



HAL
open science

Contribution à l'optique des ondes atomiques cohérentes - Conception de dispositifs multi-ondes

François Impens

► To cite this version:

François Impens. Contribution à l'optique des ondes atomiques cohérentes - Conception de dispositifs multi-ondes. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Ecole Polytechnique X, 2008. Français. NNT : . tel-00346573

HAL Id: tel-00346573

<https://pastel.hal.science/tel-00346573v1>

Submitted on 11 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Systemes de Référence Temps-Espace

Thèse présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Physique

par

François IMPENS

CONTRIBUTION À L'OPTIQUE DES ONDES ATOMIQUES COHÉRENTES
CONCEPTION DE DISPOSITIFS MULTI-ONDES

Soutenue le 17 Mars 2008 devant le jury composé de :

| | |
|-----------------------|--------------------|
| M. Jean DALIBARD | Président |
| M. Klaus MØLMER | Rapporteur |
| M. François BIRABEN | Rapporteur |
| M. Bruno DESRUELLE | Examineur |
| M. David GUÉRY-ODELIN | Examineur |
| M. Philippe BOUYER | Membre invité |
| M. Christian BORDÉ | Directeur de thèse |

Remerciements.

Ce travail a été réalisé au département SYRTE de l'Observatoire de Paris. Je remercie ses directeurs Philipp Tuckey et Noël Dimarcq de m'avoir accueilli chaleureusement dans leur laboratoire. Je remercie la DGA et le Groupe des Ecoles des Télécommunications, qui ont cofinancé ma thèse. Je remercie les membres du jury, Jean Dalibard, David Guéry-Odelin, Bruno Desruelle, de l'intérêt qu'ils ont témoigné pour ce travail, et particulièrement François Biraben et Klaus Mølmer qui ont accepté la charge de rapporteur du manuscrit.

C'est une rencontre avec Philippe Bouyer et Alain Aspect, lors de la conférence ICAP 2002 au MIT où j'étudiais alors, qui a initié ce projet scientifique. Alain et Philippe m'ont offert la possibilité de travailler dans leur groupe, mais le caractère théorique du travail envisagé, en lien avec les lasers à atomes et les interféromètres atomiques, les a conduit naturellement à solliciter Christian Bordé pour m'encadrer durant ma thèse. Alain Aspect a cependant continué à suivre mon travail avec intérêt, et je l'en remercie vivement.

Je remercie Christian Bordé et Philippe Bouyer d'avoir accompagné mon travail de thèse. Christian a été un directeur de thèse enthousiaste, patient et disponible. Il a toujours eu à coeur de fournir de nouvelles pistes originales, de s'impliquer fortement dans les points durs du projet et de m'aider à progresser en répondant 7j/7 aux diverses questions physiques que je pouvais lui soumettre. Il m'a transmis sa vision de l'optique atomique et fait partager sa recherche avec passion. Il m'a par ailleurs fait confiance en me laissant une certaine autonomie dans l'orientation et la gestion de mon projet de recherche, et en m'incitant à développer des collaborations scientifiques. Philippe m'a beaucoup aidé à inscrire ma recherche dans une perspective utile aux expérimentateurs. Il m'a apporté un soutien enthousiaste et intégré dans plusieurs collaborations en rapport avec mon projet.

Je remercie chaleureusement David Guéry-Odelin, qui m'a aidé sur une partie conséquente de mon travail de thèse. David s'est montré très disponible et les discussions que nous avons eu ont été sources de développements théoriques qui m'ont passionné. Je tiens aussi à remercier particulièrement Arnaud Landragin, avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer sur des propositions expérimentales. Arnaud a fortement contribué, avec l'énergie qu'on lui connaît, aux propositions expérimentales exposées dans ce mémoire et en particulier à les ancrer dans des paramètres expérimentaux réalistes. Je le remercie aussi chaleureusement pour avoir veillé à ce que je puisse réaliser mon travail au laboratoire dans les meilleures conditions matérielles. Je remercie vivement Yann Le Coq, qui m'a été d'une aide précieuse pour la rédaction de plusieurs publications, et avec qui j'ai eu la chance de travailler sur la théorie de l'extraction et la propagation des lasers à atomes.

Je remercie Yann Le Coq, Peter Wolf, Sébastien Bize, André Clairon, et Pierre Lemonde pour m'avoir aidé à préparer ma soutenance. Je les remercie également ainsi que Emericq Declercq et Noël Dimarcq pour des discussions très enrichissantes, notamment sur la faisabilité expérimentale des propositions de ce manuscrit. Je remercie très chaleureusement Noël pour son aide déterminante dans la mise en place de mon postdoc, ce qui m'a aidé à rédiger sereinement ce manuscrit.

J'ai passé de très bons moments à l'Observatoire en dehors des activités scientifiques. J'aimerais remercier mes amis Rodney Guimaraes et Tanja Mehlstaübler, qui ont montré que le plaisir de déguster du bon vin transcendait les différences culturelles, ainsi que les membres du club Astro-Vino et du club Oenologie, notamment les plus fidèles, Cécile, Olivier, Arnaud, Michael, Friedemann, Philipp, Tobias, Jasper. Je souhaite également remercier Patrick Cheinet, mon coach officiel pour le semi-marathon 2005 (un succès!), Benjamin Canuel qui m'a entraîné dans une aventure cyclique mémorable, Arnaud Lecallier et Alexandra Delima pour nos nombreux échanges sur les voyages et sur la culture brésilienne, ainsi qu'Alexandre Gauguet pour les discussions physico-politiques autour de la machine à café. Je remercie Pierre Uhrich pour ses éclairages passionnants sur le cinéma et pour des discussions non moins passionnantes sur la politique, ainsi qu'à Christine et à Claude Catala pour nos nombreux échanges. Merci à Fariza Dahes et à Emeric Declercq pour leur bonne humeur et pour leur sens de l'humour indéfectible. Merci à Ivan Maksimovic et à Elodie pour un heureux compagnonnage de bureau durant quelques mois, et pour les brioches. Merci à tous ceux qui m'ont aidé pour organiser le pot de thèse, notamment Arnaud Lecallier. Merci à ceux qui ont contribué à la bonne ambiance qui règne au labo Jean-Yves, Frédéric, Rodolphe, Clément, Julien, Xavier, François-Xavier, Stéphanie, Loic, Jacques, Amandine...

Enfin, je souhaite témoigner ma reconnaissance à l'égard de ma famille et de mes amis qui m'ont fait traverser joyeusement ces années de recherche.

Table des matières

| | |
|---|----------|
| Introduction | 1 |
| 1 Introduction à la propagation des sources atomiques cohérentes. | 7 |
| 1.1 Qu'est-ce qu'une source atomique cohérente? | 8 |
| 1.1.1 Notion de champ atomique. | 9 |
| 1.1.2 Cohérence d'un champ électromagnétique. | 11 |
| 1.1.2.1 Théorie classique de la cohérence : fonction de cohérence mutuelle. | 11 |
| 1.1.2.2 Au delà des mesures d'intensité : théorie quantique de la cohérence. | 12 |
| 1.1.2.3 Allure des corrélations pour des champ cohérents et incohérents. | 14 |
| 1.1.3 Cohérence d'un champ atomique. | 16 |
| 1.1.3.1 Définition. | 16 |
| 1.1.3.2 Lien entre cohérence et matrice densité : lien avec l'optique. | 16 |
| 1.1.3.3 Cohérences pour un condensat dans un état de Fock. | 17 |
| 1.1.3.4 Cohérences d'un gaz de bosons idéal à l'équilibre. | 17 |
| 1.1.3.5 Etudes expérimentales de la cohérence d'une source atomique. | 17 |
| 1.1.4 Représentation dans l'espace des phases. | 18 |
| 1.1.4.1 Principe de la représentation de Wigner. | 18 |
| 1.1.4.2 Distribution de Wigner associée à un faisceau atomique. | 18 |
| 1.1.4.3 Relation entre cohérence et distribution de Wigner. | 20 |
| 1.1.4.4 Distribution de Wigner pour un faisceau optique. | 21 |
| 1.1.4.5 Cohérence et densité dans l'espace des phases : notion de facteur de qualité. | 21 |
| 1.1.5 Conclusion. | 22 |
| 1.2 Propagation d'une source atomique cohérente : quelques rappels théoriques. | 23 |
| 1.2.1 Comparaison entre les propagations d'un champ atomique et d'un champ pho- tonique. | 23 |
| 1.2.1.1 Propagation libre en relativité générale. | 24 |
| 1.2.1.2 Propagation libre en relativité restreinte : Equation de Klein-Gordon. | 24 |

| | | |
|---------|---|----|
| 1.2.1.3 | Symétrie du terme d'interaction entre champ atomique et électromagnétique. | 25 |
| 1.2.1.4 | Différence entre optique atomique et photonique. | 25 |
| 1.2.2 | Lagrangien associé au champ atomique. | 26 |
| 1.2.2.1 | Lagrangien fondamental. | 26 |
| 1.2.2.2 | Lagrangien associé à un champ atomique non relativiste comportant un seul état interne. | 26 |
| 1.2.2.3 | Lagrangien associé à un champ atomique non relativiste comportant plusieurs états internes couplés. | 27 |
| 1.2.3 | Notion de propagateur. | 28 |
| 1.2.3.1 | Expression du propagateur comme corrélation de deux champs quantiques. | 28 |
| 1.2.3.2 | Expression du propagateur à l'aide d'une fonction de Green. | 28 |
| 1.2.3.3 | Expression du propagateur à l'aide de l'opérateur d'évolution. | 29 |
| 1.2.3.4 | Expression du propagateur par une intégrale de chemin. | 30 |
| 1.2.3.5 | Intégrale de propagation. | 30 |
| 1.2.3.6 | Propagation d'états à une particule. | 31 |
| 1.2.4 | Modélisation des interactions dans un champ atomique cohérent. | 32 |
| 1.2.4.1 | Nuage de bosons. | 32 |
| 1.2.4.2 | Nuage de fermions. | 33 |
| 1.2.5 | Equation d'évolution du champ atomique cohérent. | 33 |
| 1.2.5.1 | Approximation de température nulle. | 33 |
| 1.2.5.2 | Equation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps. | 34 |
| 1.2.5.3 | Analogie avec l'optique non linéaire. | 34 |
| 1.2.6 | Propagation d'un nuage atomique cohérent dilué : propagation ABCD. | 35 |
| 1.2.6.1 | Propagateur $ABCD$ | 36 |
| 1.2.6.2 | Evolution $ABCD$ des opérateurs position et impulsion en représentation de Heisenberg. | 37 |
| 1.2.6.3 | Théorème $ABCD$ pour un mode gaussien fondamental. | 38 |
| 1.2.6.4 | Extension à la propagation d'une fonction d'onde initiale arbitraire. | 39 |
| 1.2.7 | Loi d'expansion en régime de Thomas-Fermi dépendant du temps. | 41 |
| 1.2.8 | Conclusion. | 43 |
| 1.3 | Manipulation du champ atomique par un champ électromagnétique. | 44 |
| 1.3.1 | Interaction d'un atome à deux niveaux avec un champ électromagnétique externe oscillant. | 45 |

| | | |
|---------|---|----|
| 1.3.2 | Diffusion à deux photons sur un atome à trois niveaux. | 46 |
| 1.3.2.1 | Processus de diffusion résonnants. | 47 |
| 1.3.2.2 | Définition du paramètre de non-résonance. | 51 |
| 1.3.2.3 | Matrice de Rabi effective associée à une impulsion à deux photons. | 51 |
| 1.3.3 | Structuration d'une onde atomique par un champ électromagnétique uniforme. | 53 |
| 1.3.3.1 | Equation d'évolution du spineur. | 53 |
| 1.3.3.2 | Passage dans la représentation associée au référentiel accéléré. | 53 |
| 1.3.3.3 | Résolution dans la nouvelle représentation. | 55 |
| 1.3.3.4 | Détermination des vitesses de groupe dans la séparatrice. | 56 |
| 1.3.3.5 | Effet Borrmann. | 57 |
| 1.3.3.6 | Interprétation des relations de dispersion : renormalisation de la masse en présence du champ électrique. | 58 |
| 1.3.3.7 | Expression générale de la matrice de diffusion. | 59 |
| 1.3.4 | Conclusion. | 60 |
| 1.4 | Conclusion. | 61 |

2 Senseur à atomes en lévitation : Principe, Modélisation et Analyse de Stabilité. 65

| | | |
|---------|---|----|
| 2.1 | Description de l'expérience. | 65 |
| 2.1.1 | Principe de la mesure de l'accélération gravitationnelle. | 65 |
| 2.1.2 | Réalisation des "impulsion-miroir". | 66 |
| 2.1.2.1 | Processus envisagés pour la lévitation. | 67 |
| 2.1.2.2 | "Impulsion-miroir" retenue : double impulsion Raman. | 68 |
| 2.1.3 | Description d'un cycle effectué par l'échantillon atomique. | 70 |
| 2.1.3.1 | Description de la séquence temporelle. | 70 |
| 2.1.3.2 | Représentation du mouvement dans l'espace des impulsions. | 70 |
| 2.1.4 | Conditions de résonance. | 72 |
| 2.1.5 | Conséquence d'un écart à la résonance. | 73 |
| 2.1.5.1 | Ecart à la période résonante. | 73 |
| 2.1.5.2 | Ecart à la fréquence résonante | 74 |
| 2.1.5.3 | Comparaison de la stabilité des deux conditions de résonance. | 75 |
| 2.1.6 | Conclusion | 75 |
| 2.2 | Analyse semi-classique des performances du dispositif. | 76 |
| 2.2.1 | Evaluation de la sensibilité | 76 |
| 2.2.2 | Durée optimale des "impulsions-miroir" : compromis entre sélection et population. | 79 |
| 2.2.3 | Nécessité d'appliquer une rampe de fréquence. | 81 |

| | | |
|---------|---|-----|
| 2.2.4 | Quel nuage utiliser dans le dispositif? | 82 |
| 2.2.4.1 | Température cinétique de l'échantillon. | 82 |
| 2.2.4.2 | Densité de l'échantillon. | 84 |
| 2.2.5 | Pertes intrinsèques du résonateur. | 85 |
| 2.2.5.1 | Pertes d'origine technique. | 86 |
| 2.2.5.2 | Limitations fondamentales. | 86 |
| 2.2.6 | Conclusion | 87 |
| 2.3 | Modélisation Quantique du Système. | 88 |
| 2.3.1 | Quelle modélisation adopter? | 88 |
| 2.3.2 | Dynamique du nuage atomique : modélisation par un Hamiltonien effectif quadratique. | 89 |
| 2.3.3 | Modélisation du nuage atomique en lévitation. | 89 |
| 2.3.4 | Modélisation non-dispersive des séparatrices. | 90 |
| 2.3.5 | Conclusion : expression générale du spineur atomique. | 92 |
| 2.4 | Analyse quantique multidimensionnelle du senseur atomique. | 94 |
| 2.4.1 | Expansion initiale du nuage atomique. | 94 |
| 2.4.2 | Evolution du nuage atomique durant un cycle. | 95 |
| 2.4.2.1 | Evolution du spineur atomique lors d'une "impulsion-miroir" plane. | 96 |
| 2.4.2.2 | Evolution du spineur atomique entre deux interactions instantanées. | 97 |
| 2.4.3 | Matrice des variances. | 98 |
| 2.4.4 | Stabilité transverse du résonateur. | 100 |
| 2.4.4.1 | Expansion du nuage en l'absence de refocalisation. | 100 |
| 2.4.4.2 | Définition d'une lentille en optique atomique. | 102 |
| 2.4.4.3 | Focalisation nécessaire à la stabilisation du nuage. | 103 |
| 2.4.5 | Conclusion. | 104 |
| 2.5 | Conclusion. | 104 |

3 Senseur à atomes en lévitation : Contexte Experimental, Aspects fondamentaux.107

| | | |
|---------|---|-----|
| 3.1 | Comparaison de l'expérience proposée à d'autres dispositifs gravimétriques. | 107 |
| 3.1.1 | Gravimètre à interférométrie atomique. | 108 |
| 3.1.1.1 | Principes fondamentaux. | 108 |
| 3.1.1.2 | Description de l'expérience. | 110 |
| 3.1.1.3 | Limitations de ce dispositif. | 111 |
| 3.1.1.4 | Comparaison avec le gravimètre à lévitation par "impulsion-miroir". | 112 |

| | | |
|---------|---|-----|
| 3.1.2 | Comparaison entre gravimètre à oscillations de Bloch et gravimètre à lévitation par “impulsion-miroir”. | 112 |
| 3.1.2.1 | Description du gravimètre à oscillations de Bloch. | 113 |
| 3.1.2.2 | Modélisation par états de Bloch. | 114 |
| 3.1.2.3 | Différences dans la réflexion du nuage. | 115 |
| 3.1.2.4 | Structuration de la propagation atomique par une onde lumineuse Raman et par une onde lumineuse stationnaire. | 117 |
| 3.1.2.5 | Conclusion. | 120 |
| 3.1.3 | Conclusion. | 120 |
| 3.2 | Aire interférométrique en présence d’un champ électromagnétique : un paradoxe original. | 121 |
| 3.2.1 | Absence de sensibilité en régime d’impulsions brèves. | 122 |
| 3.2.2 | Exposé du paradoxe. | 122 |
| 3.2.3 | Rôle joué par les rampes de fréquence. | 123 |
| 3.2.4 | Aire interférométrique : Trajectoires renormalisées vs trajectoires simples. | 124 |
| 3.2.5 | Diagrammes assurant la lévitation des atomes. | 129 |
| 3.2.6 | Conclusion. | 131 |
| 3.3 | Conclusion. | 131 |

4 Interféromètre de Bordé-Ramsey multi-ondes en lévitation.

133

| | | |
|---------|--|-----|
| 4.1 | Description de l’expérience. | 133 |
| 4.1.1 | Optimisation de l’aire interférométrique dégagée par les diagrammes lévitants. | 134 |
| 4.1.2 | Lien avec les interféromètres de Ramsey. | 137 |
| 4.1.2.1 | Principe de la spectroscopie de Ramsey. | 137 |
| 4.1.2.2 | Analogie avec les interféromètres atomiques précédents. | 138 |
| 4.1.2.3 | Conclusion. | 139 |
| 4.1.3 | Succession d’interféromètres. | 139 |
| 4.1.4 | Lévitation résonnante. | 141 |
| 4.1.4.1 | Conditions de résonance dans le référentiel en chute libre. | 141 |
| 4.1.4.2 | Conditions de résonance dans le référentiel du laboratoire. | 143 |
| 4.1.4.3 | Ecart à la résonance. | 145 |
| 4.1.5 | Représentation énergie-impulsion. | 146 |
| 4.1.6 | Conclusion. | 147 |
| 4.2 | Analyse quantique complète de l’interféromètre multi-ondes. | 150 |
| 4.2.1 | Propagation du champ atomique dans la série d’impulsions lumineuses. | 150 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.2.2 | Action de deux impulsions $\pi/2$ sur un nuage atomique en chute libre. | 153 |
| 4.2.2.1 | Evolution dans le référentiel en chute libre. | 154 |
| 4.2.2.2 | Evolution dans le référentiel du laboratoire. | 156 |
| 4.2.2.3 | Influence du mouvement atomique externe sur le contraste des franges de Ramsey. | 158 |
| 4.2.3 | Propagation multi-arches. | 160 |
| 4.2.4 | Analyse d'un cycle interférométrique. | 161 |
| 4.2.5 | Evolution du spineur au cours de plusieurs cycles interférométriques. | 164 |
| 4.2.5.1 | Principe et paramètres de la simulation. | 164 |
| 4.2.5.2 | Interprétation des résultats. | 165 |
| 4.3 | Conclusion. | 168 |
| 5 | Diffusion d'une onde atomique sur un champ électromagnétique gaussien. | 169 |
| 5.1 | Eléments utiles au calcul de diagrammes de Feynman avec un champ électromagnétique externe. | 169 |
| 5.1.1 | Champ électromagnétique externe. | 170 |
| 5.1.1.1 | Diffusion par absorption simple. | 171 |
| 5.1.1.2 | Diffusion par processus Raman. | 171 |
| 5.1.2 | Expression du Hamiltonien électromagnétique en représentation d'interaction. | 171 |
| 5.1.3 | Action d'un vertex d'interaction sur l'état quantique. | 172 |
| 5.2 | Diagramme à un vertex : réalisation d'une lentille atomique par une impulsion électromagnétique gaussienne. | 175 |
| 5.2.1 | Lien entre fonctions de courbure et focalisation. | 176 |
| 5.2.2 | Expression de l'onde atomique diffusée en représentation interaction. | 177 |
| 5.2.3 | Onde diffusée dans le référentiel du laboratoire. | 178 |
| 5.2.4 | Lentille atomique réalisée. | 180 |
| 5.2.5 | Changement de courbure entre les impulsions successives. | 181 |
| 5.2.6 | Conclusion. | 182 |
| 5.3 | Calcul de diagrammes de Feynman à deux vertex d'interaction : influence de la courbure du champ sur une horloge atomique. | 183 |
| 5.3.1 | Notations. | 184 |
| 5.3.2 | Calcul du diagramme à deux vertex en représentation interaction. | 185 |
| 5.3.3 | Effet de la courbure sur les fréquences de résonance de l'interféromètre vertical. | 186 |
| 5.3.4 | Conclusion. | 188 |
| 5.4 | Conclusion. | 188 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6 | Evolution d'un nuage atomique condensé dans l'espace des phases : la méthode des moments. | 191 |
| 6.1 | Equation de propagation dans l'espace des phases. | 193 |
| 6.1.1 | Equations de propagation d'un nuage unidimensionnel sans interactions. | 193 |
| 6.1.1.1 | Propagation dans un potentiel quadratique. | 193 |
| 6.1.1.2 | Propagation dans un potentiel extérieur quelconque. | 195 |
| 6.1.1.3 | Reformulation en termes de Liouvillien. | 196 |
| 6.1.2 | Propagation de distributions de Wigner en présence d'interactions. | 198 |
| 6.1.2.1 | Propagation avec un potentiel d'interaction général. | 198 |
| 6.1.2.2 | Interactions de contact. | 199 |
| 6.1.3 | Propagation de nuages multidimensionnels | 200 |
| 6.1.4 | Comparaison avec l'équation de propagation d'un gaz classique. | 201 |
| 6.2 | Evolution des moments d'un nuage atomique condensé. | 203 |
| 6.2.1 | Définition du moment. | 203 |
| 6.2.2 | Equations du mouvement. | 204 |
| 6.2.2.1 | Méthode des contractions sur un exemple unidimensionnel. | 204 |
| 6.2.2.2 | Généralisation de la méthode des contractions à l'équation multidimensionnelle. | 205 |
| 6.2.3 | Formulation algébrique. | 208 |
| 6.2.3.1 | Retour sur la formulation Liouvillienne. | 209 |
| 6.2.3.2 | Potentiel extérieur quadratique. | 210 |
| 6.2.3.3 | Représentation en diagrammes. | 211 |
| 6.2.4 | Quels sont les moments porteurs d'une dynamique quantique? | 211 |
| 6.2.4.1 | Potentiel extérieur cubique (sans interactions). | 212 |
| 6.2.4.2 | Potentiel extérieur quadratique avec interactions de contact. | 213 |
| 6.3 | Propagation classique dans l'espace des phases. | 216 |
| 6.3.1 | Propagation de Wigner classique en régime de Thomas-Fermi : loi d'expansion. | 217 |
| 6.3.2 | Propagation de Wigner dans un potentiel extérieur quadratique en l'absence d'interactions : théorème ABCD dans l'espace des phases. | 220 |
| 6.3.3 | Annulation du déplacement de fréquence pour un nuage confiné dans un piège bidimensionnel. | 225 |
| 6.3.3.1 | Transformation d'échelle du potentiel de contact à deux dimensions. | 225 |
| 6.3.3.2 | Equation de Wigner classique. | 226 |
| 6.3.3.3 | Le spectre de l'oscillateur harmonique provient d'une symétrie du Hamiltonien. | 229 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6.3.3.4 | Invariance de la symétrie lors de l'ajout d'un potentiel d'interaction satisfaisant la relation d'échelle. | 230 |
| 6.4 | Comparaison de la méthode des moments avec l'approche variationnelle pour des nuages atomiques gaussiens. | 232 |
| 6.4.1 | Interactions dipolaires. | 233 |
| 6.4.2 | Approche variationnelle du mouvement de nuages condensés. | 234 |
| 6.4.3 | Application de la méthode des moments au mouvement de nuages condensés. | 236 |
| 6.4.4 | Confrontation expérimentale : application à la détermination des modes de basse énergie d'un condensat cylindrique. | 240 |
| 6.5 | Conclusion | 242 |
| 7 | Propagation $ABCD$ généralisée des ondes de matière en présence d'interactions. | 243 |
| 8 | Outils théoriques pour la propagation de lasers à atomes. | 269 |
| 9 | Facteur de qualité d'un faisceau d'ondes de matière. | 283 |
| | Conclusion | 289 |
| A | Fonctions de cohérence pour différents états quantiques du champ atomique et électromagnétique. | 293 |
| A.1 | Fonctions de corrélation et détection à plusieurs photons. | 293 |
| A.1.1 | Rappels sur le champ électromagnétique quantifié. | 293 |
| A.1.2 | Cohérence de premier ordre. | 294 |
| A.1.3 | Cohérences d'ordre plus élevé. | 294 |
| A.2 | Fonctions de cohérence pour quelques états du champ atomique. | 295 |
| A.2.1 | Cohérences d'un condensat dans un état-nombre. | 295 |
| A.2.1.1 | Cohérences d'un gaz de Bosons idéal à l'équilibre. | 296 |
| B | Rappels de théorie des champs. | 299 |
| B.1 | Principe de moindre action. | 299 |
| B.2 | Opérateur d'ordonnement temporel. | 300 |
| C | Modélisation des interactions atomiques à basse température. | 303 |
| C.1 | Collision à deux corps. | 303 |
| C.2 | Pseudo-potentiel de contact. | 304 |
| C.3 | Au delà de l'approximation de champ moyen : quelques méthodes. | 305 |

| | | |
|----------|--|------------|
| D | Evolution d'un système à deux niveaux dans un champ électromagnétique | 307 |
| E | Calcul heuristique de la sensibilité du gravimètre. | 311 |
| F | Coefficient de reflexion des "impulsions-miroir" en fonction de la température. | 315 |
| G | Validité de la modélisation non-dispersive. | 319 |
| H | Calcul de l'amplitude diffusée dans le référentiel du laboratoire. | 321 |
| I | Appendice : effet de la courbure sur les fréquences d'horloge. | 327 |
| | I.1 Calcul du diagramme à deux vertices en représentation interaction. | 327 |
| | I.2 Effet de la courbure du champ sur la fréquence de résonance de l'horloge atomique. . | 330 |
| J | Approche variationnelle de l'évolution de nuages gaussiens. | 333 |
| | J.1 Calcul du Lagrangien effectif. | 333 |
| | J.2 Equations du mouvement des largeurs du nuage. | 335 |
| K | Publications sur les senseurs à atomes en lévitation. | 339 |

Introduction

Motivation.

Les progrès effectués au cours de ces deux dernières décennies dans les techniques de refroidissement d'atomes ont permis d'explorer avec la matière des états quantiques auparavant réservés à la lumière. La percée la plus spectaculaire fut sans conteste la réalisation d'un condensat de Bose-Einstein, constituant un véritable analogue atomique du laser : le champ atomique d'un condensat, comme le champ photonique d'un laser, est dans un état quantique peuplant macroscopiquement un mode. Cette analogie a conduit une large partie de la communauté à désigner sous l'appellation de "laser à atomes", ou de source atomique cohérente, un faisceau d'ondes de matière extrait à partir d'un condensat.

On a pu dire, lors de l'invention du laser, que celui-ci constituait "une solution sans problème". En effet, l'utilité technologique et scientifique de disposer d'une source lumineuse pleinement cohérente et collimatée était alors mal perçue. A l'aune de la diversité actuelle des applications scientifiques et technologiques des lasers, une telle affirmation semblerait aujourd'hui pour le moins dénuée de fondement. Les sources atomiques cohérentes connaissent des débuts semblables : bien que la réalisation d'un faisceau d'ondes de matière cohérent et quasi-continu ait suscité un engouement considérable dans la communauté lié à la prouesse expérimentale réalisée, les applications potentielles de ces sources atomiques cohérentes sont encore loin d'avoir été entièrement explorées. Les dispositifs métrologiques (tels que horloges et gravimètres) à interférométrie atomique constituent un champ d'investigation particulièrement prometteur. Ces systèmes, qui ont utilisé jusqu'ici des nuages atomiques incohérents, pourraient désormais impliquer des sources atomiques pleinement cohérentes. Cela constituerait un changement qualitatif important, qui de façon imagée équivaldrait à remplacer la lumière d'une lampe de poche par celle d'un laser dans ces interféromètres.

Le développement d'applications des lasers à atomes doit aller de pair avec celui d'outils théoriques performants pour modéliser les nouvelles expériences envisagées. La propagation de nuages froids est souvent calculée au moyen de simulations numériques d'une équation aux dérivées par-

tielles non-linéaire (équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps). Si la résolution d'une telle équation est requise lorsque l'on détermine l'évolution de nuages atomiques denses, elle peut souvent être contournée lorsque l'on considère la propagation de lasers à atomes généralement relativement dilués. Contrairement à certaines idées reçues, les interactions entre atomes ne sont pas fondamentalement différentes des interactions entre photons : si les photons sont les vecteurs des interactions électromagnétiques entre atomes, les atomes sont bien les vecteurs des interactions entre photons dont une manifestation est l'effet Kerr. Tout porte à croire que les outils développés en optique peuvent être appliqués de façon pertinente aux sources atomiques cohérentes. Une optique des lasers à atomes, intégrant de façon correcte des interactions atomiques modérées, reste à construire.

Contribution.

Ce mémoire apporte une double contribution à l'optique atomique : la conception de systèmes métrologiques impliquant des résonateurs à ondes de matières, et le développements de nouveaux outils théoriques pour appréhender la propagation d'ondes de matière cohérentes.

Dans un premier volet, nous exposons deux propositions expérimentales de senseurs atomiques reposant sur un résonateur à ondes de matière. Ces systèmes sont fondés sur l'interaction d'un nuage atomique avec une série périodique d'impulsions lumineuses progressives. La première proposition, en cours de réalisation expérimentale, repose sur la lévitation d'un échantillon atomique au moyen d'une série périodique de miroirs lumineux. La seconde proposition consiste en un interféromètre atomique à ondes multiples qui s'apparente à une succession d'interféromètres de Bordé-Ramsey en lévitation. La simplicité de ces systèmes permet d'envisager un traitement quantique complet sans intervention de modèles phénoménologiques. Ces expériences sont en fait un excellent laboratoire pour étudier de façon fondamentale l'interaction lumière-matière en présence de champs gravito-inertiels. Au niveau le plus fondamental, les systèmes proposés font intervenir trois champs couplés : le champ atomique, le champ lumineux, et les champs gravito-inertiels.

La conception du piégeage atomique dans ces dispositifs présente une originalité double. D'un point de vue pratique, ces systèmes ont la particularité de faire coïncider le système de piégeage avec le système d'interrogation, dégageant le concept de "piège métrologique" : à chaque résonateur piégeant les atomes sont associées des conditions de résonance déterminant la capacités de mesure du dispositif. D'un point de vue théorique, le mode de confinement envisagé, non pas dans l'espace des positions mais dans l'espace des impulsions, est extrêmement novateur. Dans les deux systèmes,

le mouvement impulsionnel des paquets d'ondes atomiques en présence est stabilisé autour d'une trajectoire périodique. Il s'agit par ailleurs d'une particularité de l'optique atomique par rapport à l'optique photonique.

L'analyse de ces propositions expérimentales nous a conduit à d'autres considérations théoriques. D'une part nous formulons et nous résolvons un paradoxe relatif à la sensibilité de l'une des propositions expérimentales, qui permet de discuter la notion d'aire interférométrique en présence d'un champ lumineux. D'autre part un nouveau processus de focalisation d'ondes de matière est présenté, impliquant la diffusion d'ondes atomiques sur des ondes lumineuses de front d'onde sphérique.

La précision attendue pour ces dispositifs augmente avec la durée de vie des atomes dans le résonateur à ondes de matière. Cette durée dépend essentiellement de la finesse impulsionnelle du nuage atomique, ce qui fait des échantillons atomiques cohérents (de dispersion de vitesses subrecul) des candidats idéaux pour les dispositifs présentés, par ailleurs susceptibles de fonctionner de façon moins performante avec des sources atomiques incohérentes. Il y a là un parallèle intéressant avec l'optique : de même qu'il est plus aisé d'obtenir de hautes intensités dans une cavité optique en l'illuminant avec un faisceau laser plutôt qu'avec un faisceau incohérent, il est plus facile de maintenir un nombre élevé d'atomes dans un résonateur à ondes de matière en la chargeant avec un condensat plutôt qu'avec un nuage froid incohérent.

Dans un second volet, nous développons des outils théoriques permettant d'appréhender la propagation de nuages atomiques cohérents. Nous exposons une formulation de la propagation dans l'espace des phases, fondée sur l'évaluation de moments associés au nuage. Cette approche, impliquant l'équation de Wigner tronquée, permet de retrouver un certain nombre de résultats importants relatifs à la dynamique de condensats dans des modes de basse énergie. Nous exposons ensuite une généralisation de la méthode *ABCD* de propagation des ondes atomiques incluant de façon perturbative les interactions entre atomes. Ce traitement s'inspire de méthodes développées en optique pour inclure l'effet Kerr dans la propagation des lasers. Le chapitre suivant expose de nouveaux outils théoriques permettant une détermination efficace du profil d'un laser à atomes extrait à partir d'un condensat. La propagation d'ondes de matière au travers d'une discontinuité de potentiel, générée par les interactions du faisceau émis avec la source atomique, est traitée au moyen d'une approximation dans les intégrales de chemins et d'une équation intégrale traduisant la résolution d'une équation aux dérivées partielles avec condition aux limites. Cette étude a été menée en collaboration avec l'Institut d'Optique et notamment Jean-Félix Riou, Yann LeCoq et William Guérin. Nous proposons enfin la définition d'un nouveau facteur de qualité pour les faisceaux atomiques, transposant la caractérisa-

tion des faisceaux lasers optiques. Un autre facteur de qualité avait été défini précédemment pour les lasers à atomes [1], mais celui-ci n'était approprié que pour un régime particulier de propagation.

Plan du manuscrit.

Le Chapitre 1 présente le bagage théorique nécessaire à la compréhension des développements présentés dans ce manuscrit : notion de cohérence pour une source atomique, formalisme de propagation des ondes de matière, théorie des séparatrices lumineuses. Il ne comporte donc pas de résultats nouveaux, mais simplement une présentation personnelles de concepts bien établis.

La première partie traite de la conception de capteurs atomiques multi-ondes. Un procédé de focalisation des ondes de matière adapté à ces systèmes est également exposé. Cette partie est organisée selon quatre chapitres.

Le Chapitre 2 expose un capteur fondé sur la lévitation d'un nuage atomique sur une série de miroirs lumineux. Les publications correspondantes figurent dans l'annexe K.

Le Chapitre 3 compare ce dispositif à l'état de l'art des gravimètres atomiques et discute la notion d'aire interférométrique en exploitant un paradoxe original.

Le Chapitre 4 expose un senseur multi-ondes fondé sur une succession d'interféromètres de Bordé-Ramsey en lévitation. La publication correspondante, soumise à *Phys. Rev. Lett.*, est jointe à l'annexe K.

Le Chapitre 5 expose la focalisation d'une onde atomique par une onde lumineuse gaussienne.

La seconde partie expose de nouveaux outils théoriques pour l'optique des ondes de matière cohérentes. Elle est organisée en quatre chapitres et rédigée sur le mode de la "thèse par articles" : les chapitres 7, 8 et 9 correspondent à des publications ayant été soumises à la revue *Phys. Rev. A*.

Le Chapitre 6 expose une méthode de propagation des nuages atomiques dans l'espace des phases¹. La contribution principale est de montrer la validité de l'équation de Wigner tronquée en étudiant

1. Cette méthode, qui implique l'équation de Wigner et les moments en position et impulsion du nuage, n'est pas nouvelle.

plusieurs régimes de propagation - absence d'interactions, régime de Thomas Fermi, interactions décroissant en $1/r^2$ -, et en comparant les prédictions de cette équation avec celles obtenues par une approche variationnelle (pour la dynamique des modes de basse énergie)². Par ailleurs, une formulation élégante et originale de l'évolution des moments est développée.

Le Chapitre 7 expose la généralisation de la propagation ABCD. La publication correspondante est en cours d'examen par l'éditeur.

Le Chapitre 8 expose plusieurs outils théoriques permettant d'appréhender la propagation des lasers à atomes. L'article correspondant a été publié.

Le Chapitre 9 expose la définition d'un nouveau facteur de qualité permettant de caractériser les faisceaux d'ondes de matière. L'article correspondant a été publié.

2. D'autres études validant cette équation ont été réalisées avec une approche différente [2].

Introduction à la propagation des sources atomiques cohérentes.

“Every theoretical physicist who is any good knows six or seven theoretical representations for exactly the same physics.”

Nous présentons dans ce chapitre plusieurs concepts fondamentaux sur les sources atomiques cohérentes, qui serviront de fil rouge à l’analyse et à la modélisation des expériences exposées ultérieurement dans ce mémoire.

Les sources cohérentes présentent des différences importantes par rapport aux nuages froids incohérents tels que ceux issus d’un piège magnéto-optique. Leur réalisation expérimentale a été rendue possible avec l’avènement des condensats de Bose-Einstein [3]. Parallèlement, des études théoriques ont montré que le phénomène d’amplification stimulée concernait aussi bien la matière que la lumière [4, 5, 6, 7]. Ces travaux ont abouti à la modélisation de lasers à atomes [8, 9].

La première partie de ce chapitre introduit la notion de champ atomique cohérent. Nous rappelons brièvement le formalisme de seconde quantification, permettant de construire un champ atomique à partir d’une base d’états propres du Hamiltonien. Nous exposons ensuite le concept de cohérence pour un champ électromagnétique, puis pour un champ atomique. Nous montrons notamment la relation qui existe entre la cohérence du champ et sa représentation de Wigner. Ceci justifie la pertinence des méthodes de propagation dans l’espace des phases exposées en seconde partie de ce mémoire : celles-ci donnent un éclairage sur l’évolution de la cohérence d’un faisceau d’ondes atomiques.

0. Tout théoricien un tant soit peu doué connaît au moins six ou sept représentations théoriques pour exactement la même physique. Richard Feynman, *The Character of Physical Law* (MIT Press, 1965), p. 168.

La deuxième partie expose plusieurs résultats essentiels sur la propagation des sources atomiques cohérentes. Nous établissons un parallèle entre la propagation d'un champ atomique et celle d'un champ photonique. Nous présentons plusieurs outils théoriques importants pour appréhender la propagation de sources atomiques : Lagrangien, propagateur, formalisme $ABCD$. Nous détaillons notamment la modélisation des interactions, et nous obtenons une équation de propagation pour le champ atomique cohérent, en faisant appel à des approximations courantes dans le traitement de nuages condensés.

La troisième partie expose les procédés de manipulation du champ atomique par un champ électromagnétique. Cet opération permet de construire des éléments d'optique atomique, qui sont une composante essentielle des expériences exposées dans ce mémoire. Ces éléments réalisent des transferts de quantité de mouvement ou de moment cinétique du champ électromagnétique vers le champ atomique. Afin d'en préserver la cohérence, ces transferts doivent faire intervenir des processus cohérents, c'est à dire n'induisant pas de fluctuations aléatoires dans le champ atomique. Ils peuvent être effectués au moyen de diffusions à un ou plusieurs photons. Nous commençons cette partie par un bref rappel des résultats sur l'interaction d'un atome semi-classique à deux niveaux avec un champ électromagnétique. Nous exposons ensuite les processus à plusieurs photons, en discutant les conditions de résonance associées. Ces processus, qui permettent de réaliser un transfert d'impulsion important en exploitant deux niveaux proches en énergie, jouent un rôle important dans la première expérience exposée. Enfin, nous considérons la diffusion d'un paquet d'ondes atomiques sur une onde électromagnétique plane. Nous présentons les résultats de Charles Antoine et Christian Bordé sur les séparatrices temporelles [10], qui concernent directement les expériences proposées dans ce mémoire impliquant de telles séparatrices.

1.1 Qu'est-ce qu'une source atomique cohérente ?

Le cadre théorique adapté pour comprendre l'interférométrie atomique est celui de la théorie quantique des champs. Aussi commençons nous cet exposé par un bref rappel de la notion d'opérateur champ atomique. Ces opérateurs ont été introduits par Christian Bordé [11].

La particularité des sources atomiques considérées dans ce mémoire est leur caractère cohérent. La cohérence est avant tout un concept d'optique [12]. Il y a en fait une grande similitude entre les faisceaux optiques et atomiques. Ces deux champs ont des caractéristiques si proches que l'appellation de "Laser à atomes" s'est imposée pour décrire des faisceaux atomiques cohérents. En exploitant cette

analogie, nous allons étendre la notion de cohérence au champ atomique. Nous présentons enfin le lien étroit entre la cohérence d'un faisceau d'ondes (électromagnétiques ou atomiques) et sa représentation dans l'espace des phases.

1.1.1 Notion de champ atomique.

Considérons un système de N particules. La quantification la plus traditionnelle d'un tel système consiste à considérer une fonction d'onde à N particules :

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) \quad (1.1)$$

Ce formalisme de première quantification a permis d'établir de nombreuses propriétés physiques de nuages d'atomes froids. Cependant, pour des raisons théoriques et des raisons pratiques, il est souvent préférable de raisonner en termes de champs quantiques. Les atomes apparaissent alors comme les quanta d'excitation d'un champ atomique au même titre que les photons sont les quanta d'excitation d'un champ électromagnétique.

D'un point de vue théorique, seule la formulation en termes de champs quantifiés est cohérente avec le principe de causalité. En effet, un formalisme de fonctions d'ondes en première quantification conduit vite à une violation de cette prescription causale. D'un point de vue pratique, l'emploi de la théorie des champs permet d'appliquer des outils mathématiques puissants (propagateurs, intégrales de chemin, groupe de renormalisation) et d'établir une analogie parfaite entre la physique des atomes froids et l'optique quantique. La seconde quantification est détaillée dans de nombreux ouvrages de référence [13, 14]. Nous rappelons ici simplement les définitions des opérateurs champs.

Soit un système de N atomes identiques comportant plusieurs états internes (et un moment dipolaire \mathbf{d} associé) et régis par un Hamiltonien H :

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_k^2}{2m} + U^0(\hat{\mathbf{r}}_k) + \hat{\mathbf{d}}_k \cdot \mathbf{E} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k \neq l=1}^N V(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l) \quad (1.2)$$

Considérons le Hamiltonien à un corps :

$$\hat{H}_0 = \hat{\mathbf{p}}^2/2m + U^0(\hat{\mathbf{r}}) \quad (1.3)$$

ayant les états $|\phi_{\mathbf{n}}, i\rangle$ de fonction d'onde $\phi_{\mathbf{n}}$ et d'états internes i pour états propres¹ :

$$\hat{H}_0 |\phi_{\mathbf{n}}, i\rangle = E_{\mathbf{n}} |\phi_{\mathbf{n}}, i\rangle \quad (1.4)$$

On associe à chaque état propre précédent un opérateur de création et d'annihilation déterminé par son action sur la base d'états de Fock :

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{n},i} |\dots, N_{\mathbf{n},i}, \dots\rangle &= \begin{cases} \sqrt{N_{\mathbf{n},i}} |\dots, N_{\mathbf{n},i} - 1, \dots\rangle & \text{si } N_{\mathbf{n},i} \geq 1 \\ 0 & \text{si } N_{\mathbf{n},i} = 0 \end{cases} \\ \hat{a}_{\mathbf{n},i}^\dagger |\dots, N_{\mathbf{n},i}, \dots\rangle &= \sqrt{N_{\mathbf{n},i} + 1} |\dots, N_{\mathbf{n},i} + 1, \dots\rangle \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ces opérateurs de création et d'annihilation permettent de définir des opérateur champs associés à chaque niveau interne i selon :

$$\hat{\Psi}_i(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}} \phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \hat{a}_{\mathbf{n},i} \quad \hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}} \phi_{\mathbf{n}}^*(\mathbf{r}) \hat{a}_{\mathbf{n},i}^\dagger \quad (1.6)$$

Les opérateurs $\hat{\Psi}_i(\mathbf{r})$ et $\hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{r})$ s'interprètent respectivement comme les opérateurs de destruction et de création d'un atome dans l'état interne i au point \mathbf{r} . Soulignons que la quantification du champ atomique est identique à celle du champ électromagnétique. Les champs $\hat{\Psi}_i(\mathbf{r})$ et $\hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{r})$ ont pour équivalent les composantes de fréquence positive et négative du potentiel vecteur électromagnétique :

$$\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}) = \sum_l \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) \hat{b}_l \quad \hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}) = \sum_l \mathbf{u}_l^*(\mathbf{r}) \hat{b}_l^\dagger \quad (1.7)$$

Les états internes du champ atomique jouent un rôle analogue à la polarisation du champ électromagnétique.

Le théorème spin-statistique impose des relations de commutations entre les deux composantes du champ. Un champ *bosonique* vérifie ainsi les relations de *commutation* :

$$[\hat{\Psi}_i(\mathbf{r}), \hat{\Psi}_j^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.8)$$

alors qu'un champ *fermionique* $\Psi_i(\mathbf{r})$ vérifie les relations d'*anticommutation* :

$$\{\hat{\Psi}_i(\mathbf{r}), \hat{\Psi}_j^\dagger(\mathbf{r}')\} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.9)$$

1. Le vecteur \mathbf{n} caractérise les degrés de liberté externes. En l'absence de potentiel extérieur on pourrait prendre $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ vecteur d'onde.

Le Hamiltonien total peut s'exprimer à l'aide des opérateurs champs :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_i \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U^0(\hat{\mathbf{r}}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}_j^\dagger(\mathbf{r}) \langle j | \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) | i \rangle \hat{\Psi}_i(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_j^\dagger(\mathbf{r}') V_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}_j(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_i(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.1.2 Cohérence d'un champ électromagnétique.

Dans son acception la plus générale, la notion de cohérence renvoie à celle de corrélation : dans un discours cohérent, les différents arguments exposés ne sont pas indépendants mais exhibent un lien logique entre eux. La notion de cohérence est d'abord apparue en optique. Aussi est-il utile de reconsidérer ce concept dans son contexte d'origine avant de le transposer au champ atomique, suivant la démarche de Roy Glauber [15, 16]. Afin d'alléger la lecture du manuscrit, de nombreuses précisions sur les fonctions de cohérences en optique quantique et atomique ont été reportées dans l'annexe A.

1.1.2.1 Théorie classique de la cohérence : fonction de cohérence mutuelle.

Pendant longtemps, la manifestation expérimentale des corrélations du champ électromagnétique était limitée à l'apparition de franges d'interférences lors de mesures d'intensité faisant intervenir plusieurs champs superposés. Ces interférences sont intimement liées à une fonction de corrélation appelée fonction de *cohérence mutuelle* :

$$\boxed{\Gamma(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \langle E(\mathbf{r}_1, t_1) E^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle} \quad (1.11)$$

Le champ $E(\mathbf{r}, t)$ est modélisé comme une variable stochastique. $\langle \rangle$ désigne la moyenne temporelle sur une durée caractéristique de la résolution d'un détecteur d'intensité.

La traditionnelle expérience des trous d'Young permet de voir facilement le lien entre interférences et corrélations. Le signal observé sur l'écran peut s'exprimer à partir de la valeur des champs électriques en chaque trou et évalués à des instants différents, qui traduisent la différence de chemin entre les deux trajets possibles² :

$$S(\mathbf{r}, t) = \langle |E(\mathbf{r}_1, t_1) + E(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle = \langle |E(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle + \langle |E(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle + 2\text{Re}(\langle E(\mathbf{r}_1, t_1) E^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle) \quad (1.12)$$

2. Nous considérons ici simplement une modélisation scalaire du champ.

Lorsque l'on se déplace sur un écran de détection, la variation de la distance relative $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ qui en résulte affecte plus particulièrement le terme croisé, les autres termes demeurant constants à une très bonne approximation. La possibilité d'observer des interférences dépend donc de la *cohérence mutuelle*. C'est la variation de cette fonction avec les quatres paramètres $\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2$ qui caractérise la figure d'interférences³.

La décroissance temporelle de la cohérence mutuelle définit un temps de cohérence. Le temps de cohérence T_c est ainsi défini comme l'échelle de décroissance de la fonction : $f(\tau) = \int d^3\mathbf{r}\Gamma(\mathbf{r}, t_0, \mathbf{r}, t_0 + \tau)$. La longueur de cohérence L_c est définie comme $L_c = L \times T_c$. On peut également étudier les corrélations spatiales selon une direction \mathbf{u} au moyen de corrélations à temps égal $f(L_u) = \int d^3\mathbf{r}\Gamma(\mathbf{r}, t_0, \mathbf{r} + L_u\mathbf{u}, t_0)$. Ces paramètres caractérisent l'étendue de la figure d'interférences sur l'écran : celle-ci augmente avec la longueur et le temps de cohérence.

On peut également définir la *cohérence directionnelle* du champ en effectuant la transformée de Fourier de la cohérence mutuelle :

$$\Gamma(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, t_1 - t_2) = \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1 - t_2) e^{-i(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} \quad (1.13)$$

La fonction de cohérence mutuelle $\Gamma(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2)$ (ou de façon équivalente $\Gamma(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, t_1 - t_2)$) permet de caractériser la propagation de champs partiellement cohérents dans des systèmes optiques imparfaits. Dans le cas de faisceaux lumineux, on considère le plus souvent l'évolution des corrélations dans les dimensions transverses O_x, O_y à la propagation selon O_z exprimées dans les fonctions $\Gamma(\mathbf{r}_{\perp 1}, t_1, \mathbf{r}_{\perp 2}, t_2)$ et $\Gamma(\mathbf{u}_{\perp 1}, t_1, \mathbf{u}_{\perp 2}, t_2)$.

1.1.2.2 Au delà des mesures d'intensité : théorie quantique de la cohérence.

En fait, les corrélations du champ se manifestent par d'autres effets que l'obtention d'une figure d'interférences lors de mesures d'intensité. L'expérience d'Hanbury et Twiss en 1955 [17] a montré la présence de corrélations positives dans la détection simultanée de plusieurs photons émis par une source incohérente (une étoile). La seule caractérisation de la cohérence en termes de mesures globales d'intensité ou de fonction de cohérence mutuelle Γ ne rend alors plus justice, selon les propres termes de Roy Glauber [15], à toutes les corrélations quantiques présentes dans un tel champ. Dans cet article fondateur, Roy Glauber souligne que si l'optique classique est suffisante pour prédire des

3. Dans le cas d'une cohérence parfaite, les deux champs stochastiques sont liés par une relation déterministe du type $E(\mathbf{r}_2, t_2) = E(\mathbf{r}_1, t_1)e^{i\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}$. On observe alors des franges d'interférences lorsque l'on se déplace sur l'écran et que le vecteur $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ varie.

mesures d'intensité, elle ne permet en aucun cas de prédire la statistique de détection des photons. De tels effets ne peuvent être appréhendés que par un traitement quantique du champ électromagnétique, et par l'étude d'une série de fonctions de corrélation d'ordres plus élevés que la cohérence mutuelle Γ^4 . On définit ainsi des fonctions de corrélation de degré $2n$ -appelées cohérence d'ordre n -, permettant de caractériser la détection à n photons (voire annexe A). Ces corrélations à n champs constituent par ailleurs un outil fondamental en physique moderne (matière condensée, physique des hautes énergies...), et il n'est pas surprenant que la description complète des phénomènes optiques y fasse appel.

La fonction de cohérence du premier ordre :

$$\boxed{G^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle} \quad (1.14)$$

permet de prédire les mesures réalisées par un détecteur unique. Elle est l'équivalent quantique de la fonction de cohérence mutuelle Γ précédente.

La fonction de cohérence de second ordre caractérise les statistiques de détection de paires de photons :

$$\boxed{G^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{r}_3, t_3, \mathbf{r}_4, t_4) = \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_4, t_4) \rangle} \quad (1.15)$$

Enfin, la fonction de cohérence d'ordre n permet de caractériser les détections simultanées à n photons :

$$\boxed{G^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1, \dots, \mathbf{r}_{2n}, t_{2n}) = \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_n, t_n) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_{n+1}, t_{n+1}) \dots \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_{2n}, t_{2n}) \rangle} \quad (1.16)$$

Une source idéalement cohérente est un état quantique qui donne lieu à des relations entièrement *déterministes* entre les mesures de champ en différents points d'espace temps : la connaissance de la valeur du champ en un point d'espace-temps donne alors accès à la connaissance de la valeur du champ partout⁵. Pour de tels champs, les fonctions de corrélations $G^{(n)}$ sont toutes factorisées à l'aide d'une fonction à un point d'espace-temps $x_i = (\mathbf{r}_i, t_i)$. En d'autres termes, il existe pour chaque

4. Les travaux de Glauber, qui ont fondé la théorie moderne de la cohérence, lui ont valu l'attribution du prix Nobel en 2005.

5. Ce critère déterministe est celui qui fonde la notion de cohérence en théorie des communications. Par exemple, une onde plane vérifie cette condition : les valeurs du champ en différents points d'espace-temps sont reliées entre elles par une relation de phase complètement déterministe.

fonction $G^{(n)}$ une fonction f telle que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{8n} \quad G^{(n)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = f^*(x_1) \dots f^*(x_n) f(x_{n+1}) \dots f(x_{2n}) \quad (1.17)$$

Il existe une caractérisation équivalente de la cohérence en terme de fonctions de corrélations normalisées $g^{(n)}$:

Definition 1.1.1 : *Un état quantique cohérent du champ électromagnétique est tel que les fonctions de corrélations vérifient :*

$$\forall n \quad g^{(n)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \frac{G^{(n)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n})}{\sqrt{G^{(1)}(x_1, x_1) \dots G^{(1)}(x_{2n}, x_{2n})}} = 1 \quad (1.18)$$

Dans la réalité physique ce critère n'est jamais complètement rempli par les sources optiques : la cohérence parfaite est un cas-limite.

1.1.2.3 Allure des corrélations pour des champ cohérents et incohérents.

Il est intéressant de comparer les valeurs des cohérences entre un champ incohérent (superposition de champs gaussiens aléatoires indépendants obéissant à une distribution spectrale de Maxwell-Boltzmann) et un champ complètement cohérent (état cohérent gaussien). La Figure 1.1 donne l'allure des cohérence de premier et de second ordre pour ces deux états du champ.

Champ Incohérent.

Lorsque la distance $d = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ augmente de zéro à l'infini :

- La cohérence du premier ordre $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ décroît de l'unité à zéro.
- La cohérence du second ordre $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ vaut $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1 + |g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2$. Elle décroît donc de deux à un.

Le fait que $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') > 1$ à courte distance montre des corrélations positives dans la détection simultanée de photons dans deux détecteurs voisins. Cette propriété surprenante des sources incohérentes, mise en évidence par Hanbury et Twiss en 1956 [17], est couramment appelée "bunching" ou "effet Hanbury-Twiss".

Etat cohérent du champ.

Le comportement de ces fonctions pour le champ dans un état cohérent est très différent. Rappelons l'expression de ces états dans la base de Fock :

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle \quad (1.19)$$

Le paramètre α est associé ici à un mode classique du champ $E(\mathbf{r}) \mathbf{e}$. L'état cohérent est état propre de la composante positive de l'opérateur champ $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) |E(\mathbf{r}) \mathbf{e}\rangle = E(\mathbf{r}, t) \mathbf{e} |E(\mathbf{r}) \mathbf{e}\rangle$. On en déduit facilement que les fonctions de corrélation précédentes s'expriment $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1$ et $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1$. L'état $|E(\mathbf{r}) \mathbf{e}\rangle$ est donc bien un état cohérent pour les deux premières fonctions de corrélation au sens de la définition moderne de Roy Glauber. Contrairement à la source incohérente, un tel champ ne donne pas lieu à un phénomène de "bunching" lors de la détection simultanée de deux photons en des points rapprochés.

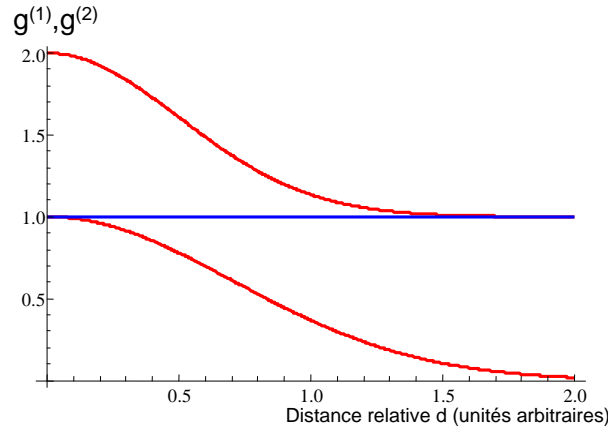


FIGURE 1.1 – Allures des fonctions de corrélation $g^{(1)}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t)$ et $g^{(2)}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t)$ en fonction de la distance $d = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ pour des sources incohérentes (courbes rouges) et cohérentes (ligne horizontale bleue), ou de façon équivalente pour une source atomique thermique (courbes rouges) ou pour un condensat pur (ligne horizontale bleue).

1.1.3 Cohérence d'un champ atomique.

1.1.3.1 Définition.

Après avoir solidement établi la cohérence d'une source optique, nous sommes en mesure d'appliquer cette notion à une source atomique. Une étude plus détaillée figure dans les références [18, 16]. Comme nous allons le voir, la notion de cohérence d'une source atomique est très liée à celle de condensation de Bose-Einstein. Dès les années 1950, Penrose et Onsager [19] ont mis en avant la présence de corrélations à longue portée dans la matrice densité du système comme signature de l'apparition d'un condensat. En fait, il est possible d'aller plus loin et de montrer que les condensats purs ne vérifient pas seulement cette propriété mais également les autres critères de cohérence optique établis au paragraphe précédent.

Les fonctions de corrélations considérées portent désormais sur le champ atomique⁶ :

$$G^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1, \dots, \mathbf{r}_{2n}, t_{2n}) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_n, t_n) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_{n+1}, t_{n+1}) \dots \hat{\Psi}(\mathbf{r}_{2n}, t_{2n}) \rangle \quad (1.20)$$

Une source atomique parfaitement cohérente vérifie donc la définition (1.1.1). Les corrélations entre champs pris à des instants différents peuvent se révéler utiles pour évaluer des fluctuations de phase [18, 20, 21, 22, 23]. Nous nous concentrons sur des corrélations de premier et second ordre prises au même instant, adaptées pour décrire les sources atomiques dans des régimes stationnaires. On trouvera une discussion plus détaillée de la cohérence de plusieurs types d'échantillons atomiques dans l'annexe A, dont nous donnons les conclusions.

1.1.3.2 Lien entre cohérence et matrice densité : lien avec l'optique.

Il est intéressant de remarquer que la fonction de cohérence du premier ordre exprime en fait les éléments de matrice de l'opérateur densité réduit à une particule :

$$G^{(1)}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) \rangle = \langle \mathbf{r}' | \hat{\rho}^{(1)} | \mathbf{r} \rangle \quad (1.21)$$

La matrice de densité est donc l'équivalent de la fonction de cohérence mutuelle Γ pour des champs électromagnétiques partiellement cohérents : de la même façon que les champs électromagnétiques aléatoires sont décrits en optique par la fonction Γ , les systèmes quantiques dans un état aléatoire sont décrits par une matrice densité.

6. La valeur moyenne de l'opérateur champ est prise sur l'état quantique global du système (par exemple un état de Fock du champ atomique).

La condition de cohérence optique de premier ordre se traduit par l'existence d'une fonction ϕ factorisant la fonction $G^{(1)}$:

$$G^{(1)}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t) = \phi(\mathbf{r})\phi^*(\mathbf{r}') \quad (1.22)$$

Cette relation traduit le fait que l'état quantique soit dans un état pur associé à la fonction d'onde $\phi(\mathbf{r})$. Les condensats sont donc des sources parfaitement cohérentes au premier ordre, et la condition de factorisation montre que ce sont les seules !

1.1.3.3 Cohérences pour un condensat dans un état de Fock.

Les cohérences normalisées correspondantes $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ vérifient alors $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1$, $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1 - 1/N$. Ces fonctions de corrélations vérifient donc, avec une très bonne approximation, la condition précédente. Il en est de même pour les cohérences d'ordre supérieur $g^{(i)}$, $i \ll N$.

1.1.3.4 Cohérences d'un gaz de bosons idéal à l'équilibre.

On trouvera en annexe A une discussion plus détaillée de cet exemple. Les corrélations spatiales des sources atomiques thermiques et cohérentes ont l'allure des courbes de la Figure 1.1.

Pour un nuage froid incohérent, l'allure des fonctions de corrélations est effectivement très similaire à celle d'un champ électromagnétique incohérent : on observe la même décroissance exponentielle, le phénomène de "bunching" et l'absence de corrélations à longue portée. L'écart à la condition de cohérence est principalement déterminé par le rapport de la fraction thermique sur la fraction condensée. Seul un condensat pur satisfait rigoureusement la condition d'unitarité des cohérences normalisées.

1.1.3.5 Etudes expérimentales de la cohérence d'une source atomique.

Ces prédictions théoriques ont pu être vérifiées expérimentalement. Concernant la cohérence du premier ordre, plusieurs expériences ont mis en évidence ces corrélations à longue portée au sein du condensat [18]. Une méthode consiste à mesurer la distribution en impulsion par spectroscopie de Bragg et à en déduire la cohérence par transformée de Fourier [24]. On peut également mesurer cette longueur en créant une superposition de deux nuages légèrement déplacés à partir du même condensat [25, 26], ou par interférences d'ondes issues d'un laser à atomes [27]. Les prédictions de la cohérence du second ordre ont également été validées expérimentalement. Des corrélations ont pu

être observées dans la détection d'atomes [28, 29, 30]. L'effet d'Hanbury-Twiss a pu être observé pour des gaz ultrafroids dans une expérience comparant ces corrélations de part et d'autre du seuil de condensation [31].

1.1.4 Représentation dans l'espace des phases.

Nous introduisons, dans ce paragraphe, la représentation de Wigner-Weyl, qui permet de caractériser un faisceau optique ou atomique dans l'espace des phases. Il y a un lien étroit entre cette représentation et la fonction de cohérence de premier ordre du faisceau.

1.1.4.1 Principe de la représentation de Wigner.

Le terme de “représentation de Wigner” fait référence à la description simultanée d'une quantité en fonction d'une variable et de sa conjuguée de Fourier. L'exemple le plus populaire -et de très loin !- de représentation de Wigner est certainement celui de la partition musicale. La partition musicale décrit simultanément un signal sonore $s(t)$ (la mélodie) en fonction du temps et de la fréquence : la partition indique, à chaque instant t , la note à jouer c'est à dire la fréquence dominante ω du signal $\tilde{s}(\omega)$ au voisinage de l'instant t . Il s'agit d'une fréquence “locale”, bien que cette définition pose problème mathématiquement. Au lieu d'une description purement temporelle $s(t)$ ou purement fréquentielle $\tilde{s}(\omega)$, on obtient ainsi une description mixte $W(t, \omega)$ dite distribution de Wigner.

1.1.4.2 Distribution de Wigner associée à un faisceau atomique.

Introduite par Wigner en 1929, cette représentation permet de caractériser simultanément un nuage atomique dans l'espace des positions et des impulsions⁷. Soit un système quantique décrit par une matrice de densité $\hat{\rho}$. La distribution de Wigner associée à ce système s'écrit :

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{r}' \langle \mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{r}' | \hat{\rho} | \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{r}' \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}'} \quad (1.23)$$

Cette distribution teste en un sens ce qui se rapproche le plus d'une probabilité jointe en impulsion et en position. Supposons qu'une telle probabilité jointe $p_{\mathbf{r}\mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ existe, c'est à dire qu'en mesurant simultanément la position et l'impulsion d'un atome pris au hasard dans l'échantillon, on ait une probabilité $p_{\mathbf{r}\mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}$ d'obtenir un atome dans le cube centré en \mathbf{r} de volume $d^3\mathbf{r}$ et d'impulsion

7. On notera que ces deux variables sont effectivement conjuguées au sens de Fourier.

dans le cube centré en \mathbf{p} de volume $d^3\mathbf{p}$. On voit déjà que la définition d'une telle probabilité pour le système pose problème, puisque la notion de mesure simultanée est inadéquate pour des observables non-commutantes telles que la position et l'impulsion. Une telle densité de probabilité permettrait de retrouver les distributions marginales en position et en impulsion selon :

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) &= \int d^3\mathbf{p} p_{\mathbf{r}\mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ p_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) &= \int d^3\mathbf{r} p_{\mathbf{r}\mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

Il se trouve que la distribution de Wigner vérifie cette double condition :

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \hat{\rho} | \mathbf{r} \rangle &= \int d^3\mathbf{p} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ p_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \hat{\rho} | \mathbf{p} \rangle &= \int d^3\mathbf{r} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

Pour accéder aux distributions de probabilité en position ou en impulsion, il suffit donc de sommer la distribution de Wigner sur la grandeur conjuguée. Celle-ci est donc en un sens l'analogie quantique de la distribution dans l'espace des phases à un corps $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ utilisée pour décrire l'évolution d'un gaz classique. Soulignons cependant que la distribution de Wigner - "probabilité quantique" - n'est pas à proprement parler une distribution de probabilité car elle est susceptible de prendre des valeurs négatives (mais réelles en tout cas). Ceci donne par ailleurs lieu à une caractérisation des systèmes exhibant un comportement spécifiquement quantique : un système physique est dit dans un état "non-classique" si la distribution de Wigner associée à sa matrice densité comporte une région négative⁸.

La Figure 1.2 montre des distributions de Wigner associées à une fonction d'onde gaussienne et à un état du type "chat de Schrödinger".

8. Soulignons cependant que même en présence d'une distribution de Wigner partiellement négative, les fluctuations en position et en impulsion telles qu'elles sont *mesurées* à travers une expérience permettent toujours de définir une véritable probabilité jointe positive $p(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Celle-ci peut parfois s'interpréter comme la convolution de la distribution de Wigner à une fonction caractéristique du processus de mesure [32, 33].

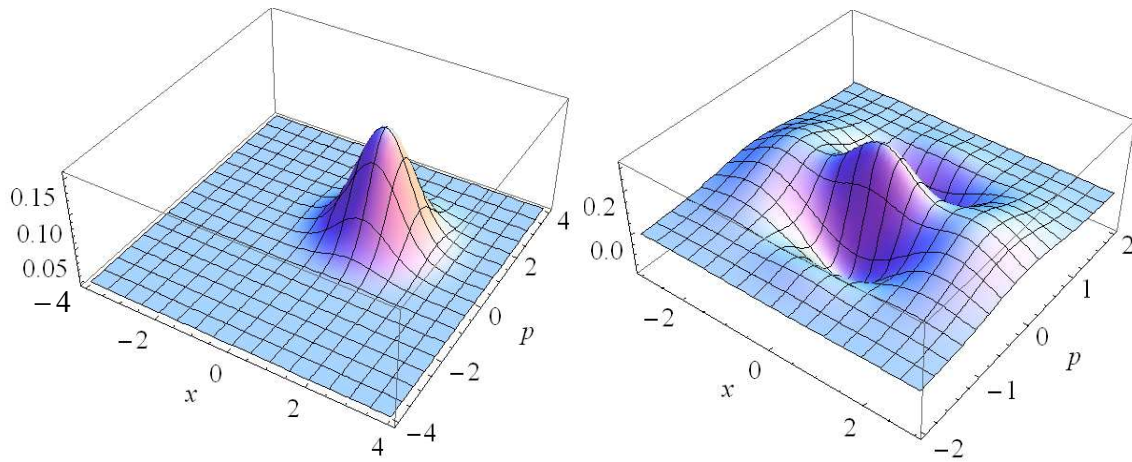


FIGURE 1.2 – Allure des distributions de Wigner associées à une fonction d’onde gaussienne et à une somme cohérente de fonctions d’onde gaussiennes formant un “chat de Schrödinger”. Cette dernière exhibe une région négative. Les unités sont arbitraires.

1.1.4.3 Relation entre cohérence et distribution de Wigner.

La distribution de Wigner d’un faisceau atomique permet notamment de retrouver la cohérence spatiale du premier ordre :

$$G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d^3\mathbf{p} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} W\left(\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}, \mathbf{p}\right) \quad (1.24)$$

Il y a une correspondance univoque entre ces deux distributions. La propagation des distributions de Wigner permet donc de connaître l’évolution de cette cohérence au cours du temps, ou de façon équivalente celle de la matrice densité réduite à un corps. Comme en optique, où la fonction Γ est largement utilisée pour décrire des champs partiellement cohérents, la distribution de Wigner (dont la connaissance équivaut à celle de $G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$) est souvent suffisante pour décrire un système quantique⁹. En information quantique par exemple, on caractérise souvent les états par leur distribution de Wigner, qui sert notamment de base à l’estimation de la fidélité de portes logiques quantiques. En tomographie quantique, les distributions de Wigner sont particulièrement utilisées pour reconstruire les états quantiques étudiés.

Il semble donc pertinent d’étudier la propagation de distributions de Wigner, donnant accès à l’évolution de la cohérence de premier ordre du nuage atomique (ou de façon équivalente celle de la

9. Etant entendu que cette caractérisation devient insuffisante pour prédire les statistiques de détections simultanées.

matrice densité réduite à un corps). Cette étude est l'objet du chapitre 6 de ce mémoire.

1.1.4.4 Distribution de Wigner pour un faisceau optique.

En optique géométrique, la description du champ en termes de rayons fait intervenir à la fois une direction de propagation *et* une position puisque ces deux paramètres sont attachés à un même rayon. Pour décrire le comportement d'une onde lumineuse partiellement cohérente à travers un système optique, il semble donc pertinent de réaliser une description de la cohérence impliquant simultanément position et direction. Bien que les deux fonctions Γ (1.11) et (1.13) de cohérence optique ne permettent pas cette description simultanée, il est possible d'obtenir une telle représentation en considérant la distribution de Wigner suivante :

$$W(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{u}_\perp, \tau) = \int d^2\mathbf{r}'_\perp \Gamma\left(\mathbf{r}_\perp + \frac{1}{2}\mathbf{r}'_\perp, \mathbf{r}_\perp - \frac{1}{2}\mathbf{r}'_\perp, \tau\right) e^{-i\mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{r}'_\perp} \quad (1.25)$$

Les distributions de Wigner trouvent alors un cadre naturel d'application en optique [34]. Elles permettent par exemple d'établir une correspondance simple avec l'optique géométrique pour la description de systèmes linéaires, ou de fournir une description *ABCD* de la propagation de faisceaux partiellement cohérents dans des systèmes optiques du premier ordre. L'équation de transport correspondante¹⁰ peut souvent être résolue analytiquement.

Bien sûr, les distributions de Wigner optiques permettent également de reconstruire la *cohérence mutuelle* :

$$\Gamma(\mathbf{r}_\perp, t, \mathbf{r}'_\perp, t) = \int d^3\mathbf{p} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} W\left(\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}, \mathbf{p}\right) \quad (1.26)$$

1.1.4.5 Cohérence et densité dans l'espace des phases : notion de facteur de qualité.

En optique photonique et comme en optique atomique, les faisceaux cohérents réalisent une forte concentration dans l'espace des phases : un faisceau laser est beaucoup plus collimaté et étroit que la lumière émise par une lampe de poche, plus faible et diffuse. Ceci est manifeste lorsque l'on éclaire un écran avec ces deux sources. Comme nous l'avons déjà mentionné en introduction, les condensats sont aux nuages thermiques ce que le laser est à la lampe de poche.

L'interprétation des distributions de Wigner en terme de quasi-probabilité permet de définir un

10. Equation de Liouville. Une telle équation est étudiée ultérieurement dans ce mémoire

volume d'occupation dans l'espace des phases. Pour un faisceau optique cohérent, cet espace concerne les dimensions transverse. Siegmann a ainsi pu définir un facteur de qualité M^2 pour caractériser les faisceaux paraxiaux [35], qui traduit le volume occupé dans l'espace des phases optiques $(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{u}_\perp)$. Un faisceau fin et collimaté a une distribution de Wigner qui dessine un pic étroit autour d'une valeur spécifique $(\mathbf{r}_\perp^0, \mathbf{u}_\perp^0)$.

Le facteur M^2 représente en fait la "dilution" dans l'espace des phases par rapport au volume occupé par un faisceau gaussien complètement cohérent. Pour un faisceau non cylindrique, le facteur de qualité doit être défini par un invariant symplectique. Nous aborderons la caractérisation d'un faisceau atomique par un tel invariant au chapitre 9.

1.1.5 Conclusion.

Cette première introduction nous a permis de définir les notions de champ atomique et de champ optique quantifié.

Nous avons établi la notion de cohérence en optique photonique et atomique. La cohérence se traduit par des conditions sur les corrélations de plusieurs champs en différents points d'espace-temps. Ces corrélations sont par ailleurs les objets fondamentaux et élémentaires de la théorie des champs, qui permettent de déterminer toutes les propriétés physiques associées (section efficace de collision...).

Nous avons montré qu'il existait une relation entre cohérence et représentation dans l'espace des phases. Les distributions de Wigner fournissent une représentation simultanée du champ en fonction de deux grandeurs conjuguées de Fourier. Elles permettent notamment d'obtenir les fonctions de cohérence du premier ordre prise à temps égal. Les sources pleinement cohérentes, atomiques ou optiques, sont associées à des distributions de Wigner étroites, traduisant une saturation des relations d'incertitude. Les imperfections du faisceau réel peuvent être caractérisées, comme nous le verrons au chapitre 9, par un facteur de qualité.

1.2 Propagation d'une source atomique cohérente : quelques rappels théoriques.

L'objet de cette section est de rappeler quelques outils théoriques nécessaires pour appréhender la propagation des sources atomiques cohérentes.

Nous commençons par introduire les notions de Lagrangien et de propagateur. Ces outils, fondamentaux en théorie des champs, trouvent un cadre naturel d'application en optique atomique.

Nous poursuivons par une modélisation des interactions entre atomes, appliquée ensuite pour établir l'équation de propagation de la composante cohérente du champ atomique.

Nous décrivons par la suite la propagation du champ atomique dans deux régimes extrêmes du point de vue de la force relative des interactions : limite de dilution (ou absence d'interactions), et limite de Thomas-Fermi (interactions prépondérantes). Pour des nuages dilués, la propagation des ondes atomiques est linéaire. Lorsque le Hamiltonien est quadratique, la propagation est décrite analytiquement par le formalisme *ABCD* introduit par Christian Bordé en physique atomique [36, 37]. En régime de Thomas-Fermi, c'est à dire quand la contribution du terme cinétique à l'énergie est bien inférieure à celle des interactions, les nuages suivent une loi d'expansion bien établie [38] faisant intervenir des paramètres d'échelle. Notons que ces deux régimes ont une portée expérimentale conséquente. En effet, la plupart des interféromètres atomiques sont correctement décrits par le formalisme *ABCD* dans la limite de dilution. Quant aux lois d'échelle du régime de Thomas-Fermi dépendant du temps, elles prédisent correctement l'expansion de nuages condensés après coupure du piège magnéto-optique dans les conditions expérimentales usuelles. Elles sont fréquemment utilisées pour modéliser les expériences impliquant des lâchers de condensats.

1.2.1 Comparaison entre les propagations d'un champ atomique et d'un champ photonique.

Nous établissons ici les équations générales relativistes de propagation d'un champ atomique et d'un champ électromagnétique. Il y a en fait une similitude très forte entre la propagation de ces deux champs. Nous considérons ici un champ atomique à deux composantes $\hat{\Psi}_a, \hat{\Psi}_b$, caractérisant un atome à deux niveaux, ainsi qu'un champ lumineux $\hat{\Psi}_l$ correspondant au quadripotential vecteur. La compréhension totale de ce paragraphe, qui suppose des connaissances préalables en théorie des champs, n'est pas indispensable pour poursuivre la lecture du manuscrit. Le lien entre les équations

fondamentales présentées ici et les équation de propagation usuelles du champ est explicité au chapitre 7.

1.2.1.1 Propagation libre en relativité générale.

La formulation la plus générale de la propagation du champ atomique doit être compatible avec les principes de la relativité générale. L'équation correspondante est celle de Tomonaga-Schwinger, invariante lors d'une transformation des coordonnées d'espace-temps à l'aide d'un difféomorphisme. Elle implique la dérivée par rapport à une hypersurface $\sigma(x)$ au point d'espace temps $x = (\mathbf{r}, t(\mathbf{r}))$:

$$i\hbar c \frac{\partial \hat{\Psi}_{a,b,l}(x)}{\partial \sigma(x)} = \hat{H}(x) \hat{\Psi}(x) \quad (1.27)$$

Nous n'entrons pas davantage dans ce formalisme, l'objet étant simplement de souligner qu'il existe une formulation de l'optique atomique compatible avec la relativité générale. Nous invitons le lecteur intéressé à se reporter à l'article de revue de Freeman Dyson sur l'équation de Tomonaga-Schwinger [39].

1.2.1.2 Propagation libre en relativité restreinte : Equation de Klein-Gordon.

Si l'on formule l'équation de propagation en accord avec simplement la relativité restreinte (écriture covariante par rapport aux transformations rigides de l'espace temps), on obtient l'équation de propagation de Klein-Gordon pour les champs atomiques et lumineux :

$$\left[\square + \frac{m_{a,b,l}^2 c^4}{\hbar^2} \right] \hat{\Psi}_{a,b,l} = 0 \quad (1.28)$$

avec la particularité pour le champ lumineux que le terme de masse disparaît : $m_l = 0$. Signalons qu'un champ atomique avec spin vérifie une équation plus spécifique (Equation de Dirac), mais qui reste compatible avec l'équation de Klein-Gordon. Comme l'a montré Christian Bordé [40, 41], cette équation peut faire l'objet d'une approximation parabolique¹¹, qui la rend soluble par la méthode de propagation *ABCD*. Un avantage remarquable de cette formulation est qu'elle débouche sur une équation de propagation commune au champ atomique et au champ électromagnétique.

11. Sous réserve d'une approximation quant à la dispersion du paquet d'ondes en impulsion. Cette dispersion doit être non relativiste (par contre l'impulsion centrale peut être relativiste). L'approximation parabolique est par ailleurs exposée dans l'annexe B du chapitre 7.

1.2 Propagation d'une source atomique cohérente : quelques rappels théoriques.25

1.2.1.3 Symétrie du terme d'interaction entre champ atomique et électromagnétique.

La symétrie entre atomes et photons est également apparente dans la linéarité du couplage entre ces particules. Si l'on adopte une théorie scalaire de cette interaction ¹², on peut utiliser le Hamiltonien d'interaction suivant :

$$H_I(t) = g_R \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}_b^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}_l(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}_a(\mathbf{r}, t) + h.c. \quad (1.29)$$

Les champs $\hat{\Psi}_b^\dagger(x, t)$, $\hat{\Psi}_l(x, t)$ et $\hat{\Psi}_a(x, t)$ correspondent respectivement à la création d'un atome excité, l'annihilation d'un photon et l'annihilation d'un atome fondamental au point d'espace-temps (x, t) .

1.2.1.4 Différence entre optique atomique et photonique.

Dimension supplémentaire : Temps Propre.

Il subsiste malgré tout des différences importantes entre l'optique photonique et l'optique atomique. En fait, Christian Bordé a montré récemment que le terme de masse supplémentaire intervenant dans la propagation des atomes pouvait être interprété comme la signature d'une dimension supplémentaire (par rapport à celle des photons) dans la propagation du champ atomique. Cette dimension porte le nom de temps propre. L'optique atomique peut alors être reformulée de façon "consistante" à cinq dimensions et donner lieu à une transposition des outils d'optique tels que le principe de Fermat, l'approximation WKB... Une introduction sur la formulation de l'optique atomique à (4+1) dimensions est donnée au chapitre 7, et un cours plus détaillé sur ce sujet a été donné par Christian Bordé [41].

La présence d'une masse fait que l'optique atomique a une dynamique intrinsèquement plus riche que l'optique photonique. Une manifestation élémentaire de ce degré de liberté supplémentaire est le fait que la vitesse d'un atome puisse varier, alors que celle d'un photon est nécessairement égale à c dans tous les référentiels. Ce degré de liberté provient en fait de la dimension supplémentaire : la vitesse des atomes, observée dans l'espace à trois dimensions, n'est en fait que la projection d'une vitesse d'un espace à quatre dimensions et dont la norme est contrainte comme pour la vitesse des photons.

Cet aspect théorique a des conséquences pratiques importantes. La flexibilité sur la vitesse des atomes permet de mettre en oeuvre des résonateurs impulsionsnels (exposés dans ce mémoire) pour les atomes, et d'explorer des effets inobservables en optique photonique.

12. Cette formulation ne tient pas compte du spin des atomes et des photons. Une telle théorie scalaire est suffisante pour rendre compte des expériences ne mettant pas en jeu des effets de polarisation.

Paraxialité.

Une autre conséquence est le fait que l'optique atomique soit en général non-paraxiale, alors que l'optique photonique entre beaucoup plus volontiers dans ce régime. Cette différence est soulignée au chapitre 9, dans lequel un nouveau facteur de qualité est défini pour les faisceaux atomiques en dehors du régime paraxial.

1.2.2 Lagrangien associé au champ atomique.

L'objet de ce paragraphe est de donner les Lagrangiens couramment utilisés en mécanique quantique non-relativiste pour caractériser le mouvement d'un nuage atomique. Ces Lagrangiens nous seront utiles dans le cadre de l'approche variationnelle du chapitre 6. On trouvera en annexe B un bref rappel sur le principe de moindre action. Pour une revue plus complète, nous invitons le lecteur à se reporter à l'excellent ouvrage de référence de Peskin et Schröder [42] sur la théorie quantique relativiste des champs.

1.2.2.1 Lagrangien fondamental.

A l'échelle d'énergie des expériences considérées dans ce mémoire, les interactions entre atomes du condensat sont de nature électromagnétique. Au niveau fondamental, l'interaction électromagnétique fait intervenir un champ modélisé par un spineur de Dirac. La densité de Lagrangien associée s'écrit [43] :

$$L = \hbar c \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m \frac{c}{\hbar}) \psi + e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad (1.30)$$

où l'on a utilisé les matrices de Dirac $\gamma^0, \dots, \gamma^3$ et la notation usuelle $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. En l'absence d'interaction électromagnétique, l'équation d'Euler-Lagrange associée au Lagrangien libre montre que le champ atomique vérifie bien l'équation de Klein-Gordon évoquée précédemment.

1.2.2.2 Lagrangien associé à un champ atomique non relativiste comportant un seul état interne.

Nous utiliserons dans ce mémoire des Lagrangiens non pas fondamentaux mais "phénoménologiques", où le champ potentiel vecteur A_μ a été éliminé par resommation des diagrammes de Feynman correspondant à l'interaction électromagnétique quantique. On ne considère alors plus des interactions atomes-photons mais uniquement des interactions atomes-atomes, indirectement transmises par

1.2 Propagation d'une source atomique cohérente : quelques rappels théoriques.27

des photons, et modélisées par un potentiel vecteur $V(\mathbf{r})$.¹³

Nous nous plaçons dans le cadre de *dispersion* en impulsion non relativiste, où l'équation de Klein-Gordon du champ atomique libre est assimilable à une équation de Schrödinger. En l'absence de couplage entre les différents états internes de l'atome considéré, le Lagrangien suivant décrit correctement l'évolution du champ atomique associé à un état interne i :

$$L_i = \frac{i\hbar}{2} \left(\hat{\Psi}_i(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) + \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{r}, t) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U^0(\hat{\mathbf{r}}) \right] \hat{\Psi}_i(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{r}', t) \hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{r}, t) V_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}_i(\mathbf{r}', t) \hat{\Psi}_i(\mathbf{r}, t) \quad (1.31)$$

Le premier terme donne lieu à la dérivée temporelle du champ, présente dans le membre de gauche de l'équation de propagation. Le second terme correspond à la somme de l'énergie cinétique et potentielle extérieure. Le troisième terme, modélisé par un produit de quatre champs, traduit les interactions entre les particules d'un même état interne. Cette modélisation relève la prise en compte des seules collisions à deux corps, approche légitime pour traiter les gaz ultra-froids dilués [44]¹⁴. Le champ $\hat{\Psi}_i$ est susceptible d'être bosonique ou fermionique.

En écrivant les équations d'Euler-Lagrange (B.3) avec le champ $\hat{\Psi}^\dagger$, nous obtenons¹⁵ :

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2 \nabla^2 \hat{\Psi}_i(\mathbf{r}, t)}{2m} + U^0(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\Psi}_i(\mathbf{r}, t) + \int d^3\mathbf{r}' \hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{r}', t) V_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}_i(\mathbf{r}', t) \hat{\Psi}_i(\mathbf{r}, t)$$

1.2.2.3 Lagrangien associé à un champ atomique non relativiste comportant plusieurs états internes couplés.

Si les états internes du champ atomique ne sont pas couplés, le Lagrangien total s'exprime simplement comme la somme des Lagrangiens précédents $L = \sum_{\text{états internes } i} L_i$. La présence d'un

13. Il est bon de noter qu'en optique, on effectue un cheminement symétrique. En effet, le champ atomique est éliminé et on considère uniquement la propagation du potentiel vecteur (ou plutôt du champ électrique). La resommation des diagrammes d'interaction atome-photon donne lieu à un indice de réfraction (dont l'équivalent atomique est la renormalisation de la masse des atomes dans un champ lumineux) et à des interactions effectives photons-photons, dont une manifestation courante est l'effet Kerr.

14. Pour les températures et les densités considérées, les collisions à trois corps ou plus sont beaucoup moins probables et n'ont pas un effet conséquent sur la dynamique du système. Signalons par ailleurs que ce terme à quatre champs est bien *renormalisable*, c'est à dire qu'il donne lieu à des prédictions indépendantes de l'échelle d'énergie considérée pour les particules.

15. Notons qu'il est nécessaire de considérer les champs Ψ et Ψ^\dagger comme des variables indépendantes pour obtenir ces équations.

couplage, susceptible d'être induit par un champ électromagnétique extérieur ou par des interactions entre atomes, se traduit par l'apparition de termes croisés dans le Lagrangien :

$$L = L_a + L_b + \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}_b^\dagger(\mathbf{r}, t) d_{ba} E(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}_a(\mathbf{r}, t) + \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}_a^\dagger(\mathbf{r}, t) d_{ab} E^*(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}_b(\mathbf{r}, t) + \sum_{(i,j) \in (a,b)} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}_j^\dagger(\mathbf{r}', t) V_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}_j(\mathbf{r}', t) \hat{\Psi}_i(\mathbf{r}, t)$$

Le paramètre $d_{ab} = d_{ba}^*$ traduit le moment dipolaire électrique de l'atome. Nous avons distingué explicitement les couplages dus au champ électromagnétique de ceux résultant des interactions atomiques présentes même en l'absence de ce champ.¹⁶

1.2.3 Notion de propagateur.

Nous expliquons ici le concept de propagateur. Cet outil, fondamental en théorie des champs, sera notamment appliqué dans l'analyse des propositions réalisées dans ce mémoire et dans l'étude de l'extraction d'un laser à atomes. En écho à l'épithète de ce chapitre, nous en proposons plusieurs définitions équivalentes, mais qui procèdent de points de vue différents.

1.2.3.1 Expression du propagateur comme corrélation de deux champs quantiques.

Il s'agit de la définition la plus courante du propagateur d'un champ quantique (tel que le champ atomique). Le propagateur du champ est identifié à la fonction de cohérence du premier ordre introduite précédemment, avec une opération d'ordonnancement temporel entre les arguments¹⁷ :

$$K(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t) = \langle 0 | T \Psi(\mathbf{r}, t) \Psi^\dagger(\mathbf{r}', t') | 0 \rangle \quad (1.32)$$

1.2.3.2 Expression du propagateur à l'aide d'une fonction de Green.

Cette définition du propagateur, à partir de l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ quantique, est adaptée pour résoudre des problèmes avec conditions aux limites. C'est notamment cette définition qui intervient dans la "règle magique" de Barton [45], utilisée dans le calcul de la

16. Soulignons cependant que le potentiel d'interaction est altéré par la présence d'un champ électromagnétique extérieur. Cette dépendance peut permettre de faire varier continûment (à l'aide d'un champ magnétique) la longueur de diffusion du potentiel d'interaction associé à un champ fermionique et d'observer ainsi des résonances dite de Feshbach, activité très populaire ces dernières années dans la communauté de la physique atomique.

17. L'opérateur d'ordre temporel T place à droite le champ appliqué à l'instant le plus tôt, voir annexe B. Cette définition du propagateur correspond à la prescription de Feynman. Il est important de mentionner que, dans cette définition, le champ Ψ évolue bien en représentation de Heisenberg, l'état du vide $|0\rangle$ étant donc laissé invariant.

1.2 Propagation d'une source atomique cohérente : quelques rappels théoriques.29

fonction d'onde du laser à atomes extrait d'un condensat (chapitre 8).

Etant donné un champ $\phi(\mathbf{r}, t)$ (classique ou quantique), défini sur le domaine spatio-temporel $\mathbb{D} \times I$, et satisfaisant une équation de propagation du type :

$$\forall(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{D} \times I \quad L_{\mathbf{r},t}[\phi](\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.33)$$

avec l'opérateur différentiel $L_{\mathbf{r},t}$ portant sur les coordonnées d'espace-temps (par exemple $L_{\mathbf{r},t} = \square + m^2$), on définit le propagateur $K(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')$ comme l'unique fonction vérifiant [45] :

$$\begin{aligned} \forall(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \in \mathbb{D}^2 \quad \forall(t, t') \in I^2 \quad L_{\mathbf{r},t}[K](\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t) &= 0 \\ \forall(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \in \mathbb{D}^2 \quad \forall(t, t') \in I^2 \quad L_{\mathbf{r}',t'}[K](\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t) &= 0 \\ \forall(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \in \mathbb{D}^2 \quad \forall t \in I \quad K(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (1.34)$$

Il y a en fait une relation simple entre le propagateur et la fonction de Green G associée à l'équation de propagation :

$$G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \theta(t - t') K(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t) \quad (1.35)$$

La fonction θ est la fonction créneau habituelle en physique ($\theta(x) = 1$ si $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ si $x < 0$).

1.2.3.3 Expression du propagateur à l'aide de l'opérateur d'évolution.

L'expression du propagateur à l'aide de l'opérateur d'évolution est couramment utilisée en mécanique quantique. Elle permet de comprendre la propagation d'une fonction d'onde en première quantification. Cette définition sera utilisée au chapitre 3 pour relier les propagateurs atomiques en présence et en l'absence de lumière.

Soit une fonction d'onde $\phi(\mathbf{r}, t)$ obéissant à l'équation de Schrödinger :

$$i \hbar \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H(t) \phi(\mathbf{r}, t) \quad (1.36)$$

et $U(t, t')$ l'opérateur d'évolution associé au Hamiltonien H :

$$U(t, t_0) = T \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt'' H(t'') \right) \right] \quad (1.37)$$

L'opérateur T désigne l'ordonnancement temporel, fréquemment utilisé en théorie des champs et expliqué dans l'annexe B. On peut définir le propagateur comme les éléments de matrice de l'opérateur

d'évolution en représentation position :

$$\boxed{K(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \langle \mathbf{r} | U(t, t') | \mathbf{r}' \rangle} \quad (1.38)$$

1.2.3.4 Expression du propagateur par une intégrale de chemin.

Cette formulation du propagateur en termes d'intégrales de chemin permet notamment de comprendre l'approximation des "chemins négligés", présentée au chapitre 8, dans le calcul d'extraction du laser à atomes¹⁸ :

$$\boxed{K(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \int d[\mathbf{r}(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S(\mathbf{r}(t))}} \quad (1.39)$$

1.2.3.5 Intégrale de propagation.

Nous établissons à présent l'équivalence des définitions précédentes du propagateur en montrant qu'elles sont toutes compatibles avec une relation fondamentale¹⁹ : l'intégrale de propagation. Cette relation intégrale permet, à partir de la fonction d'onde ϕ à un instant donné t_0 , de déterminer celle-ci à tout instant ultérieur. Elle justifie ainsi la dénomination de "propagateur" :

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}' K(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t_0) \phi(\mathbf{r}', t_0)} \quad (1.40)$$

Commençons par examiner le propagateur défini à l'aide de l'opérateur d'évolution dans (1.38). Notons $|\psi(t)\rangle$ le ket représentant l'état quantique à une particule. La fonction d'onde ϕ est donnée à tout instant t par $\phi(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{r} | \psi(t) \rangle$. En exprimant l'état quantique à l'instant t à l'aide de l'état initial et de l'opérateur d'évolution $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$; et en insérant la relation de fermeture sur les positions \mathbf{r}' entre le ket initial et l'opérateur U , on obtient directement l'intégrale de propagation (1.40).

Examinons à présent le propagateur $K(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t_0)$ défini à partir d'une fonction de Green, c'est-à-dire vérifiant le jeu d'équations (1.34). La fonction $f(\mathbf{r}, t)$ définie par :

$$f(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}' K(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t_0) \phi(\mathbf{r}', t_0) \quad (1.41)$$

18. La formulation de la physique quantique en termes d'intégrales de chemin a révolutionné l'approche théorique de nombreux phénomènes physiques. Une définition heuristique de l'intégrale de chemin est donnée dans la référence [42].

19. La relation de propagation, vraie pour toute fonction ϕ et pour tout couple d'instant (t_0, t) tel que $t_0 \leq t$, définit effectivement une fonction unique K . Elle implique en effet l'équation aux dérivées partielles sur $K : L_{\mathbf{r}, t}[K](\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t_0) = 0$. Par ailleurs en appliquant cette relation aux instants $t = t_0$ on obtient la condition initiale $K(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Le théorème de Cauchy donne alors l'unicité d'une telle fonction K .

1.2 Propagation d'une source atomique cohérente : quelques rappels théoriques.31

vérifie alors les conditions :

$$\forall(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{D} \times I \quad L_{\mathbf{r},t}[f] = 0 \quad (1.42)$$

$$\forall \mathbf{r} \in \mathbb{D} \quad f(\mathbf{r}, t_0) = \phi(\mathbf{r}', t_0) \quad (1.43)$$

Par unicité de la solution à une équation aux dérivées partielles avec des conditions initiales données (théorème de Cauchy), on obtient l'égalité $f = \phi$, ce qui prouve la relation (1.40).

Nous ne montrons pas que le propagateur défini en termes d'intégrale de chemins vérifie la relation de propagation. Cette preuve figure dans de nombreux ouvrages de référence tels que [42].

1.2.3.6 Propagation d'états à une particule.

Lorsque le propagateur est défini à partir de la corrélation de champs en différents points d'espace-temps (1.32), l'intégrale de propagation peut être obtenue en considérant les états à une particule.

Ces états permettent de relier explicitement la théorie quantique des champs au formalisme usuel de fonction d'onde en première quantification. Si l'on impliquait un nuage de fermions froids au lieu d'un nuage de bosons, il faudrait considérer une distribution d'états à une particule (au lieu d'un mode macroscopiquement peuplé) pour décrire nos expériences.²⁰

Nous nous plaçons en représentation de Heisenberg : l'évolution laisse l'état du vide invariant mais modifie, en revanche, les opérateurs champ. Un état à une particule, localisé en \mathbf{r} à l'instant t , est défini par :

$$|1, \mathbf{r}, t\rangle = \Psi^\dagger(\mathbf{r}, t) |0\rangle \quad (1.44)$$

L'état à une particule de fonction d'onde $\phi(\mathbf{r})$ à l'instant t s'écrit à partir d'une superposition des états précédents :

$$|1, \phi, t\rangle = \int d^3\mathbf{r} \phi(\mathbf{r}) \Psi^\dagger(\mathbf{r}, t) |0\rangle$$

Considérons un état à une particule dont la fonction d'onde est donnée à l'instant t_0 par $\phi(\mathbf{r}, t_0)$. La fonction d'onde au point \mathbf{r} et à l'instant t est donnée par le produit scalaire avec un état à une particule localisé au point \mathbf{r} à l'instant t :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \langle 1, \mathbf{r}, t | 1, \phi(\mathbf{r}, t_0), t_0 \rangle$$

20. On observerait, dans chaque mode occupé par les fermions, des phénomènes d'interférences à une particule.

En représentation de Heisenberg, cet état n'évolue pas. Il se décompose à l'instant t sur les états à une particule :

$$\langle 1, \mathbf{r}, t | 1, \phi(\mathbf{r}, t_0), t_0 \rangle = \langle 0 | \Psi(\mathbf{r}, t) \int d^3 \mathbf{r} \phi(\mathbf{r}, t_0) \Psi^\dagger(\mathbf{r}, t_0) | 0 \rangle$$

Cette relation peut être écrite en faisant apparaître explicitement la corrélation des champs quantiques :

$$\langle 1, \mathbf{r}, t | 1, \phi(\mathbf{r}, t_0), t_0 \rangle = \int d^3 \mathbf{r} \phi(\mathbf{r}, t_0) \langle 0 | \Psi(\mathbf{r}, t) \Psi^\dagger(\mathbf{r}, t_0) | 0 \rangle$$

Comme $t > t_0$, l'ordre des champs est bien respecté dans la corrélation définie en (1.32). On reconnaît alors l'intégrale de propagation (1.40).

1.2.4 Modélisation des interactions dans un champ atomique cohérent.

Nous rappelons ici simplement les conclusions essentielles à la modélisation des interactions interatomiques au sein d'un nuage cohérent. Une explication plus détaillée peut être trouvée en annexe C ou encore le dans le cours de Jean Dalibard [44] et dans les références incluses.

1.2.4.1 Nuage de bosons.

Aux très basses températures, la modélisation la plus simple ne prend en compte que les diffusions dans l'onde s . Le potentiel est alors modélisé par un terme de contact ²¹ :

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = g \delta(\mathbf{r})} \quad (1.45)$$

La constante g est reliée à la longueur de diffusion par la relation :

$$g = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m} \quad (1.46)$$

Ce pseudo-potentiel ne donne des résultats corrects seulement si la fonction d'onde considérée pour la diffusion est suffisamment régulière en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. On utilise également un autre pseudo-potentiel

21. La validité de cette approche dépend de caractéristiques propres du potentiel : décroissance rapide, isotropie, etc...Il est bon de noter une exception notable à cette modélisation : l'interaction dipolaire. La décroissance en $1/r^3$ de ce potentiel n'est pas suffisamment rapide pour assurer -même à basse température- la validité de l'approximation de diffusions uniquement dans l'onde s . Par ailleurs, ce potentiel présente une anisotropie. Pour ces deux raisons, la modélisation par un pseudo-potentiel de contact est inadéquate. Nous évoquerons au chapitre 6 la dynamique d'un gaz présentant des interactions dipolaires.

1.2 Propagation d'une source atomique cohérente : quelques rappels théoriques.33

applicable à des fonctions d'ondes moins régulières :

$$V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = Ng\delta(\mathbf{r})\frac{\partial r\psi(\mathbf{r})}{\partial r} \quad (1.47)$$

1.2.4.2 Nuage de fermions.

Aux températures ultrafroides, la diffusion dans l'onde s est inaccessible aux fermions du fait du principe de Pauli. A ces températures, les autres diffusions (dans l'onde p, \dots)- énergétiquement moins favorables- sont également inaccessibles. Ceci explique pourquoi les gaz de fermions sont quasiment insensibles aux interactions dans le régime de températures ultra-froides, ce qui fait d'eux des candidats prometteurs pour les interféromètres atomiques [46]. Les fermions sont par ailleurs utilisés dans les horloges optiques [47], mais il semble que la quasi-absence d'interactions ne soit pas le critère déterminant pour ces systèmes. Comme ce mémoire est dédié à l'optique des sources atomiques cohérentes, nous avons plutôt considéré des condensats de Bose-Einstein que des échantillons fermioniques. Une grande partie de l'étude réalisée ici peut cependant être transposée à la propagation de nuages fermioniques, à condition de considérer des états à une particule.

1.2.5 Equation d'évolution du champ atomique cohérent.

1.2.5.1 Approximation de température nulle.

Munis de la modélisation des interactions par un terme de contact, nous pouvons écrire simplement l'équation d'évolution du champ atomique. Pour éviter des complications inutiles, nous ne considérons ici qu'un seul état interne. Rappelons la décomposition du champ atomique selon la fraction condensée et la fraction thermique :

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}, t)\hat{a}_0 + \tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t) \quad (1.48)$$

Lorsque l'on insère cette décomposition dans le terme d'interaction du Lagrangien :

$$\frac{g}{2} \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$$

on obtient une série de termes qui correspondent à des vertex d'interactions condensat-condensat, condensat-nuage thermique, nuage thermique-nuage thermique :

$$\begin{aligned} & \frac{g}{2} \int d^3\mathbf{r} |\phi_0|^4(\mathbf{r}, t) \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \frac{g}{2} \int d^3\mathbf{r} \phi_0^*(\mathbf{r}, t) \hat{a}_0^\dagger \tilde{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t) \tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t) + \frac{g}{2} \int d^3\mathbf{r} |\phi_0|^2(\mathbf{r}, t) \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \tilde{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t) \\ & + \frac{g}{2} \int d^3\mathbf{r} |\phi_0|^2(\mathbf{r}, t) \phi_0^*(\mathbf{r}, t) \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t) + \frac{g}{2} \int d^3\mathbf{r} \tilde{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \tilde{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t) \tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t) + \dots \end{aligned}$$

Pour décrire l'évolution du nuage à température non-nulle, il est nécessaire de prendre en compte tous ces vertex d'interaction. Ce traitement est, en général, très complexe.

Les expériences proposées dans ce mémoire utilisent un nuage atomique dans un régime ultra-froid où la fraction thermique est supposée bien moins peuplée que la fraction condensée²². Nous prenons donc le parti de négliger l'interaction du condensat avec la fraction non-condensée, approximation d'autant plus légitime que les nuages considérés sont dilués. En d'autres termes, l'échantillon atomique est traité comme un gaz quantique dégénéré à température nulle.

1.2.5.2 Equation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps.

L'équation de propagation satisfaite par la fonction d'onde du condensat porte le nom d'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps :

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U^0(\mathbf{r}) + Ng|\Phi_0(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Phi_0(\mathbf{r}, t) \quad (1.49)$$

Elle est très fréquemment utilisée pour modéliser l'évolution de condensats de Bose-Einstein. La non-linéarité provient du terme cubique associé aux interactions.

1.2.5.3 Analogie avec l'optique non linéaire.

L'équation de Gross-Pitaevskii est identique à celle de la propagation d'un champ électrique dans un milieu Kerr et dans l'approximation paraxiale. Cette similitude a permis de transposer les prédictions de l'optique non-linéaire à la physique atomique, donnant lieu à un nouveau champ d'investigation : l'optique atomique non-linéaire.

Au cours de la dernière décennie, des phénomènes couramment observés en optique non-linéaire ont ainsi été réalisés avec des ondes de matière. Une technique courante pour la génération de nouvelles fréquences optiques consiste à mélanger trois ondes intenses et cohérentes dans un milieu non-linéaire afin d'en extraire une quatrième à la fréquence voulue. Ce mélange à quatre ondes a pu être réalisé avec des ondes de matière [25]. Le terme non-linéaire donne lieu à des conditions d'accords de phase identiques pour les ondes diffusées, et peut-être potentiellement utilisé pour réaliser de l'amplification atomique. Une autre transposition spectaculaire de l'optique non-linéaire à l'optique

22. En pratique, le nuage thermique devient pratiquement indétectable expérimentalement lorsqu'il représente moins de 10% de la fraction condensée [48].

1.2 Propagation d'une source atomique cohérente : quelques rappels théoriques.35

atomique a été l'observation de solitons (brillants et noirs) [49, 50, 51, 52], couramment utilisés pour les télécommunications [53].

Cette analogie avec l'optique non-linéaire a inspiré une grande partie du travail présenté dans ce mémoire, notamment l'extension du formalisme $ABCD$ présentée au chapitre 7. Il est en effet difficile d'obtenir des prédictions analytiques à partir d'une résolution directe de l'équation de Gross-Pitaevskii. L'emploi de méthodes optiques pour traiter les interactions permet par contre l'obtention de solutions approchées et simples à la propagation.

1.2.6 Propagation d'un nuage atomique cohérent dilué : propagation ABCD.

Il existe un cas particulier important où le propagateur associé à l'équation de propagation est connu de façon analytique : il s'agit de la propagation d'une onde atomique diluée dans un Hamiltonien quadratique en position et en impulsion. Un tel Hamiltonien admet l'expression générale²³ :

$$H(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}) = \frac{\tilde{\hat{\mathbf{p}}}\beta(t)\hat{\mathbf{p}}}{2m} - \tilde{\hat{\mathbf{r}}}\alpha(t)\hat{\mathbf{p}} - \frac{m}{2}\tilde{\hat{\mathbf{r}}}\gamma(t)\hat{\mathbf{r}} - m\mathbf{g}(t) \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{f}(t) \cdot \hat{\mathbf{p}} \quad (1.50)$$

Les éléments $\alpha(t), \beta(t)$ et $\gamma(t)$ sont des matrices 3×3 , tandis que $\mathbf{f}(t)$ et $\mathbf{g}(t)$ sont des vecteurs. Nous désignons par $\tilde{}$ l'opération de transposition matricielle ou vectorielle. Les matrices $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ peuvent évidemment être prises comme symétriques sans perte de généralité. En revanche, la matrice $\alpha(t)$ est prise comme antisymétrique, si bien que $\alpha(t)$ est associé à des produits de deux opérateurs qui commutent. Le passage des vecteurs aux opérateurs est donc univoque pour ce terme.

Précisons brièvement l'origine physique des termes intervenant dans ce Hamiltonien discutée en détail dans la référence [43] et exposée par ailleurs dans [36, 37, 40, 10]. Le potentiel $-m\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ modélise la contribution principale du potentiel gravitationnel. Le terme quadratique en position $\gamma(t)$ rend compte des gradients de gravité et également d'un effet de lentille effective due aux interactions atomiques. Le tenseur $\alpha(t)$ traduit des effets de rotation du référentiel comme l'effet Sagnac ou l'effet Lense-Thirring dans le domaine relativiste. Le terme quadratique en impulsion provient à la fois de l'approximation parabolique (impliquant une masse effective m^* , voir Annexe B du chapitre 7) et peut également être affecté par la présence d'ondes gravitationnelles.

23. Cet Hamiltonien est obtenu à partir du Hamiltonien relativiste par l'approximation parabolique, comme exposé dans l'appendice B du chapitre 7.

Cette évolution Hamiltonienne est adéquate pour décrire la plupart des expériences métrologiques utilisant des atomes froids. En effet, de telles expériences font généralement intervenir des nuages suffisamment dilués pour que l'impact des interactions sur les mesures effectuées ne soit pas critique. D'autre part, étant donné la résolution des interféromètres actuels, il n'est pas nécessaire de modéliser les effets gravito-inertiels par un développement plus que quadratique [10].

Le formalisme présenté ici s'inspire des lois $ABCD$ paramétrant l'évolution de rayons lumineux en optique géométrique [54]. Il a été introduit par Christian Bordé dans le cadre de la physique atomique [55, 36]. Nous exposons maintenant plusieurs résultats importants pour appréhender la propagation de fonctions d'onde dans des Hamiltoniens quadratiques. Nous adoptons les notations suivantes :

$$M(t, t_0) = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \quad \Gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t') & \beta(t') \\ \gamma(t') & \alpha(t') \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

1.2.6.1 Propagateur $ABCD$.

Le propagateur d'une équation d'évolution linéaire associée à un Hamiltonien quadratique est analytique et a été déterminé par Van-Vleck en 1928 [56]²⁴ :

$$K(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') \right] \quad (1.52)$$

La fonction $S_{cl}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')$ désigne l'action classique, c'est à dire l'intégrale du Lagrangien évaluée le long de la trajectoire classique (paramétrée par τ) entre les points d'espace temps (\mathbf{r}', t') et (\mathbf{r}, t) :

$$S_{cl}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \int_{t'}^t d\tau L(\mathbf{u}(\tau), \mathbf{p}(\tau)) \quad (1.53)$$

où la trajectoire $u(\tau)$ est celle d'un point matériel initialement à la position \mathbf{r}' à l'instant t' , arrivant à la position \mathbf{r} à l'instant t et satisfaisant aux équations classiques du mouvement :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t') = \mathbf{r}' \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{r} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\nabla_{\mathbf{r}} H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \end{cases} \quad (1.54)$$

L'action peut également être déterminée par l'équation de Hamilton-Jacobi [36] :

$$\partial_t S + H_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \nabla_{\mathbf{r}} S, t) = 0 \quad (1.55)$$

24. Remarquons qu'un tel propagateur satisfait la définition (1.38).

1.2 Propagation d'une source atomique cohérente : quelques rappels théoriques.37

Soulignons que ces solutions peuvent également être obtenues par une série de transformations unitaires successives [55, 37]. L'expression du propagateur de Van Vleck a également été démontrée par Christian Bordé [55].

1.2.6.2 Evolution $ABCD$ des opérateurs position et impulsion en représentation de Heisenberg.

Remarquons tout d'abord que le caractère quadratique du Hamiltonien permet d'obtenir un jeu d'équation fermé pour l'évolution des opérateurs position et impulsion en représentation de Heisenberg. Introduisons l'opérateur unitaire d'évolution associé au mouvement externe :

$$U_{\text{ext}}(t, t_1) = T \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^t dt' H_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t') \right) \right] \quad (1.56)$$

Nous avons à nouveau utilisé l'ordonnancement temporel T exposé dans l'annexe B. En représentation d'Heisenberg, les opérateurs position et impulsion sont définis par :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}(t, t_1) &= U_{\text{ext}}^{-1}(t, t_1) \hat{\mathbf{r}} U_{\text{ext}}(t, t_1) \\ \hat{\mathbf{P}}(t, t_1) &= U_{\text{ext}}^{-1}(t, t_1) \hat{\mathbf{p}} U_{\text{ext}}(t, t_1) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Leurs équations d'évolution de Heisenberg sont déterminées par leur commutateur avec le Hamiltonien :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{R}}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{\mathbf{R}}, \hat{H}(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{P}}) \right] \\ \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{\mathbf{P}}, \hat{H}(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{P}}) \right] \end{aligned}$$

Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}(t, t_1) \\ \frac{1}{m} \hat{\mathbf{P}}(t, t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \alpha(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}(t_0, t_1) \\ \frac{1}{m} \hat{\mathbf{P}}(t_0, t_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{g}(t) \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

Cette dernière équation peut s'intégrer formellement et donner lieu à une relation matricielle " $ABCD\xi\phi$ " entre les opérateurs à l'instant initial et ceux à l'instant final :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}(t, t_1) \\ \frac{1}{m} \hat{\mathbf{P}}(t, t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}(t_0, t_1) \\ \frac{1}{m} \hat{\mathbf{P}}(t_0, t_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

En remplaçant cette expression dans l'équation de Heisenberg pour les opérateurs positions et impulsions, on obtient le système suivant pour la matrice $ABCD$:

$$\frac{dM(t, t_0)}{dt} = \Gamma(t) M(t, t_0) \quad (1.60)$$

Cette équation peut s'intégrer formellement à l'aide de l'opérateur d'ordonnement temporel T :

$$\begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} = T \left[\exp \left(- \int_{t_0}^t dt' \begin{pmatrix} \alpha(t') & \beta(t') \\ \gamma(t') & \alpha(t') \end{pmatrix} \right) \right] \quad (1.61)$$

Le vecteur (ξ, ϕ) apparaît par ailleurs comme la solution inhomogène du système différentiel (1.58), de la forme $\frac{d\chi}{dt} = \Gamma\chi + \Phi$ avec $\Phi(t) = (f(t), g(t))$. Cette solution s'exprime :

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} = \int_{t_0}^t dt' M(t, t') \Phi(t') \quad \text{avec} \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{g}(t) \end{pmatrix}$$

Rappelons que, en représentation de Heisenberg, seuls les opérateurs évoluent, le ket représentant l'état quantique du système reste constant au cours du temps. La relation "ABCD" (1.59) entre opérateurs se traduit donc directement par une relation sur les positions et impulsions moyennes $\mathbf{r}_0(t) = \langle \hat{\mathbf{R}}(t, t_1) \rangle$ et $\mathbf{p}_0(t) = \langle \hat{\mathbf{P}}(t, t_1) \rangle$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_0(t) \\ \frac{1}{m}\mathbf{p}_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0(t_0) \\ \frac{1}{m}\mathbf{p}_0(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

Il est possible d'utiliser ces relations entre opérateurs $ABCD$ pour obtenir des intégrales premières du mouvement du paquet d'ondes, qui fournissent une démonstration alternative du théorème $ABCD$ [10].

1.2.6.3 Théorème $ABCD$ pour un mode gaussien fondamental.

L'avantage principal de la modélisation de la dynamique par un Hamiltonien quadratique est l'existence d'une base de solutions self-similaires constituée de fonctions gaussiennes et dont l'évolution est simple. En effet, l'action du propagateur (1.52) sur une gaussienne redonne une fonction gaussienne.

Plus précisément, soit une fonction d'onde $\phi(\mathbf{r}, t)$ satisfaisant l'équation de propagation associée au Hamiltonien quadratique (1.50) et définie à l'instant initial t_0 par la fonction gaussienne dans le

1.2 Propagation d'une source atomique cohérente : quelques rappels théoriques.39

mode fondamental :

$$\phi(\mathbf{r}, t_0) = \frac{1}{\sqrt{|\det(X(t_0))|}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} {}^t(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0))Y(t_0)X^{-1}(t_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)) + \frac{i}{\hbar} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)) \cdot \mathbf{p}_0(t_0) \right] \quad (1.63)$$

Par convention, les matrices $X(t_0)$, $Y(t_0)$ caractérisent respectivement les dispersions initiales en position et en impulsion :

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} \Delta x & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y & 0 \\ 0 & 0 & \Delta z \end{pmatrix} \quad Y(t_0) = \frac{i\hbar}{m} \begin{pmatrix} 1/\Delta x & 0 & 0 \\ 0 & 1/\Delta y & 0 \\ 0 & 0 & 1/\Delta z \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

La fonction d'onde $\phi(\mathbf{r}, t)$ est déterminée à tout instant ultérieur $t > t_0$ par la relation :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(t, t_0, \mathbf{r}_0(t_0), \mathbf{p}_0(t_0))}}{\sqrt{|\det(X(t))|}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} {}^t(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))Y(t)X^{-1}(t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) + \frac{i}{\hbar} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \cdot \mathbf{p}_0(t) \right] \quad (1.65)$$

Les positions et impulsions moyennes $\mathbf{r}_0(t)$, $\mathbf{p}_0(t)$ sont données par la relation ABCD (1.62). Les quantités $X(t)$, $Y(t)$ suivent elles-aussi cette loi d'évolution, faisant intervenir la même matrice $ABCD$:

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t_0) \\ Y(t_0) \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

Le terme $S_{cl}(t, t_0, \mathbf{r}_0(t_0), \mathbf{p}_0(t_0))$ correspond enfin à l'action classique entre t et t_0 d'un point matériel de masse m , de dynamique régie par le Hamiltonien classique H et de positions et impulsions initiales $\mathbf{r}_0(t_0)$ et $\mathbf{p}_0(t_0)$.

1.2.6.4 Extension à la propagation d'une fonction d'onde initiale arbitraire.

Bien que la méthode précédente fasse intervenir une fonction d'onde initialement dans le mode gaussien fondamental, il est possible d'en extraire la propagation d'une base complète de l'espace de Hilbert [37]. En effet, le théorème $ABCD$ ne s'applique pas à une seule fonction mais à toute une famille continue de fonctions paramétrées par le choix de la position centrale, de l'impulsion centrale et de la phase. En reparamétrant cette famille de fonctions pour l'exprimer comme une fonction génératrice, on peut alors obtenir la propagation d'une base de modes Hermito-Gaussiens.

Nous considérons la fonction génératrice suivante, dont le développement donne les modes Hermito-

Gaussiens :

$$F(\mathbf{r}, M_1, M_2, M_3, \alpha) = \exp \left({}^t\mathbf{r}M_1\mathbf{r} + i {}^t\mathbf{r}M_2\alpha + {}^t\alpha M_3\alpha \right) = e^{t\mathbf{r}M_1\mathbf{r}} \sum_{l,m,n} i^{l+m+n} \alpha_x^l \alpha_y^m \alpha_z^n H_{lmn} \left(\tilde{M}_2\mathbf{r}, -\frac{M_3}{2} \right) \quad (1.67)$$

En utilisant une paramétrisation adaptée de l'impulsion centrale et un facteur de phase, il est possible d'"habiller" le mode gaussien fondamental (1.63) en une telle fonction génératrice :

$$G_\alpha(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, X, Y) = \frac{1}{\sqrt{|\det(X)|}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} {}^t(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)YX^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0(\alpha) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \varphi(\alpha) \right]$$

$$\mathbf{p}_0(\alpha) = \mathbf{p}_0 - 2\hbar\tilde{X}^{-1}\alpha \quad \varphi(\alpha) = \frac{1}{2} {}^t\alpha X^{-1}X^*\alpha \quad (1.68)$$

On retrouve ainsi le développement en mode Hermito-Gaussiens :

$$G_\alpha(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, X, Y) = \frac{1}{\sqrt{|\det(X)|}} e^{t(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)YX^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} \sum_{l,m,n} i^{l+m+n} \alpha_x^l \alpha_y^m \alpha_z^n H_{lmn} \left(-2\tilde{X}^{-1}\mathbf{r}, -\frac{X^{-1}X^*}{2} \right) \quad (1.69)$$

L'obtention de la propagation des modes Hermito-Gaussien se fait alors facilement. Considérons à présent une fonction d'onde ϕ_α se propageant selon le Hamiltonien quadratique précédent et vérifiant la condition initiale $\phi_\alpha(\mathbf{r}, t_0) = G_\alpha(\mathbf{r}_0(t_0), \mathbf{p}_0(t_0), X_0, Y_0)$. La propagation *ABCD* nous donne une expression analytique de cette fonction à tout instant $t > 0$ selon $\phi_\alpha(\mathbf{r}, t) = G_\alpha(\mathbf{r}_0(t), \mathbf{p}_0(t), X(t), Y(t))$. On développe les fonctions d'onde initiales et finales en puissances de α . C'est alors la *linéarité* de l'équation de propagation qui nous permet d'identifier les coefficients de $\alpha_x^l \alpha_y^m \alpha_z^n$ et de déduire l'évolution de chaque mode H_{lmn} :

$$U_{ext}(t, t_0) \left[\frac{1}{\sqrt{|\det(X_0)|}} H_{lmn} \left(-2\tilde{X}_0^{-1}\mathbf{r}, -\frac{X_0^{-1}X_0^*}{2} \right) e^{t(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)Y_0X_0^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} \right]$$

$$= \frac{e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}(t,t_0,\mathbf{r}_0(t_0),\mathbf{p}_0(t_0))}}{\sqrt{|\det(X(t))|}} H_{lmn} \left(-2\tilde{X}^{-1}(t)\mathbf{r}, -\frac{X^{-1}(t)X^*(t)}{2} \right) e^{t(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)Y(t)X(t)^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} \quad (1.70)$$

L'équation précédente permet ainsi d'étendre le théorème *ABCD* du mode fondamental à l'ensemble des modes Hermito-Gaussiens.

Nous retiendrons deux points essentiels de la discussion précédente.

La première conclusion est d'ordre pratique. La base de solution exhibée permet de ramener la propagation d'une fonction d'onde arbitraire dans un Hamiltonien quadratique à une succession de

1.2 Propagation d'une source atomique cohérente : quelques rappels théoriques.41

deux opérations :

- Calcul des coefficients de projection de la fonction d'onde sur une base de modes Hermiteo-Gaussiens.
- Evolution des paramètres $\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, X, Y$ au cours du temps et calcul de l'action classique.

La seconde est d'ordre théorique : la propagation d'un mode Gaussien fondamental paramétré par des éléments $\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, X, Y$ quelconques contient toutes les informations nécessaires à la propagation de fonctions d'ondes générales. En d'autres termes, l'étude de la propagation d'une fonction d'onde dans un système quantique régi par un Hamiltonien quadratique en position et en impulsion peut-être ramené *sans perte de généralité* à l'étude d'une fonction d'onde initialement dans le mode fondamental gaussien. C'est pourquoi, dans les systèmes expérimentaux proposés dans ce chapitre, nous prendrons toujours une telle fonction initiale. Nous utiliserons tout au long de ce manuscrit la notation suivante pour désigner un paquet d'ondes générique :

$$wp(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, X, Y, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{|\det(X)|}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) Y X^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{i}{\hbar} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{p}_0 - 2\hbar \tilde{X}^{-1} \vec{\alpha}) + \frac{1}{2} \vec{\alpha} X^{-1} X^* \vec{\alpha} \right] \quad (1.71)$$

1.2.7 Loi d'expansion en régime de Thomas-Fermi dépendant du temps.

Comme nous invoquerons ce régime de propagation à plusieurs reprises, il est utile d'exposer brièvement ces résultats qui sont par ailleurs détaillés dans plusieurs ouvrages de référence [57]. En régime de Thomas-Fermi, la contribution dominante à l'énergie du condensat provient des interactions. Ceci permet de négliger le terme cinétique dans l'équation de Gross-Pitaeskiï en régime indépendant du temps²⁵ :

$$\mu\phi(\mathbf{r}) \simeq U^{(0)}(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + Ng|\phi(\mathbf{r})|^2\phi(\mathbf{r}) \quad (1.72)$$

En présence d'un potentiel extérieur harmonique :

$$U^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 x_i^2 \quad (1.73)$$

25. Approximation dite de Thomas-Fermi.

la norme de la fonction d'onde épouse ainsi une parabole inversée :

$$\rho(\mathbf{r}) = |\phi(\mathbf{r})|^2 = \left(\frac{\mu}{Ng}\right) \left(1 - \frac{x_i^2}{R_i^2}\right) \quad R_i = \sqrt{\frac{2\mu}{\omega_i^2}} \quad (1.74)$$

Il est possible d'étendre ces résultats dans le cas où le potentiel extérieur $U^{(0)}$ dépend du temps [38]. On absorbe alors l'évolution de la fonction d'onde dans des paramètres d'échelle λ_i en considérant la transformation de jauge suivante :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\prod_1^d \lambda_i(t)}} \exp(i\beta(t)) \exp\left(i \frac{m \sum_1^d \dot{\lambda}_i(t) x_i^2}{2\hbar \lambda_i(t)}\right) \tilde{\Phi}\left(\frac{x_i}{\lambda_i(t)}, t\right) \quad (1.75)$$

Commentons brièvement la forme de cette transformation. L'argument $x_i/\lambda_i(t)$ de la fonction d'onde $\tilde{\Phi}$. Le préfacteur $1/\sqrt{\prod_1^d \lambda_i(t)}$ assure la normalisation de la fonction d'onde. Le facteur de phase $\beta(t)$ est un artifice mathématique qui permet d'absorber l'oscillation rapide de la fonction d'onde. Le facteur de phase $\frac{m \sum_1^d \dot{\lambda}_i(t) x_i^2}{2\hbar \lambda_i(t)}$ reflète l'opération de dilatation de l'espace. En effet, l'opération de dilatation sur l'équation de Newton classique conduit à considérer un champ de vitesse local :

$$v(\mathbf{r}, t) = x_i \frac{\dot{\lambda}_i(t)}{\lambda_i(t)} \hat{e}_i \quad (1.76)$$

Une translation $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + m\mathbf{v}_0$ sur les impulsions est opérée par l'opérateur unitaire $T_{m\mathbf{v}_0} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} m\mathbf{v}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}}\right)$. Le préfacteur de la transformation de jauge équivaut donc à effectuer une translation sur les impulsions correspondant au champ de vitesse précédent : $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + mx_i[\dot{\lambda}_i(t)/\lambda_i(t)]\hat{e}_i$.

En supposant que la fonction d'onde $\Phi(\mathbf{r}, t)$ obéit à l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps (1.49), on obtient une équation pour la fonction d'onde transformée de jauge $\tilde{\Phi}$. On peut montrer que, si les paramètres d'échelle obéissent au système différentiel :

$$\ddot{\lambda}_i = \frac{\omega_i^2(0)}{\lambda_i \prod_{j=1}^d \lambda_j} - \lambda_i \omega_i^2(t) \quad (1.77)$$

alors la fonction d'onde transformée de jauge $\tilde{\Phi}$ évolue lentement $\tilde{\Phi}(x_i, t) \simeq \tilde{\Phi}(x_i, t_0)$ [38]. Ainsi la propagation est-elle essentiellement déterminée, en régime d'interactions fortes, par un jeu de quelques paramètres d'échelle obéissant au système (1.77)²⁶.

26. Les images d'un condensat en expansion sont souvent utilisées expérimentalement pour caractériser la distribution initiale d'impulsion. En fait, la taille du condensat après un certain temps de vol dépend également d'autres paramètres

1.2.8 Conclusion.

Nous avons établi en parallèle entre la propagation d'un champ atomique et celle d'un champ photonique. Les deux propagations sont essentiellement identiques à l'exception notable de la présence d'une masse pour le champ atomique. Cette différence donne à l'optique atomique une richesse supplémentaire : définition d'une dimension supplémentaire -temps propre- associée à la masse, et propagation cohérente en dehors du régime paraxial.

Nous avons rappelé plusieurs concepts de théorie des champs essentiels au traitement des sources atomiques cohérentes : Lagrangien, principe de moindre action²⁷, et propagateur.

Nous avons également modélisé plus spécifiquement la propagation des nuages atomiques considérés dans les expériences de métrologie. La modélisation des interactions a mis en évidence deux propriétés importantes. D'une part, il existe une distinction essentielle à basse température dans le comportement des fermions et des bosons, les interactions étant beaucoup plus faibles pour les premiers. D'autre part, dans de nombreuses situations expérimentales, les interactions atomiques peuvent être modélisées par une seule constante de couplage liée à la diffusion dans l'onde s et par un terme de champ moyen analogue à l'effet Kerr en optique non-linéaire. L'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps, qui résulte de cette modélisation, est alors similaire à l'équation de propagation d'un champ électrique dans un milieu non-linéaire. Cette analogie permettra de transposer efficacement les méthodes établies en optique pour décrire la propagation du champ électromagnétique dans des milieux Kerr [58, 59, 60].

Enfin, nous avons détaillé deux régimes spécifiques de propagation pour les ondes de matière. Le régime dilué est celui qui concerne le plus les expériences considérées dans ce mémoire, dont le caractère métrologique est difficilement compatible avec la présence d'interactions importantes. Dans ce régime, la propagation par matrices $ABCD$ permet une description efficace et souvent analytique de l'évolution de nuages atomiques. A l'opposé, le régime de Thomas-Fermi est souvent le cadre adapté pour décrire l'expansion de condensats immédiatement après coupure du piège.

que cette distribution initiale d'impulsion : la taille initiale du nuage bien sûr, mais également l'accumulation de l'effet des interactions sur l'ensemble de la chute [48]. Ce dernier aspect, qui intervient pourtant explicitement dans la loi d'expansion de Thomas-Fermi, est souvent omis des analyses de temps de vol - à tort-.

27. Récemment reformulé par Christian Bordé à 5D.

1.3 Manipulation du champ atomique par un champ électromagnétique.

La symétrie entre les rôles joués par les champs atomiques et électromagnétiques est manifeste dans la manipulation expérimentale de ces champs : alors qu'en optique photonique le faisceau lumineux est contrôlé par des objets matériels (tels que lentilles, miroirs...), en optique atomique le faisceau de matière est dirigé au moyen d'éléments lumineux. Nous effectuons ici quelques rappels sur les techniques de manipulation d'un champ atomique par un champ électromagnétique.

Les photons sont porteurs à la fois d'une quantité de mouvement et d'un moment cinétique. Les lois de conservation (qui au niveau fondamental est une collision) imposent que le mouvement externe des atomes soit altéré par le champ lumineux lors de l'interaction lumière-matière. Cette conservation peut ainsi permettre un transfert cohérent d'impulsion [61] ou de moment cinétique [62, 63] du champ lumineux vers le champ atomique. Le changement d'état interne associé permet par ailleurs de désigner sans ambiguïté les atomes dont le mouvement a été modifié lors de la collision. Cette propriété a servi à définir les interféromètres atomiques actuels [64].

Pour les expériences considérées, cette interaction est correctement décrite au moyen d'un formalisme semi-classique faisant intervenir un champ électromagnétique externe. Le champ lumineux considéré impliqué dans nos propositions expérimentales est en effet dans des états cohérents intenses qui lui donnent des propriétés très proches d'un champ classique.

Cependant, même en présence d'un champ électromagnétique classique, la dynamique du champ atomique est complexe. Aussi procéderons-nous par complexité croissante dans notre modélisation de l'interaction atome-champ. Nous commençons par traiter le cas le plus simple de l'interaction d'un atome à deux niveaux avec un champ électromagnétique externe quasi-résonnant. Nous abordons ensuite l'interaction d'un système à trois niveaux avec un champ électromagnétique vérifiant une condition de résonance à deux photons. Nous étendons enfin notre modélisation de la diffusion pour prendre en compte la quantification du mouvement externe de l'atome. Nous rappelons les équations d'évolution d'un spineur atomique en présence d'un champ électromagnétique. La résolution de ces équations sort du cadre de ce mémoire, nous donnons les conclusions de Charles Antoine et Christian Bordé [10] relatives à l'action d'un champ électromagnétique uniforme sur le champ atomique. Ces résultats sur les séparatrices temporelles serviront de socle à la modélisation des expériences proposées dans ce manuscrit.

1.3.1 Interaction d'un atome à deux niveaux avec un champ électromagnétique externe oscillant.

La modélisation la plus simple de l'interaction électromagnétique fait intervenir un système quantique à deux niveaux²⁸ et un champ électromagnétique externe. Les degrés de liberté externes du champ atomique sont traités de façon purement classique. Le champ électromagnétique est simplement uniforme et sinusoidal :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (1.78)$$

Le potentiel d'interaction correspondant fait intervenir l'opérateur dipolaire $\hat{\mathbf{d}} = |e|\hat{\mathbf{r}}$:

$$H_{\text{em}}(t) = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t) \quad (1.79)$$

Le résolution de ce problème est exposée dans de nombreux ouvrages de mécanique quantique [14], et nous nous contenterons ici d'en rappeler les conclusions. Les étapes du calcul sont détaillées dans l'annexe D.

