



**HAL**  
open science

# Modélisation physique et numérique du procédé de mise en forme par trempage

Emmanuelle Rélot

► **To cite this version:**

Emmanuelle Rélot. Modélisation physique et numérique du procédé de mise en forme par trempage. Mécanique [physics.med-ph]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2008. Français. NNT : 2008ENMP1580 . tel-00357876

**HAL Id: tel-00357876**

**<https://pastel.hal.science/tel-00357876>**

Submitted on 2 Feb 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





## **REMERCIEMENTS**

Ce travail a été effectué au sein du Centre de Mise en Forme des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris dans le groupe de recherche *Physico-chimie des polymères*. Cette thèse a été financée par les sociétés MAPA et Poly Implant Protheses.

Je tiens dans un premier temps à remercier les différents membres de mon jury qui ont pris le temps de juger l'ensemble de mes travaux de thèse : M. René Muller pour avoir présider mon jury, M. Francisco Chinesta et M. Jacques Guillet pour avoir accepté d'être rapporteur.

Je remercie ensuite Patrick Navard et Jérôme Bikard pour m'avoir encadrée au cours de cette thèse ainsi que Tatania Budtova. Je remercie également mes encadrants industriels, M. Michel Renaud chez MAPA et M. Brinon, M. Iza, et M. Bengeloune chez PIP pour avoir répondu à l'ensemble de mes interrogations au sujet de leurs procédés.

Je remercie également l'ensemble du personnel du CEMEF pour m'avoir aidé tout au long de mes trois années de thèse, plus particulièrement, Edith Peuvrel-Disdier, Marie-Françoise Guenegan, Sylvie Massol, Katia Mocellin pour son aide sur Forge2005®, Francis Fournier pour la conception de la machine de trempage, et l'ensemble de l'atelier et du groupe EII.

Je remercie enfin tous ceux qui m'ont entouré, écouté, aidé (et supporté) au cours de ces trois dernières années : en particulier Mélinda, Céline, Romain et tous mes autres collègues de bureau, Roland pour ses magnifiques photos, Sabine et tous les autres doctorants avec qui j'ai passé de très bons moments, et enfin Mike...

# TABLE DES MATIERES

<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>13</b>
<b>Présentation du procédé de trempage .....</b>	<b>13</b>
<b>Objectif de la thèse .....</b>	<b>16</b>
<b>NOTATIONS .....</b>	<b>18</b>
<b>1. BIBLIOGRAPHIE SUR LE TREMPAGE .....</b>	<b>22</b>
<b>1.1 Forme et évolution de la surface libre au cours du trempage .....</b>	<b>25</b>
1.1.1 Drainage dans l'épaisseur.....	26
1.1.2 Forme du ménisque .....	27
1.1.3 Rupture du fil .....	28
<b>1.2 Etudes du trempage isotherme.....</b>	<b>30</b>
1.2.1 Définition du problème .....	30
1.2.2 Approches analytiques de la prédiction de l'épaisseur .....	32
1.2.2.1 Cas d'une plaque plongée verticalement .....	32
1.2.2.2 Cas d'un cylindre plongé verticalement.....	39
1.2.3 Approche numérique du trempage .....	43
1.2.3.1 Définitions du problème .....	43
1.2.3.1.1 Cas des fluides newtoniens .....	43
1.2.3.1.2 Cas des fluides non newtoniens .....	45
1.2.3.2 Application au trempage .....	48
<b>1.3 Cas du trempage à chaud .....</b>	<b>50</b>
1.3.1 Les problèmes de transfert thermique .....	50
1.3.1.1 La démarche de Stefan .....	50

1.3.1.2	<i>La démarche de Stefan appliquée au trempage</i> .....	52
1.3.2	Solutions analytiques au problème de croissance d'un front de matière .....	54
1.3.2.1	<i>Croissance d'un front de solidification sur une plaque isotherme</i> .....	54
1.3.2.2	<i>Croissance d'un front de solidification sur une plaque non isotherme</i> .....	55
1.3.3	Modélisation du trempage à chaud.....	57
1.3.3.1	<i>Modèle à suivi de l'interface</i> .....	57
1.3.3.1.1	Maillage fixe sur l'ensemble du domaine liquide-solide .....	57
1.3.3.1.2	Immobilisation de l'interface par transformation de coordonnées.....	58
1.3.3.2	<i>Modèle enthalpique</i> .....	59
1.3.3.2.1	Formulation du modèle enthalpique.....	59
1.3.3.2.2	Application du modèle enthalpique au trempage.....	62
<b>2.</b>	<b>FORMULATION ET RESOLUTION DU PROBLEME THERMO-MECANIQUE</b> .....	<b>65</b>
<b>2.1</b>	<b>Formulation du problème mécanique</b> .....	<b>68</b>
2.1.1	Formulation du problème continu .....	69
2.1.1.1	<i>Equation de conservation de la masse</i> .....	69
2.1.1.2	<i>Equation de conservation de la quantité de mouvement</i> .....	69
2.1.2	Conditions aux interfaces .....	70
2.1.2.1	<i>Conditions aux limites</i> .....	70
2.1.2.2	<i>Contact outil / matière</i> .....	71
2.1.3	Lois de comportements .....	71
2.1.4	Résolution numérique .....	72
2.1.4.1	<i>Formulation faible du problème mécanique</i> .....	72
2.1.4.2	<i>Discrétisation spatiale</i> .....	73
2.1.4.3	<i>Discrétisation temporelle</i> .....	76
<b>2.2</b>	<b>Implémentation de la tension de surface</b> .....	<b>77</b>

2.2.1	Définition et rôle de la tension de surface dans le trempage.....	77
2.2.1.1	<i>Définition de la tension de surface</i> .....	77
2.2.1.2	<i>Objectif de l'implémentation de la tension de surface</i> .....	78
2.2.2	Revue bibliographique .....	78
2.2.2.1	<i>Estimation de la courbure à partir de deux noeuds</i> .....	79
2.2.2.2	<i>Estimation de la courbure à partir de la divergence des vecteurs normaux aux noeuds</i> .....	79
2.2.2.3	<i>Utilisation de l'opérateur Laplace-Beltrami</i> .....	81
2.2.3	Stratégie d'insertion de la tension dans Forge3 .....	82
2.2.3.1	<i>Application nodale</i> .....	82
2.2.3.2	<i>Développement du système à résoudre</i> .....	84
2.2.4	Validation de l'implémentation.....	87
2.2.4.1	<i>Equilibre d'une goutte sans gravité</i> .....	88
2.2.4.2	<i>Equilibre d'une goutte sous gravité</i> .....	88
<b>2.3</b>	<b>Formulation du problème thermique.....</b>	<b>90</b>
2.3.1	Equation de la chaleur .....	90
2.3.2	Conditions aux limites.....	90
2.3.3	Résolution du système.....	92
2.3.3.1	<i>Discrétisation spatiale</i> .....	92
2.3.3.2	<i>Discrétisation temporelle</i> .....	93
2.3.3.3	<i>Thermique asynchrone</i> .....	94
2.3.4	Le couplage thermo-mécanique .....	95
<b>3.</b>	<b>PRESENTATION DES MATERIAUX ET CARACTERISATIONS EXPERIMENTALES.....</b>	<b>97</b>
<b>3.1</b>	<b>Matériaux .....</b>	<b>100</b>
3.1.1	L'alcool de polyvinyle – PVA .....	100

3.1.2	Les silicones .....	100
3.1.2.1	<i>Les différents types d'enveloppes d'implants mammaires</i> .....	100
3.1.2.2	<i>Composition des silicones</i> .....	101
3.1.3	Le miel.....	102
<b>3.2</b>	<b>Caractérisations en rhéologie.....</b>	<b>103</b>
3.2.1	Méthodes et matériel .....	103
3.2.2	Rhéologie du PVA .....	103
3.2.2.1	<i>Comportement sous cisaillement du PVA</i> .....	103
3.2.2.2	<i>Influence de la température sur la viscosité.....</i>	104
3.2.3	Rhéologie des silicones .....	105
3.2.3.1	<i>Comportement sous cisaillement.....</i>	105
3.2.3.2	<i>Influence de la dilution.....</i>	106
3.2.3.3	<i>Influence de la température sur la viscosité.....</i>	107
3.2.4	Rhéologie du miel .....	108
<b>3.3</b>	<b>Influence de la silice sur le comportement des matériaux.....</b>	<b>109</b>
3.3.1	La silice dans le PVA .....	109
3.3.2	La silice dans les silicones .....	112
<b>3.4</b>	<b>Mesure des tensions de surface .....</b>	<b>113</b>
3.4.1	Méthodes et matériel .....	113
3.4.1.1	<i>Méthode de la goutte pendante</i> .....	113
3.4.1.2	<i>Méthode de la goutte posée</i> .....	116
3.4.2	Mesure de la tension liquide / air .....	117
3.4.3	Contact fluide – support .....	118
<b>3.5</b>	<b>Essais de trempage expérimentaux.....</b>	<b>119</b>
3.5.1	Développement d'un appareil- prototype expérimental de trempage .....	119

3.5.2	Mesure des épaisseurs .....	120
3.5.3	Erreurs sur l'épaisseur .....	121
3.5.4	Influences de paramètres physiques .....	121
3.5.4.1	<i>Influence de l'évaporation</i> .....	122
3.5.4.2	<i>Influence de la vitesse de remontée du moule</i> .....	122
3.5.4.3	<i>Influence du bain de trempage</i> .....	124
<b>4.</b>	<b>VALIDATION DE LA MODELISATION DU PROCEDE DE TREMPAGE .....</b>	<b>126</b>
<b>4.1</b>	<b>Conditions de modélisation 3D par éléments finis du trempage.....</b>	<b>128</b>
4.1.1	Mise en données dans Forge3 .....	128
4.1.1.1	<i>Géométrie et cinétique</i> .....	128
4.1.1.2	<i>Rhéologie du bain</i> .....	130
4.1.2	Sensibilité de l'épaisseur au maillage .....	131
4.1.2.1	<i>Maillage volumique du bain</i> .....	131
4.1.2.2	<i>Etude de sensibilité de l'épaisseur à la taille de maille</i> .....	133
4.1.2.3	<i>Influence de la taille de maille sur la variation d'épaisseur sur une même circonférence</i> .....	136
<b>4.2</b>	<b>Validation du modèle numérique.....</b>	<b>138</b>
4.2.1	Forme du ménisque .....	138
4.2.1.1	<i>Cas d'un fluide newtonien : comparaison avec le modèle de Tanguy et al.</i> .....	138
4.2.1.2	<i>Cas d'un fluide rhéofluidifiant : comparaison avec le modèle de Tanguy et al.</i> .....	140
4.2.2	Epaisseurs mesurées .....	143
4.2.2.1	<i>Comparaison avec les modèles théoriques</i> .....	143
4.2.2.2	<i>Comparaison avec l'expérimentation</i> .....	145

4.2.2.2.1	Cas newtonien .....	145
4.2.2.2.2	Cas pseudo plastique .....	146
<b>5.</b>	<b>INFLUENCES DE PARAMETRES PHYSIQUES ET GEOMETRIQUES – ETUDES DE CAS ISOTHERMES.....</b>	<b>148</b>
<b>5.1</b>	<b>Influence de la viscosité du bain.....</b>	<b>151</b>
5.1.1	Importance de la rhéologie sur la forme du ménisque .....	151
5.1.2	Importance de la viscosité après retrait complet du moule .....	152
5.1.2.1	<i>Influence de la viscosité sur l'épaisseur</i> .....	152
5.1.2.2	<i>Influence de la viscosité sur la masse retirée autour du moule</i> .....	155
5.1.2.3	<i>Influence de la viscosité sur la hauteur de rupture du filament.....</i>	156
<b>5.2</b>	<b>Influence de la vitesse de remontée.....</b>	<b>158</b>
5.2.1	Influence de la vitesse de remontée sur les épaisseurs extraites .....	158
5.2.2	Influence de la vitesse de retrait sur la masse retirée autour du moule .....	159
5.2.3	Influence de la vitesse sur la rupture du fil .....	160
<b>5.3</b>	<b>Influence de la tension de surface .....</b>	<b>161</b>
5.3.1	Influence de la tension de surface sur l'épaisseur extraite .....	161
5.3.1.1	<i>Variation de la taille de l'épaisseur en fonction de la tension de surface</i> .	161
5.3.1.2	<i>Variation de la masse de l'épaisseur en fonction de la tension de surface.....</i>	163
5.3.2	Influence de la tension de surface sur la rupture du fil .....	165
5.3.3	Compétition gravité – tension de surface .....	167
5.3.3.1	<i>Observations numériques</i> .....	167
5.3.3.2	<i>Observations expérimentales</i> .....	168
5.3.4	Amélioration de l'aspect de la surface .....	169
<b>5.4</b>	<b>Généralisation de l'influence des divers facteurs physiques .....</b>	<b>171</b>

5.4.1	Masse extraite autour du moule .....	171
5.4.2	Rupture du filament.....	172
<b>5.5</b>	<b>Cas de trempage de moules à formes complexes.....</b>	<b>173</b>
5.5.1	Cas du trempage d'un entre doigts .....	173
5.5.1.1	<i>Géométrie du moule employé et difficultés</i> .....	173
5.5.1.2	<i>Influence des paramètres physiques</i> .....	174
5.5.1.2.1	Influence de la viscosité .....	174
5.5.1.2.2	Influence de la vitesse .....	176
5.5.1.3	<i>Forme de la matière dans l'entre doigts</i> .....	176
5.5.1.3.1	Cas intermédiaire : mécanisme de séparation .....	177
5.5.1.3.2	Ratio à faibles valeurs de viscosité / vitesse .....	179
5.5.1.4	<i>Critère permettant d'obtenir une épaisseur convenable dans l'entre doigts</i> .....	179
5.5.1.5	<i>Epaisseur dans l'entre doigts</i> .....	180
5.5.2	Cas d'un implant mammaire .....	182
5.5.2.1	<i>Remontée verticale</i> .....	183
5.5.2.2	<i>Rotation</i> .....	185
<b>6.</b>	<b>COUPLAGE THERMO MECANIQUE .....</b>	<b>187</b>
<b>6.1</b>	<b>Température dans le moule.....</b>	<b>189</b>
6.1.1	Propriétés thermiques des matériaux.....	189
6.1.1.1	<i>Propriétés rhéologiques du bain en fonction de la température</i> .....	189
6.1.1.2	<i>Propriétés thermiques du moule</i> .....	190
6.1.1.2.1	Propriétés du moule industriel.....	190
6.1.1.2.2	Propriétés du moule employé pour la simulation numérique.....	190
6.1.2	Détermination théorique de la température à la surface du moule.....	191

6.1.3	Détermination expérimentale de la variation de température en surface du moule.....	192
6.1.4	Modélisation de la variation de température dans le moule.....	193
<b>6.2</b>	<b>Influence de la température lors du trempage .....</b>	<b>196</b>
6.2.1	Comparaison entre l'épaisseur déposée mesurée et prédite numériquement.	196
6.2.2	Importance de la variation de la température dans le moule.....	196
6.2.3	Influence de la température sur l'épaisseur mesurée .....	198
6.2.3.1	<i>Température du bain</i> .....	198
6.2.3.2	<i>Température du moule</i> .....	201
	<b>CONCLUSIONS .....</b>	<b>202</b>
	<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....</b>	<b>205</b>



# **INTRODUCTION**

## **Contexte de l'étude**

Le recouvrement d'objet par une fine couche de liquide est un procédé couramment utilisé et cela depuis plusieurs milliers d'années. Par exemple, ce procédé est employé depuis toujours pour émailler les poteries. Sa simplicité de mise en œuvre explique sa très large utilisation.

C'est son automatisation qui lui a permis d'étendre son panel d'applications et ainsi d'être largement employé dans des secteurs variés depuis plusieurs dizaines d'années. Ses objectifs peuvent être multiples : il peut permettre de recouvrir un objet pour le protéger du milieu extérieur ou encore simplement à des fins décoratives. Par exemple, il est intensivement employé à chaud dans le cadre de la fabrication et du revêtement de câbles, et pour la galvanisation de plaques en métal, de feuilles, etc. Le trempage permet également après une étape de démoulage de créer un objet de forme creuse plus ou moins complexe et de fine épaisseur. Ce type de trempage est employé dans l'industrie des gants, des gélules médicales, des prothèses mammaires et des préservatifs.

Malgré sa très large utilisation industrielle, le procédé de mise en forme par trempage n'a encore fait l'objet que de très peu d'études. Les épaisseurs retirées autour des moules ainsi que leurs répartitions ne sont pas parfaitement maîtrisées et l'influence des paramètres physiques propres aux matériaux et au milieu extérieur sont peu connus.

## **Présentation du procédé de trempage**

### ✓ Les différents types de trempage

Le procédé de trempage est très simple à mettre en œuvre : il consiste à plonger un moule ou un support dans un bain liquide pour en extraire autour une fine couche de matière. Son utilisation recouvrant bon nombre de domaines, chaque usage a ses spécificités et ses modes de fonctionnement.

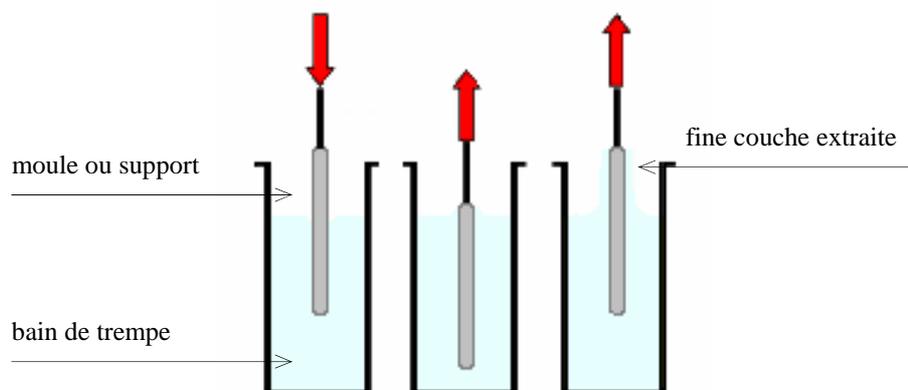
Selon les propriétés des bains de trempage utilisés et les températures employées, les supports peuvent être en différents matériaux : métal, céramique ou plastique. Le trempage peut se faire à chaud (bain ou support chauffé) ou à froid. Le trempage à chaud n'est utilisé

que pour des objets dont le moule ou le support sont de masses suffisamment importantes pour conserver la chaleur. Ces différences ont une très grande portée sur le mode d'adhésion entre le moule et le fluide. Si un gradient de température est créé, il peut y avoir solidification ou gélification, processus déterminant l'épaisseur finale extraite. Lors de la fabrication des gélules pharmaceutiques, par exemple, la solution de polymère est chauffée et le moule est à température ambiante ; lorsqu'ils entrent en contact, une fine couche de fluide autour du support gélifie ce qui constituera l'épaisseur extraite. Dans d'autres cas, seul un contact collant permet l'extraction de l'épaisseur, la solidification se faisant dans une étape suivante indépendante du trempage.

#### ✓ Les étapes du trempage

La *Figure 1* présente les différentes étapes du trempage. Le moule est plongé dans le liquide à une vitesse donnée ; dans l'industrie, l'immersion se fait généralement mécaniquement, mais il existe encore des chaînes de production manuelle comme pour le cas des implants mammaires. Une fois le moule dans le bain, il peut y avoir un temps d'attente plus ou moins long permettant par exemple la gélification. Le moule est ensuite retiré hors du bain. Il est possible de déposer plusieurs couches les unes sur les autres et d'obtenir ainsi des épaisseurs plus ou moins importantes.

Après retrait, des mouvements de rotation du moule peuvent être réalisés pour homogénéiser ainsi l'épaisseur du fluide. Ensuite, pour obtenir une couche parfaitement sèche et solide, plusieurs méthodes peuvent être employées en fonction des propriétés des matériaux. La solidification de cette couche peut se faire soit au moyen de réactions chimiques (réticulation) ou soit par évaporation de solvant. La couche est ensuite démoulée si nécessaire pour obtenir un objet creux de la forme du moule employé.



**Figure 1 : Schéma des étapes du trempage**

### ✓ Cas industriels traités

Cette thèse a été réalisée en partenariat avec deux entreprises employant le trempage dans leur production : Mapa pour leur fabrication de gants et Poly Implant Protheses pour leur production d'implants mammaires. Le travail de cette thèse a donc pour but d'être appliqué à ces deux cas particuliers.

Dans le cas des gants, un moule en céramique recouvert d'un gant en néoprène (polychloroprène vulcanisé) chauffé préalablement à 80°C est plongé dans un bain d'une solution aqueuse d'alcool de polyvinyle (PVA) à 30°C. L'adhésion entre le néoprène et le PVA est obtenue à l'aide d'un liquide, appelé primaire d'adhésion, dans lequel le moule est trempé avant d'être immergé dans le PVA. Ce liquide est un adhésif polyacrylique thermodurcissable formulé avec un peu de PVA. La solidification du liquide se fait ensuite par réticulation. Les principales difficultés de ce cas de trempage résident dans la forme des moules employés et plus particulièrement entre les doigts.

Dans le cas des implants mammaires, le trempage se fait manuellement grâce à un moule en plastique (pour des raisons de confidentialité, il nous est impossible de communiquer la nature de ce polymère) immergés dans des bains de suspension de silicone en solution dans du xylène à une température comprise entre 27 et 33°C. L'adhésion moule-fluide se fait par contact collant. Pour obtenir l'épaisseur de l'enveloppe désirée, il est nécessaire de réaliser l'opération de trempage plusieurs fois (entre 4 et 6 couches). Après évaporation du xylène, la couche extraite est réticulée puis démoulée.

### ✓ Problèmes liés au trempage

Un des paramètres clés du procédé de trempage est la maîtrise de l'épaisseur de la couche solidifiée sur le moule. L'épaisseur du revêtement est dépendante de divers facteurs : les propriétés rhéologiques du bain ainsi que sa tension de surface, les vitesses d'immersion et d'émersion et la position du moule (angle de trempage).

L'avantage du procédé de trempage est qu'il est très simple à mettre en œuvre. Cependant, il est difficile de contrôler l'épaisseur extraite autour du support aussi bien en terme de taille qu'en terme de répartition. Actuellement, la mise en place d'une chaîne de production se fait de manière empirique : l'épaisseur est mesurée expérimentalement et des ajustements sur la vitesse de trempage et la rhéologie du bain sont faits jusqu'à obtention de l'épaisseur désirée, ce qui est long et coûteux. D'autre part, il est difficile de maîtriser la répartition de la matière autour du support surtout dans le cas de formes complexes. A titre d'exemple, dans le cas du trempage des gants, l'entre-doigts est une zone particulièrement difficile à maîtriser du fait des courbures dans deux directions différentes.

Il semble donc intéressant de développer une méthode permettant de prédire l'épaisseur extraite au cours du trempage et également de mieux la maîtriser.

## **Objectif de la thèse**

Comme cela vient d'être expliqué, il n'existe pas actuellement de solutions analytiques ou numériques pour prédire l'épaisseur extraite lors du trempage tel qu'il se pratique industriellement. En effet, la mise en forme par trempage fait appel à de nombreux facteurs physiques tels que la tension de surface, la viscosité, les forces d'inertie et la gravité simultanément. Le recours à la simulation numérique est donc nécessaire si l'on souhaite prédire l'épaisseur de liquide extrait autour du moule.

Le principal objectif de ce travail de thèse est de simuler numériquement le procédé de trempage pour ainsi pouvoir prédire les épaisseurs extraites. L'avantage de la simulation numérique est qu'il est possible de visualiser des phénomènes que l'on n'observe pas expérimentalement. L'observation des résultats obtenus par simulation numérique pourrait permettre d'expliquer les irrégularités obtenues lors du trempage et de les corriger. Le logiciel choisi est Forge2005® dans sa version 3D qui présente l'avantage d'être formulé en vitesse/pression ce qui est très adapté à la mise en forme des matériaux.

Le premier chapitre sera consacré à une étude de la bibliographie existante sur le procédé de trempage. Nous y présenterons les principales approches expérimentales, théoriques et numériques existantes ainsi que leurs limites d'utilisation. Ce paragraphe traitera les cas de trempages à chaud et isotherme.

Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacré à la présentation de la formulation du problème mécanique du trempage ainsi qu'à sa résolution sous Forge2005®. Nous y introduirons également la méthode d'implémentation de la tension de surface dans le code source.

Le troisième chapitre relate l'ensemble des données expérimentales recueillies au cours de ce projet. L'objectif de ce travail a été d'introduire la physique des matériaux dans la simulation, c'est-à-dire de déterminer les lois de comportement rhéologiques des bains de trempage, d'en identifier les paramètres et de déterminer le type de contact entre le fluide et le moule. Il a également été réalisé une série de trempage expérimentale pour déterminer les épaisseurs extraites autour d'un moule cylindrique.

Les trois dernières parties seront consacrées à l'étude des résultats de la modélisation du trempage. Le quatrième chapitre est consacré à la validation de la méthode numérique développée sur Forge2005®. Après une étude approfondie de l'influence du maillage, nous comparerons nos modélisations numériques aux résultats obtenus à l'aide des méthodes développées dans la littérature et à ceux déterminés expérimentalement.

Le cinquième chapitre quant à lui est consacré à une étude numérique approfondie de l'influence des paramètres physiques sur la forme des épaisseurs extraites : les forces de tension de surface, la vitesse de retrait, la viscosité du bain et la géométrie du moule.

La dernière partie de ce travail est consacrée au trempage à chaud utilisé lors de la mise en forme des gants. Nous y étudierons l'influence de la thermique dans l'outil ainsi que celle de la température sur l'épaisseur extraite.

## NOTATIONS

$A$	Constante
$A_1, A_2$	Surfaces
$b$	Constante dans l'équation 1-5
$b_j$	Effusivité du milieu $j$
$B$	Constante dans l'équation 1-6
$B_k$	Partie bulle
$C$	Coefficient proportionnel en $Pa^{-1}$ (Equation 1-17)
$C_p$	Capacité thermique massique
$d$	Constante dans l'équation 1-5
$d_a$	Diamètre des agglomérats
$d_e, d_s$	Diamètres caractéristiques d'une goutte pendante
$D$	Constante dans l'équation 1-6
$E$	Paramètre d'étalement
$E_a$	Energie d'activation
$f$	Force
$f_l$	Fraction volumique du liquide
$f_p$	Fraction de puissance de déformation transformée en chaleur
$F_{TS}$	Force des tensions de surface
$g$	Gravité
$h$	Epaisseur dans le ménisque et dans la zone transitoire
$h_0$	Epaisseur constante dans la région II
$h_\infty$	Epaisseur maximale de la zone constante
$h_{cond}$	Coefficient de transfert par conduction
$h_{conv}$	Coefficient de transfert par convection
$h_t$	Coefficient de transfert thermique
$h_{stagnation}$	Epaisseur dans le ménisque au niveau du point de stagnation
$H$	Chaleur latente
$H_e$	Matrice hessienne
$H_f$	Enthalpie
$H_o$	Rapport d'homothétie
$H_r$	Hauteur de rupture (Figure 1-2)
$H'_r$	Hauteur initiale de rupture
$i$	Coefficient de sensibilité à l'écroutissage
$I$	Matrice identité
$j$	Sensibilité à la vitesse de déformation
$k$	Taille de maille
$K$	Consistance du matériau

$L$	Nombre adimensionnel (Equation 1-20)
$L_b$	Largeur du bain
$L_d$	Largeur de la zone de drainage
$L_p$	Longueur de la plaque
$m$	Indice d'écoulement
$\mathbf{n}$	Normale sortante
$p$	Pression
$p_0$	Pression atmosphérique
$p_e$	Périmètre de la plaque
$Q$	Flux
$r$	Paramètre de pénalité
$R$	Résidu
$R_0$	Rayon de courbure au sommet d'une goutte
$R_1, R_2$	Rayons de courbures
$R_{bain}$	Rayon du bain
$R_c$	Rayon de courbure
$R_m$	Rayon du moule
$R_{modif}$	Second membre modifié par l'élimination du terme « bulle »
$R_g$	Constante des gaz parfaits
$R_s$	rayon d'une sphère
$s$	Paramètre ajustable de loi de Carreau
$S$	Déviateur des contraintes
$S_f$	Surface d'une facette d'élément
$t$	Temps
$t_c$	Paramètre temporel ajustable de loi de Carreau
$t_d$	Temps de drainage
$t_d^*$	Temps critique de stabilisation
$t_r$	Temps de rupture du filament
$\mathbf{t}$	Vecteur tangentiel
$\mathbf{T}$	Vecteur contrainte normale
$T$	Température
$T_0$	Nombre adimensionnel (Equation 1-20)
$T_{air}$	Température de l'air
$T_b$	Température du bain
$T_{ext}$	Température extérieure
$T_f$	Température de fusion
$T_i$	Température à l'interface moule / bain
$T_m$	Température du moule

$T_p$	Température de la plaque chauffante
$\mathbf{u}$	Vitesse dans le fluide
$u, v$	Composante de $\mathbf{u}$
$U_0$	Vitesse de retrait
$V$	Vitesse de croissance de la couche
$w_k$	Fonction linéaire
$Y$	Fonction de forme de la goutte
<b>Lettre grecque</b>	
$\alpha$	Constante
$\alpha_l$	Diffusivité thermique du liquide
$\alpha_s$	Diffusivité thermique du solide
$\beta$	Terme dépendant de la température
$\chi$	Pas de temps fictif
$\delta$	Tenseur unitaire
$\delta_a$	Angle entre deux adjacentes de triangles
$\delta_f$	Abscisse du front de solidification
$\Delta T$	Différence de température
$\underline{\Delta}$	Opérateur de Laplace-Beltrami
$\nabla_s$	Opérateur divergent de la surface
$\varepsilon$	Terme très petit dans la linéarisation
$\varepsilon_e$	Emissivité
$\varphi$	Entité dépendante des dimensions d'une goutte pendante
$\dot{\gamma}$	Tenseur des vitesses de déformation
$\gamma$	Constante de Stephan-Bolzman
$\eta$	Viscosité cinématique
$\eta_s$	Nombre adimensionnel
$\kappa$	Paramètre de pénalisation
$\kappa_f$	Chaleur de fusion
$\lambda$	Nombre adimensionnel (Equation 1-20)
$\lambda^c$	Conductivité thermique
$\mu$	Viscosité dynamique
$\mu_0$	Consistance du matériau.
$\theta$	Angle de mouillage
$\vartheta$	Tenseur intermédiaire
$\rho$	Masse volumique
$\sigma$	Tension de surface
$\tau$	Tenseur de contrainte
$\tau^D$	Déviateur

$\tau_c$	Temps critique de l'équation 1-2
$\xi$	Multiplicateur lagrangien
$\nu$	Courbure à la surface
$(\omega_k^q)_{q=1,2,3,4}$	Centre de gravité du tétraèdre
$\Upsilon$	Espace des vitesses tests
$\Psi$	Espace de pression test
<b><i>Nombre adimensionnel</i></b>	
$Ca$	Nombre Capillaire
$Pr$	Nombre de Prandl
$Re$	Nombre de Reynolds
$Ste$	Nombre de Stefan

## **1. BIBLIOGRAPHIE SUR LE TREMPAGE**

# **1. BIBLIOGRAPHIE SUR LE TREMPAGE**

<b>1.1</b>	<b>Forme et évolution de la surface libre au cours du trempage .....</b>	<b>25</b>
1.1.1	Drainage dans l'épaisseur.....	26
1.1.2	Forme du ménisque .....	27
1.1.3	Rupture du fil .....	28
<b>1.2</b>	<b>Etudes du trempage isotherme.....</b>	<b>30</b>
1.2.1	Définition du problème .....	30
1.2.2	Approches analytiques de la prédiction de l'épaisseur .....	32
1.2.2.1	<i>Cas d'une plaque plongée verticalement .....</i>	<i>32</i>
1.2.2.2	<i>Cas d'un cylindre plongé verticalement.....</i>	<i>39</i>
1.2.3	Approche numérique du trempage .....	43
1.2.3.1	<i>Définitions du problème .....</i>	<i>43</i>
1.2.3.1.1	<i>Cas des fluides newtoniens.....</i>	<i>43</i>
1.2.3.1.2	<i>Cas des fluides non newtoniens.....</i>	<i>45</i>
1.2.3.2	<i>Application au trempage .....</i>	<i>48</i>
<b>1.3</b>	<b>Cas du trempage à chaud .....</b>	<b>50</b>
1.3.1	Les problèmes de transfert thermique .....	50
1.3.1.1	<i>La démarche de Stefan .....</i>	<i>50</i>
1.3.1.2	<i>La démarche de Stefan appliquée au trempage .....</i>	<i>51</i>
1.3.2	Solutions analytiques au problème de croissance d'un front de matière .....	54
1.3.2.1	<i>Croissance d'un front de solidification sur une plaque isotherme .....</i>	<i>54</i>
1.3.2.2	<i>Croissance d'un front de solidification sur une plaque non isotherme .....</i>	<i>55</i>
1.3.3	Modélisation du trempage à chaud.....	55
1.3.3.1	<i>Modèle à suivi de l'interface .....</i>	<i>57</i>
1.3.3.1.1	<i>Maillage fixe sur l'ensemble du domaine liquide-solide .....</i>	<i>57</i>

1.3.3.1.2	Immobilisation de l'interface par transformation de coordonnées.....	58
1.3.3.2	<i>Modèle enthalpique</i> .....	59
1.3.3.2.1	Formulation du modèle enthalpique.....	59
1.3.3.2.2	Application du modèle enthalpique au trempage.....	62

Ce chapitre a pour objectif de présenter les principales études expérimentales, analytiques et numériques existantes dans la littérature au sujet du procédé de trempage. Le premier paragraphe est consacré aux mécanismes physiques intervenant lors du trempage et influençant la forme de l'épaisseur. Ensuite, nous présenterons les principales études analytiques et numériques qui ont eu pour but de prédire l'épaisseur extraite. Les cas de trempage isotherme et anisotherme sont traités séparément car les phénomènes physiques mis en jeu sont différents.

### 1.1 Forme et évolution de la surface libre au cours du trempage

Dans un cas de trempage classique, la forme de la surface libre et l'épaisseur extraite sont dépendantes de quatre principales forces différentes : la viscosité, la gravité, la tension de surface et les forces d'inertie. Sous l'effet de ces paramètres, la forme du film présente trois zones distinctes (*Figure 1-1-a*) pour le cas d'un moule cylindrique ou d'une plaque de longueur infinie :

- La région I, dite transitoire, a son épaisseur  $h(z,t)$  qui diminue avec le temps.
- La région II, qui constitue la majorité du film, est stationnaire et a une épaisseur  $h_0$  constante.
- La région III est celle formée par le ménisque, lui-même divisible en deux parties (*Figure 1-1-b*) : le ménisque dynamique et le ménisque statique [Spiers73]. Dans le ménisque dynamique, les effets de gravité ainsi que ceux des contraintes normales peuvent être négligés. L'épaisseur  $y$  varie en fonction de la viscosité et de la tension de surface. Dans le ménisque statique, l'écoulement est négligé ; la forme de la surface libre  $y$  varie en fonction de la tension de surface et des forces de pressions.

De nombreuses études aussi bien expérimentale, théorique que analytique ont cherché à prédire l'évolution de la forme des ces différentes zones dans le temps et sous l'effet de différents paramètres. Ce paragraphe fait une synthèse des phénomènes intervenant dans l'épaisseur et conduisant à l'évolution de sa forme.

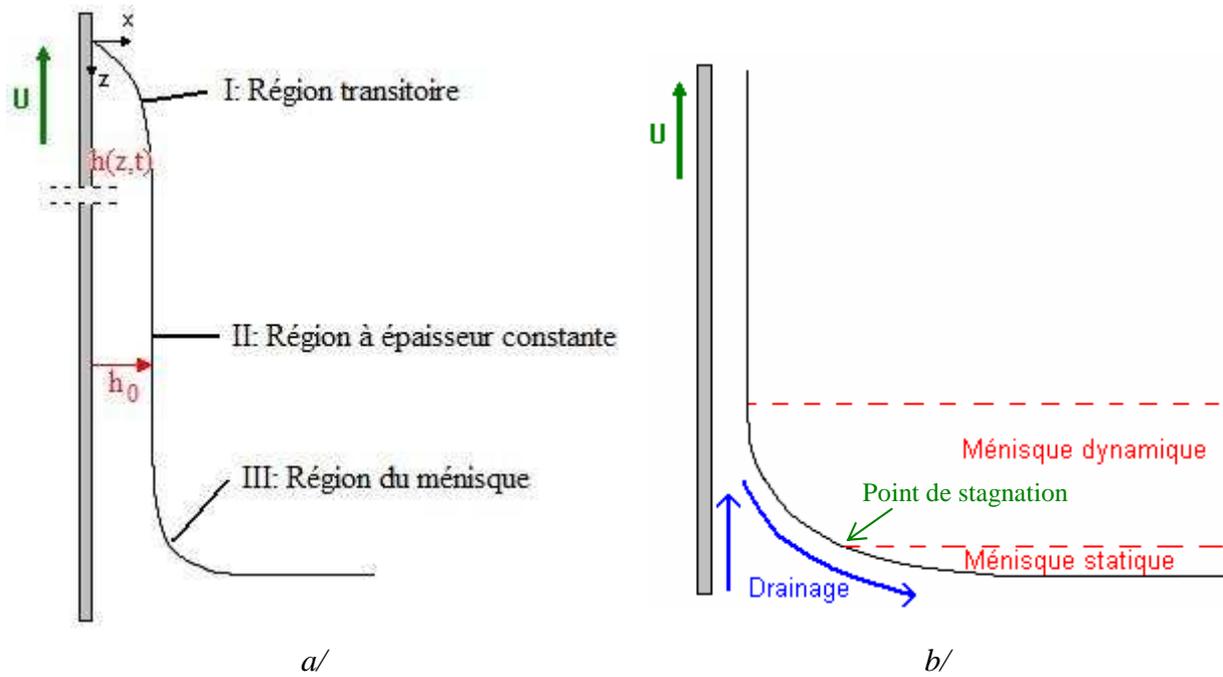


Figure 1-1 : Profil du film liquide adhérant à une surface verticale en mouvement a/ le long du moule et b/ dans le ménisque

### 1.1.1 Drainage dans l'épaisseur

Durant les premiers instants de la remontée, il se forme la région I où le liquide est drainé sous l'effet de la gravité. Le phénomène d'écoulement dans cette zone est temporaire et, au bout d'un certain temps, sa forme se stabilise. Jeffreys en 1930 [Jeffreys30] est le premier à avoir cherché à y prédire l'évolution de l'épaisseur en fonction du temps pour un fluide newtonien. Il a alors montré que le profil dans la région I au bout d'un long temps de drainage est celui d'une parabole décrite par l'expression suivante :

$$h(z,t) = \left( \frac{\eta z}{g t} \right)^{1/2} \quad \text{Eq. 1-1}$$

où  $\eta$  est la viscosité cinématique,  $g$  la gravité et  $t$  le temps. Cette expression est valable quand l'écoulement est laminaire et négligeable dans le sens horizontal (selon  $x$ ).

Denson [Denson70] a poursuivi les travaux de Jeffreys. Tout en les améliorant en prenant en compte les effets liés à la forme initiale du film, il a déterminé le temps critique  $\tau_c$  à partir duquel l'équation 1-1 est valide. L'expression permettant d'approcher ce temps critique  $\tau_c$  est la suivante :

$$\tau_c = \frac{\eta L_p}{g \left( h(z = L_p, t = 0) \right)^2} \quad \text{Eq. 1-2}$$

où  $L_p$  est la longueur de la zone transitoire.

Ce temps critique est dépendant de l'épaisseur initiale, de la viscosité du liquide et de la longueur de la plaque. L'équation 1-2 montre qu'il décroît lorsque l'épaisseur initiale augmente, et/ou diminue lorsque la viscosité diminue.

### 1.1.2 Forme du ménisque

La forme du ménisque a également fait l'objet de nombreuses études expérimentales visant à prédire sa forme. De manière générale, son épaisseur diminue asymptotiquement depuis le niveau du bain de liquide jusqu'à la région II où l'épaisseur est constante. Les premiers grands investigateurs dans ce domaine sont Groenveld [Groenveld70b] et Groenveld et Van Dortmond en 1970 [Groenveld70a] suivis par Lee et Tallmadge avec une série d'articles dans les années 70 ([Lee72], [Lee73], [Lee74]). Ils ont cherché à déterminer l'influence de paramètres tels que la vitesse de retrait et les propriétés du fluide (viscosité, densité, tension de surface) sur la forme du ménisque. Tanguy et al. en 1984 se sont ensuite intéressés à ce problème d'un point de vue numérique, ce qui sera présenté plus loin dans ce paragraphe.

Le ménisque est divisible en deux zones bien distinctes, le ménisque dynamique et le ménisque statique. Le point de passage d'une zone à l'autre est situé au niveau d'un point dit « de stagnation ». A l'aide d'essais expérimentaux, il a été cherché des formules empiriques permettant la prédiction de sa position :

- Selon Groenveld, le point de stagnation se situe au niveau de de l'épaisseur  $h_{stagnation}$  :

$$\frac{h_{stagnation}}{h_0} = 3 \quad \text{Eq. 1-3}$$

- Lee et Tallmadge quant à eux ont observé que la position du point de stagnation variait en fonction de la vitesse de retrait  $U_0$  et de la viscosité dynamique ( $\mu = \eta / \rho$ ) tel que :

$$\frac{h_{stagnation}}{h_0} = 3 - h_0^2 \left( \frac{\rho g}{\mu U_0} \right)^2 \quad \text{Eq. 1-4}$$

Les études menées se sont principalement intéressées à l'étude de l'écoulement dans le ménisque dynamique. Il a été montré expérimentalement par Groenveld et Van Dortmond, puis confirmé par Lee et Tallmadge, que la hauteur  $z$  dans le moule au dessus du bain était linéairement fonction de  $\ln(h(z) - h_0)$  tel que :

$$z = b - d \ln(h(z) - h_0) \quad \text{Eq. 1-5}$$

où  $b$  et  $d$  sont des constantes ; soit sous forme adimensionnelle :

$$\lambda = B - D \ln(1 - L) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{z}{h_0} \\ L = \frac{h(z)}{h_0} \\ D = \frac{d}{h_0} \\ B = \frac{b}{h_0} - D \ln(h_0) \end{cases} \quad \text{Eq. 1-6}$$

### 1.1.3 Rupture du fil

Après retrait du support un filament de liquide reliant le bain au film d'épaisseur autour du moule se forme. La rupture de ce fil influence l'épaisseur finale qui sera obtenue. L'étirement du filament est fonction des propriétés rhéologiques du fluide ainsi que de sa viscosité élongationnelle. Sa rupture est dépendante également de la vitesse de retrait et de la tension de surface.

Yasuda *et al.* [Yasuda04] ont regardé expérimentalement les dépendances existantes entre rupture du filament, vitesse de retrait et viscosité sur des liquides newtoniens. Ils ont montré que hauteur à laquelle se casse le filament  $H_r$  (*Figure 1-2*) augmente quand la vitesse de retrait augmente. Cette dépendance est d'autant plus grande que le liquide présente une grande viscosité de cisaillement. De même, pour une vitesse de retrait fixe, la hauteur de rupture du filament augmente linéairement avec la viscosité de cisaillement.

La relation reliant hauteur de rupture et vitesse dans le cas d'un liquide newtonien est la suivante :

$$H_r = C\mu U_0 + H_r' \quad \text{Eq. 1-7}$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique,  $C$  un coefficient proportionnel en  $Pa^{-1}$  et  $H'_r$  la hauteur initiale de rupture quand  $U_0 = 0 m/s$ . Les paramètres  $C$  et  $H'_r$  sont déterminés expérimentalement et sont dépendants de la tension de surface, de la mouillabilité du liquide sur le support et de la forme du moule.

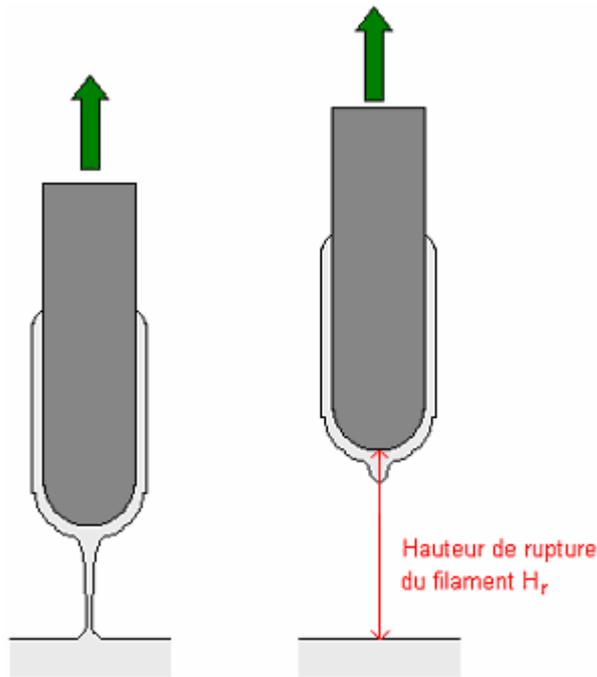


Figure 1-2 : Schéma de la rupture du filament

Il est également possible de quantifier la rupture du filament en terme de temps. Le temps de rupture  $t_r$  diminue monotonement quand augmente la vitesse de retrait. Il peut être déterminé par l'équation suivante :

$$t_r = \frac{H_r}{U_0} = C\mu + \frac{H'_r}{U_0} \quad \text{Eq. 1-8}$$

Dans ce paragraphe, nous avons apporté des informations concernant l'évolution de la forme de la surface libre extraite autour du moule au cours du temps. Dans les paragraphes suivants vont être présentés les principaux modèles théoriques et numériques qui ont pour but la prédiction de l'épaisseur extraite au cours du trempage.

## 1.2 Etudes du trempage isotherme

Dans ce paragraphe nous présenterons les principales études visant à déterminer l'épaisseur de matière extraite au cours du trempage lorsque la température n'a pas d'influence. La première partie posera le problème à résoudre. Suivra l'étude des différentes théories analytiques et numériques développées dans la littérature.

### 1.2.1 Définition du problème

Les cas de trempage traités dans la littérature se sont fait sur des géométries simples, une plaque verticale (*Figure 1-3-a*) ou un cylindre (*Figure 1-3-b*) de longueur infinie et à deux dimensions. Ces supports sont extraits hors du bain à une vitesse constante  $U_0$ .

La détermination de la forme de la surface libre  $\Gamma_F$ , i.e. l'épaisseur extraite, se fait en résolvant les équations de mouvements pour les fluides incompressibles :

$$\begin{cases} \rho(\dot{\mathbf{u}} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + \nabla \tau = \rho f \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \tau = \tau^D - p\delta \end{cases} \quad \text{Eq. 1-9}$$

où  $\mathbf{u}$  est la vitesse dans le fluide,  $p$  la pression et  $\tau$  le tenseur de contrainte. La force  $f$  est de la forme  $f = (0, g)$ . Il est considéré que le problème est traité en régime permanent, donc  $\dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t = 0$ .

$\tau^D$  est le déviateur tel que  $\tau^D = \phi(\dot{\gamma}(\mathbf{u}))$  avec  $\dot{\gamma}$  le tenseur des vitesses de déformation.

Pour un liquide newtonien, on a  $\phi(\dot{\gamma}(\mathbf{u})) = 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{u})$  avec  $\mu$  constante. Pour un fluide non newtonien, pseudoplastique par exemple, il est possible d'écrire la loi puissance  $\phi(\dot{\gamma}(\mathbf{u})) = 2K |\dot{\gamma}|^{m-1} (\dot{\gamma}(\mathbf{u}))$ , où  $K$  est la consistance et  $|\dot{\gamma}| = \sqrt{2 \dot{\gamma}(u) : \dot{\gamma}(u)}$  le produit des tenseurs.

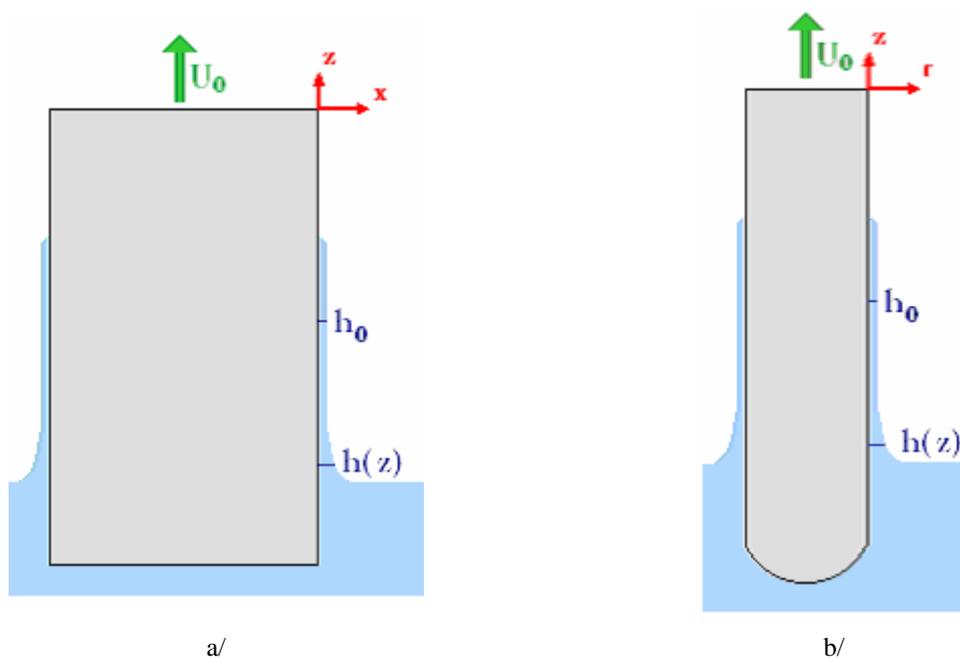


Figure 1-3 : Géométries de supports trempés dans un bain dans les cas a/ d'une plaque et b/ d'un cylindre

Pour le trempage d'une plaque, c'est-à-dire en coordonnées cartésiennes, le tenseur des vitesses de déformation  $\dot{\gamma}$  est défini par :

$$\dot{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 1-10}$$

Pour le trempage d'un cylindre, c'est-à-dire en coordonnées cylindriques, le tenseur des vitesses de déformation  $\dot{\gamma}$  est défini par :

$$\dot{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 1-11}$$

où les termes  $u$  et  $v$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{u}$ .

Pour compléter la définition du problème, il faut ajouter les conditions aux limites qui sont de types Dirichlet. Sur la surface libre, où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante et  $\mathbf{t}$  le vecteur tangentiel, les composantes des contraintes normale et tangentielle s'écrivent :

$$\begin{cases} \tau_{nn} = \frac{\sigma}{R_1} - p_0 & \text{pour la plaque} \\ \tau_{nn} = \frac{\sigma}{R_1} - \frac{\sigma}{R_2} - p_0 & \text{pour le cylindre} \\ \tau_{nt} = \mu \left[ \frac{\partial u_t}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial t} \right] = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 1-12}$$

où  $\sigma$  est la tension de surface,  $R_1$  et  $R_2$  les rayons de courbures.

Une autre condition sur la surface libre est :

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{Eq. 1-13}$$

L'ensemble de ce système est à résoudre pour prédire la forme de la surface libre. La suite de ce paragraphe portera sur les différentes approches qui en ont été faites et quelles en sont les limites.

## 1.2.2 Approches analytiques de la prédiction de l'épaisseur

Les études analytiques sur la prédiction de l'épaisseur du film extrait autour d'un support lors de trempage se sont développées depuis les années 30. Vu la complexité des paramètres mis en jeu simultanément, ces approches ont toutes été réalisées pour des géométries simples de longueur infinie : une plaque rectangulaire trempé verticalement (*Figure 1-3-a*) ou encore le cas d'un cylindre (*Figure 1-3-b*). Seuls les cas de liquides newtoniens ont été examinés ; en effet, l'introduction d'une loi de comportement propre à un liquide non newtonien conduit à un système difficile à résoudre.

### 1.2.2.1 *Cas d'une plaque plongée verticalement*

L'estimation de l'épaisseur  $h_0$  en régime permanent autour d'une plaque de longueur infinie trempée verticalement à une vitesse constante  $U_0$  a été étudiée par de nombreux auteurs. La méthode analytique la plus couramment utilisée est d'intégrer une forme simplifiée de l'équation 1-9 dans le cas d'un liquide newtonien :

$$\begin{cases} \mu \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \\ \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 1-14}$$

La solution de l'équation 1-14 est obtenue grâce aux conditions aux limites. Dans la région II à épaisseur constante, au niveau de la surface de la plaque, il est supposé qu'il n'y pas de glissement et que le contact est parfaitement collant entre le liquide et le support ; ainsi la première condition aux limites est :

$$u = U_0 \quad \text{quand } x = 0 \quad \text{Eq. 1-15}$$

Sur la surface il est considéré que la contrainte tangentielle est nulle et que la pression atmosphérique  $p_0$  est négligeable par rapport à la pression du liquide  $p$  ; ceci nous donne les conditions aux limites suivantes :

$$p = -\frac{\sigma}{R_1} \quad \text{avec} \quad R_1 = \frac{\left[1 + \left(\frac{dh}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 h}{dz^2}} \quad \text{quand } x = h \quad \text{Eq. 1-16}$$

En considérant que  $\left(\frac{dh}{dz}\right)^2$  comme négligeable, on trouve ainsi :

$$p = -\sigma \frac{d^2 h}{dz^2} \quad \text{quand } x = h \quad \text{Eq. 1-17}$$

La solution trouvée à l'équation 1-14 est :

$$u = U_0 + \left(\frac{\rho g}{\mu} - \frac{\sigma}{\mu} \frac{d^3 h}{dz^3}\right) \left(\frac{x^2}{2} - hx\right) \quad \text{Eq. 1-18}$$

L'équation 1-18 peut être intégrée à  $z$  constant pour donner l'expression du flux  $Q$  dans une unité de largeur de la plaque :

$$Q = \int_0^h u dx = U_0 h - \left( \rho g - \sigma \frac{d^3 h}{dz^3} \right) \frac{h^3}{3\mu} = U_0 h_0 - \frac{\rho g h_0^3}{3\mu}$$

**Eq. 1-19**

$$\Rightarrow u = U_0 + \frac{3}{h_0^2} \left( U_0 - \frac{Q}{h_0} \right) \left( \frac{x^2}{2} - h_0 x \right)$$

L'équation 1-19 définit la vitesse dans le fluide loin de la surface du liquide, c'est-à-dire loin du ménisque. Elle peut être réécrite à l'aide des nombres adimensionnels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{z}{h_0} \left( \frac{3\mu U_0}{\sigma} \right)^{1/3} \\ L = \frac{h}{h_0} \\ T_0 = h_0 \left( \frac{\rho g}{\mu U_0} \right)^{1/2} \end{array} \right. \quad \text{Eq. 1-20}$$

L'équation 1-19 devient alors :

$$\frac{d^3 L}{d\lambda^3} - \frac{1-L}{L^3} - \frac{T_0^3 (1-L^3)}{L^3} = 0 \quad \text{Eq. 1-21}$$

L'équation 1-21 est donc celle à résoudre pour pouvoir prédire analytiquement l'épaisseur du film extrait autour d'une plaque.

Historiquement, les premiers à s'être intéressés à ce problème sont Landau et Levich en 1942 [Landau42] ; comme cela va être montré par la suite, la solution qu'ils apportent n'est applicable que dans des cas où les effets de gravités sont négligeables devant la tension de surface. Par la suite, d'autres études ont été menées pour apporter des solutions avec des hypothèses différentes, et donc applicables dans des conditions différentes. Une des plus connues est celle de White et Tallmadge [White64] : leur solution donne de bonne corrélation avec l'expérimentation dans les cas où le nombre capillaire  $Ca = \mu u_0 / \sigma$  est inférieur à 2. Spiers et al. ont généralisé la solution de White et Tallmadge à des cas avec un nombre capillaire inférieur à 2.

✓ *Solution de Landau et Levich*

Ces auteurs ont approximé l'équation 1-21 en considérant la gravité comme négligeable devant les effets de la viscosité dans le ménisque dynamique, c'est à dire quand  $T_0^2 \ll 1$  ce qui réduit l'équation 1-21 à :

$$\frac{d^3 L}{d\lambda^3} = \frac{1-L}{L^3} \quad \text{Eq. 1-22}$$

Les conditions aux limites pour résoudre l'équation 1-22 sont :

$$\text{quand } h = h_0 : L = 1 \text{ et } \frac{dL}{d\lambda} = 0 \quad \text{Eq. 1-23}$$

$$\text{et quand } L \rightarrow \infty : \frac{d^3 L}{d\lambda^3} \rightarrow 0 \quad \text{Eq. 1-24}$$

$$\text{donc quand } L \rightarrow \infty : \frac{d^2 L}{d\lambda^2} \rightarrow \beta \quad \text{Eq. 1-25}$$

$\beta$  est une constante numérique, Landau et Levich l'ont trouvée égale à 0,63 et Deryagin *et al.* [Deryagin45] quant à eux l'ont trouvée équivalente à 0,64. Utilisant les conditions aux limites le flux  $Q$  s'écrit :

$$Q = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{U_0^{5/3} (3\mu)^{2/3}}{\sigma^{2/3} a} \quad \text{avec } a = \left( \frac{\rho g}{\sigma} \right)^{1/2} \quad \text{Eq. 1-26}$$

Soit :

$$Q = 0,93 \frac{U_0^{5/3} \mu^{2/3}}{\sigma^{1/6} (\rho g)^{1/2}} \quad \text{Eq. 1-27}$$

Connaissant  $Q$ , il est possible de déterminer l'expression de l'épaisseur du film loin du ménisque :

$$h_0 = 0,93 \frac{(U_0 \mu)^{2/3}}{\sigma^{1/6} (\rho g)^{1/2}} \quad \text{Eq. 1-28}$$

Ce qui donne en introduisant le nombre de capillaire  $Ca$  qui représente le rapport entre les forces visqueuses par rapport aux forces de tension de surface sur la surface libre :

$$T_0 = 0,93(Ca)^{1/6} \quad \text{Eq. 1-29}$$

Cependant cette équation n'est applicable que dans les cas particuliers où la gravité est négligée dans le ménisque dynamique, c'est-à-dire lorsque les vitesses de remontée sont faibles. L'utilisation de cette équation est donc limitée mais elle a été le point de départ à d'autres nombreuses investigations théoriques. Les études menées ensuite se sont faites à chaque fois sur des cas bien précis et donc avec des conditions particulières (vitesse plus ou moins lente, viscosité du fluide newtonienne ou non, etc). Aucune solution générale théorique n'a été trouvée.

✓ *Solution de White et Tallmadge*

Une des études les plus connues s'inspirant de celle de Landau et Levich est celle de White et Tallmadge [White65] qui ont résolu l'équation 1-21 en prenant en compte la gravité. Pour cela, il ne faut plus considérer  $T_0$  comme négligeable dans l'équation 1-21 qui est linéarisé en introduisant  $L = 1 + \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est très petit. En négligeant les termes en  $\varepsilon^2$  et  $\varepsilon^3$ , 1-21 se réécrit :

$$\frac{d^3 \varepsilon}{d\lambda^3} = -(1 - T_0^2) \varepsilon \quad \text{Eq. 1-30}$$

On retrouve le cas traité par Landau et Levich en considérant  $T_0^2 \ll 1$  :

$$\frac{d^3 \varepsilon}{d\lambda^3} = -\varepsilon \quad \text{Eq. 1-31}$$

En substituant  $\chi = (1 - T_0^2)^{1/3} \lambda$  dans l'équation 1-30 :

$$\frac{d^3 \varepsilon}{d\chi^3} = -\varepsilon \quad \text{Eq. 1-32}$$

L'équation 1-32 est de la même forme que celle obtenue avec l'hypothèse de Landau et Levich (Eq. 1-31). Comme dans le paragraphe précédent, quand  $L \rightarrow \infty$  :

$$\frac{d^2L}{d\chi^2} = \beta = 0,642 \quad \text{Eq. 1-33}$$

La valeur de  $\beta$  employée est celle donnée par Derjaguin [Derjaguin45]. Ainsi, en remplaçant  $\chi$  pour exprimer le résultat en fonction de  $\lambda$ , il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d^2L}{d\lambda^2} &= (1-T_0^2)^{2/3} \frac{d^2L}{d\chi^2} \\ \Rightarrow \frac{d^2L}{d\lambda^2} &\approx \beta (1-T_0^2)^{2/3} \end{aligned} \quad \text{Eq. 1-34}$$

La solution trouvée par White et Tallmadge est :

$$\frac{T_0}{(1-T_0^2)^{2/3}} \approx 0,944(Ca)^{1/6} \quad \text{Eq. 1-35}$$

La comparaison faite par White et Tallmadge de leur modèle avec des essais expérimentaux montre que cette équation n'est applicable que dans le cas particulier où le nombre de capillaire  $Ca$  est supérieur à 2. En fait, selon Spiers et al. leur approximation pour calculer la contrainte normale dans la région du ménisque peut introduire des erreurs.

✓ Solution de Spiers et al.

Spiers et al. a cherché à améliorer le modèle de White et Tallmadge pour l'étendre à des cas où le nombre capillaire est inférieur à 2 en prenant en compte la contribution de la contrainte normale imposée au niveau du ménisque dynamique.

Les conditions aux limites qui sont considérées dans la région II par Spiers et al. sont :

- $u(0, z) = U_0$
- Contrainte tangentielle sur la surface libre quand  $x = h(z)$  :  

$$\frac{1}{2}(\tau_{zz} - \tau_{xx}) \sin 2\theta + \tau_{zx} \cos 2\theta$$
- Contrainte normale à la surface libre quand  $x = h(z)$  :  

$$p + \tau_{zz} (\sin \theta)^2 + \tau_{xx} (\cos \theta)^2 + \tau_{zx} \sin 2\theta = p_0 - \frac{\sigma}{R}$$

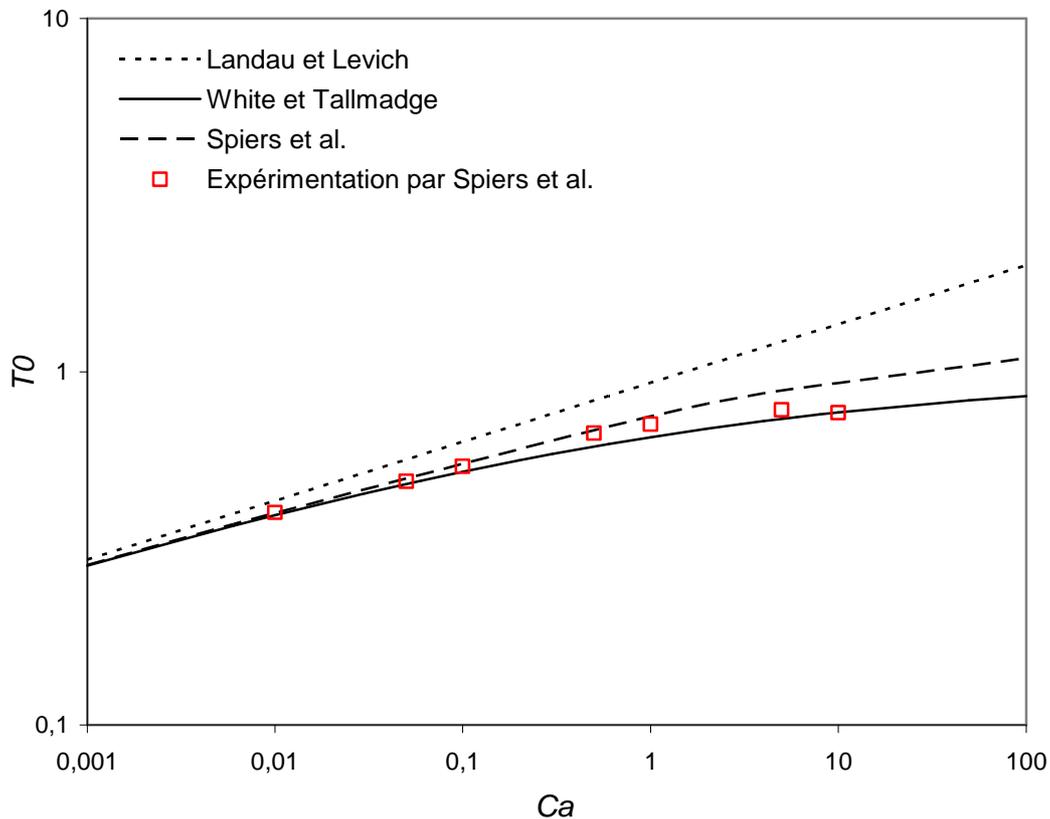
où  $\theta$  est l'angle entre la normale à la surface et l'axe  $x$  et  $R$  la courbure à la surface libre.

