Réalisation en guides d'ondes numériques stables d'un modèle acoustique réaliste pour la simulation en temps-réel d'instruments à vent

Rémi Mignot

▶ **To cite this version:**

Rémi Mignot. Réalisation en guides d'ondes numériques stables d'un modèle acoustique réaliste pour la simulation en temps-réel d'instruments à vent. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Télécom ParisTech, 2009. Français. NNT : . tel-00456997v2

HAL Id: tel-00456997

https://pastel.hal.science/tel-00456997v2

Submitted on 25 May 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TELECOM ParisTech

École Doctorale d'Informatique, Télécommunications et Électronique de Paris

Thèse

présentée pour obtenir le grade de Docteur
de Télécom ParisTech

Spécialité : **Signal et Images**

Rémi MIGNOT

Réalisation en guides d'ondes numériques stables d'un modèle acoustique réaliste pour la simulation en temps-réel d'instruments à vent

Soutenue le 3 décembre 2009 devant le jury composé de :

Brigitte d'Andréa-Novel	Présidente
Philippe Depalle	Rapporteurs
Benoît Fabre	
Yves Grenier	Examinateurs
Vesa Välimäki	
Denis Matignon	Directeurs de thèse
Thomas Hélie	

Thèse

présentée pour obtenir le grade de Docteur
de Télécom ParisTech

Spécialité : **Signal et Images**

Rémi MIGNOT

Réalisation en guides d'ondes numériques stables d'un modèle acoustique réaliste pour la simulation en temps-réel d'instruments à vent

Soutenue le 3 décembre 2009 devant le jury composé de :

Brigitte d'Andréa-Novel	Présidente
Philippe Depalle	Rapporteurs
Benoît Fabre	
Yves Grenier	Examinateurs
Vesa Välimäki	
Denis Matignon	Directeurs de thèse
Thomas Hélie	

Ce travail est rattaché au département TSI de Telecom ParisTech et a été effectué à l'IRCAM (*Institut de Recherche et de Coordination Acoustique/Musique*), centre Georges Pompidou, CNRS UMR 9912, 1 pl. Igor Stravinsky, 75004 Paris.

Version 1.2.2

Résumé

Ce travail porte sur la modélisation physique des tubes acoustiques pour la simulation numérique en temps-réel. Le but principal est la synthèse sonore d'instruments à vent, avec un modèle réaliste, une méthode modulaire et une implémentation numérique faible coût. Le modèle acoustique de "Webster-Lokshin", utilisé ici, est un modèle à 1 dimension prenant en compte à la fois la "courbure" du profil et les "pertes visco-thermiques" à la paroi. Pour ce modèle acoustique, une structure de simulation compatible avec l'approche des "Guides d'Ondes" est obtenue : un tube y est représenté par un système bouclé, avec retards, faisant intervenir plusieurs sous-systèmes sans retard interne. Une difficulté est la présence de sous-systèmes de dimension infinie qui se comportent comme des sommes infinies de systèmes du premier ou du second ordre. Dans un premier temps, ils sont approximés par des systèmes de dimension finie, puis leur "représentation d'état" à temps discret est obtenue. Enfin, en utilisant des outils standard de l'automatique, ces représentations nous permettent de faciliter la connexion d'éléments acoustiques et de réduire les coûts de calcul de la simulation numérique. Dans ce travail, l'étude de la stabilité et de la passivité est faite. Pour des cas paticuliers de tubes, un problème survient : même si les relations entrées/sorties du tube sont stables, certains sous-systèmes internes possèdent une infinité de singularités à l'origine d'instabilités internes. Nous présentons une explication de ce phénomène et ceci nous amène à proposer une nouvelle décomposition en sous-systèmes pour lever ce problème.

Abstract

This work deals with the physical modelling of acoustic tubes for digital simulation in real-time. The main application is the sound synthesis of wind instruments, with a realistic model, a modular method and a low-cost digital implementation. The acoustic model of "Webster-Lokshin", used in this work, is an unidimensional model which takes into account the "curvature" of the profile and the "visco-thermal losses" at the wall. With this acoustic model, we obtain a framework for simulation which is compatible with the "Waveguides" approach : a tube is then represented by a system with delays and closed loops, involving several sub-systems without internal delay. A difficulty is the presence of infinite-dimensional sub-systems which behave as infinite sums of first or second order systems. First, they are approximated by finite-dimensional systems, then their "state-space representation" in the discrete time domain is determined. Finally, using standard tools of automatic control, these representations facilitate the connection of acoustic elements and reduce the computational complexity of the digital simulation. In this work, an analysis of the stability and passivity of this approach is described. For some particular cases of tubes, a problem occurs : even if the input/output relations of the tube are stable, some sub-systems have an infinity of singularities which produce internal instabilities in the system. We present an explanation of this phenomenon and to solve this problem, a new decomposition into sub-systems is performed.

Remerciements

Je remercie avant tout mes directeurs de thèse, Denis Matignon et Thomas Hélie, qui m'ont apporté une aide précieuse et décisive dans la réalisation de ce travail. Je les remercie sincèrement pour tout le temps qu'ils ont consacré soit pour me conseiller sur les directions scientifiques à prendre dans mon travail, soit pour m'aider lors des rédactions et des présentations d'articles (un travail d'une grande difficulté pour le débutant que j'étais). Malgré leurs nombreuses autres activités (tant professionnelles que personnelles), leur disponibilité a été sans faille.

Merci aux membres de mon jury pour avoir accepté de s'investir dans la lecture de ce rapport. J'ai eu la chance d'avoir un jury d'une expertise d'une grande qualité, dans des disciplines aussi diverses que ce sujet de thèse est pluridisciplinaire. Ils ont fait l'effort de s'intéresser à un sujet qui n'est pas entièrement de leur spécialité, qu'ils en soient remerciés.

Je remercie Xavier Rodet pour m'avoir accueilli à l'IRCAM dans son équipe *Analyse-Synthèse*, ainsi que l'ensemble des membres de l'équipe pour leur bonne humeur. Merci également à René Caussé et les membres de l'équipe *Acoustique Instrumentale* qui se sont intéressés à mes travaux, pour les différentes discussions que nous avons eues sur l'acoustique et la synthèse des instruments de musique.

Je tiens à remercier Jean Kergomard pour l'intéret qu'il a porté à mon travail et pour son soutien notamment via le projet CONSONNES[1] qu'il a coordonné et qui a permis de financer plusieurs de mes missions.

Merci à Axel Roebel, Snorre Farner, Gilles Degottex, Arnaud Gomes, Laurent Ghys et Youcef Bensaid pour leur aide et leur patience face à tous mes petits soucis et questions d'ordre informatique ; à Deborah Lopatin et David Ralley pour leur aide dans la correction de mes fautes d'anglais. Je tiens aussi à féliciter les travaux de stage de Pierre-Damien Dekoninck et de Thomas Hézard, dont j'ai eu le plaisir de co-encadrer avec Thomas Hélie.

Je remercie à nouveau Denis Matignon et Thomas Hélie, mais aussi Hugues Vinet (directeur scientifique de l'IRCAM) et Bernard Robinet (directeur de l'EDITE au début de ma thèse en 2006) pour m'avoir fait confiance en me proposant ce sujet de thèse.

Enfin, je remercie ma famille pour leur soutien chaleureux durant toutes mes années d'études.

[1] Ce travail de thèse a été soutenu par le projet CONSONNES, ANR-05-BLAN-0097-01.

Table des matières

Résumé **5**

Abstract **7**

Remerciements **9**

Table des matières **13**

Table des figures **17**

Introduction **19**

1 État de l'art, contexte et problématique **23**
1.1 Construction modulaire d'un modèle physique 25
1.1.1 Topologie d'un instrument à vent 25
1.1.2 Interactions et états acoustiques aux interfaces 28
1.2 Modèles physiques 32
1.2.1 Deux modèles linéaires simples 32
1.2.2 Modélisation d'un excitateur : les lèvres du trompettiste 34
1.2.3 Modélisation de tubes acoustiques 35
1.3 Représentations mathématiques et réalisations numériques 39
1.3.1 Lois d'interconnexions sur les fonctions de transfert 39
1.3.2 Introduction aux représentations diffusives et approximation 40
1.3.3 Représentations d'état 42
1.3.4 Discrétisation 45
1.3.5 Lois d'interconnexion sur les représentations d'état 46
1.3.6 Outils d'automatique linéaire 47
1.3.7 Simulations 52
1.4 Problématique 55

2 Modèle de Webster-Lokshin et décomposition en quadripôles **57**
2.1 Modèle de Webster-Lokshin et variables d'état 59
2.1.1 Équations du modèle pour la pression et le débit acoustique 59
2.1.2 Ondes progressives dans les tubes à section variable 59
2.1.3 Solutions numériques 62
2.1.4 Tronçons de tube et solutions analytiques 64
2.2 Matrices de transfert et quadripôles équivalents 67
2.2.1 Quadripôles pour l'état acoustique (P, U) 67
2.2.2 Quadripôles pour les variables de type progressives 68
2.3 Décomposition "physiquement informée" des quadripôles 71
2.3.1 Isolement des opérateurs de transport 71

2.3.2 Séparation des effets dus à la géométrie du tube . . . 74
2.4 Jonction de 2 tronçons de tube . . . 79
2.4.1 Jonction de cylindres avec discontinuité d'ordre 0 . . . 80
2.4.2 Jonction de cônes avec discontinuité d'ordre 1 . . . 81
2.4.3 Jonction de tubes évasés avec discontinuité d'ordre 2 . . . 82
2.4.4 Jonction de cônes avec discontinuité d'ordre 0 . . . 83
2.4.5 Jonction de tubes évasés avec discontinuité d'ordre 0 . . . 84

