

Modélisation numérique de la mise en forme et de la tenue mécanique des assemblages par déformation plastique: application au rivetage auto-poinçonneur

Sébastien Fayolle

► To cite this version:

Sébastien Fayolle. Modélisation numérique de la mise en forme et de la tenue mécanique des assemblages par déformation plastique : application au rivetage auto-poinçonneur. Mécanique [physics.med-ph]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2008. Français. NNT : 2008ENMP1583 . tel-00361169

HAL Id: tel-00361169 https://pastel.hal.science/tel-00361169

Submitted on 13 Feb 2009 $\,$

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Ecole Doctorale 364 : Sciences Fondamentales et Appliquées

N° attribué par la bibliothèque

THESE

pour obtenir le grade de Docteur de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris Spécialité «Mécanique Numérique»

présentée et soutenue publiquement par

Sébastien FAYOLLE

ETUDE DE LA MODELISATION DE LA POSE ET DE LA TENUE MECANIQUE DES ASSEMBLAGES PAR DEFORMATION PLASTIQUE

APPLICATION AU RIVETAGE AUTO-POINÇONNEUR

26 Novembre 2008

Jury :

M. Michel BRUNET
M. René BILLARDON
M. Ron PEERLINGS
M. Richard SPATARO
M. François BAY
M. Pierre-Olivier BOUCHARD
Mme. Katia MOCELLIN

Président et Rapporteur Rapporteur Examinateur Examinateur Directeur de thèse Encadrant de thèse Encadrant de thèse

ii

Remerciements

Je souhaite dans un premier temps remercier tous les acteurs sans qui je n'aurais jamais effectué de thèse. Je me rends compte tous les jours que cela aurait été une grave erreur. Je remercie donc naturellement en premier Fabien qui m'a appelé pour me présenter le CEMEF ainsi que les recherches effectuées dans ce centre. Je remercie Jean-Loup Chenot de m'avoir reçu au sein du CEMEF et au CETIM pour avoir financé ma thèse. Toute ma gratitude va pour François Bay qui m'a accueilli au sein du groupe M3P. Je désire exprimer ma reconnaissance à mes encadrants de thèse : Pierre-Olivier Bouchard et Katia Mocellin. Vous avez toujours été là quand j'en avais besoin et vous m'avez toujours fait confiance. Ce fut pour moi un véritable plaisir de travailler avec vous. Vous m'avez fait aimer la recherche et c'est le plus beau cadeau que vous puissiez me faire.

Je tiens à remercier tout particulièrement Michel Brunet, René Billardon, Ron Peerlings et Richard Spartaro d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. C'est un immense honneur pour moi que vous ayez jugé mon travail.

Je tiens également à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à réaliser ce travail de thèse. Je pense notamment à Gilbert pour l'aide qu'il m'a apporté au niveau des machines de traction et des moyens d'acquisitions. Je pense aussi à Alain et Francis pour le montage ARCAN ainsi qu'aux membres de l'atelier pour les éprouvettes. Je remercie également Bernard et Suzanne pour leur aide précieuse. Je remercie aussi les sociétés PSA et Böllhoff pour les moyens expérimentaux et la matière qu'ils m'ont fournis.

Je n'oublie pas non plus mes nombreux collègues de bureau : Aurélien, Nicolas, Olivier, Magalie, Audrey, Isabelle, Ludovic, Claire et Raphael. Si j'étais content de venir travailler le matin, c'est en grande partie grâce à votre bonne humeur.

Je souhaite également remercier l'ensemble des doctorants, masters que j'ai pu côtoyer au cours de mon passage au CEMEF. Mais je pense plus particulièrement aux amitiés fortes qui se sont créés aux cours de soirées, discussions, randonnées... Je pense naturellement à Alice que je remercie d'avoir eu si souvent le sourire même dans les moments difficiles et d'avoir toujours était de bon conseil. Je pense ensuite à Mathilde qui m'a confirmer le virus de la grimpe à quand le 7^{ème} degrès ? Viens ensuite David. Tu m'as fait découvrir entre autre le monde du rugby ce qui m'a couté un œil au beurre noir et une cheville. Je n'ai qu'une envie, c'est de remettre ça. Greg, tes collections vestimentaires, tes blagues magistrales resteront toujours dans mon esprit. GrandSeb, ta fausse mauvaise humeur, tes discussions de Jacky et ton claquage du doigt étaient monumentales. Marc, je n'oublierais jamais ta gentillesse, ton amour du canard et les terrasses qu'ont a pu faire. Elie, le petit libanais qui est « trop whaou, j'te jure », reste toujours aussi généreux. Fabien, notre amitié commence à dater. J'ai toujours pu compter sur toi et je t'en remercie. Je ne serais pas là sans toi.

Je remercie également mes parents et ma sœur qui m'ont toujours soutenu.

Fabienne, même si la distance n'a pas toujours rendu les choses faciles, tu as toujours été là. Tu as passé la majorité de tes week-ends dans les transports pour que l'on puisse continuer à être ensemble. Cette thèse est pour toi.

Table des matières

Introdu	ction	1
Conte	xte général	3
Positi	on du problème	4
Ohiec	tifs de la thàse	₅
Objec		5
Plan d	u manuscrit	6
Chapitro	e 1 : L'assemblage par déformation plastique	7
1.1	Les assemblages par déformation plastique	9
1.1.	1 Définition	9
1.1.	2 Les différentes technologies	9
1.2	Etude du rivetage auto-poinçonneur	10
1.2.	Principe de la pose du rivet auto-poinçonneur	10
1.2.	2 La presse à riveter	11
1.2.	3 Préconisations	12
1.2.4	4 Qualité et géométrie du point d'assemblage	13
1.2.	5 Tenue mécanique d'un assemblage	14
1.2.	6 Avantages et inconvénients	15
1.2.	7 Applications industrielles	16
1.3	Etat de l'art de la simulation des assemblages par rivetage auto-poinçonneur	16
1.3.	1 Simulation de la pose du rivet auto-poinçonneur	16
1.3.	2 Etude de la tenue mécanique du point d'assemblage	21
1.3.	3 Elément équivalent	23
1.4	Problématique et objectifs de la thèse	23
1.5	Références bibliographiques	26
Chapitre	e 2 : Formulation du modèle élasto-plastique endommageable	29
2.1	Introduction	31
22	Modèle élasto-plastique	31
2.2	1 Elasticité : loi de Hooke	31
2.2	2 Formulation en parties sphériques et déviatoriques	31
2.2.	3 Formalisme de base en élasto-plasticité	32
2.2	Critères tridimensionnels de plasticité	<u>33</u>
2.2	5 Lois d'écrouissage	35 35
2	2 5 1 Lois d'écrouissage isotrone	36
2	2.5.2 Lois d'écrouissage cinématique	טכ30 אצ
2	2.5.3 Conclusions sur l'écrouissage	२० २०
2.2.	6 Choix et conclusions sur le modèle élasto-plastique	39 39
2.3	L'endommagement ductile des métaux	40
 ? ? `	Définition de la variable interne d'endommagement	40
2.3.	Mesure de l'endommagement	42424242
2.5.		43

2.3.2	2.1 Evolution du module d'élasticité d'une éprouvette en traction	44
2.3.2	2.2 Tests de micro- et nano-indentation	45
2.3.3	Conclusions sur l'endommagement ductile	46
2.4 N	1odèle élasto-plastique endommageable	47
2.4.1	Potentiel thermodynamique	47
2.4.2	Potentiel des dissipations et lois d'évolution des variables internes	48
2.4.3	Le multiplicateur plastique	49
2.4.4	Le module tangent continu	50
2.4.5	Enrichissement du modèle d'endommagement	50
2.4.5	5.1 Influence de la triaxialité	50
2.4.5	5.2 Prise en compte de l'effet de fermeture des fissures	51
2.4.5	5.3 Décomposition du tenseur des contraintes en parties traction/compression	53
2.4.5	5.4 Limite de triaxialité en compression	54
2.4.5	5.5 Conclusions sur l'enrichissement du modèle d'endommagement	54
2.4.6	Choix et conclusions sur le modèle élasto-plastique endommageable	54
2.5 C	onclusions	56
2.6 R	éférences bibliographiques	57
Chapitre 3	: Modélisation numérique du modèle élasto-plastique endommageable	59
3.1 lr	ntroduction	61
22 0	ésolution numérique du problème mécanique	61
3.2 N	Définition du problème mécanique	01
3.2.1	Definition du probleme mecanique	01 62
3.2.	12 Les équations de conservation	63
les	conditions aux limites	63
322	Formulation faible du problème mécanique	05 65
3.2.3	Discrétisation spatiale par éléments finis	66
3.2.3	3.1 Formulation P1+/P1	66
3.2.3	3.2 Formulation mini-élément	68
3.2.4	Discrétisation temporelle et résolution du problème	00
3.2.5	Intégration locale des éguations comportementales	74
3.2.5	5.1 Prédiction élastique	75
3.2.	5.2 Correction plastique	76
3.2.	5.3 Module tangent discret cohérent	81
3.2.5	5.4 Dérivée objective de la contrainte	84
3.2.5	5.5 Conclusion sur l'intégration locale des équations comportementales	84
3.2.6	Gestion incrémentale du contact par la méthode de pénalisation	86
3.2.7	Remaillage et transport de champs	88
3.2.8	Eléments endommagés et rupture	90
3.2.9	Application du modèle et validation	92
3.2.9	9.1 Essai de traction uniaxiale sur éprouvette axisymétrique entaillée	92
3.2.9	9.2 Essai d'écrasement d'une éprouvette en tonneau	95
3.2.9	0.3 Couplage fort et couplage faible	98
3.2.10	Conclusions sur la résolution numérique du problème mécanique	100
3.3 N	Iodèles d'endommagement non locaux	101
3.3.1	Le phénomène de localisation	101
3.3.2	Les méthodes de régularisation	103

3.3.3	3 Mé	thodes non locales	104
3.	.3.3.1	Formulation intégrale	105
3.	.3.3.2	Formulation à gradient explicite	107
3.	.3.3.3	Formulation à gradient implicite	108
3.3.4	4 Ela:	sto-plasticité avec endommagement non local	109
3.3.5	5 Imp	plémentation des méthodes non locales	111
3.	.3.5.1	Formulation intégrale	111
3.	.3.5.2	Formulation à gradient implicite	113
3.	.3.5.3	Modification du calcul d'intégration locale des équations comportementales	117
3.3.6	6 Lal	ongueur caractéristique	120
3.3.7	7 Apj	ports des modèles non locaux	121
3.	.3.7.1	Modèle local	122
3.	.3.7.2	Comparaison des modèles	
3.	.3.7.3	Influence de la longueur caractéristique	
3.	.3.7.4	Dépendance à la taille de maille	128
3.3.8	8 Syn	thèse sur les modèles non locaux	
	, ,		
3.4	Concl	usions et perspectives	132
3.5	Référ	ences bibliographiques	134
Chapitre	e 4 : A	nalyse inverse et caractérisation rhéologique des matériaux	139
4.1	Intro	duction	141
4.2	Ident	ification rhéologique par analyse inverse	141
4.2.2	1 Inti	oduction	141
4.2.2	2 Déf	inition du problème d'identification	142
4.2.3	3 Mé	thode de minimisation de la fonction coût	142
4.	.2.3.1	Choix de la méthode d'optimisation	142
4.	.2.3.2	Les algorithmes de stratégie d'évolution couplée à un métamodèle	143
4.2.4	4 Déf	inition d'une stratégie d'identification	144
4.3	Carac	térisation rhéologique des tôles	146
4.3.2	1 Nua	ances étudiées	146
4.3.2	2 Car	actérisation rhéologique des tôles en traction uniaxiale	147
4.	.3.2.1	Détermination expérimentale des courbes d'écrouissage	148
4.	.3.2.2	Détermination des courbes d'écrouissage par analyse inverse	156
4.	.3.2.3	Caractérisation de la loi d'endommagement	158
4.	.3.2.4	Conclusions sur les essais de traction	160
4.3.3	3 Car	actérisation rhéologique des tôles par poinçonnement	161
4.	.3.3.1	Montage de l'essai de poinçonnement et résultats expérimentaux	161
4.	.3.3.2	Modèle éléments finis	162
4.	.3.3.3	Résultat de l'identification par analyse inverse	165
4.	.3.3.4	Conclusions sur les essais de poinçonnement	166
4.4	Carac	térisation rhéologique des rivets semi-creux	167
4.4.2	1 Nat	cure des rivets semi-creux	167
4.4.2	2 Les	difficultés de la caractérisation rhéologique du rivet	167
4.	.4.2.1	Essais d'évasement	168
4.	.4.2.2	Essais d'écrasement	169
4.4.3	3 Mo	dèles éléments finis	170
4.	.4.3.1	Essai d'évasement	170

Conclusi	ions générales et perspectives	211
5.7	Références bibliographiques	210
5.6	Conclusions et perspectives	208
5.5.4	Conclusions	208
5.5.3	3 Le rivetage à rivet plein	206
5.5.2	2 Le rivet clinché	206
5.5.1	L Le clinchage à matrice fixe	205
5.5	Extension aux autres assemblages par déformation plastique	205
5.4.3	3 Conclusions	204
5.4.2	2 Résultats de l'optimisation	203
5.4.1	Optimisation de la géométrie d'une bouterolle	203
5.4	Optimisation du procédé	203
5.3.5	conclusions sur la simulation de la tenue mecanique	202
5. 	3.4.3 Le critère de rupture	199
5.	3.4.2 Modes de rupture	199
5.	3.4.1 Courbes force-déplacement	198
5.3.4	Résultats numériques et comparaisons aux résultats expérimentaux	198
5.	3.3.3 Influence de l'endommagement	197
5.	3.3.2 Influence de l'histoire de la mise en forme	197
5.	3.3.1 Influence de la taille de maille	196
5.3.3	B Etude du modèle numérique	196
5.3.2	2 Modélisation 3D dans Forge3	195
5.3.1	Caractérisation expérimentale de la tenue mécanique du point riveté	190
5.3	Modélisation de la tenue mécanique de l'assemblage riveté	190
5.2.4	Conclusions sur la simulation du rivetage	189
5.	2.3.3 Déchargement élastique	189
5.	2.3.2 Courbes force – déplacement	188
5.	2.3.1 Coupes géométriques	187
5.2.3	Résultats numériques et confrontations expérimentales	186
5.	2.2.3 Influence de l'endommagement	185
5.	2.2.2 Influence du contact et du frottement	183
5.	2.2.1 Choix de la discrétisation spatiale	180
5.2.2	2 Modélisation numérique du procédé	175
J.2 5.2.1	Définition des configurations d'études	173 179
E 2	Poso du rivet auto poinconnour	170
5.1	Introduction	179
Chapitre	e 5 : Applications numériques et validations expérimentales	177
4.6	Références bibliographiques	176
4.5	Conclusions et perspectives sur l'identification rheologique	1/3
4 5	Conclusions et norma etimes cur l'identification de falorique	
445	5 Conclusions de la caractérisation rhéologique des rivets	171
4. 444	Résultats de l'identification	171 171
ч. Д	4.3.3 Définition de l'espace de recherche	170 171
4.	4.3.2 Essai d'écrasement	170

Introduction :

Contexte général	3
Position du problème	4
Objectifs de la thèse	5
Plan du manuscrit	6

Contexte général

Dans le domaine du transport (automobile, aéronautique, ferroviaire, ...), l'une des priorités lors de la phase de conception d'un nouveau véhicule est la minimisation de sa masse, que cela soit pour une diminution du coût de fabrication ou une augmentation de l'efficacité (baisse de la consommation de carburant, réduction du rejet des gaz polluants). Pour atteindre ces objectifs, il est de plus en plus courant de combiner l'utilisation de nouvelles nuances d'aciers à haute limite élastique (HLE), d'alliages d'aluminium, de composites ou de matières plastiques. Ces nouveaux matériaux ont amené l'industrie à repenser ses techniques d'assemblage. En effet, les avancées technologiques notamment dans le domaine des matériaux métalliques rendent souvent impossible l'utilisation de procédés à chaud, comme la soudure par points, soit parce que :

- les métaux à assembler ont des températures de fusion très éloignées,
- la conductibilité électrique rend le procédé impossible,
- les revêtements de surfaces seraient détruits portant ainsi préjudice à l'aspect visuel et à la durée de vie du produit.

L'industriel doit alors déterminer une méthode d'assemblage spécifique pour chaque configuration. Ce choix se fait parmi un nombre conséquent de procédés et va alors faire l'objet d'une réflexion basée sur un ensemble de contraintes (Fig. 1). En effet, un grand nombre d'aspects doivent être pris en compte comme le coût (Varis, 2006), l'utilisation de consommables, l'usure des outils, la résistance à la rupture en statique et en dynamique du point d'assemblage, la durée du procédé d'assemblage (Barnes, et al., 2000), la facilité de mise en œuvre, la résistance à la corrosion, l'apparence du point d'assemblage, la possibilité de maintenance, ... Pour lier des produits minces de natures différentes, les assemblages par déformation plastique représentent une excellente solution. Dans le secteur automobile, cette famille d'assemblage est de plus en plus utilisée, car elle permet notamment de lier des tôles en alliage d'aluminium et en acier.



Figure 0.1 : Classification partielle des techniques d'assemblage

Position du problème

Contrairement au vissage ou au boulonnage, il n'existe pas, ou très peu, de règles normalisées de mise en œuvre des assemblages par déformation plastique. Dans le cas d'une nouvelle configuration (utilisation de nouveaux matériaux, changement de l'épaisseur des tôles à assembler, ...), les industriels sont obligés de réaliser des campagnes expérimentales de faisabilité et de tenue mécanique du point d'assemblage afin de s'assurer que l'assemblage respecte le cahier des charges. Ces campagnes expérimentales sont coûteuses que cela soit en temps machine, en main d'œuvre ou en matière. Afin de réduire les délais et les coûts de validation d'un assemblage, comme dans d'autres secteurs de conception, l'utilisation d'un outil de simulation numérique apparaît comme une solution pertinente. Un tel outil permettrait de modéliser à la fois l'étape de la mise en forme de l'assemblage et sa tenue mécanique. Un exemple de résultat numérique sur le rivetage autopoinçonneur est représenté sur la figure 2.



Figure 0.2 : Simulation de la pose et de la tenue mécanique d'un assemblage riveté avec rivet auto-poinçonneur

La simulation numérique peut s'avérer également extrêmement intéressante concernant l'optimisation des points d'assemblage. Que cela soit dans le cas du capot de la Peugeot 607 qui compte environ 70 points clinchés ou dans le cas de l'Airbus A340 et ses 1 500 000 rivets (cf. Fig. 3), disposer d'un outil permettant d'optimiser la position ou le nombre des points d'assemblage serait un atout majeur dans la réduction des coûts de fabrication ainsi que dans l'allègement des structures.





Figure 0.3 : Airbus A340-600 (gauche), Peugeot 607 (droite)

Objectifs de la thèse

L'objectif final de la thèse est de disposer d'un outil numérique qui soit capable de modéliser, avec une grande précision et en un temps de calcul contenu, la mise en forme et la tenue mécanique des assemblages par déformation plastique. Elle s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre le Centre de Mise en Forme des matériaux (CEMEF) et le Centre Technique des Industries Mécaniques (CETIM) sur la modélisation numérique de la pose et de la tenue mécanique des assemblages par déformation plastique et plus particulièrement sur la technologie du rivetage auto-poinçonneur.

L'intérêt d'un tel logiciel est multiple. En effet, il sera à la fois un logiciel :

- **D'étude de faisabilité** : il doit permettre de vérifier rapidement s'il est possible d'utiliser une technologie d'assemblage choisie sur une configuration donnée.
- **D'aide à la décision** : il doit permettre de tester rapidement différentes technologies d'assemblage afin d'aider le concepteur dans le choix final.
- **D'optimisation** : il doit permettre de tester pour une configuration donnée différents paramètres de procédé comme la forme du rivet ou de la bouterolle, l'effort de pose... afin de déterminer la configuration optimale.
- **D'innovation** : il doit être suffisamment robuste pour que l'utilisateur puisse imaginer de nouvelles technologies d'assemblage par déformation et les simuler.

Pour ce faire, il est nécessaire de développer un outil numérique capable de prendre en compte toute la complexité des phénomènes physiques qui apparaissent aussi bien au cours de la mise en forme des points d'assemblage qu'au cours d'essais de tenue mécanique en sollicitation quasistatique. Ces développements seront basés sur la suite logicielle Forge2005[®]. Cette suite logicielle est dédiée à la simulation de la mise en forme des métaux. Afin de l'enrichir pour l'application aux assemblages, nous avons abordé les points suivants :

- le développement d'un modèle matériau capable de simuler les grandes déformations et l'endommagement et de prendre en compte les difficultés numériques qui peuvent apparaître,
- l'amélioration de la simulation de la rupture par la méthode « kill-element »,
- la caractérisation précise des lois de comportement des matériaux et des composants,
- la validation des résultats numériques par des campagnes expérimentales de pose et de tenue mécanique d'éprouvettes rivetées.

Plan du manuscrit

Le mémoire est divisé en cinq chapitres. Après le chapitre d'introduction sur les assemblages par déformation plastique et plus particulièrement sur le rivetage auto-poinçonneur, le deuxième chapitre concerne le développement d'un modèle de comportement adapté aux différents éléments constituant un assemblage (tôles, rivet). L'intérêt de notre modèle par rapport à ceux présentés dans la littérature réside dans la prise en compte d'un modèle d'endommagement ductile isotrope. Ce modèle d'endommagement a la particularité de prendre en compte l'effet de refermeture des fissures et de limiter l'évolution de l'endommagement en compression dans le cas de triaxialité négative importante.

Le troisième chapitre est en partie consacré au formalisme mathématique du problème d'équilibre mécanique et à sa résolution numérique par la méthode des éléments finis. Une attention particulière est portée à l'intégration de la loi de comportement développée au chapitre 2. L'utilisation de ce modèle matériau génère une sensibilité des résultats numériques vis-à-vis de la discrétisation spatiale éléments finis. Pour corriger cette dépendance, un modèle d'endommagement non local est introduit et validé.

Le modèle numérique étant développé, il est alors nécessaire d'introduire des paramètres matériaux physiques afin d'obtenir des résultats réalistes. La caractérisation rhéologique de différentes nuances d'alliages d'aluminium et d'acier fait l'objet de la première partie du quatrième chapitre. Cette caractérisation est réalisée en combinant une méthode d'analyse inverse avec des essais de traction uniaxiale sur éprouvettes planes et des essais de poinçonnement. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'identification des paramètres de la loi rhéologique du rivet grâce à un essai d'évasement et un essai d'écrasement.

Disposant d'un modèle numérique et de paramètres matériaux, il est alors possible de réaliser l'ensemble des simulations. La première partie du cinquième chapitre est donc consacrée à l'étude numérique et expérimentale de la pose et de la tenue mécanique des assemblages par rivetage autopoinçonneur. Les résultats expérimentaux serviront à juger de la pertinence des résultats obtenus avec l'outil numérique. Un des objectifs de la thèse étant d'obtenir un outil numérique d'optimisation et d'innovation, la deuxième partie du chapitre portera sur une étude d'optimisation de géométrie de bouterolle, afin d'augmenter la tenue mécanique d'un assemblage. Pour finir, des simulations de différents procédés d'assemblage par déformation plastique seront présentées.

Finalement, le bilan des travaux réalisés et les perspectives ouvertes seront abordés en conclusion.

L'assemblage par déformation plastique

1.1	Les assemblages par déformation plastique	9
1.1.1	Définition	9
1.1.2	Les différentes technologies	9
1.2	Etude du rivetage auto-poinçonneur	10
1.2.1	Principe de la pose du rivet auto-poinçonneur	10
1.2.2	La presse à riveter	11
1.2.3	Préconisations	12
1.2.4	Qualité et géométrie du point d'assemblage	13
1.2.5	Tenue mécanique d'un assemblage	14
1.2.6	Avantages et inconvénients	15
1.2.7	Applications industrielles	16
1.3	Etat de l'art de la simulation des assemblages par rivetage auto-poinçonneur	16
1.3.1	Simulation de la pose du rivet auto-poinçonneur	16
1.3.2	Etude de la tenue mécanique du point d'assemblage	21
1.3.3	Elément équivalent	23
1.4	Problématique et objectifs de la thèse	23
1.5	Références bibliographiques	26

1.1 Les assemblages par déformation plastique

1.1.1 Définition

Les assemblages par déformation plastique sont des méthodes d'assemblage de produits minces réalisés à froid et agissant par interpénétration des matières entre elles, à l'aide d'un poinçon et d'une matrice, ou par déformation d'un composant. L'assemblage peut être réalisé sans apport de matière comme lors du clinchage, ou alors avec l'adjonction d'un rivet comme lors du rivetage autopoinçonneur ou lors du rivetage clinché.

1.1.2 Les différentes technologies

Les assemblages par déformation plastique regroupent un grand nombre de technologies. La plus populaire étant le rivetage mais nous retrouvons aussi :

- Le clinchage : il s'agit d'une technique d'assemblage sans apport de matière. La tenue mécanique est réalisée uniquement par déformation des tôles (Fig. 1.1a). La forme du poinçon ainsi que la mobilité de la matrice dépend de la technologie de clinchage retenue (Hamel, 1998).
- Le rivetage auto-poinçonneur : dans cette technologie, c'est l'insertion d'un rivet cylindrique semi-creux dans les tôles à assembler qui permet de créer le point d'assemblage (Fig. 1.1b).
- Le rivetage à rivet plein : cette technique d'assemblage se déroule en deux étapes. La première consiste à faire déboucher un rivet au travers des tôles à assembler. La seconde passe permet de réaliser la tenue mécanique en venant presser les tôles autour du rivet (Fig. 1.1c).
- Le rivet clinché : comme son nom l'indique, cette récente technologie d'assemblage est simplement un clinchage dans lequel un rivet cylindrique est utilisé afin d'augmenter la tenue mécanique de l'assemblage.



Figure 1.1 : Coupes de différentes technologies d'assemblage par déformation plastique : (a) clinchage, (b) rivetage autopoinçonneur, (c) rivetage à rivet plein

Dans ce manuscrit, nous allons nous intéresser au rivetage auto-poinçonneur. En effet, parmi les différentes technologies présentées, le rivetage auto-poinçonneur est une de celles, avec le clinchage, qui est de plus en plus utilisée dans l'industrie du transport ces dernières années. De plus, la modélisation du rivetage auto-poinçonneur demande de prendre en compte un nombre important de phénomènes physiques comme la modélisation de la rupture des tôles qui n'apparaît pas, par exemple, dans le procédé de clinchage. A terme, la capacité à modéliser le rivetage auto-poinçonneur doit nous permettre de pouvoir modéliser l'ensemble des technologies d'assemblages par déformation plastique.

1.2 Etude du rivetage auto-poinçonneur

1.2.1 Principe de la pose du rivet auto-poinçonneur

Le procédé d'assemblage par rivetage auto-poinçonneur consiste à faire pénétrer un rivet semi-creux par poinçonnage dans la ou les premières épaisseurs de matière, puis à le faire s'évaser dans la dernière épaisseur sans la perforer grâce à la reprise de l'effort par la matrice appelée bouterolle (Fig. 1.2). L'opération est effectuée de façon ininterrompue. Dans cette étude, nous avons travaillé sur la technologie RIVSET[®] de la société Böllhoff.





La pose d'un rivet auto-poinçonneur est effectuée en quatre étapes (Fig. 1.3) :

- Les pièces à assembler sont mises en contact avec la matrice.
- Les tôles sont maintenues en pression par le serre-flanc.
- La descente du poinçon assemble les pièces à l'endroit choisi. Pendant le poinçonnage, le rivet pénètre dans la ou les pièces supérieures, et forme un bourrelet en s'évasant dans la pièce située du côté matrice. La forme du bourrelet est déterminée entre autres par la forme de la matrice.
- Une fois l'effort (ou selon le cas la course) prédéterminé atteint, le poinçon remonte. A la fin du procédé, un assemblage étanche et très résistant est alors obtenu.



Figure 1.3 : Décomposition de la pose du rivet auto-poinçonneur (Böllhoff, 2005)

Le point de rivetage se présente alors sous la forme d'un plat du côté de la tête de rivet et d'une protubérance du côté de la bouterolle (Fig. 1.4). Un contrôle visuel de l'état de l'assemblage permet dans un premier temps de caractériser la conformité du point (TWI knowledge summary, 2000), notamment la présence de crique au niveau de la protubérance, un affleurement de la tête de rivet trop important ou un point dissymétrique, signe d'un problème dans l'assemblage.





Figure 1.4 : Visualisation du point riveté : (gauche) côté tête de rivet, (droite) côté de la protubérance

1.2.2 La presse à riveter

Dans notre étude, nous avons utilisé une presse à riveter instrumentée de l'entreprise Böllhoff (Fig. 1.5). La machine de pose est du type ADF, i.e. elle est équipée d'un module de puissance électrique. Cette technologie est dédiée à la production de grande série et présente l'avantage de pouvoir définir des paramètres de pose différents pour chaque point d'assemblage. Le système d'alimentation des rivets est un système en vrac. Les rivets sont disposés dans deux bols, ce qui permet d'avoir deux tailles différentes de rivets sur la même presse, et sont envoyés à la tête de pose par air comprimé. Le module de puissance est équipé d'un capteur de déplacement et de mesure d'effort qui permet d'obtenir la courbe « force de pose – déplacement du poinçon » tout au long du processus de pose du rivet. La charge maximale supportée par le col de cygne, dans notre cas, est de 70 kN. L'effort du serre-flan est fourni par un système hydraulique dont la valeur est ajustable. Dans notre cas, l'effort imposé est de 594 N.



Figure 1.5 : Vue d'ensemble de système de rivetage auto-poinçonneur (Böllhoff, 2005)

Le moniteur de contrôle affiche l'évolution de l'effort de mise en forme en fonction du déplacement du poinçon (Fig. 1.6). Des essais préalables permettent de définir une bande de tolérance sur l'effort mesuré. Si la courbe obtenue lors de la pose du rivet n'est pas contenue dans cette bande, alors l'assemblage a de grandes chances de ne pas être conforme. Sur cette courbe, nous retrouvons les quatre étapes qui constituent la pose d'un rivet. La première montée en charge qui correspond au poinçonnement de la première tôle. Puis le plateau qui correspond à la rupture de la tôle supérieure et au début du poinçonnement de la tôle inférieure. La montée en effort correspond à la phase d'évasement du rivet où la matière de la tôle inférieure est comprimée dans la bouterolle. Enfin pour finir, la remontée du poinçon qui se caractérise par un déchargement élastique du col de cygne.



Figure 1.6 : Evolution de l'effort de rivetage en fonction de la course du poinçon (Bouchard, et al., 2005)

1.2.3 Préconisations

Dans le cas d'épaisseurs ou de matériaux différents pour les tôles, le sens de rivetage a une influence sur la tenue mécanique de l'assemblage. Par conséquent pour obtenir les meilleures tenues, il est conseillé de respecter les règles suivantes :

- Dans le cas où les matières sont différentes, il faut privilégier un rivetage avec la bouterolle du côté de la tôle la plus résistante.
- Dans le cas où la matière des tôles est identique mais que leurs épaisseurs sont différentes, il est préconisé de mettre la bouterolle du côté de la tôle la plus épaisse.

Pour une épaisseur totale de tôles à assembler comprise entre 1,8 et 2,4 mm, le diamètre du rivet est de 3 mm. Pour des épaisseurs plus importantes, le diamètre retenu est de 5 mm.

1.2.4 Qualité et géométrie du point d'assemblage

La qualité d'un assemblage réalisé par rivetage auto-poinçonneur est évaluée dans un premier temps par un contrôle visuel du point d'assemblage :

- Au niveau de la tôle supérieure, un assemblage de bonne qualité sera caractérisé par le fait que la tête du rivet est en contact avec la tôle supérieure (absence de jeu). De plus, il n'y aura pas de fissuration de la tête du rivet ou de la matière qui l'entoure.
- Au niveau de la tôle inférieure, la protubérance doit présenter un aspect axisymétrique. Le rivet ne doit pas avoir transpercé la tôle afin d'assurer l'étanchéité de l'assemblage. Pour finir, la présence de fissures au niveau de la protubérance signifie que l'assemblage n'est pas conforme.

Une méthode plus précise pour évaluer la qualité de l'assemblage consiste à effectuer une coupe axiale du rivetage, de venir mesurer un certain nombre de côtes (Fig. 1.7), et de vérifier la présence de jeu ou de fissures.



Figure 1.7 : Coupe d'un point de rivetage avec les côtes principales

Trois cotes ont une importance primordiale quant à la validation de l'assemblage :

- La cote C : appelée enclenchement, sa valeur est en relation directe avec la tenue mécanique de l'assemblage. En effet, une valeur faible d'enclenchement, C < 0,1 mm, engendre une mauvaise tenue mécanique surtout en traction (sollicitation dans le sens de la longueur du rivet).
- La cote r : si elle est nulle ou trop faible, le risque de perte d'étanchéité de l'assemblage est non négligeable.
- L'affleurement a : c'est la distance entre la tête du rivet et la tôle supérieure. L'affleurement doit être le plus proche possible de 0 mm et doit être compris entre $\pm 0,15$ mm.

S'il apparaît que le point d'assemblage ne respecte pas les règles précédentes, un des paramètres de l'assemblage doit être modifié comme l'inversion des tôles à riveter, la longueur du rivet, le diamètre ou la forme de la bouterolle.

La figure 1.8 illustre deux exemples courants de défauts : le défaut de concentricité et le défaut d'assemblage. Dans le second cas, le rivet n'a pas perforé la première tôle. La solution préconisée ici est l'inversion des deux tôles.



Figure 1.8 : Exemple de défauts : (a) défaut de concentricité (PSA Peugeot - Citroën, 2003), (b) défaut d'assemblage

En réalisant une série d'essais de pose de rivet en faisant varier la force de rivetage et en mesurant la cote d'affleurement, il est possible de déterminer le « domaine de rivetabilité » d'une configuration donnée (Fig. 1.9). Ce domaine définit alors la plage d'effort de rivetage qui permet d'obtenir un rivet dont l'affleurement respecte la tolérance de $\pm 0,15$ mm. La définition du domaine de rivetabilité demande donc de réaliser un grand nombre d'essais.



Figure 1.9 : Exemple de domaine de rivetabilité (PSA Peugeot - Citroën, 2003)

1.2.5 Tenue mécanique d'un assemblage

La seconde phase de validation d'un assemblage par rivet auto-poinçonneur est la caractérisation de sa tenue mécanique. En effet, un point d'assemblage est amené à subir des efforts et celui-ci doitêtre suffisamment bien dimensionné pour ne pas se déformer ou rompre lors d'un usage classique. La tenue mécanique d'un assemblage par rivet auto-poinçonneur dépend de l'ensemble des paramètres du procédé (par exemple : géométries du rivet et de la bouterolle) ainsi que de la nature, de l'épaisseur des tôles à assembler et même de la précompression des tôles (Han, et al., 2005) et (Fu, et al., 2001).

Pour tester la résistance mécanique d'un assemblage, il est classique d'utiliser deux types d'essais : l'essai de « traction pure » et l'essai de « cisaillement pur » (Fig. 1.10). L'utilisation de ces deux essais combinés permet, en première approximation, de connaître la tenue mécanique d'un assemblage dans des cas extrêmes. En effet, les autres sollicitations peuvent être décomposées en une partie de traction et une partie de cisaillement.



Figure 1.10 : Essais mécaniques de tenue de l'assemblage : (gauche) traction, (droite) cisaillement (Bouchard, et al., 2005)

1.2.6 Avantages et inconvénients

Le principal avantage du rivetage auto-poinçonneur, comme des autres assemblages par déformation plastique, est de permettre la liaison mécanique entre des matériaux de natures différentes avec ou sans revêtement, des états de surface différents ainsi que des épaisseurs variées. Cette technologie s'applique essentiellement pour des matériaux qui ont une bonne propension à se déformer plastiquement (bien qu'il existe des applications avec du bois par exemple). La tenue mécanique est excellente et supérieure à celle d'un point de soudure, que cela soit en sollicitation statique (Cai, et al., 2005), en dynamique ou en fatigue (Sun, et al., 2007). De plus ce procédé ne s'accompagne pas de dégradation thermique des matériaux assemblés, ainsi les revêtements et les peintures ne sont pas détériorés. Il n'y a pas non plus d'émission d'étincelle ou de fumée. L'assemblage obtenu est étanche car la tôle inférieure n'est pas perforée. Pour finir, il est possible d'effectuer un contrôle continu du procédé d'assemblage et la qualité du point peut être déterminée de manière non destructive.

Au-delà du fait que l'utilisation du rivetage auto-poinçonneur se limite à l'assemblage de produits minces, il existe certaines restrictions à son utilisation. En effet, l'effort de rivetage pour mettre en forme le point d'assemblage est très important. Il peut atteindre plus de 50 kN. Cet effort de pose a une conséquence directe sur la taille des outils de pose qui ne peuvent pas forcément accéder à toutes les parties d'un véhicule. Lors de la pose du rivet, les tôles à assembler sont bloquées contre la bouterolle grâce à un serre-flan. Cela a pour conséquence que la zone de travail doit être forcément plane et d'une surface suffisante. D'un point de vue purement esthétique, la formation de la protubérance peut être un inconvénient. Pour finir, contrairement au clinchage qui crée la liaison uniquement grâce à la déformation des tôles, le rivetage auto-poinçonneur fait appel à un rivet. Son coût est de l'ordre de 0,02€ pour un rivet de diamètre 5 mm et de longueur 5 mm.

1.2.7 Applications industrielles

Le rivetage auto-poinçonneur est utilisé dans de nombreux secteurs industriels (Henrob, 2007). Les exemples représentés sur la figure 1.11 sont issus du domaine automobile. Dans chaque Citroën C6, 370 rivets auto-poinçonneurs sont utilisés dans les ouvrants et la caisse en blanc. Chez les constructeurs anglais, comme Jaguar, ou les constructeurs allemands, à l'image d'Audi et de BMW, il est de plus en plus courant de trouver des modèles dont la caisse en blanc est entièrement réalisée en alliage d'aluminium. Pour l'assembler, le rivetage auto-poinçonneur est le plus souvent utilisé et le nombre de rivets utilisés par véhicule est alors de plusieurs milliers.



Figure 1.11 : (gauche) Citroën C6, (droite) caisse en blanc de l'Audi C2

1.3 Etat de l'art de la simulation des assemblages par rivetage autopoinçonneur

Une recherche bibliographique sur la simulation des assemblages par rivetage auto-poinçonneur a révélé un nombre limité de publications avant le début de la thèse en 2004. L'essentiel des développements, dans le domaine des assemblages par déformation plastique, était alors sur le procédé de clinchage comme par exemple dans (Hamel, 1998) ou (Varis, et al., 2003) ou sur le procédé de rivetage « classique » (Langrand, 1998). Cependant au cours de ces dernières années, l'étude de la modélisation de ce procédé tant du point de vue de la simulation du procédé que de l'étude numérique de la tenue mécanique des points rivetés a connu un fort développement.

1.3.1 Simulation de la pose du rivet auto-poinçonneur

La première étude numérique sur la pose du rivetage auto-poinçonneur, connue de l'auteur, est présentée dans la thèse de (Dölle, 2001). Après une importante campagne expérimentale de poses de rivets, Dölle s'intéresse alors à la modélisation de ce procédé. Pour ce faire, il utilise le logiciel éléments finis MSC Autoforge[®]. La discrétisation spatiale est réalisée à l'aide d'éléments quadrangles 2D axisymétriques. Les différents corps déformables constituant l'assemblage, i.e. tôles et rivet, ont un comportement élasto-plastique. Lors de ses campagnes expérimentales, Dölle a mesuré pour quel enfoncement du rivet la rupture de la tôle supérieure apparaît. En se basant sur ce critère dans ses simulations, il supprime les éléments dans la zone de plus faible épaisseur pour modéliser la rupture de la tôle supérieure (Fig. 1.12).



Figure 1.12 : Visualisation en pointe de rivet des résultats de la simulation numérique (a) avant séparation et (b) après séparation de la tôle supérieure (Dölle, 2001)

Les résultats issus des simulations sont confrontés aux données expérimentales que cela soit sur des courbes effort - déplacement ou grâce à des coupes géométriques de points rivetés effectuées à différentes étapes de la pose du rivet (Fig. 1.13).



Figure 1.13 : Comparaison expérimentale/numérique pour une configuration acier DC04 0,8mm sur acier DC04 1,5mm et rivet de 5mm : (gauche) coupes géométriques, (droite) courbes effort - déplacement (Dölle, 2001)

Les courbes effort – déplacement numériques prédisent un effort de pose moins important que celui obtenu expérimentalement. Les coupes géométriques du point d'assemblage sont en bon accord avec les prévisions numériques. Cependant nous pouvons voir que les épaisseurs des tôles au centre du rivetage en fin de pose sont plus faibles dans les simulations que celles obtenues expérimentalement. Ces différences peuvent être expliquées par plusieurs facteurs. Nous pouvons citer entre autres :

- une évaluation trop faible des coefficients de frottement,
- une mauvaise caractérisation des lois de comportement entrainant une rigidité trop faible des tôles et du rivet.

La thèse de (Chergui, 2004) qui a fait suite à celle de Dölle, est plus centrée sur la modélisation de la tenue à la fatigue du rivetage auto-poinçonneur. Dans la fin du manuscrit, il a montré la faisabilité de la modélisation de la pose du rivet auto-poinçonneur avec le logiciel élément finis MSC Marc[®]. Les résultats numériques semblent corrects mais ne sont pas comparés avec des résultats expérimentaux (Fig. 1.14).



Figure 1.14 : Résultat numérique de la pose d'un rivet auto-poinçonneur avec le logiciel MSC Marc[®] (Chergui, 2004)

Plus tard (Porcaro, et al., 2006) ont simulé numériquement le procédé de pose du rivet autopoinçonneur en utilisant le code dynamique éléments finis LS-DYNA®. La résolution du problème mécanique est implicite. Pour ce faire, une configuration 2D axisymétrique du procédé a été utilisée et la discrétisation spatiale est réalisée avec des éléments quadrangles et une interpolation linéaire. Les matériaux sont considérés comme élasto-plastiques avec une loi d'écrouissage linéaire isotrope et le critère de plasticité de von Mises. Pour résoudre le problème de la distorsion des éléments du maillage, sujets à de forte déformation, les auteurs utilisent une méthode de r-adaptation du maillage. Cette technique d'adaptation consiste à améliorer la solution en optimisant la position des nœuds dans le maillage sans en ajouter de nouveaux et sans modifier les connectivités. Pour simuler la rupture de la tôle supérieure, un critère sur l'épaisseur de la tôle supérieure est utilisé. Dès que cette épaisseur est suffisamment faible, la tôle est divisée en deux parties. Pour valider leur modèle numérique, une importante campagne expérimentale basée sur l'alliage d'aluminium 6060 avec deux écrouissages (T4 et T6) a été réalisée. La comparaison des résultats numériques et expérimentaux présente, en général, une bonne corrélation que cela soit sur les courbes force – déplacement (Fig. 1.15) ou sur les coupes géométriques. Cependant, les résultats obtenus avec le modèle numérique présentent de fortes oscillations dues, d'après les auteurs, a un fort coefficient de pénalisation dans leur modèle de contact.



Figure 1.15 : Comparaison entre les simulations et l'expérience (Porcaro, et al., 2006)

Comme pour les auteurs précédents, (Abe, et al., 2006) et (Mori, et al., 2006) réalisent leur simulation de pose de rivet auto-poinçonneur avec le logiciel éléments finis LS-DYNA[®]. Cette fois-ci la formulation du problème est explicite. La discrétisation spatiale est réalisée avec des éléments quadrangles linéaires. Les tôles et les rivets sont des matériaux élasto-plastiques avec une loi d'écrouissage isotrope. Les résultats numériques sont confrontés à un cas de rivetage avec la tôle supérieure en alliage d'aluminium 5052-H34 et la tôle inférieure en acier SPCC ou SPFC (Fig. 1.16). La coupe géométrique nous apprend que, dans le modèle numérique, le rivet est trop rigide par rapport aux tôles car celui-ci ne s'évase pas suffisamment. Cela se traduit par un effort de pose numérique supérieur à celui de l'expérience surtout sur la fin du procédé.



Figure 1.16 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux (Abe, et al., 2006) : (a) coupe géométrique, (b) courbe effort - déplacement

Au Centre de Mise en Forme des Matériaux, l'étude sur le rivetage auto-poinçonneur a été lancée en 2003 par P.O. Bouchard dans le cadre d'un projet avec le groupe automobile PSA Peugeot-Citroën. Les simulations de pose de rivet sont réalisées en 2D axisymétriques avec le logiciel Forge2[®] (Bouchard, et al., 2005). Le logiciel utilise une résolution explicite du problème mécanique et la discrétisation éléments finis est réalisée par des éléments triangulaires linéaires et une formulation

mixte vitesse/pression. Les tôles ont un comportement élasto-plastique couplé faiblement avec un modèle d'endommagement isotrope. Le critère de plasticité est celui de von Mises. La rupture de la tôle supérieure est réalisée par une méthode de « kill-element » basée sur un critère d'endommagement. Les résultats numériques présentent une bonne corrélation avec ceux obtenus expérimentalement, sur tout un panel de configurations, notamment au niveau de la prédiction de la géométrie du point d'assemblage (Fig. 1.17).



Figure 1.17 : Comparaison d'une coupe géométrique expérimentale et celle issue de la simulation (Bouchard, et al., 2008)

Une dernière étude sur la pose du rivet auto-poinçonneur peut être trouvée dans (Gårdstam, 2006). Le logiciel utilisé pour réaliser les simulations est le logiciel Deform-2D. La résolution du problème mécanique est implicite et la discrétisation spatiale est réalisée à l'aide d'éléments quadrangles linéaires. Le comportement des tôles et du rivet est modélisé par une loi élasto-plastique ne prenant en compte que l'écrouissage isotrope. La simulation de la rupture de la tôle supérieure est basée sur le critère d'endommagement de Latham & Cockroft normalisé. La comparaison des résultats sur la courbe effort - déplacement montre que le calcul numérique prédit un effort bien inférieur à celui obtenu expérimentalement. Gårdstam explique cette différence par un manque d'information sur les lois de comportement des tôles dans le domaine des grandes déformations.



Figure 1.18 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux (Gårdstam, 2006)

1.3.2 Etude de la tenue mécanique du point d'assemblage

Dans (Westerberg, 2002), l'auteur a étudié la tenue mécanique en dynamique d'assemblages rivetés avec le logiciel ABAQUS-Explicit et des éléments finis de type quadrangle linéaire. Dans le manuscrit de thèse de (Chergui, 2004), l'étude porte sur la modélisation du comportement en fatigue ainsi que du comportement en statique d'assemblages rivetés. Le logiciel utilisé est ABAQUS-Explicit. Une des principales limites de ces deux études est la non-prise en compte de l'histoire des déformations et des contraintes apparues lors de la phase de pose du rivet. En effet, les géométries qui ont servi aux simulations, ont été extrapolées à partir de coupes expérimentales (Fig. 1.19).



Figure 1.19 : Création du modèle numérique pour les tests de tenue mécanique (Chergui, 2004)

Dans (Gårdstam, 2006), à partir de simulations 2D, un modèle numérique 3D a été extrapolé. Sur celui-ci, seul le champ de déformation a été transporté. En utilisant ce modèle, des simulations de tenue mécanique au cisaillement et au pelage ont été réalisées en utilisant le logiciel ABAQUS-Explicit et une discrétisation spatiale en éléments quadrangles linéaires. Gårdstam explique notamment que pour compenser le non transfert des champs de contraintes lors de la création du modèle 3D, il est nécessaire, pour obtenir des résultats numériques proches de l'expérimental, d'utiliser un coefficient de frottement extrêmement fort entre les différents éléments de l'assemblage (Fig. 1.20). Gårdstam concluera de cette étude qu'il est nécessaire de transporter les champs de contraintes en plus de celui des déformations pour avoir un modèle numérique prédictif.





Figure 1.20 : Comparaison des données expérimentales avec les données issues des simulations sur un essai de cisaillement : (a) courbes effort – déplacement, (b) faciès de rupture (Gårdstam, 2006)

Dans (Porcaro, et al., 2006) à partir du modèle 2D axisymétrique, un modèle 3D est créé afin de réaliser des simulations de tenue mécanique d'essais de traction pure et de cisaillement pur. Les champs mécaniques de contraintes et de déformations sont transférés de la configuration 2D à la configuration 3D par une méthode d'extrapolation. Les résultats numériques arrivent à reproduire le comportement global des assemblages rivetés (Fig. 1.21). Cependant dans cette étude, le modèle numérique montre certaines limites. En effet, que cela soit sur les courbes force – déplacement ou sur les faciès de rupture, les différences entre les résultats numériques et expérimentaux peuvent être, dans certains cas, très importantes. Ces différences sont plus exacerbées dans les simulations sous chargement de cisaillement pur. Une des possibilités évoquées par les auteurs pour améliorer le modèle numérique est d'introduire un modèle d'endommagement.



Figure 1.21 : Comparaison des données expérimentales avec les données issues des simulations sur un essai de cisaillement et de traction : (gauche) faciès de rupture, (droite) courbes effort – déplacement (Porcaro, et al., 2006)

Dans (Bouchard, et al., 2005) et (Bouchard, et al., 2008), à partir des résultats 2D en fin de simulation de pose de rivet, une configuration 3D est extrapolée avec le transport de l'ensemble des variables mécaniques (contraintes, déformations, ...). L'importance du transfert des variables mécaniques, issues de la simulation de pose de rivet, sur la prédiction de la tenue mécanique du point d'assemblage est alors illustrée sur un essai de cisaillement (Fig. 1.22). La non-prise en compte de « l'histoire » des variables mécaniques entraine une sous-estimation importante de la tenue mécanique de l'assemblage en cisaillement. Il est donc important de simuler le plus précisément possible la mise en forme du point d'assemblage et de disposer d'un algorithme performant de transfert entre les configurations 2D axisymétrique et 3D.



Figure 1.22 : Courbes effort – déplacement d'un essai de cisaillement d'une éprouvette rivetée avec et sans prise en compte des variables mécaniques calculées lors de la pose du rivet auto-poinçonneur (Bouchard, et al., 2008)

1.3.3 Elément équivalent

Au-delà de l'étude numérique du procédé de rivetage auto-poinçonneur que cela soit la pose ou la tenue mécanique en statique, dynamique ou fatigue, un des objectifs de l'amélioration de la connaissance du procédé est de déterminer un élément équivalent au point d'assemblage. Cet élément doit permette de simuler le comportement global du rivet dans des structures comportant des centaines voir des milliers de rivets à faible coût de calcul (Langrand, 2005). Les modèles pour le rivet auto-poinçonneur se sont inspirés des modèles définis pour les points soudés (Lin, et al., 2002), (Lin, et al., 2003) et (Langrand, et al., 2004) ou pour les rivets (Langrand, et al., 2002). Pour ce faire, plusieurs approches sont possibles. Une première approximation est de représenter le rivet par des éléments coques. C'est ce qui est fait dans (Dannbauer, et al., 2003) où le modèle permet de reproduire le comportement de la liaison en statique et en fatigue. Une simplification extrême n'utilisant qu'une liaison poutre est présentée dans (Porcaro, et al., 2004).

Pour finir, une étude récente (Sun, et al., 2005) a porté sur la définition d'une loi analytique qui permet de déterminer la valeur de la tenue maximale d'un assemblage par rivet auto-poinçonneur lors d'un essai de traction. Cette loi est basée sur des grandeurs physiques et géométriques.

1.4 Problématique et objectifs de la thèse

Aujourd'hui, le rivetage auto-poinçonneur est une technologie bien maitrisée par les industriels. Cependant chez les constructeurs automobiles (PSA Peugeot - Citroën, 2003) ou chez les fabriquants de système de rivetage auto-poinçonneur, la caractérisation du bon couple rivet (diamètre, longueur, dureté, forme) et bouterolle (forme et dimension) pour une configuration (nuances, épaisseurs) reste essentiellement empirique et est souvent basée sur le savoir faire des techniciens. Cette méthode expérimentale devient de moins en moins applicable avec l'augmentation des configurations d'assemblage à traiter, la multiplicité des paramètres du procédé, la diminution des délais de conception et les réductions du coût de développement. Comme dans d'autres étapes de développement d'un nouveau véhicule, l'utilisation d'un outil de simulation numérique apparaît alors comme un excellent moyen pour répondre à ces enjeux en réduisant le nombre de campagnes d'essais, les coûts d'outillage et les délais de conception.

La conformité d'un point d'assemblage se base sur deux critères : l'aspect de la géométrie finale du point d'assemblage et la tenue mécanique afin de voir si celui-ci respecte le cahier des charges. Le modèle numérique devra donc être capable de modéliser ces deux étapes : mise en forme et tenue mécanique. En se basant sur les études déjà existantes sur le rivetage auto-poinçonneur, il apparaît qu'il est préférable :

- de disposer d'une modélisation 2D axisymétrique pour la modélisation de la pose du rivet afin d'avoir un calcul rapide ;
- d'avoir un algorithme robuste de transfert des champs thermomécaniques d'une configuration 2D à une configuration 3D ;
- d'introduire un modèle d'endommagement afin de pouvoir prédire aussi bien l'apparition de crique lors de la mise en forme de l'assemblage que la valeur précise de la tenue mécanique en statique (traction, cisaillement).

Afin d'obtenir un outil fiable et précis, le modèle numérique sous-jacent devra prendre en compte un grand nombre de phénomènes physiques :

- Un modèle de rhéologie matériau capable de décrire le plus fidèlement possible le comportement mécanique réel des différents éléments de l'assemblage, i.e. tôles et rivet. Nous travaillerons avec des matériaux métalliques et nous utiliserons une loi élasto-plastique endommageable pour décrire le comportement des matériaux sur l'ensemble du domaine de sollicitation.
- L'identification précise des paramètres de la loi matériau retenue est un facteur déterminant pour la précision des résultats numériques. Il faudra donc mettre en œuvre une méthode fiable d'identification. Nous opterons pour une méthode d'analyse inverse basée sur un logiciel développé au sein du laboratoire RhéoForge[®].
- Le modèle numérique doit être en mesure de simuler les conditions réelles du procédé (contact, déflexion de la presse, ...) et reproduire les différents phénomènes physiques rencontrés (grande déformation, rupture, retour élastique, ...). La suite logicielle Forge2005[®] sera utilisée dans cette thèse comme base de départ des développements.

La figure 1.23 définit la stratégie mise en place pour le développement de l'outil numérique de modélisation des assemblages par déformation ainsi que les différentes étapes de validation.



Figure 1.23 : Stratégie de développement et validation

L'objectif principal de la thèse est donc d'obtenir un outil de simulation numérique qui permette de simuler le plus fidèlement possible la mise en forme du point d'assemblage et la tenue mécanique de l'assemblage pour des sollicitations simples ou non. Cet outil est destiné par la suite à être utilisé comme un outil d'aide à la décision pour proposer une solution optimale pour une configuration donnée. En effet, il sera possible de venir optimiser les paramètres du procédé d'assemblage afin d'améliorer la tenue mécanique ou diminuer la force de pose du rivet tout en obtenant un assemblage qui respecte le cahier des charges (Fig. 1.24).



Figure 1.24 : Cycle d'optimisation numérique d'un assemblage par rivetage auto-poinçonneur

Au-delà, du procédé de rivetage auto-poinçonneur, l'outil devra permettre de simuler d'autres technologies d'assemblage par déformation plastique. Il pourra alors être aussi utilisé comme outil de comparaison entres les technologies mais aussi comme un outil d'innovation. En effet, il sera possible de venir tester de nouveaux procédés ou de nouvelles géométries de matrices ou de rivets.
1.5 Références bibliographiques

Abe, Y., Kato, T. et Mori, K. 2006. Joinability of aluminium alloy and mild steel sheets by self-piercing rivet. *J. Mat. Pro. Tec.* 2006, Vol. 177, pp. 417-421.

Barnes, T. et Pashby, I. 2000. Joining techniques for aluminium spaceframes used in automobiles. Part I - solid and liquid phase welding. *J. Mat. Proc. Tech.* 2000, Vol. 99, pp. 62-71.

Böllhoff. 2005. RIVSET® General principles. 2005. Catalogue.

Bouchard, P.O. et Tollier, L. 2005. *Modélisation numérique du procédé de rivetage autopoinçonneur.* 2005. Techniques de l'ingénieur. BM 7 860.

Bouchard, P.O., Laurent, T. et Tollier, L. 2008. Numerical modeling of self-pierce riveting - From riveting process modeling down to structural analysis. *J. Mat. Proc. Tech.* 2008, Vol. 202, pp. 290-300.

Cai, W., Wang, P.C. et Yang, W. 2005. Assembly dimensional prediction for self-piercing riveted aluminium panels. *Int. J. Mach. Tools Manu.* 2005, Vol. 45, pp. 695-704.

Chergui, A. 2004. *Beitrag zur ermüdungsgerechten auslegung stanzgenieteter aluminiumleichbaukonstruktionen.* 2004. PhD Thesis, University of Paderborn.

Dannbauer, H., Gaier, C. et Halaszi, C. 2003. *Development of a model for self-piercing rivets to predict stiffness and fatigue life of automotive structures.* 2003. SAE 2003-01-2857.

Dölle, N. 2001. *Numerische simulation des fügeprozesses beim stanznieten mit halbhohlniet von duktilen Blenchwerkstoffen.* 2001. PhD Thesis, Université de Paderborn (Allemagne).

