstructure and hardenability in low-alloy steels", *The metallurgical Society/AIME*, p. 125-148, 1984.
- [KOISTINEN-1959] - Koistinen D.P., Marburger R.E., "A general equation prescribing the extent of the austenite-martensite transformation in pure iron-carbon alloys and plain carbon steels", *acta metall.*, vol. 7, p. 59-60, 1959.
- [KUNG-1982] - Kung C.Y., Rayment J.J., "An examination of the validity of existing empirical formulae for the calculation of Ms temperature", *Métall. Trans. A*, vol. 13, p. 328-331, 1982.
- [LEBLOND-1989] - Leblond J.B., Devaux J., Devaux J.C., "Mathematical modelling of transformation plasticity in steels I: case of ideal-plastic phases", *Int. J. Plast.*, vol. 5, p. 551-572, 1989.
- [LEBLOND-1984] - Leblond J.B., Devaux J., "A new kinetic model for anisothermal metallurgical transformations in steels including effect of austenite grain size", *acta metall.*, vol. 32, n° 1, p. 137-146, 1984.
- [MEY-1997] - Mey A., Préviation par calcul des cinétiques de transformations de phases et des contraintes internes lors du traitement thermique d'aciers cémentés, Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1997.
- [MIOKOVIC-2004] - Miokovic T., Schwarzer J., Schulze V. *et al*, "Description of short time phase transformations during the heating of steels based on high-rate experimental data", *J. Phys. IV*, vol. 120, p. 591-598, 2004.
- [MOLINDER-1956] - Molinder G., "A quantitative study of the formation of austenite and the solution of cementite at different austenitizing temperatures for a 1.27% carbon steel", *acta metall.*, vol. 4, p. 565-571, 1956.
- [MULOT-1979] - Mulot A., Badeau J.P., "Influence de la structure initiale et de la composition chimique sur les caractéristiques des couches durcies obtenues par trempe superficielle, bombardement électronique et laser", *Traitement thermique*, vol. 136, p. 47-63, 1979.
- [MURRY-2002] - Murry G., "Acier pour les traitements thermiques - Propriétés et guide de choix", *Techniques de l'Ingénieur - traité Matériaux métalliques*, n° M4530, 2002.
- [NICLAS-1998] - Niclas A., Prise en compte des gradients de propriétés liés au traitement thermique dans le dimensionnement des pièces mécaniques, Thèse de doctorat, ENSAM Paris, 1998.
- [PUMPHREY-1948] - Pumphrey W.I., Jones F.W., "Inter-relation of hardenability and isothermal transformation data", *JISI*, vol. 159, p. 137-144, 1948.

- [ROBERTS-1943] - Roberts G.A., Mehl R.F., "The mechanism and rate of formation of austenite from ferrite-cementite aggregates", *Trans. of the ASM*, vol. 31, p. 613-650, 1943.
- [ROSE-1956] - Rose A., Strassburg W., "Demonstration of the formation of austenite in hypoeutectoid steels by means of TTT heating diagrams", *Stahl und Eisen*, vol. 76, n° 15, p. 976-983, 1956.
- [SASTRI-1965] - Sastri A.S., West D.R.F., "Effect of austenitizing conditions on the kinetics of martensite formation in certain medium alloy steels", *JISI*, vol. 203, p. 138-145, 1965.
- [SAUNDERS-2004] - Saunders N., Guo Z., Li X. *et al*, The Calculation of TTT and CCT diagrams for General Steels, Internal Report Sente Software Ltd., 2004.
- [SIMON-1994] - Simon A., Denis S., Gautier E., "Effet des sollicitations thermomécaniques sur les transformations de phases dans l'état solide. Aspect métallurgique et mécanique", *J. Phys. IV, colloque C3, supplément au J. Phys. III*, vol. 4, p. 199-213, 1994.
- [SJÖSTRÖM-1985] - Sjöström S., "Interactions and constitutive models for calculating quench stresses in steel", *Materials Science and Technologie*, vol. 1, p. 823-829, 1985.
- [SPEICH-1981] - Speich G.R., Demarest V.A., Miller R.L., "Formation of austenite during intercritical annealing of dual-phase steel", *Métall. Trans. A*, vol. 12, p. 1419-1428, 1981.
- [STEVEN-1956] - Steven W., Haynes A.G., "The temperature of formation of martensite and bainite in low-alloy steels. Some effects of chemical composition", *JISI*, vol. 183, p. 349, 1956.
- [TALEB-2001] - Taleb L., Cavallo N., Waeckel F., "Experimental analysis of transformation plasticity", *International Journal of Plasticity*, vol. 17, n° 1, p. 1-20, 2001.
- [TALEB-2003] - Taleb L., Simkin J., "A micromechanical modeling of the Greenwood-Johnson mechanism in transformation induced plasticity", *Int. J. Plast.*, vol. 19, p. 1821-1842, 2003.
- [UMEMOTO-1983] - Umemoto M., "Transformation to pearlite from work-hardened austenite", *Trans. ISIJ*, vol. 23, p. 775, 1983.
- [UMEMOTO-1980] - Umemoto M., Komatsubara N., Tamura I., "Effect of austenite grain size on the hardenability of eutectoid steel", *Tetsu-to-Hagané*, vol. 66, p. 400-409, 1980.
- [VAMVACOUSSIS-1975] - Vamvacoussis A., Etude des structures obtenues par trempé après chauffage par induction des aciers au carbone et d'une fonte, Thèse de doctorat, Université de Nancy 1, 1975.
- [VIDEAU-1994] - Videau J., Cailletaud G., Pineau A., "Modélisation des effets mécaniques des transformations de phases pour le calcul de structures", *J. Phys. IV, colloque C3, supplément au J. Phys. III*, vol. 4, p. 227-232, 1994.
- [WANG-1999] - Wang J., Van der Wolk P.J., Van der Zwaag S., "Effects of carbon concentration and cooling rate on continuous cooling transformations predicted by artificial neural network", *ISIJ International*, vol. 39, n° 10, p. 1038-1046, 1999.



[WANG-2006] - Wang Y., Etude et modélisation de l'effet du revenu sur les évolutions de microstructures, du comportement thermomécanique et des contraintes résiduelles de trempe, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de lorraine, 2006.

[ZALKIN-1986] - Zalkin V.M., "Some controversial problems of the kinetics of the transformation of pearlite into austenite during heating of steel", *Metal Science and Heat Treatment*, vol. 28, n° 2, p. 96-102, 1986.

---

---

# CHAPITRE 6

---

---

## Chapitre 6

### SIMULATION NUMERIQUE DU PROCEDE SEMI-INDUSTRIEL

<b>6.1.</b>	<b>Mise en données du code de calcul</b>	<b>182</b>
<b>6.2.</b>	<b>Plan d'expérience numérique</b>	<b>182</b>
<b>6.3.</b>	<b>Comparaison des résultats numériques à l'expérience</b>	<b>185</b>
6.3.1.	Simulation du bridage de la tôle emboutie	185
6.3.2.	Résultats en température	186
6.3.3.	Etude métallurgique	189
6.3.4.	Prédiction de la géométrie finale	190
<b>6.4.</b>	<b>Etude des distorsions mécaniques au cours du procédé</b>	<b>193</b>
6.4.1.	Elongation des pièces	193
6.4.2.	Ouverture de la forme en « U »	194
6.4.3.	Etats de contraintes et déformations	195
<b>6.5.</b>	<b>Conclusion sur les résultats numériques</b>	<b>197</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>198</b>

## 6.1. MISE EN DONNEES DU CODE DE CALCUL

Dans les chapitres précédents, nous avons vu qu'un problème multi-physique impliquant autant de couplages que le notre, demande la connaissance de nombreux paramètres dont la caractérisation est souvent très pointue et parfois très difficile à mettre en place. C'est peut-être là que réside la principale faiblesse de notre modélisation avec une approche très macroscopique et phénoménologique de la physique.

Les résultats numériques que nous verrons dans ce chapitre et surtout leur comparaison avec les résultats expérimentaux, nous donneront plus d'informations sur la validité de notre approche et de nos hypothèses. Néanmoins, il est important de garder à l'esprit que nous connaissons mal notre matériau, principalement d'un point de vue métallurgique, et que nous avons fait de nombreuses hypothèses. Ceci ne nous permettra pas de faire des conclusions d'un point de vue quantitatif sur le procédé, mais nous aurons très certainement une bonne approche d'un point de vue qualitatif, ce qui reste le principal objectif de cette première étude numérique du projet.

Bridage		Libre		Serré	
Perçage		Oui	Non	Oui	Non
Retard douche	1s	LT1	LP1	ST1	SP1
	3s	LT3	LP3	X	X

Tableau 18 : Plan d'expérience et numéro des essais numériques

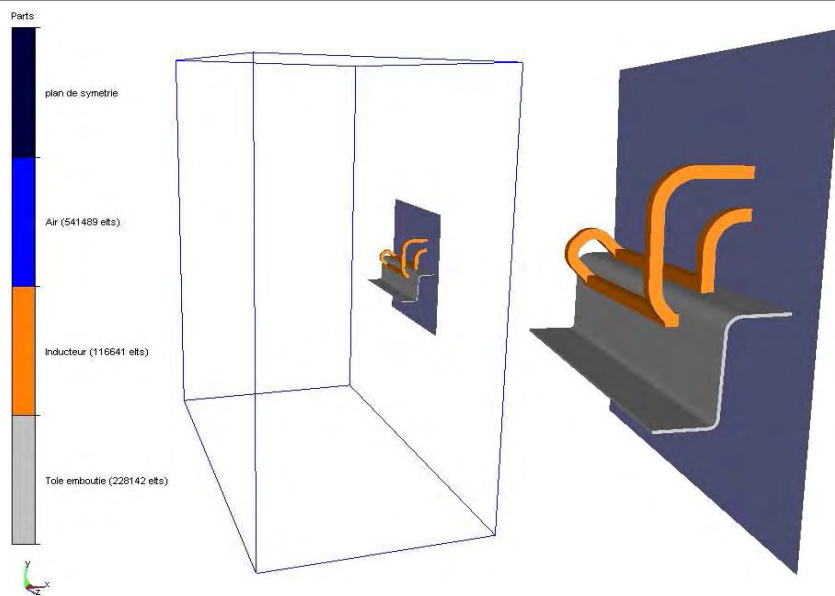
## 6.2. PLAN D'EXPERIENCE NUMERIQUE

Rappelons que le cas semi-industriel est un cas d'étude que nous avons choisi afin de simplifier la problématique du renfort de pied central et afin d'observer le lien entre deux types de distorsions : la fermeture ou ouverture de la forme en U, et la modification du galbe de la pièce. Dans le paragraphe 2.2.2 du Chapitre 2, nous présentons et expliquons le choix d'un plan d'expérience pour des essais empiriques. En ce qui concerne les essais numériques, nous nous tiendrons au même plan d'expérience (Tableau 18).

Le modèle électromagnétique est composé de la pièce, de l'inducteur et de l'air environnant (Figure 103). Du fait de la symétrie du problème, un plan de symétrie est considéré (voir conditions limites au chapitre 3).

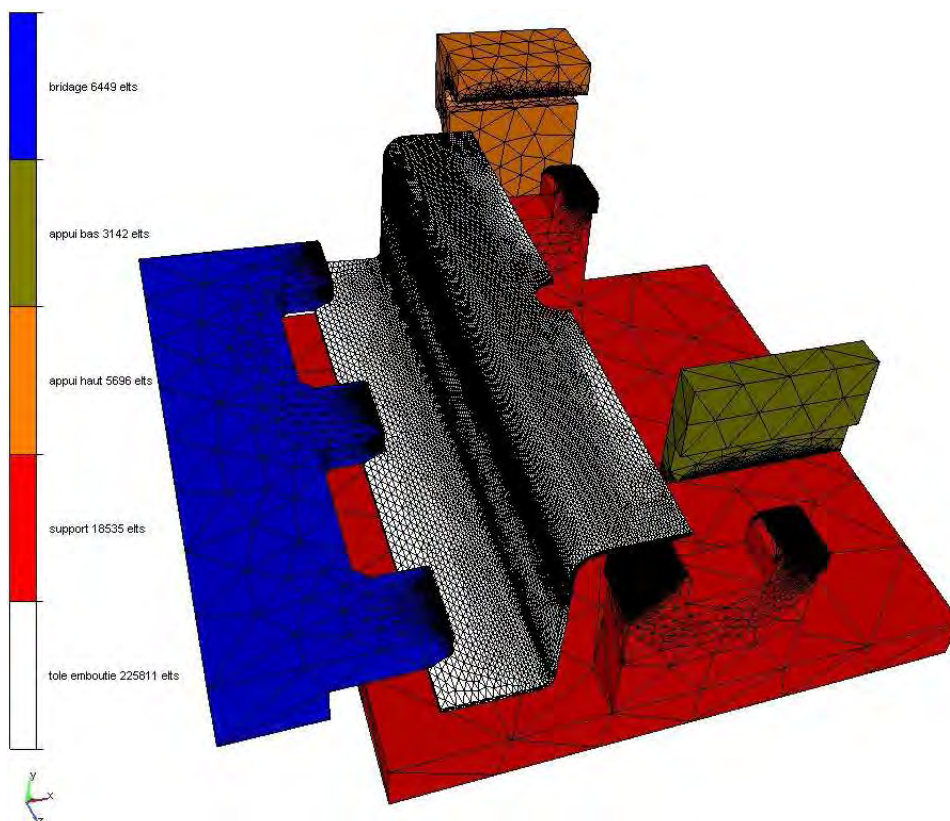
Le modèle numérique électromagnétique comporte certaines approximations géométriques :

- Les cotes géométriques de l'inducteur étaient comprises dans des tolérances relativement larges dues à la difficulté du travail du cuivre et les cotes utilisées pour le modèle numérique sont celles du cahier des charges.
- Du fait de la faible résistance mécanique du cuivre, l'inducteur fléchit sous l'effet des efforts de Laplace lors du chauffage de la pièce. L'entrefer est alors modifié durant le procédé, et ce couplage entre mécanique et électromagnétisme n'est pas pris en compte dans notre modélisation.
- Le modèle choisi pour la pièce est basé sur une moyenne des mesures qui ont été faites sur les éprouvettes (voir paragraphe 2.2.4.2 du chapitre 2). Les écarts peuvent aller jusqu'à 1,7% de la cote moyenne, modifiant ainsi légèrement les couplages électromagnétiques.



**Figure 103 : Modèle du problème électromagnétique composé de l'inducteur et de la pièce noyées dans l'air environnant (total de 886272 elts).**

Le modèle thermique, mécanique et métallurgique est composé d'un support de bridage, de 2 pièces d'appui (haute et basse) et d'une pièce de bridage (pour les essais ST1 et SP1). La tôle emboutie n'est pas entièrement modélisée puisque qu'elle présente 2 plans de symétrie. Néanmoins, le système de maintien de la pièce n'étant pas symétrique sur un de ces plans, nous utiliserons un seul de ces plans de symétrie afin d'alléger le modèle. La Figure 104 présente le modèle sur une vue éclatée, et précise le nombre d'éléments de chaque outil et de la pièce.



**Figure 104 : Visualisation éclatée du système modélisé et du maillage de chaque pièce.**

## SIMULATION NUMERIQUE DU PROCEDE SEMI-INDUSTRIEL

Le calcul d'un procédé complet se décompose en plusieurs calculs séparés : le serrage de la pièce (pour les essais ST1 et SP1), le calcul électromagnétique, le chauffage localisé de la pièce, le retard douche et la trempe.

Nous considérons que les déplacements appliqués à la pièce par le bridage n'influencent pas de manière sensible les résultats électromagnétiques. Nous ferons uniquement 2 calculs électromagnétiques : pour les pièces percées et les pièces non percées.

Les essais de mêmes conditions de bridage et perçage mais de temps de retard douche différents, ne diffèrent qu'à partir du calcul de trempe pour lequel les conditions initiales sont : soit celles obtenues après 1s de retard douche, soit celles obtenues après 3s de retard douche (le retard douche est toujours simulé sur 3s). Ainsi, nous effectuons 4 calculs de bridage, chauffage et retard douche, et 6 calculs de trempe (1 par essai).

Que la pièce soit dans les configurations appelées « libre » ou « bridée », un retour élastique s'opère lorsque nous l'enlevons de son support. Des calculs de retour élastiques sont alors effectués en respectant la procédure expérimentale utilisée pour enlever les pièces du support. Ainsi, 2 ou 3 calculs de retour élastique sont effectués successivement dans l'ordre suivant :

- retrait de l'outil de bridage s'il y a lieu (essais ST1 et SP1),
- retrait des appuis haut et bas,
- retrait du support.

Au chapitre 4, nous avons vu que le problème mécanique est exprimé par une formulation en vitesse-pression. La méthode de résolution donne alors à chaque itération de Newton-Raphson, un système linéaire symétrique défini semi-positif (voir annexe 5). Une méthode itérative de résidu minimal préconditionnée a été utilisée pour résoudre le système. Le préconditionneur par défaut, une factorisation LU incomplète, s'est avéré stagner. Nous avons donc cherché un autre préconditionneur pour le même solveur et nous nous sommes arrêté sur un préconditionneur SSOR, particulièrement adapté aux modèles dont la taille de maille est fortement anisotrope (annexe 5).

		Electromagnétisme	3h		
Bridage tôle	21h		<b>Bridage</b>	<b>Libre</b>	<b>Serré</b>
Chauffage	27h40		Retour de bridage	X	9h20
Retard douche	7h45		Retour des appuis haut et bas	18h10	6h30
Trempe	25h45		Retour du support	3h30	3h

**Tableau 19 : Temps de calcul moyens pour les différentes étapes du procédé et pour le retour élastique.**

Les temps de calcul moyens pour les différentes étapes et les différents retours élastiques sont donnés au Tableau 19. Les calculs ont été effectués sur un PC avec un processeur de 2.2GHz doté de 2Go de RAM.

Les origines des longs temps de calcul sont principalement la taille du modèle (227470 éléments et 50291 noeuds pour la tôle emboutie sans trou), la gestion du contact (48620 triangles de surface), et le grand nombre de pas de temps. Ce dernier est dû au fait que nous le limitons les pas de temps par une évolution thermique maximum de 10°C afin de représenter au mieux les évolutions métallurgiques.