Sur le même principe de résolution que White et Tallmadge, la solution finale pour la détermination de l'épaisseur est la suivante :

$$T_0 = \frac{3^{2/3}}{\sqrt{2}} \alpha(Ca, T_0) (1 - T_0^2)^{2/3} Ca^{1/6} \quad \text{Eq. 1-36}$$

Dans la résolution de White et Tallmadge, les valeurs de  $\alpha$  dans la dérivation dégènèrent vers une constante alors que dans le cas de Spiers et al., elles sont obtenues en intégrant numériquement l'équation 1-37 à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4.

$$\frac{d^3 L}{d\chi^3} - (3Ca)^{2/3} \left(1 - \frac{T_0^2}{3}\right) (1 - T_0^2)^{-1/3} \frac{d}{d\chi} \left(\frac{1}{L^2} \frac{dL}{d\chi}\right) + \frac{L-1}{L^3} = 0 \quad \text{Eq. 1-37}$$



**Figure 1-4 : Comparaison des modèles de Landau et Levich, de White et Tallmadge et de Spiers et al. avec des résultats d'essais expérimentaux selon [Spiers73] présentant le nombre adimensionnel  $T_0$  en fonction du nombre capillaire  $Ca$**

La Figure 1-4 met en évidence que pour de grands nombres capillaires, le modèle de White et Tallmadge présente les meilleures corrélations avec l'expérimentation et pour un  $Ca$  plus petit, il s'agit de celui de Spiers et al.

### 1.2.2.2 Cas d'un cylindre plongé verticalement

Le cas du trempage d'un cylindre de longueur infinie a été très peu étudié analytiquement. La théorie a été développée en détail par Deryagin *et al.* dans une série d'articles depuis 1943. La démarche pour trouver une solution permettant la prédiction de l'épaisseur extraite au cours du trempage est la même que pour le cas d'une plaque mais en coordonnées cylindriques.

✓ *Modèle 1 pour déterminer l'épaisseur maximale développé par Deryagin*

L'équation 1-9 de mouvement d'un fluide newtonien autour d'un cylindre de rayon  $R_m$  s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r + R_m} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\rho g}{\mu} \quad \text{Eq. 1-38}$$

Les conditions aux limites permettant la résolution de cette équation sont :

$$\begin{cases} \text{quand } r = 0, u = U_0 \\ \text{quand } r = h, \frac{\partial u}{\partial r} \end{cases} \quad \text{Eq. 1-39}$$

Ainsi, il est possible d'écrire :

$$u = \frac{\rho g}{2\mu} (h-r)^2 - \frac{\rho g}{2\mu} r + U_0 \quad \text{Eq. 1-40}$$

Le flux dans l'épaisseur autour du cylindre est à déterminer à partir de l'équation suivante :

$$Q = 2\pi \int_0^{h_0} (r + R_m) u dx \quad \text{Eq. 1-41}$$

En considérant  $\frac{h}{R_m} \ll 1$ , le flux devient :

$$Q = U_0 h - \frac{1}{3} \frac{\rho g}{\mu} h^3 \quad \text{Eq. 1-42}$$

Si les effets d'inertie sont négligés alors l'expression du flux peut se simplifier :

$$Q = U_0 h \quad \text{Eq. 1-43}$$

Il a été montré par Deryagin *et al.* que le maximum d'épaisseur extraite autour du moule est atteint lorsque :

$$Q_m = \frac{2}{3} U \cdot h_m = \frac{2}{3} U^{3/2} \left( \frac{\mu}{\rho g} \right)^{1/2} \quad \text{Eq. 1-44}$$

Ce qui permet d'écrire l'expression de l'épaisseur maximale possible d'atteindre autour d'un cylindre en mouvement :

$$h_\infty = \frac{2}{3} \left( \frac{\mu U_0}{\rho g} \right)^{1/2} \quad \text{Eq. 1-45}$$

Cette expression est correcte pour les cas de trempage où les effets capillaires au niveau du ménisque sont négligeables.

✓ *Modèle 2 pour déterminer l'épaisseur maximale développé par Deryagin*

Deryagin [Deryagin64] a développé par la suite une autre solution permettant de déterminer l'épaisseur maximale qu'il est possible d'atteindre autour d'un cylindre au cours du trempage en considérant, cette fois, les effets capillaires dans le ménisque. L'équation 1-9 (mouvement d'un fluide newtonien autour d'un cylindre dans le cas présent) peut alors s'écrire :

$$\mu \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r + R_m} \frac{du}{dr} = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \quad \text{Eq. 1-46}$$

La pression sur la surface libre peut s'exprimer à l'aide des conditions aux limites 1-12 suivantes :

$$p = -p_0 + \frac{\sigma}{R_1} - \frac{\sigma}{R_2} \quad \text{Eq. 1-47}$$

Avec les rayons de courbures  $R_1$  et  $R_2$  équivalents aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} R_1 \approx R_m = c^{ste} \\ \frac{1}{R_2} \approx \frac{d^2 h}{dz^2} \end{cases} \quad \text{Eq. 1-48}$$

A partir de ces simplifications, il est possible de réécrire l'équation 1-44 de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r + R_m} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\rho g}{\mu} - \frac{\sigma}{\mu} \frac{d^3 h}{dz^3} \quad \text{Eq. 1-49}$$

La vitesse  $u$  et le flux  $Q$  s'exprime de la manière suivant :

$$\begin{cases} u = - \left[ \frac{\sigma}{2\mu} \frac{d^3 h}{dz^3} + \frac{\rho g}{2\mu} \right] (h-r)^2 + \left[ \frac{\sigma}{2\mu} \frac{d^3 h}{dz^3} + \frac{\rho g}{2\mu} \right] h^2 - U_0 \\ Q = U_0 h - \frac{1}{3} \left[ \frac{\sigma}{\mu} \frac{d^3 h}{dz^3} + \frac{\rho g}{2\mu} \right] h^3 \end{cases} \quad \text{Eq. 1-50}$$

Loin de la surface du bain, le flux  $Q$  vaut :

$$Q = U_0 h_0 - \frac{\rho g}{3\mu} h_0^3 \quad \text{Eq. 1-51}$$

L'équation 1-51 peut se simplifier en introduisant les nombres  $L$  et  $\lambda$  définis précédemment et  $\alpha = h_0^2 \left( \frac{\rho g}{3\mu U_0} \right)^{1/2}$  :

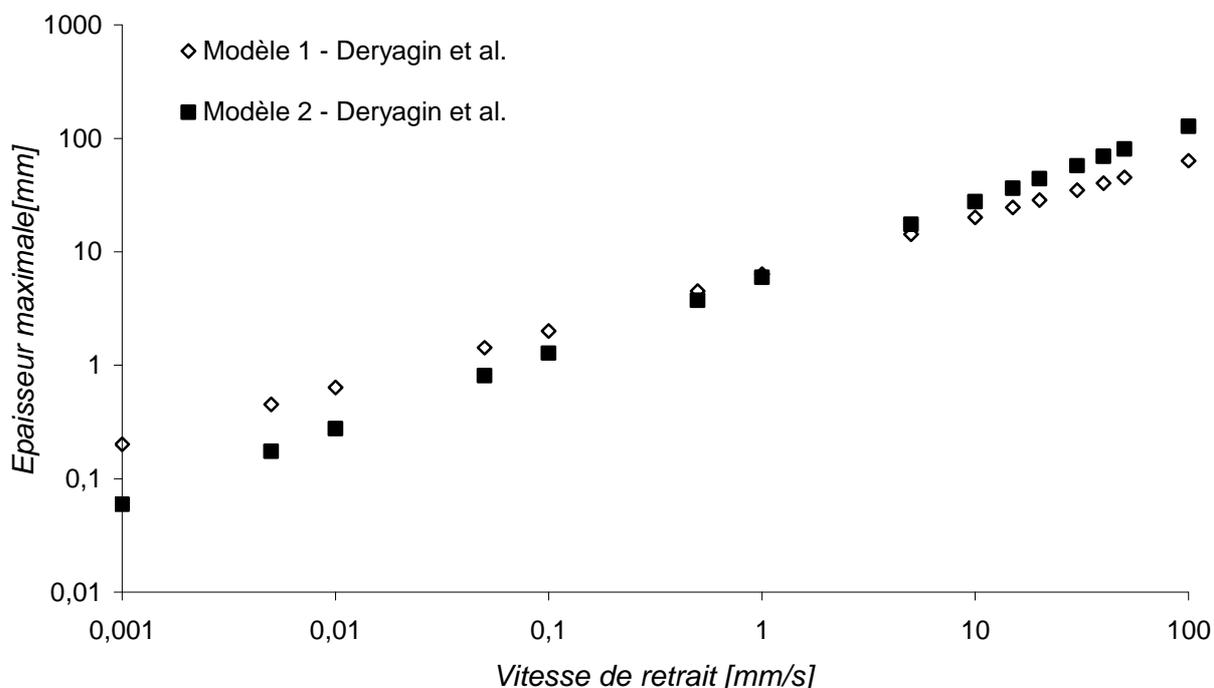
$$\frac{d^3 L}{d\lambda^3} + \alpha = \frac{1}{L^2} - \frac{1-\alpha}{L^3} \quad \text{Eq. 1-52}$$

La solution à l'équation trouvée par Deryagin [Deryagin64] est la suivante :

$$h_{\infty} = 1,32 R_m \left( \frac{\mu u}{\sigma} \right)^{2/3} \quad \text{Eq. 1-53}$$

Cette équation n'est applicable que lorsque  $\mu u / \sigma \ll 1$ .

La Figure 1-5 montre la comparaison entre les deux modèles de Deryagin et al. Le deuxième modèle est applicable lorsque les effets capillaires ne peuvent pas être négligés alors que le premier a été développé pour les cas où ces effets ne sont pas importants. A faible vitesse de retrait, le premier modèle surestime l'épaisseur alors qu'à forte vitesse, c'est le deuxième modèle qui la surestime.



**Figure 1-5 : Comparaison des deux modèles de Deryagin : calculs des épaisseurs maximales possibles de retirer autour d'un moule cylindrique lors du trempage en fonction de la vitesse de retrait à l'aide des deux méthodes 1/ équation 1-45 et 2/ équation 1-53**

Comme pour le cas de la plaque trempée, les expressions pour calculer l'épaisseur extraite autour d'un cylindre ne sont pas générales et à chaque cas particulier doit être employée une équation différente. De plus, les études se sont limitées à des cas bidimensionnels avec des géométries simples semi infinies.

Pour déterminer l'épaisseur extraite lors du trempage, les méthodes analytiques restent imparfaites et trop simplifiées. Dans les cas par exemple de fluides non-newtoniens, le

comportement rhéologique est complexe puisqu'il introduit des non-linéarités dans l'équation de mouvement. Le problème mathématique devient alors compliqué. Le recours à la modélisation numérique s'avère donc indispensable car c'est le seul moyen de conjuguer ensemble tous les facteurs physiques présents lors du trempage.

### 1.2.3 Approche numérique du trempage

Beaucoup se sont intéressés à développer une méthode de prédiction de l'épaisseur constante  $h_0$  d'un point de vue analytique. Cependant, la littérature recense très peu d'études numériques. L'étude la plus complète est celle de Tanguy [Tanguy82] et de Tanguy *et al.* ([Tanguy84-I], [Tanguy84-II] et [Tanguy85]) qui ont modélisés par éléments finis les cas de trempage d'une plaque et d'un cylindre en prenant en compte la tension de surface, la viscosité et la gravité et cela pour des fluides newtonien et non-newtonien. A l'aide de ce travail, ils ont tenté de prédire la forme du ménisque et son évolution au cours du temps ainsi que l'épaisseur constante, cependant leur étude s'est limitée aux cas bi-dimensionnel.

Le traitement numérique d'un cas d'un fluide newtonien est différent de celui d'un fluide non-newtonien qui ajoute des non-linéarités dans le problème.

#### 1.2.3.1 *Définitions du problème*

##### 1.2.3.1.1 Cas des fluides newtoniens

###### ✓ *Forme variationnelle du problème*

La première étape de résolution du problème consiste formuler le problème 1-19 sous sa forme variationnelle :

$$\begin{cases} (U \cdot \nabla)U + \nabla \cdot \tau = \rho F \\ \nabla \cdot U = 0 \\ \tau = -2\mu \dot{\gamma}(U) \end{cases} \quad \text{Eq. 1-54}$$

avec le vecteur des valeurs nodales noté  $U$  et des pressions nodales  $p$  noté  $P$ .

Résoudre ce problème consiste à considérer le problème sous la forme suivante :

$$\mathfrak{S}(U, P) = \mu \int_{\Omega} \left| \dot{\gamma}(U) \right|^2 d\Omega - \int_{\Omega} F \cdot U d\Omega - \int_{\Omega} U \cdot \nabla P d\Omega \quad \text{Eq. 1-55}$$

Pour résoudre le système 1-55 revient à chercher le point selle  $(U, P)$  de  $\mathfrak{S}(U, P)$ , c'est-à-dire à annuler au point  $(U, P)$  les dérivées directionnelles de  $\mathfrak{S}(U, P)$ . On écrit ainsi la forme faible du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \psi' \cdot \nabla \cdot U d\Omega = 0, \quad \forall \psi' \\ \int_{\Omega} B_h(U, \psi) d\Omega = 2\mu \int_{\Omega} \dot{\gamma}(U) : \dot{\gamma}(\psi) d\Omega + \int_{\Omega} (U \cdot \nabla) U \cdot \psi d\Omega \\ \quad + \int_{\Omega} \psi \cdot \nabla P d\Omega - \int_{\Omega} F \cdot \psi d\Omega + \int_{\Gamma} (-P + \tau_{nn}) \psi \cdot nd\Gamma + \int_{\Gamma} \tau_{ny} \psi \cdot td\Gamma = 0, \quad \forall \psi \end{array} \right. \quad \text{Eq. 1-56}$$

✓ *Discrétisation*

Le choix de Tanguy *et al.* pour la modélisation du trempage s'est porté sur une méthode par éléments finis décrite en vitesse et en pression. Les éléments choisis pour la description du domaine sont de type quadratique  $Q$  et tétraédrique  $T$  (Figure 1-6). La combinaison de ces deux types d'éléments permet plus de flexibilité dans la génération du maillage.

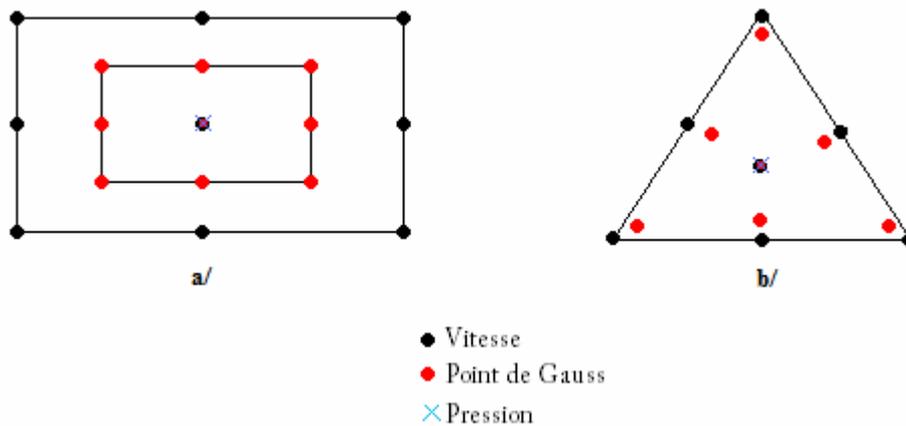


Figure 1-6 : Eléments a/ quadratique Q et b/ tétraédrique T

En transposant le système de l'équation 1-54, il est possible d'écrire :

$$\begin{cases} AU + B(U)U + C^T P = F \\ CU = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 1-57}$$

Pour les éléments quadratiques, la matrice  $C$  est de forme  $(18 \times 3)$  et pour les tétraèdres elle est de forme  $(14 \times 3)$ . La résolution du système se fait à l'aide d'une méthode de pénalité exacte avec :

$$P = \frac{1}{\kappa} S^{-1} C U \quad \text{Eq. 1-58}$$

avec  $S$  une matrice non singulière et  $\kappa$  le paramètre de pénalisation. L'équation 1-57 devient :

$$A U_{\kappa} + B(U_{\kappa}) U_{\kappa} + \frac{1}{\kappa} C^T S^{-1} C U_{\kappa} = F \quad \text{Eq. 1-59}$$

L'erreur introduite par la pénalisation peut être éliminée à l'aide d'un schéma itératif en définissant la pression ainsi :

$$P^{n+1} = P^n + \frac{1}{\kappa} S^{-1} C U^n \quad \text{Eq. 1-60}$$

Ce qui permet de déduire :

$$A U_{\kappa}^{n+1} + B(U_{\kappa}^{n+1}) U_{\kappa}^{n+1} + C^T P^n + \frac{1}{\kappa} C^T S^{-1} C U_{\kappa}^{n+1} = F \quad \text{Eq. 1-61}$$

#### 1.2.3.1.2 Cas des fluides non newtoniens

Pour les cas des fluides non newtoniens il a été employé la méthode du Lagrangien augmenté (*ALM*) couplée à une méthode par pénalité. Ceci permet de traiter les irrégularités introduites par les modèles rhéologiques séparément du champ de vitesse dans l'itération.

##### ✓ *Forme variationnelle du problème*

Comme dans le cas newtonien, la première étape revient formuler le problème 1-19 sous sa forme variationnelle :

$$\begin{cases} (U \cdot \nabla)U + \nabla \cdot \tau = \rho F \\ \nabla \cdot U = 0 \\ \tau = -2\mu \left( \left| \dot{\gamma} \right| \right) \dot{\gamma}(U) \end{cases} \quad \text{Eq. 1-62}$$

Résoudre ce problème consiste à considérer le problème sous la forme suivante :

$$\mathfrak{S}(U, P) = \int_{\Omega} \phi \left| \dot{\gamma} \right|^2 d\Omega - \int_{\Omega} F \cdot U d\Omega - \int_{\Omega} U \cdot \nabla P d\Omega \quad \text{Eq. 1-63}$$

où  $\phi \left( \left| \dot{\gamma} \right|^2 \right)$  est dépendant de la viscosité  $\mu \left( \left| \dot{\gamma} \right| \right)$ .

La résolution du problème à l'aide d'une méthode par éléments finis conduit à résoudre un système non linéaire. Pour cela, il faut employer une méthode itérative. La résolution de ce type de système se fait en deux étapes : factorisation de la matrice, très coûteuse en temps, et calcul des paramètres. L'ALM est une méthode permettant de découpler le calcul de cette non-linéarité du calcul du champ de pression et de vitesse. Pour cela, il faut introduire une variable artificielle  $\vartheta$  liée à la contrainte  $\dot{\gamma}$ . La forme faible du problème devient alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\vartheta, U, P, \xi) = & \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \phi \vartheta d\Omega + \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} P \nabla \cdot U d\Omega - \int_{\Omega} F \cdot U d\Omega \\ & + \int_{\Omega} a(x) \left( \xi - \dot{\gamma}(U) \right) d\Omega + \frac{r}{2} \int_{\Omega} a(x) \left( \xi - \dot{\gamma}(U) \right)^2 d\Omega \end{aligned} \quad \text{Eq. 1-64}$$

avec  $r$  est le paramètre de pénalité,  $a(x)$  un coefficient relié à la viscosité et  $\xi$  un multiplicateur lagrangien.

#### ✓ Modèles rhéologiques des fluides non newtoniens

Tanguy *et al.* ont considéré deux types de description pour des fluides non newtoniens.

Le premier est le modèle de *Carreau-A* défini par :

$$\tau^D = -\mu_0 \left[ 1 + \left| t_c \dot{\gamma}(\mathbf{u}) \right|^2 \right]^{-s} \dot{\gamma}(\mathbf{u}) \quad \text{Eq. 1-65}$$

avec  $\mu_0$  la viscosité dynamique à cisaillement nul,  $t_c$  le temps caractéristique et  $s$  un paramètre à déterminer.

La fonction  $\Phi(\vartheta)$  devient alors :

$$\Phi(\vartheta) = \frac{\mu_0}{2(1-s)t_c^2} \left[ \left( 1 + t_c^2 |\vartheta|^2 \right)^{1-s} - 1 \right] \quad \text{Eq. 1-66}$$

Et l'équation 1-66 s'écrit :

$$\left( \frac{\mu_0}{\left[ 1 + t_c^2 |\vartheta|^2 \right]^s} + ra(x) \right) \vartheta = a(x) \left[ r \dot{\gamma}(\mathbf{u}) - \xi \right] \quad \text{Eq. 1-67}$$

Le deuxième cas est celui d'un modèle de second ordre défini par :

$$\tau^D = -2\mu_0 \dot{\gamma} - 2\Pi_1 \left( \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} \right) = \left( -2\mu_0 \delta - 2\Pi_1 \dot{\gamma} \right) \cdot \dot{\gamma} \quad \text{Eq. 1-68}$$

avec  $\Pi_1$  le coefficient de contraintes normales.

L'équation 1-72 devient alors :

$$2\mu_0 \vartheta + 2\Pi_1 \vartheta \cdot \vartheta + ra(x) \vartheta = a(x) \left( r \dot{\gamma}(\mathbf{u}) - \xi \right) \quad \text{Eq. 1-69}$$

### ✓ Discrétisation

Il faut maintenant procéder à la discrétisation des équations 1-63 à 1-64. La procédure est assez proche de celle employée dans le cas newtonien. Les approximations de  $\mathbf{u}$  et  $p$  se font employant les éléments  $Q_{93}$  et  $T_{73}$ . Il faut également discrétiser de  $\xi$  et  $\vartheta$ . Les composantes  $\vartheta$  sont équivalentes à celle de  $\dot{\gamma}(\mathbf{u})$ , donc il a été choisi pour chaque élément d'approximer  $\vartheta$  par un polynôme biquadratique sur les éléments quadrilatéraux et par un polynôme quadratique sur les tétraèdres.

La procédure d'itération est la suivante :

1.  $\xi^0$ ,  $p^0$  et  $\mathbf{u}^0$  sont connus
2. A partir de la  $i^{\text{ème}}$  itération,  $\vartheta^i$  calculé à partir de  $\xi^{i-1}$ ,  $\mathbf{u}^i$  et  $p^i$

3. Mise à jour de  $\xi$  et calcul de  $\xi^{i+1} = \xi^i + r \left( \vartheta^i - \dot{\gamma}^{i-1} (\mathbf{u}^{i-1}) \right)$
4. Résolution du problème de Stokes en  $\mathbf{u}^i$
5. Test de convergence  $\max \left| \frac{\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}}{\mathbf{u}^{i-1}} \right| < 10^{-2}$

### 1.2.3.2 Application au trempage

Les études menés par Tanguy et al. se sont concentrées sur la description de la forme du ménisque. Pour cela, à partir de l'estimation initiale de la position de la surface libre, l'ensemble des conditions initiales permettent de déterminer le flux et ainsi de réactualiser sa position. La position de la surface libre initiale est déterminée dans les cas newtoniens à partir des modèles de Groenveld et Van Dortmond [Groenveld70] et de Lee et Tallmadge [Lee73] et dans les cas non newtoniens à partir des essais expérimentaux.

Les conditions aux limites sont celles données équation 1-12 car elles présentent l'avantage d'être incluses dans la formulation variationnelle. La position de la surface libre est actualisée à chaque incrément et son déplacement est gouverné par l'équation suivante :

$$x^{k+1} = x^k + \chi(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad \text{Eq. 1-70}$$

où  $\chi$  est le pas de temps. Seuls les sommets des éléments sont déplacés à partir de l'équation 1-70 et leurs centres de gravité sont interpolés à l'aide d'une approximation de type spline cubique. La description de cette méthode est donnée dans [Tanguy82]. Cet ajustement n'est employé que sur la partie incurvée du ménisque alors que l'épaisseur constante est fixée et imposée ainsi que la hauteur du bain.

Les prédictions numériques à l'aide de cette méthode donnent de très bons résultats lorsqu'ils sont comparés à des cas de trempages expérimentaux dans les cas newtoniens.

Pour les cas des fluides non newtoniens, Tanguy et al. ont mis en évidence l'importance de la prise en compte du couplage rhéofluidité – élasticité qui intervient de manière importante dans la réduction d'entraînement qu'ils ont observé expérimentalement dans la zone du ménisque dynamique. La loi rhéologique de Carreau-A ne permet pas de décrire ce couplage d'où l'apparition de différences entre l'expérimentation et les prédictions numériques. Cette étude a mis en évidence l'importance de la bonne mesure des propriétés rhéologiques des fluides de trempage et de l'utilisation de modèles adéquats pour sa description.

Le modèle rhéologique employé pour la description des liquides de second ordre montre de bonnes corrélations avec l'expérimentation.

La méthode numérique exposée ci-dessus reste limitée aux cas bidimensionnels avec des géométries de supports semi infinis. Cette méthode est donc une bonne approximation pour des cas à géométrie simple semi infinie type cylindre et plaque. Un grand effort a été réalisé sur la description de la rhéologie des fluides ce qui permet de bonnes corrélations expérimentation / numériques. Cependant, ce modèle n'est pas directement applicable au monde industriel où les formes des moules peuvent être complexes et donc nécessite une modélisation 3D.

### 1.3 Cas du trempage à chaud

Le cas du trempage à chaud avec solidification ou gélification ne correspond pas aux cas étudiés dans le cadre de cette thèse ; cependant il est intéressant de voir que quelques études ont été menées à ce sujet. En effet le trempage à chaud est un procédé employé couramment dans le monde industriel. Sa principale difficulté est la compréhension des mécanismes de transfert de chaleur et de masse impliqués dans le dépôt et/ou la solidification d'une couche. La solidification qui s'opère peut être assimilée à un problème de Stefan, c'est-à-dire que l'existence de gradients de températures dans différentes phases provoque des transferts thermiques par convection et par conduction.

#### 1.3.1 Les problèmes de transfert thermique

Les transferts thermiques (convection naturelle et forcée) lors d'un changement d'état liquide-solide au cours d'un trempage à chaud jouent un rôle capital. Dans ce cas, le problème se ramène à étudier l'évolution d'un front de solidification dans un liquide. Le premier à l'avoir décrit est Stefan en 1891.

##### 1.3.1.1 *La démarche de Stefan*

Lors d'un changement d'état liquide-solide, il y a libération d'énergie dans la zone de changement d'état, ce qui conduit à une discontinuité des gradients thermiques qui s'établissent dans chaque phase de part et d'autre de l'interface. Cette énergie est transformée sous forme d'enthalpie massique à la surface séparant les deux phases, qui constitue l'interface dont la position est recherchée en fonction du temps.

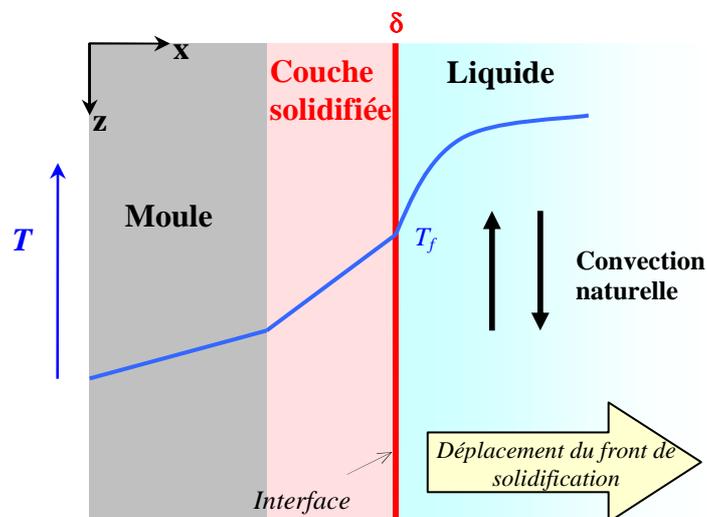


Figure 1-7 : Représentation schématique des processus de solidification

La *Figure 1-7* décrit le processus de solidification : l'énergie nécessaire à la progression du front de solidification est extraite à travers la couche solidifiée qui s'épaissit à partir de la surface d'échange (interface). Le liquide refroidit graduellement jusqu'à sa température de solidification. Les transferts thermiques (conduction et convection) sont dus à la présence des gradients des températures entre les différentes phases. Ces problèmes sont peut être traités en conduction pure en première approximation; en effet même si le rôle de la convection naturelle (formation dendritique dans les fluides peu visqueux par exemple) y est importante, elle apporte une difficulté supplémentaire à la résolution analytique.

La mise en équations du problème de transfert de chaleur en présence d'un front de solidification s'appuie d'une part sur l'équation de la chaleur dans les phases solide (couche solidifiée) et liquide (*Eq. 1-71-a*) et d'autre part sur la discontinuité des flux à l'interface solide-liquide (*Eq. 1-71b*). Pour pouvoir écrire ces hypothèses, le milieu est considéré comme semi-infini en  $x$  et  $z$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c_p^i(T) \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_i^c(T) x^m \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) \quad \text{avec } i = l \text{ ou } s \quad (a) \\ \left( \lambda_s^c \frac{\partial T_s}{\partial x} - \lambda_l^c \frac{\partial T_l}{\partial x} \right)_{x=\delta_f(t)} = \rho_s H_f \frac{d\delta_f}{dt} \quad (b) \end{array} \right. \quad \text{Eq. 1-71}$$

avec  $\delta_f$  l'abscisse du front de fusion,  $T$  la température,  $\lambda^c$  la conductivité thermique,  $c_p$  la capacité thermique massique,  $\rho$  la masse volumique,  $H_f$  l'enthalpie massique de fusion et  $m = 0, 1$  ou  $2$  suivant la géométrie, plane, cylindrique ou sphérique respectivement. Les indices  $l$  et  $s$  sont pour liquide et solide respectivement.

A cela peuvent être ajoutées des conditions aux limites telles que des températures imposées par le liquide et le moule et des flux spécifiés entre les différentes phases (convection et conduction).

Afin de caractériser les problèmes de changement de phase, il est possible d'introduire un paramètre appelé nombre de Stefan *Ste* et qui est défini comme le rapport des chaleurs sensibles de chaque phase (i.e. la chaleur émise ou absorbée par un milieu) sur leurs chaleurs latentes.

$$Ste = c_p^l \frac{\Delta T}{H} \quad \text{Eq. 1-72}$$

où  $c_p^l$  est la capacité thermique massique du liquide,  $H$  la chaleur latente de fusion et  $\Delta T$  est la différence entre la température de fusion du liquide et la température de la couche solidifiée en croissance.

### 1.3.1.2 La démarche de Stefan appliquée au trempage

L'étude de la solidification qui intervient au cours du trempage à chaud peut être assimilée à un problème de Stefan. En effet, lors de ce procédé, le moule est plongé dans un bain à une vitesse  $U_0$  et le liquide rentre en contact avec les parois du moule qui sont à une température inférieure à celle de fusion du liquide. Ce dernier refroidit progressivement pour former ainsi une couche solidifiée qui croît ensuite radialement autour du moule (Figure 1-8). L'existence des différentes températures des différentes phases provoque des transferts thermiques par convection et par conduction.

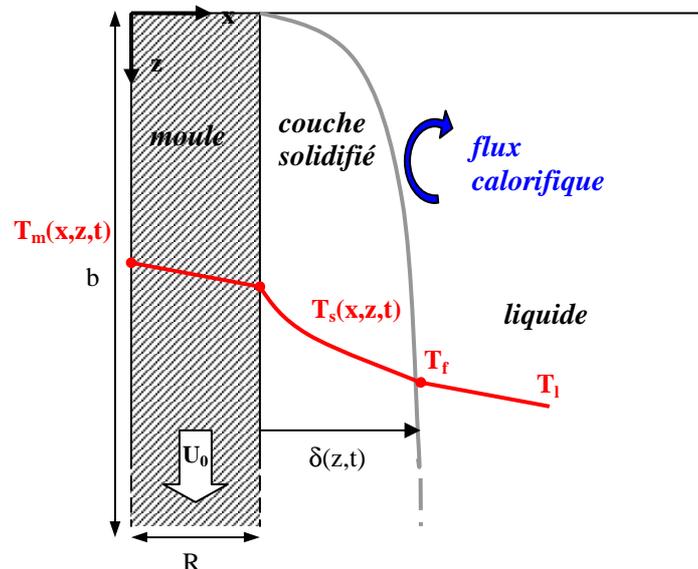


Figure 1-8 : Schéma de la solidification du liquide au contact du moule lors du trempage

Pour pouvoir appliquer la démarche de Stefan au trempage, il est nécessaire de faire des hypothèses qui sont les suivantes [Mahmoud94] :

- 1) Prise en compte du transfert par convection forcée;
- 2) Equilibre thermique à l'interface ;
- 3) Constance des propriétés thermophysiques et solidification isochore ;
- 4) Solidification à  $T_f$ ;
- 5) Conductions axiale et radiale présentes dans le moule ;
- 6) Température du moule non uniforme.

D'autre part, pour simplifier les calculs, il est supposé que  $\delta_f \ll b$  où  $b$  est la hauteur du moule. Le problème est, par conséquent, quasi-infini suivant  $x$ .

Ces hypothèses faites, il est alors possible d'appliquer la démarche de Stefan au trempage en écrivant les équations de chaleur et celles de continuité des flux ainsi que les conditions aux limites dans chaque phase.

1/ Dans la phase solidifiée, pour  $0 \leq z \leq U_0 t$ ,  $t > 0$  et  $R \leq x \leq R + \delta_f(z, t)$ , l'équation de la chaleur est la suivante :

$$\rho_s \cdot c_p^s \cdot \frac{\partial}{\partial t} T_s(x, z, t) + \rho_s \cdot c_p^s \cdot U_0 \frac{\partial}{\partial z} T_s(x, z, t) = \lambda_s^c \cdot \nabla^2 T_s(x, z, t) \quad \text{Eq. 1-73}$$

où  $\lambda_s^c$  est la conductivité thermique de la couche solidifiée,  $T_s$  la température de la couche solidifiée et  $\rho_s$  la masse volumique de la couche solidifiée.

Les conditions aux limites sont :

- A l'instant initial :  $T_s(x, z, t = 0) = T_l$  ;
- Egalité entre la température de fusion et la température de la couche solidifiée au niveau de l'interface liquide-solide :  $T_s(\delta_f, z, t) = T_f$  ;
- Flux axial nul (selon  $z$ ) aux extrémités du moule :  $\frac{\partial}{\partial z} T_s(x, b, t) = 0$ .

où  $T_f$  la température de fusion du liquide.

2/ Dans le moule, pour  $0 \leq z \leq U_0 t$ ,  $t > 0$  et  $0 \leq x \leq R$ , l'équation de chaleur est la suivante :

$$\rho_m \cdot c_p^m \cdot \frac{\partial}{\partial t} T_m(x, z, t) + \rho_m \cdot c_p^m \cdot U_0 \frac{\partial}{\partial x} T_m(x, z, t) = \lambda_m^c \cdot \nabla^2 T_m(x, z, t) \quad \text{Eq. 1-74}$$

où  $\rho_m$  la masse volumique du moule.

Les conditions aux limites sont :

- A l'instant initial :  $T_m(x, z, 0) = T_m^{t=0}$  ;
- Egalité des températures à la paroi du moule :  $T_s(R, z, t) = T_m(R, z, t)$  ;

- Egalité des flux (selon  $\mathbf{x}$ ) de part et d'autre de la paroi du moule :  

$$\lambda_s^c \frac{\partial}{\partial x} T_s(R, z, t) = \lambda_m^c \frac{\partial}{\partial x} T_m(R, z, t) ;$$
- Sur l'axe de symétrie du moule, le flux est nul (raison de symétrie) :  

$$\frac{\partial}{\partial x} T_m(0, z, t) = 0 .$$

où  $\lambda_m^c$  est la conductivité thermique du moule et  $T_m$  la température du moule.

3/ A l'interface entre la couche solidifiée et le liquide, l'équation de continuité des fluides est la suivante :

$$\rho_s \cdot [H_f + c_p^s \cdot (T_l - T_f)] \frac{d\delta_f(z, t)}{dt} = \lambda_s^c \nabla T_s(\delta_f, z, t) - h_t (T_l - T_f) \quad \text{Eq. 1-75}$$

où  $h_t$  est le coefficient de transfert thermique entre le liquide et la couche solidifiée et  $H_f$  est l'enthalpie massique de fusion. La condition aux limites est qu'à l'instant initial :  
 $\delta_f(z, t = 0) = 0 .$

### 1.3.2 Solutions analytiques au problème de croissance d'un front de matière

#### 1.3.2.1 *Croissance d'un front de solidification sur une plaque isotherme*

La première analyse traitant du problème de la progression d'un front de solidification, réalisée par Kuiken [Kuiken76], s'est faite sur une plaque dans un bain liquide parfaitement isolé (i.e. pas d'échange avec le milieu extérieur). La plaque est maintenue à une température constante et inférieure à celle de solidification du liquide. Cette analyse vise à déterminer l'épaisseur de la couche solidifiée.

La méthode choisie pour résoudre ce problème de croissance d'un front de solidification est basée sur des similitudes en introduisant la variable  $\eta = \frac{x}{(U_0/4Vz)^{1/2}}$  pour obtenir ainsi un système d'équations sans dimension. La solution apportée montre que l'épaisseur de la couche  $\delta$  augmente à mesure que le moule s'éloigne de l'entrée du bain et qu'elle peut se calculer à l'aide de l'expression :

$$\delta_f = \eta_s \left( \frac{4Vz}{U_0} \right)^{1/2} \quad \text{Eq. 1-76}$$

où  $\eta_s$  est un paramètre sans dimension correspondant à  $\eta$  en  $x = \delta_f$ , et  $V$  la vitesse de croissance de la couche. La difficulté principale est la détermination du coefficient de proportionnalité  $\eta_s$ . En général, cette dépendance ne peut pas être donnée explicitement et il est nécessaire de déterminer le nombre de Prandtl  $Pr$  ( $Pr = \eta/\alpha_l$ , où  $\eta$  est la viscosité cinématique et  $\alpha_l$  la diffusivité thermique du liquide) auquel est relié  $\eta_s$ .

Ce modèle est très simplifié : il ne prend en compte ni les mécanismes de transport, ni la géométrie du moule et surtout la température de ce dernier est supposée constante.

Des améliorations de ce modèle ont été apportées par Seeniraj et Bose [Seeniraj81] en prenant en compte les mécanismes de transport et la géométrie du moule (par introduction du nombre de Stefan). Les expressions analytiques de l'épaisseur de la couche solidifiée ont été obtenues en fonction de la distance axiale  $x$  avec comme paramètre le nombre de Stefan  $Ste$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_f = \beta / \sqrt{Pr} \left( \frac{4Vx}{U_0} \right)^{1/2} \\ \sqrt{\pi} \beta \cdot e^{\beta^2} \cdot erf(\beta) = Ste \\ \beta = \eta_s \sqrt{Pr} \end{array} \right. \quad \text{Eq. 1-77}$$

où  $\beta$  est un paramètre sans dimension à calculer à partir du nombre de Stefan.

A partir des équations 1-77, il est observé que l'épaisseur de la couche solidifiée augmente monotonement suivant  $x$ . Or, les expériences de revêtement d'un moule en cuivre cylindrique par du cuivre pur menées par Carreker [Carreker63] ont mis en évidence un phénomène de croissance et décroissance de la couche solidifiée, ce qui n'est pas constaté à partir de ce modèle. En effet le moule s'échauffe et on peut ainsi avoir refusion de la couche solidifiée ce que ne permet les modèles de Kuiken et de Seeniraj et Bose qui ont été développés en supposant que les moules ont une température constante au cours du temps, ce qui se révèle être inexact dans la plupart des cas pratiques car il ne s'agit pas de milieux semi-infinis.

### 1.3.2.2 Croissance d'un front de solidification sur une plaque non isotherme

Le cas où le moule n'est pas isotherme a également été abordé dans la littérature [Cheung85]. L'équation 1-78 formule ce problème de croissance du front de solidification, supposé stationnaire ( $U_0 = cste$  et  $T_l = cste$ ), en prenant en compte les transferts thermiques par convection à l'interface liquide/couche solidifiée et la variation de température du moule.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_s c_p^s U_0 \frac{\partial T_s}{\partial z} = \lambda_s^c \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2}, \quad z \geq 0, \quad R \leq x \leq R + \delta_f(z) \\ \rho_m c_p^m \cdot U_0 \cdot R \cdot \frac{dT_m}{dz} = \lambda_s^c \left( \frac{\partial T_s}{\partial x} \right)_{x=0} \\ z = 0: \quad \delta_f = 0, \quad T_m = T_m^{t=0} \\ x = R: \quad T_s = T_m(z) \\ x = R + \delta_f: \quad T_s = T_f \\ \rho_s U_0 \kappa_f \frac{d\delta_f}{dz} = \lambda_s^c \frac{\partial T_s}{\partial x} - h_t (T_l - T_f) \end{array} \right. \quad \text{Eq. 1-78}$$

où  $\kappa_f$  est la chaleur de fusion et  $h_t$  le coefficient de transfert thermique par convection.

Le coefficient de transfert de chaleur convective locale  $h_t$  est déterminé par l'expression suivante :

$$\frac{h_t \cdot z}{\lambda_t^c} = 0,53 \cdot \text{Pr}^{1/2} \cdot \text{Re}_z^{1/2}, \quad \text{Pr} \gg 1 \quad \text{Eq. 1-79}$$

où  $\text{Pr} = \nu / \alpha_l$  est le nombre de Prandtl et  $\text{Re} = Ux / \nu$  le nombre de Reynolds local.

La résolution du système 1-78 se fait en exprimant les équations en fonction de trois paramètres indépendants contrôlant le point où l'on passe de la croissance de la couche solidifiée à la décroissance de celle-ci et la variation axiale (selon  $x$ ) de l'épaisseur de la couche solidifiée. Ces trois paramètres sont :

1. Le coefficient de transfert thermique convectif  $A = \left( \frac{\alpha_s}{\alpha_l} \right)^{1/2} \left( \frac{\lambda_t^c}{\lambda_s^c} \right) \left( \frac{T_l - T_f}{T_f - T_m^{t=0}} \right)$ ,
2. Le rapport des températures de la couche solidifiée et de la plaque  $r = \left( \frac{\rho_s c_p^s}{\rho_m c_p^m} \right) \left( \frac{U_0 R}{\alpha_s} \right)^{-1}$ ,
3. Le nombre de Stefan  $\text{Ste} = \frac{c_p^s (T_f - T_m^{t=0})}{H_f}$ .

Ce modèle est le plus complet car en prenant en compte les variations de température dans la plaque, il permet de rendre compte des phénomènes de croissance et décroissance observés expérimentalement.

### 1.3.3 Modélisation du trempage à chaud

La principale difficulté de la simulation numérique dans un problème de changement de phase est qu'il s'agit d'un phénomène non linéaire qui varie dans le temps et l'espace. Dans le cas d'une solidification, il est nécessaire de faire un suivi de la frontière de la phase en croissance. Le trempage peut-être modélisé via deux approches différentes qui vont être présentées dans cette section ainsi que leurs avantages et leurs inconvénients.

La première approche qui est la plus traditionnellement employée, est le *modèle à suivi de l'interface* ; elle utilise des équations de conservation couplées à un bilan énergétique à l'interface liquide-solide. La position de cette dernière n'est cependant pas connue et est à déterminer au cours de la résolution numérique. La version numérique de cette approche requiert l'approximation d'un état quasi-stationnaire du mouvement de l'interface. Dans la seconde approche, appelée *méthode enthalpique*, qui peut être apparentée à une méthode continue, les équations de conservation sont développées sur un ensemble (le domaine de calcul) et il n'est plus tenu compte explicitement de l'interface liquide-solide dont la position devient un résultat implicite du calcul. Pour cela, les données traitées dans les équations correspondent à des moyennes volumiques représentatives des deux phases. La variable d'étude devient l'enthalpie qui est reliée à la fraction volumique de matière liquide et non plus à la température.

#### 1.3.3.1 Modèle à suivi de l'interface

Les modèles dits à suivi de l'interface [Cheung87] sont ceux qui traitent des problèmes à deux phases immiscibles: les équations de transfert sont résolues séparément dans le liquide et dans le solide, et la position de l'interface est obtenue par la résolution d'une équation de bilan à l'interface. Cette méthode est principalement employée dans le cas de la solidification ou de la fusion d'un matériau pur, pour lequel le changement d'état se fait à une température bien déterminée.

L'objectif principal de cette méthode est la détermination de la position de l'interface ce qui se fait en même temps que la résolution des équations du problème. Il est possible de distinguer plusieurs grandes tendances pour la réalisation de ce calcul selon le maillage appliqué.

##### 1.3.3.1.1 Maillage fixe sur l'ensemble du domaine liquide-solide

Cette méthode, qui est la plus ancienne, considère un maillage fixe sur l'ensemble du domaine liquide-solide. Deux possibilités sont à envisager. La première considère que l'interface ne passe par aucun nœud ; il est alors nécessaire d'interpoler les champs de

températures aux nœuds du maillage par différentes approximations. L'une des difficultés de cette approche est le calcul des gradients dirigés selon la normale à l'interface, lorsque l'on passe à des cas multidimensionnels [Voller97].

La deuxième possibilité est que l'interface se situe toujours sur un nœud du maillage mais cette méthode nécessite l'adaptation du pas de temps ou du maillage.

### 1.3.3.1.2 Immobilisation de l'interface par transformation de coordonnées

Cette deuxième méthode numérique, très fréquemment utilisée et qui recouvre un champ d'application plus important avec des cas complexes, permet la prise en compte de la variation de la température du moule dans les directions axiale et radiale et de la convection entre le liquide et le solide. Elle consiste à immobiliser l'interface par une transformation de coordonnées. Grâce à ce changement, proposé initialement par Landau [Landau50], à chacune des deux phases correspond un domaine de calcul fixe.

Le problème consiste à résoudre l'équation de la chaleur dans chacune des phases (liquide et couche solidifiée) avec des conditions de continuité à l'interface mobile. L'idée de cette méthode est de transformer les deux domaines évolutifs en domaines fixes et cela grâce à des changements de coordonnées [Rappaz98] :

$$\text{pour } x \in [0, \delta_f(t)] \rightarrow \xi \in [0, 1] \text{ avec } \xi = \frac{x}{\delta_f(t)} \quad \text{Eq. 1-80}$$

$$\text{et pour } x \in [\delta_f(t), L_b] \rightarrow \Delta \in [0, 1] \text{ avec } \Delta = \frac{x - \delta_f(t)}{L_b - \delta_f(t)} \quad \text{Eq. 1-81}$$

Le champ de température dans chacune des phases est alors  $T_s(\xi(x,t), t)$  et  $T_l(\Delta(x,t), t)$ . Les équations de la chaleur exprimées après dérivation deviennent :

$$\frac{\alpha_s}{\delta_f^2} \frac{\partial^2 T_s}{\partial \xi^2} + \frac{V \xi}{\delta} \frac{\partial T_s}{\partial \xi} - \frac{\partial T_s}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_l}{(L_b - \delta_f)^2} \frac{\partial^2 T_l}{\partial \Delta^2} + \frac{V \Delta}{L_b - \delta_f} \frac{\partial T_l}{\partial \Delta} - \frac{\partial T_l}{\partial t} = 0 \quad \text{Eq. 1-82}$$

Ces équations mettent en évidence des termes de transport de type «  $v \cdot \text{grad}(T)$  » comme si le matériau se déplaçait localement à vitesse  $-v\xi$  ou  $-v\Delta$ . De telles équations peuvent être résolues dans chacun des domaines par exemple avec la méthode des différences finies et des nœuds régulièrement espacés en  $\xi$  ou  $\Delta$ .

Cette méthode a été employée par Cheung et Cha [Cheung87] pour étudier le cas de la solidification d'un polymère autour d'un moule cylindrique. Elle montre de bonne corrélation avec l'expérimentation quand l'écoulement du liquide se fait indépendamment de la forme de la couche solidifiée. En revanche, quand la couche solidifiée augmente rapidement, les équations gouvernant les échanges au niveau de l'interface doivent être résolues simultanément avec les équations de conduction thermique pour déterminer le flux de chaleur convective au front de solidification, ce que ne permet pas cette méthode. L'autre inconvénient est que l'interface doit avoir une morphologie relativement simple. Pour contrecarrer ce problème, il est possible d'utiliser la méthode de suivi de front en éléments finis avec maillage évolutif.

### 1.3.3.2 *Modèle enthalpique*

La formulation enthalpique est une des méthodes les plus employées pour résoudre des problèmes de Stefan. Il s'agit d'une technique simple et flexible pour résoudre des problèmes de changement de phase se produisant pendant la fusion ou la solidification. Au lieu de travailler en terme de température, l'emploi d'une formulation enthalpique permet de s'affranchir du problème lié au suivi de l'interface liquide-solide et ainsi d'employer des techniques numériques standards.

#### 1.3.3.2.1 Formulation du modèle enthalpique

Le principal avantage de cette technique est qu'elle n'étudie pas explicitement le mouvement de l'interface : le système est étudié sur un seul domaine, représentatif des deux phases en présence, dont les propriétés thermodynamiques sont fortement dépendantes de la température. Le problème est alors ramené à la résolution d'une seule équation de la chaleur, non linéaire, dont le traitement peut être abordé par des schémas classiques de différences finies ou d'éléments finis.

La position de l'interface n'est plus l'inconnue principale du problème et est déterminée implicitement à l'aide de l'enthalpie, notée  $H$ , et plus précisément à partir de son saut au passage de l'interface (correspondant à la chaleur latente) [Caldwell00].

$$H_f = \int_{T_s}^T \rho c_p dT + \rho H_f(T) \quad \text{Eq. 1-83}$$

avec  $f_l$  la fraction volumique du liquide telle que  $f_l = \begin{cases} 1 & \text{si } T \geq T_f \\ 0 & \text{si } T < T_f \end{cases}$

et  $H$  la chaleur latente.

Les échanges de chaleur causant la variation d'enthalpie conduisent à une variation de température selon une loi  $H_f = f(T)$  spécifique à chaque matériau.

La résolution à partir de cette méthode consiste à reformuler le problème de Stefan de tel sorte qu'il puisse être défini sur le domaine entier étudié, c'est-à-dire que les nouvelles équations soient valables dans les deux phases : la couche solidifiée et le liquide. Les inconnues du problème deviennent alors les températures (une seule température est définie sur l'ensemble des phases). La solution s'obtient en résolvant l'équation 1-83, équation valable sur l'ensemble des deux phases.

$$\rho \frac{\partial H_f}{\partial t} = \text{div}(\lambda^c(T) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T)) \quad \text{Eq. 1-84}$$

où les variables sont définies de la façon suivante :

$$c_p^{eq} = c_p^l \cdot f_l + c_p^s \cdot (1 - f_l) \quad \text{et} \quad \lambda_{eq}^c = \lambda_l^c \cdot f_l + \lambda_s^c \cdot (1 - f_l) \quad \text{Eq. 1-85}$$

avec  $f_l$  la fraction volumique du liquide,  $c_p^{eq}$ ,  $c_p^l$  et  $c_p^s$  les capacités thermiques massiques équivalente, du liquide et du solide respectivement,  $\lambda_p^{eq}$ ,  $\lambda_p^l$  et  $\lambda_p^s$  les conductivités thermiques équivalente, du liquide et du solide respectivement.

La position de l'interface n'est pas l'inconnue principale du problème : sa position est trouvée, a posteriori, après détermination de la température ou de l'enthalpie soit en trouvant l'isotherme correspondant au changement de phase, soit en déterminant la fraction volumique locale du liquide.

Cette méthode est particulièrement bien adaptée aux problèmes liés à des matériaux présentant un changement de phase non purs, i.e. des matériaux manifestant un changement de phase sur une plage de températures. La méthode de résolution enthalpique peut être approchée de trois manières différentes :

✓ *Définition d'un terme source* : l'enthalpie est remplacée par son expression fonction de la température :

$$\rho c_p^{eq} \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda_{eq}^c(T) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T)) - S(T) \quad \text{Eq. 1-86}$$

où  $S(T) = H_f \cdot \frac{\partial f_l}{\partial t}$  est le terme source qui n'intervient que dans la zone de transition liquide-solide.

Or  $f_l = f_l(T)$ , il est alors obtenu :  $S(T) = c_p^{source}(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$  soit  $c_p^{source}(T) = H_f \cdot \frac{\partial f_l}{\partial T}$ .

Le bilan  $c_p(T) = c_p^{eq}(T) + c_p^{source}(T)$  peut également s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{A l'interface : } c_p(T) = c_p^{eq} + H_f \cdot \frac{\partial f_l}{\partial T} \quad \text{Eq. 1-87} \\ \text{Sinon } c_p(T) = c_p^{eq} \quad \text{Eq. 1-88} \end{array} \right.$$

✓ *Définition d'une capacité thermique massique apparente* : la variation de l'enthalpie avec la température est représentée comme une variation finie de la capacité thermique massique. Le changement de phase se déroule entre les températures  $T_1$  (début de solidification) et  $T_2$  (fin de solidification). Il est défini :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{A l'interface : } c_p(T) = c_p^{eq} + \frac{H_f}{T_1 - T_2} \text{ avec } T_1 < T < T_2 \quad \text{Eq. 1-89} \\ \text{Sinon } c_p(T) = c_p^{eq} \quad \text{Eq. 1-90} \end{array} \right.$$

✓ *Définition d'un intervalle de température  $2\delta T$*  sur lequel se produit le changement d'état :

$$\rho \langle c_p \rangle(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda^c(T) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T)) \quad \text{Eq. 1-91}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \langle c_p \rangle = c_p^s & \text{pour } T < T_f - \delta T \\ \langle c_p \rangle = c_p^l & \text{pour } T > T_f + \delta T \\ \langle c_p \rangle = \frac{H_f}{2\delta T} + c_p^{eq} & \text{pour } T_f - \delta T < T < T_f + \delta T \end{cases} \quad \text{Eq. 1-92}$$

### 1.3.3.2.2 Application du modèle enthalpique au trempage

Cette méthode a permis la prise en considération des mécanismes de transport, tels que la diffusion axiale de chaleur, la poussée d'Archimède et le cisaillement induit par le mouvement du fondu, qui avaient été négligés dans les modèles les plus simples et qui sont importants dans le cadre du trempage.

#### ✓ *Trempage à chaud*

Pour modéliser numériquement le trempage, il est considéré que le front de solidification progresse par couches. Pour obtenir de bons résultats, l'utilisation d'un maillage non-uniforme est nécessaire : il doit être raffiné aux endroits où ils importants d'être précis comme par exemple près de l'interface de solidification pour réduire les effets d'irrégularités causés par les variations continues de la fraction volumique du solide [Zhang93].

Les résultats obtenus à l'aide de la méthode enthalpique montre de bonnes corrélations avec l'expérimentale. Les inconvénients de cette méthode sont que la conduction thermique axiale est négligée dans le solide après retrait du bain, paramètre important car définissant la vitesse de solidification pendant l'étape finale de contact entre le solide et le fondu. D'autre part, les effets de capillarité et de thermocapillarité n'ont été également pas pris en compte (surface libre considérée comme plane et adiabatique).

#### ✓ *Trempage couplé à la gélification*

Une première approche de modélisation numérique du trempage couplé à la gélification a été réalisée par [Bikard07]. L'objectif était de modéliser le revêtement par trempage d'une solution de polymère gélifiante autour d'un moule cylindrique en inox dans l'optique de fabriquer des capsules dures. Contrairement aux cas précédents, un autre facteur entre en compte : l'étape de solidification passe par une étape intermédiaire où le polymère se trouve dans un état pâteux.

Le principe de la résolution numérique employée dans cette étude est de déterminer, à partir de l'évolution de la fonction caractéristique  $f_i$ , les champs de phase correspondant aux

zones où le polymère est solide, liquide ou pâteux. A partir de cette technique, l'interface liquide-solide est localisée.

Les hypothèses de modélisation sont:

- Liquide newtonien ;
- Etat stationnaire :  $U_0 = cste$ ,  $T_l = cste$  et  $T_m = cste < T_s$  ;  $\rho_{liq} = \rho_{sol}$  ;
- Gravité prise en compte ;
- Coefficients d'échange  $h$  moule-liquide et air-liquide constants ;
- Pas de convection naturelle modélisée ;
- Contact collant entre le bain et le doigt mobile.
- 

Les équations à résoudre devient :

$$\begin{cases} \rho_F \cdot c_p^F = \rho_l c_p^l f_l + \rho_s c_p^s (f - f_l) \\ \lambda_F^c = \lambda_l^c f_l + \lambda_s^c (f - f_l) \\ \mu_F^{-1} = \mu_l^{-1}(T) f_l + \mu_s^{-1}(f - f_l) \end{cases} \quad \text{Eq. 1-93}$$

La viscosité du liquide suit une loi d'Arrhénius :

$$\mu_l = \mu_0 \cdot \exp\left(\frac{E_a}{R} \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}}\right)\right) \quad \text{Eq. 1-94}$$

où  $T$  est la température,  $T_{ref}$  une température de référence,  $\mu_0$  la viscosité à la température de référence  $T_{ref}$ , et  $R$  la constante des gaz parfait.

La solidification autour du moule dans ce cas se fait par gélification : il existe donc une phase intermédiaire entre liquide et solide apparaissant au cours de la solidification. Pour prendre en compte l'existence de cet état pâteux, la fraction volumique du liquide  $f_l$  est remplacée par une fonction continue de l'enthalpie telle que :

$$f_l = \begin{cases} 0 & \text{si } H_f \leq c_p^s T_f & \text{(phase solide)} \\ (H_f - c_p^s T_f) / L_e & \text{si } c_p^s T_f \leq H_f \leq c_p^s T_f + L_e & \text{(liquide / solide)} \\ 1 & \text{si } H_f \geq c_p^s T_f + L_e & \text{(phase liquide)} \end{cases} \quad \text{Eq. 1-95}$$

où  $H_f = f_l H_l + (f - f_l)H_s$  est l'enthalpie du polymère,  $H_s$  et  $H_l$  sont respectivement les enthalpies du solide et du liquide définies telles que :

$$\begin{cases} H_s = c_p^s T \\ H_l = c_p^l T + T_f (c_p^s - c_p^l) + L_e \end{cases} \quad \text{Eq. 1-96}$$

Ce modèle est imparfait et montre de très grands écarts (entre 45 et 78 % selon les vitesses de retrait) avec l'expérimentation réalisée sur des gélules en gélatine de viscosité 0,17 Pa.s [Chaudemanche07]. En effet de lourdes hypothèses sont faites : convection et tension interfaciale négligées et température du moule constante. Cependant cette première approche montre la fiabilité d'une simulation numérique en 3D du procédé de trempage.

---

*La littérature recense un certain nombre d'articles consacrés à l'étude de la couche de matière extraite lors du trempage mais tous restent très théoriques et non applicable au monde industriel. Du fait de la complexité de ce procédé, il n'existe actuellement pas de solutions analytiques réelles permettant de déterminer a priori la valeur de l'épaisseur extraite. En effet, les phénomènes mis en jeu sont nombreux et ne sont pas simples à étudier simultanément de manière théorique. D'autres auteurs se sont également intéressés à la simulation numérique du procédé de trempage, mais leurs études se sont également portées sur des cas simplifiés avec des hypothèses très discutables telles qu'une température du moule constante au cours du temps ou encore la non prise en compte de la tension de surface.*

---

## **2. FORMULATION ET RESOLUTION DU PROBLEME THERMO-MECANIQUE**

## **2. FORMULATION ET RESOLUTION DU PROBLEME THERMO-MECANIQUE**

<b>2.1</b>	<b>Formulation du problème mécanique .....</b>	<b>68</b>
2.1.2	Formulation du problème continu .....	69
2.1.2.1	<i>Equation de conservation de la masse .....</i>	<i>69</i>
2.1.2.2	<i>Equation de conservation de la quantité de mouvement.....</i>	<i>69</i>
2.1.3	Conditions aux interfaces .....	70
2.1.3.1	<i>Conditions aux limites .....</i>	<i>70</i>
2.1.3.2	<i>Contact outil / matière.....</i>	<i>71</i>
2.1.4	Lois de comportements .....	71
2.1.5	Résolution numérique .....	72
2.1.5.1	<i>Formulation faible du problème mécanique .....</i>	<i>72</i>
2.1.5.2	<i>Discrétisation spatiale.....</i>	<i>73</i>
2.1.5.3	<i>Discrétisation temporelle .....</i>	<i>76</i>
<b>2.2</b>	<b>Implémentation de la tension de surface.....</b>	<b>77</b>
2.2.2	Définition et rôle de la tension de surface.....	77
2.2.2.1	<i>Définition de la tension de surface.....</i>	<i>77</i>
2.2.2.2	<i>Objectif de l'implémentation de la tension de surface dans le cadre du trempage .....</i>	<i>78</i>
2.2.3	Revue bibliographique .....	78
2.2.3.1	<i>Estimation de la courbure à partir de deux noeuds .....</i>	<i>79</i>
2.2.3.2	<i>Estimation de la courbure à partir de la divergence des vecteurs normaux aux noeuds .....</i>	<i>79</i>
2.2.3.3	<i>Utilisation de l'opérateur Laplace-Beltrami.....</i>	<i>81</i>
2.2.4	Stratégie d'insertion de la tension dans Forge3 .....	82
2.2.4.1	<i>Application nodale .....</i>	<i>82</i>

2.2.4.2	<i>Développement du système à résoudre</i> .....	83
2.2.5	Validation de l'implémentation.....	87
2.2.5.1	<i>Equilibre d'une goutte sans gravité</i> .....	88
2.2.5.2	<i>Equilibre d'une goutte sous gravité</i> .....	88
<b>2.3</b>	<b>Formulation du problème thermique</b> .....	<b>90</b>
2.3.2	Equation de la chaleur .....	90
2.3.3	Conditions aux limites.....	90
2.3.4	Résolution du système.....	92
2.3.4.1	<i>Discrétisation spatiale</i> .....	92
2.3.4.2	<i>Discrétisation temporelle</i> .....	93
2.3.4.3	<i>Thermique asynchrone</i> .....	94
2.3.5	Le couplage thermo-mécanique .....	95

La modélisation numérique du trempage dans le cadre de cette thèse se fait à l'aide du logiciel Forge2005® dans sa version 3D développé au Cemef; pour simplifier, nous l'appellerons Forge3. Il a été initialement développé pour simuler numériquement les problèmes de forgeage à chaud et à froid. Pour optimiser ce logiciel, de nombreux développements numériques complexes ont été réalisés comme, par exemple, la description de nombreuses lois de comportement ou encore des techniques de maillage et de remaillage complexes. Nous avons employé certaines de ces techniques pour modéliser le procédé de trempage. Nous avons en plus dû enrichir le logiciel pour prendre en compte certains aspects spécifiques du trempage comme la tension de surface.

Ce chapitre a pour but de présenter les différentes équations du problème tel que nous l'avons posé et tel qu'il sera résolu. Le problème est écrit à l'échelle macroscopique, c'est-à-dire que l'ensemble des matériaux intervenant (pièce et outillage) sont assimilés à des milieux continus et homogènes.

La première partie de ce chapitre sera dédiée à la présentation du modèle mécanique et à sa résolution. Lors de ce procédé, quatre forces déterminent l'épaisseur finale extraite : l'inertie, la gravité, la viscosité et la tension de surface. Cette dernière n'étant initialement pas prise en compte dans Forge3, nous expliquerons dans une seconde partie la méthode employée pour son implémentation dans le code source. Enfin, nous aborderons le problème lié aux aspects thermiques permettant la prise en compte des transferts de chaleur entre les différents domaines et présenterons brièvement la gestion du couplage thermo-mécanique.

## **2.1 Formulation du problème mécanique**

Le logiciel Forge3 est basé sur une formulation mixte en vitesse/pression du problème mécanique. La vitesse et la pression sont considérées comme deux variables complètement indépendantes.

Nous définirons ici le bain comme un domaine fini  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . La formulation du problème mécanique est basée sur l'écriture de deux lois de conservation de la mécanique des milieux continus : la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement. A cela viennent s'ajouter des lois supplémentaires décrivant le comportement des matériaux : les lois rhéologiques des matériaux et les lois tribologiques aux interfaces.

