



**HAL**  
open science

# Réduction au sens de la norme de Hankel de modèles dynamiques de dimension infinie

Nadia Maïzi

► **To cite this version:**

Nadia Maïzi. Réduction au sens de la norme de Hankel de modèles dynamiques de dimension infinie. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1992. Français. NNT : . tel-00410522

**HAL Id: tel-00410522**

**<https://pastel.hal.science/tel-00410522>**

Submitted on 21 Aug 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

spécialités :

Informatique Temps Réel, Robotique et **Automatique**

par

Nadia MAÏZI

sujet de thèse :

Réduction au sens de la norme de Hankel  
de modèles dynamiques de dimension infinie

Soutenue le 25 Septembre 1992 devant le jury composé de :

M. Jean-Paul MARMORAT	Président et Directeur de Thèse
M. Laurent BARATCHART	Rapporteur
M. Jonathan PARTINGTON	Rapporteur
M. Francis CONRAD	Examineur
M. François NEIRAC	Examineur

*A mes parents*



Si l'on faisait une chronologie des événements scientifiques qui m'ont poussée à réaliser cette thèse, ou plus précisément des personnes qui ont suscité mon intérêt pour l'Automatique, Yves Rouchaleau, professeur d'Automatique à l'Ecole des Mines de Paris aurait la primeur. En effet, c'est grâce à lui que j'ai découvert cette discipline et le Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole des Mines où s'est déroulé ce travail de recherche. Je tiens à l'en remercier très sincèrement.

Je remercie Marc Bordier à l'origine du sujet traité et qui aura posé la première pierre de mon étude.

Ce travail a été dirigé par Jean Paul Marmorat, et c'est à lui que vont maintenant tous mes remerciements pour la confiance qu'il m'a témoignée. Sa disponibilité et sa gentillesse ont toujours fait des discussions scientifiques que nous avons eues des moments non seulement enrichissants mais également agréables. De plus ses connaissances dans tous les domaines scientifiques que j'ai pu aborder au cours de ce travail ont permis que ses conseils soient souvent salvateurs. Je tiens à le remercier de présider mon jury de thèse.

Je remercie très chaleureusement Jonathan R. Partington, qui a accepté d'être l'un de mes rapporteurs. Il aura été mon premier contact avec la communauté scientifique internationale automatique, et grâce aux commentaires et remarques qu'il aura apportés à ce travail, il aura fortement contribué à guider sa progression.

Je remercie Laurent Baratchart pour ses encouragements et pour l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à ce travail en acceptant d'être rapporteur.

Francis Conrad m'aura prodigué de précieux conseils à propos de ce manuscrit. Quant à Francois Neirac il aura permis que le côté appliqué de cette étude soit mis en valeur en m'initiant aux problèmes spécifiques de thermique des chercheurs du Centre d'Energétique de l'Ecole des Mines.

Je les remercie de participer à ce jury.

Parce qu'il a déchiffré des équations, des concepts avec lesquels il n'était pas familier, mais qui ne l'ont pas empêché de mener à bout la censure de la toute première version de ce manuscrit, je tiens à remercier ici Jean-Pierre Merlet.

Une autre lectrice émérite est sûrement Catherine Bonnet, qui m'a fait profiter de son expérience et avec qui les échanges scientifiques et amicaux n'ont cessé depuis notre rencontre à propos d'un certain opérateur de Hankel.

*L'agréable cadre de travail offert par l'Ecole des Mines à Sophia Antipolis, les permanents et étudiants que j'ai pu y côtoyer et notamment le personnel du Centre de Mathématiques Appliquées ont concouru à créer l'ambiance sympathique dans laquelle s'est déroulée cette étude. En particulier, je voudrais remercier Eric Benoît avec qui j'ai partagé le "bureau des automaticiens du bout du couloir" pendant ces trois années, Jean-Marc Tanzy qui a toujours su répondre à mes interrogations sur les mystères de nos "machines". Enfin un grand merci à Dominique Micollier grâce à qui, le Centre de Mathématiques Appliquées n'est pas seulement un laboratoire scientifique, mais un endroit où l'on peut quelquefois oublier la science et parler de voyages, de vacances...*

*Et suivant la formule consacrée, "last but not least" sûrement, Lionel Ménard qui a été le témoin privilégié, (la victime ?), des tergiversations, des moments de doute ou d'euphorie d'une étudiante préparant une thèse. Je le remercie du fond du cœur.*

# Introduction

Un souhait légitime lorsque l'on observe un phénomène physique réel avec lequel on désire interagir est d'en élaborer un modèle. Il existe pour ce faire essentiellement deux approches : on peut supposer qu'un modèle exact du système réel existe. Il est souvent nécessaire de le simplifier, soit de le réduire, pour l'exploiter. Il s'agit du cadre de l'étude réalisée dans sa thèse par [Mic 79]. Le lecteur intéressé par une bibliographie assez complète sur les méthodes de réduction alors utilisées s'y reportera. On évoquera ici les plus connues, et en particulier les méthodes modales car elles interviendront dans certaines des applications développées par la suite.

Mais la connaissance d'un modèle exact pour le phénomène observé peut paraître irréaliste. C'est pourquoi, une seconde approche suppose que l'on ne peut de toutes façons qu'approximer le système physique réel. Elle procède alors de l'identification, problème classique en automatique qui tente de répondre à des préoccupations plus générales, à savoir représenter des systèmes physiques concrets dont on ne connaît pas à priori de modèle réel. Ceci nous permettra d'introduire les méthodes d'approximation rationnelle au sens d'une norme, auxquels le problème d'identification est lié, comme cela est fait par [Bar 87a] et ses références. Plus particulièrement, nous évoquerons la méthode d'approximation au sens de la norme de Hankel, approximation initiée par un résultat de [AAK 71] et qui fait l'objet de ce mémoire.

Ainsi, quel que soit le type de méthode choisie, la réduction apparaît comme une étape naturelle à la représentation des systèmes. De plus, disposer d'un modèle réduit présente des intérêts multiples parmi lesquels :

- la possibilité de pallier à des difficultés d'ordre numérique lorsque le système est de dimension élevée et que l'on veut utiliser le modèle à des fins de simulation;
- permettre l'extension de méthodes d'automatique comme la commande, le filtrage ... On peut ainsi évoquer le contrôle robuste des grandes structures flexibles, (par exemple les appendices utilisées pour les satellites (panneaux solaires, antennes,...)) dont la première étape consiste en une approximation  $L^\infty$  ([Cur 87]).

Les méthodes de réduction des systèmes complexes que nous présentons maintenant partent de l'hypothèse qu'un modèle mathématique linéaire donnant une description détaillée du processus est connu. Le but recherché, par une procédure d'approximation, est alors de déterminer un autre modèle linéaire de dimension finie inférieure à celle du précédent, qui soit une représentation satisfaisante du système.

Il existe une palette de méthodes qui permettent de réaliser une telle approximation [Mic 79]. Leur utilisation est plus justifiée par les bonnes performances qu'elles permettent d'obtenir plutôt que par leur assise théorique. Ainsi il existe principalement deux façons d'aborder le problème.

La première approche consiste à calculer un modèle réduit dont le développement coïncide avec celui du modèle mathématique représentant le système jusqu'à un certain degré. Cette approche regroupe les méthodes modales et les méthodes d'approximation de Routh ou de Padé. [Sha 75, GLP 91]

Une autre solution plus rigoureuse, mais numériquement plus lourde, consiste à définir une mesure caractérisant l'erreur commise en réduisant la dimension du modèle et à calculer un modèle réduit qui minimise cette mesure.

Plus particulièrement, décrivons ici les fondements des méthodes modales. Elles consistent à exploiter la relation entre les modes (ou spectre des valeurs propres du système) et le comportement du système auxquels ils sont associés. Ainsi l'approche modes dominants, classique en réduction consiste à séparer les modes du système en deux groupes :

- les modes dominants qui sont conservés dans le modèle réduit; ce groupe est habituellement constitué par les modes instables (valeurs propres ou pôles à partie réelle positive) et par les modes les plus lents (valeurs propres à partie réelle négative les plus proches de l'origine),
- les modes les plus rapides qui sont négligés.

Il apparaît clairement que le modèle réduit va dépendre des choix retenus pour la sélection des modes.

Dans [Mic 79], une méthode plus élaborée est utilisée : l'agrégation linéaire de variables d'état, qui consiste à imposer une relation linéaire entre les états du système et du modèle réduit. Ainsi, certaines propriétés du système original sont conservées par le modèle agrégé comme par exemple la commandabilité. De plus le choix des modes à conserver est établi conformément à des critères déduits de l'étude :

- de l'énergie associée à chaque mode : on calcule les contributions énergétiques apportées par chaque mode dans la sortie du système et on en réalise une classification par ordre d'importance



décroissante; on retire de cette classification les modes successifs dont la contribution s'annule (du fait de signes opposés);

- de certaines propriétés du régime asymptotique :  
des erreurs peuvent être commises si l'on ne tient pas compte des discontinuités introduites par certains modes rapides, le classement précédent les annihilant totalement. Il faut donc effectuer certaines corrections. Celles-ci étant faites, on dispose d'un classement des modes suivant leur contribution énergétique.

On retient alors les modes réellement dominants selon cette dernière classification. Il arrive que cette dominance soit claire mais souvent le choix des modes s'avère difficile. Certains, comme il est souligné dans [Hug 87], pensent, de manière excessive nous semble-t-il, que l'idée de mode est par essence une idée mathématique et qu'il est fortement improbable qu'aucune structure réelle ne vibre exactement de telle sorte que ses points bougent à l'unisson. Il faut cependant reconnaître que pour certaines structures, notamment mécaniques, l'idée du mode est souvent bonne, spécialement pour les modes les plus lents et que cela justifie en partie le principe d'approximation qui les utilise. En revanche, l'adéquation entre la théorie et la pratique pour les modes rapides est moins claire. Aussi, quelle que soit la méthode de classification choisie, il existera un litige sur le bien-fondé de la dominance d'un mode par rapport à un autre.

Ceci permet de conclure provisoirement qu'une hypothèse de connaissance du modèle (qui implique la connaissance de l'ordre du modèle en dimension finie) non seulement est simpliste car éloignée de la réalité physique (il ne semble pas possible de décrire exactement un phénomène physique par des équations mathématiques) mais n'aboutit même pas à la détermination d'un approximant optimal. Autant de raisons pour recourir au type d'approximation que nous présentons dans le paragraphe suivant qui ne suppose pas la connaissance du modèle réel et qui de plus est optimal.

Voyons ici comment le problème de la réduction de modèle est lié à une procédure, classique en automatique, appelée l'identification. Identifier un système physique concret, soit le décrire par un modèle qualitatif, est un pré-requis pour la résolution des problèmes d'automatique de commande ou d'estimation. Il existe de nombreux algorithmes permettant de répondre à ces questions dans le cas de systèmes rationnels, la résolution étant encore simplifiée lorsque la dimension de l'état, que l'on appellera ordre du système, ne dépasse pas un certain entier  $n$ . Ceci explique donc l'aspect attractif des modèles rationnels. Désormais, réduction de modèle et approximation rationnelle seront des notions confondues.

Mais ceci débouche sur un écueil lors des procédures d'identification classiques. Car si l'on suppose que les mesures effectuées sur le système physique proviennent d'un modèle rationnel, se pose alors le problème délicat de la détermination de son ordre. En général, cet ordre dépend du nombre de mesures réalisées sur le système

physique. Et pour obtenir un modèle d'ordre peu élevé, il est nécessaire d'abaisser artificiellement cet ordre par des méthodes souvent peu maîtrisées. Simplicité et fidélité se retrouvent alors situées aux antipodes.

Pour pallier à cela, une approche nouvelle des problèmes d'identification émerge depuis quelques années. Elle consiste, comme l'explique [Bar 87a], à rejeter l'hypothèse peu réaliste de l'exactitude du modèle : les données proviennent d'un système pas forcément rationnel. Quant à l'ordre, il n'est plus considéré comme une quantité à déterminer mais représente un paramètre du problème. Très précisément, on recherche un modèle rationnel qui soit le plus "proche" du système physique et dont l'ordre ne dépasse pas un certain entier  $n$ . Il faut alors expliciter le sens mathématique donné à "proche" : en plongeant le système à identifier et l'ensemble des modèles rationnels dans un espace vectoriel normé. On a ainsi posé le problème en terme d'approximation rationnelle dans un espace vectoriel normé, et on dispose d'une mesure objective de l'erreur faite en identifiant le système à son modèle. On peut en fonction de cette donnée, faire varier l'ordre de l'approximant. Il existe alors plusieurs types d'approximations rationnelles intéressants du point de vue de l'Automatique, et dont certains sont mentionnés en annexe A, qui diffèrent par la norme au sens de laquelle le problème d'approximation est posé.

Nos travaux se sont concentrés sur l'étude de l'approximation au sens de la norme de Hankel, pour laquelle l'erreur à minimiser est définie par

$$\inf_{y_r} \sup_u \frac{\|y - y_r\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}$$

où  $y$  représente la sortie du système initial,  $y_r$  celle du système réduit d'ordre  $r$  et où  $u$  représente toute entrée bornée pour la norme  $L^2$ . On peut également poser ce problème d'approximation en terme d'opérateur de la façon suivante<sup>1</sup>

*Soit  $h \in L^1(0, \infty, \mathbb{R}^{p \times m})$  la réponse impulsionnelle du système initial de dimension finie. Supposons que  $h$  ait pour opérateur de Hankel associé  $\Gamma$  de rang  $n \leq \infty$ . Il s'agit de trouver un opérateur  $\hat{\Gamma}_k$  de rang fini  $k < n$ , parmi tous les opérateurs de Hankel  $\Gamma_k$  de rang  $k$  qui minimisent  $\|\Gamma - \Gamma_k\|$ , où la norme de Hankel  $\|\cdot\|$  est la norme induite sur l'espace des opérateurs linéaires bornés de  $L^2(0, \infty, \mathbb{R}^m)$  dans  $L^2(0, \infty, \mathbb{R}^p)$ .*

On sait effectivement calculer le meilleur approximant au sens de la norme de Hankel pour les systèmes de dimension finie [AAK 71, Glo 84, KLi 81, Enn 84]. Les résultats obtenus ainsi ont abouti à diverses applications pour des problèmes de conception et de contrôle (par exemple voir [Fra 86]).

Notre étude concerne l'application de cette méthode d'approximation optimale à la réduction des modèles de dimension infinie. S'il existe alors des résultats

---

<sup>1</sup>Le premier chapitre de ce mémoire devrait permettre d'éclaircir cet énoncé pour le lecteur peu familier avec les notions qu'il invoque.

théoriques permettant de généraliser certains résultats du cas fini [GCP 88, Bon 91], ils concernent des systèmes particuliers et leurs applications restent délicates voire même ardues. Ainsi seule l'approximation au sens de la norme  $L^\infty$  de systèmes de dimension infinie qui utilise une technique alliant l'approximation optimale de Hankel et une troncature (d'une réalisation particulière du système (dans la base d'équilibre ou à sortie normale) ou d'une décomposition modale ...) donne des résultats pratiques intéressants.

Le principal objectif de ce travail a été de chercher à généraliser ces résultats à de nouveaux types de systèmes de dimension infinie. Ainsi, on a montré que pour des phénomènes d'évolution décrits par des équations aux dérivées partielles, par rapport au temps et aux variables d'espace, il était possible, en adaptant cette méthode, d'obtenir et de caractériser des modèles réduits.

Avant de présenter l'étude en elle-même, il nous a semblé nécessaire de consacrer une partie à des rappels théoriques, afin d'explicitier en quoi consistait la méthode d'approximation au sens de la norme de Hankel. En effet, elle s'articule autour de l'utilisation des opérateurs de Hankel et il est intéressant de voir comment ces opérateurs, définis dans un cadre mathématique abstrait, permettent la représentation des systèmes dynamiques tels qu'ils sont définis par l'automaticien. Cela est exposé dans le premier chapitre de ce travail, qui ne contient pas de résultats originaux, mais dont l'objectif principal est de motiver la suite. Le deuxième chapitre de cette partie donne alors les fondements de l'approximation au sens de la norme de Hankel.

Puis dans une seconde partie, on présente les résultats que l'on a établis concernant l'approximation de systèmes de dimension infinie. Cela à travers deux types de problèmes d'évolution : un problème de diffusion de chaleur, de type parabolique, pour lequel la méthode d'approximation s'adapte assez directement; deux problèmes hyperboliques décrivant l'évolution d'une poutre en flexion et en torsion, pour lesquels une approche dite de "relaxation", préalable à l'approximation, a été mise au point.



## Première Partie

# Rappels théoriques sur l'approximation de Hankel



# Chapitre Premier

## Introduction aux opérateurs de Hankel

La manière la plus intéressante de présenter les opérateurs de Hankel consiste à les considérer lorsqu'ils agissent sur certains espaces de fonctions analytiques, notamment sur les espaces de Hardy.

Aussi allons-nous dans un premier temps présenter le cadre mathématique auquel nous ferons référence tout au long de ce travail. Nous aborderons ainsi, la théorie des fonctions. Puis, nous rappellerons certaines propriétés des opérateurs définis sur un espace de Hilbert. Nous nous sommes pour cela inspirés de l'approche utilisée par J.R. Partington dans [Par 88]. On pourra également se référer à [Dur 70, Gar 81] pour ces résultats.

Forts de ces éléments théoriques mathématiques, on définira alors les opérateurs de Hankel et on établira leur lien avec la représentation des systèmes dynamiques. On cherchera alors à donner une interprétation des valeurs singulières associées à l'opérateur de Hankel, dont on mesurera l'importance pour la méthode d'approximation exposée par la suite.

### 1.1 Préliminaires

#### 1.1.1 Les espaces de Hardy

Soit  $\mathbf{T}$  le cercle unité,  $\mathcal{U}$  (resp.  $\bar{\mathcal{U}}$ ) le disque unité ouvert (resp. fermé). On représentera par  $z$  la variable du plan complexe  $\mathbb{C}$ .

On désigne par  $L^2(\mathbf{T})$  l'espace des fonctions mesurables sur le cercle  $\mathbf{T}$ , paramétrisé par  $\{e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  avec la norme

$$\|f\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2} < \infty$$

où l'on identifie deux fonctions si elles sont égales presque partout. Rappelons que  $\{e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}\}$  forme une base orthonormale de  $L^2(\mathbf{T})$ .

De manière similaire  $L^\infty(\mathbf{T})$  est l'espace des fonctions mesurables et essentiellement bornées sur  $\mathbf{T}$  avec

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup } |f(e^{i\theta})| < \infty$$

où sont négligés les ensembles de mesure nulle lors de la détermination du sup essentiel.

Remarquons que  $z^n$  est analytique dans  $\mathcal{U}$  pour  $n \geq 0$ . Les espaces de Hardy permettent d'établir un lien entre les espaces  $L^2(\mathbf{T})$  et  $L^\infty(\mathbf{T})$ , et les fonctions analytiques sur le disque.

Ainsi, on désignera par  $H_2$  (resp.  $H_2^\perp$ ) l'espace des fonctions analytiques dans  $\mathcal{U}$  (resp. dans le complémentaire de  $\bar{\mathcal{U}}$ ), nulles à l'infini pour  $H_2^\perp$ , prenant des valeurs réelles pour les valeurs réelles de la variable et telles que l'on ait

$$\sup_{r < 1} \text{ (resp. } \sup_{r > 1} \text{)} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2} < \infty \quad (1.1.1)$$

Tout élément de  $H_2$  (resp. de  $H_2^\perp$ ) peut s'écrire sous la forme  $\sum_0^\infty f_n z^n$ , (resp.

$\sum_{-\infty}^{-1} f_n z^n$ ), série géométrique dont le rayon de convergence est au moins 1.

Voyons comment on identifie les espaces de Hardy  $H_2$  et  $H_2^\perp$  à des sous espaces de  $L^2(\mathbf{T})$ . Soit  $f \in H_2$  (resp.  $f \in H_2^\perp$ ) donnée par

$$f(z) = \sum_0^\infty f_n z^n \quad \left( \text{resp. } \sum_{-\infty}^{-1} f_n z^n \right).$$

On montre alors (par exemple [Dur 70]) que le sup de (1.1.1) est égal à  $\sum_n |f_n|^2$

quantité qui est donc finie, de sorte que l'on peut définir  $\|f\|_{H_2}^2 = \sum_0^\infty |f_n|^2$ , et con-

siderer  $H_2$  en tant qu'espace de Hilbert avec la base orthonormale  $\{z^n, 0 \leq n < \infty\}$  et comme un sous espace fermé de  $L^2(\mathbf{T})$ . Un raisonnement similaire conduit aux mêmes conclusions pour  $H_2^\perp$ . De plus on montre que dans (1.1.1) le sup pour  $r < 1$  (resp. pour  $r > 1$ ) est aussi la lim lorsque  $r \rightarrow 1$ .

On peut également montrer l'existence d'un opérateur  $J$  défini de

$$H_2 \longrightarrow L^2(\mathbf{T}) \quad (\text{resp. de } H_2^\perp \longrightarrow L^2(\mathbf{T}))$$

isométrique, qui assigne à une fonction  $f \in H_2$  (resp.  $f \in H_2^\perp$ ), une fonction  $\tilde{f} \in L^2(\mathbf{T})$  définie presque partout comme la limite radiale de  $f$  comme énoncé dans la proposition suivante



**Proposition 1.1**

Si  $f(w) = \sum_0^\infty a_n w^n \in H_2$  alors pour  $|w| < 1$ ,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{\tilde{f}(z)}{z-w} dz \quad (\text{formule de Cauchy})$$

où  $\tilde{f}$  est le prolongement de  $f$  à  $T$  en prenant la limite au sens  $L^2$  des fonctions

$$f_N(z) = \sum_0^N a_n z^n.$$

Donc  $J$  prolonge  $f$  en  $\tilde{f}$  sur le disque fermé en lui assignant des valeurs à la frontière. On peut alors identifier  $f$  et  $\tilde{f}$  et définir  $f$  par la suite des coefficients de Fourier associée à  $\tilde{f}$ .

$H_2$  (resp.  $H_2^\perp$ ) s'identifie alors au sous espace de  $L^2(\mathbf{T})$  dont les coefficients de Fourier d'indice strictement négatifs (resp. positifs) sont nuls. On verra que ceci est interprété dans le cadre des systèmes dynamiques, comme représentatif d'un système anticausal, soit défini pour un temps  $t$  négatif (resp. système causal).

De même, on définit  $H_\infty$  (resp.  $H_\infty^\perp$ ) comme l'espace de toutes les fonctions analytiques et bornées sur le disque unité ouvert  $\mathcal{U}$  (resp. dans le complémentaire de  $\bar{\mathcal{U}}$ ) avec la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{|z|<1} |f(z)|.$$

$H_\infty$  (resp.  $H_\infty^\perp$ ) est un espace de Banach que l'on peut identifier au sous espace fermé de  $L^\infty(\mathbf{T})$  dont les coefficients de Fourier d'indice strictement négatifs (resp. positifs) sont nuls.

Considérons maintenant les fonctions analytiques dont le domaine est un demi plan au lieu d'être un disque; la relation entre le disque et le demi plan est donnée par l'opérateur de Möbius isométrique associant les fonctions analytiques dans le demi plan droit  $\mathbf{C}_+ = \{s \in \mathbf{C}; \operatorname{Re}(s) > 0\}$  aux fonctions analytiques dans  $\mathcal{U}$ , et défini par :

$$M : s \in \mathbf{C}_+ \mapsto Ms = \frac{1-s}{1+s} = z \in \mathcal{U}.$$

On peut noter que pour ce qui est des systèmes dynamiques, cet opérateur permet le passage du temps discret au temps continu.

Définissons alors les espaces de Hardy sur le demi plan droit  $\mathbf{C}_+$ .  $H_\infty(\mathbf{C}_+)$  (resp.  $H_2(\mathbf{C}_+)$ ) est l'espace des fonctions  $G$  analytiques et bornées dans  $\mathbf{C}_+$  avec  $\|G\|_{H_\infty(\mathbf{C}_+)} = \sup |G(s)|$  (resp.  $\|G\| = \sup_{x>0} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x+iy)|^2 dy \right)^{1/2} < \infty$ ).

Il existe des isométries injectives entre les ensembles suivants :

$$H_2(\mathbf{C}_+) \longrightarrow L^2(i\mathbb{R}) \text{ et } H_\infty(\mathbf{C}_+) \longrightarrow L^\infty(i\mathbb{R}).$$

Dans le cas où les espaces de Hardy sont définis sur  $\mathcal{U}$ , on a mis en évidence les isomorphismes entre ces espaces de Hardy et  $l^2$  par utilisation des séries de Fourier. De même, dans le cas où les espaces de Hardy sont définis sur  $\mathbb{C}_+$  et grâce à l'opérateur de Möbius et à la transformée de Laplace on exhibe les isomorphismes avec  $L^2(\mathbb{R})$ . Ainsi, on peut récapituler les différents isomorphismes reliant ces espaces.

Considérons l'espace de Hardy  $H_2$  défini sur  $\mathcal{U}$ . On note  $l_+^2 = l^2\{0, 1, 2, \dots\}$ . On a alors un isomorphisme entre  $l_+^2$  et  $H_2$  en associant à la suite  $(f_n)$  de  $l_+^2$  l'élément  $\sum_0^\infty f_n z^n$  de  $H_2$ .

On a également un isomorphisme entre  $l_+^2$  et le cojugué de  $H_2$ , soit  $H_2^\perp$ , par association de  $(f_n)$  à  $\sum_0^\infty f_n z^{-1-n}$ .

Par conséquent on peut définir l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} & : H_2 \longrightarrow H_2^\perp \\ & f(z) \longmapsto (1/z)f(1/z) \end{aligned}$$

De la même façon on peut définir un isomorphisme entre  $L^2(0, +\infty)$  et  $H_2(\mathbb{C}_+)$ .

Dressons ici un schéma des différents isomorphismes reliant ces espaces :

Espace de Hardy définis sur et à l'extérieur du disque unité

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbf{T}) & = & H_2^\perp \quad \oplus \quad H_2 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ l^2(\mathbf{Z}) & = & l^2\{\dots, -2, -1\} \quad \oplus \quad l^2\{0, 1, 2, \dots\} \\ & & \text{causalité} \quad \quad \quad \text{anticausalité} \end{array}$$

Espaces de Hardy définis sur les demi-plans complexes

$$\begin{array}{ccc} L^2(i\mathbb{R}) & = & H_2(\mathbb{C}_-) \quad \oplus \quad H_2(\mathbb{C}_+) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ L^2(\mathbb{R}) & = & L^2(-\infty, 0) \quad \oplus \quad L^2(0, +\infty) \end{array}$$

Parce que les méthodes de réductions que nous étudierons sont exploitables principalement lorsque les opérateurs de Hankel sont compacts, nous allons maintenant rappeler quelques propriétés des opérateurs compacts.

### 1.1.2 Opérateurs définis sur un espace de Hilbert

Dans tout ce qui suit ([Par 88]) les opérateurs sont supposés continus, les espaces de Hilbert sont définis sur  $\mathbb{C}$ .

Soit  $H$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire noté  $(\cdot, \cdot)$ ,  $T$  un opérateur de  $H \longrightarrow H$  linéaire.

La norme de l'opérateur est définie dans  $H$  par :

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\|/\|x\|, x \neq 0\}.$$

Si  $T$  est un opérateur compact, il admet une décomposition dite de Schmidt, intéressante car elle introduit la notion de valeurs singulières, notion primordiale pour notre problème d'approximation comme on le verra dans ce qui suit. Ainsi, lorsque  $T$  est compact, il existe des suites orthonormales  $(u_i)$  et  $(v_i)$  pour  $i \geq 1$  et des scalaires  $\sigma_i$  décroissant vers 0 tels que

$$Tx = \sum_1^{\infty} \sigma_i(x, u_i)v_i.$$

Les  $\sigma_i$  sont les valeurs singulières (parfois nommées nombres d'approximation ou encore valeurs propres généralisées) associées à l'opérateur  $T$ . Les couples  $(u_i, v_i)$  de vecteurs propres qui leur sont associés sont appelés paires de Schmidt.

Les valeurs singulières permettent donc d'écrire un opérateur comme la somme d'opérateurs de rang 1.

Introduisons ici certaines classes d'opérateurs qui s'avéreront d'un grand intérêt pour la mise en œuvre des méthodes de réduction étudiées. Aussi nous donnons ici la définition des opérateurs dits de classe  $C_p$  et plus particulièrement celle des opérateurs  $C_1$  et  $C_2$ .

### Définition 1.1

On dit qu'un opérateur compact  $T$  est de classe  $C_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) si et seulement si

$$\sum_1^{\infty} \sigma_i(T)^p < \infty.$$

En particulier,  $C_1$  est la classe des opérateurs nucléaires,  $C_2$  est la classe des opérateurs de Hilbert Schmidt.

De plus, on peut montrer que  $C_p$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|T\|_{C_p} = \left( \sum_1^{\infty} \sigma_i(T)^p \right)^{1/p}.$$

Pour l'espace  $C_2$  on a en plus le résultat suivant :

$C_2$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle S, T \rangle = \sum_1^{\infty} (Sx_k, Tx_k)$$

où  $(x_k)$  est une base orthonormale et où la valeur obtenue est indépendante de la base  $x_k$  choisie.  $C_2$  est donc un espace normé de norme associée :

$$\|S\|_{HS} = \left( \sum_1^{\infty} \|Sx_k\|^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_1^{\infty} \sigma_k(S)^2 \right)^{1/2}.$$

Quant à la norme dans  $C_1$  elle sera notée :

$$\|S\|_N = \sum_1^{\infty} \sigma_k(S).$$

## 1.2 Les opérateurs de Hankel

Introduisons maintenant les opérateurs de Hankel.

On appellera matrice de Hankel une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & \\ a_2 & \vdots & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

c'est à dire une matrice  $\{(c_{ij}); i, j = 0, \dots, \infty\}$  où les  $c_{ij}$  dépendent uniquement de  $i + j$ , et peuvent donc s'écrire  $c_{ij} = a_{i+j}$  pour une certaine suite  $a_0, a_1, a_2, \dots$ .

Sous certaines conditions d'admissibilité cette matrice est associée de manière naturelle à un opérateur  $\Gamma$  sur l'espace de Hilbert  $l^2$  des suites de carré sommable et on a

$$(\Gamma x)_i = \sum_0^{\infty} a_{i+j} x_j$$

pour  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in l^2$ .  $\Gamma$  est un opérateur de Hankel. On le représentera aussi par  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  lorsque aucune confusion ne sera possible.

De manière similaire, un opérateur de Hankel intégral sur  $L^2(0, +\infty)$  a la représentation

$$\Gamma x(t) = \int_0^{\infty} h(t+s)x(s)ds$$

de telle sorte que le noyau,  $h(t+s)$ , dépend de la somme des deux variables.

Nous allons dans ce paragraphe voir comment on peut représenter le comportement d'un système dynamique linéaire stationnaire par sa seule matrice de Hankel (ou son opérateur de Hankel). Nous essaierons également de dégager l'intérêt de ce mode de représentation pour le problème d'approximation.

### 1.2.1 Systèmes et Opérateurs de Hankel

On adoptera le formalisme classique suivant (comme par exemple dans [FR 74]) pour la représentation des systèmes dynamiques de dimension finie :

un système dynamique linéaire constant, de dimension  $n$ , à  $p$  entrées,  $q$  sorties est un triplet de matrices  $\Xi = \{A, B, C\}$ , où  $A$  est de dimension  $n \times n$ ,  $B$  de dimension  $n \times p$ ,  $C$  de dimension  $q \times n$ .

Les coefficients de ces matrices sont éléments d'un corps  $K$ , et  $\Xi$  peut représenter,

- un système à temps continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

- **un système à temps discret :**

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \quad (1.2.2)$$

où  $u \in K^p$  (l'espace des entrées),  
 $x \in K^n$  (l'espace d'état),  
 $y \in K^q$  (l'espace des sorties).

La dimension  $n$  de l'espace d'état, est appelée la dimension du système.

Etant donnée la condition initiale  $x(0)$  dans le cas continu, (resp.  $x_0$  dans le cas discret), on peut écrire la solution du système 1.2.1 :

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t C \exp A(t - \tau)Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (1.2.3)$$

$$\left( \text{resp. la solution de 1.2.2 : } y_k = CA^kx_0 + \sum_{l=1}^k CA^{k-l}Bu_l, \quad k \geq 0. \right) \quad (1.2.4)$$

La contribution de l'entrée  $u$  à la sortie  $y$ , est donc donnée par le produit de convolution de  $u$  et de la réponse impulsionnelle du système  $Ce^{At}Be(t)$  où  $e(t)$  est l'échelon de Heaviside (resp.  $CA^iB$ ).

Les dérivées successives en 0 du noyau analytique  $Ce^{At}B$  ou les termes de la suite du noyau  $\{CA^iB\}$ , donnent une suite de matrices  $q \times p$   $\{H_i\}$ , (resp.  $\{h_i\}$ ) telle que :

$$H_i = h_i = CA^{i-1}B \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots$$

qui sont les paramètres de markov du système. Ils permettent d'accéder à la description externe du système  $\Xi$  puisque celle-ci nécessite

- **dans le cas continu**, la donnée de la réponse impulsionnelle

$$h(t) = Ce^{At}Be(t) = \sum_0^{\infty} H_{i+1} \frac{t^i}{i!} e(t)$$

soit la donnée de la fonction de transfert

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \sum_1^{\infty} H_i s^{-i};$$

- **dans le cas discret**, la donnée de la fonction de transfert

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B = \sum_1^{\infty} h_i z^{-i}$$

soit la donnée de la suite  $\{h_i\}$  qui définit la réponse impulsionnelle du système, c'est à dire telle que

$$y_j = (h * u)_j = \sum_0^j h_i u_{j-i}.$$

La donnée de la matrice Hankel infinie, notée  $\Gamma$  et définie par

$$\Gamma\{H(z)\} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ h_2 & h_3 & & \\ h_3 & \vdots & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

permet donc de caractériser complètement  $\Xi$ .

## 1.2.2 Le résultat de Nehari : opérateur et symbole

Nous allons introduire la notion de norme de Hankel, qui grâce à un résultat fondamental de Nehari [Neh 57], (exposé ci après) procure une mesure significative des fonctions de  $L^\infty(\mathbf{T})$ . Cependant, et c'est ce qui la différencie de la norme de  $L^\infty(\mathbf{T})$ , comme la norme de Hankel de toute fonction de  $H_\infty$  est nulle, on la considère seulement comme une semi norme : ainsi, deux fonctions de  $L^\infty(\mathbf{T})$ , identiques à une fonction de  $H_\infty$  près ont la même norme de Hankel.

Donc lorsque l'on utilise la norme de Hankel, on doit tenir compte du fait que l'on néglige "l'effet" d'une fonction additive de  $H_\infty$ . Or ceci ne constitue pas un inconvénient sérieux en général. En effet, lorsque l'on étudie les systèmes linéaires dynamiques, on suppose que ces systèmes sont causaux, c'est à dire définis à partir d'un temps  $t > 0$ . Or ceci revient à supposer que leur fonction de transfert pour le cas mono entrée, mono sortie, appartient à  $H_\infty^\perp$ . La projection de la fonction transfert sur  $H_\infty$  est soit constante soit nulle. Aussi, la norme de Hankel devient pour ce type de systèmes une mesure significative.