### 6.3. COMPARAISON DES RESULTATS NUMERIQUES A L'EXPERIENCE

#### 6.3.1. Simulation du bridage de la tôle emboutie

Le système expérimental nous permet de serrer la pièce en déplaçant l'outil de bridage sur un axe perpendiculaire à la surface de contact jusqu'à ce qu'un espace de 2mm exactement se trouve entre la pièce et l'outil de support. En réalisant la simulation de ce serrage, on obtient les résultats de contrainte (contraintes équivalentes au sens de Von Mises) et déformations plastiques équivalentes des pièces percées et non percées. Ces résultats sont présentés en Figure 105.

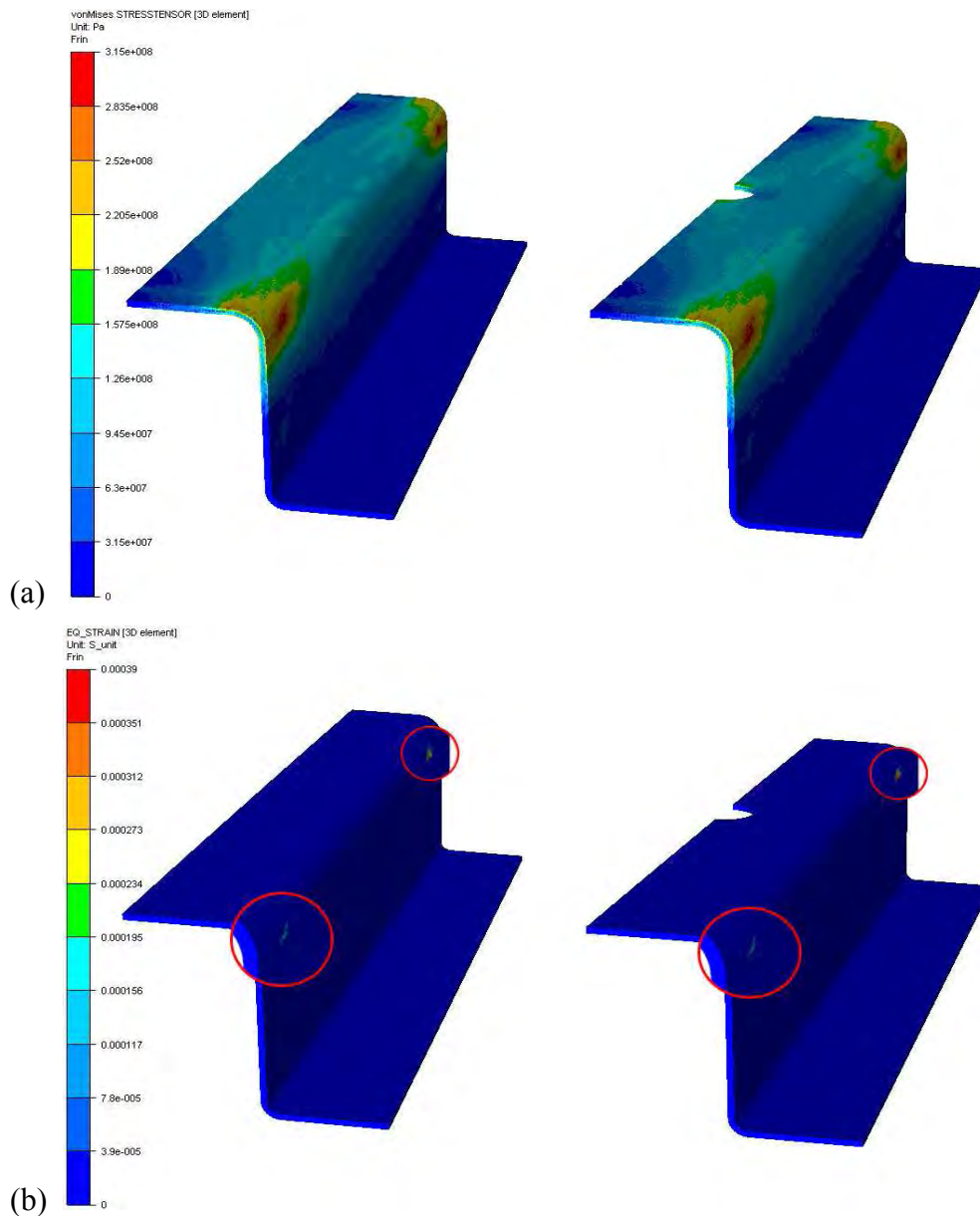
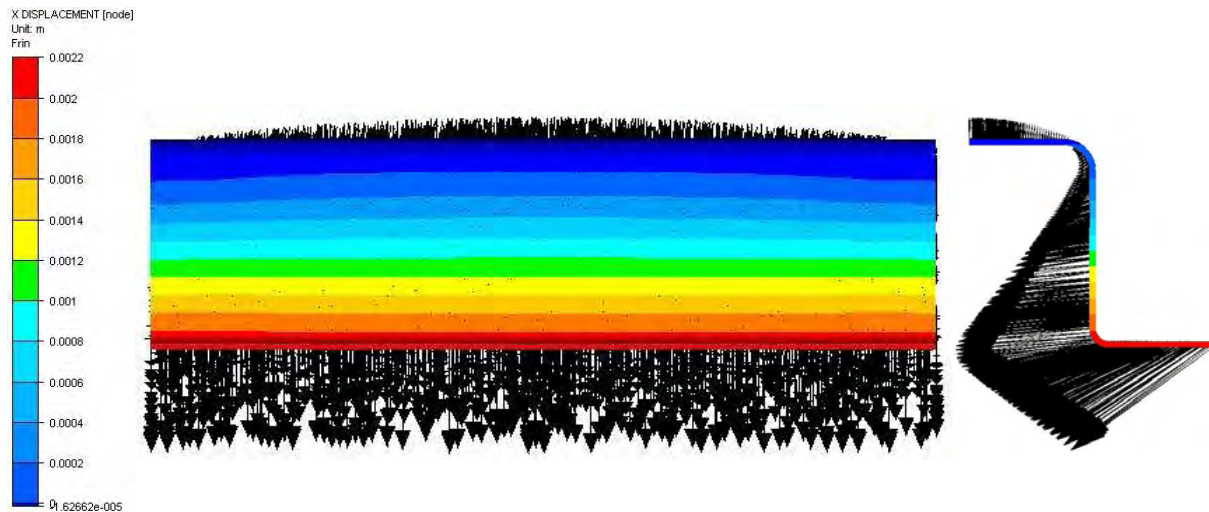


Figure 105 : Contraintes équivalentes au sens de Von Mises en Pa (a) et déformation plastique (b) après le serrage des pièces des essais ST1 et SP1

Lors des essais expérimentaux, nous avons constaté qu'après serrage puis desserrage, la pièce retrouvait ses cotes d'origine. On en avait déduit que le matériau ne plastifiait pas, ou très peu, et de manière très localisée.

C'est ce que nous montre la Figure 105. Les déformations plastiques induites dans la pièce lors de son serrage sont d'une part très faibles (maximum à env. 0,04% dans les deux configurations) et d'autre part très localisées.

De plus, ce simple essai de fermeture de la forme en U par sollicitation mécanique nous montre l'impact direct sur le galbe de la pièce. En effet, la pièce se galbe lors de son bridage avec l'outil de serrage comme le montre la Figure 106.

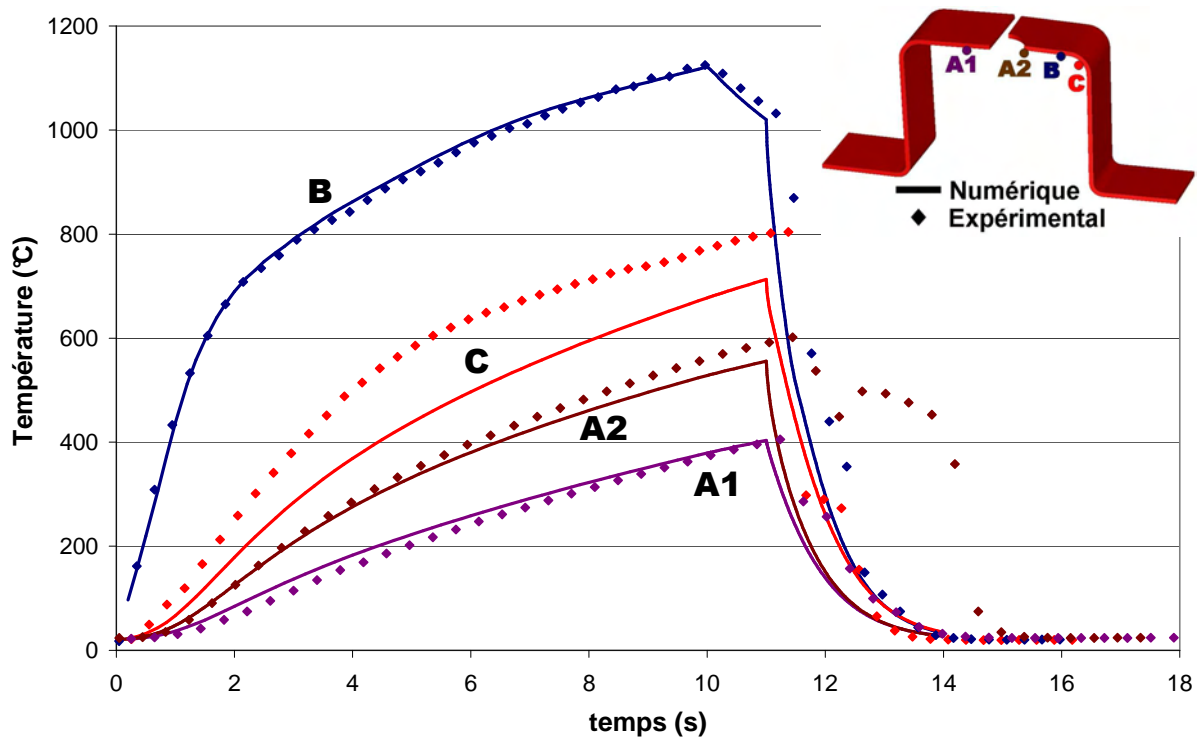


**Figure 106 : Représentation du champ de déplacements de la pièce lors du bridage : les vecteurs représentent les déplacements dans l'espace, le champ de couleur représente les déplacements dans l'axe de serrage (axe X)**

### 6.3.2. Résultats en température

Nous avons vu, dans le contexte expérimental, que les points de mesure des zones directement proches des inducteurs donnent les valeurs les plus élevées. Ensuite, nous avons constaté que les mesures dans les rayons poinçons donnent des valeurs plus faibles et que le chauffage en ces lieux se fait par diffusion thermique et non directement par effet Joule. Enfin, les mesures de températures situées au niveau du bord des trous de perçage donnent des résultats plus élevés lorsque la pièce est percée.

Comparons, dans le cas d'un traitement thermique avec un retard douche de 1 seconde, les résultats numériques et expérimentaux en ces 3 points. La Figure 107 présente les courbes d'évolution des températures. Comme nous l'avons remarqué au chapitre 2, les mesures expérimentales de la température en trempe ne sont pas exploitables car les soudures des thermocouples ne sont pas fiables sous la pression de l'eau de la douche. Néanmoins, nous pouvons faire une comparaison des résultats numériques par rapport aux résultats expérimentaux lors du chauffage et du retard douche.



**Figure 107 :** Comparaison numérique (traits pleins) et expérimentale (points) des températures à l'intérieur du rayon poinçon (C), en face de l'inducteur (B), au bord du trou percé (A2) et au même endroit pour les pièces qui ne sont pas percées (A1).

Tout d'abord, nous observons que la courbe des relevés numériques de température au point de mesure le plus proche de l'inducteur (courbe B), reproduit bien les relevés expérimentaux. De même, la présence du trou dans la pièce est très bien prise en compte dans le calcul numérique. Les courbes numériques A1 et A2 correspondent bien aux mesures expérimentales, ce qui nous conforte sur la qualité de la modélisation électromagnétique des effets de bord, ainsi que sur la modélisation de la diffusion thermique. Par contre, un écart non négligeable entre la courbe numérique et les points expérimentaux est observé dans le rayon poinçon (courbe C). Ceci peut s'expliquer par l'approximation géométrique du système expérimental et principalement de l'inducteur, comme nous l'avons déjà souligné au paragraphe 6.1. En effet, la zone du rayon poinçon est particulièrement sensible à cette approximation car elle se trouve à l'endroit où interagissent les champs électromagnétiques de deux boucles de l'inducteur, comme le montre la Figure 108. Cette figure représente la valeur normale à une section au centre de la pièce du potentiel magnétique. Rappelons que le vecteur  $\vec{A}$  est colinéaire au champ électrique  $\vec{E}$  et, dans nos hypothèses, de valeur directement proportionnelle ( $\vec{A} = j\omega\sigma\vec{E}$ ).

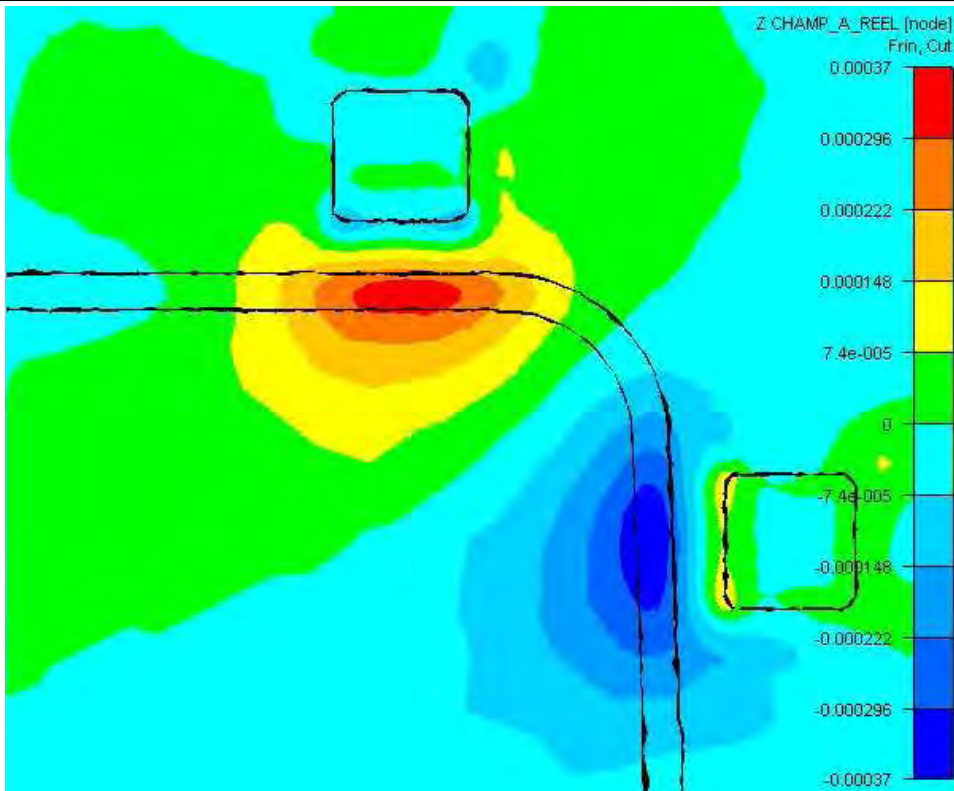


Figure 108 : Composante normale au plan de coupe du champs A. La coupe est à mi-longueur de la pièce. Les lignes représentent les frontières approximatives des frontières des domaines.

Lors de nos expériences, nous avons vu que le champ de température maximum atteint pouvait être visualisé grâce au revêtement de zinc. En effet, une ligne très nettement marquée apparaît dans la zone où la température de la pièce a atteint la température de fusion du revêtement (environ 420°C pour le zinc). La Figure 109 compare l'isovaleur numérique à 420°C après le retard douche avec la marque laissée sur les éprouvettes après traitement thermique.

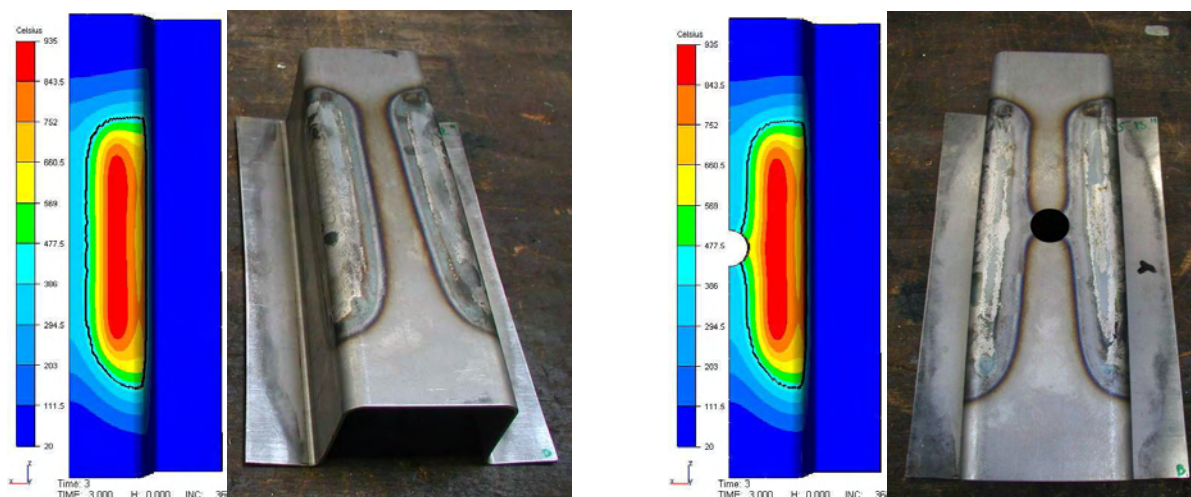


Figure 109 : Photos des pièces après traitement thermique et isovaleur de température à 420°C après la simulation du retard douche.

### 6.3.3. Etude métallurgique

Nous avons vu lors de l'étude expérimentale que la structure obtenue après traitement thermique est une bainite inférieure. Nous pouvons constater Figure 110, que dans la simulation numérique, 16% de martensite apparaît lors de la trempe. Ce résultat ne correspond pas à l'étude expérimentale et son observation par microscopie optique. Ceci est très certainement la conséquence d'un diagramme TTT déduit de lois empiriques et statistiques et non caractérisé.