Pour obtenir une expression simple du spineur atomique en sortie, il est nécessaire d'effectuer une approximation dite des "ondes tournantes". Elle consiste à considérer que la contribution anti-résonnante du champ se moyenne suffisamment rapidement pour ne pas contribuer au mouvement du spineur atomique. Cette approximation n'est valide que si la durée T associée à une rotation angulaire de π du spineur atomique vérifie :

$$T = \frac{\pi \hbar}{|\langle b | \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0 | a \rangle|} \gg \frac{1}{\omega_b - \omega_a} \quad (1.80)$$

Pour se placer dans le régime d'approximation d'ondes tournantes, il est donc nécessaire d'imposer une limite supérieure à la vitesse de rotation du spineur atomique, fonction de l'écart entre les niveaux d'énergie considérés. Cette condition impose en fait une limite à la quantité de mouvement que l'on peut transférer par unité de temps au nuage atomique.

On choisit de définir la pulsation de Rabi selon :

$$\Omega_{ba} = -\frac{\langle b | \hat{\mathbf{d}} | a \rangle E_0}{\hbar} > 0 \quad (1.81)$$

28. On néglige les complications éventuelles liées à la structure interne de l'atome comportant généralement bien plus que deux niveaux d'énergie.

Nous introduisons également le désaccord $\delta = \omega - \omega_{ba}$ ²⁹, ainsi que la pulsation de Rabi effective $\Omega_r = \sqrt{\Omega_{ba}^2 + \delta^2/4}$. Si l'approximation des ondes tournantes est vérifiée, le spineur atomique de sortie dépend du spineur en entrée selon :

$$\begin{pmatrix} b(t_0 + \tau) \\ a(t_0 + \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\cos(\frac{\Omega_r \tau}{2}) - i \cos \theta \sin(\frac{\Omega_r \tau}{2})] e^{-i\delta \frac{\tau}{2}} & -i \sin \theta \sin(\frac{\Omega_r \tau}{2}) e^{-i\delta \frac{\tau}{2}} e^{-i(\delta t_0 + \phi)} \\ -i \sin \theta \sin(\frac{\Omega_r \tau}{2}) e^{i\delta \frac{\tau}{2}} e^{i(\delta t_0 + \phi)} & [\cos(\frac{\Omega_r \tau}{2}) - i \cos \theta \sin(\frac{\Omega_r \tau}{2})] e^{i\delta \frac{\tau}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(t_0) \\ a(t_0) \end{pmatrix} \quad (1.82)$$

L'angle θ intervenant dans cette expression dépend du désaccord et de la pulsation de Rabi selon :

$$\sin \theta = \frac{\Omega_{ba}}{\Omega_r} \quad \cos \theta = \frac{-\delta}{\Omega_r} \quad \theta \in [0, \pi] \quad (1.83)$$

Nous reformulons à présent la matrice de diffusion à l'aide d'un paramètre sans dimension y (défini de façon plus générale ultérieurement) associé à la non-résonance de la transition :

$$y = \frac{-\delta}{\Omega_{ba}} \quad (1.84)$$

On obtient alors les relations :

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \cos \theta = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \quad (1.85)$$

La matrice de Rabi précédente s'exprime selon :

$$\begin{pmatrix} \left[\cos\left(\frac{\Omega_0 \tau}{2} \sqrt{1+y^2}\right) - i \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \sin\left(\frac{\Omega_0 \tau}{2} \sqrt{1+y^2}\right) \right] e^{-i\delta \frac{\tau}{2}} & \frac{i}{\sqrt{1+y^2}} \sin\left(\frac{\Omega_0 \tau}{2} \sqrt{1+y^2}\right) e^{-i\delta \frac{\tau}{2}} e^{-i(\delta t_0 + \phi)} \\ \frac{i}{\sqrt{1+y^2}} \sin\left(\frac{\Omega_0 \tau}{2} \sqrt{1+y^2}\right) e^{i\delta \frac{\tau}{2}} e^{i(\delta t_0 + \phi)} & \left[\cos\left(\frac{\Omega_0 \tau}{2} \sqrt{1+y^2}\right) - i \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \sin\left(\frac{\Omega_0 \tau}{2} \sqrt{1+y^2}\right) \right] e^{i\delta \frac{\tau}{2}} \end{pmatrix} \quad (1.86)$$

Notons que le signe des termes croisés est purement conventionnel, car lié à la définition des états internes $|a\rangle, |b\rangle$ et susceptible d'être modifié par un ajout de phase arbitraire sur l'un de ces états.

1.3.2 Diffusion à deux photons sur un atome à trois niveaux.

L'intérêt principal de ces diffusions est qu'elles permettent de communiquer aux atomes une quantité de mouvement conséquente, de façon cohérente, lors de transitions entre niveaux faiblement espacés en énergie (par exemple une transition micro-ondes). Une impulsion résonnante à un photon ne donnerait pas lieu à un transfert d'impulsion suffisant (pour nos expériences) avec un tel écart d'énergie. Les canaux de diffusion ont été abordé dans le cours de Christian Bordé [65]. Les calculs de matrice effective de diffusion lors d'une impulsion Raman figurent dans la référence [66] ainsi que

29. Nous négligeons ici tout effet de recul, mais ce terme pourrait être introduit facilement dans le désaccord.

dans le cours de Cohen-Tannoudji [67].

Considérons un atome à trois niveaux a , b , c et un champ électromagnétique externe constitué de deux ondes planes superposées :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\mathbf{E}_1^0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t + \varphi_1)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_1^0 e^{i(-\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \omega_1 t - \varphi_1)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2^0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t + \varphi_2)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2^0 e^{i(-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \omega_2 t - \varphi_2)} .$$

Pour fixer les idées, nous orientons le sens de la propagation selon $\mathbf{k}_1 = k_1 \mathbf{z}$. Pour l'instant le mouvement externe de l'atome est traité ici de façon semi-classique : les termes correspondants sont simplement rajoutés dans la condition de conservation de l'énergie.

1.3.2.1 Processus de diffusion résonnants.

Il est utile de représenter l'action du champ sur l'atome sur un diagramme énergie-impulsion. Nous désignons par le ket $|\alpha, \mathbf{p}\rangle$ un atome dans l'état interne α et avec l'impulsion \mathbf{p} . Le développement non-relativiste de l'énergie associée suit simplement une parabole :

$$E = m_\alpha c^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m_\alpha} \quad (1.87)$$

Le diagramme énergie-impulsion de l'atome fait ainsi intervenir une famille de paraboloides indexés par l'état interne considéré. Pour simplifier, nous considérons simplement la composante de l'impulsion parallèle à l'axe de propagation O_z des lasers. Le diagramme fait alors intervenir simplement des paraboles et non plus des paraboloides.

Chaque composante du champ, de la forme :

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

avec $(\omega, \mathbf{k}) \in \{(\omega_1, \mathbf{k}_1), (-\omega_1, -\mathbf{k}_1), (\omega_2, \mathbf{k}_2), (-\omega_2, -\mathbf{k}_2)\}$, se traduit par l'ajout d'une énergie $\Delta E = \hbar\omega$ et d'une quantité de mouvement $\Delta \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$. Les termes de fréquences négatives (donnant lieu à $\Delta E < 0$) s'interprètent comme des processus d'émission, et ceux de fréquence positive (donnant lieu à $\Delta E > 0$) comme des processus d'absorption. Ce déplacement est matérialisé sur le diagramme d'impulsion par un vecteur rouge. Identifier les canaux de diffusions possibles consiste à déterminer un état initial, un état final, et un processus d'interaction tels que les lois de conservation en énergie et en impulsion soient vérifiées³⁰. Nous supposons que les ondes planes ont des fréquences bien

30. Certains auteurs qualifient alors la diffusion d'élastique. A notre sens, le concept d'élasticité est différent : une diffusion est élastique ssi l'énergie cinétique des particules impliquées est conservée.

supérieures à l'écart entre les deux niveaux d'énergie a et b de l'atome, et que les deux lasers sont fortement désaccordés (dans le rouge) par rapport à la transition $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$.

Commençons par examiner les processus à un photon respectant les lois de conservation. Celles-ci s'écrivent^{31 32} :

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \hbar\mathbf{k} \quad (1.88)$$

$$\hbar\omega_f + \frac{\hbar^2\mathbf{p}_2^2}{2m} = \hbar\omega_i + \frac{\hbar^2\mathbf{p}_1^2}{2m} + \hbar\omega \quad (1.89)$$

avec les états $|i, \mathbf{p}_1\rangle$ et $|f, \mathbf{p}_2\rangle$ et le couple $(\omega, \mathbf{k}) \in \{(\omega_1, \mathbf{k}_1), (-\omega_1, -\mathbf{k}_1), (\omega_2, \mathbf{k}_2), (-\omega_2, -\mathbf{k}_2)\}$. Le diagramme de la Figure 1.3 montre qu'il n'y a pas de processus qui, à partir de l'état fondamental au repos $|i, \mathbf{p}_1\rangle = |a, \mathbf{0}\rangle$, respecte à la fois la conservation de l'impulsion et celle de l'énergie. En effet, aucun des quatre vecteurs correspondant aux processus uniphotoniques envisageables n'arrive sur une parabole.

Examinons à présent les processus à deux photons compatibles avec les lois de conservation. En d'autres termes, il s'agit cette fois-ci de déterminer deux couples tels que

$$(\omega, \mathbf{k}), (\omega', \mathbf{k}') \in \{(\omega_1, \mathbf{k}_1), (-\omega_1, -\mathbf{k}_1), (\omega_2, \mathbf{k}_2), (-\omega_2, -\mathbf{k}_2)\}$$

et deux états $|i, \mathbf{p}_1\rangle$ et $|f, \mathbf{p}_2\rangle$ qui vérifient les conditions :

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \hbar\mathbf{k} + \hbar\mathbf{k}' \quad (1.90)$$

$$\hbar\omega_f + \frac{\hbar^2\mathbf{p}_2^2}{2m} = \hbar\omega_i + \frac{\hbar^2\mathbf{p}_1^2}{2m} + \hbar\omega + \hbar\omega' \quad (1.91)$$

Nous cherchons cette fois-ci à déterminer des processus résonnants avec un état final quelconque à partir de l'état initial $|i, \mathbf{p}_1\rangle = |a, \mathbf{0}\rangle$. Géométriquement, il s'agit de trouver une somme de deux vecteurs qui envoie ce point sur une parabole. Nécessairement les vecteurs doivent être associés à des variations d'énergie de signe opposé (on suppose que $|\omega_{ca} - \omega_{1,2}| \ll \omega_{1,2}$), sinon le processus viole la conservation de l'énergie. Dans le cas où l'on considère deux couples $(\omega, \mathbf{k}) = (\omega_i, \mathbf{k}_i)$, $(\omega', \mathbf{k}') = (-\omega_i, -\mathbf{k}_i)$, on obtient un cycle d'absorption-émission dans l'onde progressive i qui n'entraîne pas de transfert d'impulsion pour l'atome³³. En revanche, les processus $(\omega, \mathbf{k}) = (\omega_1, \mathbf{k}_1)$, $(\omega', \mathbf{k}') = (-\omega_2, -\mathbf{k}_2)$

31. Notons que la conservation du moment cinétique est assurée par le choix de polarisation des faisceaux et par les moments cinétiques des niveaux internes a et b considérés.

32. Contrairement au paragraphe précédent, nous avons tenu compte de la contribution du mouvement externe de l'atome à l'énergie de la diffusion.

33. En fait, l'occurrence de ces processus se manifeste principalement par les déplacements lumineux des niveaux

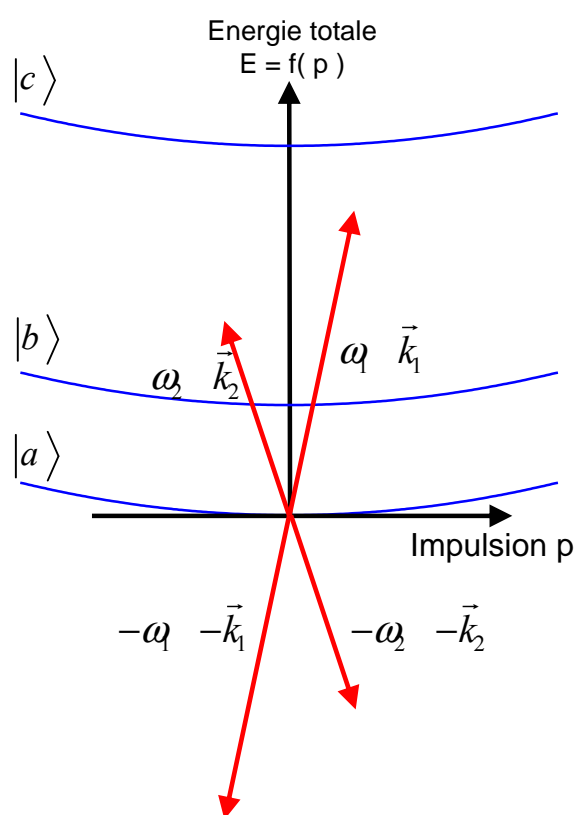


FIGURE 1.3 – Canaux de diffusion à un photon.

et $(\omega, \mathbf{k}) = (\omega_2, \mathbf{k}_2), (\omega', \mathbf{k}') = (-\omega_1, -\mathbf{k}_1)$ sont tous deux associés à des transferts de quantité de mouvement du champ lumineux vers le champ atomique. La Figure 1.4 représentant ces deux processus montre qu'un seul d'entre eux peut être résonnant (il s'agit de $(\omega, \mathbf{k}) = (\omega_1, \mathbf{k}_1), (\omega', \mathbf{k}') = (-\omega_2, -\mathbf{k}_2)$).

Le désaccord de la diffusion non-résonnante est égal en valeur absolue au double de la différence de fréquence $\Delta = 2|\omega_2 - \omega_1|$. Le canal correspondant au processus non résonnant est "fermé" si la durée de l'impulsion τ est très supérieure à l'inverse de ce désaccord $\tau \gg 1/\Delta$. La situation est alors très différente selon que l'on considère des diffusions avec changement d'état interne, ou sans changement d'état interne. En effet, même pour des niveaux faiblement espacés en énergie (par exemple reliés par une transition hyperfine), leur différence d'énergie $E_{ba} \sim \hbar \times GHz$ est supérieure de plusieurs ordres de grandeurs à l'énergie de recul $K \sim \hbar \times 10 KHz$. Ainsi le désaccord du processus non-résonnant est-il de l'ordre du GHz pour une diffusion avec changement d'état interne (diffusion Raman), mais seulement de l'ordre de $10 KHz$ pour une diffusion à état interne constant (diffusion de Bragg). Pour l'ordre de grandeur des durées d'impulsion considérées par la suite $\tau \ll 1 ms$, un ajustement des fréquences pour une diffusion de Bragg donne lieu à une ouverture simultanée de deux canaux, alors qu'un ajustement pour une diffusion Raman n'ouvre qu'un seul canal.

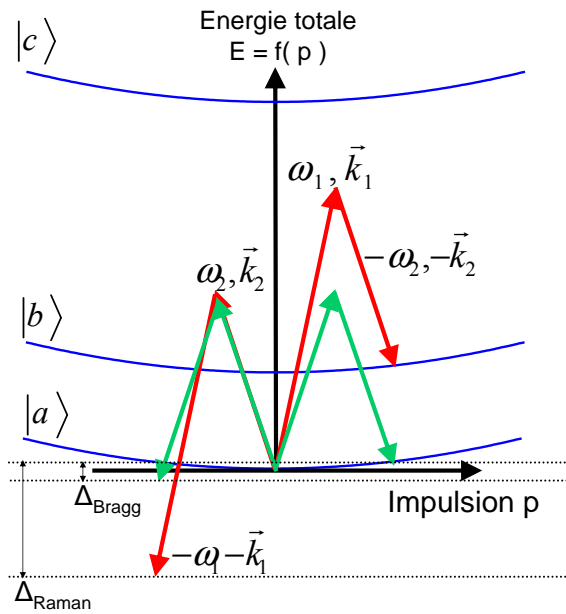


FIGURE 1.4 – Canaux de diffusion à deux photons.

1.3.2.2 Définition du paramètre de non-résonance.

Nous introduisons à présent un paramètre adimensionnel y de non-résonance³⁴ qui se révélera particulièrement commode pour conduire les calculs. Il reflète l'écart à la conservation de l'énergie lors de la diffusion et s'exprime en fonction de l'impulsion \mathbf{p} :

$$y(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\Omega_e} \left(\omega_{ba} + \frac{\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{p}}{m} + \frac{\hbar |\mathbf{k}_e|^2}{2m} - (\omega_1 - \omega_2) \right) \quad (1.92)$$

Cette expression fait intervenir la pulsation de Rabi effective Ω_e et le vecteur d'onde effectif \mathbf{k}_e , dont nous donnerons les expressions au paragraphe suivant. Le paramètre y , d'abord introduit en physique des neutrons, a été adapté par Christian Bordé [65] à l'optique atomique. Quand on quantifie les degrés de liberté externes de l'atome, ce paramètre numérique devient l'opérateur $y(\hat{\mathbf{p}})$ ³⁵.

1.3.2.3 Matrice de Rabi effective associée à une impulsion à deux photons.

Nous nous plaçons désormais dans le cas d'une diffusion *avec* changement d'état interne. Nous supposons ainsi que l'atome dispose de deux états $|a, \mathbf{p}_1\rangle$ et $|b, \mathbf{p}_2\rangle$ vérifiant les conditions de conservation précédentes pour l'absorption d'un photon de fréquence ω_1 et l'émission d'un photon de fréquence ω_2 :

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \hbar \mathbf{k}_1 - \hbar \mathbf{k}_2 \quad (1.93)$$

$$\hbar \omega_b + \frac{\hbar^2 \mathbf{p}_2^2}{2m} = \hbar \omega_a + \frac{\hbar^2 \mathbf{p}_1^2}{2m} + \hbar \omega_1 - \hbar \omega_2 \quad (1.94)$$

Cette diffusion correspond au processus résonnant de la Figure 1.4.

Les états susceptibles d'être couplés par le Hamiltonien à partir de l'état initial $|a, \mathbf{p}_1\rangle$ sont a priori nombreux : $|c, \mathbf{p}_1 + \hbar \mathbf{k}_1\rangle, |c, \mathbf{p}_1 + \hbar \mathbf{k}_2\rangle, |a, \mathbf{p}_1 + 2\hbar \mathbf{k}_1\rangle, \dots$. Cependant, dans la mesure où l'on *néglige l'émission spontanée* ainsi que les couplages fortement non-résonnants (approximation des ondes tournantes), on peut considérer que la multiplicité $\{|1\rangle = |a, \mathbf{p}_1\rangle, |2\rangle = |c, \mathbf{p}_1 + \hbar \mathbf{k}_1\rangle, |3\rangle = |b, \mathbf{p}_1 + \hbar \mathbf{k}_1 - \hbar \mathbf{k}_2\rangle\}$ forme un sous espace stable par l'évolution Hamiltonienne.

34. Dit paramètre de "non-Braggité" en anglais. Cependant une diffusion peut être associée à $y = 0$ et ne pas vérifier la condition de Bragg (associée à une diffusion élastique uniquement), cette dénomination est donc sujette à confusion et nous lui préférons "non-résonance".

35. Plus généralement ce paramètre peut dépendre simultanément des opérateurs positions et impulsions $\hat{\mathbf{r}}$ et $\hat{\mathbf{p}}$, notamment dans le cas d'une diffusion Raman comportant des déplacements lumineux inhomogènes $\Omega_{AC}^b(\hat{\mathbf{r}})$ et $\Omega_{AC}^a(\hat{\mathbf{r}})$:

$$y(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, \mathbf{k}) = \frac{1}{2\Omega_0} [\omega_2 + \omega_{ba} + \Omega_{AC}^b(\hat{\mathbf{r}}) + \hbar \mathbf{k}^2/2m + 2\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{k}/m - (\omega_1 + \Omega_{AC}^a(\hat{\mathbf{r}}))]$$

Dans la limite où le niveau $|c\rangle$ est suffisamment désaccordé, ($|\omega_{ca} - \omega_{1,2}| \gg \Omega_1, \Omega_2$ avec $\Omega_{1,2}$ pulsations de Rabi des lasers), il est possible d'éliminer adiabatiquement la population du niveau intermédiaire $|2\rangle$, et de considérer un système avec seulement deux niveaux $\{|1\rangle, |3\rangle\}$ couplés par un Hamiltonien effectif :

$$H_{eff} = \begin{pmatrix} \Omega_b^{AC} & \frac{\Omega_e}{2} e^{-i(\delta t + \phi_{eff})} \\ \frac{\Omega_e}{2} e^{i(\delta t + \phi_{eff})} & \Omega_a^{AC} \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

Le désaccord δ fait intervenir l'impulsion \mathbf{p} :

$$\delta = \omega_1 - \omega_2 - \left(\omega_{ba} + \frac{\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{p}}{m} + \frac{\hbar |\mathbf{k}_e|^2}{2m} \right) - \delta^{AC} \quad (1.96)$$

Nous avons introduit le déplacement différentiel des niveaux $\delta^{AC} = \Omega_b^{AC} - \Omega_a^{AC}$. Les paramètres du Hamiltonien effectif s'expriment :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e &= \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 & \omega_e &= \omega_1 - \omega_2 & \phi_e &= \varphi_1 - \varphi_2 & \delta^{AC} &= \Omega_b^{AC} - \Omega_a^{AC} \\ \Omega_e &= \frac{\Omega_{ca}^* \Omega_{cb}}{2\Delta} & \Omega_{ij} &= -\frac{\langle i | \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} | j \rangle}{\hbar} & \Omega_b^{AC} &= \frac{|\Omega_{cb}|^2}{4\Delta} & \Omega_a^{AC} &= \frac{|\Omega_{ca}|^2}{4\Delta} \end{aligned} \quad (1.97)$$

Le calcul de la matrice de diffusion associée à ce nouvel Hamiltonien suit rigoureusement le traitement du système à deux niveaux réalisé dans l'annexe D. Nous donnons ici son expression, qui figure par ailleurs dans la référence [68]³⁶ :

$$S = \begin{pmatrix} S_{bb} & S_{ba} \\ S_{ab} & S_{aa} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} S_{bb} &= e^{-i(\Omega_b^{AC} + \Omega_a^{AC} + \delta)\frac{\tau}{2}} \left[\cos\left(\frac{\Omega_e \tau}{2} \sqrt{1+y^2}\right) - i \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \sin\left(\frac{\Omega_e \tau}{2} \sqrt{1+y^2}\right) \right] \\ S_{ba} &= -e^{-i(\Omega_b^{AC} + \Omega_a^{AC} + \delta)\frac{\tau}{2}} e^{-i(\delta t_0 + \phi_{eff})} \frac{i}{\sqrt{1+y^2}} \sin\left(\frac{\Omega_e \tau}{2} \sqrt{1+y^2}\right) \\ S_{ab} &= -e^{-i(\Omega_b^{AC} + \Omega_a^{AC} - \delta)\frac{\tau}{2}} e^{i(\delta t_0 + \phi_{eff})} \frac{i}{\sqrt{1+y^2}} \sin\left(\frac{\Omega_e \tau}{2} \sqrt{1+y^2}\right) \\ S_{aa} &= e^{-i(\Omega_b^{AC} + \Omega_a^{AC} - \delta)\frac{\tau}{2}} \left[\cos\left(\frac{\Omega_e \tau}{2} \sqrt{1+y^2}\right) + i \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \sin\left(\frac{\Omega_e \tau}{2} \sqrt{1+y^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (1.98)$$

Il est important de noter que cette expression correspond à la matrice de diffusion calculée dans

36. Une expression équivalente de la matrice de diffusion est donnée au chapitre [65] du même ouvrage, mais avec des conventions différentes. Des différences de facteurs 2 interviennent dans la définition de la pulsation de Rabi effective.

le référentiel tournant, c'est à dire agissant sur les coefficients $c_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_e}(t), c_{a,\mathbf{p}}(t)$ traduisant la décomposition de l'état quantique dans ce référentiel $|\psi(t)\rangle = c_{b,\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_e}(t)|b, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_e\rangle e^{-i\left(\omega_b + \frac{|\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k}_e|^2}{2m\hbar}\right)t} + c_{a,\mathbf{p}}(t)|a, \mathbf{p}\rangle e^{-i\left(\omega_a + \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m\hbar}\right)t}$.

1.3.3 Structuration d'une onde atomique par un champ électromagnétique uniforme.

La diffusion d'une onde de matière sur un champ électromagnétique externe dépendant simultanément de l'espace et du temps est un problème difficile pour lequel il n'existe pas, à ce jour, de traitement rigoureux et analytique. Cependant, dans le cas où la dépendance du champ est uniquement temporelle (le champ électromagnétique uniforme est alors qualifié de séparatrice temporelle) Charles Antoine et Christian Bordé sont parvenus à une description analytique de l'évolution de l'onde atomique, en utilisant des approximations légitimées par le contexte expérimental usuel en interférométrie atomique [40, 69, 10, 70]. Nous reprenons ici les grandes lignes et les conclusions de cette analyse.

1.3.3.1 Equation d'évolution du spineur.

Considérons un atome à deux niveaux décrit par le spineur $|\Psi(t)\rangle$. L'évolution du champ atomique (à deux composantes) est décrite par l'équation de Schrödinger suivante :

$$i\hbar \frac{d|\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle}{dt} = \left[H_0 + H_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t) + H_{\text{em}}(\hat{\mathbf{r}}, t) \right] |\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle \quad (1.99)$$

Le potentiel d'interaction électromagnétique s'écrit en toute généralité :

$$H_{\text{em}}(\hat{\mathbf{r}}, t) = -2\hbar\Omega_0 F(\hat{\mathbf{r}}, t) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \phi_0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.100)$$

Nous avons désigné par $F(\hat{\mathbf{r}}, t)$ le profil transverse du champ électromagnétique classique. Le terme H_0 est le Hamiltonien usuel d'un système à deux niveaux. Le Hamiltonien externe est le Hamiltonien quadratique évoqué dans la partie précédente et d'expression générale (1.50).

1.3.3.2 Passage dans la représentation associée au référentiel accéléré.

La démarche suivie consiste à simplifier cette équation par des changements de représentation adéquats. Nous reprenons les conventions de la référence [70]. On commence par passer en représentation

interaction par rapport aux Hamiltoniens externe et interne :

$$U_1(t, t_1) = T \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^t dt' (H_0 + H_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t')) \right) \right] \quad (1.101)$$

Le temps t_1 est un paramètre arbitraire de la représentation dont la valeur n'affecte pas le résultat final.³⁷ Cette transformation unitaire permet de s'affranchir de ces deux Hamiltoniens lors de l'évolution du spineur. Le prix à payer est l'évolution des opérateurs positions et impulsion (notés $\hat{\mathbf{R}}(t, t_1)$ et $\hat{\mathbf{P}}(t, t_1)$) sous le Hamiltonien externe. Cette évolution, donnée par les relations (1.58), a été déterminée précédemment lors de la propagation *ABCD*.

Le deuxième changement de représentation élimine la dépendance temporelle rapide du champ oscillant. Elle s'inspire directement du "passage dans le référentiel tournant" utilisé dans le traitement de l'atome à deux niveaux :

$$U_2(t, t_1) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{i}{2}\hat{\phi}(t, t_1)} \\ e^{\frac{i}{2}\hat{\phi}(t, t_1)} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.102)$$

Cet opérateur fait intervenir une phase opératorielle :

$$\hat{\phi}(t, t_1) = \omega t - \omega_0(t - t_1) - \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{R}}(t, t_1) + \phi_0 \quad (1.103)$$

En notant $|\Psi_2(t)\rangle$ le spineur dans la nouvelle représentation :

$$|\Psi(t)\rangle = U_1(t, t_1)U_2(t, t_1)|\Psi_2(t, t_1)\rangle \quad (1.104)$$

on obtient pour cette quantité l'équation du mouvement dans le référentiel tournant :

$$\frac{d|\Psi_2(t, t_1)\rangle}{dt} = i\hat{M}(t, t_1)|\Psi_2(t, t_1)\rangle$$

$$M(t, t_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hat{\Delta}(t, t_1) & \Omega_0 F(\hat{\mathbf{r}}, t) \\ \Omega_0 F(\hat{\mathbf{r}}, t) & -\frac{1}{2}\hat{\Delta}(t, t_1) \end{pmatrix} \quad (1.105)$$

Le terme $\hat{\Delta}(t, t_1)$ constitue une généralisation opératorielle du désaccord numérique $\delta = \omega - \omega_0$ intervenant dans l'évolution d'un atome à deux niveaux³⁸ :

$$\hat{\Delta}(t, t_1) = \omega - \omega_0 - \mathbf{k} \cdot \dot{\hat{\mathbf{R}}}(t, t_1) - \frac{\hbar \mathbf{k} \beta \mathbf{k}}{2m} \quad (1.106)$$

37. Un choix commode pour la conduite des calculs consiste généralement à prendre pour t_1 l'instant milieu de l'impulsion temporelle considérée.

38. ω étant la fréquence du champ oscillant dans le référentiel de l'atome en mouvement.

Le dernier terme constitue un “recul généralisé”. Il apparaît naturellement quand les degrés de liberté externes du champ atomique sont quantifiés, alors que nous avons dû le rajouter artificiellement précédemment lorsque le mouvement externe était envisagé classiquement.

1.3.3.3 Résolution dans la nouvelle représentation.

La résolution général de l'équation d'évolution du spineur dans la nouvelle représentation (1.105) est délicate car la matrice $M(t, t_1)$ dépend simultanément des opérateurs non-commutatifs position et impulsion.

Néanmoins, il existe des configurations où cette double dépendance de la matrice $M(t, t_1)$ peut être ramenée à une dépendance en un seul opérateur. L'hypothèse de séparatrice temporelle et non spatiale nous permet d'éliminer la dépendance en position de $F(\hat{\mathbf{r}}, t)$. De plus, si l'on traite le champ gravitationnel comme un champ perturbatif, la dépendance en position disparaît également du désaccord $\hat{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, t, t_1)$. La matrice $M(t, t_1)$ ne dépend alors plus que de l'opérateur impulsion :

$$\frac{d|\Psi_2(t, t_1)\rangle}{dt} = i \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\hat{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, t, t_1) & \Omega_0 F(t) \\ \Omega_0 F(t) & -\frac{1}{2}\hat{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, t, t_1) \end{pmatrix} |\Psi_2(t, t_1)\rangle \quad (1.107)$$

Cette matrice peut-donc être diagonalisée en représentation impulsion. La diagonalisation correspondante est un calcul standard que l'on trouve dans de nombreux ouvrages de références [14]. Les états propres de cette matrice sont donnés par des superpositions de l'état fondamental et de l'état excité avec un poids paramétré par un angle θ défini par :

$$\tan 2\theta(\mathbf{p}) = \frac{2\Omega_0 F(t)}{\Delta(\mathbf{p}, t, t_1)} \quad \theta \in]-\pi, \pi[\quad (1.108)$$

$$\begin{aligned} |1, \mathbf{p}\rangle &= \cos \theta(\mathbf{p}) |a, \mathbf{p}\rangle + \sin \theta(\mathbf{p}) |b, \mathbf{p}\rangle \\ |2, \mathbf{p}\rangle &= \sin \theta(\mathbf{p}) |a, \mathbf{p}\rangle + \cos \theta(\mathbf{p}) |b, \mathbf{p}\rangle \end{aligned} \quad (1.109)$$

Comme l'angle θ est fonction de l'impulsion, les états propres du Hamiltonien habillé par le champ correspondent à un mélange des états interne a et b dont les poids respectifs dépendent de l'impulsion considérée. Les énergies propres $\epsilon(\mathbf{p})$ et $-\epsilon(\mathbf{p})$ respectivement associées à $|1, \mathbf{p}\rangle$ et $|2, \mathbf{p}\rangle$ s'expriment :

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \hbar \sqrt{\Omega_0^2 F^2(t) + \frac{1}{4} \Delta^2(\mathbf{p}, t, t_1)} \quad (1.110)$$

Considérons maintenant pour la fonction $F(t)$ un créneau temporel associé à la durée de l'impulsion lumineuse. Il est commode à ce stade de faire intervenir le paramètre d'inélasticité $y(\mathbf{p})$ déjà évoqué précédemment :

$$y(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\Omega_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/m + \hbar\mathbf{k}^2/2m - (\omega - \omega_0)) \quad (1.111)$$

L'énergie $\epsilon(\mathbf{p})$ s'exprime alors simplement selon :

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \hbar\Omega_0 \sqrt{1 + y^2(\mathbf{p})} \quad (1.112)$$

1.3.3.4 Détermination des vitesses de groupe dans la séparatrice.

Les deux énergies opposées des états propres se traduisent par deux relations de dispersion différentes. Celles-ci donnent lieu à des vitesses de groupe opposées $\pm v_\epsilon(\mathbf{p})$ pour les paquets d'ondes associés aux états internes $|1\rangle$ et $|2\rangle$:

$$v_\epsilon(\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{p}} \epsilon(\mathbf{p}) = \frac{\hbar\mathbf{k}}{2m} \frac{y(\mathbf{p})}{\sqrt{1 + y^2(\mathbf{p})}} \quad (1.113)$$

Lorsque l'on repasse dans la représentation initiale, on obtient deux vitesses de groupe qui ont une valeur médiane $\hbar\mathbf{k}/2m$:

$$\boxed{v_{g1,2}(\mathbf{p}) = \frac{\hbar\mathbf{k}}{2m} \pm \frac{\hbar\mathbf{k}}{2m} \frac{y(\mathbf{p})}{\sqrt{1 + y^2(\mathbf{p})}}} \quad (1.114)$$

L'analyse précédente montre que la base d'états propres du Hamiltonien est différente en l'absence et en présence de la séparatrice temporelle. En effet, en l'absence de champ (et en absence d'effet inertiels), les états propres sont donnés par la base $\{|a, \mathbf{p}\rangle, |b, \mathbf{p}\rangle\}$. La présence d'un champ électromagnétique modifie à la fois la base d'états propres qui devient $\{|1(\mathbf{p}), \mathbf{p}\rangle, |2(\mathbf{p}), \mathbf{p}\rangle\}$ et les relations de dispersion associées $\epsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\Omega_0^2 + \frac{1}{4}\Delta^2(\mathbf{p})}$.

Examinons à présent l'évolution de deux paquets d'ondes impulsionnels, associés aux états internes $|a\rangle$ et $|b\rangle$, sous l'effet d'une séparatrice temporelle. Ces paquets d'ondes admettent pour expression :

$$\int d^3\mathbf{p} F_a(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{r}, t) |a, \mathbf{p}\rangle \quad \int d^3\mathbf{p} F_b(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{r}, t) |b, \mathbf{p}\rangle \quad (1.115)$$

Lorsque l'on commence à appliquer la séparatrice temporelle, la base d'états propres devient $|1, \mathbf{p}\rangle |2, \mathbf{p}\rangle$. Chaque ket $|a, \mathbf{p}\rangle$ et $|b, \mathbf{p}\rangle$ va avoir une composante non nulle sur chacun des nouveaux états internes $|1, \mathbf{p}\rangle$ et $|2, \mathbf{p}\rangle$. Ceci donne lieu à un dédoublement des paquets d'ondes dans la séparatrice. En sortie de l'impulsion temporelle, par redécomposition des éléments $|1, \mathbf{p}\rangle$ et $|2, \mathbf{p}\rangle$ sur la base initiale

$|a, \mathbf{p}\rangle, |b, \mathbf{p}\rangle$, on observe à nouveau un doublement du nombre de paquets. Chaque paquet initial donne donc lieu à quatre paquets finaux en sortie.

1.3.3.5 Effet Borrmann.

Soulignons cependant le cas particulier important où l'impulsion centrale du champ atomique \mathbf{p}_0 vérifie la condition de résonance $y(\mathbf{p}_0) = 0$. On observe alors que les deux vitesses de groupe précédentes sont confondues :

$$v_{g1}(\mathbf{p}_0) = v_{g2}(\mathbf{p}_0) \quad (1.116)$$

Considérons par exemple l'évolution d'un paquet d'ondes associé au niveau fondamental tel que défini dans l'équation (1.115), et d'impulsion centrale résonnante. Lorsque la séparatrice est appliquée, le dédoublement usuel n'a pas lieu puisque les deux vitesses de groupes sont identiques, si bien qu'on observe une seule et unique trajectoire centrale au sein de la séparatrice lumineuse. Ce phénomène, qui porte le nom d'effet Borrmann, est représenté sur la Figure 1.5 :

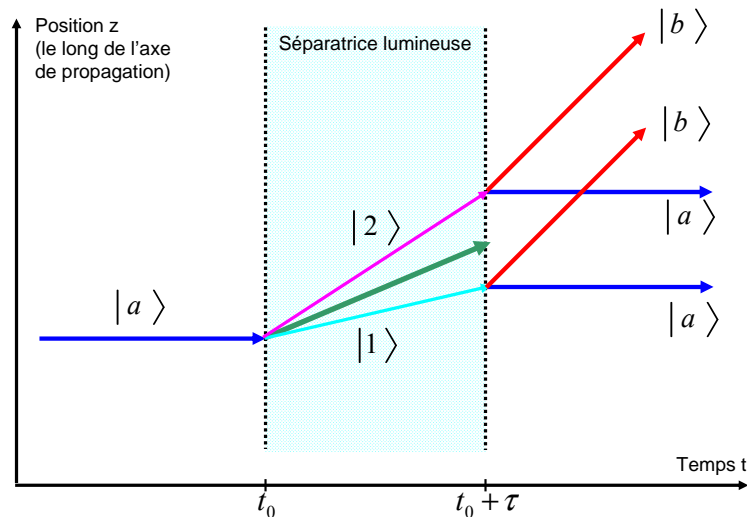


FIGURE 1.5 – *Effet d'une séparatrice lumineuse sur l'évolution d'un paquet d'ondes associé à l'état fondamental. Nous avons considéré sans perte de généralité un paquet d'ondes initialement au repos. Pour une impulsion non résonnante (avec la vitesse moyenne du paquet d'ondes), le paquet d'onde est divisé en deux sous-paquets évoluant suivant les trajectoires bleue (état 1) et mauve (état 2). En revanche, pour une impulsion résonnante, les deux sous-paquets suivent la même trajectoire médiane (verte) associée au transfert d'impulsion $\hbar\mathbf{k}/2$.*

1.3.3.6 Interprétation des relations de dispersion : renormalisation de la masse en présence du champ électrique.

Le but de ce paragraphe est de montrer que les interactions atomes-photons sont de nature à modifier la propagation du champ atomique, et à préparer le lecteur à l'analyse du chapitre 3 relative à la renormalisation³⁹ électromagnétique de la propagation atomique. La présence d'un champ électromagnétique modifie les relations de dispersion et donc la masse du champ atomique. Nous étudierons, au chapitre 3, les conséquences de la présence de ce champ sur la définition de la sensibilité inertielle d'un interféromètre atomique.

Commençons par souligner le parallèle entre la relation de dispersion (1.112) et l'énergie associée à la propagation d'un champ de Klein-Gordon (1.28). Nous avons défini la masse non-relativiste en effectuant un développement de l'énergie autour d'une impulsion moyenne du paquet d'ondes. Il est possible de généraliser cette démarche à la définition d'une masse en présence d'un champ de lumière en effectuant un développement quadratique de l'énergie associée à la propagation d'un mode d'impulsion \mathbf{p}_0 . A chacun des états interne 1, 2 précédents correspond une masse différente. De plus, le développement quadratique précédent ne comporte en général plus de symétrie sphérique. La masse de chaque état 1, 2 n'est donc plus un scalaire mais un tenseur défini par la relation :

$$\left(\frac{1}{m_{1,2}^*}\right)^{i,j} = \left(\frac{\partial E_{1,2}(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j}\right) \quad (1.117)$$

L'énergie $E_{1,2}(\mathbf{p})$ désigne l'énergie totale, prenant en compte à la fois l'énergie "interne" $\pm\epsilon(\mathbf{p})$ précédente et l'énergie du mouvement externe cachée dans les transformations unitaires. La contribution de l'énergie externe est la même pour les deux états internes, et ne dépend pas de la présence du champ lumineux. Aussi allons nous examiner particulièrement le développement quadratique de l'énergie $\epsilon(\mathbf{p})$.

Commençons par développer le paramètre de non-résonance $y(\mathbf{p})$ autour de \mathbf{p}_0 :

$$y(\mathbf{p}) = y(\mathbf{p}_0) + \frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)}{2m\Omega_0} \quad (1.118)$$

Ce développement se reporte sur l'expression de l'énergie (1.112) :

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \Omega_r + \frac{(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0))^2}{4m^2\Omega_r^2} \quad \text{avec} \quad \Omega_r = \Omega_0 \sqrt{1 + y^2(\mathbf{p}_0)} \quad (1.119)$$

39. Terme compliqué pour dire changement une fois les interactions prises en compte à tous les ordres.

Il y a donc une contribution supplémentaire à l'énergie du paquet d'ondes, mais seulement dans la direction de propagation \mathbf{k} du champ électromagnétique. On comprend que seule la composante du mouvement du champ atomique selon cette direction soit affectée, puisque les diagrammes d'interaction atomes-photons ne donnent lieu à une modification de l'impulsion que dans cette direction. La situation est analogue à celle d'un nageur qui traverserait une rivière perpendiculairement à la rive, la composante de son mouvement perpendiculaire n'est pas affectée, par contre du fait de l'interaction avec l'eau son mouvement selon la propagation du fleuve est modifié. La masse effective du champ atomique dans le champ lumineux s'écrit :

$$\boxed{\left(\frac{1}{m_{1,2}}\right)^{\mathbf{k},\mathbf{k}} = \frac{1}{m} \pm \frac{k^2}{2m^2\Omega_r^2}} \quad (1.120)$$

La masse en présence du champ électromagnétique est donc décalée de la masse simple ('bare') intervenant dans le Hamiltonien par une quantité proportionnelle au carré de l'intensité du champ, qui s'interprète comme l'énergie propre et qui provient de la resommation des diagrammes d'interaction atome-photon. Signalons qu'un phénomène analogue intervient pour les photons se propageant dans un milieu matériel : les relations de dispersion de l'onde lumineuse conduisent également à une interprétation de masse effective.

1.3.3.7 Expression générale de la matrice de diffusion.

Obtenir une expression de la matrice de diffusion S dans le cas général est une tâche ardue. Elle implique en effet le calcul préalable de la matrice de diffusion dans le référentiel accéléré $S^{(2)}$ au moyen de l'équation (1.121) qui fait intervenir une exponentielle d'opérateurs positions et impulsions non commutatifs. Il existe cependant des cas simples où une représentation adéquate permet d'éliminer la dépendance de $S^{(2)}$ vis à vis d'un des opérateurs. Dans de tels cas, et avec des hypothèses supplémentaires quant au potentiel de gravitation, une expression analytique de la matrice de diffusion a été obtenue [69, 10].

L'équation d'évolution du spineur dans la nouvelle représentation (1.105) est résolue formellement à l'aide de la matrice de diffusion $S^{(2)}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t, t_1)$:

$$|\Psi_2(t, t_1)\rangle = S^{(2)}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t, t_1)|\Psi_2(t_0, t_1)\rangle \quad \text{avec} \quad S^{(2)}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t, t_1) = T \left[\exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' \hat{M}(t', t_1) \right) \right] \quad (1.121)$$

Le résultat final est obtenu en repassant dans la représentation initiale :

$$|\Psi(t)\rangle = U_1(t, t_1)U_2(t, t_1)S^{(2)}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t, t_1)U_2^{-1}(t_0, t_1)U_1^{-1}(t_0, t_1)|\Psi(t_0)\rangle \quad (1.122)$$

On peut montrer que l'action des opérateurs associés aux changements de représentation sur la matrice de diffusion $S^{(2)}(t, t_1)$ dans le référentiel “accélééré” et “tournant” revient à modifier celle-ci par une translation sur ses arguments, c'est-à-dire par des translations sur l'impulsion et sur la position du champ atomique diffusé⁴⁰, ainsi que par des facteurs de phase. La matrice de diffusion dans le référentiel inertiel est de la forme :

$$S_{\alpha\beta} = e^{i\phi_{\alpha\beta}} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}_{\alpha\beta}} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{r}_{\alpha\beta}} S_{\alpha\beta}^{(2)} \left(\hat{\mathbf{r}} + \lambda_\alpha \tilde{B}(t_0, t_1) \frac{\hbar\mathbf{k}}{2m}, \hat{\mathbf{p}} + \lambda_\alpha \tilde{A}(t_0, t_1) \frac{\hbar\mathbf{k}}{2} \right) \quad (1.123)$$

Les indices α, β prennent leurs valeurs dans les deux états internes a et b , et le paramètre λ_α est défini comme $\lambda_b = 1, \lambda_a = -1$. Les expressions détaillées et générales des vecteurs correspondants aux translations $\mathbf{p}_{\alpha\beta}, \mathbf{r}_{\alpha\beta}$, ainsi que les facteurs de phase $\phi_{\alpha\beta}$ figurent dans les références [69, 10, 40]. Nous n'utiliserons dans la suite que des valeurs de ces paramètres dans l'approximation non-dispersive.

1.3.4 Conclusion.

Nous avons montré comment l'application d'un champ électromagnétique cohérent pouvait permettre d'agir sur les degrés de libertés internes et externes du champ atomique.

Le traitement élémentaire de l'interaction atome-lumière fait traditionnellement appel à un système à deux niveaux où seuls les degrés de liberté internes sont pris en considération. En fait, une analyse plus précise de l'interaction champ atomique-champ électromagnétique montre que l'évolution des degrés de liberté internes est indissociable du mouvement externe. L'interaction électromagnétique fait en effet apparaître des corrélations entre les états internes et externes du champ atomique. Celle-ci sont manifestes dans les séparatrices lumineuses, qui permettent de distinguer les états internes du champ atomique par la quantité de mouvement supplémentaire introduite dans l'un des états.

Nous avons montré que les processus d'interaction à deux photons permettent de réaliser un transfert d'impulsion arbitrairement grand⁴¹ entre deux états internes d'énergies arbitrairement proches. Nous avons distingué les séparatrices reposant sur des diffusions de Bragg (sans changement d'état

40. résultant essentiellement de la non-commutation entre opérateurs position et impulsion

41. A condition de disposer de lasers de fréquence arbitrairement élevée.

interne) de celles liées à des diffusions Raman (avec changement d'état) : les premières sont plus susceptibles que les secondes d'ouvrir plusieurs canaux de transfert d'impulsion simultanément. Une telle configuration n'est pas souhaitable lorsque l'on souhaite communiquer une quantité de mouvement bien définie au champ atomique. De ce point de vue, les séparatrices Raman constituent des outils de manipulation du champ plus performants en régime d'impulsions courtes.

Une analyse approfondie des séparatrices temporelles montre que le champ lumineux intervient directement dans la propagation du champ atomique, en réalisant un "habillage" des états internes qui donne lieu à des vitesses de groupe et des masses effectives différentes. Lorsque l'impulsion moyenne du champ atomique vérifie la condition de résonance, il est remarquable que les vitesses de groupe et les trajectoires se confondent, phénomène qui porte le nom d'effet Borrmann. La présence d'un champ lumineux perturbe donc de façon significative la propagation du champ atomique, et de façon plus subtile que par un simple transfert global de quantité de mouvement.

1.4 Conclusion.

Nous avons défini la notion de champ atomique. En transposant la définition de la cohérence de l'optique quantique vers la physique atomique, nous avons utilisé ce concept pour caractériser un faisceau d'ondes de matière. Le calcul des fonctions de cohérence d'un nuage thermique et d'un nuage condensé montre clairement l'analogie qui existe entre le champ de lumière dans un état cohérent et le champ atomique dans un état condensé. Nous avons également mis en évidence le lien direct qui existe entre les fonctions de cohérence du premier ordre et la représentation dans l'espace des phases.

La propagation d'ondes atomiques et lumineuses est décrite par des équations relativistes symétriques, à une différence notable près : la présence d'une masse pour le champ atomique induit une dimension supplémentaire et une dynamique plus riche que pour le champ électromagnétique. Les deux champs sont couplés de façon symétrique : la présence de matière "habille" la propagation d'ondes lumineuses, tout comme la présence d'un champ électromagnétique "habille" la propagation d'ondes atomiques.

Nous avons introduit plusieurs outils théoriques utiles pour traiter la propagation de champs optiques ou atomiques, notamment le formalisme $ABCD$ pour les ondes de matière. Nous avons rappelé la modélisation usuelle des interactions en physique atomique, et obtenu l'équation de propagation non-relativiste du champ atomique cohérent. Nous avons également exposé la propagation d'ondes de matière dans deux régimes clairement balisés sur le plan théorique et expérimental : absence d'in-

teractions et régime de Thomas-Fermi.

La symétrie entre matière et lumière se retrouve dans la manipulation réciproque de ces champs. Après avoir rappelé des résultats élémentaires sur l'interaction d'un atome à deux niveaux avec un champ électromagnétique classique, nous avons exposé le mécanisme de transfert d'impulsion par des diffusions à deux photons, qui sera impliqué dans la première expérience exposée. Nous avons également exposé les résultats relatifs à la manipulation d'ondes atomiques par des champs électromagnétiques uniformes appelés séparatrices temporelles. Celles-ci donnent lieu à une démultiplication des paquets d'ondes atomiques poursuivant en général des chemins différents, sauf à résonance où les trajectoires centrales correspondantes fusionnent. Nous reviendrons sur ce point, qui pose le problème de la définition du chemin optique pour une onde de matière évoluant dans une séparatrice lumineuse. Par ailleurs, nous concevrons au chapitre 4 un dispositif où la démultiplication des trajectoires centrales atomiques par les interactions lumineuses est contrôlée et utilisée pour réaliser un senseur spatio-temporel.

Première Partie :
Conception de senseurs atomiques multi-ondes.

Senseur à atomes en lévitation : Principe, Modélisation et Analyse de Stabilité.

Ce chapitre expose un dispositif métrologique fondé sur la lévitation d'un champ atomique par un champ lumineux. En partant d'une idée simple, nous allons développer une proposition expérimentale précise. Bien que ce soit la réalisation d'un gravimètre qui ait inspiré la conception du système présenté, celui-ci est en fait dual : il permet également de mesurer la fréquence d'une transition atomique, et pourrait à ce titre être intégré dans une horloge.

La modélisation et l'analyse quantique de l'expérience proposée met à profit les outils théoriques exposés au chapitre précédent, en particulier le formalisme *ABCD*. Nous réservons au chapitre suivant la comparaison de l'expérience avec l'état de l'art ainsi que son analyse en tant qu'interféromètre atomique.

2.1 Description de l'expérience.

Nous exposons dans cette partie une expérience de pensée permettant de mesurer l'accélération gravitationnelle.

2.1.1 Principe de la mesure de l'accélération gravitationnelle.

Considérons un nuage atomique cohérent soumis d'une part à l'accélération du champ de gravité, d'autre part à une série périodique de miroirs lumineux, dont on suppose qu'ils :

- transmettent aux atomes une vitesse verticale vers le haut, connue précisément et contrôlable.
- ne réfléchissent que les atomes appartenant à une classe de vitesses verticales bien déterminée (sélectivité).
- réfléchissent la quasi-totalité de la classe concernée (qualité).

Ces miroirs, réalisés au moyen d'un champ électromagnétique intermittent, sont désignés comme des "impulsions-miroir". Ils impriment à un échantillon d'atomes (sélectionnés dans le nuage initial) une accélération vers le haut, connue précisément et contrôlée par l'intervalle temporel T séparant les miroirs successifs. Pour une certaine durée $T := T_0$ entre les miroirs, les lasers communiquent aux atomes une accélération qui compense en moyenne celle de la gravité, si bien que l'échantillon sélectionné est maintenu en lévitation. L'intervalle temporel T_0 est appelé période "résonnante" ou "lévitante". Sa détermination donne directement accès à l'accélération gravitationnelle g .

C'est en fait la sensibilité du miroir à la vitesse verticale des atomes qui permet de mesurer la période "lévitante" T_0 : c'est seulement lorsque la durée T séparant les "impulsions-miroir" successives est très proche de la valeur T_0 qu'une fraction significative du nuage peut-être maintenue en lévitation.

En effet, supposons par exemple que la période T soit telle que $T < T_0$. Les atomes réfléchis par les miroirs successifs sont alors accélérés vers le haut. L'échantillon atomique initialement réfléchi par les "impulsions-miroir" va alors subir une dérive en vitesse et va sortir progressivement de la classe de vitesses sélectionnée par les miroirs lumineux. Les atomes sortants de cette classe deviennent alors insensibles aux "impulsions-miroir" suivantes et continuent leur trajet en chute libre, étant ainsi rapidement éjectés de la zone de lévitation¹. Un ajustement imparfait de l'écart temporel entre les "impulsions-miroir" a donc un effet double sur le nuage atomique en lévitation : il implique à la fois une accélération moyenne et une perte d'atomes.

Si l'on sonde la population atomique dans la zone de lévitation après un nombre donné de miroirs lumineux et pour différentes périodes T , on s'attend donc à obtenir une résonance en population pour la valeur $T = T_0$. C'est sur cette résonance que repose la détermination de la période T_0 et donc celle de l'accélération g . La résonance est d'autant plus étroite (et donc la mesure de g d'autant plus précise) que la population du nuage est sondée après un nombre de rebonds important. La qualité des miroirs lumineux doit permettre de préserver une population suffisante (pour le système de détection considéré) dans le nuage lévitant lorsque la période T est ajustée à sa valeur résonnante T_0 .

2.1.2 Réalisation des "impulsion-miroir".

A ma connaissance, tous les procédés permettant la réflexion ou la lévitation d'un échantillon atomique reposent sur l'interaction électromagnétique. Les propriétés des miroirs atomiques réalisés dépendent cependant du profil du champ électromagnétique considéré, et tous ne remplissent pas le

1. Si la largeur de la classe de vitesses réfléchies est inférieure à la vitesse acquise durant une chute libre entre deux rebonds lumineux, ce que nous supposons ici.

cahier des charges précédent. Nous recensons à présent les différents processus physiques permettant la lévitation d'un nuage atomique, en évaluant leur pertinence pour l'expérience proposée.

2.1.2.1 Processus envisagés pour la lévitation.

Miroir à ondes évanescentes ?

Des miroirs à ondes évanescentes peuvent être employés pour maintenir en vol un nuage atomique. Ces miroirs ont déjà été utilisés avec succès pour réaliser une cavité atomique opto-gravitationnelle [71]. Les atomes rebondissent alors élastiquement sur un profil de miroir épousant la forme du potentiel électromagnétique. Cependant, ce miroir ne remplit pas correctement le critère de "sélectivité" d'une classe de vitesses souhaité.

Pression de radiation ?

La pression de radiation peut aussi être considérée pour stabiliser verticalement le nuage atomique. On utilise alors un champ électromagnétique suffisamment intense pour que la force exercée sur les atomes compense, en moyenne, leur poids. Ce procédé a l'inconvénient majeur de faire intervenir des processus incohérents d'émission spontanée transmettant aux atomes une quantité de mouvement isotrope (donc difficilement contrôlable), et dégrade par ailleurs la cohérence de la source atomique. Aussi ne convient-il pas pour notre expérience.

Processus cohérent à un photon ?

L'écart d'énergie entre les deux niveaux de l'atome fait qu'une "impulsion-miroir" associée à une fréquence (éventuellement effective) donnée ne peut réfléchir qu'un seul des deux états internes atomiques. Le processus de réflexion est, pour l'autre état, non-résonnant : il ne vérifie pas la condition de conservation de l'énergie. Chaque "impulsion-miroir" doit donc renvoyer les atomes réfléchis dans leur état interne d'origine afin de leur permettre de rebondir sur les miroirs lumineux suivants (supposés identiques et s'adressant donc au même état interne).

Pour réaliser cette "impulsion-miroir", un choix naturel est d'envisager un cycle d'absorption-émission cohérent à un photon. Nous avons vu au chapitre précédent qu'un tel processus permettait un transfert cohérent d'impulsion. Afin de communiquer une vitesse vers le haut, le photon absorbé doit appartenir à une onde progressive dirigée vers le haut et le photon émis à une onde progressive vers le bas.

En fait, la sélectivité exigée pour les miroirs lumineux implique l'utilisation d'“impulsions-miroir” longues. Afin que l'émission spontanée n'intervienne pas, il est nécessaire que la transition utilisée ait une durée de vie bien supérieure à la durée des “impulsions-miroir”. Or, la plupart des atomes (tel que le Rubidium ^{87}Rb , impliqué dans de nombreux capteurs inertiels [72, 73]) ne possèdent pas une telle transition d'horloge. Puisque nous insistons, dans cette partie, davantage sur l'aspect “gravimètre” que sur celui d'“horloge”, nous supposons ici que l'atome considéré ne dispose pas d'une transition de la finesse spectrale requise². Un processus multiphotonique à fort désaccord doit alors être envisagé pour limiter l'émission spontanée.

Processus de Bragg à deux photons ?

Les diffusions à deux photons, avec ou sans changement d'état interne, permettraient un transfert d'impulsion cohérent du champ photonique vers le champ atomique. A priori, il semble possible d'envisager aussi bien des diffusions de Bragg que des diffusions Raman pour réaliser les “impulsions-miroir”. Les diffusions de Bragg ont cependant un inconvénient majeur au vu de la durée des “impulsions-miroir” envisagée³ : elles donnent lieu à une ouverture simultanée des deux canaux de diffusion présentés sur la Figure 1.4. Avec une réflexion par des processus de Bragg, une partie des atomes du nuage recevrait ainsi une quantité de mouvement dirigée vers le bas, ce qui est incompatible avec la fonction de miroir souhaitée. Ceci nous a conduit à privilégier un processus Raman avec changement d'état interne.

2.1.2.2 “Impulsion-miroir” retenue : double impulsion Raman.

L'“impulsion-miroir” proposée consiste en une succession de deux impulsions Raman π verticales réalisant un cycle cohérent d'absorption-émission de deux photons effectifs de quantités de mouvement opposées :

- La première impulsion Raman implique deux ondes progressives contra-propageantes de vecteurs d'onde $\mathbf{k}_{\text{down}} = \mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_{\text{up}} = \mathbf{k}_2$, de fréquences respectives $\omega_{\text{down}} = \omega_1$ et $\omega_{\text{up}} = \omega_2$. Cette impulsion excite les atomes ($a \rightarrow b$) en leur transférant une quantité de mouvement $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$.

2. Notons que l'analyse de ce chapitre peut être intégralement reprise avec des impulsions à un photon sur un atome possédant une telle transition d'horloge. Ce cas sera celui considéré au chapitre 4 exposant une proposition d'horloge optique. Nous traitons le cas plus complexe et plus général où une telle transition n'existe pas.

3. Estimé ultérieurement et de l'ordre de $\tau \simeq 1.5\text{ms}$.

- La seconde impulsion Raman π implique des ondes progressives de vecteurs d'ondes $\mathbf{k}_{\text{down}} = \mathbf{k}_4$ et $\mathbf{k}_{\text{up}} = \mathbf{k}_3$, de fréquences respectives $\omega_{\text{down}} = \omega_4$ et $\omega_{\text{up}} = \omega_3$. Cette impulsion ramène les atomes dans l'état fondamental ($b \rightarrow a$) en leur transférant une quantité de mouvement $\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4$.

L'approximation $\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4 \simeq \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 \simeq 2\hbar\mathbf{k}$ est très bien vérifiée avec le désaccord Raman considéré, fixée par une condition de conservation de l'énergie précisée ultérieurement. L'“impulsion-miroir” assure ainsi un transfert d'impulsion de $4\hbar\mathbf{k}$ aux atomes et les renvoie dans le même état interne⁴. Les éléments composant cette “impulsion-miroir” sont schématisés sur la Figure (2.1).

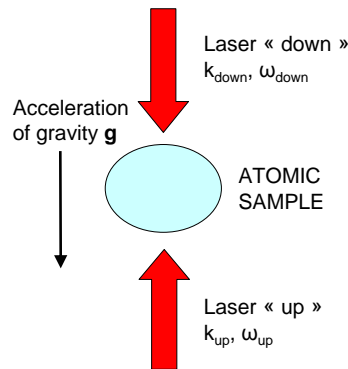


FIGURE 2.1 – Lasers intervenant dans l'“impulsion-miroir.”

Cette “impulsion-miroir” s'adresse aux atomes présent dans l'état fondamental⁵. La largeur de la classe de vitesse sélectionnée par le miroir est déterminée par la durée des impulsions Raman. Plus celles-ci sont longues, plus le miroir effectue un filtrage impulsif étroit. La séquence de rebonds donne lieu à une auto-convolution de ce filtrage. La propriété remarquable de ce miroir est qu'il assure à la fois le confinement vertical et la sélection en vitesse, point sur lequel nous reviendrons.

4. Pour réaliser cette “impulsion-miroir” expérimentalement, il suffit d'utiliser deux lasers contra-propageants en basculant le désaccord entre les deux impulsions Raman composant le miroir lumineux.

5. Nous aurions pu, de façon symétrique, imaginer un miroir agissant sur les atomes excités. Cette dernière stratégie n'est cependant pas optimale. En effet, concevoir un système où les atomes évoluent dans l'état fondamental entre les miroirs lumineux a l'avantage de les préserver pendant cette période des processus d'émission spontanée susceptibles de les éjecter de la zone de lévitation. Cet avantage est d'autant plus significatif que les impulsions lumineuses sont brèves et que les zones noires occupent une part importante de la séquence temporelle.

La qualité du miroir est directement liée à l'efficacité du transfert de population lors des impulsions Raman. Lorsque ces impulsions sont effectuées à résonance et sur un échantillon atomique de dispersion en vitesse suffisamment faible, il est possible d'atteindre expérimentalement un coefficient de transfert de l'ordre de 99,9% [61, 74]. Cette qualité de réflexion impose cependant l'utilisation d'un champ électromagnétique d'intensité quasiment uniforme sur l'échantillon atomique.

2.1.3 Description d'un cycle effectué par l'échantillon atomique.

2.1.3.1 Description de la séquence temporelle.

Cette séquence est décrite sur la Figure 2.2. Considérons un échantillon atomique, initialement au repos à l'altitude $z = z_0$, et lâché dans l'état fondamental après coupure du piège. Après une chute libre de durée $T/2$, cet échantillon a une vitesse $\mathbf{v}_0 = -gT/2\mathbf{u}_z$ lorsqu'on lui applique l'"impulsion-miroir" précédente avec un désaccord Raman ajusté pour sélectionner cette vitesse. Le nuage repart avec une vitesse $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + 4\hbar\mathbf{k}/m$. Pour une durée de chute libre $T_0/2$ telle que $\mathbf{v}_0 = -2\hbar\mathbf{k}/m\mathbf{u}_z$, le rebond est élastique, et l'échantillon atteint à nouveau l'altitude initiale, au repos, après une seconde phase d'évolution libre de même durée que la chute⁶. Pour l'ajustement $T := T_0$, sa trajectoire est donc périodique.

2.1.3.2 Représentation du mouvement dans l'espace des impulsions.

Il est instructif de considérer l'évolution de l'échantillon en représentation énergie-impulsion (Figure 2.3). La durée des impulsions Raman est supposée bien inférieure à celle de la chute libre, ajustée comme précédemment pour donner au nuage un mouvement périodique. L'énergie figurant sur le graphe est bien l'énergie totale des atomes, incluant les contributions de leur énergie interne, cinétique et gravitationnelle⁷.

Les courbes énergie-impulsion forment un réseau de paraboles indexées doublement par l'état interne des atomes et par leur altitude moyenne. Le point représentant le nuage initialement se situe initialement au centre de la parabole indexée par le couple $(z = z_0, a)$. Les phases de chute libre correspondent à un mouvement horizontal du point représentatif (flèches vertes), traduisant la conservation de l'énergie totale. Après la première chute libre, le miroir renvoie le point courant sur la même parabole $(z = 0, a)$ mais lui donne une impulsion de sens opposé. La seconde évolution libre ramène le point représentatif à sa position initiale, au centre de la parabole $(z = z_0, a)$.

6. Dans ce cas de figure, la première impulsion Raman stoppe la chute du nuage, et la seconde lui donne une vitesse opposée de même valeur que la vitesse d'arrivée sur le miroir.

7. En revanche, on considère la limite de dilution où la contribution énergétique des interactions est négligée.

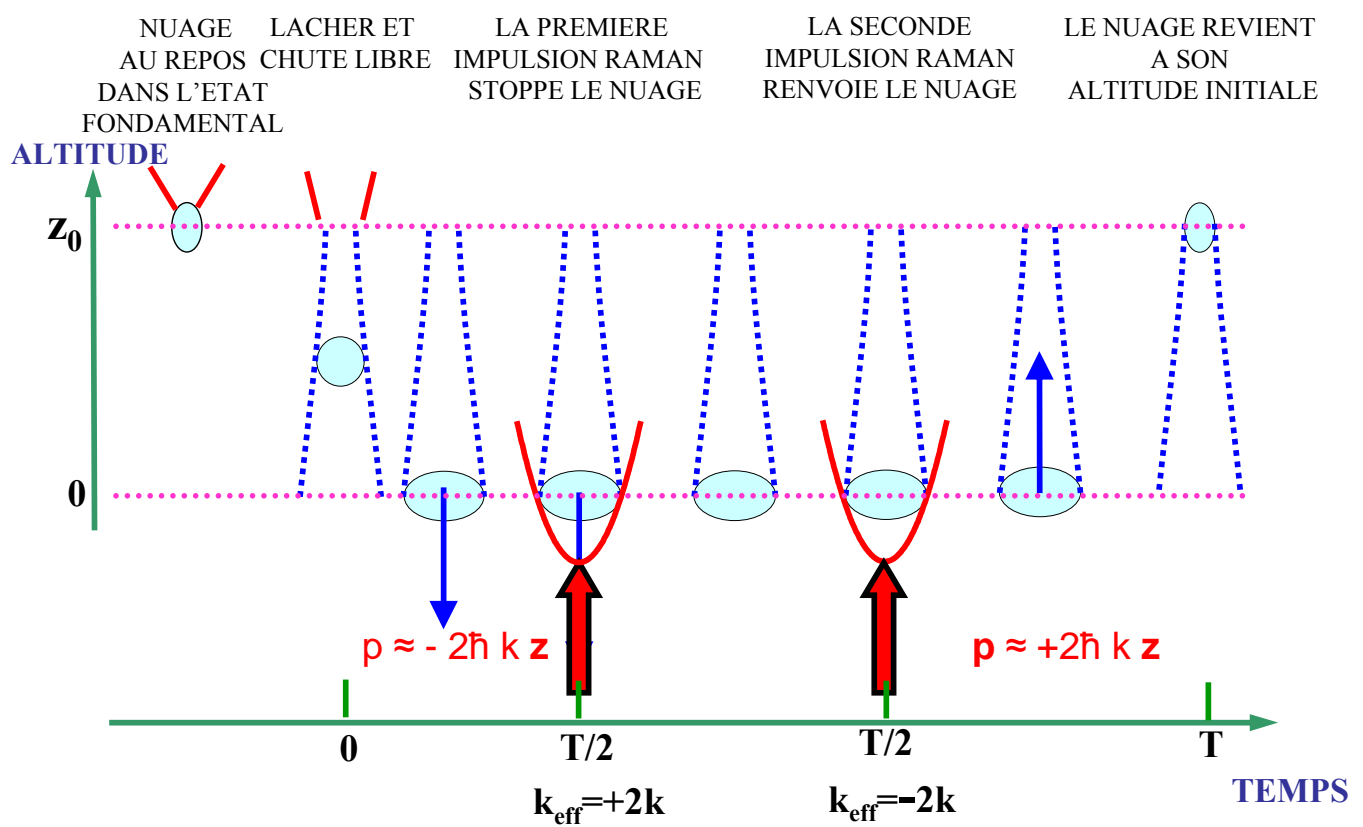


FIGURE 2.2 – Evolution du condensat au cours d'un cycle. Les deux impulsions Raman constituant le miroir sont successives et supposées ici quasi-simultanées et réalisées à l'instant $t = T/2$.

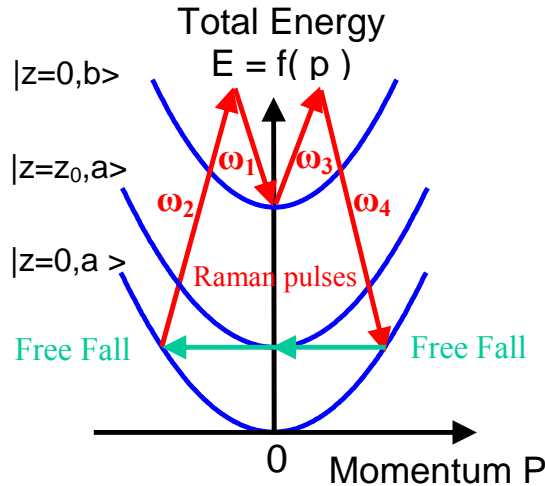


FIGURE 2.3 – Diagramme d'énergie-impulsion du condensat. Initialement, le nuage est au repos à l'altitude moyenne z_0 .

Le caractère confiné et périodique du mouvement du nuage dans l'espace des impulsions, mis en évidence sur la Figure (2.3), évoque l'idée d'un résonateur où la propagation aurait lieu dans l'espace des impulsions. L'existence de conditions de résonance assorties à la périodicité du mouvement rappelle également les conditions de rebouclage de la phase dans un résonateur optique.

2.1.4 Conditions de résonance.

La dualité du système de mesure proposé -mesure d'accélération gravitationnelle et de fréquence - est manifeste dans les conditions de résonance du système.

Les "impulsions-miroir" ne réfléchissent que les atomes ayant une vitesse proche de v_0 . Afin de rebondir plusieurs fois, le nuage atomique doit donc avoir sensiblement la même vitesse immédiatement avant chaque réflexion, ce qui implique la première condition de résonance :

$$T_0 = \frac{4\hbar k}{mg} \quad (2.1)$$

Elle traduit simplement que, durant un cycle, la quantité de mouvement communiquée aux atomes par les lasers compense en moyenne l'accélération gravitationnelle.

La conservation de l'énergie durant les deux impulsions Raman composant le miroir détermine le jeu de conditions de résonance suivant :

$$\boxed{\begin{cases} \omega_1 + \omega_b + \delta_{AC} + \frac{(\mathbf{p}_0 + 2\hbar\mathbf{k})^2}{2m\hbar} = \omega_2 + \omega_a + \frac{\mathbf{p}_0^2}{2m\hbar} \\ \omega_4 + \omega_a + \frac{(\mathbf{p}_0 + 4\hbar\mathbf{k})^2}{2m\hbar} = \omega_3 + \omega_b + \delta_{AC} + \frac{(\mathbf{p}_0 + 2\hbar\mathbf{k})^2}{2m\hbar} \end{cases}} \quad (2.2)$$

Ces conditions, qui fixent la vitesse sélectionnée par les miroirs, permettent de sonder l'écart à la période résonnante T_0 . Remarquons qu'elles permettent également une détermination de la vitesse de recul $v_r = \hbar k/m$ à condition de connaître l'accélération g .

2.1.5 Conséquence d'un écart à la résonance.

Examinons maintenant comment se traduit un écart à chacune des deux conditions de résonance (2.1) et (2.2).

2.1.5.1 Ecart à la période résonnante.

Supposons que le désaccord des lasers soit ajusté pour que les impulsions-miroir réfléchissent un échantillon atomique de vitesse $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{u}_z$.

Si la période T entre les impulsions est différente de T_0 , l'échantillon subit une accélération verticale $a = 4\hbar k/m(1/T - 1/T_0)$. Cette accélération donne lieu à une dérive de la vitesse verticale d'arrivée du nuage sur les "impulsion-miroir", qui s'écarte de la valeur v_0 satisfaisant la condition de conservation de l'énergie (2.2). Les atomes sortent donc progressivement de la résonance, et une partie du nuage n'est plus réfléchi par les "impulsions-miroir" successives. Conformément au principe de l'expérience, un choix de période T différent de T_0 provoque donc à la fois une accélération et une perte d'atomes du nuage en lévitation. Notons par ailleurs que la fraction non-réfléchi augmente à chaque cycle, car la violation de l'équation (2.2) intervient par le terme Doppler et provient de la dérive en vitesse accumulée sur l'ensemble des cycles précédents.

Il est bon de signaler la robustesse du dispositif à un ajustement imparfait de la vitesse initiale des atomes. En effet, si la condition $T = T_0$ est satisfaite mais pas celle de nuage initialement au repos, celui-ci peut malgré tout effectuer un grand nombre de rebonds à condition d'ajuster le désaccord Raman pour sélectionner la vitesse du nuage lors de l'"impulsion-miroir". Le point central est la périodicité du mouvement dans l'espace des impulsions. Dans le cas d'un nuage ayant une vitesse

initiale non nulle, son mouvement en représentation énergie-impulsion est donc simplement excentré par rapport à la vitesse de repos, donnant lieu à une dérive en position. Pour une faible vitesse initiale et un grand espace accordé à la lévitation et à la détection, ce mouvement parasite ne constitue pas un facteur limitant. Cette flexibilité sur la vitesse initiale des atomes fait que notre expérience est robuste à un défaut de synchronisation de la coupure du piège.

2.1.5.2 Ecart à la fréquence résonante

Supposons à présent que l'on fixe la période à sa valeur optimale $T := T_0$, et que les atomes soient lâchés sans vitesse initiale. Comme la période T_0 est résonnante, leur vitesse avant chaque "impulsion-miroir" est $\mathbf{v}_0 = -2\hbar\mathbf{k}/m\mathbf{z}$. Notons ω_{120} et ω_{340} les désaccords Raman satisfaisant les relations de conservation de l'énergie (2.2) pour la vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$. La durée des impulsions Raman est ajustée pour réaliser une impulsion π lorsque les conditions de conservation de l'énergie sont vérifiées.

On considère alors une variation du désaccord Raman autour des valeurs résonnantes : $\omega_2 - \omega_1 = \omega_{12} = \omega_{120} + \delta\omega$, $\omega_4 - \omega_3 = \omega_{34} = \omega_{340} + \delta\omega$. La qualité de la réflexion et le nombre d'atomes en lévitation après un nombre donné de cycles sont maximum lorsque $\delta\omega = 0$ à chaque miroir. Un écart des désaccords aux valeurs de résonance ω_{120} et ω_{340} cause ainsi, à chaque cycle, la perte d'une fraction identique du nuage.

La double condition de résonance (2.2) peut être simplifiée lorsque l'on considère un nuage lâché sans vitesse initiale et une valeur quasi-résonnante de la période $T \simeq T_0$: les conditions de conservation de l'énergie associées aux deux impulsions Raman deviennent alors symétriques. À condition d'effectuer les remplacements $\omega_1 \rightarrow \omega_3$ et $\omega_2 \rightarrow \omega_4$, on obtient effectivement pour les deux impulsions Raman successives des écarts aux désaccords résonnants égaux en valeur absolue (mais de signes opposés). Les transferts de population associés aux deux impulsions π composant le miroir lumineux sont donc identiques. On peut ainsi remplacer les deux conditions de résonance (2.2), donnant des prédictions identiques quant au nombre d'atomes réfléchis, par une condition unique impliquant l'écart $\delta\omega$.

Cette résonance en fréquence peut être mise à profit pour réaliser une horloge. On utilise alors des atomes tels que le Strontium ou l'Ytterbium possédant une transition fine spectralement. La durée de vie d'une telle transition permet par ailleurs de réaliser la lévitation au moyen d'impulsions π à un seul photon. Les conditions de résonance restent inchangées à condition de remplacer les désaccords ω_{12} et ω_{34} par la fréquence optique des lasers réalisant les impulsions. Les mesures de population du nuage lévitant pourraient être mises à profit pour réaliser un asservissement en fréquence des lasers

assurant la lévitation de l'échantillon.

2.1.5.3 Comparaison de la stabilité des deux conditions de résonance.

Si l'on augmente le temps d'interrogation de l'échantillon atomique, on s'attend à un affinement des résonances associées à une variation de la période T ou à une variation du désaccord Raman ω_{21} : chaque rebond supplémentaire de l'échantillon induit des pertes liées à un défaut de résonance des paramètres T, ω_{21} .

Insistons cependant sur le fait qu'il y ait une dissymétrie entre les deux conditions de résonance : un écart de la période T par rapport à la valeur résonnante T_0 entraîne la perte d'une fraction de la population augmentant après chaque rebond, alors qu'un écart des désaccords $\omega_{12,34}$ par rapport à $\omega_{120,340}$ implique des pertes constantes à chaque rebond. Ceci a une conséquence expérimentale intéressante : l'observation d'une résonance en période T devrait être robuste à un ajustement imparfait du désaccord Raman ω_{21} .

2.1.6 Conclusion

Nous avons exposé le principe d'un nouveau senseur à atomes froids fondé sur la lévitation d'un nuage par des doubles impulsions Raman π . Ce système présente de nombreuses analogies avec un résonateur à ondes de matière : confinement spatial et mouvement périodique dans l'espace des impulsions. La périodicité du mouvement et le maintien des atomes en lévitation dépendent de deux conditions de résonance, qui permettent à la fois d'envisager une utilisation du système en tant qu'accéléromètre ou en tant qu'élément d'une horloge.

2.2 Analyse semi-classique des performances du dispositif.

Dans cette section, nous discutons qualitativement les paramètres et performances de l'expérience précédente.

2.2.1 Evaluation de la sensibilité

Nous calculons à présent, de façon heuristique, la fraction du nuage maintenue en lévitation en fonction de la période T . Nous adoptons pour l'instant une analyse simplement unidimensionnelle, selon l'axe vertical, du mouvement de l'échantillon. Cette approche décrit le fonctionnement de l'expérience dans des conditions idéales, où tout bruit d'origine technique est négligé, et donne donc les performances ultimes du dispositif. Nous supposons ainsi que les pertes d'atomes sont uniquement dues à un écart des paramètres $(T, \omega_{12}, \omega_{34})$ des "impulsions-miroirs" par rapport à leurs valeurs de résonance $(T_0, \omega_{120}, \omega_{340})$.

Les désaccords Raman ω_{12} et ω_{34} sont ajustés pour que la vitesse d'un nuage lâché initialement au repos dans la séquence d'"impulsions-miroir" réalisées à $t_1 = T_0/2, t_2 = 3T_0/2, t_3 = 5T_0/2 \dots$ vérifie la condition de conservation de l'énergie (2.2). Un tel ajustement est possible pour la période T_0 , donnant lieu à un mouvement impulsif périodique, et donc à une répétition de la même condition de conservation de l'énergie lors des miroirs successifs.

Exprimons le paramètre de non-résonance $y(p)$ introduit au chapitre précédent et défini par l'équation (1.92). Immédiatement avant chaque réflexion, le nuage a une quantité de mouvement $p = -2\hbar k$. Par hypothèse, cette impulsion vérifie la condition de résonance, soit $y(-2\hbar k) = 0$, ce qui fixe la valeur de $y(p)$ pour une impulsion quelconque :

$$y(p) = \frac{(p + 2\hbar k)k}{2m\Omega_e}$$

Ω_e désigne la pulsation de Rabi effective et p l'impulsion moyenne du nuage immédiatement avant la réflexion. L'écart à la résonance fait que seule une fraction $\rho(p)$ du nuage est transférée lors de la première impulsion Raman :

$$\rho(p) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+y(p)^2}\right)}{1+y(p)^2}$$

Comme évoqué précédemment, il y a une symétrie des deux conditions de conservation de l'énergie pour des atomes lâchés sans vitesse initiale (et avec un ajustement correct des désaccords Raman). En

conséquence, la seconde impulsion Raman réfléchit la même fraction de l'échantillon que la première, ce qui donne le coefficient de réflexion suivant pour l'"impulsion-miroir" :

$$R(p) = \frac{\sin^4 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 + y(p)^2} \right)}{(1 + y(p)^2)^2} \quad (2.3)$$

Les atomes non réfléchis poursuivent leur chute libre pendant la prochaine séquence temporelle et auront un paramètre de Bragg donné par $y(p_0 - mgT)$ lors de la prochaine impulsion miroir. Si la condition $y(p_0 - mgT) \gg 1$ est réalisée⁸, la probabilité de recevoir un transfert d'impulsion lors des prochains miroirs lumineux est très faible pour ces atomes. Ceux-ci continuent donc leur trajectoire en chute libre avec une probabilité très faible d'interagir avec les miroirs suivants : tout se passe alors comme si ils étaient exclus du résonateur.

L'impulsion moyenne du nuage immédiatement avant la i -ème réflexion s'écrit simplement :

$$p_i = -mg\frac{T}{2} + (i - 1) \times mg(T_0 - T) \quad (2.4)$$

La fraction du nuage restant en lévitation après N rebonds est donnée par le produit des valeurs de la fonction de filtre évaluée sur les impulsions successives $p_1 \dots p_N$:

$$R(N, T) = R(p_1) \dots R(p_N) \quad (2.5)$$

La succession de réflexions apparaît ainsi comme une convolution de filtres impulsionsnels. A partir des relations (2.4) et (2.5), on obtient facilement la fraction $R(N, T)$ du nuage atomique maintenue en vol après N réflexions séparées par la durée T . La Figure 2.4 représente cette fraction lévitante $R(N, T)$ en fonction de T et pour différentes valeurs de N . Une expression analytique approchée de $R(N, T)$ est obtenue dans l'appendice E :

$$R(N, T) \simeq \exp \left[-\frac{2g^2 k^2 (T - T_0)^2 N^3}{3\Omega_e^2} \right] \quad (2.6)$$

Munis de cette expression, nous pouvons facilement majorer l'erreur commise dans la détermination de g . Considérons une série de mesures de population après N rebonds pour plusieurs périodes T

8. Il n'est cependant pas forcément nécessaire d'imposer une condition aussi restrictive. Pour $T > T_0$, les atomes "manquant un rebond" auront lors des miroirs suivants une probabilité de réflexion majorée par : $p \leq R(p_0 - mgT) < 1$. Après un nombre de cycles n tel que $R(p_0 - mgT)^n \ll 1$, ces atomes sont presque certainement exclus du piège. Dans le cas où $T < T_0$, la discussion est plus complexe : l'accélération verticale transmise aux atomes par les miroirs lumineux est susceptible de ramener à résonance des atomes ayant manqué un transfert d'impulsion.

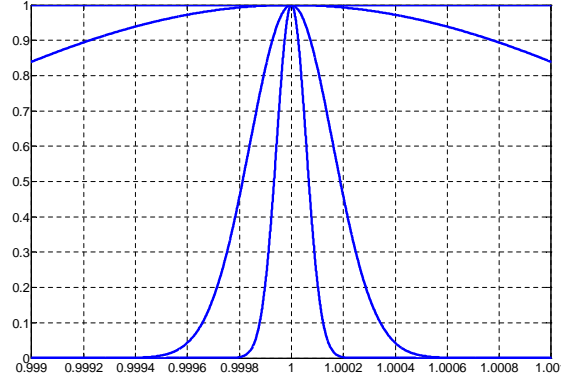


FIGURE 2.4 – Fraction $R(N, T)$ du nuage maintenue en lévitation après 1, 10, 50, 100 cycles en fonction du ratio T/T_0 ($T_0 \simeq 1.58$ ms), pour la pulsations de Rabi avons pris $\Omega_e = 2\pi \times 5 \times 10^3$ Hz.

voisines de la valeur de résonance T_0 . Supposons qu'il soit possible expérimentalement de détecter une variation relative ϵ de la population finale. Puisque les seules fuites d'atomes proviennent par hypothèse d'un écart des paramètres ($T, \omega_{12}, \omega_{34}$) à la résonance, les mesures effectuées nous permettent d'encadrer la période résonnante T_0 par les deux valeurs T_1 et T_2 telles que :

$$R(N, T_1) = R(N, T_2) = 1 - \epsilon$$

Selon le calcul précédent, l'écart entre ces valeurs est de :

$$|T_2 - T_0| \simeq |T_1 - T_0| \simeq \sqrt{\frac{3 \log(1/1 - \epsilon)}{2}} \frac{\Omega_e}{gk} \frac{1}{N^{3/2}}$$

La relation (2.1), qui relie directement l'accélération gravitationnelle à la période résonnante, nous permet de déterminer g avec une erreur relative :

$$\left| \frac{\Delta g}{g} \right| \leq \left| \frac{\Delta T}{T} \right| + \left| \frac{\Delta v_r}{v_r} \right|$$

v_r désigne la vitesse de recul $v_r = \hbar k/m$. On obtient ainsi, lors d'une mesure à ϵ près de la population atomique du nuage après N rebonds, une erreur relative sur l'accélération gravitationnelle g :

$$\boxed{\left| \frac{\Delta g}{g} \right| \leq \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{1}{\hbar k^2} \left(\frac{\pi \sqrt{-\log(1 - \epsilon)}}{N^{3/2} \tau} \right) + \left| \frac{\Delta v_r}{v_r} \right|} \quad (2.7)$$

Nous avons choisi d'exprimer cette erreur en fonction de la durée τ de l'impulsion Raman plutôt que

de la pulsation de Rabi Ω_e . Le fait que la précision relative de la mesure $|g/\Delta g|$ augmente mieux que linéairement avec le nombre N de rebonds du nuage reflète l'incidence plus grande d'un écart à la période résonnante sur le coefficient de réflexion des derniers miroirs que sur celui des premiers.

Il est instructif de réexprimer l'erreur relative en fonction du temps de lévitation $T_{int} = NT_0$ écoulé entre le lâcher de l'échantillon et la mesure de population⁹ :

$$\epsilon_g(T_{int}) = \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{1}{\hbar k^2} \left(\frac{\pi T_0^{3/2} \sqrt{-\log(1-\epsilon)}}{T_{int}^{3/2} \tau} \right) + \left| \frac{\Delta v_r}{v_r} \right| \quad (2.8)$$

T_{int} s'interprète comme la durée d'interrogation des atomes par le gravimètre. Si l'on pouvait interroger ces atomes pendant un temps arbitrairement long, tout en préservant les conditions de fonctionnement du dispositif (pertes quasi-nulles à résonance), ce serait l'incertitude sur la vitesse de recul $|\Delta v_r/v_r|$ qui limiterait la précision de la mesure de l'accélération g . La vitesse de recul a été mesurée avec une précision de l'ordre de quelques 10^{-9} pour le Césium [75, 76] et pour le Rubidium [74]¹⁰. En fait, notre proposition est sujette à d'autres sources d'erreurs à priori bien plus limitantes (vibrations du banc par exemple). Aussi supposons-nous, dans la suite, que la vitesse de recul est parfaitement connue.

En considérant les expressions (2.7) et (2.8), il semble que les impulsions Raman doivent être aussi longues que possible ($\tau = T_0/2$) pour obtenir une incertitude la plus petite possible. Ceci n'est pas surprenant, puisque le filtrage de vitesses réalisé par les miroirs lumineux est d'autant plus fin que les impulsions sont longues. La Figure 2.5 représente la précision attendue sur la mesure de g en fonction du nombre de rebonds effectués avant la mesure de population finale dans le cas d'impulsions Raman de durée maximale ($\tau = T_0/2$) et pour une incertitude de $\epsilon = 10^{-3}$ sur la population. Afin d'atteindre une précision du niveau des meilleurs gravimètres actuels, il est nécessaire de maintenir l'échantillon environ 10 s en lévitation.

2.2.2 Durée optimale des “impulsions-miroir” : compromis entre sélection et population.

La discussion précédente sur la durée des impulsions lumineuses suppose implicitement qu'il n'y a pas de corrélation entre la sélectivité en vitesse des “impulsions-miroirs” et la plus petite fraction

9. En fait T_{int} est légèrement différent à chaque chargement de l'expérience. En effet on suppose que l'écart entre le lâcher et la mesure de population est toujours de $N \times T$. Or, on fait varier légèrement T autour de T_0 et on maintient le nombre N de cycles constant.

10. Rappelons que la vitesse pourrait être déterminée de façon indépendante dans notre expérience (mais pas à ce niveau de précision).

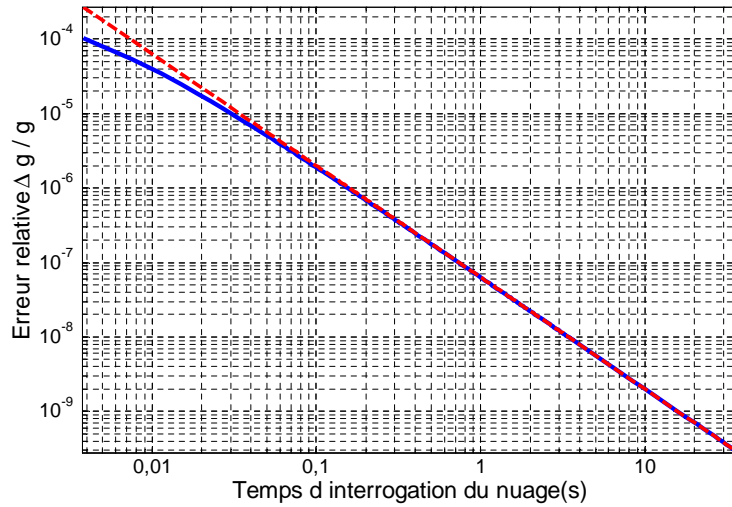


FIGURE 2.5 – Erreur sur $\Delta g/g$ en fonction de la durée d’interrogation, avec des “impulsions-miroir” de durée maximum $\tau = T_0/2$ et avec une précision relative de la mesure de population $\epsilon = 10^{(-3)}$. La ligne continue correspond à la précision obtenue par simulation numérique, et la ligne pointillée reflète la précision donnée par l’équation (2.8).

délectable du nuage lévitant ϵ . Ceci est inexact, car l’incertitude sur cette population est liée au nombre d’atomes mesurés, notamment à cause du bruit de projection quantique. Par ailleurs, tout dispositif réel possède un seuil de détection : en dessous d’une certaine densité atomique ρ_{min} , le détecteur devient inopérant. On ne peut donc faire intervenir qu’au plus N_{max} rebonds dans la lévitation, nombre au delà duquel la densité du nuage lévitant tombe en dessous du seuil ρ_{min} . N_{max} décroît lorsque les miroirs lumineux deviennent plus sélectifs, c’est à dire lorsque la durée des impulsions Raman augmente.

Il y a donc un arbitrage à rendre entre l’utilisation de miroirs lumineux hautement sélectifs en vitesse, ou au contraire celle de miroirs peu sélectifs mais compatibles avec un temps de vol du nuage plus long. En fait, le résultat de cet arbitrage dépend à mon sens de la qualité du résonateur. Dans un résonateur idéal, mieux vaut utiliser des miroirs lumineux aussi peu sélectifs que possible : plus le filtrage impulsionnel intervient tard, plus la dérive Doppler des atomes est accumulée sur une longue durée, et plus importante est la contribution de chaque atome perdu à la mesure de l’accélération gravitationnelle. En revanche, si le résonateur est de moindre qualité, il semble préférable d’utiliser des miroirs sélectifs afin que les pertes proviennent principalement d’un écart aux conditions de résonance et non des fuites intrinsèques du résonateur.

L'optimisation de la durée des impulsions lumineuses soulève en fait une piste d'amélioration intéressante du dispositif : celle de faire varier la sélectivité des "impulsions-miroir" à chaque cycle. Par analogie avec une cavité optique, tout se passe comme si un opérateur fictif changeait le miroir entre chaque aller-retour du faisceau lumineux. On peut ainsi explorer une variété de régimes de filtrage impulsionnel. On peut considérer par exemple le processus de filtrage suivant :

- Premières impulsions courtes donnant lieu à un transfert de population quasi-total.
- Impulsions finales longues sondant précisément la dérive Doppler accumulée sur l'ensemble des cycles.

2.2.3 Nécessité d'appliquer une rampe de fréquence.

Durant l'impulsion lumineuse, l'accélération due à la gravité modifie sensiblement l'évolution des atomes dans l'espace interne¹¹. La discussion précédente sur la durée des impulsions nous permet d'évaluer cet effet dans le dispositif proposé.

Il est instructif de reconsidérer le paramètre de non-résonance défini dans l'équation (1.92) du premier chapitre :

$$y(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\Omega_e} \left(\omega_{ba} + \frac{\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{p}}{m} + \frac{\hbar|\mathbf{k}_e|^2}{2m} - (\omega_1 - \omega_2) \right)$$

La diffusion de l'onde atomique sur l'onde lumineuse est caractérisée par la fonction $y(\mathbf{p})$ (pour ce qui concerne l'amplitude de transfert) . C'est essentiellement par une modification du terme Doppler de ce paramètre que l'accélération gravitationnelle agit sur la trajectoire des atomes dans l'état interne. A une tranche infinitésimale de vitesses $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 + d\mathbf{p}]$ à l'instant t_0 , est associée un paramètre y évoluant en fonction du temps selon :

$$y(t) = \frac{1}{2\Omega_e} \left(\omega_{ba} + \frac{\mathbf{k}_e \cdot (\mathbf{p}_1 - m\mathbf{g}(t - t_0))}{m} + \frac{\hbar|\mathbf{k}_e|^2}{2m} - (\omega_1 - \omega_2) \right)$$

Il n'est donc possible de négliger l'effet de l'accélération gravitationnelle que dans la mesure où la variation Δy engendrée par la gravité est négligeable ($\Delta y \ll 1$) sur la durée de l'impulsion. Cette condition se traduit par :

$$\frac{|\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{g}| \tau^2}{2\pi} \ll 1$$

Cette relation fixe l'ordre de grandeur de la durée d'impulsion à partir de laquelle il est nécessaire

11. Les équations ont été résolues exactement par Christian Bordé et Klaus Lämmerzahl [77]

de prendre en compte l'accélération gravitationnelle $\tau_{grav} = 1/\sqrt{(2\pi)|\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{g}|} \simeq 0.25 \text{ ms}$. Pour les paramètres expérimentaux envisagés au précédent paragraphe ($\tau = T_0/2 \simeq 0.75 \text{ ms}$), il est donc indispensable de prendre en compte l'accélération des atomes au cours de l'impulsion lumineuse¹².

La méthode la plus directe pour obtenir un transfert total de population consiste à appliquer, durant l'impulsion, une rampe de fréquence qui maintienne le paramètre y à une valeur constante en dépit de l'accélération subie par les atomes. Un examen rapide de $y(t)$ donne le profil temporel de fréquence désiré :

$$\omega_1(t) - \omega_2(t) = \omega_1(t_0) - \omega_2(t_0) + (\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{g}) (t - t_0)$$

Nous supposons, dans la suite, que les pentes r associées à chaque impulsion Raman composant le miroir lumineux vérifient $r = \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{g}$, prenant donc successivement les valeurs $r_1 = -2kg$ et $r_2 = +2kg$. Les rampes de fréquence, commençant à l'instant initial de chaque impulsion Raman, donnent à la phase une dépendance temporelle quadratique :

$$\varphi_e(t) = \frac{1}{2} (\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{g}) (t - t_0)^2 + (\omega_{1,3}(t_0) - \omega_{2,4}(t_0)) (t - t_0) + \varphi_e^0 \quad (2.9)$$

2.2.4 Quel nuage utiliser dans le dispositif?

Il est utile de préciser la typologie d'échantillon atomique adapté au dispositif présenté. En particulier, il est légitime de s'interroger sur la nécessité d'employer un nuage condensé dans l'expérience proposée, alors qu'un nuage froid incohérent est beaucoup plus facile à produire expérimentalement.

Nous apportons quelques éléments de réponse en considérant les exigences de notre dispositif en termes de dispersion de vitesses et de densité du nuage.

2.2.4.1 Température cinétique de l'échantillon.

Un critère heuristique.

Le principe de la mesure, tel que nous l'avons exposé, implique de pouvoir distinguer les atomes ayant subi tous les transferts d'impulsions associés aux miroirs lumineux de ceux ayant manqué au moins un transfert. Il semble donc raisonnable d'exiger que la dispersion initiale de vitesses $\Delta v_{z,\Theta}$

12. Remarquons que cet ordre de grandeur aurait pu également être obtenu grâce à une analyse dimensionnelle : la seule façon d'obtenir une durée à partir des paramètres pertinents \mathbf{k}_e et \mathbf{g} est de considérer la quantité $|\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{g}|^{-1/2}$.

soit bien inférieure à la vitesse transmise lors d'une "impulsion-miroir" :

$$\Delta v_{z,\Theta} \ll 4\hbar k$$

Cette relation se traduit alors, pour l'atome de Rubidium ^{87}Rb , par une condition sur la température cinétique $\Theta \ll 1.2 \mu\text{K}$. Pour les densités d'atomes usuelles dans les expériences en physique atomique, telles que $\rho \simeq 10^{10} \text{ at./cm}^3$ à $\rho \simeq 10^{15} \text{ at./cm}^3$, la température critique de condensation s'échelonne entre $20 \text{ nK} \leq \Theta_c \leq 1 \mu\text{K}$. Notre exigence sur la distribution de vitesses initiales implique donc que le nuage soit condensé, ou du moins dans un état proche du régime de condensation¹³.

Seuil de détection.

Soulignons un autre impératif : l'échantillon doit avoir une distribution de vitesses suffisamment étroite et une population initiale suffisamment élevée pour que la densité du nuage lévitant à résonance (conditions (2.1) et (2.2) vérifiées) soit supérieure au seuil de détection ρ_{min} lors de la mesure de population finale. Ce second critère implique également une densité élevée dans l'espace des phases¹⁴, qui fait des condensats les meilleurs candidats pour notre dispositif.

Coefficient de réflexion des miroirs lumineux et température.

En supposant que la distribution de vitesses ait une forme gaussienne :

$$P(v_z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta v_{z,\Theta}} \exp\left(-\frac{(v_z - v_0)^2}{\Delta v_{z,\Theta}^2}\right) \quad (2.10)$$

on peut calculer le coefficient de réflexion des miroirs lumineux en fonction de la température. Ceci est réalisé dans l'appendice F pour des "impulsions-miroir" de sélectivité maximale ($\tau = T_0/2$). La courbe correspondante révèle que des températures inférieures à $\Theta = 10 \mu\text{K}$ sont requises pour obtenir un coefficient de réflexion supérieur à 1%. Même pour des températures subrecul, la réflexion ne dépasse pas quelques pourcents. Soulignons cependant que cette faible valeur concerne uniquement le premier rebond : après celui-ci, l'échantillon a à priori une distribution en vitesses verticales suffisamment étroite pour pouvoir être réfléchi presque entièrement par les miroirs suivants¹⁵. Le faible coefficient

13. Ce critère est cependant heuristique : on pourrait imaginer que les "impulsions-miroirs" successives affinent progressivement la distribution de vitesse d'un échantillon beaucoup moins froid.

14. La dispersion en vitesse maximum compatible avec cette exigence dépend principalement de la sélectivité des miroirs lumineux, du nombre de cycles envisagés, et du rapport entre la densité atomique initiale et le seuil de détection ρ_{min} .

15. Le nuage atomique n'est alors plus à l'équilibre thermodynamique, et sa dispersion en vitesses longitudinale n'est

de réflexion obtenu n'est donc pas rédhibitoire : il est envisageable, à partir de paramètres réalistes pour l'échantillon initial d'atomes froids (ex. $\Theta = 1 \mu K, N = 10^6 at.$), d'obtenir la lévitation d'un nombre significatif d'atomes ($\simeq 20000$) avec des "impulsions-miroir" sélectives.

2.2.4.2 Densité de l'échantillon.

La densité optimale du nuage résulte en fait d'un arbitrage entre deux objectifs : obtenir un nombre d'atomes suffisamment élevé lors de la mesure finale de population afin de garantir un rapport signal sur bruit satisfaisant, et minimiser la densité pour limiter l'impact des interactions atomiques. Ces deux objectifs peuvent être conciliés si l'on accorde un espace suffisant au nuage. La technologie actuelle de refroidissement permet d'obtenir des condensats de Bose-Einstein ayant jusqu'à 10^8 atomes, mais la plupart des expériences métrologiques impliquant des atomes froids utilisent des nuages beaucoup moins peuplés (de l'ordre du millier d'atomes).

Les interactions atomiques sont en effet susceptibles d'entraîner des effets peu souhaitables dans le dispositif aussi bien en fonctionnement de gravimètre qu'en fonctionnement d'horloge. Quelque soit la grandeur mesurée (accélération ou fréquence), les interactions répulsives rendent délicate la stabilisation transverse du nuage. Cette stabilisation implique alors des miroirs lumineux fortement refocalisant, et qui donnent lieu à des transferts imparfaits de population (même à résonance). Ce moindre coefficient de réflexion affecte la qualité du résonateur à ondes de matière et donc la résolution du gravimètre et de l'horloge associés. Aussi est-il préférable d'utiliser des échantillons relativement dilués.

Par ailleurs, les interactions induisent à la fois des déplacements systématiques et une dispersion supplémentaire dans la mesure de fréquence de la transition considérée (intervenant dans la condition (2.2)). Cet élargissement de la raie est proportionnel aux fluctuations de population du nuage. Développons ce point précis. Nous considérons que le dispositif est chargé avec un condensat de température nulle dans la superposition d'états de Fock :

$$|\phi(0)\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \hat{a}_\phi^k |0\rangle \quad (2.11)$$

L'unique mode peuplé est associé à la fonction d'onde $\phi(\mathbf{r}, 0)$. Nous supposons que la distribution des coefficients c_k a un pic central autour d'une valeur $k = N_0$ correspondant au nombre moyen d'atomes du nuage. La fonction d'onde $\phi_k(\mathbf{r}, t)$ associée à l'état nombre $|k\rangle = \hat{a}_\phi^k |0\rangle$ évolue selon l'équation de

plus régie par le théorème d'équipartition de l'énergie. Notons toutefois que le phénomène de rethermalisation peut redonner une dispersion cinétique à l'échantillon et conduire à des pertes lors des miroirs suivants.

Gross-Pitaevskii dépendant du temps 1.49 :

$$i\hbar \frac{\partial \phi_k(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U^0(\mathbf{r}) + \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_k |\phi_k(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \phi_k(\mathbf{r}, t) \quad (2.12)$$

Cette équation montre clairement que l'évolution des fonctions d'ondes considérées dépend du nombre d'atomes k par l'intermédiaire du terme d'interactions. Le décalage en fréquence dû aux interactions est donc de l'ordre de $4\pi\hbar^2 a_k \langle |\phi_k|^2 \rangle / m$, où $\langle |\phi_k|^2 \rangle$ est la norme de la fonction d'onde ϕ_k . Ce terme fait que l'incertitude Δk sur le nombre d'atomes du nuage se reporte sur la fréquence du mode considéré. Soulignons que, dans un dispositif d'horloge, c'est le déplacement *relatif* des niveaux d'une transition qui compte et non le déplacement absolu d'un niveau. Dans notre système où un transfert de population total est envisagé, les longueurs de diffusion croisées n'interviennent pas. La différence de fréquence mesurée s'écrit [78] :

$$2\pi\nu_{int} = \left(\frac{4\pi\hbar^2}{m} \right) (a_{bb} - a_{aa}) \tilde{\rho} \quad (2.13)$$

La coincidence des longueurs de diffusion a_{bb} et a_{aa} pour certains atomes (en particulier le Rubidium) permet de s'affranchir partiellement de cet effet. Néanmoins, en général, les interactions induisent à la fois un effet systématique lié à la valeur moyenne $\tilde{\rho}$ et une incertitude supplémentaire liée aux fluctuations de population atomique. Ces limitations plaident pour l'utilisation de nuages dilués.

2.2.5 Pertes intrinsèques du résonateur.

Pour évaluer la sensibilité du dispositif, nous avons considéré jusqu'ici essentiellement le décalage Doppler créé par le mouvement unidimensionnel du nuage. Cette analyse omet cependant plusieurs limitations importantes, de nature technique mais aussi de nature fondamentale. A ce titre, la sensibilité obtenue dans l'équation (2.8) doit être comprise comme une borne supérieure correspondant à un fonctionnement optimal. Nous évoquons, dans ce paragraphe, les effets susceptibles de limiter le temps de lévitation du nuage.

Nous avons supposé que l'échantillon atomique pouvait être maintenu en vol un temps arbitrairement long si les deux conditions de résonance (2.1,2.2) étaient vérifiées. Ceci est en fait inexact : même à résonance, les pertes systématiques du résonateur ne permettent au nuage qu'un nombre fini N de rebonds. Le temps maximal de lévitation apparaît alors comme la durée de vie T_{Res} d'un mode résonnant, caractérisant la finesse du résonateur ($T_{Res} \simeq NT_0$) et conditionnant l'exactitude de la mesure de l'accélération g .

2.2.5.1 Pertes d'origine technique.

Il convient de garder à l'esprit l'impact des limitations techniques lors d'une mise en oeuvre expérimentale de notre proposition.

Les vibrations du banc optique constituent un problème technique majeur dans les mesures de gravimétrie par interférométrie atomique. Elles altèrent la mesure d'accélération effectuée par le système : celui-ci mesure l'accélération des atomes *par rapport* à la source laser et non pas par rapport à la terre. Ces vibrations font que le mouvement des atomes relativement au banc optique n'est pas exactement uniformément accéléré, mais comporte une petite composante de vitesse aléatoire qui rend la condition de conservation de l'énergie (2.2) partiellement insatisfaite pour les "impulsions-miroir" successives.

Une autre limitation technique à la finesse du résonateur provient des diffusions parasites susceptibles d'éjecter les atomes hors de la zone de confinement. Ces processus parasites sont dus majoritairement à l'émission spontanée. Heureusement, il est possible de rendre arbitrairement faible leur occurrence en utilisant des impulsions Raman fortement désaccordées (impliquant par conséquent des lasers intenses). Bien qu'elles traduisent un processus physique fondamental, ces diffusions peuvent donc être contournées au moyen d'une technologie adaptée et on peut donc les associer aux limitation "techniques".

2.2.5.2 Limitations fondamentales.

La limitation fondamentale la plus évidente concerne le confinement transverse du nuage atomique. Il y a en effet un point essentiel dont l'analyse unidimensionnelle précédente ne rend pas compte : si le nuage n'est pas refocalisé, sa taille transverse excède rapidement le diamètre des faisceaux lasers, ce qui fait sortir les atomes de la zone de réflexion après seulement quelques rebonds. La vitesse d'expansion de l'échantillon est par ailleurs augmentée par les interactions atomiques répulsives. Les atomes ne peuvent alors plus effectuer que quelque cycles dans le résonateur gravitationnel, dont la qualité est gâchée par l'expansion du nuage. Il est donc essentiel d'impliquer un mécanisme qui stabilise transversalement l'échantillon.

Celui-ci peut être obtenu en utilisant des miroirs lumineux courbés au lieu de miroirs plans. L'obtention d'une focalisation de l'onde atomique nécessite malheureusement une inhomogénéité de

l'intensité du champ électromagnétique d'autant plus grande que la distance focale souhaitée est petite. Il en résulte une pulsation de Rabi inhomogène dégradant partiellement le transfert de population à résonance et donc la qualité du résonateur. En fait, la focalisation requise dépend uniquement de la non-linéarité de la propagation (due aux interactions), qu'il est heureusement possible de rendre arbitrairement faible en concédant suffisamment d'espace au nuage. Il est alors possible de stabiliser le résonateur avec des "impulsions-miroir" presque planes et donc d'intensité quasiment uniforme. Pour de telles impulsions, l'efficacité du transfert de population peut atteindre 99,5% [79]. Le miroir à atomes réalisé est alors de très bonne qualité, donnant lieu à un résonateur très fin. Le fait que l'occupation spatiale du nuage apparaisse comme une ressource physique convertible en précision est un élément intéressant de notre système. On peut se risquer à y voir une manifestation indirecte du principe de Heisenberg.

2.2.6 Conclusion

Nous avons donné un calcul heuristique de la sensibilité du dispositif, fondé sur le simple mouvement unidimensionnel de l'échantillon. La durée optimale des impulsions lumineuses a été discutée, ainsi que le type d'échantillon compatible avec l'expérience proposée.

Nous avons par ailleurs évoqué des limitations techniques et fondamentales du dispositif. Ces dernières montrent qu'une analyse des degrés de liberté transverses du nuage est nécessaire pour en appréhender la sensibilité de façon correcte. Avant d'aborder cette analyse, nous effectuons une modélisation physique plus rigoureuse du système expérimental.

2.3 Modélisation Quantique du Système.

L'objectif de cette partie est de dégager une modélisation fidèle et efficace du système expérimental. Cette modélisation s'appliquera par ailleurs intégralement au second dispositif métrologique présenté dans ce mémoire. Rappelons que le système proposé fait intervenir fondamentalement trois champs couplés :

- Le champ atomique.
- Le champ électromagnétique.
- Les champs gravito-inertiels.

Les champs électromagnétique et gravito-inertiels sont considérés comme classiques¹⁶. Les points centraux de la modélisation sont la propagation du champ atomique dans les zones noires (absence de champ électromagnétique) et éclairées du dispositif. A partir des conclusions du chapitre précédent sur la diffusion d'ondes atomiques sur une onde électromagnétique plane, nous proposons une modélisation simplifiée des miroirs lumineux.

2.3.1 Quelle modélisation adopter ?

L'obtention d'une prédiction numérique d'un signal de mesure n'est pas pertinente. Notre modélisation doit répondre à un double objectif : être compatible avec des outils théoriques simples donnant lieu à des prédictions analytiques, et être suffisamment fidèle pour que les prédictions obtenues soient en rapport avec la réalité expérimentale. Nous nous proposons d'utiliser la boîte à outils suivante :

- Formalisme $ABCD$ pour la propagation du nuage atomique dans les zones sombres.
- Matrice de diffusion S non dispersive pour décrire l'effet des impulsions lumineuses sur le champ atomique¹⁷.

16. Cette approximation est justifiée pour le champ électromagnétique car on considère des états cohérents intenses émis par des lasers très au dessus du seuil. Pour le champ gravitationnel il va de soi que la résolution des expériences ne permet pas d'observer une signature d'un comportement quantique du champ gravitationnel C'est d'ailleurs bien dommage !

17. Correspondant à la modélisation ttt infiniment fine de Charles Antoine et Christian Bordé [10]

2.3.2 Dynamique du nuage atomique : modélisation par un Hamiltonien effectif quadratique.

Le formalisme *ABCD* permet de propager des paquets d'ondes atomiques régis par un Hamiltonien *quadratique* en champ atomique -générant une équation de propagation *linéaire*- et en les opérateurs positions et impulsions :

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{r} \psi^\dagger(\hat{\mathbf{r}}, t) H(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t) \psi(\hat{\mathbf{r}}, t) \quad \text{deg}H \leq 2 \quad (2.14)$$

En l'absence de champ électromagnétique et d'interactions atomiques, cette approximation quadratique du Hamiltonien est en général tout à fait légitime¹⁸. Le Hamiltonien s'exprime alors en première quantification selon (1.50). Nous ne considérons pas ici les effet inertiels liés à la rotation de la Terre (terme de Coriolis), ni bien sûr les corrections relativistes représentées par les termes $\beta(t)$, $\mathbf{f}(t)$. L'évolution du nuage dans les zones noires (en l'absence de champ électromagnétique) est alors décrite par le Hamiltonien :

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - m \vec{g}(t) \cdot \mathbf{r} - \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \vec{\gamma}(t) \cdot \mathbf{r} \quad (2.15)$$

Nous verrons au chapitre 7 que de tels Hamiltoniens peuvent modéliser de façon perturbative un terme non-linéaire modéré associé aux interactions de champ moyen. La matrice $\gamma(t)$ du Hamiltonien (1.50) contient ainsi une contribution éventuelle des interactions atomiques. Cette matrice apparaît ici simplement comme un paramètre donné du Hamiltonien (dépendant du temps a priori), dont nous détaillerons la détermination au chapitre 7. L'hypothèse de nuage atomique dilué est par ailleurs légitimée par l'adéquation de tels échantillons avec les exigences de notre système (voir la discussion de la partie précédente).

2.3.3 Modélisation du nuage atomique en lévitation.

La modélisation de l'échantillon dépend bien sûr des candidats envisagés pour le dispositif. Nous avons exposé dans la partie précédente des conditions limitantes sur la densité et sur la dispersion en vitesse du nuage. En particulier, cette dernière condition impose que l'échantillon soit dans un régime de températures ultrafroides, proche du seuil de condensation. Les condensats de très basse énergie sont de fait les meilleurs candidats. Aussi adoptons-nous la modélisation la plus simple, celle d'une fonction d'onde macroscopique associée à un condensat de température nulle. Cette modélisation

18. Par exemple, les termes plus que quadratiques du potentiel gravitationnel sont inférieurs de plusieurs ordres de grandeurs à g et au gradient de gravité local. Voir par ailleurs les travaux de Christian Bordé pour une discussion détaillée sur l'approximation parabolique d'un Hamiltonien de Klein-Gordon (voir chapitre 7.)

pourrait être étendue afin d'inclure des effets de température finie en considérant une distribution gaussienne de paquets d'ondes [10].

S'il n'est pas indispensable à priori que la fonction d'onde initiale soit une gaussienne¹⁹, la propagation d'une fonction génératrice gaussienne permet de déterminer l'évolution d'une fonction d'onde arbitraire (en régime dilué de propagation linéaire). La fonction génératrice fait ici intervenir un mode gaussien et un paramètre vectoriel α laissé indéterminé, suivant la démarche exposée au paragraphe 1.2.6.4 du chapitre 1. Le choix d'une fonction initiale gaussienne est donc un raccourci théorique avantageux que nous adoptons pour les deux dispositifs présentés dans ce mémoire :

$$\Psi_{\vec{\alpha}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{|\det(X_0)|}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) Y_0 X_0^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{i}{\hbar} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{p}_0 - 2\hbar \tilde{X}_0^{-1} \vec{\alpha}) + \frac{1}{2} \vec{\alpha} X_0^{-1} X_0^* \vec{\alpha} \right] \quad (2.16)$$

Par souci d'alléger les notations, nous omettrons par la suite ce paramètre α dans les équations. Rappelons que les matrices X_0, Y_0 caractérisent respectivement les dispersions initiales en position et en impulsion, comme défini au paragraphe 1.2.6.3 du chapitre précédent. Nous représenterons l'état quantique d'un nuage atomique condensé dans ce mode gaussien par le ket :

$$|a, \Psi_{\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, X_0, Y_0}\rangle$$

Nous faisons le choix d'une normalisation de fonction d'onde reflétant la population atomique du mode correspondant $\int d^3\mathbf{r} |\Psi_{\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, X_0, Y_0}(\mathbf{r})|^2 = N^{20}$.

2.3.4 Modélisation non-dispersive des séparatrices.

La matrice de diffusion S opératorielle donnée au chapitre précédent (expression (1.123)) permet de caractériser rigoureusement la diffusion d'ondes atomiques sur une onde électromagnétique plane. Cependant, son caractère doublement opératoriel (dépendance simultanée en les opérateurs position et impulsion) la rend peu maniable et inadéquate pour la résolution de problèmes simples. Par ailleurs, contrairement à la propagation dans l'espace libre, la propagation dans une séparatrice lumineuse n'admet en général pas de solution de forme gaussienne. Il n'est alors pas commode du tout de "brancher" la propagation $ABCD$ dans l'espace libre sur la propagation dans les séparatrices lumineuses si celles-ci sont traitées dans leur cadre le plus général. Il existe cependant un régime où les séparatrices lumineuses préservent la structure gaussienne des fonctions d'ondes propagées

19. Le formalisme $ABCD$ permet de propager une fonction quelconque par projection sur une base de modes hermito-gaussiens, voir le paragraphe 1.2.6.4 du chapitre précédent.

20. Cette norme est donc susceptible de varier au cours de l'évolution du nuage atomique.

par la méthode *ABCD* : il s'agit du régime d'impulsion lumineuse *courte et quasi-résonnante* [10]. L'effet de structuration de la séparatrice lumineuse est alors négligeable, ce qui permet de simplifier considérablement l'expression de la matrice de diffusion.

Nous supposons, dans un premier temps, que cette approximation (dont la validité est par ailleurs discutée dans l'appendice G) s'applique aux impulsions Raman composant les miroirs lumineux de notre système. Le traitement présenté s'applique indifféremment à la diffusion d'une onde atomique sur une onde électromagnétique progressive ou sur la somme de deux ondes progressives contrapropageantes (après élimination du niveau intermédiaire).

Reconsidérons l'expression générale (1.123), donnée au chapitre précédent, pour la matrice de diffusion :

$$S_{\alpha\beta} = e^{i\phi_{\alpha\beta}} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}_{\alpha\beta}} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{r}_{\alpha\beta}} S_{\alpha\beta}^{(2)} \left(\hat{\mathbf{r}} + \lambda_{\alpha}\tilde{B}(t_0, t_1)\frac{\hbar\mathbf{k}}{2m}, \hat{\mathbf{p}} + \lambda_{\alpha}\tilde{A}(t_0, t_1)\frac{\hbar\mathbf{k}}{2} \right)$$

L'approximation non-dispersive nous autorise à remplacer, dans cette expression, les opérateurs $\hat{\mathbf{r}}$ et $\hat{\mathbf{p}}$ par leurs valeurs moyennes. Pour le Hamiltonien (2.15) considéré, les matrices *ABCD* s'expriment simplement $A(t_0, t_1) = I_3$ et $B(t_0, t_1) = (t_0 - t_1)I_3$. Nous supposons $B(t_0, t_1) \simeq 0$, approximation valable uniquement pour des impulsions courtes²¹. Les translations spatiales des paquets d'ondes atomiques, représentés par les facteurs $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$, sont associés à des effets de structuration spatiale et donc négligés ici. En revanche, il est essentiel de conserver les translations impulsioneelles exprimant le transfert de quantité de mouvement du champ laser vers les atomes. La phase $\phi_{\alpha\beta}$ correspond à la phase laser évaluée à l'instant médian de l'impulsion lumineuse et en la position centrale correspondante du paquet d'ondes atomique à cet instant.

La matrice de diffusion du chapitre précédent caractérisait l'interaction entre une onde atomique et une onde électromagnétique plane. Lorsque l'on considère l'interaction entre une onde atomique et une onde électromagnétique gaussienne, il est nécessaire d'introduire un facteur opératoireiel $e^{if_{\alpha,\beta}(\hat{\mathbf{r}}, t)}$. En champ faible, ce terme apparaît comme la réminiscence de la courbure du front d'onde électromagnétique vers le champ atomique, dont le calcul sera abordé dans au chapitre 5. En champ fort, ce terme peut refléter des déplacements lumineux inhomogènes. Le facteur $e^{if_{\alpha,\beta}(\hat{\mathbf{r}}, t)}$ permet en fait de rendre compte de la refocalisation du nuage atomique. Un avantage théorique important est que ce terme ne menace pas la self-similarité des solutions gaussiennes : avec des ondes électromagnétiques sphériques, ce facteur s'intègre aisément dans la propagation *ABCD* par le biais d'une matrice

21. t_1 est l'instant milieu de l'impulsion

ABCD supplémentaire de type “lentille”²².

Dans l’approximation non-dispersive, la matrice de diffusion d’une onde atomique sur une onde électromagnétique gaussienne admet finalement pour expression²³ :

$$S(\theta, t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) = \begin{pmatrix} M_{bb}(\theta, \mathbf{p}_0) & M_{ba}(\theta, \mathbf{p}_0)e^{i\phi(t, \mathbf{r}_0)}e^{i\mathbf{k}_e \cdot (\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)}e^{if_{ba}(\hat{\mathbf{r}})} \\ M_{ab}(\theta, \mathbf{p}_0)e^{-i\phi(t, \mathbf{r}_0)}e^{-i\mathbf{k}_e \cdot (\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)}e^{if_{ab}(\hat{\mathbf{r}})} & M_{aa}(\theta, \mathbf{p}_0) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

θ désigne l’angle associé à l’impulsion considérée (ici $\theta = \pi$). Les éléments de la matrice M , traduisant le transfert de population, s’expriment :

$$\begin{cases} M_{aa}(\theta, \mathbf{p}_0) = M_{bb}(\theta, \mathbf{p}_0) = i \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} \sqrt{1 + y^2} \right) + i \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} \sin \left(\frac{\theta}{2} \sqrt{1 + y^2} \right) \right] \\ M_{ab}(\theta, \mathbf{p}_0) = M_{ba}(\theta, \mathbf{p}_0) = \frac{i}{\sqrt{1 + y^2}} \sin \left(\frac{\theta}{2} \sqrt{1 + y^2} \right) \\ y(\mathbf{p}_0) = -\frac{1}{2\Omega_e} \left[\omega - \omega_{ab} - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_0}{m} - \frac{\hbar k^2}{2m} \right] \end{cases} \quad (2.18)$$

Cette matrice de diffusion reflète aussi bien la diffusion d’une onde atomique sur une onde électromagnétique progressive que sur deux ondes contrapropageantes.

2.3.5 Conclusion : expression générale du spineur atomique.

Avec la modélisation présentée dans cette partie, l’évolution du spineur atomique est donnée par un produit de matrices numériques (associées à des diffusions instantanées effectives) par des opérateurs unitaires traduisant l’évolution entre ces interactions effectives. En notant t_1, \dots, t_{n-1} les instants centraux des miroirs lumineux (associés aux interactions effectives), $U_{ext}(t, t')$ l’opérateur associé à la propagation dans le noir, et $\hat{S}_M(t_i)$ la matrice numérique associée à une “impulsion-miroir”, on peut donner une expression formelle du spineur atomique immédiatement avant la n -ème

22. Comme le confirmera une étude menée au chapitre 5.

23. Il peut sembler paradoxal que l’on supprime délibérément le caractère opératoire de la matrice de diffusion en se plaçant dans l’approximation non-dispersive tout en introduisant par ailleurs un terme de courbure opératoire $e^{if_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{r}}, t)}$. En fait nous traitons les éléments de la matrice de diffusion comme des nombres *vis à vis du transfert de population* (on considère un seul paramètre $y(\mathbf{p}_0)$ et non un opérateur $y(\hat{\mathbf{p}})$, ce qui revient à traiter le champ atomique comme une onde plane) *mais pas vis à vis de la phase* qui conserve son caractère opératoire. Cette dichotomie entre approximation dans l’amplitude (population) mais pas dans la phase n’est pas étrangère à l’optique, et il n’est pas illogique de l’utiliser en optique atomique.

impulsion :

$$|\Psi(t_n - \epsilon)\rangle = \prod_{i=1}^{n-1} U_{ext}(t_i, t_{i+1}) \hat{S}(t_i) |\Psi(t_1)\rangle$$

Comme la structure gaussienne est préservée lors des diffusions et des évolutions dans le noir, le spineur ne fait intervenir qu'une somme de paquets d'ondes gaussiens. Nous verrons ultérieurement un dispositif où tous les paquets gaussiens doivent être pris en compte. La situation est en fait beaucoup plus simple ici, où l'approximation non-dispersive des miroirs lumineux²⁴ limite à un seul le nombre de paquets gaussiens. Décrire le nuage atomique revient donc à calculer l'amplitude, la phase, la position et l'impulsion centrale, ainsi que les largeurs de cette gaussienne, ce qui est l'objet de la partie suivante.

24. et notre choix de considérer exclusivement les atomes ayant reçu tous les quanta d'impulsion $4\hbar\mathbf{k}$

2.4 Analyse quantique multidimensionnelle du senseur atomique.

L'objectif de cette partie est de décrire l'évolution tridimensionnelle du nuage en lévitation en utilisant la modélisation développée dans la partie précédente, en particulier la propagation $ABCD$ et l'approche des impulsions lumineuses par des matrices de diffusion non-dispersives. Nous analysons, en particulier, le confinement transverse du nuage en lévitation, essentiel pour garantir le maintien de l'échantillon dans le faisceau laser.

2.4.1 Expansion initiale du nuage atomique.

La première phase de chute libre du nuage atomique, immédiatement après coupure du piège, n'est pas régie par une dynamique de nuage dilué. C'est pourquoi nous avons choisi de la distinguer des rebonds suivants, en lui appliquant non pas la propagation $ABCD$ mais la loi d'expansion en régime de Thomas-Fermi (paragraphe 1.2.7). Ce régime correspond en effet aux conditions usuelles de piégeage d'un échantillon froid dans un système de type "pince optique", envisagé pour la réalisation expérimentale de notre proposition. Nous supposons que cette première chute libre dilue suffisamment le nuage pour que la propagation $ABCD$ lui soit applicable ensuite. Il s'agit donc de déterminer l'état quantique du nuage $|\Psi(t_1)\rangle$ à l'issue de cette phase d'expansion, tenant lieu de condition initiale à la propagation $ABCD$ (formalisme "optique") des cycles suivants²⁵.

Dans le régime de Thomas-Fermi, l'évolution de la fonction d'onde atomique est déterminée en considérant l'ansatz (1.75) dont les paramètres d'échelle vérifient le système différentiel (1.77). Avant la coupure du piège, le nuage atomique évolue selon le Hamiltonien :

$$H = \frac{p^2}{2m} + H_G + H_P + H_{int}$$

L'expansion du nuage en chute libre immédiatement après coupure du piège est étudiée dans le référentiel accéléré associé à la transformation unitaire :

$$|\Psi(t)\rangle = U_g(t, t_u)|\Phi(t)\rangle$$

25. Si nous avons traité le problème de façon plus formelle, nous aurions pu tout aussi bien considérer directement un nuage atomique dilué dans l'espace libre. Néanmoins, il m'a semblé pertinent de traiter cette première phase d'expansion pour faire le lien avec une réalisation expérimentale dans laquelle un échantillon serait lâché à partir d'une pince optique.

$U_g(t, t_u)$ est simplement l'opérateur d'évolution associé à un champ gravitationnel quadratique entre l'instant t_u (arbitraire) et l'instant t . Le ket $|\Phi(t)\rangle$ évolue alors selon le Hamiltonien réduit $H_{TFE} = p^2/2m + H_P + H_{int}$. La forme de ce Hamiltonien permet alors d'appliquer les résultats sur l'approximation de Thomas-Fermi dépendant du temps et de prédire l'évolution de la fonction $\Phi(t)$, qui suit alors les lois d'échelle (1.77) exposées au chapitre précédent.

Pour notre analyse, il n'est en fait pas utile d'explicitier la fonction d'onde à l'issue de l'expansion. L'objet de ce paragraphe est simplement de montrer une méthode de raccordement entre l'évolution du nuage dans un piège et la propagation $ABCD$. L'expansion de Thomas-Fermi est donc simplement représentée de façon formelle, dans le référentiel accéléré, par l'opérateur unitaire U_{TFE} :

$$|\Phi(t)\rangle = U_{TFE}(t, t_0)|\Phi(t_0)\rangle \quad (2.19)$$

En repassant dans le référentiel du laboratoire à l'instant t_1 (immédiatement avant la première "impulsion-miroir") :

$$|\Psi(t_1)\rangle = U_G(t_1, t_u)U_{TFE}(t_1, t_0)U_G(t_u, t_0)|\Psi(t_0)\rangle \quad (2.20)$$

La fonction d'onde associée au ket $|\Psi(t_1)\rangle$ peut alors être projetée sur une base de fonctions de Hermite-Gauss. Rappelons que l'évolution de cette base peut être déduite de la propagation d'une fonction génératrice gaussienne, dont nous décrivons à présent la propagation $ABCD$.

2.4.2 Evolution du nuage atomique durant un cycle.

Nous déterminons ici l'évolution au cours d'un cycle (correspondant à un rebond suivi d'une phase de chute libre) des positions, des impulsions centrales, et des matrices de largeur associées à une fonction d'onde macroscopique gaussienne modélisant le nuage²⁶.

Nous supposons le spineur atomique décrit, immédiatement avant la n -ème "impulsion miroir", par une onde gaussienne dans l'état interne fondamental²⁷ :

$$|\Psi(t_n^-)\rangle = |a, \Psi_{\mathbf{r}_n, \mathbf{p}_n, X_n, Y_n}\rangle \quad (2.21)$$

Nous désignons par t_i^\pm l'instant immédiatement après ou avant l'interaction instantanée. Notre objectif est de calculer le spineur atomique à l'entrée du cycle suivant, c'est à dire $|\Psi(t_{n+1}^-)\rangle$. Nous

26. La connaissance de la phase n'est pas requise pour l'analyse du dispositif dans l'hypothèse où un seul paquet d'ondes atomique est présent. Dans le second dispositif, nous considérerons une multiplicité de paquets.

27. Cette hypothèse sera justifiée à posteriori.

procédons en deux étapes : nous commençons par déterminer le spineur immédiatement après l'action instantanée effective (c'est-à-dire $|\Psi(t_n^+)\rangle$), puis nous calculons son évolution unitaire jusqu'à la prochaine "impulsion-miroir" pour obtenir $|\Psi(t_{n+1}^-)\rangle$ ²⁸.

2.4.2.1 Evolution du spineur atomique lors d'une "impulsion-miroir" plane.

Les miroirs lumineux considérés ici impliquent uniquement des ondes planes. Pour les ondes planes considérées, la phase de courbure $f_{\alpha\beta}$ est donc nulle. Cette démarche nous permettra de mettre en évidence, lors de l'analyse de stabilité, la nécessité d'un mécanisme de refocalisation. L'action d'un miroir lumineux courbé sur une onde atomique sera développée au chapitre 5.