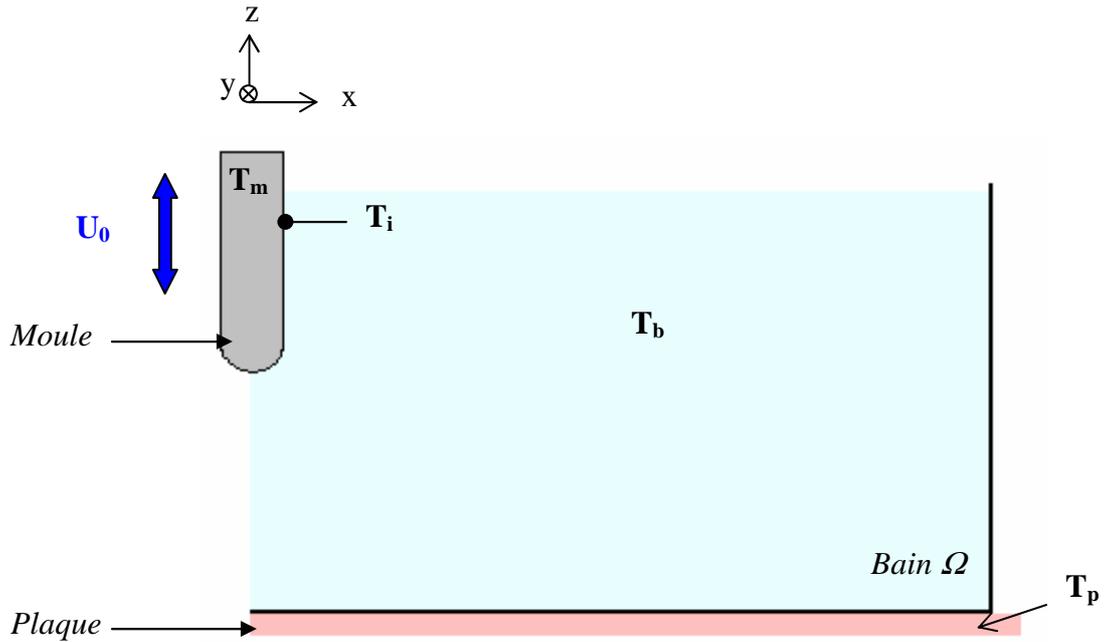


Figure 2-1 : Schéma des géométries du trempage

### 2.1.1 Formulation du problème continu

#### 2.1.1.1 Equation de conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse dit que la masse de l'objet reste constante au cours du temps ; l'équation s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0 \quad \text{Eq. 2-1}$$

où  $\rho$  est la masse volumique et  $u$  le champ de vitesse dans le domaine matériel.

En considérant le matériau comme incompressible ( $\rho = \text{constante}$ ), l'équation de conservation de la masse se simplifie :

$$\text{div}(u) = 0 \quad \text{Eq. 2-2}$$

#### 2.1.1.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot u \right) + \text{div} \tau = \rho f \quad \text{Eq. 2-3}$$

avec  $\tau$  le tenseur des contraintes et  $f$  les forces volumiques gravitationnelles tel que  $f = \{0, 0, g\}$  pour le système de coordonnées cartésiennes employé (*Figure 2-1*).

### 2.1.2 Conditions aux interfaces

La fermeture du problème mécanique décrivant le trempage se fait à l'aide des conditions imposées aux niveaux des différentes interfaces.

#### 2.1.2.1 Conditions aux limites

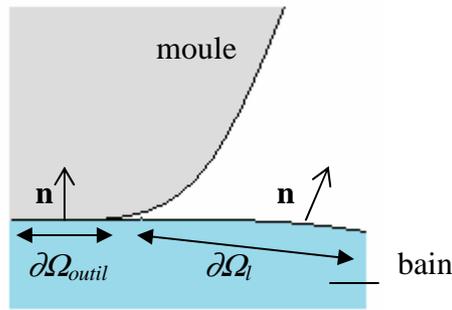


Figure 2-2 : Normale sortante de la pièce

- ✓ Sur la surface libre du bain  $\partial\Omega_l$  on impose :

$$T_{patm} = \sigma \cdot n = -(P_{atm} + \sigma v) n \quad \text{Eq. 2-4}$$

où les forces de tension de surface sont définies par :

$$T_{ts} = -\sigma v n \quad \text{Eq. 2-5}$$

où  $n$  est la normale sortante définie *Figure 2-2*,  $\sigma$  est le paramètre tension de surface et  $v$  la courbure à la surface. Le développement et l'implémentation dans Forge3 de la tension de surface sont développés dans le paragraphe 2-2.

- ✓ Entre le moule et le bain sur  $\partial\Omega_{outil}$ , une condition de non pénétration est employée. Ce problème est formulé à l'aide des conditions de Signorini :

$$\begin{cases} (u - U_0) \cdot n \leq 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ [(u - U_0) \cdot n] \cdot \sigma_n = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 2-6}$$

où  $\sigma_n = \sigma \cdot n \cdot n$  la pression de contact et  $U_0$  la vitesse de l'outil.

### 2.1.2.2 Contact outil / matière

Le contact entre le bain et le moule et entre la plaque et le moule est un contact bilatéral collant. Ce type a été choisi suite à la détermination de l'angle de contact liquide / outil ; la justification physique de ces résultats est présentée dans le *Chapitre 3*. Le contact est dit bilatéral lorsqu'il est impossible de décoller les nœuds en contact et il est de type collant quand tous les déplacements tangentiels relatifs aux nœuds en contact sont impossibles. Les conditions de contact bilatéral collant sont définies par :

$$u - U_0 = 0 \quad \text{Eq. 2-7}$$

### 2.1.3 Lois de comportements

Les lois rhéologiques à intégrer dans la modélisation doivent décrire au mieux le comportement du liquide du bain au cours du procédé de trempage. Nous avons choisi pour la description de nos fluides d'utiliser une loi viscoplastique qui nous a semblé la plus adéquate suite à des séries de mesures rhéologiques (*Chapitre 3*). La modélisation du comportement viscoplastique se fait à l'aide d'une loi de type Norton-Hoff :

$$\begin{cases} S = 2K \left( \sqrt{3} \dot{\bar{\varepsilon}} \right)^{j-1} \dot{\bar{\varepsilon}} \\ K(T, \bar{\varepsilon}) = K_0 (\bar{\varepsilon} + \varepsilon_0)^i e^{-\beta T} \\ \bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon : \varepsilon \\ \varepsilon_0 \ll 1 \text{ paramètre assurant } K > 0 \text{ à } \varepsilon = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 2-8}$$

où  $S$  est le déviateur des contraintes,  $K$  la consistance du matériau (dans le cas d'un fluide newtonien,  $K$  correspond à la viscosité),  $j$  la sensibilité à la vitesse de déformation,  $\dot{\bar{\varepsilon}}$  le tenseur des déformations défini par l'équation 2-9. Dans le cas de trempage anisotherme, la

consistance  $K$  peut dépendre de la température telle que  $i$  est le coefficient de sensibilité à l'écroutissage et  $\beta$  un terme dépendant de la température.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \text{grad } u + (\text{grad } u)^T \right) \quad \text{Eq. 2-9}$$

et  $\dot{\varepsilon}$  la vitesse de déformation équivalente définie par :

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon} : \dot{\varepsilon}} \quad \text{Eq. 2-10}$$

Le déviateur des contraintes  $s$  s'écrit :

$$\sigma = S - pI \quad \text{avec} \quad p = -\frac{1}{3} \text{Trace}(\sigma) \quad \text{Eq. 2-11}$$

où  $p$  est la pression hydrostatique et  $I$  la matrice identité.

#### 2.1.4 Résolution numérique

##### 2.1.4.1 Formulation faible du problème mécanique

Les équations de conservation de la masse et de conservation du mouvement peuvent s'écrire sous forme variationnelle :

Trouver  $(u, p) \in (U^{Ca}, P)$  tel que :

$$\int_{\Omega} S : \dot{\varepsilon}(u^*) d\omega - \int_{\Omega} p \text{div}(u^*) d\omega - \int_{\partial\Omega_h} \tau \cdot v^* dS = 0 \quad \forall u^* \in U_0^{Ca} \quad \text{Eq. 2-12}$$

$$\int_{\Omega} p^* \text{div}(u) d\omega = 0 \quad \forall p^* \in P$$

Les ensembles  $U^{ca}$  (espace des vitesses cinématiquement admissibles),  $U_0^{ca}$  (espace des vitesses cinématiquement admissibles à zéro) et  $P$  sont définis par :

$$U^{ca} = \left\{ u \in \left( H^1(\Omega)^3 / (u - u_{outil}) \cdot n \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega_c \right) \right\}$$

$$U_0^{ca} = \left\{ u \in \left( H^1(\Omega)^3 / u \cdot n \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega_c \right) \right\} \quad \text{Eq. 2-13}$$

$$P = L^2(\Omega)$$

### 2.1.4.2 Discrétisation spatiale

La discrétisation du problème à résoudre dans Forge3 se fait à l'aide de la méthode des Eléments Finis mixtes. Les espaces d'admissibilité de la vitesse  $U^{ca}$  et de la pression  $P$  sont approchés par des espaces discrets de dimensions finies  $U_k^{ca}$  et  $P_k$  où  $k$  désigne la taille de maille. Ces espaces  $U_k^{ca}$  et  $P_k$  sont basés sur une triangulation  $\Gamma_k$ , en éléments  $\omega_k$ , de l'espace  $\Omega_k$  qui discrétise le domaine continu  $\Omega$ .

$$\Omega_k = \bigcup_{\omega_k \in \Gamma_k} \omega_k \quad \text{Eq. 2-14}$$

Il est nécessaire que les fonctions  $(u_k, p_k)$  avec  $u_k \in U_k$  et  $p_k \in P_k$  convergent vers les solutions continues  $(u, p)$  lorsque  $k$  tend vers 0. Cette convergence est assurée par la consistance du problème et est vérifiée puisque les espaces d'approximation dans lesquels nous travaillons sont des espaces de polynômes.

A cause du couplage entre les champs de vitesse et de pression, la condition de consistance ne suffit plus, il faut lui ajouter une condition de stabilité spatiale ou condition de Brezzi-Babuska [Babuska73]. Cette condition va influencer directement le choix de l'élément utilisé.

Pour minimiser les temps de calcul tout en obtenant des résultats cohérents, le domaine est discrétisé à partir de l'élément tétraédrique P1+ / P1. Ce type d'élément présente l'avantage de pouvoir décrire des volumes complexes tout en étant maniables pour le maillage et le remaillage.

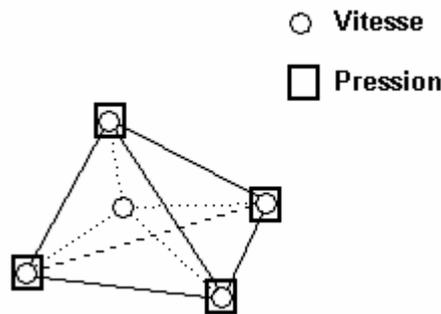


Figure 2-3 : Élément tétraédrique Vitesse / Pression

La vitesse est discrétisée par une partie linéaire  $u_k^l$  sur le tétraèdre enrichi par une partie bulle linéaire  $u_k^b$  définie sur les quatre sous tétraèdres formés par les sommets et le centre de gravité du tétraèdre que nous noterons  $(\omega_k^q)_{q=1,2,3,4}$ . La pression est approximée par une fonction linéaire sur  $w_k$ . Le champs de vitesse  $u_k$  interpolé sur l'élément P1+/P1 se

décompose selon les équations 2-17.  $U_l$  correspond à la partie linéaire du champs de vitesse et  $B_k$  la partie bulle.

$$\begin{aligned}
 U_k &= U_l + B_k \\
 B_k &= \left\{ \begin{array}{l} u_k^b \in (C^0(\Omega_k))^3 / \forall \omega_k \in \Gamma_k \text{ et } b_{k/\omega_k} \in (P^1(\omega_k^q)), q=1, \dots, 4 \\ b_k = 0 \text{ sur } \partial\Omega_k \end{array} \right\} \\
 U_l &= \left\{ u_k^l \in (C^0(\Omega_k))^3 / \forall \omega_k \in \Gamma_k \text{ et } u_{k/\omega_k} \in (P^1(\omega_k))^3 \right\} \\
 P_k &= \left\{ p_k \in (C^0(\Omega_k)) / \forall \omega_k \in \Gamma_k \text{ et } p_{k/\omega_k} \in P^1(\omega_k) \right\}
 \end{aligned} \tag{Eq. 2-15}$$

Les champs de vitesse et de pression résultants sont donnés dans l'équation 2-16.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k = u_k^l + u_k^b = \sum_{q=1}^{nbnoe} U_q N_q^l + \sum_{j=1}^{nbelt} U_j^b N_j^b \\ p_k = \sum_{q=1}^{nbnoe} P_q N_q^l \end{array} \right. \tag{Eq. 2-16}$$

$nbnoe$  et  $nbelt$  sont respectivement le nombre de nœuds et le nombre d'éléments du maillage.  $N_q^l, q=1, \dots, nbnoe$  est la matrice des fonctions d'interpolation linéaire associée au nœud  $q$ .  $N_j^b, j=1, \dots, nbelt$  est le vecteur de la fonction bulle associée à l'élément  $j$ .

Pour obtenir la formulation faible discrétisée « éléments finis », il suffit de remplacer dans l'équation 2-12 les fonctions tests par les fonctions de base avec  $e_i$  est le vecteur unitaire dans la direction  $i$  de l'espace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_k} 2K \left( \sqrt{3} \dot{\varepsilon}(u_k^l + u_k^b) \right)^{m-1} \dot{\varepsilon}(u_k^l + u_k^b) : \dot{\varepsilon}(N_q^l e_i) d\Omega_k + \int_{\partial\Omega_k} \sigma \kappa \text{div}(N_q^l \cdot e_i) dS \\ - \int_{\Omega_k} p_k \text{div}(N_q^l \cdot e_i) d\Omega_k = 0 \quad \forall q=1, \dots, nbnoe; \forall i=1, \dots, 3 \\ \int_{\Omega_k^e} 2K \left( \sqrt{3} \dot{\varepsilon}(u_k^l + u_k^b) \right)^{m-1} \dot{\varepsilon}(u_k^l + u_k^b) : \dot{\varepsilon}(N_q^b e_i) d\Omega_k \\ - \int_{\Omega_k^e} p_k \text{div}(N_q^b \cdot e_i) d\Omega_k = 0 \quad \forall e=1, \dots, nbelt; \forall i=1, \dots, 3 \\ \int_{\Omega_k} N_q^l \text{div}(u_k^l + u_k^b) d\Omega_k = 0 \quad \forall q=1, \dots, nbnoe \end{array} \right. \tag{Eq. 2-17}$$

Une fois le problème posé, il est possible de réécrire le système 2-17 sous forme matricielle pour réaliser ensuite la résolution numérique :

$$R(u^l, u^b, p) = \begin{pmatrix} R_l(u^l, u^b, p) \\ R_b(u^l, u^b, p) \\ R_p(u^l, u^b, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 2-18}$$

Pour résoudre ce système, où  $R$  est non linéaire, il est employé l'algorithme de Newton-Raphson. A partir du triplet initial  $(u_{init}^l, u_{init}^b, p_{init})$ , on cherche à apporter une correction  $(\Delta u^l, \Delta u^b, \Delta p)$  telle que :

$$R(u_{init}^l + \Delta u^l, u_{init}^b + \Delta u^b, p_{init} + \Delta p) = 0 \quad \text{Eq. 2-19}$$

On approche le résidu  $R$  à l'ordre 1 à l'aide d'un développement de Taylor :

$$R(u_{init}^l + \Delta u^l, u_{init}^b + \Delta u^b, p_{init} + \Delta p) \approx R(u_{init}^l, u_{init}^b, p_{init}) + \frac{\partial R}{\partial u^l} \Delta u^l + \frac{\partial R}{\partial u^b} \Delta u^b + \frac{\partial R}{\partial p} \Delta p = 0 \quad \text{Eq. 2-20}$$

Le système linéaire devient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_l}{\partial u^l} & \frac{\partial R_l}{\partial u^b} & \frac{\partial R_l}{\partial p} \\ \frac{\partial R_b}{\partial u^l} & \frac{\partial R_b}{\partial u^b} & \frac{\partial R_b}{\partial p} \\ \frac{\partial R_p}{\partial u^l} & \frac{\partial R_p}{\partial u^b} & \frac{\partial R_p}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u^l \\ \Delta u^b \\ \Delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_l \\ R_b \\ R_p \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 2-21}$$

Ce système peut être simplifié en notant que le terme  $\frac{\partial R_p}{\partial p}$  est nul et que dans le cas des fonctions de forme linéaires  $\frac{\partial R_l}{\partial u^b} = \frac{\partial R_b}{\partial u^l} = 0$ . On obtient ainsi :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_l}{\partial u^l} & 0 & \frac{\partial R_l}{\partial p} \\ 0 & \frac{\partial R_b}{\partial u^b} & \frac{\partial R_b}{\partial p} \\ \frac{\partial R_p}{\partial u^l} & \frac{\partial R_p}{\partial u^b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u^l \\ \Delta u^b \\ \Delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_l \\ R_b \\ R_p \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 2-22}$$

En extrayant la seconde ligne du système, le champ de vitesse bulle peut s'exprimer en fonction du champ de pression (condensation statique). Le système à résoudre devient :

$$H_e \begin{pmatrix} \Delta u^l \\ \Delta p \end{pmatrix} = -R_{\text{modif}} \quad \text{Eq. 2-23}$$

où  $H_e$  est la matrice hessienne, symétrique et  $R_{\text{modif}}$  le résidu modifié par l'élimination du terme « bulle » (condensation statique).

Le système 2-23 est résolu dans Forge3 par une méthode itérative de type résidu conjugué préconditionné [Marie97]. Cette méthode itérative permet non seulement un gain de temps mais également un gain du point de vue de coût de stockage.

#### 2.1.4.3 Discrétisation temporelle

La formulation employée dans Forge3 est Lagrangienne avec une réactualisation au cours du temps. On note  $t_0$  et  $t_{\text{fin}}$  les temps initial et final ; l'intervalle de temps  $[t_0, t_{\text{fin}}]$  est discrétisé en plusieurs intervalles  $[t_n, t_{n+1}]$ . La configuration à  $t_{n+1}$  est calculée à partir de la configuration à  $t_n$ , dans le cas en Lagrangien total, la configuration  $t_{n+1}$  serait calculée en fonction de celle à  $t_0$ .

Le schéma est de type Euler explicite :

$$X^{t+\Delta t} = X^t + \Delta t \cdot U^{t+\Delta t} \quad \text{Eq. 2-24}$$

La vitesse est constante au cours de l'incrément de temps  $[t, t + \Delta t]$ .

## 2.2 Implémentation de la tension de surface

Dans ce paragraphe nous présentons la méthode employée pour implémenter les forces de tension de surface dans le code source de Forge3. En effet, les mécanismes induits par la tension superficielle sont importants dans le trempage : ils sont susceptibles d'influencer fortement les épaisseurs extraites autour du moule. La prise en compte de cet effet est donc indispensable à la modélisation du trempage.

### 2.2.1 Définition et rôle de la tension de surface dans le trempage

#### 2.2.1.1 *Définition de la tension de surface*

Au sein d'un liquide, les molécules exercent entre elles des forces d'attraction ou de répulsion (forces de Van der Waals - attraction - électrostatique - attraction ou répulsion -) : On parle de « forces intermoléculaires ». Chaque molécule du liquide est tirée dans toutes les directions par ses voisines de ce même liquide : la résultante des forces est nulle.

A la surface du liquide, les molécules sont tirés vers l'intérieur par d'autres molécules de ce même liquide et ne sont pas, par contre, attirées intensivement par les molécules du milieu ambiant (ici, l'air). Il existe donc un gradient de pression entre les deux domaines (liquide – air) ce qui conduit à l'apparition d'une force normale qui s'annule lorsque la surface se courbe. La forme de la surface résulte donc de l'équilibre entre la pression du gaz, l'attraction par l'intérieur du liquide et le poids si l'on est en présence de la pesanteur.

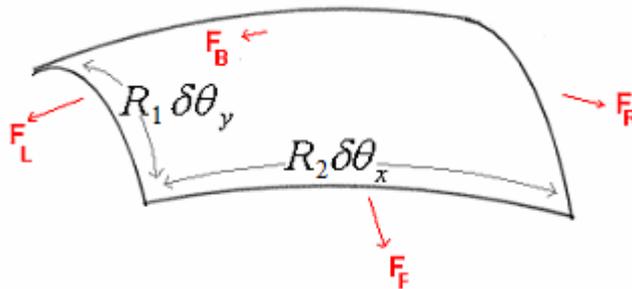


Figure 2-4 : Action des forces de tension interfaciale sur une surface libre  $\delta\theta$

Quand toutes les forces sont à l'équilibre, l'équation résultante est l'équation de Young-Laplace :

$$\Delta P = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{Eq. 2-25}$$

où  $\Delta P$  est la différence de pression,  $\sigma$  la tension de surface et  $R_1$  et  $R_2$  les rayons de courbure. La résultante de la tension de surface sur la surface gauche est donc une contrainte normale à la surface du fluide et elle est inversement proportionnelle aux rayons de courbure.

### 2.2.1.2 Objectif de l'implémentation de la tension de surface

Le trempage est soumis à l'action de quatre paramètres physiques principaux : la viscosité, la gravité, la tension de surface et les forces d'inertie. Selon les conditions de trempage, un ou plusieurs de ces facteurs prédominent. Par exemple, pour de petits nombres capillaires ( $Ca \ll 1$ ), c'est à dire à faible vitesse de remontée, la gravité peut être négligée dans la zone du ménisque; par contre pour de grands nombres capillaires, la tension de surface peut être négligée et ce sont les forces d'inertie qui prédominent [Weinstein01]. Comme notre objectif est de développer un modèle numérique général permettant de simuler le trempage, il est important de prendre en compte l'ensemble des forces jouant un rôle.

### 2.2.2 Revue bibliographique

Dans la littérature, plusieurs méthodes ont été développées pour implémenter la tension de surface.

La tension de surface est en général modélisée en appliquant la force locale « tension de surface » aux nœuds de la surface libre. Comme cela a été expliqué précédemment, la force est équivalente à un saut de pression au travers d'une interface et est donnée par la formule de Laplace :

$$\Delta P = \sigma \cdot \nu \quad \text{Eq. 2-26}$$

où  $\Delta P$  est le saut de pression,  $\sigma$  le coefficient de tension de surface et  $\nu$  la courbure.

Localement, le vecteur contrainte normale  $\vec{T}$  appliquée à la surface libre est donné par:

$$\vec{T} = \sigma \vec{n} = -P_{atm} \vec{n} - \sigma \kappa \vec{n} \quad \text{Eq. 2-27}$$

La contribution du terme « tension de surface » dans l'équation des puissances virtuelles est la suivante :

$$-\int_{\partial\Omega_{libre}} \vec{T} \cdot \vec{u}^* dS = \int P_{atm} \vec{u}^* \cdot \vec{n} dS + \int \sigma \nu \vec{u}^* \cdot \vec{n} dS \quad \text{Eq. 2-28}$$

La plupart des méthodes développées dans la littérature et permettant l'implémentation de la tension de surface dans un modèle éléments finis sont basées sur la détermination de la courbure. Les deux premiers cas présentés font partis de ceux-là mais montrent des limites ; c'est pourquoi une autre méthode, présentée dans le troisième point, a été développée et est basée sur une reformulation du terme de courbure.

### 2.2.2.1 Estimation de la courbure à partir de deux noeuds

Une première méthode consiste à calculer la courbure pour chaque côté joignant deux noeuds ( $i$  et  $j$ ). Une approximation de la courbure  $\nu$  est déterminée à partir de l'équation suivante [Bellet01]:

$$\nu = \frac{1}{R_c} = \frac{l\delta_a}{A_1 + A_2} \quad \text{Eq. 2-29}$$

où  $R_c$  est le rayon de courbure,  $\delta_a$  l'angle entre les deux adjacentes des triangles,  $A_1$  et  $A_2$  leurs surfaces respectives (Figure 2-5).

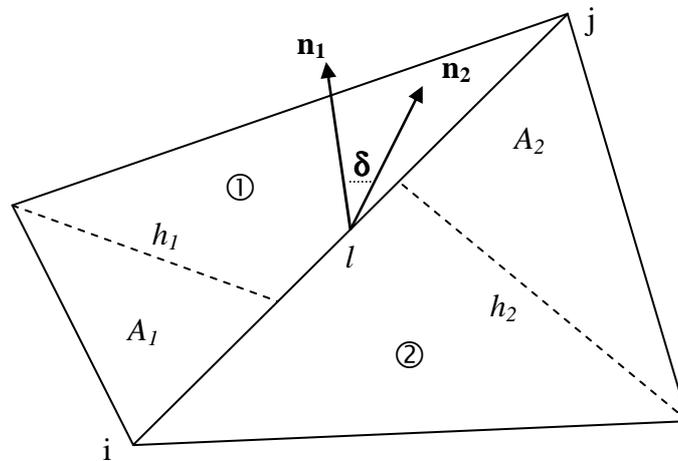


Figure 2-5 : Notations employées dans la définition de la courbure le long d'un côté joint par deux noeuds  $i$  et  $j$  et séparant deux triangles 1 et 2 selon [Bellet01]

### 2.2.2.2 Estimation de la courbure à partir de la divergence des vecteurs normaux aux noeuds

Une autre méthode consiste à calculer la courbure comme la divergence des vecteurs normaux aux noeuds.

Brackbill et al. [Brackbill92], repris par Natvi [Natvi97] en 1997 et Bellet en 2001 [Bellet01], ont montré que la courbure pouvait être donnée par l'opérateur divergent de la surface :

$$\boldsymbol{v} = -\nabla_s \cdot \boldsymbol{n} \quad \text{Eq. 2-30}$$

Pour utiliser cette équation en trois dimensions, il faut déterminer la moyenne nodale des vecteurs normaux. Chaque nœud en surface dépend de un ou plusieurs triangles. Sur chaque facette, la normale est unique. Il est simplement possible de faire une moyenne qui s'écrit ainsi :

$$\boldsymbol{n}^m = \frac{1}{\left\| \sum_{e \in \tau(m)} \boldsymbol{n}^e \right\|} \sum_{e \in \tau(m)} \boldsymbol{n}^e \quad \text{Eq. 2-31}$$

où  $\tau(m)$  est l'ensemble des facettes triangulaires autour du point  $m$  et  $\boldsymbol{n}^e$  le vecteur normal de la facette  $e$ .

Une autre méthode consiste à faire une moyenne pondérale des vecteurs normaux des facettes autour d'un nœud avec comme coefficients pondéraux les surfaces des facettes :

$$\boldsymbol{n}^m = \frac{1}{\left\| \sum_{e \in \tau(m)} \boldsymbol{n}^e \cdot S^e \right\|} \sum_{e \in \tau(m)} \boldsymbol{n}^e \cdot S^e \quad \text{Eq. 2-32}$$

Pour un triangle à trois nœuds ( $m, n, p$ ) dont les moyennes des vecteurs normaux sont  $\boldsymbol{n}^m$ ,  $\boldsymbol{n}^n$  et  $\boldsymbol{n}^p$ , il est possible d'écrire dans un repère local dans le plan de la facette ( $X, Y$ ):

$$\nabla_s \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial n_x}{\partial X} + \frac{\partial n_y}{\partial Y} = \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X} \right) n_x^i + \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} \right) n_y^i \quad \text{Eq. 2-33}$$

où  $(\xi, \eta)$  sont les coordonnées de l'élément triangulaire de référence et  $N_i$  les fonctions d'interpolations attachées au nœud  $i$ .

Après simplifications, la divergence de  $\boldsymbol{n}$  devient :

$$\nabla_s \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{2S} \left[ Y^p (n_x^n - n_x^m) - X^p (n_y^n - n_y^m) + X^n (n_y^p - n_y^m) \right] \quad \text{Eq. 2-34}$$

avec  $S$  la surface du triangle,  $(X_i, Y_i)$  les coordonnées au point  $i$ .

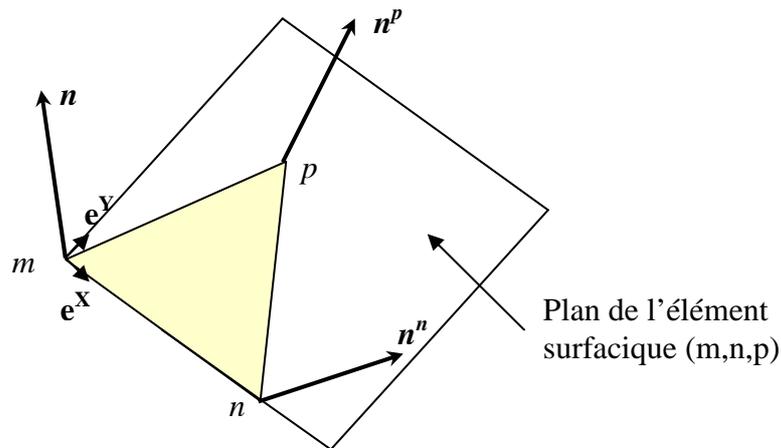


Figure 2-6 : Système de coordonnées local pour calculer  $\nabla_S \cdot n$  dans chaque triangle selon [Bellet01]

Il est à présent possible de donner l'expression du vecteur contrainte décrivant les termes de tension de surface dans l'équilibre mécanique :

$$T(\xi, \eta) = -\sigma(\nabla_S \cdot n)n(\xi, \eta) \quad \text{Eq. 2-35}$$

Si  $\nabla_S \cdot n$  est positif, alors la surface est convexe localement. La discrétisation du terme résidu de l'équation 2-35 s'écrit :

$$R_{nk} = - \int_{\partial\Omega_i} \sigma(\nabla_S \cdot n) N_n n_k^n \cdot N_n dl \quad \text{Eq. 2-36}$$

### 2.2.2.3 Utilisation de l'opérateur Laplace-Beltrami

L'utilisation de l'opérateur Laplace-Beltrami permet de reformuler le terme de tension de surface en son équivalent variationnel. Le premier à avoir introduit cet opérateur aux éléments finis est Dzuik [Dzuik91] en 1991. Bänsch l'a ensuite appliqué aux écoulements aux surfaces libres en 2001 [Bänsch01].

Pour l'application de cette méthode, il est nécessaire dans un premier temps d'introduire certaines notions. L'opérateur de Laplace-Beltrami  $\underline{\underline{\Delta}}$  est donné par :

$$\underline{\underline{\Delta}} \vec{x} = \nu \vec{n} \quad \text{Eq. 2-37}$$

avec  $\vec{x}$  le vecteur des coordonnées du point considéré et le gradient tangentiel par :

$$\underline{\nabla} f(x) = \nabla f(x) - \left( \vec{n} \cdot \nabla f(x) \right) \vec{n} \quad \text{Eq. 2-38}$$

$\underline{\Delta}$  apparaît comme la partie tangentielle de l'opérateur Laplacien appliqué à un vecteur, c'est-à-dire le projecteur de l'opérateur Laplacien sur la surface de normale  $n$ .

La modélisation de la tension de surface se fait à partir de la formulation suivante :

$$F_{TS} = \int_{\Gamma} \sigma \nu \vec{n} \cdot w d\Gamma \quad \text{Eq. 2-39}$$

où  $\Gamma$  est l'interface libre liquide-air.

En remplaçant l'expression du vecteur courbure dans l'expression, on obtient :

$$F_{TS} = \int_{\Gamma} \sigma \left( \underline{\Delta} \vec{x} \right) \cdot w d\Gamma = - \int_{\Gamma} \sigma \underline{\nabla} \vec{x} \cdot \underline{\nabla} w d\Gamma + \int_{\partial\Gamma} \sigma \partial_{\sigma} \vec{x} \cdot w d\gamma \quad \text{Eq. 2-40}$$

Si les effets de bords sont négligés (reliés à l'angle de mouillage) et que l'on considère la configuration à l'incrément  $n$ , on obtient la forme explicite suivante :

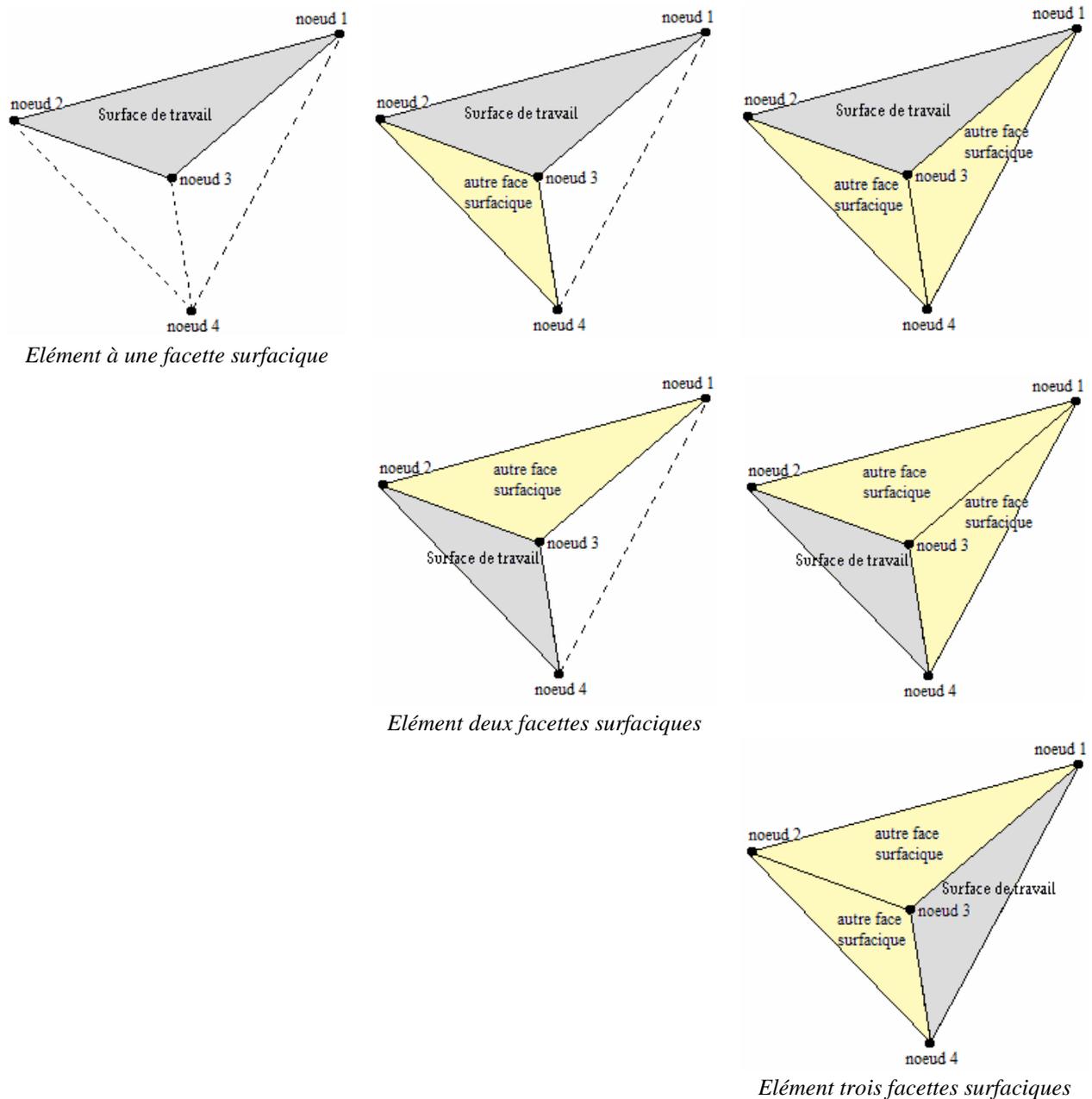
$$F_{TS} = - \int_{\Gamma} \sigma \underline{\nabla} \vec{x} \cdot \underline{\nabla} w d\Gamma \quad \text{Eq. 2-41}$$

L'implémentation numérique de la tension de surface calculée à partir de la courbure (deux premières méthodes) génère des défauts tels que des irrégularités dans les courbures comme cela peut se voir sur les résultats de [Bellet01]. Le modèle qui a été choisi pour l'implémentation de la tension de surface dans Forge3 est celle basée sur la reconstruction de la courbure à partir l'opérateur Laplace-Beltrami.

### 2.2.3 Stratégie d'insertion de la tension dans Forge3

#### 2.2.3.1 *Application nodale*

La tension de surface ne s'applique qu'au niveau des éléments surfaciques. Il est donc nécessaire dans un premier temps de déterminer l'ensemble des nœuds concernés.



**Figure 2-7 : Différentes configurations de tétraèdres surfaciques avec une ou plusieurs facette surfaciques où vient s'appliquer la tension de surface**

Comme seuls les éléments ayant au moins une facette sur la surface libre sont utilisés, il faut donc sélectionner ces éléments et numéroter les nœuds de telle manière de reconnaître quels sont ceux frontières et ceux qui ne le sont pas. Dans le cas où un même élément possède 1, 2 voire 3 facettes surfaciques (*Figure 2-7*), chaque facette est traitée indépendamment des autres ; i.e. la tension de surface est calculée et appliquée à toutes les facettes surfaciques sans tenir compte de ses voisines. C'est l'étape d'assemblage au niveau global dans la procédure éléments finis qui permettra d'assurer la continuité de la courbure de l'interface.

Le sens de numérotation des nœuds est aléatoire car il ne joue pas de rôle sur le calcul de la tension de surface. Chaque nœud de chaque face appartenant à la surface libre est numéroté de 1 à 3, le quatrième nœud étant le numéro 4. Tout au long de l'incrément, cette numérotation est conservée.

### 2.2.3.2 Développement du système à résoudre

Comme il a été montré précédemment, la contribution du terme « tension de surface » dans l'équation des puissances virtuelles vaut :

$$F_{TS} = - \int_{\Gamma} \underline{\sigma} \underline{\nabla} x \cdot \underline{\nabla} w d\Gamma \quad \text{Eq. 2-42}$$

Il faut transformer ce problème physique de telle manière à le modéliser sous forme d'équations locales.

A l'aide du développement du gradient tangentiel donné dans l'équation 2-37, il est possible de simplifier l'écriture de ce terme à l'aide de la formulation suivante :

$$\begin{aligned} \underline{\nabla}_j x_i &= x_{i,j} - n_k x_{i,k} n_j \\ &= (\delta_{k,j} - n_k n_j) x_{i,k} \\ &= x_{i,k} \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{nn}]_{k,j} \end{aligned} \quad \text{Eq. 2-43}$$

$$\text{soit} \quad \underline{\nabla} x = \nabla x \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{nn}] \quad \text{Eq. 2-44}$$

où  $n$  est la normale sortante à la facette surfacique et  $x$  est le vecteur des coordonnées du point considéré. Chaque normale est calculée indépendamment des autres, c'est-à-dire si un élément possède plusieurs facettes surfaciques, il sera calculé autant de normales qu'il y a de facettes surfaciques.

Le terme  $F_{TS}$  devient alors :

$$F_{TS} = - \int \underline{\sigma} \cdot [\nabla x (\mathbf{I} - \mathbf{nn})] \cdot [\nabla w (\mathbf{I} - \mathbf{nn})] \quad \text{Eq. 2-45}$$

$$\text{autrement dit} \quad \begin{cases} F_{TS} = - \int_{\Gamma} \underline{\sigma} \cdot [\nabla x (\mathbf{I} - \mathbf{nn})] \cdot [(\mathbf{I} - \mathbf{nn})^T \cdot \nabla w] d\Gamma \\ F_{TS} = - \int_{\Gamma} \underline{\sigma} \cdot \nabla x \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) (\mathbf{I} - \mathbf{nn})^T \cdot \nabla w d\Gamma \end{cases} \quad \text{Eq. 2-46}$$

Il faut à présent chercher à écrire cette équation de telle manière à définir localement la tension de surface au niveau de chaque élément fini. Pour cela est utilisé la notion de fonctions d'interpolation définies sur l'ensemble du domaine étudié.

Dans un premier temps sont recherchées les composantes du vecteur déplacement  $w$  en chaque nœud de la discrétisation par éléments finis. Il sera noté  $W$  le vecteur des composantes du champ nodal  $w(x)$  sur la facette :

$$W = \begin{pmatrix} w_1^1 \\ w_2^1 \\ w_3^1 \\ \vdots \\ w_1^3 \\ w_2^3 \\ w_3^3 \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 2-47}$$

Pour chaque composante  $w_1(x)$ ,  $w_2(x)$  et  $w_3(x)$  la relation fondamentale d'interpolation sous forme matricielle est :

$$\begin{bmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \\ w_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1^1 \\ w_2^1 \\ w_3^1 \\ \vdots \\ w_1^3 \\ w_2^3 \\ w_3^3 \end{bmatrix} = [N^e] \cdot W^e \quad \text{Eq. 2-48}$$

Il est introduit la matrice de l'opérateur de dérivation  $[\nabla]$  :

$$B = [\nabla] \cdot [N] = \begin{vmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Eq. 2-49

D'autre part, il a été démontré précédemment (équation 2-44) que :  $\underline{\nabla}x = \nabla x \cdot [I - nn]$ .  
Pour simplifier l'écriture il est possible de noter :

$$\underline{\nabla}x = \nabla x \cdot D \quad \text{Eq. 2-50}$$

avec  $D$  un tenseur d'ordre 2 (matrice 3x3).

où sous forme vectorielle :

$$\{\underline{\nabla}x\} = [D^*] \cdot \{\nabla x\} \quad \text{Eq. 2-51}$$

avec  $D^*$  une matrice 12x12 (3 coordonnées x 4 nœuds pour le tétraèdre).

La force résultante de la tension de surface est alors équivalente sous forme matricielle à l'équation suivante :

$$F_{TS} = -\sigma \cdot B^T \cdot D^* \cdot D^{*T} \cdot B \cdot \{x\} \cdot S_f \quad \text{Eq. 2-52}$$

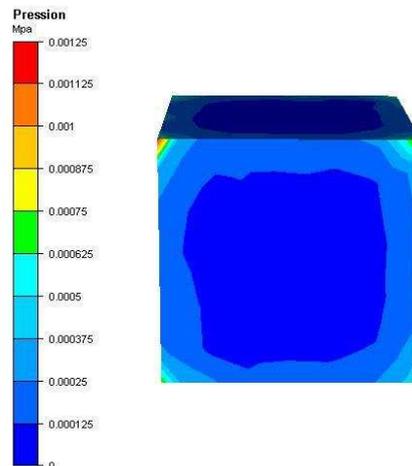
où  $B$  est la matrice des fonctions de forme,  $D^*$  la matrice projection,  $\{x\}$  les coordonnées des quatre nœuds de l'élément et  $S_f$  la surface de la facette.

La force  $F_{TS}$  a 12 composantes correspondant aux 3 coordonnées (selon  $x$ ,  $y$  et  $z$ ) des nœuds du tétraèdre. Seuls les 9 composantes correspondants aux nœuds en surface sont utilisées puisque se sont les seuls nœuds sur lesquels est appliquée la tension de surface.

#### 2.2.4 Validation de l'implémentation

Avant toute application de la tension de surface sur la modélisation du trempage, il est important de valider le bon fonctionnement de l'algorithme développé et implémenté dans le logiciel Forge3. La validation se fait sur un cube soumis à sa viscosité, à son inertie, à sa gravité (ou non selon les cas) et à la tension de surface. Les facteurs de validation du bon fonctionnement de l'algorithme sont la géométrie finale de la figure et la répartition de la pression dans le cube. La distribution de cette dernière dans le cube initial est donnée *Figure 2-8* : elle est maximale au niveau des coins et minimale aux centres des faces.

Le cube initial est de dimension  $1 \times 1 \times 1 \text{ mm}^3$  et est composé de 408 nœuds, 1556 tétraèdres et 496 facettes. Le pas de temps est de  $\Delta t = 0,001 \text{ s}$ . La viscosité dynamique employée est  $\mu = 1 \text{ Pa.s}$  et la masse volumique  $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le facteur tension de surface vaut  $\gamma = 0,02 \text{ N.m}^{-1}$ . Dans le cas où la gravité est prise en compte, le cube est posé sur un support : le contact avec le fluide est de type Tresca. Le calcul se déroule jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint.



**Figure 2-8 : Cube initial tel qu'il apparaît dans Forge3 - Répartition des champs de pression**

La tension de surface est une force venant s'appliquer aux nœuds : pour atteindre un état stable, elle intervient comme une force de « contraction » de façon à obtenir la surface la plus faible possible.

### 2.2.4.1 Equilibre d'une goutte sans gravité

Dans le cas d'un cube non soumis à la gravité, l'équilibre est atteint après 0,75 s. Il est obtenu une sphère parfaite de pression constante de 53,50 Pa (Figure 2-9). La forme sphérique est atteinte car en l'adoptant, la surface est minimisée et par conséquent, l'énergie nécessaire est également minimisée.

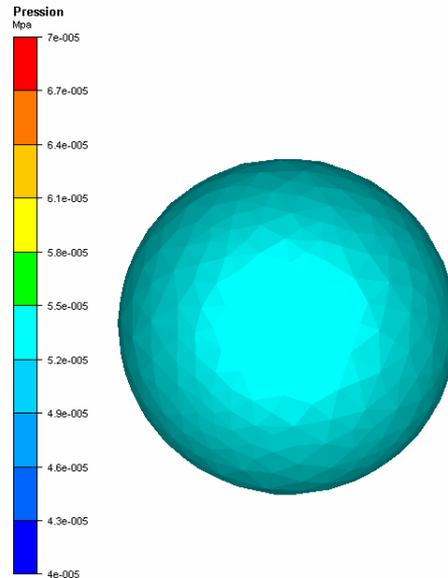


Figure 2-9 : Champ de pression dans le cube soumis à la tension de surface

Selon la formule de Laplace, la pression de la sphère doit être égale à :

$$P = \frac{2 \cdot \sigma}{R_s} \quad \text{Eq. 2-53}$$

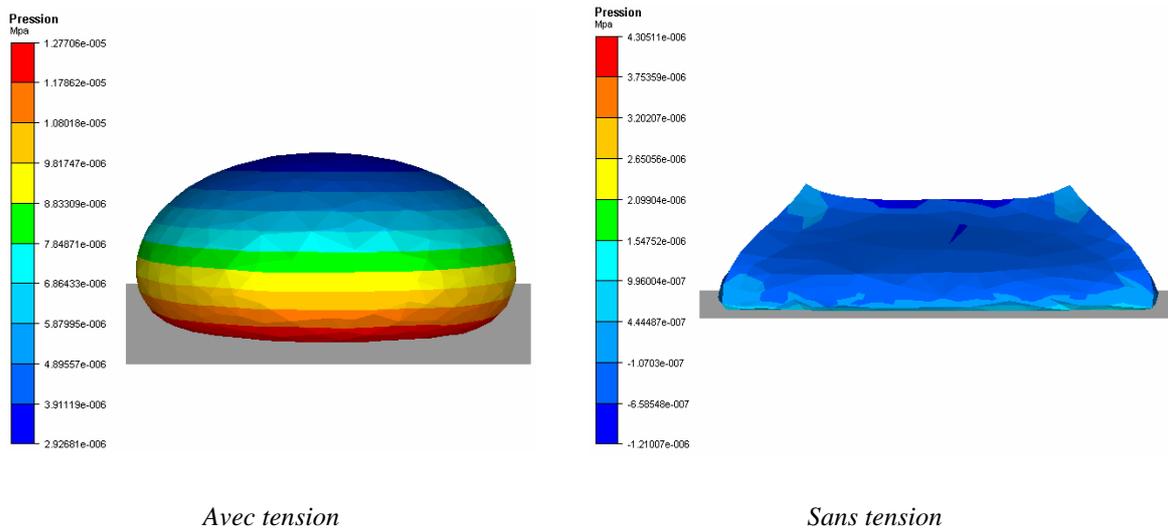
où  $R_s$  est le rayon de la sphère (ici  $R_s = 0,75\text{mm}$ ) et  $\sigma = 0,02 \text{ N.m}^{-1}$ . Le calcul à l'aide de cette formule donne une pression de 53,33 Pa, ce qui est très proche de celle trouvée numériquement. Cette vérification confirme le bon fonctionnement de l'implémentation de la tension de surface dans Forge3.

### 2.2.4.2 Equilibre d'une goutte sous gravité

L'évolution d'une goutte de fluide en contact avec une surface plane et soumise à la gravité a été également modélisée. Dans ce cas, l'équilibre est atteint au bout de 1 s.

Sur la Figure 2-10 sont comparés les résultats de deux modélisations réalisées dans les mêmes conditions si ce n'est que dans un cas est pris en compte le terme de tension de surface

et dans l'autre non. Dans le cas où le cube est juste soumis à la gravité, le cube s'est affaissé (sous l'effet de son poids) sans que les endroits anguleux ne se soient arrondis. Dans le cas où le terme de tension de surface a été introduit, la forme finale est celle d'une goutte posée. Le champs de pression à l'intérieur n'est plus homogène mais il dépend à présent de la gravité : la pression est maximale au niveau du contact avec le support et minimale au point le plus haut.



**Figure 2-10 : Comparaison entre le comportement à  $t=1s$  d'une goutte soumise à l'action de la gravité avec et sans tension de surface**

Les essais de l'implémentation de la tension de surface dans Forge3 sur un simple cube ont montré des résultats intéressants et correspondants à ceux attendus. L'algorithme employé est donc validé et pourra être à présent employé dans le cadre du trempage.

Il faut noter ici qu'aucun angle de mouillage n'a été utilisé, l'angle observé ici est donc uniquement le résultat de la gravité et du type de contact matière/support utilisé.

## 2.3 Formulation du problème thermique

Dans le cas de trempage à chaud, il existe des échanges thermiques entre le bain et le moule qu'il est important de prendre en compte. En effet, les variations de température vont avoir une influence sur le comportement rhéologique du fluide et donc sur l'épaisseur finale extraite.

### 2.3.1 Equation de la chaleur

Les échanges thermiques entre le bain, le moule et le milieu extérieur sont régis par l'équation de la chaleur suivante :

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{dT}{dt} + \text{div}(q) = f_p \cdot \tau : \dot{\varepsilon} \quad \text{Eq. 2-54}$$

avec  $\rho$  est la densité,  $C_p$  la chaleur massique,  $T$  le champ de température et  $f_p$  la fraction de puissance de déformation transformée en chaleur (coefficient de Taylor-Quinney).

Le flux  $q$  est défini à l'aide de la loi de Fourier en fonction du gradient de température :

$$q = -\lambda^c \cdot \text{grad}(T) \quad \text{Eq. 2-55}$$

avec  $\lambda^c$  la conductivité du matériau.

On a alors :

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{dT}{dt} - \text{div}(\lambda^c \cdot \text{grad}(T)) = f_p \cdot \tau : \dot{\varepsilon} \quad \text{Eq. 2-56}$$

### 2.3.2 Conditions aux limites

Le procédé de trempage anisotherme regroupe différents types de conditions aux limites en fonction du type de surfaces. Les échanges se font par convection ou rayonnement sur les surfaces libres (bain) et par conduction sur les surfaces de contact (moule et plaque). Il est également possible d'imposer un flux ou une température.

- *Convection et rayonnement*

Ces types d'échange se rencontrent au niveau de la surface du bain  $\partial\Omega_{cr}$ . L'équation régissant la convection est la suivante :

$$(-\lambda^c \cdot \text{grad}T) \cdot n = h_{conv} (T - T_{ext}) \quad \text{Eq. 2-57}$$

avec  $h_{conv}$  est le coefficient de transfert par convection,  $T$  la température du bain et  $T_{ext}$  la température extérieure.

L'équation régissant le rayonnement est la suivante :

$$(-\lambda^c \cdot \text{grad}T) \cdot n = \varepsilon_e \gamma (T^4 - T_{ext}^4) \quad \text{Eq. 2-58}$$

avec  $\varepsilon_e$  l'émissivité et  $\gamma$  la constante de Stephan-Bolzman.

En regroupant les coefficients de transfert de convection et de rayonnement, on obtient :

$$h_{cr} = h_{conv} + \varepsilon_e \gamma (T^2 + T_{ext}^2) (T + T_{ext}) \quad \text{Eq. 2-59}$$

- *Conduction*

Des transferts par conduction ont lieu à l'interface moule / liquide  $\partial\Omega_{cond}$ . L'équation décrivant ce type d'échange est la suivante :

$$(-k \cdot \text{grad}(T)) \cdot n = h_{cond} (T - T_i) \quad \text{Eq. 2-60}$$

avec  $T_i$  la température d'interface entre les deux domaines et  $h_{cond}$  le coefficient de transfert traduisant la résistance thermique de contact.

L'expression permettant de déterminer la température d'interface  $T_i$  est :

$$T_i = \frac{b_1 T_1 + b_2 T_2}{b_1 + b_2} \quad \text{Eq. 2-61}$$

où  $T_j$  est la température du milieu  $j$  et  $b_j$  l'effusivité du milieu  $j$  telle que  $b_j = \sqrt{h_j \rho_j c_j}$ .

- *Température imposée*

Il est également possible d'imposer une température  $T_{imp}$  sur une partie du bord  $\partial\Omega_T$  du domaine ou encore un flux sortant imposé  $\Phi_{imp}$  :

$$\begin{aligned} T &= T_{imp} \\ \Phi_{imp} &= -\lambda^c \text{grad}T \cdot n \end{aligned} \quad \text{Eq. 2-62}$$

Le bain de trempage est posé sur une plaque qui peut permettre de le chauffer en lui imposant une température selon l'équation 2-62.

### 2.3.3 Résolution du système

La forme variationnelle de l'équation de chaleur est :

$$\begin{aligned} \forall T^*, \int_{\Omega} \rho C_p \frac{dT}{dt} T^* dV + \int_{\Omega} \lambda^c \cdot \text{grad}(T) \cdot \text{grad}(T^*) dV + \int_{\partial\Omega_{cr}} h_{cr} (T - T_{ext}) T^* dS \\ + \int_{\partial\Omega_{cond}} h_{cond} (T - T_i) T^* dS + \int_{\partial\Omega_{flux}} \Phi_{imp} T^* dS - \int_{\Omega} f S : \dot{\epsilon} T^* dV = 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 2-63}$$

#### 2.3.3.1 *Discrétisation spatiale*

La discrétisation du problème thermique s'appuie sur le même maillage que celui qui discrétise le problème mécanique. Le même type d'éléments P1 est utilisé pour l'interpolation et la discrétisation de  $T$  ; la température est interpolée aux nœuds ainsi :

$$T_h = \sum_{k=1}^{nbnoe} T_k N_k \quad \text{Eq. 2-64}$$

A l'aide de cette interpolation, il est possible de réécrire l'équation 2-63:

$$C \frac{dT_h}{dt} + K \cdot T_h = Q \quad \text{Eq. 2-65}$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \forall i, j \in [1, nbnoe] \\ C : \text{Matrice de capacité} \quad C_{ij} = \int_{\Omega_h} \rho c N_i N_j dV \\ K : \text{Matrice de conductivité} \quad K_{i,j} = \int_{\Omega_h} k \cdot \text{grad}(N_i) \text{grad}(N_j) d\Omega \\ \quad + \int_{\partial\Omega_{h_{cr}}} h_{cr} N_i N_j dS + \int_{\partial\Omega_{h_c}} h_c N_i N_j dS \\ Q : \text{Terme source} \quad Q_i = \int_{\partial\Omega_{h_{cond}}} h_c N_i T_f dS + \int_{\partial\Omega_{h_{cr}}} h_{cr} N_i T_{ext} dS \\ \quad + \int_{\partial\Omega_{h_{flux}}} N_i \Phi_{imp} dS + \int_{\Omega_h} N_i f S : \dot{\epsilon} d\Omega \end{array} \right. \quad \text{Eq. 2-66}$$

### 2.3.3.2 Discrétisation temporelle

Pour discrétiser les équations thermiques en temps, il est utilisé un schéma de type différences finies à trois niveaux développé par [Soyris90]. Pour rendre le schéma plus consistant, on se place à l'instant  $t^*$  appartenant à l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  ; on définit alors :

$$t^* = \alpha_1 t_{n-1} + \alpha_2 t_n + \alpha_3 t_{n+1} \quad \text{Eq. 2-67}$$

avec  $t_{n-1}, t_n, t_{n+1}$  trois pas de temps successifs séparés par les durées  $dt_0 = t_n - t_{n-1}$  et  $dt = t_{n+1} - t_n$ . Les coefficients  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont choisis arbitrairement en faisant en sorte que leur somme soit égale à 1.

Le champ de température  $T^*$  au temps  $t^*$  s'écrit alors :

$$T^* = \alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n + \alpha_3 T_{n+1} \quad \text{Eq. 2-68}$$

Sa dérivée par rapport au temps  $t^*$  s'écrit :

$$\frac{dT^*}{dt} = \frac{\beta_1 T_{n-1} - \beta_2 T_n}{dt_0} + \frac{\gamma_1 T_n - \gamma_2 T_{n+1}}{dt} \quad \text{Eq. 2-69}$$

Selon [Soyris90], le schéma est consistant pour :

$$\begin{cases} \alpha_2 = 1 - \alpha_1 + \left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right) \frac{dt_0}{dt} - \frac{1}{2} \gamma_2 \left(1 + \frac{dt_0}{dt}\right) \\ \alpha_3 = \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\right) \frac{dt_0}{dt} + \frac{1}{2} \gamma_2 \left(1 + \frac{dt_0}{dt}\right) \end{cases} \quad \text{Eq. 2-70}$$

et inconditionnellement stable pour :

$$\begin{aligned} \gamma_2 &\geq \frac{1}{2} \\ \alpha_3 &> \frac{1}{2} \gamma_2 \end{aligned} \quad \text{Eq. 2-71}$$

Les équations 2-69 et 2-70 sont utilisées pour réécrire le problème 2-63 :

$$\begin{aligned} C \left( \frac{\beta_1 T_{n-1} + \beta_2 T_n}{\Delta t_0} + \frac{\gamma_1 T_n + \gamma_2 T_{n+1}}{\Delta t} \right) + K \cdot (\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n + \alpha_3 T_{n+1}) &= Q \\ \Leftrightarrow \left( C \frac{\gamma_2}{\Delta t} + K \cdot \alpha_3 \right) T_{n+1} &= Q - K \cdot (\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n) - C \left( \frac{\beta_1 T_{n-1} + \beta_2 T_n}{\Delta t_0} + \frac{\gamma_1 T_n}{\Delta t} \right) \\ \Leftrightarrow GA \cdot T_{n+1} &= \frac{1}{\alpha_3} \left[ Q + K \cdot (\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n) - C \left( \frac{\beta_1 T_{n-1} + \beta_2 T_n}{dt_0} + \frac{\gamma_1 T_n}{dt} \right) \right] \end{aligned} \quad \text{Eq. 2-72}$$

avec  $GA = C \frac{\gamma_2}{\alpha_3 \cdot dt} + K$

$$\begin{aligned} GA \cdot T_{n+1} &= \frac{1}{\alpha_3} \left[ Q + \left( C \frac{\gamma_2}{\alpha_3 \cdot dt} - GA \right) \cdot (\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n) - C \left( \frac{\beta_1 T_{n-1} + \beta_2 T_n}{dt_0} + \frac{\gamma_1 T_n}{dt} \right) \right] \\ \Leftrightarrow GA \cdot \frac{T^*}{\alpha_3} &= \frac{1}{\alpha_3} \left( Q + C \left( \left( \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\alpha_3 \cdot dt} - \frac{\beta_1}{dt_0} \right) T_{n-1} + \left( \frac{\alpha_2 \gamma_2}{\alpha_3 \cdot dt} - \frac{\beta_2}{dt_0} - \frac{\gamma_1}{dt} \right) T_n \right) \right) \end{aligned}$$

Le système 2-72 est résolu à l'aide de la méthode du gradient conjugué préconditionné par la diagonale. On trouve alors l'expression de  $T_{n+1}$  à partir de :

$$T_{n+1} = \frac{T^*}{\alpha_3} - (\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n) \quad \text{Eq. 2-73}$$

### 2.3.3.3 Thermique asynchrone

Lors de gradients thermiques importants à l'interface entre la pièce et l'outil, pour minimiser les problèmes numériques liés à ce choc, il faut raffiner très fin le maillage à cette interface. Comme la discrétisation spatiale est la même pour le problème mécanique et pour le problème thermique, un maillage fin conduit à une forte augmentation des temps de calcul

pour la résolution du problème mécanique. La solution à ce problème est l'utilisation de maillages calibrés de manière à ne pas trop pénaliser la résolution du problème mécanique, ce qui peut parfois conduire à des imprécisions lors de la résolution du problème thermique.

Il est possible d'utiliser une méthode de pas de temps asynchrone pour faire face à ces problèmes thermiques. Les oscillations spatio-temporelles dues aux chocs thermiques sont liées au temps de pénétration de la chaleur  $t_p$ , temps nécessaire au flux thermique de parcourir une taille de maille  $h$ . Dans ce cas, le choc thermique ne sera pris en compte que lorsque le gradient thermique aura traversé l'élément frontière au bout d'un temps caractéristique :

$$\Delta t_{\text{asyn}} = \frac{\rho c}{\lambda^c} h \quad \text{Eq. 2-74}$$

On relie ainsi les pas de discrétisation temporelle et spatiale. Pour une taille de maille stable et imposée, le pas de temps défini à l'équation 2-74 ne doit pas être plus grand que le pas de temps stable, soit [Tronel93]:

$$\Delta t \geq \Delta t_{\text{asyn}} \quad \text{Eq. 2-75}$$

Cette équation donne le pas de temps minimal pour qu'il n'y ait pas d'oscillation du champ de température. Il faut ensuite ramener le résultat obtenu à  $t + dt_{\text{asyn}}$  au problème défini à  $t + dt$ . La température  $T_{n+1}$  à  $\Delta t$  est déterminée à partir de  $T_{n+1}^{\text{asyn}}$  calculée à  $\Delta t_{\text{asyn}}$  selon l'expression suivante [Aliaga00] :

$$T_{n+1} = T_n + (T_{n+1}^{\text{asyn}} - T_n) \frac{\Delta t}{\Delta t_{\text{asyn}}} \quad \text{Eq. 2-76}$$

#### 2.3.4 Le couplage thermo-mécanique

Le couplage entre le problème mécanique et le problème thermique est faible. Les équations mécaniques 2-2 et 2-3 et l'équation thermique 2-54 sont résolues indépendamment et de façon séquentielle. A l'instant  $t$ , le problème mécanique est résolu avec la configuration mécanique et thermique de l'instant  $t$ . Le problème thermique est ensuite résolu avec la configuration mécanique de l'instant  $t + \Delta t$  calculé précédemment et la configuration thermique de l'instant  $t$ .

---

*Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation thermo-mécanique du problème lié au trempage. Le problème est résolu à l'aide d'une approche lagrangienne par éléments finis. La tension de surface a été implémentée dans le code à l'aide d'une méthode basée sur la reformulation de la courbure grâce à l'opérateur de Laplace-Beltrami. Un cas de validation de l'implémentation de la tension de surface a été présenté en utilisant le logiciel Forge3.*

---

### **3. PRESENTATION DES MATERIAUX ET CARACTERISATIONS EXPERIMENTALES**

### **3. PRESENTATION DES MATERIAUX ET CARACTERISATIONS EXPERIMENTALES**

<b>3.1</b>	<b>Matériaux .....</b>	<b>100</b>
3.1.1	L'alcool de polyvinyle – PVA .....	100
3.1.2	Les silicones .....	100
3.1.2.1	<i>Les différents types d'enveloppes d'implants mammaires</i> .....	100
3.1.2.2	<i>Composition des silicones</i> .....	101
3.1.3	Le miel.....	102
<b>3.2</b>	<b>Caractérisations en rhéologie .....</b>	<b>103</b>
3.2.1	Méthodes et matériel .....	103
3.2.2	Rhéologie du PVA .....	103
3.2.2.1	<i>Comportement sous cisaillement du PVA</i> .....	103
3.2.2.2	<i>Influence de la température sur la viscosité</i> .....	104
3.2.3	Rhéologie des silicones .....	105
3.2.3.1	<i>Comportement sous cisaillement</i> .....	105
3.2.3.2	<i>Influence de la dilution</i> .....	106
3.2.3.3	<i>Influence de la température sur la viscosité</i> .....	107
3.2.4	Rhéologie du miel .....	108
<b>3.3</b>	<b>Influence de la silice sur le comportement des matériaux.....</b>	<b>109</b>
3.3.1	La silice dans le PVA .....	109
3.3.2	La silice dans les silicones .....	112
<b>3.4</b>	<b>Mesure des tensions de surface .....</b>	<b>113</b>
3.4.1	Méthodes et matériel .....	113
3.4.1.1	<i>Méthode de la goutte pendante</i> .....	113
3.4.1.2	<i>Méthode de la goutte posée</i> .....	116
3.4.2	Mesure de la tension liquide / air .....	117

3.4.3	Contact fluide – support .....	118
<b>3.5</b>	<b>Essais de trempage expérimentaux.....</b>	<b>119</b>
3.5.1	Développement d'un appareil- prototype expérimental de trempage .....	119
3.5.2	Mesure des épaisseurs .....	120
3.5.3	Erreurs sur l'épaisseur .....	121
3.5.4	Influences de paramètres physiques .....	121
3.5.4.1	<i>Influence de l'évaporation</i> .....	122
3.5.4.2	<i>Influence de la vitesse de remontée du moule</i> .....	122
3.5.4.3	<i>Influence du bain de trempe</i> .....	124

Afin de pouvoir effectuer une bonne modélisation du procédé de trempage, il est nécessaire de déterminer l'ensemble des paramètres propres aux matériaux et aux outils employés. Il faut aussi bien comprendre les phénomènes physiques intervenant au cours du procédé industriel. Ce chapitre a pour objectif de présenter l'ensemble des données expérimentales recueillies au cours de ce travail de thèse permettant d'alimenter la simulation numérique.