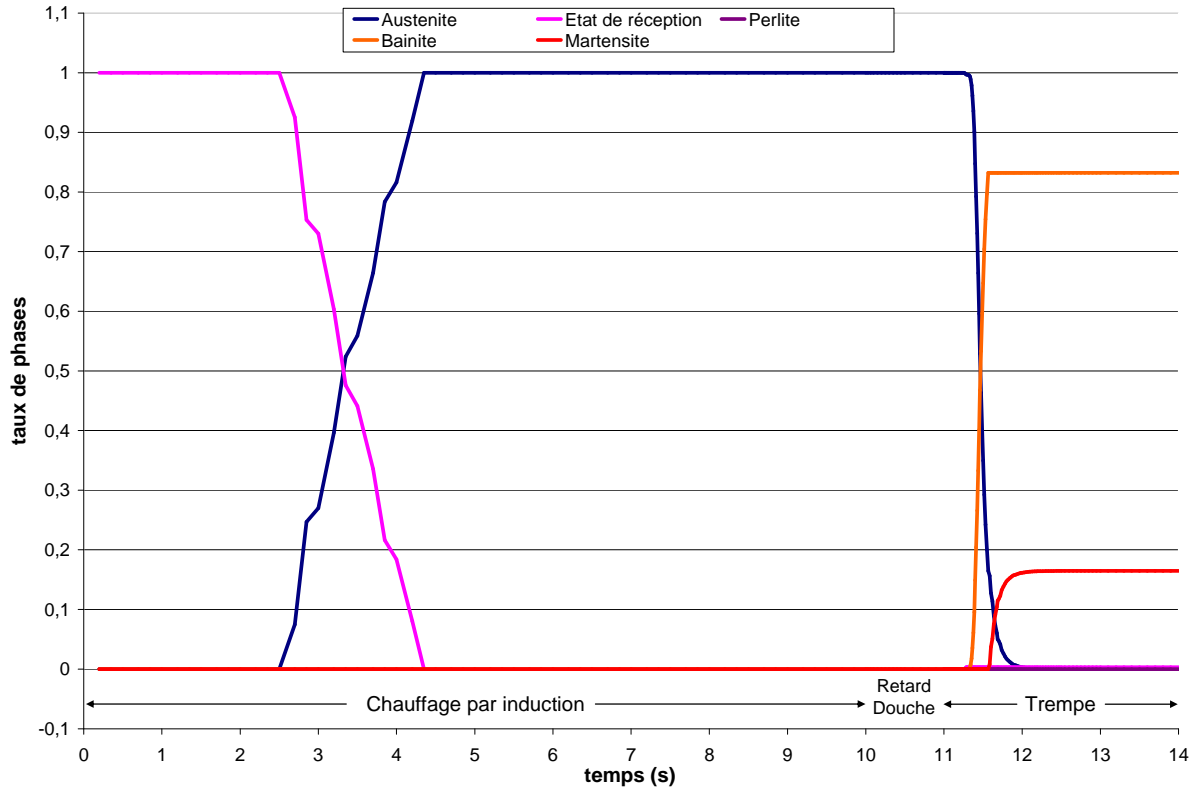


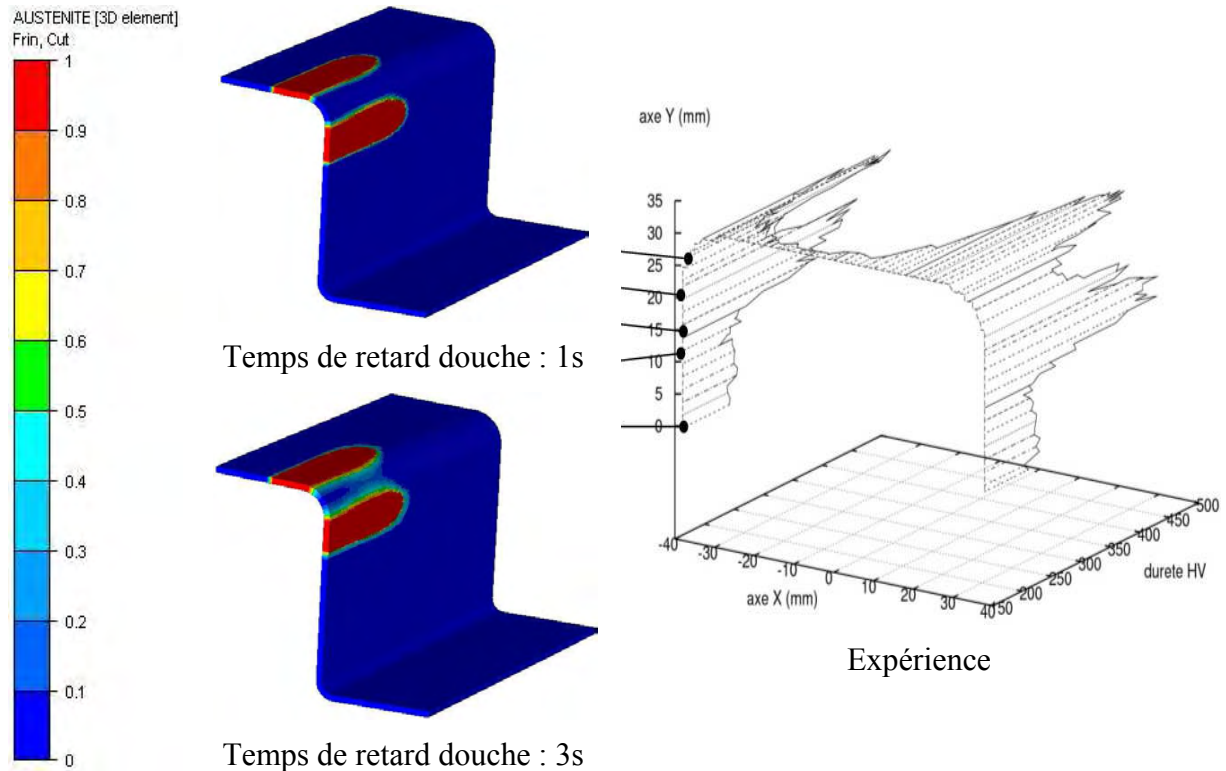
Figure 110 : Evolution structurale du matériau par rapport au temps au niveau du point B de la pièce (essai LP1).

Avec ces données, le calcul numérique ne nous permet donc pas d'avoir une bonne prédiction des phases présentes en fin de procédé. Néanmoins, nous utilisons comme paramètres thermomécaniques de la martensite, les paramètres utilisés pour la bainite. Ce choix n'est pas physique mais permet d'avoir un résultat thermomécanique qui n'est pas affecté par les erreurs métallurgiques dues au manque de données matériau.

En ce qui concerne l'étude de la répartition géométrique des phases dans la pièce, nous utiliserons le taux d'austénite en fin de retard douche comme un estimateur de la ZAT. Sous l'hypothèse que, dans l'expérience, toute l'austénite présente en fin de retard douche est ensuite transformée en bainite, nous pouvons comparer l'estimateur obtenu numériquement avec, par exemple, la dureté des éprouvettes en fin de traitement thermique. La Figure 111 rappelle les relevés de dureté déjà présentés au chapitre 2 afin de les comparer avec la ZAT à la fin du retard douche de l'essai LP1, pour des temps de retard de 1s et 3s.

Nous pouvons constater dans les résultats numériques, un taux d'austénite faible par rapport à ce qu'on aurait pu attendre dans la zone du rayon poinçon, suite à l'étude expérimentale. Rappelons que nous avons trouvé un taux de bainite d'environ 50% dans cette zone. Cela s'explique directement par les observations faites au paragraphe 6.3.2 sur le fait que la

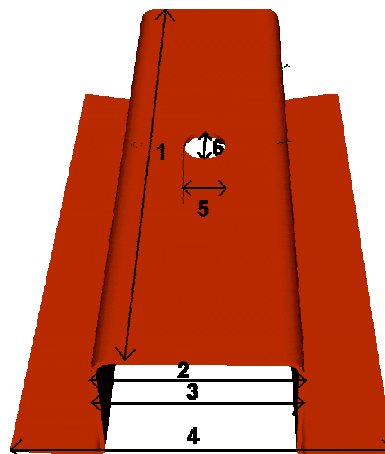
température est sous estimée au point C (dans le rayon poinçon) et au paragraphe 6.1 sur les écarts géométriques entre le modèle numérique et le dispositif expérimental.



**Figure 111 : Comparaison numérique et expérience des ZAT : champ de taux d'austénite pour les résultats numériques et dureté HV pour les observations expérimentales.**

### 6.3.4. Prédiction de la géométrie finale

Nous rappelons Figure 112 la numérotation des cotes que nous avons mesurées lors de nos expériences. Pour les résultats numériques, nous relèverons la valeur de chacune de ces cotes en fonction du temps. Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons uniquement aux valeurs de ces cotes à la fin des simulations de retour élastique, et nous les comparons aux mesures expérimentales. L'étude de l'évolution dans le temps de chaque cote en fonction des paramètres du procédé fera l'objet d'un paragraphe ultérieur.



**Figure 112 : Rappel des 6 cotes mesurées sur les éprouvettes semi-industrielles**

### 6.3 Comparaison des résultats numériques à l'expérience

Le Tableau 20 présente les écarts en mm entre les valeurs avant et après traitement thermique des cotes 1 à 6, pour les mesures expérimentales comme pour les relevés numériques.

Intéressons nous tout d'abord à la cote 1 (longueur des pièces). Nous constatons que les résultats numériques varient peu en fonction des configurations d'essai et que la tendance est à la diminution de longueur, tout comme nous l'avons vu pour les mesures expérimentales. Néanmoins, le rétrécissement de la pièce est beaucoup plus prononcé que dans l'expérience. Ceci peut être dû à la valeur du coefficient de dilatation thermique utilisé dans le calcul numérique pour la bainite.

Exp	1	2	3	4	5	6	Num	1	2	3	4	5	6
Essai LP1	-0.1	0.0	-0.1	-0.5	---	---	Essai LP1	-0.6	0.0	-0.1	0.0	0.1	0.1
Essai LP3	-0.1	-0.1	-0.3	-0.9	---	---	Essai LP3	-0.6	0.0	-0.2	0.0	0.1	-0.1
Essai LT1	0.0	0.0	-0.2	-0.6	0.1	0.0	Essai LT1	-0.7	0.0	-0.1	0.0	0.1	-0.5
Essai LT3	0.2	0.0	-0.3	-0.8	0.0	0.0	Essai LT3	-0.7	0.1	-0.1	0.0	0.1	-0.5
Essai ST1	-0.1	-0.3	-1.8	-4.2	0.1	-0.1	Essai ST1	-0.7	-0.3	-1.6	-3.6	0.1	-0.5
Essai SP1	-0.1	-0.3	-1.7	-4.0	---	---	Essai SP1	-0.6	-0.4	-1.6	-3.5	0.1	-0.1

**Tableau 20 : Ecart en mm des cotes mesurées avant TTH et après TTH. Moyenne sur les 3 éprouvettes de chaque essai et résultats numériques**

Observons maintenant la cote 2 qui est la largeur de la pièce mesurée en sortie de rayon poinçon. Nous observons, comme dans l'expérience, que cette cote varie très peu lorsque la pièce n'est pas bridée et qu'elle diminue d'environ 0.3mm lorsqu'elle la pièce est bridée pendant le traitement thermique.

La cote 3 donne également des résultats numériques similaires à l'expérience, bien que nous n'observons pas de dépendance au temps de retard douche (LP1 vs LP3 ou LT1 vs LT3). Nous n'observons pas de dépendance sensible à la présence du trou (LP1 vs LT1 ou LP3 vs LT3) dans les résultats numériques, comme dans les résultats expérimentaux. Par contre, la sensibilité de la cote 3 à la présence du bridage est très nettement marquée, que ce soit dans les résultats numériques ou expérimentaux.

De la même manière, la cote 4 est très sensible à la présence du bridage. L'écart de sa valeur entre avant et après le traitement thermique est, dans l'ensemble, plus faible pour les résultats numérique que pour les observations expérimentales. Nous ne pouvons observer ni de sensibilité au temps de retard douche, ni de sensibilité à la présence du trou.

Les écarts aux cotes 5 et 6 nous donnent une quantification de l'ovalisation du trou dans les essais LT1, LT3 et ST1. Nous constatons une différence notable entre le résultat numérique et l'observation expérimentale sur cette ovalisation. Cette différence est directement liée à celle constatée à la cote 1.

En conclusion, la cote 1 montre les écarts significatifs d'un point de vue quantitatif. Il est fort probable que les approximations que nous avons faites pour les données du matériau en soient

## **SIMULATION NUMERIQUE DU PROCEDE SEMI-INDUSTRIEL**

---

la cause, notamment la valeur de dilatation thermique de la bainite. En effet, n'ayant pas connaissance de cette valeur, nous l'avons considérée égale à celle de l'état de réception.

Cet écart, principalement visible sur la cote 1 (sens principal de dilatation de la pièce), peut avoir un impact sur le mode de distorsion général de la pièce. Ceci nous amène à penser que la non-sensibilité au temps de retard douche ou à la présence du trou sur l'ensemble des cotes peut avoir la même origine que la différence quantitative entre les résultats numériques et expérimentaux à la cote 1.

Néanmoins, le calcul numérique nous donne une très bonne prédiction de l'effet du bridage sur les distorsions de la pièce. En effet, ce paramètre est beaucoup plus influent sur les résultats et son influence ne paraît pas sensible aux approximations précédemment citées. La corrélation entre les résultats numériques et expérimentaux est très bonne sur ce point.



## 6.4. ETUDE DES DISTORSIONS MECANIKES AU COURS DU PROCEDE

### 6.4.1. Elongation des pièces

La Figure 113 donne l'évolution de la cote 1 pour les différentes configurations d'essais.

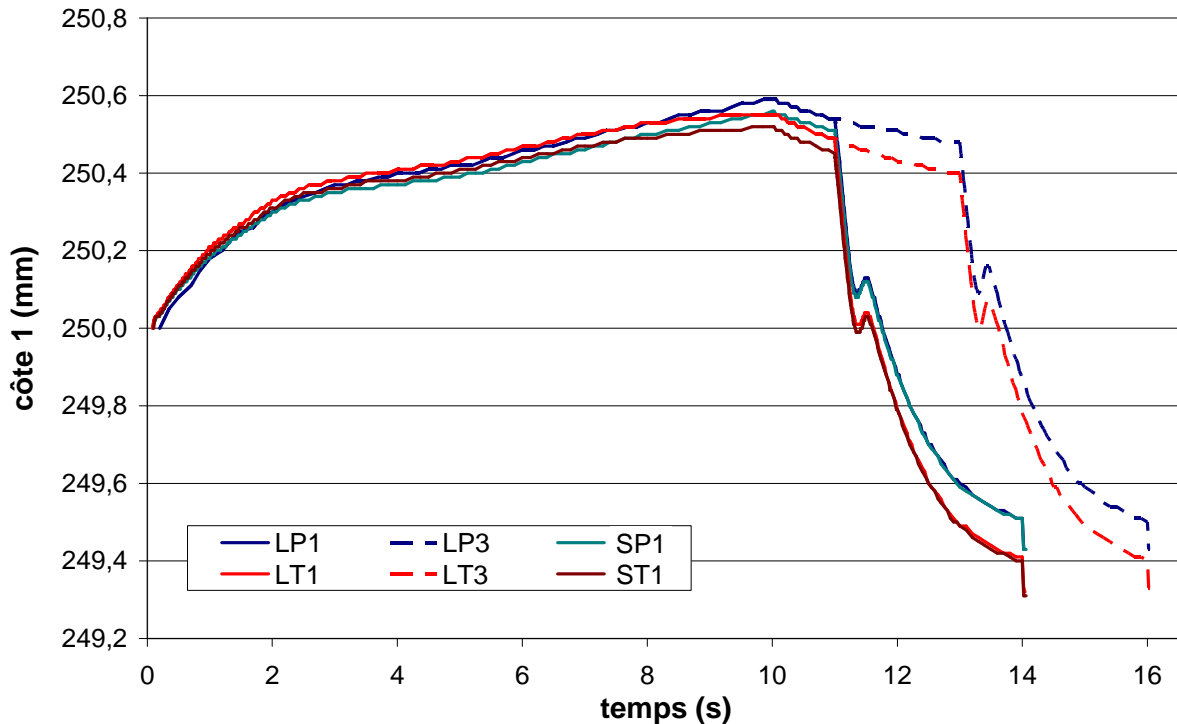


Figure 113 : Valeur de la cote 1 en fonction du temps dans les différentes conditions d'essai.

Tout d'abord, on peut distinguer différents phénomènes comme l'austénitisation qui débute à 2.5 secondes de chauffage dans les zones les plus chaudes, ou la trempe qui commence après environ 0,3 seconde de douche.

Ensuite, nous pouvons voir que les pièces bridées s'allongent légèrement moins au chauffage que les pièces qui ne le sont pas. Cet écart est ensuite compensé lors de la trempe pour que, finalement, l'effet du bridage ne soit plus visible après le traitement thermique. La différence d'élongation au chauffage entre les pièces bridées et non bridées paraît être une conséquence du galbe créé par la fermeture du « U » lors du bridage (voir Figure 106). La pièce étant galbée, l'élongation ne se fait plus uniquement sur l'axe de mesure de la cote.

Enfin, la présence d'un trou au centre de la pièce a pour conséquence un allongement plus rapide au début du chauffage et plus lent à la fin. En fin de chauffage la longueur des pièces percée est inférieure aux autres, et cette différence reste jusqu'en fin de traitement thermique. La cause de l'allongement plus rapide en début de chauffage est due à une plus faible résistance de la structure percée. Ensuite, la répartition de température étant différente pour les pièces percées (Figure 109), l'augmentation du galbe est facilitée. On a donc en fin de chauffage, des pièces percées avec un galbe plus important que les pièces non percées, et avec une élongation qui ne se fait plus uniquement sur l'axe de mesure de la cote (Figure 114).