Chaque "impulsion-miroir" fait intervenir deux impulsions Raman successives, la matrice de diffusion correspondante $\hat{S}_M(t_i)$ est donc le produit de deux matrices de diffusion non-dispersives notées $\hat{S}(\mathbf{k})$ ²⁹. Comme précédemment, nous écartons les atomes ayant manqué un ou plusieurs quanta de quantité de mouvement, qui sont supposés en dessous de la zone de détection. Tout se passe donc comme si ces atomes étaient éjectés du piège, ou encore comme si l'on effectuait à l'issue de chaque impulsion Raman une mesure virtuelle écartant les atomes n'ayant pas changé d'état interne. Cette opération correspond à une mesure projective du type "Von Neumann". Elle se traduit mathématiquement par la projection orthogonale de l'état quantique du nuage après chaque impulsion Raman sur l'état interne attendu à l'issue d'une impulsion π :

$$|\Psi(t_n^+)\rangle = P_{|a\rangle} \hat{S}(-\mathbf{k}) P_{|b\rangle} \hat{S}(\mathbf{k}) |a, \Psi_{\mathbf{r}_n, \mathbf{p}_n, X_n, Y_n}\rangle \quad (2.23)$$

Cette projection fait que la norme de l'état quantique associé au mode diminue au cours du temps, reflétant ainsi la déperdition d'atomes du nuage en lévitation. On obtient ainsi le spineur effectif $|\Psi(t_n^+)\rangle$:

$$|\Psi(t_n^+)\rangle = \rho_\infty(\hat{\mathbf{r}}) |a, \Psi_{\mathbf{r}_n, \mathbf{p}_n + 2\hbar\mathbf{k}, X_n, Y_n}\rangle \quad \text{avec} \quad \rho_\infty(\mathbf{r}) = \hat{S}_{ab}(-\mathbf{k}) \hat{S}_{ba}(\mathbf{k}) = \text{sinc}^2\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 + y(p_n)^2}\right) \quad (2.24)$$

avec le "sinus cardinal" $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. Le facteur $\rho_\infty(\mathbf{r})$ reflète la proportion d'atomes conservés dans le nuage en lévitation. La matrice de diffusion associée au miroir plan $\hat{S}_{M\infty}(t_i)$ découle facilement

28. Remarquons que le caractère "instantané" a trait à notre modélisation, et pas à l'impulsion lumineuse réelle. Avec nos conventions, immédiatement après l'impulsion lumineuse de durée totale τ , le spineur atomique s'écrit :

$$|\Psi(t_n + \tau/2)\rangle = U_{ext}(t_n + \frac{\tau}{2}, t_n) \hat{S}_M(t_n) |\Psi(t_n^-)\rangle \quad (2.22)$$

29. Il s'agit de la matrice de diffusion non-dispersive donnée par les équations (2.17), (2.18) et évaluée avec $\theta = \pi$.

des expressions précédentes :

$$\hat{S}_{M\infty}(t_i) = P_{|a\rangle} \rho_\infty(\hat{\mathbf{r}}) P_{|a\rangle} \quad (2.25)$$

Ceci justifie à posteriori (ou par récurrence sur n) l'hypothèse de départ d'un spineur atomique comportant uniquement une composante fondamentale.

2.4.2.2 Evolution du spineur atomique entre deux interactions instantanées.

Il s'agit ici de calculer l'action de l'opérateur d'évolution externe $U_1(t_{n+1}, t_n)$ associé au Hamiltonien quadratique (2.15). Grâce au théorème $ABCD$, la propagation du spineur atomique est essentiellement ramenée à la résolution du système différentiel (1.61) portant sur les matrices $ABCD$, et à l'évaluation de l'action $S_{cl}(t_{n+1}, t_n)$ le long de la trajectoire classique :

$$U_1(t_{n+1}, t_n)|a, \Psi_{\mathbf{r}_n, \mathbf{p}_n, X_n, Y_n}\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(t_{n+1}, t_n)\hbar} |a, \Psi_{\mathbf{r}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1}, X_{n+1}, Y_{n+1}}\rangle \quad (2.26)$$

Dans notre approche impliquant un unique paquet d'ondes, la phase d'action n'intervient pas, et nous traitons donc uniquement l'évolution des positions, impulsions centrales et largeurs gaussiennes $\mathbf{r}_n, \mathbf{p}_n, X_n, Y_n$. Il suffit pour cela de déterminer les matrices $ABCD$ et le vecteur (ξ, ϕ) associés à une évolution sous le l'Hamiltonien (2.15). Dans un champ de gravité constant, le calcul du vecteur (ξ, ϕ) donné par (1.62) est trivial :

$$\begin{pmatrix} \xi(t_{n+1}, t_n) \\ \phi(t_{n+1}, t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \vec{g}(t_{n+1} - t_n)^2 \\ \vec{g}(t_{n+1} - t_n) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

La détermination de la matrice $ABCD$ est, par contre, plus complexe, notamment du fait de la dépendance temporelle du terme de lentille divergente $\gamma(t)$ modélisant les interactions. Nous laissons de côté pour l'instant ce problème, qui fera l'objet d'un traitement spécifique au chapitre 7, et nous oublions pour l'instant la dépendance temporelle de ce coefficient remplacé par sa valeur moyenne³⁰. En considérant l'exponentielle matricielle (1.61), on obtient l'expression suivante de la matrice $ABCD$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} A(t_{n+1}, t_n) & B(t_{n+1}, t_n) \\ C(t_{n+1}, t_n) & D(t_{n+1}, t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh[\sqrt{\gamma}(t_{n+1} - t_n)] & \gamma^{-1/2} \sinh[\sqrt{\gamma}(t_{n+1} - t_n)] \\ \gamma^{1/2} \sinh[\sqrt{\gamma}(t_{n+1} - t_n)] & \cosh[\sqrt{\gamma}(t_{n+1} - t_n)] \end{pmatrix}} \quad (2.28)$$

30. Au premier ordre d'un développement de Magnus, c'est effectivement la valeur moyenne de γ qui intervient.

Les fonctions hyperboliques de la matrice γ sont définies comme suit :

$$\cosh(\sqrt{\gamma}(t-t_0)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i)!} \gamma^i (t-t_0)^{2i} \quad \gamma^{\pm 1/2} \sinh(\sqrt{\gamma}(t-t_0)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i+1)!} \gamma^{i\pm 1} (t-t_0)^{2i+1\pm 1} \quad (2.29)$$

Avec l'approche de Hamiltonien indépendant du temps, les coefficients de la matrice de transfert $ABCD$ ne dépendent que de la durée $T = t_{i+1} - t_i$ entre les interactions instantanées³¹. En conclusion, nous obtenons le jeu de relations suivant pour les positions, impulsions centrales et largeurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n+1} \\ \mathbf{Y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh[\sqrt{\gamma}T] & \gamma^{-1/2} \sinh[\sqrt{\gamma}T] \\ \gamma^{1/2} \sinh[\sqrt{\gamma}T] & \cosh[\sqrt{\gamma}T] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n \\ \mathbf{Y}_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{n+1} \\ \mathbf{p}_{n+1}/m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh[\sqrt{\gamma}T] & \gamma^{-1/2} \sinh[\sqrt{\gamma}T] \\ \gamma^{1/2} \sinh[\sqrt{\gamma}T] & \cosh[\sqrt{\gamma}T] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_n \\ \mathbf{p}_n/m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \vec{g}(t_{n+1} - t_n)^2 \\ \vec{g}(t_{n+1} - t_n) \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (2.30)$$

2.4.3 Matrice des variances.

Il est utile, à ce stade de la discussion, de préciser le lien qui existe entre les matrices X, Y paramétrant la fonction d'onde gaussienne décrivant l'échantillon, et les largeurs spatiales du nuage considéré. D'après la forme du paquet d'ondes (2.16), la largeur du nuage est déterminée par les trois valeurs propres de la matrice $\text{Im}(YX^{-1})$:

$$\Delta\eta = \sqrt{\frac{\hbar}{m\lambda_\eta}} \quad \lambda_\eta \in \text{Sp} [\text{Im}(YX^{-1})], \quad \eta = x, y, z$$

Rappelons que les matrices X_0, Y_0 décrivent respectivement les dispersions initiales en position et en impulsion. Le lien entre les puissances de la matrice $ABCD$ et la stabilité des dimensions transverses du nuage n'apparaît pas directement : même si les puissances n -ème de cette matrice restent finies lorsque $n \rightarrow \infty$, ce qui garantit que la suite de matrices (Y_n, X_n) est bornée, cette condition n'interdit pas a priori l'annulation d'une valeur propre de la matrice YX^{-1} qui donnerait lieu à une divergence sur la taille du nuage dans une direction. En fait, le lien entre puissance des matrices $ABCD$ et taille du nuage apparaît lorsque l'on considère une matrice des variances caractérisant les moments d'ordre deux en position et en impulsion du paquet d'ondes [10] :

$$V := \begin{pmatrix} \Delta_{rr} & \Delta_{rv} \\ \Delta_{vr} & \Delta_{vv} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

31. Cette invariance par translation temporelle n'est en fait qu'une approximation : un traitement plus exact impliquerait de recalculer après chaque rebond la matrice γ rendant compte des interactions.

Les sous matrices $\Delta_{rr}, \Delta_{rv}, \Delta_{vr}, \Delta_{vv}$ s'expriment :

$$\begin{aligned}\Delta_{rr} &= \langle \vec{r}^t \vec{r} \rangle - \langle \vec{r} \rangle^t \langle \vec{r} \rangle \\ m\Delta_{rv} &= \langle \vec{r}^t \vec{p} \rangle - \langle \vec{r} \rangle^t \langle \vec{p} \rangle \\ m\Delta_{vr} &= \langle \vec{p}^t \vec{r} \rangle - \langle \vec{p} \rangle^t \langle \vec{r} \rangle \\ m^2\Delta_{vv} &= \langle \vec{p}^t \vec{p} \rangle - \langle \vec{p} \rangle^t \langle \vec{p} \rangle\end{aligned}\quad (2.32)$$

L'équation d'évolution de cette matrice découle des equations de Heisenberg (1.58) pour les opérateurs $\hat{\mathbf{r}}(t)$ et $\hat{\mathbf{p}}(t)$ déjà évoquées au chapitre précédent. En présence d'un Hamiltonien quadratique (2.15), ces équations sont simples. Elle donnent lieu à une équation du mouvement pour la matrice des variances :

$$\frac{dV}{dt} = \Gamma V + V \Gamma \quad (2.33)$$

où la matrice $\Gamma(t)$ est définie comme :

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \alpha(t) \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

L'intégration formelle de ce type d'équation fait intervenir des exponentielles de matrice. La solution générale s'écrit :

$$V(t) = T \left(e^{\int_{t_0}^t dt' \Gamma(t')} \right) V(t_0) T^t \left(e^{\int_{t_0}^t dt' \Gamma(t')} \right) \quad (2.35)$$

On reconnaît ici l'expression des matrices $ABCD$ donnée au chapitre précédent, si bien que :

$$V(t) = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} V(t_0)^t \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

En notant M_k la matrice $ABCD$ associée au k -ème cycle :

$$M_k = \begin{pmatrix} A(t_{k+1}, t_k) & B(t_{k+1}, t_k) \\ C(t_{k+1}, t_k) & D(t_{k+1}, t_k) \end{pmatrix}$$

on peut exprimer la matrice des variances après n cycles comme un produit de matrices $ABCD$:

$$\boxed{V(t) = M_n M_{n-1} \dots M_2 M_1 V(t_0)^t M_1^t M_2^t \dots M_{n-1}^t M_n^t} \quad (2.37)$$

2.4.4 Stabilité transverse du résonateur.

L'objectif de cette section est d'obtenir une condition, portant sur le miroir lumineux, de stabilisation transverse du résonateur à ondes de matière (maintien d'une extension transverse de nuage finie pour un nombre arbitrairement grand de cycles). Le diamètre du nuage devrait idéalement rester bien inférieur à celui du faisceau laser afin que les atomes soient illuminés par une intensité lumineuse uniforme et puissent être réfléchis avec une grande probabilité. Le résonateur atomique est étudié au moyen d'un formalisme linéaire d'entrée-sortie complètement analogue à celui utilisé pour caractériser les résonateurs optiques : la condition de stabilité est discutée en termes de puissance de matrices $ABCD$. Nous réservons à un chapitre ultérieur la description de miroirs atomiques lumineux courbés permettant d'obtenir la focalisation requise.

2.4.4.1 Expansion du nuage en l'absence de refocalisation.

Le nuage atomique garde une taille finie au cours des rebonds successifs si et seulement si la sous-matrice Δ_{rr} reste bornée lorsque $n \rightarrow \infty$. Le caractère périodique de la séquence d'impulsion lumineuse fait que les matrices $ABCD$ associées à chaque cycle sont identiques³². Lors d'une "impulsion-miroir" faisant intervenir uniquement des ondes planes, l'uniformité du facteur $\rho_\infty(\mathbf{r}) = \rho_0$ implique que les "impulsions-miroir" ne modifient pas les paramètres X, Y du faisceau atomique. Les miroirs lumineux sont donc des miroirs-plan. La matrice $ABCD$ décrivant un cycle s'exprime :

$$M_\infty = \begin{pmatrix} \cosh[\sqrt{\gamma}T] & \gamma^{-1/2} \sinh[\sqrt{\gamma}T] \\ \gamma^{1/2} \sinh[\sqrt{\gamma}T] & \cosh[\sqrt{\gamma}T] \end{pmatrix}$$

Nous montrons ici que, en l'absence de mécanisme de refocalisation, l'expansion libre du nuage suffit à faire diverger la taille de l'échantillon. La vitesse d'expansion est encore renforcée par la présence d'interactions atomiques répulsives qui interviennent par le biais de la matrice γ (définie positive).

On peut voir la manifestation de cette divergence en étudiant les puissances de la matrice M traduisant la propagation $ABCD$ du nuage durant un cycle. Supposons que cette matrice soit diagonalisable³³. La matrice M apparaît alors comme un produit tensoriel de matrices 2×2 associées à chaque direction de l'espace :

$$M_\infty = M_x \otimes M_y \otimes M_z$$

Les puissances n -ème d'une matrice restent finies lorsque $n \rightarrow \infty$ si et seulement si ses valeurs propres ont un module inférieur ou égal à l'unité. Cette condition sur M peut-être reportée directement sur

32. Dans une approche simplifiée des interactions utilisant un terme de lentille divergente constant.

33. Ce qui sera vérifié par une étude de la matrice γ ultérieure.

les matrices 2×2 entrant dans le produit tensoriel. Chacune de ces matrices 2×2 est unitaire, et comporte donc deux valeurs propres λ_1, λ_2 telles que :

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1 \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(M_{x,y,z}) \quad (2.38)$$

Considérons sans perte de généralité la direction O_x . On pose $\lambda_1 = e^{iu_x}$ et $\lambda_2 = e^{-iu_x}$ avec $u_x \in \mathbb{C}$. Les puissances de M_x ne restent finies que si ses deux valeurs propres ont un module égal à un, c'est à dire si u_x est un réel. Le nombre u_x peut être déterminé³⁴ en considérant la trace de la matrice M_x :

$$2 \cos u_x = M_{x1,1} + M_{x2,2}$$

Dans le cas étudié d'une propagation en présence d'interactions atomiques répulsives, on obtient :

$$\cos u_x = \cosh(\gamma_x T) > 1 \quad \text{avec} \quad \gamma_x > 0$$

Nécessairement $u_x \notin \mathbb{R}$, et l'une des deux valeurs propres a donc un module strictement supérieur à un. La matrice des variances spatiales Δ_{rr} , sous-matrice de V , est donc également susceptible de diverger.

Même si le nuage atomique était infiniment dilué, la réflexion par des ondes planes serait donc incompatible avec un confinement transverse. La matrice M associée à une propagation libre s'écrit simplement :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Le calcul des puissances de cette matrice est immédiat :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & nT \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

On observe donc encore une divergence dans la matrice des variances Δ_{rr} . Remarquons que la discussion précédente sur les valeurs propres n'est pas transposable puisque cette matrice est non-diagonalisable. On tire de la discussion qui précède la conclusion suivante, assez évidente et en tout cas conforme à notre intuition sur l'évolution libre d'un nuage atomique :

En présence d'interactions atomiques répulsives, ou même en l'absence de telles interactions, la réflexion du nuage atomique par des "impulsions-miroirs" planes donne lieu à

34. Au signe près puisqu'on n'a pas lesquelles des deux valeurs propres de la matrice correspondait à λ_1 .

une taille transverse infinie après un nombre arbitrairement grand de rebonds.

2.4.4.2 Définition d'une lentille en optique atomique.

Nous apportons maintenant une définition précise d'une lentille atomique.

Il existe en optique photonique un formalisme matriciel $ABCD$ qui représente l'action des systèmes optiques par des opérations matricielles sur des paramètres attachés aux rayons lumineux traversant ces systèmes. Plus précisément, la matrice $ABCD$ d'un système optique établit une correspondance linéaire entre la position transverse et la direction d'un rayon lumineux sortant d'un système optique avec sa position et sa direction en entrée. Une lentille mince de distance focale f se traduit ainsi par l'action matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{out} \\ \mathbf{s}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{in} \\ \mathbf{s}_{in} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

où les vecteurs $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$ représentent respectivement la position et la direction du rayon lumineux dans le plan transverse à la propagation.

Il y a une analogie très forte entre le formalisme $ABCD$ optique et la propagation $ABCD$ des ondes de matière en optique atomique, ce qui motive la définition suivante :

Lentille atomique : On appelle lentille atomique tout système induisant sur la propagation d'une onde de matière gaussienne la relation d'entrée-sortie entre les matrices de largeur \mathbf{X}, \mathbf{Y} :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{out} \\ \mathbf{Y}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{in} \\ \mathbf{Y}_{in} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

où la matrice F est diagonalisable, avec des valeurs propres réelles considérées comme des "temps de focalisation"³⁵, les vecteurs propres étant considérés comme les axes principaux du système optique correspondant.

Nous supposons donc que l'interaction instantanée effective modifie les paramètres du faisceau atomique par l'intermédiaire d'une matrice $ABCD$ de type (2.42). Soulignons qu'il n'est en fait

³⁵. En optique on considère traditionnellement des distances focales, qui sont reliées de façon univoque à un temps focal dans l'approximation paraxiale. Les paramètres suivant la loi ABCD n'ont pas les mêmes dimensions qu'en optique, d'où la différence constatée sur la dimension de F . Les temps de focalisation peuvent être éventuellement négatifs dans le cas d'une lentille atomique divergente. Par abus de langage nous parlerons parfois de "distances focales" pour les valeurs propres de F même si il s'agit ici de temps.

nécessaire de confiner l'échantillon que selon les dimensions horizontales, puisque l'expansion verticale du nuage ne risque pas de le faire sortir des faisceaux laser verticaux. Nous supposons donc que l'interaction instantanée effective, modélisant l'impulsion lumineuse, transforme les paramètres X_0, Y_0 en des paramètres X_1, Y_1 suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{Y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -C_\perp & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{Y}_0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

La matrice de courbure C_\perp a des éléments non nuls uniquement dans les dimensions transverses x, y :

$$C_\perp = \begin{pmatrix} 1/f_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/f_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.4.3 Focalisation nécessaire à la stabilisation du nuage.

Calculons maintenant la matrice $ABCD$ établissant la correspondance entre X_n, Y_n et X_{n+1}, Y_{n+1} en présence d'"impulsions-miroir" refocalisantes. Cette matrice est obtenue par le produit de la matrice "lentille" (2.43) avec la matrice $ABCD$ (2.28) traduisant l'évolution libre du nuage entre les miroirs lumineux :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{n+1} \\ \mathbf{Y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh[\sqrt{\gamma}T] - C_\perp \gamma^{-1/2} \sinh[\sqrt{\gamma}T] & \gamma^{-1/2} \sinh[\sqrt{\gamma}T] \\ \gamma^{1/2} \sinh[\sqrt{\gamma}T] - C_\perp \cosh[\sqrt{\gamma}T] & \cosh[\sqrt{\gamma}T] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_n \\ \mathbf{Y}_n \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Cette matrice reste un produit tensoriel $M_f = M_{f_x} \otimes M_{f_y} \otimes M_z$ de matrices 2×2 associées à chaque direction de l'espace, car on fait coïncider les axes principaux du miroir lumineux (vecteurs propres de C_\perp) avec les directions O_x, O_y ³⁶. La relation (2.37) donnant la matrice des variances après plusieurs cycles, et la décomposition en produit tensoriel, montrent que l'évolution des variances selon chaque direction est indépendante. Afin de maintenir des dimensions transverses finies, il suffit donc que les matrices 2×2 M_{f_x} et M_{f_y} vérifient la condition sur les valeurs propres $|\text{Tr}(M_{x,y})| \leq 1$. Cette condition s'exprime pour la distance focale f_x :

$$\left| \cosh[\sqrt{\gamma_{xx}}T] - \frac{1}{2f_x} \sinh[\sqrt{\gamma_{xx}}T] \right| < 1 \quad (2.45)$$

Naturellement, une condition identique est obtenue pour la distance focale f_y . Comme nous l'établirons au chapitre 5, la distance focale de la lentille atomique réalisée par des ondes sphériques est

³⁶. On suppose initialement que ces directions diagonalisent la matrice de largeurs du paquet d'ondes gaussien et donc celle du terme γ associé au champ moyen (et au gradient de gravité), voir chapitre 7.

contrôlée par la distance entre le centre du nuage et le col du faisceau laser. Les coefficients de la matrice γ dépendent directement de la densité du nuage atomique et disparaissent dans la limite de dilution. Pour une distance focale donnée, il est donc possible d’assurer la validité de la condition (2.45) en concédant suffisamment d’espace à l’échantillon.

2.4.5 Conclusion.

L’analyse quantique multidimensionnelle du résonateur nous a permis de déterminer le mouvement transverse du nuage atomique. Cette analyse montre en particulier que le système proposé est compatible avec le maintien du nuage en lévitation pendant une durée longue si les impulsions lumineuses réalisent un miroir de courbure suffisamment forte pour contrer l’effet de lentille divergente des interactions atomiques. Nous avons obtenu la condition de stabilité (2.45), qui établit la focalisation requise en fonction de la force des interactions atomiques. Si cette condition de stabilité est vérifiée, si le diamètre du nuage est bien inférieur à celui du faisceau, et si les paramètres $(\omega_{12}, \omega_{34}, T)$ du résonateur sont proches de leurs valeurs optimales, il est possible de maintenir le nuage en vol pendant un grand nombre de rebonds.

2.5 Conclusion.

Nous avons présenté, dans ce chapitre, un dispositif métrologique fondé sur la lévitation d’un nuage d’atomes froids par des miroirs lumineux intermittents. Nous en avons exposé le principe et effectué une analyse de performances semi-classique. Nous avons ensuite dégagé une modélisation faisant appel aux outils de l’optique atomique, en particulier à la propagation $ABCD$ et aux matrices de diffusion instantanée. Cette modélisation a été appliquée au système pour discuter la stabilité des degrés de liberté transverses du nuage lors de l’évolution sur la série d’“impulsions-miroir”. En traitant les interactions par un terme de lentille divergente³⁷, nous avons obtenu une condition de stabilité portant sur la courbure des miroirs lumineux et dont la réalisation sera abordée au chapitre 5.

Ce système présente de nombreuses analogies avec un résonateur à ondes de matière : le champ électromagnétique assure le confinement du nuage atomique grâce à une série de filtres impulsionsnels. Ce dispositif présente une originalité double par rapport aux systèmes métrologiques usuels. D’un point de vue pratique, il a la particularité de faire coïncider le système de piégeage avec celui d’interrogation : les “impulsions-miroir” constituant le piège jouent également le rôle de sonde de vitesse des atomes permettant la mesure d’accélération. D’un point de vue théorique, le recours à l’espace

³⁷. approche que nous développerons au chapitre 7

des impulsions au lieu de celui des positions pour piéger l'échantillon constitue un élément original.

Senseur à atomes en lévitation : Contexte Experimental, Aspects fondamentaux.

L'objet de ce chapitre est de gagner en profondeur dans l'analyse de la proposition expérimentale précédente, en répondant à un double objectif : situer cette proposition par rapport à l'état de l'art des gravimètres atomiques, et montrer qu'elle soulève des questions théoriques fondamentales.

Le premier volet de ce chapitre permet de cerner l'originalité et les potentialités du senseur inertielle proposé. Nous montrons d'une part comment notre proposition se différencie des dispositifs existants, d'autre part nous identifions parmi les limitations actuelles à la mesure gravimétrique celles que notre système permet de contourner. Nous allons en fait comparer notre expérience aux gravimètres fondés sur l'interférométrie atomique en chute libre [80] (également développé au laboratoire SYRTE de l'Observatoire de Paris [72]) et sur les oscillations de Bloch d'un nuage d'atomes froids [79] (système réalisé au LKB-Jussieu).

Pour placer la discussion de l'expérience proposée dans un cadre théorique intéressant, nous allons en pousser l'analyse jusqu'à obtenir une confrontation avec des principes physiques fondamentaux. Il s'avère que le dispositif présenté met justement en lumière un tel paradoxe : sa sensibilité à l'accélération gravitationnelle est apparemment contradictoire avec les principes de l'interférométrie atomique [64]. La résolution de cette contradiction permet non seulement de comprendre à un niveau plus fondamental la capacité de mesure de notre système, mais inspire aussi directement la conception d'un nouveau système expérimental dont l'analyse sera l'objet du prochain chapitre.

3.1 Comparaison de l'expérience proposée à d'autres dispositifs gravimétriques.

Nous exposons ici les deux gravimètres à atomes froids annoncés en introduction. Les descriptions de ces expériences répondent à des motivations différentes. Le gravimètre à interférométrie atomique

en chute libre développé à l'université de Stanford et à l'Observatoire de Paris est à l'heure actuelle l'accéléromètre à atomes froids le plus performant. Ce dispositif est donc un étalon de performance naturel au regard duquel nous évaluons la pertinence de notre proposition. Le second gravimètre exposé, bien que fondé sur une méthode de mesure prometteuse, n'est pas actuellement au même niveau de précision. Si nous exposons le principe de cette expérience, c'est essentiellement pour montrer en quoi notre projet expérimental s'en démarque : bien que les deux systèmes soient apparemment presque identiques, il existe néanmoins entre eux des différences profondes tant sur le plan du mode de fonctionnement (conditions de stabilisation du nuage, sensibilité de la mesure à la dispersion en vitesse) que sur le plan théorique (mode de confinement envisagé), qu'il nous a semblé pertinent de souligner dans ce manuscrit.

3.1.1 Gravimètre à interférométrie atomique.

Ce dispositif expérimental a d'abord été réalisé par Achim Peters *et al.* [80].

3.1.1.1 Principes fondamentaux.

Il est fondé sur une idée fondamentale en interférométrie atomique [64] : l'interaction lumière-matière corrèle l'acquisition d'une quantité de mouvement de recul pour les atomes à un changement d'état interne. Cette corrélation est parfaite, c'est-à-dire qu'un atome reçoit un quantum d'impulsion $\hbar\mathbf{k}_e$ de la part du champ lumineux si et seulement si il change d'état interne. Grâce à cette intrication entre degrés de libertés internes et externes, Christian Bordé a montré qu'il était possible d'utiliser un interféromètre -formé de deux couples d'impulsions $\pi/2$ - pour sonder le mouvement externe des atomes [64]. La phase de De Broglie résultant du transfert d'impulsion se manifeste alors comme un décalage en fréquence sur les franges de Ramsey. Ces systèmes, intriquant les degrés de liberté internes et externes du champ atomique, sont usuellement désignés comme interféromètres de Bordé-Ramsey.

A chaque instant, deux paquets d'ondes associés à des états internes distincts circulent dans l'interféromètre. La phase résultant du mouvement externe est différente pour chaque bras. Le point-clé est que ce déphasage, exprimé comme la circulation du Hamiltonien le long des trajectoires centrales associées à chaque bras :

$$\Phi = \frac{1}{\hbar} \left(\int_{t_0}^{t_f} dt' H_e(t') - \int_{t_0}^{t_f} dt' H_e(t') \right) \quad (3.1)$$

3.1 Comparaison de l'expérience proposée à d'autres dispositifs gravimétriques 109

contient en particulier un terme d'accélération et un terme de rotation provenant du Hamiltonien :

$$H_e = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - m\mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{r} - \boldsymbol{\Omega}(t) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \quad (3.2)$$

Le décalage en fréquence observé dans les franges d'interférences dépend donc des grandeurs $\mathbf{g}(t)$, $\boldsymbol{\Omega}(t)$. Ce sont les termes associés du Hamiltonien qui donnent la sensibilité du dispositif aux effets inertiels.

Afin d'observer des interférences, il est nécessaire d'assurer un recouvrement des paquets d'ondes atomiques en sortie de l'interféromètre. Ceci implique de fermer les trajectoires centrales qui leur sont associées : à l'instant final t_f considéré pour la mesure, la distance entre les positions centrales des paquets d'ondes doit être inférieure à leur longueur de cohérence. Cette condition de fermeture fait que le déphasage (3.1) peut être exprimé comme une intégrale de contour dans un espace à quatre dimensions :

$$\Delta\Phi_{ext.} \propto \oint_C d^4\mathbf{l} [m\mathbf{g}(t') \cdot \mathbf{r} + [\boldsymbol{\Omega}(t') \times \mathbf{r}] \cdot \mathbf{p}(t')] \quad (3.3)$$

Les coordonnées intervenant dans l'intégrale de contour pour une transformation donnée (rotation ou accélération) sont celles qui interviennent dans la transformation de Lorentz associée. Le déphasage lié à une accélération ("boost" de Lorentz) selon la direction O_z fait ainsi intervenir une intégrale de contour dans les coordonnées (z, t) . Le déphasage lié à une rotation selon O_z fait intervenir une intégrale de contour dans les coordonnées (x, y) . Grâce au théorème de Green (appliqué dans l'espace-temps à quatre dimensions), ces intégrales de contour peuvent être écrites en termes d'intégrales de flux au travers de la surface encerclée par le contour, dont l'aire est appelée "aire interférométrique". Aux six générateurs des transformations de Lorentz paramétrés par $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, a_x, a_y, a_z$, on peut ainsi associer une aire interférométrique dans les sous-espaces de dimension 2 de \mathbb{R}^4 engendrés respectivement par $(y, z), (x, z), (x, y), (x, t), (y, t), (z, t)$.

Il est souhaitable de découpler la composante du déphasage dépendant de l'accélération de celle dépendant des rotations¹. Afin d'utiliser l'interféromètre en mode "accéléromètre", il est commode d'annuler la sensibilité rotationnelle en assurant le recouvrement des trajectoires spatiales. Les intégrales de contour associées aux rotations sont alors nulles. Seules demeurent les intégrales de contour spatio-temporelles associées aux accélérations.

C'est la stratégie suivie pour le gravimètre atomique développé à l'Observatoire de Paris. Les atomes ont une vitesse verticale et le recouvrement des trajectoires est assuré. Idéalement, seule

1. Un renversement de la vitesse des atomes peut permettre d'effectuer cette décomposition quand les deux termes interviennent simultanément, voir [81].

demeure l'aire interférométrique dans les coordonnées (z, t) . Notons cependant qu'il est difficile de contrôler exactement la vitesse horizontale des atomes, la composante résiduelle générant une incertitude estimée à 10^{-9} [80]. Cet effet Sagnac (ou terme de Coriolis) résiduel ne constitue toutefois pas à l'heure actuelle un facteur limitant la résolution des instruments.

3.1.1.2 Description de l'expérience.

On utilise une séquence d'impulsions lumineuses de type $\pi/2 - \pi - \pi/2$. Ces impulsions lumineuses impliquent un processus Raman et sont associées à un même vecteur d'onde effectif \mathbf{k}_e . L'aire interférométrique associée à cette séquence est représentée sur la Fig. 3.1. Comme nous venons de le

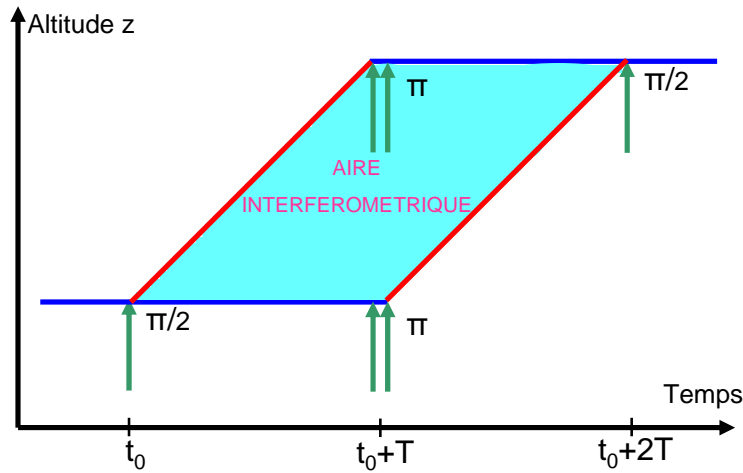


FIGURE 3.1 – Interféromètre en configuration d'impulsion $\pi/2 - \pi - \pi/2$, représenté dans le référentiel en chute libre. Les lignes rouges et bleues correspondent respectivement à des paquets d'ondes dans l'état fondamental et dans l'état excité. L'aire interférométrique (dans le plan $O_z O_t$) est inscrite dans le contour C .

mentionner, le mouvement purement vertical des atomes (aux imperfections près liées à un défaut d'alignement des lasers ou à une vitesse horizontale résiduelle) assure le recouvrement des trajectoires et l'invariance du déphasage par rapport au rotations. Seul reste le déphasage gravitationnel, proportionnel à l'accélération de la gravité, au vecteur d'onde effectif et au carré du temps d'interrogation des atomes [82, 36] :

$$|\Delta\Phi_g| = k_e g T^2 \tag{3.4}$$

En sortie de l'interféromètre, la population atomique dans l'état fondamental dépend à la fois de la phase imprimée par les lasers Φ_l et d'un déphasage entre les deux bras Φ_i , qui dépend directement

3.1 Comparaison de l'expérience proposée à d'autres dispositifs gravimétriques¹¹¹

de l'accélération gravitationnelle :

$$N = \frac{N_0}{2} \left[1 - \cos(\Phi_l - \Phi_i) \right] \quad (3.5)$$

C'est donc sur la comparaison entre une phase laser connue précisément et le déphasage gravitationnel que repose la mesure d'accélération. La sensibilité du dispositif est déterminée par la dépendance de la population N vis-à-vis d'une variation infinitésimale d'un des termes de phase ϕ_l, ϕ_i , qui peut être quantifiée au moyen d'une fonction de sensibilité [73]. Afin de maximiser la variation relative de la population, on se place "à flanc de frange", c'est à dire qu'on ajuste le déphasage des lasers pour que le déphasage soit égal à $\phi_l - \phi_i = \pm\pi/2$.

Les trois impulsions lumineuses intervenant à des instants différents, elle s'applique également sur un nuage ayant des vitesses différentes. Il est nécessaire d'ajuster les fréquences de chaque impulsion pour remplir les conditions de Bragg correspondantes. Ceci peut-être réalisé au moyen d'une rampe de fréquence de pente :

$$\alpha = \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{g} \quad (3.6)$$

La phase imprimée par les lasers est alors principalement contrôlée au moyen de la pente de la rampe α . On peut alors mesurer g en déterminant expérimentalement la pente de la rampe de fréquence permettant le maintien "à flanc de frange".

3.1.1.3 Limitations de ce dispositif.

Ce sont les vibrations parasites du banc d'optique qui constituent actuellement la principale limitation à la résolution de cet instrument. Cette source de bruit domine les autres par plusieurs ordres de grandeur. L'accélération mesurée, intervenant dans l'équation (3.6), n'est en fait pas l'accélération des atomes par rapport à la Terre (qui constitue le véritable "g" recherché) mais plutôt l'accélération des atomes par rapport au banc optique. Les vibrations de ce banc provoquent à la fois un mouvement translationnel et un "tilt" des lasers. Les translations verticales induisent une fluctuation d'accélération qui s'ajoute directement à l'accélération gravitationnelle.² L'effet de tilt dynamique induit par les vibrations altère le produit scalaire $\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{g}$ (autrement dit on ne mesure alors plus la norme de \mathbf{g} mais seulement sa projection selon \mathbf{k}_e). Ce tilt introduit également une ouverture spatiale de la trajectoire générant un terme de Coriolis dans le déphasage. Isoler le système optique à un niveau suffisant pour que ces vibrations ne gâchent pas la limite fondamentale de précision du

2. Une façon alternative de formuler cet effet est de dire que ces translations impriment un bruit de phase parasite par effet Doppler.

dispositif constitue un véritable défi expérimental. Les progrès attendus dans le rejet des vibrations, que ce soit par une meilleure isolation physique du banc optique ou par une isolation mathématique résultant d'un traitement des données *à posteriori* en corrélation avec le signal d'un séismomètre, devraient permettre d'améliorer la résolution de l'instrument jusqu'à une sensibilité de $10^{-9} g$.

Le bruit de phase des lasers Raman, générant des fluctuations du déphasage le long des deux bras, est également susceptible d'affecter la précision de la mesure. La qualité de l'asservissement réalisé fait que cette source de bruit ne constitue pas le facteur limitant dans le dispositif actuel.

3.1.1.4 Comparaison avec le gravimètre à lévitation par “impulsion-miroir”.

Les deux limitations précédentes affectent également notre proposition expérimentale. L'accélération mesurée par notre dispositif est bien l'accélération des atomes relativement au faisceau laser et non relativement à la terre. Par ailleurs, les fluctuations de phase et d'intensité des lasers dégradent également la qualité de la mesure : elles sont susceptibles de provoquer des transferts de population imparfaits et donc d'altérer la stabilité du résonateur à ondes de matière.

Notre proposition comporte cependant deux avantages significatifs par rapport au système à interférométrie en chute libre : la possibilité de maintenir les atomes pendant un temps d'interrogation long, et le confinement du nuage dans une zone d'oscillation réduite³. Cette dernière propriété augmente la robustesse de notre système à une éventuelle inhomogénéité du champ électromagnétique.

D'après notre estimation heuristique de la sensibilité (Figure 2.5), afin d'atteindre la stabilité donnée par l'état de l'art $10^{-9}g$, il est nécessaire de faire léviter le nuage pendant 10 s ce qui semble délicat à mettre en oeuvre.

3.1.2 Comparaison entre gravimètre à oscillations de Bloch et gravimètre à lévitation par “impulsion-miroir”.

Nous avons vu que notre dispositif était susceptible de fonctionner dans un régime d'impulsion où les “impulsions-miroir” occupent la totalité du cycle. L'échantillon atomique tombe alors dans un champ électromagnétique continûment présent - associé à une onde effective et progressive Raman dont le vecteur d'onde bascule à chaque demi-période - et reçoit périodiquement des quanta d'impulsion qui le maintiennent en lévitation.

3. Avec malgré tout un phénomène de diffusion que nous abordons dans la partie suivante.

3.1 Comparaison de l'expérience proposée à d'autres dispositifs gravimétriques113

Ce système évoque alors très fortement un autre dispositif gravimétrique, proposé et réalisé récemment [79], fondé sur les oscillations d'un nuage atomique dans une onde électromagnétique stationnaire⁴. Cette expérience est prioritairement destinée à mesurer le rapport \hbar/m_{Rb} [74]. Dans ce système, les atomes sont également maintenus en lévitation par des processus à deux photons associés à un champ électromagnétique continûment présent. Le mouvement du nuage a été caractérisé comme une oscillation de Bloch [84], en accord avec une terminologie et un formalisme couramment utilisé en physique des solides. Par ailleurs, ce système présente également deux avantages importants avancés pour notre dispositif : maintien de l'échantillon en lévitation permettant une interrogation longue, et confinement spatial limitant les effets d'inhomogénéité du champ électromagnétique. Malgré ces ressemblances frappantes, des différences essentielles persistent, qui permettent à ces expériences d'explorer une physique différente.

3.1.2.1 Description du gravimètre à oscillations de Bloch.

Nous rappelons brièvement le principe de cette expérience, dont le lecteur trouvera une description approfondie dans la thèse de Pierre Cladé [85].

On peut la décomposer en trois étapes. La première consiste à préparer un échantillon atomique de faible dispersion en vitesses au moyen d'une impulsion Raman sélective. Dans une seconde étape, l'échantillon préparé évolue pendant une durée déterminée en présence du potentiel électromagnétique périodique et du potentiel gravitationnel. La dernière étape consiste à mesurer la distribution de vitesses de l'échantillon par spectroscopie Raman. Les impulsions Raman interviennent donc en deux temps et avec des rôles distincts : la première fois pour affiner la distribution de vitesses, la seconde fois pour la sonder.

Le rôle du champ électromagnétique est, dans ce système, principalement de permettre à l'accélération de la gravité d'agir pendant plus longtemps grâce au phénomène d'oscillations de Bloch⁵. De façon imagée, on mesure l'accélération de la gravité en examinant les vitesses initiales et finales d'un mobile chutant librement à partir d'une tour arbitrairement haute. Une mesure de la gravité à $10^{-6}g$ a pu être réalisée par cette méthode. Cette précision est certes bien inférieure à celles des meilleurs dispositifs actuels, mais elle est susceptible d'être largement améliorée.

4. Soulignons cependant que des oscillations d'un échantillon froid soumis à une force constante dans une onde électromagnétique stationnaire avaient été observées par Christian Bordé [83].

5. et également de donner lieu à un confinement conférant une robustesse aux effets d'inhomogénéité du champ

3.1.2.2 Modélisation par états de Bloch.

Nous décrivons à présent l'évolution de l'état quantique du nuage dans la phase d'oscillations. Par simplicité, nous adoptons une modélisation unidimensionnelle selon l'axe vertical. Le Hamiltonien admet pour expression :

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_z^2}{2m} + A \cos(2k\hat{z}) \quad (3.7)$$

Nous considérons désormais les états propres du Hamiltonien habillé par le champ électromagnétique, et non plus sur les états propres "libres" que sont les états d'impulsion définie. Le Hamiltonien est invariant par translation d'une demi-longueur d'onde. Il est donc possible de trouver des états propres qui diagonalisent l'opérateur unitaire réalisant cette translation. Ces états, dits états de Bloch et notés $|\Psi_q\rangle$, peuvent être décomposés sur les états d'impulsion définie :

$$|\Psi_q\rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l |\hbar q + l \times 2\hbar k\rangle \quad (3.8)$$

La quantité $\hbar q$ est communément appelée quasi-impulsion.

La périodicité du potentiel fait apparaître une structure de bandes : on obtient une série de branches distinctes pour l'énergie $E_n(q)$. Sous réserve des conditions d'adiabaticité :

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N} \quad \left| \langle n, q(t) | \frac{d}{dt} | n, q(t) \rangle \right| \ll \frac{|E_n(q) - E_i(q)|}{\hbar}} \quad (3.9)$$

l'état quantique évolue au sein d'une bande donnée sans effectuer de transition vers les autres bandes [84], le degré de liberté associé étant ainsi "gelé".

Considérons l'ajout d'un potentiel linéaire au Hamiltonien traduisant une force constante F . L'évolution de la quasi-impulsion $\hbar q$ suit alors une loi de Newton classique :

$$\hbar q(t) = \hbar q(0) + F t \quad (3.10)$$

Si les conditions d'adiabaticité précédentes sont vérifiées, l'évolution d'un état quantique $|\psi(0)\rangle = |n, q(0)\rangle$ est déterminée uniquement par celle de la quasi-impulsion $\hbar q(t)$ qui suit la loi de Newton, à l'exception des instants où elle croise le bord de l'intervalle $] -\hbar k, \hbar k[$ et où elle effectue un saut de $\pm 2\hbar k$ (suivant le bord de l'intervalle rencontré).

3.1 Comparaison de l'expérience proposée à d'autres dispositifs gravimétriques 115

Interprétation du saut de quasi-impulsion par des transition à deux photons.

Le saut du paramètre q ne traduit pas une brusque modification de l'état quantique : il est de même nature que celui d'un angle θ associé à la coordonnée polaire d'un vecteur tournant continûment et astreint par définition à rester dans l'intervalle $] - \pi, \pi[$.

Néanmoins, il est possible d'effectuer une interprétation de l'évolution de $q(t)$ associant à chaque saut une transition multi-photonique fictive. Considérons l'évolution d'un état de Bloch de quasi-impulsion initiale $\hbar q(0) = 0$ et celle d'un atome libre d'impulsion initiale $p(0) = 0$, sous l'influence de la force constante $F = -mg$. Tant que la quasi-impulsion reste dans la première zone de Brillouin $] - k, k[$, l'atome et l'état de Bloch ont la même (quasi) impulsion : $p(t) = \hbar q(t)$. En revanche après l'instant t_1 tel que $\hbar q(t_1) = p(t_1) = -\hbar k$, l'impulsion de l'atome en chute libre se différencie de la quasi-impulsion de Bloch. Pour que l'impulsion de l'atome libre suive la quasi-impulsion, on imagine que celui-ci subit à l'instant t_1 une transition instantanée à deux photons (de Bragg) qui ramène l'impulsion de la valeur $-\hbar k$ à la valeur $+\hbar k$, permettant de reproduire le saut de la quasi-impulsion. On assimile ainsi la quasi-impulsion $q(t)$ à l'impulsion d'un atome fictif en chute libre subissant une transition de Bragg à chaque instant où la quasi-impulsion sort de la première zone de Brillouin (ces instants sont espacés de $T_0 = 2\hbar k/mg$). Bien que l'évolution de l'état quantique soit continue, cette interprétation en termes de transitions à deux photons constitue une image physique commode. Cette image permet de rendre compte de la propagation d'états d'impulsion définie dans le système : un état d'impulsion définie $|p(0)\rangle$ va ainsi subir un saut de $2\hbar k$ à des instants périodiquement espacés $t_1, t_1 + T_0, t_1 + 2T_0, \dots$

3.1.2.3 Différences dans la réflexion du nuage.

Sensibilité impulsionnelle

Une première différence importante porte sur la sensibilité de la lévitation à l'impulsion des atomes.

En effet, le mécanisme d'oscillations de Bloch n'effectue aucune sélection en impulsion : les différentes composantes impulsionnelles du paquet d'ondes atomiques effectuent simplement les transitions de Bragg fictives à des instants différents correspondants à la sortie de la première zone de Brillouin des quasi-impulsions correspondantes. La condition de maintien du nuage en lévitation ne porte donc pas sur l'impulsion des atomes ; il s'agit en fait d'une condition d'adiabaticité permettant d'éviter les transitions entre bandes énergétiques. C'est bien parce que la lévitation de Bloch n'est

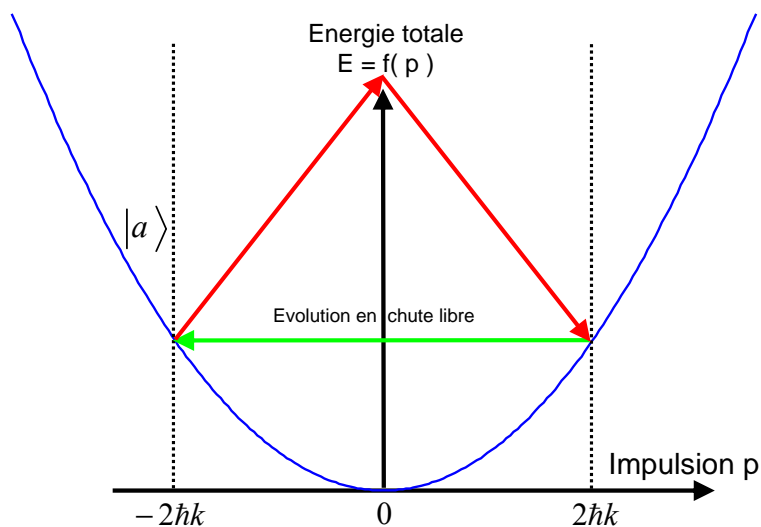


FIGURE 3.2 – Représentation de l’oscillation de Bloch dans un diagramme énergie-impulsion. Le processus de diffusion de Bragg intervient lorsque l’impulsion de l’atome heurte un bord de la première zone de Brillouin (lignes pointillées).

pas sélective en vitesse qu’il est nécessaire, pour la mesure de l’accélération gravitationnelle, de précéder la phase d’oscillations par une étape de filtrage (de vitesses) par impulsion Raman. La finesse impulsionnelle de l’échantillon conditionne simplement la visibilité des oscillations, mais pas les oscillations elles-mêmes. C’est la grande résolution en vitesse (subrecul) qu’il est possible d’atteindre avec des atomes froids qui a permis l’observation des oscillations de Bloch [84].

Notre proposition expérimentale, fondée sur des “impulsions-miroir” pulsées, diffère fondamentalement sur cet aspect : la lévitation des atomes est conditionnée par le fait que leur impulsion satisfasse la condition de conservation de l’énergie. Dans le système que nous proposons, le filtrage impulsionnel intervient donc à chaque rebond du nuage. La corrélation entre le confinement impulsionnel vertical du nuage et son maintien en lévitation est un élément central de notre système, absent dans le système à oscillations de Bloch.

Synchronisation des transitions à deux photons.

Une seconde différence essentielle entre les deux expériences réside dans la synchronisation des transitions multi-photoniques subies par les atomes⁶.

6. Même si ces transitions sont, en un sens, fictives pour les états de Bloch

3.1 Comparaison de l'expérience proposée à d'autres dispositifs gravimétriques117

Même si la durée envisagée pour les impulsions Raman est susceptible d'aboutir à un éclairage permanent des atomes, le basculement périodique du vecteur d'onde effectif associé impose une synchronisation *active* des transitions photoniques. En revanche, cette synchronisation est *passive* dans le gravimètre à oscillations de Bloch : les atomes de toutes les classes de vitesse du nuage subissent automatiquement une “transition de Bragg” à l'instant adéquat. La dispersion dans les instants de transition reproduit simplement la dispersion en vitesses. Il est nécessaire d'obtenir des températures subrecoil pour pouvoir résoudre expérimentalement ces instants de transition : dans le cas contraire, les transitions se produisent à chaque instant.

3.1.2.4 Structuration de la propagation atomique par une onde lumineuse Raman et par une onde lumineuse stationnaire.

Donnons à présent un tour plus abstrait à la discussion en examinant les différences des deux expériences dans l'habillage de la propagation du champ atomique par le champ électromagnétique .

Dimensionnalité de la propagation.

Commençons par une considération de dimensionnalité. Dans notre proposition, le potentiel électromagnétique couple deux feuillets de propagation disjoints en l'absence de champ externe. Dans le système à oscillations de Bloch, le potentiel électromagnétique agit sur un feuillet unique. Cette différence est résumée sur la Figure 3.3.

Directionnalité des processus d'émission-absorption.

Une seconde différence importante entre “habillage” de la propagation par une interaction de type “progressif Raman” et “onde stationnaire” réside dans la directionnalité d'absorption des photons : une onde lumineuse stationnaire est susceptible de provoquer une absorption ou une émission de photons dans les deux sens, alors qu'une onde lumineuse Raman ne donne lieu qu'à des absorption de photons dans un sens donné et une émission dans le sens opposé. Ceci provient du fait que l'écart d'énergie entre les deux états internes considérés est généralement beaucoup plus grand que l'énergie de recul⁷.

Cette directionnalité donne lieu à une plus grande multiplicité des diagrammes d'interactions résonnants possibles pour un “habillage d'onde stationnaire”. Des atomes évoluant dans une onde stationnaire sont en effet susceptibles d'absorber ou d'émettre consécutivement plusieurs photons

7. Nous avons déjà évoqué ce point au chapitre 1 en discutant l'ouverture de canaux de diffusion simultanés lors d'impulsions de Bragg courtes.

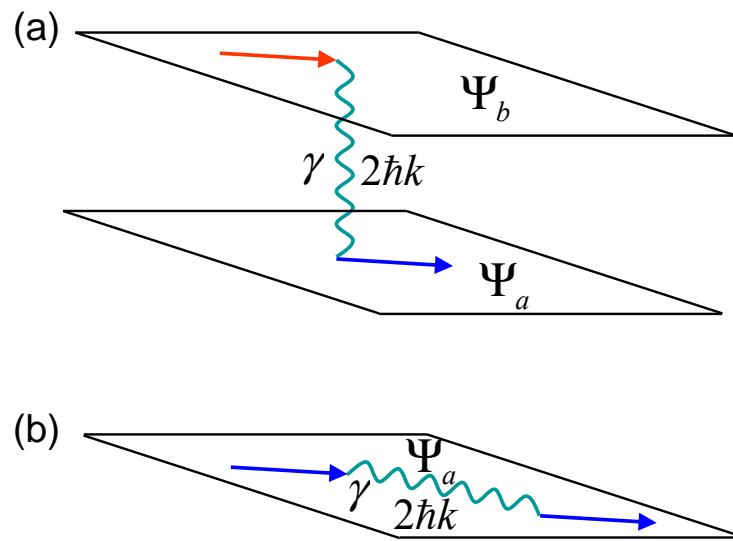


FIGURE 3.3 – *Topologie de la propagation. Modification du propagateur atomique dans le cas (a) d’impulsions Raman ou (b) d’impulsions de Bragg. Dans le premier cas la propagation doit être envisagée en considérant deux feuillets. Ces deux feuillets sont déformés continûment par le potentiel d’interaction.*

effectifs de même quantité de mouvement. La situation est très différente pour un “habillage progressif Raman”, dans lequel deux interactions successives ne génèrent pas de transfert de quantité de mouvement mais ramènent simplement l’atome dans son état initial.

La Figure 3.4 montre qualitativement la modification du propagateur atomique en présence de potentiel électromagnétique associé à une onde stationnaire et à une onde Raman : Bien que, dans un cas comme dans l’autre, le champ électromagnétique fasse intervenir la superposition de deux ondes planes, les diagrammes associés sont donc différents. Il en résulte une modification substantiellement différente des états propres du Hamiltonien (qui deviennent des fonctions d’ondes périodiques) et, comme nous allons le voir, des surfaces de dispersion.

Topologie des surfaces de dispersion.

En présence d’une impulsion Raman, l’habillage de la propagation par le potentiel électromagnétique “croise” les champs atomiques des feuillets a et b mais ne change pas de façon fondamentale la topologie du spectre énergétique : le nombre de composantes connexes est préservé. En effet, en l’absence de champ électromagnétique, le spectre énergétique contient deux composantes connexes qui sont les surfaces de dispersion paraboloides $E_{a,b}(\mathbf{p})$, distants de l’énergie $E_b - E_a$. En présence

3.1 Comparaison de l'expérience proposée à d'autres dispositifs gravimétriques 119

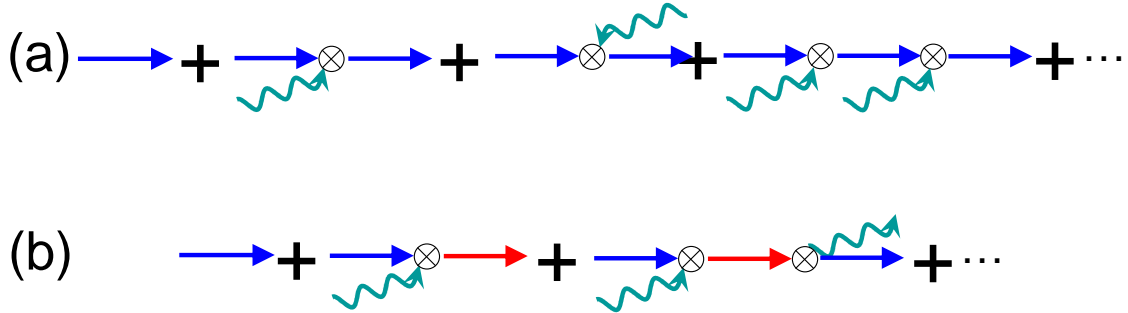


FIGURE 3.4 – Modification du propagateur atomique dans le cas d'une onde progressive Raman (a) ou stationnaire (b). Les flèches bleues et rouges représentent respectivement le propagateur libre dans l'état fondamental et dans l'état excité. Les flèches vertes représentent des photons effectifs de quantité de mouvement $\pm 2\hbar k$. Seuls les premiers diagrammes de Feynman sont représentés.

du champ, le spectre est donné par les surfaces de dispersion $E_1(\mathbf{p})$ et $E_2(\mathbf{p})$ associées à chaque état interne habillé [86]. On obtient à nouveaux deux composantes connexes non bornées. Ces deux surfaces de dispersion sont appelées “branche α ” et “branche β ” par Werner [87].

En revanche, dans le cas d'impulsions de Bragg, l'habillage de la propagation par le potentiel périodique au sein d'un feuillet unique conduit à une autre topologie des surfaces de dispersion : le parabolöide observé en l'absence de champ électromagnétique fait place à *plusieurs composantes connexes et bornées* $E_i(\mathbf{p})$. Si la condition d'adiabaticité (3.9) est vérifiée, le mouvement dans l'espace des impulsions se fait à l'intérieur d'une seule composante connexe (“bande multi-dimensionnelle”). Le seul moyen pour un atome de passer d'une composante à une autre consiste alors à effectuer une transition inter-bandes, qui peut être inhibée si l'évolution quantique est suffisamment lente. Le piégeage par oscillation de Bloch est donc un “piégeage topologique”, qui provient de la division du parabolöide $E(\mathbf{p})$ en plusieurs composantes connexes, bornées et suffisamment séparées énergétiquement pour vérifier la condition d'adiabaticité^{8 9}.

8. En pratique, la vitesse de l'évolution de l'état quantique est fixée par l'accélération gravitationnelle. La seule “molette” disponible est donc l'intensité du champ, fixée à un niveau tel que l'écart d'énergie des niveaux soit compatible avec la condition d'adiabaticité 3.9. La lévitation et les oscillations disparaissent bien dans la limite de champ électromagnétique faible. Pour un champ très faible, lorsque la quasi-impulsion s'approche de la limite de la zone de Brillouin sous l'effet de l'accélération de la gravité, la condition d'adiabaticité (3.9) n'est alors plus vérifiée. On observe alors simplement une transition inter-bandes à chaque franchissement de zone de Brillouin, et l'énergie de l'atome est très voisine de celle qu'il aurait dans le cas d'une chute libre en l'absence de champ.

9. Signalons par ailleurs qu'une discussion des collisions possibles dans les potentiels périodiques à partir des surfaces de dispersion a été réalisée par Klaus Mølmer [88].

3.1.2.5 Conclusion.

Dressons un bilan des similitudes entre le dispositif à oscillations de Bloch et celui à “impulsions-miroir”, en fonction de la durée envisagée pour ces miroirs lumineux.

Apparemment, c’est dans le régime où les impulsions ont une durée maximale que les deux systèmes se ressemblent le plus : dans l’un comme dans l’autre, le nuage lévite alors dans un champ électromagnétique présent continûment (dont le vecteur d’onde bascule à chaque demi-période $T_0/2$ pour notre proposition). En fait, un examen attentif montre le contraire : c’est dans ce régime que les différences entre les deux systèmes sont les plus marquées.

Avec des “impulsions-miroir” longues, la réflexion s’accompagne d’un filtrage impulsionnel très étroit qui n’a pas lieu dans le potentiel stationnaire du gravimètre à oscillations de Bloch. En revanche, pour des “impulsions-miroir” brèves, les impulsions lumineuses agissent dans le régime de Raman-Nath et les miroirs lumineux réfléchissent indifféremment toutes les classes de vitesses atomiques. La situation se rapproche alors de celle des oscillations de Bloch, où la totalité de l’échantillon est réfléchi (à des instants spécifiques de chaque classe de vitesses). En adoptant une première “impulsion-miroir” Raman longue, une succession d’“impulsions-miroir” courtes, et une dernière “impulsion-miroir” longue, notre dispositif reproduirait les trois phases du dispositif à oscillations de Bloch : filtrage, oscillation de tous les atomes, sonde de vitesse. Mais il peut également explorer bien d’autres régimes de fonctionnement, associés à d’autres profils de durée pour la séquence d’impulsions lumineuses.

3.1.3 Conclusion.

Nous avons exposé le principe de mesure inertielle par interférométrie atomique, sous-jacent à la réalisation de senseurs inertiels performants. Le concept d’aire interférométrique fournit une piste d’analyse intéressante de notre dispositif à “impulsion-miroir”, que nous développons dans la partie suivante.

Nous avons également comparé notre proposition expérimentale au dispositif à oscillations de Bloch d’atomes froids. Bien que les deux systèmes soient en apparence similaires - tous deux font intervenir sur la lévitation d’atomes par des processus d’interaction à deux photons-, ils possèdent néanmoins des différences profondes tant dans leur principe de fonctionnement (sélection ou non de classes de vitesse lors des rebonds) que sur le plan théorique (topologie différente des surfaces de dispersion) que nous avons soulignées.

3.2 Aire interférométrique en présence d'un champ électromagnétique : un paradoxe original.

Cette partie expose et résout un paradoxe original, qui montre la nécessité de redéfinir le concept d'aire interférométrique en présence d'un champ électromagnétique. Ce paradoxe émerge d'une analyse précise des trajectoires atomiques dans le dispositif à "impulsions-miroir" précédent. L'analyse par matrices de diffusion instantanées, que nous en avons donné jusqu'à présent, est inadéquate : dès lors que l'on se place dans un régime d'"impulsions-miroir" longues, il est nécessaire de considérer l'intrication entre degrés de libertés internes et externes du champ atomique.

Le paradoxe envisagé nous amène à considérer le problème suivant : quelle est la sensibilité inertielle émanant de la propagation d'un champ atomique en présence d'un champ électromagnétique externe couplant degrés de libertés internes et externes des atomes ?

Cette question revêt à la fois un intérêt pratique et un intérêt fondamental. Dans une perspective expérimentale, elle permet d'optimiser la configuration de senseurs inertiels reposant sur des interféromètres atomiques illuminés durant une fraction non-négligeable du temps de vol de l'échantillon. Dans une perspective fondamentale, la modification de la sensibilité inertielle par la présence d'un champ lumineux pourrait être connectée à une éventuelle inclusion de l'interaction électromagnétique dans la courbure de l'espace-temps¹⁰.

Le paradoxe exposé - et résolu - ici apporte quelques éléments de réponse à la compréhension de l'aire interférométrique dégagée par les trajectoires atomiques en présence d'un champ électromagnétique.

Nous expliquons d'abord en termes d'aire interférométrique l'absence de sensibilité du dispositif en régime d'impulsions lumineuses courtes. Ceci nous conduit à examiner la situation pour des impulsions longues et à formuler le paradoxe étudié dans cette partie. Nous examinons ensuite le rôle des rampes de fréquence. Le paradoxe est alors résolu, en s'interrogeant sur la nature des trajectoires (simples ou renormalisées par le champ électromagnétique).

10. Travail en cours de développement par Christian Bordé.

3.2.1 Absence de sensibilité en régime d'impulsions brèves.

L'absence de sensibilité en régime d'impulsions courtes peut être comprise de plusieurs points de vue.

Dans une perspective classique, la détermination de g proposée repose sur des mesures périodiques de la vitesse de l'échantillon par des miroirs lumineux. La précision avec laquelle ces miroirs sondent la vitesse du nuage est inversement proportionnelle à la durée des impulsions lumineuses correspondantes. Tout gravimètre reposant sur une telle détermination *classique* de l'accélération des atomes par un champ lumineux ne peut donc faire intervenir des impulsions brèves sans gâcher la précision de la mesure.

Dans une perspective plus fondamentale, il est intéressant d'envisager un instant notre proposition expérimentale comme un interféromètre atomique. La sensibilité aux effets inertiels provient alors de l'aire dégagée par la séparation, dans l'espace-temps, des trajectoires atomiques associées aux deux états internes a et b . Or, cette aire est nulle dans le cas de l'"impulsion-miroir" imaginée initialement, qui réalise successivement deux transferts de population complets et quasi-instantanés. Le seul moyen de générer une aire interférométrique non-nulle est en fait de créer une superposition cohérente d'ondes atomiques suivant des trajectoires différentes dans l'espace-temps (ici un profil $z(t)$ différent, même si les trajectoires spatiales se confondent). Avec le type de miroir lumineux envisagé, cet objectif ne peut être atteint qu'en allongeant la durée des impulsions lumineuses.

3.2.2 Exposé du paradoxe.

En fait, l'interprétation de la sensibilité inertielle en termes d'aire interférométrique pose problème. Il semble qu'il existe un régime de fonctionnement où cette sensibilité existe malgré la nullité de l'aire interférométrique.

Considérons un fonctionnement du dispositif au voisinage des conditions de résonance - c'est à dire pour $T \simeq T_0$ -, et avec des miroirs lumineux composés d'impulsions Raman comportant une rampe de fréquence de pente adéquate. D'après la discussion du chapitre précédent, un tel système permet - du moins en principe - une détermination de l'accélération g .

Considérons à présent l'aire interférométrique engendrée. Dans ce système, le paquet d'ondes atomiques évolue exclusivement dans l'état fondamental entre les impulsions lumineuses, si bien que

seules les périodes d'illumination des atomes sont susceptibles de générer de l'aire interférométrique.

En fait, un examen attentif des trajectoires des atomes durant leur illumination semble montrer que tel n'est pas le cas. Initialement dans l'état fondamental, le paquet d'ondes atomique arrive sur chaque "impulsion-miroir" avec une quantité de mouvement centrale \mathbf{p}_0 vérifiant la condition de résonance $y(\mathbf{p}_0) = 0$. Durant l'illumination, le paquet d'ondes atomique fondamental peut être décomposé en une somme cohérentes de deux paquets associés aux états internes habillés par le champ électromagnétique :

$$\int d^3\mathbf{p}F_a(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{r}, t)|a, \mathbf{p}\rangle \longrightarrow \int d^3\mathbf{p}F_1(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{r}, t)|1, \mathbf{p}\rangle + \int d^3\mathbf{p}F_2(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{r}, t)|2, \mathbf{p}\rangle \quad (3.11)$$

Si les deux profils dispersifs (représenté par les fonctions $F_{1,2}$) des paquet d'ondes "habillés" diffèrent, leur impulsion centrale $\mathbf{p}_{c1,2} = \mathbf{p}_0$ est, en revanche, identique. Or, l'effet Borrmann exposé au chapitre 1 montre que les vitesses de groupe de ces deux états sont alors égales : $v_{g1}(\mathbf{p}_0) = v_{g2}(\mathbf{p}_0) = v_{0a} + (\hbar/2m)\mathbf{k}_e$. Durant le miroir lumineux, l'onde atomique va donc être mise dans une superposition cohérente de deux paquets d'ondes associés à des états internes différents, mais dont les centres suivent la même trajectoire (cf. Figure 3.5). Il n'y aurait donc pas d'aire interférométrique dégagée par l'évolution dans une impulsion lumineuse d'un paquet d'ondes atomique résonnant.

3.2.3 Rôle joué par les rampes de fréquence.

Il pourrait sembler que le paradoxe précédent puisse être résolu simplement en considérant le rôle joué par les rampes de fréquence. Le maintien de la condition de résonance au cours de l'impulsion lumineuse nécessite en effet la présence d'une rampe de fréquence de pente $r = \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{g}$. Il suffirait alors de lire la valeur de cette pente pour obtenir une mesure de g !

C'est bien la rampe de fréquence qui fait coïncider les trajectoires des atomes habillés. En l'absence de cette rampe, la valeur résonnante \mathbf{p}_0 de l'impulsion atomique *dans le référentiel du laboratoire* est indépendante du temps. Les impulsions centrales des paquets d'ondes atomiques "habillés", qui subissent une accélération gravitationnelle, ne peuvent donc pas coïncider durablement avec la valeur résonnante \mathbf{p}_0 . Il en résulte que les trajectoires "habillées" ne se superposent pas non plus durablement dans l'impulsion lumineuse. En revanche, l'application d'une rampe de fréquence de pente $r = \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{g}$ fait que la condition de conservation de l'énergie "suit la chute libre des atomes". Les trajectoires centrales "habillées", issues d'un paquet d'ondes atomiques de vitesse initiale résonnante, sont alors superposées durant toute la durée de l'impulsion lumineuse.

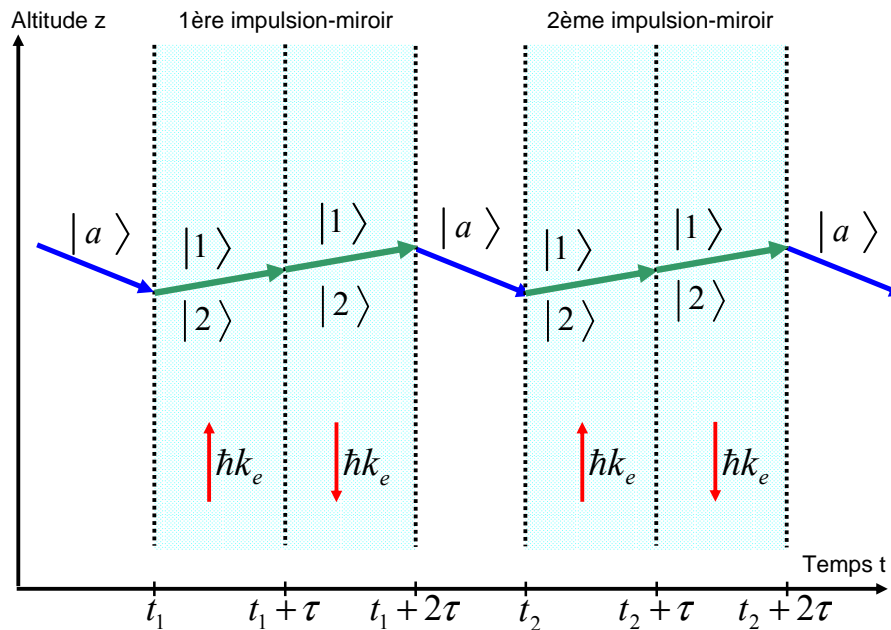


FIGURE 3.5 – Trajectoire des paquets d’ondes atomiques au sein du dispositif gravitationnel d’atomes en lévitation. Les flèches vertes représentent la trajectoire commune des états atomiques habillés par la présence du champ électromagnétique externe.

En fait, l’argument présenté ici est fallacieux : la détermination de l’accélération gravitationnelle dans notre dispositif repose bien sur la détermination de la période résonnante T_0 et non sur une lecture de la pente de fréquence r ¹¹.

3.2.4 Aire interférométrique : Trajectoires renormalisées vs trajectoires simples.

L’aire interférométrique a été introduite, initialement, pour caractériser des interféromètres sondant les champs inertiels au moyen de nuages atomiques se propageant dans le noir entre des impulsions lumineuses quasi-instantanées. Une fois le recul pris en compte, l’évolution externe du champ atomique est totalement découplée de son évolution interne : les deux composantes du spineur atomique se propagent indépendamment, entre les impulsions lumineuses, sur leurs feuillets respectifs de propagation. En revanche, l’aire interférométrique que nous avons considéré durant l’illumination

11. Par ailleurs, une analyse par diagrammes de Feynman pourrait montrer que la circulation du potentiel gravitationnel n’est pas complètement annulée par les rampes de fréquence. En particulier, du fait du décalage des instants initiaux et du basculement des rampes de fréquence, cette circulation persiste pour les interféromètres virtuels impliquant des interactions dans des miroirs lumineux différents. Une telle analyse sera menée dans une publication ultérieure.

résulte de la propagation simultanée du champ atomique sur deux feuillets couplés (comme représenté sur la Figure 3.1). Il n'est en fait pas évident que ce soient les trajectoires associées aux vitesses de groupe des états atomiques "habillés" qui délimitent l'aire interférométrique.

Afin de discuter le paradoxe de façon précise, il faut donc remettre à plat la notion d'aire interférométrique en présence d'un champ électromagnétique. En particulier, il s'agit de déterminer quelles sont les trajectoires atomiques à considérer pour définir cette aire : trajectoires simples des atomes, ou bien renormalisées par le champ externe. Il y a un parallèle intéressant avec le paradoxe évoqué par Greenberger [89], où l'on obtient des résultats différents selon que c'est la vitesse de groupe ou bien la vitesse de phase qui est prise en compte pour décrire une expérience d'interférence de neutrons.

Il convient, pour répondre à cette question, de revenir à une analyse élémentaire de la sensibilité du dispositif. Celui-ci est sensible à la gravité si et seulement si la population totale dans l'état fondamental, évaluée à l'instant final et dans la zone de détection $Det.$, dépend de l'accélération gravitationnelle g ¹². Cette quantité s'exprime au moyen du propagateur renormalisé K selon :

$$N_a = N_0 \int_{Det.} d^3 \mathbf{r} \left| \int d^3 \mathbf{r}' K(\mathbf{r}, t_f, \mathbf{r}', t_i) \Phi_a(\mathbf{r}', t_i) \right|^2 \quad (3.12)$$

t_i désigne l'instant initial que nous choisissons comme le début du premier "miroir Raman". Nous supposons, pour simplifier l'analyse, qu'à cet instant tous les atomes sont dans l'état interne fondamental.

Nous allons franchir un second pas vers la résolution du paradoxe en considérant la structure du propagateur atomique renormalisé par le champ électromagnétique externe¹³. C'est bien ce propagateur qui détermine, en présence du champ lumineux, les trajectoires centrales des paquets d'ondes "habillés". Le propagateur simple, intervenant dans la définition usuelle de l'aire interférométrique, détermine quant-à-lui les trajectoires d'atomes évoluant dans le noir. En reprenant la définition (1.38) des propagateurs en termes d'opérateur d'évolution, nous obtenons une expression du propagateur

12. Pour la plupart des calculs nous supposons que la zone de détection finale est infinie, afin que la sensibilité inertielle obtenue ne repose pas sur un simple effet de "cadrage", mais bien sur un phénomène d'interférences. Nous restreindrons cependant les contributions du champ atomique à la mesure finale aux seuls termes ayant reçu un transfert de quantité de mouvement suffisant pour assurer la lévitation. En effet, avec un temps d'interrogation suffisamment long et une zone de détection suffisamment étroite, tous les atomes ayant "manqué" un ou plusieurs quanta d'impulsion sont en dessous de la zone de détection et ne contribuent pas au signal.

13. Dans le langage de la théorie des champs, le propagateur renormalisé correspond à la resommation des diagrammes de Feynman irréductibles à une particule [42]. Ce traitement est standard en théorie des champs et réalisé dans de nombreux ouvrages de référence [42]. Nous allons cependant le reprendre ici, afin de ne pas égarer les lecteurs qui ne sont pas familiers avec ce formalisme.

renormalisé K et du propagateur simple K^1 :

$$K_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \langle \beta, \mathbf{r} | U(t, t') | \alpha, \mathbf{r}' \rangle \quad \alpha, \beta \in \{a, b\}^2 \quad (3.13)$$

$$K_{\alpha,\beta}^1(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \langle \beta, \mathbf{r} | U_1(t, t') | \alpha, \mathbf{r}' \rangle \quad \alpha, \beta \in \{a, b\}^2 \quad (3.14)$$

Les opérateurs U et U_1 désignent respectivement les opérateurs d'évolution associés au Hamiltonien total H et au Hamiltonien H_1 privé du potentiel électromagnétique (défini dans l'équation (1.101) du chapitre 1.).

Afin de comprendre la relation entre propagateur simple et propagateur renormalisé, il est utile d'exprimer ce dernier en fonction du propagateur simple au moyen d'un développement en champ électromagnétique faible. Ce développement peut être obtenu en traitant l'interaction électromagnétique de façon perturbative dans l'évolution de l'état quantique des atomes. Nous passons en représentation interaction via l'opérateur d'évolution unitaire $U_1(t, t_u)$. Le Hamiltonien associé à l'interaction électromagnétique s'écrit, dans cette représentation :

$$\tilde{H}_{\text{em}} = U_1^{-1}(t, t_u) (V(\hat{\mathbf{r}}, t) |b\rangle\langle a| + h.c.) U_1(t, t_u) \quad (3.15)$$

La série perturbative de Dyson donne le spineur en représentation d'interaction :

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \left(1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_i}^t dt' \tilde{H}_I(t') + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_i}^t dt'' \int_{t_i}^{t''} dt' \tilde{H}_I(t'') \tilde{H}_I(t') + \dots \right) |\tilde{\Psi}(t_i)\rangle \quad (3.16)$$

Cette expression se traduit directement par la relation suivante pour le propagateur renormalisé K :

$$K_{aa}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_i, t_i) = \langle a, \mathbf{r} | U_1(t, t_u) \left(1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_i}^t dt' \tilde{H}_I(t') + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_i}^t dt'' \int_{t_i}^{t''} dt' \tilde{H}_I(t'') \tilde{H}_I(t') + \dots \right) U_1^{-1}(t_i, t_u) | a, \mathbf{r}_i \rangle \quad (3.17)$$

Nous nous concentrons sur les termes au plus de deuxième ordre. En insérant deux relations de fermeture entre les interactions, on obtient un développement de l'élément de matrice K_{aa} du propagateur renormalisé en fonction du propagateur simple :

$$\boxed{K_{aa}(x, x_i) \simeq K_{aa}^1(x, x_i) + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_i}^t dx_2 \int_{t_i}^{t_2} dx_1 [K_{aa}^1(x, x_2) V^*(x_2) K_{bb}^1(x_2, x_1) V(x_1) K_{aa}^1(x_1, x_i)]} \quad (3.18)$$

Pour rendre les équations plus concises, nous avons introduit les points d'espace temps $x = (\mathbf{r}, t)$. L'équation (3.18) admet pour représentation diagrammatique la Figure 3.6. Elle reflète la correction principale induite par le champ lumineux sur la propagation du champ atomique entre deux états

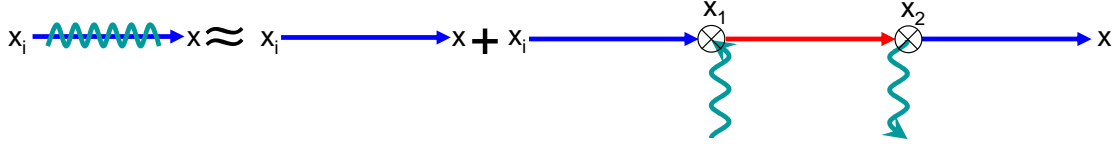


FIGURE 3.6 – Développement d'un élément de matrice du propagateur renormalisé au deuxième ordre interactif.

fondamentaux : le champ lumineux induit un bras de propagation dans l'état excité dont la longueur dépend de deux instants, sur lesquels la somme est effectuée. Le développement diagrammatique précédent montre que le champ atomique se propage simultanément selon une continuité de bras, définis par les points d'espace-temps x_1 et x_2 associés aux processus d'interactions, et contribuant avec un poids infinitésimal $dx_1 dx_2$. Il en résulte une contribution de nature interférométrique à la probabilité de présence :

$$\begin{aligned}
 & |\langle a, \mathbf{r} | \Psi(t) \rangle|^2 \simeq \left| \int d^3 \mathbf{r}_i K_{aa}^1(x, x_i) \phi_a(x_i) \right|^2 \\
 & + \frac{1}{\hbar^2} \int d^3 \mathbf{r}_i \int_{t_i}^t dx_2 \int_{t_i}^{t_2} dx_1 K_{aa}^{*1}(x, x_i) K_{aa}^1(x, x_2) V^*(x_2) K_{bb}^1(x_2, x_1) V(x_1) K_{aa}^1(x_1, x_i) |\phi_a(x_i)|^2 + c. c. \\
 & + \frac{1}{\hbar^4} \int d^3 \mathbf{r}_i \int_{t_i}^t dx_2 \int_{t_i}^{t_2} dx_1 \int_{t_i}^t dx_2' \int_{t_i}^{t_2'} dx_1' \\
 & [K_{aa}^1(x, x_2) V^*(x_2) K_{bb}^1(x_2, x_1) V(x_1) K_{aa}^1(x_1, x_i) K_{aa}^{1*}(x, x_2') V(x_2') K_{bb}^{1*}(x_2', x_1') V^*(x_1') K_{aa}^{1*}(x_1', x_i) |\phi_a(\mathbf{r}_i, t_i)|^2]
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Les termes des deuxième et troisième lignes traduisent la contribution d'une continuité d'interféromètres virtuels représentés sur la Figure 3.7.

Quels sont les diagrammes qui contribuent ?

Les interféromètres de la deuxième ligne sont définis par les deux instants (t_1, t_2) , et ceux de la troisième ligne par les quatre instants (t_1, t_2, t_1', t_2') . L'intégration sur les coordonnées spatiales initiales \mathbf{r}_i et intermédiaires $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2'$ reflète les intégrales de propagation successives entre les instants d'interaction¹⁴. La largeur impulsionnelle du paquet initial $\phi_a(\mathbf{p}_i, t_i)$ confère à l'impulsion initiale \mathbf{p}_i un rôle de variable d'ajustement.

¹⁴. Par ailleurs, on peut montrer en utilisant la relation de Van Vleck et les relations entre action et impulsion $\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}'} = -\mathbf{p}'$, $\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{p}$, que l'effet de cette intégration est essentiellement d'assurer la conservation de l'impulsion à chaque vertex d'interaction.

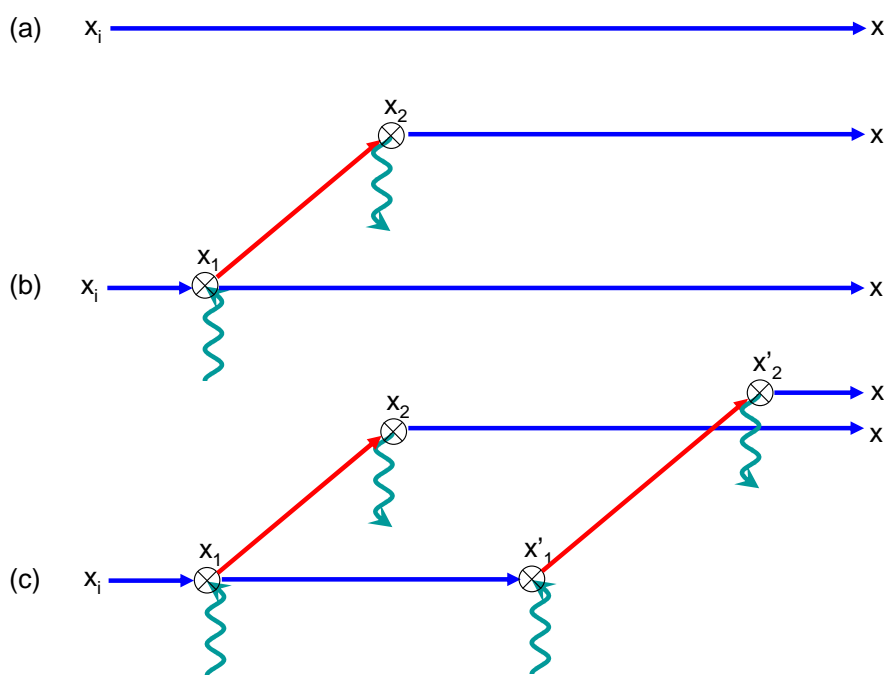


FIGURE 3.7 – Interféromètres virtuels contribuant à la densité atomique. Les diagrammes (a), (b) et (c) correspondent respectivement à la première, la deuxième et à la troisième ligne de l'équation (3.19) donnant la densité de probabilité en fonction du développement au deuxième ordre du propagateur renormalisé.

Du fait de l'intégration sur la position finale \mathbf{r} , seuls les interféromètres dont l'ouverture spatiale est inférieure à la longueur de cohérence du nuage contribuent significativement à la population N_a . Les contributions des interféromètres associés aux diagrammes de la deuxième ligne, nécessairement ouverts, est donc faible. En revanche, parmi les diagrammes de la troisième ligne, il existe des interféromètres exactement fermés, plus précisément ceux définis par des instants (t_1, t_2, t'_1, t'_2) vérifiant la condition de fermeture :

$$\mathbf{k}_{e1}(t'_1 - t_1) + \mathbf{k}_{e2}(t'_2 - t_2) = 0 \quad (3.20)$$

L'interaction lumière-matière génère donc des corrections de nature interférométrique à la densité de présence donnée par le propagateur simple. Nous voyons donc se profiler une réponse alternative au paradoxe : même si les trajectoires renormalisées sont resuperposées, les interféromètres virtuels générés par le propagateur renormalisé ont une aire moyenne non-nulle et donnent à ces trajectoires renormalisées une "épaisseur interférométrique" qui confère au dispositif une sensibilité inertielle.

3.2.5 Diagrammes assurant la lévitation des atomes.

En continuant sur la lancée du développement du propagateur renormalisé, on peut apporter un regard nouveau sur notre système. On suppose que celui-ci interroge les atomes pendant un temps suffisamment long pour que seuls les atomes ayant reçu tous les quanta d'impulsion vers le haut (un à chaque impulsion Raman) subsistent dans la fenêtre de détection, les atomes ayant manqué au moins un transfert étant alors en dessous de cette zone.

En reprenant le développement du paragraphe précédent, on voit que ceci équivaut à réduire l'expression de la densité de probabilité à la contribution d'une classe spéciale de diagrammes de Feynman que nous appellerons la "classe des diagrammes lévitants", impliquant le transfert d'un quantum de quantité de mouvement vers le haut au champ atomique lors de chaque impulsion Raman. Les diagrammes minimaux de cette classe (dont un exemple est représenté sur la Figure 3.8) font intervenir exactement une interaction lors de chaque impulsion Raman. Ces diagrammes, en somme cohérente, peuvent être vus comme les bras infinitésimaux d'un interféromètre multi-ondes. La géométrie de ces bras est fixée par la série d'instantanés d'interactions t_1, \dots, t_n , qui sont pris dans leur impulsion Raman respective. Plus les impulsions sont longues, plus la géométrie de ces bras est variable.¹⁵

15. En fait, la double condition de résonance du résonateur est une condition d'accord de phase de ces différents bras. Ceci apparaîtra au chapitre suivant.

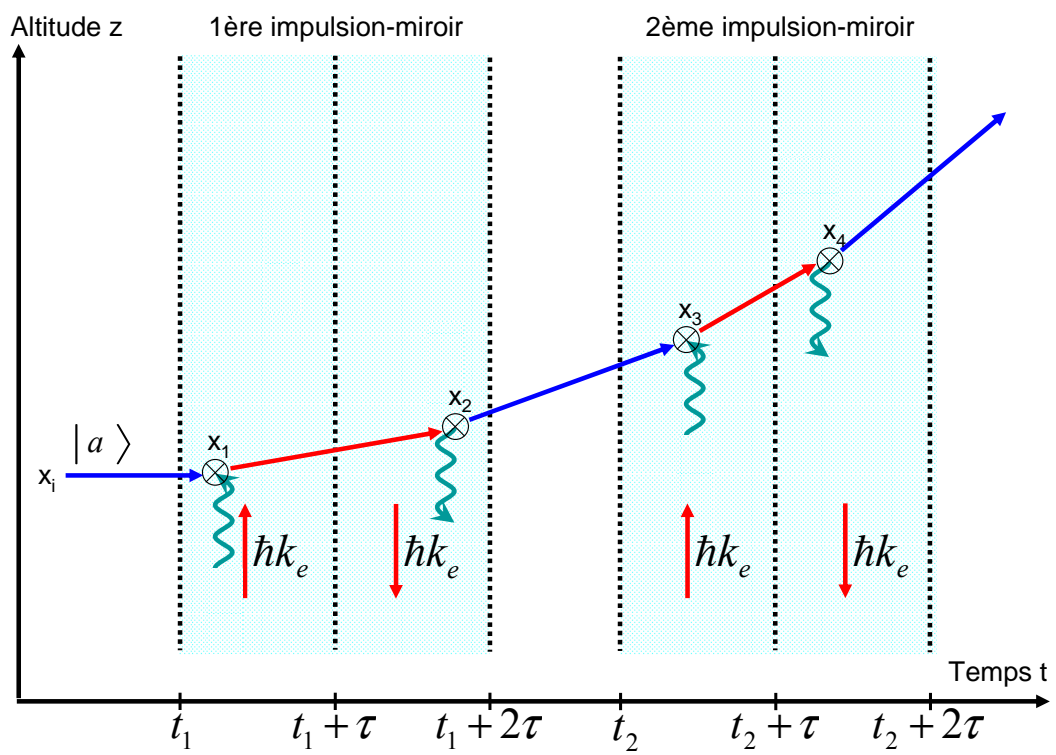


FIGURE 3.8 – Un exemple de diagramme lévitant, représenté dans le référentiel accéléré.

3.2.6 Conclusion.

Nous avons appréhendé la notion d'aire interférométrique en présence d'un champ électromagnétique en soulignant le rôle joué par la resommation des interactions lumière-matière dans la propagation. Le paradoxe exposé et résolu, impliquant l'effet Borrmann, montre que les trajectoires des états internes "habillés" par le champ électromagnétique ne doivent alors pas être prises comme les limites de l'aire interférométrique : elles-mêmes sont porteuses d'une épaisseur interférométrique résultant des interférences entre les diagrammes de Feynman resommés dans le propagateur habillé par le champ. Enfin, nous avons distingué une classe spéciale de diagrammes de Feynman donnant lieu à la lévitation des atomes et contribuant plus particulièrement à la population mesurée dans notre dispositif.

3.3 Conclusion.

Nous avons situé notre proposition de senseur à "impulsion-miroir" par rapport à l'état de l'art des dispositifs atomiques, en le comparant au gravimètre à interférométrie atomique en chute libre et au gravimètre à oscillations atomiques de Bloch. Nous avons mis en évidence des différences profondes entre notre proposition et ce système en montrant qu'elles procédaient à un confinement différent des atomes, respectivement par filtrage impulsif et par la topologie des surfaces de dispersion. Nous avons, en revanche, envisagé notre proposition comme un interféromètre atomique en utilisant comme fil rouge de la discussion un paradoxe lié à l'effet Borrmann. Cette discussion nous a conduit à remettre en question la notion d'aire interférométrique dégagée par les trajectoires atomiques en présence d'un champ lumineux, et à considérer les diagrammes résultant d'un développement du propagateur renormalisé.

La sensibilité du dispositif apparaît alors comme résultant des interférences d'une classe spéciale de diagrammes associée aux atomes maintenus en lévitation, et dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini d'instantants d'interaction lumière-matière pris dans chaque impulsion lumineuse. La durée temporelle finie de chaque impulsion lumineuse fait que ces diagrammes ont une géométrie et une aire interférométrique variables. Nous envisageons maintenant un interféromètre dans lequel cette géométrie est contrôlée par l'emploi d'impulsions $\pi/2$ brèves, qui délimitent précisément les instants d'interaction. Mettre en oeuvre cette stratégie est l'objet du chapitre suivant.

Interféromètre de Bordé-Ramsey multi-ondes en lévitation.

Le senseur spatio-temporel présenté dans les chapitres précédents mettait en jeu la lévitation d'un nuage atomique par une succession de miroirs lumineux. Ces miroirs réalisaient lors de chaque miroir un transfert de population quasi-total sous réserve qu'une double condition de résonance soit vérifiée.

Nous avons montré que la sensibilité inertielle de ce dispositif provenait d'interférences de "diagramme lévitants". Ces diagrammes, dont la géométrie varie selon la distribution des instants d'interaction, génèrent des interféromètres virtuels d'aire et de sensibilité inertielle également variables. Ces interféromètres contribuent à la densité du nuage en lévitation à l'instant final, qui est la grandeur mesurée.

Cette proposition expérimentale implique donc une analyse physique beaucoup plus complexe que le simple "jonglage" d'un seul nuage atomique gaussien sur lequel reposait notre description initiale. En suivant le fil conducteur d'un système reposant sur une classe résonnante de diagrammes d'interactions, nous allons concevoir un nouveau dispositif, où la géométrie des interféromètres est cette fois-ci maîtrisée par l'emploi d'impulsions brèves. Comme pour le dispositif précédent, sa capacité de mesure est duale, donnant lieu à un fonctionnement de type "gravimètre" ou "horloge". Nous avons jusqu'ici davantage insisté sur les aspects de mesure inertielle du système précédent. Nous nous attacherons, dans ce chapitre, à présenter les potentialités de mesure fréquentielle de ce nouveau système.

4.1 Description de l'expérience.

Nous décrivons ici la séquence d'impulsions lumineuses et les trajectoires atomiques du système envisagé, qui s'apparente à un interféromètre de Bordé-Ramsey en lévitation. Nous donnons ensuite un portrait de l'évolution du nuage atomique dans l'espace des impulsions. Celui-ci révèle un mode de confinement original, fondé sur les interférences constructives du nuage atomique dans un réseau

d'arches de trajectoires prédéfinies par les instants d'impulsions. Le peuplement des différents chemins empruntés par les atomes est sensible à une double condition de résonance qui confère au système sa capacité de mesure.

4.1.1 Optimisation de l'aire interférométrique dégagée par les diagrammes lévitants.

Considérons à nouveau le senseur atomique en lévitation précédent en régime d'illumination continue, c'est-à-dire avec des impulsions Raman de durée $T_0/2$. Examinons précisément les diagrammes lévitants associés au premier miroir Raman. La Figure 4.1 montre deux diagrammes d'interaction possibles appartenant à la classe des diagrammes lévitants. Lorsque l'on considère la densité de probabilité, ces deux diagrammes vont générer des interférences si les paquets d'ondes atomiques empruntant les chemins correspondants se recouvrent à l'issue de chaque bras. Le recouvrement est optimal lorsque la condition de fermeture sur les instants d'interactions, que nous avons donnée au chapitre antérieur, est vérifiée : $\mathbf{k}_{e1}(t'_1 - t_1) + \mathbf{k}_{e2}(t'_2 - t_2) = 0$. Dans le cas considéré, cette relation se traduit par : $t'_1 - t_1 = t_2 - t'_2$.

A cet interféromètre est associée une certaine aire, déterminée par les instants d'interactions, qui lui confère une sensibilité inertielle. Cette aire est maximale pour des instants choisis aux extrémités de chaque impulsion Raman :

$$\begin{cases} t_1 = t_{m1}, \\ t_2 = t_{m1} + T_0, \end{cases} \quad \begin{cases} t'_1 = t_{m1} + T_0/2 - \epsilon, \\ t'_2 = t_{m1} + T_0/2 + \epsilon, \end{cases} \quad (4.1)$$

Dans le système précédent, à l'issue de la première "impulsion-miroir", la population atomique fondamentale comportait des contributions de tous les interféromètres virtuels possibles. Afin d'augmenter la sensibilité du dispositif, une voie possible est de recentrer ces contributions interférométriques autour de l'interféromètre maximal précédent. Ceci peut-être obtenu en décomposant chaque impulsion lumineuse π du miroir lumineux en deux impulsions $\pi/2$ brèves et réalisées aux instants t_1, t'_1, t_2, t'_2 précédents. On obtient alors le dispositif de la Figure 4.2.

Les deux bras de cet interféromètre appartiennent à la classe des "diagrammes lévitants" : la composante correspondante du champ atomique reçoit un transfert d'impulsion total de $\hbar\mathbf{k}_{e1} - \hbar\mathbf{k}_{e2}$.

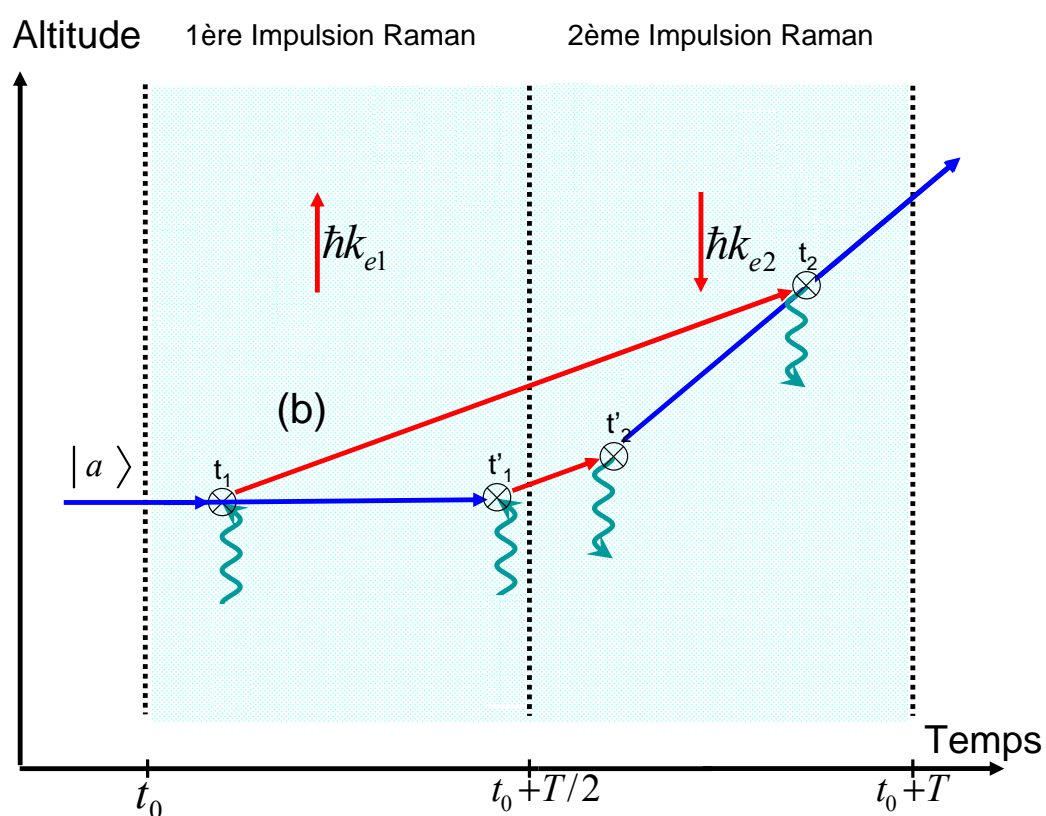


FIGURE 4.1 – Deux diagrammes lévitants réalisant un interféromètre fermé considérés immédiatement après la première impulsion-miroir. Ces deux diagrammes sont déterminés par le choix des instants d'interactions t_1, t_2, t_1', t_2' . Par souci de simplicité, ils sont représentés dans le référentiel en chute libre.

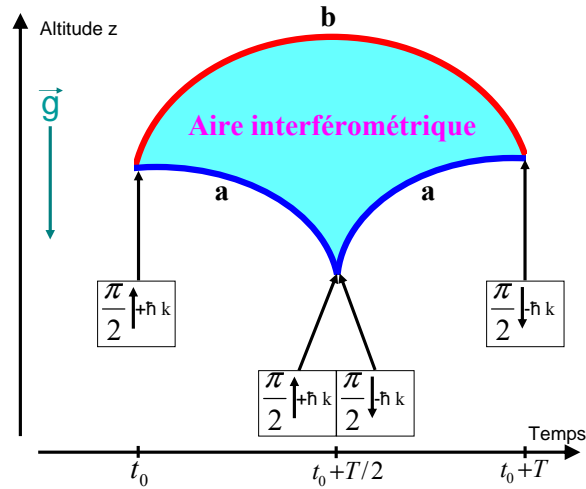


FIGURE 4.2 – Séquence d’impulsions lumineuses retenue, optimisant l’aire interférométrique générée par les diagrammes précédents. Les trajectoires atomiques sont représentées ici dans le référentiel du laboratoire en présence du champ de gravité. Cette séquence réalise un interféromètre de Bordé-Ramsey en configuration verticale.

Ce transfert compense en moyenne l’action de la gravité sur la durée T considérée si celle-ci vérifie :

$$T := T_0 = \frac{\hbar(k_{e1} - k_{e2})}{m g} \quad (4.2)$$

La durée T_0 obtenue correspond à la période résonnante du dispositif précédent si les impulsions $\pi/2$ sont réalisées par des processus Raman avec $k_{e1} \simeq 2k$ et $k_{e2} \simeq -2k$. Nous allons cependant plutôt considérer, dans ce nouveau dispositif, des impulsions à un seul photon et dans les fréquences optiques. Ces impulsions permettent un transfert de quantité de mouvement conséquent, donnant lieu à une période de lévitation du même ordre que dans le senseur précédent. Surtout, elles ouvrent la voie à la réalisation d’une horloge optique avec notre dispositif.

C’est donc la condition de lévitation qui contraint la durée totale de l’interféromètre à la valeur $T := T_0$. Sous cette condition, la géométrie retenue pour l’interféromètre (Figure 4.2) est alors optimale du point de vue de l’aire interférométrique et de la sensibilité inertielle. En fait, cette synchronisation de la séquence d’impulsions optimise également la sensibilité spectroscopique, comme nous allons le voir au paragraphe suivant. Le transfert d’impulsion vertical reçu par les atomes sortant dans l’état interne fondamental confère à cet interféromètre un rôle de miroir lorsque les interférences sont constructives dans cet état. A ce titre, nous emploierons parfois le qualificatif de “miroir interférométrique” pour désigner la séquence des quatre impulsions lumineuses. Ce miroir

sera qualifié de “résonnant” quand la quasi-totalité des atomes sort de l'interféromètre dans l'état fondamental et avec un transfert d'impulsion de $\hbar\mathbf{k}_{e1} - \hbar\mathbf{k}_{e2}$.

4.1.2 Lien avec les interféromètres de Ramsey.

Nous rappelons brièvement le principe de la spectroscopie par interférométrie de Ramsey¹. Cette analyse va nous permettre de juger de la pertinence du choix de l'interféromètre précédent en termes de sensibilité fréquentielle.

4.1.2.1 Principe de la spectroscopie de Ramsey.

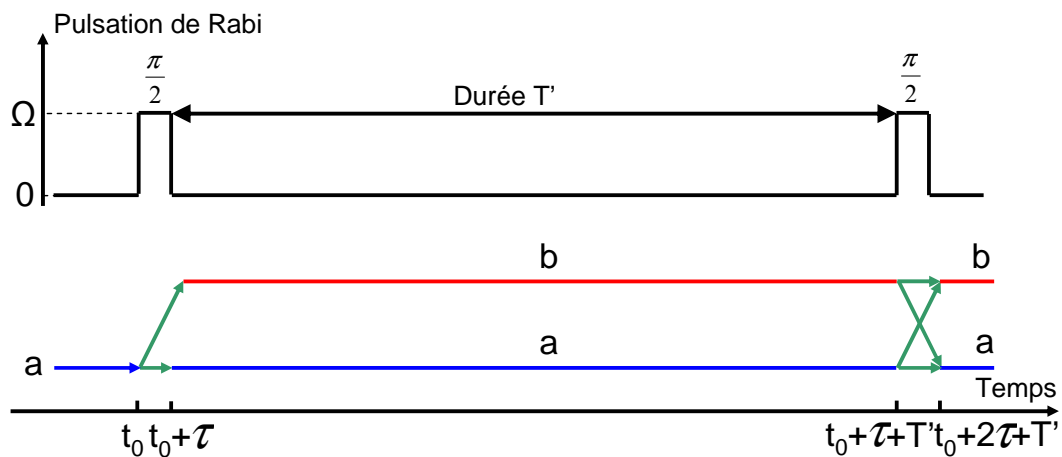


FIGURE 4.3 – *Interféromètre de Ramsey.*

Soit un atome à deux niveaux a et b , initialement dans l'état fondamental a . Dans un interféromètre de Ramsey, représenté sur la Figure 4.3, cet atome est soumis à deux impulsions lumineuses $\pi/2$ séparées par une durée temporelle T' ². A l'instant $t = t_0$, le système est donc dans l'état quantique $|\Psi\rangle = |a\rangle$. A l'issue de la première impulsion lumineuse - à l'instant $t = t_0 + \tau$ -, l'état quantique des atomes est mis dans la superposition cohérente :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a\rangle - ie^{-i\phi_1}|b\rangle) \quad (4.3)$$

Nous avons noté ϕ_1 la phase du champ électromagnétique à l'instant $t_1 = t_0 + \tau$ et supposé le champ quasi-résonnant. L'état quantique se sépare ainsi en deux bras qui vont se propager dans chaque état

1. Soulignons que ces systèmes, inventés par Norman Ramsey, ne prenaient pas en compte la quantification du mouvement externe des atomes, introduite par Christian Bordé dans ces expériences.

2. Avec les conventions précédentes $T' = T/2 - 2\tau$

interne. Le bras correspondant à l'état interne b va accumuler une phase $\phi_b = \omega_b T$ durant la période temporelle T' . Lors de la seconde impulsion, la moitié de la composante fondamentale (associée à l'état a) du spineur atomique est transférée dans l'état excité avec une phase $\phi_2 = \phi_1 + \omega T'$. Le retard de phase du bras a par rapport au bras b (du fait de la moindre énergie de l'état interne a) est alors corrigé par l'accumulation de la phase laser entre les deux instants d'interaction $\phi_2 - \phi_1 = \omega \times T'$. Pour une pulsation laser résonnante telle que $\omega = \omega_0$, les deux contributions s'équilibrent exactement. Les deux composantes transférées dans l'état b interfèrent alors constructivement³. Pour un désaccord $\delta = \omega - \omega_0$ tel que $\delta \times T' = \pi$, nous nous trouvons dans la situation opposée : les interférences sont constructives dans l'état fondamental et destructives dans l'état excité. Un écart de fréquence $\delta\omega$ se manifeste ainsi par un déphasage proportionnel à la durée T' séparant les impulsions lumineuses. Ce déphasage est susceptible d'être détecté par une mesure de population, ce qui permet de réaliser un asservissement de la fréquence du laser dont la précision $\Delta\omega$ est proportionnelle à l'inverse de $1/T'$ ^{4 5}.

4.1.2.2 Analogie avec les interféromètres atomiques précédents.

Le principe de la spectroscopie de Ramsey est en fait entièrement similaire à celui sur lequel reposaient les interféromètres atomiques exposés au chapitre précédent. Dans ces systèmes, l'état quantique des atomes était mis dans une superposition cohérente de deux états d'impulsion du type :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\mathbf{p}\rangle + |\mathbf{p} + \hbar k \mathbf{u}_z\rangle) \quad (4.4)$$

Les paquets d'ondes atomiques correspondants évoluaient alors dans chaque bras en acquérant une distance relative selon O_z grâce à leur différence de quantité de mouvement. Afin d'obtenir des franges d'interférences, il était nécessaire d'assurer le recouvrement des paquets d'onde atomiques en sortie : l'ouverture spatiale de l'interféromètre devait être inférieure à la longueur de cohérence de ces paquets. La fermeture de l'interféromètre était réalisée dans le gravimètre en chute libre par une

2. Pour simplifier nous négligeons pour l'instant les effets associés au mouvement externe. Lorsque celui-ci est pris en compte, comme au paragraphe suivant, ce n'est plus le désaccord par rapport à la fréquence de la transition qui intervient, mais le désaccord par rapport à une fréquence comportant un terme Doppler et un terme de recul.

3. Parallèlement, lors de la seconde impulsion lumineuse, la moitié de la composante excitée du spineur est transférée dans l'état fondamental avec un déphasage de $\pi + \omega_0 T' - (\phi_2 - \phi_1)$ par rapport à la composante fondamentale initiale. On vérifie que pour la pulsation résonnante $\omega = \omega_0$, ces composantes interfèrent destructivement : toute la population atomique a été transférée dans l'état excité.

4. Une situation typique est celle d'un asservissement "à flanc de frange" où le désaccord δ entre la fréquence du laser et celle de la transition atomique est maintenu à une valeur telle que $\delta \times T' = \pi/2$.

5. Notons que notre analyse simplifiée suppose que la durée de vie du niveau excité b est bien supérieure à la durée T . Par ailleurs, la durée de cohérence du champ électromagnétique utilisé doit être bien supérieure à T , sinon les fluctuations aléatoires induites dans la différence de phase $\phi_2 - \phi_1$ dégraderaient le contraste des franges d'interférences.

séquence adaptée d'impulsions lumineuses de type $\pi/2$ - π - $\pi/2$. Pour des nuages de grande longueur de cohérence, il est cependant possible d'obtenir des franges d'interférences avec une simple succession de deux impulsions $\pi/2$ espacées d'un intervalle temporel T .

En considérant le quadri-vecteur impulsion $\underline{P} = (E, \mathbf{p})$, il est facile de voir que l'évolution précédente décrit parfaitement le dispositif de Ramsey, à un changement de coordonnées près. La superposition quantique fait cette fois-ci intervenir l'énergie de l'atome en lieu et place de son impulsion :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|E_a\rangle + |E_a + \hbar\omega_0\rangle) \quad (4.5)$$

L'axe selon lequel les paquets d'ondes se séparent est alors le temps propre τ au lieu de l'altitude z . Il est possible d'observer des interférences avec des interféromètres de Ramsey ouverts si la durée T est telle que la séparation "temps propre" en sortie d'interféromètre est inférieure à la durée de vie des états internes considérés.

4.1.2.3 Conclusion.

Notre système apparaît donc comme un interféromètre de Bordé-Ramsey dont la durée totale T est déterminée par une condition de lévitation $T := T_0$. Les interactions lumière-matière sont placées de façon à maximiser la sensibilité fréquentielle : chaque couple d'impulsions $\pi/2$ est séparé de la durée $T_0/2$. Le transfert de quantité de mouvement est quasi-total quand les deux interféromètres de Ramsey impliqués sont à résonance, permettant à l'interféromètre de jouer pleinement son rôle de miroir.

4.1.3 Succession d'interféromètres.

En répétant périodiquement la séquence des quatre impulsions $\pi/2$ quasi-instantanées précédentes, comme exposé sur la Figure 4.4, on réalise une succession d'interféromètres de Bordé-Ramsey verticaux. Alternativement, on peut considérer que le champ atomique évolue dans une séquence de double impulsions $\pi/2$ brèves et associées à des vecteurs d'ondes opposés (à l'exception de la première et la dernière impulsion lumineuse de la séquence).

Comparons ce système au senseur inertiel précédent, qui reposait sur un éclairage quasi-continu des atomes. Le fait d'avoir des impulsions lumineuses quasi-instantanées resserre la continuité de diagrammes d'interaction possibles en limitant la variation des instants d'interactions à des intervalles

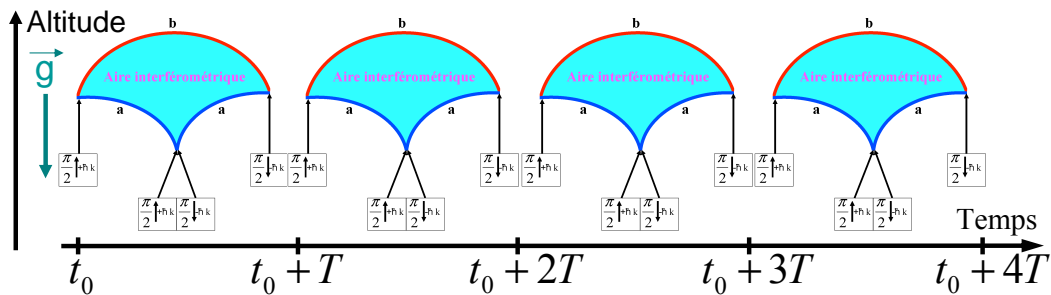


FIGURE 4.4 – Succession d’interféromètres de Bordé-Ramsey en lévitation.

temporels très fins. En passant à la limite, on peut envisager une discrétisation de ces diagrammes. Les diagrammes lévitants font alors intervenir, pour chaque couple d’impulsions $\pi/2$ associés à une onde progressive de même sens, exactement une interaction. Un exemple d’un tel diagramme est donné sur la Figure 4.5. Pour plus de clarté, nous l’avons représenté dans le référentiel accéléré en chute libre : les trajectoires des atomes entre les impulsions correspondent alors à des lignes droites. Sous l’influence de la gravité, ces chemins prennent la forme d’“arches” dans le référentiel du laboratoire. Aussi caractérisons nous parfois le système présenté ici comme un interféromètre “multi-arches”, terme faisant référence à la multiplicité des trajectoires empruntées par les paquets d’ondes atomiques.

A l’issue du i -ème miroir interférométrique, il y a en fait 4^i “diagrammes lévitants” associés aux choix possibles des instants d’interaction lors de la séquence d’impulsions. A chacun de ces diagrammes, on peut associer une trajectoire du paquet d’ondes atomique selon une succession d’“arches lévitantes”. Si des conditions de résonance (définies au paragraphe suivant) sont vérifiées, la population du nuage se concentre dans les “arches lévitantes” (représentées sur la Figure 4.6) par un phénomène d’interférences constructives. Dans la partie suivante, nous analyserons quantitativement la propagation d’un paquet d’ondes en tenant compte de la multiplicité des arches.

Dans le senseur atomique précédent, il était nécessaire d’utiliser des impulsions lumineuses à front d’onde sphérique refocalisant le nuage afin de compenser l’effet de lentille divergente des interactions atomiques. Ceci vaut aussi pour les interféromètres de Bordé-Ramsey en lévitation considérés dans notre système : en l’absence de confinement transverse, les paquets d’ondes atomiques en superposition cohérente sortent du diamètre des faisceaux lasers. Il est donc nécessaire d’employer des impulsions lumineuses sphériques dans ces interféromètres. Nous discuterons au chapitre 5, en champ faible, la diffusion d’une onde atomique sur de telles impulsions lumineuses.

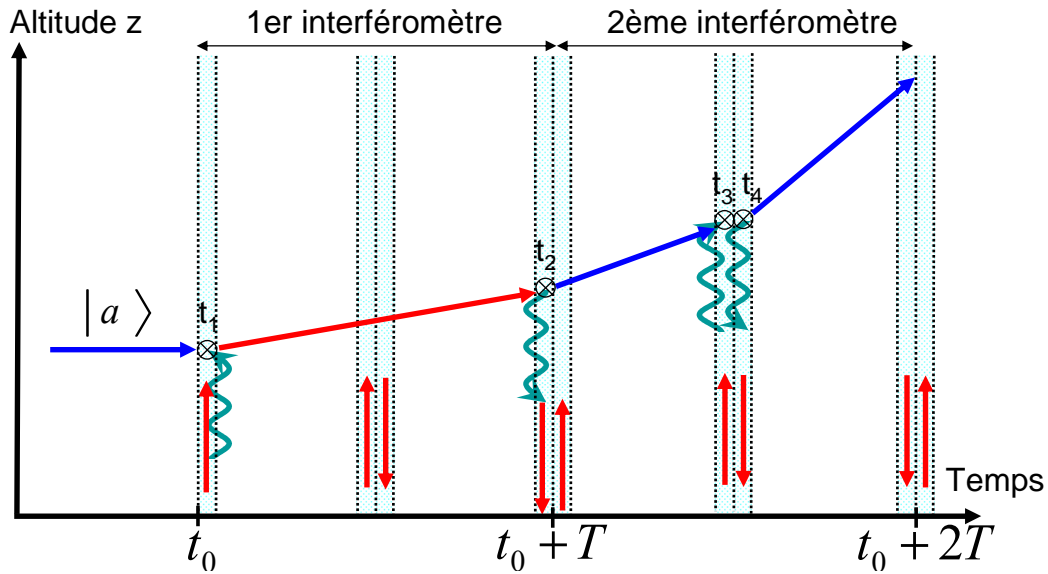


FIGURE 4.5 – Un diagramme lévitant possible avec des impulsions $\pi/2$ infiniment brèves, représenté dans le référentiel en chute libre.

4.1.4 Lévitration résonnante.

Le dispositif interférométrique exposé permet, comme le senseur du chapitre précédent, de réaliser la lévitation du nuage atomique sous réserve qu'une double condition de résonance soit remplie. Le premier volet de cette condition porte sur la durée T de l'interféromètre, il s'agit de la relation (4.2). Cette relation assure que les atomes ayant subi des diagrammes d'interactions "lévitants" ont une accélération gravitationnelle équilibrée, en moyenne, par la quantité de mouvement communiquée par les photons. Leur mouvement dans l'espace des impulsions est alors périodique. Nous précisons à présent le second volet de cette condition de résonance, qui porte sur la phase des impulsions lumineuses. L'étude est d'abord menée dans le référentiel en chute libre, puis dans le référentiel du laboratoire.

4.1.4.1 Conditions de résonance dans le référentiel en chute libre.

Il convient de définir précisément ce référentiel que nous noterons R' . Ses coordonnées s'expriment en fonction de celles du référentiel du laboratoire R selon :

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ z' = z + \frac{1}{2} g (t - t_m)^2, \end{cases} \quad (4.6)$$

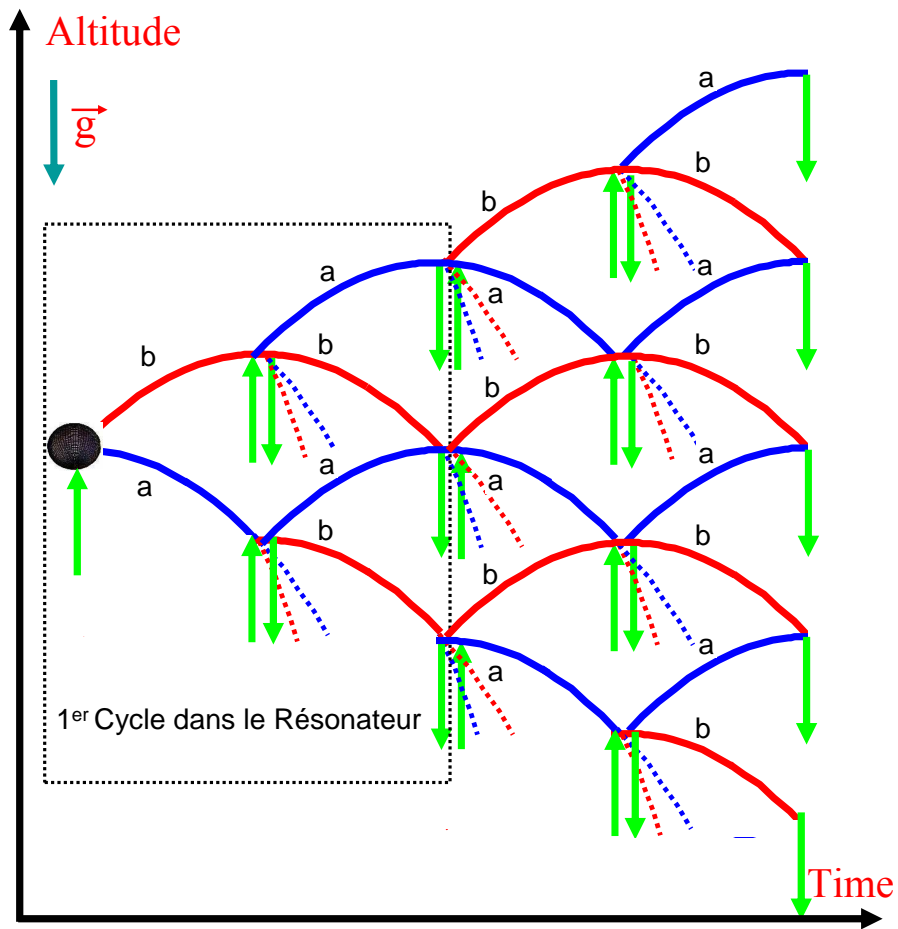


FIGURE 4.6 – Trajectoires à ondes multiples dans un interféromètre de Bordé-Ramsey évoluant dans le champ de pesanteur. Les chemins en pointillés correspondent à des diagramme “non-lévitants” qui peuvent être interprétés comme des voies de sortie de la zone de lévitation.

Dans le référentiel en chute libre, les interférences peuvent être appréhendées par la méthode de Ramsey, exposée précédemment. Plaçons nous dans ce référentiel, et examinons l'action des deux premières impulsions lumineuses $\pi/2$, séparées de la durée $T/2$, sur un nuage atomique dans l'état fondamental et d'impulsion définie \mathbf{p}_0 . Le mouvement externe se traduit alors simplement par une modification des énergies associés aux deux bras de l'interféromètre⁶. En effet, leur différence de phase n'est plus $\Delta\varphi = (E_b - E_a)/\hbar \times T/2$ comme dans l'interféromètre de Ramsey précédent, mais devient $\Delta\varphi = \omega'_1 \times T/2$ avec :

$$\omega'_1 = f_1(\mathbf{p}_0) = \frac{1}{\hbar} \left(E_b + \frac{(\mathbf{p}_0 + \hbar\mathbf{k}_{e1})^2}{2m} - E_a - \frac{\mathbf{p}_0^2}{2m} \right) \quad (4.7)$$

Si la fréquence ω des impulsions lumineuses *dans le référentiel en chute libre* satisfait $\omega := \omega'_1$, les interférences sont constructives dans l'état excité : la séquence d'impulsions est alors équivalente à une impulsion π . Comme l'avait souligné Christian Bordé [64], le mouvement externe des atomes se manifeste donc par un simple déplacement de la fréquence résonnante $\omega_{ab} \rightarrow \omega'_1 = f_1(\mathbf{p}_0)$ qui dépend désormais de l'impulsion centrale du nuage. De même, si les deux impulsions $\pi/2$ suivantes ont une fréquence dans le référentiel en chute libre vérifiant $\omega := \omega'_3$:

$$\omega'_3 = f_2(\mathbf{p}_0 + \hbar\mathbf{k}_{e1}) = \frac{1}{\hbar} \left(E_b + \frac{(\mathbf{p}_0 + \hbar\mathbf{k}_{e1})^2}{2m} - E_a - \frac{(\mathbf{p}_0 + \hbar\mathbf{k}_{e1} - \hbar\mathbf{k}_{e2})^2}{2m} \right) \quad (4.8)$$

alors leur effet sur les degrés de liberté internes des atomes est celui d'une rotation π . Si ces deux conditions sont vérifiées par les fréquences, tous les atomes du nuage se trouvent dans l'état fondamental et ont reçu un transfert d'impulsion de $\hbar\mathbf{k}_{e1} - \hbar\mathbf{k}_{e2}$ en sortie de l'interféromètre de la Figure 4.2. Celui-ci joue alors pleinement le rôle de miroir lumineux qui était dévolu à la double impulsion Raman π du système précédent.

4.1.4.2 Conditions de résonance dans le référentiel du laboratoire.

Examinons à présent comment se traduisent les conditions précédentes dans le référentiel du laboratoire. L'obtention d'une phase évoluant linéairement dans le référentiel en chute libre nécessite l'application d'une rampe de fréquence dans le référentiel du laboratoire⁷. Pour établir ceci, il suffit de considérer le changement de coordonnées 4.6 dans la phase laser $\phi(\mathbf{r}', t) = k_{ei}z' - \omega t + \varphi_{1,2}^0$ exprimées

6. Le paquet d'ondes correspondant est infiniment fin en impulsion, et a donc une longueur de cohérence arbitrairement grande, ce qui fait que l'ouverture de l'interféromètre correspondant n'intervient pas.

7. Nous avons déjà montré au chapitre 2 un résultat en fait équivalent : une telle rampe est nécessaire pour maintenir constante la valeur du paramètre de non-résonance y au cours de la chute libre.

dans le référentiel en chute libre. On obtient alors dans le référentiel du laboratoire :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = k_{ei}z + \frac{1}{2} k_{ei} g t^2 - \omega t + \varphi_{1,2}^0 \quad (4.9)$$

Le terme quadratique joue un rôle essentiel dans les interférences observées. La rampe de fréquence de pente $r = k_{ei}g$, appliquée précédemment durant l'impulsion lumineuse, doit ici être appliquée entre deux impulsions $\pi/2$ brèves associées à une même onde progressive. C'est bien l'accumulation de phase entre les impulsions lumineuses qui est déterminante ici, et pas uniquement la fréquence de ces impulsions⁸.

Nous supposons désormais, dans toute la suite de ce chapitre, qu'une rampe de fréquence de pente adaptée $r_i = k_{ei}g$ est appliquée entre chaque couple d'impulsions $\pi/2$ associées à une même onde progressive. Les rampes de fréquence démarrent en même temps que la première des impulsions $\pi/2$ de chaque interféromètre de Ramsey composant le "miroir interférométrique". Dans chaque interféromètre de Ramsey, une seule des deux fréquences associées aux impulsions $\pi/2$ est indépendante, l'autre étant fixée par la pente de la rampe de fréquence. Par convention nous choisissons de spécifier celle associée à la première impulsion $\pi/2$ de chaque onde progressive. La condition de résonance sur les fréquences s'écrit alors, dans le référentiel du laboratoire :

$$\omega_1 = f_1(\mathbf{p}_0) = \frac{1}{\hbar} \left(E_b + \frac{(\mathbf{p}_0 + \hbar\mathbf{k}_{e1})^2}{2m} - E_a - \frac{\mathbf{p}_0^2}{2m} \right) \quad (4.11)$$

$$\omega_3 = f_2(\mathbf{p}_0 + \hbar\mathbf{k}_{e1} + m\mathbf{g}T/2) = \frac{1}{\hbar} \left(E_b + \frac{(\mathbf{p}_0 + \hbar\mathbf{k}_{e1} + m\mathbf{g}T/2)^2}{2m} - E_a - \frac{(\mathbf{p}_0 + \hbar\mathbf{k}_{e1} + m\mathbf{g}T/2 - \hbar\mathbf{k}_{e2})^2}{2m} \right) \quad (4.12)$$

Avec les conventions choisies pour définir le référentiel R' , la première fréquence est inchangée $\omega_1 = \omega'_1$. En revanche, la troisième fréquence résonnante est modifiée par un terme Doppler $\omega'_3 = f_2(\mathbf{p}_0 + \hbar\mathbf{k}_{e1}) \rightarrow \omega_3 = f_2(\mathbf{p}_0 + \hbar\mathbf{k}_{e1} + m\mathbf{g}T/2)$ lors du passage dans le référentiel du laboratoire. Si les deux conditions fréquentielles sont réalisées, l'interféromètre transmet la quasi-totalité du nuage atomique dans l'état fondamental et avec une quantité de mouvement supplémentaire de $\Delta\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}_{e1} - \hbar\mathbf{k}_{e2} + m\mathbf{g}T$.

8. Dans la limite d'impulsions lumineuses quasi-instantanées, la phase laser intervient de façon discrète, uniquement lors des deux instants associés aux impulsions. Dans cette limite, il suffit que la différence de phase laser entre les instants t_1 et t_2 correspondant aux deux impulsions $\pi/2$ vérifie :

$$\phi_2(\mathbf{r}, t_2) - \phi_1(\mathbf{r}, t_1) = \frac{1}{2} k_{ei} g (t_2 - t_1)^2 - \omega(t_2 - t_1) \quad (4.10)$$

Il est alors possible le profil temporel de phase souhaité grâce à un saut de fréquence effectué exactement à l'instant milieu de la période séparant les deux impulsions $\pi/2$. Cependant, dès lors que les impulsions lumineuses ont une durée finie, il est nécessaire d'opérer une rampe de fréquence.

Comme dans le senseur précédent, l'obtention d'une succession de réflexions totales de l'échantillon avec des fréquences fixes pour les impulsions lumineuses nécessite de maintenir la périodicité du mouvement impulsionnel du nuage atomique. Cette condition, qui s'écrit $\Delta \mathbf{p} = 0$, équivaut à la condition de lévitation (4.2). Comme dans les chapitres précédents, la lévitation du nuage est alors soumise à une double condition de résonance sur laquelle repose notre mesure duale "fréquence-accelération". Nous rassemblons ici l'ensemble de ces conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} T := T_0 = \frac{\hbar(k_{e1} - k_{e2})}{m g} \\ \omega_1 = \omega_1^0(\mathbf{p}_0) = \frac{1}{\hbar} \left(E_b + \frac{(\mathbf{p}_0 + \hbar \mathbf{k}_{e1})^2}{2m} - E_a - \frac{\mathbf{p}_0^2}{2m} \right) \\ \text{Application d'une rampe de fréquence de pente } r_1 = \frac{1}{2} k_{e1} g \text{ entre les deux premières impulsions } \pi/2. \\ \omega_3 = f_2(\mathbf{p}_0 + \hbar \mathbf{k}_{e1} + m \mathbf{g} T/2) = \frac{1}{\hbar} \left(E_b + \frac{(\mathbf{p}_0 + \hbar \mathbf{k}_{e1} + m \mathbf{g} T/2)^2}{2m} - E_a - \frac{(\mathbf{p}_0 + \hbar \mathbf{k}_{e1} + m \mathbf{g} T/2 - \hbar \mathbf{k}_{e2})^2}{2m} \right) \\ \text{Application d'une rampe de fréquence de pente } r_2 = \frac{1}{2} k_{e2} g \text{ entre les deux dernières impulsions } \pi/2. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Les rampes de fréquence démarrent respectivement à l'instant initial de la première et de la troisième impulsion $\pi/2$.

4.1.4.3 Ecart à la résonance.

La discussion sur l'effet d'un écart à la résonance dans ce dispositif est essentiellement identique à celle menée au Chapitre 2. Rappelons que l'on suppose en permanence que les pentes des rampes de fréquence (effectives ou discrètes) sont convenablement ajustées suivant $r_i = \frac{1}{2} k_{e i} g$.

Un écart de la durée T par rapport à la valeur résonnante T_0 donne lieu à un défaut de périodicité du mouvement impulsionnel de l'échantillon : les atomes réfléchis sont accélérés vers le haut ou vers le bas. L'accumulation de cette accélération au cours des rebonds conduit à une dérive Doppler et à une violation de plus en plus flagrante des conditions de résonance de Ramsey. Aussi ce dispositif permet-il de déterminer la période T_0 , avec le même processus de mesure que celui du chapitre précédent : on effectue une mesure de population finale après un certain nombre d'interféromètres, et pour différentes valeurs de la période T . Lorsque celle-ci est égale à sa valeur résonnante T_0 , on s'attend à observer un pic du nombre d'atomes maintenus en lévitation.

Un écart de fréquence par rapport à la fréquence résonnante $\omega_{1,3} := \omega_{1,3}^0 + \delta\omega$ ⁹ induit également un

⁹. Cet écart est reporté sur les deuxième et quatrième fréquence du fait de la rampe de fréquence supposée constamment ajustée.

transfert de population imparfait dans l'interféromètre de Bordé-Ramsey. Une partie des atomes du nuage ne reçoit alors plus la quantité de mouvement nécessaire à la lévitation. Là encore, en sondant la population du nuage après un certain nombre de cycles, on s'attend à trouver une résonance pour la fréquence adéquate (qui n'est pas exactement la fréquence de la transition atomique ω_{ab} du fait du terme de recul). Aussi est-il possible d'utiliser le système exposé pour réaliser une source de fréquence.

La différence essentielle, par rapport à la discussion du chapitre 2, consiste en l'interprétation des fuites : les pertes sont ici de nature interférentielles, elles proviennent du peuplement de chemins-non lévitants qui sont à résonance dépeuplés par des interférences destructives. Nous allons explorer cet aspect de façon quantitative dans les paragraphes suivants. Il est remarquable que la période T intervienne à un double niveau. D'une part elle fixe la géométrie des trajectoires atomiques centrales dans l'interféromètre. D'autre part elle détermine le peuplement des trajectoires correspondante en intervenant dans la phase des interférences. D'un point de vue thermodynamique, on pourrait dire qu'une modification de la période T constitue à la fois un apport de travail (modification de la structure des niveaux, ou ici de la forme des trajectoires) et un apport de chaleur (modification du peuplement par interférences)¹⁰.

4.1.5 Représentation énergie-impulsion.

Comme pour le senseur précédent, il est instructif de donner une représentation énergie-impulsion du mouvement de l'échantillon. Celui-ci est sensiblement plus complexe que dans le senseur précédent, puisque il est désormais nécessaire de considérer non plus un seul paquet mais bien plusieurs paquets d'ondes en superposition. Nous supposons ici que les conditions de résonance précédentes (4.13) sont vérifiées, et nous ignorons l'effet d'atténuation des interférences lié à la séparation spatiale des paquets. L'évolution est décrite par les quatre graphes (a),(b),(c),(d) de la Figure 4.7 , correspondant à chaque impulsion $\pi/2$. Les étoiles représentent les paquets d'ondes en superposition cohérente, les flèches pleines les impulsions lumineuses $\pi/2$, et les flèches pointillées les trajectoires des paquets. Comme précédemment, les courbes énergie-impulsion sont des paraboles paramétrées par l'altitude centrale et par l'état interne considérés. La conservation de l'énergie totale implique à nouveau que les points représentatifs des paquets d'ondes en chute libre évoluent selon une trajectoire horizontale.

