HAL
open science

Géométrie multi-échelles pour les images et les textures

Gabriel Peyré

To cite this version:

Gabriel Peyré. Géométrie multi-échelles pour les images et les textures. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2005. Français. NNT : . tel-00365025

HAL Id: tel-00365025

https://pastel.hal.science/tel-00365025

Submitted on 2 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mathématiques Appliquées

présentée et soutenue par

Gabriel PEYRÉ

Géométrie multi-échelles pour les images et les textures

Jury

Pierre	ALLIEZ	(Examinateur)
Laurent	COHEN	(Examinateur)
Stéphane	MALLAT	(Directeur de thèse)
Yves	MEYER	(Examinateur)
Valérie	PERRIER	(Rapporteur)
Martin	VETTERLI	(Rapporteur)

le 13 décembre 2005

Remerciements

Tout d'abord, un grand merci à Stéphane Mallat pour m'avoir guidé de façon si dynamique pendant ces trois années de thèse. Stéphane m'a appris les mathématiques subtiles du traitement des images géométriques ainsi que la rigueur scientifique. Merci encore pour cette réactivité permanente qui m'a motivé tout au long de ma thèse.

Laurent Cohen partage avec Stéphane la responsabilité de mes premiers pas dans la recherche. Laurent m'a poussé à présenter nos travaux et à rédiger des articles. Grâce à lui j'ai découvert des communautés aussi diverses que celles de la vision par ordinateur ou du calcul numérique.

J'ai eu la chance d'avoir deux rapporteurs de grand talent. J'ai rencontré Martin Vetterli en Sardaigne, où ses qualités d'orateur et son intuition sur les problèmes géométriques m'ont fasciné. Je suis ravi qu'il ait accepté cette tâche difficile de relecture. Valérie Perrier a analysé mon travail avec beaucoup de précision et sa bienveillance a su me rassurer. Son professionnalisme fait écho à la rigueur que Stéphane a souhaité me transmettre.

Pierre Alliez m'a guidé dans la jungle de la recherche en informatique graphique. Sa disponibilité sans faille m'a permis de comprendre les enjeux de cette discipline. Nos rencontres à Paris et à Sophia Antipolis ont été l'occasion d'un jaillissement d'idées très rafraîchissantes.

Yves Meyer a présidé le jury d'une main de maître, en mettant son immense connaissance scientifique au service d'une discussion extrêmement stimulante. J'avais déjà eu la chance de voir ce dynamisme en action lors de son cours de DEA, où les idées de l'algèbre des représentations se mettent au service de l'efficacité de l'analyse multirésolution.

L'ambiance détendue du CMAP doit énormément au dynamisme de Jeanne, qui écoute beaucoup et conseille parfois. De nombreux membres du labo méritent des remerciements, mais je tiens particulièrement à remercier notre chef Vincent ainsi que Grégoire qui m'a encadré pour mes enseignements. Merci à Erwann pour m'avoir enseigné les secrets ancestraux des bandelettes. Charles a été un compagnon de thèse formidable, je suis heureux que l'on ait soutenu en même temps.

Je dois maintenant rendre un hommage appuyé à mes deux co-auteurs, Vincent et Jérôme, autant pour leur apport scientifique que pour leur soutien moral. Je suis ravi que l'Objectif se porte si bien, et je suis content que cette réussite se soit construite à trois.

Vincent et Jérôme ne sont cependant pas les seuls à m'avoir soutenu dans les moments difficiles. Mes amis ont toujours été là, et je remercie en particulier la bande des quatres Didi, Michaël, Julien et Nicolas ainsi qu'Adrien, Rakan et Laëtitia. Que les autres me pardonnent, je ne les oublie pas, bien au contraire ! Milles merci à Gwenn pour m'avoir supporté, aidé et compris pendant cette thèse.

Je remercie ma famille, pour son soutien sans faille. Merci surtout à Marie-Noëlle pour tellement de choses, en particulier sa confiance et ... ses relectures attentives ! Je dédie cette thèse à Lucien, mon père.

Table des matières

1 Introduction

1.1 La géométrie des images 2
1.1.1 Modèle mathématique 3
1.2 Succès et échecs des bases d'ondelettes 4
1.2.1 Meilleure approximation orthogonale 4
1.2.2 Bases d'ondelettes 1D 4
1.2.3 Bases d'ondelettes 2D 6
1.2.4 Succès des bases d'ondelettes 7
1.3 Modélisation de la géométrie des images 7
1.3.1 Modélisations probabilistes des images naturelles 8
1.3.2 La géométrie dans le cortex visuel 11
1.3.3 Les contours en vision par ordinateur 13
1.4 Représentations creuses d'images géométriques 14
1.4.1 Élements finis 14
1.4.2 Analyse harmonique géométrique 16
1.4.3 La transformée en bandelettes 18
1.5 Guide de lecture 19
1.5.1 Bandelettes orthogonales (chapitre 2) 19
1.5.2 Compression d'images (chapitre 3) 23
1.5.3 Compression de surfaces (chapitre 4) 24
1.5.4 Inversion de la tomographie (chapitre 5) 24
1.5.5 Analyse de textures géométriques (chapitre 6) 25

2 Bandelettes orthogonales

2.1 Approximation avec des bandelettes polynomiales 27
2.1.1 Notations 27
2.1.2 Régularité dans le domaine des ondelettes 28
2.1.3 Régularité dans le domaine en ondelettes déformé 29
2.1.4 Approximation polynomiale sur des domaines en forme de bandes 30

2.1.5 Approximation sur tout le domaine en ondelettes 32
2.1.6 Approximation d'une fonction géométrique 35
2.2 Base de bandelettes orthogonales 37
2.2.1 Segmentation en quadtree 37
2.2.2 Bandeletisation avec des ondelettes de Alpert 38
2.2.3 Construction d'une base de bandelettes 40
2.2.4 Construction du dictionnaire de bandelettes 42
2.2.5 Résultats d'approximation 44
2.2.6 Algorithme de meilleure base de bandelettes 51
2.2.7 Compression dans une meilleure base de bandelettes 52
2.3 Algorithme de calcul 55
2.3.1 Transformée en bandelettes discrète 55
2.3.2 Algorithme rapide 56
2.3.3 Transformée de Alpert 2D 59

3 Bandelettes pour la compression d'images

3.1 État de l'art 65
3.1.1 Codeurs en ondelettes 65
3.1.2 Codeur JPEG2000 66
3.1.3 Codeurs géométriques 67
3.2 Le codeur en bandelettes orthogonales 68
3.2.1 Transformée en bandelettes d'ordre 0 68
3.2.2 Transformée en bandelettes par groupements 70
3.2.3 Description du codeur 73
3.3 Résultats numériques 74
3.3.1 Comparaison avec un codeur arithmétique en ondelettes 74
3.3.2 Comparaison avec JPEG2000 75
3.3.3 Discussion et problèmes ouverts 76

4 Bandelettes pour la compression de surfaces

4.1 Représentations de la géométrie 3D 80
4.1.1 Géométrie multi-échelles des surfaces 80
4.1.2 Compression géométrique de surfaces 82
4.2 Codeur en bandelettes pour la compression de surfaces 85
4.2.1 Compression d'images de géométrie 85
4.2.2 Compression de cartes de normales 86

5 Bandelettes pour l'inversion de la tomographie

5.1 Introduction 89
5.2 Inversion et seuillage dans une base. 92
5.2.1 Décomposition en ondelettes-vaguelettes 92
5.2.2 Inversion en curvelets 93
5.2.3 Inversion en bandelettes 94
5.2.4 Notations 95
5.3 Estimateur en bandelettes 95
5.3.1 Définition de l'estimateur 95
5.3.2 Estimateur oracle 96
5.3.3 Résultats d'estimation 98
5.3.4 Estimation rapide en bandelettes 99
5.4 Résultats numériques 102
5.5 Appendice : preuve du lemme 5.2 102

6 Analyse de textures géométriques

6.1 Introduction 106
6.1.1 Textures naturelles et synthétiques 106
6.1.2 Modélisation des textures géométriques 106
6.2 Synthèse de textures 106
6.2.1 État de l'art 107
6.2.2 Génération de texture et représentation creuse 109
6.3 Transformée en bandelettes par groupement 112
6.3.1 Flot géométrique et flot optique 112
6.3.2 Champ d'association multi-échelles 114
6.3.3 Transformée en bandelettes par groupements 115
6.3.4 Transformée en bandelettes sur un domaine multirésolution 118
6.4 Synthèse géométrique avec des bandelettes 119
6.4.1 Algorithme générique 119
6.4.2 Synthèse avec un flot géométrique fixé 121
6.4.3 Synthèse de la géométrie 125

Bibliographie 131

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse est consacrée à la représentation de la géométrie des images. Pour obtenir une représentation efficace il faut modéliser l'information géométrique et on construit des outils pour traiter ce modèle. Ces deux ingrédients vont de paire, s'influençant mutuellement pour obtenir un résultat satisfaisant, c'est à dire un modèle pertinent et des algorithmes rapides et performants.

On propose donc une modélisation géométrique des images, l'ambition étant de pouvoir extraire l'information contenue dans les images naturelles, c'est-à-dire les images qui nous entourent. Ce problème est bien sûr difficile car la géométrie des images est complexe et variable.

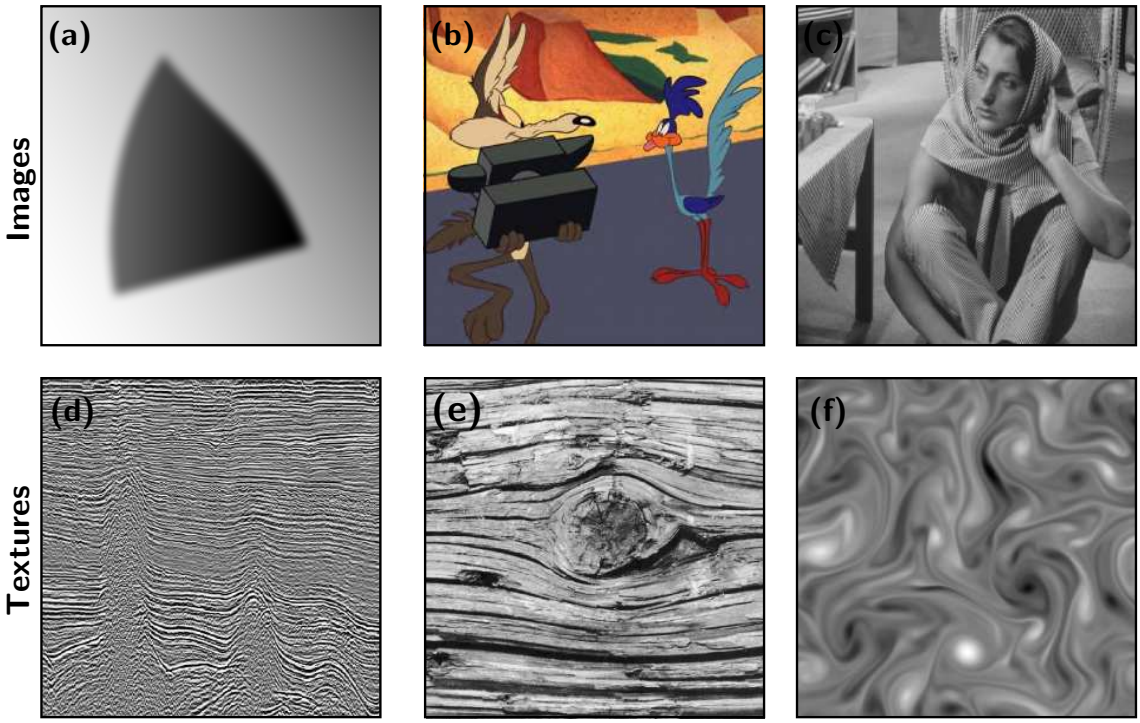


Fig. 1.1 *Exemples d'images et de textures.*

1.1 La géométrie des images

La géométrie des images et des textures. La figure 1.1 (a–c) fournit des exemples d'images géométriques de complexité croissante.

L'image 1.1 (a) montre une image géométrique simple. Il s'agit d'un objet géométrique de couleur uniforme sur un fond uniforme. Malgré la simplicité de cet exemple, la description de cette forme nécessite de nombreux détails : ce triangle possède des coins, ses côtés sont légèrement courbés et ces derniers sont un peu flous.

En agrégeant de nombreux objets géométriques, on arrive à une image proche de celle des dessins animés, comme on peut le voir à la figure 1.1 (b). Les phénomènes d'occlusion entre les différents plans de la scène complexifient encore la structure de l'image. Ce type d'images constitue le premier modèle qui sera abordé dans cette thèse.

La photographie 1.1 (c) est représentative des images que l'on souhaite pouvoir traiter car le monde qui nous entoure n'est pas celui des dessins animés. Elle possède certes des objets géométriques mais une grande part de l'information est contenue dans les textures qui remplissent ces objets.

Les images (d-f) montrent des textures possédant une structure géométrique. Ce sont ces textures géométriques qui font défaut au modèle d'images régulières par morceaux (images (a–b)). Pourtant, ces textures sont présentes dans la plupart des photographies que l'on souhaite comprimer. Une caractéristique commune de ces textures est qu'elles sont formées par de longs filaments qui s'entrechoquent (couches sismiques (d), nervures du bois (e) et fluide turbulent (f)). Le deuxième modèle abordé dans cette thèse est celui des textures turbulentes, qui possèdent des structures géométriques longues.

Formation de la géométrie. Cette multitude de structures géométriques peut en partie s'expliquer par le principe de formation de ces images.

Une scène photographiée est composée d'objets se cachant les uns les autres et projetant des ombres. Le principe d'occlusion crée des contours et des jonctions, de plus la diffraction de la lumière a tendance à lisser ces courbes. Ce type de phénomènes justifie en partie le modèle de dessin animé représenté à l'image 1.1 (b).

De nombreux phénomènes naturels créent des textures géométriques, comme par exemple des écoulements turbulents (image 1.1 (f)) ou bien des croissances régulières (images 1.1 (e)).

Enfin, les constructions humaines possèdent souvent des structures périodiques et symétriques, comme par exemple les stries et damiers des habits dans l'image 1.1 (c).

Traitement de la géométrie. La compréhension de la géométrie des images constitue le point bloquant dans nombre d'applications. En traitement d'images, la compression, le débruitage et l'inversion d'opérateurs sont bien sûr concernés et sont abordés dans cette thèse. En vision par ordinateur, les problèmes de groupage et de segmentation mettent en jeu des formes géométriques et la question de la reconnaissance de formes se doit d'exploiter des a priori géométriques. Enfin, en graphisme 2D et 3D, la synthèse d'images et particulièrement de textures demande un réalisme accru et donc une grande fidélité géométrique.

Une approche courante pour analyser une image est de trouver une représentation compacte de son contenu. Pour obtenir une représentation efficace, il faut exploiter les sources de régularité qui existent dans l'image. Les outils classiques comme l'analyse de Fourier et l'analyse en ondelettes doivent être dépassés pour analyser la régularité géométrique des images naturelles.

La recherche de représentations non redondantes est à la base du développement de la théorie de l'information fondée par Shannon [173] et de la physiologie de la vision, comme postulé par Attneave [12]. La théorie de l'information a eu un impact considérable sur l'analyse d'images, mais ce n'est qu'assez récemment que les outils numériques ont été rapprochés des modèles physiologiques, voir par exemple les travaux de Olshausen et Field [144]. La recherche d'outils mathématiques pour représenter la géométrie pourrait ainsi avoir un impact sur la compréhension du fonctionnement du cortex visuel.

1.1.1 Modèle mathématique

Le premier type de structures géométriques étudié dans cette thèse est celui des images de dessins animés, figure 1.1 (b). On peut les définir mathématiquement comme des fonctions régulières à l'extérieur d'un ensemble de courbes régulières. Comme les images naturelles ont rarement des discontinuités aussi franches, un lissage peut aussi être appliqué à l'image, avec un noyau a priori inconnu. Ce modèle a été introduit par Donoho dans [68] et il a aussi été utilisé par Le Pennec et Mallat dans [115].

Fonctions uniformément régulières Dans cette thèse, on considère des exposants de régularité $\alpha > 0$ non nécessairement entiers. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert, on note $\mathrm{C}^\alpha(\Omega)$ l'espace des fonctions α-hölderiennes d'ordre α sur Ω. Ce sont les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ayant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $[\alpha]$ vérifiant

$$\|f\|_{\mathrm{C}^\alpha(\Omega)} \stackrel{\text{def.}}{=} \max \left(\begin{array}{l} \max\limits_{a_1+a_2=[\alpha]} \sup\limits_{(x,y)\in\Omega^2} \left| \frac{\partial^{a_1+a_2} f(x)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2}} - \frac{\partial^{a_1+a_2} f(y)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2}} \right| \|x-y\|^{[\alpha]-\alpha} \\ \max\limits_{a_1+a_2\leqslant\alpha} \sup\limits_{x\in\Omega} \left| \frac{\partial^{a_1+a_2} f(x)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2}} \right| \end{array} \right) < +\infty$$

avec

$$[\alpha] \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} \lfloor \alpha \rfloor & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N}, \\ \alpha - 1 & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Fonctions avec une régularité géométrique Une fonction $f \in \mathrm{L}^2([0,1]^2)$ possède une régularité géométrique C^α si

- $f = \widetilde{f}$ ou $f = \widetilde{f} * h$ avec $\widetilde{f} \in \mathrm{C}^\alpha(\Lambda)$ pour $\Lambda = [0,1]^2 - \{\gamma_i\}_{1\leqslant i\leqslant \mathrm{G}}$.
- Le noyau de lissage h est C^α et possède un support de taille $s > 0$. On suppose de plus qu'il vérifie $\|h\|_{\mathrm{C}^\alpha} \leqslant s^{-(2+\alpha)}$.
- Les courbes de contours γ_i sont C^α et ne s'intersectent pas tangentiellement.

Les courbes γ_i sont les contours des objets géométriques formant l'image à analyser. Les discontinuités que définissent ces courbes sont dues aux phénomènes d'occlusion entre les objets, qui de plus crée des jonctions en T et des croisements. Le lissage par un noyau h modélise le phénomène de diffraction, qui génère un flou d'image a priori inconnu.

Cette classe de fonctions géométriques constitue le modèle mathématique qui permet d'obtenir tous les résultats garantissant la qualité de la représentation à l'aide de bandelettes orthogonales.

Pourtant, comme on l'a vu à la figure 1.1 (d-f), la plupart des images contiennent des structures géométriques plus complexes. Dans un premier temps, il est donc important de construire des algorithmes suffisamment robustes pour améliorer le traitement des images même dans ces cas difficiles. Dans un deuxième temps, nous identifions les difficultés que représentent ces parties texturées et présentons quelques pistes pour aller plus loin dans l'analyse géométrique.

1.2 Succès et échecs des bases d'ondelettes

Le cadre mathématique classique pour construire une représentation compacte de fonctions est celui de l'approximation dans une base orthonormée. Dans cette section, nous présentons ce cadre et détaillons le cas des bases d'ondelettes, populaires en compression d'images.

1.2.1 Meilleure approximation orthogonale

L'approximation d'une fonction $f \in \mathrm{L}^2$ ou d'un vecteur $f \in \ell^2$ se calcule de façon simple dès lors que l'on dispose d'une base orthonormée $\mathrm{B} = \{g_\mu\}_\mu$ de L^2 ou ℓ^2. Il suffit en effet d'imposer un seuil $\mathrm{T} > 0$ et de rejeter les coefficients de la décomposition de f dans B d'amplitude inférieure à T

$$f_{\mathrm{M}} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{|\langle f,\, g_\mu\rangle| > \mathrm{T}} \langle f,\, g_\mu\rangle\, g_\mu \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{M} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{Card}\,\{\mu \;\backslash\; |\langle f,\, g_\mu\rangle| > \mathrm{T}\}\,,$$

où $\langle \cdot,\, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique sur L^2 ou ℓ^2.

La fonction f_{M} ainsi obtenue est la meilleure approximation de f avec M coefficients dans la base B. Cette approximation est non linéaire puisque les coefficients $\langle f,\, g_\mu\rangle$ pris en compte pour approcher f sont choisis en fonction de f. Pour obtenir une approximation efficace en norme L^2, il s'agit donc de trouver une base exploitant au mieux les propriétés de la classe de fonctions considérée.

Pour les fonctions uniformément régulières, la base de Fourier est optimale pour effectuer de telles approximations. Pour les fonctions de $\mathrm{L}^2([0,1])$ ayant des discontinuités, les bases d'ondelettes, décrites au prochain paragraphe, permettent de pallier au problème de l'analyse de Fourier en exploitant pleinement l'adaptivité qu'autorise le choix des coefficients à garder.

1.2.2 Bases d'ondelettes 1D

Les ondelettes ont été introduites dans les travaux de Daubechies [54], Mallat [128] et Meyer [137]. Ces travaux généralisent les procédures de codage pyramidales comme celle de Burt et

Adelson [26] et le codage en sous-bandes utilisé par Vetterli [192] pour le codage d'images. Les ouvrages de Daubechies [55], Mallat [129], Meyer [138] et Vetterli [193] constituent des références sur l'approximation en ondelettes.

Une base d'ondelettes B de $\mathrm{L}^2([0,1]^2)$ est obtenue en dilatant et translatant une fonction ψ

$$\mathrm{B} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{\psi_{jn} \setminus j \leqslant 0,\ n = 0 \ldots 2^{-j} - 1\right\} \qquad \text{avec} \qquad \psi_{jn}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 2^{-j/2}\,\psi(2^{-j}x - n).$$

Il est nécessaire de modifier les ondelettes dont le support intersecte le bord de $[0,1]^2$ pour obtenir une base orthonormée. Pour les développements théoriques du chapitre 2 il suffit de considérer une extension périodique des fonctions de base à l'extérieur du carré.

La fonction ψ possède principalement deux propriétés :

- Elle est *oscillante*. La fonction ψ a ainsi un nombre p suffisamment élevé de *moments nuls*
$$\forall\, k \leqslant p-1, \qquad \int_0^1 \psi(x)\, x^k \mathrm{d}x = 0.$$
Si une fonction f est régulière, par exemple de classe C^α sur un intervalle contenant le support d'une fonction ψ_{jn}, alors le produit scalaire $\langle f,\, \psi_{jn}\rangle$ va être quasiment nul.
- Elle a un support compact, de taille m. Ainsi une fonction ψ_{jn} a un support de taille $\mathrm{K}2^j$ et est localisée autour du point $2^j n \in [0,1]$.

Ces deux propriétés font de la base d'ondelettes un outil efficace pour analyser les fonctions 1D ayant des singularités ponctuelles.

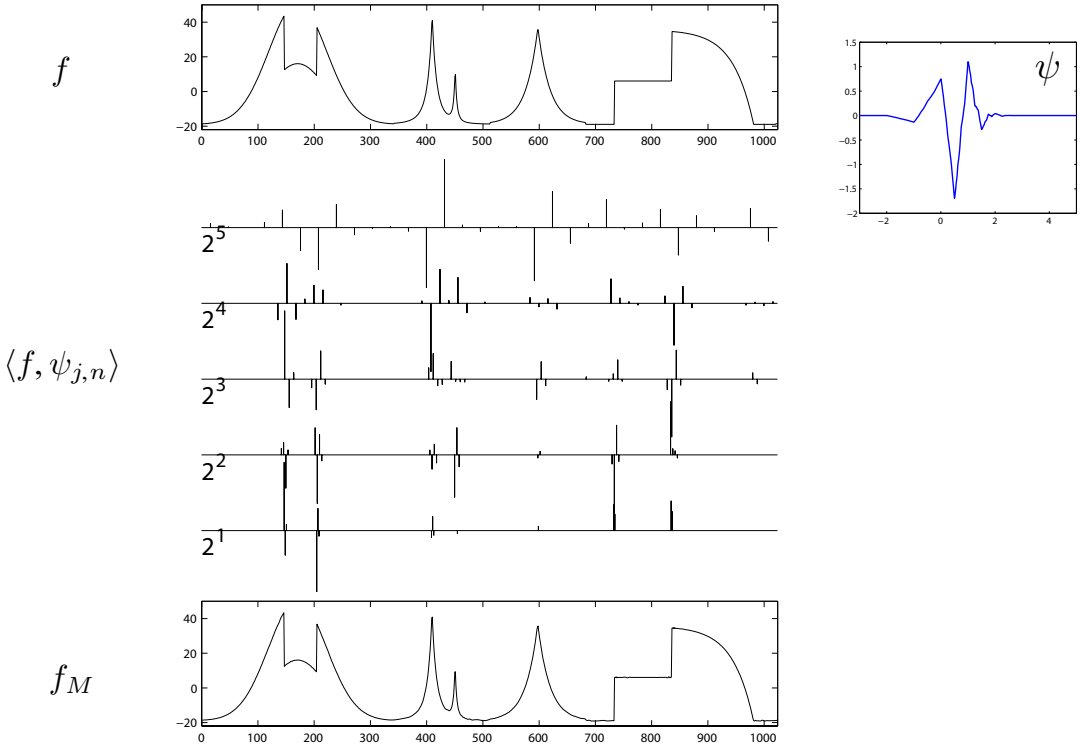


Fig. 1.2 *Fonction 1D, transformée en ondelettes, et approximation obtenue en gardant 10% des coefficients.*

La figure 1.2 montre une telle fonction, ainsi que les coefficients de la décomposition en ondelettes $\langle f,\, \psi_{jn}\rangle$ associés. On peut constater que les grands coefficients sont peu nombreux

et localisés au voisinage des singularités. On peut alors prouver que si la fonction est C^α par morceaux et que l'ondelette ψ a $p \geqslant \alpha$ moments nuls, alors la meilleure approximation f_M dans la base d'ondelettes M vérifié

$$\|f - f_M\|^2_{L^2} \leqslant C\, M^{-2\alpha},$$

où C est une constante qui ne dépend que de f. Cette décroissance asymptotique est optimale pour les fonctions régulières par morceaux, voir le livre de DeVore [65]. Ainsi, en 1D, la base d'ondelettes fournit une représentation adaptative optimale des fonctions ayant un nombre fini de discontinuités.

1.2.3 Bases d'ondelettes 2D

On construit des bases d'ondelettes de $L^2([0,1]^2)$ à l'aide de produits tensoriels des espaces d'ondelettes 1D. On peut encore décrire une telle base à l'aide de translation et dilatation mais en 2D, il faut considérer 3 fonctions d'ondelettes $\{\psi^H, \psi^V, \psi^D\}$, pour les directions horizontale, verticale et diagonale. La figure 1.3 montre un exemple de fonctions d'ondelettes 2D.

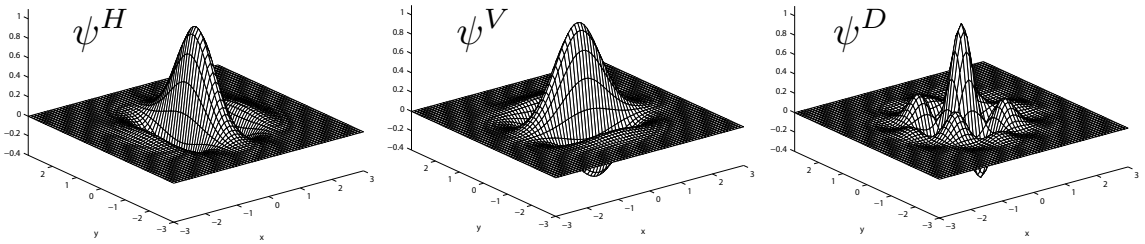


Fig. 1.3 *Exemple d'un triplet de fonctions ondelettes en 2D.*

La transformée en ondelettes analyse une fonction $f \in L^2([0,1]^2)$ en calculant la décomposition de f dans une base d'ondelettes. Pour chaque échelle 2^j et orientation $k \in \{V, H, D\}$, il s'agit donc de calculer l'ensemble des produits scalaires

$$f_j^k[n_1, n_2] \stackrel{\text{def.}}{=} \langle f,\, \psi_{jn}^k \rangle \qquad \text{avec} \qquad \psi_{jn}^k(x_1, x_2) \stackrel{\text{def.}}{=} 2^{-j}\, \psi^k(2^{-j}x_1 - n_1, 2^{-j}x_2 - n_2).$$

On peut interpréter cet ensemble de coefficients comme une image f_j^k contenant les coefficients d'ondelettes de f pour chaque échelle 2^j et orientation k. La fonction ψ_{jn}^k est localisée au voisinage du point $2^j n$ sur un carré de taille $m2^j$.

Pour une fonction f ayant une régularité géométrique C^α, telles les images 1.1 (a–b), la meilleure approximation f_M avec M coefficients dans une base d'ondelettes satisfait

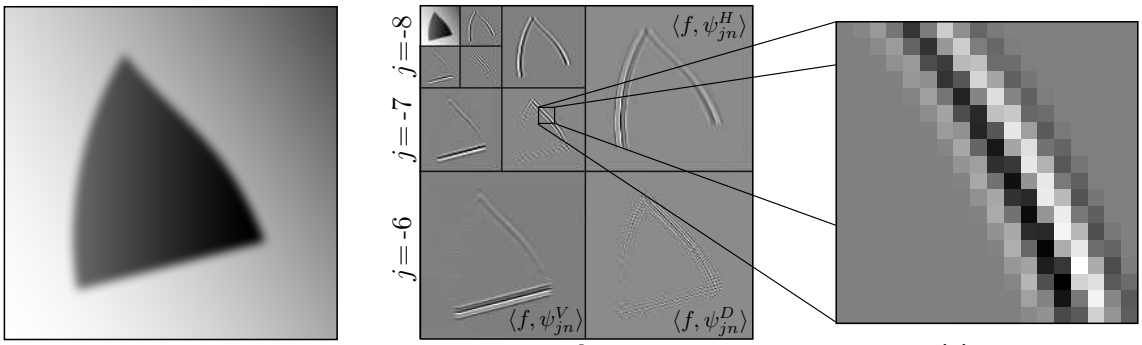
$$\|f - f_M\|^2_{L^2([0,1]^2)} \leqslant C\, M^{-1}, \tag{1.1}$$

où C est une constante qui ne dépend que de f. Comme l'ont montré Korostelev et Tsybakov [110] dans le cadre du problème d'estimation, ce taux d'approximation n'est pas optimal et la qualité de l'approximation est complètement dirigée par la présence de discontinuités.

Les bases d'ondelettes orthogonales sont capables de résoudre un problème essentiellement 1D, celui de l'analyse des singularités ponctuelles. En 2D, le problème devient beaucoup

plus complexe, à cause de la présence de singularités curvilignes. Les ondelettes classiques ne sont pas capables de représenter de telles singularités de façon efficace à cause de leur support carré.

Dans cette thèse nous construisons une base orthogonale adaptée à la fonction f exploitant la régularité qui existe le long des contours de f. On obtient ainsi un taux d'approximation asymptotique optimal $\mathrm{M}^{-\alpha}$ pour des fonctions ayant une régularité géométrique C^{α}.



(a) Fonction originale **(b) Transformée en ondelettes** **(c) Zoom**

Fig. 1.4 *Une image avec de la régularité géométrique et ses coefficients en ondelettes.*

1.2.4 Succès des bases d'ondelettes

Bien que non optimale pour l'approximation d'images géométriques, les bases d'ondelettes sont en pratique un outil très efficace.

Le débruitage par seuillage dans une base d'ondelettes, introduit par Donoho et Johnstone [70, 73], utilise la capacité des ondelettes à représenter de façon compacte une image, et ainsi à bien séparer le signal du bruit. La figure 1.5 montre un exemple de débruitage en ondelettes.

Les ondelettes sont également employées en compression d'images avec succès. Elles sont en effet à la base du nouveau standard de compression d'images JPEG2000 [48].

La figure 1.6 montre une image compressée dans une base d'ondelettes en gardant plus ou moins de coefficients. Le standard JPEG2000 suit le même principe, en quantifiant les coefficients avec un seuil variable puis en codant les coefficients quantifiés.

1.3 Modélisation de la géométrie des images

Différents outils et modèles ont été proposés pour représenter des images géométriques. Chaque outil propose une approche originale pour décrire la géométrie et s'avère efficace dans le cadre d'un modèle souvent restrictif d'images géométriques.

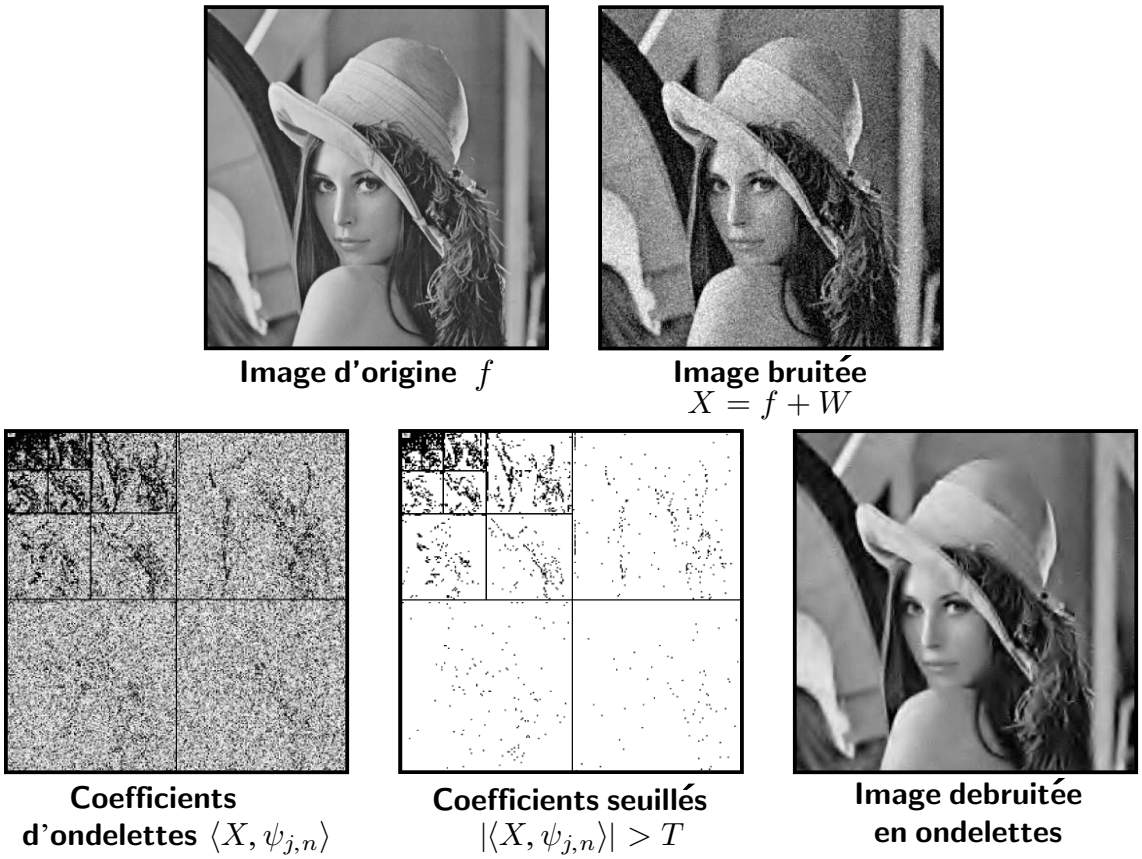


Fig. 1.5 *Débruitage dans une base d'ondelettes.*

1.3.1 Modélisations probabilistes des images naturelles

Invariance en échelle. Les images naturelles sont structurées et leur description spaciale est donc redondante. Une modélisation adéquate fournit un a priori sur les images à étudier qui permet de réduire cette redondance. Les études psychophysiques de Kersten [106] estiment par exemple qu'un pixel d'une image naturelle a un contenu informatif moyen de 1.4 bit par pixel. Ces mesures exploitent les a priori de la vision humaine sans pour autant les expliquer.

Des études ont montré que la puissance spectrale des images naturelles vérifie en moyenne une loi de puissance $\mathrm{P}(\omega) \simeq |\omega|^{-2\alpha}$ avec α voisin de 1, voir par exemple les travaux de Burton et Moorhead [161]. Ce comportement en puissance peut être expliqué par la relative invariance en échelle des images naturelles, ce qui signifie que les histogrammes des grandeurs caractéristiques d'une image ne changent pas quand on change l'échelle d'observation. La faible décroissance du spectre peut s'expliquer par la présence de contours dans les images naturelles, comme l'ont montré Hsiao et Millane [99].

Cependant, comme le montre la figure 1.7, la puissance spectrale n'est pas caractéristique des images naturelles. Le spectre de Fourier ne tient pas compte des corrélations multi-échelles qui existent dans une image naturelle.

Ce spectre explique principalement la nature fractale (invariante par changement d'échelle) des images naturelles. Les mêmes arguments d'invariance ont permis à Kolmogorov de

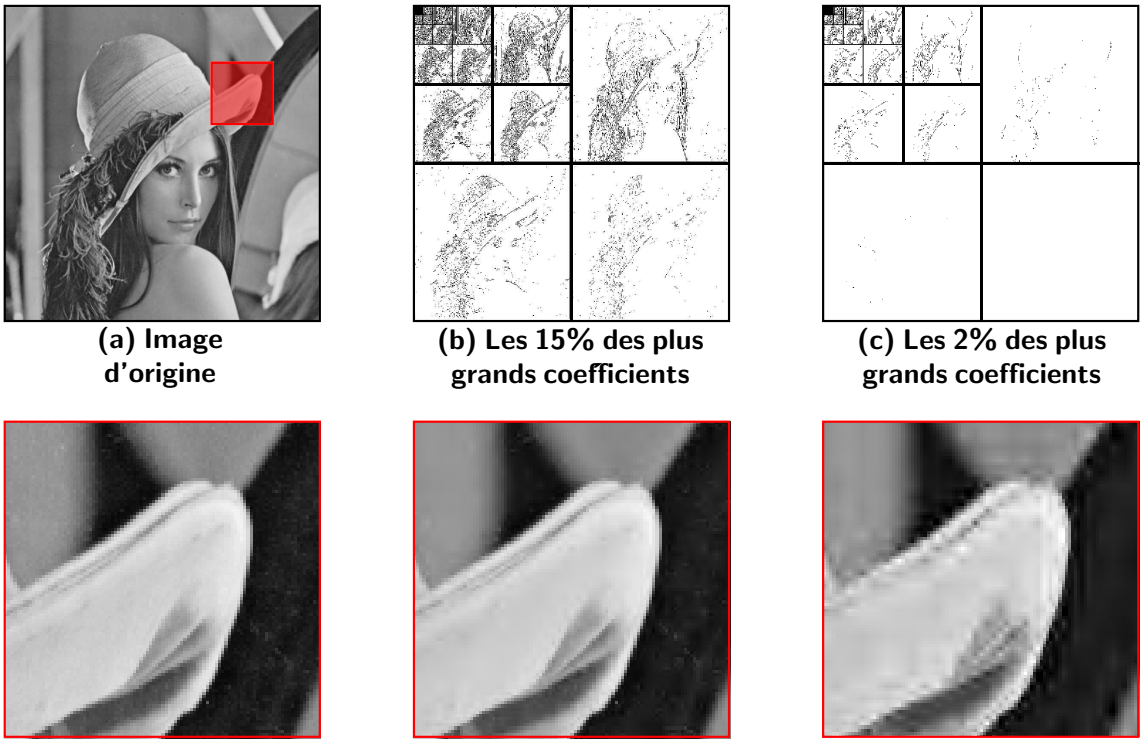


Fig. 1.6 *Approximation d'une image dans une base d'ondelettes.*

montrer que le spectre de puissance du champ de vitesses des turbulences pleinement développées [109] avait le même comportement. Il manque donc la composante géométrique qui est caractéristique des images naturelles.

Des méthodes utilisant des champs de Markov ont été proposées par Geman et Geman [86] pour caractériser les corrélations locales présentes dans les images naturelles. Un cadre général utilisant un champ de Markov sur des coefficients filtrés a été introduit par Mumford et al. [140, 211]. Ces dépendances et l'invariance en échelle peuvent être en partie expliquées par des principes simples de formation des images par occlusions, comme expliqué par Mumford et al. [116, 139].

Modélisations en ondelettes. La figure 1.8 (b) montre l'histogramme des coefficients d'ondelettes d'une image naturelle (l'ordonnée est le logarithme de la probabilité d'apparition). On peut s'apercevoir que l'histogramme est piqué au voisinage de zéro (contrairement à celui d'un bruit blanc qui forme une parabole) ce qui signifie que la représentation en ondelettes est assez creuse. La première description probabiliste de Mallat [128] utilise des distributions gaussiennes généralisées pour modéliser la distribution des coefficients en ondelettes.

Modélisations d'ordre plus élevé. Pour prendre en compte des corrélations à plus longue distance, des études ont été faites spécifiquement sur les décompositions multi-échelles par Huang et Mumford [100] et montrent les dépendances entre les coefficients d'ondelettes voisins en échelle et en espace, voir Liu et Moulin pour une étude théorique [122].

La figure 1.8 (c) montre l'histogramme des coefficients en ondelettes d'une image naturelle

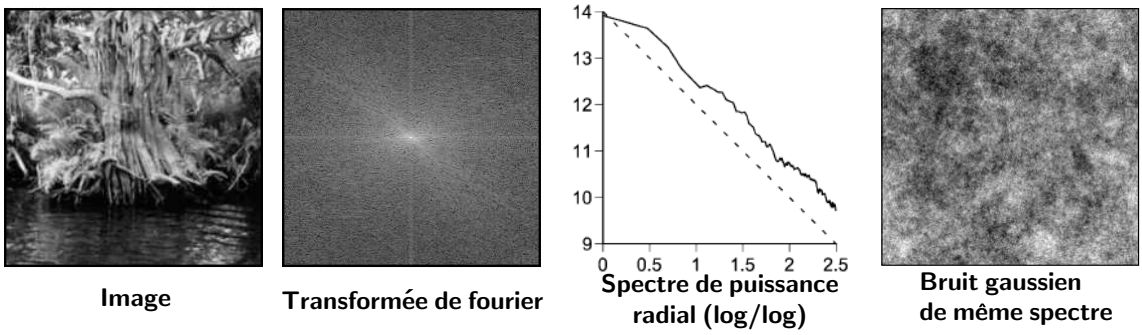


Fig. 1.7 *Une image naturelle (gauche) et son spectre de puissance en diagramme* log / log *(centre). À droite une réalisation d'un processus gaussien avec le même spectre.*

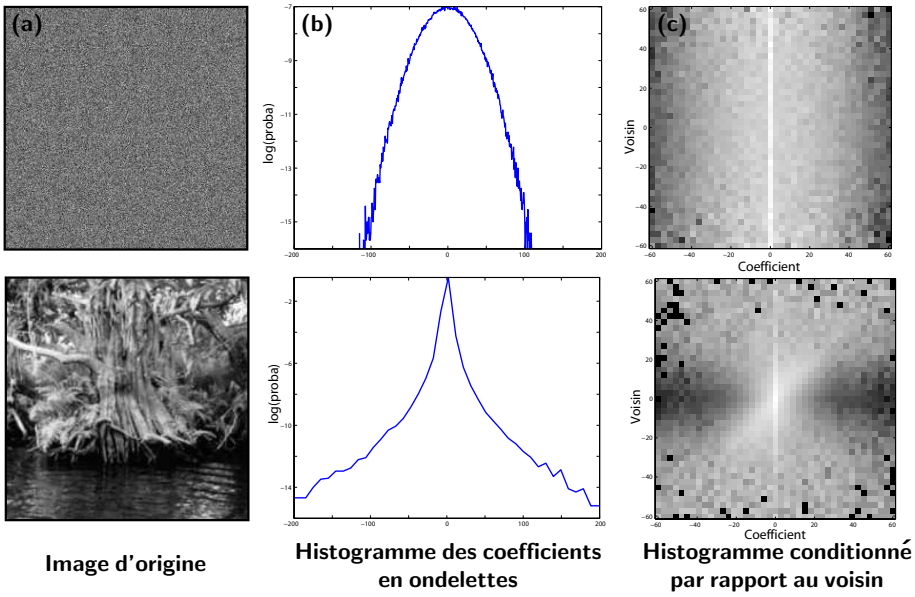


Fig. 1.8 *(a) histogrammes des coefficients d'ondelettes* $p(x) = \mathbb{P}(\langle f, \psi_{jn}\rangle = x)$. *(b) histogrammes conditionnés par rapport au coefficient voisin* $p(x, y) = \mathbb{P}(\langle f, \psi_{jn}\rangle = x \,|\, \langle f, \psi_{jn+1}\rangle = y)$.

conditionnés par rapport à la valeur du coefficient immédiatement à droite à la même échelle. Cet histogramme révèle une forte corrélation des coefficients (l'histogramme n'est pas constant le long des colonnes, contrairement à celui de l'image du bruit blanc).

Les modélisations les plus poussées des coefficients d'ondelettes utilisent la structure arborescente de la décomposition. Un champ de Markov caché sur l'arbre de décomposition est utilisé par Romberg et al. [162, 163] pour capturer les dépendances non-gaussiennes des coefficients. Wainwrigth et al. [194] ont aussi utilisé une cascade de mixtures gaussiennes composées avec une fonction non-linéaire ce qui diminue le nombre de paramètres à estimer. Cette méthode a été appliquée à la compression d'images par Buccigrossi et Simoncelli [25], au débruitage par Portilla et al. [160], à la synthèse de texture par Portilla et Simoncelli [159] et à la reconnaissance d'œuvres d'art par Lyu et al. [127].

Les corrélations existant entre les coefficients en ondelettes d'une image naturelle sont en partie dues à son contenu géométrique et texturé. Des modélisations réellement géométriques de ces dépendances, comme par exemples celles de Wakin et al. [197] ou de Li [119]

permettent d'améliorer les algorithmes de compression.

Réduction de dimension. De nombreuses approches récentes essaient de décrire un ensemble d'images naturelles comme un espace de petite dimension inclus dans un espace de grande dimension (comme par exemple $\mathbb{R}^N$ où N est le nombre de pixels d'une image discrétisée). Historiquement, la reconnaissance de visages a été le premier champ à développer ce type de méthodes en utilisant des composantes principales, avec la méthode Eigenfaces de Turk et Pentland [188]. Une telle transformation permet de décorréler les images à analyser mais ne prend pas en compte les dépendances d'ordres plus élevés qu'imposent les structures géométriques. Les décompositions obtenues avec une analyse en composantes indépendantes par Bell et Sejnowski [16] et la recherche de représentations creuses utilisée par Olshausen et Field [144] fournissent des fonctions de base localisées et orientées plus adaptées aux images naturelles (voir aussi la prochaine section pour les connexions avec la physiologie de la vision humaine).

Cependant, de telles projections linéaires ne peuvent décrire parfaitement des ensembles d'images complexes dont la formation est dictée par des principes d'occlusion et de réflexion fortement non-linéaires. Ainsi, des algorithmes ont été proposés pour prendre en compte des ensembles plus génériques telles des variétés de dimension quelconque. Les pionniers dans cette voie sont les algorithmes Isomap de Tenenbaum et al. [185] et LLE de Roweis et Saul [164]. Des études théoriques de Donoho et Grimes [72] ainsi que Wakin et al. [196, 195] analysent des modèles de bibliothèques d'images ayant ou n'ayant pas une structure de variété.

1.3.2 La géométrie dans le cortex visuel

Le premier modèle expliquant la perception visuelle est sans doute celui élaboré par les théoriciens de la Gestalt comme Wertheimer [202]. Différents principes de regroupements hiérarchiques comme ceux représentés à la figure 1.9 expliquent la formation de l'image et sa compréhension. Des algorithmes de calculs ont été proposés par l'équipe de Morel [64] pour reproduire ce processus de groupement. Des travaux comme celui de Ben-Shahar et Zucker [17] utilisent des critères perceptuels pour analyser la géométrie des images.

Afin de comprendre les traitements effectués par le cerveau, les physiologistes ont proposé et validé des modèles de calculs biologiques pour la vision humaine. Ces modèles sont voisins des approches utilisées en traitement de l'image, le cerveau calculant une représentation compacte des images qu'il analyse, comme suggéré par Attneave [12] et Barlow [14].

Les études de Hubel et Wiesel [101] ont montré que la transformation effectuée par les premiers neurones visuels de V1 peut être vue comme la décomposition d'une image sur des ondelettes orientées. Les figures 1.10 (a) et (b) détaillent l'organisation de ces neurones en hypercolonnes. Le codage effectué par ces neurones a été précisé par Laughlin [113] et Srinivasan et al. [178].

Ces conclusions ont eu une influence sur les travaux en vision par ordinateur, grâce en particulier à Marr [132]. En retour, des études ont cherché à retrouver numériquement une telle structure de transformation, comme par exemple les travaux de Olshausen et Field [144].

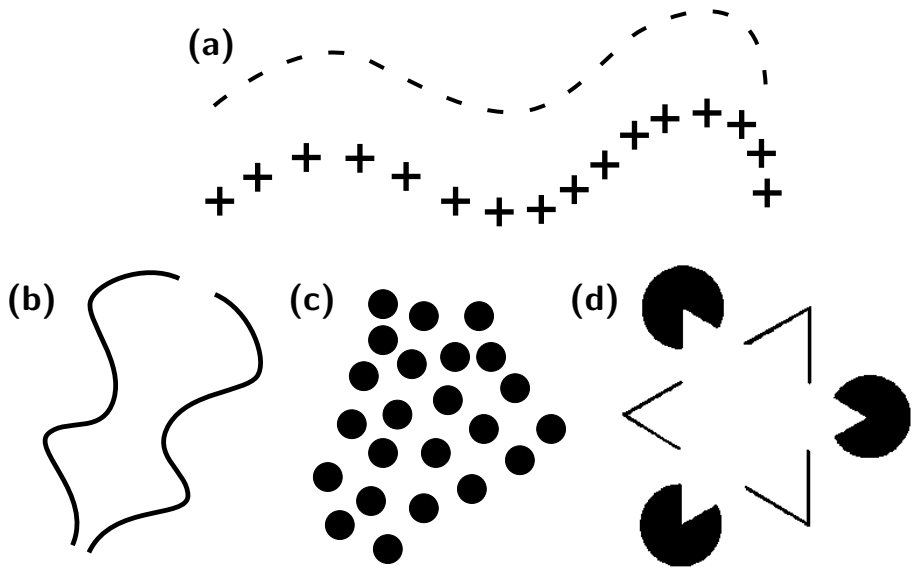


Fig. 1.9 *Exemple de principes de groupements gestaltiques : (a) bonne continuation, (b) symétrie, (c) constance de forme, (d) illusion d'optique (triangle de Kaniza).*

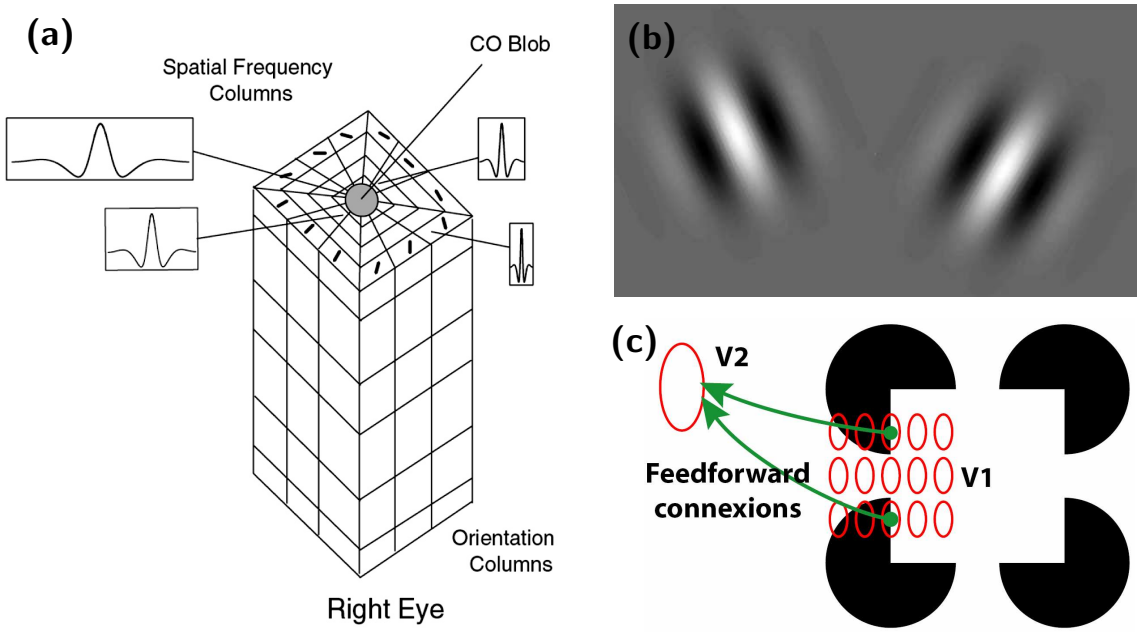


Fig. 1.10 *(a) Structure en hypercolonnes des neurones de V1 (figure extraite de* [21]*), (b) cellules orientées de V1 (figure extraite de* [205]*), (c) interaction entre les cellules de V1 et de V2 (figure extraite de* [117]*).*

Cependant, les calculs biologiques ne s'arrêtent pas à cette première couche de transformations et comme on l'a vu à la section précédente, il existe encore des corrélations dans ces données ainsi transformées.

Des modèles ont été proposés récemment pour la deuxième couche de cellules V2 du cortex visuel, voir par exemple l'article introductif de Fregnac [84]. Ces modèles utilisent des interactions entre les cellules de V1 et de V2 (voir figure 1.10 (c)), ces dernières étant capables d'agréger un grand nombre de fortes réponses le long des contours géométriques.

Ce procédé peut être vu de façon duale soit comme une amplification ou une inhibition de l'information visuelle. Field et al. [82] ont montré que ce probable chaînage des cellules de V1 fournissait une meilleure information pour clarifier les situations visuelles ambiguës et aider la détection des contours. D'un autre côté, Schwartz et Simoncelli [170] expliquent que ce chaînage peut aussi servir à enlever les dépendances entre les réponses des neurones de V1 dues aux structures géométriques des images naturelles.

Cette intégration du contenu géométrique le long de courbes est semblable aux algorithmes de segmentation et groupage introduits en vision par ordinateur, par exemple à travers la méthode de Tensor Voting de l'équipe de Medioni [135].

Les outils de transformées en bandelettes développés dans cette thèse peuvent être interprétés comme une seconde couche de transformation qui cherche à enlever cette redondance géométrique présente dans une transformée multirésolution.

1.3.3 Les contours en vision par ordinateur

En vision par ordinateurs, la notion de contour est apparue très tôt comme un moyen de représenter simplement des images géométriques.

La définition des contours d'une image est problématique car ces courbes ne correspondent que rarement à des discontinuité franches. Sur la figure 1.11 on peut voir des zooms sur différents contours d'une image naturelle. Suivant l'échelle à laquelle on regarde l'image, on peut observer en (c) une discontinuité, aussi bien qu'en (d) un gradient progressif d'intensité. Il existe aussi de fines structures géométriques (f–h) présentes seulement aux fines échelles d'observation.

Ces fines structures correspondent souvent à la présence de textures qui peuvent rarement être décrites par de simple courbes. En effet, comme on peut le voir dans les cheveux (h) ou bien le chapeau (g), cette géométrie correspond à de fines stries qui s'enchevêtrent suivant un mouvement plus ou moins turbulent.

Les algorithmes classiques d'extraction de contours tel celui de Canny [34] utilisent une échelle de lissage fixée. Ceci ne permet pas de prendre en compte toute la gamme de profils de discontinuités présents dans une image. Ainsi les contours doivent être détectés et chaînés à travers l'ensemble des résolutions, ce qui correspond à la notion de Scale Space introduite par Witkin [204].

Les contours ont été utilisés comme un système de codage proche de la perception visuelle. La construction originale de Carlsson [35] extrait les contours présents dans une image et encode, en plus de l'emplacement de ces courbes, un profil de discontinuité. Ce type de représentations d'images par maxima locaux peuvent être effectuées sur un domaine multirésolution comme expliqué par Mallat et Zhong [131]. Des constructions plus complexes comme celle de Elder [80] prennent en compte de façon moins redondante le degré de lissage local des images naturelles.

Cependant, comme expliqué par Le Pennec et Mallat dans [114], la notion de contours n'est pas pertinente pour l'approximation car on s'intéresse avant tout aux directions de régularité. Bien que la localisation exacte d'un contour soit un problème mal posé à cause du lissage inconnu, la détection d'une direction parallèle au contour est un problème plus simple à résoudre.

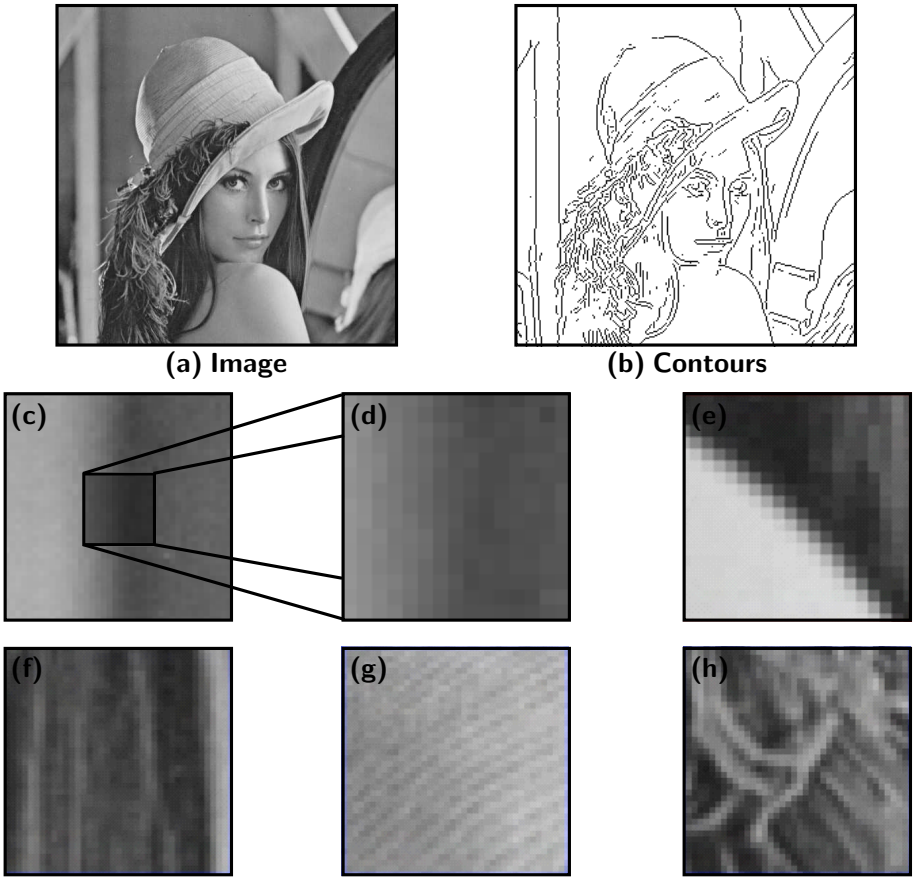


Fig. 1.11 *La géométrie et les contours d'une image.*

1.4 Représentations creuses d'images géométriques

À l'exception notable des curvelets (détaillées à la section 1.4.2), le point commun des méthodes d'approximation géométriques est de proposer une représentation qui s'adapte à la géométrie de l'image. Il y ainsi une phase de recherche de la géométrie (que ce soit sous forme de courbe de contour, de triangulation, de segmentation, de flot, etc.), qui va de paire avec l'algorithme calculant la représentation.

1.4.1 Élements finis

La construction d'une base orthonormée fournit un cadre adéquat pour formuler le problème d'approximation. Cependant, des constructions directes à l'aide de fonctions polynomiales par morceaux ont été proposées pour capturer l'anisotropie des images géométriques.

La figure 1.12 montre l'approximation d'une fonction représentant une forme géométrique. En (b) on peut voir une approximation à l'aide de fonctions linéaires par morceaux sur des triangles et en (c) une approximation à l'aide de fonctions d'ondelettes. L'approximation non linéaire (c) en ondelettes peut être interprétée comme la disposition de carrés de tailles variables, alors qu'en (b) on s'autorise à placer des triangles. Ceci permet d'avoir des fonctions de base aux supports allongés suivant la discontinuité et donc de ne pas avoir

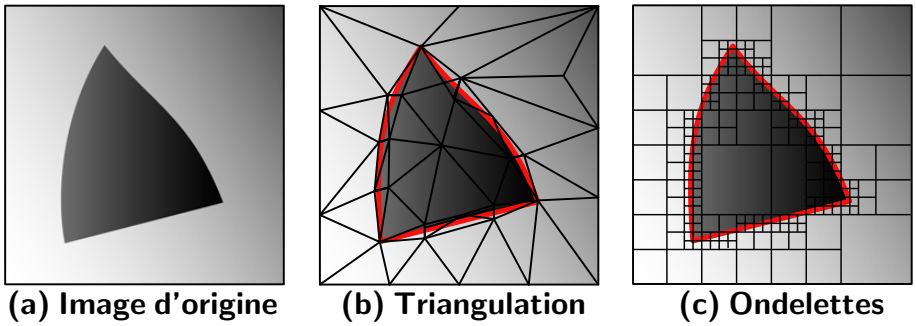


Fig. 1.12 *Approximation par triangulation et approximation par ondelettes (seuls les supports des fonctions de base utilisées sont représentés).*

à utiliser un grand nombre de petits carrés pour bien approcher cette forme géométrique.

On peut alors prouver que si la fonction est C^2 hors de contours eux même C^2, l'approximation $\widetilde{f}_{\mathrm{M}}$ avec des éléments finis linéaires sur M triangles vérifie

$$\|f - \widetilde{f}_{\mathrm{M}}\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{M}^{-2}, \tag{1.2}$$

où C est une constante qui ne dépend que de la fonction f. On obtient ainsi une nette amélioration par rapport à l'approximation en ondelettes (1.1).

Il est même possible d'obtenir un exposant $\mathrm{M}^{-\alpha}$ pour une régularité géométrique C^{α}, à condition d'utiliser des éléments finis d'ordre plus élevé, le long de domaines allongés comme le montre la figure 1.13.

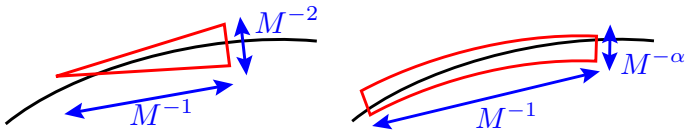


Fig. 1.13 *Éléments finis pour l'approximation autour d'une courbe.*

Cependant, ce schéma d'approximation suppose que l'on connaît à l'avance la position des courbes de discontinuité. Comme montré par Agarwal et Suri [2], la recherche d'une triangulation optimale est un problème NP-complet. Cependant, des algorithmes utilisant des heuristiques obtiennent de bons résultats, comme par exemple les progressive meshes de Hoppe [95], les algorithmes de Garland et Heckbert [85] ainsi que celui de Lindstom et Turk [121]. Des algorithmes gloutons du même type sont aussi utilisés en compression d'images, comme par exemple dans les travaux de Demaret et al. [62] et ceux de Dekel et al. [60].

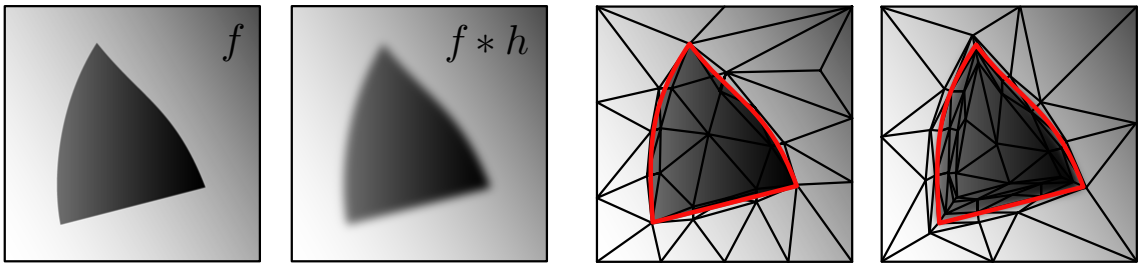


Fig. 1.14 *Approximation par triangulation d'une fonction sans et avec lissage.*

La plus grosse difficulté que doivent surmonter ces algorithmes est l'adaptation à un lissage a priori inconnu. La figure 1.14 montre les triangulations obtenues pour une image nette et pour une image lissée. Ces triangulations sont totalement différentes, car il faut non seulement placer les triangles au bon endroit mais en plus leur donner un aspect qui dépend totalement du lissage. La figure 1.15 montre l'aspect optimal que doit prendre un triangle en fonction du degré s de lissage.

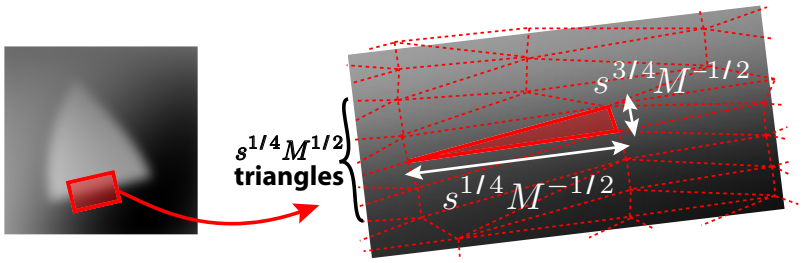


Fig. 1.15 *Aspect des triangles pour l'approximation d'un contour lissé avec un noyau de taille s.*

1.4.2 Analyse harmonique géométrique

Pour surmonter les problèmes de recherche explicite de la géométrie, de nouvelles approches ont été proposées qui exploitent des outils d'analyse harmonique.

Utilisation d'une base fixe. De nombreuses extensions des ondelettes ont été proposées pour obtenir des bases avec une grande sélectivité directionnelle. On peut citer par exemple la pyramide steerable de Simoncelli et al. [176], les brushlets de Meyer et Coifman [136] et les ondelettes complexes de Kingsbury [108]. Cette sélectivité permet de mieux prendre en compte la géométrie des images mais l'échantillonnage directionnel mal contrôlé empêche d'obtenir des résultats mathématiques pour l'approximation de fonctions géométriques.