3 Analyse de stabilité et de passivité 85
3.1 Stabilité et passivité dans les cylindres et les cônes . . . 87
3.1.1 Réseau de cylindres . . . 87
3.1.2 Réseau de cônes . . . 88
3.2 Analyse complexe de la fonction Γ . . . 96
3.2.1 Notions d'analyse dans le plan complexe . . . 96
3.2.2 Analyse des singularités de Γ . . . 98
3.2.3 Représentations intégrales . . . 102
3.3 Stabilité et passivité dans les tubes évasés avec profil $\mathcal{C}^1$ . . . 106
3.3.1 Préliminaires . . . 106
3.3.2 Stabilité et passivité de R_ψ et T_ψ . . . 109
3.3.3 Stabilité et passivité de R_e . . . 110
3.3.4 Stabilité du réseau . . . 111
3.4 Interprétation des coupures . . . 112
3.4.1 Interprétation de R . . . 112
3.4.2 Apparition des coupures . . . 113
3.4.3 Interprétation des instabilités pour les courbures négatives . . . 115
3.5 Stabilités et passivités : bilan et observations . . . 117
3.5.1 Bilan des instablités . . . 117
3.5.2 Observations et conjectures . . . 118
3.5.3 Vers une réalisation numérique stable . . . 119

4 Stabilisation et réalisations numériques 123
4.1 Approximation finie de systèmes de dimension infinie . . . 125
4.1.1 Procédure d'optimisation . . . 125
4.1.2 Mise en représentation d'état et discrétisation . . . 130
4.2 Structure généralisée simplifiée . . . 133
4.2.1 Forme globale et forme décomposée . . . 133
4.2.2 Forme standard du quadripôle . . . 133
4.2.3 Paramétrisation . . . 134
4.3 Réalisation numérique stable de tronçons convexes . . . 136
4.3.1 Stabilisation des tubes à courbure négative . . . 136
4.3.2 Réalisation numérique stable d'un tronçon . . . 137
4.4 Approximations et simulations de tubes évasés . . . 142
4.4.1 Comparaison de 3 modèles . . . 142
4.4.2 Construction de deux trombones virtuels . . . 143

Conclusion 145

A Résultats annexes pour la stabilité des réseaux $\mathcal{C}^1$ 149
A.1 Théorème du Maximum et Corollaires . . . 149
A.1.1 Théorème du Maximum . . . 149
A.1.2 Corollaires . . . 149
A.2 Des propriétés algébriques . . . 151

A.3 Des propriétés spécifiques des fonctions Γ, R et T 153
A.4 Stabilité, causalité et espaces de Hardy 155
A.4.1 Stabilité 155
A.4.2 Causalité 156

B Position des racines du polynôme G **158**

C Représentations intégrales **160**
C.1 Transformée de Laplace inverse d'une fraction rationnelle 160
C.2 Transformée de Laplace inverse pour une coupure sur $\mathbb{R}^-$ 161
C.3 Transformée de Laplace inverse pour une coupure $\mathcal{C}$ 162

D Représentations diffusives pour l'analyse de stabilité (principe) **164**
D.1 Modèle 164
D.2 Analyse du système couplé 165

E Quadripôles de conversion **166**

F Effet de la courbure et des pertes sur les impédances **168**

G Article de congrès : CAO 2006 **171**

H Article de congrès : IEEE WASPAA 2007 **178**

I Article de congrès : IEEE Med 2008 **183**

J Article de congrès : IFAC FDA 2008 **190**

K Article de congrès : DAFx 2009 **197**

L Résumé étendu de congrès : IFAC CDPS 2009 **203**

Bibliographie **207**

Table des figures

1.1 Exemple du réseau d'éléments d'un instrument à vent "fantaisiste" 25
1.2 Dessin de l'instrument à vent "fantaisiste" modélisé par le réseau de la figure 1.1 . . . 26
1.3 Quadripôles de conversion pour les ondes $p^{\pm}$ 30
1.4 Jonction à N portes : $\mathbf{J}_N$ 31
1.5 Schéma d'une embouchure simplifiée, et circuit électrique équivalent 32
1.6 Représentation de l'embouchure en quadripôles 33
1.7 Système équivalent pour le rayonnement acoustique 33
1.8 Schéma du modèle de lèvres 35
1.9 Modélisation d'un tube à section variable par un réseau de cylindres ou de cônes . . . 36
1.10 Factorisation de la fonction de réflexion d'une cellule de *Kelly-Lochbaum* 38
1.11 Factorisation des propagateurs sur la ligne inférieure 38
1.12 Quadripôle équivalent de la connexion de 2 quadripôles 39
1.13 Schéma d'un asservissement en boucle fermé 39
1.14 Calcul itératif du quadripôle E_1 équivalent à un réseau droit de N quadripôles A_n . . 40
1.15 Optimisation de la fonction $\breve{D}$ par des fonctions de transfert de dimension finie 42
1.16 Séparation des opérateurs de propagation en 2 quadripôles 44
1.17 Concaténation de 2 quadripôles avec les représentations d'état 47
1.18 Diagramme bloc de la forme canonique de *Kalman* 49
1.19 La réponse impulsionnelle h_{test} représente la réflexion globale du tube *test* 52
1.20 Réponses impulsionnelles de la simulation de réseaux de cylindres ou de cônes 54

2.1 Profil et impédance d'entrée d'un tube *test* 63
2.2 Profil et impédance d'entrée d'un tube *fantaisiste* 64
2.3 Impédances d'un tronçon de tube caténoïdal calculées analytiquement et numériquement 66
2.4 Fonction Γ et fréquence de coupure 66
2.5 Quadripôle $\mathbf{Q}_{PU}$, en représentation admittance. 67
2.6 Impédance d'un tronçon de tube ouvert 68
2.7 Impédance d'un tronçon de tube fermé 69
2.8 Interprétation physique et décomposition symbolique de $\mathbf{Q}_{\phi}$ 71
2.9 Décomposition des quadripôles $\mathbf{Q}_{PU}$ and $\mathbf{Q}_{UP}$. 73
2.10 Impédance d'un tube semi-infini 74
2.11 Séparation des effets de la géométrie du profil d'un tronçon 75
2.12 Connexion de 2 quadripôles avec les variables (p^+, p^-). 79
2.13 Connexion de 2 cylindres, avec discontinuité d'ordre 0. 80
2.14 Structure de la connexion de 2 cylindres, avec discontinuité d'ordre 0. 80
2.15 Connexion de 2 cônes, avec discontinuité d'ordre 1. 81
2.16 Structure de la connexion de 2 cônes, avec discontinuité d'ordre 1. 81
2.17 Connexion de 2 tubes évasés, avec discontinuité d'ordre 2. 82
2.18 Structure de la connexion de 2 tubes évasés, avec discontinuité d'ordre 2. 82
2.19 Connexion de 2 cônes, avec discontinuité d'ordre 0. 83
2.20 Structure de la connexion de 2 cônes, avec discontinuité d'ordre 0. 83

2.21 Connection de 2 tubes évasés, avec discontinuité d'ordre 0. 84
2.22 Structure de la connexion de 2 tubes évasés, avec discontinuité d'ordre 0. 84

3.1 Un réseau de tronçons connecté sur 1 ou 2 réflexions 87
3.2 Structure de filtre en treilli pour un réseau de cylindres 87
3.3 Jonctions de cônes 88
3.4 Cône convergent tronqué 89
3.5 Structures de simulation du cône convergent tronqué 90
3.6 Réponse impulsionnelle du cône convergent tronqué 91
3.7 Schéma du cône 91
3.8 Structure de simulation du cône et quadripôle équivalent 91
3.9 Jonction de cônes connectée à une réflexion $\mathcal{R}_p$ 92
3.10 Tronçon de cône connecté à une réflexion passive : forme globale du tronçon. 93
3.11 Tronçon de cône connecté à une réflexion passive : forme décomposée et équivalences . 93
3.12 Réseau droit de tronçons coniques avec continuité de section, connecté à gauche et à droite à des réflexions passives R_l et R_r respectivement. 94
3.13 Exemple (1) de simulation par un réseau de tronçons coniques 95
3.14 Exemple (2) de simulation par un réseau de tronçons coniques 95
3.15 Phase de la racine de s dans le plan complexe 97
3.16 Phase de $f(s)$ dans le plan complexe 98
3.17 Lieu des racines de G et des points de branchement de Γ quand $\varepsilon = 0$ 99
3.18 Lieu des racines de G et des points de branchement de Γ quand $\varepsilon > 0$ 100
3.19 Phase de $\Gamma(s)$ dans le plan complexe pour une courbure positive 101
3.20 Phase de $\Gamma(s)$ dans le plan complexe pour une courbure négative 102
3.21 Quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ et sa forme décomposée 106
3.22 Forme décomposée du quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ connecté à une réflexion R_p 107
3.23 Résumé des propriétés de $\Gamma(s)$ (voir annexe A). 108
3.24 Résumé des propriétés de $R(s)$ (voir annexe A). 108
3.25 Résumé des propriétés de $T(s)$ (voir annexe A). 108
3.26 Réseau droit de tronçons de tube avec profil $\mathcal{C}^1$ connecté à deux réflexions passives . . 111
3.27 Quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ et sa forme décomposée. 112
3.28 Densification des pôles et zéros quand $L \to \infty$ 114
3.29 Passage des pôles de $\mathbb{C}_0^-$ vers $\mathbb{R}^+$ pour les courbure négatives 116
3.30 Quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ décomposé : $\mathbf{Q}_\phi \equiv \mathcal{Q}_s^l \odot \mathbf{Q}_\psi \odot \mathcal{Q}_s^r$ 117
3.31 Modules des fonctions R_s^l, R_ψ, R_s^r et R_ϕ^l pour un tronçon à courbure négative 120
3.32 Courbes de niveau à 0 dB des fonctions R_ϕ^l et T_ϕ 120

4.1 Illustration de l'approximation des Représentations Intégrales dans le plan de Laplace 128
4.2 Illustration de l'approximation des Représentations Intégrales dans le domaine de Fourier 129
4.3 Approximations des fonctions R et D 129
4.4 Quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ et une forme décomposée. 133
4.5 Forme standard du quadripôle 134
4.6 Réduction de la forme standard du quadripôle 134
4.7 Forme standard réduite du quadripôle 134
4.8 Phase de R_{li}^* dans le domaine de Laplace et illustration du contour $\gamma(i\omega)$ 139
4.9 Affichage de R_{li}^*, $\mathcal{G}_l$ et de son approximation $\widetilde{\mathcal{G}_l}$. 140
4.10 Affichage de $\mathcal{H}_l$ et de son approximation $\widetilde{\mathcal{H}_l}$ 140
4.11 Affichage de R_ϕ^l et de sa version simulée 141
4.12 Affichage de R_ϕ^r et de sa version simulée 141
4.13 Affichage de T_ϕ et de sa version simulée 141
4.14 Réponse impulsionnelle du tube virtuel construit avec 4 tronçons. 142
4.15 Comparaisons des impédances calculées pour le tube *test* 143