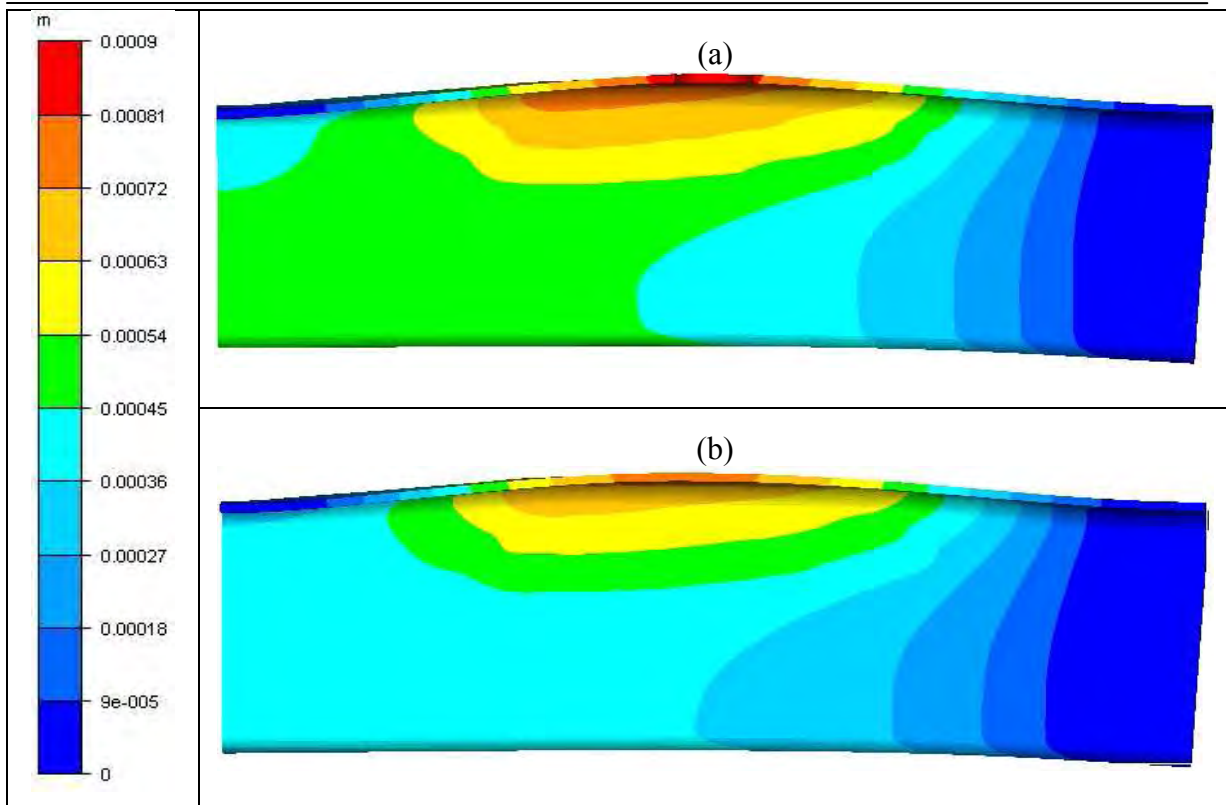


Figure 114 : Visualisation des déplacements (x10) de matière dans la pièce en fin de chauffage et champ de déformation sur l'axe Y pour les pièces percée (a) et pleine (b)

### 6.4.2. Ouverture de la forme en « U »

Les cotes 2, 3 et 4 représentent la largeur de la forme en « U » à différents niveaux. La Figure 115 montre l'évolution des ces 3 cotes dans le temps pour chacune des configurations d'essai.

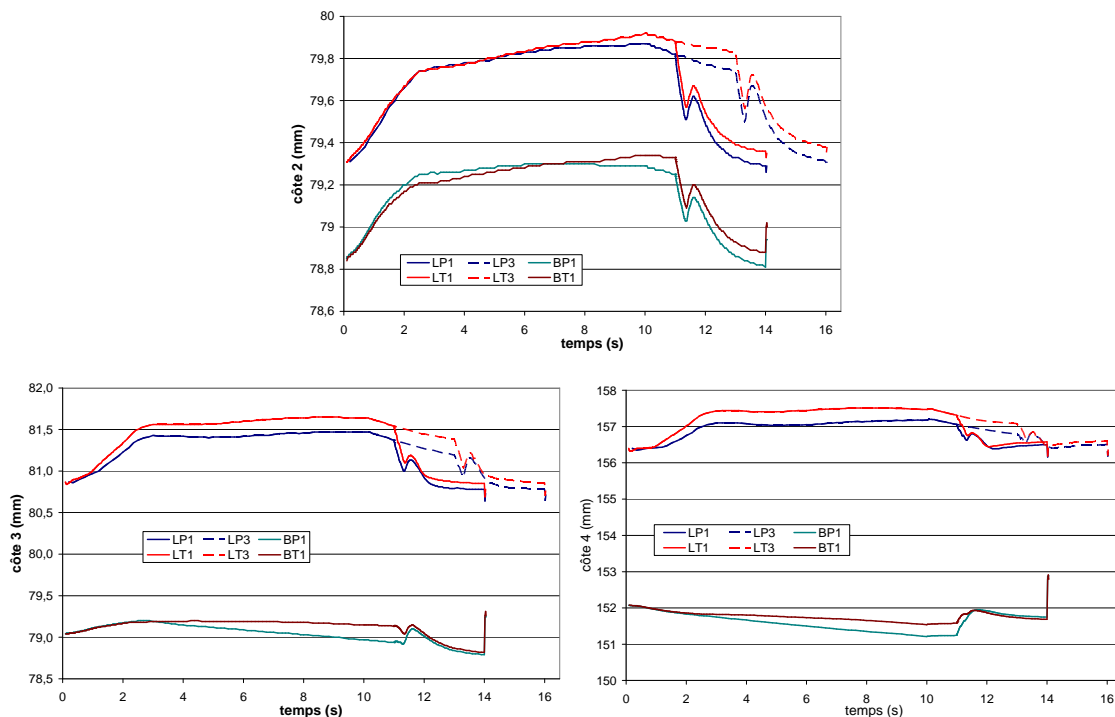


Figure 115 : Valeur des cotes 2, 3 et 4 en fonction du temps dans les différentes conditions d'essai

Dans le cas des configurations où la pièce est bridée, la valeur de départ des cotes est plus petite. De plus, l'amplitude de l'ouverture ou fermeture de la forme en « U » est plus faible. En fin de trempe, la pièce s'est très légèrement refermée par rapport à sa position bridée, et, une fois relâchée, elle ne reprend plus sa forme d'origine. Une partie des déformations élastiques du bridage a été plastifiée pendant le traitement thermique.

Les pièces percées d'un trou ont tendance à plus s'ouvrir lors du chauffage. La trempe ayant tendance à se faire de façon similaire que la pièce soit percée ou non, on retrouve le décalage de la fin du chauffage à la fin de la trempe. Le fait que les pièces percées aient d'avantage tendance à s'ouvrir lors du chauffage, est encore une fois certainement dû au rapport entre forme en « U » et galbe. Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.1.3 et à la Figure 31, l'augmentation du galbe d'une pièce emboutie de ce type peut entraîner aussi bien à l'ouverture qu'à la fermeture de la forme en « U ».

### 6.4.3. Etats de contraintes et déformations

Nous choisissons trois éléments du maillage aux environs des points A, B et C de la Figure 107, et nous regardons leurs états de contrainte et de déformation en fonction du temps. La Figure 116 présente les courbes d'évolution des contraintes équivalentes de Von Mises et des déformations plastiques équivalentes lors du traitement thermique aux points A, B et C des essais à bridage libre et temps de retard douche de 1s. Tout d'abord, on constate que les sollicitations mécaniques en ces points alternent beaucoup entre traction et compression. Notre modèle aujourd'hui prend en compte un écrouissage isotrope mais il serait bon de pouvoir essayer de prendre en compte un écrouissage cinématique (ce qui implique une caractérisation supplémentaire) ou un écrouissage compris entre ces deux modèles.

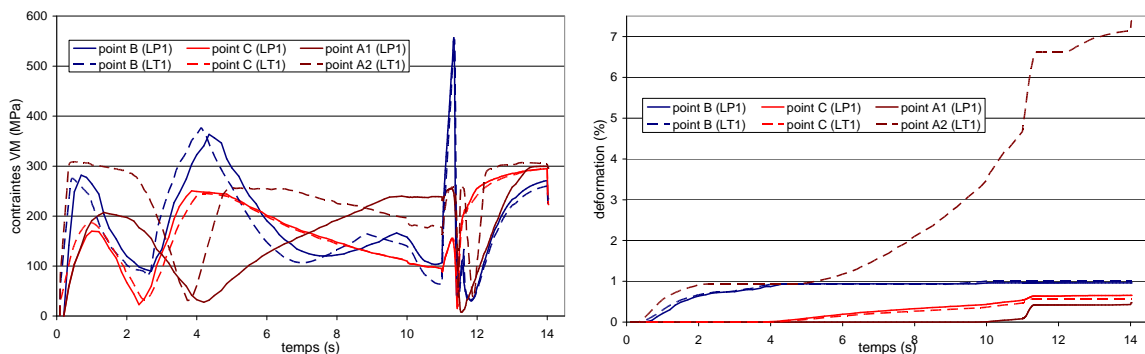


Figure 116 : Courbes d'évolution des contraintes équivalentes de Von Mises et de déformation plastique équivalente aux points A, B et C des essais LP1 et LT1.

Ensuite, nous pouvons constater que l'état de contrainte et la déformation ne diffèrent que légèrement aux points B et C entre les pièces percées et les pièces pleines. Par contre, les résultats sont très différents au niveau du point selon qu'il soit en bordure d'un trou (pièces percées de l'essai LT1) ou dans la matière (pièces pleines de l'essai LP1). Du point de vue des contraintes, l'évolution dans le temps est différente mais reste dans le même ordre de grandeur. Par contre, d'un point de vue des déformations, nous atteignons des valeurs beaucoup plus élevées (7% au lieu de 0,5%) si le point A est au bord du trou. Cela s'explique par le fait que la température est plus élevée, donc que la matière est plus ductile et s'observe d'un point de vue macroscopique d'une part par les valeurs de la cote 6, et d'autre part par la forme du galbe de la pièce (Figure 114). Nous pouvons conclure de cette observation que la thermique de la pièce joue un rôle important dans les distorsions par l'adoucissement du matériau qu'elle entraîne. Qu'en est il de l'importance des contraintes induites par les fort gradients thermiques ? Pour répondre à cette question, nous allons comparer les déformations

plastiques totales dans le matériau avec les déformations plastiques induites par plasticité de transformation (Figure 117).

D'un point de vue qualitatif, nous constatons que les zones déformées ne sont pas exactement les mêmes puisque la plasticité de transformation ne peut apparaître que dans la ZAT, alors que la déformation totale est également importante dans le rayon poinçon que dans la ZAT. D'un point de vue quantitatif, nous nous apercevons que la plasticité de transformation joue un rôle très important dans les déformations de la pièce.

Nous ne présentons pas ici les champs de déformation par plasticité de transformation des pièces bridées ou percées car les résultats sont très peu sensibles à ces paramètres. En effet, nous avons vu à la Figure 116 que les contraintes équivalentes dans la ZAT (point B) ne sont que très peu influencées par la présence d'un trou, et principalement lors des transformations de phase en trempe (pic à 11,35 secondes). De la même manière, nous voyons Figure 105a que les contraintes induites par le bridage sont le plus élevées en dehors de la ZAT. De plus, ces contraintes disparaissent lors du changement de phase au chauffage car nous avons considéré un matériau sans aucune mémoire mécanique de la phase mère à la phase fille. Le bridage ne peut donc pas avoir un effet prépondérant sur la valeur de la plasticité de transformation.

Nous déduisons de ces observations que les contraintes présentes lors des transformations métallurgiques au refroidissement, responsables d'une valeur de déformation par plasticité de transformation élevée, même faible, sont les contraintes d'origine thermique.

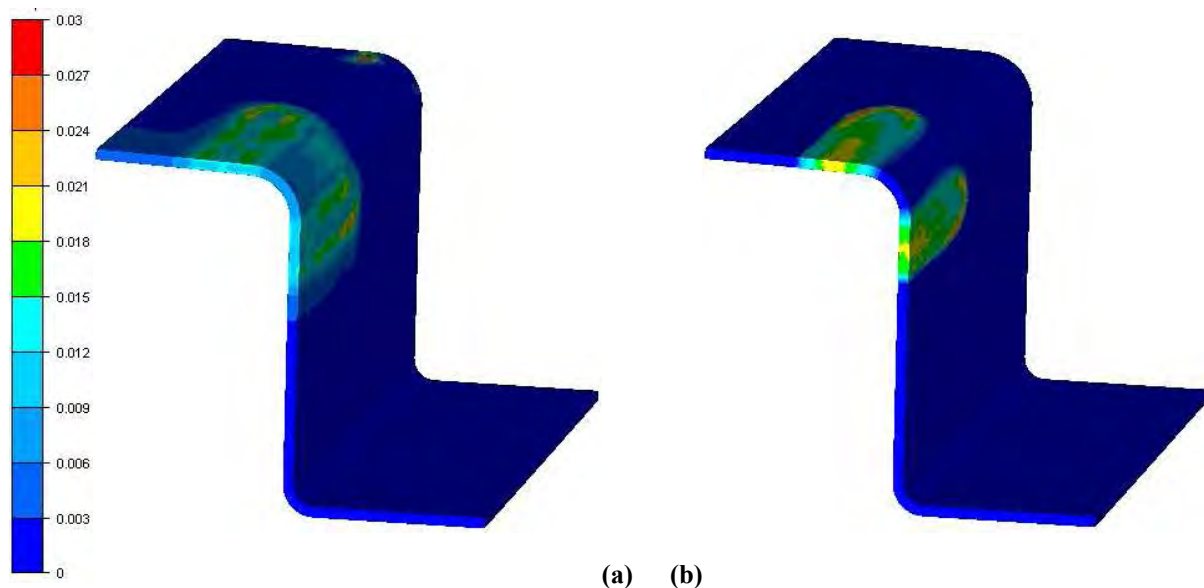


Figure 117 : Champ de déformation plastique équivalente (en m/m) (a) et de déformation par plasticité de transformation (b) dans une pièce de l'essai LPI, après retour élastique

## 6.5. CONCLUSION SUR LES RESULTATS NUMERIQUES

Comme nous l'avons évoqué à la fin du chapitre précédent, nous avons fait de nombreuses hypothèses sur le matériau, principalement du point de vue de la métallurgie et des couplages. Malgré une très bonne corrélation des résultats thermiques entre numérique et expérience, les approches que nous avons utilisées pour estimer un diagramme TTT n'apparaissent pas tout à fait satisfaisantes puisque la structure métallurgique obtenue numériquement ne correspond pas exactement à la structure observée lors de nos essais.

Néanmoins, nous avons essayé de limiter l'impact de cette approximation sur les distorsions mécaniques en donnant à la martensite les mêmes propriétés matériau qu'à la bainite. D'un point de vue qualitatif, nous retrouvons les grandes influences observées dans l'expérience. Le traitement thermique de la pièce a tendance à fermer la forme en « U » et à réduire la longueur de la pièce. Nous retrouvons également la contribution du paramètre le plus influent du procédé sur les distorsions : le bridage. En effet, les résultats numériques corréleront très bien avec l'expérience sur la fermeture de la forme en « U » lors du traitement thermique des pièces bridées. En revanche, les contributions de la présence d'un trou et du temps de retard douche sur les distorsions sont beaucoup plus fines et n'apparaissent pas dans les résultats numériques. Il est également possible que ces contributions ne puissent apparaître dans nos résultats faute de connaissance des conditions initiales de notre pièce. Par exemple, un temps de retard douche plus long a pour principal effet d'augmenter la température maximum atteinte dans le rayon poinçon, siège d'une grande hétérogénéité des contraintes résiduelles d'emboutissage. Ainsi, la relaxation des contraintes d'emboutissage lors du chauffage de la pièce peut être un facteur clef des distorsions obtenues en fin de procédé. Une étude qui a été menée sur des agrafes traitées thermiquement [SPATARO-2008], montre que pour la simulation numérique du traitement thermique des tôles minces pliées, la prise en compte des contraintes d'emboutissage lors du chauffage et de l'austénitisation est indispensable à une bonne estimation des distorsions.

Enfin, la simulation numérique du procédé nous a apporté plus d'informations sur l'évolution de la géométrie de la pièce dans le temps et les mécanismes qui sont à l'origine des distorsions. Par exemple, nous savons que les influences des paramètres du procédé observées expérimentalement et numériquement apparaissent dès le chauffage. Le chauffage paraît être une phase clef dans l'apparition des distorsion du traitement thermique. Aussi, nous avons vu que dans le cas d'une pièce qui n'est pas galbée au départ, la relation galbe / fermeture du « U » est bien présente. Nous avons pu visualiser le galbe qui apparaît dans la pièce et en déduire son importance sur l'évolution de la forme en « U » et sur la contribution de la présence du trou dans les distorsions. Nous avons également vu que la plasticité de transformation est à l'origine d'une grande part des déformations, mais étant localisée uniquement dans la ZAT et n'atteignant pas le rayon poinçon, son influence directe sur les distorsions reste à évaluer. Enfin, on observe que le bridage serré des pièces n'induit pas de manière significative une augmentation de la plasticité de transformation, mais provoque une distorsion qui se fige lors du procédé.

Cette première approche numérique d'un procédé de traitement thermique localisé sur une tôle emboutie n'est pas totalement satisfaisante pour ce qui est des résultats quantitatifs mais permet déjà de bien comprendre ce qu'il se passe au niveau de la géométrie de la pièce pendant le chauffage, le retard douche et la trempe, de prédire les effets d'un bridage sur les distorsions et de comprendre les mécanismes à l'origine des distorsions.

## BIBLIOGRAPHIE

[SPATARO-2008] - Spataro R., Bay F., Chastel Y. *et al*, "Numerical modelling of clip manufacturing: focus on heat treatment", *11th ESAFORM Conference on Material Forming*, 2008.