10. Toutefois, cette approche est à nuancer car des superpositions quantiques cohérentes sont en jeu ici qui échappent à la description d'un système à l'équilibre thermodynamique faisant intervenir des matrices densités diagonales. En fait, le système "atomes+photons" étudié n'est pas du tout à l'équilibre thermodynamique (notamment du fait de la présence de rayonnement lumineux hors équilibre et de l'hypothèse de départ sur le paquet d'ondes uniquement dans l'état fondamental).

A l'instant initial $t = t_0$, le nuage atomique est au repos dans l'état fondamental. Ce paquet est représenté par l'étoile verte de la Figure 4.7. La première impulsion $\pi/2$ (flèches rouge) dédouble le nuage initial en deux paquets superposés, qui évoluent selon des trajectoires séparées (Figure (a)). Après une première phase de chute libre de durée $T_0/2$, les deux paquets ont des altitudes différentes. Sous l'effet de la deuxième impulsion $\pi/2$, le paquet d'ondes fondamental (étoile verte transparente) est transféré dans l'état excité (Figure (b)). La troisième impulsion $\pi/2$ dédouble chacun des deux paquets excités (Figure (c)). Après la deuxième phase de chute libre de même durée $T_0/2$, les deux paquets dans l'état excité (étoiles rouges transparentes) sont transférés dans l'état fondamental par la quatrième impulsion $\pi/2$ (Figure (d)).

La Figure 4.7 montre que le mouvement des paquets est confiné dans l'espace des impulsions (mouvement horizontal fini des points représentatifs sur la figure). Ce confinement dans l'espace des impulsions est obtenu par un phénomène d'interférences négatives qui ferment les voies de sortie. Les interférences impliquées dans cette extinction des voies de sortie sont des interférences multi-ondes similaires à celles d'une cavité de Fabry-Perot. Ces interférences conduisent à un affinement de la distribution impulsionsnelle de l'échantillon. Par ailleurs, on notera un phénomène de diffusion en altitude qui la localisation dans les impulsions verticales précédente. Cette diffusion dans l'espace vertical permet de maintenir la relation d'incertitude Heisenberg malgré la localisation impulsionsnelle.

Enfin, les Figures (a),(b),(c),(d) montrent la nécessité d'appliquer une rampe de fréquence entre les impulsions, puisque deux fréquences différentes interviennent dans les transitions. Si la condition de cyclicité $T := T_0$ est vérifiée, ce sont les deux seules fréquences qui interviennent dans toute la séquence.

4.1.6 Conclusion.

Nous avons exposé un système expérimental reposant sur une succession d'interféromètres atomiques de Bordé-Ramsey en configuration verticale. Cette proposition est directement inspirée de l'analyse par diagrammes de Feynman du senseur précédent. Dans la limite d'impulsions lumineuses brèves, elle en constitue la version discrète : la continuité de "diagrammes lévitants" précédent fait place à un réseau discret d'"arches lévitantes". Une analyse élémentaire, analogue à celle d'un interféromètre de Ramsey, montre que le peuplement de ces "arches lévitantes" est soumis à une double condition de résonance (4.13) portant à la fois sur la durée totale de l'interféromètre, sur la fréquence des impulsions lumineuses, et sur la pente d'une rampe de fréquence entre deux impulsions $\pi/2$ successives composant un interféromètre de Ramsey.

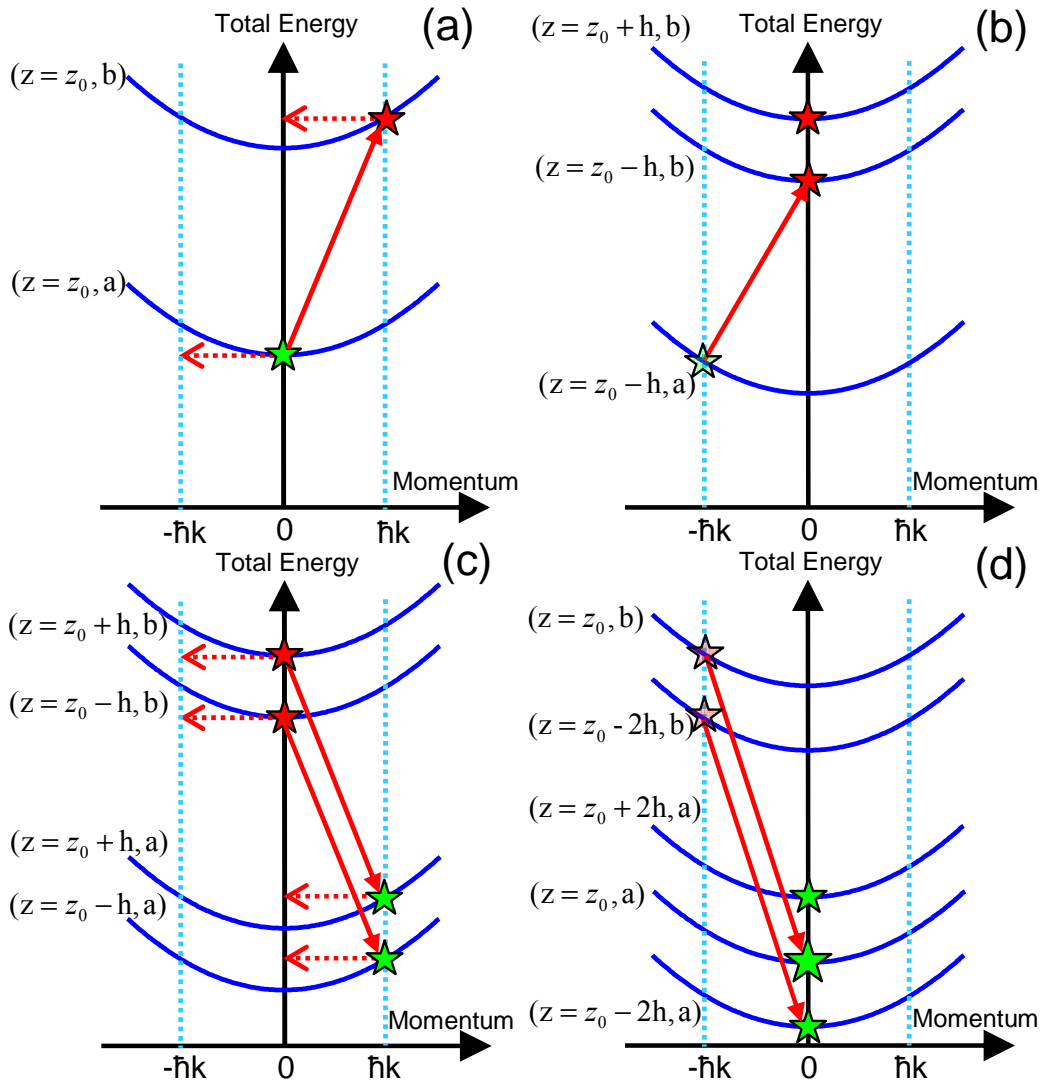


FIGURE 4.7 – Portrait du mouvement du nuage en coordonnées énergie-impulsion.

Il est remarquable que, en présence de ces conditions de résonance, l'impulsion du nuage oscille entre deux valeurs bien déterminées. Le système présenté met en oeuvre un "piège impulsional" longitudinal, dans lequel le confinement est obtenu en éteignant les voies de sorties (arches non lévitanes) par un phénomène d'interférences destructives. Le confinement transverse reste assuré par la courbure du front d'onde des impulsions lumineuses utilisées. Hors de la résonance, il est nécessaire d'élargir les chemins empruntés par le nuage atomique à l'ensemble des diagrammes d'interaction et non plus aux seuls diagrammes lévitanes. L'analyse qualitative de cette partie doit être complétée par une analyse quantitative rigoureuse, prenant en compte le mouvement externe des paquets d'ondes atomiques. C'est l'objet de la partie suivante.

4.2 Analyse quantique complète de l'interféromètre multi-ondes.

Nous donnons à présent une analyse quantique complète de la succession d'interféromètres atomiques en lévitation décrite dans la partie précédente. En particulier, nous prenons en compte l'intrication entre les degrés de libertés internes et externes du nuage atomique qui apparaît au cours du temps. Notre analyse repose sur la propagation des paquets d'ondes atomiques par la méthode *ABCD*.

Nous commençons par appliquer la modélisation quantique aux atomes subissant une simple séquence de deux impulsions $\pi/2$ dessinant un interféromètre de Ramsey. Nous analysons ensuite l'évolution du spineur atomique après un cycle interférométrique complet. La structure du paquet d'ondes atomiques en sortie présente une forte analogie avec celle d'une onde lumineuse issue d'une cavité de Fabry-Perot¹¹. Nous présentons enfin les résultats de la simulation numérique du système après plusieurs cycles interférométriques. Ces résultats, qui laissent augurer d'excellentes performances pour le capteur, montrent que le nuage atomique reste confiné dans l'espace des impulsions lorsque les conditions de résonance sont vérifiées, et que les franges centrales associées aux figures de résonance s'affinent nettement après plusieurs cycles.

4.2.1 Propagation du champ atomique dans la série d'impulsions lumineuses.

La prise en compte du mouvement externe des atomes dans les interféromètres en lévitation conduit à considérer un champ spinoriel au lieu du simple système à deux états précédents :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} b(\mathbf{r}, t) \\ a(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

A l'instant initial $t = t_0$, nous supposons que tous les atomes du nuage sont au repos et dans l'état fondamental. La propagation envisagée étant linéaire, nous faisons appel à la méthode usuelle de la fonction générique gaussienne décrite au chapitre 1. Aussi considérons-nous la composante

11. La structure du paquet d'ondes dans l'espace des impulsions, montrant précisément le phénomène d'interférences multi-ondes observé, sera développée dans une publication ultérieure.

fondamentale du spineur comme un paquet d'ondes gaussien paramétré par α :

$$\psi(\mathbf{r}, t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ wp(r_0, p_0, X_0, Y_0, \alpha) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Bien que l'utilisation d'ondes lumineuses sphériques soit indiquée pour réaliser le confinement transverse du nuage atomique, afin de simplifier l'analyse du dispositif, nous ignorons pour l'instant dans notre modélisation les effets de courbure du champ lumineux. Leur impact sur la fréquence résonnante associée aux interféromètres lévitants fera l'objet d'une analyse perturbative (champ électromagnétique faible) au chapitre 5. Nous considérons alors simplement les impulsions lumineuses comme des ondes planes progressives :

$$E(x, y, z, t) = \frac{1}{2}E(t)e^{i(k(z-z_0)-\omega(t-t_0)+\phi_0)} + c.c$$

Ces impulsions sont supposées quasi-instantanées, si bien que leur action sur les paquets d'ondes atomiques est correctement décrite par une matrice de diffusion instantanée¹².

Remarquons que le spineur atomique peut être décomposé à tout instant selon une somme de paquet d'ondes atomiques gaussiens :

$$\psi(\mathbf{r}, t_0) = \sum_{k=1}^{N_b} A_k \begin{pmatrix} wp(r_{0k}, p_{0k}, X_k, Y_k) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=N_b+1}^{N_a+N_b} A_k \begin{pmatrix} 0 \\ wp(r_{0k}, p_{0k}, X_k, Y_k) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Une telle structure est stable par propagation $ABCD$ entre les impulsions lumineuses. Elle l'est également durant l'interaction avec le champ laser, puisque les impulsions lumineuses agissent sur les paquets gaussiens par une simple matrice 2×2 numérique dépendant de leurs positions et impulsions centrales (le transfert d'impulsion $\hbar\mathbf{k}_e$ étant sous-entendu). A cause de sa dépendance vis à vis des positions et impulsions centrales, la matrice de diffusion affecte différemment chaque paquet intervenant dans la somme (4.15). Cette dépendance joue un rôle central dans la structuration de l'onde atomique par la série d'impulsions lumineuses. Lors de chaque impulsion, on calcule donc le produit des vecteurs de la somme (4.15) par la matrice de diffusion présentée précédemment en

12. Ce qui n'était pas le cas des impulsions lumineuses longues du dispositif précédent : la modélisation adoptée au chapitre 2 est en fait une approximation assez grossière.

(2.17) :

$$S(\theta, t, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) = \begin{pmatrix} M_{bb}(\theta, \mathbf{p}_0) & M_{ba}(\theta, \mathbf{p}_0) e^{i\phi(t, \mathbf{r}_0)} e^{i\mathbf{k}_e \cdot (\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)} e^{if_{ba}(\hat{\mathbf{r}})} \\ M_{ab}(\theta, \mathbf{p}_0) e^{-i\phi(t, \mathbf{r}_0)} e^{-i\mathbf{k}_e \cdot (\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)} e^{if_{ab}(\hat{\mathbf{r}})} & M_{aa}(\theta, \mathbf{p}_0) \end{pmatrix}$$

Ainsi, après une impulsion lumineuse quasi-instantanée d'angle $\theta = \pi/2$, l'expression du spineur devient :

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t_0) &= \sum_{k=1}^{N_b} \begin{pmatrix} M_{bb}(\frac{\pi}{2}, p_{0k}) & M_{ba}(\frac{\pi}{2}, p_{0k}) e^{i\phi(t, r_{0k})} e^{i\mathbf{k}_e \cdot (\hat{\mathbf{r}} - r_{0k})} e^{if_{ba}(\hat{\mathbf{r}})} \\ M_{ab}(\frac{\pi}{2}, p_{0k}) e^{-i\phi(t, r_{0k})} e^{-i\mathbf{k}_e \cdot (\hat{\mathbf{r}} - r_{0k})} e^{if_{ab}(\hat{\mathbf{r}})} & M_{aa}(\frac{\pi}{2}, p_{0k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k wp_k \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{k=N_b+1}^{N_a+N_b} \begin{pmatrix} M_{bb}(\frac{\pi}{2}, p_{0k}) & M_{ba}(\frac{\pi}{2}, p_{0k}) e^{i\phi(t, r_{0k})} e^{i\mathbf{k}_e \cdot (\hat{\mathbf{r}} - r_{0k})} e^{if_{ba}(\hat{\mathbf{r}})} \\ M_{ab}(\frac{\pi}{2}, p_{0k}) e^{-i\phi(t, r_{0k})} e^{-i\mathbf{k}_e \cdot (\hat{\mathbf{r}} - r_{0k})} e^{if_{ab}(\hat{\mathbf{r}})} & M_{aa}(\frac{\pi}{2}, p_{0k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A_k wp_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons noté wp_k le k -ème paquet d'ondes $wp(r_{0k}, p_{0k}, X_k, Y_k)$. Les facteurs de courbure f_{ba} et f_{ab} reflètent un effet de lentille des impulsions lumineuses. Le lien entre ces termes quadratiques et la focalisation du nuage sera établi au chapitre 5. Les facteurs $e^{\pm i\mathbf{k}_e \cdot (\hat{\mathbf{r}} - r_{0k})}$ reflètent simplement le transfert d'impulsion $\Delta p = \pm \hbar k_e \mathbf{u}_z$ associé à l'émission ou à l'absorption d'un photon.

La propagation des nuages atomiques dans la série d'impulsions est à la fois simple et complexe.

Elle est simple car l'état quantique du système peut être décrit analytiquement à tout instant au moyen d'un nombre fini de paramètres associé à chaque paquet d'ondes : amplitude, phase, positions et impulsions centrales (les matrices X et Y étant identiques pour tous les paquets d'ondes)¹³.

Elle est complexe du fait du grand nombre de paramètres à prendre en compte : à chaque impulsion $\pi/2$, le nombre de paquets gaussiens est doublé. Aussi faut-il tenir compte de $N = 2^{16} \simeq 64000$ paquets d'ondes après quatre interféromètres de Bordé-Ramsey successifs. Même si l'évolution de chaque paquet est simple et équivalente à celle de quelques paramètres, leur démultiplication exponentielle constitue un obstacle à la simulation numérique de ce modèle au delà de quelques cycles interférométriques. La complexité algorithmique (exponentielle) de la simulation de la propagation est révélatrice de la difficulté à simuler l'évolution d'un état quantique fortement intriqué : ici, le nombre de termes en superposition cohérente croît exponentiellement avec le temps¹⁴.

13. Soulignons par ailleurs que, à la différence de la modélisation approximative du senseur précédent par un unique mode Gaussien, la description par une somme de paquets Gaussiens est cette fois-ci correcte.

14. Dans la nature, toutes les composantes de la superposition suivent en parallèle une évolution Hamiltonienne. En revanche, lors d'une simulation avec un ordinateur classique, les paramètres de chaque paquet d'ondes doivent être calculés de façon séparée : tous les paramètres r_{0k}, p_{0k} doivent être calculés séparément alors que la nature les calcule tous simultanément par l'évolution Hamiltonienne. La difficulté éprouvée à simuler numériquement l'évolution quantique de ce système est une illustration du parallélisme naturel du calcul quantique, qui permet aux algorithmes

4.2.2 Action de deux impulsions $\pi/2$ sur un nuage atomique en chute libre.

Avant d'aborder la propagation des paquets d'ondes atomiques dans la séquence d'interféromètres, il est instructif de commencer par appliquer la modélisation précédente à une simple succession de deux impulsions $\pi/2$. Ce système (analogue à un interféromètre de Ramsey) est représenté sur la Figure 4.8. Nous décrivons d'abord l'évolution du spineur dans le référentiel en chute libre (ou de façon équivalente dans un espace sans gravité), puis dans le référentiel du laboratoire. Nous évaluons ensuite l'influence du mouvement des paquets d'ondes sur les voies de sortie de l'interféromètre. Nous

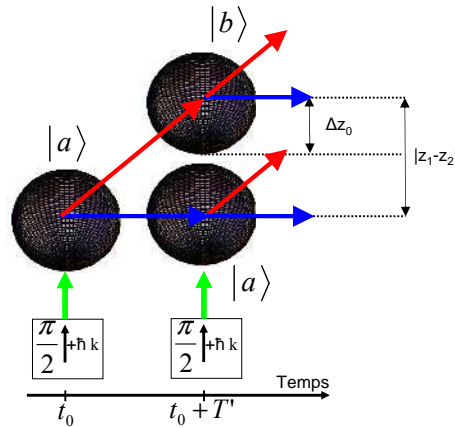


FIGURE 4.8 – Représentation de l'évolution des cohérences atomiques dans un interféromètre de Ramsey. Les paquets atomiques sont représentés

supposons les vecteurs \mathbf{p}_0 et \mathbf{k} colinéaires à l'axe vertical O_z . Nous exprimerons souvent le paquet d'ondes $w_p(r_0, p_0, X_0, Y_0, \alpha)$ sous la forme¹⁵ :

$$w_p(r_0, p_0, X, Y, \alpha) = e^{ip_0(z-z_0)} F(r - r_0, X, Y)$$

quantiques de surpasser les algorithmes classiques dans la résolution de problèmes modélisables par l'évolution d'un état quantique intriqué.

14. Le fait de prendre une impulsion initiale \mathbf{p}_0 ayant une composante horizontale ne changerait pas la discussion mais alourdirait inutilement les notations. Dans ce même but d'alléger les notations, nous désignons par r le vecteur \mathbf{r} tridimensionnel.

15. La dépendance de la fonction F en α est implicite pour alléger les notations.

4.2.2.1 Evolution dans le référentiel en chute libre.

La condition de conservation de l'énergie associée aux impulsions s'écrit dans ce référentiel :

$$\hbar\omega = E_b + \frac{(p_0 + \hbar k)^2}{2m} - E_a - \frac{p_0^2}{2m} \quad (4.16)$$

Nous supposons cette condition vérifiée pour les deux impulsions lumineuses $\pi/2$, si bien que la matrice de diffusion a une forme simple :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -ie^{i\phi(r_{0k},t)} \\ -ie^{-i\phi(r_{0k},t)} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Immédiatement après la première impulsion, réalisée à $t = t_0^+$, le nuage est décrit par :

$$\psi(r, t_0^+) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -ie^{i\phi_0} F(r - r_0, X_0, Y_0) e^{\frac{i}{\hbar}(p_0 + \hbar k)(z - z_0)} \\ F(r - r_0, X_0, Y_0) e^{\frac{i}{\hbar}p_0(z - z_0)} \end{pmatrix}$$

Les deux composantes du spineur atomique évoluent ensuite librement durant une durée $T/2$. Du fait de leur différence d'impulsion centrale, celles-ci acquièrent une séparation spatiale ainsi qu'une phase relative liée au terme d'action. Ainsi le spineur s'exprime-t-il, à l'instant $t = t_0 + T'^-$:

$$\psi(r, t_0 + T'^-) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -ie^{i\phi_0} e^{\frac{i}{\hbar}S_1} F(r - r_1, X, Y) e^{\frac{i}{\hbar}p_1(z - z_1)} \\ e^{\frac{i}{\hbar}S_2} F(r - r_2, X, Y) e^{\frac{i}{\hbar}p_2(z - z_2)} \end{pmatrix}$$

Les quantités de mouvement p_1, p_2 ainsi que les positions r_1, r_2 à l'instant $t = t_0 + T'$ sont simplement celles d'une particule libre non-relativiste en $r_0 = (0, 0, z_0)$ à l'instant initial $t = t_0$ et d'impulsions respectives $p_1 = p_0 + \hbar k$ et $p_2 = p_0$. Les matrices X et Y sont déterminées à l'instant $t = T_0 + T'$, à partir des matrices initiales X_0, Y_0 et de la relation $ABCD$. Les facteurs S_1 et S_2 correspondent à l'action classique d'une particule libre de masse m , d'énergie interne E_i (où $E_1 = E_b, E_2 = E_a$) et de quantité de mouvement p_i :

$$S'_i = S'(r_0, p_i, E_i, T') = \left(\frac{p_i^2}{2m} - E_i \right) T' \quad (4.18)$$

À l'issue de la seconde impulsion $\pi/2$, le spineur atomique est de la forme :

$$\psi(r, t_0 + T'^+) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -ie^{i\phi_0} e^{-\frac{i}{\hbar}p_1 z_1} e^{\frac{i}{\hbar}S'_1} F(r - r_1, X, Y) e^{\frac{i}{\hbar}p_1 z} - ie^{i\phi_2} e^{-\frac{i}{\hbar}p_1 z_2} e^{\frac{i}{\hbar}S'_2} F(r - r_2, X, Y) e^{\frac{i}{\hbar}p_1 z} \\ e^{-\frac{i}{\hbar}p_2 z_2} e^{\frac{i}{\hbar}S'_2} F(r - r_2, X, Y) e^{\frac{i}{\hbar}p_2 z} - e^{i(\phi_0 - \phi_1)} e^{-\frac{i}{\hbar}p_2 z_1} e^{\frac{i}{\hbar}S'_1} F(r - r_1, X, Y) e^{\frac{i}{\hbar}p_2 z} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Les phases ϕ_1 et ϕ_2 correspondent aux phases laser évaluées aux positions respectives z_1, z_2 et à l'instant $t = t_0 + T'$.

Dans la limite où la séparation spatiale des paquets d'ondes atomiques peut être négligée, les deux impulsions $\pi/2$ résonnantes agissent comme une impulsion unique π . Autrement dit, si les positions centrales convergent ($z_1 \rightarrow z_2$) ou si la longueur de cohérence des paquets d'onde tend vers l'infini ($XY^{-1} \rightarrow 0$), les interférences doivent être parfaitement constructives dans l'état excité et parfaitement destructives dans l'état fondamental. Ceci est réalisé si le spineur admet une expression de la forme :

$$\psi(r, t_0 + T'^+) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} e^{i\phi_b} [F(r - r_1, X, Y) + F(r - r_2, X, Y)] e^{\frac{i}{\hbar} p_1 z} \\ e^{i\phi_a} [F(r - r_1, X, Y) - F(r - r_2, X, Y)] e^{\frac{i}{\hbar} p_2 z} \end{array} \right) \quad (4.20)$$

Cette écriture implique la relation suivante entre les phases de l'expression (4.19) :

$$\begin{cases} S_2 - S_1 - p_1(z_2 - z_1) = \hbar(\phi_0 - \phi_2) \\ S_2 - S_1 - p_2(z_2 - z_1) = \hbar(\phi_0 - \phi_1) \end{cases} \quad (4.21)$$

Cette égalité reflète la compensation entre trois contributions intervenant dans la relation de phase :

- La différence de phase d'action $(S_2 - S_1)/\hbar$
- Les différences de phase laser $\phi_i - \phi_0$.
- La phase de séparation spatiale des centres des paquets d'ondes $p_i(z_2 - z_1)/\hbar$.

Cette annulation (autrement appelée "théorème des points milieux") admet une interprétation simple, si l'on examine la structure de la propagation dans un espace à $4 + 1$ dimensions : la différence d'action $S_2 - S_1$ peut s'interpréter comme un terme de séparation "temps propre" des paquets d'ondes atomiques analogue au terme $p_i(z_2 - z_1)$. Le lecteur intéressé trouvera une démonstration détaillée dans le cours de Christian Bordé sur l'optique atomique à $4 + 1$ dimensions [41].

Nous allons vérifier simplement ici le jeu d'équations (4.21). Nous vérifions uniquement la première équation, la seconde étant obtenue par un calcul similaire. En utilisant l'expression (4.18), on exprime

les termes du membre de gauche comme :

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \left(E_b - E_a - \frac{p_0 \hbar k}{m} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) T' \\ p_1(z_1 - z_2) &= (p_0 + \hbar k) \left(\frac{\hbar k}{m} \right) T' \end{aligned}$$

La séparation des centres des paquets d'ondes élimine bien la contribution Doppler $\frac{p_0 \hbar k T'}{m}$ du terme d'action. En utilisant la condition de résonance de Bragg (4.16) ainsi que la relation $z_2 - z_0 = \frac{p_0}{m} \times T'$, on obtient pour la différence des phases laser :

$$\hbar(\phi_2 - \phi_0) = \hbar k(z_2 - z_0) - \hbar \omega T' = \left(E_b - E_a + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) T'$$

Ceci permet d'établir la première relation du système (4.21), la seconde étant obtenue par un calcul similaire. Nous avons ainsi montré l'expression (4.20) du spineur atomique en sortie de l'interféromètre. La séparation spatiale des paquets d'ondes durant l'impulsion se traduit par des translations différentes (selon z_1 ou z_2) en argument de la fonction F , et donc par un recouvrement imparfait des paquets d'ondes atomiques. Comme nous allons le voir, ceci atténue le contraste des interférences.

4.2.2.2 Evolution dans le référentiel du laboratoire.

Il est instructif de vérifier le résultat précédent en se plaçant dans le référentiel du laboratoire. Nous supposons comme auparavant que les deux impulsions $\pi/2$ successives sont résonnantes, et nous introduisons un déphasage additionnel $\Delta\phi$ lors la seconde impulsion $\pi/2$ laissé comme paramètre libre. Nous déterminerons sa valeur d'ajustement pour l'obtention d'un transfert total de population¹⁶.

Il suffit de reprendre l'expression (4.19) en tenant compte des modifications dans les phases de l'action et des lasers. Dans le référentiel du laboratoire les positions et impulsions centrales sont données par :

$$\begin{cases} z_1 = r_0 + \frac{(p_0 + \hbar k)T'}{m} - \frac{1}{2}gT'^2 \\ z_2 = r_0 + \frac{p_0 T'}{m} - \frac{1}{2}gT'^2 \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = p_0 + \hbar k - mgT' \\ p_2 = p_0 - mgT' \end{cases} \quad (4.22)$$

L'action classique d'un mobile d'altitude et d'impulsion initiales (r_0, p_0) , évoluant dans un champ de

¹⁶. qui est en accord avec les conclusions de la partie précédente quant au profil temporel de phase adapté à la spectroscopie de Ramsey en chute libre.

gravité uniforme pendant un temps t et avec une énergie interne E , s'exprime :

$$S(r_0, p_0, E, t) = \frac{1}{3} m g t^3 - p_0 g t^2 + \left(\frac{p_0^2}{2m} - m g z_0 - E \right) t \quad (4.23)$$

Du fait de l'accélération des atomes entre les deux impulsions lumineuses, les fréquences résonnantes ω_1, ω_2 associées aux deux impulsions lumineuses sont désormais différentes :

$$\begin{aligned} \hbar\omega_1 &= E_b + \frac{(p_0 + \hbar k)^2}{2m} - E_a - \frac{p_0^2}{2m} \\ \hbar\omega_2 &= E_b + \frac{(p_0 - m g T' + \hbar k)^2}{2m} - E_a - \frac{(p_0 - m g T')^2}{2m} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Les phases lasers de la première et seconde impulsion s'expriment respectivement $\phi_I(r, t) = \omega_1(t - t_0) - k(z - z_0) + \phi_0$ et $\phi_{II}(r, t) = \omega_2(t - t_0) - k(z - z_0) + \Delta\phi + \phi_0$. Le spineur atomique s'exprime dans le référentiel du laboratoire en remplaçant dans (4.19) les actions $S'_{1,2}$ et les phases laser $\phi_{1,2}$ précédentes par $S_{1,2}$ et $\phi_{II}(z_{1,2}, t_0 + T')$. Il s'agit alors de vérifier le jeu de relations (4.21) précédent. Un calcul élémentaire montre que le membre de gauche s'écrit :

$$S_2 - S_1 + p_1(z_1 - z_2) = \left(E_b + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_a \right) T'$$

Le terme faisant intervenir la différence de phase lasers :

$$\hbar(\phi_0 - \phi_2) = \left(E_b + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_a \right) T' - \hbar \frac{k g}{2} T'^2 - \hbar \Delta\phi$$

Les relations de phase (4.21) sont préservées si le déphasage additionnel vérifie :

$$\Delta\phi = -\frac{k g}{2} T'^2 \quad (4.25)$$

En utilisant les condition de conservation de l'énergie (4.24), on voit que le déphasage $\Delta\phi$ introduit est le même que celui résultant d'un saut de fréquence effectué à l'instant milieu $t = T'/2$:

$$\phi_{II}(z, t) = k(z - z_0) - \omega_2(t - t_0) + \Delta\phi + \phi_0 = k(z - z_0) - [\omega_2(t - T'/2) + \omega_1(T'/2 - t_0)] + \phi_0$$

Grâce à ce déphasage additionnel $\Delta\phi$, la phase laser imprimée sur l'onde atomique est la même que celle accumulée par une rampe de fréquence de pente $r = -kg$ entre les impulsions lumineuses :

$$\phi_{II}(z, t_0 + T') - \phi_I(z, t_0 + T') = - \int_{t_0}^{t_0 + T'} dt (\omega_1 - k g t)$$

Ce résultat est conforme à l'analyse précédente : avec un tel profil temporel, tout se passe comme si la phase du champ évoluait dans le référentiel en chute libre avec une fréquence constante.

4.2.2.3 Influence du mouvement atomique externe sur le contraste des franges de Ramsey.

Considérons à nouveau l'expression (4.20) donnant le spineur atomique en sortie de l'interféromètre de Ramsey. Contrairement à une impulsion π parfaite, la séquence des deux impulsions $\pi/2$ donne lieu seulement à un transfert de population partiel dans l'état excité.¹⁷ Le contraste des franges d'interférences est ainsi atténué par la séparation des paquets. Selon une analyse dimensionnelle élémentaire, il devrait dépendre du rapport entre la distance de leurs centres sur leur longueur de cohérence (dans la direction de séparation).

Plaçons nous à présent dans les conditions de résonance (4.13) établies dans la partie précédente. Comme représenté sur la Figure 4.7, nous avons alors conclu à un mouvement périodique du nuage atomique dans l'espace des impulsions. La prise en compte des effets de séparation spatiale nuance cependant cette analyse. En effet, la fraction du nuage atomique non transférée dans l'état excité en sortie de l'interféromètre de Ramsey peut s'interpréter comme un terme de "fuite" de cette trajectoire périodique. Les "fuites" ne reflètent pas ici une violation des conditions de résonance mais la non-fermeture des trajectoires atomiques centrales dessinant l'interféromètre de Ramsey. Les atomes composant la population "fuyante" ne reçoivent pas le transfert de quantité de mouvement adéquat pour assurer leur lévitation, et sortent graduellement de la zone de détection.

Nous nous proposons maintenant de quantifier les pertes d'atomes correspondantes en prenant l'exemple d'un mode gaussien fondamental. Bien que seule la direction O_z de séparation des paquets d'onde joue un rôle déterminant, afin d'en donner une description réaliste, nous adoptons un formalisme tridimensionnel. On considère comme état initial un mode fondamental gaussien saturant les relations d'incertitude, et de matrices initiales :

$$X_0 = \begin{pmatrix} \Delta x_0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y_0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta z_0 \end{pmatrix} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} i\hbar/(m\Delta x_0) & 0 & 0 \\ 0 & i\hbar/(m\Delta y_0) & 0 \\ 0 & 0 & i\hbar/(m\Delta z_0) \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

L'effet des interactions atomiques est négligé ici, si bien que les matrices X, Y sont alors données à

17. De façon analogue, en présence d'un désaccord $\delta\omega$ générant idéalement des interférences de Ramsey totalement destructives dans l'état excité ($\delta\omega \times T = \pi$), on observe ici un résidu de population fondamentale associé au recouvrement partiel des paquets d'ondes.

l'instant $t = T$ par l'évolution libre :

$$X = X_0 + Y_0 \times T \quad Y = Y_0 \quad (4.27)$$

La probabilité de fuite p_{out} correspond au carré de la norme de la composante inférieure du spineur atomique :

$$p_{out} = \frac{1}{4} \int d^3r |F(r - r_1, X, Y) - F(r - r_2, X, Y)|^2 \quad (4.28)$$

soit encore :

$$\begin{aligned} p_{out} &= \frac{1}{4} \int d^3r [|F(r - r_1, X, Y)|^2 + |F(r - r_2, X, Y)|^2 \\ &\quad - F(r - r_1, X, Y)F^*(r - r_2, X, Y) - F^*(r - r_1, X, Y)F(r - r_2, X, Y)] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Calculons le terme interférentiel $I = \int d^3r F(r - r_1, X, Y)F^*(r - r_2, X, Y)$. Cette intégrale triple se factorise en trois intégrales simples :

$$I = \frac{\pi^{-3/2}}{\det(X)} \Pi_{\eta=x,y,z} \int dr_\eta \exp[-P_\eta(r_\eta - a_\eta)^2] \exp[-P_\eta^*(r_\eta - b_\eta)^2] \quad (4.30)$$

L'intégration sur les coordonnées $\eta = x, y$ est triviale car dans ces intégrales $a_{x,y} = b_{x,y}$. Cette intégration fait juste apparaître un produit $\pi^{1/2}\Delta x \times \pi^{1/2}\Delta y$ compensant les facteurs correspondants à ces coordonnées dans la constante de normalisation $\pi^{3/2}/|\det X|$. L'intégration sur l'altitude z n'est guères difficile, elle peut-être menée à l'aide de la relation suivante, appropriée pour décrire les interférences de paquets d'ondes gaussiens [37] :

$$\begin{aligned} &\int dz \exp[-P(z - a)^2] \exp[-P^*(z - b)^2] \exp\left[i\frac{Mv}{\hbar}(z - a)\right] \exp\left[-i\frac{Mv'}{\hbar}(z - b)\right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{P + P^*}} \exp\left[-i\frac{M(v'b - va)}{\hbar}\right] \exp[iK(a + b)] \exp\left[-\frac{PP^*}{P + P^*}(a - b)^2 - \frac{K^2}{P + P^*} - \frac{2K(a - b)\text{Im}P}{P + P^*}\right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

avec la quantité $K = M(v - v')/(2\hbar)$. En appliquant ceci au terme interférentiel considéré, on obtient :

$$I = \frac{\pi^{-3/2}}{|\det X|} (\pi^{1/2}\Delta x)(\pi^{1/2}\Delta y) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{P_z + P_z^*}} \exp\left[-\frac{P_z P_z^*}{P_z + P_z^*}(a_z - b_z)^2\right] \quad (4.32)$$

Dans l'intégrale considérée $a_z = z_1, b_z = z_2$. Par ailleurs, en utilisant l'expression des matrices X et Y , on peut exprimer le facteur P_z en fonction de la longueur de cohérence dans cette direction :

$$P_z = \frac{1}{2\Delta z_0^2 [1 + i\hbar/(m\Delta z_0^2)T]}$$

La quantité $P + P^*$ devient naturellement :

$$P_z + P_z^* = 2\text{Re}P_z = \frac{1}{[\Delta z_0^2 + \hbar^2/m^3 \Delta z_0^2 T^2]} = \frac{1}{\Delta z^2}$$

Le facteur $\sqrt{\frac{\pi}{P_z + P_z^*}} = \pi^{1/2} \Delta z$ équilibre donc le terme correspondant dans la constante de normalisation $\pi^{3/2} / |\det X|$. On obtient finalement la probabilité de fuite :

$$p_{out} = \frac{1}{2} \left[1 - \exp \left[- \left(\frac{z_1 - z_2}{2\Delta z_0} \right)^2 \right] \right] \quad (4.33)$$

Comme prévu, la probabilité de fuite à résonance ne dépend que du rapport entre la séparation spatiale $|z_1 - z_2|$ et la longueur de cohérence Δz_0 . Celle-ci est bien le paramètre d'échelle pertinent : c'est quand la demi-distance des centres devient de l'ordre de la longueur de cohérence (càd que les "boules" de la Figure 4.8 commencent à ne plus se recouvrir) que les pertes à résonance deviennent significatives¹⁸. La décroissance exponentielle du contraste traduit la forme gaussienne des paquets. La disparition de ces fuites dans la limite de grande longueur de cohérence $\Delta z_0 \gg |z_1 - z_2|$ montre l'intérêt d'utiliser des sources atomiques cohérentes dans ce dispositif.

4.2.3 Propagation multi-arches.

Il est manifeste sur l'expression (4.16) que le nombre de paquets gaussiens se dédouble à chaque impulsion lumineuse $\pi/2$. Leurs positions centrales évoluent donc selon un réseau d'arches dont les impulsions lumineuses constituent les nœuds. Comme les impulsions $\pi/2$ sont groupées par paires contrapropageantes (hormis la première et la dernière impulsion), chaque nœud du réseau (représenté sur la Figure 4.6) génère quatre nouvelles arches.

Dans ce réseau, les "arches lévitanes" évoquées précédemment (cf Fig. 4.4) deviennent vite minoritaires. Toutefois, si les conditions de résonance sont satisfaites et si la longueur de cohérence des paquets est suffisamment grande, les interférences sont constructives dans les arches lévitanes et destructives dans les autres arches. Les voies de sorties des "arches lévitanes", ou encore du cycle impulsif périodique de la Figure 4.7, sont alors éteintes par ces interférences destructives.

Immédiatement après la m -ème impulsion, le spineur atomique comporte donc $2^{(m-1)}$ paquets d'onde en superposition cohérente dans chaque état. Chaque arche est indexée par un couple d'entier

¹⁸. Dans la limite de faible cohérence $\Delta z_0 \ll |z_1 - z_2|$, les deux états internes sont équiprobables en sortie de l'interféromètre.

(e_i, m_i) correspondant à l'état interne et au nombre algébrique de quanta d'impulsion reçus par les atomes de la part du champ laser. Le paquet d'ondes généré à partir de la trajectoire suivante :

- Première arche suivie : paquet d'ondes dans l'état interne e_1 et ayant reçu au total la quantité de mouvement $m_1 \hbar k$ du champ laser.
- ...
- m -ème arche suivie : paquet d'ondes dans l'état interne e_m et ayant reçu au total la quantité de mouvement $m_m \hbar k$ du champ laser.

sera désigné par la fonction¹⁹ :

$$\Phi^{(e_1 m_1 e_2 m_2 \dots e_m m_m)}(\mathbf{r}, t) \quad (4.34)$$

4.2.4 Analyse d'un cycle interférométrique.

Nous déterminons ici le spineur atomique après un cycle interférométrique complet (représenté sur la Figure 4.7) en l'explicitant par une expression formelle et en détaillant certaines caractéristiques des paquets d'ondes impliqués. En sortie d'un interféromètre de Bordé-Ramsey vertical, ce spineur comporte 8 paquets d'ondes dans chaque état interne regroupés dans le tableau suivant :

19. La généalogie des paquets d'ondes n'est pas sans rappeler les structures d'arbres couramment utilisées en informatique : les "feuilles" de cet arbre sont les paquets d'ondes présent dans le spineur atomique à l'instant t considéré, leurs ancêtres correspondent aux "branches". Comme en informatique, chaque paquet d'ondes peut alors être indexé par sa généalogie, c'est à dire en désignant les arches "mères" aboutissant à ce paquet.

| Chemin | $p_{0i}(T)$ | $z_{0i}(T)$ | État final |
|------------|------------------------|-----------------------|------------|
| b1b1a2a2 | $2 \hbar k + \Delta p$ | $3v_r T/2 + \Delta z$ | a |
| a0b1b1a2 | $2 \hbar k + \Delta p$ | $v_r T/2 + \Delta z$ | a |
| a0b1a2a2 | $2 \hbar k + \Delta p$ | $v_r T + \Delta z$ | a |
| b1b1b1a2 | $2 \hbar k + \Delta p$ | $v_r T + \Delta z$ | a |
| b1b1b1b1 | $\hbar k + \Delta p$ | $v_r T + \Delta z$ | b |
| a0b1b1b1 | $\hbar k + \Delta p$ | $v_r T/2 + \Delta z$ | b |
| b1b1a2b1 | $\hbar k + \Delta p$ | $3v_r T/2 + \Delta z$ | b |
| a0b1a2b1 | $\hbar k + \Delta p$ | $v_r T/2 + \Delta z$ | b |
| a0a0a0a0 | Δp | Δz | a |
| b1a0a0a0 | Δp | $v_r T/2 + \Delta z$ | a |
| a0a0b-1a0 | Δp | $-v_r T/2 + \Delta z$ | a |
| b1a0b-1a0 | Δp | Δz | a |
| a0a0b-1b-1 | $-\hbar k + \Delta p$ | $-v_r T/2 + \Delta z$ | b |
| a0a0a0b-1 | $-\hbar k + \Delta p$ | Δz | b |
| b1a0b-1b-1 | $-\hbar k + \Delta p$ | Δz | b |
| b1a0a0b-1 | $-\hbar k + \Delta p$ | $v_r T/2 + \Delta z$ | b |

$z_{0i}(T)$ et $p_{0i}(T)$ désignent les altitudes et quantité de mouvement centrales du paquet d'ondes atomique considéré à la fin de l'interféromètre. Δz and Δp désignent la contribution -identique pour tous les paquets- des paramètres initiaux et de la chute libre à la position et à l'impulsion finale : $\Delta z = z_0 - 1/2gT^2$ et $\Delta p = p_0 + mgT$. v_r est la vitesse de recul $v_r = \hbar k/m$.

Le tableau 4.2.4 montre que l'onde atomique sortant dans l'un des états internes est la superposition de deux groupes de paquets d'impulsion identique et de positions centrales périodiquement espacées. Cette onde atomique a donc la même structure qu'une onde lumineuse en sortie d'une cavité optique de Fabry-Perot chargée avec deux ondes de directions différentes.

Dans une telle cavité optique, le nombre d'ondes réfléchies interférant simultanément dépend du rapport entre la longueur de cohérence et la longueur de la cavité. Dans la succession d'interféromètres lévitants considérée ici, la durée écoulée joue le rôle dévolu habituellement au chemin optique. Le nombre d'ondes de matière interférant est alors limité cette fois-ci par le rapport T_φ/T_0 entre la durée de cohérence de la phase T_φ et la période optimale T_0 du résonateur. Soulignons que ces interférences sont également limitées par la longueur de cohérence verticale L_z , puisque le terme d'interférence entre deux paquets d'ondes centrés en r_1 et r_2 est atténué par une intégrale de recou-

vrement $\int d^3\mathbf{r}F_\alpha(z - z_1, t)F_\alpha(z - z_2, t)^{20}$.

Expression Analytique.

En utilisant la relation (4.16) décrivant l'action d'une impulsion lumineuse, il est possible d'obtenir une expression analytique formelle du spineur atomique après un cycle interférométrique²¹. L'intérêt principal d'obtenir une telle expression et de valider les simulations numériques exposées ultérieurement.

La propagation du spineur atomique au cours de la séquence d'impulsions met simplement en jeu une modification des impulsions et positions centrales selon le tableau précédent et une succession de matrices 2×2 de diffusion instantanée agissant sur chaque paquet d'ondes. Après un cycle interférométrique, le spineur atomique en sortie s'obtient en considérant la somme de tous les chemins résumés dans le tableau :

$$|\Psi\rangle = \sum_{\text{Traj.}} S_{e_4 m_4, e_3 m_3}^{(-)} e^{iS_{e_3}(z_0 + m_1 v_r T/2 - gT^2/8, m_3 v_r - gT/2, T)} S_{e_3 m_3, e_2 m_2}^{(-)} S_{e_2 m_2, e_1 m_1}^{(+)} e^{iS_{e_1}(z_0, m_1 v_r, T)} S_{e_1 m_1, a_0}^{(+)} \\ \times wp(z_0 + (m_1 + m_3)v_r T/2 - 1/2gT^2, m_4 \hbar k - mgT, X, Y) |e_4\rangle$$

Dans cette dernière équation, nous avons noté $S_e(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, T)$ l'action classique acquise pendant la durée T d'un point matériel de position et vitesses initiales $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$ et d'énergie interne E_e . Par ailleurs, les matrices de diffusion $S^{(+)}$ et $S^{(-)}$ correspondent à la matrice 2×2 $S(\pi/2, r_0, p_0)$ associées respectivement aux impulsions progressives vers le haut et vers le bas. Une vérification rapide montre que les chemins $(e_1, m_1) \dots (e_4, m_4)$ pris en compte dans la somme redonnent exactement les paquets d'ondes du tableau précédent.

20. De façon imagée, on obtient ainsi un "cube" spatio-temporel défini par le quadrivecteur de cohérence $(T_\varphi, L_x, L_y, L_z)$ et délimitant les paquets interférant. Ici L_x et L_y n'interviennent pas puisque les centres des paquets sont confondus selon les axes O_x et O_y .

21. Cette expression met en jeu un nombre raisonnable (16) de paquets d'ondes. En revanche, dès le deuxième cycle interférométrique, 256 paquets gaussiens sont présents, et il n'est plus possible d'en donner une expression formelle sans recouvrir plusieurs pages de manuscrit. Nous ne détaillons pas ici ces expressions, car elles ne donnent pas un éclairage physique particulier.

21. Nous avons indexé les éléments des matrices de diffusion S^\pm avec à la fois l'état interne e_i et l'entier m_i associé au nombre de quanta d'impulsion échangés. Ce dernier indice peut paraître redondant, mais il rappelle que les éléments de la matrice de diffusion dépendent de la quantité de mouvement reçue par les atomes. Cette convention est un peu analogue à celle adoptée par Christian Bordé dans [90] où les matrices de diffusion agissent sur un vecteur d'état en représentation (e_i, m_i) .

4.2.5 Evolution du spineur au cours de plusieurs cycles interférométriques.

4.2.5.1 Principe et paramètres de la simulation.

La simulation suit le principe de l'expérience exposé précédemment au paragraphe 4.1.4.3 : on mesure la population atomique totale dans un niveau donné après un nombre de cycles déterminé, et pour différentes valeurs d'un paramètre associé aux conditions de résonance de (4.13). En fonctionnement d'horloge, on suppose que la période est ajustée pour satisfaire $T := T_0$ selon la condition (4.2) et on décale les fréquences d'interrogation selon $\omega_{1,2,3,4} := \omega_{1,2,3,4}^0 + \delta\omega$ ²². En fonctionnement de gravimètre, on suppose que les fréquences (effectives dans le cas Raman) des impulsions sont fixées pour satisfaire les conditions (4.11),(4.12) et on fait varier la période selon $T := T_0 + \delta T$.

La démultiplication des paquets d'ondes atomiques, intervenant à chaque impulsion lumineuse, rend en pratique très délicate sinon impossible l'obtention d'une expression algébrique au delà de deux cycles hors des conditions de résonance²³. Il est, par contre, possible de simuler numériquement l'évolution du spineur atomique pendant plusieurs cycles, c'est-à-dire plusieurs interféromètres de Bordé-Ramsey successifs. Nous avons effectué la simulation jusqu'à quatre cycles, impliquant $N = 16^4 \simeq 64000$ paquets d'ondes, ce qui consomme déjà plusieurs heures de temps de calcul d'un micro-ordinateur standard et en implémentation MATLAB²⁴. Soulignons une fois de plus que cette difficulté, inhérente à la simulation classique de l'évolution d'un état quantique fortement intriqué, est bien sûr contournée par une réalisation physique de l'expérience.

Nous nous plaçons dans un régime de nuage dilué, qui permet de s'affranchir des interactions atomiques. Cette hypothèse, qui simplifie considérablement le traitement, est justifiée sur le plan pratique par la typologie des nuages atomiques utilisés dans les expériences métrologiques (quelques centaines d'atomes dans certaines horloges)²⁵. Cette hypothèse nous permet de supposer par ailleurs une courbure quasi-nulle dans les miroirs lumineux, si bien que l'on prend $f_{ab} = f_{ba} = 0$ dans la

22. le décalage de toutes les fréquences d'une même quantité est bien compatible avec le maintien de la condition sur la pente de fréquence

23. Lorsque les conditions de résonance sont vérifiées, une expression exacte peut être obtenue, qui sera détaillée dans une publication ultérieure.

24. Il est certainement possible de réduire ce temps en employant un langage de programmation plus approprié, en améliorant les routines, et en faisant appel à une architecture de calcul plus puissante. Malgré ces possibles améliorations, la multiplication du nombre de paquets d'ondes par 16 à chaque cycle supplémentaire rend difficile l'obtention de prédictions numériques au delà de six cycles, à moins d'avoir recours à des approximations supplémentaires négligeant les arches fortement non-résonnantes.

25. Elle l'est aussi sur le plan théorique, car nous concentrons ainsi l'étude sur la structuration d'une onde atomique diluée par une série discrète d'impulsions lumineuses. Ce problème est intéressant en soi, et nous dégagons ainsi les effets de structuration qui ne proviennent pas du terme non-linéaire d'interaction.

matrice de diffusion²⁶. La simulation repose alors simplement sur l'évolution des paramètres A_k (amplitude complexe multipliant le paquet d'ondes), r_{0k}, p_{0k} , car les paramètres X_k, Y_k suivent simplement l'évolution libre. Notre simulation, qui prend en compte tous les paquets d'ondes - y compris ceux issus d'arches "non-lévitanes" - reproduit alors très fidèlement l'évolution de l'état quantique dans le système.

Nous avons considéré un atome fictif de transition suffisamment fine pour que l'émission spontanée et la décohérence soient négligeables durant les quelques millisecondes de la simulation. Les paramètres considérés sont similaires à ceux du gravimètre précédent²⁷. La pulsation de Rabi considérée pour les impulsions lumineuses est de $\Omega = 10^4 \text{ Hz}$. La zone de détection est définie entre $z_{min} = -300 \mu\text{m}$ et $z_{max} = +300 \mu\text{m}$.

4.2.5.2 Interprétation des résultats.

Les Figures 4.9 et 4.10 montrent la population mesurée dans l'état fondamental après 1, 2, 3, 4 cycles, lorsque l'on fait varier la période T et la fréquence des impulsions lumineuses comme précisé ci-dessus. Ces figures mettent en évidence plusieurs éléments très positifs du senseur proposé.

Le premier constat important est que la frange centrale a une amplitude unité : lorsque les conditions de résonance sont vérifiées, tous les atomes sont préservés dans l'état fondamental à l'issue d'un nombre entier de cycles. Il est remarquable que, à résonance, la démultiplication de ces voies de sorties ne conduise pas à des pertes d'atomes. Ceci confirme l'extinction des voies de sortie du cycle énergie-impulsion de la Figure 4.7 par le phénomène d'interférences destructives. Cela laisse entrevoir un bon contraste pour les franges d'interférences.

Un autre point crucial est l'affinement rapide de la frange centrale lorsque les atomes effectuent plusieurs cycles énergie-impulsion. Cet affinement peut être interprété comme résultant de la superposition d'une multiplicité d'ondes cohérentes, de façon analogue à l'affinement observé dans une cavité optique de Fabry-Perot. La propagation des multiples paquet d'ondes, résultant de la contribution de plusieurs cycles dans une même zone impulsionnelle, peut-être envisagée directement dans l'espace des impulsions et non dans l'espace des positions²⁸.

26. Un développement ultérieur pourrait consister à inclure des effets de courbure et d'interactions pour estimer la capacité de focalisation de la série discrète d'impulsions $\pi/2$. La stabilité à long terme est néanmoins difficile à établir avec cette simulation, qui est limitée à quatre ou cinq cycles à cause de la démultiplication des paquets évoquée ci-dessus.

27. Le vecteur d'onde associé aux impulsions lumineuses $\pi/2$ est pris égal au vecteur d'onde effectif Raman précédent, où l'impulsion Raman était accordée sur la transition $|a\rangle = |5S_{1/2}, F=1\rangle \rightarrow |b\rangle = |5S_{1/2}, F=2\rangle$ du ^{87}Rb .

28. Une expression du paquet d'ondes impulsionnel, lorsque les conditions de résonance sont vérifiées, sera donnée

L'affinement observé sur la résonance en la période T conduit également à une amélioration de la détermination de l'accélération gravitationnelle²⁹. La structure du signal d'interférences observé est particulièrement intéressante. En effet, il semble que le signal observé après n cycles serve d'enveloppe au signal après $n + 1$ cycles. Ceci peut se comprendre car les paquets d'ondes atomiques présents au $n + 1$ ème cycle sont issus par dédoublement des paquet d'onde du n ème cycle et induisent un phénomène de "battement". Ce battement se retrouve dans la structure fractale du signal observé³⁰.

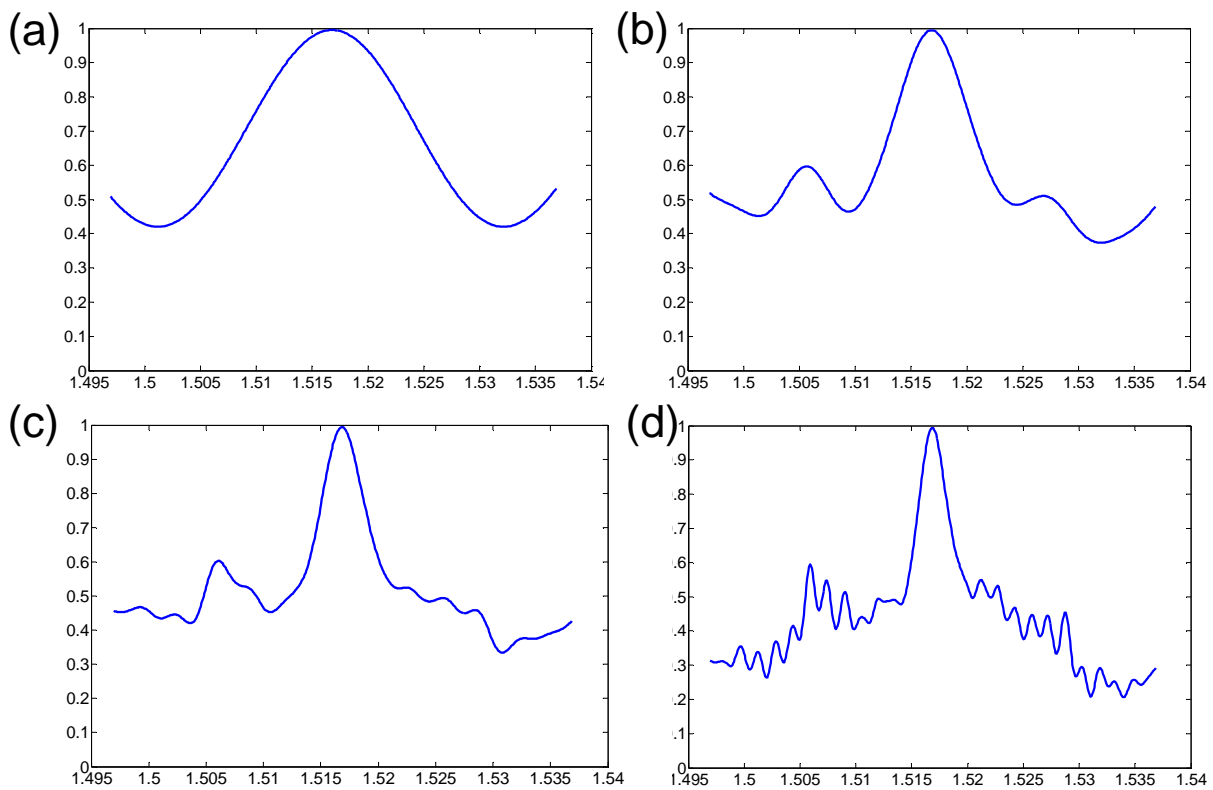


FIGURE 4.9 – Fraction de la population dans l'état interne fondamental après respectivement 1, 2, 3, 4 cycles en fonction de la durée T (ms) et pour des fréquences résonnantes.

dans une publication ultérieure. Elle met clairement en évidence le filtrage impulsionnel réalisé sur l'échantillon au cours des interféromètres successifs.

29. On rappelle que cette détermination a lieu via la condition de résonance (4.2) et que la relation d'incertitude associée est $\Delta g/g = \Delta T_0/T_0 + \delta v_r/v_r$.

30. On peut se risquer à y voir une signature de la structure multi-ondes du paquet impulsionnel. Cette approche sera développée dans des travaux ultérieurs.

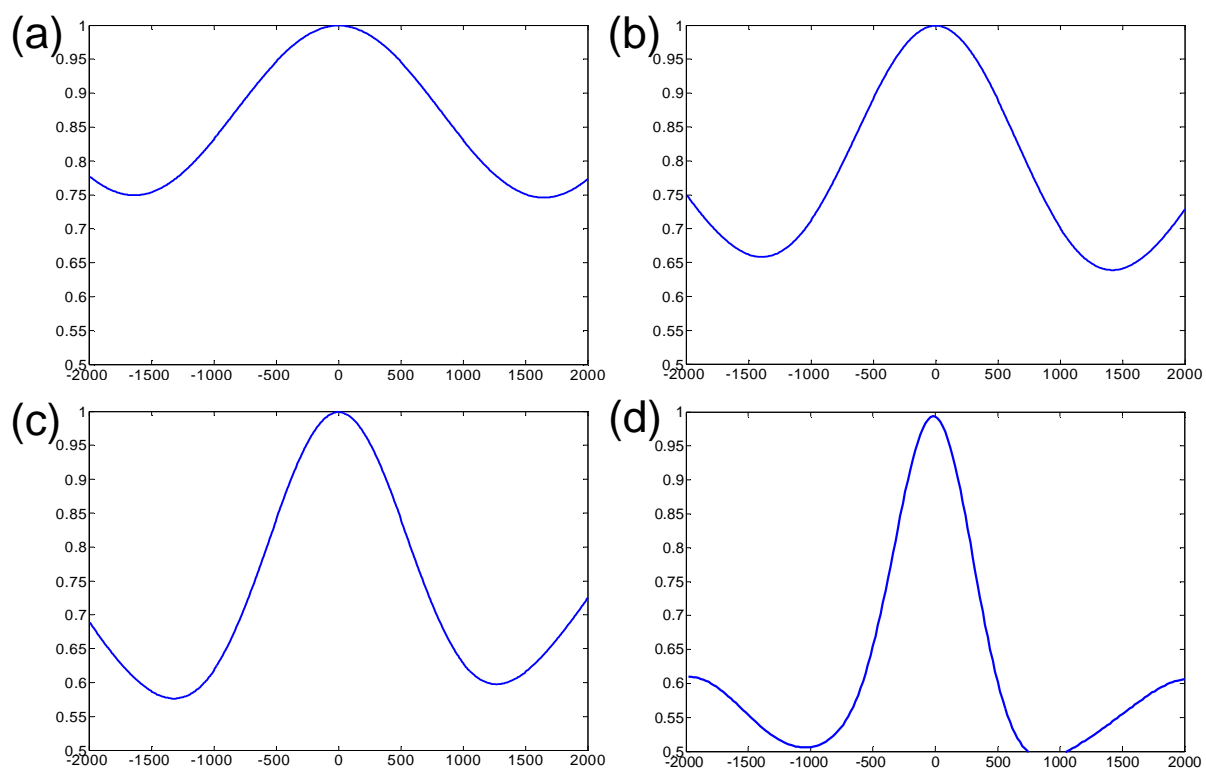


FIGURE 4.10 – Fraction de la population dans l'état interne fondamental après respectivement 1, 2, 3, 4 cycles en fonction du décalage en fréquence $\delta\omega$ (Hz) (identique pour les quatre fréquences d'interrogation : $\omega_{1,2,3,4} := \omega_{1,2,3,4}^0 + \delta\omega$).

4.3 Conclusion.

En partant d'une analyse rigoureuse "champ faible" du senseur à paquet d'ondes gaussien unique, nous avons conçu un nouveau dispositif mettant en jeu une succession d'interféromètres de Bordé-Ramsey verticaux.

Le système présenté réalise un piégeage cohérent de l'échantillon atomique selon un mode particulier : le confinement vertical a lieu dans l'espace des impulsions, et le confinement transverse est réalisé dans l'espace des positions par la sphéricité du front d'onde des impulsions lumineuses utilisées. Ce piégeage dans l'espace mixte $r_x \times r_y \times p_z$ par interférences multi-ondes est original à notre connaissance. On observe une diffusion de l'altitude du nuage, qui traduit le maintien de la relation d'incertitude de Heisenberg malgré la localisation dans l'espace des impulsions³¹. Le piégeage cohérent est sensible à une double condition de résonance, qui confère une sensibilité inertielle et fréquentielle au dispositif.

Signalons enfin quelques perspectives de continuation de l'étude présentée dans ce chapitre. Il serait bon d'évaluer la robustesse du confinement et de l'affinement de la frange centrale à une augmentation de température du nuage supposé ici parfaitement condensé.³² Une seconde contribution importante serait d'identifier un atome compatible avec la réalisation d'une horloge optique par ce dispositif. Un tel atome devrait bien sûr posséder une transition d'horloge dans les fréquences optiques, et être susceptible d'être refroidi au niveau exigé par le fonctionnement du senseur multi-arches présenté -affinement des franges et contraste suffisant-. Ce dernier point nécessite bien sûr une étude des effets de température finie sur le signal interférentiel obtenu.

31. En fait, ce piégeage impulsif vertical était également réalisé par le senseur à "impulsion-miroir" précédent. Ce confinement était apparent dans la fonction de filtrage opérée à chaque cycle. Cependant, les aspects de diffusion verticale avaient été occultés par notre analyse naïve des impulsions lumineuses, qui ne prenait pas en compte les effets de structuration du paquet d'ondes atomiques.

32. Cela nous permettrait par ailleurs d'envisager éventuellement un fonctionnement à l'aide d'un échantillon d'atomes non condensé, ce qui assouplirait considérablement les conditions que doivent remplir les atomes candidats à ce dispositif.

Diffusion d'une onde atomique sur un champ électromagnétique gaussien.

Ce chapitre regroupe des développements techniques liés au calcul de diagrammes de Feynman d'une onde atomique sur un champ électromagnétique gaussien. La lecture de ce chapitre, plus technique et difficile d'accès que les autres, n'est pas requise pour la compréhension du reste du manuscrit.

Dans les deux systèmes expérimentaux analysés, nous avons considéré l'emploi d'impulsions lumineuses de front d'onde sphérique pour obtenir un confinement transverse du nuage. Le problème de la diffusion d'une onde atomique sur une onde électromagnétique gaussienne intervient donc de façon centrale dans ces dispositifs. A ma connaissance, ce problème qui a été abordé dans [91], n'a pas été résolu à ce jour dans le cas général. Nous en donnons ici un traitement détaillé en champ électromagnétique faible, suffisant pour tirer des conclusions qualitatives quant à l'influence de la courbure du front d'onde dans les deux expériences précédentes. Nous évaluons donc les diagrammes de Feynmann impliquant un champ atomique et un champ électromagnétique externe gaussien. Le diagramme à un seul vertex d'interaction permet de rendre compte de la forme de l'onde atomique diffusée en sortie d'une impulsion lumineuse gaussienne. En particulier, il met en évidence le rôle de lentille atomique, au sens de la définition donnée au Chapitre 2, joué par une "impulsion-miroir" de profil transverse gaussien. Le calcul de diagrammes de Feynman à deux vertex d'interaction permet d'évaluer le décalage fréquentiel associé à la courbure du front d'onde dans un interféromètre de Bordé-Ramsey vertical, élément constitutif du senseur multi-arches précédent.

5.1 Eléments utiles au calcul de diagrammes de Feynman avec un champ électromagnétique externe.

Nous précisons, dans cette partie, les conventions adoptées, ainsi que les éléments communs au calcul de diagrammes de Feynman avec un champ externe de profil gaussien. Afin de faciliter la

lecture des développements qui vont suivre, nous précisons à nouveau les notations utilisées :

$$\begin{aligned}
 H_1(t) &= H_0 + H_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t) \\
 H_{em}(t) &= V_{ba}(\hat{\mathbf{r}}, t) |b\rangle\langle a| + h.c. \\
 U_1(t, t_u) &= T \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_u}^t dt' H_1(t') \right) \right] \\
 |\Psi(t)\rangle &= U_1(t, t_u) |\tilde{\Psi}(t)\rangle
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Le ket $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ désigne l'état quantique en représentation interaction, t_u étant un instant défini par convention. Nous obtenons ainsi la série perturbative de Dyson :

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \left(1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \tilde{H}_{em}(t_1) + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \tilde{H}_{em}(t_2) \tilde{H}_{em}(t_1) + \dots \right) |\tilde{\Psi}(t_0)\rangle \tag{5.2}$$

Nous effectuons un choix de représentation qui simplifie les développements suivants : l'instant t_u est fixé à l'instant initial t_0 , si bien que $|\tilde{\Psi}(t_0)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle$. Au premier ordre, l'onde diffusée correspond au terme d'ordre 1 de la série précédente :

$$|\tilde{\Psi}^{(1)}(t)\rangle = \left[\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \tilde{H}_{em}(t_1) \right] |\Psi(t_0)\rangle \tag{5.3}$$

5.1.1 Champ électromagnétique externe.

Commençons par expliciter le champ électromagnétique considéré. Le profil de ce champ peut être exprimé à partir des fonctions de courbure U^\pm introduites par Christian Bordé [40] :

$$U_0^\pm(\mathbf{r}) = \frac{1}{1 \mp 2iz/b} \exp \left[-\frac{1}{1 \mp 2iz/b} \frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right] \tag{5.4}$$

Nous avons introduit le paramètre confocal $b = kw_0^2$. Il est également commode d'utiliser la fonction Lorentzienne complexe L^+ [92] :

$$L^+(z) = \frac{1}{1 - 2iz/(k_0 w_0^2)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{4b^2}}} \exp \left[i \arctan \left(\frac{z}{2b} \right) \right] \tag{5.5}$$

La phase dépendant de cette expression est usuellement identifiée en optique comme la phase de Gouy. Le champ électromagnétique utilisé dépend du processus de diffusion envisagé, impliquant soit une simple absorption, soit un cycle d'absorption-émission donnant lieu à un changement d'état

interne (processus Raman).

5.1.1.1 Diffusion par absorption simple.

Dans le cas d'un simple processus d'absorption, seule une onde progressive intervient, de la forme :

$$E_1(x, y, z, t) = \frac{1}{2}U_0^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)e^{ik_0(z-z_w)}E(t)e^{-i\varphi_1(t)} + c.c \quad (5.6)$$

5.1.1.2 Diffusion par processus Raman.

Nous envisageons ici une diffusion Raman : absorption d'un photon du champ E_1 et émission d'un photon dans le champ E_2 . Les deux ondes contra-propageantes impliquées s'écrivent :

$$\begin{aligned} E_1(x, y, z, t) &= \frac{1}{2}U_0^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)e^{ik_0(z-z_w)}E(t)e^{-i\varphi_1(t)} + c.c \\ E_2(x, y, z, t) &= \frac{1}{2}U_0^-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)e^{-ik_0(z-z_w)}E(t)e^{-i\varphi_2(t)} + c.c \end{aligned}$$

Nous avons considéré que les vecteurs d'ondes associés à E_1 et E_2 sont de même norme et de directions opposées $\mathbf{k}_{1,2} = \pm k_0\mathbf{u}_z$, ce qui est vérifié avec une excellente précision compte-tenu du désaccord Raman $\omega_1 - \omega_2$ envisagé (ajusté pour que la diffusion soit résonnante). Par ailleurs, en utilisant les termes respectifs $U_0^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)$ et $U_0^-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)$ pour décrire les deux impulsions lumineuses contra-propageantes, nous supposons que celles-ci ont des fronts d'onde identiques. Les phases φ_1 et φ_2 ont un profil temporel quadratique associé à des rampes de fréquence de pentes $r_{1,2} = k_{1,2}g$. Tout se passe comme si on pouvait remplacer le champ électromagnétique total $E = E_1 + E_2$ par un champ effectif proportionnel à $E_1E_2^*$.

5.1.2 Expression du Hamiltonien électromagnétique en représentation d'interaction.

Nous adoptons les conventions suivantes pour exprimer le Hamiltonien d'interaction :

$$\begin{aligned} H_{em}(t) &= V_{ba}(\hat{\mathbf{r}}, t) |b\rangle\langle a| + c.c. \\ V_{ba}(\mathbf{r}, t) &= V(\mathbf{r})F(t)e^{-i\varphi(t)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

La forme des fonctions intervenant dans le potentiel dépend du type d'impulsion considéré :

$$V(\mathbf{r}) = -\hbar\Omega_0U_0^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)e^{ik_0z}, \quad F(t) = F_1(t), \quad \varphi(t) = \varphi_1(t) \quad \text{Imp. simple} \quad (5.8)$$

$$V(\mathbf{r}) = -\hbar\Omega_eU_0^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)U_0^{-*}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)e^{i2k_0(z-z_w)}, \quad F(t) = F_1(t)F_2^*(t) \quad \varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t), \quad \text{Imp. Raman} \quad (5.9)$$

Grâce à la relation $U_0^-(\mathbf{r}) = U_0^{+*}(\mathbf{r})$, on voit que la fonction de courbure associée est de la forme $U_0^{+2}(\mathbf{r})$ dans le cas Raman. Afin de préserver la versatilité de notre approche vis à vis des deux processus de diffusion envisagés, nous utiliserons l'expression générale (5.7) du potentiel V . La phase φ est de la forme :

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t dt \left[\omega + r(t - t_r) \right] = \frac{1}{2} r (t_1 - t_r)^2 + \omega(t - t_0)$$

Les développements suivants confirmeront que la pente de la rampe adéquate pour annuler l'effet de l'accélération gravitationnelle dans l'évolution interne est bien $r = \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{g}$.

En représentation interaction, le potentiel électromagnétique s'exprime formellement par :

$$\tilde{H}_{em} = U_1^{-1}(t, t_0) (V_{ba}(\hat{\mathbf{r}}, t) |b\rangle\langle a| + h.c.) U_1(t, t_0)$$

Il est possible d'intégrer la transformation unitaire U_1 à l'intérieur de l'argument du potentiel :

$$\tilde{H}_{em}(t) = V \left(U_{ext}^{-1}(t, t_0) \hat{\mathbf{r}} U_{ext}(t, t_0), t \right) \otimes |b\rangle\langle a| e^{i\omega_{ba}(t-t_0)} + h.c.$$

Le Hamiltonien externe associé à U_{ext} étant simplement quadratique, les équations de Heisenberg correspondantes pour les opérateurs position et impulsion sont simples et résolues par une transformation de type $ABCD$. Il est ainsi possible d'exprimer analytiquement l'opérateur $\tilde{\mathbf{r}}(t) = U_{ext}^{-1}(t, t_0) \hat{\mathbf{r}} U_{ext}(t, t_0)$ au moyen des paramètres A, B et ξ :

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = A(t, t_0) \hat{\mathbf{r}} + B(t, t_0) \hat{\mathbf{p}} + \xi(t, t_0)$$

Cette transformation fait apparaître un terme opératoire de translation dans le potentiel :

$$\tilde{H}_{em}(t) = V \left(A(t, t_0) \hat{\mathbf{r}} + B(t, t_0) \hat{\mathbf{p}} + \xi(t, t_0), t \right) \otimes |b\rangle\langle a| e^{i\omega_{ba}(t-t_0)} + h.c.$$

5.1.3 Action d'un vertex d'interaction sur l'état quantique.

Avant d'aborder le calcul de diagrammes plus complexes, il est nécessaire de déterminer l'action d'un vertex d'interaction intervenant à l'instant t_1 sur l'état quantique. Nous considérons sans perte de généralité un terme du type :

$$\tilde{H}_{em}(t_1) |a, \tilde{\psi}(\mathbf{r})\rangle = \left[V_{ba} \left(\tilde{\mathbf{r}}(t_1), t_1 \right) \otimes |b\rangle\langle a| e^{i\omega_{ba}(t_1-t_0)} \right] |a, \tilde{\psi}(\mathbf{r})\rangle$$

Afin de séparer les deux opérateurs positions et impulsions agissant simultanément, il est judicieux de considérer la représentation de Fourier du potentiel V_{ba} . L'exponentielle de l'opérateur $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ peut en effet être donnée grâce à la formule de Baker-Hausdroff :

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{r}}(t)} = e^{i\mathbf{k}\cdot[A_1\hat{\mathbf{r}}+\xi_1]} e^{i\mathbf{k}\cdot B_1\hat{\mathbf{p}}} e^{\frac{i}{2}[A_1\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{r}}, B_1\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{p}}]} = e^{i\frac{\hbar}{2}\tilde{\mathbf{k}}A_1\tilde{B}_1\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(A_1\hat{\mathbf{r}}+\xi_1)} e^{i\hat{\mathbf{p}}\cdot\tilde{B}_1\mathbf{k}}$$

Pour alléger les équations nous avons noté $A_1 = A(t_1, t_0)$ et $B_1 = B(t_1, t_0)$. Finalement :

$$\tilde{H}_{em}(t_1)|a, \tilde{\psi}(\mathbf{r})\rangle = F(t_1)e^{-i\varphi(t_1)} e^{i\omega_{ba}(t_1-t_0)} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{k}) e^{i\frac{\hbar}{2}\tilde{\mathbf{k}}A_1\tilde{B}_1\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(A_1\hat{\mathbf{r}}+\xi_1)} e^{i\hat{\mathbf{p}}\cdot\tilde{B}_1\mathbf{k}} \int \frac{d^3\mathbf{r}'}{(2\pi)^{3/2}} \psi(\mathbf{r}')|b, \mathbf{r}'\rangle$$

Nous avons donc séparé l'action des opérateurs impulsion et position, et introduit la transformée de Fourier $V(\mathbf{k})$ du potentiel V . L'action du potentiel général pourrait désormais être obtenue en insérant des relations de fermeture entre les exponentielles correspondantes. Alternativement, on peut remarquer que l'exponentielle de l'opérateur impulsion $\hat{\mathbf{p}}$ agit par une simple translation :

$$e^{i\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{a}/\hbar}|\mathbf{r}\rangle = |\mathbf{r} - \mathbf{a}\rangle$$

L'expression précédente devient :

$$\tilde{H}_{em}(t_1)|a, \tilde{\psi}(\mathbf{r})\rangle = F(t_1)e^{-i\varphi(t_1)} e^{i\omega_{ba}(t_1-t_0)} \int \frac{d^3\mathbf{r}'}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{k}) e^{i\frac{\hbar}{2m}\tilde{\mathbf{k}}A_1\tilde{B}_1\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(A_1\mathbf{r}_{op}+\xi_1)} \tilde{\psi}(\mathbf{r}')|b, \mathbf{r}' - \hbar\tilde{B}_1\mathbf{k}\rangle$$

Il est possible, grâce à deux approximations, de sortir la composante de recul de l'intégrale :

1. Approximation de nuage dilué : on suppose que les interactions n'affectent pas les matrices A_1 et \tilde{B}_1 . Celles-ci sont donc simplement des homotéthies, et le terme de recul est isotrope : $\frac{\hbar}{2m}\tilde{\mathbf{k}}A_i\tilde{B}_i\mathbf{k} = f(|\mathbf{k}|^2)$.¹
2. Approximation d'onde lumineuse monochromatique : la potentiel d'interaction associé est concentré sur une "coquille de masse" dans l'espace à 2 + 1 dimensions (transverse+longitudinal) $V(\mathbf{k}) = f(k_x, k_y)\delta(|\mathbf{k}|^2 - k_e^2)$

1. Remarquons cependant que si les interactions sont plus fortes, l'effet de lentille divergente qui leur est associée conduit à une modification effective des matrices $ABCD$ susceptible de briser la symétrie sphérique du terme de recul.

Dans la limite de nuage dilué, et en présence du Hamiltonien (2.15) évoqué au chapitre 2, l'expression des paramètres $ABCD\xi$ est triviale :

$$A_1 = 1 \quad B_1 = \frac{t_1 - t_0}{m} \quad \xi_1 = \frac{1}{2}\mathbf{g}(t_1 - t_0)^2$$

On obtient alors l'action du vertex d'interaction dans la représentation d'interaction :

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{H}_{em}(t_1)|a, \tilde{\psi}(\mathbf{r})\rangle &= F(t_1)e^{-i\varphi(t_1)}e^{i\omega_{ba}(t_1-t_0)}e^{i\frac{\hbar k_e^2}{2m}(t_1-t_0)} \\ &\times \int \frac{d^3\mathbf{r}'}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}' - \frac{\hbar\mathbf{k}}{m}(t_1-t_0) + \xi_1)} \tilde{\psi}(\mathbf{r}')|b, \mathbf{r}' - \frac{\hbar\mathbf{k}}{m}(t_1 - t_0)\rangle \end{aligned}} \quad (5.10)$$

Il sera également utile de connaître l'action du vertex associé au terme conjugué $\tilde{H}_{em}^\dagger(t_1)$. Soulignons qu'il faut ici tenir compte de la non-commutation des observables² :

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{H}_{em}^\dagger(t_1)|b, \tilde{\psi}(\mathbf{r})\rangle &= F^*(t_1)e^{i\varphi(t_1)}e^{-i\omega_{ba}(t_1-t_0)}e^{i\frac{\hbar k_e^2}{2m}(t_1-t_0)} \\ &\times \int \frac{d^3\mathbf{r}'}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} V^*(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}' - \frac{\hbar\mathbf{k}}{m}(t_1-t_0) + \xi_1)} \tilde{\psi}(\mathbf{r}')|a, \mathbf{r}' + \frac{\hbar\mathbf{k}}{m}(t_1 - t_0)\rangle \end{aligned}} \quad (5.11)$$

Nous appellerons parfois les deux vertex d'interactions précédents “vertex d'absorption” et “vertex d'émission”.

2. qui se manifeste par le fait que la phase de recul ne change pas de signe contrairement à ce qui se passerait si le calcul impliquait des termes numériques !

5.2 Diagramme à un vertex : réalisation d'une lentille atomique par une impulsion électromagnétique gaussienne.

Plusieurs méthodes peuvent être envisagées pour réaliser des lentilles atomiques à l'aide d'un champ électromagnétique classique. Citons le procédé bien connu d'impression de phase [93]³. En fait, cette technique n'est pas adaptée pour le senseur envisagé, car elle repose sur l'inhomogénéité de l'intensité du champ et donc de la pulsation de Rabi, contradictoire avec le contrôle de l'angle associé à l'impulsion lumineuse. En effet, avec une pulsation de Rabi inhomogène, ni les impulsions π , ni la succession de deux impulsions $\pi/2$ ne donneront lieu à un transfert de population quasi-total à résonance, ce qui est pourtant souhaitable pour indispensable la qualité du résonateur.

Nous étudions ici la réalisation d'une lentille atomique par un processus de diffusion sur un champ électromagnétique à front d'onde sphérique. Comme représenté sur la Figure 5.1, la focalisation provient alors directement de la transmission de courbure du front d'onde. Il est possible de traiter simultanément la diffusion d'une onde atomique sur une simple onde électromagnétique gaussienne progressive, ou bien sur une onde effective Raman issue de deux ondes gaussiennes contre-propageantes. Ces situations correspondent respectivement aux modes de fonctionnement envisagés pour le premier et le second senseur développés dans ce mémoire. La détermination de l'onde atomique résultante nous permet d'évaluer la distance focale associée au miroir lumineux. Celle-ci est en fait contrôlée par la distance du centre du paquet d'ondes atomiques au col du faisceau laser gaussien. Ces développements, en partie publiés dans la référence [94], s'inspirent de calculs présentés dans [40].

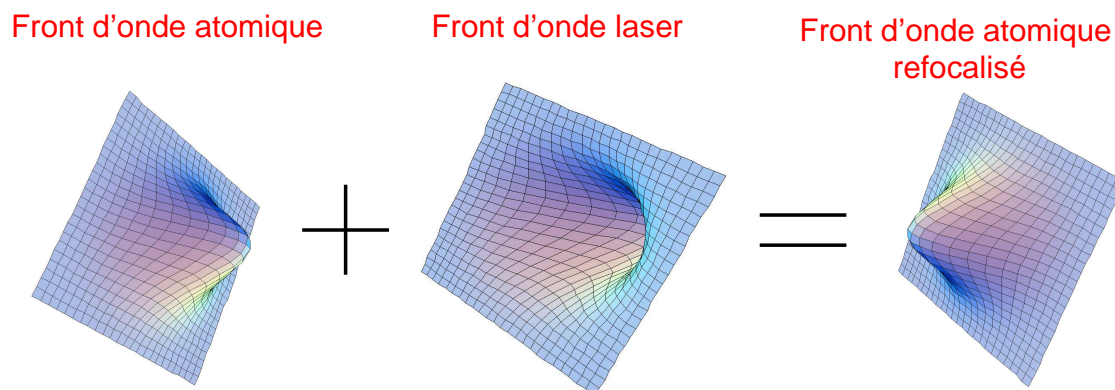


FIGURE 5.1 – Interaction entre une onde laser sphérique et une onde de matière sphérique. La courbure du front d'onde laser refocalise l'onde de matière.

3. que nous avons par ailleurs exposé dans [94]

5.2.1 Lien entre fonctions de courbure et focalisation.

Nous commençons par établir le lien qui existe entre la présence de fonctions de courbure f_{ba} dans la matrice de diffusion (2.17) et la réalisation d'une lentille atomique⁴.

Supposons en effet que cette fonction soit quadratique en les coordonnées transverses :

$$f_{ba}(\mathbf{r}, \tau) = -\frac{m}{2\hbar f} \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right) \quad (5.12)$$

Considérons l'action de la matrice de diffusion sur un paquet d'ondes gaussien dans l'état fondamental :

$$\begin{pmatrix} M_{bb}(\theta, \mathbf{p}_0) & M_{ba}(\theta, \mathbf{p}_0)e^{i\phi(t, \mathbf{r}_0)}e^{i\mathbf{k}_e \cdot (\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)}e^{if_{ba}(\hat{\mathbf{r}})} \\ M_{ab}(\theta, \mathbf{p}_0)e^{-i\phi(t, \mathbf{r}_0)}e^{-i\mathbf{k}_e \cdot (\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)}e^{if_{ab}(\hat{\mathbf{r}})} & M_{aa}(\theta, \mathbf{p}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ wp(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, X_0, Y_0) \end{pmatrix}$$

Le paquet d'ondes $wp(r_0, p_0, X_0, Y_0)$ désigne ici un paquet gaussien tel que défini dans l'équation (1.71) avec $\alpha = 0$. Le paquet d'onde diffusé dans l'état excité s'écrit alors :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{r}, t) &= \frac{M_{ab}(\theta, \mathbf{p}_0)e^{-i\phi(t, \mathbf{r}_0)}}{\sqrt{|\det X_0|}} \exp \left[-\frac{im}{2\hbar f} \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right) \right] \\ &\times \exp[-i\mathbf{k}_e \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] \exp \left[\frac{im}{2\hbar} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) Y_0 X_0^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \right] \end{aligned}$$

On peut reformuler cette expression en intégrant les terme de phase quadratiques et linéaires en position dans les paramètres de la gaussienne :

$$b(\mathbf{r}, t) = M_{ab}(\theta, \mathbf{p}_0)e^{-i\phi(t, \mathbf{r}_0)} \sqrt{\left| \frac{\det X_1}{\det X_0} \right|} \times wp(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, X_1, Y_1)$$

où les paramètres r_1, p_1, X_1, Y_1 sont reliés au valeurs initiales par les relations d'entrée-sortie :

$$\boxed{\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \hbar \mathbf{k}_e} \quad (5.13)$$

Ces relations d'entrée-sortie sont caractéristiques d'un miroir courbé donnant lieu simultanément à un transfert d'impulsion et à une focalisation. Le calcul que nous allons mener sur l'amplitude diffusée permettra d'identifier la distance focale f en fonction des paramètres du faisceau laser et

4. Rappelons que les "distances focales" $f_{x,y,z}$ associées sont en fait des temps.

de la fonction d'onde atomique. Nous retiendrons que la multiplication de la fonction d'onde par un facteur de phase quadratique, du type $\exp[-i(\alpha_x(x-x_0)^2 + \alpha_y(y-y_0)^2 + \alpha_z(z-z_0)^2)]$, correspond à l'action d'une lentille mince d'axes principaux O_x, O_y, O_z et de distances focales :

$$f_{\eta=x,y,z} = \frac{m}{2\hbar\alpha_\eta} \quad (5.14)$$

5.2.2 Expression de l'onde atomique diffusée en représentation interaction.

Connaissant l'action d'un vertex (5.10), il est aisé d'obtenir le terme de premier ordre (5.3) de la série de Dyson. Plus précisément, nous exprimons l'amplitude $\tilde{b}(\mathbf{r}, t) = \langle b, \mathbf{r} | \tilde{\Psi}^{(1)}(t) \rangle$:

$$\tilde{b}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 F(t_1) e^{-i\varphi(t_1)} e^{i\omega_{ba}(t_1-t_0)} e^{i\frac{\hbar k_e^2}{2m}(t_1-t_0)} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}+\xi_1)} \psi\left(\mathbf{r} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{m}(t_1-t_0), t_0\right)$$

En introduisant la fonction d'onde initiale dans l'espace des impulsions, nous obtenons :

$$\tilde{b}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 F(t_1) e^{-i\varphi(t_1)} e^{i\omega_{ba}(t_1-t_0)} e^{i\frac{\hbar k_e^2}{2m}(t_1-t_0)} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}+\xi_1)} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi(\mathbf{p}, t_0) e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}+\frac{\hbar\mathbf{k}}{m}(t_1-t_0))}$$

Cette amplitude peut être calculée en effectuant d'abord l'intégration temporelle :

$$\tilde{b}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{i\hbar} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} (2\pi\hbar)^{3/2}} V(\mathbf{k}) \psi(\mathbf{p}, t_0) e^{i\frac{\hbar}{m}(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} \left(\int_{t_0}^t dt_1 F(t_1) e^{i\frac{\hbar k_e^2}{2m}(t_1-t_0)} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}(t_1-t_0)/m} e^{i\omega_{ba}(t_1-t_0)} e^{i\mathbf{k}\cdot\xi_1} e^{-i\varphi(t_1)} \right) \quad (5.15)$$

Nous nous plaçons dans le cas où la fonction d'onde atomique se situe en dehors de la zone d'interaction à l'instant initial t_0 et à l'instant final t . Cette hypothèse, pertinente dans le cadre d'un calcul de diffusion, nous permet d'étendre les bornes de la zone d'intégration temporelle à l'infini.

Il est opportun de rediscuter la dépendance de la phase en t_1 . On constate que toutes les phases présentes dans l'intégrale sur t_1 ont une dépendance temporelle linéaire ou quadratique. On retrouve bien le terme lié à la fréquence de la transition ω_{ba} , le terme de recul, le terme Doppler, le terme quadratique $\mathbf{k}\cdot\xi_1$ lié l'accélération gravitationnelle. Dans l'amplitude (5.15), seules les composantes \mathbf{k} et \mathbf{p} minimisant les variations de la phase totale en t_1 vont donner lieu à une contribution significative. En fait, la condition de résonance s'écrit comme une condition de phase stationnaire :

$$\frac{d}{dt_1} \left[\frac{1}{2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{g})(t_1-t_0)^2 + \left[\frac{\hbar k_e^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}}{m} + \omega_{ba} \right] (t_1-t_0) - \varphi(t_1) \right] \simeq 0$$

Cette condition est plus ou moins relaxée suivant la durée τ du créneau temporel $F(t)$ considéré pour l'impulsion lumineuse. Il est utile à ce stade d'introduire la transformée de Fourier du créneau $\tilde{F}(\omega) = \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} F(t) e^{-i\omega t}$, dont nous noterons $\Delta\omega$ la largeur typique. En considérant l'expression (5.10) de la phase φ , on retrouve la nécessité d'employer une rampe de fréquence de pente $r = \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{g}$ pour compenser l'accélération de la gravité. Pour chaque couple (\mathbf{k}, \mathbf{p}) , on peut définir la fréquence sélectionnée par l'intégrale temporelle dans le spectre de F sélectionnée par l'intégrale temporelle :

$$\omega_B(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \omega - \left[\omega_{ba} + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} + \frac{\hbar k_e^2}{2m} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{g} (t_r - t_0) \right] \quad (5.16)$$

Si le créneau temporel est long, seules les impulsions et vecteurs d'onde (\mathbf{k}, \mathbf{p}) tels que $\omega_B(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \simeq 0$ vont donner une contribution significative. La dépendance de $\omega_B(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \simeq 0$ en l'instant t_r de démarrage de la rampe montre au passage que celui-ci détermine l'impulsion résonnante \mathbf{p} . L'amplitude diffusée s'exprime finalement :

$$\tilde{b}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{i\hbar} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} (2\pi\hbar)^{3/2}} V(\mathbf{k}) \tilde{F}(\omega_B(\mathbf{k}, \mathbf{p})) \psi(\mathbf{p}, t_0) e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} \quad (5.17)$$

Cette expression montre clairement la structure du paquet d'ondes atomiques diffusé en représentation interaction. La décomposition de la fonction d'onde sur l'espace des impulsions révèle un produit de trois facteurs : la distribution d'impulsion de l'onde atomique initiale, la composante de Fourier du potentiel d'interaction et une fonction de filtre associée à la conservation de l'énergie.

5.2.3 Onde diffusée dans le référentiel du laboratoire.

Pour obtenir l'amplitude $b(\mathbf{r}, t) = \langle b, \mathbf{r} | \Psi^{(1)}(t) \rangle$, il suffit d'appliquer le propagateur défini au chapitre 1 $K_b(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \langle b, \mathbf{r} | U_{ext}(t, t') | b, \mathbf{r}' \rangle$ à l'amplitude précédente \tilde{b} :

$$b(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{r}'}{(2\pi)^{3/2}} K_b(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t_0) \tilde{b}(\mathbf{r}', t_0) \quad (5.18)$$

En présence d'un Hamiltonien extérieur quadratique, l'action du propagateur K_b sur une gaussienne est simple : comme exposé au chapitre 1, elle consiste simplement en une modification des positions et impulsions centrales du paquet selon la trajectoire classique, en une modification des matrices X et Y selon une relation linéaire $ABCD$ et en l'ajout d'une phase d'action classique. Si la fonction d'onde $\tilde{b}(\mathbf{r}, t)$ était une gaussienne $\tilde{b}(\mathbf{r}, t) \simeq w p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0), \mathbf{p}_0(t_0), X(t_0), Y(t_0))$, on aurait donc une évolution du type :

$$b(\mathbf{r}, t) \simeq w p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t), \mathbf{p}_0(t), X(t), Y(t)) e^{iS(t, t_0)}$$

Bien que la fonction dans l'amplitude (5.17) ne soit pas une gaussienne, nous allons retrouver un résultat très similaire en explicitant l'intégrale de propagation et en moyennant quelques approximations.

Etant donné que le paquet d'ondes $\tilde{b}(\mathbf{r}, t)$ est explicitement décomposé dans l'espace des impulsions, il est plus commode d'utiliser le propagateur mixte position-impulsion $K_b(\mathbf{r}, t, \mathbf{p}', t') = \langle b, \mathbf{r} | U_{ext}(t, t') | b, \mathbf{p}' \rangle$ pour déterminer l'amplitude $b(\mathbf{r})$ dans le référentiel du laboratoire. Ce propagateur permet de faire évoluer des ondes planes dans le champ de gravité uniforme. L'intégrale de propagation mixte s'écrit :

$$b(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi \hbar)^{3/2}} K_b(\mathbf{r}, t, \mathbf{p}', t_0) \tilde{b}(\mathbf{p}', t_0) \quad \text{avec} \quad \tilde{b}(\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}, t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{i\hbar} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{k}) \tilde{F}(\omega_B(\mathbf{k}, \mathbf{p})) \psi(\mathbf{p}, t_0)$$

Il s'agit donc de calculer l'amplitude suivante :

$$b(\mathbf{r}, t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{i\hbar} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi \hbar)^{3/2}} \left(\int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} K_b(\mathbf{r}, t, \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}, t_0) V(\mathbf{k}) \tilde{F}(\omega_B(\mathbf{k}, \mathbf{p})) \right) \psi(\mathbf{p}, t_0) \quad (5.19)$$

Ce calcul est assez long et technique, et il a été reporté en annexe H, dans lequel les approximations relatives à la dispersion de l'onde lumineuse et de l'onde atomique sont explicitées.

Dans le cas d'une diffusion atomique associée à un processus d'absorption simple (potentiel d'interaction (5.8)), et moyennant des approximations quant aux corrections Doppler dispersives, à la correction du recul longitudinal et à la largeur impulsionnelle du paquet d'ondes, l'amplitude diffusée s'écrit⁵ :

$$\boxed{b(\mathbf{r}, t) = \Omega_0 \sqrt{2\pi} U_0^+ \left[\mathbf{r} - \mathbf{r}_w - \left(\frac{\mathbf{p}_{0\omega} + \hbar \mathbf{k}_0}{m} \right) (t - t_0) - \frac{1}{2} \mathbf{g} (t - t_0)^2 \right] \times \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi \hbar)^{3/2}} K_b(\mathbf{r}, t, \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_0, t_0) \tilde{F}(\omega_B(\mathbf{k}_e, \mathbf{p})) \psi(\mathbf{p}, t_0)} \quad (5.20)$$

L'interprétation de cette expression est simple. L'amplitude diffusée est obtenue en propageant les composantes impulsionnelles de la fonction d'onde atomique après multiplication par le filtre impulsionnel associé aux impulsions lumineuses π et ajout de l'impulsion de recul $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}_0$. Le terme de courbure U_0^+ est tout simplement imprimé, moyennant une approximation sur la largeur impulsionnelle du paquet d'ondes atomiques, et évalué en la position donnée par le mouvement d'un point matériel fictif de vitesse correspondant à l'impulsion centrale du paquet d'ondes filtré.

5. Nous avons utilisé la fonction de courbure U_0^+ défini en (5.4).

Dans le cas d'une diffusion Raman (potentiel d'interaction (5.9)), le calcul est très similaire. A quelques erreurs près, celui-ci figure dans la référence [94] jointe au manuscrit. On obtient alors le résultat :

$$\begin{aligned}
 b(\mathbf{r}, t) = & \Omega_0 \sqrt{2\pi} L^+ \left(z - z_w - \frac{p_{0\omega} z}{m} (t - t_0) + \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 \right) U_0^{+2} \left[\mathbf{r} - \mathbf{r}_w - \left(\frac{\mathbf{p}_{0\omega} + \hbar \mathbf{k}_0}{m} \right) (t - t_0) - \frac{1}{2} \mathbf{g}(t - t_0)^2 \right] \\
 & \times \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi \hbar)^{3/2}} K_b(\mathbf{r}, t, \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_0, t_0) \tilde{F}(\omega_B(\mathbf{k}_e, \mathbf{p})) \psi(\mathbf{p}, t_0)
 \end{aligned}
 \tag{5.21}$$

5.2.4 Lentille atomique réalisée.

Nous déterminons maintenant la fonction de courbure f_{ba} associée à la diffusion en champ faible. Cette fonction nous donne un indice qualitatif sur le terme de courbure présent dans la matrice de diffusion champ fort. Une prédiction quantitative impliquerait un traitement "champ fort" beaucoup plus complexe.

Considérons d'abord la diffusion par simple absorption, et réécrivons la fonction de courbure U^+ de l'amplitude (5.20) afin de faire apparaître explicitement le terme quadratique :

$$U_0^+(\mathbf{r}) = \exp \left[-\frac{k_0^2 w_0^2 + i2k_0 z}{k_0^2 w_0^4 + 4z^2} (x^2 + y^2) \right]
 \tag{5.22}$$

En considérant la translation dans les arguments de la fonction U_0^+ selon $\mathbf{r}'_w(t) = \mathbf{r}_w + \left(\frac{\mathbf{p}_{0\omega} + \hbar \mathbf{k}_0}{m} \right) (t - t_0) + \frac{1}{2} \mathbf{g}(t - t_0)^2$:

$$U_0^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_w(t)) = \exp \left[-\frac{k_0^2 w_0^2 + i2k_0(z - z'_w(t))}{k_0^2 w_0^4 + 4(z - z'_w(t))^2} \left((x - x_w)^2 + (y - y_w)^2 \right) \right]
 \tag{5.23}$$

La fonction de courbure s'exprime donc :

$$f_{ba}(\mathbf{r}) = \frac{2k_0(z - z'_w(t))}{k_0^2 w_0^4 + 4(z - z'_w(t))^2} \left((x - x_w)^2 + (y - y_w)^2 \right)
 \tag{5.24}$$

Soulignons que de tels termes de courbure peuvent être générés par d'autres procédés, comme celui d'impression de phase impliquant les déplacements lumineux inhomogènes. Cette expression reflète des termes croisés en x, y, z qui ont une importance particulière vis-à-vis de notre système. D'une part, elle confirme que la quantité de mouvement verticale transmise dépend de la position centrale du paquet d'ondes atomique. En effet, un développement de premier ordre au voisinage de la position atomique centrale $x \simeq x_0 + \delta_x, y \simeq y_0 + \delta_y$ donne lieu à un terme linéaire en z qui modifie donc

l'impulsion transmise par le champ. Cette modification de l'impulsion transmise est neutralisée si le faisceau laser est centré sur l'onde atomique $x_w = x_0, y_w = y_0$. Par ailleurs, le coefficient du terme quadratique dépend de l'altitude z considérée, donc de l'altitude centrale du paquet d'ondes atomique. La distance focale, qui est directement reliée à ce coefficient par l'expression (5.14), est donc contrôlée par l'altitude des atomes relativement au col du faisceau laser :

$$\boxed{f(z_0, z_w, t) = \left(\frac{m}{\hbar}\right) \frac{k_0^2 w_0^4 + 4(z_0 - z'_w(t))^2}{4k_0(z_0 - z'_w(t))}} \quad z'_w(t) = z_w + \left(\frac{p_{0z} + \hbar k_0}{m}\right) (t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \quad (5.25)$$

Dans le cas d'une diffusion Raman, qui correspond à la situation du gravimètre présenté dans ce mémoire, l'expression de l'amplitude est similaire à quelques modifications près : il y a un facteur longitudinal $L(z)$, la quantité de mouvement transmise est $\hbar \mathbf{k}_e = 2\hbar \mathbf{k}_0$, et c'est le carré de la fonction U_0^+ qui intervient. Cette dernière modification diminue simplement par deux la distance focale :

$$\boxed{f_{Ram.}(z_0, z_w, t) = \left(\frac{m}{\hbar}\right) \frac{k_0^2 w_0^4 + 4(z_0 - z'_w(t))^2}{2k_0(z_0 - z'_w(t))}} \quad z'_w(t) = z_w + \left(\frac{p_{0z} + 2\hbar k_0}{m}\right) (t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \quad (5.26)$$

La fonction $L(z)$ en préfacteur affecte seulement le profil longitudinal du faisceau, mais pas sa structure transverse. Celui-ci ne change donc pas la focalisation transverse, qui seule compte pour stabiliser le nuage. Dans l'"impulsion-miroir" utilisée, les distances focales associées à chaque impulsion Raman s'additionnent selon⁶ :

$$\frac{1}{f_{I.-M.}} = \frac{1}{f_{Ram.1}} + \frac{1}{f_{Ram.2}} \quad (5.27)$$

5.2.5 Changement de courbure entre les impulsions successives.

Les deux senseurs atomiques exposés impliquent un cycle de l'état interne de l'atome $a \rightarrow b \rightarrow a$. Dans le premier senseur, chaque transition est assurée par une impulsion lumineuse d'angle π . Dans le second senseur, chaque transition est assurée par un couple de deux impulsions d'angle $\pi/2$ associées au même vecteur d'onde. Afin d'obtenir un transfert net de quantité de mouvement, nous avons vu qu'il était nécessaire d'utiliser des ondes (effectives dans le cas Raman) de sens opposés pour chacune des deux transitions $a \rightarrow b$ et $b \rightarrow a$. De même, pour obtenir une focalisation de l'onde atomique, il faut que les ondes impliquées dans les deux transitions aient des courbures opposées. En effet, pour le transfert de quantité de mouvement comme pour le transfert de courbure, ce changement de signe compense la conjugaison complexe du champ classique intervenant lors de la deuxième interaction.

6. Pour voir ceci il suffit d'écrire le profil de champ atomique ρ (voir Chapitre 2 Partie IV) après la multiplication par les deux éléments de matrices $S_{ba}(\mathbf{k})$ et $S_{ba}(-\mathbf{k})$: $\rho(\mathbf{r}) \propto e^{-\frac{im}{\hbar} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 + y(p_n)^2}\right)$.

Nous avons vu que la fonction de courbure U_0^+ donnait lieu à une lentille convergente pour une absorption de photon. Aussi supposons-nous que les deux premières impulsions $\pi/2$ (ou la première impulsion Raman π pour le premier senseur) associées au passage $a \rightarrow b$ font intervenir une onde de courbure U_0^+ (dans le cas Raman onde effective de courbure U_0^{+2}), tandis que les deux impulsions $\pi/2$ suivantes (ou la seconde impulsion Raman π pour le premier senseur) associées au passage $b \rightarrow a$ font intervenir une onde de courbure U_0^- (dans le cas Raman onde effective de courbure U_0^{-2}).

5.2.6 Conclusion.

Nous avons mené un calcul de diagramme de Feynman à un vertex d'interaction qui nous a permis de déterminer l'onde atomique diffusée en champ faible, et dans le cadre de plusieurs approximations quant à la dispersion du paquet d'ondes atomiques et du paquet d'ondes lumineux. Le calcul correspondant est valable aussi bien pour un processus de diffusion Raman que pour un processus d'absorption simple. Le profil de l'onde diffusée confirme la possibilité de focaliser l'onde atomique par une onde lumineuse gaussienne, et il donne une estimation qualitative de la distance focale associée à la diffusion (expressions (5.25) et (5.26)). Il apparaît que cette focale dépend du temps et qu'elle est contrôlée par distance du centre du paquet d'ondes atomiques au col du faisceau laser. Nous allons poursuivre cette approche "champ faible" en calculant des diagrammes de Feynman d'ordre plus élevés.

5.3 Calcul de diagrammes de Feynman à deux vertex d'interaction : influence de la courbure du champ sur une horloge atomique.

L'objet de cette partie est d'estimer l'impact de la courbure du champ lumineux sur les fréquences mesurées par le résonateur multi-arches. Cette estimation est obtenue en évaluant les fréquences mesurées après un cycle interférométrique dans le cadre d'un traitement champ faible prenant en compte le mouvement externe des atomes dans le champ électromagnétique courbé. Ce calcul s'inspire de développements de Christian Bordé sur l'influence du transit dans les lignes d'absorption [92]. La différence essentielle est que le mouvement externe des atomes est ici traité de façon complètement quantique alors qu'il était considéré comme classique dans la référence [92]. Ces calculs impliquent désormais des diagrammes d'interaction à deux vertex. La majeure partie a été reportée dans l'annexe I.

Nous considérons plus particulièrement les “diagrammes lévitants” associés au premier cycle interférométrique, correspondant à l'échange d'un quantum de quantité de mouvement pour chaque couple d'impulsions lumineuses $\pi/2$ copropageantes. Rappelons que dans la limite d'un grand nombre de rebonds, ces diagrammes contribuent de façon prépondérante à la population atomique mesurée, et qu'ils correspondent au réseau d'arches principales dessinées sur la Figure du chapitre précédent. L'hypothèse de champ faible nous permet de nous focaliser sur les diagrammes minimaux faisant intervenir seulement deux vertex d'interaction durant le premier interféromètre⁷. Le premier vertex est placé dans la première ou la deuxième impulsion $\pi/2$, le second vertex dans la troisième ou la quatrième impulsion. On obtient ainsi quatre diagrammes possibles, et donc six termes croisés donnant lieu à des interférences.

C'est la dépendance d'une mesure de population finale N_a vis à vis des fréquences des impulsions lumineuses que nous cherchons à obtenir ici, et non la forme de l'onde diffusée. Aussi est-il possible de mener entièrement l'analyse des diagrammes de Feynman en représentation interaction. Ceci nous épargne le calcul de l'intégrale de propagation précédente associée à la transformation unitaire $U_{ext}(t, t_0)$.

7. A ces diagrammes lévitants minimaux on peut associer des boucles supplémentaires correspondant à l'ajout de cycles d'absorption-émission durant une même impulsion lumineuses. Ignorer la présence de ces diagrammes revient à ignorer une modification d'indice due au champ électromagnétique et à considérer la propagation des diagrammes lévitants minimaux avec le propagateur simple et non avec le propagateur renormalisé. Cette approximation ne devrait pas changer les conclusions qualitatives présentées ici.

5.3.1 Notations.

Commençons par préciser le potentiel électromagnétique associé à la série d'impulsions lumineuses dans lesquelles évoluent les atomes. Nous considérons ici simplement un cycle interférométrique de durée totale T . Rappelons que les deux premières impulsions $\pi/2$ ont un vecteur d'onde $k_1 = k\mathbf{z}$ et une courbure U_0^+ , tandis que les deux impulsions suivantes ont un vecteur d'onde $k_1 = -k\mathbf{z}$ et une courbure U_0^- . Nous supposons que chaque impulsion lumineuse a une durée τ . De façon formelle, on écrit le potentiel d'interaction sous la forme :

$$H_{em}(t) = (F_1(t)V_1(\mathbf{r})e^{-i\varphi_1(t)} + F_2(t)V_2(\mathbf{r})e^{-i\varphi_2(t)}) |b\rangle\langle a| + c.c. \quad (5.28)$$

Les fonctions temporelles $F_1(t)$ et $F_2(t)$ sont définies à partir de la fonction continue par morceaux $\mathbf{1}_{[t_i, t_f]}$ égale à l'unité sur l'intervalle $[t_i, t_f]$ et nulle partout ailleurs :

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \mathbf{1}_{[t_0, t_0+\tau]} + \mathbf{1}_{[t_0+T_0/2-\tau, t_0+T_0/2]} \\ F_2(t) &= \mathbf{1}_{[t_0+T_0/2, T_0/2+\tau]} + \mathbf{1}_{[t_0+T_0-\tau, t_0+T_0]} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Les potentiels $V_1(\mathbf{r})$ et $V_2(\mathbf{r})$ traduisent les profils respectifs des deux premières et des deux dernières impulsions $\pi/2$:

$$\begin{aligned} V_1(\mathbf{r}) &= -\hbar\Omega_0 U_0^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)e^{ik_0z} \\ V_2(\mathbf{r}) &= -\hbar\Omega_0 U_0^-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)e^{-ik_0z} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Les fonctions donnant la dépendance temporelle de la phase :

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \omega_1(t - t_0) + \frac{1}{2}r_1(t - t_0)^2 \\ \varphi_2(t) &= \omega_2(t - t_0) + \frac{1}{2}r_2(t - (t_0 + T_0/2))^2 \end{aligned} \quad (5.31)$$

On s'attend à ce que les valeurs des pentes $r_1 = -kg$ et $r_2 = kg$ conduisent bien à une annulation de la phase quadratique dans l'intégrale. Cependant, nous verrons que ces pentes sont légèrement modifiées par la courbure.

5.3.2 Calcul du diagramme à deux vertex en représentation interaction.

La contribution du terme de second ordre à la série de Dyson s'écrit :

$$|\tilde{\Psi}^{(2)}(t)\rangle = \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \tilde{H}_{em}(t_2) \tilde{H}_{em}(t_1) |\Psi^{(0)}(t_0)\rangle$$

Tous les diagrammes intervenant dans cette double somme ne sont pas les "diagrammes lévitants" que nous cherchons à évaluer. Ceux-ci correspondent au choix de l'instant t_1 dans l'intervalle $[t_0, t_0 + T_0/2]$ et de l'instant t_2 dans $[t_0 + T_0/2, t_0 + T_0]$. Nous cherchons à calculer la contribution des "diagrammes lévitants" après un cycle, c'est-à-dire à l'instant $t_f = t_0 + T_0$. Cette contribution s'écrit en représentation interaction :

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}_{lev.}^{(2)}(t_f)\rangle &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt_2 F_2^*(t_2) V_2^* \left(\tilde{\mathbf{r}}(t_2) \right) e^{i\varphi_2(t_2)} \\ &\times \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt_1 F_1(t_1) V_1 \left(\tilde{\mathbf{r}}(t_1) \right) e^{-i\varphi_1(t_1)} \otimes (|a\rangle\langle a|) e^{i\omega_{ba}[(t_1-t_0)-(t_2-t_0)]} |\Psi^{(0)}(t_0)\rangle \end{aligned} \quad (5.32)$$

Après des calculs assez longs et techniques et des approximations développées dans l'annexe I, on aboutit à l'amplitude suivante $\tilde{a}_{lev.}^{(2)}(\mathbf{r}, t_f) = \langle a, \mathbf{r} | \tilde{\Psi}_{lev.}^{(2)}(t_f) \rangle$:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{lev.}^{(2)}(\mathbf{r}, t_f) &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi^{(0)}(\mathbf{p}, t_0) e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}+2\hbar k_0\mathbf{z})\cdot\mathbf{r}} \\ &\times \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt_2 F_2^*(t_2) e^{i\phi_2(t_2)} U_0^{-*}(\mathbf{r} + \mathbf{s}_2(\mathbf{p})) \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt_1 F_1(t_1) e^{-i\phi_1(t_1)} e^i U_0^+(\mathbf{r} + \mathbf{s}_1(\mathbf{p})) \end{aligned} \quad (5.33)$$

avec :

$$\begin{aligned} \phi_1(t_1) &= \varphi_1(t_1) + \frac{1}{2} k_0 g (t_1 - t_0)^2 - \left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} + \omega_{ba} + \frac{p_z k_0}{m} \right) (t_1 - t_0) \\ \phi_2(t_2) &= \varphi_2(t_2) - \frac{1}{2} k_0 g (t_2 - t_0)^2 + \left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} - \omega_{ba} + \frac{(p_z + \hbar k_0) k_0}{m} \right) (t_2 - t_0) \\ \mathbf{s}_1(\mathbf{p}) &= \frac{\mathbf{p}}{m} (t_1 - t_0) + \frac{\hbar k_0 \mathbf{z}}{m} (t_2 - t_0) + \frac{1}{2} \mathbf{g} (t_1 - t_0)^2 \\ \mathbf{s}_2(\mathbf{p}) &= \frac{\mathbf{p}}{m} (t_2 - t_0) + \frac{1}{2} \mathbf{g} (t_2 - t_0)^2 \end{aligned}$$

Vérifions rapidement la cohérence cette expression. Les deux conditions de stationnarité des phases ϕ_1 et ϕ_2 par rapport à t_1 et t_2 devraient redonner les conditions de conservation de l'énergie associées à chaque interaction. On vérifie que c'est bien le cas. En oubliant, pour l'instant, la présence des

fonctions de courbure, on retrouve dans chaque condition de stationnarité la fréquence de la transition ω_{ba} , le terme Doppler, le terme de recul et la dérivée de la phase laser $\varphi(t)$. De plus, on constate que la pente de la rampe de fréquence annulant la phase quadratique provenant de l'accélération gravitationnelle est bien égale à $r = k_0 g$ pour φ_1 et à $r = -k_0 g$ pour φ_2 .

5.3.3 Effet de la courbure sur les fréquences de résonance de l'interféromètre vertical.

Les fréquences mesurées sont celles qui maximisent la population d'atomes en lévitation notée $\rho_{lev} = \left| \langle \tilde{\Psi}_{lev.}^{(2)}(t_f) | \tilde{\Psi}_{lev.}^{(2)}(t_f) \rangle \right|^2$. On cherche ainsi les fréquences ω_1 et ω_2 (intervenant respectivement dans les phases laser φ_1 et φ_2) réalisant la condition :

$$\frac{d \left| \langle \tilde{\Psi}_{lev.}^{(2)}(t_f) | \tilde{\Psi}_{lev.}^{(2)}(t_f) \rangle \right|^2}{d\omega_{1,2}} = 0 \quad (5.34)$$

Si les ondes électromagnétiques considérées étaient des ondes planes, il suffirait d'écrire la condition de stationnarité des phases ϕ_1 et ϕ_2 de (5.34) par rapport à t_1 et t_2 . On retrouverait ainsi les conditions de Bragg usuelles. Du fait de la présence des fonctions U_0^{-*} et U^{0+} , cette condition de stationnarité va être modifiée pour inclure un terme de courbure. Les calculs correspondants sont menés dans l'annexe I. Nous obtenons pour la population totale lévitante une expression de la forme :

$$\begin{aligned} \rho_{lev} &= \frac{1}{(i\hbar)^4} \int \frac{d^2 \mathbf{p}_\perp d p_z}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi^{(0)}(\mathbf{p}, t_0) \psi^{(0)*}(\mathbf{p}', t_0) \int \frac{dz}{(2\pi)^{1/2}} \int \frac{dx}{(2\pi)^{1/2}} \\ &\times \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt'_2 e^{-i\Phi_2^c(t'_2, x, p_\perp)} K_2'(x, z, t'_2) \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt'_1 e^{i\Phi_1^c(t'_1, x, p_\perp)} K_1'(x, z, t'_1) \\ &\times \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt_2 e^{i\Phi_2^c(t_2, x, p_\perp)} K_2(x, z, t_1) \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt_1 e^{-i\Phi_1^c(t_1, x, p_\perp)} K_1(x, z, t_1) \\ &\times \int \frac{dy}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\left(\frac{L^+}{w_0^2} + \frac{L^+}{w_0^2} + \frac{L^-}{w_0^2} + \frac{L^-}{w_0^2}\right) y^2} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{r} / \hbar} \end{aligned}$$

Nous ne cherchons pas à expliciter ici les fonctions réelles $K_i(x, z)$. Ce qui est important, c'est que les fonctions de phase Φ_1^c et Φ_2^c vis à vis desquelles nous exprimons la stationnarité comportent à

présent un terme de courbure associé à la partie complexe de L^\pm :

$$\begin{aligned} \Phi_1^c &= \left[\omega_1 - \omega_{ab} - \frac{\hbar k_0^2}{2m} - \frac{k_0 p_z}{m} + \frac{k_0 p_\perp x}{mR} \right] (t_1 - t_0) + \left[\frac{1}{2} r_1 + \frac{1}{2} k_0 g + \frac{k_0 p_\perp^2}{2m^2 R} \right] (t_1 - t_0)^2 \\ \Phi_2^c &= \left[\omega_2 - r_2 \frac{T_0}{2} - \omega_{ab} + \frac{\hbar k_0^2}{2m} + \frac{k_0(p_z + \hbar k_0)}{m} - \frac{k_0 p_\perp x}{mR} \right] (t_2 - t_0) + \left[\frac{1}{2} r_2 - \frac{1}{2} k_0 g - \frac{k_0 p_\perp^2}{2m^2 R} \right] (t_2 - t_0)^2 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Nous avons remplacé les fonctions de phase φ_1 et φ_2 par leurs expressions en fonction de la pente et de la fréquence.

Nous pouvons extraire de cette expression des décalages en fréquence en considérant les conditions de stationarité de la phase aux différents instants centraux des créneaux $F(t) : t_0, t_0 + T_0/2, t_0 + T_0$. Cette valeur dépend -sous l'intégrale- de l'impulsion \mathbf{p}_\perp considérée, mais c'est le résultat après intégration qui compte. Remarquons que le terme $k_1 p_\perp x / mR$ admet une moyenne nulle pour un nuage centré ou de vitesse moyenne selon O_z . Le décalage sur la fréquence associé à chaque type de "diagramme lévitant" dépend alors des instants choisis pour les interactions⁸. Considérons les diagrammes tels que la première interaction ait lieu dans la première impulsion $\pi/2$ et la seconde dans la quatrième. L'évaluation de la stationnarité de Φ_1^c montre que la première fréquence de résonance n'est pas déplacée (hormis par le terme $k_1 p_\perp x / mR$ dont la moyenne est nulle. En revanche, la seconde condition de stationarité évaluée en $t = t_0 + T_0$ donne :

$$\omega_2 = \omega_{ab} + \frac{\hbar k_0^2}{2m} + \frac{k_0(p_z + \hbar k_0)}{m} - \frac{k_0 p_\perp x}{mR} + -k_0 g T_0 - \frac{k_0 p_\perp^2 T_0}{m^2 R}$$

Le premier terme de courbure s'annule en moyenne, mais le terme $k_2 p_\perp^2 T_0 / m^2 R$ ne disparaît pas lors de l'intégration. On observe alors une correction proportionnelle au carré de la vitesse radiale moyenne de l'échantillon :

$$\Delta\omega = -\frac{k_0 \langle v_r^2 \rangle T_0}{R} \quad v_r = \frac{p_\perp}{m} \quad (5.36)$$

La correction sur le terme quadratique montre que les pentes des rampes de fréquence doivent elles-aussi être corrigées pour maintenir un transfert de population quasi-total. La correction est de $\Delta r = (k_2 \langle v_r^2 \rangle) / R = \Delta\omega / T_0$ ⁹.

8. En fait, les conditions de stationarité de phase sont une condition d'accord de phase pour chaque classe de diagramme, les classes étant définies en désignant les impulsions lumineuses durant lesquelles arrivent les interactions.

9. Cette augmentation de la pente provient du décalage différentiel des fréquences résonnantes lié à la courbure. Pour le diagramme considéré, la première fréquence n'est pas décalée mais la deuxième l'est, il est donc normale que la pente reliant les deux s'en trouve affectée.

5.3.4 Conclusion.

Nous avons obtenu ici une estimation du décalage des fréquences de résonance de l'interféromètre vertical de Bordé-Ramsey résultant de la courbure de l'onde lumineuse utilisée. L'ordre de grandeur $\Delta\omega = k\langle v_r^2 \rangle T/R$ montre que ce décalage peut être réduit si l'on accorde suffisamment d'espace transverse à l'échantillon : la vitesse radiale quadratique moyenne $\langle v_r^2 \rangle$ peut alors être réduite considérablement. On retrouve une fois de plus un concept-clé dans ce mémoire, qui est que l'allocation d'espace au nuage atomique permet de s'affranchir d'effets indésirables limitant l'exactitude de la mesure effectuée. Par ailleurs, nous voyons ici une conséquence du fait que le nuage soit centré sur la zone où la courbure est la plus faible : le décalage en fréquence est du second ordre en la vitesse radiale, proportionnel à $\langle v_r^2 \rangle = 0$.

5.4 Conclusion.

Les calculs diagrammatiques menés dans cette partie nous ont permis d'estimer la focalisation obtenue par des impulsions lumineuses gaussiennes, ainsi que l'impact de la courbure sur les fréquences mesurées par un interféromètre de Bordé-Ramsey vertical.

Concernant la focalisation, nous avons montré qu'un terme de phase quadratique pouvait s'interpréter comme l'action d'une "lentille" sur les paramètres X, Y . A l'aide d'un développement en champ faible du premier ordre, nous avons obtenu une expression de la distance focale associée, qui est contrôlée par la courbure du champ électromagnétique et par la distance du centre du paquet d'ondes atomiques au col du faisceau laser. L'interaction avec des champs de front d'onde sphérique permet de réaliser une lentille avec un profil d'intensité plus homogène que les lentilles à impression de phase où le terme quadratique résulte de déplacements lumineux inhomogènes[93].

Nous avons également déterminé, au premier ordre, l'influence de la courbure du front d'onde sur les fréquences mesurées par un interféromètre vertical. Le décalage obtenu (par rapport aux fréquences mesurées par des ondes planes) est heureusement limité par le centrage du nuage sur l'axe de propagation des faisceaux lasers. Bien sûr, ce décalage peut être rendu arbitrairement faible si l'on concède suffisamment d'espace au nuage atomique, car des ondes lumineuses quasi-planes suffisent alors à refocaliser le faisceau atomique alors presque exempt d'interactions répulsives.

Seconde Partie :

Conception de nouveaux outils théoriques
pour l'optique des ondes de matière cohérentes.

Evolution d'un nuage atomique condensé dans l'espace des phases : la méthode des moments.

Ce chapitre expose une méthode de propagation des ondes de matière fondée sur leur évolution en représentation de Wigner.

Nous avons mentionné au chapitre 1 qu'il y avait une relation directe entre la fonction de cohérence du premier ordre d'un faisceau atomique (ou optique) et la distribution de Wigner associée. La représentation dans l'espace des phases est donc pertinente pour évaluer l'évolution de la cohérence d'un faisceau atomique. Le volume occupé dans l'espace des phases constitue également un indicateur quantitatif du degré de condensation du nuage, ce qui n'est pas surprenant puisque cohérence et condensation sont étroitement liées pour les faisceaux d'ondes de matière. Il y a un parallèle avec l'optique, où le caractère multimode et la cohérence d'un faisceau lumineux se manifestent par une forte concentration d'intensité dans un faible volume d'espace des phases.

Mais cette représentation présente un autre avantage significatif lié à la structure de l'équation de propagation associée. Cette équation fait intervenir à la fois des opérateurs classiques (i.e. ne disparaissant pas dans la limite classique $\hbar \rightarrow 0$) et une série d'opérateurs différentiels hiérarchisés par des puissances croissantes de \hbar . Le propagateur associé, dit propagateur de Liouville, comprend ainsi une partie classique corrigée par une série de termes quantiques associés à des puissances croissantes de \hbar . Cette représentation dans l'espace des phases donne ainsi un accès privilégié à la transition entre physique classique et physique quantique, puisque elle fait structurellement intervenir des termes apparaissant comme des corrections quantiques à une évolution classique (dans la limite classique où $\hbar \rightarrow 0$). Cette structure particulière fait de la représentation de Wigner-Weyl un outil adapté pour décrire les collisions moléculaires et atomiques [95, 96].

Dans ce chapitre, nous établissons l'équation de propagation associée à la représentation de Wi-

gner d'un nuage atomique cohérent. Tout au long de ce chapitre, nous faisons l'hypothèse que le nuage considéré est à température nulle, c'est-à-dire que nous négligeons l'impact du nuage thermique. Nous nous plaçons d'abord dans le cas particulier d'un condensat de Bose unidimensionnel dont les atomes n'interagissent pas, puis nous étendons progressivement la discussion aux nuages multidimensionnels en présence d'un potentiel d'interaction général.

Nous déterminons ensuite l'évolution de moments des opérateurs impulsions et positions associés à un nuage atomique condensé. Leur évolution ne fait intervenir qu'un nombre fini de termes de la série d'opérateurs différentiels de l'équation de Wigner. Nous développons une méthode systématique d'obtention des équations correspondantes, qui peuvent être aisément représentées sous forme de diagrammes. Nous adoptons une formulation algébrique qui permet d'appréhender simplement l'évolution de moments en présence d'interactions de contact et d'un potentiel extérieur quadratique. Notre étude permet également de caractériser les moments porteurs d'une signature quantique comme ceux dont l'évolution fait intervenir les premiers termes quantiques du propagateur. Cette identification des observables dont la valeur moyenne est régie par une dynamique "quantique" peut servir à orienter les expériences visant à mettre en évidence des signatures macroscopiques d'un comportement quantique. Signalons que d'autres groupes se sont penchés récemment sur les prédictions de l'équation de Wigner classique (par des méthodes numériques pour le problème des recombinaisons à trois corps dans les condensats ou pour l'atténuation (damping) de Beliaev-Landau) et sur l'évolution de moments [97, 2, 98, 99]

La partie classique de l'équation de propagation de Wigner (également appelée équation de Wigner tronquée) décrit exactement la propagation de condensats infiniment dilués évoluant dans un potentiel extérieur harmonique. Nous montrons que cette équation conduit également à une prédiction correcte de la dynamique de nuages atomiques condensés dans le régime où les interactions jouent un rôle prépondérant. A potentiel extérieur fixé, c'est la force des interactions qui caractérise entièrement la propagation du nuage. La validité de l'équation classique de Wigner dans les deux régimes extrêmes (interactions négligeables ou au contraire prépondérantes) laisse penser que cette équation approchée décrit correctement l'évolution du nuage dans un large domaine de régime d'interaction. Nous retrouvons ensuite la loi $ABCD\xi$ de propagation optique des nuages atomiques dilués dans le cadre de l'équation de Wigner classique. Nous montrons ensuite que l'équation de Wigner classique prédit correctement l'universalité du mode fondamental d'un nuage condensé soumis à un potentiel se transformant comme $1/r^2$ sous les dilatations de l'espace. Ceci concerne en particulier les nuages bidimensionnels évoluant en présence d'un pseudo-potentiel de contact.

Enfin, nous mettrons à profit les équations du mouvement de moments quadratiques pour explorer la dynamique de nuages particuliers - associés à un mode fondamental gaussien, donc à basse énergie -, mais avec cette fois-ci une situation de portée générale pour les interactions atomiques. Nous nous intéresserons au cas de nuages présentant des interactions de contact et des interactions dipolaires électriques. Les excitations de basse énergie de tels nuages ont déjà été explorées par le biais d'une approche variationnelle [100, 101]. Nous allons voir que l'équation de Wigner classique permet de retrouver de façon plus simple et élégante les prédictions variationnelles, notamment la fréquence des modes monopolaires et quadrupolaires d'un condensat en forme de cigare.

6.1 Equation de propagation dans l'espace des phases.

Pour un rappel de la définition et de quelques propriétés élémentaires des distributions de Wigner, nous renvoyons le lecteur au chapitre 1 dans lequel ces distributions ont été introduites. Nous calculons ensuite l'équation de propagation de la distribution correspondante dans un contexte de plus en plus général. Nous commençons par établir l'équation de propagation d'une distribution de Wigner unidimensionnelle dans un potentiel extérieur quadratique. Nous établissons ensuite l'équation de propagation pour un condensat évoluant dans un potentiel extérieur général en l'absence puis en présence d'interactions. Nous étendons par la suite ce formalisme à la propagation de distributions de Wigner multidimensionnelles associées à des potentiels d'interaction de portée finie. Nous terminons par une comparaison entre les équations de propagation des nuages atomiques condensés et non-condensés.

6.1.1 Equations de propagation d'un nuage unidimensionnel sans interactions.

Afin de mettre en évidence la structure de l'équation de propagation de Wigner, nous commençons par traiter le cas de nuages unidimensionnels permettant d'éviter les complications algébriques des fonctions dépendant de plusieurs variables.

6.1.1.1 Propagation dans un potentiel quadratique.

Nous supposons ici que la fonction d'onde se propage dans un potentiel extérieur quadratique. Comme nous allons le voir, la propagation dans un tel potentiel possède la particularité de ne donner lieu qu'à des termes "classiques" dans l'équation de propagation de Wigner. Ceci est complètement cohérent avec le résultat que nous avons retrouvé dans le cadre des intégrales de chemin, où les

potentiels quadratiques donnent lieu à un moyennage des fluctuations quantiques qui se résume à la contribution de l'action le long d'un seul chemin classique.

Nous considérons dans toute la suite un système quantique initialement dans l'état pur $|\Phi(0)\rangle$. La fonction d'onde correspondante satisfait l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\phi_t(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\phi_{xx}(x, t) + U^0(x, t)\phi(x, t) \quad (6.1)$$

Nous avons utilisé la convention f_{x_i} pour désigner la dérivée partielle d'une fonction f par rapport à la variable x_i . Par convention, nous noterons les dérivées multiples $\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_k^{m_k}}$ comme $f_{x_i^{m_i} \dots x_k^{m_k}}$. Ces opérateurs agiront de toute façon sur des fonction suffisamment régulières pour que l'ordre de dérivation ne change pas le résultat. Cette convention a l'avantage de permettre une écriture synthétique des équations aux dérivées partielles, et nous l'utiliserons tout au long de ce chapitre.

La distribution de Wigner associée à la fonction d'onde ϕ s'écrit :

$$W(x, p, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)} \int dx' \phi(x + \frac{x'}{2}, t) \phi^*(x - \frac{x'}{2}, t) \exp(-\frac{i}{\hbar}px') \quad (6.2)$$

Pour obtenir l'équation de propagation, il suffit de dériver la fonction de Wigner par rapport au temps et d'utiliser l'équation de Schrödinger (6.1) pour la fonction d'onde ϕ :

$$i\hbar W_t(x, p, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right) \frac{1}{(2\pi\hbar)} \int dx' \left[\phi_{xx}(x + \frac{x'}{2}, t) \phi^*(x - \frac{x'}{2}, t) - \phi(x + \frac{x'}{2}, t) \phi_{xx}^*(x - \frac{x'}{2}, t) \right] e^{-ipx'/\hbar} \\ + \frac{1}{(2\pi\hbar)} \int dx' \left[U^0(x + \frac{x'}{2}, t) - U^0(x - \frac{x'}{2}, t) \right] \phi(x + \frac{x'}{2}, t) \phi^*(x - \frac{x'}{2}, t) e^{-ipx'/\hbar} \quad (6.3)$$

Les deux premiers termes donnent en fait une contribution identique qui s'évalue facilement après intégration par parties comme :

$$-\frac{i\hbar p}{m} W_x(x, p, t)$$

Pour traiter les termes suivants, on utilise la relation suivante valable au voisinage de $x' = 0$ pour toute fonction f développable en série entière en x :

$$f(x + \frac{x'}{2}) - f(x - \frac{x'}{2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)!} \left(\frac{x'}{2}\right)^{2n+1} f_{x^{2n+1}}(x) \quad (6.4)$$

En appliquant cette relation à la fonction U^0 nous obtenons un développement faisant intervenir uniquement des distributions de Wigner. Le prix à payer est de voir apparaître une série d'opérateurs de dérivation. Dans cette section, le caractère quadratique du potentiel U^0 fait que cette série est réduite à son premier terme. Sans perte de généralité, on choisit l'origine des coordonnées au minimum du potentiel de telle sorte que le potentiel extérieur s'écrit $U^0(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. L'équation de propagation revêt alors une forme simple :

$$\boxed{W_t = -\frac{p}{m}W_x + m\omega^2 x W_p} \quad (6.5)$$

Cette équation de propagation est bien classique, en ce sens qu'elle demeure inchangée dans la limite où $\hbar \rightarrow 0$. Il est cependant bon de garder à l'esprit que des effets quantiques peuvent intervenir par l'intermédiaire de la distribution de Wigner initiale $W(x, p, 0)$, susceptible d'impliquer la constante \hbar (notamment par le biais de la relation d'incertitude). Cette équation est fréquemment appelée dans la littérature "équation de Wigner tronquée". Toutefois, comme la troncature intervient précisément à l'ordre zéro en \hbar , nous privilégierons dans ce mémoire l'appellation "équation de Wigner classique".