D'autre part, l'importance de cette norme dans le problème de l'approximation rationnelle vient aussi de ce que le meilleur approximant rationnel (strictement propre) de degré fixé, de la fonction de transfert d'un système linéaire stable avec une erreur d'approximation donnée peut être décrit analytiquement. Cette élégante description analytique est due à un résultat fondamental d'Adamjan, Arov et Krein [AAK 71].

Considérons le cas où l'on dispose de la forme matricielle de l'opérateur comme explicitée ci dessus.

On définit la norme de Hankel comme étant la norme classique associée à un opérateur et on la notera  $\| \cdot \|$ .

Nehari [Neh 57] a introduit un résultat très important sur la meilleure approximation rationnelle : il établit l'existence d'une association bi-réciproque :

$$\text{Opérateur de Hankel borné } \Gamma \longleftrightarrow \text{fonction de } L^\infty(\mathbf{T})$$

qui conserve les normes, soit telle que  $\|\Gamma\| = \|f\|_\infty$ . Cette association est fondamentale car elle permet de traiter indifféremment le problème d'approximation d'un

opérateur en norme d'opérateur ou d'une fonction en norme  $L^\infty$ . L'opérateur  $\Gamma(f)$  dont l'action est caractérisée par  $\Gamma(f) = PM_fR$  où

$$\begin{aligned} R : H_2 &\longrightarrow L^2 \text{ avec } R(\sum_0^\infty a_n z^n) = \sum_0^\infty a_n z^{-n} \text{ ,} \\ M_f : L^2 &\longrightarrow L^2 \text{ avec } M_f h = fh \text{ et} \\ P : L^2 &\longrightarrow H_2 \text{ avec } (\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^{-n}) = \sum_0^\infty c_n z^n \end{aligned}$$

définit donc une application linéaire bornée de  $H_2$  dans  $H_2$ . De plus on a

$$\|\Gamma(f)\| \leq \|f\|_\infty.$$

### **Théorème 1.1 (Nehari)**

Une matrice de Hankel  $\Gamma$  est bornée si et seulement si il existe  $f \in L^\infty(\mathbf{T})$  telle que  $\Gamma = \Gamma(f)$ . De plus il existe  $\tilde{f} \in L^\infty(\mathbf{T})$  telle que

$$\inf_{g \in H_\infty} \|f - g\|_\infty = \|\tilde{f}\|_\infty = \|\Gamma\|.$$

Cette quantité est la norme de Hankel de la fonction  $f$  que l'on notera

$$\|f\|_{\mathcal{H}} \triangleq \|\Gamma\|.$$

On introduit alors la notion de symbole associé à l'opérateur de Hankel de la façon suivante : une fonction  $g \in L^\infty(\mathbf{T})$  telle que  $g_k = a_k$  pour  $(k = 0, 1, 2, \dots)$  est un symbole associé à l'opérateur de Hankel correspondant à la matrice  $(a_0, a_1, \dots)$ .

On peut remarquer que :  $f \in H_2 \implies \Gamma(f) = 0$ .

Dès que l'on dispose du symbole associé à un opérateur de Hankel, on peut donc accéder à sa norme.

Déterminer  $g$  correspondant à  $\Gamma$  est appelé le problème de prolongement de Nehari. Le théorème qui suit donne une solution explicite à ce problème, le symbole exhibé étant unique.

### **Théorème 1.2 (Sarason)**

Si  $\Gamma : H_2 \longrightarrow H_2$  correspond à la matrice de Hankel  $(a_0, a_1, \dots)$  et  $f \in H_2$ ,  $f$  n'étant pas nulle, telle que  $\|\Gamma f\| = \|\Gamma\| \|f\|$ , alors il existe un symbole unique  $g$  associé à  $\Gamma$ , de norme minimale  $\|g\|_\infty = \|\Gamma\|$  et il est donné par  $g = \frac{\Gamma f}{Rf}$  soit  $g(z) = \frac{\Gamma f(z)}{f(1/z)}$ .

De plus,  $|g(e^{i\theta})|$  est constant presque partout.

Ce résultat a les conséquences suivantes : il permet de déterminer le symbole associé à l'opérateur de Hankel lorsque la norme de celui-ci est atteinte. Or c'est le cas lorsque les opérateurs sont compacts.

C'est pourquoi on va regarder pour quelles conditions sur le symbole l'opérateur de Hankel est de rang fini et compact.

Un théorème fondamental permet de déterminer le rang de l'opérateur de Hankel :

**Théorème 1.3 (Kronecker)**

$(f_1, f_2, \dots)$  détermine un opérateur de Hankel de rang fini si et seulement si  $f_1/z + f_2/z^2 + \dots$  est rationnelle. Ce rang est égal au nombre de pôles de cette fonction dans le disque  $\{|z| < 1\}$ .

Une interprétation de ce théorème dans le cadre des systèmes dynamiques sera la suivante : le rang de l'opérateur de Hankel est égal à la dimension du système linéaire auquel il est associé. On en déduit le corollaire :

**Corollaire 1.1**

$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k z^k$  détermine un opérateur de Hankel de rang fini si et seulement si  $g(z) \in H_\infty^\perp + RH_\infty$  où  $RH_\infty$  est l'ensemble des fonctions rationnelles sur  $H_\infty$ .

Considérons l'espace normé  $H_\infty + C(T)$  où  $H_\infty$  est l'espace des fonctions analytiques sur le disque, et  $C(T)$  celui des fonctions bornées et continues sur sa frontière.

On peut remarquer que comme  $\mathcal{I}$  est un automorphisme de  $C(T)$  alors

$$\mathcal{I} : H_\infty + C(T) \longrightarrow H_\infty^\perp + C(T) \text{ est un isomorphisme isométrique.}$$

D'autre part Sarason [Par 88] établit le résultat suivant :

$$H_\infty + C(T) \text{ est un sous espace fermé de } L^\infty(\mathbf{T}).$$

Une condition nécessaire et suffisante pour la compacité de  $\Gamma$  est :

**Théorème 1.4 (Hartman)**

$$\Gamma = \Gamma_g \text{ est compact} \iff g \in H_\infty^\perp + C(T)$$

**1.2.3 Opérateur de Hankel intégraux**

Considérons les opérateurs de Hankel intégraux définis sur  $L^2(0, +\infty)$ . On détermine à l'aide de la transformée de Laplace, notée  $\hat{\cdot}$ , l'action que de tels opérateurs induisent sur  $H_2(\mathbb{C}_+)$  :

**Théorème 1.5**

Si  $h \in L^1(0, +\infty) \cap L^2(0, +\infty)$ , alors l'opérateur  $\Gamma_h$  défini par

$$\begin{aligned} \Gamma_h : L^2(0, +\infty) &\longrightarrow L^2(0, +\infty) \\ u &\longmapsto \Gamma_h u \text{ tel que } \Gamma_h u(x) = \int_0^\infty h(x+y)u(y)dy \end{aligned}$$

a un unique prolongement à un opérateur de  $L^2(0, +\infty)$ , ou de manière équivalente à un opérateur  $\hat{\Gamma}_h$  de  $H_2(\mathbb{C}_+)$  et  $\|\Gamma_h\| = \|\hat{\Gamma}_h\| \leq \|\hat{h}\|_\infty$ .



Etant donnée une fonction  $G(s) \in L^\infty(i\mathbb{R})$  on dira que l'opérateur

$$\hat{\Gamma}_h : H \longmapsto P_+\{G(s)H(-s)\}$$

où

$$P_+ : L^2(i\mathbb{R}) \longmapsto H_2(\mathbb{C}_+)$$

est l'opérateur de projection orthogonale, est un opérateur de Hankel sur le demi plan, (i.e. sur  $H_2(\mathbb{C}_+)$ ). Pour relier ceci avec les opérateurs de Hankel sur le disque (i.e. sur  $H_2$ ), on utilise l'isomorphisme isométrique  $V$  :

$$\begin{aligned} V : H_2 &\longrightarrow H_2(\mathbb{C}_+) \\ g &\longmapsto Vg \text{ tel que } (Vg)(s) = \pi^{-1/2}g(Ms)/(1+s) \\ V^{-1} : H_2(\mathbb{C}_+) &\longrightarrow H_2 \\ G &\longmapsto V^{-1}G \text{ tel que } (V^{-1}G)(z) = 2\pi^{1/2}G(Mz)/(1+z) \end{aligned}$$

où  $M$  est l'opérateur de Möbius introduit au paragraphe 1.1.1.

### **Théorème 1.6**

Soit  $G(s) \in L^\infty(i\mathbb{R})$ .

Alors l'opérateur de Hankel déterminé sur  $H_2(\mathbb{C}_+)$  par  $G$ , est équivalent à l'opérateur de Hankel déterminé sur  $H_2$  par la fonction  $g(z) = G(Mz)/z \in L^\infty(\mathbf{T})$ .

On appellera  $\mathcal{W}$  l'opérateur qui dans ce théorème associe  $L^\infty(i\mathbb{R})$  à  $L^\infty(\mathbf{T})$ , avec

$$(\mathcal{W}G)(z) = G(Mz)/z.$$

Son inverse est

$$(\mathcal{W}^{-1}g)(s) = (Ms)g(Ms).$$

On peut remarquer que  $\|\mathcal{W}G\|_\infty = \|G\|_\infty$  et ainsi identifier certains types d'opérateurs en utilisant  $\mathcal{W}$  ou  $\mathcal{W}^{-1}$ .

De ceci se déduisent [Par 88] les formes pour le demi plan des théorèmes

- de Nehari ,
- de Kronecker (rang fini),
- de Hartman (compacité).

## **1.2.4 Interprétation de l'action de l'opérateur de Hankel**

Voyons comment on peut interpréter l'action induite par  $\Gamma$  sur une suite causale comme il est remarqué notamment dans [KLi 81]. Pour cela, replaçons nous dans les hypothèses faites sur le système  $\Xi$  considéré au paragraphe 1.2.1; on considérera le cas discret :

la fonction de transfert (matricielle) du système linéaire  $\Xi$  est

$$H(z) = \sum_1^{\infty} h_i z^{-i} = Z_h$$

où  $\{h_i, i = 1, 2, \dots\}$  est la suite de réponses impulsionnelles (matricielles).

On pose

$$\Gamma(H(z)) \triangleq \Gamma.$$

Soient  $\eta = \{\eta_i\}$  où les  $\eta_i$  sont des  $m$ -vecteurs et  $\zeta = \{\zeta_i\}$  où les  $\zeta_i$  sont des  $p$ -vecteurs, deux suites de  $l_-^2$ , telles que

$$\Gamma\eta = \zeta$$

avec  $\eta(z) = \sum_1^{\infty} \eta_i z^{-i} \in l_-^2$  et  $\zeta(z) = \sum_1^{\infty} \zeta_i z^{-i} \in l_-^2$ . Ainsi  $\Gamma$  transforme une suite causale en une suite causale.

Si l'on note  $\check{\eta}(z) = \sum_1^{\infty} \eta_i z^{i-1} \in l_+^2$  ceci est équivalent à

$$p_- [Z_h \check{\eta}(z)] = \zeta(z)$$

où  $p_-$  représente l'opérateur de projection sur l'espace  $l_+^2$ .

Cette représentation fonctionnelle  $Z_h$  permet d'interpréter l'action de l'opérateur  $\Gamma$  comme la transformation d'une suite anticausale en une suite causale :

$$Z_h : \begin{array}{ccc} l_+^2 & \longrightarrow & l_-^2 \\ \text{Passé} & & \text{Futur} \end{array}$$

Ainsi, à un élément défini dans le passé on associe un élément défini dans le futur. Ceci peut être interprété comme une projection de  $H_2$  dans  $H_2^\perp$ .

Cela peut se transposer au cas continu à l'aide de l'opérateur de Möbius. On a vu comment dans le cas continu, on définit pour une fonction matricielle  $H(s)$  stable strictement propre de dimension  $p \times q$ , soit dans  $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ , l'opérateur de Hankel

$$\Gamma_H : H_2(\mathbb{C}_+) \longmapsto H_2(\mathbb{C}_+)$$

On peut également interpréter son action comme une projection de

$$H_2(\mathbb{C}_-) \longrightarrow H_2(\mathbb{C}_+).$$

Cet opérateur a un analogue dans le domaine du temps, obtenu en utilisant la transformée de Laplace inverse. En effet, étant donné une fonction  $h \in L^1 \cap L^2(0, +\infty; \mathbb{C}^{p \times q})$  de transformée de Laplace  $H \in H_\infty(\mathbb{C}_+)$ , on définit

$$\Gamma_h : \begin{array}{ccc} L^2(0, +\infty; \mathbb{C}^p) & \longrightarrow & L^2(0, +\infty; \mathbb{C}^q) \\ u & \longmapsto & \Gamma_h u \end{array}$$

tel que  $(\Gamma_h u)(t) = \int_0^\infty h(t + \tau)u(\tau)d\tau$ .

Comme  $H$  est la transformée de Laplace de  $h$ ,  $\Gamma_H$  et  $\Gamma_h$  sont utilisés indifféremment car ils possèdent les mêmes propriétés. Ainsi  $h$  joue le rôle du symbole de l'opérateur de Hankel  $\Gamma_h$ .

Il faut souligner ici l'importance des hypothèses formulées qui permettent de *bien* définir l'opérateur de Hankel, c'est-à-dire de lui donner un sens et de lui assurer l'intéressante<sup>1</sup> propriété de compacité. En effet le fait que  $h \in L^1(0, +\infty; \mathbb{C}^{p \times q})$  assure la compacité de  $\Gamma_h$ , d'après 1.2 et le définit comme un opérateur de  $L^2$  dans  $L^2$ .

On peut remarquer que  $h \in L^2(0, +\infty; \mathbb{C}^{p \times q})$  assure que  $\Gamma_h u$  soit défini en tout point  $t$  d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

L'ordre du système étant égal au rang de l'opérateur de Hankel. Il sera de degré fini si et seulement si  $H(s)$  est une fonction rationnelle de  $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ , et sera alors donné par le nombre de pôles de  $H(s)$ . Dans le cas contraire, l'ordre du système est infini. Mais la représentation intégrale de l'opérateur de Hankel reste néanmoins valable pour ce type de système.

Maintenant qu'est établi le lien entre représentation des systèmes dynamiques et opérateurs de Hankel, nous allons préciser ce que sont les valeurs singulières associées à un opérateur de Hankel et en donner une interprétation. Elles constituent un élément clé de la théorie de Hankel car elles donnent une mesure de l'erreur d'approximation réalisée et interviennent lors de la construction effective des modèles réduits recherchés.

### 1.2.5 Classes particulières d'opérateurs de Hankel

Nous allons maintenant donner les conditions pour qu'un opérateur de Hankel (soit les symboles associés) appartienne aux classes particulières définies dans le paragraphe 1.1.2 : opérateurs nucléaires et de Hilbert Schmidt. Ceci est primordial car comme on l'a déjà souligné, ces classes d'opérateur vont se révéler très utiles pour l'approximation de certains systèmes. On se focalisera sur le cas intégral qui, comme on le verra correspond au cas des systèmes continus auxquels est consacré l'essentiel de notre étude.

Rappelons que la forme d'un opérateur de Hankel intégral est

$$(\Gamma_h u)(t) = \int_0^\infty h(t + \tau)u(\tau)d\tau$$

ou encore

$$(\hat{\Gamma}_h U)(s) = P_+ \{H(s)U(-s)\}$$

La proposition suivante est un corollaire important au théorème de Hartman :

---

<sup>1</sup>Dans le sens où elle assure l'existence de la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur de Hankel.

**Proposition 1.2**

Si  $h \in L^1$  alors  $\Gamma_h$  est un opérateur compact.

**Théorème 1.7**

Pour l'opérateur intégral  $(\Gamma u)(t) = \int_0^\infty h(t + \tau)u(\tau)d\tau$  avec  $h \in L^1$ , on a

$$\|\Gamma\| \leq \|\hat{h}\|_\infty \leq \|h\|_{L^1} \leq 2\|\Gamma\|_N$$

La proposition suivante découle d'un résultat établi par Peller, Coifman et Rochberg dans [CR 80], dont une version simplifiée établie par Bonsall et Walsh [BW 86] est la suivante : la compacité de l'opérateur de Hankel acquise, elle exprime une condition nécessaire et suffisante de nucléarité

**Proposition 1.3**

Un opérateur de Hankel  $\Gamma$  sur  $H_2(\mathbb{C}_+)$  est nucléaire si et seulement si son symbole est de la forme

$$G(s) = \sum_1^\infty \lambda_k (2\operatorname{Re}(a_k)/(s - a_k)),$$

avec  $\sum_1^\infty \lambda_k < \infty$ , et  $a_k \in \mathbb{C}_-$ , les séries convergeant dans  $H_\infty$ .

De plus, lorsque l'opérateur de Hankel intégral de noyau  $h$  est nucléaire,  $h$  doit avoir un "bon comportement" au niveau continuité ou régularité (smoothness) et taux de décroissance à l'infini : on suppose en général

$$h \in L^1 \cap L^2 \text{ et } t^{1/2}h \in L^2.$$

Enfin, Coifman et Rochberg donnent la condition nécessaire et suffisante suivante pour que l'opérateur de Hankel associé à une fonction  $G(s)$  soit nucléaire :

**Théorème 1.8**

Un opérateur de Hankel  $\Gamma$  sur  $H_2(\mathbb{C}_+)$  est nucléaire si et seulement si

$$\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty |G''(s)| dx dy < \infty \text{ où } s = x + iy.$$

Il existe également des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur de Hankel soit Hilbert Schmidt comme celle du théorème suivant :

**Théorème 1.9**

Supposons que  $h \in L^1$  définisse l'opérateur de Hankel borné  $\Gamma$ . Alors  $\Gamma$  est Hilbert Schmidt si et seulement si  $t^{1/2}h(t) \in L^2(0, +\infty)$  et dans ce cas  $\|\Gamma\|_{HS} = \|t^{1/2}h\|_{L^2}$ .

### 1.3 Les valeurs singulières

Nous allons introduire la notion de valeurs singulières d'une manière un peu différente de ce qui a été fait dans le paragraphe 1.1.2. On va se placer dans le cas simple où l'opérateur de Hankel  $\Gamma$  est de type matriciel. Il s'agira d'une matrice de dimension infinie supposée représenter un système linéaire stable  $\Xi$ , d'ordre  $n$ . Aussi, le rang de  $\Gamma$  sera  $n$ . Cependant les résultats que l'on va exposer sont aussi valables dans le cas d'un opérateur de Hankel intégral représentant un système de dimension infinie.

Notons  $\Gamma^*$  la matrice complexe conjuguée de  $\Gamma$ .  $\Gamma^*$  et  $\Gamma$  sont deux matrices (symétriques dans le cas scalaire) de dimension  $(\infty \times \infty)$  toutes deux non négatives. De plus  $\text{rang } \Gamma\Gamma^* = \text{rang } \Gamma^*\Gamma = n$  et  $\Gamma\Gamma^*$  a donc  $n$  valeurs propres positives non nulles. Soit  $(\lambda_i)$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$  ces  $n$  valeurs propres positives ordonnées comme suit :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$$

Les valeurs singulières associées à  $\Gamma$ , soit les  $n$  nombres réels positifs :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$$

sont telles que

$$\sigma_i^2 = \lambda_i.$$

La matrice de Hankel  $\Gamma$  peut alors se factoriser comme

$$\Gamma = \mathcal{O}\mathcal{C} \quad \text{où} \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^k \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = (B \quad AB \quad \dots \quad A^k B \quad \dots).$$

Soit  $M$  (resp.  $W$ ) le grammien d'observabilité (resp. grammien de commandabilité) associé au système  $\Xi$ . Lorsque le système est stable  $M$  et  $W$  sont les solutions des équations de Lyapunov qui, sont dans le cas discret données par

$$\begin{cases} AWA^t - W = -BB^t \\ A^tMA - M = -C^tC. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Si l'on suppose le système commandable et observable,  $M$  et  $W$  sont définis positifs et de rang plein.

Les valeurs propres non nulles de  $MW$  sont égales aux valeurs propres de  $\Gamma\Gamma^*$ . On montre en annexe B.2 comment on peut établir ce résultat, de manière intuitive, dans le cas où l'opérateur de Hankel est intégral. On peut également se référer à [Fra 86].

De plus, il existe une base de l'espace d'état, appelée base d'équilibre, dans laquelle les deux grammiens sont égaux à la matrice

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Le système  $y$  est aussi commandable qu'observable, les conditions d'observabilité étant équivalentes sur  $\mathcal{O}$  et sur  $M$  (resp. de commandabilité sur  $\mathcal{C}$  et sur  $W$ ). C'est pourquoi on dit que la réalisation correspondante est équilibrée.

On peut introduire les valeurs singulières de la façon suivante,

### Définition 1.2

Pour  $n \geq 1$ ,  $\sigma_n(\Gamma) = \inf \{ \|\Gamma - S\|, \text{rang } S < n \}$ . La borne inférieure est atteinte.

Ces valeurs singulières forment un ensemble d'invariants qui mesurent la qualité de l'approximation de  $\Gamma$  par des matrices de rang décroissant.

Ainsi on peut interpréter  $\sigma_1(\Gamma)$  comme  $\|\Gamma\|$ . Donc

$$\begin{aligned} \|\Gamma\| &= \sup_{\|u\|=1} \|\Gamma u\| = \sup_{u \in \bar{\mathcal{U}}} \frac{\sqrt{|u^t \Gamma^* \Gamma u|}}{\|u\|} \\ &= \rho \left( (\Gamma \Gamma^*)^{1/2} \right) \\ &= \sigma_1. \end{aligned}$$

où  $\rho \left( (\Gamma \Gamma^*)^{1/2} \right)$  est le rayon spectral de  $(\Gamma \Gamma^*)^{1/2}$ .

### 1.3.1 Grammiens et valeurs singulières

On peut donner une interprétation physique des grammiens associés au système qui permet d'établir leur lien avec les valeurs singulières. Ainsi,  $W$  étant le grammien de commandabilité, on peut montrer que l'énergie minimale nécessaire pour atteindre à un instant  $t$  l'état  $x$  est

$$E(x) = x^t W^{-1} x$$

$W^{-1}$  étant une matrice symétrique définie positive, il existe donc une base orthogonale où elle est diagonale. On la notera alors  $\Sigma^{-1}$ . Soit  $P$  la matrice de changement de base

$$E(x) = x^t P^t \Sigma^{-1} P x$$

Si on se place sur la sphère unité, tenant compte du fait que les propriétés d'homothétie permettent la généralisation des résultats ci après :

$$E(z) = z^t \Sigma^{-1} z \quad \text{avec} \quad \|z\| = 1$$

$E(z)$  étant l'énergie nécessaire pour atteindre le point  $z$  de la sphère unité. Posons

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \delta_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \delta_i & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

et  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  tel que  $\|z\| = 1$ . On a  $\sigma_i = 1/\delta_i$ .

Comme dans [Moo 81] on peut utiliser l'image suivante : on montre que les lieux où se situent les  $E(z)$  correspondent à une ellipsoïde dont les modules des demi axes sont les  $\delta_i$ . On fait le changement de variables suivant :  $\delta_i z_i = Z_i$

On obtient donc

$$\begin{cases} \sum_1^n \left(\frac{Z_i}{\delta_i}\right)^2 = 1 \\ E(z) = \sum_1^n Z_i^2 \end{cases}$$

Quand  $\sigma_i$  est faible, (soit quand la matrice est presque singulière), alors  $\delta_i$  tend

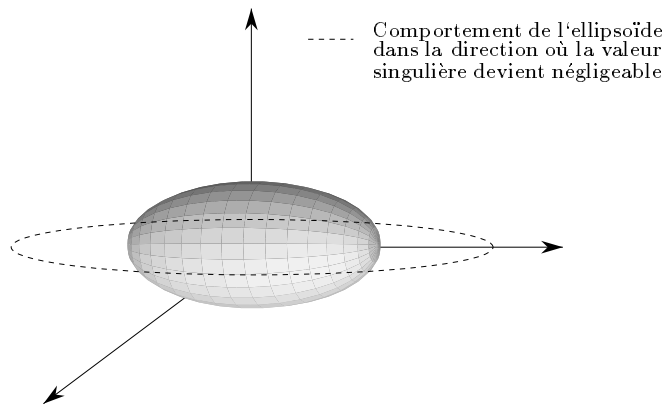


Figure 1.3.1 : Ellipsoïde d'énergie

vers l'infini ou du moins est très grande, et donc s'étale sur l'un des axes. A la limite, lorsque la matrice  $\Sigma$  devient singulière, on a une perte de dimension de l'ellipsoïde, puisque l'énergie devient infinie dans une certaine direction. Ceci peut être représenté comme sur la figure 1.3.1.

Cette interprétation va justifier la démarche suivante. Pour certains types de réductions [SB 80], [SP], on estimera que la partie du système qui n'est ni observable ni commandable n'affecte pas beaucoup le comportement entrée-sortie du système; on n'en gardera donc que les parties les plus commandables et observables. Pour cela, on partitionne le système en deux sous matrices diagonales. Le rang choisi comme limite correspond au décrochage entre  $\sigma_k$  et  $\sigma_{k+1}$ , lorsque  $\sigma_k \gg \sigma_{k+1}$  dans la suite des valeurs singulières

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0.$$

On conserve la réalisation correspondant aux  $k$  premières valeurs singulières et on obtient une approximation d'ordre  $k$ .

Cette méthode de réduction appelée troncature dans la base d'équilibre est souvent utilisée car elle permet de bons résultats pratiques.

Introduisons maintenant la méthode que nous avons choisi d'étudier, à savoir l'approximation optimale au sens de la norme de Hankel.



## Chapitre 2

# Approximation Hankel-optimale et Approximation $L_\infty$

L'approximation au sens de la norme de Hankel est une méthode d'approximation optimale qui repose sur le résultat de Nehari énoncé dans le théorème 1.1 établissant l'existence d'une association biréciproque entre la fonction de transfert d'un système et l'opérateur de Hankel (représenté par une matrice dans le cas de la dimension finie) qui lui est associé.

### 2.1 Approximation des systèmes de dimension finie

Considérons, comme il est fait par Silverman et Bettayeb dans [SB 80], le cas simple où le système  $\Xi$  étudié est de dimension finie  $n$ , discret, mono entrée mono sortie et stable; l'opérateur de Hankel est alors représenté par la matrice infinie des coefficients de la réponse impulsionnelle du système. Ainsi si l'on considère la réalisation  $(A, B, C)$  associée à  $\Xi$  - qui permet de décrire l'évolution du système suivant les équations 1.2.2 - on a vu comment caractériser totalement le comportement de ce système  $\Xi$  par la matrice de Hankel  $\Gamma$  définie de la façon suivante :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_k & \dots \\ f_2 & f_3 & f_4 & \dots & f_{k+1} & \dots \\ \vdots & & & & & \\ f_k & f_{k+1} & f_{k+2} & \dots & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

où les  $f_i$  sont donnés par

$$f_i = CA^{i-1}B.$$

$\Gamma$  est symétrique réelle, bornée et de rang égal à la dimension du système. Réduire le système correspond alors indifféremment ([Glo 84])

- à trouver une matrice de Hankel  $\Gamma_r$  de rang  $r$  inférieur au rang de  $\Gamma$  qui permette de réaliser une erreur minimale, l'erreur étant définie par

$$\|\Gamma - \Gamma_r\| = \sup_{u \in L^2(-\infty, 0)} \frac{\|y(\Xi) - y_r(\Xi)\|_{L^2(0, \infty)}}{\|u(\Xi)\|_{L^2(-\infty, 0)}}$$

où  $y$  représente la sortie du système initial,  $y_r$  celle du système réduit et où  $u$  représente l'entrée, ou bien

- si  $G$  est la fonction de transfert de  $L^\infty$  associée à  $\Xi$ , à déterminer  $\hat{G}$  de degré  $r$  telle que

$$\|G - \hat{G}\|_{\mathcal{H}} = \inf_{F, \hat{G}} \|G - \hat{G} - F\|_\infty = \sigma_{k+1}$$

avec  $\hat{G}(s) \in H_\infty^\perp$  et  $F(s) \in H_\infty$ .

Ce sont Adamjan *et al.* [AAK 71] qui, les premiers, résolvent ce problème d'approximation en établissant l'existence d'un approximant unique. Des applications à des cas de systèmes dynamiques linéaires stationnaires scalaire [SB 80] puis multivariable [KLi 81, Glo 84] ont suivi. Ainsi, il a été établi que l'approximant est connu lorsque le système est de dimension finie, soit lorsque  $\Gamma$  est de rang fini. Pour le cas présenté ici ceci se concrétise comme suit :  $\Gamma$  de rang fini  $n$  et borné est donc compact. On peut lui associer la décomposition de Schmidt suivante

$$\Gamma = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & \dots & u^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

où la matrice  $\Sigma$  est la matrice des valeurs singulières de  $\Gamma$  rangées par ordre croissant,  $\sigma_{i+1} \leq \sigma_i$ ;  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $U$  et  $V$  sont deux matrices orthogonales (i.e.  $U^t U = Id = V^t V$ ) où les  $v^i$  et les  $u^i$  (les  $i^{\text{ème}}$  colonnes de  $V$  et de  $U$ , respectivement) sont les paires de Schmidt associées à la valeur singulière  $\sigma_i$ , respectivement à droite et à gauche :

$$\Gamma v^i = \sigma_i u^i \quad \text{et} \quad \Gamma^* u^i = \sigma_i v^i.$$

Dans le cas où  $\Gamma$  est symétrique et réelle, soient  $u_j^i$  et  $v_j^i$  les  $j^{\text{ème}}$  composantes de  $u^i$ ,  $v^i$  respectivement; on définit

$$\mu^i(z) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j^i z^{-j}$$

et

$$\nu^i(z) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j^i z^{j-1}.$$

Le principal résultat énoncé par [AAK 71] et appliqué à ce cas particulier est le suivant :

**Théorème 2.1**

Soit  $\sigma_{r+1} < \sigma_r$  la  $(r+1)^{\text{ème}}$  valeur singulière de la matrice de Hankel bornée  $\Gamma$ . Alors, parmi toute les matrices de Hankel bornées  $\Lambda$  de rang  $r$ , il en existe une,  $\Lambda^r$ , unique, qui minimise  $\|\Gamma - \Lambda\|$  et

$$\|\Gamma - \Lambda^r\| = \sigma_{r+1}.$$

De plus,  $\Lambda^r = \Gamma - \Gamma(\Phi^r(z))$  où  $\Gamma(\Phi^r(z))$  représente la matrice de Hankel associée au système dont la fonction de transfert est

$$\Phi^r(z) = \sigma_{r+1} \frac{\mu^{r+1}(z)}{\nu^{r+1}(z^{-1})}.$$

Le même théorème peut être énoncé en terme de minimisation de la fonction de transfert au sens de la norme de Hankel.

La puissance et l'originalité du résultat d'Adamjan, Arov et Krein viennent du fait qu'il établit que parmi tous les opérateurs atteignant l'optimum  $\sigma_{r+1}$ , il y en a au moins un qui est un opérateur de Hankel. En effet, il est désormais bien connu que si l'on recherche la meilleure approximation de  $\Gamma$  par un opérateur quelconque de rang  $r < n$  alors on a :

$$\inf_{\Lambda \text{ de rang } r} \|\Gamma - \Lambda\| = \sigma_{r+1}.$$

En fait si

$$\Gamma = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} V^t$$

est la décomposition en valeurs singulières de  $\Gamma$  alors un opérateur atteignant la borne  $\sigma_{r+1}$  est donné par

$$\Lambda = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} V^t.$$

Mais en général,  $\Lambda$  n'est pas un opérateur de Hankel.

Le résultat d'optimalité de l'approximation de Hankel constitue une des principales motivations de ce type d'approximation : pour  $r$  fixé, la matrice de Hankel  $\Gamma_r$  existe toujours et définit alors totalement le système réduit associé d'ordre  $r$ . De plus, dès que l'on a choisi le degré de l'approximant recherché, on peut estimer l'erreur d'approximation que l'on réalisera dans le meilleur des cas d'après la définition 1.2, pour peu que l'on connaisse les valeurs singulières associées à l'opérateur de Hankel. On peut décrire succinctement les principales étapes qui pratiquement permettent la construction de l'approximant optimal comme suit :

- **Détermination des valeurs singulières :**

Il suffit alors pour déterminer les valeurs singulières, de déterminer les grammiens associés à  $\Xi$  d'après le résultat du paragraphe 1.3.1 sachant qu'ils sont solution des équations de Lyapunov 1.3.1.

- **Réalisation dans la base d'équilibre :**

On construit la réalisation dans la base d'équilibre  $(F, G, H)$  associée à  $\Xi$  pour laquelle

$$M = \Sigma = W \quad \text{où} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n \end{pmatrix}.$$

Soit  $r < n$  l'ordre d'approximation choisi. On réalise alors une partition de  $(F, G, H)$  correspondant à la partition de  $\Sigma$  en deux sous matrices diagonales délimitées par  $\sigma_r$ . Ceci est fait de la façon suivante :

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} H = (H_1 \quad H_2)$$

où  $F_{11}$  est de dimension  $r \times r$ .

- **Système réduit d'ordre  $r$  :**

On construit la réalisation associée à ce système à l'aide notamment de la transformation  $T$ , qui réalise le changement de base conduisant à la réalisation dans la base d'équilibre, des valeurs singulières et des termes de la réalisation  $(F, G, H)$ .

Pour plus de précisions on se référera à l'algorithme détaillé donné en annexe C extrait de [SB 80].

Se dégage de la présentation de ce cas simple l'importance des valeurs singulières lors de la détermination de l'approximant de Hankel. Non seulement elles interviennent dans son expression explicite, mais en plus elles donnent la mesure de l'erreur d'approximation réalisée.

Il existe également une solution optimale au problème de réduction d'un système multivariable. Elle est réalisée par généralisation des résultats précédents comme dans [KLi 81, Glo 84].

Ainsi par exemple dans [Glo 84], toutes les solutions du problème d'approximation au sens de la norme de Hankel sont explicitées et il est montré que ce sont des fonctions simples de réalisations dans la base d'équilibre. La connaissance explicite des valeurs singulières conserve dans ce cas son caractère essentiel. De plus, l'intérêt de ces valeurs est renforcé parce qu'elles interviennent dans les résultats que [Glo 84] établit concernant les bornes de la réponse fréquentielle et qui s'inspirent des inégalités du théorème 1.7. Leur domaine d'application est plus large que l'approximation optimale elle-même.

Le problème se pose en ces termes : quelle est l'incidence du fait que la norme de Hankel ait été rendue *petite* pour les autres normes ?

On étudie ici le cas de la norme  $L^\infty$  pour une fonction de transfert  $G$  stable.