Fu, M. et Mallik, P.K. 2001. *Effect of process variables on the static and fatigue properties of selfpiercing riveted joints in aluminium alloy 5754.* 2001. SAE Paper No. 2001-01-0825.

Gårdstam, J. 2006. *Simulation of mechanical joining for automotive applications.* Stockholm : s.n., 2006. Licentiate PhD Thesis, Royal Institute of Technology.

Hamel, V. 1998. *Contribution à l'étude de l'assemblage par clinchage. Aspects numériques et expérimentaux.* 1998. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiegne.

Han, L., Young, K.W., Hewitt, R., Chrysanthou, A., O'Sullivan, J.M. 2005. The effect of pre-straining on the mechanical behaviour of self-piercing riveted aluminium alloy sheets. *Advanced Materials Research.* 2005, Vol. 6-8, pp. 157-162.

Henrob. 2007. General Industry. 2007. Catalogue.

Langrand, B. 2005. *Comportement et modélisation des assemblages ponctuels*. 2005. Techniques de l'ingénieur. BM 7 805.

Langrand, B. 1998. Contribution à la caractérisation numérique et expérimentale d'assemblages structuraux rivetés sous sollicitation dynamique. 1998. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis.

Langrand, B. et Combescure, A. 2004. Non-linear and failure behaviour of spotwelds: a "global" finite element and experiments in pure and mixed modes I/II. *Int. J. Solids Struc.* 2004, Vol. 41, pp. 6631-6646.

Langrand, B., Patronelli, L., Deletombe, E., Markiewicz, E., Drazétic, P. 2002. An alternative numerical approach for full scale characterisation for riveted joint design. *Aerospace Sci. Tech.* 2002, Vol. 6, pp. 343-354.

Lin, S.H., Pan, J., Tyan, T., Prasad, P. 2003. A general failure criterion for spot welds under combined loading conditions. *Int. J. Solids Struct.* 2003, Vol. 40, pp. 5539-5564.

Lin, S.H., Pan, J., Wu, S.R., Tyan, T., Wung, P. 2002. Failure loads of spot welds under combined opening and shear static loading conditions. *Int. J. Solids Struct.* 2002, Vol. 39, pp. 19-39.

Mori, K., Kato, T., Abe, Y., Ravshanbek, Y. 2006. Plastic joining of ultra strength steel and aluminium alloy sheets by self piercing rivet. *Annals of the CIRP.* 2006, Vol. 55, pp. 283-286.

Porcaro, R., Hanssen, A.G., Aalberg, A., Langseth, M. 2004. Joining of aluminium using self-piercing riveting: testing, modelling and analysis. *Int. J. Crash.* 2004, Vol. 9, pp. 141-154.

Porcaro, R., Hanssen, A.G., Langseth, M., Aalberg, A. 2006. Self-piercing riveting process: an experimental and numerical investigation. *J. Mat. Proc. Tech.* 2006, Vol. 171, pp. 10-20.

Porcaro, R., Hanssen, A.G., Langseth, M., Aalberg, A. 2006. The behaviour of a self-piercing riveted connection under quasi-static loading conditions. *Int. J. Solids Struc.* 2006, Vol. 43, pp. 5110-5131.

PSA Peugeot - Citroën. 2003. *Méthode d'essai d'assemblage par rivets auto-poinçonneurs de produits plats revétus ou non.* 2003. Normes véhicules. B13 6120.

Sun, X. et Khaleel, M.A. 2005. Strength estimation of self-piercing rivets using lower bound limit load analysis. *Sci. Tech. Welding Joining.* 2005, Vol. 10, pp. 624-635.

Sun, X., Stephens, E.V. et Khaleel, M.A. 2007. Fatigue behaviors of self-piercing rivets joining similar and dissimilar sheet metals. *Int. J. Fatigue*. 2007, Vol. 29, pp. 370-386.

TWI knowledge summary. 2000. Self-piercing riveting. *TWI world center for materials joining technology*. [En ligne] 2000. www.twi.co.uk.

Varis, J. 2006. Economics of clinched joint compared to riveted joint and example of applying calculations to a volume product. *J. Mat. Pro. Tec.* 2006, Vol. 172, pp. 130-138.

Varis, J.P. et Lepistö, J. 2003. A simple testing-based procedure and simulation of the clinching process using finite element analysis for establishing clinching parameters. *Thin-Walled Struct.* 2003, Vol. 41, pp. 691-709.

Westerberg, C. 2002. *Finite element simulation of crash testing of self-piercing rivet joints, peel specimen.* 2002. Master's Dissertation, Lund University.

Chapitre 2 :

Formulation du modèle élasto-plastique endommageable

2.1	Intro	duction	31
2.2	Mode	ele élasto-plastique	31
2.2.	1 Ela:	sticité : loi de Hooke	31
2.2.	2 For	mulation en parties sphériques et déviatoriques	31
2.2.	3 For	malisme de base en élasto-plasticité	32
2.2.	4 Crit	ères tridimensionnels de plasticité	33
2.2.	5 Loi:	s d'écrouissage	35
2	.2.5.1	Lois d'écrouissage isotrope	36
2	.2.5.2	Lois d'écrouissage cinématique	38
2	.2.5.3	Conclusions sur l'écrouissage	39
2.2.	6 Cho	pix et conclusions sur le modèle élasto-plastique	39
2.3	L'end	ommagement ductile des métaux	40
2.3.	1 Déf	inition de la variable interne d'endommagement	42
2.3.	2 Me	sure de l'endommagement	43
2	.3.2.1	Evolution du module d'élasticité d'une éprouvette en traction	44
2	.3.2.2	Tests de micro- et nano-indentation	45
2.3.	3 Cor	nclusions sur l'endommagement ductile	46
2.4	Mode	ele élasto-plastique endommageable	47
2.4.	1 Pot	entiel thermodynamique	47
2.4.	2 Pot	entiel des dissipations et lois d'évolution des variables internes	48
2.4.	3 Lei	nultiplicateur plastique	49
2.4.	4 Lei	nodule tangent continu	50
2.4.	5 Enr	ichissement du modèle d'endommagement	50
2	.4.5.1	Influence de la triaxialité	50
2	.4.5.2	Prise en compte de l'effet de fermeture des fissures	51
2	.4.5.3	Décomposition du tenseur des contraintes en parties traction/compression	53
2	.4.5.4	Limite de triaxialité en compression	54
2	.4.5.5	Conclusions sur l'enrichissement du modèle d'endommagement	54
2.4.	6 Cho	pix et conclusions sur le modèle élasto-plastique endommageable	54
2.5	Concl	usions	56
2.6	Référ	ences bibliographiques	57

2.1 Introduction

Afin de modéliser les assemblages par déformation plastique, de la mise en forme à la tenue mécanique du point d'assemblage, il est nécessaire d'utiliser des lois de comportement matériaux les plus physiques et les plus représentatives possibles. Pour ce faire, les lois développées doivent permettre de modéliser le comportement à froid de tôles en alliage d'aluminium ou en acier ductile ainsi que celui des rivets en acier à haute limite élastique. Cependant il ne faut pas perdre de vue que ces lois de comportement vont être utilisées dans un logiciel de simulation. Il faut donc trouver un bon compromis entre la précision du modèle, la complexité à caractériser les paramètres du modèle et l'influence de ces lois sur le temps de calcul des simulations.

La modélisation d'assemblage par déformation plastique implique la prise en compte de grandes déformations. En effet, les zones déformées peuvent atteindre des taux de déformation de l'ordre de 100 à 150%. Il faut donc modéliser l'ensemble de la plage de sollicitation des matériaux, i.e. de l'élasticité à la plasticité en prenant en compte l'endommagement pour modéliser l'adoucissement des matériaux ductiles en grandes déformations. La dépendance des matériaux à la vitesse de déformation pourra être prise en compte à travers l'enrichissement des lois d'écrouissage isotrope. De plus, si on veut étudier la tenue mécanique de l'assemblage, il faut également être capable de modéliser la rupture du matériau.

Il est important de noter que l'implémentation numérique du modèle de comportement retenu a été réalisée au sein de la suite logicielle élément finis Forge2005[®] qui utilise un formalisme de type Lagrangien réactualisé (cf. chapitre 3). C'est la raison pour laquelle seules les notations usuelles en petites déformations, soit dans un repère matériel, sont utilisées dans l'ensemble du manuscrit.

2.2 Modèle élasto-plastique

2.2.1 Elasticité : loi de Hooke

La loi d'élasticité relie σ , le tenseur des contraintes de Cauchy, à ε^e , le tenseur des déformations élastiques, via ⁴*E*, le tenseur d'élasticité d'ordre 4. La loi de Hooke permet de définir le tenseur d'élasticité en fonction des coefficients de Lamé μ et λ .

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^{4}\boldsymbol{E}: \boldsymbol{\varepsilon}^{e} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^{e} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{e}) \boldsymbol{I}$$
(2.1)

I est le tenseur identité d'ordre 2 défini par $I_{ij} = \delta_{ij}$. Les coefficients de Lamé sont reliés au module d'Young *E* et au coefficient de Poisson ν , par les relations suivantes :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
(2.2)

2.2.2 Formulation en parties sphériques et déviatoriques

De manière générale pour un tenseur τ , nous noterons t sa partie déviatorique et tr (τ) I sa partie sphérique telles que ces trois tenseurs vérifient la relation suivante :

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{I}$$
(2.3)

En appliquant cette relation aux tenseurs des contraintes et des déformations élastiques, nous définissons :

$$s = \sigma - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\sigma) I = \sigma + pI$$

$$e^{e} = \varepsilon^{e} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\varepsilon^{e}) I$$
(2.4)

Où s est le déviateur des contraintes de Cauchy et p est la pression hydrostatique qui est négative en traction et positive en compression.

$$\begin{cases} s = 2\mu e^e = 2G e^e \\ p = -\left(\frac{2\mu + 3\lambda}{3}\right) \operatorname{tr}(\varepsilon^e) = -\kappa \operatorname{tr}(\varepsilon^e) \end{cases}$$
(2.5)

G et κ sont respectivement le module de cisaillement et le module de compression hydrostatique.

2.2.3 Formalisme de base en élasto-plasticité

Dans le cadre de la formulation du comportement élasto-plastique pour les petites déformations, il est courant d'adopter une décomposition additive du tenseur des taux de déformations en une partie élastique réversible et une partie plastique irréversible :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{2.6}$$

 $\dot{\epsilon}^e$ et $\dot{\epsilon}^p$ sont respectivement le tenseur des taux de déformations élastiques et plastiques. Le tenseur des taux de déformations est défini comme étant la partie symétrique du tenseur gradient du champ de vitesse \vec{v} :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{v} + \left(\vec{\nabla} \vec{v} \right)^T \right)$$
(2.7)

La partie plastique du comportement est intrinsèquement incompressible, ce qui implique que le tenseur des taux de déformations plastiques est purement déviatorique. Nous obtenons alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{e}}^e + \dot{\boldsymbol{e}}^p \\ \operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e) \end{cases}$$
(2.8)

Dans le cadre général de la plasticité, il est possible de définir localement à un instant donné la vitesse de déformation plastique équivalente au sens de von Mises. Celle-ci est donnée à chaque instant par :

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{e}^p : \dot{e}^p}$$
(2.9)

Nous pouvons alors facilement en déduire la déformation plastique équivalente qui est obtenue en intégrant (2.9) au cours du temps :

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\varepsilon}}(\xi) d\xi \tag{2.10}$$

2.2.4 Critères tridimensionnels de plasticité

Le critère de plasticité définit la forme de la surface de charge dans l'espace des contraintes. Pour des états de contraintes contenus à l'intérieur de cette surface, le comportement est entièrement élastique et suit la loi de Hooke. L'équation générale de la surface de charge peut s'écrire de la manière suivante :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X}, R) = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X})_{eq} - R(r, \dot{r}) - \sigma_{v} \le 0$$
(2.11)

 $(\sigma, X)_{eq}$ est la contrainte équivalente qui est gouvernée par le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur d'écrouissage cinématique X. L'expression de la contrainte équivalente dépend directement de la forme du critère de plasticité. R est la fonction d'écrouissage isotrope qui dépend de la variable d'écrouissage isotrope r et de sa dérivée temporelle \dot{r} dans le cas de l'élastoviscoplasticité. σ_y est la limite élastique qui modélise la forme initiale de la surface de plasticité. Afin de faciliter l'écriture des équations, la limite élastique et l'écrouissage isotrope peuvent être réunis dans une même fonction σ_0 qui correspond à la limite d'écoulement plastique :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{R}) = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X})_{ea} - \sigma_0(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) \le 0$$
(2.12)

Dans le cadre d'un matériau élasto-plastique classique, la variation de la variable d'écrouissage isotrope s'apparente à la vitesse de déformation plastique équivalente, i.e. $\dot{r} = \dot{\bar{\varepsilon}}$.

On peut démontrer que pour respecter le principe de la dissipation maximale, l'accroissement de la déformation plastique $\dot{\epsilon}^p$ est normal à la surface de charge ou d'écoulement. Cette condition s'exprime par la règle de normalité qui définit le cadre de la plasticité associée telle que :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\boldsymbol{e}}^{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \boldsymbol{n}$$
(2.13)

 $\hat{\lambda}$ est le multiplicateur plastique qui est un scalaire positif. n est la normale à la surface de charge suivant laquelle l'écoulement a lieu. Dans le cas des matériaux non standards, il est possible d'introduire dans la règle de normalité une fonction plastique différente de la fonction de charge, on parlera alors de plasticité non associée, ce qui ne sera pas le cas dans cette étude.

Lorsque l'écoulement plastique se produit, la surface de charge évolue de façon à respecter le fait que l'état de contrainte ne peut sortir de la surface de charge (2.12). Cette condition peut s'écrire sous la forme des inégalités ou conditions de Kuhn-Tucker :

$$\dot{\lambda} \ge 0, \quad f \le 0, \quad \dot{\lambda}f = 0 \tag{2.14}$$

Il existe donc trois cas de figure lors d'un chargement (Fig. 2.1). Lorsque le chargement est purement élastique (AB), la contrainte équivalente reste inférieure à la limite d'écoulement plastique ce qui se traduit mathématiquement par f < 0 et $\dot{\lambda} = 0$. Dès que la contrainte équivalente atteint la valeur de la contrainte d'écoulement f = 0, le matériau commence à s'écouler $\dot{\lambda} > 0$ à la condition que $\dot{f} = 0$ (CD). Cette condition est appelée condition de cohérence. Le dernier cas est celui du déchargement élastique (DE) à partir d'un état plastique initial, i.e. $\dot{f} < 0$ et f = 0. Comme précédemment pour que la condition de cohérence și l'aut qu'il n'y ait pas d'écoulement plastique $\dot{\lambda} = 0$.



Figure 2.1 : Représentation du critère de charge – décharge dans l'espace des contraintes

Il existe de nombreux critères de plasticité qui visent à modéliser le comportement plastique de matériaux isotropes ou anisotropes. En ce qui concerne les critères de plasticité isotropes indépendants de la pression hydrostatique, nous pouvons, pour les plus utilisés, les classer selon leur année d'apparition :

• Tresca (1894) :

$$\sigma_0 = \max_{i,i} (z_i - z_j) \tag{2.15}$$

• Von Mises (1913) :

$$2\sigma_0^2 = (z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_1 - z_3)^2$$
(2.16)

• Hershey (1954) et Hosford (1972) :

$$2\sigma_0^2 = (z_1 - z_2)^{2a} + (z_2 - z_3)^{2a} + (z_1 - z_3)^{2a}$$
(2.17)

 z_i sont les composantes du tenseur $\mathbf{z} = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})$ dans le repère des contraintes principales. Le critère proposé par Hershey et Hosford est une évolution du critère de plasticité de von Mises dans lequel a est un paramètre du matériau. Si a = 1, nous retrouvons le critère de von Mises.

Le critère de von Mises étant un critère objectif, il est possible de l'exprimer en fonction des invariants du tenseur *z* que nous définirons comme étant :

$$J_{1}(\mathbf{z}) = \operatorname{tr}(\mathbf{z})$$

$$J_{2}(\mathbf{z}) = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{z}:\mathbf{z}}$$

$$J_{3}(\mathbf{z}) = \operatorname{det}(\mathbf{z})$$
(2.18)

Le critère de von Mises s'écrit alors simplement :

$$\sigma_0 = \mathbf{J}_2(\mathbf{z}) \tag{2.19}$$

Le tenseur des taux de déformations plastiques est donné par :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \boldsymbol{n} = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{X})}{J_{2}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X})}$$
(2.20)

Une propriété intéressante du tenseur *n* peut-être déduite de la relation précédente :

$$\boldsymbol{n}:\boldsymbol{n}=\frac{3}{2} \tag{2.21}$$

En utilisant la relation (2.9), nous trouvons une relation simple entre le multiplicateur plastique et la vitesse de déformation plastique équivalente :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{e}^p : \dot{e}^p = \dot{\lambda}$$
(2.22)

En général, les tôles métalliques n'ont pas un comportement isotrope. En effet, les procédés de fabrication, dans notre cas le laminage à froid, induisent une anisotropie matérielle qui se traduit par une orientation préférentielle de la direction cristallographique des grains. Il peut être alors intéressant d'utiliser un critère de plasticité anisotrope. La littérature regorge de critères anisotropes tels que ceux proposés par (Hill, 1948), (Barlat, et al., 1989), (Banabic, et al., 2000). Pour des raisons de difficultés de caractérisations expérimentales, d'implémentation et de temps de calcul, nous nous limiterons dans ce manuscrit au critère isotrope de von Mises.

2.2.5 Lois d'écrouissage

Lorsque l'on mesure expérimentalement la surface de charge d'un matériau métallique, on peut constater qu'en présence de déformations inélastiques, elle subit une expansion, une translation et une distorsion (Lemaitre, et al., 1996). Les deux premières modifications sont représentées, respectivement, par l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. En prenant le critère de plasticité de von Mises, l'évolution d'une surface de charge dans l'espace des contraintes, lors d'un essai de traction – compression uniaxiale, peut-être représentée par la figure 2.2.





Lors de la phase de traction le matériau s'écrouit, i.e. se durcit, augmentant ainsi la contrainte d'écoulement (AB). Le matériau est alors déchargé jusqu'à atteindre une contrainte nulle (BC). Suit alors la phase de compression (CE) qui fait apparaître l'effet Bauschinger. Ce phénomène se manifeste par un abaissement de la contrainte d'écoulement plastique. La prise en compte d'un seul type d'écrouissage, que cela soit l'écrouissage isotrope (CF) ou l'écrouissage cinématique (CD), dans le modèle de plasticité ne permet pas de rendre compte de ce phénomène.

2.2.5.1 Lois d'écrouissage isotrope

Les lois d'écrouissage isotrope définissent donc la dilatation du critère de plasticité dans l'espace des contraintes. Dans le cadre d'une formulation élasto-plastique, en ne prenant en compte que l'écrouissage de type isotrope et un critère de plasticité de von Mises, l'équation générale de la surface de charge se réduit à :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, R) = J_2(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_0(r, \dot{r}) \le 0$$
(2.23)

Cette formulation est l'une des plus utilisées en modélisation des assemblages par déformation plastique (Abe, et al., 2006), (Porcaro, et al., 2004) et plus généralement en mise en forme de tôles minces. L'évolution de la surface de charge au cours du temps est donnée directement par la limite d'écoulement σ_0 . La figure 2.3 représente l'effet de l'écrouissage isotrope sur le critère de plasticité lors d'une sollicitation de type traction – compression uniaxiale. Si l'écrouissage isotrope définit bien le durcissement du matériau au cours d'une déformation monotone, il ne tient cependant pas compte de l'effet Bauschinger. En effet, la contrainte d'écoulement en compression est identique à celle précédemment atteinte en traction.



Figure 2.3 : Représentation de l'écrouissage isotrope

Cette loi d'évolution s'obtient classiquement à partir d'essais de traction uniaxiale sur des éprouvettes découpées dans le sens du laminage. Pour des plages de déformations plus importantes, il est possible d'utiliser des essais de cisaillement ou des essais de gonflage (bulge test). Les courbes obtenues sont alors approchées par des lois analytiques.

Dans le cas où la dépendance à la vitesse de déformation n'est pas prise en compte au travers de \dot{r} , quatre lois sont couramment utilisées en mise en forme à froid :

• Ludwick (1909) :

$$\sigma_0(r) = \sigma_v + Kr^n \tag{2.24}$$

• Hollomon (1944) :

$$\sigma_0(r) = Kr^n \tag{2.25}$$

• Swift (1947) :

$$\sigma_0(r) = K(r + r_0)^n$$
(2.26)

• Voce (1948) :

$$\sigma_0(r) = K (1 - \exp(-n(r + r_0)))$$
(2.27)

La loi de Ludwick définit une loi de type puissance avec prise en compte de la limite d'élasticité σ_y . *K* est la consistance du matériau et est assimilée à une contrainte. *n* est l'exposant d'écrouissage isotrope. Cette loi est bien adaptée pour la modélisation du comportement des aciers doux. Quand la limite élastique est suffisamment faible pour être négligée, il est possible d'utiliser la loi d'Hollomon. Une alternative aux deux précédentes lois est la loi de Swift. Cette loi est aussi une loi puissance qui introduit une déformation seuil r_0 qui permet de simuler ou non une limite élastique. La dernière loi est la loi de Voce. Contrairement aux lois précédentes, ce n'est pas une loi puissance mais une loi exponentielle. Elle a la particularité de modéliser le mécanisme de restauration dynamique qui se traduit par une saturation de l'écrouissage isotrope aux grandes déformations. Cette loi est particulièrement bien adaptée pour modéliser le comportement des alliages d'aluminium.

L'influence de la vitesse de déformation sur la loi d'écrouissage isotrope peut-être introduite par différentes méthodes. On parle alors de viscoplasticité. Nous pouvons citer les méthodes additives, paramétrées et multiplicatives. Le lecteur intéressé pourra se référer à (Ben-Tahar, 2005). Quand nous aurons besoin dans notre étude de modéliser la viscoplasticité, nous opterons pour l'approche multiplicative qui introduit un coefficient de sensibilité à la vitesse *m*. Dans le cas de la loi de Swift, nous obtenons :

$$\sigma_0(r) = K(r + r_0)^n \dot{r}^m$$
(2.28)

Une méthode pour déterminer la valeur de *m* consiste à effectuer différents essais de traction à différentes vitesses de déformations et à tracer la courbe de contrainte équivalente en fonction de la vitesse de déformation :

$$m = \frac{\partial \ln(J_2(\sigma))}{\partial \ln(\dot{r})}$$
(2.29)

2.2.5.2 Lois d'écrouissage cinématique

L'écrouissage cinématique correspond à la translation de la surface de charge dans l'espace des contraintes. La variable d'écrouissage cinématique X est un tenseur déviatorique qui définit la position de la surface de charge à chaque instant dans l'espace des contraintes. L'équation de la surface de charge, en ne tenant compte que de l'écrouissage cinématique, se réduit à :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, R) = J_2(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{X}) - \sigma_{\gamma} \le 0$$
(2.30)

Différents modèles d'écrouissage cinématique existent dans la littérature (Lemaitre, et al., 1996). Les deux principaux sont le modèle linéaire de Prager et le modèle non linéaire de Lemaitre & Chaboche :

• Prager (1955) :

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \frac{2}{3}C\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{2}{3}C\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{2.31}$$

• Armstrong & Frederick (1966) :

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \frac{2}{3}C\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \gamma \boldsymbol{X}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{2}{3}C\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \gamma \boldsymbol{X}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$
(2.32)

Dans le modèle de Prager, C est un coefficient de proportionnalité entre la vitesse du tenseur d'écrouissage cinématique et le tenseur des vitesses de déformation plastique. Le modèle de Armstrong & Frederick est une généralisation du modèle de Prager en ajoutant un terme supplémentaire qui agit comme « un effet de mémoire évanescente du trajet de déformation ». Le caractère non linéaire de la loi est introduit au travers du paramètre γ . Comme le montre la figure 2.4, la représentation géométrique de l'évolution de la surface de charge en utilisant un écrouissage cinématique non linéaire permet de prendre en compte un décalage entre l'écrouissage en compression et celui de la traction mais n'est pas suffisant pour rendre compte correctement de l'éffet Bauschinger.



Figure 2.4 : Représentation de l'écrouissage cinématique de Lemaitre & Chaboche

Dans le cas présent, la loi d'écrouissage cinématique non linéaire d'Armstrong & Frederick peut-être déterminée à partir de la courbe contrainte – déformation obtenue par un essai de traction – compression uniaxial. La courbe expérimentale est alors approchée par :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_y + \frac{C}{\gamma} (1 - \exp(-\gamma \bar{\varepsilon})) & \text{où } 0 < \bar{\varepsilon} < \bar{\varepsilon}_c \\ \sigma = -\sigma_y + \frac{C}{\gamma} (-1 + (2 - \exp(-\gamma \bar{\varepsilon}_c)) \exp(-\gamma (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_c))) & \text{où } \bar{\varepsilon}_c < \bar{\varepsilon} \end{cases}$$
(2.33)

2.2.5.3 Conclusions sur l'écrouissage

La prise en compte de l'écrouissage permet de modéliser l'évolution de la surface de charge au cours du temps en combinant une translation (écrouissage cinématique) et une dilatation (écrouissage isotrope) de celle-ci. Il a été montré que l'écrouissage cinématique est prépondérant dans le domaine des faibles déformations ou dans le domaine des faibles sollicitations cycliques (Chaboche, 1989). Dans le cas de fortes déformations comme celles qui ont lieu dans nos applications, l'écrouissage cinématique est négligeable. C'est pour cette raison que nous ne considérons plus que l'écrouissage isotrope dans le reste du manuscrit.

2.2.6 Choix et conclusions sur le modèle élasto-plastique

Nous allons donc baser nos développements sur le modèle élasto-plastique qui suit. Nous considérerons une décomposition additive du tenseur des déformations en partie élastique et plastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{2.34}$$

La partie élastique du comportement est modélisée par la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^{4}\boldsymbol{E}:\boldsymbol{\varepsilon}^{e} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^{e} + \lambda\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{e})\boldsymbol{I}$$
(2.35)

Pour la plasticité, nous travaillons en plasticité associée avec un critère de plasticité de von Mises et en ne tenant compte que de l'écrouissage isotrope :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, R) = J_2(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_0(r) \le 0$$
(2.36)

La partie plastique du tenseur des vitesses de déformation est donnée par :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \boldsymbol{n} = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{J}_{2}(\boldsymbol{\sigma})}$$
(2.37)

Dans ce modèle, il existe une relation simple entre le multiplicateur plastique, la variable d'écrouissage isotrope et la vitesse de déformation plastique cumulée :

$$\dot{\lambda} = \dot{r} = \dot{\bar{\varepsilon}} \tag{2.38}$$

La condition de charge – décharge est donnée au travers des conditions de Kuhn-Tucker :

$$\dot{\lambda} \ge 0, \quad f \le 0, \quad \dot{\lambda}f = 0$$
 (2.39)

Il est possible de déterminer la valeur du multiplicateur plastique lorsque le chargement est plastique, i.e. f = 0 et $\dot{f} = 0$:

$$\dot{\lambda} = \frac{\langle \boldsymbol{s} : \dot{\boldsymbol{e}} \rangle}{J_2(\sigma) \left(1 + \frac{1}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r}\right)}$$
(2.40)

Le symbole $\langle . \rangle$ est l'opérateur de Macaulay qui désigne la partie positive de toute variable scalaire a :

$$\langle a \rangle = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \ge 0\\ 0 & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$
(2.41)

En utilisant la définition du multiplicateur plastique, nous pouvons calculer le module tangent continu :

$${}^{4}\boldsymbol{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\dot{s}}}{\partial \boldsymbol{\dot{\varepsilon}}} = 2\mu \left(\left({}^{4}\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \right) - \frac{\boldsymbol{s} \otimes \boldsymbol{s}}{\frac{2}{3} J_{2}(\boldsymbol{\sigma})^{2} \left(1 + \frac{1}{3\mu} \frac{\partial \sigma_{0}}{\partial r} \right)} \right)$$
(2.42)

Ce modèle permet de bien représenter le comportement de matériaux élasto-plastiques tant que les déformations sont assez petites pour ne pas engendrer d'endommagement. Or comme nous l'avons dit en introduction, lors de la mise en forme du point d'assemblage, certaines zones subissent des déformations de l'ordre de 100% ce qui implique la prise en compte de l'endommagement dans notre modèle. L'endommagement jouera un rôle encore plus important dans la modélisation de la tenue mécanique des points d'assemblage.

2.3 L'endommagement ductile des métaux

Dans le cadre des métaux ductiles, sous l'effet des déformations plastiques, la matière se dégrade à l'échelle microscopique. Cette dégradation correspond à l'apparition de microporosités qui finissent par interagir entre elles jusqu'à former une fissure macroscopique et entraîner la ruine du matériau. L'endommagement caractérise la détérioration progressive de la matière qui précède la rupture macroscopique. Pour les métaux, les différents défauts responsables de la rupture ductile sont les inclusions, les joints de grains ou les précipités. Sous de fortes sollicitations mécaniques, des concentrations de contraintes autour de ces défauts engendrent l'apparition des microporosités.





Dans une éprouvette plane, considérons un élément de volume représentatif (EVR) d'une taille suffisamment grande par rapport aux hétérogénéités du milieu (Fig. 2.5). Cet EVR qui contient deux inclusions, est soumis à une traction uniaxiale. La réponse en terme de force/déplacement est illustrée sur la figure 2.6. Il est admis que l'endommagement ductile de cet EVR se décompose en trois étapes :

- Dès le début de l'écoulement plastique, il apparaît des microcavités autour des défauts présents dans la matière. Ces cavités peuvent apparaître, par exemple, par décohésion d'une inclusion avec la matrice ou par rupture fragile de cette inclusion. Cette phase d'apparition de cavités s'appelle la *nucléation*. Durant cette phase, représentée par le trajet BC (Fig. 2.6), les propriétés mécaniques, i.e. l'élasticité et l'écrouissage, ne sont pas affectées.
- Avec l'augmentation des déformations, le volume des microcavités augmente. A partir d'une certaine taille, elles deviennent suffisamment nombreuses et importantes pour modifier le comportement local de la matière. Cela génère un adoucissement du matériau qui entre en compétition avec le durcissement lié à l'écrouissage. C'est la phase de *croissance*.
- La dernière phase est la phase de *coalescence* des microcavités modélisée par le trajet DE.
 Les microcavités fusionnent et finissent par former des macro-fissures. Cela entraînent la ruine du matériau.

Au delà du point E de la courbe de traction, c'est la rupture complète de l'EVR. Dans un modèle sans prise en compte de l'endommagement ou avec un modèle d'endommagement découplé, le trajet observé serait ABCG.



Figure 2.6 : Réponse schématique d'une éprouvette en traction

Pour modéliser, l'endommagement il existe deux principales approches : les approches microscopiques et macroscopiques. Les approches microscopiques sont basées sur des modèles d'évolutions de taux de porosité et de croissance de cavités voir par exemple (Tvergaard, et al., 1984) et (Gologanu, et al., 1993). Les modèles macroscopiques, quant à eux, modélisent l'endommagement de manière phénoménologique, sans représenter explicitement les différents mécanismes d'endommagement microstructuraux. La deuxième approche sera retenue dans ce manuscrit car les modèles microscopiques demandent la caractérisation d'un grand nombre de paramètres contrairement aux modèles macroscopiques.

2.3.1 Définition de la variable interne d'endommagement

De nombreux modèles d'endommagement ont été développés en utilisant des variables internes. Mais les formulations récentes sont toutes basées sur les travaux de (Kachanov, 1958) qui développa un modèle de propagation de fissures en utilisant le concept de surface résistante effective. C'est quelques années plus tard que (Rabotnov, 1963) donna un sens physique à la variable d'endommagement. Il fut le premier à considérer que la réduction de la surface résistante à cause de l'apparition des fissures était une bonne mesure de l'endommagement. En suivant cette idée, il est alors possible de définir l'endommagement présent dans un EVR (Fig. 2.8).



Figure 2.7 : Elément endommagé

Dans un solide endommagé (Fig. 2.7), isolons un EVR. Soit S l'aire d'une section de cet EVR repérée par sa normale \vec{n} . Soit \tilde{S} l'aire résistante effective correspondante, i.e. l'aire totale diminuée de l'aire des microcavités ou des microfissures S_D . L'endommagement de la section $D_{\vec{n}}$ se définit alors comme étant :

$$D_{\vec{n}} = \frac{S - \tilde{S}}{S} = \frac{S_D}{S}$$
(2.43)

 $D_{\vec{n}}$ est donc compris entre 0 pour un matériau sain, i.e. absence de microcavités ou microfissures, et 1 qui correspond à la rupture de l'EVR selon le plan normal à \vec{n} .

Cette définition générale de l'endommagement impose l'utilisation d'un tenseur d'ordre 2 ou plus pour représenter la variable d'endommagement. Dans ce manuscrit, nous allons faire l'hypothèse d'isotropie de l'endommagement. Cette hypothèse n'est pas très éloignée de la réalité. En effet, elle suppose une répartition uniforme et une orientation dans toutes les directions des fissures et des cavités. Dans ce cas, l'endommagement ne dépend plus de l'orientation de la normale \vec{n} et un scalaire D est suffisant pour caractériser l'état d'endommagement du matériau :

$$D_{\vec{n}} = D \quad \forall \vec{n} \tag{2.44}$$

Pour compléter la définition de la variable d'endommagement, nous introduisons deux scalaires. Le premier est la valeur de déformation plastique équivalente à partir de laquelle l'endommagement commence à apparaître $\bar{\varepsilon}_D$. En effet au début de la déformation plastique, il n'y a pas d'influence de la nucléation des microcavités sur les propriétés mécaniques. L'introduction de $\bar{\varepsilon}_D$ permet de tenir compte de cette observation. Le deuxième scalaire est l'endommagement critique à rupture D_c qui correspond à la valeur d'endommagement à partir de laquelle il y a rupture de l'EVR. Dès que l'endommagement atteint la valeur de D_c , l'EVR peut-être considéré comme rompu, i.e. D = 1. La

figure 2.8 représente l'évolution d'une loi d'endommagement ainsi que les différents scalaires intervenant dans sa définition.



Figure 2.8 : Représentation d'une loi d'évolution de l'endommagement

L'endommagement découle donc du concept de surface résistance effective. De la même manière, il est possible de définir le tenseur des contraintes effectives de Cauchy $\tilde{\sigma}$. Ce tenseur représente les contraintes que subit l'EVR sur la surface résistante effective où plus simplement la contrainte qu'il faudrait appliquer à un EVR non endommagé pour avoir la même déformation que celle de l'EVR endommagé. Ce tenseur s'écrit comme étant :

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \tag{2.45}$$

Au travers du tenseur des contraintes effectives, Lemaitre définit le principe d'équivalence en déformation (Lemaitre, et al., 1996). Ce principe stipule que « le comportement du matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective ».

2.3.2 Mesure de l'endommagement

Contrairement à la température ou la déformation, il n'est pas possible d'avoir accès directement à la variable d'endommagement. De plus, la mesure de l'endommagement dépend directement du modèle physique retenu pour le décrire (macroscopique, microscopique, ...). En ce qui nous concerne, il est possible d'utiliser le principe d'équivalence en déformation, pour relier les déformations à l'endommagement. Il est alors nécessaire de coupler ce principe avec l'observation de l'évolution de grandeurs physiques mesurables et impactées par l'endommagement.

L'apparition d'endommagement dans un matériau ductile se traduit par l'évolution de nombreuses propriétés mécaniques et physiques comme par exemple :

- la diminution du module d'Young,
- la diminution de la taille du critère de plasticité,
- la diminution de la dureté,
- la diminution de la vitesse de propagation des ondes dans le solide,
- la diminution de la densité,
- l'augmentation de la résistance électrique.

En se basant sur ces évolutions, il est alors possible de définir différentes stratégies de mesures locales ou globales de l'endommagement afin de déterminer sa loi d'évolution. Une présentation de ces différentes techniques peut être trouvée dans (Lemaitre, et al., 1996), ainsi qu'une comparaison des résultats obtenus sur l'étude d'un acier dans (Alves, 2001).

2.3.2.1 Evolution du module d'élasticité d'une éprouvette en traction

Un moyen couramment utilisé, mais difficile à mettre en œuvre, pour mesurer l'évolution de l'endommagement est d'obtenir l'évolution du module d'Young lors d'un essai de traction uniaxiale (Mashayekhi, et al., 2007), (Celentano, et al., 2007). En appliquant le principe d'équivalence en déformation à la loi d'élasticité linéaire unidimensionnelle d'un matériau endommagé, nous obtenons :

$$\sigma = (1 - D)E\varepsilon^e \tag{2.46}$$

E est le module d'Young du matériau non endommagé. Réciproquement, nous pouvons définir le module d'élasticité du matériau endommagé par \tilde{E} :

$$\tilde{E} = (1 - D)E \tag{2.47}$$

En mesurant l'évolution du module d'Young par une série de charge – décharge au cours de l'essai de traction, il est possible de déterminer l'endommagement avec la relation :

$$D = \frac{E - \tilde{E}}{E}$$
(2.48)

Très simple dans son principe, cette mesure est très délicate dans sa réalisation essentiellement à cause de la difficulté d'évaluer correctement le module d'élasticité. Un autre inconvénient de cette méthode est la nécessité d'utiliser un grand nombre de jauges pour évaluer l'endommagement sur une seule éprouvette. Le coût de cet essai devient donc non négligeable. La procédure de mesure est donnée sur la figure 2.9.



Figure 2.9 : Procédure de mesure de l'endommagement par évaluation du module d'élasticité

Il est possible d'obtenir des résultats avec une marge d'erreur d'environ 5%. Pour cela, il faut :

- utiliser des éprouvettes à section centrale affaiblie pour localiser l'endommagement,
- utiliser des jauges de faibles dimensions,
- évaluer le module d'élasticité lors des décharges élastiques en éliminant les zones de plus fortes non linéarités.

2.3.2.2 Tests de micro- et nano-indentation

La mesure de l'endommagement par évaluation de la variation du module d'élasticité, lors d'un essai de traction, est une méthode qui est assez bien maîtrisée. Mais comme nous l'avons souligné, elle comporte de nombreux inconvénients. C'est la raison pour laquelle ces dernières années de nombreux travaux ont été menés sur la mesure de l'endommagement en utilisant des tests de microou nano-indentation (Arnold, et al., 2002), (Panis, 2004), (Mkaddem, et al., 2006), (Guelorget, et al., 2007). Il est possible d'accéder soit à la variation de la dureté soit à la variation du module d'élasticité.

La procédure expérimentale est représentée sur la figure 2.10. Dans un premier temps, un essai de traction uniaxiale est réalisé sur une éprouvette plate. Cet essai est mené jusqu'à rupture totale de l'éprouvette. Une partie de l'éprouvette est alors découpée dans le sens longitudinal et est enrobée dans une résine. Une phase de polissage est effectuée afin d'atteindre un état de surface le plus fin possible tout en veillant à ne pas engendrer trop de déformation plastique à la surface. Les essais d'indentation sont effectués sur la surface polie.



Figure 2.10 : Procédure de mesure de l'endommagement par indentation

Par micro-indentation, il est possible de mesurer la dureté du matériau qui est influencée par l'écrouissage, i.e. augmentation de la dureté, et par l'endommagement, i.e. diminution de la dureté. L'essai de dureté consiste à mesurer la taille de l'empreinte laissée par un indenteur soumis à une charge m pendant une durée t. L'indenteur utilisé est souvent une pointe diamantée de forme pyramidale (indenteur Vickers). Les valeurs de m et de t sont choisies de façon à obtenir des empreintes mesurables et de manière à ce que la durée de l'essai soit suffisante pour qu'il ne soit pas sensible à la viscosité du matériau. La dureté Meyer-Vickers est définie comme étant égale à la pression moyenne H.

Cette pression moyenne est égale au rapport de la force F appliquée par l'indenteur sur la surface projetée S de l'empreinte :

$$H = \frac{F}{S} = \frac{2F}{d^2} \tag{2.49}$$

d étant la valeur de la diagonale de l'empreinte. La méthode est basée sur le modèle phénoménologique qui établit que dans un cas non endommagé, la micro-dureté est proportionnelle

à la contrainte d'écoulement du matériau avec un décalage r_h dû à la plasticité engendrée par l'indentation :

$$H(r+r_h) = k\sigma_0(r) \tag{2.50}$$

Le paramètre k peut être identifié par des mesures de dureté sur une région de l'éprouvette de traction où la déformation plastique est inférieure à $\bar{\varepsilon}_D$. r_h est de l'ordre de 0.08 pour un indenteur de type Vickers.

Dans le cas où la plasticité est suffisante pour faire apparaître l'effet de l'endommagement, i.e. $r > \bar{\varepsilon}_D$, la relation (2.50) est modifiée de la façon suivante :

$$H(r + r_h) = k(1 - D)\tilde{\sigma}_0(r)$$
(2.51)

Elle peut être réécrite comme :

$$\widetilde{H}(r+r_h) = k\widetilde{\sigma}_0(r) \tag{2.52}$$

 $\tilde{\sigma}_0$ est la valeur de la contrainte d'écoulement seuil si l'endommagement n'existait pas. Cette contrainte effective est déduite par extrapolation de la courbe obtenue avant apparition de l'endommagement. L'endommagement est alors déduit en utilisant la relation qui suit :

$$D = 1 - \frac{H}{\tilde{H}}$$
(2.53)

H est la valeur de la dureté mesurée et \tilde{H} est la dureté effective obtenue à partir de (2.52)

Un autre moyen de mesure de l'endommagement est l'utilisation de la nano-indentation. En effet, il a été prouvé que la nano-indentation, en plus de donner des informations sur la dureté, est un moyen efficace de mesure du module d'élasticité (Olivier, et al., 1992). En reprenant l'équation (2.48), il est alors possible de déterminer la répartition de l'endommagement le long de l'éprouvette de traction. Que cela soit pour la micro- ou la nano-indentation, il faudra en plus utiliser une technique de mesure de champ de déformation afin de pouvoir avoir accès à la courbe endommagement en fonction de la déformation plastique. Une méthode courante est l'utilisation de la corrélation d'images (Panis, 2004).

Au cours de la thèse, nous avons essayé d'obtenir les lois d'endommagement expérimentalement en utilisant les méthodes de micro- et nano-indentation. Malheureusement, notre procédure de polissage a été trop intrusive et a engendré un écrouissage superficiel trop important pour pouvoir évaluer l'influence de l'endommagement sur la dureté ou sur le module d'Young. C'est la raison pour laquelle nous avons déterminé les paramètres des lois d'endommagement en utilisant une méthode d'analyse inverse (cf. Chapitre 4).

2.3.3 Conclusions sur l'endommagement ductile

L'endommagement ductile de matériaux comme les alliages d'aluminium ou des aciers, se caractérise par l'apparition de micro défauts dans la matière qui interagissent entre eux jusqu'à créer une macro fissure et entraîner la ruine du matériau. L'endommagement est une mesure de la dégradation progressive de la matière. L'approche retenue pour modéliser l'endommagement est une approche macroscopique qui se base sur le concept de contrainte effective et sur le principe d'équivalence en déformation.

2.4 Modèle élasto-plastique endommageable

En repartant du modèle élasto-plastique retenu dans la première partie de ce chapitre, nous allons introduire le modèle d'endommagement ductile de Lemaitre en utilisant le principe d'équivalence en déformation. Contrairement à la présentation du modèle élasto-plastique qui découlait du cadre des matériaux standard généralisés, nous allons développer notre modèle en redéfinissant le cadre thermodynamique.

2.4.1 Potentiel thermodynamique

Le point de départ de la théorie est la supposition que l'énergie libre spécifique d'Helmholtz choisie comme potentiel d'état est une fonction convexe de toutes les variables d'état. Les variables d'état utilisées dans notre développement sont regroupées dans le tableau 2.1. Chacune de ces variables est rattachée à un mécanisme que cela soit l'élasticité, la plasticité, l'écrouissage ou l'endommagement.

Tablea	u 2.1 :	Variables	internes

Mécanisme	Variable d'état	Variable associée
Elasticité	$\boldsymbol{\varepsilon}^{e}$	σ
Plasticité	$oldsymbol{arepsilon}^p$	$-\sigma$
Ecrouissage isotrope	r	R
Endommagement	D	-Y

A chaque variable d'état correspond une force associée. La force associée à l'endommagement est le scalaire -Y qui correspond à la variation d'énergie interne engendrée par une augmentation d'endommagement à contrainte constante. Elle est communément appelée le taux de restitution d'énergie élastique. Le produit $-Y\dot{D}$ correpond à la puissance dissipée par le processus de décohésion.

L'énergie libre d'Helmholtz est donc une fonction de ces variables d'état :

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, r, D) \tag{2.54}$$

Sous l'hypothèse classique du découplage entre l'élasticité associée à l'endommagement et l'écrouissage plastique, l'énergie libre est donnée par la somme :

$$\Psi = \Psi^{ed} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{e}, \boldsymbol{D} \right) + \Psi^{p} \left(\boldsymbol{r} \right) \tag{2.55}$$

 Ψ^{ed} et Ψ^p sont respectivement le potentiel élastique endommageable et le potentiel plastique.

Dans la théorie de Lemaitre, le potentiel élastique endommageable est donné par la forme suivante :

$$\rho \Psi^{ed} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{e} : (1 - D) \,^{4} \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^{e}$$
(2.56)

 ρ est la densité. Le choix de ce potentiel thermodynamique, nous donne accès à la loi d'élasticité endommageable de notre matériau à travers la loi d'état :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi^{ed}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{e}} = (1 - D)^{4} \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^{e}$$
(2.57)

En utilisant la définition de la contrainte effective (2.45), l'équation précédente s'écrit alors :

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = {}^{4}\boldsymbol{E}:\boldsymbol{\varepsilon}^{e} \tag{2.58}$$

La variable thermodynamique associée à l'endommagement est donnée par :

$$-Y = \rho \frac{\partial \Psi^{ed}}{\partial D} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{e} \colon {}^{4}\boldsymbol{E} \colon \boldsymbol{\varepsilon}^{e} \Rightarrow Y = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{e} \colon {}^{4}\boldsymbol{E} \colon \boldsymbol{\varepsilon}^{e}$$
(2.59)

En utilisant l'inverse de la loi d'élasticité ainsi que la décomposition en partie déviatorique et sphérique du tenseur des contraintes, nous obtenons les relations suivantes :

$$Y = \frac{1}{2(1-D)^2} \boldsymbol{\sigma}: ({}^{4}\boldsymbol{E})^{-1}: \boldsymbol{\sigma}$$

= $\frac{1}{2E(1-D)^2} ((1+\nu)\boldsymbol{\sigma}: \boldsymbol{\sigma} - \nu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})^2)$
= $\frac{J_2(\boldsymbol{\sigma})}{2E(1-D)^2} (\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(-\frac{p}{J_2(\boldsymbol{\sigma})}\right)^2)$
= $\frac{\boldsymbol{s}: \boldsymbol{s}}{4\mu(1-D)^2} + \frac{p^2}{2\kappa(1-D)^2}$ (2.60)

En ce qui concerne la contribution plastique Ψ^p à l'énergie libre, celle-ci est donnée par :

$$\rho\Psi^p = \int_0^r R(\xi)d\xi \tag{2.61}$$

En appliquant le même principe que précédemment, il est possible de calculer la variable thermodynamique associée à l'écrouissage isotrope :

$$R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial r} = R(r)$$
(2.62)

Le second principe de la thermodynamique, s'écrit sous la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem, et est toujours satisfait si le taux d'endommagement est positif (Lemaitre, et al., 2005) :

$$\boldsymbol{\sigma}: \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - R\dot{r} + Y\dot{D} \ge 0 \tag{2.63}$$

2.4.2 Potentiel des dissipations et lois d'évolution des variables internes

Les lois d'évolution des variables internes peuvent être déterminées en supposant l'existence d'un potentiel des dissipations F qui est une fonction convexe des variables associées. Ce potentiel se décompose en deux parties :

$$F = f + F_Y \tag{2.64}$$

f correspond au critère de plasticité. Dans notre cas, c'est le critère isotrope de von Mises défini à l'équation (2.36) auquel nous avons appliqué le principe d'équivalence en déformation :

$$f(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, R) = J_2(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) - \sigma_0(r) \le 0$$
(2.65)

Ou dans l'espace des contraintes :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, R; D) = \frac{J_2(\boldsymbol{\sigma})}{1 - D} - \sigma_0(r) \le 0$$
(2.66)

 F_Y correspond au potentiel des dissipations lié à d'endommagement et est donné par :

$$F_Y = \frac{S_0}{(b+1)(1-D)} \left(\frac{Y}{S_0}\right)^{b+1}$$
(2.67)

b et S_0 sont des constantes matériau.

Les lois d'évolution des variables internes sont obtenues en dérivant le potentiel des dissipations :

• Pour le tenseur des taux de déformations plastiques :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = -\dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial(-\boldsymbol{\sigma})} = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda}\boldsymbol{n} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D}\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{J}_{2}(\boldsymbol{\sigma})}$$
(2.68)

L'expression du tenseur est modifiée par rapport à l'élasto-plasticité. Nous devons donc redéfinir la vitesse de déformation plastique équivalente :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - D} \tag{2.69}$$

Il n'y a donc plus équivalence entre le multiplicateur plastique et la déformation plastique équivalente.

Pour la variable d'écrouissage isotrope :

$$\dot{r} = -\dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial R} = \dot{\lambda} \tag{2.70}$$

Comme pour l'élasto-plasticité, nous avons équivalence entre le multiplicateur plastique et l'évolution de la variable d'écrouissage isotrope.

• Pour le taux d'endommagement :

$$\dot{D} = -\dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial(-Y)} = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D}\left(\frac{Y}{S_0}\right)^b$$
(2.71)

2.4.3 Le multiplicateur plastique

Comme pour l'élasto-plasticité, le multiplicateur plastique respecte la condition de charge – décharge :

$$\dot{\lambda} \ge 0, \quad f \le 0, \quad \dot{\lambda}f = 0 \tag{2.72}$$

Pour déterminer son expression lors d'un chargement plastique, comme précédemment nous appliquons la condition de cohérence soit f = 0 et $\dot{f} = 0$. La différentielle de f donne :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}} : \dot{\tilde{s}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} \dot{r} = 0$$
(2.73)

Après quelques calculs, nous obtenons la définition du multiplicateur plastique dans le cas de l'élasto-plasticité endommageable :

$$\frac{\dot{\lambda}}{1-D} = \frac{\langle \tilde{\mathbf{s}} : \dot{\mathbf{e}} \rangle}{J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \left(1 + \frac{1-D}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r}\right)} = \frac{\langle \mathbf{s} : \dot{\mathbf{e}} \rangle}{J_2(\boldsymbol{\sigma}) \left(1 + \frac{1-D}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r}\right)}$$
(2.74)

Si l'endommagement est nul, nous retrouvons le multiplicateur du modèle élasto-plastique (2.41).

2.4.4 Le module tangent continu

Comme précédemment, le module tangent continu est défini par :

$${}^{4}\boldsymbol{C} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{s}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\epsilon}}} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{s}}}{\partial \dot{\boldsymbol{e}}} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{e}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}$$
(2.75)

Avec

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{e}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = {}^{4}\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}$$
(2.76)

En dérivant le déviateur des contraintes et en introduisant l'expression du multiplicateur plastique, nous trouvons :

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial \dot{e}} = 2\mu(1-D) \left(I \otimes I - \frac{s \otimes s}{\frac{2}{3} J_2(\sigma)^2 \left(1 + \frac{1-D}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r}\right)} \left(1 + \frac{J_2(\sigma)}{3\mu(1-D)^2} \left(\frac{Y}{S_0}\right)^b\right) \right)$$
(2.77)

Si l'endommagement est désactivé, i.e. D = 0, Y = 0, alors le module tangent continu élastoplastique (2.42) apparaît.

2.4.5 Enrichissement du modèle d'endommagement

2.4.5.1 Influence de la triaxialité

Le modèle d'endommagement isotrope qui vient d'être développé permet de relativement bien décrire l'évolution de l'endommagement ductile pour des chemins de déformation simples. Cependant quand les chemins de déformation deviennent plus complexes, il faut modifier le modèle initial afin que celui-ci soit en accord avec les observations expérimentales. Un des points clés du modèle initial est le fait que le taux de triaxialité a une forte influence sur l'évolution de l'endommagement. En effet, le taux de triaxialité $-p/J_2(\sigma)$ apparaît explicitement dans la définition du taux de restitution d'énergie élastique -Y:

$$Y = \frac{J_2(\sigma)}{2E(1-D)^2} \left(\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(-\frac{p}{J_2(\sigma)}\right)^2\right)$$
(2.78)

Le rapport de triaxialité donne, en première approximation, des informations sur l'état de contrainte local de la matière. Trois cas peuvent être rencontrés :

$$-\frac{p}{J_2(\sigma)} \begin{cases} > 0 & \text{traction} + \text{cisaillement} \\ = 0 & \text{cisaillement pur} \\ < 0 & \text{compression} + \text{cisaillement} \end{cases}$$
(2.79)

Comme le taux de restitution d'énergie élastique intervient directement dans la loi d'évolution d'endommagement, nous avons donc une influence du taux de triaxialité sur l'évolution de l'endommagement :

$$\dot{D} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - D} \left(\frac{Y}{S_0}\right)^b \tag{2.80}$$

Un aspect important de l'évolution de l'endommagement n'est pas pris en compte dans (2.78) et (2.80). En effet, il est important de distinguer l'évolution de l'endommagement en traction de celui en compression. Cette distinction vient du fait que lorsque la matière est dans un état de compression, les microcavités et les microfissures se referment partiellement ce qui entraîne un rétablissement de la rigidité du matériau ainsi qu'une forte diminution de la vitesse d'endommagement.

Une première tentative pour prendre en compte la distinction entre évolution de l'endommagement en traction et évolution en compression est de venir modifier la formulation du taux de restitution d'énergie élastique en ne prenant en compte que la partie positive de la pression hydrostatique :

$$Y = \frac{J_2(\sigma)}{2E(1-D)^2} \left(\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\langle -p \rangle}{J_2(\sigma)} \right)^2 \right)$$
(2.81)

Bien que ce modèle soit le plus simple à implémenter, il ne permet pas de prendre en compte l'effet de fermeture partielle des fissures. En effet, il ne fait que stopper l'évolution de l'endommagement en compression sans pour autant modéliser le rétablissement de la rigidité. Pour modéliser ce deuxième phénomène, il faut mettre en place un modèle plus complet comme celui décrit dans (Ladèveze, et al., 1984).

2.4.5.2 Prise en compte de l'effet de fermeture des fissures

Le modèle de fermeture des fissures introduit une différenciation du comportement du matériau en traction et en compression. Considérons le cas d'un état de contrainte uniaxiale. La contrainte effective est donnée en traction par :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} \quad \text{si} \quad -\frac{p}{J_2(\sigma)} > 0$$
(2.82)

Le deuxième cas est celui de la compression, dans ce cas le tenseur des contraintes effectives est défini par :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - hD}$$
 si $-\frac{p}{J_2(\sigma)} < 0$ (2.83)

h est un coefficient qui caractérise l'effet de fermeture des fissures. Ce paramètre est un paramètre qui dépend du matériau et qui satisfait la condition qui suit :

$$0 \le h \le 1 \tag{2.84}$$

La valeur généralement préconisée pour ce paramètre est h = 0,2 (Lemaitre, et al., 1996). Il est intéressant de noter que si h = 1, le modèle initial est retrouvé. Dans le cas h = 0, alors l'effet de fermeture des fissures est total et le matériau ne s'endommage plus en compression.

La principale difficulté de la formulation est de savoir comment caractériser la compression et la traction. Comme nous l'avons déjà dit la triaxialité donne, en première approximation, l'état local de contrainte en un point de matière. Il suffit alors d'utiliser le tenseur des contraintes équivalentes défini par :

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - hD} \tag{2.85}$$

Il faut alors écrire le potentiel élastique endommageable sous la forme :

$$\rho \Psi_c^{ed} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e \colon (1 - hD) \,^4 \boldsymbol{E} \colon \boldsymbol{\varepsilon}^e \tag{2.86}$$

La loi d'élasticité est alors donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - hD)^{4} \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^{e} \tag{2.87}$$

Et le taux de restitution d'énergie élastique :

$$Y = \frac{h}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{e} \colon {}^{4}\boldsymbol{E} \colon \boldsymbol{\varepsilon}^{e}$$

= $\frac{hJ_{2}(\boldsymbol{\sigma})}{2E(1-hD)^{2}} \left(\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(-\frac{p}{J_{2}(\boldsymbol{\sigma})}\right)^{2}\right)$ (2.88)

Cette deuxième approche, par rapport à l'équation (2.81), permet de bien prendre en compte l'effet de fermeture au travers de la variable h. Cette méthode est suffisante pour la plupart des applications.

Cependant la définition de l'état de contrainte local reste approximatif pour des problèmes plus complexes. En effet, le signe de la triaxialité est donné par l'inverse du signe de la pression hydrostatique p. Or cette pression est égale, dans notre cas, à $- \text{tr}(\sigma)/3$. Si nous nous plaçons dans le repère des contraintes principales, la pression hydrostatique est donnée par $p = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$. Or il est tout à fait envisageable d'avoir un état de contrainte dans lequel les sollicitations diffèrent suivant les directions. Il faut alors savoir quelle partie du tenseur des contraintes est en traction ou en compression pour bien calculer le taux de restitution d'énergie élastique et donc l'endommagement.

2.4.5.3 Décomposition du tenseur des contraintes en parties traction/compression

Tout d'abord, écrivons le tenseur des contraintes de Cauchy dans ses directions propres :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \tag{2.89}$$

où σ_i sont les contraintes principales et $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base orthonormale des vecteurs propres de σ .