4.16 Impédances calculées et mesurée d'un trombone 144

C.1 Contours de Bromwich 161
C.2 Illustration de la mesure du saut le long d'une coupure 163

E.1 Quadripôles de conversion pour les ondes $p^{\pm}$ 166
E.2 Quadripôles de conversion pour les ondes $\phi^{\pm}$ 167
E.3 Quadripôles de conversion pour les ondes $\psi^{\pm}$ 167

F.1 Influence des pertes sur l'impédance d'un tube ouvert 168
F.2 Influence de la courbure sur l'impédance d'un tube ouvert 169
F.3 Influence de la courbure sur une impédance d'un tube semi-infini 170

Introduction

Modélisation physique et synthèse sonore

L'étude de l'acoustique des intruments de musique a permis de mieux connaître leur principe de fonctionnement en proposant et en validant des lois physiques, ou *modèles physiques*, qui gouvernent leurs grandeurs acoustiques et mécaniques. Cette étude rend alors possible la "prédiction" de l'acoustique d'un instrument avant que celui-ci ne soit fabriqué ou modifié. Cela peut être une aide précieuse pour la lutherie, par exemple pour modifier des caractéristiques de l'instrument (par exemple, puissance sonore, timbre, jouabilité, inharmonicité, etc.).

De plus, l'outil informatique rend maintenant possible la simulation numérique de ces modèles, et l'observation du signal acoustique rayonné de l'instrument permet de réaliser une synthèse sonore dite par *modèles physiques*.

Etudier la modélisation physique pour la synthèse sonore permet de simuler les comportements internes des instruments de musique. Comparée aux approches de traitements de signal, cette approche peut conduire à des sons plus réalistes, particulièrement durant les transitoires d'attaque et les transitions entre deux notes. Aujourd'hui, de nombreux logiciels de synthèse sonore proposés dans le commerce reposent soit entièrement soit partiellement sur des modèles physiques. Ils permettent aux compositeurs de disposer d'un orchestre virtuel sur ordinateur.

Outre l'aide à la lutherie et l'aide à la composition mentionnées précédemment, la synthèse sonore par modélisation physique a d'autres intérêts. Premièrement, la construction "virtuelle" d'un instrument peut permettre de reproduire le son d'un instrument de musique existant mais injouable, dans le cadre par exemple de la restoration d'instruments anciens. Nous pouvons alors parler de "fac-similés virtuels". Deuxièmement, elle permet de produire les sons d'instruments imaginaires et donc d'explorer de nouvelles possibilités sonores ayant une validité physique. L'IRCAM[2], où se travail de thèse s'est passé, est particulièrement intéressé par cet aspect pour des créations musicales contemporaines.

But du travail

Le sujet de ce travail de thèse est l'étude d'un modèle de tubes acoustiques, et la proposition d'outils mathématiques permettant la représentation et la simulation du modèle. Une des applications à laquelle nous nous intéressons tout particulièrement est la construction d'instruments à vent virtuels. Pour y arriver, un résonateur acoustique complet est construit en connectant plusieurs sous-systèmes qui imitent chacun des effets acoustiques.

Malheureusement, les simulations numériques dans le domaine temporel nécessitent souvent beaucoup de temps de calcul de la part des micro-processeurs, et des simplifications des modèles physiques doivent alors être considérées pour rendre la simulation en temps-réel possible. De plus, à cause des interactions entre éléments d'un instrument, la construction d'un synthétiseur modulaire par modèles physiques est délicate.

Au cours de ce travail nous avons gardé à l'esprit 3 principes que nous cherchons à respecter. Nous les détaillons ci-dessous :

Réalisme : Pour qu'un synthétiseur soit suffisamment intéressant, pour la production musicale par exemple, le son produit doit sembler naturel et donner l'illusion qu'il a été produit par un instrument réel. Pour ce faire, il est nécessaire de prendre en compte tous les paramètres pertinents pour l'oreille humaine, même ceux difficiles à modéliser et à simuler. Ce réalisme tant recherché est cependant difficilement accessible, mais les travaux de recherche successifs permettent peu à peu de s'en approcher.

Faible coût : Pour qu'un "utilisateur" puisse interpréter une oeuvre avec un synthétiseur numérique, l'ordinateur doit être capable de réaliser les opérations demandées en temps-réel. Il est donc intéressant de s'occuper de cet aspect pour pouvoir soit réaliser la synthèse sur des ordinateurs peu puissants, soit réaliser plusieurs synthèses sonores simultanément sur le même ordinateur.

[2] *Institut de Recherhe et de Coordination Acoustique/Musique*

Modularité : Une raison pour laquelle la synthèse par modélisation physique est un sujet passionnant, est qu'elle rend possible la synthèse d'instruments inexistants ou imaginaires, mais avec une validation physique, et donc préserve un certain réalisme pour l'oreille. Pour pouvoir créer et tester de nouveaux intruments, la modularité de la construction de l'instrument est intéressante. Nous souhaitons en quelque sorte concevoir "un synthétiseur de synthétiseurs".

Cependant ces principes sont en partie contradictoires. Par exemple pour obtenir du réalisme, il est nécessaire de prendre en compte certains phénomènes coûteux à simuler. Le travail présenté dans ce document tend à réconcilier ces 3 aspects.

Un autre aspect est absolument crucial pour la simulation, qu'elle soit analogique ou numérique : il s'agit de la stabilité du système global. En effet, si le système n'est pas stable, certains sous-états du système ont des valeurs numériques qui tendent vers l'infini au cours du temps, ce qui pose un sérieux problème pour la simulation. Il est absolument capital d'assurer la stabilité du modèle en temps continu, et la stabilité de la simulation en temps discret.

Petit état de l'art

Dans la littérature, il existe plusieurs approches de modélisation (voir par exemple [VPEK06] pour un aperçu de ces différentes techniques), mais une approche intéressante est celle des *guides d'ondes numériques* (voir par exemple [Smi98]). Avec cette approche, plusieurs travaux ont considéré un modèle acoustique de tubes à symétrie de révolution basé sur l'équation des pavillons, ou équation de *Webster* (voir [Web19]). En approximant un tube à section variable par plusieurs cylindres ou cônes on obtient la structure des réseaux de *Kelly-Lochbaum* (voir par exemple [MG73, V̈95, Sca97]). Cette structure rend possible une construction modulaire de l'instrument virtuel et une simulation numérique en temps-réel (à faible coût).

Cependant, un type d'amortissement particulier doit être pris en compte parce qu'il se révèle pertinent à l'oreille humaine. Cet amortissement est l'effet des pertes dites *visco-thermiques* qui a lieu à proximité de la paroi du tube, dans les couches limites. Par exemple dans [Mat94, Duc02, vW02] ces pertes visco-thermiques ont été prises en compte. Mais ce modèle de pertes (voir [Pol91]) implique des opérateurs mathématiques complexes, liés entre autres à la présence de dérivées fractionnaires. Pour une simulation suffisamment réaliste, il est nécessaire de les simuler, mais leur complexité rend le temps de calcul plus grand.

De plus, alors que la connexion de systèmes simples ne pose pas de difficulté, la présence des pertes et d'autres phénomènes rend la connexion de nos systèmes moins évidente. Cette fois-ci c'est donc en plus la modularité du modèle qui devient délicate. Dans [DRMP92, Mat95, DT95, Tas99], un formalisme est présenté qui nous semble intéressant pour l'aspect de la modularité. Il décrit chaque sous-système en variables d'état, et une algèbre de connexion permet par exemple de déduire la représentation d'état de l'ensemble du système. L'une des difficultés de ce travail est d'utiliser le formalisme des représentations d'état, pour un modèle tenant compte des pertes visco-thermiques.

Plan du document

Le document s'organise de la manière suivante :

- ✓ Le chapitre 1 donne un aperçu un peu plus détaillé de l'état de l'art. Il constitue un point de départ pour ce travail, et présente plusieurs outils et modèles issus de la littérature dont nous avons besoin par la suite. Il expose le contexte de la modélisation physique d'intruments à vent par un formalisme qui se veut modulaire. Il présente des modèles connus de la littérature et des outils de représentation mathématique des modèles. Nous verrons aussi que d'anciens modèles de tubes à section variable ne permettent pas de prendre en compte avec réalisme les effets de pertes visco-thermiques sans augmenter le temps de calcul nécessaire.
- ✓ Le chapitre 2 présente le modèle de *Webster-Lokshin* qui prend en compte à la fois les pertes visco-thermiques et la courbure du tube, avec une hypothèse faible sur la géométrie des iso-

bares. De ce modèle nous obtenons plusieurs formes de systèmes modélisant un tronçon de tube. L'une de ces formes est particulièrement intéressante parce qu'elle sépare les différents effets acoustiques dus à la géométrie du tube. Cette décomposition permet non seulement une interprétation "élégante" de ces effets, mais elle isole les opérateurs mathématiques standard des autres opérateurs non standard et délicats à simuler.

✓ Le chapitre 3 présente l'étude de stabilité des systèmes modélisant les tubes à section variable. Nous y présentons la stabilité pour des réseaux de cylindres, de cônes et de tronçons de tube évasés. Ce dernier type de tubes fait apparaître des opérateurs non standard que nous détaillons. Un des points forts de ce chapitre est l'interprétation des instabilités qui apparaissent dans des cas particuliers.

✓ Le chapitre 4 donne des procédures pour passer du modèle acoustique exact, représenté en sous-systèmes, au modèle numérique simulable en temps discret. Un point de ce chapitre traite du cas particulier des tubes à courbure négative, qui pose de délicats problèmes de stabilité. Il y est proposé une solution pour obtenir une réalisation numérique stable.

✓ Enfin, la conclusion rappelle les points forts de ce travail et ouvre sur des perspectives.