Lorsque les valeurs singulières de la matrice de Hankel sont données, et lorsque  $G$  tend vers 0 à l'infini, il est établi que

$$\|G(j\omega)\|_{L^\infty} \leq 2(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_N)$$

et de plus, qu'il existe une constante  $D$  telle que

$$\|G(j\omega) + D\|_{L^\infty} \leq (\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_N).$$

Ce résultat est prouvé à l'aide de la représentation suivante (qui existe toujours) pour une fonction de transfert carrée stable :

$$G(s) = D_0 + \sigma_1 E_1(s) + \sigma_2 E_2(s) + \dots + \sigma_N E_N(s),$$

où  $E_k(s)$  sont des fonctions "all-pass" (toutes leurs valeurs singulières sont égales à 1), et stable pour tout  $k$ , et où les sommes partielles  $D_0 + \sigma_1 E_1(s) + \sigma_2 E_2(s) + \dots + \sigma_k E_k(s)$  sont de degré de Mac-Millan  $k$ . Cette représentation s'obtient par réduction de l'ordre d'une dimension à la fois, en utilisant la méthode d'approximation optimale au sens de la norme de Hankel.

A l'aide de cette représentation, on peut calculer de manière très simple un approximant d'ordre  $k$  de  $G(s)$  mais qui ne soit pas forcément optimal; cet approximant d'ordre  $k$  sera donné par :

$$\hat{G}(s) = D_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} \sigma_i E_i(s)$$

et vérifiera

$$\|G(s) - \hat{G}(s)\|_{L^\infty} \leq (\sigma_{k+1} + \sigma_{k+2} + \dots + \sigma_N).$$

Lorsque  $G(s)$  est approximé par  $\tilde{G}(s)$ , fonction de transfert d'ordre  $k$  issue de la restriction d'une réalisation dans la base d'équilibre (comme vu au paragraphe 1.3.1) alors

$$\|G(s) - \tilde{G}(s)\|_{L^\infty} \leq 2(\sigma_{k+1} + \sigma_{k+2} + \dots + \sigma_N).$$

Ces résultats montrent que l'approximation de type Hankel ou de type troncature dans la base d'équilibre donnent des erreurs "assez bonnes" au sens de la norme  $L^\infty$ .

Nous allons dans ce qui suit nous consacrer au problème de la réduction de systèmes continus de dimension infinie.

## 2.2 Approximation des systèmes de dimension infinie

La généralisation des résultats précédents aux systèmes de dimension infinie suscite plusieurs types de préoccupations.

Qui dit système de dimension infinie, pose le problème de la détermination d'une réalisation associée à ce système qui soit bien posée (voir par exemple [CPr 78], [Cur 88c, Cur 88b], [CW 89]) et notamment qui permette d'en garantir l'étude spectrale. Ainsi, Curtain étudie les propriétés de la classe des systèmes qu'elle appelle spectraux, soit dont l'opérateur associé est spectral, ce qui signifie qu'il a une décomposition spectrale simple et que ses vecteurs propres forment une base complète de l'espace d'état. Les systèmes à paramètres distribués paraboliques et hyperboliques sont spectraux. Ce n'est plus le cas des systèmes à retard : Curtain *et al* [CZ 87, CZ 88] établissent que la condition nécessaire et suffisante de nucléarité de l'opérateur de Hankel associé assure qu'un système scalaire à retard soit spectral. C'est la réciproque de cette intéressante propriété, que l'on rétablira pour le cas multivariable et que l'on utilisera pour montrer la nucléarité du système parabolique, objet de notre première application.

### 2.2.1 Existence de l'approximant Hankel-optimal

Récemment, Curtain, Glover et Partington [CG 85, GCP 88] ont étudié le problème de l'approximation au sens de la norme de Hankel de systèmes multivariables de dimension infinie dans le cas continu. Ils ont établi que lorsque ces systèmes étaient nucléaires alors on pouvait expliciter l'approximant optimal au sens de la norme de Hankel de façon similaire au cas de la dimension finie.

Soit donc un système nucléaire, dont la réponse impulsionnelle satisfait  $h \in L^1 \cap L^2(0, \infty; \mathbb{C}^{p \times q})$  et dont l'observation est

$$y(t) = \int_0^t h(t-s)u(s)ds,$$

où les sorties  $y \in L^2(0, \infty; \mathbb{C}^q)$ , les entrées  $u \in L^2(0, \infty; \mathbb{C}^p)$ .

Dans ce cas l'opérateur de Hankel correspondant  $\Gamma$  est défini par

$$(\Gamma f)(t) = \int_0^\infty h(t+s)f(s)ds, \quad f \in L^2(0, \infty; \mathbb{C}^p).$$

On construit à partir des valeurs singulières de  $\Gamma$  et des paires de Schmidt associées, une réalisation  $(A, B, C)$ , telle que  $h(t) = Ce^{At}B$  (il peut s'agir par exemple d'une réalisation dans la base d'équilibre). Ici  $A, B$  et  $C$  sont des opérateurs de dimension infinie. Il est alors montré que des troncatures  $(A_n, B_n, C_n)$  de  $(A, B, C)$ , permettent de se ramener à la dimension finie et assurent la convergence suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G(s) - G_n(s)\|_\infty = 0$$

où  $G$  est la transformée de Laplace de  $h$ ,  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  et où  $G_n(s) = C_n(sI_n - A_n)^{-1}B_n$ . Des estimations des erreurs d'approximation successives sont aisément explicitées dans ce cas.

Les résultats de [Glo 84] pour le cas fini sont alors appliqués à  $G_n$  pour chaque  $n$  et des approximants optimaux au sens de la norme de Hankel sont obtenus; leur expression paramétrisée est donnée par un opérateur linéaire  $\vartheta_n$  [BH 83]. Il est alors montré que  $\vartheta_n$  converge en norme  $L^\infty$  vers une fonction  $\vartheta$  qui elle-même correspond aux solutions paramétrisées du problème d'approximation au sens de la norme de Hankel de  $G(s)$ ; sont alors données des bornes de l'erreur d'approximation.

On conçoit que la détermination de cet approximant optimal est loin d'être triviale en pratique.

Pour une certaine classe de réponses impulsionnelles  $h$ , on peut obtenir directement et explicitement la fonction  $\vartheta$  en termes de réalisation d'espace d'état ou en fonction de  $\Gamma$  et de  $h$ .

Il s'agit des fonctions du type  $F(s)e^{-sT}$  où  $T > 0$  et  $F(s)$  rationnelle; cette classe comprend les systèmes à retard [GLP 90].

Mais, lorsque l'on n'est pas dans cette classe, il devient difficile de déterminer l'opérateur de Hankel, ses valeurs singulières et paires de Schmidt associées.

Dans le cas de la dimension infinie, si la théorie [GCP 88] permet de déterminer explicitement un approximant optimal, les applications sont loin d'être immédiates. Pour pallier ce problème, on sera conduit à déterminer un approximant  $L^\infty$  comme le suggèrent les bons résultats sur les erreurs commises suivant le type d'approximant considéré, exposés au paragraphe suivant.

### 2.2.2 Approximant $L_\infty$

Rappelons ici quel est l'encadrement de la norme de l'erreur commise comme il est établi dans [GCP 88, Théorème 6.4].

Soit  $h \in L^1$  admettant pour transformée de Laplace  $G$ ,  $\hat{G}_k$  l'approximant optimal de degré  $k$  de  $G$  (au sens de la norme de Hankel); cela signifie que  $\|G - \hat{G}_k\|_{\mathcal{H}} = \sigma_{k+1}$ . Soit  $\hat{h}_k$  la transformée de Laplace inverse de  $\hat{G}_k$ . Alors on a les propriétés suivantes :

- il existe une matrice constante  $D$  telle que

$$\|G - \hat{G}_k - D\|_\infty \leq M_k \quad \text{où} \quad M_k = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{k+i}(G),$$

- $\|G - \hat{G}_k\|_N \leq 2k\sigma_{k+1} + M_k$ ,
- $\|h - \hat{h}_k\|_1 = \int_0^\infty \|h(t) - \hat{h}_k(t)\| dt \leq 4k\sigma_{k+1}(G) + 2M_k$ .

Ceci montre que l'approximation de Hankel est intéressante lorsque l'on souhaite obtenir de bonnes estimations uniformes dans le domaine fréquentiel, pourvu que les valeurs singulières du système décroissent vite à l'infini.

Considérons une réalisation à sortie normale : cela signifie que le grammien de commandabilité est donné par  $P = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \dots)$  et le grammien d'observabilité par  $Q = I$ . Soit  $G_k$  la fonction de transfert correspondant à la restriction de cette réalisation à l'ordre  $k$ , alors on a

$$\|G - G_k\|_\infty \leq 2M_k$$

ce qui n'est que deux fois moins bon que la borne obtenue pour une approximation optimale au sens de la norme de Hankel. Cette remarque sera d'un grand intérêt par la suite.

Enfin, citons le cas où l'opérateur de Hankel est nucléaire, ce qui signifie que les valeurs singulières sont sommables. Dans le cas où elles décroissent rapidement à l'infini en  $K^{-i}$ , on a

$$\begin{array}{ccc} \sigma_{k+1} & \leq \|G - \hat{G}\|_\infty \leq & \sigma_{k+1} + \sigma_{k+2} + \dots \\ \parallel & & \parallel \\ K^{-k} & & K^{-k} \frac{1}{1 - \frac{1}{K}} \end{array}$$

avec  $K \gg 1$ .

Ainsi l'approximation  $L^\infty$  possède de bonnes propriétés de convergence.

Ces remarques justifient l'intérêt qui a été porté à la détermination d'un approximant  $L^\infty$  tel qu'il s'est manifesté par la mise en évidence de l'existence d'une décomposition modale pour les systèmes nucléaires [ZCPG 88] ou pour les systèmes retardés au sens de Bellmann et Cooke [PGZC 88]. Il s'agit alors de réduire une nouvelle fois cet approximant par troncature dans la base d'équilibre ou par ap-



proximation de Hankel (comme il est proposé [CG 86b]).

Dans le travail qui suit, nous avons utilisé ces méthodes en les adaptant aux spécificités des systèmes étudiés.

Ainsi, dans la seconde partie de ce mémoire nous présentons tout d'abord l'étude d'un problème d'évolution de la température au sein d'une paroi [Maï 91]. On verra comment on détermine une approximation  $L^\infty$  de ce système parabolique multivariable en s'inspirant des résultats établis dans [ZCPG 88] pour les systèmes scalaires à retard.

Puis nous envisagerons les problèmes de systèmes hyperboliques, à la limite de l'instabilité, modélisant des poutres. Ne remplissant plus les mêmes hypothèses que le premier problème d'évolution, il s'est alors avéré nécessaire de mettre au point une approche originale, préalable à l'approximation, et que l'on a baptisée relaxation [Maï 92].



## Deuxième Partie

# Application à des systèmes de dimension infinie



## Chapitre 3

# Etude d'un problème parabolique

Dans ce chapitre, nous exposons les étapes de l'approche qui nous ont conduits à déterminer, en utilisant l'approximation optimale au sens de la norme de Hankel, un approximant  $L^\infty$  permettant de décrire l'évolution d'un champ de températures au sein d'une paroi.

Il s'agit d'un cas favorable pour lequel la réduction se fait assez aisément : en effet, on remarquera que l'on peut considérer ce système comme un système à retard de variable de Laplace  $\sqrt{s}$ ; il est alors possible d'utiliser la méthode de décomposition en pôle résidu développée dans [ZCPG 88]. Il sera cependant nécessaire au cours des développements, de redémontrer certains résultats pour les adapter aux spécificités de notre système.

### 3.1 Le modèle physique

Décrivons tout d'abord le phénomène, illustré par la figure 3.1.1, comme cela est fait dans [Nei 89].

Une des faces de cette paroi est le siège d'un échange convectif ( $h_i$ ) avec une masse d'air isolée. L'autre face échange, également par convection ( $h_e$ ), avec l'air extérieur. D'autre part, la paroi absorbe des flux d'origine solaire  $\phi_{si}$  et  $\phi_{se}$  sur ses faces intérieures et extérieures respectivement. Il y a monodimensionalité des échanges conductifs dans la paroi. Le champ de température dont on cherche l'évolution est donc une fonction  $\theta(x, t)$ , température à un instant  $t$  en un point quelconque de la paroi.

L'équation de l'évolution de la chaleur au sein du mur s'écrit :

$$\rho(x)C(x)\frac{\partial\theta}{\partial t}(x, t) = \operatorname{div} \left( \lambda(x)\vec{\operatorname{grad}} \theta(x, t) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(x)\frac{\partial\theta}{\partial x}(x, t) \right)$$

où sont représentés

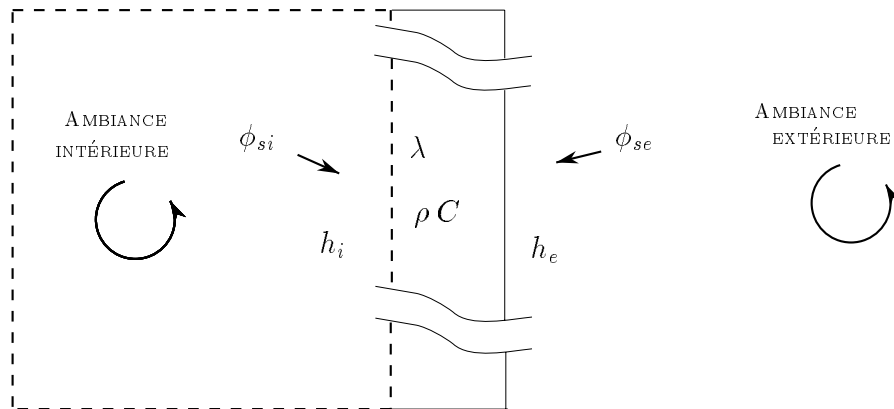


Figure 3.1.1 : Paroi couplée à une masse d'air

$\rho$ , la masse volumique en  $kg/m^3$ ,  
 $C$ , la chaleur massique en  $J/kgK$ ,  
 et  $\lambda$ , la conductivité en  $W/mK$ .

Le mur étant constitué de couches homogènes au sein desquelles  $\rho$ ,  $C$  et  $\lambda$  sont constantes, cette équation devient (au sein d'une couche) :

$$\rho C \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x, t). \quad (3.1.1)$$

On va alors, pour simplifier le problème, supposer que notre paroi est mono-couche. Les conditions aux limites associées à 3.1.1 sont

- en  $x = 0$  (face intérieure)

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = -h_i (T_i(t) - \theta(0, t)) - \phi_{si}(t) \quad (3.1.2)$$

où  $T_i$  est la température au sein de la masse d'air;

- en  $x = l$  (face extérieure)

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = h_e (T_e(t) - \theta(l, t)) + \phi_{se}(t) \quad (3.1.3)$$

où  $T_e$  est la température extérieure.

Enfin, la condition initiale qui permet de parvenir au modèle physique complet est la suivante

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x). \quad (3.1.4)$$

Nous avons donc à résoudre le système de 4 équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x, t) \\ \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = -h_i (T_i(t) - \theta(0, t)) - \phi_{si}(t) \\ \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = h_e (T_e(t) - \theta(l, t)) + \phi_{se}(t) \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x). \end{array} \right. \quad (3.1.5)$$

Par la suite, on utilisera les notations simplifiées :

$$a = \lambda/\rho C, \alpha = \lambda/h_i \text{ et } \beta = \lambda/h_e.$$

On peut d'ores et déjà remarquer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont positifs puisque  $\lambda$ ,  $h_i$  et  $h_e$  le sont.

Le contrôle sera noté :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = T_i + \frac{\phi_{si}(t)}{h_i} \\ v(t) = T_e + \frac{\phi_{se}(t)}{h_e}. \end{array} \right.$$

Il est bien indépendant du comportement intrinsèque du système.

L'observation est réalisée à la frontière du mur :

$$y(t) = \theta(0, t). \quad (3.1.6)$$

Le système 3.1.5 devient donc avec les nouvelles notations et en tenant compte de l'observation  $y$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x, t) \\ \theta(0, t) = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) + u(t) \\ \theta(l, t) = -\beta \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) + v(t) \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ y(t) = \theta(0, t). \end{array} \right. \quad (3.1.7)$$

Ce problème est un problème classique d'évolution de la chaleur dont les conditions aux bords sont des conditions de Fourier.

## 3.2 Le problème posé et ses traitements

Nous allons dans ce qui suit rechercher un approximant en utilisant la démarche exposée au paragraphe 2.2 car le système à réduire est de dimension infinie. Pour déterminer directement un approximant Hankel-optimal, il est nécessaire de connaître ses valeurs singulières (si elles existent).

Or, on a déjà évoqué le fait que si ces invariants du système sont en théorie la clé de notre problème, car ils permettent d'accéder à une expression de l'approximant optimal, en pratique ce sont des éléments qui restent inaccessibles. Même dans les cas où est établie une méthode pour leur calcul explicite, comme dans [GLP 86] ou [GLP 90] pour les systèmes dont la fonction de transfert associée est de la forme  $e^{-sT}F(s)$  où  $F$  est une fonction rationnelle, le calcul peut devenir rapidement extrêmement complexe. C'est pourquoi, on préfère souvent des méthodes qui permettent seulement d'accéder à une estimation de ces valeurs [GLP 90] et qui sont beaucoup plus simples.

Une des façons de procéder est de réaliser une combinaison entre approximation modale et approximation de Hankel comme il est proposé dans [CG 86b] : l'approximation modale constituera une étape intermédiaire permettant de se ramener à un système de dimension finie pour lequel on sait déterminer les valeurs singulières.

Il faut bien voir ici que cette approximation intermédiaire est faite de façon à garantir l'optimalité de l'approximant final. Celle-ci résulte d'une importante propriété de convergence des valeurs singulières (cf par exemple [Par 88]) : soit  $G$  la fonction de transfert associée à un système de dimension infinie et soit  $G_n$  une fonction d'ordre  $n$  telle que

$$G_n \longrightarrow G \text{ au sens de la norme } L^\infty$$

alors

$$\sigma_i(G_n) \longrightarrow \sigma_i(G)$$

où  $\sigma_i(G)$  (resp.  $\sigma_i(G_n)$ ) désigne la  $i^{\text{ème}}$  valeur singulière de  $G$  (resp. de  $G_n$ ). En fait ceci découle de la relation

$$|\sigma_i(G_n) - \sigma_i(G)| \leq \|G_n - G\|_\infty. \quad (3.2.1)$$

Nous démontrerons cette propriété au paragraphe 3.5.1, dans le cas où  $G_n$  est une approximation modale de  $G$ .

Ainsi, pourvu que l'erreur d'approximation, au sens de la norme infinie, entre le système de dimension infinie et le système de dimension finie soit suffisamment faible, les valeurs singulières deviennent accessibles de manière assez précise. On peut alors, grâce à elles, déterminer une approximation optimale au sens de la norme de Hankel du système de dimension finie.

Dans un premier temps, le problème qui se pose est donc de déterminer un approximant qui soit de dimension finie et tel que l'erreur d'approximation (au sens  $\| \cdot \|_\infty$ )



soit assez faible. Ceci peut se faire suivant différentes méthodes d'approximation : par des méthodes utilisant des éléments finis, de type modale, de type Padé ou encore Fourier-Laguerre (cf par exemple [Sha 75] ou [Par 90] et ses références.) Dans le cas où l'opérateur de Hankel associé au système de dimension infinie est nucléaire, on sait déterminer directement un tel approximant. Car alors, le système admet une décomposition modale du type de celle donnée dans le paragraphe 3.3.3; il suffit alors d'en prendre une troncature à l'ordre  $n$  choisi comme ordre du système approximant de dimension finie. Ceci se justifie par le caractère irréversible du phénomène : ce système parabolique est dissipatif <sup>1</sup> et donc libère son énergie au cours du temps. Ses pôles sont inclus dans un cône d'ouverture variable d'angle inférieur à  $\pi$  comme représenté sur la figure 3.2.1. Le système n'est plus influencé par les modes qui s'éloignent de l'axe imaginaire dans ce cône. Une approximation modale peut donc pour de tels système être considérée comme une bonne approximation. Pour arriver

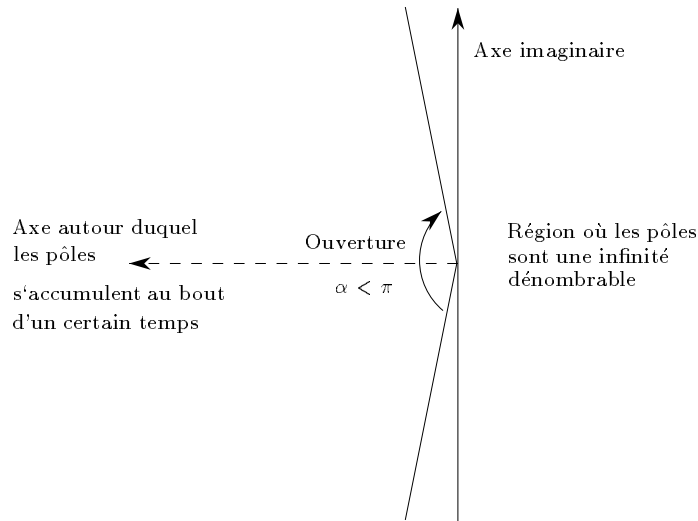


Figure 3.2.1 : Lieu des pôles des systèmes paraboliques

à cette approximation intermédiaire deux approches sont possibles :

- Une approche dans le domaine fréquentiel;
- Une approche par formulation variationnelle.

Nous allons dans ce qui suit expliciter ces procédés dans le cas particulier de notre problème d'évolution de la chaleur au sein d'une paroi.

<sup>1</sup>Le phénomène des ondes amorties, qui, comme la chaleur peut être classé parmi les phénomènes de type parabolique pourra donc probablement être traité de manière similaire.

### 3.3 Etude dans le domaine fréquentiel

#### 3.3.1 Calcul de la fonction de transfert

On utilise pour ce faire la transformée de Laplace monolatère sur la variable  $t$  (car on suppose que le système est causal soit que pour  $t < 0$ ,  $\theta(x, t) = 0$ ). A toute fonction du temps  $f(t)$  on associe sa transformée de Laplace :

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

De telle sorte que le modèle physique se met sous la forme d'un jeu d'équations différentielles en  $x$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial x^2}(x, s) - \frac{s}{a} \hat{\theta}(x, s) = -\frac{1}{a} \theta_0(x) \\ \alpha \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x}(0, s) + \hat{u}(s) = \hat{\theta}(0, s) \\ -\beta \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x}(l, s) + \hat{v}(s) = \hat{\theta}(l, s) \\ \hat{y}(s) = \hat{\theta}(0, s). \end{array} \right. \quad (3.3.1)$$

Déterminons la fonction de transfert  $G$  telle que

$$\hat{y}(s) = G(s) \begin{pmatrix} \hat{u}(s) \\ \hat{v}(s) \end{pmatrix}.$$

Pour cela, on intègre l'équation différentielle en  $x$  du système 3.3.1 avec comme condition à la limite en  $x$ ,  $\theta(x, 0) = 0$ . Ceci nous amène à l'expression suivante pour la fonction  $G$  :

$$\boxed{\begin{array}{l} G(s) = \frac{1}{\Delta} \left[ e^{ql}(1 + \beta q) - e^{-ql}(1 - \beta q) \ , \quad 2\alpha q \right] \\ \text{où } q = \sqrt{\frac{s}{a}} \ , \\ \text{où } \Delta = e^{ql}(1 + \alpha q)(1 + \beta q) - e^{-ql}(1 - \alpha q)(1 - \beta q). \end{array}} \quad (3.3.2)$$

On peut indifféremment considérer  $G$  comme une fonction de la variable  $s$  ou de la variable  $q$  grâce car ses numérateur et dénominateur sont des fonctions impaires de

$q$ . De plus, remarquons que la fonction de transfert  $G$  est de la forme :

$$e^{-\alpha\sqrt{s}}F(\sqrt{s})$$

où  $\alpha = \frac{l}{\sqrt{a}}$  et  $F$  est la fonction matricielle définie par

$$F(\sqrt{s}) = \frac{1}{\Delta} \left[ e^{2\alpha\sqrt{s}}(1 + \beta q) - (1 - \beta q), e^{\alpha\sqrt{s}}2\alpha q \right].$$

On peut donc considérer  $G$  comme la fonction de transfert d'un système à retard dont la variable serait  $\sqrt{s}$ .

### 3.3.2 Pôles de la fonction de transfert

Nous allons maintenant étudier les pôles associés à  $G$  pour déterminer le comportement de notre système.

#### Détermination des pôles

Les pôles de  $G$  sont de la forme  $s = aq^2$  avec  $q$  racine de l'équation

$$\Delta = 0 \iff e^{2ql} = \frac{(1 - \alpha q)(1 - \beta q)}{(1 + \alpha q)(1 + \beta q)}. \quad (3.3.3)$$

#### Proposition 3.1

Soit  $q$  une racine de l'équation 3.3.3. Alors  $q$  est imaginaire pur.

*Démonstration de la proposition 3.1*

Montrons par l'absurde que  $Re(q) = 0$ .

Rappelons ici que  $\alpha, \beta$  et  $l$  sont strictement positifs.

1) Supposons que  $Re(q) > 0$ .

Alors  $Re(\alpha q) > 0$  et donc  $\left| \frac{1 - \alpha q}{1 + \alpha q} \right| < 1$  de même  $Re(\beta q) > 0$  soit  $\left| \frac{1 - \beta q}{1 + \beta q} \right| < 1$  car l'opérateur de Möbius établit un isomorphisme entre  $\mathbb{C}_+$  et  $\{|z| < 1\}$ . Donc

$$Re(q) > 0 \implies \left| \frac{(1 - \alpha q)(1 - \beta q)}{(1 + \alpha q)(1 + \beta q)} \right| < 1.$$

Or  $|e^{2ql}| = |e^{2Re(q)} e^{2iIm(q)}| = |e^{2Re(q)}|$  et  $Re(q) > 0 \implies |e^{2Re(q)}| > 1$ .

D'où la contradiction.

2) Supposons que  $\operatorname{Re}(q) < 0$ .

On fait le raisonnement symétrique s'appuyant sur l'isomorphisme établi par l'opérateur de Möbius entre  $\mathbb{C}_-$  et  $\{|z| > 1\}$ . On arrive alors à une contradiction.

Donc  $q$  est imaginaire pur.

□

On pose  $q = i\omega$  avec  $\omega$  réel.

En injectant cette expression dans l'équation 3.3.3 on obtient

$$e^{2i\omega l} = \frac{(1 - \alpha i\omega)(1 - \beta i\omega)}{(1 + \alpha i\omega)(1 + \beta i\omega)}. \quad (3.3.4)$$

*Remarque 3.1*

*Au vu de l'équation 3.3.4, on peut tout de suite conclure que si  $q$  est solution alors  $-q$  l'est également.*

La résolution de l'équation 3.3.4 nous amène à la conclusion suivante : les pôles  $s$  de la fonction de transfert  $G$  sont tels que  $s = -a\omega^2$  où  $\omega \in \mathbb{R}^*$  et vérifie

$$\tan(\omega l) = -\frac{(\alpha + \beta)\omega}{1 - \alpha\beta\omega^2}. \quad (3.3.5)$$

Donc tous les pôles de la fonction de transfert  $G$  sont réels et négatifs. Cela signifie donc que  $G$  est une fonction stable.

### Comportement asymptotique des pôles

L'équation 3.3.5 permettant de caractériser les pôles peut s'écrire de la façon suivante

$$l\omega(k) = \arctan(-\alpha\omega) + \arctan(-\beta\omega) + k\pi,$$

où  $k$  est un entier positif.

On en déduit que lorsque la valeur de  $\omega(k)$  devient grande, c'est à dire lorsque  $\arctan(-\omega)$  tend asymptotiquement vers  $-\pi/2$ ,  $\omega(k)$  se comporte comme  $(k-1)\pi/l$ .

Donc les pôles de  $G$  tendent asymptotiquement vers la valeur  $-a\frac{k^2\pi^2}{l^2}$ .

De plus ces pôles sont isolés et simples.

Dans la suite, on désignera ces pôles par la suite infinie des  $\{\xi_k\}_{k>0}$ .

### 3.3.3 Décomposition modale

Les résultats établis précédemment vont nous permettre de statuer sur le bien fondé de l'écriture de  $G$  sous forme d'une somme infinie de fractions rationnelles élémentaires (ou de décomposition en éléments simples).

### Propriétés de la fonction de transfert

La fonction de transfert  $G$  est une fonction *méromorphe*.

En effet, on a vu qu'elle admettait une suite de pôles, les  $\{\xi_k\}_{k>0}$ , sans point d'accumulation, en dehors desquels elle est holomorphe (de par son expression comme quotient de fonctions holomorphes).

### Proposition 3.2

On peut décomposer  $G$  sous la forme

$$G(s) = \sum_1^{\infty} \frac{\text{Res}(G; \xi_k)}{s - \xi_k}.$$

Ce résultat se déduit d'un théorème cité dans [ZCPG 88]. Il utilise la notion de diagramme de distribution dont la définition est la suivante :

### Définition 3.1

Considérons une fonction

$$h_1(s) = \sum_{i=0}^{n_1} p_i(s) e^{-\gamma_i s}$$

avec  $p_i(s)$  polynôme de degré  $\delta_i$  et  $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_{n_1}$ .

Le diagramme de distribution (ou diagramme de Newton) des points  $(\gamma_i, \delta_i)$ ,  $i = 0, \dots, n_1$ , est la ligne polygonale  $L$  correspondant à la partie supérieure de la frontière de l'enveloppe convexe des points  $(\gamma_i, \delta_i)$ .

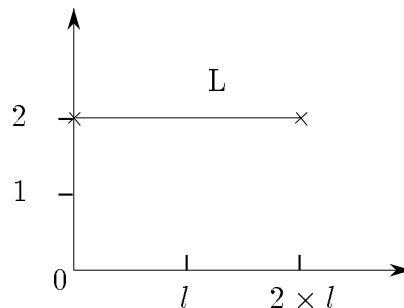


Figure 3.3.1 : Diagramme de distribution L

Dans notre application, la fonction  $h_1$ , fonction de la variable  $q$  ( $= \sqrt{s/a}$ ), s'écrit

$$\begin{aligned} h_1(q) &= (1 + \alpha q)(1 + \beta q) - (1 - \alpha q)(1 - \beta q)e^{-2ql} \\ &= p_0(q) + p_1(q)e^{-\gamma_1 q}. \end{aligned}$$

On a donc  $\delta_0 = 2$ ,  $\delta_1 = 2$ ,  $\gamma_0 = 0$  et  $\gamma_1 = 2l$ . Le diagramme de distribution correspondant à  $h_1(q)$  est donné figure 3.3.1.

Rappelons la définition suivante :

**Définition 3.2** *Deux fonctions analytiques dans le demi plan droit sont coprimales si elles n'ont pas de zéros communs dans  $\mathbb{C}_+$  ou à l'infini.*

On peut maintenant énoncer le théorème donnant la décomposition en éléments simples d'une fonction :

### Théorème 3.1

Soit une fonction

$$h_1(s) = \sum_{i=0}^{n_1} p_i(s) e^{-\gamma_i s}$$

avec  $p_i(s)$  polynôme de degré  $\delta_i$  et  $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_{n_1}$ , et soit  $K$  le diagramme de distribution de  $h_1(s)$ . Supposons que sur chaque segment  $K_j$  de  $K$  il y ait exactement deux points  $(\gamma_i, \delta_i)$ .

Soit

$$h_2(s) = \sum_{i=1}^{n_2} q_i(s) e^{-\alpha_i s}$$

avec  $q_i(s)$  polynôme de degré  $d_i$ , et supposons que  $h_1$  et  $h_2$  soient des facteurs coprimales. Si tous les points  $(\alpha_i, d_i)$  sont en dessous de  $K$  et si  $0 \leq \alpha_i \leq \gamma_{n_1}$ ,  $i = 1, \dots, n_2$ , alors

a)  $f(s) = \frac{h_2(s)}{h_1(s)}$  admet la décomposition

$$f(s) = \sum_1^{\infty} \frac{h_2(z_j)/h_1'(z_j)}{s - z_j} \quad (3.3.6)$$

lorsque tous les pôles de  $f$  sont simples.

b) Cette somme est uniformément convergente en  $s$  sur tout sous ensemble compact de  $\mathbb{C}/\{z_j\}$ .

*Idée de la démonstration*

Ce théorème s'appuie en partie sur le résultat de Bellman et Cooke [BeC 63, Théorème 12.13], qui indique l'existence de contours fermés  $C_l$  tels que :  $\text{distance}(0, C_l) \rightarrow \infty$ ,  $\text{longueur}(C_l)/\text{distance}(0, C_l)$  est bornée, et il y a exactement un pôle entre  $C_l$  et  $C_{l+1}$ .

Considérons l'intégrale  $\int_{C_l} f(s)/(z-s)ds$ , pour un point fixé  $z$  (qui ne soit pas un pôle de  $f$  et qui soit intérieur à  $C_l$ ). Alors d'après le théorème de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_l} \frac{f(s)}{z-s} ds = \Sigma \left[ \text{Res} \left( \frac{f(s)}{z-s} \right) \right] \text{ à l'intérieur du contour } C_l.$$

Les pôles de  $f(s)/(z-s)$  sont les pôles de  $f(s)$  et  $z$ . Les résidus sont, respectivement,  $\text{Res}(f; z_j)/(z-z_j)$  où  $z_j$  est un pôle de  $f$ , et  $-f(z)$ . Ainsi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_l} \frac{f(s)}{z-s} ds = \sum_{j=1}^{N_l} \frac{\text{Res}(f; z_j)}{(z-z_j)} - f(z),$$

où la somme est prise sur tous les pôles  $z_j$  à l'intérieur du contour  $C_l$  (au nombre de  $N_l$ ).

La fin de la preuve vient de propriétés de convergence de  $f$  lorsque  $l$  tend vers l'infini.

□

Il est facile de voir que les hypothèses du théorème 3.1 sont vérifiées pour notre fonction de transfert  $G = h_2/h_1$  prise comme fonction de la variable  $q$ , avec

$$h_1(q) = (1 + \alpha q)(1 + \beta q) - (1 - \alpha q)(1 - \beta q)e^{-2ql} \text{ et}$$

$$h_2(q) = [h_{21}(q), h_{22}(q)] = [(1 + \beta q) - (1 - \beta q)e^{-2ql}, 2\alpha q e^{-ql}].$$

$G(q)$  est donc décomposable en une somme infinie uniformément convergente de la forme

$$\begin{aligned} G(q) &= \sum_1^{\infty} \frac{h_2(\omega_j)/h_1'(\omega_j)}{q - \omega_j} \\ &= \sum_1^{\infty} \left[ \frac{h_{21}(\omega_j)/h_1'(\omega_j)}{q - \omega_j}, \frac{h_{22}(\omega_j)/h_1'(\omega_j)}{q - \omega_j} \right] \end{aligned}$$

où les  $\{\omega_j\}_{j>0}$  sont solutions de l'équation 3.3.5.

Pour avoir le résultat de la proposition 3.2 il faut maintenant montrer qu'une telle décomposition est licite lorsque  $G$  est considérée comme fonction de  $s$  ( $= aq^2$ ).