Nous supposons que la décomposition en partie traction et partie compression est une décomposition additive :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_+ + \boldsymbol{\sigma}_- \tag{2.90}$$

 σ_+ et σ_- sont respectivement les parties du tenseur des contraintes en traction et en compression et sont données par :

$$\boldsymbol{\sigma}_{+} = \sum_{i=1}^{3} \langle \sigma_{i} \rangle e_{i} \otimes e_{i}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{-} = \sum_{i=1}^{3} \langle -\sigma_{i} \rangle e_{i} \otimes e_{i}$$
(2.91)

La réécriture du potentiel élastique endommageable en contrainte, et en tenant compte de cette décomposition, nous donne :

$$\rho \Psi^{ed} = \frac{1+\nu}{2E} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_+:\boldsymbol{\sigma}_+}{1-D} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_-:\boldsymbol{\sigma}_-}{1-hD} \right) - \frac{\nu}{2E} \left(\frac{\langle \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \rangle^2}{1-D} + \frac{\langle -\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \rangle^2}{1-hD} \right)$$
(2.92)

En dérivant ce potentiel, nous obtenons la loi d'élasticité endommageable :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{e} = \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_{+}}{1-D} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_{-}}{1-hD} \right) - \frac{\nu}{E} \left(\frac{\langle \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \rangle^{2}}{1-D} + \frac{\langle -\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \rangle^{2}}{1-hD} \right) \boldsymbol{I}$$
(2.93)

Le tenseur des contraintes effectives est alors défini par :

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{+}}{1-D} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_{-}}{1-hD} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\boldsymbol{I}:\boldsymbol{\sigma}_{+} - \langle \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \rangle}{1-D} + \frac{\boldsymbol{I}:\boldsymbol{\sigma}_{-} + \langle -\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \rangle}{1-hD} \right) \boldsymbol{I}$$
(2.94)

Le taux de restitution d'énergie élastique $Y = \rho \, \partial \Psi^{ed} / \partial D$ vaut alors :

$$Y = \frac{1}{2E(1-D)^2} \left((1+\nu)\boldsymbol{\sigma}_+ : \boldsymbol{\sigma}_+ - \nu \langle \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \rangle^2 \right) + \frac{h}{2E(1-hD)^2} \left((1+\nu)\boldsymbol{\sigma}_- : \boldsymbol{\sigma}_- - \nu \langle -\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \rangle^2 \right)$$
(2.95)

Cette méthode, plus complète que les deux précédentes, permet de bien distinguer les contributions en traction des contributions en compression du tenseur des contraintes dans l'évolution de l'endommagement. Cependant, elle a l'inconvénient d'ajouter une grande quantité d'opérations pour calculer le taux de restitution d'énergie élastique et donc l'endommagement.

2.4.5.4 Limite de triaxialité en compression

De nombreux auteurs ont étudié l'influence de la pression hydrostatique sur l'apparition de la rupture ductile. Ces études ont montré qu'en dessous d'une certaine valeur de triaxialité, la rupture ductile ne peut pas apparaître. Cette valeur de triaxialité est égale à -1/3 d'après (Bao, et al., 2005). En suivant, l'idée de Bao, nous pouvons alors remplacer l'équation (2.80) par :

$$\dot{D} = \begin{cases} \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \left(\frac{Y}{S_0}\right)^b & \text{si} & -\frac{p}{J_2(\sigma)} > 0\\ \frac{\dot{\lambda}}{1-hD} \left(\frac{Y}{S_0}\right)^b & \text{si} & -\frac{1}{3} < -\frac{p}{J_2(\sigma)} \le 0\\ 0 & \text{si} & -\frac{p}{J_2(\sigma)} \le -\frac{1}{3} \end{cases}$$
(2.96)

2.4.5.5 Conclusions sur l'enrichissement du modèle d'endommagement

Comme nous avons pu le voir le modèle initial d'endommagement ductile de Lemaitre peut être enrichi afin de prendre en compte :

- l'effet de fermeture des fissures,
- une différentiation entre endommagement en compression et en traction,
- une limite de triaxialité en compression en dessous de laquelle l'endommagement n'évolue plus.

Le modèle avec décomposition du tenseur des contraintes en partie traction et compression ainsi que la prise en compte d'une limite de triaxialité en compression permettent de prédire correctement des phénomènes complexes tels que l'apparition de chevrons en filage (Bourgeon, 2008). Dans notre cas d'application, nous ne prendrons pas en compte le modèle le plus complet. En effet, outre le fait de sa relative complexité à mettre en œuvre, celui-ci demande d'effectuer un trop grand nombre d'opérations et risque donc d'augmenter le temps de calcul des simulations. Nous considérons donc que la triaxialité est une bonne mesure de l'état de contrainte locale et que la différenciation entre état en compression et en traction se fait au travers du taux de restitution d'énergie élastique. Nous appliquerons aussi le critère de limite en triaxialité.

2.4.6 Choix et conclusions sur le modèle élasto-plastique endommageable

Le modèle élasto-plastique endommageable que nous retiendrons pour le reste du manuscrit est composé de l'ensemble des équations qui suivent avec :

$$h = 1 \qquad \text{si} \qquad -\frac{p}{J_2(\sigma)} > 0$$

$$h \in [0,1] \qquad \text{sinon} \qquad (2.97)$$

Nous utiliserons une décomposition additive du tenseur des taux de déformations plastiques :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \tag{2.98}$$

La loi d'élasticité est donnée par la loi de Hooke couplée avec la variable d'endommagement :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - hD)(2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^e + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \boldsymbol{I})$$
(2.99)

Le critère de plasticité retenu est le critère de von Mises et l'équation de la surface de charge s'écrit :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, R; D) = \frac{J_2(\boldsymbol{\sigma})}{1 - hD} - \sigma_0(r) \le 0$$
(2.100)

Les lois d'évolution des variables internes sont obtenues en dérivant le potentiel des dissipations :

• Pour le tenseur des taux de déformation plastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - hD} \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{J}_{2}(\boldsymbol{\sigma})}$$
(2.101)

• Pour la variable d'écrouissage :

$$\dot{r} = \dot{\lambda} = (1 - hD)\dot{\bar{\varepsilon}} \tag{2.102}$$

• Pour le taux d'endommagement :

$$\dot{D} = \begin{cases} \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \left(\frac{Y}{S_0}\right)^b & \text{si} & -\frac{p}{J_2(\sigma)} > 0 & \text{et} \quad \bar{\varepsilon} \ge \bar{\varepsilon}_D \\ \frac{\dot{\lambda}}{1-hD} \left(\frac{Y}{S_0}\right)^b & \text{si} & -\frac{1}{3} < -\frac{p}{J_2(\sigma)} \le 0 & \text{et} \quad \bar{\varepsilon} \ge \bar{\varepsilon}_D \\ 0 & \text{si} & -\frac{p}{J_2(\sigma)} \le -\frac{1}{3} & \text{ou} \quad \bar{\varepsilon} < \bar{\varepsilon}_D \end{cases}$$
(2.103)

avec Y qui vaut :

$$Y = \frac{hJ_2(\sigma)}{2E(1-hD)^2} \left(\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(-\frac{p}{J_2(\sigma)}\right)^2\right)$$
(2.104)

La condition de charge – décharge est donnée par les conditions de Kuhn-Tucker :

$$\dot{\lambda} \ge 0, \ f \le 0, \ \dot{\lambda}f = 0$$
 (2.105)

En plasticité, le multiplicateur plastique et le module tangent continu associé sont donnés par :

$$\frac{\dot{\lambda}}{1-hD} = \frac{\langle s; \dot{e} \rangle}{J_2(\sigma) \left(1 + \frac{1-hD}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r}\right)}$$
(2.106)

$${}^{4}\boldsymbol{C} = 2\mu(1-hD)\left({}^{4}\boldsymbol{I}^{dev} - \frac{\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{s}}{\frac{2}{3}J_{2}(\boldsymbol{\sigma})^{2}\left(1 + \frac{1-hD}{3\mu}\frac{\partial\sigma_{0}}{\partial r}\right)}\left(1 + \frac{J_{2}(\boldsymbol{\sigma})}{3\mu(1-hD)^{2}}\left(\frac{Y}{S_{0}}\right)^{b}\right)\right)$$
(2.107)

2.5 Conclusions

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons établi le modèle de comportement qui a servi de base à l'ensemble de nos développements. Nous avons justifié le choix d'un critère de plasticité isotrope de type von Mises ainsi que le fait de ne pas tenir compte de l'écrouissage cinématique pour plusieurs raisons :

- la complexité de caractérisation des critères de plasticité anisotropes et le coût en terme de temps de calcul,
- les chemins de déformation sont suffisamment simples pour ne pas prendre en compte l'écrouissage cinématique en première approche.

Ensuite, nous avons introduit le concept d'endommagement ductile des métaux avec la présentation du principe d'équivalence en déformation de Lemaitre. Deux méthodes de mesures de l'endommagement ont été abordées.

Nous avons alors développé en détail un modèle matériau de type élasto-plastique endommageable. Comme le modèle d'endommagement initial présentait des limitations par rapport à différentes observations expérimentales, celui-ci a été enrichi en prenant en compte deux aspects :

- une évolution de l'endommagement différente en compression de celle en traction,
- une limite de triaxialité en dessous de laquelle l'endommagement n'évolue plus.

2.6 Références bibliographiques

Abe, Y., Kato, T. et Mori, K. 2006. Joinability of aluminium alloy and mild steel sheets by self-piercing rivet. *J. Mat. Process. Techno.* 2006, Vol. 177, pp. 417-421.

Alves, M. 2001. Measurement of ductile material damage. *Mech. Struct. & Mach.* 2001, Vol. 29, pp. 451-476.

Arnold, G., Hubert, O., Dutko, M., Billardon, R. 2002. Identification of a continuum damage model from micro-hardness measurements. *Mat. Proc. Def.* 2002, Vol. 5, pp. 163-173.

Banabic, D., Comsa, D.S. et Balan, T. 2000. A new yield criterion for orthotropic sheet metals under plane-stress condition. *Proceedings of the Conference TPR2000.* 2000, pp. 217-224.

Bao, Y. et Wierzbicki, T. 2005. On the cut-off value of negative triaxiality for fracture. *Engng. Fract. Mech.* 2005, Vol. 72, pp. 1049-1069.

Barlat, F. et Lian, J. 1989. Plastic behaviour and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions. *Int. J. of Plast.* 1989, Vol. 5, pp. 51-66.

Ben-Tahar, M. 2005. *Contribution à l'étude et à la simulation du procédé d'hydroformage.* 2005. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

Bourgeon, L. 2008. *Modélisation numérique de l'endommagement des métaux en forge à froid.* 2008. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

Celentano, D.J. et Chaboche, J.L. 2007. Experimental and numerical characterization of damage evolution in steels. *Int. J. Plast.* 2007, Vol. 23, pp. 1739-1762.

Chaboche, J.L. 1989. Constitutive equations for cyclic plasticity ans cyclic viscoplasticity. *Int. J. Plast.* 1989, Vol. 5, pp. 247-302.

Gologanu, M., Leblond, J.B. et Devaux, J. 1993. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids. Case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *J. Mech. Phys. Solids.* 1993, Vol. 41, pp. 1723-1754.

Guelorget, B., François, M. et Lu, J. 2007. Microindentation as a local measurement technique. *Materials Letters.* 2007, Vol. 61, pp. 34-36.

Hill, R. 1948. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic materials. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Science, Royal Society London.* 1948, pp. 281-297.

Kachanov, L.M. 1958. Time of the rupture process under creep condition. *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Otd. Tekhn. Nauk.* 1958, Vol. 8, pp. 26–31.

Ladèveze, P. et Lemaitre, J. 1984. Damage effective stress in quasi unilateral conditions. 16th Int. Congress Theor. Appl. Mech. 1984.

Lemaitre, J. et Chaboche, J.L. 1996. Mécanique des matériaux solides. 2e édition. s.l. : Dunod, 1996.

Lemaitre, J. et Desmorat, R. 2005. Engineering damage mechanics. s.l. : Springer-Verlag, 2005.

Mashayekhi, M., Ziaei-Rad, S., Parvizian, J., Niklewicz, J., Hadavinia, H. 2007. Ductile crack growth based on damage criterion: experimental and numerical studies. *Mechanics of Materials.* 2007, Vol. 39, pp. 623-636.

Mkaddem, A., Gassara, F. et Hambli, R. 2006. A new procedure using the microhardness technique for sheet material damage characterisation. *J. Mat. Process. Tech.* 2006, Vol. 178, pp. 111-118.

Olivier, W.C. et Pharr, G.M. 1992. Improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *J. Mater. Res.* 1992, Vol. 7, pp. 1564-1583.

Panis, M.W. 2004. *Experimental identification of a damage evolution law for steel.* Technische universiteit Eindhoven. 2004. Internal report. MT04.05.

Porcaro, R., Hanssen, A.G., Aalberg, A., Langseth, M. 2004. Joining of aluminium using self-piercing riveting: testing, modelling and analysis. *Int. J. Crash.* 2004, Vol. 9, pp. 141-154.

Rabotnov, Y.N. 1963. On the equations of state for creep. *Progress in Applied Mechanics.* 1963, Vol. Prager Anniversary VOLUME, p. 307.

Tvergaard, V. et Needleman, A. 1984. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metall. Mater.* 1984, Vol. 32, pp. 157-169.

Chapitre 3 :

Modélisation numérique du modèle élasto-plastique endommageable

3.1	Intro	duction	61
3.2	Réso	lution numérique du problème mécanique	61
3.2	2.1 Dé	finition du problème mécanique	61
	3.2.1.1	Description du mouvement	62
	3.2.1.2	Les équations de conservation	63
	Les con	ditions aux limites	63
3.2	2.2 Fo	rmulation faible du problème mécanique	65
3.2	2.3 Dis	scrétisation spatiale par éléments finis	66
	3.2.3.1	Formulation P1+/P1	66
	3.2.3.2	Formulation mini-élément	68
3.2	2.4 Dis	scrétisation temporelle et résolution du problème	70
3.2	2.5 Int	égration locale des équations comportementales	74
	3.2.5.1	Prédiction élastique	75
	3.2.5.2	Correction plastique	76
	3.2.5.3	Dérivée objective de la contrainte Erreur ! Signet r	10n défini.
	3.2.5.4	Module tangent discret cohérent	81
	3.2.5.5	Conclusion sur l'intégration locale des équations comportementales	84
3.2	2.6 Ge	stion incrémentale du contact par la méthode de pénalisation	86
3.2	2.7 Re	maillage et transport de champs	88
3.2	2.8 Elé	ments endommagés et rupture	90
3.2	2.9 Ap	plication du modèle et validation	92
	3.2.9.1	Essai de traction uniaxiale sur éprouvette axisymétrique entaillée	92
	3.2.9.2	Essai d'écrasement d'une éprouvette en tonneau	95
	3.2.9.3	Couplage fort et couplage faible	98
3.2	2.10	Conclusions sur la résolution numérique du problème mécanique	100
3.3	Mod	èles d'endommagement non locaux	101
3.3	8.1 Le	phénomène de localisation	101
3.3	8.2 Le	s méthodes de régularisation	103
3.3	8.3 M	éthodes non locales	
	3.3.3.1	Formulation intégrale	
	3.3.3.2	Formulation à gradient explicite	
	3.3.3.3	Formulation à gradient implicite	
3.3	8.4 Ela	isto-plasticité avec endommagement non local	
3.3	8.5 Im	plémentation des méthodes non locales	
	3.3.5.1	Formulation intégrale	
	3.3.5.2	Formulation à gradient implicite	
	3.3.5.3	Modification du calcul d'intégration locale des équations comportementales	
3.3	8.6 La	longueur caractéristique	120
3.3	8.7 Ap	ports des modèles non locaux	
		-	

3.3.7.1	Modèle local	122
3.3.7.2	Comparaison des modèles	124
3.3.7.3	Influence de la longueur caractéristique	126
3.3.7.4	Dépendance à la taille de maille	128
3.3.8 Sy	ynthèse sur les modèles non locaux	131
3.4 Con	clusions et perspectives	132
3.5 Réfé	érences bibliographiques	134

3.1 Introduction

Les simulations de ce manuscrit, que cela soit pour la mise en forme de l'assemblage ou pour la tenue mécanique des points d'assemblage, ont été réalisées avec une version améliorée de la suite logicielle éléments finis Forge2005[®]. Initialement, cette suite logicielle est dédiée à la simulation de la mise en forme de lopins lors de divers procédés de mise en forme (forgeage, emboutissage, laminage, roulage, ...). Ses principales caractéristiques sont :

- un logiciel dédié aux problèmes axisymétriques et déformations planes : Forge2[®],
- un logiciel pour les problèmes 3D : Forge3[®],
- une formulation mixte vitesse-pression,
- l'utilisation d'éléments finis P1+/P1 : tétraèdres linéaires en 3D et triangles linéaires en 2D avec terme bulle,
- des lois de comportements variées : élastique, élasto-plastique, élasto-visco-plastique + thermique,
- la gestion des grandes déformations plastiques,
- le remaillage automatique 2D et 3D,
- la gestion multi matériaux et multi corps,
- une approche simple de l'endommagement,
- modélisation de la rupture par la méthode de « kill-element ».

Dans ce chapitre, nous allons détailler les principales étapes de la résolution du calcul mécanique pour un problème 3D ainsi que l'intégration de la loi de comportement élasto-plastique endommageable développée au chapitre précédent. Nous détaillerons aussi la méthode que nous avons développée pour gérer les éléments entièrement endommagés ainsi que pour la modélisation de la rupture. Nous mettrons en évidence les problèmes de localisation et de dépendance des résultats à la taille de maille, engendrés par l'utilisation d'une loi de comportement couplée avec l'endommagement. Nous introduirons alors les méthodes dites non-locales qui permettent de résoudre ces problèmes.

3.2 Résolution numérique du problème mécanique

3.2.1 Définition du problème mécanique

La mise en forme des assemblages par déformation plastique met en jeu deux types d'objets. Des objets dits indéformables (les outils) dont les déformations au cours du procédé sont négligeables et des objets dits déformables (tôles, rivets, ...). D'un point de vue mécanique, les différents solides déformables sont considérés comme des domaines finis constitués d'un milieu homogène et continu et s'inscrivent donc dans le contexte de la mécanique des milieux continus.

Soit un objet déformable $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ délimité par sa frontière $\partial \Omega \subset \mathbb{R}^2$. L'étude du problème mécanique consiste à développer les équations qui vont nous permettre d'avoir accès aux champs de déplacements, déformations et contraintes au cours du temps. Après avoir introduit le formalisme de la description du mouvement de tout point \vec{x} de Ω , nous développerons les équations de conservation qui régissent son équilibre, ainsi que les conditions aux limites associées. Nous verrons alors comment résoudre le problème mécanique à l'aide d'une formulation éléments finis mixte en vitesse/pression.
3.2.1.1 Description du mouvement

Résoudre un problème mécanique impose d'introduire un formalisme pour la description du mouvement des solides. Il existe deux grandes familles. L'approche dite Lagrangienne qui consiste à suivre l'évolution de chaque point matériel du solide au cours du temps et l'approche Eulérienne qui consiste à se positionner en un point de l'espace et à observer quels points du solide y passent. L'approche retenue dans Forge2005[®] est l'approche dite Lagrangienne réactualisée.



Figure 3.1 : Description Lagrangienne du mouvement

A l'instant initial t_0 , le solide occupe le domaine noté par Ω_0 (Fig. 3.1). En se déformant au cours du temps, il occupe à l'instant t le domaine Ω_t . Afin de suivre le mouvement d'un point matériel du solide, il existe une fonction Φ qui est une bijection de Ω_0 sur Ω_t quel que soit l'instant t. L'expression du vecteur position \vec{x} de tout point de Ω_t , à l'instant t, est donnée par :

$$\vec{x} = \Phi(\vec{x}_0, t) \tag{3.1}$$

Ainsi la fonction Φ définit la position à l'instant t du point matériel de coordonnées initiales \vec{x}_0 . Cette description est appelée description Lagrangienne du mouvement, pour lequel il est possible d'introduire le champ de déplacement Lagrangien \vec{u} défini par :

$$\vec{x}(\vec{x}_0, t) = \vec{x}_0 + \vec{u}(\vec{x}_0, t) \tag{3.2}$$

La description du mouvement est complètement définie par la connaissance de l'état initial et de l'état final du point matériel. Les logiciels de Forge2005[®] sont basés sur une description du mouvement du type Lagrangien réactualisé. Cette méthode consiste à venir découper en une suite d'intervalles de pas de temps la simulation $[t_0, t_0 + \Delta t, ..., t]$. Sur chacun de ces intervalles, le mouvement est défini par une fonction Φ^t définie par analogie à (3.1) comme :

$$\vec{x}_{t+\Delta t} = \Phi^{t}(\vec{x}_{t}, t + \Delta t)$$
(3.3)

Le pas de discrétisation temporelle Δt est choisi suffisamment petit pour permettre d'adopter l'hypothèse des petites déformations (entre 0.1% et 1% de déformation par incrément). Sous cette hypothèse, les tenseurs des taux de déformations $\dot{\varepsilon}$ et des déformations ε peuvent être écrits comme :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) + \left(\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \right)^T \right), \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{u} + \left(\vec{\nabla} \vec{u} \right)^T \right)$$
(3.4)

3.2.1.2 Les équations de conservation

Le solide Ω doit respecter l'ensemble des équations de conservation. Le principe fondamental de la dynamique, appelé aussi principe de conservation de la quantité de mouvement, nous donne classiquement :

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \left(\vec{f} - \vec{\gamma} \right) = \vec{0} \tag{3.5}$$

Dans cette expression, ρ est la masse volumique du matériau, \vec{f} désigne les efforts volumiques décrivant les efforts de gravité, $\vec{\gamma}$ est le vecteur accélération. Dans notre étude, nous ferons une hypothèse classique en mise en forme des matériaux, nous supposerons que les efforts d'inertie et de gravité sont négligeables devant les forces internes (liées aux tenseurs des contraintes). L'équation de conservation de la quantité de mouvement se réduit alors à :

$$\vec{\nabla}.\,\boldsymbol{\sigma} = \vec{0} \tag{3.6}$$

La deuxième équation de conservation est l'équation de conservation de la masse qui s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\cdot} \left(\rho \vec{v} \right) = 0 \tag{3.7}$$

Dans le cas d'un matériau incompressible et isotrope, la masse volumique ρ est constante, l'incompressibilité se traduit alors par :

$$\vec{\nabla}.\,\vec{v}=0\tag{3.8}$$

Cette condition n'est satisfaite que pour une transformation purement plastique. Cependant, le comportement élastique est souvent compressible et l'équation précédente devient alors :

$$\vec{\nabla}.\,\vec{v} = -\left(\frac{\dot{p}}{\kappa(1-hD)} + \frac{h\dot{D}}{\kappa(1-hD)^2}p\right) \tag{3.9}$$

Nous écrirons les équations liées à l'endommagement comme si nous étions en compression avec le paramètre h de l'effet de fermeture des fissures (cf. 2.4.5.2). En effet, le modèle en traction se retrouve facilement en prenant h = 1.

Les conditions aux limites

Les équations d'équilibre sont vérifiées en tout point du volume du solide. Les conditions aux limites sont quant à elles appliquées sur la surface extérieure du domaine, c'est ce qui conditionne l'état d'équilibre du solide.



Figure 3.2 : Conditions aux limites

Le système est soumis à des conditions aux limites de quatre types représentées par la figure 3.2 :

• Condition de bord libre :

$$\vec{t} = \boldsymbol{\sigma} \vec{n} = \vec{0} \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_l$$
 (3.10)

• Condition de vitesse imposée :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_v \tag{3.11}$$

• Condition de contrainte imposée :

$$\vec{t} = \vec{t}_0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_t \tag{3.12}$$

 \vec{n} est la normale sortante au solide, \vec{t}_0 est la contrainte normale imposée et \vec{v}_0 est la vitesse imposée à la surface du solide.

• Condition de contact unilatéral frottant sur $\partial \Omega_c$:

Cette condition apparaît entre le solide et les outils. Cette condition est essentielle en mise en forme et se décompose en deux notions distinctes : le contact et le frottement. Afin d'exprimer la condition de contact, il est commode d'introduire la pression de contact σ_n définie par la projection du vecteur contrainte sur la normale extérieure à la surface de l'outil :

$$\sigma_n = (\boldsymbol{\sigma} \vec{n}).\,\vec{n} \tag{3.13}$$

La condition de contact de la pièce contre l'outil est traduite au travers des conditions de Signorini :

$$\begin{cases} (\vec{v} - \vec{v}_{out}) \cdot \vec{n} \le 0\\ \sigma_n \le 0 & \text{sur } \partial \Omega_c\\ \sigma_n (\vec{v} - \vec{v}_{out}) \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$
(3.14)

Dans cette expression, \vec{v}_{out} est la vitesse de l'outil et $\partial \Omega_c$ est la frontière du domaine Ω sur laquelle la condition de contact unilatéral est imposée. Ces équations décrivent une condition de non pénétration. Si σ_n est nulle alors il n'y a pas contact et le solide et l'outil peuvent avoir des vitesses différentes. Dans le cas où il y a contact, alors la vitesse normale du solide au point de contact devient égale à celle de l'outil, la pression de contact devient alors non nulle. La condition de contact traite de la composante normale du vecteur contrainte.

La composante tangentielle ou cission de frottement est donnée par la loi de frottement et est définie par :

$$\vec{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \vec{n} - \sigma_n \vec{n} \tag{3.15}$$

Pour une loi de frottement de type Coulomb, la contrainte tangentielle est reliée à la contrainte normale via le coefficient de frottement α_f :

$$\vec{\tau} = \alpha_f (-\sigma_n \vec{n}) \tag{3.16}$$

3.2.2 Formulation faible du problème mécanique

Le problème mécanique fort est défini par l'ensemble des équations de conservation plus la prise en compte des conditions aux limites. Pour simplifier les écritures, les conditions aux limites de bord libre ou liées au contact et au frottement ne seront pas prises en compte dans les développements qui suivent et nous considérerons que $\partial \Omega = \partial \Omega_v \cup \partial \Omega_t$. En tenant compte de la décomposition en partie déviatorique et sphérique du tenseur des contraintes, le problème mécanique fort s'écrit sur le domaine Ω :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{s} - \vec{\nabla} p = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\left(\frac{\dot{p}}{\kappa(1 - hD)} + \frac{h\dot{D}}{\kappa(1 - hD)^2}p\right) \\ \vec{v} = \vec{v}_0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_v \\ \vec{t} = \vec{t}_0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_t \end{cases}$$
(3.17)

La formulation faible est une formulation mixte en vitesse – pression. Pour cela, nous considérons que ces deux variables sont totalement indépendantes l'une de l'autre. Pour ce faire, introduisons les espaces fonctionnels des vitesses cinématiquement admissibles \mathcal{V} (vérifiant les conditions aux limites), des vitesses cinématiquement admissibles à \mathcal{V}_0 (vérifiant les conditions aux limites homogènes) ainsi que l'espace des pressions \mathcal{P} .

$$\mathcal{V} = \left\{ \vec{v} \in \left(H^1(\Omega) \right)^3, \vec{v}|_{\partial \Omega_v} = \vec{v}_0 \text{ sur } \Omega \right\}$$
(3.18)

$$\mathcal{V}^{0} = \left\{ \vec{v}^{*} \in \left(H^{1}(\Omega) \right)^{3}, \vec{v}^{*} |_{\partial \Omega_{v}} = \vec{0} \text{ sur } \Omega \right\}$$
(3.19)

$$\mathcal{P} = L^2(\Omega) \tag{3.20}$$

 H^1 est l'espace de Sobolev et L^2 est l'espace de Lebesgue des fonctions de carré sommable sur Ω .

La formulation faible du problème mécanique s'obtient après deux étapes. La première consiste à multiplier les équations du problème fort par des fonctions tests $(\vec{v}^*, p^*) \in \mathcal{V}^0 \times \mathcal{P}$ et à les intégrer sur le domaine. La deuxième étape est l'utilisation du théorème de la divergence. Le problème se met alors sous la forme :

Trouver $(\vec{v}, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P}$ tels que :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \boldsymbol{s}(\vec{v}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\vec{v}^*) d\Omega - \int_{\Omega} p \vec{\nabla} . \vec{v}^* d\Omega - \int_{\partial \Omega_t} \vec{t}_0 . \vec{v}^* d\Gamma = 0 \\ \int_{\Omega} p^* \left(-\vec{\nabla} . \vec{v} - \frac{\dot{p}}{\kappa(1 - hD)} - \frac{h\dot{D}}{\kappa(1 - hD)^2} p \right) d\Omega = 0 \\ \forall (\vec{v}^*, p^*) \in \mathcal{V}^0 \times \mathcal{P} \end{cases}$$
(3.21)

L'existence et l'unicité de la solution pour ce problème sont obtenues sous les conditions du théorème de Brezzi dont découle la condition *inf-sup* de stabilité. Pour l'équation quasi compressible, la démonstration de cette condition est présentée dans (Brezzi, et al., 1991).

3.2.3 Discrétisation spatiale par éléments finis

Le problème mécanique faible est résolu en utilisant la méthode des éléments finis qui consiste en une approximation des espaces continus de dimensions infinies \mathcal{V} et \mathcal{P} par des espaces discrets $\mathcal{V}_h \subset$ \mathcal{V} et $\mathcal{P}_h \subset \mathcal{P}$ dans lesquels se trouvent les solutions approchées (\vec{v}_h, p_h) de (\vec{v}, p) . Le domaine Ω est alors décomposé en éléments simples. La réunion de ces éléments forme la triangularisation du domaine Ω et définit le domaine discrétisé Ω_h . Nous avons donc :

$$\Omega_h = \bigcup_e \Omega_e , e \in \mathcal{E} \subset \mathbb{N}$$
(3.22)

 Ω_e correspond à un élément de la triangularisation. \mathcal{E} est l'ensemble des éléments (topologie). L'expression de la forme faible du problème dans les espaces discrétisés donne le système suivant :

Trouver $(\vec{v}_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{P}_h$ tels que :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_{h}} \boldsymbol{s}(\vec{v}_{h}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\vec{v}_{h}^{*}) d\Omega_{h} - \int_{\Omega_{h}} p_{h} \vec{\nabla} . \vec{v}_{h}^{*} d\Omega_{h} - \int_{\partial \Omega_{h_{t}}} \vec{t}_{0} . \vec{v}_{h}^{*} d\Gamma_{h} = 0 \\ \int_{\Omega_{h}} p_{h}^{*} \left(-\vec{\nabla} . \vec{v}_{h} - \frac{\dot{p}_{h}}{\kappa(1 - hD)} - \frac{h\dot{D}}{\kappa(1 - hD)^{2}} p_{h} \right) d\Omega_{h} = 0 \\ \forall (\vec{v}_{h}^{*}, p_{h}^{*}) \in \mathcal{V}_{h}^{0} \times \mathcal{P}_{h} \end{cases}$$
(3.23)

L'opération de discrétisation consiste donc à passer du problème faible aux dérivées partielles (3.21) au problème discret (3.23). L'efficacité et la précision des résultats obtenus lors de la résolution du problème discret sont directement reliées aux choix des espaces d'approximation \mathcal{V}_h et \mathcal{P}_h , i.e. dans le choix des fonctions d'interpolation associées aux inconnues en vitesse et pression.

3.2.3.1 Formulation P1+/P1

Le choix du type d'éléments finis et du type d'interpolation est très important. Les logiciels de Forge2005[®] utilisent les éléments finis mixtes P1+/P1 en vitesse – pression. Il s'agit du plus petit élément mixte compatible au sens de Brezzi-Babuska (Babuska, 1973). C'est un élément tétraédrique 3D linéaire, initialement développé pour l'étude du problème de Stokes (Arnold, et al., 1984), dont l'interpolation en vitesse est enrichie par l'ajout d'un degré de liberté supplémentaire au centre de l'élément, aussi appelé « bulle ». La figure 3.3 illustre les degrés de liberté de cet élément :



Figure 3.3 : Degrés de liberté en vitesse et en pression pour l'élément tétraédrique P1+/P1

Le champ de vitesse interpolé \vec{v}_h sur l'élément P1+/P1 se décompose en une partie linéaire \vec{v}_l et une partie bulle \vec{v}_b correspondant à l'ajout du degré de liberté interne. Cette décomposition est unique et s'écrit :

$$\vec{v}_h = \vec{v}_l + \vec{v}_b$$
, où $\vec{v}_h \in \mathcal{V}_h = \mathcal{L}_h \oplus \mathcal{B}_h$ (3.24)

Avec les espaces discrets définis par :

$$\mathcal{L}_{h} = \left\{ \vec{v}_{l} \in \left(C^{0}(\Omega_{h}) \right)^{3}, \vec{v}_{l}|_{\Omega_{e}} \in \left(P^{1}(\Omega_{e}) \right)^{3}, \vec{v}_{l}|_{\partial \Omega_{e}} = \vec{v}_{0}, \forall e \in \mathcal{E} \right\}$$
(3.25)

$$\mathcal{L}_{h}^{0} = \left\{ \vec{v}_{l}^{*} \in \mathcal{V}^{0} \cap \left(\mathcal{C}^{0}(\Omega_{h}) \right)^{3}, \vec{v}_{l}^{*}|_{\Omega_{e}} \in \left(P^{1}(\Omega_{e}) \right)^{3}, \vec{v}_{l}^{*}|_{\partial\Omega_{e}} = \vec{0}, \forall e \in \mathcal{E} \right\}$$
(3.26)

$$\mathcal{P}_{h} = \left\{ p_{h} \in L^{2}(\Omega_{h}) \cap C^{0}(\Omega_{h}), p_{h}|_{\Omega_{e}} \in P^{1}(\Omega_{e}), \forall e \in \mathcal{E} \right\}$$
(3.27)

 \mathcal{B}_h est l'espace d'interpolation de la fonction bulle. Cette fonction bulle est définie comme étant linéaire par morceaux sur Ω_e et s'annulant sur le bord (Coupez, 1991). L'espace d'interpolation s'écrit alors :

$$\mathcal{B}_{h} = \left\{ \vec{v}_{b} \in \left(\mathcal{C}^{0}(\Omega_{h}) \right)^{3}, \vec{v}_{b} |_{\partial \Omega_{e}} = \vec{0}, \forall e \in \mathcal{E}, \vec{v}_{b} |_{\Omega_{e_{i}}} \in \left(P^{1}(\Omega_{e_{i}}) \right)^{3}, i = 1, \dots, 4 \right\}$$
(3.28)

 Ω_{e_i} , i = 1, ..., 4 représentent dans tout tétraèdre de la triangularisation, les sous-tétraèdres dont le centre du tétraèdre est un sommet commun.



Figure 3.4 : Elément de référence P1+/P1 et sous-tétraèdres associés

Par conséquent, les champs de vitesse et de pression s'écrivent en un point de l'espace \vec{x} comme :

$$\vec{v}_h(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} N_k^l(\vec{x}) \vec{V}_k^l + \sum_{j=1}^{Nbelt} N_j^b(\vec{x}) \vec{V}_j^b$$
(3.29)

$$p_h(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} N_k^l(\vec{x}) P_k$$
(3.30)

 $N_k^l(\vec{x}) \in \mathcal{L}_h, k = 1..Nbnoe$ sont les fonctions d'interpolation des champs linéaires vitesse et pression associées au nœud $k. N_j^b(\vec{x}) \in \mathcal{B}_h, j = 1..Nbelt$ est la fonction bulle associée à l'élément $j. \vec{V}_k^l$ est la valeur de la vitesse au nœud $k. \vec{V}_j^b$ est la valeur nodale de la vitesse associée au nœud central. P_k est la pression associée au nœud k. Les champs de vitesse et de pression sont donnés sur l'élément Ω_e par :

$$\vec{v}_{h}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{4} N_{k}^{l}(\vec{x}) \vec{V}_{k}^{l} + N^{b}(\vec{x}) \vec{V}^{b}$$
(3.31)

et

$$p_h(\vec{x}) = \sum_{k=1}^4 N_k^l(\vec{x}) P_k$$
(3.32)

Pour un élément de référence (Fig. 3.4), les fonctions d'interpolations linéaires et la fonction bulle associée sont données par :

$$\begin{cases} N_{1}^{l} = \xi \\ N_{2}^{l} = \eta \\ N_{3}^{l} = \zeta \\ N_{4}^{l} = 1 - \xi - \eta - \zeta \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \sup \Omega_{e_{1}} & N_{1}^{b} = 4\xi \\ \sup \Omega_{e_{2}} & N_{2}^{b} = 4\eta \\ \sup \Omega_{e_{3}} & N_{3}^{b} = 4\zeta \\ \sup \Omega_{e_{4}} & N_{4}^{b} = 4(1 - \xi - \eta - \zeta) \end{cases}$$
(3.33)

Le problème discrétisé s'écrit alors :

Trouver $(\vec{v}_l, \vec{v}_b, p_h) \in \mathcal{L}_h \times \mathcal{B}_h \times \mathcal{P}_h$ tels que :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_{h}} \boldsymbol{s}(\vec{v}_{l}+\vec{v}_{b}): \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\vec{v}_{l}^{*}) d\Omega_{h} - \int_{\Omega_{h}} p_{h} \vec{\nabla}. \vec{v}_{l}^{*} d\Omega_{h} - \int_{\partial\Omega_{h_{t}}} \vec{t}_{0}. \vec{v}_{l}^{*} d\Gamma_{h} = 0 \\ \int_{\Omega_{h}} \boldsymbol{s}(\vec{v}_{l}+\vec{v}_{b}): \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\vec{v}_{b}^{*}) d\Omega_{h} - \int_{\Omega_{h}} p_{h} \vec{\nabla}. \vec{v}_{b}^{*} d\Omega_{h} = 0 \\ \int_{\Omega_{h}} p_{h}^{*} \left(-\vec{\nabla}. (\vec{v}_{l}+\vec{v}_{b}) - \frac{\dot{p}_{h}}{\kappa(1-hD)} - \frac{h\dot{D}}{\kappa(1-hD)^{2}} p_{h}\right) d\Omega_{h} = 0 \\ \forall (\vec{v}_{l}^{*}, \vec{v}_{b}^{*}, p_{h}^{*}) \in \mathcal{L}_{h}^{0} \times \mathcal{B}_{h} \times \mathcal{P}_{h} \end{cases}$$
(3.34)

D'après la définition de \mathcal{B}_h , nous avons :

$$-\int_{\partial\Omega_{h_t}} \vec{t}_0.\,\vec{v}_b^* d\Gamma_h = 0 \tag{3.35}$$

Le système d'équations à résoudre est alors un système couplé à cause de la dépendance du déviateur des contraintes au champ de vitesse total. Il est possible de résoudre un tel système pour des problèmes élasto-plastiques (Gay, 1995). Mais en utilisant une propriété spécifique de la bulle (Aliaga, 2000), il est possible de découpler les équations et aboutir à une formulation originale de l'élément P1+/P1 appelée mini-élément.

3.2.3.2 Formulation mini-élément

La bulle possède une propriété qui permet de diminuer grandement le temps de calcul en négligeant certains termes de la matrice locale. Cette propriété est la suivante : pour tout tenseur constant sur l'élément, $\boldsymbol{C} \in P^0(\Omega_h)$, nous avons :

$$\int_{\Omega_h} \boldsymbol{C} : \vec{\nabla} \vec{v}_b \, d\Omega_h = 0 \tag{3.36}$$

Cela entraı̂ne que pour toute composante linéaire de la vitesse $\vec{v}_l \in \mathcal{L}_h$, nous avons :

$$\int_{\Omega_h} \vec{\nabla} \vec{v}_l : \vec{\nabla} \vec{v}_b \, d\Omega_h = 0 \quad \forall \vec{v}_b \in \mathcal{B}_h \tag{3.37}$$

Il est alors possible de prouver (Aliaga, 2000) que le multiplicateur plastique ne dépend plus que de la partie linéaire de la vitesse, i.e. $\dot{\lambda}(\dot{e}(\vec{v}_h)) = \dot{\lambda}(\dot{e}(\vec{v}_l))$.

En tenant compte de la propriété de la bulle, le problème mécanique se formule finalement comme : Trouver $(\vec{v}_l, \vec{v}_b, p_h) \in \mathcal{L}_h \times \mathcal{B}_h \times \mathcal{P}_h$ tels que :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_{h}} \boldsymbol{s}(\vec{v}_{l}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\vec{v}_{l}^{*}) d\Omega_{h} - \int_{\Omega_{h}} p_{h} \vec{\nabla} . \vec{v}_{l}^{*} d\Omega_{h} - \int_{\partial \Omega_{h_{t}}} \vec{t}_{0} . \vec{v}_{l}^{*} d\Gamma_{h} = 0 \\ \int_{\Omega_{h}} \boldsymbol{s}(\vec{v}_{b}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\vec{v}_{b}^{*}) d\Omega_{h} - \int_{\Omega_{h}} p_{h} \vec{\nabla} . \vec{v}_{b}^{*} d\Omega_{h} = 0 \\ \int_{\Omega_{h}} p_{h}^{*} \left(-\vec{\nabla} . (\vec{v}_{l} + \vec{v}_{b}) - \frac{\dot{p}_{h}}{\kappa(1 - hD)} - \frac{h\dot{D}}{\kappa(1 - hD)^{2}} p_{h} \right) d\Omega_{h} = 0 \\ \forall (\vec{v}_{l}^{*}, \vec{v}_{b}^{*}, p_{h}^{*}) \in \mathcal{L}_{h}^{0} \times \mathcal{B}_{h} \times \mathcal{P}_{h} \end{cases}$$
(3.38)

En considérant que les fonctions tests correspondent aux fonctions d'interpolation (méthode de Galerkin standard), le problème précédent forme un système d'équations non linéaires d'inconnues \vec{v}_l , \vec{v}_b et p_h qui est évalué sur chaque élément Ω_e de la discrétisation. Ce système peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{e}^{l}(\vec{v}_{e}^{l}, p_{e}^{h}) &= \mathbf{R}_{e}^{ll} + \mathbf{0} + \mathbf{R}_{e}^{lp} = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{e}^{b}(\vec{v}_{e}^{b}, p_{e}^{h}) &= \mathbf{0} + \mathbf{R}_{e}^{bb} + \mathbf{R}_{e}^{bp} = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{e}^{p}(\vec{v}_{e}^{l}, \vec{v}_{e}^{b}, p_{e}^{h}) &= \mathbf{R}_{e}^{pl} + \mathbf{R}_{e}^{pb} + \mathbf{R}_{e}^{pp} = \mathbf{0} \end{cases}$$
(3.39)

Les différents termes de ce système sont des matrices. \mathbf{R}_e^l , \mathbf{R}_e^b et \mathbf{R}_e^p sont respectivement les résidus en vitesse linéaire, en terme bulle et en pression. L'indice *e* indique que les termes sont calculés au niveau de chaque élément. Les expressions des différentes matrices qui composent le système local après discrétisation sont données sur l'élément Ω_e par :

$$\begin{aligned} R_{e,nk}^{ll} &= \int_{\Omega_e} s_{ij}^{l} B_{ijkn}^{l} J(\vec{x}) d\Omega_e - \int_{\partial\Omega_e} T_{0,k} N_n^{l}(\vec{x}) J'(\vec{x}) d\Gamma_0 \\ R_{e,nk}^{lp} &= -\int_{\Omega_e} P_m^h N_m^{l}(\vec{x}) \frac{\partial N_n^{l}}{\partial x_k}(\vec{x}) J(\vec{x}) d\Omega_e \\ R_{e,k}^{bb} &= \int_{\Omega_e} s_{ij}^{b} B_{ijk}^{b} J(\vec{x}) d\Omega_e \\ R_{e,k}^{bp} &= -\int_{\Omega_e} P_m^h N_m^{l}(\vec{x}) \frac{\partial N^b}{\partial x_k}(\vec{x}) J(\vec{x}) d\Omega_e \\ R_{e,k}^{pl} &= -\int_{\Omega_e} N_k^{l}(\vec{x}) \frac{\partial N^{l}}{\partial x_j}(\vec{x}) V_j^{l} J(\vec{x}) d\Omega_e \\ R_{e,k}^{pb} &= -\int_{\Omega_e} N_k^{l}(\vec{x}) \frac{\partial N^b}{\partial x_j}(\vec{x}) V_j^{b} J(\vec{x}) d\Omega_e \\ R_{e,k}^{pb} &= -\int_{\Omega_e} N_k^{l}(\vec{x}) \frac{\partial N^b}{\partial x_j}(\vec{x}) V_j^{b} J(\vec{x}) d\Omega_e \\ R_{e,k}^{pp} &= -\int_{\Omega_e} N_k^{l}(\vec{x}) N_m^{l}(\vec{x}) \left(\frac{\dot{P}_m^h}{\kappa_m (1 - hD_m)} + \frac{h\dot{D}_m}{\kappa_m (1 - hD_m)^2} P_m^h \right) J(\vec{x}) d\Omega_e \end{aligned}$$

Les intégrales précédentes sont définies par rapport à l'élément de référence. $J(\vec{x})$ et $J'(\vec{x})$ sont respectivement les déterminants des matrices Jacobiennes volumiques et surfaciques de la transformation entre l'élément courant et l'élément de référence.

Les tenseurs B_{ijkn}^{l} et B_{ijkn}^{b} sont définis à partir des équations (3.4) et (3.31) comme :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = B^{l}_{ijkn} \, v^{l}_{kn} + B^{b}_{ijk} \, v^{b}_{k} \tag{3.41}$$

$$B_{ijkn}^{l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_{n}^{l}}{\partial x_{j}} \delta_{ik} + \frac{\partial N_{n}^{l}}{\partial x_{i}} \delta_{jk} \right); \quad B_{ijk}^{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N^{b}}{\partial x_{j}} \delta_{ik} + \frac{\partial N^{b}}{\partial x_{i}} \delta_{jk} \right)$$
(3.42)

Après assemblage des matrices locales de l'ensemble des éléments, nous obtenons le système global non-linéaire suivant :

$$\left(\boldsymbol{R} \left(\vec{v}^{l}, \vec{v}^{b}, p^{h} \right) \right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}^{l} \left(\vec{v}^{l}, p^{h} \right) \\ \boldsymbol{R}^{b} \left(\vec{v}^{b}, p^{h} \right) \\ \boldsymbol{R}^{p} \left(\vec{v}^{l}, \vec{v}^{b}, p^{h} \right) \end{pmatrix} = (\boldsymbol{0})$$
(3.43)

3.2.4 Discrétisation temporelle et résolution du problème

Comme présenté dans le paragraphe 3.2.1.1, l'espace temporel est discrétisé en plusieurs incréments. Le problème mécanique revient alors à résoudre l'équilibre du système sur chaque incrément. A l'instant t, le système est supposé être à l'équilibre. L'équilibre est alors perturbé en actualisant son chargement et le nouveau problème correspond alors à la détermination des champs de vitesse et de pression qui permettent de respecter l'équilibre du système à l'instant $t + \Delta t$. Soit $(\vec{v}_n^l, \vec{v}_n^b, p_n^h)$ les valeurs des champs respectant l'équilibre à l'instant t. Les champs $(\vec{v}_{n+1}^l, \vec{v}_{n+1}^b, p_{n+1}^h)$ satisfaisant l'équilibre à l'instant $t + \Delta t$ sont définis de façon incrémentale par :

$$\begin{cases} \vec{v}_{n+1}^{l} = \vec{v}_{n}^{l} + \Delta \vec{v}^{l} \\ \vec{v}_{n+1}^{b} = \vec{v}_{n}^{b} + \Delta \vec{v}^{b} \\ p_{n+1}^{h} = p_{n}^{h} + \Delta p^{h} \end{cases}$$
(3.44)

 $(\vec{v}_{n+1}^l, \vec{v}_{n+1}^b, p_{n+1}^h)$ sont les inconnues à déterminer. Plaçons-nous au niveau d'un élément du maillage. Nous devons donc résoudre le système local non linéaire suivant :

$$\boldsymbol{R}_{e,n+1} = \boldsymbol{R}_{e} \left(\vec{v}_{e,n+1}^{l}, \vec{v}_{e,n+1}^{b}, p_{e,n+1}^{h} \right) = (\boldsymbol{0})$$
(3.45)

Pour ce faire, nous utilisons un schéma itératif de Newton-Raphson. Soit $(\vec{v}_{e,k}^l, \vec{v}_{e,k}^b, p_{e,k}^h)$, la solution obtenue à l'incrément k, la solution exacte est donnée par :

$$\left(\vec{v}_{e,n+1}^{l}, \vec{v}_{e,n+1}^{b}, p_{e,n+1}^{h}\right) = \left(\vec{v}_{e,k}^{l} + \delta\vec{v}_{e,k}^{l}, \vec{v}_{e,k}^{b} + \delta\vec{v}_{e,k}^{b}, p_{e,k}^{h} + \delta p_{e,k}^{h}\right)$$
(3.46)

 $(\delta \vec{v}_{e,k}^l, \delta \vec{v}_{e,k}^b, \delta p_{e,k}^h)$ quantifie l'écart entre la solution exacte et la solution itérée. Il est alors possible de linéariser (3.46) au premier ordre, en écrivant simplement que :

$$\boldsymbol{R}_{e,n+1} = \boldsymbol{R}_{e,n+1}^{k} + \delta \vec{v}_{e,k}^{l} \frac{\partial \boldsymbol{R}_{e,n+1}^{k}}{\partial \vec{v}_{e,k}^{l}} + \delta \vec{v}_{e,k}^{b} \frac{\partial \boldsymbol{R}_{e,n+1}^{k}}{\partial \vec{v}_{e,k}^{b}} + \delta p_{e,k}^{h} \frac{\partial \boldsymbol{R}_{e,n+1}^{k}}{\partial p_{e,k}^{h}} = \boldsymbol{0}$$
(3.47)

A chaque itération de l'algorithme de résolution, le système d'équations (3.47) se ramène à la résolution du système linéaire suivant (les indices k et n + 1 ne sont plus marqués afin d'alléger les notations) :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{e}^{ll} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}_{e}^{lp} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}_{e}^{bb} & \boldsymbol{H}_{e}^{bp} \\ \left(\boldsymbol{H}_{e}^{lp}\right)^{T} & \left(\boldsymbol{H}_{e}^{bp}\right)^{T} & \boldsymbol{H}_{e}^{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta \vec{v}_{e}^{l} \\ \delta \vec{v}_{e}^{b} \\ \delta p_{e}^{h} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_{e}^{l} \\ \boldsymbol{R}_{e}^{b} \\ \boldsymbol{R}_{e}^{p} \end{pmatrix}$$
(3.48)

Dans ce système, l'ensemble des matrices $H_e^{\chi y}$ forme la matrice de raideur, ou matrice Hessienne, qui est assemblée à partir des sous-matrices de raideur données par :

$$\boldsymbol{H}_{e}^{xy} = \frac{\partial \boldsymbol{R}_{e}^{xy}}{\partial z} \tag{3.49}$$

 $\mathsf{Ou}(xy) = \{(ll); (lp); (bb); (bp); (pl); (pb); (pp)\} \text{ et } z = (\vec{v}_e^l; \vec{v}_e^b; p_e^h).$

En pratique, il est possible de ne plus faire apparaître explicitement la contribution de la bulle en utilisant la méthode dite de « condensation de la bulle » (Aliaga, 2000). Cela consiste à remarquer que :

$$\delta \vec{v}_e^b = - \left(\boldsymbol{H}_e^{bb} \right)^{-1} \left(\boldsymbol{R}_e^b + \boldsymbol{H}_e^{bp} \, \delta p_e^h \right) \tag{3.50}$$

En remplaçant cette expression dans le système (3.48), nous obtenons alors :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{e}^{ll} & \boldsymbol{H}_{e}^{lp} \\ \left(\boldsymbol{H}_{e}^{lp}\right)^{T} & \boldsymbol{H}_{e}^{pp} - \left(\boldsymbol{H}_{e}^{bp}\right)^{T} \left(\boldsymbol{H}_{e}^{bb}\right)^{-1} \boldsymbol{H}_{e}^{bp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta \vec{v}_{e}^{l} \\ \delta p_{e}^{h} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_{e}^{l} \\ \boldsymbol{R}_{e}^{p} - \left(\boldsymbol{H}_{e}^{bp}\right)^{T} \left(\boldsymbol{H}_{e}^{bb}\right)^{-1} \boldsymbol{R}_{e}^{b} \end{pmatrix}$$
(3.51)

Il est encore possible de diminuer le nombre de termes à calculer grâce au fait que certains d'entre eux sont linéaires. En effet, nous avons :

$$\boldsymbol{R}_{e}^{pb} = \left(\boldsymbol{H}_{e}^{bp}\right)^{T} \vec{v}_{e}^{b}, \quad \boldsymbol{R}_{e}^{bb} = \boldsymbol{H}_{e}^{bb} \vec{v}_{e}^{b}, \quad \boldsymbol{R}_{e}^{bp} = \boldsymbol{H}_{e}^{bp} p_{e}^{h}$$
(3.52)

Par conséquent, \boldsymbol{R}_{e}^{p} et \boldsymbol{R}_{e}^{b} peuvent être réécrits comme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{e}^{b} &= \boldsymbol{H}_{e}^{bb} \, \vec{v}_{e}^{b} + \boldsymbol{H}_{e}^{bp} \, \boldsymbol{p}_{e}^{h} \\ \boldsymbol{R}_{e}^{p} &= \boldsymbol{R}_{e}^{pl} + \boldsymbol{R}_{e}^{pp} + \left(\boldsymbol{H}_{e}^{bp}\right)^{T} \vec{v}_{e}^{b} \end{aligned} \tag{3.53}$$

En posant :

$$\boldsymbol{C}_{e} = \left(\boldsymbol{H}_{e}^{bp}\right)^{T} \left(\boldsymbol{H}_{e}^{bb}\right)^{-1} \boldsymbol{H}_{e}^{bp}$$
(3.54)

Le système local qui est résolu est le suivant :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{e}^{ll} & \boldsymbol{H}_{e}^{lp} \\ \left(\boldsymbol{H}_{e}^{lp}\right)^{T} & \boldsymbol{H}_{e}^{pp} - \boldsymbol{C}_{e} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta \vec{v}_{e}^{l} \\ \delta p_{e}^{h} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_{e}^{l} \\ \boldsymbol{R}_{e}^{pl} + \boldsymbol{R}_{e}^{pp} - \boldsymbol{C}_{e} p_{e}^{h} \end{pmatrix}$$
(3.55)

Grâce à cette substitution, la taille des matrices de raideur locales passe d'une dimension (19x19) à (16x16).

Les termes nécessaires dans le calcul du système (3.55) sont donnés par :

$$\begin{aligned} H_{e,nklm}^{ll} &= \frac{\partial R_{e,nk}^{ll}}{\partial v_{e,lm}^{l}} = \int_{\Omega_{e}} B_{jkn}^{l} C_{ijpq}^{l} B_{pqlm}^{l} J(\vec{x}) d\Omega_{e} - \int_{\partial\Omega_{e}} \frac{\partial T_{0,k}}{\partial v_{lm}^{l}} N_{n}^{l}(\vec{x}) J^{'(\vec{x})} d\Gamma_{0} \\ H_{e,nkl}^{lp} &= \frac{\partial R_{e,nk}^{lp}}{\partial p_{e,l}^{h}} = -\int_{\Omega_{e}} N_{l}^{l}(\vec{x}) \frac{\partial N_{n}^{l}}{\partial x_{k}} (\vec{x}) J(\vec{x}) d\Omega_{e} \\ H_{e,kl}^{bb} &= \frac{\partial R_{e,k}^{bb}}{\partial v_{e,l}^{b}} = \int_{\Omega_{e}} B_{ijk}^{b} C_{ijpq}^{b} B_{pql}^{b} J(\vec{x}) d\Omega_{e} \\ H_{e,kl}^{bp} &= \frac{\partial R_{e,k}^{bp}}{\partial p_{e,l}^{h}} = -\int_{\Omega_{e}} N_{l}^{l}(\vec{x}) \frac{\partial N^{b}}{\partial x_{k}} (\vec{x}) J(\vec{x}) d\Omega_{e} \\ H_{e,kl}^{pp} &= \frac{\partial R_{e,k}^{pp}}{\partial p_{e,l}^{h}} = -\int_{\Omega_{e}} N_{k}^{l}(\vec{x}) N_{l}^{l}(\vec{x}) \left(\frac{1}{\kappa_{l}(1-hD_{l})} + \frac{h\dot{D}_{l}}{\kappa_{l}(1-hD_{l})^{2}}\right) J(\vec{x}) d\Omega_{e} \end{aligned}$$

$$(3.56)$$

Après calcul des matrices locales sur l'ensemble des éléments et assemblage de celles-ci, nous obtenons le système global linéaire :

$$[\boldsymbol{H}] \begin{pmatrix} \delta \vec{v}^l \\ \delta p^h \end{pmatrix} = -(\boldsymbol{R}) \tag{3.57}$$

Où *H* est la matrice Hessienne globale et *R* est le résidu global. Le système (3.57) est résolu de manière itérative par la méthode de résidu minimal pré-conditionné par une décomposition incomplète de Cholesky. Une technique de stockage compact de la matrice du système est utilisée afin d'optimiser le stockage mémoire. Une fois la résolution réalisée, il n'est plus nécessaire de reconstruire le champ bulle. En effet, la bulle n'apporte que des corrections d'ordre 2 alors que l'approximation éléments finis retenue est en théorie d'ordre 1. Par conséquent, il est inutile d'en tenir compte en dehors du terme C_e .