6.1.1.2 Propagation dans un potentiel extérieur quelconque.

Notons tout d'abord que les dérivées de la distribution de Wigner par rapport à l'impulsion peuvent s'exprimer en fonction de l'intégrale :

$$(i\hbar)^{2n+1} W_{p^{2n+1}}(x, p, t) = \int dx' x'^{2n+1} \phi(x + \frac{x'}{2}, t) \phi^*(x - \frac{x'}{2}, t) e^{-ipx'/\hbar} \quad (6.6)$$

En utilisant cette relation et le développement en série entière (6.4) dans l'équation de propagation (6.3), nous obtenons l'équation de propagation dans un potentiel général U^0 :

$$\boxed{W_t = -\frac{p}{m}W_x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\hbar)^{2n}}{(2n+1)!2^{2n}} U_{x^{2n+1}}^0 W_{p^{2n+1}}} \quad (6.7)$$

Sauf mention explicite du contraire, nous supposons dans la suite que le potentiel extérieur est quadratique. Ce traitement recouvre une réalité expérimentale satisfaisante, puisque les potentiels de piégeage des nuages atomiques sont correctement approchés au voisinage de leur minimum par un terme quadratique. La prise en compte d'un terme de pesanteur linéaire se traduit simplement pour un nuage piégé dans un potentiel quadratique par une simple translation des coordonnées du minimum (*SAG*). Le cas d'un nuage libre évoluant dans un potentiel de pesanteur linéaire suit un traitement similaire. Le traitement de termes de degrés supérieurs à deux d'un potentiel extérieur quelconque est, en revanche, bien plus complexe. Comme nous allons le voir, un tel potentiel ne

permet en général pas d'obtenir une équation fermée pour l'évolution d'un moment car celui-ci est couplé à une famille infinie de moments de puissances croissantes.

6.1.1.3 Reformulation en termes de Liouvillien.

La symétrie entre position et moment dans l'équation de propagation provient en fait de la symétrie des équations de Hamilton, qui font notamment intervenir le crochet de Poisson $\overleftrightarrow{\Lambda}$:

$$\overleftrightarrow{\Lambda} = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x} \quad (6.8)$$

et le Hamiltonien classique associé au mouvement $H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U_0(x)$. L'équation de propagation de Wigner admet alors une formulation où position et impulsion interviennent de façon entièrement symétrique [95] :

$$\frac{\partial W(x, p, t)}{\partial t} = -iH(x, p) \left[i \frac{2}{\hbar} \sin \frac{\hbar \overleftrightarrow{\Lambda}}{2} \right] W(x, p, t) \quad (6.9)$$

On vérifie facilement que le développement en série entière de la fonction "sinus" intervenant dans (6.9) permet de retrouver intégralement la série d'opérateurs différentiels intervenant dans (6.7). La dépendance quadratique du Hamiltonien en impulsion fait que seul un des termes du crochet de Poisson donne lieu une série infinie. L'opérateur agissant sur la fonction de Wigner est en fait le Liouvillien quantique L_Q :

$$L_Q = H(x, p) \left[i \frac{2}{\hbar} \sin \frac{\hbar \overleftrightarrow{\Lambda}}{2} \right] \quad (6.10)$$

La propagation de la fonction de Wigner est alors donnée par l'exponentiation de cet opérateur :

$$W(x, p, t) = e^{-iL_Q(t-t_0)} W(x, p, t_0) \quad (6.11)$$

Nous avons implicitement supposé que le Hamiltonien ne dépendait pas du temps. La propagation de distributions de Wigner dans des potentiels dépendant du temps est donnée par l'expression formelle :

$$W(x, p, t) = T \left[\exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' L_Q(t') \right) \right] W(x, p, t_0) \quad (6.12)$$

L'opérateur T désigne l'ordonnancement temporel tel que celui intervenant dans les séries de Dyson [42]. La structure de l'équation de propagation, organisée en une série d'opérateurs différentiels associés à des puissances croissantes de \hbar , est explicite dans l'expression du Liouvillien (6.10). Le premier terme

de la série, qui est le seul à ne pas disparaître dans la limite $\hbar \rightarrow 0$, correspond à la partie classique du Liouvillien :

$$L_c = H(x, p) \overleftrightarrow{\Lambda} \quad (6.13)$$

C'est bien cet opérateur qui intervient dans l'équation (6.5) de propagation dans un potentiel quadratique. La propagation classique est donnée par l'exponentiation de cette opérateur selon $e^{-iL_c(t-t_0)}$.

Afin d'identifier les contributions associées aux opérateurs différentiels de chaque ordre dans la propagation de Wigner, il est utile d'adopter une technique de fonction génératrice et d'introduire comme Bund [102] le paramètre sans dimension α en facteur de \hbar :

$$L_Q^{(\alpha)} = H(x, p) \left[i \frac{2}{\alpha \hbar} \sin \frac{\alpha \hbar \overleftrightarrow{\Lambda}}{2} \right] \quad (6.14)$$

Le Liouvillien quantique s'exprime alors comme une série génératrice :

$$L_Q^{(\alpha)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha \hbar)^{2n} L_{2n} \quad (6.15)$$

faisant intervenir les termes L_{2n} :

$$L_{2n} = H(x, p) \left[i \frac{(-1)^n}{2^{2n} (2n+1)!} (\overleftrightarrow{\Lambda})^{2n+1} \right] \quad (6.16)$$

Sauf mention contraire, nous nous placerons dans le cadre $\alpha = 1$ correspondant à la théorie standard. Nous allons montrer que la partie classique du Liouvillien est suffisante pour rendre compte correctement de la dynamique des condensats dans une grande variété de régimes d'interaction.

Soulignons que l'on peut en changeant la valeur de α , obtenir une famille de théories effectives dont le degré de "quantification" est paramétré par α . Dans la limite $\alpha \rightarrow 0$, la théorie devient classique et la série d'opérateurs différentiels peut effectivement être interprétée en termes de corrections quantiques. Ceci peut donner lieu à un traitement perturbatif des termes supérieurs de la série de Liouvilliens (6.15). C'est l'approche utilisée par Bund [102] pour évaluer les premières corrections quantiques intervenant dans le traitement de probabilités de transitions collisionnelles. Nous nous intéressons dans ce chapitre à la dynamique des moments, où un tel développement perturbatif serait applicable également. Nous n'aborderons cependant pas dans ce manuscrit l'évaluation des corrections quantiques correspondantes.

6.1.2 Propagation de distributions de Wigner en présence d'interactions.

Nous étendons à présent le formalisme précédent au cas où les atomes du nuage interagissent par un potentiel général V . Il est important de souligner que l'hypothèse de condensat à température nulle adoptée tout au long de ce chapitre nous permet de considérer simplement les interactions entre atomes du condensat. A température non nulle, il faudrait également prendre en compte les interactions entre la fraction condensée et le nuage thermique par le biais d'intégrales de collisions [103]. Nous obtenons l'équation de propagation pour des condensats en présence d'interactions modélisables par un terme de contact (tel que le potentiel de Van der Waals), puis pour des nuages où la prise en compte d'un potentiel d'interaction de portée finie est nécessaire (telle que l'interaction dipolaire électrique). Afin d'éviter pour l'instant des complications algébriques inutiles, nous continuons à nous placer dans le cas unidimensionnel.

6.1.2.1 Propagation avec un potentiel d'interaction général.

Rappelons l'équation (1.32) de propagation d'un champ atomique en présence d'un potentiel général $V(x, x')$ d'interaction :

$$i\hbar\hat{\psi}_t(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\hat{\psi}_{xx}(x, t) + U^0(x, t)\hat{\psi}(x, t) + \int dx' \hat{\psi}^\dagger(x', t)V(x', x)\hat{\psi}(x', t)\hat{\psi}(x, t) \quad (6.17)$$

ce qui se traduit par l'équation intégral-différentielle suivante pour la fonction d'onde macroscopique $\phi(x, t)$:

$$i\hbar\phi_t(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\phi_{xx}(x, t) + U^0(x, t)\phi(x, t) + \int dx' |\phi(x', t)|^2 V(x', x)\phi(x, t) \quad (6.18)$$

Tout se passe donc comme si la fonction d'onde évoluait dans un potentiel extérieur fictif supplémentaire donné par le potentiel de champ moyen :

$$U^{m.f.}(x) = \int dx' dp' W(x', p', t)V(x', x) \quad (6.19)$$

Ce potentiel peut donc être traité formellement de façon identique au potentiel extérieur U^0 dans l'équation (6.7). En reprenant les termes correspondant à U^0 dans cette équation, on voit que le potentiel d'interaction se traduit par l'ajout d'une série d'opérateurs intégral-différentiels dans le

membre de droite de l'équation de propagation :

$$W_t(x, p, t) = \left[-\frac{p}{m} W_x(x, p, t) + m \omega^2 x W_p(x, p, t) \right] + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\hbar)^{2n}}{(2n+1)!2^{2n}} \int dx' dp' W(x', p', t) V_{x^{2n+1}}(x', x) W_{p^{2n+1}}(x, p, t) \quad (6.20)$$

Afin de faire apparaître la partie classique de la propagation, nous effectuons les regroupements suivants :

$$W_t(x, p, t) = \left[-\frac{p}{m} W_x(x, p, t) + \left(m \omega^2 x + \int dx' dp' W_{x'}(x', p', t) V(x', x) \right) W_p(x, p, t) \right] + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(i\hbar)^{2n}}{(2n+1)!2^{2n}} \int dx' dp' W(x', p', t) V_{x^{2n+1}}(x', x) W_{p^{2n+1}}(x, p, t) \quad (6.21)$$

La composante classique de l'équation de propagation correspond à la partie entre crochets. Les interactions atomiques se manifestent par l'introduction d'un terme non-linéaire. L'équation de propagation de Wigner ne fait donc plus simplement intervenir un Liouvillien dans le membre de droite, mais un opérateur plus complexe car non-linéaire. La technique d'expansion des termes différentiels en une série génératrice suivant α reste valable pour évaluer l'action terme à terme de la série d'opérateurs.

6.1.2.2 Interactions de contact.

Il s'agit là d'un cas particulier important puisque la grande majorité des nuages atomiques cohérents produits expérimentalement ne comportent que des interactions dont le comportement à longue portée est compatible avec une modélisation par potentiel de contact :

$$V^c(x, x') = g \delta(x - x') \quad (6.22)$$

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, les fonctions d'onde associées à de tels nuages vérifient notamment l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps. En reprenant l'équation (6.21) avec le potentiel de contact (6.22) on obtient l'équation de propagation suivante :

$$W_t(x, p, t) = \left[-\frac{p}{m} W_x(x, p, t) + \left(m \omega x + Ng \int dp' W_x(x, p', t) \right) W_p(x, p, t) \right] + Ng \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(i\hbar)^{2n}}{(2n+1)!2^{2n}} \left(\int dp' W_{x^{2n+1}}(x, p', t) \right) W_{p^{2n+1}}(x, p, t) \quad (6.23)$$

6.1.3 Propagation de nuages multidimensionnels

Nous effectuons à présent la dernière étape de généralisation qui consiste à considérer des échantillons atomiques à plusieurs dimensions. Le point de départ est cette fois-ci l'équation du champ atomique :

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \hat{U}^0(\mathbf{r}, t) \right) \phi(\mathbf{r}, t) \quad (6.24)$$

La démarche pour obtenir l'équation de propagation de Wigner est quasiment identique. Il suffit à nouveau de dériver la fonction de Wigner par rapport au temps et d'insérer l'équation de propagation du nuage atomique. Le Laplacien correspondant à l'énergie cinétique se traite à nouveau par une intégration par partie. Le terme correspondant est séparable et donc chaque dimension est traitée de façon séparée, donnant lieu au terme :

$$- \frac{i\hbar \mathbf{p}}{m} \cdot \partial_{\mathbf{r}} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$$

Le potentiel U^0 fait intervenir un développement en série entière généralisant l'expression (6.4) aux fonctions de plusieurs variables :

$$F(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}'}{2}) - F(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}'}{2}) = \sum_{n=0, m_1+\dots+m_k=2n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n} m_1! \dots m_k!} (r_1'^{m_1} \dots r_k'^{m_k}) F_{x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}}(\mathbf{r}) \quad (6.25)$$

En général nous prendrons la dimension k égale à trois, toutefois nous avons utilisé ces notations pour nous réserver la possibilité d'étudier des nuages bidimensionnels. Nous verrons que ces nuages ont un comportement particulier vis-à-vis des interactions de contact. Le produit de facteurs $r_i^{m_i}$ se traduit à nouveau par des dérivées de la fonction de Wigner par rapport à l'impulsion. On obtient finalement :

$$W_t = - \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{m} W_{x_i} + \sum_{n=0, m_1+\dots+m_k=2n+1}^{+\infty} \frac{(i\hbar)^{2n}}{2^{2n} m_1! \dots m_k!} U_{x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}}^0 W_{p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}} \quad (6.26)$$

On distingue à nouveau la partie classique de cette équation comme celle qui persiste dans la limite $\hbar \rightarrow 0$:

$$W_t = - \sum_{i=1}^k \left(\frac{p_i}{m} W_{x_i} + \sum_{i=1}^k U_{x_i}^0 W_{p_i} \right) \quad (6.27)$$

La composante classique de l'équation de propagation est séparable et donc nettement plus simple que l'équation complète.

L'équation de propagation multidimensionnelle en présence d'un potentiel d'interaction est obtenue à nouveau en traitant le terme de champ moyen comme une contribution supplémentaire au potentiel extérieur U^0 :

$$\begin{aligned}
 W_t = & - \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{m} W_{x_i} + \sum_{n=0, m_1+\dots+m_k=2n+1}^{+\infty} \frac{(i\hbar)^{2n}}{2^{2n} m_1! \dots m_k!} U_{x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}}^0 W_{p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}} \\
 & + \sum_{n=0, m_1+\dots+m_k=2n+1}^{+\infty} \frac{(i\hbar)^{2n}}{2^{2n} m_1! \dots m_k!} \int dx' dp' W_{x_1'^{m_1} \dots x_k'^{m_k}}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) V(\mathbf{r}', \mathbf{r}) W_{p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

6.1.4 Comparaison avec l'équation de propagation d'un gaz classique.

Il est instructif d'examiner comment les différences de comportement entre un nuage classique et un nuage condensé transparaissent dans leur propagation dans l'espace des phases.

La description d'un gaz classique fait intervenir une distribution de probabilité à un corps $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ régie par l'équation dite de Boltzmann [104] :

$$f_t(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = -\frac{p}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \nabla_{\mathbf{r}} U^0 \nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + I_{coll}(f) \tag{6.29}$$

où l'intégrale de collision est définie par :

$$I_{coll}[f] = \frac{1}{m} \int d^3 \mathbf{p}_2 \int d^2 \Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2| (f_1' f_2' - f_1 f_2) \tag{6.30}$$

On désigne par \mathbf{p}'_1 et \mathbf{p}'_2 les impulsions finales d'une collision binaire d'atomes ayant initialement pour quantité de mouvement \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 . f_1, f_2, f_1' et f_2' correspondent à l'évaluation de la distribution f à la position \mathbf{r} et aux quantités de mouvement respectives $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_1$ et \mathbf{p}'_2 .

L'équation de Boltzmann prend une forme qui présente de nombreuses similitudes avec l'équation de Wigner. Le lien entre formalisme de Wigner et équation de Boltzmann a par ailleurs été étudié par Lalöe et Snider [105, 106]. On retrouve notamment les termes de l'équation de Wigner venant du développement à l'ordre zéro en α du Liouvillien (6.14). Les termes correspondant à l'expansion du Liouvillien aux ordres supérieurs en α , qui ne se retrouvent pas dans l'équation de Boltzmann, sont spécifiques de la propagation "quantique" d'un nuage atomique condensé.

Le terme de collision est également différent. Les collisions entre atomes du condensats transparaissent dans l'équation de propagation de Wigner sous la forme d'un potentiel de champ moyen

présent dans une série de dérivées, alors qu'entre atomes d'un gaz classique elles se manifestent par une intégrale de collision(6.30). Celles-ci seraient également présentes dans l'équation de Wigner si l'on prenait en compte la fraction non-condensée. Il faudrait alors considérer trois "vertices" d'interactions différents correspondants aux collisions condensat - condensat, condensat - nuage thermique et nuage thermique - nuage thermique. Comme spécifié au chapitre 1, nous avons choisi de négliger l'influence de la fraction thermique et en particulier les deux derniers types de collisions.

6.2 Evolution des moments d'un nuage atomique condensé.

Nous nous intéressons à présent à l'évolution des moments associés aux opérateurs positions et impulsions pour un nuage atomique condensé. Ces équations découlent de l'équation de propagation de Wigner établie précédemment.

Ces moments définissent des quantités physiques significatives de l'état du nuage atomique telles que sa position, sa taille quadratique moyenne sa vitesse moyenne et son énergie cinétique. Par ailleurs, leur évolution dynamique peut révéler une transition entre les régimes sans collisions et hydrodynamique pour un gaz classique [107].

Les moments d'un nuage peuvent également s'avérer être un outil approprié pour l'étude des nuages condensés. Ils permettent de décrire les excitations de basse énergie, et constituent une alternative intéressante au traitement par des méthodes variationnelles [100, 101]. Nous verrons dans la partie suivante que les prédictions de ces deux méthodes coïncident. Par ailleurs, la structure du spectre associé à leur évolution dynamique est susceptible d'être utilisée pour identifier des signatures quantiques en présence d'une phase condensée macroscopique. En effet, l'équation de propagation contient des termes qui dépendent spécifiquement de \hbar , et qui interviennent par des couplages successifs dans l'évolution de grandeurs moyennes.

6.2.1 Définition du moment.

Commençons par définir les moments que nous allons considérer par la suite. Ils s'expriment en fonction de la distribution de Wigner :

$$\overline{a(\mathbf{r}, \mathbf{p})} = \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p} a(\mathbf{r}, \mathbf{p}) W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (6.31)$$

Les distributions de Wigner permettent de calculer des valeurs moyennes d'opérateurs fonctions des position et impulsion à condition que ceux-ci soient ordonnés de façon à symétriser les places respectives de la position et de l'impulsion. Cet ordonnancement porte le nom d'ordre de Weyl. Par exemple, l'opérateur $\hat{x}\hat{p}_x$ devient $S(\hat{x}\hat{p}_x) = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x})$ après ordonnancement de Weyl. La valeur d'un moment $a(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$ quelconque défini à partir de la fonction de Wigner est alors égale à la valeur moyenne de l'observable correspondante, après éventuel réarrangement de Weyl :

$$\overline{a(\mathbf{r}, \mathbf{p})} = \text{Tr} [\hat{\rho} S[a(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})]] \quad (6.32)$$

On comprend aisément pourquoi ce réarrangement intervient nécessairement dans le membre de droite : l'intégrale (6.31) définissant le moment $\overline{a(\mathbf{r}, \mathbf{p})}$ est bien évidemment invariante lorsque l'on permute les places respectives des opérateurs position et impulsion. Si la symétrisation n'intervenait pas dans l'opérateur dont on calcule la valeur moyenne, la non-commutativité des opérateurs position et impulsion ferait que cette invariance ne serait pas respectée.

6.2.2 Equations du mouvement.

Nous cherchons à évaluer la dérive temporelle d'un moment générique $\overline{x_1^{a_1} \dots x_k^{a_k} p_1^{b_1} \dots p_l^{b_l}}$. Afin de comprendre la façon dont procéder, il est instructif de commencer par un cas particulier.

6.2.2.1 Méthode des contractions sur un exemple unidimensionnel.

Nous allons ici évaluer la dérivée temporelle du moment \overline{xp} . Pour cela nous utilisons l'équation de propagation (6.7) :

$$\frac{d\overline{xp}}{dt} = \int dx dp xp \left[-\frac{p}{m} W_x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\hbar)^{2n}}{(2n+1)!2^{2n}} U_{x^{2n+1}}^0 W_{p^{2n+1}} \right] \quad (6.33)$$

Comme la distribution de Wigner s'annule à l'infini, toutes les intégrales faisant intervenir exclusivement des dérivées de cette fonction s'annulent :

$$\int dx dp W_x(x, p, t) = \int dx dp W_p(x, p, t) = 0 \quad (6.34)$$

Par contre lorsque la coordonnée présente dans la dérivée est aussi présente dans le moment, on obtient en intégrant par parties une contribution non nulle :

$$\int dx dp xp W_x(x, p, t) = -\overline{p} \quad (6.35)$$

L'astuce consiste ainsi à abaisser le degré des moments considérés en utilisant des intégrations par parties jusqu'à épuisement des coordonnées présentes dans la dérivée. Cette opération s'apparente à une contraction d'indice entre les coordonnées "moments" et les coordonnées "dérivées". Dans la série de dérivées de distributions de Wigner par rapport à l'impulsion, seul le premier terme se traduit par une contraction complète selon p . En effet, les termes suivants comportent au moins trois dérivées partielles selon p qui ne peuvent être couplées qu'à une seule coordonnée de p dans le moment. Les contractions correspondant aux termes supérieurs sont donc incomplètes et il ne reste alors que des

intégrales de la forme :

$$\int dx dp f(x) W_{p^b}(x, p), \quad b \geq 2$$

nulles du fait de l'annulation de la distribution de Wigner et de ses dérivées à l'infini. L'équation du mouvement pour le moment \overline{xp} s'écrit ainsi :

$$\frac{d\overline{xp}}{dt} = \frac{\overline{p^2}}{m} - \overline{xU_x} \tag{6.36}$$

6.2.2.2 Généralisation de la méthode des contractions à l'équation multidimensionnelle.

La contraction entre les coordonnées présentes dans le moment et dans les dérivées partielles reste bien sûr possible à plusieurs dimensions :

$$\int dx dp x_1^{a_1} \dots x_{i-1}^{a_{i-1}} x_i^{a_i} x_{i+1}^{a_{i+1}} \dots x_k^{a_k} p_1^{b_1} \dots p_l^{b_l} W_{x_i}(x, p, t) = (-a_i) \overline{x_i^{(a_i-1)} \dots x_j^{a_j} p_k^{b_k} \dots p_l^{b_l}} \tag{6.37}$$

Tout se passe comme si on avait "contracté" la coordonnée x_i . Nous allons désormais envisager les choses sous forme de diagramme, c'est-à-dire d'interconnexion d'une série d'objets "coordonnées" par des connecteurs définis par les coordonnées par rapport auxquels on dérive les distributions de Wigner. Afin d'envisager toutes les interconnexions possibles, nous allons désormais écrire les moments sans regrouper les coordonnées x_i en puissances. Ainsi, dans le moment précédent qui s'écrit désormais $\overline{x_i \dots x_i x_j \dots p_k \dots p_l}$, la coordonnée x_i apparaît a_i fois et donne lieu à a_i contractions qui génère chacune un terme $(-1) \overline{x_i^{a_i-1} x_k^{a_k} \dots p_l^{b_l}}$.

Muni de cette approche diagrammatique, nous pouvons désormais aborder l'évolution de moments généraux tels que celui défini en (6.31). Nous utiliserons désormais la notation $\overline{x_i \dots x_k \dots p_l \dots p_m}$, où les coordonnées x_i, p_i sont susceptibles d'apparaître plusieurs fois dans le produit. Nous cherchons à décrire simplement les termes apparaissant dans le membre de droite de l'équation lorsque l'on effectue une dérivation temporelle de ce moment. Il suffit en fait de considérer les moments obtenus lorsque l'on "raye" les coordonnées par rapport auxquelles la distribution de Wigner considérée est dérivée. Ces coordonnées sont en effet supprimées de l'expression du moment lors de l'intégration par partie. Nous désignerons les coordonnées à supprimer par une flèche \downarrow . Chaque distribution de Wigner dérivée de l'équation (6.26) engendre des termes qui correspondent au placement possible de telles flèches sur les coordonnées de la dérivation présentes dans le moment. L'ensemble des placements possibles permet de retrouver l'intégralité des termes apparaissant dans l'expression de la dérivée du moment. Une même distribution dérivée donnera lieu à une série de termes identiques. Ainsi la

distribution dérivée :

$$W_{p_1 p_2 p_3}$$

agira sur un moment en donnant lieu à une suppression des coordonnées p_1, p_2, p_3 et donnera lieu à autant de termes que de placements simultanés possibles de ces trois coordonnées. Par exemple, dans le cas du moment :

$$\overline{x_1 x_2 p_1 p_1 p_2 p_1 p_3 p_3 p_2} \tag{6.38}$$

on obtient $3 \times 2 \times 2$ façons de placer le triple connecteurs $p_1 p_2 p_3$, ce qui donne le facteur 12 correspondant à la dérivation des puissances correspondantes.

Remarquons que pour un nombre n fixant l'ordre de la dérivation à $2n + 1$ la série des dérivées partielles balaye toutes les combinaisons possibles de coordonnées impulsions dans les dérivées partielles :

$$\sum_{m_1 + \dots + m_k = 2n + 1}^{+\infty} \frac{(i\hbar)^{2n}}{2^{2n} m_1! \dots m_k!} U_{x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}}^0 W_{p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}}$$

Il est donc possible de changer de point de vue et de se baser uniquement sur les coordonnées impulsions intervenant dans l'expression du moment sans regarder les détails de la série de dérivées de Wigner. Reconsidérons l'exemple précédent $\overline{x_1 x_2 p_1 p_1 p_2 p_1 p_3 p_3 p_2}$. Nous allons considérer les termes apparaissant dans le membre de droite de l'équation provenant des distributions de Wigner dérivées trois fois par rapport à l'impulsion du type $W_{p_i p_j p_k}$. Quelques soient les trois coordonnées impulsions que l'on choisisse parmi les coordonnées du moment - par exemple p_1, p_1, p_2 si on prend les trois premières-, il existe dans la série des dérivées de Wigner un terme unique permettant la connection de ces trois coordonnées. Pour regarder l'action de la série des distributions de Wigner dérivées, il suffit donc d'examiner toutes les interconnexions possibles au sein du moment avec 1 coordonnée position (2 termes), puis 1 coordonnée impulsion (7 termes), puis entre 3 coordonnées impulsions (7.6.5 / 3! termes), entre 5 coordonnées (7.6.5.4.3 / 5! termes), et entre les 7 coordonnées (1 terme). A chaque fois on divise par le facteur $(m_1! \dots m_k!)$ s'il y a plusieurs coordonnées identiques. Les connections obtenues sont représentées ci-après :

L'ensemble des termes correspondant à la dérivée d'un moment est donc obtenu de la façon générale suivante :

1. Moments générés par le terme $-p_i/m W_{x_i}$. Ceux ci sont obtenus en plaçant le connecteur \downarrow sur une coordonnée position x_i . On remplace la coordonnée correspondante par p_i/m dans l'expression du moment.

$$\begin{aligned}
 \frac{d \overline{x_1 x_2 p_1 p_1 p_2 p_1 p_3 p_3 p_2}}{dt} &= \overline{\downarrow x_1 x_2 p_1 p_1 p_2 p_1 p_3 p_3 p_2} + \overline{\downarrow x_1 x_2 p_1 p_1 p_2 p_1 p_3 p_3 p_2} \\
 &+ \overline{\downarrow x_1 x_2 \dot{p}_1 p_1 p_2 p_1 p_3 p_3 p_2} + \dots + \overline{\downarrow x_1 x_2 p_1 p_1 p_2 p_1 p_3 p_3 p_2} \\
 &+ \frac{1}{2!} \overline{\downarrow \downarrow \downarrow x_1 x_2 \dot{p}_1 \dot{p}_1 \dot{p}_2 p_1 p_3 p_3 p_2} + \frac{1}{3!} \overline{\downarrow \downarrow \downarrow x_1 x_2 \dot{p}_1 \dot{p}_1 \dot{p}_2 \dot{p}_1 p_3 p_3 p_2} + \dots + \\
 &+ \frac{1}{3!} \overline{\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow x_1 x_2 \dot{p}_1 \dot{p}_1 \dot{p}_2 \dot{p}_1 \dot{p}_3 p_3 p_2} + \frac{1}{3!} \overline{\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow x_1 x_2 \dot{p}_1 \dot{p}_1 \dot{p}_2 \dot{p}_1 p_3 \dot{p}_3 p_2} + \dots + \\
 &+ \frac{1}{3!2!2!} \overline{\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow x_1 x_2 \dot{p}_1 \dot{p}_1 \dot{p}_2 \dot{p}_1 \dot{p}_3 \dot{p}_3 p_2}
 \end{aligned}$$

FIGURE 6.1 – Développement des moments apparaissant dans l'expression de la dérivation temporelle par la méthode des contractions.

2. Moments générés par le premier terme de la série de dérivées selon l'impulsion. Placer le connecteur \downarrow sur une coordonnée p_i et remplacer la coordonnée correspondante par $-U_{x_i}^0$.
3. Moments générés par le second terme de la série de dérivées selon l'impulsion. Considérer tous les placements possibles simultanés de trois flèches au dessus de coordonnées de type p_i . Chaque terme est obtenu en supprimant les coordonnées correspondantes p_i, p_j, p_k (avec éventuellement deux ou plusieurs coordonnées identiques) et en insérant le facteur $-U_{x_i x_j x_k}^0$ dans le moment considéré. Chaque terme est pondéré par un facteur $(i\hbar)^2$. Il faut diviser cette contribution par un facteur supplémentaire $m!$ s'il y a m coordonnées identiques.
4. Moments générés par le troisième terme de la série de dérivées selon l'impulsion. Considérer tous les placements possibles simultanés de cinq flèches...

Il y a un parallèle amusant à faire entre l'expansion que nous considérons et celle données par les diagrammes de Feynmann en théorie des champs. Dans les deux cas, ces diagrammes procèdent d'un développement en série entière d'une fonction de type exponentielle. L'interprétation en terme de développement perturbative est possible pour l'équation de Wigner dans la limite classique où $\hbar \rightarrow 0$

(en considérant le paramètre adimensionnel α correspondant permettant de prendre cette limite).
 Considérons par exemple la forme la plus simple d'interaction, de type $\phi^k(x)$. De tels diagrammes
 correspondent au développement en série entière d'une exponentielle du type :

$$\langle 0|T \left[\phi(x_1)\dots\phi(x_m) \exp \left(\int d^4x \phi^k(x) \right) \right] |0\rangle$$

où l'opérateur T est désigné l'ordonnancement temporel. Dans de tels cas, la série considérée génère
 des éléments du type :

$$\frac{1}{n!} \langle 0|T \left[\phi(x_1)\dots\phi(x_m) \left(\int d^4x \phi^k(x) \right)^n \right] |0\rangle$$

Le théorème de Wick implique que cette quantité peut s'écrire comme une somme de termes où les
 champs $\phi(x)$ sont intégralement connectés deux à deux par des propagateurs. Ainsi les diagrammes
 d'ordre n font intervenir l'ensemble des connections possibles entre un nombre $k \times n + m$ d'objets au
 moyen de connecteurs binaires que l'on appelle des propagateurs. Dans notre expansion, le nombre
 d'objets est fixé par le moment initial, plus précisément par le nombre n_p de coordonnées impulsions
 de ce moment. L'ensemble des diagrammes d'ordre n correspond à l'ensemble des placements pos-
 sibles de connecteurs à $2 \times n + 1$ entrées sur de tels moments. La série s'arrête ainsi naturellement
 lorsque $2n + 1 \geq n_p$. Remarquons que le facteur $1/(m_1! \dots m_k!)$ par lequel on divise la contribution
 lorsque la même coordonnée intervient plusieurs fois est également similaire au facteur de symétrie
 par lequel on divise les diagrammes de Feynman. Cette division intervient pour les diagrammes de
 Feynman lorsque l'on connecte plusieurs champs atomiques au même point d'espace-temps (donnant
 lieu à des "loops") et pour les moments lorsque l'on connecte plusieurs coordonnées identiques p_i .
 Dans les deux cas, la raison de la division est purement combinatoire : elle compense le fait que
 l'on compte plusieurs fois la contribution de configurations identiques, c'est-à-dire correspondant à
 l'interconnexion des mêmes objets.

6.2.3 Formulation algébrique.

Afin de systématiser l'étude de la dynamique des moments, il est utile d'adopter une perspective
 algébrique. Cette approche va nous aider notamment à découpler les équations différentielles gouver-
 nant l'évolution des moments.

Cette approche consiste à interpréter les moments comme des éléments de l'espace vectoriel :

$$E = \text{Vect} \left\{ \overline{x_1^{a_1} \dots x_k^{a_k} p_1^{b_1} \dots p_l^{b_l}} \mid a_1 \in \mathbb{N}, \dots, b_l \in \mathbb{N} \right\}$$

La dérivation temporelle apparaît alors comme un endomorphisme f . En présence d'un potentiel harmonique, l'équation (6.36) donnant l'évolution du moment \overline{xp} peut ainsi s'interpréter comme :

$$f(\overline{xp}) = -\frac{1}{m}\overline{p^2} + m\omega^2\overline{x^2} \quad (6.39)$$

Identifier une famille de moments admettant un système d'équations différentielles fermé revient alors à identifier un sous espace vectoriel de E stable par l'endomorphisme f associé à la dérivation temporelle. La recherche d'une telle famille de moments est pertinente car elle permet d'identifier des grandeurs moyennes dont la dynamique est aisément soluble.

De façon similaire, rechercher une équation différentielle fermée pour un moment \overline{a} :

$$\lambda_n \frac{d^n \overline{a}}{dt^n} + \dots + \lambda_0 \overline{a} = 0 \quad (6.40)$$

revient alors à trouver un polynôme annulant l'action de l'endomorphisme f sur le vecteur \overline{a} :

$$[\lambda_n X^n + \dots + \lambda_0](f)(\overline{a}) = 0 \quad (6.41)$$

L'identification d'un sous-espace stable de dimension finie conduit, par le théorème de Cayley-Hamilton [108], à l'obtention d'un polynôme annulateur de l'endomorphisme et donc à une équation différentielle faisant intervenir un seul moment.

6.2.3.1 Retour sur la formulation Liouvillienne.

En reprenant la formulation en termes de Liouvillien (6.10), on voit que la dérivation temporelle d'un moment de type $\overline{x^a p^b}$ fait apparaître dans le membre de droite des moments de la forme $\overline{H_p(x,p)x^{a-1}p^b}$, $\overline{H_x(x,p)x^a p^{b-1}}$, $\overline{H_{x^3}(x,p)x^a p^{b-3}}$, $\overline{H_{p^3}(x,p)x^{a-3}p^b}$. Ces termes correspondent au développement du Liouvillien en une série de puissance impaires du crochet de Poisson $\overleftrightarrow{\Lambda}$. Nous nous plaçons dans un cadre non-relativiste où le Hamiltonien $H(x,p)$ est une fonction quadratique de l'impulsion, et donc la série de moments associés à des dérivées du Hamiltonien par rapport à l'impulsion se réduit à $\overline{H_p(x,p)x^{a-1}}$. Avec un potentiel extérieur U^0 quelconque, les termes apparaissant dans le membre de droite tels que $\overline{H_x(x,p)x^a p^{b-1}}$ vont en général donner lieu à des moments d'ordre plus élevés que le moment initial. La question qui se pose désormais est d'identifier des Hamiltoniens tels que les équations sur les moments $\overline{H_p(x,p)x^{a-1}p^b}$ "rebouclent", c'est-à-dire donnant lieu à des sous-espaces stables pour l'endomorphisme de dérivation f .

Nous allons voir que ceci est réalisé pour un Hamiltonien quadratique sans interaction : on peut

identifier une famille de moments qui constituent un sous-espace stable. En revanche, pour des Hamiltonien comportant la contribution non-linéaire d'un potentiel de contact, il n'y a en général pas de tel sous-espace.

Le premier cas est celui d'un Hamiltonien sans interaction en présence d'un potentiel extérieur quadratique. Le second cas est moins trivial, il s'agit d'un Hamiltonien comportant un pseudo-potentiel d'interactions de contact entre ses molécules. Afin de mettre en évidence de façon simple l'existence d'espaces stables et d'appréhender la dynamique des moments en présence d'interactions de contact, nous allons représenter les équation sous forme de diagrammes.

6.2.3.2 Potentiel extérieur quadratique.

La particularité du potentiel quadratique est que les moments intervenant dans l'expression de la dérivée temporelle sont de puissance inférieure ou égale à celle du moment que l'on dérive. On peut reformuler cette propriété en énonçant que le sous-espace E_n :

$$E_n = Vect\{ \overline{x_1^{a_1} \dots x_k^{a_k} p_1^{b_1} \dots p_l^{b_l}} \mid a_1 + \dots + b_l \leq n \}$$

est stable par l'endomorphisme F . Dans le cas d'un potentiel harmonique centré à l'origine, c'est-à-dire de la forme $U^0 = m \sum_j \omega_j^2 x_j^2$, les puissances des moments sont conservées. On peut alors identifier un sous-espace stable plus restreint, l'espace :

$$E'_n = Vect\{ \overline{x_1^{a_1} \dots x_k^{a_k} p_1^{b_1} \dots p_l^{b_l}} \mid a_1 + \dots + b_l = n \}$$

est stable par l'opération de dérivation. A l'ordre 2, ceci permet d'identifier la famille de moments $\overline{p^2}, \overline{x\overline{p}}, \overline{x^2}$ comme obéissant à un système d'équations fermées. De même, la position moyenne \mathbf{x} et l'impulsion moyenne \mathbf{p} obéissent à un système d'équations fermées. Pour un potentiel quadratique, la matrice associée à l'endomorphisme de dérivation au sein d'une multiplicité E_n , admet en fait une expression de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

Il est alors facile de diagonaliser l'endomorphisme de dérivation au sein de chaque multiplicité pour obtenir les fréquences d'oscillation des moments correspondants.

Le traitement de potentiels polynomiaux d'ordre plus élevé (cubique, quartique...) est beaucoup plus complexe car l'endomorphisme de dérivation f va coupler certains éléments du sous-espace à des moments de puissance plus élevée. On observe alors un mélange non-linéaire des multiplicités précédentes, et il n'est en général plus possible d'identifier des espaces stables.

6.2.3.3 Représentation en diagrammes.

Une façon commode de représenter le système différentiel régissant les moments consiste à écrire des diagrammes représentant leurs couplages. Ceux-ci sont construits de la manière suivante. On relie par une flèche chaque moment \overline{m} aux moments apparaissant dans l'expression de $f(\overline{m}) = \dot{\overline{m}}$. Des diagrammes de cette forme ont été développés par David Guéry-Odelin pour traiter l'évolution d'un gaz classique régi par l'équation de Boltzmann [109]. On obtient ainsi, pour les moments évoluant dans un potentiel quadratique, le diagramme de la Figure 6.2.

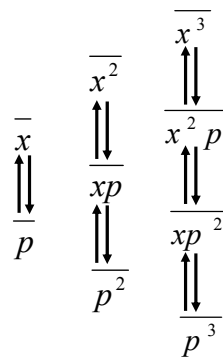


FIGURE 6.2 – Diagrammes montrant le couplage de moments des sous-espaces E_1, E_2, E_3 .

6.2.4 Quels sont les moments porteurs d'une dynamique quantique ?

Rappelons que la constante \hbar intervient en général de façon "statique" via la distribution de Wigner initiale. Cela donne lieu à des relations entre les différents moments, notamment la relation d'incertitude entre les dispersions en impulsion et en position.

Il est cependant intéressant de considérer également les effets dynamiques associés à la constante \hbar . Les moments régis par une dynamique quantique sont ceux pour lesquels les opérateurs associés à des ordres non nuls en \hbar interviennent dans l'équation d'évolution. Nous allons examiner quels sont ces moments dans deux cas de figure : nuage atomique soumis à un potentiel cubique, puis à un potentiel extérieur quadratique avec interactions de contact entre atomes. Pour simplifier la discussion, nous nous plaçons dans un cadre unidimensionnel (par p nous entendons p_x).

Le premier terme non trivial de la série de puissances de \hbar de l'équation (6.7) fait intervenir deux dérivées troisièmes :

$$\frac{(i\hbar)^2}{3!2^2} U_{x^3} W_{p^3}$$

6.2.4.1 Potentiel extérieur cubique (sans interactions).

On peut ainsi voir que ce sont les termes plus que quadratiques du potentiel qui induisent une évolution dynamique non-classique pour les positions et vitesses moyennes. Les équations d'évolution de ces moments s'écrivent, dans le formalisme de Wigner :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= -\frac{\bar{p}}{m} \\ \frac{d\bar{p}}{dt} &= -\frac{\overline{U_x^0}}{m} \end{aligned} \quad (6.42)$$

Ainsi, un terme de potentiel cubique λx^3 va coupler l'évolution de l'impulsion moyenne \bar{p} à la dispersion $\overline{x^2}$. Les positions et impulsions moyennes n'obéissent alors plus aux équations de Hamilton classique. C'est seulement dans le cas où l'approximation

$$\overline{U_x^0} \simeq U_x^0(\bar{x}) \quad (6.43)$$

peut être réalisée que l'on retrouve de telles équations. Cet exemple montre une fois de plus que l'évolution dans un potentiel quadratique est interprétable de façon classique.

L'action d'un potentiel plus que quadratique est donc de coupler chaque moment à d'autres moments de puissances de plus en plus élevées. Si l'on considère par exemple la position moyenne, celle-ci, va être graduellement couplée à des moments d'ordre de plus en plus élevés et donc à des moments dont la puissance est compatible avec l'apparition d'un terme quantique en \hbar^2 .

Nous considérons ici un potentiel extérieur “cubique” de la forme :

$$U^0 = \beta x^3 e^{-\epsilon x^2} \quad (6.44)$$

Un potentiel purement cubique n'est pas physique car il donne lieu à des états associés à des énergies non bornées inférieurement. Afin de pallier à ce problème, nous avons introduit un facteur exponentiel imposant une borne inférieure au spectre associé à ce potentiel. Nous supposons que la constante ϵ est très faible, et permet de traiter le potentiel comme un terme cubique sur les dimensions du nuage, c'est-à-dire lorsque $x \simeq \sqrt{x^2}$.

Comme la dérivée troisième du potentiel extérieur est non-nulle, tout moment contenant une puissance en p supérieure à trois a des termes quantiques tels que (6.42) dans sa dérivée temporelle. Le diagramme de la Figure 6.3 montre comment la position moyenne est couplée à des termes quantiques. Remarquons cependant que ces corrections interviennent à un ordre élevé puisque la contribution quantique apparaît seulement après 8 itérations de l'endomorphisme f , ce qui correspond à une dérivée 8ème.

6.2.4.2 Potentiel extérieur quadratique avec interactions de contact.

La dérivée troisième du potentiel extérieur est nulle. La seule contribution quantique possible ne peut donc venir que du champ moyen. Le terme quantique d'ordre le plus bas s'écrit :

$$\frac{(i\hbar)^2}{3!2^2} \left(\int dx dp dp' W_{x^3}(x, p', t) \right) W_{p^3}(x, p, t) \quad (6.45)$$

Ce terme ne peut avoir d'effet sur l'évolution d'un moment que s'il comporte une puissance en p d'ordre supérieur ou égal à 3. En effet, si la puissance de p est inférieure ou égale à deux, l'intégration sur p annule directement le terme.

Examinons donc les équations du mouvement pour des moments d'ordre 3. En présence d'interactions de contact, les équations de moments font apparaître des produits de distributions de

Wigner :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\overline{x^3}}{dt} = \frac{3}{m} \overline{x^2 p} \\ \frac{d\overline{x^2 p}}{dt} = \frac{2}{m} \overline{x p^2} - m\omega^2 \overline{x^3} + Ng \int dx dp dp' W_x(x, p', t) W_p(x, p, t) x^2 p \\ \frac{d\overline{x p^2}}{dt} = \frac{1}{m} \overline{p^3} - 2m\omega^2 \overline{x^2 p} + Ng \int dx dp dp' W_x(x, p', t) W_p(x, p, t) x p^2 \\ \frac{d\overline{p^3}}{dt} = -3m\omega^2 \overline{x p^2} + Ng \int dx dp dp' W_x(x, p', t) W_p(x, p, t) p^3 + \frac{(i\hbar)^2}{3!} Ng \int dx dp dp' W_{x^3}(x, p', t) W_{p^3}(x, p, t) p^3 \end{array} \right. \quad (6.46)$$

Examinons le terme quantique de la dernière équation. Une intégration par parties sur p permet de contracter les dérivées avec les puissances de p . Une intégration par parties sur x montre que ce terme est, en fait, nul.

Les corrections quantiques interviennent donc sur la multiplicité d'ordre 4 correspondant un sous-espace E_4 . Le terme quadratique du potentiel extérieur couple tous les moments d'une même multiplicité entre eux. Le premier terme quantique apparaît ainsi dans la dérivée du moment $\overline{x p^3}$:

$$Q_1 = (i\hbar)^2 Ng \int dx dp dp' W_{x^3}(x, p', t) W(x, p, t) x \quad (6.47)$$

Le diagramme de la Figure 6.3 montre comment ce terme intervient dans la dynamique du moment $\overline{x^4}$.

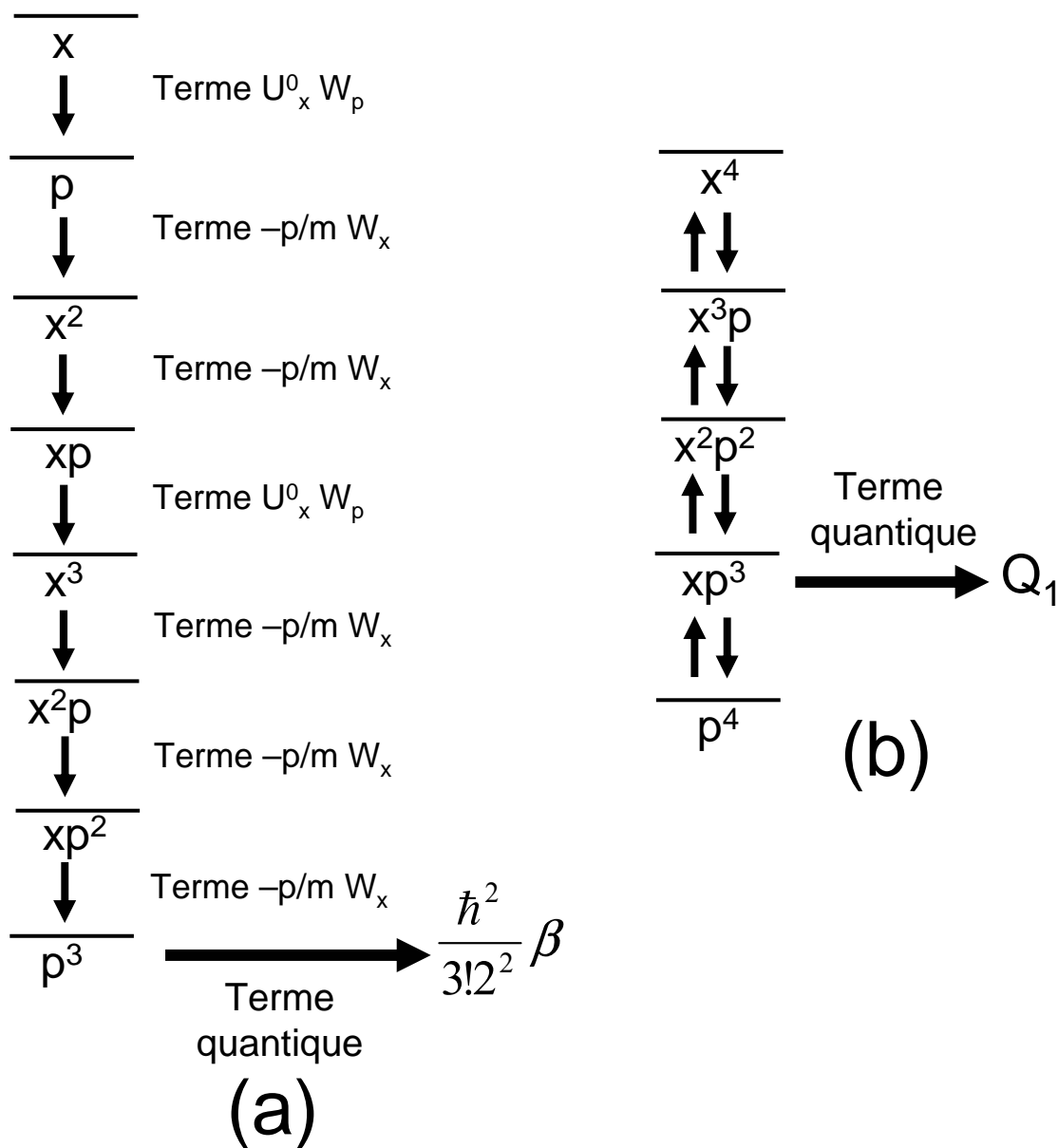


FIGURE 6.3 – Diagrammes montrant l'intervention des premières corrections quantiques (a) dans l'évolution de la position moyenne en présence d'un potentiel cubique (6.44) sans interactions (b) dans l'évolution d'un moment d'ordre 4 en présence d'un potentiel extérieur quadratique et d'un pseudopotentiel de contact.

6.3 Propagation classique dans l'espace des phases.

Reprenons l'exemple d'un nuage atomique condensé évoluant en présence d'un potentiel extérieur quadratique et d'un potentiel d'interaction modélisable par un terme de contact. La discussion précédente montre que les termes quantiques de l'équation de propagation de Wigner (6.26) n'interviennent pas dans la dynamique de moments position-impulsion de faible puissance (inférieure ou égale à cinq). La position moyenne et la largeur quadratique évoluent par exemple de façon classique. Ceci suggère que la partie classique de l'équation de Wigner, qui a l'avantage d'être beaucoup plus simple que l'équation complète, est suffisante pour décrire la propagation du nuage dans un tel potentiel.

C'est ce que nous allons vérifier en examinant directement la distribution solution de l'équation classique, et en comparant son comportement avec celui prédit pour la solution de l'équation de Wigner complète. Soulignons que cette approximation classique (plus fréquemment appelée "équation de Wigner tronquée") a déjà été étudiée en optique [110, 111] et en physique atomique [97, 2, 98]. On s'attend à ce que les prédictions des deux équations coïncident dans la limite de faible densité, puisque l'équation de Wigner complète se réduit à sa partie classique pour un nuage infiniment dilué. Il est en revanche moins évident que l'équation classique soit adaptée pour décrire le comportement d'un nuage dans la limite de Thomas-Fermi où la dynamique est dominée par l'effet des interactions. Celles-ci génèrent en effet une série infinie de dérivées dans l'équation de Wigner, et les ordres supérieurs ignorés dans l'équation classique sont susceptibles de modifier sensiblement la propagation. Il s'avère en fait que là encore l'équation classique est pertinente. Il y a là une complète cohérence avec la forme classique que prennent les équations hydrodynamiques dans ces deux régimes : la seule contribution à ces équations faisant intervenir explicitement la constante \hbar est le terme de pression quantique, qui devient négligeable aussi bien dans la limite de dilution que dans la limite de Thomas-Fermi.

Les deux régimes de propagation évoqués correspondent à deux situations opposées du point de la contribution relative des interactions à l'énergie totale du nuage. La validité de l'équation de Wigner classique dans ces deux cas extrêmes laisse présager un domaine de validité important pour l'équation classique. Sa pertinence pour décrire le régime intermédiaire où énergie d'interactions et énergie cinétique sont comparables sera confirmée par l'étude de la dynamique d'ansatz gaussiens dans la partie suivante.

Nous examinons enfin deux cas de figure où l'équation de Wigner classique permet de retrou-

ver aisément les prédictions provenant d'une symétrie de l'équation d'onde. Les deux exemples font intervenir un potentiel extérieur quadratique. D'une part nous obtenons la propagation *ABCD* en l'absence d'interactions interatomiques, conséquence de la symétrie symplectique de l'équation de propagation. D'autre part, nous retrouvons l'invariance du spectre d'excitation des modes monopolaires et quadrupolaires lors de l'addition d'un potentiel d'interaction en $1/r^2$ (ou d'un potentiel de contact à deux dimensions). Ce dernier résultat est profondément lié à une symétrie du Hamiltonien [112]. Il n'était pas trivial *a priori* que la troncature de la série des dérivées dans l'équation de Wigner soit compatible avec cette prédiction. Sa validité suggère que la troncature des termes quantiques d'ordre supérieur ou égal à \hbar^2 préserve la symétrie du Hamiltonien responsable de la structure du spectre.

6.3.1 Propagation de Wigner classique en régime de Thomas-Fermi : loi d'expansion.

Nous montrons ici que l'équation de Wigner classique prédit correctement la dynamique d'expansion d'un nuage atomique condensé en régime d'interactions fortes. Nous retrouvons en fait les lois d'échelles établies par Castin et Dum [38, 113] généralisant l'approximation de Thomas-Fermi aux potentiels extérieurs dépendant du temps.

Nous reprenons la démarche suivie par ces auteurs en considérant à nouveau la transformation de jauge suivante correspondant à un changement d'échelle dépendant du temps :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\prod_1^d \lambda_i(t)}} e^{i\beta(t)} e^{im \sum_1^d \dot{\lambda}_i(t) x_i^2 / [2\hbar \lambda_i(t)]} \tilde{\Phi}(x_i / \lambda_i(t), t) \quad (6.48)$$

Nous exprimons à présent la distribution de Wigner associée à Φ en fonction de la distribution de Wigner \tilde{W} associée à la fonction rééchelonnée $\tilde{\Phi}$:

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d \prod_1^d \lambda_i} \int d^3 \mathbf{r}' e^{im \sum_1^d \dot{\lambda}_i (x_i + x_i')^2 / (2\hbar \lambda_i)} \tilde{\Phi} \left(\frac{x_i + x_i' / 2}{\lambda_i}, t \right) e^{-im \sum_1^d \dot{\lambda}_i (x_i - x_i')^2 / (2\hbar \lambda_i)} \tilde{\Phi}^* \left(\frac{x_i - x_i' / 2}{\lambda_i}, t \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'} \quad (6.49)$$

Il est facile de transformer cette expression par le changement de variable $x_i'' = x_i' / \lambda_i$ pour faire apparaître la distribution de Wigner de la fonction $\tilde{\Phi}$:

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \tilde{W} \left(\frac{x_i}{\lambda_i}, \lambda_i p_i - m \dot{\lambda}_i x_i, t \right) \quad (6.50)$$

La transformation de jauge précédente sur les fonctions d'onde se traduit donc dans l'espace des phases par la transformation suivante :

$$M_S : (\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \rightarrow (x_i/\lambda_i, \lambda_i p_i - m\dot{\lambda}_i x_i, t) \quad (6.51)$$

Nous notons $W^c(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ la distribution solution de l'équation de Wigner classique afin d'éviter toute confusion entre cette solution approchée et la véritable distribution de Wigner $W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Nous établissons la même correspondance de jauge entre les distributions W^c et \widetilde{W}^c qu'entre les distributions de Wigner W et \widetilde{W} . Notre objectif est de montrer que le mouvement de $W^c(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ suit essentiellement celui des paramètres d'échelle λ_i donnés par la loi d'expansion en régime d'interactions fortes. En d'autres termes, nous souhaitons montrer que si les paramètres λ_i vérifient le jeu d'équations :

$$\ddot{\lambda}_i = \frac{\omega_i^2(0)}{\lambda_i \prod_{j=1}^d \lambda_j} - \lambda_i \omega_i^2(t) \quad (6.52)$$

alors la distribution \widetilde{W}^c évolue lentement.

Nous commençons par écrire l'équation du mouvement pour \widetilde{W}^c en insérant la transformation de jauge (6.48) dans l'équation de Wigner classique :

$$-m\ddot{\lambda}_i \lambda_i x'_i \widetilde{W}_{p_i}^c + \widetilde{W}_t^c = -\frac{p'_i}{m\lambda_i^2} \widetilde{W}_{x_i}^c + \left[\frac{m}{2} \omega^2(t) \lambda_i^2 x'_i + \frac{1}{\prod_1^d \lambda_j} N g \frac{\partial |\widetilde{\Phi}(x'_i, t)|^2}{\partial x_i} \right] \widetilde{W}_{p_i}^c$$

Les quantités intervenant dans cette expression sont évaluées au point $(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t') = M_S(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Nous effectuons à présent des regroupements judicieux dans l'équation précédente afin de faire apparaître l'équation des paramètres λ_i :

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_t^c(x'_i, p'_i, t) = & -\frac{p'_i}{m\lambda_i^2} \widetilde{W}_{x_i}^c(x'_i, p'_i, t) + \frac{1}{\prod_1^d \lambda_j} \partial_{x_i} \left[\frac{m}{2} \omega^2(0) x_i'^2 + N g |\widetilde{\Phi}(x'_i, t)|^2 \right] \widetilde{W}_{p_i}^c(x'_i, p'_i, t) \\ & + m \left[\ddot{\lambda}_i \lambda_i + \lambda_i^2 \omega^2(t) - \frac{\omega^2(0)}{\prod_1^d \lambda_j} \right] x'_i \widetilde{W}_{p_i}^c(x'_i, p'_i, t) \quad (6.53) \end{aligned}$$

Lorsque les paramètres d'échelle vérifient les équations (6.52), le dernier terme du membre de droite disparaît. Afin d'évaluer la rapidité de l'évolution temporelle de W^c , nous la décomposons en une partie statique et une partie dépendant du temps : $\widetilde{W}^c(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \widetilde{W}^c(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0) + \delta \widetilde{W}^c(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. La

composante dépendant du temps obéit alors à une équation aux dérivées partielles :

$$\boxed{\delta\widetilde{W}_t^c + \sum_{i=1}^d \left[\frac{p_i}{m\lambda_i^2} \delta\widetilde{W}_{x_i}^c - \frac{V_{x_i}^e}{\prod_{j=1}^d \lambda_j} \delta\widetilde{W}_{p_i}^c \right]} = S(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (6.54)$$

avec le potentiel V^e et le terme source S définis par :

$$V^e(\mathbf{r}, 0) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^d \omega_i^2(0) x_i^2 + Ng |\widetilde{\Phi}(\mathbf{r}, 0)|^2 \simeq \mu - \frac{\hbar^2 \overline{p^2}(0)}{2m}$$

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = -\frac{p_i}{m\lambda_i^2(t)} \widetilde{W}_{x_i}^c(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0) + V_{x_i}^e(\mathbf{r}, 0) \widetilde{W}_{p_i}^c(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0)$$

Le terme $\delta\widetilde{W}^c(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ dépendant du temps s'exprime comme la convolution de la fonction de Green de cette équation aux dérivées partielles avec le terme source. Pour établir que la composante $\delta\widetilde{W}^c$ évolue lentement, c'est-à-dire avec un temps caractéristique bien plus long que celui associé à l'énergie d'interaction, il suffit de montrer que le terme source S est plus petit que la fréquence d'interaction $\omega_{int} = E_{int}(0)/\hbar$.

Le premier facteur du terme source :

$$\frac{p_i}{m\lambda_i^2} W_{x_i}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0) \sim \frac{p_i}{m\lambda_i^2} \left(\frac{\overline{p_i}}{\hbar} \right) W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0)$$

contribue principalement pour les valeurs $p_i \simeq \overline{p_i}(0)$ de l'ordre du moment initial. La décroissance de la distribution de Wigner initiale fait que ce terme est négligeable dès lors que l'on considère des valeurs de l'impulsion bien supérieures à la moyenne initiale $|p_i| \gg |\overline{p}(0)|$. Le premier terme est donc du même ordre de grandeur que la fréquence associée à l'énergie cinétique initiale $\omega_K = \overline{p^2}(0)/(2m\hbar)$. Le second facteur, faisant intervenir l'opérateur associé à l'énergie cinétique, peut être estimé à :

$$V_{x_i}^e(\mathbf{r}, 0) W_{p_i}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0) \sim \frac{\overline{p_i}(0)}{\hbar} \frac{\overline{p^2}(0)}{2m} \frac{\overline{x_i}}{\hbar} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0)$$

où nous avons utilisé l'analyse de Fourier pour évaluer l'ordre de grandeur de $W_{p_i}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0) \sim \overline{x_i}/\hbar W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0)$. Cette deuxième contribution est donc également comparable à la fréquence associée à l'énergie cinétique initiale et donc bien inférieure à celle associée à l'énergie d'interaction.

Cette analyse montre que la distribution $\widetilde{W}^c(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ évolue bien plus lentement que les paramètres d'échelle λ_i dont l'échelle de temps correspond aux fréquences de piégeage initiales (bien supérieures

à la fréquence de recul dans la limite de Thomas-Fermi). En première approximation il est donc possible d'écrire la solution de l'équation de Wigner classique sous la forme :

$$W^c(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \simeq W^c \left(\frac{x_i}{\lambda_i}, \lambda_i p_i - m \dot{\lambda}_i x_i, 0 \right) \quad (6.55)$$

avec des paramètres d'échelle vérifiant le jeu de relations (6.52). L'équation de Wigner classique aboutit donc à une prédiction d'expansion du nuage conforme aux résultats attendus pour le régime de Thomas-Fermi dépendant du temps.

6.3.2 Propagation de Wigner dans un potentiel extérieur quadratique en l'absence d'interactions : théorème ABCD dans l'espace des phases.

En l'absence d'interactions et en présence d'un potentiel quadratique, la validité de l'équation de Wigner classique est évidente puisque l'équation de Wigner complète se réduit à sa partie classique. Il est néanmoins instructif de retrouver l'équivalent dans l'espace des phases de la propagation par le théorème *ABCD* utilisée à plusieurs reprises dans ce mémoire, résultat lié à la symétrie symplectique de l'équation d'onde. Ceci permet également de faire le lien entre la propagation dans l'espace des phases exposée dans ce chapitre et les autres outils théoriques exposés dans le manuscrit tels que l'approche des interactions par une méthode *ABCD*.

L'équation de Wigner classique fournit une méthode élégante pour obtenir la version dans l'espace des phases du théorème *ABCD* démontré par Christian Bordé pour les fonctions d'onde. Ce n'est pas surprenant car l'équation de Wigner classique a une structure qui reflète celle des équations de Hamilton, qui interviennent dans la démonstration de Christian Bordé du théorème *ABCD*. Par ailleurs, mentionnons que Christian Bordé avait déjà montré en procédant par intégration directe que la propagation de la distribution de Wigner associée à un mode fondamental gaussien suivait la dynamique *ABCD* [55]. Nous obtenons ici le résultat général pour une distribution de Wigner initiale quelconque en faisant appel à l'équation de propagation.

Commençons par examiner les conséquences de l'évolution *ABCD* sur l'espace des phases en considérant, comme au chapitre 1, l'évolution des opérateurs position et impulsion en représentation

de Heisenberg :

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}(t) \\ \frac{1}{m}\hat{\mathbf{P}}(t) \end{pmatrix} = M(t, t_0) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}(t_0) \\ \frac{1}{m}\hat{\mathbf{P}}(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\xi}(t) \\ \hat{\phi}(t) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M(t, t_0) = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \quad (6.56)$$

Puisque l'état quantique est invariant en représentation de Heisenberg, la valeur moyenne associée aux observables position et impulsion suit la même évolution temporelle que les opérateurs correspondants (ce résultat découle par ailleurs du théorème *ABCD*). Un échantillon atomique ayant une distribution de Wigner initialement concentrée autour du point $\mathbf{R}(t_0), \mathbf{P}(t_0)$ aura, à l'instant t , une distribution concentrée en $(\mathbf{R}(t), \mathbf{P}(t)) = M(t, t_0)(\mathbf{R}(t_0), \mathbf{P}(t_0))$. L'espace des phases en t_0 est donc envoyé par une application linéaire sur l'espace des phases à t comme présenté sur la figure 6.4.

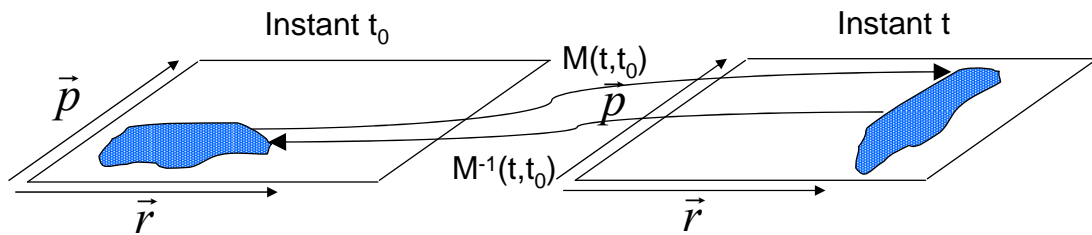


FIGURE 6.4 – Transformation dans l'espace des phases associée à la propagation dans un potentiel quadratique en position et en impulsion.

Etant donné que les distributions de Wigner font intervenir des couples position-impulsion plutôt que sur des couples position-vitesse, il est utile de définir l'application M' suivante :

$$M'(t, t_0) = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & \frac{1}{m}B(t, t_0) \\ mC(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \quad (6.57)$$

Nous avons introduit la masse en tant que paramètre dans l'application M' afin de préserver les conventions usuelles des matrices *ABCD*.

Il est donc logique de s'attendre à ce que cette correspondance se transpose directement en une relation entre la distribution de Wigner à l'instant t et celle à l'instant t_0 :

$$W \left(M'(t, t_0) (\mathbf{r}, \mathbf{p}) + (\xi(t, t_0), m\phi(t, t_0)), t \right) = W (\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \quad (6.58)$$

Nous allons montrer que l'équation de propagation de Wigner classique est bien compatible avec une

telle relation et implique une expression des matrices 3×3 $ABCD$ et vecteurs ξ, ϕ en concordance avec les équations usuelles de l'optique atomique (1.61) et (1.62) évoquées en introduction.

Selon la relation (6.58), la connaissance de la distribution de Wigner initiale, de l'inverse de la transformation $M'(t, t_0)$ et des vecteurs $\xi(t, t_0), \phi(t, t_0)$ suffit à déterminer la distribution de Wigner à l'instant t :

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = W\left(M'^{-1}(t, t_0) \begin{pmatrix} \mathbf{r} - \xi(t, t_0) \\ \mathbf{p} - m\phi(t, t_0) \end{pmatrix}, t_0\right) \quad (6.59)$$

Heureusement, la structure symplectique des équations de propagation dans un potentiel quadratique fait que la transformation M' sur l'espace des phases est facilement inversible :

$$M'^{-1}(t, t_0) = \begin{pmatrix} A(t_0, t) & \frac{1}{m}B(t_0, t) \\ mC(t_0, t) & D(t_0, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{D}(t, t_0) & -\frac{1}{m}\tilde{B}(t, t_0) \\ -m\tilde{C}(t, t_0) & \tilde{A}(t, t_0) \end{pmatrix} \quad (6.60)$$

Nous considérons l'évolution de la distribution de Wigner sous le Hamiltonien quadratique (1.50) déjà introduit au premier chapitre et dont nous rappelons ici l'expression générique :

$$H = \frac{\mathbf{p} \cdot \beta(t) \cdot \mathbf{p}}{2m} - \tilde{\mathbf{r}}\alpha(t)\mathbf{p} - \frac{m}{2}\tilde{\mathbf{r}}\gamma(t)\mathbf{r} - m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{p}$$

Afin de montrer que l'équation de Wigner classique préserve la propagation par matrice $ABCD$, nous allons utiliser une méthode générale qui consiste à montrer qu'une fonction d'essai vérifie la même équation de propagation et les mêmes conditions initiales. Nous considérons ici la distribution suivante :

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = W\left(\tilde{D}(t, t_0)(\mathbf{r} - \xi) - \frac{1}{m}\tilde{B}(t, t_0)(\mathbf{p} - m\phi), -m\tilde{C}(t, t_0)(\mathbf{r} - \xi) + \tilde{A}(t, t_0)(\mathbf{p} - m\phi), 0\right) \quad (6.61)$$

Nous allons montrer que si certaines équations sont satisfaites par les paramètres A, B, C, D, ξ, ϕ , cette fonction vérifie l'équation de Wigner classique :

$$y_t = -H_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot y_{\mathbf{r}} + H_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot y_{\mathbf{p}} \quad (6.62)$$

Nous imposons aux paramètres les conditions initiales $A(t_0, t_0) = C(t_0, t_0) = I_3$, $B(t_0, t_0) = D(t_0, t_0) = 0_3$ et $\xi(t_0, t_0) = \phi(t_0, t_0) = 0$ afin de faire coïncider initialement les deux distributions.

Il importe de faire attention à la transposition des matrices. Rappelons le résultat élémentaire de

calcul différentiel :

$$\partial_{\mathbf{r}} f(M\mathbf{r}) = \widetilde{M} \partial_{\mathbf{r}} f$$

En insérant l'expression de F dans l'équation classique (6.62), on obtient au point $(\mathbf{r}', \mathbf{p}') = (\mathbf{r} - \xi, \mathbf{p} - m\phi)$:

$$\begin{aligned} & \left[\widetilde{D}_t \mathbf{r} - \frac{1}{m} \widetilde{B}_t \mathbf{p} + (-\widetilde{D}\xi_t + \widetilde{B}\phi_t) \right] \cdot W_{\mathbf{r}}|_0 + \left[-m\widetilde{C}_t \mathbf{r}' + \widetilde{A}_t \mathbf{p}' + (m\widetilde{C}\xi_t - \widetilde{A}\phi_t) \right] \cdot W_{\mathbf{p}}|_0 \\ &= - \left[\beta \frac{\mathbf{p}'}{m} - \widetilde{\alpha} \mathbf{r}' + f \right] \cdot \left[\widetilde{D} W_{\mathbf{r}}|_0 - m\widetilde{C} W_{\mathbf{p}}|_0 \right] + \left[\alpha \mathbf{p}' - m\gamma \mathbf{r}' - m\mathbf{g} \right] \cdot \left[-\frac{1}{m} \widetilde{B} W_{\mathbf{r}}|_0 + \widetilde{A} W_{\mathbf{p}}|_0 \right] \end{aligned} \quad (6.63)$$

En utilisant enfin la relation $\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = \widetilde{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, nous regroupons les termes dépendant du temps selon les puissances de \mathbf{r}, \mathbf{p} et dérivées partielles de la distribution de Wigner initiale auxquels ils sont associés :

$$\begin{aligned} & \left[\widetilde{D}_t - \widetilde{D}\widetilde{\alpha} - \widetilde{B}\gamma \right] \mathbf{r} \cdot W_{\mathbf{r}}|_0 + \left[-\widetilde{B}_t + \widetilde{D}\widetilde{\beta} - \widetilde{B}\alpha \right] \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot W_{\mathbf{r}}|_0 + \left[-\widetilde{C}_t + \widetilde{C}\widetilde{\alpha} + \widetilde{A}\gamma \right] m\mathbf{r} \cdot W_{\mathbf{p}}|_0 \\ &+ \left[\widetilde{A}_t - \widetilde{C}\beta - \widetilde{A}\widetilde{\alpha} \right] \mathbf{p} \cdot W_{\mathbf{p}}|_0 + \left[-(\widetilde{D}_t \xi - \widetilde{D}\xi_t + \widetilde{D}f) + (\widetilde{B}_t \phi + \widetilde{B}\phi_t - \widetilde{B}g) \right] W_{\mathbf{r}}|_0 \\ &+ m \left[(\widetilde{C}_t \xi + \widetilde{C}\xi_t - \widetilde{C}f) - (\widetilde{A}_t \phi + \widetilde{A}\phi_t - \widetilde{A}g) \right] W_{\mathbf{p}}|_0 = 0 \end{aligned} \quad (6.64)$$

Les termes entre crochets sont nécessairement nuls. En effet, d'une part les matrices $ABCD$ sont paramétrées uniquement par le temps, d'autre part leur loi d'évolution est indépendante de l'état quantique propagé lorsque l'on considère la propagation en absence d'interactions. L'équation précédente doit donc être vérifiée pour toute fonction $W_{\mathbf{r}}|_0, W_{\mathbf{p}}|_0$ et pour toutes les positions \mathbf{r}, \mathbf{p} . L'indépendance de ces paramètres permet d'obtenir la nullité des termes entre crochets. On obtient ainsi le jeu d'équation suivant pour les matrices $ABCD$:

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_t &= \widetilde{A}\widetilde{\alpha} + \widetilde{C}\beta \\ \widetilde{B}_t &= \widetilde{B}\widetilde{\alpha} + \widetilde{D}\widetilde{\beta} \\ \widetilde{C}_t &= \widetilde{A}\gamma + \widetilde{C}\widetilde{\alpha} \\ \widetilde{D}_t &= \widetilde{B}\gamma + \widetilde{D}\widetilde{\alpha} \end{aligned} \quad (6.65)$$

Nous avons utilisé l'antisymétrie de la matrice α et la symétrie de la matrice γ . Il est satisfaisant de voir que la masse n'intervient plus comme paramètre dans la dynamique d'évolution des matrices.

Ce système d'équations peut être reformulé de façon synthétique en faisant intervenir la matrice Γ :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt} M(t, t_0) &= \Gamma(t)M(t, t_0) \\ \text{avec } M(t, t_0) &= \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \quad \text{et } \Gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \alpha(t) \end{pmatrix} \end{aligned}} \quad (6.66)$$

On retrouve donc l'équation d'évolution du premier chapitre pour les matrices $ABCD$. Par ailleurs, les paramètres ξ et ϕ obéissent aux équations :

$$\frac{d}{dt} \left[M^{-1}(t, t_0) \begin{pmatrix} \xi(t, t_0) \\ \phi(t, t_0) \end{pmatrix} \right] = M^{-1}(t, t_0) \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Nous avons utilisé l'expression (6.60) donnant l'inverse de la matrice M , et basée par ailleurs sur le caractère symplectique du mouvement. En utilisant les conditions initiales $\xi(t_0, t_0) = \phi(t_0, t_0) = 0$ ainsi que les relations $M^{-1}(t, t_0) = M(t_0, t)$ et $M(t, t_0)M(t_0, t') = M(t, t')$, l'équation précédente s'intègre en :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \xi(t, t_0) \\ \phi(t, t_0) \end{pmatrix} = \int_{t_0}^t dt' M(t, t') \begin{pmatrix} f(t') \\ g(t') \end{pmatrix}} \quad (6.67)$$

On retrouve ainsi pour l'évolution des paramètres ξ, ϕ l'équation (1.62) énoncée au chapitre 1. Nous avons raisonné jusqu'ici par conditions nécessaires pour retrouver la dynamique des paramètres associés à la propagation $ABCD\xi\phi$. Le point clé est que ces paramètres suffisent à définir le mouvement, ce qu'il est aisé d'établir en remontant les équations. En effet, si les paramètres $ABCD\xi\phi$ vérifient les équations (6.66) et (6.67), l'équation (6.64) l'est aussi et la distribution F défini par la relation (6.61) vérifie bien l'équation de Wigner. La distribution $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ vérifie alors la même équation de propagation que la distribution de Wigner $W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ et ces distributions coïncident par construction à l'instant initial. Les résultats relatifs aux équations aux dérivées partielles permettent alors d'identifier ces deux distributions :

$$\boxed{W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = W \left(\tilde{D}(t, t_0)(\mathbf{r} - \xi) - \frac{1}{m} \tilde{B}(t, t_0)(\mathbf{p} - m\phi), -m\tilde{C}(t, t_0)(\mathbf{r} - \xi) + \tilde{A}(t, t_0)(\mathbf{p} - m\phi), t_0 \right)} \quad (6.68)$$

Nous avons donc vérifié que la propagation en régime dilué dans un potentiel quadratique obéissait à la même dynamique $ABCD$ que celle prédite pour les fonctions d'ondes par l'optique atomique. Pour effectuer cette démonstration, nous n'avons pas eu besoin de considérer une fonction initiale gaussienne comme dans le théorème $ABCD$.

6.3.3 Annulation du déplacement de fréquence pour un nuage confiné dans un piège bidimensionnel.

L'équation de Wigner classique permet de retrouver un résultat important sur les atomes confinés dans des pièges bidimensionnels : le spectre des modes d'un nuage confiné dans un piège harmonique bidimensionnel a un comportement universel. Le système présente en effet des modes d'oscillations collectifs "de respiration" également espacés de $2\omega_0$ (ω_0 est la fréquence du piège harmonique isotrope), et ce indépendamment de la force relative des interactions.

En fait ce n'est pas à proprement parler la dimensionnalité du nuage atomique qui est en jeu ici, mais plutôt la symétrie du potentiel d'interaction par rapport à une transformation d'échelle. Les résultats discutés ici s'appliquent en effet à tout potentiel d'interaction se transformant sous une dilatation de l'espace selon :

$$V(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^{-2}V(\mathbf{r}) \quad (6.69)$$

Nous supposons que les interactions du nuage sont modélisables par un pseudopotentiel de contact à deux dimensions, et nous commençons par montrer pourquoi ce potentiel satisfait la relation d'échelle (6.69). Nous montrons ensuite que l'équation de Wigner classique prédit également la présence d'un mode de fréquence $2\omega_0$ indépendamment de la force des interactions. En suivant la démonstration de Pitaevskii et Rosch [112], nous montrons que le comportement universel observé est en fait la réminiscence d'une symétrie du Hamiltonien par rapport aux dilatations de l'espace. Il est instructif que l'équation de Wigner classique aboutisse à la même prédiction d'universalité pour le mode fondamental. Ceci suggère que la troncature des termes dérivés ne brise pas la symétrie invoquée ici pour le Hamiltonien.

6.3.3.1 Transformation d'échelle du potentiel de contact à deux dimensions.

Rappelons brièvement ici la signification de l'appellation "nuage bidimensionnel ou unidimensionnel". Les fonctions d'onde associées à de tels nuages vivent bien dans un espace de Hilbert à trois dimensions. Cependant, la quantification des degrés de liberté externe du nuage peut permettre de geler le mouvement selon une direction. Pour comprendre ce mécanisme, considérons un nuage confiné dans une boîte cubique de côté L_i évoluant librement dans la boîte. Nous adoptons des conditions aux limites périodiques, qui imposent que la coordonnée du vecteur d'onde associée à la direction i vérifie $k_i = 2\pi n/L_i$, $n \in \mathbb{Z}$. L'énergie minimale associée au mouvement selon la direction i est donc le terme cinétique $\Delta E_i = (2\pi\hbar)^2/(2mL_i^2)$. Il est possible de créer un piège ayant une géométrie et des conditions de température telles que cette énergie ΔE_i ne soit accessible que selon une ou deux

directions. Tout se passe alors comme si la fonction d'onde était à une ou deux dimensions.

Considérons un potentiel de contact effectif à d dimensions $V(\mathbf{r}) = g\delta^d(\mathbf{r})$. Ce potentiel se traduit par un potentiel de champ moyen dans l'équation d'onde :

$$U^{mf}(\mathbf{r}) = Ng|\Phi(\mathbf{r})|^2 \quad (6.70)$$

Soit une dilatation de l'espace $\mathbf{r} \rightarrow \lambda\mathbf{r}$. Examinons la nouvelle fonction d'onde dans l'espace dilaté. Les probabilités de présence d'un atome dans un cube de volume δV situé en \mathbf{r} de l'espace initial et dans un cube de volume $\lambda^d\delta V$ situé en $\lambda\mathbf{r}$ de l'espace dilaté doivent correspondre. L'expression de la fonction d'onde $\Phi'(\mathbf{r}, t)$ dans l'espace dilaté doit donc être de la forme :

$$\Phi'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\lambda^{d/2}}\Phi\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}, t\right)e^{i\varphi(t)} \quad (6.71)$$

Le facteur de phase adéquat est en fait celui donné dans la transformation de jauge (6.50) utilisée pour décrire l'expansion de Thomas-Fermi. La conséquence de cette transformation pour le potentiel la relation d'échelle :

$$U^{mf}(\lambda\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\lambda^d}U^{mf}(\mathbf{r}, t) \quad (6.72)$$

On voit donc que le potentiel de contact ne vérifie la transformation (6.69) que pour la dimensionalité $d = 2$. A trois dimensions, seul le potentiel d'interaction en $1/r^2$ vérifie cette relation d'échelle :

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{g}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2} \quad (6.73)$$

Les résultats exposés dans ce paragraphe seront valables pour les deux potentiels d'interaction. Ils feront cependant l'objet d'un traitement séparé dans l'équation de Wigner classique.

6.3.3.2 Equation de Wigner classique.

Nous évaluons à présent la fréquence d'oscillation associée à l'évolution du moment $\overline{\mathbf{r}^2}$ d'un nuage condensé en présence d'un potentiel harmonique et d'un potentiel d'interaction V . Nous utilisons l'équation de Wigner classique, équivalente ici à l'équation de Wigner complète car le moment ne fait intervenir que deux coordonnées. Nous envisageons les deux configurations suivantes :

- Nuage tridimensionnel présentant des interactions à distances décrites par un potentiel V vé-

rifiant la relation d'échelle $V(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^n V(\mathbf{r})$.

- Nuage à d dimensions présentant des interactions modélisables par un terme de contact $V^c(\mathbf{r}) = g\delta^d(\mathbf{r})$.

Nous notons dans les deux cas U^{mf} le potentiel de champ moyen résultant des interactions. La méthode des contractions évoquée dans le paragraphe précédent donne aisément les équations du mouvement pour le moment $\overline{x_i^2}$:

$$\frac{d\overline{x_i^2}}{dt} = \frac{2}{m} \overline{x_i p_i} \quad (6.74)$$

$$\frac{d\overline{x_i p_i}}{dt} = \frac{\overline{p_i^2}}{m} - \overline{x_i V_{x_i}^{har}} - \overline{x_i U_{x_i}^{mf}} \quad (6.75)$$

Lorsque l'on somme ces relations sur chaque coordonnée, on obtient une équation fermée pour le moment \mathbf{r}^2 :

$$\frac{m}{2} \frac{d^2 \overline{\mathbf{r}^2}}{dt^2} = \frac{\overline{\mathbf{p}^2}}{m} - \overline{\mathbf{r} \cdot V_{\mathbf{r}}^{har}} - \overline{\mathbf{r} \cdot U_{\mathbf{r}}^{mf}} \quad (6.76)$$

Utilisons à présent les relations d'échelle pour évaluer les termes associés aux deux potentiels. Le terme harmonique vérifie simplement :

$$\overline{\mathbf{r} U_{\mathbf{r}}^0} = 2\overline{U^0} = m\omega_0^2 \overline{\mathbf{r}^2} \quad (6.77)$$

On s'attend à des relations similaires pour les termes d'interaction.

Considérons tout d'abord les interactions générées par un potentiel à distance V satisfaisant la relation d'échelle (6.69). Dans le membre de droite de l'équation de Wigner, le terme associé aux interactions s'écrit :

$$\overline{x_i U_{x_i}^{mf}} = \int d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{p}' d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{p} W(\mathbf{r}', \mathbf{p}') x_i V_{x_i}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

En utilisant la symétrie du potentiel qui entraîne $V_{x_i}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = -V_{x'_i}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, on peut également exprimer la quantité précédente sous la forme :

$$\overline{x_i U_{x_i}^{mf}} = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{p}' d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{p} W(\mathbf{r}', \mathbf{p}') (x_i - x'_i) V_{x_i}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (6.78)$$

En sommant cette relation sur les différentes coordonnées de \mathbf{r} :

$$\overline{\mathbf{r} \cdot U_{\mathbf{r}}^{mf}} = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{p}' d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{p} W(\mathbf{r}', \mathbf{p}') [(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot V_{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (6.79)$$

La relation d'échelle satisfaite par le potentiel V s'écrit sous forme différentielle :

$$\mathbf{r} \cdot V_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) = nV(\mathbf{r}) \quad (6.80)$$

La loi de transformation du potentiel d'interaction V se reporte ainsi simplement sur le terme de champ moyen :

$$\overline{\mathbf{r} \cdot U_{\mathbf{r}}^{mf}} = n \overline{U_{\mathbf{r}}^{mf}} \quad (6.81)$$

Examinons à présent la contribution des interactions de contact à l'équation (6.76) en dimension d . Les termes correspondants sont de la forme :

$$\overline{x_i U_{x_i}^{mf}} = g \int d^d \mathbf{r} d^d \mathbf{p}' d^d \mathbf{p} x_i W_{x_i}(\mathbf{r}, \mathbf{p}') W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

Cette contribution s'évalue aisément par intégration par parties :

$$\overline{x_i U_{x_i}^{mf}} = -\frac{1}{2} \int d^d \mathbf{p}' d^d \mathbf{r}' d^d \mathbf{p} d^d \mathbf{r} W(\mathbf{r}', \mathbf{p}') (g\delta^d(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\overline{E^{int}} \quad (6.82)$$

En sommant sur les différentes coordonnées, on obtient :

$$\overline{\mathbf{r} \cdot U_{\mathbf{r}}^{mf}} = -d \overline{U_{\mathbf{r}}^{mf}} \quad (6.83)$$

Il est satisfaisant de voir que le calcul confirme l'analyse dimensionnelle du paragraphe précédent : en dimension 2, les interactions de contact sont équivalentes au potentiel en $1/r^2$ du point de vue des transformations d'échelle.

Il suffit à présent d'utiliser les expressions correspondantes dans l'équation (6.76) différentielle de la taille du nuage :

$$\frac{m}{2} \frac{d^2 \overline{\mathbf{r}^2}}{dt^2} = 2 \frac{\overline{\mathbf{p}^2}}{2m} - m\omega_0^2 \overline{\mathbf{r}^2} + \ell \overline{U^{mf}} \quad (6.84)$$

ou l'entier ℓ vaut $\ell = -n$ ou $\ell = d$ selon la configuration de potentiel étudiée. Pour la valeur particulière $\ell = 2$, il est possible de regrouper le terme d'interaction avec l'énergie cinétique. En

y ajoutant le potentiel extérieur harmonique fonction uniquement de \mathbf{r}^2 , on obtient une équation différentielle pour \mathbf{r}^2 faisant intervenir uniquement la fréquence du piège, la masse et l'énergie totale $E = \frac{\overline{\mathbf{p}^2}}{2m} + \frac{m}{2}\omega_0^2\overline{\mathbf{r}^2} + \overline{U^{mf}}$:

$$\frac{d^2\overline{\mathbf{r}^2}}{dt^2} + 4\omega_0^2\overline{\mathbf{r}^2} = \frac{4E}{m} \quad (6.85)$$

L'équation de Wigner classique prédit donc également le mode d'oscillation universel de la taille du nuage à la fréquence $2\omega_0$ pour un condensat bidimensionnel avec interaction de contact ou pour un nuage tridimensionnel avec des interactions en $1/r^2$.

6.3.3.3 Le spectre de l'oscillateur harmonique provient d'une symétrie du Hamiltonien.

Cette explication sur l'oscillateur harmonique va permettre de mettre en évidence le rôle de la symétrie des interactions dans le comportement universel observé.

La structure des niveaux de l'oscillateur harmonique découle en fait de l'inclusion du Hamiltonien dans une algèbre de Lie. Le point fondamental est un jeu de relations de commutations faisant intervenir l'énergie cinétique \hat{K} , le potentiel harmonique H_{har} , et le générateur des dilatations \hat{Q} :

$$\hat{Q} = \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}}] \quad (6.86)$$

Il est possible de comprendre d'où vient l'expression de \hat{Q} en notant qu'une dilatation homogène opère en chaque point de l'espace une translation d'un vecteur proportionnel à la position \mathbf{r} et que l'opérateur impulsion $\hat{\mathbf{p}}$ est le générateur des translations. Les relations de commutations fondamentales s'écrivent :

$$[\hat{Q}, \hat{K}] = -2i\hat{K} \quad (6.87)$$

$$[\hat{Q}, \hat{H}_{har}] = 2i\hat{H}_{har} \quad (6.88)$$

$$[\hat{K}, \hat{H}_{har}] = i\omega_0^2\hat{Q} \quad (6.89)$$

Les deux premières relations de commutation sont la version infinitésimale de la transformation des opérateurs énergie cinétique \hat{K} et potentiel harmonique \hat{H}_{har} sous les dilatations de l'espace :

$$x_i \rightarrow \lambda x_i \quad \sum_i \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta_{x_i} \rightarrow \lambda^{-2} \left(\sum_i \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta_{x_i} \right) \quad \sum_i \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_i^2 \rightarrow \lambda^2 \left(\sum_i \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_i^2 \right) \quad (6.90)$$

La troisième relation est spécifique du potentiel harmonique et permet de fermer le jeu de commutations et définir une algèbre de Lie représentant le groupe $SO(2, 1)$:

$$\begin{aligned}\hat{L}_1 &= \frac{1}{2\omega_0} (\hat{K} - \hat{H}_{har}) \\ \hat{L}_2 &= \frac{\hat{Q}}{2} \\ \hat{L}_3 &= \frac{1}{2\omega_0} (\hat{K} + \hat{H}_{har}) = \frac{\hat{H}_0}{2\omega_0}\end{aligned}\tag{6.91}$$

Ces opérateurs satisfont bien les relations de commutations qui définissent un moment cinétique. Ils permettent de construire les opérateurs de création et d'annihilation selon la définition habituelle $\hat{L}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{L}_1 \pm \hat{L}_2)$, qui vérifient les relations de commutation avec le Hamiltonien $[\hat{H}_0, \hat{L}^\pm] = \pm 2\omega_0 \hat{L}^\pm$. En les appliquant à un état propre $|\Psi_0\rangle$ d'énergie E_0 , on obtient l'échelle habituelle des niveaux d'énergie :

$$\hat{H}_0 (\hat{L}^\pm |\Psi_0\rangle) = \pm 2\omega_0^2 \hat{L}^\pm |\Psi_0\rangle\tag{6.92}$$

6.3.3.4 Invariance de la symétrie lors de l'ajout d'un potentiel d'interaction satisfaisant la relation d'échelle.

La structure universelle des modes de l'oscillateur harmonique est donc la conséquence d'un jeu de relations de commutations qui permet d'insérer le Hamiltonien dans une algèbre de Lie représentant le groupe $SO(2, 1)$.

Soit donc un potentiel vérifiant la relation d'échelle (6.69). Ce potentiel se transforme de façon identique à l'opérateur d'énergie cinétique lors d'une dilatation de l'espace et obéit donc à la même relation de commutation :

$$[\hat{V}, \hat{Q}] = -2i\hat{V}\tag{6.93}$$

Comme ce potentiel d'interaction ne fait intervenir que l'opérateur position, il commute avec le potentiel de piégeage. En définissant l'opérateur $\hat{K}' = \hat{K} + \hat{V}$, on obtient donc un jeu de relations identique :

$$\begin{aligned}[\hat{Q}, \hat{K}'] &= -2i\hat{K}' \\ [\hat{Q}, \hat{H}_{har}] &= 2i\hat{H}_{har} \\ [\hat{K}', \hat{H}_{har}] &= i\omega_0^2 \hat{Q}\end{aligned}\tag{6.94}$$

$$\tag{6.95}$$

Grâce à la similitude de transformations, on a pu à nouveau regrouper ensemble l'énergie cinétique et l'énergie d'interaction tout en préservant les relations de commutation précédentes. Il suffit alors de redéfinir des opérateurs $\hat{\mathbf{L}}'$ comme précédemment pour inclure à nouveau le Hamiltonien total $\hat{H}' = \hat{K}' + \hat{H}_{har}$ dans une algèbre de Lie représentant $SO(2,1)$. Les opérateurs d'échelle correspondants redonnent la structure des modes espacés de $2\omega_0$, qui est finalement préservée même en présence d'interactions.

6.4 Comparaison de la méthode des moments avec l'approche variationnelle pour des nuages atomiques gaussiens.

Il s'agit ici de confronter les prédictions de la méthode des moments à celles de l'approche variationnelle par Lagrangien effectif ainsi qu'à des mesures expérimentales. Nous étudions ici la dynamique de nuages condensés décrits par des fonctions d'essai gaussiennes en présence d'un potentiel extérieur harmonique, d'un pseudo-potentiel d'interaction, et d'un potentiel dipolaire. Les méthodes exposées ici s'appliquent exclusivement à basse énergie : la description du nuage par un mode fondamental gaussien suppose de fait que l'on se place dans ce régime.

Nous commençons par traiter ces nuages par une méthode variationnelle en suivant la démarche de Pérez-Garcia [100, 101]. Nous calculons en particulier les équations du mouvement pour les largeurs du nuage. Le découplage des équations d'Euler Lagrange correspondantes est technique, mais ne présente pas de difficulté majeure. Le calcul correspondant est reporté à l'annexe J.

Nous retrouvons ensuite ces équations par la méthode des moments. Sur cet exemple, cette méthode est plus simple : elle donne lieu directement à un système d'équations qui ne portent que sur les largeurs du nuage, alors que les équations découlant du Lagrangien font intervenir simultanément tous les paramètres des fonctions d'essai. Cet avantage peut s'avérer significatif lorsque ces fonctions sont indexées par un grand nombre de paramètres.

Nous appliquons ensuite les équations différentielles obtenues à la détermination des fréquences monopolaires et quadrupolaires d'oscillation d'un condensat cylindrique. Pérez-Garcia et *al.* avait montré qu'il y avait un excellent accord entre les résultats de l'approche variationnelles, les mesures expérimentales [114, 115, 116] et les prédictions théoriques de Stringari [117, 118]. Comme les fréquences obtenues par la méthode des moments sont identiques à celles de la méthode variationnelle, cette concordance profite également à la méthode développée dans ce chapitre. Nous ne faisons dans cette section aucune hypothèse quant à la force relative des interactions, et les moments considérés ne font intervenir que les termes classiques de l'équation de Wigner. Les prédictions exactes obtenues par la méthode des moments suggèrent donc que l'équation de Wigner classique décrit de façon correcte la dynamique de condensats non seulement dans les cas limites d'interactions négligeables ou au contraire prédominantes évoqués dans la partie précédente, mais également en présence d'interactions de force arbitraire.

6.4.1 Interactions dipolaires.

Nous considérons ici un condensat qui présente, outre les interactions précédentes associées aux collisions dans l'onde s , des interactions dipolaires dont les effets liés à l'anisotropie et à la longue portée du potentiel échappent à la modélisation par potentiel de contact. Bien que l'ordre de grandeur du potentiel dipolaire soit bien plus faible que celui du potentiel de diffusion dans l'onde s , ses effets ont pu être observés sur un condensat de ^{52}Cr présentant un moment magnétique permanent au voisinage de la fréquence de Feshbach, c'est-à-dire lorsque la contribution du potentiel de contact est fortement diminuée [119]. Dans cette expérience, l'anisotropie induite par l'interaction dipolaire modifie l'aspect du nuage lors de son expansion et permet de supprimer la fameuse inversion d'ellipticité initialement perçue comme la signature d'un condensat. Yi et You avaient montré auparavant que la présence d'un potentiel anisotropique était également susceptible d'affecter les fréquences d'oscillation des modes de basse énergie d'un condensat de Rubidium ^{85}Rb [120], mais cette modification n'a pas été observée expérimentalement à ma connaissance. C'est cette altération du spectre des excitations de basse énergie que nous allons étudier grâce au formalisme de Wigner développé dans ce chapitre.

Nous considérons donc un condensat dont les atomes présentent un moment dipolaire. Celui-ci peut-être magnétique ou électrique, permanent (par exemple si le dipole est lié au spin de la particule) ou bien au contraire induit par un champ électromagnétique. La discussion que nous menons dans cette partie concerne indifféremment tous les types de dipôles, à condition de modifier la constante de couplage en conséquence. Nous supposons que les moments dipolaires sont alignés selon Oz , par un champ magnétique ou bien électrique selon le type de dipole envisagé. Le potentiel d'interaction est de la forme :

$$V_d(\mathbf{r}) = g_d \frac{1 - 3 \cos^2 \theta_r}{R^2} \quad \cos \theta_r = \mathbf{r} \cdot \mathbf{z} \quad (6.96)$$

La Figure 6.5 montre les conventions géométriques utilisées dans cette expression. La constante de couplage g_d vaut respectivement $g_d = \mu^2$ pour des dipôles magnétiques (μ étant le moment magnétique, permanent ou bien induit par un champ \mathbf{B}) et $g_d = \alpha^2(0)\mathbf{E}^2(\mathbf{0})$ pour des dipôles électriques induits (avec α polarisabilité atomique, $\mathbf{E}(\mathbf{0})$ champ électrique local). Comme précédemment, le potentiel associé aux diffusions dans l'onde s est modélisé par le terme $V_c(\mathbf{r}) = g_0\delta(\mathbf{r})$, où g_0 est relié à la longueur de diffusion a_s par la relation $g_0 = 4\pi\hbar^2 a_s/m$.

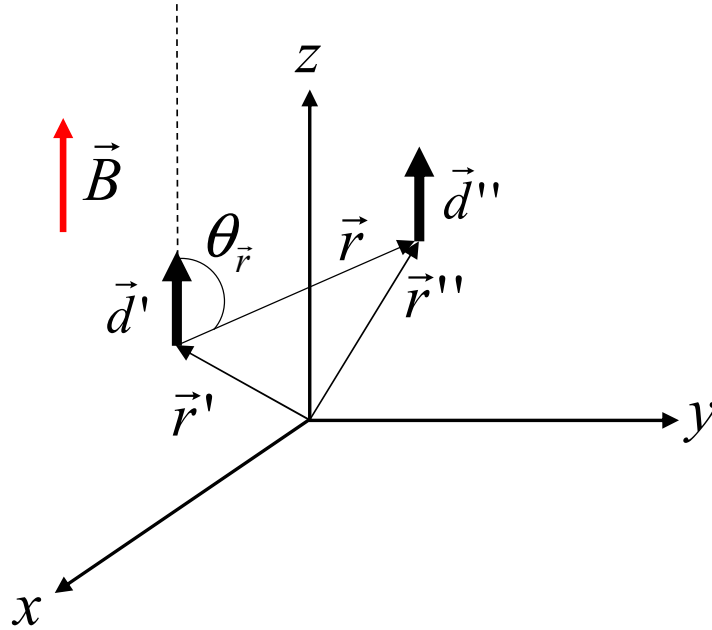


FIGURE 6.5 – Interaction de deux dipôles alignés par un champ magnétique.

6.4.2 Approche variationnelle du mouvement de nuages condensés.

Il s'agit d'un outil théorique bien établi en physique. Cette méthode consiste à ramener l'étude d'un champ atomique présentant une infinité de degrés de libertés à celle d'une famille finie de degrés de libertés choisis de façon à caractériser efficacement le nuage. Ceux-ci apparaissent comme les paramètres d'une famille de fonctions d'essais choisie de façon à approcher au mieux la fonction d'onde macroscopique du condensat. En suivant la démarche de Pérez-Garcia [100] nous considérons dans cette section les fonctions d'essai gaussiennes :

$$\Phi_{\mathbf{w}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}}(\mathbf{r}, t) = A(t) \prod_{\eta=x,y,z} e^{-(\eta-\eta_0)^2/(2w_\eta^2(t)) + i\eta\alpha_\eta(t) + i\eta^2\beta_\eta^2(t)} \quad (6.97)$$

Pour un condensat présentant à la fois des interactions de contact et des interactions à distance, le Lagrangien associé au mouvement de la fonction d'onde s'écrit :

$$L(\Phi, \Phi^*) = \frac{i\hbar}{2} \int d^3\mathbf{r} \left(\Phi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \Phi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \Phi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) + \int d^3\mathbf{r} \Phi^*(\mathbf{r}, t) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U^0(\mathbf{r}) \right] \Phi(\mathbf{r}, t) \\ + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{r} \Phi^*(\mathbf{r}', t) \Phi^*(\mathbf{r}, t) [V_c(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + V_d(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \Phi(\mathbf{r}, t) \Phi(\mathbf{r}', t) \quad (6.98)$$

Lorsque l'on insère la fonction d'essai dans cette expression, on obtient un Lagrangien dit "effectif" qui fait intervenir uniquement les paramètres de cette fonction :

$$L_e(w_x, w_y, w_z, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z) = L(\Phi_{\mathbf{w}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}}, \Phi_{\mathbf{w}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}}^*) \quad (6.99)$$

Le terme "effectif" fait référence au caractère approximatif de la méthode utilisée. Le calcul de ce Lagrangien, réalisé dans l'annexe J, ne pose pas de difficulté. Il suffit essentiellement d'effectuer les changements de variable $u = x - x_0$ et d'utiliser les intégrales gaussiennes :

$$\int du e^{-ibu^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \quad \int du u e^{-ibu^2} = 0 \quad \int du u^2 e^{-ibu^2} = \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \quad (6.100)$$

Tous calculs faits, on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} L_e = & \frac{\pi^{3/2} w_x w_y w_z}{2} \left[\frac{i\hbar}{2} (A\dot{A}^* - A^*\dot{A}) + |A|^2 \left[\left(\hbar\dot{\beta}_x + \frac{2\hbar^2}{m} \beta_x^2 + \frac{1}{2} m\nu_x^2 \right) (2x_0^2 + w_x^2) \right. \right. \\ & + \left. \frac{\hbar^2}{2mw_x^2} + \frac{\hbar^2\alpha_x^2}{m} + 2x_0(\hbar\dot{\alpha} + \frac{2\hbar^2}{m}\alpha_x\beta_x) + y, z, \dots \right] \\ & \left. + |A|^4 \left[\frac{g_0}{2\sqrt{2}} + 4\sqrt{2}g_d \int d^3\mathbf{r} \frac{1 - 3\cos^2\theta_{\mathbf{r}}}{r^2} \prod_{\eta=x,y,z} e^{-r_\eta^2/(2w_\eta^2)} \right] \right] \end{aligned} \quad (6.101)$$

Les équations du mouvement pour les paramètres de la fonction d'essai découlent des équation d'Euler-Lagrange pour le nouveau Lagrangien :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_e}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L_e}{\partial q} \quad (6.102)$$

où $q = w_x, \alpha_x, \dots$. Le découplage de ces équations différentielles n'est pas évident à priori et nécessite quelques efforts calculatoires. Ces équations sont présentées dans [101] dans le cas d'interactions de contact, mais ces références comportent de nombreuses erreurs. Nous avons donc refait les calculs intermédiaires correspondants dans le cas plus général d'interactions dipolaires, que l'on trouvera dans l'annexe J. Le résultat final est donné dans [120]. On obtient que l'évolution des largeurs (w_x, w_y, w_z) est donnée par le mouvement d'un point matériel fictif de masse m , de position \mathbf{w} dans le potentiel effectif :

$$V^e(\mathbf{w}) = \sum_{\eta=x,y,z} \left(\frac{\hbar^2}{2mw_\eta^2} + \frac{m}{2} \nu_\eta^2 w_\eta^2 \right) + \frac{N}{\pi^{3/2} w_x w_y w_z} \left[\frac{g_0}{2\sqrt{2}} + 4\sqrt{2}g_d \int d^3\mathbf{r} \frac{1 - 3\cos^2\theta_{\mathbf{r}}}{r^2} \prod_{\eta=x,y,z} e^{-r_\eta^2/(2w_\eta^2)} \right] \quad (6.103)$$

Interprétons les différentes contributions à ce potentiel. Le terme $\hbar^2/(2mw_\eta^2)$ correspond à “l'énergie cinétique de point zéro”, c'est-à-dire la contribution à l'énergie cinétique due aux fluctuations imposées par la relation d'incertitude. Soulignons que le choix de la famille de fonctions d'essai impose ici une saturation de la relation de Heisenberg, et que celle-ci est en un sens un artifice de calcul. Il est bon de noter cependant que cette relation n'est en général pas maintenue lors de l'évolution d'un nuage atomique réel : la propagation se traduit par une dispersion dans l'espace des phases menant à $\Delta x \Delta p > \hbar$. Le second terme traduit la contribution de la largeur du paquet d'ondes à l'énergie potentielle. Ces deux premiers termes représentent le potentiel effectif associé à un nuage évoluant sans interactions dans un piège harmonique. Les deux termes suivants traduisent respectivement les contributions du terme de contact et du terme dipolaire. Comme on s'y attend, ces termes augmentent avec la densité du nuage quand les largeurs diminuent. Ce sont les interactions qui induisent un couplage entre les largeurs selon différentes directions. La compétition entre le terme de potentiel harmonique incitant à minimiser la largeur et les autres termes incitant à l'augmenter donne lieu à une dynamique non-triviale pour le point fictif représentant \mathbf{w} . Cette dynamique a été étudiée en présence d'interactions de contact dans [101]. Yi et You en ont donné une analyse prenant en compte le terme d'interaction dipolaire [120].

6.4.3 Application de la méthode des moments au mouvement de nuages condensés.

Nous utilisons à présent les équations générales d'évolution des moments exposées précédemment dans ce chapitre. Ces moments seront évalués à l'aide des fonctions d'essai et exprimés en fonction des paramètres correspondants. Les équations d'évolution des moments nous donnent alors les équations du mouvement pour les paramètres.

Nous adoptons dans ce paragraphe la convention x_1, x_2, x_3 en lieu et place de x, y, z au paragraphe précédent pour utiliser des équations de moments identiques à celles exposées auparavant dans ce chapitre. Afin d'être cohérent avec les développements effectués dans le cadre de l'approche variationnelle, les fonctions d'essais sont encore normées selon :

$$\int d^3 \mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^2 = N \iff \pi^{3/2} |A|^4 (w_1 w_2 w_3) = N \quad (6.104)$$

Cette normalisation a pour conséquence la présence de facteurs $1/N$ dans les expressions de moments.

La distribution de Wigner associée aux fonctions d'essai gaussiennes précédentes s'exprime ainsi :

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{N}{(\pi\hbar)^3} \prod_{i=1,2,3} e^{-(x-x_{0i})^2/w_i^2} e^{-\frac{w_i^2}{\hbar^2}(p_i-2\hbar\beta_i x_i-\hbar\alpha_i)^2}$$

Nous allons faire intervenir uniquement des moments sur au plus deux coordonnées position ou impulsion. Les équations correspondantes ont déjà été détaillées dans ce chapitre (6.42, 6.74, 6.75), pour faciliter la lecture nous les regroupons ici à nouveau :

$$\frac{d\overline{x_i}}{dt} = -\frac{\overline{p_i}}{m} \tag{6.105}$$

$$\frac{d\overline{p_i}}{dt} = -\frac{\overline{V_{x_i}}}{m} \tag{6.106}$$

$$\frac{d\overline{x_i^2}}{dt} = \frac{2}{m}\overline{x_i p_i} \tag{6.107}$$

$$\frac{d\overline{x_i p_i}}{dt} = \frac{1}{m}\overline{p_i^2} - m\omega_i^2\overline{x_i^2} - \overline{x_i V_{x_i}^{mf}} \tag{6.108}$$

$$\frac{d\overline{p_i^2}}{dt} = -2m\omega_i^2\overline{x_i p_i} - \overline{p_i V_{x_i}^{mf}} \tag{6.109}$$

C'est l'évolution des moments quadratiques qui va permettre d'accéder à la dynamique des largeurs du nuage. Plus précisément, on considère le moment $\overline{(x_i - x_{i0})^2}$ relié de façon univoque à la largeur w_i .

Il suffit de calculer les équations du mouvement pour $\overline{x_i^2}$ et pour la position moyenne x_{i0} . Cette dernière correspond à l'équation classique de Newton, elle peut également se déduire des équations (6.105) et (6.106) sur les moments d'ordre un. On peut montrer que le champ moyen a une contribution nulle au mouvement de la position centrale (car $\overline{V_{x_i}^{mf}} = 0$) qui suit simplement une oscillation harmonique. Pour obtenir l'équation sur $\overline{x_i^2}$, on dérive simplement l'équation (6.107) et on remplace le membre de droite à l'aide de (6.108) :

$$\frac{m}{2} \frac{d^2\overline{x_i^2}}{dt^2} = \frac{\overline{p_i^2}}{m} - m\omega_i^2\overline{x_i^2} - \overline{x_i V_{x_i}^{mf}} \quad i = 1, 2, 3 \tag{6.110}$$

En utilisant cette équation et la relation fondamentale de la dynamique :

$$\frac{m}{2} \frac{d^2\overline{(x_i - x_{0i})^2}}{dt^2} = \left(\frac{\overline{p_i^2}}{m} - \frac{m}{2}\dot{x}_{0i}^2 \right) - m\omega_i^2 \left(\overline{x_i^2} - x_{0i}^2 \right) - \overline{x_i V_{x_i}^{mf}} \tag{6.111}$$

Exprimons à présent les moments quadratiques en position et en impulsion :

$$\begin{aligned}\overline{x_i^2} &= \frac{1}{N} \int d^3\mathbf{r} x_i^2 |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 = x_{0i}^2 + \frac{w_i^2}{2} \\ \overline{p_i^2} &= \frac{1}{N} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p} p_i^2 W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{m}{2} (\dot{x}_{0i}^2 + \dot{w}_i^2) + \frac{\hbar^2}{2mw_i^2}\end{aligned}\quad (6.112)$$

En utilisant ces relations, on vérifie que les termes explicites de l'équation (6.111) ne font plus intervenir que la largeur w_i :

$$m\ddot{w}_i = -m\omega_i^2 w_i + \frac{\hbar^2}{mw_i^3} - \frac{2}{w_i} \overline{x_i V_{x_i}^{mf}} \quad (6.113)$$

La contribution du champ moyen dépend des trois largeurs simultanément mais pas de la position centrale ni des autres paramètres. Nous avons obtenu rapidement un système fermé d'équation couplées pour les largeurs w_x, w_y, w_z . Le découplage initial des équations, qui a été effectué directement sur les équations de moments, est beaucoup plus simple et explicite que celui des équations d'Euler-Lagrange.

Evaluons à présent la contribution des interactions. Le potentiel de champ moyen fait intervenir un terme de contact et un terme dipolaire :

$$V^{mf}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' |\phi(\mathbf{r}', t)|^2 [V^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + V^d(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (6.114)$$

Le calcul du terme de contact est identique à celui de la section 6.3.3 :

$$\overline{x_i V_{x_i}^c} = -\overline{V^c} = -\frac{g_0}{2N} \int d^3\mathbf{r} |\Phi(\mathbf{r})|^4 \quad (6.115)$$

Le coefficient N provient de la normalisation des fonctions d'essai. En utilisant l'expression (6.97) des fonctions d'essai et la condition de normalisation (6.104), cette quantité devient :

$$\overline{x_i V_{x_i}^c} = -\frac{g_0 N}{4\sqrt{2}\pi^{3/2} w_1 w_2 w_3} \quad (6.116)$$

Calculons à présent la contribution dipolaire :

$$\overline{x_i V_{x_i}^d} = \frac{1}{N} \int d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{r}'' |\Phi(\mathbf{r}'')|^2 x_i V_{x_i}^d(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') |\Phi(\mathbf{r}')|^2 \quad (6.117)$$

Après l'insertion des fonction d'essai (6.97) et le changement de variables $\mathbf{R} = (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')/2$, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')/2$, cette expression devient :

$$\overline{x_i V_{x_i}^d} = |A|^4 \int d^3\mathbf{R} d^3\mathbf{r} \left| \frac{\partial \mathbf{r}', \mathbf{r}''}{\partial \mathbf{R}, \mathbf{r}} \right| \left(\frac{x_i + X_i}{2} \right) V_{x_i}^d(\mathbf{r}) \prod_{j=1,2,3} e^{-(X_j + x_j/2)^2/w_j^2} e^{-(X_j - x_j/2)^2/w_j^2} \quad (6.118)$$

Regroupons dans chaque exponentielle les termes dépendant de \mathbf{R} et de \mathbf{r} . On note que le terme faisant intervenir R_i correspond à une fonction impaire et ne contribue donc pas. Il est aisé d'effectuer l'intégration sur les coordonnées de \mathbf{R} :

$$\overline{x_i V_{x_i}^d} = |A|^4 (2\pi)^{3/2} w_1 w_2 w_3 \int d^3\mathbf{r} x_i V_{x_i}^d(\mathbf{r}) \prod_{j=1,2,3} e^{-x_j^2/(2w_j^2)} \quad (6.119)$$

En intégrant par parties et en utilisant la relation de normalisation (6.104) :

$$\overline{x_i V_{x_i}^d} = -\frac{2\sqrt{2}N}{\pi^{3/2}(w_1 w_2 w_3)} \left[\int d^3\mathbf{r} V^d(\mathbf{r}) \prod_{j=1,2,3} e^{-x_j^2/(2w_j^2)} + \int d^3\mathbf{r} \left(\frac{x_i^2}{2w_i^2} \right) V^d(\mathbf{r}) \prod_{j=1,2,3} e^{-r_j^2/(2w_j^2)} \right] \quad (6.120)$$

Il est possible d'écrire cette expression de façon plus synthétique :

$$\overline{x_i V_{x_i}^d} = \frac{2\sqrt{2}N}{\pi^{3/2}(w_1 w_2 w_3)} \left[\omega_i \frac{dK_d}{dw_i} - K_d \right] \quad \text{avec} \quad K_d(\mathbf{w}) = \int d^3\mathbf{r} V^d(\mathbf{r}) \prod_{j=1,2,3} e^{-x_j^2/(2w_j^2)} \quad (6.121)$$

La contribution correspondante dans l'équation (6.113) peut donc s'exprimer sous la forme d'une dérivée totale :

$$\frac{2}{w_i} \overline{x_i V_{x_i}^d} = \frac{d}{dw_i} \left(\frac{4\sqrt{2}N K_d}{\pi^{3/2} w_1 w_2 w_3} \right) = \frac{d}{dw_i} \left(\frac{4\sqrt{2}g_d}{\pi^{3/2} w_1 w_2 w_3} \int d^3\mathbf{r} \frac{1 - 3 \cos^2 \theta_{\mathbf{r}}}{r^2} \prod_{j=1,2,3} e^{-x_j^2/(2w_j^2)} \right) \quad (6.122)$$

Lorsque l'on insère les termes dus aux interactions (6.116) et (6.122) dans l'équation du mouvement (6.113), on obtient à nouveau une dynamique des largeurs associé au mouvement dans le potentiel effectif V^e défini en (6.103) :

$$\boxed{m \ddot{w}_i = - \frac{dV_e(\mathbf{w})}{dw_i}} \quad (6.123)$$

Commentons la présence d'un terme quantique en \hbar dans l'équation des largeurs malgré le fait que l'on ait considéré des moments d'ordre deux régis par l'équation de Wigner classique. Celui-ci traduit en fait les relations de dispersion entre l'impulsion et la position imposée par l'ansatz gaussien adopté. Rappelons que si l'équation de Wigner classique n'introduit pas de termes dynamique en \hbar , cette

constante peut néanmoins intervenir par le biais de la distribution de Wigner initiale.

6.4.4 Confrontation expérimentale : application à la détermination des modes de basse énergie d'un condensat cylindrique.

Les équations différentielles précédentes nous permettent de déterminer les fréquences des modes monopolaires et quadrupolaires d'un condensat cylindrique. Nous considérons ici uniquement les interactions de contact. Le calcul correspondant a été effectué par Perez-Garcia et *al.* [101] dans le but de confronter les fréquences prédites par l'approche variationnelle aux mesures expérimentales. Cette confrontation vaut également pour la méthode des moments, qui prédit exactement le même système différentiel et donc les mêmes fréquences d'oscillations que l'approche variationnelle. Nous en présentons donc ici les résultats.

Commençons par extraire les modes d'oscillations du système différentiel des largeurs. En tenant compte de la symétrie cylindrique du problème, celui-ci prend la forme :

$$\begin{cases} \ddot{w}_r + \omega_r^2 w_r = \frac{\hbar^2}{m^2 w_r^3} + \frac{N g_0}{\pi^{3/2} w_r^3 w_z} \\ \ddot{w}_z + \omega_z^2 w_z = \frac{\hbar^2}{m^2 w_z^3} + \frac{N g_0}{\pi^{3/2} w_r^2 w_z^2} \end{cases} \quad (6.124)$$

En suivant la démarche de Perez-Garcia et Michinel, nous mettons à présent les équations sous une forme adimensionnelle. Il est utile d'introduire la longueur caractéristique du piège radial $a_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega_r)}$, le rapport des fréquences de piégeage $\lambda = \omega_z/\omega_r$ et un paramètre P adimensionnel quantifiant la force relative des interactions :

$$P = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a_0} = \frac{N g_0 \sqrt{m\omega_r}}{(2\pi)^{3/2} \hbar^{5/2}} \quad (6.125)$$

A partir des paramètres précédents, nous définissons des largeurs et un temps adimensionnel suivant $u_{r,l} = w_{r,l}/a_0$, $\tau = \omega_r t$. Le système différentiel précédent devient :

$$\frac{d^2 u_r}{d\tau^2} + u_r = \frac{1}{u_r^3} + \frac{P}{w_r^3 w_z} \quad (6.126)$$

$$\frac{d^2 u_z}{d\tau^2} + \lambda^2 u_z = \frac{1}{u_z^3} + \frac{P}{u_r^2 u_z^2} \quad (6.127)$$

Les positions d'équilibre u_{0r}, u_{0z} sont définies par les relations :

$$\begin{aligned} u_{0r}^4 u_{0z} &= u_{0z} + P \\ \lambda^2 u_{0z}^4 &= 1 + P \frac{u_{0z}}{u_{0r}^2} \end{aligned} \quad (6.128)$$

On obtient alors les fréquences d'oscillations :

$$\begin{aligned} \omega_a &= 2\omega_r \sqrt{1 - 2P_{4,1}} \quad \text{avec} \quad P_{i,j} = \frac{P}{4\nu_{0r}^i \nu_{0z}^j} \\ \omega_{b,c} &= 2\omega_r \left[\frac{1}{2} (1 + \lambda^2 - P_{2,3}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \lambda^2 - P_{2,3})^2 - 8P_{3,2}} \right]^{1/2} \sqrt{1 - 2P_{4,1}} \end{aligned} \quad (6.129)$$

La détermination de ces trois fréquences passent par la résolution numérique du système algébrique (6.128). Les valeurs obtenues ont été comparées aux mesures expérimentales effectuées au JILA [114], au MIT [115] et à Rice [116] pour différentes valeurs de P pour des rapports d'anisotropie respectifs de $\lambda_z = \frac{1}{8}, \frac{18}{132}, \frac{117}{163}$.

Il est également remarquable que, à la limite de Thomas-Fermi ($P \gg 1$), les équations précédentes donnent lieu à une expression analytique des trois fréquences $\omega_{a,b,c}$. Dans cette limite, le système polynomial (6.128) devient soluble analytiquement :

$$u_{0r} = (P\lambda)^{1/5} \quad u_{0z} = \left(\frac{P}{\lambda^4} \right)^{1/5} \quad (6.130)$$

Les fréquences admettent ainsi pour expression :

$$\begin{aligned} \omega_a &= \sqrt{2}\omega_r \\ \omega_{b,c} &= \frac{\omega_r}{\sqrt{2}} \left[4 + 3\lambda^2 \pm \sqrt{16 + 9\lambda^4 - 16\lambda^2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (6.131)$$

Ces expressions coïncident exactement avec celles obtenues par Sandro Stringari [117, 118].

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé l'équation de propagation d'un nuage condensé dans l'espace des phases. Cette équation aux dérivées partielles comporte une partie classique et une partie interprétable comme des corrections classiques.

Nous avons montré que la partie classique de cette équation de propagation était compatible avec un certain nombre de résultats généraux sur la propagation des condensats : propagation de Thomas-Fermi en régime d'interactions fortes, propagation $ABCD$ en l'absence d'interactions, et annulation du déplacement de fréquence pour des condensats dans des pièges bidimensionnels.

Nous avons également décrit une méthode simple permettant d'obtenir les équations générales du mouvement pour des moments en position et en impulsion du nuage condensé. Nous avons reformulé le problème de l'obtention d'un système d'équations fermé en des termes algébriques, et mis en évidence sur quelques exemples simples comment les termes quantiques intervenaient dans la dynamique des moments.

Par ailleurs, cette évolution a été mise à profit pour retrouver la dynamique d'ansatz Gaussiens. Il est remarquable que les prédictions obtenues en considérant les moments en termes de fréquence des modes de basse énergie coïncident parfaitement avec celles de l'approche variationnelle et avec les données expérimentales. L'approche des moments permet notamment d'éviter le découplage complexe du système d'équations différentielles issu de l'analyse variationnelle. Ces conclusions positionnent la méthode des moments comme un outil prometteur pour l'étude de nuages condensés.

Propagation $ABCD$ généralisée des ondes de matière en présence d'interactions.

Résumé.

Nous présentons une généralisation du formalisme $ABCD$ de l'optique atomique, qui inclut l'effet des interactions dans l'approximation où les aberrations optiques sont négligées. Les interactions sont modélisées par un terme de lentille d'optique atomique déterminé de façon perturbative à partir de l'évolution linéaire. Nous appliquons cette approche à la détermination des effets d'interaction sur un nuage en chute libre, et à l'obtention d'une condition de stabilité pour un résonateur à ondes de matière. Une introduction au formalisme $ABCD$ à $(4+1)$ dimensions est présentée dans l'Annexe B.

Generalized $ABCD$ propagation for interacting atomic clouds.

F. Impens^{1,2} and Ch. J. Bordé^{1,3}

¹ *SYRTE, Observatoire de Paris, CNRS, 61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France*

² *Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Caixa Postal 68528, 21941-972 Rio de Janeiro, RJ, Brasil and*

³ *Laboratoire de Physique des Lasers, Institut Galilée, F-93430 Villetaneuse, France*

(Dated: December 11, 2008)

We present a treatment of the nonlinear matter wave propagation inspired from optical methods, which includes interaction effects within the atom optics equivalent of the aberrationless approximation. The atom-optical ABCD matrix formalism, considered so far for non-interacting clouds, is extended perturbatively beyond the linear regime of propagation. This approach, applied to discuss the stability of a matter-wave resonator involving a free-falling sample, agrees very well with the predictions of the full nonlinear paraxial wave equation. An alternative optical treatment of interaction effects, based on the aberrationless approximation and suitable for cylindrical paraxial beams of uniform linear density, is also adapted for matter waves.

PACS numbers: 03.75.Pp, 03.75.-b, 42.65.Jx, 41.85.Ew, 31.15-Md

I. INTRODUCTION

Light and matter fields are governed by similar equations of motion [1]. Both photons and atoms interact in a symmetrical manner: atom-atom interactions are mediated through photons, while photon-photon interactions are mediated through atoms. Before the advent of Bose-Einstein condensation, two groups realized independently that atomic dipole-dipole interactions give rise to a cubic nonlinearity in the propagation equation analogous to that induced by the Kerr effect [2, 3]. Following this analogy, the field of non-linear atom optics emerged in the last decade, leading to the experimental verification with matter waves of several well-known nonlinear optical phenomena[i] : the four-wave mixing [9], the formation of solitons [10–13] and of vortices [14, 15], the superradiance [16] and the coherent amplification [17]. The nonlinear propagation of matter waves has been the object of extensive experimental [18, 19] and theoretical work, among which the time-dependent Thomas-Fermi approximation [20], the variational approach [21], and more recently the method of moments [22]. These treatments have been used successfully to obtain analytical expressions in good agreement with the exact solution of the 3D nonlinear Schrödinger equation (NLSE).

There exists, for cylindrical wave-packets propagating in the paraxial regime, a very elegant method to handle this equation which has been used in optics to treat self-focusing effects [23, 24]. It relies on the “aberrationless approximation”, assuming that the nonlinearity is sufficiently weak as to preserve the shape of a fundamental Gaussian mode, and it involves a generalized complex radius of curvature. This treatment is equally relevant for the paraxial propagation of cylindrical matter waves, and it is presented in this context in Appendix A. Unfortunately, the assumptions required - such as the constant longitudinal velocity and the paraxial propagation - limit the scope of this approach, which appears as too stringent to describe the matter wave propagation in most experiments.

This motivates the introduction of a different analytical method to obtain approximate solutions for the NLSE in a more general propagation regime. This is the central contribution of this paper, which exposes a perturbative matrix analysis especially well-suited to discuss the stability of a matter-wave resonator. With an Hamiltonian quadratic in position and momentum operators, and in the absence of atomic interactions, the Schrödinger equation admits a basis of Gaussian solutions. Their evolution is easily obtained through a time-dependent matrix denoted “ABCD” [1, 25], in analogy with the propagation of optical rays in optics [26]. In the “aberrationless approximation”, it is possible to extend this treatment to include perturbatively interaction effects and obtain the propagation of a fundamental Gaussian mode with a modified “ABCD” matrix. As an illustration of this method, the stability of a matter-wave resonator is analyzed thanks to this “ABCD” matrix, which encapsulates the divergence resulting from the mean-field potential. An ABCD-matrix approach had already been used in [18] to characterize the divergence of a weakly outcoupled atom laser beam due to interactions with the source condensate. The present treatment is

[i] Many other optical phenomena have also been verified with matter waves. A short list includes interferences [4] and diffraction phenomena [3, 5], the temporal Talbot effect [6], and the influence of spatial phase fluctuations on interferometry [7]. New effects arise also with rotating condensates [8].

sensibly different, since it is not restricted to the paraxial regime and since it addresses rather self-interaction effects in the beam propagation. An “ABCD” matrix, including self-focusing effects, is computed in Sec. IV, and used to model the propagation of an atomic sample in a matter-wave resonator. Self-focusing is also discussed through an alternative method exposed in Appendix A.

Our approach is indeed mainly inspired from previous theoretical developments in optics, which aimed at treating the wave propagation in a Kerr medium through such a matrix formalism [23]. An approach of the non-linearity based on the resulting frequency-dependent diffraction [27] successfully explained the asymmetric profile of atomic and molecular intra-cavity resonances [28], as well as the dynamics of Gaussian modes in ring and two-isotopes lasers [29, 30]. Later, a second-order polynomial determined by a least-square fit of the wave intensity profile was considered to model the Kerr effect [31]. In this paper, we explore the quantum mechanical counterpart of this strategy: mean-field interactions are modelled thanks to a second-order polynomial, determined perturbatively from the wave-function, and which can be interpreted in optical terms.

II. LENSING POTENTIAL

One considers the propagation of a zero-temperature condensate in a uniform gravity field and in the mean-field approximation. The corresponding Hamiltonian reads:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + mgz + g_I |\phi(\hat{\mathbf{r}}, t)|^2 \quad (1)$$

g_I is the coupling constant related to the s-wave scattering length a and to the number of atoms N by $g_I = 4\pi N\hbar^2 a/m$. Our purpose is to approximate the mean-field potential $g_I |\phi(\mathbf{r}, t)|^2$ by an operator leading to an easily solvable wave equation and as close as possible to the interaction potential. A second-order polynomial in the position and momentum operators is a suitable choice, since it allows to obtain Gaussian solutions to the propagation equation. We note $\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + mgz$ the interaction-free Hamiltonian and

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t) = \hat{H}_0 + P_l(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t) \quad (2)$$

the quadratic Hamiltonian accounting for interactions effects.

The strategy exposed in this paper consists in picking up, among the possible polynomials P , the element which minimizes an appropriate distance measure to the mean-field potential. In geometric terms, this polynomial appears as the projection of the mean-field potential onto the vector space spanned by second-order polynomials in position and momentum. This potential will be referred to as the “lensing potential”, denomination which will be justified in Sec. IV. We define a distance analogous to the error function used in [31], which involves the polynomial P and the quantum state $|\phi(t)\rangle$ resulting from the non-linear evolution:

$$E(P(t), |\phi(t)\rangle) = \int d^3\mathbf{r} |\langle \mathbf{r} | P(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t) |\phi(t)\rangle - g_I |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 \phi(\mathbf{r}, t) |^2 \quad (3)$$

The minimization of the distance $E(P(t), |\phi(t)\rangle)$ for the lensing potential $P_l(t)$ implies that the function E is stationary towards any second-order polynomial coefficient at the point $(P_l(t), |\phi(t)\rangle)$:

$$\forall t \geq t_0 \quad \nabla_P E(P_l(t), |\phi(t)\rangle) = 0 \quad (4)$$

We have noted ∇_P the gradient associated with the coefficients of a second-order polynomial, and t_0 is the initial time from which we compute the evolution of the wave-function - we assume that $\phi(\mathbf{r}, t_0)$ is known -. The determination of the lensing potential associated with self-interactions in the beam indeed requires previous knowledge of the wave-function evolution. This difficulty did not arise in other optical treatments of atomic interaction effects [18, 32, 33], in which the atomic beam propagation was mainly affected by interactions with a different sample of well-known wave-function. This is typically the case for a weakly outcoupled continuous atom laser beam, in which the diverging lens effect results from the source condensate. We propose to circumvent this self-determination problem thanks to a perturbative treatment. Such approach is legitimate for the diluted matter waves involved in usual atom interferometers. The first-order lensing polynomial and the corresponding Hamiltonian $\hat{H}^{(1)}(t) = \hat{H}_0 + P_l^{(1)}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t)$ are determined from the linear evolution, according to:

$$\forall t \geq t_0 \quad \nabla_P E\left(P_l^{(1)}(t), e^{-i/\hbar \hat{H}_0(t-t_0)} |\phi(t_0)\rangle\right) = 0 \quad (5)$$

Higher-order lensing effects can be computed iteratively. For instance, the second-order lensing polynomial $P_l^{(2)}(t)$ satisfies:

$$\forall t \geq t_0 \quad \nabla_P E \left(P_l^{(2)}(t), T \left[e^{-i/\hbar \int_{t_0}^t dt' [\hat{H}_0 + P_l^{(1)}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t)']} \right] |\phi(t_0)\rangle \right) = 0$$

where we have used the usual time-ordering operator T [34].