*Fin de la preuve de la proposition 3.2*

Comme la suite infinie des  $\{\omega_j\}_{j>0}$  représente les solutions de l'équation 3.3.5, c'est une suite réelle et on sait que si  $\omega_j$  est solution alors  $-\omega_j$  l'est aussi. Donc si  $[h_2(\omega_j)/h_1'(\omega_j)]/(q - \omega_j)$  est un des termes de la somme infinie alors  $[h_2(\omega_j)/h_1'(\omega_j)]/(q + \omega_j)$  en fait également partie. Regroupons ces deux termes; pour la première composante de  $G$  on obtient

$$\frac{(q + \omega_j)[h_{21}(\omega_j)/h_1'(\omega_j)] + (q - \omega_j)[h_{21}(-\omega_j)/h_1'(-\omega_j)]}{(q^2 - \omega_j^2)} \quad (3.3.7)$$

Or on sait que  $a\omega_j^2 = \xi_j$  où  $\xi_j$  est un pôle de  $G(s)$ . Donc l'équation 3.3.7 devient

$$\begin{aligned} & \frac{a(q + \omega_j)(h_{21}(\omega_j)/h_1'(\omega_j)) + a(q - \omega_j)(h_{21}(-\omega_j)/h_1'(-\omega_j))}{(s - \xi_j)} \\ &= \frac{a(q + \omega_j) \operatorname{Res}((h_{21}/h_1); \omega_j) + a(q - \omega_j) \operatorname{Res}((h_{21}/h_1); -\omega_j)}{(s - \xi_j)}. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Notons  $H_1$  (respectivement  $H_{21}$ ,  $H_{22}$ ) la fonction telle que  $H_1(s) = h_1(q)$  (respectivement  $H_{21}(s) = h_{21}(q)$ ,  $H_{22}(s) = h_{22}(q)$ ). Alors il reste à montrer que l'expression finale de 3.3.8 est égale à

$$\frac{\operatorname{Res}([H_{21}/H_1]; \xi_j)}{(s - \xi_j)}$$

Ceci se montre facilement lorsqu'on a remarqué que :

$$\operatorname{Res}([h_{21}/h_1]; \omega_j) = -\operatorname{Res}([h_{21}/h_1]; -\omega_j)$$

et que

$$\frac{2a\omega_j \operatorname{Res}([h_{21}/h_1]; \omega_j)}{s - \xi_j} = \frac{\operatorname{Res}([H_{21}/H_1]; \xi_j)}{s - \xi_j}.$$

On raisonne de manière analogue pour montrer que la deuxième composante de  $G(s)$  se décompose en une somme infinie uniformément convergente. Ainsi la proposition 3.2 est prouvée. □

Ce résultat est fondamental car il va nous permettre de déterminer un approximant de dimension finie de  $G$  au sens de la norme  $\infty$ . En effet, il suffira de tronquer la décomposition modale de  $G$  à l'ordre  $n$ .

## Les résidus

Pour exploiter le résultat de la proposition 3.2, il faut procéder au calcul des résidus de la fonction  $G$  en les  $\{\xi_k\}_{k>0}$ . Ce calcul nous donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}([H_{21}/H_1]; \xi_k) &= \frac{2\alpha\alpha\omega_k^2(1 + \beta^2\omega_k^2)}{\Upsilon} \\ \operatorname{Res}([H_{22}/H_1]; \xi_k) &= \frac{2\alpha a\omega_k^2(-1 + \alpha\beta\omega_k^2)}{\cos(\omega_k l)\Upsilon} \end{aligned}$$

où  $\Upsilon = (\alpha + \beta + l + \omega_k^2(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2l + \beta^2l) + \alpha^2\beta^2\omega_k^4l)$ .



### 3.3.4 Propriétés de l'opérateur de Hankel

La propriété de nucléarité d'un opérateur de Hankel, qui indique que ses valeurs singulières ont une décroissance rapide vers zéro à l'infini, peut aussi être déduite de l'allure de la fonction de transfert qui lui est associé. Ainsi, est énoncé dans [GCP 88] le théorème suivant<sup>1</sup> qui n'est qu'une version un peu différente du corollaire 1.3

#### Théorème 3.2

L'opérateur de Hankel  $\Gamma$  associé à une fonction de transfert  $G$  est nucléaire si et seulement si

$$G(s) = \sum_1^{\infty} \frac{a_j Re(\xi_j)}{(s - \xi_j)}$$

où les  $\xi_j$  sont des nombres complexes dans le demi plan gauche et où

$$\sum_1^{\infty} |a_j| \leq C \|\Gamma\|_N$$

où  $\|\cdot\|_N$  représente la norme nucléaire.

Donc si l'on écrit

$$G(s) = \sum_1^{\infty} \frac{\text{Res}(G; \xi_k)}{s - \xi_k}$$

une condition de nucléarité devient

$$\sum_1^{\infty} \left| \frac{\text{Res}(G; \xi_k)}{Re(\xi_k)} \right| < \infty.$$

Il est immédiat que cela est vérifié dans notre cas, car le rapport  $\frac{\text{Res}(G; \xi_k)}{Re(\xi_k)}$  évolue comme  $1/k^2$ .

L'opérateur de Hankel associé à notre système est donc nucléaire. Ceci laisse présager que l'approximation de Hankel pour ce système sera très bonne.

On peut remarquer ici, que la propriété de nucléarité de l'opérateur de Hankel associé au système dépend des conditions au bord appliquées à l'équation de la chaleur. Ainsi, les résultats exposés dans [CG 86a] indiquent que lorsqu'elles sont de type Neumann, le système est nucléaire, comme dans le cas présenté ici où les conditions sont des conditions de Fourier. Par contre, cela n'est plus vrai lorsqu'elles sont seulement de Dirichlet.

Nous sommes donc maintenant en mesure de conclure, c'est-à-dire

- de déterminer un approximant uniforme et de dimension finie  $G_n$  de  $G$ ;

<sup>1</sup>On donnera une autre justification de la nucléarité dans le paragraphe 3.5.1.

- d'approximer  $G_n$  par une fonction  $\hat{G}_p$  d'ordre  $p < n$  et optimale au sens de la norme de Hankel.

La fonction  $\hat{G}_p$  constituera un approximant  $L^\infty$  de  $G$ .

Mais avant de réaliser ces deux étapes il est intéressant de remarquer que la décomposition modale de  $G$  aurait pu être déterminée à partir de la formulation variationnelle de notre système.

## 3.4 Formulation variationnelle du problème

Nous allons dans ce qui suit donner une formulation dite variationnelle ou faible de notre modèle d'évolution de la chaleur. Puis à partir des données de cette formulation abstraite et pour retrouver le résultat de la partie 3.3, nous construirons une décomposition de type modale.

### 3.4.1 La formulation variationnelle

Reprenons le modèle différentiel 3.1.7 où l'on symbolise par  $(\dot{\phantom{x}})$  la dérivation en temps, et par  $(\prime)$  la dérivation en espace.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}(x, t) = a\theta''(x, t) \\ \theta(0, t) = \alpha\theta'(0, t) + u(t) \\ \theta(l, t) = -\beta\theta'(l, t) + v(t) \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ y(t) = \theta(0, t). \end{array} \right. \quad (3.4.1)$$

Soit  $I = ]0, l[$ .

Soit  $\varphi$  une fonction suffisamment régulière sur  $I$ , par exemple dans  $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ .

Multiplions par  $\varphi$  la première équation de 3.4.1, et intégrons la<sup>1</sup>; on obtient :

$$\int_0^l \dot{\theta}(x, t)\varphi(x)dx - a \int_0^l \theta''(x, t)\varphi(x)dx = 0. \quad (3.4.2)$$

Par intégration par parties et compte tenu des conditions au bord décrites dans 3.4.1 ceci devient

---

<sup>1</sup>On suppose que les intégrales sont bien définies.

$$\int_0^l \dot{\theta}(x, t) \varphi(x) dx + a \int_0^l \theta'(x, t) \varphi'(x) dx - a\theta'(l)\varphi(l) + a\theta'(0)\varphi(0) = 0$$

puis,

$$\int_0^l \dot{\theta}(x, t) \varphi(x) dx + a \int_0^l \theta'(x, t) \varphi'(x) dx + a \left[ \frac{\theta(l)\varphi(l)}{\beta} + \frac{\theta(0)\varphi(0)}{\alpha} \right] - a \begin{bmatrix} \varphi(0)/\alpha & \varphi(l)/\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = 0.$$

Définissons les espaces fonctionnels

$$\begin{aligned} H &= L^2(I) \\ V &= H^1(I) = \{f \in L^2(I), f' \in L^2(I)\}. \end{aligned}$$

Les produits scalaires sur les espaces  $V$  et  $H$  seront notés respectivement,  $(\cdot, \cdot)_V$  et  $(\cdot, \cdot)_H$ .

D'après l'inégalité de Poincaré, on peut munir  $V$  du produit scalaire

$$(y, z)_V = (y', z')_H = \int_I y'(x)z'(x)dx + \frac{y(l)z(l)}{\beta} + \frac{y(0)z(0)}{\alpha}$$

et de la norme associée. Soient  $\tilde{V}$  et  $\tilde{H}$  les espaces duaux de  $V$  et de  $H$ , respectivement; comme  $V \subset H$ , avec injection dense et continue, on identifie  $H$  et  $\tilde{H}$  et  $V \subset H \equiv \tilde{H} \subset \tilde{V}$ . Notons alors  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{V}V}$  le produit de dualité entre  $V$  et  $\tilde{V}$ . Définissons les opérateurs  $A \in \mathcal{L}(V, \tilde{V})$  et  $B^* \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^2)$  par :

$$\langle Ay, z \rangle_{\tilde{V}V} = a \left( \int_I y'z'dx + \frac{y(l)z(l)}{\beta} + \frac{y(0)z(0)}{\alpha} \right) = a \left( (y, z)_V + \frac{y(l)z(l)}{\beta} + \frac{y(0)z(0)}{\alpha} \right)$$

$$B^*y = \begin{bmatrix} ay(0)/\alpha, ay(l)/\beta \end{bmatrix}$$

pour  $y, z \in V$ .

### Remarque 3.2

$A$  est un opérateur linéaire, auto-adjoint, non-borné sur  $H$ , de domaine

$\mathcal{D}(A) = \{y \in V / y(0) = \alpha y'(0) \text{ et } y(l) = -\beta y'(l)\}$  dense dans  $V$ .

Pour tout  $y \in \mathcal{D}(A)$ ,  $Ay = -ay'' \in H$ .

Avec ces notations, la formulation du modèle 3.4.1 est équivalente, pour tout  $\varphi \in V$  à la formulation suivante :

$$\left( \dot{\theta}, \varphi \right)_H + \langle A\theta, \varphi \rangle_{\tilde{V}V} - (U, B^*\varphi) = 0 \quad (3.4.3)$$

où  $U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

Soit  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \tilde{V})$  l'opérateur adjoint de  $B^*$ . Il est borné, au plus de rang 2.

Puisque l'équation 3.4.3 est vérifiée par toute fonction  $\varphi \in V$ , si  $\theta(t) \in V$  pour  $t > 0$ , on obtient la formulation dite variationnelle du problème 3.4.1 :

$$\dot{\theta} + A\theta - BU = 0 \quad (3.4.4)$$

dans  $\tilde{V}$ , pour  $U \in L^2(0, \tau; \mathbb{R}^2)$  ( $\tau > 0$  fixé).

On associe au système 3.4.4 la sortie  $\mathcal{Y}$  définie par

$$\mathcal{Y}(t) = C\theta(t) = \theta(0). \quad (3.4.5)$$

L'opérateur d'observation  $C$  est défini dans  $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ . Il est borné, au plus de rang 1.

L'équation 3.4.4, du premier ordre en temps, peut donc être considérée comme un système du premier ordre dans  $\tilde{V}$ ; ainsi on peut écrire

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \mathcal{A}\theta + BU; & \theta(0) = \theta_0 \\ \mathcal{Y} = C\theta \end{cases} \quad (3.4.6)$$

où l'on a posé  $\mathcal{A} = -A$ .

### 3.4.2 Valeurs propres et vecteurs propres

A partir de la formulation 3.4.6, on peut donc calculer les valeurs propres et vecteurs propres associés à l'opérateur  $\mathcal{A}$ . Ces valeurs propres doivent coïncider avec les pôles du système.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\mathcal{A}$  et  $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  son vecteur propre associé alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\psi &= \lambda\psi \\ \text{soit } a\psi'' &= \lambda\psi \\ \text{avec } \psi'(l) &= -\psi(l)/\beta \quad \text{et} \quad \psi'(0) = \psi(0)/\alpha. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $\mathcal{A}$  sont alors de la forme  $\lambda_k = -a\omega_k^2$  où les  $\omega_k$  sont dans  $\mathbb{R}$  et sont caractérisés par l'équation :

$$\tan(\omega_k l) = -\frac{\omega_k(\alpha + \beta)}{1 - \alpha\beta\omega_k^2}. \quad (3.4.7)$$

D'autre part, la résolution de l'équation différentielle précédente en  $\psi$  conduit à la suite de vecteurs propres :

$$\psi_k = C_1 \cos \omega_k x + C_2 \sin \omega_k x, \quad (3.4.8)$$

avec  $\psi'_k(l) = -\frac{\psi_k(l)}{\beta}$  et  $\psi'_k(0) = \frac{\psi_k(0)}{\alpha}$ ,

et  $C_1$  et  $C_2$  des constantes (qui dépendent de l'indice  $k$ ) telles que  $C_1 = C_2\omega_k$ . L'équation 3.4.8 devient donc

$$\psi_k(x) = C_2 (\sin \omega_k x + \alpha \omega_k \cos \omega_k x). \quad (3.4.9)$$

Cette suite de vecteurs forme une base de l'espace de Hilbert  $V$ . On la rend orthonormale. Ceci permet de déterminer la constante  $C_2$  en normalisant la suite des  $\psi_k$  :  $C_2$  sera tel que  $(\psi_k, \psi_k)_V = \int |\psi_k|^2 = 1$ . Un calcul (assez fastidieux) conduit au résultat suivant :

$$C_2^2 = \frac{2(1 + \beta^2 \omega_k^2)}{\Upsilon} \quad (3.4.10)$$

avec  $\Upsilon$  défini page 50.

### Remarque 3.3

L'équation 3.4.7 est bien identique à l'équation 3.3.5 caractérisant les pôles de la fonction de transfert. Dorénavant on parlera indifféremment des valeurs propres  $\lambda_k$  ou des pôles  $\xi_k$ .

## 3.4.3 Décomposition modale de la fonction de transfert

La formulation 3.4.6 permet de définir une réalisation, donnée par le triplet  $(\mathcal{A}, B, C)$ , associée à notre système de dimension infinie. Celle-ci est "bien posée" au sens de la théorie des systèmes linéaires comme cela est défini par Curtain et Weiss dans [CW 89, théorème 5.1]. Cela signifie que  $(\mathcal{A}, B, C)$  vérifie les conditions du théorème suivant :

### Théorème 3.3

Soient  $U$ ,  $X$  et  $Y$  des espaces de Hilbert et  $(\mathcal{A}, B, C)$  un triplet d'opérateurs tels que

- (1)  $\mathcal{A}$  génère un semi groupe fortement continu  $\mathbb{T}$  sur  $X$  (alors  $\mathbb{T}$  détermine deux nouveaux espaces de Hilbert  $X_1 = D(\mathcal{A})$  et son dual  $X_{-1}$ );
- (2)  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  est un opérateur de contrôle admissible pour  $\mathbb{T}$  (en un sens défini également dans [CW 89]);
- (3)  $C \in \mathcal{L}(X_1, V)$  est un opérateur d'observation admissible pour  $\mathbb{T}$  (toujours en un sens défini dans [CW 89]);
- (4) il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel qu'une solution  $H : \rho(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{L}(U, Y)$  de l'équation du résolvant D.1.2 soit borné dans le demi-plan droit  $\mathbb{C}_\alpha$ .

Alors  $(\mathcal{A}, B, C)$  est bien posé.

Preuve des assertions précédentes

- (1)  $\mathcal{A}$  est un opérateur spectral régulier ayant une infinité dénombrable de valeurs propres simples  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ ; ses vecteurs propres normalisés  $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  forment une base de  $V$  ( $\mathcal{A}$  est symétrique dans notre cas). De plus  $\mathcal{A}$  est un opérateur maximal monotone; il engendre donc un semi groupe continu de contraction diagonal  $(T_t)_{t \geq 0}$  défini par :
- $T_t : \theta_0 \mapsto \theta(t)$  tel que  $\theta(t)$  soit solution de l'équation  $\dot{\theta} - \mathcal{A}\theta = 0$  munie de la condition initiale  $\theta_0$ .

Pour montrer l'admissibilité des opérateurs linéaires et bornés  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \tilde{V})$  et  $C \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$  on va utiliser le critère donné dans [Wei 88].

Il s'agit d'un lemme technique qui permet de conclure à l'admissibilité de la paire  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  qui utilise la notion de mesure de Carleson scalaire et qui s'énonce avec les notations suivantes :

pour  $h > 0$  et  $w \in \mathbb{R}$ , on note

$$R(h, w) = \{z \in \mathbb{C} / 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq h, |\operatorname{Im}(z) - w| \leq h\}.$$

Ainsi,  $R(h, w)$  est un rectangle dans le demi plan droit complexe, qui s'appuie sur l'axe imaginaire. On peut alors donner la définition suivante :

**Définition 3.3 (Critère de Carleson)**

Soit  $\lambda$  une suite de nombres complexes tel que  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$ . Alors on dit que la suite de nombres complexes  $b$  satisfait le critère de mesure de Carleson pour la suite  $\lambda$  si pour tout  $h > 0$  et tout  $w \in \mathbb{R}$  on a

$$\sum_{-\lambda_k \in R(h, w)} |b_k|^2 \leq Mh$$

où  $b_k$  représente la  $k^{\text{ème}}$  composante de  $b$  et  $M > 0$  est indépendant de  $h$  et de  $w$ .

Montrons que ces conditions sont vérifiées dans notre cas.

- (2) On démontre que  $B$  est admissible par un calcul détaillé en annexe D.1.1 utilisant le fait que les  $\omega_k$  se comportent asymptotiquement comme  $k\pi/l$  (voir le paragraphe 3.3.2) permet de conclure qu'il existe une constante  $M > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\sum_{-\lambda_k \in I(h)} |b_k|^2 \leq M\sqrt{h}$$

où le rectangle  $R(h, w)$  de la définition 3.3 est noté ici  $I(h)$  puisque comme les pôles sont tous situés sur l'axe réel, il se restreint alors à un intervalle de longueur  $h$ .

Le critère de Carleson est donc bien vérifié par l'opérateur  $B$ .

- (3) Il est montré dans [CW 89] que la réalisation  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$  est une réalisation bien posée si et seulement si  $(\mathcal{A}^*, \mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*)$  est une réalisation bien posée. Il est donc possible pour montrer que l'opérateur  $C$  est admissible d'utiliser le critère de Carleson appliqué au couple  $(\mathcal{A}^*, \mathcal{C}^*)$ . Et il est facile de voir qu'il est encore vérifié dans ce cas comme cela est fait en annexe D.1.2.

Le dernier point est démontré en annexe D.1.3.  $\square$

Donc la réalisation  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$  est bien posée. Le système 3.4.6 admet alors une solution unique et on peut, pour le résoudre et l'étudier, utiliser les mêmes outils que dans le cas de la dimension finie.

D'autre part, on a les représentations suivantes :

$$\forall x \in V, \quad x = \sum_1^{\infty} (x, \psi_i)_V \psi_i, \quad (3.4.11)$$

$$\forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}x = \sum_1^{\infty} \lambda_i (x, \psi_i)_V \psi_i, \quad (3.4.12)$$

$$\forall x \in V, \quad T_t(x) = e^{\mathcal{A}t} x = \sum_1^{\infty} e^{\lambda_i t} (x, \psi_i)_V \psi_i, \quad (3.4.13)$$

$$\forall x \in V, \quad (pI - \mathcal{A})^{-1} x = \sum_1^{\infty} \frac{(x, \psi_i)_V}{p - \lambda_i} \psi_i, \quad (3.4.14)$$

où  $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A)$  défini dans la remarque 3.2. Alors l'opérateur d'entrée/sortie associé à 3.4.6 est donné par

$$y(t) = \int_{-\infty}^t C e^{\mathcal{A}(t-s)} B U(s) ds \quad (3.4.15)$$

et on peut définir l'opérateur de Hankel  $\Gamma : L^2(0, \infty; \mathbb{R}^2) \longrightarrow L^2(0, \infty; \mathbb{R})$  par

$$(\Gamma U)(t) = \int_0^{\infty} C e^{\mathcal{A}(t+s)} B U(s) ds. \quad (3.4.16)$$

Comme le sup des valeurs propres de  $\mathcal{A}$  est négatif, alors  $\mathcal{A}$  est exponentiellement stable<sup>1</sup> [Cur 88a] et  $\Gamma$  est un opérateur compact. En utilisant la décomposition 3.4.13 on obtient

$$(\Gamma U)(t) = \sum_1^{\infty} \int_0^{\infty} e^{\lambda_i(t+s)} C \psi_i (B U(s), \psi_i)_V ds. \quad (3.4.17)$$

On peut également définir la fonction de transfert  $G(p)$  pour le système 3.4.6 donnée par

$$\begin{aligned} G(p) &= C(pI - \mathcal{A})^{-1} B \\ &= \sum_1^{\infty} \frac{C \psi_i B^* \psi_i}{p - \lambda_i} \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

---

<sup>1</sup>Cette hypothèse est nécessaire pour garantir la propriété de compacité de l'opérateur de Hankel; si  $\mathcal{A}$  n'était que fortement stable, alors  $\Gamma$  serait seulement borné [Keu 90].

où  $C\psi_i = \psi_i(0)$  et  $B^*\psi_i = \left[ a\psi_i(0)/\alpha, a\psi_i(l)/\beta \right]$ .

Ainsi, les coefficients de la décomposition modale donnée en 3.4.18 sont les

$$\left[ a\psi_k(0)^2/\alpha, a\psi_k(0)\psi_k(l)/\beta \right]$$

où  $\psi_k$  est le vecteur propre normalisé de rang  $k$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$ . Ils sont égaux aux résidus de  $G$  en  $\lambda_k$  (soit en  $\xi_k$  d'après la remarque 3.3) mentionnés dans la proposition 3.2.

Avec cette décomposition modale, la condition suffisante du paragraphe 3.3.4 pour que  $\Gamma$  soit nucléaire devient

$$\sum_1^{\infty} \frac{|C\psi_i| |B^*\psi_i|}{|Re(\lambda_i)|} < \infty.$$

On a donc retrouvé, grâce à la connaissance d'une réalisation associée au système, la décomposition modale établie au paragraphe 3.3.3. Un avantage de cette approche est qu'elle ne requiert pas de théorème du type du théorème 3.1 exploitant la forme très particulière de la fonction de transfert. Elle nécessite simplement que la réalisation choisie soit "bien posée".

Nous allons maintenant introduire les approximations  $L^\infty$  que l'on peut construire à partir de ce type de décomposition modale.

## 3.5 L'approximation

On va maintenant déterminer l'approximant de notre système au sens de la norme de Hankel en réalisant les deux étapes évoquées au paragraphe 3.2.

### 3.5.1 Approximation modale et résultats de convergence

On a donc, de deux manières différentes, déterminé la décomposition modale associée à la fonction de transfert de notre système d'évolution. Reprenons les notations de la décomposition modale utilisées dans le paragraphe 3.4.3; on a :

$$G(p) = \sum_1^{\infty} \frac{C\psi_i B^*\psi_i}{p - \lambda_i}. \quad (3.5.1)$$

La réalisation  $(\mathcal{A}, B, C)$  associée au système permet de donner directement une expression de l'approximation modale d'ordre  $n$  de l'opérateur de Hankel  $\Gamma$  :

$$(\Gamma^n U)(t) = \sum_1^n \int_0^\infty e^{\lambda_i(t+s)} C\psi_i (BU(s), \psi_i)_V ds \quad (3.5.2)$$



et de la fonction de transfert  $G$  :

$$G^n(p) = \sum_1^n \frac{C\psi_i B^*\psi_i}{p - \lambda_i}. \quad (3.5.3)$$

La convergence de ces troncatures provient des estimations suivantes :

$$\|\Gamma - \Gamma^n\| \leq \|G - G^n\|_\infty \leq \sum_{n+1}^\infty \frac{|C\psi_i| |B^*\psi_i|}{|Re(\lambda_i)|}. \quad (3.5.4)$$

Mais d'autres résultats de convergence se déduisent de l'expression 3.5.1 de  $G$  [CG 86a] :

**Lemme 3.1**

Si  $G$  se décompose en  $\sum_1^\infty \frac{C\psi_i B^*\psi_i}{p - \lambda_i}$ , alors :

(1) les  $n$  valeurs singulières  $(\sigma_i^n)$  de  $\Gamma^n$  convergent vers les  $n$  premières valeurs singulières  $(\sigma_i)$  de  $\Gamma$ ,

(2)  $\Gamma$  est nucléaire,

(3)  $\sigma_1^n + \dots + \sigma_n^n \longrightarrow \sum_1^\infty \sigma_i$  lorsque  $n \longrightarrow \infty$ ,

(4)  $\sum_1^\infty \sigma_i \leq \sum_1^\infty \frac{|C\psi_i| |B^*\psi_i|}{2|Re(\lambda_i)|}$ .

*Preuve du Lemme*

Rappelons que les valeurs singulières associées à  $\Gamma$  sont définies comme les valeurs propres de  $(\Gamma^*\Gamma)^{1/2}$ .

1. D'après 3.5.4,  $(\Gamma^n)^*\Gamma^n \longrightarrow \Gamma^*\Gamma$  lorsque  $n \longrightarrow \infty$  au sens de la topologie uniforme. Comme ces opérateurs sont bornés et autoadjoints, d'après [Kat 66, page 291], leurs valeurs propres convergent lorsque  $n \longrightarrow \infty$ . On doit remarquer ici que pour que cette convergence soit réalisée, il suffit d'assurer la convergence au sens  $L^\infty$  de  $G^n$  vers  $G$ .

2. et 4. Définissons  $\Gamma_l$ , opérateur de Hankel de rang 1 par

$$(\Gamma_l U)(t) = \int_0^\infty e^{\lambda_l(t+s)} C\psi_l(BU(s), \psi_l)_V ds. \quad (3.5.5)$$

Alors

$$(\Gamma_l^* \Gamma_l U)(t) = -\frac{|C\psi_l|^2}{2\operatorname{Re}\lambda_l} B^* \psi_l e^{\lambda_l t} \int_0^\infty e^{\lambda_l(s)} (U(s), B^* \psi_l)_V ds. \quad (3.5.6)$$

On peut voir facilement que  $\Gamma_l^* \Gamma_l$  a la valeur propre simple  $\mu_l^2$  où

$$\mu_l = \frac{|C\psi_l| |B^* \psi_l|}{-2\operatorname{Re}(\lambda_l)}. \quad (3.5.7)$$

$\mu_l$  est la valeur singulière associée à  $\Gamma_l$ . Par inégalité triangulaire, on a

$$\|\Gamma\|_N = \left\| \sum_1^\infty \Gamma_l \right\|_N \leq \sum_1^\infty \|\Gamma_l\|_N = \sum_1^\infty \mu_l. \quad (3.5.8)$$

Donc  $\Gamma$  est nucléaire et l'inégalité donnée par 4. est établie.

3. On a

$$\begin{aligned} \|\Gamma - \Gamma^n\|_N &= \left\| \sum_{n+1}^\infty \Gamma_l \right\|_N \\ &\leq \sum_{n+1}^\infty \mu_l \quad \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Cette convergence se déduit de la forme des valeurs singulières associées aux  $\Gamma_l$ .

Donc  $\|\Gamma^n\|_N \longrightarrow \|\Gamma\|_N$  lorsque  $n \longrightarrow \infty$  et 3. est établi.

□

### 3.5.2 Approximation $L_\infty$

L'approche choisie était donc de déterminer d'abord une approximation modale de notre système initial pour un  $n$  donné et de lui appliquer le schéma de réduction développé par [Glo 84] : ainsi on obtient un approximant (au sens de la norme de Hankel), de dimension  $k < n$ , de l'approximation modale. Soit  $\tilde{G}_k$  la fonction de transfert associée à ce système d'ordre  $k$ . On a

$$\begin{aligned} \|G - \tilde{G}_k\|_\infty &\leq \|G - G^n\|_\infty + \|G^n - \tilde{G}_k\|_\infty \\ &\leq m_n + (\sigma_{k+1}^n + \cdots + \sigma_n^n) \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

d'après 3.5.4 et les résultats sur les bornes donnés dans le paragraphe 2.2.2, où  $m_n$  est défini par

$$m_n = \sum_{n+1}^\infty 2\mu_l.$$

De plus, d'après le lemme 3.1

$$\sigma_{k+1}^n + \cdots + \sigma_n^n \longrightarrow \sum_{k+1}^{\infty} \sigma_i \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

Comme

$$\sum_{k+1}^{\infty} \sigma_i \leq \inf_{\Lambda \text{ de rang} \leq k} \|\Gamma - \Lambda\|_N \leq \|\Gamma - \Gamma^k\|_N \leq m_k \quad (3.5.10)$$

d'après [Glo 84, Corollaire 9.9], on a finalement lorsque  $n$  devient très grand

$$\|G - \tilde{G}_k\|_{\infty} \leq m_k. \quad (3.5.11)$$

Ainsi, par un choix judicieux de  $n$  et de  $k$ , on peut obtenir une approximation d'ordre fini et restreint de notre système avec une erreur correcte au sens de la norme  $L^{\infty}$ . De plus, on a vu que  $\|G - G_k\|_{\infty} \geq \sigma_{k+1}$  pour toute approximation  $G_k$  de degré de Mac-Millan  $k$ . On se rapproche donc de l'approximant Hankel-optimal (pour lequel l'erreur  $L^{\infty}$  est exactement  $\sigma_{k+1}$ ) si  $n$  est grand et si  $\sigma_{k+i}$  décroît rapidement. Dans ce cas on peut dire que  $\tilde{G}_k$  est un bon approximant au sens de Hankel.

## 3.6 Quelques résultats numériques

### 3.6.1 Approximation de Hankel

C'est à l'aide des logiciels de calcul formel, *mathematica* et de CAO en Automatique *basile*, que l'on a réalisé les applications numériques et les simulations qui suivent. Pour pouvoir tester les approximations réalisées grâce à la méthode exposée dans la section 3.5, on désire simuler notre système initial. Pour cela on en réalise une discrétisation spatiale, qui n'est d'ailleurs rien d'autre qu'un nouveau type d'approximation. Les détails de ce calcul classique sont exposés en annexe D.2.

L'étude des valeurs propres associées aux deux modèles précédents, réalisée en annexe D.3, permet d'appuyer ce choix de simulation. En effet, on peut alors comparer les valeurs propres associées au modèle discrétisé avec celles du modèle continu. On constate alors que les premiers modes restent très proches puis s'éloignent progressivement. Ceci n'est cependant pas à mettre en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle ces deux modèles représentent bien le même système. Car globalement, on peut penser que la divergence des valeurs propres se compense puisque le comportement simulé par chacun des modèles est identique.

Le système de référence correspond donc à une discrétisation en espace d'ordre 100 du système 3.1.7.

La décomposition modale est calculée à l'ordre 50 pour répondre aux impératifs de capacité de calcul des logiciels; cependant, cet ordre est suffisant pour que l'approximation soit bonne car les valeurs propres de ce système sont proches de celles du système discrétisé : on s'en assure en comparant les 50 premières valeurs propres du modèle de référence, notées  $S_d$ , avec celles de l'approximation modale,  $S_c$ , comme représenté figure 3.6.1.

On détermine alors les approximants Hankel-optimaux de l'approximation modale d'ordre 50, pour différents ordres.

Tous ces systèmes seront représentés par simulation de leurs observations sur les 100 premiers instants, pour différents types de contrôle. Les notations seront les suivantes :

- le système initial (discrétisé) : courbe  $\Omega$  ,
- l'approximation modale (d'ordre 50) : courbe  $\Omega_M$  ,
- l'approximation de Hankel d'ordre  $n$  : courbe  $\Omega_h^n$ ,

successivement pour les deux contrôles  $U(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , figures 3.6.2 , 3.6.4 et 3.6.5,

et  $V(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ 1 \end{bmatrix}$ , figures 3.6.3 , 3.6.6 et 3.6.7.

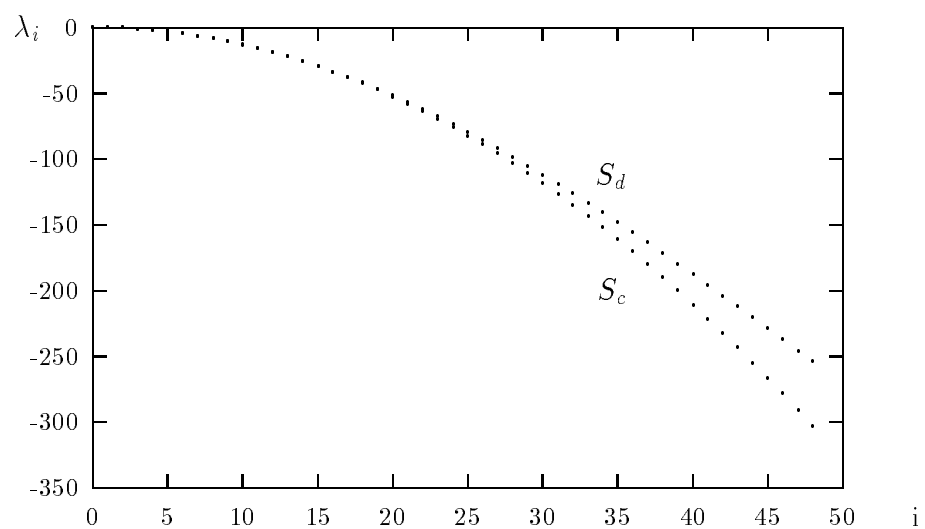


Figure 3.6.1 : Comparaison des 49 premières valeurs propres.

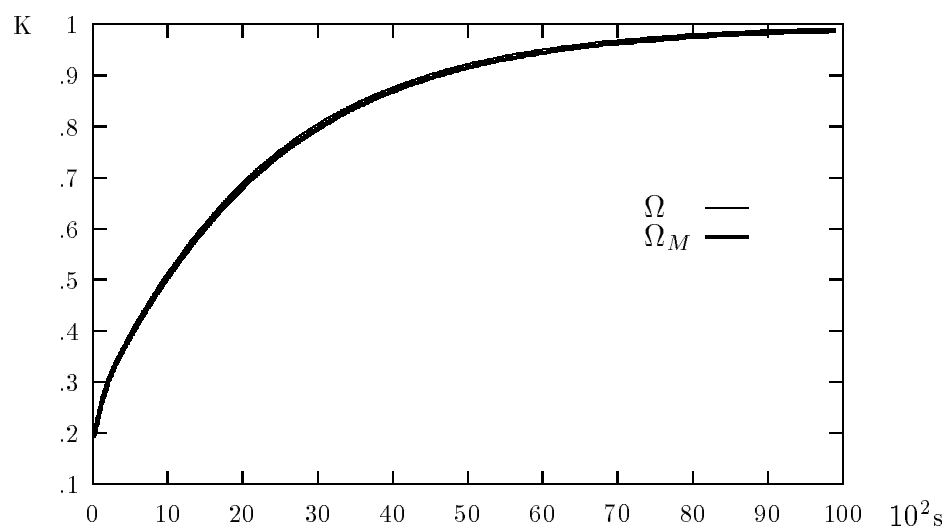


Figure 3.6.2 : Simulation discrète et Approximation modale pour le contrôle  $U(t)$ .