A la fin de la résolution, nous obtenons alors une solution itérée $(\vec{v}_{n+1}^{l,k+1}, p_{n+1}^{h,k+1})$:

$$\begin{cases} \vec{v}_{n+1}^{l,k+1} = \vec{v}_{n+1}^{l,k} + \delta \vec{v}_{n+1}^{l,k} \\ p_{n+1}^{h,k+1} = p_{n+1}^{h,k} + \delta p_{n+1}^{h,k} \end{cases}$$
(3.58)

Sur celle-ci, il est possible de vérifier l'équilibre mécanique :

$$\left\|\boldsymbol{R}_{n+1}^{k+1}\right\| = \epsilon \tag{3.59}$$

Si l'équilibre n'est pas atteint, i.e. $\epsilon > tolérance$, le processus est réitéré en considérant :

$$\begin{cases} \vec{v}_{n+1}^{l,k} = \vec{v}_{n+1}^{l,k+1} \\ p_{n+1}^{h,k} = p_{n+1}^{h,k+1} \end{cases}$$
(3.60)

Cette méthode est utilisée jusqu'à convergence de l'algorithme $\|\mathbf{R}_{n+1}^{k+1}\| = \epsilon < tolérance$. La tolérance est fixée soit par défaut, soit par l'utilisateur.



L'algorithme de résolution est illustré sur la figure 3.5 qui suit :

Figure 3.5 : Schéma de résolution implicite incrémentale par l'algorithme de Newton-Raphson

Dans les expressions (3.56), nous voyons apparaître le module tangent discret linéaire et le module tangent discret bulle qui sont définis par :

$$C_{ijpq}^{l} = \frac{\partial \dot{s}_{ij}(\vec{v}^{l})}{\partial \dot{\varepsilon}_{pq}(\vec{v}^{l})} \Leftrightarrow {}^{4}C^{l} = \frac{\partial \dot{s}(\vec{v}^{l})}{\partial \dot{\epsilon}(\vec{v}^{l})}$$

$$C_{ijpq}^{b} = \frac{\partial \dot{s}_{ij}(\vec{v}^{b})}{\partial \dot{\varepsilon}_{pq}(\vec{v}^{b})} \Leftrightarrow {}^{4}C^{b} = \frac{\partial \dot{s}(\vec{v}^{b})}{\partial \dot{\epsilon}(\vec{v}^{b})}$$
(3.61)

Ces termes sont à déterminer à chaque itération de l'algorithme de Newton-Raphson à travers l'intégration de la loi de comportement qui sera présentée dans la section qui suit.

Une fois le champ de vitesse déterminé, la position du maillage dans l'espace est actualisée selon un schéma d'intégration d'Euler explicite. La nouvelle position de chaque nœud du maillage est définie par :

$$\vec{x}(t + \Delta t) = \vec{x}(t) + \Delta t \ \vec{v}(t) \tag{3.62}$$

3.2.5 Intégration locale des équations comportementales

Cette section décrit un algorithme pour l'intégration numérique du modèle matériau élasto-plastique endommageable développé dans le chapitre 2. Pour rappel, les équations à intégrer sont les suivantes :

• Pour une charge ou une décharge élastique $\dot{\lambda} = 0$:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{s} = 2\mu(1 - hD)\boldsymbol{e}^{e} \\ \boldsymbol{p} = -\kappa(1 - hD)\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{e}) \\ \dot{\boldsymbol{D}} = 0 \end{cases}$$
(3.63)

• Pour une charge élasto-plastique $\dot{\lambda} > 0$:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda}\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{s} = 2\mu(1 - hD)\boldsymbol{e}^{e} \\ \boldsymbol{p} = -\kappa(1 - hD)\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{e}) \\ \dot{\boldsymbol{D}} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - hD} \left(\frac{Y}{S_{0}}\right)^{b} \end{cases}$$
(3.64)

Il est à noter que les équations (3.64) restent valables dans le cas d'un chargement élastique en considérant $\dot{\lambda} = 0$. A partir de ces relations, il est possible de déterminer la loi de comportement reliant \dot{s} et $\dot{\varepsilon}$ sous la forme différentielle suivante :

$$\dot{\boldsymbol{s}} = {}^{4}\boldsymbol{C}: \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.65}$$

 ${}^{4}C$ est un tenseur d'ordre 4 appelé module tangent continu. L'expression du module tangent continu est donnée par :

$${}^{4}\boldsymbol{\mathcal{C}} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{s}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = 2\mu(1-hD)\left(\left({}^{4}\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}\right) - \boldsymbol{s} \otimes \boldsymbol{s}(\gamma - \gamma_{d})\right)$$
(3.66)

Où γ et γ_d sont donnés par :

$$\gamma = \frac{1}{\frac{2}{3}J_2(\boldsymbol{\sigma})^2 \left(1 + \frac{(1-hD)}{3\mu}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\lambda}\right)}$$
(3.67)

$$\gamma_d = \gamma \frac{J_2(\boldsymbol{\sigma})}{3\mu(1-hD)^2} \left(\frac{Y}{S_0}\right)^b$$
(3.68)

L'algorithme utilisé, pour intégrer ces équations, est basé sur le concept de prédiction élastique/correction plastique qui est largement utilisé dans l'intégration des modèles de comportements élasto-plastiques avec ou sans endommagement (Simo, et al., 1985), (Benallal, et al., 1988), (Doghri, 1993), (Gay, 1995), (Aliaga, 2000), (Andrade Pires, et al., 2004). Dans ce manuscrit, nous allons considérer le schéma de retour radial correspondant à un schéma d'intégration temporel d'Euler implicite.

Nous remarquons tout d'abord que l'équation de conservation de la masse fait intervenir la pression hydrostatique. Cette équation est résolue dans la méthode éléments finis mixte développée dans les sections précédentes. L'intégration de la pression dans les systèmes (3.63) et (3.64) est donc réalisée dans la recherche de l'équilibre (3.57).

Considérons un point d'intégration d'un élément du maillage éléments finis. Dans l'incrément de temps Δt compris entre $[t, t + \Delta t]$, l'incrément de déformation est donné et vaut :

$$\Delta t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} = \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n \tag{3.69}$$

De plus, nous supposons connues les valeurs de s_n , p_n , D_n , $\bar{\varepsilon}_n$ et λ_n qui vérifient l'équilibre du système à l'instant t, ainsi que la pression hydrostatique p_{n+1} à l'instant $t + \Delta t$. L'intégration locale des équations du comportement (3.64) doit nous permettre d'obtenir les valeurs de s_{n+1} , D_{n+1} , $\bar{\varepsilon}_{n+1}$ et λ_{n+1} à l'instant $t + \Delta t$. Pour mettre en œuvre cette intégration, nous nous placerons dans l'espace des contraintes effectives :

$$\begin{cases} \tilde{s}_{n} = \frac{s_{n}}{1 - hD_{n}}, \tilde{s}_{n+1} = \frac{s_{n+1}}{1 - hD_{n+1}} \\ \tilde{p}_{n} = \frac{p_{n}}{1 - hD_{n}}, \tilde{p}_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{1 - hD_{n+1}} \end{cases}$$
(3.70)

3.2.5.1 Prédiction élastique

La première étape de l'algorithme est l'évaluation de la prédiction élastique. Pour ce faire, la prédiction élastique suppose que l'incrément de déformation est entièrement élastique et que l'ensemble des variables internes ne varie pas au cours de l'incrément. Cela se traduit dans notre cas par le fait que l'incrément de déformation plastique ainsi que l'incrément d'endommagement sont nuls, i.e. $\Delta e^p = \mathbf{0}$ et $\Delta D = 0$. Il est alors possible de déterminer le prédicteur élastique pour le déviateur des contraintes équivalentes :

$$\tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^{t} = 2\mu(\boldsymbol{e}_{n}^{e} + \Delta \boldsymbol{e}) = \tilde{\boldsymbol{s}}_{n} + 2\mu\Delta\boldsymbol{e}$$
(3.71)

L'exposant $(.)^t$ dénote la prédiction élastique.

L'étape suivante de l'algorithme consiste à vérifier si la prédiction élastique est restée à l'intérieur de la surface de charge. Pour ce faire, nous calculons :

$$f_{n+1}^t = f(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^t, R_n) = J_2(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^t) - \sigma_0(\lambda_n)$$
(3.72)

Si $f_{n+1}^t \leq 0$, alors le chargement dans l'intervalle de temps étudié est purement élastique (Fig. 3.6a). Dans ce cas, les variables à calculer à l'instant $t + \Delta t$ sont données directement par :

$$\begin{cases} \tilde{s}_{n+1} = \tilde{s}_{n+1}^t \\ \lambda_{n+1} = \lambda_n \\ D_{n+1} = D_n \\ \Delta \boldsymbol{e}_{n+1}^e = \Delta \boldsymbol{e} \end{cases}$$
(3.73)

Dans le cas contraire, il faut déterminer la valeur des inconnues afin que le critère de cohérence soit respecté. Cela est réalisé au travers de la correction plastique.



Figure 3.6 Représentation dans l'espace des contraintes effectives d'un incrément : (a) élastique, (b) élasto-plastique

3.2.5.2 Correction plastique

La correction plastique consiste à venir reprojeter les variables sur la surface de charge afin que le critère de cohérence soit respecté (Fig. 3.6b). L'évaluation de la correction, à apporter au prédicteur élastique, est réalisée en plusieurs étapes. Tout d'abord, le déviateur des contraintes effectives est évalué à l'instant $t + \Delta t$:

$$\tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t - 2\mu \Delta \boldsymbol{e}^p = \tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t - \frac{2\mu\Delta\lambda}{1 - hD_{n+1}} \tilde{\boldsymbol{n}}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t - \frac{3\mu\Delta\lambda}{1 - hD_{n+1}} \frac{\tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}}{\mathsf{J}_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1})}$$
(3.74)

Nous pouvons remarquer que cette expression fait apparaître deux inconnues D_{n+1} et $\Delta\lambda$. Nous avons donc en tout trois inconnues \tilde{s}_{n+1} , D_{n+1} et $\Delta\lambda$ à déterminer. Nous disposons de trois équations qui relient les inconnues :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{s}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{t} - \frac{2\mu\Delta\lambda}{1 - hD_{n+1}} \tilde{\mathbf{n}}_{n+1} \\ f_{n+1} = J_{2}(\tilde{\mathbf{\sigma}}_{n+1}) - \sigma_{0}(\lambda_{n+1}) = 0 \\ D_{n+1} - D_{n} - \frac{\Delta\lambda}{1 - hD_{n+1}} \left(\frac{Y_{n+1}}{S_{0}}\right)^{b} = 0 \end{cases}$$
(3.75)

La première équation est l'expression du déviateur des contraintes effectives à l'instant t + 1, la deuxième est le critère de plasticité avec $f_{n+1} = f(\tilde{\sigma}_{n+1}, R_{n+1})$ et la dernière équation correspond à la loi d'évolution de l'endommagement. Pour résoudre ce système d'équations non linéaires, il est courant d'utiliser un schéma itératif de Newton-Raphson (Doghri, 1995) (Lemaitre, et al., 2005).

Il est possible de diminuer le nombre d'inconnues et le nombre d'équations à résoudre. La première méthode consiste à introduire l'évolution de la contrainte effective dans le critère de plasticité et ainsi faire disparaître l'inconnue \tilde{s}_{n+1} (Vaz Jr., et al., 2001), (Saanouni, et al., 2001). Certains auteurs

diminuent encore la taille du système à résoudre (de Souza Neto, 2002), (Andrade Pires, et al., 2003), (Mashayekhi, et al., 2005). Dans leur modèle, ils n'utilisent plus qu'une seule équation à une inconnue $\Delta\lambda$ en injectant le critère de plasticité dans la loi d'évolution de l'endommagement.

Dans ce manuscrit, nous utiliserons un système de deux équations à deux inconnues que nous nommerons « couplage fort ». Nous étudierons une alternative, qui sous l'hypothèse de non évolution de l'endommagement lors de la résolution de l'incrément plastique, nous permet de nous ramener à un système à une équation et une inconnue que nous appellerons « couplage faible » (Lestriez, 2003).

3.2.5.2.1 Système à deux équations : couplage fort

Repartons de notre système de trois équations non linéaires à trois inconnues \tilde{s}_{n+1} , $\Delta \lambda$ et D_{n+1} :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{s}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^{t} - \frac{2\mu\Delta\lambda}{1 - hD_{n+1}} \tilde{\mathbf{n}}_{n+1} \\ f_{n+1} = J_{2}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}) - \sigma_{0}(\lambda_{n+1}) = 0 \\ D_{n+1} - D_{n} - \frac{\Delta\lambda}{1 - hD_{n+1}} \left(\frac{Y_{n+1}}{S_{0}}\right)^{b} = 0 \end{cases}$$
(3.76)

D'après la définition de $\widetilde{\boldsymbol{n}}_{n+1}$, nous avons :

$$\widetilde{\boldsymbol{n}}_{n+1} = \frac{3}{2} \frac{\widetilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}}{J_2(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1})}$$
(3.77)

En combinant (3.77) et la définition du critère de plasticité (3.76), nous trouvons :

$$\tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1} = \frac{2}{3}\sigma_0 \tilde{\boldsymbol{n}}_{n+1} \tag{3.78}$$

En utilisant cette expression dans \tilde{s}_{n+1} , nous obtenons l'expression de la normale en fonction du prédicteur du déviateur des contraintes effectives :

$$\widetilde{\boldsymbol{n}}_{n+1} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t}{\frac{2}{3}\sigma_0 + \frac{2\mu\Delta\lambda}{1 - hD_{n+1}}}$$
(3.79)

Nous pouvons aussi réécrire \tilde{s}_{n+1} comme étant égal à :

$$\tilde{s}_{n+1} = \frac{\tilde{s}_{n+1}^{t}}{1 + \frac{3\mu}{\sigma_0} \frac{\Delta\lambda}{1 - hD_{n+1}}}$$
(3.80)

En injectant cette dernière équation dans le critère de plasticité, nous obtenons un système de deux équations non linéaires à deux inconnues $\Delta\lambda$, D_{n+1} :

$$\begin{cases} g_1 = f_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{s}_{n+1}^t : \tilde{s}_{n+1}^t - \sigma_0 - \frac{3\mu\Delta\lambda}{1 - hD_{n+1}} = 0\\ g_2 = D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\lambda}{1 - hD_{n+1}} \left(\frac{Y_{n+1}}{S_0}\right)^b = 0 \end{cases}$$
(3.81)

Ce système est résolu et linéarisé par un schéma itératif de Newton-Raphson. Cette méthode se décompose de la manière suivante. Soit $g_i(x_j) = 0$ le système d'équations à résoudre. Dans notre cas i = 1,2 et x_j correspond au vecteur des inconnues. Soit x_j^k , la solution du système à l'itération k, alors la solution exacte du système s'écrit :

$$x_j = x_j^k + \delta x_j^k \tag{3.82}$$

Dans cette relation, δx_j^k définit la quantité qui différencie la solution exacte de la solution itérée. En effectuant un développement de Taylor à l'ordre 1 du système (3.82), nous obtenons :

$$g_i(x_j) = g_i(x_j^k + \delta x_j^k) = g_i(x_j^k) + \delta x_j^k \frac{\partial g_i(x_j^k)}{\partial x_j^k} = 0$$
(3.83)

Nous aboutissons alors au système linéarisé suivant :

$$P_{ij}\,\delta x_j^k = -g_i\left(x_j^k\right) \tag{3.84}$$

 P_{ij} est la matrice Jacobienne. Il nous faut donc définir les dérivées des deux équations vis-à-vis des deux inconnues. Pour la première équation du système, nous obtenons :

$$P_{11} = \frac{\partial g_1}{\partial \Delta \lambda} = -\frac{\partial \sigma_0}{\partial \Delta \lambda} - \frac{3\mu}{1 - hD_{n+1}}$$
(3.85)

et

$$P_{12} = \frac{\partial g_1}{\partial D_{n+1}} = -\frac{3\mu h \Delta \lambda}{(1 - h D_{n+1})^2}$$
(3.86)

Pour la loi d'évolution de l'endommagement, nous avons :

$$P_{21} = \frac{\partial g_2}{\partial \Delta \lambda} = -\frac{1}{1 - hD_{n+1}} \left(\frac{Y_{n+1}}{S_0}\right)^b - \frac{b}{S_0} \frac{\Delta \lambda}{1 - hD_{n+1}} \left(\frac{Y_{n+1}}{S_0}\right)^{(b-1)} \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \Delta \lambda}$$
(3.87)

et

$$P_{22} = \frac{\partial g_2}{\partial D_{n+1}} = 1 - \frac{h\Delta\lambda}{(1 - hD_{n+1})^2} \left(\frac{Y_{n+1}}{S_0}\right)^b - \frac{b}{S_0} \frac{\Delta\lambda}{1 - hD_{n+1}} \left(\frac{Y_{n+1}}{S_0}\right)^{(b-1)} \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial D_{n+1}}$$
(3.88)

Pour avoir l'ensemble des équations, il faut calculer les dérivées de Y_{n+1} par rapport aux deux inconnues. Pour ce faire, repartons de la définition du taux de restitution d'énergie élastique dans le cas où la triaxialité est négative :

$$Y_{n+1} = h\left(\frac{\tilde{s}_{n+1}:\tilde{s}_{n+1}}{4\mu} + \frac{\tilde{p}_{n+1}}{2\kappa}\right)$$
(3.89)

A l'aide de (3.81), nous pouvons définir :

$$\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}:\tilde{\mathbf{s}}_{n+1} = \frac{2}{3}\sigma_0^2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^t:\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^t - \frac{3\mu\Delta\lambda}{1-hD_{n+1}}\right)$$
(3.90)

En remplaçant dans (3.89), Y_{n+1} devient :

$$Y_{n+1} = \frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tilde{s}_{n+1}^t:\tilde{s}_{n+1}^t - \frac{3\mu\Delta\lambda}{1 - hD_{n+1}}\right)^2}{6\mu} + h\frac{\tilde{p}_{n+1}^2}{2\kappa}$$
(3.91)

_

Les deux dérivées se calculent facilement à partir de l'équation précédente et sont données par :

$$\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial \Delta \lambda} = -\frac{h}{1 - hD_{n+1}} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^t : \tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^t - \frac{3\mu\Delta\lambda}{1 - hD_{n+1}} \right)$$
(3.92)

et

$$\frac{\partial Y_{n+1}}{\partial D_{n+1}} = -\frac{h\Delta\lambda}{1-hD_{n+1}} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^t : \tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^t - \frac{3\mu\Delta\lambda}{1-hD_{n+1}} \right) = \frac{\Delta\lambda}{1-hD_{n+1}} \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial\Delta\lambda}$$
(3.93)

Il est donc possible de calculer les contributions incrémentales aux deux inconnues :

$$\delta D_{n+1}^{k} = \left(\frac{\partial g_{1}}{\partial \Delta \lambda}\Big|_{k} g_{2}^{k} - \frac{\partial g_{2}}{\partial \Delta \lambda}\Big|_{k} g_{1}^{k}\right) \left(\frac{\partial g_{1}}{\partial D_{n+1}}\Big|_{k} \frac{\partial g_{2}}{\partial \Delta \lambda}\Big|_{k} - \frac{\partial g_{2}}{\partial D_{n+1}}\Big|_{k} \frac{\partial g_{1}}{\partial \Delta \lambda}\Big|_{k}\right)^{-1}$$

$$\delta \Delta \lambda^{k} = -\left(g_{1}^{k} + \frac{\partial g_{1}}{\partial D_{n+1}}\Big|_{k} \delta D_{n+1}^{k}\right) \left(\frac{\partial g_{1}}{\partial \Delta \lambda}\Big|_{k}\right)^{-1}$$
(3.94)

Nous pouvons alors réactualiser :

$$\begin{cases} \Delta \lambda^{k+1} = \Delta \lambda^k + \delta \Delta \lambda^k \\ D_{n+1}^{k+1} = D_{n+1}^k + \delta D_{n+1}^k \end{cases}$$
(3.95)

Les itérations sont répétées tant que le résidu n'est pas inférieur à une valeur de convergence :

$$\sqrt{\left(\frac{g_1^{k+1}}{\sigma_0}\right)^2 + \left(g_2^{k+1}\right)^2} \le 10^{-10}$$
(3.96)

La convergence est atteinte en général au bout de 5 à 7 itérations. Cependant si cette valeur n'est pas atteinte au-delà de 200 itérations, le calcul est arrêté pour non convergence.

Une fois la convergence atteinte, les variables sont mises à jour :

$$\begin{cases} \boldsymbol{s}_{n+1} = (1 - hD_{n+1})\tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^{t} - 2\mu\Delta\lambda^{k+1}\tilde{\boldsymbol{n}}_{n+1} \\ D_{n+1} = D_{n+1}^{k+1} \\ r_{n+1} = \lambda_{n+1} = \lambda_{n} + \Delta\lambda^{k+1} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n} + \frac{\Delta\lambda^{k+1}}{1 - hD_{n+1}} \\ \Delta \boldsymbol{e}_{n+1}^{e} = \frac{\boldsymbol{s}_{n+1}}{2\mu(1 - hD_{n+1})} \end{cases}$$
(3.97)

3.2.5.2.2 Système à une équation : couplage faible

Cette deuxième méthode est une simplification de la première en posant l'hypothèse qu'au cours de la déformation plastique, l'endommagement ne s'accroît pas. Le système (3.76) devient alors :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{s}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^t - \frac{2\mu\Delta\lambda}{1 - hD_n} \tilde{\mathbf{n}}_{n+1} \\ f_{n+1} = J_2(\tilde{\mathbf{\sigma}}_{n+1}) - \sigma_0(\lambda_{n+1}) = 0 \\ \Delta D - \frac{\Delta\lambda}{1 - hD_n} \left(\frac{Y_{n+1}}{S_0}\right)^b = 0 \end{cases}$$
(3.98)

La seule inconnue dans l'évaluation de \tilde{s}_{n+1} est alors $\Delta \lambda$. Le système réduit devient :

$$\begin{cases} g_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{s}_{n+1}^t : \tilde{s}_{n+1}^t - \sigma_0 - \frac{3\mu\Delta\lambda}{1 - hD_n} = 0\\ g_2 = D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\lambda}{1 - hD_n} \left(\frac{Y_{n+1}}{S_0}\right)^b = 0 \end{cases}$$
(3.99)

Nous sommes en présence de deux équations totalement découplées. Nous ne devons résoudre plus qu'une seule équation non linéaire à une inconnue. Nous utilisons pour cela toujours un schéma itératif de Newton-Raphson. La seule dérivée nécessaire dans le schéma est :

$$\frac{\partial g_1}{\partial \Delta \lambda} = -\frac{\partial \sigma_0}{\partial \Delta \lambda} - \frac{3\mu}{1 - hD_n}$$
(3.100)

Comme pour le couplage fort, une fois que l'algorithme a convergé, les variables sont mises à jour :

$$\begin{cases} \boldsymbol{s}_{n+1} = (1 - hD_n) \tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t - 2\mu\Delta\lambda \tilde{\boldsymbol{n}}_{n+1} \\ D_{n+1} = D_n - \frac{\Delta\lambda^{k+1}}{1 - hD_n} \left(\frac{Y_{n+1}}{S_0}\right)^b \\ r_{n+1} = \lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta\lambda^{k+1} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n + \frac{\Delta\lambda^{k+1}}{1 - hD_{n+1}} \\ \Delta \boldsymbol{e}_{n+1}^e = \frac{\boldsymbol{s}_{n+1}}{2\mu(1 - hD_{n+1})} \end{cases}$$
(3.101)

3.2.5.3 Module tangent discret cohérent

Comme l'ont montré Nagtegaal (Nagtegaal, 1982) et plus tard Simo et Taylor (Simo, et al., 1985), pour conserver le caractère de convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson pour le problème mécanique global (3.57), il est nécessaire d'utiliser un module tangent discret cohérent avec le schéma d'intégration des équations comportementales dans l'assemblage des matrices locales (3.56). Comme nous l'avons vu, dans le schéma de résolution, nous avons à expliciter un module tangent discret linéaire ⁴ C^d . Dans le cas d'un incrément de chargement élastique, le module tangent élastique discret cohérent est égal au tenseur d'élasticité endommagé :

$${}^{4}\boldsymbol{C}^{d} = 2\mu(1-hD_{n})\left({}^{4}\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}\right)$$
(3.102)

Dans le cas où l'incrément de chargement est plastique, le module tangent plastique discret cohérent est défini par :

$${}^{4}\boldsymbol{C}_{n+1}^{d} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{s}}_{n+1}}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}}$$
(3.103)

3.2.5.3.1 Système à deux équations : couplage fort

Le calcul du module tangent discret cohérent ne se fait pas aussi facilement que pour le module continu. Pour le calculer, nous repartons de la définition à l'instant $(t + \Delta t)$ du déviateur des contraintes :

$$\mathbf{s}_{n+1} = (1 - hD_{n+1})\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^t - 2\mu\Delta\lambda\tilde{\mathbf{n}}_{n+1}$$
(3.104)

En différenciant cette expression, nous obtenons :

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = (1 - hD_{n+1})\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} - h\tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t \otimes \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} - 2\mu \tilde{\boldsymbol{n}}_{n+1} \otimes \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} - 2\mu \Delta \lambda \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{n}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}$$
(3.105)

Pour calculer le module tangent, nous devons exprimer les quatre dérivées suivantes :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^{t}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}, \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}, \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{n}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}, \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}$$
(3.106)

L'équation d'évolution de l'endommagement est donnée par :

$$D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\lambda}{1 - hD_{n+1}} \left(\frac{Y_{n+1}}{S_0}\right)^b = D_{n+1} - D_n - Y_{n+1}^*(\Delta\lambda, D_{n+1}, \tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^t, \tilde{p}_{n+1}) = 0$$
(3.107)

 Y_{n+1}^* est une fonction de l'incrément du multiplicateur plastique, de l'endommagement, du prédicteur élastique du déviateur des contraintes équivalentes et de la pression équivalente. En différenciant, cette équation, nous obtenons :

$$\frac{\partial D_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = a_1 \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} + \boldsymbol{a}_2 : \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^t}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} + a_3 \frac{\partial \tilde{p}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}$$
(3.108)

avec

$$a_{1} = \frac{\partial Y_{n+1}^{*}}{\partial \Delta \lambda} \left(1 - \frac{\partial Y_{n+1}^{*}}{\partial D_{n+1}} \right)^{-1}$$

$$a_{2} = \frac{\partial Y_{n+1}^{*}}{\partial \tilde{s}_{n+1}^{t}} \left(1 - \frac{\partial Y_{n+1}^{*}}{\partial D_{n+1}} \right)^{-1}$$

$$a_{3} = \frac{\partial Y_{n+1}^{*}}{\partial \tilde{p}_{n+1}} \left(1 - \frac{\partial Y_{n+1}^{*}}{\partial D_{n+1}} \right)^{-1}$$
(3.109)

En ce qui concerne le prédicteur du déviateur des contraintes effectives, nous repartons de sa définition :

$$\widetilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t = 2\mu (\boldsymbol{e}_{n+1} - \boldsymbol{e}_n^p) \tag{3.110}$$

En dérivant celle-ci, nous obtenons :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t}{\partial \boldsymbol{e}_{n+1}} = 2\mu \,{}^4\boldsymbol{I} \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = 2\mu \,{}^4\boldsymbol{I}^{dev} \tag{3.111}$$

En ce qui concerne la pression hydrostatique équivalente, nous avons :

$$\tilde{p}_{n+1} = -\kappa \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) = -\kappa \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} : \boldsymbol{I}$$
(3.112)

Ce qui nous donne pour la dérivée par rapport au tenseur des déformations :

$$\frac{\partial \tilde{p}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = -\kappa \boldsymbol{I} \tag{3.113}$$

La dernière équation est celle du critère de plasticité :

$$J_2(\tilde{\sigma}_{n+1}^t) - \sigma_0 - \frac{3\mu\Delta\lambda}{1 - hD_{n+1}} = 0$$
(3.114)

En la différenciant, nous obtenons :

$$\frac{\partial J_2(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} - \frac{\partial \sigma_0}{\partial \Delta \lambda} \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} - \frac{3\mu}{1 - hD_{n+1}} \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} - \frac{3\mu h\Delta \lambda}{(1 - hD_{n+1})^2} \frac{\partial D_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \mathbf{0}$$
(3.115)

En utilisant les relations (3.108), (3.113) et (3.115), nous obtenons :

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \left(\frac{2\mu \widetilde{\boldsymbol{n}}_{n+1} - \frac{3\mu h \Delta \lambda}{(1 - h D_{n+1})^2} (2\mu \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3 \kappa \boldsymbol{I})}{\frac{\partial \sigma_0}{\partial \Delta \lambda} + \frac{3\mu}{1 - h D_{n+1}} + \frac{3\mu h \Delta \lambda}{(1 - h D_{n+1})^2} \boldsymbol{a}_1}\right) = \boldsymbol{a}_4$$
(3.116)

L'équation de l'évolution de l'endommagement peut alors être réécrite comme :

$$\frac{\partial D_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = a_1 \boldsymbol{a}_4 + 2\mu \boldsymbol{a}_2 + a_3 \kappa \boldsymbol{I} = \boldsymbol{a}_5$$
(3.117)

La variation de la normale d'écoulement $\widetilde{\boldsymbol{n}}_{n+1}$ s'écrit simplement comme :

$$\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{n}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{3\mu}{J_2(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^t)} \left({}^4\boldsymbol{I}^{dev} - \frac{2}{3}\widetilde{\boldsymbol{n}}_{n+1} \otimes \widetilde{\boldsymbol{n}}_{n+1} \right) = {}^4\boldsymbol{a}_6 \tag{3.118}$$

En remplaçant (3.116), (3.117) et (3.118) dans (3.105), nous pouvons mettre le module tangent sous la forme :

$${}^{4}\boldsymbol{C}_{n+1}^{d} = \frac{\partial \boldsymbol{s}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = 2\mu(1-hD_{n+1}) {}^{4}\boldsymbol{I}^{dev} - h\tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^{t} \otimes \boldsymbol{a}_{5} - 2\mu\tilde{\boldsymbol{n}}_{n+1} \otimes \boldsymbol{a}_{4} - 2\mu\Delta\lambda {}^{4}\boldsymbol{a}_{6}$$
(3.119)

3.2.5.3.2 Système à une équation : couplage faible

De la même manière que pour le couplage fort, nous partons de la définition du déviateur des contraintes :

$$\boldsymbol{s}_{n+1} = (1 - hD_n)\tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t - 2\mu\Delta\lambda\tilde{\boldsymbol{n}}_{n+1}$$
(3.120)

En différenciant cette expression, nous obtenons :

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = (1 - hD_n) \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} - 2\mu \tilde{\boldsymbol{n}}_{n+1} \otimes \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} - 2\mu \Delta \lambda \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{n}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}$$
(3.121)

Par rapport au couplage fort, nous avons juste besoin de recalculer $\partial \Delta \lambda / \partial \varepsilon_{n+1}$. L'équation de la surface de charge est donnée par :

$$J_2(\tilde{s}_{n+1}^t) - \sigma_0 - \frac{3\mu\Delta\lambda}{1 - hD_n} = 0$$
(3.122)

En la différenciant, nous obtenons :

$$2\mu \widetilde{\boldsymbol{n}}_{n+1} - \frac{\partial \sigma_0}{\partial \Delta \lambda} \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} - \frac{3\mu}{1 - hD_n} \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \boldsymbol{0}$$
(3.123)

Nous avons donc accès directement à la dérivée qui nous intéresse :

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{2\mu \widetilde{\boldsymbol{n}}_{n+1}}{\frac{\partial \sigma_0}{\partial \Delta \lambda} + \frac{3\mu}{1 - hD_n}}$$
(3.124)

Le module tangent discret s'écrit alors comme étant :

$${}^{4}\boldsymbol{C}_{n+1}^{d} = 2\mu(1-hD_{n})\left(1-2\mu\Delta\lambda\frac{3\mu}{J_{2}(\boldsymbol{\tilde{\sigma}}_{n+1}^{t})}\right) {}^{4}\boldsymbol{I}^{dev}$$
$$-4\mu^{2}\boldsymbol{\tilde{n}}_{n+1}\otimes\boldsymbol{\tilde{n}}_{n+1}\left(\frac{1}{\frac{\partial\sigma_{0}}{\partial\Delta\lambda}+\frac{3\mu}{1-hD_{n}}}+\frac{\Delta\lambda}{J_{2}(\boldsymbol{\tilde{\sigma}}_{n+1}^{t})}\right)$$
(3.125)

3.2.5.4 Dérivée objective de la contrainte

Comme nous l'avons déjà évoqué en introduction du chapitre 2, l'écriture des équations de comportement est faite en considérant de petites déformations. Cependant pour tenir compte des rotations rigides, le tenseur des contraintes calculé après intégration est corrigé de la manière suivante :

$$\boldsymbol{s}_{n+1} = \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \boldsymbol{s}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\Omega} \tag{3.126}$$

où $\mathbf{\Omega}$ est la matrice de rotation correspondant à la partie antisymétrique du tenseur de la vitesse :

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{v} - \left(\vec{\nabla} \vec{v} \right)^T \right)$$
(3.127)

3.2.5.5 Conclusion sur l'intégration locale des équations comportementales

Dans cette section, nous avons mis en place l'ensemble des équations ainsi que la stratégie qui nous permet d'intégrer les équations du modèle matériau élasto-plastique endommageable développé au chapitre 2. Nous avons calculé les modules tangents discrets cohérents avec le schéma d'intégration retenu afin de garder une convergence quadratique du schéma de Newton-Raphson du problème d'équilibre global. Nous avons aussi mis en place un découplage des équations de comportement et d'endommagement en considérant que l'incrément d'endommagement n'évolue pas dans un pas de temps. Le module tangent discret lié à cette hypothèse a été calculé.

Une remarque peut être faite sur l'intégration locale des équations. En effet, il est entièrement possible de résoudre le système de trois équations à trois inconnues (3.75). Cette résolution bien qu'augmentant le nombre d'inconnues à l'avantage de calculer directement le module tangent discret cohérent.

Nous avons écrit les équations dans le cas où le paramètre de fermeture des fissures intervient, i.e. l'élément est soumis à une compression. Dans la pratique avant d'intégrer les équations, le taux de triaxialité est calculé au point d'intégration considéré, si la matière est en traction alors la valeur de h est modifiée :

$$h = 1$$
 si $-\frac{p}{J_2(\sigma)} > 0$ (3.128)

Les différentes étapes de l'algorithme d'intégration des équations sont résumées sur la figure 3.7 qui suit :



Figure 3.7 : Algorithme d'intégration locale des équations comportementales

3.2.6 Gestion incrémentale du contact par la méthode de pénalisation

Dans la définition de nos conditions aux limites, nous avons parlé de la condition de contact unilatéral frottant qui s'applique sur la frontière $\partial \Omega_c$ du solide. Nous allons présenter brièvement comment cette condition est prise en compte dans les logiciels de Forge2005[®].



Figure 3.8 : Définition de la fonction distance

Considérons un nœud de la triangularisation du solide. A l'instant t, une fonction d(t)qui caractérise la distance séparant le nœud de la surface de l'outil, peut être définie. Par convention, d sera positive si le nœud est à l'extérieur de l'outil, vaudra zéro à la surface et sera négative s'il y a pénétration dans l'outil. La condition de non pénétration du nœud sur la surface de l'outil s'écrit alors naturellement comme étant :

$$d(t) \ge 0 \tag{3.129}$$

Au cours de l'incrément mécanique, le solide se déforme et le nœud peut se retrouver à l'intérieur de l'outil entrainant une situation non physique. La condition de non pénétration doit donc être aussi respectée à la fin de l'incrément ce qui se traduit par:

$$d(t + \Delta t) \ge 0 \tag{3.130}$$

Cette condition de non pénétration peut être linéarisée au premier ordre (Mocellin, 1999) :

$$d(t + \Delta t) = d(t) + \left(\vec{v}_{out} - \vec{v}(t)\right) \cdot \vec{n}(t) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$
(3.131)

La condition de contact unilatéral s'écrit alors :

$$h(\vec{v}(t)) = (\vec{v}(t) - \vec{v}_{out}) \cdot \vec{n}(t) - \frac{d(t)}{\Delta t} \le 0$$
(3.132)

Ou encore¹:

$$\langle h(\vec{v}(t)) \rangle = 0 \tag{3.133}$$

¹ (.) est l'opérateur de Macaulay défini dans le Chapitre 2

Bien que la condition de contact soit exprimée à l'instant $t + \Delta t$, cette formulation est dite « explicite ». Cela est dû au fait que la normale \vec{n} et la fonction distance d sont évaluées à l'instant t et qu'elles sont considérées comme constantes au cours de l'incrément de temps.

Pour tenir compte des conditions de contact dans la formulation du problème d'équilibre, il existe de nombreuses méthodes, le lecteur intéressé pourra se reporter à (Mocellin, 1999), (Barboza, 2004) pour plus de détails sur ces méthodes. Dans Forge2005[®], la méthode de pénalisation a été retenue. La contrainte de non pénétration est imposée grâce à un coefficient de pénalisation ρ_c . La formulation faible du problème mécanique (3.23) prend alors la forme suivante :

Trouver $(\vec{v}_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{P}_h$ tels que :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_{h}} \boldsymbol{s}(\vec{v}_{h}): \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\vec{v}_{h}^{*}) d\Omega_{h} - \int_{\Omega_{h}} p_{h} \vec{\nabla} . \vec{v}_{h}^{*} d\Omega_{h} - \int_{\partial \Omega_{h_{t}}} \vec{t}_{0} . \vec{v}_{h}^{*} d\Gamma_{h} \\ + \rho_{c} \sum_{x_{k} \in \partial \Omega_{c}} \langle h(\vec{v}_{h}(x_{k})) \rangle . \vec{n}(x_{k}) . \vec{v}_{h}^{*} . S(x_{k}) - \int_{\partial \Omega_{c}} \vec{\tau}_{h} . \vec{v}_{h}^{*} d\Gamma_{h} = 0 \\ \int_{\Omega_{h}} p_{h}^{*} \left(-\vec{\nabla} . \vec{v}_{h} - \frac{\dot{p}_{h}}{\kappa(1 - hD)} - \frac{h\dot{D}}{\kappa(1 - hD)^{2}} p_{h} \right) d\Omega_{h} = 0 \\ \forall (\vec{v}_{h}^{*}, p_{h}^{*}) \in \mathcal{V}_{h}^{0} \times \mathcal{P}_{h} \end{cases}$$
(3.134)

La contribution du contact est donc définie par une sommation sur les nœuds en contact. $S(x_k)$ est la surface associée au nœud k utilisée pour affecter un poids plus fort aux nœuds liés à des faces frontières de plus grande surface et est définie par :

$$S(x_k) = \int_{\partial \Gamma} N^k d\Gamma$$
(3.135)

De plus, nous voyons apparaître la contribution due à la loi de frottement :

$$\int_{\partial \Omega_c} \vec{\tau}_h \cdot \vec{v}_h^* d\Gamma_h \tag{3.136}$$

Physiquement la méthode de pénalisation consiste à venir appliquer un effort de répulsion aux nœuds pénétrant dans l'outil, cet effort est proportionnel à la distance de pénétration :

$$\sigma_n = -\rho_c \langle h(\vec{v}_h(x_k)) \rangle \tag{3.137}$$

L'avantage de la méthode de pénalisation est de ne pas introduire d'inconnue supplémentaire dans le problème d'équilibre. L'inconvénient est que la méthode n'est pas exacte (sauf pour une valeur de $\rho_c = \infty$) et autorise une légère pénétration des nœuds dans l'outil. Le choix de la valeur de ρ_c est très importante. Une valeur trop grande va engendrer un mauvais conditionnement des systèmes linéaires à résoudre. Une valeur trop faible va entrainer une incapacité du modèle à empêcher les nœuds de pénétrer dans l'outil.

3.2.7 Remaillage et transport de champs

La méthode des éléments finis est basée sur la discrétisation spatiale en éléments simples (tétraèdre en 3D) du solide sur lequel l'équilibre mécanique est résolu. Le maillage initial est généré en utilisant un mailleur topologique (Coupez, 1991). Comme nous l'avons vu, à la fin de chaque incrément de temps, la position des nœuds du maillage est mise à jour (3.62).

En présence de grandes déformations, la qualité des éléments du maillage se dégrade. La précision des résultats obtenus par la méthode des éléments finis étant fortement dépendante de la qualité du maillage, il est alors nécessaire de remailler le domaine et de transporter les champs calculés de l'ancien maillage sur le nouveau pour assurer une bonne continuité du calcul. Forge2005[®] dispose d'un remailleur automatique basé sur le mailleur topologique précité.

Un nouveau maillage est automatiquement créé lorsque que l'un des critères suivants est rencontré :

Le critère de qualité géométrique des éléments. En 2D, i.e. élément triangulaire, la qualité d'un élément Q_e peut être définie comme le rapport entre la surface du triangle S_e et le carré de son périmètre P_e :

$$0 < Q_e = 12\sqrt{3}\frac{S_e}{P_e^2} < 1 \tag{3.138}$$

 Q_e vaut 1 lorsque l'élément est un triangle équilatéral qui présente la meilleure qualité. Quand l'élément se dégrade Q_e tend vers 0.

- Le critère basé sur l'accroissement de la déformation plastique. Dès que l'incrément de déformation plastique calculé dépasse une valeur critique, nous considérons que les déformations ont été suffisamment importantes pour dégrader le maillage. Un remaillage est alors nécessaire.
- Le critère de proximité de zone critique de l'outillage. Au cours de la simulation, lorsque le solide s'approche d'une zone de l'outil qui a une forte courbure, le maillage est mis à jour afin d'enrichir le nombre d'éléments dans cette zone.
- Le critère basé sur le nombre d'incréments de temps. Il est possible d'imposer un remaillage tous les X incréments de temps. Par défaut, un remaillage est effectué tous les vingt incréments.

L'ensemble de ces critères est utilisé dans nos calculs. Une fois le nouveau maillage créé, il faut alors transférer les données mécaniques (contraintes, déformations, endommagement, ...) de l'ancien maillage sur le nouveau afin d'assurer la continuité du calcul. Pour se faire des techniques de transport ont été développées.

Les variables à transférer sont soit :

- **Des variables P1** qui sont calculées et stockées aux nœuds du maillage. Dans notre formulation, ces variables sont les inconnues du problème mécanique, i.e. la vitesse et la pression.
- **Des variables P0** qui sont calculées et stockées aux centres des éléments du maillage. En général, ce sont les variables d'état comme les contraintes, les vitesses de déformations, ...

Le transport des variables P1 s'effectue en deux étapes. Considérons un nœud n_1 d'un élément e du nouveau maillage ainsi que f le champ P1 à transporter. La première étape consiste à venir projeter le nœud sur l'ancien maillage afin de déterminer l'élément e' de l'ancien maillage auquel il appartient. La deuxième étape est l'interpolation directe de $f(n_1)$ à partir des valeurs nodales de f aux nœuds de l'élément e'(Fig. 3.9) :

$$f(n_1) = \sum_{i=1}^{4} N(n'_i) f(n'_i)$$
(3.139)

 $N(n_i^{'}), i = 1..4$ sont des fonctions d'interpolation. $f(n_i^{'}), i = 1..4$ sont les valeurs de f aux nœuds de l'ancien maillage.



Figure 3.9 : Transport P1

Les fonctions d'interpolation sont définies par :

$$N(n'_{2}) = \frac{\det\left(\overrightarrow{n'_{1}n_{1}}, \overrightarrow{n'_{1}n_{3}}, \overrightarrow{n'_{1}n_{4}}\right)}{DET}, \quad N(n'_{3}) = \frac{\det\left(\overrightarrow{n'_{1}n_{2}}, \overrightarrow{n'_{1}n_{1}}, \overrightarrow{n'_{1}n_{4}}\right)}{DET}$$

$$N(n'_{4}) = \frac{\det\left(\overrightarrow{n'_{1}n_{2}}, \overrightarrow{n'_{1}n_{3}}, \overrightarrow{n'_{1}n_{1}}\right)}{DET}, \quad N(n'_{1}) = 1 - N(n'_{2}) - N(n'_{3}) - N(n'_{4})$$
(3.140)

avec

$$DET = \det\left(\overrightarrow{n_1 n_2}, \overrightarrow{n_1 n_3}, \overrightarrow{n_1 n_4}\right)$$
(3.141)

Elles respectent la propriété suivante :

$$\sum_{i=1}^{4} N(n'_i) = 1$$
(3.142)

Le transport des variables PO consiste à utiliser une étape supplémentaire afin de se retrouver dans le cas d'un transport de champ de type P1. Pour cela, une méthode des moindres carrés est utilisée afin de déterminer la valeur du champ PO aux nœuds du maillage (Boussetta, 2005).

3.2.8 Eléments endommagés et rupture

Les équations développées précédemment fonctionnent parfaitement tant que la valeur de l'endommagement reste inférieure à l'endommagement critique. En effet, dès que $D \ge D_c$, le modèle d'endommagement développé impose une rupture totale de l'EVR par décohésion atomique. L'endommagement est alors considéré comme égal à 1 et le modèle numérique est mis en défaut comme dans l'équation (3.75) où le quotient devient nul, rendant les équations non consistantes. Il faut donc mettre en place une stratégie de gestion numérique des éléments entièrement endommagés pour gérer la rupture.

Si un élément est entièrement endommagé alors celui-ci perd toute rigidité mécanique, i.e. le tenseur des contraintes est nul et la déformation plastique ne peut plus augmenter. Nous avons traduit ces conditions par le système suivant :

De plus l'équation d'incompressibilité (3.9) sur l'élément devient :

$$\vec{\nabla}.\,\vec{v}=0\tag{3.144}$$

Dans les itérations de Newton-Raphson du problème mécanique, il suffit alors de modifier les matrices locales des éléments entièrement endommagés afin de respecter les conditions (3.143). Ces éléments n'ont plus de contribution dans le calcul mécanique. Cette méthode ne pose pas de problème pour des éléments totalement endommagés isolés (Fig. 3.10a). Cependant quand un nœud est entièrement entouré d'éléments totalement endommagés (Fig. 3.10b) celui-ci n'a plus de contribution comportementale et la matrice de raideur globale *H* devient non inversible à cause de la présence d'un zéro sur sa diagonale. La solution retenue est de venir détecter si un nœud est dans une telle situation et de rétablir une matrice qui sera inversible tout en vérifiant les conditions (3.143). L'élimination de ces degrés de liberté du système matriciel est compliqué à cause de l'utilisation d'une méthode de stockage compact, on se contente donc d'imposer (3.143) et (3.144) directement sur les degrés de liberté (matrice locale identité et second membre local nul).



Figure 3.10 : Eléments entièrement endommagés : (a) élément isolé, (b) nœud entouré d'éléments endommagés

Une fois la convergence du calcul mécanique obtenue sur un incrément de temps, nous mettons en place notre stratégie de modélisation de la rupture. Pour modéliser la rupture, il existe de nombreuses méthodes qui peuvent se classer en trois catégories : les méthodes discrètes, continues

et mixtes. Une présentation détaillée de ces méthodes peut être trouvée dans (Comby, 2006). Nous avons retenu la méthode discrète « kill-element » qui est un peu grossière mais suffisante dans notre étude.

La méthode « kill-element » consiste à supprimer les éléments endommagés du maillage (modification de la table de connectivité) et du calcul mécanique. Le principal avantage de cette méthode est sa facilité de mise en œuvre que cela soit en 2D ou en 3D. Par contre, cette méthode reste assez grossière car elle amène à une perte de matière et peut engendrer des surfaces de ruptures dentelées. Un autre inconvénient de cette méthode est la possibilité d'apparition d'éléments reliés au maillage principal par un seul nœud (Fig. 3.11a) ou d'éléments détachés du maillage (Fig. 3.11b). Ces éléments ayant des mouvements de corps rigides peuvent empêcher ou ralentir la convergence du calcul.





Figure 3.11 : Modélisation et gestion de la rupture

Pour palier à ces problèmes, nous avons mis en place une méthode qui vérifie si un élément du maillage se trouve dans une de ces situations. Si tel est le cas alors cet élément sera supprimé. Les différentes étapes de la fissuration sont illustrées sur la figure 3.11.

3.2.9 Application du modèle et validation

3.2.9.1 Essai de traction uniaxiale sur éprouvette axisymétrique entaillée

Le premier essai retenu pour illustrer notre modèle est l'essai de traction uniaxiale sur éprouvette axisymétrique entaillée. Dans la littérature, ce test est couramment utilisé pour l'étude des modèles matériaux avec prise en compte d'un endommagement ductile (Benallal, et al., 1991), (Vaz Jr., et al., 2001), (de Souza Neto, 2002) et (Andrade Pires, et al., 2004). La géométrie de l'éprouvette de traction, les conditions de sollicitation ainsi que le maillage éléments finis retenus sont donnés par la figure 3.12. La taille moyenne des éléments est de 1mm. Elle a été choisie afin de se rapprocher de la taille des éléments utilisée dans (Vaz Jr., et al., 2001). L'incrément de temps est fixé à 0,1s. Les simulations sont réalisées sur le logiciel 2D de Forge2005[®] qui gère les configurations axisymétriques.



Figure 3.12 : Eprouvette axisymétrique entaillée : géométrie, sollicitations et maillage éléments finis

Les paramètres matériau sont ceux définis dans (Vaz Jr., et al., 2001) et sont résumés dans le tableau 3.1. Le paramètre *h* qui caractérise l'effet de fermeture des fissures est fixé à 0 car dans le cas d'un essai de traction celui-ci n'a aucune influence. L'essai est réalisé avec un contrôle en déplacement. La vitesse imposée est de 0,1 mm/s jusqu'à atteindre un déplacement de 0,7 mm. L'évolution de la carte d'endommagement dans l'éprouvette est représentée sur la figure 3.13. Dans (Vaz Jr., et al., 2001), les auteurs utilisent un algorithme explicite d'intégration des équations de comportement ainsi que des éléments quadrangles linéaires.

Description	Symbole	Valeur
Masse volumique	ρ	2700 kg/m ³
Module d'élasticité	E	69004 MPa
Coefficient de Poisson	ν	0,3
Limite élastique	σ_y	80,559 MPa
Contrainte d'écoulement	$\sigma_0(r)$ 589 $(10^{-4} + r)^{0,216}$ M	
Paramètre d'endommagement (exposant)	b	1
Paramètre d'endommagement (dénominateur)	S_0	1,25 MPa
Déformation seuil	$ar{arepsilon}_D$	0
Endommagement critique à rupture	D_c	1
Effet de fermeture des fissures	h	0

Tableau 3.1 : Propriétés matériau pour un alliage d'aluminium (Vaz Jr., et al., 2001)

Comme nous pouvons le voir, dans le premier stade de l'essai, l'endommagement est concentré en fond d'entaille. Lorsque le déplacement devient plus important, la zone d'endommagement maximum se déplace progressivement vers le centre de l'éprouvette ce qui est en accord avec les résultats de (de Souza Neto, 2002). Vers la fin de l'essai, i.e. u = 0.6 mm, l'endommagement est fortement localisé au centre de l'éprouvette.



Figure 3.13 : Eprouvette axisymétrique entaillée : carte d'endommagement (échelle variable)

Ceci implique que la rupture s'amorce au centre de l'éprouvette ce qui est en accord avec les observations expérimentales de (Hancock, et al., 1976). En effet, les auteurs ont montré que pour une certaine configuration d'éprouvette entaillée, la fissuration s'amorce au centre et se propage radialement. La raison qui explique l'augmentation rapide de l'endommagement au centre de

l'éprouvette est que le modèle d'endommagement est dépendant de la triaxialité et que celle-ci est plus forte au centre de l'éprouvette (Fig. 3.14).



Figure 3.14 : Eprouvette axisymétrique entaillée : carte de triaxialité des contraintes

En comparant, les résultats obtenus avec ceux de (Vaz Jr., et al., 2001), on observe une bonne corrélation. Les évolutions de l'endommagement et de la déformation plastique équivalente au centre de l'éprouvette en fonction du déplacement imposé sont reportées sur la figure 3.15.



Figure 3.15 : Eprouvette axisymétrique entaillée : évolution de l'endommagement et de la déformation plastique équivalente au centre de l'éprouvette au cours de l'essai

3.2.9.2 Essai d'écrasement d'une éprouvette en tonneau

Pour caractériser la capacité d'un matériau à être mis en forme, il est courant d'utiliser de petites éprouvettes de géométrie axisymétrique qui sont mises en compression. En effet, ces essais permettent de reproduire l'état de contrainte/déformation de la matière dans ces procédés et ainsi de savoir s'il y a risque de rupture du matériau. Dans notre application, nous allons considérer un lopin en forme de tonneau dont la géométrie est donnée par (Gouveia, et al., 1996). La géométrie et le maillage éléments finis sont représentés par la figure 3.16. Le logiciel 2D de Forge2005[®] a permis d'obtenir les résultats numériques présentés sur les figures 3.17 et 3.18 et un pas de temps de 0,01 s a été utilisé.



Figure 3.16 : Eprouvette en tonneau : géométrie, sollicitations et maillage éléments finis

Dans (Gouveia, et al., 1996), les auteurs ont étudié la capacité de quatre critères d'endommagement à prédire la zone d'apparition des fissures pour un alliage de plomb UNS L52905. Expérimentalement, il a été trouvé que la fissuration s'amorce à la surface de l'éprouvette au niveau de la hauteur moyenne.

Tableau 3.2 :	: Propriétés matériau	pour un	alliage de	plomb UM	NS L52905	(Andrade Pire	s. et al	2003)
		P		P		(·	-,,	,

Description	Symbole	Valeur
Masse volumique	ρ	11340 kg/m ³
Module d'élasticité	Ē	18000 MPa
Coefficient de Poisson	ν	0,4
Limite élastique	σ_y	43 MPa
Contrainte d'écoulement	$\sigma_0(r)$	66,656(0,0133 + r) ^{0,10158} MPa
Coefficient de frottement	$lpha_f$	0,35
Paramètre d'endommagement (exposant)	b	1
Paramètre d'endommagement (dénominateur)	S_0	1,5 MPa
Déformation seuil	$ar{arepsilon}_D$	0
Endommagement critique à rupture	D_c	1
Effet de fermeture des fissures	h	0;0,05;0,2;1

Plus tard les auteurs de (Andrade Pires, et al., 2003) ont utilisé, sur le même essai, un modèle d'endommagement de type Lemaitre avec prise en compte de l'effet de fermeture des fissures et décomposition du tenseur des contraintes en parties positives et négatives. Ils ont conclu que pour une valeur du paramètre de l'effet de fermeture des fissures supérieure à 0,08, les simulations ne donnent pas le bon emplacement de la zone d'amorçage des fissurations.

Nous allons considérer différentes simulations afin de mettre en évidence les effets des différentes améliorations apportées au modèle initial de Lemaitre :

- la prise en compte de l'effet de fermeture des fissures avec une évolution de l'endommagement différente en compression de celle en traction,
- une limite de triaxialité en dessous de laquelle l'endommagement n'évolue plus.

Les propriétés matériaux sont listées dans le Tableau 3.2. Dans un premier temps, nous allons considérer qu'il n'y a pas de limite de triaxialité en dessous de laquelle l'endommagement n'évolue plus. La figure 3.17 présente les résultats pour quatre valeurs de h pour trois niveaux de réduction : 25%, 45% et 65%.



Figure 3.17 : Carte d'endommagement pour l'éprouvette en tonneau : (a) h=1 ; (b) h=0,2 ; (c) h=0,05 ; (d) h=0

Dans la première simulation h est fixé à 1, ce qui correspond au modèle d'endommagement de Lemaitre initial. En effet dans ce cas l'endommagement évolue de la même manière que la matière soit en compression ou en traction. Tout au long de la simulation, la zone d'endommagement maximum se situe au niveau de la zone de contact entre l'outil et le lopin. La localisation de la zone d'amorçage de la rupture n'est pas conforme aux observations expérimentales. En prenant une valeur de h = 0,2 comme proposée par Lemaitre (Lemaitre, et al., 1996), nous observons que l'évolution de l'endommagement en compression est réduite mais que la zone où l'endommagement est maximal en fin de simulation se situe encore dans la zone de contact entre outil et lopin. Dans le cas où h = 0,05, i.e. valeur utilisée par Andrade Pires, nous observons bien que la zone la plus endommagée, en fin de simulation, est la surface libre médiane. La dernière simulation correspond au cas où h = 0, i.e. l'effet de fermeture des fissures est total et l'endommagement ne peut pas évoluer en compression. L'endommagement est alors entièrement concentré dans la zone où la triaxialité est positive au niveau du bombé. Les résultats obtenus sont donc conformes à ceux de (Andrade Pires, et al., 2003).

Nous allons maintenant utiliser une valeur de h = 0,2 mais cette fois-ci nous allons prendre en considération la limite de triaxialité en dessous de laquelle l'endommagement n'évolue plus. La comparaison avec et sans ce nouveau critère est illustrée par la figure 3.18.



Figure 3.18 : Carte d'endommagement pour l'éprouvette en tonneau : Influence de la limite de triaxialité en compression : (a) sans limite ; (b) avec limite

Comme nous pouvons le voir, dès le début du procédé, le profil de la carte d'endommagement est modifié. En effet, la zone du lopin se situant sous l'outil est en forte compression et le taux de triaxialité est largement inférieur à -1/3. Il n'y a donc pas d'évolution de l'endommagement dans cette zone. A 45% de réduction, nous pouvons voir que l'endommagement commence à se concentrer le long de la zone médiane de l'éprouvette. A la fin du procédé d'écrasement, l'endommagement maximal se situe au niveau du bombé conformément aux expériences.