La première construction réellement géométrique est celle de la frame de curvelets [31] de Candès et Donoho. Il s'agit d'une base fixe (elle ne dépend pas de l'image) qui permet d'approcher de façon presque optimale des fonctions ayant une régularité géométrique d'ordre C^2. Les fonctions de base de cette frame (voir figure 1.16) sont des fonctions localisées à la fois en espace et en fréquence. Le support des fonctions de base est allongé selon un ratio largeur=longueur^2 identique à celui des éléments finis utilisés pour l'approximation des fonctions C^2 par morceaux, voir la section 1.4.1. L'approximation f_{M} d'une fonction f ayant une régularité C^2 avec M curvelets vérifie

$$\|f - f_{\mathrm{M}}\|^2 \leqslant \mathrm{C}\, \log(\mathrm{M})^3\, \mathrm{M}^{-2}.$$

Ce résultat d'approximation est presque optimal et rejoint celui des triangulations adaptées, équation (1.2). Cependant, l'approximation dans une frame de Curvelets se calcule automatiquement à l'aide d'une transformée rapide et d'un seuillage des coefficients.

Les curvelets ont été appliquées à l'inversion d'opérateurs [33] et plus particulièrement à l'inversion de l'opérateur de tomographie [28], voir plus particulièrement le chapitre 5 à ce sujet. Des résultats d'optimalité ont été démontrés pour la représentation des opérateurs intégraux [29] et des opérateurs différentiels hyperboliques [30] par Demanet et Candès. Les

curvelets ont aussi été appliquées à l'étude d'image astronomiques [180] et au débruitage [179] par Stark et al..

Le résultat d'approximation dans une frame de curvelets est cependant difficile à mettre en oeuvre pour la compression d'images, principalement à cause de la nature continue des fonctions curvelets et au manque d'orthogonalité. De nouvelles constructions du frame de curvelets ont cependant été proposées [32] qui améliorent grandement ces deux points.

Fig. 1.16 *Exemple de fonctions de base du frame de Curvelets.*

La transformée en contourlets de Do et Vetterli [67] décompose une image à l'aide d'une combinaison de filtres multi-échelles et directionnels. Contrairement au frame de curvelet, les fonctions de base correspondantes sont construites directement dans un domaine discret à l'aide de bancs de filtres. L'esprit de la méthode est cependant similaire à celui des curvelets car il s'agit d'une base fixe avec une grande sélectivité directionnelle. D'autres constructions proposent aussi une extension des ondelettes à l'aide de filtrages directionnels comme par exemple les directionlets de Velisavljevic et al. [191].

Utilisation d'une base adaptée. Plutôt que construire une base fixe pour la représentation d'images géométriques, de nombreuses approches utilisent une base ou une approximation adaptée à l'image à approcher. Contrairement aux approches par éléments finis décrites à la section 1.4.1, ces méthodes disposent d'algorithme de calcul rapide, qui exploite la structure hiérarchique du dictionnaire de bases ou de la segmentation utilisée pour définir l'approximation.

Le modèle d'horizon formé de fonctions régulières par morceaux a été introduit par Donoho [68] et une représentation par wedglets est proposée pour approcher ce type de fonctions.

Une segmentation de l'image à l'aide d'un arbre de subdivision est construite par Shukla et al. [175] et utilise une approximation polynomiale par morceaux, ce qui permet de capturer des régularités d'ordres plus élevés.

Les wedgeprints de Wakin et al. [197] ne correspondent pas à une décomposition dans une base orthonormée mais permettent un codage adapté à la géométrie des coefficients d'une décomposition en ondelettes. Ce codage prend en compte les dépendances à travers les échelles des coefficients en ondelettes près d'un contour. Cette dépendance est analysée à l'aide de footprints 2D qui étendent la notion introduite par Dragotti et Vetterli [76].

Les ondelettes ENO bidimensionnelles sont utilisées par Matei et Cohen [133] pour améliorer la représentation en ondelettes à l'aide d'un schéma de subdivision non-linéaire près des singularités.

1.4.3 LA TRANSFORMÉE EN BANDELETTES

La transformée en bandelettes, introduite par Le Pennec et Mallat dans [115], construit une base adaptée au contenu géométrique d'une image. Pour des fonctions avec une régularité géométrique, l'approximation dans une meilleure base de bandelettes permet d'avoir une décroissance asymptotique de l'erreur optimale. La construction originale de [115] effectue d'abord une déformation locale sur des sous-carrés pour aligner la singularité avec la direction horizontale ou verticale. Une étape de bandelétisation utilisant des produits tensoriels d'ondelettes est ensuite appliquée pour absorber la régularité le long de la géométrie.

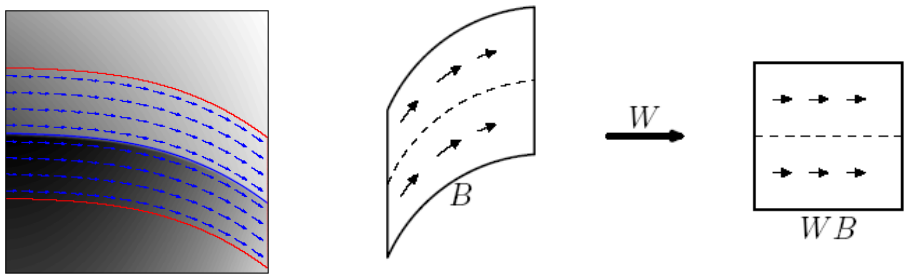


Fig. 1.17 *Exemple de modèle d'horizon et déformation du domaine selon un flot géométrique.*

La construction d'une base de bandelettes s'effectue sur un domaine B où la fonction f considérée est un modèle d'horizon, comme montré à la figure 1.17. La bande B contient une unique courbe de singularité, que l'on peut approcher par une courbe paramétrée (par exemple horizontalement) par $x_2 = \gamma(x_1)$. L'opérateur de déformation

$$\forall\, x \in \mathrm{B}, \quad w(x) = (x_1, x_2 - \gamma(x_1))$$

permet de définir le domaine déformé $\mathrm{WB} \overset{\text{def.}}{=} w(\mathrm{B})$ (supposé carré), ainsi que la fonction warpée $\mathrm{W}f(x) = f(w^{-1}(x))$.

À partir d'une fonction d'ondelette 1D ψ associée à une fonction d'échelle φ on peut définir une base d'ondelettes déformées de $\mathrm{L}^2(\mathrm{B})$

$$\left\{\psi^k_{j,n}(w(x)) \;\backslash\; j \leqslant j_{\mathrm{WB}}, \quad n \in \mathrm{I}_{\mathrm{WB}} \quad \text{et} \quad k \in \{\mathrm{V}, \mathrm{H}, \mathrm{D}\}\right\},$$

où $2^{j_{\mathrm{WB}}}$ est la taille du carré WB et I_{WB} est un ensemble d'indices de positions. Les ondelettes verticales ψ^{V}_{jn} et diagonales ψ^{D}_{jn} possèdent des moments nuls le long de γ, elles sont donc adaptées pour l'approximation de f qui est régulière le long de γ. Ce n'est pas le cas des ondelettes horizontales ψ^{H}_{jn}, qu'il faut remplacer par de nouvelles fonctions anisotropes définies par

$$\forall\, j_1, j_2 \leqslant j_{\mathrm{WB}}, \qquad \psi^{\mathrm{H}}_{j_1 j_2 n}(w(x)) \overset{\text{def.}}{=} \psi_{j_1 n_1}(x_1)\psi_{j_2 n_2}(x_2 - \gamma(x_1)).$$

On obtient ainsi la base orthonormée de bandelettes de $\mathrm{L}^2(\mathrm{WB})$.

Pour approcher une fonction f avec une régularité géométrique comme définie à la section 1.1.1, il faut segmenter le domaine $[0, 1]$ en carrés à l'intérieur desquels la fonction f est un modèle d'horizon. La figure 1.18 gauche, montre une telle segmentation utilisant un quadtree. Ce procédé sera repris en détail lors de la construction des bases de bandelettes orthogonales à la section 2.2.1.

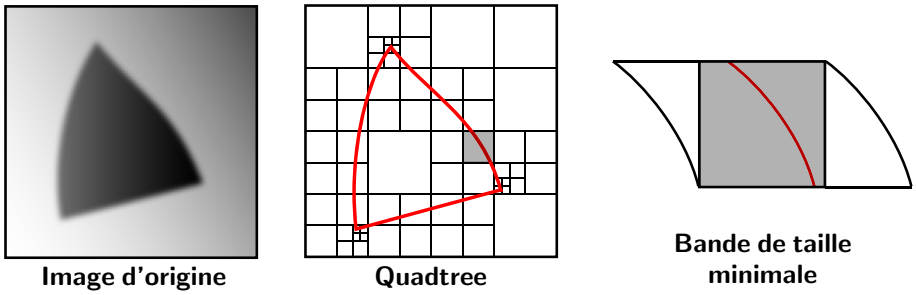


Fig. 1.18 *Exemple de segmentation en quadtree et bande de taille minimale pour la construction de la base de bandelette.*

Pour pouvoir appliquer la construction précédente, il faut agrandir chaque petit carré de la segmentation pour obtenir une bande B que l'on peut ensuite warper, comme le montre la figure 1.18, droite. On obtient une base de bandelettes de $\mathrm{L}^2([0,1]^2)$ en restreignant l'ensemble des fonctions obtenues sur chaque bande aux carrés de la segmentation.

1.5 GUIDE DE LECTURE

1.5.1 BANDELETTES ORTHOGONALES (CHAPITRE 2)

Le premier outil introduit dans cette thèse pour représenter des images géométriques sont les bases orthogonales de bandelettes. Cette classe de bases orthonormées est adaptée à l'étude des fonctions régulières hors de contours réguliers, comme décrit à la définition 1.1.1.

Géométrie Discrète. Les bandelettes orthogonales sont construites sur un domaine discret, celui des coefficients d'ondelettes. Ceci permet d'unifier à la fois la théorie mathématique (qui fait l'objet des chapitres 2.1 et 2.2) et la pratique numérique sur des images ayant une précision finie (chapitre 2.3).

En effet, il faut garder à l'esprit que, même si notre modèle mathématique suppose l'existence d'une fonction $f \in \mathrm{L}^2$, en pratique, nous avons accès uniquement à un vecteur de coefficients discrétisés, noté $\overline{f}$. Ce procédé de discrétisation concerne aussi bien la vision humaine (acquisition par les cônes de la rétine) que la prise de photos numériques (acquisition par les capteurs CCD). On peut modéliser cette étape de discrétisation comme une projection sur un ensemble de fonctions d'échelles translatées.

À la figure 1.19 on peut voir une fonction d'ondelette 1D ψ, la fonction d'échelle correspondante et l'effet de la discrétisation sur une fonction $f \in \mathrm{L}^2$ (en réalité une image à haute résolution $2^{-\mathrm{J}} = 512$) par projection à la résolution $2^{-\mathrm{J}} = 32$.

Géométrie multi-échelles. La représentation en ondelettes est à la fois creuse et structurée, ce qui est à la base du succès des standards de compression tels JPEG2000 [48]. Dans le cas d'une image géométrique, comme on peut le voir à la figure 1.20, les grands

Fig. 1.19 *Discrétisation d'une fonction 2D. Chaque pixel correspond à un coefficient $\overline{f}[n]$ de la projection de f sur une fonction d'échelle.*

coefficients sont localisés à chaque échelle près des courbes de singularité. En effet, si le support d'une ondelette ψ^k_{jn} ne rencontre pas une telle courbe, le coefficient d'ondelettes $f^k_j[n]$ va être petit.

On peut donc se concentrer sur les grands coefficients, qui sont localisés dans des tubes de largeur $m2^j$ (où m est la taille du support des ondelettes ψ^k) autour des courbes de singularité. Ainsi on a remplacé un problème 2D (l'approximation de la fonction f) par un problème essentiellement 1D (l'approximation des coefficients $f^k_j[n]$ autour des singularités).

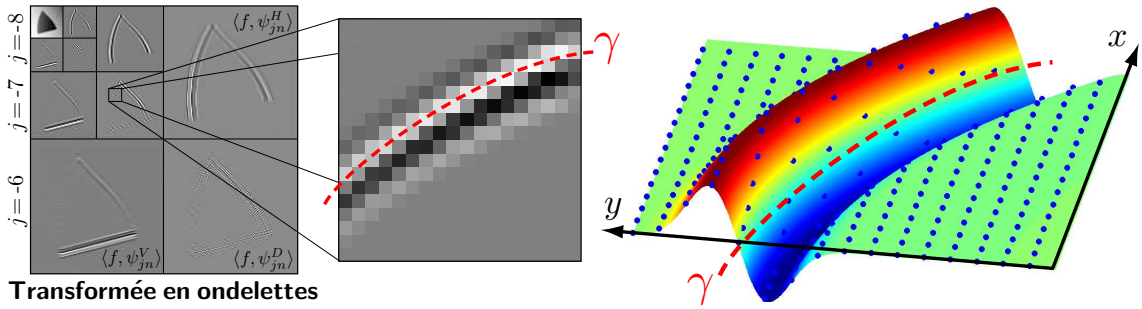


Fig. 1.20 *Les coefficients en ondelettes sont des échantillons d'une fonction régularisée.*

Pour quantifier précisément la régularité de cet ensemble de coefficients, on remarque que l'on peut les écrire comme des échantillons d'une fonction régularisée

$$\langle f,\, \psi^k_{jn} \rangle = f * \psi^k_j(n_1 2^j, n_2 2^j) \qquad \text{où} \qquad \psi^k_j(x) = \frac{1}{2^j}\psi^k(-2^{-j}x).$$

À la figure 1.20, droite, on peut voir la fonction continue $f * \psi^k_j$, qui oscille sur un domaine de largeur $m2^j$. Lorsque l'on se déplace le long de la courbe de singularité γ, la fonction f tout comme les échantillons $f^k_j[n]$ varient peu. Grâce au lissage par le noyau ψ^k_j, on peut également dévier légèrement de γ sans pour autant faire varier les coefficients $f^k_j[n]$ de façon importante.

Construction des bases orthogonales de bandelettes. Le chapitre 2 rentre dans le vif du sujet en présentant la construction des bases orthonormées de bandelettes.

La section 2.1 présente un schéma d'approximation simple par bandelettes polynomiales d'une image géométrique. Ce schéma ne donne pas naissance à un algorithme de calcul rapide et on peut le comparer aux méthodes d'approximation par éléments finis présentées

à la section 1.4.1. Cependant, ce schéma suit fidèlement la méthodologie des bandelettes orthogonales, puisqu'il est construit sur le domaine discret des coefficients en ondelettes, et utilise des vecteurs de base ayant un support qui suit la géométrie de l'image.

La section 2.3 décrit et analyse la construction des bases orthogonales de bandelettes. Contrairement aux bandelettes polynomiales, l'approximation dans une meilleure base de bandelettes est effectuée par un algorithme rapide. L'approximation dans cette meilleure base est asymptotiquement aussi efficace que l'approximation par bandelettes polynomiales.

Une base orthogonale de bandelettes $\mathcal{B}(\Gamma)$ est construite à l'aide de bases discrètes $\mathcal{B}(\Gamma_j^k)$ de chaque espace ℓ_j^2 de coefficients en ondelettes. Chaque base $\mathcal{B}(\Gamma_j^k)$ est paramétrée par $\Gamma_j^k = (\mathrm{Q}, \{\widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}}\}_{\mathrm{S}\in\mathrm{Q}})$, où Q est une segmentation en quadtree de $[0,1]^2$ et $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}}$ est une courbe géométrique. La figure 1.21 montre un ensemble de coefficients d'ondelettes qui sont déformés suivant une géométrie approchée. Les vecteurs de base sont construits à l'aide d'espaces de polynômes par morceaux discrets sur ce domaine déformé.

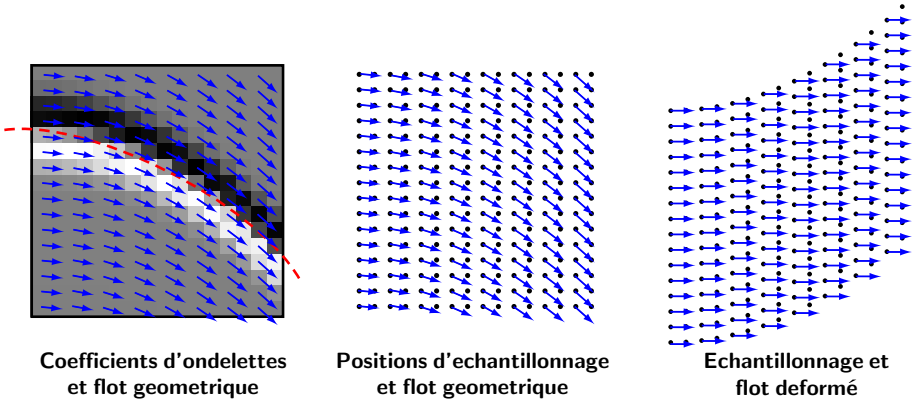


Fig. 1.21 *Déformation de l'échantillonnage des coefficients d'ondelettes suivant un flot géométrique.*

Le rôle du quadtree est de fournir une segmentation de l'ensemble des coefficients en carrés isolant une unique singularité et ayant une longueur b optimale pour la qualité d'approximation désirée. Cette taille est identique à la longueur des tubes nécessaires à l'approximation par bandelettes polynomiales. La largeur a des bandes n'a pas à être fixée dans cette approximation par base orthonormée. Elle est en effet automatiquement déterminée en conservant les plus grands coefficients dans une base construite dans chaque carré S du quadtree.

Résultat d'approximation et de compression. Pour construire de façon algorithmique et rapide un jeu de paramètres $\{\Gamma_j^k\}_{k,j}$ efficace pour l'approximation d'une fonction géométrique f, on procède par minimisation d'un Lagrangien prenant en compte à la fois la qualité de l'approximation et le nombre de coefficients nécessaires pour décrire cette approximation. La section 2.2.6 donne la définition de ce Lagrangien et prouve qu'une meilleure base pour ce Lagrangien donne une décroissance asymptotique optimale de l'erreur d'approximation.

Si f est une fonction de classe C^α à l'extérieur de contours C^α alors dans une base adaptée de bandelettes la meilleure approximation f_{M} avec M termes vérifie

$$\|f - f_{\mathrm{M}}\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{M}^{-\alpha}.$$

où C est une constante qui dépend uniquement de f. Ce résultat fait l'objet du théorème 2.15.

Pour utiliser ce schéma d'approximation en compression d'images, il faut quantifier les coefficients de bandelettes et coder les paramètres de géométrie à part. On obtient le résultat suivant d'approximation dans une base adaptée de bandelettes

$$\|f - f_{\mathrm{R}}\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant \mathrm{C}\ |\log(\mathrm{R})|^{\alpha}\ \mathrm{R}^{-\alpha},$$

où R est le nombre de bits nécessaires pour coder l'approximation f_{R} de f dans une base adaptée de bandelettes.

Ce résultat montre que la décroissance asymptotique de l'erreur commise par un codage en bandelettes atteint la borne inférieure de Kolmogorov à un facteur $|\log(\mathrm{R})|^{\alpha}$ près.

Améliorations par rapport aux bandelettes de première génération. Cette construction améliore la construction originale des bases de bandelettes de Le Pennec et Mallat [115] car elle est construite directement sur le domaine des coefficients d'ondelettes.

L'analyse mathématique est ainsi simplifiée car on définit une géométrie indépendante à chaque échelle.

Le fait de travailler directement sur des coefficients discrets améliore le comportement de l'algorithme sur des images réelles et apporte une amélioration pour la compression d'images et de surfaces.

Enfin, l'étape de bandelétisation est implémentée par une cascade d'opérateurs orthogonaux. Ceci permet d'obtenir des bases à la fois orthogonales et formées de fonctions régulières. L'orthogonalité permet de contrôler de façon exacte l'erreur d'approximation et la régularité des fonctions assure une reconstruction plus agréable pour l'œil.

Toutes ces propriétés sont importantes dans de nombreuses applications, comme par exemple la compression d'images (chapitre 3) ou de surfaces (chapitre 4) et l'inversion d'opérateurs (chapitre 5).

Outre ces améliorations, cette thèse expose aussi un nouveau cadre pour l'approximation de fonctions géométriques. En effet, la géométrie est analysée et approchée sur un domaine multirésolution, en l'occurrence celui des coefficients d'ondelettes. Le fait de travailler sur les coefficients d'ondelettes permet de se focaliser sur la vraie difficulté qui correspond aux zones non uniformément régulières, près des singularités.

Algorithme de calcul rapide. La section 2.3 présente l'algorithme de transformée en bandelettes rapide qui permet d'obtenir de manière effective cette approximation.

Sur chaque carré S, la meilleure géométrie est obtenue en testant toutes les géométries quantifiées possibles.

La construction de la segmentation en quadtree se réalise à l'aide d'un algorithme qui commence par une segmentation en carrés de petite largeur et essaie de regrouper les carrés quatre par quatre lorsque ceci fait décroître le Lagrangien. Cette procédure est décrite à la section 2.3.2 et repose sur la propriété d'additivité du Lagrangien.

La complexité numérique de l'algorithme de transformée d'une image de $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ pixels dans une meilleure base de bandelettes est de l'ordre de $\mathrm{O}(\mathrm{N}^2\,\mathrm{T}^{-2(p-1)})$, où T est le seuil

d'approximation et $p \geqslant \alpha$ est le nombre de moments nuls de la transformation.

1.5.2 COMPRESSION D'IMAGES (CHAPITRE 3)

L'algorithme de transformée en bandelettes orthogonales présenté à la section 2.3.2 est utilisable tel quel pour comprimer une image. La méthode consiste à quantifier et coder les coefficients en bandelettes et à coder à part les segmentations en quadtree ainsi que les géométries dans chaque carré.

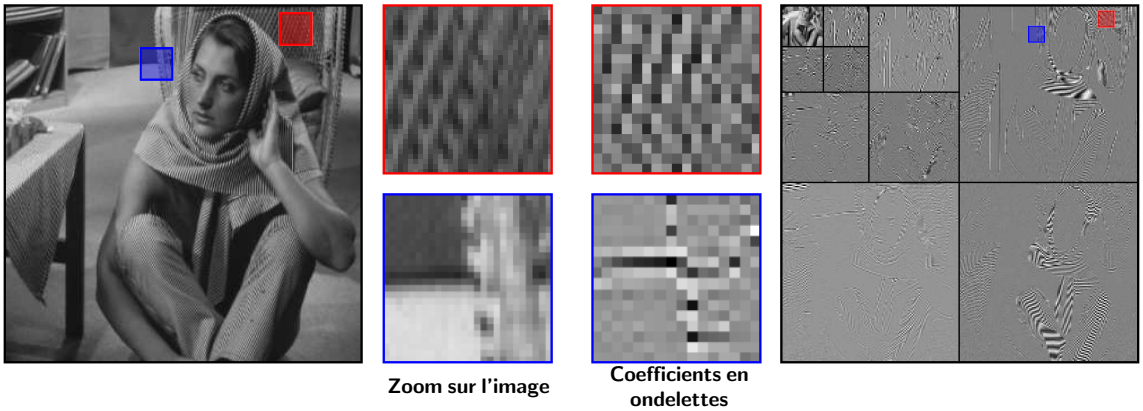


Fig. 1.22 *Configurations complexes de coefficients d'ondelettes. A gauche on peut voir une image ainsi que deux zooms sur des carrés avec une géométrie périodique (haut) ou une jonction (bas). A droite on peut voir des zooms sur les coefficients d'ondelettes à la plus fine échelle correspondant aux même carrés.*

Cependant, la complexité de la géométrie des images naturelles est bien souvent hors du modèle régulier par morceaux qui sert de base à l'analyse en bandelettes. Comme on peut le voir à l'image 1.22, il y a beaucoup d'effets chaotiques dus aux interactions entre la grille d'échantillonnage et une géométrie courbe et variable. Sans remettre en question totalement notre construction des bandelettes orthogonales, on peut simplifier l'algorithme et essayer d'effectuer des transformées un peu plus ad-hoc.

On obtient ainsi un codeur en bandelettes modifié qui code de façon entropique les coefficients de la décomposition et transmet à part les informations de géométrie. La comparaison avec un codeur similaire de coefficients d'ondelettes montre un gain d'environ 1.5 dB en faveur de la transformée en bandelettes. La figure 1.23 montre qu'il y a aussi un gain important en terme de qualité visuelle dû au meilleur respect de la géométrie.

Les meilleurs codeurs en ondelettes tel JPEG2000 utilisent un codage contextuel complexe des coefficients en ondelettes [48]. Les résultats de ces codeurs avancés sont très similaires à ceux du codeur en bandelettes qui se contente de coder chaque coefficient de manière indépendante de ses voisins. L'approche qu'utilise JPEG2000 pour coder les coefficients est une façon astucieuse de prendre en compte la redondance géométrique des coefficients en ondelettes à l'intérieur d'une même échelle de transformation. Ce type de codage contextuel pourrait aussi être envisagé pour la transformée en bandelettes bien que son implantation soit plus difficile.

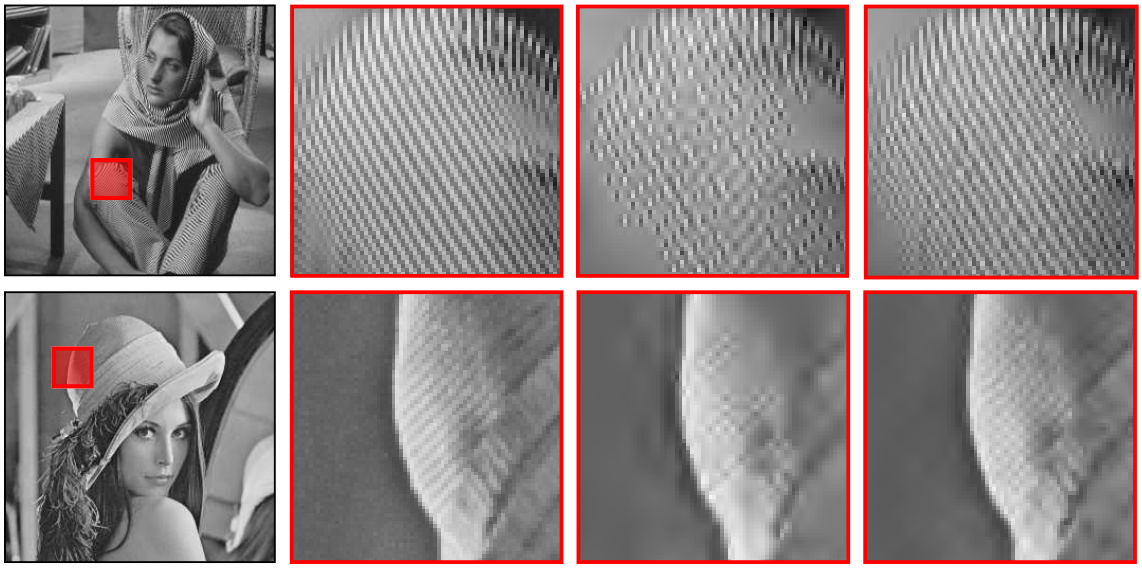


Fig. 1.23 *Comparaison de la compression en ondelettes et en bandelettes pour un taux de 0.2b̃its/pixel.*

1.5.3 Compression de surfaces (chapitre 4)

Le chapitre 4 applique la transformée en bandelettes orthogonales à la compression de surfaces 3D. Ces données sont importantes pour la synthèse d'images et leur quantité toujours grandissante nécessite des algorithmes de compression avancés.

Les surfaces à comprimer sont peu texturées car ces détails fins sont pris en compte par d'autres types de données (textures plaquées sur la surface, fonction de reflectance, etc.). Il n'y a pas de phénomènes d'occlusion et bien souvent les discontinuités de tangence de la surface sont bien marquées, donc bien analysées par la transformée en bandelettes. Bien sûr, la complexité de la topologie d'une surface (trous, bords, distortions isopérimétriques) ne doit pas être sous-estimée mais c'est principalement hors du cadre de cette thèse. Ce chapitre ne se préoccupe pas des problèmes de paramétrisation et échantillonnage de la surface mais montre que la transformée en bandelettes est un outil de choix pour la compression de surfaces avec une régularité géométrique.

1.5.4 Inversion de la tomographie (chapitre 5)

Le chapitre 5 applique l'algorithme de transformée en bandelettes à l'inversion de l'opérateur de tomographie R. Ce travail utilise les résultats obtenus par Charles Dossal dans sa thèse [75] dans le cadre du débruitage d'images géométriques.

Comme l'explique Donoho [71], la transformée en ondelettes est un outil puissant pour l'inversion de la tomographie car la transformée de Radon est presque diagonalisée par une base d'ondelettes. Le dictionnaire de bandelettes orthogonales est ainsi bien adapté à l'inversion de la tomographie car les fonctions bandelettes sont des combinaisons d'ondelettes à échelle fixée. En utilisant la capacité des bandelettes à bien représenter une fonction géométrique, nous étendons les résultats d'estimation de Donoho [71] et de Donoho et Candès

[28] à des fonctions ayant une régularité géométrique quelconque.

Si f est une fonction de classe C^α hors de contours qui sont des courbes C^α, on construit un estimateur $\hat{f}$ de f à partir des mesures $Y = Rf + W$ où W est un bruit blanc gaussien. On montre qu'en seuillant de manière adaptée à chaque échelle les coefficients de bandelettes de $R^{-1}Y$, on commet avec forte probabilité une erreur

$$\|f - \widehat{f}\|^2 \leqslant C\ |\log(\sigma)|^{\frac{1}{2\alpha+1}}\ \sigma^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}.$$

où C est une constante qui ne dépend que de f et σ est la variance du bruit W.

Des applications numériques montrent que notre algorithme rapide d'inversion se comporte bien sur des données réelles ou synthétiques, améliorant les résultats d'inversion obtenus avec une frame de curvelets par Candès et Donoho [28].

1.5.5 Analyse de textures géométriques (chapitre 6)

Dans le dernier chapitre, nous identifions une classe de textures géométriques susceptibles d'être analysées à l'aide d'outils d'analyse harmonique. La figure 1.24 montre quelques exemples de ces textures, qui possèdent une géométrie turbulente.

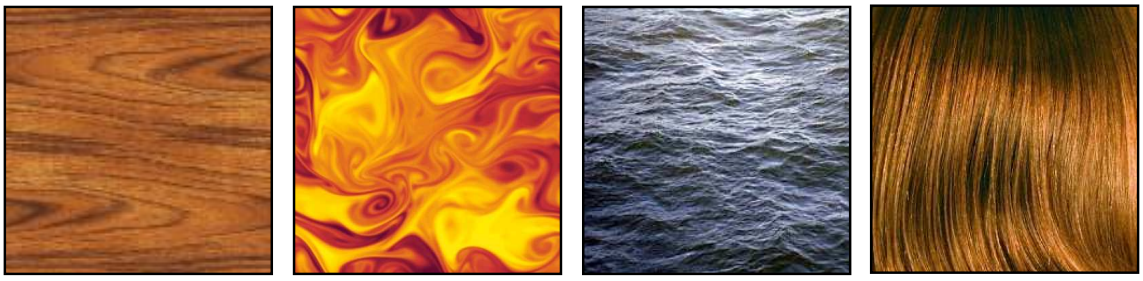


Fig. 1.24 *Exemple de textures avec une géométrie turbulente.*

La régularité de ces images diffère du modèle d'images régulières par morceaux introduit à la section 1.1.1. La régularité que l'on souhaite capturer persiste sur une longue distance et suit un flot turbulent donnant lieu à des phénomènes de chocs et de singularités.

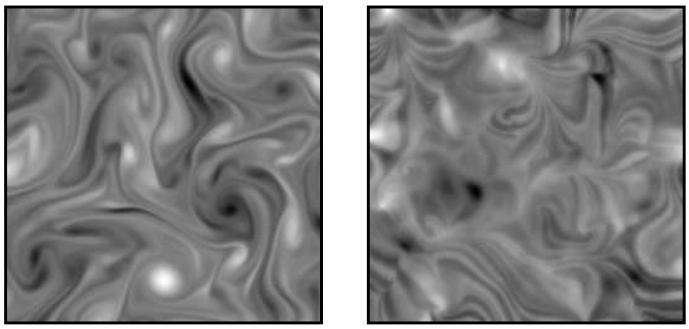
La transformée en bandelettes orthogonales n'est pas adaptée pour analyser ce type de régularité. La subdivision du domaine suivant un quadtree est trop rigide et ne se prête pas à une analyse statistique. De même, la subdivision fixe utilisée pour la compression d'images (voir section 1.5.2) réduit beaucoup trop la longueur des géométries prises en compte.

Pour pallier ces problèmes, nous avons utilisé une nouvelle classe de transformation en bandelettes développée et brevetée par Stéphane Mallat au sein de la société Let It Wave [130]. Cette transformée utilise un champ d'association géométrique multi-échelles qui est calculé à l'aide d'un critère d'appariement de voisinages. Ce champ multi-échelles permet d'exploiter des corrélations à des distances de plus en plus longues.

Pour l'analyse de textures, nous avons utilisé une instance particulière de cette transformée qui permet d'avoir une quasi-invariance par translation et une grande liberté dans le choix des directions d'appariement.

Nous validons l'efficacité de cette transformée à l'aide d'une application à la synthèse de

textures qui consiste à créer une nouvelle texture ressemblant à un exemple donné. La classe de méthodes retenue modélise les textures intéressantes à l'aide des histogrammes de coefficients transformés.



Texture d'origine **Texture synthetisée**

Fig. 1.25 *Synthèse de texture avec synthèse de la géométrie et des coefficients de bandelettes.*

L'enjeu est alors de modéliser avec des histogrammes relativement creux à la fois les coefficients en bandelettes et la géométrie qui paramétrise cette transformée. Ainsi, une synthèse réussie nécessite une réelle modélisation de la géométrie de la texture. À la figure 1.25, on peut voir un exemple de texture géométrique synthétisée à l'aide de cet algorithme.

Chapitre 2

Bandelettes orthogonales

Dans ce chapitre, nous présentons la construction des bandelettes orthogonales. La section 2.1 décrit un schéma d'approximation simplifié qui ne correspond pas à une décomposition dans une base orthonormée. La section 2.2 présente les bases de bandelettes orthogonales proprement dites, ainsi que les stratégies de meilleures bases associées. Enfin la section 2.3 décrit l'algorithme rapide de transformée en bandelettes discrètes.

2.1 Approximation avec des bandelettes polynomiales

Dans cette section, nous construisons une manière simple mais efficace de capturer la régularité géométrique dans le domaine des ondelettes. Pour chaque échelle de la transformée en ondelettes, nous construisons une approximation polynomiale par morceaux à l'intérieur de fines bandes qui suivent la géométrie.

2.1.1 Notations

Nous allons utiliser à la fois des normes fonctionnelles

$$\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{A})} \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{\mathrm{A}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \qquad \text{pour} \qquad \mathrm{A} \subset [0,1]^2,$$

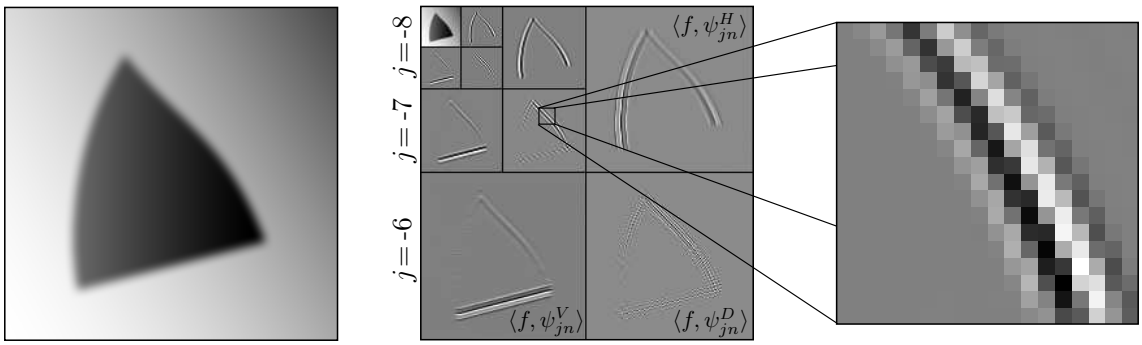
et des normes discrètes

$$\|f_j^k\|^2_{\ell^2_j(\mathrm{A})} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{(2^j n)\in \mathrm{A}} \left| f_j^k[n] \right|^2 \qquad \text{pour} \qquad \mathrm{A} \subset [0,1]^2,$$

où $\ell^2_j(\mathrm{A})$ est l'espace des vecteurs $\{g[n]\}_{(2^j n)\in \mathrm{A}}$. Par exemple, les coefficients de la transformée en ondelettes f_j^k à une échelle donnée 2^j et orientation k d'une fonction f appartiennent à $\ell^2_j([0,1]^2)$. Dans la suite, on notera $f_j \in \ell^2$ lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible sur l'échelle 2^j ou l'orientation k.

2.1.2 RÉGULARITÉ DANS LE DOMAINE DES ONDELETTES

Une transformée en ondelettes est capable de bien représenter les parties régulières d'une fonction. Sur figure 2.1 (b), on peut constater que les seuls coefficients en ondelettes non-nuls sont situés au voisinage des singularités géométriques. Pour obtenir une meilleure approximation de f, nous devons nous concentrer sur ces coefficients à une échelle 2^j et orientation k fixée, pour les approcher à l'aide d'un petit nombre de paramètres.



(a) Fonction originale **(b) Transformée en ondelettes** **(c) Zoom**

Fig. 2.1 *Une image avec de la régularité géométrique et ses coefficients en ondelettes.*

Cette étape de bandelétisation enlève ainsi la correlation qui existe entre les coefficients en ondelettes près des singularités curvilignes. Pour pouvoir enlever cette redondance, il nous faut trouver une source de régularité dans la transformée en ondelettes de la fonction et construire un schéma d'approximation adapté. Il y a en fait deux sources de régularité que nous pouvons exploiter :

- **Régularité à cause de l'ondelette** : des produits scalaires avec un ensemble de fonctions translatées peuvent se calculer à l'aide d'une *convolution* :

$$\langle f,\, \psi^k_{jn} \rangle = f * \psi^k_j(n_1 2^j, n_2 2^j) \qquad \text{où} \qquad \psi^k_j(x) = \frac{1}{2^j}\psi^k(-2^{-j}x),$$

  et où $k \in \{\mathrm{V}, \mathrm{H}, \mathrm{D}\}$. Cette écriture est vraie pour les fonctions ondelettes ψ^k_{jn} dont le support est inclus dans $[0,1]^2$. Pour les ondelettes qui intersectent le bord du carré, on considère une extension périodique des fonctions ainsi qu'une convolution périodique. Ainsi, bien que la fonction d'origine f soit singulière au niveau d'un contour, les coefficients en ondelettes sont des échantillons d'une fonction régularisée f^k_j obtenue en lissant la fonction d'origine avec le noyau ψ^k_j qui a une largeur de l'ordre de 2^j. Ce lissage assure une régularité dans la direction orthogonale à la géométrie. Cette régularité est importante car elle nous permet de faire quelques erreurs dans la localisation de la géométrie sans trop d'influence sur l'erreur d'approximation.
- **Régularité le long de la géométrie** : la fonction f est régulière dans la direction de la géométrie. Ainsi, lorsque l'on se déplace parallèlement à la courbe de singularité, la fonction transformée $f * \psi^k_j$ varie lentement. Nous utilisons cette régularité pour comprimer les coefficients en ondelettes non-nuls restants.

Dans la suite, on note

$$\mathrm{F}_j \stackrel{\text{def.}}{=} f * \psi^k_j \qquad \text{et} \qquad f^k_j = \mathrm{F}_j(x_n), \qquad \text{où} \qquad x_n \stackrel{\text{def.}}{=} 2^j n.$$

2.1.3 RÉGULARITÉ DANS LE DOMAINE EN ONDELETTES DÉFORMÉ

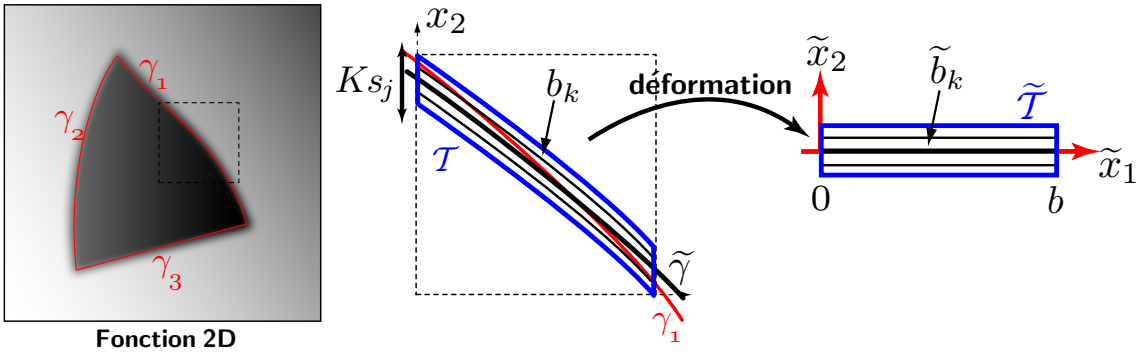


Fig. 2.2 *Déformation locale dans un tube.*

Pour créer un schéma d'approximation discret dans le domaine des ondelettes, nous définissons un tube $\mathcal{T}$ autour des courbes de singularité γ_i, comme montré à la figure 2.2. Nous supposons que γ_i est paramétré horizontalement par une fonction γ sur un intervalle $x_1 \in \mathrm{I}$ de longueur b et nous considérons une géométrie $\widetilde{\gamma}$ approchant γ. Le tube $\mathcal{T}$ est défini autour de la géométrie approchée

$$\mathcal{T} \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x_1, x_2) \setminus x_1 \in \mathrm{I} \quad \text{et} \quad |x_2 - \widetilde{\gamma}(x_1)| \leqslant \mathrm{K}\, s_j\}\,,$$

avec $s_j \stackrel{\text{def.}}{=} \max(s, 2^j)$. Ceci nous permet de définir une fonction déformée

$$\forall\, \widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{T}} \stackrel{\text{def.}}{=} w(\mathcal{T}), \quad \mathrm{F}_{j\mathrm{W}}(\widetilde{x}) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{F}_j(w^{-1}(\widetilde{x})). \tag{2.1}$$

Si la géométrie approchée ne dévie pas trop de la géométrie d'origine, on peut borner les dérivée de la fonction déformée à l'aide de ce lemme, déjà démontré dans l'article de Le Pennec et Mallat [115].

Lemme 2.1 Soit $g \stackrel{\text{def.}}{=} \widetilde{g} * \mathrm{H}_\sigma$, où $\widetilde{g}$ est une fonction de classe C^α dans $[0, b]^2 - \{\gamma_1\}$ et γ_1 est un contour paramétré horizontalement par γ. Le noyau est $\mathrm{H}_\sigma = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{H}(x/\sigma)$ où H est de classe C^α et vérifie $\int |\mathrm{H}| = 1$. Soit $\widetilde{\gamma}$ une géométrie approchée vérifiant

$$\forall\, x \in [0, b], \qquad |\gamma(x) - \widetilde{\gamma}(x)| \leqslant \mathrm{C}_1\, b^\alpha,$$

où C_1 est une constante qui ne dépend que de γ. Alors la fonction déformée

$$\forall\, x, \quad g_{\mathrm{W}}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} g(x_1, x_2 + \widetilde{\gamma}(x_1))$$

vérifie

$$\forall\, i_1 \leqslant \alpha,\ \forall i_2 \leqslant \beta, \qquad \left|\frac{\partial^{i_1+i_2} g_{\mathrm{W}}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}\right| \leqslant \mathrm{C}\, \|g\|_{\mathrm{C}^\alpha}\, \|\gamma\|_{\mathrm{C}^\alpha}\, \sigma^{-i_1/\alpha - i_2}, \tag{2.2}$$

où C est une constante qui ne dépend ni de σ ni de b.

On peut appliquer ce résultat pour quantifier la régularité de la fonction F_j à l'intérieur de $\mathcal{T}$ comme suit.

Proposition 2.2 Soit f une fonction ayant une régularité géométrique C^α. Soit $\mathrm{F}_{j\mathrm{W}}$ la fonction déformée à l'intérieur d'un tube $\widetilde{\mathrm{T}}$ suivant une singularité approchée $\widetilde{\gamma}$ satisfaisant

$$\forall\, x \in [0, b], \qquad |\gamma(x) - \widetilde{\gamma}(x)| \leqslant \mathrm{C}_1\, b^\alpha,$$

où C_1 est une constante qui ne dépend que de γ. Soit $s_j \stackrel{\text{def.}}{=} \max(s, 2^j)$. La fonction $\mathrm{F}_{j\mathrm{W}}$ définie à l'équation (2.1) a ses dérivées bornées par

$$\forall\, i_1 \leqslant \alpha,\ \forall\, i_2 \leqslant \beta, \quad \forall\, \widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{T}}, \qquad \left| \frac{\partial^{i_1+i_2} \mathrm{F}_{j\mathrm{W}}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}(\widetilde{x}) \right| \leqslant \mathrm{C}\, 2^j\, s_j^{-i_1/\alpha - i_2}, \tag{2.3}$$

où $\beta > \alpha$ est la régularité des fonctions d'ondelettes ψ^k et C est une constante qui ne dépend que de f.

Preuve. Comme on l'a déjà mentionné, il nous faut exploiter la définition de F_j comme une convolution, puisque l'on a $\mathrm{F}_j = \widetilde{f} * h_s * \psi_j$. Il nous faut alors distinguer deux cas

– Si $2^j \geqslant s$, alors on peut appliquer le résultat du lemme 2.1 à la fonction

$$g \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{C}_\psi\, 2^j\, \widetilde{f} * h_s \qquad \text{convoluée contre le noyau} \qquad \mathrm{H}_\sigma \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{C}_\psi^{-1}\, 2^{-j}\, \psi_j.$$

Cette fonction correspond à un noyau valide H dilaté par $\sigma = 2^j$ si l'on pose

$$\mathrm{C}_\psi = \|\psi\|_{\mathrm{L}^1} \stackrel{\text{def.}}{=} \int |\psi|,$$

qui est une constante. L'équation 2.2 nous apporte la majoration suivante

$$\left\| \frac{\partial^{i_1+i_2} \mathrm{F}_{j\mathrm{W}}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}} \right\|_\infty \leqslant \mathrm{C}_f\, \mathrm{C}_\psi\, 2^j\, 2^{-j(i_1/\alpha + i_2)},$$

en utilisant le fait que $\|g\|_{\mathrm{C}^\alpha(\Lambda)} = \|\mathrm{C}_\psi\, 2^j\, \widetilde{f} * h_s\|_{\mathrm{C}^\alpha(\Lambda)} = \mathrm{C}_f\, \mathrm{C}_\psi\, 2^j$, où l'on a noté $\Lambda = \mathrm{T} - \gamma$.

– Si $2^j < s$, alors on peut appliquer le résultat du lemme 2.1 à la fonction

$$g \stackrel{\text{def.}}{=} \widetilde{f} * \psi_j \qquad \text{convoluer contre le noyau} \qquad \mathrm{H}_\sigma \stackrel{\text{def.}}{=} h_s \qquad \text{avec} \qquad \sigma \stackrel{\text{def.}}{=} s.$$

L'équation 2.2 nous assure la majoration suivante

$$\left\| \frac{\partial^{i_1+i_2} \mathrm{F}_{j\mathrm{W}}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}} \right\|_\infty \leqslant \mathrm{C}_f 2^j s^{-i_1/\alpha - i_2},$$

puisque l'on a $\|g\|_{\mathrm{C}^\alpha(\Lambda)} = \|\widetilde{f} * \psi_j\|_{\mathrm{C}^\alpha(\Lambda)} \leqslant 2^j\, \mathrm{C}_f$.

On obtient ainsi la borne souhaitée dans tous les cas considérés. ∎

2.1.4 Approximation polynomiale sur des domaines en forme de bandes

Construction d'un ensemble de bandes On considère maintenant un tube $\mathcal{T} \subset [0,1]^2$ de longueur b dans le domaine des ondelettes à une échelle 2^j, comme construit dans la sous-section précédente. Comme montré à la figure 2.2, on subdivise ce tube en un ensemble de bandes $\{b_i\}_{i=0}^{\mathrm{N}_a - 1}$ de largeur $a > 0$

$$b_i \stackrel{\text{def.}}{=} w^{-1}(\widetilde{b}_i) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{b}_i \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{I} \times [(i - \mathrm{N}_a/2)a, (i - \mathrm{N}_a/2 + 1)a],$$

où $\mathrm{N}_a = \mathrm{K}\, 2^j/a$. Dans la suite, on suppose que le nombre N_a de bandes est un entier, ce qui simplifie l'exposé.

Approximation polynomiale On construit maintenant une approximation de l'ensemble discret de coefficients f_j^k à l'intérieur de $\mathcal{T}$. Cette approximation est définie comme une regression polynomiale par morceaux sur les bandes déformées $\widetilde{b}_i$. Plus précisément, on définit l'espace

$$\mathrm{V}_{\mathcal{T}} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ g \in \ell^2(\mathcal{T}) \;\middle\backslash\; \begin{array}{l} \forall\, x_n \in b_i, \quad g[n] = \mathrm{P}_i(\widetilde{x}_n) \\ \text{avec } \mathrm{P}_i \text{ polynomial sur } \widetilde{b}_i \text{ et } \deg(\mathrm{P}_i) < p. \end{array} \right\},$$

où l'on a noté

$$x_n \stackrel{\text{def.}}{=} (n_1 2^j, n_2 2^j) \in \mathcal{T} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{x}_n \stackrel{\text{def.}}{=} w(x_n) \in \widetilde{\mathcal{T}}.$$

Dans la suite, on utilise la définition du degré d'un polynôme comme la somme des degrés selon chaque coordonnée, $\deg(\mathrm{P}) \stackrel{\text{def.}}{=} \deg_{\mathrm{X}}(\mathrm{P}) + \deg_{\mathrm{Y}}(\mathrm{P})$. À l'intérieur de chaque tube $\mathcal{T}$ nous utilisons la projection orthogonale au sens de $\ell^2(\mathcal{T})$, notée $\mathrm{P}_{\mathrm{V}_{\mathcal{T}}}$, sur l'espace $\mathrm{V}_{\mathcal{T}}$ pour définir un vecteur $\hat{f}_j$ approchant $f_j \stackrel{\text{def.}}{=} f_j^k$,

$$\forall\, x_n \in \mathcal{T} \qquad \hat{f}_j[n] \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{P}_{\mathrm{V}_{\mathcal{T}}}(f_j)[n]. \tag{2.4}$$

Résultat d'approximation On remarque que nous avons encore deux degrés de liberté pour définir $\hat{f}_j$, qui sont la longueur b et la largeur a des bandes. Le paramètre a est fixé dans la proposition suivante comme une fonction de b pour atteindre une erreur minimale à l'intérieur du tube $\mathcal{T}$.

Proposition 2.3 Soit f une fonction ayant une régularité géométrique C^α. Soit 2^j une échelle fixée en ondelettes, k une orientation et soit $b > 0$. On note $\mathcal{T}$ un tube de longueur b comme construit à la sous-section 2.1.4 autour d'une géométrie approchée $\widetilde{\gamma}$ qui satisfait

$$\forall\, x \in \mathrm{I}^0, \qquad |\gamma(x) - \widetilde{\gamma}(x)| \leqslant \mathrm{C}_1\, b^\alpha,$$

où C_1 est une constante qui ne dépend que de γ. Pour une largeur de bande $a > 0$ bien choisie, l'approximation $\hat{f}_j$ de $f_j \stackrel{\text{def.}}{=} f_j^k$ définie par l'équation (2.4) vérifie

$$\|f_j - \hat{f}_j\|_{\ell^2(\mathcal{T})} \leqslant \mathrm{C}\, s_j^{-1}\, b^{2\alpha+1},$$

où C est une constante qui ne dépend que de f.

Preuve. Nous commençons par borner l'erreur d'approximation ponctuelle $\left| f_j[n] - \hat{f}_j[n] \right|$ pour un point $x_n = 2^j n$ à l'intérieur d'une bande $b_i \subset \mathcal{T}$. À l'intérieur de cette bande, nous avons

$$\forall\, x_n = 2^j n \in \widetilde{b}_i, \qquad f_j[n] = \mathrm{F}_{j\mathrm{W}}(\widetilde{x}_n), \qquad \text{et} \qquad \hat{f}_j[n] = \mathrm{P}_{\mathrm{V}_i}(f_j)[n],$$

où V_i est l'espace des polynômes discrets déformés de degré inférieur à p dans b_i

$$\mathrm{V}_i \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \{g[n]\}_{2^j n \in b_i} \;\backslash\; g[n] = \mathrm{P}(2^j n) \quad \text{avec} \quad \mathrm{P} \text{ polynomial et } \deg(\mathrm{P}) < p \right\}.$$

Dans la suite, on va faire la démonstration pour un exposant α entier. On note P_i le développement de Taylor de la fonction $\mathrm{F}_{j\mathrm{W}}$ à l'ordre α pris au centre $\widetilde{c}$ de $\widetilde{b}_i$. Nous avons, pour tout $\widetilde{x} \in \widetilde{b}_i$, l'erreur suivante

$$|\mathrm{F}_{j\mathrm{W}}(\widetilde{x}) - \mathrm{P}_i(\widetilde{x})| \leqslant \mathrm{C}_1 \sum_{i_1+i_2=\alpha} \left| \frac{\partial^\alpha \mathrm{F}_{j_w}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}(\widetilde{c}) \right| \, |\widetilde{x}_1 - \widetilde{c}_1|^{i_1} \, |\widetilde{x}_2 - \widetilde{c}_2|^{i_2} \tag{2.5}$$

$$\leqslant \mathrm{C}_2 \sum_{i_1+i_2=\alpha} 2^j s_j^{i_1/\alpha + i_2}\, b^{i_1}\, a^{i_2}, \tag{2.6}$$

On a utilisé la borne sur les dérivées de $\mathrm{F}_{j\mathrm{W}}$ fournie par la proposition 2.2 ainsi que les majorations

$$\forall x \in b_i, \qquad |\widetilde{x}_1 - \widetilde{c}_1| \leqslant b, \qquad \text{et} \qquad |\widetilde{x}_2 - \widetilde{c}_2| \leqslant a.$$

On obtient au final la majoration

$$\forall\, \widetilde{x} \in \widetilde{b}_i, \qquad |\mathrm{F}_{j\mathrm{W}}(\widetilde{x}) - \mathrm{P}_i(\widetilde{x})| \leqslant \mathrm{C}_2\, 2^j\, (s_j^{-1} b^\alpha + s_j^{-\alpha} a^\alpha).$$

Pour avoir une borne optimale, il convient de déterminer la largeur a des bandes pour absorber la différence de régularité entre les directions x_1 et x_2. Ceci mène au choix

$$s_j^{-1}\, b^\alpha = s_j^{-\alpha}\, a^\alpha \quad \Longrightarrow \quad a \stackrel{\text{def.}}{=} b\, s_j^{1-1/\alpha}. \tag{2.7}$$

En utilisant P_i, on construit un vecteur discret $g \in \ell^2(\mathcal{T})$ en définissant

$$\forall\, x_n \in b_i, \qquad g[n] \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{P}_i(\widetilde{x}_n).$$

Comme le nombre de points x_n à l'intérieur de $\mathcal{T}$ est plus petit que $\mathrm{K}\, b\, s_j\, 2^{-2j}$, cette approximation produit une erreur

$$\begin{aligned}
\|f_j - g\|^2_{\ell^2(\mathcal{T})} &\leqslant \mathrm{K}\, b\, s_j\, 2^{-2j} \max_{i,\, x_n \in b_i} |f_j[n] - g[n]|^2 \\
&\leqslant \mathrm{K}\, b\, s_j\, 2^{-2j} \max_{i,\, \widetilde{x} \in \widetilde{b}_i} |\mathrm{F}_{j\mathrm{W}}(\widetilde{x}) - \mathrm{P}_i(\widetilde{x})|^2 \\
&\leqslant \mathrm{K}\, b\, s_j\, 2^{-2j} \left(\mathrm{C}_2\, 2^j\, s_j^{-1}\, b^\alpha\right)^2 \leqslant \mathrm{C}\, s_j^{-1}\, b^{2\alpha+1}.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $g \in \mathrm{V}_{\mathcal{T}}$, on peut alors borner l'erreur d'approximation de notre approximation polynomiale par morceaux

$$\begin{aligned}
\|f_j - \hat{f}_j\|^2_{\ell^2(\mathcal{T})} = \|f_j - \mathrm{P}_{\mathrm{V}_{\mathcal{T}}}(f_j)\|^2_{\ell^2(\mathcal{T})} &= \sup_{\varphi \in \mathrm{V}_{\mathcal{T}}} \left(\|f_j - \varphi\|^2_{\ell^2(\mathcal{T})}\right) \\
&\leqslant \|f_j - g\|^2_{\ell^2(\mathcal{T})} \leqslant \mathrm{C}\, s_j^{-1}\, b^{2\alpha+1},
\end{aligned}$$

ce qui donne bien le résultat souhaité. ■

2.1.5 APPROXIMATION SUR TOUT LE DOMAINE EN ONDELETTES

Segmentation du domaine en ondelettes Soit f une fonction ayant une régularité géométrique C^α, comme on l'a défini à la sous-section 1.1.1. Nous voulons approcher l'ensemble des coefficients d'ondelettes $f_j \stackrel{\text{def.}}{=} f_j^k$ pour une échelle 2^j et orientation k fixées. Pour ce faire, nous segmentons le carré $[0,1]^2$, comme montré à la figure 2.3, en :

- un ensemble de tubes de longueur $b > 0$ et de largeur $\mathrm{K}\, 2^j$ autour de l'ensemble de courbes $\{\gamma_i\}$.
- des petits carrés de taille $\mathrm{K}\, 2^j$ autour des coins où deux courbes se rencontrent.
- les régions restantes.

L'ensemble des tubes est créé en divisant chaque courbe γ_i en morceaux $\left\{\gamma_i(t) \;\backslash\; t \in \mathrm{I}^0\right\}$ le long desquels la courbe admet soit une paramétrisation horizontale

$$\left\{\gamma_i(t) \;\backslash\; t \in \mathrm{I}^0\right\} = \left\{(x_1, \gamma(x_1)) \;\backslash\; x_1 \in \mathrm{I}\right\}, \quad \text{et} \quad \left|\gamma'(x_1)\right| \leqslant 2,$$

soit une paramétrisation verticale

$$\{\gamma_i(t) \setminus t \in \mathrm{I}^0\} = \{(\gamma(x_2), x_2) \setminus x_2 \in \mathrm{I}\}, \quad \text{et} \quad |\gamma'(x_2)| \leqslant 2.$$

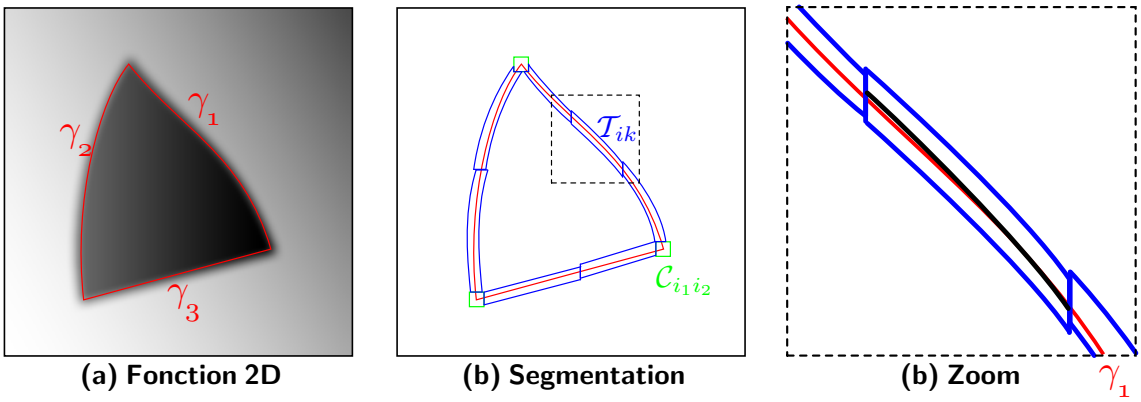
On souhaiterait idéalement que chaque intervalle projeté I ait une longueur de b. Ceci n'est pas toujours compatible avec la condition que $|\gamma'| \leqslant 2$. On peut cependant facilement voir que seul un nombre constant d'intervalles de taille plus petite que b est nécessaire. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que les intervalles I sont de longueur b.

Cette segmentation, ainsi que le schéma d'approximation polynomial nous permet de définir un vecteur $\hat{f}_j \in \ell^2_j$ approchant les coefficients en ondelettes f_j.

- Dans un tube $\mathcal{T}$ autour d'une singularité, nous définissons $\hat{f}_j$ à l'aide de l'équation (2.4),
- À l'intérieur d'un coin $\mathcal{C}$ où deux courbes se rencontrent, on se contente de garder les coefficients d'origine, c'est-à-dire

$$\forall\, (2^j n) \in \mathcal{C}, \qquad \hat{f}_j[n] = f_j[n].$$

- Dans les régions restantes, on ne retient aucun coefficient et l'on pose $\hat{f}_j[n] = 0$ pour les points x_n qui ne sont ni dans les tubes, ni dans les carrés de coins.



(a) Fonction 2D **(b) Segmentation** **(b) Zoom**

Fig. 2.3 *Segmentation de l'espace en ondelettes à l'aide d'un ensemble de tubes.*

Paramétrisation de la géométrie L'approximation discrète $\hat{f}_j$ est décrite par la segmentation de $[0,1]^2$ en tubes et, à l'intérieur de chaque tube $\mathcal{T}$, par la décomposition de f_j sur une base orthogonale fixée de l'espace $\mathrm{V}_{\mathcal{T}}$.

Cette segmentation est décrite par les intervalles projetés I de longueur b sur lesquels les tubes sont définis, ainsi que par les géométries approchées $\widetilde{\gamma}$. Pour maintenir un nombre réduit de telles géométries, nous utilisons une régression polynomiale pour définir $\widetilde{\gamma}$. Le lemme suivant, qui utilise la régularité de la courbe γ, montre que cette géométrie approchée est assez précise pour la construction que l'on réalise.

Lemme 2.4 Soit γ une fonction de classe C^α définie sur un intervalle I de longueur b et soit $\{\theta_i\}_i$ la base orthogonale des polynômes de Legendre sur I. Alors le polynôme

$$\widetilde{\gamma} = \sum_{i=0}^{p-1} \langle \gamma, \theta_i \rangle\, \theta_i \qquad \text{vérifie} \qquad \forall\, x \in \mathrm{I}, \quad |\gamma(x) - \widetilde{\gamma}(x)| \leqslant \mathrm{C}\, b^\alpha. \tag{2.8}$$

Résultat d'approximation En adaptant le paramètre b qui contrôle la longueur des tubes, on peut optimiser l'approximation pour atteindre un nombre fixé de paramètres. On utilise un nombre global M_0 de paramètres qui lient les approximations $\hat{f}_j$ à travers toutes les échelles.

Théorème 2.5 Soit f une fonction ayant une régularité C^α comme défini en 1.1.1. Soit 2^j une échelle telle que

$$\mathrm{M}_0^{-\alpha} \stackrel{\text{def.}}{=} 2^{j_0} \leqslant 2^j \leqslant 2^{j_1} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{M}_0^{-1/2}.$$

Pour chaque $\mathrm{M}_0 > 0$, il existe une longueur de tube $b > 0$ telle que la regression polynomiale $\hat{f}_j$ construite à la sous-section 2.1.4 vérifie

$$\|f_j - \hat{f}_j\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant \mathrm{C}_1\, \mathrm{M}_j^{-\alpha} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{M}_j \leqslant \mathrm{C}_2\, \mathrm{M}_0, \tag{2.9}$$

où M_j est le nombre de paramètres nécessaire à la description de $\hat{f}_j$ et C_1 et C_2 sont des constantes qui ne dépendent que de f.

Preuve. Le nombre de coefficients nécessaire pour décrire $\hat{f}_j$ se décompose comme $\mathrm{M}_j = \mathrm{M}_{j\mathrm{B}} + \mathrm{M}_{j\mathrm{G}} + \mathrm{M}_{j\mathrm{S}}$, où

- $\mathrm{M}_{j\mathrm{B}}$ est le nombre de paramètres de bandelettes. Ceci comprend les coefficients nécessaires pour spécifier les regressions polynomiales dans chaque bande, ainsi que les coefficients en ondelettes gardés dans les carrés des coins $\mathcal{C}$. Il y a L/b tubes dans la segmentation construite à la sous-section 2.1.4, où L est la longueur totale des courbes $\{\gamma_i\}$. Le nombre total de bandes est donc égal à $(\mathrm{L}/b)(\mathrm{K}2^j/a)$. Comme à l'intérieur de chaque bande, $\hat{f}_j$ est un polynôme de degré $p-1$ et en utilisant l'expression de a trouvée à l'équation (2.7), on a

$$\mathrm{M}_{j\mathrm{B}} \leqslant p\,(\mathrm{L}/b)(\mathrm{K}\, s_j/a) + \mathrm{N}_c\, \mathrm{K}^2 = p\, \mathrm{L}\, \mathrm{K}\, b^{-2}\, s_j^{1/\alpha} + \mathrm{N}_c\, \mathrm{K}^2,$$

  où N_c est le nombre de coins où deux courbes se rencontrent.
- $\mathrm{M}_{j\mathrm{G}}$ est le nombre de paramètres nécessaire pour décrire les géométries approchées. Il faut se rappeler que pour chaque tube $\mathcal{T}$, nous devons enregistrer l'approximation $\widetilde{\gamma}$ de la géométrie originale γ, comme définie à l'équation (2.8). Il nous faut donc p coefficients pour chaque tube $\mathcal{T}$, et donc au total $\mathrm{M}_{j\mathrm{G}} \leqslant p\, \mathrm{L}/b$.
- $\mathrm{M}_{j\mathrm{S}}$ est le nombre de paramètres nécessaire pour spécifier la segmentation du domaine en ondelettes. Une fois que l'on dispose des géométries approchées $\widetilde{\gamma}$, nous avons besoin uniquement d'enregistrer les intervalles projetés I, on a donc $\mathrm{M}_{j\mathrm{S}} \leqslant 2\, \mathrm{L}/b$.