---

# CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

## CONCLUSIONS

Nous avons commencé l'étude par une approche expérimentale sur un cas industriel. Les campagnes d'essais réalisées nous ont permis de mieux comprendre le procédé et de mieux cerner les problèmes qu'il pose. Nous avons tout d'abord pu souligner l'extrême sensibilité de la géométrie finale de la pièce aux paramètres du procédé comme le temps de chauffage, la puissance fournie par le générateur, ou les conditions de bridage.

Ensuite, une étude approfondie de nombreux relevés géométriques répartis sur toute la pièce a permis de dégager des tendances sur la façon dont se déforme le renfort de pied central. Nous avons alors montré un lien étroit entre trois modes de déformation : un changement de galbe, une rotation de la pièce autour de son axe et une déformation de la forme en « U ». Nous en avons alors conclu que la grande sensibilité géométrique aux paramètres du procédé était due au caractère très tridimensionnel de la géométrie et au lien étroit entre les trois modes de déformation.

Nous avons alors choisi de concentrer notre étude sur une géométrie plus simple afin de mieux cibler les paramètres importants du procédé, et mieux comprendre les mécanismes de distorsion lors du traitement thermique. Notre choix s'est porté sur une pièce emboutie en une simple forme de « U » car nous avons émis l'hypothèse que cette forme est à l'origine de toutes les distorsions. Cette géométrie pourrait être considérée en deux dimensions, mais le fait que le traitement thermique soit localisé sur une partie de la pièce rend le procédé complètement tridimensionnel. Un support de maintien de la pièce, un inducteur et un système de trempe par douche ont été spécifiquement conçus pour ces essais.

Suite aux expériences sur ce dispositif, nous avons pu conclure qu'un temps de retard douche plus long entraîne de plus grandes distorsions, que la présence d'un trou modifie le champ de température lors du chauffage mais qu'il n'a pas un impact significatif sur les distorsions, et qu'un bridage modifie grandement les distorsions lors du traitement thermique, même s'il n'impose que de faibles contraintes (domaine élastique).

Finalement, des questions ont été soulevées comme la part des déformations d'origine métallurgique devant les déformations d'origine thermique, et la part des déformations au chauffage devant les déformations en trempe. Les outils numériques pour répondre à ces questions se sont alors avérés indispensables.

Un outil de simulation numérique par éléments finis a alors été développé. Ce travail comprend la réalisation d'un modèle de résolution des problèmes électromagnétiques utilisant des éléments finis originaux, son implémentation et son couplage avec le logiciel Forge. Les couplages avec la thermique ont ensuite été réalisés, et une étude complète du couplage avec la mécanique et la métallurgie a été menée. Les évolutions nécessaires au logiciel Forge pour la prise en compte du chauffage par induction ont été étudiées et implémentées. Au final, ce logiciel de simulation numérique comprend les modèles et couplages multiphysiques nécessaires au calcul couplé des procédés de traitement thermique par induction.

---

Une fois l'outil numérique en main, il a été nécessaire de déterminer les paramètres du procédé et du matériau utiles à la simulation du procédé semi-industriel. Certains paramètres ont fait l'objet d'essais de caractérisation au laboratoire, d'autres ont été sous-traités, et certains ont dû être estimés par les relations ou des valeurs empiriques disponibles dans la littérature. Le caractère très peu trempable du matériau nous a amenés à faire de nombreuses hypothèses plus ou moins fortes sur les paramètres métallurgiques du matériau ou sur les paramètres de couplage. Néanmoins, nous avons détaillé une mise en données permettant une étude préliminaire du procédé.

Les résultats de cette étude numérique préliminaire apportent diverses informations sur les choix et hypothèses qui ont été exposés dans ce rapport. Par exemple, nous constatons que l'estimation du diagramme TTT par le modèle de Kirkaldy n'est pas tout à fait satisfaisante et que le fait que la géométrie du système expérimental soit mal maîtrisée (du fait de la faible résistance mécanique de l'inducteur) entraîne des différences de résultats entre le numérique et l'expérience. Néanmoins, avec de fortes hypothèses appliquées à la martensite, une bonne corrélation apparaît pour les résultats en température et les distorsions mécaniques. Les résultats de sensibilité des distorsions aux paramètres du procédé sont variables. D'un côté, la sensibilité numérique au paramètre le plus influent qui est le bridage de la pièce, donne de très bons résultats qualitatifs et quantitatifs. D'un autre côté, on note peu de sensibilité (expérimentalement et numériquement) à un paramètre plus fin comme le temps de retard douche. La sensibilité à la présence d'un trou n'apporte que peu d'informations puisqu'elle n'apparaît pas de manière significative ni dans les résultats numériques, ni dans l'expérience.

Les résultats numériques nous apportent également des informations sur le procédé, les mécanismes de distorsion au cours du temps et les effets respectifs des différents couplages. En effet, nous avons observé une forte proportion de déformation par plasticité de transformation par rapport aux déformations créées par les gradients thermiques. Nous avons également observé que la répartition dans la pièce n'est pas la même pour ces deux modes de déformation et que la zone qui paraît la plus sensible, le rayon poinçon, n'est pas concerné par la plasticité de transformation. Or, la plasticité de transformation apparaît uniquement si un champ de contrainte est appliqué au matériau, et elle est peu sensible au bridage de la pièce. Le champ de contrainte à l'origine de la plasticité de transformation est alors celui créé au chauffage et lors de l'austénitisation. Nous en déduisons donc que le chauffage est un instant clef dans la formation des distorsions au cours du traitement thermique. Cette hypothèse a également été formulée suite aux observations d'évolutions des cotes mesurées par le modèle numérique, au cours du procédé.

En conclusion, à la fin de cette étude, nous avons acquis par la voix expérimentale, une expertise sur le procédé industriel de PSA Peugeot Citroën, et sur les procédés de traitements thermiques par induction localisée de manière générale. Nous avons aussi développé une meilleure connaissance du matériau HR45 par une caractérisation ou une estimation de son comportement thermique, métallurgique et mécanique. De plus, nous avons créé un module de simulation numérique par éléments finis des problèmes électromagnétiques, et nous avons fait évoluer un logiciel de simulation numérique commercial pour la modélisation d'un chauffage local et les couplages avec la simulation électromagnétique. Ces développements numériques ont permis une meilleure compréhension du procédé semi-industriel et de la physique qui régit les distorsions. Ils ont également ouvert des portes vers de nouveaux tests numériques qui pourraient permettre de mieux comprendre encore le procédé. Et enfin, l'association des observations expérimentales et des résultats numériques nous permet de



---

mieux déterminer quelles seraient les règles de conception de base qui permettraient de minimiser les distorsions au cours du traitement thermique.

## PERSPECTIVES

Le modèle numérique développé donnant des résultats qualitatifs satisfaisants, il serait intéressant dès à présent de pouvoir utiliser cet outil afin d'aller plus loin dans la compréhension du procédé.

A la vue des résultats obtenus, certains tests de sensibilité semblent indispensables sur les paramètres du matériau et du procédé. Tout d'abord, la sensibilité au paramètre de plasticité de transformation doit être déterminée afin de savoir si l'erreur que nous faisons sur sa valeur (qu'on ne peut pas caractériser dans le cas de notre matériau) est du premier ordre. Ensuite, il serait important de tester la sensibilité des résultats numériques à la valeur du coefficient de dilatation thermique de la bainite, et de voir si ce coefficient est à l'origine des écarts d'évolution de la cote 1 (longueur de la pièce) entre nos résultats numériques et expérimentaux. Un autre paramètre peut avoir une influence sur cet écart. Il s'agit des conditions de frottement entre la pièce et les outils. Nous avons ici choisi une loi de glissement (loi de Tresca à coefficient de frottement nul). Des simulations pour lesquelles on considérerait des coefficients de frottement à valeur non nulle, seraient nécessaire afin d'observer l'influence de cette valeur sur la géométrie globale des pièces. Enfin, nous avons vu qu'un test de simulation du procédé avec une simulation de l'emboutissage au préalable est nécessaire. Ce test nous permettrait de savoir si les contraintes résiduelles d'emboutissage sont prépondérantes par rapport aux contraintes générées pendant le traitement thermique, ou si elles sont de second ordre.

D'autres tests peuvent être envisagés pour mieux répondre aux attentes industrielles sur le procédé. Par exemple, on peut imaginer des tests sur des formes d'embouti différentes et de plus en plus proches de la forme générale d'un renfort de pied central. Il s'agirait dans un premier temps d'une forme simple de « U » mais cette fois-ci emboutie avec un galbe. Dans un second temps, on peut imaginer une forme où le « U » serait élargie de manière asymétrique, pour observer une éventuelle rotation autour de l'axe de la pièce. Et dans un troisième temps, une forme très proche de la forme du haut d'un renfort de pied central. Un autre exemple peut être intéressant. Il s'agit de tester différentes formes de bridage. Dans notre étude, nous avons bridé le « U » par serrage des flans. Comme nous avons vu un lien entre forme de « U » et galbe, on pourrait imaginer tester un bridage empêchant le galbe qui apparaît au chauffage (un maintien par le trou par exemple). On peut également imaginer un système de galbe évoluant dans le temps. Par exemple, relâcher une pièce serrée pendant le retard douche ou, à l'inverse, brider une pièce libre pendant le retard douche. Une telle évolution du système de bridage permettrait de jouer sur le fait que le sens des déplacements au chauffage et à la trempe sont inversés.

Une fois les enseignements tirés des tests de sensibilité aux paramètres matériau, à la géométrie et au bridage, il serait intéressant de mettre au point un autre cas expérimental pour lequel le matériau de la pièce serait un matériau connu comme, par exemple, un C50, dont les paramètres thermophysiques, rhéologiques et métallurgiques ont été caractérisés par le LSG2M de Nancy et intégrés dans la base de données du logiciel Forge. Nous pourrions alors dans un second temps, valider le code de calcul et les couplages multi-physiques implémentés par une étude qualitative des résultats. De plus, cette nouvelle étude nous permettrait d'étudier des sensibilités plus fines aux paramètres du procédé. A ce stade, il serait intéressant de regarder de plus près les paramètres qui semblaient jusque-là de second ordre, comme la prise

---

en compte d'un écrouissage cinématique afin de mieux modéliser le comportement cyclique du matériau lors du traitement thermique.

Enfin, pour répondre aux attentes finales du projet, des développements numériques supplémentaires seraient nécessaires. Tout d'abord, une parallélisation du code est nécessaire (en terme de mémoire et de temps CPU) à la simulation d'un cas industriel sur des tôles minces de grande taille comme un renfort de pied central. Ensuite, il est indispensable de pouvoir prédire les déformations de la pièce lors du procédé industriel, quel que soit l'acier utilisé. Or, nous avons vu que certains paramètres, notamment métallurgiques ou de couplages, peuvent parfois être difficiles à caractériser. Les essais expérimentaux sur un cas semi-industriel ayant une très bonne reproductivité, le développement d'une boucle de résolution inverse permettrait d'estimer sur un tel cas simplifié, les valeurs des paramètres que nous ne pouvons pas caractériser. Aussi, il serait intéressant de créer une passerelle permettant de transférer les résultats d'une pièce industrielle, à un code de calcul du comportement des pièces en crash. Nous pourrions ainsi quantifier l'amélioration du procédé sur les prestations en crash des pièces à gradients de propriétés. Enfin, l'objectif final étant de maîtriser les distorsions lors du traitement thermique, on peut imaginer le développement d'une boucle d'optimisation du bridage de la pièce (basé sur les observations expérimentales précédentes), visant à la minimisation des distorsions. Le problème que l'on risque de rencontrer sur un tel système numérique, est que les distorsions sont très sensibles au bridage, même pour des contraintes très faibles. Le modèle d'optimisation risque alors d'être peu stable et d'avoir du mal à converger vers une solution. Une autre idée serait de brider la pièce uniquement pour bloquer les mouvements de corps rigide (bridage du type de celui que nous avons appelé « libre » dans le cas semi-industriel), et d'optimiser la géométrie initiale de la pièce (géométrie après emboutissage) afin d'obtenir la géométrie désirée en fin de traitement thermique.

---

## ANNEXES

<b>Annexe 1 : Le ferromagnétisme</b>	<b>204</b>
<b>Annexe 2 : Plan du support de bridage</b>	<b>206</b>
<b>Annexe 3 : Attaque chimique en vue de l'observation microscopique</b>	<b>207</b>
<b>Annexe 4 : Approximation des régimes quasi-permanents</b>	<b>208</b>
<b>Annexe 5 : Etude du solveur et préconditionneur du système linéaire</b>	<b>210</b>
<b>Bibliographie des annexes</b>	<b>220</b>

## ANNEXE 1 : LE FERROMAGNETISME

Pour expliquer le ferromagnétisme, il faut regarder l'orientation des dipôles magnétiques atomiques. Une zone du matériau dans laquelle ces dipôles sont orientés dans la même direction est appelée *domaine magnétique* ou *domaine de Weiss*. Les interfaces entre ces zones sont nommées *parois de Bloch*. Pour un matériau polycristallin, comme un acier, les joints de grains sont des parois de Bloch. Toutefois, à l'intérieur d'un même grain, plusieurs domaines magnétiques peuvent exister, donc des parois de Bloch sont présentes (Figure 118). Si en absence de champ magnétique extérieur, la somme vectorielle des orientations magnétiques des domaines est nulle, le matériau n'est globalement affecté d'aucune magnétisation. Sinon, la présence d'une orientation magnétique du matériau en fait un aimant permanent.

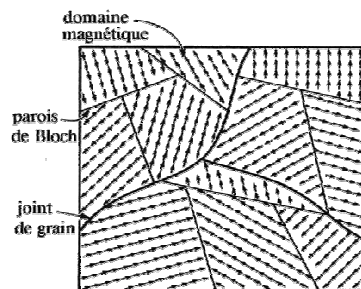


Figure 118 : Domaines de Weiss dans un matériau ferromagnétique

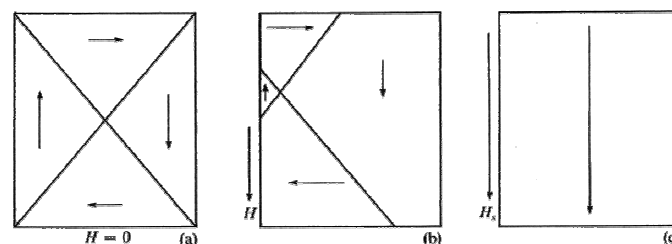


Figure 119 : Déplacement des parois de Bloch dans un matériau ferromagnétique plongé dans un champ magnétique  $H$

Afin de comprendre le mécanisme du ferromagnétisme dans le matériau, nous allons nous intéresser à un cas où l'orientation moyenne des domaines est globalement nulle en l'absence de champ magnétique extérieur (Figure 119a). Lorsqu'un champ magnétique extérieur est appliqué, les domaines magnétiques d'orientation voisine de celle de  $\vec{H}$  croissent au dépend de ceux d'orientation opposée. Les parois de Bloch se déplacent donc dans le matériau (Figure 119b). A la limite, lorsque le champ  $\vec{H}$  atteint une valeur critique  $H_s$ , le matériau n'est plus constitué que d'un seul domaine magnétique (Figure 119c), orienté dans le sens de  $\vec{H}$ . L'induction atteint alors une valeur maximale  $B_s$  appelée induction à saturation. Cette valeur est représentée Figure 120. Elle est le maximum de la boucle d'hystérésis dans la courbe d'aimantation.

Lorsque l'intensité du champ  $\vec{H}$  diminue pour s'annuler, les domaines magnétiques ont tendance à réapparaître. Toutefois, le déplacement des parois de Bloch n'étant pas instantané,

une induction non nulle  $B_R$ , appelée *induction rémanente*, persiste lorsque  $H = 0$ . Il faut en fait appliquer un champ magnétique opposé à celui de départ pour annuler l'induction. Ce champ de valeur  $H_C$  nécessaire à annuler l'induction magnétique est appelé *champ coercitif*. Si enfin, le champ extérieur continu de diminuer jusqu'à saturation puis réaugmente pour saturer de nouveau mais dans le sens opposé, nous obtenons la boucle d'hystérésis en Figure 120.

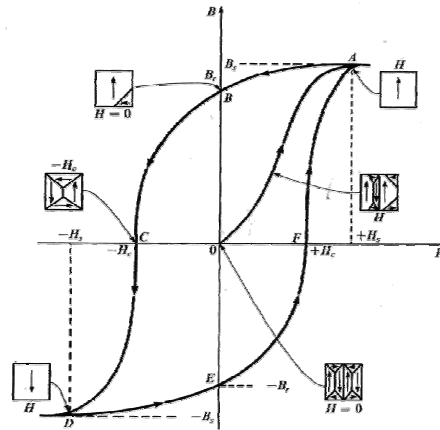


Figure 120 : Courbe d'aimantation présentant une boucle d'hystérésis pour un matériau ferromagnétique plongé dans un champ magnétique qui varie alternativement de  $+H_S$  à  $-H_S$ .

L'aire de la boucle d'hystérésis représente l'énergie dépensée, par unité de volume du matériau, pour réorienter les moments magnétiques des domaines et déplacer les parois de Bloch, au cours d'un cycle complet de variation du champ magnétique extérieur (une période pour un problème harmonique) [DORLOT-1986].

La perméabilité magnétique, relation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$ , est alors, pour un matériau ferromagnétique, fortement dépendante du champ magnétique extérieur. Elle est aussi très influencée par la température. En effet, le ferromagnétisme est dû à un mouvement d'ensemble des atomes, qui orientent leur moment magnétique selon une même direction, et une augmentation de température favorise l'agitation thermique de ces atomes. Ceci a pour effet de bouleverser progressivement l'alignement des moments magnétiques.

Lorsque la température atteint une valeur critique  $T_C$  (température de Curie), les moments magnétiques s'orientent de façon désordonnée. Par conséquent, le ferromagnétisme disparaît et le matériau devient amagnétique. La Figure 121 montre l'évolution de l'induction à saturation et du désordre de l'orientation des moments magnétiques en fonction de la température.