A travers cet exemple, nous pouvons clairement voir que pour bien prédire la zone d'endommagement maximal dans un procédé de mise en forme engendrant de forte compression, il est nécessaire de prendre en compte l'effet de fermeture des fissures. De plus, il est intéressant d'imposer une limite de triaxialité en dessous de laquelle l'évolution de l'endommagement n'est plus possible.
3.2.9.3 Couplage fort et couplage faible

Dans le paragraphe 3.2.5, nous avons mis en place un système de couplage faible entre la loi de comportement et l'endommagement. Nous allons maintenant comparer les résultats obtenus avec ce couplage par rapport au couplage fort sur les deux essais précédents pour une discrétisation temporelle $\Delta t = 0,01$ s. Tout d'abord, en ce qui concerne l'essai de traction uniaxiale sur éprouvette axisymétrique entaillée. La comparaison du point de vue de la répartition de l'endommagement en fin d'essai pour un déplacement u = 0,6 mm (Fig. 3.19) montre que celle-ci est pratiquement identique. Cependant, nous pouvons noter que les valeurs d'endommagement sont légèrement plus faibles pour le couplage faible. En effet, la valeur maximale de l'endommagement pour le couplage fort est de 0,83 contre 0,75 pour le couplage faible. Cela s'explique par le fait que dans la résolution du système (3.98), on utilise la valeur de l'endommagement à l'instant t qui est utilisé au lieu de sa valeur à l'instant t + 1.



Figure 3.19 : Cartes d'endommagement à la fin de l'essai de traction uniaxiale pour les deux couplages



Figure 3.20 : Evolution de l'endommagement et de la déformation plastique équivalente au centre de l'éprouvette au cours de l'essai pour les deux couplages

L'évolution de l'endommagement et de la déformation plastique équivalente pour un nœud situé au centre de l'éprouvette est représentée sur la figure 3.20. Comme pour la répartition de l'endommagement, nous pouvons voir que l'endommagement est plus faible (et donc la déformation plastique équivalente est plus haute) pour le couplage faible. La figure 3.21 nous montre l'écart au cours de la simulation sur l'endommagement au centre de l'éprouvette entre les couplages faible et fort. Plus l'endommagement est important plus la différence est grande. Pour une valeur d'endommagement inférieure à 0,5, l'écart reste inférieur à 10%. En général la valeur de l'endommagement critique D_c est inférieure à 0,5, la différence en utilisant un couplage faible pour un problème plus complexe reste donc contenue. La brusque diminution de l'écart entre les deux couplages pour l'avant dernier point est due à la diffusion des variables qui apparaît lors du remaillage. Il est également important de noter que plus le pas de temps sera petit, plus l'écart entre les couplages fort et faible sera contenu.



Figure 3.21 : Ecart d'évaluation de l'endommagement au centre de l'éprouvette entre les couplages faible et fort

En ce qui concerne l'essai d'écrasement, nous pouvons tirer les mêmes conclusions que pour l'essai de traction uniaxiale. La répartition de l'endommagement au cours de l'essai est représentée sur la figure 3.22. L'endommagement est plus faible pour le couplage faible. Les taux d'endommagement étant faible, l'erreur commise par le couplage faible est inférieure à 0,1% à la fin du procédé.



Figure 3.22 : Cartes d'endommagement au cours de l'essai de compression : (a) Couplage fort ; (b) Couplage faible

L'avantage du couplage faible sur le couplage fort est la diminution du temps de calcul. En effet, dans l'intégration des lois de comportement, il n'y a plus qu'une seule équation non linéaire à résoudre, contre deux pour le couplage fort. Afin de montrer le gain de temps de calcul obtenu avec le couplage faible, nous avons utilisé quatre maillages différents pour l'essai de traction uniaxiale sur éprouvette axisymétrique entaillée. Les temps de calcul pour atteindre un déplacement de 0,5 mm obtenus avec les deux couplages sont rapportés dans le tableau 3.3. Le gain de temps est très important et est compris entre 15% et 30% ce qui est non négligeable surtout dans l'optique de simulations qui pourront durer plusieurs heures.

Taille moyenne de maille	Temps Couplage Faible	Temps Couplage Fort	Ecart en %
0,8 mm	15s	19s	21%
0,4 mm	46s	54s	15%
0,2 mm	1min 06s	1min 33s	29%
0,1 mm	5min 55s	7min 48s	24%

Tableau 3.3 : Eprouvette axisymétrique entaillée : Comparaison du temps de calcul pour les couplages

3.2.10 Conclusions sur la résolution numérique du problème mécanique

Dans cette section, nous avons tout d'abord mis en place l'ensemble des équations qui régissent la mécanique en vue des simulations d'assemblages par déformation plastique. Puis nous avons introduit la méthode de résolution retenue qui est celle des éléments finis avec une formulation mixte du problème en vitesse – pression.

L'intégration des équations comportementales qui est un point clé de la résolution a été présentée en détail ainsi que le calcul du module tangent discret consistant. Nous avons alors introduit un découplage des équations qui régissent le comportement et l'endommagement en supposant que l'endommagement n'évolue pas ou peu lors de l'incrément de déformation plastique.

Les développements ont été validés sur deux cas classiques. Le premier est l'essai de traction uniaxiale d'une éprouvette axisymétrique qui nous a permis de mettre en évidence la robustesse de l'algorithme. Le second est l'essai de compression d'un lopin en tonneau qui nous a permis d'illustrer les améliorations apportées au modèle initial d'endommagement de Lemaitre. En effet, nous avons pu voir l'importance de l'effet de fermeture des fissures ainsi que celle de la prise en compte d'une limite de triaxialité en dessous de laquelle l'endommagement ne peut plus évoluer.

La comparaison des deux types de couplages entre les équations du comportement et l'endommagement, nous a montré que :

- le couplage faible engendre une erreur contenue dans le calcul de l'endommagement tant que celui-ci est inférieur à 0,5,
- une diminution du temps de calcul de l'ordre de 20 à 30% en utilisant un couplage faible par rapport au couplage fort.

L'utilisation du couplage faible, nous permet donc d'avoir une diminution conséquente en temps de calcul tout en ayant une erreur sur le résultat suffisamment faible. C'est la raison pour laquelle dans le reste de ce manuscrit, nous nous limiterons à l'utiliser le couplage faible dans nos simulations.

3.3 Modèles d'endommagement non locaux

Un phénomène précurseur de la rupture dans la mise en forme de lopin ductile est le phénomène de localisation des déformations plastiques, et donc de l'endommagement, dans des zones confinées. Les solutions numériques obtenues par la méthode des éléments finis dans le cadre standard de la mécanique des milieux continus montrent une forte dépendance des résultats vis-à-vis de la taille et de l'orientation du maillage (Pijaudier-Cabot, et al., 1988). Le raffinement du maillage n'apporte pas de solution à ce problème. Aujourd'hui, le problème est bien connu et il a été démontré que celui-ci n'est pas dû uniquement au modèle numérique puisque la dépendance au maillage est une conséquence directe du fait que le problème mécanique est mal posé.

Après une brève présentation du phénomène de localisation, nous introduirons les méthodes dites non locales qui permettent de s'affranchir de la dépendance des résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale. Après la présentation de leurs implémentations dans Forge2005[®], nous mettrons en évidence les apports des méthodes non locales sur un essai de traction uniaxiale d'éprouvettes planes.

3.3.1 Le phénomène de localisation

Au lieu de présenter les détails théoriques pour illustrer le phénomène de la localisation des déformations, nous expliciterons la nature du problème sur un exemple unidimensionnel. Pour cela, considérons une poutre de section constante S et de longueur initiale L_0 sujette à une traction uniaxiale (Fig. 3.23). Le matériau de la poutre a un comportement élasto-plastique avec un écrouissage adoucissant isotrope linéaire (la même démonstration peut-être réalisée en considérant un matériau élastique endommageable). Le critère de plasticité s'écrit :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, R) = J_2(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_0(\bar{\varepsilon}) \le 0 \tag{3.145}$$

Dans cette expression, nous avons appliqué la propriété d'équivalence entre la variable d'écrouissage et la déformation plastique équivalente. La courbe de contrainte – déformation est illustrée sur la figure 3.23. Tant que la déformation reste inférieure à ε_0 , le comportement est purement élastique :

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{si} \quad \varepsilon \le \varepsilon_0 \tag{3.146}$$

Au-delà de cette valeur de déformation, le matériau s'adoucit progressivement en suivant la loi d'écrouissage suivante :

$$\sigma_0(\bar{\varepsilon}) = \langle \sigma_v + H\bar{\varepsilon} \rangle \tag{3.147}$$

H est le module plastique et est donné par :

$$H = -\frac{\sigma_y}{\varepsilon_f} \tag{3.148}$$

Et la contrainte est alors donnée par :

$$\sigma = E\varepsilon_0 - H(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad \text{si} \quad \varepsilon_0 < \varepsilon \le \varepsilon_f \tag{3.149}$$

Les équations (3.146) et (3.149) définissent entièrement le comportement de la matière sur l'ensemble du domaine de sollicitation.



Figure 3.23 : Localisation : exemple 1D d'une poutre en traction uniaxiale

Imposons un déplacement u à la poutre. La réponse de celle-ci est linéaire élastique tant que le déplacement u reste inférieur à $u_0 = L\varepsilon_0$. Au-delà de ce déplacement, la résistance de la poutre est dégradée. Pour chaque point matériel, il y a alors deux possibilités pour cette baisse de contrainte :

- Soit un déchargement élastique
- Soit un adoucissement plastique

Posons *l* comme étant la longueur de la zone de la poutre qui plastifie. Par conséquent la longueur de la zone qui se décharge élastiquement vaut L - l avec $L = L_0 + u$. La déformation dans ces deux zones est donnée respectivement par :

$$\begin{cases} \varepsilon_p = \varepsilon_0 + \frac{E\varepsilon_0 - \sigma}{H} & \text{si zone plastifiée} \\ \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} & \text{si zone élastique} \end{cases}$$
(3.150)

Calculons la valeur du déplacement *u* de la poutre :

$$u = \int_{0}^{L} \varepsilon dx$$

= $\int_{0}^{L-l} \varepsilon_{e} dx + \int_{0}^{l} \varepsilon_{p} dx$ (3.151)
= $(L-l) \frac{\sigma}{E} + l \left(\varepsilon_{0} + \frac{E\varepsilon_{0} - \sigma}{H}\right)$

La contrainte vaut :

$$\sigma = \frac{u - l\left(\varepsilon_0 + \frac{E\varepsilon_0}{H}\right)}{\left((L - l)\frac{1}{E} - \frac{l}{H}\right)}$$
(3.152)

La réponse globale de la structure (3.152) dépend donc de la longueur de la zone plastifiée. Le problème vient du fait que cette longueur *l* est indéterminée. Sa valeur peut être comprise entre 0 et *L*. Cela implique que le problème mécanique a une infinité de solutions. D'un point de vue purement mathématique, ce phénomène se caractérise par la perte d'ellipticité (en statique) ou d'hyperbolicité (en dynamique) des équations différentielles qui gouvernent le problème mécanique. Hill a introduit une condition nécessaire pour la perte de l'unicité de la solution du problème pour le comportement élasto-plastique (Hill, 1958) :

$$\int_{\Omega} \Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega = 0 \tag{3.153}$$

Où l'opérateur ∆ correspond à la différence entre deux champs distincts cinématiquement admissibles et supposés être chacun solution du problème mécanique. Une autre condition locale suffisante et plus restrictive pour assurer l'unicité de la solution du problème est définie par :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}: \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0 \tag{3.154}$$

La définition de la loi constitutive, nous donne :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = {}^{4}\boldsymbol{C}: \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.155}$$

En combinant les équations (3.154) et (3.155), la condition d'unicité est alors donnée par :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}: \,\,^{4}\boldsymbol{C}: \, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0 \tag{3.156}$$

Comme le tenseur des taux de déformation est strictement positif, l'unicité de la solution est donc garantie tant que le module tangent reste défini positif.

Lors d'une résolution éléments finis, le problème de la non connaissance de l va se traduire par la dépendance des résultats vis-à-vis de la taille et de l'orientation du maillage. Par exemple, considérons que la poutre est discrétisée en N éléments avec une interpolation linéaire du déplacement et par conséquent une interpolation linéaire des déformations. A cause des erreurs d'arrondis ou de l'effet de concentration de contrainte dû à une imperfection de géométrie, un élément de la structure va atteindre la limite élastique avant tous les autres : la zone plastifiée correspondra alors à un seul élément et les éléments voisins se déchargeront élastiquement, i.e. l = L/N. La réponse globale de la structure dépend alors de la taille des éléments. C'est la raison pour laquelle, dans des configurations plus complexes en 2D ou en 3D, les déformations, et donc l'endommagement, se concentrent dans des bandes de largeur un élément. Enfin, lorsque la taille des éléments tend vers zéro, la rupture de la poutre a lieu avec une dissipation d'énergie nulle ce qui est non physique.

3.3.2 Les méthodes de régularisation

La description classique de la mécanique des milieux continus pose donc un problème de perte d'unicité de la solution à partir du moment où le matériau a un comportement adoucissant. Or le modèle matériau développé introduit un adoucissement au travers de la variable d'endommagement. Tous les modèles matériaux prenant en compte un couplage entre l'endommagement et les lois de comportement sont donc sujets au phénomène de localisation des déformations et de l'endommagement. Pour résoudre le problème de sensibilité des résultats vis-àvis de la taille et de l'orientation du maillage, de nombreuses méthodes appelées méthodes de régularisation ont été proposées durant ces 20 dernières années. Ces méthodes de régularisation sont des compléments du modèle mécanique classique permettant de préserver le caractère bien posé du problème. Les méthodes les plus couramment utilisées dans la littérature sont entre autres :

- Les modèles micropolaires ou à degrés de libertés supplémentaires basés sur les milieux de Cosserat (de Borst, et al., 1991).
- Les modèles non locaux à formulation intégrale (Bažant, et al., 2002).
- Les modèles non locaux à gradient de variables internes (Abu Al-Rub, et al., 2004).
- Les modèles à effet retard (Suffis, et al., 2003).

Notre choix s'est porté sur les modèles non locaux qu'ils soient à formulation intégrale ou à formulation à gradient de variables internes. En effet, ces modèles présentent de nombreux avantages. Ils peuvent être implémentés dans un code éléments finis sans en modifier globalement la structure, contrairement aux modèles micropolaires qui augmentent énormément le nombre de degrés de liberté aux nœuds du maillage ainsi que le nombre d'équations à résoudre. De plus, les modèles non locaux ont été appliqués avec succès sur un grand nombre de comportements matériaux et notamment des matériaux endommageables.

3.3.3 Méthodes non locales

D'un point de vue phénoménologique, les modèles non locaux considèrent que l'état de la matière en un point \vec{x} (contrainte, déformation, ...) ne dépend plus uniquement de l'histoire des déformations et de la température en ce point mais aussi de l'état de la matière dans l'ensemble du solide. L'influence du point \vec{y} du solide sur le point \vec{x} se fait au travers de la fonction $\psi(\vec{x}, \vec{y})$ qui définit la force de l'interaction. Comme les interactions diminuent avec l'augmentation de la distance entre les deux points considérés, celles-ci peuvent être négligées quand la distance excède une certaine limite appelée le rayon d'interaction, longueur caractéristique ou longueur interne que nous noterons *l*. Pour pouvoir connaître l'état de la matière en un point, il faut alors effectuer la moyenne pondérée d'une ou plusieurs grandeurs physiques (Fig. 3.24).



Figure 3.24 : Moyenne pondérée pour une microstructure irrégulière

Historiquement, l'idée de milieux non locaux est une généralisation du milieu à microstructure de Cosserat (Cosserat, et al., 1909) qui enrichit la description du mouvement de chaque point de matière par l'ajout d'un vecteur de rotation en plus du vecteur de déplacement classique. Les milieux non locaux apparaissent alors sous une forme intégrale pour l'élasticité dans les années 60 (Kröner, 1967), (Eringen, 1972). Dans les années 80, Eringen étendra cette approche à la plasticité (Eringen, 1981). La plasticité classique est alors un cas particulier de la plasticité non locale. L'application du milieu non local aux matériaux élastiques endommageables a été introduit dans (Pijaudier-Cabot, et al., 1987) et (Bažant, et al., 1988).

En parallèle aux développements des modèles non locaux à formulation intégrale, des modèles utilisant des gradients de variables internes ont été introduits notamment pour la plasticité par (Aifantis, 1984), (Aifantis, 1987), (Mühlhauss, et al., 1991) et (de Borst, et al., 1992). Quelques années plus tard, il sera démontré que ces modèles à gradients de variables sont des cas particuliers des méthodes non locales à formulation intégrale. En ce qui concerne l'endommagement, c'est dans les années 90 que les modèles à gradients ont commencé à être utilisés notamment par (Aifantis, 1992) et (Peerlings, et al., 1996). Toutes ces méthodes ont un effet régularisant sur le champ de déformation et donc sur l'endommagement, elles préservent du phénomène de localisation.

3.3.3.1 Formulation intégrale

Soit $f(\vec{x})$ un champ local quelconque défini en tout point \vec{x} du solide $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, le champ non local $\bar{f}(\vec{x})$ correspondant est donné par la forme intégrale qui suit :

$$\bar{f}(\vec{x}) = \frac{1}{\Psi(\vec{x})} \int_{\Omega} \psi(\vec{x}; \vec{y}) f(\vec{y}) d\Omega$$
(3.157)

Avec la fonction $\Psi(\vec{x})$ qui est définie par :

$$\Psi(\vec{x}) = \int_{\Omega} \psi(\vec{x}; \vec{y}) d\Omega$$
(3.158)

Dans cette expression $\psi(\vec{x}, \vec{y})$ est une fonction poids qui définit l'influence du point situé à la position \vec{y} sur la valeur du champ calculé en \vec{x} . Cette fonction poids diminue avec l'augmentation de la distance entre \vec{x} et \vec{y} (Bažant, et al., 2002) et doit vérifier la condition suivante :

$$\int_{\Omega} \psi(\vec{x}; \vec{y}) d\Omega = 1$$
(3.159)

Cette condition permet entre autre de respecter le fait que si le champ local est uniforme dans l'ensemble du solide alors le champ non local est lui aussi uniforme. Dans la littérature, cette fonction est souvent définie comme étant soit une gaussienne soit une fonction cloche :

Gaussienne :

$$\psi(\vec{x}\,;\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}l^3} \exp\left(-\frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|^2}{2l^2}\right) \quad \text{où} \quad \psi(\vec{x}\,;\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}l^3} \exp\left(-\frac{4\|\vec{x}-\vec{y}\|^2}{l^2}\right) \quad (3.160)$$

Cette fonction est définie sur un support infini et suppose donc que l'ensemble des points du solide intervient dans le calcul du champ non local au point \vec{x} . Pour diminuer le temps de calcul il est courant de ne pas prendre en compte les points situés à une distance supérieure à la longueur

caractéristique. Une solution plus simple est d'utiliser une fonction définie sur un support fini pour ne pas être obligé de faire des approximations. Une fonction qui répond à ces attentes est la fonction polynomiale en forme de cloche.

• Fonction cloche :

$$\psi(\vec{x};\vec{y}) = \begin{cases} \frac{105}{32\pi l^3} \left(1 - \frac{\|\vec{x} - \vec{y}\|^2}{l^2}\right)^2 & \text{si} & \|\vec{x} - \vec{y}\| \le l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
(3.161)

La longueur caractéristique *l* apparaît explicitement dans l'expression des deux fonctions de poids. Les fonctions présentées ici (3.160) et (3.161) respectent la condition (3.159) pour un solide inclus dans \mathbb{R}^3 . Une représentation unidimensionnelle normée des deux fonctions de poids est présentée sur la figure 3.25.



Figure 3.25 : Méthode non locale à formulation intégrale : fonctions poids

Une propriété importante du modèle non local est que si $l \rightarrow 0$ alors la variable non locale est identique à la variable locale. Le modèle mécanique local est une solution particulière du modèle non local.

Comme nous l'avons déjà évoqué, la longueur caractéristique *l* détermine la taille de la zone d'influence qui intervient dans le calcul de la variable non locale. Les fonctions de poids (3.160) et (3.161) sont toutes les deux des fonctions isotropes. Dans la formulation du problème non local, il est possible d'utiliser des fonctions anisotropes qui privilégient la pondération suivant une ou plusieurs directions de l'espace. Il faut alors définir autant de longueurs caractéristiques que de sens d'anisotropie. Un exemple d'utilisation de modèle non local avec fonction de poids anisotrope peut être trouvé dans (Germain, et al., 2007). Afin de reproduire le comportement élastique endommageable de composites, ces auteurs utilisent deux longueurs caractéristiques qui caractéristiques qui modélise l'influence d'un pli à l'autre est considérée comme nulle.

3.3.3.2 Formulation à gradient explicite

A partir de la formulation intégrale, il est possible d'obtenir une formulation différentielle du champ non local. Pour ce faire, un développement en série de Taylor de $f(\vec{y})$ est réalisé :

$$f(\vec{y}) = f(\vec{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_i} (y_i - x_i) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (y_i - x_i) (y_j - x_j) + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (y_i - x_i) (y_j - x_j) (y_k - x_k) + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} (y_i - x_i) (y_j - x_j) (y_k - x_k) (y_l - x_l) + \cdots$$
(3.162)

En introduisant (3.162) dans l'expression intégrale du champ non local (3.157) et en évaluant les intégrales, nous obtenons :

$$\bar{f}(\vec{x}) = f(\vec{x}) + c(l)\nabla^2 f(\vec{x}) + d(l)\nabla^4 f(\vec{x}) + \cdots$$
(3.163)

Dans cette expression, l'opérateur ∇^n est le Laplacien d'ordre n. Les paramètres c(l) et d(l) ont la dimension d'une aire au carré et sont fonction de la longueur caractéristique. Les termes impairs dans (3.162) disparaissent à cause du caractère isotrope de la fonction poids. En tronquant cette série au-delà des termes du second ordre, nous obtenons la formulation à gradient explicite du champ non local :

$$\bar{f}(\vec{x}) = f(\vec{x}) + c(l)\nabla^2 f(\vec{x})$$
(3.164)

Cette relation est dite formulation à gradient explicite dans le sens où le champ non local dépend explicitement des expressions du champ local et de ses dérivées. Il est à noter que l'on retrouve la propriété de la formulation intégrale, quand $l \rightarrow 0$ nous avons équivalence entre les champs non locaux et locaux.

La formulation à gradient explicite est dite faiblement non locale contrairement à la formulation intégrale ou à la formulation à gradient implicite (présentée dans le paragraphe qui suit) qui sont fortement non locales. En effet, le calcul du champ non local pour la formulation à gradient explicite est réalisé sur un support limité. C'est à cause de son caractère non local faible que la méthode à gradient explicite n'est pas capable de régulariser correctement le problème mécanique (Peerlings, et al., 2001). Cette méthode présente d'autres désavantages. En effet, dans (Askes, et al., 2002) les auteurs ont montré que cette formulation est incapable de décrire la perte totale de rigidité du matériau. De plus, il a été prouvé qu'en dynamique cette formulation révèle un comportement non physique. La prise en compte des termes d'ordres supérieurs dans la série (3.163), en plus de rendre l'implémentation très complexe, n'apporte pas d'amélioration significative et ne résout pas les problèmes évoqués. Ce sont pour toutes ces raisons que nous n'étudierons pas plus en détail cette méthode de régularisation.

3.3.3.3 Formulation à gradient implicite

La formulation implicite est obtenue après une simple manipulation de l'expression (3.163). En effet, le Laplacien de (3.163) donne :

$$\nabla^2 \bar{f}(\vec{x}) = \nabla^2 f(\vec{x}) + c(l) \nabla^4 f(\vec{x}) + \cdots$$
(3.165)

En combinant cette expression avec (3.163), nous obtenons :

$$\bar{f}(\vec{x}) - c(l)\nabla^2 \bar{f}(\vec{x}) = f(\vec{x}) + (d(l) - c(l)^2)\nabla^4 f(\vec{x}) + \cdots$$
(3.166)

Dans cette équation, une propriété intéressante est que tous les termes du membre de droite commencent par $(d(l) - c(l)^2)$. Nous verrons l'utilité de cette propriété un peu plus loin.

En tronquant cette série au-delà des termes du second ordre, nous obtenons l'expression du champ non local dans une formulation à gradient implicite :

$$\bar{f}(\vec{x}) - c(l)\nabla^2 \bar{f}(\vec{x}) = f(\vec{x})$$
 (3.167)

Cette équation définit la formulation implicite du problème non local. En effet, le champ non local est calculé au travers du champ local et des dérivées du champ non local. Il est à noter que cette équation s'apparente à une équation de diffusion où c(l) est un terme de diffusivité.

Pour résoudre cette équation, il faut introduire une condition aux limites. Cela est réalisé au travers de l'équation qui suit :

$$\vec{\nabla} \vec{f} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega \tag{3.168}$$

où \vec{n} est la normale extérieure au solide.

Dans (Peerlings, et al., 1996), les auteurs ont montré que la définition de $\overline{f}(\vec{x})$, comme une solution du problème aux conditions aux limites défini par (3.167) et (3.168), est exactement équivalent à la formulation non locale intégrale en prenant une fonction de Green comme fonction de pondération :

$$\bar{f}(\vec{x}) = \int_{\Omega} \psi(\vec{x}; \vec{y}) f(\vec{y}) d\Omega$$
(3.169)

 $\psi(\vec{x};\vec{y})$ est définie dans \mathbb{R}^3 par :

$$\psi(\vec{x};\vec{y}) = \frac{1}{4\pi \|\vec{x} - \vec{y}\| l^2} \exp\left(-\frac{\|\vec{x} - \vec{y}\|}{l}\right)$$
(3.170)

En effet, cette fonction poids entraine que $(d(l) - c(l)^2) = 0$ et permet donc d'obtenir une formulation implicite du problème qui ne néglige aucun terme dans la série (3.166). Dans cette configuration, la valeur de la constante c(l) est donnée par :

$$c(l) = l^2 (3.171)$$

La formulation implicite, tout comme les formulations intégrales et explicites, respecte la condition d'égalité entre les champs locaux et non locaux lorsque $l \rightarrow 0$.

3.3.4 Elasto-plasticité avec endommagement non local

Le choix de la variable locale à insérer dans le modèle non local dépend fortement du modèle matériau retenu et reste délicat à justifier. Il est à noter qu'il est courant d'utiliser la ou les variables associées au phénomène adoucissant. Pour les modèles élasto-plastiques couplés avec un endommagement isotrope macroscopique, nous pouvons utiliser entre autres :

- les déplacements (Jirásek, et al., 2005), (Rodríguez-Ferran, et al., 2005) ;
- la déformation plastique équivalente $\bar{\varepsilon}$ qui intervient dans le calcul de l'endommagement (Peerlings, et al., 2002) ;
- le taux de restitution d'énergie élastique (Liebe, et al., 2001) ;
- la variable d'endommagement (Nedjar, 2001), (Areias, et al., 2003).

Pour des modèles d'endommagement de type microscopique, comme par exemple modèle de Gurson ou de Gologanu, la variable non locale est généralement le taux de porosité (Reusch, et al., 2003), (Jackiewicz, et al., 2003) et (Brunet, et al., 2005).

Dans ce manuscrit, nous avons retenu la variable d'endommagement comme étant la variable à moyenner. En effet, il a été montré dans (Jirásek, 1998) que l'endommagement non local est la méthode qui donne la meilleure régularisation.

La perte de rigidité du matériau engendrée par l'apparition de l'endommagement est donc maintenant réalisée au travers de la variable d'endommagement non locale \overline{D} . Comme pour la définition de l'endommagement dans le modèle local, la variable non locale \overline{D} est bornée et est comprise entre 0 pour le matériau sain et 1 pour l'endommagement total.

Il faut alors venir modifier les équations du chapitre 2 afin de prendre en compte le couplage entre l'endommagement non local et le comportement du matériau. La contrainte effective s'écrit :

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - h\overline{D}} \tag{3.172}$$

Pour l'élasticité, la loi de Hooke devient :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - h\overline{D})(2\mu\boldsymbol{\varepsilon}^e + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \boldsymbol{I})$$
(3.173)

Le critère de plasticité de von Mises est donné par :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, R; D) = \frac{J_2(\boldsymbol{\sigma})}{1 - h\overline{D}} - \sigma_0(r, \dot{r}) \le 0$$
(3.174)

Les lois d'évolution des variables internes sont données par :

• Pour le tenseur des taux de déformation plastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \frac{\dot{\lambda}}{1 - h\overline{D}} \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{J}_{2}(\boldsymbol{\sigma})}$$
(3.175)

• Pour la variable d'écrouissage :

$$\dot{r} = \dot{\lambda} = (1 - h\overline{D})\dot{\bar{\varepsilon}} \tag{3.176}$$

• Pour le taux d'endommagement :

$$\dot{D} = \begin{cases} \frac{\dot{\lambda}}{1-\overline{D}} \left(\frac{Y}{S_0}\right)^b & \text{si} & -\frac{p}{J_2(\sigma)} > 0\\ \frac{\dot{\lambda}}{1-h\overline{D}} \left(\frac{Y}{S_0}\right)^b & \text{si} & -\frac{1}{3} < -\frac{p}{J_2(\sigma)} \le 0\\ 0 & \text{si} & -\frac{p}{J_2(\sigma)} \le -\frac{1}{3} \end{cases}$$
(3.177)

Le calcul de la variable non locale est effectué soit avec la méthode intégrale :

$$\overline{D}(\vec{x}) = \frac{\int_{\Omega} \psi(\vec{x}; \vec{y}) D(\vec{y}) d\Omega}{\int_{\Omega} \psi(\vec{x}; \vec{y}) d\Omega}$$
(3.178)

soit avec la méthode implicite :

$$\begin{cases} \overline{D}(\vec{x}) - l^2 \nabla^2 \overline{D}(\vec{x}) = D & \text{sur } \Omega \\ \overline{\nabla} \overline{D}(\vec{x}) \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial \Omega \end{cases}$$
(3.179)

D'un point de vue thermodynamique, la variable d'endommagement \overline{D} doit respecter l'inégalité de Clausius-Duhem (2.63) :

$$\boldsymbol{\sigma}: \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - R\dot{\boldsymbol{r}} + Y\dot{\overline{\boldsymbol{D}}} \ge 0 \tag{3.180}$$

Cette inégalité est vérifiée si l'évolution de la variable d'endommagement non locale est positive. Il faut alors respecter la condition suivante :

$$\dot{\overline{D}} \ge 0 \tag{3.181}$$

Pour imposer le respect de cette condition, dans notre formulation, nous avons utilisé la relation classique qui suit :

$$\overline{D}(t) = \max(\overline{D}(\tau), 0 \le \tau \le t)$$
(3.182)

La valeur du multiplicateur plastique est donnée par :

$$\frac{\dot{\lambda}}{1-h\overline{D}} = \frac{\langle \boldsymbol{s}: \dot{\boldsymbol{e}} \rangle}{J_2(\boldsymbol{\sigma}) \left(1 + \frac{1-h\overline{D}}{3\mu} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r}\right)}$$
(3.183)

Et le module tangent continu vaut :

$${}^{4}\boldsymbol{\mathcal{C}} = 2\mu(1-h\overline{D})\left({}^{4}\boldsymbol{I}^{dev} - \frac{\boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{s}}{\frac{2}{3}J_{2}(\boldsymbol{\sigma})^{2}\left(1+\frac{1-h\overline{D}}{3\mu}\frac{\partial\sigma_{0}}{\partial r}\right)}\left(1+\frac{J_{2}(\boldsymbol{\sigma})}{3\mu(1-h\overline{D})^{2}}\left(\frac{Y}{S_{0}}\right)^{b}\right)\right)$$
(3.184)

3.3.5 Implémentation des méthodes non locales

Dans cette section, nous allons présenter les différents aspects de l'implémentation des méthodes non locales à formulation intégrale et à gradient implicite. La résolution du problème non local est, en général, réalisée en même temps que le calcul de l'équilibre mécanique (Geers, 2004), (Germain, et al., 2007). Cette résolution couplée engendre une forte augmentation du temps de résolution et la matrice tangente du système mécanique globale est alors non symétrique. La suite logicielle Forge2005[®] utilisant des matrices symétriques dans la résolution mécanique, cette approche couplée n'est pas envisageable sans une modification importante du code. (Boers, et al., 2005) ont montré qu'il est possible de découpler la résolution des deux équations tout en conservant de bons résultats. En contrepartie, il est nécessaire d'utiliser un pas de discrétisation temporelle faible. Nous avons donc utilisé cette seconde approche.

3.3.5.1 Formulation intégrale

Pour le modèle non local à formulation intégrale, l'évaluation de l'endommagement non local correspond au calcul de la moyenne non locale pour l'ensemble des points de Gauss du maillage éléments finis du problème mécanique. La moyenne non locale est donnée par :

$$\overline{D}(\vec{x}) = \frac{\int_{\Omega} \psi(\vec{x}; \vec{y}) D(\vec{y}) d\Omega}{\int_{\Omega} \psi(\vec{x}; \vec{y}) d\Omega}$$
(3.185)

Dans cet exemple, nous utiliserons une fonction poids de type cloche car elle a l'avantage d'avoir un support fini ce qui est un point important pour la suite :

$$\psi(\vec{x};\vec{y}) = \begin{cases} \frac{105}{32\pi l^3} \left(1 - \frac{\|\vec{x} - \vec{y}\|^2}{l^2}\right)^2 & \text{si} & \|\vec{x} - \vec{y}\| \le l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
(3.186)

Considérons le point de Gauss *i* avec i = 1, ..., Nbgauss où Nbgauss correspond au nombre de points de Gauss du maillage éléments finis. Sa position dans l'espace est donnée au travers du vecteur \vec{x}_i . L'approximation numérique de la moyenne non locale est construite en utilisant la méthode d'intégration de Gauss (Strömberg, et al., 1996), (Jirásek, et al., 2005) :

$$\overline{D}_{i} \equiv \overline{D}(\vec{x}_{i}) = \frac{\int_{\Omega} \psi(\vec{x}; \vec{y}) D(\vec{y}) d\Omega}{\int_{\Omega} \psi(\vec{x}; \vec{y}) d\Omega}$$

$$\approx \frac{\sum_{k=1}^{Nbgauss} w_{k} \psi(\vec{x}_{i}; \vec{y}_{k}) D(\vec{y}_{k}) J(\vec{y}_{k})}{\sum_{l=1}^{Nbgauss} w_{l} \psi(\vec{x}_{i}; \vec{y}_{l}) J(\vec{y}_{l})}$$

$$= \sum_{k=1}^{Nbgauss} a_{ik} \overline{D}(\vec{y}_{k})$$
(3.187)

Dans cette expression, w_k est le poids d'intégration du point de Gauss \vec{x}_k . $J(\vec{x}_k)$ est le Jacobien de la transformation isoparamétrique évalué au point \vec{x}_k . Les a_{ik} sont définis par :

$$a_{ik} = \frac{w_k \psi(\vec{x}_i; \vec{y}_k) J(\vec{y}_k)}{\sum_{l=1}^{Nbgauss} w_l \psi(\vec{x}_i; \vec{y}_l) J(\vec{y}_l)}$$
(3.188)

Il est important de noter que les termes $\psi(\vec{x}_i; \vec{y}_k)$ et a_{ik} sont nuls dans le cas où la distance séparant les points de Gauss \vec{x}_i et \vec{y}_k est supérieure à la longueur caractéristique *l*. Les sommes dans (3.187)

et (3.188) n'ont donc pas besoin d'être évaluées sur l'ensemble des points d'intégration du domaine mais seulement sur ceux situés dans une sphère (3D) ou dans un cercle (2D) de rayon l centré au point \vec{x}_i .

La recherche des points de Gauss voisins du point \vec{x}_i constitue le point critique de l'efficacité de la méthode intégrale. Travaillant avec des éléments linéaires P1, il suffit d'un seul point de Gauss sur chaque élément pour pouvoir réaliser les intégrations numériques. Dans notre cas, nous avons mis en place une recherche récursive sous contraintes pour diminuer le nombre de tests effectués. La figure 3.26 illustre le fonctionnement de la fonction de recherche de voisins sur une partie de maillage (2D). Le principe est de rechercher les éléments voisins de l'élément central, ces éléments sont considérés comme étant des voisins potentiels. Pour chaque voisin potentiel, la distance le séparant du point de gauss central est évaluée. Si cette distance est inférieure à la longueur caractéristique alors le voisin est valide sinon il est non valide. Pour chaque élément valide, les voisins potentiels sont recherchés et les étapes précédentes sont répétées jusqu'à ce que l'ensemble des voisins potentiels soit testé.



Figure 3.26 : Illustration de la méthode de recherche des points de Gauss dans un rayon l

Plusieurs remarques peuvent être formulées en se basant sur la méthode de résolution et la recherche des points de Gauss. La première concerne le rapport de taille entre la longueur caractéristique l et la taille moyenne du maillage h. Si l < h alors le champ non local est identique au champ local. En effet, dans ce cas il n'y a pas d'autres points de Gauss que celui de l'élément courant pour effectuer la moyenne et le poids vaut alors 1. Pour s'assurer d'une bonne régularisation, la longueur caractéristique doit respecter la règle suivante :

$$l \ge 2h \tag{3.189}$$

La longueur caractéristique étant de l'ordre de la dizaine voir de la centaine de micromètres (cf. 3.3.6), le respect de cette condition devient très difficile dans le cas d'applications de grandes dimensions. Il peut être alors intéressant de mettre en œuvre une technique de maillage adaptatif afin de s'assurer que cette relation soit bien respectée dans les zones endommagées (Rodríguez-Ferran, et al., 2001).

La deuxième remarque vient du fait qu'il est nécessaire d'effectuer la recherche des points de Gauss voisins du point de Gauss sur lequel le champ non local est évalué. En effet, il est évident que plus la longueur caractéristique est grande par rapport à la taille moyenne du maillage plus le temps de recherche est important. Pour diminuer l'augmentation du temps de la simulation liée à la recherche des voisins, il peut être intéressant de ne pas effectuer la recherche des voisins tous les incréments de temps mais uniquement si un remaillage a été effectué.

La dernière remarque concerne l'évaluation du champ non local proche d'une zone de fissuration. En effet, l'algorithme mis en place pour rechercher les points de Gauss voisins utilise la mesure de distance entre les deux points de Gauss comme critère pour évaluer si un point influe sur un autre. Or cet algorithme peut engendrer un mauvais calcul du champ non local pour des éléments proches de la zone de fissuration en prenant en compte des points qui ne devraient pas intervenir dans le calcul (Fig. 3.27).



Figure 3.27 : Représentation d'un cas où le calcul du champ local sur l'élément considéré ne sera pas valide

Pour résoudre ce problème, il est possible de venir évaluer la distance réelle séparant deux points de Gauss en parcourant les différents éléments les reliant et en évaluant à chaque fois la distance entre les éléments. Cette méthode bien qu'efficace, est très lourde en terme de temps de calcul et n'est pas de mise en œuvre aisée.

3.3.5.2 Formulation à gradient implicite

Les équations qui constituent le modèle non local à formulation à gradient implicite sont résolues par la méthode éléments finis. Le problème fort initial s'écrit :

$$\begin{cases} \overline{D} - l^2 \nabla^2 \overline{D} = D & \text{sur } \Omega \\ \overline{\nabla} \overline{D} \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial \Omega \end{cases}$$
(3.190)

Définissons tout d'abord les espaces des fonctions test :

$$\overline{\mathcal{D}} = \{ \overline{D} \in H^1(\Omega) \}$$
(3.191)

$$\overline{\mathcal{D}}^0 = \{ \overline{\mathcal{D}}^* \in H^1(\Omega) \}$$
(3.192)

La formulation faible du problème non local s'obtient après multiplication de (3.190) par la fonction poids \overline{D}^* et intégration sur le domaine Ω .

$$\int_{\Omega} \overline{D}^* (\overline{D} - l^2 \nabla^2 \overline{D}) d\Omega = \int_{\Omega} \overline{D}^* D d\Omega$$
(3.193)

En développant le Laplacien en divergence et gradient, nous obtenons :

$$\overline{D}^* l^2 \nabla^2 \overline{D} = \vec{\nabla} . \left(\overline{D}^* l^2 \vec{\nabla} \overline{D} \right) - \vec{\nabla} \overline{D}^* . l^2 \vec{\nabla} \overline{D}$$
(3.194)

En substituant (3.194) dans (3.193) :

$$\int_{\Omega} \overline{D}^* \overline{D} + \vec{\nabla} \overline{D}^* \cdot l^2 \vec{\nabla} \overline{D} - \vec{\nabla} \cdot \left(\overline{D}^* l^2 \vec{\nabla} \overline{D} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \overline{D}^* D d\Omega$$
(3.195)

En appliquant le théorème de la divergence :

$$l^{2} \int_{\Omega} \vec{\nabla} . \left(\overline{D}^{*} \vec{\nabla} \overline{D} \right) d\Omega = l^{2} \int_{\partial \Omega} \overline{D}^{*} \vec{\nabla} \overline{D} . \vec{n} d\Gamma$$
(3.196)

Finalement en utilisant la condition aux limites, la formulation faible du problème non local s'écrit comme :

Trouver $\overline{D} \in \overline{\mathcal{D}}$ tel que :

$$\int_{\Omega} \left(\overline{D}^* \overline{D} + \vec{\nabla} \overline{D}^* . \, l^2 \vec{\nabla} \overline{D} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \overline{D}^* D d\Omega \quad \forall \overline{D}^* \in \overline{D}^*$$
(3.197)

La discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis de (3.197) se fait selon la méthode de Galerkin. Définissons les espaces discrets d'interpolation du champ non local

$$\overline{\mathcal{D}}_{h} = \left\{ \overline{D}_{h} \in C^{0}(\Omega_{h}), \overline{D}_{h} |_{\Omega_{e}} \in P^{1}(\Omega_{e}), \forall e \in \mathcal{E} \right\}$$
(3.198)

$$\overline{\mathcal{D}}_{h}^{0} = \left\{ \overline{D}_{h}^{*} \in C^{0}(\Omega_{h}), \overline{D}_{h}^{*}|_{\Omega_{e}} \in P^{1}(\Omega_{e}), \forall e \in \mathcal{E} \right\}$$
(3.199)

Le champ non local d'endommagement s'écrit en un point de l'espace \vec{x} comme :

$$\overline{D}_{h}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{Nbnoe} N_{k}^{l}(\vec{x})\overline{D}_{k}$$
(3.200)

Comme dans la résolution du problème mécanique, l'indice h désigne la variable discrète, *Nbnoe* correspond au nombre de nœuds de la discrétisation spatiale et $N_k^l(\vec{x})$ représente la fonction d'interpolation associée au nœud k. Le type d'élément utilisé est le même que pour l'interpolation en pression à savoir le tétraèdre P1 (en 3D). Sur l'élément Ω_e , le champ non local s'écrit :

$$\overline{D}_h(\vec{x}) = \sum_{k=1}^4 N_k^l(\vec{x})\overline{D}_k$$
(3.201)

Le problème discrétisé s'écrit alors :

Trouver $\overline{D}_h \in \overline{\mathcal{D}}_h$ tel que :

$$\int_{\Omega_h} \left(\overline{D}_h^* \overline{D}_h + \vec{\nabla} \overline{D}_h^* \cdot l^2 \vec{\nabla} \overline{D}_h \right) d\Omega_h = \int_{\Omega_h} \overline{D}_h^* D d\Omega_h \quad \forall \overline{D}_h^* \in \overline{D}_h^*$$
(3.202)

Le problème non local se ramène à une équation linéaire d'inconnue \overline{D}_h qui est évaluée sur chaque élément Ω_e de la discrétisation. Le système local se met sous la forme :

$$[\mathbf{K}_e](\overline{D}_e^h) = (f_e) \tag{3.203}$$

Les termes de la matrice de raideur locale K_e sont donnés par :

$$K_{e,ij} = \int_{\Omega_e} \left(N_i^l N_j^l + l^2 \frac{\partial N_i^l}{\partial x_k} \frac{\partial N_j^l}{\partial x_k} \right) d\Omega_e$$
(3.204)

Le second membre local f_e s'obtient par :

$$f_{e,i} = \int_{\Omega_e} N_i^l N_j^l D_j d\Omega_e \tag{3.205}$$

Après calcul et assemblage des matrices locales de l'ensemble des éléments du maillage, le système global est résolu et le champ non local \overline{D}_h est déterminé.

Par rapport au modèle non local à formulation intégrale, il est important de noter que la valeur de la longueur caractéristique ne va pas influencer le temps de résolution du problème non local. En effet, *l* apparaît comme un simple paramètre qui caractérise la diffusion du champ local. Un des problèmes bien connu des équations de diffusion est le phénomène de choc qui se caractérise par des oscillations spatiales du champ diffusé (Aliaga, 2000). Dans le cas stationnaire, il existe alors une relation simple entre la discrétisation spatiale et le coefficient de diffusion afin de bien capturer la diffusion, cette relation se traduit dans notre cas par :

$$h \le l \tag{3.206}$$

Ou de façon plus générale :

$$h \le \sqrt{c(l)} \tag{3.207}$$

Pour valider l'implémentation du calcul non local pour la formulation à gradient implicite, il est possible d'obtenir des solutions analytiques pour des répartitions du champ local particulières dans une configuration unidimensionnelle.

$$\bar{f}(x) - l^2 \frac{\partial^2 \bar{f}(x)}{\partial^2 x} = f(x)$$
(3.208)

Cette équation se ramène à une équation différentielle du deuxième ordre dont la solution générale s'écrit :

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} (c_1 + c_2 - f(x)) e^{x/l} + \frac{1}{2} (c_1 - c_2 - f(x)) e^{-x/l} + f(x)$$
(3.209)

Où c_1 et c_2 sont des constantes à déterminer en fonction des conditions aux limites.

Pour l'étude analytique, nous allons considérer, dans un premier temps, le problème de la poutre infinie ayant une répartition de la variable locale définie par la fonction Heaviside :

$$H(x, x^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x^* \\ 1 & \text{si } x \ge x^* \end{cases}$$
(3.210)

En remplaçant f dans (3.208) par H défini par (3.210), nous obtenons :

$$\bar{f}(x) - l^2 \frac{\partial^2 \bar{f}(x)}{\partial^2 x} = H(x, x^*)$$
 (3.211)

La solution de cette équation, pour un domaine infini en supposant que $\lim_{x\to\infty} \bar{f}(\vec{x}) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} \bar{f}(\vec{x}) = 0$ ainsi que la continuité et la dérivabilité au premier ordre de $\bar{f}(\vec{x})$, est donnée par :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\left(\frac{x-x^*}{l}\right)} & \text{si } x < x^* \\ 1 - \frac{1}{2}e^{\left(-\frac{x-x^*}{l}\right)} & \text{si } x \ge x^* \end{cases}$$
(3.212)

Pour analyser les performances de notre implémentation, nous avons considéré une poutre 3D de 130 mm de longueur et de 10 mm de côté avec x^* imposé au centre de l'éprouvette, i.e. 65 mm, et une taille moyenne h des éléments de 0,5 mm. Les résultats analytiques et numériques du calcul du champ non local pour différentes longueurs caractéristiques sont présentés sur la figure 3.28.



Figure 3.28 : Solutions analytiques et numériques pour la méthode non locale à gradient implicite pour un champ local donné par la fonction Heaviside (h = 0,5 mm)

Nous pouvons constater sur la figure 3.28 que pour une longueur caractéristique inférieure à la taille de maille, nous avons l'apparition de fortes oscillations sur la solution numérique. Pour une longueur caractéristique respectant la condition décrite par l'équation (3.206), nous avons une solution numérique qui est très proche de la solution analytique. Plus la longueur caractéristique est importante plus la diffusion est importante. Tout comme pour la formulation non locale intégrale, il peut être alors intéressant de mettre en place une méthode de maillage adaptatif qui permet de s'assurer du respect de (3.206) sur l'ensemble du domaine afin de garantir la qualité de la solution obtenue.

Prenons comme deuxième exemple une répartition de la variable locale en forme de porte :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} & |x| > 1\\ 0 & \text{si} & |x| \le 1 \end{cases}$$
(3.213)

La solution analytique, pour ce cas en supposant que $\lim_{x\to\infty} \bar{f} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \bar{f} = 0$ ainsi qu'une fonction $\bar{f}(\vec{x}) C^1$ sur l'ensemble du domaine, est donnée par :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} (e^{-1/l} - e^{1/l}) e^{-|x|/l} & \text{si} \quad |x| > 1\\ 1 - \frac{1}{2e^{1/l}} (e^{x/l} + e^{-x/l}) & \text{si} \quad |x| \le 1 \end{cases}$$
(3.214)

Comme précédemment, nous avons réalisé les calculs sur une poutre de 130 mm avec une taille moyenne des éléments de 0,5 mm. Les résultats analytiques et numériques sont représentés sur la figure 3.29.



Figure 3.29 : Solutions analytiques et numériques pour la méthode non locale à gradient implicite pour un champ local donné par une fonction porte (h = 0,5 mm)

Les mêmes conclusions que sur le cas précédent peuvent être tirées en ce qui concerne la relation entre la taille de la discrétisation spatiale et la longueur caractéristique. En plus, cet exemple montre, plus concrètement, l'effet de la méthode non locale à gradient implicite sur le phénomène de localisation de l'endommagement. Pour une concentration uniforme et discontinue de l'endommagement local dans une bande de largeur 2 mm, l'endommagement non local est alors non uniforme, continu et étendu sur une largeur supérieure à 2mm et n'atteint jamais 1.

3.3.5.3 Modification du calcul d'intégration locale des équations comportementales

L'utilisation d'une méthode non locale avec l'objectif de calculer l'endommagement impose la réécriture d'une partie du schéma d'intégration des équations comportementales (cf. §3.2.5). En effet, la contrainte équivalente s'écrit alors comme :

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - h\overline{D}} \tag{3.215}$$

En décomposant en partie déviatorique et sphérique, nous obtenons :

$$\tilde{s} = \frac{s}{1 - h\overline{D}}$$
 et $\tilde{p} = \frac{p}{1 - h\overline{D}}$ (3.216)

Comme nous travaillons dans l'espace des contraintes effectives, la prédiction élastique du déviateur des contraintes équivalentes n'est pas modifiée :

$$\tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t = \tilde{\boldsymbol{s}}_n + 2\mu \Delta \boldsymbol{e} \tag{3.217}$$

Par contre, l'évaluation de la correction plastique qui fait intervenir l'endommagement, est modifiée de la manière suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t - 2\mu \Delta \boldsymbol{e}^p = \tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t - \frac{2\mu\Delta\lambda}{1 - h\overline{D}_{n+1}} \widetilde{\boldsymbol{n}}_{n+1}$$
(3.218)

Dans cette expression, contrairement au modèle local, il n'y a qu'une seule inconnue $\Delta \lambda$ à déterminer. En effet, à cause de la résolution découplée des équations d'équilibre et du problème non local, la variable \overline{D}_{n+1} est considérée comme constante au cours des itérations de l'intégration locale.

L'inconnue $\Delta\lambda$ est déterminée au travers de l'équation de la surface de charge :

$$g_1 = f_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^t : \tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^t - \sigma_0 - \frac{3\mu\Delta\lambda}{1 - h\overline{D}_{n+1}} = 0$$
(3.219)

Comme dans le cas du couplage faible (cf. §3.2.5.2.2), la détermination du multiplicateur plastique est réalisée en résolvant l'équation (3.219) par un schéma itératif de Newton-Raphson. Dans ce cas, le schéma d'intégration ne nécessite le calcul que d'une seule dérivée donnée par :

$$\frac{\partial g_1}{\partial \Delta \lambda} = -\frac{\partial \sigma_0}{\partial \Delta \lambda} - \frac{3\mu}{1 - h\overline{D}_{n+1}}$$
(3.220)

Pour assurer le caractère de convergence quadratique du schéma itératif de Newton-Raphson du calcul d'équilibre mécanique, nous devons calculer le module tangent discret cohérent. Repartons de l'expression du déviateur des contraintes à l'instant $t + \Delta t$:

$$\mathbf{s}_{n+1} = (1 - h\overline{D}_{n+1})\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}^t - 2\mu\Delta\lambda\tilde{\mathbf{n}}_{n+1}$$
(3.221)

En différenciant cette expression, nous obtenons :

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = (1 - h\overline{D}_{n+1}) \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} - h\tilde{\boldsymbol{s}}_{n+1}^t \otimes \frac{\partial \overline{D}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} - 2\mu \tilde{\boldsymbol{n}}_{n+1} \otimes \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} - 2\mu \Delta \lambda \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{n}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}$$
(3.222)

Nous avons formulé l'hypothèse que l'endommagement non local \overline{D}_{n+1} est constant au cours de l'intégration locale ce qui se traduit par :

$$\frac{\partial \overline{D}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \mathbf{0} \tag{3.223}$$

Nous nous retrouvons dans le même schéma que pour l'intégration locale du couplage faible du modèle d'endommagement. Le module tangent discret cohérent avec le schéma d'intégration est alors donné par :

$${}^{4}\boldsymbol{C}_{n+1}^{d} = 2\mu(1-h\overline{D}_{n+1})\left(1-2\mu\Delta\lambda\frac{3\mu}{J_{2}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{t})}\right) {}^{4}\boldsymbol{I}^{dev} - 4\mu^{2}\widetilde{\boldsymbol{n}}_{n+1}\otimes\widetilde{\boldsymbol{n}}_{n+1}\left(\frac{1}{\frac{\partial\sigma_{0}}{\partial\Delta\lambda}+\frac{3\mu}{1-h\overline{D}_{n+1}}}+\frac{\Delta\lambda}{J_{2}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{t})}\right)$$
(3.224)

La seule différence avec le modèle d'endommagement local est le remplacement de la variable D_n par son équivalent non local \overline{D}_{n+1} .

Solution connue à l'instant $t: \left(\vec{v}_n^l, \vec{v}_n^b, p_n^h \right)$ Intégration locale du comportement (3.217): $\Delta\lambda$, \boldsymbol{s}_{n+1} , ${}^{4}C_{n+1}^{d}$ Calcul du système linéaire (3.57) : Equilibre mécanique $[\boldsymbol{H}] \begin{pmatrix} \delta \vec{v}^l \\ \delta p^h \end{pmatrix} = -(\boldsymbol{R})$ $k \leftarrow k + 1$ Solution potentielle (3.58) : $\begin{cases} \vec{v}_{n+1}^{l,k+1} = \vec{v}_{n+1}^{l,k} + \delta \vec{v}_{n+1}^{l,k} \\ p_{n+1}^{h,k+1} = p_{n+1}^{h,k} + \delta p_{n+1}^{h,k} \end{cases}$ $t \leftarrow t + \Delta t$ Forge 2005® $\|\mathbf{R}_{n+1}^{k+1}\| = \epsilon < tolérance$ Convergence du problème d'équilibre non in the second se Calcul de $D_{n+1} = D_n + \Delta t \dot{D}_{n+1}$ (3.177) Calcul non local Calcul de \overline{D}_{n+1} (3.178) ou (3.179) Application du critère (3.182) Test de fin de la simulation non In Fin de la simulation

La figure 3.30 représente le schéma de résolution globale du problème mécanique avec un modèle d'endommagement non local.

Figure 3.30 : Algorithme de résolution du problème mécanique et du problème d'endommagement non local

3.3.6 La longueur caractéristique

Quelle que soit la méthode non locale retenue, celle-ci enrichit la description du milieu mécanique classique au travers de la longueur caractéristique *l* qui intervient soit dans la fonction de pondération soit dans l'équation de diffusion. La longueur caractéristique est un paramètre intrinsèque au matériau dont la caractérisation ainsi que le sens physique dépend fortement du modèle matériau retenu.

Pour les matériaux granulaires comme les bétons, elle est en relation directe avec la taille des agrégats. En première approximation, elle peut être considérée comme étant comprise entre trois et cinq fois la taille du plus gros agrégat (Bažant, et al., 1989). Pour une identification plus précise de la longueur caractéristique, il est aussi possible d'utiliser la loi d'effet d'échelle (le Bellégo, et al., 2003).

Pour des matériaux au comportement élastique endommageable, (lacono, et al., 2006) ont montré qu'il est possible d'utiliser une méthode d'analyse inverse pour caractériser la loi d'endommagement et la longueur interne. Cette méthode est efficace à condition d'avoir suffisamment de données expérimentales (courbes force-déplacement et mesure de la largeur de la zone endommagée).

Pour les matériaux composites, la longueur caractéristique est en étroite relation avec la taille moyenne des fibres de la matrice. Il est possible de la déterminer en combinant une mesure précise du champ de déplacement en pointe de fissure, grâce à une méthode de corrélation d'images, et l'utilisation d'une méthode d'analyse inverse (Geers, et al., 1999).

Pour les matériaux métalliques, la longueur caractéristique est très mal connue et fait l'objet de nombreux débats et recherches. Certains chercheurs considèrent que cette longueur peut être définie comme étant la distance moyenne entre deux inclusions ou défauts. Elle est donc de l'ordre de grandeur de la dizaine voir de la centaine de micromètres. En première approximation, elle peut être considérée comme constante même si de récentes études, en plasticité non locale, ont montré qu'elle peut dépendre localement de la température et du taux de contrainte (Voyiadjis, et al., 2005). Toujours dans le cadre de la plasticité non locale, une tentative de caractérisation de la longueur caractéristique a été réalisée en utilisant la nano-indentation (Yuan, et al., 2001), (Abu Al-Rub, et al., 2004).