Le nombre total de paramètres vérifie

$$\mathrm{M}_j \leqslant \mathrm{C}_1 \left(s_j^{1/\alpha}\, b^{-2} + b^{-1} \right).$$

Pour obtenir le résultat d'approximation donné à l'équation 2.9, on choisit b tel que $s_j^{1/\alpha}\, b^{-2} = \mathrm{M}_0$, ce qui donne

$$b \stackrel{\text{def.}}{=} s_j^{\frac{1}{2\alpha}}\, \mathrm{M}_0^{-1/2} \quad \Longrightarrow \quad b^{-1} \leqslant 2^{-\frac{j_0}{2\alpha}}\, \mathrm{M}_0^{1/2} \leqslant \mathrm{M}_0$$

puisque l'on a supposé que $2^j \geqslant 2^{j_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{M}_0^{-\frac{1}{2\alpha}}$. Nous avons donc $\mathrm{M}_j \leqslant 2\mathrm{C}_1\mathrm{M}_0$. L'erreur d'approximation totale est la somme des erreurs suivantes.

- L'erreur à l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ de tous les tubes. En utilisant la proposition 2.4, on sait que la géométrie approchée $\widetilde{\gamma}$ vérifie $|\gamma - \widetilde{\gamma}| \leqslant \mathrm{C}_1\, b^{\alpha}$. On peut donc appliquer la proposition 2.3 et comme il y a L/b tubes, on obtient

$$\|f_j - \hat{f}_j\|^2_{\ell^2(\mathcal{E}_{\mathcal{T}})} \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{L}\, s_j^{-1}\, b^{2\alpha} \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{L}\,\mathrm{M}_0^{-\alpha} \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{L}\,\mathrm{M}_j^{-\alpha}.$$

- L'erreur dans l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ de tous les coins. Comme dans ces carrés on a posé $f_j = \hat{f}_j$, on obtient une erreur d'approximation nulle.
- L'erreur dans les zones restantes $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}$. Dans ces zones, la fonction f est uniformément C^{α} régulière et les coefficients en ondelettes satisfont donc

$$\forall\, x_n \in \mathcal{E}_{\mathcal{R}}, \quad |f_j[n]| \leqslant \mathrm{C}_2\, 2^{j(1+\alpha)}.$$

L'erreur correspondante est donc

$$\begin{aligned}\|f_j - \hat{f}_j\|^2_{\ell^2(\mathcal{E}_{\mathcal{R}})} &\leqslant \sum_{x_n \in \mathcal{E}_{\mathcal{R}}} (\mathrm{C}_2\, 2^{j(1+\alpha)})^2 \leqslant 2^{-2j}\, (\mathrm{C}_2\, 2^{j(1+\alpha)})^2 \\ &\leqslant \mathrm{C}_2^2\, 2^{2j\alpha} \leqslant \mathrm{C}_2^2\, 2^{2j_1\alpha} \leqslant \mathrm{C}_2^2\, \mathrm{M}_0^{-\alpha}.\end{aligned}$$

L'erreur totale est

$$\begin{aligned}\|f_j - \hat{f}_j\|_{\ell^2} &\leqslant \|f_j - \hat{f}_j\|_{\ell^2(\mathcal{E}_{\mathcal{T}})} + \|f_j - \hat{f}_j\|_{\ell^2(\mathcal{E}_{\mathcal{C}})} + \|f_j - \hat{f}_j\|_{\ell^2(\mathcal{E}_{\mathcal{R}})} \\ &\leqslant (\mathrm{C}\,\mathrm{L})^{1/2}\, \mathrm{M}_j^{-\alpha/2} + 0 + \mathrm{C}_2\, \mathrm{M}_0^{-\alpha/2} \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{M}_j^{-\alpha/2},\end{aligned}$$

ce qui donne bien le résultat souhaité. ■

2.1.6 Approximation d'une fonction géométrique

Pour approcher la fonction originale f, on choisit M_0 un ordre de grandeur du nombre de coefficients et un budget de coefficients M_j pour chaque échelle 2^j. On impose de plus que

$$\begin{cases} \forall\, 2^j < 2^{j_0} \overset{\text{def.}}{=} \mathrm{M}_0^{-\alpha}, \quad \mathrm{M}_j = 0 & \Longrightarrow \quad \hat{f}_j = 0, \\ \forall\, 2^j > 2^{j_1} \overset{\text{def.}}{=} \mathrm{M}_0^{-1/2}, \quad \mathrm{M}_j = 2^{-2j} & \Longrightarrow \quad \hat{f}_j = f_j. \end{cases}$$

Pour les échelles 2^j restantes, le théorème 2.5 définit une approximation $\hat{f}_j^k$ de chaque ensemble de coefficients f_j^k à l'aide de M_j paramètres. Ceci définit une fonction $\hat{f}$ par

$$\hat{f} \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k,j \leqslant 0} \hat{f}_j^k[n]\, \psi_{jn}^k. \tag{2.10}$$

Le nombre total de paramètres nécessaires pour décrire $\hat{f}$ est $\mathrm{M} \overset{\text{def.}}{=} \sum_{j,k} \mathrm{M}_j$ et le théorème suivant montre que cette construction amène une décroissance optimale de l'erreur.

Théorème 2.6 Soit f une fonction avec une régularité géométrique de classe C^{α}, avec $\alpha \geqslant 1$, comme décrit à la définition 1.1.1. Pour chaque $\mathrm{M}_0 > 0$, soit $\hat{f}$ la fonction définie par l'équation (2.10). Cette approximation vérifie

$$\|f - f_{\mathrm{M}}\|^2_{\mathrm{L}^2} \leqslant \mathrm{C}\, \log_2(\mathrm{M})^{\alpha+1}\, \mathrm{M}^{-\alpha}. \tag{2.11}$$

où M est le nombre de paramètres nécessaire pour décrire $\hat{f}$, et C est une constante qui ne dépend que de f.

Remarque 2.7 Ce résultat est sous-optimal par un facteur $\log_2(\mathrm{M})^{\alpha+1}$. Cependant, en distribuant d'une façon plus complexe les budgets de coefficients M_j à travers les échelles, il est possible de faire disparaître ce facteur $\log_2(\mathrm{M})^{\alpha+1}$. Dans la section 2.2 nous construisons une approximation dans une base orthonormale de bandelettes qui apporte la décroissance optimale sans ce facteur.

Preuve. Il y a trois régimes distincts pour l'étude des approximations f_j^k :

- Pour les fines échelles $2^j < 2^{j_0}$, on a défini $\hat{f}_j^k = 0$. Ceci nécessite 0 paramètre et comme la fonction f est à variations bornées, comme montré dans [45], l'erreur résultante est bornée par
$$\sum_{k,j<j_0} \|f_j^k - \hat{f}_j^k\|_{\ell^2}^2 \leqslant \mathrm{C}2^{j_0} = \mathrm{C}\,\mathrm{M}_0^{-\alpha}.$$
- Pour les échelles intermédiaires $2^{j_0} \leqslant 2^j \leqslant 2^{j_1}$, on choisit $\mathrm{M}_j = \mathrm{M}_0$. Le théorème 2.5 s'applique, et nous avons
$$\|f_j^k - \hat{f}_j^k\|_{\ell^2}^2 \leqslant \mathrm{C}\mathrm{M}_0^{-\alpha}.$$
avec moins de M_0 paramètres par échelle.
- Pour les échelles grossières $2^j > 2^{j_1}$, on a posé $\hat{f}_j^k = f_j^k$. Ceci donne lieu à une erreur nulle et nécessite $\frac{3}{4}2^{-2j_1} \leqslant \mathrm{M}_0$ coefficients pour chaque orientation k et pour toutes les échelles $2^j > 2^{j_1}$.

Le nombre total de paramètres M nécessaire pour décrire la fonction $\hat{f}$ est

$$\mathrm{M} = \sum_{j<j_0} 0 + \sum_{j=j_0}^{j_1} 3\,\mathrm{M}_0 + \sum_{j>j_1} 3\,2^{-2j} \leqslant \mathrm{C}_1\,\log_2(\mathrm{M}_0)\mathrm{M}_0,$$

et l'erreur correspondante est

$$\begin{aligned}\|f - \hat{f}\|^2 &= \underbrace{\sum_{k,j<j_0} \|f_j^k - \hat{f}_j^k\|_{\ell^2}^2}_{\leqslant \mathrm{C}\mathrm{M}_0^{-\alpha}} + \sum_{k,j=j0}^{j_1} \underbrace{\|f_j^k - \hat{f}_j^k\|_{\ell^2}^2}_{\leqslant \mathrm{C}\mathrm{M}_0^{-\alpha}} + \underbrace{\sum_{k,j>j_1} \|f_j^k - \hat{f}_j^k\|_{\ell^2}^2}_{=0} \\ &\leqslant \mathrm{C}_2 \log_2(\mathrm{M}_0)\mathrm{M}_0^{-\alpha}\end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. On peut donc énoncer le résultat d'approximation suivant

$$\|f - \hat{f}\|_{\ell^2}^2 \leqslant \mathrm{C}\log_2(\mathrm{M})^{\alpha+1}\mathrm{M}^{-\alpha},$$

qui est ce que l'on souhaitait démontrer à un terme $\log_2(\mathrm{M})^{\alpha+1}$ près. ■

2.2 BASE DE BANDELETTES ORTHOGONALES

Le schéma présenté à la section précédente n'est pas utile dans la pratique car on ne dispose pas d'un moyen simple de calculer les dimensions optimales a et b. De la même façon que les approximations polynomiales par morceaux peuvent être obtenues par un seuillage dans une base orthonormée d'Alpert [8, 7], nous introduisons les bases de bandelettes pour obtenir une approximation par seuillage dans une meilleure base.

2.2.1 SEGMENTATION EN QUADTREE

Pour fixer la longueur b des bandes, nous calculons la segmentation décrite à la sous-section 2.1.4 à l'aide d'un quadtree.

Une segmentation en quadtree de $[0,1]^2$ est obtenue par subdivisions successives du carré initial en quatre carrés de tailles égales. La figure 2.4 montre les étapes de subdivision menant à la construction d'un quadtree, ainsi que l'arbre quaternaire permettant de représenter cette subdivision.

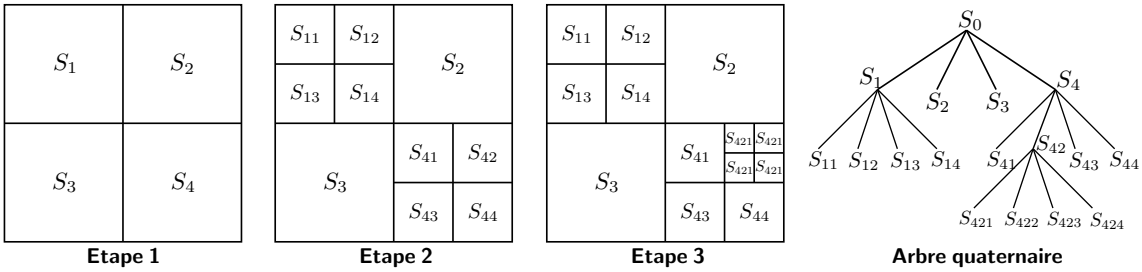


Fig. 2.4 *Construction d'un quadtree par subdivisions successives.*

Ceci mène à une segmentation de $[0,1]^2$ en des carrés de tailles dyadiques. On cherche une segmentation qui encapsule les courbes de singularité par un ensemble de carrés de taille b et qui remplissent les zones restantes par des grands carrés. Pour une segmentation Q_j^k de $[0,1]^2$ en carrés de largeurs dyadiques plus grandes que 2^j, nous répartissons ces carrés en plusieurs groupes :

- L'ensemble $\mathcal{E}_b(\mathrm{Q}_j^k)$ des carrés de largeur b contenant un contour. Par définition, un carré contenant un contour est un carré distant de moins de $\mathrm{K}\, s_j$ d'une et une seule courbe de contour. Cette courbe doit pouvoir être paramétrée soit horizontalement soit verticalement par une fonction γ satisfaisant $|\gamma'| \leqslant 2$.
- L'ensemble $\mathcal{E}_-(\mathrm{Q}_j^k)$ des carrés contenant un contour de largeur inférieure à b.
- L'ensemble $\mathcal{C}(\mathrm{Q}_j^k)$ des carrés contenant un coin. Par définition, un tel carré contient une jonction de deux courbes.
- L'ensemble $\mathcal{R}(\mathrm{Q}_j^k)$ des carrés réguliers, qui sont les carrés restants.

Idéalement, nous souhaiterions n'avoir que des carrés réguliers ainsi que des carrés de taille b contenant une jonction. Mais des contraintes topologiques (comme des croisements de contours et des jonctions) et les variations de courbures (par exemple un contour horizontal qui devient vertical) nous obligent à subdiviser certains carrés de taille b en des carrés plus petits. Cependant, comme montré par Le Pennec et Mallat [115], on peut construire un

quadtree possédant un faible nombre de carrés de petite taille. Ceci est résumé dans la proposition suivante. La figure 2.5 montre un quadtree adapté à une fonction géométrique.

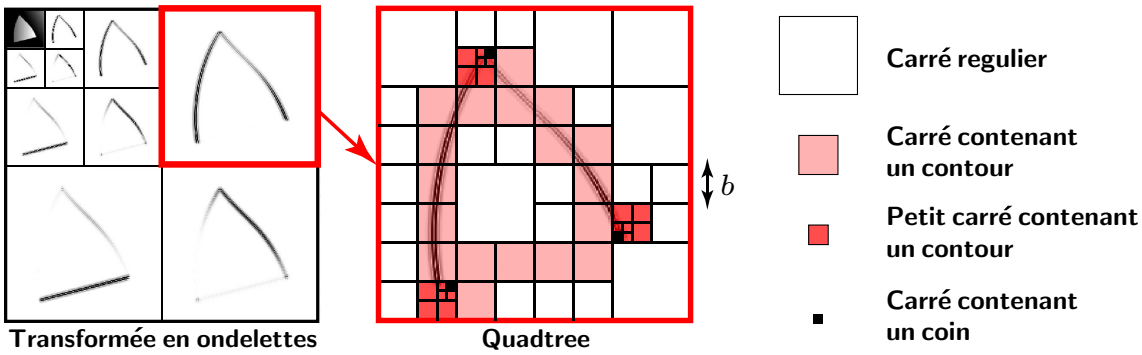


Fig. 2.5 *Un exemple de quadtree adapté.*

Proposition 2.8 Pour tout $b > 0$ donné, il existe une segmentation en quadtree Q_j^k de $[0,1]^2$, en des carrés de côté plus grande que 2^j ayant les propriétés suivantes :

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Q}_j^k) = \mathrm{C}_1\, b^{-1}, \qquad \mathrm{Card}(\mathcal{E}_b(\mathrm{Q}_j^k)) = \mathrm{C}_2\, b^{-1},$$
$$\mathrm{Card}(\mathcal{E}_-(\mathrm{Q}_j^k)) = \mathrm{C}_3\, |\log_2(b)|\,, \qquad \mathrm{Card}(\mathcal{C}(\mathrm{Q}_j^k)) = \mathrm{C}_4,$$

où $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3$ et C_4 sont des constantes qui ne dépendent que de f, et sont indépendantes de b.

La démonstration de ce lemme se trouve dans [115]. Elle exhibe une segmentation valide en utilisant une subdivision récursive des carrés plus grands que b ou contenant des jonctions. On montre le contrôle sur le nombre de carrés en exploitant la régularité des courbes et en utilisant le fait que ces courbes ne s'intersectent pas tangentiellement.

2.2.2 BANDELETISATION AVEC DES ONDELETTES DE ALPERT

Nous construisons maintenant une base orthogonale de $\ell^2_j(\mathrm{S})$, à une échelle 2^j et orientation k. On suppose que le carré $\mathrm{S} \subset [0,1]^2$ est de largeur b et qu'il contient une courbe de singularité paramétrée horizontalement par γ.

En suivant la construction de la section 2.1.4, notre base doit être capable de reproduire les fonctions qui sont polynomiales par morceaux sur de fines bandes qui suivent une géométrie approchée $\widetilde{\gamma}$.

Nous ne considérons que des largeurs dyadiques $a = b\,2^\ell$ pour $\ell \leqslant 0$. Pour chacune de ces largeurs possibles, on subdivise le domaine déformé $\widetilde{\mathrm{S}}$ en un ensemble de $\mathrm{N}_\ell \simeq 2^{-\ell}$ bandes parallèles $\widetilde{\mathrm{S}} = \bigcup_{i=0}^{\mathrm{N}_\ell - 1} \widetilde{b}_{\ell i}$ de largeur $b\,2^\ell$, comme à la figure 2.6 et nous notons $b_{\ell i} \overset{\text{def.}}{=} w^{-1}(\widetilde{b}_{\ell i})$. Quelques bandes le long du bord de S peuvent être non connexes et il peut y avoir entre $2^{-\ell+1}$ et $2^{-\ell}$ bandes.

Nous définissons alors les espaces multirésolution de Alpert, qui sont les sous-espaces de $\ell^2(\mathrm{S})$ suivant

$$\mathrm{G}_\ell \overset{\text{def.}}{=} \left\{ g \in \ell^2(\mathrm{S}) \;\middle\backslash\; \begin{array}{l} \forall\, x_n \in b_{\ell i}, \quad g[n] = \mathrm{P}_i(\widetilde{x}_n) \\ \text{et } \mathrm{P}_i \text{ est polynomial avec } \deg(\mathrm{P}_i) < p. \end{array} \right\}.$$

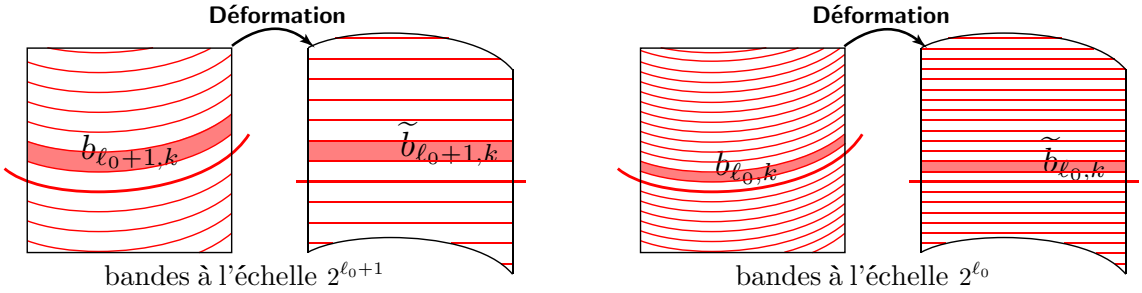


Fig. 2.6 *Exemple de dispositions de bandes pour plusieurs échelles 2^ℓ.*

On rappelle que l'on définit le degré d'un polynôme à deux variables comme la somme des degrés selon chaque coordonnée. Comme les bandes vérifient $\mathrm{b}_{\ell-1i} \subset b_{\ell 2i}$, ces espaces satisfont $\mathrm{G}_\ell \subset \mathrm{G}_{\ell-1}$, ce qui permet de définir une base orthogonale $\{\Psi_{\ell i}\}_{i=0}^{m_\ell-1}$ de l'espace de détails H_ℓ :

$$\mathrm{Vect}_i(\Psi_{\ell i}) = \mathrm{H}_\ell \qquad \text{où} \qquad \mathrm{H}_\ell \oplus^\perp \mathrm{G}_\ell = \mathrm{G}_{\ell-1}.$$

On peut noter que la dimension m_ℓ de l'espace H_ℓ est $\frac{p}{2}(p+1)(\mathrm{N}_{\ell-1} - \mathrm{N}_\ell)$, sauf pour les échelle fines 2^ℓ, où il peut y avoir des bandes $b_{\ell i}$ contenant moins de $\frac{p}{2}(p+1)$ points x_n.

On peut alors définir la base de bandelettes discrète $\mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma})$ de $\ell^2(\mathrm{S})$ par

$$\mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\Psi_{\ell i} \ \backslash \ -2\, j \log_2(b) \leqslant \ell \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant i \leqslant m_\ell - 1\}\,.$$

Cette base est une extension 2D des bases de multi-ondelettes introduites par Alpert [8]. Nous utilisons des polynômes déformés 2D là où la construction d'origine utilise des polynômes 1D. La projection d'un vecteur de $\ell^2(\mathrm{S})$ sur les vecteurs de $\mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma})$ se calcule à l'aide d'un algorithme rapide semblable à celui d'une transformée en ondelettes rapide. Cet algorithme suit la méthode proposée dans [7], en utilisation un procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour calculer, à chaque échelle ℓ, une base de l'espace $\mathrm{G}_{\ell-1}$ qui commence par les vecteurs de G_ℓ et termine par les vecteurs de H_ℓ. La description détaillée de cet algorithme est donnée à la sous-section 2.3.3.

Pour majorer les les coefficients de la décomposition d'un vecteur dans cette base orthonormées, il est important de contrôler les normes ℓ^∞ et ℓ^1 des vecteurs de base $\Psi_{\ell i}$.

Lemme 2.9 On a les majorations

$$\|\Psi_{\ell i}\|_{\ell^2} = 1, \quad \text{et} \quad \|\Psi_{\ell i}\|_{\ell^\infty} \leqslant \mathrm{C}_\Psi\, b^{-1}\, 2^{-\ell/2}\, 2^j, \tag{2.12}$$

$$\text{et} \quad \|\Psi_{\ell i}\|_{\ell^1} \leqslant \mathrm{C}_\Psi\, b\, 2^{\ell/2}\, 2^{-j}, \tag{2.13}$$

où C_Ψ est une constante.

Preuve. On définit le support d'une bandelette par

$$\mathrm{Supp}\,(\Psi_{\ell i}) \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{2^j\, n \in [0,1]^2 \ \backslash \ \Psi_{\ell i}[n] \neq 0\right\}.$$

On note que

$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{Supp}\,(\Psi_{\ell i})) \leqslant \#\{\text{points dans S}\}/\mathrm{N}_\ell \leqslant \mathrm{C}\, b^2\, 2^\ell\, 2^{-2j},$$

où C est une constante. On définit l'ensemble

$$\mathrm{I}_{\ell i} = \left\{ n \ \Big\backslash \ |\Psi_{\ell i}[n]| \geqslant \frac{1}{2}\|\Psi_{\ell i}\|_{\ell^\infty} \right\}.$$

On a la majoration suivante :

$$1 = \|\Psi_{\ell i}\|_{\ell^2} \geqslant \sum_{n \in \mathrm{I}_{\ell i}} |\Psi_{\ell i}[n]|^2 \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{Card}(\mathrm{I}_{\ell i}) \|\Psi_{\ell i}\|^2_{\ell^\infty}.$$

Comme les vecteurs $\Psi_{\ell i}$ sont des échantillons de polynômes dilatés d'un facteur 2^ℓ, on a

$$\forall\, \ell, i, \qquad \operatorname{Card}(\mathrm{I}_{\ell i}) \geqslant \mathrm{C}_\Psi \operatorname{Card}(\Psi_{\ell i}).$$

On en déduit que

$$\|\Psi_{\ell i}\|_{\ell^\infty} \leqslant \mathrm{C}_\Psi \operatorname{Card}(\operatorname{Supp}(\Psi_{\ell i}))^{-1/2},$$

ce qui donne la borne annoncée. On obtient la borne de la norme ℓ^1 en remarquant que

$$\|\Psi_{\ell i}\|_{\ell^1} \leqslant \operatorname{Card}(\operatorname{Supp}(\Psi_{\ell i}))\, \|\Psi_{\ell i}\|_{\ell^\infty},$$

ce qui permet de conclure. ■

2.2.3 Construction d'une base de bandelettes

Soit $\mathrm{S} \subset [0,1]^2$ un carré contenant des coefficients d'ondelettes à une échelle 2^j et orientation k. Soit $\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}$ une orientation approchée dans S. Dans la section précédente, nous avons construit une base de bandelettes $\mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma}_\mathrm{S}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\Psi_{\ell i}\}_{\ell,i}$ de $\ell^2_j(\mathrm{S})$. On note toujours par $\mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma}_\mathrm{S})$ les vecteurs de $\ell^2_j([0,1]^2)$ étendu à partir des vecteurs $\Psi_{\ell i} \in \mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma}_\mathrm{S})$ par

$$\forall\, (2^j n) \notin \mathrm{S}, \quad \Psi_{\ell i}[n] \stackrel{\text{def.}}{=} 0.$$

Soit $\Gamma^k_j \stackrel{\text{def.}}{=} (\mathrm{Q}^k_j, \{\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}\}_{\mathrm{S} \in \mathrm{Q}^k_j})$ une segmentation en quadtree Q^k_j de $[0,1]^2$ à une échelle 2^j et orientation k, auquel on ajoute, pour chaque carré $\mathrm{S} \in \mathrm{Q}^k_j$, par une géométrie approchée $\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}$. Une base de bandelettes $\mathcal{B}(\Gamma^k_j)$ de l'espace entier de coefficients $\ell^2_j([0,1]^2)$ est définie par

$$\mathcal{B}(\Gamma^k_j) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcup_{\mathrm{S} \in \mathrm{Q}^k_j} \mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma}_\mathrm{S})$$

Un vecteur de bandelettes $\Psi_\mu \in \mathcal{B}(\Gamma^k_j)$ est ainsi spécifié par $\mu = (j, k, \mathrm{S}, \widetilde{\gamma}_\mathrm{S}, \ell, i)$ où

- 2^j est l'échelle de la transformée en ondelettes 2D et $k \in \{\mathrm{V}, \mathrm{H}, \mathrm{D}\}$ est l'orientation,
- $\mathrm{S} \in \mathrm{Q}^k_j$ est un carré dyadique de largeur $b = \mathrm{L}\, 2^j$, où L est une puissance de 2,
- $\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}$ est une géométrie approchée,
- $\ell \in \{-2\log_2(\mathrm{L}), \ldots, 0\}$ et $i \in \{1, \ldots, 2^{-\ell}\}$ sont l'échelle et l'index d'un vecteur $\Psi_{\ell i}$ dans la base de bandelettes orthogonales $\mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma}_\mathrm{S})$.

Nous avons ainsi défini

$$\forall\, x_n \in \mathrm{S} \in \mathrm{Q}^k_j, \quad \Psi_\mu[n] = \Psi_{\ell i}[n] \qquad \text{où} \qquad \mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma}_\mathrm{S}) = \{\Psi_{\ell i}\}_{\ell,i}.$$

Ces vecteurs discrets $\Psi_\mu \in \ell^2([0,1]^2)$ peuvent être transformés en fonction $\widetilde{\Psi}_\mu \in \mathrm{L}^2([0,1]^2)$ en définissant

$$\widetilde{\Psi}_\mu = \sum_n \Psi_\mu[n]\, \psi^k_{jn}.$$

On peut ainsi transformer un ensemble $\{\mathcal{B}(\Gamma_j^k)\}_{k,j\leqslant 0}$ de bases de bandelettes discrètes en une unique base de fonctions de $\mathrm{L}^2([0,1]^2)$ définie par

$$\mathcal{B}(\Gamma) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcup_{k,j\leqslant 0} \left\{ \widetilde{\Psi}_\mu \;\Big\backslash\; \Psi_\mu \in \mathcal{B}(\Gamma_j^k) \right\}, \qquad \text{où} \qquad \Gamma \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcup_{k,j\leqslant 0} \Gamma_j^k.$$

La projection d'une fonction f sur les fonctions de $\mathcal{B}(\Gamma)$ est calculée en effectuant tout d'abord une transformée en ondelettes 2D, puis en projetant les coefficients en ondelettes f_j^k sur la base discrète 2D $\mathcal{B}(\Gamma_j^k)$. Ces deux transformées sont implémentées à l'aide d'un algorithme de calcul rapide, comme décrit à la sous-section 2.3.1.

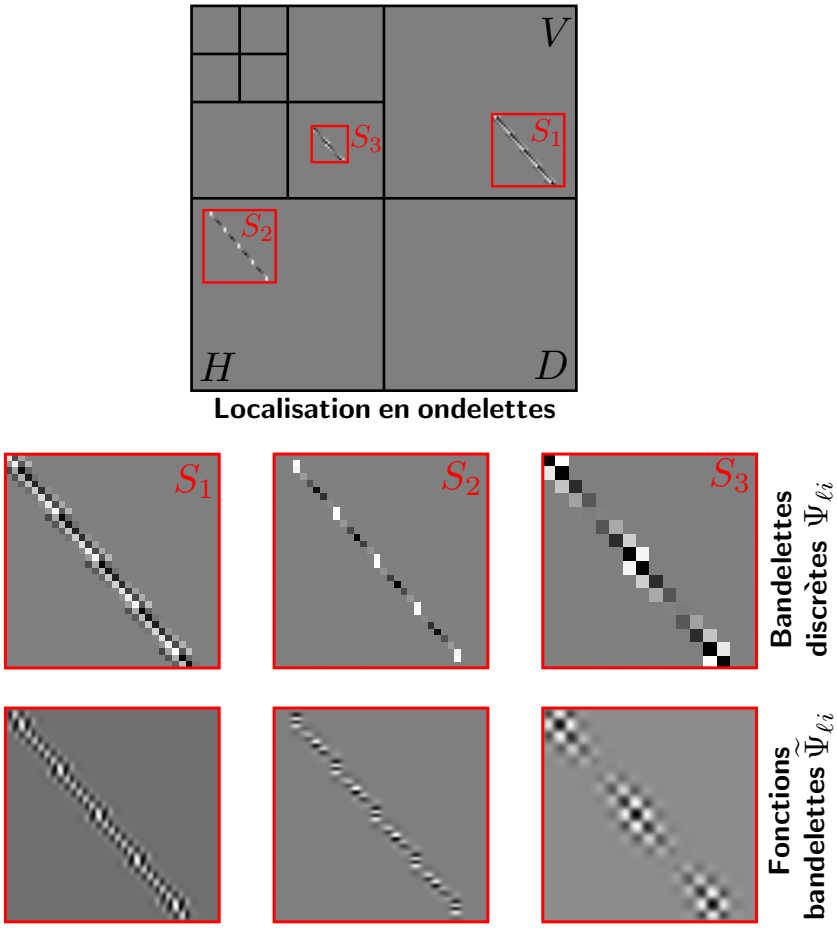


Fig. 2.7 *Dessin des bases de bandelettes pour plusieurs échelles 2^j.*

La figure 2.7 montre plusieurs vecteurs discrets $\Psi_{\ell i}$ ainsi que les fonctions bandelettes interpolées $\Psi_{\ell i}$. En haut de la figure, on peut voir la localisation des vecteurs discrets à l'intérieur de carrés dans le domaine des ondelettes à une échelle 2^j et orientation k. Ces fonctions sont aussi régulière que les fonctions d'ondelettes 2D utilisées. Bien que chaque quadtree segmente l'espace des coefficients en carrés disjoints, la reconstruction après une décomposition en bandelettes seuillée ne souffre pas d'effets de blocs.

2.2.4 CONSTRUCTION DU DICTIONNAIRE DE BANDELETTES

Quantification de la géométrie Soit T le seuil en dessous duquel les coefficients en bandelettes vont être rejetés pour l'approximation. Pour réduire le nombre de bases de bandelettes potentielles, on ne va considérer qu'un petit nombre de géométries quantifiées à l'intérieur de chaque carré S du quadtree. De façon plus précise, à partir d'une paramétrisation $\widetilde{\gamma}$, on définit une géométrie quantifiée $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{T}^2}$ avec une précision de T^2

$$\widetilde{\gamma}_{\mathrm{T}^2} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{p-1} \mathrm{Q}_{\mathrm{T}^2}(\langle \gamma,\, \theta_i \rangle)\, \theta_i,$$

où $\{\theta_i\}$ est la base de polynômes de Legendre déjà utilisée au lemme 2.4. Nous avons utilisé le quantificateur

$$\mathrm{Q}_\tau(x) = q\,\tau, \qquad \text{si} \qquad (q-1/2)\tau \leqslant x \leqslant (q+1/2)\tau, \tag{2.14}$$

pour un pas de quantification $\tau = \mathrm{T}^2$. En restreignant l'amplitude des coefficients $\langle \gamma,\, \theta \rangle$, on obtient un nombre fini de géométries potentielles

$$\mathcal{G}_{\mathrm{T}^2}(\mathrm{S}) \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \widetilde{\gamma}_{\mathrm{T}^2} \;\middle\backslash\; \gamma \text{ géométrie telle que } \forall\, i,\ |\langle \gamma,\, \theta_i \rangle| \leqslant \mathrm{A}_\theta\, \mathrm{T}^{\frac{3/2}{\alpha+1}} \right\} \cup \{\Xi\},$$

où A_θ est une constante définie par

$$\mathrm{A}_\theta \stackrel{\text{def.}}{=} 2\, b^{1/2} \max_{i<p} \|\theta_i\|_\infty.$$

On note que l'on a ajouté un symbole Ξ à cet ensemble de géométries dans le but de prendre en compte d'une manière transparente le cas où le carré S ne contient pas de géométrie. Dans ce cas, on fixe $\mathcal{B}(\mathrm{S}, \Xi) \stackrel{\text{def.}}{=} \Delta_j(\mathrm{S})$ comme étant la base de Dirac définie par

$$\Delta_j(\mathrm{S}) = \{\delta_n\}_{(2^j n) \in \mathrm{S}} \qquad \text{où} \qquad \delta_n[m] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m, \\ 1 & \text{si} \quad n = m. \end{cases} \tag{2.15}$$

On voit alors que la taille du dictionnaire de base de $\ell^2_j(\mathrm{S})$ ainsi obtenu est

$$\mathrm{Card}\,(\mathcal{G}_{\mathrm{T}^2}(\mathrm{S})) = \prod_{i=0}^{p-1} \mathrm{Card} \left\{ \mathrm{Q}_{\mathrm{T}^2}(\langle \gamma,\, \theta_i \rangle) \;\middle\backslash\; |\langle \gamma,\, \theta_i \rangle| \leqslant \mathrm{A}_\theta\, \mathrm{T}^{\frac{3/2}{\alpha+1}} \right\} \leqslant \mathrm{C}_{\mathcal{G}}\, \mathrm{T}^{-\eta} \tag{2.16}$$

où $\mathrm{C}_{\mathcal{G}}$ est une constante et

$$\eta \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{2\alpha + 1/2}{\alpha+1}(p-1) \leqslant 2(p-1).$$

Nous avons utilisé ici le fait que l'on peut imposer $\widetilde{\gamma}(0) = 0$ pour réduire encore le nombre de paramètres libre de p à $p-1$.

Bien que l'on se soit restreint à un nombre fini de géométries, la proposition suivante montre que l'on peut toujours approcher de façon précise la géométrie d'origine.

Proposition 2.10 Soit S un carré de taille b tel que

$$\mathrm{C}_1\, \mathrm{T}^{\frac{2}{\alpha+1}} \leqslant b \leqslant \mathrm{C}_2\, \mathrm{T}^{\frac{1}{\alpha+1}}, \tag{2.17}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. On suppose qu'une seule courbe géométrique γ_i coupe $S = S_1 \times S_2$. On suppose de plus que cette courbe est paramétrée horizontalement par γ et que $|\gamma'| \leqslant 2$. On peut alors trouver une géométrie approchée et quantifiée $\widetilde{\gamma}_{T^2}$ telle que

$$\forall\, x \in S_1, \quad |\gamma(x) - \widetilde{\gamma}_{T^2}(x)| \leqslant C\, b^{\alpha},$$

avec une constante C qui ne dépend que de γ.

Preuve. À l'aide du lemme 2.4, on sait que la projection $\widetilde{\gamma} \stackrel{\text{def.}}{=} P_{V_p}(\gamma)$ satisfait

$$\forall\, x \in S_1, \quad |\gamma(x) - \widetilde{\gamma}(x)| \leqslant C\, b^{\alpha}.$$

Comme la paramétrisation satisfait $|\gamma'| \leqslant 2$, on a $\|\gamma\|_\infty \leqslant 2b$ et on peut donc borner l'amplitude des coefficients de projection

$$|\langle \gamma,\, \theta_i \rangle| \leqslant b\, \|\gamma\|_\infty \|\theta_i\|_\infty \leqslant b^2\, (A_\theta/2)\, b^{-1/2} \leqslant 2\, C_\theta\, b^{3/2},$$

puisque l'on peut poser $\|\theta_i\|_\infty \leqslant (A_\theta/2)\, b^{-1/2}$ où A_θ est une constante indépendante de b. Ceci prouve que $\widetilde{\gamma}_{T^2}$ appartient à $\mathcal{G}_{T^2}(S)$ et satisfait

$$\begin{aligned} |\widetilde{\gamma}(x) - \widetilde{\gamma}_{T^2}(x)| &\leqslant \sum_{i=0}^{p-1} |\langle \gamma,\, \theta_i \rangle - Q_{T^2}(\langle \gamma,\, \theta_i \rangle)|\ \|\theta_i\|_\infty \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{p-1} T^2\, (A_\theta/2)\, b^{-1/2} \leqslant p\, (A_\theta/2)\, b^{\alpha+1/2} \leqslant C_1\, b^{\alpha}, \end{aligned}$$

puisque l'on a $T^2 \leqslant b^{\alpha+1}$. En utilisant le fait que

$$\|\gamma - \widetilde{\gamma}_{T^2}\|_\infty \leqslant \|\gamma - \widetilde{\gamma}\|_\infty + \|\widetilde{\gamma} - \widetilde{\gamma}_{T^2}\|_\infty \leqslant C\, b^{\alpha} + C_1\, b^{\alpha},$$

on conclut au résultat annoncé. ■

Construction du dictionnaire Soit 2^j une orientation et k une orientation fixée. Le dictionnaire $\mathcal{D}_j^k$ de bandelettes discrètes est composé des bases $\mathcal{B}(\Gamma_j^k)$ obtenues à l'aide de toutes les segmentations possibles en quadtree Q_j^k et de toutes les géométries approchées $\{\widetilde{\gamma}_S\}$ à l'intérieur des carrés de la segmentation.

En forçant les géométries $\widetilde{\gamma}_S$ à appartenir à $\mathcal{G}_{T^2}(S)$, on définit un dictionnaire fini $\mathcal{D}_{j,T^2}^k$ de bases de bandelettes discrètes

$$\mathcal{D}_{j,T^2}^k \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \mathcal{B}(\Gamma_j^k) \in \mathcal{D}_j^k \ \middle\backslash\ \Gamma_j^k = (Q_j^k, \{\widetilde{\gamma}_S\}) \quad \text{et} \quad \forall\, S \in Q_j^k, \quad \widetilde{\gamma}_S \in \mathcal{G}_{T^2}(S) \right\}.$$

En utilisant l'équation (2.2.3), on peut transformer un ensemble $\{\mathcal{B}(\Gamma_j^k)\}_{k,j \leqslant 0}$ de bases de bandelettes discrètes en une unique base de bandelettes de $L^2([0,1]^2)$. L'union de toutes ces bases forme un dictionnaire de base de $L^2([0,1]^2)$. Pour obtenir un dictionnaire de taille finie, on impose de plus que, pour toutes les échelles $2^j < T^2$, on ait $\mathcal{B}(\Gamma_j^k, T) = \Delta_j([0,1]^2)$, où $\Delta_j([0,1]^2)$ est la base de Dirac définie à l'équation (2.15). Le dictionnaire résultant $\mathcal{D}_{T^2}$ est ainsi défini par

$$\mathcal{D}_{T^2} \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \mathcal{B}(\Gamma) \ \middle\backslash\ \begin{array}{ll} \forall\, 2^j < T^2, & \mathcal{B}(\Gamma_j^k) = \Delta_j([0,1]^2), \\ \forall\, 2^j \geqslant T^2, & \mathcal{B}(\Gamma_j^k) \in \mathcal{D}_{j,T^2}^k \end{array} \right\}.$$

2.2.5 RÉSULTATS D'APPROXIMATION

On peut maintenant démontrer l'efficacité de l'approximation dans une base de bandelettes adaptée. On rappelle que l'on note $\beta > \alpha$ la régularité de la fonction ondelette ψ utilisée. On suppose que β est un entier.

Proposition 2.11 Soit $\mathrm{T} > 0$ et soit f une fonction ayant une régularité géométrique de classe C^α, comme défini en 1.1.1. Soit 2^j une échelle telle que

$$\mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \stackrel{\text{def.}}{=} 2^{j_0} \leqslant 2^j \leqslant 2^{j_1} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{T}^{\frac{1}{\alpha+1}}, \tag{2.18}$$

et k une orientation. On peut alors trouver une longueur adaptée $b \stackrel{\text{def.}}{=} b_\mathrm{T}$ telle que si S est un carré de taille b contenant une courbe de singularité γ, il existe une géométrie approchée quantifiée $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{T}^2} \in \mathcal{G}_{\mathrm{T}^2}(\mathrm{S})$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \|f_j^k - f_{j\mathrm{M_S}}^k\|^2_{\ell^2(\mathrm{S})} \leqslant \mathrm{C}_1\, b\, s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\, \mathrm{T}^{\frac{4\alpha\beta}{\delta}} \\ \mathrm{M_S} \leqslant \mathrm{C}_2\, b\, s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\, \mathrm{T}^{-2\frac{\alpha+\beta}{\delta}}, \end{array} \right. \qquad \text{avec} \qquad \delta \stackrel{\text{def.}}{=} 2\alpha\beta + \alpha + \beta, \tag{2.19}$$

où $f_{j\mathrm{M_S}}^k$ est l'approximation de f_j^k obtenue par un seuillage à T dans la base $\mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma}_{\mathrm{T}^2})$, cette approximation nécessitant $\mathrm{M_S}$ coefficients de bandelettes.

Preuve. On définit la longueur optimale

$$b = b_\mathrm{T} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{C}_b\, \mathrm{T}^{\frac{2\beta}{\delta}}\, s_j^{\frac{\beta+1}{\delta}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C}_b \stackrel{\text{def.}}{=} (\mathrm{C_F}\, \mathrm{C}_\psi)^{-\frac{2\beta}{\gamma}}, \tag{2.20}$$

où $\mathrm{C_F} \stackrel{\text{def.}}{=} \|\mathrm{F}_{j\mathrm{W}}\|_{\mathrm{C}^\alpha}$, où $\mathrm{F}_{j\mathrm{W}}$ est définie à l'équation (2.1) et C_Ψ est définie à l'équation (2.12). En utilisant le fait que $s_j \leqslant 1$ et que $\mathrm{T} \leqslant 1$, on a

$$b \leqslant \mathrm{C}_b\, \mathrm{T}^{\frac{1}{\alpha+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2\beta}}} \leqslant \mathrm{C}_b\, \mathrm{T}^{\frac{1}{\alpha+1}} \qquad \text{et} \qquad b \geqslant \mathrm{C}_b\, 2^{j_0\frac{\beta+1}{\delta}}\, \mathrm{T}^{\frac{2\beta}{\delta}} \geqslant \mathrm{C}_b\, \mathrm{T}^{\frac{2}{\alpha+1}}.$$

Les hypothèses de la proposition 2.10 sont donc satisfaites et on peut utiliser la géométrie approchée quantifiée $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{T}^2}$ fournie par cette proposition.

On définit aussi le tube $\mathcal{T}$ de largeur $\mathrm{K}2^j$ autour de la courbe $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{T}^2}$, comme on l'a déjà fait à la sous-section 2.1.4. On note $\mathrm{S}_{\ell i} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{Supp}\,(\Psi_{\ell i})$ et $f_j \stackrel{\text{def.}}{=} f_j^k$.

Borner les coefficients en bandelettes : Il y a deux sortes de fonctions bandelettes $\Psi_{\ell i} \in \mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma}_{\mathrm{T}^2})$:

- Si $\mathrm{S}_{\ell i}$ n'intersecte par $\mathcal{T}$, alors on peut utiliser la faible amplitude des coefficients d'ondelettes

$$\forall\, x_n \notin \mathcal{T}, \quad |f_j[n]| = \left|\langle f,\, \psi_{jn}^k\rangle\right| \leqslant \mathrm{C}_f\, 2^{j(1+\alpha)}, \tag{2.21}$$

  où $\mathrm{C}_f \stackrel{\text{def.}}{=} \|f\|_{\mathrm{C}^\alpha}$, ce qui mène à

$$|\langle f_j,\, \Psi_{\ell i}\rangle| \leqslant \mathrm{C}_f\, \|f_j\|_{\ell^\infty} \|\Psi_{\ell i}\|_{\ell^1} \leqslant (\mathrm{C}_f\, \mathrm{C}_\Psi)\, 2^{j\alpha}\, 2^{\ell/2}\, b$$

  où l'on a exploité la normalisation donnée à l'équation 2.12. On définit une échelle de coupure en bandelettes 2^{ℓ_0} par

$$(\mathrm{C}_f\, \mathrm{C}_\Psi)\, 2^{j\alpha}\, 2^{\ell_0/2}\, b = \mathrm{T} \quad \Longrightarrow \quad 2^{\ell_0} \stackrel{\text{def.}}{=} (\mathrm{C}_f \mathrm{C}_b)^{-2}\, 2^{-2j\alpha}\, \mathrm{T}^2\, b^{-2}.$$

Quitte à prendre une puissance de deux légèrement plus grande que le membre de droite, on suppose que ℓ_0 est un entier. On peut vérifier que l'on a

$$2^\ell \leqslant 2^{\ell_0} \quad \Longrightarrow \quad |\langle f,\, \Psi_{\ell i}\rangle| \leqslant \mathrm{T}.$$

- Si $\mathrm{S}_{\ell i}$ intersecte $\mathcal{T}$, comme la géométrie $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{T}^2}$ reste plus proche que b^α de γ, on peut utiliser le lemme 2.1 pour mesurer la régularité de la fonction F_{jw} déformée le long de la géométrie $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{T}^2}$. Soit $\mathrm{P}_{\widetilde{c}}(x)$ le polynôme de Taylor de la fonction F_{jw} au point $\widetilde{c} = w(c)$, où c est le centre de $\mathrm{Supp}\,(\Psi_{\ell i})$. On utilise un polynôme de degré $\alpha - 1$ le long de la direction $\widetilde{x}_1$ et de degré $\beta - 1$ dans la direction $\widetilde{x}_2$. On rappelle que $\beta > \alpha$ est la régularité des ondelettes ψ^k utilisées. En utilisant un raisonnement similaire à celui de l'équation (2.5), on obtient la borne suivante

$$\mathrm{F}_{j\mathrm{W}}(\widetilde{x}) = \mathrm{P}_{\widetilde{c}}(\widetilde{x} - \widetilde{c}) + \varepsilon(\widetilde{x}) \qquad \text{avec} \qquad \|\varepsilon\|_\infty \leqslant \mathrm{C_F}\, 2^j \left(s_j^{-1}\, b^\alpha + s_j^{-\beta}\, (2^\ell\, b)^\beta\right),$$

puisque $\mathrm{Supp}\,(\Psi_{\ell i})$ est de taille $b \times (b2^\ell)$. On peut maintenant calculer les produits scalaires avec les bandelettes en utilisant le fait que $\Psi_{\ell i}$ est orthogonal à l'espace des polynômes déformés de degré inférieur à p

$$\langle f,\, \Psi_{\ell i}\rangle = \sum_{x_n \in \mathrm{S}_{\ell i}} f_j[n]\Psi_{\ell i}[n] = \sum_{x_n \in \mathrm{S}_{\ell i}} \mathrm{F}_{j\mathrm{W}}(\widetilde{x}_n)\Psi_{\ell i}[n] \tag{2.22}$$

$$= \sum_{x_n \in \mathrm{S}_{\ell i}} \varepsilon(\widetilde{x}_n)\Psi_{\ell i}[n], \tag{2.23}$$

ce qui mène à la borne suivante

$$|\langle f,\, \Psi_{\ell i}\rangle| \leqslant \|\varepsilon\|_\infty \|\Psi_{\ell i}\|_{\ell^1} \leqslant (\mathrm{C_F}\, \mathrm{C_\Psi})\, b^{\beta+1}\, s_j^{-\beta}\, 2^{\ell/2} \max\left(s_j^{\beta-1}\, b^{\alpha-\beta}, 2^{\ell\beta}\right),$$

puisque $\|\Psi_{\ell i}\|_{\ell^1} \leqslant \mathrm{C_\Psi}\, b\, 2^{\ell/2}\, 2^{-j}$. On définit une échelle de coupure en bandelettes 2^{ℓ_1} par

$$s_j^{\beta-1}\, b^{\alpha-\beta} = 2^{\ell_1 \beta} \quad \Longrightarrow \quad 2^{\ell_1} \stackrel{\text{def.}}{=} s_j^{1-1/\beta}\, b^{\alpha/\beta - 1},$$

et on vérifie que si $2^\ell \geqslant 2^{\ell_1}$ alors on a

$$|\langle f,\, \Psi_{\ell i}\rangle| \leqslant (\mathrm{C_F}\, \mathrm{C_\Psi})\, b^{\frac{\delta}{2\beta}}\, s_j^{-\frac{1+\beta}{2}} \leqslant \mathrm{T},$$

à l'aide de la définition de $b = b_{\mathrm{T}}$.

Borner $\mathrm{M_S}$ **:** Le nombre de coefficients au-dessus du seuil est

$$\mathrm{M_S} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{Card}(\mathrm{J_T}) \qquad \text{où} \qquad \mathrm{J_T} \stackrel{\text{def.}}{=} \{(\ell, i) \setminus |\langle f,\, \Psi_{\ell i}\rangle| \geqslant \mathrm{T}\}.$$

On borne ce nombre à l'aide de

$$\mathrm{J}_0 \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{(\ell, i) \;\middle\backslash\; \mathrm{Supp}\,(\Psi_{\ell,i}) \cap \mathcal{T} = \varnothing \quad \text{et} \quad 2^\ell \geqslant 2^{\ell_0}\right\}$$

$$\text{et} \quad \mathrm{J}_1 \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{(\ell, i) \;\middle\backslash\; \mathrm{Supp}\,(\Psi_{\ell,i}) \cap \mathcal{T} \neq \varnothing \quad \text{et} \quad 2^\ell \geqslant 2^{\ell_1}\right\}$$

puisque l'on a prouvé que $\mathrm{J_T} \subset (\mathrm{J}_1 \cup \mathrm{J}_2)$.

On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(\mathrm{J}_0) &\leqslant \sum_{\ell\geqslant\ell_0} 2^{-\ell} \leqslant 2\,2^{-\ell_0} \leqslant 2(\mathrm{C}_f\,\mathrm{C}_b)^2 b \underbrace{2^{2j\alpha}}_{\leqslant \mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}} \underbrace{b}_{\leqslant \mathrm{T}^{\frac{2\beta}{\delta}}} \mathrm{T}^{-2} \\ &\leqslant 2(\mathrm{C}_f\,\mathrm{C}_b)^2\, b\,\mathrm{T}^{-2\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{\beta+1}{\delta}} \leqslant 2(\mathrm{C}_f\,\mathrm{C}_b)^2\, b\, s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\,\mathrm{T}^{-2\frac{\alpha+\beta}{\delta}}.\end{aligned}$$

Pour chaque échelle 2^ℓ, il y a moins que $\mathrm{K}\,2^j/(b\,2^\ell)+1$ bandelettes dans $\{\Psi_{\ell i}\}_i$ qui intersectent $\mathcal{T}$, de sorte que

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(\mathrm{J}_1) &\leqslant \sum_{\ell\geqslant\ell_1}(\mathrm{K}\,2^j/(b\,2^\ell)+1) \leqslant 2\,\mathrm{K}\,2^j\,b^{-1}\,2^{-\ell_1} + \mathrm{C}_0\,\log_2(\mathrm{T}) \\ &\leqslant 2\,\mathrm{K}\,2^j\,s_j^{1/\beta-1}\,b^{-\alpha/\beta} \leqslant 2\,\mathrm{K}\,s_j^{1/\beta}\,b^{-\alpha/\beta} \leqslant 2\,\mathrm{K}\,b\,s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\,\mathrm{T}^{-2\frac{\alpha+\beta}{\delta}}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathrm{M_S} \leqslant \mathrm{Card}(\mathrm{J}_0) + \mathrm{Card}(\mathrm{J}_1) \leqslant \mathrm{C}_2\,b\,s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\,\mathrm{T}^{-2\frac{\alpha+\beta}{\delta}}.$$

Borner $\|f_j - f_{j\mathrm{M_S}}\|^2$: On utilise la décomposition

$$\begin{aligned}\|f_f - f_{j\mathrm{M_S}}\|^2_{\ell^2(\mathrm{S})} &= \sum_{(\ell,i)\notin\mathrm{J_T}} |\langle f_j,\,\Psi_{\ell i}\rangle|^2 \\ &= \sum_{(\ell,i)\in\widetilde{\mathrm{J}}_o\cup\widetilde{\mathrm{J}}_1} |\langle f_j,\,\Psi_{\ell i}\rangle|^2 + \sum_{(\ell,i)\in(\mathrm{J}_0\cup\mathrm{J}_1)\setminus\mathrm{J_T}} |\langle f_j,\,\Psi_{\ell i}\rangle|^2,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les ensembles

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{J}}_0 &\overset{\text{def.}}{=} \Big\{(\ell,i) \;\Big\backslash\; \mathrm{Supp}\,(\Psi_{\ell i})\cap\mathcal{T} = \varnothing \quad \text{et} \quad 2^\ell < 2^{\ell_0}\Big\} \\ \text{et}\quad \widetilde{\mathrm{J}}_1 &\overset{\text{def.}}{=} \Big\{(\ell,i) \;\Big\backslash\; \mathrm{Supp}\,(\Psi_{\ell i})\cap\mathcal{T} \neq \varnothing \quad \text{et} \quad 2^\ell < 2^{\ell_1}\Big\}.\end{aligned}$$

On note tout d'abord que

$$\begin{aligned}\sum_{(\ell,i)\in(\mathrm{J}_0\cup\mathrm{J}_1)\setminus\mathrm{J_T}} |\langle f_j,\,\Psi_{\ell i}\rangle|^2 &\leqslant (\mathrm{Card}((\mathrm{J}_0\cup\mathrm{J}_1)\setminus\mathrm{J_T})\,\mathrm{T}^2 \\ &\leqslant (\mathrm{Card}(\mathrm{J}_0\cup\mathrm{J}_1)\,\mathrm{T}^2 \leqslant \mathrm{C}_2\,b\,s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\,\mathrm{T}^{\frac{4\alpha\beta}{\delta}}.\end{aligned}$$

Borner la contribution $\widetilde{\mathrm{J}}_1$ directement à l'aide de l'équation (2.23) mène à un résultat sous-optimal. Nous introduisons à la place

$$\mathrm{V} \overset{\text{def.}}{=} \mathrm{vect}\,\{\Psi_{\ell i} \;\backslash\; (\ell,i)\in\mathrm{J}_0\cup\mathrm{J}_1\}$$

et nous utilisons une projection pour borner l'erreur

$$\sum_{(\ell,i)\in\widetilde{\mathrm{J}}_o\cup\widetilde{\mathrm{J}}_1} |\langle f_j,\,\Psi_{\ell i}\rangle|^2 = \|f_j - \mathrm{P_V}(f_j)\|^2_{\ell^2(\mathrm{S})}.$$

Nous utilisons aussi la décomposition

$$f_j = f_j^0 + f_j^1 \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} \forall\, x_n\in\mathcal{T}, & f_j^0[n] = 0, \quad \text{et} \quad f_j^1[n] = f_j[n], \\ \forall\, x_n\notin\mathcal{T}, & f_j^0[n] = f_j[n], \quad \text{et} \quad f_j^1[n] = 0. \end{cases}$$

L'erreur de projection peut s'écrire comme

$$\begin{aligned}\|f_j - \mathrm{P_V}(f_j)\|_{\ell^2(\mathrm{S})} &\leqslant \|f_j^1 - \mathrm{P_V}(f_j^1)\|_{\ell^2(\mathrm{S})} + \|f_j^0\|_{\ell^2(\mathrm{S})} + \|\,\mathrm{P_V}(f_j^0)\|_{\ell^2(\mathrm{S})} \\ &\leqslant \|f_j^1 - \mathrm{P_V}(f_j^1)\|_{\ell^2(\mathrm{S})} + 2\|f_j^0\|_{\ell^2(\mathrm{S})}.\end{aligned}$$

La norme de f_j^0 est bornée en utilisant le fait que les coefficients en ondelettes sont bornés par l'équation (2.21) à l'extérieur de $\mathcal{T}$

$$\begin{aligned}\|f_j^0\|^2_{\ell^2(\mathrm{S})} &\leqslant \underbrace{\left(b^2\, 2^{-2j}\right)}_{\text{nbr. pts. dans S}} \mathrm{C}_f\, 2^{2j(\alpha+1)} \leqslant (\mathrm{C}_f)^2\, b\ \underbrace{2^{2j\alpha}}_{\leqslant \mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}}\ \underbrace{b}_{\leqslant \mathrm{T}^{\frac{2\beta}{\delta}}} \\ &\leqslant \mathrm{C}_f\, b\, \mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}+\frac{2\beta}{\delta}}\, s_j^{\frac{\beta+1}{\delta}} \leqslant \mathrm{C}_f\, b\, \mathrm{T}^{\frac{4\alpha\beta}{\delta}}\, s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}.\end{aligned}$$

On note que $\mathrm{P_V}(f_j^1)$ est une approximation polynomiale par morceaux sur des bandes de taille $b \times b2^{\ell_1}$ qui suivent une géométrie approchée $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{T}^2}$. On peut donc appliquer le résultat d'approximation de la proposition 2.3 en utilisant une largeur de bandes $a \stackrel{\text{def.}}{=} b\, 2^{\ell_1}$. Ceci mène à

$$\|f_j - \mathrm{P_V}(f_j)\|^2_{\ell^2(\mathrm{S})} \leqslant \mathrm{C}_2\, s_j^{-1}\, b^{2\alpha+1} \leqslant \mathrm{C}_2\, b\, \mathrm{T}^{\frac{4\alpha\beta}{\delta}}\, s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}},$$

ce qui permet de conclure. ■

En utilisant une segmentation en quadtree bien choisie, on peut étendre le résultat d'approximation précédent à une échelle entière de la transformée en ondelettes.

Théorème 2.12 Soit $\mathrm{T} > 0$ et soit f une fonction ayant une régularité géométrique C^α, comme défini en 1.1.1. Soit 2^j une échelle telle que

$$\mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \stackrel{\text{def.}}{=} 2^{j_0} \leqslant 2^j \leqslant 2^{j_1} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{T}^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

et k une orientation. Il existe une base de bandelette $\mathcal{B}(\Gamma_j^k) \in \mathcal{D}^k_{j,\mathrm{T}^2}$ avec $\Gamma_j^k = (\mathrm{Q}_j^k, \{\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}\})$, telle que l'approximation $f^k_{j\mathrm{M}_j^k}$ par seuillage à T de f_j^k dans cette base vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} \|f_j^k - f^k_{j\mathrm{M}_j^k}\|^2_{\ell^2} \leqslant \mathrm{C}_1\, \max\left(s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\, \mathrm{T}^{\frac{4\alpha\beta}{\delta}}, 2^{2j\alpha}\right) \\ \mathrm{M}_j^k \leqslant \mathrm{C}_2\, s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\, \mathrm{T}^{-2\frac{\alpha+\beta}{\delta}}, \qquad \text{avec} \qquad \delta \stackrel{\text{def.}}{=} 2\alpha\beta + \alpha + \beta, \end{array}\right. \tag{2.24}$$

où $\mathrm{M}_j^k = \mathrm{M}^k_{j\mathrm{B}} + \mathrm{M}^k_{j\mathrm{S}} + \mathrm{M}^k_{j\mathrm{G}}$ inclut le nombre $\mathrm{M}^k_{j\mathrm{B}}$ de coefficients de bandelettes au-dessus de T, le nombre $\mathrm{M}^k_{j\mathrm{S}}$ de coefficients nécessaire à la description de la segmentation Q_j^k, et le nombre $\mathrm{M}^k_{j\mathrm{G}}$ de coefficients nécessaire à la description des géométries approchées $\{\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}\}_\mathrm{S}$.

Remarque 2.13 On note que lorsque $\alpha = \beta$, on obtient le même résultat que celui du théorème 2.5, c'est-à-dire que l'équation (2.24) devient

$$\|f_j^k - f^k_{j\mathrm{M}_j^k}\|^2_{\ell^2} \leqslant \mathrm{C}\,(\mathrm{M}_j^k)^{-\alpha}.$$

Preuve. Pour spécifier la base de bandelettes, on utilise la segmentation en quadtree Q_j^k fournie par la proposition 2.8 avec une largeur de carré fixée

$$b = b_\mathrm{T} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{C}_b\, \mathrm{T}^{\frac{2\beta}{\delta}}\, s_j^{\frac{\beta+1}{\delta}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C}_b \stackrel{\text{def.}}{=} (\mathrm{C_F}\, \mathrm{C}_\psi)^{-\frac{2\beta}{\gamma}}, \tag{2.25}$$

comme on l'a déjà fait à l'équation (2.20).

Dans chaque carré $\mathrm{S} \in \mathrm{Q}_j^k$ qui contient une courbe de singularité γ_j paramétrée par γ, on choisit la géométrie approchée $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}} \stackrel{\text{def.}}{=} \widetilde{\gamma}_{\mathrm{T}^2}$ fournie par la proposition 2.10. Dans les carrés restants (qui soit sont réguliers, soit contiennent un coin), on définit $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}} = \Xi$, puisque l'on souhaite garder les coefficients en ondelettes d'origine.

On a donc défini une base de bandelettes $\mathcal{B}(\Gamma_j^k)$, paramétrée par $\Gamma_j^k \stackrel{\text{def.}}{=} (\mathrm{Q}_j^k, \{\widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}}\})$ qui appartient au dictionnaire $\mathcal{D}_{j,\mathrm{T}^2}^k$, puisque $2^j \leqslant \mathrm{T}^2$.

On va maintenant évaluer le nombre de coefficients en bandelettes au-dessus du seuil dans chaque carré dyadique, en même temps que l'erreur d'approximation correspondante.

- Dans les carrés réguliers $\mathrm{S} \in \mathcal{R}(\mathrm{Q}_j^k)$, les coefficients en ondelettes sont petits

$$\forall\, x_n \in \mathrm{S}, \quad |f_j[n]| \stackrel{\text{def.}}{=} \left|\langle f,\, \psi_{jn}^k\rangle\right| \leqslant \mathrm{C}_f\, 2^{j(1+\alpha)}.$$

  Soit $2^{j_\star}$ l'échelle de coupure en ondelettes définie par

$$2^{j_\star} \stackrel{\text{def.}}{=} (\mathrm{C}_f)^{-\frac{1}{\alpha+1}}\, \mathrm{T}^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

  Quitte à prendre une puissance de deux légèrement inférieur au membre de droite, on suppose que $j_\star$ est un entier. Si $j < j_\star$, on a $|f_j[n]| < \mathrm{T}$ et donc $\sum_{\mathrm{S}\in\mathcal{R}(\mathrm{Q}_j^k)} \mathrm{M}_{\mathrm{S}} = 0$. Si $j \geqslant j_\star$, on a

$$\sum_{\mathrm{S}\in\mathcal{R}(\mathrm{Q}_j^k)} \mathrm{M}_{\mathrm{S}} \leqslant 2^{-2j_\star} \leqslant (\mathrm{C}_f)^{\frac{2}{\alpha+1}}\, \mathrm{T}^{-\frac{2}{\alpha+1}} \leqslant (\mathrm{C}_f)^{\frac{2}{\alpha+1}}\, s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\, \mathrm{T}^{-2\frac{\alpha+\beta}{\delta}}.$$

  Dans les deux cas, on a

$$\sum_{\mathrm{S}\in\mathcal{R}(\mathrm{Q}_j^k)} \|f_{j\mathrm{M}_{\mathrm{S}}}^k - f_j^k\|_{\ell^2(\mathrm{S})}^2 \leqslant 2^{-2j}\, \|f_j\|_{\ell^\infty}^2 \leqslant (\mathrm{C}_f)^2\, 2^{2j\alpha}.$$

  On a donc prouvé la borne de l'équation (2.24) pour les carrés réguliers.
- Dans tous les carrés contenant un coin $\mathrm{S} \in \mathcal{C}(\mathrm{Q}_j^k)$, il y a moins de C_4 coefficients, donc le nombre de coefficients au-dessus de T est inférieur à C_4 dans ces carrés et on a aussi

$$\sum_{\mathrm{S}\in\mathcal{C}(\mathrm{Q}_j^k)} \|f_{j\mathrm{M}_{\mathrm{S}}}^k - f_j^k\|_{\ell^2(\mathrm{S})}^2 \leqslant \mathrm{C}_4\, \mathrm{T}^2 \leqslant \mathrm{C}_4\, s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\, \mathrm{T}^{\frac{4\alpha\beta}{\delta}},$$

  ce qui vérifie la borne de l'équation (2.24).
- Dans les carrés de taille $b = b_{\mathrm{T}}$ contenant un contour, à l'aide de la proposition 2.11 et en utilisant le fait qu'il y a moins de $\mathrm{C}_2\, b^{-1}$ carrés de ce type, on a

$$\sum_{\mathrm{S}\in\mathcal{E}_b(\mathrm{Q}_j^k)} \|f_j^k - f_{j\mathrm{M}_{\mathrm{S}}}^k\|_{\ell^2(\mathrm{S})}^2 \leqslant (\mathrm{C}_2\, b^{-1})\, \mathrm{C}_1\, b\, s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\, \mathrm{T}^{\frac{4\alpha\beta}{\delta}}$$

  ainsi que

$$\sum_{\mathrm{S}\in\mathcal{E}_b(\mathrm{Q}_j^k)} \mathrm{M}_{\mathrm{S}} \leqslant (\mathrm{C}_2\, b^{-1})\, \mathrm{C}_2\, b\, s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\, \mathrm{T}^{-2\frac{\alpha+\beta}{\delta}}.$$

  Ceci satisfait la borne (2.24).

- Pour les carrés S de taille inférieure à b_{T} qui contiennent un contour, on peut utiliser une stratégie sous-optimale, en utilisant autant de coefficients $\mathrm{M}_{\widetilde{\mathrm{S}}}$ que le nombre utilisé dans un carré $\widetilde{\mathrm{S}}$ de taille optimale b_{T}. L'erreur correspondante est bornée par celle commise dans un carré de taille b_{T}. Comme il y a moins de $\log_2(b) \leqslant \mathrm{C}_1\ |\log_2(\mathrm{T})|$ carrés de ce type, on voit que la borne de l'équation (2.24) est encore valide.