III. OPTICAL PROPAGATION OF MATTER WAVES: THE ABCD THEOREM.

This section gives a remainder on a general result - called the *ABCD* theorem - concerning the propagation of matter waves in a time-dependent quadratic potential, which is the atomic counterpart of the ray matrix formalism frequently used in optics [26]. It shows that the evolution of a Gaussian wave-function under an Hamiltonian quadratic in position and momentum is similar to the propagation of a Gaussian mode of the electric field in a linear optical system. A detailed description of this theoretical result of atom optics is given in the references [25, 35].

One considers a time-dependent quadratic Hamiltonian such as:

$$\hat{H}_0 + P_l(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, t) = \frac{\hat{\mathbf{p}}\hat{\beta}(t)\hat{\mathbf{p}}}{2m} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{p}}\hat{\alpha}(t)\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{r}}\hat{\delta}(t)\hat{\mathbf{p}} - \frac{m}{2}\hat{\mathbf{r}}\hat{\gamma}(t)\hat{\mathbf{r}} - m\mathbf{g}(t) \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{f}(t) \cdot \hat{\mathbf{p}} + h(t) \quad (6)$$

$\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ and $\delta(t)$ are 3×3 matrices [i] ; $\mathbf{f}(t)$ and $\mathbf{g}(t)$ are three-dimensional vectors; $h(t)$ is a scalar, and \sim stands for the transposition. Here we use this Hamiltonian to approximate the nonlinear Hamiltonian (1). The Hamiltonian (6) is indeed appropriate to describe several physical effects [36, 37].

A. ABCD propagation of a Gaussian wave-function.

The propagation of a Gaussian wave-packet in such an Hamiltonian can be described simply as follows. Let $\phi(\mathbf{r}, t)$ be an atomic wave packet initially given by:

$$\phi(\mathbf{r}, t_0) = \frac{1}{\sqrt{|\det X_0|}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c0}) Y_0 X_0^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c0}) + \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_{c0} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c0}) \right] \quad (7)$$

The 3×3 complex matrices X_0 , Y_0 represent the initial width of the wave packet in position and momentum respectively: $X_0 = iD(\Delta x(t_0), \Delta y(t_0), \Delta z(t_0))$ and $Y_0 = D(\Delta p_x(t_0), \Delta p_y(t_0), \Delta p_z(t_0))$, with D standing for a diagonal matrix. The vectors \mathbf{r}_{c0} , \mathbf{p}_{c0} give the initial average position and momentum. The *ABCD* theorem for matter waves states that, at any time $t \geq t_0$, the wave-packet $\phi(\mathbf{r}, t)$ satisfies:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{i/\hbar S(t, t_0, \mathbf{r}_{c0}, \mathbf{p}_{c0})}}{\sqrt{|\det X(t)|}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t)) Y(t) X^{-1}(t) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t)) + \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_{c0}(t) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t)) \right]$$

$S(t, t_0, \mathbf{r}_{c0}, \mathbf{p}_{c0})$ is the classical action evaluated between t and t_0 of a point-like particle which motion follows the classical Hamiltonian $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ and with respective initial position and momentum $\mathbf{r}_{c0}, \mathbf{p}_{c0}$. The width matrices in position $X(t)$ and momentum $Y(t)$, and the average position and momentum $\mathbf{r}_c(t), \mathbf{p}_c(t)$ are determined through the same 6×6 “ABCD” matrix:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_c(t) \\ \frac{1}{m} \mathbf{p}_c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{c0} \\ \frac{1}{m} \mathbf{p}_{c0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi(t, t_0) \\ \phi(t, t_0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

[i] $\delta(t) = -\tilde{\alpha}(t)$ to ensure the Hamiltonian hermiticity

The $ABCD$ matrix and the vectors ξ, ϕ can be expressed formally as [37]:

$$M(t, t_0) = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} = T \left[\exp \left(\int_{t_0}^t dt' \begin{pmatrix} \alpha(t') & \beta(t') \\ \gamma(t') & \delta(t') \end{pmatrix} \right) \right] \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} \xi(t, t_0) \\ \phi(t, t_0) \end{pmatrix} = \int_{t_0}^t dt' M(t, t') \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t') \\ \mathbf{g}(t') \end{pmatrix} \quad (9)$$

Although the former expressions seem rather involved, in all cases of practical interest, the $ABCD\xi\phi$ parameters can be determined analytically or at least by efficient numerical methods.

B. Interpretation of the $ABCD$ propagation and aberrationless approximation.

The phase-space propagation provides a relevant insight in the transformation operated by the $ABCD$ matrix. Consider the Wigner distribution of a single-particle density operator evolving under the Hamiltonian (6). The Wigner distribution at time t is related to the distribution at time t_0 by the following map:

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = W \left(\tilde{D}(\mathbf{r} - \xi) - \frac{1}{m} \tilde{B}(\mathbf{p} - m\phi), -m\tilde{C}(\mathbf{r} - \xi) + \tilde{A}(\mathbf{p} - m\phi), t_0 \right)$$

where the matrices A, B, C, D and vectors ξ, ϕ are again evaluated at the couple of instants (t, t_0) . The action of the evolution operator onto the Wigner distribution is thus amenable to a time-dependent linear map. The fact that $ABCD$ matrices are symplectic [25] implies that this map is unitary: such evolution preserves the global phase-space volume, and the quality factor of an atomic beam in the sense of [38].

In photon as in atom optics, the aberrationless approximation consists in assuming that the Gaussian function (7) is a self-similar solution of the propagation equation in spite of the non-linearity, the evolution of which is given by the $ABCD$ propagation. The propagation is thus described through a map which preserves the phase-space density. This is an approximation, since for atomic or light beams evolving in nonlinear media, the phase-space density indeed changes during the propagation.

IV. ABCD MATRIX A FREE-FALLING INTERACTING ATOMIC CLOUD.

Let us apply the method discussed above to describe the propagation of a free-falling Gaussian atomic wave-packet. In the aberrationless approximation, such a wave-packet is simply determined by the parameters $ABCD\xi\phi$ and by the phase associated with the action. In view of the resonator stability analysis, we will focus on the computation of the $ABCD$ matrix in presence of the mean-field potential. We consider only the leading-order nonlinear corrections, associated with the first-order lensing polynomial $P_l^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$.

This section begins with the determination of this potential defined by Eq.(5). A formal expression of the atom-optical $ABCD$ matrix, taking into account this lensing potential, is obtained. An infinitesimal expansion of this expression shows that the mean-field interactions effectively play the role of a divergent lens: the atom-optical $ABCD$ matrix of the free-falling cloud evolution is similar to the optical $ABCD$ matrix associated with the propagation of a light ray through a series of infinitesimal divergent lenses. In our case, the propagation axis is the time, and the infinitesimal lenses correspond to the action of the mean-field potential in infinitesimal time slices.

A. Determination of the lensing potential.

We assume that the condensate, evolving in the Hamiltonian (1), is initially at rest and described by a Gaussian wave-function:

$$\phi(x, y, z, t_0) = \frac{\pi^{-3/4}}{\sqrt{w_x(t_0)w_y(t_0)w_z(t_0)}} e^{-\frac{x^2}{2w_x(t_0)^2} - \frac{y^2}{2w_y(t_0)^2} - \frac{z^2}{2w_z(t_0)^2}} \quad (10)$$

It is easy to show that, when one considers the interaction-free evolution, the widths are given at time $t \geq t_0$ by:

$$w_i(t) = \sqrt{w_i^2(t_0) + \frac{\hbar^2}{m^2 w_i^2(t_0)} (t - t_0)^2}$$

This result can be easily retrieved by considering the initial width matrices $X_0 = iD(w_x(t_0), w_y(t_0), w_z(t_0))$ and $Y_0 = \frac{\hbar}{m}D(1/w_x(t_0), 1/w_y(t_0), 1/w_z(t_0))$ for the wave-function, and applying the free $ABCD$ matrix [25]:

$$\begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t - t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

The square of the free-evolving wave-function thus reads:

$$|\phi^{(0)}(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{\pi^{-3/2}}{w_x(t)w_y(t)w_z(t)} \exp \left[-\frac{(x - x_c(t))^2}{w_x(t)^2} - \frac{(y - y_c(t))^2}{w_y(t)^2} - \frac{(z - z_c(t))^2}{w_z(t)^2} \right]$$

We use this expression to determine the first-order lensing polynomial $P_l^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Since this operator acts on Gaussian wave-functions, differentiation is equivalent to the multiplication by a position coordinate, so the action of the momentum operator is indeed equivalent to that of the position operator up to a multiplicative constant. One can thus, without any loss of generality, search for a lensing polynomial $P_l^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ involving only the position operator. With this choice, the error function (3) minimized by the polynomial P becomes simply:

$$E(P(t), |\phi^{(0)}(t)\rangle) = \int d^3\mathbf{r} |\phi^{(0)}(\mathbf{r}, t)|^2 \left(P(\mathbf{r}, t) - g_I |\phi^{(0)}(\mathbf{r}, t)|^2 \right)^2$$

Expanding the polynomial $P_l^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ around the central position $\mathbf{r}_c(t)$, a parity argument shows that the linear terms vanish:

$$P_l^{(1)}(\mathbf{r}, t) = g_I [c_0(t) - c_x(t)(x - x_c(t))^2 - c_y(t)(y - y_c(t))^2 - c_z(t)(z - z_c(t))^2]$$

By definition of the lensing polynomial, the error function (12) must be stationary with respect to each coefficient $c_{x,y,z,0}(t)$, which leads to:

$$c_0(t) = \frac{7}{4V(t)} \quad c_{x,y,z}(t) = \frac{1}{2w_{x,y,z}(t)^2 V(t)} \quad V(t) = (2\pi)^{3/2} \prod_{i=x,y,z} w_i(t) \quad (12)$$

Only the quadratic term intervene in the $ABCD$ matrix: the coefficient $c_0(t)$ merely adds a global additional phase to the wave-function, which does not change the subsequent stability analysis.

B. Formal expression of the effective $ABCD$ matrix.

We can readily express the $ABCD$ matrix associated with the evolution under $\hat{H}^{(1)}(t)$. Writing this Hamiltonian in the form of Eq. (6), and using the formal expression (8) of the $ABCD$ matrix as a time-ordered series, one obtains:

$$M^{(1)}(t, t_0, X_0) = \begin{pmatrix} A^{(1)}(t, t_0, X_0) & B^{(1)}(t, t_0, X_0) \\ C^{(1)}(t, t_0, X_0) & D^{(1)}(t, t_0, X_0) \end{pmatrix} = T \left[\exp \left(\int_{t_0}^t dt' \begin{pmatrix} \alpha^{(1)}(t') & \beta^{(1)}(t') \\ \gamma^{(1)}(t') & \delta^{(1)}(t') \end{pmatrix} \right) \right] \quad (13)$$

In contrast to the usual linear $ABCD$ matrices, this matrix now depends on the input vector through the initial position width matrix X_0 [i]. A brief inspection of Eq. (6) and of the Hamiltonian $\hat{H}^{(1)}(t)$

$$\hat{H}^{(1)}(t) = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2m} + mg\hat{z} + g_I [c_0(t) - c_x(t)(\hat{x} - x_c(t))^2 - c_y(t)(\hat{y} - y_c(t))^2 - c_z(t)(\hat{z} - z_c(t))^2], \quad (14)$$

shows that the matrices in the exponential read $\alpha^{(1)}(t) = \delta^{(1)}(t) = 0$, $\beta^{(1)}(t) = 1$ and $\gamma^{(1)}(t) = \frac{2g_I}{m}D(c_x(t), c_y(t), c_z(t))$. Using Eqs. (11) and (12), one readily obtains the elements of the quadratic matrix γ :

$$\gamma_{ii}(t) = \frac{g_I}{m} \frac{1}{\left(w_i(t_0)^2 + \frac{\hbar^2}{m^2 w_i(t_0)^2} (t - t_0)^2 \right) \prod_{j=x,y,z} \left(w_j^2(t_0) + \frac{\hbar^2}{m^2 w_j(t_0)^2} (t - t_0)^2 \right)^{1/2}} \quad (15)$$

[i] The Hamiltonian $\hat{H}^{(1)}(t)$ and the lensing polynomial $P_l^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ depend of course also on X_0 , but we do not mention this dependence explicitly to alleviate the notations.

A significant simplification arises because $\gamma^{(1)}(t)$ is diagonal: one needs only to compute the exponential of three 2×2 matrices associated with the orthogonal directions O_x, O_y, O_z . The $ABCD$ matrix is simply the tensor product of those:

$$M^{(1)}(t, t_0, X_0) = \otimes_{i=x,y,z} T \left[\exp \left(\int_{t_0}^t dt' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma_{ii}(t') & 0 \end{pmatrix} \right) \right] \quad (16)$$

C. Propagation in a series of infinitesimal lenses.

An infinitesimal expansion of (18) shows that the evolution between t and $t + dt$ is described by the $ABCD$ matrix:

$$M^{(1)}(t + dt, t, X_0) \simeq \begin{pmatrix} 1 & dt \\ \gamma(t) & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

It can be rewritten as a product of two $ABCD$ matrices:

$$M^{(1)}(t + dt, t, X) \simeq \begin{pmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma(t) & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

If these were 2×2 matrices, in the optical formalism, the first matrix would be associated with the propagation of a ray on the length dt and the second matrix, of the form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -dt/f & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

would model a lens of infinitesimal curvature dt/f . One can thus consider, by analogy, that this second 6×6 matrix realizes an atom-optical lens which curvature is the infinitesimal 3×3 matrix $D(\gamma_{xx}(t), \gamma_{yy}(t), \gamma_{zz}(t)) dt$. Besides, one can exploit the fact that it is a tensor product: if one considers each direction O_x, O_y, O_z separately, the propagation amounts - as in optics - to a product of 2×2 matrices, which makes the analogy with a lens even more transparent. The resulting 6×6 $ABCD$ matrix is simply given by the tensor product of those. Transverse degrees of freedom are, nonetheless, coupled to each other through the lensing potential. It is worth noticing that the focal lengths f_x, f_y, f_z have here the dimension of a time, and are negative if one considers repulsive interactions: the quadratic potential $P_l^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ acts as a series of diverging lenses associated with each infinitesimal time slice.

D. Expression of the nonlinear $ABCD$ matrix with the Magnus Expansion.

Because of the time-dependence of the Hamiltonian $\hat{H}^{(1)}(t)$, the time-ordered exponential in (18) cannot, in general, be expressed analytically. Fortunately, a useful expression is provided by the Magnus expansion [39]:

$$M^{(1)}(t, t_0, X_0) = \otimes_{i=x,y,z} \exp \left[\int_{t_0}^t dt_1 N_i(t_1) + \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 [N_i(t_1), N_i(t_2)] + \dots \right] \quad \text{with } N_i(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma_{ii}(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

This expansion has the advantage to preserve the unitarity of the evolution operator: at any order, the operator obtained by truncating the series in the exponential is unitary. The Magnus expansion can be considered as the continuous generalization of the Baker-Hausdorff formula [40] giving the exponential of a sum of two operators A and B as a function of a series of commutators along $\exp(A + B) = \exp A \exp B \exp([A, B]/2) \dots$. The Magnus expansion has been successfully applied to solve various physical problems, among which differential equations in classical and quantum mechanics [41], spectral line broadening [42], nuclear magnetic resonance [43], multiple photon absorption [44] and strong field effects in saturation spectroscopy [45].

The first-order term $\Omega_1(t, t_0)$ in the argument of the exponential can be expressed as

$$\Omega_1(t, t_0) = \int_{t_0}^t dt' N(t') = \begin{pmatrix} 0 & t - t_0 \\ \langle \gamma \rangle(t - t_0) & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

with the average quadratic diagonal matrix $\langle \gamma \rangle_{ii} = 1/(t - t_0) \int dt \gamma_{ii}(t)$. Exact expressions for $\langle \gamma \rangle_{ii}$ are given in Eq. (C1) of Appendix C for a cylindrical condensate. Without this symmetry, the matrix elements $\langle \gamma \rangle_{ii}$ cannot be

evaluated analytically to our knowledge, but are nonetheless accessible with efficient numerical methods [i]. The first-order $ABCD$ matrix reads [ii]:

$$M_1^{(1)}(t, t_0, X_0) = \exp[\Omega_1(t, t_0)] = \begin{pmatrix} \cosh(\langle\gamma\rangle^{1/2}(t-t_0)) & \langle\gamma\rangle^{-1/2} \sinh(\langle\gamma\rangle^{1/2}(t-t_0)) \\ \langle\gamma\rangle^{1/2} \sinh(\langle\gamma\rangle^{1/2}(t-t_0)) & \cosh(\langle\gamma\rangle^{1/2}(t-t_0)) \end{pmatrix} \quad (22)$$

As expected, this main contribution of the Magnus expansion is independent of the ordering of the successive infinitesimal lenses, and can be interpreted as the $ABCD$ matrix of a thick lens with finite curvature. This expression is similar to the paraxial $ABCD$ matrix obtained in [18] to describe the interactions between an atom laser and a condensate of known wave-function.

In the following developments, we use mainly this first-order contribution to the Magnus expansion. In order to justify this approximation, we have performed a second-order computation of the $ABCD$ matrix $M^{(1)}(t, t_0, X_0)$ in Appendix B. This second-order correction is weighted by the small parameter $\epsilon = (\tau/\tau_c)^4$, depending on the ratio of the duration $\tau = t - t_0$ to a time-scale τ_c , which reads for a spherical cloud of radius w_0 :

$$\tau \ll \tau_c = \left(\frac{w_0}{4\pi a}\right)^{1/6} \frac{mw_0^2}{\hbar} \quad (23)$$

One checks that the first-order expansion is valid for an arbitrary long time ($\tau_c \rightarrow \infty$) as interaction effects vanish ($a \rightarrow 0$). Considering a sample of initial radius $w_0 = 10 \mu\text{m}$, and using the s-wave scattering length $a \simeq 5.7\text{nm}$ of the ^{87}Rb [18], one obtains $\tau_c = 0,31 \text{ s}$. The convergence of the Magnus series is indeed guaranteed when the following inequality is satisfied [40]:

$$N_m = \int_{t_0}^t dt' \|N(t')\| < \ln(2), \quad (24)$$

and our second-order computation gives an additional heuristic indication of convergence for a flight duration $\tau \ll \tau_c$.

V. STABILITY ANALYSIS OF A MATTER-WAVE RESONATOR

In this Section, we apply the method of the $ABCD$ matrix to discuss the propagation of an atomic sample with mean-field repulsive interactions in a matter-wave resonator [46]. The considered resonator involves a series of focusing atomic mirrors. In this system, there is a competition between the transverse sample confinement provided by the mirrors and the expansion induced by the repulsive interactions, which determines the maximum size of the sample during its propagation. In order to keep the sample within the resonator, its transverse size must stay smaller than the diameter of the laser beams realizing the atomic mirrors. If this criterium is met during the successive bounces, the resonator is considered as stable. The $ABCD$ matrix method developed previously, giving an easy derivation of the sample width evolution, is well-suited to discuss this issue. One assumes an initial Gaussian profile for the sample wave-function. The atomic wave propagation in-between the mirrors is treated in the aberrationless approximation, and described by the nonlinear $ABCD$ matrix (22) accounting for self-interaction effects. The evolution of the sample width obtained with this method is compared to the behavior expected from a non-perturbative paraxial approach.

A. Resonator description

The considered matter-wave resonator is based on the levitation of a free-falling two-level atomic sample by periodic vertical Raman light pulses. This proposal is described in detail in the reference [47], but we remind here its main features for the sake of clarity. In the absence of light field, the atomic sample propagates in the Hamiltonian (1). The intermediate level involved the Raman pulses is taken sufficiently far detuned from the atom energy levels, so that

[i] In the short expansion limit considered later where $|t - t_0| \ll mw_i^2(t_0)/\hbar$, the average quantities $\langle\gamma_{ii}\rangle$ can be approximated by the instantaneous value of the quadratic coefficient γ_{ii} at the center of the considered time interval.

[ii] For repulsive interactions, all the eigenvalues of the matrix γ are positive, and by convention its square root has also positive eigenvalues.

spontaneous emission can be safely neglected [i]. After adiabatic elimination of the intermediate level, the action of the Raman pulses can be modelled by the effective dipolar Hamiltonian:

$$\hat{H}_{dip}(t) = -\hbar\Omega_{ba}(\mathbf{r}, t) \cos(\omega t - 2\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \phi_0) (|b\rangle\langle a| + |a\rangle\langle b|) \quad (25)$$

The Raman pulses are assumed to be short, resonant and performed successively by two counter-propagating vertical lasers. The sequence is arranged in pairs of successive π pulses with opposite effective vertical wave-vectors. Each pair acts as an atomic mirror, bringing back the atoms in their initial internal state a , and providing them with a net momentum transfer of $\Delta\mathbf{p} \simeq 4\hbar\mathbf{k}$. The atomic motion is sketched on Fig. 1 in the energy-momentum picture.

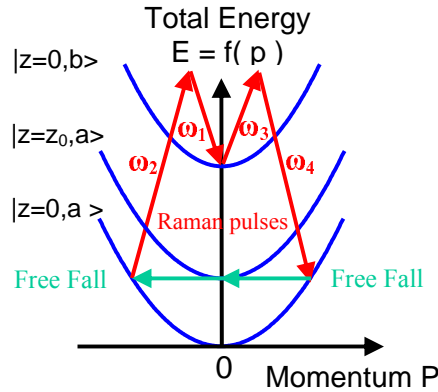


FIG. 1: Evolution of the atomic sample in the energy-momentum picture. The atoms are initially at rest at the altitude z_0 . The total energy includes the kinetic, gravitational and internal energy. As a conservative motion, the free-fall is represented by a leftward horizontal trajectory of the representative point.

If the period T in-between two successive “Raman mirrors” is set to

$$T := T_0 = \frac{mg}{4\hbar k}, \quad (26)$$

the acceleration provided by the Raman pulses compensates on average that of gravity: the cloud levitates and evolves inside a matter-wave resonator [47].

B. Focusing with atomic mirrors.

Matter-wave focusing can be obtained, in principle, with laser waves of quadratic intensity profile [48, 49] or alternatively of spherical wave-front [47]. We concentrate on the focusing obtained with an electric field of quadratic intensity profile [49], the discussion of which is less technical. The Rabi frequency considered for the Raman pulses of the resonator depends quadratically on the distance to the propagation axis O_z [ii]:

$$\Omega_{ba}(x, y, z, t) = \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2w_{las}^2}\right) \Omega_0(t) \quad (27)$$

These Raman pulses generate a quadratic position-dependent light-shift proportional to the field intensity and thus to the square of the Rabi frequency (27). After the pulse, the atomic wave-function initially in of the form of Eq. (7) is thus multiplied by a factor yielding the input-output relation:

$$\psi_{out}(\mathbf{r}, t) = e^{i2k(z-z_0)} e^{-i(x^2+y^2)/w_{las}^2} e^{i\phi'_0} \psi_{in}(\mathbf{r}, t) \quad (28)$$

[i] As a concrete example, one could consider the ^{87}Rb set on an hyperfine transition to realize this setup. A detuning of a few GHz in the Raman laser is sufficient to make the effects of spontaneous emission negligible. Note that the effective frequency of the Raman pulses (given by the difference between the two frequencies of the counterpropagating lasers) is not detuned but resonant with the transition of the two-level sample.

[ii] Close to the propagation axis, this quadratic profile can be reproduced to a good approximation with Raman pulses of Gaussian intensity profile.

with ϕ'_0 a constant phase added at the condensate center $\mathbf{r}_0 = (0, 0, z_0)$ during the pulse. The outgoing wave-function can thus be put again in the form of Eq. (7) if one replaces p_0 by $p_1 = p_0 + 2\hbar k$, and X_0, Y_0 with

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ D(-1/f, -1/f, 0) & I_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

where $D(-1/f, -1/f, 0)$ denotes as previously a 3×3 diagonal matrix and with a focal time of

$$f = \frac{mw_{las}^2}{2\hbar} \quad (30)$$

This expression shows that the pulse acts as a lens in the transverse directions O_x, O_y [i].

The strength of the focusing which can be achieved with such atomic mirrors [ii] is indeed limited by the quasi-uniformity required for the Rabi frequency on the condensate surface, in order to perform an efficient population transfer with the Raman π -pulse. Considering a cigar-shaped cloud of small width w_\perp along the O_x, O_y axis, one may require that the Rabi frequency difference between the border and the center of the cloud satisfies: $|\Omega(w_\perp, 0, z, t) - \Omega_0(t)|/|\Omega_0(t)| \leq \epsilon$. This yields readily a lower bound on the focal time f :

$$f \geq \frac{m w_\perp^2}{2\hbar \epsilon} \quad (31)$$

With a reasonable bound of $\epsilon = 10^{-2}$, a cylindrical cloud of ^{87}Rb atoms of transverse size $w_\perp \simeq 10 \mu\text{m}$, one obtains a minimum focusing time: $f \geq 6,7\text{s}$. A back-on-the-envelope computation of the reflection coefficient shows that the losses resulting from such an inhomogeneity of the Rabi frequency are on the order of 10^{-3} .

C. Resonator stability analysis.

We now investigate the non-linear *ABCD* propagation of a cigar-shaped sample in the resonator. As a specific example, we consider a cloud of ^{87}Rb atoms taken in the two internal levels $|a\rangle = |5S_{1/2}, F = 1\rangle$ and $|b\rangle = |5S_{1/2}, F = 2\rangle$. In-between the Raman mirrors, the whole sample is expected to propagate in the ground state $|a\rangle$. We consider a sample of $N = 10^5$ atoms, of initial dimensions $w_x = w_y = w_r = 10 \mu\text{m}$ and $w_z = 100 \mu\text{m}$, and we use the s-wave scattering length $a \simeq 5.7\text{nm}$ of the Rubidium. We investigate the evolution of this sample during a thousand bounces and for various mirror focal times. Keeping a significant atomic population inside a matter-wave resonator during such a big number of reflections is challenging, but not impossible in principle given the high population transfer which has been achieved experimentally with Raman pulses [50] [iii]. One obtains the value $T_0 \simeq 1.5\text{ms}$ for the period between the Raman mirrors. This time scale is much shorter than the duration $\tau_c \simeq 0,3\text{s}$ found for the validity of the first-order Magnus expansion associated with a spherical cloud of radius $w_0 = 10 \mu\text{m}$. This shows that the ABCD matrix of the cigar-shaped condensate is well-approximated by the leading order [Eq. (22)] of the Magnus expansion [iv]. Furthermore, the free-propagation time T_0 is also much shorter than the time-scale $\tau_r = mw_r^2/\hbar$ associated with the free expansion of the transverse width, so that one can safely approximate the average quadratic coefficient $\langle\gamma\rangle$ with the instantaneous value $\langle\gamma\rangle \simeq \gamma(w_x(T_0/2), w_y(T_0/2), w_z(T_0/2))$.

To compute the evolution of the transverse and longitudinal sample width, one proceeds as follows. As in Section IV A, one starts with initial width matrices $X_0 = iD(w_x(t_0), w_y(t_0), w_z(t_0))$ and $Y_0 = \frac{\hbar}{m}D(1/w_x(t_0), 1/w_y(t_0), 1/w_z(t_0))$ and computes the interacting ABCD matrix (22) as a function of these initial

[i] The absence of focusing in the direction of laser beam propagation O_z is not critical since it does not drive the cloud out of the beam.
 [ii] The considered atomic mirrors consist indeed not in a single, but in a double Raman pulse. This does not change the qualitative discussion of this paragraph.

[iii] We treat the wave-propagation in the resonator as if the atomic cloud was entirely reflected on the successive atomic mirrors. Indeed, even if resonant Raman pulses can perform a population transfer with an efficiency close to 99% [50], the residual losses become significant after a big number of bounces in a real experiment. This results in a gradual decrease of the mean-field interactions, which could be accounted for in a more sophisticated model. Our point here is simply to illustrate the nonlinear *ABCD* method on a thought experiment, and we thus adopted a simplified approach with perfect atomic mirrors.

[iv] We have computed the time-scale τ_c determining the validity of the first-order Magnus term for spherical wave-packets only. Nonetheless, a basic dimensional analysis shows that for a cigar-shaped cloud, the time-scale determining the validity of the first-order Magnus term is bounded below by the time τ_c given by Eq. (23) and computed by setting w_0 equal to the smallest cigar dimension.

widths. During the first cycle, one multiplies the corresponding vector (X_0, Y_0) successively with nonlinear ABCD matrix (22) and with the mirror ABCD matrix (29). The new width matrices (X_1, Y_1) are obtained, from which one can infer the nonlinear ABCD matrix for the next propagation stage. The iteration of these algebraic operations is a straightforward numerical task. The results, depicted on Fig. 2, show that the transverse width oscillates with an amplitude and a period which both increase with the mirror focal time. The maximum sample size is $w_r = 25 \mu m$ and $w_r = 60 \mu m$ for the respective focal times $f = 20 s$ and $f = 100 s$. Considering for instance a laser beam of waist $w = 100 \mu m$ in the experiment, one sees that with those focal times the atomic cloud remains within the light beam and is thus efficiently confined transversally in the resonator. As expected, the use of Raman mirrors with a stronger curvature allows one to shrink the transverse size of the stabilized cloud. Fig. 3 shows the evolution of the maximum sample transverse size as a function of the mirror focal time. The extended ABCD matrix analysis presented in this paper allows thus to determine efficiently the minimum amount of focusing required to keep the sample within the diameter of the considered Raman lasers. In that respect it can be used to optimize the trade-off, exposed in the previous paragraph, between strongly focusing or highly reflecting atomic mirrors.

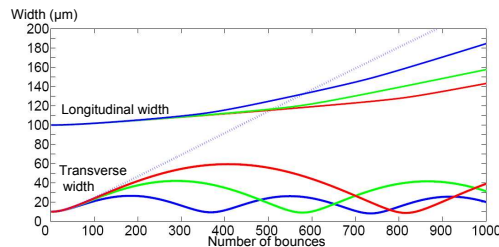


FIG. 2: Evolution of the transverse and longitudinal width of the sample (μm) during the successive bounces in the cavity (numbered from 1 to 1000), for the mirror focal times $f = 20 s$ (blue), $f = 50 s$ (green) and $f = 100 s$ (red). The dashed line represents the evolution of the transverse width in the absence of focusing with the Raman mirrors.

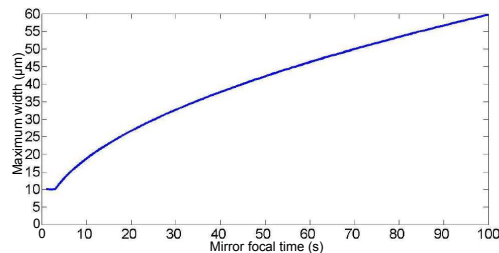


FIG. 3: Maximum sample transverse width (μm) during the evolution in the resonator as a function of the Raman mirror focal time (s). We have considered the first 1000 bounces to determine this maximum.

D. Comparison with the predictions of the nonlinear paraxial equation.

As exposed in Appendix A, the propagation of an atomic beam with a longitudinal momentum much greater than the transverse momenta can be alternatively described by a paraxial wave equation of the form (A2). Furthermore, if the linear density of the atomic beam is uniform, the nonlinear coefficient intervening in this paraxial equation is a constant. As in nonlinear optics [51] and in 2D condensates [52], this equation induces a universal behavior in paraxial atomic beams [53]: the transverse width oscillates with a frequency independent from the strength of the interaction. The width oscillations, depicted on Fig. 2, indeed allow one to confront the results of our method, which uses a non-paraxial wave equation treated in the aberrationless approximation, to the predictions of the full nonlinear paraxial equation with a uniform nonlinear coefficient. We stress that this second approach leaves the nonlinear term as such and does not assume that the Gaussian shape of the atomic beam is preserved. In this sense it is more exact than the radius of curvature method used in Appendix A. It is also approximate, since the atomic beam is neither paraxial nor of uniform linear density. Nevertheless, it is remarkable that both treatments agree very well on the

oscillation period of the width.

To apply the paraxial description, one models the action of the successive mirrors on the transverse wave-function with an average potential. The lens operated by each Raman mirror, of focal time f , imprints a phase factor of $e^{i\frac{m}{2\hbar f}r^2}$ [see Eq. (28) and Eq. (30)]. The series of lenses, separated by the duration T_0 , thus mimics the following effective quadratic potential:

$$V_{\perp, lens} = \frac{m}{2\hbar^2 T_0 f} r^2 \quad (32)$$

Adding the nonlinear contribution approximated by a contact term of constant strength [i] $V_{\perp, int}(\mathbf{r}) = \beta|\psi_{\perp}(\mathbf{r})|^2\psi_{\perp}(\mathbf{r})$ to Eq. (A1), one obtains a 2D nonlinear Schrödinger equation (NLSE):

$$i\hbar\partial_{\zeta}\psi_{\perp}(x, y, \zeta) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + \beta|\psi_{\perp}(x, y, \zeta)|^2 + \frac{m}{2\hbar^2 T_0 f} r^2 \right] \psi_{\perp}(x, y, \zeta), \quad (33)$$

ζ is a parameter defined in Eq. (A1) equivalent to the propagation time. Setting $K = \frac{m}{\hbar}$, one can recast this equation in the same form as the propagation of a light wave in a quadratic graded index medium [51]:

$$2iK\partial_{\zeta}\psi_{\perp}(x, y, \zeta) = \left[-\partial_T^2 + \gamma|\psi_{\perp}(x, y, \zeta)|^2 + K^2 \left(\frac{1}{fT_0} \right) \right] \psi_{\perp}(x, y, \zeta), \quad (34)$$

with a constant γ which we do not need to explicit. As shown in [51, 53], such equation yields transverse oscillations of universal frequency:

$$\omega_{par} = \frac{2}{\sqrt{fT_0}}$$

The results obtained from the perturbative ABCD approach are confronted with this prediction on Fig. 4. The agreement improves as the mirror focal time increases, and it is in fact already good (4%) for a focal time of $f = 3s$ and attains 0.7% for a focal time of $f = 50s$. As discussed above, focal times shorter than $f = 20s$ seem incompatible with the reflection coefficient desired for the atomic mirrors. The disagreement observed below $f \leq 3s$ may be attributed to a failure of the paraxial approximation.

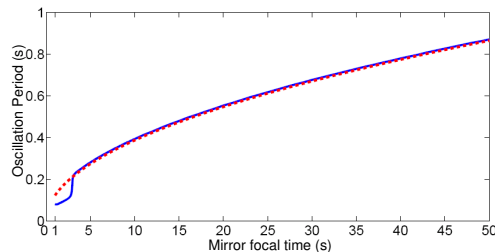


FIG. 4: Period of the transverse width oscillations (s) in the matter-wave resonator as a function of the Raman mirror focal time (s). The full and the dashed line give the oscillation periods obtained respectively through the perturbative ABCD approach and through the nonlinear paraxial wave equation.

VI. CONCLUSION

This paper exposed a treatment of the non-linear Schrödinger equation involving theoretical tools from optics and atom-optics. The *ABCD* propagation method for matter waves has been extended beyond the linear regime thanks to a perturbative analysis relying on an atom-optical aberrationless approximation. We have derived approximate

[i] The coefficient β is indeed a constant only if the linear atomic density is uniform, which is not the case here.

analytical expressions for the ABCD matrix of an interacting atomic cloud thanks to a Magnus expansion. This matrix analysis has been applied to discuss the propagation of an atomic sample in a perfect matter-wave resonator. We have shown that such sample can be efficiently stabilized thanks to focusing atomic mirrors. We have found that the nonlinear ABCD propagation reproduces to a good level of accuracy the universal oscillations expected from the nonlinear paraxial equation for matter waves [53], which makes it a promising tool to model future nonlinear atom optics experiments and a seducing alternative to previous numerical methods applied to matter-wave resonators [48]. We have also highlighted an other optical method, involving more stringent assumptions - paraxial propagation, cylindrical symmetry and constant longitudinal velocity - and also relying on the aberrationless approximation. This last method enables one to address self-interaction effects in the free propagation through a complex parameter [defined in Eq. (A13)], which is analogous to a radius of curvature, and the evolution of which is very simple [Eq. (A14)]. As far as the beam width is concerned, the effect of self-interactions can be interpreted as a scaling transformation of the free propagation by a factor depending on the matter-wave flux \mathcal{F} [See Eq. (A15)]. Both approaches are relevant to study interaction effects on the stability of atomic sensors resting on Bloch oscillations [54], on the sample propagation in coherent interferometers [55]. An interesting continuation of this work would be to develop a nonlinear ABCD matrix analysis beyond the aberrationless approximation.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors acknowledge enlightening discussions with Yann Le Coq on the nonlinear paraxial equation for matter waves. François Impens thanks Nicim Zagury and Luiz Davidovich for their hospitality. This work was supported by DGA (Contract No 0860003) and by CNRS. Our research teams in SYRTE and Laboratoire de Physique des Lasers are members of IFRAF(www.ifraf.org).

APPENDIX A: THE METHOD OF THE NON-LINEAR RADIUS OF CURVATURE.

This method addresses the paraxial propagation of a monochromatic and cylindrical matter-wave beam. It relies on the introduction of an effective complex radius of curvature [23, 26], which evolution is especially simple, even for a self-interacting beam. It has been applied successfully by Bélanger and Paré [24] to describe self focusing phenomena of cylindrical optical beams propagating in the paraxial approximation, and it works equally well for matter waves propagating in the same regime. This is typically the case for an atom laser beam falling into the gravity field, for which the transverse momentum components become negligible compared to the vertical momentum after sufficient time [18].

We consider a mono-energetic wave-packet propagating in the paraxial regime, and evolving in the sum of a longitudinal potential $V_{//}(z)$ and a transverse one $V_{\perp}(x, y, z)$, which may also vary slowly with the longitudinal coordinate z . This section begins with a brief reminder on the paraxial equation for matter waves [33], and on its spherical-wave solutions in the linear case [23]. It is remarkable that such solutions can be extended to the nonlinear propagation [23], at the cost of certain approximations, and thanks to the introduction of a generalized radius of curvature depending on the coupling strength. Our treatment of the nonlinear matter wave propagation follows step by step the approach of Bélanger and Paré for optical waves [24].

1. The Paraxial Equation for Matter Waves.

Our derivation of the nonlinear paraxial wave-equation follows the treatment done in [33]. The wave-function is factorized into a transverse and longitudinal component:

$$\psi(x, y, z) = \psi_{\perp}(x, y, z) \psi_{//}(z)$$

The longitudinal component obeys a 1D time-independent Schrödinger equation,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_{//}}{\partial z^2} + V_{//} \psi_{//} = E \psi_{//},$$

which can be solved with the WKB method:

$$\psi_{//}(z) = \sqrt{\frac{m\mathcal{F}}{p(z)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{z_0}^z du p(u)\right].$$

$\mathcal{F} = \int d^2\mathbf{r}_\perp \frac{p(z)}{m} |\psi(\mathbf{r}_\perp, z)|^2$ is the atomic flux evaluated through any infinite transverse plane, the transverse wave-function ψ_\perp being normalized to unity $\int d^2\mathbf{r}_\perp |\psi_\perp(\mathbf{r}_\perp, z)|^2 = 1$. $p(z) = \sqrt{2m(E - V_{//}(z))}$ is the classical momentum along z , and z_0 is the associated classical turning point verifying $p(z_0) = 0$. The transverse wave-function ψ_\perp , assumed to depend slowly enough on the coordinate z to make its second derivative negligible, verifies the equation:

$$\left[i\hbar \frac{p(z)}{m} \partial_z + \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_x^2 + \partial_y^2) - V_\perp(x, y, z) \right] \psi_\perp(x, y, z) = 0,$$

This equation can be simplified with a variable change in which the longitudinal coordinate z is replaced by the parameter ζ :

$$\zeta(z) = \int_{z_0}^z dz \frac{m}{p(z)} \quad (\text{A1})$$

which corresponds to the time needed classically to propagate from the turning point z_0 to the coordinate z [i]. The wave equation becomes

$$\left[i\hbar \partial_\zeta + \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_x^2 + \partial_y^2) - V_\perp(x, y, \zeta) \right] \psi_\perp(x, y, \zeta) = 0, \quad (\text{A2})$$

We assume from now on that the transverse potential $V_\perp(x, y, z)$ has a cylindrical symmetry. If one sets $K = m/\hbar$ and $V_\perp(x, y, \zeta) = \frac{\hbar^2}{2} K_2(\zeta) r^2$ with $r^2 = x^2 + y^2$, Eq. (A2) has the same form as the paraxial equation for the electric field used in [24]:

$$[\partial_T^2 + 2iK\partial_\zeta - KK_2(\zeta)r^2] \psi_\perp(x, y, \zeta) = 0, \quad (\text{A3})$$

It is worth noticing that, as a consequence of our variable change, the derivative with respect to the longitudinal coordinate z has been replaced by a time derivative with respect to ζ .

2. Spherical Wave solutions to the linear equation.

One looks for solutions of Eq. (A3) of the kind:

$$\psi_\perp(x, y, \zeta) = A(\zeta) \exp \left[i \frac{K}{2q(\zeta)} r^2 \right] \quad (\text{A4})$$

with again $K = m/\hbar$. Such function is a solution if and only if the parameter $q(\zeta)$ - called complex radius of curvature, and homogenous to a time for matter waves - satisfies the following equation:

$$\frac{q' - 1}{q^2} - \frac{K_2(\zeta)}{K} = 0 \quad (\text{A5})$$

and if the amplitude $A(\zeta)$ verifies:

$$\frac{A'}{A} + \frac{1}{q} = 0 \quad (\text{A6})$$

The prime stands for the derivative with respect to ζ . In the absence of the transverse potential, i.e. $V_\perp(x, y, \zeta) = 0$, an obvious evolution is obtained with $q(\zeta) = \zeta$.

These equations imply a relation between the amplitude and width of the wave-function. We adopt the usual decomposition for the complex radius of curvature along its imaginary and complex part:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} + \frac{2i}{Kw^2}$$

[i] Indeed, this parameter appear as proportional to the proper time experienced by the atom on the classical trajectory determined by $p(z)$ [56].

Assuming that $K_2(\zeta)$ is real, and combining the imaginary part of Eq. (A5) with the real part of Eq. (A6), one obtains:

$$|A(\zeta)|^2 = |A_0|^2 \frac{w_0^2}{w^2(\zeta)}$$

This relation reflects the conservation of the atomic flux \mathcal{F} along the propagation. With our choice of normalization, the parameter $|A|^2$ is given by:

$$|A|^2 = \frac{2}{\pi w^2} \quad (\text{A7})$$

3. Spherical Wave solutions to the nonlinear equation.

With several approximations, it is possible to find similar solutions in the interacting case. Atomic interactions are described by the mean-field potential

$$V_i(x, y, \zeta) = g_I^0 |\psi_{//}(z)|^2 |\psi_{\perp}(x, y, \zeta)|^2 \quad \text{with} \quad g_I^0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$

which intervenes in the time-independent equation verified by ψ . This induces the following transverse potential

$$V_{\perp}(x, y, \zeta) = g_I^0 |\psi_{//}(\zeta)|^2 (|\psi_{\perp}(x, y, \zeta)|^2 - |\psi_{\perp}(0, 0, \zeta)|^2)$$

in the paraxial equation verified by ψ_{\perp} . In the considered example, this potential receives no other contribution. The subsequent analysis requires three important approximations. First, it uses the ‘‘aberrationless approximation’’, which assumes that the wave-function follows the Gaussian profile (A4) in spite of the non-linearity. Second, it assumes that the transverse mean-field potential is well-described by a second order expansion,

$$V_{\perp}(x, y, \zeta) \simeq -2g_I^0 |\psi_{//}(\zeta)|^2 \frac{|A(\zeta)|^2}{w^2(\zeta)} r^2 \quad (\text{A8})$$

The term $G(\zeta) = g_I^0 |\psi_{//}(\zeta)|^2$ can be seen as the atom-optical equivalent of a third-order non-linear permittivity. Third, it neglects the dependence on $G(\zeta)$ towards the altitude, which is a valid approach if the linear density $n_{1D} = m\mathcal{F}/p(z)$ is a constant [i]. We assume from now on that the atomic flux \mathcal{F} is constant and that the average longitudinal momentum $p(z) = \sqrt{2m(E - V_{//}(z))} \simeq p_{0//}$ varies very slowly with z . The parameter ζ can then be expressed simply as $\zeta = m(z - z_0)/p_{0//}$. Eq. (A8) and the normalization of ψ_{\perp} [Eq. (A7)] give readily:

$$\frac{K_2(\zeta)}{K} = \frac{-4g_I^0 \mathcal{F}}{\pi p_{0//} w^4(\zeta)}$$

Eq. (A5) can then be recast as:

$$\frac{q' - 1}{q^2} + \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_c} \left(\frac{4}{K^2 w^4(\zeta)} \right) = 0$$

The quantity \mathcal{F}_c , called critical flux, reads $\mathcal{F}_c = \pi p_{0//} \hbar^2 / (g_I^0 m^2)$. The last equation may be split into its real and imaginary part along:

$$\left(\frac{1}{R} \right)' + \frac{1}{R^2} - \sigma \left(\frac{2}{K w^2} \right)^2 = 0 \quad (\text{A9})$$

and

$$\left(\frac{1}{K w^2} \right)' + 2 \left(\frac{1}{R} \right) \left(\frac{2}{K w^2} \right) = 0 \quad (\text{A10})$$

[i] This approximation is indeed implicit in the treatment of B elanger and Par e [24], since it is necessary to obtain the nonlinear paraxial wave-equation which is the starting point of their analysis.

where we have introduced the dimensionless parameter $\sigma = 1 + \mathcal{F}/\mathcal{F}_c$. This system can be uncoupled thanks to the following trick: Eq. (A10) is multiplied by $i\sqrt{\sigma}$ and added to Eq. (A9). One obtains:

$$\left(\frac{1}{R}\right)' + i\sqrt{\sigma}\left(\frac{2}{Kw^2}\right)' + \frac{1}{R^2} + \frac{2i\sqrt{\sigma}}{R}\left(\frac{2}{Kw^2}\right) - \sigma\left(\frac{2}{Kw^2}\right)^2 = 0 \quad (\text{A11})$$

This equation can be simply interpreted as

$$q'_{NL} - 1 = 0 \quad (\text{A12})$$

with the generalized complex radius of curvature:

$$q_{NL} = \frac{1}{R} + \frac{2\sqrt{\sigma}i}{Kw^2} \quad (\text{A13})$$

Its very simple evolution

$$q_{NL}(z) = q_{NL}(z_0) + \frac{m(z - z_0)}{p_{0//}} \quad (\text{A14})$$

gives readily the real radius of curvature $R(z)$ and the width $w(z)$ for any altitude z . One thus has, as in the linear case, a simple spherical-wave solution (A4). Indeed, this method allows one to approximate very efficiently the nonlinear propagation of a wave-function of initial Gaussian profile. Consider a Gaussian atomic beam of width $w(z_0) = w_0$ at the waist ($R(z_0) = +\infty$) situated at the position z_0 on the propagation axis. Eqs. (A13) and (A14) show that the beam width follows:

$$w(z) = \sqrt{w_0^2 + \frac{\hbar^2}{w_0^2 p_{0//}^2} \sigma (z - z_0)^2} \quad (\text{A15})$$

The width of a self-interacting atomic beam evolves thus as an interaction-free beam in which the propagation length from the waist is multiplied by a factor $\sqrt{\sigma}$. As far as the paraxial beam width evolution is concerned, self-interaction effects thus operate as a scaling transformation of the free propagation with a factor $\sqrt{\sigma}$. The quantity $\sqrt{\sigma} - 1$ has the same sign as the diffusion length a , so one checks that Eq. (A15) leads consistently to a faster expansion for repulsive interactions and to a slower expansion for attractive ones. As in optics, this treatment can thus be applied to discuss the self focusing for matter waves. It is, however, important to keep in mind its validity domain and the several hypothesis required - constant longitudinal velocity, cylindrical symmetry and paraxial propagation -.

APPENDIX B: SECOND-ORDER COMPUTATION OF THE NONLINEAR ABCD MATRIX.

1. Expression of the second-order matrix.

In this Appendix, we discuss the nonlinear corrections to the $ABCD$ matrix associated with the second-order of the Magnus expansion $\Omega_2(t, t_0)$, which reads:

$$\Omega_2(t, t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 [N(t_1), N(t_2)] = \begin{pmatrix} S(t, t_0) & 0 \\ 0 & -S(t, t_0) \end{pmatrix} \quad S(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\gamma(t_1) - \gamma(t_2)) \quad (\text{B1})$$

This term, arising from the non-commutativity between the Hamiltonians taken at different times, naturally depends on the ordering chosen for the successive lenses. Because of the cloud expansion, lenses are ordered from the most divergent to the less divergent. To discuss the effect of this second-order contribution on the wave-function, it is useful to compute the exponential:

$$\exp[\Omega^{(2)}(t, t_0)] = \begin{pmatrix} e^{S(t, t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-S(t, t_0)} \end{pmatrix} \quad (\text{B2})$$

The action of such matrix onto the position-momentum width vector (X, Y) , defined in Sec. III A, would operate a squeezing between position and momentum. This squeezing is indeed a consequence of our aberrationless approximation, in which the propagation leaves the phase-space volume invariant: the expansion of the cloud size must be, in our treatment, compensated by a reduced momentum dispersion. One finds consistently that the diagonal

matrix elements $S_{xx,yy,zz}(t)$, involved in (B2), are positive, which results from the decrease of the matrix elements $\gamma_{xx,yy,zz}(t)$ with time.

The $ABCD$ matrix obtained from a second-order approximation of the Magnus expansion reads:

$$M_2^{(1)}(t, t_0, X_0) \simeq \otimes_{i=x,y,z} \begin{pmatrix} \cosh K_{ii}(t, t_0) + S_{ii}(t, t_0) \frac{\sinh K_{ii}(t, t_0)}{K_{ii}(t, t_0)} & (t - t_0) \frac{\sinh K_{ii}(t, t_0)}{K_{ii}(t, t_0)} \\ \langle \gamma \rangle \frac{\sinh K_{ii}(t, t_0)}{K_{ii}(t, t_0)} & \cosh K_{ii}(t, t_0) - S_{ii}(t, t_0) \frac{\sinh K_{ii}(t, t_0)}{K_{ii}(t, t_0)} \end{pmatrix} \quad (\text{B3})$$

We have introduced the functions $K_{ii}(t, t_0) = \sqrt{S_{ii}^2(t, t_0) + \langle \gamma_{ii} \rangle (t - t_0)^2}$. Again, an analytic expression of $\langle \gamma_{ii} \rangle$ and $S_{ii}(t, t_0)$ can be found for cigar-shaped condensates in Eq. (C1) and Eq. (C2) of Appendix C. Higher-order contributions to the $ABCD$ matrix (20) can be computed along similar guidelines, but they involve various integrations which need to be performed numerically.

2. Comparison with the first-order matrix.

Let us expand the matrix (B7) in the short duration limit. We consider an atomic cloud initially described by a Gaussian wave-function (10) of spherical symmetry i.e. $w_x(t_0) = w_y(t_0) = w_z(t_0) = w_0$. Such assumption does not change the nature of the discussion, but it considerably simplifies the algebra: the 3×3 matrices $\gamma(t)$, $S(t)$ and $K(t)$ are then proportional to the matrix identity $I_{3 \times 3}$ and can be identified to scalars. $\gamma(t)$ can be expressed as a function of two time scales involving the sample radius w_0 , the scattering length a and fundamental constants:

$$\gamma(t) = \tau_2^{-2} \left(1 + \frac{(t - t_0)^2}{\tau_1^2} \right)^{-5/2} \quad \tau_1 = \frac{mw_0^2}{\hbar} \quad \tau_2 = \sqrt{\frac{w_0}{4\pi a}} \tau_1 \quad (\text{B4})$$

The quantity $S(t)$ (B1) can be expressed thanks to a second-order Taylor expansion of $\gamma(t)$. Setting $\tau = t - t_0$ and noticing that $\gamma'(t_0) = 0$, one obtains:

$$S(t) = -\frac{5}{6} \frac{\tau^4}{\tau_1^2 \tau_2^2} + O(\tau^6) \quad (\text{B5})$$

which yields for the quantity $K(t)$:

$$K(t) = \sqrt{\langle \gamma \rangle} \tau \left(1 + \frac{25}{72} \frac{\tau^6}{\tau_1^4 \tau_2^2} \right) + O(\tau^8) \quad (\text{B6})$$

Using this expansion and that of $x \rightarrow \sinh x/x$, one can express the second-order matrix $M_2^{(1)}(\tau, X_0)$ as:

$$M_2^{(1)}(\tau, X_0) = M_1^{(1)}(\tau, X_0) + \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \frac{\tau^4}{\tau_1^2 \tau_2^2} \frac{\sinh(\langle \gamma \rangle^{1/2} \tau)}{\langle \gamma \rangle^{1/2} \tau} & \frac{25}{72} \frac{\tau^6}{\tau_1^4 \tau_2^2} \left[\cosh(\langle \gamma \rangle^{1/2} \tau) - \frac{\sinh(\langle \gamma \rangle^{1/2} \tau)}{\langle \gamma \rangle^{1/2} \tau} \right] \\ \frac{25}{72} \frac{\tau^6}{\tau_1^4 \tau_2^2} \left[\cosh(\langle \gamma \rangle^{1/2} \tau) - \frac{\sinh(\langle \gamma \rangle^{1/2} \tau)}{\langle \gamma \rangle^{1/2} \tau} \right] & \frac{5}{6} \frac{\tau^4}{\tau_1^2 \tau_2^2} \frac{\sinh(\langle \gamma \rangle^{1/2} \tau)}{\langle \gamma \rangle^{1/2} \tau} \end{pmatrix} + O(\tau^8) \quad (\text{B7})$$

This expansion shows that the first-order term is a valid approximation as long as:

$$\tau \ll \tau_c = \left(\frac{w_0}{4\pi a} \right)^{1/6} \frac{mw_0^2}{\hbar} \quad (\text{B8})$$

Considering for an instance an initial cloud size of $w_0 = 25 \mu\text{m}$ and the ^{87}Rb scattering length $a = 5,7 \text{nm}$, one obtains $\tau_1 = 0,14 \text{s}$, $\tau_2 = 1,63 \text{s}$, and $\tau_c = 0,31 \text{s}$. Note that the relevant small parameter ϵ , weighting the relative correction brought by the second-order term, decreases as $\epsilon = (\tau/\tau_c)^4$ when $\tau/\tau_c \rightarrow 0$.

APPENDIX C: ABCD MATRIX ELEMENTS FOR THE CIGAR-SHAPED CONDENSATE

We evaluate in this appendix various primitives necessary to explicit the non-linear $ABCD$ matrix to first and second order in the Magnus expansion given in Eq. (22) and Eq. (B7). We consider a cigar-shaped cylindrical condensate with a long vertical extension: $w_x = w_y = w_r \ll w_z$. We remind the linear evolution of the width given by Eq. (11) i.e. $w_{r,z}(t) = \sqrt{w_{r,z}^2 + \Delta v_{r,z}^2 (t - t_0)^2}$. We shall use the short-hand notation $w_{r,z} = w_{r,z}(t_0)$ and $\Delta v_{r,z} = \hbar/(mw_{r,z}(t_0))$.

1. Average quadratic coefficient.

We seek to evaluate:

$$\gamma_{rr}(t) = \frac{g_I}{(2\pi)^{3/2} m w_z(t) w_r(t)^4} \quad \gamma_{zz}(t) = \frac{g_I}{(2\pi)^{3/2} m w_z(t)^3 w_r(t)^2}$$

We note $\gamma_0 = g_I / [(2\pi)^{3/2} m]$ and $\Lambda(t)$ the function:

$$\Lambda(t) = \frac{\sqrt{\Delta v_r^2 w_z^2 - w_r^2 \Delta v_z^2} (t - t_0)}{w_r w_z(t)}$$

The elements of the matrix $\bar{\gamma}$ are readily obtained:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{rr} &= \gamma_0 \left[\frac{\Delta v_r^2 w_z(t)}{2w_r^2(\Delta v_r^2 w_z^2 - w_r^2 \Delta v_z^2) w_r^2(t)} + \frac{(\Delta v_r^2 w_z^2 - 2w_r^2 \Delta v_z^2) \text{Arctan } \Lambda(t)}{2w_r^3(\Delta v_r^2 w_z^2 - w_r^2 \Delta v_z^2)^{3/2} (t - t_0)} \right] \\ \bar{\gamma}_{zz} &= \gamma_0 \left[\frac{\Delta v_z^2}{w_z^2(\Delta v_z^2 w_r^2 - \Delta v_r^2 w_z^2) w_z(t)} + \frac{\Delta v_r^2 \text{Arctan } \Lambda(t)}{w_r(\Delta v_r^2 w_z^2 - w_r^2 \Delta v_z^2)^{3/2} (t - t_0)} \right] \end{aligned} \quad (\text{C1})$$

2. Second-order Magnus term.

We evaluate here the matrix $S(t)$. Its computation involves tedious algebra:

$$\begin{aligned} S_{rr}(t, t_0) &= -\frac{\gamma_0}{4w_r^3 \Delta v_r (\Delta v_r^2 w_z^2 - w_r^2 \Delta v_z^2)^{3/2} w_r^2(t)} \times \left[\Delta v_r(t - t_0) (2w_r^2 \Delta v_z^2 - \Delta v_r^2 w_z^2) w_r^2(t) \text{Arctan } \Lambda(t) \right. \\ &\quad - w_r \Delta v_r \sqrt{\Delta v_r^2 w_z^2 - w_r^2 \Delta v_z^2} (2w_r^2 + \Delta v_r^2 (t - t_0)^2) w_r(t) - 2w_r^3 \Delta v_z^2 w_r^2(t) \log \left(\frac{w_r(t)}{w_r} \right) \\ &\quad \left. + w_r^3 \Delta v_z^2 w_r^2(t) \log \left(\frac{w_r^2 \Delta v_z^2 - 2\Delta v_r^2 w_z^2 + 2\Delta v_r \sqrt{\Delta v_r^2 w_z^2 - w_r^2 \Delta v_z^2} w_z(t) - \Delta v_r^2 \Delta v_z^2 (t - t_0)^2}{w_r^2 \Delta v_z^2 - 2\Delta v_r^2 w_z^2 + 2\Delta v_r \sqrt{\Delta v_r^2 w_z^2 - w_r^2 \Delta v_z^2} w_z} \right) \right] \\ S_{zz}(t, t_0) &= \frac{\gamma_0 w_z(t)}{w_z^2 (w_r^2 \Delta v_z^2 - \Delta v_r^2 w_z^2)} + \frac{\gamma_0 \Delta v_r^2 (t - t_0) \text{Arctan } \Lambda(t)}{2w_r (\Delta v_r^2 w_z^2 - w_r^2 \Delta v_z^2)^{3/2}} + \frac{\gamma_0 \Delta v_z^2 (t - t_0)^2}{2w_z^2 (\Delta v_r^2 w_z^2 - w_r^2 \Delta v_z^2) w_z(t)} \\ &\quad + \frac{\gamma_0 \Delta v_r \text{Arctanh} \left(\frac{\Delta v_r (t - t_0)}{w_r \Lambda(t)} \right)}{(\Delta v_r^2 w_z^2 - w_r^2 \Delta v_z^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

APPENDIX D: RELATIVISTIC HAMILTONIAN AND ABCD LAW IN (4+1)D

The purpose of this appendix is to give a short introduction to generalizations of the ABCD law for relativistic particles [56]. A relativistic approach has the major advantage of providing a common framework for massive particles like atoms and massless ones like photons. A second step in this process is to introduce mass as a quantum observable conjugate of proper time. Atom optics then becomes identical to photon optics in an extended (4+1)D space-time with 4 space dimensions. The optical path along the fourth dimension replaces the usual action phase factor in ordinary space-time. Finally, within the approximation of a slowly varying phase and amplitude of the field, the dispersion surface can be locally approximated by a tangent paraboloid and the dynamics is that of a non-relativistic massive particle in all cases. The corresponding propagator gives the generalized ABCD law. The starting point is the classical relation between the 4-momentum p_μ , the metric tensor $g^{\mu\nu}$ (with signature $+- --$) and the rest mass of a particle m :

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = m^2 c^2 \quad (\text{D1})$$

From this relation one can infer a Klein-Gordon equation and proceed with the various approximations to deduce a Schroedinger-like equation. This is done in [56]. Here, we shall follow a simpler track, starting with the approximations on classical formulas and turn later to quantum mechanics. From the previous formula and the relation between the covariant component $p_0 c$ (energy) and the contravariant one $p^0 c$ (relativistic mass times c^2):

$$p^0 c = g^{00} p_0 c + g^{0i} p_i c \quad (\text{D2})$$

we obtain

$$(p^0)^2 = g^{00}(m^2 c^2 - p_i f^{ij} p_j) \quad (\text{D3})$$

where

$$f^{ij} = g^{ij} - \frac{g^{0i} g^{0j}}{g^{00}} \quad (\text{D4})$$

is the 3D metric tensor.

The component $p^0 c$ is related to the relativistic mass m^* through

$$p^0 c = m^* c^2 \quad (\text{D5})$$

and can be written

$$p^0 c = \frac{m^* c^2}{2} + \frac{(m^2 c^2 - p_i f^{ij} p_j) g^{00}}{2m^*} \quad (\text{D6})$$

If $m^* c^2$ is approximated by a known prescribed function of time, this formula remains valid to second-order (parabolic approximation) since:

$$x = \frac{x_0}{2} + \frac{x^2}{2x_0} + O((x - x_0)^2)$$

and the Hamiltonian $p_0 c$ can be written as :

$$H = \frac{m^* c^2}{2g^{00}} + \frac{m^2 c^2}{2m^*} - \frac{1}{2m^*} p_i f^{ij} p_j - \frac{g^{0i}}{g^{00}} p_i c \quad (\text{D7})$$

$$i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{D8})$$

In some cases it may be more convenient to assume that the energy E is close to a known value E_0 either because energy is conserved and remains equal to its initial value or because of a slow variation of parameters. We can again make use of the identity: $E = \frac{E_0}{2} + \frac{E^2}{2E_0} + O(\varepsilon^2)$ valid to second-order in $\varepsilon = E - E_0$ with either:

$$E^2 = p_0^2 c^2 = \frac{c^2}{g^{00}} (m^2 c^2 - p_i g^{ij} p_j - 2p_0 g^{0i} p_i) \quad (\text{D9})$$

or

$$E^2 = p_0^2 c^2 = g_{00} m^2 c^4 - g_{00} c^2 p^i f_{ij} p^j \quad (\text{D10})$$

In the parabolic approximation, the Hamiltonian can then be approximated by:

$$H = \frac{E_0}{2} + \frac{m^2 c^4}{2E_0 g^{00}} - \frac{c^2}{2E_0 g^{00}} (p_i g^{ij} p_j + 2p_0 g^{0i} p_i) \quad (\text{D11})$$

$$\simeq \frac{E_0}{2} + \frac{m^2 c^4}{2E_0 g^{00}} - \frac{c^2}{2E_0 g^{00}} p_i g^{ij} p_j + \frac{g^{0i}}{g^{00}} p_i c \quad (\text{D12})$$

or by:

$$H = \frac{E_0}{2} + g_{00} \frac{m^2 c^4}{2E_0} - g_{00} c^2 \frac{p^i f_{ij} p^j}{2E_0} \quad (\text{D13})$$

This means that the usual hyperbolic dispersion curve is locally approximated by the parabola tangent to the hyperbola for the energy E_0 . This approximation scheme applies to massive as well as to massless particles (For example in the case of quasi-monochromatic light $m = 0$ and $E_0 = \hbar\omega$ [1]). The non-relativistic limit is obtained for $m^* \rightarrow m\sqrt{g^{00}}$ or $E_0 \rightarrow mc^2/\sqrt{g^{00}}$. All these forms of the Hamiltonian can be shown to be equivalent thanks to (D2).

From the above Hamiltonians we can deduce a Schrodinger-like equation:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{m^* c^2}{2g^{00}} + \frac{m^2 c^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2}{2m^*} \partial_i f^{ij} \partial_j - i\hbar c \frac{g^{0i}}{g^{00}} \partial_i \right] \varphi \quad (\text{D14})$$

which is identical to a Schroedinger equation for a non-relativistic particle of mass m^* with a shift in the rest mass. This equation can also be derived directly from Klein-Gordon equation by a procedure analogous to that of H. Feshbach and F. Villars [?] in which the rest mass is replaced by the relativistic mass. This results in the addition of small terms required by hermiticity that we shall ignore here for the sake of simplicity.

The usual Lagrangian in ordinary space-time is:

$$L = -mc\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} \quad (\text{D15})$$

where the dot stands for the time derivative. The canonical 4-momentum is:

$$p_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = mc\frac{g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}} = mcg_{\mu\nu}u^\nu \quad (\text{D16})$$

where u^ν is the normalized 4-velocity. Especially, the relativistic mass is given by:

$$m^* = \frac{mc}{\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}} = m\frac{dt}{d\tau} \quad (\text{D17})$$

where τ is the proper time.

The Euler-Lagrange equations of motion are:

$$\dot{p}_\mu = \frac{1}{2m^*}\partial_\mu g_{\lambda\nu}p^\lambda p^\nu \quad (\text{D18})$$

to be combined with equation (D16)

$$\dot{x}^\mu = \frac{1}{m^*}g^{\mu\nu}p_\nu \quad (\text{D19})$$

In (4+1) dimensions, the proper time τ is introduced as an additional space-like coordinate [?] $x^4 = -x_4 = c\tau$ and the conjugate fourth momentum component mc is simply $p^4 = -p_4 = m^*\dot{x}^4$. The Hamiltonian becomes:

$$H = \frac{m^*c^2}{2g^{00}} - \frac{1}{2m^*}p_i f^{\hat{i}\hat{j}} p_j - \frac{g^{0\hat{i}}}{g^{00}} p_i c \quad (\text{D20})$$

$$\hat{i}, \hat{j} = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{D21})$$

where we have introduced an extended metric tensor $g^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ (greek indices with a hat have integer values from 0 to 4: $\hat{\mu}, \hat{\nu} = 0, 1, 2, 3, 4$ and latin ones from 1 to 4) such that $g^{44} = -1$. Note that the components $g^{4\mu}$ could be used to represent electromagnetic interactions as in Kaluza-Klein theory.

In (4+1)D the Schroedinger equation thus becomes:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{m^*c^2}{2g^{00}} + \frac{\hbar^2}{2m^*}\partial_i f^{\hat{i}\hat{j}}\partial_j - i\hbar c\frac{g^{0\hat{i}}}{g^{00}}\partial_i \right] \varphi \quad (\text{D22})$$

corresponding to:

$$(p_{op})_{\hat{i}}\varphi = i\hbar\partial_{\hat{i}}\varphi \quad (\text{D23})$$

where the fourth component is the mass operator:

$$p_{op}^4 = m_{op}c = -(p_{op})_4 \quad (\text{D24})$$

In the weak-field approximation the space-time metric tensor takes the form

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (\text{D25})$$

where $\eta_{\mu\nu}$ is Minkowski metric tensor:

$$\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1) \quad (\text{D26})$$

and the $h_{\mu\nu}$'s are considered as first-order quantities.

In (4+1)D the Hamiltonian is:

$$H = \frac{m^*c^2}{2} (1 + h^{00}) - \frac{1}{2m^*} p_i \eta^{ij} p_j + \frac{1}{2m^*} p_i h^{ij} p_j + h^{0i} p_i c \quad (\text{D27})$$

$$\hat{i}, \hat{j} = 1, 2, 3, 4 \quad \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = (1, -1, -1, -1) \quad (\text{D28})$$

and the field equation can be written as an ordinary Schrödinger equation in flat space-time with an additional spatial dimension $c\tau$:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{m^*c^2}{2} (1 + h^{00}) \varphi - \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m^*} \partial_i h^{ij} \partial_j \varphi + i\hbar c h^{0i} \partial_i \varphi \quad (\text{D29})$$

In most cases of interest for atom interferometry, the external motion Hamiltonian can be expressed as a quadratic polynomial of both momentum and position. In this quadratic limit:

$$h^{00} = \frac{2g_i x^i}{c^2} - \frac{x^i \gamma_{ij} x^j}{c^2} \quad (\text{D30})$$

$$c h^{0i} = -f^i + \alpha_j^i x^j \quad (\text{D31})$$

$$h^{ij} = \eta^{ij} + \beta^{ij} \quad (\text{D32})$$

The (4+1)D Hamiltonian becomes:

$$\begin{aligned} H = & \frac{m^*c^2}{2} + \frac{1}{2} \vec{p}_{op} \cdot \vec{\alpha}(t) \cdot \vec{q}_{op} + \frac{1}{2m^*} \vec{p}_{op} \cdot \vec{\beta}(t) \cdot \vec{p}_{op} \\ & - \frac{1}{2} \vec{q}_{op} \cdot \vec{\delta}(t) \cdot \vec{p}_{op} - \frac{m^*}{2} \vec{q}_{op} \cdot \vec{\gamma}(t) \cdot \vec{q}_{op} \\ & + \vec{f}(t) \cdot \vec{p}_{op} - m^* \vec{g}(t) \cdot \vec{q}_{op} \end{aligned} \quad (\text{D33})$$

where vectors and tensors are now defined in a four dimensional space $\vec{q} = (x, y, z, c\tau)$, $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z, mc)$ with $\beta_{44} = 1$.

It is convenient to introduce a new notation:

$$\underline{\vec{\beta}}(t) = \vec{\beta}(t)/m^*, \underline{\vec{\gamma}}(t) = m^* \vec{\gamma}(t), \underline{\vec{g}}(t) = m^* \vec{g}(t) \quad (\text{D34})$$

with which the wave equation now reads:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & \left[\frac{m^*c^2}{2} + \frac{1}{2} \vec{p}_{op} \cdot \vec{\alpha}(t) \cdot \vec{q}_{op} + \frac{1}{2} \vec{p}_{op} \cdot \underline{\vec{\beta}}(t) \cdot \vec{p}_{op} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \vec{q}_{op} \cdot \vec{\delta}(t) \cdot \vec{p}_{op} - \frac{1}{2} \vec{q}_{op} \cdot \underline{\vec{\gamma}}(t) \cdot \vec{q}_{op} \right. \\ & \left. + \vec{f}(t) \cdot \vec{p}_{op} - \underline{\vec{g}}(t) \cdot \vec{q}_{op} \right] \varphi \end{aligned} \quad (\text{D35})$$

$$+ \vec{f}(t) \cdot \vec{p}_{op} - \underline{\vec{g}}(t) \cdot \vec{q}_{op} \varphi \quad (\text{D36})$$

The propagator of this equation with four space dimensions can be derived as in [25] for three space dimensions:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(q, q', t, t') = & \left(\frac{1}{2\pi i\hbar} \right)^2 |\det \underline{B}|^{-1/2} \\ & \exp \left[\left(\frac{i}{2\hbar} \right) \left[\tilde{q} D \underline{B}^{-1} q - 2\tilde{q} \underline{B}^{-1} q' + \tilde{q}' \underline{B}^{-1} A q' \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{D37})$$

with $\tilde{q} = (x, y, z, c\tau)$, $\tilde{p} = (p_x, p_y, p_z, mc)$ and this leads to a new the ABCD theorem which gives the propagation law

for Hermite-Gauss wave packets:

$$wave_packet(q, t) = \exp \left[\frac{i\tilde{p}_c(t)(q - q_c(t))}{\hbar} \right] F(q - q_c(t), p_c(t), X(t), Y(t)) \quad (D38)$$

where the phase factor usually associated with the classical action has disappeared and is replaced by the term coming from the motion of the wave packet in the fourth space coordinate $c\tau$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' \left(\frac{1}{2\pi i\hbar \underline{B}_{44}} \right)^{1/2} \exp \left[(i/2\hbar) \underline{B}_{44}^{-1} c^2 (\tau - \tau')^2 \right] \\ & \exp \left[imc^2 (\tau' - \tau_c(t_0)) / \hbar \right] F(\tau' - \tau_c(t_0), X_0, Y_0) \\ = & \exp \left[\frac{imc^2}{\hbar} (\tau - \tau_c(t)) \right] F(\tau - \tau_c(t), X_\tau(t), Y_\tau(t)) \end{aligned} \quad (D39)$$

where F is the generating function of Hermite-Gauss wave packets [25]. The center of the wave packet follows a classical law:

$$q_c(t) = \underline{A}(t, t_0) q_c(t_0) + \underline{B}(t, t_0) p_c(t_0) + \underline{\xi}(t, t_0) \quad (D40)$$

$$p_c(t) = \underline{C}(t, t_0) q_c(t_0) + \underline{D}(t, t_0) p_c(t_0) + \underline{\phi}(t, t_0) \quad (D41)$$

including the classical relation between proper time and time coordinate (obtained by integration of D17):

$$\tau_c(t) = \tau_c(t_0) + \underline{B}_{44}(t, t_0) m = \int_{t_0}^t \frac{m}{m^*(t')} dt'$$

We know from Ehrenfest theorem, that the motion of the wave packet center is also obtained in this case from classical equations. The equations satisfied by the $ABCD$ matrices can be derived either from the Hamilton-Jacobi equation (see [35]) or from Hamilton's equations. For the previous Hamiltonian, Hamilton's equations can be written as an equation for the two-component vector:

$$\underline{\chi} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad (D42)$$

as:

$$\frac{d\underline{\chi}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dH}{dp} \\ -\frac{dH}{dq} \end{pmatrix} = \underline{\Gamma}(t) \underline{\chi} + \underline{\Phi}(t) \quad (D43)$$

where

$$\underline{\Gamma}(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix} \quad (D44)$$

is a time-dependent 8x8 matrix and where:

$$\underline{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} \quad (D45)$$

The integral of Hamilton's equation can thus be written as:

$$\underline{\chi}(t) = \begin{pmatrix} \underline{A}(t, t_0) & \underline{B}(t, t_0) \\ \underline{C}(t, t_0) & \underline{D}(t, t_0) \end{pmatrix} \underline{\chi}(t_0) + \begin{pmatrix} \underline{\xi}(t, t_0) \\ \underline{\phi}(t, t_0) \end{pmatrix} \quad (D46)$$

where

$$\underline{\mathcal{M}}(t, t_0) = \begin{pmatrix} \underline{A}(t, t_0) & \underline{B}(t, t_0) \\ \underline{C}(t, t_0) & \underline{D}(t, t_0) \end{pmatrix} = \mathcal{T} \exp \left[\int_{t_0}^t \begin{pmatrix} \alpha(t') & \beta(t') \\ \gamma(t') & \delta(t') \end{pmatrix} dt' \right] \quad (D47)$$

where \mathcal{T} is a time-ordering operator and where:

$$\begin{pmatrix} \xi(t, t_0) \\ \underline{\phi}(t, t_0) \end{pmatrix} = \int_{t_0}^t \underline{\mathcal{M}}(t, t') \underline{\Phi}(t') dt' \quad (\text{D48})$$

-
- [1] C. J. Bordé, in *Fundamental Systems in Quantum Optics*, Les Houches Lectures Session LIII (Elsevier, 1991).
- [2] G. Lenz, P. Meystre, and E. M. Wright, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3271 (1993).
- [3] W. Zhang and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **49**, 3799 (1994).
- [4] P. Berman, *Atom Interferometry* (Academic Press, 1997).
- [5] K. V. Krutitsky, F. Burchbacher, and J. Audretsch, *Phys. Rev. A* **59**, 1517 (1999); K. V. Krutitsky, K.-P. Marzlin, and J. Audretsch, *Phys. Rev. A* **65**, 063609 (2002).
- [6] L. Deng *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5407 (1999).
- [7] G.-B. Jo *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 240406 (2007).
- [8] I. Josopait *et al.*, *Eur. Phys. J. D* **22**, 385 (2003).
- [9] L. Deng *et al.*, *Nature* **398**, 218 (1999).
- [10] S. Burger *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5198 (1999).
- [11] J. Denschlag *et al.*, *Science* **287**, 97 (2000).
- [12] L. Khaykovich *et al.*, *Science* **17**, 1290 (2002).
- [13] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, *Nature* **417** (2002).
- [14] M. R. Matthews *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999).
- [15] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806 (2000).
- [16] S. Inouye *et al.*, *Science* **285**, 571 (1999).
- [17] S. Inouye *et al.*, *Nature* **402**, 641 (December 1999).
- [18] Y. LeCoq *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 170403 (2001).
- [19] T. Busch, M. Köhl, T. Esslinger, and K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **65**, 043615 (2002).
- [20] Y. Castin and R. Dum, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).
- [21] H. Michinel, *Pure Appl. Opt.* 701-708 **4**, 701 (1995).
- [22] V. M. Perez-Garcia, P. J. Torres, and G. Montesinos, *SIAM J. Appl. Math.* **67**, 990 (2007).
- [23] A. Yariv and P. Yeh, *Optics Communications* **27**, 295 (1978).
- [24] P.-A. Bélanger and C. Paré, *Applied Optics* **22**, 1293 (1983).
- [25] C. J. Bordé, *Metrologia* **39**, 435 (2001).
- [26] H. Kogelnik, *Bell System Technical Journal* **44**, 455 (1965).
- [27] B. K. Garside, *IEEE Journal of Quantum Electronics* **4**, 940 (1968).
- [28] A. Le Floch, R. Le Naour, J. M. Lenormand, and J. P. Taché, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 544 (1980).
- [29] F. Bretenaker, A. Le Floch, and J. P. Taché, *Phys. Rev. A* **41**, 3792 (1990).
- [30] F. Bretenaker and A. Le Floch, *Phys. Rev. A* **42**, 5561 (1990).
- [31] V. Magni, G. Cerullo, and S. D. Silvestri, *Opt. Commun.* **96**, 348 (1993).
- [32] J.-F. Riou *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 070404 (2006).
- [33] J.-F. Riou *et al.*, *Phys. Rev. A* **77**, 033630 (2008).
- [34] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Advanced Book Program, 1995).
- [35] C. J. Bordé, *C. R. Acad. Sci. Paris* **4**, 509 (2001).
- [36] C. J. Bordé, J.-C. Houard, and A. Karasiewicz, in *Gyros, Clocks and Interferometers: Testing relativistic gravity in space* (Springer-Verlag, 2000), e-print arXiv:gr-qc/0008033.
- [37] C. J. Bordé, *General Relativity and Gravitation* **36**, 475 (2004).
- [38] F. Impens, *Phys. Rev. A* **77**, 013619 (2008).
- [39] W. Magnus, *Comm. Pure Appl. Math* **7**, 649 (1954).
- [40] P. Pechukas and J. C. Light, *J. Chem. Phys.* **44**, 3897 (1966).
- [41] R. A. Marcus, *J. Chem. Phys.* **52**, 4803 (1970).
- [42] W. A. Cady, *J. Chem. Phys.* **60**, 3318 (1974).
- [43] J. S. Waugh, *J. Magn. Reson.* **50**, 30 (1982).
- [44] I. Schek, J. Jortner, and M. L. Sage, *Chem. Phys.* **59**, 11 (1981).
- [45] J. Ishikawa, F. Riehle, J. Helmcke, and C. J. Bordé, *Phys. Rev. A* **49**, 4794 (1994).
- [46] F. Impens, P. Bouyer, A. Landragin, and C. J. Bordé, *Journ. Phys. IV* **135**, 311 (2006).
- [47] F. Impens, P. Bouyer, and C. J. Bordé, *Appl. Phys. B* **84**, 603 (2006).
- [48] G. Whyte, P. Öhberg, and J. Courtial, *Phys. Rev. A* **69**, 053610 (2004).
- [49] D. R. Murray and P. Öhberg, *JOSA B:Optical Physics* **38**, 1227 (2005).
- [50] M. Weitz, B. C. Young, and S. Chu, *Phys. Rev. A* **50**, 2438 (1994).
- [51] C. Pare and P. Belanger, *Optical and Quantum Electronics* **24**, S1051 (1992).
- [52] L. P. Pitaevskii and A. Rosch, *Phys. Rev. A* **55**, R853 (1997).
- [53] F. Impens, to be published (2008).

- [54] P. Cladé *et al.*, Eur. Phys. Lett. **71**, 730 (2005), e-print arXiv:physics/0506225.
- [55] P. Bouyer and M.A. Kasevich, Phys. Rev. A **56**, R1083 (1997); S. Gupta *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 140401 (2002); Y.-J. Wang *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94**, 090405 (2005); Y. LeCoq *et al.*, Appl. Phys. B: Laser and Optics **84**, 627 (2006).
- [56] Ch. J. Bordé, Eur. Phys. Jour. Spec. Top. **48**, 315 (2008); Ch. J. Bordé, in *Proc. of the Enrico Fermi International School of Physics*, Course CLXVIII (IOS Press, 2007)

Outils théoriques pour la propagation de lasers à atomes.

Resumé.

Nous présentons un modèle théorique pour la propagation de lasers à atomes sans self-interactions. Nous partons d'une équation intégrale de la propagation tout à fait générale, et nous utilisons les mêmes approximations qu'en optique des photons pour obtenir des outils adaptés au calcul de la propagation du laser à atomes. Nous discutons les approximations qui permettent soit de réduire l'équation à une intégrale de Fresnel-Kirchoff calculée par la méthode de la phase stationnaire, soit à l'équation iconale. Dans l'approximation paraxiale, nous introduisons également les matrices ABCD et le facteur de qualité. Nous appliquons ces outils à un exemple concret : l'expérience de Riou et al.[1].

Theoretical tools for atom laser beam propagation

J.-F. Riou*,^{1,†} Y. Le Coq,² F. Impens,² W. Guerin[‡],¹ C. J. Bordé,² A. Aspect,¹ and P. Bouyer¹

¹*Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, CNRS et Université Paris Sud 11
Campus Polytechnique, RD 128, 91127 Palaiseau, France*

²*SYRTE, Observatoire de Paris, CNRS, UPMC
61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France*

(Dated: February 17, 2008)

We present a theoretical model for the propagation of non self-interacting atom laser beams. We start from a general propagation integral equation, and we use the same approximations as in photon optics to derive tools to calculate the atom laser beam propagation. We discuss the approximations that allow to reduce the general equation whether to a Fresnel-Kirchhoff integral calculated by using the stationary phase method, or to the eikonal. Within the paraxial approximation, we also introduce the *ABCD* matrices formalism and the beam quality factor. As an example, we apply these tools to analyse the recent experiment by Riou et al. [Phys. Rev. Lett. **96**, 070404 (2006)].

PACS numbers: 03.75.Pp, 39.20.+q, 42.60.Jf, 41.85.Ew

Introduction

Matter wave optics, where a beam of neutral atoms is considered for its wave-like behavior, is a domain of considerable studies, with many applications, ranging from atom lithography to atomic clocks and atom interferometer [66]. The experimental realization of coherent matter-wave - so called atom lasers [1–7] - which followed the observation of Bose-Einstein condensation put a new perspective to the field by providing the atomic analogue to photonic laser beams.

Performant theoretical tools for characterizing the propagation properties of matter waves and their manipulation by atom-optics elements are of prime interest for high accuracy application, as soon as one needs to go beyond the proof-of-principle experiment. In the scope of partially coherent atom-interferometry, and for relatively simple (*i.e.* homogenous) external potentials, many theoretical works has been developed [8–11] and applied successfully [12, 13]. All these tools essentially address the propagation of an atomic wavepacket. For fully coherent atom-laser beams, most theoretical investigations focused on the dynamics of the outcoupling [14–27] and the quantum statistical properties of the output beam [28–35]. Some works specifically addressed the spatial shape of the atom laser beam [36, 37], but rely essentially on numerical simulations or neglect the influence of dimensionality and potential inhomogeneity. For realistic experimental conditions, the 3D external potential is inhomogeneous, and full numerical simulation become particularly cumbersome. One thus needs a simpli-

fied analytical theoretical framework to handle the beam propagation.

Following our previous work [38, 39], we present here in detail a simple but general framework for the propagation of atom laser beams in inhomogeneous media. We show how several theoretical tools from classical optics can be adapted for coherent atom-optics. We address three major formalisms used in optics : the eikonal approximation, the Fresnel-Kirchhoff integral, and the *ABCD* matrices formalism in the paraxial approximation.

The first part of the paper gives an overview of these theoretical tools for atom laser beam propagation. In the first section, we introduce the integral equation of the propagation and its time-independent version. We present in the second section different ways of dealing with the time-independent propagation of the matter wave. First, the time-independent propagator is computed using the stationary phase approximation. Then, we show that two approximations -the eikonal and the paraxial approximation-, which apply in different physical contexts, can provide a more tractable treatment than the general integral equation. In the second part, we show in practice how to use these methods in the experimental case of [38] with a rubidium radiofrequency-coupled atom laser. Some of these methods have recently been used also for a metastable helium atom laser [40] as well as for a Raman-coupled atom laser [41].

I. ANALYTICAL PROPAGATION METHODS FOR MATTER WAVES

A. Matter wave weakly outcoupled from a source

1. Propagation equation

We consider a matter wave $\psi_\ell(\mathbf{r}, t)$ outcoupled from a source $\psi_s(\mathbf{r}, t)$. We note $V_i(\mathbf{r}, t)$ ($i = \{\ell, s\}$), the external potential in which each of them evolves. We also introduce a coupling term $W_{ij}(\mathbf{r}, t)$ between ψ_i and ψ_j . In

*Present address: Physics Department of Penn State University, 104 Davey Laboratory, Mailbox 002, University Park, PA 16802, U.S.A.

‡Present address: Institut Non Linéaire de Nice, 1361 route des Lucioles, 06560 Valbonne, France

†Electronic address: jfriou@phys.psu.edu

the mean-field approximation, such system is described by a set of two coupled Gross-Pitaevskii equations, which reads

$$i\hbar \partial_t \psi_i = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_i + \sum_{k=\ell, s} g_{ki} |\psi_k|^2 \right] \psi_i + W_{ij} \psi_j. \quad (1)$$

In this equation, g_{ik} is the mean-field interaction strength between states i and k . The solution of such equations is not straightforward, mainly due to the presence of a nonlinear mean-field term. However, in the case of propagation of matter waves which are weakly outcoupled from a source, one can greatly simplify the treatment [27]. Indeed, the weak coupling assumption implies the two following points:

- The evolution of the source wave-function is unaffected by the outcoupler,
- the extracted matter wave is sufficiently diluted to make self-interactions negligible.

The former differential system can then be rewritten as:

$$i\hbar \partial_t \psi_s = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_s + g_{ss} |\psi_s|^2 \right] \psi_s, \quad (2)$$

$$i\hbar \partial_t \psi_\ell = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_\ell + g_{s\ell} |\psi_s|^2 \right] \psi_\ell + W_{\ell s} \psi_s. \quad (3)$$

The source wave-function $\psi_s(\mathbf{r}, t)$ now obeys a single differential equation (2), and can thus be determined independently. The remaining nonlinear term $|\psi_s|^2$ in Eq. (3), acts then as an external potential for the propagation of ψ_ℓ . This last equation is thus a Schrödinger equation describing the evolution of the outcoupled matter wave in the total potential $V(\mathbf{r}, t)$ in presence of a source term $\rho(\mathbf{r}, t)$,

$$i\hbar \partial_t \psi_\ell = H_{\mathbf{r}} \psi_\ell + \rho, \quad (4)$$

where

$$H_{\mathbf{r}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}} + V, \quad (5a)$$

$$V = V_\ell + g_{s\ell} |\psi_s|^2, \quad (5b)$$

$$\rho = W_{\ell s} \psi_s. \quad (5c)$$

2. Integral equation

The evolution between times t_0 and t ($t > t_0$) of the solution ψ_ℓ of Eq. (4) in a given volume \mathcal{V} delimited by

a surface \mathcal{S} , is expressed by an implicit integral [42]

$$\begin{aligned} \psi_\ell(\mathbf{r}, t) = & \int_{\mathcal{V}} d\mathbf{r}' \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t_0) \psi_\ell(\mathbf{r}', t_0) \\ & + \frac{i\hbar}{2m} \int_{t_0}^t dt' \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{S}' \cdot [\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \nabla_{\mathbf{r}'} \psi_\ell(\mathbf{r}', t') \\ & - \psi_\ell(\mathbf{r}', t') \nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t')] \\ & + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \int_{\mathcal{V}} d\mathbf{r}' \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}', t'), \end{aligned} \quad (6)$$

where $d\mathbf{S}'$ is the outward-oriented elementary normal vector to the surface \mathcal{S} . We have introduced the time-dependent Green function $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau)$ which verifies

$$[i\hbar \partial_\tau - H_{\mathbf{r}}] \mathcal{G} = i\hbar \delta(\tau) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (7)$$

and is related to the propagator \mathcal{K} of the Schrödinger equation via a Heaviside function Θ ensuring causality,

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) = \mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) \Theta(\tau). \quad (8)$$

Eq. (6) states that, after the evolution time $t - t_0$, the value of the wave function is the sum of three terms, the physical interpretation of which is straightforward. The first one corresponds to the propagation of the initial condition $\psi_\ell(\mathbf{r}', t_0)$ given at any position in the volume \mathcal{V} . The second one takes into account the propagation of the wave function taken at the surrounding surface \mathcal{S} , and is non-zero only if \mathcal{V} is finite. This term takes into account any field which enters or leaks out of \mathcal{V} . Finally, the last term expresses the contribution from the source.

Eq. (6) can be successfully applied to describe the propagation of wavepackets in an atom interferometer as described in [43]. Nevertheless, the propagation of a continuous atom laser, the energy of which is well defined, can be described with a time-independent version of Eq. (6), that we derive below.

3. Time-independent case

We consider a time-independent hamiltonian $H_{\mathbf{r}}$ and a stationary source

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) \exp(-iEt/\hbar). \quad (9)$$

We thus look for stationary solutions of Eq. (4) with a given energy E ,

$$\psi_\ell(\mathbf{r}, t) = \psi_\ell(\mathbf{r}) \exp(-iEt/\hbar). \quad (10)$$

When $t_0 \rightarrow -\infty$, Eq. (6) then becomes time-independent:

$$\begin{aligned} \psi_\ell(\mathbf{r}) = & \frac{1}{i\hbar} \int_{\mathcal{V}} d\mathbf{r}' \mathcal{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \\ & + \frac{i\hbar}{2m} \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{S}' \cdot [\mathcal{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \psi_\ell(\mathbf{r}') - \psi_\ell(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')], \end{aligned} \quad (11)$$

where \mathcal{G}_E is the time-independent propagator related to \mathcal{K} via

$$\mathcal{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^{+\infty} d\tau \mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) e^{i\frac{E\tau}{\hbar}}. \quad (12)$$

Note that the first term of Eq. (6) vanishes in the time-independent version of the propagation integral equation as $\mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) \rightarrow 0$ when $\tau \rightarrow \infty$. The second term of Eq. (11) is the equivalent for matter waves of what is known in optics as the Fresnel-Kirchhoff integral [44].

B. Major approximations for atom laser beam propagation

1. Independent treatment of a succession of potentials

As an optical wave can enter different media (free space, lenses...) separated by surfaces, matter waves can propagate in different parts of space, where they experience potentials of different nature. For instance, when one considers an atom laser outcoupled from a condensate as in the example of part II, the beam initially interacts with the Bose-condensed atoms and abruptly propagates in free space outside of the condensate. The expression of the propagator in whole space would then be needed to use the equation (11). Most generally, such calculation requires to apply the Feynmann's path integral method, either numerically or analytically [45]. For example, the time-dependent propagator \mathcal{K} can be analytically expressed in the case of a continuous potential which is at most quadratic, by using the Van Vleck's formula [46], or the ABCD formalism [43]. However such expressions fail to give the global propagator value for a piecewise-defined quadratic potential.

As in classical optics, we can separate the total evolution of a monochromatic wave in steps, each one corresponding to one homogeneous potential. This step-by-step approach stays valid as long as one can neglect any reflection on the interface between these regions as well as feedback from one region to a previous one. In this approach, each interface is considered as a surface source term for the propagation in the following media. It allows us to calculate \mathcal{K} explicitly in every part of space as long as the potential in each region remains at most quadratic, which we will assume throughout this paper.

2. The time-independent propagator in the stationary phase approximation

Whereas the expression of \mathcal{G}_E is well known for free space and linear potentials [8, 37], to our knowledge, there is no analytical expression for the inverted harmonic potential, which plays a predominant role in an atom laser interacting with its source-condensate. We

thus give in the following a method to calculate the time-independent propagator \mathcal{G}_E in any up to quadratic potential.

Since \mathcal{K} is analytically known in such potentials, we use the definition of \mathcal{G}_E as its Fourier transform (Eq. 12). The remaining integral over time τ is calculated via a stationary phase method [44], taking advantage that \mathcal{K} is a rapidly oscillating function. We write the time-dependent propagator as

$$\mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) = \mathcal{A}(\tau) \exp [i\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau)]. \quad (13)$$

We introduce τ_n as the positive real solution(s) of

$$\partial_\tau \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau_n) = -E/\hbar, \quad (14)$$

which correspond(s) to the time(s) spent on classical path(s) of energy E connecting \mathbf{r}' to \mathbf{r} . We develop ϕ to the second order around τ_n ,

$$\phi(\tau) \simeq \phi(\tau_n) + \left. \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right|_{\tau_n} (\tau - \tau_n) + \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} \right|_{\tau_n} \frac{(\tau - \tau_n)^2}{2}. \quad (15)$$

Using the last development in the integral (12), and assuming that the envelope $\mathcal{A}(\tau)$ varies smoothly around τ_n , we can express \mathcal{G}_E as

$$\mathcal{G}_E^{(1)} \simeq \sum_n \sqrt{\frac{2i\pi}{\phi''(\tau_n)}} \mathcal{K}(\tau_n) \exp \left(i \frac{E\tau_n}{\hbar} \right). \quad (16)$$

Such approach is valid as long as stationary points τ_n exist and their contribution can be considered independently: Eq. 16 fails if the stationary points are too close to each other. We can estimate the validity of our approach by defining an interval $\mathcal{I}_n = [\tau_n - \theta_n; \tau_n + \theta_n]$ in which the development around τ_n contributes to more than $\beta = 90\%$ to the restricted integral. For θ large enough, we can use [47],

$$\left| \int_{-\theta}^{\theta} dx \exp \left[iz \frac{x^2}{2} \right] - \sqrt{\frac{2i\pi}{z}} \right| \sim \frac{2}{|z\theta|}, \quad (17)$$

and obtain θ_n

$$\theta_n = \frac{1}{1-\beta} \sqrt{\frac{2}{\pi\phi''(\tau_n)}}. \quad (18)$$

The validity condition is thus $|\tau_n - \tau_{n+1}| \geq \theta_n + \theta_{n+1}$.

If (16) is not valid, a better approximation consists then in developing ϕ to higher order around a point which is inbetween successive τ_n . The simplest choice is to take the one which cancels ϕ'' , and to choose stationary points τ_k which verify

$$\partial_\tau^2 \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau_k) = 0. \quad (19)$$

We thus develop ϕ to the third order around τ_k , which leads to the following expression of \mathcal{G}_E ,

$$\mathcal{G}_E^{(2)} \simeq \frac{2\pi\mathcal{K}(\tau_k) \exp \left(i \frac{E\tau_k}{\hbar} \right)}{\sqrt[3]{-\phi^{(3)}(\tau_k)/2}} \text{Ai} \left(\frac{\phi'(\tau_k) + E/\hbar}{\sqrt[3]{\phi^{(3)}(\tau_k)/2}} \right), \quad (20)$$

where Ai is the Airy function of the first kind [48].

In practice, combining the use of $\mathcal{G}_E^{(2)}$ and $\mathcal{G}_E^{(1)}$ depending on the values of \mathbf{r}' and \mathbf{r} gives a good estimate of the time-independent propagator, as we will see in part II.

Although the above approach is quite general, further approximations can be made. In the region where diffraction can be neglected, one can describe the propagation with the eikonal approximation. When the propagation is in the paraxial regime, it is more appropriate to describe it with the paraxial $ABCD$ matrices, instead of using the general Kirchhoff integral.

3. Eikonal propagation

The purpose of this method equivalent to the WKB approximation is to give a semi-classical description of the propagation from a matter wave, given its value on a surface. Let us consider that we know the value of the wave function of energy E on the surface \mathcal{S}' . To calculate its value on any other surface \mathcal{S} , the eikonal considers classical paths connecting \mathcal{S} and \mathcal{S}' . Let us write the wave function as

$$\psi_\ell(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp[iS(\mathbf{r})/\hbar]. \quad (21)$$

The Schrödinger equation on ψ_ℓ reduces to [49]

$$\begin{cases} |\nabla_{\mathbf{r}} S| = \frac{\hbar}{\lambda}, \\ \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (A^2 \nabla S) = 0, \end{cases} \quad (22)$$

where we have introduced the de Broglie wavelength

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E - V(\mathbf{r}))}}. \quad (23)$$

The first equation is known in geometric optics as the eikonal equation [44, 50]. The calculation consists in integrating the phase along the classical ray of energy E connecting \mathbf{r}' to \mathbf{r} , to obtain the phase on \mathbf{r} ,

$$S(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} d\mathbf{u} \frac{\hbar}{\lambda(\mathbf{u})} + S(\mathbf{r}'). \quad (24)$$

The second equation of system (22) corresponds to the conservation of probability density flux, and is equivalent to the Poynting's law in optics. Again after integration along the classical path connecting \mathbf{r}' to \mathbf{r} , one obtains the amplitude on \mathcal{S}

$$A(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}') \exp\left(-\int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} d\mathbf{u} \frac{\Delta S(\mathbf{u}) \lambda(\mathbf{u})}{2\hbar}\right). \quad (25)$$

Note that interference effects are included in this formalism: if several classical paths connect \mathbf{r}' to \mathbf{r} , their respective contributions add coherently to each other. Also, if some focussing points exist, dephasings equivalent to the Gouy phase in optics appear and can be calculated following [44].

Such semiclassical treatment is valid as long as one does not look for the wave function value close to classical turning points, and as long as transverse diffraction is negligible: transverse structures of size Δx must be large enough not to diffract significantly, *i.e.* $\Delta x^4 \gg (\hbar t/2m)^2$. This condition restricts the use of the eikonal to specific regions of space where the matter wave does not spend a too long time t . For instance, this is the case for the propagation in the small region of overlap with the BEC.

The eikonal can thus be used to deal with the first term of Eq. (11), and is equivalent to the development of this integral around classical trajectories [67].

4. Paraxial propagation

The paraxial regime applies as soon as the transverse wavevector becomes negligible compared to the axial one. It is for instance the case after some propagation for gravity-accelerated atom-laser beams. We can then take advantage of methods developed in optics and use the paraxial atom-optical $ABCD$ matrices formalism [39, 43], instead of the general Kirchhoff integral, and characterize globally the beam with the quality factor M^2 [51, 52].

a. The paraxial equation: We look for paraxial solutions to the time-independent Schrödinger equation,

$$H_{\mathbf{r}} \psi_\ell(\mathbf{r}) = E \psi_\ell(\mathbf{r}). \quad (26)$$

We decompose the wave function and the potential in a transverse (“ \perp ”) and parallel (“ \parallel ”) component, taking z as the propagation axis,

$$\begin{cases} \psi_\ell(x, y, z) = \psi_\perp(x, y, z) \psi_\parallel(z), \\ V(x, y, z) = V_\perp(x, y, z) + V_\parallel(z), \end{cases} \quad (27)$$

where $V_\parallel(z) = V(0, 0, z)$. We express the solution ψ_\parallel to the one dimensional equation

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_\parallel}{\partial z^2} + V_\parallel \psi_\parallel = E \psi_\parallel, \quad (28)$$

by using the WKB approximation,

$$\psi_\parallel(z) = \sqrt{\frac{m\mathcal{F}}{p(z)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{z_0}^z du p(u)\right]. \quad (29)$$

In this expression, \mathcal{F} is the atomic flux through any transverse plane, $p(z) = \sqrt{2m(E - V_\parallel(z))}$ is the classical momentum along z and z_0 is the associated classical turning point verifying $p(z_0) = 0$. Using these expressions, and assuming an envelope ψ_\perp slowly varying along z , we obtain the paraxial equation of propagation for the transverse profile,

$$\left[i\hbar \partial_\zeta + \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_x^2 + \partial_y^2) - V_\perp(x, y, \zeta) \right] \psi_\perp(x, y, \zeta) = 0, \quad (30)$$

where $\zeta(z) = \int_{z_0}^z dz m/p(z)$ is a parameter corresponding to the time which would be needed classically to propagate on axis from the turning point z_0 . The equation (30) can thus be solved as a time-dependent Schrödinger equation,

$$\psi_{\perp}(x, y, \zeta) = \int_{S'} dx' dy' \mathcal{K}(x, y; x', y'; \zeta - \zeta') \psi_{\perp}(x', y', \zeta'). \quad (31)$$

The use of the paraxial approximation allows us to focus only on the evolution of the transverse wave function, reducing the dimensionality of the system from 3D to 2D, as the third dimension along the propagation axis z is treated via a semi-classical approximation (Eq. 29).

b. ABCD matrices: In the case of a separable transverse potential independent of z , the paraxial approximation restricts to two independent one dimensional equations. Let us consider a potential V_x at most quadratic in x . One can then write the propagator \mathcal{K}_x by using the Van Vleck formula, or equivalently the general *ABCD* matrix formalism [8],

$$\mathcal{K}_x = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi i B}} \exp \left[\frac{i\alpha}{2B} (Ax'^2 + Dx^2 - 2xx') \right]. \quad (32)$$

The coefficients A, B, C, D verifying $AD - BC = 1$, are functions of $\zeta - \zeta'$, and α is an arbitrary factor depending on the definition of the *ABCD* coefficients. These ones are involved in the matrix describing the classical dynamics of a virtual particle of coordinate X and speed V in the potential $V_x(X)$

$$\begin{pmatrix} X(\zeta) \\ \alpha V(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\zeta - \zeta') & B(\zeta - \zeta')/\alpha \\ C(\zeta - \zeta') & D(\zeta - \zeta') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(\zeta') \\ \alpha V(\zeta') \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Different choices of α can be made and popular values in the atomoptic literature are $\alpha = 1$ [8] or $\alpha = m/\hbar$ [38, 39]. We take the last convention and, by introducing the wavevector $K = mV/\hbar$, use throughout this paper the following definition for the *ABCD* coefficients in which is included the value of α ,

$$\begin{pmatrix} X(\zeta) \\ K(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\zeta - \zeta') & B(\zeta - \zeta') \\ C(\zeta - \zeta') & D(\zeta - \zeta') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(\zeta') \\ K(\zeta') \end{pmatrix}. \quad (34)$$

c. Propagation using the Hermite-Gauss basis: To calculate the propagation along the x axis

$$\psi_x(x, \zeta) = \int dx' \mathcal{K}_x(x; x'; \zeta - \zeta') \psi_x(x', \zeta'), \quad (35)$$

it is useful to use the Hermite-Gauss basis of functions $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\Phi_0(x, \{X, K\}) = \frac{(2\pi)^{-1/4}}{\sqrt{X}} \exp \left(i \frac{K}{X} \frac{x^2}{2} \right), \quad (36)$$

$$\Phi_n(x, \{X, K\}) = \Phi_0(x) \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \frac{|X|^n}{X^n} H_n \left[\frac{x}{\sqrt{2|X|}} \right]. \quad (37)$$

H_n is the n th order Hermite polynomial, and the two parameters $(X, K) \in \mathbb{C}$, which define univocally the basis set, must verify the normalization condition

$$KX^* - K^*X = i, \quad (38)$$

so that this basis is orthonormalized.

These functions propagate easily via \mathcal{K}_x , as

$$\Phi_n(x, \{X, K\}(\zeta)) = \int dx' \mathcal{K}_x(x; x'; \zeta - \zeta') \Phi_n(x', \{X, K\}(\zeta')), \quad (39)$$

i.e. the integral is calculated by replacing $X(\zeta')$ and $K(\zeta')$ by their value at ζ through the algebraic relation (34).

Thus, the propagation of the function ψ_x between two positions $z(\zeta')$ and $z(\zeta)$ is obtained by first decomposing the initial profile on the Hermite-Gauss basis

$$\psi_x(x, \zeta') = \sum_n c_n \Phi_n(x, \{X, K\}(\zeta')), \quad (40)$$

where

$$c_n = \int dx \Phi_n^*(x, \{X, K\}(\zeta')) \psi_x(x, \zeta'). \quad (41)$$

The profile after propagation until $z(\zeta)$ is then

$$\psi_x(x, \zeta) = \sum_n c_n \Phi_n(x, \{X, K\}(\zeta)). \quad (42)$$

The high efficiency of this method comes from the fact that, once the decomposition (40) is made, the profile at any position $z(\zeta)$ is obtained by calculating an algebraic evolution equation: the *ABCD* law (Eq. 34). Such computational method is then much faster than the use of the Kirchhoff integral which would need to calculate an integral for each considered position.

Note that the initial choice of $\{X, K\}(\zeta')$ is a priori arbitrary as soon as it verifies the normalization condition (38). However one can minimize the number of functions Φ_n needed for the decomposition if we choose $\{X, K\}(\zeta')$ as a function of the second-order moments of the profile.

d. Moments and quality factor: Let us define the second-order moments of ψ_x ,

$$\langle xx^* \rangle = \int dx x^2 \psi_x \psi_x^*, \quad (43)$$

$$\langle kk^* \rangle = \int dx \partial_x \psi_x \partial_x \psi_x^*, \quad (44)$$

$$\langle xk^* + x^*k \rangle = i \int dx x [\psi_x \partial_x \psi_x^* - \psi_x^* \partial_x \psi_x], \quad (45)$$

where we have used that ψ_x is normalized ($\int dx |\psi_x|^2 = 1$). We also define the wavefront curvature \mathcal{C} [53] as

$$\mathcal{C} = \frac{\langle xk^* + x^*k \rangle}{2\langle xx^* \rangle}. \quad (46)$$

The three moments follow also an $ABCD$ law during propagation. By introducing the matrix

$$\mathcal{M}(\zeta) = \begin{pmatrix} \langle xx^* \rangle & \langle xk^* + x^*k \rangle / 2 \\ \langle xk^* + x^*k \rangle / 2 & \langle kk^* \rangle \end{pmatrix}, \quad (47)$$

this law is expressed as

$$\mathcal{M}(\zeta) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mathcal{M}(\zeta') \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^t. \quad (48)$$

This relation allows to derive propagation laws on the wavefront second-order moments, such as the r.m.s transverse size (Rayleigh law). As $\det(\mathcal{M})$ is constant, this law also exhibits an invariant of propagation, the beam quality factor M^2 , related to the moments and curvature by

$$\langle xx^* \rangle (\langle kk^* \rangle - \mathcal{C}^2 \langle xx^* \rangle) = \left(\frac{M^2}{2} \right)^2. \quad (49)$$

The physical meaning of the M^2 factor becomes clear by taking the last equation at the waist, *i.e.* where the curvature \mathcal{C} is zero:

$$\sqrt{\langle xx^* \rangle_0 \langle kk^* \rangle_0} = \frac{M^2}{2}. \quad (50)$$

The M^2 factor is given by the product of the spatial and momentum widths at the beam waist and indicates how far the beam is from the diffraction limit. Because of the Heisenberg uncertainty relation, the M^2 factor is always larger than one and equals unity only for a perfect gaussian wavefront.

Finally, the determination of the second order moments and the M^2 factor from an initial profile allows us to choose the more appropriate values of $\{X(\zeta'), K(\zeta')\}$ to parameterize the Hermite-Gauss basis used for the decomposition at $z(\zeta')$ (Eq. 40). Indeed, these parameters are closely related to the second order moments of the Hermite-Gauss functions $\Phi_n(x, \{X, K\})$ by

$$\langle xx^* \rangle_{\Phi_n} = (2n + 1) |X|^2, \quad (51)$$

$$\langle kk^* \rangle_{\Phi_n} = (2n + 1) |K|^2, \quad (52)$$

$$\langle xk^* + x^*k \rangle_{\Phi_n} = (2n + 1) (XK^* + X^*K). \quad (53)$$

From this we obtain that the M^2 factor of the mode Φ_n is $M_{\Phi_n}^2 = (2n + 1)$ and that all the modes have the same curvature

$$\mathcal{C}_{\Phi_n} = \mathcal{C} = (XK^* + X^*K) / 2|X|^2. \quad (54)$$

It is thus natural to choose the parameters $\{X, K\}$, so that the curvature of the profile (Eq. 46) equals \mathcal{C} . This last condition, together with the choice $|X|^2 = \langle xx^* \rangle / M^2$, the normalization condition (38) and the choice of X real (the phase of X is a global phase over the wavefront), lead to the univocal determination of the parameters $\{X(\zeta'), K(\zeta')\}$ associated with the Hermite-Gauss basis, so that the decomposition of the initial profile $\psi_x(x, \zeta')$ needs a number of terms of the order of M^2 .

II. APPLICATION TO A RADIOFREQUENCY-OUTCOUPLED ATOM LASER

We apply the previous framework to the radiofrequency (rf) outcoupled atom laser described in [38] where a Bose-Einstein condensate (BEC) of rubidium 87 (mass m) is magnetically harmonically trapped (frequencies $\omega_x = \omega_z = \omega_\perp$ and ω_y) in the ground state $|F = 1, m_F = -1\rangle$, and is weakly outcoupled to the untrapped state $|F = 1, m_F = 0\rangle$. The BEC is considered in the Thomas-Fermi (TF) regime described by the time-independent wave function $\phi_s(r)$, with a chemical potential μ and TF radii $R_{\perp, y} = \sqrt{2\mu/m\omega_{\perp, y}^2}$ [54]. The external potential experienced by the beam is written

$$V_i(r) = \mu - \frac{1}{2}m\omega_\perp^2\sigma^2 - \frac{1}{2}m[\omega_\perp^2(x^2 + z^2) + \omega_y^2y^2] \quad (55)$$

inside the BEC region, and

$$V_o(r) = \frac{1}{2}m\omega^2\sigma_q^2 - \frac{1}{2}m\omega^2[x^2 + (z + \sigma_q)^2]. \quad (56)$$

outside. The expulsive quadratic potential of V_i originates from the mean-field interaction (independent of the Zeeman substates for ^{87}Rb) between the laser and the condensate, whereas that of V_o (frequency ω) is due to the second order Zeeman effect. We have noted $\sigma = g/\omega_\perp^2$ and $\sigma_q = g/\omega^2$ the vertical sags due to gravity $-mgz$ for $m_F = -1$ and $m_F = 0$ states respectively. The rf coupling (of Rabi frequency Ω_R) between the condensate and the beam is considered to have a negligible momentum transfer and provides the atom-laser wave function with a source term $\rho = \hbar\Omega_R/2 \phi_s(r)$.

In the following, we consider a condensate elongated along the y axis ($\omega_\perp \gg \omega_y$), so that the laser dynamics is negligible along this direction [68]. We thus study independently the evolution in each vertical (x, z) plane at position y_0 . We calculate the beam wave function in two steps corresponding to a propagation in each region defined by V_i and V_o (see Fig. 1). The wave function at the BEC frontier is calculated in section IIA using the eikonal approximation. Then, in section IIB, we calculate the wave function at any position outside the BEC, with the help of the Fresnel-Kirchhoff formalism and the paraxial ABCD matrices.

A. Propagation in the condensate zone

In this section we determine the beam wave function $\psi_\ell(\mathbf{r})$ in the condensate zone by using the eikonal formalism described in section IB3. This formalism is appropriate in this case as the time necessary for the laser to exit the BEC region (≈ 1 ms) is small enough so that the transverse diffraction is negligible (transverse size $\approx R_\perp$).

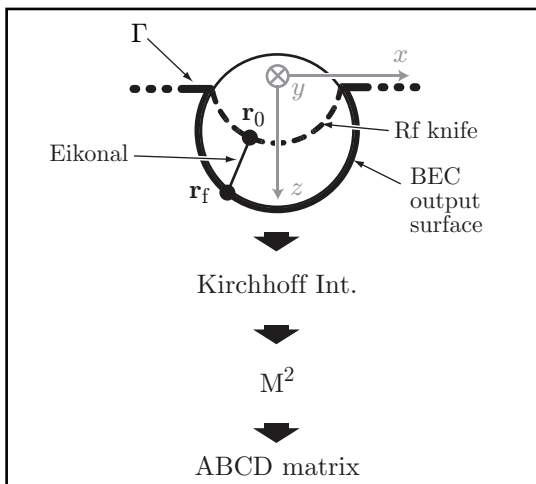


FIG. 1: Principle of the calculation : the wave function is calculated from the rf knife (a circle of radius r_0 centered at the frame origin) using the eikonal. A general radial atomic trajectory starting at zero speed from \mathbf{r}_0 crosses the BEC border at \mathbf{r}_f . Once the matter wave has exited the condensate region, the wave function is given by the Fresnel-Kirchhoff integral, allowing to compute the wave function at any point from the BEC output surface. In the paraxial approximation, we calculate the propagation using $ABCD$ matrices.

1. Atomic rays inside the BEC

One first needs to calculate the atomic paths followed by the atom laser rays from the outcoupling surface (the rf knife) to the border of the BEC. The rf knife is an ellipsoid centered at the magnetic field minimum (chosen in the following as the frame origin, see figure 1). Its intersection with the (x, z) plane at position y_0 is a circle centered at the frame origin. Its radius r_0 depends on the rf detuning $\delta\nu = \frac{m}{2\hbar} [\omega_\perp^2 (r_0^2 - \sigma^2) + \omega_y^2 y_0^2]$. As we neglect axial dynamics and consider zero initial momentum, the classical equations of motion give for the radial coordinate $r = \sqrt{x^2 + z^2}$, $r(t) = r_0 \cosh \omega_\perp t$ allowing to find a starting point \mathbf{r}_0 on the rf knife for each point \mathbf{r}_f on the BEC output surface, *i.e.* the BEC border below the rf knife [55].

2. Eikonal expression of the wave function

We now introduce

$$a_\perp = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_\perp}}, \quad R = \frac{r}{a_\perp}, \quad \epsilon = -\left(\frac{r_0}{a_\perp}\right)^2, \quad (57)$$

which are respectively the size of the harmonic potential, the dimensionless coordinate and energy associated with

the atom laser. Following Eq. (24) and (25), we obtain

$$\begin{cases} S(R) = \frac{\hbar}{2} \left[R\sqrt{R^2 + \epsilon} + \epsilon \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2 + \epsilon}}{\sqrt{-\epsilon}} \right) \right], \\ A(R) = \frac{\mathcal{B}\phi_s(\mathbf{r}'_0)}{[R^2(R^2 + \epsilon)]^{1/4}}. \end{cases} \quad (58)$$

\mathcal{B} is proportional to the coupling strength, and is not directly given by the eikonal treatment [69]. The atom laser beam amplitude $A(R)$ [70] is proportional to the BEC wave function value at the rf knife $\phi_s(\mathbf{r}_0)$. The wave function at the BEC output surface is then

$$\psi_\ell(R_f) = A(R_f) \exp [iS(R_f)/\hbar]. \quad (59)$$

B. Propagation outside the condensate

Once the matter wave has exited the condensate region, the volume source term ρ vanishes and the beam wave function is given by the second term of Eq. 11 only, *i.e.* the Fresnel-Kirchhoff integral for matter waves, allowing to compute the wave function at any point from the wave function on the BEC output surface. In this section, we calculate the propagation using an analytical expression for the time-independent propagator and apply the $ABCD$ formalism in the paraxial regime.

1. Fresnel-Kirchhoff Integral

We perform the Fresnel-Kirchhoff integral in the (x, z) plane at position y_0 :

$$\psi_\ell = \frac{i\hbar}{2m} \oint_\Gamma d\mathbf{l}' \cdot [\mathcal{G}_E \nabla \psi_\ell - \psi_\ell \nabla \mathcal{G}_E], \quad (60)$$

where ψ_ℓ is non zero only on the BEC output surface as seen in section II A. The surface \mathcal{S} of equation 11 is here reduced to its intersection contour Γ with the vertical plane. It englobes the BEC volume and is closed at infinity.

Using the expression of \mathcal{G}_E calculated in appendix A, we compute equation (60) and the result is shown in Fig. 2 for four different outcoupling rf detunings. When coupling occurs at the top of the BEC, the propagation of the beam exhibits a strong divergence together with a well-contrasted interference pattern. The divergence is due to the strong expulsive potential experienced by the beam when crossing the condensate, and interferences occur because atomic waves from different initial source points overlap during the propagation.

Comparison with a numerical Gross-Pitaevskii simulation shows good agreement. We also compare the results obtained by using at the BEC surface either Eq. 59 or Eq. B9. The eikonal method fails when coupling at the very bottom of the BEC [Fig. 2(a)], since the classical turning point is too close to the BEC border, whereas

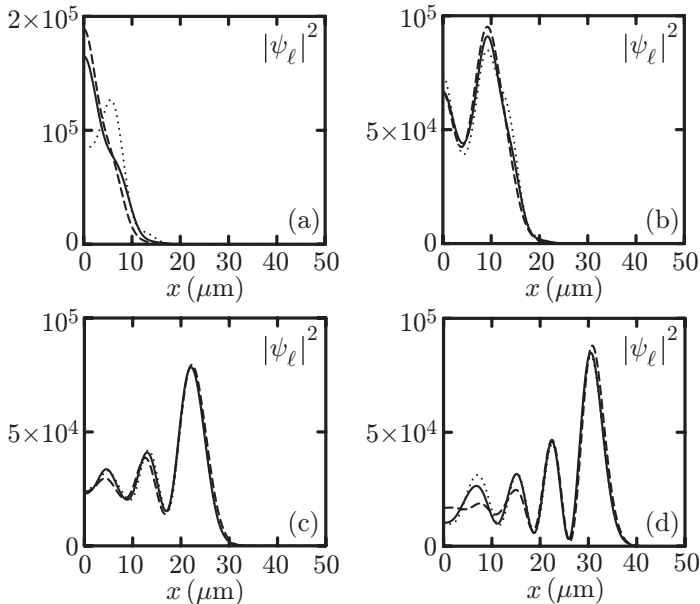


FIG. 2: Density profiles obtained at $150 \mu\text{m} = z - \sigma$ below the BEC center. We consider the vertical plane $y_0 = 0$ and have normalised $|\psi_\ell|^2$ to unity. We have drawn the results obtained by using as input of the Kirchhoff integral the profile calculated using the eikonal (Eq. 59, dotted line) or exact solutions of the inverted harmonic oscillator (Eq. B9, full line), and compare them to a full numerical integration of the two-dimensional Gross-Pitaevskii evolution of the atom laser (dashed line). The used rf detunings are: (a) $\delta\nu = 8900$ Hz, (b) $\delta\nu = 6500$ Hz, (c) $\delta\nu = 2100$ Hz, (d) $\delta\nu = -1100$ Hz, and correspond to increasing outcoupling height, from (a) to (d).

the method using the exact solutions of the inverted harmonic potential agrees much better with the numerical simulation for any rf detuning. Finally, for very high coupling in the BEC [Fig. 2(d)], our model slightly overestimates the fringe contrast near the axis.

2. Propagation in the paraxial regime

Since the atom laser beam is accelerated by gravity, it enters quickly the paraxial regime. In the case considered in [38], the maximum transverse energy is given by the chemical potential μ whereas the longitudinal energy is mainly related to the fall height z by $E_z \approx mgz$. For μ typically of a few kHz, one enters the paraxial regime after approximately $100 \mu\text{m}$ of vertical propagation. For larger propagation distances, we can thus take advantage of the paraxial approximation presented in Sec. IB 4.

To proceed, we start from the profile $\psi_\ell(x)$ calculated after $150 \mu\text{m}$ of propagation via the Kirchhoff integral. Using Eqs. (43)-(46), we extract the widths $\langle xx^* \rangle$, $\langle kk^* \rangle$ and the beam curvature \mathcal{C} at this position. From these parameters we calculate the beam quality factor M^2 by using the general equation (49). Following

the procedure presented in Sec. IB 4, we can choose the appropriate Hermite-Gauss decomposition of $\psi_\ell(x)$ and the propagation of each mode is then deduced from the $ABCD$ matrix corresponding to the transverse part of the potential described in Eq. 56, $V_\perp(x) = -\frac{m}{2}\omega^2 x^2$. The $ABCD$ matrix then reads

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \omega(\zeta - \zeta') & \frac{\hbar}{m\omega} \sinh \omega(\zeta - \zeta') \\ \frac{m\omega}{\hbar} \sinh \omega(\zeta - \zeta') & \cosh \omega(\zeta - \zeta') \end{pmatrix}. \quad (61)$$

As explained in Sec. IB 4, the propagation is parameterized by the time ζ , given by the classical equation of motion of the on-axis trajectory in the longitudinal part of the potential $V_\parallel(\tilde{z}) = -\frac{m}{2}\omega^2 \tilde{z}^2$, where $\tilde{z} = z + \sigma_q$.

The $ABCD$ matrices formalism allows also to extract global propagation laws on the second order moments $X(\zeta)$, $K(\zeta)$ and evaluate the wavefront curvature $\mathcal{C}(\zeta) = \Re\left(\frac{K(\zeta)}{X(\zeta)}\right)$ associated with the wavefront $\psi_\ell(x, \zeta)$.

By considering the paraxial evolution of the r.m.s. size σ of $\psi_\ell(x, \zeta)$, we then obtain a generalized Rayleigh formula :

$$\sigma^2(\xi) = \sigma_0^2 \cosh^2(\omega\xi) + \left(\frac{M^2 \hbar}{2m\omega}\right)^2 \frac{\sinh^2(\omega\xi)}{\sigma_0^2}, \quad (62)$$

involving the M^2 factor, and where $\sigma_0 = X(\zeta_0)$ and $\xi = \zeta - \zeta_0$. We have introduced the focus time ζ_0 so that $\mathcal{C}(\zeta_0) = 0$. The relation (62) has been fruitfully used in [38] and [41] to extract the beam quality factor from experimental images.

Conclusion

Relying on the deep analogy between light waves and matter waves, we have introduced theoretical tools to deal with the propagation of coherent matter waves :

- The eikonal approximation is the standard treatment of geometrical optics. It is valid when diffraction, or wave-packet spreading, is negligible. It can be fruitfully used to treat short time propagation, as we show on the example of an atom laser beam crossing its source BEC.
- The Fresnel-Kirchhoff integral comes from the classical theory of diffraction. It is particularly powerful as it allows to deal with piecewise defined potential in two or three dimensions together with taking into account diffraction and interference effects.
- The $ABCD$ matrices formalism can be used as soon as the matter wave is in the paraxial regime. This widely used technique in laser optics provides simple algebraic laws to propagate the atomic wavefront, and also global laws on the second order moments of the beam, as the Rayleigh formula. Those results are especially suitable to characterize atom laser beams quality by the M^2 factor.

The toolbox developed in this paper can efficiently address a diversity of atom-optical setups in the limit where interactions in the laser remain negligible. It can be suited for beam focussing experiments [59, 60] and their potential application to atom lithography [61]. It also provides a relevant insight on beam profile effects in interference experiments involving atom lasers or to characterize the outcoupling of a matter-wave cavity [62]. It could also be used in estimating the coupling between an atom laser beam and a high finesse optical cavity [63]. Further developments may be carried out to generalize our work. In particular, the M^2 factor approach could be generalized to self interacting atom laser beam in the spirit of [64] or to more general cases of applications, such as non-paraxial beams or more complex external potential symmetries [65].

Acknowledgments

The LCFIO and SYRTE are members of the Institut Francilien de Recherche sur les Atomes Froids (IFRAF). This work is supported by CNES (No. DA:10030054), DGA (Contracts No. 9934050 and No. 0434042), LNE, EU (grants No. IST-2001-38863, No. MRTN-CT-2003-505032 and FINAQS STREP), ESF (No. BEC2000+ and QUDEDIS).

APPENDIX A: TIME-INDEPENDENT PROPAGATOR IN AN INVERTED HARMONIC POTENTIAL

The time-dependent propagator of the inverted harmonic potential can be straightforwardly deduced from its expression for the harmonic potential [45] by introducing imaginary trapping frequencies $\omega \rightarrow i\omega$. We derive here an analytic evaluation of its time-independent counterpart \mathcal{G}_E , by using the results of section IB 2.

We consider a potential in dimension d , characterized by the expulsing frequency ω

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{0}) - \sum_{j \in [1..d]} \frac{1}{2} m \omega^2 r_j^2. \quad (\text{A1})$$

By introducing the reduced time $s = \omega\tau$ and the harmonic oscillator size $\sigma_o = \sqrt{\hbar/m\omega}$, \mathcal{G}_E is expressed as

$$\mathcal{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^\infty ds \mathcal{H}(s) e^{i\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}', s)}, \quad (\text{A2})$$

with $\mathcal{H}(s) = m/(2\pi i \hbar \sinh s)$, and

$$\phi = \frac{[(\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2) \cosh s - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}']}{2\sigma_o^2 \sinh s} + \frac{(E - V(\mathbf{0}))c}{\hbar\omega} s. \quad (\text{A3})$$

The first-order stationary times s_\pm verify

$$\cosh s_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4(E - V(\mathbf{0}))c}}{2(E - V(\mathbf{0}))}, \quad (\text{A4})$$

where $b = m\omega^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$ and $c = E - V(\mathbf{0}) + m\omega^2(\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2)/2$. If there are positive and real solutions s_\pm , \mathcal{G}_E reads (eq. 16)

$$\mathcal{G}_E^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{s_\pm > 0} \sqrt{\frac{2i\pi}{\partial^2 \phi / \partial s^2 |_{s_\pm}}} \mathcal{H}(s_\pm) e^{i\phi(s_\pm)}. \quad (\text{A5})$$

Otherwise, the relevant stationary point s_0 (eq. 19) verifies

$$\cosh s_0 = \frac{\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2 + \sqrt{(\mathbf{r} + \mathbf{r}')^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}}{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}. \quad (\text{A6})$$

s_0 is the time associated with the classical trajectory connecting \mathbf{r}' and \mathbf{r} with the closest energy to E . If the angle between \mathbf{r} and \mathbf{r}' is above $\pi/2$, then according to equation (A6), the absolute value of the first derivative of ϕ is never minimal, so that $e^{i\phi(s)}$ quickly oscillates over $[0; +\infty)$ and one can take $\mathcal{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$. In other cases, where the solution is unique, one develops the phase around s_0 and \mathcal{G}_E finally expresses as (eq. 20)

$$\mathcal{G}_E^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{2\pi \mathcal{H}(s_0)}{\kappa} e^{i\phi(s_0)} \text{Ai} \left(-\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \phi}{\partial s} \Big|_{s_0} \right), \quad (\text{A7})$$

where $\kappa = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial s^3} \Big|_{s_0} \right)^{1/3}$.

APPENDIX B: EXACT SOLUTIONS OF THE TWO-DIMENSIONAL INVERTED HARMONIC OSCILLATOR AND RELATION WITH THE EIKONAL

In this appendix we give an analytical expression for the eigenfunctions of the inverted harmonic potential in the BEC region. The use of such solutions enable us to avoid any divergence of the eikonal solution close to the turning point.

Using dimensionless parameters introduced in Eq. (57), the time-independent Schrödinger equation in the BEC region reads

$$-\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \right) - R^2 \psi = \epsilon \psi. \quad (\text{B1})$$

Introducing the angular momentum $L_\alpha = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$, one can decompose the solution of this equation as the product of a radial part and an angular part

$$\psi(R, \alpha) = \phi(R) e^{il\alpha}, \quad (\text{B2})$$

with $l \in \mathbb{Z}$ and $\hbar l$ is the angular momentum of the wave function. The general solution ϕ is given by

$$\phi(R) = \frac{c_1}{R} \text{M} \left(-i\frac{\epsilon}{4}; \frac{l}{2}; iR^2 \right) + \frac{c_2}{R} \text{W} \left(-i\frac{\epsilon}{4}; \frac{l}{2}; iR^2 \right). \quad (\text{B3})$$

$\text{M}(\mu, \nu, z)$ and $\text{W}(\mu, \nu, z)$ are Whittaker functions (related to the confluent hypergeometric functions of the

first and second kind) [48] whereas c_1 and c_2 are complex coefficients.

In general, the wave function must be decomposed on the basis of the different solutions $\phi(R)$ parameterized by l and ϵ . However, in the following, we restrict ourselves to the study of a solution that connects asymptotically to the eikonal. Thus, we are only interested in the wave function describing a dynamics without any transverse speed or diffraction, *i.e.* with $l = 0$. Since the wave progresses from the rf knife R_0 to the outer part of the potential, we also only look for “outgoing wave” type solutions [56]. Such solutions behave as progressive waves in the asymptotic limit ($R \rightarrow \infty$). One can express the Whittaker functions in term of hypergeometric functions [48] for any complex parameter μ and z

$$M(\mu, 0, z) = e^{-z/2} \sqrt{z} {}_1F^1\left(\frac{1}{2} - \mu; 1; z\right), \quad (\text{B4})$$

$$W(\mu, 0, z) = e^{-z/2} z^\mu {}_2F^0\left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{1}{2} - \mu; -\frac{1}{z}\right). \quad (\text{B5})$$

For $|z| \rightarrow \infty$, these functions are asymptotically ex-

panded as [57]

$${}_1F^1(a; b; z) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-z)^{-a} {}_2F^0\left(a, a-b+1; -\frac{1}{z}\right) + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} {}_2F^0\left(b-a, 1-a; \frac{1}{z}\right), \quad (\text{B6})$$

and

$${}_2F^0\left(a, b; \frac{1}{z}\right) \longrightarrow 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right). \quad (\text{B7})$$

One thus obtains an asymptotic formula for equation (B3) in which terms proportional to $e^{iR^2/2}$ or $e^{-iR^2/2}$ appear. Cancelling the second ones corresponding to an incoming wave towards the center, leads to a relation between c_1 and c_2 :

$$i \frac{e^{-\pi\epsilon/4}}{\Gamma(\frac{1}{2} - i\frac{\epsilon}{4})} c_1 + c_2 = 0 \quad (\text{B8})$$

The solution is finally written as:

$$\psi(R) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\epsilon}{4}) e^{i\epsilon[1 - \ln(-\epsilon/4)]/4}}{R} \left[e^{\pi\epsilon/8} M\left(-i\frac{\epsilon}{4}; 0; iR^2\right) - \frac{i e^{-\pi\epsilon/8}}{\Gamma(\frac{1}{2} - i\frac{\epsilon}{4})} W\left(-i\frac{\epsilon}{4}; 0; iR^2\right) \right]. \quad (\text{B9})$$

where the prefactor has been chosen so that the asymptotic expression of $\psi(R)$ connects to the eikonal solution

given by equation (58).