Devant la difficulté à déterminer expérimentalement cette longueur caractéristique pour les métaux, de nombreux auteurs l'utilisent comme un paramètre purement numérique qui ne sert uniquement qu'à régulariser la solution numérique sans forcément justifier du choix de la valeur de celle-ci. Il existe alors deux approches. La première méthode consiste à réaliser plusieurs simulations d'un procédé en faisant varier la longueur caractéristique du modèle non local (en vérifiant que le rapport entre la taille de maille et la longueur caractéristique vérifie soit (3.190) soit (3.208)). Ensuite la longueur caractéristique vérifie soit (3.190) soit (3.208)). Ensuite la longueur caractéristique qui donne les résultats les plus satisfaisants, est alors retenue (Jackiewicz, et al., 2003), (Yuan, et al., 2004). La deuxième approche consiste à fixer une taille de maille pour la simulation et à choisir une longueur caractéristique suffisamment importante afin de ne plus avoir de dépendance des résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale. Il suffit ensuite de venir identifier les paramètres matériaux sur ce modèle (Areias, et al., 2003), (César de Sá, et al., 2006).

3.3.7 Apports des modèles non locaux

Dans cette partie, nous allons présenter les apports de la formulation non locale vis-à-vis de la formulation classique. Pour ce faire, nous utiliserons un essai de traction uniaxiale sur éprouvette plane. Cet essai a été retenu car il permet de clairement voir le phénomène de localisation des déformations et de l'endommagement. Dans un premier temps, une comparaison des deux modèles non locaux implémentés sera effectuée. Puis nous verrons l'influence de la longueur caractéristique sur les résultats obtenus. Pour finir, nous étudierons la capacité du modèle non local à affranchir les résultats de la dépendance à la discrétisation spatiale.

L'éprouvette est une éprouvette plane de dimensions 4×1 mm. Elle est sollicitée à son extrémité supérieure à une vitesse imposée de 0,1 mm/s. L'autre extrémité est encastrée. Le contact entre les outils et l'éprouvette est du type bilatéral collant. Quatre discrétisations spatiales ont été utilisées afin de caractériser l'influence de la taille de maille sur les résultats et sur la localisation des déformations et de l'endommagement (Fig. 3.31). Les simulations sont réalisées en déformations planes avec le logiciel 2D de Forge2005[®] et l'incrément de temps est de 0,001 s.



Figure 3.31 : Géométrie de l'éprouvette plane et les différentes discrétisations spatiales

Les paramètres matériaux de l'éprouvette plane, récapitulés dans le tableau 3.4, sont ceux d'un alliage d'aluminium.

Description	Symbole	Valeur
Masse volumique	ρ	2700 kg/m ³
Module d'élasticité	Ε	70000 MPa
Coefficient de Poisson	ν	0,3
Limite élastique	σ_y	70 MPa
Contrainte d'écoulement	$\sigma_0(r)$	$596(10^{-4} + r)^{0,31}$ MPa
Paramètre d'endommagement (exposant)	b	1
Paramètre d'endommagement (dénominateur)	S_0	2,25 MPa
Déformation seuil	$ar{arepsilon}_D$	0
Endommagement critique à rupture	D_c	1

3.3.7.1 Modèle local

Dans cette section, nous allons caractériser l'influence du maillage sur les résultats obtenus avec le modèle local. Les figures 3.32, 3.33 et 3.34 représentent respectivement les isovaleurs d'endommagement, de déformation plastique équivalente et des taux de déformation plastique équivalente pour les quatre discrétisations spatiales retenues. Les visualisations correspondent à l'incrément précédent la rupture. Il est clairement visible que la taille de la zone de localisation de l'endommagement dépend fortement de la taille de maille. Plus la taille de maille est faible, plus l'endommagement va se concentrer dans deux bandes perpendiculaires formant un angle de 45° avec l'éprouvette. Les remarques précédentes peuvent s'appliquer de la même manière à la déformation plastique équivalente.



Figure 3.32 : Cartes d'endommagement local pour différentes tailles de maille : (a) h = 0, 16 mm, (b) h = 0, 08 mm, (c) h = 0, 04 mm, (d) h = 0, 02 mm



Figure 3.33 : Cartes de déformation plastique équivalente locale pour différentes tailles de maille : (a) h = 0, 16 mm, (b) h = 0, 08 mm, (c) h = 0, 04 mm, (d) h = 0, 02 mm



Figure 3.34 : Cartes des taux de déformation plastique équivalente locale pour différentes tailles de maille : (a) h = 0, 16 mm, (b) h = 0, 08 mm, (c) h = 0, 04 mm, (d) h = 0, 02 mm

En ce qui concerne les taux de déformation plastique équivalente, la localisation dans une zone de plus en plus étroite est encore plus marquée. Lors de la rupture de l'éprouvette, la fissuration va apparaître dans une des deux bandes de localisation. Les éléments entièrement endommagés vont alors se concentrer dans une bande de largeur un élément. La dissipation à rupture de l'éprouvette va donc être fortement dépendante de la taille du maillage. Cette dépendance se répercute directement sur la réponse globale de la structure. La figure 3.35 représente les courbes force – déplacement obtenues pour les différentes configurations de maillage. Pour un endommagement faible, toutes les courbes se superposent. Au-delà d'un point de bifurcation, qui correspond au moment où le phénomène d'endommagement prend l'ascendant sur le phénomène d'écrouissage isotrope, les courbes vont bifurquer et donner des résultats différents. Plus la taille moyenne du maillage sera faible plus la structure aura un comportement fragile.



Figure 3.35 : Courbes force – déplacement pour la méthode locale

3.3.7.2 Comparaison des modèles

Les deux formulations non locales, intégrale et gradient implicite, sont comparées sur la simulation de l'essai de traction uniaxiale avec un taille moyenne de maillage de 0,04 mm. Pour effectuer cette comparaison, nous ne pouvons pas utiliser la formulation à gradient implicite développée au paragraphe 3.3.3.3. En effet, la valeur de c(l) est obtenue en utilisant dans la formulation intégrale une fonction de poids de type Green (3.170). Or cette fonction présente une singularité en $\vec{x} = \vec{y}$. C'est la raison pour laquelle nous utiliserons pour la formulation intégrale, une fonction de poids de type Gauss (3.160). Dans ce cas, la constante c(l) intervenant dans (3.167) est donnée par :

$$c(l) = \frac{l_{imp}^2}{2} = 0,0025 \text{ mm}^2$$
 (3.225)

Où l_{imp} est la longueur caractéristique du modèle à gradient implicite. Nous avons choisi une valeur de c(l) égale à 0,0025 mm². Comme la taille moyenne du maillage de l'éprouvette est de 0,04 mm, la constante c(l) vérifie donc bien la condition (3.207). Pour déterminer la longueur caractéristique à utiliser dans le modèle non local à formulation intégrale l_{int} , il existe un rapport entre les longueurs caractéristiques des deux formulations non locales :

$$l_{int} = 2\sqrt{2}l_{imp} = 0.2 \text{ mm}$$
 (3.226)

La longueur interne du modèle à formulation intégrale respecte aussi le critère (3.189).

Les champs d'endommagement non locaux et de déformation plastique équivalente pour les deux formulations pris avant l'apparition de la rupture sont représentés sur la figure 3.36. La répartition de l'endommagement est identique que cela soit avec la formulation intégrale ou avec la formulation à gradient implicite. L'endommagement ne se concentre plus dans deux bandes mais au centre de l'éprouvette. Cependant nous remarquons que la méthode non locale à formulation intégrale « diffuse » l'endommagement de façon légèrement plus importante. En ce qui concerne la déformation plastique équivalente, les résultats obtenus avec les deux formulations sont identiques et nous retrouvons le schéma en croix de la méthode locale même si celui-ci est moins localisé.



Figure 3.36 : Cartes d'endommagement non local (gauche) et de taux de déformation plastique équivalente (droite) pour les méthodes non locales avec h = 0,04 mm : (a) formulation intégrale, (b) formulation à gradient implicite

La figure 3.37 illustre les courbes force – déplacement obtenues pour les modèles non locaux à formulation intégrale et à formulation à gradient implicite. Les différences entre les deux modèles sont faibles. Comme pour l'analyse des isovaleurs d'endommagement, il apparaît que la méthode non locale à formulation intégrale est légèrement plus ductile que la méthode à gradient implicite. La différence entre les résultats obtenus avec les deux modèles peut être expliquée par le fait que dans le modèle à formulation implicite l'ensemble des termes de la série n'est pas conservé (Peerlings, et al., 2001).



Figure 3.37 : Courbes force – déplacement obtenues avec les deux formulations non locales avec $h=0,04~\mathrm{mm}$

En ce qui concerne le temps CPU, la simulation pour le modèle non local à formulation intégrale est de 1h 06mn 59s pour atteindre un déplacement de 1 mm. Le modèle non local à formulation à gradient implicite quant à lui met 21mn 56s pour le même déplacement. Le calcul effectué avec la formulation intégrale demande plus de temps que la formulation à gradient implicite. En effet comme nous l'avons déjà fait remarquer lors de l'implémentation de ces deux méthodes, la formulation intégrale nécessite en 2D de mettre en place la recherche des points de Gauss contenus dans un cercle de rayon *l* autour du point de Gauss où le calcul non local est réalisé. Cette recherche est d'autant plus coûteuse en temps de calcul que le rapport entre la longueur caractéristique et la taille de maille est importante. A l'opposé, la méthode à gradient implicite revient à résoudre une équation de diffusion dans laquelle la longueur caractéristique est un paramètre caractérisant la diffusion du champ non local.

Plusieurs conclusions peuvent être tirées de cette comparaison entre les deux types de formulations du modèle d'endommagement non local. Tout d'abord, les résultats obtenus sont identiques quelle que soit la formulation utilisée. Le calcul utilisant la formulation à gradient implicite est plus rapide que celui basé sur la formulation intégrale car celui-ci n'est pas contraint à la recherche des voisins. Pour finir, la condition à respecter entre la longueur caractéristique et la taille du maillage dans les zones endommagées est moins contraignante dans le cas du modèle à gradient implicite (3.189) et (3.207). C'est pour ces différentes raisons que nous utiliserons le modèle non local à formulation à gradient implicite plutôt que le modèle à formulation intégrale dans le reste de cette étude.

3.3.7.3 Influence de la longueur caractéristique

Les méthodes non locales enrichissent le modèle mécanique au travers de l'introduction d'une longueur caractéristique l. Les isovaleurs d'endommagement non local pour trois longueurs internes différentes (Fig. 3.38) et une taille de maille h = 0,04 mm montrent clairement son influence sur les valeurs de la variable d'endommagement non local. Plus la longueur caractéristique est grande, plus la zone endommagée et la bande de localisation est large et plus la valeur de l'endommagement non local est faible. Ce phénomène est en accord avec la théorie des modèles non locaux. En effet, plus la valeur de la longueur caractéristique est grande plus la dissipation de l'endommagement sera importante et donc plus la zone endommagée sera étendue. Nous avons aussi effectué un calcul avec une longueur caractéristique nulle afin de voir si notre modèle est capable de retrouver le modèle local. Comme nous pouvons le voir, nous retrouvons bien le phénomène de localisation de l'endommagement dans deux bandes perpendiculaires lorsque la longueur caractéristique est nulle. Le modèle respecte donc bien la théorie.



Figure 3.38 : Isovaleurs d'endommagement non local pour plusieurs longueurs caractéristiques avec h = 0,04 mm : (a) l = 0 mm, (b) l = 0,2 mm, (c) l = 0,5 mm et (d) l = 1 mm

Les figures 3.39 et 3.40 représentent respectivement les isovaleurs de déformation plastique équivalente et de taux de déformation plastique équivalente. Comme pour l'endommagement, plus la longueur caractéristique est importante plus la largeur des zones de la déformation plastique équivalente et des taux de déformation plastique équivalente sont étendues. L'influence de la longueur caractéristique est clairement visible. Et comme pour l'endommagement quand la longueur caractéristique est nulle, les profils obtenus sont très proches de ceux de la méthode locale.



Figure 3.39 : Isovaleurs de la déformation plastique équivalente pour plusieurs longueurs caractéristiques avec h = 0, 04 mm : (a) l = 0 mm, (b) l = 0, 2 mm, (c) l = 0, 5 mm et (d) l = 1 mm



Figure 3.40 : Isovaleurs des taux de déformation plastique équivalente pour plusieurs longueurs caractéristiques avec h = 0,04 mm : (a) l = 0 mm, (b) l = 0,2 mm, (c) l = 0,5 mm et (d) l = 1 mm

L'étude des courbes de réponses force – déplacement, obtenues pour les différentes longueurs caractéristiques (Fig. 3.41), montre que celle-ci agit fortement sur la réponse globale de l'éprouvette. Plus la longueur caractéristique est importante, plus le comportement est ductile et plus la rupture sera retardée. De plus, conformément à la théorie, le modèle non local donne les mêmes résultats que le modèle local pour une longueur caractéristique nulle.



Figure 3.41 : Courbes force – déplacement pour plusieurs longueurs caractéristiques avec h = 0,04 mm

Au travers de cette étude de l'influence de la longueur caractéristique sur les résultats obtenus, nous nous rendons compte que la détermination précise de celle-ci est importante afin d'obtenir des résultats corrects. En effet, une longueur caractéristique trop faible va rendre la méthode non locale inefficace dans son rôle de régularisation. Au contraire, une longueur caractéristique trop importante va lisser excessivement les informations. Une méthode qui pourrait être efficace pour caractériser cette longueur serait de faire une identification multicritères basée à la fois sur la courbe de réponse globale de la structure et sur le champ de déformation en utilisant une méthode de corrélation d'image.

3.3.7.4 Dépendance à la taille de maille

Le but du modèle d'endommagement non local développé est de s'affranchir de la dépendance des résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale. Nous avons donc repris les quatre maillages (Fig. 3.31) et nous avons appliqué le modèle d'endommagement non local à formulation à gradient implicite avec une longueur caractéristique de 0,2 mm. Cette longueur caractéristique a été choisie afin de respecter la condition (3.206) pour l'ensemble des maillages.

Pour rappel avec le modèle local, que cela soit pour l'endommagement (Fig. 3.32), la déformation plastique équivalente (Fig. 3.33) ou le taux de déformation plastique équivalente (Fig. 3.34), plus la taille du maillage est faible plus les champs se localisent dans des zones étroites de largeur un élément. Ce comportement indésirable est supprimé par l'utilisation du modèle d'endommagement non local à condition que la longueur caractéristique soit suffisamment grande vis-à-vis de la taille de maille. La largeur de la zone endommagée est alors pratiquement identique quelle que soit la discrétisation spatiale utilisée (Fig. 3.42). Plus le maillage est fin, plus la précision est importante mais la zone endommagée reste identique. Pour la déformation plastique équivalente (Fig. 3.43) et le taux de déformation plastique équivalente (Fig. 3.44), tout comme pour l'endommagement, l'influence de la discrétisation spatiale n'est plus visible. L'effet de régularisation des méthodes non locales est donc bien effectué.



Figure 3.42 : Cartes d'endommagement non local pour différentes tailles de maille avec l = 0, 2 mm : (a) h = 0, 16 mm, (b) h = 0, 08 mm, (c) h = 0, 04 mm, (d) h = 0, 02 mm



Figure 3.43 : Cartes de déformation plastique équivalente pour différentes tailles de maille avec l = 0, 2 mm : (a) h = 0, 16 mm, (b) h = 0, 08 mm, (c) h = 0, 04 mm, (d) h = 0, 02 mm



Figure 3.44 : Isovaleurs des taux de déformation plastique équivalente pour différentes tailles de maille avec l = 0, 2 mm : (a) h = 0, 16 mm, (b) h = 0, 08 mm, (c) h = 0, 04 mm, (d) h = 0, 02 mm

La figure 3.45 représente les courbes force – déplacement obtenues avec le modèle d'endommagement non local. Nous pouvons voir que l'utilisation de la méthode non locale permet d'obtenir une réponse de la structure qui a tendance à être identique quelle que soit la discrétisation du maillage. La méthode d'endommagement non local est donc une bonne réponse :

- au phénomène de localisation des déformations et de l'endommagement,
- pour obtenir des résultats indépendants du maillage.



Figure 3.45 : Courbes force – déplacement pour la méthode non locale avec l = 0, 2 mm

3.3.8 Synthèse sur les modèles non locaux

Un phénomène bien connu des modèles matériaux qui introduisent un comportement adoucissant au travers d'un écrouissage isotrope négatif ou d'un modèle d'endommagement, est le phénomène de localisation des déformations et/ou de l'endommagement qui est la conséquence de la perte d'unicité de solution du problème mécanique. Dans une résolution numérique, la localisation se manifeste par une dépendance des résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale. Pour s'affranchir de cette dépendance, nous avons utilisé les modèles non locaux. Nous avons alors été amenés à réécrire le modèle matériau pour prendre en compte un couplage entre l'endommagement et le comportement au travers de la variable d'endommagement non locale \overline{D} .

Deux formulations du modèle d'endommagement non local ont été implémentées dans la suite logicielle Forge 2005[®] : la formulation intégrale et la formulation à gradient implicite. La comparaison des deux modèles sur l'essai de traction uniaxiale d'une éprouvette plane a révélé que les résultats obtenus sont quasiment identiques quelle que soit la formulation utilisée. Cependant, c'est la méthode à formulation à gradient implicite qui a été retenue car elle présente de nombreux avantages :

- La résolution d'une équation de diffusion est rapide en utilisant la méthode des éléments finis.
- La valeur de la longueur caractéristique n'influe pas sur le temps de résolution du problème non local contrairement à la formulation intégrale.
- La contrainte imposée à la valeur de la taille de maille dans les zones endommagées pour que le calcul non local soit efficace est moins importante (3.206) que pour la formulation intégrale (3.189).
- Son implémentation dans un code parallèle est facilement envisageable contrairement à la méthode intégrale où il est nécessaire de rechercher les voisins d'un élément.

Les méthodes non locales introduisent un paramètre supplémentaire dans le modèle mécanique qui a la dimension d'une longueur et qui est appelé longueur caractéristique. Ce paramètre est en relation directe avec la diffusion du champ local. En effet, comme nous avons pu le voir, la longueur caractéristique a une forte influence sur les résultats obtenus. Pour obtenir des résultats réalistes, il est alors nécessaire de venir déterminer cette longueur caractéristique avec une grande précision. Malheureusement, comme évoqué dans la section 3.3.6, dans le cas des matériaux ductiles comme les métaux, il n'existe pas (à notre connaissance) de méthode expérimentale efficace qui donne accès à cette grandeur de façon directe ou indirecte.

Du point de vue de la mécanique, l'utilisation de modèles d'endommagement non locaux pose un problème pour la modélisation de la rupture et de la fissuration lorsque la variable d'endommagement non locale \overline{D} atteint la valeur critique. En effet, la zone entièrement endommagée peut avoir une largeur de plusieurs éléments, ce qui pose le problème du positionnement de la fissure. De plus, (Simone, et al., 2004) ont montré que les méthodes non locales conduisent à une erreur de prédiction du champ d'endommagement en point de fissure. La modélisation correcte de la fissuration dans les modèles non locaux est encore un sujet de recherche complexe.

Bien que les méthodes non locales apportent une véritable valeur ajoutée au modèle matériau « classique », il n'est pas concevable à l'heure actuelle de les utiliser dans le cadre d'applications industrielles. En effet, les contraintes imposées par la longueur caractéristique sur les tailles du maillage dans les zones endommagées ainsi que la non-connaissance de la longueur caractéristique en sont les principales limitations.

3.4 Conclusions et perspectives

Ce chapitre a pour objet l'implémentation de l'ensemble du modèle numérique qui nous servira pour les simulations de pose et de tenue mécanique des assemblages par déformation. Nous avons tout d'abord présenté la mise en œuvre détaillée de la résolution numérique du problème mécanique qui se décompose en deux parties : la résolution globale de l'équilibre mécanique par la méthode des éléments finis et l'intégration de la loi de comportement élasto-plastique endommageable. Le comportement adoucissant introduit au travers de la variable d'endommagement rend les résultats numériques dépendants de la discrétisation spatiale. Pour nous affranchir de cette dépendance, un modèle d'endommagement non local a été développé.

Nous avons développé l'ensemble des équations et des algorithmes pour résoudre le problème mécanique avec la méthode des éléments finis ainsi que les équations pour intégrer localement la loi de comportement en utilisant un algorithme de prédiction élastique/correction plastique. L'utilisation d'une matrice tangente discrète cohérente avec le schéma d'intégration, nous a permis de garder une bonne convergence du système de résolution itérative de Newton-Raphson du problème d'équilibre mécanique. Afin d'améliorer le temps de calcul, nous avons mis en place un découplage entre l'équation de la surface de charge et la loi d'évolution de l'endommagement. Nous avons, tout d'abord, validé nos développements sur un essai classique de la littérature : traction uniaxiale d'une éprouvette axisymétrique. Les résultats ont montré une excellente corrélation avec ceux de la littérature. Afin de mettre en évidence, les apports des enrichissements apportés au modèle de Lemaitre standard, i.e. effet de fermeture des fissures et limite de triaxialité en dessous de laquelle l'endommagement n'évolue plus, nous avons utilisé un essai d'écrasement d'éprouvette en tonneau. Nous avons pu voir l'importance de ces améliorations pour prédire correctement les zones endommagées en compression.

Pour s'affranchir de la dépendance des résultats vis-à-vis de la discrétisation spatiale, nous avons exploré les méthodes d'endommagement non locales. La variable d'endommagement D est alors remplacée dans les équations par son équivalent non local \overline{D} . Pour calculer cet endommagement non local, nous avons implémenté deux formulations :

- la formulation intégrale,
- la formulation à gradient implicite.

Les méthodes non locales reviennent à faire diffuser la variable d'endommagement afin que celui-ci ne se localise pas. La comparaison des deux méthodes sur un cas de traction uniaxiale d'éprouvette plane a montré qu'elles donnent des résultats pratiquement identiques. Cependant la formulation à gradient implicite est plus avantageuse en termes de temps de calcul, de facilité à mettre en œuvre et de condition sur la taille du maillage. Les modèles non locaux introduisent une longueur caractéristique qui caractérise l'intensité de la diffusion du champ local. Cette longueur a une forte influence sur les résultats obtenus et il est donc nécessaire de la caractériser précisément. Les simulations qui vont être réalisées dans les chapitres suivants sont plus complexes que les essais de traction ou de compression étudiés. Afin de garder un modèle numérique performant et robuste, nous utiliserons dans le reste du manuscrit un couplage faible entre les équations du comportement et l'endommagement. Effectivement, nous avons vu au paragraphe 3.2.9.3 que le couplage faible permet d'avoir des résultats proches du couplage fort tout en permettant de garder un temps de calcul raisonnable. De plus, nous n'utiliserons pas de méthode non locale.

Les perspectives de ce chapitre sont nombreuses. Il serait intéressant d'implémenter un couplage fort entre la résolution du problème d'équilibre mécanique et du problème non local afin d'évaluer la pertinence de l'approximation faite par la résolution séquentielle. Cette résolution couplée devra passer par un changement important dans la suite logicielle Forge2005[®]. En effet, il faudra mettre en œuvre de nouvelles méthodes de stockage et de résolution avec des matrices non symétriques ce qui peut être réalisé avec la librairie scientifique PETSc.

Du point de vue du modèle non local, de récentes études expérimentales ont permis de visualiser les bandes de localisation lors d'un essai de traction uniaxiale sur une éprouvette plane grâce à une méthode d'interférométrie (Guelorget, et al., 2006). La largeur des bandes de localisation évolue au cours de l'essai ce qui est en contradiction avec le modèle non local développé. Pour prendre en compte cette évolution, il sera indispensable de passer par une longueur caractéristique qui est non constante et qui évolue avec les variables internes. Se posera alors le problème de la caractérisation de cette loi d'évolution.
3.5 Références bibliographiques

Abu Al-Rub, R.K. et Voyiadjis, G.Z. 2004. Analytical and experimental determination of the material intrinsic length scale and strain gradient plasticity theory from micro- and nano-indentation experiments. *Int. J. of Plast.* 2004, Vol. 20, pp. 1139-1182.

Aifantis, E.C. 1984. On the microstructural origin of certain inelastic models. ASME J. Engng. Mat. Tech. 1984, Vol. 106, pp. 326-330.

Aifantis, E.C. 1992. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *Int. J. Eng. Sci.* 1992, Vol. 30, pp. 1279-1300.

Aifantis, E.C. 1987. The physics of plastic deformation. Int. J. Plast. 1987, Vol. 3, pp. 211-247.

Aliaga, C. 2000. *Simulation numérique par éléments finis en 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'aciers: application à la trempe de pièce forgées ou coulées.* 2000. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

Andrade Pires, F.M., de Souza Neto, E.A. et Owen, D.R.J. 2004. On the finite element prediction of damage growth and fracture initiation in finitely deforming ductile materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2004, Vol. 193, pp. 5223-5256.

Andrade Pires, F.M., César de Sá, J.M.A., Costa Sousa, L., Natal Jorge, R.M. 2003. Numerical modelling of ductile plastic damage in bulk metal forming. *Int. J. Mech. Sci.* 2003, Vol. 45, pp. 273-294.

Areias, P.M.A., César de Sá, J.M.A. et Conceição António, C.A. 2003. A gradient model finite strain elastoplasticity coupled with damage. *Finite Element in Analysis and Design*. 2003, Vol. 39, pp. 1191-1235.

Arnold, D.N., Brezzi, F. et Fortin, M. 1984. A stable finite element for Stokes equations. *Calcolo*. 1984, Vol. 21, pp. 337-344.

Askes, H. et Sluys, L.J. 2002. Explicit and implicit gradient series in damage mechanics. *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2002, Vol. 21, pp. 379-390.

Babuska, I. 1973. The finite element method with penalty. 1973, Vol. 27, pp. 221-228.

Barboza, J.A.P. 2004. *Traitement du contact entre corps déformables et calcul parallèle pour la simulation 3D du forgeage multicorps.* 2004. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

Bažant, Z.P. et Jirásek, M. 2002. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress. *J. Engng. Mech.* 2002, Vol. 128, pp. 1119-1149.

Bažant, Z.P. et Pijaudier-Cabot, G. 1989. Measurement of characteristic length of nonlocal continuum. *J. Engng. Mech.* 1989, Vol. 115, pp. 755-767.

Bažant, Z.P. et Pijaudier-Cabot, G. 1988. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *J. Appl. Mech.* 1988, Vol. 55, pp. 287-293.

Benallal, A., Billardon, R. et Doghri, I. 1988. An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elastoplastic and damage equations. *Comm. Appl. Num. Methods.* 1988, Vol. 4, pp. 731-740.

Benallal, A., Billardon, R. et Lemaitre, J. 1991. Continuum damage mechanics and local approach to fracture: numerical procedures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 1991, Vol. 92, pp. 141-155.

Boers, S.H.A., Schreurs, P.J.G. et Geers, M.G.D. 2005. Operator-split damage-plasticity applied to groove forming in food can lids. *Int. J. Solids Struct.* 2005, Vol. 42, pp. 4154-4178.

Boussetta, R. 2005. *Estimateurs d'erreur et remaillage adaptatif: application à la simulation 3D des procédés de mise en forme des matériaux.* 2005. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

Brezzi, F. et Fortin, M. 1991. *Mixed and hybrid finite elements methods.* s.l. : Springer-Verlag, 1991.

Brunet, M., Morestin, F. et Walter-Leberre, H. 2005. Failure analysis of anisotropic sheet-metals using a non-local plastic damage model. *J. Mat. Process. Tech.* 2005, Vol. 170, pp. 457-470.

César de Sá, J.M.A., Areias, P.M.A. et Zheng, C. 2006. Damage modelling in metal forming problems using an implicit non-local gradient model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2006, Vol. 195, pp. 6646-6660.

Comby, I. 2006. *Development and validation of a 3D computational tool to describe damage and fracture due to alkali silica reaction in concrete structures.* 2006. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

Cosserat, E. et Cosserat, F. 1909. Théorie des corps déformables. s.l. : Hermann, 1909.

Coupez, T. 1991. *Grandes transformations et remaillage automatique.* 1991. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

de Borst, R. et Mühlhauss, H.B. 1992. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1992, Vol. 35, pp. 521-539.

de Borst, R. et Sluys, L.J. 1991. Localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 1991, Vol. 90, pp. 805-827.

de Souza Neto, E.A. 2002. A fast, one-equation integration algorithm for the Lemaitre ductile damage model. *Commun. Numer. Meth. Engng.* 2002, Vol. 18, pp. 541-554.

Doghri, I. 1993. Fully implicit integration and consistent tangent modulus in elasto-plasticity. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 1993, Vol. 36, pp. 3915-3932.

Doghri, I. 1995. Numerical implementation and analysis of a class of metal plasticity models coupled with damage. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 1995, Vol. 38, pp. 3403-3431.

Eringen, A.C. 1972. On nonlocal elasticity. Int. J. Engng. Sci. 1972, Vol. 10, pp. 233-248.

Eringen, A.C. 1981. On nonlocal plasticity. Int. J. Engng. Sci. 1981, Vol. 19.

Gay, C. 1995. *Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à froid.* 1995. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

Geers, M.G.D. 2004. Finite strain logarithmic hyperelasto-plasticity with softening: a strongly nonlocal implicit gradient framework. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2004, Vol. 193, pp. 3377-3401.

Geers, M.G.D., de Borst, R., Brekelmans, W.AM., Peerlings, R.H.J. 1999. Validation and internal length scale determination for a gradient damage model: application to short glass-fibre-reinforced polypropylene. *Int. J. Solids Struct.* 1999, Vol. 36, pp. 2557-2583.

Germain, N., Besson, J. et Feyel, F. 2007. Composite layered materials: Anisotropic nonlocal damage models. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2007, Vol. 192, pp. 4272-4282.

Gouveia, B.P.P.A., Rodrigues, J.M.C. et Martins, P.A.F. 1996. Fracture prediting in bulk metal forming. *Int. J. Mech. Sci.* 1996, Vol. 38, pp. 361-372.

Guelorget, B., François, M., Vial-Edwards, C., Montay, G., Daniel, L.; Lu, J. 2006. Strain rate measurement by electronic speckle pattern interferometry: a new look at the strain localization onset. *Mat. Science Engng. A.* 2006, Vol. 415, pp. 234-241.

Hancock, J.W. et Mackenzie, A.C. 1976. On the mechanics of ductile fracture in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states. *J. Mech. Phys. Solids.* 1976, Vol. 24, pp. 147-169.

Hill, R. 1958. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids.* 1958, Vol. 1, pp. 19-30.

Iacono, C., Sluys, L.J. et van Mier, J.G.M. 2006. Estimation of model parameters in nonlocal damage theories by inverse analysis techniques. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2006, Vol. 195, pp. 7211-7222.

Jackiewicz, J. et Kuna, M. 2003. Non-local regularization for FE simulation of damage in ductile materials. *Comput. Mat. Sci.* 2003, Vol. 28, pp. 684-695.

Jirásek, M. et Marfia, S. 2005. Non-local damage model based on displacement averaging. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2005, Vol. 63, pp. 77-102.

Jirásek, M. 1998. Nonlocal models for damage ans fracture: Comparison of approaches. *Int. J. Solids Struct.* 1998, Vol. 35, pp. 4133-4145.

Kröner, E. 1967. Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. *Int. J. Solids Struct.* 1967, Vol. 3, pp. 731-742.

le Bellégo, C., Dubé, J.F., Pijaudier-Cabot, G., Gérard, B. 2003. Calibration of nonlocal damage model from size effect tests. *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2003, Vol. 22, pp. 33-46.

Lemaitre, J. et Chaboche, J.L. 1996. Mécanique des matériaux solides. 2e édition. s.l. : Dunod, 1996.

Lemaitre, J. et Desmorat, R. 2005. Engineering damage mechanics. s.l. : Springer-Verlag, 2005.

Lestriez, P. 2003. *Modélisation numérique du couplage thermo-mécanique-endommagement en transformations finies. Application à la mise en forme.* 2003. Thèse de doctorat, Université Technologique de Troyes.

Liebe, T., Steinmann, P. et Benallal, A. 2001. Theoretical and computational aspects of a thermodynamically consistent framework for geometrically linear gradient damage. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2001, Vol. 190, pp. 6555-6576.

Mashayekhi, M., Ziaei-Rad, S., Parvizian, J., Nikbin, K., Hadavinia, H. 2005. Numerical analysis of damage evolution in ductile solids. *Struct. Integ. Durab.* 2005, Vol. 1, pp. 67-82.

Mocellin, K. 1999. *Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à chaud: étude du contact et calcul multigrille.* 1999. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

Mühlhauss, H.B. et Aifantis, E.C. 1991. A variational principle for gradient plasticity. *Int. J. Solids Struct.* 1991, Vol. 28, pp. 845-858.

Nagtegaal, J. 1982. On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems. *Comp. Meth. Appl. Eng.* 1982, Vol. 33, pp. 469-484.

Nedjar, B. 2001. Elastoplastic-damage modelling including the gradient of damage: formulation and computational aspects. *Int. J. Solids Struc.* 2001, Vol. 38, pp. 5421-5451.

Peerlings, R.H.J., Geers, M.G.D., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M. 2001. A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *Int. J. Solids Struct.* 2001, Vol. 38, pp. 7723-7746.

Peerlings, R.H.J., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M., de Vree, J.H.P. 1996. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1996, Vol. 17, pp. 3391-3403.

Peerlings, R.H.J., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M., Geers, M.G.D. 2002. Localisation issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. *Europ. J. of Mech A/Solids.* 2002, Vol. 21, pp. 175-189.

Pijaudier-Cabot, G. et Bažant, Z.P. 1987. Nonlocal damage theory. ASCE J. Eng. Mech. 1987, Vol. 113, pp. 1512-1533.

Pijaudier-Cabot, G., Bažant, Z.P. et Tabbara, M. 1988. Comparison of various models for strain softening. *Engng. Comp.* 1988, Vol. 5, pp. 141-150.

Reusch, F., Svendsen, B. et Klingbeil, D. 2003. A non-local extension of Gurson-based ductile damage modeling. *Comput. Mat. Sci.* 2003, Vol. 26, pp. 219-229.

Rodríguez-Ferran, A., Arbós, I. et Huerta, A. 2001. Adaptive analysis based on error estimation for nonlocal damage models. *Eur. J. Fin. Elem.* 2001, Vol. 10, pp. 193-207.

Rodríguez-Ferran, A., Morata, I. et Huerta, A. 2005. A new damage model based on nonlocal displacements. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 2005, Vol. 29, pp. 473-493.

Saanouni, K., Cherouat, A. et Hammi, Y. 2001. Numerical aspects of finite elastoplasticity with isotropic ductile damage for metal forming. *Eur. J. Fin. Elem.* 2001, Vol. 10, pp. 327-351.

Simo, J.C. et Taylor, R.L. 1985. Consistent tangent operators for rate independent elasto-plasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1985, Vol. 48, pp. 101-118.

Simone, A., Askes, H. et Sluys, L.J. 2004. Incorrect initiation and propagation of failure in non-local and gradient-enhanced media. *Int. J. Solids Struct.* 2004, Vol. 41, pp. 351-363.

Strömberg, L. et Ristinmaa, M. 1996. FE-formulation of a nonlocal plasticity theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1996, Vol. 136, pp. 127-144.

Suffis, A., Lubrecht, T.A.A. et Combescure, A. 2003. Damage model with delay effect analytical and numerical studies of the evolution of the characteristic damage length. *Int. J. Solids Struct.* 2003, Vol. 40, pp. 3463-3476.

Vaz Jr., M. et Owen, D.R.J. 2001. Aspects of ductile fracture and adaptative mesh refinement in damaged elasto-plastic materials. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2001, Vol. 50, pp. 29-54.

Voyiadjis, G.Z. et Abu Al-Rub, R.K. 2005. Gradient plasticity theory with a variable length scale parameter. *Int. J. Solids Struct.* 2005, Vol. 42, pp. 3998-4029.

Yuan, H. et Chen, J. 2004. Comparison of computational predictions of material failure using nonlocal damage models. *Int. J. Solids Struct.* 2004, Vol. 41, pp. 1021-1037.

Yuan, H. et Chen, J. 2001. Identification of the intrinsec material length in gradient plasticity theory from micro-indentation tests. *Int. J. Solids Struct.* 2001, Vol. 38, pp. 8171-8187.

Chapitre 4 :

Analyse inverse et caractérisation rhéologique des matériaux

4.1	ntro	luction	141
4.2	denti	ification rhéologique par analyse inverse	141
4.2.1	Intr	oduction	141
4.2.2	Déf	inition du problème d'identification	142
4.2.3	Mé	thode de minimisation de la fonction coût	142
4.2	.3.1	Choix de la méthode d'optimisation	142
4.2	.3.2	Les algorithmes de stratégie d'évolution couplée à un métamodèle	143
4.2.4	Déf	inition d'une stratégie d'identification	144
4.3	Carac	térisation rhéologique des tôles	146
4.3.1	Nua	ances étudiées	146
4.3.2	Car	actérisation rhéologique des tôles en traction uniaxiale	147
4.3	.2.1	Détermination expérimentale des courbes d'écrouissage	148
4.3	.2.2	Détermination des courbes d'écrouissage par analyse inverse	156
4.3	.2.3	Caractérisation de la loi d'endommagement	158
4.3	.2.4	Conclusions sur les essais de traction	160
4.3.3	Car	actérisation rhéologique des tôles par poinçonnement	161
4.3	.3.1	Montage de l'essai de poinçonnement et résultats expérimentaux	161
4.3	.3.2	Modèle éléments finis	162
4.3	.3.3	Résultat de l'identification par analyse inverse	165
4.3	.3.4	Conclusions sur les essais de poinçonnement	166
4.4	Carac	térisation rhéologique des rivets semi-creux	167
4.4.1	Nat	ure des rivets semi-creux	167
4.4.2	Les	difficultés de la caractérisation rhéologique du rivet	167
4.4	.2.1	Essais d'évasement	168
4.4	.2.2	Essais d'écrasement	169
4.4.3	Мо	dèles éléments finis	170
4.4	.3.1	Essai d'évasement	170
4.4	.3.2	Essai d'écrasement	170
4.4	.3.3	Définition de l'espace de recherche	171
4.4.4	Rés	ultats de l'identification	171
4.4.5	Cor	clusions de la caractérisation rhéologique des rivets	173
4.5	Concl	usions et perspectives sur l'identification rhéologique	173
4.6	Référ	ences bibliographiques	176

4.1 Introduction

Les deux chapitres précédents ont été consacrés à l'implémentation et à la validation dans un logiciel éléments finis d'un comportement élasto-plastique endommageable. Ce modèle a été retenu car il permet de représenter une grande partie des phénomènes physiques qui apparaissent lors de la sollicitation à froid de métaux ductiles sur des plages de déformation importantes. Cependant pour obtenir des simulations réalistes et prédictives, il est important d'introduire des paramètres précis dans les lois d'écrouissage et d'endommagement.

Ce chapitre décrit les méthodologies qui ont été mises en place afin de déterminer le comportement des différentes nuances mises à notre disposition (issues du domaine automobile) pour les tôles ainsi que celui des rivets auto-poinçonneurs. Les essais expérimentaux ainsi que les méthodes numériques utilisées pour identifier les lois d'écrouissage et d'endommagement sont présentés en détail. Dans un premier temps, on présente le principe d'identification de paramètres matériau par une méthode d'analyse inverse basée sur un algorithme évolutionnaire couplé à un méta-modèle. Cette stratégie d'identification est celle implémentée dans le logiciel RhéoForge[®] développé au CEMEF. Les algorithmes d'analyse inverse ont besoin d'être alimentés par des observables issues de données expérimentales. Le choix de ces observables ainsi que les essais expérimentaux associés sont alors abordés pour les tôles puis pour le rivet.

4.2 Identification rhéologique par analyse inverse

4.2.1 Introduction

L'identification des paramètres matériaux qui interviennent dans le modèle développé, est une des clés pour obtenir une bonne corrélation entre les données obtenues expérimentalement et les prédictions des simulations numériques. Dans le modèle élasto-plastique endommageable, le comportement mécanique d'un matériau, pour un écrouissage isotrope de Swift (2.26) et une loi d'endommagement de Lemaitre (2.103), est entièrement décrit quand les onze paramètres listés dans le tableau 4.1 sont connus. Ces paramètres se répartissent en trois catégories représentatives du processus qu'ils caractérisent : l'élasticité, la plasticité et l'endommagement. Pour les identifier, nous avons mis en place une méthodologie basée sur l'utilisation de l'analyse inverse.

Mécanisme	Description	Symbole
	Module d'élasticité	Ε
Elasticité	Coefficient de Poisson	ν
	Limite élastique	σ_y
	Consistance	K
Plasticité	Exposant d'écrouissage	n
	Déformation seuil	r_0
	Paramètre d'endommagement (exposant)	b
	Paramètre d'endommagement (dénominateur)	S_0
Endommagement	Déformation seuil	$arepsilon_D$
	Endommagement critique à rupture	D_c
	Effet de fermeture des fissures	h

 Tableau 4.1 : Paramètres à identifier pour un écrouissage de Swift et un endommagement de Lemaitre avec prise en compte de l'effet de fermeture des fissures

4.2.2 Définition du problème d'identification

La résolution du problème d'analyse inverse consiste à minimiser une fonction coût qui représente l'écart observé entre des données issues d'un modèle numérique et des données obtenues expérimentalement. En effet, au cours des essais, l'expérimentateur a la possibilité de mesurer certaines observables : effort, déplacement, température, déformation, ... Dans notre application, les inconnues à identifier sont l'ensemble des paramètres présents dans les définitions de la loi d'écrouissage et de la loi d'endommagement du matériau. Prenons le cas d'un essai de traction uniaxiale et définissons le vecteur F^e contenant les valeurs expérimentales d'une observable, ici la courbe force – déplacement mesurée par la machine de traction :

$$F^{e} = (F_{1}^{e}, F_{2}^{e}, \dots, F_{N}^{e})$$
(3.227)

N étant le nombre de valeurs expérimentales de l'observable retenue.

Une simulation numérique par éléments finis de l'essai expérimental est réalisée avec un jeu de paramètres λ . Les valeurs de l'observable obtenues par la résolution numérique en utilisant les paramètres λ sont définies par le vecteur $F(\lambda)$. Le problème d'identification de paramètres s'exprime alors sous la forme d'un problème d'optimisation : il s'agit de trouver le jeu de paramètres optimal λ^* qui minimise l'écart entre les valeurs expérimentales et les valeurs issues de la simulation. La fonction coût normalisée Φ retenue est l'erreur relative au sens des moindres carrés :

$$\begin{cases} \Phi(\lambda^*) = \min_{\lambda} (\Phi(\lambda)) \\ \\ \Phi(\lambda) = \frac{\|F^e - F(\lambda)\|_2}{\|F^e\|_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (F_i^e - F_i(\lambda))^2}{\sum_{i=1}^N (F_i^e)^2}} \end{cases}$$
(3.228)

4.2.3 Méthode de minimisation de la fonction coût

4.2.3.1 Choix de la méthode d'optimisation

Il est possible de classer les différents algorithmes d'optimisation en trois classes :

- les algorithmes à direction de descente (algorithme à base de gradient) ;
- les algorithmes d'ordre 0 et algorithmes évolutionnaires ;
- les algorithmes hybrides.

Le choix de l'algorithme de minimisation est intimement lié aux données du problème (observables, dérivabilité de $\Phi(\lambda)$, ...). Les algorithmes à direction de descente ne sont utilisables que si la fonction Φ est continue et différenciable sur l'ensemble du domaine de recherche. Ces algorithmes ont l'avantage de converger rapidement vers un point stationnaire. Elles sont donc extrêmement efficaces dans le cas d'un problème convexe ne possédant qu'un minimum. Dans le cas d'un problème plus complexe, elles ne permettent d'atteindre que le minimum local le plus proche du point de départ qui n'est pas forcément le minimum global. Les résultats sont alors fortement dépendants du jeu de paramètre initial.

Les algorithmes évolutionnaires sont des méthodes d'optimisation stochastique basées sur les concepts de la théorie de l'évolution de Darwin et de la génétique. Ces algorithmes ne nécessitent

pas le calcul du gradient de la fonction coût. Chaque jeu de paramètres λ est alors appelé un « individu ». L'algorithme cherche alors à générer un ou plusieurs nouveaux individus, le plus proche possible de l'optimum λ^* , uniquement à partir de la connaissance de la valeur de la fonction coût d'un ou plusieurs autres individus de l'espace des paramètres $\Phi_n(\lambda_n)$, où $n \in \mathbb{N}$. L'avantage des algorithmes évolutionnaires est leur capacité à atteindre le minimum global. En contrepartie, leur vitesse de convergence est relativement faible par rapport aux algorithmes à direction de descente. Parmi les algorithmes évolutionnaires, on peut distinguer deux grandes catégories :

- Les algorithmes génétiques qui s'appuient sur une représentation binaire des individus. Ces algorithmes, du fait de leur représentation des individus, s'adaptent bien aux problèmes où les paramètres à identifier sont des booléens (vrai/faux).
- Les algorithmes à stratégie d'évolution qui représentent chaque individu par un vecteur de paramètres, sont plus adaptés à l'optimisation dans des espaces de recherche continus. C'est ce type d'algorithme que nous utiliserons car ils sont bien adaptés à l'identification de paramètres rhéologiques dans un espace non convexe. Cet algorithme est présent dans RhéoForge[®].

Les algorithmes hybrides sont des algorithmes qui essayent de combiner les avantages des différentes méthodes. Le lecteur intéressé pourra trouver de plus amples informations dans (Do, 2006).

4.2.3.2 Les algorithmes de stratégie d'évolution couplée à un métamodèle

Le principe des algorithmes de stratégie d'évolution est le suivant. Une population initiale P_0 est constituée à partir de plusieurs individus λ_n tirés aléatoirement dans l'espace de recherche avec n variant de 1 à *NbIndiv* (nombre d'individus de la population). Chacun de ces individus est alors évalué de façon exacte, i.e. calcul de la fonction coût $\Phi_n(\lambda_n)$. En se basant sur la performance des différents individus, une nouvelle population de solutions potentielles P_{k+1} est créée en utilisant les trois opérateurs classiques d'évolution :

- **Sélection** : Cet opérateur est le plus basique. Dans un premier temps, il consiste à sélectionner les individus de la population les plus performants et à éliminer les plus faibles. Les individus éliminés sont alors remplacés par les enfants les plus performants.
- **Croisement** : C'est un opérateur facultatif pour les algorithmes à stratégie d'évolution. Son rôle consiste à combiner deux (ou plus) individus afin d'en créer un nouveau.
- Mutation : Cette opération consiste à venir modifier un nouvel individu de façon aléatoire.
 C'est la mutation qui garantit la globalité de la recherche et est donc le principal opérateur d'exploration.

Le cycle est relancé jusqu'à atteindre une solution suffisamment précise ou un nombre d'itérations maximales. La principale limitation de cette première méthode est qu'elle nécessite l'évaluation de l'ensemble des individus afin de déterminer leur performance ce qui se traduit par autant de simulations numériques que d'individus. Afin de diminuer le nombre d'évaluations de la fonction coût, il est intéressant de coupler l'algorithme à stratégie d'évolution avec un métamodèle. L'utilisation d'un métamodèle permet d'améliorer les performances de l'algorithme en diminuant le nombre d'évaluations exactes de la fonction coût. Dans le cas du logiciel RhéoForge[®], le métamodèle est basé sur l'algorithme de Krigeage (Cressie, 1993). Cet algorithme permet d'améliorer la nouvelle

population générée par la stratégie d'évolution en permettant de choisir des jeux de paramètres susceptibles de donner des fonctions coût plus faibles. Pour ce faire, la fonction coût est interpolée dans un premier temps sur l'espace de recherche grâce à la connaissance de la valeur de la fonction coût pour les individus déjà évalués. En se basant sur cette interpolation, le métamodèle permet de donner une estimation de la fonction coût ainsi qu'un intervalle de confiance de cette estimation pour des jeux de paramètres qui n'ont pas encore été testés. Un ensemble de jeux de paramètres potentiellement performants est alors généré. Pour finir, l'algorithme ne va retenir que 20% des meilleurs jeux de paramètres évalués par le métamodèle. La Figure 4.1 illustre l'algorithme général d'identification.





4.2.4 Définition d'une stratégie d'identification

Dans le cadre de notre modèle, pour définir complètement un matériau, il est nécessaire d'identifier onze paramètres. Les paramètres liés à l'élasticité, i.e. module d'Young, coefficient de Poisson et limite élastique, sont des données qui sont fournies par les fabricants des nuances. Ils ne seront donc pas identifiés par la stratégie d'analyse inverse.

Les paramètres qui restent à identifier, sont ceux de la loi d'écrouissage isotrope et ceux de la loi d'endommagement. En se basant sur le fait que tant que la déformation plastique équivalente est inférieure à $\bar{\varepsilon}_D$, il n'y a pas d'endommagement, nous allons définir une stratégie d'identification en

deux étapes. La première étape consiste à venir déterminer la loi d'écrouissage isotrope en utilisant un comportement élasto-plastique. On se servira donc que de la première partie de la courbe pour identifier les paramètres de la loi d'écrouissage. Pour rappel, la loi d'écrouissage est donnée au travers d'une loi de Swift :

$$\sigma_0(r) = K(r + r_0)^n$$
(3.229)

Les inconnues sont donc la consistance K, l'exposant d'écrouissage n et la déformation seuil r_0 . Une fois l'identification effectuée, il est possible d'ajuster le paramètre r_0 afin de correctement prendre en compte la limite d'élasticité en utilisant la relation suivante :

$$r_0 = \left(\frac{\sigma_y}{K}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{3.230}$$

Pour illustrer, la méthodologie d'identification, nous allons étudier un essai de traction uniaxiale d'une éprouvette plane de 1,5 mm d'épaisseur en acier doux ES. L'observable est la courbe de force – déplacement. La comparaison des résultats numériques et des résultats expérimentaux montre une bonne corrélation sur la première partie de la courbe (Fig. 4.2). La divergence entre les deux courbes correspond à l'instant où l'endommagement a suffisamment d'influence pour modifier l'écrouissage du matériau.



Figure 4.2 : Comparaison des courbes force – déplacement expérimentale et numérique avec la loi d'écrouissage identifiée pour l'acier ES

Logiquement, la seconde étape de l'identification consiste à venir caractériser les paramètres de la loi d'endommagement sur la deuxième partie de la courbe. Pour rappel, la loi d'évolution d'endommagement isotrope est donnée par :

$$\dot{D} = \begin{cases} \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \left(\frac{Y}{S_0}\right)^b & \text{si} & -\frac{p}{J_2(\sigma)} > 0 & \text{et} \quad \bar{\varepsilon} \ge \bar{\varepsilon}_D \\ \frac{\dot{\lambda}}{1-hD} \left(\frac{Y}{S_0}\right)^b & \text{si} & -\frac{1}{3} < -\frac{p}{J_2(\sigma)} \le 0 & \text{et} \quad \bar{\varepsilon} \ge \bar{\varepsilon}_D \\ 0 & \text{si} & -\frac{p}{J_2(\sigma)} \le -\frac{1}{3} & \text{ou} \quad \bar{\varepsilon} < \bar{\varepsilon}_D \end{cases}$$
(3.231)

Trois paramètres interviennent dans cette définition : b, S_0 et h. En ce qui concerne le paramètre d'effet de fermeture des fissures h, n'ayant pas pu réaliser des essais de traction compression sur nos éprouvettes, nous le considérerons égal à 0,2 quelle que soit la nuance. En plus des deux

paramètres restant, il faut déterminer l'endommagement critique D_c et la déformation seuil $\bar{\varepsilon}_D$ à partir de laquelle l'endommagement commence. Un intervalle pour l'analyse inverse de la valeur de $\bar{\varepsilon}_D$ peut être facilement déterminé en utilisant les résultats numériques. En effet, sur la figure 4.2, la valeur du déplacement où les deux courbes divergent permet de connaître la valeur de la déformation équivalente correspondante. En ce qui concerne l'endommagement critique, celui-ci est aussi déterminé directement à partir de la simulation. Pour ce faire, nous considérons que la valeur de l'endommagement numérique maximal relevé au déplacement à la rupture de l'éprouvette correspond à la valeur de l'endommagement critique. La figure 4.3 représente le résultat d'une identification complète. Nous obtenons une bonne corrélation entre la courbe numérique et la courbe expérimentale.



Figure 4.3 : Comparaison des courbes force – déplacement expérimentale et numérique avec les lois d'écrouissage et d'endommagement identifiées pour l'acier ES

4.3 Caractérisation rhéologique des tôles

4.3.1 Nuances étudiées

Les métaux étudiés, fournis par la société PSA, sont des nuances couramment utilisées dans le secteur de l'automobile pour la conception des ouvrants que cela soit pour la peau, les doublures ou les renforts (Lange, 2006). Toutes ces nuances sont utilisées lors de configurations de rivetage autopoinçonneur. Quatre nuances (trois alliages d'aluminium et un acier) ont été caractérisées et utilisées pour les essais de rivetage. Ces nuances se présentent sous la forme de tôles laminées à froid. Le tableau 4.2 retranscrit les différentes nuances et les épaisseurs des tôles mises à notre disposition.

Nuance	Epaisseurs (mm)
Acier doux ES revêtu G10/10	1,47 ; 2
Alliage d'aluminium 5754-O	1;2
Alliage d'aluminium 5182-O	1,2 ; 2,5
Alliage d'aluminium 6016-T4-DR100	1,2

Les tableaux 4.3 et 4.4, quant à eux, présentent respectivement la composition chimique de l'acier et des différentes nuances d'alliage d'aluminium.

Tableau 4.3 : Composition chimique des tôles en acier en pourcentage massique

Nuance	С	Mn	Si	Ρ	S	AI
ES	<0,08	<0,4	<0,1	<0,025	<0,025	<0,02

Nuance	Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Zn	Ti	
5754-0	<0,4	<0,4	<0,1	<0,5	2,6-3,6	<0,3	<0,2	<0,15	
5182-0	<0,2	<0,35	<0,15	<0,2-0,5	4-5	<0,1	<0,25	<0,1	
6016-T4-DR100	0 9-1 5	<0.5	<0.2	<0.2	0 25-0 6	<0.1	<0.2	<0.15	

Tableau 4.4 Composition chimique des tôles en alliage d'aluminium en pourcentage massique

4.3.2 Caractérisation rhéologique des tôles en traction uniaxiale

Une méthode simple et efficace pour caractériser la rhéologie de tôles minces est l'essai de traction uniaxiale. En effet, l'essai de traction est très riche en informations sur le comportement d'une tôle : limite d'élasticité, charge de rupture, allongement à rupture, courbe d'écrouissage... De plus, il est simple de mise en œuvre, facile à dépouiller et fiable (François, 2005). Les essais ont été effectués à température ambiante sur une machine hydraulique DARTEC de capacité maximale 320 kN. La machine de traction est équipée d'une cellule de force de 20 kN. Cette cellule permet de mesurer la force de traction F avec une incertitude de 0,5% sur les mesures.

Les éprouvettes ont été découpées et usinées dans des plaques de 38x125 mm. La géométrie des éprouvettes de traction est représentée sur la figure 4.4. La longueur de la zone utile de l'éprouvette est de 20 mm et son épaisseur *e* dépend de la nuance étudiée (Tab. 4.2). Pour chaque nuance et chaque épaisseur de tôle 5 essais ont été réalisés. Les deux extrémités de l'éprouvette sont maintenues par des mors. La vitesse de déplacement du mors supérieur est imposée et est constante au cours de l'essai. Les essais ont été réalisés à deux vitesses différentes 0,1 mm/s et 20 mm/s afin de caractériser la sensibilité à la vitesse des matériaux.



Figure 4.4 : Géométrie des éprouvettes de traction : (gauche) avant déformation, (droite) après déformation

L'essai fournit alors un diagramme donnant la force appliquée à l'éprouvette en fonction de son allongement pour une vitesse constante de la traverse de la machine de traction.

La caractérisation de la loi d'écrouissage des tôles est réalisée par deux méthodes. En effet, l'essai de traction uniaxiale est un des rares essais qui permet d'obtenir directement la loi d'écrouissage d'un matériau sous certaines conditions :

- avant l'apparition de la striction,
- hypothèse des déformations planes.

Ces données issues de l'expérience, nous servirons alors à initialiser l'algorithme d'analyse inverse mais aussi à valider la pertinence des résultats obtenus.

La caractérisation de la loi d'endommagement, quant à elle, ne sera effectuée que de façon numérique.

4.3.2.1 Détermination expérimentale des courbes d'écrouissage

Mesure par extensomètre

La détermination expérimentale de la courbe d'écrouissage isotrope est réalisée en combinant deux moyens de mesure. Tout d'abord, comme nous travaillons à de faibles vitesses de sollicitation, nous avons utilisé un extensomètre pour mesurer l'allongement $L - L_0$. Cet extensomètre a un empattement initial $L_0 = 10$ mm et est fixé sur la zone utile de l'éprouvette (Fig. 4.4). A partir de la mesure de l'allongement et de la force, il est possible de déduire la déformation conventionnelle ε_{conv} ainsi que la contrainte conventionnelle σ_{conv} :

$$\varepsilon_{conv} = \frac{L - L_0}{L_0} \le 0.15$$
 et $\sigma_{conv} = \frac{F}{l_0 \times e} = \frac{F}{S_0}$ (3.232)

L'extensomètre est limité dans sa mesure de la déformation conventionnelle. En effet, au-delà de 15% de déformation, la réponse de l'extensomètre n'est plus linéaire. Pour avoir accès, à l'ensemble de la courbe contrainte – déformation conventionnelle, i.e. jusqu'à rupture de l'éprouvette, nous avons utilisé une méthode d'extrapolation de la mesure de la déformation conventionnelle en fonction du déplacement des mors. Celle-ci consiste à venir compléter la courbe déformation conventionnelle – déplacement des mors par le point de mesure donné à l'allongement à rupture A_r (Fig. 4.5) (Lange, 2006). En extrapolant la courbe, il est alors possible d'obtenir la courbe contrainte - déformation conventionnelle jusqu'à rupture de l'éprouvette. Il est intéressant de remarquer que le début de la courbe est non linéaire en raison du cédage élastique initial des mors.