On a ainsi prouvé que

$$\begin{aligned}\|f_j^k - f_{j\mathrm{M}_j}^k\|_{\ell^2}^2 &= \sum_{\mathrm{S}\in\mathcal{R}(\mathrm{Q}_j^k)} \|f_j^k - f_{j\mathrm{M}_\mathrm{S}}^k\|_{\ell^2(\mathrm{S})}^2 + \sum_{\mathrm{S}\in\mathcal{C}(\mathrm{Q}_j^k)} \|f_j^k - f_{j\mathrm{M}_\mathrm{S}}^k\|_{\ell^2(\mathrm{S})}^2 \\ &\quad + \sum_{\mathrm{S}\in\mathcal{E}_b(\mathrm{Q}_j^k)} \|f_j^k - f_{j\mathrm{M}_\mathrm{S}}^k\|_{\ell^2(\mathrm{S})}^2 + \sum_{\mathrm{S}\in\mathcal{E}_-(\mathrm{Q}_j^k)} \|f_j^k - f_{j\mathrm{M}_\mathrm{S}}^k\|_{\ell^2(\mathrm{S})}^2 \\ &\leqslant \mathrm{C}_1\ \max\left(s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\ \mathrm{T}^{\frac{4\alpha\beta}{\delta}}, 2^{2j\alpha}\right)\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_{j\mathrm{B}} &= \sum_{\mathrm{S}\in\mathcal{R}(\mathrm{Q}_j^k)} \mathrm{M}_\mathrm{S} + \sum_{\mathrm{S}\in\mathcal{C}(\mathrm{Q}_j^k)} \mathrm{M}_\mathrm{S} + \sum_{\mathrm{S}\in\mathcal{E}_b(\mathrm{Q}_j^k)} \mathrm{M}_\mathrm{S} + \sum_{\mathrm{S}\in\mathcal{E}_-(\mathrm{Q}_j^k)} \mathrm{M}_\mathrm{S} \\ &\leqslant \mathrm{C}_2\, s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\ \mathrm{T}^{-2\frac{\alpha+\beta}{\delta}}.\end{aligned}$$

Il nous faut maintenant prouver la même borne pour le nombre de coefficients géométriques $\mathrm{M}_{j\mathrm{G}}$ et le nombre de coefficients de segmentation $\mathrm{M}_{j\mathrm{S}}$.

Pour décrire le quadtree, on commence par le nœud racine et on utilise un seul coefficient pour dire si un sous-carré doit être subdivisé en quatre nœuds fils (voir la figure 2.4 pour la représentation de la segmentation sous forme d'arbre). Ce schéma de codage nécessite autant de coefficients pour coder le quadtree qu'il y a de feuilles dans l'arbre quaternaire, ce qui mène à

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_{j\mathrm{S}} &\leqslant \mathrm{Card}(\mathrm{Q}_j^k) \leqslant \mathrm{C}_1\, b^{-1} \leqslant \mathrm{C}_1\, \mathrm{C}_b^{-1}\, \mathrm{T}^{-2\frac{\beta}{\delta}}\, s_j^{-\frac{\beta+1}{\delta}} \\ &\leqslant \mathrm{C}_1\, \mathrm{C}_b^{-1}\, s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\ \mathrm{T}^{-2\frac{\alpha+\beta}{\delta}}\ \underbrace{\left(\mathrm{T}^{-2\frac{\alpha}{\delta}}\, s_j^{-\frac{1+\alpha}{\delta}}\right)}_{\leqslant 1 \text{ puisque } s_j \geqslant \mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}} \leqslant \left(\mathrm{C}_1\, \mathrm{C}_b^{-1}\right)\ s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\ \mathrm{T}^{-2\frac{\alpha+\beta}{\delta}}.\end{aligned}$$

Pour coder les courbes géométriques approchées $\{\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}\}_\mathrm{S}$, on utilise un coefficient pour dire si $\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}$ est égal au symbole d'absence de géométrie Ξ ou non. Si $\widetilde{\gamma}_\mathrm{S} \neq \Xi$, on utilise 1 coefficient pour dire si la géométrie est paramétrée horizontalement ou verticalement. On utilise ensuite $p-1$ coefficients pour encoder le polynôme $\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}$, puisque l'on peut supposer que $\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}(0) = 0$ et que $\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}$ est de degré $p-1$. Pour chaque carré, ceci nécessite moins de $p+1$ coefficients, ainsi le nombre total de coefficients géométriques est

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_{j\mathrm{G}} &\leqslant (p+1)\ \mathrm{Card}(\mathrm{Q}_j^k) \leqslant (p+1)\, \mathrm{C}_1\, b^{-1} \\ &\leqslant \left((p+1)\, \mathrm{C}_1\, \mathrm{C}_b^{-1}\right)\ s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\ \mathrm{T}^{-2\frac{\alpha+\beta}{\delta}},\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

On peut maintenant énoncer le principal résultat d'approximation en bandelettes pour une fonction géométrique dans une base de bandelettes de $\mathrm{L}^2([0,1]^2)$ bien choisie.

Théorème 2.14 Soit f une fonction avec une régularité géométrique C^α comme décrit à la définition 1.1.1. Pour chaque $\mathrm{T} > 0$, il existe une base de bandelettes $\mathcal{B}(\Gamma) \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}^2}$ telle que l'approximation f_M de f par un seuillage à T dans la base $\mathcal{B}(\Gamma)$ satisfasse

$$\begin{cases} \|f - f_\mathrm{M}\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant \mathrm{C}_1\, \mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \\ \mathrm{M} \leqslant \mathrm{C}_2\, \mathrm{T}^{-\frac{2}{\alpha+1}}, \end{cases} \tag{2.26}$$

où $\mathrm{M} = \mathrm{M}_\mathrm{B} + \mathrm{M}_\mathrm{G} + \mathrm{M}_\mathrm{S}$ inclut le nombre M_B de coefficients en bandelettes au-dessus de T, le nombre M_S de coefficients nécessaire pour spécifier les quadtrees et le nombre M_G de coefficients nécessaire pour spécifier les géométries approchées à l'intérieur de chaque carré des quadtrees. Les réels C_1 et C_2 sont des constantes qui ne dépendent que de f. En particulier, on a le résultat d'approximation suivant

$$\|f - f_\mathrm{M}\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant \mathrm{C}\, \mathrm{M}^{-\alpha}, \tag{2.27}$$

où C est une constante qui ne dépend que de f.

Preuve. Pour chaque échelle 2^j vérifiant

$$\mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \stackrel{\text{def.}}{=} 2^{j_0} \leqslant 2^j \leqslant 2^{j_1} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{T}^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

on choisit la base de bandelettes discrètes $\mathcal{B}(\Gamma_j^k)$ fournie par le théorème 2.12. Pour les échelles restantes, on utilise la base de Dirac $\Delta_j([0,1]^2)$ comme définie à l'équation (2.15). En transformant ces bases en une base de $\mathrm{L}^2([0,1]^2)$, on obtient une base de bandelettes orthogonales $\mathcal{B}(\Gamma) \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}^2}$ de $\mathrm{L}^2([0,1]^2)$. L'approximation par seuillage dans cette base se résume à une approximation à chaque échelle de la transformée en bandelettes, puisque

$$\|f - f_\mathrm{M}\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \sum_{j,k} \|f_j^k - f_{j\mathrm{M}_j^k}^k\|_{\ell^2}^2 \qquad \text{où} \qquad \mathrm{M} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j,k} \mathrm{M}_j^k.$$

En utilisant le résultat de l'équation (2.24), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k,j=j_0}^{j_1} \|f_j^k - f_{j\mathrm{M}_j^k}^k\|_{\ell^2}^2 &\leqslant \sum_{k,j=j_0}^{j_1} \mathrm{C}_1 \left(s_j^{\frac{\alpha-\beta}{\delta}}\, \mathrm{T}^{\frac{4\alpha\beta}{\delta}} + 2^{2j\alpha} \right) \\ &\leqslant 3\, \mathrm{C}_1 \left(2^{j_0 \frac{\alpha-\beta}{\delta}}\, \mathrm{T}^{\frac{4\alpha\beta}{\delta}} + 2^{j_1\alpha} \right) \leqslant 12\, \mathrm{C}_1\, \mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait qu'il y a moins de 2^{-2j_1} coefficients pour les échelles grossières restantes, on a

$$\sum_{k,j>j_1} \|f_j^k - f_{j\mathrm{M}_j^k}^k\|_{\ell^2}^2 \leqslant 2^{-2j_1}\, \mathrm{T}^2 \leqslant \mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}},$$

ainsi que

$$\sum_{k,j>j_1} \mathrm{M}_j^k \leqslant 2^{-2j_1} \leqslant \mathrm{T}^{\frac{-2}{\alpha+1}}$$

On utilise le fait que $\left| f_j^k[n] \right| \leqslant \mathrm{C}_f\, 2^j$, de sorte que, pour $j < j_0$, on a $\left| f_j^k[n] \right| < \mathrm{T}$. L'énergie d'une unique échelle en ondelettes vérifie $\|f_j^k\|^2 \leqslant \mathrm{C}_f\, 2^j$, ce qui mène à

$$\sum_{k,j<j_0} \|f_j^k - f_{j\mathrm{M}_j^k}^k\|_{\ell^2}^2 \leqslant 6\, \mathrm{C}_f\, 2^{2j_0} \leqslant 6\, \mathrm{C}_f\, \mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}, \qquad \text{avec} \qquad \sum_{k,j<j_0} \mathrm{M}_j^k = 0.$$

En combinant toutes ces bornes, on obtient le résultat de l'équation (2.26) et en substituant T entre ces équations, on obtient la borne (2.27). ∎

2.2.6 ALGORITHME DE MEILLEURE BASE DE BANDELETTES

On va maintenant décrire un algorithme rapide pour trouver une base de bandelettes qui mène au résultat d'approximation du théorème 2.14. On utilise une stratégie similaire à celle employée par Le Pennec et Mallat dans [115] avec le calcul d'une meilleure base minimisant un Lagrangien. Soit

$$\mathcal{B}(\Gamma) = \{\widetilde{\Psi}_\mu\}_\mu \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}^2}, \qquad \text{où} \qquad \Gamma = \bigcup_{j,k} \Gamma_j^k, \tag{2.28}$$

une base de bandelettes, où $\Gamma_j^k = \left(\mathrm{Q}_j^k, \{\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}\}_\mathrm{S}\right)$ sont les paramètres qui décrivent cette base à chaque échelle. On définit

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{B}(\Gamma), \mathrm{T}) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{\left|\langle \widetilde{\Psi}_\mu,\, f\rangle\right| < \mathrm{T}} \left|\langle \widetilde{\Psi}_\mu,\, f\rangle\right|^2 + \mathrm{T}^2\,\mathrm{M}$$

avec $\mathrm{M} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{M_B} + \mathrm{M_S} + \mathrm{M_G}$, où

$$\mathrm{M_B} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{Card}\left\{\mu \;\Big\backslash\; \left|\langle \widetilde{\Psi}_\mu,\, f\rangle\right| \geqslant \mathrm{T}\right\} \tag{2.29}$$

est le nombre de coefficients de bandelettes au-dessus de T, $\mathrm{M_S}$ est le nombre de paramètres de segmentation nécessaire pour la description des quadtrees $\{\mathrm{Q}_j^k\}_{j,k}$ et $\mathrm{M_G}$ est le nombre de paramètres géométriques nécessaire pour décrire les géométries approchées $\{\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}\}_\mathrm{S}$.

Un résultat standard, déjà démontré dans [115], établit que la base qui minimise le Lagrangien est presque aussi bonne que la base fournie par le théorème 2.14. De façon plus précise, on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème 2.15 Soit $\mathrm{T} > 0$ et soit f une fonction ayant une régularité géométrique C^α. Soit $\mathcal{B}^\star(\Gamma)$ la base définie par

$$\mathcal{B}^\star(\Gamma) \stackrel{\text{def.}}{=} \underset{\mathcal{B}(\Gamma)\in\mathcal{D}_{\mathrm{T}^2}}{\mathrm{argmin}}\; \left(\mathcal{L}(f, \mathcal{B}(\Gamma), \mathrm{T})\right).$$

Alors l'approximation f_M de f par seuillage à T dans la base $\mathcal{B}^\star(\Gamma)$ satisfait

$$\|f - f_\mathrm{M}\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{M}^{-\alpha},$$

où $\mathrm{M} = \mathrm{M_B} + \mathrm{M_G} + \mathrm{M_S}$ inclut le nombre $\mathrm{M_B}$ de coefficients en bandelettes au-dessus de T, le nombre $\mathrm{M_S}$ de coefficients nécessaire pour décrire les quadtrees, le nombre $\mathrm{M_G}$ de coefficients nécessaire pour spécifier les géométries à l'intérieur de chaque quadtree et C est une constante qui ne dépend que de f.

Preuve. Le résultat (2.26) nous dit qu'il existe une base de bandelettes $\mathcal{B}(\Gamma) \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}^2}$ telle que

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{B}^\star(\Gamma), \mathrm{T}) \leqslant \mathcal{L}(f, \mathcal{B}(\Gamma), \mathrm{T}) \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}.$$

Si on note $\mathrm{M} = \mathrm{M_B} + \mathrm{M_S} + \mathrm{M_G}$ le nombre total de paramètres nécessaires pour représenter l'approximation par seuillage f_M dans $\mathcal{B}^\star(\Gamma)$, on a

$$\begin{aligned} &\|f - f_\mathrm{M}\|_\mathrm{L}^2 \leqslant \mathcal{L}(f, \mathcal{B}^\star(\Gamma), \mathrm{T}) \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \\ \text{et} \qquad &\mathrm{M}\,\mathrm{T}^2 \leqslant \mathcal{L}(f, \mathcal{B}^\star(\Gamma), \mathrm{T}) \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

En combinant ces deux équations, on obtient le résultat voulu. ■

On note que ce Lagrangien peut se décomposer comme

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{B}(\Gamma), \mathrm{T}) = \sum_{k,j \leqslant 0} \mathcal{L}(f_j^k, \mathcal{B}(\Gamma_j^k), \mathrm{T}),$$

où les Lagrangiens discrets, définis à l'équation (2.28), peuvent s'écrire comme

$$\mathcal{L}(f_j^k, \mathcal{B}(\Gamma_j^k), \mathrm{T}) = \|f_j^k - f_{j\mathrm{M}_j^k}^k\|_{\ell_j^2} + (\mathrm{M}_{j\mathrm{B}} + \mathrm{M}_{j\mathrm{S}} + \mathrm{M}_{j\mathrm{G}})\mathrm{T}^2.$$

La base $\mathcal{B}^\star(\Gamma)$ peut ainsi s'obtenir en trouvant les meilleures bases discrètes $\mathcal{B}^\star(\Gamma_j^k)$ qui minimisent $\mathcal{L}(f, \mathcal{B}(\Gamma_j^k), \mathrm{T})$ pour chaque échelle $\mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \leqslant 2^j \leqslant \mathrm{T}^{\frac{1}{\alpha+1}}$.

Un algorithme de calcul rapide pour effectuer cette minimisation est décrit à la sous-section 2.3.1.

2.2.7 Compression dans une meilleure base de bandelettes

Soit T un pas de quantification fourni par l'utilisateur. Plus T est élevé, plus le nombre de coefficients de bandelettes mis à zéro lors de l'approximation va être grand et plus la compression sera agressive.

Pour compresser une fonction f dans une base de bandelettes $\mathcal{B}(\Gamma) = \{\widetilde{\Psi}_\mu\}_\mu \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}^2}$, on quantifie et code ses coefficients transformés et on code également les paramètres géométriques $\Gamma = \{\Gamma_j^k\}$ qui décrivent la base, où $\Gamma_j^k = (\mathrm{Q}_j^k, \{\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}\})$. Ceci donne lieu à une fonction reconstruite

$$f_\mathrm{R} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_\mu \mathrm{Q}_\mathrm{T}(\langle f, \widetilde{\Psi}_\mu\rangle)\, \widetilde{\Psi}_\mu, \tag{2.30}$$

où le quantificateur est défini à l'équation (2.14) et

$$\mathrm{R} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{R}_\mathrm{B} + \mathrm{R}_\mathrm{S} + \mathrm{R}_\mathrm{G} = \sum_{j,k} (\mathrm{R}_{j\mathrm{B}}^k + \mathrm{R}_{j\mathrm{S}}^k + \mathrm{R}_{j\mathrm{G}}^k)$$

est le nombre de bits nécessaire pour le codage de f_R, ce qui inclut

- $\mathrm{R}_{j\mathrm{B}}^k$ le nombre de bits nécessaire pour coder les coefficients de bandelettes

$$\langle f, \widetilde{\Psi}_\mu\rangle = \langle f_j^k, \Psi_\mu\rangle$$

  pour une seule échelle 2^j et orientation k,
- $\mathrm{R}_{j\mathrm{B}}^k$ est le nombre de bits nécessaire pour coder la segmentation en quadtree Q_j^k,
- $\mathrm{R}_{j\mathrm{B}}^k$ est le nombre de bits nécessaire pour coder la géométrie approchée quantifiée $\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}$ à l'intérieur de chaque carré S d'un quadtree Q_j^k.

On obtient le résultat de compression suivant.

Théorème 2.16 Soit $\mathrm{T} > 0$ et soit f une fonction ayant une régularité géométrique C^α. Soit $\mathcal{B}^\star(\Gamma) \in \mathcal{D}_{\mathrm{T}^2}$ la base de bandelettes qui minimise le Lagrangien $\mathcal{L}(f, \mathcal{B}(\Gamma), \mathrm{T}/2)$ comme décrit à la sous-section 2.2.6. Alors la fonction f_R, reconstruite depuis les coefficients quantifiés de f dans la base $\mathcal{B}^\star(\Gamma)$, comme défini à l'équation (2.30), vérifie

$$\|f - f_\mathrm{R}\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant \mathrm{C}\, \log_2(\mathrm{R})^\alpha\, \mathrm{R}^{-\alpha},$$

où $\mathrm{R} = \mathrm{R_B} + \mathrm{R_S} + \mathrm{R_G}$ est le nombre de bits nécessaire au codage de f_R et C est une constante, qui ne dépend que de f.

Preuve. En utilisant le théorème 2.15, l'approximation par seuillage f_M à $\mathrm{T}/2$ dans la base de bandelettes $\mathcal{B}^\star$ vérifie

$$\|f - f_\mathrm{M}\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant \mathrm{C}_1\,(\mathrm{T}/2)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}, \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{M} \leqslant \mathrm{C}_2\,(\mathrm{T}/2)^{-\frac{2}{\alpha+1}},$$

où $\mathrm{M} = \mathrm{M_B} + \mathrm{M_S} + \mathrm{M_G}$ est le nombre de coefficients de bandelettes nécessaire pour spécifier f_M. On a

$$\|f - f_\mathrm{R}\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \sum_{a_\mu} |a_\mu - \mathrm{Q_T}(a_\mu)|^2 \qquad \text{où} \qquad a_\mu \stackrel{\text{def.}}{=} \langle f,\, \widetilde{\Psi}_\mu \rangle.$$

Comme pour les $\mathrm{M_B}$ coefficients a_μ non quantifiés à 0, on a $|a_\mu - \mathrm{Q_T}(a_\mu)|^2 \leqslant \mathrm{T}^2/4$, on obtient

$$\|f - f_\mathrm{R}\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant \sum_{|\mu|>\mathrm{T}/2} |a_\mu|^2 + \frac{1}{4}\mathrm{M_B}\,\mathrm{T}^2 = \|f - f_\mathrm{M}\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \frac{1}{4}\mathrm{M_B}\,\mathrm{T}^2 \tag{2.31}$$

$$\leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{T}^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}. \tag{2.32}$$

On doit donc maintenant borner R en fonction de M.

Borner $\mathrm{R_B}$: Pour chaque échelle $2^{j_0} \leqslant 2^j \leqslant 2^{j_1}$ et orientation k, on doit coder les coefficients en bandelettes quantifiés. Une stratégie consiste à coder l'indice des $\mathrm{M}_{j\mathrm{B}}^k$ coefficients non nuls, ce qui nécessite $\log_2(2^{-2j})$ bits par coefficient et ensuite à coder les amplitudes quantifiées, ce qui nécessite moins de $\log_2(\|f\|_2/\mathrm{T})$ puisque les coefficients en bandelettes sont plus petits que $\|f\|_2$. On a donc

$$\mathrm{R}_{j\mathrm{B}}^k \leqslant \mathrm{M}_{j\mathrm{B}}^k \left(\log_2(2^{-2j}) + \log_2(\|f\|_{\mathrm{L}^2}/\mathrm{T})\right).$$

On note tout d'abord que

$$2^j \geqslant 2^{j_1} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{T}^{-\frac{1}{\alpha+1}} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{R}_{j\mathrm{B}}^k \leqslant \mathrm{C_B}\,\mathrm{M}_{j\mathrm{B}}^k\,|\log_2(\mathrm{T})|.$$

Pour les échelles restantes $2^j > 2^{j_1}$, nous n'avons besoin que de stocker les valeurs quantifiées des coefficients et l'on obtient une borne encore plus faible. On a donc

$$\mathrm{R_B} = \sum_{k,j\leqslant 0} \mathrm{R}_{j\mathrm{B}}^k \leqslant \mathrm{C_B}\,\mathrm{M_B}\,|\log_2(\mathrm{T})|.$$

Borner $\mathrm{R_S}$: Pour chaque échelle $2^{j_0} \leqslant 2^j \leqslant 2^{j_1}$ et orientation k, on stocke la segmentation en quadtree du domaine en ondelettes en utilisant un bit pour coder chaque type de nœud (qui peut être soit un nœud réel ou bien une feuille). On a donc $\mathrm{R}_{j\mathrm{S}} = \mathrm{M}_{j\mathrm{S}}$ et $\mathrm{R_S} \leqslant \mathrm{M_S} \leqslant \mathrm{M}$.

Borner $\mathrm{R_G}$: Pour chaque échelle $2^{j_0} \leqslant 2^j \leqslant 2^{j_1}$ et orientation k, on doit stocker la géométrie approchée $\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}$ à l'intérieur de chaque carré de Q_j^k. On utilise tout d'abord un bit pour dire si $\widetilde{\gamma}_\mathrm{S} = \Xi$ ou non. Si $\widetilde{\gamma}_\mathrm{S} \neq \Xi$, on utilise un autre bit pour dire si la géométrie est horizontale ou verticale et ensuite on doit coder un polynôme quantifié $\widetilde{\gamma}_\mathrm{S}$. Comme montré

à l'équation 2.16, il y a moins de $\mathrm{C}_{\mathcal{G}}\,\mathrm{T}^{-\eta}$ tels polynômes. Le nombre de bits de géométrie est donc inférieur à $2+\log_2(\mathrm{C}_{\mathcal{G}}\,\mathrm{T}^{-\eta})$ bits par carré. Comme il y a moins de $\mathrm{C}_1\,b^{-1}$ carrés, on a

$$\mathrm{R}_{j\mathrm{G}}^{k} \leqslant \mathrm{C}_1\,b^{-1}(2+\log_2(\mathcal{C}_{\mathcal{G}}\,\mathrm{T}^{-\eta}) \leqslant \mathrm{C}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{M}_{j\mathrm{B}}\,|\log_2(\mathrm{T})| \quad \text{en utilisant} \quad b^{-1} \leqslant \mathrm{C}_b^{-1}\,\mathrm{T}^{-\frac{2}{\alpha+1}}.$$

Comme il n'y a pas de géométrie aux échelles restantes, on a

$$\mathrm{R}_{\mathrm{G}} = \sum_{k,j\leqslant 0} \mathrm{R}_{j\mathrm{G}}^{k} \leqslant \mathrm{C}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{M}_{\mathrm{G}}\,|\log_2(\mathrm{T})|$$

Borner l'erreur : En combinant les trois types de bits, on a

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_{\mathrm{B}} + \mathrm{R}_{\mathrm{S}} + \mathrm{R}_{\mathrm{G}} \leqslant \max(\mathrm{C}_{\mathrm{B}}, \mathrm{C}_{\mathrm{S}}, \mathrm{C}_{\mathrm{G}})\,\mathrm{M}\,|\log_2(\mathrm{T})|\,.$$

En combinant ce résultat avec la borne de l'équation (2.32), on obtient le résultat voulu. ■

Ce théorème montre que la décroissance asymptotique de l'erreur commise par un codage en bandelettes atteint la borne inférieure de Kolmogorov à un facteur $|\log(\mathrm{R})|^{\alpha}$ près. En effet, la classe des images ayant une régularité géométrique C^{α} contient la classe des images uniformément C^{α} et on sait que pour cette classe d'image, la borne de Kolmogorov décroît comme $\mathrm{R}^{-\alpha}$.

2.3 ALGORITHME DE CALCUL

Dans cette section, nous décrivons l'algorithme de transformée en bandelettes rapide d'une image discrétisée. Un programme MATLAB réalisant cette transformée est disponible librement au téléchargement [155].

2.3.1 TRANSFORMÉE EN BANDELETTES DISCRÈTE

Image discrétisée Une image discrétisée $\overline{f}$ de $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ pixels est obtenue en projetant une fonction $f \in \mathrm{L}^2([0,1]^2)$ sur un ensemble de fonctions d'échelles $\{\Phi_{\mathrm{J}n}\}_n$ à une résolution $2^{\mathrm{J}} = \mathrm{N}^{-1}$

$$\forall\, n \in \{0, \ldots, \mathrm{N}-1\}^2, \quad \overline{f}[n] \stackrel{\text{def.}}{=} \langle f,\, \Phi_{\mathrm{J}n} \rangle$$

où

$$\Phi_{\mathrm{J}n}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 2^{-\mathrm{J}} \Phi(2^{-\mathrm{J}} x - n).$$

Fonction d'échelles en ondelettes Les espaces intermédiaires $\mathrm{V}_j \subset \mathrm{L}^2([0,1]^2)$ peuvent se décomposer comme des sommes d'espace de détails en ondelettes

$$\mathrm{V}_j = \bigoplus_{k,p<j} \mathrm{W}_j^k \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}_j = \text{vect}\, \left\{ \varphi_{jn} \;\backslash\; n \in \{0, \ldots, 2^{-j}-1\}^2 \right\}$$

où

$$\varphi_{jn} \stackrel{\text{def.}}{=} 2^{-j} \varphi(2^{-j} x - n). \tag{2.33}$$

Les fonctions d'ondelettes et les fonctions d'échelles peuvent s'écrire à l'aide d'une cascade de filtrages passe-bas $\{g^k[n]\}_n$ et passe-haut $\{h^k[n]\}_n$, ce qui s'écrit dans le domaine de Fourier

$$\widehat{\psi_j^k}(\omega) = \prod_{p \leqslant j} \widehat{h^k}(2^p\, \omega) \qquad \text{et} \qquad \widehat{\varphi_j^k}(\omega) = \widehat{g^k}(2^j\, \omega) \prod_{p \leqslant j-1} \widehat{h^k}(2^p\, \omega).$$

Bases de bandelettes discrètes Nous avons décrit à l'équation (2.2.3) comment transformer des vecteurs de bandelettes discrets $\psi_\mu \in \mathcal{B}(\Gamma_j^k)$ de ℓ_j^2 en un ensemble de fonctions $\widetilde{\Psi}_\mu$. Pour $j > \mathrm{J}$, on peut aussi transformer ces vecteurs en des vecteurs $\overline{\Psi}_\mu$ de l'espace de pixels de l'image ℓ_{J}^2 comme suit

$$\overline{\mathcal{B}}(\Gamma_j^k) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\overline{\Psi}_\mu\}_\mu \qquad \text{où} \qquad \overline{\Psi}_\mu \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{(2^j\, n) \in [0,1[^2} \Psi_\mu[n]\, \overline{\psi}_{jn}^k$$

où les vecteurs d'ondelettes discrets $\overline{\psi}_{jn}^k$ sont définis dans le domaine de Fourier

$$\widehat{\overline{\psi}_{jn}^k}(\omega) \stackrel{\text{def.}}{=} \prod_{p=\mathrm{J}+1}^{j} \widehat{h^k}(\omega).$$

Une base discrète de bandelettes est définie par

$$\overline{\mathcal{B}}(\Gamma) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcup_{k,j>\mathrm{J}} \overline{\mathcal{B}}(\Gamma_j^k) \qquad \text{où} \qquad \Gamma = \bigcup_{k,j>\mathrm{J}} \Gamma_j^k.$$

L'ensemble de toutes les bases possibles de bandelettes discrètes $\overline{\mathcal{B}}(\Gamma)$ pour tous les ensembles de bases $\overline{\mathcal{B}}(\Gamma_j^k) \in \mathcal{D}_{j,\mathrm{T}^2}^k$, $j > \mathrm{J}$, forme le dictionnaire de bandelettes discrètes $\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{T}^2}$.

Transformée en bandelettes discrètes Le calcul d'une transformée en bandelettes discrètes d'une image $\overline{f}$ correspond à la projection de cette image sur les vecteurs d'une base $\overline{\mathcal{B}}(\Gamma)$. Cette transformée est calculée à l'aide tout d'abord d'une transformée en ondelettes discrète rapide de l'image $\overline{f} \in \ell_{\mathrm{J}}^2$ puis d'une transformée en bandelettes discrète de l'ensemble de coefficients d'ondelettes $\overline{f}_j^k$ pour chaque échelle $2^j > 2^{\mathrm{J}}$ et orientation k.

Lorsque les fonctions d'échelles Φ_{jn} sont en fait des fonctions d'échelles de la transformée en ondelettes φ_{jn} comme défini à l'équation (2.33), on a

$$\forall\, k, \quad \forall\, j > \mathrm{J}, \quad \langle \overline{f}, \overline{\Psi}_\mu \rangle_{\ell_{\mathrm{J}}^2} = \langle f, \widetilde{\Psi}_\mu \rangle_{\mathrm{L}^2} = \langle \overline{f}_j^k, \Psi_\mu \rangle_{\ell_j^2}.$$

Dans le cas général, lorsque la fonction d'échelle Φ^k est C^β à support compact, alors les coefficients en bandelettes $\langle \overline{f}, \overline{\Psi}_\mu \rangle$ et les coefficients $\langle f, \widetilde{\Psi}_\mu \rangle$ sont proches. On peut ainsi énoncer le résultat d'approximation discrète suivant.

Théorème 2.17 Soit $\mathrm{T} > 0$ et soit $\overline{f}$ une image de $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ pixels discrétisée depuis une fonction f ayant une régularité géométrique C^α. Soit $\overline{\mathcal{B}}^\star(\Gamma)$ la base de bandelettes discrète définie par

$$\overline{\mathcal{B}}^\star(\Gamma) \stackrel{\text{def.}}{=} \underset{\overline{\mathcal{B}}(\Gamma) \in \overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{T}^2}}{\operatorname{argmin}} \left(\mathcal{L}(\overline{f}, \overline{\mathcal{B}}(\Gamma), \mathrm{T}) \right).$$

L'approximation $\overline{f}_{\mathrm{M}}$ de $\overline{f}$ par un seuillage à T dans la base $\overline{\mathcal{B}}^\star(\Gamma)$ vérifie

$$\|\overline{f} - \overline{f}_{\mathrm{M}}\|_{\ell_{\mathrm{J}}^2}^2 \leqslant \mathrm{C}\, \mathrm{M}^{-\alpha},$$

où $\mathrm{M} = \mathrm{M_B} + \mathrm{M_G} + \mathrm{M_S}$ inclut le nombre $\mathrm{M_B}$ de coefficients en bandelettes au-dessus de T, le nombre $\mathrm{M_S}$ de coefficients nécessaires pour spécifier les quadtrees, le nombre $\mathrm{M_G}$ de coefficients nécessaires pour spécifier les géométries dans chaque carré des quadtrees et C est une constante qui ne dépend que de f.

On a aussi un théorème similaire au théorème 2.16 pour la compression en bandelettes d'une image discrétisée.

2.3.2 Algorithme rapide

Nous décrivons maintenant en détail l'algorithme de transformée en bandelettes rapide direct. Ceci inclut à la fois le calcul de la meilleure base de bandelettes $\overline{\mathcal{B}}^\star(\Gamma)$ ainsi que le calcul de la décomposition de $\overline{f}$ dans cette base. L'algorithme inverse en découle immédiatement, puisqu'il ne nécessite pas la recherche de la meilleure base et qu'il consiste à inverser les transformées en ondelettes ainsi que les transformées de Alpert sur les carrés des quadtrees.

(1) Paramètres de l'algorithme. L'utilisateur fournit une image discrétisée $\overline{f}$ de taille $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ pixels, et un seuil T qui contrôle le taux de compression de l'algorithme. On note $2^{\mathrm{J}} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{N}^{-1}$

(2) Transformée en ondelettes 2D. On calcule la transformée en ondelettes discrète 2D de l'image d'origine $\overline{f}$. Ceci produit un ensemble de vecteurs de coefficients $\{\overline{f}_j^k\}_{k,j>\mathrm{J}}$. Les vecteurs $\overline{f}_j^k$, pour chaque échelle 2^j et orientation $k \in \{\mathrm{V},\mathrm{H},\mathrm{D}\}$ peuvent être stockés dans une unique image ayant la même taille que l'image d'origine $\overline{f}$. Les étapes suivantes (3)-(7) implémentent la bandelétisation, qui est répétée pour chaque échelle et orientation.

(3) Selection de chaque carré dyadique. Un carré dyadique est par définition un carré obtenu en subdivisant de façon récursive le carré $[0,1]^2$ en quatre carrés de même taille. Pour chaque carré S, on regroupe les coefficients en ondelettes $\{\overline{f}_j^k[n]\}_{(2^j n)\in \mathrm{S}}$ dans un vecteur noté f_{S}. Les étapes suivantes (4)-(7) sont répétées pour chaque carré dyadique S à chaque échelle 2^j et orientation k d'une transformée en ondelettes.

(4) Quantification de la géométrie. Nous devons maintenant trouver la meilleure géométrie approchée quantifiée $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}}$ à l'intérieur d'un carré S. Nous devons donc tester toutes les bases de bandelettes $\mathcal{B}(\mathrm{S},\widetilde{\gamma}_m^{\Omega})$ de $\ell_j^2(\mathrm{S})$ pour les géométries

$$\widetilde{\gamma}_m^{\Omega} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{p-1} (m_i \mathrm{T}^2)\theta_i \qquad \text{où} \qquad |m_i| \leqslant \mathrm{A}_\theta\, \mathrm{T}^{-2} \qquad \text{et} \qquad \Omega \in \{\mathrm{V},\mathrm{H}\},$$

pour chaque ensemble possible de coefficients $m \stackrel{\text{def.}}{=} \{m_i\}_i$ et orientation Ω. Nous ajoutons aussi à ces géométries le symbole spécial $\widetilde{\gamma} = \Xi$. Une géométrie horizontale $\widetilde{\gamma}_m^{\mathrm{H}}$ (resp. une géométrie verticale $\widetilde{\gamma}_m^{\mathrm{V}}$) paramétrise une courbe approchée horizontale $(x, \widetilde{\gamma}_m^{\mathrm{H}}(x))$ (resp. une courbe approchée verticale $(\widetilde{\gamma}_m^{\mathrm{V}}(y), y)$).

L'étape suivante (5) est répétée pour chaque géométrie potentielle $\widetilde{\gamma}_m^{\Omega}$.

(5) Calcul de la transformée de Alpert. Pour une géométrie donnée $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}_m^{\Omega}$, nous calculons l'ensemble des produits scalaires

$$\mathcal{A}_{\widetilde{\gamma}}(f_{\mathrm{S}})[\ell,i] \stackrel{\text{def.}}{=} \langle f_{\mathrm{S}},\, \Psi_{\ell i}\rangle \qquad \text{où} \qquad \mathcal{B}(\mathrm{S},\widetilde{\gamma}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\Psi_{\ell i}\}_{\ell,i}.$$

Cette transformée $\mathcal{A}_{\widetilde{\gamma}}$ est calculée à l'aide d'un algorithme rapide comme expliqué à la sous-section 2.3.3. Pour le symbole spécial $\widetilde{\gamma} = \Xi$, la transformée correspondante $\mathcal{A}_{\Xi}$ est l'identité.

(6) Sélection de la meilleure géométrie. Pour un seuil donné T, nous devons choisir la meilleure géométrie $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}_m^{\Omega}$ ou $\widetilde{\gamma} = \Xi$ qui minimise le Lagrangien

$$\mathcal{L}(f_{\mathrm{S}}, \mathcal{B}(\mathrm{S},\widetilde{\gamma}), \mathrm{T}) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{(\ell,i)\in \mathrm{J_T}} \big|\mathcal{A}_{\widetilde{\gamma}}(f_{\mathrm{S}})[\ell,i]\big|^2 + \big(\mathrm{Card}(\mathrm{J_T}) + \mathrm{M_G}\big)\,\mathrm{T}^2$$

où

$$\mathrm{J_T} \stackrel{\text{def.}}{=} \big\{(\ell,i) \;\backslash\; \big|\mathcal{A}_{\widetilde{\gamma}}(f_{\mathrm{S}})[\ell,i]\big| > \mathrm{T}\big\}$$

et $\mathrm{M_G} = 1$ si $\widetilde{\gamma} = \Xi$ et $\mathrm{M_G} = p+1$ sinon. On peut ainsi définir la géométrie sélectionnée pour le carré S par

$$\widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}} \stackrel{\text{def.}}{=} \operatorname*{argmin}_{\widetilde{\gamma}_m^{\Omega}} \big(\mathcal{L}(f_{\mathrm{S}}, \mathcal{B}(\mathrm{S},\widetilde{\gamma}_m^{\Omega}), \mathrm{T})\big).$$

(7) Construction du quadtree. Une fois que l'on a calculé les coefficients transformés $\mathcal{A}_{\widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}}}(f_{\mathrm{S}})$ pour chaque carré dyadique, on doit choisir la meilleure segmentation en carré. Ceci revient à conserver uniquement un sous-ensemble de carrés dyadiques de façon à obtenir une segmentation en quadtree. Une telle segmentation peut s'obtenir à partir de la segmentation complète en petits carrés, suivi d'une phase de regroupement par quatre des carrés. Grâce à l'additivité du Lagrangien et à la structure hiérarchique du quadtree, la minimisation de $\mathcal{L}$ s'effectue à l'aide d'un algorithme rapide parcourant l'arbre de bas en haut. Cet algorithme a été introduit par Donoho dans [68] et a déjà été utilisé par Le Pennec et Mallat dans [115]. Il constitue un cas particulier de l'algorithme CART d'estimation statistique, introduit par Breiman et al. [20].

A l'étape précédente (6), nous avons enregistré, pour chaque carré dyadique S la valeur $\mathcal{L}(\mathrm{S}) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{L}(f_{\mathrm{S}}, \mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}}), \mathrm{T})$ du Lagrangien restreint à S, de même que la meilleure géométrie quantifiée $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}}$. Alors, pour chaque échelle 2^j et orientation k, on calcule la structure de quadtree à l'aide de l'algorithme suivant

- Initialisation du quadtree : chaque carré S de taille $b = 2^j$ est une feuille. Enregistrer les géométries optimales $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}}$ et initialiser $\mathcal{L}_0$, le Lagrangien cumulatif du sous-arbre à $\mathcal{L}_0(\mathrm{S}) = \mathcal{L}(\mathrm{S})$.
- Commencer avec des carrés S de taille $b = 2 \times 2^j$.
- Pour chaque carré S, on note $(\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3, \mathrm{S}_4)$ ses quatre sous-carrés et

$$\mathcal{L}'(\mathrm{S}) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{L}_0(\mathrm{S}_1) + \mathcal{L}_0(\mathrm{S}_2) + \mathcal{L}_0(\mathrm{S}_3) + \mathcal{L}_0(\mathrm{S}_4) + \mathrm{T}^2$$

  le Lagrangien du sous-arbre (le terme additionnel T^2 est dû au coût de un coefficient pour la subdivision). Les sous-carrés doivent être rassemblés si $\mathcal{L}(\mathrm{S}) < \mathcal{L}'(\mathrm{S})$. Si c'est le cas, déclarer S comme une feuille, enregistrer la géométrie optimale $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}}$. Mettre à jour $\mathcal{L}_0(\mathrm{S}) = \min(\mathcal{L}(\mathrm{S}), \mathcal{L}'(\mathrm{S}))$.
- Tant que $b < 1$, faire $b \leftarrow 2 \times b$ et répéter l'étape précédente.

(9) Fin de l'algorithme. Dans chaque carré S du quadtree, nous avons enregistré les coefficients de la transformée de Alpert $\mathcal{A}_{\widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}}}(f_{\mathrm{S}})$. Comme la transformée de Alpert est une transformée orthogonale des coefficients d'origine f_{S}, nous pouvons les enregistrer au même endroit. L'ensemble de tous les coefficients en bandelettes peuvent être stockés dans une image de taille $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$, tout comme une transformée en ondelettes. Il faut aussi garder trace des structures de quadtrees, ainsi que les paramètres (m, Ω) ou Ξ des géométries optimales.

Complexité numérique Pour une image de $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ pixels, la complexité numérique de la transformée en ondelettes discrète est de l'ordre de $\mathrm{O}(\mathrm{N}^2)$. Pour chaque échelle 2^j, chaque orientation k et pour chaque taille dyadique b, la complexité du calcul de la transformée de Alpert est de

$$\mathcal{C}(j, b) = \underbrace{(1/b)^2}_{\text{nbr.carrés}} \times \underbrace{\mathrm{C}_{\mathcal{A}}\,(2^j\, b)^2}_{\text{complexité Alpert tr.}} \times \underbrace{\mathrm{C}_{\mathcal{G}}\,\mathrm{T}^{-\eta}}_{\text{nbr.géométries}} = \mathrm{C}\, 2^{-2j}\, \mathrm{T}^{-\eta}.$$

Comme le nombre de telles tailles de carrés, d'échelles 2^j et d'orientation k est proportionnel à $|\log_2(\mathrm{T})|$ et que $\eta < p - 1$, la complexité globale de la transformée en bandelettes est de $\mathrm{O}(\mathrm{N}^2\, \mathrm{T}^{-(p-1)})$, où p est le nombre de moments nuls de la transformée.

Bien que polynomiale en N et en T^{-1}, la complexité d'une recherche exhaustive des géométries est trop grande pour de vraies images. Une implantation typique (voir les chapitres

3 et 4) utilise des calculs heuristiques pour réduire le nombre de géométries potentielles et restreint les carrés à des tailles 4×2^j et 8×2^j seulement. Le chapitre 3 applique l'algorithme de transformée en bandelettes à la compression d'images et explique les modifications faites à la transformée d'origine pour la rendre plus efficace.

2.3.3 Transformée de Alpert 2D

Dans cette sous-section, nous décrivons la transformée de Alpert rapide. Rappelons que pour programmer la transformée en bandelettes rapide, l'étape (5) de l'algorithme décrit à la section 2.3.2 nécessite le calcul de la transformée $\mathcal{A}_{\widetilde{\gamma}}(g)$ où $g = f_{\mathrm{S}}$ est un ensemble de coefficients discrets et $\mathrm{S} \subset [0,1]^2$ est un carré dyadique.

On rappelle que p est le nombre de moments nuls que l'on souhaite obtenir pour les vecteurs de bandelettes discrètes. Dans cette section, on définit le degré d'un polynôme en deux variables comme le maximum des degrés selon chacun des axes. Ceci va nous amener à considérer des groupes de $\mathrm{N}_p \overset{\text{def.}}{=} p^2$ ondelettes de Alpert. Il est possible d'utiliser une autre convention, ce qui nécessite l'utilisation de

$$\mathrm{N}_p \overset{\text{def.}}{=} \mathrm{Card}\left\{(a_1,a_2) \ \backslash \ \deg(\mathrm{X}^a) < p\right\}.$$

On suppose donc donné en entrée de l'algorithme un ensemble de coefficients $\{g[n]\}_{n=0}^{\mathrm{N}-1}$ qui sont des échantillons d'une certaine fonction $g[n] = g(x_n)$ où $\mathcal{U} \overset{\text{def.}}{=} \{x_n\}_n \subset [0,1]^2$. Pour la transformée en bandelettes, on a $g = f_{\mathrm{S}}$ et $x_n = 2^j n$. On suppose aussi donnée une courbe $\widetilde{\gamma}$ qui va paramétrer la transformée de Alpert. Dans la suite, on note $\ell^2(\mathcal{U})$ l'espace des vecteurs indexés par les $x_n \in \mathcal{U}$ qui dans le cas de la transformée en bandelettes, s'identifie avec $\ell^2(\mathrm{S})$.

Groupements dyadiques de points La première étape de l'algorithme consiste à subdiviser l'ensemble des points $\mathcal{U}$ de façon récursive en deux moitiés égales (où presque égales si le cardinal d'un ensemble intermédiaire est impair). Ainsi pour chaque échelle $\ell \leqslant 0$ de la transformée, on dispose d'une partition de $\mathcal{U}$ en 2^ℓ sous-ensembles

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=0}^{2^{-\ell}-1} \mathcal{U}_\ell^i \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{U}_\ell^i = \mathcal{U}_{\ell-1}^{2i} \cup \mathcal{U}_{\ell-1}^{2i+1}. \tag{2.34}$$

Dans le cas qui nous intéresse, cette subdivision est calculée à l'aide de la courbe $\widetilde{\gamma}$, que l'on suppose paramétrée horizontalement par $(x_1, \gamma(x_1))$. On rappelle que l'on a défini un opérateur de déformation ainsi que des positions déformées

$$w(x) \overset{\text{def.}}{=} (x_1, x_2 - \gamma x_1) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{x}_n = (\widetilde{x}_{1n}, \widetilde{x}_{2n}) \overset{\text{def.}}{=} w(x_n).$$

On pose initialement $\mathcal{U}_0^0 = \mathcal{U}$. La subdivision $\mathcal{U}_\ell^i = \mathcal{U}_{\ell-1}^{2i} \cup \mathcal{U}_{\ell-1}^{2i+1}$ s'obtient en classant les ordonnées $\widetilde{x}_{2n}$ par ordre croissant et en plaçant la première moitié des points dans $\mathcal{U}_{\ell-1}^{2i}$ et la deuxième dans $\mathcal{U}_{\ell-1}^{2i+1}$. La figure 2.8 illustre ce procédé.

On arrête la subdivision à l'échelle ℓ_0 la plus petite satisfaisant

$$\forall\, i, \qquad \mathrm{N}_p/2 < \mathrm{Card}(\mathcal{U}_{\ell_0}^i) \leqslant \mathrm{N}_p.$$

On constate que les points x_n se répartissent dans des bandes $b_{\ell i}$ (définies à la sous-section 2.2.2) qui contiennent les points $\mathcal{U}_\ell^i$.

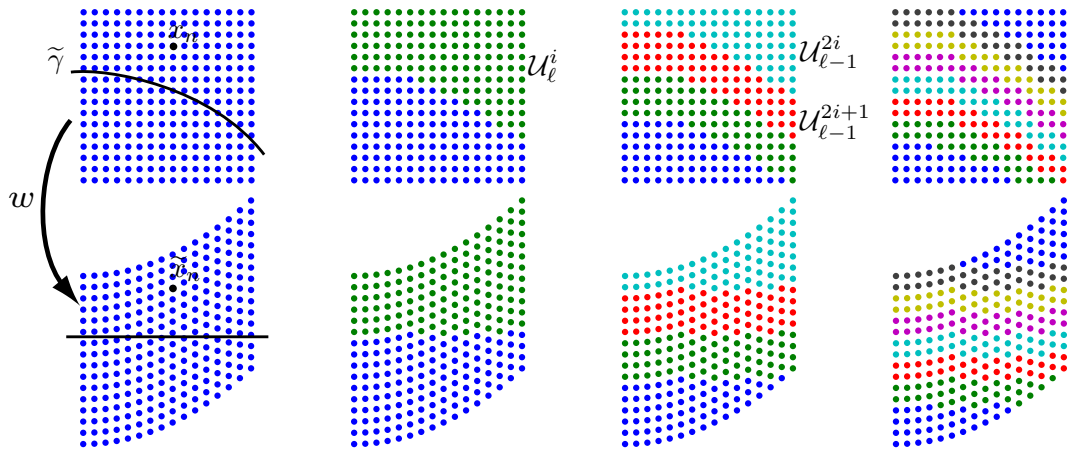


Fig. 2.8 *Exemple de regroupements dyadiques suivant une courbe géométrique.*

Espaces de multiresolution polynomiaux Dans la suite, si $\mathrm{X}^a = \mathrm{X}_1^{a_1}\mathrm{X}_2^{a_2}$ est un monôme, on note de même la fonction $\mathrm{X}^a : x \mapsto (x_1)^{a_1}(x_2)^{a_2}$. De plus, si g est une fonction continue, on note $[g]_\ell^i$ le vecteur discret échantillonné et restreint aux points de $\mathcal{U}_\ell^i$, c'est-à-dire, pour $\ell > \ell_0$

$$\forall\, n, \qquad [g]_\ell^i[n] \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} g(x_n) & \text{si} \qquad x_n \in \mathcal{U}_\ell^i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme on l'a déjà expliqué à la sous-section 2.2.2, on souhaite projeter le vecteur $g \in \ell^2(\mathcal{U})$ sur des espaces multiresolution

$$\mathrm{G}_\ell \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ \varphi \in \ell^2(\mathcal{U}) \;\middle\backslash\; \begin{array}{l} \forall\, x_n \in \mathcal{U}_\ell^i, \quad \varphi[n] = \mathrm{P}_i(\widetilde{x}_n) \\ \text{et } \mathrm{P}_i \text{ est polynomial de degré inférieur à } p-1. \end{array} \right\}.$$

Ces espaces satisfont $\mathrm{G}_\ell \subset \mathrm{G}_{\ell-1}$ puisque les ensembles $\mathcal{U}_\ell^i$ satisfont la propriété d'emboîtement (2.34). On note de plus que $\mathrm{G}_0 = \ell^2(\mathcal{U})$.

La base orthogonale de Alpert est alors définie comme une base orthogonale $\{\Psi_{\ell i}\}_{i=0}^{m_\ell - 1}$ de l'espace de détails H_ℓ :

$$\mathrm{Vect}_i(\Psi_{\ell i}) = \mathrm{H}_\ell \qquad \text{où} \qquad \mathrm{H}_\ell \oplus^\perp \mathrm{G}_\ell = \mathrm{G}_{\ell-1}.$$

On constate que l'on a les décompositions orthogonales

$$\mathrm{G}_\ell = \bigoplus_{i=0}^{2^{-\ell-1}} \mathrm{G}_\ell^i \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}_\ell = \bigoplus_{i=0}^{2^{-\ell-1}} \mathrm{H}_\ell^i,$$

où G_ℓ^i (resp. H_ℓ^i) est formé par l'ensemble des vecteurs de G_ℓ (resp. H_ℓ) nuls en dehors de G_ℓ^i. On remarque que l'on a

$$\forall\, \ell > \ell_0 + 1, \qquad \dim(\mathrm{H}_\ell) = 2^{-\ell}\,\mathrm{N}_p \qquad \text{et} \qquad \dim(\mathrm{H}_\ell^i) = \mathrm{N}_p,$$

et que $\dim(\mathrm{H}_{\ell_0}^i)$ peut éventuellement être plus petit que N_p.

Construction de la base de Alpert Notre but est de construire de façon algorithmique une base orthonormale de H_ℓ^i pour chaque ℓ et chaque i. Pour simplifier on suppose que

$\ell > \ell_0 + 1$ (pour le cas initial $\ell = \ell_0 + 1$, il faut prendre en compte le fait que l'on peut avoir $\mathrm{Card}(\mathcal{U}_\ell^i) < \mathrm{N}_p$).

On constate que l'on dispose d'une base de G_ℓ^i :

$$\mathcal{B}(\mathrm{G}_\ell^i) \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ [\mathrm{X}^a]_\ell^i \ \setminus \deg(\mathrm{X}^a) < p \right\}.$$

On peut compléter cette base à l'aide d'une base de H_ℓ^i :

$$\mathcal{B}(\mathrm{H}_\ell^i) \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ [\mathrm{X}^a]_{\ell-1}^{2i} - [\mathrm{X}^a]_{\ell-1}^{2i+1} \ \setminus \deg(\mathrm{X}^a) < p \right\}.$$

On constate que l'on obtient bien une base de $\mathrm{G}_{\ell-1}$ en réunissant toutes les bases ainsi obtenues puisque

$$\mathrm{vect}\,(\mathcal{B}_\ell^i) = \mathrm{G}_{\ell-1}^{2i} \oplus^\perp \mathrm{G}_{\ell-1}^{2i+1} \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{B}_\ell^i \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{B}(\mathrm{G}_\ell^i) \cup \mathcal{B}(\mathrm{H}_\ell^i).$$

Pour construire une base orthonormée de H_ℓ qui est orthogonale à G_ℓ, il suffit d'appliquer le procédé d'orthogonalisation de *Gram-Schmidt* à la famille $\mathcal{B}_\ell^i$ pour obtenir une famille orthogonale $\widetilde{\mathcal{B}}_\ell^i$. L'orthogonalisation gardant l'ordre des vecteurs, les N_p premiers vecteurs de $\widetilde{\mathcal{B}}_\ell^i$ fournissent une base orthonormée de G_ℓ^i et les N_p derniers vecteurs fournissent une base orthonormée de H_ℓ^i : ce sont les fonctions multi-ondelettes $\Psi_{\ell i}^k$ pour $k = 0, \ldots, \mathrm{N}_p - 1$.

On pourra noter qu'il n'y a bien sûr pas unicité d'une telle famille de fonctions d'ondelettes. Dans la construction originale, en dimension 1, Alpert propose de fixer ces fonctions en imposant que la fonction $\Psi_{\ell i}^{(k)}$ ait en fait $p + k - 1$ moments nuls. Ceci revient à utiliser une base $\mathcal{B}(\mathrm{H}_\ell^i)$ légèrement différente (composée de vecteurs de degrés supérieurs à p).

L'algorithme de calcul que l'on vient de décrire nécessite à chaque échelle $2^{-\ell}$ orthogonalisations de Gram-Schmidt sur $2\mathrm{N}_p$ vecteurs de taille $\mathrm{N}2^\ell$, ce qui demande $(2\mathrm{N}_p)^2\mathrm{N}2^\ell$ opérations. Ainsi la complexité totale de l'algorithme est de

$$\sum_{\ell=-\log_2(\mathrm{N})}^{0} 2^{-\ell}((2\mathrm{N}_p)^2\mathrm{N}2^\ell) = \mathrm{O}(\mathrm{N}\log_2(\mathrm{N})).$$

Il est possible de l'accélérer en réalisant les orthogonalisations directement dans la base des monômes, ce qui conduit à un algorithme de complexité $\mathrm{O}(\mathrm{N})$ décrit à la section suivante.

Fonction $h = \texttt{transformee_alpert}(x, g, \gamma, p, d)$.

Entrée : points $x[n] \stackrel{\text{def.}}{=} x_n$, valeurs $g[n]$, courbe paramétrée $x_2 = \gamma(x_1)$,
nombre de moments nuls p.
Si $d = +1$ (transformée directe) alors $g[n] = g(x_n)$ et $h[m] = \mathcal{A}_{\tilde{\gamma}}[\ell, i, k]$.
Si $d = -1$ (transformée inverse) alors les rôles de g et h sont inversés.
Sortie : vecteur transformé h.

Initialisation : Calcul des points $\widetilde{x}_n = (x_{1n}, x_{2n} - \gamma(x_{1n}))$.
Calcul des groupements : $[\mathrm{U}_0, \ldots, \mathrm{U}_{\mathrm{P}-1}] = \texttt{calcul_groupes}(\{x_n\}_n, p^2)$,
avec $\mathrm{U}_i \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{U}^i_{\ell_0}$ et $g_i = \mathrm{Card}(\mathrm{U}_i)$.

Répéter pour $i = 0, \ldots, \mathrm{P}-1$: (calcul des matrices de moments)
Répéter, pour $a = 0, \ldots, g_i$, *pour* $b_1 = 0, \ldots, \lfloor\sqrt{2}p\rfloor - 1$ et $b_2 = 0, \ldots, 2p^2/\lfloor\sqrt{2}p\rfloor - 1$
$n = \mathrm{G}_i[a]$, $y \stackrel{\text{def.}}{=} \widetilde{x}_n$ et $\mathrm{M}_i[a, b] \stackrel{\text{def.}}{=} (y_1)^{b_1}\,(y_2)^{b_2}$.
Orthogonalisation : $\mathrm{Q}_i \stackrel{\text{def.}}{=} \texttt{orthogonalise}(\mathrm{M}_i)$.
Stockage des matrices $\mathrm{Q}(0) \stackrel{\text{def.}}{=} [\mathrm{Q}_0, \ldots, \mathrm{Q}_{\mathrm{P}-1}]$.

Répéter pour chaque $\ell = 1, \ldots, \mathrm{L}-1 \stackrel{\text{def.}}{=} \lfloor\log_2(\mathrm{P})\rfloor$
Nombre de paquets $n_\ell \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{P}/2^\ell$, taille des paquets $m_\ell \stackrel{\text{def.}}{=} 2\,n_\ell\,p^2$.
Répéter pour chaque $i = 0, \ldots, n_\ell - 1$ (mise à jour des matrices)
$\widetilde{\mathrm{M}}_i^+ \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{Q}_{2i}^- * \mathrm{M}_{2i}$, et $\widetilde{\mathrm{M}}_i^- \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{Q}_{2i}^+ * \mathrm{M}_{2i}$
$\widetilde{\mathrm{Q}}_i \stackrel{\text{def.}}{=} \texttt{orthogonalise}(\widetilde{\mathrm{M}}_i)$
Stockage des matrices : $\mathrm{Q}(\ell) \stackrel{\text{def.}}{=} [\widetilde{\mathrm{Q}}_0, \ldots, \widetilde{\mathrm{Q}}_{n_\ell - 1}]$ et $\forall\, i = 0, \ldots, \mathrm{P}-1, \quad \mathrm{M}_i = \widetilde{\mathrm{M}}_i$.

Initialiser $w \stackrel{\text{def.}}{=} v$ *et répéter pour* $\ell = 0, \ldots, \mathrm{L}-1$ *(si* $d = +1$*) ou* $\ell = \mathrm{L}-1, \ldots, 0$ *(si* $d = -1$*)*
Si $\ell = 0$ (traitement spécial pour la première échelle)
Initialiser $r \stackrel{\text{def.}}{=} w$ *et répéter pour* $i = 0, \ldots, \mathrm{P}-1$
Indices d'entrée $\Theta \stackrel{\text{def.}}{=} \sigma_i - ip^2 + (0 : g_i - p^2 - 1)$.
Transformation : si $d = +1$ alors $r(\Theta) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{Q}(\ell)_i^+ * w(\mathrm{G}(i))$
si $d = -1$ alors $r(\mathrm{G}(i)) = \texttt{transp}(\mathrm{Q}(\ell)_i^+) * w(\Theta)$
Indices d'entrée $\Theta \stackrel{\text{def.}}{=} \sigma_i - ip^2 + \mathrm{N} - \mathrm{P}\,p^2 + (0 : p^2 - 1)$.
Transformation : si $d = +1$ alors $r(\Theta) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{Q}(\ell)_i^- * w(\mathrm{G}(i))$
si $d = -1$ alors $r(\mathrm{G}(i)) \stackrel{\text{def.}}{=} r + \texttt{transp}(\mathrm{Q}(\ell)_i^-) * w(\Theta)$
Stocker le résultat : $w \stackrel{\text{def.}}{=} r$.
sinon (échelles suivantes)
Nombre de paquets $n_\ell \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{P}/2^\ell$, taille des paquets $m_\ell \stackrel{\text{def.}}{=} 2\,n_\ell\,p^2$.
Initialiser $r \stackrel{\text{def.}}{=} w$, $\mu_0 \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{N} - m_\ell$ *et répéter pour* $i = 0, \ldots, n_\ell - 1$
Indices d'entrée $\Sigma \stackrel{\text{def.}}{=} \mu_0 + 2ip^2 + (0 : 2p^2 - 1)$,
Indices de sortie $\Theta \stackrel{\text{def.}}{=} \mu_0 + ip^2 + (0 : p^2 - 1)$,
Position des valeurs transformées $\nu \stackrel{\text{def.}}{=} \mu_0 + i\,p^2$.
Transformation : si $d = +1$ alors $r(\Theta) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{Q}(\ell)_i^+ * w(\Sigma)$
si $d = -1$ alors $r(\Sigma) = \texttt{transp}(\mathrm{Q}(\ell)_i^+) * w(\Theta)$
Indices de sortie $\Theta \stackrel{\text{def.}}{=} \Theta + m_\ell/2$.
Transformation : si $d = +1$ alors $r(\Theta) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{Q}(\ell)_i^- * w(\Sigma)$
si $d = -1$ alors $r(\Sigma) = \texttt{transp}(\mathrm{Q}(\ell)_i^-) * w(\Theta)$
Stocker le résultat : $w \stackrel{\text{def.}}{=} r$.

N.B. : La fonction `transp` calcule la transposée d'une matrice. La fonction `orthogonalise`(A) renvoie une matrice dont les lignes sont les vecteurs colonnes de A orthgonalisés entre elles. La matrices A^+ contient les p^2 première colonnes de A et la matrice A^- contient les colonnes restantes. La fonction `calcul_groupes` calcule les groupements $\mathcal{U}^i_\ell$ à l'échelle ℓ_0. Le signe $*$ correspond à la multiplication matricielle, $w(\Theta)$ extrait le sous-vecteur d'indices Θ et $(a : b) = \{a, a+1, \ldots, b\}$.

Table 1: Pseudo-code pour la transformée de Alpert.

Algorithme en détails Le pseudo-code 1 détaille les différentes étapes de l'algorithme. Ce code suit les étapes principales de l'algorithme original d'Alpert [7]. Un programme MATLAB de cet algorithme est disponible gratuitement au téléchargement [154].

On calcule tout d'abord un ensemble de matrices orthogonales $\mathrm{Q}(\ell)$ qui se cascadent à travers les échelles. La deuxième partie de l'algorithme applique ces matrices en sélectionnant les bons coefficients et en plaçant les résultats dans le vecteur w. Les transformées directes et inverses sont calculées par le même algorithme, il suffit de préciser $s = \pm 1$.

Chapitre 3

Bandelettes pour la compression d'images

Dans ce chapitre, nous appliquons l'algorithme de transformée en bandelettes décrite au chapitre 2.3 à la compression d'images. Cependant, pour mieux prendre en compte la complexité des images naturelles, nous apportons quelques simplifications et améliorations.

3.1 État de l'art

3.1.1 Codeurs en ondelettes

Les codeurs utilisant une transformée en ondelettes n'exploitent pas de réelle modélisation de la géométrie des images. Ils construisent empiriquement des schémas de codage efficaces pour prendre en compte les corrélations des coefficients en ondelettes comme expliqué par Liu et Moulin [122].

Historiquement, les premiers codeurs se sont intéressés aux redondances entre les différentes échelles. Le premier proposé est le codeur par arbre de zéros de Shapiro [174], affiné par le codeur SPIHT de Said et Pearlman [166]. Des études théoriques comme celle de Cohen et al. [43], étudient le taux de distorsion asymptotique de ce type de codeurs. Des modélisations plus complexes des dépendances entre les échelles ont permis quelques améliorations, voir par exemple le codeur de Buccigrossi et Simoncelli [25].

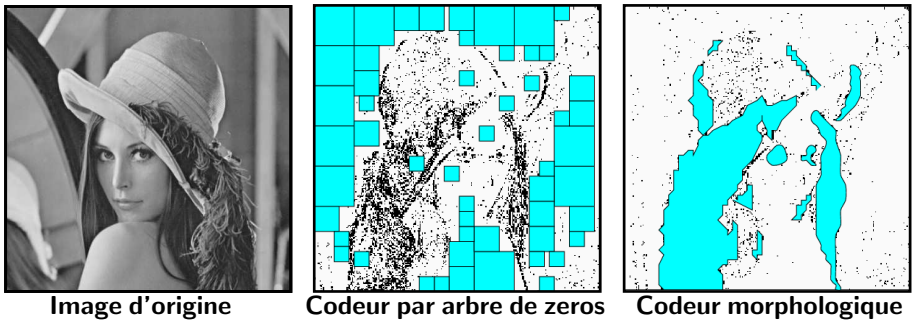


Fig. 3.1 *Comparaison entre le codage par arbre de zéros (codeur* [174]*) des coefficients nuls et le codage morphologique (codeur* [172]*) de groupes de coefficients non-nuls.*

Cependant, la dernière génération de codeurs exploite uniquement les dépendances à l'intérieur d'une même échelle. On peut citer les codeurs de Chai et al. [36], le codeur morphologique de Servetto et al. [172], et le codeur SFQ de Xiong et al. [209]. La figure 3.1 montre qu'en se restreignant à chaque échelle indépendamment, on peut effectuer un codage exploitant la forme géométrique des groupes de coefficients non-nuls. Le standard JPEG2000, présenté à la section suivante, considère ainsi chaque échelle de façon indépendante.

3.1.2 Codeur JPEG2000

JPEG2000 est le standard le plus récent de compression d'images, voir le livre de Taubman et Marcellin [184] pour une description complète. Il utilise une transformée en ondelettes et effectue un codage optimisé de façon à satisfaire principalement deux objectifs :

- Produire un codage progressif. Ceci signifie que l'on comprime l'image une seule fois et que l'on peut la décompresser plus ou moins selon la qualité que l'on souhaite obtenir.
- Réduire la redondance qui existe dans les coefficients d'ondelettes. Pour améliorer la distorsion par rapport à un simple codage entropique des coefficients quantifiés, JPEG2000 utilise un codeur adaptatif.

Le codeur adaptatif de JPEG2000 est EBCOT, introduit par Taubman [183], qui permet de remplir ces deux objectifs avec une complexité numérique réduite. Pour chaque échelle 2^j et orientation k, les coefficients f_j^k de la transformée en ondelettes sont regroupés par blocs dont la taille est typiquement 64×64, comme montré à la figure 3.2. Ceci permet d'optimiser localement le codage des coefficients, tout en garantissant une dispersion du budget de bits sur toute l'image.