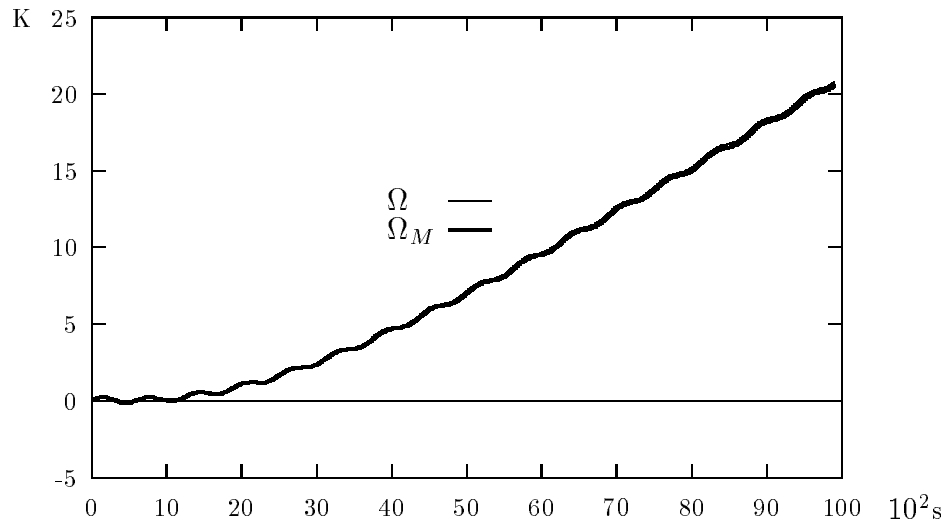


Figure 3.6.3 : Simulation discrète et Approximation modale pour le contrôle  $V(t)$ .

Les figures 3.6.2 et 3.6.3 montrent que les courbes  $\Omega$  et  $\Omega_M$  sont confondues. Ceci légitime le choix d'une approximation modale tronquée comme première étape pour le passage de la dimension infinie à la dimension finie.

Pour évaluer l'erreur d'approximation réalisée par l'approximation de Hankel, on peut calculer les valeurs singulières associées à notre première approximation modale : on a réalisé ce calcul pour les 20 premières valeurs singulières associées au système à partir des grammians d'observabilité et de commandabilité; elles sont répertoriées dans le tableau suivant :

mode $i$	$\sigma_i^2$	mode $i$	$\sigma_i^2$
1	$9.1 \cdot 10^{-2}$	11	$5.734898 \cdot 10^{-11}$
2	$1.009 \cdot 10^{-2}$	12	$5.971604 \cdot 10^{-12}$
3	$1.191 \cdot 10^{-3}$	13	$8.46948 \cdot 10^{-13}$
4	$1.6316056 \cdot 10^{-4}$	14	$5.8867 \cdot 10^{-14}$
5	$2.3652981 \cdot 10^{-5}$	15	$4.582 \cdot 10^{-15}$
6	$3.2053644 \cdot 10^{-6}$	16	$2.76 \cdot 10^{-16}$
7	$3.952773 \cdot 10^{-7}$	17	$1.7 \cdot 10^{-17}$
8	$4.3215992 \cdot 10^{-8}$	18	$2.029 \cdot 10^{-18}$
9	$4.661287 \cdot 10^{-9}$	19	$2.481 \cdot 10^{-19}$
10	$4.3262816 \cdot 10^{-10}$	20	$5.896 \cdot 10^{-20}$

Ce tableau permet de choisir l'ordre de l'approximation suivant l'erreur maximale (au sens de la norme de Hankel) tolérée. Rappelons en effet que cette erreur est égale, si le système approximant est d'ordre  $n$ , à la  $n + 1^{\text{ème}}$  valeur singulière associée au système initial. Ainsi, une approximation de Hankel d'ordre 10 représentée

figures 3.6.5 et 3.6.7 conduit à une erreur inférieure d'un facteur  $10^{-4}$  à celle réalisée par approximation de Hankel d'ordre 2 représentée figures 3.6.4 et 3.6.6. La différence de qualité entre une approximation d'ordre 2 et une approximation d'ordre 10 est très nette dans le cas du contrôle  $V(t)$ .

K

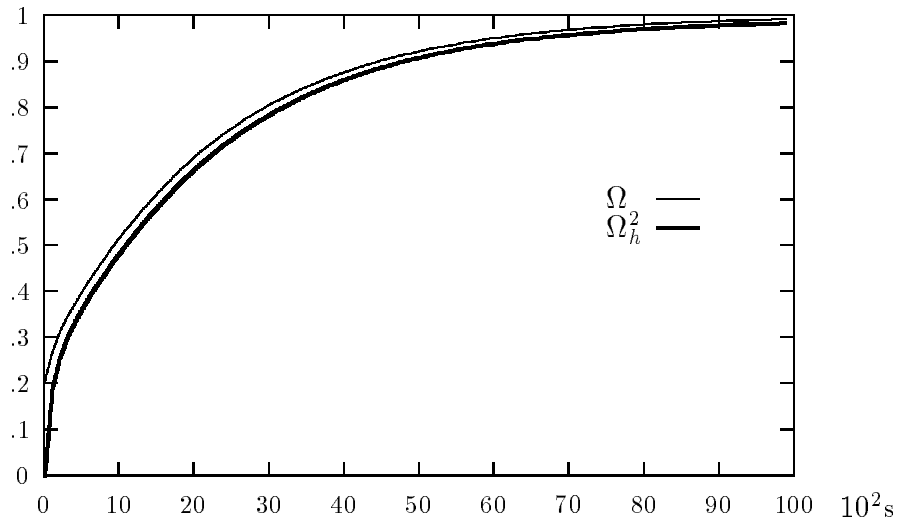


Figure 3.6.4 : Simulation discrète et Approximation de Hankel d'ordre 2 pour le contrôle  $U(t)$ .

K

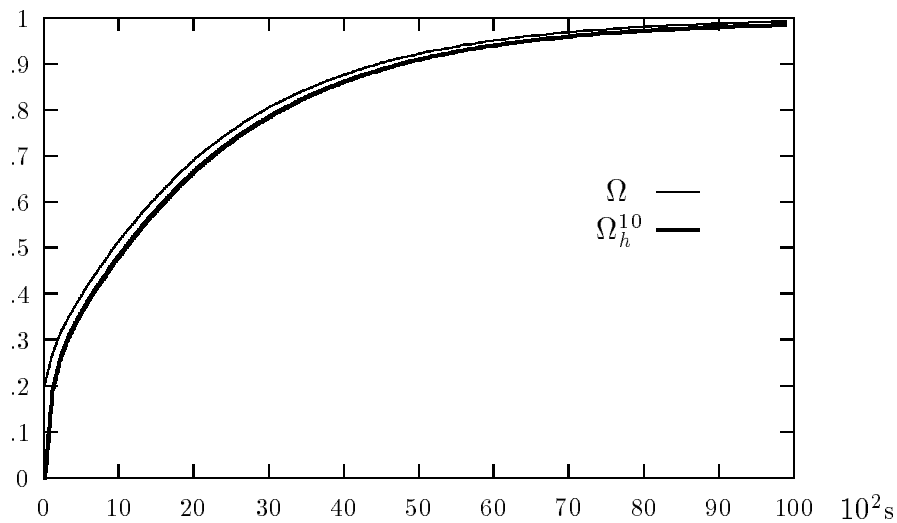


Figure 3.6.5 : Approximation de Hankel d'ordre 10 pour le contrôle  $U(t)$ .

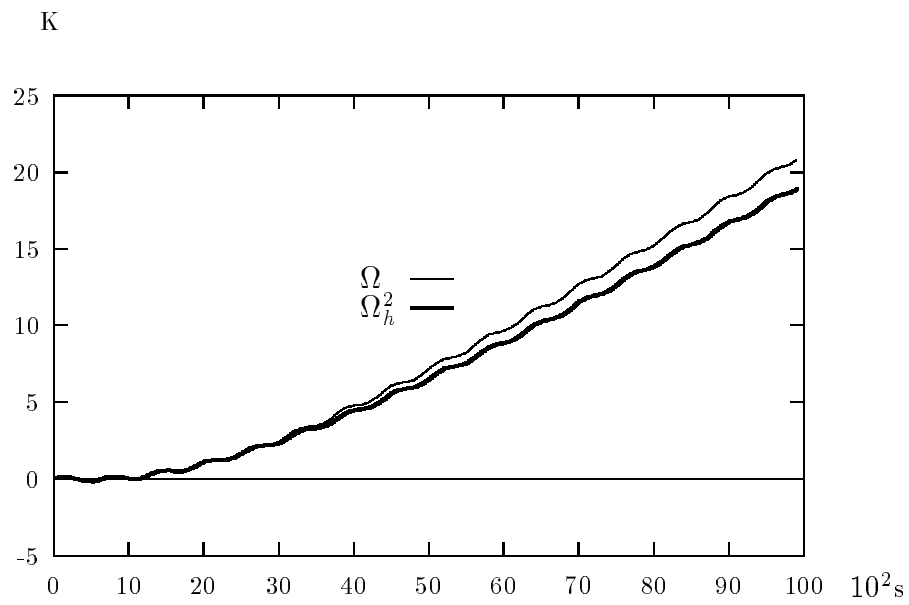


Figure 3.6.6 : Simulation discrète et Approximation de Hankel d'ordre 2 pour le contrôle  $V(t)$ .

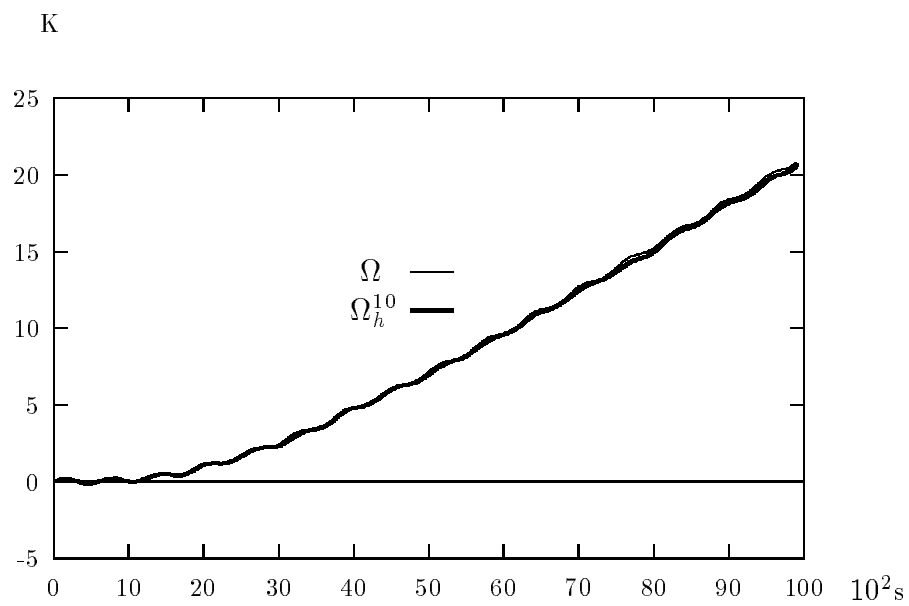


Figure 3.6.7 : Approximation de Hankel d'ordre 10 pour le contrôle  $V(t)$ .



### 3.6.2 Comparaison avec l'approximation par dominance modale

Une étude réalisée en collaboration avec le CENERG (Centre d'Énergétique de l'École des Mines) nous a permis de comparer les modèles réduits par approximation au sens de Hankel avec ceux obtenus par une méthode d'approximation se basant sur l'analyse de la dynamique des différents modes propres d'un système [Nei 89] : elle consiste, dans un premier temps, à regrouper en un mode (le mode de couplage direct avec les sollicitations) tous les modes du système de départ dont la constante de temps (inverse de la valeur propre) est inférieure à 1s.<sup>1</sup> Dans un second temps on calcule l'énergie des modes restants. Cette grandeur n'a aucune réalité physique mais elle permet de déterminer quels sont les modes d'un système qui influencent notablement sa dynamique. Les modes dominants sont ceux dont l'énergie est supérieure à 5% de l'énergie totale du système. Il ne reste plus qu'à agglomérer autour de ces modes dominants les autres modes.

Le modèle réduit ainsi construit doit rendre compte de toute l'information dynamique contenue dans le modèle d'origine. Les résultats numériques suivants cor-

Figure 3.6.8 : Évolution des 4 modèles

respondent à l'étude d'une paroi constituée d'un matériau homogène dont les caractéristiques sont semblables à celles d'un béton moyen. De plus, comme la dynamique d'un modèle apparaît clairement lorsque celui-ci est soumis à une sollicitation qui varie comme une séquence binaire pseudo-aléatoire, on a simulé l'évolution des différents modèles dans de telles conditions.

La figure 3.6.8 présente un exemple des résultats obtenus, les courbes étant répertoriées comme suit :

- $\mathcal{T}_1$  = modèle de référence;
- $\mathcal{T}_2$  = modèle discret d'ordre 3;
- $\mathcal{T}_3$  = modèle réduit par dominance modale;
- $\mathcal{T}_4$  = modèle réduit d'ordre 3 par approximation au sens de la norme de Hankel.

Il apparaît donc clairement que même si l'on n'accède pas à un approximant optimal au sens de la norme de Hankel par la méthode développée précédemment, les résultats obtenus sont, en pratique, bien meilleurs que ceux obtenus par des méthodes de réduction classiques.

---

<sup>1</sup>Cette valeur doit en fait être choisie en fonction du pas de temps de simulation utilisé. Pour des simulations effectuées avec un pas de temps de 10s (ce qui est notre cas) les dynamiques des modes dont la constante de temps est inférieure à 1s ne sont pas observables. Il est donc tout à fait justifié de considérer que tout se passe comme si ces modes avaient une constante de temps nulle.

### 3.7 Conclusion

On a donc montré comment on peut en s'appuyant sur des résultats de réduction au sens de la norme de Hankel approximer des systèmes de dimension infinie pourvu qu'ils répondent à certaines propriétés :

- régularité de la réponse impulsionnelle associée au système :  
 $h \in L^1 \cap L^2(0, \infty; \mathbb{C}^{p \times q})$ ;
- nucléarité de l'opérateur de Hankel associé.

Mais si ces propriétés suffisent à assurer l'existence d'un approximant optimal, encore faut-il pouvoir le déterminer explicitement. Or, ceci ne peut se faire que si l'on connaît les valeurs singulières associées au système. Et en dimension infinie, cela n'est le cas en pratique que pour les systèmes dits à retard. C'est pourquoi on introduit une étape intermédiaire permettant d'accéder au moins aux  $n$  premières valeurs singulières. Encore une fois, cette étape n'est pas réalisable pour tous les systèmes : il faut qu'ils admettent une décomposition de type modale ou toute autre forme de représentation permettant d'en déterminer une bonne approximation  $L^\infty$ .

Enfin, il faut remarquer que l'on ne s'est intéressé qu'à des systèmes stables. Le cas instable où le nombre de pôles à partie réelle positive est fini est une simple généralisation des résultats précédents; mais il n'en est plus de même lorsque les pôles instables sont en nombre infini, ou encore lorsque le système n'est ni stable ni instable (soit qu'il a une infinité de pôles sur l'axe imaginaire).

C'est le cas des systèmes hyperboliques pour lesquels on a adapté, de manière efficace dans le cas du modèle d'évolution d'une poutre flexible, la méthode d'approximation de Hankel.

## Chapitre 4

# Etude de systèmes hyperboliques

Dans le chapitre 2, on a exposé la méthode d'approximation au sens de la norme de Hankel dans l'hypothèse où le système à réduire est stable.

Considérons ici le cas où

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

avec  $G_1(s) \in H_\infty(\mathbb{C}_+)$  et  $G_2(s) \in H_\infty(\mathbb{C}_-)$  de degrés respectifs  $n_1$  et  $n_2$ . Supposons que l'on veuille approximer  $G(s)$  de manière à conserver ses pôles instables. Une méthode, exposée dans [Glo 84], est de réaliser une approximation optimale au sens de la norme de Hankel de  $G_1(s)$  et de conserver  $G_2(s)$ . L'approximant est alors

$$\hat{G}(s) = \hat{G}_1(s) + G_2(s)$$

avec  $\hat{G}_1(s) \in H_\infty^+$  de degré  $k < n_1$ . De plus on a

$$\|G(s) - \hat{G}_1(s) - G_2(s)\|_{L^\infty} \geq \sigma_{k+1}(G_1(s))$$

puisque  $G_2(s) \in H_\infty^-$  et que  $\hat{G}_1(s)$  est de degré  $k$ .

Mais on peut également en modifiant  $G_2(s)$ , c'est à dire en faisant de légers changements sur les pôles instables, faire décroître la norme  $L^\infty$  de l'erreur.

On conçoit l'impossibilité d'adapter cette technique à un système dont le nombre de pôles instables est infini. Dans [Par 91] une méthode d'approximation des systèmes instables de dimension infinie utilisant des facteurs coprime a été développée. Mais dans le cas où les pôles instables sont une infinité, ce problème reste essentiellement ouvert à notre connaissance.

C'est pour le cas intermédiaire à la limite de la stabilité et de l'instabilité, c'est à dire pour un système possédant une infinité de pôles sur l'axe imaginaire que l'on a défini une nouvelle approche permettant d'en déterminer une approximation.

En particulier on s'est intéressé aux systèmes à paramètres distribués représentant des structures flexibles. Leur réponse impulsionnelle n'est pas dans  $L^1 \cap L^2(0, \infty; \mathbb{C}^{p \times q})$ . L'opérateur de Hankel associé à de tels systèmes, quand il est défini, n'est pas compact. La théorie de l'approximation au sens de la norme de

Hankel ne peut s'appliquer.

Aussi, l'approche que nous proposons dans ce chapitre [Maï 92], permet en formulant le problème d'approximation d'une manière différente de retrouver, dans certains cas, les hypothèses favorables (sur la réponse impulsionnelle et sur l'opérateur de Hankel associé) à l'utilisation de la méthode de Hankel. Il s'agit en fait d'exprimer la norme d'opérateur suivant une métrique différente.

Voyons le détail de cette approche que nous nommerons la méthode de *relaxation* et qui consiste, sans influencer le comportement dynamique des systèmes, à restreindre l'espace d'entrée en renforçant la norme associée tout en relâchant l'espace de sortie en affaiblissant la norme associée.

## 4.1 La méthode de relaxation

### 4.1.1 Les motivations

Considérons un système  $\Xi$  d'opérateur de Hankel associé  $\Gamma$ . Soit  $U$  l'espace des contrôles et  $Y$  l'espace des sorties.

L'opérateur  $\Gamma$  agit du passé  $L_2(-\infty, 0; U) = \mathcal{U}$  vers le présent  $L_2(0, +\infty; Y) = \mathcal{Y}$  (cf paragraphe 1.2.4) et les valeurs singulières qui lui sont associées donnent une mesure de la distance entre deux systèmes (cf paragraphe 1.3).

Ainsi rappelons que :

$$\sigma_1(\Gamma) = \sigma_1(\Xi) = \sup \frac{|y|_{L_2(0, +\infty; Y)}}{|u|_{L_2(-\infty, 0; U)}}.$$

Soit  $\Xi_r$  le système représentant l'approximation optimale de Hankel de degré  $r$  de  $\Xi$  (en supposant que les hypothèses requises sur  $\Xi$  pour que cet approximant optimal existe soient remplies); d'après le théorème 1.2 la distance  $d$  entre  $\Xi$  et  $\Xi_r$  est donnée par :

$$\begin{aligned} d(\Xi, \Xi_r) &= \inf_{y_{\Xi_r}} \sup_u \frac{|y_{\Xi} - y_{\Xi_r}|_{L_2(0, +\infty; Y)}}{|u|_{L_2(-\infty, 0; U)}} \\ &= \sigma_{r+1}. \end{aligned}$$

En réalité, lorsque l'on étudie un problème physique concret, il n'est pas nécessaire de définir les espace d'entrée et de sortie sur un intervalle de temps infini. C'est pourquoi, nous avons décidé de restreindre les définitions de  $\mathcal{U}$  et de  $\mathcal{Y}$  à des intervalles de temps fini,  $[-T, 0]$  pour le passé et  $[0, T]$  pour le futur et d'introduire une nouvelle distance  $\mu$  :

$$\mu(\Xi, \Xi_r) = \inf_{y_{\Xi_r}} \sup_u \frac{|y_{\Xi} - y_{\Xi_r}|_{L_2(0, +T; Y)}}{|u|_{L_2(-T, 0; U)}}.$$

Lorsque l'on modifie les espaces d'entrée et de sortie, on ne change ni la relation d'entrée sortie décrite par le système, ni son comportement dynamique intrinsèque;

on pose juste le problème différemment, et tout en étant moins exigeant on devient plus réaliste : car un système a seulement besoin de *vivre* durant un intervalle de temps fini  $T$ .

Cette idée est à la base de l'approche suivante : pour qu'elle soit plus appropriée à l'étude des systèmes à paramètres distribués on a décidé, non pas de changer les intervalles de temps, mais d'introduire un terme d'oubli, modifiant ainsi la norme  $L^2$ .

### 4.1.2 L'approche

Considérons ici encore notre système  $\Xi$  défini sur les espaces de Hilbert suivants (que l'on identifie avec leurs duals, respectivement  $\tilde{\mathcal{U}}$  et  $\tilde{\mathcal{Y}}$ ) :

$$\Xi : \mathcal{U} = L_2(-\infty, 0; U) \longmapsto \mathcal{Y} = L_2(0, +\infty; Y) \quad (4.1.1)$$

Introduisons une nouvelle norme : soit  $\alpha > 0$ ;

$$\int_{-\infty}^0 |u(t)e^{-\alpha t}|_U^2 dt < \infty \iff u \in \mathcal{U}_\alpha \text{ et } \int_0^{+\infty} |y(t)e^{-\alpha t}|_Y^2 dt < \infty \iff y \in \mathcal{Y}_\alpha. \quad (4.1.2)$$

$\mathcal{U}_\alpha$  et  $\mathcal{Y}_\alpha$  sont les espaces *relaxés* d'entrée et de sortie respectivement.

Le choix de cette norme a deux avantages : le terme exponentiel opère sur les entrées du système un effet stabilisant tout en empêchant les sorties d'aller trop vite à l'infini.

Ainsi, ce changement d'espaces est tout à fait adapté aux structures flexibles que nous allons étudier. De plus, on ne perd pas d'information quant au comportement du système car l'espace des entrées admissibles est restreint et l'espace des sorties est étendu; en effet :

$$L_2(-T, 0; U) \subset \mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}_\alpha \subset L_2(0, +T; Y).$$

On peut remarquer ici que si  $\alpha = 0$ , on retrouve les espaces d'origine  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{Y}$ .

Le système  $\Xi$  restreint aux espaces relaxés :

$$\Xi : \mathcal{U}_\alpha \longmapsto \mathcal{Y}_\alpha \quad (4.1.3)$$

peut être représenté de la façon équivalente :

$$\tilde{\Xi} : \mathcal{U} \longmapsto \mathcal{Y} \quad (4.1.4)$$

où  $\tilde{\Xi}$  est le système de réponse impulsionnelle associée  $\tilde{h}(t) = h(t)e^{-\alpha t}$ .

Ainsi il est suffisant, afin de réduire le système original 4.1.1, d'utiliser l'une ou l'autre des formulations 4.1.3 ou 4.1.4.

On a appliqué cette approche à des systèmes représentant des structures flexibles. De tels systèmes ne libèrent pas leur énergie au cours du temps. Ils sont conservatifs,

le temps ayant un caractère réversible. Toutes leurs valeurs propres sont situées sur l'axe imaginaire et aucune d'entre elle ne peut être négligée. Ces systèmes ne sont ni stables, ni instables. On peut citer pour exemples le diapason, le ressort qui oscille indéfiniment, les modèles de grandes structures flexibles lorsqu'on ne tient pas compte du terme d'amortissement ...

On conçoit qu'aucun approximant rationnel ne peut modéliser la dynamique d'un tel système. De plus, il existe des raisons pragmatiques qui indiquent que dans ce cas, la théorie de Hankel ne s'applique pas : en effet, ces systèmes ne génèrent pas de semi-groupe exponentiellement stable puisque tous leurs modes (i.e. valeurs propres) sont situés sur l'axe imaginaire; l'opérateur de Hankel associé, lorsqu'il existe, n'est pas borné, ce qui implique que certaines des valeurs singulières qui lui sont associées peuvent être infinies. Même dans le cas où l'opérateur de Hankel est borné (et non compact), le comportement des valeurs singulières n'est plus intéressant pour le problème de la réduction, car elles ne tendent pas vers 0.

On a vu dans le chapitre 1, corollaire 1.2, qu'une condition suffisante pour qu'un opérateur de Hankel soit compact était que la réponse impulsionnelle associée  $h$  soit dans  $L^1$ . La condition nécessaire et suffisante énoncée dans le théorème de Hartman 1.4, lorsqu'on la transpose au cas continu, devient la suivante : considérons  $H(s) \in L^\infty(i\mathbb{R})$ , la transformée de Laplace de  $h$  :

**Théorème 4.1 (Hartman)**

$H(s) \in L^\infty(i\mathbb{R})$  définit un opérateur de Hankel compact si et seulement si  $H \in H_\infty(\mathbb{C}_-) + C^*(i\mathbb{R})$  où  $C^*(i\mathbb{R})$  est l'espace des fonctions continues sur  $i\mathbb{R}$ , avec une limite unique en  $\pm i\infty$ .

C'est pourquoi la méthode de relaxation peut être intéressante : si elle régularise suffisamment la réponse impulsionnelle du système  $\tilde{\Xi}$ , l'opérateur de Hankel peut devenir bien défini, compact et même nucléaire. Alors la théorie de l'approximation de Hankel peut être appliquée au système  $\tilde{\Xi}$ .

### 4.1.3 Formulation générale

On rappelle ici la formulation variationnelle générale pour une réalisation d'espace d'état comme elle est relatée dans [Ben 89].

Soient  $V$  et  $H$  deux espaces de Hilbert, munis respectivement des produits scalaires  $(\cdot, \cdot)_V$  et  $(\cdot, \cdot)_H$ . Avec les conventions usuelles on pose

$$V \subset H \equiv \tilde{H} \subset \tilde{V}$$

chaque espace étant dense dans le suivant avec injection continue et on identifie  $H$  et son dual  $\tilde{H}$ .

On considère l'opérateur linéaire  $A$  défini sur  $V$ , non borné, auto-adjoint, coercif tel que

$$\langle Ay, z \rangle_{\tilde{V}} = (y, z)_V = (A^{1/2}y, A^{1/2}z)_H$$

avec  $y, z \in V = D_{A^{1/2}} = \{v \in H / A^{1/2}v \in H\}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{V}}$  représente le produit de dualité entre  $V$  et  $\tilde{V}$ . Introduisons le domaine de  $A$  défini par :

$$D_A = \{v \in V / Av \in H\}$$

qui a la structure d'un espace de Hilbert muni de la norme du graphe. On a alors la suite d'inclusions

$$D_A \subset V \subset H \equiv \tilde{H} \subset \tilde{V}$$

chaque espace étant dense dans le suivant avec injection continue.

Avec les mêmes notations que dans le paragraphe 1.2.1, soient  $B \in \mathcal{L}(U, \tilde{V})$  et  $C \in \mathcal{L}(V, Y)$ .

Dans tout ce qui suit,  $(\cdot)$  indiquera la dérivation partielle par rapport au temps.

Considérons le système défini par :

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) + Az(t) = Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) \\ z(0) = z_0, \dot{z}(0) = z_1 \end{cases} \quad (4.1.5)$$

pour  $z_0 \in V, z_1 \in V$ , et  $u \in \mathcal{U}$ .

Supposons maintenant que l'opérateur  $A^{-1}$  soit compact de  $H$  dans  $H$  : cela est vrai dès que l'injection de  $V$  dans  $H$  est compacte.

Ceci implique qu'il existe une suite  $\{\lambda_k = \omega_k^2, \omega_k > 0\}_{k>0}$  de valeurs propres de  $A$  et une suite  $\{\phi_k\}_{k>0}$  de vecteurs propres associés qui forment une base orthogonale de  $H$ , avec  $|\phi_k|_H = 1, \forall k > 0$ , et une base orthogonale de  $V$  avec  $\|\phi_k\|_V = \omega_k, \forall k > 0$ .

On pose

$$\omega_{-k} = -\omega_k, \phi_{-k} = \phi_k, \forall k > 0,$$

$$b_k = B^* \phi_k \in U, c_k = C \phi_k \in Y.$$

Considérons maintenant l'espace produit,  $\mathcal{V} = V \times H$ . Son dual est l'espace  $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{H}$  où  $\mathcal{H} = H \times \tilde{V}$ . On pose alors  $\mathcal{W} = D_A \times V$ .

On obtient la suite  $\mathcal{W} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{H} = \tilde{\mathcal{V}} \subset \tilde{\mathcal{W}}$ , chaque espace étant dense dans le suivant avec injections continues.

Le système 4.1.5 est équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = \mathcal{A}Z(t) + \mathcal{B}u(t) \\ y(t) = \mathcal{C}Z(t) \\ Z(0) = Z_0 \end{cases} \quad (4.1.6)$$

où

$$Z = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}, \mathcal{C} = (C \quad 0).$$

L'opérateur  $\mathcal{A}$  est un opérateur fermé de domaine dense, maximal monotone, qui génère un  $C_0$  semi groupe de contractions  $S(t)$  sur  $\mathcal{V}$ .

Le domaine de  $\mathcal{A}$  est donné par  $D_{\mathcal{A}} = D_A \times V$ ;  $\mathcal{A}$  est anti symétrique :

$$\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*.$$

L'injection de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{H}$  est compacte car l'injection de  $V$  dans  $H$  l'est. Il s'ensuit que le spectre de  $\mathcal{A}$  est discret et composé, comme on peut aisément le montrer, de la suite des valeurs propres  $i\sqrt{\lambda_k}$  et  $-i\sqrt{\lambda_k}$ .

Le vecteur propre correspondant à  $i\sqrt{\lambda_k}$  (resp. à  $-i\sqrt{\lambda_k}$ ) est :

$$\Phi^k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_k \\ -i\sqrt{\lambda_k}\phi_k \end{pmatrix} \quad \left( \text{resp. } \bar{\Phi}^k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_k \\ i\sqrt{\lambda_k}\phi_k \end{pmatrix} \right)$$

et il est facile de voir que la suite  $\{\Phi^k, \bar{\Phi}^k\}$  forme une base orthogonale de  $\mathcal{H}$ .

$\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{V}) = \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{H})$  et  $\mathcal{C}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{V}; \mathcal{H})$ .

Montrons ici qu'il existe des conditions suffisantes pour qu'une série de distributions soit une distribution. Cela sera utile pour caractériser la réponse impulsionnelle associée avec le système précédent : il s'agit en effet d'une série de distributions  $h$  donnée par  $\sum_{k \geq 1} T_k {}^t b_k c_k$  où  $T_k = \sin \sqrt{\lambda_k} t / \sqrt{\lambda_k}$  avec  $t > 0$ .

Considérons l'espace  $\mathcal{D}$  des fonctions indéfiniment différentiables à support compact. Comme  $T_k$  est une fonction localement intégrable, elle définit une distribution dans  $\tilde{\mathcal{D}}$ . On doit maintenant prouver que la série de distributions  $\sum_{k \geq 1} T_k {}^t b_k c_k$  converge dans  $\tilde{\mathcal{D}}$ . D'après Schwartz [Sch 66], il est suffisant de montrer que  $\forall \varphi \in \mathcal{D}$   $\sum_{k \geq 1} \langle T_k, \varphi \rangle {}^t b_k c_k$  converge dans  $\mathbb{R}$ . On établit le lemme suivant :

#### Lemme 4.1

*Supposons qu'il existe  $N$  et  $m$  tels que  $|{}^t b_k c_k| \leq P k^N$  et  $|\lambda_k| \geq Q k^{2m}$  où  $P, Q$  sont deux constantes et  $c_k, b_k$  sont définis comme précédemment. Alors, la série de distributions  $\sum_{k \geq 1} T_k {}^t b_k c_k$  converge dans  $\tilde{\mathcal{D}}$ .*

*De plus, elle définit une distribution  $T$  telle que pour  $\varphi \in \mathcal{D}$  avec le support  $[0, +K]$ ,  $\langle T, \varphi \rangle \leq C \|\varphi^{(n)}\|_{\infty}$  où  $n \in \mathbb{N}$  est tel que  $n > \frac{N+1}{m} - 1$  et  $C$  est une constante.*

Preuve du lemme : en intégrant par parties  $n$  fois, on a

$$|\langle T_k, \varphi \rangle| = \left| \int_0^K \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi(t) dt \right| \leq \|\varphi\|_{\infty} \frac{K}{\sqrt{\lambda_k}} \leq \dots \leq \|\varphi^{(n)}\|_{\infty} \frac{K}{(\sqrt{\lambda_k})^{(n+1)}}.$$

Maintenant, si l'on suppose que

$$\begin{aligned} |{}^t b_k c_k| &\leq P k^N \quad N \in \mathbb{N}, P \text{ une constante} \\ |\lambda_k| &\geq Q k^{2m} \quad \text{avec } m \geq 1, Q \text{ une constante} \\ \text{et } n \in \mathbb{N} &\text{ tel que } n > \frac{N+1}{m} - 1 \end{aligned} \tag{4.1.7}$$



alors

$$\sum_{k \geq 1} | \langle T_k, \varphi \rangle {}^t b_k c_k | \leq 2K P Q^{-(n+1)/2} \|\varphi^{(n)}\|_\infty \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{m(n+1)-N}} \quad (4.1.8)$$

et la série  $\sum_{k \geq 1} T_k {}^t b_k c_k$  tend vers la distribution  $h$ .  $\square$

Avec  $n$  comme dans 4.1.7,  $T^{(-n)}$ , la  $n^{\text{ème}}$  primitive de  $T$ , est la série de terme général :

$$\left( g(\sqrt{\lambda_k}) {}^t b_k c_k \right) / \lambda_k^{(n+1)/2},$$

où la fonction  $g()$  est soit  $\sin()$  soit  $\cos()$ . Comme  $T^{(-n)}$  est une fonction de  $C^0 \cap L^\infty$  elle admet une transformée de Laplace dans  $Re(s) > 0$ . Donc, la transformée de Laplace de  $T$  existe. Si on tient compte du changement d'espace présenté dans le paragraphe 4.1.2, la réponse impulsionnelle correspondant au nouveau système  $\tilde{\Xi}$  conformément aux espaces relaxés  $\mathcal{U}_\alpha$  et  $\mathcal{Y}_\alpha$  devient :

$$\tilde{h}(t) = h(t)e^{-\alpha t}. \quad (4.1.9)$$

De plus, la transformée de Laplace de  $\tilde{h}$  existe dans  $Re(s) > -\alpha$ .