Figure 4.5 : Exemple d'extrapolation des déformations conventionnelles à partir des données de l'extensomètre pour l'alliage d'aluminium 5754-O de 2mm d'épaisseur

Les propriétés mécaniques classiques sont définies par la courbe contrainte – déformation conventionnelle (Fig. 4.6). En effet, cette courbe permet de définir la limite d'élasticité apparente R_e , la résistance à la traction R_m et l'allongement maximal à rupture A_r .





La courbe conventionnelle ne nous permet pas d'avoir accès à la courbe d'écrouissage du matériau. En effet, la contrainte conventionnelle est calculée en ne tenant pas compte de la réduction de la section de l'éprouvette au cours de l'essai. Sous l'hypothèse que la section et les déformations sont uniformes dans la zone utile de l'éprouvette, il est possible de déterminer la courbe d'écrouissage rationnelle qui relie la contrainte rationnelle (ou vraie) σ_{rat} à la déformation rationnelle (ou vraie) ε_{rat} . Cette courbe d'écrouissage rationnelle correspond à la courbe d'écrouissage intrinsèque du matériau :

$$\varepsilon_{rat} = \ln(1 + \varepsilon_{conv})$$
 et $\sigma_{rat} = \sigma_{conv} (1 + \varepsilon_{conv})$ (3.233)

L'hypothèse est validée avant apparition de la striction qui correspond à des déformations vraies de l'ordre de 0,2 pour les nuances étudiées. Pour obtenir la courbe d'écrouissage telle que définie dans le chapitre 2 (cf. §2.2.5), il est nécessaire de définir une mesure de la déformation plastique équivalente. Pour ce faire nous utilisons la relation suivante :

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{rat} - \frac{\sigma_y}{E} \tag{3.234}$$

Dans cette expression, E est le module d'Young et σ_y la limite d'élasticité. La détermination précise du module d'Young par un essai de traction n'est pas une chose aisée. En effet à cause du cédage élastique des outils et du serrage manuel des mors qui induisent une précontrainte initiale, la mesure directe du module d'Young est entachée d'erreur. C'est la raison pour laquelle nous utiliserons soit les données du fournisseur de la nuance (quand celles-ci sont disponibles) soit les valeurs classiques pour les aciers, E = 210 GPa, et les alliages d'aluminium, E = 70 GPa.

Les propriétés mécaniques déduites des essais de traction et leurs dispersions sont résumées dans le tableau 4.5. La figure 4.7 présente l'allure des courbes d'écrouissage des différentes tôles étudiées pour une vitesse de traction de 0,1 mm/s. Dans notre cas, ceci correspond à une vitesse de déformation moyenne de l'ordre de $0,025 \text{ s}^{-1}$. Il est à noter que l'épaisseur des tôles ne fait pas varier de façon significative les propriétés du matériau. C'est pour cette raison que la caractérisation n'est effectuée que sur une épaisseur par nuance.

Nuance	Epaisseur (mm)	R_e (MPa)	R _m (MPa)	$A_r(\%)$
ES	1,5	190 <u>+</u> 5	315 <u>+</u> 3	58 <u>+</u> 1
	2	190 ± 2	311 <u>+</u> 1	60 ± 1
5754-O	1	103 ± 5	218 ± 1	29 <u>+</u> 1
	2	116 <u>+</u> 4	220 ± 2	29 <u>+</u> 1
5182-O	1,2	152 <u>+</u> 3	284 ± 2	28 <u>+</u> 1
	2,5	142 ± 2	284 ± 2	28 <u>+</u> 1
6016-T4 DR100	1,2	149 <u>+</u> 1	255 ± 1	28 <u>+</u> 1

Tableau 4.5 : Propriétés mécaniques des tôles pour une vitesse de traction de 0,1 mm/s

Il est possible d'obtenir une valeur des paramètres de la loi d'écrouissage directement à partir des données issues de l'expérience en utilisant une méthode des moindres carrés. Les valeurs des différents paramètres déterminés expérimentalement sont regroupées dans le tableau 4.6 pour une loi de Swift (2.26) et dans le tableau 4.7 pour une loi d'écrouissage de Voce (2.27). Ces paramètres nous serviront de jeu de paramètres initial pour la caractérisation rhéologique par analyse inverse.

Tableau 4.6 : Paramètres de la loi d'écrouissage de Swift des tôles pour une vitesse de traction de 0,1 mm/s

Nuance	K (MPa)	n	r ₀
ES	606,2	0,282	0,016
5754-0	433	0,3	0,0075
5182-0	574	0,304	0,012
6016-T4 DR100	480	0,26	0,011

Tableau 4.7 : Paramètres de la loi d'écrouissage de Voce des tôles pour une vitesse de traction de 0,1 mm/s

Nuance	K (MPa)	n	r_0
ES	430	9,2	0,063
5754-O	283	12,13	0,036
5182-0	379	11	0,046
6016-T4 DR100	340	11	0,052



Figure 4.7 : Courbes d'écrouissage des différentes tôles étudiées (vitesse de traction de 0,1 mm/s)

4.3.2.1.1 Mesure directe de la déformation

Une des principales limitations de l'essai de traction est son incapacité à pouvoir fournir la courbe d'écrouissage du matériau à partir du moment où la striction apparaît, soit pour une déformation vraie d'environ 0,2. Pour pouvoir prolonger cette courbe, il faut alors mettre en place une méthode de mesure du champ de déformation. Il existe de nombreuses méthodes dédiées à la mesure de champs. Certaines d'entre elles utilisent la distorsion d'un marquage régulier imprimé sur la tôle. En général, ce marquage est formé soit d'un quadrillage soit de rangées ordonnées de cercles. Une autre approche consiste à utiliser un système de mesure par corrélation d'images. Le principe de cette méthode est alors basé sur la reconnaissance de niveaux de gris. Un motif aléatoire appelé mouchetis est appliqué sur l'éprouvette et permet de suivre chaque point du motif d'une image à l'autre. La précision des résultats dépend alors de la qualité du mouchetis et de la résolution des photos numériques. Des méthodes plus complexes utilisent un système d'interférométrie afin de mesure des franges d'interférence.

Dans notre étude, la corrélation d'images a été utilisée pour déterminer le champ des déformations. Pour ce faire, un mouchetis de points noirs sur fond blanc a été réalisé sur les éprouvettes de traction. L'essai de traction uniaxiale est alors arrêté à plusieurs reprises afin de pouvoir prendre des photos du mouchetis de la zone utile. A la fin de l'essai, le système ARAMIS[®] développé par la société GOM est utilisé afin de calculer le champ de déplacement du mouchetis grâce à la corrélation d'image. Grâce à la connaissance des déplacements, le logiciel est capable de reconstruire le champ de déformation. Comme la surface de l'éprouvette est plane et reste à une distance constante de l'objectif de l'appareil photo, la corrélation est réalisée en 2D.

Les déformations principales logarithmiques (ε_1 , ε_2) mesurées grâce à ARAMIS[®], nous permettent de déterminer la déformation équivalente définie au sens de von Mises par :

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)}$$
(3.235)

Où la troisième déformation ε_3 qui correspond à l'amincissement, est donnée par :

$$\varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \tag{3.236}$$

Les figures 4.8 et 4.9 représentent respectivement les champs de déformation équivalente calculés par ARAMIS[®] à différentes étapes de l'essai pour une éprouvette en alliage d'aluminium 5754 de 2mm d'épaisseur et pour une éprouvette en acier ES de 1,5 mm d'épaisseur. Il est intéressant de noter la différence dans la formation de la striction entre les deux matériaux. En effet dans le cas de l'alliage d'aluminium, la striction apparaît rapidement. De plus, cette striction est une striction localisée avec le phénomène typique d'apparition de bandes de striction orientée à 45° par rapport au sens de traction. Ces bandes de striction apparaîssent avant la rupture et une de ces deux bandes est clairement visible sur la figure 4.8 pour un déplacement u = 7,8 mm. A l'opposé, la striction est diffuse dans l'acier. Une striction diffuse est caractéristique d'un matériau très ductile. Cette ductilité se traduit, aussi au niveau des courbes d'écrouissage, avec la présence d'un large palier de contrainte sur la courbe d'écrouissage conventionnelle (Fig. 4.7).



u = 7,8 mm u = 8,5 mm u = 10 mmFigure 4.8 : Série de photos prises lors d'un essai de traction pour l'alliage d'aluminium 5754-O et les champs de déformation équivalente calculés par ARAMIS[®]



Figure 4.9 : Série de photos prises lors d'un essai de traction pour l'acier ES et les champs de déformation équivalente calculés par ARAMIS®

A partir des données issues de la corrélation d'image, il est possible de prolonger la courbe d'écrouissage. La méthode consiste à venir calculer la déformation et la contrainte vraie dans la section centrale de l'éprouvette dont la largeur est notée *l*. Pour ce faire, dans un premier temps, les valeurs de la déformation équivalente et de la déformation dans la section centrale de l'éprouvette sont récupérées grâce au logiciel ARAMIS[®]. Puis la déformation vraie et la contrainte vraie sont obtenues en appliquant les formules suivantes :

$$\varepsilon_{rat} = \frac{\int_0^l \bar{\varepsilon} dl}{l} \quad \text{et} \quad \sigma_{rat} = \frac{F}{S} = \frac{F}{S_0 \frac{\int_0^l \exp(\varepsilon_3) dl}{l_0}}$$
(3.237)

Dans cette expression l_0 est la largeur initiale de l'éprouvette et F est l'effort mesuré par la machine de traction aux différentes étapes.

La figure 4.10 présente les valeurs de la déformation et de l'amincissement mesurés par ARAMIS[®] dans la section de plus faible largeur de l'éprouvette en acier ES. Dans ce cas, nous pouvons voir que les déformations ne sont plus uniformément réparties au-delà d'une déformation vraie de 0,3.



Figure 4.10 : Mesure par ARAMIS[®] de la déformation équivalente et de l'amincissement dans la section centrale de l'éprouvette en acier ES

Les résultats de l'extension pour l'acier ES et pour l'alliage d'aluminium 5182 permettent de tirer plusieurs conclusions (Fig. 4.11). Tout d'abord, l'utilisation de cette méthode d'extension de la courbe d'écrouissage est très intéressante pour l'acier et moins pour l'ensemble des alliages d'aluminium testés. En effet, elle permet d'étendre la courbe d'écrouissage jusqu'à des déformations équivalentes de 0,6 – 0,8 pour l'acier contre 0,4 pour les alliages d'aluminium. Le fait que cette méthode soit si efficace avec l'acier ES vient du fait que cet acier est bien plus ductile que les alliages d'aluminium. En effet, la localisation rapide des déformations dans des bandes de striction pour les alliages d'aluminium rend plus difficile le prolongement des courbes.

Enfin ces résultats nous amènent à rediscuter la forme de la loi d'écrouissage. En effet, la loi de Swift identifiée sur la courbe de traction jusqu'à la striction permet de bien décrire le comportement de l'acier au-delà de celle-ci ce qui n'est pas vrai pour la loi de Voce. En ce qui concerne l'alliage d'aluminium, les données obtenues par la corrélation d'image ne permettent pas d'avoir suffisamment d'informations pour juger de la pertinence de la forme de la loi à choisir pour les alliages d'aluminium.





4.3.2.1.2 Etude de la sensibilité à la vitesse

Afin de se rapprocher des vitesses de sollicitation qui ont lieu lors de la pose du rivet autopoinçonneur, des essais de traction ont été effectués à une vitesse de déplacement des mors imposée de 20 mm/s, ce qui correspond à une vitesse de déformation moyenne de 1 s^{-1} . Pour de telles vitesses de sollicitation, l'utilisation de l'extensomètre n'est plus possible. Pour relier le déplacement du mors supérieur u et la déformation conventionnelle ε_{conv} , la méthode de la longueur effective introduite dans (Priadi, 1993) a été utilisée. Le principe de cette méthode est d'attribuer une longueur initiale appelée longueur effective L_e au déplacement du mors supérieur. Cette approche permet d'évaluer correctement la déformation de l'éprouvette pour des vitesses élevées. L'expérience montre qu'à basse vitesse (Fig. 4.5), nous avons :

$$L - L_0 = ku \tag{3.238}$$

 $L - L_0$ est la mesure de l'allongement par l'extensomètre. k est la raideur de tout ce qui est en dehors de la partie utile de l'éprouvette. La longueur effective L_e est alors calculée de la manière suivante :

$$L_e = \frac{L_0}{k} = \frac{u}{\varepsilon_{conv}}$$
(3.239)

Cette longueur est considérée comme étant constante au cours de l'essai.

Le tableau 4.8 et la figure 4.12 résument respectivement les propriétés mécaniques et les courbes d'écrouissage de l'acier ES et de l'alliage d'aluminium 5182-O pour les différentes vitesses de déformation. Ces données montrent clairement que l'acier est plus sensible que l'alliage d'aluminium. Cependant cette influence n'est pas suffisamment marquée pour avoir une réelle influence dans notre modèle. A titre d'information, le tableau 4.9 présente les paramètres de la loi de Swift avec prise en compte de la vitesse de déformation pour l'acier ES (2.28).

Tableau 4.8 : Influence de la vitesse de traction sur les propriétés mécaniques des tôles

Nuance	Vitesse (mm/s)	R_e	<i>R</i> _m	$A_r(\%)$
ES 1,47 mm	0,1	190 <u>+</u> 5	315 <u>+</u> 3	58 <u>+</u> 1
	20	242 <u>+</u> 1	350 ± 2	58 <u>+</u> 1
5182-O 2,5 mm	0,1	152 <u>+</u> 3	284 <u>+</u> 2	28 <u>+</u> 1
	20	152 <u>+</u> 3	280 ± 2	28 <u>+</u> 1



Figure 4.12 : Influence de la vitesse de traction sur la courbe d'écrouissage de l'acier ES et de l'aluminium 5182-0

Tableau 4.9 : Paramètres de la loi d'écrouissage de Swift avec prise en compte du terme de vitesse pour l'acier ES

K (MPa)	n	r_0	m
649,5	0,282	0,03	0,02

4.3.2.2 Détermination des courbes d'écrouissage par analyse inverse

4.3.2.2.1 Modèle éléments finis

Il s'agit dans cette partie de simuler numériquement l'essai de traction. Seule la partie de l'éprouvette qui n'est pas serrée par les mors est modélisée et un plan de symétrie est utilisé dans l'épaisseur (Fig. 4.13). Pour prendre correctement en compte le phénomène d'amincissement de l'éprouvette, la modélisation est réalisée avec le logiciel 3D de Forge2005[®]. Une étude de sensibilité a montré que la taille du maillage n'influence pas les résultats. Un maillage de taille moyenne 1 mm sera donc utilisé afin de garder des temps de simulation relativement faibles (entre 5 et 10 minutes). Le contact entre les outils et le lopin est un contact de type bilatéral collant afin de reproduire l'effet de serrage des mors.



Figure 4.13 : Modèle éléments finis de l'essai de traction uniaxiale

Pour finir, l'espace de recherche des paramètres de la loi d'écrouissage isotrope par l'algorithme d'analyse inverse a été choisi en effectuant une variation de $\pm 20\%$ des paramètres identifiés par la méthode expérimentale.

4.3.2.2.2 Résultats de l'identification et comparaisons avec les lois expérimentales

Les paramètres de la loi de Swift et de Voce sont identifiés pour une seule épaisseur de chacune des nuances étudiées. Pour diminuer le temps de calcul de l'identification, c'est la tôle de plus faible épaisseur qui est utilisée. Comme présenté dans la section 4.2.4, les identifications sont menées sur la première partie de la courbe de traction, i.e. avant la chute d'effort due à l'apparition de l'endommagement. Les valeurs des paramètres identifiés sont récapitulées dans le tableau 4.10 pour la loi de Swift et dans le tableau 4.11 pour la loi de Voce.

Tableau 4.10 : Paramètres identifiés de la loi d'écrouissage de Swift des tôles pour une vitesse de traction de 0,1 mm/s

Nuance	K (MPa)	n	r_0
ES	650,63	0,302	0,0169
5754-0	477,02	0,327	0,0084
5182-0	633,23	0,343	0,0156
6016-T4 DR100	533,37	0,295	0,0116

Tableau 4.11 : Paramètres identifiés de la loi d'écrouissage de Voce des tôles pour une vitesse de traction de 0,1 mm/s

Nuance	K (MPa)	n	r_0
ES	449,27	8,11	0,068
5754-0	279,61	11,31	0,039
5182-0	364,63	11,02	0,049
6016-T4 DR100	333,28	10,74	0,055

Les courbes d'écrouissage issues de l'identification manuelle et de l'identification par analyse inverse sont illustrées par la figure 4.14. Les courbes d'écrouissage sont très proches pour des valeurs de déformation plastique inférieure à 0,2 quelle que soit la forme de la loi retenue ou la méthode d'identification. Cependant pour des valeurs de déformations supérieures à 0,2, les courbes d'écrouissage ne sont plus confondues. Les lois de Voce identifiées expérimentalement avant l'apparition de la striction sont extrêmement proches des courbes identifiées par analyse inverse. Par contre dans le cas de la loi de Swift, l'identification expérimentale a tendance à fournir des courbes d'écrouissage moins ductiles que les courbes identifiées par analyse inverse.



Figure 4.14 : Lois d'écrouissage identifiées manuellement (paramètres initiaux) et par analyse inverse (optimisés)

La figure 4.15 illustre les comparaisons entre les courbes expérimentales et les courbes numériques obtenues à partir des paramètres identifiés. Plusieurs remarques peuvent être faites. Tout d'abord, en ce qui concerne les lois d'écrouissage de Swift identifiées. La comparaison entre les courbes expérimentales et les courbes numériques montre une bonne corrélation quelle que soit la nuance. Cette bonne corrélation est vérifiée tant que l'écrouissage reste positif, i.e. avant l'apparition de

l'endommagement. Au-delà de cette limite, la courbe numérique continue à croître. En ce qui concerne les lois d'écrouissage de Voce identifiées, nous pouvons voir que la corrélation entre les courbes expérimentales et les courbes numériques est bonne sur la première partie de la courbe. Cependant au-delà d'un certain déplacement, l'effort de traction prédit numériquement chute et passe en dessous de l'effort obtenu expérimentalement. Cette chute d'effort est due à l'apparition de la striction et au phénomène de saturation d'écrouissage propre à la loi de Voce.



Figure 4.15 : Comparaison entre les courbes force –déplacement obtenues expérimentalement et numériquement avec les paramètres identifiés

4.3.2.3 Caractérisation de la loi d'endommagement

4.3.2.3.1 Modèle élément finis

La deuxième étape de la caractérisation de la rhéologie des tôles est l'identification des paramètres de la loi d'endommagement. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, l'utilisation d'un modèle d'endommagement couplé avec le comportement matériau entraine une dépendance à la discrétisation spatiale des résultats obtenus par la méthode des éléments finis. Pour corriger cette dépendance, il est possible d'utiliser un modèle d'endommagement non local (cf. chapitre 3). Cependant ce genre de modèle n'est pas encore assez abouti pour être utilisé efficacement (mauvaise connaissance de la signification physique de la longueur caractéristique, contrainte sur la taille du maillage, ...). Pour s'affranchir de cette dépendance, la même taille de maille sera utilisée pour la phase d'identification (essai de traction) et pour la phase de simulation du rivetage auto-

poinçonneur (pose du rivet et tenue mécanique). Cette taille est donc de 0,1 mm dans la zone d'endommagement de l'éprouvette.

Afin de diminuer le nombre de paramètres dans l'identification, nous supposons que l'exposant d'endommagement *b* est fixé à 1 pour les alliages d'aluminium et à 2 pour l'acier ductile. Cette hypothèse forte est classique et n'est pas très loin des valeurs réelles (Lemaitre, et al., 2005). S_0 est supposé être compris entre 0,01 et 5.

4.3.2.3.2 Résultats de l'identification

Les valeurs identifiées des paramètres de la loi d'endommagement couplée à la loi d'écrouissage de Swift sont récapitulées dans le tableau 4.12. Les courbes numériques avec et sans endommagement sont confrontées aux résultats expérimentaux sur la figure 4.16. Une excellente corrélation est obtenue entre les courbes expérimentales et les résultats des simulations des essais de traction.

Tableau 4.12 : Paramètres identifiés de la loi d'endommagement des tôles pour une vitesse de traction de 0,1 mm/s

Nuance	$\overline{\varepsilon}_D$	S ₀ (MPa)	b	D _c
ES	0,202	3,1	2	0,6
5754-0	0,195	3,9	1	0,44
5182-0	0,225	4,7	1	0,5
6016-T4 DR100	0,2	4,1	1	0,5





4.3.2.4 Conclusions sur les essais de traction

Pour caractériser la rhéologie de produits minces, l'essai de traction est très souvent utilisé. En effet, en plus d'être un essai simple de mise en œuvre, il permet d'avoir accès à un grand nombre d'informations. Dans notre cas, les essais de traction nous ont permis de caractériser de façon expérimentale ou numérique :

- les paramètres des lois d'écrouissage isotrope de Swift et de Voce,
- les paramètres de la loi d'endommagement isotrope de Lemaitre combinée à une loi d'écrouissage de Swift.

A partir des données issues d'un extensomètre lors de l'essai de traction, une première estimation des paramètres des lois d'écrouissage de Swift et Voce a été réalisée. Pour compléter les résultats obtenus expérimentalement, une méthode de corrélation d'image a été utilisée. Cette méthode a été efficace, dans notre cas, seulement pour l'acier doux ES et a montré qu'une loi de Swift permet de représenter correctement l'écrouissage de cette nuance. La corrélation d'image a montré ses limites dans le cas des alliages d'aluminium. En effet, ces nuances ne sont pas suffisamment ductiles pour que cette méthode puisse fournir des données intéressantes.

Afin d'optimiser les valeurs des paramètres des lois d'écrouissage identifiées expérimentalement, nous avons utilisé une méthode d'analyse inverse basée sur un algorithme de stratégie d'évolution couplée à un métamodèle au travers du logiciel RhéoForge[®]. L'identification est basée sur la courbe force – déplacement. Les paramètres obtenus par analyse inverse permettent d'avoir des résultats numériques très proches de ceux obtenus expérimentalement avant l'apparition de l'endommagement. Cette étude a permis d'identifier que la loi de Voce est mal adaptée pour la modélisation du comportement de l'ensemble des nuances. C'est la raison pour laquelle nous retenons la loi d'écrouissage de Swift dans le reste du manuscrit. La deuxième étape de l'identification concerne la loi d'endommagement. Celle-ci a aussi été effectuée en utilisant la méthode d'analyse inverse. Les résultats obtenus montrent une excellente corrélation entre les courbes numériques et les courbes expérimentales. La stratégie d'identification en deux étapes, mise en place dans cette étude, semble donc efficace.

Il est légitime de se poser la question de la cohérence des lois identifiées par un essai de traction avec les déformations subies pendant un rivetage. En effet, les essais de traction sont limités à des déformations de l'ordre de 40% pour les alliages d'aluminium et d'environ 80% pour l'acier. Alors que dans les simulations de pose de rivet auto-poinçonneur, certaines parties des tôles atteignent des déformations comprises entre 100 et 150%. Au-delà de l'aspect des valeurs des déformations, le type de sollicitation n'est pas le même. En effet, lors de la pose du rivet auto-poinçonneur, les tôles subissent des chemins de déformation complexes avec notamment, en plus de la traction, du cisaillement et de la compression. C'est la raison pour laquelle des essais se rapprochant du mode de déformation subi par les tôles au cours de la pose du rivet auto-poinçonneur seront présentés dans la section qui suit.

4.3.3 Caractérisation rhéologique des tôles par poinçonnement

Afin de se rapprocher du chemin de déformation que suivent les tôles lors de pose de rivets autopoinçonneurs, un montage d'essai de poinçonnement a été développé et réalisé au CEMEF. Cet essai présente l'avantage de permettre d'atteindre des déformations bien supérieures à celles atteintes lors de l'essai de traction. De plus, les chemins de déformation subis par la matière lors du poinçonnement sont plus représentatifs de ceux observés en rivetage.

4.3.3.1 Montage de l'essai de poinçonnement et résultats expérimentaux

Le montage est constitué d'une matrice, d'un poinçon et d'un serre-flan (Fig. 4.17). Celui-ci est piloté par une machine hydraulique DARTEC de capacité maximale en compression de 32 kN. Une cellule de charge de 50kN a été utilisée afin de faire l'acquisition de l'effort de poinçonnement. La mesure du déplacement du poinçon est réalisée grâce à un capteur LVDT. Le montage a été développé afin que les plaques de dimensions 38x125 mm s'intègrent directement. Pour chaque nuance et chaque épaisseur de tôle, trois séries de 5 essais ont été réalisées. Chacune des séries d'essai se caractérise par une vitesse de déplacement du poinçon différente. Les vitesses utilisées sont 0,1 mm/s, 1 mm/s et 10 mm/s.



Figure 4.17 : Photo du montage de poinçonnement développé au CEMEF

La figure 4.18 présente les courbes effort - déplacement enregistrées lors des essais de poinçonnement pour les 4 nuances ainsi que pour les différentes vitesses de sollicitation. Il est intéressant de constater sur ces courbes que comme pour les essais de traction, la vitesse de sollicitation n'a qu'une faible influence sur les résultats. Nous nous sommes alors intéressés à l'identification des lois pour une seule vitesse de sollicitation, soit 0,1 mm/s.

Contrairement à l'essai de traction, les résultats issus de l'essai de poinçonnement ne sont pas exploitables sans l'utilisation d'un modèle numérique associé.



Figure 4.18 : Courbes effort-déplacement des essais de poinçonnement pour les différentes tôles étudiées et les différentes vitesses de sollicitation

4.3.3.2 Modèle éléments finis

Les géométries du poinçon et de la matrice étant axisymétriques, c'est le logiciel 2D de Forge2005[®] qui est utilisé pour modéliser l'essai (Fig. 4.19). La taille de maille utilisée pour discrétiser la tôle est identique à celle utilisée lors des simulations de rivetage soit 0,1 mm de moyenne. Le coefficient de la loi de frottement de Coulomb entre la tôle et les outils rigides (poinçon, matrice et serre-flan) est défini comme étant égal à 0,1. Les outils sont des corps rigides.



Figure 4.19 : Modélisation de l'essai de poinçonnement pour une tôle d'épaisseur 1mm (visualisation fictive)

La géométrie des outils n'étant pas disponible, nous avons mesuré les différentes côtes à l'aide d'un pied à coulisse et d'une lunette binoculaire. Cependant les différents angles de découpe n'ont pu être mesurés avec précision.

Contrairement à la simulation de l'essai de traction, l'essai de poinçonnement est, à priori, plus délicat à mettre en œuvre. En effet, les résultats numériques peuvent être dépendants de paramètres physiques (du frottement, de la géométrie des outils, du jeu entre le poinçon et la matrice) mais aussi numériques (taille de maille). Nous avons donc réalisé une étude de sensibilité sur ces paramètres avec et sans prise en compte de l'endommagement. Les résultats sur les courbes effort - déplacement révèlent plusieurs problématiques (Fig. 4.20 à 4.23). Dans le cas d'une simulation sans prise en compte d'endommagement, les résultats sont indépendants de la valeur du coefficient de la loi de frottement ainsi que de la discrétisation spatiale. Cependant les résultats montrent une forte influence des résultats vis-à-vis des géométries (rayon de découpe, et jeu entre la matrice et le poinçon). L'ajout de l'endommagement dans le modèle accentue l'effet des géométries et introduit la dépendance des résultats vis-à-vis de la taille de maille.



Figure 4.20 : Influence du coefficient de frottement de la loi de Coulomb : (gauche) sans endommagement et (droite) avec endommagement



Figure 4.21 : Influence de la taille de maille : (gauche) sans endommagement et (droite) avec endommagement







Figure 4.23 : Influence du jeu entre la matrice et le poinçon : (gauche) sans endommagement et (droite) avec endommagement

Malgré ces dépendances, nous avons réalisé des simulations de poinçonnement à partir des paramètres des lois d'écrouissage de Swift et de Voce identifiées sur les essais de traction et sans prendre en compte l'endommagement (Fig. 4.24). La première remarque qui peut être faite concerne les lois de Voce des alliages d'aluminium. En effet, les paramètres identifiés par analyse inverse sur les essais de traction donnent des courbes numériques qui ont une excellente corrélation avec les données expérimentales malgré les nombreuses approximations. Les lois de Swift, quant à elles, permettent d'avoir une bonne corrélation seulement sur le début de la courbe. En ce qui concerne l'acier doux, le constat est plus mitigé. En effet, quelle que soit la forme de la loi d'écrouissage retenue, la courbe numérique est assez éloignée de celle obtenue expérimentalement.

Au vu de ces premiers résultats, il semble que la forme de la loi d'écrouissage la mieux adaptée pour les essais de poinçonnement des alliages d'aluminium soit la loi de Voce. Cette constatation est en contradiction avec les résultats obtenus sur l'essai de traction qui eux privilégient la forme de Swift pour l'écrouissage.



Figure 4.24 : Comparaisons entre les courbes force –déplacement obtenues expérimentalement et les courbes numériques avec les lois identifiées sur les essais de traction

4.3.3.3 Résultat de l'identification par analyse inverse

Comme pour les essais de traction, l'observable qui est utilisée dans l'algorithme d'identification est la courbe force – déplacement. Les plages d'identification sont basées sur les paramètres issus de l'analyse inverse sur l'essai de traction. Les tableaux 4.13 et 4.14 récapitulent respectivement les paramètres identifiés des lois d'écrouissage de Swift et de Voce. Comme nous pouvons le constater, un grand nombre d'identification n'ont pas donné de jeu de paramètres pertinents notamment en ce qui concerne la formulation de la loi d'écrouissage de Swift pour les alliages d'aluminium.

Tableau 4 13 · Paramètres	identifiés de la loi	i d'écrouissage de Sy	vift nour une vitesse de	noinconnement de 0.1 mm/s
Tableau 4.15 . Falailleties	identifies de la loi	i u eti buissage ue sv	viit pour une vitesse de	poinçonnement de 0,1 mm/s

Nuance	K (MPa)	n	r_0
ES	543,9	0,29	0,018
5754-O	-	-	-
5182-0	-	-	-
6016-T4 DR100	-	-	-

Tableau 4.14 : Paramètres identifiés de la loi d'écrouissage de Voce pour une vitesse de poinçonnement de 0,1 mm/s

Nuance	ance K (MPa)		r_0	
ES	-	-	-	
5754-O	261,02	14,44	0,035	
5182-0	331,62	13,28	0,041	
6016-T4 DR100	333,28	10,74	0,055	

A partir de ces lois d'écrouissage, nous avons tenté d'identifier les paramètres de la loi d'endommagement des différentes nuances. Cependant l'analyse inverse n'a pas réussi à fournir de jeu de paramètres pertinent quelle que soit la forme de la loi d'écrouissage retenue. En effet, dans le cas de la loi de Voce, il est extrêmement difficile de caractériser un intervalle de recherche pour le paramètre $\bar{\varepsilon}_D$. De plus, l'effet d'adoucissement de l'endommagement sur le comportement du matériau n'est pas significatif avant l'apparition de la rupture. En ce qui concerne la loi de Swift, les paramètres d'endommagement identifiés ne permettent pas de se rapprocher des courbes expérimentales. Il ne faut pas oublier non plus que la modélisation de cet essai est très sensible aux paramètres géométriques et numériques ce qui peut aussi expliquer l'échec des identifications.

4.3.3.4 Conclusions sur les essais de poinçonnement

L'essai de poinçonnement peut sembler intéressant pour la caractérisation des propriétés mécaniques des tôles minces. En effet lors d'un rivetage auto-poinçonneur, lorsque le rivet pénètre dans la tôle supérieure, celle-ci subit un chemin de déformation proche de celui d'un poinçonnement. Cependant cet essai, bien que relativement facile de mise en œuvre, pose de nombreux problèmes dans le cadre d'une identification par analyse inverse. Effectivement, contrairement à l'essai de traction à basse vitesse où seule la géométrie de l'éprouvette influence les résultats, l'essai de poinçonnement est dépendant d'un grand nombre de paramètres :

- géométries du poinçon et de la matrice,
- jeu entre le poinçon et la matrice,
- discrétisation éléments finis lors de la prise en compte de l'endommagement.

Les identifications nous ont montré que la caractérisation de la loi d'écrouissage est possible si la forme retenue est correcte. Ce qui se traduit dans notre cas par une loi de Voce pour les alliages d'aluminium et une loi de Swift pour l'acier doux. En excluant les problèmes de dépendances des résultats, cette conclusion est en contradiction pour les alliages d'aluminium avec les résultats que nous avons obtenus lors de l'identification sur les essais de traction uniaxiale. Cette contradiction est le reflet d'une limitation de notre modèle. Elle peut être la conséquence :

- d'un mauvais choix dans la forme de la loi d'écrouissage isotrope. Il faudrait alors soit opter pour une loi d'écrouissage plus générale comportant un plus grand nombre de paramètres à identifier soit réécrire les lois d'écrouissages en découplant la limite d'élasticité des autres paramètres.
- d'une anisotropie du matériau. En effet, il semble que nous ayons une différence de comportement du matériau suivant le sens de sollicitation (longueur ou épaisseur de la tôle). Cette anisotropie étant une conséquence directe du mode de fabrication des tôles, i.e. laminage à froid. Notre modèle utilisant un comportement purement isotrope n'est alors pas apte à capter ce phénomène. Pour ce faire, il faudrait introduire un critère de plasticité anisotrope.

En ce qui concerne les lois d'endommagement, nous n'avons pas pu juger de la pertinence de l'essai de poinçonnement. En effet, il nous a été impossible de caractériser les paramètres des lois d'endommagement correctement. Cette incapacité est principalement la résultante du manque de précision dans la connaissance des géométriques des outils.

4.4 Caractérisation rhéologique des rivets semi-creux

4.4.1 Nature des rivets semi-creux

Les rivets auto-poinçonneurs utilisés dans nos campagnes expérimentales, nous ont été fournis par la société Böllhoff. Ces rivets sont mis en forme par plusieurs passes de frappe à froid à partir de bobines de fil en acier au bore 35-B2 dont la composition chimique est récapitulée dans le tableau 4.15. Cette nuance d'acier est souvent utilisée dans la fabrication d'éléments d'assemblage (rivet, écrou, ...) car elle se caractérise notamment par une très haute limite d'élasticité. Dans notre cas, les rivets utilisés ont une dureté Vickers apparente de 480 ± 30 Hv.

Tableau 4.15 : Composition chimique des rivets en pourcentage massique

С	Mn	Si	Р	S	Al	Cr	В
0,32-0,36	0,5-0,6	0,05-0,1	<0,015	<0,015	<0,08	0,02-0,05	20-50ppm

4.4.2 Les difficultés de la caractérisation rhéologique du rivet

Contrairement à une tôle, l'accès aux propriétés matériaux des rivets n'est pas aisé. Cette difficulté résulte de la combinaison de plusieurs facteurs. Tout d'abord, le rivet a une géométrie complexe et un essai simple, comme l'essai de traction uniaxiale pour les tôles, n'est pas envisageable. De plus, la taille des rivets à notre disposition est réduite. En effet, elle varie entre 5 et 8 mm de longueur pour 5,3 mm de diamètre. Pour finir, les rivets sont fabriqués en plusieurs étapes de frappe à froid ce qui engendre des contraintes et des déformations résiduelles. Pour être parfaitement rigoureux, il faudrait prendre en compte toute l'histoire de la mise en forme du rivet pour pouvoir avoir un état de contrainte et de déformation initial correct. Cependant comme le procédé de fabrication des rivets est confidentiel, nous avons mis en place deux essais afin de caractériser leur comportement : un essai d'évasement et un essai d'écrasement. Les essais seront effectués sur les rivets de 8 mm de longueur car ils nous offrent un plus grand volume de travail. La figure 4.25 représente les deux géométries des rivets mis à notre disposition.







Rivset[®] K Ø5.3x8

Figure 4.25 : Géométries des rivets auto-poinçonneurs de longueur 5 et 8mm

4.4.2.1 Essais d'évasement

Dans l'optique de se rapprocher du mode de déformation subi par le rivet lors de la création de l'assemblage, un montage d'évasement de rivet a été adapté sur le moyen d'essai de poinçonnement des tôles (cf. §4.3.3.1). La tête du rivet est posée sur un support positionné en lieu et place de la matrice. Le poinçon est remplacé par un arbre chanfreiné à 30°. L'essai consiste donc à venir évaser le rivet jusqu'à rupture (Fig. 4.26). Au cours de l'essai, l'effort est mesuré par la cellule d'effort de 50kN de la machine hydraulique DARTEC. Le déplacement du poinçon est enregistré grâce à un capteur LVDT. Le poinçon est contrôlé en déplacement et la vitesse imposée est de 0,1 mm/s.



Figure 4.26 : Schéma de l'essai d'évasement de rivet

Les résultats obtenus pour 5 essais d'évasement sont représentés sur la figure 4.27. Lors de la montée d'effort, il y a une excellente corrélation entre les différents essais. Au-delà d'une certaine limite, le rivet se rompt. La fissuration est très aléatoire et ce phénomène donne alors des résultats très différents à chacun des essais. C'est la raison pour laquelle nous avons recherché un autre essai mécanique présentant une meilleure reproductibilité.



Figure 4.27 : Courbes force – déplacement mesurées lors d'essais d'évasement de rivet

4.4.2.2 Essais d'écrasement

Le deuxième essai retenu pour identifier la rhéologie des rivets est un essai d'écrasement inspiré de celui présenté dans (Porcaro, et al., 2006). Un cylindre creux de 5,3 mm de diamètre et de 4 mm de longueur est découpé dans le rivet. Cette découpe est réalisée grâce à un fil diamanté de 0,02 mm. Le cylindre creux ainsi obtenu est compressé entre deux tas plats. Comme pour l'essai d'évasement, la machine hydraulique DARTEC a été utilisée avec une cellule d'effort de 50kN. La mesure du déplacement du plat supérieur est réalisée grâce à un capteur LVDT et la consigne de vitesse est de 0.1 mm/s. Le dispositif expérimental est illustré par la figure 4.28.



Figure 4.28 : Dispositif expérimental de l'essai d'écrasement du rivet

La figure 4.29 représente les courbes effort – déplacement enregistrées pour 5 essais d'écrasement. Contrairement à l'essai d'évasement, nous avons une excellente reproductibilité sur l'ensemble de la courbe d'essai.



Figure 4.29 : Courbes force – déplacement mesurées lors d'essais d'écrasement de rivet
4.4.3 Modèles éléments finis

4.4.3.1 Essai d'évasement

Les géométries du rivet et du poinçon étant axisymétriques, c'est le logiciel 2D de Forge2005[®] qui est utilisé pour modéliser l'essai d'évasement (Fig. 4.30). La taille moyenne du maillage est de 0.1 mm et correspond à la taille de maillage retenue pour les simulations de pose de rivets auto-poinçonneurs. Le coefficient de frottement de la loi de Coulomb est fixé égal à 0,1.





Figure 4.30 : Modélisation de l'essai d'évasement de rivet : (gauche) configuration initiale, (droite) configuration déformée

4.4.3.2 Essai d'écrasement

L'essai d'écrasement, quant à lui, est modélisé en 3D (Fig. 4.31). Afin de diminuer la durée des simulations, seul un huitième du rivet est modélisé. Comme dans la modélisation de l'essai d'évasement, la taille de maille est égale à 0,1 mm. Le coefficient de frottement de la loi de Coulomb est fixé à 0,1.



Figure 4.31 : Modélisation de l'essai d'écrasement du rivet

4.4.3.3 Définition de l'espace de recherche

Une difficulté supplémentaire pour la caractérisation de la courbe d'écrouissage du rivet provient du choix de l'espace de recherche des différents paramètres à identifier. En effet, nous ne disposons pas de données initiales et l'utilisation de la courbe d'écrouissage de l'acier 35-B2 n'est pas appropriée à cause des contraintes et déformations résiduelles existantes dans le rivet. De plus, les courbes d'écrouissage issues de la littérature présentent une disparité importante. La figure 4.32 illustre ces courbes d'écrouissage et le tableau 4.16 récapitule les paramètres des lois de Swift associées (certaines courbes ont été approchées en utilisant le critère des moindres carrés). En se basant sur ces données, nous avons défini notre espace de recherche comme étant égal à $\pm 20\%$ des bornes inférieures et supérieures. Sauf pour le paramètre r_0 qui varie entre 10^{-5} et 0,3.



Figure 4.32 : Courbes d'écrouissages pour la matière constituant le rivet issues de la littérature

Tableau 4.16 : Paramètres des lois d'écrouissages de Swift définies dans la littérature pour les rivets auto-poinçonneurs

Essai	K (MPa)	n	r_0
(Abe, et al., 2006)	1995	0,014	—
(Bouchard, et al., 2007)	1200	0,7	0,0001
(Chergui, 2004)	2296	0,137	0,028
(Gårdstam, 2006)	1154	0,03	0,00011
(Porcaro, et al., 2006)	2534	0,154	0,04
(Westerberg, 2002)	2000	0,05	_

4.4.4 Résultats de l'identification

Les paramètres de la loi d'écrouissage identifiés sur les deux essais sont résumés dans le tableau 4.17. La courbe contrainte – déformation associée est représentée sur la figure 4.33. Le premier constat est que les deux jeux de paramètres identifiés donnent des courbes d'écrouissage relativement proches. On notera cependant que la courbe issue de l'identification sur l'essai d'évasement présente une courbure plus prononcée que celle issue de l'identification sur l'essai d'écrasement, ce qui se traduit par une valeur plus importante de l'exposant d'écrouissage. Afin de déterminer le meilleur jeu de paramètres, nous avons réalisé une simulation de l'essai d'évasement

avec les paramètres issus de l'identification sur l'essai d'écrasement et inversement. Les figures 4.34 et 4.35 illustrent les résultats obtenus numériquement comparés aux données expérimentales. Comme nous pouvons le voir sur la figure 4.34, les résultats numériques sont très proches de la courbe expérimentale quel que soit le jeu de paramètres utilisés. Par contre, sur la figure 4.35, la différence entre les jeux de paramètres est plus marquée et on peut clairement identifier que le jeu de paramètres identifié sur l'essai d'écrasement est de meilleure qualité. Nous l'utiliserons donc pour les simulations de rivetage et de tenue mécanique.

	п	F ₀
Evasement 2337	0,263	0,1592
Ecrasement 2400	0,197	0,0569





Figure 4.33 : Courbes d'écrouissage identifiées du rivet







Figure 4.35 : Comparaison des courbes force - déplacement expérimentales et numériques pour l'essai d'écrasement

4.4.5 Conclusions de la caractérisation rhéologique des rivets

La caractérisation de la rhéologie des rivets utilisés dans les assemblages de rivetage autopoinçonneur n'est pas aisée. En effet, le rivet, outre ses faibles dimensions, n'a pas un état de contrainte et de déformation neutre de par son mode de fabrication, i.e. frappe à froid. Des essais spécifiques ont été mis en place pour identifier le comportement mécanique des rivets. Nous avons défini un essai d'évasement qui se rapproche du mode de déformation subi par le rivet lors de sa pose, et un essai d'écrasement. A l'aide de la même méthode d'analyse inverse mise en place pour les éprouvettes de traction, nous avons caractérisé les paramètres de la courbe d'écrouissage pour les deux essais. Après comparaison des différentes courbes, il est apparu que le jeu de paramètres identifié sur l'essai d'écrasement est le plus pertinent. Il est à noter que nous n'avons pas identifié la loi d'endommagement des rivets. En effet, lors de nos simulations de rivetage auto-poinçonneur, nous avons pu noter que les déformations du rivet restent très contenues, i.e. inférieure à 0,3. A ce niveau de déformation, l'endommagement n'a pas d'effet sur le comportement du rivet. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas identifié de loi d'endommagement pour les rivets.

4.5 Conclusions et perspectives sur l'identification rhéologique

Ce chapitre a été consacré à la caractérisation des paramètres matériaux, i.e. loi d'écrouissage et loi d'endommagement, des différents éléments constituant une configuration d'assemblage par rivetage auto-poinçonneur. Dans un premier temps, la méthode d'identification de paramètres par une méthode d'analyse inverse basée sur un algorithme de stratégie d'évolution couplé à un métamodèle a été présentée. Cette méthode d'identification doit être alimentée par des données issues d'une observable expérimentale. Dans nos cas d'applications, nous avons utilisé des courbes effort – déplacement issues de différentes campagnes expérimentales.

La caractérisation rhéologique des différentes nuances de tôles mises à notre disposition a été réalisée en utilisant deux essais. Le premier est l'essai classique de traction uniaxiale. Cet essai nous a notamment permis de déterminer les paramètres mécaniques conventionnels comme la limite d'élasticité et l'allongement à rupture. Une méthode de mesure de champ de déformation par analyse d'image a été utilisée afin de compléter les données brutes des essais. A partir de l'ensemble

de ces données, nous avons pu notamment montrer que les nuances utilisées sont faiblement dépendantes de la vitesse de déformation et que la méthode d'analyse d'image mise en place pour enrichir les courbes d'écrouissage n'est efficace que dans le cas de matériaux très ductiles. En effet, dans le cas des alliages d'aluminium, l'endommagement se localise fortement limitant ainsi la zone adoucissante mais aussi engendrant une évolution de l'endommagement plus rapide ce qui entraine une rupture plus brutale. L'identification par la méthode d'analyse inverse a alors été utilisée pour caractériser les lois d'écrouissage ainsi que les paramètres de la loi d'endommagement. Cette méthode a donné de bons résultats pour une loi d'écrouissage de Swift. Cependant l'essai de traction souffre de plusieurs limitations. En effet, outre le fait d'atteindre des niveaux de déformations faibles, il n'est pas représentatif du chemin de déformation que subit la matière au cours d'un rivetage.

Afin de s'affranchir de ses limitations, nous nous sommes tournés vers un essai de poinçonnement. Ce type d'essai, bien que théoriquement très intéressant, n'a pu fournir de données supplémentaires sur le comportement des tôles. En effet, cet essai est dépendant d'un grand nombre de paramètres qui ont été difficilement maitrisables dans notre cas. Cependant il est à noter que contrairement à l'essai de traction, c'est la formulation de Voce des lois d'écrouissage qui a donné de meilleurs résultats pour les alliages d'aluminium. Il y a donc une contradiction sur la forme de la loi d'écrouissage à retenir entre ces deux essais. Cette contradiction montre les limites du modèle et suggère deux voies d'améliorations et d'investigations possibles. La première repose sur la modification de la forme de la loi d'écrouissage. La seconde amélioration envisageable est l'introduction d'un critère de plasticité anisotrope.

Avant tout, il semble nécessaire de mettre en place de nouveaux essais de caractérisation des tôles ou de choisir des observables locales pour l'identification avec notamment l'utilisation de la corrélation d'images. Pour la caractérisation dans la longueur des tôles, un essai de cisaillement couplé à une méthode d'identification par analyse inverse semble être en mesure de fournir une courbe d'écrouissage sur une plage de déformation plus importante (Bouvier, et al., 2006). Pour caractériser le comportement dans l'épaisseur de la tôle, un essai de pincement peut être envisagé (Fig. 4.36). Tout comme l'essai de poinçonnement, cet essai présente l'avantage d'atteindre des taux de déformations importants. Mais à la différence du poinçonnement, l'essai de pincement permet d'avoir une meilleure maitrise des géométries et par conséquent il sera moins sensible. Une des particularités de cet essai est de solliciter la tôle en compression n'engendrant alors pas d'endommagement. Il faudra donc identifier la loi d'endommagement sur un des autres essais.



Figure 4.36 : Essai de pincement de tôle

Dans le reste du manuscrit, nous utiliserons les paramètres des lois d'écrouissages Swift et d'endommagement identifiés par la méthode d'analyse inverse sur les essais de traction. Bien que nous connaissions les limitations de cet essai, il est le seul à nous avoir fourni l'ensemble des données. De plus, il ne faut pas perdre de vue que nous travaillons dans un contexte « industriel » et que l'essai de traction est l'essai le plus courant.

Afin de caractériser la loi d'écrouissage des rivets auto-poinçonneurs, nous avons mis en place deux essais : un essai d'évasement et un essai d'écrasement d'un cylindre découpé dans le rivet. L'utilisation de la méthode d'identification par analyse inverse, nous a permis de déterminer un jeu de paramètres de la loi d'écrouissage de Swift qui donne une très bonne corrélation expérimental-numérique sur ces deux essais.

Cependant, il est à noter qu'il devrait être envisageable d'améliorer le comportement global du rivet, dans les simulations de pose et de tenue mécanique, en modélisant l'ensemble de son procédé de fabrication. En effet, nous disposerions alors de la répartition correcte des contraintes et des déformations résiduelles. Un procédé de fabrication « non réaliste », la répartition des contraintes de von Mises et de la déformation équivalente sont représentés sur la figure 4.37.



Figure 4.37 : Procédé « non réaliste » de fabrication d'un rivet et répartition de la déformation équivalente (en haut) et des contraintes de von Mises (en bas)

4.6 Références bibliographiques

Abe, Y., Kato, T. et Mori, K. 2006. Joinability of aluminium alloy and mild steel sheets by self-piercing rivet. *J. Mat. Process. Techno.* 2006, Vol. 177, pp. 417-421.

Bouchard, P.O., Laurent, T. et Tollier, L. 2007. Numerical modeling of self-pierce riveting - From riveting process modeling down to structural analysis. *J. Mat. Proc. Tech.* 2007.

Bouvier, S., et al. 2006. Characterization of the strain-induced plastic anisotropy of rolled sheets by using sequences of simple shear and uniaxial tensile tests. *Int. J. Plast.* 2006, Vol. 174, pp. 115-126.

Chergui, A. 2004. *Beitrag zur ermüdungsgerechten auslegung stanzgenieteter aluminiumleichbaukonstruktionen.* 2004. PhD Thesis, University of Paderborn.

Cressie, N. 1993. Statistics for special data. N.Y. : J. Wiley, 1993.

Do, T.T. 2006. *Optimisation de forme en forgeage 3D.* 2006. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

François, D. 2005. Lois de comportement des métaux - Elastoplasticité. Viscoplasticité. *Techniques de l'ingénieur.* 2005.

Gårdstam, J. 2006. *Simulation of mechanical joining for automotive applications.* Stockholm : s.n., 2006. Licentiate Thesis, Royal Institute of Technology.

Lange, C. 2006. *Etude physique et modélisation numérique du procédé de sertissage de pièces de carrosserie.* 2006. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

Lemaitre, J. et Desmorat, R. 2005. Engineering damage mechanics. s.l. : Springer-Verlag, 2005.

Porcaro, R., et al. 2006. Self-piercing riveting process: an experimental and numerical investigation. *J. Mat. Proc. Tech.* 2006, Vol. 171, pp. 10-20.

Priadi, D. 1993. *Etude expérimentale et rhéologique des lois de comportement de la striction d'acier pour la simulation d'emboutissage.* 1993. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

Westerberg, C. 2002. *Finite element simulation of crash testing of self-piercing rivet joints, peel specimen.* 2002. Master's Dissertation, Lund University.

Applications numériques et validations expérimentales

5.1	5.1 Introduction	
5.2	Pose du rivet auto-poinçonneur	179
5.2.2	1 Définition des configurations d'études	179
5.2.2	2 Modélisation numérique du procédé	180
5.	.2.2.1 Choix de la discrétisation spatiale	180
5.	.2.2.2 Influence du contact et du frottement	183
5.	.2.2.3 Influence de l'endommagement	185
5.2.3	3 Résultats numériques et confrontations expérimentales	186
5.	.2.3.1 Coupes géométriques	187
5.	.2.3.2 Courbes force – déplacement	188
5.	.2.3.3 Déchargement élastique	189
5.2.4	4 Conclusions sur la simulation du rivetage	189
5.3	Modélisation de la tenue mécanique de l'assemblage riveté	190
5.3.2	1 Caractérisation expérimentale de la tenue mécanique du point riveté	190
5.3.2	2 Modélisation 3D dans Forge3	195
5.3.3	3 Etude du modèle numérique	196
5.	.3.3.1 Influence de la taille de maille	196
5.	.3.3.2 Influence de l'histoire de la mise en forme	197
5.	.3.3.3 Influence de l'endommagement	197
5.3.4	4 Résultats numériques et comparaisons aux résultats expérimentaux	198
5.	.3.4.1 Courbes force-déplacement	198
5.	.3.4.2 Modes de rupture	199
5.	.3.4.3 Le critère de rupture	199
5.3.5	5 Conclusions sur la simulation de la tenue mécanique	202
5.4	Optimisation du procédé	203
5.4.2	1 Optimisation de la géométrie d'une bouterolle	203
5.4.2	2 Résultats de l'optimisation	203
5.4.3	3 Conclusions	204
5.5	Extension aux autres assemblages par déformation plastique	205
5.5.2	1 Le clinchage à matrice fixe	205
5.5.2	2 Le rivet clinché	206
5.5.3	3 Le rivetage à rivet plein	206
5.5.4	4 Conclusions	208
5.6	Conclusions et perspectives	208
5.7	Références bibliographiques	210

5.1 Introduction

Au cours des chapitres précédents, nous avons tout d'abord développé un modèle numérique capable de prendre en compte l'ensemble des phénomènes physiques qui apparaissent lors de la pose d'un rivet auto-poinçonneur ou lors d'un test de tenue mécanique d'un point d'assemblage. Ce modèle a été ensuite implémenté dans la suite logicielle Forge2005[®]. Afin de l'alimenter avec des paramètres de lois d'écrouissage et d'endommagement réalistes, plusieurs campagnes expérimentales de caractérisation rhéologique ont été réalisées que cela soit pour les tôles ou pour les rivets. Les paramètres des lois ont alors été identifiés en utilisant le logiciel d'analyse inverse RhéoForge[®].

La première partie du présent chapitre sera consacrée aux résultats des simulations numériques ainsi qu'à la validation expérimentale de poses de rivets auto-poinçonneurs. Nous présenterons notamment l'influence de divers paramètres physiques ou numériques sur les résultats obtenus ainsi que l'importance de la prise en compte de l'endommagement dès l'étape de pose.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous étudierons la tenue mécanique du point d'assemblage riveté que cela soit du point de vue numérique ou expérimental. Pour ce faire, nous aborderons la technologie numérique mise en place pour passer d'un modèle 2D axisymétrique à un modèle 3D. Nous présenterons le montage d'essai spécifique nous permettant de réaliser des essais en traction pure, en cisaillement pur ou en sollicitation mixte. Nous verrons alors notamment l'importance de prendre en compte l'histoire de la mise en forme du point d'assemblage (contrainte, déformation, endommagement) pour obtenir une bonne prédiction de la tenue mécanique et du mode de rupture.

Enfin, les objectifs de la thèse étant d'obtenir un outil numérique d'aide à la décision, d'optimisation et d'innovation, nous verrons, dans la dernière partie de ce chapitre, qu'il est possible d'utiliser le modèle numérique développé afin :

- d'optimiser la géométrie de la bouterolle pour obtenir un assemblage plus performant en terme de tenue mécanique,
- de simuler tout un panel de technologies d'assemblages par déformation plastique.

5.2 Pose du rivet auto-poinçonneur

5.2.1 Définition des configurations d'études

Notre étude du rivetage auto-poinçonneur est basée sur un ensemble de 6 configurations d'assemblages issues du domaine automobile. Ces configurations utilisent l'ensemble des nuances de tôles caractérisées dans le chapitre précédent et sont récapitulées dans le tableau 5.1.

Configuration	Tôle sup	érieure	Tôle in	férieure	Rivet	Bouterolle
1	5182-0	1,2 mm	ES	1,47 mm	5 mm	D1002020
2	6016-T4	1,2 mm	5182-O	1,2 mm	5 mm	D1002020
3	5182-O	1,2 mm	5182-O	2,5 mm	5 mm	D1002020
4	6016-T4	1,2 mm	5182-O	2,5 mm	5 mm	D1002020
5	5754-O	1 mm	5754-O	2 mm	5 mm	DZ0902000
6	5754-O	1 mm	ES	2 mm	5 mm	DZ0902000

Tableau 5.1 : Configurations de rivetage auto-poinçonneur étudiées

Le rivet de 5 mm de longueur ainsi que deux bouterolles Böllhoff ont été utilisées. La géométrie du rivet ainsi que celles des bouterolles nous ont été fournies par la société Böllhoff. Les bouterolles sont représentées sur la figure 5.1.



Figure 5.1 : Géométries des bouterolles utilisées

5.2.2 Modélisation numérique du procédé

La modélisation de la mise en forme du point d'assemblage lors du procédé de rivetage autopoinçonneur étant un problème axisymétrique, nous avons utilisé le logiciel 2D de Forge2005[®]. La bouterolle, le poinçon et le serre-flan sont considérés comme étant des corps non déformables. Cela signifie qu'aucun calcul mécanique ou thermique ne sera réalisé dans ces pièces. La vitesse de descente du poinçon est constante et est de 20 mm/s. Le serre-flan maintient la tôle avec un effort de 5,94 kN. Les paramètres matériaux utilisés sont ceux identifiés sur les essais de traction avec une loi d'écrouissage de Swift. La Figure 5.2 représente une vue pseudo-3D d'un modèle numérique de pose d'un rivet auto-poinçonneur. A la fin du procédé de pose, l'assemblage subit un déchargement élastique.