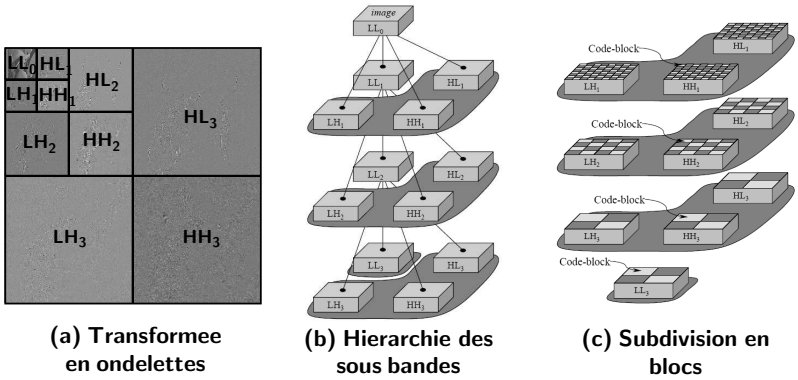


Fig. 3.2 *Subdivision en blocs* 64×64 *des coefficients d'une transformée en ondelettes.*

Pour chaque bloc, un flot de bits est produit pour coder de façon progressive les coefficients à l'intérieur du bloc. Des seuils dyadiques de la forme $\mathrm{T}_k \overset{\text{def.}}{=} 2^{-k}\,\mathrm{T}_0$ sont utilisés pour quantifier les coefficients. Chaque coefficient $c_n \overset{\text{def.}}{=} f_j^k[n]$, quantifié à la précision la plus fine T_0, peut être représenté sous la forme

$$\mathrm{Q}_{\mathrm{T}_0}(c_n) = \sigma(c_n) \sum_{k \geqslant 0} c_n^{(k)}\, 2^k\, \mathrm{T}_0 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \sigma(c_n) \in \{-1, 1\}, \\ c_n^{(k)} \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Pour un k fixé, l'ensemble des bits $c_n^{(k)}$ forment un *plan de bits* et EBCOT code cet ensemble de bits en les parcourant de manière séquentielle, comme représenté à la figure 3.3.

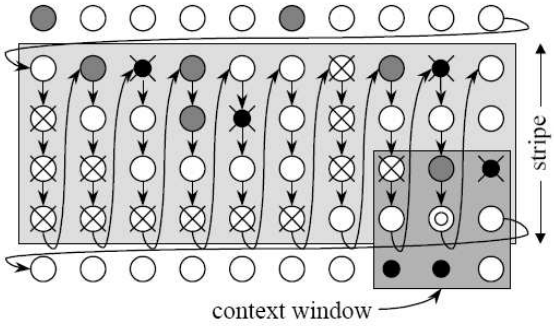


Fig. 3.3 *Déplacement de la fenêtre de contexte lors du codage d'un plan de bits.*

Le codage de chaque plan de bits s'effectue de manière adaptative. De nombreuses expériences numériques ont mené au choix d'un certain nombre de contextes (correspondant aux configurations des bits voisins dans le plan de bits précédents) qui capturent de façon compacte la structure locale des coefficients d'ondelettes. En construisant progressivement les histogrammes des bits conditionnés par rapports aux différents contextes, EBCOT est capable de coder les coefficients en ondelettes de façon très efficace.

3.1.3 Codeurs géométriques

De nombreuses méthodes d'analyse harmonique géométrique, présentées à la section 1.4.2, ont donné naissance à des algorithmes de compression, par exemple les contourlets de Do et Vetterli [67] ainsi que les approximations ENO bidimensionnelles de Matei et Cohen [133].

D'autres algorithmes de transformations géométriques donnent de très bons résultats comme par exemple les ondelettes courbes de Wang et al. [198] et les ondelettes orientées de Chappelier et Guillemot [38]. Ces schémas utilisent une transformée en ondelettes modifiée de façon non-linéaire de façon à suivre une orientation locale. La programmation de ces transformées est effectuée grâce à une décomposition en étapes élémentaires de lifting, comme introduit par Sweldens et Daubechies [59]. Le principal problème avec ces approches est l'impossibilité de garantir l'orthogonalité de la base utilisée pour la décomposition. Ce type de méthodes est aussi employé en codage video par ondelettes, où l'on souhaite suivre le flot optique lors de la transformation, voir par exemple le codeur de Secker et Taubman [171] et Popescu [153].

Certains codeurs essaient d'améliorer le codage arithmétique avec des modèles géométriques plus poussés que les constructions empiriques présentées à la section précédente, comme par exemple les codeurs de Wakin et al. [197] ou de Li [119].

Un codeur en bandelettes a déjà été utilisé par Le Pennec et Mallat [114]. Il utilise la transformée en bandelettes de première génération ainsi qu'un simple codeur arithmétique des coefficients quantifiés. Le codeur que nous présentons dans ce chapitre est du même type mais il utilise une transformée généralisant les bases de bandelettes orthogonales présentées dans les chapitres précédents. Nous montrons une légère amélioration par rapport au codeur de [114] de l'ordre de 0.3dB sur des images typiques et nous comparons ce codeur à JPEG2000.

3.2 LE CODEUR EN BANDELETTES ORTHOGONALES

Dans cette section, nous expliquons les modifications apportées à la transformée en bandelettes orthogonales pour la rendre plus efficace sur les images naturelles. Avant de décrire précisément la nouvelle transformée et le codeur associés aux sous-sections 3.2.2 et 3.2.2, nous décrivons un cas particulier simple de transformée en bandelettes qui donne une interprétation intuitive de la construction théorique.

3.2.1 TRANSFORMÉE EN BANDELETTES D'ORDRE 0

Dans cette sous-section, nous détaillons la transformée en bandelettes avec un seul moment nul. Tout en restant dans le cadre théorique garantissant un contrôle de l'erreur d'approximation, l'algorithme à l'ordre 0 est plus simple et peut donc s'interpréter de façon intuitive. Ce cas particulier consiste à utiliser :

- une géométrie approchée linéaire, c'est-à-dire des morceaux de droites. Ainsi, dans chaque carré S de la segmentation, l'algorithme de transformée décrit à la sous-section 2.3.1 va déterminer la meilleure direction pour approcher l'ensemble de coefficients en ondelettes dans S.
- des fonctions de base constantes sur des bandes rectilignes. Dans le cadre de la construction décrite à la sous-section 2.2.2, ceci correspond à utiliser des espaces G_ℓ de fonctions constantes sur les bandes $b_{\ell i}$.

L'approximation avec M termes dans une meilleure base de bandelettes constante par morceaux donne une erreur d'approximation contrôlée par

$$\|f - f_{\mathrm{M}}\|^2_{\mathrm{L}^2} \leqslant \mathrm{C}\,\mathrm{M}^{-3/2}.$$

Ce résultat diffère de celui présenté au théorème 2.14 pour un nombre de moments nul $p = 2$. Ceci vient du faire que l'on utilise une base ayant $p = 1$ moment nuls avec une géométrie d'ordre 2 (linéaire). Il est à noter que ce résultat n'est pas couvert par le théorème 2.14. En effet, celui-ci suppose, pour obtenir une décroissance en M^{-2}, que l'on utilise une géométrie linéaire ainsi que des fonctions linéaires par morceaux.

L'intérêt de ce schéma simple d'approximation constante par morceaux est que l'on dispose d'une interprétation de la bandelétisation à l'aide d'une transformée unidimensionnelle. Nous allons expliquer en détails cette étape de la transformée, qui correspond à l'étape (5) de la transformée décrite à la sous-section 2.3.2.

Réordonnancement des points de la grille (étape 1 de la bandelétisation) Jusqu'à la fin de cette section, on considère un carré S de taille b dans le domaine des coefficients d'ondelettes à une échelle 2^j et orientation k, comme on peut le voir à la figure 3.4 (b). Le but est de décrire de façon simple la transformée de Alpert discrète $\mathcal{A}_{\widetilde{\gamma}}$ des coefficients $f_{\mathrm{S}} \stackrel{\text{def.}}{=} \{f_j^k[n]\}_{2^j n \in \mathrm{S}}$ nécessaires pour l'étape (5) de l'algorithme décrit à la sous-section 2.3.2.

La transformée de Alpert est paramétrée par une géométrie linéaire $\widetilde{\gamma} = d$, où d est une direction quantifiée. Comme décrit par la théorie, il est nécessaire de choisir environ T^{-2} géométries quantifiées. Cependant, dans cette section, nous allons considérer toutes les directions d joignant un couple de points $(2^j\,n, 2^j\,n') \in \mathrm{S}^2$. Ce faisant, on verra que l'on

teste en fait toutes les transformée de Alpert $\mathcal{A}_d$ d'ordre 0. Le nombre de telles directions d quantifiées est de l'ordre de $\mathrm{O}(\mathrm{N}_\mathrm{S}^2)$ où $\mathrm{N}_\mathrm{S} \stackrel{\text{def.}}{=} (2^j/b)^2$ est le nombre de coefficients dans S.

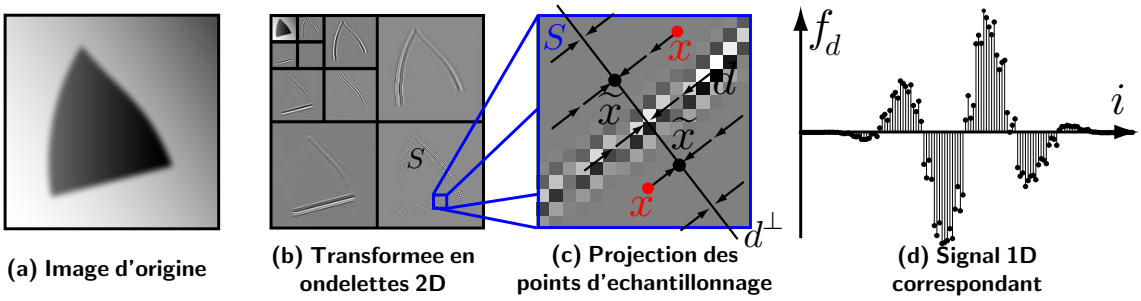
La transformée de Alpert $\mathcal{A}_d$ peut en fait être calculée à l'aide d'une transformée de Haar $\mathcal{H}$ monodimensionnelle d'un signal discret

$$\mathcal{A}_d(f_\mathrm{S}) = \mathcal{H}(\widetilde{f}_\mathrm{S}), \qquad \text{où} \qquad \forall\, k \in \{0, \ldots, \mathrm{N}_\mathrm{S} - 1\}, \quad \widetilde{f}_\mathrm{S}[k] = f_\mathrm{S}[(\varphi_d)^{-1}[k]].$$

La bijection

$$\varphi_d : \left\{ n \;\backslash\; 2^j n \in \mathrm{S} \right\} \longmapsto \{0, \ldots, \mathrm{N}_\mathrm{S} - 1\}^2$$

correspond à une numérotation des points à l'intérieur de S, c'est-à-dire à un réordonnancement 1D de ces points le long d'un axe.



(a) Image d'origine (b) Transformee en ondelettes 2D (c) Projection des points d'echantillonnage (d) Signal 1D correspondant

Fig. 3.4 *Réordonnancement discret des points d'échantillonnage.*

Pour construire ce réordonnancement, comme montré à la figure 3.4 (c), on sélectionne chaque point $x_n \stackrel{\text{def.}}{=} 2^j n \in \mathrm{S}$ sur la grille d'échantillonnage des coefficients f_S et on le projette orthogonalement sur la droite $d^\perp$ perpendiculaire à d. Ceci donne un nouveau point $\widetilde{x}_n$ repéré par son abscisse sur la droite $d^\perp$. On peut ensuite classer les abscisses de tous les points et la valeur de $\varphi_d[n]$ est l'ordinal de $\widetilde{x}_n$ dans ce classement.

On peut remarquer que seules les positions relatives le long de $d^\perp$ des points d'échantillonnage importe dans ce schéma d'ordre 0.

Transformée de Haar 1D (étape 2 de la bandelétisation) De façon intuitive, si la direction d suit bien une courbe de discontinuité passant à travers S (voir la figure 3.4 (c)), alors ce réordonnancement sera capable de transférer la régularité directionnelle 2D de f_S dans une régularité isotrope 1D de $\widetilde{f}_\mathrm{S}$. C'est pour cela qu'une transformée de Haar 1D est efficace pour capturer cette régularité.

La transformée de Haar est la plus simple des transformées en ondelettes et en particulier elle ne possède qu'un moment nul. Dans [156], une transformée 1D générale est employée, ce qui améliore les résultats numériques mais n'apporte pas de moments nuls supplémentaires.

L'étape (6) de l'algorithme décrit à la sous-section 2.3.2 compare toutes les directions d possibles pour trouver celle qui minimise le Lagrangien. La figure 3.5 montre comment cette minimisation permet de choisir à la fois une direction admissible et une taille des carrés correcte. Sur la première ligne on peut voir différents carrés S extraits autour d'une singularité dans le domaine en ondelettes. Sur la ligne du milieu, on peut voir le signal discret réordonné 1D $\widetilde{f}_\mathrm{S}$. Sur la ligne du bas, on peut voir l'amplitude des coefficients de Haar $\mathcal{H}(\widetilde{f}_\mathrm{S})$.

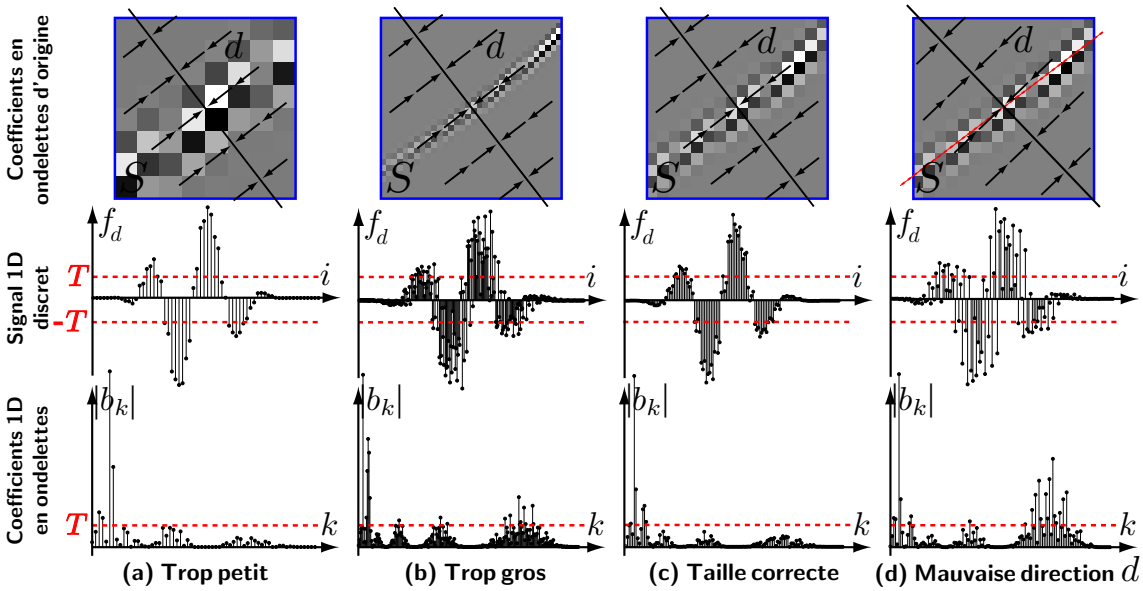


Fig. 3.5 *Influence de la taille de* S *et de la direction* d.

(a) Le carré est trop petit, puisque on peut étendre un peu S sans produire de coefficients de Haar au-dessus du seuil T.

(b) Le carré est trop grand et il y a trop de coefficients de Haar au-dessus du seuil T. Ceci provient du faire que la vraie géométrie a un peu de courbure et que la direction d dévie trop de cette géométrie.

(c) Le carré a la bonne taille et le signal 1D est régulier. On remarque qu'il y a beaucoup plus de coefficients de Haar vérifiant $\left|\mathcal{H}(\widetilde{f}_{\mathrm{S}})[k]\right| < \mathrm{T}$ que de coefficients d'ondelettes vérifiant $|f_{\mathrm{S}}[n]| < \mathrm{T}$.

(d) La direction d dévie trop de la vraie géométrie.

Mathématiquement, ce choix de la meilleur direction correspond à minimiser le Lagrangien $\mathcal{L}(f_{\mathrm{S}}, d, \mathrm{T})$ (voir l'étape (6) de l'algorithme présenté à la section 2.3.2). Il convient de noter que ce choix de taille b et de direction d dépend de la précision fixée par l'utilisateur par l'intermédiaire de T. Ainsi, des carrés corrects pour grand seuil T (compression agressive) peuvent s'avérer trop grands pour un petit seuil T, puisque plus de précision est alors requise.

3.2.2 TRANSFORMÉE EN BANDELETTES PAR GROUPEMENTS

La géométrie de 16 coefficients d'ondelettes La géométrie des images naturelles est complexe. La topologie de l'ensemble des courbes est souvent compliquée avec de très nombreuses jonctions en T, croisements et enchevêtrements. Comme on peut le voir à l'image 3.6, il y a beaucoup d'effets chaotiques dûs aux interactions entre la grille d'échantillonnage et une géométrie courbe et variable.

Pour toutes ces raisons, il est rare de pouvoir exploiter, dans une image typique, une régularité géométrique sur une longueur de plus d'une dizaine de pixels. À l'échelle la plus fine de la transformée en ondelettes, ceci ce traduit par des corrélations sur environ 4 coefficients d'ondelettes. Étant donné le coût du codage d'une géométrie, il n'est de plus

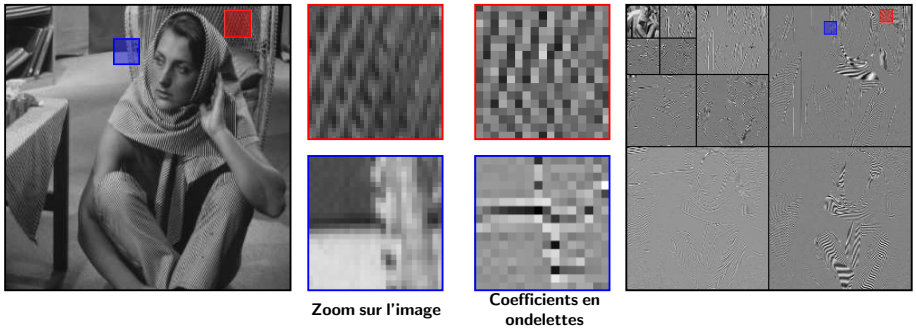


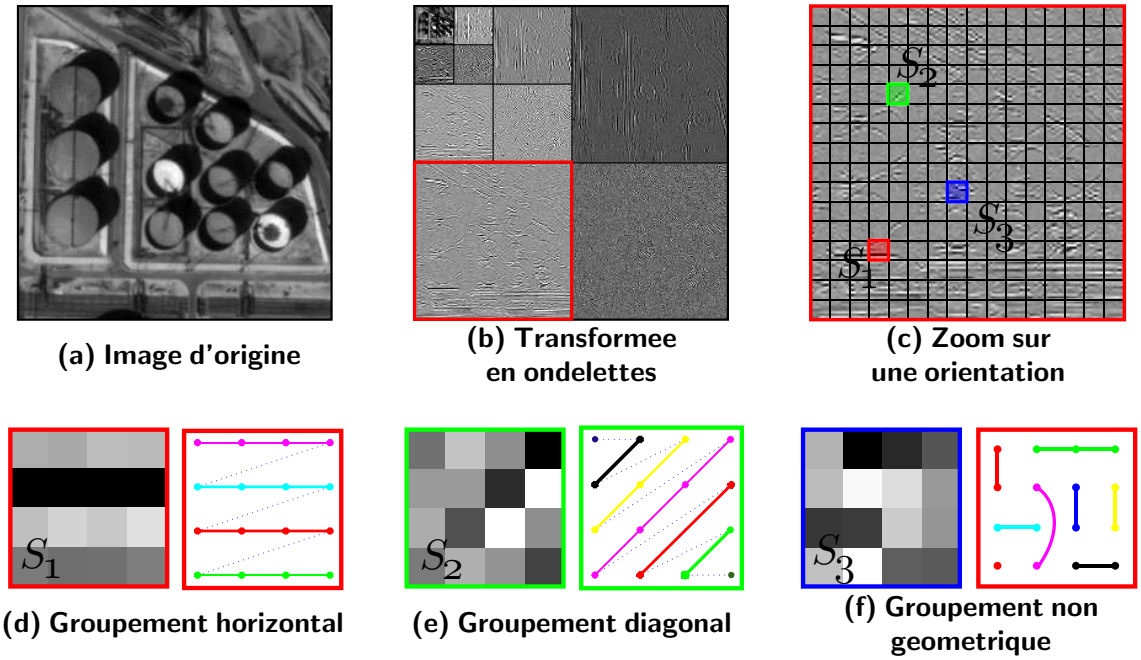
Fig. 3.6 *Configurations complexes de coefficients d'ondelettes.*

pas raisonnable de pouvoir gagner en compression en considérant des interactions de moins de 3 coefficients.

Ces constatations ainsi que la pratique empirique de la transformée en bandelettes nous ont amenés à ne pas utiliser de quadtree, en se restreignant à des carrés S de côté $b = 42^j$, c'est à dire des paquets de 4×4 coefficients d'ondelettes.

Une transformée par groupements Le fait de se restreindre à des groupes de 4×4 coefficients comporte plusieurs avantages :

- Comme on l'a déjà dit, ils contiennent les corrélations typiques que l'on trouve dans les images naturelles.
- Le fait de ne pas avoir de quadtree simplifie la procédure de codage, comme on le verra à la sous-section suivante.
- Enfin, en se concentrant sur seulement 16 coefficients, on peut mieux comprendre la nature des redondances des coefficients d'ondelettes. On va ainsi construire une transformée en bandelettes ad-hoc plus adaptée.



(a) Image d'origine (b) Transformee en ondelettes (c) Zoom sur une orientation

(d) Groupement horizontal (e) Groupement diagonal (f) Groupement non geometrique

Fig. 3.7 *Zoom sur des carrés de côté 4×4 dans une transformée en ondelettes.*

Le figure 3.7 montre trois paquets typiques de 16 coefficients d'ondelettes. À chaque fois, on a effectué un regroupement adapté des coefficients.

- Le carré S_1 correspond à une régularité purement horizontale. On a donc groupé les coefficients suivant les 4 lignes.
- Le carré S_2 correspond à une régularité diagonale. On a donc groupé les coefficients selon les 7 lignes diagonales.
- Le carré S_3 correspond à une géométrie chaotique (près d'une jonction). Les groupements correspondant sont donc très complexes.

Les groupement ont été effectués de façon manuelle pour garantir que les coefficients en ondelettes sont quasi-constants dans chaque groupe.

Plutôt que d'utiliser une transformée en bandelettes orthogonales classique, qui va transformer tous les coefficients d'un seul coup, une meilleure stratégie consiste à transformer chaque groupe de coefficients de manière indépendante. Ainsi, l'information n'est pas diffusée à travers les groupes, ce qui garantit une meilleure compression.

Plus précisément, la géométrie est maintenant décrite par un ensemble de groupes orientés $G = \{(G_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{N_G}$

$$\{n \setminus 2^j n \in S\} = \bigcup_{i=1}^{N_G} G_i \qquad \text{et} \qquad \varphi_i : G_i \longmapsto \{0, \ldots, g_i - 1\},$$

où g_i est le cardinal du groupe G_i. Les fonctions φ_i permettent d'ordonner les points à l'intérieur de G_i.

Les nouvelles fonctions de base de bandelettes sont définies avec des polynômes orthogonaux restreints à chaque groupe G_i. On note, pour chaque taille de groupe g_i, $\{\theta_m^{g_i}\}_{m=0}^{g_i-1}$ la base orthogonale de $\mathbb{R}^{g_i}$ formée par l'orthogonalisation discrète des monômes $1, X, \ldots, X^{g_i-1}$ évalués en des nœuds d'échantillonnage régulièrement espacés. La figure 3.8 montre les vecteurs discrets correspondants. Si on les considère comme échantillonnés aux points $\{0, \ldots, g_i - 1\}$, chaque vecteur $\theta_m^{g_i}$ a $m-1$ moments nuls discrets.

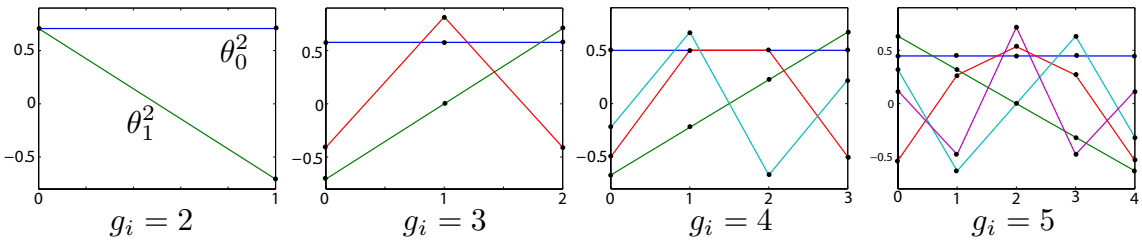


Fig. 3.8 *Polynômes de Lagrange discrets.*

Une base de bandelettes $\mathcal{B}(G, S)$ de $\ell_j^2(S)$, paramétrée par la géométrie G, peut être définie à l'aide de ces polynômes orthogonaux. Chaque vecteur de base $\Psi_{i,m}$ est indexé par le numéro d'un groupe G_i et par le numéro d'un polynôme orthogonal $\theta_m^{g_i}$

$$\Psi_{i,m}[n] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \notin G_i \\ \theta_m^{g_i}[\varphi_i[n]] & \text{si} \quad n \in G_i. \end{cases}$$

Choix des groupements Chaque géométrie G, composée d'un groupement $\{G_i\}_i$ et d'un ordre $\{\varphi_i\}_i$ sur les éléments des groupes, donne naissance à une base orthogonale de

bandelettes $\mathcal{B}(\mathrm{G}, \mathrm{S})$. Il convient donc de trouver un ensemble convenable de groupements, puisqu'en général un ordonnancement raisonnable en découle naturellement.

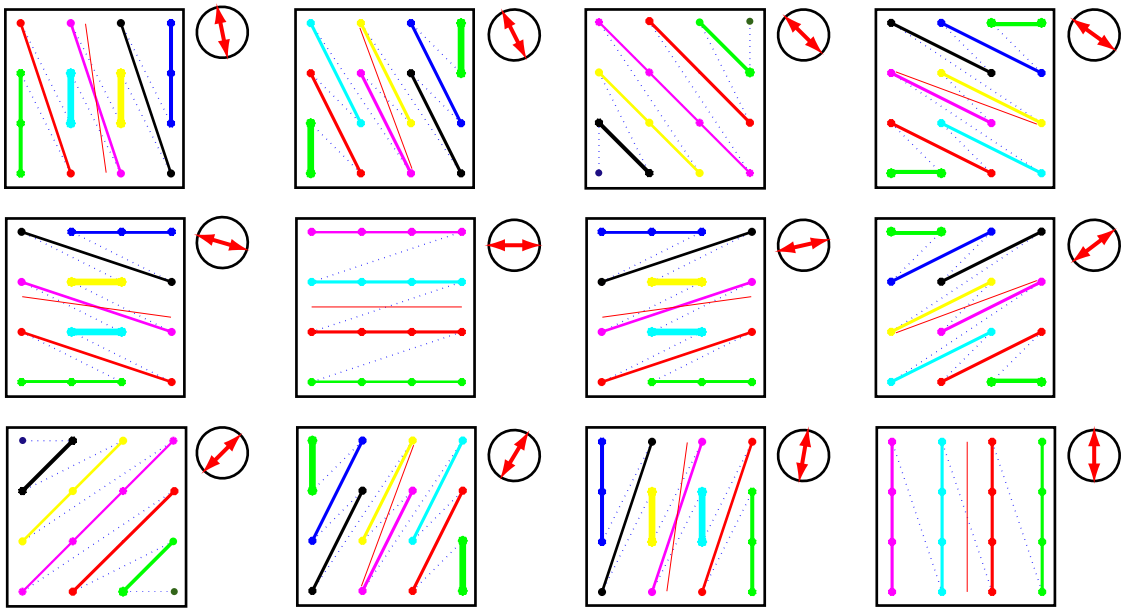


Fig. 3.9 *Groupements possibles de 16 coefficients issus d'une géométrie linéaire (avec les directions de groupement associées).*

La figure 3.9 montre les regroupements que nous avons utilisés dans notre codeur en bandelettes. Ces groupements découlent directement des ordonnancements 1D φ_d construits à la section 3.2.1 dans le cadre de la transformée d'ordre 0. Chaque groupe G_i correspond en effet à un ensemble de points voisins lorsqu'on les projette le long d'un direction d.

Il est cependant à noter que ce choix de groupements est empirique et que la construction d'un ensemble de groupement optimal est un problème ouvert.

3.2.3 DESCRIPTION DU CODEUR

On peut donc remplacer, dans l'étape (5) de l'algorithme décrit à la section 2.3.2, la transformée de Alpert par la transformée restreinte à des groupes que l'on vient de décrire. Ceci donne naissance à une nouvelle transformée en bandelettes orthogonales, mieux adaptée aux images naturelles.

Le codeur en ondelettes réalise la compression d'une image discrétisée $\overline{f}$ de la manière suivante :

- Pour chaque orientation 2^j et chaque orientation k, on subdivise en carrés S_m de 4×4 les coefficients $\overline{f}_j^k$ de la transformée en ondelettes.
- L'algorithme calcule le meilleur groupement $\mathrm{G}^{(d)}$ tel que la transformée des coefficients f_{S} dans la base $\mathcal{B}(\mathrm{G}^{(d)}, \mathrm{S})$ minimise le Lagrangien et stocke $\mathcal{G}_j^k[m] = d$ l'indice de ce regroupement (en posant $\mathcal{G}_j^k[m] = \Xi$ si il n'y a pas de géométrie convenable).
- L'algorithme stocke en même temps les coefficients de la transformée en bandelettes.
- Ces coefficients sont quantifiés à l'aide du quantificateur uniforme décrit à l'équation (2.14).

- Ces coefficients quantifiés sont codés à l'aide d'un codeur arithmétique, ce qui produit un flot de bits de coefficients de bandelettes.
- Les cartes de géométries $\mathcal{G}_j^k[m]$ sont également codées à l'aide d'un codeur arithmétique, ce qui crée un flot de bits de coefficients de géométrie.

3.3 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

3.3.1 COMPARAISON AVEC UN CODEUR ARITHMÉTIQUE EN ONDELETTES

Dans nos tests de compression, la transformées en ondelettes utilisée correspond aux ondelettes biorthogonales 7/9 de Cohen et al. [44].

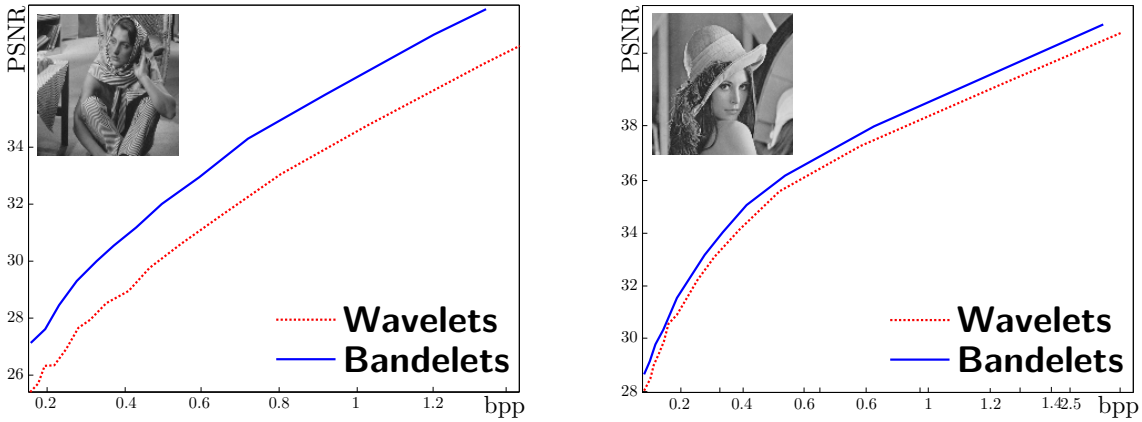


Fig. 3.10 *Courbes de distorsion du codeur en bandelettes pour (gain en PSNR ∼0.6dB) et Barbara (gain en PSNR ∼2dB).*

Nous avons tout d'abord comparé le codeur en bandelettes décrit à la section précédente à un codeur en ondelettes type utilisant uniquement un codage arithmétique des coefficients quantifiés. Ces résultats sont reportés à la figure 3.10 sous la forme de courbe de débit/distorsion, mesurée à l'aide du PSNR

$$\mathrm{PSNR}(f, f_{\mathrm{R}}) \stackrel{\text{def.}}{=} -10 \log_{10}(\|f - f_{\mathrm{R}}\|_{\mathrm{L}^2} / \|f\|_\infty),$$

où R est mesuré en nombre de bits par pixels. On peut observer un gain typique des bandelettes par rapport aux ondelettes de l'ordre de 0.6dB pour l'image Lena et de 1.6dB pour l'image Barbara.

La figure 3.11 montre un gain perceptuel important par rapport aux ondelettes, car la géométrie des images est mieux respectée et les phénomènes d'oscillations près des contours sont diminués. À la figure 3.12, on peut voir les orientations principales des géométries G détectées dans chaque carré S à l'échelle la plus fine de la transformée en ondelettes.

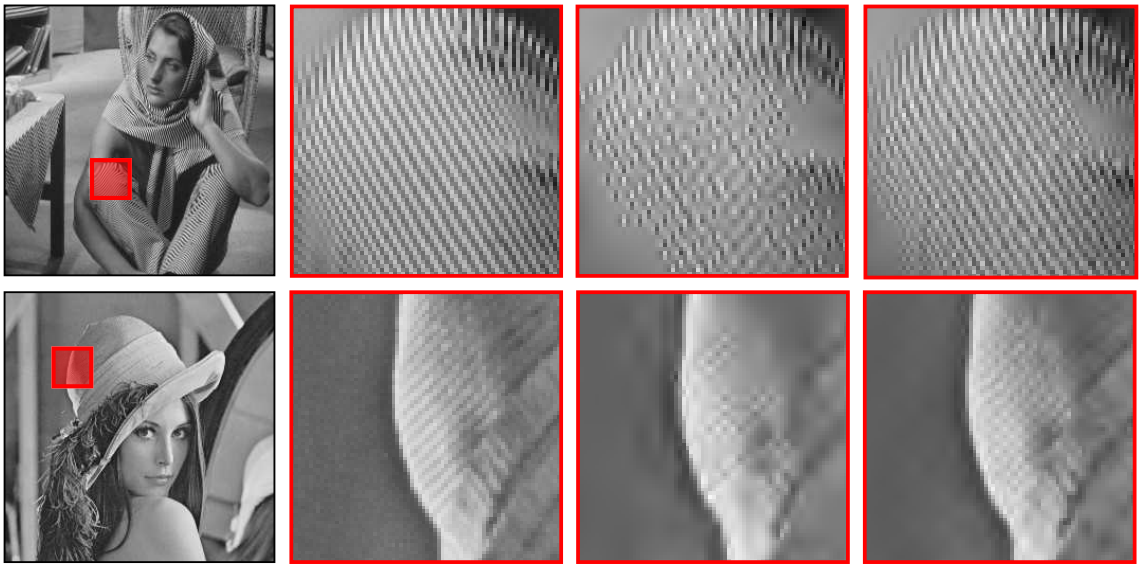


Fig. 3.11 *Comparaison entre le codeur en ondelettes et le codeur en bandelettes orthogonales à 0.2 bit/pixel.*

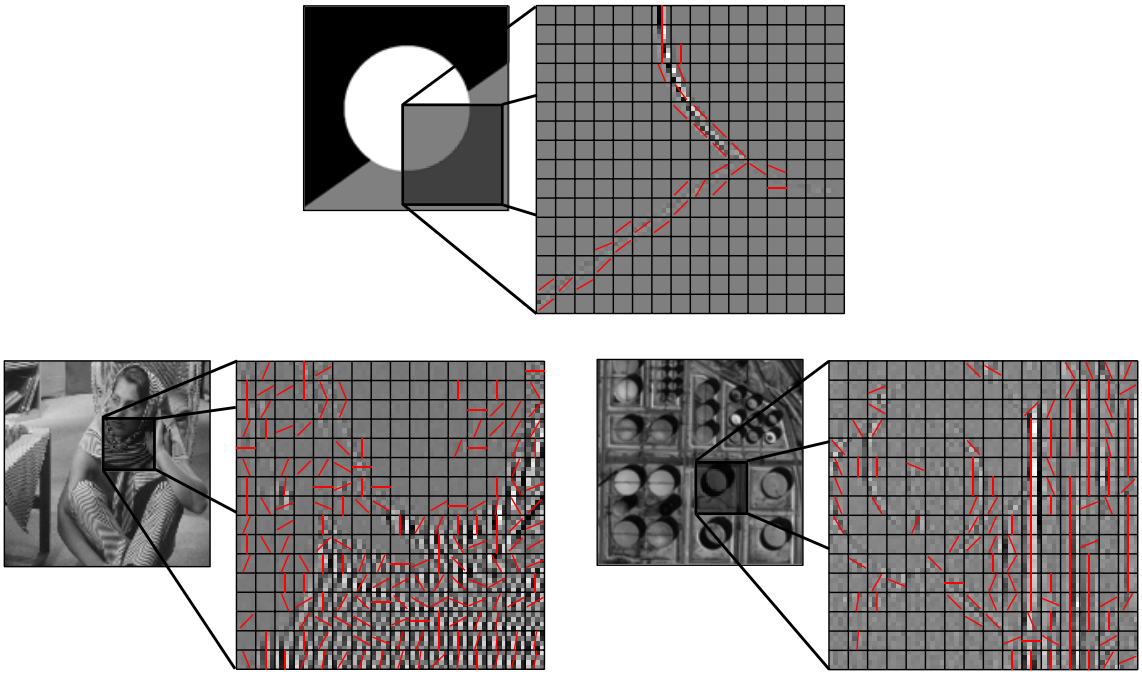


Fig. 3.12 *Géométries calculées par la transformée en bandelettes.*

3.3.2 Comparaison avec JPEG2000

La figure 3.13 montre la comparaison entre le gain obtenu, par rapport à un codeur arithmétique en ondelettes, par les bandelettes et par JPEG2000. On constate que ces deux codeurs font quasiment jeu égal sur les faibles taux de compression, et ce n'est que pour les taux peu agressifs (supérieurs à 2 bits/pixels) que les bandelettes apportent un léger gain.

L'interprétation de ce fait est que ces deux codeurs exploitent la géométrie des images.

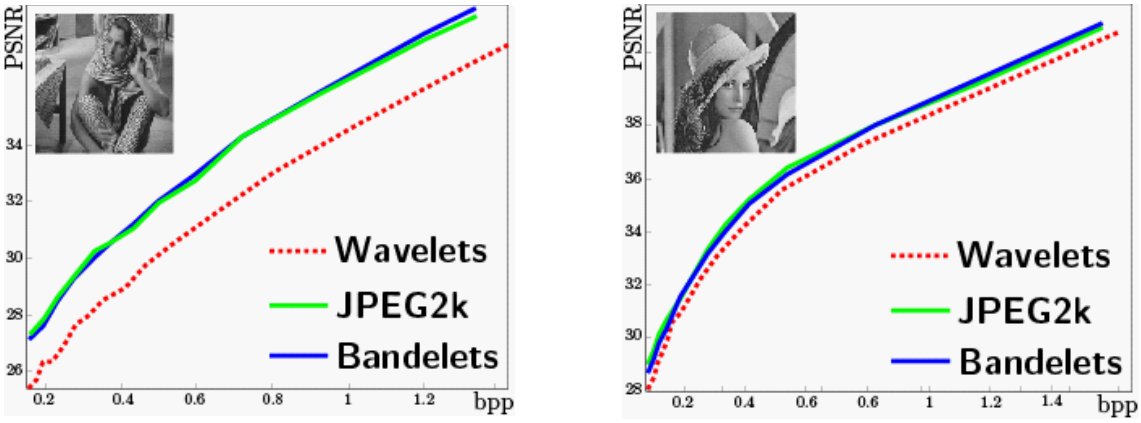


Fig. 3.13 *Comparaison de la compression avec une transformée en bandelettes et avec JPEG2000.*

Ces deux méthodes fonctionnent sur des petits groupes de coefficients dans le domaine des ondelettes, mais emploient des stratégies différentes pour capturer les corrélations typiques qui existent dans les coefficients d'une transformée en ondelettes. Le fait de considérer une géométrie de façon explicite à travers une transformée adaptée correspond à un traitement sans doute plus fin de la géométrie. Cependant, il ne faut pas oublier que grâce au système de plan de bits, JPEG2000 n'a pas besoin de coder explicitement les paramètres des contextes, ce qui constitue un gain certain.

3.3.3 Discussion et problèmes ouverts

L'étude du codeur en bandelettes montre bien que les meilleurs codeurs contextuels, tels JPEG2000, sont capables de prendre en compte la géométrie des images d'une manière assez fine. Une question naturelle est donc de savoir s'il est possible, à l'aide d'une transformée adaptée, de faire mieux qu'avec un codeur contextuel.

Une première approche pour améliorer le codeur en bandelettes consiste à ajouter un codeur contextuel à la suite de la transformée en bandelettes. Cette construction s'avère relativement complexe, car les coefficients en bandelettes ont une structure plus complexe que ceux en ondelettes et ne sont pas classifiables à l'aide de la seule échelle en ondelettes 2^j.

De plus, cette approche n'est pas très satisfaisante du point de vue théorique, car elle ne répond pas à la question centrale, qui est la paramétrisation des géométries complexes, issue des jonctions et des parties texturées d'une image. L'approche par groupements discrets de coefficients d'ondelettes semble concluante et une approche consisterait à chercher une nouvelle classe de regroupements capable de capturer des géométries plus chaotiques.

Un espoir en faveur de cette approche est que l'information géométrique n'est pas prédominante dans le flot de bits (environ 5% pour l'image Barbara à 0.5 bits/pixels). L'analyse théorique de la transformée en bandelettes montre que l'information géométrique et l'information des coefficients de bandelettes doivent être du même ordre. En utilisant une géométrie plus riche et mieux adaptée, il est envisageable d'établir un équilibre plus avantageux entre ces quantités.

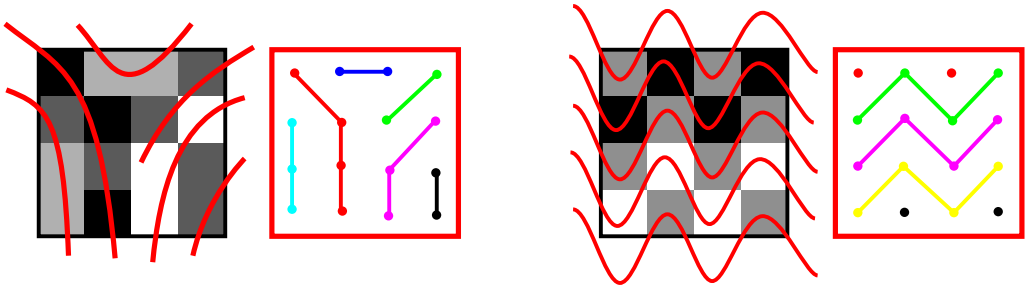


Fig. 3.14 *Regroupements complexes de coefficients d'ondelettes.*

La figure 3.14 montre des exemples de regroupements potentiels pour des géométries avec des symétries et périodicités complexes. Il reste cependant beaucoup de travail pour arriver à établir un vrai modèle et ainsi comprendre quels sont les regroupements nécessaires à une bonne représentation.

Chapitre 4

Bandelettes pour la compression de surfaces

Dans ce chapitre, nous présentons une application des bases orthogonales de bandelettes à la compression de données issues de surfaces 3D. Ce type de données devient de plus en plus important à cause des multiples applications dans les domaines du multimédia, du jeu vidéo ou bien de la simulation médicale. Comme l'expliquent Schröder et Sweldens [168], la taille des données 3D dépasse maintenant celle des images ou des videos. Un exemple frappant est celui du projet Digital Michelangelo [118] qui a scanné la statue du David avec plus de 10^9 points (voir figure 4.1).

Dans cette thèse, nous nous intéressons particulièrement à la surface elle-même et aux normales à la surface. Ces deux types de données sont très importantes pour obtenir un rendu réaliste de scènes 3D. Ces données se différencient des images 2D traditionnelles car bien que localement planes, elles possèdent une topologie globale complexe (puisqu'une surface peut contenir des trous et des bords). Pour utiliser nos outils issus de l'analyse harmonique, nous appliquons des méthodes issues du graphisme 3D pour paramétrer des surfaces sur un ou plusieurs domaines plans.

Nos bases de bandelettes sont capables de capturer la géométrie des surfaces typiques obtenues par scanner ou par création artistique. Ainsi nous observons un gain variant entre 1.5dB à 2dB pour la plupart des surfaces testées.

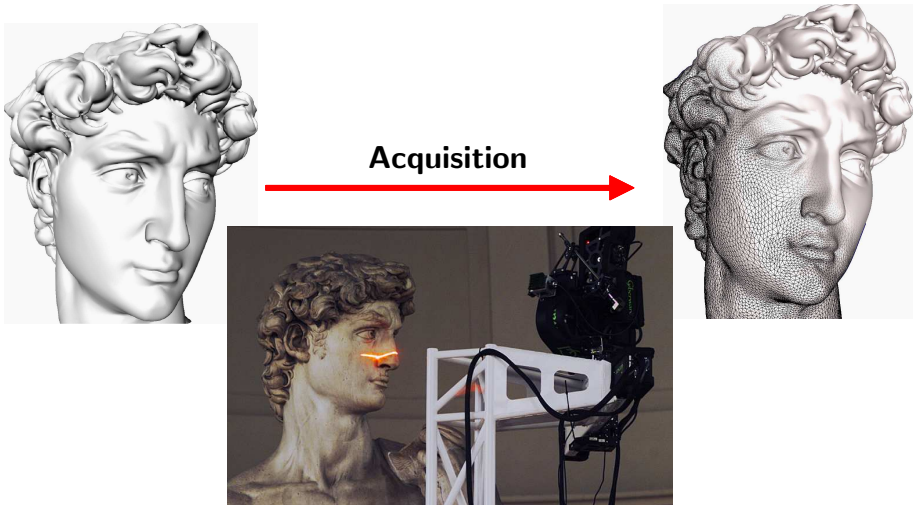


Fig. 4.1 *Digitalisation de la statue du David de Michel-Ange (image tirée de* [118]).

4.1 Représentations de la géométrie 3D

4.1.1 Géométrie multi-échelles des surfaces

La géométrie des surfaces naturelles est complexe et est intrinsèquement multi-échelles comme le souligne Dana et al. [53]. Les différentes techniques utilisées pour décrire cette géométrie doivent ainsi prendre en compte la grande variété de structures qui existe à tous les niveaux de détails : les macro structures (la représentation traditionnelle à l'aide de maillages 3D), les mesostructures (par exemple cartes de détails « bump map » ou bien les cartes de déplacements) et les structures microscopiques des matériaux (fonction de reflectance). Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur la compression de ces structures géométriques, en utilisant l'outil des bandelettes orthogonales.

La géométrie dirige la création, le rendu et les calculs Les structures géométriques sont au cœur du procédé de création, que ce soit pour les artistes (figure 4.2 (a)) ou pour la modélisation assistée par ordinateurs (figure 4.2 (b)). Ainsi la perception visuelle est principalement sensible aux lignes de courbures qui créent la plupart des réflexions lumineuses, voir figure 4.2 (c).

En ce qui concerne l'analyse et le rendu des données 3D, la plupart des algorithmes font particulièrement attention aux structures géométriques des objets, pour une plus grande efficacité (par exemple avec la méthode de remaillage anisotrope d'Alliez et al. [4]) ou pour des raisons esthétiques. Ainsi le rendu non-photoréaliste utilise des traits placés de façon à suggérer la géométrie des objets, voir par exemple l'algorithme de Hertzmann et al. [94] et la figure 4.2 (d).

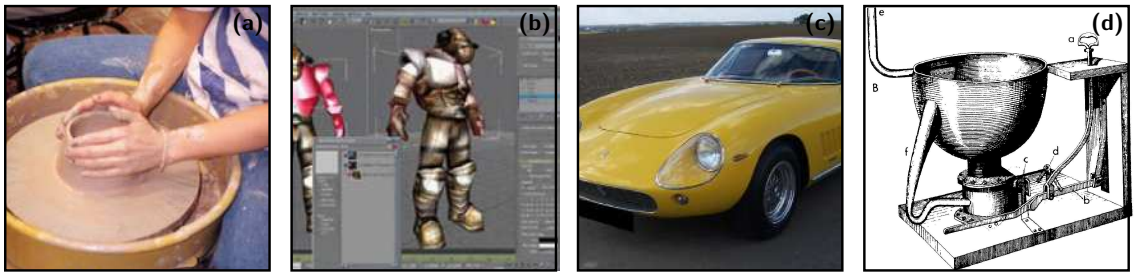


Fig. 4.2 *Importance de la géométrie lors de la création et du rendu.*

La géométrie est discrète Travailler sur des données digitales signifie travailler sur un domaine discret (voir la figure 4.3).

Même si le modèle fonctionnel sous-jacent est réalisé dans le domaine continu, l'étape de discrétisation a lieu avant toute analyse et traitement de la surface. Cette étape de discrétisation peut consister en une acquisition par scanner d'un objet (comme le projet Michelangelo [118], de reconstruction depuis des photographies (voir par exemple l'étude de Slabaugh et al. [177]), ou bien de remaillage d'une surface déjà acquise (voir par exemple l'étude de Alliez et al. [6]).

Une transformée en ondelettes peut alors être appliquée à l'ensemble des données discrétisées pour obtenir une représentation multirésolution, voir par exemple le compte rendu de

Alliez et Gotsman sur les techniques de compression géométrique [5].

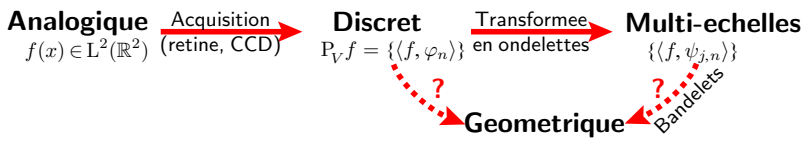


Fig. 4.3 *Hiérarchie des représentations d'une surface.*

La géométrie est multi-échelles La géométrie des surfaces est naturellement multi-échelles, comme on peut le constater directement sur des surfaces naturelles (voir image 4.4). Ces structures géométriques incluent :

- des arêtes avec un degré de lissage variable,
- des meso-structures plus fines,
- des structures encore plus fines, par exemple des effets artistiques complexes.

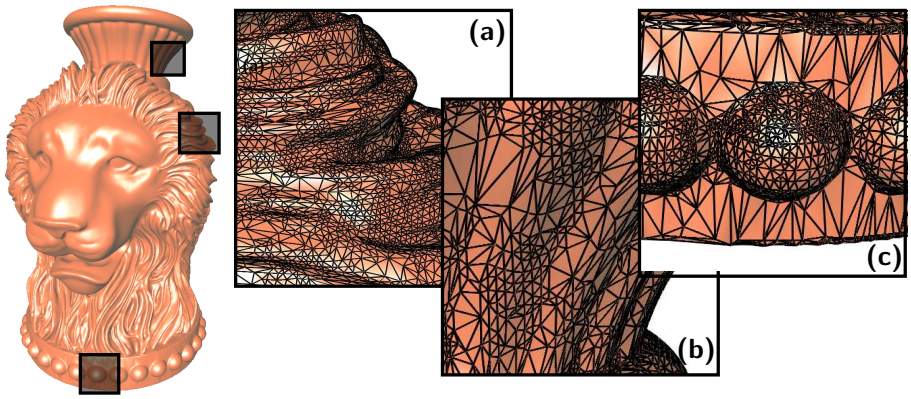


Fig. 4.4 *La géométrie d'une surface complexe est naturellement multi-échelles.*

Sur des modèles scannés avec beaucoup de précision (par exemple acquis pour des études artistiques comme le David, [118] où bien par reconstruction comme avec l'algorithme de Hoppe et al. [96]), les arêtes vives sont souvent localisées sur une largeur de quelques points. Pour de telles surfaces, la géométrie n'est pas une collection de discontinuités mais plutôt des zones de grande courbure. La localisation de ces arêtes est un problème mal posé, qui nécessite des algorithmes complexes comme celui de Ohtake et al. [143] (voir la figure 4.8, gauche). L'approche des bandelettes orthogonales prend le contre-pied de ces techniques de localisation et utilise plutôt une estimation d'une direction de régularité locale, qui est à la fois bien posée et utile pour le problème de la compression de surfaces.

Représentation de surface utilisant des images L'utilisation d'une grille d'échantillonnage régulière offre une représentation agréable pour un grand nombre de traitements à appliquer à une surface 3D. Nous utilisons ce type de représentation pour proposer un modèle fonctionnel pour les surfaces géométriques, ce qui permet de formuler le problème de codage de ces surfaces et de proposer un outil algorithmique pour le résoudre.

En fixant une paramétrisation plane de la surface 3D nous sommes capables d'utiliser les techniques classiques d'analyse harmonique comme les représentations par bases orthogonales et les algorithmes de meilleure base. Bien que la distorsion que l'on souhaite minimiser soit géométrique (par exemple la distance de Hausdorff), nous allons utiliser la norme L^2

pour guider la construction des outils. Nous utilisons la liberté dont on dispose lors de l'allocation des bits de codage pour réduire l'erreur géométrique.

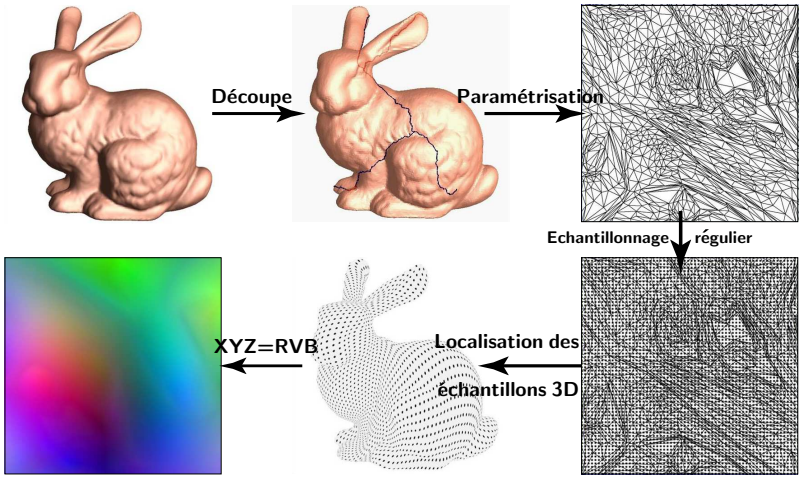


Fig. 4.5 *Génération d'une image de géométrie (figure tirée de* [88]).

Les principales représentations surfaciques utilisant des images sont :

- **Les images de géométrie** de Gu et al. [88] : la surface 3D est ré-échantillonnée sur une grille régulière, ce qui permet de la représenter de façon compacte comme une image couleur. Cette représentation est principalement utilisée pour les grandes structures d'une surface (aspect général de l'objet et les grandes déformations). La figure 4.5 détaille la création d'une image de géométrie.
- **Normal map** (voir l'étude de Peercy et al. [149]) : pour modéliser les détails fins d'un objet, les normales sont encodées avec un échantillonnage précis sous la forme d'une image à trois canaux. Sur les matériels modernes, de telles cartes de normales peuvent être affichées de manière intéractive sur une surface. La figure 4.6 explique le calcul d'une carte de normales et montre un rendu utilisant une telle carte.
- **Autres données** : on peut citer bien sûr l'application de textures (voir l'étude de Heckbert [91]), les cartes de déplacement de Wang et al. [199], les cartes de réflexion de l'environnement de Agarwal et al. [3], les textures volumiques utilisées par Owada et al. [146]. Il existe aussi des données de grande dimension comme la fonction plénoptique utilisée par exemple par Wood et al. [206] et qui fait l'objet d'une étude théorique par Do et al. [66].

Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur la compression des images de géométrie et sur les cartes de normales. Cependant la compression par ondelettes devrait se montrer utile à la compression d'autres données possédant des structures géométriques.

4.1.2 Compression géométrique de surfaces

Modèle fonctionnel pour les surfaces On considère une fonction $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ qui peut représenter soit une image de géométrie (c'est-à-dire une surface 3D) ou bien une carte de normale (c'est-à-dire les normales à cette surface). Le fait que le domaine de départ soit $[0,1]$ signifie que l'on a réussi à paramétrer la surface sur un domaine plan carré. Nous traitons chaque composante X/Y/Z de cette carte indépendamment, en supposant que ce sont des fonctions avec une régularité géométrique comme défini à la sous-section 1.1.1.

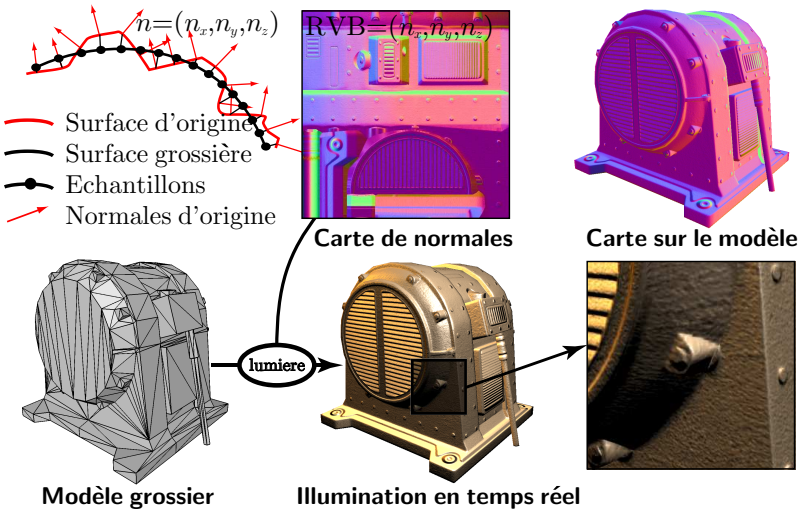


Fig. 4.6 *Génération et rendu d'une carte de normales.*

Ce modèle permet de prendre en compte le fait que les surfaces naturelles n'ont que rarement des arêtes vives. La figure 4.9 (a) montre une surface 3D dont la projection est une fonction continue ayant une discontinuité de tangente de plus en plus lissée. Sur la figure 4.7 on peut voir les différents types de structures géométriques sur une surface et sur l'image de géométrie correspondante.

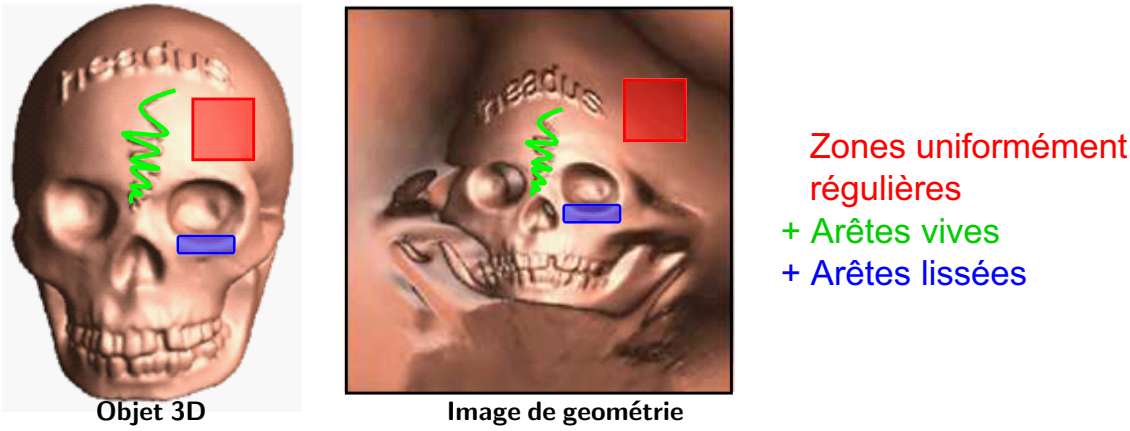


Fig. 4.7 *Illustration du modèle régulier par morceaux lissé sur une surface 3D.*

En graphisme 3D, les fonctions uniformément régulières constituent le modèle de surfaces le plus fréquemment utilisé. En conception assistée par ordinateur, les surfaces rationnelles telles les NURBS constituent un outil important, comme expliqué par Farin et al. [81]. Le gain d'intérêt pour les surfaces de subdivision pour la création (voir par exemple la méthode de Bierman et al. [18]) et pour la reconstruction (par exemple à l'aide de l'algorithme de Hoppe et al. [96]) permet la description de surfaces lisses par morceaux. Le modèle géométrique que nous utilisons permet de remplacer les arêtes vives par des transitions plus ou moins lissées. Ce type de structures géométriques a déjà été utilisé pour la création de personnages animés chez Pixar [63], voir aussi la figure 4.8, droite.

Compression de surfaces De nombreuses méthodes ont été proposées pour comprimer des surfaces 2D, voir par exemple l'étude de Alliez et Gotsman [5]. Un remaillage semi-

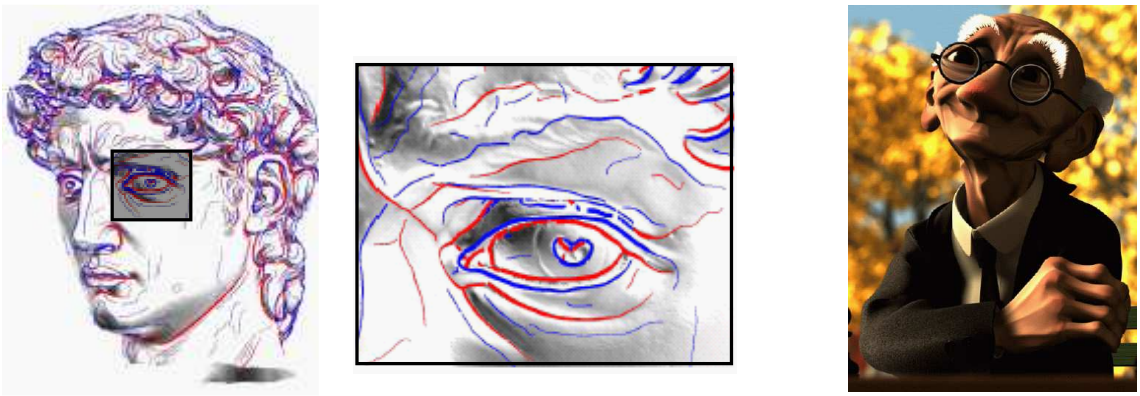


Fig. 4.8 *Gauche : exemples de lignes de crêtes (en bleu) et de vallées (en rouge) sur le David (image tirée de* [143]). Droite : utilisation des arêtes lissées pour la modélisation de personnages animés (image tirée de [63]).

régulier est souvent réaliser avant d'effectuer la compression. La première construction d'ondelettes sur des triangulations a été proposée par [77]. Elle consiste à encoder les différences par rapport à un schéma de subdivision. Le schéma de lifting, introduit par Sweldens [182], a été utilisé par Sweldens et Schröder [169] pour la compression de surfaces. Les meilleurs codeurs de surfaces utilisent des méthodes semblables, comme par exemple les approximations par multirésolution normale de Khodakovsky et al. [107]. Tous ces schémas sont très proches des constructions classiques d'ondelettes isotropes décrites à la sous-section 1.2.3 et peu de résultats théoriques d'approximation existent pour les surfaces (à l'exception notable du cas des courbes 2D, voir l'analyse de Daubechies et al. [58]).

Pour la compression d'images et d'images de géométrie, les algorithmes les plus efficaces utilisent une transformation orthogonale des données et un codage adapté des coefficients quantifiés. Les algorithmes JPEG et JPEG2000 (présentés à la sous-section 3.1.2) sont des exemples de ce type de codeurs par transformée. L'utilisation de fonction orthogonale va de paire avec l'utilisation de fonctions régulières, pour réduire les effets de blocs lors de la reconstruction du signal compressé.

Lorsque l'on considère une surface ayant une régularité géométrique C^2 (c'est-à-dire contenant des arêtes vives ou des arêtes lissées), représentée avec une image géométrique f et une carte de normale g, les meilleurs codages en ondelettes f_{R} et g_{R} avec R bits satisfont

$$\|f - f_{\mathrm{R}}\|^2 \leqslant \mathrm{C}\mathrm{R}^{-3/2}\log^{3/2}(\mathrm{R}) \qquad \text{et} \qquad \|g - g_{\mathrm{R}}\|^2 \leqslant \mathrm{C}\mathrm{R}^{-1}\log(\mathrm{R}),$$

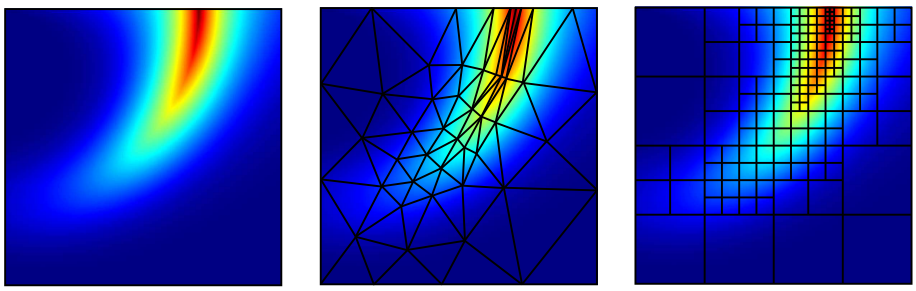
où C est une constante qui ne dépend que de f. Cette différence entre la surface et la carte de normales est due au fait que l'image de géométrie ne possède que des discontinuités de tangentes alors que les cartes de normales ont de vraies discontinuités.

Comme on l'a déjà fait remarquer à la sous-section 1.2.3, ces taux d'approximation ne sont pas optimaux. Pour exploiter la régularité qui existe le long des arêtes, nous allons utiliser une base adaptée de bandelettes. Le codage dans cette base permet d'obtenir un taux d'approximation $\mathrm{R}^{-2}\log^2(\mathrm{R})$ optimal.

Approximation de surface et anisotropie Les problèmes d'approximation géométriques ont été beaucoup étudiés et bien que la construction d'une triangulation optimale soit NP-complet (voir l'analyse d'Agarwal et al. [2]), il existe des algorithmes gloutons

efficaces, comme par exemple les maillages progressifs de Hoppe [95], les algorithmes de Garland et Heckbert [85] ainsi que celui de Lindstom et Turk [121]. De plus, des méthodes guidées par l'erreur comme celle de Cohen-Steiner et al. [47] sont prometteuses car plus globales.

Cependant, les arêtes lissées sont encore plus complexes à représenter, parce que le ratio des longueurs des triangles doit être adapté localement suivant un degré de lissage variable et inconnu (voir la figure 4.9, (b)).