Chapitre 1

État de l'art, contexte et problématique

Ce chapitre donne un bref aperçu de l'état de l'art. Il constitue un point de départ pour ce travail, et présente plusieurs outils et modèles issus de la littérature dont nous avons besoin par la suite. De plus, nous exposons ici le contexte de la modélisation physique d'intruments à vent par un formalisme qui se veut modulaire, et nous illustrons les problématiques qui nous ont poussés à continuer le travail existant. Notons que les premiers modèles simulables de tubes acoustiques ont été étudiés pour la modélisation du conduit vocal dans le but de la synthèse de la parole (voir par exemple [MG73] ou [Mae82]).

Dans une première partie, la modélisation par l'approche des *Guides d'Ondes* est présentée. Cette approche permet de modéliser un instrument quelconque par une méthode modulaire. Plus précisément, l'instrument est construit par la connexion d'éléments acoustiques ou mécaniques modélisant chacun une partie de l'instrument complet.

Dans une deuxième partie, nous présentons des modèles physiques relativement simples de plusieurs éléments. Ayant choisi de nous concentrer sur la modélisation et la simulation des instruments de la famille des cuivres (trompette, trombone, etc.) nous exposons des modèles : d'embouchure, de rayonnement, de lèvres et de tubes acoustiques à section variable.

Dans une dernière partie, nous présentons les outils mathématiques que nous utilisons par la suite pour représenter les modèles physiques par un formalisme commun bien adapté à la modularité et à la simulation numérique dans le domaine temporel. Sur l'exemple d'une simulation numérique d'un pavillon, nous verrons pourquoi il est intéressant d'étudier un modèle acoustique plus fin ; ce que nous ferons au chapitre 2.

1.1 Construction modulaire d'un modèle physique

1.1.1 Topologie d'un instrument à vent

1.1.1.1 *Représentation modulaire de systèmes dynamiques*

Les systèmes dynamiques décrits mathématiquement par un ensemble d'*Equations aux Dérivées Partielles* (EDPs) d'évolution (avec la variable temporelle t), peuvent être modélisés par un réseau de systèmes plus petits connectés les uns aux autres. Cette approche apparaît pour la modélisation des circuits électriques dans les années 1970 avec les techniques appelées *Transmission Line Matrix* (TLM, voir [JB71]) et *Wave Digital Formulation* (WDF, voir [Fet86]). Dans les années 1980 apparaît une approche similaire pour les systèmes acoustiques qui est appelée *Digital Waveguide Networks* (DWN, voir [Smi87]). Dans la suite de ce travail nous utiliserons le terme francophone *Guides d'Ondes*. Notons qu'une présentation détaillée des méthodes de simulations numériques peut être trouvées dans [Bil04, vW07].

Les *Guides d'Ondes* permettent donc de représenter un instrument de musique par un réseau d'éléments qui imitent chacun les effets acoustiques d'une partie de l'instrument. Ces éléments sont connectés les uns aux autres en respectant la topologie de l'instrument réel, et échangent entre eux des signaux qui sont les variables de sortie des uns et les variables d'entrée des autres.

En définissant un réseau d'éléments acoustiques, ces approches rendent possible la construction modulaire d'instruments de musique existants ou non existants.

Des exemples de constructions d'instruments, fondés sur l'approche des *Guides d'Ondes* mais utilisant des modèles et formalismes différents, penvent être trouvés dans la littérature (voir par exemple [vWC03, Duc01, Sca97]).

1.1.1.2 *Exemple d'un instrument "fantaisiste"*

La figure 1.1 présente le réseau d'éléments associé à un instrument "fantaisiste" de type cuivre de la figure 1.2. Les éléments du réseau sont les suivant :

- l'élément E_0 représente les lèvres du musicien qui servent d'excitateur,
- l'élément E_1 modélise l'embouchure de l'instrument,
- les éléments E_2, E_6, E_8, E_{11} et E_{13} représentent des tronçons de tubes acoustiques,
- les éléments E_3, E_5 et E_7 représentent des jonctions permettant chacun de connecter 3 autres éléments entre eux,
- les éléments E_4, E_{10} et E_{12} représentent des diaphragmes,
- l'élément E_9 représente les effets du couplage avec le rayonnement acoustique à la sortie du pavillon,
- l'élément E_{14} représente le rayonnement d'un trou.

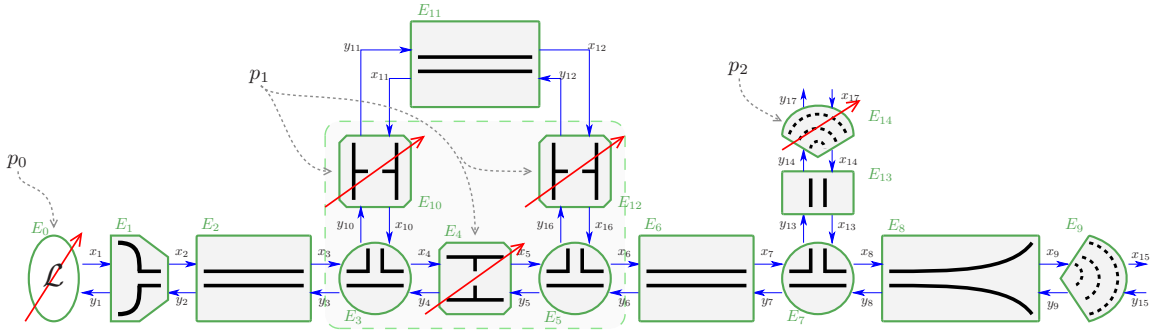


Fig. 1.1 – *Exemple du réseau d'éléments d'un instrument à vent "fantaisiste"*

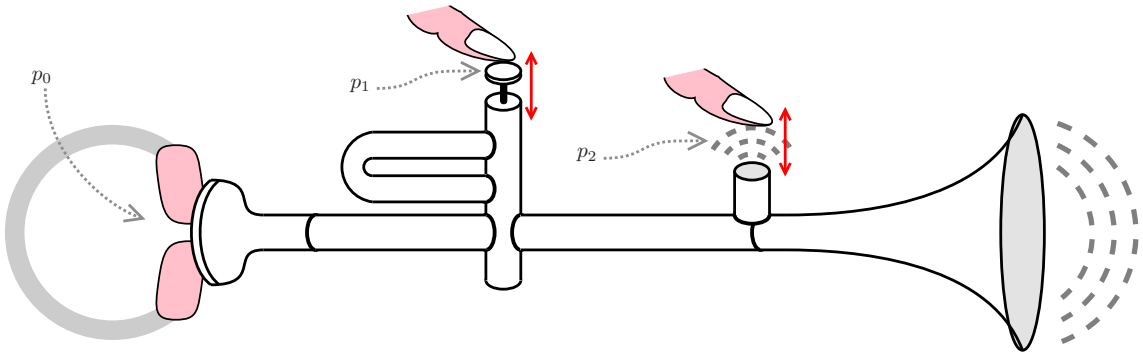


Fig. 1.2 – *Dessin de l'instrument à vent "fantaisiste" modélisé par le réseau de la figure 1.1. Les paramètres p_0, p_1 et p_2 représentent les paramètres de jeu contrôlés par l'instrumentiste.*

L'ensemble des éléments E_3, E_4, E_{10} et E_{12} constitue un modèle d'un piston (voir [Héz09]). Ce piston permet de diriger l'onde acoustique provenant du tube E_1 soit directement vers le tube E_3, soit par la déviation E_{11} (et réciproquement). Cette "commutation" acoustique est réalisée par l'intermédiaire des états des diaphragmes E_4, E_{10} et E_{12}.

Pour prendre en compte l'interprétation d'un instrumentiste, les éléments E_0, E_4, E_{10}, E_{12} et E_{14} (lèvres, diaphragmes et rayonnement du trou), doivent pouvoir changer de paramètres en cours du jeu. Par exemple le changement de position du piston contrôle un changement de paramètres d'ouverture des diaphragmes.

Notons que cet exemple est tout à fait "fantaisiste" puisque à notre connaissance il n'éxiste pas d'instruments avec pistons et trous à la fois. Cependant il a l'intérêt de rassembler des éléments acoustiques dont nous aurons besoin par la suite.

1.1.1.3 *Quelques définitions pour les réseaux acoustiques*

Element : Un élément représente un système dynamique isolé et échangeant des signaux avec l'extérieur.

Réseau : Un réseau est un ensemble d'éléments connectés les uns aux autres avec une topologie donnée. Le système complet à simuler est ainsi représenté par un réseau d'éléments. Si ce réseau n'a qu'une sortie, il s'agit alors du signal sonore produit par l'instrument.

Remarque 1.1. *Un élément peut être lui-même défini par un réseau d'éléments. On peut ainsi construire une "arborescence" d'éléments contenant d'autres éléments. Dans l'exemple de l'instrument de la figure 1.1, les 5 éléments E_3, E_4, E_5, E_{10} et E_{11} peuvent être rassemblés pour définir le sous-réseau de l'élément* piston.

Portes : Une porte est l'ensemble d'une entrée et d'une sortie d'un élément permettant l'échange de signaux avec l'extérieur. Physiquement, chaque porte représente un point d'accès sur lequel on peut connecter un autre élément acoustique.

Remarque 1.2. *Dans ce travail, puisque nous n'étudions que la propagation longitudinale de l'onde acoustique, les entrées et sorties sont presque toujours de dimension 1. Cependant, il est possible de rencontrer des entrées/sorties de dimension quelconque. C'est notamment le cas du modèle de poutres de Reissner applicable à la corde vibrante pour laquelle on peut considérer jusqu'à 6 degrés de liberté en un seul point (voir par exemple [TR03]).*

Remarque 1.3. *Puisque les éléments interagissent entre eux, il est nécessaire de définir des communications bi-directionnelles, c'est pourquoi l'entrée et la sortie associées à une même porte sont*

toujours de même dimension. On définit donc la dimension d'une porte *par les dimensions de son entrée et de sa sortie.*

Connexion : L'échange de signaux entre éléments se fait en "branchant" la sortie d'une porte d'un élément sur l'entrée d'une porte d'un autre élément, et reciproquement. Une connexion est donc définie par un point du système représentant le branchement de 2 portes.

Remarque 1.4. *Pour que 2 portes puissent être connectées entre elles, elles doivent être de même dimension.*

Quadripôle : Un quadripôle est un élément particulier à deux portes de dimension 1 chacune. Il a donc 2 entrées et 2 sorties. Par exemple, un tube est représenté par un quadripôle pour lequel une porte correspond à l'extrémité gauche, et l'autre porte à l'extrémité droite. Les entrées et sorties correspondent aux états acoustiques aux extrémités du tube (cf. §1.1.2 p.28).