-
- [1] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **78**, 582 (1997).
- [2] B. P. Anderson and M. A. Kasevich, Science **282**, 1686 (1998).
- [3] I. Bloch, T. W. Hänsch, and T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. **82**, 3008 (1999).
- [4] E. W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerston, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, Science **283**, 1706 (1999).
- [5] G. Cennini, G. Ritt, C. Geckeler, and M. Weitz, Phys. Rev. Lett. **91**, 240408 (2003).
- [6] N. P. Robins, C. Figl, S. A. Haine, A. K. Morison, M. Jeppesen, J. J. Hope, and J. D. Close, Phys. Rev. Lett. **96**, 140403 (2006).
- [7] W. Guerin, J.-F. Riou, J. P. Gaebler, V. Josse, P. Bouyer, and A. Aspect, Phys. Rev. Lett. **97**, 200402 (2006).
- [8] C. J. Bordé, C. R. Acad. Sci. Paris t.2 Série IV, 509 (2001).
- [9] P. Storey and C. Cohen-Tannoudji, J. Phys. II France **4**, 1999 (1994).
- [10] C. Antoine and C. J. Bordé, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **5**, 199 (2003).
- [11] K. Bongs, R. Launay, and M. A. Kasevich, App. Phys. B **84**, 599 (2006).
- [12] C. W. Oates, G. Wilpers, and L. Hollberg, App. Phys. B **85**, 31 (2006).
- [13] G. Wilpers, C. W. Oates, S. A. Diddams, A. Bartels, T. M. Fortier, W. H. Oskay, J. C. Bergquist, S. R. Jefferts, T. P. Heavner, T. E. Parker, et al., Metrologia **44**, 146 (2007).
- [14] R. J. Ballagh, K. Burnett, and T. F. Scott, Phys. Rev. Lett. **78**, 1607 (1997).
- [15] M. Naraschewski, A. Schenzle, and H. Wallis, Phys. Rev. A **56**, 603 (1997).
- [16] H. Steck, M. Naraschewski, and H. Wallis, Phys. Rev. Lett. **80**, 1 (1998).
- [17] W. Zhang and D. F. Walls, Phys. Rev. A **57**, 1248 (1998).
- [18] J. Schneider and A. Schenzle, Applied Physics B **69**, 353 (1999).
- [19] Y. B. Band, P. S. Julienne, and M. Trippenbach, Phys. Rev. A **59**, 3823 (1999).
- [20] M. Edwards, D. A. Griggs, P. L. Holman, C. W. Clark, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **32**, 2935 (1999).
- [21] R. Graham and D. F. Walls, Phys. Rev. A **60**, 1429

- (1999).
- [22] J. Schneider and A. Schenzle, *Phys. Rev. A* **61**, 053611 (2000).
- [23] N. P. Robins, C. M. Savage, J. J. Hope, J. E. Lye, C. S. Fletcher, S. A. Haine, and J. D. Close, *Phys. Rev. A* **69**, 051602 (2004).
- [24] N. P. Robins, A. K. Morrison, J. J. Hope, and J. D. Close, *Phys. Rev. A* **72**, 031606 (2005).
- [25] B. Kneer, T. Wong, K. Vogel, W. P. Schleich, and D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **58**, 4841 (1998).
- [26] N. Robins, C. Savage, and E. A. Ostrovskaya, *Phys. Rev. A* **64**, 043605 (2001).
- [27] F. Gerbier, P. Bouyer, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4729 (2001); *Phys. Rev. Lett.* **93**, 059905(E) (2004).
- [28] G. M. Moy and C. M. Savage, *Phys. Rev. A* **56**, R1087 (1997).
- [29] G. M. Moy, J. J. Hope, and C. M. Savage, *Phys. Rev. A* **59**, 667 (1999).
- [30] M. W. Jack, M. Naraschewski, M. Collet, and D. Walls, *Phys. Rev. A* **59**, 2962 (1999).
- [31] A. S. Bradley, J. J. Hope, and M. J. Collet, *Phys. Rev. A* **68**, 063611 (2003).
- [32] Y. Japha, S. Choi, K. Burnett, and Y. B. Band, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1079 (1999).
- [33] S. Choi, Y. Japha, and K. Burnett, *Phys. Rev. A* **61**, 063606 (2000).
- [34] Y. Japha and B. Segev, *Phys. Rev. A* **65**, 063411 (2002).
- [35] J. Ruostekoski, T. Gasenzer, and D. A. W. Hutchinson, *Phys. Rev. A* **68**, 011604 (2003).
- [36] T. Busch, M. Köhl, T. Esslinger, and K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **65**, 043615 (2002); *Phys. Rev. A* **65**, 069902(E) (2002).
- [37] T. Kramer and M. Rodríguez, *Phys. Rev. A* **74**, 013611 (2006); *Phys. Rev. A* **75**, 069905(E) (2007).
- [38] J.-F. Riou, W. Guerin, Y. Le Coq, M. Fauquembergue, V. Josse, P. Bouyer, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 070404 (2006).
- [39] Y. Le Coq, J. H. Thywissen, S. A. Rangwala, F. Gerbier, S. Richard, G. Delannoy, P. Bouyer, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 170403 (2001).
- [40] R. G. Dall, L. J. Byron, A. G. Truscott, G. R. Dennis, M. T. Johnsson, M. Jeppesen, and J. J. Hope, *Opt. Express* **15**, 17673 (2007).
- [41] M. Jeppesen, J. Dugué, G. R. Dennis, M. T. Johnsson, C. Figl, N. P. Robins, and J. D. Close, *ArXiv:cond-mat/0704.0291v2* (2007).
- [42] G. Barton, *Elements of Green's Functions and Propagation* (Clarendon Press, Oxford, 1989).
- [43] C. J. Bordé, in *Fundamental Systems in Quantum Optics*, edited by J. Dalibard, J. M. Raimond, and J. Zinn-Justin, Les Houches, Session LIII (Elsevier Science Publishers B. V., 1990).
- [44] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Cambridge Univ. Press (7th edition), 2002).
- [45] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, 1965).
- [46] J. H. van Vleck, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **14**, 178 (1928).
- [47] L. Brillouin, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3ème série* **33**, 17 (1916), URL <http://archive.numdam.org/>.
- [48] M. Abramowitz and I. E. Stegun, *Handbook of Mathematical functions* (Dover, New-York, 1972).
- [49] A. Messiah, *Quantum mechanics* (Dover, New York, 2000).
- [50] L. D. Landau and E. M. Lifchitz, *The classical theory of fields* (Oxford, England, Pergamon Press (4th edition), 1975).
- [51] A. E. Siegman, in *Solid State Lasers: New Developments and Applications*, edited by M. Inguscio and R. Wallenstein (Plenum Press, New York, 1993).
- [52] P. A. Bélanger, *Opt. Lett.* **16**, 196 (1991).
- [53] A. E. Siegman, *IEEE J. Quantum Electron.* **27**, 1146 (1991).
- [54] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [55] J.-F. Riou, Ph.D. thesis, Institut d'Optique (<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00138450>) (2006).
- [56] H. A. Fertig and B. I. Halperin, *Phys. Rev. B* **36**, 7969 (1987).
- [57] L. D. Landau and E. M. Lifchitz, *Quantum mechanics* (Oxford, England, Pergamon Press (3rd edition), 1977).
- [58] M. Köhl, T. Busch, K. Mølmer, T. W. Hänsch, and T. Esslinger, *Phys. Rev. A* **72**, 063618 (2005).
- [59] I. Shvarchuck, Ch. Buggle, D. S. Petrov, K. Dieckmann, M. Zielonkowski, M. Kemmann, T. G. Tiecke, W. von Klitzing, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 270404 (2002).
- [60] A. S. Arnold, C. MacCormick, and M. G. Boshier, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **37**, 485 (2004).
- [61] E. Knyazchyan, B. Mercier, H. Perrin, P.-E. Pottie, and V. Lorent, *J. Phys.: Conf. Ser.* **19**, 44 (2005).
- [62] F. Impens, P. Bouyer, and C. J. Bordé, *App. Phys. B* **84**, 603 (2006).
- [63] S. Ritter, A. Öttl, T. Donner, T. Bourdel, M. Köhl and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 090402 (2007).
- [64] C. Paré and P. A. Bélanger, *Opt. and Quant. Electron.* **24**, S1051 (1992).
- [65] F. Impens, *Phys. Rev. A* **77** (2008).
- [66] See for example *App. Phys. B* **84**(4), special issue *Quantum Mechanics for Space Application: From Quantum Optics to Atom Optics and General Relativity* (2006).
- [67] The stationary phase method could also provide a way to calculate this integral, see [55].
- [68] This has been checked in a similar configuration by numerical simulations as reported in [58].
- [69] A detailed development of the first term of Eq. 11 using the stationary phase approximation leads to the value $\mathcal{B} = \Omega_R / \omega_\perp \sqrt{i\pi/2}$ [55]. However, in practice, as long as one is interested only in the shape of the wave function, the precise value of C is not necessary.
- [70] This treatment does not allow us to predict the wave function value in the vicinity of the classical radial turning-point $R_0 = \sqrt{-\epsilon}$ since the normalisation $A(R)$ diverges as $R \rightarrow R_0$. A more accurate treatment is thus needed to deal with the few trajectories starting at the edge of the rf knife. One possibility is to use the exact solution ψ of the radially symmetric two-dimensional inverted potential, as presented in appendix B.

Facteur de qualité d'un faisceau d'ondes de matière.

Résumé.

Les imperfections d'un faisceau d'ondes de matière ont été récemment caractérisées à travers la mesure d'un paramètre présenté comme le facteur de qualité du faisceau. Si ce paramètre permet de propager la largeur transverse d'un faisceau dans le régime paraxial, il n'est pas adapté pour la propagation d'ondes de matière dans un système d'optique atomique général. Un nouveau facteur de qualité, compatible avec la propagation la plus générale d'ondes de matière, est proposé.

Quality factor of a matter-wave beam

F. Impens

SYRTE, Observatoire de Paris, CNRS, UPMC, 61 Avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France

(Received 17 August 2007; published 25 January 2008)

Imperfections in matter-wave beams have been recently characterized experimentally through the measurement of a parameter presented as a beam quality factor. While this parameter is adequate to propagate the transverse width of a cylindrical atomic beam in the paraxial regime, it is not well suited for the description of matter waves in general atom-optical systems. A different quality factor, consistent with the general propagation of matter waves, is proposed.

DOI: [10.1103/PhysRevA.77.013619](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.77.013619)

PACS number(s): 03.75.Pp, 41.85.Ew, 31.15.xh

I. INTRODUCTION

There is a strong analogy between the propagation of light and matter waves [1]. It is manifest in the paraxial wave equation for the mode U of an electromagnetic field $\mathbf{E}(x, y, z) = U(x, y, z)e^{i(kz - \omega t)}\hat{\mathbf{e}}$ which takes the form of a bidimensional Schrödinger equation

$$2ik \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U(x, y, z) + F(x, y)U(x, y, z) \quad (1)$$

with a function $F(x, y)$ depending on the local refraction index. A spectacular achievement proving the similarity of the atomic and light fields was the realization of a quasicontinuous matter beam analog to a laser [2–9]. It has been shown recently that the extraction of a quasicontinuous atom laser from a Bose-Einstein condensate by a weak rf [10–13] or Raman [14] outcoupling involves the propagation through a discontinuous potential which degrades the beam collimation. To quantify this effect, Riou *et al.* [10] introduced a parameter presented as a quality factor. It allows one to estimate the transverse width of a cylindrical atomic beam falling in a uniform gravitational field and in the paraxial regime, i.e., with atoms strongly accelerated along one privileged direction.

However, an important difference between light and matter waves is that the latter generally do not propagate in this paraxial regime. This is typically the case for a condensate expanding after a sudden trap shut down, which can be viewed as a pulsed atom laser. Even for a weakly outcoupled atom laser, the paraxial approximation is often valid only after a certain propagation time [10] during which the beam must be treated in a more general framework. A comparison between the usual Schrödinger equation and the paraxial wave equation (1) shows that for these matter waves, time plays the role devoted to the axis of propagation O_z in paraxial optics, and that the transverse space is three dimensional and spanned by $\{\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\}$ instead of $\{\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y\}$.

To extend the concept of matter beam quality beyond the paraxial regime, it is necessary to reconsider its physical significance in optics. For cylindrical light beams, a quality factor compares the divergence of a nonideal beam to a standard set by a perfect Gaussian mode. It conveys the idea of degradation in the collimation or, equivalently, that of diminu-

tion in phase-space density. A relevant quality parameter should thus be left invariant during the propagation in perfect linear optical systems which preserve the beam collimation.

Such systems are modelled by a finite set of $ABCD$ matrices which describe linear input-output relations in the light beam phase space [15]. Their atomic counterpart is the quantum evolution under an Hamiltonian quadratic in position and impulsion, which involves similar relations with 3×3 $ABCD$ matrices [16,17]. The phase-space evolution of the atomic beam then also amounts to a time-dependent map in the arguments of the Wigner distribution [1]

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = W \left(\tilde{D}(\mathbf{r} - \xi) - \frac{1}{m} \tilde{B}(\mathbf{p} - m\phi), -m\tilde{C}(\mathbf{r} - \xi) + \tilde{A}(\mathbf{p} - m\phi), t_0 \right).$$

The tilde stands for the transposition, the vectors \mathbf{r}, \mathbf{p} are the position and impulsion, the matrices A, B, C, D and vectors ξ, ϕ are time-dependent parameters determined in Ref. [16]. Thanks to the unimodularity of the $ABCD$ matrices, the propagation under those quadratic Hamiltonians preserves the phase-space density and as such does not alter the atomic beam collimation. In this view, these Hamiltonians can be considered as perfect aberrationless atom-optical systems and should thus leave invariant a well-defined quality factor.

This is not the case for the parameter used so far to characterize the quality of matter beams [10,14]. This is disturbing, since its current definition would sometimes lead to ignoring possible improvements of the atom laser collimation through noncylindrical atom-optical elements such as astigmatic atomic lenses [18]. It seems thus useful to propose a quality factor for atom lasers which respects this invariance requirement. This is the main purpose of this paper.

II. QUALITY FACTOR OF A CYLINDRICAL BEAM

Let us first reconsider the definition of a quality factor for a cylindrical light beam, before extending this concept to atom optics. Partially coherent light beams can be described by means of a first-order field correlation function Γ relating the field amplitude at different points of planes transverse to the direction of propagation O_z . For a cylindrical beam, only a single transverse direction O_x needs to be considered in the correlation function:

$$\Gamma(x_1, x_2, z) = \langle E(x_1, z) E^*(x_2, z) \rangle.$$

The Wigner transform of this function provides a phase space picture of the beam

$$W(x, k_x, z) = \int dx' \Gamma\left(x + \frac{x'}{2}, x - \frac{x'}{2}, z\right) e^{-ik_x x'}$$

which can be used to define moments in the transverse position and wave vectors

$$\langle m(x, k_x, z) \rangle = \int dx dk_x m(x, k_x, z) W(x, k_x, z).$$

Because the beam is cylindrical and transverse $\langle x \rangle = \langle k_x \rangle = 0$. The moments $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ and $\Delta k_x = \sqrt{\langle k_x^2 \rangle}$ are, respectively, the transverse squared width and wave-vector dispersions of the beam.

Optimal collimation is achieved with a perfectly coherent Gaussian mode, for which the position and direction moments verify at the waist:

$$\Delta x|_{w, \text{Gaussian}} \Delta k_x|_{w, \text{Gaussian}} = \frac{1}{2}.$$

Partially coherent cylindrical light beams have a lesser collimation quantitatively estimated thanks to a quality factor M^2 [19]. This parameter can be expressed as a combination of moments left invariant during the propagation in aberrationless cylindrical optical systems

$$\frac{M^2}{2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle_z \langle k_x^2 \rangle_z - \langle x k_x \rangle_z^2}. \quad (2)$$

At the beam waist, this expression reduces to the product of transverse squared width and divergence, which has a clear interpretation in terms of phase-space dispersion

$$\frac{M^2}{2} = \Delta x|_w \Delta k_x|_w. \quad (3)$$

This is indeed the definition that has been adopted to express the quality of a matter beam [10,14], once taken into account De Broglie relation between momentum and wave vector $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$:

$$M_1^2 = \frac{2}{\hbar} \Delta x|_w \Delta p_x|_w. \quad (4)$$

This definition is consistent if one considers only matter-waves and atom-optical systems with cylindrical symmetry, and a propagation in the paraxial regime: the parameter M_1^2 is then unaltered by the propagation in aberrationless systems.

However, these conditions are far too restrictive to characterize the matter beams in most experiments, which generally involve potentials without any symmetry and a matter-wave propagation outside the paraxial regime. A three-dimensional quality factor M_3 , invariant under the whole set of possible $ABCD$ matrices, is then required. Following previous treatments of optical and quantum mechanical invariants [20–22], we now examine how to properly define this parameter.

III. QUADRATIC PROPAGATION INVARIANT FOR MATTER BEAMS

Our goal is to replace the parameter M_1 by an $ABCD$ -invariant combination of moments which still provides insight on the matter beam divergence. In the unidimensional case, the price to pay to express the product $\Delta x|_w \Delta k_x|_w$ (3) as an invariant expression (2) was to introduce an additional moment $\langle x k_x \rangle$ mixed in wave vector and position. This term can be viewed as an element of a variance matrix. Such matrices have been introduced in optics [20], and they can also characterize a partially coherent atomic beam [23]:

$$V = \begin{pmatrix} \Delta_{r,r} & \Delta_{r,v} \\ \tilde{\Delta}_{r,v} & \Delta_{v,v} \end{pmatrix}.$$

The matrices $\Delta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ are

$$\Delta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \langle a_x b_x \rangle & \langle a_x b_y \rangle & \langle a_x b_z \rangle \\ \langle a_y b_x \rangle & \langle a_y b_y \rangle & \langle a_y b_z \rangle \\ \langle a_z b_x \rangle & \langle a_z b_y \rangle & \langle a_z b_z \rangle \end{pmatrix}$$

with the vectors $\mathbf{a}, \mathbf{b} = \mathbf{r}, \mathbf{p}/m$. We now derive the variance evolution when the atomic field propagates under a Hamiltonian which is quadratic in position and impulsion,

$$H(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}) = \frac{\hat{\mathbf{p}} \beta(t) \hat{\mathbf{p}}}{2m} - \hat{\mathbf{r}} \alpha(t) \hat{\mathbf{p}} - \frac{m \hat{\mathbf{r}} \gamma(t) \hat{\mathbf{r}}}{2} - m \mathbf{g}(t) \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{f}(t) \cdot \hat{\mathbf{p}}. \quad (5)$$

$\alpha(t)$, $\beta(t)$, and $\gamma(t)$ are 3×3 matrices; $\mathbf{f}(t)$ and $\mathbf{g}(t)$ are three dimensional vectors. It follows from the equations of motion for the position and impulsion operators in the Heisenberg picture that the variance matrix V satisfies

$$\frac{dV}{dt} = \Gamma V + V \Gamma \quad \text{with} \quad \Gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \alpha(t) \end{pmatrix}.$$

The integration of this last equation involves the time-ordering operator T and the atom-optical $ABCD$ matrix [24]

$$M(t, t_0) = \begin{pmatrix} A(t, t_0) & B(t, t_0) \\ C(t, t_0) & D(t, t_0) \end{pmatrix} = T \left\{ \exp \left[- \int_{t_0}^t dt' \begin{pmatrix} \alpha(t') & \beta(t') \\ \gamma(t') & \alpha(t') \end{pmatrix} \right] \right\}.$$

The evolution of the variance matrix in the quadratic Hamiltonian (5) is then similar to the transformation laws in optics:

$$V(t) = M(t, t_0) V(t_0) \tilde{M}(t, t_0). \quad (6)$$

The most straightforward attempt to generalize the unidimensional quality factor M_1^2 to three dimensions would consist in considering norms and scalar products in Eq. (2) instead of single coordinates

$$\sqrt{\langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle \langle p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \rangle - \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle^2}.$$

At an instant satisfying $\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle^2 = 0$, the multidimensional equivalent of a “waist,” this expression would express the

greater phase space occupied by the matter beam. Unfortunately, this quantity is not left invariant in the propagation under a general quadratic Hamiltonian.

Nonetheless, it is possible to define the quality factor that respects the invariance requirement and still provides a meaningful insight into the beam phase space. We use the fact that the $ABCD$ matrices associated with matter wave propagation are symplectic, i.e., they verify at all times the following relation:

$$M(t, t_0)^{-1} = LM(t, t_0)\tilde{L} \Leftrightarrow L = \tilde{M}(t, t_0)LM(t, t_0) \quad (7)$$

with the matrix L :

$$L = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

This symplectic structure can indeed be used to generate a family of invariants [20–22]. The lowest order of this invariant family indeed generalizes the definition of the current matter beam quality factor

$$M_3^4(t) = \frac{4m^2}{3\hbar^2} \text{Tr}[V(t)LV(t)L]. \quad (8)$$

The constant is adjusted to yield $M_3=1$ for a Gaussian matter wave. Proving the invariance of this parameter is simple and identical to optics [20]. Combining relation (6) describing the variance matrix propagation with the cyclic property of the trace, the definition (8) can be recast as

$$M_3^4(t) = \frac{4m^2}{3\hbar^2} \text{Tr}[V(t_0)\tilde{M}(t, t_0)L\tilde{M}(t, t_0)V(t_0)\tilde{M}(t, t_0)LM(t, t_0)].$$

The symplectic relation (7) then gives the desired invariance of $M_3(t)$:

$$M_3^4(t) = \frac{4m^2}{3\hbar^2} \text{Tr}[V(t_0)LV(t_0)L] = M_3^4(t_0). \quad (9)$$

Its expression in terms of position and impulsion momenta is

$$\begin{aligned} M_3^4 = & \frac{4}{3\hbar^2} [\langle x^2 \rangle \langle p_x^2 \rangle - \langle xp_x \rangle^2 + \langle y^2 \rangle \langle p_y^2 \rangle - \langle yp_y \rangle^2 + \langle z^2 \rangle \langle p_z^2 \rangle \\ & - \langle zp_z \rangle^2 + 2(\langle xy \rangle \langle p_x p_y \rangle - \langle xp_y \rangle \langle yp_x \rangle) + 2(\langle xz \rangle \langle p_x p_z \rangle \\ & - \langle xp_z \rangle \langle zp_x \rangle) + 2(\langle yz \rangle \langle p_y p_z \rangle - \langle yp_z \rangle \langle zp_y \rangle)]. \end{aligned} \quad (10)$$

This expression can be rewritten in a more compact form as a sum of moments along single and multiple directions

$$M_3^4 = \frac{1}{3} [Q_x + Q_y + Q_z - A_{xy} - A_{xz} - A_{yz}],$$

$$Q_\eta = \frac{4}{\hbar^2} \langle \eta^2 \rangle \langle p_\eta^2 \rangle,$$

$$A_{\eta\eta'} = \frac{8}{\hbar^2} (\langle \eta p_\eta \rangle \langle \eta' p_{\eta'} \rangle - \langle \eta\eta' \rangle \langle p_\eta p_{\eta'} \rangle). \quad (11)$$

The quantities Q_η correspond to the fourth power of the previous matter-wave quality factor M_1 considered along the

three spatial directions, while the terms $A_{\eta\eta'}$ reflect correlations between different directions. If one chooses the coordinate system along the beam principal axis, the position momenta satisfy $\langle \eta\eta' \rangle = 0$ for $\eta \neq \eta'$, yielding a simpler expression for $A_{\eta\eta'}$

$$A_{\eta\eta'} = \frac{8}{\hbar^2} \langle \eta p_\eta \rangle \langle \eta' p_{\eta'} \rangle.$$

These two families of parameters have different physical significance and obey different constraints. The parameters Q_η are a manifestation of the beam divergence and are bounded below by the Heisenberg principle $Q_\eta \geq 1$. The terms $A_{\eta\eta'}$ reflect the beam asymmetry and can be of either sign, they cancel for spherical clouds. As previously announced, a Gaussian matter wave satisfies $M_3=1$.

This atomic beam quality factor thus reflects the departure from a fundamental Gaussian mode: a beam with a quality factor $M_3 \gg 1$ needs to be expanded onto several modes, which is likely to degrade the fringe pattern in an atomic interference experiment or to add additional noise in the atomic beam [25]. In principle, if these modes were put into a fully coherent and accurately controlled superposition, a high value of the quality factor would merely induce an additional complexity in the fringe pattern. This ideal situation is, however, not encountered in practice, since the coefficients of the mode decomposition are generally not accessible. For most precision interferometric measurement, a simple TEM₀₀ mode is indeed highly preferable. In the LIGO experiment, the beam quality factor of the laser involved is maintained at a value $M \approx 1$ thanks to a mode-cleaning step which filters out high order modes [26,27]. This quality factor requirement, reflecting the control on the beam structure, should also apply to accurate interferometers involving atom lasers.

It seems in general more advantageous to minimize the quantities Q_η which are directly related to the beam collimation. In this respect, the fact that the invariant quantity is M_3 instead of the coefficients Q_η has a practical interest. Considering for instance a cylindrical beam with given $Q_x = Q_y = Q_r = M_1^4$ and Q_z , it is possible to reduce Q_r while keeping the quality factor M_3 constant by increasing Q_z or by generating negative asymmetrical parameters $A_{\eta\eta'}$ [28]. One can thus trade some longitudinal collimation or cylindrical symmetry for a better transverse collimation. The corresponding $ABCD$ transformation could be implemented by astigmatic atom-optical lenses such as electromagnetic waves with an asymmetric wave front [18]. This possibility of improvement is ignored in Ref. [10,14], which wrongly seem to consider the transverse divergence measured at the waist (i.e., M_1^2) as an upper bound for the atom laser collimation in the subsequent propagation.

IV. CONCLUSION

A quality factor has been defined for matter waves [M_3 , Eq. (10)], which addresses the general propagation of

an atom laser. It generalizes the currently adopted beam quality factor [M_1 , Eq. (4)], indeed only appropriate to describe the propagation of matter waves in the paraxial regime and in cylindrical potentials, and which can lead to underestimating the optimal collimation of an atom laser. Higher order invariants proportional to $I_k = \left(\frac{m}{\hbar}\right)^{2k} \text{Tr}\{[V(t)LV(t)L]^k\}$ could also be considered to describe the atomic beam, but they do not provide the same insight into the phase-space density.

ACKNOWLEDGMENTS

The author is greatly indebted to Christian J. Bordé for enlightening discussions on atom optics and warm encouragement on this project. The author also thanks Yann Lecoq for helpful discussions and Emeric De Clercq for reading of the manuscript. This work is supported by DGA (Délégation Générale de l'Armement). SYRTE is a member of IFRAF (www.ifraf.org).

-
- [1] Ch. J. Bordé, *Fundamental Systems in Quantum Optics* (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [2] Ch. J. Bordé, *Ann. Phys. (Paris)* **20**, 477 (1995).
- [3] Ch. J. Bordé, *Phys. Lett. A* **204**, 217 (1995).
- [4] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 582 (1997).
- [5] I. Bloch, T. W. Hänsch, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3008 (1999).
- [6] F. Gerbier, P. Bouyer, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4729 (2001).
- [7] G. Cennini, G. Ritt, C. Geckeler, and M. Weitz, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 240408 (2003).
- [8] E. W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, *Science* **283**, 1706 (1999).
- [9] W. Guerin, J.-F. Riou, J. P. Gaebler, V. Josse, P. Bouyer, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 200402 (2006).
- [10] J.-F. Riou, W. Guerin, Y. LeCoq, M. Fauquembergue, V. Josse, P. Bouyer, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 070404 (2006).
- [11] M. Köhl, T. Busch, K. Mølmer, T. W. Hänsch, and T. Esslinger, *Phys. Rev. A* **72**, 063618 (2005).
- [12] T. Busch, M. Köhl, T. Esslinger, and K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **65**, 043615 (2002).
- [13] Y. LeCoq, J. H. Thywissen, S. A. Rangwala, F. Gerbier, S. Richard, G. Delannoy, P. Bouyer, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 170403 (2001).
- [14] M. Jeppesen, J. Dugue, G. Dennis, M. T. Johnsson, C. Figl, N. P. Robins, and J. D. Close, e-print arXiv:0704.029.
- [15] M. J. Bastiaans, *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 1227 (1986).
- [16] Ch. J. Bordé, *C. R. Ac. Sci. Paris, t.2, Série IV*, 509 (2001).
- [17] Ch. J. Bordé, *Metrologia* **39**, 435 (2001).
- [18] F. Impens, P. Bouyer, and C. J. Bordé, *Appl. Phys. B: Lasers Opt.* **84**, 603 (2006).
- [19] A. E. Siegman, *IEEE J. Quantum Electron.* **27**, 1146 (1991).
- [20] J. Serna, R. Martínez-Herreri, and P. Mejias, *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 1094 (1991).
- [21] A. J. Dragt, F. Neri, and G. Rangarajan, *Phys. Rev. A* **45**, 2572 (1992).
- [22] R. Simon and N. Mukunda, *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, 2440 (2000).
- [23] C. Antoine, Ph. D. thesis, Université Paris VI, Paris, <http://hal.archives-ouvertes.fr/00007967>, 2005.
- [24] Ch. J. Bordé, *Gen. Relativ. Gravit.* **36**, 475 (2004).
- [25] M. Johnsson, S. Haine, J. Hope, N. Robins, C. Figl, M. Jeppesen, J. Dugué, and J. Close, *Phys. Rev. A* **75**, 043618 (2007).
- [26] A. Abramovici *et al.*, *Science* **256**, 325–333 (1992).
- [27] N. Uehara, E. K. Gustafson, M. M. Fejer, and R. L. Byer, *Proc. SPIE* **2989**, 57 (1997).
- [28] J. Serna, P. Mejías, and R. Martínez-Herrero, *J. Mod. Opt.* **39**, 625 (1992).

Conclusion

Résultats.

Le travail théorique exposé dans ce mémoire a répondu à un double objectif : la conception et l'analyse de nouvelles expériences métrologiques impliquant des sources atomiques cohérentes, et le développement d'outils théoriques de portée générale pour appréhender leur propagation.

Sur le plan des propositions expérimentales, nous avons exposé deux dispositifs impliquant la lévitation d'un échantillon atomique cohérent par des impulsions électromagnétiques et permettant de réaliser un gravimètre ou une horloge. Dans la première expérience présentée, la lévitation est réalisée par une série périodique de miroirs lumineux intermittents. L'analyse des effets de structuration de ces miroirs sur le champ atomique a permis de dégager un paradoxe original impliquant l'effet Borrmann. Elle a également inspiré la conception du second dispositif, fondé une série d'interféromètres de Bordé-Ramsey maintenus en lévitation. Le trait d'union entre ces deux systèmes est la réalisation d'un résonateur à ondes de matière "impulsionnel" sensible à une double condition de résonance. Le confinement vertical de l'échantillon est réalisé dans l'espace des impulsions et non dans celui des positions, ce qui constitue un piégeage cohérent novateur à notre sens. Nous avons, par ailleurs, dégagé un procédé de focalisation par transmission de courbure d'un front d'onde lumineux sphérique. La distance focale de la lentille réalisée par ce procédé a été évaluée dans le cadre d'un traitement perturbatif, ainsi que les déplacements de fréquence résultant de la courbure des champs électromagnétiques utilisés.

Les développements théoriques de la seconde partie sont complémentaires. Nous avons étudié la propagation d'un échantillon cohérent dans l'espace des phases. La validité de la composante classique de l'équation de Wigner a été établie pour différents régimes d'interaction : régime de Thomas-Fermi, potentiel d'interaction en $1/r^2$. Nous avons exposé une démonstration alternative du théorème ABCD dans l'espace des phases. Nous avons également montré que l'évolution de moments du deuxième ordre, dictée par cette équation classique, conduisait à des prédictions correctes pour la dynamique des modes de basse énergie d'un condensat - en accord avec les résultats de méthodes variationnelles

- . Un second travail théorique a consisté à étendre la méthode ABCD de propagation de nuages atomiques au delà du régime linéaire. Cette extension, inspirée de développements théoriques en optique non-linéaire, repose sur un traitement perturbatif du terme d'interaction. Elle est donc adaptée à la propagation d'échantillons relativement dilués. Une troisième étude, menée en collaboration avec le groupe d'optique atomique d'Orsay, porte sur le développements d'outils théoriques pour appréhender l'extraction et la propagation de lasers à atomes. Le profil du faisceau atomique cohérent extrait à partir d'un condensat est altéré par le processus d'extraction et par les interactions atomiques qui créent une discontinuité de potentiel. Cette discontinuité est traitée par une approximation sur les intégrales de chemins, ainsi que par l'utilisation d'une équation intégrale ("règle magique") adaptée à la résolution d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites. Par ailleurs, le calcul de la fonction d'onde extraite en régime stationnaire est simplifié par l'emploi d'un formalisme (intégrale de Kirchhoff, WKB) et d'approximations (iconale, de phase stationnaire, paraxiale) issus de l'optique. Enfin, nous avons exposé une généralisation du facteur de qualité utilisé jusqu'ici pour caractériser les lasers à atomes dans le régime paraxial. Un autre invariant de propagation a été proposé pour décrire le faisceau, qui ne requiert pas les hypothèses de symétrie cylindrique et de propagation paraxiale nécessaires pour utiliser le facteur de qualité précédent.

Perspectives.

Nous présentons ici plusieurs axes de continuation du travail présenté.

Les développements théoriques de la seconde partie ouvrent des perspectives intéressantes. Les outils présentés pour l'extraction du laser à atomes pourraient être appliqués à des situations plus complexes impliquant, par exemple, plusieurs résonateurs à ondes de matière couplés par un laser à atomes. Par ailleurs, l'inclusion des interactions de façon non-perturbative dans le formalisme ABCD de l'optique atomique ainsi que l'identification d'un facteur de qualité invariant en régime de propagation non-linéaire constitueraient une extension pertinente des résultats présentés.

En fait, la prolongation la plus percutante de ce travail est la réalisation des propositions expérimentales présentées : la balle est désormais dans le camp des expérimentateurs ! Le senseur à "impulsion-miroir" est en cours de développement dans le cadre du projet IFRAF "BIARO", auquel je souhaite apporter un soutien actif. L'interféromètre multi-arches en lévitation, susceptible de conduire à la réalisation d'une horloge optique, pourrait également faire l'objet d'une réalisation expérimentale.

Signalons cependant que la modélisation de cette expérience devrait auparavant faire l'objet d'approfondissements, en particulier d'une extension aux échantillons atomiques de température finie. Ceci nous permettrait de déterminer l'influence de la température sur la figure d'interférences observée, et donc le niveau de refroidissement compatible avec l'obtention d'une horloge optique par les interféromètres en lévitation. Les atomes candidats devront à la fois être susceptibles d'être refroidis à la température requise et posséder une raie suffisamment fine spectralement. Ces deux conditions sont restrictives, et nous pensons que l'Ytterbium et le Strontium sont à l'heure actuels les atomes les plus prometteurs. Sur le plan théorique, l'analyse du résonateur à ondes de matière constitué par les interféromètres multi-arches pourrait être complétée par le calcul analytique de la fonction d'onde macroscopique associée à l'échantillon. Ce calcul, qui fera l'objet d'une publication ultérieure, a été mené lorsque les conditions de résonance sont vérifiées. Il devrait permettre, par extension, d'exprimer analytiquement l'affinement des franges d'interférences multi-ondes au fur et à mesure de l'interrogation des atomes par les impulsions lumineuses successives.

Les résonateurs à ondes de matière exposés ont jusqu'ici été envisagés dans un fonctionnement passif, c'est à dire qu'ils affinent un mode dans l'espace des impulsions, mais sans réaliser de gain. Il serait intéressant de considérer le phénomène d'amplification stimulée dans ces systèmes, en impliquant par exemple un chargement d'atomes continu. Ceci pourrait conduire à l'obtention de résonateurs actifs et d'un laser à atomes reposant sur l'amplification cohérente d'un mode impulsionnel. Ce principe de fonctionnement trancherait avec celui des lasers à atomes usuels, impliquant l'extraction d'un mode à partir d'un condensat par un couteau électromagnétique, mais pas l'amplification directe d'un mode du champ atomique¹.

1. Notons toutefois qu'une amplification d'ondes de matière a été réalisée grâce au phénomène de superradiance par Kozuma *et al.* [121] puis par Ketterle *et al.* [122]

Fonctions de cohérence pour différents états quantiques du champ atomique et électromagnétique.

Nous détaillons ici davantage les notions de cohérence pour un champ électromagnétique et pour un champ atomique. Nous établissons le lien entre détection simultanée et fonction de corrélation. Nous détaillons ensuite les valeurs de ces fonctions pour différents états du champ atomique, en reprenant les conclusions de Glauber [16].

A.1 Fonctions de corrélation et détection à plusieurs photons.

Après un bref rappel de la quantification du champ électromagnétique, nous exposons les opérateurs associés à la détection d'un ou plusieurs photons du champ électromagnétique.

A.1.1 Rappels sur le champ électromagnétique quantifié.

Les champs électromagnétiques peuvent être déduit du potentiel vecteur $A(\mathbf{r}, t)$. Lors de la quantification de ce potentiel, on distingue deux composantes associées respectivement aux opérateurs d'annihilation et de création :

$$\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}) = \sum_l \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) \hat{b}_l \quad \hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}) = \sum_l \mathbf{u}_l^*(\mathbf{r}) \hat{b}_l^\dagger \quad (\text{A.1})$$

En représentation de Heisenberg, les composantes $\hat{A}^{(+)}$ et $\hat{A}^{(-)}$ acquièrent une dépendance temporelle associée à des fréquences respectivement positives et négatives :

$$\hat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \mathbf{u}_l(\mathbf{r}) \hat{a}_l e^{-i\omega_l t} \quad \hat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \sum_l \mathbf{u}_l^*(\mathbf{r}) \hat{a}_l^\dagger e^{+i\omega_l t} \quad (\text{A.2})$$

En utilisant les relations entre champ électrique et potentiel vecteur :

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.3})$$

on voit que le champ électrique comporte alors une composante de fréquence positive $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ et une composante de fréquence négative $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ associées respectivement à la destruction et à la création de photons :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \sum_l (\nabla \cdot \mathbf{u}_l(\mathbf{r})) \hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \sum_l (\nabla \cdot \mathbf{u}_l^*(\mathbf{r})) \hat{a}_l^\dagger e^{+i\omega_l t} \quad (\text{A.4})$$

A.1.2 Cohérence de premier ordre.

Commençons par établir la fonction de corrélation associée à un détecteur unique. Le signal donné par un détecteur idéal est proportionnel à la probabilité de détection par unité de temps d'un photon unique au point \mathbf{r} :

$$\sum_f |\langle f | \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle|^2 = \langle i | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle \quad (\text{A.5})$$

Comme le processus de détection peut donner lieu à un état final arbitraire, nous avons sommé sur tous les états finaux possibles et utilisé la relation de fermeture. Cette expression apparaît comme l'équivalent quantique de l'intensité classique $I(\mathbf{r}, t) = \langle E(\mathbf{r}, t) E^*(\mathbf{r}, t) \rangle$. Bien que l'intensité classique ne fasse intervenir le champ électrique qu'en un seul point, nous avons vu qu'il était utile de connaître la corrélation du champ classique entre deux points d'espace-temps distants afin de rendre compte des propriétés d'interférence. De façon analogue, il est nécessaire de pouvoir accéder aux corrélations quantiques du champ entre différents points d'espace temps pour décrire les phénomènes d'interférence à un niveau quantique. Nous définissons donc la fonction de corrélation suivante à deux champs :

$$\boxed{G^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle} \quad (\text{A.6})$$

A.1.3 Cohérences d'ordre plus élevé.

Si la fonction précédente permet d'étudier la détection de photons en un seul point de l'espace, elle est insuffisante pour caractériser le comportement de deux détecteurs distants. Pour modéliser une détection simultanée idéale, nous exprimons cette fois-ci la probabilité de détection simultanée de deux photons uniques en deux points d'espace-temps distants (\mathbf{r}_1, t_1) et (\mathbf{r}_2, t_2) :

$$\sum_f |\langle f | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) | i \rangle|^2 = \langle i | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) | i \rangle \quad (\text{A.7})$$

La fonction de corrélation décrivant les processus de détection à deux photons admet donc pour expression :

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2, \mathbf{r}_3, t_3, \mathbf{r}_4, t_4) = \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_3, t_3) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_4, t_4) \rangle \quad (\text{A.8})$$

Encore une fois, nous avons gardé des degrés de liberté supplémentaires pour pouvoir rendre compte d'effets liés à la superposition du champ avec lui même.

De façon plus générale, les corrélations permettant de décrire la détection simultanée de n photons s'expriment :

$$G^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1, \dots, \mathbf{r}_{2n}, t_{2n}) = \langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_n, t_n) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_{n+1}, t_{n+1}) \dots \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_{2n}, t_{2n}) \rangle \quad (\text{A.9})$$

A.2 Fonctions de cohérence pour quelques états du champ atomique.

Nous détaillons ici les fonctions de corrélation de premier et de second ordre, prises à des instants égaux, pour différents types de nuage atomique : état nombre, ou gaz (idéal) de bosons à l'équilibre.

A.2.1 Cohérences d'un condensat dans un état-nombre.

L'évaluation des cohérences est aisée pour une source atomique dans un état de Fock pour le champ atomique. Rappelons que l'opérateur champ s'exprime alors en représentation de Heisenberg :

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \phi_0(\mathbf{r}, t) \hat{a}_0 + \sum_{i>0} \phi_i(\mathbf{r}, t) \hat{a}_i \quad (\text{A.10})$$

Lorsque l'on moyenne avec un état de Fock $|N\rangle = 1/\sqrt{N!} \hat{a}_0^{\dagger N} |0\rangle$, seul l'opérateur associé au mode fondamental intervient dans les fonctions de corrélations :

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= N \phi_0^*(\mathbf{r}, t) \phi_0^*(\mathbf{r}', t) \\ G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= N(N-1) \phi_0^*(\mathbf{r}, t) \phi_0^*(\mathbf{r}', t) \phi_0(\mathbf{r}, t) \phi_0(\mathbf{r}', t) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Les cohérences normalisées correspondantes $g^{(1)}, g^{(2)}$ vérifient alors $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1, g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1 - 1/N$. Ces fonctions de corrélations vérifient donc avec une très bonne approximation la cohérence précé-

dente. Il en est de même pour les cohérences d'ordres supérieurs $g^{(i)}, i \ll N$. Un condensat dans un état de Fock est donc, avec une très bonne approximation, une source atomique cohérente. De même que les lasers optiques où une inversion de population est réalisée, il s'agit d'un système hors équilibre.

A.2.1.1 Cohérences d'un gaz de Bosons idéal à l'équilibre.

Nous examinons ici les fonctions de corrélations pour différentes phases du nuage atomique. Il est possible de distinguer trois régimes suivant la valeur de la densité ρ relativement à la densité critique $\rho_c = (2\pi\hbar/(mk_B T))^{-3/2} = \lambda_T^{-3}$ caractérisant le seuil de condensation :

- Gaz très dilué et non condensé $\rho \ll \rho_c$. Ce sont la longueur d'onde thermique $\lambda_T = 2\pi\hbar/(mk_B T)$ et la fugacité $z = e^{\mu/(k_B T)}$ qui fixent la portée des corrélations qui s'expriment selon :

$$g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim e^{-\sqrt{4\pi(1-z)}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/\lambda_T} \quad g^{(2)}(\mathbf{r}) = 1 + |g^{(1)}(\mathbf{r})|^2 \quad (\text{A.12})$$

- Gaz juste au seuil de condensation $\rho = \rho_c$ mais sans fraction condensée. La longueur de corrélation diverge et donne lieu à une décroissance asymptotique en $1/r$:

$$g_{crit.}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad g^{(2)}(\mathbf{r}) = 1 + |g^{(1)}(\mathbf{r})|^2 \quad (\text{A.13})$$

- Gaz comportant une fraction condensée $\rho > \rho_c$. En N_c le nombre d'atomes condensés, on obtient cette fois-ci une valeur non-nulle de la corrélation sur tout le volume du condensat :

$$\begin{aligned} g_{cond.}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{N_c}{N} \phi_0(\mathbf{r})\phi_0^*(\mathbf{r}') + \left(1 - \frac{N_c}{N}\right) g_{crit.}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 1 + |g_{crit.}^{(1)}(\mathbf{r})|^2 - \frac{N_c^2 |\phi_0(\mathbf{r})|^2 |\phi_0^*(\mathbf{r}')|^2}{G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r})G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r})} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

On peut tirer des résultats précédents les conclusions suivantes. Pour des sources atomiques thermique, la décroissance exponentielle des fonctions de corrélations est très similaire à celle obtenue pour un champ électromagnétique incohérent sur la figure 1.1. On retrouve notamment le phénomène de "bunching" obtenu pour de la lumière incohérente car $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 2$. Il n'y a pas de corrélations à longue portée puisque $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow 0$ quand $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow +\infty$.

Une fois passé le seuil de condensation, la portée des corrélations devient de l'ordre de la taille du condensat : la fonction de corrélation $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ reste non nulle tant que \mathbf{r} et \mathbf{r}' sont pris dans le condensat. Pour obtenir une source parfaitement cohérente au premier ordre $g^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1$, il est

nécessaire d'obtenir un condensat pur. La cohérence du second ordre est reliée au ratio de la densité locale de condensat $\rho_{cond.}(\mathbf{r})$ sur la densité totale $\rho(\mathbf{r})$: $g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 2 - \left(\frac{\rho_{cond.}(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})} \right)^2$. Pour obtenir une source parfaitement cohérente au second ordre, il est nécessaire de maintenir $\rho_c(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$, ce qui ne peut être vérifié que sur le centre du piège. La présence d'atomes non-condensés entraîne un phénomène de "bunching".

Nous avons limité notre discussion à un gaz parfait. Un traitement plus complet devrait prendre en compte les interactions atomiques [16]. En présence d'interactions, les corrélations de densité résultent d'une compétition entre deux mécanismes contradictoires : la tendance des bosons à se grouper en un même point de l'espace, et les interactions répulsives "de noyau dur" tendant à écarter les atomes des uns des autres. La cohérence d'un nuage à l'équilibre devient alors une fonction à la fois de la température et de la longueur de diffusion associée au potentiel d'interaction. Cependant, il est notable que pour ce qui est de la cohérence spatiale, l'effet des interactions est souvent masqué par celui des quasi-excitations de Bogoliubov à température finie. Pour la cohérence temporelle et les fluctuations de phase, l'effet de la non-linéarité est en revanche important.

Rappels de theorie des champs.

B.1 Principe de moindre action.

Le Lagrangien adapté à la description d'un système de champs en interaction dépend de la nature des particules considérées et de leurs caractéristiques propres (telles que leur spin, leur isospin...). La recherche de Lagrangiens admissibles pour les particules du modèle standard est un objectif majeur de la physique théorique. A partir du Lagrangien, on définit une quantité appelée action :

$$S = \int dt L(t) = \int dt d^3\mathbf{r} L(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi) \quad (\text{B.1})$$

Le mouvement du champ $\phi(\mathbf{r}, t)$ de la particule obéit au principe de moindre action, c'est à dire que la valeur de ce champ minimise la quantité précédente. Les quantités S , $L(t)$ et $L(\phi, \partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi)$ sont désignées respectivement comme l'action, le Lagrangien et la densité de lagrangien. En théorie relativiste des champs, il est usuel de privilégier une écriture de cette relation à l'aide de points d'espace-temps $x = (\mathbf{r}, t)$ telle que la coordonnée "temps" ne joue plus un rôle particulier :

$$S = \int d^4x L(\phi, \partial_\mu\phi) \quad (\text{B.2})$$

Les équations du mouvement traduisent le principe de moindre action, entraînant la stationnarité de l'action par rapport à une variation infinitésimale du champ. Elles portent le nom d'équation d'Euler-Lagrange :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L(\phi, \partial_\mu\phi)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = \frac{\partial L(\phi, \partial_\mu\phi)}{\partial\phi} \quad (\text{B.3})$$

Si le Lagrangien contient plusieurs champs ϕ_a, ϕ_b, \dots , chaque champ donne lieu à une telle équation. Cette forme a l'avantage de donner lieu à des expressions covariantes, c'est à dire invariantes par changement de référentiel suivant des accélérations et des rotations. Une action covariante satisfait ainsi le principe de relativité restreinte qui prescrit que les lois de la physique ont la même forme dans tous les référentiels. Cependant, comme les outils théoriques et les expériences proposées dans ce mémoire se situent essentiellement dans un cadre non-relativiste, nous adopterons le plus souvent

des conventions où nous distinguons clairement la coordonnée temporelle des coordonnées spatiales.

B.2 Opérateur d'ordonnement temporel.

Nous effectuons ici un rappel sur l'opérateur d'ordonnement temporel T . L'opérateur d'évolution associé à un Hamiltonien \hat{H}_0 indépendant du temps s'écrit :

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t - t_0)\hat{H}_0\right) \quad (\text{B.4})$$

En effet, on vérifie que l'état quantique :

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (\text{B.5})$$

est solution de l'équation de Schrödinger :

$$\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_0 |\psi(t)\rangle \quad (\text{B.6})$$

Lorsque le Hamiltonien dépend du temps, la résolution n'est pas aussi simple, du fait de la non-commutation des opérateurs Hamiltoniens à des instants différents. Néanmoins, on peut donner une solution formelle de l'équation de Schrödinger :

$$\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (\text{B.7})$$

en définissant la série suivante, inventée par Freeman Dyson, et portant son nom :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & \left(1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}(t_1) + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) \right. \\ & \left. + \frac{1}{(i\hbar)^3} \int_{t_0}^t dt_3 \int_{t_0}^{t_3} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_3) \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) + \dots \right) |\psi(t_0)\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Il faut prendre garde à l'ordre des opérateurs : le Hamiltonien associé à l'instant le plus tôt est toujours le plus à droite. Chaque terme d'intégration multiple comporte une zone d'intégration "en triangle". On peut réécrire ces termes en intégrant sur un "carré" et en divisant par le facteur correspondant au nombre de fois où on compte la même configuration. Si l'on procède naïvement le terme

$$\frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1)$$

deviendrait :

$$\frac{1}{2!} \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1)$$

Mais attention ! Ce résultat est faux, puisque l'on n'a pas comme avant le Hamiltonien de l'instant le plus tôt sur la droite. Il faut respecter l'ordre des opérateurs. C'est pourquoi on utilise l'opérateur T qui ordonne les opérateurs en fonction de l'instant qui leur est associé :

$$T \left[\hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) \right] = \begin{cases} \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) & \text{si } t_2 > t_1 \\ \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) & \text{si } t_1 > t_2 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

L'expression correcte de ce terme d'ordre 2 est donc :

$$\frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) = \frac{1}{2!} \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 T \left[\hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) \right]$$

En fait, le comptage de l'intégration multiple fait sortir un facteur $1/n!$ quant on intègre sur les n coordonnées temporelles. Il n'est pas très difficile de s'en convaincre : dans l'intégration, on compte $n!$ fois le même configuration correspondant à toutes les permutations possibles des différents instants. Une fois correctement réécrit, le terme d'ordre n est donc de la forme :

$$T \left[\frac{1}{n!} \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_{t_0}^t dt_n \dots \int_{t_0}^{t_n} dt_1 \hat{H}(t_n) \dots \hat{H}(t_1) \right] \quad (\text{B.10})$$

Quand on effectue la sommation de tous les termes, on voit apparaître une exponentielle :

$$|\psi(t)\rangle = T \left[\exp \left(\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') \right) \right] |\psi(t_0)\rangle \quad (\text{B.11})$$

Ceci explique la forme générale de l'opérateur d'évolution :

$$\boxed{U(t, t_0) = T \left[\exp \left(\frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t') \right) \right]} \quad (\text{B.12})$$

Modélisation des interactions atomiques à basse température.

Nous abordons ici la modélisation des interactions par un pseudo-potential dans les nuages de Bosons.

C.1 Collision à deux corps.

Puisque ce sont des collisions à deux corps qui expliquent le comportement macroscopique des gaz d'atomes froids dilués [123, 44], il est naturel de considérer le problème de la diffusion sur un système de deux particules traitées en première quantification. Pour simplifier, nous commençons par supposer que ces particules sont discernables et sans degrés de liberté internes, si bien que le système est entièrement décrit par une fonction d'onde à deux corps $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. En fait, comme les mouvements du centre de masse et de la position relative des deux particules sont découplés, la collision peut-être décrite au moyen d'une fonction d'onde en la seule position relative $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2$.

Le Hamiltonien associé au mouvement relatif est de la forme (avec $m_r = m/2$ masse réduite) :

$$\hat{H}_{\mathbf{r}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_r} + V(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{C.1})$$

Le processus de diffusion est en fait caractérisé par le spectre et les états propres de ce Hamiltonien définis par l'équation :

$$\left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_r} + V(\hat{\mathbf{r}}) \right] \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} \quad (\text{C.2})$$

Pour la plupart des nuages d'atomes froids produits expérimentalement, la contribution dominante à la dynamique du nuage provient d'un potentiel isotrope : le potentiel de Van der Waals. La particularité de l'évolution d'une fonction d'onde dans un tel potentiel radial $V(r)$ est que le moment cinétique orbital est conservé. Les fonctions harmoniques sphériques sont alors une base particuliè-

rement adaptée pour décomposer la fonction propre $\phi_{\mathbf{k}}$:

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\mathbf{r}) \frac{u_{k,l,m}(\mathbf{r})}{r} \quad (\text{C.3})$$

Comme en mécanique du point, lors du mouvement dans un potentiel radial, la conservation du moment cinétique se traduit par un potentiel effectif répulsif en $\hat{\mathbf{L}}^2/r^2$ (\mathbf{L}^2 désigne le carré de la norme du moment cinétique orbital.). Cette contribution donne une énergie élevée aux fonctions radiales $u_{k,l,m}(\mathbf{r})$ associées à un entier $l > 0$. L'ordre de grandeur typique de cette énergie supplémentaire est de $\epsilon_l = \hbar^2 l(l+1)/(2m_r b^2)$ pour une diffusion dans l'onde associée à l . Aux températures T ultra-froides telles que $k_B T \ll \epsilon_1 = \hbar^2/(2m_r b^2)$, seule la diffusion dans l'onde $l = 0$ est accessible. En fait cette propriété n'est vraie que *pour des potentiels décroissant suffisamment rapidement à l'infini*. Par décroissance rapide, nous entendons une décroissance au moyen en $1/r^n$ avec $n > 3$. Cette propriété a deux conséquences importantes.

C.2 Pseudo-potentiel de contact.

A basse énergie, la fonction propre $\psi_{\mathbf{k}}$ est donc de la forme :

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a \frac{e^{ikr}}{r} \quad (\text{C.4})$$

Cette relation semble montrer que la collision n'est alors plus caractérisée que par un seul paramètre a , appelé longueur de diffusion. On peut en fait montrer que pour des potentiels à décroissance strictement plus rapide que $1/r^3$ et en régime dilué $n|a|^3 \ll 1$, le comportement macroscopique du gaz ne dépend que de cette longueur a et pas de la forme précise du potentiel d'interaction. Tout autre potentiel associé à une longueur de diffusion identique est donc approprié pour décrire le gaz. La modélisation la plus simple est celle d'une interaction de contact :

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r})} \quad (\text{C.5})$$

La constante g est reliée à la longueur de diffusion par la relation :

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (\text{C.6})$$

Ce pseudo-potentiel donne des résultats corrects seulement si la fonction d'onde considérée pour la diffusion est suffisamment régulière en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. On utilise également un autre pseudo-potentiel applicable à des fonctions d'ondes moins régulières :

$$V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = Ng\delta(\mathbf{r})\frac{\partial r\psi(\mathbf{r})}{\partial r} \tag{C.7}$$

C.3 Au delà de l'approximation de champ moyen : quelques méthodes.

La décomposition (1.48) du champ :

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}, t)\hat{a}_0 + \tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t)$$

mène à un système d'équations d'évolution couplées pour les champs $\hat{\Psi}_0(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}, t)\hat{a}_0$ et $\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t)$. Ce cas général est très complexe. Plusieurs méthodes permettent cependant de simplifier la résolution de ce système. La simplification la plus couramment utilisée provient d'une approximation de type "champ moyen" appliquée au champ atomique "thermique". Cette approximation, couramment appelée approximation de Hartree-Fock-Bogoliubov, consiste à remplacer les produits de deux champs du type $\tilde{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ par leur valeur moyenne. Elle permet ainsi de ramener les termes quartiques à des termes quadratiques. Une seconde approche consiste à considérer l'évolution de la matrice densité associée à la fraction condensée en prenant la trace des degrés de libertés associés aux modes thermiques. Cette méthode permet d'obtenir une "équation-maître" fermée pour la fraction condensée [124]. L'interaction du condensat par la fraction thermique fait alors intervenir des super-opérateurs similaires à ceux qui agissent sur la matrice densité d'un atome à deux niveaux pour rendre compte de l'émission spontanée [14]. Ces deux méthodes donnent lieu à des équations dont il semble difficile d'extraire des prédictions analytiques.

Evolution d'un système à deux niveaux dans un champ électromagnétique

Le potentiel d'interaction fait intervenir l'opérateur dipolaire $\hat{\mathbf{d}} = |e\rangle\langle\hat{\mathbf{r}}|$:

$$V = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E} = |e\rangle\langle\hat{\mathbf{r}}| \cdot \mathbf{E} \quad (\text{D.1})$$

Le Hamiltonien total du système s'écrit simplement :

$$\hat{H} = \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| + \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| - \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{D.2})$$

En reprenant les notations du système à deux niveaux utilisées précédemment, on écrit facilement les équations couplées satisfaites par les composantes de l'état atomique :

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{b}(t) &= \hbar\omega_b b(t) + V_{ba}a(t) \\ i\hbar\dot{a}(t) &= V_{ba}^*b(t) + \hbar\omega_a a(t) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

L'élément de matrice V_{ab} s'écrit simplement :

$$V_{ba} = \langle a|V|b\rangle = -\hbar\Omega_{ba} \left(\frac{e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}}{2} \right) \quad (\text{D.4})$$

où l'on a défini la pulsation de Rabi Ω_{ab} comme :

$$\Omega_{ba} = -\frac{\langle b|\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0|a\rangle}{\hbar} \quad (\text{D.5})$$

Afin de factoriser la différence temporelle rapide, nous effectuons la première transformation unitaire :

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_b(t-t_1)} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_a(t-t_1)} \end{pmatrix} |\Psi_1(t)\rangle \quad (\text{D.6})$$

Cette première transformation unitaire fait explicitement apparaître dans les équation du mouvement pour les amplitudes une composante résonante (lente) et une composante antirésonante (rapide). Une intégration formelle des équations donne ainsi :

$$\tilde{b}(t) = \tilde{b}(t_0) - i\Omega_{ba} \int_{t_0}^t dt' \tilde{a}(t') e^{i(\omega_b - \omega_a)t'} \left(\frac{e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}}{2} \right) \quad (\text{D.7})$$

Si la fréquence du champ électromagnétique excitant la transition est proche de la fréquence de résonance, c'est à dire si $\omega \simeq \omega_{ba} = \omega_b - \omega_a$, l'intégration temporelle met en jeu une exponentielle oscillant lentement, à la fréquence $\delta = \omega - \omega_{ba}$ et une composante d'oscillation rapide $\omega + \omega_{ba}$. L'approximation des ondes tournantes consiste à considérer que ce dernier terme, d'évolution beaucoup plus rapide que les composantes \tilde{b} et \tilde{a} se moyenne rapidement et donne une contribution nulle dans l'intégrale de l'équation précédente. Afin que cette approximation soit valide, il est nécessaire que la composante non résonante oscille plusieurs fois sur l'échelle de temps T déterminant une variation typique de \tilde{a} , \tilde{b} :

$$T \gg \frac{1}{\omega_b - \omega_a} \quad (\text{D.8})$$

Une fois le terme non-résonant éliminé, les équations satisfaites par les composantes du spineur deviennent :

$$\begin{aligned} i\dot{b}_1(t) &= \Omega_{ba} e^{-i(\delta t + \phi)} a_1(t) \\ i\dot{a}_1(t) &= \Omega_{ba}^* e^{i(\delta t + \phi)} b_1(t) \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Dans la nouvelle représentation, le mouvement du spineur atomique est régi par le Hamiltonien effectif :

$$\hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\Omega_{ba} e^{-i(\delta t + \phi)} \\ \hbar\Omega_{ba} e^{-i(\delta t + \phi)} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.10})$$

L'élimination de la dépendance temporelle d'un tel Hamiltonien est classique. Elle s'effectue par passage dans un repère tournant associé à une rotation autour de l'axe Oz à la fréquence d'oscillation des termes dépendant du temps. En introduisant l'opérateur de rotation :

$$R(\mathbf{n}, \theta) = e^{i(\sigma \cdot \mathbf{n}\theta)} \quad (\text{D.11})$$

on effectue sur le spineur la transformation suivante :

$$|\Psi_1(t)\rangle = U_2(t, t_1) |\Psi_2(t)\rangle \quad \text{où} \quad U_2(t, t_1) = R(\mathbf{z}, \delta(t - t_1)) \quad (\text{D.12})$$

Ce changement de représentation se traduit par une modification de l'équation de Schrödinger pour le ket $|\Psi_2(t)\rangle$:

$$i\hbar \frac{d|\Psi_2(t)\rangle}{dt} = \left[U_2^\dagger \hat{H}_1 U_2 - i\hbar U_2^\dagger \frac{dU_2}{dt} \right] |\Psi_2(t)\rangle \quad (\text{D.13})$$

Le Hamiltonien effectif est désormais indépendant du temps :

$$\hat{H}_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} -\delta & \Omega_{ba} e^{-i\phi} \\ \Omega_{ba}^* e^{i\phi} & \delta \end{bmatrix} \quad (\text{D.14})$$

La diagonalisation de cette matrice est un thème récurrent dans les ouvrages de mécanique quantique [14]. En adoptant des convention usuelles [68], nous en rappelons les valeurs propres :

$$\lambda_{\pm} = \pm \hbar \Omega_r \quad \text{avec} \quad \Omega_r = \sqrt{\Omega_{ba}^2 + \delta^2} \quad (\text{D.15})$$

ainsi que la base de vecteurs propres associés :

$$|\lambda_+\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |b_2\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |a_2\rangle \quad (\text{D.16})$$

$$|\lambda_-\rangle = -\sin \frac{\theta}{2} |b_2\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |a_2\rangle \quad (\text{D.17})$$

où l'angle θ est défini à partir des relations :

$$\sin \theta = \frac{\Omega_{ba}}{\Omega_r} \quad \cos \theta = \frac{-\delta}{\Omega_r} \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (\text{D.18})$$

Le problème de l'évolution du système à deux niveaux initialement dans l'état associé au ket $|\Psi(t_0)\rangle$ est désormais ramené à un passage dans la représentation adaptée et à une projection du ket correspondant sur la base de vecteurs propres. On procède donc selon le schema suivant, traditionnel en physique quantique :

- Passage du ket initial dans la nouvelle représentation : $|\Psi_2(t_0)\rangle = U_2^\dagger(t_0, t_1) U_1^\dagger(t_0, t_1) |\Psi(t_0)\rangle$.
- Projection du ket $|\Psi_2(t_0)\rangle$ sur la base de vecteurs propres $|\lambda_{\pm}\rangle$: $|\Psi_2(t_0)\rangle = a_{0+} |\lambda_+\rangle + a_{0-} |\lambda_-\rangle$
- Evolution temporelle linéaire : $|\Psi_2(t)\rangle = a_{0+} e^{i\lambda_+(t-t_0)} |\lambda_+\rangle + a_{0-} e^{i\lambda_-(t-t_0)} |\lambda_-\rangle$.
- Retour dans la représentation initiale : $|\Psi_2(t)\rangle = U_1(t, t_1) U_2(t, t_1) |\Psi_2(t)\rangle$.

Les calculs correspondants sont sans difficultés. La relation entre le ket de sortie et le ket définissant l'état initial est bien sûr linéaire du fait du théorème de superposition en mécanique quantique. Tous calculs faits, on obtient la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} b(t_0 + \tau) \\ a(t_0 + \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\cos(\frac{\Omega_r \tau}{2}) - i \cos \theta \sin(\frac{\Omega_r \tau}{2})] e^{-i\delta \frac{\tau}{2}} & -i \sin \theta \sin(\frac{\Omega_r \tau}{2}) e^{-i\delta \frac{\tau}{2}} e^{-i\delta(t_0 + \phi)} \\ -i \sin \theta \sin(\frac{\Omega_r \tau}{2}) e^{i\delta \frac{\tau}{2}} e^{i\delta(t_0 + \phi)} & [\cos(\frac{\Omega_r \tau}{2}) - i \cos \theta \sin(\frac{\Omega_r \tau}{2})] e^{i\delta \frac{\tau}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(t_0) \\ a(t_0) \end{pmatrix} \quad (\text{D.19})$$

Calcul heuristique de la sensibilité du gravimètre.

L'objet de cet appendice est de donner une expression approchée de la fraction du nuage atomique préservée en lévitation après N rebonds sur les "impulsions-miroir" du dispositif exposé au chapitre 2. Comme dans la partie 2.1 de ce chapitre, le mouvement des atomes est pris comme unidimensionnel selon l'axe vertical : $\mathbf{p} = p\mathbf{z}$.

Rappelons le point de départ de ce calcul. Chaque "impulsion-miroir" opère un filtre impulsional R défini en (2.3) :

$$R(p) = \frac{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+y(p)^2}\right)}{(1+y(p)^2)^2}$$

avec le paramètre de non-élasticité $y(p)$:

$$y(p) = \frac{(p + 2\hbar k)k}{2m\Omega_e} \quad (\text{E.1})$$

La fraction du nuage restant en lévitation après N rebonds est donnée par le produit :

$$R(N, T) = R(p_1)\dots R(p_N) \quad \text{avec} \quad p_i = -mg\frac{T}{2} + (i-1) \times mg(T_0 - T) \quad (\text{E.2})$$

A résonance, la série de quantités de mouvement et les paramètres d'élasticité associés sont simplement :

$$p_1 = \dots = p_N = -2\hbar k \quad y(p_1) = \dots = y(p_N) = 0 \quad (\text{E.3})$$

Nous envisageons une interrogation du nuage durant un grand nombre n de rebonds, ce qui implique des valeurs voisines de la résonance pour la période T et le désaccord Raman ω_{21} . Les paramètres d'élasticité vérifient alors $y(p_1), \dots, y(p_N) \ll 1$, ce qui autorise le développement limité suivant pour

le coefficient de réflexion :

$$R(p_i) = \frac{1}{(1 + y^2(p_i))^2} + O(y^4(p_i)) = 1 - 2y^2(p_i) + O(y^4(p_i))$$

La fraction du nuage maintenue en vol s'exprime alors :

$$\log \frac{1}{R(T)} = - \sum_{i=1}^N \log (R(p_i)) \simeq \sum_{i=1}^N \log (1 + 2y^2(p_i)) \quad (\text{E.4})$$

Le paramètre de non-élasticité associé à la i -ème impulsion-miroir est obtenue directement à partir des équations (E.1) et (E.2) :

$$y(p_i) \simeq \frac{g(T - T_0)k}{\Omega_e} \times i$$

Le coefficient de réflexion devient :

$$\log \frac{1}{R(N, T)} \simeq \sum_{i=1}^N \log \left(1 + 2i^2 \frac{g^2(T - T_0)^2 k^2}{\Omega_e^2} \right)$$

Le fait de se placer dans la limite d'un grand nombre de cycles nous permet d'approximer cette somme par une intégrale :

$$\log \frac{1}{R(N, T)} \simeq \int_1^N dx \log \left(1 + 2x^2 \frac{g^2(T - T_0)^2 k^2}{\Omega_e^2} \right) \quad (\text{E.5})$$

Cette fonction s'intègre facilement par par parties :

$$\int dx \log(1 + ax^2) = -2x + 2 \frac{\arctan(\sqrt{ax})}{\sqrt{a}} + x \log(1 + ax^2) \quad (\text{E.6})$$

Posons $a = 2g^2(T - T_0)^2 k^2 / \Omega_e^2$. Le paramètre a vérifie $y(p_n) \simeq \sqrt{an} \ll 1$. L'expression (E.6) permet de réaliser un développement limité du membre de droite de l'équation (E.5) :

$$\log \frac{1}{R(N, T)} \simeq -2n + 2 \left[n - \frac{1}{3}an^3 \right] + n aN^2 = \frac{1}{3}aN^3$$

Le terme provenant de la borne inférieure d'intégration peut raisonnablement être négligé devant la

valeur intégrale. On obtient finalement

$$R(N, T) \simeq \exp \left[-\frac{2g^2 k^2 (T - T_0)^2 N^3}{3\Omega_e^2} \right] \quad (\text{E.7})$$

Coefficient de reflexion des “impulsions-miroir” en fonction de la température.

Il est intéressant de préciser à ce stade l’impact des “impulsions-miroir” sur un nuage de température finie, afin d’examiner si des impulsions maximales (c’est-à-dire correspondant à une illumination constante de l’échantillon atomique) sont compatibles avec le maintien en lévitation d’une population atomique suffisante pour la mesure finale. Nous considérons donc ici la réflexion d’un nuage atomique de température Θ vérifiant la condition de résonance, c’est à dire dont la distribution de vitesse est centrée autour d’une valeur satisfaisant la condition de Bragg. Il suffit de considérer la distribution de vitesses longitudinale, c’est-à-dire selon l’axe de propagation Oz des lasers :

$$P(v_z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta v_{z,T}} \exp \left[- \left(\frac{v_z - v_{0z}}{\Delta v_{z,T}} \right)^2 \right] \quad (\text{F.1})$$

Nous définissons la classe des vitesses réfléchies par l’“impulsion-miroir” comme l’ensemble des vitesses pour lesquelles les atomes ont une probabilité de réflexion (donnée par l’équation 2.3) supérieure ou égale à $1/2$. Afin d’estimer qualitativement la population atomique réfléchi lors d’une “impulsion-miroir”, nous considérons en première approche que les atomes sont réfléchis si et seulement si ils appartiennent à la classe de vitesses précédente. Ceci équivaut à effectuer l’approximation suivante :

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} R(v_z) P(v_z) dv_z \simeq \int_{v_0 - \Delta v_{z,r}/2}^{v_0 + \Delta v_{z,r}/2} P(v_z) dv_z = \frac{\Delta v_{z,r}}{\sqrt{\pi}\Delta v_{z,T}} \quad (\text{F.2})$$

L’avantage de cette approche qualitative est qu’elle permet d’extraire une dépendance analytique simple du coefficient de réflexion vis à vis de la température du nuage et de la durée de l’impulsion.

Les extremités v_{\pm} de la classe de vitesses considérée sont définies implicitement par la relation :

$$R(m v_{\pm}) = \left[\frac{\pi}{2} \text{sinc} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 + y(m v_{\pm})^2} \right) \right]^4 = \frac{1}{2}$$

On en tire facilement une expression de la “bande passante” $\Delta v_{z,r}$ en fonction de la durée τ des impulsions Raman composant le miroir et du vecteur d’onde effectif de l’impulsion Raman $k_{eff} = 2k$:

$$\Delta v_{z,r} = \frac{4\pi\alpha}{k_{eff}\tau} \quad (\text{F.3})$$

La constante numérique α est de l’ordre de l’unité $\alpha \simeq 0.58$. Dans le régime où les atomes tombent dans un champ continu de lumière, c’est-à-dire pour $\tau = T_0/2$, on obtient alors une “bande passante” en vitesse de :

$$\Delta v_{z,r \text{ cont.}} = \frac{8\pi\alpha}{k_{eff}T_0} = \frac{\alpha\pi mg}{\hbar k^2} = 76 \mu m s^{-1} \quad (\text{F.4})$$

C’est le rapport de cette largeur de vitesses à la dispersion d’origine thermique qui détermine le coefficient de réflexion C . On suppose le nuage initialement à l’équilibre thermodynamique, si bien que si bien que la dispersion en énergie cinétique vérifie le théorème d’équipartition :

$$\frac{m}{2} \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B \Theta \quad (\text{F.5})$$

Par ailleurs, cette quantité s’exprime en fonction de la dispersion en vitesse $\Delta v_{z,T}$ selon $\langle v_z^2 \rangle = (\Delta v_{z,T})^2/2$. On peut alors exprimer simplement la dispersion en vitesse longitudinale thermique $\Delta v_{z,T} = \sqrt{2k_B\Theta/m}$ puis le coefficient de réflexion C en fonction de la température Θ et de la durée des impulsions τ :

$$C = \sqrt{\frac{2\pi m \alpha^2 \Theta}{k_B k^2 \tau^2}} \quad (\text{F.6})$$

On obtient ainsi une dépendance en $\sqrt{\Theta/\tau^2}$ du coefficient de réflexion. La Figure F.1 montre la fraction de l’échantillon réfléchi par une “impulsions-miroir” maximale en fonction de la température Θ du nuage. nous avons déjà estimé le régime de température du nuage en nous basant sur un critère simple : la dispersion de vitesse initiale doit être au plus de l’ordre de la vitesse acquise entre deux réflexions sous l’effet de la gravité. Cette condition nous donnait une température Θ de l’échantillon de l’ordre du micro-Kelvin. Le graphe précédent montre qu’une “impulsion-miroir” de durée maximale appliquée sur un nuage atomique à cette température donne un coefficient de réflexion d’environ 2.5%.

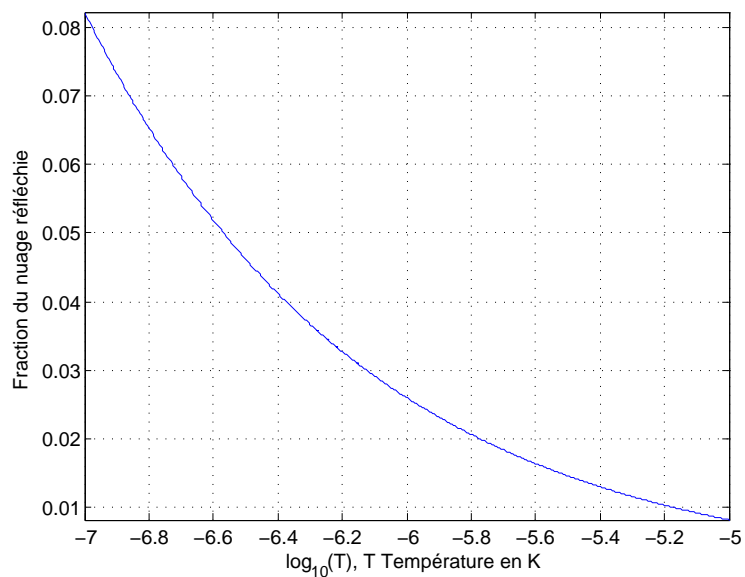


FIGURE F.1 – Fraction du nuage réfléchi en fonction de la température Θ de l'échantillon.

Validité de la modélisation non-dispersive.

Nous proposons ici un critère de validité heuristique pour l'expression non-dispersive précédente. Nous avons vu que la séparatrice lumineuse habillait les états internes de l'atome en donnant lieu, en général, à des vitesses de groupe différentes. Du fait de ces différentes vitesses de groupe, on observe en général une multiplication des paquets d'ondes : à partir d'un paquet d'ondes Gaussien dans un état interne donné, on obtient en sortie de séparatrice une somme de deux fonctions d'ondes non gaussiennes dans chaque état interne, soit quatre paquets d'ondes. Chaque paquet d'ondes a suivi dans la séparatrice la trajectoire d'un des deux états internes habillés. On conçoit que l'approximation non-dispersive ne peut être valide que lorsque ces "trajectoires habillées" sont très proches. Dans le cas contraire, leur dédoublement serait incompatible avec le maintien d'une structure de paquet d'ondes minimal gaussien dans la séparatrice. Cette propriété est bien vérifiée lorsque l'impulsion moyenne des atomes satisfait la condition de résonance de Bragg, puisque l'effet Borrmann prédit alors la fusion des deux "trajectoires habillées".

Nous proposons donc le critère suivant pour valider l'approximation non-dispersive : l'effet de structuration de la séparatrice lumineuse est considéré comme négligeable si la séparation spatiale de deux paquets d'ondes issus de trajectoires "habillées" différentes (cf. Figure 1.5) est inférieure à leur diamètre. Il s'agit en quelque sorte d'un "critère de Rayleigh" pour les séparatrices lumineuses, établissant si l'on peut distinguer le fait qu'il y ait deux paquets d'ondes gaussiens en sortie. Si ce n'est pas le cas, la structure de paquet d'onde minimal gaussien n'est que faiblement altérée par la séparatrice lumineuse et l'approximation non-dispersive constitue une description correcte.

L'étude du chapitre précédent montre que la différence des vitesses de groupe des paquets d'ondes habillés est proportionnelle à la différence de leurs paramètres y :

$$\Delta v_g = \frac{\hbar k}{2m} y(\mathbf{p}_c)$$

La distance relative $|\mathbf{r}_{c1} - \mathbf{r}_{c2}|$ des centres des paquets d'ondes en sortie de la séparatrice est proportionnelle à la différence des vitesses de groupe et à la durée de l'impulsion lumineuse :

$$|\mathbf{r}_{c1} - \mathbf{r}_{c2}| = \Delta v_g \tau = \frac{\hbar k}{2m} y(\mathbf{p}_c) \tau$$

L'approximation non-dispersive est donc correcte si :

$$\frac{\hbar k}{2m} y(\mathbf{p}_c) \tau \ll \Delta r \quad (\text{G.1})$$

avec Δr le diamètre du paquet d'ondes atomiques.

Pour donner une interprétation simple de ce critère en termes de relation “temps-énergie”, nous supposons qu'il y a saturation des relations d'incertitude $\Delta r = \hbar/2\Delta p$ et symétrie sphérique du paquet d'ondes. Le critère précédent peut alors être reformulé comme suit :

$$\Delta \nu_{Doppler} y(\mathbf{p}_c) \tau \ll 1 \quad (\text{G.2})$$

avec $\Delta \nu_{Doppler} = \Delta p k / (m\hbar)$ la variation du terme Doppler associé à la dispersion impulsionnelle Δp du paquet d'ondes. La durée compatible avec l'approximation d'impulsion lumineuse non-dispersive est donc d'autant plus grande que le paquet d'ondes impulsionnel est fin et résonant $y(\mathbf{p}_c) \ll 1$. Nous nous plaçons dans ce régime pour traiter les impulsions lumineuses du système d'atomes en lévitation exposé dans ce chapitre.

Une formulation alternative de l'approximation non-dispersive consiste à dire que l'on néglige l'intrication quantique de l'état interne des atomes avec leur mouvement externe. Les degrés de liberté externes sont alors considérés comme “gelés” pendant l'impulsion lumineuse.

Calcul de l'amplitude diffusée dans le référentiel du laboratoire.

Nous menons dans cet appendice le calcul de l'amplitude atomique diffusée (5.19), dans le référentiel du laboratoire, évoqué au chapitre 5 :

$$b(\mathbf{r}, t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{i\hbar} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left(\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} K_b(\mathbf{r}, t, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t_0) V(\mathbf{k}) \tilde{F}(\omega_B(\mathbf{k}, \mathbf{p})) \right) \psi(\mathbf{p}, t_0)$$

Cette amplitude implique le propagateur mixte $K_b(\mathbf{r}, t, \mathbf{p}, t_0)$. L'expression de ce propagateur découle de la formule de Van Vleck (1.52) et de l'action classique acquise par une particule entre deux instants connaissant son impulsion initiale et sa position finale. On obtient :

$$K_b(\mathbf{r}, t, \mathbf{p}, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-img^2(t-t_0)^3/6\hbar} e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{g}(t-t_0)^2} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-m\mathbf{g}(t-t_0))\cdot\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{p}^2(t-t_0)/2m} \quad (\text{H.1})$$

L'expression (5.19) de l'amplitude diffusée nous amène à évaluer le propagateur mixte entre les points (\mathbf{r}, t) et $(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t)$:

$$K_b(\mathbf{r}, t, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-img^2(t-t_0)^3/6\hbar} e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{g}(t-t_0)^2} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-m\mathbf{g}(t-t_0))\cdot\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{p}^2(t-t_0)/2m} e^{-i\omega_b(t-t_0)} \\ \times e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\frac{1}{2}\mathbf{g}(t-t_0)^2-\frac{\mathbf{p}}{m}(t-t_0)-\mathbf{r}_w)} e^{-i\hbar k_z^2/2m(t-t_0)} e^{-i\hbar k_\perp^2(t-t_0)/2m} \quad (\text{H.2})$$

Notre objectif est donc de calculer la double intégrale (5.19). Il semble judicieux de commencer par l'intégration sur le vecteur d'onde \mathbf{k} . On vérifie sur l'expression que le propagateur K_b est bien une fonction gaussienne de \mathbf{k} , ce qui traduit que l'action est une forme quadratique des coordonnées positions et impulsion. En revanche, les deux autres fonctions sous l'intégrale ne sont pas des fonctions gaussiennes du vecteur d'onde \mathbf{k} : la transformée de Fourier $V(\mathbf{k})$ a seulement une dépendance gaussienne vis à vis des coordonnées transverses k_x, k_y mais pas vis à vis de k_z et la fonction de filtrage n'a pas a priori un profil gaussien dans l'espace de Fourier¹. Afin de se ramener à un calcul

1. Sauf si l'on envisage un profil d'allumage et d'extinction du champ gaussien, ce qui est une autre piste de calcul.

extricable, impliquant essentiellement des intégrations gaussiennes, nous choisissons d'adopter deux approximations qui font appel à la collimation du faisceau laser :

1. Corrections dispersives à l'effet Doppler négligeables.
2. Corrections dispersives au recul longitudinal négligeables.

La première approximation suppose que la largeur spectrale de F est suffisante pour que la dispersion Doppler liée au profil de champ lumineux n'affecte pas la valeur de l'intégrale :

$$\Delta\omega \gg \Delta k_z \frac{p_0}{m}, \Delta k_\perp \frac{\Delta p_\perp}{m} \quad (\text{H.3})$$

La seconde approximation repose également sur la paraxialité du faisceau : dans ce cas, la distribution $V(\mathbf{k})$ est fortement resserrée autour d'une valeur $\mathbf{k} = k_e \mathbf{u}_z$ (avec $k_e = k_0$ pour une diffusion simple et $k_e = 2k_0$ pour une diffusion Raman). Ceci implique que la largeur Δk_z de la distribution selon l'axe O_z est bien inférieure aux largeurs transverses $\Delta k_x, \Delta k_y$. En conséquence, quand \mathbf{k} varie sur la largeur typique de $V(\mathbf{k})$, la variation du recul longitudinal $\hbar \mathbf{k}_z^2 / 2m$ est bien plus faible que le recul transverse typique. Ceci nous permet de prendre en compte le recul transverse tout en négligeant la variation du recul longitudinal :

$$\hbar \mathbf{k}_z^2 / 2m \simeq \hbar k_e^2 / 2m \quad (\text{H.4})$$

Nous avons à dessein séparé les composantes transverses et longitudinales dans l'expression (H.2) du propagateur mixte afin de faire intervenir cette approximation.

Nous pouvons à présent mener à bien l'intégration sur le vecteur d'onde \mathbf{k} dans l'amplitude (5.19) :

$$b(\mathbf{r}, t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{i\hbar} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \tilde{F}(\omega_B(\mathbf{k}_e, \mathbf{p})) \psi(\mathbf{p}, t_0) \left(\int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} K_b(\mathbf{r}, t, \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}, t_0) V(\mathbf{k}) \right) \quad (\text{H.5})$$

Nous ne considérons dans cette intégrale que les facteurs dépendant explicitement du vecteur d'onde \mathbf{k} . La contribution du propagateur mixte à cette intégrale se résume à deux termes de la deuxième

ligne de (H.2). Ainsi l'on cherche simplement à évaluer :

$$I(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\frac{1}{2}\mathbf{g}(t-t_0)^2-\frac{\mathbf{p}}{m}(t-t_0)-\mathbf{r}_w)} e^{-i\hbar k_{\perp}^2(t-t_0)/2m} \quad (\text{H.6})$$

On voit apparaître dans l'intégrale une position $\mathbf{r}_w(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{g}(t-t_0)^2 + \frac{\mathbf{p}}{m}(t-t_0) + \mathbf{r}_w$ qui peut s'interpréter comme le mouvement d'une particule fictive initialement (à $t = t_0$) en \mathbf{r}_w i.e. au col du faisceau laser et avec une vitesse \mathbf{p}/m . Selon la dimension longitudinale, l'intégrale correspond à une somme de Fourier usuelle (grâce à l'approximation sur le recul longitudinal), alors que dans l'intégration transverse le recul donne lieu à un terme quadratique .

Il est utile à ce stade de faire intervenir explicitement la forme du potentiel d'interaction utilisé :

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} V(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \begin{cases} -\hbar\Omega_0 U_0^+(\mathbf{r}-\mathbf{r}_w) e^{ik_0 z} & \text{Diffusion simple} \\ -\hbar\Omega_e U_0^+(\mathbf{r}-\mathbf{r}_w) U_0^{-*}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_w) e^{i2k_0(z-z_w)} & \text{Diffusion Raman} \end{cases} \quad (\text{H.7})$$

Nous introduisons la transformée de Fourier transverse de ce potentiel :

$$U_0^{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{w_0^2}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)} \exp\left[-\frac{(k_x^2 + k_y^2)w_0^2}{4}(1 \mp 2iz/b)\right] e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (\text{H.8})$$

Considérons pour commencer un processus de diffusion simple. En identifiant le membre de gauche de l'équation (H.7) avec la décomposition de Fourier transverse donnée par (H.8), on obtient :

$$\int \frac{dk_z}{(2\pi)^{1/2}} V(\mathbf{k}) e^{ik_z z} = -\hbar\Omega_0 \frac{w_0^2}{2} \exp\left[-\frac{k_{\perp}^2 w_0^2}{4}(1 \mp 2i(z-z_w)/b)\right] e^{i\mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}-\mathbf{r}_{\perp w})} e^{ik_0(z-z_w)} \quad (\text{H.9})$$

En utilisant cette relation, nous pouvons alors effectuer l'intégration sur le vecteur d'onde dans (H.6) :

$$I(\mathbf{p}) = -\hbar\Omega_0 \frac{w_0^2}{2} e^{ik_0(z-r_{wz}(\mathbf{p},t))} \int \frac{d^2\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)} \exp\left[-\frac{k_{\perp}^2 w_0^2}{4}(1 \mp 2i(z-z_w)/b)\right] e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_w(\mathbf{p},t))} e^{-i\hbar k_{\perp}^2(t-t_0)/2m} \quad (\text{H.10})$$

On intègre alors le terme de recul transverse dans la décomposition de Fourier transverse de la fonction de courbure :

$$I(\mathbf{p}) = -\hbar\Omega_0 \frac{w_0^2}{2} e^{ik_0(z-r_{wz}(\mathbf{p},t))} \int \frac{d^2\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)} \exp\left[-\frac{\mathbf{k}_{\perp}^2}{4} w_0^2 \left(1 - \frac{2i}{k_0 w_0^2} \left(z - r_{wz}(\mathbf{p}, t) - \frac{\hbar k_0(t-t_0)}{m}\right)\right)\right] e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_w(\mathbf{p},t))} \quad (\text{H.11})$$

Finalement on obtient :

$$I(\mathbf{p}) = -\hbar\Omega_0 e^{ik_0(z-r_{wz}(\mathbf{p},t))} U^+ \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w(\mathbf{p}, t) - \frac{\hbar\mathbf{k}_0}{m}(t-t_0) \right) \quad (\text{H.12})$$

L'impulsion acquise durant la diffusion se manifeste par le facteur $e^{ik_0(z-r_{wz}(\mathbf{p},t))}$. La translation dans l'argument de la courbure reflète le mouvement externe de l'atome lors de l'interaction. Poursuivons le calcul d'amplitude :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{r}, t) &= \Omega_0 \sqrt{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-img^2(t-t_0)^3/6\hbar} e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{g}(t-t_0)^2} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-m\mathbf{g}(t-t_0))\cdot\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{p}^2(t-t_0)/2m} e^{-i\omega_b(t-t_0)} \\ &\times e^{-i\hbar k_0^2/2m(t-t_0)} e^{ik_0(z-r_{wz}(\mathbf{p},t))} U^+ \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w(\mathbf{p}, t) - \frac{\hbar\mathbf{k}_0}{m}(t-t_0) \right) \tilde{F}(\omega_B(\mathbf{k}_e, \mathbf{p})) \psi(\mathbf{p}, t_0) \end{aligned} \quad (\text{H.13})$$

En remplaçant le terme $r_{wz}(\mathbf{p}, t)$ par sa valeur et en effectuant des regroupements adéquats :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{r}, t) &= \Omega_0 \sqrt{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-img^2(t-t_0)^3/6\hbar} e^{-\frac{i}{2\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{g}(t-t_0)^2} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}+\hbar k_0\mathbf{u}_z-m\mathbf{g}(t-t_0))\cdot\mathbf{r}} \\ &\times e^{-i(\mathbf{p}+\hbar k_0\mathbf{u}_z)^2(t-t_0)/2m} e^{-i\omega_b(t-t_0)} U_0^+ \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w(\mathbf{p}, t) - \frac{\hbar\mathbf{k}_0}{m}(t-t_0) \right) \tilde{F}(\omega_B(\mathbf{k}_e, \mathbf{p})) \psi(\mathbf{p}, t_0) \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

Nous allons effectuer une dernière approximation, qui va nous permettre de sortir le terme de courbure de l'intégrale : nous supposons que la fonction de courbure $U_0^+ \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w(\mathbf{p}, t) - \frac{\hbar\mathbf{k}_0}{m}(t-t_0) \right)$ est approximativement constante sur la largeur impulsionnelle du paquet d'ondes $\tilde{F}(\omega_B(\mathbf{k}_e, \mathbf{p})) \psi(\mathbf{p}, t_0)$. Ce terme de courbure est alors évalué sur l'impulsion \mathbf{p}_{0F} associée au paquet d'ondes atomique filtré par l'impulsion lumineuse. On approxime alors $U_0^+ \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w(\mathbf{p}, t) - \frac{\hbar\mathbf{k}_0}{m}(t-t_0) \right)$ par sa valeur en l'impulsion centrale $\mathbf{p}_{0\omega}$ du paquet d'ondes atomique filtré par l'impulsion lumineuse $\tilde{F}(\omega_B(\mathbf{k}_e, \mathbf{p})) \psi(\mathbf{p}, t_0)$. Pour un paquet d'ondes atomiques quasi-résonnant cette impulsion $\mathbf{p}_{0\omega}$ est très voisine de l'impulsion moyenne \mathbf{p}_0 du paquet d'ondes atomiques. Par ailleurs on reconnaît dans cette amplitude le propagateur mixte $K_b(\mathbf{r}, t, \mathbf{p} + \hbar k_0\mathbf{u}_z, t_0)$:

$$\boxed{b(\mathbf{r}, t) = \Omega_0 \sqrt{2\pi} U_0^+ \left[\mathbf{r} - \mathbf{r}_w - \left(\frac{\mathbf{p}_{0\omega} + \hbar\mathbf{k}_0}{m} \right) (t-t_0) - \frac{1}{2}\mathbf{g}(t-t_0)^2 \right] \times \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} K_b(\mathbf{r}, t, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_0, t_0) \tilde{F}(\omega_B(\mathbf{k}_e, \mathbf{p})) \psi(\mathbf{p}, t_0)}$$

Considérons à présent le cas d'une impulsion Raman. Nous ne détaillons pas ici le calcul correspon-

dant, qui figure dans la référence [94] jointe au manuscrit, et qui donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
 b(\mathbf{r}, t) = & \Omega_0 \sqrt{2\pi} L^+ \left(z - z_w - \frac{p_{0\omega} z}{m} (t - t_0) + \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \right) U_0^{+2} \left[\mathbf{r} - \mathbf{r}_w - \left(\frac{\mathbf{p}_{0\omega} + \hbar \mathbf{k}_0}{m} \right) (t - t_0) - \frac{1}{2} \mathbf{g} (t - t_0)^2 \right] \\
 & \times \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} K_b(\mathbf{r}, t, \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_0, t_0) \tilde{F}(\omega_B(\mathbf{k}_e, \mathbf{p})) \psi(\mathbf{p}, t_0)
 \end{aligned}
 \tag{H.15}$$

Appendice : effet de la courbure sur les fréquences d'horloge.

I.1 Calcul du diagramme à deux vertices en représentation interaction.

Nous repartons de l'expression (5.32) exprimant la contribution des diagrammes lévitants au terme de second ordre de la série de Dyson :

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}_{lev.}^{(2)}(t_f)\rangle &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt_2 F_2^*(t_2) V_2^* \left(\tilde{r}(t_2) \right) e^{i\varphi_2(t_2)} \\ &\times \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt_1 F_1(t_1) V_1 \left(\tilde{r}(t_1) \right) e^{-i\varphi_1(t_1)} \otimes (|a\rangle\langle a|) e^{i\omega_{ba}[(t_1-t_0)-(t_2-t_0)]} |\Psi^{(0)}(t_0)\rangle \end{aligned}$$

En utilisant les expressions (5.10) et (5.11) décrivant les actions des vertices d'absorption et d'émission, nous obtenons sans difficulté majeure l'expression :

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}_{lev.}^{(2)}(t_f)\rangle &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt_2 F_2^*(t_2) e^{i\left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} - \omega_{ba}\right)(t_2-t_0) + i\varphi_2(t_2)} \int \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^{3/2}} V_2^*(\mathbf{k}_2) e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \left(\mathbf{r} - \frac{\hbar\mathbf{k}_1}{m}(t_1-t_0) + \frac{\hbar\mathbf{k}_2}{m}(t_2-t_0) + \xi_2\right)} \\ &\times \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt_1 F_1(t_1) e^{i\left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} + \omega_{ba}\right)(t_1-t_0) - i\varphi_1(t_1)} \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} V_1(\mathbf{k}_1) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \left(\mathbf{r} - \frac{\hbar\mathbf{k}_1}{m}(t_1-t_0) + \xi_1\right)} \\ &\times \int \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^{3/2}} \psi^{(0)}(\mathbf{r}, t_0) |a, \mathbf{r} - \frac{\hbar\mathbf{k}_1}{m}(t_1-t_0) + \frac{\hbar\mathbf{k}_2}{m}(t_2-t_0)\rangle \end{aligned}$$

Nous passons alors à l'amplitude complexe $\tilde{a}_{lev.}^{(2)}(\mathbf{r}, t_f) = \langle a, \mathbf{r} | \tilde{\Psi}_{lev.}^{(2)}(t_f) \rangle$:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{lev.}^{(2)}(\mathbf{r}, t_f) &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt_2 F_2^*(t_2) e^{i\left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} - \omega_{ba}\right)(t_2-t_0) + i\varphi_2(t_2)} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^{3/2}} V_2^*(\mathbf{k}_2) e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{r} + \xi_2)} \\ &\times \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt_1 F_1(t_1) e^{i\left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} + \omega_{ba}\right)(t_1-t_0) - i\varphi_1(t_1)} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} V_1(\mathbf{k}_1) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \left(\mathbf{r} - \frac{\hbar \mathbf{k}_2}{m}(t_2-t_0) + \xi_1\right)} \\ &\times \psi^{(0)}\left(\mathbf{r} + \frac{\hbar \mathbf{k}_1}{m}(t_1-t_0) - \frac{\hbar \mathbf{k}_2}{m}(t_2-t_0), t_0\right) \end{aligned}$$

Nous procédons comme pour le calcul du diagramme à un vertex en faisant apparaître la transformée de Fourier de la fonction d'onde initiale :

$$\psi^{(0)}\left(\mathbf{r} + \frac{\hbar \mathbf{k}_1}{m}(t_1-t_0) - \frac{\hbar \mathbf{k}_2}{m}(t_2-t_0), t_0\right) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi^{(0)}(\mathbf{p}, t_0) e^{i\mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{r} + \frac{\hbar \mathbf{k}_1}{m}(t_1-t_0) - \frac{\hbar \mathbf{k}_2}{m}(t_2-t_0)\right)}$$

En insérant ceci dans l'expression précédentes et en regroupant les phases associées à \mathbf{k}_1 et à \mathbf{k}_2 on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{lev.}^{(2)}(\mathbf{r}, t_f) &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi^{(0)}(\mathbf{p}, t_0) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \\ &\times \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt_2 F_2^*(t_2) e^{i\left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} - \omega_{ba}\right)(t_2-t_0) + i\varphi_2(t_2)} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^{3/2}} V_2^*(\mathbf{k}_2) e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m}(t_2-t_0) + \xi_2\right)} \\ &\times \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt_1 F_1(t_1) e^{i\left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} + \omega_{ba}\right)(t_1-t_0) - i\varphi_1(t_1)} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^{3/2}} V_1(\mathbf{k}_1) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m}(t_1-t_0) - \frac{\hbar \mathbf{k}_2}{m}(t_2-t_0) + \xi_1\right)} \end{aligned}$$

En effectuant la première intégrale sur le vecteur d'onde \mathbf{k}_1 , on fait apparaître le profil spatial de la première impulsion ainsi qu'une translation¹ :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{lev.}^{(2)}(\mathbf{r}, t_f) &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi^{(0)}(\mathbf{p}, t_0) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \\ &\times \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt_2 F_2^*(t_2) e^{i\left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} - \omega_{ba}\right)(t_2-t_0) + i\varphi_2(t_2)} \int \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^{3/2}} V_2^*(\mathbf{k}_2) e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m}(t_2-t_0) + \xi_2\right)} \\ &\times \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt_1 F_1(t_1) e^{i\left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} + \omega_{ba}\right)(t_1-t_0) - i\varphi_1(t_1)} U_0^+\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m}(t_1-t_0) - \frac{\hbar \mathbf{k}_2}{m}(t_2-t_0) + \xi_1\right) e^{ik_0\left(z + \frac{pz}{m}(t_1-t_0)\right)} \end{aligned}$$

Sans approximation, il n'est pas a priori possible de réaliser une telle intégrale avec \mathbf{k}_2 du fait de la présence d'un terme dépendant de \mathbf{k}_2 dans U_0^+ . Nous supposons cependant que la dispersion transverse

1. Nous rappelons la notation $\xi_{1,2} = \frac{1}{2}\mathbf{g}(t_{1,2} - t_0)^2$

est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer $\mathbf{k}_2 \simeq k_0$ dans l'intégrale précédente :

$$U_0^+ \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m}(t_1 - t_0) - \frac{\hbar \mathbf{k}_2}{m}(t_2 - t_0) + \xi_1 \right) \simeq U_0^+ \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m}(t_1 - t_0) + \frac{\hbar k_0 \mathbf{z}}{m}(t_2 - t_0) + \xi_1 \right) \quad (\text{I.1})$$

En effectuant l'intégrale sur le vecteur \mathbf{k}_2 , on obtient alors :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{lev.}^{(2)}(\mathbf{r}, t_f) &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi^{(0)}(\mathbf{p}, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \\ &\times \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt_2 F_2^*(t_2) e^{i \left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} - \omega_{ba} \right) (t_2 - t_0) + i\varphi_2(t_2)} U_0^{-*} \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m}(t_2 - t_0) + \xi_2 \right) e^{ik_0 \left(z + \frac{pz}{m}(t_2 - t_0) - 1/2g(t_2 - t_0)^2 \right)} \\ &\times \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt_1 F_1(t_1) e^{i \left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} + \omega_{ba} \right) (t_1 - t_0) - i\varphi_1(t_1)} U_0^+ \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m}(t_1 - t_0) + \frac{\hbar k_0 \mathbf{z}}{m}(t_2 - t_0) + \xi_1 \right) \\ &\times e^{ik_0 \left(z + \frac{pz}{m}(t_1 - t_0) + \frac{\hbar k_0}{m}(t_2 - t_0) - 1/2g(t_1 - t_0)^2 \right)} \end{aligned}$$

Nous regroupons à présent les termes de phase dépendant de l'instant t_1 et ceux dépendant de l'instant t_2 :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{lev.}^{(2)}(\mathbf{r}, t_f) &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi^{(0)}(\mathbf{p}, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} + 2\hbar k_0 \mathbf{z}) \cdot \mathbf{r}} \\ &\times \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt_2 F_2^*(t_2) e^{i \left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} - \omega_{ba} + \frac{(pz + \hbar k_0)k_0}{m} \right) (t_2 - t_0) + i(\varphi_2(t_2) - 1/2k_0g(t_2 - t_0)^2)} U_0^{-*} \left(\mathbf{r}' + \frac{\mathbf{p}}{m}(t_2 - t_0) + \xi_2 \right) \\ &\times \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt_1 F_1(t_1) e^{i \left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} + \omega_{ba} + \frac{pz k_0}{m} \right) (t_1 - t_0) - i(\varphi_1(t_1) + 1/2k_0g(t_1 - t_0)^2)} U_0^+ \left(\mathbf{r}' + \frac{\mathbf{p}}{m}(t_1 - t_0) + \frac{\hbar k_0 \mathbf{z}}{m}(t_2 - t_0) \right) \end{aligned}$$

L'amplitude précédente peut être réécrite de façon plus synthétique :

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{a}_{lev.}^{(2)}(\mathbf{r}, t_f) &= \frac{1}{(i\hbar)^2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi^{(0)}(\mathbf{p}, t_0) e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} + 2\hbar k_0 \mathbf{z}) \cdot \mathbf{r}} \\ &\times \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt_2 F_2^*(t_2) e^{i\varphi_2(t_2)} U_0^{-*}(\mathbf{r} + \mathbf{s}_2(\mathbf{p})) \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt_1 F_1(t_1) e^{-i\varphi_1(t_1)} e^i U_0^+(\mathbf{r} + \mathbf{s}_1(\mathbf{p})) \end{aligned}} \quad (\text{I.2})$$

avec :

$$\begin{aligned}
\phi_1(t_1) &= \varphi_1(t_1) + \frac{1}{2}k_0g(t_1 - t_0)^2 - \left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} + \omega_{ba} + \frac{p_z k_0}{m} \right) (t_1 - t_0) \\
\phi_2(t_2) &= \varphi_2(t_2) - \frac{1}{2}k_0g(t_2 - t_0)^2 + \left(\frac{\hbar k_0^2}{2m} - \omega_{ba} + \frac{(p_z + \hbar k_0)k_0}{m} \right) (t_2 - t_0) \\
\mathbf{s}_1(\mathbf{p}) &= \frac{\mathbf{p}}{m}(t_1 - t_0) + \frac{\hbar k_0 \mathbf{z}}{m}(t_2 - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{g}(t_1 - t_0)^2 \\
\mathbf{s}_2(\mathbf{p}) &= \frac{\mathbf{p}}{m}(t_2 - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{g}(t_2 - t_0)^2
\end{aligned}$$

I.2 Effet de la courbure du champ sur la fréquence de résonance de l'horloge atomique.

Commençons par expliciter la “population lévitante” $\rho_{lev} = \left| \langle \tilde{\Psi}_{lev}^{(2)}(t_f) | \tilde{\Psi}_{lev}^{(2)}(t_f) \rangle \right|^2$:

$$\begin{aligned}
\rho_{lev} &= \frac{1}{(i\hbar)^4} \int \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi^{(0)}(\mathbf{p}, t_0) \psi^{(0)*}(\mathbf{p}', t_0) e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}/\hbar} \\
&\times \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt'_2 F_2(t'_2) e^{-i\phi_2(t'_2)} U_0^-(\mathbf{r} + \mathbf{s}'_2(\mathbf{p}')) \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt'_1 F_1^*(t'_1) e^{i\phi_1(t'_1)} U_0^{+*}(\mathbf{r}' + \mathbf{s}'_1(\mathbf{p}')) \\
&\times \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt_2 F_2^*(t_2) e^{i\phi_2(t_2)} U_0^{-*}(\mathbf{r} + \mathbf{s}_2(\mathbf{p})) \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt_1 F_1(t_1) e^{-i\phi_1(t_1)} U_0^+(\mathbf{r} + \mathbf{s}_1(\mathbf{p}))
\end{aligned}$$

Les fréquences ω_1 et ω_2 rendant maximale la quantité précédente sont celles pour lesquelles l'intégrale quadruple sur les quatre instants t_1, t_2, t'_1, t'_2 est stationnaire. Nous allons voir comment la courbure intervient dans la condition de stationnarité.

Rappelons l'expression des fonctions de courbure :

$$\begin{aligned}
U_0^+(x, y, z) &= L^+(z) e^{-L^+(z)x^2/w_0^2} e^{-L^+(z)y^2/w_0^2} \\
L^+(z) &= \frac{1}{1 - \frac{2iz}{b}} = \frac{w_0^2}{w^2(z)} + i \frac{b}{2R(z)} \quad b = k_0 w_0^2 \\
w^2(z) &= w_0^2 + \frac{4z^2}{k_0^2 w_0^2} \quad R(z) = \frac{b^2}{4z} + z
\end{aligned} \tag{I.3}$$

On obtient des expressions semblables avec U_0^- en prenant simplement le complexe conjugué, impliquant $L^-(z) = \frac{w_0^2}{w^2(z)} - i \frac{b}{2R(z)}$.

Nous cherchons à quantifier la modification de la condition de phase stationnaire. Comme nous recherchons la correction de premier ordre à cet effet, nous nous autorisons l'approximation suivante, qui consiste à égaliser les impulsions \mathbf{p} et \mathbf{p}' dans les arguments des fonctions de courbure : $\mathbf{s}'_{1,2}(\mathbf{p}') \simeq \mathbf{s}'_1(\mathbf{p})$. Si on avait affaire à des ondes électromagnétiques planes, l'intégration spatiale entraînerait $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$. Du fait du profil spatial, cette égalité est partiellement relaxée et $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ peut être de l'ordre de $\hbar\Delta k$ où Δk est la largeur dispersive des fonctions U_0^+ . On suppose donc légitimement que l'approximation $\mathbf{p} \simeq \mathbf{p}'$ conduit seulement à négliger un terme d'ordre supérieur en la courbure.

On effectue alors d'abord l'intégration en position \mathbf{r} . On effectue un changement de coordonnées pour aligner à chaque fois le vecteur \mathbf{x} suivant la composante transverse \mathbf{p}_\perp envisagée. Grâce à ce choix, la composante de \mathbf{s}_i selon l'axe O_x est égale à $\frac{p_\perp}{m} \times (t_i - t_0)$, et le composante de \mathbf{s}_i selon O_y est nulle. Avec cette convention et l'approximation précédente sur l'impulsion, l'intégrale devient :

$$\begin{aligned} \rho_{lev} &= \frac{1}{(i\hbar)^4} \int \frac{d^2\mathbf{p}_\perp dp_z}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi^{(0)}(\mathbf{p}, t_0) \psi^{(0)*}(\mathbf{p}', t_0) \\ &\times \int \frac{dz}{(2\pi)^{1/2}} \int \frac{dx}{(2\pi)^{1/2}} \int_{t_0 + \frac{T_0}{2}}^{t_f} dt'_2 F_2(t'_2) e^{-i\phi_2(t'_2)} e^{-\frac{L^-}{w_0^2} \left(x + \frac{p_\perp}{m} (t'_2 - t_0)\right)^2} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{T_0}{2}} dt'_1 F_1^*(t'_1) e^{i\phi_1(t'_1)} e^{\frac{L^+}{w_0^2} \left(x + \frac{p_\perp}{m} (t'_1 - t_0)\right)^2} \\ &\times \int_{t_0 + \frac{T_0}{2}}^{t_f} dt_2 F_2^*(t_2) e^{i\phi_2(t_2)} e^{\frac{L^-}{w_0^2} \left(x + \frac{p_\perp}{m} (t_2 - t_0)\right)^2} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{T_0}{2}} dt_1 F_1(t_1) e^{-i\phi_1(t_1)} e^{-\frac{L^+}{w_0^2} \left(x + \frac{p_\perp}{m} (t_1 - t_0)\right)^2} \\ &\times \int \frac{dy}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\left(\frac{L^+}{w_0^2} + \frac{L^+}{w_0^2} + \frac{L^-}{w_0^2} + \frac{L^-}{w_0^2}\right) y^2} e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{r} / \hbar} \end{aligned}$$

En toute rigueur les fonctions L^\pm intervenant dans cette expression devraient être évaluées à des altitudes différentes et dépendant des instants t_1, t_2, t'_1, t'_2 , par exemple $L^\pm(z + s_{1z})$ avec $s_{1z} = \frac{p_z}{m}(t_1 - t_0) - \frac{1}{2}g(t_1 - t_0)^2$. Nous effectuons une ultime approximation simplificatrice, qui consiste à négliger la dépendance temporelle de ces fonction et à considérer qu'on évalue tous les termes L^\pm au même endroit, approximation justifiée par le fait que l'on se place en champ lointain. On n'a alors plus qu'un seul paramètre L^\pm qui intervient dans les intégrales.

Nous pouvons voir à présent comment les fonctions de courbure s'intègrent dans les phases com-

plexes de l'intégration. La population lévitante totale peut ainsi être mise sous la forme :

$$\rho_{lev} = \frac{1}{(i\hbar)^4} \int \frac{d^2\mathbf{p}_\perp dp_z}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi^{(0)}(\mathbf{p}, t_0) \psi^{(0)*}(\mathbf{p}', t_0) \int \frac{dz}{(2\pi)^{1/2}} \int \frac{dx}{(2\pi)^{1/2}}$$

$$\times \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt'_2 e^{-i\Phi_2^c(t'_2, x, p_\perp)} K'_2(x, z, t'_2) \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt'_1 e^{i\Phi_1^c(t'_1, x, p_\perp)} K'_1(x, z, t'_1)$$

$$\times \int_{t_0+T_0/2}^{t_f} dt_2 e^{i\Phi_2^c(t_2, x, p_\perp)} K_2(x, z, t_1) \int_{t_0}^{t_0+T_0/2} dt_1 e^{-i\Phi_1^c(t_1, x, p_\perp)} K_1(x, z, t_1)$$

$$\times \int \frac{dy}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\left(\frac{L^+}{w_0^2} + \frac{L^+}{w_0^2} + \frac{L^-}{w_0^2} + \frac{L^-}{w_0^2}\right) y^2} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \cdot \mathbf{r}/\hbar}$$

Les fonctions de phase Φ^c , s'obtiennent en écrivant que :

$$\Phi_{\frac{1}{2}}^c(t_1) = \phi_{\frac{1}{2}}(t) \pm \frac{k_0}{2R(z)} (x - s_{\frac{1}{2}}(t))^2$$

Il y a ici une simplification important qui consiste à négliger la variation temporelle du rayon de courbure. En effet, ce rayon dépend bien de z , une première approximation consiste à l'évaluer à l'altitude moyenne du nuage, et une seconde consiste ensuite à négliger la variation de courbure occasionnée par la dépendance temporelle de l'altitude moyenne. Ensuite, on remarque que la composante transverse de s_1 est réduite à $p_\perp/m(t_1 - t_0)$ grâce à notre choix de coordonnées. Enfin nous mettons la phase φ_2 sous la forme : $\varphi_2(t) = (\omega_2 - r_2 \frac{T_0}{2})(t - t_0) + \frac{1}{2}r_2(t - t_0)^2$. Nous obtenons :

$$\Phi_1^c = \left[\omega_1 - \omega_{ab} - \frac{\hbar k_0^2}{2m} - \frac{k_0 p_z}{m} + \frac{k_0 p_\perp x}{mR} \right] (t_1 - t_0) + \left[\frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}k_0 g + \frac{k_0 p_\perp^2}{2m^2 R} \right] (t_1 - t_0)^2$$

$$\Phi_2^c = \left[\omega_2 - r_2 \frac{T_0}{2} - \omega_{ab} + \frac{\hbar k_0^2}{2m} + \frac{k_0(p_z + \hbar k_0)}{m} - \frac{k_0 p_\perp x}{mR} \right] (t_2 - t_0) + \left[\frac{1}{2}r_2 - \frac{1}{2}k_0 g - \frac{k_0 p_\perp^2}{2m^2 R} \right] (t_2 - t_0)^2$$

(I.4)

En supposant que la deuxième interaction ait lieu à $t = t_0 + T_0/2$ (ce qui correspond à l'un des diagrammes lévitant possible), on réécrit donc la deuxième phase avec un développement quadratique autour de cette valeur. La condition de stationarité déterminant la fréquence de résonance mesurée doit être estimée à l'instant central de l'impulsion considérée.

Approche variationnelle de l'évolution de nuages gaussiens.

J.1 Calcul du Lagrangien effectif.

Nous présentons ici le calcul du Lagrangien effectif associé à l'évolution de nuages gaussiens en présence d'un potentiel de contact et d'interactions à distance. Nous partons de l'expression générale du Lagrangien pour la fonction d'onde d'un nuage condensé :

$$\begin{aligned}
 L(\Phi, \Phi^*) = & \frac{i\hbar}{2} \int d^3\mathbf{r} \left(\Phi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \Phi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \Phi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) + \int d^3\mathbf{r} \Phi^*(\mathbf{r}, t) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U^0(\mathbf{r}) \right] \Phi(\mathbf{r}, t) \\
 & + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{r} \Phi^*(\mathbf{r}', t) \Phi^*(\mathbf{r}, t) [V_c(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + V_d(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \Phi(\mathbf{r}, t) \Phi(\mathbf{r}', t)
 \end{aligned} \tag{J.1}$$

Le potentiel V désigne le potentiel dipolaire :

$$V(\mathbf{R}) = g_d \frac{1 - 3 \cos^2 \theta_R}{R^2} \quad \cos \theta_R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{z} \tag{J.2}$$

Pour obtenir l'expression du Lagrangien effectif, nous insérons dans cette expression les fonctions d'essai gaussiennes :

$$\Phi_{\mathbf{w}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}}(\mathbf{r}, t) = A(t) \prod_{\eta=x,y,z} e^{-(\eta - \eta_0)^2 / (2w_\eta^2(t)) + i\eta\alpha_\eta(t) + i\eta^2\beta_\eta^2(t)} \tag{J.3}$$

Les différents termes du Lagrangien peuvent être obtenus en faisant appel à des intégrales gaussiennes du type :

$$\int du e^{-ibu^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \quad \int du u e^{-ibu^2} = 0 \quad \int du u^2 e^{-ibu^2} = \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \tag{J.4}$$

Le premier terme associé à la dérivée de la fonction d'onde s'écrit :

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{r} \frac{i\hbar}{2} \left[\Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] &= \int d^3\mathbf{r} \left[\frac{i\hbar}{2} (A\dot{A}^* - A^*\dot{A}) + |A|^2 (\dot{\alpha}_x x + 2\dot{\beta}_x x^2) + \text{termes en } y, z \right] \prod_{\eta=x,y,z} e^{-(\eta-\eta_0)^2/w_\eta^2} \\ &= \frac{\pi^{3/2} w_x w_y w_z}{2} \left[\frac{i\hbar}{2} (A\dot{A}^* - A^*\dot{A}) + |A|^2 \left(2\hbar\dot{\alpha}_x x_0 + 2\hbar\dot{\beta}_x \left(x_0^2 + \frac{w_x^2}{2} \right) \right) + y, z \right] \end{aligned} \quad (\text{J.5})$$

Le terme associé à l'énergie cinétique se calcule de façon similaire :

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{r} \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi(\mathbf{r}, t)|^2 &= \int d^3\mathbf{r} \frac{\hbar^2 |A|^2}{2m} \left[\frac{(x-x_0)^2}{w_x^4} + (\alpha_x + 2\beta_x x)^2 + y, z \dots \right] \prod_{\eta=x,y,z} e^{-(\eta-\eta_0)^2/w_\eta^2} \\ &= \frac{\pi^{3/2} w_x w_y w_z}{2} |A|^2 \left[\frac{\hbar^2}{2m w_x^2} + \frac{\hbar^2}{m} \alpha^2 + \frac{\hbar^2}{m} 4\alpha\beta x_0 + \frac{\hbar^2}{m} 4\beta^2 \left(x_0^2 + \frac{w_x^2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{J.6})$$

La contribution de l'énergie potentielle au Lagrangien et de l'énergie de contact s'écrivent respectivement :

$$\int d^3\mathbf{r} \left(\frac{1}{2} m \nu_x^2 x^2 + y, z \right) |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 = \pi^{3/2} w_x w_y w_z |A|^2 \frac{1}{2} m \nu_x^2 \left(x_0^2 + \frac{w_x^2}{2} \right) \quad (\text{J.7})$$

$$\int d^3\mathbf{r} g_0 |\phi(\mathbf{r}, t)|^4 = g_0 \frac{\pi^{3/2} w_x w_y w_z}{2\sqrt{2}} |A|^4 \quad (\text{J.8})$$

Reste enfin à calculer le terme dû aux interactions dipolaires. Celui-ci est de la forme :

$$L_d = g_d \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \frac{1 - 3 \cos^2 \theta_{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}}{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2} |\Phi(\mathbf{r}_1)|^2 |\Phi(\mathbf{r}_2)|^2 \quad (\text{J.9})$$

On reformule cette intégrale avec le changement de variables $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/2$:

$$L_d = g_d |A|^4 \int d^3\mathbf{R} d^3\mathbf{r} \left| \frac{\partial \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{R}, \mathbf{r}} \right| \frac{1 - 3 \cos^2 \theta_{\mathbf{r}}}{r^2} \prod_{\eta=x,y,z} e^{-(\mathbf{R}_\eta + \mathbf{r}_\eta/2)^2/w_\eta^2} e^{-(\mathbf{R}_\eta - \mathbf{r}_\eta/2)^2/w_\eta^2} \quad (\text{J.10})$$

On est ramené au calcul d'une intégrale sur une seule des coordonnées car l'intégrale sur \mathbf{R} est triviale. Le terme dipolaire du Lagrangien s'exprime alors à l'aide d'une intégrale sur une seule des coordonnées :

$$L_d = (2\pi)^{3/2} w_x w_y w_z g_d |A|^4 \int d^3\mathbf{r} \frac{1 - 3 \cos^2 \theta_{\mathbf{r}}}{r^2} \prod_{\eta=x,y,z} e^{-r_\eta^2/(2w_\eta^2)} \quad (\text{J.11})$$

On ne cherchera pas à calculer ce terme explicitement, seule sa dépendance vis à vis des paramètres du Lagrangien nous intéresse. L'ensemble des contributions précédentes donne le Lagrangien :

$$L_e = \frac{\pi^{3/2} w_x w_y w_z}{2} \left[\frac{i\hbar}{2} (A\dot{A}^* - A^*\dot{A}) + |A|^2 \left[\left(\hbar\dot{\beta}_x + \frac{2\hbar^2}{m} \beta_x^2 + \frac{1}{2} m \nu_x^2 \right) (2x_0^2 + w_x^2) + \frac{\hbar^2}{2m w_x^2} + \frac{\hbar^2 \alpha_x^2}{m} + 2x_0 (\hbar\dot{\alpha} + \frac{2\hbar^2}{m} \alpha_x \beta_x) + y, z, \dots \right] + |A|^4 \left[\frac{g_0}{2\sqrt{2}} + 4\sqrt{2} g_d \int d^3 \mathbf{r} \frac{1 - 3 \cos^2 \theta_{\mathbf{r}}}{r^2} \prod_{\eta=x,y,z} e^{-r_\eta^2 / (2w_\eta^2)} \right] \right]$$

J.2 Equations du mouvement des largeurs du nuage.

Nous calculons ici les équations du mouvement pour les largeurs à partir des équations d'Euler-Lagrange obtenues avec le Lagrangien effectif. Ces équations sont présentées dans [125, 100], les calculs intermédiaires correspondants présentent cependant de nombreuses erreurs.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_e}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L_e}{\partial q} \quad (\text{J.12})$$

Afin d'alléger les notations, nous notons C_0 la contribution correspondant au terme en facteur de $|A|^2$ et C_I celle comportant en facteur de $|A|^4$ (provenant des interactions.) :

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{\pi^{3/2} w_x w_y w_z}{2} \left[\left(\hbar\dot{\beta}_x + \frac{2\hbar^2}{m} \beta_x^2 + \frac{1}{2} m \nu_x^2 \right) (2x_0^2 + w_x^2) + \frac{\hbar^2}{2m w_x^2} + \frac{\hbar^2 \alpha_x^2}{m} + 2x_0 (\hbar\dot{\alpha} + \frac{2\hbar^2}{m} \alpha_x \beta_x) + y, z, \dots \right] \\ C_I &= \frac{\pi^{3/2} w_x w_y w_z}{2} \left[\frac{g_0}{2\sqrt{2}} + 4\sqrt{2} g_d \int d^3 \mathbf{r} \frac{1 - 3 \cos^2 \theta_{\mathbf{r}}}{r^2} \prod_{\eta=x,y,z} e^{-r_\eta^2 / (2w_\eta^2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{J.13})$$

Les équations d'Euler-Lagrange pour les paramètres $q = A, A^*$ s'écrivent alors :

$$-i\pi^{3/2} \hbar \frac{d}{dt} [A^* w_x w_y w_z] = A^* C_0 + 2|A|^2 A^* C_I \quad (\text{J.14})$$

$$i\pi^{3/2} \hbar \frac{d}{dt} [A w_x w_y w_z] = A C_0 + 2|A|^2 A C_I \quad (\text{J.15})$$

La combinaison $A \times (\text{J.14}) - A^* \times (\text{J.15})$ redonne la conservation du nombre d'atomes :

$$\pi^{3/2} |A|^2 w_x w_y w_z = Cte = N \quad (\text{J.16})$$

Les équations du mouvement pour les paramètres α_η et β_η relient ces paramètres à la position et à la vitesse moyenne :

$$\dot{\eta}_0 = \frac{\hbar}{m} (2\beta_\eta \eta_0 + \alpha_\eta) \quad (\text{J.17})$$

$$\frac{d}{dt} [w_\eta^2 + 2\eta_0^2] = \frac{4\hbar^2}{m} [\beta_\eta (w_\eta^2 + 2\eta_0^2) + \alpha_\eta \eta_0] \quad (\text{J.18})$$

L'équation (J.17) reflète en fait simplement l'équation de Hamilton $d\langle \mathbf{r} \rangle / dt = \langle \mathbf{p} \rangle / m$. On peut l'utiliser dans l'équation (J.18) pour exprimer β_η en fonction de la largeur correspondante uniquement :

$$\beta_\eta = \frac{m \dot{w}_\eta}{2\hbar w_\eta} \quad (\text{J.19})$$

Cette relation permet de retrouver le facteur de phase intervenant lors d'une transformation d'échelle. En termes de variables hydrodynamiques, elle correspond en fait l'équation de continuité.

Nous allons à présent obtenir un système d'équations différentielles fermé sur les largeurs. L'équation d'Euler-Lagrange sur les paramètre w_x donne le résultat :

$$\frac{1}{w_\eta} \left[\frac{\pi^{3/2} w_x w_y w_z}{2} i\hbar (A^* \dot{A} - A \dot{A}^*) \right] = |A|^2 \frac{dC_0}{dw_\eta} + |A|^4 \frac{dC_I}{dw_\eta} \quad (\text{J.20})$$

La combinaison d'équations $A \times (J.14) + A^* \times (J.15)$ permet d'exprimer le terme faisant intervenir le préfacteur A en fonction des largeurs :

$$\frac{\pi^{3/2} w_x w_y w_z}{2} i\hbar (A^* \dot{A} - A \dot{A}^*) = |A|^2 C_0 + 2|A|^4 C_I \quad (\text{J.21})$$

En utilisant cette dernière expression dans l'équation (J.20), on obtient :

$$|A|^2 \left(\frac{dC_0}{dw_\eta} - \frac{C_0}{w_\eta} \right) = |A|^4 \left(2 \frac{C_I}{w_\eta} - \frac{dC_I}{dw_\eta} \right) \quad (\text{J.22})$$

On remarque que dans le premier terme toutes les contributions proportionnelles à w_η disparaissent. Le second terme est aisé puisque C_I est proportionnel à η . En utilisant la relation (J.16) traduisant la conservation du nombre d'atomes, l'équation précédente s'écrit :

$$2 \left(\hbar \dot{\beta}_\eta + \frac{2\hbar^2}{m} \beta_\eta^2 + \frac{1}{2} m \nu_\eta^2 \right) w_\eta^2 - \frac{\hbar^2}{m w_\eta^3} = \frac{N}{\pi^3 (w_x w_y w_z)^2} \left(2 \frac{C_I}{w_\eta} - \frac{dC_I}{dw_\eta} \right) \quad (\text{J.23})$$

On peut réécrire l'équation sous la forme suivante en isolant les termes en β et en interprétant le

membre de droite comme la dérivée d'une quantité :

$$2\hbar \left(\dot{\beta}_\eta + \frac{2\hbar}{m} \beta_\eta^2 \right) = -\frac{dV^e}{dw_\eta} \quad (\text{J.24})$$

où la quantité V^e s'exprime comme :

$$V^e(w_x, w_y, w_z) = \sum_{\eta=x,y,z} \left(\frac{\hbar^2}{2mq_\eta^2} + \frac{m}{2} \nu_\eta^2 q_\eta^2 \right) + \frac{NC_I}{\pi^3 (w_x w_y w_z)^2} \quad (\text{J.25})$$

Éliminons à présent les termes en β_η de l'équation (J.23) au profit des largeurs w_η . Réécrivons l'équation (J.19) sous la forme :

$$\dot{w}_\eta = \frac{2\hbar}{m} \beta_\eta w_\eta \quad (\text{J.26})$$

En dérivant cette équation, on reconnaît le terme en β de l'équation (J.23) :

$$m\ddot{w}_\eta = 2\hbar \left(\dot{\beta}_\eta + \frac{2\hbar}{m} \beta_\eta^2 \right) w_\eta \quad (\text{J.27})$$

Grâce à cette relation, le membre de gauche de l'équation (J.23) s'exprime comme la dérivée seconde des largeurs w_η :

$$m\ddot{w}_\eta = -\frac{dV^e}{dw_\eta} \quad (\text{J.28})$$

L'évolution des largeurs w_η suit donc celle de la position d'un point matériel fictif évoluant dans le potentiel :

$$V^e(\mathbf{w}) = \sum_{\eta=x,y,z} \left(\frac{\hbar^2}{2mw_\eta^2} + \frac{m}{2} \nu_\eta^2 w_\eta^2 \right) + \frac{N}{\pi^{3/2} (w_x w_y w_z)} \left[\frac{g_0}{2\sqrt{2}} + 4\sqrt{2}g_d \int d^3\mathbf{r} \frac{1 - 3\cos^2\theta_{\mathbf{r}}}{r^2} \prod_{\eta=x,y,z} e^{-\mathbf{r}_\eta^2/(2w_\eta^2)} \right] \quad (\text{J.29})$$

Publications sur les senseurs à atomes en lévitation.

Space-time sensors using multiple-wave atom interferometry

Référence [126]

Gravimètre à cavité d'ondes de matière

Référence [127]

Matter-Wave Cavity Gravimeter

Référence [94]

Space-time sensors using multiple-wave atom interferometry

F. Impens^{1,2} and Ch. J. Bordé^{1,3}

¹ SYRTE, Observatoire de Paris, 61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France

² Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Caixa Postal 68528, 21941-972 Rio de Janeiro, RJ, Brasil and

³ Laboratoire de Physique des Lasers, Institut Galilée, F-93430 Villetaneuse, France

(Dated: December 9, 2008)

We propose a space-time sensor based on a succession of levitating Bordé-Ramsey interferometers set in a vertical configuration. The sample is coherently trapped in the longitudinal momentum space thanks to a multiple wave interference phenomenon. The system constitutes a matter-wave resonator in momentum space, whose set of resonance conditions yields a promising sensitivity in both the inertial and the frequency domain.

PACS numbers: 06.30.Ft, 06.30.Gv, 37.25.+k, 03.75.Dg, 42.50.Ct

Optical clocks have become frequency standards of high fractional accuracy, currently of the order of 10^{-16} [1], and are as such promising tools to investigate basics physics through a battery of fundamental tests [2]. Horizontal Bordé-Ramsey interferometers [3, 4] have been used successfully to build atomic optical clocks of high stability [5]. However, in presence of gravity, this system presents two drawbacks: curvature shifts resulting from the transverse field profile exploration by the traveling atoms and a finite interrogation time [6]. This has led the metrology community to privilege experiments built around atomic traps [7], able to keep the sample in the Lamb-Dicke regime, thereby reducing residual shifts due to atomic motion and increasing the interaction time with the interrogation field. This paper proposes instead to circumvent the previous limitations with a multiple-wave atom interferometer [8], which rests on a succession of vertical Bordé-Ramsey interferometers. The usual sequence of two pairs of $\pi/2$ pulses with inverted wave-vectors is here directed vertically, thus providing a net vertical momentum transfer to the atoms. The repetition of this sequence, assorted to a set of resonance conditions, gives rise to a levitation of the atomic sample. Field curvature effects are reduced by the system geometry, in which the laser beam and sample propagation axes coincide. Numerical simulations confirm that a fast central fringe narrowing occurs when the atomic sample is interrogated over several bounces, and that the multiple wave interference preserves the atomic population in levitation. Beyond seducing experimental features for frequency metrology, this system exhibits a special physical effect, which is the coherent localization of an atomic sample in momentum through a constructive multiple wave interference process. This motivates an analogy with an atomic Fabry-Perot resonator [9] in momentum space. This setup, derived from an earlier gravimeter proposal [10], has been presented in a number of conferences [11].