(a) Image d'origine **(b) Triangulation** **(c) Ondelettes**

Fig. 4.9 *Approximation d'une surface avec une arête de plus en plus lissée. Seuls les supports des fonctions de base utilisées sont représentés.*

Pour avoir un problème bien posé (avec une solution ayant une complexité numérique raisonnable), il est nécessaire de fixer une échelle pour la géométrie. Ceci permet de construire une approximation adaptée pour cette échelle. En graphisme 3D, le problème de l'extraction des arêtes a été beaucoup étudié et nécessite un lissage plus ou moins grand voire une analyse à toutes les résolutions comme par exemple dans l'algorithme de Ohtake et al. [143].

La construction des bandelettes orthogonales montre en effet que fixer l'échelle en ondelettes 2^j revient à régulariser la géométrie, ce qui garantit un algorithme rapide et robuste.

4.2 Codeur en bandelettes pour la compression de surfaces

Dans cette section, nous appliquons le codeur en bandelettes orthogonales présenté à la sous-section 3.2.3 à la compression d'images de géométrie et de cartes de normales. Nous comparons ses performances au codeur en ondelettes qui code les coefficients quantifiés à l'aide d'un codeur arithmétique.

4.2.1 Compression d'images de géométrie

Les images de géométrie ont été introduites par Gu et al. [88]. Elles consistent en un ré-échantillonnage complet de la surface de manière à la représenter sous la forme d'une image couleur. Le problème principal de cette approche est la grande distorsion induite par cette paramétrisation plane. Des solutions existent pour résoudre ce problème, comme

par exemple la subdivision de la surface utilisée par Sander et al. [167] ou bien l'utilisation d'une paramétrisation sphérique par Hoppe et al. [97].

Nous avons choisi d'utiliser des images de géométrie avec des paramétrisations sphériques, ce qui limite nos tests à des surfaces closes de genre 0. L'extension à images de géométrie multiples (comme par exemple après une subdivision de la surface) est possible mais hors du sujet de cette thèse.

La façon la plus simple de comprimer une telle image de géométrie est d'utiliser un codeur classique d'images (par exemple à l'aide d'une transformée en ondelettes) avec un traitement spécial des bords de l'image (voir les travaux de Hoppe et al. [97]). Cette approche est naturelle et suit la construction théorique proposée par Dahmen et al. [52]. Nous mesurons l'erreur de reconstruction entre une surface $\mathcal{M}$ et sa reconstruction avec R bits $\mathcal{M}_{\mathrm{R}}$ à l'aide de

$$\mathrm{PSNR}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_{\mathrm{R}}) \stackrel{\text{def.}}{=} 10 \log_{10}(\|\mathcal{M}\|_\infty / d_{\mathrm{H}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}_{\mathrm{R}})),$$

où $\|\mathcal{M}\|_\infty$ est la diagonale du cube contenant $\mathcal{M}$ et d_{H} est l'erreur quadratique de Hausdorff calculée à l'aide de l'outil METRO [42].

La principale différence entre la norme L^2 et la distance géométrique d_{H} est que cette dernière est invariante aux déformations le long du plan tangent à la surface. Pour enlever ce biais lors du codage, nous utilisons une modification simple, qui consiste à allouer les bits de façon intelligente. On effectue à cet effet un changement de base local à chaque échelle de la transformée pour amener la normale à la verticale. Ce changement de base peut être estimé à l'aide de la surface représentée à l'échelle plus grossière. On alloue ensuite 3 fois plus de bits dans la direction de la normale que dans les directions tangentielles. Cette technique s'est montrée efficace dans le cadre d'autres schémas de compression, comme par exemple celui de Hoppe et al. [97] ainsi que Guskov et al. [89] mais une étude théorique plus approfondie reste à être faite.

La figure 4.12 montre les courbes de distorsion de Hausdorff. On remarque que même pour les images de géométrie ayant des arêtes très lissées (comme la gargouille), on observe un gain en terme de PSNR de l'ordre de 1.4dB.

Sur ces images de géométrie, une grande distorsion est causée par la paramétrisation sphérique, ce qui ajoute une anisotropie artificielle. La figure 4.11 montre les distorsions Hausdorff pour des petits carrés de surfaces extraits de plusieurs surfaces. Ces images ne souffrent pas de distorsion artificielle et l'on note encore une fois une amélioration de l'ordre de 1.5dB.

4.2.2 Compression de cartes de normales

Une carte de normales est une image couleur qui encode les normales à la surface sur une grille régulière. On utilise généralement un maillage grossier lors du rendu, auquel on ajoute une carte de normales détaillée pour rendre les détails géométriques fins de la surface.

Dans nos tests, les cartes de normales sont soit créées par des artistes (voir la figure 4.12 pour les modèles de générateurs) ou en utilisant une paramétrisation sphérique (voir la figure 4.12 pour l'autre carte de normales).

Une carte de normales peut être codée de plusieurs façons :

- Comme une texture avec un canal représentant une carte d'élévation. Le champ de normales est alors calculé lors du rendu par différentiation. Ceci est efficace pour des éléva-

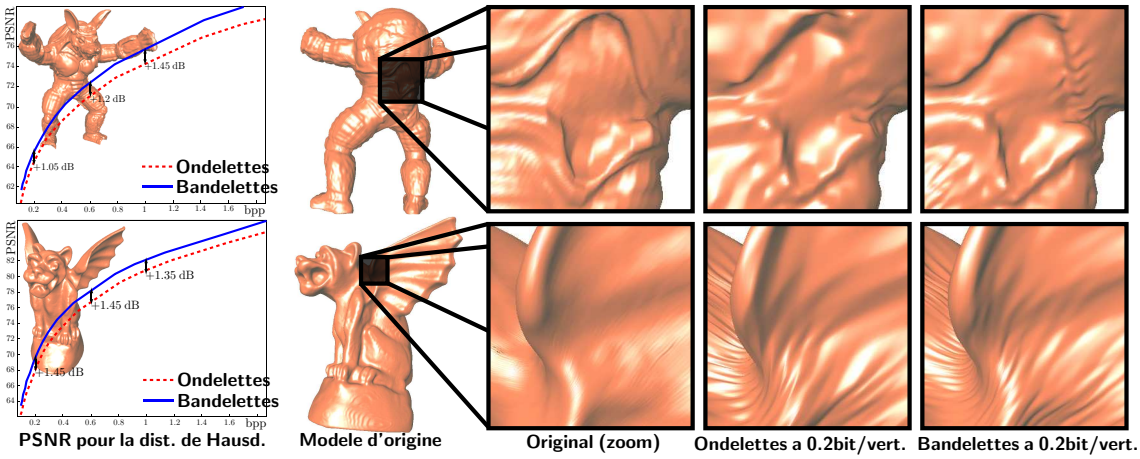


Fig. 4.10 *Courbes de distorsion de Hausdorff pour la compression d'images de géométrie.*

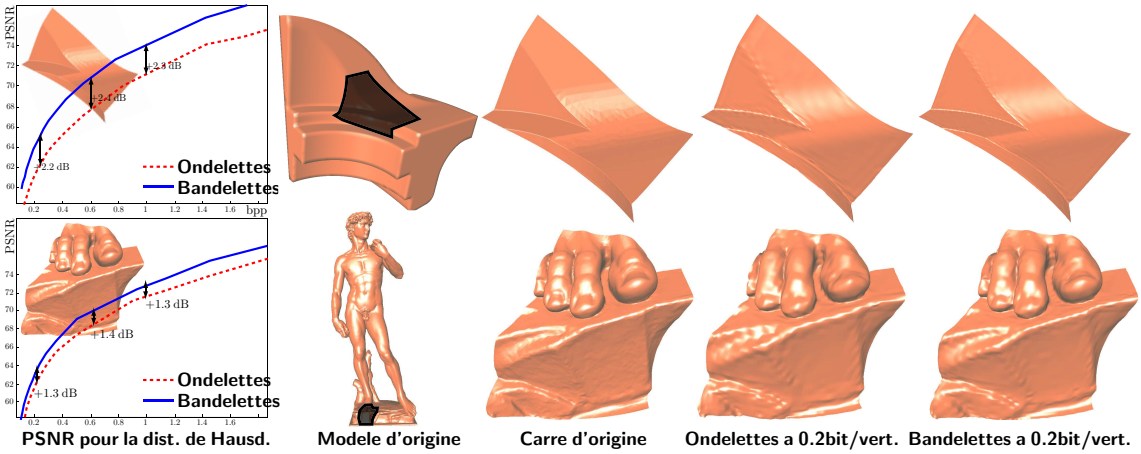


Fig. 4.11 *Courbes de distorsion de Hausdorff pour la compression d'images de géométrie extraites selon des carrés.*

tions peu élevées.

- Comme une texture avec deux canaux, qui représentent les coordonnées x et y des normales. Pour des niveaux d'élévation modérés, on peut alors retrouver sans trop d'erreur numérique la composante z en exploitant le fait que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- Comme une texture couleur dans le cas général, où l'on peut encoder les composantes des normales soit dans un système de coordonnées globales, soit dans un repère lié au plan tangent local.

Dans nos tests, nous avons utilisé des images couleur qui encodent un canal par axe spacial. Nous renormalisons les normales après décompression. L'erreur de reconstruction est mesurée à l'aide du PSNR traditionnel

$$\mathrm{PSNR}(f, f_{\mathrm{R}}) \stackrel{\mathrm{def.}}{=} 20 \log_{10}(\|f\|_\infty / \|f - f_{\mathrm{R}}\|_2).$$

La figure 4.12 montre les courbes de distorsion. On peut constater une amélioration typique du PSNR de l'ordre de +2dB pour les cartes avec des fortes discontinuités (générateurs) et de +1.3dB pour les modèles avec des arêtes très lissées. Ces résultats montrent clairement les bénéfices apportés par notre codeur en bandelettes pour la compression des cartes de

normales. Ce gain est plus important que pour la compression d'images de géométrie, principalement pour les raisons suivantes :

- Les ondelettes marchent relativement bien pour les images de géométrie, qui n'ont que des discontinuités de tangentes (la décroissance de l'erreur en ondelettes est de l'ordre de $R^{-3/2}$).
- Une carte de normales a un contenu géométrique important aux fines échelles, où notre transformée en bandelettes apporte une réelle amélioration car le nombre de coefficients à ces échelles est grand.

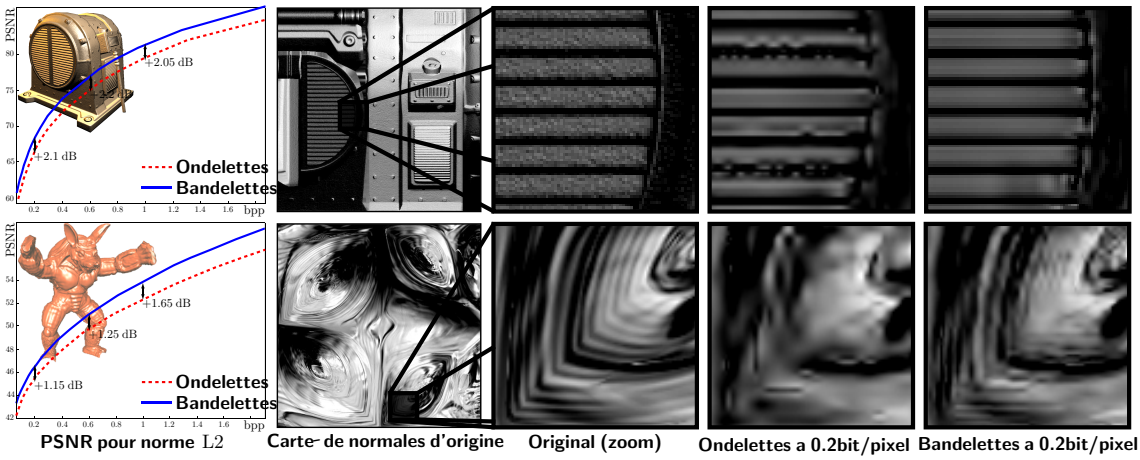


Fig. 4.12 *Courbes de distorsion* L^2 *pour la compression de cartes de normales.*

Chapitre 5

Bandelettes pour l'inversion de la tomographie

Ce chapitre utilise les bases orthogonales de bandelettes pour inverser l'opérateur de tomographie en présence de bruit. Un estimateur est construit par seuillage dans une meilleure base de bandelettes.

Cette construction exploite à la fois la capacité des bandelettes orthogonales à bien représenter les fonctions géométriques et la localisation en échelle des fonctions de base. Nous montrons comment étendre les résultats classiques de débruitage et d'inversion dans une base fixe au cadre d'un dictionnaire de bases. Ceci nous permet de démontrer l'optimalité de l'estimateur en bandelettes pour les fonctions ayant une régularité géométrique.

Des exemples numériques sur des données synthétiques montrent que notre nouvelle méthode apporte une nette amélioration par rapport à l'état de l'art.

5.1 Introduction

Nous proposons maintenant d'utiliser les bases de bandelettes pour estimer un signal f appartenant à la classe Θ_α des fonctions C^α géométriquement régulières à partir de la transformée de Radon de f en présence de bruit.

$$\mathrm{Y} = \mathrm{R}f + \mathrm{W}$$

Où W est un bruit blanc gaussien de variance ε^2 et où R désigne la transformée de Radon.

L'opérateur de tomographie R, autre dénomination de la transformée de Radon, est défini pour $f \in \mathrm{L}^2([0,1]^2)$ par :

$$(\mathrm{R}f)(t,\theta) = \int f(x)\,\delta(x_1\cos\theta + x_2\sin\theta - t)\,\mathrm{d}x.$$

La valeur $(\mathrm{R}f)(t,\theta)$ somme les contributions de la fonction originale f le long d'une droite paramétrée par sa pente θ et son abscisse t. Cet opérateur est associé au procédé de tomographie [93], où des données sont acquises par lancé de rayons. Les applications dans le domaine médical sont innombrables, principalement en radiologie, voir l'étude de Newton et Potts [141].

La transformée de Radon s'apparente à un filtre : en effet l'opérateur $\mathrm{R}^*\mathrm{R}$ est un filtrage dont la réponse impulsionnelle h vérifie

$$|\widehat{h}(\omega)| = \mathrm{C}/|\omega|.$$

Cette propriété induit en particulier que R^{-1} n'est pas borné et qu'on ne peut espérer avoir un estimateur de f correct en calculant $\mathrm{R}^{-1}\mathrm{Y}$. Il est ainsi nécessaire de construire un estimateur plus robuste qui ne risque pas de faire exploser le bruit aux hautes fréquences.

La figure 5.1 montre un exemple d'image géométrique artificiellement bruitée, ce qui permet d'observer l'explosion du bruit dans l'image $\mathrm{R}^{-1}\mathrm{Y}$.

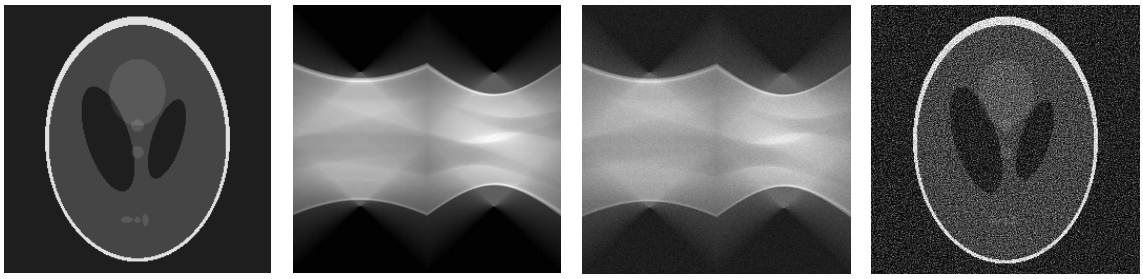


Image d'origine f | Transformee de Radon Rf | Transformee de Radon bruitee Y | Donnee bruitee inversee $R^{-1}Y$

Fig. 5.1 *Exemple de transformée de Radon bruitée.*

Risque d'un estimateur Soit f une fonction et $\hat{f}$ un estimateur calculée à partir des données bruitées Y.

On définit l'erreur quadratique moyenne MSE (pour Mean Square Error) de $\hat{f}$ par

$$\mathrm{MSE}(\hat{f}, f, \varepsilon) = \mathrm{E}(\|f - \hat{f}\|^2_{\mathrm{L}^2}).$$

Si Ω est un ensemble de fonctions on définit le risque d'un estimateur $\hat{f}$ sur l'ensemble Ω par

$$r(\hat{f}, \Omega, \varepsilon) = \sup_{f \in \Omega} \mathrm{E}(\|f - \hat{f}\|^2_{\mathrm{L}^2}).$$

On définit ainsi le risque minimax de Ω comme le risque du meilleur estimateur sur Ω

$$r(\Omega, \varepsilon) = \inf_{\hat{f}} r(\hat{f}, \Omega, \varepsilon) = \inf_{\hat{f}} \sup_{f \in \Omega} \mathrm{E}(\|f - \hat{f}\|^2_{\mathrm{L}^2}).$$

Quand Ω est fixé, ce risque est une fonction croissante de ε.

Inversion par régularisation De nombreuses opérations en traitement d'images correspondent à l'inversion d'un opérateur linéaire comme par exemple la déconvolution ou l'inversion de la tomographie.

$$\mathrm{Y} = \mathrm{K}f + \mathrm{W}.$$

L'inversion de ces opérateurs est mal posée et le cadre probabiliste est adapté à la description de ces problèmes, voir à ce sujet la présentation de O'Sullivan [145].

La théorie de la régularisation a été développée par Tikhonov [186] pour résoudre ces problèmes dans le cadre de l'analyse fonctionnelle. Ces méthodes par régularisation se focalisent sur une classe de fonctions qui forment un a priori pour l'inversion.

Des modèles bayesiens permettent de généraliser ces approches, voir par exemple l'approche d'Archer et Titterington [9]. La régularisation des problèmes mal posés est aussi un cadre unificateur pour décrire les modèles physiologiques, comme l'ont montré par exemple Bertero et al. pour la vision humaine et Poggio et al. [157] pour la vision par ordinateur.

Des méthodes pénalisant la variation totale de l'image ont été proposées par Rudin et al. [165] ainsi que par Jonsson et al. [102].

Des méthodes récentes exploitent comme a priori un critère de bonne représentation dans une base fixée, comme par exemple la base d'ondelettes qui est utilisée par Daubechies et al. [56]. Ces approches sont équivalentes à une régularisation par pénalisation, mais avec des normes fonctionnelles plus variées.

Inversion par décomposition en valeurs singulières Il est également possible d'utiliser la représentation de f dans une base orthogonale adaptée à l'opérateur K. L'approche SVD, Singular Value Decomposition, consiste à utiliser une base de vecteurs propres de l'opérateur $\mathrm{K}^*\mathrm{K}$ et de construire un estimateur diagonal dans cette base.

Soit $\{e_\nu\}_\nu$ une base de vecteurs propres de l'opérateur $\mathrm{K}^*\mathrm{K}$ associée aux valeurs propres $\{k_\nu\}_\nu$. Les vecteurs e_ν forment une base orthogonale. On note

$$h_\nu \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\|\mathrm{K}e_\nu\|_{\mathrm{L}^2}}\mathrm{K}e_{nu}$$

et on a la formule de reconstruction suivante

$$f = \sum_\nu k_\nu^{-1}[\mathrm{K}f, h_\nu]e_\nu.$$

Dans la suite, on note $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ le produit scalaire sur l'espace de départ L^2 et $[\cdot,\cdot]$ le produit scalaire sur l'espace d'arrivé de l'opérateur K. On estime f par un estimateur diagonal dans cette base,

$$\hat{f} = \sum_\nu \omega_\nu k_\nu^{-1}[\mathrm{Y}, h_\nu]e_\nu.$$

$\{\omega_\nu\}_\nu$ étant une suite d'éléments de $[0,1]$, choisis a priori pour assurer la convergence de la série.

Comme la base $\{e_\nu\}_\nu$ est orthogonale on peut minorer le risque pour le jeu de paramètres $\{\omega_\nu\}_\nu$ optimal

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\|\hat{f} - f\|_{\mathrm{L}^2}^2) &= \sum_\nu \left(\omega_\nu^2 k_\nu^{-2}\varepsilon^2 + (1-\omega_\nu)^2 k_\nu^{-2}[\mathrm{K}f, h_\nu]^2\right)\\ &\geqslant 1/2\sum_\nu \min(k_\nu^{-2}\varepsilon^2, |\langle f,\, e_\nu\rangle|^2).\end{aligned}$$

Le risque d'un tel estimateur est ainsi lié à la décroissance des coefficients $|\langle f,\, e_\nu\rangle|$. Pour la transformée de Radon comme pour tous les filtres, la base $\{e_\nu\}_\nu$ est la base de Fourier. L'estimateur par SVD sépare ainsi les fréquences et les traitent séparément en atténuant plus celles qui sont amplifiées par l'opérateur inverse K^{-1}. Si les coefficients de Fourier du signal f à estimer décroissent rapidement la SVD est parfaitement adaptée à l'estimation. Si f contient des singularités, la transformée de Fourier ne décroît pas rapidement et la forte atténuation des hautes fréquences provoque un lissage visible au niveau des singularités.

Si on considère l'opérateur de radon R cette approche n'est pas satisfaisante pour les fonctions de notre modèle Θ_α.

Ce défaut d'estimation est lié au fait que la base $\{e_\nu\}_\nu$ utilisée est entièrement construite à partir des propriétés de l'opérateur. Donoho dans [71] propose une construction similaire à l'aide des ondelettes qui permet d'estimer des fonctions dans des Besov. Candès et Donoho dans [33] poursuivent cette voie en proposant un estimateur diagonal en Curvelets presque optimal pour les fonctions $\mathcal{C}^2$ géométriquement régulières.

L'idée sous-jacente à ces trois méthodes est d'utiliser une représentation adaptée à l'opérateur et aux fonctions à estimer. A chaque fois on sépare les bandes de fréquences et on les traite séparément. On effectue sur chacune de ces bandes l'équivalent d'un débruitage.

Nous proposons de reprendre cette méthode et de l'appliquer à l'espace Θ_α des fonctions C^α-géométriquement régulières en utilisant les bandelettes de seconde génération. Nous montrons pourquoi cette famille est particulièrement bien adaptée à ce problème et comment on peut appliquer les résultats obtenus dans la thèse de Charles Dossal [75].

Nous reprenons maintenant plus en détail la décomposition en ondelettes-vaguelettes de Donoho et l'inversion en curvelets de Donoho et Candès. Nous mettrons en évidence le fait que ces inversions peuvent être vues comme des débruitages par bandes de fréquences. Nous en déduirons une méthode d'inversion en bandelettes de seconde génération. Nous présenterons cette méthode sous la forme d'une suite de débruitage afin d'utiliser les résultats existants sur le débruitage en bandelettes.

5.2 Inversion et seuillage dans une base.

5.2.1 Décomposition en ondelettes-vaguelettes

Donoho prend acte des limites de la SVD pour les fonctions dans des espaces de Besov et propose pour l'inversion de certains filtres et de la transformée de Radon une décomposition similaire avec une base d'ondelettes $\{\psi_\lambda\}_\lambda$.

L'objectif de cette nouvelle décomposition est d'exploiter la localisation fréquentielle des ondelettes qui diagonalisent presque R et la capacité de ces dernières à bien représenter les fonctions des espaces de Besov. On définit ainsi une famille $\mathrm{R}^* u_\lambda = k_j \psi_\lambda$. L'indice $\lambda = (j, k, n)$ prend en compte l'échelle j, l'orientation k ainsi que la localisation spatiale n des fonctions d'ondelettes. Le réel k_j ne dépend que de l'échelle j et permet d'avoir une norme de u_λ de l'ordre de $2^{j/2}$. Les ψ_λ jouent le rôle des vecteurs propres et les k_j des valeurs propres associées. On a par définition de u_λ la formule de reconstruction suivante :

$$f = \sum_\lambda [\mathrm{R}f, u_\lambda] k_j^{-1} \psi_\lambda.$$

On estime ensuite f en seuillant les coefficients de $[\mathrm{Y}, u_\lambda]$ avec un seuil t_j adapté à chaque échelle j

$$\hat{f} = \sum_\lambda \mathrm{S}_{t_j}([\mathrm{Y}, u_\lambda]) k_j^{-1} \psi_\lambda$$

Les termes $[\mathrm{Y}, u_\lambda]$ cachent en quelque sorte une inversion, en effet

$$[\mathrm{Y}, u_\lambda] = [\mathrm{R}f + \mathrm{W}, u_\lambda] = [\mathrm{R}(f + \mathrm{R}^{-1}\mathrm{W}), u_\lambda] = \langle f + \mathrm{R}^{-1}\mathrm{W}, \mathrm{R}^* u_\lambda\rangle = k_j \langle f + \mathrm{R}^{-1}\mathrm{W}, \psi_\lambda\rangle$$

Au facteur k_j près $[\mathrm{Y}, u_\lambda]$ correspond au coefficient d'ondelettes des données Y brutalement inversées. Le facteur k_j est présent pour contrôler l'explosion du bruit $\mathrm{R}^{-1}\mathrm{W}$ sur les échelles fines.

On peut ainsi voir l'estimateur $\hat{f}$ en ondelettes-vaguelettes comme une somme d'estimateurs $\hat{f}_j$

$$\hat{f} = \sum_j \hat{f}_j \quad \text{avec } \hat{f}_j = k_j^{-1} \sum_n \mathrm{S}_{t_j}(\langle f + \mathrm{R}^{-1}\mathrm{W},\, \psi_{jn}^k\rangle)\psi_{jn}^k.$$

Ces estimateurs $\hat{f}_j$ sont obtenus par seuillage des données $\mathrm{R}^{-1}\mathrm{Y}$ dans la base d'ondelettes. On effectue ainsi un débruitage bande de fréquence par bande de fréquence de $\mathrm{R}^{-1}\mathrm{Y}$ avec un bruit contrôlé par bande de fréquence. Le niveau du seuil t_j est choisi en fonction de la variance ε_j^2 du bruit $\langle \mathrm{R}^{-1}\mathrm{W},\, \psi_{j,n}^k\rangle$ qui croît comme $\varepsilon^2 2^{-j}$. Du fait que les ondelettes diagonalisent presque R, le bruit $\langle \mathrm{R}^{-1}\mathrm{W},\, \psi_{j,n}^k\rangle$ est proche d'un bruit blanc et on peut transposer des méthodes développées dans le cadre de bruit blanc pour déterminer des seuils t_j qui assurent l'optimalité de l'estimateur sur les espaces de Besov.

Donoho montre ainsi dans [71] que l'on obtient une décroissant asymptotique optimale du risque par seuillage en ondelettes-vaguelettes pour des fonctions f dans une boule d'un espace de Besov.

Les deux points qui assurent qu'un estimateur est performant sont :
- Les ondelettes diagonalisent presque l'opérateur, ce qui permet de contrôler au mieux la variance du bruit $[\mathrm{W}, u_\lambda]$ en fonction de λ.
- Le fait que les espaces de Besov soient orthosymétriques dans une base d'ondelettes, ce qui permet de concentrer l'énergie des fonctions f sur peu de coefficients et ainsi de garantir à chaque échelle un minimum de coefficients au-dessus du seuil.

Kalifa et Mallat dans [104] utilisent un seuillage adapté dans des bases d'ondelettes miroirs pour inverser un filtrage hyperbolique. Les auteurs montrent que leur estimateur est optimal pour l'estimation des fonctions à variation bornée en encadrant l'espace BV par deux espaces de Besov orthosymétriques dans la base d'ondelettes miroirs.

Ces résultats encourageants ne permettent cependant pas d'estimer de manière optimale les fonctions géométriquement régulières. Donoho et Candès dans [28, 33] proposent d'appliquer la même méthode avec les curvelets.

5.2.2 Inversion en curvelets

Les curvelets $\{\gamma_\lambda\}_\lambda$ forment un tight frame qui assure une représentation presque optimale des fonctions C^2 régulières. De plus elles sont localisées fréquentiellement comme les ondelettes et diagonalisent presque R. On établit une formule de reconstruction à partir de la famille U_μ définie par $\mathrm{R}^*\mathrm{U}_\lambda \overset{\text{def.}}{=} k_s \gamma_\lambda$ où k_s ne dépend que de l'échelle s,

$$f = \sum_\lambda [\mathrm{R}f, \mathrm{U}_\lambda] k_s^{-1} \gamma_\lambda.$$

On détermine de la même manière un estimateur par seuillage

$$\hat{f}_{cur} = \sum_{\lambda} \mathrm{S}_{t_s}([\mathrm{Y}, \mathrm{U}_\lambda])\gamma_\lambda \tag{5.1}$$

avec un seuil dépendant de l'échelle

$$t_s \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{2 \log \mathrm{N}_s} k_s^{-1} \varepsilon, \tag{5.2}$$

où N_s est le nombre de curvelets à l'échelle s.

On obtient alors un estimateur dont la décroissance asymptotique du risque est quasi optimal sur l'ensemble Θ_2 des fonctions C^2 géométriquement régulières. Pour tout $d > 0$

$$\forall f \Theta_2, \quad \mathrm{MSE}(\hat{f}_{cur}, f, \varepsilon) = \mathrm{O}(\varepsilon^{4/5+d}). \tag{5.3}$$

Ce risque est presque optimal sur cette classe : en effet Candès et Donoho ont montré [33] que la décroissance asymptotique du risque est borné inférieurement par $\mathrm{O}(\varepsilon^{4/5} |\log|\varepsilon|^{-2/5})$. On peut faire la même observation que pour la décomposition en ondelettes-vaguelettes et voir cet estimateur comme une somme d'estimateurs de débruitage.

Nous proposons d'utiliser les bandelettes de seconde génération et les résultats obtenus en débruitage avec les bandelettes de première génération pour étendre les résultats de Donoho et Candès à la classe Θ_α des fonctions C^α-géométriquement régulières.

5.2.3 Inversion en bandelettes

Sur le modèle de la WVD nous proposons un estimateur construit échelle par échelle dans une base de bandelettes adaptée. Nous allons utiliser les résultats obtenus par Charles Dossal dans sa thèse [75] sur le débruitage issu de la théorie de la selection de modèles de Birgé et Massart pour garantir le risque des estimateurs $\hat{f}_j$ sur chaque bande. Nous allons considérer le même découpage en espaces d'ondelettes que Donoho dans [71]. Nous utiliserons un autre estimateur par seuillage à chaque échelle qui va exploiter la régularité de la fonction f à chaque échelle. Ainsi le bruit N_j, projection de $\mathrm{R}^{-1}\mathrm{W}$ sur les espaces d'ondelettes,

$$\mathrm{N}_j = \sum_n \langle \mathrm{R}^{-1}\mathrm{W}, \psi_{jn} \rangle \psi_{jn} = 2^{-j/2} \sum_n [\mathrm{W}, u_{jn}] \psi_{jn}.$$

que nous essaierons de supprimer à chaque échelle est identique à celui traité par le WVD. Ce bruit est proche d'un bruit blanc, nous utiliserons comme pour la WVD le fait que les bases u_{jn} sont des bases de Riesz pour traiter la coloration de ce bruit.

Nous agrègerons ensuite les estimateurs $\hat{f}_j$ pour définir un estimateur global $\hat{f}$ dont les performances seront liées aux capacités d'approximation non linéaire des bandelettes. Nous énonçons des résultats en probabilité pour conserver une preuve simple mais il est également possible d'obtenir les mêmes résultats en espérance. Dans sa thèse Charles Dossal démontre le résultat en probabilité et en espérance. La preuve en espérance issue de celle de Barron, Birgé et Massart [15] est un peu plus technique que celle que nous reprenons en probabilité mais suit le même principe. La seule différence avec le débruitage est le défaut d'orthogonalité de la base u_{jn} qui ne pose pas de problème du fait qu'elle soit une base de Riesz comme nous le montrons dans la preuve en probabilité que nous présentons.

5.2.4 NOTATIONS

Dans une base orthogonale $\mathrm{B} = \{g_\mu\}_\mu$ d'un espace L^2 où ℓ^2_j, la meilleure approximation avec M termes d'une fonction $f \in \mathrm{L}^2$ ou d'un vecteur $f \in \ell^2$ dans B peut se calculer à l'aide d'un opérateur de seuillage

$$\mathrm{S_T}(f, \mathrm{B}) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{|\langle f,\, g_\mu\rangle| > \mathrm{T}} \langle f,\, g_\mu\rangle\, g_\mu \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{M} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{Card}\,\{\mu \ \backslash\ |\langle f,\, g_\mu\rangle| > \mathrm{T}\}\,,$$

où $\langle \cdot,\, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique sur L^2 ou ℓ^2.

5.3 ESTIMATEUR EN BANDELETTES

5.3.1 DÉFINITION DE L'ESTIMATEUR

On souhaite estimer une fonction f géométriquement régulière à partir de

$$\mathrm{Y} = \mathrm{R}f + \mathrm{W}.$$

Comme nous l'avons expliqué nous allons estimer f échelle par échelle à partir des projections sur un espace d'ondelettes de $\mathrm{R}^{-1}\mathrm{Y}$.

Dans la suite, on note X^k_j les coefficients de la décomposition en ondelettes du processus X à l'échelle 2^j et orientation k, où X est le signal inversé $\mathrm{X} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{R}^{-1}\mathrm{Y} = f + \mathrm{R}^{-1}\mathrm{W}$.

Pour chaque échelle 2^j, on définit le seuil suivant

$$(t_j)^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda\ |\log(\varepsilon)|\ \varepsilon^2 2^{-j},$$

où λ est une constante qui sera définie plus tard lors de l'analyse de notre estimateur. On définit la meilleure base de bandelettes qui minimise l'estimateur pénalisé (ou entropie)

$$\mathcal{B}^\star(\Gamma^k_j) \stackrel{\text{def.}}{=} \underset{\mathcal{B}(\Gamma^k_j) \in \mathcal{D}^k_{j\varepsilon^2}}{\mathrm{argmin}}\ \mathcal{L}(\mathrm{X}^k_j, \mathcal{B}(\Gamma^k_j), t_j).$$

À une échelle 2^j vérifiant

$$2^j \geqslant 2^{j_0} \stackrel{\text{def.}}{=} \varepsilon^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} = \varepsilon^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}$$

et une orientation k, l'estimation $\hat{f}^k_j$ des coefficients en ondelettes f^k_j de f est défini à l'aide d'un seuillage dans la meilleure base

$$\hat{f}^k_j \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{S}_{t_j}(\mathrm{X}^k_j, \mathcal{B}^\star(\Gamma^k_j)).$$

Pour les fines échelles restantes $2^j < 2^{j_0}$, on définit $\hat{f}^k_j \stackrel{\text{def.}}{=} 0$.

On peut alors agréger les estimateurs à travers toutes les échelles en ondelettes pour obtenir un estimateur $\hat{f}$ de f

$$\hat{f} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k,j \leqslant 0} \sum_n \hat{f}^k_j[n]\, \psi^k_{jn}.$$

5.3.2 Estimateur oracle

Nous allons borner le risque en deux temps. D'abord nous allons montrer grâce à des arguments statistiques que l'estimateur choisi avec la pénalisation adéquate est presque aussi bon qu'un estimateur oracle. Puis nous allons utiliser les capacités d'approximation des bandelettes pour montrer que cet estimateur oracle et donc que l'estimateur selectionné est bon.

Soit f une fonction ayant une régularité géométrique, C^α, $2^j \geqslant 2^{j_0}$ une échelle en ondelettes et k une orientation. Dans la suite, on note $f_j \stackrel{\text{def.}}{=} f_j^k$ et on ne fera plus référence à l'orientation courante k.

On définit un estimateur oracle $f_j^1 \in \ell_j^2$ de f_j en utilisant un seuillage de f_j dans une meilleure base oracle de bandelettes.

$$f_j^1 \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{S}_{t_j}(f_j, \mathcal{B}^1(\Gamma_j)), \tag{5.4}$$

où

$$\mathcal{B}^1(\Gamma_j) = \{\Psi_\mu^1\}_\mu \stackrel{\text{def.}}{=} \underset{\mathcal{B}(\Gamma_j)\in\mathcal{D}^k_{j\sigma^2}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(f_j^k, \mathcal{B}(\Gamma_j), t_j).$$

Jusqu'à la fin de cette section, on note $\mathcal{B}^1$ la base oracle définie à l'équation (5.4), ainsi que $\mathcal{B}^\star = \{\Psi_\mu^\star\}_\mu$ la meilleure base d'estimation définie à l'équation (5.3.1). Enfin on définit

$$\begin{aligned} \mathrm{M}^\star &\stackrel{\text{def.}}{=} \operatorname{Card}\left\{\mu \setminus \left|\langle \Psi_\mu^\star, \mathrm{X}_j\rangle\right| > t_j\right\}, \\ \mathrm{M}^1 &\stackrel{\text{def.}}{=} \operatorname{Card}\left\{\mu \setminus \left|\langle \Psi_\mu^1, \mathrm{X}_j\rangle\right| > t_j\right\}. \end{aligned}$$

On peut maintenant montrer comment l'efficacité de notre estimateur peut être bornée à l'aide de l'estimateur oracle.

Proposition 5.1 Soit $\hat{f}_j$ l'estimateur en bandelettes défini à la sous-section 5.3.1 et f_j^1 l'estimateur oracle défini à l'équation (5.4). Si $\lambda > 32\,\mathrm{C}$, où C est une constante dépendant seulement de l'opérateur R et de la base d'ondelettes, alors avec une probabilité supérieure à $1 - 4\sigma^4$, on a

$$\|f_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 + (t_j)^2\,\mathrm{M}^\star \leqslant \mathrm{C}_\lambda\,\mathcal{L}(f_j, \mathcal{B}^\star, t_j), \tag{5.5}$$

où $\mathrm{C}_\lambda \stackrel{\text{def.}}{=} \left(1 - \sqrt{32\mathrm{C}/\lambda}\right)^{-1}$.

Preuve. En utilisant la définition de $\hat{f}_j$ comme minimisateur du Lagrangien, on a

$$\|\mathrm{X}_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 + (t_j)^2\,\mathrm{M}^\star \leqslant \|\mathrm{X}_j - f_j^1\|_{\ell_j^2}^2 + (t_j)^2\,\mathrm{M}^\star.$$

On utilise ensuite la décomposition suivante

$$\left\{\begin{array}{lll} \|\mathrm{X}_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 = & \|\mathrm{X}_j - f_j + f_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 & \leqslant \|\mathrm{X}_j - f_j\|_{\ell_j^2}^2 + \|f_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 + \langle \mathrm{X}_j - f_j,\, f_j - \hat{f}_j\rangle, \\ \|\mathrm{X}_j - f_j^1\|_{\ell_j^2}^2 = & \|\mathrm{X}_j - f_j + f_j - f_j^1\|_{\ell_j^2}^2 & \leqslant \|\mathrm{X}_j - f_j\|_{\ell_j^2}^2 + \|f_j - f_j^1\|_{\ell_j^2}^2 + \langle \mathrm{X}_j - f_j,\, f_j - f_j^1\rangle, \end{array}\right.$$

ce qui mène à

$$\left\{\begin{array}{l} \|\mathrm{X}_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 - \|\mathrm{X}_j - f_j^1\|_{\ell_j^2}^2 + (t_j)^2 \leqslant (t_j)^2\,\mathrm{M}^1 \\ \|f_j - \hat{f}_j\|_{\ell_j^2}^2 - \|f_j - f_j^1\|_{\ell_j^2}^2 + \langle \mathrm{X}_j - f,\, f^1 - \hat{f}_j\rangle + (t_j)^1\,\mathrm{M}^\star \leqslant (t_j)^2\,\mathrm{M}^1. \end{array}\right.$$

On a ainsi

$$\|f_j - \hat{f}_j\|^2_{\ell^2_j} + (t_j)^2\,\mathrm{M}^\star \leqslant \|f_j - f^1_j\|^2_{\ell^2_j} + (t_j)^2\,\mathrm{M}^1 + 2\langle \mathrm{X}_j - f_j,\, \hat{f}_j - f^1_j\rangle. \tag{5.6}$$

On définit $\mathcal{M}$ comme étant le sous-espace de ℓ^2_j engendré par les bandelettes discrètes générant $\hat{f}_j$ et f^1_j. De façon plus précise, on définit

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{vect}\,(\mathrm{E}^\star \cup \mathrm{E}^1) \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} \mathrm{E}^\star = \left\{\Psi^\star_\mu \;\middle\backslash\; \left|\langle \mathrm{X}_j,\, \Psi^\star_\mu\rangle\right| > t_j\right\} \\ \mathrm{E}^\star = \left\{\Psi^1_\mu \;\middle\backslash\; \left|\langle f_j,\, \Psi^1_\mu\rangle\right| > t_j\right\} \end{cases}$$

Dans la suite, on note N_j les coefficients en ondelettes du bruit additionnel $\mathrm{R}^{-1}\mathrm{W}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\langle \mathrm{X}_j - f_j,\, \hat{f}_j - f^1_j\rangle = \langle \mathrm{P}_{\mathcal{M}}(\mathrm{N}_j),\, \hat{f}_j - f^1_j\rangle \leqslant \|\hat{f}_j - f^1_j\|_{\ell^2_j}\,\|\,\mathrm{P}_{\mathcal{M}}(\mathrm{N}_j)\|_{\ell^2_j}. \tag{5.7}$$

En utilisant la définition de f^1_j, on a

$$\|\hat{f}_j - f^1_j\|_{\ell^2_j} \leqslant \|\hat{f}_j - f_j\|_{\ell^2_j} + \|f_j - f^1_j\|_{\ell^2_j} \leqslant 2\left(\|f_j - \hat{f}_j\|^2_{\ell^2_j} + (t_j)^2\,\mathrm{M}(\hat{f}_j)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.8}$$

Pour borner la norme de la projection du bruit N_j sur $\mathcal{M}$, nous avons besoin d'un lemme statistique sur les grandes déviations, dont la démonstration se trouve à la section 5.5.

Lemme 5.2 Soit N_j les coefficients en ondelettes de $\mathrm{R}^{-1}\mathrm{W}$ où W est un bruit blanc gaussien de variance ε^2. Il existe une constante C telle que, avec une probabilité plus grande que $1 - 4\sigma^4$, pour n'importe quel sous-espace $\mathcal{E}$, de dimension K, généré par des bandelettes, on ait

$$\|\,\mathrm{P}_{\mathcal{E}}(\mathrm{N}_j)\|^2 \leqslant \mathrm{C}\;|\log(\varepsilon)|\;\sigma^2_j\,\mathrm{K}. \tag{5.9}$$

En utilisant le fait que la dimension de $\mathcal{M}$ est plus petite que $\mathrm{M}^\star + \mathrm{M}^1$, en utilisant le lemme 5.2, on a avec une probabilité plus grande que $1 - 4\sigma^4$,

$$\|\,\mathrm{P}_{\mathcal{M}}(\mathrm{N}_j)\|^2 \leqslant \mathrm{C}\;|\log(\varepsilon)|\;\sigma^2_j\,\left(\mathrm{M}^\star + \mathrm{M}^1\right).$$

Ainsi, pour n'importe quel $\lambda > 0$, on a, avec une probabilité plus grande que $1 - 4\sigma^4$

$$\begin{aligned}\|\,\mathrm{P}_{\mathcal{M}}(\mathrm{N}_j)\|^2 &\leqslant \frac{\mathrm{C}}{\lambda}\left(\lambda\;|\log(\varepsilon)|\;\sigma^2_j\,(\mathrm{M}^\star + \mathrm{M}^1)\right) \\ &\leqslant \frac{\mathrm{C}}{\lambda}\left(\|f_j - \hat{f}_j\|^2_{\ell^2_j} + (t_j)^2\,\mathrm{M}^\star) + \|f_j - f^1_j\|^2_{\ell^2_j} + (t_j)^2\,\mathrm{M}^1\right)\end{aligned}$$

De part la définition de f^1_j, on déduit que

$$\|\,\mathrm{P}_{\mathcal{M}}(\mathrm{N}_j)\|^2 \leqslant \frac{\mathrm{C}}{\lambda}\,2\left(\|f_j - \hat{f}_j\|^2 + (t_j)^2\mathrm{M}(\hat{f}_j)\right).e \tag{5.10}$$

En exploitant les bornes fournies par les équations (5.6), (5.7), (5.8) et (5.10) on obtient

$$\begin{aligned}\|f_j - \hat{f}_j\|^2 + \lambda\,\sigma^2_j\;|\log(\varepsilon)|\;\mathrm{M}(\hat{f}_j) &\leqslant \|f_j - f^1_j\|^2 + \lambda\,\sigma^2_j\;|\log(\varepsilon)|\;\mathrm{M}(f^1_j) \\ &\quad + 4\sqrt{\frac{2\mathrm{C}}{\lambda}}\left(\|f_j - \hat{f}_j\|^2 + (t_j)^2\mathrm{M}(\hat{f}_j)\right),\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. ∎

5.3.3 Résultats d'estimation

Après avoir montré que le risque de notre estimateur $\hat{f}_j$ était de l'ordre du risque de l'estimateur oracle f_j^1 pour un bon choix du seuil t_j, on utilise maintenant les propriétés des bandelettes de deuxième génération pour déterminer ce risque. Nous allons pour cela, utiliser les capacités d'approximation des bandelettes.

Proposition 5.3 Soit f une fonction ayant une régularité géométrique C^α et $\varepsilon > 0$ la variance du bruit additionnel. Soit $2^j \geqslant 2^{j_0}$ une échelle et k une orientation. Alors, avec une probabilité plus grande que $1 - 4\sigma^4$, on a

$$\|f_j^k - \hat{f}_j^k\|_{\ell_j^2}^2 \leqslant \mathrm{C}\ |\log(\varepsilon)|\ 2^{-j\frac{\alpha}{\alpha+1}}\ \varepsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}, \tag{5.11}$$

où C est une constante qui dépend seulement de f.

Preuve. On définit f_j^0 comme suit

$$f_j^0 = \mathrm{S}_{\widetilde{t}_j}(f_j, \mathcal{B}^1) \qquad \text{où} \qquad \mathcal{B}^0 \stackrel{\text{def.}}{=} \operatorname*{argmin}_{\mathcal{B}\in\mathcal{D}_{j\varepsilon^2}^k} \mathcal{L}(f_j, \mathcal{B}, \widetilde{t}_j). \tag{5.12}$$

où l'on a utilisé un niveau de seuillage $(\widetilde{t}_j)^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda\,(\sigma_j)^2$. De part la définition de f_j^1, on a

$$\mathcal{L}(f_j, \mathcal{B}^1, t_j) \leqslant |\log(\varepsilon)|\ \mathcal{L}(f_j, \mathcal{B}^0, \widetilde{t}_j). \tag{5.13}$$

On peut maintenant utiliser la capacité des bandelettes à bien représenter une fonction géométrique. En appliquant le théorème 2.12, il existe une constante C qui ne dépend que de f telle que

$$\mathcal{L}(f_j, \mathcal{B}^0, \widetilde{t}_j) \leqslant \mathrm{C}\,(\widetilde{t}_j)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} = \mathrm{C}\,(\lambda\,\sigma_j^2)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}. \tag{5.14}$$

En insérant les inégalités (5.13) et (5.14) dans l'inégalité donnée par le lemme 5.1, on conclut la démonstration de la proposition 5.3. ■

On peut maintenant agréger les résultats d'estimation à travers toutes les échelles en ondelettes.

Théorème 5.4 Soit f une fonction ayant une régularité géométrique C^α et $\varepsilon > 0$ un bruit additionnel suffisamment petit. Alors, avec une probabilité plus grande que $1 - \mathrm{C}\,|\log(\varepsilon)|\ \varepsilon$, on a

$$\|f - \hat{f}\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant \mathrm{C}\,|\log(\varepsilon)|^{\frac{1}{2\alpha+1}}\ \varepsilon^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}, \tag{5.15}$$

où C est une constante qui ne dépend que de f.

Preuve. L'erreur globale commise lors de l'estimation de f se calcule en sommant les erreurs commises lors des estimations de chaque $\hat{f}_j^k$.

Pour les fines échelles $2^j < 2^{j_0}$, on utilise le fait que $f \in \mathrm{L}^2([0,1]^2)$ et que $\|f\|_{\mathrm{C}^\alpha}$ est borné, ce qui implique

$$\|f_j^k\|_{\ell_j^2}^2 \leqslant \mathrm{C}_1\,2^j \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k,j<j_0} \|f_j^k - \hat{f}_j^k\|_{\ell_j^2}^2 \leqslant 2\,\mathrm{C}_1\,2^{j_0} \leqslant |\log(\varepsilon)|^{\frac{1}{2\alpha+1}}\ \varepsilon^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}, \tag{5.16}$$

Pour les échelles restantes $2^j \geqslant 2^{j_0}$, $\hat{f}_j^k$ est défini comme un seuillage dans une meilleure base de bandelettes discrètes. On peut donc appliquer les résultats de 5.3 et sommer les erreurs pour obtenir, avec une probabilité plus grande que $1 - \mathrm{C}\,|\log(\varepsilon)|\,\varepsilon^4$,

$$\|f - \hat{f}\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant \sum_{k,j \geqslant j_0} \mathrm{C}\,\varepsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}\ |\log(\varepsilon)|\ 2^{-\frac{\alpha j}{\alpha+1}} + \sum_{k,j<j_0} \mathrm{C}_2\, 2^j \tag{5.17}$$

$$\leqslant \mathrm{C}''\ |\log(\varepsilon)|^{\frac{1}{2\alpha+1}}\ \varepsilon^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}, \tag{5.18}$$

ce qui termine la preuve du théorème 5.4. ■

Remarque 5.5 Tous ces résultats sont encore valides lorsque l'on mesure le risque $\mathrm{E}(\|f_j - \hat{f}_j\|^2)$, c'est-à-dire lorsque l'on remplace les bornes valides avec grande probabilité par des bornes en espérance. La preuve est identique à celle du débruitage et reprend ainsi la preuve initiale de Barron, Birgé et Massart [15]

5.3.4 Estimation rapide en bandelettes

Dans cette section, nous décrivons chaque étape du calcul de l'estimateur en bandelettes.

Image discrétisée Les calculs qui suivent sont effectués non pas sur des fonctions $f \in \mathrm{L}^2$ mais sur des images discrétisées $\overline{f} \in \ell^2$, ce qui correspond à la pratique numérique.

Une image discrétisée $\overline{f}$ de $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ pixels est obtenue par la projection d'une fonction $f \in \mathrm{L}^2([0,1]^2)$ sur un ensemble de fonctions d'échelle $\{\Phi_{\mathrm{J}n}\}_n$ à une résolution $2^{\mathrm{J}} = \mathrm{N}^{-1}$

$$\forall\, n \in \{0, \ldots, \mathrm{N}-1\}^2, \quad \overline{f}[n] \stackrel{\text{def.}}{=} \langle f,\, \Phi_{\mathrm{J}n} \rangle$$

où

$$\Phi_{\mathrm{J}n}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 2^{-\mathrm{J}} \Phi(2^{-\mathrm{J}} x - n).$$

L'algorithme Le calcul de l'estimateur en bandelettes inclut la transformée en bandelettes, un seuillage adapté suivant l'échelle et enfin la transformée en bandelettes inverse. La transformée en bandelettes est calculée avec un algorithme rapide qui comprend à la fois le calcul de la meilleure base de bandelettes, $\mathcal{B}^\star(\Gamma_j^k)$ pour chaque échelle et le calcul de la décomposition de de l'image inversée sur cette base.

(1) Données de l'algorithme. L'utilisateur dispose de données bruitées et discrétisées $\overline{y} = \mathrm{R}\,\overline{f} + \overline{w}$, où w est une réalisation d'un buit blanc gaussien de variance ε. On commence par calculer le signal discrétisé inversé $\overline{g} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{R}^{-1}\overline{y} = \overline{f} + \mathrm{R}^{-1}\overline{w}$ de taille $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ pixels. On souhaite donc estimer le signal discrétisé d'origine $\overline{f}$ à partir de l'image bruitée $\overline{g}$. La variance du bruit ε peut être estimée directement à partir du signal corrompu $\overline{y}$ à l'aide de techniques standards [70].

(2) Transformée en ondelettes 2D. On calcule la transformée en ondelettes discrètes 2D des données d'origine $\overline{g}$. Ceci donne une série de coefficients $\{\overline{g}_j^k\}_{j>\mathrm{J},k}$. Ces nouvelles

images $\overline{g}_j^k$, pour chaque échelle 2^j et orientation $k \in \{\mathrm{V}, \mathrm{H}, \mathrm{D}\}$, peuvent être stockées dans une unique image de la même taille que l'image l'originale $\overline{g}$. Les étapes suivantes (3)-(7) implémentent la bandelétisation et sont répétées pour chaque échelle et orientation.

(3) Selection des carrés dyadiques. Un carré dyadique S est, par définition, obtenu en subdivisant de façon récursive le carré $[0,1]^2$ en quatre sous-carrés de même taille. Ceci permet de regrouper les coefficients $\{\overline{g}_j^k[n]\}_n$ par carrés dyadiques formés par les n vérifiant $2^j n \in \mathrm{S}$. Les étapes suivantes (4)-(7) sont répétées pour chaque carré dyadique S à une échelle fixée 2^j et orientation k de la transformée en ondelettes. On note $g_{\mathrm{S}} \stackrel{\text{def.}}{=} \{\overline{g}_j^k[n]\}_{(2^j n)\in \mathrm{S}} \in \ell_j^2(\mathrm{S})$ l'ensemble des coefficients en ondelettes à l'intérieur de S.

(4) Quantification de la géométrie. On doit maintenant trouver la meilleure géométrie quantifiée possible $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}}$ à l'intérieur du carré S. On va donc tester, pour chaque type de géométrie $\Omega \in \{\mathrm{H}, \mathrm{V}, \Xi\}$ un ensemble suffisant de courbes géométriques (sauf bien sûr pour le cas $\Omega = \Xi$ où l'on ne re-transforme pas g_{S}).

Dans la suite, on note $\{\theta_i\}_{i=0}^{\alpha-1}$ la base orthogonale des polynômes de Lagrange sur l'intervale couvert par S (d'abord horizontalement, puis verticalement suivant la valeur de Ω). On teste l'efficacité de la base de bandelettes $\mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma}_m^{\Omega})$ de $\ell_j^2(\mathrm{S})$ pour les géométries

$$\widetilde{\gamma}_m^{\Omega} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{i=0}^{p-1} (m_i \varepsilon^2)\, \theta_i \qquad \text{où} \qquad |m_i| \leqslant \mathrm{A}_\theta\, \varepsilon^{-2} \qquad \text{et} \qquad \Omega \in \{\mathrm{V}, \mathrm{H}\},$$

pour chaque catégorie $\Omega \in \{\mathrm{H}, \mathrm{V}\}$ et pour chaque ensemble de coefficients $m \stackrel{\text{def.}}{=} \{m_i\}_i$ vérifiant $|m_i| \leqslant \mathrm{A}_\theta\, \varepsilon^{-2}$.

L'étape suivante (5) est répétée pour chaque géométrie potentielle $\widetilde{\gamma}_m^{\Omega}$, ainsi que pour le cas particulier $\Omega = \Xi$.

(5) Calcul de la transformée de Alpert. Pour une géométrie donnée $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}_m^{\Omega}$, on calcule l'ensemble des produits scalaires

$$\mathcal{A}_\gamma(g_{\mathrm{S}})[\ell, i] \stackrel{\text{def.}}{=} \langle g_{\mathrm{S}},\, \Psi_{\ell i} \rangle \qquad \text{où} \qquad \mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\Psi_{\ell i}\}_{\ell, i}.$$

Cette transformée $\mathcal{A}_\gamma$ peut être calculée avec l'algorithme de transformée de Alpert discrète, comme expliqué dans [7]. Pour le cas particulier $\widetilde{\gamma} = \Xi$, la transformation $\mathcal{A}_\Xi$ est l'identité.

(6) Selection de la meilleure géométrie. Il faut maintenant sélectionner la géométrie $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}} = \widetilde{\gamma}_m^{\Omega}$ qui minimise le Lagrangien

$$\mathcal{L}(g_{\mathrm{S}}, \mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma}_{\mathrm{S}}), t_j) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{(\ell,i)\in \mathrm{J}_\sigma} |\mathcal{A}_\gamma(g_{\mathrm{S}})[\ell, i]|^2 + \big(\mathrm{Card}(\mathrm{J}_\sigma) + \mathrm{M}_{\mathrm{G}}\big)\, \varepsilon^2$$

où t_j est le seuil qui dépend de l'échelle 2^j défini à l'équation 5.3.1 et où

$$\mathrm{J}_\sigma \stackrel{\text{def.}}{=} \{(\ell, i) \;\backslash\; |\mathcal{A}_\gamma(g_{\mathrm{S}})[\ell, i]| > \varepsilon\}$$

et $\mathrm{M}_{\mathrm{G}} = 1$ si $\Omega = \Xi$ et $\mathrm{M}_{\mathrm{G}} = \alpha$ sinon. On est ainsi capable de définir la géométrie optimale à l'intérieur de S par

$$\gamma_{\mathrm{S}} = \underset{\widetilde{\gamma}_m^{\Omega}}{\mathrm{argmin}} \big(\mathcal{L}(g_{\mathrm{S}}, \mathcal{B}(\mathrm{S}, \widetilde{\gamma}_m^{\Omega}), \varepsilon)\big).$$

(7) Construction du quadtree. Une fois que l'on a calculé les coefficients transformés $\mathcal{A}_{\gamma_S}(g_S)$ pour chaque carré dyadique, on choisit la meilleure segmentation en carrés. Grâce à l'additivité du Lagrangien et à la structure hiérarchique des quadtree, la minimisation de $\mathcal{L}$ peut être effectuée avec une procédure rapide comme introduit dans [68] et déjà employé dans [115].

Lors de l'étape précédente (6), nous avons enregistré, pour chaque carré dyadique S, la valeur $\mathcal{L}(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{L}(g_S, \mathcal{B}(S, \gamma_S), t_j)$ du Lagrangien restreint à S, en même temps que la meilleure géométrie quantifiée $\widetilde{\gamma}_S$. Alors, pour chaque échelle 2^j et orientation k, on calcule la structure de quadtree optimale :

- Initialisation du quadtree : chaque petit carré S de largeur $b = 2^j$ est une feuille de l'arbre. On enregistre dans les feuilles de l'arbre la géométrie optimale $\widetilde{\gamma}_S$ et on initialise $\mathcal{L}_0$, le Lagrangien cumulatif sur le sous-arbre, à $\mathcal{L}_0(S) = \mathcal{L}(S)$.
- On démarre avec des carrés S de taille $b = 2 \times 2^j$.
- Pour chaque carré S, on note (S_1, S_2, S_3, S_4) ses 4 sous-carrés et

$$\mathcal{L}'(S) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{L}_0(S_1) + \mathcal{L}_0(S_2) + \mathcal{L}_0(S_3) + \mathcal{L}_0(S_4) + t_j^2$$

  est le Lagrangien du sous-arbre (le facteur additionnel t_j^2 est dû au coût du codage de la subdivision, évalué à un coefficient). Les sous-carrés sont regroupés si $\mathcal{L}(S) < \mathcal{L}'(S)$. Si c'est le cas, on déclare S comme une feuille et on enregistre la meilleure géométrie $\widetilde{\gamma}_S$ dans l'arbre. On met à jour $\mathcal{L}_0(S) = \min(\mathcal{L}(S), \mathcal{L}'(S))$.
- Tant que $b < 1$, faire $b \leftarrow 2 \times b$ et répéter l'étape précédente.

(9) Seuillage des coefficients. Pour chaque carré S du quadtree, on enregistre les coefficients de la transformée de Alpert $\mathcal{A}_{\widetilde{\gamma}_S}(g_S)$. Ces coefficients peuvent être stockés à la place des coefficients de la transformée en ondelettes. On met ensuite à zéro les coefficients dont la valeur absolue est en dessous du seuil t_j.

(10) Calcul de la transformée en bandelettes inverse. Le calcul de la transformée inverse est implémenté en inversant d'abord la transformée de Alpert sur chaque carré dyadique S faisant parti du quadtree à chaque échelle et chaque orientation, puis en inversant la transformée en ondelettes. Ces calculs ne demandent aucune recherche de meilleure base, puisque l'on utilise les paramètres géométriques (quadtrees et géométries quantifiées) trouvés lors de la transformée directe.

Complexité numérique Pour une image de $N \times N$ pixels, la complexité numérique de la transformée en ondelettes rapide est de l'ordre de $O(N^2)$. Pour chaque échelle 2^j, chaque orientation k et chaque taille dyadique de carrés b, la complexité de calculer les coefficients de Alpert est

$$\mathcal{C}(j,b) = \underbrace{(1/b)^2}_{\text{nbr.carrés}} \times \underbrace{C_{\mathcal{A}}\,(2^j\,b)^2}_{\text{complexité Alpert tr.}} \times \underbrace{C_{\mathcal{G}}\,\varepsilon^{-\eta}}_{\text{nbr.géometries}} = C\,2^{-2j}\,\varepsilon^{-\eta}.$$

puisque le nombre de tels carrés est proportionnel à $|\log(\varepsilon)|$ et que $\eta < \alpha - 1$. La complexité totale du calcul de l'estimateur est donc asymptotiquement de $O(N^2\,\varepsilon^{-(\alpha-1)})$.

Bien que polynomiale en N et en ε^{-1}, la complexité de la recherche de la géométrie par exploration exhaustive est trop grande pour de grandes images. Les approches rapides

(voir les chapitres 3 et 4) utilisent des heuristiques pour réduire le nombre de géométries potentielles et se restreignent à des carrés de taille 4×2^j et 8×2^j.

5.4 Résultats numériques

Nous avons testé les algorithmes d'estimation par seuillage en ondelettes et en bandelettes sur des données synthétiques. On utilise une image discrétisée f connue à l'avance (voir figure 5.2 (a)). On perturbe artificiellement cette image dans le domaine de Radon en posant $y = \mathrm{R}f + w$, où w est une réalisation d'un bruit blanc gaussien de variance ε^2. La figure 5.2 (b) montre l'image bruitée et inversée $\mathrm{R}^{-1}y = f + \mathrm{R}^{-1}w$. Dans la suite, on quantifie la variance du bruit w en % relativement à la variance de la transformée de Radon de f notée $\sigma(\mathrm{R}f)$.

La transformée de Radon est implémentée numériquement avec l'algorithme de Averbuch, Coifman, Donoho, Israeli et Walden[13]. Ce dernier utilise une paramétrisation des droites d'intégration qui n'est pas exactement polaire, mais ceci n'a pas d'influence sur l'analyse mathématique.

Nous avons testé l'estimateur en bandelettes $\widehat{f_b}$ calculé par l'algorithme présenté à la section précédente, ainsi que l'estimateur $\widehat{f_w}$ par seuillage dans une base d'ondelettes. Ces deux estimateurs ont été rendus invariants par translation en réalisant une estimation des différentes versions translatées de l'image et en moyennant les résultats recalés. L'utilisation d'estimateurs invariants par translation améliore grandement les résultats numériques, comme expliqué par Donoho et Coifman [69]

On mesure la qualité de l'estimateur à l'aide du PSNR

$$\mathrm{PSNR}(f, \widehat{f_b}) = -10 \log_2(\|f - \widehat{f_b}\|_{\mathrm{L}^2} / \|f\|_\infty).$$

Sur la figure 5.2, en haut, on peut voir la comparaison des deux estimateurs pour une large gamme de variances ε^2. On peut observer un gain constant d'environ 0.9dB en faveur de l'estimateur en bandelettes. En (c) et (d) on peut voir une comparaison visuelle entre les deux estimateurs. L'estimateur en bandelettes respecte mieux les contours très marqués de cette image synthétique. Il reste cependant un travail numérique important pour tester et améliorer cet estimateur en bandelettes dans des cas réels possédant des géométries complexes.

5.5 Appendice : preuve du lemme 5.2

Soit $\mathcal{E}_1$ un sous-espace vectoriel engendré par K bandelettes. Nous utilisons le lemme de Borell pour borner la probabilité que $\| \mathrm{P}_{\mathcal{E}_1}(\mathrm{N}_j)\|$ soit loin de sont espérance. Ce lemme est démontré dans le livre d'Adler [1].