Les réponses impulsionnelles des systèmes étudiés dans la suite, appartiennent à l'espace de distributions  $\tilde{\mathcal{D}}$ .

## 4.2 Application aux structures flexibles

### 4.2.1 Oscillateur harmonique

Comme introduction à nos applications, traitons le cas simple d'un système de dimension finie : considérons un oscillateur harmonique représenté suivant la formulation usuelle

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) + \omega^2 z(t) = u(t) \\ y(t) = z(t) \end{cases} \quad (4.2.1)$$

où  $u \in L_2(-\infty, 0; U)$  est le contrôle (ou entrée),  $z$  l'état,  $y \in L_2(0, +\infty; Y)$  l'observation (ou sortie) et  $U = Y = \mathbb{R}$ .

La fonction de transfert est donnée par

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

et la réponse impulsionnelle par

$$h(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}.$$

L'observation peut s'écrire :

$$y(t) = \int_0^t \frac{\sin \omega \tau}{\omega} u(t - \tau) d\tau.$$

La réponse impulsionnelle est telle que  $h \notin L^1$ ,  $h \notin L^2$  et  $h \in C^1$ . Aussi, l'opérateur de Hankel associé appartient à l'espace des distributions. Il est donné par

$$\Gamma v(t) = \int_{-\infty}^0 \frac{\sin \omega(t - \tau)}{\omega} v(\tau) d\tau$$

et est non borné :

$$\sup \frac{|\Gamma v(t)|_{L_2(0, +\infty)}}{|v|_{L_2(-\infty, 0)}} = +\infty.$$

Dans le but de réduire la norme de  $\Gamma v$  et de renforcer la norme du contrôle  $v$ , on restreint l'espace des contrôles  $\mathcal{U} = L_2(-\infty, 0; \mathbb{R})$  du système original à  $\mathcal{U}_\alpha$ . Cet espace des entrées est donné comme il est exposé au 4.1.2 par

$$v \in \mathcal{U}_\alpha \iff \exists w \in \mathcal{U} \quad v(t) = w(t)e^{\alpha t}.$$

On a

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{U}_\alpha} v(t) = e^{-\alpha t} \Gamma v(t) &= \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha t} \frac{\sin \omega(t - \tau)}{\omega} e^{\alpha \tau} w(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha(t - \tau)} \frac{\sin \omega(t - \tau)}{\omega} w(\tau) d\tau \\ &= \tilde{\Gamma} w(t). \end{aligned}$$

Maintenant, on peut considérer le système défini de  $L_2(-\infty, 0; \mathbb{R})$  dans  $L_2(0, +\infty; \mathbb{R})$  avec l'opérateur de Hankel  $\tilde{\Gamma}$  et la réponse impulsionnelle

$$\tilde{h}(t) = e^{-\alpha t} \frac{\sin \omega t}{\omega} \in L^1, \in L^2 \text{ et } \in C^1.$$

La sortie de ce système  $\tilde{\Xi}$  est

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) = (\tilde{h} * w)(t) &= \int_0^t \frac{e^{-\alpha \tau} \sin \omega \tau}{\omega} w(t - \tau) d\tau \\ &= e^{-\alpha t} \int_0^t \frac{\sin \omega \tau}{\omega} u(t - \tau) d\tau = e^{-\alpha t} y(t). \end{aligned}$$

L'opérateur de Hankel  $\tilde{\Gamma}$  est de rang fini égal à 2. En effet

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} w(t) &= \int_0^\infty \frac{\sin \omega(t + \tau)}{\omega} w(\tau) e^{-\alpha(t + \tau)} d\tau \\ &= \sin \omega t e^{-\alpha t} \int_0^\infty \frac{\cos \omega \tau}{\omega} w(\tau) e^{-\alpha \tau} d\tau + \cos \omega t e^{-\alpha t} \int_0^\infty \frac{\sin \omega \tau}{\omega} w(\tau) e^{-\alpha \tau} d\tau \end{aligned}$$

Posons  $A = \int_0^\infty \frac{\cos \omega \tau}{\omega} w(\tau) e^{-\alpha \tau} d\tau$  et  $B = \int_0^\infty \frac{\sin \omega \tau}{\omega} w(\tau) e^{-\alpha \tau} d\tau$ .

Alors  $\tilde{\Gamma}v(t) = A \sin \omega t e^{-\alpha t} + B \cos \omega t e^{-\alpha t}$ . Donc  $\tilde{\Gamma}v(t)$  appartient au sous-espace vectoriel de dimension 2 engendré par  $[e^{-\alpha t} \cos \omega t, e^{-\alpha t} \sin \omega t]$  et l'opérateur de Hankel admet 2 valeurs singulières. De plus,  $\tilde{\Gamma}$  est symétrique par rapport au produit scalaire de  $L^2$ . On est donc dans le cas où ses valeurs singulières sont égales au module de ses valeurs propres et on peut les calculer explicitement en utilisant la méthode exposée en annexe B.1 :

comme  $\tilde{\Gamma}v(t) = \lambda v(t)$ , il existe  $p$  et  $q$  tels que  $v(t) = p \sin \omega t e^{-\alpha t} + q \cos \omega t e^{-\alpha t}$ . En remplaçant  $v(t)$  par cette expression dans  $A$  et  $B$  on obtient :

$$\begin{cases} A = p \int_0^\infty \frac{\sin 2\omega \tau}{2\omega} e^{-2\alpha \tau} d\tau + q \int_0^\infty \frac{\cos^2 \omega \tau}{\omega} e^{-2\alpha \tau} d\tau \\ B = p \int_0^\infty \frac{\sin^2 \omega \tau}{\omega} e^{-2\alpha \tau} d\tau + q \int_0^\infty \frac{\sin 2\omega \tau}{2\omega} e^{-2\alpha \tau} d\tau. \end{cases}$$

La résolution en  $\lambda$  du système suivant :

$$\begin{cases} p \int_0^\infty \frac{\sin 2\omega \tau}{2\omega} e^{-2\alpha \tau} d\tau + q \int_0^\infty \frac{\cos^2 \omega \tau}{\omega} e^{-2\alpha \tau} d\tau = \lambda p \\ p \int_0^\infty \frac{\sin^2 \omega \tau}{\omega} e^{-2\alpha \tau} d\tau + q \int_0^\infty \frac{\sin 2\omega \tau}{2\omega} e^{-2\alpha \tau} d\tau = \lambda q. \end{cases}$$

conduit aux deux valeurs singulières, finies pour  $\alpha \neq 0$  :

$$\sigma_1 = \frac{\alpha + \sqrt{2\alpha^2 + \omega^2}}{4(\alpha^2 + \omega^2)\alpha} \quad \sigma_2 = \left| \frac{\alpha - \sqrt{2\alpha^2 + \omega^2}}{4(\alpha^2 + \omega^2)\alpha} \right|.$$

Lorsque  $\alpha = 0$  on retrouve le résultat énoncé précédemment, à savoir que  $\|\Gamma\| = \sigma_1 = +\infty$ .

Ainsi, après “restriction” de l'espace d'entrées et “dilatation” de l'espace de sorties pour le système original, on peut de manière similaire considérer un autre système  $\tilde{\tilde{E}}$ , défini de  $L^2$  dans  $L^2$  et pour lequel l'opérateur de Hankel est bien défini et borné. De plus, et parce qu'il s'agit ici du cas particulier de la dimension finie, ceci est suffisant pour assurer la compacité et la nucléarité de l'opérateur de Hankel associé.

Cet exemple n'ayant qu'une vocation de présentation intuitive (on conçoit qu'il n'y ait aucun intérêt à réduire un système d'ordre 2), étudions maintenant les cas de deux systèmes de dimension infinie.

## 4.2.2 Poutre d'Euler Bernouilli

Considérons une poutre uniforme, de longueur, de masse linéique et de rigidité en flexion égales à 1 et dont on négligera l'amortissement structurel, faible par essence.

On la suppose encastrée à l'une de ses extrémités, commandée à l'autre par une force ponctuelle.

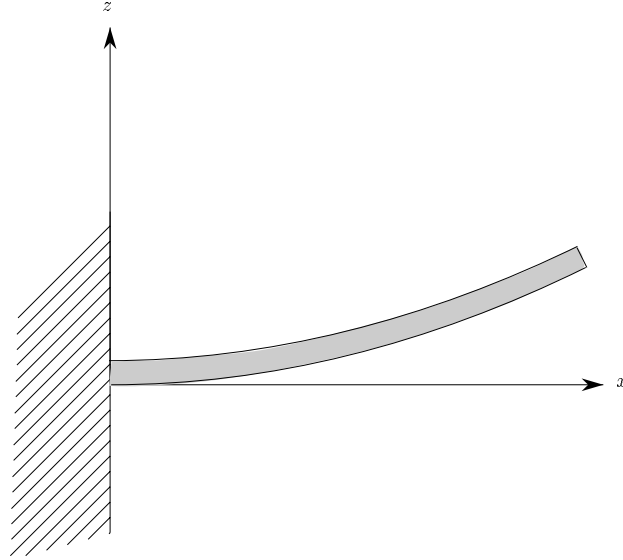


Figure 4.2.1 : Poutre en flexion, encastrée à une extrémité

Les vibrations transversales d'une telle poutre peuvent être modélisées par l'équation d'Euler-Bernoulli et le système la décrivant est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}(x, t) = 0 ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ z(0, t) = 0 = \frac{\partial z}{\partial x}(0, t) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, t) = 0, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(1, t) = u(t) \\ z(x, 0) = z_0, \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = z_1 \end{array} \right. \quad (4.2.2)$$

où  $u(t)$  est la force ponctuelle appliquée à l'extrémité de la poutre et  $z_0, z_1$  sont les conditions initiales.

On observe

$$y(t) = z(1, t). \quad (4.2.3)$$

Dans tout ce qui suit,  $(')$  indiquera la dérivation partielle par rapport à l'espace.

On introduit les espaces :

$$\begin{aligned}\Omega &= ]0, 1[ \\ H &= L^2(\Omega) \\ V &= \{z \in W^{2,2}(\Omega) / z(0) = \frac{\partial z}{\partial x}(0) = 0\} \\ U &= \mathbb{R} = Y.\end{aligned}$$

$A \in \mathcal{L}(V, \tilde{V})$  est défini par

$$\forall w, z \in V \quad \langle Aw, z \rangle_{\tilde{V}V} = \int_0^1 w'' z'' d\tau = (w, z)_V,$$

et  $C \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$  par

$$\forall z \in V, \quad Cz = z(1).$$

$A$  est un opérateur linéaire auto adjoint, non borné sur  $H$ ,  $V$ -coercif. On peut écrire la première équation de 4.2.2 de la façon suivante :

$$\forall \psi \in V \quad (\ddot{z}, \psi)_H + \langle Az(t), \psi \rangle_{\tilde{V}V} + (u(t), C\psi) = 0.$$

Alors soit  $C^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \tilde{V})$  l'opérateur adjoint de  $C$ . Le système 4.2.2 est équivalent à :

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) + Az(t) = C^*u(t) \\ y(t) = Cz(t) \\ z(0) = z_0; \dot{z}(0) = z_1 \end{cases} \quad (4.2.4)$$

On peut exprimer le système 4.2.4 avec les mêmes notations qu'en 4.1.6 :

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = \mathcal{A}Z(t) + \mathcal{B}u(t) \\ y(t) = \mathcal{C}Z(t) \\ Z(0) = Z_0 \end{cases} \quad (4.2.5)$$

Les résultats d'analyse spectrale suivants sont établis dans [BS 79]. Les valeurs propres de  $A$  sont de la forme  $\lambda_k = -\omega_k^2$ , avec  $\omega_k = \zeta_k^2$ ,  $k \geq 1$ , où les  $\zeta_k$  sont les racines positives de

$$\cos \zeta \cosh \zeta + 1 = 0$$

i.e.

$$\zeta_k = (k - 1/2)\pi + \sigma_k$$

avec  $|\sigma_k| < \pi/2$  et  $|\sigma_k| \searrow 0$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

Les fonctions propres normalisées associées sont données par

$$\Phi_k(x) = \cosh \zeta_k x - \cos \zeta_k x - \gamma(\zeta_k)(\sinh \zeta_k x - \sin \zeta_k x)$$

avec

$$\gamma(\zeta) = \frac{\cosh \zeta + \cos \zeta}{\sinh \zeta + \sin \zeta}.$$

Ici, avec les notations du lemme 4.1, les hypothèses 4.1.7 sont vérifiées pour  $N = 0$ ,  $m = 2$  et  $n = 0$  :

$$\begin{aligned} b_k = c_k = \Phi_k(1) = 2(-1)^{k-1} \quad \text{donc} \quad |{}^t b_k c_k| = 4, \\ \lambda_k \sim k^4. \end{aligned}$$

Aussi, dans ce cas particulier, l'équation 4.1.8 devient :

$$\sum_{k \geq 1} | \langle T_k, \varphi \rangle {}^t b_k c_k | \leq 8K \|\varphi\|_\infty \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$$

où  $\varphi \in \mathcal{D}$  avec le support  $[0, K]$ . La réponse impulsionnelle  $h$  donnée par  $\sum_{k \geq 1} T_k {}^t b_k c_k$  où  $T_k = \sin(\sqrt{\lambda_k} t) / \sqrt{\lambda_k}$  est une distribution. En fait  $h$  est une fonction continue bornée car la série converge normalement (vers une fonction continue) et appartient à  $L^\infty$ .

Appliquons la méthode de relaxation à notre système. La réponse impulsionnelle devient comme dans 4.1.9 :

$$\tilde{h}(t) = h(t)e^{-\alpha t}.$$

Ici  $\tilde{h} \in L^1$ ,  $\tilde{h} \in L^2$ . Aussi, l'opérateur de Hankel  $\tilde{\Gamma}$  associé est compact. La fonction de transfert associée est donnée par :

$$\tilde{G}(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{{}^t b_k c_k}{(s + \alpha)^2 + \omega_k^2}.$$

Etablissons alors la nucléarité de  $\tilde{\Gamma}$ .  $\tilde{G}$  peut s'écrire :

$$\tilde{G}(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2i\omega_k} \left( \frac{1}{s - \eta_k} - \frac{1}{s - \bar{\eta}_k} \right) \quad (4.2.6)$$

où  $\eta_k = -\alpha + i\omega_k$  et  $\bar{\eta}_k$  est son conjugué complexe. Aussi, avec les notations du corollaire 1.3 on a :

$$|a_k| = \left| \frac{1}{\alpha\omega_k} \right| \sim \frac{1}{\alpha k^2}$$

et la somme infinie  $\sum |a_k|$  converge. Les conditions du corollaire 1.3 sont donc vérifiées et l'opérateur de Hankel associé à  $\tilde{G}$  est nucléaire.

On peut alors déterminer un approximant du système  $\tilde{\Xi}$ .

### 4.2.3 Les ondes

Etudions maintenant le cas d'un système hyperbolique pour lequel notre approche de relaxation n'est plus concluante. Considérons le système représentant la torsion

d'une poutre modélisé par l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) = 0 ; & 0 \leq x \leq 1 \\ z(0, t) = 0 , & \frac{\partial z}{\partial x}(1, t) = u(t) \\ z(x, 0) = z_0 , & \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = z_1 \end{cases} \quad (4.2.7)$$

où  $z$  est l'angle de la poutre avec sa position de repos et où  $u(t)$  est le contrôle appliqué à l'extrémité de la poutre.

On étudiera ce système pour deux types d'observation, la déformation de la poutre puis sa vitesse angulaire.

### Observation de la déformation

On observe l'angle entre la poutre et sa position de repos en son extrémité :

$$y(t) = z(1, t). \quad (4.2.8)$$

Introduisons les espaces suivants :

$$\begin{aligned} \Omega &= ]0, 1[ \\ H &= L^2(\Omega) \\ V &= \{z \in H^1(\Omega) / z(0) = 0\} \\ U &= \mathbb{R} = Y. \end{aligned}$$

$A \in \mathcal{L}(V, \tilde{V})$  est défini par

$$\forall w, z \in V \quad \langle Aw, z \rangle_{\tilde{V}V} = \int_0^1 w'z' d\tau = (w, z)_V,$$

et  $C \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$  par

$$\forall z \in V, \quad Cz = z(1).$$

Comme cela a été fait précédemment, on peut réécrire 4.2.7 sous la forme :

$$\forall \psi \in V \quad (\ddot{z}, \psi)_H + \langle Az(t), \psi \rangle_{\tilde{V}V} + (u(t), C\psi) = 0.$$

Le système 4.2.7 devient :

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) + Az(t) = C^*u(t) \\ y(t) = Cz(t) \\ z(0) = z_0; \dot{z}(0) = z_1 \end{cases} \quad (4.2.9)$$

ou suivant la formulation usuelle du premier ordre en temps :

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) &= \mathcal{A}Z(t) + \mathcal{B}u(t) \\ y(t) &= \mathcal{C}Z(t) \\ Z(0) &= Z_0 \end{cases} \quad (4.2.10)$$

Les valeurs propres de  $A$  sont les  $\lambda_k = \omega_k^2$ ,  $k \geq 1$  avec

$$\omega_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Les fonctions propres associées sont données par :

$$\Phi_k(x) = \sqrt{2} \sin \omega_k x.$$

Alors, avec les notations du lemme 4.1, les hypothèses 4.1.7 sont vérifiées pour  $N = 0$ ,  $m = 1$  et  $n = 1$  :

$$\begin{aligned} b_k = c_k = \Phi_k(1) &= (-1)^{k-1} \sqrt{2} \text{ et } |{}^t b_k c_k| = 2, \\ \lambda_k &\sim k^2. \end{aligned}$$

L'équation 4.1.8 devient :

$$\sum_{k \geq 1} | \langle T_k, \varphi \rangle {}^t b_k c_k | \leq 4K \|\varphi'\|_\infty \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$$

où  $\varphi \in \mathcal{D}$  a pour support  $[0, K]$ .  $h$ , la réponse impulsionnelle, donnée par  $\sum_{k \geq 1} T_k {}^t b_k c_k$  où  $T_k = \sin(\sqrt{\lambda_k} t) / \sqrt{\lambda_k}$  est une distribution, et une fonction car la série harmonique  $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k}$  converge puisque  $\sum_{k \geq 1} \frac{({}^t b_k c_k)^2}{\omega_k^2}$  converge. La nouvelle réponse impulsionnelle a donc les propriétés suivantes :

$$\tilde{h}(t) = h(t)e^{-\alpha t} \in L^1 \text{ et } \in L^2.$$

L'opérateur de Hankel associé,  $\tilde{\Gamma}$ , est compact.

Cependant ceci ne va pas suffire pour exploiter les résultats connus sur l'approximation de Hankel. En effet, si la fonction de transfert  $\tilde{G}$  se décompose en une somme infinie de la même façon que dans le corollaire 1.3, ses coefficients  $a_k$  sont tels que

$$|a_k| = \left| \frac{1}{\alpha \omega_k} \right| \sim \frac{1}{\alpha k}$$

et la somme infinie  $\sum |a_k|$  ne converge pas. Ceci s'explique par le fait que les valeurs propres de l'opérateur des ondes ( $\sim k$ ) ne croissent pas lorsque  $k$  tend vers l'infini aussi vite que celles de l'opérateur des poutres ( $\sim k^2$ ). L'opérateur de Hankel  $\tilde{\Gamma}$  n'est pas nucléaire. Ainsi la méthode de relaxation appliquée à ce système n'induit pas les résultats escomptés.

On va voir que c'est aussi le cas lorsque l'on observe la vitesse angulaire de la poutre.



## Observation de la vitesse angulaire

La sortie du système correspond maintenant à la vitesse angulaire à l'extrémité de la poutre :

$$y(t) = \frac{\partial z}{\partial t}(1, t). \quad (4.2.11)$$

Dans ce cas,  $h$ , la réponse impulsionnelle, donnée par  $\sum_{k \geq 1} T_k^t b_k c_k$  où  $T_k = \cos(\sqrt{\lambda_k} t)$  est encore une distribution, mais ce n'est plus une fonction : ceci provient de ce que  $h$  s'exprime comme la somme infinie de distributions de Dirac (voir par exemple [LeM 91]).

Ainsi la méthode de relaxation appliquée à ce système n'induit pas les résultats escomptés sur la nouvelle réponse impulsionnelle. En effet

$$\tilde{h}(t) = h(t)e^{-\alpha t} \notin L^1 \text{ et } \notin L^2.$$

L'opérateur de Hankel associé,  $\tilde{\Gamma}$ , n'est plus compact et la théorie de Hankel ne peut être appliquée.

Pour ces deux systèmes, modélisant les poutres et les ondes, les propriétés de l'opérateur de Hankel semblent liées au comportement des valeurs propres des systèmes qu'ils caractérisent. A cela, s'ajoute le fait que les systèmes hyperboliques étudiés ne sont pas retardés dans le sens de Bellman and Cooke [BeC 63], i.e. les fonctions de transfert associées n'ont pas une infinité de pôles dans un - n'importe lequel - demi plan droit. En effet, les pôles ne s'accumulent pas à gauche de l'axe imaginaire. C'est pourquoi, dans le cas des ondes, il y a peu d'espoir d'obtenir, ne serait-ce qu'une convergence  $L^\infty$  d'une simple approximation modale, comme celle-ci est établie pour les systèmes à retard dans [PGZC 88].

## 4.3 Analyse de la méthode de relaxation

La méthode de relaxation introduit un certain nombre d'interrogations, et c'est pourquoi, dans ce paragraphe, nous allons tenter de répondre à certaines d'entre elles. Pour cela, nous étudierons le problème d'évolution que représente le système des cordes vibrantes. Il sera ramené par discrétisation à la dimension finie pour des impératifs clairs de simulation et de cohérence par rapport aux résultats précédents concernant les ondes.

Aussi soulèverons nous les questions suivantes :

- Comment choisir le coefficient  $\alpha$
- par rapport à des critères physiques ?

- par rapport à des considérations théoriques ?
- Quel est le comportement des pôles et des valeurs singulières associés aux systèmes réduits et relaxés ?
- Quelles sont les relations entre le système de dimension infinie et le modèle réduit par relaxation puis approximation de Hankel ?

Rappelons tout d'abord quelques résultats concernant les cordes vibrantes.

### 4.3.1 Les cordes vibrantes et la relaxation

Reprenons ici le formalisme introduit dans [Cia 82]. Considérons une corde homogène de section constante, de longueur  $l$ , tendue entre deux extrémités fixes placées le long d'un axe, l'une étant à l'origine  $0$  et l'autre au point d'abscisse  $l$ . La corde est soumise à l'action d'une force verticale  $f(x, t)$  et on se propose d'étudier les petits mouvements transversaux de la corde dans le plan vertical; autrement dit, on cherche une fonction  $z(x, t)$  définie pour  $0 \leq x \leq l$  et  $t \geq 0$ , qui représente à l'abscisse  $x$  et à l'instant  $t$  la déformation verticale de la corde. La fonction  $z$  doit alors vérifier l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (4.3.1)$$

qui n'est autre que l'équation des ondes en dimension un.

On suppose connue la forme de la corde à l'instant initial  $t=0$ ,  $z(x, 0)$ , ainsi que la distribution des vitesses initiales le long de la corde,  $\frac{\partial z}{\partial t}(x, 0)$ , pour  $0 \leq x \leq l$  (par exemple, si la corde est simplement lâchée à partir d'une position donnée, on a  $\frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = 0$ , pour  $0 \leq x \leq l$ ). Enfin, on doit avoir  $z(0, t) = z(l, t) = 0$  pour  $t \geq 0$  puisqu'on suppose que les extrémités de la corde sont fixes.

On est donc amené à trouver une fonction  $z(x, t)$  définie pour  $0 \leq x \leq l$  et  $t \geq 0$  qui soit une solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ z(0, t) = 0 = \frac{\partial z}{\partial x}(l, t), \quad t \geq 0 \text{ (conditions aux limites),} \\ z(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l \text{ (condition initiale),} \\ \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq l \text{ (condition initiale)} \end{array} \right. \quad (4.3.2)$$

Dans ce qui suit, on considérera les mouvements de la corde en présence d'une force  $f(x, t) = Bu(x, t)$  et une longueur  $l = 1$ ; l'observation sera donnée par

$$y(x, t) = \bar{B}^T z(x, t).$$

Comme dans ce cas il n'existe pas de méthode directe pour calculer les valeurs singulières associées au système de dimension infinie, et que l'on n'est pas dans un cas favorable même en relaxant le système d'après les résultats du paragraphe 4.2.3, on se ramène à un système de dimension finie en discrétisant en espace. On choisit pour ce faire de réaliser une discrétisation par différence finie dont le détail est en annexe E.1. On obtient le système suivant pour une discrétisation à l'ordre  $N$  :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \Omega^2 \theta = Bu(t) \\ Y = C\theta \end{cases} \quad (4.3.3)$$

où

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N \end{pmatrix}$$

est la matrice des valeurs propres  $\omega_k$  du système discret d'ordre  $N$  avec  $\omega_k^2 = 4 \sin^2 \left( \frac{2k-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right)$ .

On notera<sup>1</sup> par commodité  $B = \begin{pmatrix} b_1^T \\ \dots \\ b_N^T \end{pmatrix}$  et on a  $C = \bar{B}^T$ .

Si l'on relaxe le système 4.3.3, la fonction de transfert qui lui est associée devient

$$H(s) = \sum_1^N \frac{1}{(s + \alpha)^2 + \omega_k^2}.$$

Par extension du problème de l'oscillateur harmonique, exposé au paragraphe 4.2.1, à  $N$  masses oscillant, on peut déduire la représentation interne suivante du système relaxé :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + (\alpha^2 I + \Omega^2)\theta = Bu \\ y = C\theta \end{cases} \quad (4.3.4)$$

$I$  représente la matrice identité.

On définit le vecteur d'état

$$\Theta = (\dot{\theta}_1 \quad \eta_1 \theta_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \eta_2 \theta_2 \quad \dots \quad \dot{\theta}_N \quad \eta_N \theta_N)^T$$

---

<sup>1</sup> $b_i^T$  est une ligne ce qui n'implique pas que  $b_i$  soit une colonne de  $B$  puisque la matrice n'est en général pas carrée.

où  $\{\theta_k, 1 \leq k \leq N\}$  sont les composantes de  $\theta$  et  $\eta_k = -\alpha + i\omega_k$  sont les valeurs propres associées au système du premier ordre en temps équivalent au système précédent 4.3.4 et dont la représentation d'espace d'état est la suivante

$$\begin{cases} \dot{\Theta} = \mathcal{A}\Theta + \mathcal{B}u \\ Y = \mathcal{C}\Theta \end{cases} \quad (4.3.5)$$

où  $\mathcal{A}$  est la matrice diagonale par blocs de dimension  $(2N \times 2N)$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & A_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_N \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A_k = \begin{pmatrix} -2\alpha & -\bar{\eta}_k \\ \eta_k & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{B} = -(B_1^T \quad B_2^T \quad \cdots \quad B_N^T)^T \quad \text{avec} \quad B_k = \begin{pmatrix} b_k^T \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $b_k^T$  est la  $k^{\text{ème}}$  ligne de  $B$ .

$$\mathcal{C} = (C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_N) \quad \text{avec} \quad C_k = (c_k \quad 0)$$

où  $c_k$  est la  $k^{\text{ème}}$  colonne de  $C$ .

Analysons alors l'influence du choix du coefficient  $\alpha$  sur ce système et sur ses approximations.

### 4.3.2 Le coefficient de relaxation $\alpha$

#### Interprétation physique

Le coefficient  $\alpha$  intervient, comme on l'a vu au paragraphe 4.1.2, dans le terme exponentiel visant à renforcer la norme de l'espace des entrées et affaiblir la norme de l'espace des sorties.  $1/\alpha$  est homogène à un temps, et peut être interprété comme la période pendant laquelle on requiert que les sorties soient régulières au sens de la norme  $L^2$ . De manière symétrique, c'est sur l'intervalle  $[-1/\alpha, 0]$  que l'on demande que les entrées soient régulières. Ainsi, plus cette période sera faible, moins l'influence de la relaxation sera ressentie par le système. C'est pourquoi, en première approche, on peut considérer qu'un choix de  $\alpha \geq 1$  est judicieux.

Nous allons préciser ceci à travers l'étude des valeurs singulières associées au système, pour des valeurs de  $\alpha$  différentes.

#### Etude des valeurs singulières

Pour accéder aux valeurs singulières du système discrétisé on calcule les grammiens qui lui sont associés. Pour le détail technique de ce calcul on se référera à

l'annexe E.2.1. On développe alors un algorithme permettant le calcul de ces grammiens, et donc des valeurs singulières, à l'aide de la bibliothèque M++ du langage C++. Les choix faits pour que cela soit réalisé avec le plus d'économie de calculs sont exposés en annexe E.2.2. Ceci nous a permis d'accéder aux valeurs singulières pour un système discrétisé d'ordre  $N = 10$  fixé et pour des valeurs de  $\alpha$  comprises entre 0 et 3; On les a représentées figure 4.3.2. Au vu du comportement de ces

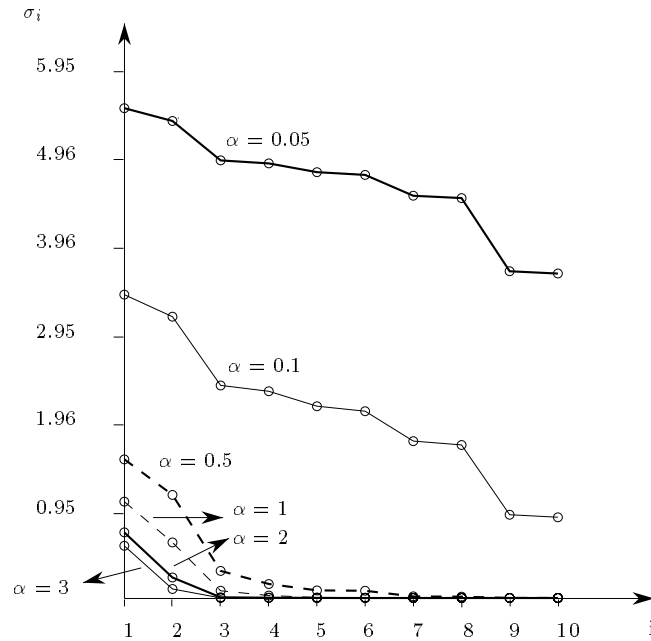


Figure 4.3.1 : Evolution des valeurs singulières en fonction de  $\alpha$

valeurs singulières, il est permis de conclure sur la fourchette dans laquelle il semble le plus réaliste de choisir  $\alpha$  dans ce cas particulier. En effet, pour assurer la nucléarité de l'opérateur de Hankel associé, il faut que ces valeurs restent finies et faibles. Il faut donc que  $\alpha$  ne soit pas trop proche de 0. Ceci permet de justifier le choix de  $\alpha \in [0.5, 1]$ .

D'autre part, et pour rester cohérent avec la remarque du paragraphe précédent exprimant la volonté de ne pas trop perturber le système, il est nécessaire de considérer des valeurs de  $\alpha$  raisonnablement grandes.

Il semble donc correct de choisir pour  $\alpha$  la valeur 1. C'est ce que l'on a fait dans les développements suivants.

On peut donc conclure qu'il existe un lien entre la rapidité de convergence vers 0 des valeurs singulières et la valeur du coefficient  $\alpha$ .

### 4.3.3 Le comportement des modes propres

Analysons le comportement des modes propres associés aux approximations de Hankel du système relaxé. On les a calculés pour un système initial relaxé d'ordre de

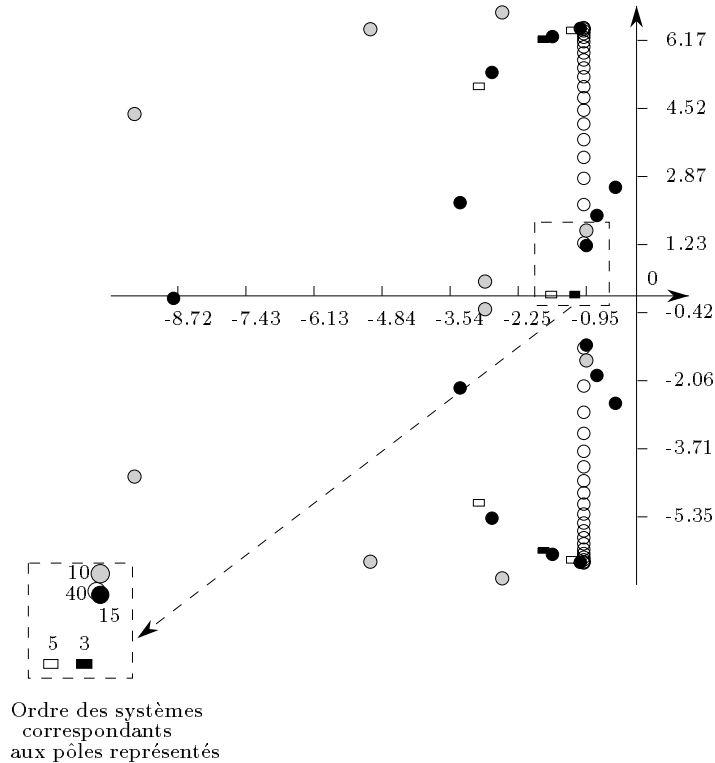


Figure 4.3.2 : Les pôles en fonction de l'ordre d'approximation

discretisation égal à 20 puis pour les approximations que l'on en a fait. On peut faire plusieurs remarques à propos de la représentation qui les illustre figure 4.3.3:

- ils sont dans le cas où l'ordre d'approximation est pair, complexes conjugués à partie réelle négative, dans le cas contraire, le mode non couplé est réel négatif;
- ils ne sont pas, pour un même ordre d'approximation, situés sur le même axe; on n'a donc guère d'espoir de pouvoir retrouver une forme de la matrice d'état qui permette de remonter à
  - un système du second ordre
  - un système ni stable, ni instable, débarrassé de son coefficient de relaxation.

On n'a donc pas trouvé de lien direct entre le système initial et ses approximants relaxés comme on l'a schématisé sur la figure 4.3.3.

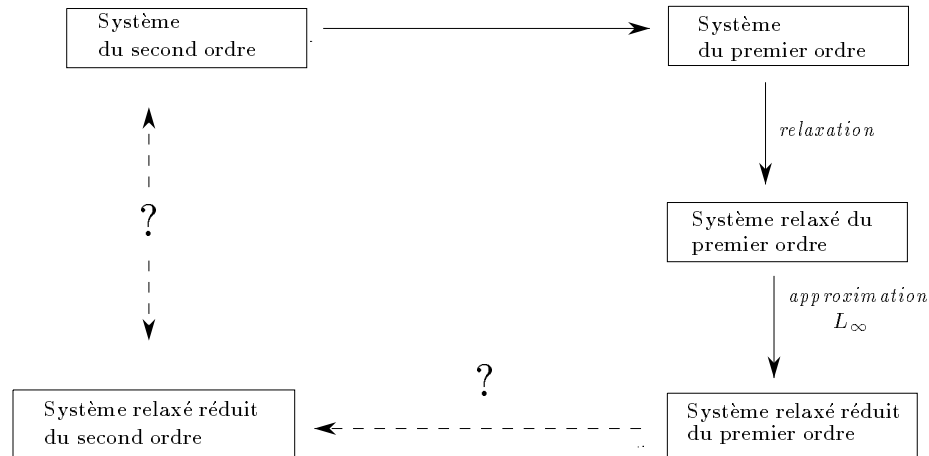


Figure 4.3.3 : Étapes de l'approximation

#### 4.3.4 Conclusion

Les faits observés précédemment permettent de corroborer les remarques suivantes.