Figure 5.2 : Vue 3D reconstituée de la configuration 2D axisymétrique de calcul

5.2.2.1 Choix de la discrétisation spatiale

Le choix de la taille moyenne du maillage dans les simulations de pose de rivet auto-poinçonneur doit être motivé suivant les priorités de l'utilisateur. En effet, il va falloir que celui-ci fasse un compromis entre la précision du résultat et le temps de calcul. Le mailleur intégré dans la suite logicielle Forge2005[®] permet l'utilisation de boites de raffinement du maillage. Ces boites définissent des zones où la taille de maillage est localement différente de la valeur moyenne. La figure 5.3 représente 3 des 4 discrétisations que nous avons utilisées pour déterminer l'influence du maillage sur les résultats. Dans les trois premières discrétisations, la taille de maille est identique pour l'ensemble des objets déformables. La moyenne du maillage est de 0,2 mm pour la première configuration tandis quelle est de 0,15 mm pour la deuxième (configuration non illustrée) et de 0,1 mm pour la troisième (Fig. 5.3a-b). La dernière discrétisation utilise des boites de raffinement de maillages afin de raffiner celui-ci dans les zones qui sont les plus importantes, i.e. autour du fut du rivet (Fig. 5.3c).



Figure 5.3 : Trois des discrétisations spatiales : (1) h = 0,2 mm, (2) h = 0,1 mm, (3) boites de raffinement de maillage

Les figures 5.4 et 5.5 représentent respectivement les courbes d'effort – déplacement obtenues avec les quatre discrétisations et la répartition de l'endommagement en fin de pose du rivet pour la configuration 5. Le tableau 5.2 résume le nombre d'éléments constituant le maillage, la durée du calcul ainsi que l'effort maximal calculé en fin de pose.

Sur la figure 5.4, quelle que soit la courbe, nous pouvons noter la présence de chutes brutales d'effort qui n'apparaissent pas dans les essais expérimentaux. Ces chutes d'effort résultent de la suppression des éléments entièrement endommagés par la méthode de kill-element. Ces éléments se trouvent en pointe de rivet. Lors de leurs suppressions, il n'y a alors plus de matière sous la pointe du rivet ce qui se traduit par une chute de l'effort pour faire avancer le rivet. Ces chutes sont d'autant plus importantes que la discrétisation spatiale est grossière. L'utilisation de raffinements locaux permet de diminuer considérablement ces instabilités.

En ce qui concerne l'allure générale des courbes effort – déplacement, nous avons une différence de comportement en fin de pose entre les discrétisations spatiales fines et les plus grossières. Cette différence peut s'expliquer facilement en observant la figure 5.5. En effet, on voit clairement que l'extérieur du rivet n'est pas en contact avec les tôles dans le cas des discrétisations h = 0,2 mm et h = 0,15 mm. La diminution de la zone de contact va donc diminuer les frottements et par conséquent les efforts. Il est donc important d'avoir un maillage suffisamment fin au niveau du fût du rivet pour avoir une bonne prédiction des efforts en fin pose.

Vis-à-vis de la répartition de l'endommagement, nous pouvons voir sur la figure 5.5, que quelle que soit la discrétisation utilisée, nous obtenons des résultats qui sont identiques.

Logiquement, plus le maillage est constitué d'un nombre important d'éléments, plus la durée des simulations est importante (Tab. 5.2). L'utilisation de boites de raffinement de maillage permet alors de diminuer le nombre d'éléments tout en gardant une précision importante. C'est donc cette discrétisation spatiale que nous utiliserons pour l'ensemble de nos simulations.



Figure 5.4 : Courbes effort – déplacement pour les trois discrétisations



Figure 5.5 : Répartition de l'endommagement en fin de procédé pour les quatre discrétisations

 Tableau 5.2 : Nombres d'éléments du maillage, temps CPU et effort maximal calculé en fin de pose pour les différentes discrétisations spatiales

Discrétisation	Nombre d'éléments	Temps CPU	Effort Max (kN)
1	9170	40min	36,1
2	14500	1h 35min	40,6
3	28850	9h 18min	42,7
4	14375	3h 41min	42,7

5.2.2.2 Influence du contact et du frottement

5

Durant la phase d'assemblage, le contact normal et le frottement entre les différents matériaux jouent un rôle important. Dans notre modèle numérique, le contact est de type unilatéral et le frottement est défini au travers de la loi de Coulomb (cf. Chapitre 3). On définit un coefficient de frottement α_f à chaque interface entre deux éléments du système :

$$\tau_c = \alpha_f \sigma_n \tag{3.240}$$

De plus si un corps est plastique incompressible, son critère de plasticité limite la contrainte de cisaillement critique. Dans le cas d'un critère de plasticité de von Mises, nous avons :

$$\tau_c \le \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \tag{3.241}$$

Nous avons évalué l'influence des différents coefficients de frottement que cela soit sur la géométrie finale calculée ou sur la courbe effort – déplacement. Pour ce faire, nous avons réalisé 5 simulations en faisant varier les coefficients de frottement entre le rivet et les tôles ou entre les outils et les tôles (Tab. 5.3).

Simulation	Valeurs des coefficients de frottement
1	0,12 entre tous les éléments
2	0,2 entre les tôles et le rivet et 0,12 ailleurs
3	0,3 entre les tôles et le rivet et 0,12 ailleurs
4	0.2 entre les tôles et le rivet. 0.2 entre les tôles et les outils et 0.12 ailleurs

0,2 entre les tôles et le rivet, 0,3 entre les tôles et les outils et 0,12 ailleurs

Tableau 5.3 : Définitions des différentes configurations de frottement

Les figures 5.6 et 5.7 présentent respectivement les résultats des simulations en terme de courbes effort – déplacement et en terme de géométrie du point d'assemblage. Nous pouvons voir sur la figure 5.6 que les coefficients de frottement entre les tôles et le rivet n'ont pas d'influence significative sur l'allure de la courbe effort – déplacement, ce qui n'est pas le cas pour les coefficients de frottement entre les tôles. En effet, plus le coefficient de frottement entre la tôle inférieure et la bouterolle est important plus les efforts sont importants en fin de pose du rivet, i.e. le moment où la zone de contact entre ces deux corps est la plus importante.

Nous retrouvons les mêmes influences sur la géométrie du point riveté (Fig. 5.7). Les frottements entre le rivet et les tôles n'ont pas d'influence. Par contre le frottement entre les tôles et les outils et plus particulièrement le frottement au niveau de la bouterolle conditionne la forme finale de l'assemblage. En effet, plus le coefficient de frottement est important entre la tôle inférieure et la bouterolle, plus la matière est freinée dans son écoulement et plus le rivet a tendance à s'évaser.

Finalement pour nos simulations, nous utiliserons les coefficients récapitulés dans le tableau 5.4. Ces coefficients ont été déterminés par confrontation entre les résultats numériques et expérimentaux. Il est à noter que les coefficients de frottement sont différents suivant que la tôle soit un alliage d'aluminium ou un acier.



Figure 5.6 : Evolution d'une courbe force -déplacement en fonction des valeurs des coefficients de frottement



Figure 5.7 : Superposition des géométries calculées pour les différentes configurations de frottement

Elément 1	Elément 2	α_f
Rivet	Tôle Supérieure (Acier/Alliage Alu)	0,12 / 0,2
Rivet	Tôle Inférieure (Acier/Alliage Alu)	0,12 / 0,2
Rivet	Poinçon	0,12
Tôle Supérieure	Tôle Inférieure	0,12
Tôle Supérieure (Acier/Alliage Alu)	Serre-Flan	0,12 / 0,3
Tôle Inférieure (Acier/Alliage Alu)	Bouterolle	0,12 / 0,3

5.2.2.3 Influence de l'endommagement

Afin de quantifier l'influence de la prise en compte ou non de l'endommagement dans la phase de mise en forme du point d'assemblage par rivetage auto-poinçonneur, nous avons réalisé deux simulations : une avec prise en compte du couplage comportement-endommagement et une sans couplage. Comme nous pouvons le voir sur les courbes d'effort de pose du rivet (Fig. 5.9), il apparaît clairement que la prise en compte de l'endommagement diminue le niveau des efforts calculés pour la pose du rivet. La prise en compte de l'endommagement n'a par contre aucune influence significative sur la forme du point d'assemblage. La figure 5.8 regroupe les champs d'endommagement en fin de pose pour l'ensemble des configurations d'études. Nous pouvons voir que l'endommagement atteint de fortes valeurs au niveau de la bouterolle.



Figure 5.8 : Représentation du champ d'endommagement en fin de pose pour l'ensemble des configurations



Figure 5.9 : Influence de l'endommagement sur la courbe d'effort

5.2.3 Résultats numériques et confrontations expérimentales

Afin de valider nos résultats numériques, des campagnes expérimentales ont été effectuées sur une presse électrique de la société Böllhoff (cf. chapitre 1). Pour chaque configuration, nous avons réalisé une dizaine de rivetages. Pour chacun des rivets posés, nous avons enregistré la courbe de force – déplacement du poinçon (Fig. 5.10a) et nous avons aussi réalisé une coupe transversale du point d'assemblage (Fig. 5.10b). Ces données sont celles qui ont servi à valider la précision des résultats issus des simulations numériques.





Comme nous pouvons le voir sur la figure 5.10a, le déplacement enregistré par la presse est supérieur à la longueur du rivet. Ce phénomène est dû à une raideur faible du col de cygne. Afin de la compenser, nous avons effectué une correction consistant à prendre en compte la raideur de la presse dans les données expérimentales.

5.2.3.1 Coupes géométriques

La figure 5.11 représente les superpositions des coupes expérimentales des points rivetés avec les géométries issues des simulations numériques. Nous obtenons une excellente corrélation quelle que soit la configuration. En effet, que cela soit l'évasement du rivet ou les épaisseurs des différentes tôles, les simulations numériques donnent des résultats identiques aux observations expérimentales. Cependant nous pouvons constater qu'il existe de très légères différences au niveau de la géométrie du bouton (côté bouterolle). Ces différences s'expliquent par le fait que les rivets n'étaient pas parfaitement alignés avec les bouterolles dans nos essais ce qui a engendré une dissymétrie. De plus, sur la configuration 1, nous pouvons noter que la tôle d'aluminium va moins loin sous la pointe du rivet qu'en réalité. Cette différence peut s'expliquer soit par des coefficients de frottement mal définis soit par une rupture de la tôle supérieure trop précoce.



Figure 5.11 : Superpositions des coupes géométriques de points rivetés avec les profils obtenus numériquement

5.2.3.2 Courbes force – déplacement

La figure 5.12 regroupe l'ensemble des confrontations entre les courbes d'effort – déplacement expérimentales et les courbes calculées numériquement. La corrélation des résultats issus du modèle numérique avec les données expérimentales est excellente sur l'ensemble des configurations. Le plus gros écart est à noter sur la configuration 2 au moment de la montée en effort. Il est possible que cela soit un coefficient de frottement mal défini qui retarde la montée en effort pour cette configuration.





Les valeurs des efforts de rivetage obtenus expérimentalement et numériquement sont récapitulées dans le tableau 5.5. Le modèle numérique est extrêmement précis. En effet, il est capable de prédire l'effort de rivetage avec un écart maximal de 5%.

Configuration	Effort de pose expérimental (kN)	Effort de pose numérique (kN)	Ecart (%)
1	62,8	63,1	0,5
2	64	65,3	1,9
3	63,4	65,4	3,1
4	61,5	61,9	0,7
5	44,6	43,1	3,3
6	48,2	47,6	1,2

Tableau 5.5 : Efforts de rivetages expérimentaux et calculés

5.2.3.3 Déchargement élastique

A la fin des simulations de pose, une étape de déchargement élastique de l'assemblage est effectuée. Nous pouvons voir sur la figure 5.13, la redistribution des contraintes après le déchargement. Cette étape est primordiale pour retrouver l'équilibre mécanique de l'assemblage.



Figure 5.13 : Champ de contrainte avant (gauche) et après (droite) déchargement élastique (Config. 5)

5.2.4 Conclusions sur la simulation du rivetage

Le modèle numérique développé nous a permis de simuler, avec une grande précision, différentes configurations de rivetages auto-poinçonneurs. Dans un premier temps, une étude de sensibilité du modèle numérique a été effectuée. Nous avons pu, entre autres, mettre en évidence la nécessité :

- d'utiliser un maillage disposant d'une discrétisation spatiale raffinée dans les zones de grandes déformations et dans les zones de contact entre le rivet et les tôles à assembler,
- de caractériser avec précision les paramètres de la loi de frottement de Coulomb qui va influencer faiblement la géométrie finale mais énormément la courbe effort déplacement,
- de prendre en compte le couplage entre la loi de comportement des matériaux et l'endommagement. En effet, l'endommagement va venir « adoucir » les matériaux et va donc diminuer les efforts nécessaires à la pose des rivets.

Puis nous avons confronté les résultats numériques avec des données issues de campagnes expérimentales de rivetage. Pour ce faire nous avons utilisé des coupes géométriques de points rivetés ainsi que les courbes effort – déplacement du poinçon. Nous avons obtenu d'excellentes corrélations sur ces deux observables. En effet, les géométries sont prédites avec une grande précision tout comme les efforts de rivetage.

5.3 Modélisation de la tenue mécanique de l'assemblage riveté

5.3.1 Caractérisation expérimentale de la tenue mécanique du point riveté

Pour caractériser la tenue mécanique d'un assemblage, il est possible d'utiliser les essais classiques de traction en croix, cisaillement et pelage présentés dans le chapitre 1. Cependant ces types d'essais ne permettent pas de rendre compte de sollicitations complexes composées de traction et de cisaillement. Afin de pouvoir imposer des sollicitations complexes sur les assemblages rivetés, nous avons développé, au CEMEF, un montage de type Arcan. Historiquement, le montage Arcan a été introduit dans les années 70 pour l'étude du comportement des matériaux composites sous sollicitations planes (Arcan, et al., 1978). Il a été intensément utilisé dans l'étude des composites (Delsart, et al., 2005) mais aussi des colles (Cognard, 2008). Ces dernières années, le montage Arcan a été utilisé pour l'étude des assemblages soudés, rivetés avec des rivets classiques (Langrand, et al., 2003) ou avec des rivets auto-poinçonneur (Porcaro, et al., 2006). Ce type de montage permet d'appliquer à une éprouvette tout un panel de sollicitations, de la traction pure au cisaillement pur. Notre montage permet d'utiliser un total de 7 angles de sollicitation : 0° (traction pure), 15°, 30°, 45°, 60°, 75° et 90° (cisaillement pur) (Fig. 5.14). Le montage a été conçu et réalisé de manière à ce que les sollicitations de la presse passent au niveau du point de rivetage.



Figure 5.14 : Montage Arcan en position 0° (traction pure), 45°, 90° (cisaillement pur)

Pour pouvoir utiliser un montage Arcan en utilisant les tôles fournies par la société PSA, nous avons été amenés à développer des éprouvettes en croix constituées de deux tôles pliées à leurs extrémités à 45° (Fig. 5.15). La surface de recouvrement des deux tôles est un carré de 38 x 38 mm.



Figure 5.15 : Eprouvette en croix utilisée dans le montage Arcan

Le montage Arcan est installé dans la machine hydraulique DARTEC équipée d'une cellule de mesure d'effort de 20 kN. Le déplacement est mesuré au niveau de la traverse de la machine hydraulique. La vitesse de déplacement imposée est de 0,1 mm/s. Environ 20 éprouvettes en croix sont disponibles pour chacune des configurations. 5 essais sont réalisés à 0°, 45° et 90°. Le reste des éprouvettes a été utilisé pour d'autres angles de sollicitation. L'essai est considéré comme terminé quand les deux tôles sont entièrement séparées ou quand le déplacement a atteint une valeur seuil de 15 mm.



Figure 5.16 : Courbes force – déplacement expérimentales issues des essais de tenue mécanique avec le montage de type Arcan pour la configuration 1

Les résultats obtenus avec le montage de type Arcan ont une dispersion contenue (Fig. 5.16). Les assemblages par rivetage auto-poinçonneur ont une tenue mécanique plus importante en cisaillement pur (90°) qu'en traction pure (0°). La valeur de la tenue mécanique pour des sollicitations mixtes est alors comprise entre ces deux extrema.

A partir des données issues des courbes effort - déplacement, il est possible de définir un critère de rupture simple de l'assemblage. En effet, l'angle θ entre l'axe de révolution du rivet de l'éprouvette et la ligne d'application de l'effort de la traverse définit le ratio entre les efforts de cisaillement *S* et de traction *N* (Fig. 5.17). L'effort global appliqué par la machine hydraulique lors d'un essai de tenue mécanique est noté *F* et se décompose de la manière suivante :

$$N(\theta) = F\cos(\theta) \tag{3.242}$$

$$S(\theta) = F\sin(\theta) \tag{3.243}$$

L'expression du critère de rupture du point d'assemblage peut se mettre alors sous la forme qui suit :

$$\left(\frac{N}{N_u}\right)^a + \left(\frac{S}{S_u}\right)^b = 1 \tag{3.244}$$

Les efforts de traction et de cisaillement sont normés respectivement par l'effort maximal de traction N_u (mesuré à 0°) et l'effort maximal de cisaillement S_u (mesuré à 90°). Une bonne approximation de ce critère a été obtenue pour une valeur de a = b = 2 pour l'ensemble des configurations (Fig. 5.18).

Un tel critère de rupture est extrêmement important dans le cadre de la définition d'un élément équivalent qui pourra être à l'échelle d'une structure (cf. chapitre 1).



Figure 5.17 : Décomposition de l'effort de cisaillement et de traction sur le point d'assemblage





Nous avons rencontré 3 modes de ruptures différents lorsque l'assemblage est soumis à une sollicitation de cisaillement pur :

 Mode de rupture 1 : Rotation du rivet et arrachement de la tôle supérieure. Le rivet se met à tourner générant de fortes déformations et de l'endommagement au niveau de la tôle supérieure. La tôle supérieure finit par se rompre en laissant une partie de sa matière coincée entre le rivet et la tôle inférieure (Fig. 5.19).

- Mode de rupture 2 : Rotation et déboutonnage de la tôle inférieure du rivet. Le rivet se met à tourner dans la tôle inférieure. Le rivet génère de fortes déformations et de l'endommagement au niveau de la tôle supérieure cependant le rivet se déboutonne de la tôle inférieure avant la rupture complète de la tôle supérieure (Fig. 5.20).
- Mode de rupture 3 : Cisaillement de la tôle inférieure. Ce mode de rupture apparaît lorsque la tôle supérieure est plus rigide que la tôle inférieure. Le rivet reste alors coincé dans la tôle supérieure et le cisaillement apparaît dans la tôle inférieure engendrant une rupture du bouton (Fig. 5.21).



Figure 5.19 : Illustration du mode de rupture 1



Figure 5.20 : Illustration du mode de rupture 2



Figure 5.21 : Illustration du mode de rupture 3

Sous sollicitation de traction pure, les deux modes de rupture que nous avons pu observer sont :

- Mode de rupture 4 : Arrachement de la tôle supérieure. Le trou, dans la tôle supérieure généré par la pose rivet, s'expanse sous la tête du rivet sous l'effet de la charge. Des fissures suivant le sens de sollicitation apparaissent. Une fois le trou suffisamment élargi la tôle supérieure s'arrache complètement (Fig. 5.22).
- *Mode de rupture 5 : Arrachement du rivet par la tôle inférieure*. Ce mode de rupture apparaît lorsque la tôle supérieure est plus rigide que la tôle inférieure ou lorsque le rivet ne s'est pas assez expansé lors de sa pose (épaisseur de tôles à assembler trop importante par

rapport à la longueur du rivet). Le rivet est alors entrainé par la tôle supérieure et s'arrache de la tôle inférieure (Fig. 5.23).



Figure 5.22 : Illustration du mode de rupture 4



Figure 5.23 : Illustration du mode de rupture 5

Les modes de rupture des éprouvettes ayant subi des sollicitations mixtes composées de traction et de cisaillement sont une combinaison des modes de rupture précédemment cités (Fig. 5.24 et 5.25).



Figure 5.24 : Combinaison des modes de rupture 1 et 4



Figure 5.25 : Combinaison des modes de rupture 3 et 5

Il est à noter que la bibliographie suggère la présence d'autres modes de rupture que nous n'avons pas observé. En effet, ces modes de ruine de l'assemblage sont liés à la rupture du rivet (PSA Peugeot - Citroën, 2003).

5.3.2 Modélisation 3D dans Forge3

Contrairement aux simulations de poses de rivets qui sont réalisées en configuration 2D axisymétrique, les simulations de tenue mécanique doivent être effectuées en configuration 3D. Pour pouvoir utiliser les résultats obtenus lors de la simulation de la pose de rivet, il est nécessaire de mettre en place une stratégie de transfert de géométries et de champs mécaniques du 2D au 3D. Cette stratégie se compose de trois étapes (Fig. 5.26) :

- A partir des géométries issues du procédé de pose du rivet, des géométries 3D sont extrapolées par révolution.
- Un nouveau maillage est alors généré pour toutes les nouvelles géométries. L'ensemble des champs mécaniques est projeté sur les nouveaux maillages. La technologie utilisée est très proche de celle servant dans le remaillage (cf. 3.2.7).
- Pour se rapprocher de la géométrie des éprouvettes expérimentales, une découpe du maillage des tôles est effectuée. Un modèle numérique représentant une demie éprouvette est alors obtenu.

Seule la zone de contact entre les tôles de 38 x 38 mm est modélisée. En effet, nous avons considéré que cette zone représente l'assemblage et que les plis des tôles des éprouvettes n'ont pas d'effet sur la tenue mécanique.



Figure 5.26 : Génération du modèle 3D à partir du modèle 2D axisymétrique

Le montage Arcan est considéré comme étant indéformable et est par conséquent modélisé par des outils rigides. La taille de maille la plus faible utilisée est de 0,2 mm dans les zones proches du rivet. Les coefficients de frottement sont les mêmes que ceux utilisés pour les simulations de poses de rivets.

5.3.3 Etude du modèle numérique

5.3.3.1 Influence de la taille de maille

Pour étudier l'influence de la discrétisation spatiale sur les résultats, nous avons utilisé 2 maillages différents. Le premier maillage utilise une taille de maille de 0,25 mm dans les zones proches du rivet. Le deuxième maillage a une taille de maille de 0,5 mm dans ces mêmes zones (Fig. 5.27).



Figure 5.27 : Différentes discrétisations spatiales étudiées

Les résultats sont présentés en terme de courbe force – déplacement sur un essai de traction (Fig. 5.28). Ils montrent que le maillage a une faible influence sur les résultats pour les deux maillages étudiés. En effet, la finesse du maillage va jouer essentiellement sur la diminution des oscillations sur la courbe de réponse. Ces oscillations ont été identifiées comme étant dues aux étapes de remaillage qui ont lieues au cours de la simulation .



Figure 5.28 : Influence du maillage sur la courbe effort – déplacement d'un essai de cisaillement

5.3.3.2 Influence de l'histoire de la mise en forme

Comme dans (Bouchard, et al., 2008) et (Porcaro, et al., 2006), nous avons voulu caractériser l'influence de la prise en compte de l'histoire de la mise en forme dans les simulations de tenue mécanique, en termes de contrainte résiduelle, déformation plastique résiduelle et d'endommagement. Pour ce faire, nous avons comparé deux simulations de traction pure (0°) sur la configuration 6 : une avec transfert des champs mécanique et l'autre sans transfert. La figure 5.29 est une confrontation entre les courbes effort – déplacement calculées de ces deux simulations. Comme nous pouvons le voir, le transfert des champs mécanique est extrêmement important. En effet, la structure ayant un état initial neutre a un comportement global moins « raide » ce qui est en accord avec la littérature. Il est donc important d'être capable de modéliser correctement la phase de pose du rivet pour être capable de calculer correctement la tenue mécanique du point d'assemblage.





5.3.3.3 Influence de l'endommagement

La particularité de notre modèle numérique par rapport à la littérature est la prise en compte du couplage comportement - endommagement. Pour caractériser l'importance de la prise en compte de ce couplage dans les simulations de la tenue mécanique des assemblages rivetés, nous avons réalisé deux ensembles de simulations pose – tenue mécanique : un avec des matériaux ayant un comportement élasto-plastique et un avec des matériaux ayant un comportement élasto-plastique et un avec des matériaux ayant un comportement élasto-plastique et un avec des courbes effort – déplacement calculées avec la courbe expérimentale. Il apparait clairement qu'il est important de prendre en compte le couplage comportement – endommagement afin de prédire des efforts de tenues mécaniques réalistes. En effet, l'endommagement adoucit le comportement des matériaux et par conséquent diminue les efforts nécessaires pour la rupture du point d'assemblage.



Figure 5.30 : Influence de l'endommagement sur la courbe effort-déplacement d'un essai de traction

En ce qui concerne les facies de rupture, la prise en compte de l'endommagement couplé au modèle de rupture par « kill-element » nous permet de simuler l'apparition des fissures dans les tôles lors des essais de tenue mécanique (Fig. 5.31). Il est évident que sans modèle d'endommagement, il est plus difficile de modéliser correctement le facies de rupture du point riveté.





Figure 5.31 : Exemple de facies de rupture des tôles

5.3.4 Résultats numériques et comparaisons aux résultats expérimentaux

Pour valider notre modèle numérique, nous nous sommes focalisés sur les configurations 6. Cette configuration est constituée d'une tôle supérieure en alliage d'aluminium 5754-O et d'une tôle inférieure en acier ES. La validation du modèle numérique est réalisée sur les courbes effort – déplacement et sur les faciès de rupture.

5.3.4.1 Courbes force-déplacement

La figure 5.32 récapitule les confrontations entre les courbes effort – déplacement obtenues expérimentalement et celles obtenues par les calculs numériques. Que cela soit pour la sollicitation à 0° (traction pure), à 45° (mode mixte) ou à 90° (cisaillement pur), nous obtenons une excellente corrélation entre les courbes numériques et les courbes expérimentales. La différence la plus importante est observée sur la montée en effort pour la sollicitation mixte.

Cette différence peut avoir plusieurs origines :

- La non-prise en compte de la rigidité du moyen d'essai.
- Un mauvais serrage des morts engendrant un glissement de l'éprouvette.
- La complexité du mode de rupture et la « rusticité » de la méthode de kill-element.

Les comparaisons des efforts à rupture expérimentaux et calculés montrent que le modèle numérique donne d'excellents résultats (Tab. 5.6). En effet, l'écart maximal constaté pour la sollicitation mixte est inférieur à 7%.

Sollicitation	Effort maximal mesuré (kN)	Effort maximal calculé (kN)	Ecart (%)
0°	1,79	1,81	1,1
45°	2,36	2,21	6,4
90°	4,16	4,21	1,2

Tableau 5.6 : Tenues mécaniques expérimentaux et calculées des points rivetés

5.3.4.2 Modes de rupture

La deuxième observable utilisée pour valider les résultats de nos simulations est le mode de rupture du point d'assemblage. La figure 5.33 récapitule les modes de rupture calculés et observés pour la sollicitation en traction pure (0°). Nous pouvons voir que les faciès sont identiques. En effet, le mode de rupture est le mode 4, i.e. le rivet reste dans la tôle inférieure. Il apparait des fissures au niveau du trou de la tôle supérieure.

La figure 5.34 illustre le faciès de rupture de la configuration 6 pour une sollicitation mixte (45°). Le mode de rupture est une combinaison des modes 1 et 4. Le rivet reste dans la tôle inférieure et la tôle supérieure se déchire sans rompre complètement. Nous pouvons voir que le modèle numérique reproduit avec une extrême fidélité la rupture de la tôle supérieure.

Pour finir, la figure 5.35 illustre la comparaison du mode de rupture calculé et observé expérimentalement pour une sollicitation en cisaillement pur (0°). Le mode de rupture est le mode 1. En effet, le rivet reste dans la tôle inférieure et la tôle supérieure se découpe tout en laissant de la matière sous la tête du rivet. Le modèle numérique fournit encore une excellente corrélation.

Comme pour les courbes force-déplacement, nous obtenons une excellente corrélation sur les modes de ruptures quelque soit la sollicitation. Le modèle numérique est donc prédictif sur les faciès de rupture.

5.3.4.3 Le critère de rupture

Une des finalités du code de calcul développé est de pouvoir définir un critère de rupture de l'assemblage qui pourra être intégré au niveau d'un élément équivalent simple. Nous avons superposé les critères de rupture expérimentaux et numériques (Fig. 5.36). Comme nous pouvons le voir, les deux critères sont extrêmement proches. De plus, le critère numérique est à l'intérieur de l'expérimental. Par conséquent, le critère numérique est sécuritaire vis-à-vis du critère expérimental ce qui est intéressant d'un point de vue dimensionnement des structures.







Figure 5.32 : Comparaisons des courbes expérimentales et numériques de tenue mécanique (configuration 6)





Figure 5.33 : Modes de rupture calculés et observés et champ d'endommagement pour la sollicitation à 0°





Figure 5.34 : Modes de rupture calculés et observés et champ d'endommagement pour la sollicitation à 45°





Figure 5.35 : Modes de rupture calculés et observés et champ d'endommagement pour la sollicitation à 90°



Figure 5.36 : Comparaisons des critères de ruptures numériques et expérimentaux de la configuration 6

5.3.5 Conclusions sur la simulation de la tenue mécanique

Tout d'abord, nous avons présenté le moyen d'essai de type Arcan qui nous a permis de solliciter nos éprouvettes rivetées aussi bien en cisaillement pur qu'en traction pure ou en mode mixte. A partir des données issues des essais, nous avons alors défini un critère de rupture d'un assemblage riveté. Et nous avons aussi présenté les différents modes de rupture que nous avons pu rencontrer.

La modélisation des essais de tenue mécanique a nécessité la mise en place d'une méthodologie de transfert des géométries et des champs mécaniques du modèle 2D axisymétrique sur un modèle 3D. Nous avons alors étudié l'influence de la discrétisation spatiale ainsi que de la prise en compte de l'histoire de la mise en forme sur les résultats obtenus par le modèle numérique développé. Il en est ressorti que la taille de maille a une influence contenue ce qui n'est pas le cas de l'histoire de la mise en forme. En effet, par rapport à un modèle vierge, les contraintes résiduelles et les déformations plastiques résiduelles vont venir « durcir » le comportement des matériaux. La prise en compte du couplage comportement – endommagement va venir « adoucir » les matériaux.

Le modèle numérique développé, couplé avec les paramètres rhéologiques identifiés, nous a permis d'obtenir d'excellentes corrélations avec les données expérimentales. En effet que cela soit au niveau des courbes effort – déplacement, ou des faciès de rupture, nous avons obtenu des résultats d'une grande précision sur l'ensemble des sollicitations.

Le point critique de ce modèle est le temps de calcul nécessaire pour les simulations. En effet, les simulations nécessitent entre 1 (0°) et 3 jours (90°) de temps de calculs sur un seul processeur cadencé à 3,2 GHz. Une des raisons de cette durée de calcul est la présence de nombreuses zones de contact qui peuvent être ciselées à cause du kill-element. Il sera nécessaire dans l'avenir de venir optimiser les algorithmes de contact pour diminuer les temps de calcul.

5.4 Optimisation du procédé

5.4.1 Optimisation de la géométrie d'une bouterolle

La performance de la tenue mécanique d'un assemblage par rivetage auto-poinçonneur est dépendante d'un grand nombre de facteurs que ceux-ci soient géométriques (bouterolles, rivet, affleurement) ou liés au procédé de pose (effort de serre-flan, effort de pose) (Fu, et al., 2001) (Han, et al., 2005). Un des objectifs de la thèse est de disposer d'un outil numérique qui permette d'optimiser ces paramètres d'assemblage. Pour tester les capacités de notre modèle numérique, nous avons étudié l'optimisation de la géométrie de la bouterolle. En effet, en se basant sur le constat que sur certaines des configurations que nous avons modélisé la bouterolle n'est pas entièrement remplie lors du procédé de pose (Fig. 5.12), nous avons envisagé de modifier la géométrie de la bouterolle. Le fait de remplir cette bouterolle devrait augmenter les contraintes résiduelles de compression. Cette augmentation de contrainte permet-elle d'améliorer la tenue mécanique de l'assemblage ?

5.4.2 Résultats de l'optimisation

Après plusieurs itérations, nous avons réussi à déterminer une bouterolle qui est entièrement remplie par la tôle inférieure lors de la pose du rivet. La figure 5.37 est une comparaison des géométries initiale et optimisée. Le fait de remplir la bouterolle engendre, en contrepartie, une augmentation significative de l'effort de pose. Cette augmentation d'effort influence directement la durée de vie des outils mais aussi celui du col de cygne (Fig. 5.38).



Figure 5.37 : Géométries de la bouterolle initiale (bleu) et de la bouterolle optimisée (rouge)



Figure 5.38 : Comparaison des efforts de pose calculés pour les deux bouterolles

La comparaison de la tenue mécanique des deux assemblages est effectuée sur un essai de cisaillement (Fig. 5.39). Nous pouvons clairement voir que le rivetage effectué sur la bouterolle optimisée a une tenue mécanique améliorée en cisaillement par rapport au rivetage avec bouterolle standard.



Figure 5.39 : Courbes effort – déplacement calculées pour les deux géométries de bouterolle

5.4.3 Conclusions

A travers cet exemple simple, nous avons pu montrer qu'il est possible de venir optimiser la géométrie d'une bouterolle pour optimiser la tenue mécanique d'un point d'assemblage. Cependant, ce changement de géométrie conduit à une augmentation des efforts nécessaire à la pose du rivet. L'utilisateur devra donc faire le bon compromis entre l'effort de pose (et donc la durée de vie des outils et du col de cygne) et la performance de son assemblage. Cette optimisation a été réalisée manuellement et il a fallu, entre chaque simulation, redessiner une nouvelle géométrie de bouterolle ce qui peut prendre du temps. Dans le cas d'une optimisation de forme géométrique, Il devrait être intéressant d'utiliser un algorithme automatique d'optimisation (Do, 2006).

Nous n'avons pas testé d'autres paramètres procédés pour optimiser un assemblage. Cependant l'outil développé laisse la possibilité à son utilisateur de venir tester :

- l'effet de l'effort de serre-flan,
- la cinématique de la presse,
- la géométrie du rivet,
- ...

5.5 Extension aux autres assemblages par déformation plastique

Le choix initial d'étudier le rivetage auto-poinçonneur a été en partie motivé par le fait que c'est une des technologies d'assemblage par déformation les plus complexes à modéliser. En effet, outre les grandes déformations, il faut notamment prendre en compte l'endommagement mais aussi la rupture des tôles à assembler. Le modèle numérique développé pour le rivetage auto-poinçonneur doit donc être en mesure de modéliser l'ensemble des technologies d'assemblage par déformation plastique. Les exemples qui suivent, sont des tests de faisabilité. En effet, dans la plupart des cas, nous ne disposons ni de géométrie précise, ni des lois de comportement pour les différents composants.

5.5.1 Le clinchage à matrice fixe

Le clinchage consiste à venir déformer des tôles entre un poinçon et une bouterolle afin d'obtenir un point d'assemblage. Par définition, le clinchage ne nécessite pas d'apport de matière. Les technologies de clinchage se divisent en deux grandes catégories : le clinchage à matrice fixe et le clinchage à matrice mobile. Le clinchage à matrice fixe est une technologie du fabricant d'outils de clinchage TOX. La bouterolle circulaire employée a la particularité de disposer d'une gorge dans laquelle le métal vient s'écouler lorsque les tôles sont en compression entre le poinçon et la bouterolle (Fig. 5.40).



Figure 5.40 : Simulation du clinchage à matrice fixe : visualisation de la discrétisation spatiale et du champ de contrainte de von Mises
5.5.2 Le rivet clinché

Le rivet clinché est une technologie récente qui se situe entre le clinchage classique et le rivetage auto-poinçonneur. En effet, le principe de base est le même que celui du clinchage. Les tôles sont déformées par la matrice afin de créer un bouton. La différence est que le poinçon du clinchage est remplacé par un rivet. La forme finale du point d'assemblage ressemble alors à un point clinché avec un rivet pour combler le trou du poinçon (Fig. 5.41).



Figure 5.41 : Simulation de pose d'un rivet clinché : visualisation de la discrétisation spatiale et du champ de contraintes de von Mises

De récentes études ont montré qu'il est possible de réaliser la pose d'un rivet clinché sans matrice (Neugebauer, et al., 2006). Cette méthode d'assemblage présente l'avantage de s'affranchir du coût de la bouterolle mais aussi et surtout de la problématique de l'alignement entre le poinçon et la bouterolle. La figure 5.42 illustre les résultats issus d'une simulation de pose de rivet clinché sur une matrice plate.



Figure 5.42 : Simulation de pose d'un rivet clinché sans matrice : visualisation de la discrétisation spatiale et du champ de contrainte de von Mises

5.5.3 Le rivetage à rivet plein

Le rivetage à rivet plein est un assemblage réalisé en deux étapes. La première consiste à percer les tôles à assembler avec le rivet plein. La deuxième étape est le pincement des tôles afin de les faire écouler dans la gorge du rivet et ainsi créer une connexion efficace. La modélisation de ce procédé est compliquée car il faut simuler la découpe des deux tôles. Le résultat d'une simulation du procédé est illustré sur la figure 5.43.



1^{ère} étape





Figure 5.43 : Simulation de rivetage à rivet plein : visualisation de la discrétisation spatiale et du champ de contrainte de von Mises pour les deux étapes

5.5.4 Conclusions

A travers un grand nombre d'exemples, nous avons pu voir que le modèle numérique développé pour la modélisation du procédé de rivetage auto-poinçonneur, nous a permis de simuler sans difficulté tout un panel de technologies d'assemblage par déformation. L'objectif d'obtenir un outil numérique capable de simuler l'ensemble des assemblages par déformation plastique est atteint. En effet, l'outil mis en place permet à son utilisateur de simuler des procédés connus pour augmenter son savoir faire ou bien d'innover en proposant de nouvelles configurations ou cinématiques d'assemblage.

5.6 Conclusions et perspectives

Nous avons pu mettre en évidence la capacité du modèle numérique développé à fournir des résultats cohérents avec l'expérimental pour la modélisation de la pose et de l'évaluation de la tenue mécanique des assemblages par déformation plastique.

En effet, en ce qui concerne la simulation numérique de la pose de rivets auto-poinçonneurs, nous avons réussi à obtenir un outil numérique qui permet d'être prédictif aussi bien sur l'effort de pose que sur la géométrie finale du point riveté. Nous avons pu notamment voir que la prise en compte de l'endommagement dès cette étape de mise en forme est essentielle et qu'elle permet d'avoir des résultats numériques très proches de ceux obtenus expérimentalement.

La modélisation de la tenue mécanique des points d'assemblage rivetés est effectuée en 3D. Il nous a donc fallu mettre en place une stratégie de transfert des géométries et des champs mécaniques depuis les simulations de pose 2D axisymétrique vers un modèle 3D. Les résultats des simulations ont montré que le modèle développé permet de prédire, avec une bonne précision, les efforts nécessaires pour rompre la liaison mécanique. Nous avons pu aussi montrer la nécessité de modéliser correctement la pose du rivet afin d'initialiser le calcul de tenue mécanique avec des champs de contraintes et de déformations correctes. De plus, nous avons aussi abordé le fait qu'il est nécessaire de prendre en compte le couplage comportement – endommagement afin de pouvoir calculer correctement les efforts mais aussi de prédire les modes de rupture. Les données expérimentales ont été obtenues grâce à l'utilisation d'un montage de type ARCAN qui nous a permis de tester les assemblages en traction pure, en cisaillement pur mais aussi sous sollicitation mixte.

Nous avons alors utilisé le modèle numérique développé pour une étude d'optimisation de la forme géométrique de la bouterolle. Après plusieurs itérations, il nous a été possible de définir une nouvelle géométrie qui nous a permis d'obtenir une meilleure tenue mécanique de l'assemblage étudié. A travers cette étude, nous avons pu voir que le modèle développé est suffisamment robuste pour être utilisé dans le cadre d'un processus d'optimisation d'un point d'assemblage.

Finalement pour tester la robustesse du modèle, les poses de nombreux types d'assemblages par déformation plastique ont été modélisées. Bien que ne possédant pas toutes les données relatives aux différents assemblages (géométries, matières), nous avons réussi à obtenir des résultats qui semblent très prometteurs.

Le modèle numérique développé, nous a donc permis de remplir l'ensemble des objectifs fixés en début de thèse. C'est-à-dire un outil de simulation des assemblages par déformation plastique qui permet d'étudier la faisabilité d'un assemblage mais aussi un outil d'optimisation et d'innovation.

Cependant, il est à noter que l'outil numérique développé comporte certaines limitations. Voici quelques unes des perspectives intéressantes pour améliorer le modèle :

- L'automatisation de la création du modèle 3D à partir du modèle 2D axisymétrique : cette étape reste longue à mettre en œuvre puisqu'il est nécessaire de faire une révolution de chacun des éléments du modèle 2D puis de faire une étape de découpe pour chacune des plaques. L'automatisation de cette procédure simplifierait énormément la chaîne de simulation.
- L'ajout d'une étape de recherche d'équilibre après la phase de découpe lors de la création du modèle 3D : en effet, la phase de découpe dans une structure précontrainte va engendrer un changement dans l'équilibre mécanique du système avec, notamment dans notre cas, l'apparition de l'effet de coin des plaques.
- Améliorer la gestion du contact : Le point critique du modèle actuel est le temps de calcul lié à la gestion contact. En effet, les zones de contact sont nombreuses ce qui se traduit par une augmentation non négligeable du nombre d'itérations nécessaires pour converger sur les incréments de temps.
- La prise en compte de l'auto-contact : Lors de simulations de tenue mécanique à 90° (cisaillement pur), il arrive que la tôle supérieure finisse par entrer en contact avec ellemême (Fig. 5.44). Le logiciel 3D de Forge2005® ne gère pas l'auto contact ce qui se traduit par une interpénétration non physique.
- L'utilisation d'un maillage adaptatif : Pour diminuer le nombre d'éléments du modèle tout en gardant une grande précision dans les résultats, il serait intéressant d'utiliser un maillage adaptatif basé sur les déformations ou l'endommagement.



Figure 5.44 : Exemple d'auto-contact non géré dans une simulation de cisaillement

5.7 Références bibliographiques

Arcan, M. et Hashinz & Voloshin, A. 1978. A method to produce uniform planestress states with applications to fibre-reinforced materials. *Experimental Mechanics.* 1978, Vol. 18, 2.

Bouchard, P.O., Laurent, T. et Tollier, L. 2008. Numerical modeling of self-pierce riveting - From riveting process modeling down to structural analysis. *J. Mat. Proc. Tech.* 2008, Vol. 202, pp. 290-300.

Cognard, J.Y., Créac'hcadec, R.,Sohier, L., Davies, P. 2008. Analysis of the nonlinear behavior of adhesives in bonded assemblies—Comparison of TAST and Arcan tests. *International Journal of Adhesion and Adhesives.* 2008. In Press, Corrected Proof.

Delsart, D., Mortier, J.M. et Dagois, M. 2005. Experimental characterization and modelling of the inter-ply interface properties of fiber reinforced composite materials. *International conference on impact loading of lightweight structures.* 2005.

Do, T.T. 2006. *Optimisation de forme en forgeage 3D.* 2006. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

Fu, M. et Mallik, P.K. 2001. *Effect of process variables on the static and fatigue properties of selfpiercing riveted joints in aluminium alloy 5754.* 2001. SAE Paper No. 2001-01-0825.

Han, L., Young, K.W., Hewitt, R., Chrysanthou, A. et O'Sullivan, J.M. 2005. The effect of pre-straining on the mechanical behaviour of self-piercing riveted aluminium alloy sheets. *Advanced Materials Research.* 2005, Vol. 6-8, pp. 157-162.

Langrand, B., Fabis, J., Deubon, A. et Mortier, J.M. 2003. Détermination expérimentale du comportement mécanique et de critère de rupture d'assemblages sous chargements mixtes. Application aux rivets et points soudés. *Mécaniques & Industries.* 2003, Vol. 4, pp. 273-283.

Neugebauer, R., Dietrich, S. et Kraus, C. 2006. Comparision of dieless clinching and dieless rivet clinching of magnesium. *International Conference on Magnesium Alloys and their Applications*. 2006.

Porcaro, R., Hanssen, A.G., Langseth, M. et Aalberg, A. The behaviour of a self-piercing riveted connection under quasi-static loading conditions. *Int. J. Solids Struc.* 2006, Vol. 43, pp. 5110-5131.

PSA Peugeot - Citroën. 2003. *Méthode d'essai d'assemblage par rivets auto-poinçonneurs de produits plats revétus ou non.* 2003. Normes véhicules. B13 6120.

Conclusions générales et perspectives :

Ce mémoire a abordé la problématique de la simulation numérique de la mise en forme et de la tenue mécanique des assemblages par déformation plastique avec comme principale application le rivetage auto-poinçonneur. Ce travail a eu pour objectif de mettre au point un outil numérique qui permette :

- de diminuer le nombre d'essais pour établir les paramètres procédé les mieux adaptés (géométries bouterolle et rivet, efforts de la presse et du serre-flan, ...) pour assembler une configuration matérielle donnée,
- de comparer différentes technologies d'assemblage pour une configuration matérielle donnée,
- d'optimiser un assemblage existant en jouant sur les paramètres procédé ou sur les géométries,
- d'innover en créant de nouvelles technologies d'assemblages.

Après une rapide introduction sur les assemblages par déformation plastique, la première partie du premier chapitre a été consacrée à la présentation du rivetage auto-poinçonneur. Outre son principe de fonctionnement, nous avons aussi abordé les standards qui sont utilisés dans l'industrie pour valider un assemblage par rivetage auto-poinçonneur. La deuxième partie de ce chapitre a été consacré à l'état de l'art de la simulation numérique du rivetage auto-poinçonneur.

Le deuxième chapitre du manuscrit a abordé le développement du modèle de comportement que nous avons utilisé dans notre outil numérique. Les contraintes fixées initialement étaient de définir un modèle de comportement capable de prendre en compte le plus de phénomènes physiques tout en restant suffisamment simple en terme de caractérisation de paramètres mais aussi et surtout en terme de temps de calcul. Nous avons opté pour un modèle élasto-plastique avec endommagement ductile qui est capable de représenter le comportement des aciers et des alliages d'aluminium sur l'ensemble de la plage des déformations. Bien que travaillant avec des tôles laminées, nous avons choisi d'utiliser un critère de plasticité isotrope de type von Mises. Nous avons aussi fait le choix de ne tenir compte que de l'écrouissage isotrope. Le modèle d'endommagement ductile retenu est basé sur le modèle de Lemaitre que nous avons enrichi afin de prendre en compte l'effet de fermeture des fissures ainsi qu'une limite de triaxialité en dessous de laquelle l'endommagement n'évolue plus.

La première partie du troisième chapitre a été consacrée à l'intégration du modèle de comportement élasto-plastique endommageable dans la suite logicielle Forge2005[®]. Nous avons présenté la mise en œuvre détaillée de la résolution numérique du problème mécanique. Elle se décompose en une résolution globale de l'équilibre mécanique par la méthode des éléments finis et par l'intégration de la loi de comportement élasto-plastique endommageable par un algorithme de prédiction élastique/correction plastique. Pour diminuer le temps de calcul au niveau de l'intégration locale de la loi de comportement, nous avons introduit un découplage entre l'équation de la surface de charge et la loi d'évolution de l'endommagement. Les développements ont été validés sur un essai de traction uniaxiale d'une éprouvette axisymétrique. Afin de mettre en évidence l'intérêt de notre

modèle d'endommagement, nous avons utilisé un essai d'écrasement d'éprouvette en tonneau. Nous avons ainsi pu voir l'importance de l'effet de fermeture des fissures ainsi que de la limite de triaxialité en dessous de laquelle l'endommagement n'évolue plus, pour prédire correctement les zones endommagées en compression.

L'introduction du comportement adoucissant à travers la variable d'endommagement rend les résultats numériques dépendants de la discrétisation spatiale. Pour s'affranchir de cette dépendance, nous avons exploré les méthodes d'endommagement non locales. Nous avons étudié une formulation intégrale et une formulation à gradient implicite. Nous avons pu voir que ces deux méthodes donnent les mêmes résultats ainsi qu'une bonne régularisation du problème. La formulation à gradient implicite est la plus avantageuse que cela soit en termes de temps de calcul ou de facilité de mise en œuvre. Il est à noter que les méthodes non locales introduisent une nouvelle variable appelée la longueur caractéristique. Le sens physique de cette variable est encore aujourd'hui un sujet de recherche. Bien que ces méthodes répondent parfaitement à la problématique de localisation de l'endommagement, nous ne les avons pas utilisées dans le reste du manuscrit. En effet, l'incapacité à caractériser correctement la longueur caractéristique ainsi que la contrainte qu'elle impose sur la discrétisation spatiale, rendent difficile l'utilisation des méthodes non locales dans le cas d'applications industrielles.

Le quatrième chapitre a été consacré à la caractérisation des paramètres des lois d'écrouissage et des lois d'endommagement des tôles et des rivets. L'identification des paramètres a été effectuée grâce au logiciel RhéoForge®. Ce logiciel utilise une méthode d'analyse inverse basée sur un algorithme de stratégie d'évolution couplé à un métamodèle. Afin d'alimenter l'algorithme d'identification, nous avons abordé deux types d'essais pour les tôles ainsi que pour les rivets. En effet, pour les tôles nous avons dans un premier temps réalisé des essais de traction uniaxiale. Ces essais nous ont notamment permis de déterminer les paramètres mécaniques conventionnels. Nous avons aussi abordé une méthode de mesure de champ de déformation par analyse d'image. Cette méthode a montré ses limites dans le cas des alliages d'aluminium qui ont une zone adoucissante limitée à cause d'une évolution rapide de l'endommagement. L'identification des courbes d'écrouissage et des lois d'endommagement par la méthode d'analyse inverse a donné de bons résultats pour une loi d'écrouissage de Swift. L'essai de traction souffrant de plusieurs limitations (niveaux de déformations faibles, chemin de déformation non représentatif du rivetage) nous nous sommes tournés vers un essai du type poinçonnement. Malheureusement, cet essai n'a pas pu nous fournir de données supplémentaires sur le comportement des tôles. En effet, cet essai est sensible à d'un grand nombre de paramètres qui ont été difficilement maitrisables dans notre cas. Il serait intéressant de concevoir un essai mécanique plus proche des sollicitations subies par les tôles lors du rivetage auto-poinconneur, et moins sensible aux conditions opératoires. En ce qui concerne les rivets auto-poinçonneurs, nous avons mis en place deux essais : un essai d'évasement et un essai d'écrasement sur un cylindre découpé dans le rivet. L'utilisation de la méthode d'identification par analyse inverse, nous a permis de déterminer un jeu de paramètres de la loi d'écrouissage de Swift qui donne une très bonne corrélation entre les observables expérimentales et numériques sur ces deux essais.

La première partie du cinquième et dernier chapitre a été consacrée à la modélisation numérique de la pose des rivets auto-poinçonneurs et à sa validation expérimentale. Nous avons montré qu'il est nécessaire de maitriser le maillage, les coefficients de frottement et de prendre en compte l'endommagement pour obtenir des résultats cohérents avec l'expérience. Nous avons réussi à obtenir un outil numérique prédictif aussi bien sur l'effort de pose que sur la géométrie finale du point riveté.

La deuxième partie du cinquième chapitre a été consacrée à la modélisation et à la validation de la tenue mécanique des points d'assemblage rivetés. La modélisation est effectuée en utilisant un modèle 3D. Après avoir présenté la stratégie de transfert des géométries et des champs mécaniques issus des simulations de pose 2D axisymétrique vers un modèle 3D, nous avons montré que le modèle développé permet d'obtenir, avec une bonne précision, les efforts nécessaires pour rompre le point d'assemblage. Nous avons pu aussi montrer la nécessité de modéliser correctement la pose du rivet afin d'initialiser le calcul de tenue avec des champs de contraintes et de déformations corrects. Nous avons aussi montré qu'il est nécessaire de prendre en compte le couplage comportement – endommagement pour obtenir des simulations réalistes. Les données expérimentales qui nous ont servi à valider notre modèle, ont été obtenues grâce à l'utilisation d'un montage de type ARCAN grâce auquel nous avons testé les assemblages en traction pure, en cisaillement pur mais aussi sous sollicitation mixte.

Dans la dernière partie de ce chapitre, le modèle numérique développé a été utilisé dans le cadre d'une optimisation du point d'assemblage. Nous avons réussi à obtenir une nouvelle géométrie de bouterolle qui permet d'augmenter la tenue mécanique. Pour finir, nous avons montré la capacité de notre modèle à simuler tout un panel de technologies d'assemblages par déformation plastique.

Globalement, les travaux menés ont permis de mettre au point un outil numérique fiable et précis qui répond à l'ensemble des attentes définies en début de thèse. Cependant de nombreuses perspectives d'améliorations peuvent être envisagées afin de rendre plus robuste l'outil numérique.

Tout d'abord en ce qui concerne le modèle de comportement, il serait réellement intéressant d'évaluer l'influence sur le rapport précision/temps CPU de la prise en compte d'un critère de plasticité anisotropeet de l'écrouissage cinématique.

En ce qui concerne la caractérisation rhéologique des matériaux, il semble nécessaire de mettre en place de nouveaux essais de caractérisation des tôles. Nous avons évoqué un essai de cisaillement couplé à une méthode d'identification par analyse inverse ou un essai de pincement. Pour l'amélioration du comportement du rivet, deux améliorations peuvent être explorées. La première amélioration possible est la prise en compte de l'endommagement du rivet. En effet, bien que nous ne l'ayons pas observé, la littérature suggère l'existence de modes de rupture dans lesquels le rivet casse. La deuxième amélioration concerne la mise en place de la modélisation du procédé de fabrication du rivet qui nous permettrait d'obtenir avec précision l'état de contrainte et de déformation du rivet.

L'outil numérique que nous avons utilisé dans le dernier chapitre donne d'excellents résultats cependant il est possible de l'améliorer pour qu'il soit plus performant. En effet, il serait intéressant : d'automatiser la création du modèle 3D à partir des données issues d'une simulation 2D, d'ajouter une étape de recherche d'équilibre après la phase de découpe, d'améliorer la gestion du contact et de prendre en compte l'auto-contact. Une partie de ces améliorations sont présentes maintenant dans la suite logicielle Forge2007[®].

<u>Résumé :</u> Le travail de thèse porte sur la modélisation de la mise en forme et de la tenue mécanique des assemblages par déformation plastique avec comme principale application le rivetage autopoinçonneur. Dans un premier temps, le développement d'un modèle de comportement, capable de prendre en compte l'ensemble des phénomènes physiques apparaissant lors de la pose du rivet ou de la tenue mécanique du point d'assemblage, est abordé. Le comportement retenu est un comportement élasto-plastique endommageable. Le modèle d'endommagement, basé sur le modèle de Lemaitre et le principe d'équivalence en déformation, a été amélioré afin de prendre en compte l'effet de fermeture des fissures ainsi qu'une limite de triaxialité en dessous de laquelle l'endommagement ne peut plus évoluer. Ce modèle de comportement a alors été implémenté dans la suite logicielle Forge2005[®]. Afin de s'affranchir du phénomène de localisation, des méthodes d'endommagement non locales ont été introduites. Dans un deuxième temps, la caractérisation des paramètres des lois d'écrouissages et d'endommagement est réalisée en utilisant une méthode d'indentification par analyse inverse basée sur un algorithme évolutionnaire couplé à un métamodèle. L'ensemble des essais mis en place pour alimenter cet algorithme est abordé de façon précise. Finalement, le modèle numérique développé est utilisé pour simuler le rivetage autopoinçonneur et la tenue mécanique du point d'assemblage. Pour ce dernier point, un montage ARCAN a été conçu pour solliciter les éprouvettes assemblées en cisaillement, traction ou encore pour des sollicitations mixtes. Les résultats obtenus sont alors comparés avec l'expérience et montrent une bonne corrélation. Le modèle numérique ainsi développé peut également être utilisé pour la majorité des technologies d'assemblage par déformation plastique, mais il constitue également un outil d'aide à l'optimisation de la tenue mécanique, comme cela est illustré en dernière partie de ce travail.

<u>Mots-clés :</u> Rivet auto-poinçonneur, assemblages par déformation plastique, elasto-plasticité endommageable, modèles non locaux, éléments finis

Abstract: The thesis deals with the numerical modelling of process and mechanical strength of joining by deformation with self-piercing riveting as main application. The first step was to develop a material model. This model needed to represent all the phenomena which appeared during the riveting process or during the mechanical testing of the joint. We have opted for damaged elasticplastic behaviour. The damage law is based on the model of Lemaitre and its strain equivalence principle. We have improved this damage model to take into account the crack closure effect and a lower limit of triaxiality under which the damage cannot evolve. This material model was implemented in the finite element software Forge2005®. No local damage models were used to prescribe the damage localization effect. In a second step, the characterisation of hardening and damage law parameters was performed using an inverse method based on an evolutionary algorithm coupled with a meta-model. All the specific experimental tests were presented with accuracy. Finally, computations of self-piercing riveting process and computations of mechanical test on a riveted joint were achieved with the developed numerical model. For this last part, an ARCAN type device was developed to apply shear, tensile and mixed solicitations on the riveted samples. Numerical results were compared with the experimental ones and shown good agreements. As shown in the last part of this thesis, the developed numerical model was able to model all the joining by deformation technologies and it may be use like an optimization tool.

Keywords: Self-piercing riveting, joining by deformation, elastic-plastic with damage, non local models, finite element