Après avoir introduit les matériaux utilisés pour les bains de trempage, nous présenterons leurs études en rhéologie ; nous verrons également l'influence de leur composition sur leur comportement sous cisaillement. Ensuite, nous expliquerons comment se sont déroulées les mesures de tension de surface, paramètre physique jouant un rôle important dans la détermination finale de l'épaisseur. Enfin, nous présenterons la méthode et l'appareillage employés pour les essais expérimentaux de trempage ainsi que les mesures faites.

### **3.1 Matériaux**

Une bonne connaissance des propriétés du bain de trempage est importante pour une modélisation correcte. Ce paragraphe a pour but de présenter brièvement les deux matériaux des bains de trempage employés par nos partenaires industriels ainsi que le miel qui nous servira de référence.

#### **3.1.1 L'alcool de polyvinyle – PVA**

Le matériau employé dans la mise en forme des gants qui fait l'objet de la modélisation dans cette thèse est une solution aqueuse d'alcool de polyvinyle renfermant des particules de silices dispersées (moins de 1%). Nous appellerons ce matériau par l'abréviation PVA. Sa masse volumique est de  $1,39 \text{ g/cm}^3$ . L'extrait sec de ce produit est de 13% ; cette donnée est importante car elle permet par la suite de passer par un calcul très simple de l'épaisseur « humide » à l'épaisseur « sèche ».

#### **3.1.2 Les silicones**

##### **3.1.2.1 *Les différents types d'enveloppes d'implants mammaires***

Il existe différentes sortes d'implants mammaires : certains sont remplis de sérum physiologique et d'autre de gel à haute cohésivité à base de silicone. Selon le type de remplissage, la composition des enveloppes diffère légèrement. Dans le cas d'un remplissage à base de sérum physiologique, l'enveloppe est constituée d'un système mono-couche, alors que dans le cas d'un remplissage à base de gel à haute cohésivité, il s'agit de systèmes tri-couches.

Tous les matériaux composant l'enveloppe ont une même base commune : il s'agit de silicone en solution dans du xylène (65%). Ils existent trois grandes familles :

- Le *MED6 6400* ou *MED3 6400* que nous nommerons S1 est le silicone de base le plus employé. C'est celui que nous utiliserons ici. Sa masse volumique est de 0,95 g/cm<sup>3</sup> ;
- Le *MED 6600* ou S2 qui présente de bonnes propriétés barrières ;
- Le *MED 6400* ou S3 qui possède de bonnes propriétés d'adhésion avec S2.

L'ensemble des silicones se présente de la même manière : ils sont stockés en deux parties (*Part A* et *Part B*) ; la solution employée lors du trempage se prépare la veille en mélangeant 50% de Part A avec 50% Part B. Ces deux parties sont identiques à la différence que la A contient un catalyseur, le platine, permettant l'accélération des réactions de réticulation et la B un agent réticulant. Tous nos essais sont réalisés directement sur les mélanges.

### 3.1.2.2 Composition des silicones

Nous avons cherché à vérifier la composition exacte de chaque silicone car peu d'informations sont données par le fournisseur concernant chaque produit. Sur chaque partie (*Part A* et *Part B*), une identification par spectrométrie de résonance magnétique nucléaire a été menée par Valeria Harabagiu à l'Institut de Chimie Macromoléculaire de Iasi en Roumanie. L'objectif de ce travail est la détermination de la composition exacte de ces matériaux.

Le résultat trouvé est que tous les silicones S1, S2 et S3 ont la même composition : du polydimethyl-siloxane substitué avec des groupes amiline :



Figure 3-1 : Formule chimique du polydimethyl-siloxane substitué par des groupes amiline

Les rapports d'intensités montrent qu'il y a plus de groupements  $\text{Si} \left( \text{C}_6\text{H}_4\text{NH}_2 \right)$  que de groupements  $\text{Si} \left( \text{CH}_3 \right)$ .

La différence entre l'ensemble des propriétés des silicones doit provenir de différences entre les masses molaires et du pourcentage des groupes phényles (permettant de bonnes propriétés barrières mais réduisant les propriétés mécaniques).

### 3.1.3 Le miel

Nous avons également travaillé avec du miel qui présente l'avantage d'être un liquide avec une rhéologie simple. L'objectif est d'avoir un matériau de référence simple pour mieux comprendre les phénomènes observés numériquement. La masse volumique du miel que nous avons choisi est de  $1,4 \text{ g/cm}^3$ .

## 3.2 Caractérisations en rhéologie

### 3.2.1 Méthodes et matériel

La caractérisation rhéologique des fluides a été menée à l'aide d'un rhéomètre à contrainte imposée Bohlin Gemini® équipé d'un système de contrôle de température Peltier. La géométrie employée est un cône-plan (angle du cône 4° et diamètre 40mm). L'objectif de ses mesures est d'extraire des lois décrivant le comportement des matériaux qui seront par la suite implémentées dans Forge3D. Dans le cas du PVA et du silicone S1, la caractérisation s'est faite pour différentes températures.

### 3.2.2 Rhéologie du PVA

#### 3.2.2.1 *Comportement sous cisaillement du PVA*

Le PVA a été étudié sous cisaillement à différentes températures variant de 30°C à 80°C. L'échantillon a été changé à chaque température testée.

La *Figure 3-2* présente les courbes du comportement du PVA sous cisaillement à ces différentes températures. A 30°C, température à laquelle se trouve le bain de trempe, le comportement observé est quasi-newtonien. Cependant, lorsque la température augmente, le caractère newtonien se perd pour atteindre le comportement d'un fluide pseudo-plastique. Nous verrons par la suite que la présence d'agrégat de silice dans le PVA joue un rôle important sur ce changement de comportement.

Lors de l'immersion du moule à une vitesse comprise entre 1 et 20 mm/s, le taux de cisaillement dans l'épaisseur est compris entre 1 et 10 s<sup>-1</sup>. Pour ces valeurs de taux de cisaillement, les courbes d'écoulement du PVA se situent au niveau du plateau newtonien. Lors de la modélisation, son comportement sera alors décrit comme un fluide newtonien dont les valeurs des viscosités sont données dans le *Tableau 3-1*. Le paramètre à prendre en compte également est l'évolution de cette viscosité en fonction de la température qui est présentée dans le paragraphe 3.2.2.2.

Température [°C]	Viscosité [Pa/s]
30	0,40
40	0,31
50	0,23
60	0,19
70	0,16
80	0,14

**Tableau 3-1 : Viscosité des solutions de PVA lors des plateaux newtoniens en fonction de la température (à une cisaillement de 1s<sup>-1</sup>)**

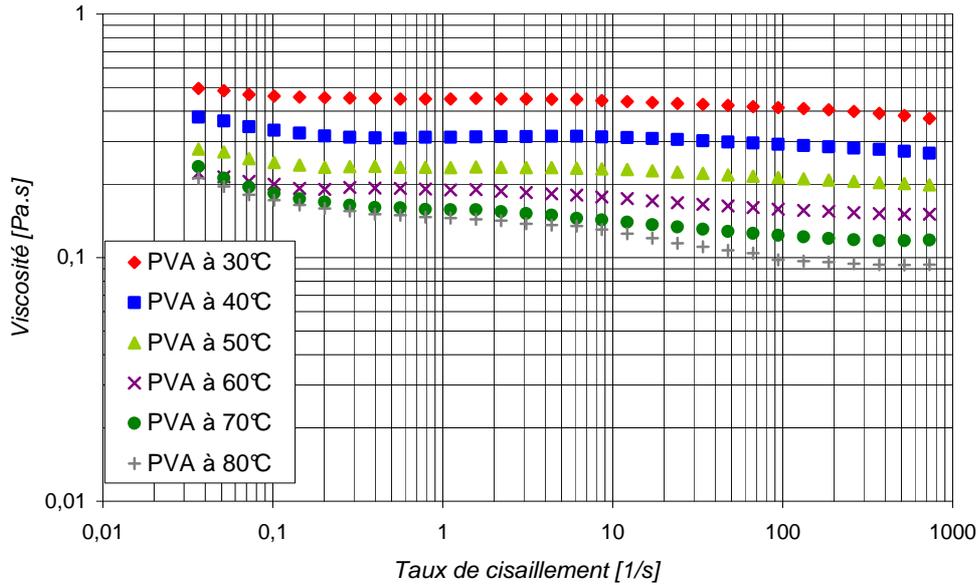


Figure 3-2 : Viscosité en fonction du taux de cisaillement pour une solution de PVA

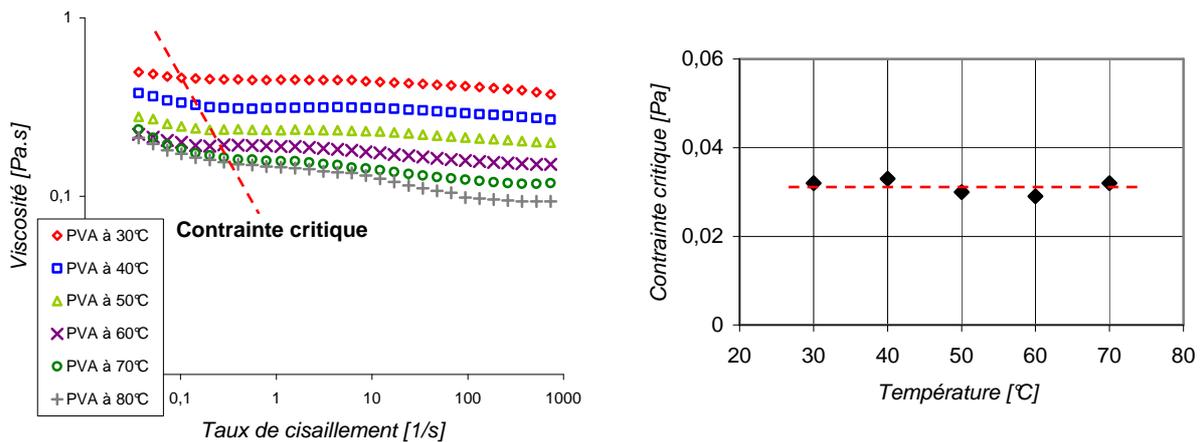


Figure 3-3 : Contrainte critique en fonction de la température

Nous pouvons remarquer sur la *Figure 3-2* qu'à faible taux de cisaillement, il y a une remontée de la viscosité. Ceci peut provenir d'une organisation des agrégats de silices qui se désorganiserait sous écoulement. Le tracé de la contrainte à laquelle le plateau newtonien commence, *Figure 3-3*, montre que celle-ci est constante. Ce résultat suggère donc l'existence d'une structure qui se casse à une contrainte de 0,02-0,03 Pa.

### 3.2.2.2 Influence de la température sur la viscosité

Comme nous venons de le voir, le PVA présente un comportement newtonien dans la gamme de cisaillement à laquelle se déroule le trempage ; le paramètre qui jouera donc un rôle sur la viscosité est la température. La relation classique exprimant l'évolution de la

viscosité en fonction de la température loin d'une zone vitreuse est la loi d'Arrhenius dont l'expression est la suivante :

$$\mu = \mu_0 \cdot \exp\left(\frac{E_a}{R_g} \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}}\right)\right) \quad \text{Eq. 3-1}$$

où  $T$  est la température,  $T_{ref}$  la température de référence valant dans ici  $27^\circ\text{C}$ ,  $\mu_0$  la viscosité à la température de référence  $T_{ref}$  telle que  $\mu_0 = 0,44\text{Pa.s}$ , et  $R_g$  la constante des gaz parfaits.

A partir des *Figures 3-4* et *3-5* est calculée l'énergie d'activation  $E_a = 20,5\text{ kJ.mol}^{-1}$ .

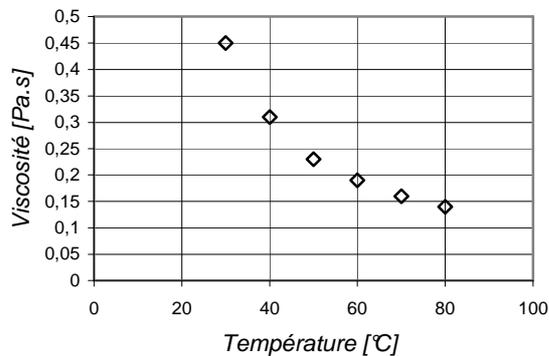


Figure 3-4 : Viscosité en fonction de la température

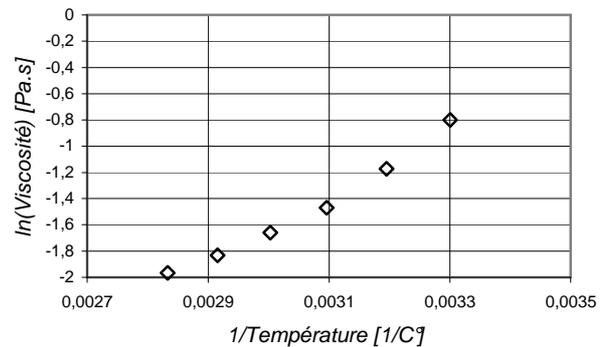


Figure 3-5 : Log de la viscosité en fonction de l'inverse de la température

### 3.2.3 Rhéologie des silicones

#### 3.2.3.1 *Comportement sous cisaillement*

Toutes les solutions de silicone présentent le même profil de courbes de viscosité en fonction du cisaillement (*Figure 3-6*) ; le silicone S2 a une plus faible viscosité. Les trois échantillons ont un comportement pseudo-plastique.

Le comportement des silicones peut être approximé à l'aide d'une loi puissance, par exemple :

$$\mu(\dot{\gamma}, T) = \mu_0(T) \cdot \dot{\gamma}^{m-1} \quad \text{Eq. 3-2}$$

où  $m$  est l'indice d'écoulement ou indice de pseudoplasticité.  $m$  est sans unité et est caractéristique du matériau. Il vaut 1 pour un fluide newtonien et 0 pour un rigide plastique.  $\mu_0$  est la consistance du matériau.

Cette loi relie la viscosité à une puissance du taux de cisaillement et permet de découpler l'effet de la température et du cisaillement. On trouve pour les différents silicones les lois suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} S1: \mu = 1,705 \dot{\gamma}^{-0,078} \\ S2: \mu = 0,870 \dot{\gamma}^{-0,092} \\ S3: \mu = 1,816 \dot{\gamma}^{-0,089} \end{array} \right. \quad \text{Eq. 3-3}$$

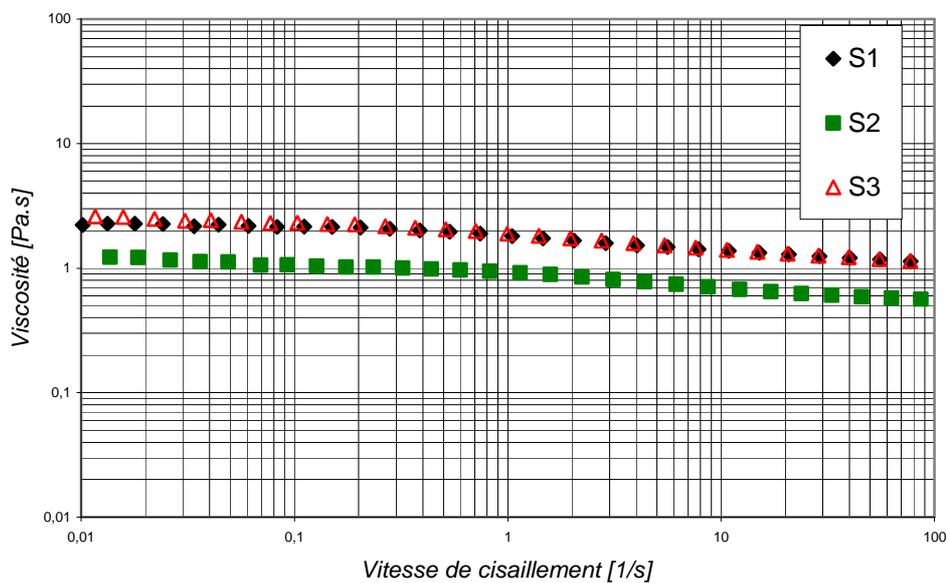


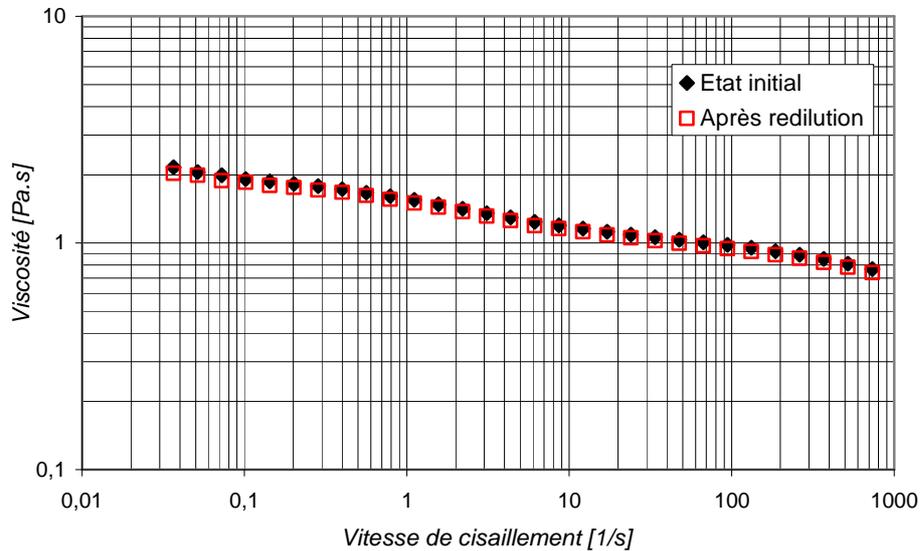
Figure 3-6 : Ecoulement sous cisaillement des silicones à température ambiante

### 3.2.3.2 Influence de la dilution

Lors du trempage des implants, pour ne pas avoir de pertes, la matière s'écoulant le long du moule est récupérée pour être ensuite mélangé à nouveau dans les bains de trempage. Le temps entre la récupération de ce surplus de silicone et sa réutilisation peut être de plusieurs heures ce qui conduit à une certaine évaporation du xylène. Le résultat est que le produit récupéré est beaucoup plus visqueux, il est donc nécessaire de le diluer dans le xylène, pour retrouver la même viscosité qu'initialement. Se pose alors le problème de l'influence de cette étape de récupération et de dilution sur la rhéologie des silicones.

Pour voir si cette opération de mélange ne modifiait pas la trempage, une étude en rhéologie a été réalisée. Une certaine quantité de silicone S1 est laissée dans une coupelle à température ambiante sous hotte pendant 3 heures afin de laisser évaporer du solvant (xylène). Ce qui est obtenu après évaporation est dilué avec du xylène (le poids de xylène ajouté correspond au point évaporé) et agité à faible vitesse. Une mesure de viscosité est réalisée sur ce mélange

puis comparée à une mesure faite avant évaporation. Le résultat est donné *Figure 3-7* : la dilution à l'aide du xylène d'un échantillon concentré ne modifie pas le comportement des silicones sous cisaillement.



**Figure 3-7: Viscosité en fonction de la vitesse de cisaillement pour le S1 avant et après dilution**

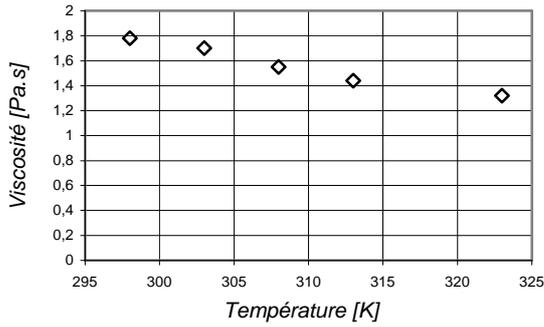
### 3.2.3.3 Influence de la température sur la viscosité

Le trempage dans le cas des implants mammaires se fait à la température ambiante de la pièce de travail, qui varie entre 27 et 33°C. L'intérêt de la détermination de la loi d'Arrhenius est de voir si cette légère variation de température peut avoir ou non une influence sur la rhéologie des silicones.

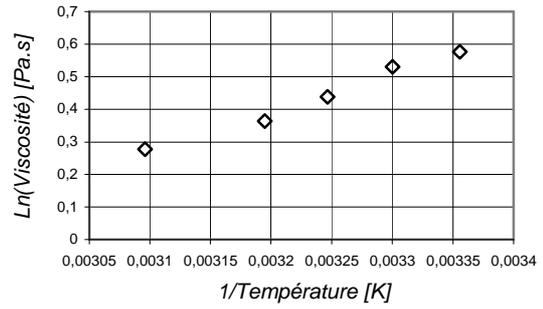
La loi d'Arrhenius trouvée pour le silicone S1, déterminée à l'aide des *Figures 3-8* et *3-9*, est donnée par l'expression suivante :

$$\mu = 1,73 \cdot \exp\left(\frac{E_a}{R_g} \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}}\right)\right) \quad \text{Eq. 3-5}$$

avec une énergie d'activation de  $E_a = 10 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .



**Figure 3-8 : Viscosité en fonction de la température pour un taux de cisaillement de  $1s^{-1}$**

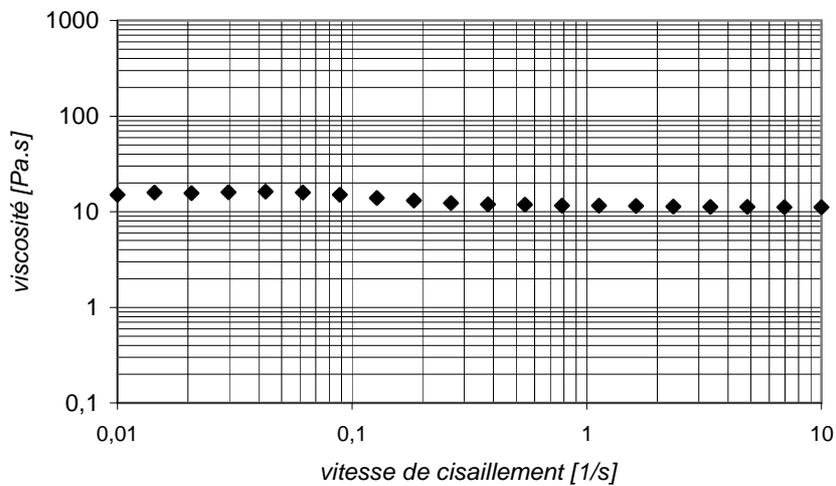


**Figure 3-9 : Log de la viscosité en fonction de l'inverse de la température**

A 27 °C la viscosité de S1 est de 1,73 Pa.s et à 33°C elle est de 1,60 Pa.s. La différence peut être considérée comme négligeable.

### 3.2.4 Rhéologie du miel

La viscosité du miel a été mesurée en cisaillement simple. Son comportement est newtonien avec une viscosité de 13 Pa.s (*Figure 3-10*).



**Figure 3-10 : Mesure sous cisaillement de la viscosité du miel**

### **3.3 Influence de la silice sur le comportement des matériaux**

#### **3.3.1 La silice dans le PVA**

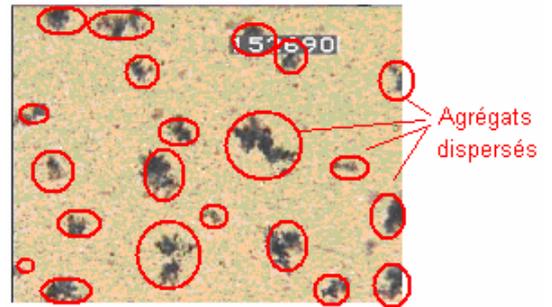
La silice dans le PVA est présente à un taux inférieur à 1%. Sachant que les charges de silices modifient la rhéologie d'une formulation, nous avons cherché à déterminer l'influence de cette charge sur le comportement du PVA sous cisaillement. Le CEMEF dispose d'un rhéomètre optique contra-rotatif qui nous a permis de suivre par microscopie optique le comportement des agrégats de silice contenu dans notre solution sous un cisaillement de taux croissant. L'ensemble des photographies est montré sur la *Figure 3-10* et le lien entre ces observations et les résultats en viscosimétrie est donné *Figure 3-11*.

A faible taux de cisaillement, nous avons observé précédemment que les courbes d'écoulement n'étaient pas linéaires et qu'à mesure qu'augmentait la température, cette zone de non-linéarité augmentait. L'état microscopique durant cette phase n'est pas observable au rhéomètre optique car lors de la mise en position des plateaux, la force exercée par ces derniers conduit à une contrainte supérieure à la contrainte critique ce qui détruit l'état dans lequel se trouve la solution au repos. Nous supposons que l'état dans lequel se trouve la silice durant cette étape est sous forme d'un réseau d'agrégats. Cette hypothèse sera confirmée par la suite car nous avons observé la reconstruction du réseau au repos.

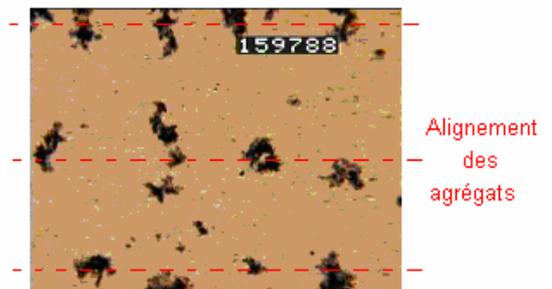
Lorsque la contrainte critique est atteinte, la viscosité du PVA devient indépendante du taux de cisaillement. En fait, les observations (*Figure 3-10-A*) montre qu'au plateau newtonien, la silice se trouve sous forme d'agrégats dispersés de taille variable. A mesure qu'augmente le cisaillement, on constate l'arrachement de petits amas de silice à partir des plus gros : la solution est alors plus finement dispersée.

A fort taux de cisaillement ( $10 \text{ s}^{-1}$ ), le comportement newtonien s'arrête et on retrouve des courbes non-linéaires avec une pente négative. On observe alors que les agrégats et les particules de silice se sont alignés dans le sens de l'écoulement (*Figure 3-10-B*).

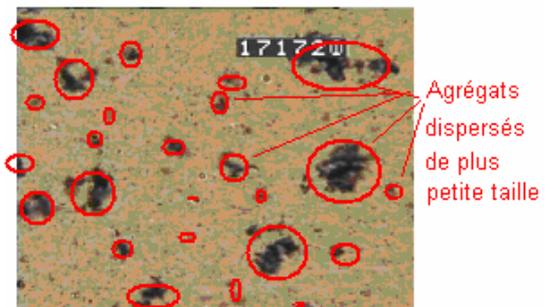
A  $500 \text{ s}^{-1}$ , la solution de PVA est constituée de petits agrégats de silice bien dispersés (*Figure 3-10-C*). Si on observe l'échantillon au repos pendant quelques minutes, on constate que ces agrégats ont tendance à se rapprocher (*Figure 3-10-D*) pour reformer ainsi petit à petit de plus gros agrégats.



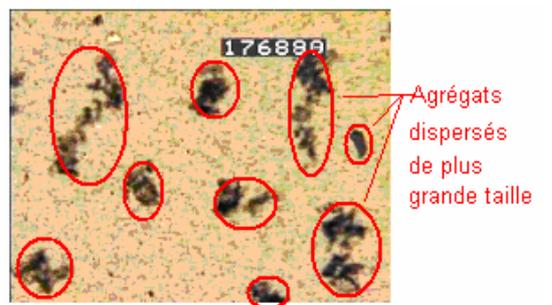
A/ Cisaillement nul



B/ Cisaillement =  $10 \text{ s}^{-1}$



C/ Cisaillement nul tout de suite après fort cisaillement



D/ Cisaillement nul après fort cisaillement

Figure 3-10 : Observation du comportement de la silice sous rhéo-optique

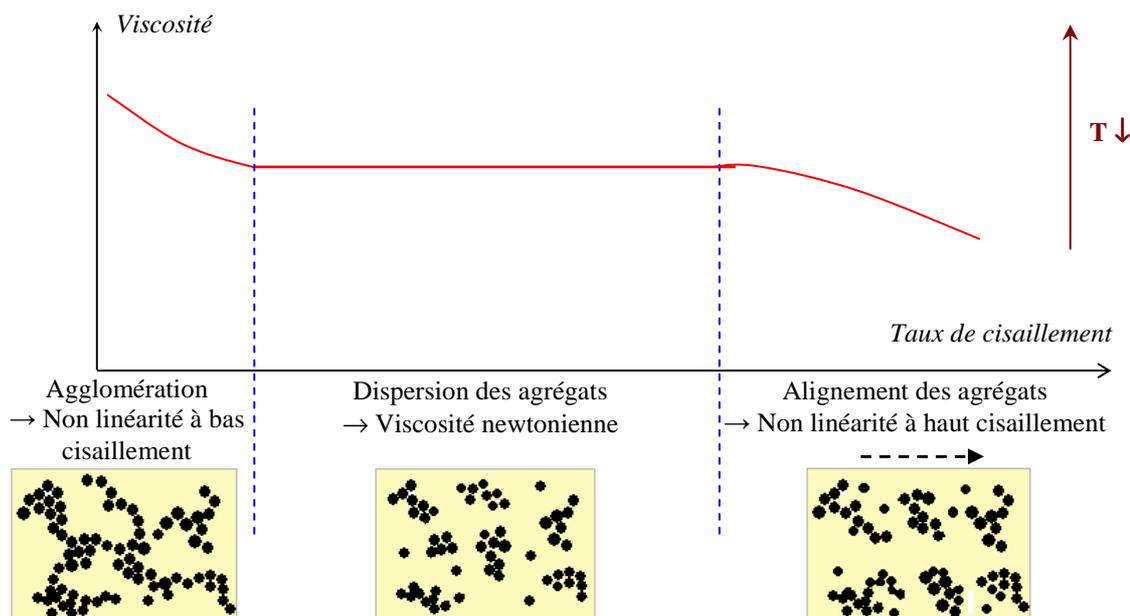


Figure 3-11 : Schéma du lien entre les courbes d'écoulement et le comportement de la silice observé

Pour confirmer que l'arrangement des charges de silice est bien à l'origine du comportement à seuil du PVA, une solution sans silice a été testée en viscosimétrie dans les mêmes conditions. La Figure 3-12 présente les résultats obtenus à différentes températures. La viscosité observée est proche de celle de l'eau, ce qui correspond à la limite inférieure de mesure pour le rhéomètre employé. Ceci explique pourquoi nous n'avons obtenu des résultats cohérents que pour une petite plage de taux de cisaillement (entre 1 et 100  $s^{-1}$ ). Cependant, nous pouvons considérer le comportement de la solution de PVA sans silice comme newtonienne et donc qu'elle ne présente pas le même type de comportement à seuil que celle avec silice.

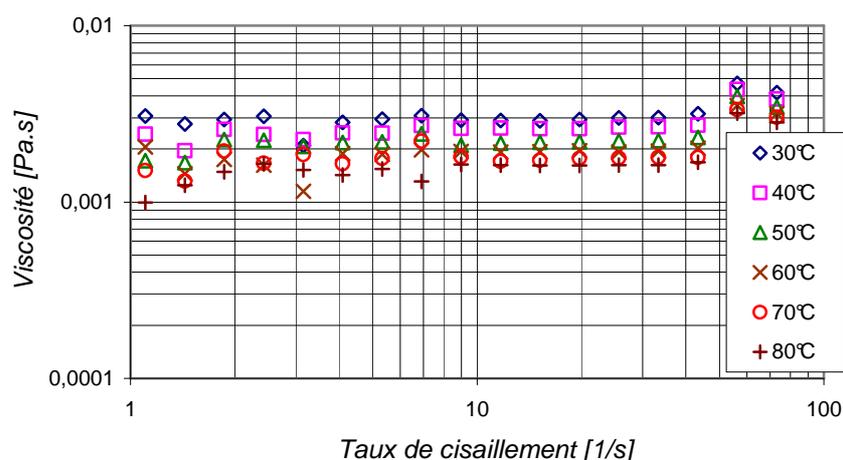


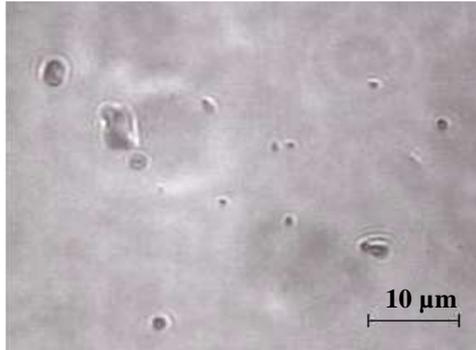
Figure 3-12 : Viscosité en fonction du taux de cisaillement pour une solution de PVA sans silice

La manière avec laquelle s'organisent les amas de silice dans le PVA a une grande influence sur le comportement du PVA sous cisaillement. Ceci n'est vraiment sensible qu'à

bas (réseau d'agrégats) et très haut (alignement d'agrégats) taux de cisaillement, ce qui n'est pas pertinent pour notre modélisation, qui ne considèrera que la zone newtonienne.

### 3.3.2 La silice dans les silicones

Les silicones présentent un très faible pourcentage de silice sous forme d'agrégats dispersés très irrégulièrement comme le montre la *Figure 3-13*. Leurs diamètres sont de tailles variables : de 1 à 7  $\mu\text{m}$ .



**Figure 3-13 : Photographie des agglomérats de silices dans le S1**  
**Photographie réalisée au microscope optique METALLUX 3 (LEITZ) à température ambiante**

Comme le pourcentage en silice est très faible, sa structuration ne joue pas un rôle majeur sur le comportement des silicones sous cisaillement. Cependant, un point a dû être vérifié dans le procédé industriel de trempage : lors du trempage, les suspensions de silicones sont entreposées dans de grandes cuves sans agitation pendant plusieurs heures. Il fallait donc être sûr que les amas de silice ne sédimentent pas et que donc les implants obtenus au début et à la fin de la journée ont la même composition. Pour cela il a été calculé la vitesse de sédimentation à l'aide de la formule suivante [Cabane] :

$$u_s = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\mu_{\text{fluide}}} \cdot \left( (\rho_{\text{fluide}} - \rho_{\text{solide}}) \cdot g \cdot d_a^2 \right) \quad \text{Eq. 3-4}$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $\mu_{\text{fluide}}$  la viscosité du fluide,  $g$  l'accélération et  $d_a$  le diamètre des agglomérats considérés comme sphériques.

Dans le cas d'une particule de diamètre de 7  $\mu\text{m}$ , la vitesse de sédimentation est de  $u_s^{d=7\mu\text{m}} = 0,16 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cette vitesse étant très faible, la sédimentation est donc négligeable.

Pour confirmer le résultat de ce calcul, il a été mesuré la différence d'extrait sec et de viscosité entre la surface et le fond de la cuve. La moyenne de l'extrait sec en surface est de 37,55% alors qu'au fond de la cuve elle est de 37,63% soit une différence de 0,08% ; la moyenne de viscosité en surface est de 1,32 Pa.s alors qu'au fond de la cuve elle est de 1,33 Pa.s soit une différence de 0,01 Pa.s. Dans les deux cas, la différence peut être considérée comme insignifiante ce qui confirme qu'il n'y a pas de sédimentation des agrégats de silice.

### 3.4 Mesure des tensions de surface

#### 3.4.1 Méthodes et matériel

Lors du trempage, deux paramètres physiques clés sont à prendre en compte en plus de la viscosité : la tension de surface entre le liquide et l'air et le type de contact entre le moule et le liquide. Ce paragraphe a pour but de déterminer ces deux facteurs. Les mesures ont été faites à l'aide d'un tensiomètre *DSA1100 Krüss*.

##### 3.4.1.1 *Méthode de la goutte pendante*

Pour calculer la tension de surface entre un liquide et l'air, nous avons choisi d'employer la méthode de la goutte pendante. Cette méthode se base sur l'équilibre entre les forces de gravité et les forces interfaciales. Les gouttes sont formées à l'extrémité d'un capillaire (aiguille) à l'air ambiant. La différence de pression entre deux milieux, dont la surface de séparation est incurvée, est décrite par la loi de Laplace :

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \sigma \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{Eq. 3-5}$$

où  $P_1$  est la pression du côté convexe,  $P_2$  celle du côté concave,  $\sigma$  la tension de surface,  $R_1$  et  $R_2$  les deux rayons de courbure principaux de la surface au point considéré. Dans le cas sphérique, ces deux rayons :  $R_1 = R_2 = R$ . La *Figure 3-14* présente un schéma de la goutte pendante.

Quand une goutte pendante atteint l'équilibre hydrodynamique et mécanique, gouverné uniquement par la force gravitationnelle et la tension superficielle, la différence de pression à l'interface peut s'exprimer linéairement en fonction de la hauteur de la goutte :

$$\Delta P = \Delta P_0 + \Delta \rho g z \quad \text{Eq. 3-6}$$

où  $\Delta P_0$  est la différence de pression en un plan sélectionné,  $\Delta \rho$  la différence de masse volumique entre les deux fluides et  $z$  la hauteur depuis le plan sélectionné.

La combinaison des équations 3-5 et 3-6 permet d'écrire l'équation 3-7.

$$\sigma \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\sigma}{R_0} + \Delta \rho g z \quad \text{Eq. 3-7}$$

où  $R_0$  est le rayon de courbure au sommet de la goutte où  $R_0 = R_1 = R_2$ . Les rayons de courbure peuvent être calculés à l'aide ces considérations géométriques :

$$R_1 = \frac{\left\{ 1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 \right\}^{3/2}}{\frac{d^2 z}{dx^2}} \quad \text{Eq. 3-8}$$

$$\sin \Phi = \frac{\frac{dz}{dx}}{\left\{ 1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 \right\}^{1/2}} \quad \text{Eq. 3-9}$$

$$R_2 = \frac{x}{\sin \Phi} \quad \text{Eq. 3-10}$$

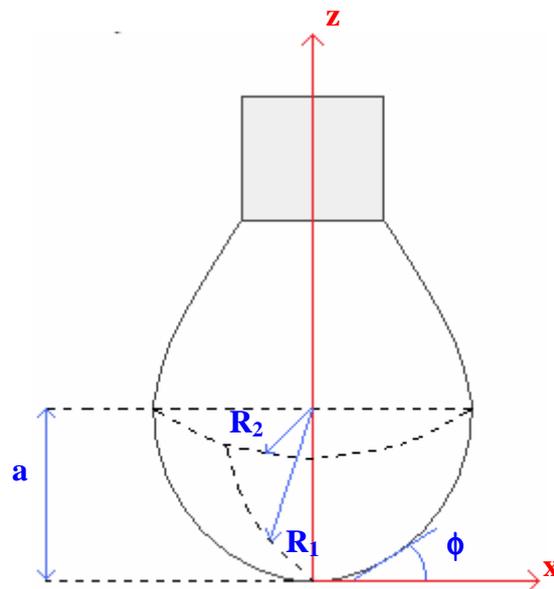


Figure 3-14 : Schéma et géométrie d'une goutte pendante

A partir de là, il est possible de réécrire l'équation de Young-Laplace pour une goutte pendante axisymétrique à l'aide d'un système de trois équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos \Phi \\ \frac{dz}{ds} = \sin \Phi \\ \frac{d\Phi}{ds} = \frac{2}{R_0} + \left( \frac{\Delta \rho g}{\sigma} \right) z - \frac{\sin \Phi}{x} \end{cases} \quad \text{Eq. 3-11}$$

Ces équations différentielles sont fonction de  $s$ , longueur de l'arc mesurée le long du profil de la goutte. A cela vient s'ajouter des conditions aux limites :

$$x(0) = z(0) = \Phi(0) = 0 \quad \text{Eq. 3-12}$$

Le système différentiel peut être réécrit ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi(1) = \frac{d\bar{x}}{ds} = \cos \Phi \\ \chi(2) = \frac{d\bar{z}}{ds} = \sin \Phi \\ \chi(3) = \frac{d\bar{\Phi}}{ds} = \beta \bar{z} = \frac{\sin \Phi}{\bar{x}} \end{array} \right. \quad \text{Eq. 3-13}$$

où  $\bar{x}$ ,  $\bar{z}$  et  $\bar{s}$  sont des variables adimensionnelles représentant respectivement  $x$ ,  $z$  et  $s$  divisées par  $R_0$ . Le paramètre  $Y$  est la fonction de forme de la goutte (nombre de Bond), il est négatif pour une goutte pendante, positif pour une goutte posée et nul pour une sphère parfaite. Il est obtenu à partir de l'expression suivante :

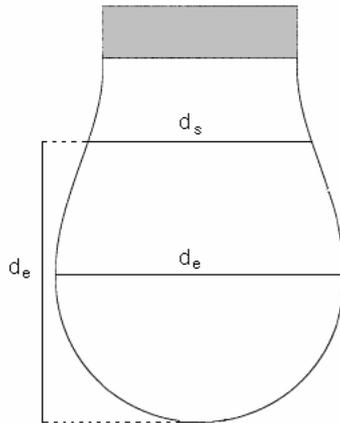
$$Y = \frac{2 + \Delta\rho g R_0^2}{\sigma} \quad \text{Eq. 3-14}$$

Comme aucune solution analytique n'est possible, on peut déterminer les valeurs de  $\beta$  et  $R_0$  à partir d'une méthode itérative basée sur des données expérimentales. Dans un premier temps on écrit l'entité  $\varphi$  dépendante des dimensions de la goutte :

$$\varphi = \frac{d_s}{d_e} \quad \text{Eq. 3-15}$$

où  $d_s$  et  $d_e$  sont des diamètres caractéristiques d'une goutte pendante décrits *Figure 3-15*. Dans un deuxième temps un autre facteur est introduit, le rapport d'homothétie  $H_o$  défini par :

$$H_o = -\varphi \left( \frac{d_e}{R_0} \right)^2 \quad \text{Eq. 3-16}$$



**Figure 3-15 : Profil et dimensions d'une goutte pendante**

L'expression donnant la tension de surface entre un liquide et l'air est défini par l'expression suivante :

$$\sigma_{\text{liquide/air}} = \frac{\Delta\rho \cdot g \cdot d_e^2}{H_o} \quad \text{Eq. 3-17}$$

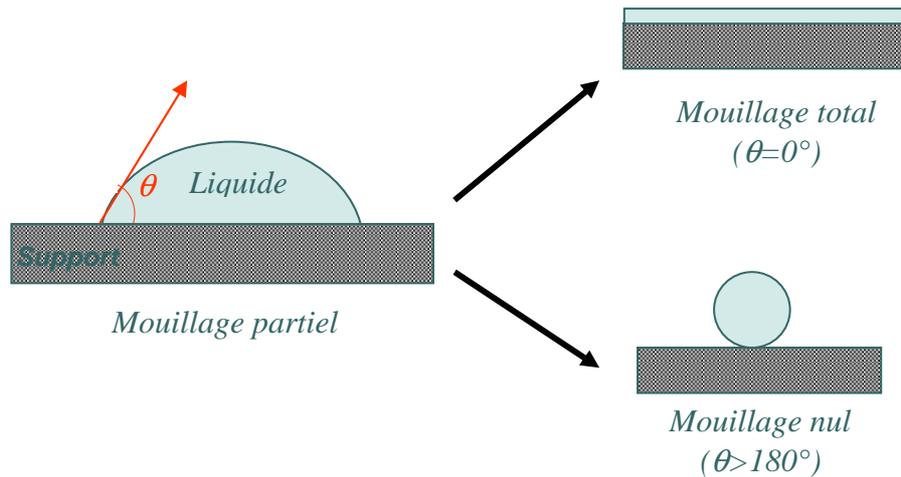
Les tensions superficielles des liquides sont d'ordinaire égales à plusieurs dizaines de mJ/m<sup>2</sup>.

#### 3.4.1.2 Méthode de la goutte posée

Pour déterminer le type de contact entre le moule et le liquide, nous avons utilisé le principe de la goutte posée. Cette méthode permet de déterminer l'aptitude appelée mouillabilité, que possède un liquide à occuper la plus grande surface possible lorsqu'on le dispose sur une surface solide.

Le principe de la mesure consiste à photographier une goutte posée sur une surface non mouillée. La forme de la goutte est déterminée par l'équilibre entre les forces gravitationnelles et les forces capillaires : elle dépend donc de la tension de surface  $\sigma$ , des dimensions de la goutte et de la masse spécifique du liquide  $\rho$ . L'angle  $\theta$  formé (*Figure 3-16*) sera d'autant plus petit que le liquide se répand. La valeur de l'angle de contact  $\theta$  détermine la capacité de mouillabilité d'un liquide et on distingue quatre cas :

- Il est dit qu'un liquide est parfaitement mouillant quand  $\theta = 0^\circ$
- Le liquide est dit mouillant quand  $0^\circ < \theta < 90^\circ$
- Le liquide est non mouillant quand  $90^\circ < \theta < 180^\circ$
- Le liquide est parfaitement non mouillant quand  $\theta = 180^\circ$



**Figure 3-16 : Représentation schématique d'une goutte de liquide posée sur un substrat solide. Le mouillage est caractérisé par un angle de contact qui est fixé par les interactions entre les surfaces**

L'énergie de surface résulte des forces d'attraction et de répulsion existantes entre les matériaux présents au voisinage de la zone de séparation de chacune des phases. Cette énergie est représentée par la tension superficielle, La mesure de l'énergie libre de surface d'un solide est déduite de la mesure de l'angle de contact et des tensions superficielles du liquide et du solide avec l'air. La détermination de l'angle de contact permet d'évaluer l'affinité d'une surface vis-à-vis d'un liquide.

Dans le cas du mouillage partiel, la partie mouillée de la surface est délimitée par une ligne de contact où les trois phases se rencontrent : le liquide de la goutte, l'air et la phase du substrat solide. La forme de la goutte et son angle de contact sont fixées par le paramètre d'étalement  $E$  défini comme :

$$E = \sigma_{\text{solide/air}} - \sigma_{\text{liquide/air}} - \sigma_{\text{solide/liquide}} \quad \text{Eq. 3-18}$$

où  $\sigma_{\text{solide/air}}$ ,  $\sigma_{\text{liquide/air}}$  et  $\sigma_{\text{solide/liquide}}$  sont respectivement les tensions de surface solide/air, liquide/air et solide/liquide.

L'équilibre d'une goutte de liquide déposée sur une surface est décrit par l'équation de Young [Darque03]:

$$\sigma_{\text{liquide/air}} \cdot \cos \theta + \sigma_{\text{solide/liquide}} = \sigma_{\text{solide/air}} \quad \text{Eq. 3-19}$$

Le paramètre que nous allons déterminer est l'angle  $\theta$  qui va donc nous permettre de déduire quel type de contact existe entre nos supports et nos fluides.

### 3.4.2 Mesure de la tension liquide / air

La mesure de la tension de surface liquide / air a été effectuée sur trois fluides à température ambiante : le PVA, le silicone S1 et le miel. La *Figure 3-17* montre le cas de la

mesure pour le PVA. Il est important de bien distinguer les contours de la goutte pour avoir une bonne précision de la mesure finale. La mesure est faite en statique car bien que les solvants employés (l'eau et le xylène) soient volatiles les pertes de matière par évaporation durant le temps de mesure sont négligeables (voir paragraphe 3.5.3.1).

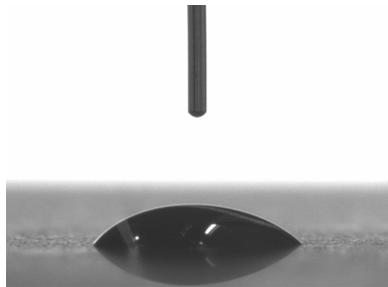


**Figure 3-17 : Photographie d'une goutte pendante de PVA permettant de mesurer la tension de surface liquide / air**

Chaque mesure a été réalisée 10 fois. Pour le PVA, la valeur trouvée est de  $\sigma_{PVA/air} = 47,6 \text{ mN} / \text{m}$  ; le silicone S1 a pour tension de surface  $\sigma_{S1/air} = 20,5 \text{ mN} / \text{m}$ . Enfin, le miel présente comme valeur  $\sigma_{miel/air} = 69,8 \text{ mN} / \text{m}$ .

### 3.4.3 Contact fluide – support

La détermination du type de contact entre le moule et le fluide se fait à l'aide de la mesure de l'angle de contact.



**Figure 3-19 : Photographie d'une goutte posée de PVA sur le néoprène**

L'angle de mouillage obtenu dans le cas du contact du PVA sur la céramique recouverte de néoprène à 80°C est de 87°. Or le contact entre le néoprène et le PVA est amélioré lors du procédé industriel à l'aide d'un primaire d'adhésion. L'angle de contact devient alors 61°. Le mélange d'adhésion remplit donc bien sa fonction et on peut considérer que le contact entre le support et le PVA est « collant ».

L'angle de contact a également été mesuré entre le silicone S1 et le moule en plastique. L'angle de mouillage obtenu est de 54,3°. De même que dans le cas du PVA, l'angle de contact étant inférieur à 90°, le contact entre le moule et le silicone S1 peut être considéré comme « collant ».

Le contact entre le moule et le fluide dans les cas traités sera modélisé à l'aide d'un contact collant sous Forge3.

### 3.5 Essais de trempage expérimentaux

Pour valider le modèle numérique développé sous Forge3, il est nécessaire de réaliser des essais expérimentaux modèles.

#### 3.5.1 Développement d'un appareil- prototype expérimental de trempage

La machine de trempage employée (*Figures 3-19 et 3-20*) a été conçue par le bureau d'étude du Cemef et réalisée au sein de ses ateliers. Elle permet de descendre dans un fluide maintenu à une certaine température, un moule de forme cylindrique et de le remonter. Celui-ci aura alors une certaine épaisseur du fluide sur sa surface.

Le mouvement réalisé par cette machine de trempage permet une descente suivie d'une remontée verticale à une vitesse constante comprise entre 1 et 10 mm/s et sur une distance de 300 mm maximum. Il est possible après la remontée verticale de réaliser un mouvement de rotation de 180° selon un axe perpendiculaire au mouvement vertical. Le temps de séjour du moule dans le bain peut être variable à souhait. Le bain de trempage n'est pas alimenté en fluide au cours du trempage : le volume du liquide est donc constant au cours du temps et équivaut à 3dl.

Pour réaliser du trempage en température, il est possible de placer sous le bain de trempage une plaque chauffante permettant son maintien en température. Le chauffage du moule se fait en étuve avant le trempage puis est placé sur la machine de trempage à température ambiante.

La conception de ce prototype de treppage a été indispensable au déroulement de cette thèse pour valider les développements numériques et pour une meilleure compréhension du précédé de treppage.

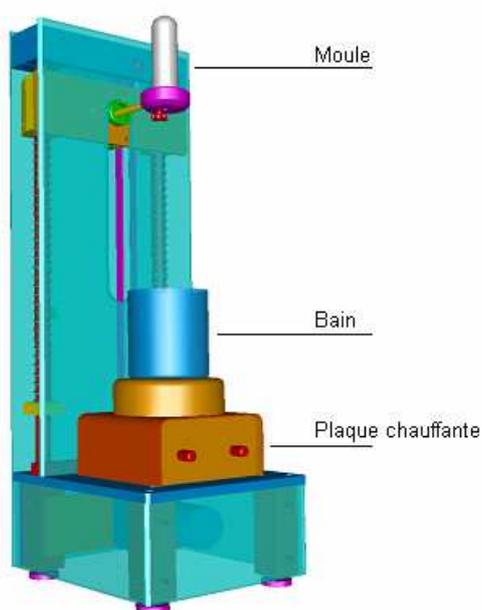


Figure 3-19 : Schéma de la machine de treppage



Figure 3-20 : Photo de la machine de treppage

### 3.5.2 Mesure des épaisseurs

Le paramètre-clef de cette étude est la prédiction de l'épaisseur extraite lors de remontée, et sa variation autour et le long du moule. La méthode pour déterminer l'épaisseur extraite est basée sur l'analyse d'image. Une photographie à l'aide d'un appareil Nikon D100 avec un objectif macroscopique de 100 mm du moule est prise en contre jour avant et après trempage ; les deux clichés sont ensuite comparés pour calculer l'épaisseur de fluide extrait. Le contre jour se fait en plaçant un éclairage derrière le moule et en diffusant la lumière à l'aide d'une feuille de papier calque. L'avantage de cette méthode, en plus d'être précise, rapide et facile, est qu'il est possible de déterminer l'épaisseur à une instant bien précis au cours de la remontée. La photographie est prise après une remontée de 65 mm du moule.

La *Figure 3-21 a/* montre une photographie prise en contre jour du moule seul et la *Figure 3-21 b/* présente l'image du même moule mais après trempage dans du miel. Les mesures ne se font donc pas sur l'ensemble de la circonférence du moule mais uniquement sur deux côtés. Le moule étant cylindrique, nous supposons donc que l'épaisseur, à une même hauteur donnée, est la même tout autour de la circonférence. L'analyse se fait numériquement en établissant une échelle entre nombre de pixels et mm.



**Figure 3-21 : Photographie à contre-jour a/ du moule et b/ du moule après trempage dans le miel**

Pour une meilleure précision, les mesures des épaisseurs expérimentales se font perpendiculairement selon l'axe de symétrie du moule, même dans l'hémisphère inférieur (*Figure 3-22*). Il en est fait de même numériquement.

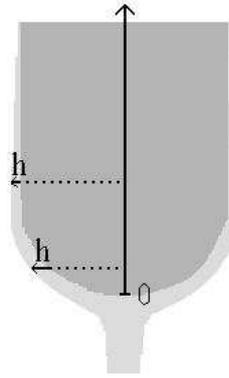


Figure 3-22 : Mesure des épaisseurs

### 3.5.3 Erreurs sur l'épaisseur

Il est important de prendre les photographies en contre jour pour une bonne précision des mesures. Ceci permet une propagation sans réflexion des rayons lumineux : la délimitation des contours de la surface libre est plus facile à obtenir sur une image prise en contre jour que sur une obtenue à l'aide d'éclairage sur les côtés.

Nous avons comparé deux résultats de mesures d'épaisseurs sur exactement le même trempage mais dans deux conditions d'éclairages différentes : le cas où le moule est éclairé en contre jour et celui où il est illuminé à l'aide de deux spots placés de chaque côté.

Les mesures expérimentales sont sources d'erreurs dont il faut tenir compte. Les principales raisons de ces erreurs sont la délimitation de la surface libre et la détermination de l'échelle. La valeur de cette erreur est de l'ordre de 10% : elle a été déterminée à partir des différences d'épaisseurs obtenues entre différents trempage dans les mêmes conditions.

Des erreurs autres que sur les mesures d'épaisseurs peuvent exister. Le réglage de la vitesse en est une source : en effet, cette commande se fait à l'aide d'un bouton que l'on tourne pour obtenir la vitesse désirée mais la graduation n'est pas très précise. La vitesse de 10 mm/s est la valeur butoir du bouton et est donc celle qui conduit à de moins grandes erreurs sur ce paramètre : elle est donc celle choisie pour la comparaison entre l'expérimentation et la modélisation.

### 3.5.4 Influences de paramètres physiques

Un autre intérêt d'effectuer des expériences de trempage avec la machine-prototype en plus de la comparaison avec les résultats numériques est d'étudier l'influence de certains paramètres physiques. Dans un premier temps, nous avons quantifié l'importance de l'évaporation du solvant sur l'épaisseur. Nous avons également étudié l'importance sur l'épaisseur du fluide extrait des variations de vitesse de remontée et de la viscosité.

### 3.5.4.1 Influence de l'évaporation

Les silicones sont en solutions dans un solvant volatil : le xylène. Son évaporation doit donc être un facteur diminuant l'épaisseur au cours du trempage. La mesure de l'influence de ce paramètre est importante pour savoir s'il est nécessaire d'en tenir compte lors de la modélisation numérique.

Pour mesurer l'importance de l'évaporation du xylène, nous avons placé une épaisseur de 0,5 mm de silicone S1 dans une coupelle et nous avons regardé l'évolution du poids de l'ensemble. La variation du poids au cours du temps nous a permis de déterminer l'évolution de l'épaisseur. L'expérience s'est faite à 30°C en étuve sous évacuation d'air (pour ne pas la saturer en xylène). Le temps caractéristique du trempage est de moins de 5 minutes.

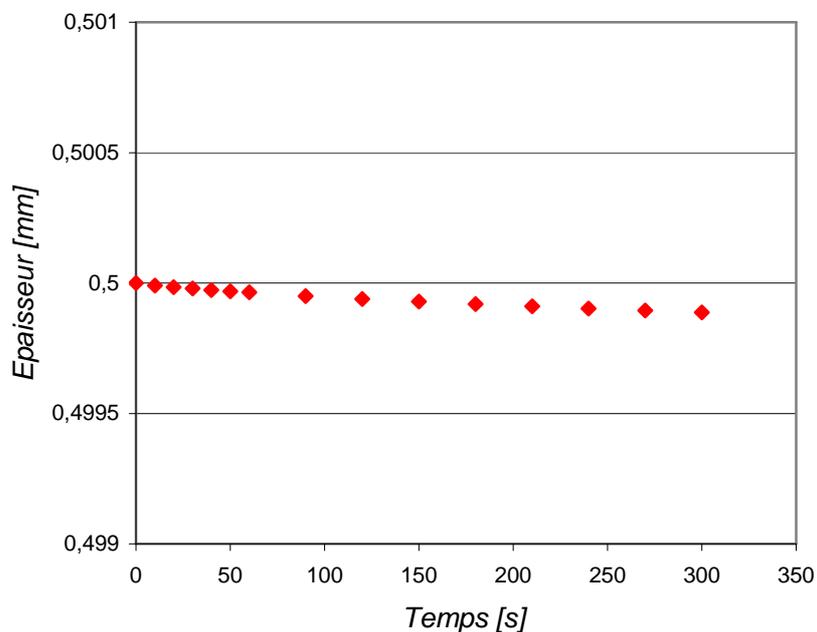


Figure 3-23 : Evolution de l'épaisseur du silicone S1 à 30°C pendant 5 minutes

Comme le montre la *Figure 3-23*, la perte d'épaisseur en 5 minutes est tout à fait négligeable. Nous considérerons donc l'évaporation du solvant comme nulle.

Le PVA, qui est une solution aqueuse, peut également présenter un problème d'évaporation puisque le trempage s'effectue en température. Cependant, même si le moule en céramique est chauffé à 80°C, nous démontrons plus tard que la température d'interface avec le fluide est de 38°C. Par conséquent, comme pour le cas du silicone, nous pouvons négliger l'évaporation.

### 3.5.4.2 Influence de la vitesse de remontée du moule

Un des paramètres physiques influençant l'épaisseur extraite au cours du trempage est la vitesse de remontée du moule. Les *Figures 3-24* et *3-25* présentent les épaisseurs mesurées

pour différentes vitesses de remontée du moule variant de 1 mm/s à 10 mm/s. Le premier constat est que plus la vitesse est grande, plus l'épaisseur extraite est importante. En effet, plus on retire rapidement le moule, moins le fluide a le temps de s'écouler par gravité. La deuxième remarque est que au dessus d'une certaine vitesse, ici 5 mm/s, l'épaisseur reste la même malgré l'augmentation de vitesse. Il est alors possible de supposer que le moule a alors atteint la quantité maximale de matière qu'il puisse « accrocher » et qu'il est saturé.

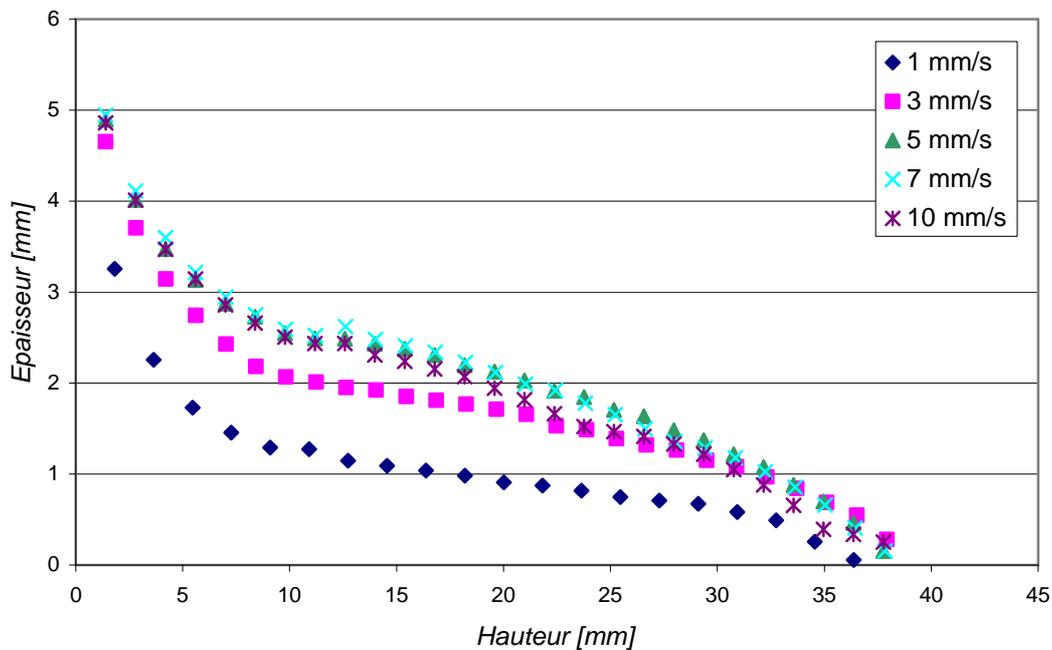


Figure 3-24 : Influence de la vitesse de remontée sur les épaisseurs extraites – cas du miel

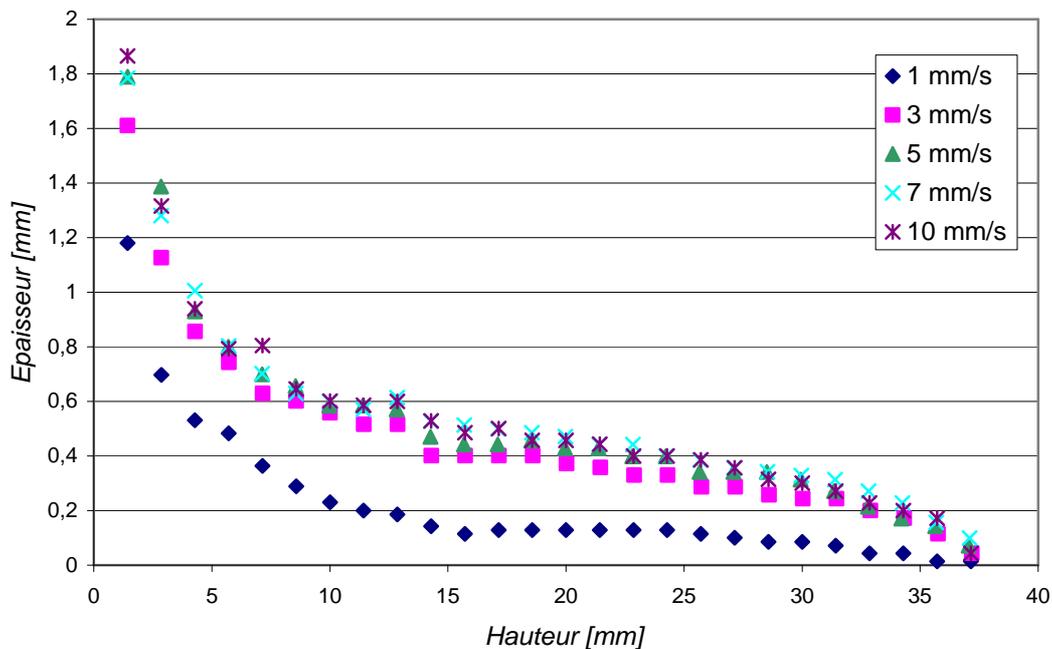


Figure 3-25 : Influence de la vitesse de remontée sur les épaisseurs extraites – cas du PVA

### 3.5.4.3 Influence du bain de trempe

La Figure 3-26 donne les épaisseurs extraites pour les trois fluides étudiés, miel, silicone S1 et PVA, à une vitesse de remontée de 10 mm/s. Les raisons des différences d'épaisseurs entre ce trois liquides sont liées aux différences des paramètres physiques : tension de surface, viscosité et masse volumique.

Le miel est celui présentant la plus grande épaisseur : il s'agit du fluide présentant la plus grande viscosité, la importante masse volumique et la plus grande valeur de tension de surface.

Le silicone S1 et le PVA présentent des épaisseurs similaires. Entre ces deux fluides, sur une gamme de cisaillement de 1 à 10 s<sup>-1</sup>, présente une différence de viscosité avec un facteur 10, le silicone S1 étant le plus visqueux. Le PVA présente une plus grande tension de surface, facteur venant s'opposer aux forces gravitationnelles et réduisant ainsi les pertes de matière ; c'est pourquoi, malgré une viscosité plus forte, le trempage dans le silicone S1 ne présente pas une plus grande épaisseur que le PVA.