D'un point de vue mathématique, les systèmes réellement déplaisants (c'est à dire avec une infinité de pôles sur l'axe imaginaire) ne peuvent être traités par les méthodes d'approximation ou de contrôle robuste usuelles. Notamment les techniques de pondération [Enn 84,LA 85] ne seront plus performantes car aucune fonction agissant sur le transfert ne pourra permettre de faire disparaître les pôles accumulés sur l'axe imaginaire à l'infini.

Il est donc justifié de mettre au point des techniques telles que la relaxation pour s'adapter à ce genre de systèmes, dont l'étude reste mathématiquement tout à fait intéressante.

Le point de vue de l'ingénieur est tout autre. Certains prônent l'inexistence de tels systèmes en affirmant que les pôles à l'infini finissent toujours par être entraînés de l'axe imaginaire vers le demi plan gauche. Or cela n'est pas en contradiction avec notre approche. En effet, ce sont des considérations physiques du même ordre, qui rendent légitime l'approximation du système relaxé dont la fonction de transfert est  $G(s + \alpha)$  (avec  $\alpha > 0$ ).





# Conclusion

Cette étude a permis d'étendre une partie des résultats sur l'approximation au sens de la norme de Hankel à certains systèmes de dimension infinie.

Ainsi, dans le chapitre 3 de ce mémoire, on a établi l'existence d'un approximant pour le cas d'un système parabolique modélisant le comportement de la chaleur. Pour cela, on a mis en évidence le parallèle existant entre ce système multivariable et les systèmes scalaires à retard, ce qui a permis d'utiliser les propriétés de cette classe de systèmes dans ce cas particulier. De plus, on a pu constater que pour ce système parabolique, le modèle réduit au sens de la norme de Hankel était, d'un point de vue pratique, bien meilleur qu'un modèle réduit par les méthodes classiques résultant de l'analyse modale, pour un même ordre d'approximation.

Cette extension n'est cependant plus possible pour les systèmes hyperboliques que l'on a introduit au chapitre 4. C'est pourquoi, on y a élaboré une approche préalable à la réduction : elle consiste pratiquement à refermer l'angle du cône contenant les modes du système étudié. Cela permet, lorsque les valeurs propres des systèmes croissent avec une vitesse suffisamment élevée (ce qui est le cas d'une poutre d'Euler Bernoulli, mais plus celui des ondes), de retrouver les hypothèses nécessaires à la construction d'un approximant de Hankel. Mais cette approche préalable n'est pas suffisante dans le cas de systèmes modélisés par l'équation des ondes, quel que soit le type d'observation considéré.

L'intérêt pratique de la méthode d'approximation Hankel-optimale doit être tempéré : tout d'abord, on a pu constater que les systèmes de dimension infinie pour lesquels l'approximant Hankel-optimal était effectivement déterminé étaient rares. Ceci vient de la difficulté du problème de la détermination des valeurs singulières et des paires de schmidt associées : il existe des algorithmes de calcul de ces invariants pour les systèmes de dimension finie [Y 83, Y 90]; mais la complexité de leur détermination reste entière dans le cas de la dimension infinie à l'exception de cas particuliers pour lesquels des algorithmes de calcul ont été mis au point : les systèmes dont la fonction de transfert est la partie stable de  $G(s)e^{-st}$  où  $G$  est rationnelle [GLP 90], ou dont le symbole associé est du type  $m^*W$ , où  $m \in H_\infty$  est une fonction de module un sur le cercle unité et où  $W$  est une fonction rationnelle [S 89]. Une alternative à ce calcul explicite, [GCP 88], est l'étape intermédiaire faisant intervenir un approximant  $L^\infty$  de dimension finie. Or cette étape introduit

la contrainte supplémentaire de nucléarité de l'opérateur de Hankel. Enfin, lors de l'étude des systèmes à la limite de la stabilité et de l'instabilité, on a pu réaliser combien la norme de Hankel était "exigeante": il est nécessaire d'introduire un facteur d'oubli, par le biais de notre approche de relaxation, pour que l'opérateur de Hankel associé au système soit défini et que sa norme devienne bornée.

Ces faits soulignent donc les difficultés de l'application de cette méthode et justifient qu'elle soit peu utilisée pratiquement. Il faut cependant remarquer que lorsqu'elle fonctionne, comme dans le cas du système parabolique, l'approximation au sens de la norme de Hankel permet d'obtenir des résultats réellement intéressants.

Finalement, on peut se poser la question suivante, concernant l'extension de l'utilisation de cette méthode d'approximation aux systèmes de dimension infinie : faut-il réaliser l'étude des propriétés de ces systèmes en les regroupant en classes, telles celles de Callier-Desoer [CaD 78], Pritchard-Salamon [PrS 87], comme il est fait dans [Cur 88c] ou bien s'intéresser directement aux propriétés des cas particuliers considérés ? La classification des systèmes est attirante, car il est toujours plus élégant de déterminer des résultats généraux. Mais cela implique des hypothèses très souvent contraignantes. La réalité physique est peu souvent modélisée directement par des systèmes appartenant à l'une de ces classes. Et lorsque l'on désire traiter une application, les spécificités du problème considéré aboutissent à l'élaboration d'une méthode particulière.

La façon dont ce travail a été réalisé tendrait à montrer qu'il est difficile de trancher réellement et que les deux approches restent en définitive complémentaires.

# Annexes



## Annexe A

# A propos des autres types d'approximations

Il existe plusieurs types de normes qui permettent de poser le problème d'approximation en des termes différents. Leur choix est intimement lié au type d'application que l'on souhaite réaliser. Il va dépendre

- des caractéristiques fondamentales à conserver quant au comportement du système;
- de l'adéquation de chacune de ces normes au type de problème posé : par exemple d'un point de vue pratique, la norme  $L^\infty$  semble la plus adaptée à la résolution des problèmes de contrôle;
- de l'élément (fonction, variable) sur laquelle l'erreur induite par la réduction est à minimiser : fonction de transfert, réponse impulsionnelle, observation, opérateur de Hankel...

En pratique, n'ont été envisagés que les problèmes d'approximation rationnelle au sens de la norme associée à l'espace  $L^p$  pour  $p = 2$  ou  $\infty$  ou au sens de la norme de Hankel.

Il est difficile de réaliser un classement de l'efficacité des méthodes de réduction en fonction du type de norme choisie, car elles ne répondent pas aux mêmes objectifs. Cependant, les inégalités suivantes permettent de situer entre elles les différentes erreurs que l'on cherche à minimiser :

Pour tout  $F(z) \in L^2$

$$\|F(z)\|_H \leq \|F(z)\|_\infty$$

De plus, si  $F(z) \in H_2^\perp$

$$\|F(z)\|_2 \leq \|F(z)\|_H \leq \|F(z)\|_\infty$$

comme cela est démontré dans [KLi 81].

Suivant le type de norme choisie, il a été démontré des résultats d'existence, voire d'unicité de l'approximant d'un système de dimension finie. Voyons ce qu'il en est dans le cas de l'approximation au sens de la norme  $L^2$ , problème initié dans le cas scalaire par [Ros 78] et [Ruc 78], puis développé dans un cadre plus général et avec une formulation différente par [Bar 87a, Bar 87b]. Et tout d'abord, décrivons succinctement les objectifs de cette approximation.

On considère que le système à identifier est défini par sa fonction de transfert  $\mathcal{F}$ , éventuellement non rationnelle, et on cherche, pour un entier  $n$  donné, à déterminer quelle matrice rationnelle  $\mathcal{H}$ , de degré de Mac-Millan <sup>1</sup> au plus  $n$ , approche le mieux  $\mathcal{F}$  au sens de la norme  $L^2$ .

Cette norme est essentiellement bien adaptée aux problèmes d'estimation [Bar 87a, pages 23–24]; ainsi, on peut en donner l'interprétation suivante : si  $\delta$  est un bruit blanc et  $y$  la sortie associée à  $\delta$  par un système dynamique linéaire stationnaire dont la fonction de transfert  $\mathcal{F}$  est  $L^2$ ,  $y$  est un processus stationnaire dont le spectre permet en principe de retrouver  $\mathcal{F}$ . Si, à présent,  $\mathcal{H}$  est une fonction de transfert rationnelle stable d'ordre au plus  $n$ , si  $\hat{y}$  est la sortie correspondante à  $\delta$ , la variance de  $\|y - \hat{y}\|$  est minimale lorsque la norme  $L^2$  de  $\|\mathcal{F} - \mathcal{H}\|$  est elle-même minimale.

En pratique, on se ramène au cas du temps discret, pour lequel le problème mathématique s'exprime ainsi :

*Etant donné  $(\mathcal{F}_{i,j})$  une matrice  $p \times m$  d'éléments de l'espace de Hardy réel  $H_2^\perp$  et  $n$  un entier, trouver une matrice de transfert rationnelle stable  $(\mathcal{H}_{i,j})$  de taille  $p \times m$  et de degré de Mac-Millan au plus  $n$  telle que*

$$\sum_{i,j} \|\mathcal{F}_{i,j} - \mathcal{H}_{i,j}\|_{H_2^\perp}^2$$

*soit minimal.*

Le problème ainsi formulé, il est démontré dans [Bar 87b] l'existence et l'unicité générique d'un meilleur approximant.

---

<sup>1</sup>soit la dimension de son état dans une réalisation minimale

## Annexe B

# A propos des valeurs singulières

Dans ce qui suit, on va considérer un système dynamique linéaire constant, de dimension  $n$ , à  $p$  entrées,  $q$  sorties représenté par le triplet de matrices  $\Xi = \{A, B, C\}$ , où  $A$  est de dimension  $n \times n$ ,  $B$  de dimension  $n \times p$ ,  $C$  de dimension  $q \times n$ .

On supposera que le système est stable, soit que les valeurs propres de la matrice  $A$  sont à partie réelle négative. Cela permet d'assurer que l'opérateur de Hankel associé à ce système soit bien défini. Rappelons comment cet opérateur  $\Gamma$  est défini :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma : L^2(0, +\infty; \mathbb{C}^p) & \longrightarrow & L^2(0, +\infty; \mathbb{C}^q) \\ u & \longmapsto & \Gamma u \end{array}$$

est tel que  $(\Gamma u)(t) = \int_0^\infty C e^{A(t+\tau)} B u(\tau) d\tau$ .

## B.1 Cas où l'opérateur de Hankel est symétrique

Dire que l'opérateur de Hankel est symétrique correspond

- au cas scalaire où l'opérateur est réel et symétrique.

En effet :

$$\begin{aligned} (\Gamma u, v)_{L^2(0, +\infty, \mathbb{R})} &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} C e^{A(t+\tau)} B u(\tau) d\tau v^*(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} C e^{A(\tau+t)} B v(t) dt u^*(\tau) d\tau \end{aligned}$$

car  $v^*(t) = v(t)$  et  $u(\tau) = u^*(\tau)$

$$= (u, \Gamma v)_{L^2(0, +\infty, \mathbb{R})}.$$

- au cas multivariable où

$$\begin{cases} A = A^* & \text{soit } A \text{ symétrique réel,} \\ B = C^* & \text{soit } B \text{ et } C \text{ colocalisés.} \end{cases}$$

En effet :

$$\begin{aligned} (\Gamma u, v)_{L^2} &= \int \int v^*(t) C e^{A(t+\tau)} B u(\tau) d\tau dt \\ (u, \Gamma v)_{L^2} &= \int \int v^*(t) B^* e^{A^*(t+\tau)} C^* dt u(\tau) d\tau \\ &= \int \int v^*(t) C e^{A^*(t+\tau)} B u(\tau) d\tau dt \end{aligned}$$

D'où la symétrie de  $\Gamma$ .

Dans ces deux cas les valeurs singulières de l'opérateur de Hankel  $\Gamma$  sont égales au module de ses valeurs propres puisque  $\Gamma = \Gamma^*$ .

On peut alors calculer les valeurs singulières de  $\Gamma$  comme suit :

$$\begin{aligned} \Gamma v(t) &= \int_0^\infty C e^{A(t+\tau)} B v(\tau) d\tau \\ &= C e^{At} \int_0^\infty e^{A\tau} B v(\tau) d\tau \\ &= C e^{At} \xi_v. \end{aligned}$$

$\xi_v$  est indépendant de  $t$  et est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , vecteur constant donnant les composantes de  $\Gamma v(t)$  suivant la base de l'espace image de  $\Gamma$ ,  $\text{Im}(\Gamma)$ . On a alors  $\dim(\text{Im}(\Gamma)) = n$  et  $v(t) = C e^{At} \rho$  avec  $\rho \in \mathbb{R}^n$ .

Soit  $\lambda$  la valeur propre de  $\Gamma$  associée à  $v(t)$ .  $|\lambda|$  est une valeur singulière de  $\Gamma$ .

$$\begin{aligned} \Gamma v(t) &= \lambda v(t) \\ \iff C e^{At} \left( \int_0^\infty e^{A\tau} B C e^{A\tau} d\tau \right) \rho &= \lambda C e^{At} \rho. \end{aligned}$$

Comme  $(C, A)$  est observable,  $C e^{At} \rho_1 = 0 \iff \rho_1 = 0$ , et l'équation précédente se simplifie en :

$$\lambda \rho = \left( \int_0^\infty e^{A\tau} B C e^{A\tau} d\tau \right) \rho \quad (\text{B.1.1})$$

Les modules des solutions en  $\lambda$  de cette équation sont les valeurs singulières associées à  $\Gamma$ .

## B.2 Cas où l'opérateur de Hankel n'est pas symétrique

On va établir dans ce cas le lien existant entre les valeurs singulières et les grammiens associés au système  $\Xi$ . Ces grammiens sont définis par les équations de Lyapunov



qui dans le cas continu sont les suivantes :

$$\begin{cases} AW + WA^{*t} = -BB^{*t} \\ MA + A^{*t}M = -C^{*t}C \end{cases}$$

où le grammien de commandabilité  $W$  est tel que  $W_\tau = \int_0^\tau e^{At}BB^{*t}e^{A^{*t}t}dt$  et où le grammien d'observabilité  $M$  est tel que  $M_\tau = \int_0^\tau e^{A^{*t}t}C^{*t}Ce^{At}dt$ .

De plus  $M = \mathcal{O}^*\mathcal{O}$  et  $W = \mathcal{C}\mathcal{C}^*$ .

Si l'on suppose le système commandable et observable,  $M$  et  $W$  sont tous les deux non singuliers (i.e. toute valeur propre est strictement positive) pour tout  $\tau > 0$ .

Reprenons les notations du paragraphe précédent, soit notons  $\Gamma v(t) = Ce^{At}\xi_v$  où  $\xi_v \in \mathbb{R}^n$  et  $\text{Im}(\Gamma) = Ce^{At}\mathbb{R}^n$ .  $\xi_v$  est l'état dans lequel on se trouve sachant que l'on a appliqué au système au repos l'entrée  $v(t)$  pour  $t$  variant de  $-\infty$  à 0.

$$\begin{aligned} \|\Gamma v\|^2 &= \int_0^\infty \xi_v^* e^{A^*t} C^* C e^{At} \xi_v dt \\ &= \|\xi_v\|_M^2 \\ &\triangleq \xi_v^* M \xi_v. \end{aligned}$$

$M$  est défini positif et symétrique et mesure l'observabilité d'un état : la norme de  $\Gamma v$  mesure "comment je vois ce que j'ai atteint". Un état qui vérifierait  $\xi^* M \xi = 0$  soit  $Ce^{At}\xi = 0$  serait un état inobservable.

On désire connaître

$$\sup_v \frac{\|\Gamma v\|^2}{\|v\|^2} = \sup_{\|v\|^2=1} \|\xi_v\|_M^2$$

sachant que

$$\xi_v = \int_0^\infty e^{At} B v(t) dt.$$

On veut donc optimiser  $\|\xi_v\|_M^2$  sur la boule unité  $\|v\|^2 = 1$  et dans l'hyperplan défini par la relation liant  $\xi_v$  à  $v$ .

Si l'on définit la fonction de coût (modifiée) :

$$J = \|\xi_v\|_M^2 - \lambda^* \left( \xi_v - \int_0^\infty e^{At} B v(t) dt \right) - \mu (\|v\|^2 - 1)$$

où  $\mu$  est un scalaire et où  $\lambda$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , l'optimisation se traduit par

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial \xi_v} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial v} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.2.1})$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} (1) \quad \xi_v - \int_0^\infty e^{At} B v(t) dt = 0 \\ (2) \quad \|v\|^2 = 1. \end{cases} \quad (\text{B.2.2})$$

Or

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_v} = 2M\xi_v - \lambda = 0$$

Comme  $(C, A)$  est observable,  $M$  est inversible et on a

$$\xi_v = \frac{1}{2}M^{-1}\lambda. \quad (\text{B.2.3})$$

D'autre part  $\frac{\partial J}{\partial v}$  appartient au dual de l'espace des commandes  $L^2(0, +\infty; \mathbb{R}^p)$  et s'écrit :

$$\frac{\partial J}{\partial v} = B^* e^{A^* t} \lambda - 2\mu v(t) = 0$$

soit

$$v(t) = \frac{1}{2\mu} B^* e^{A^* t} \lambda. \quad (\text{B.2.4})$$

Ayant ainsi caractérisés la fonction  $v(t)$  et le vecteur  $\xi_v$  qui définissent l'optimum, on trouve  $\lambda$  et  $\mu$  en reportant ces deux expressions dans les contraintes.

Reprenons la première contrainte :

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{B.2.2} \\ \iff \quad \xi_v &= \frac{1}{2}M^{-1}\lambda \quad \text{d'après B.2.3} \\ &= \int_0^\infty e^{At} B B^* e^{A^* t} \frac{\lambda}{2\mu} dt \quad \text{d'après B.2.4} \\ &= \frac{W}{2\mu} \quad \text{d'après l'expression du grammien } W. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{2}M^{-1}\lambda = \frac{W}{2\mu}$$

soit

$$\mu\lambda = WM\lambda \quad (\text{B.2.5})$$

et  $\lambda$  est un vecteur propre de  $WM$  pour la valeur propre  $\mu$ .

La seconde contrainte :

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ B.2.2} \\
 \iff \|v\|^2 &= \frac{1}{4\mu^2} \int_0^\infty \lambda^* e^{At} B B^* e^{A^*t} \lambda dt \text{ d'après B.2.4} \\
 &= \frac{1}{4\mu^2} \lambda^* W \lambda \\
 &= \frac{1}{4\mu^2} \|\lambda\|_W^2 = 1.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\|\lambda\|_W = |2\mu|.$$

Et la valeur du coût sous les contraintes B.2.4 et B.2.3 est

$$\begin{aligned}
 \|\xi_v\|_M^2 &= \xi_v^* M \xi_v \\
 &= \left(\frac{W}{2\mu} \lambda\right)^* M \left(\frac{W}{2\mu} \lambda\right) \\
 &= \frac{1}{4\mu^2} \lambda^* W^* M W \lambda
 \end{aligned}$$

or  $W = W^*$

$$= \frac{1}{4\mu^2} \lambda^* W M W \lambda.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 \frac{\|\xi_v\|_M^2}{\|v\|^2} &= \left(\frac{1}{4\mu^2} \lambda^* W M W \lambda\right) \frac{4\mu^2}{\lambda^* W \lambda} \\
 &= \frac{\lambda^* W M W \lambda}{\|\lambda\|_W}
 \end{aligned}$$

comme  $\mu \lambda = W M \lambda$  d'après B.2.5

$$= \frac{\lambda^* W \mu \lambda}{\|\lambda\|_W} = \frac{\mu \|\lambda\|_W}{\|\lambda\|_W} = \mu.$$

Ainsi

$$\sup_v \frac{\|\Gamma v\|^2}{\|v\|^2} = \sup_{\|v\|^2=1} \|\xi_v\|_M^2 = \mu$$

où  $\mu$  est valeur propre de  $MW$ .



## Annexe C

# Algorithme de réduction dans le cas scalaire

L'algorithme permettant de réaliser l'approximation de l'opérateur de Hankel de rang fini  $\Gamma$  par un opérateur de Hankel de rang moindre, dans le cas scalaire est le suivant :

*On détermine  $g_s^r$ , réponse impulsionnelle associée à la matrice de Hankel approximant  $\Gamma$ .  $g_s^r$  est la partie stable de la fonction  $g^r$  approchant au sens de la norme  $L^\infty$  le symbole  $f$  associé à  $\Gamma$ . Puis on détermine une réalisation associée à cette fonction. On se donne*

- Une réalisation  $A, b, c$  stable,
- $r$ , le rang de l'approximation recherchée.

- (1) Déterminer les grammians  $M$  et  $W$ . Pour cela résoudre les équations de Lyapunov en  $M$  et  $W$ .
- (2) Calculer les valeurs singulières de la matrice de Hankel : les racines carrées des valeurs propres de  $MW$ .
- (3) Ordonner ces valeurs par ordre décroissant, et former la matrice  $\Sigma$  des valeurs singulières ainsi rangées.
- (4) Déterminer la transformation  $T$  permettant le passage de la réalisation à sa base équilibrée.
- (5) Calculer  $g^r$ :

$$g^r = f(z) - \lambda \frac{m(z)d^*(z)}{d(z)m^*(z)}$$

où

$$\lambda = \pm \sigma_{r+1}$$

$$\pm \frac{m^*(z)}{d^*(z)} = \sigma_{r+1}^{-\frac{1}{2}} t_{r+1} (I - zA)^{-1} b = \nu(z), \quad t_{r+1} \text{ la } r+1^{\text{ème}} \text{ ligne de } T$$

$$\frac{m(z)}{d(z)} = \mu(z)$$

$$\nu(z) = z^{-1} \mu(z^{-1})$$

$$f(z) = c(zI - A)^{-1} b$$

d'où

$$g^r = c(zI - A)^{-1} b - \sigma_{r+1} z^{-1} \frac{\nu(z^{-1})}{\nu(z)}$$

(6) Détermination de la partie stable<sup>1</sup> de  $g^r$ :  $g_s^r$ . Elle n'est la meilleure approximation de degré  $r$  de  $f$  qu'au sens norme de Hankel et **non pas au sens de la norme  $L^\infty$** .

(7) Détermination de la réalisation associée à  $\Gamma(g_s^r)$ .

---

<sup>1</sup> $g_s^r$  est la partie propre stable de  $g^r$ , c'est à dire que son dénominateur contient seulement les  $r$  zeros de  $m^*(z)$  dans  $|z| \leq 1$ . Alors  $\Gamma(g_s^r) = \Gamma(g^r)$  est de rang  $r$  (Kronecker).

## Annexe D

# A propos de la chaleur

### D.1 Éléments techniques pour démontrer que le triplet $(\mathcal{A}, B, C)$ est bien posé

#### D.1.1 Admissibilité de l'opérateur $B$

On va montrer que l'opérateur  $B$  satisfait à la condition énoncée par le critère de Carleson donné dans la définition 3.3 :

$$\sum_{-\lambda_k \in I(h)} |b_k|^2 \leq Mh \quad (\text{D.1.1})$$

où  $I(h)$  est l'intervalle de la droite réelle de longueur  $h$ .

Pour cela déterminons les coefficients  $b_k^*$  de  $B^*$ .

Reprenons les notations du paragraphe 3.4.2.  $\lambda$  est la suite des valeurs propres  $\lambda_k = -a\omega_k^2$  associées à l'opérateur  $\mathcal{A}$  générant le semi groupe  $T_t$ .

Soit  $\psi_k$  un vecteur de la base normalisée associée aux valeurs propres  $\lambda$ .

Soit  $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} (U, B^* \psi_k) &= (BU, \psi_k) \\ &= \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a\psi_k(0)}{\alpha}, \frac{a\psi_k(l)}{\beta} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} b_k^* &= \begin{bmatrix} \frac{a\psi_k(0)}{\alpha}, \frac{a\psi_k(l)}{\beta} \end{bmatrix} \\ &= \left( \frac{2a^2(1 + \beta^2\omega_k^2)}{\Upsilon} \right)^{1/2} \begin{bmatrix} \omega_k, \frac{\sin \omega_k l + \alpha \omega_k \cos \omega_k l}{\beta} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \sum_{-\lambda_k \in I(h)} |b_k|^2 \\ = & \sum_{a\omega_k^2 \in I(h)} \frac{2a^2(1 + \beta^2\omega_k^2)}{\Upsilon} \left( \omega_k^2 + \frac{[\sin \omega_k l + \alpha\omega_k \cos \omega_k l]^2}{\beta^2} \right). \end{aligned}$$

Il est utile ici de rappeler deux résultats établis au paragraphe 3.3.2.

L'équation 3.3.5 donnant les  $\omega_k$  admet une solution exactement dans chaque intervalle  $[k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2]$ . Il y a donc un nombre fini de pôles dans l'intervalle  $I(h)$ . Soit  $N(h)$  ce nombre.

D'autre part, les  $\omega_k$  se comportent asymptotiquement comme  $k\pi/l$ . Donc si l'on regarde le comportement asymptotique de  $b_k^2$  :

$$b_k^2 \longrightarrow \frac{2a^2(1 + \beta^2\omega_k^2)}{\alpha^2\beta^4 l \omega_k^4} \left( \beta^2\omega_k^2 + [\sin \omega_k l + \alpha\omega_k \cos \omega_k l]^2 \right);$$

on en déduit qu'un majorant de  $b_k^2$  est  $\mathcal{M}_b = \frac{2a^2}{l} \left[ \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right]$ .

On a donc

$$\sum_{a\omega_k^2 \in I(h)} |b_k|^2 \leq N(h)\mathcal{M}_b.$$

Or étant donné  $h$  la longueur de l'intervalle  $I(h)$ , il existe  $k$  tel que

$$\frac{k^2\pi^2}{l^2} < h^2 < \frac{(k+1)^2\pi^2}{l^2}.$$

Il y a donc au plus  $k+1$  pôles et

$$N(h) < k+1 < \sqrt{h} \frac{l}{\pi} + 1.$$

Il existe donc  $K$  tel que

$$N(h) < K\sqrt{h}$$

et finalement

$$\sum_{a\omega_k^2 \in I(h)} |b_k|^2 \leq M\sqrt{h}$$

où  $M = K\mathcal{M}_b$ .

L'équation D.1.1, condition du critère de Carleson est donc vérifiée.



### D.1.2 Admissibilité de l'opérateur $C$

Montrons que la paire  $(\mathcal{A}^*, C^*)$  est admissible, soit que la paire  $(\mathcal{A}, C^*)$  est admissible puisque l'opérateur  $\mathcal{A}$  est autoadjoint. Il suffit de montrer que l'opérateur  $C^*$  satisfait au critère de Carleson soit que :

$$\sum_{a\omega_k^2 \in I(h)} |c_k|^2 \leq Mh$$

où les  $c_k$  sont les coefficients de  $C$  et où  $M$  est une constante positive.

Les coefficients  $c_k$  sont tels que

$$c_k = \psi_k(0) = \left( \frac{2(1 + \beta^2 \omega_k^2)}{\Upsilon} \right)^{1/2} \alpha \omega_k.$$

Or

$$\begin{aligned} & \sum_{-\lambda_k \in I(h)} |c_k|^2 \\ &= \sum_{a\omega_k^2 \in I(h)} \left( \frac{2(1 + \beta^2 \omega_k^2)}{\Upsilon} \right) \alpha^2 \omega_k^2. \end{aligned}$$

De la même façon qu'au paragraphe précédent, on peut montrer que le terme général de cette série,  $c_k^2$  converge asymptotiquement vers

$$\left( \frac{2\beta^2 \omega_k^2}{\alpha^2 \beta^4 l \omega_k^4} \right) \alpha^2 \omega_k^2$$

et qu'un majorant est  $\mathcal{M}_c = \frac{2}{l\beta^2}$ .

On en déduit donc que

$$\sum_{a\omega_k^2 \in I(h)} |c_k|^2 \leq M\sqrt{h}$$

où  $M = K\mathcal{M}_c$  et où  $K$  est défini au paragraphe précédent.

Donc l'opérateur  $C$  est admissible.

### D.1.3 Propriétés de la fonction de transfert

La fonction de transfert associée à une réalisation bien posée doit vérifier l'équation du résolvant <sup>1</sup> ([CW 89]):

$$\frac{H(s) - H(\beta)}{s - \beta} = -C(sI - A)^{-1}(\beta I - A)^{-1}B \quad (\text{D.1.2})$$

pour tout  $s, \beta \in \rho(A)$  avec  $s \neq \beta$ .

Dans le cas présent la fonction de transfert peut directement s'écrire sous la forme de la somme de la série convergente :

$$H(s) = \sum \frac{c_k b_k^*}{(s - \lambda_k)}$$

Il s'ensuit donc que l'équation

$$\frac{H(s) - H(0)}{s} = \sum \frac{c_k b_k^*}{(s - \lambda_k)\lambda_k}$$

a un sens et est vérifiée.

Les conditions du théorème 3.3 sont donc remplies pour notre triplet  $(A, B, C)$ .

## D.2 Discrétisation spatiale par différences finies

Rappelons que le système que l'on cherche à discrétiser est le suivant

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x, t) \quad (\text{D.2.1})$$

$$\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) + u(t) = \theta(0, t) \quad (\text{D.2.2})$$

$$-\beta \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) + v(t) = \theta(l, t) \quad (\text{D.2.3})$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad (\text{D.2.4})$$

$$y(t) = \theta(0, t). \quad (\text{D.2.5})$$

L'équation aux dérivées partielles D.2.1 en  $x$  et en  $t$  décrivant les échanges conductifs peut être approximée grâce à une méthode de différences finies par  $n$  équations

<sup>1</sup>Cette équation permet de garantir que la relation d'entrée sortie a bien un sens pour ce système.

différentielles en  $t$  en décomposant le mur en sous-volumes supposés à température homogène. Pour cela, on place  $n$  nœuds équidistants en :

$$x_0 = 0, x_1 = \Delta x, x_2 = 2\Delta x, \dots, x_n = n\Delta x = l$$

où  $\Delta x = \frac{l}{n}$  est le pas de discrétisation du mur.

Pour  $1 \leq i \leq n - 1$ , les nœuds  $x_i$  seront situés au centre d'un domaine de largeur  $\Delta x$  donné par  $[(i - 1/2)\Delta x, (i + 1/2)\Delta x]$ .

Les points extrêmes  $x_0$  et  $x_n$  seront eux situés aux extrémités du mur.

Appelons  $\theta_i(t)$  la température supposée uniforme du domaine  $i$ , et posons  $\Delta x = h$ .

On peut alors donner une expression de l'équation D.2.1 dans chacun des sous-domaines ainsi définis en approchant  $\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x^2}$  par  $\frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{\Delta x^2}$  et  $\frac{\partial \theta_i}{\partial x}$  par  $\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\Delta x}$  ou par  $\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\Delta x}$ .

Les conditions aux limites D.2.2 et D.2.3 sont assimilées dans le bilan des domaines 0 et  $n$ .

Les équations discrètes sont

- pour un nœud courant ( $1 \leq i \leq n - 1$ ) :

$$\frac{a}{h^2} [\theta_{i-1}(t) - 2\theta_i(t) + \theta_{i+1}(t)] = \frac{d\theta_i(t)}{dt},$$

- pour le nœud 0 :

$$\frac{a}{h^2} [-(2h/\alpha + 2)\theta_0(t) + 2\theta_1(t)] = \frac{d\theta_0(t)}{dt} - \frac{2u(t)a}{\alpha h},$$

- pour le nœud  $n$  :

$$\frac{a}{h^2} [2\theta_{n-1}(t) - (2h/\beta + 2)\theta_n(t)] = \frac{d\theta_n(t)}{dt} - \frac{2v(t)a}{\beta h}.$$

On a donc un système de  $n + 1$  équations différentielles en temps que l'on note matriciellement :

$$\frac{d\Theta}{dt} = A_d \Theta + B_d U \quad (\text{D.2.6})$$

où :

$\Theta$  est la matrice  $(n + 1) \times 1$

$$\Theta(t) = \begin{pmatrix} \theta_0(t) \\ \theta_1(t) \\ \vdots \\ \theta_n(t) \end{pmatrix},$$



$([k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2])$ . Elle admet donc au moins un point d'accumulation, que l'on notera  $\varpi_k(\infty)$ , et une sous-suite indicée suivant  $n'$  et telle que

$$\varpi_k(n') \longrightarrow \varpi_k(\infty) \quad \text{lorsque } n' \longrightarrow \infty.$$

L'existence de ce point d'accumulation permet d'écrire

$$\begin{aligned} & \lim_{n' \rightarrow \infty} n' \sin \vartheta(k, n') \\ &= \lim_{n' \rightarrow \infty} n' \sin \frac{\varpi_k(n')}{n'} \\ &\sim \lim_{n' \rightarrow \infty} n' \frac{\varpi_k(n')}{n'} \\ &= \varpi_k(\infty). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{(\alpha + \beta) \frac{n' \sin \vartheta(k, n')}{l}}{1 - \alpha \beta \frac{n'^2 \sin^2 \vartheta(k, n')}{l^2}} \\ &= \frac{(\alpha + \beta) \frac{\varpi_k(\infty)}{l}}{1 - \alpha \beta \frac{\varpi_k^2(\infty)}{l^2}}. \end{aligned}$$

Comme la fonction tangente est continue sur l'intervalle considéré

$$\tan(n' \vartheta(k, n') - k\pi) \longrightarrow \tan(\varpi_k(\infty) - k\pi) \quad \text{lorsque } n' \longrightarrow \infty.$$

Et finalement, on a

$$\tan(\varpi_k(\infty) - k\pi) = -\frac{(\alpha + \beta)(\varpi_k(\infty)/l)}{1 - \alpha \beta (\varpi_k^2(\infty)/l^2)}. \quad (\text{D.3.3})$$

$\varpi_k(\infty)$  est solution de l'équation D.3.3 qui comme l'équation D.3.2 admet une solution unique dans l'intervalle associé à  $k$ ,  $[k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2]$ . Il y a donc unicité du point d'accumulation.  $\varpi_k(\infty)$  est la limite unique de la suite  $(\varpi_k(n))_n$ . Pour  $n$  grand on a

$$\begin{aligned} n \vartheta(k, n) &\sim \omega_k l \\ &\sim \omega_k h \end{aligned}$$

où  $\omega_k$  est solution de l'équation 3.4.7. Ceci vient du fait que les équations D.3.3 et 3.4.7 sont équivalentes.