Lemme 5.6 Si $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction 1-lipschitz et W est un bruit blanc gaussien

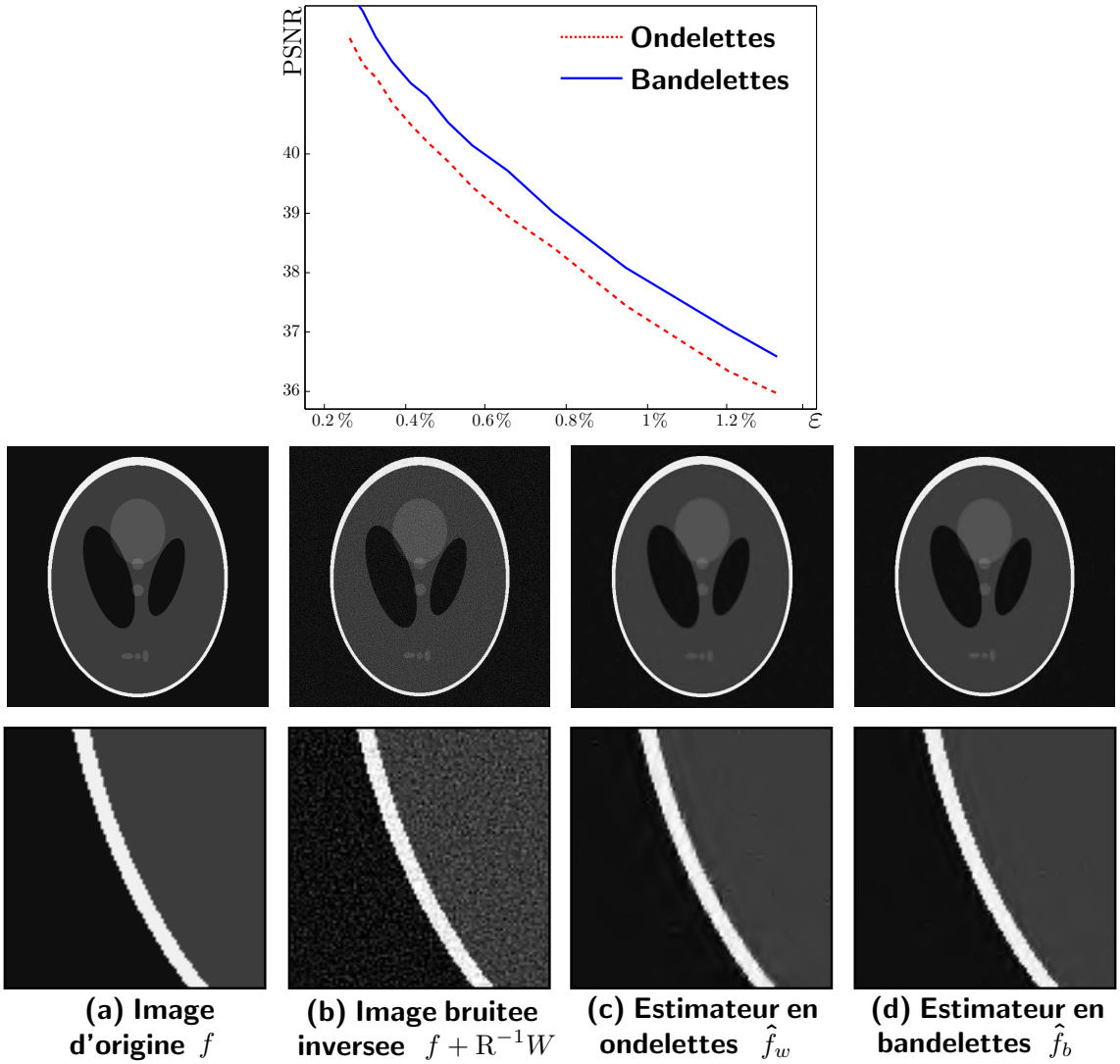


Fig. 5.2 *Comparaison de l'inversion de la tomographie par seuillage en ondelettes et en bandelettes. Les images montrées ont été estimées pour un bruit* $\varepsilon = 1\%\sigma(\mathrm{R}f)$.

de variance ε^2, alors on a

$$\mathrm{P}\left(\Phi(\mathrm{W}) \geqslant \mathrm{E}(\Phi(\mathrm{W})) + \varepsilon t\right) \leqslant e^{-t^2/2}.$$

Pour appliquer ce lemme, nous devons écrire $\| \mathrm{P}_{\mathcal{E}_1}(\mathrm{N}_j)\|$ comme l'image d'un bruit blanc de dimension finie W_j par une fonction Lipschitz f. Avec les notations de la WVD , nous avons

$$\mathrm{N}_j = \sum_{n=0}^{2^{-2j}} \langle \mathrm{K}^{-1}\mathrm{W},\, \psi_{jn}\rangle \psi_{jn} = 2^{-j/2} \sum_{n=0}^{2^{-2j}} [\mathrm{W}, u_{jn}]\psi_{jn}.$$

On définit alors

$$\mathrm{U}_j \stackrel{\text{def.}}{=} \text{vect}\left\{u_{jn} \setminus n \leqslant 2^{-2j}\right\},$$

et W_j est la projection orthogonale du bruit W sur U_j, divisée par ε. Comme $\varepsilon\mathrm{W}_j$ est une projection orthogonale d'un bruit blanc gaussien W sur un espace U_j dont la dimension

est 2^{-2j}, W_j est un bruit blanc gaussien de dimension 2^{-2j}. On en déduit donc que

$$\mathrm{N}_j = \sigma_j \sum_{n=0}^{2^{-2j}} [\mathrm{W}_j, u_{jn}]\psi_{jn}.$$

On a ensuite $\| \mathrm{P}_{\mathcal{E}}(\mathrm{N}_j)\| = f(\mathrm{W}_j)$, où W_j est un vecteur de dimension fini composé de variables aléatoires gaussiennes, centrées, de variance unité et indépendantes. De plus,

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{U}_j & \to & \mathbb{R} \\ \mathrm{X} & \mapsto & \| \mathrm{P}_{\mathcal{E}_1}(\sigma_j \sum_n [\mathrm{X}, u_{jn}]\psi_{jn})\| \end{array} \right.$$

où f est $(\mathrm{C}_3\, \sigma_j)$-lipschitz, puisque la norme L^2 est 1-lipschitz, la projection sur $\mathcal{E}_1$ est 1-lipschitz et la fonction g telle que $g(\mathrm{X}) = \sum_n [\mathrm{X}, u_{jn}]\psi_{jn}$ est C_3 lipschitz. Cette propriété qui est au coeur de la WVD est entièrement détaillée dans [71] et vient du fait que la base $v_{jn} = 2^{j/2}\mathrm{R}\psi_{jn}$ vérifie

$$[u_\lambda, v_\mu] = \delta_{\lambda,\mu}$$

et est une base de Riesz

$$\mathrm{C}_2 \| \sum_\lambda a_\lambda v_\lambda \|_{\mathrm{L}^2} \leqslant \|(a_\lambda)\|_{\ell^2} \leqslant \mathrm{C}_3 \| \sum_\lambda a_\lambda v_\lambda \|_{\mathrm{L}^2}$$

On peut maintenant appliquer, pour tout $\lambda > 0$, le lemme de Borrell 5.6 à $\| \mathrm{P}_{\mathcal{E}_1}(\mathrm{N}_j)\|$,

$$\mathrm{P}\{|\| \mathrm{P}_{\mathcal{E}_1}(\mathrm{N}_j)\| - \mathrm{E}(\| \mathrm{P}_{\mathcal{E}}(\mathrm{N}_j)\|)| > \lambda\} \leqslant 2e^{-\frac{1}{2}\lambda^2/(\mathrm{C}_3\sigma_j)^2}.$$

En appliquant l'inégalité de Jensen, on déduit, pour tout $\lambda > 0$

$$\mathrm{P}\{\| \mathrm{P}_{\mathcal{E}_1}(\mathrm{N}_j)\| > \lambda + \sqrt{\mathrm{C}_3^2 \mathrm{K}\sigma_j^2}\} \leqslant 2e^{-\frac{1}{2}\lambda^2/(\mathrm{C}_3\sigma_j)^2}.$$

Si on choisit $\lambda \geqslant \sqrt{\mathrm{C}_3^2 \mathrm{K}\sigma_j^2}$, on obtient

$$\mathrm{P}\{\| \mathrm{P}_{\mathcal{E}_1}(\mathrm{N}_j)\| > 2\lambda\} \leqslant 2e^{-\frac{1}{2}\lambda^2/(\mathrm{C}_3\sigma_j)^2}.$$

On choisit $\lambda = 2\sqrt{\mathrm{C}_3^2\, \mathrm{K}\sigma_j^2 \log(\mathcal{V})}$ pour obtenir :

$$\mathrm{P}\{\| \mathrm{P}_{\mathcal{E}_1}(\mathrm{N}_j)\| > 4\sqrt{\mathrm{C}_3^2 \mathrm{K}\sigma_j^2 \log(\mathcal{V})}\} \leqslant 2\mathcal{V}^{-2\mathrm{K}}.$$

La dimension de $\mathcal{E}_1$ est bornée par 2N et le nombre de sous-espaces $\mathcal{E}_1$ dont la dimension est K est borné par $\binom{\mathcal{V}}{\mathrm{K}}$, ainsi

$$\sum_{\mathrm{K}=1}^{2\mathrm{N}} \binom{\mathcal{V}}{\mathrm{K}} \mathcal{V}^{-2\mathrm{K}} \leqslant \sum_{\mathrm{K}=1}^{2\mathrm{N}} \frac{\mathcal{V}^{\mathrm{K}}}{\mathrm{K}!} \mathcal{V}^{-2\mathrm{K}} \leqslant \sum_{\mathrm{K}=1}^{2\mathrm{N}} \mathcal{V}^{-\mathrm{K}} \leqslant 2\mathcal{V}^{-1}.$$

On a finalement

$$\mathrm{P}\left\{\forall\, \mathcal{E}_1 \text{ tel que } \mathrm{K} \leqslant 2\mathrm{N},\ \| \mathrm{P}_{\mathcal{E}_1}(\mathrm{N}_j)\| \leqslant 4\sqrt{\mathrm{C}_2^2 \mathrm{K}\sigma_j^2 \log(\mathcal{V})}\right\} \geqslant 1 - 4\mathcal{V}^{-1},$$

ce qui permet de conclure en bornant $\mathcal{V}^{-1}$

$$\mathcal{V}^{-1} \leqslant 2^{2j_c} = \varepsilon^4.$$

Chapitre 6

Analyse de textures géométriques

Les images naturelles sont composées d'un ensemble de parties relativement homogènes que l'on appelle textures. Cette définition est vague et demande à être confrontée à l'expérience, par exemple la prise de photographies comme dans l'album de textures de Brodatz [22].

L'importance des textures pour la perception a été initialement remarquée par Gibson [87] mais le travail de Julesz [103] a été l'un des premiers à essayer de donner un sens à la notion de texture. En graphisme 3D, les textures sont des éléments essentiels pour enrichir une image de synthèse, voir l'article de synthèse de Heckbert [91].

Dans cette partie, nous exposons de façon informelle un modèle pour les textures géométriques ayant un comportement turbulent. Une transformée en bandelettes utilisant un champ d'association multi-échelles est utilisé afin d'exploiter ce type de régularité. La géométrie peut ainsi être représentée à l'aide d'un champ que l'on peut modéliser de façon statistique. Une application à la synthèse de textures turbulentes permet de valider le modèle et la transformée.

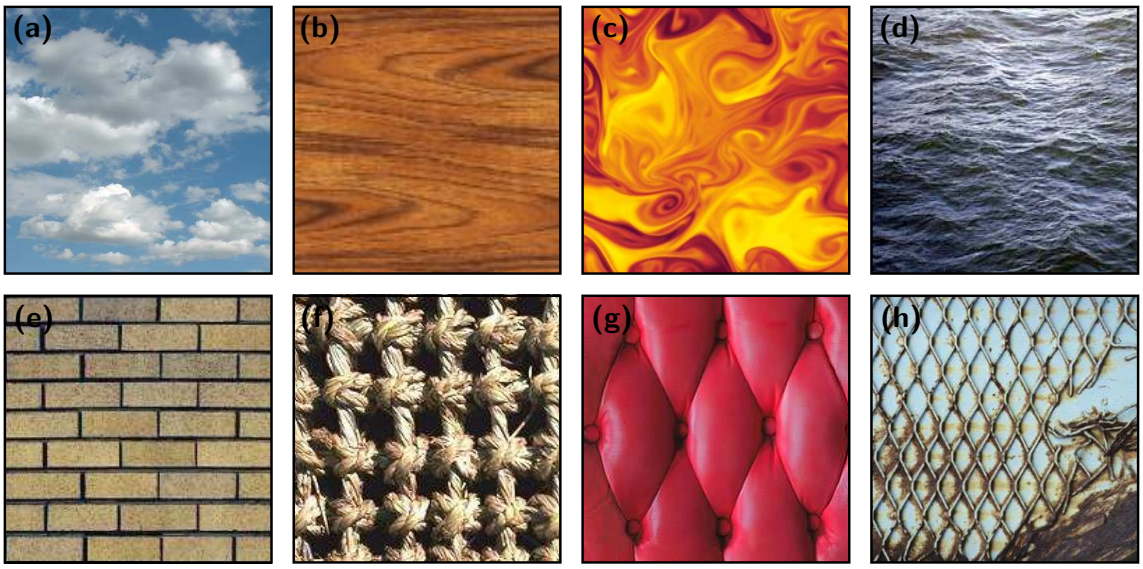


Fig. 6.1 *Exemples de structures géométriques naturelles et synthétiques.*

6.1 INTRODUCTION

6.1.1 TEXTURES NATURELLES ET SYNTHÉTIQUES

Bien que certaines textures aient une nature fractale peu régulière (comme par exemple un nuage, image 6.1 (a)), de nombreux phénomènes naturels créent des textures avec des structures géométriques (comme par exemple les rainures du bois, figure 6.1 (b)). La géométrie de ces textures naturelles est souvent turbulente et elles sont même souvent issues de la physique des fluides (figure 6.1 (c-d)).

Les textures synthétiques, le plus souvent crées par l'homme, sont encore plus régulières et géométriques (figure 6.1 (e-h)). Possédant souvent de nombreuses symétries et périodicités, cette classe de textures est difficile à appréhender à l'aide d'outils purement statistiques. Nous allons donc essentiellement nous concentrer sur les textures possédant une géométrie turbulente.

6.1.2 MODÉLISATION DES TEXTURES GÉOMÉTRIQUES

Le modèle mathématique introduit à la section 1.1.1 pour l'analyse d'images géométriques ne convient pas à l'analyse des textures telles que celles représentées à la figure 6.1 (b-d). Ces textures ne sont pas régulières par morceaux, puisqu'elles sont composées d'un grand nombre de stries turbulentes. Ces stries sont relativement parallèles mais elles sont amenées à se rapprocher voire à se rencontrer, ce qui crée des chocs et des points singuliers.

La transformée en bandelettes orthogonales présentée aux chapitres précédents n'est pas adaptée à l'analyse de ce type de régularité. La subdivision du domaine suivant un quadtree est trop rigide et ne se prête pas à une analyse statistique et la subdivision fixe utilisée pour la compression d'image (voir section 1.5.2) réduit beaucoup trop la longueur des courbes que l'on peut analyser. Tout en suivant le principe de base des bandelettes orthogonales d'appariement de points sur un domaine de coefficients d'ondelettes, on va utiliser à la section 6.3 une nouvelle transformée adaptée. Cette transformée a été introduite par Stéphane Mallat et fait l'objet d'un brevet [130]. Elle utilise un champ d'association multi-échelles qui paramétrise une transformée adaptée.

6.2 SYNTHÈSE DE TEXTURES

Le problème de la synthèse de textures consiste à générer une image texturée se conformant à un modèle, à des mesures, ou bien à un exemple. Juger de la qualité d'une texture synthétisée est essentiellement un problème subjectif qui touche à la perception humaine. Ce problème complexe est cependant simple à mettre en pratique. Dans le cas où l'on dispose d'un modèle, on peut par exemple superposer un échantillon de la texture synthétisée sur la texture d'origine. La synthèse est un succès si l'œil humain n'arrive pas à retrouver la trace de la nouvelle texture.

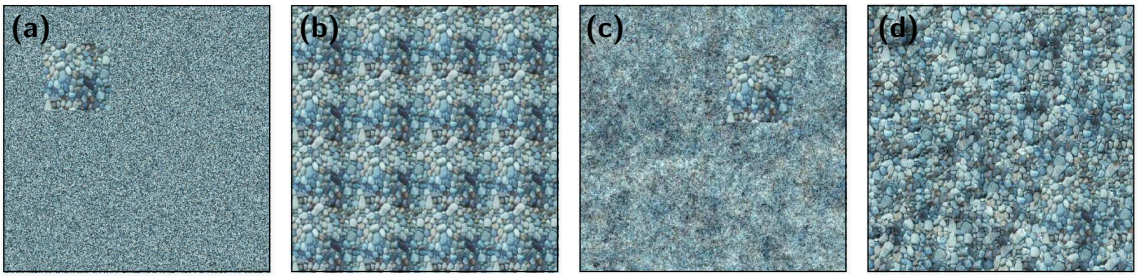


Fig. 6.2 *Comparaison de différentes méthodes de synthèse de textures.*

La figure 6.2 montre ce procédé de validation sur quatre méthodes de synthèse de plus en plus complexes (et satisfaisantes).

- En (a), on génère une image de bruit possédant les mêmes couleurs.
- En (b), on recopie côte-à-côte l'échantillon d'origine.
- En (c), on génère une image de bruit possédant les mêmes histogrammes de coefficients d'ondelettes (voir section 6.2.2)
- En (d), on génère une nouvelle image en recopiant de façon intelligente des parties de la texture d'origine (algorithme de Efros et Leung [78]).

6.2.1 État de l'art

Comme expliqué par Haralick [90], les méthodes de synthèse de textures peuvent être classifiées comme structurelles ou statistiques. Les méthodes statistiques sont généralement de bas niveau et permettent une modélisation globale de la classe de textures à synthétiser. Les méthodes structurelles essaient d'assembler les objets constitutifs de la texture.

Textures naturelles et méthodes procédurales. L'idée originale de Pearson [148] est de modéliser des textures naturelles (taches, zébrures, etc.) à partir d'équations aux dérivées partielles non-linéaires. L'équation de réaction-diffusion a été utilisée en graphisme par Witkin et Kaas [203] puis par Turk [187].

Les méthodes par agrégation de cellules de Fleischer et al. [83] et par subdivision de Worley [207] sont des variations autour des méthodes de réaction-diffusion. Dans toutes ces méthodes, la géométrie se crée progressivement à partir d'interactions locales.

Une autre classe de méthodes, ne nécessitant pas de résolution d'équations différentielles, utilise la génération de coefficients dans un domaine transformé. L'idée originale de Perlin [150, 151] consiste à sommer des bruits blancs filtrés à différentes échelles. Ce type de méthodes paramétriques (aussi appelées procédurales) est étudié plus en détails à la section 6.2.2, comme point de départ de méthodes non paramétriques utilisant des mesures issues d'une texture modèle.

De nombreuses autres méthodes en graphisme essaient de modéliser directement des textures naturelles, comme par exemple en simulant l'évolution de l'apparence des surfaces comme le font Dorsey et al. [74] ainsi que Chen et al. [41].

Modélisation statistique. Les approches statistiques dédiées à l'analyse et à la synthèse de textures, bien que n'étant pas les plus efficaces pour des applications graphiques, proposent une vraie modélisation de la classe de textures. Ainsi les méthodes par calculs des histogrammes de coefficients en ondelettes de Heeger et Bergen [92] sont adaptées aux textures peu régulières voire fractales.

Les méthodes utilisant des champs de Markov ont été proposées initialement par Cross et Jain [51] Chellappa et Kashyap [40] ainsi que Kashyap et Lapsa [105] pour modéliser et synthétiser les textures. Popat [158] a repris ces travaux pour obtenir le premier algorithme efficace de synthèse de textures. L'équipe de Mumford [140, 211] a systématisé et théorisé cette approche pour analyser et synthétiser les dépendances présentes dans les images naturelles.

Les modélisations les plus efficaces des coefficients d'ondelettes utilisent la structure arborescente de la décomposition. Les premières méthodes proposées utilisent une estimation non-paramétrique des histogrammes conditionnels à travers les échelles et ont été appliquées avec succès par De Bonnet [19] puis Paget et Longstaff [147] à la synthèse de textures.

Des méthodes plus directes comme celle de Portilla et Simoncelli [159] utilisent une modélisation paramétrique des histogrammes conditionnels et donnent de bons résultats.

Méthodes par recopie. Les méthodes les plus efficaces de synthèse de textures procèdent par recopie des pixels de l'image d'origine, introduites par Efros et Leung [78] et popularisées par Wei et Levoy [200]. Ces algorithmes gênèrent ainsi les pixels un à un, en cherchant dans l'image d'origine un petit voisinage ressemblant au voisinage que l'on est en train de synthétiser. Les algorithmes plus récents procèdent par recopie de parties entières de textures de façon à conserver les structures d'origine. On peut citer celui d'Ashikhmin [11], d'Efros et Freeman [79], de Kwatra et al. [112] et de Cohen et al. [46].

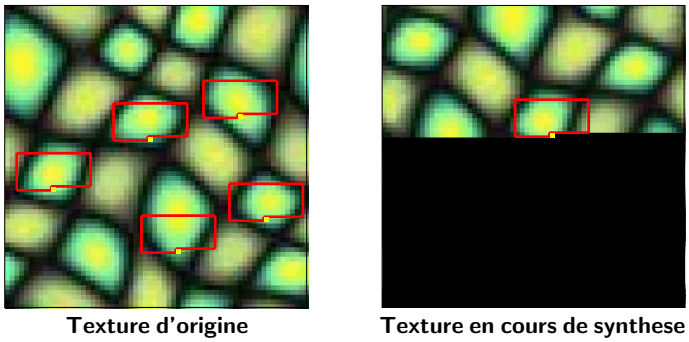


Fig. 6.3 *Construction d'une texture par recherche de meilleurs appariements.*

Des procédures d'optimisation plus globales comme celles de Demanet et al. [61] (pour l'inpainting) et de Kwatra et al. [111] permettent d'avoir une synthèse indépendante de l'ordonnancement des points ainsi que d'incorporer des contraintes additionnelles.

Ce type de méthodes a été aussi appliquées à la désocclusion (ou inpainting) par Crimisi et al. [50] Sun et al. [181] et Demanet et al. [61]. Le problème difficile de la désocclusion est la synthèse de parties texturées tout en respectant les structures géométriques qui touchent le bord de la région à remplir.

Importance de la géométrie. La prise en compte de la géométrie via la détection des contours (voir section 1.3.3) a été utilisée pour la synthèse de textures. Certaines méthodes comme celle de Wu et Yu [208] tentent d'améliorer le respect des bords lors de la recopie. Les algorithmes de Liu et al. [125] et de Matusik et al. [134] exploitent des informations géométriques lors de l'interpolation de textures.

Des méthodes de synthèse de texture comme celle de Neyret [142] utilisent un champ de vecteurs pour synthétiser des textures turbulentes. Elles s'inspirent des algorithmes de visualisation de champs de vecteurs, dont les plus connus sont le *Spot Noise* de Wijk [190] ainsi que LIC de Cabral et [27]. Ces algorithmes calculent des convolutions curvilignes le long du flot pour générer une texture turbulente.

La géométrie d'une texture peut aussi être analysée à l'aide des symétries et périodicités de l'image d'origine, comme expliqué dans les travaux de Liu et son équipe [123, 124].

6.2.2 Génération de texture et représentation creuse

Synthèse et régularité. Une méthode simple pour générer des fonctions avec une régularité globale proche de C^α consiste à utiliser une réalisation d'un processus stationnaire X dont la puissance spectrale $\mathrm{P_X}(\omega)$ satisfait

$$\mathrm{P_X}(\omega) = |\omega|^{-2\alpha}\,. \tag{6.1}$$

La figure 6.4 montre des exemples de telles fonctions 2D pour différentes valeurs de α.

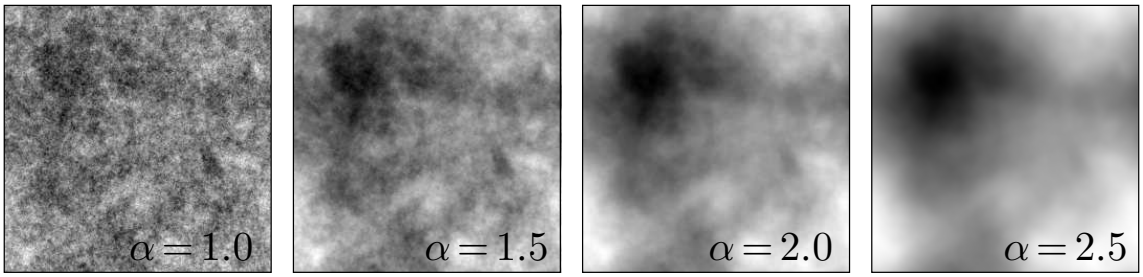


Fig. 6.4 *Textures stochastiques par filtrage de la transformée de Fourier.*

Cependant, comme le montre la figure 6.4, la puissance spectrale n'est pas caractéristique des images naturelles (voir aussi la section 1.3.1 pour une discussion sur ce sujet).

La transformée de Fourier est capable de mesurer la régularité globale d'une fonction. Pour analyser la régularité locale, qui peut éventuellement varier d'un point à l'autre, il faut utiliser une transformée en ondelettes. La décroissance des coefficients en ondelettes est en effet quasiment caractéristique de la régularité hölderienne, puisqu'au voisinage d'un point x où une fonction bidimensionnelle f est C^α, on a

$$|\langle f,\, \psi_{jn}\rangle| \leqslant \mathrm{C}\, 2^{j(\alpha+1)} \qquad \text{pour} \qquad 2^j n \text{ voisin de } x.$$

Il est donc naturel d'utiliser la transformée en ondelettes pour analyser des signaux avec un comportement fractal [10].

Pour la synthèse de textures, les premières méthodes ont été proposées par Perlin [150, 151] pour créer des images fractales (montagnes, nuages, etc). Elles consistent à sommer des

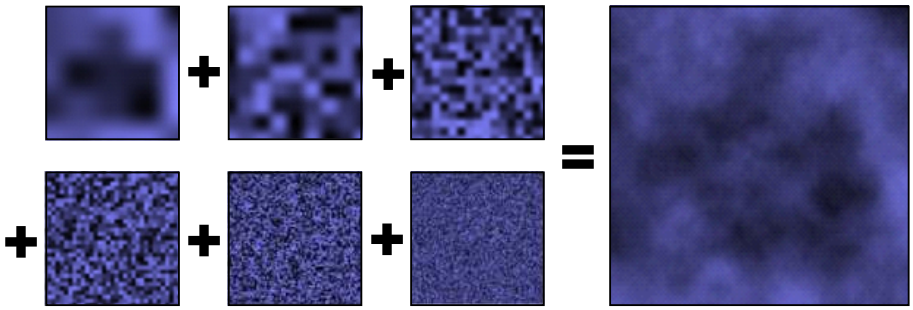


Fig. 6.5 *Exemple de construction d'un Perlin Noise.*

bruits blancs filtrés à plusieurs résolutions. La figure 6.5 montre une image de nuages ainsi obtenue. Cette méthode donne des résultats assez proches des bruits obtenus par filtrage de fourier (image 6.4) mais avec une souplesse bien plus grande offerte par la manipulation des différentes échelles. Cette méthode a été améliorée par Cook et DeRose [49] en utilisant des processus gaussiens dont les coefficients en ondelettes suivent une loi gaussienne de variance dépendant de l'échelle (voir figure 6.6).

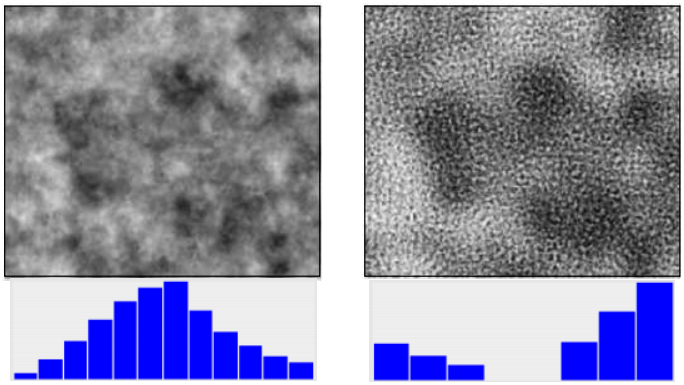


Fig. 6.6 *Exemples de bruits en ondelettes.*

Synthèse par égalisation d'histogrammes. Pour la synthèse non paramétrique, Heeger et Bergen [92] utilisent l'égalisation des histogrammes des coefficients d'ondelettes. Cette méthode donne de bons résultats pour les textures homogènes et fractales. L'idée est d'utiliser une réalisation d'un processus aléatoire dont les coefficients multi-échelles sont indépendants et suivent une loi fixée à chaque échelle, qui est estimée à partir de la texture d'origine.

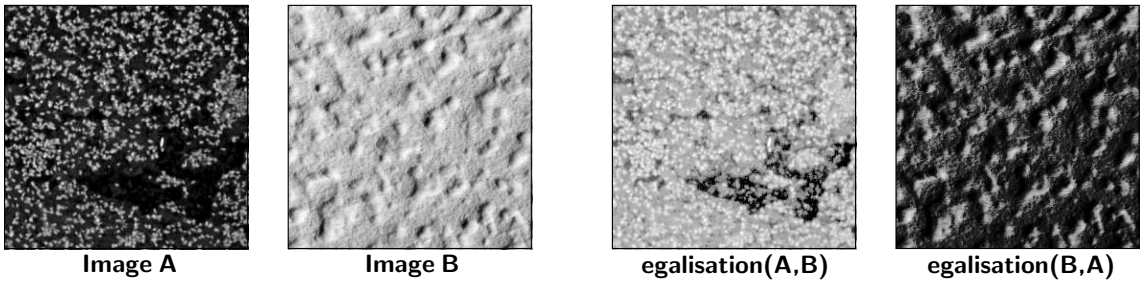


Fig. 6.7 *Exemple d'égalisation d'histogrammes.*

L'égalisation d'histogrammes consiste à composer une fonction g par une fonction croissante

φ de telle manière que l'histogramme des valeurs de $\varphi \circ g$ soit proche de celui d'une fonction f donnée à l'avance. Pour des images f et g composées de pixels prenant des valeurs dans $\{0, \ldots, 255\}$, l'algorithme d'égalisation est simple. Il consiste à calculer les histogrammes p et les distributions cumulées c

$$\forall\, y \in \{0, \ldots, 255\}, \quad p_f[y] \stackrel{\text{def.}}{=} \operatorname{Card}\{x \setminus f[x] = y\} \qquad \text{et} \qquad c_f[y] \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{t=0}^{y} p_f[t].$$

En supposant pour simplifier que c_g est croissante, on peut calculer $\varphi \stackrel{\text{def.}}{=} (c_g)^{-1} \circ c_f$. La figure 6.7 montre un exemple d'égalisation d'histogrammes.

Le pseudo-code 2 explique le principe de l'algorithme égalisation des histogrammes de coefficients d'ondelettes. La figure 6.8 montre des exemples de succès de cette méthode mais aussi les problèmes qui ont lieu lorsque l'on s'intéresse à des images avec des structures géométriques.

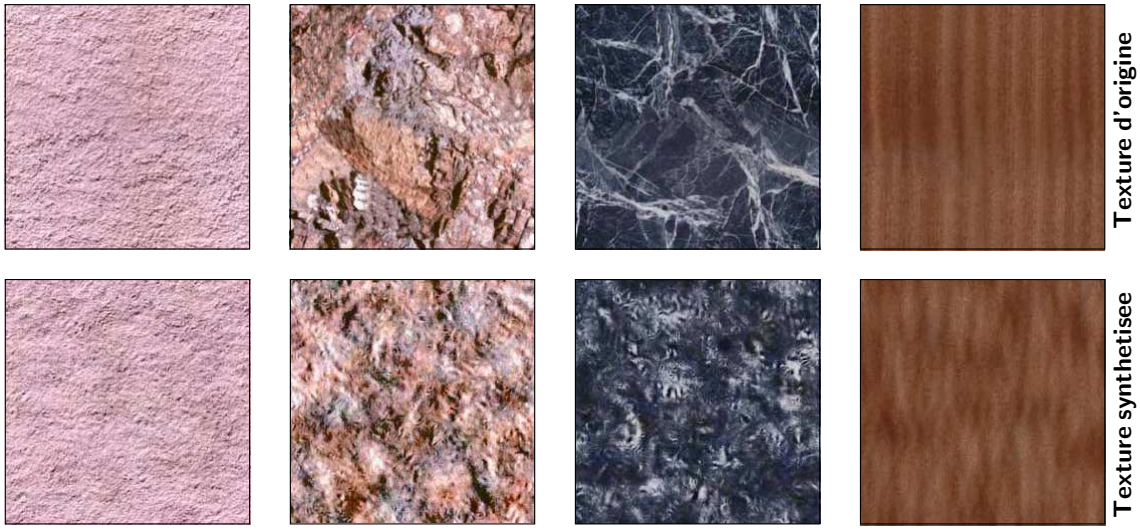


Fig. 6.8 *Exemples de synthèse de texture par égalisation d'histogrammes. Textures fractales (gauches) et textures avec des structures géométriques (droite).*

Indépendance et représentation creuse. Toutes les méthodes de génération de coefficients aléatoires dans un domaine transformé consistent à imposer une certaine représentation creuse de la texture. Ainsi la synthèse sera un succès si la classe de textures considérée se représente de façon creuse à l'aide de la transformation employée. Pour éviter d'avoir à modéliser les corrélations qui subsistent dans une transformée en ondelettes, une alternative est donc d'utiliser une transformée qui représente de façon plus creuse les textures qui nous intéressent.

Nous souhaitons utiliser une approche d'égalisation d'histogrammes semblable à celle de Heeger et Bergen [92] mais en étendant la méthode à des textures ayant des structures géométriques. Ceci aura pour avantage d'éviter les méthodes complexes d'échantillonnages de distributions de probabilité (échantillonneur de Gibbs [140], projections alternées [159], etc), tout en ayant une réelle intuition sur les propriétés des textures simulées, via une construction add-hoc de la transformée.

Il faut donc garantir que les histogrammes de coefficients transformés sont représentatifs de la classe de textures que l'on souhaite synthétiser.

Fonction B = `synthese_egalisation`(A, B).

Entrée : texture A.
Sortie : texture synthétisée B.

Initialisation : B = `bruit_blanc`().

Calcul de la transformée de l'image d'origine :
$[A_0, A_1, \ldots, A_m]$ = `transforme`(A).
Répéter jusqu'à convergence :
Égalisation spatiale : B = `egalisation`(A, B).
Passage en domaine transformé : $[B_0, B_1, \ldots, B_m]$ = `transforme`(M).
Pour chaque $j = 0, \ldots, m$: B_j = `egalisation`(A_j, B_j).
Passage en domaine spacial : B = `transforme_inverse`($B_0, \ldots, B_m$).

N.B. : Les fonctions `transforme` et `transforme_inverse` sont inverses l'une de l'autre et calculent une représentation multirésolution de l'image. La fonction `egalisation` réalise l'égalisation d'histogrammes.

Table 2: Pseudo-code pour la synthèse de texture par égalisation d'histogrammes.

6.3 TRANSFORMÉE EN BANDELETTES PAR GROUPEMENT

On souhaite réaliser une transformation de l'image qui donne une représentation creuse d'une texture géométrique. Le but est ainsi d'avoir une représentation dont les coefficients sont au maximum décorrélés les uns des autres pour avoir une modélisation simple à l'aide de statistiques du premier ordre (c'est-à-dire à l'aide des histogrammes des coefficients).

On s'autorise beaucoup de souplesse dans la construction de la représentation, en particulier, on renonce à l'orthogonalité et on va même construire une représentation redondante. Ainsi on pourra retrouver par exemple une certaine invariance par translation qui fait défaut à la représentation en ondelettes et en bandelettes orthogonales.

L'invariance par translation est une propriété naturelle lorsque l'on ne s'intéresse pas à la compression d'un signal. Donoho et Johnstone [70] ont utilisé la transformée en ondelettes redondante pour le débruitage et Li et al. [120] utilisent le même type de transformations pour la modification de contraste.

6.3.1 FLOT GÉOMÉTRIQUE ET FLOT OPTIQUE

La géométrie d'une texture peut être représentée à l'aide d'un flot le long duquel s'alignent les motifs de la texture. La figure 6.9 montre un possible flot de texture. Des algorithmes de calculs ont été proposés par Ben-Shahar et Zucker [17] ansi que par l'équipe de Morel [64]. Ces méthodes reposent sur des hypothèses proches de la théorie de la Gestalt comme par exemple la bonne continuation, voir par exemple le livre fondateur de Wertheimer [202].

Dans la suite de cette section, nous allons décrire une transformée géométrique qui évite la

construction d'un tel flot. A la place nous allons utiliser le concept de champ d'association. Cette notion est fréquemment employée pour décrire les interactions parmi les neurones de V1 dans le cortex visuel, voir la sous-section 1.3.2 pour plus de détails.

Dans cette sous-section, nous donnons quelques pistes pour comprendre pourquoi la notion de flot de texture (ou en vidéo de flot optique) est mal adaptée au problème de la représentation de la géométrie.

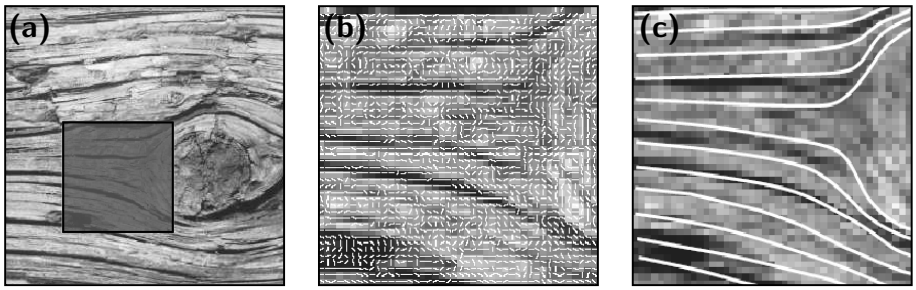


Fig. 6.9 *Géométrie d'une texture de bois.*

Tout comme la recherche des contours d'une image (voir section 1.3.3), le problème de l'extraction d'un tel flot est mal posé, car la texture est souvent buitée et plus ou moins floue. Pour obtenir un flot régulier, les méthodes classiques basées sur des quantités différentielles doivent être régularisées comme le font Xu et Prince [210] ou bien chaînées globalement par exemple avec la méthode de *tensor voting* introduite par Medioni et son équipe [135].

Cependant, pour l'utilisation d'un flot géométrique à des fins de compression ou de modélisation statistique, il faut un flot capable de suivre précisément et sur des distances longues les motifs de la texture. La figure 6.10 montre une approche d'extraction de la géométrie sous forme de flot à chaque échelle d'une transformée en ondelettes invariante par translation. On voit que cette approche n'arrive pas à relier des coefficients en ondelettes semblables mais très distants, car il est difficile, avec des mesures locales, d'obtenir des lignes intégrales qui ne divergent pas.

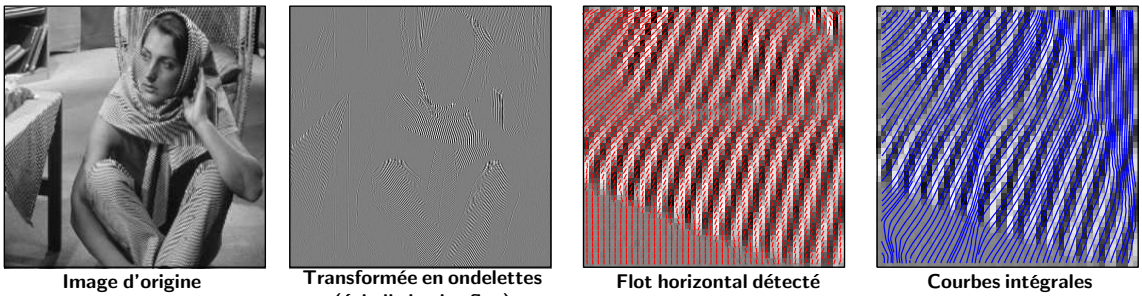


Image d'origine | Transformée en ondelettes (échelle la plus fine) | Flot horizontal détecté | Courbes intégrales

Fig. 6.10 *Exemple de flot et de lignes intégrales calculées sur une transformée en ondelettes l'algorithme de Horn et Schunk* [98] sur des tranches 1D le long de la direction verticale.

Ce problème est ainsi voisin du calcul de flot optique en analyse et compression video (bien que notre problème soit 2D alors que la video contient une dimension temporelle supplémentaire). La détection de flot optique est régularisée soit en calculant des correspondances entre images sur des voisinages assez larges comme dans l'algorithme de Lucas et Kanade [126], soit par des méthodes variationnelles globales en espace comme l'algorithme de Horn et Schunk [98] voir en temps et en espace comme expliqué par Weickert et Schnörr [201].

6.3.2 CHAMP D'ASSOCIATION MULTI-ÉCHELLES

La transformée en bandelettes par groupement est un algorithme qui a été développé par Stéphane Mallat au sein de la société Let It Wave et qui est déposée dans le brevet [130]. Ce travail utilise un cas particulier de cet algorithme qui est adapté a notre problème d'analyse de texture.

L'idée principale est d'exploiter la redondance géométrique qui s'exerce sur de longues distances en définissant un champ d'association multi-échelles. Ce champ est utilisé pour réaliser des groupements entre des couples de points de plus en plus distants dans l'image. La figure 6.11 montre une portion d'un tel champ le long d'une singularité géométrique turbulente. Les vecteurs représentent quelques exemples de couples de points que l'on apparie le long de la géométrie. Ce champ se construit petit à petit depuis les courtes distances (échelle fine) vers les distances plus longues (échelles grossières).

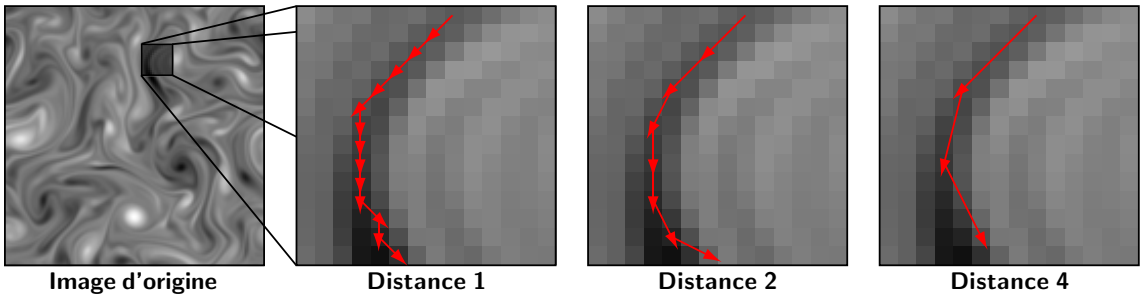


Fig. 6.11 *Illustration du principe d'un champ d'association multi-échelles.*

On peut rapprocher cette construction d'un procédé de quantification de la géométrie. Ainsi plus la géométrie doit relier des points éloignés, plus elle doit être quantifiée de façon précise. Cette méthode permet d'assurer un suivi de la singularité sur une longue distance, ce qui est impossible avec un algorithme calculant un flot à la résolution la plus fine (voir figure 6.10). En effet, même si le champ courte distance est quelque peu erroné (dû à la faible précision), le champ à l'échelle suivante peut corriger les erreurs en introduisant une petite modification. Ce procédé est assez semblable au système dynamique contrôlant la répartition de l'erreur de quantification d'un codeur Σ/Δ, étudié en détails par Daubechies et al. [57].

Dans les sous-sections suivantes, on va expliquer comment on peut calculer ce champ grâce à des appariements de voisinages. Tout comme le font les méthodes de calcul de flot optique décrites à la section précédente, l'utilisation d'un petit voisinage autour de chaque point permet de régulariser le champ ainsi détecté pour avoir un problème de représentation bien posé.

Pour le débruitage d'images, des méthodes par appariement de voisinages ont été récemment proposées par Buades et al. [24], qui sont inspirées des méthodes de synthèse de textures par recopie telles celles de Efros et Leung [78]. Cependant, le problème du débruitage est plus simple que celui de la compression ou de l'analyse de textures. En effet, il n'est pas nécessaire de calculer explicitement un flot optique, comme l'explique Buades et al. [23] et encore moins d'imposer une régularité de ce flot (ce qui est nécessaire pour éviter les ambiguïtés locales causées par la présence de contours).

Pour obtenir une représentation creuse d'une image, au contraire du débruitage, il ne suffit pas d'avoir des petits coefficients transformés, il faut aussi avoir un champ d'association

géométrique régulier. En effet, ce champ, qui paramétrise la transformée, fait partie intégrante de la représentation de l'image et doit donc aussi être codé à l'aide de peu de coefficients (pour avoir une compression efficace ou bien une modélisation statistique qui capture les caractéristiques de l'image).

6.3.3 TRANSFORMÉE EN BANDELETTES PAR GROUPEMENTS

La transformée de Haar est la plus simple des transformées en ondelettes. Une étape de la transformée consiste à remplacer deux coefficients voisins (a, b) par leur moyenne et leur différence

$$(a, b) \qquad \longrightarrow \qquad (m, d) \stackrel{\text{def.}}{=} \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}\right). \tag{6.2}$$

Cette transformée a l'avantage d'avoir une interprétation intuitive sous forme de moyennage et d'être très facilement inversible. L'idée est de partir de cette étape élémentaire et de l'appliquer de façon successive sur des couples de deux pixels.

Une étape de l'algorithme sur toute l'image. On suppose donc que l'on dispose d'une liste de couples de pixels (x_k, y_k) avec x_k et $y_k \in \{0, \ldots, n-1\}^2$, où n est la taille de l'image M que l'on souhaite transformer. On impose que les points x_k soient tous différents et dans la pratique, on choisit tous les points de l'image M. On définit une matrice de poids W initialisée à $\mathrm{W}[x] = 1$ pour tous les points x, ainsi qu'une matrice de détails D qui sera remplie séquentiellement.

À chaque étape k de la transformée, on effectue la mise à jour

$$\begin{cases} \mathrm{M}[y_k] \leftarrow (\mathrm{W}[x_k]\,\mathrm{M}[x_k] + \mathrm{W}[y_k]\,\mathrm{M}[y_k])/(\mathrm{W}[x_k] + \mathrm{W}[y_k]), \\ \mathrm{D}[x_k] \leftarrow (\mathrm{M}[x_k] - \mathrm{M}[y_k])\sqrt{\mathrm{W}[x_k]\mathrm{W}[y_k]}/\sqrt{\mathrm{W}[x_k] + \mathrm{W}[y_k]}, \\ \mathrm{D}[y_k] \leftarrow \mathrm{W}[x_k] + \mathrm{W}[y_k]. \end{cases}$$

L'algorithme va progressivement remplir la matrice D de détails, en mettant en même temps à jour les matrices de poids et de moyenne M (qui remplace l'image de départ).

Le point important est de choisir de façon intelligente ces couples de pixels. Tout d'abord, on considère les pixels x_k selon un ordre prédéfini (par exemple ligne après ligne). On va parcourir plusieurs fois l'ensemble des pixels (chaque passage sur toute l'image correspondra à une échelle de la transformée de Haar). Dans la suite on note $\ell \in \{0, 1, \ldots, \mathrm{L}-1\}$ le numéro de l'échelle considérée. À chaque pixel x_k on associe un pixel $y_k = x_k + \mathrm{F}_\ell[x_k]$, où F_ℓ est le champ d'association géométrique à l'échelle ℓ.

Choix des couples de points. Pour chaque pixel x_k, on calcule le champ d'association F_ℓ selon un critère géométrique. Si on note

$$x_k + \mathrm{V} = \{x_k + t \ \backslash \ t \in \mathrm{V}\} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{V} = \{-d/2, \ldots, d/2\}^2$$

le voisinage de $d \times d$ pixels autour de x_k (où d est une constante), on cherche le pixel y_k ayant le voisinage le plus proche. Plus précisément, on choisit

$$y_k = \operatorname*{argmin}_{y \in \Delta_\ell(x_k)} \sum_{t \in \mathrm{V}} |\mathrm{M}[x_k + t] - \mathrm{M}[y + t]|^2 .$$

La région $\Delta_\ell(x_k)$ est un sous-ensemble de pixels, qui force les vecteurs du champ d'association F_ℓ à avoir une taille d'environ 2^ℓ. Elle est définie à l'aide du champ précédent $\mathrm{F}_{\ell-1}$ de la façon suivante :

$$\Delta_\ell(x_k) = ((u_k + \mathrm{F}_{\ell-1}[u_k]) + \mathrm{V}) \cap (\mathrm{F}_{\ell-1}[x_k])^+ \qquad \text{avec} \qquad u_k \overset{\text{def.}}{=} x_k + \mathrm{F}_{\ell-1}[x_k]$$

et où l'on a noté $(\mathrm{F}_{\ell-1}[x_k])^+$ le demi plan défini par

$$(\mathrm{F}_{\ell-1}[x_k])^+ \overset{\text{def.}}{=} \{x \neq x_k \ \backslash \ \langle x - (u_k + \mathrm{F}_{\ell-1}[u_k]), \mathrm{F}_{\ell-1}[x_k] + \mathrm{F}_{\ell-1}[u_k]\rangle > 0\}$$

On doit restreindre la recherche à une zone de plus en plus éloignée du point x_k pour obliger la transformée à aller moyenner des valeurs correspondant à des coefficients de plus en plus distants. Ceci est nécessaire pour pouvoir associer la valeur de ℓ à une échelle de bandelettes.

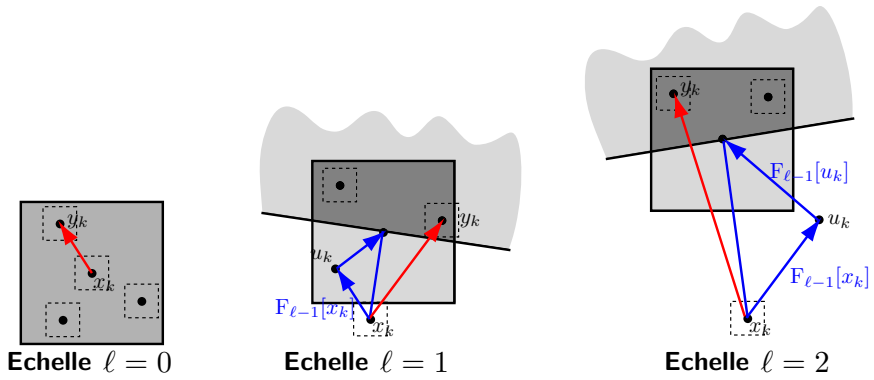


Fig. 6.12 *Recherche du champ d'association par meilleur appariement. À chaque échelle, la région $\Delta_\ell(x_k)$ est la zone la plus foncée.*

La figure 6.12 montre trois exemples de recherche de champs d'association à des échelles ℓ différentes. On voit que le carré de recherche $((u_k + \mathrm{F}_{\ell-1}[u_k]) + \mathrm{V})$ est à chaque fois plus éloigné du point x_k. La condition $y_k \in \Delta_\ell(x_k)$ empêche le champ d'association de revenir en arrière.

Algorithme de calcul en plusieurs étapes. Pour obtenir l'algorithme complet, on effectue la transformation détaillée précédemment de façon répétée pour plusieurs échelles $\ell = 0, \ldots, \mathrm{L}-1$. Chaque étape, pour une échelle ℓ fixée, stocke les matrices de détails D dans une variable D_ℓ ainsi que le champ d'association F_ℓ.

Le pseudo-code 3 détaille les différentes étapes de l'algorithme qui est un cas particulier du brevet [130]. Cet algorithme renvoie des coefficients de détails $\{\mathrm{D}_\ell\}_{\ell=0}^{\mathrm{L}-1}$ ainsi qu'une image basse fréquence D_L. L'algorithme peut être employé dans une version simplifiée où il ne calcule par les champs F_ℓ, ceux-ci étant supposés donnés par l'utilisateur par l'intermédiaire des variables $\widetilde{\mathrm{F}}_\ell$.

La figure 6.13 montre les coefficients de détails, ainsi que le champ d'association (affiché sur l'image de moyenne temporaire A à l'étape ℓ). On voit que le champ est de plus en plus long et qu'il y a très peu de coefficients de détails non nuls.

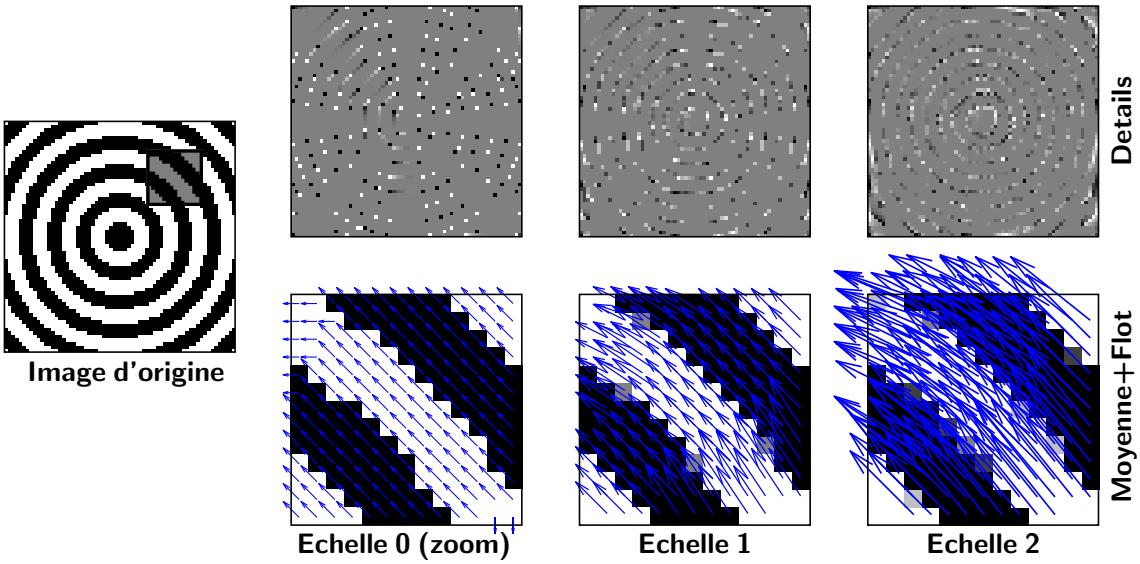


Fig. 6.13 *Champ d'association géométrique multi-échelles détecté par l'algorithme, coefficients de moyenne et de détail.*

Fonction $[\mathrm{D}_0, \ldots, \mathrm{D}_\mathrm{L}, \mathrm{F}_0, \ldots, \mathrm{F}_{\mathrm{L}-1}, \mathrm{W}] =$ `transfo_bandelettes`(M).
ou Fonction $[\mathrm{D}_0, \ldots, \mathrm{D}_\mathrm{L}, \mathrm{F}_0, \ldots, \mathrm{F}_{\mathrm{L}-1}, \mathrm{W}] =$ `transfo_bandelettes`$(\mathrm{M}, \widetilde{\mathrm{F}}_0, \ldots, \widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{L}-1})$.

Entrée : image M.
Sortie : coefficients de détails $\mathrm{D}_0, \ldots, \mathrm{D}_{\mathrm{L}-1}$,
moyenne basse fréquence D_L, poids W,
champ d'association multi-échelles $\mathrm{F}_0, \ldots, \mathrm{F}_{\mathrm{L}-1}$, avec $\mathrm{F}_\ell[x] \in \mathbb{R}^2$.

Initialisation : $\mathrm{A} = \mathrm{M}$.

Répéter pour chaque échelle $\ell = 0, \ldots, \mathrm{L}-1$:
- *Répéter pour chaque pixel* x_k :
  - Si $\ell > 0$, calcul du centre de la zone de recherche
    $z_k = x_k + \mathrm{F}_{\ell-1}[x_k] + \mathrm{F}_{\ell-1}[x_k + \mathrm{F}_{\ell-1}[x_k]]$,
    (sinon on pose $z_k = x_k$).
  - Si le champ $\widetilde{\mathrm{F}}_\ell$ n'est pas fourni, recherche du meilleur appariement :
    pour chaque pixel $y \in z_k + \mathrm{V}$, calculer
    $\mathrm{E}(y) = \sum_{s \in \mathrm{V}} |\mathrm{A}[y+s] - \mathrm{A}[x_k+s]|^2$,
    retenir $y_k = \mathrm{argmin}(\mathrm{E}(y))$ et poser $\mathrm{F}_\ell[x_k] = y_k - x_k$.
  - (sinon on pose $\mathrm{F}_\ell[x_k] = \widetilde{\mathrm{F}}_\ell[x_k]$ et $y_k = x_k + \mathrm{F}_\ell[x_k]$)
  - Transformée de Haar : poser
    $\mathrm{D}_\ell[x_k] = (\mathrm{A}[x_k] - \mathrm{A}[y_k])\sqrt{\mathrm{W}[x_k]\mathrm{W}[y_k]}/\sqrt{\mathrm{W}[x_k] + \mathrm{W}[y_k]}$,
    $\mathrm{A}[y_k] = (\mathrm{W}[x_k]\mathrm{A}[x_k] + \mathrm{W}[y_k]\mathrm{A}[y_k])/(\mathrm{W}[x_k] + \mathrm{W}[y_k])$,
    $\mathrm{W}[y_k] = \mathrm{W}[x_k] + \mathrm{W}[y_k]$.

Enregistrer les basses fréquences $\mathrm{D}_\mathrm{L} = \mathrm{A}$.

N.B. : La fonction a deux prototypes suivant que l'utilisateur fournit un champ précalculé $\widetilde{\mathrm{F}}_0, \ldots, \mathrm{F}_{\mathrm{L}-1}$, ou bien que l'algorithme doit calculer lui-même le champ $\mathrm{F}_0, \ldots, \mathrm{F}_\ell$ par recherche de meilleurs appariements.

Table 3: Pseudo-code pour la transformée en bandelettes par groupements.

6.3.4 TRANSFORMÉE EN BANDELETTES SUR UN DOMAINE MULTIRÉSOLUTION

Tout comme pour la transformée en bandelettes orthogonales, la transformée complète en bandelettes par groupements s'obtient par la succession d'une transformée multirésolution, puis d'une transformée de Haar le long d'un champ d'association à chaque échelle de la transformation, comme expliqué dans le brevet [130].

La première raison en faveur de cette succession de deux transformées est théorique. Les théorèmes d'approximation en bandelettes orthogonales ne sont valides que si l'on enchaîne une transformée en ondelettes puis une transformée anisotrope adaptée. À l'échelle d'un pixel, les bandelettes (orthogonales tout comme par groupements) ne sont pas capables d'absorber les parties régulières et les transitions lissées. La deuxième raison est pratique puisque les fonctions de base bandelettes ne sont pas régulières si on les considère dans le domaine discret et qu'au contraire les fonctions de base obtenues avec la succession des deux transformées sont régulières (voir section 2.2.3).

Interprétation comme une décomposition. L'algorithme de transformée en bandelettes par groupements présenté à la sous-section 6.3.3 correspond à la décomposition d'une image discrétisée sur une frame $\{g^{\omega}_{\ell m}\}_{\ell m}$ qui dépend d'un champ d'association multi-échelles ω. Le paramètre ω représente ainsi la géométrie paramétrisant la transformation en bandelettes.

Le fait que la famille $\{g^{\omega}_{\ell m}\}_{\ell m}$ forme une frame signifie que la transformée en bandelettes conserve relativement bien l'énergie, c'est à dire qu'il existe deux constantes a et b telles que

$$\forall\, \mathrm{A} \in \Theta, \qquad a \,\|\mathrm{A}\|^2_{\ell^2} \leqslant \sum_{\ell,m} \langle \mathrm{A},\, g^{\omega}_{\ell m}\rangle^2 \leqslant b \,\|\mathrm{A}\|^2_{\ell^2}.$$

Cette propriété n'est pas triviale et nécessite que la géométrie de la texture soit suffisamment régulière. Ceci suppose des conditions techniques sur l'ensemble Θ des textures considérées qui ne sont pas développées dans cette thèse.

On peut appliquer cette transformée par groupements à chaque échelle d'une transformée multirésolution. Dans la suite, on note $\{\mathrm{A}_j\}_j$ les coefficients de la décomposition d'une image A sur une frame multirésolution $\{\psi_{jn}\}_{j,n}$ (par exemple une base d'ondelettes ou une frame laplacienne). Formellement, on a

$$\mathrm{A}_j[n] \stackrel{\text{def.}}{=} \langle \mathrm{A},\, \psi_{jn}\rangle,$$

où j est un paramètre d'échelle et n un paramètre spacial.

Cette transformée par groupements sur chaque ensemble de coefficients A_j permet de calculer

$$\langle \mathrm{A}_j,\, g^{\omega}_{\ell m}\rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \langle \mathrm{A},\, g^{\omega}_{j\ell m}\rangle \qquad \text{où} \qquad g^{\omega}_{j\ell m} \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_n g^{\omega}_{\ell m}[n]\, \psi_{jn}.$$

On obtient ainsi une frame $\{g^{\omega}_{j\ell m}\}_{j,\ell,m}$ qui dépend de trois paramètres
- l'échelle $0 \leqslant j < \mathrm{J}$ de la transformée multirésolution,
- l'échelle $0 \leqslant \ell < \mathrm{L}$ de la transformée par groupements,
- l'index spatial m de la transformée par groupements.

On remarque que dans la suite, on utilise la même géométrie ω pour toutes les échelles j, bien que ceci ne soit pas a priori requis par l'algorithme. Ceci permet d'avoir une synthèse de textures de meilleure qualité, car il est difficile de prendre en compte une éventuelle modification de la géométrie à travers les échelles.

On note $\{\widetilde{g}^{\omega}_{j\ell m}\}_{j,\ell,m}$ une famille biorthogonale de cette frame, que l'on utilise pour la reconstruction à l'aide de

$$\mathrm{A} = \sum_{j,\ell,m} \langle \mathrm{A},\, g^{\omega}_{j\ell m} \rangle\, \widetilde{g}^{\omega}_{j\ell m}.$$

Cette formule de reconstruction se calcule numériquement à l'aide d'un algorithme de transformée inverse qui fait l'objet du code 4.

Fonction $\mathrm{M} =$ `transfo_bandelettes_inverse`$(\mathrm{D}_0, \ldots, \mathrm{D}_\mathrm{L}, \mathrm{F}_0, \ldots, \mathrm{F}_{\mathrm{L}-1}, \mathrm{W})$.

Entrée : coefficients de bandelettes $\mathrm{D}_0, \ldots, \mathrm{D}_\mathrm{L}$, matrice de poids W
champ d'association multi-échelles $\mathrm{F}_0, \ldots, \mathrm{F}_{\mathrm{L}-1}$, avec $\mathrm{F}_\ell[x] \in \mathbb{R}^2$.
Sortie : image M.

Initialisation : $\mathrm{M} = \mathrm{D}_\mathrm{L}$ (basse fréquences).

Répéter pour chaque échelle $\ell = \mathrm{L}-1, \mathrm{L}-2, \ldots, 1$:
  Répéter pour chaque pixel x_k :
    Pixel couplé $y_k = x_k + \mathrm{F}_\ell[x_k]$, transformée de Haar inverse :
      $\mathrm{M}[y_k] = \mathrm{M}[y_k] - \mathrm{D}[x_k]\sqrt{\mathrm{W}[y_k] - \mathrm{W}[x_k]}/\sqrt{\mathrm{W}[y_k]\mathrm{W}[x_k]}$.

Table 4: Pseudo-code pour la transformée en bandelettes par groupements inverse.

6.4 SYNTHÈSE GÉOMÉTRIQUE AVEC DES BANDELETTES

Dans le but de synthétiser des textures géométriques, nous allons utiliser la transformée en bandelettes par groupements. Nous envisageons deux scénarios pour cette synthèse, suivant que l'on dispose ou non d'une géométrie a priori.

6.4.1 ALGORITHME GÉNÉRIQUE

L'algorithme générique de synthèse de textures à l'aide de la transformée en bandelettes utilise l'égalisation d'histogrammes des coefficients en bandelettes par groupements calculés sur une représentation multirésolution $\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_{\mathrm{J}-1}$ de la texture d'origine A.

Dans la suite, on suppose que l'on veut synthétiser une texture discrétisée B de $n \times n$ pixels à partir d'une texture originale A de même taille.

Fonction B = `synthese_bandelettes`(A).

Entrée : texture originale A de taille $n \times n$.
Sortie : texture synthétisée B.

Initialisation : B = `bruit_blanc`(n).

Calcul du champ d'association à synthétiser
  $[\widetilde{\mathrm{F}}_1, \ldots, \widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{L}-1}]$ = `calcul_champ`(A).
Égalisation des histogrammes en espace
  A = `egalisation`(A, B).
Calcul de la transformée multirésolution de la texture d'origine
  $[\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_m]$ = `transforme`(A).
Répéter jusqu'à convergence :
  Calcul de la transformée multirésolution de la texture synthétisée
    $[\mathrm{B}_0, \ldots, \mathrm{B}_m]$ = `transforme`(B).
  Répéter pour chaque échelle $j = 0, \ldots, m$:
    Égalisation des histogrammes multirésolution
      A_j = `egalisation`($\mathrm{A}_j, \mathrm{B}_j$).
    Calcul du champ d'association et des coefficients de bandelettes à l'échelle j
      $[\mathrm{F}_0, \ldots, \mathrm{F}_{\mathrm{L}-1}, \mathrm{D}_0, \ldots, \mathrm{D}_{\mathrm{L}}]$ = `transfo_bandelettes`(A_j).
    Calcul des coefficients de bandelettes de l'image à synthétiser à l'échelle j
      $[\widetilde{\mathrm{D}}_0, \ldots, \widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{L}}]$ = `transfo_bandelettes`($\mathrm{B}_j, \widetilde{\mathrm{F}}_0, \ldots, \widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{L}-1}$).
    Répéter pour chaque échelle $\ell = 0, \ldots, \mathrm{L}-1$:
      Égalisation des histogrammes en bandelettes
        $\widetilde{\mathrm{D}}_\ell$ = `egalisation`($\widetilde{\mathrm{D}}_\ell, \mathrm{D}_\ell$).
    Calcul de la transformée en bandelettes inverse de la texture synthétisée
      B_j = `transfo_bandelettes_inverse`($\widetilde{\mathrm{D}}_0, \ldots, \widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{L}}, \widetilde{\mathrm{F}}_0, \ldots, \widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{L}-1}$).
  Calcul de la transformée en multirésolution inverse de la texture synthétisée
    B = `transforme_inverse`($\mathrm{B}_0, \ldots, \mathrm{B}_m$).

N.B. : La fonction `egalisation` fait l'objet du pseudo-code 2 et la fonction `transfo_bandelettes` est décrite dans le pseudo-code 3. La fonction `transforme` réalise une transformée multirésolution (transformée en ondelettes ou transformée laplacienne par exemple). La fonction `calcul_champ` détermine un champ d'association à partir de la texture d'origine ou à partir de données fournies par l'utilisateur (voir les sous-sections suivantes).

Table 5: Pseudo-code pour l'algorithme générique de synthèse de texture.

Modélisation probabiliste. On a vu au paragraphe 6.3.4 que l'algorithme de transformée par groupements, lorsqu'il est appliqué sur une représentation multirésolution $\{\mathrm{A}_j\}_{j=0}^{\mathrm{J}-1}$ d'une texture A, correspond à la décomposition de A dans une frame $\{g^{\omega}_{j\ell m}\}_{j,\ell,m}$.

Le paramètre ω représente la géométrie, qui peut être représentée sous la forme d'un champ d'association, ou, comme on le verra à la sous-section 6.4.3, sous une forme plus compacte.

Dans cette section, on suppose que l'on dispose du paramètre géométrique $\widetilde{\omega}$ de la texture B à synthétiser. Ce paramètre peut être fourni par l'utilisateur (comme c'est le cas à la section 6.4.2) ou bien déterminé par une réalisation d'un processus aléatoire (comme c'est le cas à la section 6.4.3).