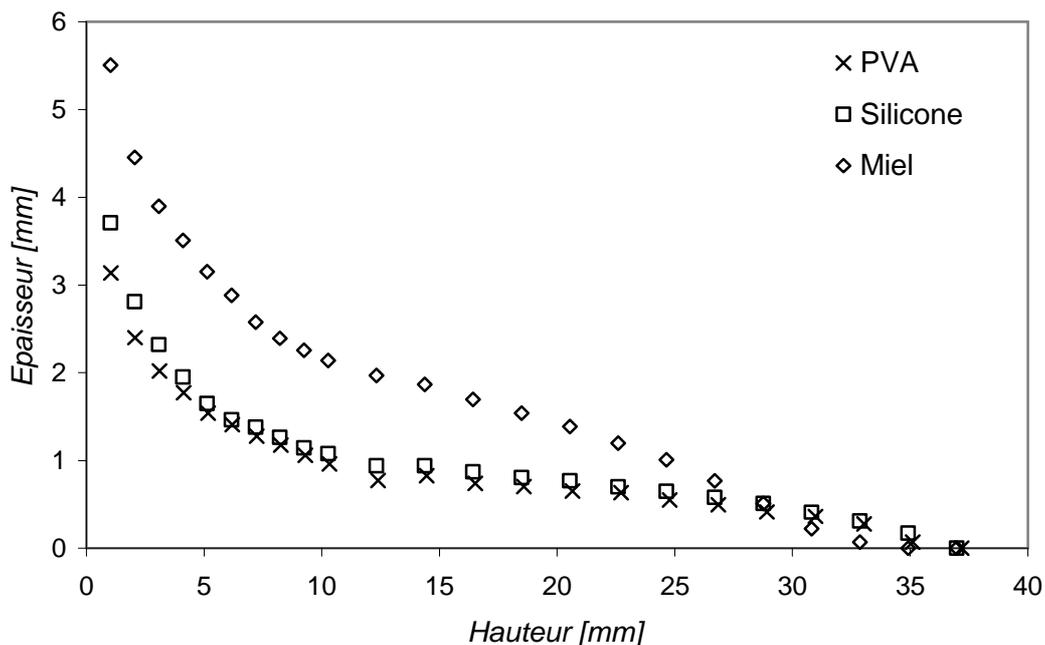
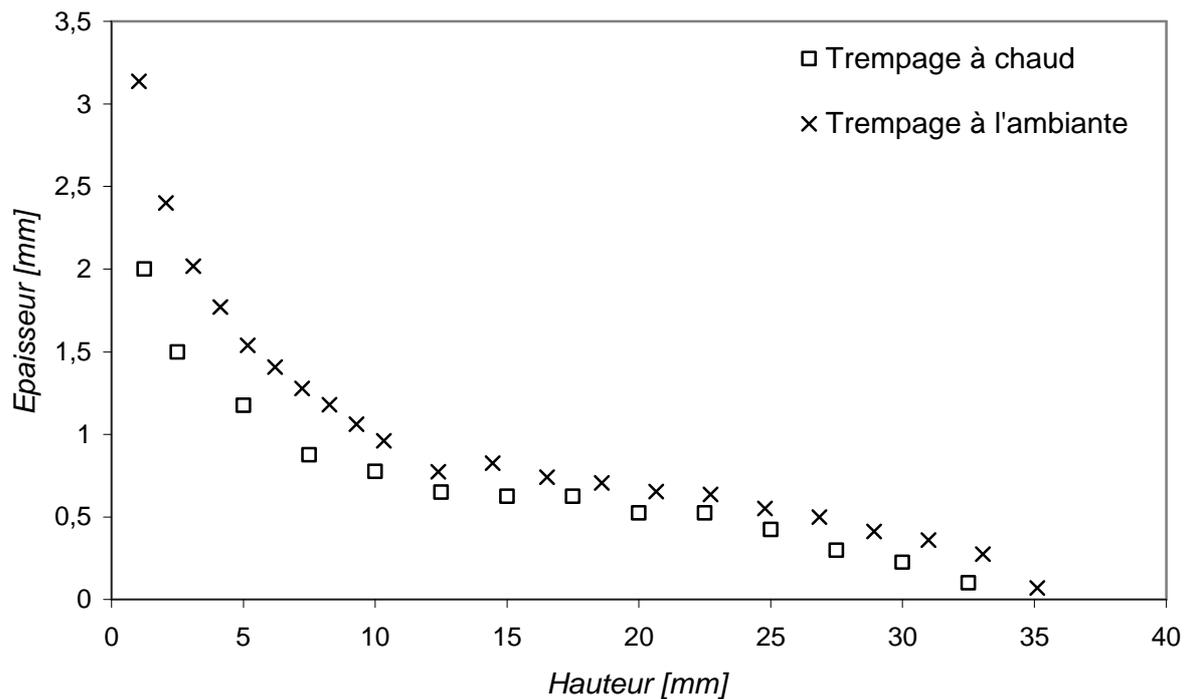


Figure 3-26 : Influence de la rhéologie sur les épaisseurs moyennes extraites à une vitesse de remontée de 10 mm/s

### 3.5.4.4 Trempage à chaud

La mise en forme des gants par trempage est un procédé se réalisant à partir d'un moule et d'un bain chauffé. Le gradient de température n'entraîne pas de solidification ou gélification mais permet une fluidification du PVA.

Nous avons cherché à reproduire les conditions en température du trempage. Le moule est chauffé préalablement à 80°C puis est plongé dans un bain à 30°C. Comme la montre la *Figure 3-27*, l'épaisseur extraite lors d'un trempage avec gradient de température conduit à une épaisseur extraite légèrement plus fine que celle obtenue à l'ambiante. Les différences ne sont pas très grandes car comme nous le montrerons dans le *Chapitre 6*, la température en surface du moule au moment du trempage se stabilise rapidement à 39°C et non plus 80°C. On passe donc d'une viscosité de 0,43 Pa.s à 25°C à une de 0,31 Pa.s à 39°C : la différence est faible ce qui explique le faible écart d'épaisseur entre les deux cas.



**Figure 3-27 : Comparaison des épaisseurs extraites entre trempage à chaud et trempage à l'ambiante**

---

*Ce chapitre expérimental avait pour but d'apporter une meilleure connaissance des procédés et matériaux employés lors des trempages étudiés. Nous avons déterminé les lois de comportement des bains de trempage, leurs tensions de surface avec l'air et le type de contact existant entre le moule et le liquide. Les essais expérimentaux de trempage sur la machine-prototype de trempage conçue et fabriquée au CEMEF nous serviront de références et de points de comparaison avec les résultats numériques.*

---

## **4. VALIDATION DE LA MODELISATION DU PROCEDE DE TREMPAGE**

## **4. VALIDATION DE LA MODELISATION DU PROCEDE DE TREMPAGE**

<b>4.1</b>	<b>Conditions de modélisation 3D par éléments finis du trempage.....</b>	<b>128</b>
4.1.1	Mise en données dans Forge3 .....	128
4.1.1.1	<i>Géométrie et cinétique</i> .....	128
4.1.1.2	<i>Rhéologie du bain</i> .....	130
4.1.2	Sensibilité de l'épaisseur au maillage .....	131
4.1.2.1	<i>Maillage volumique du bain</i> .....	131
4.1.2.2	<i>Etude de sensibilité de l'épaisseur à la taille de maille</i> .....	133
4.1.2.3	<i>Influence de la taille de maille sur la variation d'épaisseur sur une même circonférence</i> .....	136
<b>4.2</b>	<b>Validation du modèle numérique.....</b>	<b>138</b>
4.2.1	Forme du ménisque .....	138
4.2.1.1	<i>Cas d'un fluide newtonien : comparaison avec le modèle de Tanguy et al</i> .....	138
4.2.1.2	<i>Cas d'un fluide rhéofluidifiant : comparaison avec le modèle de Tanguy et al</i> .....	140
4.2.2	Epaisseurs mesurées .....	143
4.2.2.1	<i>Comparaison avec les modèles théoriques</i> .....	143
4.2.2.2	<i>Comparaison avec l'expérimentation</i> .....	145
4.2.2.2.1	Cas newtonien .....	145
4.2.2.2.2	Cas pseudo plastique .....	146

L'objectif de ce chapitre est de présenter les différents points clés de la mise en données des simulations numériques du trempage sous Forge3 ainsi que la validation des résultats obtenus. Nous aborderons ici le cas de trempage 3D d'un moule à géométrie simple plongé verticalement.

Dans un premier temps, nous présenterons en détail l'ensemble des données permettant la modélisation du trempage sous Forge3 et nous ferons une étude approfondies du maillage qui s'est avéré être un paramètre numérique clé dans le cadre de la modélisation du trempage. La deuxième partie du chapitre sera consacrée à la validation du modèle numérique développé. Nous avons comparé nos résultats à ceux obtenus à l'aide des principales études relatées dans la littérature et à ceux tirés de la série d'expérimentation décrite *Chapitre 3*.

#### **4.1 Conditions de modélisation 3D par éléments finis du trempage**

Nous présentons dans ce paragraphe l'ensemble des conditions de mises en données du problème du trempage. Ces conditions concernent d'une part l'insertion des paramètres physiques tels que la géométrie, la cinétique et la rhéologie du bain et d'autre part les facteurs numériques, et plus particulièrement, le maillage. Le cas traité ici est celui d'un cylindre mais les paramètres (physiques et numériques) fournis sont transposables à d'autres cas de trempage tels que le cas d'une plaque ou encore les cas de moules plus complexes auxquels nous nous intéresserons dans le *Chapitre 5*.

##### **4.1.1 Mise en données dans Forge3**

###### *4.1.1.1 Géométrie et cinétique*

La mise en place et la validation de la simulation ont été réalisées à partir d'un moule à géométrie simple, un cylindre à extrémité inférieure hémisphérique.

Les dimensions du moule cylindrique sont données *Figure 4-1*. Le moule est plongé dans un bain maintenu par une plaque qui peut être utilisée pour le chauffer et/ou le maintenir en température. Ce système particulier étant axisymétrique, il est possible de ramener le problème sur un quart de bain : La *Figure 4-1* montre les périodicités existantes sur cette géométrie. Le choix a été fait de rester dans une description 3D du problème et non 2D axisymétrique afin de permettre de traiter ultérieurement des géométries générales plus complexes.

Le moule est un outil flottant animé par un mouvement vertical de descente et de remontée à vitesse constante. Nous avons considéré que l'étape de descente pouvait être négligée dans des cas de trempage isotherme. En effet, elle n'a aucune influence sur

l'épaisseur finale extraite : la quantité de matière retirée autour du moule n'est établie que pendant l'étape de remontée. Ce constat n'est pas vrai en trempage anisotherme où le temps de séjour du moule dans le bain affecte la température du moule.

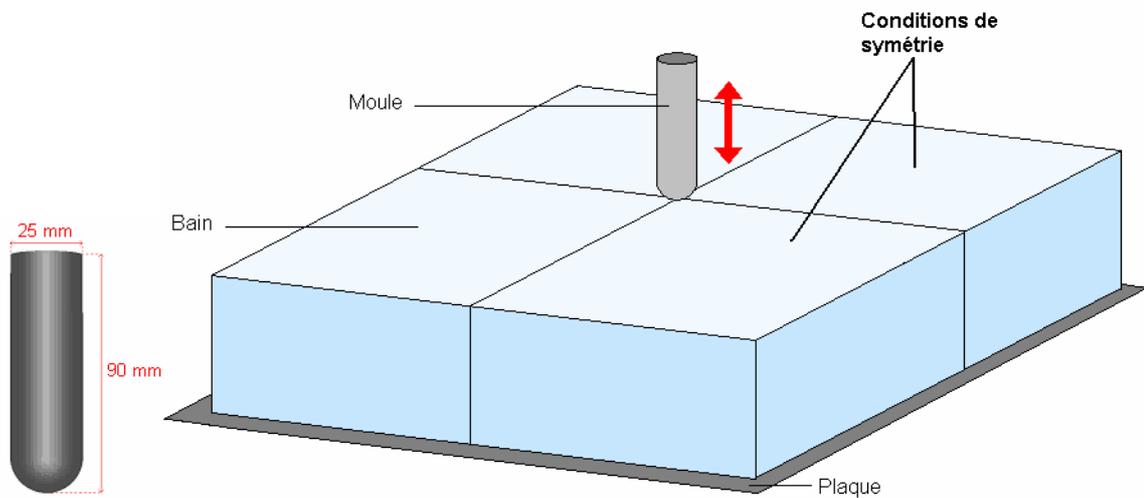


Figure 4-1 : Géométrie de l'ensemble des domaines du trempage

L'objectif final de la modélisation du trempage est la prédiction de l'épaisseur extraite autour du moule. Nous allons également nous intéresser à l'épaisseur dans le ménisque, lieu du drainage au cours de la remontée. La comparaison entre résultats numériques et résultats expérimentaux sera présentée sous forme de graphiques donnant la mesure de distance *moule – surface libre* mesurées perpendiculairement à l'axe de la hauteur (définies Figure 4-2) en fonction de la hauteur. Ce choix permet une meilleure précision lors des mesures recueillies grâce à notre prototype de trempage car plus simples à réaliser. Par contre dans les autres cas où seuls des cas numériques sont étudiés et comparés, nous avons mesuré l'épaisseur réelle, et donc dans la partie hémisphérique, la mesure s'est faite radialement.



a/ Mesure de l'épaisseur après retrait

b/ Mesure de l'épaisseur dans le ménisque

Figure 4-2 : Mesure de l'épaisseur en fonction de la hauteur

#### 4.1.1.2 Rhéologie du bain

Trois types de liquide sont employés, le PVA, le silicone S1 et le miel, avec chacun une loi de comportement qui lui est propre.

Comme cela a été expliqué dans le *Chapitre 2*, la modélisation du comportement des fluides du bain se fait à l'aide d'une loi visco-plastique de type Norton-Hoff :

$$S = 2K \left( \sqrt{3} \dot{\varepsilon} \right)^{j-1} \dot{\varepsilon} \quad \text{Eq. 4-1}$$

à laquelle peut se combiner, dans des cas de couplages thermo-mécanique (trempage anisotherme), l'influence de la température exprimée par la loi d'Arrhénius :

$$K(T, \bar{\varepsilon}) = K_0 (\bar{\varepsilon} + \varepsilon_0)^i e^{-\beta T} \quad \text{Eq. 4-2}$$

avec  $\beta = \frac{E_a}{R_g}$

où  $E_a$  est l'énergie d'activation et  $R_g$  la constante des gaz parfaits.

L'étude des comportements rhéologiques sous cisaillement a été présentée dans le *Chapitre 3*. Nous avons montré que le PVA et le miel présentaient un comportement newtonien, alors que le silicone S1 un comportement pseudoplastique. Les cas du PVA et du silicone ont été traités en température alors que le miel n'a été uniquement étudié à température ambiante. En effet, ce fluide nous a permis de mettre en place les différents essais car il présente l'avantage d'être relativement visqueux : les épaisseurs extraites sont plus grandes ce qui facilite aussi bien l'expérimentation que la modélisation numérique. Le *Tableau 4-1* résume l'ensemble des paramètres des lois de comportement pour chaque matériau.

	$K_0$ [Pa.s]	i	$\beta$	j
PVA	0,80	0	0,023	1
Silicone S1	2,43	0	0,012	0,922
Miel	13	-	-	1

**Tableau 4-1 : Données numériques des paramètres des lois de comportement pour chaque matériau**

Le *Tableau 4-2* donne les valeurs des paramètres tension de surface et les masses volumiques de chaque matériau. Ces valeurs ont été déterminées expérimentalement (*Chapitre 3*)

	$\sigma$ (mN/m)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
PVA	47,0	1390
Silicone S1	25,8	950
Miel	60,0	1400

**Tableau 4-2 : Données numériques des paramètres physiques pour chaque matériau**

#### 4.1.2 Sensibilité de l'épaisseur au maillage

La méthode par éléments finis en 3 dimensions nécessite une discrétisation du volume, étape primordiale qui peut directement influencer sur la précision des résultats obtenus. Lors de la génération du maillage, il faut que celui-ci permette de tenir compte des singularités géométriques liés au trempage : les fines épaisseurs de l'ordre du millimètre et la courbure du ménisque. Ce paragraphe présente l'étude qui nous a permis de déterminer de manière optimum le maillage à employer et la meilleure taille d'éléments permettant un bon compromis entre fiabilité des résultats et temps de simulation. Ce paramètre s'est révélé être un facteur clé dans le cadre de la simulation numérique du trempage.

##### 4.1.2.1 *Maillage volumique du bain*

La modélisation du procédé de trempage conduit à travailler sur de très fines épaisseurs de l'ordre du millimètre. Le choix du maillage est donc une étape importante pour optimiser les résultats. Nous avons opté pour la technique des boîtes de maillage mobiles : elle permet une bonne précision des calculs dans les épaisseurs fines. Cette méthode consiste à définir des zones géométriques (parallélépipédique, cylindrique ou sphérique) dans lesquelles on contraint les éléments à ne pas dépasser une taille d'éléments maximale, c'est-à-dire une distance maximale entre deux points de discrétisations consécutifs.

Lors de la simulation du trempage, le maillage subit d'importantes déformations ce qui est susceptible de le faire dégénérer rendant alors impossible la convergence du calcul. Afin de s'affranchir de ce problème tout en conservant une approche lagrangienne, nous utilisons dans Forge3 le remaillieur automatique permettant de régénérer un maillage de bonne qualité, et cela au cours du calcul. La méthode de remaillage automatique a été développée par Coupeuz en 1991 [Coupeuz91]. Elle présente l'avantage d'adapter le maillage selon les besoins au cours de la simulation. Le principe consiste à recréer un nouveau maillage  $\Omega'$  à partir d'un ancien maillage  $\Omega$ .

Le mailleur employé dans Forge3 permet la construction d'éléments tétraédriques linéaires à quatre nœuds. Il se décompose en deux parties : un mailleur surfacique et un mailleur volumique :

- Le mailleur surfacique améliore la surface sans en modifier la géométrie (respect d'un critère géométrique).
- Le mailleur volumique n'a pas d'influence sur la surface puisqu'il travaille avec des frontières imposées. Le critère respecté par ce mailleur est en terme de volume : le volume de l'ensemble des éléments doit être équivalent au volume contenu dans les frontières du domaine.

Une fois le remaillage terminé, les données de l'ancien maillage doivent être transportées sur le nouveau pour ne perdre aucune information durant cette étape. Il existe deux types de variables à transporter:

- Les variables constantes (P0) sur chaque élément et stockées au niveau du centre de gravité (déformation équivalente ou encore partie déviatorique du tenseur des contraintes). Le transport de ce type de variable se fait dans un premier temps par une extrapolation nodale qui permet par la suite de transférer les quantités nodales avec un transport P1 (expliqué dans la suite du paragraphe).
- Les variables nodales linéaires (P1) sur l'élément (vitesse, pression ou température). Le transport de ce type de variables se fait par une interpolation inverse. Il est déterminé l'élément  $e$  de l'ancien maillage contenant un nœud  $k'$  du nouveau maillage :

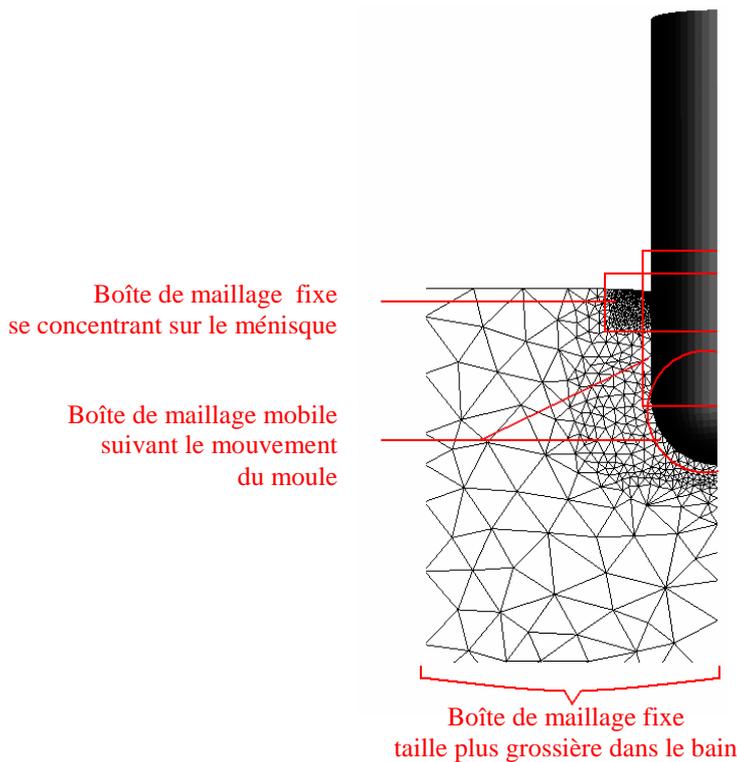
$$q' = Jq$$

$$\forall k' \in \Omega', q' = \sum_{k \in e} q^k N_{pond}^k \quad \text{Eq. 4-3}$$

avec  $q$  la quantité nodale transportée,  $q'$  la quantité transportée,  $J$  l'opérateur linéaire de transport par interpolation inverse et  $(N_{pond}^k)_{k=1,\dots,4}$  les fonctions de pondération qui permettent d'obtenir les contributions pondérées des quatre nœuds de l'élément  $e$  au nœud  $k'$ .

Cependant, le transport est une étape d'interpolation, laquelle peut dans certains cas limiter la précision des résultats où encore générer des oscillations.

La méthode des boîtes mobiles de raffinement nous permet d'avoir des tailles de mailles hétérogènes dans l'ensemble du bain (*Figure 4-3*). Près du moule, on privilégie une taille d'éléments petite alors que plus loin dans le bain, il n'est pas nécessaire d'avoir un maillage fin. Une étude a été menée pour déterminer l'influence de la taille de maille appliquée autour du moule sur l'épaisseur extraite numériquement. L'objectif est de trouver un maillage optimal à employer pour optimiser les résultats tout en conservant des temps de calculs raisonnables.



**Figure 4-3 : Répartition de la taille de maille dans le bain de trempage**

#### 4.1.2.2 Etude de sensibilité de l'épaisseur à la taille de maille

Pour différentes tailles d'éléments maximales autorisées autour du moule, nous avons regardé les épaisseurs extraites pour des conditions de trempage (bain newtonien – miel, vitesse de retrait 10 mm/s) identiques. La *Figure 4-4* montre que l'épaisseur extraite ne varie en fonction de la taille de maille qu'au niveau de la région I. Cette zone va se révéler être une région critique difficile à maîtriser numériquement.

Lors des premiers instants de retrait, plus la maille est grossière, plus il va être difficile pour le moule de l'accrocher, et cela, malgré le contact collant. En effet, plus la maille est grosse, plus elle est rigide et donc plus il est difficile de l'extraire du bain. Pour estomper ce phénomène, comme le montre la *Figure 4-4*, il faut réduire la taille de maille : elle devient alors moins rigide.

D'autre part, nous constatons que les épaisseurs mesurées pour des tailles d'éléments de l'ordre de 0,2mm et de 0,4mm sont quasiment identiques. On a donc convergence des résultats pour une taille de maille égale ou inférieure à 0,4mm.

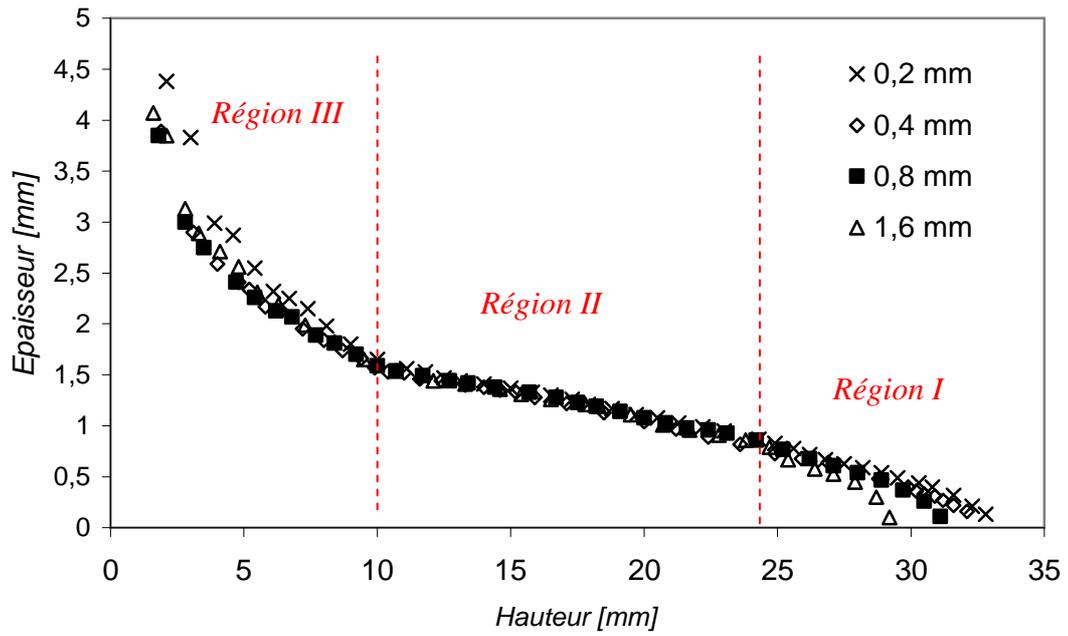


Figure 4-4 : Influence de la taille de maille sur l'épaisseur

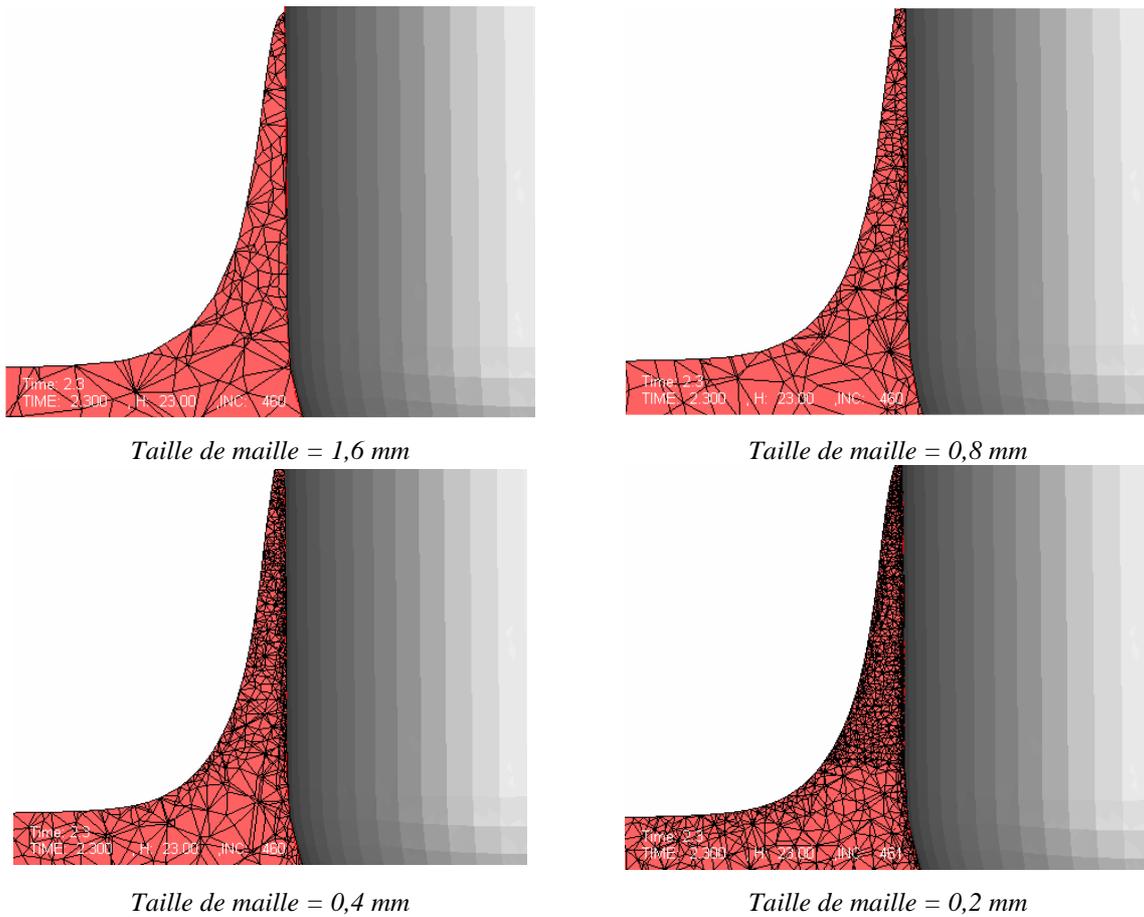


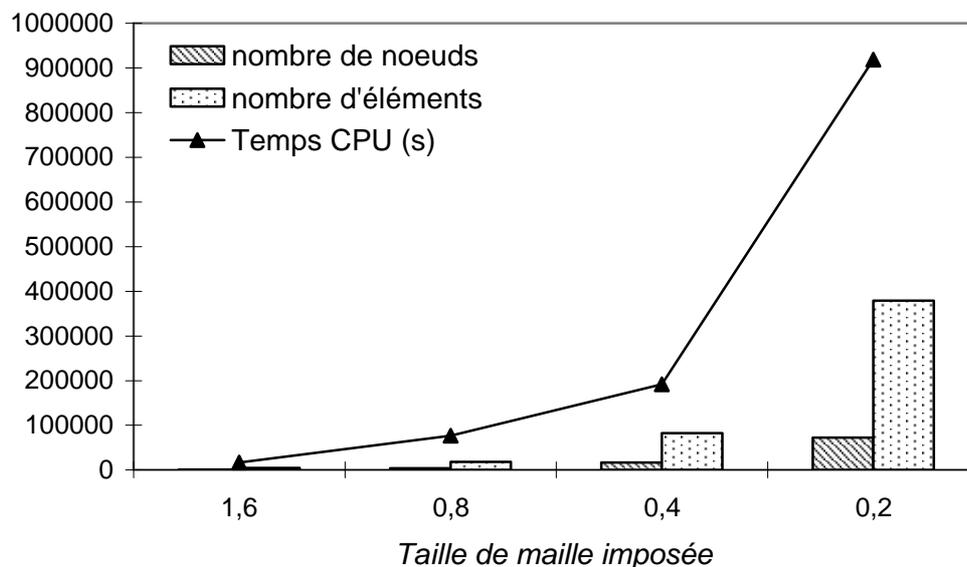
Figure 4-5 : Densité de maille dans l'épaisseur de retrait

Si on s'intéresse à la densité de maille dans l'épaisseur extraite (*Figure 4-5*), on constate que plus la taille initiale maximale des éléments est petite, plus il y a de maille dans l'épaisseur ce qui favorise l'indépendance des épaisseurs vis-à-vis du maillage. Dans le cas d'une taille de maille de 1,6 mm, seuls un ou deux éléments sont présents dans l'épaisseur alors que pour une maille de 0,4 mm, il y en a une dizaine et pour 0,2 mm, ce nombre est de l'ordre de 20.

Cependant, comme le montre le *Tableau 4-3* et la *Figure 4-6* la taille de maille a une grande influence sur les temps de calculs : ils augmentent considérablement lorsque l'on diminue la taille de maille. En fait, on vérifie bien que le temps CPU varie selon un loi puissance en fonction de la taille de maille ( $CPU \approx ddl^{3/2}$ ) ce qui est conforme à la prédiction théorique pour un solveur linéaire itératif.

Taille de maille imposée	Nombre de noeuds	Nombre d'éléments	Temps CPU
1,6 mm	1050	4185	16680 s soit 4h 38min
0,8 mm	3889	17634	76500 s soit 21h 9min
0,4 mm	16633	82206	192240 s soit 2 jours 5h 24min
0,2 mm	12364	379201	918600 s soit 10 jour 15h 10min

**Tableau 4-3 : Nombres d'éléments et de nœuds et temps de calcul pour un cas de remontée de trempage sur un quart de bain sur un PC Intel Core2 2,66GHz**

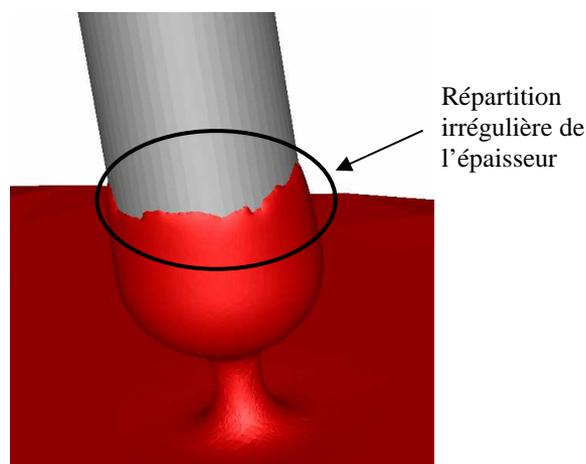


**Figure 4-6 : Graphique présentant l'évolution du nombre de nœuds et d'éléments et du temps de calcul selon la taille de maille**

La taille de maille la plus adaptée ici est donc de 0,4 mm puisqu'elle permet une bonne précision des résultats et un temps de calcul raisonnable.

#### 4.1.2.3 Influence de la taille de maille sur la variation d'épaisseur sur une même circonférence

Le cas du cylindre est un cas axisymétrique, et donc nous pourrions penser que l'épaisseur extraite devrait l'être également. Or, comme le montre la *Figure 4-7*, dans la région I, l'épaisseur est répartie irrégulièrement particulièrement au niveau de la zone d'accrochage. La bordure montre un aspect en dents de scie, ce qui est contraire à un résultat axisymétrique.



**Figure 4-7 : Exemple de répartition non axisymétrique de l'épaisseur sur le moule**

Ce phénomène a pour origine diverses raisons. Dans un premier temps, Forge3 ne génère pas un maillage axisymétrique autour du moule. Deuxièmement, la principale source à l'origine de ce phénomène est le remaillage : il peut être à l'origine de la perte de contact entre le moule et le bain malgré le contact collant du fait du critère d'optimisation utilisé. Nous n'avons cependant pas pu intervenir sur ce critère. La *Figure 4-8* met en image cette perte de contact entre des éléments du bain et l'outil. Ces mailles ainsi décrochées du moule se replacent dans l'épaisseur en dessous sous l'effet de la gravité.

Pour diminuer ce phénomène à défaut d'optimiser l'algorithme de remaillage, il faut diminuer la taille de maille imposée. Plus le maillage est raffiné, plus il y a de mailles dans l'épaisseur comme le montrait la *Figure 4-5*. En effet si seul un élément constitue l'épaisseur, le remaillage conduit à une perte de contact avec le moule. Dans le cas où plusieurs éléments forment l'épaisseur, l'existence d'éléments voisins apporte une contrainte à la matière et réduit les chances de perte de contact. Cette hypothèse est confirmée par les observations faites sur la *Figure 4-9*. On y constate les écarts d'épaisseurs sur une même hauteur tout autour du moule. Les différences d'épaisseurs sont moins grandes si la taille d'élément est plus faible ; et ceci est d'autant plus vérifié dans la région I.

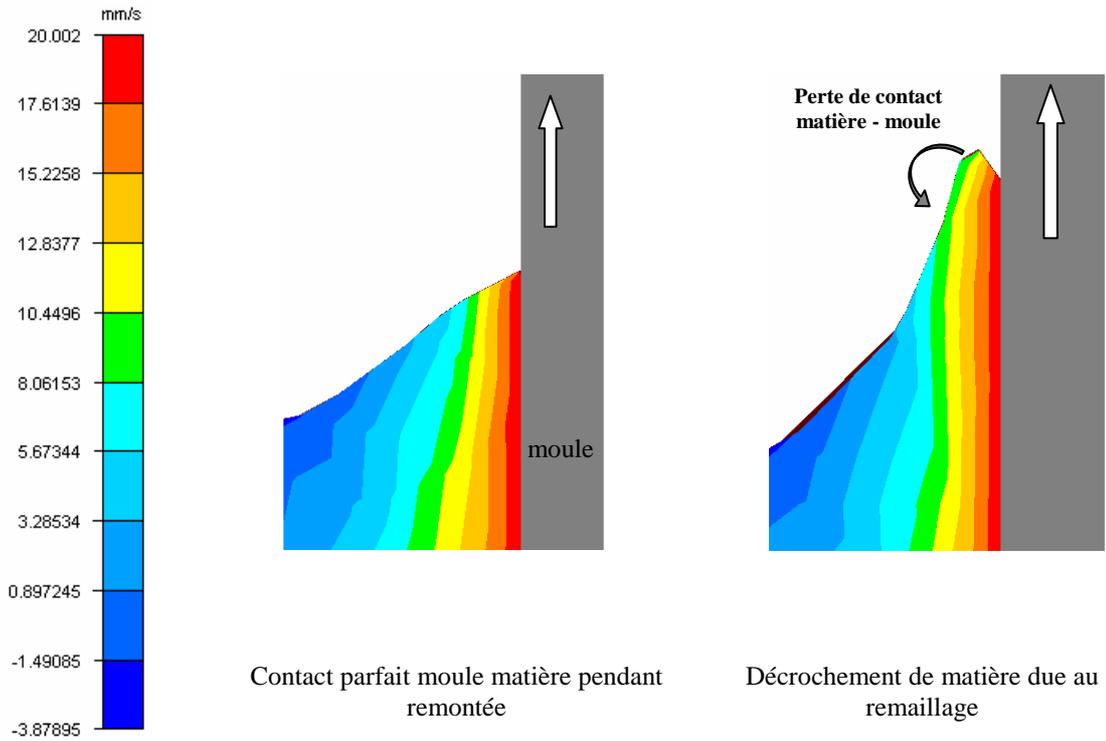


Figure 4-8 : Image de perte de contact matière - moule

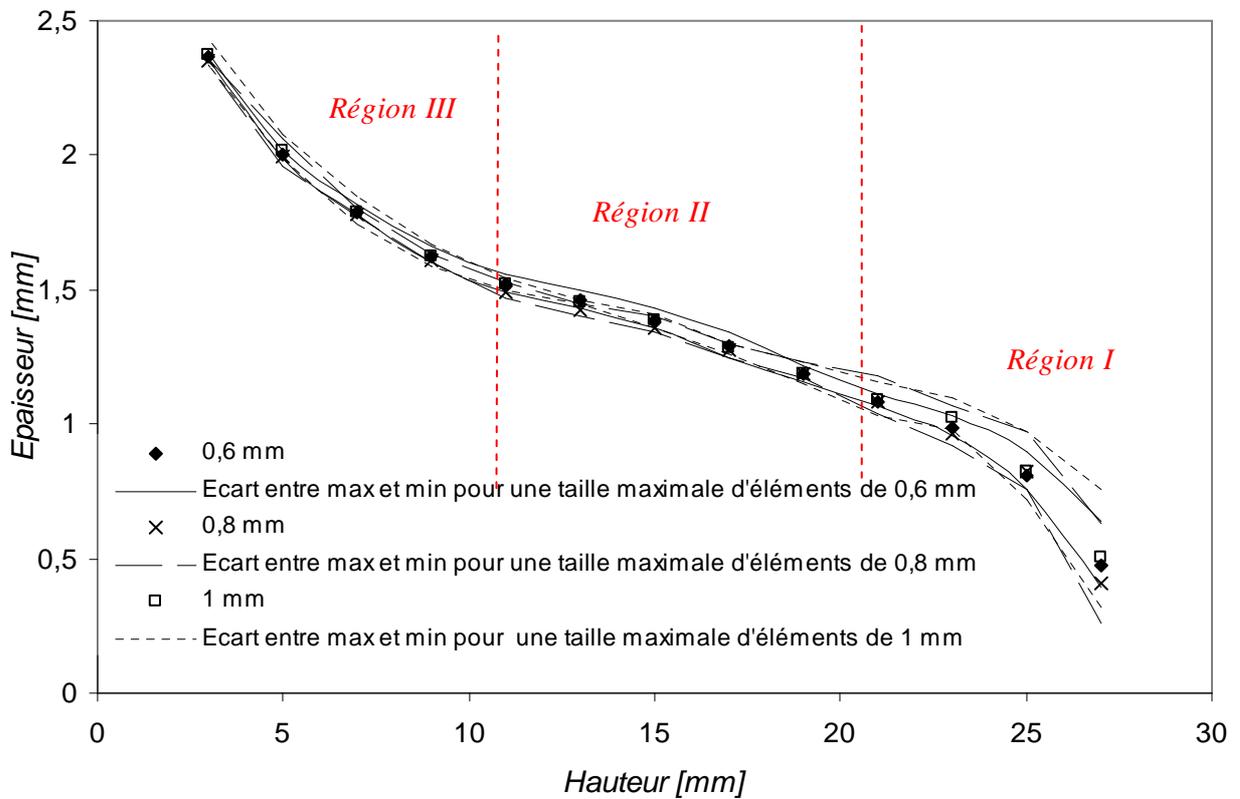


Figure 4-9 : Mesures des épaisseurs sur la circonférence du cylindre avec écart sur une même hauteur

## 4.2 Validation du modèle numérique

Pour estimer la validité des résultats numériques, nous les avons comparés pour différents matériaux et différentes conditions à des résultats obtenus à l'aide de modèles développés dans la littérature et à l'aide d'essais expérimentaux. Nous nous intéresserons ici à l'épaisseur dans le ménisque et à celle obtenue après retrait complet du moule.

### 4.2.1 Forme du ménisque

Nous avons comparé les formes de ménisque obtenus par Forge3 à celles présentées dans le manuscrit de thèse de Tanguy [Tanguy82] et dans une série d'articles de Tanguy et al. ([Tanguy84-I], [Tanguy84-II]). Ils traitent le cas du trempage d'un fil de diamètre 0,19 mm dans différents bains de rhéologies différentes (newtonien et rhéofluidifiant) : leurs résultats sont ceux obtenus à partir de leur modèle numérique et ceux fournis par des expériences de trempage qu'ils ont réalisées.

#### 4.2.1.1 *Cas d'un fluide newtonien : comparaison avec le modèle de Tanguy et al.*

Le cas du trempage dans un bain newtonien s'est fait à l'aide d'une huile Vitrea de viscosité  $\mu = 2,9 Pa.s$ , de tension de surface  $\sigma = 35,9 mN/m$  et de masse volumique  $\rho = 910 kg.m^{-3}$ . Deux vitesses de remontée ont été examinées : 24,1 mm/s et 74,7 mm/s.

La *Figure 4-10* présente la comparaison entre nos résultats expérimentaux et ceux obtenus à partir du modèle de Tanguy et à partir de Forge3 à une vitesse de retrait de 24,1 mm/s. Si l'on considère les erreurs dont fait part Tanguy dans son manuscrit de thèse sur les mesures expérimentales liées aux imprécisions de mesures et au repérage incertain du niveau du fluide, les résultats numériques que nous avons obtenus sont très proches des résultats expérimentaux. On observe cependant de légères différences au niveau du ménisque statique<sup>i</sup>. En fait, les mesures expérimentales ont été faites dans un bain alimenté en continu sans pour autant que le volume du bain soit maintenu constant au cours du temps, alors que dans le cadre de notre simulation, le volume de l'ensemble du fluide (bain + épaisseur) est considéré comme constant au cours du temps.

Les résultats du modèle numérique de Tanguy et al. montrent des différences avec notre simulation, surtout aux faibles hauteurs. En fait, la première source d'erreur est liée à la détermination de la forme de la surface libre initiale. Contrairement à notre cas où nous modélisons le trempage dès les premiers instants de la remontée, ils approximent la forme

---

<sup>i</sup> La région du ménisque peut être divisée en deux zones (*Chapitre 1*) séparées par un point de stagnation des écoulement : le ménisque dynamique qui est la partie supérieure et le ménisque statique qui est celle inférieure.

initiale de la surface libre puis recalcule sa position au cours du temps. Cette première étape s'est faite dans ce cas à l'aide des résultats de Groenveld et Van Dormond [Groenveld70] et Lee et Tallmadge [Lee73] qui sont des modèles basés sur des hypothèses plus contraignantes que celles du modèle utilisé dans Forge3. La deuxième source des différences observées est que le modèle de Tanguy et al. considère le volume du bain fixe dans le temps, d'où son niveau nettement supérieur.

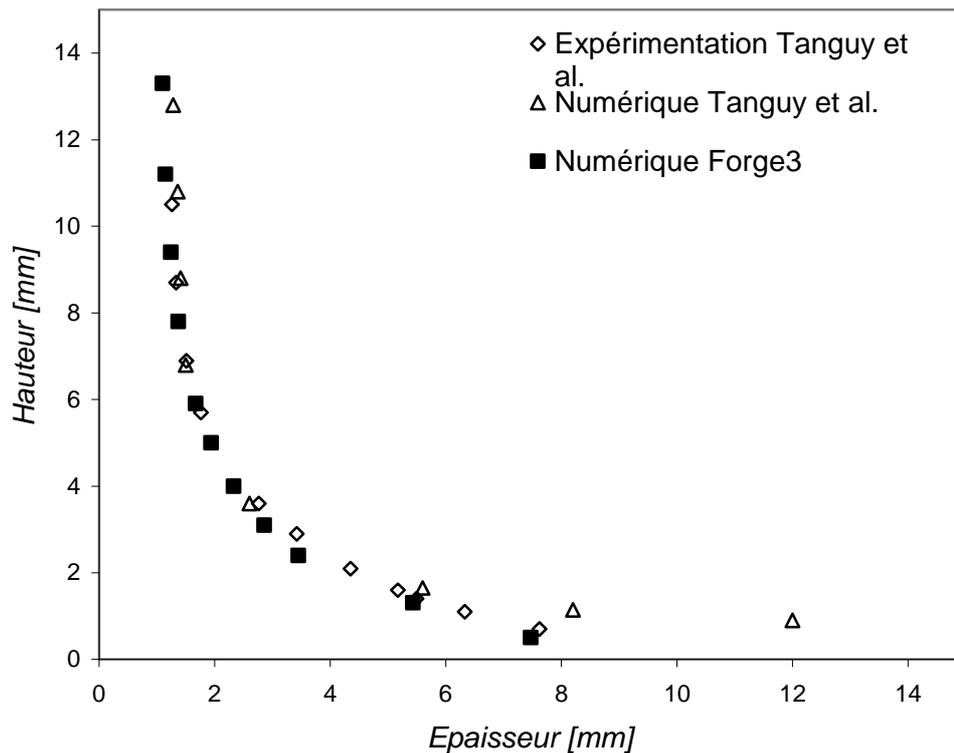


Figure 4-10 : Comparaison dans le cas d'une huile vitréa  $\nu = 24,1$  mm/s

Le même cas a été réalisé pour une vitesse de retrait de 74,7 mm/s, les résultats sont donnés *Figure 4-11*. Comme précédemment, les résultats obtenus à l'aide de la modélisation sous Forge3 donnent de très bonnes corrélations avec les résultats expérimentaux. Les mesures numériques de Tanguy montrent encore des valeurs légèrement différentes.

La conclusion de cette comparaison est que la forme du ménisque obtenue par Forge3 semble bien correspondre à la forme réelle du ménisque au cours du trempage dans un fluide newtonien à faible et à forte vitesse de retrait pour un couple viscosité / tension de surface donné.

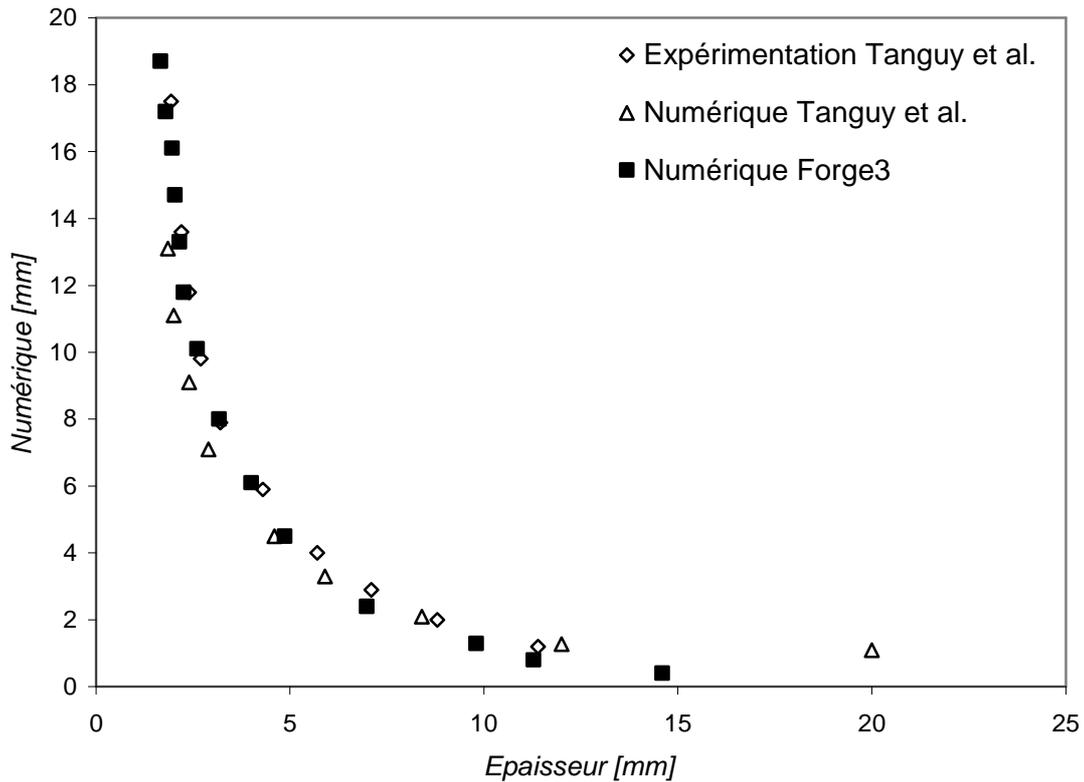


Figure 4-11 : Comparaison dans le cas d'une huile vitrée  $v = 74,7 \text{ mm/s}$

#### 4.2.1.2 Cas d'un fluide rhéofluidifiant : comparaison avec le modèle de Tanguy et al.

Deux cas de fluides rhéofluidifiants sont examinés : le Klucel (solution d'hydroxypropylcellulose dans l'eau) de tension de surface  $\sigma = 46,5 \text{ mN/m}$  et de masse volumique  $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ , et l'alginate de sodium de tension de surface  $\sigma = 58,9 \text{ mN/m}$  et de masse volumique  $\rho = 1195 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Tanguy a décrit le comportement des fluides sous cisaillement à l'aide d'une loi de Carreau-A définie par :

$$\mu = -\mu_0 \left[ 1 + 2 \left| t_c \dot{\gamma} \right|^2 \right]^{-s} \quad \text{Eq. 4-4}$$

avec  $\eta_0$  la viscosité à cisaillement nul,  $t_c$  une constante de temps et  $s$  le paramètre lié au caractère rhéofluidifiant.

Dans Forge3, le comportement de ces matériaux est décrit à l'aide d'une loi puissance :

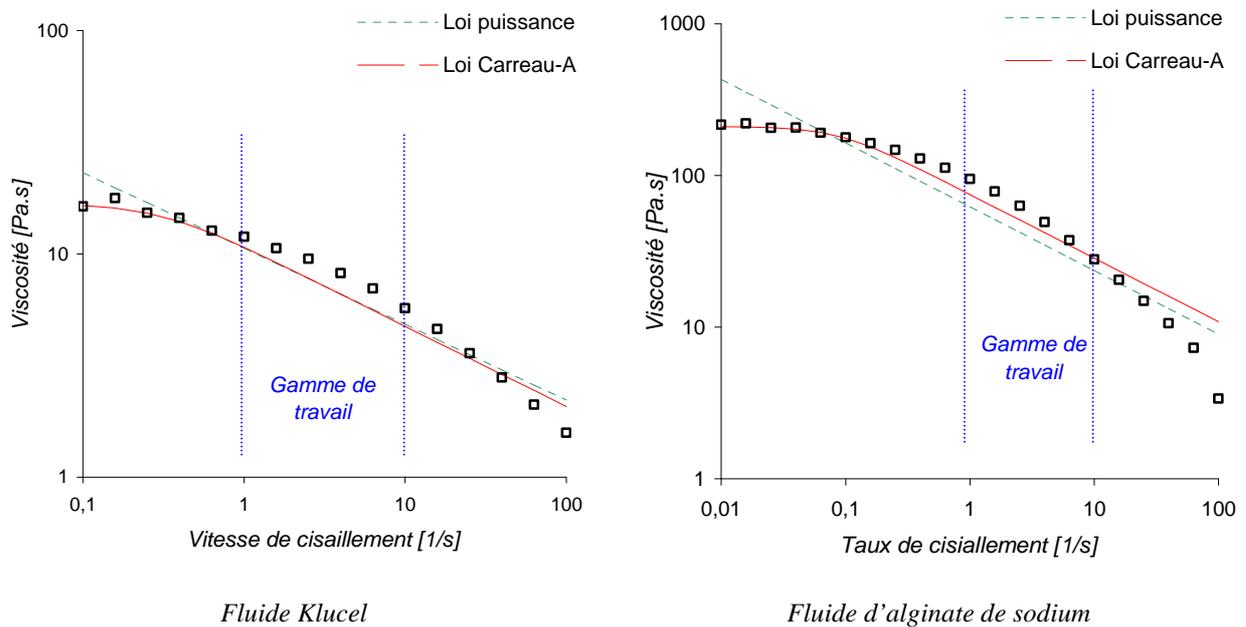
$$\mu = \mu_0 \cdot \dot{\gamma}^m \quad \text{Eq. 4-5}$$

Les paramètres employés pour la description du comportement des fluides employés par Tanguy sont donnés dans le *Tableau 4-4* ainsi que ceux de nos lois puissances.

	Loi Carreau-A			Loi puissance	
	$\mu_0$	$t_c$	$S$	$\mu_0$	$m$
Klucel	16,76	2,36	0,18	10,59	-0,34
Alginat de sodium	211,46	8,34	0,21	62,26	-0,42

**Tableau 4-4 : Paramètres des lois de comportement**

La *Figure 4-12* montre la viscosité en fonction du taux de cisaillement pour les deux fluides ci-dessus ainsi que les lois de comportement. On constate que les deux fluides ont un caractère rhéofluidifiant très marqué, particulièrement l’alginate de sodium. Les deux modèles rhéologiques décrivent bien le comportement des fluides rhéofluidifiants à fort taux de cisaillement. L’avantage du modèle A de Carreau par rapport au modèle à loi puissance est qu’il transcrit le plateau newtonien à faible taux de cisaillement. Ni le modèle de Carreau, ni celui à loi puissance ne permet pas de prendre en compte le caractère élastique des fluides.



**Figure 4-12 : Viscosité en fonction de la vitesse de cisaillement pour les deux fluides rhéofluidifiants**

Les résultats des comparaisons numériques – expérimentation sont données *Figure 4-13* et *Figure 4-14*.

Dans le premier cas, la vitesse de remontée est de 28,7 mm/s. Les valeurs données par Forge 3D sont très proches de celles obtenues expérimentalement. Le modèle numérique de Tanguy a tendance à légèrement surestimer l’épaisseur.

Par contre, dans le deuxième cas où la vitesse de retrait est de 42,5 mm/s, Forge3 surestime l'épaisseur du ménisque de 50% par rapport aux résultats expérimentaux. La tendance pour le modèle numérique de Tanguy est la même mais avec une surestimation de l'ordre de 10%.

Dans le ménisque, une composante élongationnelle vient se superposer à la composante en cisaillement, ce qui n'est pas vrai dans l'épaisseur constante où le fluide se comporte comme un fluide newtonien. Denson en 1972 [Denson72], repris par Tanguy [Tanguy85], a montré que dans le ménisque, il était possible qu'une particule de fluide puisse subir de brusques variations de vitesse de déformation. Pour décrire parfaitement ce qui s'y déroule, il est donc nécessaire dans le cas de fluide rhéofluidifiant de prendre en compte le caractère élastique ce que ne permettent pas les modèles de loi puissance et de Carreau-A.

Les différences entre les courbes sont donc la conséquence de la non considération de l'influence de l'élasticité et la non prise en compte du couplage entre la viscosité et l'élasticité.

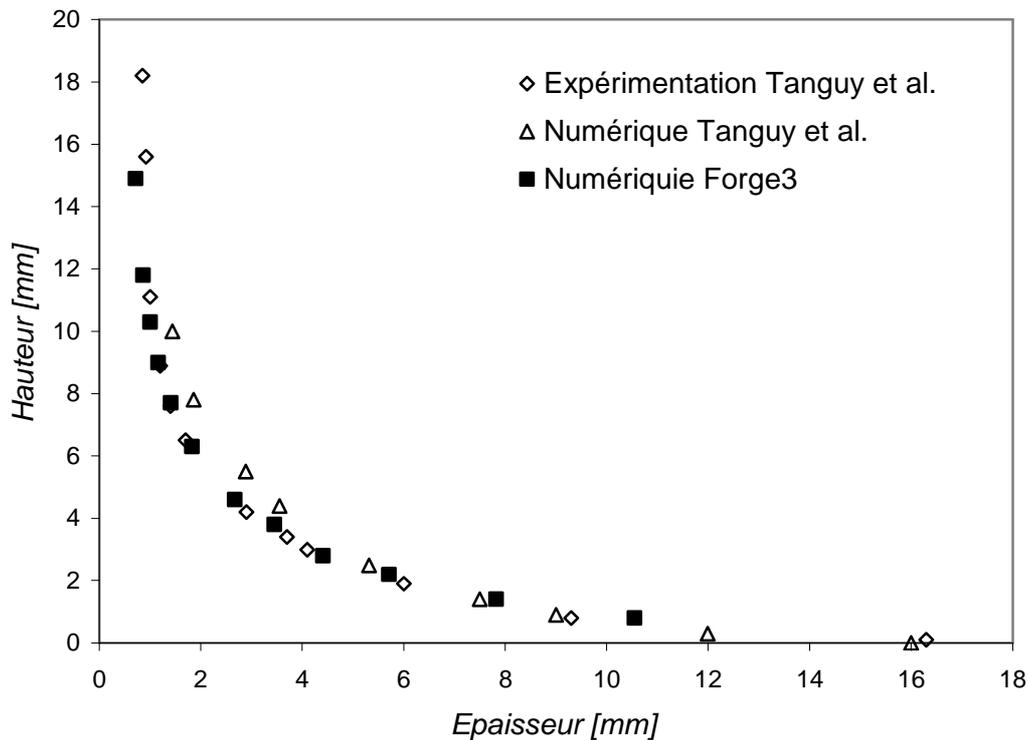


Figure 4-13 : Comparaison dans le cas d'un fluide Klucel à  $v=28,7\text{mm/s}$

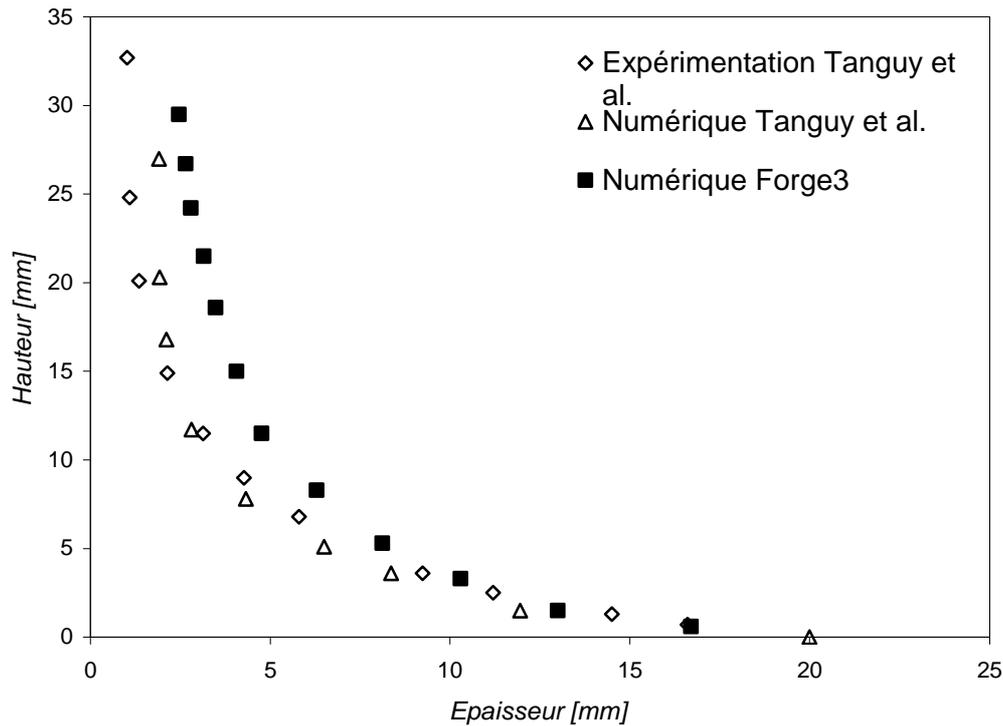


Figure 4-14 : Comparaison dans le cas d'un fluide d'Alginate de sodium à  $v=42,5\text{mm/s}$

Cependant, l'objectif final des cas industriels traités dans le cadre de cette thèse n'est pas de modéliser ce qui se déroule dans le ménisque mais bien ce qui se passe après émerision. D'autre part, la loi puissance est suffisante aux vues des gammes de cisaillements observées au cours du retrait du moule dans les cas traités qui sont de l'ordre de  $1\text{ s}^{-1}$  à  $10\text{ s}^{-1}$ .

#### 4.2.2 Épaisseurs mesurées

##### 4.2.2.1 Comparaison avec les modèles théoriques

Pour la comparaison avec les différentes méthodes théoriques, nous avons modélisé le cas d'une plaque trempée dans un bain de viscosité newtonienne  $5\text{ Pa}\cdot\text{s}$ , de tension de surface  $\sigma = 40\text{ mN/m}$ , de masse volumique  $\rho = 1400\text{ kg/m}^3$  à différentes vitesses de retrait. Les épaisseurs constantes (région II) obtenues à l'aide de Forge3 sont comparées aux épaisseurs calculées à l'aide des expressions littérales des trois principaux modèles présentés dans le Chapitre 1 :

- Landau et Levich : 
$$h_0 = 0,944 \cdot \left( \frac{\mu U_0}{\rho g} \right)^{1/2} (Ca)^{1/6}$$

- White et Tallmadge :  $\frac{T_0}{(1-T_0^2)^{2/3}} = 0,944 \cdot Ca^{1/6}$  avec  $T_0 = h_0 \cdot \left( \frac{\rho g}{\mu U_0} \right)^{1/2}$
- Spiers et al. :  $T_0 = \frac{3^{2/3}}{\sqrt{2}} \alpha(Ca, T_0) (1-T_0^2)^{2/3} Ca^{1/6}$

Les vitesses de retrait ont été choisies de telle manière à balayer les domaines de validité de ces modèles, soit pour Landau et Levich  $Ca < 1$ , pour White et Tallmadge  $Ca > 2$  et pour Spiers  $2 < Ca < 50$ .

✓ Cas avec un nombre capillaire tel que  $Ca < 1$

Dans ce cas, nous avons choisi une vitesse de remontée de  $U_0 = 1 \text{ mm/s}$ , soit un nombre capillaire de  $Ca = 0,125$ . Les résultats des calculs des épaisseurs sont :

$$\begin{cases} h_{\text{forge}} = 0,40 \text{ mm} \\ h_{\text{Landau \& Levich}} = 0,40 \text{ mm} \\ h_{\text{White \& Tallmadge}} = 0,32 \text{ mm} \\ h_{\text{Spiers}} = 0,33 \text{ mm} \end{cases}$$

L'épaisseur obtenue à l'aide de Forge3 est équivalente à celle obtenue à l'aide du modèle de Landau et Levich, qui pour un nombre capillaire inférieur à 1, est le modèle le plus réaliste. Il est donc possible de conclure que pour un cas newtonien à faible vitesse, les simulations du trempage sur Forge3 donnent des résultats cohérents.

✓ Cas avec un nombre capillaire tel que  $Ca > 2$

Dans ce cas, la vitesse de remontée choisie est de  $U_0 = 20 \text{ mm/s}$  soit un nombre capillaire de  $Ca = 2,5$ . Les résultats des calculs des épaisseurs sont :

$$\begin{cases} h_{\text{forge}} = 1,85 \text{ mm} \\ h_{\text{Landau \& Levich}} = 2,97 \text{ mm} \\ h_{\text{White \& Tallmadge}} = 1,89 \text{ mm} \\ h_{\text{Spiers}} = 1,88 \text{ mm} \end{cases}$$

L'épaisseur obtenue à l'aide Forge3 se rapproche de celle obtenue à l'aide de l'équation de Spiers, modèle le plus complet dans le domaine de nombres capillaires supérieurs à 2 et inférieurs à 50. L'épaisseur obtenue par White et Tallmadge, dont le domaine de validité est

pour un nombre capillaire supérieur à 2, est très proche de celle de Spiers. En revanche, le modèle de Landau et Levich en est très éloigné, ce qui est cohérent avec le fait que ce modèle n'est correct que pour de petits nombres capillaires.