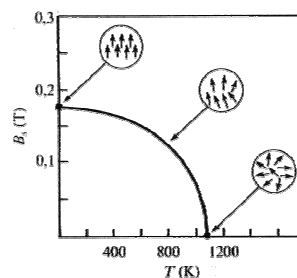


Figure 121 : Variation de l'induction à saturation du fer pur en fonction de la température

# ANNEXE 2 : PLAN DU SUPPORT DE BRIDAGE

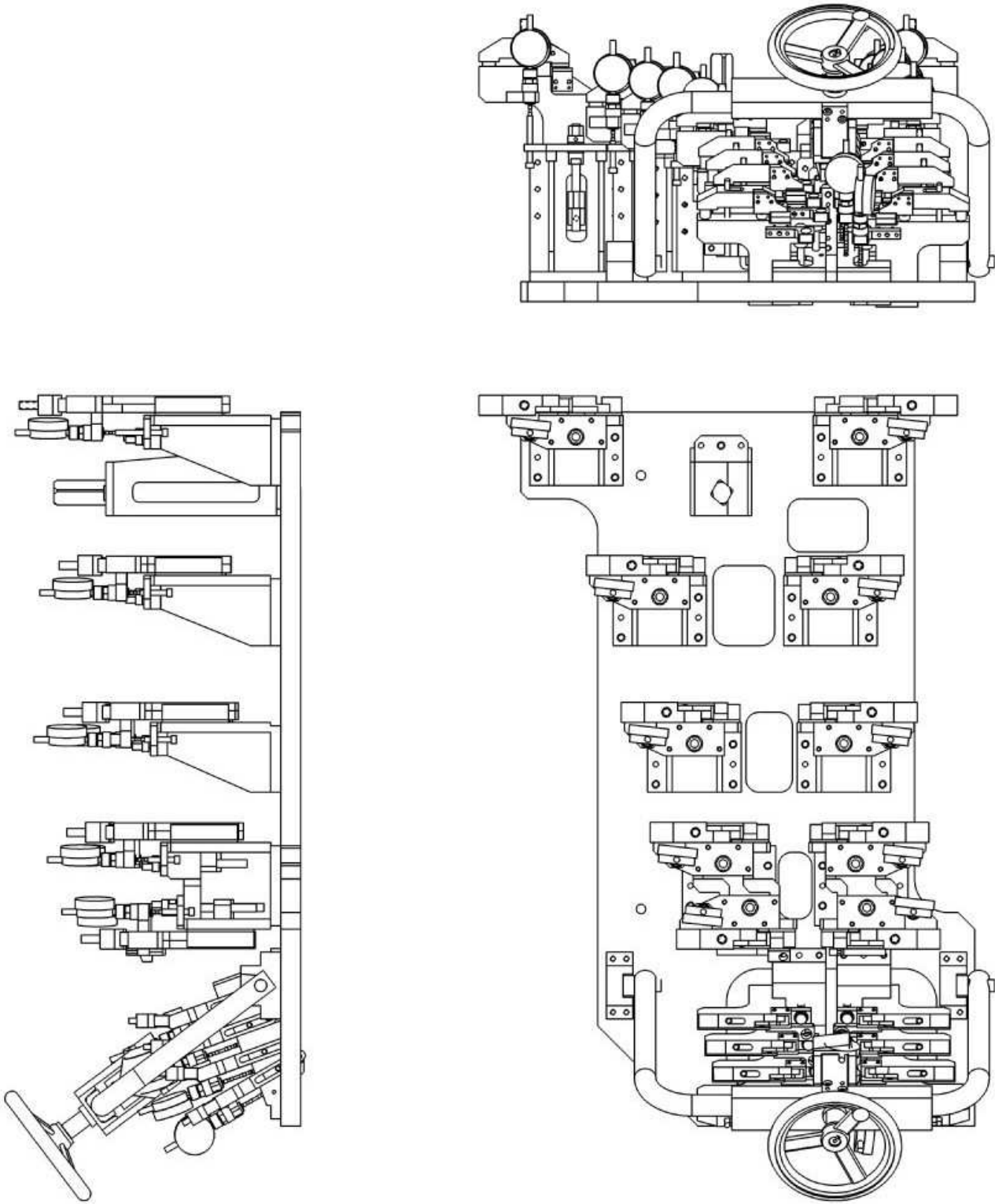


Figure 122 : Plan du support de bridage

## ANNEXE 3 : ATTAQUE CHIMIQUE EN VUE DE L'OBSERVATION MICROSCOPIQUE

L'attaque acide des tôles HR45 polies dans le but de révéler la structure ferritique et la structure bainitique trempée à l'eau est faite dans un bain composé à 50% de Marshall et 50% de Villela pendant 5 secondes.

Il est à noter que le bain utilisé n'est valable que quelques jours après lesquels le mélange doit être refait.

MARSHALL	
Eau distillée	50 mL
Acide oxalique	4 gr
Acide sulfurique	2.5 mL
Peroxyde d'hydrogène	50 mL

Tableau 21 : Composition chimique de l'acide « Marshall »

VILLELA	
Acide picrique	1 gr
Acide chlorhydrique	5 mL
Ethanol	100 mL

Tableau 22 : Composition chimique de l'acide « Villela »

## ANNEXE 4 : APPROXIMATION DES REGIMES QUASI-PERMANENTS

L'ARQP néglige les courants de déplacement  $\vec{J}_D$  dans l'équation de Maxwell-Ampère (238), pour des distributions ne variant pas trop rapidement dans le temps.

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial(\epsilon \vec{E})}{\partial t} = \vec{0} \quad (237)$$

### 1. *Domaine de validité :*

Pour démontrer la validité de l'ARQP, nous allons reprendre les équations (238), (239), (240) et (241) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial(\epsilon \vec{E})}{\partial t} \quad (238)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho = \rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{lié}} \quad (239)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (240)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \quad (241)$$

A ces quatre équations, on ajoute une condition de jauge de Lorentz (comme définie dans [GIÉ-1985]).  $c$  est la vitesse des ondes dans le vide.

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (242)$$

A partir de ce système de 5 équations, on arrive aux 2 équations de Poisson (243) et (244) :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu \vec{J} = \vec{0} \quad (243)$$

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \quad (244)$$

(243) est obtenue en insérant les définitions des potentiels (240) et (241) dans la relation de Maxwell-Ampère (238). Dans l'équation résultante,  $\phi$  est remplacé par la valeur correspondante de  $\vec{A}$  via la jauge (242). De la même manière mais en utilisant Maxwell-Gauss (239) à la place de Maxwell-Ampère (238), et en remplaçant cette fois-ci  $\vec{A}$  par  $\phi$  via la jauge de Lorentz, on obtient l'équation de Poisson (244).

Une solution physiquement acceptable pour une distribution de charge et de densité de courant de dimension finie est la solution des potentiels retardés (pour plus de détail sur la solution des potentiels retardés voir le chapitre 13 de [GIÉ-1985]) :



$$\phi(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV \quad (245)$$

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV \quad (246)$$

$r$  est la distance entre un point  $M$  quelconque et un point  $P$ .  $P$  correspond au lieu où la densité volumique de charge est  $\rho(t)$  et la densité volumique de courant est  $\vec{J}(t)$ .

Dans le cadre de l'ARQP, on obtient par le même raisonnement que précédemment les deux équations suivantes :

$$\phi(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(t)}{r} dV \quad (247)$$

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(t)}{r} dV \quad (248)$$

En comparant (245) avec (247) et (246) avec (248), on s'aperçoit que l'ARQP revient à négliger les retards  $\delta t = r/c$ . Ce retard peut effectivement être négligé s'il est très petit devant le temps de propagation  $T$  de l'onde électromagnétique, c'est-à-dire si la distance  $r$  est négligeable devant la longueur d'onde  $\lambda = cT$  :

$$r \ll \lambda \quad (249)$$

Les fréquences utilisées usuellement dans les applications industrielles du chauffage par induction sont situées en basse et moyenne fréquences (de 50 Hz à 1 MHz). Pour que l'ARQP soit vérifiée dans le plus limitant des cas ( $f=1\text{MHz}$ ), il faut alors que la distance maximale entre deux points matériels de l'installation soit petite devant 300 mètres. Cette condition est vérifiée dans un très large domaine d'applications, en particulier pour les applications de chauffage par induction.

## 2. Propriété de l'ARQP :

L'équation de Maxwell-Ampère (238) simplifiée par l'ARQP et avec les lois constitutives du matériau, on obtient :

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (250)$$

Si on cherche à dériver (250) par un opérateur de divergence, on a l'équation suivante :

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu \nabla \cdot \vec{J} \quad (251)$$

La divergence d'un rotationnel donnant un résultat nul, l'équation (251) s'annule. On peut donc écrire la loi de conservation du flux suivante :

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (252)$$

## ANNEXE 5 : ETUDE DU SOLVEUR ET PRECONDITIONNEUR DU SYSTEME LINEAIRE

### A5.1 Solveurs de systèmes linéaires symétriques définis positifs

Supposons un système linéaire à résoudre  $Ax = b$  tel que  $A$  soit une matrice symétrique définie positive.

$$Ax = b \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A^T = A \\ (x; x)_A = x^T A x > 0 \quad \text{pour tout } x \text{ non nul} \end{cases} \quad (253)$$

#### A5.1.1 Résolution directe : Elimination de Gauss – factorisation LU

La méthode d'élimination de Gauss a pour but de transformer le système  $Ax = b$  en un système équivalent dit triangulaire :

$$Ux = \hat{b} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} U \text{ matrice triangulaire supérieure} \\ x \text{ vecteur inconnues également solution de } Ax = b \end{array} \quad (254)$$

D'une manière générale, sur un système de taille  $n$ , on agira par étapes de façon à avoir à l'étape quelconque  $k$  :

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad A^{(k)}x = b^{(k)} \quad (255)$$

On définit alors un multiplicateur  $m$  tel que :

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad i = k, \dots, n \quad (256)$$

Et on obtient alors le système de l'étape  $k+1$  par :

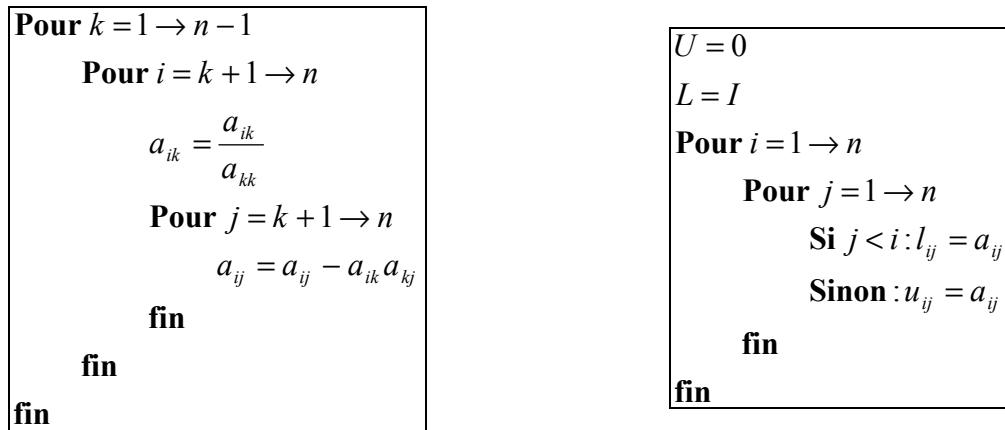
$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)} \end{cases} ; \quad i = k+1, \dots, n \quad ; \quad j = k, \dots, n \quad (257)$$

On réalise ces étapes  $n-1$  fois, jusqu'à l'obtention d'une matrice triangulaire supérieure que l'on nommera alors  $U$ . Le vecteur  $b$  obtenu sera alors noté  $\hat{b}$ . Notons que la matrice

triangulaire inférieure L formée par les multiplicateurs  $m_{ij}$  ( $m_{ii} = 1$ ) forme avec U la factorisation LU de A :

$$A = LU \tag{258}$$

L'algorithme de élimination de Gauss (Figure 123a) permet de reconstruire une matrice A comportant la matrice U au dessus de sa diagonale (diagonale comprise) et les multiplicateurs au dessous de sa diagonale. Il est alors facile de retrouver les matrices L et U (Figure 123b).



a) Elimination de Gauss (algorithme « kij »)

b) Reconstruction des matrices L et U

**Figure 123 : Algorithmique de la factorisation LU**

Afin d'avoir un conditionnement optimal des matrices L et U, nous permutons, à chaque début d'étape k, la ligne i (pour  $i \geq k$ ) dont le terme  $a_{ik}$  est maximal, avec la ligne k. Ceci permet d'avoir le pivot de gauss le plus élevé possible à chaque itération.

Notons que l'algorithme de la Figure 123a n'est possible que si la matrice A n'a aucun terme nul sur sa diagonale, ce qui est toujours le cas dans nos résolutions.

L'intérêt de l'élimination de Gauss et de la factorisation LU est de résoudre le système linéaire  $Ax = b$  par la résolution successive de deux systèmes linéaires triangulaires :

$$A = LU \Rightarrow L U x = b \Rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \tag{259}$$

Cette méthode permet de trouver la solution d'un système linéaire en un nombre fini d'opérations ( $\frac{2}{3}n^3 + 2n^2$ ). C'est pourquoi on la nomme méthode directe. Toutefois, les erreurs d'arrondie impliquées par la résolution numérique peuvent générer des erreurs non négligeables entre la solution exacte et la solution approchée trouvée numériquement. Soit e l'erreur commise :

$$e = \|x - \hat{x}\| \text{ avec } \hat{x} \text{ solution approchée et } \|\cdot\| \text{ la norme euclidienne} \tag{260}$$

On peut montrer que l'erreur dépend fortement, pour les méthodes directes, du conditionnement de la matrice A :

$$\frac{e}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r = b - A\hat{x} \\ \text{cond}(A) = \frac{|\lambda_{\max}(A)|}{|\lambda_{\min}(A)|} \end{cases} \quad (261)$$

où  $\lambda(A)$  représente une valeur propre de  $A$ . On constate alors que si le conditionnement de  $A$  est grand, l'écart entre la solution exacte et la solution approchée peut être important bien que le résidu  $r$  soit faible. Dans ce cas, on utilise des méthodes itératives dont l'erreur ne dépend pas du conditionnement.

#### A5.1.2 Méthodes itératives de type point fixe

L'idée des méthodes itératives est de construire une suite de vecteurs  $x^{(k)}$  qui converge vers la solution exacte  $x$  du système  $Ax = b$ .

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} \quad (262)$$

Les méthodes de point fixe ont pour principe de calculer une solution approchée  $x_{k+1}$  à partir de la solution approchée à l'étape précédente  $x_k$  tel que :

$$x_{k+1} = Bx_k + c \quad (263)$$

Généralement, on calcule la matrice  $B$  (matrice d'itération) et le vecteur  $c$  à partir d'une décomposition de la matrice  $A$  sous la forme  $A = M - N$ . Cette décomposition est appelée « splitting ». On écrit alors :

$$\begin{aligned} M x_{k+1} &= N x_k + b \\ \text{d'où } B &= M^{-1}N \quad \text{et} \quad c = M^{-1}b \end{aligned} \quad (264)$$

On peut montrer [GOLUB-1996 ; GUYOMARC'H-2000] que, quel que soit le vecteur initial  $x_0$ , la suite  $\{x_k\}$  converge vers la solution du système linéaire si le rayon spectral de  $B$  est inférieur à 1 :

$$\text{convergence si : } \rho(B) < 1 \quad \text{où} \quad \rho(B) = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ valeur propre de } B\} \quad (265)$$

#### Méthode de Jacobi

Si les éléments diagonaux de la matrice  $A$  sont non nuls, le système  $Ax = b$  est équivalent à :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (266)$$

Pour une donnée initiale  $x^{(0)}$  choisie, on calcule  $x^{(k+1)}$  par :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (267)$$

Ce qui nous permet d'identifier le splitting suivant :

$$M_J = D \quad \text{et} \quad N_J = E + F \quad (268)$$

où D est la matrice diagonale de A, -E est la matrice triangulaire inférieure de A et -F est la matrice triangulaire supérieure de A tel que :

$$A = D - (E + F) \quad (269)$$

La matrice d'itération de Jacobi et le vecteur c associé sont alors donnés par :

$$\begin{cases} B_J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A \\ c_J = D^{-1}b \end{cases} \quad (270)$$

Après avoir réalisé n opérations pour le calcul de  $x^{(k+1)}$ , on résout l'équation générale (263) par méthode de point fixe jusqu'à convergence de la solution. La méthode de Jacobi demande de stocker 2 fois le vecteur x (pour l'itération k et l'itération k+1).

### Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel consiste à réactualiser le vecteur  $x^{(k)}$  de la méthode de Jacobi à chaque itération k :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (271)$$

Cette réactualisation permet de ne stocker qu'une seule fois le vecteur x. Le splitting de A donne pour cette méthode :

$$\begin{aligned} M_{GS} &= D - E \quad \text{et} \quad N_{GS} = F \\ \Rightarrow \begin{cases} B_{GS} = (D - E)^{-1} F \\ c_{GS} = (D - E)^{-1} b \end{cases} \end{aligned} \quad (272)$$

### Méthode SOR (Successive Over Relaxation)

La méthode SOR donne une solution sous forme de somme pondérée entre la solution de Gauss-Seidel et la solution de l'itération précédente :

$$x_i^{(k+1)} = \omega x_{i,GS}^{(k+1)} + (1 - \omega) x_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (273)$$

$\omega$  est le paramètre de relaxation compris entre 0 et 2 (condition nécessaire à la convergence [CIARLET-1998]). On obtient alors le splitting suivant :

$$\begin{aligned}
M_\omega &= \frac{1}{\omega} D - E \quad \text{et} \quad N_\omega = \frac{(1-\omega)}{\omega} D + F \\
\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_\omega = (D - \omega E)^{-1} [(1-\omega)D + \omega F] \\ c_\omega = \omega(D - \omega E)^{-1} b \end{array} \right. & \quad (274)
\end{aligned}$$

Le choix de la valeur de  $\omega$  doit être fait afin d'optimiser la convergence de la méthode. On sait que la convergence sera d'autant plus rapide que le rayon spectral de la matrice d'itération sera faible (265). On cherche alors  $\omega_{\text{opt}}$  tel que :

$$\rho(B_{\omega_{\text{opt}}}) = \inf_{0 < \omega < 2} [\rho(B_\omega)] \quad (275)$$

La valeur du paramètre de relaxation optimal  $\omega_{\text{opt}}$  dépend de la forme de la matrice d'itération  $B$ , donc de la forme de  $A$ . Prenons comme exemple le cas d'une matrice  $A$  tridiagonale [CIARLET-1998] :

$$\begin{aligned}
\rho(B_{\omega_{\text{opt}}}) &= \omega_{\text{opt}} - 1 \quad \text{avec} \quad \omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_{GS})}} \\
\text{et} \quad \rho(B_{GS}) &= \rho(B_J)^2 \quad \Rightarrow \quad \rho(B_{\omega_{\text{opt}}}) < \rho(B_{GS}) < \rho(B_J)
\end{aligned} \quad (276)$$

Or, la matrice d'itération  $B_\omega$  n'est pas symétrique. Il est néanmoins possible de la symétriser : l'idée est de réaliser une seconde boucle, inverse à la méthode SOR :

$$\begin{aligned}
x_i^{(k+\frac{1}{2})} &= \omega x_{i,GS}^{(k+\frac{1}{2})} + (1-\omega)x_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n \\
x_i^{(k+1)} &= \omega x_{i,GS}^{(k+1)} + (1-\omega)x_i^{(k+\frac{1}{2})}, \quad i = n-1, \dots, 1
\end{aligned} \quad (277)$$

La méthode SOR symétrisée (méthode SSOR) a alors pour matrice d'itération  $B$  et pour vecteur  $c$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{B}_\omega = M_\omega^{-T} N_\omega^T M_\omega^{-1} N_\omega \\ \quad = (D - \omega F)^{-1} [(1-\omega)D + \omega E] (D - \omega E)^{-1} [(1-\omega)D + \omega F] \\ \tilde{c}_\omega = \omega(2-\omega)(D - \omega F)^{-1} D (D - \omega E)^{-1} b \end{array} \right. \quad (278)$$

La méthode SOR demande  $n$  opérations et deux fois le stockage de  $x$  (comme Jacobi). La méthode SSOR demande  $2n$  opérations et deux fois le stockage de  $x$ .

### 45.1.3 Méthodes itératives basées sur l'optimisation

#### Le gradient conjugué

On utilise la méthode du gradient conjugué dans les cas où  $A$  est une matrice symétrique définie positive. Nous ne développerons pas ici l'aspect mathématique. Le lecteur intéressé par la manière d'obtenir les relations et l'algorithme présentés ci-dessous est invité à se référer à [GOLUB-1996].

La méthode du gradient conjugué repose sur la minimisation de la fonctionnelle :

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) \quad (279)$$

Il s'agit d'une méthode de descente classique : après avoir défini un vecteur de départ  $x^{(0)}$  on détermine pour chaque itération  $k$  une pente  $p^{(k)}$  et un scalaire  $\alpha^{(k)}$  qui nous permettent de calculer l'itérée suivante :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)} \quad (280)$$

On peut alors déduire le résidu à l'itération  $k+1$  :

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = r^{(k)} + \alpha^{(k)} A p^{(k)} \quad (281)$$

Le scalaire  $\alpha^{(k)}$  est le pas optimal défini par :

$$\alpha^{(k)} = \frac{r^{(k)T} p^{(k)}}{p^{(k)T} A p^{(k)}} = \frac{r^{(k)T} r^{(k)}}{p^{(k)T} A p^{(k)}} \quad (282)$$

Le vecteur de direction de recherche est choisi orthogonal (au sens du produit scalaire associé à  $A$ ) au précédent :

$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta^{(k)} p^{(k)}$$

avec :  $p^{(k+1)T} A p^{(k)} = 0 \Rightarrow \beta^{(k)} = -\frac{r^{(k+1)T} A p^{(k)}}{p^{(k)T} A p^{(k)}} \quad (283)$

choix de  $x^{(0)}$   
 $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$   
 $p^{(0)} = r^{(0)}$   
**tant que** la convergence n'est pas atteinte, itérer sur  $k$

$$\alpha^{(k)} = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(p^{(k)}, A p^{(k)})}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha^{(k)} A p^{(k)}$$

$$\beta^{(k)} = -\frac{(r^{(k+1)}, r^{(k+1)})}{(r^{(k)}, r^{(k)})}$$

$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta^{(k)} p^{(k)}$$

test de convergence

**fin**

**Figure 124 : Algorithme de résolution de systèmes linéaires par la méthode du gradient conjugué**

On obtient alors l'algorithme du gradient conjugué présenté en Figure 124.

### Le gradient conjugué préconditionné

Nous pouvons montrer que pour tout vecteur  $x^{(0)}$ , la méthode du gradient conjugué converge en un nombre fini d'itérations vers la solution  $x$ . Toutefois le taux de convergence de cette méthode dépend fortement du conditionnement de  $A$  : plus  $\text{cond}(A)$  sera grand, plus la convergence sera lente. Il est alors souvent préférable de réécrire le système linéaire à l'aide d'une matrice symétrique définie positive  $C$  tel que :

$$C^{-1}Ax = C^{-1}b \quad \text{et} \quad \text{cond}(C^{-1}A) \ll \text{cond}(A) \quad (284)$$

Cette opération s'appelle préconditionner le système. Il faut choisir judicieusement la matrice  $C$  :

1.  $C$  doit être une bonne approximation de  $A$  de manière que le conditionnement du système soit bien meilleur (i.e. beaucoup plus faible) que celui du système d'origine ( $A$  serait idéale),
2. Le système  $Cy = z$  doit être beaucoup plus facile à résoudre que le système d'origine ( $I$  serait idéale),
3. La construction de  $C$  doit être peu coûteuse comparée à celle de  $A$ .

Une fois une matrice de préconditionnement judicieusement choisie, il faut résoudre le système (284) alors que la matrice  $C^{-1}A$  n'est plus symétrique. Il n'est pas cependant nécessaire de la symétriser (par une factorisation LU par exemple) car  $C^{-1}A$  est auto adjointe pour un produit scalaire associé à  $C$ . C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} &\text{pour } (x, y) \text{ le produit scalaire euclidien : } x^T y \\ &\text{et } (x, y)_M \text{ le produit scalaire associé à } M : x^T M y \\ &(C^{-1}Ax, y)_C = (Ax, y) = (x, C^{-1}Ay)_C \end{aligned} \quad (285)$$

On peut alors résoudre le système préconditionné en résolvant l'algorithme du gradient conjugué (Figure 124) avec des produits scalaires  $C$ . En posant  $z^{(k)} = C^{-1}r^{(k)}$  on a :

$$\begin{aligned} (z^{(k)}, z^{(k)})_C &= (z^{(k)}, r^{(k)}) \\ (C^{-1}Ap^{(k)}, p^{(k)})_C &= (Ap^{(k)}, p^{(k)}) \end{aligned} \quad (286)$$

On obtient alors, pour deux matrices symétriques définies positives  $A$  et  $C$ , l'algorithme du gradient conjugué préconditionné présenté en Figure 125.

## **A5.2 Solveur pour systèmes linéaires symétriques définis semi-positifs**

### A5.2.1 Le problème mécanique exprimé en vitesse-pression

Nous avons vu que le problème mécanique est exprimé dans le logiciel Forge, par une formulation en vitesse-pression. Nous obtenons alors à chaque itération de Newton-Raphson,



un système linéaire symétrique défini semi-positif puisque le bloc  $-\beta^2 A_{pp}$  de (287) n'est pas défini positif.

$$\begin{bmatrix} A_{vv} & A_{vp} \\ A_{vp}^T & -\beta^2 A_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (287)$$

choix de  $x^{(0)}$   
 $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$   
 $p^{(0)} = C^{-1}r^{(0)}$   
 $z^{(0)} = p^{(0)}$

**tant que** la convergence n'est pas atteinte, itérer sur k

$$\alpha^{(k)} = \frac{(p^{(k)}, r^{(k)})}{(z^{(k)}, Az^{(k)})}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)}z^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha^{(k)}Az^{(k)}$$

$$p^{(k+1)} = C^{-1}r^{(k+1)}$$

$$\beta^{(k)} = -\frac{(p^{(k+1)}, r^{(k+1)})}{(p^{(k)}, r^{(k)})}$$

$$z^{(k+1)} = p^{(k+1)} + \beta^{(k)}z^{(k)}$$

test de convergence

**fin**

Figure 125 : Algorithme de résolution de systèmes linéaires par la méthode du gradient conjugué préconditionné

Les solveurs présentés précédemment ne sont donc pas directement applicables au problème mixte résolu dans Forge. Nous présenterons dans les paragraphes suivants l'adaptation des solveurs précédents aux systèmes qui ne sont pas définis positifs.

#### A5.2.2 La méthode du résidu minimal préconditionné

Nous avons vu au paragraphe 0A5.1.3 que la méthode du gradient conjugué consiste à minimiser la fonctionnelle (279) par une méthode de descente. Mais l'existence et l'unicité d'un minimum à cette fonctionnelle n'est assurée que si A est symétrique définie positive. La méthode du résidu minimal consiste à utiliser le même principe que la méthode du gradient conjugué mais sur une autre fonctionnelle :

$$E(x) = (b - Ax, b - Ax) = (r, r) \quad (288)$$

Cette fonctionnelle, appelée fonctionnelle erreur, est encore strictement convexe (donc existence et unicité d'un minimum) lorsque A est symétrique non définie positive.

Dans le cas préconditionné, la fonctionnelle à minimiser devient :

$$E(r) = (C^{-1}r, r) \quad (289)$$

La résolution de cette fonctionnelle par la méthode descente donne l'algorithme Figure 126.

choix de  $x^{(0)}$   
 $r^{(0)} = b$   
 $p^{(0)} = C^{-1}r^{(0)}$   
 $z^{(0)} = Ap^{(0)}$   
**tant que** la convergence n'est pas atteinte, itérer sur k  

$$\alpha^{(k)} = \frac{(r^{(k)}, C^{-1}z^{(k)})}{(C^{-1}z^{(k)}, z^{(k)})}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} p^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha^{(k)} z^{(k)}$$

$$\beta^{(k)} = -\frac{(AC^{-1}r^{(k+1)}, C^{-1}z^{(k+1)})}{(C^{-1}z^{(k)}, z^{(k)})}$$

$$p^{(k+1)} = C^{-1}r^{(k+1)} + \beta^{(k)} p^{(k)}$$

$$z^{(k+1)} = AC^{-1}r^{(k+1)} + \beta^{(k)} z^{(k)}$$
 test de convergence  
**fin**

**Figure 126 : Algorithme de résolution de systèmes linéaires par la méthode du résidu minimal préconditionné**

### A5.2.3 Critère de convergence

Il est nécessaire de définir un critère d'arrêt de la méthode qui, s'il est satisfait, nous permet de considérer la solution  $x^{(k)}$  comme la solution exacte à une tolérance près. Bien qu'il existe de nombreux critères, nous présenterons uniquement celui utilisé dans Forge. Il consiste à comparer le résidu de l'équation à l'étape k par rapport au résidu initial. Le critère doit être inférieur à un epsilon ( $10^{-7}$  par défaut dans Forge) pour qu'on puisse dire que la convergence est atteinte :

$$\frac{\|(b - Ax)^{(k)}\|}{\|(b - Ax)^{(0)}\|} < \varepsilon \quad (290)$$

### A5.2.4 Préconditionnement

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, l'idée du préconditionnement est de trouver une matrice C symétrique définie positive proche de A. Plusieurs types de préconditionneurs existent. Nous en présenterons ici trois différents : le préconditionnement de Jacobi, la factorisation LU incomplète et le préconditionneur SSOR (Symétric Successive Over Relaxation).

### Préconditionnement de Jacobi

Le préconditionneur de Jacobi (comme SSOR présenté ci-après) est issu du splitting des méthodes de point fixe. En effet, on utilise comme matrice de préconditionnement l'approximation  $M$  de  $A$  (pour rappel :  $A = M - N$  et  $c = M^{-1} b$ ). Aucune itération n'est alors nécessaire au calcul de la matrice de préconditionnement  $C$  car elle peut directement s'écrire en fonction de la matrice  $A = D - E - F$ .

Le plus simple préconditionneur possible est de prendre la diagonale de  $A$ . Nous utilisons alors la matrice  $M_J = D$  issue du splitting de la méthode de point fixe de Jacobi.

$$C = M_J = D \quad (291)$$

### Factorisation LU incomplète

L'intérêt d'une factorisation LU est le faible coût de résolution des systèmes triangulaires. Malheureusement, cette factorisation mène généralement à un remplissage inacceptable pour de grandes matrices creuses (problème de stockage mémoire). Pour éviter cela, on fait une factorisation incomplète de  $A$  : on ne calcule pas tous les éléments de  $L$  et  $U$ . On calcule alors  $L$  et  $U$  telles que  $LU$  soit inversible et :

$$A = LU - R \quad (292)$$

$R$  est une matrice comportant des zéros là où on souhaite que la factorisation soit exacte. Il faut alors choisir une stratégie de remplissage. Le choix le plus naturel semble être de prendre le même schéma de remplissage que  $A$ , la diagonale en sus. Cette factorisation est appelée  $ILU(0)$ . Cependant, on peut améliorer la précision en choisissant un schéma de remplissage identique au produit  $LU$  de la factorisation  $ILU(0)$ . Il s'agit alors de la factorisation  $ILU(1)$ . On peut ainsi définir différents niveaux de remplissages et construire des factorisations incomplètes d'ordre  $p$  :  $ILU(p)$ .

Le logiciel Forge utilise par défaut le préconditionneur  $ILU(1)$ . Ce préconditionneur n'a pas été satisfaisant dans la résolution de notre simulation numérique de traitement thermique de tôles comportant une forte anisotropie de la taille des éléments (rapport de taille supérieur à  $\frac{1}{4}$ ). En effet la convergence du solveur linéaire était extrêmement lente et ne permettait pas la convergence de Newton-Raphson en un nombre d'itérations acceptables. D'autres préconditionneurs sont disponibles comme par exemple, ceux utilisant les matrices définies dans les méthodes de point fixe présentées au paragraphe 0. Nous nous sommes arrêté sur le préconditionneur SOR symétrisé (SSOR – Symetric Successive Over Relaxation) présenté ci-dessous.

### Préconditionnement SSOR

De la même manière que pour le préconditionnement de Jacobi, nous utilisons l'approximation  $M$  de  $A$  issue du splitting de la méthode de point fixe SSOR.

$$C = \frac{1}{\omega(2-\omega)} (D - \omega E) D^{-1} (D - \omega F) \quad (293)$$

Ce préconditionnement (comme celui de Jacobi) ne demande pas de stockage de la matrice  $C$  puisqu'elle est contenue dans  $A$ . Néanmoins, elle demande des calculs supplémentaires pour la détermination du paramètre de relaxation  $\omega$ .

## **BIBLIOGRAPHIE DES ANNEXES**

- [CIARLET-1998] - Ciarlet P.G., *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, Paris, p. 279, 1998.
- [DORLOT-1986] - Dorlot J., Baïlon J., Masounave J., *Des Matériaux 2ème édition*, Edition de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 1986.
- [GIÉ-1985] - Gié H., Sarmant J., *Electromagnétisme*, Lavoisier - Techniques et Documentation, vol. 1, 1985.
- [GOLUB-1996] - Golub G.H., Van Loan C.F., *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, vol. 3ème Edition, p. 694, 1996.
- [GUYOMARC'H-2000] - Guyomarc'h F., *Méthode de Kyrlov : régularisation de la solution et accélération de la convergence*, Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 2000.