Paramètres statiques Des paramètres statiques sont des paramètres constants dans le temps qui caractérisent un élément. Il s'agit par exemple de constantes géométriques ou physiques du tube tel que la longueur ou le rayon.

Paramètres variables Des paramètres variables sont des paramètres évoluant dans le temps. Nous pouvons aussi parler de paramètres de jeu, puisque leur variation permet de prendre en compte l'interprétation du musicien.

Elements statiques et éléments variables Les éléments statiques sont des éléments qui n'ont aucun paramètre variable. A l'opposé, un élément variable possède au moins un paramètre variable.

Remarque 1.5. *Dans l'exemple de la figure 1.1, les éléments variables sont ceux représentés avec une flèche oblique (éléments E_0, E_4, E_{10}, E_{12}, et E_{14}).*

1.1.1.4 *Relations entrées/sorties et matrices de transfert des élements*

Pour chaque élément, la modélisation acoustique par l'approche des *Guides d'Ondes* nécessite d'avoir une relation qui lie les sorties aux entrées.

En considérant les vecteurs $U(t)$ et $Y(t)$ des entrées et des sorties respectivement (de taille N), la relation entrées/sorties peut s'écrire dans le cas général par la relation implicite

$$\mathbf{H}\{\, U,\, Y \,\}(t) = \mathbf{0}. \tag{1.1}$$

Si les sorties peuvent s'exprimer explicitement en fonction des entrées, ce qui peut simplifier les calculs, la relation s'écrit alors

$$Y(t) = \mathcal{H}\{\, U \,\}(t). \tag{1.2}$$

Dans le cas où l'élément représente un système linéaire invariant, associé à un système d'EDPs linéaires, alors les sorties de Y s'écrivent comme une somme de convolutions :

$$Y_n(t) = \sum_{m=1}^{N} \left(H_{n,m} * U_m\right)(t), \tag{1.3}$$

où $H_{n,m}(t)$ est la réponse impulsionnelle entre la sortie Y_n et l'entrée U_m.

A partir de cette relation, il est possible de remplacer les produits de convolution par de simples produits en considérant la transformée de Laplace. Pour un signal scalaire temporel causal[1] $x(t)$, sa transformée de Laplace $\widehat{x}(s)$ est donnée par

$$\widehat{x}(s) := \mathcal{TL}\ \{x\}\ (s) := \int_0^{+\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}\,t, \tag{1.4}$$

où s est la variable complexe de Laplace. En écrivant $s = \xi + i\omega$, le réel ξ est associé à un amortissement et ω à une pulsation (fréquence en rad.s^{-1}). L'axe imaginaire $i\mathbb{R}$ représente le domaine de Fourier, et la transformée de Fourier de $x(t)$ est donnée par $\widehat{x}(i\omega)$, s'il existe $a < 0$ tel que $\widehat{x}$ est une fonction complexe holomorphe pour $\Re\mathrm{e}(s) > a$.

Une première propriété intéressante est qu'un produit de convolution dans le temps devient un simple produit dans le domaine de Laplace. Soient x et y des fonctions du temps :

$$\widehat{(x * y)}(s) = \widehat{x}(s) \times \widehat{y}(s). \tag{1.5}$$

Une autre propriété est qu'une dérivée N-ième du temps devient un produit par s^N :

$$y(t) = \frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}t^N}x(t) \ \Leftrightarrow\ \widehat{y}(s) = s^N\widehat{x}(s), \qquad \text{si } \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}x(t{=}0){=}0,\ \forall n \in [0, N{-}1]_{\mathbb{N}}. \tag{1.6}$$

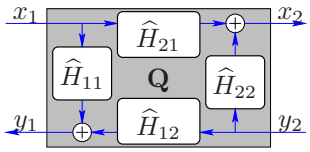
Soit la matrice $\widehat{H}(s)$ composée des transformées de Laplace des réponses impulsionnelles $H_{n,m}$. Maintenant la relation (1.3) devient dans le domaine de Laplace le produit matriciel suivant :

$$\widehat{Y}(s) = \begin{bmatrix} \widehat{Y}_1(s) \\ \dots \\ \widehat{Y}_N(s) \end{bmatrix} = \widehat{H}(s)\widehat{U}(s) = \begin{bmatrix} \widehat{H}_{1,1}(s) & \dots & \widehat{H}_{1,N}(s) \\ \dots & & \dots \\ \widehat{H}_{N,1}(s) & \dots & \widehat{H}_{N,N}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{U}_1(s) \\ \dots \\ \widehat{U}_N(s) \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

$\widehat{H}(s)$ est appelée la *Matrice de Transfert* entre les vecteurs des sorties $\widehat{Y}$ et des entrées $\widehat{U}$, et pour tout (n, m), $\widehat{H}_{n,m}(s) := \widehat{Y}_n(s)/\widehat{U}_m(s)$ est la *fonction de transfert* entre la sortie $\widehat{Y}_n$ et l'entrée $\widehat{U}_m$.

Dans le cas simple d'un quadripôle **Q** la relation entrées/sorties est donnée par une matrice de transfert (2×2) composée de 4 fonctions de transfert.

$$\begin{bmatrix} \widehat{y}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{bmatrix} = \widehat{H} \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{H}_{11} & \widehat{H}_{12} \\ \widehat{H}_{21} & \widehat{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{y}_2 \end{bmatrix}$$



1.1.2 Interactions et états acoustiques aux interfaces

1.1.2.1 *Interactions*

A la connexion de 2 portes de 2 éléments, les variables x_k et y_k sont des variables acoustiques quelconques. Ces variables "d'échange" sont à la fois les sorties d'un élément et les entrées de l'autre élément. Cet échange de signaux est nécessaire pour prendre en compte le couplage acoustique entre éléments. Les conditions limites d'un élément sont ainsi imposées par les interactions des éléments de proche en proche.

Un choix naturel est de représenter l'état acoustique par la pression acoustique P et le débit acoustique U (voir par exemple [GKV05]). Un autre choix, adapté à la simulation de *Guides d'Ondes*, consiste à définir et à utiliser des ondes progressives qui respectent naturellement le principe de causalité.

[1] Un signal x est causal si $x(t) = 0$, pour $t < 0$.

Pour améliorer la modularité de la construction de systèmes acoustiques, il est intéressant de choisir par convention un type d'état acoustique commun et bien adapté. Alors nous devrons pour chaque modèle développé, obtenir un système dynamique ayant ces variables pour entrées et sorties.

1.1.2.2 *Equation de d'Alembert et ondes progressives*

Prenons le cas simple d'une quantité $v(x,t)$ se propageant suivant l'axe x à la vitesse c et solution de l'équation de d'Alembert :

$$\Box v(x,t) := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v(x,t) = 0, \tag{1.8}$$

qui se réécrit par factorisation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x,t) = 0, \tag{1.9}$$

avec x la variable spatiale (en mètres) et t la variable du temps (en secondes). Ainsi, v peut se décomposer en la somme de 2 quantités :

$$v(x,t) = v^+(x-ct) + v^-(x+ct), \tag{1.10}$$

où v^+ est solution de $\partial_t + c\partial_x = 0$, et v^- solution de $\partial_t - c\partial_x = 0$. La quantité $v^+(x-ct)$ est l'onde aller se propageant dans le sens des x croissants et la quantité $v^-(x+ct)$ est l'onde retour se propageant dans le sens des x décroissants. Notons qu'il n'y a pas de couplage entre ces deux quantités. On appelle v^+ et v^- *Ondes Progressives.*

1.1.2.3 *Un changement de variables adapté aux* Guides d'Ondes

Dans le cas des tubes acoustiques à symétrie de révolution et à section variable de rayon $r(\ell)$ (ou ℓ est la variable spatiale), nous définirons des ondes progressives par un changement de variables en fonction des quantités P et U (pression et débit acoustique). Puis nous vérifierons le "caractère" progressif de ces ondes avec le modèle acoustique utilisé.

Ici nous définissons les ondes $p^\pm$ par :

$$\begin{bmatrix} p^+(\ell,t) \\ p^-(\ell,t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & Z_c \\ 1 & -Z_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P(\ell,t) \\ U(\ell,t) \end{bmatrix}, \tag{1.11}$$

où $Z_c = \rho_0 c_0/S_c$ avec $S_c = \pi r_c^2$ où r_c est un rayon choisi arbitrairement. Pour des conditions standard, les constantes physiques sont données par : la masse volumique $\rho_0 = 1.2$ Kg.m^{-3} et la célérité du son $c_0 = 344$ m.s^{-1}.

Par exemple, en considérant des ondes données par l'équation de d'Alembert, nous cherchons à savoir dans quel cas les variables p^+ et p^- définissent des ondes progressives découplées. En utilisant la conservation des moments (ou équation d'*Euler*), on obtient une relation entre P et U :

$$S(\ell)\partial_\ell P(\ell,t) + \rho_0\partial_t U(\ell,t) = 0, \qquad \Rightarrow \partial_\ell P(\ell,t) = -\frac{Z(\ell)}{c_0}\partial_t U(\ell,t), \tag{1.12}$$

où $Z(\ell) = \rho_0 c_0/S(\ell)$ avec $S(\ell) = \pi r(\ell)^2$. On injecte cette expression de $\partial_\ell P$ dans $\Box P = 0$:

$$\begin{aligned}(\partial_t + c_0\partial_l)(\partial_t - c_0\partial_l) P(\ell,t) &= (\partial_t + c_0\partial_l)\Big(\partial_t P(\ell,t) + Z(\ell)\partial_t U(\ell,t)\Big) \\ &= \partial_t(\partial_t + c_0\partial_l)\Big(P(\ell,t) + Z(\ell)U(\ell,t)\Big) = 0.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Dans le cas particulier où $Z(\ell) = Z_c$, alors (1.13) prouve que p^+ est solution de $\partial_t + c_0\partial_\ell = 0$. De la même manière on trouve que p^- est solution de $\partial_t - c_0\partial_\ell = 0$. Par conséquent, dans le cas d'un tube

cylindrique de rayon r_c, les variables p^+ et p^- sont des ondes progressives et découplées. Dans le cas contraire, elles restent progessives mais ne sont pas découplées (voir [H06]).