Les pôles du système (valeurs propres de  $A_d$ ) sont donc

$$\begin{aligned} p &= (a/h^2)\eta \\ &= (2a/h^2)(\cos \vartheta - 1) \\ &= -4a \left( \frac{\sin(\vartheta/2)}{h} \right)^2 \\ &= -a \frac{\vartheta^2}{h^2} \\ &= -a\omega_k^2 \end{aligned}$$

pour  $n$  grand, soit pour  $\vartheta$  petit (car  $-\pi/2 + k\pi < n\vartheta < \pi/2 + k\pi$ ).

On retrouve donc exactement les premières valeurs propres du système, pourvu que l'ordre de discrétisation soit assez grand. C'est pourquoi le système D.2.6 de  $n + 1$  équations différentielles du premier ordre en  $t$  peut être utilisé directement à des fins de simulation.

# Annexe E

## A propos des cordes vibrantes

### E.1 Discrétisation spatiale

Nous allons dérouler ici les calculs permettant de déterminer la réalisation et le spectre associé au système obtenu par discrétisation du système 4.3.2 représentant les cordes vibrantes.

Pour discrétiser ce problème en espace, par une méthode de différences finies, on établit un maillage de pas  $\frac{1}{N+1}$  avec  $N$  entier  $\geq 1$ . Le pas  $h$  est destiné à tendre vers 0. En notant  $z_i$  une approximation de la solution en  $(x_i = ih)$ , notée  $\varphi(x_i)$ , on approche

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(ih, t) \text{ par } \frac{-z_{i-1} + 2z_i - z_{i+1}}{h^2}(t).$$

La discrétisation la plus naturelle consiste à trouver des nombres  $z_i$ ,  $1 \leq i \leq N+1$  solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{z}(t) + \frac{-z_{i-1}(t) + 2z_i(t) - z_{i+1}(t)}{h^2} = u(ih), \quad 1 < i < N \quad t > 0 \\ z_0(t) = 0, \quad z_N(t) = z_{N+1}(t), \quad t \geq 0 \\ z_i(0) = u_0(ih), \quad 1 \leq i \leq N \\ \frac{\partial z_i}{\partial t}(0) = u_1(ih), \quad 1 \leq i \leq N \end{array} \right.$$

où

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}$$

est le vecteur d'état correspondant à cette discrétisation spatiale.  
On peut encore écrire ce qui précède sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\mathcal{Z}} = A\mathcal{Z} + \mathcal{U}(t), \quad t \geq 0 \\ z_0(t) = 0, \quad z_N(t) = z_{N+1}(t), \quad t \geq 0 \\ z_i(0) = u_0(ih), \quad 1 \leq i \leq N \\ \frac{\partial z_i}{\partial t}(0) = u_1(ih), \quad 1 \leq i \leq N \end{array} \right. \quad (\text{E.1.1})$$

où

$$\mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} u(h, t) \\ u(2h, t) \\ \vdots \\ u(Nh, t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans notre cas la commande est indépendante de l'espace : on prendra  $\mathcal{U}(t) = Bu(t)$ , où  $B$  est une matrice de commande indépendante du temps. On prendra comme matrice d'observation  $C = \bar{B}^T$ .

Par la suite on considérera la matrice  $h^2A$  que par abus de notations on continuera à appeler  $A$ .  $A$  est réelle symétrique définie négative et diagonalisable.

Diagonalisons  $A$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Alors

$$\begin{aligned} Az &= \lambda z \\ \implies \begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1} = \lambda z_i \\ z_{N-1} - z_N = \lambda z_N \end{cases} \end{aligned}$$

Comme  $z_N = z_{N+1}$  on peut écrire E.1.2

$$z_{N-1} - 2z_N + z_{N+1} = \lambda z_N$$

donc

$$Az = \lambda z$$

$$\text{soit} \quad z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1} = \lambda z_i, \quad 1 \leq i \leq N$$

$$\text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} z_{i+1} \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_i \\ z_{i-1} \end{pmatrix}$$

D'où par récurrence

$$\begin{pmatrix} z_{i+1} \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} z_1 \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.1.2})$$



Posons  $H = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On diagonalise  $H$ . Ses deux valeurs propres  $\mu_1$  et  $\mu_2$  vérifient l'équation

$$s^2 - (2 + \lambda)s + 1 = 0.$$

La matrice de passage est

$$p = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$H = pdp^{-1}.$$

où

$$d = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \text{ et } p^{-1} = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \begin{pmatrix} 1 & -\mu_2 \\ -1 & \mu_1 \end{pmatrix}.$$

En injectant ceci dans E.1.2 on obtient

$$p^{-1} \begin{pmatrix} z_{i+1} \\ z_i \end{pmatrix} = d^i p^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

La résolution de ce système conduit à

$$z_{i+1} = \frac{\mu_1^{i+1} - \mu_2^{i+1}}{\mu_1 - \mu_2} z_1;$$

comme  $z_{N+1} = z_N$ ,

$$\mu_1^{N+1} - \mu_2^{N+1} = \mu_1^N - \mu_2^N.$$

D'autre part on a

$$\mu_1 + \frac{1}{\mu_1} = \mu_2 + \frac{1}{\mu_2}.$$

Donc

$$\mu_1^{N+1} - \mu_2^{N+1} = \mu_1^N - \mu_2^N$$

soit 
$$\mu^{N+1} - \mu^{-N-1} = \mu^N - \mu^{-N}$$

ou encore 
$$(\mu - 1)(\mu^{2N+1} + 1) = 0$$

On en déduit les solutions

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = 1 \Rightarrow \lambda = 0 \\ \text{ou } \mu \text{ racine } (2N + 1)^{\text{ème}} \text{ de } -1 \Rightarrow \mu = \exp \left[ \frac{i\pi(2k - 1)}{2N + 1} \right] \quad k \in \{1, \dots, N\}. \end{array} \right.$$

D'où

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \mu + \frac{1}{\mu} - 2 \\ &= -4 \sin^2 \left( \frac{2k-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right) \quad k \in \{1, \dots, N\}\end{aligned}$$

$\lambda_k$  décroît de 0 à  $-4$  lorsque  $k$  augmente. Donc  $A$  est semblable à la matrice diagonale<sup>1</sup>

$$D = \left( -4 \sin^2 \left( \frac{2k-1}{2N+1} \frac{\pi}{2} \right) \right)_{k \in \{1, \dots, N\}}.$$

Déterminons la matrice de passage  $P$ . Comme c'est la matrice de passage d'une matrice symétrique  $A$ , elle est orthogonale.

Le vecteur propre  $\vec{v}_k$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$  est donné par

$$\vec{v}_k = \begin{pmatrix} z_1^k \\ \vdots \\ z_N^k \end{pmatrix}$$

où  $z_j^k = \frac{\mu_{1,k}^j - \mu_{2,k}^j}{\mu_1^k - \mu_2^k} z_1$ . On peut choisir de ne pas tenir compte du terme constant  $\frac{z_1}{\mu_1^k - \mu_2^k}$ . Les composantes de  $\vec{v}_k$  sont alors

$$\begin{aligned}z_j^k &= \mu_{1,k}^j - \mu_{2,k}^j \\ &= 2i \sin \frac{j(2k-1)}{2N+1} \pi.\end{aligned}$$

On choisira finalement

$$z_j^k = \sin \frac{j(2k-1)}{2N+1} \pi.$$

Donc la matrice de passage  $P$  est

$$P = \left( \sin \frac{j(2k-1)}{2N+1} \pi \right)_{1 \leq j, k \leq N}.$$

Pour normaliser  $P$  on calcule  $\|\vec{v}_k\|$  ce qui nous conduit au résultat

$$\|\vec{v}_k\|^2 = \frac{2N+1}{4}.$$

Comme

$$PP^T = \frac{2N+1}{4} Id,$$

---

<sup>1</sup>Rappelons qu'ici  $A$  est en fait  $h^2 A$  donc  $A$  est en réalité semblable à  $D/h^2$ . Les valeurs propres associées sont alors  $\lambda_k/h^2 = \lambda_k(N+1)^2$ .

on choisit comme matrice de passage, la matrice orthonormée

$$\frac{2}{\sqrt{2N+1}}P.$$

On a

$$A = \frac{4}{2N+1}PDP^T.$$

Si l'on considère le nouveau vecteur d'état

$$\theta = \frac{2}{\sqrt{2N+1}}PZ$$

alors on a le système suivant

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{4}{2N+1}PAP^T\theta + \frac{2}{\sqrt{2N+1}}PBu(t) \\ Y = \frac{2}{\sqrt{2N+1}}\bar{B}^T P^T\theta \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = D\theta + \frac{2}{\sqrt{2N+1}}PBu(t) \\ Y = \frac{2}{\sqrt{2N+1}}(\bar{B})^T\theta. \end{cases}$$

Posons  $-D = \Omega^2$  et  $B = \frac{2}{\sqrt{2N+1}}PB$ . Le système discrétisé s'écrit alors sous la forme

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \Omega^2\theta = Bu(t) \\ Y = \bar{B}^T\theta. \end{cases}$$

## E.2 Les grammians du système discrétisé et relaxé

On va dérouler ici le calcul permettant d'accéder aux grammians associés au système résultant de la discrétisation et de la relaxation du problème des cordes vibrantes. Pour ce faire, on s'est inspiré de l'approche proposée dans [Wil 90].

### E.2.1 Le calcul

Déterminons le grammien de commandabilité.

Soit  $W_c$  le grammien de commandabilité associé au système  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ .  $W_c$  est solution de l'équation de Lyapunov

$$\mathcal{A}W_c + W_c\bar{\mathcal{A}}^T + \mathcal{B}\bar{\mathcal{B}}^T = 0. \quad (\text{E.2.1})$$

Si on exprime  $W_c$  en termes de matrices blocks ( $2 \times 2$ )  $W_c^{kl}$  l'équation E.2.1 devient

$$A_k W_c^{kl} + W_c^{kl} \bar{A}_l^T + B_k \bar{B}_l^T = 0.$$

On note

$$W_c^{kl} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}.$$

E.2.2 devient

$$\begin{pmatrix} -2\alpha & -\bar{\eta}_k \\ \eta_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\alpha & \bar{\eta}_l \\ -\eta_l & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_k^T \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_l & 0 \end{pmatrix} = 0$$

soit le système :

$$\begin{cases} -4\alpha w_{11} & -\eta_l w_{12} & -\bar{\eta}_k w_{21} & & = -b_k^T b_l \\ \bar{\eta}_l w_{11} & -2\alpha w_{12} & & -\bar{\eta}_k w_{22} & = 0 \\ \eta_k w_{11} & & -2\alpha w_{21} & -\eta_l w_{22} & = 0 \\ & \eta_k w_{12} & +\bar{\eta}_l w_{21} & & = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système conduit aux solutions:

$$\begin{cases} w_{11} = 2\alpha(\eta_l \bar{\eta}_l + \eta_k \bar{\eta}_k) \frac{b_k^T b_l}{d_{kl}} \\ w_{12} = \bar{\eta}_l(\eta_l \bar{\eta}_l - \eta_k \bar{\eta}_k) \frac{b_k^T b_l}{d_{kl}} \\ w_{21} = -\eta_k(\eta_l \bar{\eta}_l - \eta_k \bar{\eta}_k) \frac{b_k^T b_l}{d_{kl}} \\ w_{22} = 4\alpha \eta_k \bar{\eta}_l \frac{b_k^T b_l}{d_{kl}} \end{cases}$$

où

$$d_{kl} = (\eta_k \bar{\eta}_k - \eta_l \bar{\eta}_l)^2 + 8\alpha^2(\eta_k \bar{\eta}_k + \eta_l \bar{\eta}_l).$$

$$W_c^{kl} = \frac{b_k^T b_l}{d_{kl}} \begin{pmatrix} 2\alpha(\eta_k \bar{\eta}_k + \eta_l \bar{\eta}_l) & \bar{\eta}_l(\eta_l \bar{\eta}_l - \eta_k \bar{\eta}_k) \\ -\eta_k(\eta_l \bar{\eta}_l - \eta_k \bar{\eta}_k) & 4\alpha \eta_k \bar{\eta}_l \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.2})$$

et

$$W_c = (W_c^{kl})_{1 \leq k, l \leq N}.$$

On vérifie les conditions suivantes

$$\begin{cases} w_{11}(l, k) = \bar{w}_{11}(k, l) \\ w_{22}(l, k) = \bar{w}_{22}(k, l) \\ w_{12}(k, l) = \bar{w}_{21}(l, k). \end{cases}$$

Remarquons qu'il peut être intéressant de donner l'expression des grammien en fonction des  $\omega_k^2$  pour avoir des conclusions sur leur comportement suivant le rapprochement des fréquences.

Introduisons la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

de dimension  $(2N \times 2N)$ .

$P$  vérifie

- $P^2 = Id$ ;
- $P\bar{\mathcal{A}}P = \mathcal{A}^T$  où  $\bar{\mathcal{A}}$  est le complexe conjugué de  $\mathcal{A}$  de dimension  $(2N \times 2N)$ , soit  $\mathcal{A} = P\bar{\mathcal{A}}^T P$ .

Le grammien d'observabilité  $W_o$  est solution de l'équation de Lyapunov

$$\bar{\mathcal{A}}^T W_o + W_o \mathcal{A} + \bar{\mathcal{C}}^T \mathcal{C} = 0. \quad (\text{E.2.3})$$

En exprimant  $\mathcal{A}$  en fonction de  $P$  l'équation E.2.3 devient

$$P\mathcal{A}PW_o + W_o P\bar{\mathcal{A}}^T P + \bar{\mathcal{C}}^T \mathcal{C} = 0.$$

En multipliant à droite et à gauche par  $P$  on obtient

$$APW_o P + PW_o P\bar{\mathcal{A}}^T + P\bar{\mathcal{C}}^T \mathcal{C}P = 0.$$

Comme

$$\mathcal{C}P = \mathcal{C} \quad \text{et} \quad (\bar{\mathcal{C}}P)^T = \bar{\mathcal{C}}^T$$

on a

$$\bar{\mathcal{A}}PW_o P + PW_o P\bar{\mathcal{A}}^T + \bar{\mathcal{C}}^T \mathcal{C} = 0. \quad (\text{E.2.4})$$

On peut donc déduire  $W_o$  de  $W_c$  au vu des équations E.2.2 et E.2.4 :  $W_o$  a la même expression que  $W_c$  dans E.2.2 à cela près que les termes de la diagonale "secondaire" (de pente -1) changent de signe.

En effet

$$PW_o^{kl}P = \frac{c_k^T c_l}{d_{kl}} \begin{pmatrix} 2\alpha(\eta_k \bar{\eta}_k + \eta_l \bar{\eta}_l) & -\bar{\eta}_l(\eta_l \bar{\eta}_l - \eta_k \bar{\eta}_k) \\ \eta_k(\eta_l \bar{\eta}_l - \eta_k \bar{\eta}_k) & 4\alpha\eta_k \bar{\eta}_l \end{pmatrix}$$

Soit

$$W_o^{kl} = \frac{c_k^T c_l}{d_{kl}} \begin{pmatrix} 2\alpha(\eta_k \bar{\eta}_k + \eta_l \bar{\eta}_l) & -\bar{\eta}_l(\eta_l \bar{\eta}_l - \eta_k \bar{\eta}_k) \\ \bar{\eta}_k(\eta_l \bar{\eta}_l - \eta_k \bar{\eta}_k) & 4\alpha \bar{\eta}_k \bar{\eta}_l \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.5})$$

et

$$W_o = (W_o^{kl})_{1 \leq k, l \leq N}.$$

## E.2.2 Remarques pour simplifier l'implémentation de ce calcul

Grammien de commandabilité  $W_c$ :

- termes diagonaux:

$$\begin{aligned} d_{kk} &= -16\alpha^2 \eta_k \bar{\eta}_k \\ W_c^{kk} &= -\frac{b_k^T b_k}{16\alpha^2 \eta_k \bar{\eta}_k} \begin{pmatrix} 4\alpha \eta_k \bar{\eta}_k & 0 \\ 0 & 4\alpha \eta_k \bar{\eta}_k \end{pmatrix} \\ &= -\frac{b_k^T b_k}{4\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- symétrie:

$$\begin{aligned} d_{lk} &= (\eta_l \bar{\eta}_l - \eta_k \bar{\eta}_k)^2 - 8\alpha^2(\eta_l \bar{\eta}_l + \eta_k \bar{\eta}_k) \\ &= d_{kl}. \\ W_c^{lk} &= \frac{b_l^T b_k}{d_{kl}} \begin{pmatrix} 2\alpha(\eta_l \bar{\eta}_l + \eta_k \bar{\eta}_k) & -\bar{\eta}_k(\eta_l \bar{\eta}_l - \eta_k \bar{\eta}_k) \\ \eta_l(\eta_l \bar{\eta}_l - \eta_k \bar{\eta}_k) & 4\alpha \eta_l \bar{\eta}_k \end{pmatrix} \\ &= (\bar{W}_c^{kl})^T. \end{aligned}$$

Grammien d'observabilité  $W_o$ :

- termes diagonaux:

$$\begin{aligned} d_{kk} &= -16\alpha^2 \eta_k \bar{\eta}_k \\ W_o^{kk} &= -\frac{c_k^T c_k}{16\alpha^2 \eta_k \bar{\eta}_k} \begin{pmatrix} 4\alpha \eta_k \bar{\eta}_k & 0 \\ 0 & 4\alpha \eta_k \bar{\eta}_k \end{pmatrix} \\ &= -\frac{b_k^T b_k}{4\alpha} ((\eta_l \bar{\eta}_l - \eta_k \bar{\eta}_k) \quad 4\alpha \eta_l \bar{\eta}_k) \\ &= (\bar{W}_o^{kl})^T. \end{aligned}$$

On est dans le cas particulier où pour simplifier, l'on a supposé que le système a des capteurs et des actionneurs colocalisés, soit que:

$$\mathcal{C} = \bar{\mathcal{B}}^T.$$

Dans ce cas:

$$\bar{\mathcal{C}}^T \mathcal{C} = \mathcal{B} \bar{\mathcal{B}}^T$$

et

$$PW_oP = W_c.$$

Il suffit donc de connaître l'un des deux grammiens pour déduire l'autre.





# Références bibliographiques

- [AAK 71] Adamjan V.M., Arov D.Z. and Krein M.G. “Analytic properties of Schmidt pairs for a Hankel operator and the generalized Schur-Takagi problem” *Math, USSR Sbornik*, vol. 15, n° 1, pp. 31-73, 1971.
- [Bar 87a] Baratchart L. “Sur l’approximation rationnelle  $L^2$  pour les systèmes dynamiques linéaires” *Thèse présentée à l’université de Nice*, Sept. 1987.
- [Bar 87b] Baratchart L. “Recent and new results in rational  $L^2$  approximation” *N.A.T.O. A.S.I. series*, vol. 34, Modeling Robustness and Sensitivity Reduction in Control Systems, R.F. Curtain Ed., Springer Verlag, 1987.
- [BH 83] Ball J.A., Helton J.W., “A Beurling-Lax theorem for the Lie group  $U(m,n)$  which contains most classical interpolation theory” *J. Operator Theory* 9, pp. 107-142, 1983.
- [BS 79] Ball J.M., Slemrod M. “Nonharmonic fourier series and the stabilization of distributed semi-linear control systems” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 32, pp. 555-587, 1979.
- [BeC 63] Bellman R., Cooke K.L. “Differential-Difference Equations” Academic Press, New York 1963.
- [Ben 89] Bensoussan A. “Some results on exact controllability” *Fifth symposium on control of distributed parameter systems*, Perpignan, 26-29 Jun 1989.
- [Bon 91] Bonnet C. “Réalisation et réduction dans la base d’équilibre de systèmes linéaires de dimension infinie à temps discret. Application à des systèmes fractionnaires et extension à des systèmes postfiltrés” *Thèse présentée à l’université de Provence*, Nov. 1991.
- [BW 86] Bonsall F.F., Walsh D. “Symbols for trace class Hankel operators with good estimates for norms” *Glasgow Math. J.* 28, pp. 47-54, 1986.

- [Bre 83] Brezis H. "Analyse fonctionnelle" Ed. Masson, 1983.
- [CaD 78] Callier F.M., Desoer C.A. "An Algebra of Transfer Functions for Distributed Linear Time-Invariant Systems" *IEEE Trans. Circ. and Syst.*, vol. CAS-25, pp. 651-662, Sept 1978.
- [Cia 82] Ciarlet P. G. "Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation" Ed. Masson, 1982.
- [Cur 87] Curtain R.F. " $L^\infty$  -Approximations of Complex Functions and Robust Controller for Large Flexible Space Structures" *Nieuw Archies Voor Wiskunde*, pp 7-22.
- [Cur 88a] Curtain R.F. "Spectral systems" *Int. J. of Control*, vol. 39, n° 4, pp. 657-666.
- [Cur 88b] Curtain R.F. "Equivalence of input-output stability and exponential stability for infinite-dimensional systems" *Math. Syst. Theory* n° 21, pp 19-48, 1988.
- [Cur 88c] Curtain R.F. "A synthesis of time and frequency domain methods for the control of infinite-dimensional systems: A system theoretic approach" Mathematics Institute, University of Groningen, *to appear in SIAM Frontiers of Applied Mathematics*.
- [CG 85] Curtain R.F., Glover K. "Balanced realizations for infinite dimensional systems" *Proc. Workshop on Operator Theory and Systems*, Amsterdam June 4-7, 1985.
- [CG 86a] Curtain R.F., Glover K. "Controller Design for Distributed Systems Based on Hankel-norm Approximations" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-31, n° 2, pp. 173-176, Feb. 1986.
- [CG 86b] Curtain R.F., Glover K. "Robust Stabilization of Infinite Dimensional Systems by Finite Dimensional Controllers" *Systems and Control Letters*, 7, pp. 41-47, 1986.
- [CPr 78] Curtain R.F., Pritchard A.J. "Infinite dimensional linear systems theory" *Lectures notes in Control and Information Sciences*, Springer Verlag New York, n° 8, pp. 51-84, 1978.
- [CW 89] Curtain R.F., Weiss G. "Well posedness of triples of operators (in the sense of linear systems theory)" *ISNM*, vol. 91, pp. 41-59, Birkhauser Verlag Basel, 1989.
- [CZ 87] Curtain R.F., Zwart H.J. "Spectral realizations for delay systems" *Lectures notes in Control and Information Sciences*, Springer Verlag New York, n° 102, pp. 64-87, 1987.

- 
- [CZ 88] Curtain R.F., Zwart H.J. "A note on spectral realizations for delay systems" *Systems and Control Letters*, 10, pp. 265-269, 1988.
- [CR 80] Coifman R.R., Rochberg R. "Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in  $L^p$ " *Asterisque* 77, pp. 11-66, 1980.
- [Dur 70] Duren P. "Theory of  $H^p$  spaces" *Pure and Applied Math.*, vol. 38, Academic Press, New York 1970.
- [Enn 84] Enns D. "Model reduction for control system design" *PHD thesis*, Department of Electrical Engineering, Stanford University, 1984.
- [Fra 86] Francis B.A. "A course in  $H_\infty$  Control Theory" *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, 88, Springer-Verlag, 1986.
- [FR 74] Faurre P., Robin M. "Eléments d'automatique" Dunod, Paris 1984 (édition originale 1974).
- [Gar 81] Garnett J.B. "Bounded analytic functions" Academic Press, 1981.
- [Glo 84] Glover K. "All optimal Hankel-norm approximations of linear multi-variable systems and their  $L^\infty$  error bounds" *Int. J. Control*, vol. 39, n° 6, pp. 1115-1193, 1984.
- [GCP 88] Glover K., Curtain R.F., Partington J.R. "Realization and Approximation of Linear Infinite Dimensional Systems with Error Bounds" *SIAM J. Control Optim.*, 26, pp. 863-898, 1988.
- [GLP 86] Glover K., Lam J., Partington J. "Balanced Realization and Hankel-norm Approximation of Systems involving Delays" *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 1810-1815, Athens, Dec. 1986.
- [GLP 90] Glover K., Lam J., Partington J. "Rational Approximation of a Class of Infinite Dimensional Systems I: Singular Values of Hankel Operators" *Math. Control Signals Systems*, 3, pp. 325-344, 1990.
- [GLP 91] Glover K., Lam J., Partington J.R. "Rational Approximation of a Class of Infinite Dimensional Systems II: Optimal convergence Rates of  $L^\infty$  approximants" *Math. Control Circ. Sys.*, 4, pp. 233-246, 1991.
- [GK 69] Gohberg I., Krein M.G. "Introduction to the theory of linear non self adjoint operators in Hilbert space" *AMS Translations Providence, R.I.*, 1969.
- [Hug 87] Hughes P.C. "Space Structure Vibration Modes : How many exist ? Which ones are important ?" *IEEE Control Systems Magazine*, pp. 22-28, Feb. 1987.

- [Kat 66] Kato P. "Perturbation theory for linear operators" Springer Verlag, 1966.
- [Keu 90] van Keulen B. "Hankel operators for non-exponentially stabilizable infinite dimensional systems" *Systems and Control Letters*, 15, pp. 221-226, 1990.
- [KLi 81] Kung S., Lin D.W. "Optimal Hankel-norm model reductions : multivariable systems" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-26, pp. 832-852, Aug 1981.
- [LA 85] Latham G., Anderson B.D.O. "Frequency-weighted optimal Hankel-norm approximation of stable transfer functions", *System and Control Letters*, 5, pp. 229-236, 1985
- [LeM 91] Leblond J., Marmorat J.P. "Boundary control and observation of some one-dimensional vibrating structures : regularity and stabilization" *Rapport de Recherche INRIA*, n° 1382, January 1991.
- [Maï 91] Maïzi N. "Réduction de modèle appliquée à une équation d'évolution de la chaleur" *Rapport de Recherche EMP*, n° 05/91, Avril 1991.
- [Maï 92] Maïzi N. "A "relaxation" approach for the Hankel approximation of some vibrating structures" *Proceedings of 10<sup>th</sup> International Conference on Analysis and Optimization of Systems*, Sophia-Antipolis, June 9-12, 1992.
- [Mic 79] Michaïlesco G.P. "Approximation des systèmes complexes par des modèles de dimension réduite" *Thèse présentée au centre d'Orsay*, Université de Paris-sud, 1979.
- [Moo 81] Moore B.C. "Principal Components Analysis in Linear Systems : Controllability, Observability, and Model Reduction" *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-26, n° 1, pp. 17-31, Feb 1981.
- [Neh 57] Nehari Z. "On bounded bilinear forms" *Annals of math.*, vol. 65, n° 1, pp. 153-162, January 1957.
- [Nei 89] Neirac F. "Approche théorique et expérimentale des modèles réduits du comportement thermique des bâtiments" *Thèse présentée à l'ENSMP*, 1989.
- [Par 88] Partington J.R. "An introduction to Hankel Operators" London mathematical society student school, n° 13, Cambridge university press, 1988.
- [Par 90] Partington J.R. "Approximation of delay systems by Fourier-Laguerre series" *Automatica*, 27, pp. 569-572, 1991.

- [Par 91] Partington J.R. "Approximation of unstable infinite-dimensional systems using coprime factors" *Systems and Control Letters*, 16, pp. 89-96, 1991.
- [PGZC 88] Partington J.R., Glover K., Zwart H.J., Curtain R.F. " $L^\infty$ -approximation and nuclearity of delay systems" *Systems and Control Letters*, 10, pp. 59-65, 1988.
- [PrS 87] Pritchard A.J., Salamon D. "The linear quadratic control problem for infinite dimensional systems with unbounded input and output operators" *SIAM J. Control Optim.*, 25, pp. 121-144, 1987.
- [Ros 78] Rosencher E. "Approximation rationnelle des filtres à 1 ou 2 indices : une approche hilbertienne" *Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Paris IX-Dauphine*, 1978.
- [Ruc 78] Ruckebush G. "Sur l'approximation rationnelle des filtres" *Rapport n° 35, CMA ÉCOLE POLYTECHNIQUE*, 1978.
- [Sch 66] Schwartz L. "Théorie des distributions" Éditions HERMANN, PARIS 1966.
- [Sha 75] Shamash Y. "Model reduction using the Routh stability criterion and the Padé approximation technique" *Int. J. Control*, vol. 21, n° 3, pp. 475-484, 1975.
- [SB 80] Silverman L.M., Bettayeb M. "Optimal approximation of linear systems" *presented at the JACC.*, 1980.
- [SP] Silverman L.M., Pernebo L. "Model reduction via balanced state space representations" *to appear IEEE Trans. on AL.*
- [S 89] Smith M. "Singular values and vectors of a class of Hankel operators", *Systems and Control Letters*, 12, pp. 301-308, 1989.
- [Wei 88] Weiss G. "Admissibility of input elements for diagonal semigroups on  $L^2$ " *Systems and Control Letters*, 10, pp. 79-82, 1988.
- [Wei 89] Weiss G. "The representation of regular linear systems on Hilbert spaces" *ISNM*, vol. 91, pp. 401-416, Birkhauser Verlag Basel, 1989.
- [Wil 90] Williams T. "Closed-Form Grammians and Model Reduction for Flexible Space Structures" *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, vol. 35, pp. 379-382, March 1990.
- [Y 83] Young N.J. "The singular value decomposition of an infinite Hankel matrix" *Linear Algebra Computation*, vol. 50, pp. 639-656, 1983.

- [Y 90] Young N.J. “A polynomial method for the singular value decomposition of block Hankel operators” *Systems and Control Letters*, 14, pp. 103-112, 1990.
- [ZCPG 88] Zwart H.J., Curtain R.F., Partington J.R., Glover K. “Partial fraction expansions for delay systems” *Systems and Control Letters*, 10, pp. 235-243, 1988.

# Table des Matières

Introduction	1
<b>Première Partie : Rappels théoriques sur l'approximation de Hankel</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction aux opérateurs de Hankel</b>	<b>9</b>
1.1 Préliminaires . . . . .	9
1.2 Les opérateurs de Hankel . . . . .	14
1.3 Les valeurs singulières . . . . .	23
<b>2 Approximation Hankel-optimale et Approximation <math>L_\infty</math></b>	<b>27</b>
2.1 Approximation des systèmes de dimension finie . . . . .	27
2.2 Approximation des systèmes de dimension infinie . . . . .	32
<b>Deuxième Partie : Application à des systèmes de dimension infinie</b>	<b>37</b>
<b>3 Etude d'un problème parabolique</b>	<b>39</b>
3.1 Le modèle physique . . . . .	39
3.2 Le problème posé et ses traitements . . . . .	42
3.3 Etude dans le domaine fréquentiel . . . . .	44
3.4 Formulation variationnelle du problème . . . . .	52
3.5 L'approximation . . . . .	58
3.6 Quelques résultats numériques . . . . .	62

3.7 Conclusion . . . . .	68
<b>4 Etude de systèmes hyperboliques</b>	<b>69</b>
4.1 La méthode de relaxation . . . . .	70
4.2 Application aux structures flexibles . . . . .	75
4.3 Analyse de la méthode de relaxation . . . . .	83
<b>Conclusion</b>	<b>91</b>
<b>Annexes</b>	<b>93</b>
<b>A A propos des autres types d'approximations</b>	<b>95</b>
<b>B A propos des valeurs singulières</b>	<b>97</b>
B.1 Cas où l'opérateur de Hankel est symétrique . . . . .	97
B.2 Cas où l'opérateur de Hankel n'est pas symétrique . . . . .	98
<b>C Algorithme de réduction dans le cas scalaire</b>	<b>103</b>
<b>D A propos de la chaleur</b>	<b>105</b>
D.1 Eléments techniques pour démontrer que le triplet $(\mathcal{A}, B, C)$ est bien posé . . . . .	105
D.2 Discrétisation spatiale par différences finies . . . . .	108
D.3 Validation du modèle : étude des valeurs propres . . . . .	110
<b>E A propos des cordes vibrantes</b>	<b>113</b>
E.1 Discrétisation spatiale . . . . .	113
E.2 Les grammians du système discrétisé et relaxé . . . . .	117
<b>Références bibliographiques</b>	<b>123</b>



# Table des Figures

1.3.1 Ellipsoïde d'énergie . . . . .	25
3.1.1 Paroi couplée à une masse d'air . . . . .	40
3.2.1 Lieu des pôles des systèmes paraboliques . . . . .	43
3.3.1 Diagramme de distribution L . . . . .	47
3.6.1 Comparaison des 49 premières valeurs propres. . . . .	63
3.6.2 Simulation discrète et Approximation modale pour le contrôle $U(t)$ . . . . .	63
3.6.3 Simulation discrète et Approximation modale pour le contrôle $V(t)$ . . . . .	64
3.6.4 Simulation discrète et Approximation de Hankel d'ordre 2 pour le contrôle $U(t)$ . . . . .	65
3.6.5 Approximation de Hankel d'ordre 10 pour le contrôle $U(t)$ . . . . .	65
3.6.6 Simulation discrète et Approximation de Hankel d'ordre 2 pour le contrôle $V(t)$ . . . . .	66
3.6.7 Approximation de Hankel d'ordre 10 pour le contrôle $V(t)$ . . . . .	66
3.6.8 Évolution des 4 modèles . . . . .	67
4.2.1 Poutre en flexion, encastree à une extrémité . . . . .	78
4.3.1 Evolution des valeurs singulières en fonction de $\alpha$ . . . . .	87
4.3.2 Les pôles en fonction de l'ordre d'approximation . . . . .	88
4.3.3 Étapes de l'approximation . . . . .	89

## Résumé

L'objet de cette thèse est d'étudier l'applicabilité de la méthode d'approximation rationnelle en norme de Hankel à des systèmes dynamiques linéaires de dimension d'état infinie. On illustre par trois exemples concrets les possibilités d'utilisation des techniques d'approximation développées ces dernières années, notamment par Curtain, Glover et Partington. Les exemples choisis représentent des phénomènes d'évolution décrits par des équations aux dérivées partielles, par rapport au temps et aux variables d'espace. Il s'agit :

- d'un problème de diffusion de chaleur, de type parabolique, pour lequel les techniques d'approximation s'adaptent assez directement;
- de deux problèmes hyperboliques décrivant l'évolution d'une poutre en flexion et en torsion, pour lesquels une méthode originale appelée "relaxation" a été mise au point : préalable à l'approximation de Hankel, elle permet son application lorsque les pôles associés au système hyperbolique croissent suffisamment rapidement.

Mots-clés : **Modélisation, opérateur de Hankel, opérateur nucléaire, valeurs singulières, approximation rationnelle, système linéaire de dimension infinie, système parabolique, système hyperbolique**

## Abstract

The purpose of this thesis is to study the availability of rational Hankel approximation methods as applied to infinite dimensional linear systems. Three concrete examples illustrate the possibilities of application of the approximation techniques which have been developed the late years, namely by Curtain, Glover and Partington. The selected examples describe evolution phenomena given by distributed parameter systems. We intend to study :

- a parabolic system, representative of a problem of heat diffusion, for which approximation techniques can be applied almost directly;
- two hyperbolic systems modelling an undamped flexible beam and the torsion of a beam; in these cases an original method called "relaxation" has been developed : preceding the Hankel approximation, it allows its application when the rate of growth of the poles associated with the hyperbolic system is sufficiently high.

Keywords : **Modélisation, Hankel operator, nuclear operator, singular values, rational approximation, infinite dimensional linear system, parabolic system, hyperbolic system**