# TABLE DES FIGURES

Figure 1 : Schéma représentant les interactions entre PSA et le Cemef, les deux partenaires de la thèse, et l'ensemble des sous-traitants.	1
Figure 2 : Pied milieu d'une Peugeot 207	7
Figure 3 : Plan d'un pied milieu type A7 et zone de traitement thermique	7
Figure 4 : Test anti-intrusion en cas de choc latéral sur un pied milieu de 306 avant et après traitement thermique. La pièce traitée résiste au test alors que l'autre pièce présente un risque pour le passager	8
Figure 5 : Systèmes de chauffage par induction : (a) chauffage dans la masse et (b) chauffage localisé	10
Figure 6 : Tôle d'acier en sortie de four à induction en fin de procédé de laminage	10
Figure 7 : Boucle d'hystérésis de la courbe d'aimantation pour un acier ferritique (XC10), perlitique (XC80), martensitique (XC55), et martensitique recuit (XC55) [SAQUET-1999]	13
Figure 8 : Effet de la température sur la perméabilité magnétique relative d'un acier au carbone [RUDNEV-2003]	13
Figure 9 : Représentation de la profondeur de peau	14
Figure 10 : Lignes de champ et distribution de puissance le long d'un cylindre plongé dans un champ magnétique créé par un inducteur solénoïde [RUDNEV-2003]	15
Figure 11 : Courbes typiques de flux de chaleur et de coefficient d'échange thermique pour un solide chaud plongé dans un bain liquide [BELL-1984]	17
Figure 12 : Schéma du diagramme d'équilibre de phase binaire Fe-Fe <sub>3</sub> C [MURRY-1998]	19
Figure 13 : Structure cubique face centré c.f.c et cubique centré c.c [DORLOT-1986]	19
Figure 14 : Origine de la maille quadratique centrée $\alpha'$ selon Bain [MURRY-1998]	20
Figure 15 : Micrographie de structures martensitiques en a) lattes et b) en plaquettes [THOMAS-2002]	20
Figure 16 : Morphologie et chronologie de formation (i, ii, iii, iv) de la bainite a) supérieure et b) inférieure [FOCT-1997]	21
Figure 17 : Structures bainitiques d'un acier a) 6MnCrB5 trempé à l'eau et b) 35MNV7 trempé à l'air [AUCLAIR-1997]	22
Figure 18 : Schéma de diagramme TTT avec domaines de transformation	22
Figure 19 : Diagramme TRC d'un acier 25CrMo4 [BÉGUINOT-1997]	23
Figure 20 : Diagramme de transformation d'un acier 34CrMo4 a) au chauffage continu et b) en chauffage isotherme [FARIAS-1991]	24
Figure 21 : Superposition des trois ordres de grandeur de contraintes [MAEDER-1990]	24
Figure 22 : Cas de la déformation par traction uni axiale d'une éprouvette dont les caractéristiques mécaniques à cœur et en peau sont différentes [ALIAGA-2000]	25
Figure 23 : Schéma du système démonstrateur. Une machine à commande numérique actionne et coupe le générateur, puis descend l'ensemble pièce + support de bridage dans le bain	32
Figure 24 : Schéma des différentes configurations de chauffage testée	32
Figure 25 : Pied milieu RPC A7 avant et après traitement thermique	33
Figure 26 : système de bridage des pieds milieux en vue du traitement thermique : a) schéma d'une touche d'appui réglable et b) position des sections où sont placées les touches d'appui 2 par 2 sur les feuillures	34
Figure 27 : Système de serrage : la pièce est plaquée contre les parties basses touches d'appui à l'aide d'un volant puis maintenue dans cette position à l'aide des parties hautes.	34
Figure 28 : Support de contrôle : a) support et trous de maintient du comparateur, b) emplacement des 15 points numérotés	35
Figure 29 : Déplacement selon Y des points de mesure après un traitement thermique dont le chauffage a été effectué en 15s avec une puissance de 69kW	36
Figure 30 : Génération du « pli » au niveau du 5 <sup>ème</sup> bridage du pied milieu	37
Figure 31 : Schéma du mécanisme de flambage qui apparaît sur les flans lorsqu'on augmente le galbe.	38
Figure 32 : Comparaison des résultats de déplacements après des traitements thermiques dont les paramètres de chauffage sont 17s / 60kW (bleu) et 15s / 69kW (rouge)	38
Figure 33 : Comparaison des résultats de déplacements après des traitements thermiques dont les paramètres de chauffage sont 11s / 69kW (bleu) et 15s / 69kW (rouge)	39

Figure 34 : Comparaison des résultats de déplacements après des traitements thermiques dont les paramètres de chauffage sont 11s / 69kW (bleu) et 15s / 53kW (vert)	40
Figure 35 : Comparaison des résultats de déplacements après des traitements thermiques dont les paramètres de chauffage sont 15s / 53kW (vert) et 15s / 69kW (rouge)	40
Figure 36 : Comparaison des résultats de déplacements pour deux conditions de bridage différentes : un galbe important (en rouge) et le même galbe global complété d'une rotation autour de l'axe longitudinal (bleu)	42
Figure 37 : Géométrie des échantillons semi industriels : emboutie en « U »	44
Figure 38 : Dispositif expérimental du banc d'essai en « U »	44
Figure 39 : Système de support et de serrage développé pour l'étude du cas semi industriel	45
Figure 40 : Instrumentation des éprouvettes de thermocouple et position des 2 thermocouples de référence A et B, et du thermocouple C en bord de trou	47
Figure 41 : Evolution dans le temps de la température mesurée par le thermocouple A lors du traitement thermique du U.	47
Figure 42 : Evolution des températures de chaque coté et au milieu d'un rayon poinçon	48
Figure 43 : Effet électromagnétique de bord (antagoniste à l'effet thermique) créé par un trou percé dans une pièce visible après traitement thermique	48
Figure 44 : Comparaison des évolutions de température dans le cas d'une éprouvette percée (gauche) et d'une éprouvette non percée (droite)	48
Figure 45 : Microscopie optique de l'état de réception (dureté 168HV) à deux échelles différentes	49
Figure 46 : Microscopie optique suite à une trempe à l'air (dureté 149HV) à deux échelles différentes	50
Figure 47 : Microscopie optique suite à une trempe à l'eau (dureté 381HV) à deux échelles différentes	50
Figure 48 : Evolution de dureté Vickers sur le plan médian d'une éprouvette semi industrielle et microscopie optique de 5 zones différentes	51
Figure 49 : Schéma d'une éprouvette semi industrielle et des 6 côtes mesurées	52
Figure 50 : Comparaison des quatre formulations pour le calcul des courants induits dans une plaque carrée plongée dans un champs magnétique la traversant dans son épaisseur (nombre d'éléments tétraédriques : 8586) [NAKATA-1988a].	62
Figure 51 : Phénomènes d'auto-induction et répartition des densités de courant.	63
Figure 52 : Schématisation des valeurs de tension et courant fournies par le générateur dans le cas d'un système série (gauche) et parallèle (droite).	66
Figure 53 : Représentation d'un inducteur de forme quelconque et de ces 3 frontières : $\Gamma_0$ et ces deux bornes $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ .	67
Figure 54 : Représentation du domaine d'étude $\Omega$ et de ses frontière : $\Gamma_0$ condition de Dirichlet ; $\Gamma_1$ condition de Neumann	69
Figure 55 : Degrés de liberté pour un élément de Nédélec de dimension 2 ou 3 [ERN-2005]	71
Figure 56 : Représentation graphique des fonctions de forme d'un élément triangulaire (2D) de Nédélec [ERN-2005]	72
Figure 57 : Algorithme de résolution électromagnétique tenant compte de la dépendance de la perméabilité magnétique au champ magnétique	75
Figure 58 : Schématisation de la différence d'ordre de grandeur des temps caractéristiques de l'électromagnétisme et de la thermique	81
Figure 59 : Rapport de conductivité électrique de deux matériaux (HR45 faiblement allié et acier inoxydable fortement allié) par rapport à leur valeur à l'ambient.	84
Figure 60 : Organigramme de la procédure de couplage entre électromagnétisme et thermique	86
Figure 61 : Masse volumique du HR45 en fonction de la température	89
Figure 62 : Principe de fonctionnement du dispositif de pressurisation des creusets	89
Figure 63 : Principe de calcul de Cp pour deux chauffages étagés des creusets à blanc et avec échantillon	90
Figure 64 : Chaleur spécifique du HR45 en fonction de la température	91
Figure 65 : Schéma d'une installation pour la méthode flash laser	91
Figure 66 : Diffusivité thermique du HR45 en fonction de la température	92
Figure 67 : Modèle électromagnétique composé de l'inducteur et de la pièce et de l'air (total de 886272 elts).	94
Figure 68 : A gauche, composante normale du champs A dans une coupe est à mi-longueur de la pièce ; A droite, la densité de puissance induite par effet Joules dans la pièce.	94
Figure 69 : Champ de température en fin de chauffage des tôles embouties pleines et avec trou.	95
Figure 70 : Élément tétraédrique P1+/P1 de référence pour la vitesse et la pression	106
Figure 71 : Schématisation uniaxiale de la partition des contraintes dans l'approche par un modèle additif	112
Figure 72 : Interprétation graphique de la méthode du prédicteur élastique-retour radial dans l'espace des déviateurs principaux	115
Figure 73 : Résolution par la méthode de Newton, difficulté liée aux valeurs négatives	117
Figure 74 : Diagramme de résolution des équations de Prandtl-Reuss	119
Figure 75 : Organigramme du couplage thermomécanique	122

Figure 76 : Mesure de dilatation à l'aide de tige poussoir en alumine. A gauche : photo du four fermé ; A droite : Schéma de principe de mesure et du système de positionnement.	123
Figure 77 : Coefficient linéique de dilatation par rapport à l'ambiante	124
Figure 78 : Visualisation éclatée du modèle physique thermomécanique et du maillage de la pièce et des outils.	125
Figure 79 : Déformée (x10) et champ de déformation plastique généré par la dilatation thermique d'une pièce bridée et chauffée localement.	125
Figure 80 : Schéma du principe d'additivité : la courbe de refroidissement T(t) est partitionnée en une série d'étapes isothermes.	134
Figure 81 : Reconstruction schématiques des cinétiques et détermination des paramètres d'Avrami à partir d'un diagramme TTT	136
Figure 82 : Représentation schématique d'un diagramme TTT par le modèle de transformation de phase [ALLAGA-2000]	137
Figure 83 : Diagramme de résolution du calcul des cinétiques de transformation en trempe	139
Figure 84 : Schématisation du chauffage au isotherme d'un acier ferrito-perlitique	140
Figure 85 : Représentation schématique d'un diagramme TTA d'un acier hypoeutectoïde	142
Figure 86 : Représentation schématique de la cinétique de formation de l'austénite pour un acier ferrito-perlitique : (a) d'après [FARIAS-1990] ; (b) avec nos hypothèses. La forme des courbes en (b) est calculée à partir de 2 points des courbes (a)	145
Figure 87 : Représentation schématique du mécanisme de plasticité de transformation lors de transformations martensitiques (mécanisme de Magee) (a) ou diffusives (mécanisme de Greenwood-Johnson) (b) [SIMON-1994]	146
Figure 88 : Algorithme de résolution couplée du problème thermo-metall-mécanique	153
Figure 89 : Schéma représentatif des couplages multi-physiques pour la simulation d'un traitement thermique de trempe après chauffage par induction.	154
Figure 90 : Schéma représentatif des couplages multi-physiques dans le cadre de nos hypothèses	156
Figure 91 : Micrographie de la structure HR45 d'après [BERGE-2003]	157
Figure 92 : Eprouvette de 5mm de large, 60mm de long en tôle d'épaisseur 2mm chauffée par effet Joule entre les 2 mors de la machine de traction développée au CEMEF	158
Figure 93 : système de mesure par extensomètre mécanique	159
Figure 94 : Essai de dilatométrie libre du chauffage lent (1 °C/s) de l'état trempé (bainite) de l'ambiant à 1000°C	161
Figure 95 : Comparaison des résultats obtenus au CEMEF en dilatométrie libre avec le coefficient linéique de dilatation mesuré au CRITT de Nancy	161
Figure 96 : Points expérimentaux et courbes rhéologiques de la loi THEVP à différentes températures pour l'état de réception	162
Figure 97 : Points expérimentaux et courbes rhéologiques de la loi THEVP à différentes températures pour l'état austénitique	163
Figure 98 : Points expérimentaux et courbes rhéologiques de la loi THEVP à différentes températures pour l'état trempé (bainite)	164
Figure 99 : Comparaison de trempabilité de différents aciers d'après [MURRY-2002]	167
Figure 100 : Diagramme TTT calculé par la méthode de Kirkaldy pour une nuance HR45	170
Figure 101 : Méthode graphique de mesure de l'enthalpie de transformation	172
Figure 102 : Taux d'austénite en fin de chauffage (a) et déformation par plasticité de transformation en fin de trempe (b).	172
Figure 103 : Modèle du problème électromagnétique composé de l'inducteur et de la pièce noyées dans l'air environnant (total de 886272 elts).	183
Figure 104 : Visualisation éclatée du système modélisé et du maillage de chaque pièce.	183
Figure 105 : Contraintes équivalentes au sens de Von Mises en Pa (a) et déformation plastique (b) après le serrage des pièces des essais STI et SPI	185
Figure 106 : Représentation du champ de déplacements de la pièce lors du bridage : les vecteurs représentent les déplacements dans l'espace, le champ de couleur représente les déplacements dans l'axe de serrage (axe X)	186
Figure 107 : Comparaison numérique (traits pleins) et expérimentale (points) des températures à l'intérieur du rayon poinçon (C), en face de l'inducteur (B), au bord du trou percé (A2) et au même endroit pour les pièces qui ne sont pas percées (A1).	187
Figure 108 : Composante normale au plan de coupe du champs A. La coupe est à mi-longueur de la pièce. Les lignes représentent les frontières approximatives des frontières des domaines.	188
Figure 109 : Photos des pièces après traitement thermique et isovaleur de température à 420°C après la simulation du retard douche.	188
Figure 110 : Evolution structurale du matériau par rapport au temps au niveau du point B de la pièce (essai LPI).	189

---

Figure 111 : Comparaison numérique et expérience des ZAT : champ de taux d'austénite pour les résultats numériques et dureté HV pour les observations expérimentales.	190
Figure 112 : Rappel des 6 cotes mesurées sur les éprouvettes semi-industrielles	190
Figure 113 : Valeur de la cote 1 en fonction du temps dans les différentes conditions d'essai.	193
Figure 114 : Visualisation des déplacements ( $\times 10$ ) de matière dans la pièce en fin de chauffage et champ de déformation sur l'axe Y pour les pièces percée (a) et pleine (b)	194
Figure 115 : Valeur des cotes 2, 3 et 4 en fonction du temps dans les différentes conditions d'essai	194
Figure 116 : Courbes d'évolution des contraintes équivalentes de Von Mises et de déformation plastique équivalente aux points A, B et C des essais LPI et LT1.	195
Figure 117 : Champ de déformation plastique équivalente (en m/m) (a) et de déformation par plasticité de transformation (b) dans une pièce de l'essai LPI, après retour élastique	196
Figure 118 : Domaines de Weiss dans un matériau ferromagnétique	204
Figure 119 : Déplacement des parois de Bloch dans un matériau ferromagnétique plongé dans un champ magnétique H	204
Figure 120 : Courbe d'aimantation présentant une boucle d'hystérésis pour un matériau ferromagnétique plongé dans un champ magnétique qui varie alternativement de $+H_s$ à $-H_s$ .	205
Figure 121 : Variation de l'induction à saturation du fer pur en fonction de la température	205
Figure 122 : Plan du support de bridage	206
Figure 123 : Algorithmique de la factorisation LU	211
Figure 124 : Algorithme de résolution de systèmes linéaires par la méthode du gradient conjugué	215
Figure 125 : Algorithme de résolution de systèmes linéaires par la méthode du gradient conjugué préconditionné	217
Figure 126 : Algorithme de résolution de systèmes linéaires par la méthode du résidu minimal préconditionné	218

---





---

### **Résumé :**

Le traitement thermique des aciers après chauffage par induction localisé est un procédé aujourd'hui répandu, notamment dans l'industrie automobile. Ce type de procédés a fait ses preuves dans le cadre de pièces massives, mais les distorsions générées sont encore parfois insuffisamment maîtrisées lorsqu'il s'agit de tôles minces. PSA-Peugeot-Citroën s'intéresse alors à l'étude et la compréhension des phénomènes en jeu ainsi qu'à la simulation numérique de tels procédés. C'est ainsi dans cette démarche et dans le cadre d'un partenariat entre le Cemef et PSA, que s'inscrit ce travail appliqué au traitement thermique d'un renfort de pied central.

Un procédé aussi complexe nécessite la compréhension de la thermique, de la mécanique, de la métallurgie, de l'électromagnétisme, ainsi que de leurs interactions mutuelles au chauffage comme au refroidissement. Ce travail se trouve alors au carrefour de plusieurs disciplines comme la thermomécanique et l'électromagnétisme, ainsi que les méthodes numériques et l'étude expérimentale. Il fait suite à divers travaux réalisés au laboratoire concernant la thermique ou la mécanique, ainsi qu'une thèse précédente portant sur la modélisation numérique couplée de la trempe. Il constitue également la première approche 3D des procédés de chauffage par induction et des couplages multi physiques qui en découlent.

La présentation de ce travail se décompose en 3 grandes parties. Premièrement, on décrit le contexte industriel, la problématique et l'historique de l'étude du procédé, pour en arriver aux études expérimentales réalisées dans ce travail : une porte sur le procédé industriel et l'autre sur un modèle simplifié que nous avons conçu pour une meilleure compréhension des phénomènes physiques qui génèrent les distorsions. Ces études expérimentales, riches en résultats, soulignent la nécessité d'un outil numérique pour aller encore plus loin dans la compréhension physique du procédé. Nous poursuivons alors sur trois chapitres présentant les modèles numériques par éléments finis, développés et utilisés dans le code de calcul pour simuler les problèmes couplés : thermique / électromagnétisme, mécanique / métallurgie et l'ensemble de la structure couplée. La troisième et dernière partie du rapport traite, d'une part, de la mise en donnée d'un cas semi-industriel ainsi que de la caractérisation des paramètres, et d'autre part, des résultats numériques obtenus et de leur comparaison avec les résultats expérimentaux.

Le modèle développé permet d'estimer dans une première approche les distorsions subies par une structure mince lors de son traitement thermique localisé par induction. Le code de calcul actuel forme une base solide pour de futures évolutions permettant de simuler des problèmes industriels complexes.

**Mots-clés :** traitement thermique, induction, tôles minces, simulation numérique 3D, éléments finis, élément finis d'arête, électromagnétisme, thermomécanique, rhéologie, métallurgie, cinétiques de transformations, multi physique, couplages

---

### **Abstract :**

Heat treatment of steel after localised induction heating is now a widespread process - especially in the automotive industry. This process has proved its reliability in the context of massive parts, but the distortions generated are still often insufficiently controlled when dealing with thin sheets. PSA-Peugeot-Citroën is interested in the analysis and understanding of the phenomena involved, as well as the numerical simulation of such processes. It is therefore within this framework and in within a partnership between PSA and CEMEF that this work has taken place, using as an application the heat treatment of centre pillars.

Such a complex process requires the understanding of heat transfer, solid mechanics, metallurgy, electromagnetism, and their mutual interactions for heating as well as cooling. This work lies at the crossroads of several disciplines such as thermomechanics and electromagnetism, as well as numerical methods and experimental study. It follows various projects carried out in the laboratory dealing with heat transfer or mechanics, as well as a previous thesis focused on a coupled numerical model for quenching. It is also a first 3D approach for induction heating processes and related multiphysics couplings.

The presentation of this work is divided into three main parts. We first describe the industrial context, the problematic and the previous studies carried out on this process, getting then to experimental studies conducted within this work: one is aimed at the industrial process and the other on a simplified model we have developed in order to understand better the physical phenomena which create distortions. These experimental studies, which have provided us with many results, underscore the need for a numerical model in order to get a better in-depth understanding of the physics involved in the process. We then have three chapters devoted to the finite element models developed and used in our computer tool in order to simulate the coupled problems: heat transfer/electromagnetism, solid mechanics/metallurgy as well as the whole coupled structure. The third and last part of this report deals on one hand with the setting up of a semi-industrial cases as well as material parameters identification, and on the other hand with numerical results obtained and their comparison with experimental results.

This model enables us to estimate in a first approach the distortions undergone by a thin structure during localized induction heat treatment. The present computer tool provides us with a solid basis for future developments enabling us to tackle with complex industrial problems.

**Key-words:** heat treatment, induction heating, thin plates, 3D numerical modelling, finite elements, edge finite elements, electromagnetism, thermo mechanics, rheology, metallurgy, solid-state phase change, coupled multi physics

---