Une interprétation de cette remarque est que la modélisation d'un élément par un système ayant comme variable d'entrée et de sortie p^+ et p^-, revient en réalité à considérer des conditions frontières imposées par des tubes cylindriques de rayon r_c semi-infinis (ou anéchoïques) connectés à chaque portes. Choisir une valeur pour r_c permet de définir des tubes cylindriques de *référence*. Cela nous servira de convention pour faciliter la modularité de la modélisation acoustique en *Guides d'Ondes*.

1.1.2.4 *Quadripôles de conversion*

Pour convertir un élément représenté par l'état (P, U) en une représentation équivalente par des variables p^+ et p^-, à partir de (1.11) il est possible d'obtenir des quadripôles de conversion donnés par la figure 1.3.

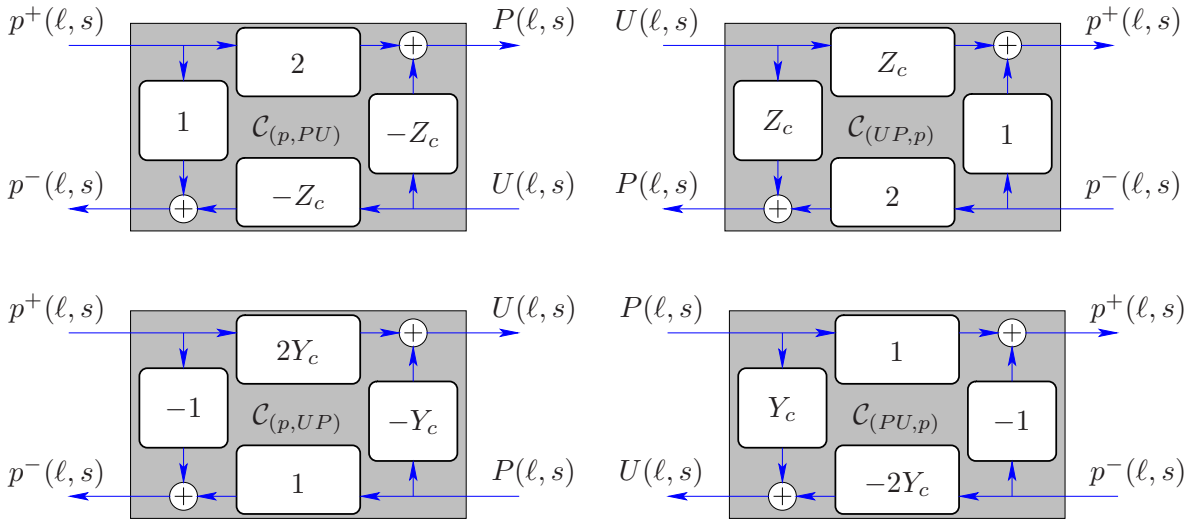


Fig. 1.3 – *Quadripôles de conversion pour les ondes* $p^\pm$ *:* $\mathcal{C}_{(p,PU)}$, $\mathcal{C}_{(UP,p)}$, $\mathcal{C}_{(p,UP)}$ *et* $\mathcal{C}_{(PU,p)}$.

1.1.2.5 *Jonctions à N portes*

Les éléments *jonction* sont des éléments à N portes qui permettent de connecter N éléments quelconques entre eux, tels que des tronçons de tubes par exemple (voir la figure 1.4). Elles sont modélisées sans dimensions spatiales, si bien qu'elles doivent vérifier la continuité de pression et de débit sur chaque porte. Par convention, le débit positif va vers la jonction.

La continuité de pression et de débit est équivalente aux lois de *Kirchhoff* pour les circuits électriques, et donne

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P_n & = & P_1, \quad \text{pour } 1 \leq n \leq N, \\ \sum_{n=1}^{N} U_n & = & 0. \end{array} \right.$$

En introduisant $p_n^\pm$ (voir (1.11)), et en considérant les ondes aller p_n^+ comme variables connues et les ondes retour p_n^- comme variables inconnus, la résolution de ce système linéaire conduit à

$$P^- = J_N P^+, \text{ avec } J_N = \Big(\frac{2}{N}\mathbf{1}_N - I_N\Big), \tag{1.14}$$

où $P^+ = \left[p_1^+,\ p_2^+,\ \ldots,\ p_N^+\right]^T$, $P^- = \left[p_1^-,\ p_2^-,\ \ldots,\ p_N^-\right]^T$, I_N est la matrice identité (N×N), et $\mathbf{1}_N$ est la matrice (N×N) remplie avec des 1 ($\mathbf{1}_N(i,j) = 1, \forall(i,j)$).

Exemple 1.1.

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad J_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad J_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

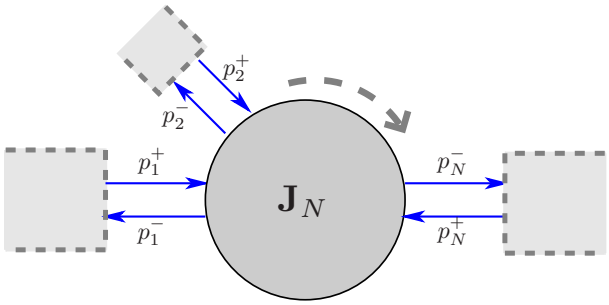


Fig. 1.4 – *Jonction à N portes :* $\mathbf{J}_N$

1.2 Modèles physiques

Cette partie s'intéresse à présenter quelques modèles physiques simples de la littérature. Nous pourrons ainsi construire un premier instrument virtuel de cuivre (trompette ou trombone par exemple) avec l'approche modulaire des guides d'ondes.

Nous présentons ici un modèle d'embouchures et un modèle de rayonnements acoustiques donnés par des systèmes linéaires du second ordre, un modèle non linéaire d'excitateurs pour les cuivres, enfin nous donnons des modèles linéaires de tubes acoustiques par l'approche des guides d'ondes.

Ce dernier modèle de tubes acoustiques fera l'objet d'une amélioration dans le chapitre 2 par un modèle plus fin.

1.2.1 Deux modèles linéaires simples

1.2.1.1 *Modélisation de l'embouchure*

L'embouchure d'un cuivre est l'élément inséré à l'entrée du résonateur et où le musicien appuie ses lèvres. Cet élément est constitué d'une cavité appelée *cuvette* et d'un petit tube de forme approximativement conique appelé *queue*.

Dans [FR91], il est proposé de modéliser cet élément par un circuit électrique équivalent (voir par exemple [Mar05]). Ainsi, la cavité de la cuvette est modélisée par une compliance acoustique C_a, et le tube de la queue par une résistance acoustique R_a et une masse acoustique M_a en série (cf. Fig. 1.5). La forme de la queue est ici simplifiée par un cylindre de rayon r_s "équivalent" pour le modèle considéré. Notons que cette modélisation par une équivalence avec l'électronique est couramment utilisée pour l'étude des résonateurs de *Helmholtz* (voir e.g. [How76]) ou des circuits acoustiques des enceintes (voir e.g. [Mar05]).

Malgré sa petite taille, l'embouchure est une pièce déterminante pour l'enveloppe spectrale du son produit et donc pour la couleur sonore de l'instrument. Ce modèle est une approximation basses fréquences par un système du second ordre (du type RLC ou *masse/ressort/amortisseur*), et ne permet pas de prendre en compte tous les paramètres pertinents. Des modèles plus fins peuvent être trouvés dans [vW02, vW07], mais nous choisissons ici ce modèle simple pour illustrer le formalisme. Avec $\mu = 1.8\ 10^{-5}$Kg.(m.s)$^{-1}$ le coefficient de viscosité, les valeurs de C_a, M_a et R_a sont données par

$$C_a = \frac{V_m}{\rho_0 c_0^2}, \qquad M_a = \frac{\rho_0 L_s}{\pi r_s^2}, \qquad R_a = \frac{8\mu L_s}{\pi r_s^4}. \tag{1.15}$$

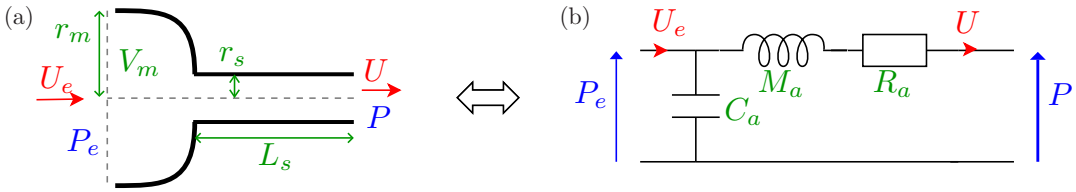


Fig. 1.5 – *(a) : Schéma d'une embouchure simplifiée, (b) : circuit électrique équivalent. r_m et V_m sont respectivement le rayon et le volume de la cuvette. r_s et L_s sont respectivement le rayon et la longueur de la queue simplifiée.*

A partir de ce modèle acoustique, un quadripôle est obtenu avec P_e et P pour entrées et U_e et U pour sorties (cf. Fig. 1.6-(a)). Les impédances Z_1 et Z_2 qui apparaissent valent

$$Z_1(s) = \frac{1}{sC_a}, \tag{1.16}$$

$$Z_2(s) = R_a + sM_a. \tag{1.17}$$

Pour obtenir le quadripôle équivalent avec les ondes progressives $p^{\pm}$ comme entrées et sorties, les 2 quadripôles de conversion $\mathcal{C}_{(p,UP)}$ et $\mathcal{C}_{(PU,p)}$ sont connectés à chaque extrémités (cf. Fig. 1.6-(a)).