La comparaison des épaisseurs constantes obtenues à l'aide de simulations sous Forge3 montre des résultats cohérents avec les modèles théoriques existants à faible et à plus forte vitesse de retrait.

#### 4.2.2.2 Comparaison avec l'expérimentation

Les résultats des essais expérimentaux présentés dans le *Chapitre 3* sont ici comparés aux résultats numériques obtenus dans les mêmes conditions de forme de moule, de température et de vitesse (ici, 10 mm/s).

##### 4.2.2.2.1 Cas newtonien

La *Figure 4-15* présente la comparaison des épaisseurs obtenues numériquement et expérimentalement dans le cas du miel. Ce fluide est notre liquide de référence car il présente l'avantage d'avoir un comportement rhéologique simple et bien connu : il est newtonien. L'autre avantage du miel par rapport au PVA est qu'il n'a pas de particule en suspension, dont l'impact sur la rhéologie, l'organisation et l'épaisseur de la couche déposée n'ont pas été clairement définis à l'aide de l'expérimentation (par exemple l'alignement de la silice dans le sens de l'écoulement dans le PVA doit modifier la rhéologie du fluide).

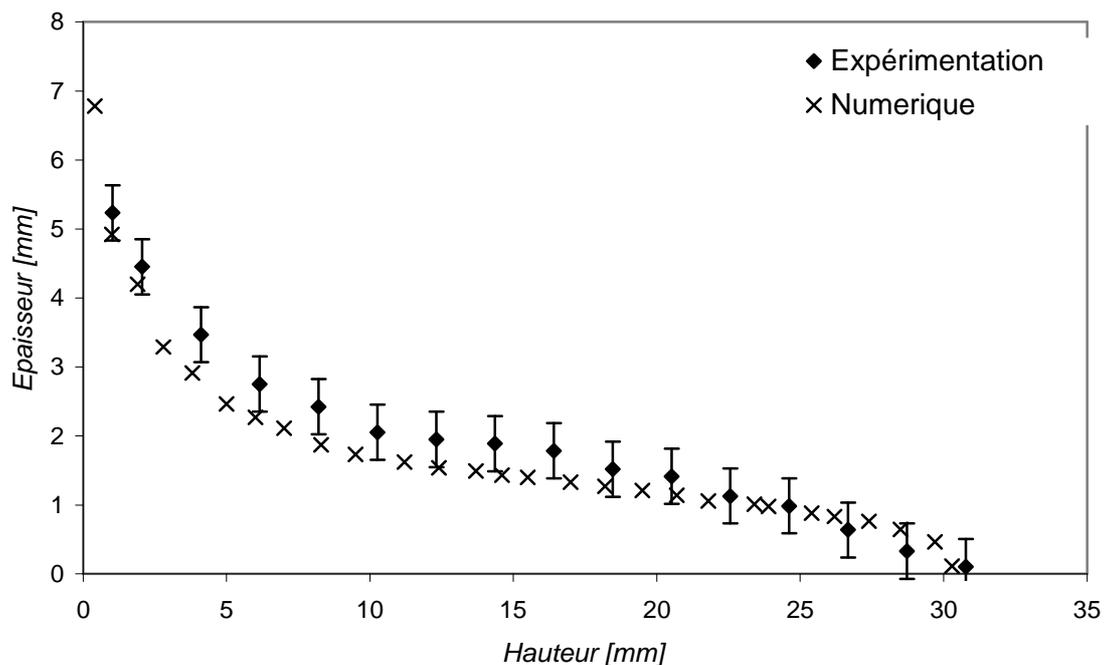


Figure 4-15 : Comparaison entre trempage numérique et trempage expérimental dans le miel à une vitesse de retrait de 10 mm/s

La Figure 4-16 présente la comparaison des épaisseurs obtenues numériquement et expérimentalement dans le cas du PVA.

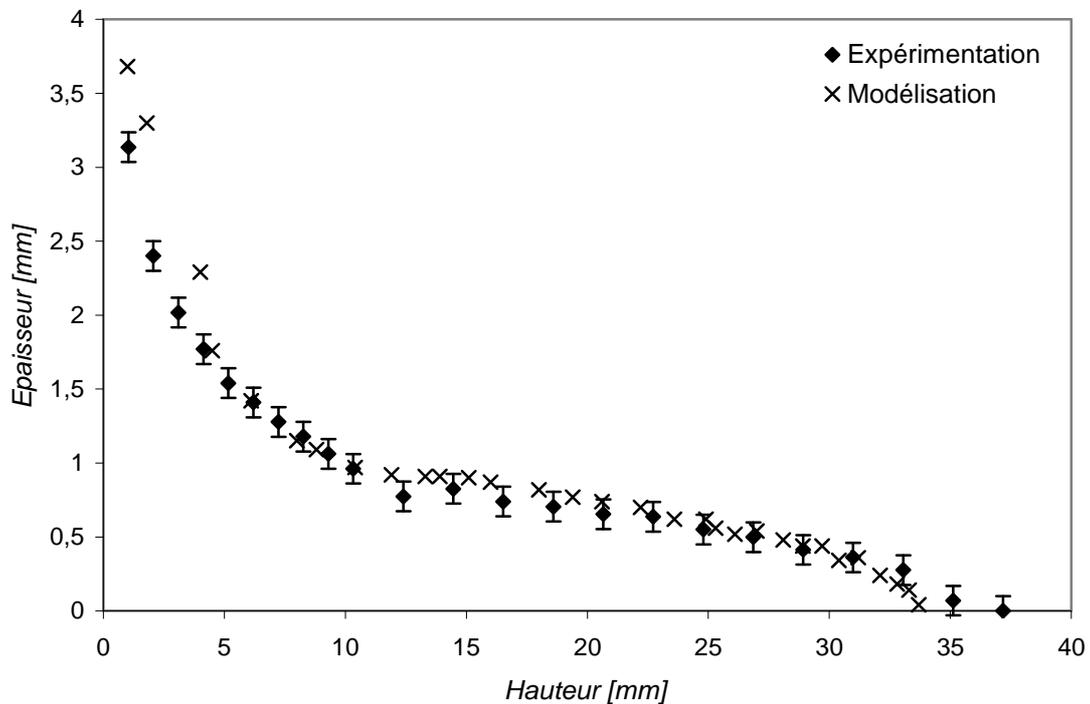


Figure 4-16 : Comparaison entre trempage numérique et trempage expérimental dans le PVA à une vitesse de retrait de 10 mm/s

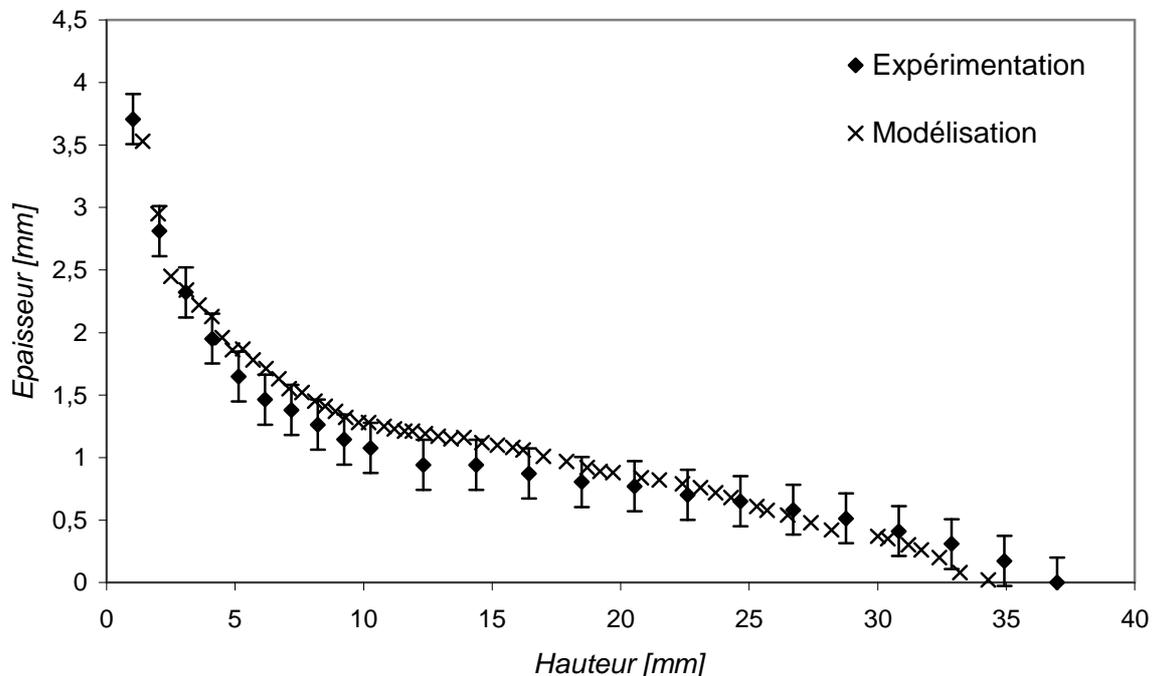
Dans les deux cas, les deux courbes donnent une tendance très proche et les épaisseurs obtenues sont du même ordre de grandeur. Les différences observées au niveau supérieur du moule peuvent être dues à un artefact numérique ; comme nous l'avons vu dans ce chapitre, le maillage et le remaillage peuvent être la source d'erreur dans cette zone. Ce phénomène est accentué dans le cas du PVA car la viscosité étant plus faible, associée une tension de surface relativement élevée, les éléments ont tendance à dégénérer dans la région I et donc le remaillage est plus fréquent.

Les autres sources de différences sont liées aux essais expérimentaux. D'une part, les paramètres physiques sont moins bien contrôlés que dans la simulation numérique (température, vitesse de retrait, profondeur de trempage dans le bain). D'autre part, l'établissement de l'échelle et la délimitation du contour de la surface libre peuvent également induire des erreurs.

#### 4.2.2.2.2 Cas pseudo plastique

La Figure 4-17 présente la comparaison des épaisseurs obtenues numériquement et expérimentalement dans le cas du silicone S1. Comme précédemment, les courbes donnent des résultats très proches. Les raisons des différences observées sont les mêmes que pour les

cas newtoniens, c'est-à-dire, les erreurs liées aux essais expérimentaux principalement. On constate ici que la loi puissance permet de bien modéliser les épaisseurs extraites dans le cas du silicone S1.



**Figure 4-17 : Comparaison entre trempage numérique et trempage expérimental dans le silicone S1 à une vitesse de retrait de 10 mm/s**

Ce chapitre a détaillé la mise en donnée de la simulation du trempage sous Forge 3 et montré l'importance du choix du maillage. En effet, il s'agit d'une étape critique car il faut que ce dernier permette d'obtenir une bonne précision dans les résultats tout en conservant des temps de calcul raisonnables. Il a été choisi d'utiliser la technique de boîtes mobiles de raffinement de maillage avec une taille d'élément maximale de 0,4 mm autour du moule.

Le modèle développé sous Forge3 pour modéliser le trempage a ensuite été validé à l'aide de comparaisons avec des modèles développés dans la littérature ainsi qu'avec des essais expérimentaux. Il a été montré que dans le cas de fluides newtoniens, les épaisseurs obtenues par Forge3 sont très proches de l'expérimentation aussi bien dans le ménisque que après émergence. Dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant, le modèle à loi puissance choisi ne permet pas de décrire ce qui se déroule dans le ménisque puisque le caractère élastique du fluide n'est pas pris en compte. Par contre, dans les gammes de cisaillement dans lesquelles nous travaillons, le modèle à loi puissance permet une bonne description de la surface libre après émergence.

## **5. INFLUENCES DE PARAMETRES PHYSIQUES ET GEOMETRIQUES – ETUDES DE CAS ISOTHERMES**

## **5. INFLUENCES DE PARAMETRES PHYSIQUES ET GEOMETRIQUES – ETUDES DE CAS ISOTHERMES**

<b>5.1</b>	<b>Influence de la viscosité du bain.....</b>	<b>151</b>
5.1.1	Importance de la rhéologie sur la forme du ménisque .....	151
5.1.2	Importance de la viscosité après retrait complet du moule .....	152
5.1.2.1	<i>Influence de la viscosité sur l'épaisseur .....</i>	<i>152</i>
5.1.2.2	<i>Influence de la viscosité sur la masse retirée autour du moule .....</i>	<i>155</i>
5.1.2.3	<i>Influence de la viscosité sur la hauteur de rupture du filament.....</i>	<i>156</i>
<b>5.2</b>	<b>Influence de la vitesse de remontée.....</b>	<b>158</b>
5.2.1	Influence de la vitesse de remontée sur les épaisseurs extraites .....	158
5.2.2	Influence de la vitesse de retrait sur la masse retirée autour du moule .....	159
5.2.3	Influence de la vitesse sur la rupture du fil .....	160
<b>5.3</b>	<b>Influence de la tension de surface .....</b>	<b>161</b>
5.3.1	Influence de la tension de surface sur l'épaisseur extraite .....	161
5.3.1.1	<i>Variation de la taille de l'épaisseur en fonction de la tension de surface .</i>	<i>161</i>
5.3.1.2	<i>Variation de la masse de l'épaisseur en fonction de la tension de surface.....</i>	<i>163</i>
5.3.2	Influence de la tension de surface sur la rupture du fil .....	165
5.3.3	Compétition gravité – tension de surface .....	167
5.3.3.1	<i>Observations numériques .....</i>	<i>167</i>
5.3.3.2	<i>Observations expérimentales .....</i>	<i>168</i>
5.3.4	Amélioration de l'aspect de la surface .....	169
<b>5.4</b>	<b>Généralisation de l'influence des divers facteurs physiques .....</b>	<b>171</b>
5.4.1	Masse extraite autour du moule .....	171
5.4.2	Rupture du filament.....	172
	Influences des paramètres physiques et géométriques – Etudes de cas isothermes	149

<b>5.5</b>	<b>Cas de trempage de moules à formes complexes .....</b>	<b>173</b>
5.5.1	Cas du trempage d'un entre doigts .....	173
5.5.1.1	<i>Géométrie du moule employé et difficultés</i> .....	173
5.5.1.2	<i>Influence des paramètres physiques</i> .....	174
5.5.1.2.1	Influence de la viscosité .....	174
5.5.1.2.2	Influence de la vitesse .....	176
5.5.1.3	<i>Forme de la matière dans l'entre doigts</i> .....	176
5.5.1.3.1	Cas intermédiaire : mécanisme de séparation .....	177
5.5.1.3.2	Ratio à faibles valeurs de viscosité / vitesse.....	179
5.5.1.4	<i>Critère permettant d'obtenir une épaisseur convenable dans l'entre doigts</i> .....	179
5.5.1.5	<i>Épaisseur dans l'entre doigts</i> .....	180
5.5.2	Cas d'un implant mammaire .....	182
5.5.2.1	<i>Remontée verticale</i> .....	183
5.5.2.2	<i>Rotation</i> .....	185

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier numériquement l'influence sur le procédé de trempage de certains paramètres physiques majeurs tels que la tension de surface, la viscosité, la vitesse de retrait ou encore la géométrie du moule. Cette partie a pour objectif de donner également les limites actuelles de l'utilisation de notre modèle pour la modélisation du processus de revêtement par trempage.

Les deux premiers paragraphes seront consacrés à l'observation du rôle de la viscosité ainsi que celui de la vitesse de retrait sur l'épaisseur extraite au cours du trempage. Ensuite, nous étudierons l'influence des forces de tension de surface. Les trois premiers paragraphes porteront sur l'étude du trempage d'un moule cylindrique selon les critères donnés dans le *Chapitre 4*. La dernière partie sera consacrée à des cas de trempages à formes géométriques complexes : les cas de l'entre doigts - zone critique durant le trempage des gants - et de l'implant axisymétrique seront examinés.

## 5.1 Influence de la viscosité du bain

Dans ce premier paragraphe, nous allons nous intéresser à l'influence de la viscosité newtonienne sur la forme de la surface libre, aussi bien au niveau du ménisque qu'après retrait complet du moule. Comme nous l'avons déjà vu expérimentalement dans le *Chapitre 3*, la viscosité est un facteur clé dans la détermination de l'épaisseur extraite. Dans les cas des fluides traités ici, dans la gamme des taux de cisaillement induits par le trempage ( $\dot{\gamma} = 1 - 10 \text{ s}^{-1}$ ), nous nous plaçons au niveau du plateau newtonien.

Nous nous intéresserons ici au cas d'un fluide newtonien de tension de surface  $\sigma = 25,8 \text{ mN/m}$  et de densité  $d = 0,95$ . La vitesse de retrait est de 10 mm/s, ce choix a été fait car elle est ni trop lente (vitesse lente = long temps de calcul) et ni trop rapide (pour se rapprocher des cas industriels).

### 5.1.1 Importance de la rhéologie sur la forme du ménisque

Bien avant d'influencer l'épaisseur finale extraite autour du moule, la viscosité joue déjà un rôle sur la forme du ménisque. Selon Spiers [Spiers73], les forces de tension de surface, de pression et la viscosité sont les trois principales forces déterminant la forme du ménisque. Plus précisément, l'épaisseur  $y$  est fonction de :

- La viscosité et la tension de surface dans le ménisque dynamique,
- La tension de surface et les forces de pression dans le ménisque statique.

Comme le montre la *Figure 5-1*, la viscosité a une réelle influence sur la forme du ménisque : à faible viscosité, sa courbure est d'autant plus importante que la viscosité est faible. Cette forme laisse déjà supposer que l'épaisseur après retrait sera plus faible pour des fluides moins visqueux.

La simulation numérique retranscrit donc bien l'importance des forces visqueuses dans la détermination de l'épaisseur dans le ménisque.

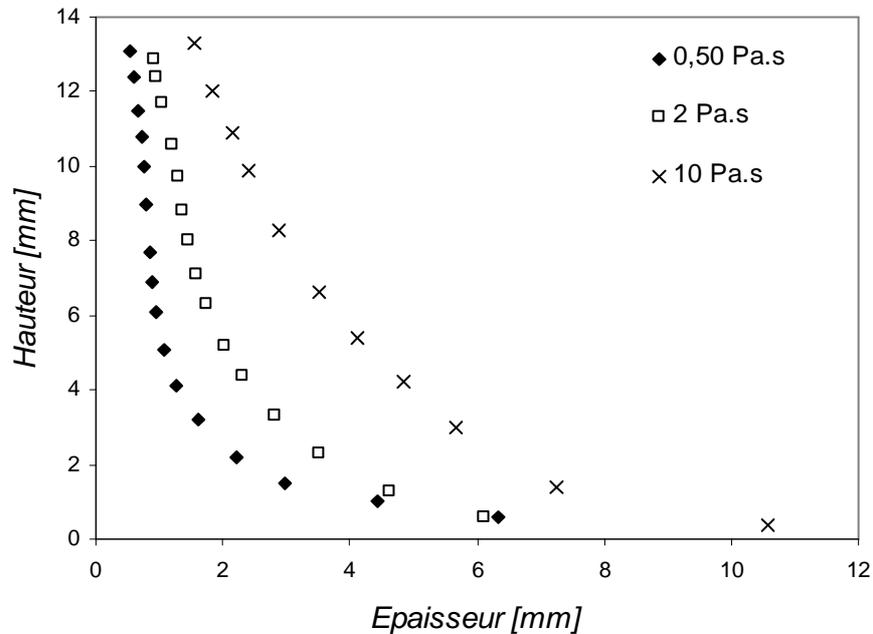


Figure 5-1 : Evolution de la forme du ménisque en fonction de la viscosité newtonienne

## 5.1.2 Importance de la viscosité après retrait complet du moule

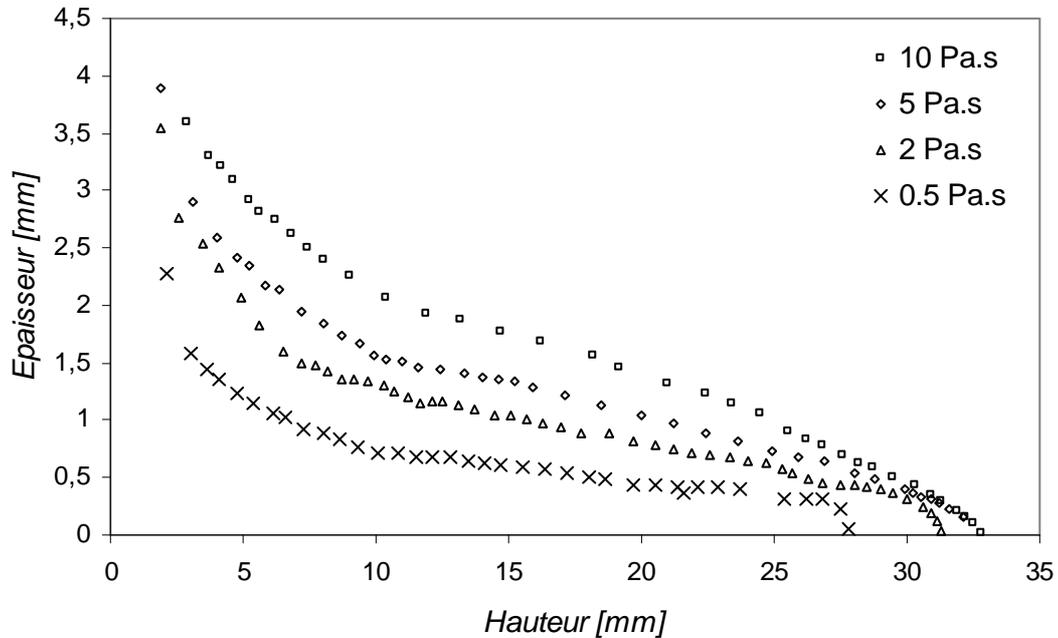
### 5.1.2.1 *Influence de la viscosité sur l'épaisseur*

La *Figure 5-2* présente l'évolution des épaisseurs extraites autour du moule pour différentes viscosités. Plus cette dernière est forte, plus l'épaisseur extraite est importante. Nous retrouvons bien numériquement les mêmes tendances que nous avons observées expérimentalement, c'est-à-dire qu'une plus grande viscosité conduit à une plus grande épaisseur.

La hauteur maximale de la couche extraite est plus basse pour de plus petite viscosité, ceci est en fait lié à des instabilités numériques. Nous avons présenté dans le *Chapitre 4* l'origine de ce type d'observations dues au remaillage dans la région I. Nous retrouvons ce même phénomène ici à faible viscosité. Alors que le moule a été plongé à une profondeur de 33 mm, la hauteur moyenne de la couche extraite pour une viscosité inférieure ou égale à 2 Pa.s est plus basse (31,5 mm pour  $\mu = 2 Pa.s$  et 27,5 mm pour  $\mu = 0,5 Pa.s$ ). Il n'y a pas eu de perte

de matière mais celle-ci est venue s'agglutiner dans les épaisseurs inférieures ce qui explique l'augmentation soudaine d'épaisseur dans la région I.

Il est possible de corriger les conséquences liées à ce phénomène de perte de hauteur en considérant que la masse de matière extraite est correcte. Nous savons également que la surface libre dans la région I suit une forme parabolique ([Jeffreys30]).

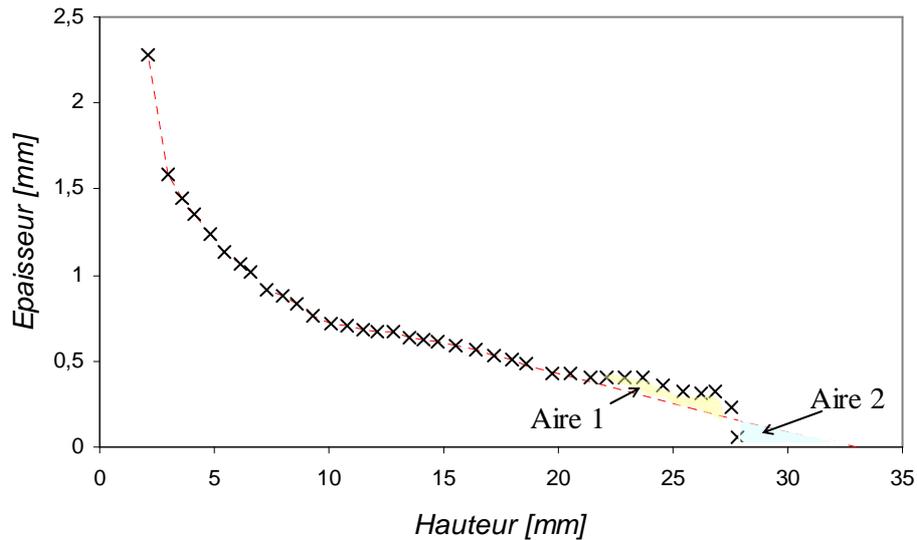


**Figure 5-2 : Influence de la viscosité sur l'épaisseur dans un cas newtonien**

A l'aide de ces deux postulats, il est possible de gommer les erreurs liées aux instabilités numériques et de reconstruire les formes des épaisseurs dans la région I. La courbe doit être redessinée de telle manière que l'épaisseur dans la région I soit de la forme d'une parabole ayant pour origine la hauteur réelle de trempage. Il faut également conserver la même masse de matière autour du moule. Pour cela, il faut respecter l'égalité des aires sous courbes comme cela est expliquée *Figure 5-3* : l'Aire 1 doit être équivalente à l'Aire 2.

Le principe pour redessiner la forme de la surface libre consiste donc à résoudre le système suivant :

$$\text{pour } (h, z) \in \text{région I} \quad \begin{cases} \text{Aire}_{\text{corrigée}} = \text{Aire}_{\text{numérique}} \\ h = a \cdot z^2 + b \cdot z + c \quad a, b, c \text{ constantes} \\ h(z = 33\text{mm}) = 0 \end{cases}$$



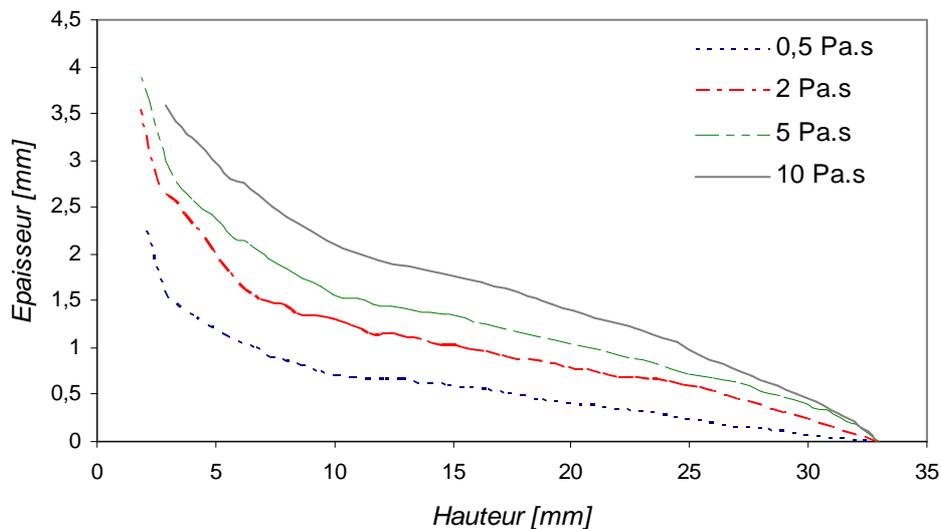
**Figure 5-3 : Extrapolation de la répartition de l'épaisseur pour une viscosité de 0,5 Pa.s pour corriger les erreurs numériques**

Les deux cas à corriger sont ceux aux plus faibles viscosités : à 0,5 Pa.s et à 2 Pa.s. Les valeurs des constantes a, b et c ainsi que les aires sont données dans le *Tableau 5-1*.

	a	b	c	Aire <sub>numérique</sub>	Aire <sub>corrigée</sub>
$\mu = 0,5 \text{ Pa.s}$	0,0002	-0,044	1,23	12,0	12,1
$\mu = 2 \text{ Pa.s}$	-0,001	-0,020	1,73	16,3	16,8

**Tableau 5-1 : Données permettant la reconstruction de la région I des courbes à faibles viscosités**

Après correction, les courbes donnant l'épaisseur en fonction de la hauteur sur le moule avec une viscosité différente sont données *Figure 5-4*.



**Figure 5-4 : Evolution de l'épaisseur en fonction de la viscosité après correction**

### 5.1.2.2 Influence de la viscosité sur la masse retirée autour du moule

Comme l'épaisseur est dépendante de la viscosité, la masse de fluide extraite autour du moule doit varier également. Le calcul s'est fait en déterminant les aires sous les courbes de la *Figure 5-2* à l'aide de la méthode des trapèzes. La masse peut ensuite être calculée connaissance les masses volumiques du fluide.

Comme le démontre la *Figure 5-5*, l'évolution de la masse extraite augmente logarithmiquement en fonction de la viscosité selon l'équation suivante :

$$m = 3,32 \ln(\mu) + 8,45 \quad \text{Eq. 5-1}$$

avec  $m$  la masse retirée autour du moule et  $\mu$  la viscosité.

La généralisation de cette équation donne l'expression suivante :

$$m = A \ln(\mu) + B \quad \text{Eq. 5-2}$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes dépendantes de la masse volumique du fluide, de sa tension de surface et de la vitesse de retrait.

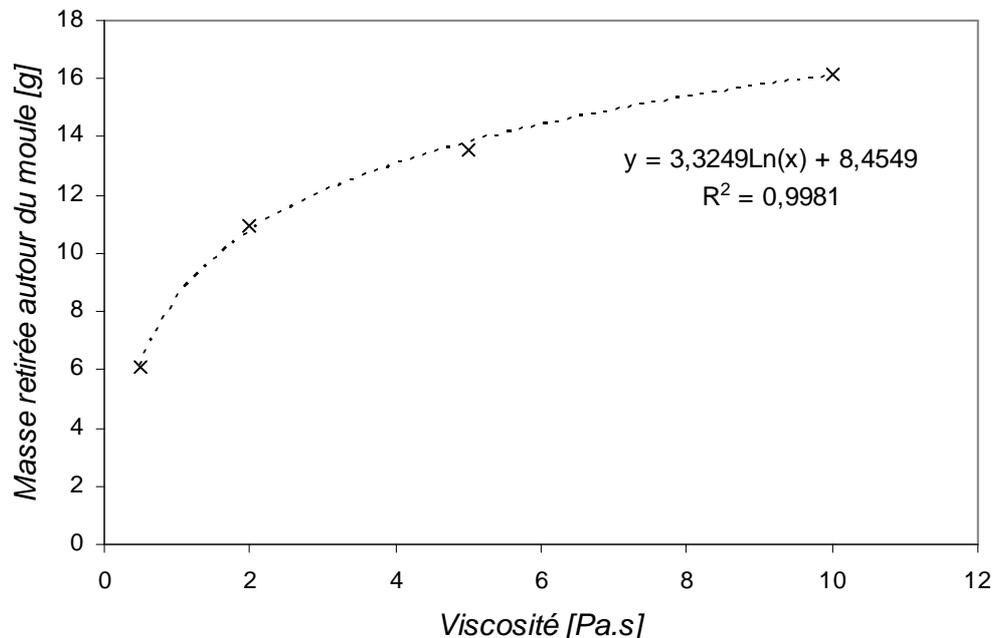


Figure 5-5 : Graphique présentant la relation entre la masse retirée autour du moule et la viscosité pour un fluide newtonien de masse volumique  $950 \text{ kg/m}^3$ , de tension de surface  $25,8 \text{ mN/m}$  et de à une vitesse de retrait de  $10 \text{ mm/s}$

### 5.1.2.3 Influence de la viscosité sur la hauteur de rupture du filament

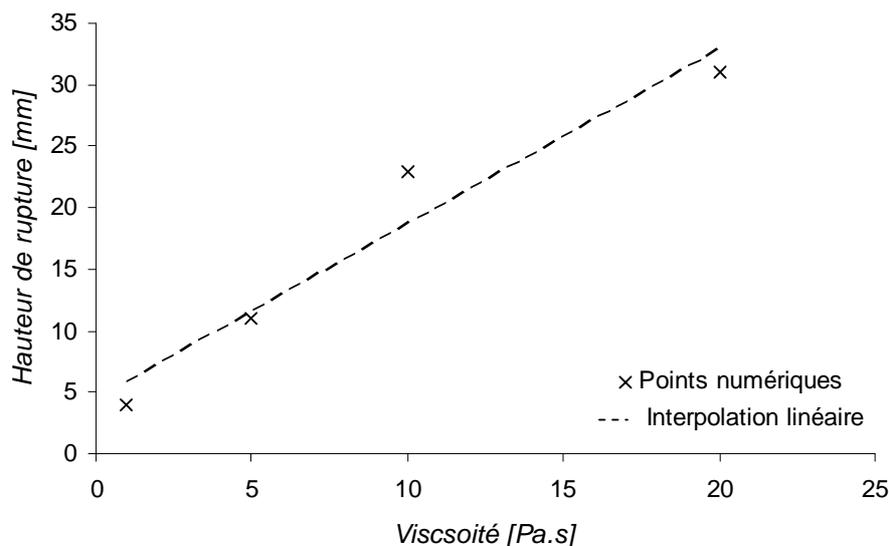
Nous avons regardé l'influence de la tension de surface sur la rupture du filament dans le cas d'un fluide newtonien de tension de surface 60 mN/m, de densité 1,4 et à une vitesse de remontée de 10 mm/s. Selon une série d'expériences menée par Yasuda *et al.* [Yasuda04] présentée dans le *Chapitre 1*, la hauteur de rupture du fil est reliée à la vitesse de retrait selon l'équation suivante :

$$H_r = C\mu U_0 + H_r' \quad \text{Eq. 5-3}$$

où  $C$  est un coefficient proportionnel en  $\text{Pa}^{-1}$  et  $H_r'$  la hauteur initiale de rupture quand  $U_0 = 0 \text{ m/s}$ .

Expérimentalement, la rupture du filament peut être due à divers facteurs prévisibles ou non. Une instabilité, une petite hétérogénéité de la composition du fluide, une poussière dans l'air peuvent en être à l'origine lors de l'élongation du filament due à la remontée du moule. Numériquement, le caractère aléatoire du milieu extérieur n'intervient pas mais la rupture se produit lorsque le diamètre du filament devient extrêmement petit (inférieur à la taille de maille) sous l'effet de la vitesse de remontée.

Il est donc intéressant de voir comment le processus de rupture du fil s'effectue numériquement. Sur la *Figure 5-6* est donnée la hauteur à laquelle elle se déroule en fonction de la vitesse de retrait. On constate que l'on retrouve bien la linéarité décrite par l'équation 5-3.



**Figure 5-6 : Evolution de la hauteur de rupture du filament en fonction de la viscosité pour un fluide newtonien de masse volumique  $1400\text{kg/m}^3$ , à une vitesse de remontée de  $10\text{mm/s}$  et de tension de surface  $60\text{mN/m}$**

La relation numérale trouvée est la suivante :

$$H_r = 1,42\mu + 4,43 = 0,14\mu U_0 + 4,43 \quad \text{Eq. 5-4}$$

Yasuda *et al.* ont également relié le temps  $t_r$  auquel se déroulait la rupture en fonction de la viscosité selon l'équation 5-5 :

$$t_r = \frac{H_r}{U_0} = C\mu + \frac{H_r'}{U_0} \quad \text{Eq. 5-5}$$

$$\text{soit } t_r = 0,44 + 0,14\mu = \frac{4,4}{U_0} + 0,14\mu \quad \text{Eq. 5-6}$$

La rupture du filament créé à la sortie du moule hors du bain au cours de la modélisation numérique suit bien les tendances établies expérimentalement.

Alors qu'expérimentalement la rupture se produit lorsque le diamètre du filament atteint une valeur critique, là où toute instabilité conduit à la rupture, numériquement le phénomène conduisant à cette même rupture fait appel à un mécanisme semblable. La rupture du filament y apparaît lorsque le diamètre devient inférieur à la taille de maille minimum. C'est pourquoi les observations faites lors des modélisation du trempage donnent les mêmes tendances qu'expérimentalement.

## 5.2 Influence de la vitesse de remontée

Dans ce paragraphe, nous présentons l'étude de l'influence de la vitesse de retrait sur le procédé de trempage. Nous nous intéresserons dans un premier temps à son rôle sur l'épaisseur extraite. Nous regarderons ensuite l'évolution en fonction de la vitesse de remontée de la rupture du filament créé après retrait complet du moule. Le cas du fluide traité ici est le miel :  $\sigma = 60mN / m$  et de densité  $d = 1,4$ .

### 5.2.1 Influence de la vitesse de remontée sur les épaisseurs extraites

Nous avons vu expérimentalement que dans les cas du miel et du PVA, les épaisseurs extraites à 5, 7 et 10 mm/s étaient presque identiques et il avait été alors supposée qu'au delà d'une certaine vitesse de retrait, ici 5 mm/s, l'épaisseur extraite était la même. Cette tendance n'est pas retrouvée numériquement comme le montre la *Figure 5-7* : plus la vitesse est rapide, plus l'épaisseur est grande.

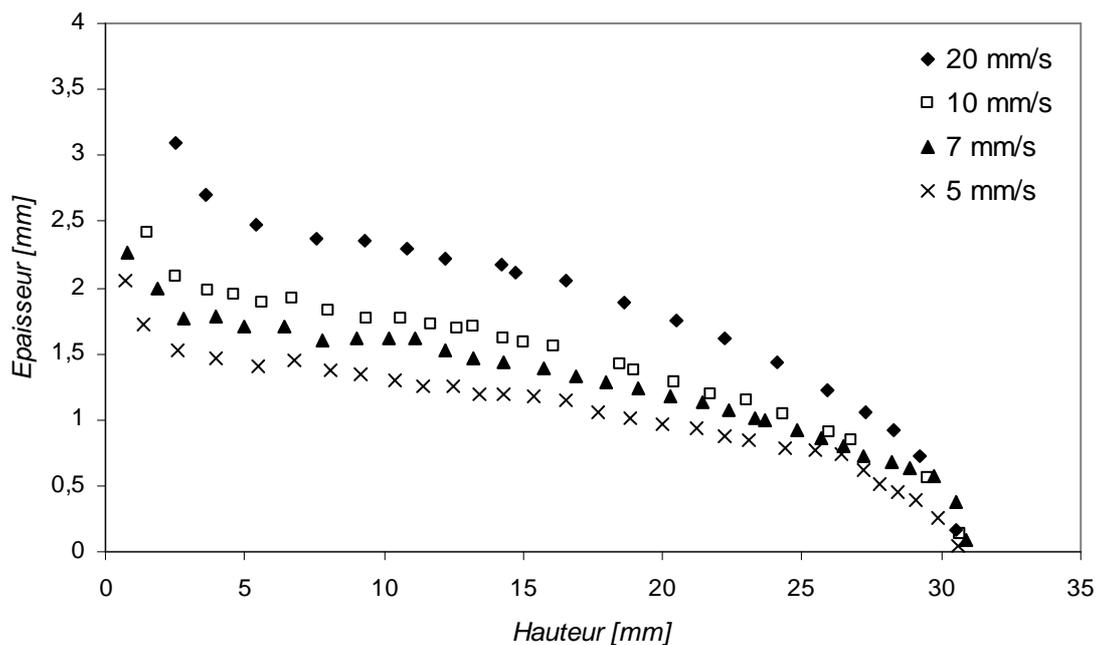


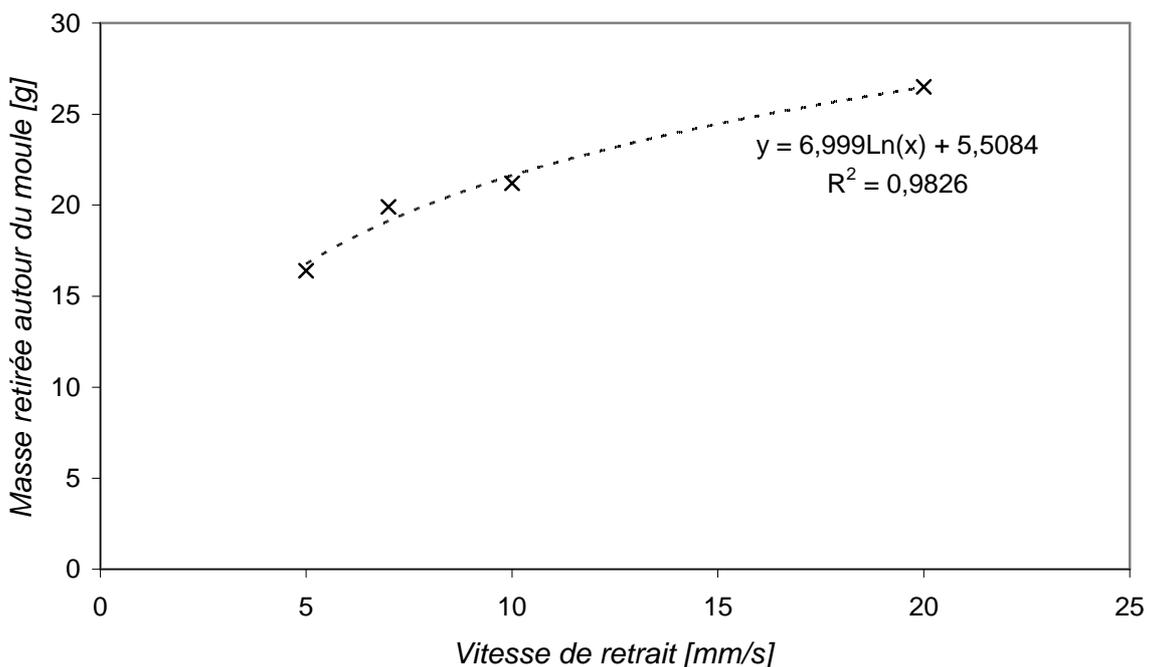
Figure 5-7 : Evolution de l'épaisseur en fonction de la vitesse de remontée dans le cas du miel

Les raisons des différences observées entre expérimentation et modélisation ont pour principale origine les erreurs liées aux mesures expérimentales. En plus de celle liées au calcul de l'épaisseur sur les photographies viennent s'ajouter celles dues à une mauvaise maîtrise des vitesses de remontée sur le prototype de trempage (erreur estimée à 10%). La modélisation numérique permet évidemment une grande précision aussi bien au niveau des paramètres tels que la vitesse de retrait que sur la mesure des épaisseurs.

La tendance que nous donne la *Figure 5-7* semble donc correcte et elle est confirmée par l'épaisseur obtenue à une vitesse de 20 mm/s – non testée expérimentalement - nettement plus importante qu'à 10 mm/s

### 5.2.2 Influence de la vitesse de retrait sur la masse retirée autour du moule

Nous procédons à la même étude que nous avons faite dans le paragraphe 5.1.2.2, c'est-à-dire nous cherchons la variation de masse retirée en fonction de la vitesse de retrait du moule.



**Figure 5-8 : Graphique représentant la relation entre la masse retirée autour du moule et la vitesse de retrait pour un fluide newtonien de masse volumique 1400 kg/m<sup>3</sup>, de tension de surface 60 mN/m et de viscosité 13 Pa.s**

Selon la *Figure 5-8*, l'évolution de la masse extraite augmente logarithmiquement en fonction de la vitesse de retrait selon l'équation suivante :

$$m = 7,00 \ln(U_0) + 5,51 \quad \text{Eq. 5-7}$$

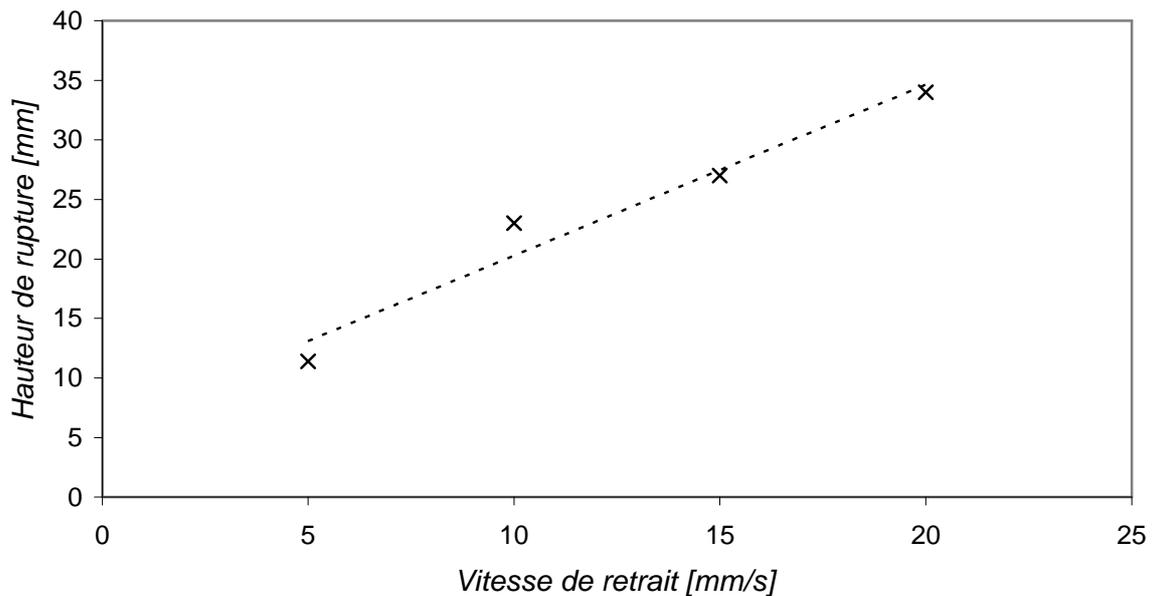
avec  $U_0$  la vitesse de retrait du moule.

Les paramètres  $A$  et  $B$  sont fonction de la masse volumique, de la tension de surface et la viscosité.

### 5.2.3 Influence de la vitesse sur la rupture du fil

Nous procédons de même que dans le paragraphe 5.1.2.3 pour déterminer l'influence de la vitesse de retrait sur la hauteur de rupture du filament.

Sur la *Figure 5-9* est donnée la hauteur à laquelle la rupture du filament s'effectue en fonction de la vitesse de retrait. On constate que l'on retrouve bien la linéarité décrite par Yasuda *et al.* [Yasuda04] dans l'équation 5-3.



**Figure 5-9 :** Evolution de la hauteur de rupture du filament en fonction de la vitesse de retrait pour un fluide newtonien de masse volumique  $1400 \text{ kg/m}^3$ , de tension de surface  $60 \text{ mN/m}$  et de viscosité  $10 \text{ Pa.s}$

La relation numérique trouvée dans ce cas est la suivante :

$$H_r = 1,39U_0 + 5,9 = 0,14\mu U_0 + 5,9 \quad \text{Eq. 5-8}$$

Il est également possible de relier le temps  $t_r$  auquel se déroule la rupture en fonction de la vitesse de retrait  $U_0$  selon l'équation 5-5 :

$$t_r = \frac{5,9}{U_0} + 1,4 = \frac{5,9}{U_0} + 0,14\mu \quad \text{Eq. 5-9}$$

Comme dans le cas où l'on avait regardé l'influence de la viscosité sur la rupture du filament, l'influence de la vitesse de retrait sur cette même rupture suit bien les tendances établies expérimentalement.

### 5.3 Influence de la tension de surface

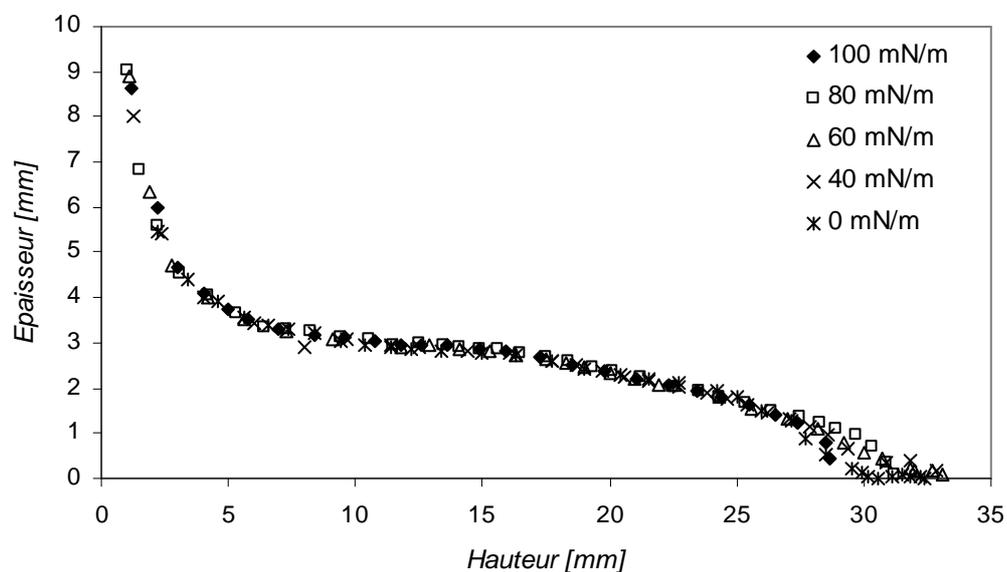
Le dernier paramètre physique dont nous avons étudié l'influence est lié aux forces de surface. L'intérêt de l'emploi de la simulation numérique est qu'elle nous permet d'étudier le rôle de ce facteur sur la forme et l'aspect de la surface libre, ce qui, expérimentalement, est difficile à réaliser.

#### 5.3.1 Influence de la tension de surface sur l'épaisseur extraite

##### 5.3.1.1 *Variation de la taille de l'épaisseur en fonction de la tension de surface*

L'influence de la tension de surface sur l'épaisseur a été étudiée pour deux cas de fluides newtoniens : le premier avec une viscosité de 13 Pa.s (*Figure 5-10*) et le second avec une viscosité de 0,8 Pa.s (*Figure 5-11*).

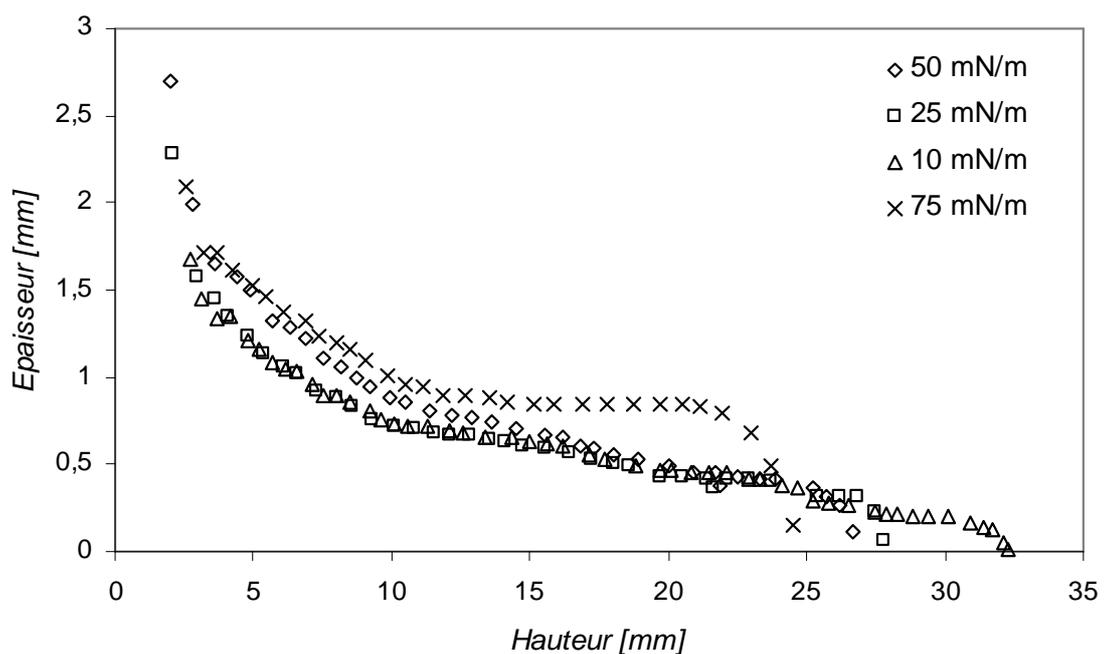
Dans le premier cas (*Figure 5-10*), la tension de surface n'a pas une réelle influence: l'épaisseur reste constante lorsque varie le facteur tension interfaciale. De légères différences sont tout de même à noter dans la région transitoire mais cela peut rester négligeable. Par conséquent, quand la viscosité est très grande, elle a peu d'influence sur le rôle de la tension de surface.



**Figure 5-10 : Influence de la tension de surface pour un fluide newtonien de viscosité 13 Pa.s à une remontée de 50 mm**

Par contre, dans le deuxième cas où la viscosité est plus faible (*Figure 5-11*), la tension de surface joue un rôle important sur la forme du film extrait. Pour une faible tension de surface, la matière se répartit tout le long du moule depuis la hauteur de trempe. Pour une valeur plus grande, cette hauteur est perdue et on retrouve le phénomène de décrochement de matière au cours de la remontée déjà observé à très faible viscosité. En fait, pour de grande tension de surface, la force qui vient s'appliquer est plus importante que celle fournie par le mouvement de remontée du moule. Malgré le contact collant, la matière se décroche pour venir se tasser dans les zones inférieures de l'épaisseur.

Pour contrecarrer ce phénomène, il faut diminuer la taille de maille. Or, une telle diminution conduit à des temps de calcul beaucoup trop importants comme nous l'avons montré dans le *Chapitre 4*. Il est possible comme dans les cas à faibles viscosités de reconstruire les courbes à grandes tensions de surface. Pour cela nous utilisons les mêmes méthodes décrites dans le sous paragraphe 5.1.2.1. Les résultats de cette extrapolation sont montrés sur la *Figure 5-12*.



**Figure 5-11 : Influence de la tension de surface pour un fluide newtonien de viscosité 0,8 Pa.s à une remontée de 50 mm**

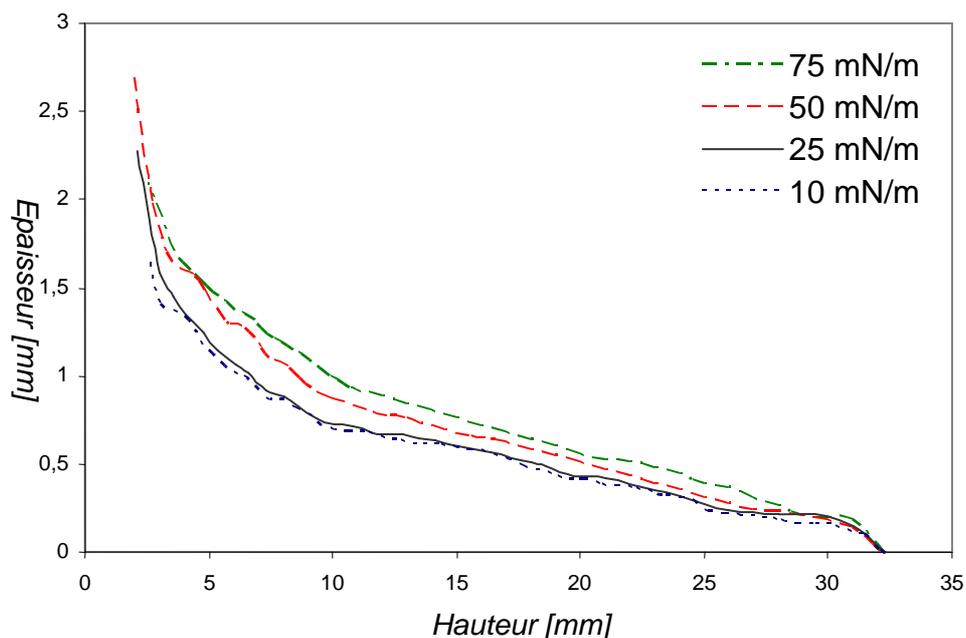


Figure 5-12 : Evolution de l'épaisseur en fonction de la tension de surface après corrections de la Figure 5-11

### 5.3.1.2 Variation de la masse de l'épaisseur en fonction de la tension de surface

La simulation numérique ne permet pas de décrire parfaitement les répartitions d'épaisseurs extraites à fortes tensions de surface. Cependant, comme il n'y a pas de perte de matière mais seulement une mauvaise répartition, il est possible d'évaluer son influence sur la masse extraite.

Dans les deux cas étudiés précédemment, nous avons déterminé la masse de matière extraite autour du moule pour les différentes valeurs de tension de surface. Les résultats obtenus sont donnés dans le *Tableau 5-2* pour le fluide newtonien de viscosité 13 Pa.s et dans le *Tableau 5-3* pour le fluide newtonien de viscosité 0,8 Pa.s.

Tension de surface [mN/m]	0	40	60	80	100
Aire sous la courbe [mm <sup>2</sup> ]	60,9	64,6	63,4	66,6	62,7
Masse de miel autour du doigt [g]	30,7	32,6	31,9	33,6	31,6

Tableau 5-2 : Masse retirée autour du moule à H = 50 mm pour un fluide newtonien de viscosité 13 Pa.s

<b>Tension de surface [mN/m]</b>	10	25	50	75
<b>Aire sous la courbe [mm<sup>2</sup>]</b>	17,6	19,4	21,8	22,5
<b>Masse de PVA autour du doigt [g]</b>	8,8	9,7	10,9	11,2

Tableau 5-3 : Masse retirée autour du moule à H = 50 mm pour un fluide newtonien de viscosité 0,8 Pa.s

La Figure 5-13 présente l'évolution de la masse, ramenée à un nombre adimensionnel, en fonction de la tension de surface. Lorsque la viscosité est de 0,8 Pa.s, le poids augmente en même temps que la tension de surface avec une pente de 0,0035. Par contre dans le cas où la viscosité est de 13 Pa.s, le poids reste quasiment stable avec une pente de seulement 0,0004.

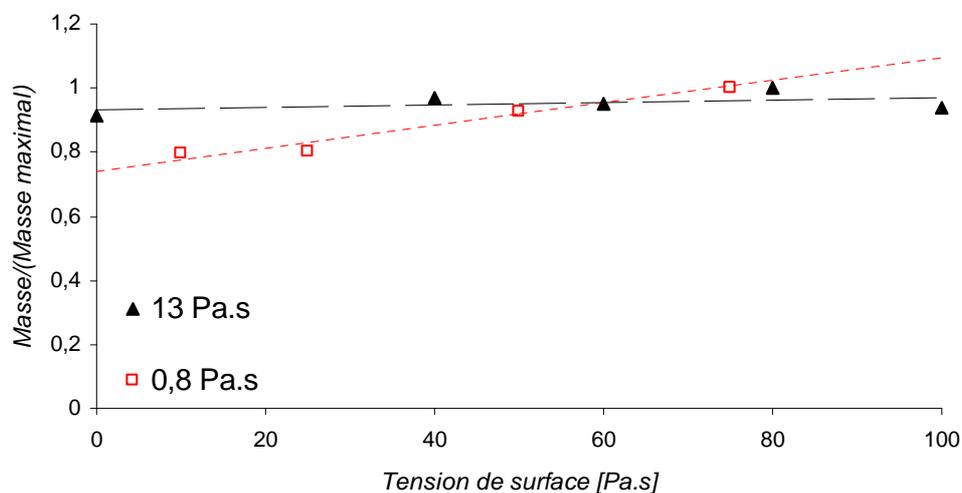


Figure 5-13 : Variation de la masse en fonction de la tension de surface et de la viscosité

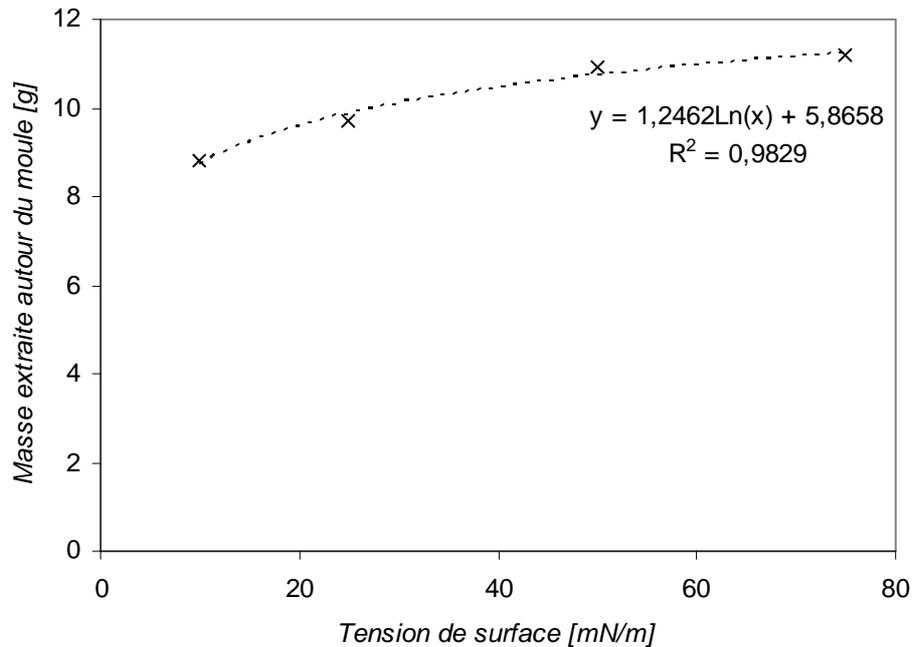
La tension de surface a un rôle plus important dans les cas de fluides à basses viscosités alors qu'à plus forte viscosité, la négliger ne serait pas une approximation grossière. Weinstein et al. [Weinstein01] rappelle que la tension de surface peut être négligée dans les cas où le nombre capillaire est grand. Comme le montre le Tableau 5-4, nos résultats sont bien en accord avec cette théorie : à grand nombre capillaire, la tension de surface peut être négligée.

	<b>Fluide 1</b> $\mu = 13 \text{ Pa} \cdot \text{s}$				<b>Fluide 2</b> $\mu = 0,8 \text{ Pa} \cdot \text{s}$			
<b>Tension de surface [mN/m]</b>	40	60	80	100	10	25	50	75
<i>Ca</i>	3,25	2,17	1,63	1,30	0,5	0,2	0,1	0,07

Tableau 5-4 : Dépendance entre nombre capillaire et propriété du fluide

Pour le cas où la tension de surface n'est pas négligeable, la masse extraite autour du moule évolue logarithmiquement en fonction de la tension de surface comme le montre la *Figure 5-14*. L'équation permettant d'établir cette relation est la suivante :

$$m = 1,25 \ln(\sigma) + 5,87 \quad \text{Eq. 5-10}$$



**Figure 5-14 :** Graphique représentant la relation entre la masse retirée autour du moule et la tension de surface pour un fluide newtonien de masse volumique  $1390 \text{ kg/m}^3$ , à une vitesse de remontée de  $10 \text{ mm/s}$  et de viscosité  $0,8 \text{ Pa.s}$

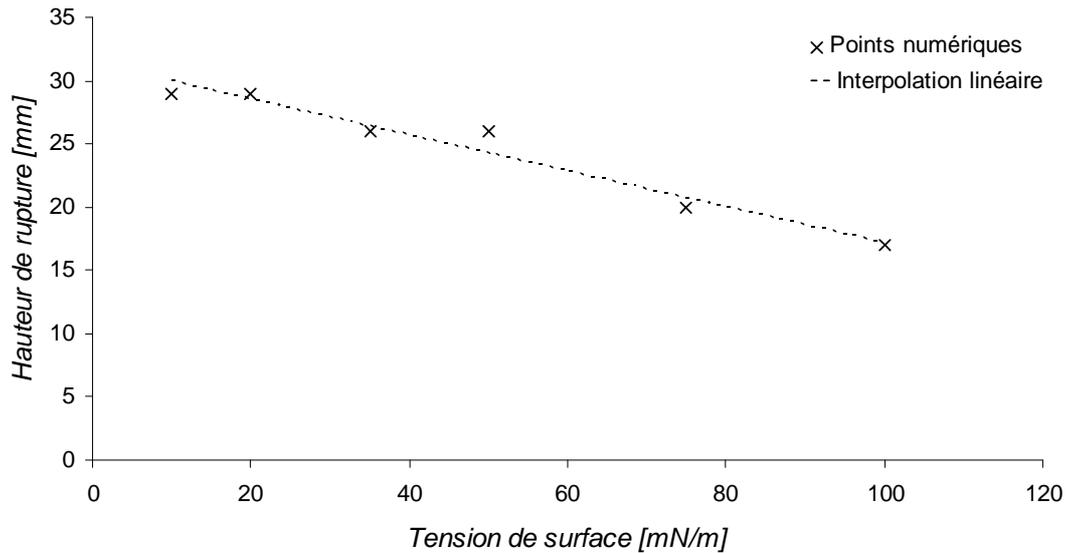
Les paramètres  $A$  et  $B$  cette fois est fonction de la masse volumique, la vitesse de remontée et la viscosité.