Let us begin by considering a simple yet important point illustrated on Fig. 1: when is a sequence of two distinct $\pi/2$ pulses equivalent to a single π pulse? The answer to this question, not as trivial as it seems, is essential for Ramsey interferometry and also for our

system, which rests on a controlled momentum transfer through a sequence of $\pi/2$ pulses. We consider a diluted

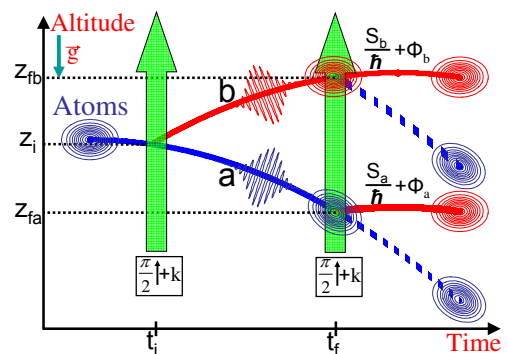


FIG. 1: Action of two distinct $\pi/2$ pulses on a free-falling atomic wave-packet. The phase difference between the two outgoing wave-packets comes from the classical action and laser phase acquired on each path, and from the distance of their centers.

sample of two-level atoms evolving in the gravity field (considered as uniform) according to the Hamiltonian $H = \frac{p^2}{2m} + mgz$, initially in the lower state a and described by the Gaussian wave-function [12] $\psi_a(\mathbf{r}, t_0) = \frac{\pi^{-3/2}}{\sqrt{w_{x0}w_{y0}w_{z0}}} e^{-\frac{m}{2\hbar} \left(\frac{(x-x_i)^2}{w_{x0}^2} + \frac{(y-y_i)^2}{w_{y0}^2} + \frac{(z-z_i)^2}{w_{z0}^2} \right) + \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_{ia}(t_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}$. After the two $\pi/2$ light pulses, performed at times t_i and $t_f = t_i + T$, the initial wave-packet has been split into four packets following two possible intermediate trajectories. The excited wave-function receives two wave-packet contributions coming from either path and associated with the absorption of a photon at times t_i and t_f , of common central momentum $\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_i + \hbar\mathbf{k} + m\mathbf{g}T$ and respective central positions \mathbf{r}_{fa} and \mathbf{r}_{fb} . On each path, these wave-packets acquire an action phase $S_{a,b}/\hbar$ and a laser phase $\phi_{a,b}$ evaluated at their center and at the corresponding interaction time. Both contributions to the excited state are phase-matched if the following relation is verified [13]:

$$-\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}_{f,a} + S_a + \hbar\phi_a = -\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}_{f,b} + S_b + \hbar\phi_b \quad (1)$$

The action and laser phases read respectively $S_{a,b} = mg^2T^3/3 + \mathbf{p}_{ia,ib} \cdot \mathbf{g}T^2 + (p_{ia,ib}^2/2m - mgz_i - E_{a,b})T$ and $\phi_{a,b} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{i,fa} - \omega_{1,2}(t_{i,f} - t_c) + \phi_{1,2}^0$. We have introduced the initial central momentum along the excited path $\mathbf{p}_{ib} = \mathbf{p}_{ia} + \hbar\mathbf{k}$, and the central time $t_c = (t_i + t_f)/2$ used as phase reference for the two pulses. The terms $\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}_{fa,b}$ reflect the atom-optical path difference between both wave-packets at their respective centers. Condition (1) is fulfilled if the laser frequencies $\omega_{1,2}$ are set to their resonant values

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{\hbar} \left(E_b + \frac{(\mathbf{p}_{1,2} + \hbar\mathbf{k})^2}{2m} - E_a - \frac{p_{1,2}^2}{2m} \right) \quad (2)$$

with $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_i$, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_i + m\mathbf{g}T$ and if the laser phases ϕ_1^0, ϕ_2^0 verify $\phi_1^0 = \phi_2^0$. If these conditions are fulfilled, and if the sample coherence length w is much larger than the final wave-packet separation $|\mathbf{r}_{f,a} - \mathbf{r}_{f,b}|$ - or equivalently if the Doppler width $k\Delta p/m$ experienced by the travelling atoms is much smaller than the frequency $1/T$ -, one obtains an almost fully constructive interference in the excited state. The succession of two $\pi/2$ pulses then mimics very efficiently a single π pulse, the quantum channel to the lower state being shut off by destructive interferences.

This compensation of the phase induced by the external atomic motion through fine-tuned laser phases is at the heart of our proposal. A key point is that condition (1), expressing the equality of the quantity $I = -\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}_f + S + \hbar\phi$ for both paths, is independent of the initial wave-packet position. Identical conditions on the pulse frequencies and frequency ramp thus prevail to obtain the full population transfer for a group of atomic wave-packets with a common average momentum and internal state. This property will allow to address simultaneously the numerous wave-packets generated in the $\pi/2$ pulse sequence.

Applying a second sequence of two $\pi/2$ pulses with downward wave-vectors [15], one obtains a vertical Bordé-Ramsey interferometer bent by the gravity field sketched on Fig. 2 Starting with a sufficiently coherent sample in the lower state, and with well adjusted frequencies (2) and ramp slopes, the previous discussion shows that a net momentum transfer of $2\hbar\mathbf{k}$ is provided to each atom during the interferometric sequence. For the special interpulse duration

$$T := T^0 = \frac{\hbar k}{mg}, \quad (3)$$

these atoms end up in the lower state with their initial momentum. Two major benefits are then expected. First, the periodicity of the sample motion in momentum gives rise to levitation. Second, only two frequencies, given by (2), are involved in the successive resonant pairs of $\pi/2$ pulses. In particular, the first and the fourth pulse of the Bordé Ramsey interferometer, as well as the second and the third one, correspond to identical resonant frequencies: $\omega_1^0 = \omega_4^0$ and $\omega_2^0 = \omega_3^0$.

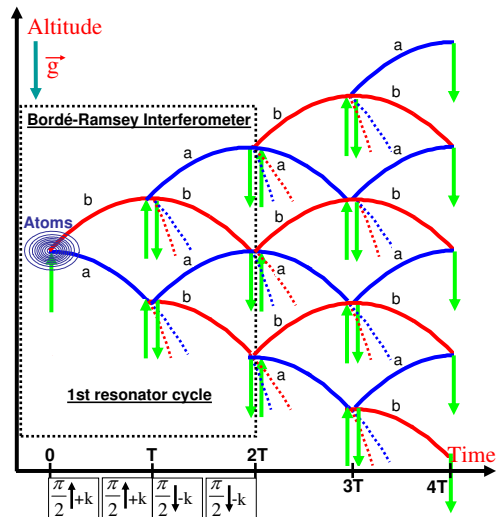


FIG. 2: Levitating atomic trajectories in the sequence of pulses. The first four pulses generate a vertical Bordé-Ramsey interferometer. The central positions of the wave-packets explore a network of paths which doubles at each laser pulse.

If the previous conditions are fulfilled, the repetition of the interferometer sequence gives rise to a network of levitating paths - sketched on Fig. 2 - reflecting the diffusion of the atomic wave in the successive light pulses. The same laser field is used to levitate the sample and to perform its interrogation, generating a clock signal based on either one of the two frequencies ω_1^0, ω_2^0 . Our measurement indeed rests on the double condition (2, 3), which must be fulfilled to ensure this periodic motion: should the parameters $(T, \omega_{1,2,3,4})$ differ from their resonant values $(T^0, \omega_{1,2,3,4}^0)$, the outgoing channels would open again and induce losses in the levitating cloud, which can be tracked by a population measurement. We expect multiple wave interference to induce a narrowing of the resonance curve associated with the levitating population around this condition.

We consider a free-falling diluted sample, taken at zero temperature and described initially by a macroscopic Gaussian wave-function. In-between the pulses, the propagation of a Gaussian wave-packet is amenable to a change of its central position and momentum according to classical dynamics, of its widths according to $w_{x,y,z}^2(t) = w_{x,y,z}^2(t_0) + \frac{\hbar^2}{4m^2w_{x,y,z}^2(t_0)}(t - t_0)^2$, and to the addition of the action phase already considered [16]. Since the light pulses are short, their action onto each atomic wave-packet is efficiently modeled by a position-dependent Rabi matrix [17] evaluated at the packet center. The evolution of each wave-packet is thus very simple. However, their number doubles at each light pulse, which makes their book-keeping a computational challenge. This difficulty, intrinsic to the classical simulation of an entangled quantum state, has limited our investigation to a sequence of sixteen pulses, involving 28 levitating paths.

tating Bordé-Ramsey interferometers associated with the resonant paths and a total number of $N \simeq 64000$ atomic waves sufficient to probe the expected multiple wave interference effects.

The atomic transition used in this setup should have level lifetimes longer than the typical interferometer duration (ms), and the atoms should be cooled at a sub-recoil temperature - for instance by outcoupling the sample from a source condensate - in order to keep a sufficient levitating population in spite of the momentum filtering realized by the successive interferometers. Possible candidates are the Sr, Yb and Hg atoms, which have a narrow clock transition in their internal structure. To guarantee a sufficient overlap of the interfering wave-packets, we consider a cloud of coherence length $w = 100 \mu m$ much larger than the wave-packets separation $2h$ on the order of $2h \simeq 15 \mu m$. Last, this sample is taken sufficiently extended and diluted to render interaction effects negligible. The $\pi/2$ pulses have a Rabi pulsation of $\Omega = 2\pi \times 10^5 Hz$. Fig. 3 shows the levitating and the falling atomic population in the lower state as a function of the frequency shift $\delta\omega$ from the resonant frequencies $\omega_{1,2,3,4}^0$. It reveals a fully constructive interference in the levitating arches when the resonance conditions are fulfilled, as well as the expected narrowing of the central fringe associated with the levitating wave-packets. Falling wave-packets yield secondary fringe patterns with shifted resonant frequencies, which induce an asymmetry in the central fringe if the total lower state population is monitored. This effect, critical for a clock operation, can nonetheless be efficiently attenuated by limiting the detection zone to the vicinity of the levitating arches. This strategy improves as the levitation time increases: the main contribution to the “falling” background comes then from atoms with a greater downward momentum and thus further away from the detection zone. Besides, multiple wave interferences sharpen the symmetric “levitating” central fringe fast enough to limit the effect of the asymmetric background of falling fringes. Considering a shift δT from the resonant duration T_0 , one obtains also a central fringe narrowing as the number of pulses increases and thus an improved determination of acceleration g through condition (3).

To keep the sample within the laser beam diameter, it is necessary to involve a transverse confinement, which may be obtained by using laser waves of spherical wave-front for the pulses [10]. In contrast to former horizontal clocks [5], the atomic motion is here collinear to the light beam, which reduces the frequency shift resulting from this wave-front curvature. A weak-field treatment, to be published elsewhere, shows that this shift is proportional to the ratio $\Delta\omega_{curv.} \propto k\langle v_{\perp}^2 \rangle T/R$, involving the average square transverse velocity $\langle v_{\perp}^2 \rangle$ and the field radius of curvature R at the average altitude of the levitating cloud. An other key point is that the central fringe sharpens fast as the sample experiences these first interferometers, which confirms the accuracy improvement expected for both the frequency and acceleration mea-

surement through multiple wave interference. Let us note that, as current atomic clocks and sensors, our proposal implies technological challenges likely to limit the accuracy of these measurements, such as the management of spurious phase shifts induced by acousto-optical modulators generating chirped pulses [19]. Fortunately, this effect can be estimated and partially corrected [5].

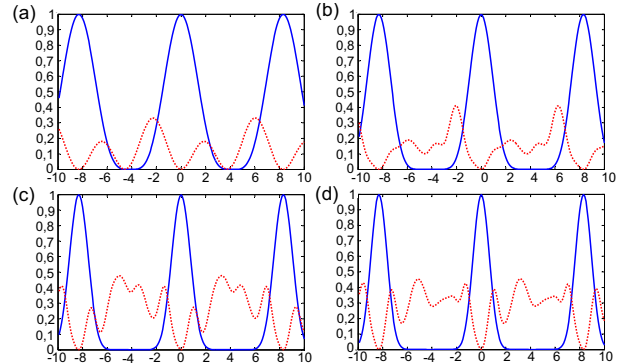


FIG. 3: Fraction of the total sample population levitating (full line) and falling (dashed line) in state a after one, two, three and four sequences of four pulses as a function of the frequency detuning $\delta\omega$ (kHz) ($\omega_{1,2,3,4} := \omega_{1,2,3,4}^0 + \delta\omega$) and for a resonant interferometer duration $2T^0 \simeq 1,5 ms$.

An analysis of the atomic motion in momentum space, sketched in the energy-momentum diagram of Fig. 4, is especially enlightening. In this picture, the total energy accounts for the rest mass, the kinetic and the gravitational potential energy. It is a parabolic function of the momentum. Each star stands for a specific wave-packet, the motion of which between the light pulses is represented by horizontal dashed arrows, in accordance with energy conservation. For the duration $T := T^0$, and for a sufficiently coherent atomic sample, Fig. 4 reveals that the atomic motion in momentum is periodic and bounded between two well-defined values associated with the photon recoil. The momentum confinement is here provided by destructive interferences which shut off the quantum channels going out of this bounded momentum region. This remarkable property suggests an analogy with a resonator in momentum space. Following this picture, we have computed the lower-state wave-function after N resonant pulse sequences of duration $2T_0$, considering only the vertical axis with no loss of generality. Each wave-packet ends up at rest, and with a momentum dispersion Δp_f . Applying the phase relation (1) successively between the multiple arms, one obtains: $\psi_a(p, t_0 + 2NT_0) = C_N e^{-\frac{p^2}{\Delta p_f^2}} \sum_{Paths} e^{-iz_f p}$. C_N is a complex number, and the altitudes z_f are the endpoints of the resonant paths drawn on Fig. 2, on which the sum is performed. By labelling these paths with the instants of momentum transfer, this sum appears up to a global phase as an effective canonical partition function of N independent particles, with $Z_1 = 2 \cos^2(kTp/2m)$ the one-particle partition function. This yields a wave-function of the form

$\psi_a(p, t_0 + 2NT_0) = C'_N e^{i\phi(\mathbf{p}, N)} e^{-\frac{p^2}{\Delta p_f^2}} \cos^{2N}(p/p_m)$, with $p_m = 2m/kT_0$. As $N \rightarrow +\infty$, multiple wave interferences thus yield an exponential momentum localization, scaled by the momentum p_m , around the rest value $p = 0$. The diffusion in altitude observed in the network of paths of Fig. 2 reflects a back-action of this localization.

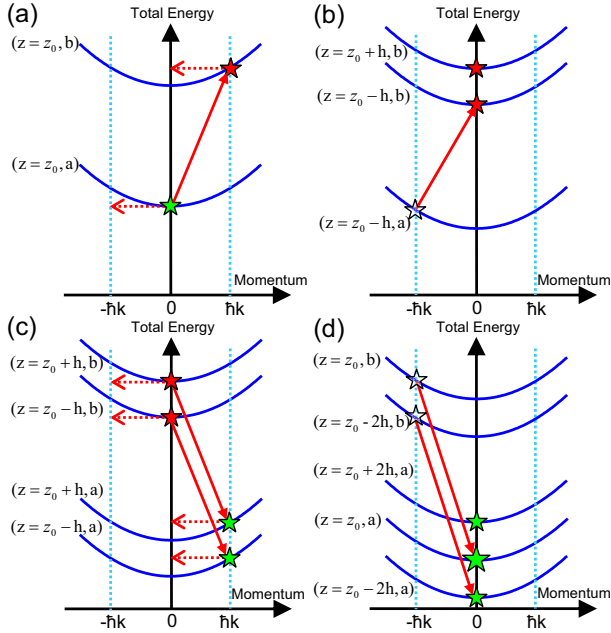


FIG. 4: Motion of the atomic wave-packets in the energy-momentum picture for the interferometer duration $2T^0$. Figs. (a,b,c,d), associated with the 1st,2nd,3rd and 4th light pulses respectively, show the packets present in coherent superposition (full stars) immediately after - or transferred (transparent stars) during - the considered pulse, whose effect is represented by a full red arrow.

To summarize, we have proposed a space-time atomic sensor achieving the levitation of an atomic sample through multiple wave interference effects in a series of vertical $\pi/2$ light pulses. The sensitivity of this levitation towards a double resonance condition can be used to realize a frequency or an acceleration measurement, with an accuracy improving with the number of interfering wave-packets. The sample needs to be cooled at a subrecoil temperature in order to yield the desired interference effects. For a sufficiently diluted cloud, transverse confinement may be provided by the wave-front of spherical light pulses. This system involves no off-resonant trapping light field and is thus exempt from the corresponding frequency shifts. It appears as a promising alternative to current optical-lattice clocks [1] and cold atom gravimeters [18]. It may also operate as an atomic gyrometer [4, 20] by tilting the lasers or by introducing additional horizontal light pulses, and exploiting the generated horizontal wave-packet motion. As exposed, this setup is a passive resonator in momentum space, it could nonetheless also be turned into an active system through matter-wave amplification by plunging the levitating wave-packets into a reservoir of source atoms.

The authors are grateful to S. Bize, P. Bouyer, A. Clairon, A. Landragin, Y. LeCoq, P. Lemonde and F. Pereira for stimulating discussions. F. Impens thanks N. Zagury and L. Davidovich for hospitality. This work is supported by CNRS and DGA (Contract No 0860003). SYRTE and L.P.L. are affiliated with IFRAF(www.ifraf.org).

-
- [1] A. D. Ludlow et al., *Science* **319**, 1805 (2008); R. LeTargat et al. *Phys. Rev. Lett.* **97**, 130801 (2006); M. Takamoto et al. *J. Phys. Soc. Jpn.* **75**, 104302 (2006).
[2] S. Blatt et al., *Phys. Rev. Lett.* **100**, 140801 (2008); T. Rosenband et al., *Science* **319**, 1808 (2008).
[3] C. J. Bordé et al. *Phys. Rev. A* **30**, 1836 (1984).
[4] C. J. Bordé, *Phys. Lett. A* **140**, 10 (1989).
[5] G. Wilpers et al., *Metrologia* **44**, 146 (2007).
[6] T. Trebst et al. *IEEE Trans. on Inst. and Meas.* **50**, 535 (2001).
[7] H. Katori et al., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 173005 (2003).
[8] M. Weitz, T. Heupel, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2356 (1996); H. Hinderthür et al., *Phys. Rev. A* **59**, 2216 (1999); T. Aoki et al., *Phys. Rev. A* **67**, 053602 (2003).
[9] M. Wilkens et al., *Phys. Rev. A* **47**, 2366 (1993).
[10] F. Impens, P. Bouyer, and C. J. Bordé, *Appl. Phys. B* **84**, 603 (2006).
[11] C. J. Bordé and F. Impens, in *Abs. of ICOLS 2007*.
www.laserspectroscopy.org, (2007); F. Impens et. al. in *Abs. of YAO 2007* (2007)
[12] This assumption does not induce any loss of generality: the following discussion would also apply to any mode of the Hermite-Gauss basis, and thus to any wave-function by linearity.
[13] This equation can also be interpreted as a generalized optical path in 5D [14].
[14] C. J. Bordé, in *Proc. of the Enrico Fermi International School of Physics*, **168** (2007), and *Eur. Phys. Jour. D* in press.
[15] In the configuration of Fig. 2, the two pulse pairs are performed successively, which maximizes the interferometric area for a fixed interferometer duration; one could nonetheless also let a finite time between them.
[16] C. J. Bordé, *Metrologia* **39**, 435 (2001).
[17] C. J. Bordé, in *Atom Interferometry* (Ed. P. R. Berman, 1997).
[18] A. Peters, K. Y. Chung, and S. Chu, *Nature* **400**, 849

- (1999) and *Metrologia* **38**, 25 (2001).
- [19] C. Degenhardt et al., *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **54**, 771 (2005).
- [20] B. Canuel et al., *Phys. Rev. Lett.* **97**, 010402 (2006), and references therein.

Gravimètre à cavité d'ondes de matière

F. Impens¹, P. Bouyer², A. Landragin¹ et Ch.J. Bordé³

¹ SYRTE, CNRS UMR 8630, Observatoire de Paris, 61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France

² Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, UMR 8501 du CNRS, 91403 Orsay, France

³ SYRTE et Laboratoire de Physique des Lasers, Université Paris 13, 93430 Villetaneuse, France

Abstract. We describe a matter-wave cavity based gravimeter closed on one end by periodic Gaussian Raman pulses. The gravimeter sensitivity increases quickly with the number of cycles experienced by the condensate inside the cavity. The matter wave is refocused thanks to a spherical wavefront for the Raman pulses. This technique opens the way to experimental realizations of controllable atom optics devices such as condensate lenses or convergent mirrors.

La réalisation de condensats de Bose-Einstein permet d'envisager de nouveaux dispositifs interférométriques utilisant la cohérence et la collimation de faisceaux atomiques. Néanmoins, les interactions entre atomes peuvent jouer un rôle limitant et dégrader cette collimation [1]. Nous proposons ici un schéma de cavité résonnante fondé sur la stabilisation d'un condensat par impulsions Raman gaussiennes périodiques. En adaptant la période des impulsions à l'accélération gravitationnelle, on observe une résonance sur le nombre d'atomes préservés dans la cavité après un certain nombre de cycles qui permet la détermination de l'accélération de la gravité. Une adaptation du front d'onde du faisceau laser permet de plus de rendre ce miroir sphérique et d'obtenir un confinement paraxial du condensat.

1. CYCLE SUIVI PAR LE CONDENSAT

Le cycle effectué par le condensat est résumé sur la figure 1. Initialement au repos dans l'état $|z = z_0, g\rangle$, le condensat est soumis après une chute libre de $T/2$ à une première impulsion Raman π lui transférant une vitesse $\mathbf{v} = 2\hbar\mathbf{k}/m \mathbf{u}_z$ (\mathbf{k} vecteur d'onde des lasers). On inverse le désaccord des lasers et on soumet le condensat à une deuxième impulsion Raman π . L'onde atomique reçoit ainsi un transfert d'impulsion à chaque cycle. Ce miroir Raman permet de ramener le condensat dans l'état initial si la période T entre deux cycles satisfait la condition de résonance: $T = T_0 := 4\hbar k/mg$ (1). Le condensat repasse alors au repos entre les deux impulsions Raman. Afin d'obtenir un coefficient de réflexion maximal, le désaccord Raman doit satisfaire: $\omega_2 - \omega_1 = \omega_{eg} - mg^2 T_0^2/8\hbar$ (2).

2. CONDITIONS DE STABILITÉ ET SENSIBILITÉ

Si on répète le cycle d'impulsions-miroir avec une période T_0 , le condensat repasse périodiquement dans l'état initial. Afin que cette cavité gravitationnelle soit à résonance, les deux conditions doivent être satisfaites. La première condition est cependant beaucoup plus critique que la seconde. En effet, un faible écart à la période T_0 définie par (1) va donner lieu à une accélération du condensat et à une perte d'atomes augmentant à chaque cycle, alors qu'une violation de la condition (2) se traduira par une perte d'atomes constante. Même si le désaccord Raman n'est pas parfaitement ajusté, on pourra donc observer une résonance lorsque T varie. La largeur de cette résonance diminuant en $n^{-3/2}$, l'estimation de T_0 et donc de g est d'autant plus précise que le nombre n de cycles effectués est élevé. La figure 2 montre

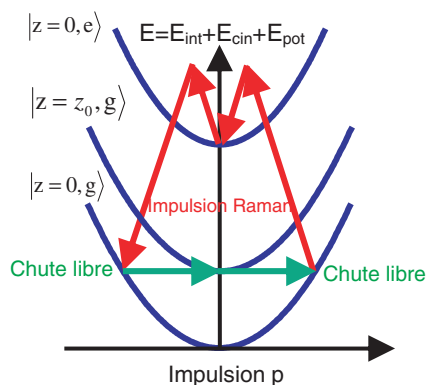


Figure 1. Un cycle d'évolution du condensat (z_0 est l'altitude initiale du condensat).

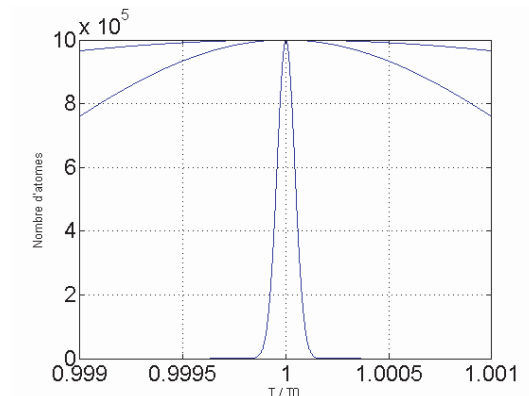


Figure 2. Nombre d'atomes présents dans la cavité après 50,100,1000 cycles en fonction de T/T_0 . avec $T_0 \approx 0.76$ ms, initialement $N = 10^6$ atomes et une pulsation de Rabi $\Omega = 2\pi 10^4$ Hz.

la prédiction de la résonance après 50,100,1000 cycles, où l'on a supposé la condition (2) parfaitement vérifiée. Une théorie détaillée de l'évolution de la fonction d'onde atomique au cours de chaque cycle a été développée par une extension du formalisme ABCD prenant en compte les interactions [2].

En l'absence d'un mécanisme permettant de stabiliser transversalement la cavité, l'expansion du condensat et la taille finie du miroir Raman limitent le nombre de cycles du condensat dans la cavité [3]. Des procédés de focalisation de l'onde atomique utilisant l'impression de phase via les déplacements lumineux ont été proposés [4]. La difficulté de contrôler précisément l'intensité d'une onde laser donne lieu à des fluctuations de phase engendrant des aberrations optiques importantes. Nous proposons de refocaliser l'onde atomique en utilisant plutôt la courbure du front d'onde d'un mode laser gaussien. Le calcul correspondant sera exposé dans une publication ultérieure [2].

3. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'amplification atomique implique la réalisation d'éléments permettant une optique atomique cohérente et notamment de stabiliser un mode. Cette stabilisation intervient dans notre montage grâce à la sélectivité en vitesse des impulsions Raman et également grâce au profil de front d'onde. La stabilisation de la cavité par ajustement de la période entre les impulsions fournit une détermination de l'accélération de la gravité g . Il est possible d'imaginer une version 3D de la cavité précédente, afin de réaliser un dispositif interférométrique multidimensionnel en microgravité [5].

Références

- [1] Y. Le Coq, J. H. Thywissen, S. A. Rangwala, F. Gerbier, S. Richard, G. Delannoy, P. Bouyer, A. Aspect, Phys. Rev. Lett. **87** 170403 (2001)
- [2] F. Impens, P. Bouyer et Ch. J. Bordé, en préparation
- [3] C. G. Aminoff, A. M. Steane, P. Bouyer, P. Desbiolles, J. Dalibard et C. Cohen-Tannoudji, Phys. Rev. Lett. **71**, 3083 (1993)
- [4] B. Dubetski et P. R. Berman, Phys. Rev. A **58**, 2413 (1998); G. Whyte, P. Öhberg, et J. Courtial, Phys. Rev. A **69**, 053610 (2004); D. R. Murray et P. Öhberg, J. Phys. B **38**, 1227 (2005)
- [5] Ch. J. Bordé, Gen. Rel. Grav. **36**, 475 (2004)

F. IMPENS^{1,✉}
 P. BOUYER²
 C.J. BORDÉ^{1,3}

Matter-wave cavity gravimeter

¹ SYRTE, CNRS UMR 8630, Observatoire de Paris, 61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris, France

² Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, CNRS UMR 8501, 91403 Orsay Cedex, France

³ Laboratoire de Physique des Lasers, Institut Galilée, CNRS UMR 7538, Université Paris Nord, 93430 Villetaneuse, France

Received: 30 January 2006/Revised version: 17 June 2006
 © Springer-Verlag 2006

ABSTRACT We propose a gravimeter based on a matter-wave resonant cavity loaded with a Bose–Einstein condensate and closed with a sequence of periodic Raman pulses. The gravimeter sensitivity increases quickly with the number of cycles experienced by the condensate inside the cavity. The matter wave is refocused thanks to a spherical wave-front of the Raman pulses. This provides a transverse confinement of the condensate which is discussed in terms of a stability analysis. We develop the analogy of this device with a resonator in momentum space for matter waves.

PACS 06.30.Gv; 06.30.Ft; 03.75.-b; 03.75.Dg; 32.80.Lg; 32.80.-t; 32.80.Pj

1 Introduction

The realization of gravimeters loaded with cold atomic clouds has drastically increased the accuracy of the measurement of gravitational acceleration to a few parts per billion [1, 2]. The recent obtention of quasi-continuous atom lasers now opens new perspectives for gravito-inertial sensors with the possibility to load these devices with a fully coherent and collimated matter source instead of the incoherent cold atomic samples used so far. In this paper we investigate a gravimeter based on a resonant matter-wave cavity loaded with a Bose–Einstein condensate. The condensate is stabilized in momentum space thanks to a sequence of periodic “mirror pulses” consisting in velocity-sensitive double Raman π -pulses. Between the pulses, the optical potential is shut off and the condensate experiences a pure free fall. Other measurements of the acceleration of gravity have been proposed, based on the Bloch oscillations of an atomic cloud in a standing light wave [3, 4] or on the bouncing of a cloud on an evanescent-wave optical cavity [5, 6]. In our setup, we can minimize parasitic diffusions processes [7] which may kick atoms out of the cavity and thus limit the lifetime T_{cav} . The expansion of the atomic cloud, whose size quickly exceeds the diameter of the mirror, usually limits the number of bounces in the cavity [6]. As in [5, 6], we circumvent this problem

by using a “curved mirror” which refocuses periodically the condensate. This gives a very promising sensitivity for the proposed gravimeter, which increases as $T_{\text{cav}}^{3/2}$ with the atom interrogation time T_{cav} as in standard atom gravimeters [1].

2 Determination of the acceleration of gravity: principle of the measurement

Following up our approach in [8], we present in this section a first simple description of the proposed matter-wave cavity and give a heuristic analysis of its performance as a gravimeter.

2.1 Principle of the experiment

The principle is to levitate a free falling atomic sample by providing a controllable acceleration mediated by a coherent atom–light interaction. Radiation pressure could provide levitation, but the resulting force is not precisely tunable if tied to incoherent spontaneous emission processes. A better choice to provide this acceleration is thus a series of vertical Raman pulses. Indeed these pulses impart coherently a very well defined momentum to a collection of atoms [9]. A sequence of Raman pulses of identical effective wave vector \mathbf{k} interspaced with a duration T gives an acceleration to an atomic cloud which is monitored by the choice of T . Levitation occurs when the sequence of vertical Raman pulses compensates, on average, the action of gravity. This stabilization is obtained thanks to a fine-tuning of the period between two pulses: after a fixed time, one observes a resonance in the number of atoms kept in the cavity for the adequate period T_0 . The atomic cloud is then well stabilized, and the average Raman acceleration equals the gravitational acceleration. Knowing the period T_0 , one can infer the corresponding Raman acceleration and thus the gravity acceleration g . The ratio $\hbar k/m$ can be simultaneously determined using the resonance condition of the Raman mirrors.

2.2 Description of the cavity

As displayed in Fig. 1, the atomic sample, initially at rest in the lower state a , is dropped. After a free fall of duration $T/2$, during which the sample acquires a momentum $gT/2$, we shine a first Raman π pulse of 2 counter-propagating lasers with respective wave vectors $\mathbf{k}_{\text{down}} = \mathbf{k}_1$ and $\mathbf{k}_{\text{up}} = \mathbf{k}_2$ and respective frequencies $\omega_{\text{down}} = \omega_1$ and $\omega_{\text{up}} = \omega_2$. This

✉ Fax: +33 143255542, E-mail: francois.impens@obspm.fr, christian.borde@obspm.fr

brings the atom from the internal state a to an internal state b with a momentum transfer $2\hbar k = k_2 - k_1$. Then we shine a second Raman π pulse with $k_{\text{down}} = k_4$ and $k_{\text{up}} = k_3$, with respective frequencies $\omega_{\text{down}} = \omega_4$ and $\omega_{\text{up}} = \omega_3$ ($\omega_3 - \omega_4 \sim \omega_2 - \omega_1$). This pulse brings the atomic internal state back to state a with an additional momentum transfer $2\hbar k$. If the two successive pulses are sufficiently close, this sequence acts as a single coherent “mirror pulse” which keeps the same internal state a and modifies the atomic momentum by $4\hbar k$. In particular, if the initial momentum is $-2\hbar k$, the mirror simply inverts the velocity. This “mirror pulse” is velocity-sensitive: it reflects only the atoms whose vertical momentum belong to a tiny interval around a specific value p_0 . Thus, in order to bounce several times, the atoms should have the same momentum p_0 immediately before each “mirror pulse”. This implies a resonance condition (1) on the period between two pulses. The adequate momentum p_0 is set by the energy conservation during the pulse and fulfills the resonance condition (2). As depicted in Fig. 2, if the resonance condition (1) is satisfied, the sample will have a periodic trajectory in the momentum space. It is this periodicity of the atomic momentum for an adequate time-spacing T_0 of two successive “mirror pulses”, which yields the picture of a matter-wave cavity in momentum space. Figure 3 represents an energy–momentum diagram of the atomic sample during a cavity cycle.

2.3 Resonance conditions

For the resonant period T_0 , the momentum kick imparted during each “mirror pulse” is equal to the momentum acquired through the free fall between two such pulses:

$$T_0 = \frac{4\hbar k}{mg}. \quad (1)$$

If the period T differs from T_0 , the atomic cloud takes an acceleration $a = 4\hbar k/m(1/T - 1/T_0)$. The average speed resulting from this acceleration drifts the momentum of the atoms from the optimum value $p_0 = -2\hbar k u_z$ satisfying the Bragg condition (2) associated with elastic energy conservation. This drives the atoms progressively out of resonance and

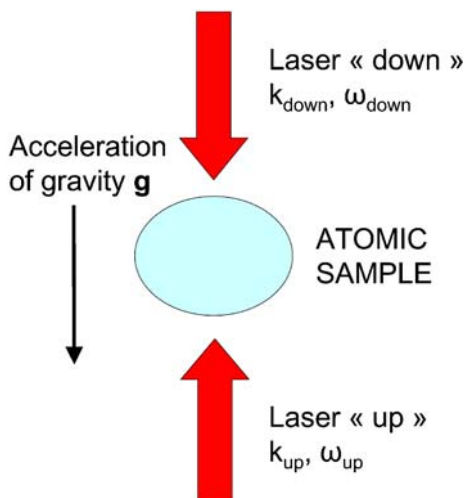


FIGURE 1 Setup description

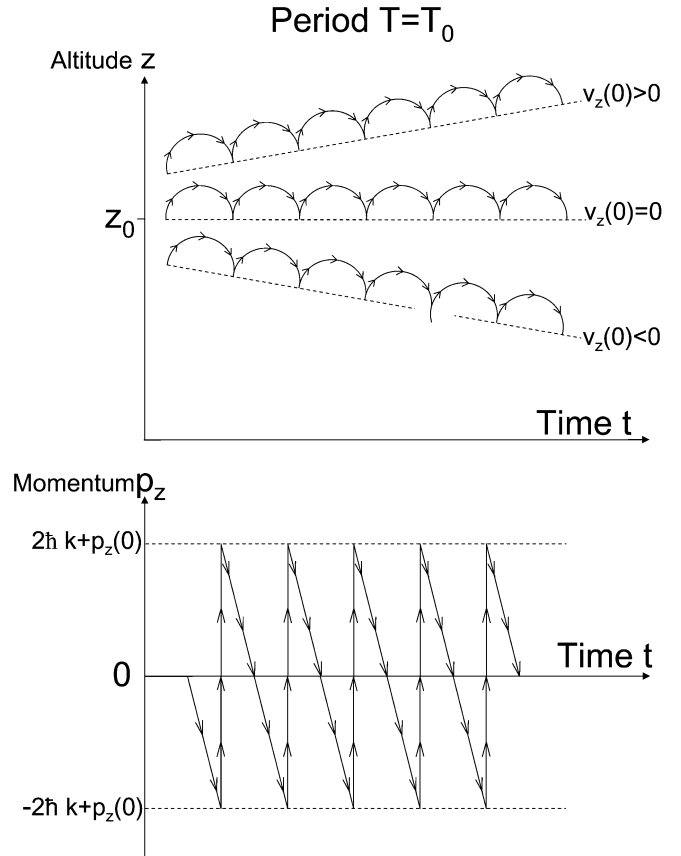


FIGURE 2 Altitude and momentum of the atom sample as a function of time for the resonant period $T = T_0$ and for different initial velocities. The atom cloud always undergoes a periodic motion in momentum space even with a nonzero initial velocity. The figure illustrates three different cases of stable cavity in momentum space

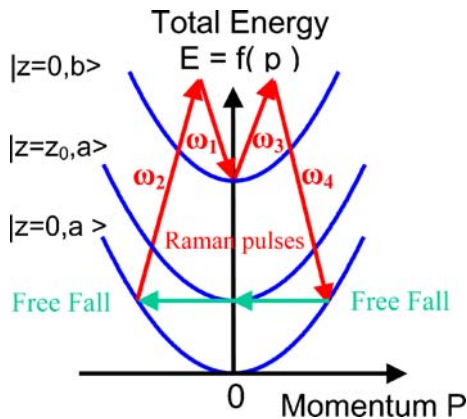


FIGURE 3 Energy–momentum diagram of the condensate. z_0 represents the height from which atoms are dropped

a part of the cloud will not be reflected by the “mirror pulses”. When T differs from T_0 , we thus observe a drift in position and momentum as well as a leakage of the condensate. It should be noted that if $T = T_0$, a non-zero initial velocity does not reduce fundamentally the number of bounces of an atomic sample (Fig. 2). Indeed, only the periodicity of the momentum space trajectory matters, and provided that one adjusts the Raman detuning to account for the shift in the momentum p_0 , the sample can still be reflected several times. The atomic sam-

ple merely drifts with a constant average vertical velocity, the only limitation being then the finite size of the experiment. Thanks to this flexibility in the initial velocity, the resonance observed is robust to an imperfect timing of the trap shutdown.

Bragg resonance conditions express the energy conservation during the pulses:

$$\begin{aligned}\omega_1 + \omega_b + \delta_{AC} + \frac{(\mathbf{p} + 2\hbar\mathbf{k})^2}{2m\hbar} &= \omega_2 + \omega_a + \frac{\mathbf{p}^2}{2m\hbar} \\ \omega_4 + \omega_a + \frac{(\mathbf{p} + 4\hbar\mathbf{k})^2}{2m\hbar} &= \omega_3 + \omega_b + \delta_{AC} + \frac{(\mathbf{p} + 2\hbar\mathbf{k})^2}{2m\hbar}.\end{aligned}\quad (2)$$

\mathbf{p} is the matter-wave average momentum immediately before the first Raman pulse, and δ_{AC} is the light shift. Thanks to this second set of conditions, which directly impacts the reflection coefficient, the “mirror pulses” act directly as the probe of the resonant time-spacing T_0 expressed in (1). When the atomic sample is dropped without initial speed, for a nearly resonant period $T \simeq T_0$, the first pulse brings the sample at rest, so that both pulses play a symmetric role. If one does the replacements $\omega_1 \rightarrow \omega_3$ and $\omega_2 \rightarrow \omega_4$, the mismatch in the two Bragg conditions is then equal in absolute value, yielding identical reflection coefficients for both pulses. One can then consider that the two Bragg conditions merge into a single one. We assume from now on that the atomic cloud has no initial velocity¹, but the extension to the general case is straightforward.

The two conditions (1) and (2) must be satisfied to ensure the resonance of the matter-wave cavity. Nonetheless, condition (1) on the period is much more critical than the Bragg condition (2). Indeed, a slight shift in the period T from its optimum value T_0 implies for the condensate an upward or downward acceleration. The increasing speed acquired by the atoms will generate, through Doppler shifting, a greater violation of the Bragg resonance condition and thus greater losses at each “mirror pulse”. Conversely, a mismatch in the detuning $\omega_2 - \omega_1$ with the adjustment $T = T_0$ will only induce constant losses at each cycle. The observation of a resonance in the number of atoms, when one scans the period between two Raman pulses, is thus very sharp and robust to an imperfect adjustment of the Raman detuning. Consistently, we choose to determine the acceleration of gravity g through condition (1). Figure 4 sketches the number of atoms in the cavity as a function of the period T after different numbers of cycles with a detuning matching perfectly condition (2). We observe that the resonance in T becomes sharper as the number of cycles increases.

2.4 Expected sensitivity

Let us derive the resonance figure associated with the period T . We characterize the mismatch in the Bragg condition by an “off-Braggness” parameter $y(\mathbf{p})$ function of the average momentum of the atoms [10]:

$$y(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\Omega_0} \left[\hbar\mathbf{k}^2/2m + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}/m - (\omega_1 - \omega_2 - \omega_{ba} - \delta_{AC}) \right] \quad (3)$$

¹ Bose–Einstein condensates can be brought at rest very accurately and are thus well suited for our system.

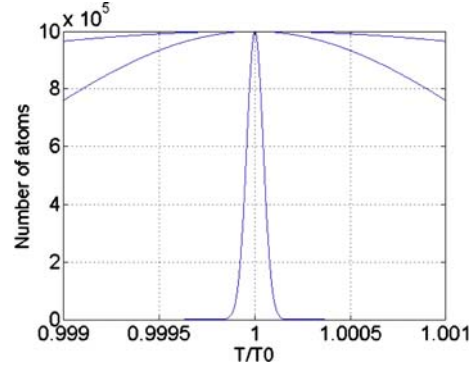


FIGURE 4 Number of atoms in the cavity after 1, 10, 50 cycles as a function of the ratio T/T_0 ($T_0 \simeq 3.8$ ms). We took $\Omega_0 = 2\pi \times 5 \times 10^3$ Hz. The number of atoms initially present in the cavity was fixed to be $N = 10^6$

where Ω_0 the effective Rabi frequency of the Raman pulse and \mathbf{p} the momentum immediately before the first pulse. The Raman detuning is adjusted to be resonant if $\mathbf{p} = p_0\mathbf{u}_z = -2\hbar\mathbf{k}\mathbf{u}_z$, so we adjust the detuning to match $y(-2\hbar\mathbf{k}\mathbf{u}_z) = 0$:

$$y(\mathbf{p}) = \frac{(p_z + 2\hbar k)k}{2m\Omega_0} = \frac{(p_z + mgT_0/2)k}{2m\Omega_0}. \quad (4)$$

In the remainder of this section, we focus on the vertical component of momentum, which we note as p to alleviate the notations. Because of the mismatch in the Bragg condition, only a fraction $\varrho(p)$ of the atomic cloud will then be transferred during the first Raman pulse:

$$\varrho(p) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+y(p)^2}\right)}{1+y(p)^2}. \quad (5)$$

For the second Raman pulse, the mismatch is equal in value and opposite in sign, so the same fraction of atoms undergoes the second transition. The reflection coefficient of the “mirror pulse” is then simply the product of these values:

$$R(p) = \frac{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+y(p)^2}\right)}{(1+y(p)^2)^2}. \quad (6)$$

The part of the cloud which is not reflected will simply go on a free fall and have an off-Braggness parameter of $y(p - mgT)$ for the next “mirror pulse”. We will adopt experimental parameters such that $y(mgT_0) \gg 1$, so that non-reflected atoms are insensitive to subsequent Raman transitions and can be considered as expelled from the cavity.

The average momentum acquired by the atomic cloud results from a competition between the gravitational acceleration and the kicks of the “mirror pulses”. Given a period T for the sequence, the average vertical momentum of the cloud immediately before the n -th “mirror pulse” is simply:

$$p_n = -mgT/2 + (n-1) \times mg(T_0 - T). \quad (7)$$

The remaining fraction of the cloud after n cycles is thus:

$$R(T) = R(p_1) \dots R(p_n). \quad (8)$$

We expand this expression in Appendix A for nearly resonant pulses. We have assumed that a relative variation ε of the

condensate population can be tracked experimentally. This computation shows that the error in the determination of the gravity acceleration can be less than:

$$\frac{|\Delta g|}{g} \leq \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{1}{\hbar k^2} \left(\frac{\Omega_0 \sqrt{-\log(1-\varepsilon)}}{n^{3/2}} \right) + \left| \frac{\Delta v_r}{v_r} \right| \quad (9)$$

where $v_r = \hbar k/m$ is a recoil velocity which can be measured independently or, as stated before, directly from resonance condition (2) [11]. This velocity has been determined with an accuracy as good as a few 10^{-9} for Cs [12, 13] and Rb atoms [14], ultimately limits the performance of our gravimeter. Figure 5 displays the relative error in the determination of the acceleration of gravity obtained from a numerical simulation with the reflection coefficient (6). It shows a very good agreement with the analytic expression (9) after about 10 cycles.

Formula (9), thus, yields a sensitivity which scales as $n^{3/2} = (T_{\text{cav}}/T_0)^{3/2}$, where T_{cav} is the interrogation time of the atoms and T_0 the duration of a cycle at resonance. We, thus, obtain the expected improvement of the sensitivity with the atom interrogation time. This is normal since the accuracy of the measurement also increases with the selectivity of the Raman pulses. The mirror pulses should thus be as long as possible to act as efficient atom velocity probes. Ideally, each pulse should last half of the optimal period T_0 . The atom sample would then fall in a continuous light field. This setup resembles that of Cladé et al. [3], except that here the atomic sample is interacting with a travelling wave, and that in addition to condition (1) we have a double Raman condition (2).

In the previous description, one could in principle maintain the sample for an arbitrarily long time inside the cavity provided that the two resonance conditions are fulfilled, yielding an extremely accurate measurement of the gravitational acceleration. In fact, even at resonance, systematic losses occur that limit the number of condensate cycles. Practically, one can hope to keep a significant number of atoms in the cloud up to a certain number of n cycles, which reflects the sample lifetime $T_{\text{cav}} = nT_0$ at resonance. These losses at resonance have several origins.

First, they can result from imperfect recoil transfers due to residual fluctuations in the Raman lasers intensities. Raman

impulsions can be very effective though, since these transfers have been realized with an efficiency as high as 99.5%.

Second, parasitic diffusions may eject atoms from the cavity. These processes, such as absorption followed by spontaneous emission, can be made arbitrarily small by using far-detuned Raman pulses. This limitation is thus essentially of technical nature.

Third, the cloud expansion can drive the atomic sample out of the Raman lasers. Indeed, if the cloud is not refocused, its transverse size exceeds quickly the diameter of the Raman lasers. The atoms would then be limited to a few cycles in the cavity. It is, thus, essential to involve a mechanism that stabilizes transversally the atomic cloud. We expose in Sect. 4 two ways to focus the atomic sample.

3 ABCD analysis of the matter-wave cavity

In the following, we will calculate explicitly the evolution of an atom sample in our gravitational cavity using the ABCD matrix formalism [15–17]. In this section, we assume that the atom density after the initial free fall is sufficiently low to make the effect of interactions negligible during the subsequent bounces.

3.1 Description of the atomic sample

We will restrict ourselves to a Bose–Einstein condensate which, in the Hartree–Fock approximation, can be described by a macroscopic wavefunction $\Psi(\mathbf{r}, t)$. After the initial free-fall, the evolution follows the linear partial differential equation:

$$i\hbar \partial_t |\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle = [p^2/2m + H_G] |\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle, \quad (10)$$

where H_G is the Hamiltonian associated with gravito-inertial effects. From the linearity of this equation, we can deduce the time evolution of any arbitrary wave function from the propagation of a complete set of functions. As explained in the Appendix C, the propagation of such a basis, the Hermite–Gauss modes $H_{lmn}(\mathbf{r})$, can be extracted from the propagation of a generating Gaussian wave function [17]:

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\det(X_0)}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) Y_0 X_0^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{i}{\hbar} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{p}_0 - 2\hbar \tilde{X}_0^{-1} \alpha) + \frac{1}{2} \alpha X_0^{-1} X_0^* \alpha \right]. \quad (11)$$

The matrices X_0 , Y_0 and the vectors \mathbf{r}_0 , \mathbf{p}_0 correspond respectively to the position and momentum widths, to the average position and to the average momentum of the wave function. We can then restrict our derivation without any loss of generality to the propagation of (11). Since the Hamiltonian H_G can be considered with a very good approximation to be quadratic in position and momentum, the wave-packet (11) follows the ABCD law for atom optics [16]. In order to alleviate the notations, we shall omit to mention the index α in the subsequent computations and denote the corresponding state $|\Psi_{\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, X_0, Y_0}\rangle$.

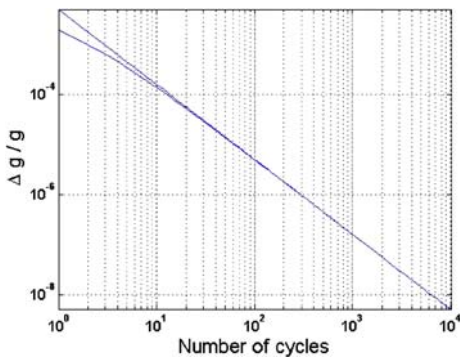


FIGURE 5 Error on $\Delta g/g$ as a function of the number of cycles, with Raman pulses of Rabi pulsation $\Omega_0 = 2\pi \times 5 \times 10^3$ Hz and a detection threshold of $\varepsilon = 10^{-3}$. The lower curve is the actual sensitivity based on a simulation with a condensate of infinitely narrow momentum distribution. The upper curve is the analytic formula (9)

3.2 Initial expansion

Before the trap shutdown, the condensate evolves under the Hamiltonian $H = p^2/2m + H_G + H_{\text{Trap}}$. We remove the gravitational term H_G thanks to a unitary transform $U_G(t, t_0)$:

$$|\Psi(t)\rangle = U_G(t, t_0)|\Phi(t)\rangle. \quad (12)$$

$U_G(t, t_0)$ represents the evolution of a quantum state under a gravitational field. Performing this unitary transform is equivalent to studying the condensate in the non-inertial free falling frame. The state $|\Phi(t)\rangle$ then evolves under the Hamiltonian $H_{\text{Free Fall}} = p^2/2m + H_{\text{Trap}}$. The condensate is taken to be initially in the strong coupling regime, so that the corresponding wave function $\Phi(\mathbf{r}, t)$ follows the scaling laws established by Castin and Dum [18] for the Thomas–Fermi expansion. The initial wave function $\Phi(\mathbf{r}, t_0)$ corresponds to the Thomas–Fermi profile. We represent concisely its evolution by the unitary transform $U_{\text{TFE}}(t, t_0)$:

$$|\Phi(t)\rangle = U_{\text{TFE}}(t, t_0)|\Phi(t_0)\rangle. \quad (13)$$

It is indeed not useful at this point to explicit this transform, whose expression is given in the *Appendix B*. We transform back to the laboratory frame at the time t_1 when we start to shine the first “mirror pulse”:

$$|\Psi(t_1)\rangle = U_G(t_1, t_0)U_{\text{TFE}}(t_1, t_0)|\Phi(t_0)\rangle. \quad (14)$$

The resulting quantum state $|\Psi(t_1)\rangle$ will be taken as a starting point for the subsequent oscillation of the condensate in the cavity. Its evolution is conveniently obtained by decomposition on a suitable basis of Hermite–Gauss modes $H_{lmn}(\mathbf{r})$, as explained in the preceding paragraph. The initial free fall simply determines the initial coefficients of the projection:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t_1) = \sum_{l,m,n} c_{lmn}(t_1)H_{lmn}(\mathbf{r}). \quad (15)$$

3.3 Propagation of a Gaussian wave-packet in the diluted regime

The evolution of free falling atoms in a Raman pulse is non-trivial since the gravitational acceleration makes the detuning (3) time-dependent:

$$\Delta(t) = \omega_1 - \omega_2 - \omega_{ba} - 2(\mathbf{p} - m\mathbf{g}t\mathbf{u}_z) \cdot \mathbf{k}/m - 2\hbar\mathbf{k}^2/m - \delta_{\text{AC}}. \quad (16)$$

The behavior of a two-level atom falling into a laser wave has been solved exactly [19]. Gravitation alters significantly the two-level atom state trajectory on the Bloch sphere when the pulse duration τ becomes of the order of:

$$\tau_g = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{k}| |\mathbf{g}|}} \simeq 10^{-4} \text{ s}. \quad (17)$$

Indeed, for this duration the off-Braggness parameter (3) changes significantly during the pulse. As seen in the previous

section, in order to probe effectively the resonance condition (1), the Raman π -pulses need to be velocity-selective. This leads us to consider pulse durations on the order of the millisecond, typically longer than τ_g . It is then necessary to compensate the time-dependent term induced by the acceleration of gravity in the detuning by an opposite frequency ramp chirping the pulse.

The simultaneous effects of gravito-inertial and electromagnetic fields can be decoupled thanks to an effective propagation scheme developed by Antoine and Bordé [16, 17]. It accounts for the electromagnetic interaction through an instantaneous diffusion matrix \hat{S} and for gravito-inertial effects through a unitary transform $U_1(T, 0)$:

$$|\Psi(T)\rangle = U_1(T, 0)\hat{S}|\Psi(0)\rangle. \quad (18)$$

Following this propagation method, it is sufficient to apply an effective instantaneous diffusion matrix for each “mirror pulse” and evolve the state between the pulse centers as if there was no electromagnetic field.

3.4 Action of the effective instantaneous interaction matrix \hat{S}

We study in this paragraph the interaction of the condensate with a quasi-plane electromagnetic wave, for which the instantaneous diffusion matrix \hat{S} is known. This matrix is operator-valued, but momentum operators can be taken as complex-numbers since the considered wave function is a narrow momentum wave-packet centered around a nearly resonant momentum \mathbf{p}_0 (i.e., such that $y(\mathbf{p}_0) \ll 1$). In other circumstances, this interaction can give rise to fine structuring effects such as the splitting of the initial wave into several packets following different trajectories (Borrmann effect) [10]. Following the approach of Sect. 3.1, we consider a Gaussian matter-wave:

$$|\Psi_0\rangle = |a, \Psi_{\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, X_0, Y_0}\rangle. \quad (19)$$

We study the interaction of this atomic wave with a “mirror pulse” involving two linearly polarized running laser waves:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \mathbf{E}(x, y) \cos(kz - \omega_1 t + \Phi_1) \\ & + \mathbf{E}(x, y) \cos(kz + \omega_2 t + \Phi_2). \end{aligned} \quad (20)$$

With respect to the population transfer, electromagnetic fields may be treated as plane waves in the vicinity of the beam waist. The effective diffusion matrix $\hat{S}(\mathbf{k}, \mathbf{p}_0)$ associated to a Raman pulse effective wave vector \mathbf{k} and applied to a wave-packet of central momentum \mathbf{p}_0 then yields [10]:

$$\begin{aligned} \hat{S}(\mathbf{k}, \mathbf{p}_0) = & \begin{pmatrix} S_{bb} & S_{ba} \\ S_{ab} & S_{aa} \end{pmatrix} \\ S_{aa} = S_{bb}^* = & \exp \left[-i(\Omega_{\text{AC}}^e(\mathbf{r}) + \Omega_{\text{AC}}^g(\mathbf{r}))\frac{\tau}{2} \right] \exp(i\delta_{12}\tau) \\ & \times \left[\cos(\Omega_0\tau\sqrt{1+y^2}) + i\frac{2y}{\sqrt{1+4y^2}} \sin(\Omega_0\tau\sqrt{1+y^2}) \right] \\ S_{ab} = S_{ba} = & i \exp \left[-i(\Omega_{\text{AC}}^e(\mathbf{r}) + \Omega_{\text{AC}}^g(\mathbf{r}))\frac{\tau}{2} \right] \exp(-i\delta_{12}\tau) \\ & \times \left(\sin(\Omega_0\tau\sqrt{1+y^2}) \right) / \left(\sqrt{1+y^2} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

$$y(\mathbf{p}_0, \mathbf{k}) = \frac{-\delta_{12}(\mathbf{p}_0, \mathbf{k})}{2\Omega_0} = -\frac{1}{2\Omega_0}[\omega_1 - \omega_2 - \omega_{ab} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_0/m - \hbar \mathbf{k}^2/2m - (\Omega_{AC}^e(\mathbf{r}) - \Omega_{AC}^s(\mathbf{r}))]. \quad (22)$$

ω_1, ω_2 are respectively the pulsations of the lasers propagating upward and downward, τ the duration of the pulse, $\Omega_{AC}^e(\mathbf{r})$ and $\Omega_{AC}^s(\mathbf{r})$ are the AC Stark shifts of the associated levels. It is worth commenting the position dependence of those terms, which intervene in two different places in the S matrix. In the off-Braggness parameter y , the term $\delta_{AC}(\mathbf{r})$ induces an intensity modulation, while in the complex exponential, the term $\Omega_0(\mathbf{r}) = \Omega_{AC}^e(\mathbf{r}) + \Omega_{AC}^s(\mathbf{r})$ changes the atomic wave-front.

After each ‘‘mirror pulse’’, the part of the condensate which does not receive the double momentum transfer will fall out of the trap if $y(p_0 + mgT) \gg 1$. We, thus, project out those states and focus on the non diagonal terms of the diffusion matrix:

$$|\Psi(2\tau)\rangle = \langle a|\hat{S}(-\mathbf{k}, \mathbf{p}_0 + \hbar\mathbf{k})|b\rangle \langle b|\hat{S}(\mathbf{k}, \mathbf{p}_0)|\Psi(0)\rangle. \quad (23)$$

The state after the mirror pulse is thus:

$$|\Psi(2\tau)\rangle = \varrho(\mathbf{r})|a, \Psi_{r_0, p_0+2\hbar k, X_0, Y_0}\rangle$$

$$\varrho(\mathbf{r}) = \frac{e^{-i2(\delta_{12}-\Omega_{AC}^0(\mathbf{r}))\tau} \sin^2\left(\Omega_0\tau\sqrt{1+y(p_0)^2}\right)}{(\Omega_0\tau\sqrt{1+y(p_0)^2})^2}. \quad (24)$$

The amplitude factor $\varrho(\mathbf{r})$ reflects both the loss of non-reflected atoms and the change in the atomic beam wave-front. Expanding the generating wave function (11) into powers of α , one shows that the effect of the interaction matrix S is the same on each mode of the expansion (15).

3.5 Gravito-inertial effects

The unitary transform $U_1(T, 0)$ represents the gravito-inertial effects. We refer the interested reader to [17] for a thorough derivation of this operator. We remind here the main result necessary for our computation. This operator maps a state defined by a Gaussian of parameters X_1, Y_1, r_1, p_1 in position representation onto an other Gaussian state in position representation whose parameters X_2, Y_2, r_2, p_2 depend linearly on the former according to:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh[\sqrt{\gamma}T] & \gamma^{-1/2} \sinh[\sqrt{\gamma}T] \\ \gamma^{1/2} \sinh[\sqrt{\gamma}T] & \cosh[\sqrt{\gamma}T] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

The coefficient γ represents the gravity gradient assumed to be constant in time. There is the same matrix relation between the initial and final position and momentum centers $\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2$ of the wave-packets, with an additional function ξ which reflects the constant part of the gravity field. The transform $U_1(T, 0)$ also introduces an additional phase factor given by the classical action:

$$U_1(T, 0)|a, \Psi_{r_1, p_1, X_1, Y_1}\rangle = e^{iS_{Cl}(T, 0)}|a, \Psi_{r_2, p_2, X_2, Y_2}\rangle. \quad (26)$$

Since this phase factor does not play any role in the following computations, we do not give its expression here, but it can be found in [16]. Expanding a generic Gaussian such as

(11) shows that the propagation of any Hermite mode of the expansion (15) is identical in the gravity field: the Gaussian parameters X, Y involved in each mode are transformed identically.

3.6 Conclusion: cycle evolution of the matter wave

In our approach, the effect of the interactions has been neglected after the first bounce and the propagation of the diluted atomic sample in the cavity is essentially mode-independent. Nonetheless, in experiments where atomic samples of higher density are bouncing on electromagnetic mirrors [6, 20–22], interactions do change the shape of the cloud during the propagation. As we shall see in the next section, interactions impact the transverse velocity distribution in a way that can lead to a reduced stability of the cavity. In the following, we will review possible focusing techniques to solve this problem.

4 Matter-wave focusing

We investigate in this section two possible curved mirrors. We first review a focusing technique based on the phase imprinting through a position-dependent Stark shift [23]. Afterwards, we introduce an original focusing mechanism based on a laser wave-front curvature transfer.

4.1 Matter-wave focusing with phase imprinting

This method has the advantage of leading to tractable equations. It relies on a position dependent Stark shift provided by quasi-plane waves with a smooth intensity profile:

$$\mathbf{E}(x, y) = E_0 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{w^2}\right) \mathbf{u}. \quad (27)$$

Unfortunately, this Stark shift implies a position-dependence due in the population transfer. This results in a loss of atoms which makes this focusing method hardly compatible with the extreme cavity stability required by this experiment. Nonetheless, it is interesting to demonstrate the effect on the wave curvature induced by this position dependent light shift. In this perspective, we neglect the position dependence in the population transfer but not in the phase of the diffracted matter wave. Indeed this shift $\Omega_{AC}(\mathbf{r}) = \Omega_{AC}^0 \left(1 - 2\frac{x^2+y^2}{w^2}\right)$ imprints a quadratic phase to the matter wave:

$$|\Psi(2\tau)\rangle = \varrho_1 \exp\left[-i\frac{4\Omega_{AC}^0\tau}{w^2}(x^2 + y^2)\right] |a, \Psi_{r_0, p_0+2\hbar k, X_0, Y_0}\rangle. \quad (28)$$

The position-independent phase shift is hidden in the coefficient ϱ_1 . Using expression (11) for the wave function $\Psi_{r_0, p_0+2\hbar k, X_0, Y_0}$, one can recast the last equation into:

$$|\Psi(2\tau)\rangle = \varrho_1 |a, \Psi_{r_0, p_0+2\hbar k, X_1, Y_1}\rangle \quad (29)$$

with:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{8\hbar\Omega_{AC}^0\tau}{mw^2} P_{\perp} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

with P_{\perp} projection matrix on the transverse directions:

$$P_{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

The AC shift factor, thus, changes the Gaussian parameters of the matter wave just like a thin lens of focal f in classical optics, where the transform law yields:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

One could, thus, define the focal length of an atom optic device as the f parameter entering the ABCD transform (30). Precisely, a phase factor $\exp[-i\alpha(x^2 + y^2 + z^2)]$ on a Gaussian atomic wave changes the Gaussian parameters of the matter wave according to the ABCD law of a thin lens of focal:

$$f = \frac{m\alpha}{2\hbar}. \quad (33)$$

The AC dependent Stark shift thus plays for the atomic beam the role of a thin lens of focal $f = mw^2/8\hbar\Omega_{AC}^0\tau$. Let us point out that this focusing occurs in the time domain so that the ‘‘focal length’’ is indeed a duration.

4.2 Matter-wave focusing with spherical light waves

As mentioned in the last paragraph, the impossibility to maintain a perfect population transfer on the whole wave-front while focusing with a light shift effect makes this technique inadequate for the proposed gravimeter. We investigate here a different method that does not have this major drawback. Instead of shaping the atomic wave-front thanks to an indirect light-shift effect, a better way to proceed is indeed

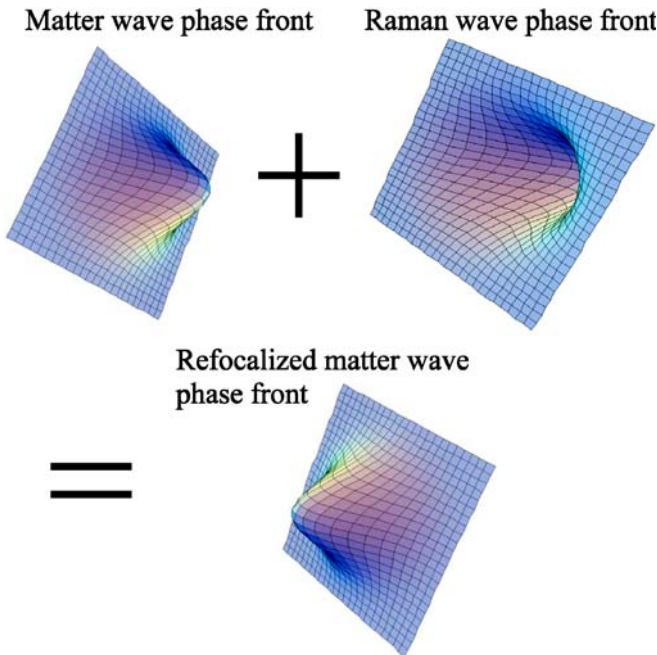


FIGURE 6 Interaction between a spherical matter wave and a laser. The laser spherical wave-front refocuses the matter wave

to have the matter wave interact with a light wave of suitable wave-front, like on Fig. 6. Following up this intuitive picture, we propose an alternative matter-wave focusing scheme, fully original to our knowledge, based on the matter-wave interaction with electromagnetic fields of spherical wave-front. To show that the focusing is effective, we compute the transition amplitude of a matter wave interacting with Gaussian Raman waves to first order in the electromagnetic field. A similar computation has been previously performed by Bordé in the context of atomic beamsplitters [24].

Let us consider for the ‘‘mirror pulse’’ two counter-propagating matched Gaussian beams:

$$\begin{aligned} E_1(x, y, z, t) &= \frac{1}{2}U_0^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w) e^{ik_0(z-z_w)} E(t) e^{i\omega_1 t + i\varphi_1} + c.c. \\ E_2(x, y, z, t) &= \frac{1}{2}U_0^-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w) e^{-ik_0(z-z_w)} E(t) e^{i\omega_2 t + i\varphi_2} + c.c. \end{aligned}$$

$$\text{with } U_0^{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{1 \mp 2iz/b} \exp\left[-\frac{1}{1 \mp 2iz/b} \frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right] \quad (34)$$

where $k_0 = (k_2 - k_1)/2$. The detuning $\omega_2 - \omega_1$ is adjusted so that the relevant Raman process be the absorption of a photon from mode E_2 followed by the emission of a photon into mode E_1 . We have used the confocal parameter of the light beam $b = k_0 w_0^2$ as well as the complex Lorentzian function L^+ [25]:

$$L^+(z) = \frac{1}{1 - 2iz/(k_0 w_0^2)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{4b^2}}} \exp\left[i \arctan\left(\frac{z}{2b}\right)\right]. \quad (35)$$

The term $\arctan\left(\frac{z}{2b}\right)$ is known as the Gouy phase. The matching of the two laser beams is reflected in the relation between their transverse structures $U_0^-(\mathbf{r}) = U_0^{+*}(\mathbf{r})$: at each point their curvature is identical. The Raman diffusion associated with these fields yields an effective interaction Hamiltonian whose matrix elements is:

$$\begin{aligned} V_{ba}(\mathbf{r}, t) &= -\hbar\Omega U_0^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w) U_0^{-*}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w) e^{i2k_0(z-z_w)} F(t) \\ &\times e^{-i(\omega_{21} + r(t-t_r))t + i\varphi_0} + c.c. \end{aligned} \quad (36)$$

The term $r(t - t_r)$ accounts for the frequency ramp starting at time t_r , $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$ is the Raman detuning and $F(t) = |E(t)|^2$ the time envelope of the pulse. The computation of the transition amplitude is somewhat involved and deferred to Appendix D. We obtain:

$$\begin{aligned} b^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= i\Omega\sqrt{2\pi} e^{i2k_0[z-z_{C0}(t) - 2\hbar k_0(t-t_0)/m]} e^{i\varphi_0'} \\ &\times L^+(z - z_{C0}(t)) U_0^{+2}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{C0}(t) - \frac{2\hbar\mathbf{k}_0}{m}(t-t_0)\right) \\ \langle b, \mathbf{r} | U_0(t, t_0) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} [\tilde{F}(\omega_B(p_z, \mathbf{k}_0)) \langle a, \mathbf{p} | \Psi(t_0) \rangle] | b, \mathbf{p} \rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

$U_0(t, t_0)$ is the evolution operator in the gravitational field, $\mathbf{r}_{C0}(t) = \mathbf{r}_w + \frac{\mathbf{p}_w}{m}(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{g}(t - t_0)^2$ and $\omega_B(p_z, \mathbf{k}_0)$ a frequency which reflects the Bragg resonance condition:

$$\omega_B(p_z, \mathbf{k}_0) = -\left[\omega_{ba} + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} + \frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m} - \omega_{21} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{g}(t_r - t_0)\right]. \quad (38)$$

$U_0^{+2}(\mathbf{r})$ corresponds to a Gaussian mode of confocal parameter $b = k_0 w_0^2$ and waist $w_0/\sqrt{2}$. The first-order term (37) is the leading contribution to the outgoing excited matter wave. The filtering of the pulse acts as expected through the Fourier envelope $\tilde{F}(\omega_B(p_z, \mathbf{k}_0))$, significant only for a small velocity class which can be tuned by the starting time t_r of the frequency ramp. The operator $U_0(t, t_0)$ reflects the propagation in the gravitational field. The factor $L^+(z - z_C(t))$ barely affects the longitudinal shape of the atomic wave, without contributing to the average vertical momentum. As discussed in Sect. 2, the cavity lifetime of the atomic sample does not depend on its longitudinal profile. Therefore we do not need to worry about this factor.

What matters is the transverse structure of this outgoing wave, which corresponds to a focusing matter wave. As suggested in Fig. 6, the curvature of the Gaussian Raman wave has been transmitted from the laser wave to the atomic wave through the term $U_0^{+2}[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{C0}(t) - \frac{2\hbar\mathbf{k}_0}{m}(t - t_0)]$. This term induces a quadratic dependence of the phase on spatial coordinates:

$$U_0^{+2}(\mathbf{r}) = \exp\left[-\frac{2k_0^2 w_0^2 + i4k_0 z}{k_0^2 w_0^4 + 4z^2}(x^2 + y^2)\right]. \quad (39)$$

Following the approach of the precedent paragraph, and the relation (33), this can be interpreted as a thin lens effect. To express the corresponding focal, we introduce the vector $\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{C0}(t) - \frac{2\hbar\mathbf{k}_0}{m}(t - t_0)$. For an atomic wave centered around $z = z_a$ at the time t , the interaction with the light field plays the role of a thin lens of focal $f(z_a, z_w, t)$ to first order in the electromagnetic field:

$$f(z_a, z_w, t) = \frac{m}{\hbar} \frac{2k_0 \tilde{z}(t)}{k_0^2 w_0^4 + 4\tilde{z}(t)^2}, \quad (40)$$

where the parameter $\tilde{z}(t)$ is:

$$\tilde{z}(t) = z_a - \left(\frac{p_{0z} + 2\hbar k_0}{m}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2\right) - z_w. \quad (41)$$

This focal can, thus, be controlled by the relative position of the laser waist and atomic wave-packet center. This first-order computation shows how the laser beam curvature is transferred to the matter beam wave-front and suggests that it is possible to focus matter waves through Raman pulses with a spherical wave-front in a controllable manner.

4.3 Transverse stability of the cavity

The main threat to the cavity stability is indeed the interatomic interactions which will push away the atoms of the sample from the central axis of the cavity. It is indeed possible to approximate these interactions with an effective lens. A detailed ABCD matrix analysis of the interaction effects will be presented elsewhere. Here we just consider that interactions induce an effective quadratic potential represented by the diagonal matrix γ_i .

In the precedent paragraphs, the focusing obtained is only effective for the transverse directions. This is sufficient, since the longitudinal spread of the atomic sample does not drive it out of the laser beams. The transverse stability of the cavity

is entirely reflected in the temporal evolution of the Gaussian parameters $X(t), Y(t)$. The final parameters are related to the initial parameters by the ABCD matrix:

$$\begin{pmatrix} \cosh[\sqrt{\gamma_i}T] - \frac{p_{\perp}}{f} \sqrt{\gamma_i} \sinh[\sqrt{\gamma_i}T] & \gamma_i^{-1/2} \sinh[\sqrt{\gamma_i}T] \\ \sqrt{\gamma_i} \sinh[\sqrt{\gamma_i}T] - \frac{p_{\perp}}{f} \cosh[\sqrt{\gamma_i}T] & \cosh[\sqrt{\gamma_i}T] \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Since the gravity gradient is diagonal, the matrix (42) is indeed a tensor product of three 2×2 matrices $M_x \otimes M_y \otimes M_z$ corresponding to each direction x, y and z . Therefore the time evolution of the longitudinal and transverse Gaussian parameters is decoupled. The matter wave will be confined if each of the transversal 2×2 matrix has eigenvalues inferior to unity in modulus. This condition is equivalent to:

$$0 \leq \cosh[\sqrt{\gamma_{ix}}T] - \frac{\sqrt{\gamma_{ix}} \sinh[\sqrt{\gamma_{ix}}T]}{2f} \leq 1, \quad (43)$$

and a similar condition holds for γ_{iy} . In our approach of reasonably diluted propagation, a slight curvature in the mirror counteracts the effective interaction gradient γ_i and stabilizes transversally the matter-wave beam.

5 Conclusion

We would like to point out the physical insight provided by the picture of a cavity in momentum space. Such a cavity is only possible in atom optics since photons, whose velocity is fixed to c , cannot be accelerated. In our system, the corresponding momentum wave-packet oscillates between two well-defined values (Fig. 2), with a resonance observed for the adequate time-spacing of the mirrors. We can push further the analogy with an optical cavity. The force mg is the speed of the field in the momentum space. $4\hbar k$ is the momentum analog for the cavity length. The cycle period T_0 of the wave propagating in momentum space is orders of magnitude longer than the usual cycle time of a pulse in an optical cavity.

Let us look again at the resonance condition (1) with this picture in mind. This relation corresponds in momentum space to:

$$T = L/c \quad (44)$$

with the replacements $mg \rightarrow c$ (propagation velocity in momentum space) and $4\hbar k \rightarrow L$ (distance in momentum space). The usual resonance condition for an optical cavity yields:

$$T = n2L/c \quad n \in N. \quad (45)$$

The difference can be explained by the fact that, unlike in an optical cavity where the light goes back and forth between the mirrors, the “way back” in momentum space from $-2\hbar k$ to $2\hbar k$ has to be provided by the light pulse. This explains why the factor 2 is absent in the denominator of (44). The integer n is absent in the resonance condition (44) because we considered only two-photon Raman pulses for the optical mirrors. Indeed, for each period $T_n = nT_0$, the cavity becomes resonant with mirror pulses based on n -photons processes. In order to levitate, the atomic sample needs to receive from the light

pulse an adequate momentum transfer of $4n\hbar k$. This momentum fixes the number of photons exchanged for each possible resonant period T_n .

In the proposed gravimeter, the momentum cavity is loaded with short single atomic pulses well-localized in momentum space, since the instantaneous velocity distribution is sharply peaked at any time. This is the analog of a femtosecond pulse propagating in an optical cavity. It would be interesting, however, to load the cavity with a continuous flow of free falling atoms coming from a continuous atom laser. At a fixed momentum, the contributions from different times would sum-up and interfere, exactly like in a Péroto-Fabry interferometer. This system would then constitute to our knowledge the first example of a momentum space cavity continuously loaded with a matter-wave beam.

We have studied the levitation of an atomic sample by periodic double Raman pulses. In our system, the matter wave is trapped in an immaterial cavity of periodic optical mirrors. For the adequate time interspace between two pulses, the atomic sample is stabilized and levitate for a long time. Thanks to the sensitivity of the stabilization to this period, one obtains an accurate determination of the gravitational acceleration.

In our approach, the system could be loaded with any atomic sample describable by a macroscopic wave function. It is indeed not necessary to impose an initial small velocity dispersion, since the first mirror pulse will serve as a filter for a narrow velocity-class, while the next pulses will serve as a probe. Many aspects developed in this paper are still valid for a thermal cloud. Nonetheless, Bose-Einstein condensates are ideally suited for this trap since matter-wave focusing is more efficient with a single mode coherent source. In this paper we have considered only π -pulses for the atom-light interactions. In fact, one could consider other schemes, for example one could split each π -pulse in two co-propagating $\pi/2$ -pulses separated by a dark space resulting in a sequence of Ramsey-Bordé interferometers [17]. Since the sensitivity to gravitation is proportional to the area covered in space-time by the interferometer, the optimal situation is obtained when the co-propagating $\pi/2$ -pulses are separated by $T_0/2$. An experimental realization of this proposal is planned with the support of the Institut Francilien de Recherche en Atomes Froids (IFRAF).

ACKNOWLEDGEMENTS We are very grateful to A. Landragin for valuable discussions and suggestions. F. Impens acknowledges support from DGA (Délégation Générale de l'Armement). This work is supported by CNES, ANR and DGA. Further support comes from the European Union STREP consortium FINAQS. LNE-SYRTE and the atom optics group (www.atomoptic.fr) of the Laboratoire Charles Fabry are members of IFRAF (www.ifraf.org).

Appendices

A Computation of the gravimeter sensitivity

After n nearly-resonant cycles, the fraction of the cloud preserved becomes:

$$R(T) = R(p_1) \dots R(p_n)$$

$$\text{with } R(p) = \frac{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+y(p)^2}\right)}{(1+y(p)^2)^2}, \quad (\text{A.1})$$

with expression (7) for the momenta:

$$p_n = -mgT/2 + (n-1) \times mg(T_0 - T). \quad (\text{A.2})$$

At resonance $T = T_0$, one would have $p_1 = \dots = p_n = -2\hbar k$ and $y(p_1) = \dots = y(p_n) = 0$. For a big number of cycles n , in the vicinity of the resonance $T \simeq T_0$ one still has $y(p_1), \dots, y(p_n) \ll 1$. The expression for the reflection coefficients simplifies to:

$$\begin{aligned} R(p_i) &= \frac{1}{(1+y^2(p_i))^2} + O(y^4(p_i)) \\ &= 1 - 2y^2(p_i) + O(y^4(p_i)). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

The fraction of atoms kept in the cloud can then be expressed as:

$$\log \frac{1}{R(T)} = - \sum_{i=1}^n \log(R(p_i)) \simeq \sum_{i=1}^n \log(1 + 2y^2(p_i)). \quad (\text{A.4})$$

We insert expression (7) for the momentum in (4) to derive an expression for the off-Braggness parameter:

$$y(p_i) \simeq \frac{g(T - T_0)k}{\Omega_0} \times i. \quad (\text{A.5})$$

The reflection coefficient becomes:

$$\log \frac{1}{R(T)} \simeq \sum_{i=1}^n \log\left(1 + 2i^2 \frac{g^2(T - T_0)^2 k^2}{\Omega_0^2}\right). \quad (\text{A.6})$$

This sum may be approximated by an integral because $i \gg 1$:

$$\log \frac{1}{R(T)} \simeq \int_1^n dx \log\left(1 + 2x^2 \frac{g^2(T - T_0)^2 k^2}{\Omega_0^2}\right). \quad (\text{A.7})$$

This integral can be performed analytically:

$$\int dx \log(1 + ax^2) = -2x + 2 \frac{\arctan(\sqrt{ax})}{\sqrt{a}} + x \log(1 + ax^2). \quad (\text{A.8})$$

We set $a = 2g^2(T - T_0)^2 k^2 / \Omega_0^2$, which verifies $\sqrt{an} \simeq y(p_n) \ll 1$. We can then use expression (A.8) in (A.7) and Taylor expand the right hand side:

$$\log \frac{1}{R(T)} \simeq -2n + 2 \left[n - \frac{1}{3} an^3 \right] + nan^2 = \frac{1}{3} an^3. \quad (\text{A.9})$$

We have omitted the small term coming from the lower bound of the integral. We finally obtain:

$$\log \frac{1}{R(T)} = \frac{2g^2 k^2 (T - T_0)^2 n^3}{3\Omega_0^2}. \quad (\text{A.10})$$

Let the condensate perform n bounces for a range of values of T close to the expected value T_0 , and detect the number of atoms in the cloud afterwards. If a relative variation ε can be tracked experimentally, we can bound the period T_0 between T_1 and T_2 such that $R(T_1) = R(T_2) = 1 - \varepsilon$. According to our previous computation:

$$|T_2 - T_0| \simeq |T_1 - T_0| \simeq \sqrt{\frac{3 \log(1/1 - \varepsilon)}{2}} \frac{\Omega_0}{gk} \frac{1}{n^{3/2}}. \quad (\text{A.11})$$

We infer the gravitational acceleration from the period T_0 thanks to relation (1), so that their relative errors are related by:

$$\left| \frac{\Delta g}{g} \right| \leq \left| \frac{\Delta T}{T} \right| + \left| \frac{\Delta v_r}{v_r} \right|. \quad (\text{A.12})$$

with the recoil velocity $v_r = \hbar k/m$. This gives the following upper bound for the relative error on the gravitational acceleration g :

$$\left| \frac{\Delta g}{g} \right| \leq \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{1}{\hbar k^2} \left(\frac{\Omega_0 \sqrt{-\log(1 - \varepsilon)}}{n^{3/2}} \right) + \left| \frac{\Delta v_r}{v_r} \right|. \quad (\text{A.13})$$

B Thomas–Fermi expansion

The evolution of a condensate initially in the strong coupling regime yields [18]:

$$U_{\text{TFE}}(t, t_0) |\Phi(t_0)\rangle = |\Phi(t)\rangle, \quad (\text{B.1})$$

with:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{-i\beta(t)} e^{im \sum_j r_j^2 \dot{\lambda}_j(t)/2\hbar \lambda_j(t)}}{\sqrt{\lambda_1(t) \lambda_2(t) \lambda_3(t)}} \tilde{\Phi}(\mathbf{r}/\lambda_j(t), t_0)$$

$$\text{and } \tilde{\Phi}(\mathbf{r}, t_0) \simeq \left(\frac{\mu}{N_0 g} \right)^{1/2} \left(1 - \omega_{\perp}^2 \frac{(x^2 + y^2)}{R^2} - \omega_z^2 \frac{z^2}{Z^2} \right)^{1/2}.$$

For a cigar-shaped condensate, the frequency ratio $\varepsilon = \frac{\omega_z}{\omega_{\perp}}$ is small and we may keep track of the radial expansion only:

$$\lambda_z(t) = 1 \quad \lambda_{\perp}(t) = \sqrt{1 + \omega_{\perp}^2 t^2} \quad (\text{B.2})$$

$$\beta(t) = \frac{\mu}{\hbar \omega_{\perp}} \arctan(1 + \omega_{\perp}^2 t^2). \quad (\text{B.3})$$

C Propagation of a wave function: the method of the generating function

Let us assume that we know the solution of a linear PDE for a family of initial conditions indexed by α :

$$\partial_t f(\mathbf{r}, t, \alpha) = \mathcal{L}(f)(\mathbf{r}, t, \alpha)$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, 0, \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{\det(X_0)}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) Y_0 X_0^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\hbar} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{p}_0 - 2\hbar \tilde{X}_0^{-1} \alpha) + \frac{1}{2} \alpha X_0^{-1} X_0^* \alpha \right] \\ &= \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

where \mathcal{L} is a linear differential operator in the first two variables of the function f . Hermite modes can be defined through an analytic expansion of the exponential $\Psi_{\alpha}(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \exp[\mathbf{r} M_1 \mathbf{r} + \mathbf{r} M_2 \alpha + \alpha M_3 \alpha] &= e^{r M_1 r} \\ &\times \sum_{l,m,n} i^{l+m+n} \alpha_1^l \alpha_2^m \alpha_3^n H_{lmn} \left(\tilde{M}_2 \mathbf{r}, -\frac{1}{2} M_3 \right). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

From the linearity of \mathcal{L} , the propagation of an Hermite–Gauss mode H_{lmn} , i.e., the solution at future times of the partial differential equation with initial condition:

$$\begin{aligned} \partial_t g_{lmn}(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{L}(g_{lmn})(\mathbf{r}, t) \\ g_{lmn}(\mathbf{r}, 0) &= H_{lmn}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

can be inferred from the coefficient of $\alpha_1^l \alpha_2^m \alpha_3^n$ in the α expansion of $f(\mathbf{r}, t, \alpha)$, after a change of variables in the argument of the Hermite polynomial. The propagation of any arbitrary wave function $\Psi(\mathbf{r}, t)$ then follows by linearity from the computation of the initial projection on the Hermite–Gauss basis:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{l,m,n} c_{lmn} g_{lmn}(\mathbf{r}, t) \\ \text{with } c_{lmn} &= \int d^3 \mathbf{r} H_{lmn}^*(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, 0). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

D Computation of the first-order transition amplitude with spherical waves

The state vector evolves under the Hamiltonian $H = H_0 + H_E + V$, where H_0 accounts for the internal atomic degrees of freedom, $H_E = p^2/2m + mgz$ for the external particle motion and V for the light-field. In this appendix we compute the transition amplitude to first order in V . To perform this computation, we consider the state vector $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ in the interaction picture:

$$|\Psi(t)\rangle = U_0(t, t_1) |\tilde{\Psi}(t)\rangle. \quad (\text{D.1})$$

$U_0(t, t_1)$ is the free evolution operator in the absence of light field between times t_1 and t :

$$U_0(t, t_1) = \exp(-iH_E(t - t_1)/\hbar) \exp(-iH_0(t - t_1)/\hbar). \quad (\text{D.2})$$

The light field is turned on at time t_0 . The first-order term of the Dyson series associated with the potential V is:

$$|\tilde{\Psi}^{(1)}(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \tilde{V}(t') |\tilde{\Psi}^{(0)}(t_0)\rangle, \quad (\text{D.3})$$

where $\tilde{V}(t')$ is the potential in the interaction picture:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t) &= U_0^{-1}(t, t_1) (V_{ba}(\mathbf{r}_{\text{op}}, t) \otimes |b\rangle\langle a|) U_0(t, t_1) + \text{h.c.} \\ &= V_{ba}(\mathbf{R}_{\text{op}}(t, t_1), t) \otimes |b\rangle\langle a| e^{i\omega_{ba}(t-t_1)} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

$\mathbf{R}_{\text{op}}(t, t_1)$ is the position operator in the interaction picture, given by integration of the Heisenberg equation of motion [17]:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{op}}(t, t_1) &= U_0^{-1}(t, t_1) \mathbf{r}_{\text{op}} U_0(t, t_1) \\ &= A(t, t_1) \mathbf{r}_{\text{op}} + B(t, t_1) \mathbf{p}_{\text{op}} + \xi(t, t_1). \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

The parameter t_1 , associated with a choice of representation for the interaction picture, can be chosen as $t_1 = t_0$. We need only consider the term V_{ba} of the interaction potential, for which we adopt the usual rotating wave approximation. The first-order transition amplitude $b^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ is given by the relation:

$$b^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{i\hbar} \langle b, \mathbf{r} | U_0(t, t_0) \times \int_{t_0}^t dt' V_{ba}(\mathbf{R}_{\text{op}}(t', t_0), t') \otimes |b\rangle \langle a| e^{i\omega_{ba}(t-t_0)} U_0^{-1}(t_0, t_0) | \Psi(t_0) \rangle. \quad (\text{D.6})$$

In order to understand how the light wave structures the atomic wave-packet, we introduce the matrix elements of V between plane atomic waves:

$$b(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{i\hbar} \langle b, \mathbf{r} | U_0(t, t_0) \int_{t_0}^t dt' \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} |b, \mathbf{p}'\rangle e^{i\omega_{ba}(t'-t_0)} \times \langle \mathbf{p}' | V_{ba}(\mathbf{R}_{\text{op}}(t', t_0), t') | \mathbf{p} \rangle e^{i\omega_{ba}(t'-t_0)} \langle a, \mathbf{p} | \Psi(t_0) \rangle. \quad (\text{D.7})$$

We introduce the Fourier transform of the interaction potential:

$$V_{ba}(\mathbf{r}, t) = -\hbar\Omega F(t) e^{-i\frac{r}{2}(t-t_r)^2 - i\omega_{21}(t-t_0) + i\varphi_0} \times \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} W(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_w)}. \quad (\text{D.8})$$

To compute the Fourier components of V , we first use the BCH relation:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot(A(t', t_0)\mathbf{r}_{\text{op}} + B(t', t_0)\mathbf{p}_{\text{op}} + \xi(t', t_0))} = e^{i\mathbf{k}\cdot A(t', t_0)\mathbf{r}_{\text{op}}} e^{i\mathbf{k}\cdot B(t', t_0)\mathbf{p}_{\text{op}}} e^{\frac{i}{2}[\tilde{A}(t', t_0)\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{\text{op}}, \tilde{B}(t', t_0)\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_{\text{op}}] + i\xi(t', t_0)}. \quad (\text{D.9})$$

The last commutator is responsible for the recoil term, and can be written:

$$\frac{1}{2} [\tilde{A}(t', t_0)\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{\text{op}}, \tilde{B}(t', t_0)\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_{\text{op}}] = \frac{i\hbar}{2} \tilde{\mathbf{k}}A(t', t_0) \tilde{\mathbf{B}}(t', t_0) \mathbf{k}. \quad (\text{D.10})$$

The matrix element of the interaction potential contains the following term:

$$\langle \mathbf{p}' | W(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(A(t', t_0)\mathbf{r}_{\text{op}} + B(t', t_0)\mathbf{p}_{\text{op}} + \xi(t', t_0))} | \mathbf{p} \rangle = W(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot B\mathbf{p} - i\frac{\hbar}{2m}\tilde{\mathbf{k}}A\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{k} + i\xi} \langle \mathbf{p}' | e^{i\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{\text{op}}} | \mathbf{p} \rangle = W(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot B\mathbf{p} + i\frac{\hbar}{2m}\tilde{\mathbf{k}}A\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{k} + i\xi} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \hbar\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{k}), \quad (\text{D.11})$$

we omitted the (t', t_0) to alleviate the notations. The transition amplitude (D.8) becomes:

$$b^{(1)}(\mathbf{r}, t) = i\Omega \int \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{k}}{(2\pi\hbar)^{3/2} (2\pi)^{3/2}}$$

$$\times \int_{t_0}^t dt' \langle b, \mathbf{r} | U_0(t, t_0) | b, \mathbf{p} + \hbar\tilde{\mathbf{A}}(t', t_0) \mathbf{k} \rangle W(\mathbf{k}) \times e^{i\mathbf{k}\cdot(B(t', t_0)\mathbf{p} + i\xi(t', t_0) - \mathbf{r}_w)} e^{i\frac{\hbar}{2m}\tilde{\mathbf{k}}A(t', t_0)\tilde{\mathbf{B}}(t', t_0)\mathbf{k}} \times e^{i\omega_{ba}(t'-t_0)} F(t') e^{-i\frac{r}{2}(t'-t_r)^2 - i\omega_{21}(t'-t_0) + i\varphi_0} \langle a, \mathbf{p} | \Psi(t_0) \rangle \quad (\text{D.12})$$

The evolution of the ABCD ξ parameters in a constant gravitational field is simple:

$$A(t', t_0) = 1 \quad B(t', t_0) = \frac{t' - t_0}{m} \quad \xi(t', t_0) = \frac{1}{2} \mathbf{g}(t' - t_0)^2. \quad (\text{D.13})$$

One can extend the computation to include the effect of interactions by taking into account an effective lensing effect in the ABCD matrices. This approach will be developed elsewhere. We introduce the Fourier transform $\tilde{F}(\omega) = \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} F(t) e^{-i\omega t}$ of the slowly varying envelope $F(t')$. The phase in the integral (D.12) is a second-order polynomial in t' :

$$\varphi(t') = \frac{1}{2} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{g} - r) t'^2 + \left[\omega_{ba} + \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}{m} + \frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m} - \omega_{21} + r t_r - \mathbf{k}\cdot\mathbf{g} t_0 + \omega \right] t' + \varphi'_0, \quad (\text{D.14})$$

where φ'_0 is a constant phase term. In order to maximize the transition amplitude, the chirp rate r should be adjusted to cancel the quadratic variation of the phase, which yields as anticipated in Sect. 2:

$$r = \mathbf{k}\cdot\mathbf{g}. \quad (\text{D.15})$$

The time t_r , at which the frequency ramp begins, selects the velocity class of the atoms which undergo the transition. Indeed, the momentum p of these atoms satisfies:

$$\left| \omega_{ba} + \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}{m} + \frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m} - \omega_{21} + \mathbf{k}\cdot\mathbf{g}(t_r - t_0) \right| \leq \Delta\omega, \quad (\text{D.16})$$

where $\Delta\omega$ is the spectral width of the time envelope $F(t')$. As a consistency check, we see that this condition reproduces the resonance condition (2) for $t_r = t_0$. The next step in the computation of the amplitude (D.12) is to consider that the matter wave is out of the interaction zone at the initial and final times. This is legitimate, since we are in fact interested in computing a scattering amplitude. This simplification allows us to extend the bounds of the time integral to infinity, which yields a Dirac distribution:

$$b^{(1)}(\mathbf{r}, t) = i\Omega \sqrt{2\pi} e^{i\varphi'_0} \times \int \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{k}}{(2\pi\hbar)^{3/2} (2\pi)^{3/2}} \langle b, \mathbf{r} | U_0(t, t_0) | b, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k} \rangle W(\mathbf{k}) \times e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_w} \langle a, \mathbf{p} | \Psi(t_0) \rangle \int d\omega \tilde{F}(\omega) \times \delta\left(\omega + \omega_{ba} + \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}{m} + \frac{\hbar\mathbf{k}^2}{2m} - \omega_{21} + \mathbf{k}\cdot\mathbf{g}(t_r - t_0)\right). \quad (\text{D.17})$$

The Bragg resonance condition selects the Fourier component of adequate frequency in the temporal envelope. To alleviate the notations, we note $\omega_B(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ the frequency selected by the Bragg condition:

$$\omega_B(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \omega_{ba} + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m} + \frac{\hbar \mathbf{k}^2}{2m} - \omega_{21} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{g}(t_r - t_0). \quad (\text{D.18})$$

To simplify the computation, it is useful to assume that the spectrum $\tilde{F}(\omega)$ is broad enough to override dispersion effects of the laser wave. In other words:

$$\omega_B(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \simeq \omega_B(p_z, \mathbf{k}_0). \quad (\text{D.19})$$

This is legitimate if the spectral width $\Delta\omega$ of the pulse $F(t)$ verifies:

$$\Delta\omega \gg \Delta k_z \frac{p_0}{m}, \Delta k_\perp \frac{\Delta p_\perp}{m}. \quad (\text{D.20})$$

Within these conditions, the Dirac integral leaves the amplitude:

$$\begin{aligned} b^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= i\Omega\sqrt{2\pi}e^{i\varphi'_0} \\ &\times \int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{k}}{(2\pi\hbar)^{3/2}(2\pi)^{3/2}} \langle b, \mathbf{r}|U_0(t, t_0)|b, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle W(\mathbf{k}) \\ &\times e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_w} \tilde{F}(\omega_B(p_z, \mathbf{k}_0)) \langle a, \mathbf{p}|\Psi(t_0)\rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

In order to see how the curvature of the light beam is imprinted onto the atomic beam, we need to perform the integration over $W(\mathbf{k})$. To compute this spatial Fourier transform, we go back to the expression of the potential (36):

$$\begin{aligned} V_{ba}(\mathbf{r}, t) &= -\hbar\Omega U_0^{+2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w) \\ &\times e^{i2k_0(z-z_w)} F(t) e^{-i(\omega_{21} + r(t-t_r))t} + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

where we have used the relation between the Gaussian modes $U_0^-(\mathbf{r}) = U_0^{+*}(\mathbf{r})$. The spatial function inside the potential is defined by:

$$U_0^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{1-2iz/b} \exp\left[-\frac{1}{1-2iz/b} \frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right], \quad (\text{D.23})$$

with the confocal parameter $b = k_0 w_0^2$. It will be useful to introduce its transverse Fourier transform:

$$U_0^+(\mathbf{r}) = \frac{w_0^2}{4\pi} \int dk_x dk_y \exp\left[-\frac{(k_x^2 + k_y^2)w_0^2}{4}(1-2iz/b)\right]. \quad (\text{D.24})$$

It is convenient to introduce the Lorentzian function [25]:

$$L^+(z) = \frac{1}{1-2iz/b}. \quad (\text{D.25})$$

The transverse Fourier transform of $W(\mathbf{r})$ can then be expressed as:

$$W(\mathbf{r}) = L^{+2}(z) \exp\left[-2L^+(z) \frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right] e^{i2k_0 z}$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)} \left(\frac{w_0^2}{4} L^+(z)\right) \\ &\times \exp\left[-\frac{(k_x^2 + k_y^2)w_0^2}{4}(1-2iz/b)\right] e^{+i2k_0 z} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp}, \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

From this last expression we infer:

$$\begin{aligned} &\int \frac{dk_z}{(2\pi)^{1/2}} W(\mathbf{k}) e^{ik_z z} = \\ &L^+(z) \frac{w_0^2}{4} \exp\left[-\frac{(k_x^2 + k_y^2)w_0^2}{4}(1-2iz/b)\right] e^{+i2k_0 z} \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

The propagation of a plane wave in a gravitational field yields:

$$\langle \mathbf{r}|U_0(t, t_0)|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} e^{iS_{Cl}(t, t_0)}, \quad (\text{D.28})$$

with $S_{Cl}(t, t_0)$ classical action between a trajectory of initial momentum \mathbf{p} , final position \mathbf{r} and duration $t - t_0$. The corresponding expression can be recast as:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}|U_0(t, t_0)|\mathbf{p}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-img^2(t-t_0)^3/6\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p} \cdot \mathbf{g}(t-t_0)^2} \\ &\times e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-m\mathbf{g}(t-t_0)) \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{p}^2(t-t_0)/2m}. \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

This gives an expression for the matrix element:

$$\begin{aligned} \langle b, \mathbf{r}|U_0(t, t_0)|b, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-img^2(t-t_0)^3/6\hbar} \\ &\times e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p} \cdot \mathbf{g}(t-t_0)^2} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-m\mathbf{g}(t-t_0)) \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{g}(t-t_0)^2 - \frac{\mathbf{p}}{m}(t-t_0) - \mathbf{r}_w)} \\ &\times e^{-i\omega_b(t-t_0)} e^{-i\hbar k_z^2/2m(t-t_0)} e^{-i\mathbf{p}^2(t-t_0)/2m} e^{-i\hbar k_\perp^2(t-t_0)/2m}. \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

The momentum distribution $W(\mathbf{k})$ peaked around the value $\mathbf{k} = 2k_0\mathbf{u}_z$ has a width $\Delta\mathbf{k} \ll k_0$, and one can verify on (D.26) that its longitudinal width Δk_z is much narrower than the transverse ones $\Delta k_x, \Delta k_y$. The correction to the longitudinal recoil $\hbar k_z^2/2m$ when \mathbf{k} varies in the width of $W(\mathbf{k})$ is thus typically much smaller than the transverse recoil. The term $\hbar k_z^2/2m$ in (D.30) will therefore be approximated by $2\hbar k_0^2/m$. By summing up the Fourier modes, we will recover for the atomic wave the transverse Fourier profile of the Gaussian laser wave (D.26) up to a translation. We note $\mathbf{r}_c(t) = \mathbf{r}_w + \frac{\mathbf{p}}{m}(t-t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{g}(t-t_0)^2$ the point associated with a classical motion in the gravity field from \mathbf{r}_w . The role played by the position associated with the classical movement and the action phase pre-factor are indeed a consequence of the ABCD ξ theorem [16]. Gathering all the terms of (D.21) dependent on the wavevector \mathbf{k} , and using relation (D.29) we can perform the integration on the wavevector \mathbf{k} along:

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)} \left[\int \frac{dk_z}{(2\pi)^{1/2}} W(\mathbf{k}) e^{ik_z(z-z_c)} \right] e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{c\perp})} \\ &\times e^{-i\frac{\hbar\mathbf{k}_\perp^2}{2m}(t-t_0)} e^{-i\frac{2\hbar k_0^2}{m}(t-t_0)} \\ &= L^+[z-z_c] e^{i2k_0(z-z_c)} e^{-i\frac{2\hbar k_0^2}{m}(t-t_0)} \frac{w_0^2}{4} \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \exp \left[-\frac{\mathbf{k}_\perp^2}{4} \frac{w_0^2}{2} (1 - 2i(z - z_C)/b) \right] e^{-i\frac{\hbar \mathbf{k}_\perp^2}{2m}(t-t_0)} \\
 & \times e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{C\perp}(t))} \\
 & = L^+(z - z_C(t)) e^{i2k_0[z - z_C - 2\hbar k_0(t-t_0)/m]} \frac{w_0^2}{4} \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)} \\
 & \times \exp \left(-\frac{\mathbf{k}_\perp^2}{8} w_0^2 \left[1 - \frac{2i}{k_0 w_0^2} (z - z_C(t)) - \frac{2\hbar k_0(t-t_0)}{m} \right] \right) \\
 & \times e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{C\perp}(t))} \\
 & = L^+(z - z_C(t)) e^{i2k_0[z - z_C(t) - \frac{2\hbar k_0}{m}(t-t_0)]} \\
 & \times U_0^{+2} \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_C(t) - \frac{2\hbar \mathbf{k}_0}{m}(t-t_0) \right). \tag{D.31}
 \end{aligned}$$

The momentum acquired during the Raman process is reflected in the factor $e^{i2k_0[z - z_C(t) - \frac{2\hbar k_0}{m}(t-t_0)]}$. The translation $\mathbf{r} - \mathbf{r}_C(t) - \frac{2\hbar \mathbf{k}_0}{m}(t-t_0)$ accounts for the classical motion in the gravitational field and the momentum acquired during the Raman process. Inserting this result in equation (D.21):

$$\begin{aligned}
 b^{(1)}(\mathbf{r}, t) & = i\Omega \sqrt{2\pi} e^{i2k_0[z - z_C(t) - \frac{2\hbar k_0}{m}(t-t_0)]} e^{i\varphi'_0} \\
 & \times \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-im\mathbf{g}^2(t-t_0)^3/6\hbar} e^{-\frac{i}{2\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}(t-t_0)^2} e^{-i\mathbf{p}^2(t-t_0)/2m} \\
 & \times e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} - m\mathbf{g}(t-t_0)) \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega_B t} L^+(z - z_C(t)) \\
 & \times U_0^{+2} \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{C0}(t) - \frac{2\hbar \mathbf{k}_0}{m}(t-t_0) \right) \tilde{F}(\omega_B(p_z, \mathbf{k}_0)) \langle a, \mathbf{p} | \Psi(t_0) \rangle. \tag{D.32}
 \end{aligned}$$

If the atomic wave-packet is sufficiently narrow, the Gaussian modes $L^+(z - z_C(t)) U_0^{+2} \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_C(t) - \frac{2\hbar \mathbf{k}_0}{m}(t-t_0) \right)$, which depend on the momentum \mathbf{p} through $\mathbf{r}_C(t)$, are approximately constant on the width of the distribution $\tilde{F}(\omega_B(p_z, \mathbf{k}_0)) \langle a, \mathbf{p} | \Psi(t_0) \rangle$ centered on \mathbf{p}_0 . We can then pull those functions out of the momentum integral. The phase factor in the momentum integral correspond to the propagation of plane waves in a gravitational field. One can thus interpret the momentum integral as the propagation of the filtered wave-packet in the gravitational field:

$$\begin{aligned}
 b^{(1)}(\mathbf{r}, t) & = i\Omega \sqrt{2\pi} e^{i2k_0[z - z_C(t) - \frac{2\hbar k_0}{m}(t-t_0)]} e^{i\varphi'_0} \\
 & \times L^+(z - z_C(t)) U_0^{+2} \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{C0}(t) - \frac{2\hbar \mathbf{k}_0}{m}(t-t_0) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \langle b, \mathbf{r} | U_0(t, t_0) \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \\
 & \times [\tilde{F}(\omega_B(p_z, \mathbf{k}_0)) \langle a, \mathbf{p} | \Psi(t_0) \rangle] | b, \mathbf{p} \rangle, \tag{D.33}
 \end{aligned}$$

with $\mathbf{r}_{C0}(t) = \mathbf{r}_w + \frac{\mathbf{p}_0}{m}(t-t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{g}(t-t_0)^2$. To first order in the field, the curvature of the Gaussian Raman wave is transferred in a controlled way to the atomic wave through the terms $L^+(z - z_C(t)) U_0^{+2} \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{C0}(t) - \frac{2\hbar \mathbf{k}_0}{m}(t-t_0) \right)$.

REFERENCES

- 1 A. Peters, K.Y. Chung, S. Chu, *Nature* **400**, 849 (1999)
- 2 A. Peters, K.Y. Chung, S. Chu, *Metrologia* **38**, 25 (2001)
- 3 P. Cladé, S. Guellati-Khelifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, F. Biraben, *Europhys. Lett.* **71**, 730 (2005)
- 4 C.J. Bordé, C. Chardonnet, D. Mayou, Effects of curvature in laser spectroscopy with strong fields, In: *Laser Spectroscopy VIII*, ed. by W. Persson, S. Svanberg (Springer, 1987), pp. 381–385
- 5 H. Wallis, J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, *Appl. Phys. B* **54**, 407 (1992)
- 6 C.G. Aminoff, A.M. Steane, P. Bouyer, P. Desbiolles, J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3083 (1993)
- 7 A. Landragin, J.-Y. Courtois, G. Labeyrie, N. Vansteenkiste, C.I. Westbrook, A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1464 (1996)
- 8 F. Impens, P. Bouyer, A. Landragin, C.J. Bordé, *J. Phys. IV* (2006), unpublished
- 9 M. Weitz, B.C. Young, S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2563 (1994)
- 10 C.J. Bordé, *Matter-Wave Interferometers: A Synthetic Approach in Atom Interferometry*, ed. by P. Berman (Academic Press, 1997) pp. 257–292
- 11 Y. Le Coq, J.H. Thywissen, S.A. Rangwala, F. Gerbier, S. Richard, G. Delannoy, P. Bouyer, A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 170403 (2001)
- 12 D.S. Weiss, B.C. Young, S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2706 (1993)
- 13 A. Wicht, J. Hensley, E. Sarajlic, S. Chu, *Phys. Scripta* **102**, 82 (2002)
- 14 R. Battesti, P. Cladé, S. Guellati-Khelifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, F. Biraben, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 253001 (2004)
- 15 C.J. Bordé, Propagation of laser beams and of atomic systems, Les Houches, Session LIII 1990, *Fundamental Systems in Quantum Optics* (1992)
- 16 C.J. Bordé, *C.R. Acad. Sci. IV Phys.* **2**, 509 (2001)
- 17 C.J. Bordé, *Metrologia* **39**, 435 (2001)
- 18 Y. Castin, R. Dum, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996)
- 19 C.J. Bordé, C. Lämmerzahl, *Phys. Lett. A* **203**, 59 (1995)
- 20 K. Bongs, S. Burger, G. Birkl, K. Sengstock, W. Ertmer, K. Rzazewski, A. Sanpera, M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3577 (1999)
- 21 A.S. Arnold, C. McCormick, M.G. Boshier, *Phys. Rev. A* **65**, 031601 (2002)
- 22 C.V. Saba, P.A. Barton, M.G. Boshier, I.G. Hughes, P. Rosenbusch, B.E. Sauer, E.A. Hinds, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 468 (1999)
- 23 G. Whyte, P. Öhberg, J. Courtial, *Phys. Rev. A* **69**, 053610 (2004)
- 24 C.J. Bordé, *Gen. Relat. Grav.* **36**, 475 (2004)
- 25 C.J. Bordé, J.L. Hall, C.V. Kunsasz, D.G. Hummer, *Phys. Rev. A* **14**, 236 (1976)

Bibliographie

- [1] J.-F. RIOU, W. GUERIN, Y. LECOQ, M. FAUQUEMBERGUE, V. JOSSE, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Beam Quality of a Nonideal Atom Laser”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 070404 (2006).
- [2] A. SINATRA, C. LOBO, ET Y. CASTIN, “The truncated Wigner method for Bose-condensed gases : limits of validity and applications”, *J. Phys. B* **35**, 3599 (2002).
- [3] M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN, ET E. A. CORNELL, “Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor”, *Science* **269**, 198 (1995).
- [4] C. J. BORDÉ, “Amplification de champs atomiques par émission stimulée d’atomes”, *Annales de Physique* **20**, 477 (1995).
- [5] C. J. BORDÉ, “Amplification of atomic fields by stimulated emission of atoms”, *Physics Letters A* **204**, 217 (1995).
- [6] M. OLSHANII, Y. CASTIN, ET J. DALIBARD, dans *Proceedings of the 12th International Conference on Laser Spectroscopy*, ÉDITÉ PAR M. INGUSCIO, M. ALLEGRINI, ET A. SASSO (World Scientific, Singapore, 1996).
- [7] C. J. BORDÉ, dans *Proceedings of the 12th International Conference on Laser Spectroscopy*, ÉDITÉ PAR M. INGUSCIO, M. ALLEGRINI, ET A. SASSO (World Scientific, Singapore, 1996).
- [8] C. K. LAW ET N. P. BIGELOW, “Amplifying an atomic wave signal using a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. A* **58**, 4791 (1998).
- [9] H. M. WISEMAN, “Defining the (atom) laser”, *Phys. Rev. A* **56**, 2068 (1997).
- [10] C. ANTOINE, *Contribution à la théorie des interféromètres atomiques*, Ph.D. thesis, Université Paris VI, <http://hal.archives-ouvertes.fr/00007967>, 2005.
- [11] C. J. BORDÉ, dans *Advances in Laser Spectroscopy*, ÉDITÉ PAR H. WALTHER, F. STRUMIA, ET T. ARRECCHI (Plenum Press, 1983), Chap. Density matrix equations and diagrams for high resolution non-linear laser spectroscopy. Application to Ramsey fringes in the optical domain, pp. 1–70.
- [12] L. MANDEL ET E. WOLF, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1995).

- [13] H. T. C. STOOFF, dans *Coherent Matter Waves, Ecole des Houches Session LXXII*, ÉDITÉ PAR R. KAISER, C. WESTBROOK, ET F. DAVID (EDP Sciences, 1999).
- [14] C. COHEN-TANNOUJDI, B. DIU, ET F. LALOË, dans *Mécanique quantique*, ÉDITÉ PAR HERMANN (PUBLISHER, 1997).
- [15] R. J. GLAUBER, “The Quantum Theory of Optical Coherence”, *Phys. Rev.* **130**, 2529 (1963).
- [16] M. NARASCHEWSKI ET R. J. GLAUBER, “Spatial coherence and density correlations of trapped Bose gases”, *Phys. Rev. A* **59**, 4595 (1999).
- [17] R. H. BROWN ET R. Q. TWISS, “Correlation between Photons in two Coherent Beams of Light”, *Nature* **177**, 27 (1956).
- [18] C. C. TANNOUJDI, *Propriétés de cohérence des condensats de Bose-Einstein, Cours du Collège de France* (<http://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/>, YEAR).
- [19] O. PENROSE ET L. ONSAGER, “Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium”, *Phys. Rev.* **104**, 576 (1956).
- [20] Y. CASTIN ET J. DALIBARD, “Relative phase of two Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **55**, 4330 (1997).
- [21] H. WALLIS, A. RÖHRL, M. NARASCHEWSKI, ET A. SCHENZLE, “Phase-space dynamics of Bose condensates : Interference versus interaction”, *Phys. Rev. A* **55**, 2109 (1997).
- [22] E. M. WRIGHT, D. F. WALLS, ET J. C. GARRISON, “Collapses and Revivals of Bose-Einstein Condensates Formed in Small Atomic Samples”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2158 (1996).
- [23] M. LEWENSTEIN ET L. YOU, “Quantum Phase Diffusion of a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3489 (1996).
- [24] J. STENGER, S. INOUE, A. P. CHIKKATUR, D. M. STAMPER-KURN, D. E. PRITCHARD, ET W. KETTERLE, “Bragg Spectroscopy of a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4569 (1999).
- [25] E. W. HAGLEY *et al.*, “Measurement of the Coherence of a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3112 (1999).
- [26] M. HUGBART, J. RETTER, F. GERBIER, S. RICHARD, J. H. THYWISSEN, A. VARON, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Longueur de cohérence d’un condensat de Bose Einstein dans un piège très anisotrope”, *J. Phys. IV France* **119**, 193 (2004).
- [27] M. GREINER, I. BLOCH, O. MANDEL, T. W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Exploring Phase Coherence in a 2D Lattice of Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160405 (2001).
- [28] M. YASUDA ET F. SHIMIZU, “Observation of Two-Atom Correlation of an Ultracold Neon Atomic Beam”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3090 (1996).

- [29] S. FOELLING, F. GERBIER, A. WIDERA, O. MANDEL, T. GERICKE, ET I. BLOCH, “Spatial quantum noise interferometry in expanding ultracold atom clouds”, *Nature* **434**, 481 (2005).
- [30] M. GREINER, C. A. REGAL, J. T. STEWART, ET D. S. JIN, “Probing Pair-Correlated Fermionic Atoms through Correlations in Atom Shot Noise”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 110401 (2005).
- [31] M. SCHELLEKENS, R. HOPPELER, A. PERRIN, J. V. GOMES, D. BOIRON, A. ASPECT, ET C. I. WESTBROOK, “Hanbury Brown Twiss Effect for Ultracold Quantum Gases”, *Nature* **445**, 402 (2007).
- [32] B. FRIEDEN ET B. SOFFER, “Information-theoretic significance of the Wigner distribution”, *Phys. Rev. A* **74**, 052108 (2006).
- [33] K. WÓDKIEWICZ, “Operational Approach to Phase-Space Measurements in Quantum Mechanics”, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1064 (1984).
- [34] M. BAASTIANS, “Application of the Wigner distribution function to partially coherent light”, *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 1227 (1986).
- [35] A. E. SIEGMAN, “Defining the effective radius of curvature for a nonideal optical beam”, *IEEE J. Quantum Electron.* **27**, 1146 (1991).
- [36] C. J. BORDÉ, “Theoretical tools for atom optics and interferometry”, *C. R. Acad. Sci. Paris* **4**, 509 (2001).
- [37] C. J. BORDÉ, “Atomic clocks and inertial sensors”, *Metrologia* **39**, 435 (2001).
- [38] Y. CASTIN ET R. DUM, “Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).
- [39] F. J. DYSON, “The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman”, *Phys. Rev.* **75**, 486 (1949).
- [40] C. J. BORDÉ, “Quantum Theory of Atom-Wave Beam Splitters and Application to Multidimensional Atomic Gravito-Inertial Sensors”, *General Relativity and Gravitation* **36**, 475 (2004).
- [41] C. J. BORDÉ, dans *Proc. of the Enrico Fermi International School of Physics “Atom Optics and Space Physics”, and to be published*, ÉDITÉ PAR T. HAENSCH, S. LESCHIUTTA, ET A. WALLARD (IOS Press, 2007).
- [42] M. PESKIN ET D. SCHROEDER, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Advanced Book Program, 1995).
- [43] C. J. BORDÉ, J.-C. HOUARD, ET A. KARASIEWICZ, dans *Gyros, Clocks and Interferometers : Testing relativistic gravity in space Springer-Verlag (2000) pp. 403-438 et gr-qc/0008033.*, ÉDITÉ PAR C. LÄMMERZAHN, C. EVERITT, ET F. HEHL (Springer-Verlag, 2000), Chap. Relativistic phase shift for Dirac particles interacting with weak gravitational fields in matter-wave interferometers, pp. 403–438, et gr-qc/0008033.

- [44] J. DALIBARD, dans *Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CXL : Bose – Einstein condensation in gases : Collisional dynamics of ultra-cold atomic gases.*, ÉDITÉ PAR M. INGUSCIO, S. STRINGARI, ET C. WIEMAN (IOS Press, 1998).
- [45] G. BARTON, dans *Elements of Green's Functions and Propagation : Potentials, Diffusion, and Waves*, ÉDITÉ PAR O. U. PRESS (Clarendon Press - Oxford, 1989).
- [46] G. ROATI, E. DE MIRANDES, F. FERLAINO, H. OTT, G. MODUGNO, ET M. INGUSCIO, “Atom Interferometry with Trapped Fermi Gases”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 230402 (2004).
- [47] A. BRUSCH, R. L. TARGAT, X. BAILLARD, M. FOUCHÉ, ET P. LEMONDE, “Hyperpolarizability Effects in a Sr Optical Lattice Clock”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 103003 (2006).
- [48] W. D. PHILLIPS (non publié).
- [49] S. BURGER, K. BONGS, S. DETTMER, W. ERTMER, K. SENGSTOCK, A. SANPERA, G. V. SHLYAPNIKOV, ET M. LEWENSTEIN, “Dark Solitons in Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5198 (1999).
- [50] J. DENSCHLAG *et al.*, “Generating solitons by phase engineering of a Bose-Einstein condensate”, *Science* **287**, 97 (2000).
- [51] L. KHAYKOVICH, F. SCHRECK, G. FERRARI, T. BOURDEL, J. CUBIZOLLES, L. D. CARR, Y. CASTIN, ET C. SALOMON, “Formation of a Matter-Wave Bright Soliton”, *Science* **17**, 1290 (2002).
- [52] K. E. STRECKER, G. B. PARTRIDGE, A. G. TRUSCOTT, ET R. G. HULET, “Formation and Propagation of Matter Wave Soliton Trains”, *Nature* **417**, (2002).
- [53] H. A. HAUS ET W. S. WONG, “Solitons in optical communications”, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 423 (1996).
- [54] H. KOGELNIK, “Imaging of optical modes - resonators with internal lenses (Gaussian light beam propagation modes and transformation upon passage through lenses between resonators explained by Fresnel diffraction theory)”, *Bell System Technical Journal* **44**, 455 (1965).
- [55] C. J. BORDÉ, dans *Fundamental Systems in Quantum Optics, Les Houches Lectures, Session LIII, 1990*, ÉDITÉ PAR J. DALIBARD, J.-M. RAIMOND, ET J. ZINN-JUSTIN (Elsevier Science Publishers, 1991), pp. 287–380.
- [56] J. H. V. VLECK, “The Correspondence principle in the statistical interpretation of quantum mechanics”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **14**, 178 (1928).
- [57] Y. CASTIN, dans *Coherent Atomic Matter Waves*, ÉDITÉ PAR R. KAISER, C. WESTBROOK, ET F. DAVID (Springer-Verlag, 1999).

- [58] F. BRETENAKER, A. LE FLOCH, ET J. P. TACHÉ, “Theoretical and experimental study of elliptical Gaussian-mode size dynamics in ring lasers”, *Phys. Rev. A* **41**, 3792 (1990).
- [59] F. BRETENAKER ET A. LE FLOCH, “Specific lenslike effects and resonant diffraction losses in two-isotope gas lasers”, *Phys. Rev. A* **42**, 5561 (1990).
- [60] G. STEPHAN ET M. TRÜMPER, “Gaussian beam parameters and their stabilization in gas lasers”, *Phys. Rev. A* **28**, 3450 (1983).
- [61] M. WEITZ, B. C. YOUNG, ET S. CHU, “Atomic Interferometer Based on Adiabatic Population Transfer”, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2563 (1994).
- [62] C. RYU, M. F. ANDERSEN, P. CLADÉ, V. NATARAJAN, K. HELMERSON, ET W. D. PHILLIPS, “Observation of Persistent Flow of a Bose-Einstein Condensate in a Toroidal Trap”, *Science* **99**, 260401 (2007).
- [63] T. P. SIMULA, N. NYGAARD, S. X. HU, L. A. COLLINS, B. I. SCHNEIDER, ET K. MØLMER, “Angular momentum exchange between coherent light and matter fields”, *Phys. Rev. A* **77**, 015401 (2008).
- [64] C. J. BORDÉ, “Atomic interferometry with internal state labelling”, *Physics Letters A* **140**, 10 (1989).
- [65] C. J. BORDÉ, dans *Atom Interferometry*, ÉDITÉ PAR P. R. BERMAN (Academic Press, 1997), Chap. Matter wave interferometers : a synthetic approach in Atom Interferometry, pp. 257–292.
- [66] K. MOLER, D. S. WEISS, M. KASEVICH, ET S. CHU, “Theoretical analysis of velocity-selective Raman transitions”, *Phys. Rev. A* **45**, 342 (1992).
- [67] C. COHEN-TANNOUJDI, *Interférométrie atomique, Cours du Collège de France* (<http://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/>, 1992-1993).
- [68] B. YOUNG, M. KASEVICH, ET S. CHU, dans *Precision atom interferometry with light pulses*, ÉDITÉ PAR P. BERMAN (Academic Press, 1997).
- [69] C. ANTOINE ET C. J. BORDÉ, “Exact phase shifts for atom interferometry”, *Phys. Lett. A* **306**, 277 (2003).
- [70] C. ANTOINE, “Matter wave beam splitters in gravito-inertial and trapping potentials : generalized ttt scheme for atom interferometry”, *App. Phys. B* **13**, 585 (2006).
- [71] H. WALLIS, J. DALIBARD, ET C. COHEN-TANNOUJDI, “Trapping atoms in a gravitational cavity”, *Appl. Phys. B* **54**, 407 (1992).
- [72] P. CHEINET, F. P. D. SANTOS, A. CLAIRON, N. DIMARCQ, D. HOLLEVILLE, ET A. LANDRAGIN, “Gravimètre à atomes froids”, *J. Phys. IV France 119 (2004) 153-154* **119**, 153 ((2004)).

- [73] P. CHEINET, B. CANUEL, F. P. D. SANTOS, A. GAUGUET, F. LEDUC, ET A. LANDRAGIN, “Measurement of the sensitivity function in time-domain atomic interferometer”, <http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00012411/en/> (2005).
- [74] R. BATTISTI, P. CLADÉ, S. GUELLATI-KHELIFA, C. SCHWOB, F. NEZ, L. JULIEN, ET F. BIRABEN, “Bloch Oscillations of Ultracold Atoms : A Tool for a Metrological Determination of h/m_{Rb} ”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 253001 (2004).
- [75] D. S. WEISS, B. C. YOUNG, ET S. CHU, “Precision measurement of the photon recoil of an atom using atomic interferometry”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2706 (1993).
- [76] A. WICHT, J. HENSLEY, E. SARAJLIC, ET S. CHU, “A Preliminary Measurement of the Fine Structure Constant Based on Atom Interferometry”, *Physica Scripta* **102**, 82 (2002).
- [77] C. J. BORDÉ ET C. LÄMMERZAHN, “Rabi oscillations in gravitational fields : Exact solution”, *Phys. Lett. A* **203**, 59 (1995).
- [78] Y. SORTAIS, S. BIZE, C. NICOLAS, A. CLAIRON, C. SALOMON, ET C. WILLIAMS, “Cold Collision Frequency Shifts in a ^{87}Rb Atomic Fountain”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3117 (2000).
- [79] P. CLADÉ, S. GUELLATI-KHELIFA, C. SCHWOB, F. NEZ, L. JULIEN, ET F. BIRABEN, “A promising method for the measurement of the local acceleration of gravity using Bloch oscillations of ultracold atoms in a vertical standing wave”, *Europhysics Letters* **71**, 730, arXiv/0506225 (2005).
- [80] A. PETERS, K. Y. CHUNG, ET S. CHU, “Measurement of Gravitational Acceleration by Dropping Atoms”, *Nature* **400**, 849 (1999).
- [81] B. CANUEL *et al.*, “Six-Axis Inertial Sensor Using Cold-Atom Interferometry”, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 010402 (2006).
- [82] C. J. BORDÉ, dans *Laser Spectroscopy X* (World Scientific, 1991), pp. 239–245.
- [83] C. J. BORDÉ, dans *Frequency Standards and Metrology, Proceedings of the fourth Symposium* (Springer-Verlag, 1988).
- [84] M. BEN DAHAN, E. PEIK, J. REICHEL, Y. CASTIN, ET C. SALOMON, “Bloch Oscillations of Atoms in an Optical Potential”, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4508 (1996).
- [85] P. CLADÉ, *Oscillations de Bloch d’atomes ultrafroids et mesure de la constante de structure fine*, Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00010730/en/>, 2005.
- [86] C. LÄMMERZAHN ET C. J. BORDÉ, “Atom interferometry in gravitational fields : influence of gravitation on the beam splitter,”, *Gen. Rel. and Grav.* **31**, 635 (1999).

- [87] S. A. WERNER, “Gravitational and magnetic field effects on the dynamical diffraction of neutrons”, *Phys. Rev. B* **21**, 1774 (1980).
- [88] K. MØLMER, “Phase-matched matter wave collisions in periodic potentials”, *New Journal of Physics* **8**, 170 (2006).
- [89] D. M. GREENBERGER, “Velocity vs. Momentum - A new relativistic Paradox”, *Physica B* **137**, 256 (1986).
- [90] C. J. BORDÉ, C. SALOMON, S. AVRILLIER, A. VAN LERBERGHE, C. BRÉANT, D. BASSI, ET G. SCOLES, “Optical Ramsey fringes with traveling waves”, *Phys. Rev. A* **30**, 1836 (1984).
- [91] T. P. SIMULA, A. MURADYAN, ET K. MØLMER, “Atomic diffraction in counterpropagating Gaussian pulses of laser light”, *Phys. Rev. A* **76**, 063619 (2007).
- [92] C. J. BORDÉ, J. L. HALL, C. V. KUNASZ, ET D. G. HUMMER, “Saturated absorption line shape : Calculation of the transit-time broadening by a perturbation approach”, *Phys. Rev. A* **14**, 236 (1976).
- [93] G. WHYTE, P. ÖHBERG, ET J. COURTIAL, “Transverse laser modes in Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **69**, 053610 (2004).
- [94] F. IMPENS, P. BOUYER, ET C. J. BORDÉ, “Matter Wave Cavity Gravimeter”, *Appl. Phys. B* **84**, 603 (2006).
- [95] S. DE GROOT ET L. SUTTORP, *Foundations of Electrodynamics, Chap VI*. (North Holland, 1972).
- [96] M. GADELLA, “Moyal Formulation of Quantum Mechanics”, *Fortschr. Phys.* **43**, 229 (1995).
- [97] M. J. STEEL, M. K. OLSEN, L. I. PLIMAK, P. D. DRUMMOND, S. M. TAN, M. J. COLLETT, D. F. WALLS, ET R. GRAHAM, “Dynamical quantum noise in trapped Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **58**, 4824 (1998).
- [98] A. A. NORRIE, R. J. BALLAGH, ET C. W. GARDINER, “Quantum turbulence and correlations in Bose-Einstein condensate collisions”, *Phys. Rev. A* **73**, 043617 (2006).
- [99] V. M. PEREZ-GARCIA, P. J. TORRES, ET G. MONTESINOS, “The Methods of Moments For the nonlinear Schrödinger equations : theory and applications”, *SIAM J. Appl. Math.* **67**, 990 (2007).
- [100] V. M. PÉREZ-GARCÍA, H. MICHINEL, J. I. CIRAC, M. LEWENSTEIN, ET P. ZOLLER, “Low Energy Excitations of a Bose-Einstein Condensate : A Time-Dependent Variational Analysis”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5320 (1996).
- [101] V. M. PÉREZ-GARCÍA, H. MICHINEL, J. I. CIRAC, M. LEWENSTEIN, ET P. ZOLLER, “Dynamics of Bose-Einstein condensates : Variational solutions of the Gross-Pitaevskii equations”, *Phys. Rev. A* **56**, 1424 (1997).

- [102] G. W. BUND, S. S. MIZRAHI, ET M. C. TIJERO, “Quasicausal expansion of the quantum Liouville propagator”, *Phys. Rev. A* **53**, 1191 (1996).
- [103] E. ZAREMBA, T. NIKUNI, ET A. GRIFFIN, “Dynamics of Trapped Bose Gases at Finite Temperatures”, *Journal of Low Temperature Physics* **116**, 277 (1999).
- [104] B. DIU, C. GUTHMANN, D. LEDERER, ET B. ROULET, *Eléments de Physique Statistique* (Herrmann, 2007).
- [105] F. LALOË, “La transformée de Wigner libre, évolution dans une collision”, *J. Phys. IV* **50**, 1851 (1989).
- [106] R. S. W. MULLIN ET F. LALOË, “Analysis of certain binary collision approximation closures of the BBGKY hierarchy”, *Physica A* **218**, 155 (1995).
- [107] D. GUÉRY-ODELIN, F. ZAMBELLI, J. DALIBARD, ET S. STRINGARI, “Collective oscillations of a classical gas confined in harmonic traps”, *Phys. Rev. A* **60**, 4851 (1999).
- [108] W. APPEL, dans *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, ÉDITÉ PAR MAGNARD-VUIBERT (Editions H&K, 2005).
- [109] D. GUÉRY-ODELIN, *Thèse d’habilitation à diriger des recherches* (CNRS, 2005).
- [110] D. DRAGOMAN, “Wigner Distribution Function in Nonlinear Optics”, *Appl. Opt.* **35**, 4142 (1996).
- [111] M. J. WERNER ET P. D. DRUMMOND, “Robust algorithms for solving stochastic partial differential equations”, *J. Comp. Phys.* **132**, 312 (1997).
- [112] L. P. PITAEVSKII ET A. ROSCH, “Breathing modes and hidden symmetry of trapped atoms in two dimensions”, *Phys. Rev. A* **55**, R853 (1997).
- [113] Y. KAGAN, E. L. SURKOV, ET G. V. SHLYAPNIKOV, “Evolution of a Bose gas in anisotropic time-dependent traps”, *Phys. Rev. A* **55**, R18 (1997).
- [114] D. S. JIN, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN, ET E. A. CORNELL, “Collective Excitations of a Bose-Einstein Condensate in a Dilute Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 420 (1996).
- [115] M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. J. VAN DRUTEN, D. M. KURN, D. S. DURFEE, C. G. TOWNSEND, ET W. KETTERLE, “Collective Excitations of a Bose-Einstein Condensate in a Magnetic Trap”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 988 (1996).
- [116] C. C. BRADLEY, C. A. SACKETT, J. J. TOLLETT, ET R. G. HULET, “Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).

- [117] S. STRINGARI, “Collective Excitations of a Trapped Bose-Condensed Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2360 (1996).
- [118] F. DALFOVO, L. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI, “Order parameter at the boundary of a trapped Bose gas”, *Phys. Rev. A* **54**, 4213 (1996).
- [119] T. LAHAYE, T. KOCH, B. FRÖHLICH, M. FATTORI, J. METZ, A. GRIESMAIER, S. GIOVANAZZI, ET T. PFAU, “Strong dipolar effects in a quantum ferrofluid.”, *Nature* **448**, 672 (2007).
- [120] S. YI ET L. YOU, “Probing dipolar effects with condensate shape oscillation”, *Phys. Rev. A* **66**, 013607 (2002).
- [121] M. KOZUMA, Y. SUZUKI, Y. TORII, T. SUGIURA, T. KUGA, E. W. HAGLEY, ET L. DENG, “Phase-Coherent Amplification of Matter Waves”, *Science* **286**, 2309 (1999).
- [122] D. SCHNEBLE, Y. TORII, M. BOYD, E. W. STREED, D. E. PRITCHARD, ET W. KETTERLE, “The Onset of Matter-Wave Amplification in a Superradiant Bose-Einstein Condensate”, *Science* **300**, 475 (2003).
- [123] L. D. LANDAU ET E. M. LIFSHITZ, *Quantum Mechanics : Non-Relativistic Theory* (Butterworth-Heinemann, 1996).
- [124] D. JAKSCH, C. W. GARDINER, ET P. ZOLLER, “Quantum kinetic theory. II. Simulation of the quantum Boltzmann master equation”, *Phys. Rev. A* **56**, 575 (1997).
- [125] H. MICHINEL, “Non-linear propagation of Gaussian beams in planar graded-index waveguides : a variational approach”, *Pure Appl. Opt. 4 701-708* **4**, 701 (1995).
- [126] F. IMPENS ET C. J. BORDÉ, “Space-time sensors using multiple wave atom interferometry”, *Phys. Rev. Lett.* soumis (2009).
- [127] F. IMPENS, P. BOUYER, A. LANDRAGIN, ET C. J. BORDÉ, “Gravimètre a cavité d’ondes de matière”, *Journ. Phys. IV* **135**, 311 (2006).