Les lois d'interconnexion algébriques sur les fonctions de transfert de la partie 1.3.1 p.39 conduisent au quadripôle $\mathbf{Q}_{mp}$ de la figure 1.6-(b). Ce quadripôle a pour entrée $[p_e^+, p^-]^T$ et pour sortie $[p_e^-, p^+]^T$, où $p_e^\pm$ sont les ondes progressives du coté lèvres, et $p^\pm$ sont les ondes progressives du coté résonateur. Les fonctions de transfert de $\mathbf{Q}_{mp}$ sont données par :

$$\begin{cases} H_{mp}^{11}(s) &= 2\big(M_a Y_c^2 s + (1 + R_a Y_c) Y_c\big)/d(s) - 1, \\ H_{mp}^{12}(s) &= 2Y_c/d(s), \\ H_{mp}^{21}(s) &= 2Y_c/d(s), \\ H_{mp}^{22}(s) &= 2\big(-C_a s - Y_c\big)/d(s) + 1, \end{cases} \tag{1.18}$$

avec $d(s) = Y_c M_a C_a s^2 + (C_a + Y_c R_a C_a + M_a Y_c^2)s + (2 + R_a Y_c) Y_c$.

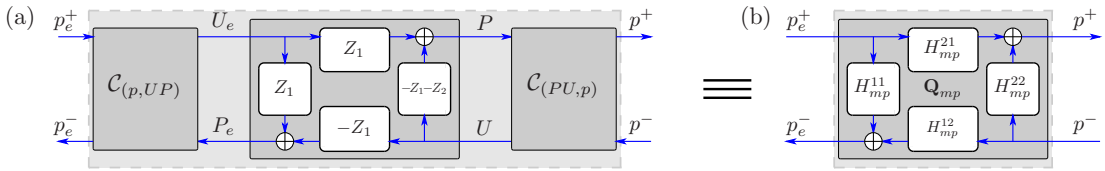


Fig. 1.6 – *Représentation de l'embouchure en quadripôles. L'utilisation des quadripôles de conversion permet de passer des variables acoustiques (P, U) aux variables progressives (p^+, p^-).*

1.2.1.2 *Modélisation du rayonnement acoustique*

A la fin du pavillon ou d'un trou, la pression acoustique et le débit acoustique sont liés par l'impédance du rayonnement acoustique notée $Z_r(s)$. Pour simuler cet effet, un système dynamique correspondant est obtenu. Pour ce système les variables du coté résonateur sont $p^\pm$ et la variable du coté extérieur est la pression acoustique rayonnée P_r (cf. Fig. 1.7). Notons qu'ici la pression acoustique venant de l'extérieur est ignorée en accord avec les conditions de Sommerfeld (voir e.g. [Som12, Gru63]).

Pour une impédance quelconque $Z_r(s)$, la réflexion du rayonnement $R_r(s)$ et la transmission $T_r(s)$ sont calculées en utilisant les lois d'interconnexion algébriques sur les fonctions de transfert de la partie 1.3.1 p.39.

$$R_r(s) = \frac{Z_r(s) - Z_c}{Z_r(s) + Z_c} \tag{1.19}$$

$$T_r(s) = R_r(s) + 1. \tag{1.20}$$

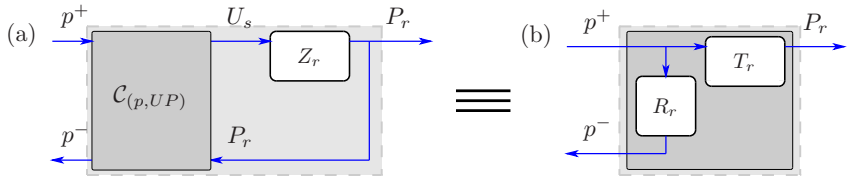


Fig. 1.7 – *Système équivalent pour le rayonnement acoustique*

Parmi différents modèles de rayonnements acoustiques (voir par exemple [LS48, DNJ01, SGK+09]), le modèle de rayonnement d'une calotte sphérique pulsante de [HR03] nous semble bien approprié pour un instrument de cuivre en raison de l'évasement du pavillon. Ici nous choisissons son approximation par un système du second ordre pour illustrer le formalisme. Notons Z_r' son impédance acoustique et

R'_r sa réflexion associée. Leurs expressions sont :

$$Z'_r(s) = Z_s \frac{\alpha_r \frac{s}{\omega_r} + \left(\frac{s}{\omega_r}\right)^2}{1 + 2\xi_r \frac{s}{\omega_r} + \left(\frac{s}{\omega_r}\right)^2}, \tag{1.21}$$

$$R'_r(s) = \frac{2\omega_r Z_c Z_s}{Z_s + Z_c} \frac{(\alpha_r - 2\xi_r)s - \omega_r}{d(s)} + \frac{Z_s - Z_c}{Z_s + Z_c}, \tag{1.22}$$

avec $d(s) = (Z_s + Z_c)s^2 + \omega_r(2Z_c\xi_r + Z_s\alpha_r)s + Z_c\omega_r^2$, et où ω_r, α_r et ξ_r sont les paramètres optimisés du modèle.

1.2.2 Modélisation d'un excitateur : les lèvres du trompettiste

Nous rappelons le principe des instruments auto-entretenus. L'auto-oscillation d'un instrument à vent est produite par le couplage entre un excitateur et un résonateur. Sans résonateur, sous l'effet d'une commande constante ou très lentement variable dans le temps et dépassant un certain seuil d'oscillation, l'excitateur se met à osciller à une fréquence propre. Mais en présence d'un résonateur, le couplage avec les modes du résonateur vient modifier la fréquence de jeu.

L'excitateur des bois est constitué d'une anche simple (clarinette, saxophone), ou d'une anche double (hautbois, basson), ou d'un jet d'air (flûtes). Pour ce qui concerne les cuivres (trompette, trombone, cor, ...) les lèvres de l'instrumentiste sont l'excitateur. Notons que les principes de fonctionnement des lèvres et des anches sont assez semblables (les lèvres sont même qualifiées d'anches *lipales*), si bien que pour certains modèles simples, la simulation d'un modèle à partir de l'autre modèle est quasi-immédiate. Des modèles d'anches sont présentés dans [Sch81, GGA95, Duc01, DGK00] par exemple. Ici nous nous intéressons à un modèle de lèvres pour les cuivres.

Les expériences présentées dans [VR98, Ver00] ont montré que la lèvre supérieure d'un trompettiste, peut déja être correctement modélisée par un modèle à un degré de liberté du type *masse/ressort/-amortisseur* comme le montre la figure 1.8. La lèvre inférieure est considérée fixe.

Quand les lèvres sont ouvertes, $x > 0$, ce modèle *excitateur-résonateur* est donné par les 3 équations suivantes :

(i) La vibration de la lèvre, modélisée par un système *masse/ressort/amortisseur*, est caractérisée par une équation différentielle du second ordre :

$$\ddot{x} + v\dot{x} + \omega^2 x = F_p. \tag{1.23}$$

où x est la position de la lèvre supérieure, $v = r/m$ est la viscosité massique de la lèvre, $\omega = \sqrt{k/m}$ est proportionnelle au facteur de contraction de la lèvre et F_p est proportionnelle aux forces de pression appliquées sur la masse. Les pressions appliquées sont : la pression p_m à l'intérieur de la bouche, la pression p_b sous la lèvre et la pression p à l'extérieur.

(ii) Sous hypothèse d'ondes planes, on écrit $p = p^+ + p^-$ où $p^\pm$ sont les ondes progressives en sortie du canal et en entrée de l'embouchure. Pour un modèle linéaire de résonateur, son influence s'écrit par la convolution

$$p^- = h * p^+, \tag{1.24}$$

où h est la réponse impulsionnelle de la réflexion du résonateur sur les ondes progressives $p^\pm$.

(iii) Enfin, sous hypothèse de fluide localement incompressible, en comportement quasi-stationnaire avec une viscosité et une inertie négligées, l'écoulement du canal entre les 2 lèvres est caractérisé par l'équation de Bernoulli :

$$p_m + \frac{1}{2}\rho_0 v_m^2 = p_b + \frac{1}{2}\rho_0 v_b^2, \tag{1.25}$$

où v_m et v_b sont les vitesses d'écoulement respectivement dans la bouche et dans le canal. Dans [Ver00, pages 18-19], la vitesse v_m dans la bouche est négligée et l'approximation $p_b = p$ est faite.

A la fermeture des lèvres, $x \leq 0$, le modèle considère que la lèvre inférieure agit comme un ressort et un amortisseur supplémentaires sur la lèvre supérieure. Dans [Ver00, page 14], cet effet est pris en compte en multipliant v par 5, et ω par 4.

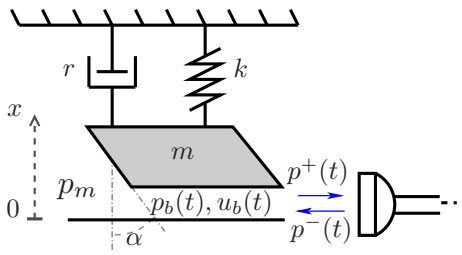


Fig. 1.8 – *Schéma du modèle de lèvres*

L'élément représentant les lèvres devient alors un système à une entrée p^+ et une sortie p^- échangées avec l'élément de l'embouchure. Pour tenir compte de l'interprétation du musicien, les paramètres p_m, ω et v sont variables.

A partir des équations (1.23) et (1.25) le système modélisant les lèvres est alors écrit par une équation linaire et une équation non linéraire :

• Lèvres ouvertes ($x(t) > 0$) :

$$\begin{cases} \ddot{x} + v\dot{x} + \omega^2 x = Ap_m + B(p^+ + p^-), \\ p^+ = p^- - \xi x \frac{C}{2}\left(Cx - \sqrt{(Cx)^2 + 4\left|p_m - 2p^-\right|}\right). \end{cases} \tag{1.26}$$

• Lèvres fermées ($x(t) \leq 0$) :

$$\begin{cases} \ddot{x} + 5v\dot{x} + 4\omega^2 x = A\left(p_m - p^+ - p^-\right), \\ p^+ = p^-, \end{cases} \tag{1.27}$$

où A, B et C sont des constantes dépendant de la géométrie des lèvres, de la masse m et des constantes physiques (densité de l'air et vitesse du son), et $\xi = \mathrm{sgn}(p_m - p^+ - p^-)$.