### 5.3.2 Influence de la tension de surface sur la rupture du fil

Nous avons regardé l'influence de la tension de surface sur la rupture du filament dans le cas d'un fluide newtonien de viscosité  $10 \text{ Pa.s}$ , de densité  $1,4$  et à une vitesse de remontée de  $10 \text{ mm/s}$ . Nous procédons de même que dans le paragraphe 5.1.2.3 pour déterminer l'influence de la tension de surface sur la hauteur de rupture du filament.

La *Figure 5-15* donne l'évolution linéaire de la hauteur de rupture en fonction de la tension de surface. La relation numérique trouvée dans ce cas est la suivante :

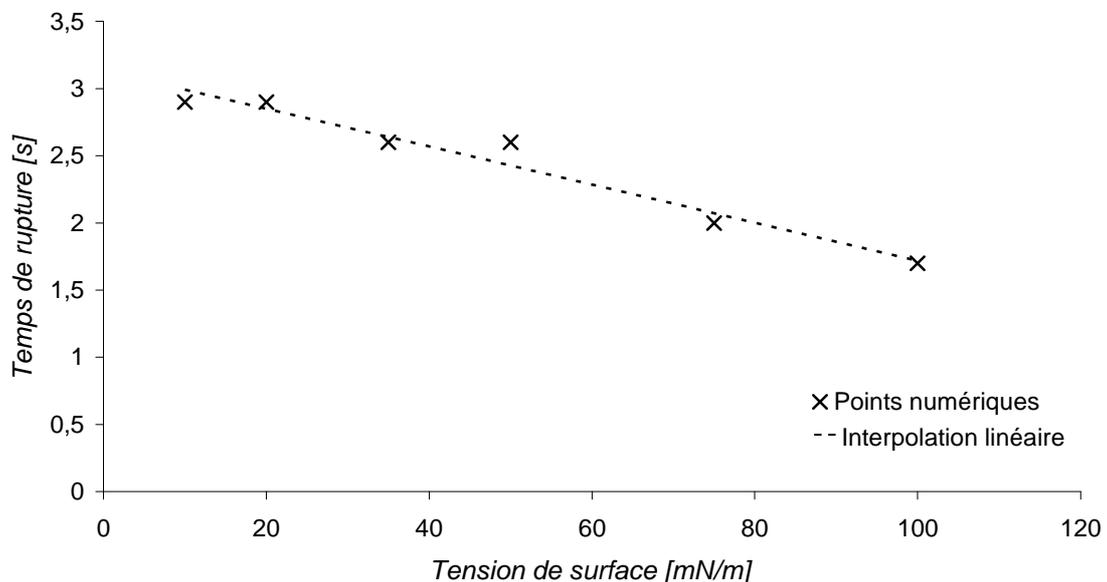
$$H_r = -0,14\sigma + 31,34 \quad \text{Eq. 5-11}$$



**Figure 5-15 : Evolution de la hauteur de rupture en fonction de la tension de surface pour un fluide newtonien de masse volumique  $1400\text{kg/m}^3$ , à une vitesse de remontée de  $10\text{mm/s}$  et de viscosité  $10\text{Pa.s}$**

La Figure 5-18 montre la linéarité existante entre la tension de surface et le temps de rupture. La relation liant le temps  $t_r$  auquel se déroule la rupture à la tension de surface est :

$$t_r = -0,014\sigma + 3,13 \quad \text{Eq. 5-12}$$



**Figure 5-16 : Evolution du temps de rupture du filament en fonction de la vitesse de retrait pour un fluide newtonien de masse volumique  $1400\text{kg/m}^3$ , à une vitesse de remontée de  $10\text{mm/s}$  et de viscosité  $10\text{Pa.s}$**

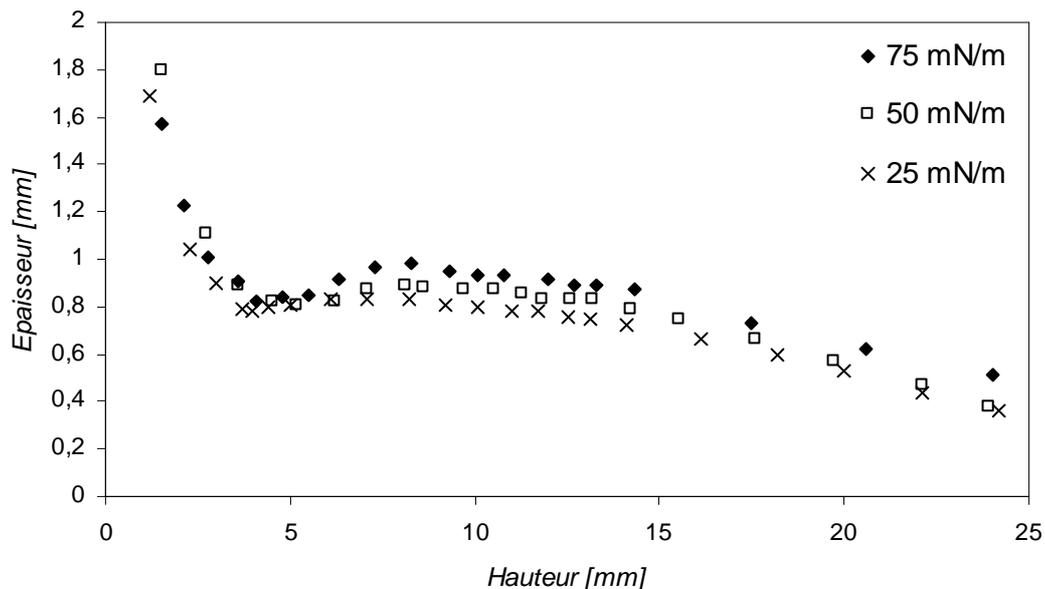
Le temps de rupture ainsi que la hauteur de rupture évolue tout deux linéairement avec la tension de surface.

### 5.3.3 Compétition gravité – tension de surface

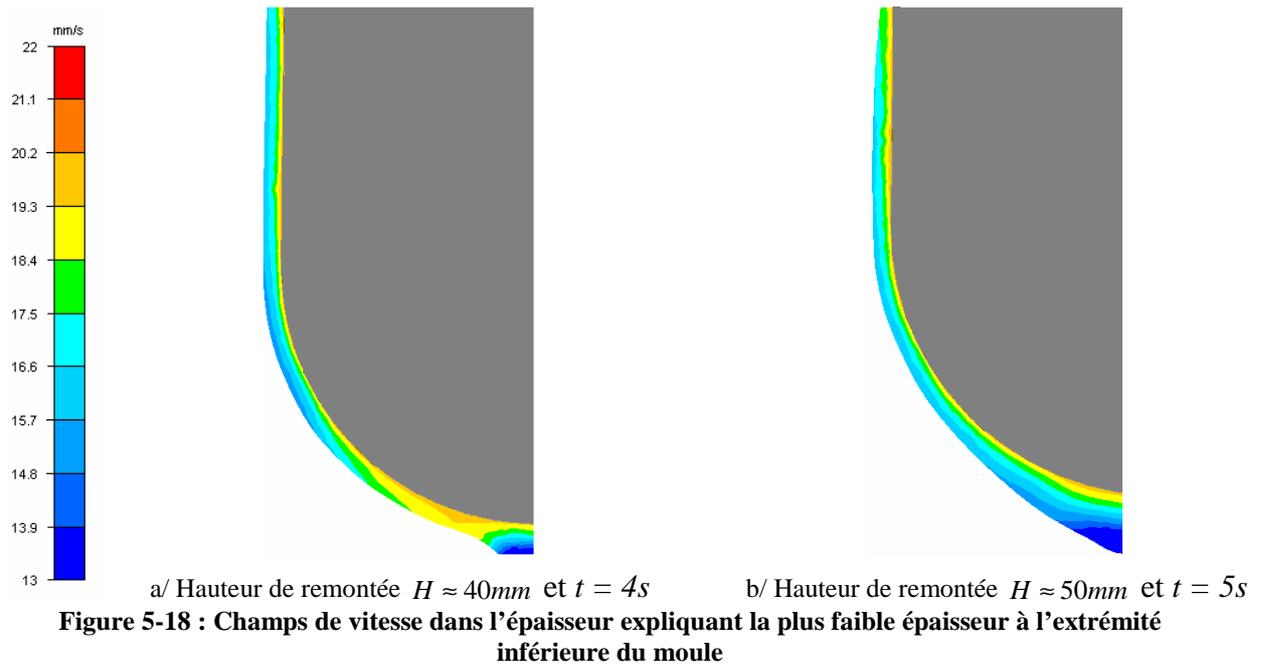
Comme nous venons de le montrer, dans les cas de fluides peu visqueux, la tension de surface joue un rôle important : plus sa valeur est grande, plus il a de matière extraite autour du moule. En fait, cette force vient s'opposer à la gravité qui est responsable de la perte de matière par écoulement. L'opposition entre la gravité et les forces de tension de surface ne se fait pas uniquement sur la masse mais également sur la forme de la surface libre au niveau de l'hémisphère inférieure du moule, là où les instabilités numériques sont inexistantes.

#### 5.3.3.1 *Observations numériques*

Juste après le retrait du moule, à  $H \approx 40\text{mm}$ , une singularité dans la forme de l'épaisseur apparaît et est accentuée à plus forte tension de surface : dans la partie inférieure, l'épaisseur diminue (*Figure 5-17*). On pourrait penser au premier abord que l'épaisseur augmente continuellement le long du moule sous l'effet de la gravité mais ce n'est pas le cas. Du fait de la courbure du moule, la tension de surface joue un rôle important dans cette zone et conduit à cette diminution. La *Figure 5-18* montre le champ de vitesse dans l'épaisseur. La zone de diminution correspond à une zone de stagnation où la vitesse est plus faible que dans le reste de l'épaisseur. Ce phénomène apparaît temporairement juste après le retrait du moule et la formation du fil. Les forces de tension de surface à cet instant sont plus importantes que les forces gravitationnelles ce qui apporte cette courbure à la surface libre. Ce phénomène conduit à une diminution localisée de l'épaisseur. Rapidement, sous l'effet du poids de la matière, la gravité vient gommer cette singularité.

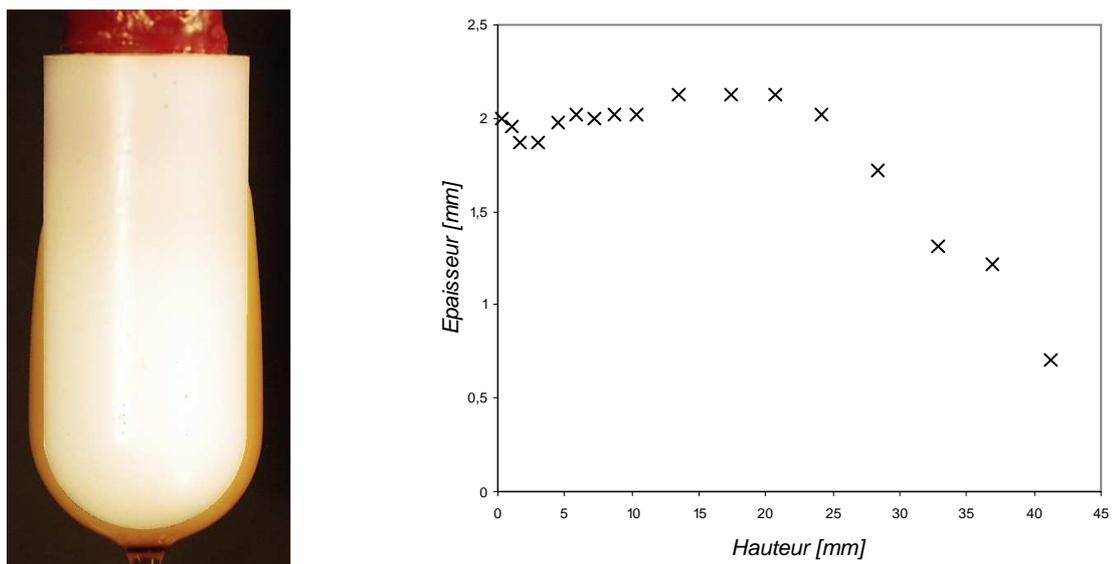


**Figure 5-17 : Épaisseur en fonction de la hauteur avec variation de la tension de surface dans le cas d'un fluide newtonien de viscosité 0,8 Pa.s à une hauteur de retrait de 40 mm**



### 5.3.3.2 Observations expérimentales

Pour vérifier que le phénomène de diminution d'épaisseur n'est pas liée à un artefact numérique mais bien à la compétition tension de surface / gravité, nous avons regardé expérimentalement la forme de la surface libre juste après émergence. Nous nous sommes intéressés au cas du miel car c'est le fluide étudié qui a la plus grande valeur de tension de surface.



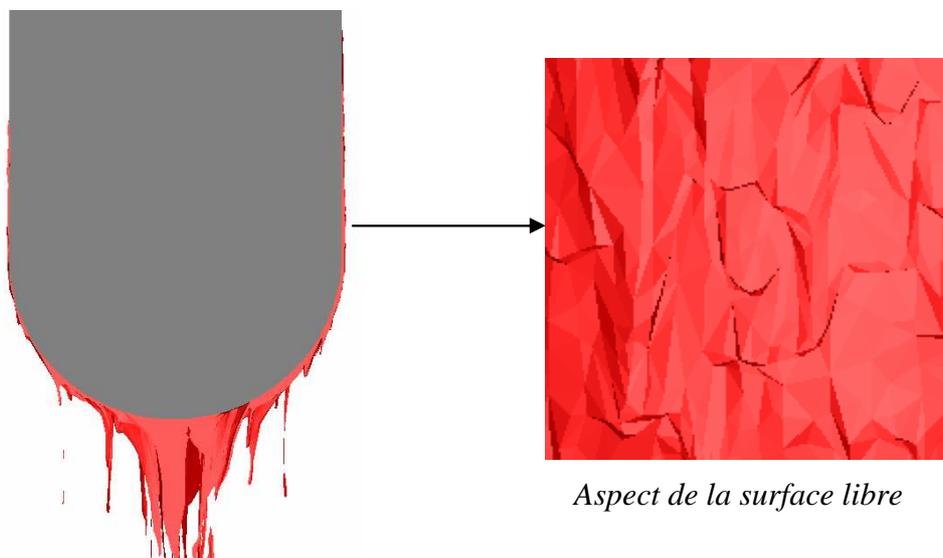
**Figure 5-19 : Observation expérimentale de l'épaisseur de miel juste après retrait ( $H \approx 40\text{ mm}$ )**

La *Figure 5-19* montre le résultat de cette étude expérimentale. Visuellement, on observe sur la *Figure 5-19 a/* une diminution d'épaisseur dans la partie inférieure du moule. Les mesures des épaisseurs *Figure 5-19 b/* confirment les observations visuelles faites. A l'aide de ces essais expérimentaux, nous confirmons donc bien que lors de la formation du fil, la tension de surface joue un rôle important dans la forme de la surface libre en s'opposant à la gravité.

#### 5.3.4 Amélioration de l'aspect de la surface

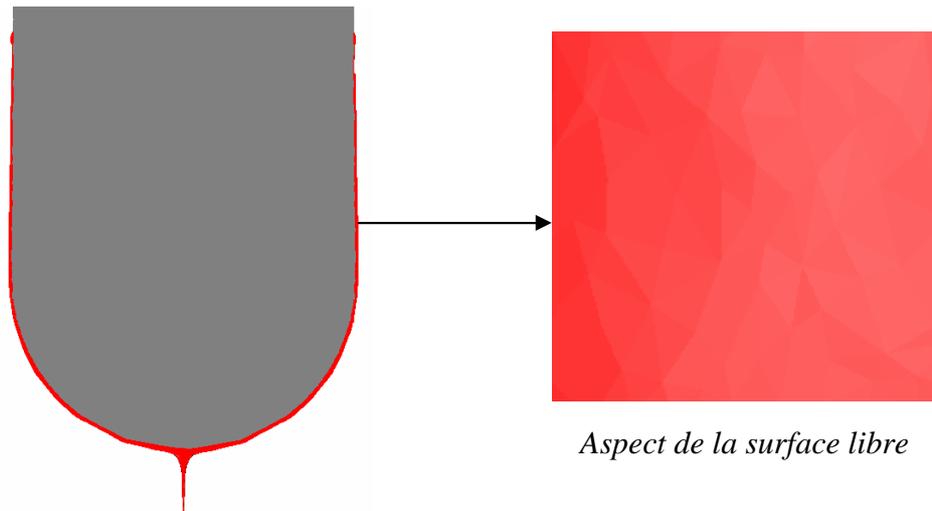
Un intérêt plus numérique de l'utilisation de la tension de surface est le lissage de la surface de l'épaisseur et ainsi la réduction du risque de dégénérescence du maillage.

Dans des cas de faibles viscosités (ici  $\eta = 0,1 Pa.s$ ), l'absence de la tension de surface conduit à un aspect de la surface très irrégulier et une perte de matière très anarchique au niveau inférieur du moule comme le montre la *Figure 5-20*. En plus de la perte de matière plus grande, le manque de tension de surface conduit à un maillage très déformé ce qui pose des problèmes de calcul : le maillage est dégénéré et amène à l'arrêt prématuré des calculs.



**Figure 5-20 : Observation de l'état de surface sans tension de surface : nombreuses irrégularités**

Par contre, pour le même cas mais avec les forces de tension de surface, on remarque sur la *Figure 5-21* que la surface est parfaitement lisse et que les pertes anarchiques de matières observées *Figure 5-20* ne sont plus présentes. La tension de surface cherche à minimiser l'énergie de surface en réduisant la taille de la surface : les irrégularités sont ainsi gommées.



**Figure 5-21 : Observation de l'état de surface avec tension de surface : gommage des irrégularités**

## 5.4 Généralisation de l'influence des divers facteurs physiques

Nous venons de montrer l'influence de chaque paramètre physique isolé (viscosité, vitesse de remontée et tension de surface). Dans la suite de ce paragraphe, nous nous proposons de regrouper l'ensemble des observations faites pour tirer des conclusions communes concernant les études des masses retirées autour du moule ainsi que celle réalisée au sujet de la rupture du filament.

### 5.4.1 Masse extraite autour du moule

Dans les paragraphes précédents, nous avons montré que la masse retirée autour du moule varie logarithmiquement en fonction de la viscosité, de la vitesse de remontée et de la tension de surface :

$$\begin{cases} m = A \ln(\mu) + B \\ m = \alpha \ln(U_0) + \beta \\ m = K \ln(\sigma) + H \end{cases} \quad \text{Eq. 5-13}$$

avec les constantes  $A$  et  $B$  fonction de la masse volumique, de la vitesse de retrait et de la tension de surface, les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  fonction de la masse volumique, de la viscosité et de la tension de surface, et les constantes  $K$  et  $H$  fonction de la masse volumique, de la vitesse de retrait et de la viscosité.

Dans la suite de ce sous paragraphe, nous allons considérer l'influence de la masse volumique comme négligeable. La forme générale des équations 5-13 est :

$$\begin{aligned} m = & C_1 \ln(\mu) \ln(U_0) \ln(\sigma) + C_{21} \ln(\mu) \ln(U_0) + C_{22} \ln(\mu) \ln(\sigma) + C_{23} \ln(\sigma) \ln(U_0) \\ & + C_{31} \ln(\mu) + C_{32} \ln(\sigma) + C_{33} \ln(U_0) + C_4 \end{aligned} \quad \text{Eq. 5-14}$$

où  $C_i$  sont des constantes.

A l'aide des points numériques trouvés et donnés dans les *Figure 5-5*, *Figure 5-8* et *Figure 5-14*, il est possible de déterminer les valeurs des constants  $C_i$ . Ainsi, on trouve :

$$m = -1,57 \ln(\mu) \ln(U_0) \ln(\sigma) - 1,29 \ln(\mu) \ln(U_0) - 5,7 \ln(\mu) \ln(\sigma) - 0,81 \ln(\sigma) \ln(U_0) + 2,43 \ln(\mu) - 2,18 \ln(\sigma) - 3,04 \ln(U_0) - 1,50 \quad \text{Eq. 5-15}$$

#### 5.4.2 Rupture du filament

La hauteur de rupture du filament est fonction de la masse volumique, de la tension de surface, de la viscosité et de la vitesse de retrait comme nous l'avons montré dans les paragraphes précédents :

- Lorsque la viscosité varie, nous avons trouvé la relation suivante :

$$H_r = 1,42\mu + 4,43 = 0,14\mu U_0 + 4,43 \quad \text{Eq. 5-16}$$

- La variation de vitesse nous a permis d'établir l'équation suivante :

$$H_r = 1,39U_0 + 5,9 = 0,14\mu U_0 + 5,9 \quad \text{Eq. 5-17}$$

- Et enfin, l'étude sur la tension de surface a démontré :

$$H_r = -0,14\sigma + 31,34 \quad \text{Eq. 5-18}$$

Les deux premières relations trouvées sont quasiment équivalentes. Les pentes trouvées est la même et vaut 0,14 mais l'ordonnée à l'origine est légèrement différentes. Les valeurs étant très proches, il est possible d'écrire la forme généralisée suivante :

$$H_r = 0,14\mu U_0 + 5,1 \pm 0,8 \quad \text{Eq. 5-19}$$

En considérant l'influence de la masse volumique négligeable, la forme généralisée de l'équation de la hauteur de rupture du filament est la suivante :

$$H_r = C_1\mu U_0\sigma + C_{21}\mu U_0 + C_{22}\sigma + C_3 \quad \text{Eq. 5-20}$$

Soit, sous forme numérale :

$$H_r = -0,0029\mu U_0\sigma + 0,32\mu U_0 + 0,057\sigma + 0,0042 \quad \text{Eq. 5-21}$$

## 5.5 Cas de trempage de moules à formes complexes

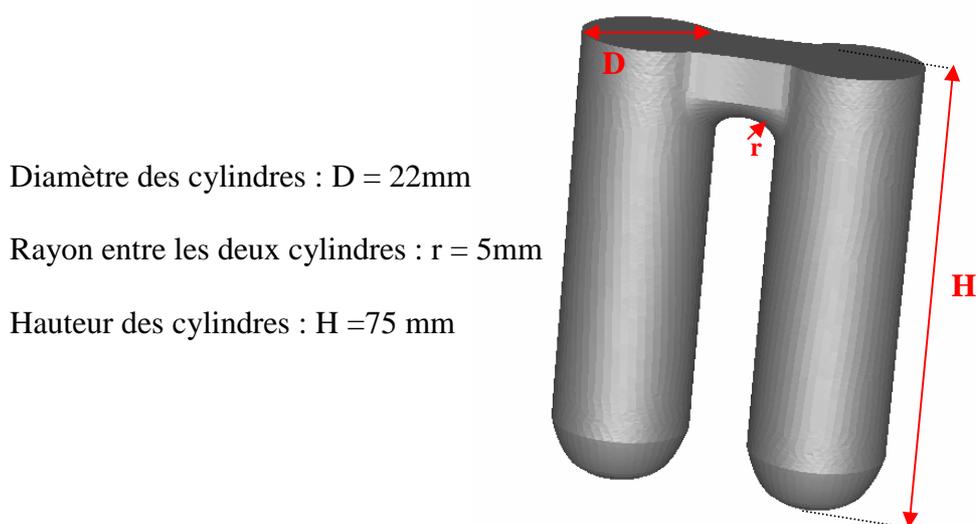
L'objectif de la modélisation numérique 3D par calcul direct du procédé de trempage est de pouvoir être appliquée au monde industriel. Nous allons nous intéresser ici au cas des entre doigts permettant la fabrication d'un gant et au cas d'un implant mammaire axisymétrique.

### 5.5.1 Cas du trempage d'un entre doigts

Pour des raisons de temps de calcul, il n'est pas possible actuellement de modéliser le trempage d'un gant complet. La principale difficulté de ce procédé est d'avoir une bonne répartition de la matière au niveau des entre doigts. En effet, du fait de l'existence des différentes courbures, il est difficile d'obtenir des épaisseurs épousant parfaitement la forme du moule.

#### 5.5.1.1 *Géométrie du moule employé et difficultés*

Les principales difficultés du trempage au niveau de l'entre doigts sont liées au risque d'y obtenir une masse de matière continue (doigts palmés) ou au contraire de ne rien y retirer. Expérimentalement (observation sur les chaînes de production), il a été observé que les trois paramètres permettant d'optimiser la forme de l'épaisseur dans cette région sont la viscosité, la vitesse de remontée et la courbure. Nous allons regarder l'influence des deux premiers sur la forme de matière retirée. Selon les observations industrielles, la forme dans l'entre doigts permettant d'optimiser le trempage dans cette région est celle d'une « selle de cheval ». Le moule employé numériquement est présenté sur la *Figure 5-22* avec ses dimensions. Le paramètre « courbure » ne sera donc pas examiné ici et nous avons fait l'ensemble des tests numériques sur ce moule.



**Figure 5-22 : Géométrie du moule pour étude de l'entre doigts**

### 5.5.1.2 Influence des paramètres physiques

Dans ce sous paragraphe, nous avons étudié l'influence des deux principaux facteurs jouant un rôle dans l'entre doigts, c'est-à-dire la vitesse de remontée du moule et la viscosité du bain. La tension de surface a également une influence sur la forme de la matière retirée, mais il s'agit d'un paramètre qu'il est difficile de modifier expérimentalement et donc industriellement.

#### 5.5.1.2.1 Influence de la viscosité

Nous avons examiné deux cas newtonien de différentes viscosités : le miel ( $\mu = 13 Pa.s$ ) et le PVA ( $\mu = 0,4 Pa.s$ ) à une vitesse de retrait de 50 mm/s.

Au cours de la remontée, à une hauteur de retrait 65mm, le champ de vitesse dans la masse de matière extraite dans l'entre doigts est dépendant de la viscosité (*Figure 5-23* et système de coordonnées données *Figure 5-24 a/*). Dans le cas du PVA, le champ de vitesse devient négatif au centre de l'entre doigts (cas favorable) alors que pour le miel, il est tout le temps positif (cas défavorable).

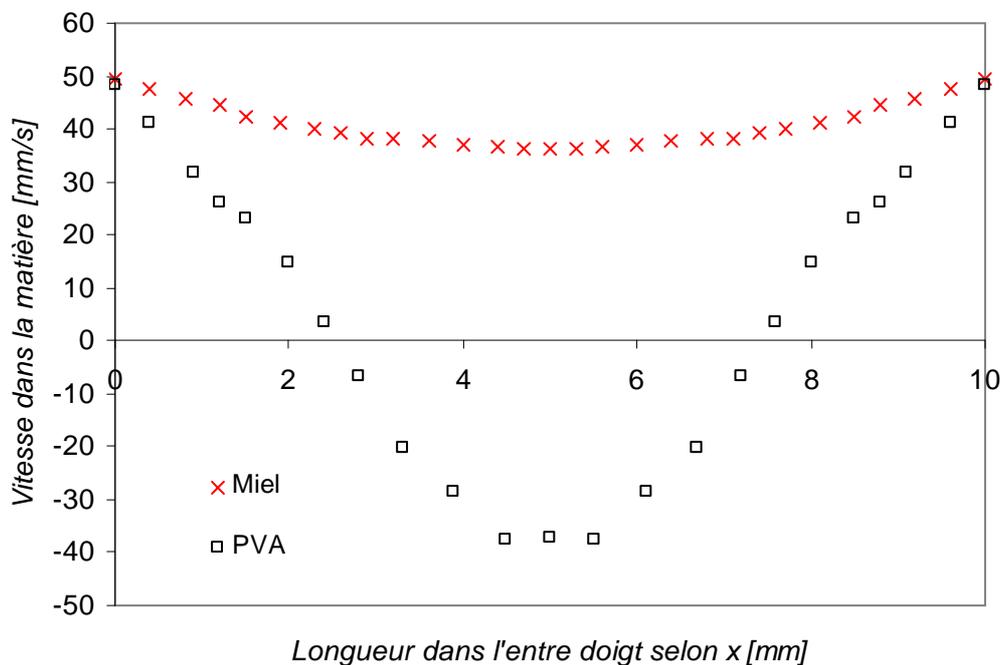
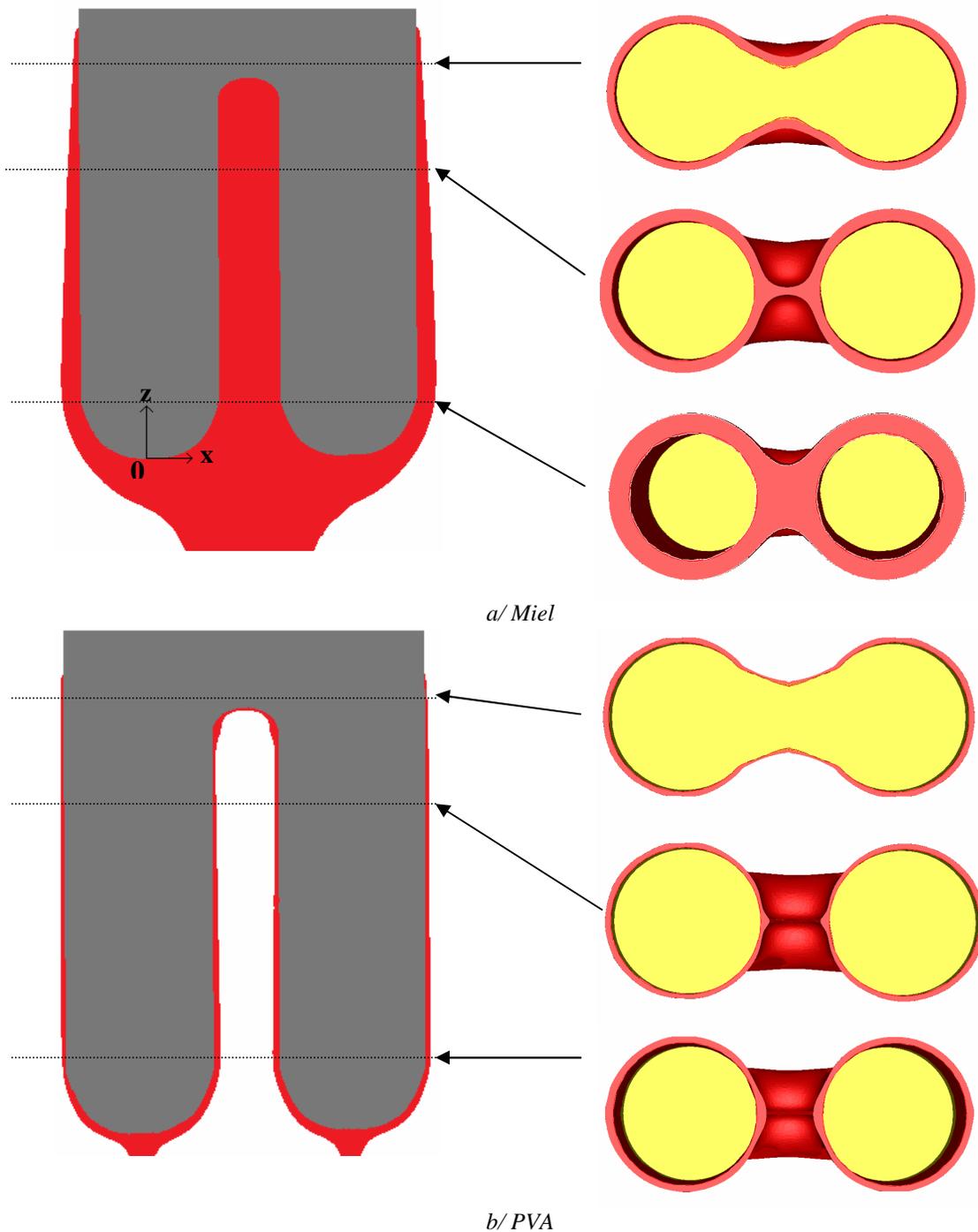


Figure 5-23 : Champ de vitesse selon z à une hauteur de retrait de 65mm dans l'entre doigts pour différentes vitesses de remontée dans le cas du miel



**Figure 5-24 : Différences de comportements de la matière après extraction du mole hors du bain dans deux cas newtoniens : a/ le miel et b/ le PVA. A gauche, coupe au plan de symétrie, à droite, différentes coupes en vue de dessus**

Cette répartition du champ de vitesse est directement liée à la forme finale de la matière extraite dans l'entre doigts. Après extraction complète du moule, dans le cas du PVA (*Figure 5-24 b/*), il est obtenu une fine épaisseur épousant la forme de l'entre doigts alors que dans le cas du miel (*Figure 5-24 a/*), le fluide y forme une masse de matière continue. La conclusion

de ces observations est que pour une même vitesse de remontée, pour obtenir une forme correcte du film dans l'entre doigt, il faut diminuer la viscosité.

#### 5.5.1.2.2 Influence de la vitesse

La viscosité n'est pas le seul facteur jouant un rôle sur l'épaisseur retirée dans l'entre doigts. La vitesse de retrait est très importante également. Plus elle est faible, plus le champ de vitesse au cours de la remontée dans l'entre doigts tend vers des valeurs négatives (*Figure 5-25*). Dans le cas du miel, pour une vitesse de retrait de 1 mm/s, le champ de vitesse dans l'entre doigts devient négatif et laisse donc présager une forme finale comme celle de la *Figure 5-24 b/*. Par contre dans les cas où la vitesse est de 50 ou 10 mm/s pour le miel, le champ de vitesse reste positif et donc à la fin du trempage, la matière extraite autour du moule est de la forme de la *Figure 5-24 a/*.

Il est donc nécessaire de jouer sur le couplage vitesse de remontée / viscosité pour que la matière extraite adopte bien la forme du moule et pour obtenir les épaisseurs désirées.

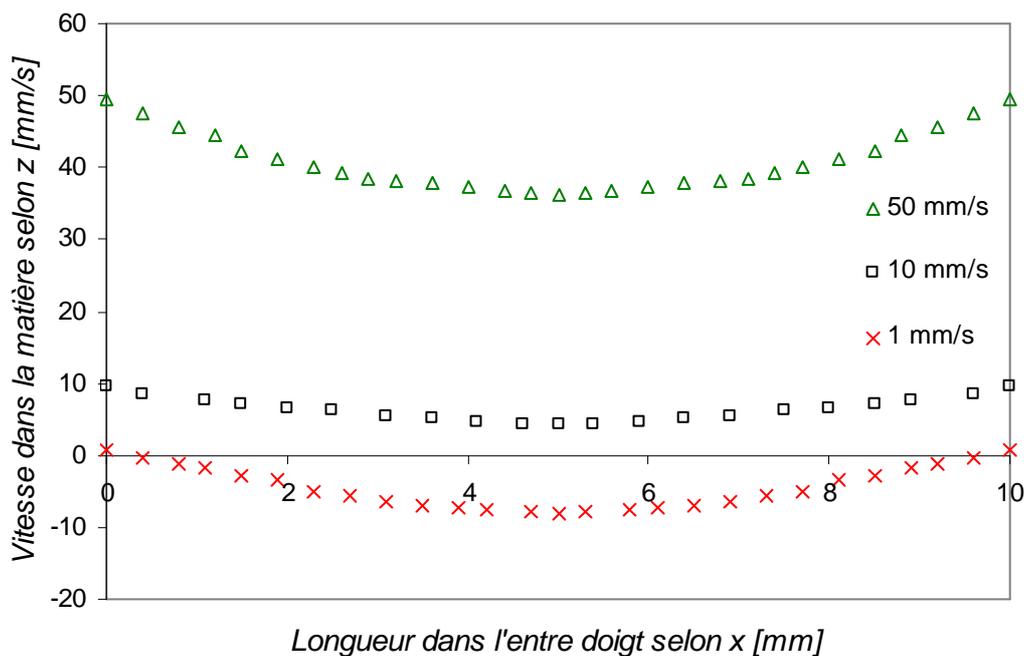
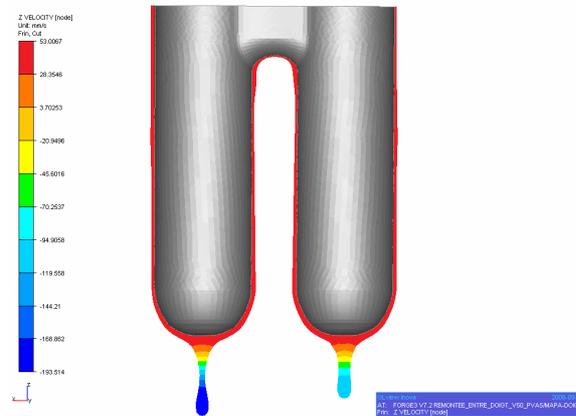


Figure 5-25 : Champ de vitesse dans l'entre doigts pour le miel à différentes vitesses

#### 5.5.1.3 Forme de la matière dans l'entre doigts

Nous avons distingué trois cas de formes finales d'épaisseurs extraites. Dans le premier cas, lorsque le ratio vitesse / viscosité a de trop grandes valeurs, il est retiré une masse continue de matière dans l'entre doigts. Le deuxième cas correspond au trempage à faible valeurs du couplage vitesse / viscosité qui permet dès les premiers instants de la remontée de

réaliser une fine épaisseur épousant la courbure. Le troisième cas est intermédiaire au deux précédents : à la sortie du bain, l'entre doigts est constitué d'une masse de matière continue qui se sépare vite en deux. Nous allons étudier ici les mécanismes des deux derniers cas qui permettent d'obtenir une forme finale du type de la *Figure 5-26*.



**Figure 5-26 : Forme finale de l'épaisseur autour du moule à deux doigts dans le cas du PVA à une vitesse de retrait de 50mm/s et à une hauteur de 150 mm**

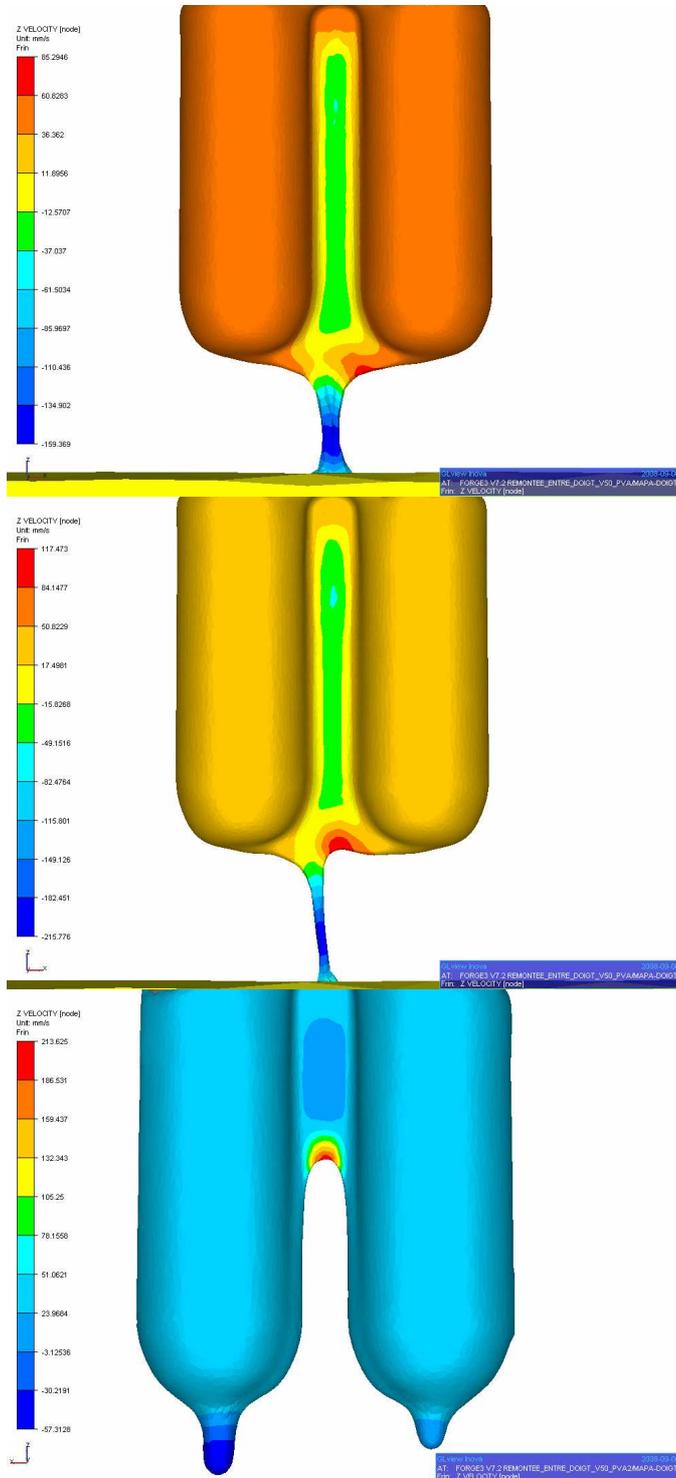
#### 5.5.1.3.1 Cas intermédiaire : mécanisme de séparation

Ce premier cas est obtenu pour une vitesse de remontée faible et une viscosité importante (cas du miel à 1 mm/s) ou encore pour une viscosité plus petite et une vitesse de remontée importante (cas du PVA à 50 mm/s).

Nous avons regardé en détails le cas du PVA à une vitesse de 50 mm/s que nous présentons *Figure 5-27*. Après émergence du moule, il y a séparation de la matière en deux dans l'entre doigts et ainsi les épaisseurs viennent épouser parfaitement la géométrie curviligne. Les différentes étapes de ce processus sont :

- Au départ, *Figure 5-27 a/*, la matière forme une masse constante s'écoulant par un filament de fluide reliant le moule au bain et qui s'est formé au cours de la remontée.
- A partir d'une hauteur de retrait de 95 mm (*Figure 5-27 b/*), au niveau de la formation du filament entre les doigts, il apparaît une zone à très forte vitesse selon +z (115 mm/s). C'est à partir de ce phénomène que l'amas de matière est drainé dans l'entre doigts vers le contour des doigts pour ensuite venir coller parfaitement à la forme du moule. Dans les cas de plus grandes viscosité et / ou vitesse, la « palme » est trop large pour permettre toute séparation dans l'entre doigts.

— Comme le montre la *Figure 5-27 c/*, la zone à forte vitesse est hétérogène selon  $+z$  et sépare ainsi la matière en deux, qui sous l'effet de la tension de surface, vient épouser la forme du moule. La forme finale obtenue est donnée *Figure 5-26*.



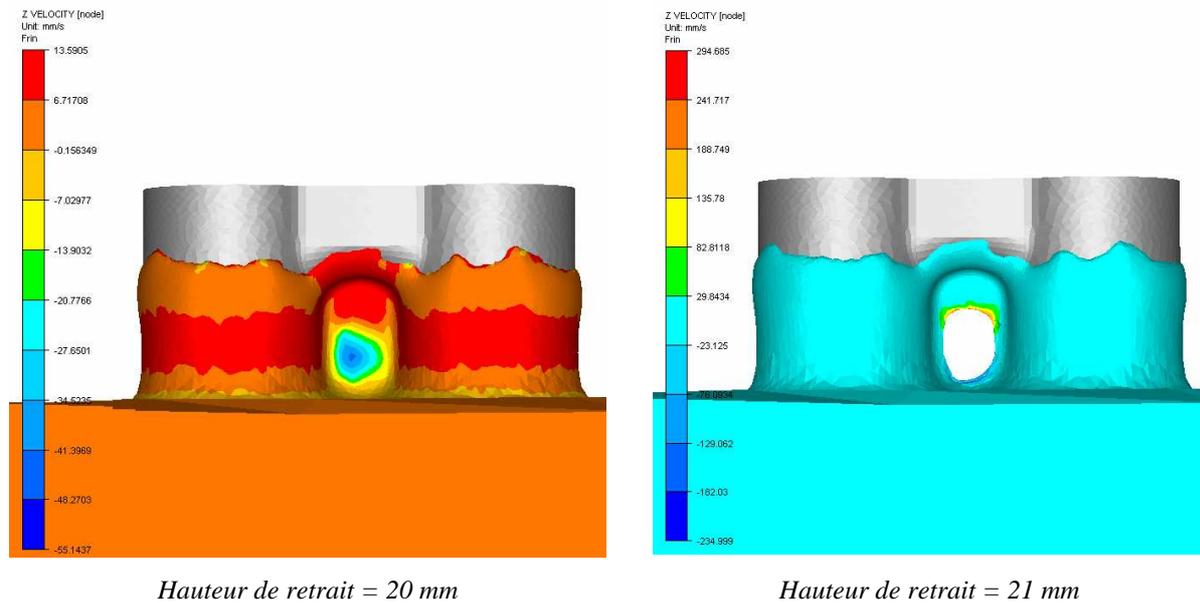
a/ Hauteur de retrait = 90mm

b/ Hauteur de retrait = 95mm

c/ Hauteur de retrait = 115mm

**Figure 5-27 : Répartition du champ de vitesse dans l'entre doigts au cours de la remontée : mise en évidence du phénomène de détachement de la matière dans cette zone**

### 5.5.1.3.2 Ratio à faibles valeurs de viscosité / vitesse



**Figure 5-28 : Comportement de la matière dans l'entre doigts au cours de la remontée (PVA à 10 mm/s)**

Pour de faible viscosité et de faible vitesse de remontée (cas du PVA à 10 mm/s), la séparation de la matière dans l'entre doigts se fait dès les premiers instants de la remontée comme cela peut se voir sur la *Figure 5-28*. Comme ces deux paramètres physiques sont faibles, le champ de vitesse dans l'entre doigts devient très petit (*Figure 5-28 a/*) ce qui conduit à une épaisseur de la masse de matière continue faible. Il y a rapidement rupture de cette membrane formée dans l'entre doigts (*Figure 5-28 b/*) et la matière vient ensuite épouser la forme de la courbure.

### 5.5.1.4 Critère permettant d'obtenir une épaisseur convenable dans l'entre doigts

A partir des différentes observations du comportement du fluide dans l'entre doigts, il est possible d'établir un diagramme résumant l'ensemble des informations recueillies et donnant les conditions du ratio vitesse de retrait / viscosité permettant d'obtenir des doigts non palmés.

Sur la *Figure 5-29*, nous avons tracé une droite approximative délimitant les cas de ratio vitesse / viscosité permettant d'obtenir des entre doigts épousant parfaitement le moule et ceux conduisant à une « palme ».

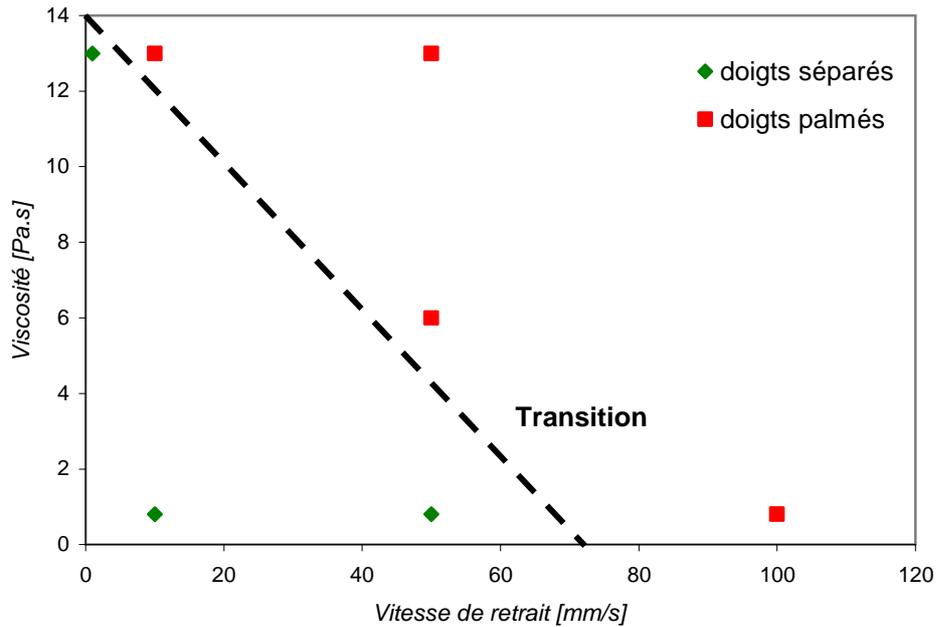


Figure 5-29 : Diagramme présentant l'influence du ratio vitesse de retrait / viscosité sur le comportement du fluide de l'entre doigts

#### 5.5.1.5 Epaisseur dans l'entre doigts

Nous allons voir à présent comment se répartit l'épaisseur du film dans l'entre doigts. En plus de l'importance des paramètres viscosité et vitesse de retrait, sous l'effet de la gravité, de la tension de surface et de la courbure, elle n'est pas répartie régulièrement tout autour du moule.

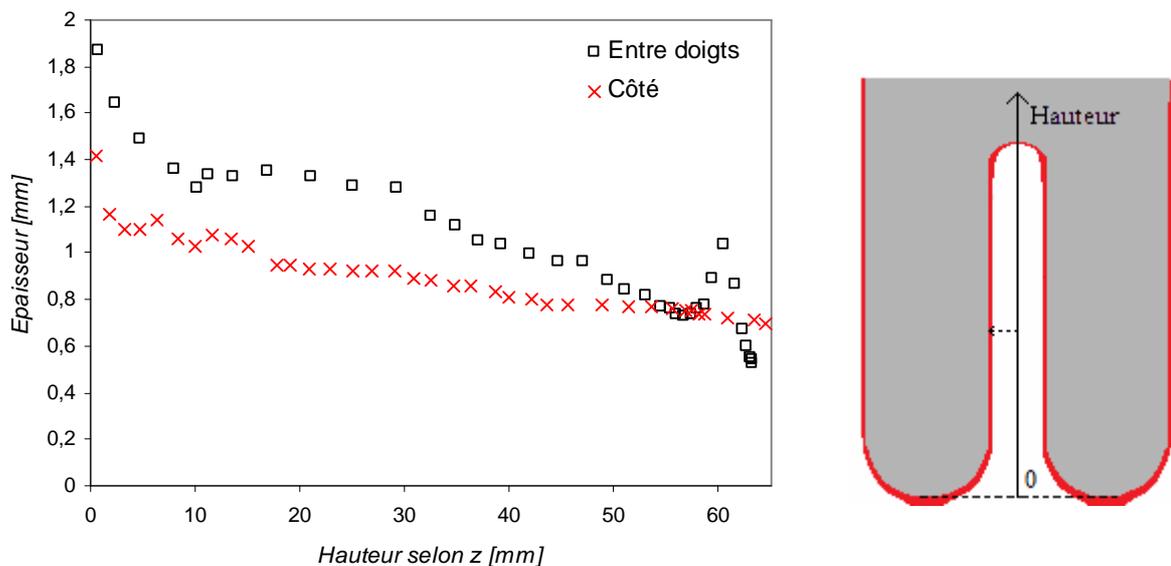


Figure 5-30 : Répartition de l'épaisseur autour du moule à deux doigts

Pour le cas du PVA à 50 mm/s (*Figure 5-30*), l'épaisseur dans la région de l'entre doigts est plus importante que dans les régions sur les côtés du moule. Le fluide est donc moins drainé dans l'entre doigts qu'autour du reste du moule.

La comparaison entre le cas du PVA à 10mm/s et à 50mm/ montre bien que la vitesse de retrait a une influence sur l'épaisseur extraite comme le montre la *Figure 5-31*. Plus la vitesse est faible, plus l'épaisseur dans l'entre doigts est petite.

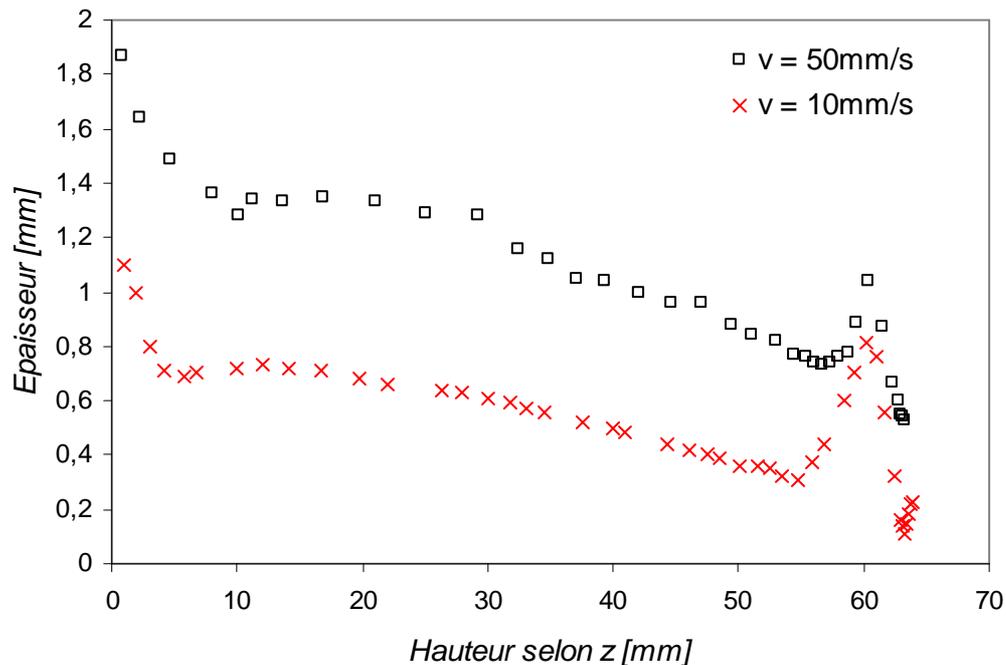


Figure 5-31 : Comparaison des épaisseurs dans l'entre doigts pour le PVA à différentes vitesses

D'autre part, sur les *Figure 5-30* et *Figure 5-31*, nous constatons que la courbure dans l'entre doigts a une grande influence sur l'épaisseur extraite. Nous avons déjà remarqué *Chapitre 4* que sur la partie hémisphérique inférieure du moule, l'épaisseur avait tendance à diminuer malgré la présence de la gravité. Ce phénomène s'accroît à plus grande tension de surface. Cette influence de la courbure sur l'épaisseur est retrouvée dans la partie supérieure de l'entre doigts. La courbure y est inversé par rapport à l'extrémité inférieure du moule, la tendance est donc différente : l'épaisseur augmente dans cette zone. En fait, la tension de surface y implique une dépression (*Figure 5-32*). Plus on se situe loin de la zone à forte courbure, plus la pression est grande : La pression  $P_1$  dans le haut de la courbure est négative et à mesure que l'on se rapproche de la région à forte courbure, la pression diminue pour atteindre la valeur de  $P_2$ . Ce phénomène conduit à une augmentation locale de l'épaisseur. Dans le reste de l'épaisseur, sous l'effet de la gravité, la pression augmente et atteint la valeur de  $P_3$ .

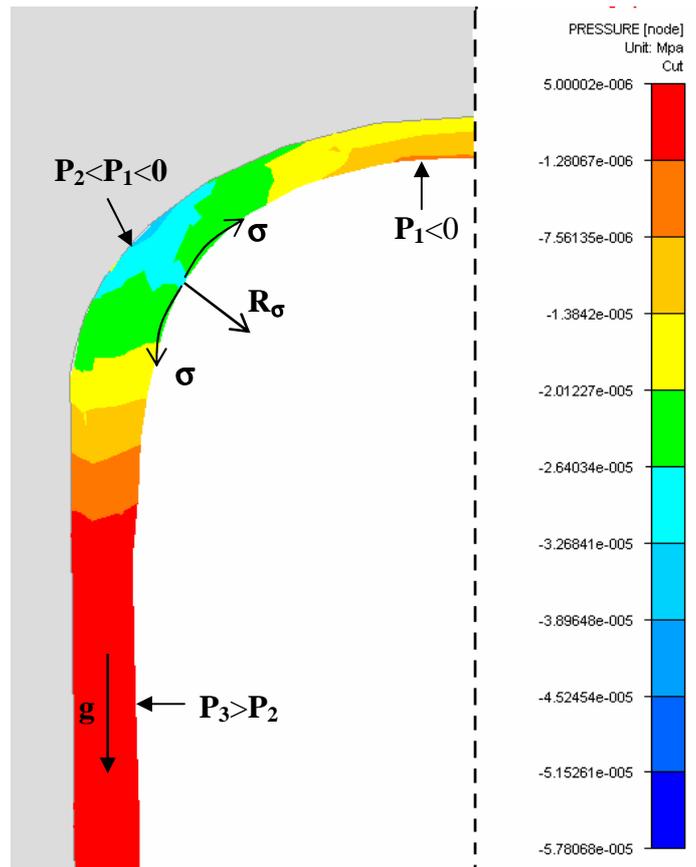


Figure 5-32 : Répartition de la pression  $P_i$  ( $i=1, 2$  ou  $3$  selon le lieu) dans la courbure de l'entre doigts où  $\sigma$  est la force de tension de surface et  $R_\sigma$  sa résultante

### 5.5.2 Cas d'un implant mammaire

La remontée du moule de l'implant mammaire se fait selon deux mouvements qui se succèdent : tout d'abord, il y a une remontée verticale du moule suivie par une rotation de  $90^\circ$  (Figure 5-33).

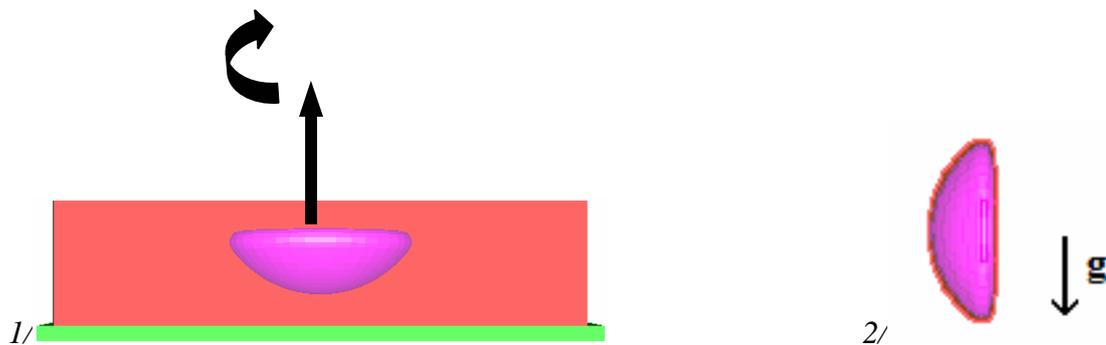
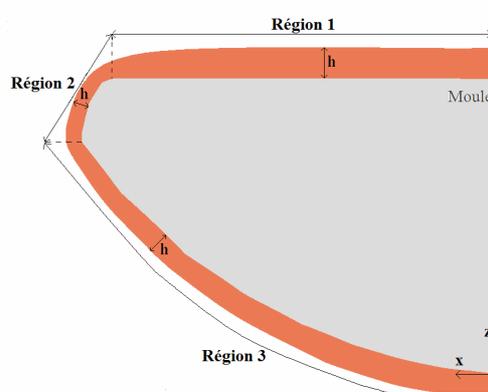


Figure 5-33 : Mouvement réalisé par le moule d'implant axisymétrique 1/ Remontée verticale suivie d'une rotation pour atteindre 2/ position fixe pour écouler le fluide le long du moule

Les épaisseurs sont mesurées de la manière présentée *Figure 5-34*. Nous distinguerons trois régions où les pentes du moule sont différentes et donc où les forces de tension de surface, la gravité et la viscosité jouent un rôle différent.



**Figure 5-34 : Mesures des épaisseurs autour u moule**

#### 5.5.2.1 Remontée verticale

La remontée s'est faite à une vitesse de 10mm/s jusqu'à une hauteur de 100mm. Selon la région étudiée, les contraintes dans l'épaisseur varient. La *Figure 5-35* représente la répartition des contraintes de von Mises dans cette épaisseur pendant l'étape de retrait à une hauteur de 60mm. Les différences observées entre les différentes régions ont pour conséquence une répartition irrégulière de l'épaisseur autour du moule.

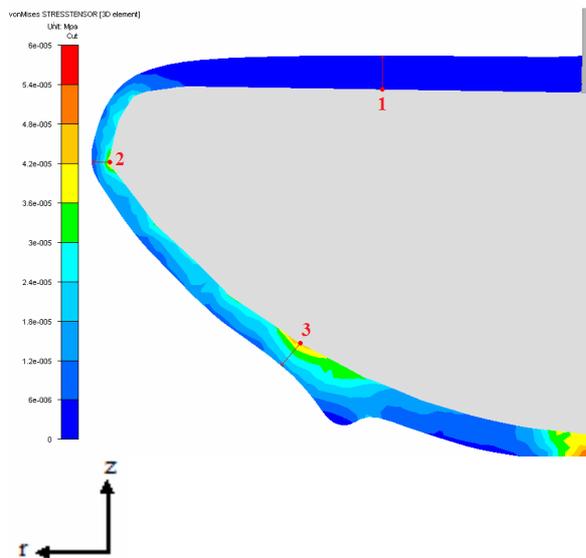
- Dans la région 1, l'épaisseur moyenne est de 3,34 mm. Selon  $x$ , l'épaisseur  $y$  diminue partant d'une épaisseur de 4,09 mm pour  $x = 0$  mm à une épaisseur de 1,84 mm pour  $x = 47,3$  mm. La courbure de la région 2 est à l'origine de cette diminution d'épaisseur car lorsque l'on s'en rapproche, les forces gravitationnelles ainsi que les forces de tension de surface  $y$  deviennent plus importantes.

La contrainte de von Mises  $y$  est faible et relativement constante (*Figure 5-35 b/*) du fait de la géométrie de cette région qui est celle d'un plateau horizontal.

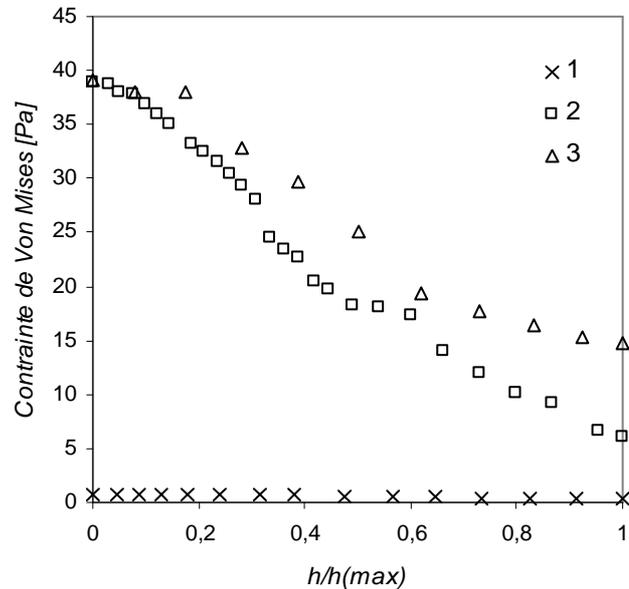
- La région 2 est une zone où la courbure est importante : la tension de surface  $y$  est donc prépondérante ainsi que la gravité. C'est dans cette zone que l'épaisseur est la plus faible : 1,19 mm en moyenne.

Dans l'épaisseur, lorsque l'on s'éloigne du moule (selon 2 *Figure 5-35 a/*), la contrainte de von Mises diminue relativement régulièrement (*Figure 5-35 b/*).

– La région 3 présente une courbure plus faible que précédemment. Malgré une contrainte de von Mises légèrement supérieure à celle de la région 2, l'épaisseur moyenne y est plus importante (2,55 mm) car la gravité y joue un rôle plus important.



a/ Champ de contrainte dans l'épaisseur à  $t = 10s$



b/ Contraintes en fonction de l'épaisseur ramenée à un nombre adimensionnel pour trois endroits différents autour du moule

**Figure 5-35 : Répartition des contraintes de Von Mises dans l'épaisseur**

La répartition du champ de vitesse dans l'épaisseur est donnée sur la *Figure 5-36* :

– Dans la région 1, le champ de vitesse est constant. Cette zone est peu soumise aux forces gravitationnelles et de tension de surface, c'est pourquoi aussi bien le champ de vitesse que les contraintes de von Mises évoluent de manière constante.

– Dans la région 2, le champ de vitesse décroît linéairement.

– Dans la région 3, le champ de vitesse diminue dans un premier temps puis re-augmente pour atteindre la même valeur sur la surface libre qu'à l'interface moule / fluide. Cette évolution peut trouver son origine dans la compétition tension de surface / gravité.