La texture synthétisée B s'obtient comme réalisation d'un vecteur aléatoire X tel que

$$\mathrm{X} = \sum_{j,\ell,m} \mathrm{X}_{j\ell m}\, \widetilde{g}_m^{\widetilde{\omega}}$$

où $\mathrm{X}_{j\ell m}$ sont des variables aléatoires identiquement distribuées pour chaque couple (j,ℓ) d'échelles. La loi de ces variables est donc supposée indépendante de la position $m \in \mathrm{I}_m$

$$\forall\, m \in \mathrm{I}_m, \quad p_{j\ell}(y) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{Prob}(\mathrm{X}_{j\ell m} = y),$$

ce qui correspond à une hypothèse de stationarité. On suppose de plus que les textures vérifient une hypothèse d'ergodicité, ce qui signifie que l'on peut estimer $p_{j\ell}$ à l'aide des histogrammes

$$\widetilde{p}_{j\ell}(y) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\mathrm{Card}(\mathrm{I}_m)}\, \mathrm{Card}\left\{ m \in \mathrm{I}_m \;\middle\backslash\; \left| \langle \mathrm{B},\, g_{j\ell m}^{\widetilde{\omega}} \rangle - y \right| \leqslant \varepsilon \right\},$$

où les y parcourent un ensemble fini de valeurs, qui sont les centres des boîtes de taille ε de l'histogrammes approché.

Algorithme de calcul. Pour synthétiser une réalisation B de ce processus, on peut utiliser la procédure d'égalisation d'histogrammes présentée à la section 6.2.2 et qui fait l'objet du pseudo-code 2.

Le pseudo-code 5 détaille les étapes de l'algorithme obtenu, qui sont semblables à celles de l'algorithme 2. La seule différence est la nécessité de calculer un champ d'association $\mathrm{F}_0, \ldots, \mathrm{F}_{\mathrm{L}-1}$ pour la texture d'origine A et un autre champ $\widetilde{\mathrm{F}}_0, \ldots, \widetilde{\mathrm{F}}_{\mathrm{L}-1}$ pour la texture B en cours de synthèse. Le champ d'origine est calculé à l'aide de l'algorithme `transfo_bandelettes` qui a été décrit à la section précédente et fait l'objet du code 3. Le champ de la texture à synthétiser est calculé une fois pour toutes par la fonction `calcul_champ`. Les sections qui suivent décrivent deux façons différentes de calculer ce champ.

6.4.2 Synthèse avec un flot géométrique fixé

Dans un premier temps, nous supposons que l'utilisateur fournit un champ de vecteurs très précis et nous déduisons un champ d'association multi-échelles $\widetilde{\omega}$. Ceci nous permet de synthétiser une texture qui « suit » ce flot de vecteurs et présente des caractéristiques proches d'une texture d'origine. Bien sûr, si la texture donnée en exemple possède une géométrie totalement différente du champ utilisé, cette méthode ne synthétisera pas une texture conforme à l'original.

Cette méthode fournit un algorithme pour générer une texture utile pour visualiser un champ de vecteurs. De nombreux algorithmes permettent une visualisation de champs de vecteurs, ils ont été présentés à la section 6.2.1. Bien que la comparaison avec notre algorithme sorte du cadre de cette thèse, on peut remarquer que notre méthode possède l'avantage d'utiliser une texture turbulente arbitraire comme modèle.

Calcul du champ d'association. Nous décrivons maintenant une implantation possible de la fonction `calcul_champ` nécessaire au pseudo-code 5.

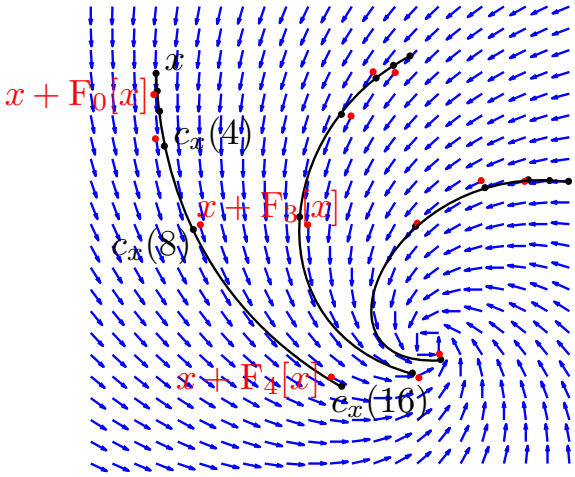


Fig. 6.14 *Calcul d'un champ d'association en suivant les lignes intégrales d'un flot.*

On suppose que l'utilisateur fournit un flot mono-résolution V de norme unitaire

$$\forall\, x \in [0, n]^2, \qquad \mathrm{V}(x) \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{et} \qquad \|\mathrm{V}(x)\| = 1.$$

La plupart des données représentées sous forme de champs de vecteurs proviennent de simulation de mécanique des fluides. Dans la suite de cette sous-section, nous utilisons un modèle analytique simple de champ construit par superposition de champs potentiels centrés autour d'un point singulier, comme l'explique De Wijk [190]. Chaque champ élémentaire est décrit par son centre p_i, son terme source s_i et sa vorticité r_i. Le champ V est défini par

$$\mathrm{V}(x) = \sum_i \begin{pmatrix} s_i & -r_i \\ r_i & s_i \end{pmatrix} \frac{x - p_i}{\|x - p_i\|^2}.$$

La figure 6.15 montre deux champs de vecteurs

Ce flot mono-résolution permet de définir un champ d'appariement en suivant les lignes intégrales du flot

$$\forall\, x \in [0, n]^2, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial c_x}{\partial t}(t) = \mathrm{V}(c_x(t)), \\ c_x(0) = x. \end{cases}$$

La courbe c_x est la ligne de flot issue de x, dont elle s'éloigne avec une vitesse unitaire constante. Ceci nous amène à définir, pour chaque échelle $\ell \geqslant 0$, le champ d'association

$$\forall\, x \in \{0, \ldots, n-1\}^2, \qquad \mathrm{F}_\ell[x] = x - [c_x(2^\ell)],$$

où $[a]$ représente le point à coordonnées entières le plus proche de a. La figure 6.14 montre un exemple de calcul de ce champ d'association.

Une fois que l'on dispose de ce champ d'appariement, on peut effectuer une synthèse de textures en utilisant l'algorithme déjà présenté au pseudo-code 5.

Résultats. La figure 6.16 montre les résultats de synthèses obtenus avec différents types de transformées multirésolution, qui implémentent la fonction `transforme` du pseudo-code 5. Nous avons testé :

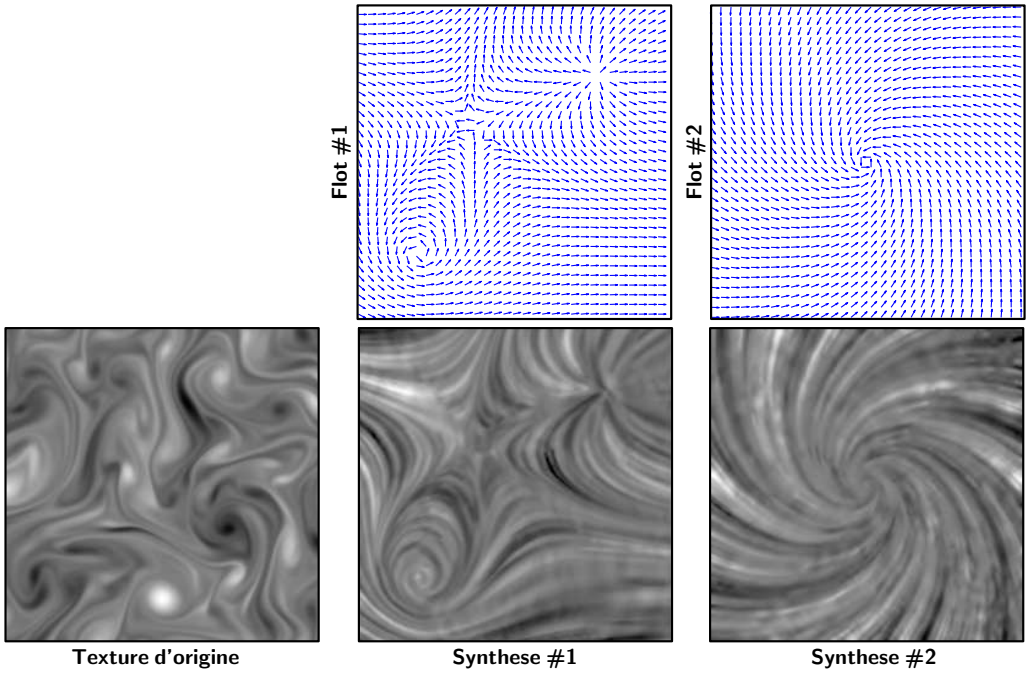


Fig. 6.15 *Exemples de champs de vecteurs synthétiques (champ en haut et lignes intégrales en bas) avec les synthèses de textures correspondantes.*

- en (b) aucune transformée n'est utilisée et on a $A_0 = A$, $m = 0$. Le résultat de synthèse n'est pas satisfaisant et montre bien qu'il est nécessaire de réaliser la transformée en bandelettes par groupements sur un domaine multirésolution. En effet, on retrouve bien les stries noires et blanches de la texture d'origine, mais la largeur de ces stries est beaucoup trop faible. Ceci est dû au fait que les bandelettes par groupements ne sont pas capables de capturer la régularité qui existe dans la direction orthogonale à la géométrie.
- en (c) une transformée en ondelettes invariante par translation est utilisée. Le résultat de synthèse n'est pas satisfaisant dans les zones où la géométrie est horizontale. Ceci est dû au fait que la texture originale ne contient pas de structure horizontale. Ce cas est certes extrême mais, généralement, le découplage des orientations empêche une bonne continuation des motifs passant de l'horizontale à la verticale.
- en (d) une pyramide laplacienne comme décrite par Simoncelli et al. [176] est utilisée. La figure 6.17 montre un exemple de décomposition à l'aide de cette pyramide laplacienne. Le résultat de synthèse est meilleur, parce que cette transformée est pratiquement invariante par translation et ne privilégie aucune orientation.

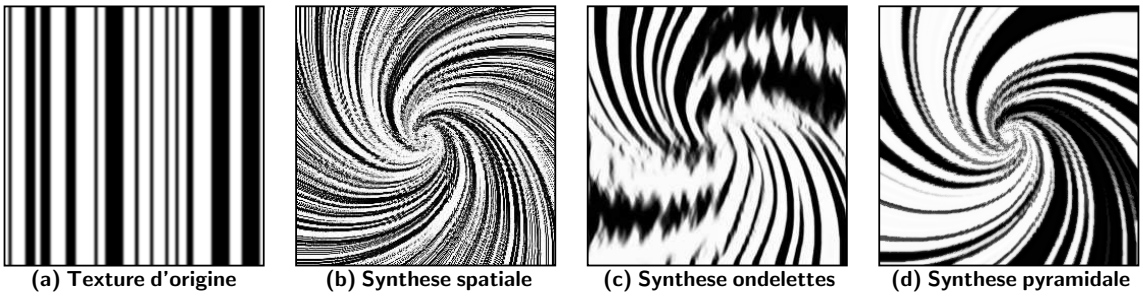


Fig. 6.16 *Comparaison des différentes transformées sur lesquelles on calcule le champ d'association.*

Fig. 6.17 *Transformée Laplacienne pyramidale.*

La figure 6.18 montre d'autres résultats de synthèse. On voit que pour la texture (b) la transformée en bandelettes a été capable de capturer une régularité longue distance, mais avec cependant quelques interruptions. Dans les deux cas, l'utilisation d'une transformée sur un domaine pyramidal multirésolution permet de capturer la largeur variable des stries, tout en autorisant un passage ininterrompu de l'horizontale à la verticale. La texture (c) présente une géométrie plus complexe à cause de l'enchevêtrement permanent des filaments verticaux et horizontaux. La synthèse en bandelettes n'est pas capable de représenter ce phénomène (car la texture synthétisée doit se conformer strictement au flot fourni par l'utilisateur). Cependant, la faible régularité de la texture d'origine se traduit par des interruptions fréquentes des structures géométriques synthétisées, ce qui donne un aspect assez proche de la texture d'origine.

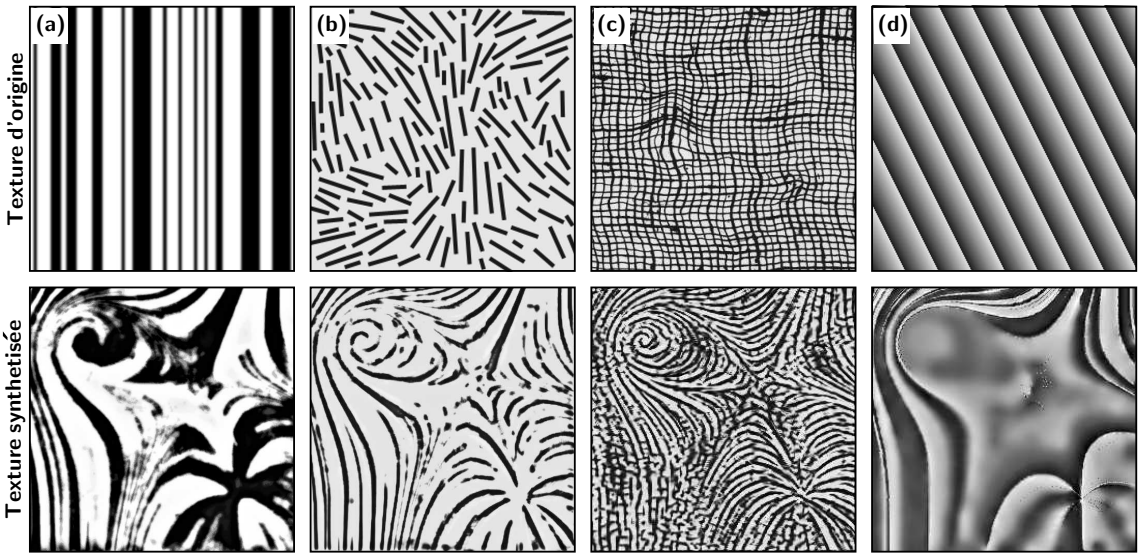


Fig. 6.18 *D'autres exemples de synthèses de textures avec flot géométrique fixé.*

L'algorithme de synthèse 5 est itératif et il est nécessaire d'effectuer une dizaine d'itérations pour obtenir une synthèse de qualité. La figure 6.19 montre l'évolution de la synthèse. Bien que l'on ne se préoccupe pas des questions de convergence de l'algorithme, on peut noter que le nombre d'itérations nécessaires est bien plus grand que pour l'algorithme simple de synthèse non-géométrique 2. Ceci est dû à la complexité des interactions entre les structures géométriques, qui peuvent s'amplifier ou bien s'anihiler au cours des itérations.

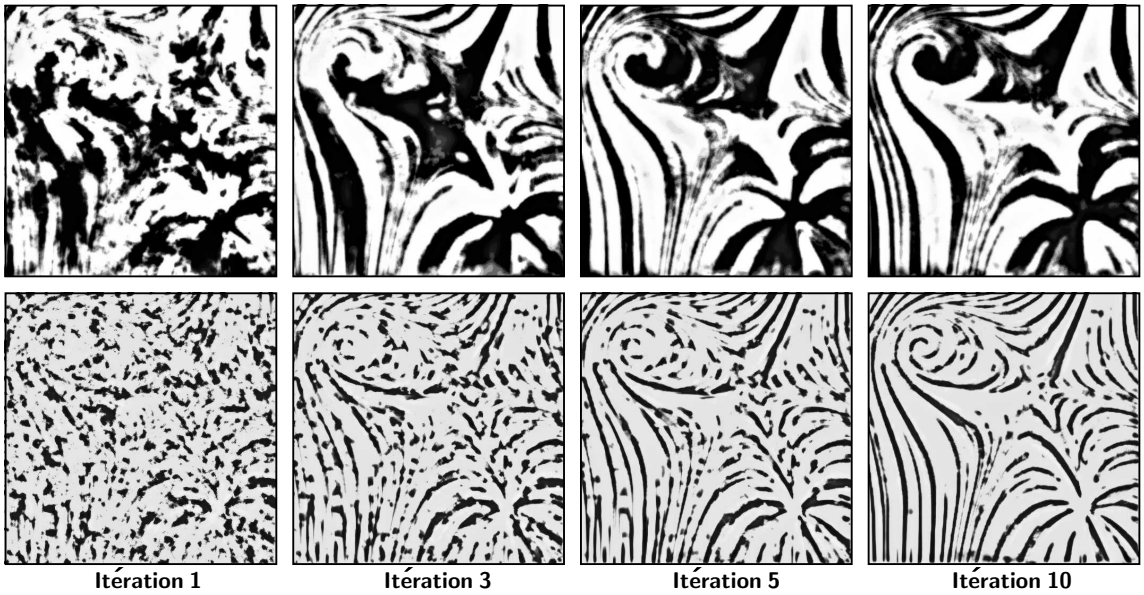


Fig. 6.19 *Progression de la synthèse de textures.*

6.4.3 Synthèse de la géométrie

Nous souhaitons maintenant réellement synthétiser la géométrie $\widetilde{\omega}$ d'une nouvelle texture B. On utilise les champs d'association $\{\mathrm{F}_\ell\}_\ell$ de la texture d'origine A et construire des nouveaux champs d'association $\{\widetilde{\mathrm{F}}_\ell\}_\ell$ possédant des caractéristiques semblables. Ce nouveau champ sera calculé à l'aide de la réalisation d'un processus aléatoire dont la loi de probabilité est estimée à partir du champ $\{\mathrm{F}_\ell\}_\ell$.

Ceci fournira une nouvelle version de la fonction `calcul_champ`(A) nécessaire au pseudo-code 5 qui permet de calculer $\widetilde{\omega}$. Cette nouvelle fonction prend vraiment en compte le contenu de la texture A et n'utilise pas de flot mono-résolution fourni par l'utilisateur.

Représentation angulaire du champ d'association. Pour synthétiser les champs $\widetilde{\mathrm{F}}_\ell$, nous allons une fois de plus utiliser une procédure d'égalisation d'histogrammes. Comme on l'a vu à la section 6.2.2, il faut disposer de quantités fournissant une représentation creuse des champs d'association. Pour cela, nous commençons par effectuer un changement de variables permettant de ne manipuler que des orientations

$$\theta_\ell \stackrel{\text{def.}}{=} \operatorname{atan}((\mathrm{F}_\ell)_1/(\mathrm{F}_\ell)_2) \qquad \text{où} \qquad \mathrm{F}_\ell[x] = ((\mathrm{F}_\ell)_1[x], (\mathrm{F}_\ell)_2[x]).$$

Il est important de noter qu'il s'agit réellement d'une variable d'orientation, car le sens de la géométrie importe peu pour la synthèse. Ainsi les angles θ_ℓ peuvent être considérés modulo π. Ceci présente l'avantage d'enlever les chocs existants lorsqu'un champ d'association change brusquement d'orientation.

La figure 6.20 (ligne du haut) montre les champs angulaires $\cos(2\theta_\ell)$ pour une texture turbulente. On s'aperçoit que ces champs se ressemblent beaucoup et que, en un certain sens les angles se raffinent à travers les échelles. Il est donc naturel de ne pas synthétiser chaque θ_ℓ indépendamment, mais plutôt de synthétiser le différentiel existant entre θ_ℓ et $\theta_{\ell+1}$.

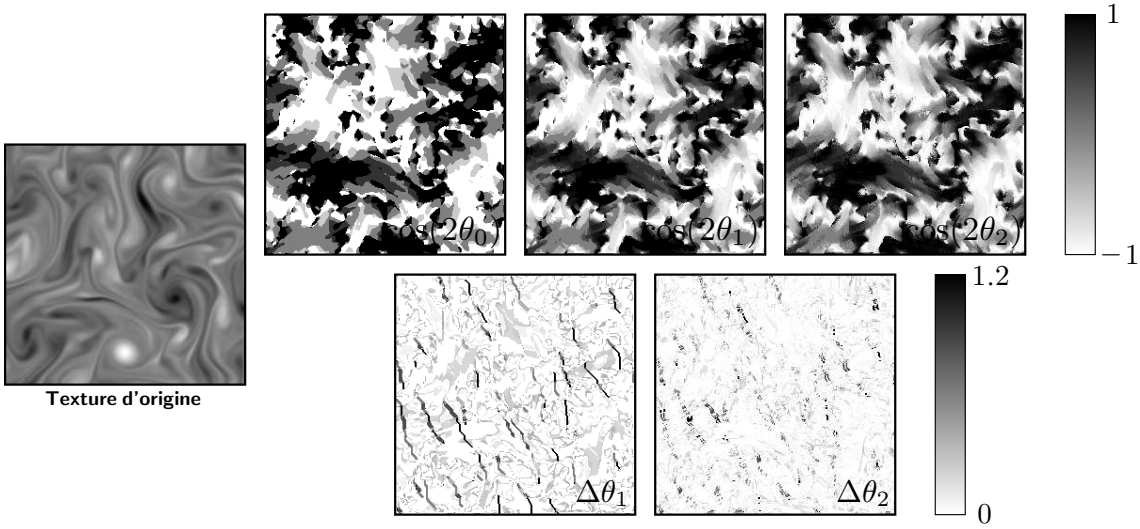


Fig. 6.20 *Cartes d'orientations θ_ℓ et d'orientations relatives $\Delta\theta_\ell$.*

Ainsi, on utilise le fait qu'il est possible, à partir d'un champ F_ℓ, d'extrapoler un champ $\mathrm{F}_\ell^\uparrow$ en composant deux fois le flot à l'échelle ℓ

$$\mathrm{F}_\ell^\uparrow[x] \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{F}_\ell[x] + \varepsilon \mathrm{F}_\ell[x + \mathrm{F}_\ell[x]]$$

La quantité $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ est calculée de façon à ce que $\mathrm{F}_\ell[x + \mathrm{F}_\ell[x]]$ et $\mathrm{F}_\ell[x]$ pointent dans le même sens. Ceci nous permet alors de définir un différentiel angulaire entre deux échelles

$$\theta_\ell^\uparrow \stackrel{\text{def.}}{=} \operatorname{atan}((\mathrm{F}_\ell^\uparrow)_1/(\mathrm{F}_\ell^\uparrow)_2) \qquad \text{et} \qquad \Delta_{\ell+1} = \theta_{\ell+1} - \theta_\ell^\uparrow.$$

La figure 6.21 illustre le principe du calcul de ces différentiels angulaires.

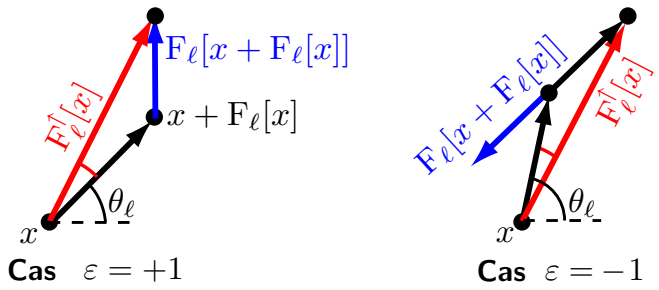


Fig. 6.21 *Calcul du champ extrapolé $\mathrm{F}_\ell^\uparrow$ et du différentiel angulaire $\Delta\theta_\ell$.*

Fonctions à valeurs circulaires et synthèse de directions. Il faut garder à l'esprit que θ_0 n'est pas une fonction à valeurs dans $[0, \pi]$, mais réellement une fonction à valeurs dans le cercle $\mathbb{R}/(\pi\mathbb{R})$. Traiter θ_0 comme une fonction à valeurs scalaires imposerait l'existence de singularités artificielles lorsque $\theta_0(x)$ passe de 0 à π. Ces singularités seraient difficiles à synthétiser, car elles sont difficiles à représenter en ondelettes.

La prise en compte de données à valeurs dans S^1, comme le fait par exemple Perona pour la diffusion [152], est l'un des nouveaux champs d'activité en vision par ordinateur. Chan et Chen expliquent ainsi l'importance des « images non plates » [37], qui sont à valeurs

dans un groupe de Lie (c'est à dire une surface possédant une structure algébrique). La régularisation des données d'IRM est un problème d'actualité qui met en jeu des images à valeurs tensorielles et nécessite des algorithmes adaptés comme celui de Chefd'hotel et al. [39].

Le traitement d'image n'a en revanche développé que peu d'algorithmes pour analyser ce type de signaux. Récemment, Ur-Uaman et al. [189] ont expliqué le formalisme de la transformée en ondelettes pour les fonctions à valeurs dans une variété.

Pour analyser F_0 et synthétiser $\widetilde{\mathrm{F}}_0$, nous avons utilisé une variante très simple de cette transformation, qui consiste à employer une transformée de Haar modifiée. On remplace les moyennes et les différences scalaires par des moyennes et des différences obtenues sur le cercle modulo π. Si l'on utilise une représentation des directions à l'aide de réels entre 0 et π, ceci consiste à remplacer l'étape élémentaire de Haar décrite à l'équation (6.2) par

$$(a,b) \to (m,d) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} \frac{1}{2}\,(a+b, a-b) & \text{si} \quad |x-y| \leqslant \pi/2, \\ \frac{1}{2}\,(a+b+\pi, a-b+\pi)\,\%\pi & \text{si } |x-y| > \pi/2 \quad \text{et} \quad a \leqslant b. \\ \frac{1}{2}\,(a+b+\pi, a-b-\pi)\,\%\pi & \text{si } |x-y| > \pi/2 \quad \text{et} \quad a > b. \end{cases} \tag{6.3}$$

où $x\%\pi$ renvoie le représentant de x modulo π appartenant à $[0,\pi[$.

Paramétrisation de la géométrie. Contrairement à ce que l'on a fait à la section 6.4.2, on va maintenant paramétrer la géométrie $\widetilde{\omega}$ non plus directement par les champs $\{\widetilde{\mathrm{F}}_\ell\}_\ell$, mais par les variables angulaires

$$\widetilde{\omega} \stackrel{\text{def.}}{=} (\widetilde{\theta}_0, \Delta\widetilde{\theta}_1, \ldots \Delta\widetilde{\theta}_{\mathrm{L}-1}).$$

On peut en effet passer simplement de la représentation par variables angulaires à la représentation par champs d'association.

Il suffit d'appliquer un algorithme itératif, qui intialise $\widetilde{\mathrm{F}}_0$ à l'aide de $\widetilde{\theta}_0$ puis, pour chaque $\ell = 1, \ldots, \mathrm{L}-1$

- calcule le champ extrapolé $\widetilde{\mathrm{F}}^{\uparrow}_{\ell-1}$.
- cherche le point $y = x + \widetilde{\mathrm{F}}_\ell[x]$ au voisinage de $y_0 = x + \widetilde{\mathrm{F}}^{\uparrow}_{\ell-1}[x]$ tel que

$$\operatorname{atan}((y_1 - x_1)/(y_2 - x_2)) \quad \text{soit proche de} \quad \widetilde{\theta}_{\ell-1}[x] + \Delta\widetilde{\theta}_{\ell-1}[x].$$

- enregistre la valeur $\widetilde{\mathrm{F}}_\ell[x] = y - x$.

Modélisation probabiliste. Pour simplifier les notations, on définit

$$\widetilde{\omega} = (\widetilde{\omega}_0, \ldots, \widetilde{\omega}_{\mathrm{L}-1}) \stackrel{\text{def.}}{=} (\widetilde{\theta}_0, \Delta\widetilde{\theta}_1, \ldots \Delta\widetilde{\theta}_{\mathrm{L}-1})$$

les différentes composantes de la géométrie à synthétiser. On rappelle que $\widetilde{\omega}_0$ est une image à valeurs dans le cercle S^1 et que pour $\ell > 0$, $\widetilde{\omega}_\ell$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On calcule ainsi le paramètre $\widetilde{\omega}$ comme la réalisation d'un processus aléatoire

$$\Omega = (\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{\mathrm{L}-1}),$$

dont la distribution de probabilité est estimée à l'aide de la géométrie de la texture d'origine.

Le paramètre $\widetilde{\omega}_\ell$ est donc une réalisation d'un vecteur aléatoire Ω_ℓ tel que

$$\Omega_\ell = \Phi_\ell^{-1}(\{\Omega_{\ell in}\}_{\ell,i,n})$$

où

$$\Phi_\ell : \left\{ \begin{array}{ll} & f \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \\ \text{ou} & f \in (\mathrm{S}_1)^{\mathrm{N}} \end{array} \right\} \mapsto \{f_{in}\}_{i,n} \tag{6.4}$$

est une transformée en ondelettes à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans S^1 (on a noté i l'indice d'échelle et n l'indice spatial). Pour $\ell = 0$, on utilise en effet une transformée en ondelettes de Haar circulaire définie à l'aide des étapes élémentaires 6.3. Pour $\ell > 1$, on utilise une transformée en ondelettes 2D classique.

Les coefficients en ondelettes $\{\Omega_{\ell in}\}_{\ell in}$ du processus Ω_ℓ sont alors supposés être des variables aléatoires identiquement distribuées pour chaque couple (ℓ, i) d'échelles. Comme on l'a déjà fait à la section 6.4.1, on peut estimer, pour chaque (ℓ, i) les densités de probabilité des coefficients $\{\Omega_{\ell in}\}_n$ à l'aide des histogrammes empiriques des coefficients $\Phi(\omega_\ell)$, où ω_ℓ est la géométrie de la texture A d'origine.

Algorithme de calcul. On peut donc générer des nouveaux paramètres angulaires $\widetilde{\omega}_\ell$ en utilisant une procédure d'égalisation d'histogrammes similaire à celle décrite par le pseudo-code 2.

Une fois ces paramètres synthétisés, on peut générer un champ d'association $\{\widetilde{\mathrm{F}}_\ell\}_\ell$. Ceci constitue une nouvelle version de la fonction `calcul_champ`(A) du code générique 5.

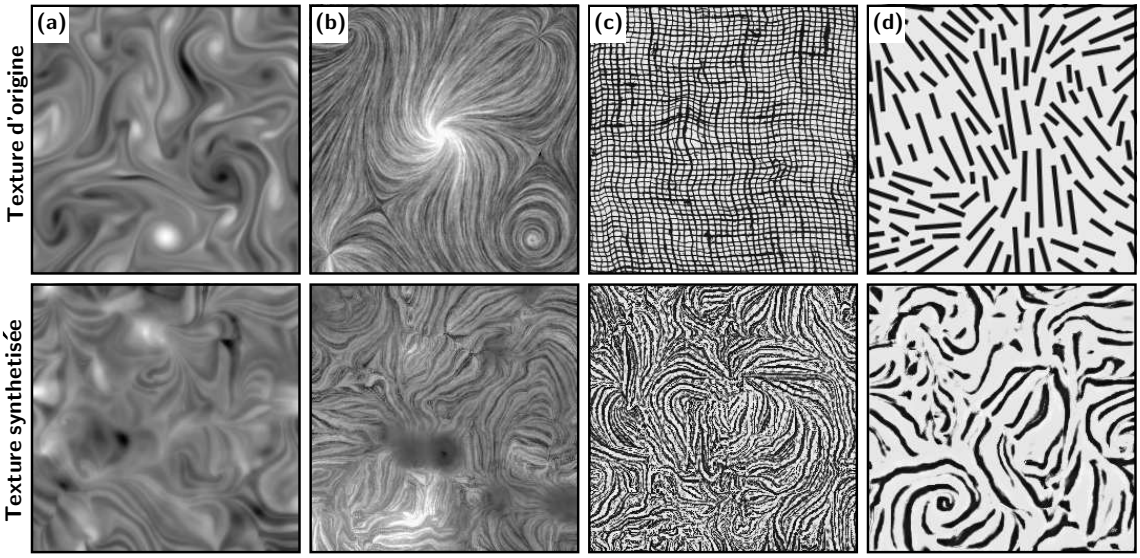


Fig. 6.22 *Synthèse de texture avec synthèse du champ d'association et des coefficients de bandelettes.*

Résultats. La figure 6.22 montre des résultats de synthèse de textures turbulentes. On observe que les textures synthétisées possèdent des structures géométriques relativement longues.

En (a) et (b), les structures géométriques sont un peu plus courtes que celles d'origine et la géométrie est globalement moins régulière. Ceci provient de la modélisation des champs

d'association par des coefficients d'ondelettes de différences angulaires qui n'est pas assez efficace.

En (c) la géométrie est totalement différente de la géométrie initiale (composée d'un enchevêtrement de courbes exclusivement horizontales et verticales). Ceci est dû au fait que notre transformée n'est pas capable de prendre en compte la juxtaposition de deux orientations (la géométrie doit être localement parallèle).

En (d), on observe une géométrie courbe (ou rectiligne sur des courtes distances), différente de la géométrie initiale. Les champs d'association sont en effet synthétisés indépendamment des coefficients de bandelettes. Ceci est problématique pour les textures possédant des zones sans géométrie.

Bibliographie

[1] R. J. Adler. *The Geometry of Random Fields.* Birkhäuser, 2003.

[2] P. K. Agarwal and S. Suri. Surface approximation and geometric partitions. *SIAM Journal on Computing*, 27(4) :1016–1035, August 1998.

[3] S. Agarwal, R. Ramamoorthi, S. Belongie, and H. Wann Jensen. Structured importance sampling of environment maps. *ACM Trans. Graph.*, 22(3) :605–612, 2003.

[4] P. Alliez, D. Cohen-Steiner, O. Devillers, B. Lévy, and M. Desbrun. Anisotropic polygonal remeshing. *ACM Transactions on Graphics. Special issue for SIGGRAPH conference*, pages 485–493, 2003.

[5] P. Alliez and C. Gotsman. *Recent Advances in Compression of 3D Meshes*, pages 3–26. Springer-Verlag, 2005.

[6] P. Alliez, G. Ucelli, C. Gotsman, and M. Attene. Recent advances in remeshing of surfaces. *AIM@SHAPE State-of-the-art report*, 2005.

[7] B.K. Alpert. *Wavelets and Other Bases for Fast Numerical Linear Algebra*, pages 181–216. C. K. Chui, editor, Academic Press, San Diego, CA, USA, 1992.

[8] B.K. Alpert. A class of bases in L^2 for the sparse representation of integral operators. *SIAM J. Math. Anal.*, 24, 1993.

[9] G. Archer and D.M. Titterington. On some bayesian/regularization methods for image restoration. *IEEE Trans. Image Processing*, 4(7) :989–995, July 1995.

[10] A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray, and J.F. Muzy. *Fractales, Ondelettes et Turbulence : de l'ADN aux croissances cristallines.* Diderot Editions, Paris, 1995.

[11] M. Ashikhmin. Synthesizing natural textures. In *SI3D '01 : Proceedings of the 2001 symposium on Interactive 3D graphics*, pages 217–226, New York, NY, USA, 2001. ACM Press.

[12] F. Attneave. Some informational aspects of visual perception. *Psychological Review*, 61 :183–193, 1954.

[13] A. Averbuch, R. Coifman, D. Donoho, M. Israeli, and J. Walden. Fast slant stack : A notion of radon transform for data on a cartesian grid which is rapidly computable,algebraically exact, geometrically faithful, and invertible. *SIAM Journal of Scientific Computing, to appear*, 2002.

[14] H. B. Barlow. Possible principles underlying the transformation of sensory messages. In W. A. Rosenblith, editor, *Sensory Communication*, pages 217–234. MIT Press, 1961.

[15] A. Barron, L. Birge, and P. Massart. Risk bounds for model selection via penalization. *Probab. Th. Rel. Fields*, 113 :301–413, 1999.

[16] A.J. Bell and T.J. Sejnowski. The independent components of natural scenes are edge filters. *Vision Res.*, 37(23) :3327–3338, December 1987.

[17] O. Ben-Shahar and S.W. Zucker. The perceptual organization of texture flow : A contextual inference approach. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell*, 25(4) :401–417, 2003.

[18] H. Biermann, D. Zorin, and A. Levin. Piecewise smooth subdivision surfaces with normal control. In *Proc. of SIGGRAPH 2000*, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, pages 113–120, July 2000.

[19] J. S. De Bonet. Multiresolution sampling procedure for analysis and synthesis of texture images. In *SIGGRAPH '97 : Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 361–368. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 1997.

[20] L. Breiman, J. H. Friedman, R. A. Olshen, , and C. J. Stone. *Classification and Regression Trees*. Wadsworth, Belmont, CA, 1984.

[21] P. C. Bressloff and J. D. Cowan. The functional geometry of local and horizontal connections in a model of v1. *J Physiol Paris*, 97(2-3) :221–236, Mar-May 2003.

[22] P. Brodatz. *Textures : a Photographic Album for Artists and Designers*. Dover Publications, NY, 1966.

[23] A. Buades, B. Coll, and J. M. Morel. Denoising image sequences dose not require motion estimation. *Preprint CMLA*, 2005.

[24] A. Buades, B. Coll, and J. M. Morel. On image denoising methods. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation, To Appear*, 2005.

[25] R.W. Buccigrossi and E.P. Simoncelli. Image compression via joint statistical characterization in the wavelet domain. *IEEE Trans. Image Processing*, 8(12) :1688–1701, December 1999.

[26] P. J. Burt and E. H. Adelson. The laplacian pyramid as a compact image code. *IEEE Trans. on Communications*, 4, April 1983.

[27] B. Cabral and L. C. Leedom. Imaging vector fields using line integral convolution. In *SIGGRAPH '93 : Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 263–270, New York, NY, USA, 1993. ACM Press.

[28] E. J. Candès and D. L. Donoho. Curvelets and reconstruction of images from noisy radon data. *Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII, A. Aldroubi, A. F. Laine, M. A. Unser eds., Proc. SPIE 4119*, 2000.

[29] E. Candès and L. Demanet. Curvelets and fourier integral operators. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 336 :395–398, 2003.

[30] E. Candès and L. Demanet. The curvelet representation of wave propagators is optimally sparse. *Comm. Pure Appl. Math*, 58(11) :1472–1528, 2005.

[31] E. Candès and D. Donoho. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise C_2 singularities. *Comm. Pure Appl. Math.*, 57(2) :219–266, 2004.

[32] E. J. Candès, L. Demanet, D. L. Donoho, and L. Ying. Fast discrete curvelet transforms. *Tech. Repport*, 2005.

[33] E. J. Candès and D. L. Donoho. Recovering edges in ill-posed inverse problems optimality of curvelet frames. *Ann. Statist*, 30 :784 –842, 2000.

[34] A. Canny. A computationnal approach to edge detection. *IEEE Trans. Patt. Recog. and Mach. Intell*, 8(6) :679–698, 1986.

[35] S. Carlsson. Sketch based coding of grey level images. *Signal Processing*, 15(1) :57–83, 1988.

[36] B. B. Chai, J. Vass, and X. Zhuang. Significance-linked connected component analysis for wavelet image coding. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(6) :774–784, June 1999.

[37] T. Chan and J. Shen. Variational restoration of nonflat image features : Models and algorithms. *j-SIAM-J-APPL-MATH*, 61(4) :1338–1361, August 2001.

[38] V. Chappelier and C. Guillemot. Oriented wavelet transform for image compression and denoising. *IEEE Transactions on Image Processing, submitted*, 2005.

[39] C. Chefd'hotel, D. Tschumperl'e, R. Deriche, and O. Faugeras. Regularizing flows for constrained matrix-valued images. *J. Math. Imaging Vis.*, 20(1-2) :147–162, 2004.

[40] R. Chellappa and R. L. Kashyap. Texture synthesis using 2-D noncausal autoregressive models. *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-33(1) :194, 1985.

[41] Y. Chen, L. Xia, T-T. Wong, X. Tong, H. Bao, B. Guo, and H-Y. Shum. Visual simulation of weathering by γ-ton tracing. *ACM Trans. Graph.*, 24(3) :1127–1133, 2005.

[42] P. Cignoni, C. Rocchini, and R. Scopigno. Metro : Measuring error on simplified surfaces. *Computer Graphics Forum*, 17(2) :167–174, June 1998.

[43] A. Cohen, W. Dahmen, I. Daubechies, and R. DeVore. Tree approximation and optimal encoding. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 11(2) :192–226, sept 2001.

[44] A. Cohen, I. Daubechies, and J-C. Feauveau. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45 :485–560, 1992.

[45] A. Cohen, R. deVore, P. Petrushev, and H. Xu. Non linear approximation and the space $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^2)$. *Amer. J. Math*, 121 :587–628, 1999.

[46] M. F. Cohen, J. Shade, S. Hiller, and O. Deussen. Wang tiles for image and texture generation. *ACM Trans. Graph.*, 22(3) :287–294, 2003.

[47] D. Cohen-Steiner, P. Alliez, and M. Desbrun. Variational shape approximation. *ACM Transactions on Graphics. Special issue for SIGGRAPH conference*, pages 905–914, 2004.

[48] JPEG200 Committee. Jpeg 2000 image coding system, part1. *ISO/IEC JTC 1/SC 29/WG 1 N2678, 19*, July 2002.

[49] R.L. Cook and T. DeRose. Wavelet noise. *ACM Trans. Graph.*, 24(3) :803–811, 2005.

[50] A. Criminisi, P. Pérez, and K. Toyama. Object removal by exemplar-based inpainting. In *CVPR (2)*, pages 721–728, 2003.

[51] G. Cross and A. K. Jain. Markov random field texture models. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 5(1) :25–39, January 1983.

[52] W. Dahmen and R. Schneider. Wavelets on manifolds I : Construction and domain decomposition. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 31(1) :184–230, 2000.

[53] K. J. Dana, B. van Ginneken, N. Nayar, and J. J. Koenderink. Reflectance and texture of real-world surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 18(1) :1–34, 1999.

[54] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41 :909–996, 1988.

[55] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1992.

[56] I. Daubechies, M. Defrise, and C. De Mol. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint, November 2003.

[57] I. Daubechies, R. DeVore, C.S. Güntürk, and V.A. Vaishampayan. Exponential precision in a/d conversion with an imperfect quantizer. *IEEE Journal in Information Theory, To Appear*, 2003.

[58] I. Daubechies, O. Runborg, and W. Sweldens. Normal multiresolution approximation of curves. *Constructive Approximation*, 20(3) :399–463, 2004.

[59] I. Daubechies and W. Sweldens. Factoring wavelet transforms into lifting steps. *J. Fourier Anal. Appl.*, 4(3) :245–267, 1998.

[60] S. Dekel, N. Dyn, and R. Kazinnik. Low bit-rate image coding using adaptive geometric splines approximation. *In preparation*, 2005.

[61] L. Demanet, B. Song, and T. Chan. Image inpainting by correspondence maps : a deterministic approach. In *VLSM 2003 proceedings*, October 2003.

[62] L. Demaret, N. Dyn, and A. Iske. Image compression by linear splines over adaptive triangulations. Preprint, Technische Universitat Munchen, 2004.

[63] T. DeRose, M. Kass, and T. Truong. Subdivision surfaces in character animation. In *Proc. of SIGGRAPH 98*, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, pages 85–94, July 1998.

[64] A. Desolneux, L. Moisan, and J-M. Morel. A grouping principle and four applications. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell*, 25(4) :508–513, 2003.

[65] R. DeVore. Nonlinear approximation. *Acta. Numer.*, 7 :51–150, 1998.

[66] M. N. Do, D. Marchand-Maillet, and M. Vetterli. On the bandlimitedness of the plenoptic function. In *Proc. of IEEE International Conference on Image Processing*, sept 2005.

[67] M. N. Do and M. Vetterli. The contourlet transform : an efficient directional multiresolution image representation. *IEEE Transactions Image on Processing, To appear*, 2005.

[68] D. Donoho. Wedgelets : Nearly-minimax estimation of edges. *Ann. Statist*, 27 :353–382, 1999.

[69] D. Donoho and R. Coifman. *Translation-Invariant De-Noising*, pages 125–150. Springer, NY, 1995.

[70] D. Donoho and I. Johnstone. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81 :425–455, Dec 1994.

[71] D.L. Donoho. Nonlinear solution of linear problems by wavelet-vaguelette decomposition. *App. and Comp. Harmonic Analysis*, 2, 1992.

[72] D.L. Donoho and C. Grimes. Image manifolds isometric to euclidean space. *J. Math. Imaging Computer Vision*, 23, July 2005.

[73] D.L. Donoho and I.M. Johnstone. Ideal denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases. *Comptes Rendus de l'Acadéémie des Sciences*, Serie 1(319) :1317–1322, 1994.

[74] J. Dorsey, H. K. Pedersen, and P. Hanrahan. Flow and changes in appearance. In *Proceedings of the ACM Conference on Computer Graphics*, pages 411–420, New York, August 4–9 1996. ACM.

[75] C. Dossal. *Estimation de fonctions géométriques et déconvolution sous contrainte d'espacement*. PhD thesis, École Polytechnique, 2005.

[76] P.L. Dragotti and M. Vetterli. Wavelet footprints : Theory, algorithms and applications. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 51(5) :1306–1323, Mat 2003.

[77] M. Eck, T. DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery, and W. Stuetzle. Multiresolution Analysis of Arbitrary Meshes. *Computer Graphics*, 29(Annual Conference Series) :173–182, 1995.

[78] A. A. Efros and T. K. Leung. Texture synthesis by non-parametric sampling. In *ICCV '99 : Proceedings of the International Conference on Computer Vision-Volume 2*, page 1033. IEEE Computer Society, 1999.

[79] A.A. Efros and W.T. Freeman. Image quilting for texture synthesis and transfer. *Proc. of SIGGRAPH 2001*, pages 341–346, August 2001.

[80] J. Elder. Are edges incomplete ? *International Journal of Computer Vision*, 34(2/3) :97–122, 1999.

[81] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, Boston, 3. edition, 1993.

[82] D.J. Field, A. Hayes, and R.F Hess. Contour integration by the human visual system : evidence for a local association field. *Vision Research*, 33 :173–193, 1993.

[83] K. W. Fleischer, D. H. Laidlaw, B. L. Currin, and A. H. Barr. Cellular texture generation. In *SIGGRAPH '95 : Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 239–248, New York, NY, USA, 1995. ACM Press.

[84] Y. Fregnac. Neurogeometry and entoptic visions of the functional architecture of the brain. *J Physiol Paris*, 97(2-3) :87–92, Mar-May 2003.

[85] M. Garland and P. Heckbert. Surface simplification using quadric error metrics. *Proc. of SIGGRAPH 1997*, pages 209–215, 1997.

[86] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6) :721–741, November 1984.

[87] J. J. Gibson. *The Perception of the Visual World*. Houghton Mifflin, Boston, Massachusetts, 1950.

[88] X. Gu, S. Gortler, and H. Hoppe. Geometry Images. *Proc. of SIGGRAPH 2002*, pages 355–361, 2002.

[89] I. Guskov, K. Vidimce, W. Sweldens, and P. Schröder. Normal meshes. In *Proc. of SIGGRAPH 2000*, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, pages 95–102, 2000.

[90] R. M. Haralick. Statistical and structural approaches to texture. *Proc. IEEE*, 67(5) :786–804, May 1979.

[91] P. S. Heckbert. Survey of texture mapping. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 6(11) :56–67, November 1986.

[92] D. J. Heeger and J. R. Bergen. Pyramid-Based texture analysis/synthesis. In Robert Cook, editor, *SIGGRAPH 95 Conference Proceedings*, Annual Conference Series, pages 229–238. ACM SIGGRAPH, Addison Wesley, August 1995.

[93] G. T. Herman. *Image Reconstruction From Projections, The Fundamentals of Computerized Tomography.* Academic Press, New York, 1980.

[94] A. Hertzmann and D. Zorin. Illustrating smooth surfaces. In *SIGGRAPH '00 : Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 517–526. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 2000.

[95] H. Hoppe. Progressive meshes. *Proc. of SIGGRAPH 1996*, pages 99–108, 1996.

[96] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, M. Halstead, H. Jin, J. McDonald, J. Schweitzer, and W. Stuetzle. Piecewise smooth surface reconstruction. In *Proc. of SIGGRAPH 94*, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, pages 295–302, July 1994.

[97] H. Hoppe and E. Praun. Shape compression using spherical geometry images. *Multiresolution in Geometric Modelling*, 2003.

[98] B. Horn and B. Schunk. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 20, 1981.

[99] W. H. Hsiao and R. P. Millane. Effects of occlusion, edges, and scaling on the power spectra of natural images. *Journal of the Optical Society of America A*, 22(9) :1789–1797, September 2005.

[100] J. Huang and D. Mumford. Statistics of natural images and models. In *Proc. of CVPR99*, pages 541–547, 1999.

[101] D. Hubel and T. Wiesel. Receptive fields and functional architecture of monkey striate cortex. *Journal of Physiology (London)*, 195 :215–243, 1968.

[102] E. Jonsson, S. C. Huang, and T. Chan. Total variation regularization in positron emission tomography. In *tech. rep., Mathematics, UCLA*, 1998.

[103] B. Julesz. Visual pattern discrimination. *IRE Trans. Inform. Theory*, 8(2) :84–92, 1962.

[104] J. Kalifa and S. Mallat. Thresholding estimators for linear inverse problems and deconvolutions. *The Annals of Statistics*, 31(1) :58–109, feb 2003.

[105] R. L. Kashyap and P. M. Lapsa. Synthesis and estimation of random fields using long-correlation models. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6) :800–809, November 1984.

[106] D. Kersten. Predictability and redundancy of natural images. *Journal of the Optical Society of America A*, 4(12) :2395–2400, December 1987.

[107] A. Khodakovsky and I. Guskov. *Compression of Normal Meshes.* Springer-Verlag, 2003.

[108] N. Kingsbury. Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals. *Journal of Appl. and Comput. Harmonic Analysis*, 10 :234–253, 2001.

[109] A.N. Kolmogorov. Dissipation of energy in a locally isotropic turbulence. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 32, 1941.

[110] A. Korostelev and A. Tsybakov. *Minimax Theory of Image Reconstruction*, volume 82 of *Lecture Notes in Statistics.* Springer, 1993.

[111] V. Kwatra, I. Essa, A. Bobick, and N. Kwatra. Texture optimization for example-based synthesis. *ACM Transactions on Graphics, SIGGRAPH 2005*, August 2005.

[112] V. Kwatra, A. Schödl, I. Essa, G. Turk, and A. Bobick. Graphcut textures : Image and video synthesis using graph cuts. *ACM Transactions on Graphics, SIGGRAPH 2003*, 22(3) :277–286, July 2003.

[113] S. Laughlin. A simple coding procedure enhances a neuron's information capacity. *Z Naturforsch*, 36(9) :910–912, September 1981.

[114] E. Le Pennec and S. Mallat. Sparse Geometrical Image Approximation with Bandelets. *IEEE Transaction on Image Processing*, 14(4) :423–438, 2004.

[115] E. Le Pennec and S. Mallat. Bandelet Image Approximation and Compression. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, page to appear, 2005.

[116] A.B. Lee, D. Mumford, and J. Huang. Occlusion models for natural images : A statistical study of a scale-invariant dead leaves model. *International Journal of Computer Vision*, 41(1/2) :35–59, 2001.

[117] T. S. Lee. Computations in the early visual cortex. *J Physiol Paris*, 97(2-3) :121–139, Mar-May 2003.

[118] M. Levoy, K. Pulli, B. Curless, S. Rusinkiewicz, D. Koller, L. Pereira, M. Ginzton, S. Anderson, J. Davis, J. Ginsberg, J. Shade, and D. Fulk. The digital michelangelo project : 3D scanning of large statues. In *Proc. of Siggraph 2000*, pages 131–144, 2000.

[119] X. Li. On exploiting geometric constraint of image wavelet coefficients. *IEEE Trans. on Image Processing*, 12(11) :1378–1387, November 2003.

[120] Y. Li, L. Sharan, and E.H. Adelson. Compressing and companding high dynamic range images with subband architectures. *ACM Trans. Graph.*, 24(3) :836–844, 2005.

[121] P. Lindstrom and G. Turk. Fast and memory efficient polygonal simplification. *Proc. IEEE Visualization '98*, pages 279–286, October 1998.

[122] J. Liu and P. Moulin. Information-theoretic analysis of interscale and intrascale dependencies between image wavelet coefficients. *IEEE Trans. on Image Processing*, 10(11) :1647–1658, November 2001.

[123] Y. Liu, W-C. Lin, and J.H. Hays. Near regular texture analysis and manipulation. *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH 2004)*, 23(3) :368–376, August 2004.

[124] Y. Liu, Y. Tsin, and W-C. Lin. The promise and perils of near-regular texture. *Int. J. Comput. Vision*, 62(1-2) :145–159, 2005.

[125] Z. Liu, C. Liu, H-Y. Shum, and Y. Yu. Pattern-based texture metamorphosis. In *PG '02 : Proceedings of the 10th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, page 184, Washington, DC, USA, 2002. IEEE Computer Society.

[126] B. D. Lucas and T. Kanade. An iterative image registration technique with an application to stereo vision. In Ann Drinan, editor, *Proceedings of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI '81)*, pages 674–679, Los Altos, CA, August 24–28 1991. William Kaufmann.

[127] S. Lyu, D. Rockmore, and H. Farid. A digital technique for art authentication. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 101(49) :17006–17010, 2004.

[128] S. Mallat. A theory of multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11 :674–693, July 1989.

[129] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing.* Academic Press, San Diego, 1998.

[130] S. Mallat. Method and apparatus for processing signals with grouping bandelets using association fields, let it wave, pct submission for european pattent, nov 2005.

[131] S. G. Mallat and S. Zhong. Characterization of signals from multiscale edges. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(7) :710–732, July 1992.

[132] D. Marr. *Vision.* Freeman, San Francisco, 1982.

[133] B. Matei and A. Cohen. *Nonlinear Subdivison Schemes : Applications to Image processing, in Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling*, pages 93–97. A. Iske, E. Quak and M.S. Floater ed., Springer Verlag, 2002.

[134] W. Matusik, M. Zwicker, and F. Durand. Texture design using a simplicial complex of morphable textures. *ACM Trans. Graph.*, 24(3) :787–794, 2005.

[135] G. Medioni, M-S. Lee, and C-K. Tang. *A Computational Framework for Segmentation and Grouping.* Elsevier, 2000.

[136] F. G. Meyer and R. R. Coifman. Brushlets : A tool for directional image analysis and image compression. *Journal of Appl. and Comput. Harmonic Analysis*, 5 :147–187, 1997.

[137] Y. Meyer. Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs. *Séminaire Bourbaki*, 662, 1985–1986.

[138] Y. Meyer. *Ondelettes et Opérateurs.* pub-hermann, pub-hermann :adr, 1990.

[139] D. Mumford and B. Gidas. Stochastic models for generic images. *Q. Appl. Math.*, LIV(1) :85–111, 2001.

[140] D. Mumford and S.C. Zhu. Prior learning and gibbs reaction-diffusion. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(11) :1236–1250, 1997.

[141] T.H. Newton and D.G. Potts (editors). *Radiology of the Skull and Brain, Vol 5 : Technical Aspects of Computed Tomography.* C.V. Mosby Company, 1981.

[142] F. Neyret. Advected textures. *Symposium on Computer Animation'03*, july 2003.

[143] Y. Ohtake, A. Belyaev, and S. Seidel. Ridge-valley lines on meshes via implicit surface fitting. *ACM Transactions on Graphics*, 23(3) :609–612, August 2004.

[144] B. A. Olshausen and D. J. Field. Emergence of simple-cell receptive-field properties by learning a sparse code for natural images. *Nature*, 381(6583) :607–609, June 1996.

[145] F. O'Sullivan. A statistical perspective on ill-posed inverse problems. *Statist. Sci.*, 1 :502–527, 1986.

[146] S. Owada, F. Nielsen, M. Okabe, and T. Igarashi. Volumetric illustration : Designing 3d models with internal textures. *Proceedings of SIGGRAPH 2004*, pages 322–328, 2004.

[147] R. Paget and I. D. Longstaff. Texture synthesis via a noncausal nonparametric multiscale markov random field. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(6) :925–931, June 1998.

[148] J. E. Pearson. Complex patterns in a simple system. *Science*, 261(189) :777–786, July 1993.

[149] M. Peercy, J. Airey, and B. Cabral. Efficient bump mapping hardware. In *Proc. of SIGGRAPH 1997*, pages 303–306, 1997.

[150] K. Perlin. An image synthesizer. In *SIGGRAPH '85 : Proceedings of the 12th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 287–296, New York, NY, USA, 1985. ACM Press.

[151] K. Perlin. Improving noise. In *SIGGRAPH '02 : Proceedings of the 29th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 681–682, New York, NY, USA, 2002. ACM Press.

[152] P. Perona. Orientation diffusions. *IEEE Trans. Image Processing*, 7(3) :457–467, March 1998.

[153] B. Pesquet-Popescu and V. Bottreau. Three dimensional lifting schemes for motion compensated video compression. In *Proc. IEEE Int. Conf. Accoust. Speech and Signal Proc.*, 2001.

[154] G. Peyré. Alpert transform toolbox, available on Matlab Central. `http ://www.mathworks.com/matlabcentral/`, 2005.

[155] G. Peyré and S. Mallat. Bandelets toolbox, available on Matlab Central. `http ://www.mathworks.com/matlabcentral/`, 2005.

[156] G. Peyré and S. Mallat. Surface compression with geometric bandelets. *ACM Transactions on Graphics, Vol. 24(3), (Proc. of SIGGRAPH'05)*, 24(3), Aug. 2005.

[157] T.A. Poggio, V. Torre, and C. Koch. Computational vision and regularization theory. *Nature*, 317 :314–319, 1985.

[158] K. Popat and R. W. Picard. Novel cluster-based probability model for texture synthesis, classification, and compression. In *Proc. SPIE Vol. 2094, p. 756-768, Visual Communications and Image Processing '93, Barry G. Haskell ; Hsueh-Ming Hang ; Eds.*, pages 756–768, October 1993.

[159] J. Portilla and E. P. Simoncelli. A parametric texture model based on joint statistics of complex wavelet coefficients. *Int. J. Comput. Vision*, 40(1) :49–70, 2000.

[160] J. Portilla, V. Strela, M. Wainwright, and E. P. Simoncelli. Image denoising using a scale mixture of Gaussians in the wavelet domain. *IEEE Trans Image Processing*, 12(11) :1338–1351, November 2003.

[161] C. J. Burton I. R.Moorhead. Color and spectral structure in natural scenes. *Applied Optics*, 26 :157–170, 1987.

[162] J. Romberg, H. Choi, and R. Baraniuk. Bayesian Tree-Structured Image Modeling using Wavelet Domain Hidden Markov Models. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(7), July 2001.

[163] J. Romberg, H. Choi, R. Baraniuk, and N. Kingsbury. Hidden Markov Tree Models for Complex Wavelet Transforms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, May 2002. Unpublished.

[164] S. Roweis and L. Saul. Nonlinear Dimensionality Reduction by Locally Linear Embedding. *Science*, 290(5500) :2323–2326, Dec. 2000.

[165] L.I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. In *Proceedings of the eleventh annual international conference of the Center for Nonlinear Studies on Experimental mathematics : computational issues in nonlinear science*, pages 259–268. Elsevier North-Holland, Inc., 1992.

[166] A. Said and W.A. Pearlman. A new fast and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 6 :243–250, June 1996.

[167] P. Sander, Z. Wood, S. Gortler, J. Snyder, and H. Hoppe. Multi-chart Geometry Images. *Proc. Symposium on Geometry Processing 2003*, pages 146–155, 2003.

[168] P. Schrder and W. Sweldens. Digital geometry processing. *SIGGRAPH 2001 Course Notes*, 2001.

[169] P. Schröder and W. Sweldens. Spherical Wavelets : Efficiently Representing Functions on the Sphere. In *Proc. of SIGGRAPH 95*, pages 161–172, 1995.

[170] O. Schwartz and E. P. Simoncelli. Natural signal statistics and sensory gain control. *Nature Neuroscience*, 4(8) :819–825, August 2001.

[171] A. Secker and D. Taubman. Lifting based invertible motion adaptive transform, limat, framework for highly scalable video compression. *IEEE Trans. Image Proc.*, 12, dec 2003.

[172] S. D. Servetto, K. Ramchandran, and M. T. Orchard. Image coding based on a morphological representation of wavelet data. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(9) :1161–1173, September 1999.

[173] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27(3) :379–423, 1948.

[174] J. M. Shapiro. Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients. *IEEE Trans. Signal Processing*, 41(12) :3445–3462, December 1993.

[175] R. Shukla, P.L. Dragotti, M. Do, and M. Vetterli. Rate distortion optimized tree structured compression algorithms for piecewise smooth images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(3), 2005.

[176] E.P. Simoncelli, W.T. Freeman, E.H. Adelson, and D.J. Heeger. Shiftable multiscale transforms. *IEEE Trans. Information Theory*, 38(2) :587–607, March 1992. Special Issue on Wavelets.

[177] G. Slabaugh, B. Culbertson, T. Malzbender, and R. Schafer. A survey of methods for volumetric scene reconstruction from photographs. In *Proc. of IEEE Eurographics Workshop*, pages 81–100, Wien, June 21–22 2001. Springer-Verlag.

[178] M. V. Srinivasan, S. B. Laughlin, and A. Dubs. Predictive coding : a fresh view of inhibition in the retina. *Proc. R. Soc. Lond. B*, 216 :427–459, 1982.

[179] J. L. Starck, E. J. Candès, and D. L. Donoho. The curvelet transform for image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11 :670–684, 2000.

[180] J. L. Starck, D. L. Donoho, and E. J. Candès. Astronomical image representation by the curvelet transform. *Astronomy and Astrophysics*, 398 :785–800, 2003.

[181] J. Sun, L. Yuan, J. Jia, and H-Y. Shum. Image completion with structure propagation. *ACM Trans. Graph.*, 24(3) :861–868, 2005.

[182] W. Sweldens. The lifting scheme : A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 3(2) :186–200, 1996.

[183] D. Taubman. High performance scalable image compression with ebcot. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(7) :1151–1170, July 2000.

[184] D. Taubman and M. Marcellin. *JPEG2000 : Image compression fundamentals, standards and practice.* Kluwer Academic Publishers, Nov. 2001.

[185] J. B. Tenenbaum, V. de Silva, and J. C. Langford. A Global Geometric Framework for Nonlinear Dimensionality Reduction. *Science*, 290(5500) :2319–2323, Dec. 2000.

[186] A.N. Tikhonov. The regularization of ill-posed problems. *Dokl. Akad. Nauk.*, SSR 153(1) :49–52, 1963.

[187] G. Turk. Generating textures on arbitrary surfaces using reaction-diffusion. In *SIGGRAPH '91 Proceedings*, pages 289–298, 1991.

[188] M. Turk and A. Pentland. Eigenfaces for recognition. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 3(1) :71–86, 1991.

[189] I. Ur-Raman, I. Drori, V. Stodden, and P. Schroder. Multiscale representations of manifold-valued data. *to appear in SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 2005.

[190] J. J. van Wijk. Image based flow visualization. In *SIGGRAPH '02 : Proceedings of the 29th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 745–754, New York, NY, USA, 2002. ACM Press.

[191] Vladan Velisavljevic, Baltasar Beferull-Lozano, Martin Vetterli, and Pier Luigi Dragotti. Directionlets : Anisotropic Multidirectional representation with separable filtering. *IEEE Transactions on Image Processing, To appear*, 2005.

[192] M. Vetterli. Multi-dimensional sub-band coding : Some theory and algorithms. *Signal Processing*, 6 :97–112, 1984.

[193] M. Vetterli and J. Kovavcević. *Wavelets and Subband Coding.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1995.

[194] M. J. Wainwright, E. P. Simoncelli, and A. S. Willsky. Random cascades on wavelet trees and their use in modeling and analyzing natural imagery. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 11(1) :89–123, July 2001.

[195] M. Wakin, D. Donoho, H. Choi, and R. Baraniuk. High-Resolution Navigation on Non-Differentiable Image Manifolds. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Philadelphia, PA, March 2005.

[196] M. Wakin, D. Donoho, H. Choi, and R. Baraniuk. The Multiscale Structure of Non-Differentiable Image Manifolds. In *Optics and Photonics*, San Diego, CA, July 2005.

[197] M. Wakin, J. Romberg, H. Choi, and R. Baraniuk. Wavelet-domain Approximation and Compression of Piecewise Smooth Images. *IEEE Transactions on Image Processing, To appear*, 2005.

[198] D. Wang, L. Zhang, and A. Vincent. Curved wavelet transform for image coding. *IEEE Trans. on Image Processing, To Appear*, 2005.

[199] L. Wang, X. Wang, X. Tong, S. Lin, S. Hu, B. Guo, and H-Y. Shum. View-dependent displacement mapping. *ACM Trans. Graph.*, 22(3) :334–339, 2003.

[200] L-Y. Wei and M. Levoy. Fast texture synthesis using tree-structured vector quantization. In *SIGGRAPH '00 : Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 479–488. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 2000.

[201] J. Weickert and C. Schnörr. Variational optic flow computation with a spatio-temporal smoothness constraint. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 14(3) :245–255, 2001.

[202] M. Wertheimer. Principles of perceptual organisation. In W. H. Ellis, editor, *Source Book of Gestalt Psychology*. London, 1938.

[203] A. Witkin and M. Kass. Reaction-diffusion textures. In *SIGGRAPH '91 : Proceedings of the 18th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 299–308. ACM Press, 1991.

[204] Andrew P. Witkin. Scale-space filtering. In Alan Bundy, editor, *Proceedings of the 8th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 1019–1022. William Kaufmann, August 1983.

[205] F. Wolf and T. Geisel. Universality in visual cortical pattern formation. *J Physiol Paris*, 97(2-3) :253–264, Mar-May 2003.

[206] D. N. Wood, D. I. Azuma, K. Aldinger, B. Curless, T. Duchamp, D. H. Salesin, and W. Stuetzle. Surface light fields for 3d photography. In *Proc. of SIGGRAPH 2000*, pages 287–296, 2000.

[207] S. Worley. A cellular texture basis function. In *SIGGRAPH '96 : Proceedings of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 291–294, New York, NY, USA, 1996. ACM Press.

[208] Q. Wu and Y. Yu. Feature matching and deformation for texture synthesis. *ACM Trans. Graph.*, 23(3) :364–367, 2004.

[209] Z. Xiong, K. Ramchandran, and M.T. Orchard. Space-frequency quantization for wavelet image coding. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(5) :677–693, May 1997.

[210] C. Xu and J. L. Prince. Snakes, shapes, and gradient vector flow. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3) :359–369, March 1998.

[211] S. C. Zhu, Y. Wu, and D. Mumford. Filters, random fields and maximum entropy (FRAME) : Towards a unified theory for texture modeling. *Int. J. Comput. Vision*, 27(2) :107–126, 1998.