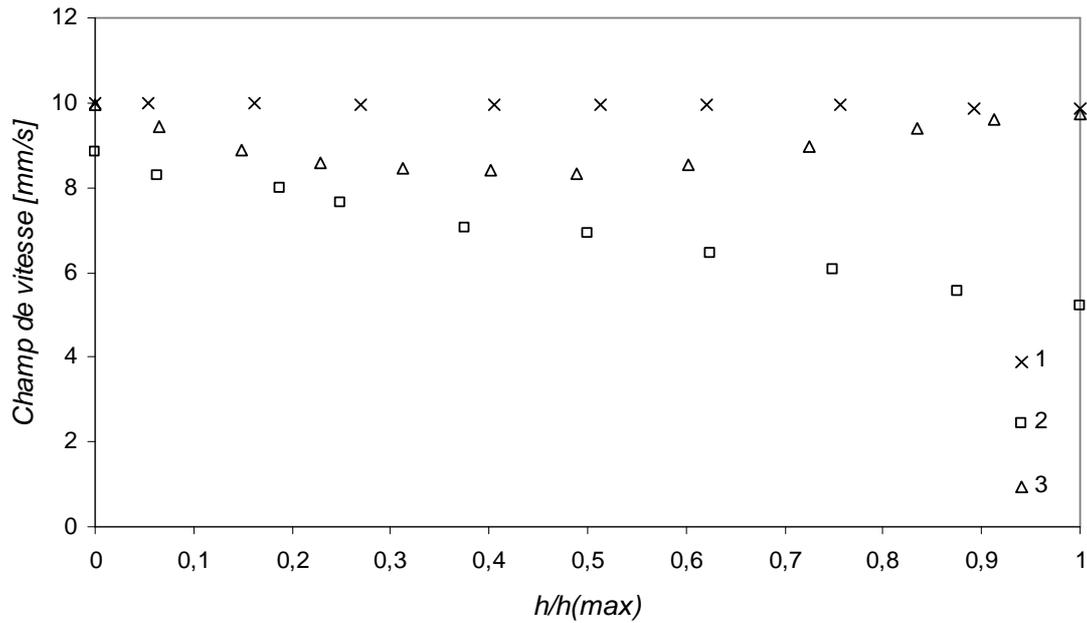


Figure 5-36 : Répartition du champ de vitesse en fonction de l'épaisseur  $h$  avec  $h_{max}$  l'épaisseur totale à l'endroit de la mesure

### 5.5.2.2 Rotation

Le mouvement de rotation qui s'opère industriellement est très rapide. Après une rotation de  $90^\circ$  à une vitesse de 40 tr/min, l'épaisseur extraite autour du moule n'a quasiment pas varié par rapport à celle mesurée avant rotation comme cela peut se voir sur la Figure 5-37. Le mouvement de rotation se faisant rapidement, la répartition avant et après de l'épaisseur autour du moule reste la même : l'étape de rotation peut donc être négligée.

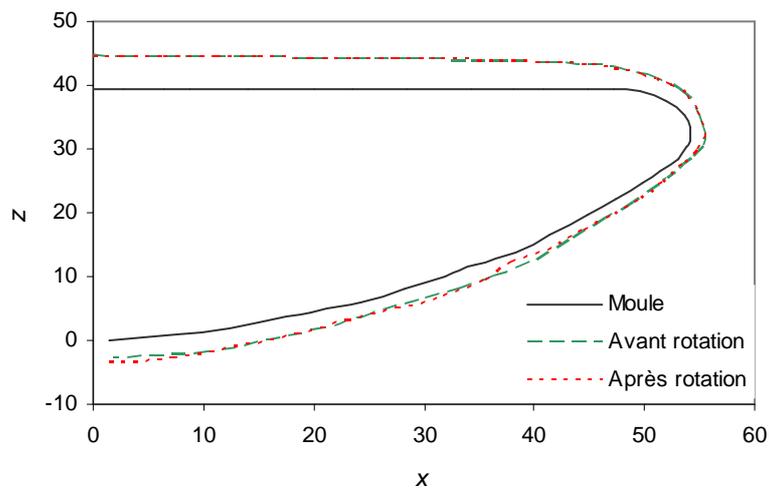


Figure 5-37 : Forme de l'épaisseur selon  $(x,z)$  sur un demi moule avant et après rotation

Le moule est ensuite laissé pendant près d'une heure dans la même position « verticale » pour que le fluide s'écoule. Tous les quarts d'heure, il est tourné de 90° selon son axe de symétrie pour permettre un écoulement régulier de l'ensemble de l'épaisseur.

Cette étape est difficile à mettre en œuvre numériquement car les pertes de matières sont très grandes et les épaisseurs obtenues très fines. Pour modéliser de tels cas, il faut travailler avec des tailles de mailles beaucoup plus petites que celles employées jusqu'à présent, ce qui n'est pas réalisable actuellement. En effet, numériquement nous avons trouvé des épaisseurs comprises entre 1,19 et 3,34mm, soit une masse de matière retenue autour du moule de 410g environ. Industriellement, il est obtenu au final une épaisseur comprise entre 0,34 et 0,54mm, soit une masse de matière retenue de 68g environ. La différence de masse entre avant écoulement et après est donc de 342g soit une perte de 83,4%. C'est donc durant cette étape que va se déterminer l'épaisseur finale extraite autour du moule contrairement au cas du trempage des gants où cette étape est inexistante et juste répartition de la matière tout autour du moule.

---

*Dans ce chapitre, nous avons présenté l'influence de paramètres physiques tels que la vitesse de retrait, la tension de surface, la viscosité et la forme du moule sur les épaisseurs extraites au cours du trempage.*

*La tension de surface est la force venant s'opposer à la gravité : elle permet de réduire les pertes de matières lorsque la viscosité est faible. Par contre pour de forte viscosité, elle est négligeable. D'autre part, nous avons montré que plus la viscosité du bain est faible, plus les épaisseurs retirées sont petites et plus la vitesse de remontée est grande, plus elles sont importantes.*

*Nous avons également examiné des cas avec des formes de moules complexes : le cas de l'entre doigts et celui de l'implant mammaire axisymétrique. Nous avons pu mesurer les épaisseurs dans ces deux cas mais les problèmes de temps de calcul (15 jours pour un cas) rendent difficiles l'exploration complète de ces deux cas tests.*

---

## **6. COUPLAGE THERMO MECANIQUE**

## 6. COUPLAGE THERMO MECANIQUE

<b>6.1</b>	<b>Température dans le moule</b>	<b>189</b>
6.1.1	Propriétés thermiques des matériaux.....	189
6.1.1.1	<i>Propriétés rhéologiques du bain en fonction de la température.....</i>	189
6.1.1.2	<i>Propriétés thermiques du moule .....</i>	190
6.1.1.2.1	Propriétés du moule industriel	190
6.1.1.2.2	Propriétés du moule employé pour la simulation numérique	190
6.1.2	Détermination théorique de la température à la surface du moule.....	191
6.1.3	Détermination expérimentale de la variation de température en surface du moule.....	192
6.1.4	Modélisation de la variation de température dans le moule.....	193
<b>6.2</b>	<b>Influence de la température lors du trempage</b>	<b>196</b>
6.2.1	Comparaison entre l'épaisseur déposée mesurée et prédite numériquement.	196
6.2.2	Importance de la variation de la température dans le moule.....	196
6.2.3	Influence de la température sur l'épaisseur mesurée.....	198
6.2.3.1	<i>Température du bain .....</i>	198
6.2.3.2	<i>Température du moule .....</i>	201

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier l'influence des différences de température entre les différents milieux lors du trempage dans le cas du procédé utilisant le PVA : le moule est chauffé initialement à 80°C puis il est plongé dans un bain de PVA maintenu à 30°C. Nous présentons dans ce chapitre le cas de ce trempage sur un moule cylindrique.

Le premier paragraphe est consacré à la mise en place des données thermiques pour permettre une modélisation correcte. Nous y aborderons également l'étude des variations de température en surface et au sein du moule au cours du trempage. La deuxième partie est consacrée à la détermination de l'influence de la température du bain et du moule sur la forme de l'épaisseur extraite. Nous nous attacherons à vérifier si l'hypothèse d'une température du moule constante au cours du temps rapportée dans la littérature est applicable dans notre cas.

## 6.1 Température dans le moule

Dans le cadre du trempage des gants, le moule est chauffé à plus haute température que le bain. Ce paragraphe est centré sur l'étude de l'évolution de la température dans les différents milieux au cours du temps.

### 6.1.1 Propriétés thermiques des matériaux

#### 6.1.1.1 *Propriétés rhéologiques du bain en fonction de la température*

Le bain est maintenu à une température de 30°C, mais au cours du trempage, lorsque le moule chaud entre en contact avec ce dernier, sa température change au niveau de l'interface avec l'outil. Cela n'a pas pour conséquence de provoquer un changement de phase (pas de solidification ni de gélification) mais il y a une modification locale de la viscosité du fluide. Nous avons vu précédemment que le caractère rhéologique du fluide est un des facteurs ayant une grande influence sur la forme de la surface libre : plus la viscosité est faible, plus l'épaisseur est petite.

La variation de viscosité en fonction de la température est modélisée à partir de la loi d'Arrhénius :

$$\mu = \mu_0 \cdot \exp\left(\frac{E_a}{R_g} \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}}\right)\right) \quad \text{Eq. 6-1}$$

où, pour le cas du PVA,  $T$  est la température du fluide,  $T_{ref}$  la température de référence valant dans ce cas 27°C,  $\mu_0$  la viscosité à la température de référence  $T_{ref}$  équivalente à

$\mu_0 = 0,44 Pa.s$ ,  $R_g$  la constante des gaz parfaits et  $E_a$  l'énergie d'activation telle que  $E_a = 20,5 kJ.mol^{-1}$ .

Numériquement, la loi d'Arrhénius se combine à la loi visco-plastique de type Norton-Hoff grâce à l'expression suivante :

$$K(T, \bar{\epsilon}) = K_0 (\bar{\epsilon} + \epsilon_0)^i e^{-\beta T} \quad \text{Eq. 6-2}$$

avec  $K_0 = 0,80 Pa.s$  et  $\beta = 0,023$  pour le PVA. Sa conductivité thermique est de  $\lambda^c = 0,52 M.m^{-1}.K^{-1}$

### 6.1.1.2 Propriétés thermiques du moule

#### 6.1.1.2.1 Propriétés du moule industriel

Le moule employé industriellement pour le trempage dans le PVA est en céramique recouvert d'une couche flocage + néoprène : il s'agit donc d'un ensemble multicouches. Ses propriétés thermique et géométrique sont données *Figure 6-1*. Le moule est creux mais la partie céramique a une épaisseur nettement plus grande que celles du flocage et du néoprène réunis.

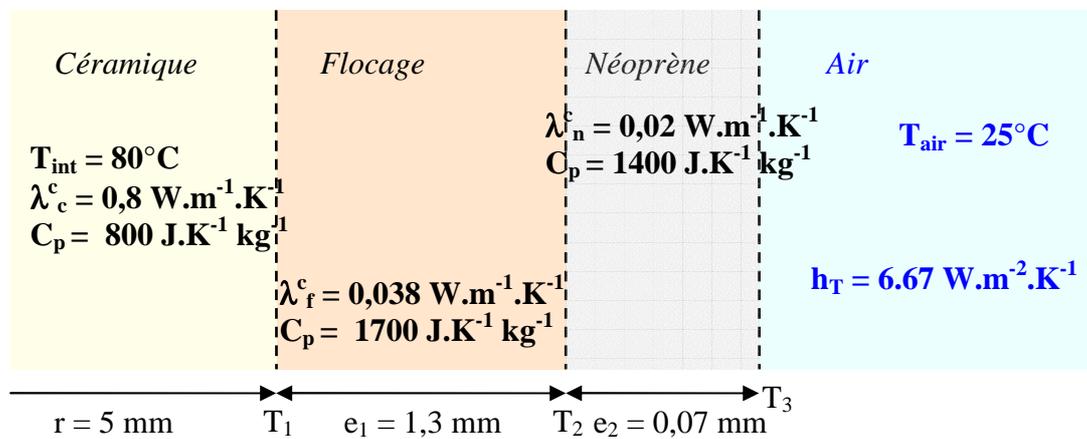


Figure 6-1 : Propriétés géométrique et thermique de l'ensemble multicouche du moule employé pour le PVA

#### 6.1.1.2.2 Propriétés du moule employé pour la simulation numérique

Pour simplifier la modélisation et la simulation numérique, nous considérerons un moule plein de rayon  $R_m = 12,5 \text{ mm}$  et constitué d'un même matériau (*Figure 6-2*). L'utilisation d'un système multicouches aurait été compliqué à mettre en œuvre numériquement et nous avons choisi un système équivalent au moule industriel mais constitué que d'une seule couche. La

détermination des propriétés thermiques du moule permettant d'obtenir les mêmes propriétés que celles décrites *Figure 6-1* est donnée dans le paragraphe suivant.

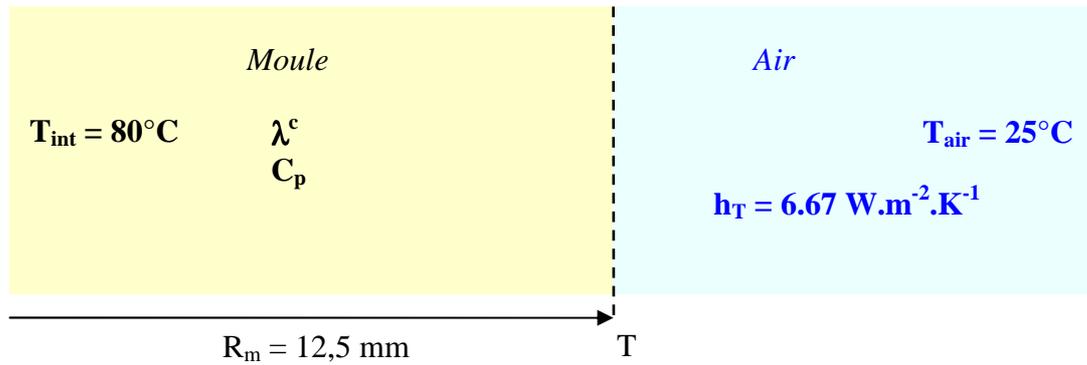


Figure 6-2 : Schéma du moule employé pour la simulation numérique

### 6.1.2 Détermination théorique de la température à la surface du moule

Entre le moment de la sortie du moule hors du four et son immersion dans le bain, il s'écoule environ 60s sur notre cas expérimental. Il est possible de déterminer l'ensemble des températures  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  de la *Figure 6-1* à partir des conditions thermiques entre les milieux durant cette étape. Pour cela, il faut résoudre le système suivant :

$$\frac{\lambda^c}{r} (T_{\text{int}} - T_1) = \frac{\lambda^c}{e_1} (T_1 - T_2) = \frac{\lambda^c}{e_2} (T_2 - T_3) = h_T (T_3 - T_{\text{air}}) \quad \text{Eq. 6-3}$$

La résolution de ce système à l'aide des valeurs de la *Figure 6-1* donne les valeurs des températures suivantes :

$$\begin{cases} T_1 = 65,6^\circ\text{C} \\ T_2 = 60,2^\circ\text{C} \\ T_3 = 59,6^\circ\text{C} \end{cases}$$

La température à l'interface air / moule vaut donc  $59,6^\circ\text{C}$ .

Dans le cas d'un moule plein constitué d'un même matériau, le système permettant de calculer la température  $T_i$  à l'interface moule / air est le suivant :

$$\frac{\lambda^c}{R_m} (T_{\text{int}} - T_i) = h_T (T_i - T_{\text{air}}) \quad \text{Eq. 6-4}$$

Il est possible à partir de l'équation 6-4 de déterminer les propriétés thermiques du moule employé numériquement à partir des résultats trouvés à l'aide de l'équation 6-3. La conductivité thermique permettant d'obtenir une température d'interface de 59,6°C en considérant la température interne de 80°C et externe de 25°C est équivalente à  $\lambda^c = 0,08W.m^{-1}.K^{-1}$ . Cette approximation peut paraître grossière mais dans la suite de ce paragraphe, nous montrerons qu'elle donne des résultats très cohérents avec les observations expérimentales.

Une fois le moule plongé dans le bain, il entre en contact avec le PVA qui est maintenu à une température de 30°C à l'aide d'une plaque chauffante. L'outil simulé a alors sa température en surface qui varie selon l'équation suivante :

$$\frac{\lambda^c}{R_m}(T_{int} - T_i) = \frac{\lambda^c_{PVA}}{R_{bain}}(T_i - T_{PVA}) \quad \text{Eq. 6-5}$$

avec le rayon du bain  $R_{bain} = 40mm$  (taille du matériel employé expérimentalement),  $T_{int}$  la température du moule équivalente à 59,6°C et  $T_{PVA}$  la température du bain de PVA valant 30°C. Selon ce calcul, la température à l'interface  $T_i$  est alors de 39,9°C.

### 6.1.3 Détermination expérimentale de la variation de température en surface du moule

Pour contrôler et mesurer les variations de températures aux interfaces moule / air puis moule / PVA au cours du trempage, nous avons collé une sonde thermique à la surface du moule (système multicouches) lors d'une opération réelle de trempage. La première étape consiste à le chauffer dans une étuve à 80°C pendant 1 heure ; l'objectif est d'obtenir une température uniforme de l'outil en sortie du four. Il est ensuite plongé dans un bain de PVA maintenu à 30°C grâce à une plaque chauffante. Le temps de contact entre le moule et l'air avant immersion est de 60s : il correspond au temps de transfert entre le four et l'appareil de trempage et celui pour le descendre dans le bain à une vitesse de 10 mm/s.

La *Figure 6-3* donne l'évolution de la température à la surface du moule que nous avons mesurée. Pendant les 60s de contact entre le moule et l'air, la température en surface de l'outil passe de 80°C à 61°C. Cette diminution ne se fait pas linéairement du fait de la diffusivité thermique : elle se fait principalement durant les premières secondes. Nous retrouvons ici approximativement la valeur obtenue à l'aide du calcul de l'équation 6-3. Ensuite, une fois le moule plongé dans le bain, sa température en surface se stabilise à une température de 39°C très rapidement. Encore une fois, la valeur trouvée expérimentalement se rapproche de celle trouvée à l'aide des calculs théoriques de 39,9°C.

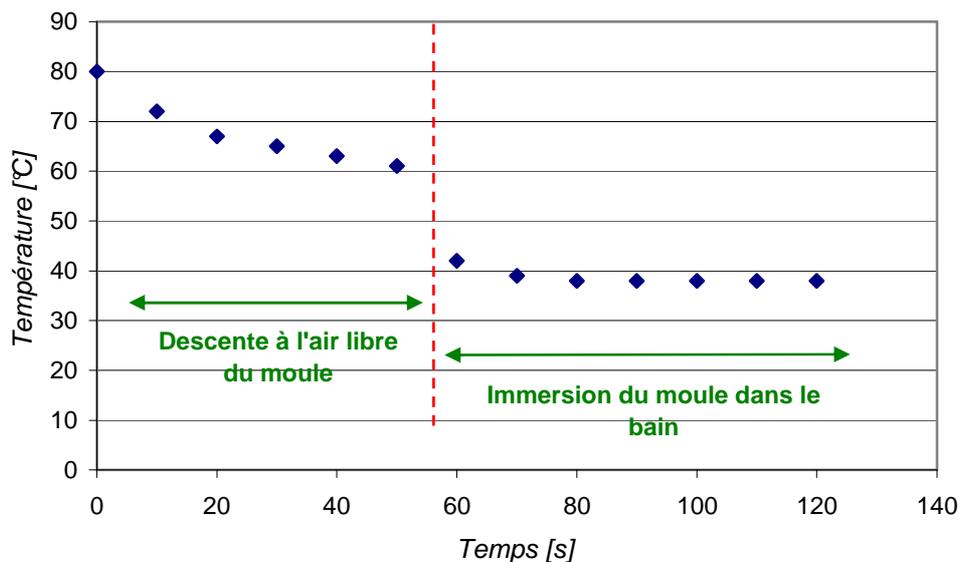


Figure 6-3 : Evolution de la température du moule en surface au cours du trempage

#### 6.1.4 Modélisation de la variation de température dans le moule

La modélisation de la variation de température dans le moule se fait sous Forge3 en le considérant comme un outil déformable maillé en volume et non plus en surface comme jusqu'à présent. L'expérience faite précédemment a été modélisée, c'est-à-dire le moule chauffé préalablement à une température uniforme de 80°C est, pendant 60 s, exposé au milieu ambiant à 25°C (air) puis plongé à une vitesse de 10 mm/s dans le bain de PVA maintenu à 30°C.

La *Figure 6-4* donne l'évolution de la température dans le moule après qu'il ait été maintenu 60s dans l'air. La température à l'interface moule / air est à cet instant de 61,5°C, valeur très proche de celle obtenue expérimentalement et celle calculée à l'aide des équations théoriques. La variation de température dans le moule évolue de 61,5°C en surface à 80°C au cœur comme le montre le graphique de la *Figure 6-4*. Cette variation n'est pas linéaire, la température chutant brutalement sur environ 5 mm de profondeur à partir de la surface pour ensuite se rapprocher de 80°C.

La *Figure 6-5* donne l'évolution de la température dans le moule au contact du bain de PVA. La température à l'interface moule / liquide après émergence complète est de 40°C à une hauteur de 10mm au dessus du point le plus bas dans le moule et de 49 °C pour une hauteur de 35mm (hauteur de trempage du moule dans le bain). Expérimentalement, nous avons trouvé 39°C, la sonde ayant été placée juste au dessus de la partie sphérique : nous retrouvons donc bien les mêmes ordres de grandeur. L'avantage de la simulation numérique est bien

démontrée ici : elle permet de mettre en évidence les différences de température le long du moule, les parties basses étant plus longtemps plongée dans le bain que les parties hautes. La variation de température dans le moule varie moins brutalement que pour le cas de la *Figure 6-4* : à mesure que l'on approche du centre du moule, la température augmente jusqu'à atteindre 80°C comme le montre le graphique de la *Figure 6-5*.

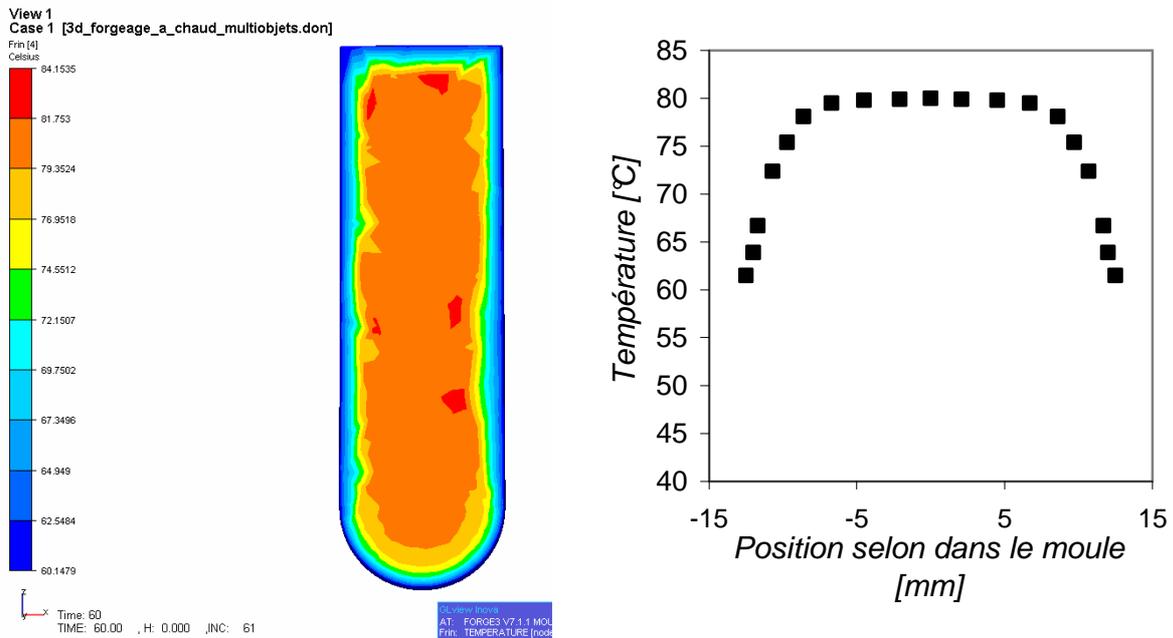


Figure 6-4 : Température dans le moule après 60s dans l'air à 25°C

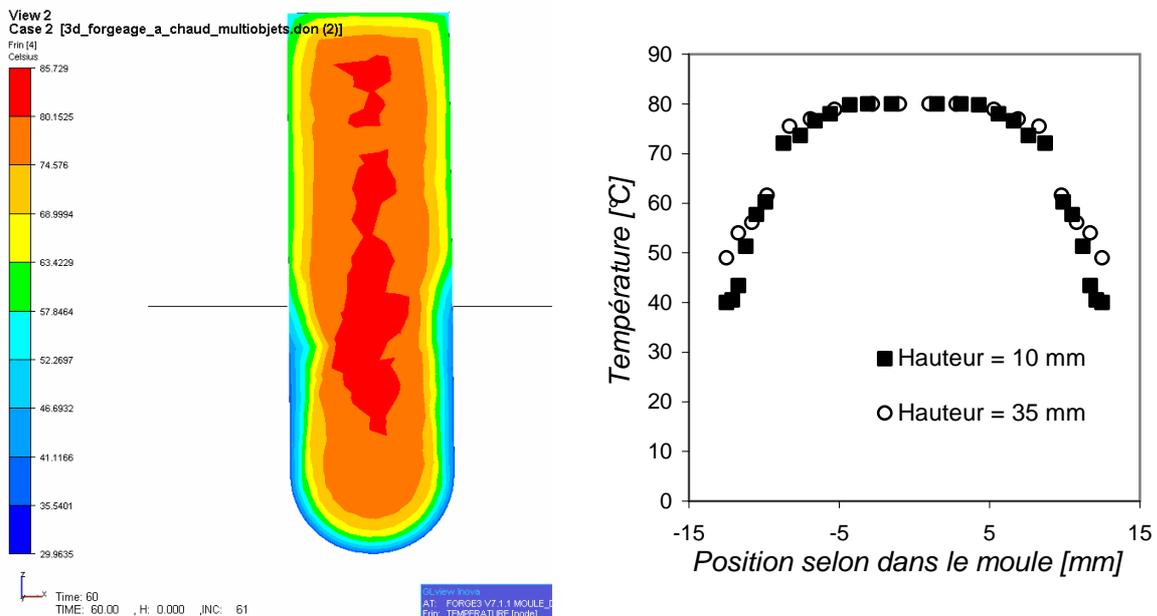


Figure 6-5 : Température dans le moule lors de son contact avec le bain de PVA à 30°C

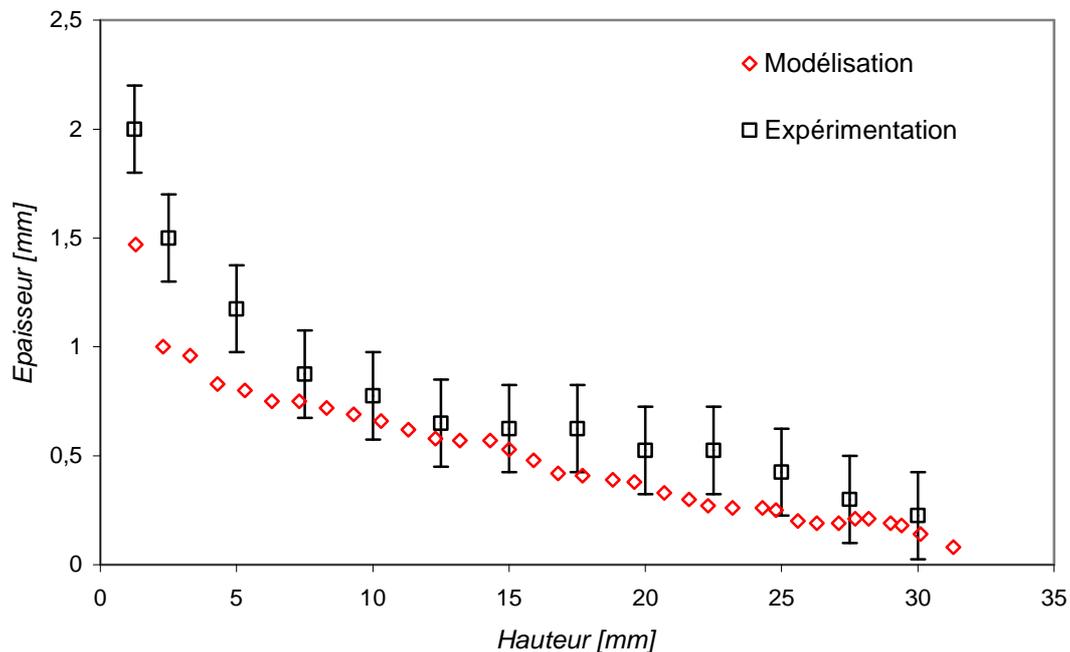
Dans l'air comme dans le PVA, les variations de températures de l'interface trouvées numériquement correspondent bien à celles observées expérimentalement. Le cœur du moule conserve sa température initiale de 80°C même une fois plongé dans le bain. A noter ici que dans la réalité, le moule étant creux, la température de l'air à l'intérieur est aussi fonction de l'autorayonnement des parois internes du moule, ce qui n'a pas été intégré ici.

## 6.2 Influence de la température lors du trempage

Dans ce paragraphe nous nous proposons d'étudier l'influence de la température sur la forme de la surface libre au cours du trempage dans un bain de PVA. En plus de la comparaison entre trempage numérique et expérimental, nous allons voir l'importance de la prise en compte de la thermique dans l'outil et l'influence de la variation de température des différents milieux sur l'épaisseur.

### 6.2.1 Comparaison entre l'épaisseur déposée mesurée et prédite numériquement

L'épaisseur de la couche déposée mesurée expérimentalement donne des valeurs approchées de celles trouvées numériquement (*Figure 6-6*) pour un moule chauffé à 80°C et un bain maintenu à 30°C. Les principales sources de différences sont liées aux erreurs des mesures expérimentales. En plus de celles liées à la délimitation de la surface libre sur les photographies viennent s'ajouter celles dues aux températures plus ou moins bien maîtrisées. Il est difficile expérimentalement de contrôler au degré près les températures du moule, du bain et du milieu ambiant. Ceci explique les différences entre mesure et simulation observées sur la *Figure 6-6*.



**Figure 6-6 : Comparaison entre modélisation numérique et expérience de trempage à chaud. Epaisseur de la couche déposée en fonction de la position sur le moule.**

### 6.2.2 Importance de la variation de la température dans le moule

Dans la littérature, certains modèles permettant la prédiction de l'épaisseur ([Bikard07], [Cheung85] et [Seeniraj81]) considèrent la température du moule comme constante au cours

du temps lors de trempage à chaud. Il apparaît donc intéressant de voir si une telle hypothèse est valide dans notre cas.

La Figure 6-7 montre la comparaison entre les épaisseurs pour trois cas de trempage différents dans un bain de PVA maintenu à 30°C. Le premier essai a consisté à plonger un moule préalablement chauffé à 80°C et dont la température varie avec le temps et le milieu ambiant (propriétés thermiques de l'outil données dans le paragraphe 6.1.1.2). Les deux autres cas correspondent au trempage d'un moule à température constante. Le premier est maintenu à une température de 39°C car nous avons montré expérimentalement et numériquement que la surface du moule une fois plongée dans le bain se stabilisait rapidement à cette température. Le deuxième est à une température constante de 80°C qui est la température initiale à laquelle est chauffé le moule.

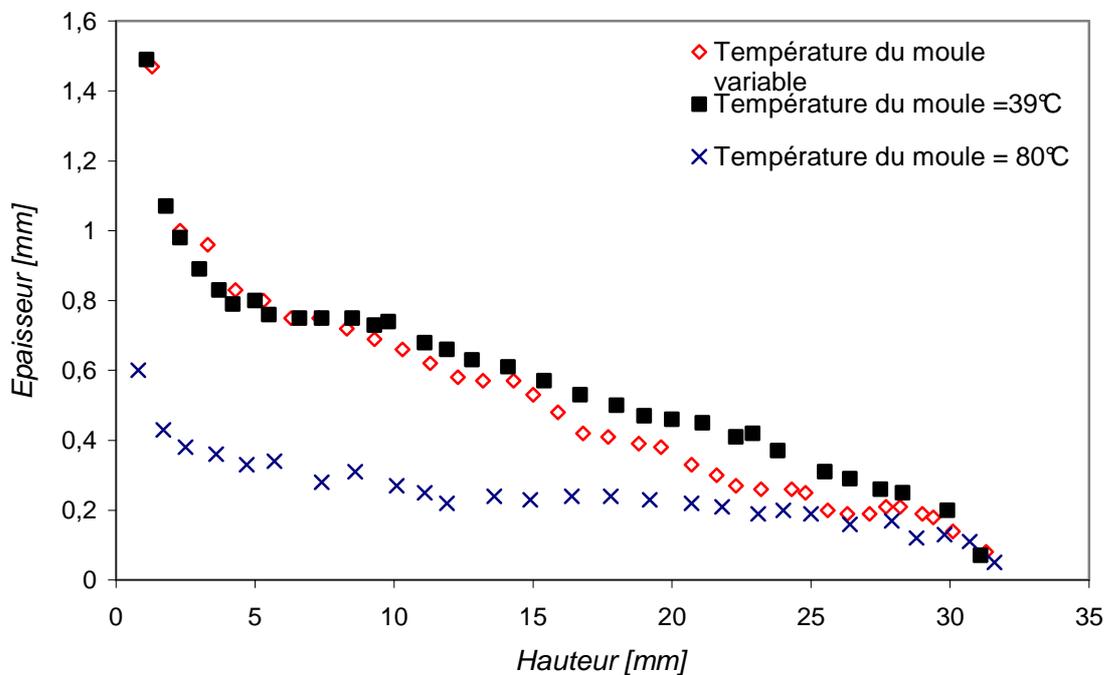


Figure 6-7 : Influence de la thermique dans l'outil sur l'épaisseur

Lorsque le moule est maintenu à une température de 80°C, l'épaisseur extraite est nettement plus petite que dans le cas où la thermique dans l'outil est prise en compte. Considérer la température du moule comme constante et égale à la température initiale du moule au cours du temps est donc une hypothèse non applicable dans le cadre du trempage dans le PVA. En effet, la surface du moule passe de 80°C à 39°C après immersion dans le bain ce qui conduit à une variation de viscosité de 0,14 Pa.s à 80°C à 0,31 Pa.s à 39°C.

Par contre, les différences entre les épaisseurs des cas avec thermique dans l'outil et avec maintien de la température en surface à 39°C montre des résultats très proches. Les

principales différences se situent dans la partie supérieure du moule (entre 15 et 30 mm de hauteur) : l'épaisseur est légèrement plus faible pour le cas où le moule a sa température variable. En fait, dans ce cas, les zones supérieures ont été en contact moins longtemps avec le bain : la

*Figure 6-5* montre bien qu'à une hauteur de 35 mm, la température en surface est de 49°C et non pas 39°C dans les zones plus proches de l'hémisphère. En effet, cette zone est immergée plus tardivement et remontée plus tôt. Le fluide y acquiert donc une température plus élevée que dans le reste de l'épaisseur et il a donc une plus faible viscosité. C'est pourquoi l'épaisseur y est plus petite que si le moule était maintenu à 39°C. Dans ce second cas, la viscosité est uniforme le long du moule et correspond à celle obtenue à 39°C.

### 6.2.3 Influence de la température sur l'épaisseur mesurée

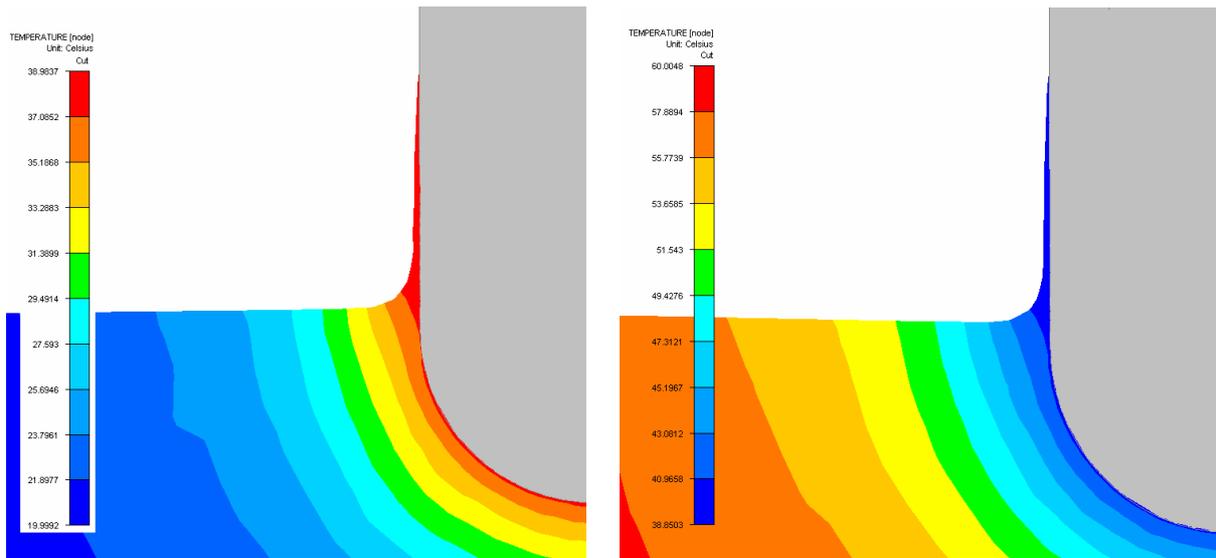
La température a une influence sur l'épaisseur extraite au cours du trempage à cause de son influence sur la viscosité. Nous allons voir au travers de cette partie l'influence de cette dernière sur les épaisseurs en faisant varier les températures du bain et du moule.

#### 6.2.3.1 *Température du bain*

##### – Cas d'un moule à température constante

Lorsqu'un moule avec une température constante en surface (ici 39°C) est plongé dans un bain de PVA, rapidement autour de ce dernier se forme une fine épaisseur de fluide adoptant cette température. C'est ce que montre la *Figure 6-8* : la température du bain est équivalente à celle en surface du moule autour de ce dernier. Loin du moule, la température du bain est celle imposée par la plaque chauffante. L'apparition du film autour du moule à température de l'outil se produit quelque soit la température initiale du bain, qu'elle lui soit supérieure ou inférieure.

Dans le cas d'un moule avec une température en surface constante, l'épaisseur extraite ne varie donc pas lorsque la température du bain change (*Figure 6-9*). En fait, comme l'épaisseur adopte la température du moule et non plus celle du bain, la viscosité y est localement la même comme dans les deux exemples donnés dans les *Figure 6-8* et *Figure 6-9*. C'est pourquoi aucune différence d'épaisseur n'est observée.



Bain à 20°C

Bain à 60°C

Figure 6-8 : Variation de température dans le bain

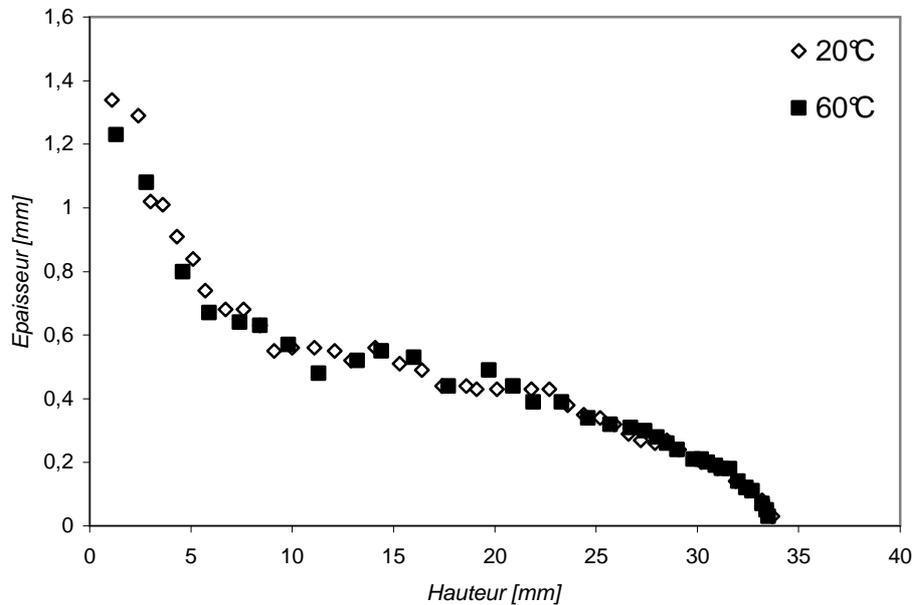
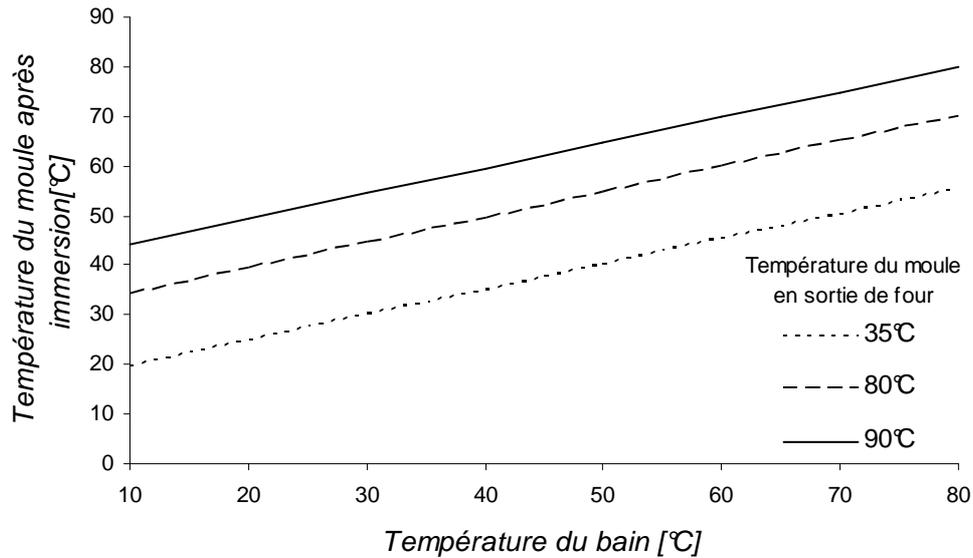


Figure 6-9 : Influence de la température du bain sur l'épaisseur extraite pour un moule maintenu à 39°C

– Cas d'un moule à température variable

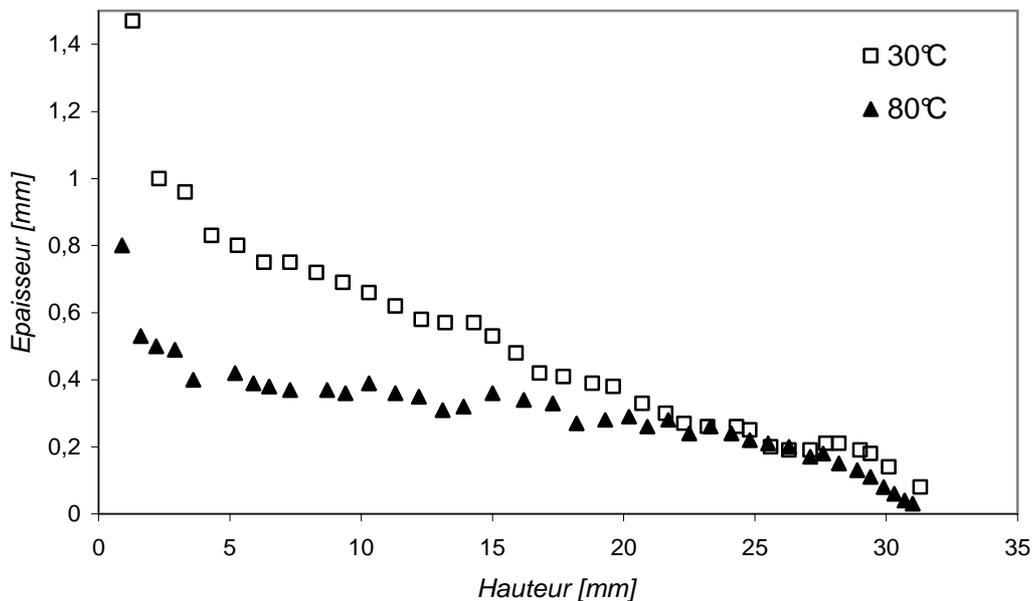
Dans le cas où la température du moule est considérée comme variable, la température du bain joue un rôle important puisque c'est au travers des échanges thermiques entre les deux milieux que la température au niveau de l'épaisseur est déterminée.

La température du moule en surface est dépendante de sa température initiale et de la température du bain (Figure 6-10). Elle augmente linéairement en fonction de ces deux températures. Une fois établie, la température en surface du support va influencer localement celle du bain et ainsi déterminer la viscosité du fluide.



**Figure 6-10 : Variation de la température en surface du moule en fonction de la température du bain de PVA et de la température initiale**

Logiquement, plus la température de maintien du fluide est grande, plus l'épaisseur est faible (*Figure 6-11*). Dans le cas d'un bain chauffé à 80°C, la température dans l'épaisseur est de 70°C : le PVA y a une viscosité de 0,16 Pa.s. Dans le deuxième cas où le bain est à 30°C, le fluide autour du moule est à 39°C d'où une viscosité de l'ordre de 0,31 Pa.s. On retrouve bien ici l'importance des températures de chauffe des deux milieux qui conduisent à la viscosité du bain, qui est un des facteurs déterminant l'épaisseur.



**Figure 6-11 : Influence de la température du bain sur l'épaisseur du bain lorsque le moule est de température variable**

### 6.2.3.2 Température du moule

Comme nous venons de la voir, la température du moule est le facteur déterminant de l'épaisseur puisque localement autour de ce dernier, le PVA adopte une température comprise entre celle du bain et celle du moule. La *Figure 6-12* expose le cas d'un moule à température constante plongé dans un bain à 30°C. Logiquement, plus sa température est grande, plus l'épaisseur est faible puisque plus la viscosité du PVA y est petite. Le réglage de la température du moule est donc un moyen de réguler la viscosité du bain d'un même fluide sans modifier sa composition et ainsi obtenir les épaisseurs désirées.

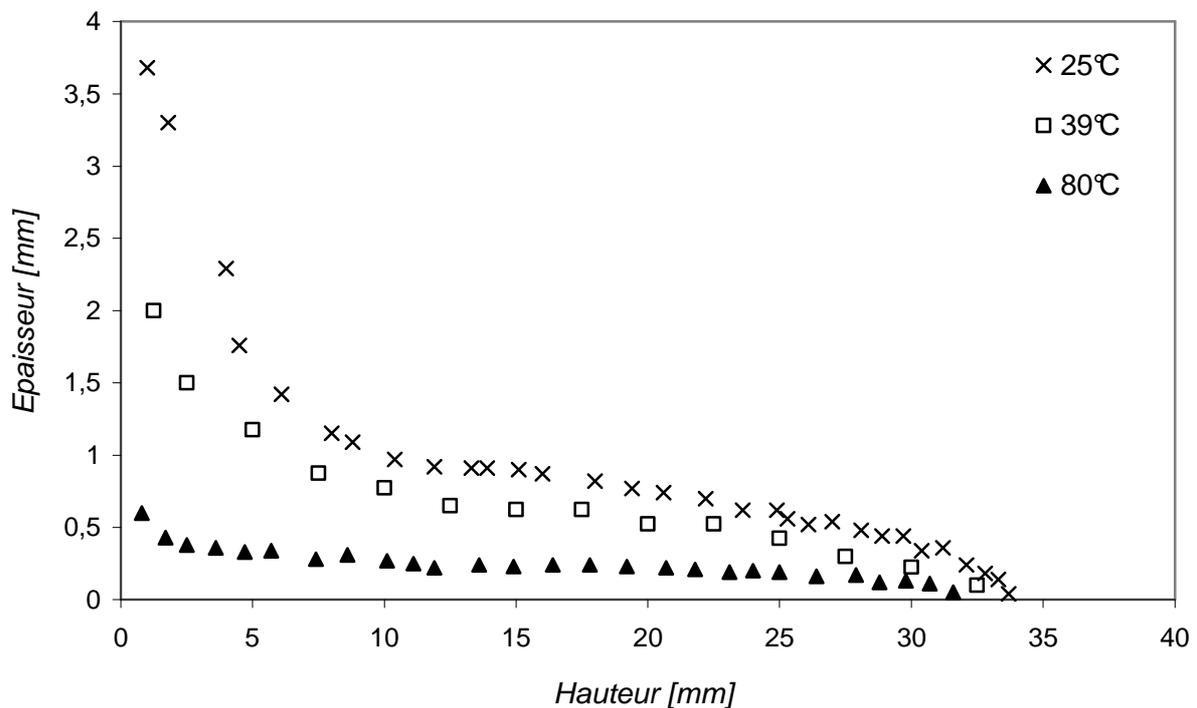


Figure 6-12 : Variation de l'épaisseur en fonction de la température du moule

---

*Ce chapitre a donné les résultats de l'étude du trempage à chaud. Il a permis de mettre en place la modélisation numérique et de constater que dans le cadre de la mise en forme des gants, le facteur thermique joue un rôle important puisqu'il permet d'ajuster la viscosité du bain en fonction des besoins au niveau des épaisseurs : plus le moule sera chaud, plus l'épaisseur sera petite. Nous avons également démontré que pour ce type de trempage, l'hypothèse d'une température du moule constante au cours du temps était grossière et qu'il fallait donc tenir compte des variations de température du moule. Cependant, une fois plongé dans le bain, l'outil se stabilise thermiquement en surface.*

---

## CONCLUSIONS

Le travail de thèse relaté dans ce manuscrit a présenté l'étude numérique du procédé de trempage à l'aide du logiciel Forge2005® dans sa version 3D. Une étude bibliographique préalable a mis en évidence que peu d'études avaient été menées sur ce sujet et que la plupart d'entre elles étaient incomplètes et non représentatives du trempage à l'échelle industrielle. Cette recherche nous a permis de mettre en relief les points clés du procédé de trempage :

**Forme de la surface libre** - Au cours du trempage d'un moule semi infini, la surface libre peut être divisée en trois zones distinctes : la région transitoire correspondant à la zone supérieure du film, la région à épaisseur constante constituant la majorité du film et la région du ménisque. Les formes de ces trois zones sont dépendantes de quatre principales forces différentes : la viscosité, la gravité, la tension de surface et les forces d'inertie.

**Prédiction de l'épaisseur lors de trempage isotherme** - Les études théoriques les plus représentatives sont celle de *Landau et Levich*, *White et Tallmadge* et *Spiers et al.* Ces modèles ne sont valables que pour des cas particuliers et ne sont donc pas généralisables. Le recours à la simulation numérique permet d'obtenir des modèles plus complets à l'instar de celui de *Tanguy et al.* qui donne de bonnes corrélations avec l'expérimentation. Cependant, cette méthode n'est pas applicable au milieu industriel puisqu'elle ne traite que des cas de moules semi infinis à deux dimensions.

**Prédiction de l'épaisseur lors de trempage anisotherme** - Dans les cas où le trempage se fait avec une différence de température entre le bain et le moule, l'épaisseur retirée est due à des processus de gélification ou de solidification. Comme pour les cas anisothermes, les modèles théoriques et numériques précédemment publiés sont incomplets et font preuves d'hypothèses plus ou moins acceptables telles qu'une température du moule constante au cours du temps et la négligence de la tension de surface.

Le premier travail de modélisation sur Forge3 a consisté à adapter cet outil numérique au cas du trempage. Il a été indispensable d'implémenter les forces de tension de surface qui jouent un rôle important lors de la détermination d'une épaisseur au cours d'un procédé de revêtement. L'enrichissement de Forge3 s'est également fait à l'aide de l'introduction des données physiques des bains de trempage et du moule. Pour cela, une étude approfondie de la rhéologie des fluides employés a été effectuée pour déterminer leurs lois de comportement en fonction de la température et de leur composition (par exemple les amas de silices). La validation du modèle numérique développé sur Forge 3 s'est faite ensuite en comparant les résultats de trempage calculés sur un moule axisymétrique à ceux obtenus dans la littérature et à ceux réalisés sur une petite machine de trempage.

Nous avons ensuite procédé à une étude approfondie de l'influence des principaux paramètres physiques tels que la tension de surface, la viscosité, la vitesse de retrait et les températures du moule et du bain sur la forme de la surface libre :

**Tension de surface** : elle est la force venant s'opposer à la gravité et permet de réduire les pertes de matières. Ce facteur est très important pour les cas où le fluide du bain de trempe est très peu visqueux. La tension de surface peut être négligée lorsque le nombre capillaire est grand.

**Viscosité** : il s'agit d'un paramètre clé dans la détermination de l'épaisseur et il est donc nécessaire de bien le maîtriser. Nous avons vu que plus la viscosité est grande, plus le film extrait est épais.

**Vitesse de retrait** : Ce paramètre, avec la température, est celui qui est facilement modifiable expérimentalement. La détermination de son influence est donc importante : plus la vitesse de retrait de matière est grande, moins la matière a le temps de s'écouler et plus l'épaisseur extraite est grande.

**Température** : Au travers de ce facteur, il est possible de modifier la viscosité du fluide extrait.

Nous avons enfin regardé des cas où les formes sont plus complexes. Lors de la mise en forme des gants, les principales difficultés se rencontrent dans les zones des entre doigts. Nous avons montré que si la viscosité et la vitesse de retrait étaient trop importantes, il était obtenu des « doigts palmés ». Le cas de l'implant mammaire axisymétrique a également été étudié : du fait des différences de courbures, les épaisseurs extraites sont irrégulières.

## PERSPECTIVES

Le travail de thèse a permis de mettre en place une simulation numérique du trempage sous Forge3 et d'étudier l'influence des principaux facteurs physiques et de la forme du moule. Mais les principales difficultés rencontrées ont été liées à des temps de calcul trop importants :

- Pour minimiser les *erreurs liées au remaillage*, il est préférable de travailler avec une petite taille d'éléments. Nous avons vu que de passer d'une taille maximale de 0,4 mm à 0,2 mm fait passer les temps de calculs de 2 jours à 10 jours.
- L'autre problème lié au temps de calcul est que de travailler sur un seul PC ne permet pas une investigation approfondie du trempage appliqué aux *cas industriels*.

Pour poursuivre ce travail de modélisation, il est important de paralléliser le problème pour pouvoir réduire encore la taille de mailles et étudier des cas à moules plus complexes.

Il serait également intéressant de développer des lois rhéologiques plus complexes prenant en compte les aspects rhéofluidifiants et élastiques des fluides non newtoniens.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Aliaga00] C. Aliaga, « Simulation numérique par éléments finis 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'aciers : application à la trempe de pièces forgées ou coulées ». *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 2000
- [Babuska73] I. Babuska, « The finite element methode with penalty » *Math. Comp* **27**, 221 (1973)
- [Bänsch01] E. Bänsch, “Finite element discretization of the Navier-Stokes equations with a free capillary surface” *Numer. Math.* **88**, 203-235
- [Bellet01] M. Bellet, « Implementation of surface tension with wall adhesion effects in a three-dimensional finite element model for fluid flow” *Commun. Numer. Meth. Engng.* **17**, 563-579 (2001)
- [Bikard07] J. Bikard, J. de Oliveira, C. Chaudemanche, T. Budtova, “3D numerical modelling of a dip-coating process by a multidomain macroscopic approach” *Int. J. Mat. Forming* **10**, 337 (2007)
- [Cabane] B. Cabane, « Formulation des dispersions » *Technique de l'Ingénieur*
- [Caldwell00] J. Caldwell, C.C. Chan, “Spherical Solidification by the Enthalpy Method and the Heat Balance Integral Method” *Appl. Math. Model.* **24**, 45-53 (2000)
- [Carreker63] R.P. Carreker, Dip-Forming – A Continuous Casting Process, *JOM* **15**, 549-556 (1963).
- [Chaudemanche07] C. Chaudemanche, “Les polysaccharides, une alternative pour le développement d'une nouvelle gélule végétale”, *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 2007
- [Cheung85] F.B. Cheung, “Analysis of Freeze Coating on a Nonisothermal Moving Plate by a Perturbation Method” *J. Heat Transfert* **107**, 549-556 (1985)
- [Cheung87] F.B. Cheung, S.W. Cha, “Finite-Difference Analysis of Growth and Decay of a Freeze Coat on a Continuous moving Cylinder” *Num. Heat Transfert* **12**, 41-56 (1987)
- [Coupez91] T. Coupez, « Grandes déformations et remaillage automatique », *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 1991
- [Darque03] E. Darque-Ceretti, E et Felder, « Adhésion et Adhérence » *Sciences et Techniques de l'Ingénieur*, France, 2003

- [Denson70] C.D. Denson, "The drainage of Newtonian liquids entrained on a vertical surface" *Ind. Eng. Chem. Fundam.* **9**, 443 (1970)
- [Denson72] C. Denson, "The drainage of non-Newtonien liquids entrained on a vertical surface", *Trans. Soc. Rheol.* **16**, 687 (1972)
- [Deryagin43] B. Deryagin, "Thickness of the liquid film adhering to a moving thread" *Dolk. Akad. Nauk.* **39**, 11 (1943)
- [Deryagin43] B.V. Deryagin, "Thickness of a liquid layer adhering to walls of vessels on their emptying and the theory of photo and motion picture film coating" *Dolk. Acad. Nauk.* **39**, 13 (1943)
- [Deryagin45] B.V. Deryagin, Titiyevskaya A.S., "Experimental study of liquid film thickness left on a solid wall after receding meniscus" *Dokl. Akad Nauk SSSR* **50**, 307 (1945)
- [Deryagin63] B.V. Deryagin,"Theory of the deposition of a viscous liquid on to a fibre or wire being withdrawn from the liquid" *Prikl. Mekh. Tekh. Phys.* **3**, 71 (1963)
- [Deryagin67] B.V. Deryagin, P.S. Kireev, V.A. Ryabov, D.V. Kedaseev, "Deposition of a coating on a moving glass rod" *Soviet Physiq. Dokl.* **12**, 176 (1967)
- [Dzuik91] G. Dzuik, « An algorithm for evalutionary surfaces » *Numer. Math.* **58**, 603 (1991)
- [Groenveld70a] P. Groenveld, R.A. Van Dortmond, "Shape of the air interface during the formation of viscous liquids by withdrawal" *Chem. Eng. Sci.* **25**, 1571 (1970)
- [Groenveld70b] P. Groenveld, "High capillary number withdrawal from viscous Newtonian liquids by flat plates" *Chem. Eng. Sci.* **25**, 33 (1970)
- [Jeffreys30] H. Jeffreys, "The draining of a vertical plate" *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society Magazine* **26**, 204 (1930)
- [Krozel100] J.W. Krozel, A.N. Palazoglu, R.L. Powell, "Experimental observation of dip-coating phenomena and the prospect of using motion control to minimize fluid retention" *Chem. Eng. Sc.* **55**, 3639 (2000)
- [Kuiken76] H.K. Kuiken, "Solidification of a Liquid on a Moving Sheet" *Int. J. Heat Transfert* **20**, 309-317 (1976)
- [Landau42] L. Landau, B. Levich, "Dragging of a liquid by a moving plate" *Acta Physicochimica* **17**, 41 (1942)
- [Landau50] H.G. Landau, "Heat Conduction in a Melting Solid" *Quart. Applied Math* **8**, 81 (1950)
- [Mahmoud94] K.G. Mahmoud, "Numerical Analysis of Freeze Coating on a two-

- dimensional moving plate”, *Num. Heat Transfert Part A* **25**, 279-293 (1994)
- [Marie97] S. Marie, « Un modèle de parallélisation S.P.M.D. pour la simulation numérique de procédés de mise en forme de matériaux ». *Thèse de doctorat*, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 1997
- [Natvi97] S.E. Navti, K. Ravindran, C. Taylor, R.W. Lewis, “Finite element Modelling of surface tension effects using Lagrangian – Eulerian kinematic description”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **147**, 41 – 60 (1997)
- [Lee72] C.Y. Lee, J.A. Tallmadge, « Description of meniscus profiles in free coating » *AIChE Journal* **18**, 1077 (1972)
- [Lee73] C.Y. Lee, J.A. Tallmadge, « Description of meniscus profiles in free coating II: Analytical expression » *AIChE Journal* **19**, 403 (1973)
- [Lee74] C.Y. Lee, J.A. Tallmadge, « Dynamic meniscus profiles in free coating III: Predictions based on two-dimensional flow fields » *AIChE Journal* **6**, 1079 (1974)
- [Rappaz98] M. Rappaz, M. Bellet, M. Deville, « Modélisation Numérique en Science et Génie des matériaux » *Traité des Matériaux* **10**, 211-290 (1998)
- [Seeniraj81] R.V. Seeniraj, T.K. Bose, “Freeze-Coating on a Continuous Moving Sheet and on an Axially Moving Cylinder” *Wärme- und Stoffübertragung* **15**, 239-243 (1981)
- [Soyris90] N. Soyris, « Modélisation tridimensionnelle du couplage thermique en forgeage à chaud ». *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 1990
- [Spiers73] R. P. Spiers, C.V. Subbaraman, W. L. Wilkinson, “Free coating of a Newtonian liquid onto a vertical surface” *Chem. Eng. Sc.* **29**, 389 (1974)
- [Tanguy82] P. Tanguy, “Recouvrement par trempage avec des fluides polymères : analyse par éléments finis et étude expérimentale”, *Thèse de doctorat*, Université de Laval, Canada, 1982
- [Tanguy84-I] P. Tanguy, M. Fortin, L. Choplin, “Finite element simulation of dip coating, I: Newtonian fluids” *Int. J. Num. Methods in Fluids* **4**, 441, (1984)
- [Tanguy84-II] P. Tanguy, M. Fortin, L. Choplin, “Finite element simulation of dip coating, II: non-Newtonian fluids” *Int. J. Num. Methods in Fluids* **4**, 459, (1984)

- [Tanguy85] P. Tanguy, M. Fortin, L. Choplin, “Shear-thinning effects on dip coating” *Can. J. Chem. Eng.* 63, 533, (1985)
- [Terzolo04] L. Terzolo, « Vers une prédiction de la durée de vie des outils de forge à chaud par la modélisation numérique du régime thermique et de l’usure abrasive ». *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 2004
- [Tronel93] Y. Tronel, « Contribution à la modélisation thermo-mécanique et physique du forgeage à chaud ». *Thèse de doctorat*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 1993
- [Voller97] V.R. Voller, “An Overview of Numerical Methods for Solving Phase Change Problems” *Ad. Num. Heat Transfer* 1, 341 (1997)
- [Weinstein01] S.J. Weinstein, K.J. Ruschak, “Dip coating on a planar non-vertical substrate in the limit of negligible surface tension” *Chem. Eng. Sc.* 56, 4957 (2001)
- [White65] White D.A., Tallmadge J. A., “theory of drag out of liquids on flat plates” *Chem. Engng. Sci.* 20, 33 (1965)
- [Yasuda04] K. Yasuda, T. Koshiha, N. Mori, “Effect of rheological property of coating liquid and withdrawal velocity on dip coating process in manufacturing of capsules” *Nihon Reoroji Gakkaishi (Journal of the Society of Rheology, Japan)* 32, 85, 2004
- [Zhang93] H. Zhang, M.K. Moallemi, S. Kumar, “Thermal Analysis of the Hot Dip-Coating Process” *J. of Heat Transfer* 115, 453-460 (1993)

## **Résumé :**

Le trempage est un procédé permettant de retirer autour d'un objet ou d'un moule une fine couche de matière après immersion de ce dernier dans un bain de liquide. Ce procédé est largement employé dans diverses industries telles que dans des applications protectrices ou de décorations ou encore pour obtenir des objets de formes creuses (implants mammaires, gants, préservatifs ou gélules). L'avantage du trempage est qu'il est très simple d'utilisation ; cependant, il est difficile de contrôler l'épaisseur extraite et sa répartition autour de l'objet. L'objectif de cette thèse est de modéliser numériquement ce procédé pour ensuite être capable de prédire l'épaisseur extraite et sa répartition autour du moule. Pour cela, la modélisation s'est faite en résolvant les équations mécaniques et thermiques dans le bain à l'aide d'une approche Lagrangienne par éléments finis accompagnée de remaillage. La tension de surface, force importante puisqu'elle permet entre autre d'éviter des instabilités en surface, a été intégrée grâce à une méthode basée sur la reformulation de la courbure à l'aide de l'opérateur de Laplace-Beltrami. Pour enrichir la modélisation, une série d'expérimentation ont également été menées pour caractériser les fluides employés.

**Mots-clés :** trempage, simulation numérique, rhéologie, tension de surface

## **Abstract :**

Dip-coating is a process allowing the extraction of a thin layer of matter around a mould by dipping it in a bath of liquid. This is a common process extensively used in industries concerned, for example, with the application of protective or decorative coatings and also used to manufacture parts having a thin thickness such as gloves, mammal prostheses, medical capsules and condoms. The advantage of this process is its simplicity and its low cost; but it is difficult to control the thickness and its repartition around the object. The goal of this thesis is to numerically predict the thickness of the layer extracted on the mould. The mechanical and thermal balance equations are solved in the bath using a Lagrangian Finite Element approach with remeshing technique. The liquid/air interfacial tension is taken into account in order to avoid surface instabilities; the method used to implement interfacial tension in the modelling is based on the reformulation of the curvature with Laplace-Beltrami operator. Experimental researchs are also realized in order to characterize physically the liquids used in the bath.

**Keywords :** dip-coating, numerical modelling, rheology, interfacial tension