Remarque 1.6. *Le modèle non linéaire du canal, donné par l'équation de Bernoulli pour l'écoulement, est déterminant pour la mise en vibration de la masse. En effet, la masse et le résonateur sont ici représentés par des modèles linéaires, à une commande constante, le système ne peut pas osciller sans la présence de non-linéarités. C'est donc le rôle de l'écoulement.*

Remarque 1.7. *D'autres modèles de lèvres à 2 degrés de liberté ont été étudiés, tels que le modèle de Pelorson et Baillet (voir [Bai94]) ou le modèle de Strong-Rodet-Depalle (voir [Str90, RDFL90]), ou à 2 masses tel que le modèle de Ishizaka et Flanagan (voir [IF72]).*

1.2.3 Modélisation de tubes acoustiques

1.2.3.1 *Réseau de cylindres et de cônes*

Intéressons-nous maintenant à la modélisation du tube acoustique de l'instrument. Dans [Web19], un modèle de tube à section variable sans perte est donné. Avec P la pression acoustique et U le débit acoustique, ce modèle est donné par l'*équation des pavillons* (ou équation de *Webster*), et l'équation d'*Euler* :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{r'(x)}{r(x)}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) P(x,t) = 0, \tag{1.28}$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} U(x,t) + S(x)\frac{\partial}{\partial x} P(x,t) = 0, \tag{1.29}$$

où x est la variable spatiale sur l'axe de révolution du tube, $r(x)$ le rayon du tube et $S(x) = \pi r(x)^2$ l'aire d'une section.

Dans [MG76] une modélisation des tubes acoustiques par guides d'ondes est donnée en approchant le profil $r(x)$ par une succession de cylindres. Puis dans [VÖ95] ce modèle est amélioré en prenant compte une succession de cônes comme le montre la partie supérieure de la figure 1.9. C'est-à-dire que le profil du tube $r(x)$ est dans un premier cas approximé par une fonction $\widetilde{r}_1(x)$ constante par morceaux, et dans un second cas par une fonction $\widetilde{r}_2(x)$ continue et affine par morceaux. Ces réseaux de tubes font apparaître des jonctions caractérisées par un changement de section pour les tronçons cylindriques et de pentes pour les tronçons coniques.

En résolvant les équations (1.28) et (1.29) pour les géométries correspondantes et en considérant la continuité de pression et de débit aux jonctions de tube, la structure de *Kelly-Lochbaum* est obtenue pour un réseau de cylindres et de cônes (cf. Fig. 1.9). Dans cette structure apparaissent : des retards qui représentent la propagation d'ondes progressives à travers les tronçons de tube sans perte et des quadripôles qui représentent les réflexions et transmissions d'ondes aux jonctions de tubes.

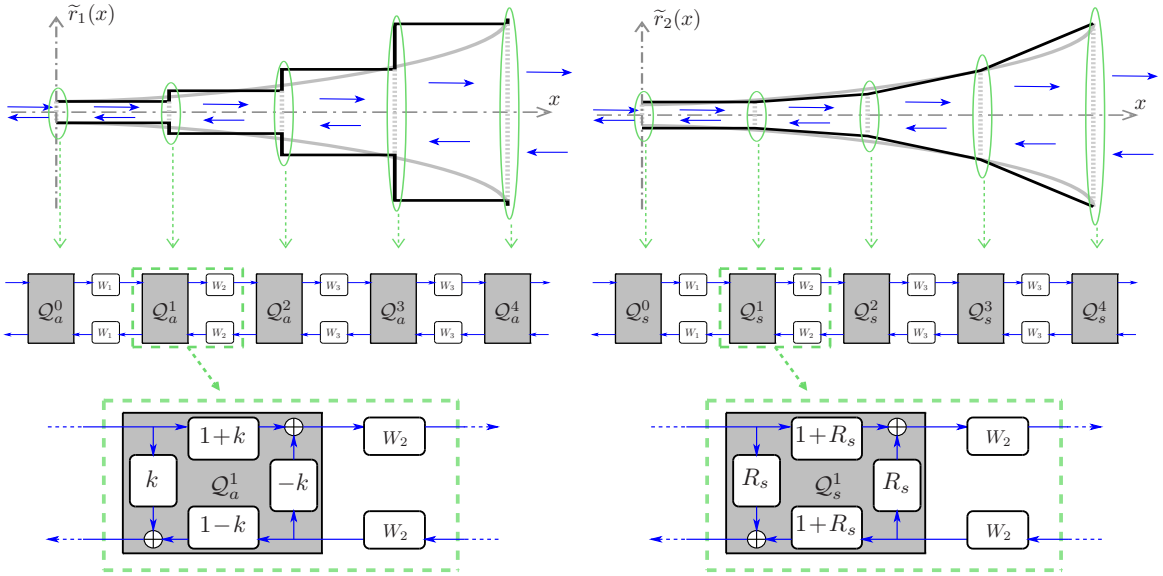


Fig. 1.9 – *Modélisation d'un tube à section variable par un réseau de cylindres (à gauche) ou de cônes (à droite). De ces approximations, un réseau de* Kelly-Lochbaum *est obtenu pour les cylindres (voir [MG76]) ou pour les cônes (voir [VÖ95]). La partie inférieure présente la structure du quadripôle d'une cellule de* Kelly-Lochbaum *à la jonction de 2 tronçons de tube.*

Considérons la connexion de 2 tronçons de cylindres de rayons respectifs r_1 et r_2 et de sections $S_1 = \pi r_1^2$ et $S_2 = \pi r_2^2$. Le quadripôle $\mathcal{Q}_a^1$ représentant la jonction des 2 tronçons contient un coefficient k qui est associé à la réflexion d'ondes. Il est donné par :

$$k \;=\; \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}. \tag{1.30}$$

Considérons maintenant la connexion de 2 tronçons de cônes de pentes respectives r'_1 et r'_2 et de rayon r_j à la jonction. Le quadripôle $\mathcal{Q}_s^1$ représentant la jonction des 2 tronçons contient une fonction de transfert $R_s(s)$ (dans le domaine de Laplace) qui est associé à la réflexion d'ondes. $R_s(s)$ est une fonction de transfert du premier ordre donnée par :

$$R_s(s) \;=\; \frac{\alpha}{s-\alpha}, \quad \text{avec} \;\; \alpha = \frac{c_0}{2}\left(\frac{r'_1 - r'_2}{r_j}\right). \tag{1.31}$$

Dans le cas de tubes cylindriques ou coniques sans perte, les propagateurs W_n sont des retards purs donnés dans le domaine de Laplace par :

$$W_n(s) \;=\; \mathrm{e}^{-\tau_n s}, \tag{1.32}$$

où $\tau_n = L_n/c_0$ est le temps de propagation à travers un tronçon de longueur L_n.

Dans [Mat94] puis dans [Duc01] ces modèles sont étendus avec la prise en compte des pertes visco-thermiques (respectivement pour les réseaux de cylindres et de cônes). Cet effet de pertes modifie les opérateurs de propagations qui deviennent alors :

$$W_n(s) \;=\; \breve{D}_n(s)\,\mathrm{e}^{-\tau_n s}, \quad \text{avec} \;\; \breve{D}_n(s) := \mathrm{e}^{-\epsilon_n \sqrt{s}}, \tag{1.33}$$

où ϵ_n est le coefficient des pertes du n-ième tube.

La fonction de transfert $\breve{D}$ représente la dispersion d'ondes due aux pertes visco-thermiques. Il est prouvé que cette fonction est de module plus petit que 1, et correspond à un système causal et stable.

Remarque 1.8. *Dans [vW02] des améliorations à ces modèles de tubes sont apportées en considérant notamment des réseaux de cônes avec d'éventuelles ruptures de section, et les pertes visco-thermiques.*

1.2.3.2 *Pertes visco-thermiques dans les tubes*

Le phénomène que nous avons nommé *pertes visco-thermiques* est un effet d'amortissement à proximité de la paroi du tube, qui est dû à la viscosité de l'air et à la conduction thermique (voir par exemple [BHKP89] ou [Bru98, p.112-115]). Pour l'application aux tubes de résonateurs d'instruments à vent nous utilisons l'hypothèse de tubes larges qui s'exprime par $r \gg (l'_v\lambda)^{\frac{1}{2}}$ et $r \gg (l_h\lambda)^{\frac{1}{2}}$, où r est le rayon, $\lambda = c_0/f$ la longueur d'onde, l'_v et l_h les longueurs caractéristiques des effets visqueux ($l'_v \approx 4\ 10^{-8}$m) et des effets thermiques ($l_h \approx 6\ 10^{-8}$m). Par exemple, en considérant un rayon $r = 2.5$ mm, ce modèle de pertes est valide pour des fréquences $f \gg 3.3$ Hz, ce qui est compatible avec des applications audio pour lesquelles les fréquences audibles sont supérieures à 50 Hz environ.

Dans [Pol91] l'étude de cet effet est étudié, et l'équation dite de *Lokshin* est obtenue (voir [LR78, Lok78]). Cet amortissement est proportionnel à la *racine carrée* de la fréquence et inversement proportionnel au rayon du tube. Dans [Mat94], le modèle est utilisé dans le cadre de la simulation de tubes acoustiques, et l'équation d'ondes qui caractérise la pression P est donnée par :

$$\partial^2_{c_0 t} P + 2\frac{\kappa_0}{r}\partial^{\frac{3}{2}}_{c_0 t} P + \left(\frac{\kappa_0}{r}\right)^2 \partial_{c_0 t} P - \partial^2_x P = 0, \tag{1.34}$$

où ∂_z représente la dérivée $\frac{\partial}{\partial z}$ par rapport à une variable z et le coefficient $\kappa_0 = \sqrt{l'_v} + (\gamma - 1)\sqrt{l_h} \approx 3.5\ 10^{-4}\ \mathrm{m}^{\frac{1}{2}}$.

L'équation (1.34) fait apparaître une dérivée fractionnaire 3/2 par rapport au temps : $\partial_t^{3/2}$. De telles dérivées ne sont pas fréquentes, mais sont très étudiées (voir [OS74, SKM87, MR93, Mat02]). Elles apparaissent dans certains problèmes physiques présentant des phénomènes dits à *mémoire longue* : dans les matériaux visco-élastiques (voir par exemple [Cap76, Koe84, BT86]) ou dans les tubes acoustiques (voir [FD00, LR78, Pol91, Md95, MAM98]). Pour se donner une idée dans le domaine temporel, notons que la dérivée 1/2 vérifie la relation implicite $(\partial_t^{1/2})\circ(\partial_t^{1/2}) = (\partial_t)$. Malgré l'apparente complexité de cet opérateur, sa manipulation dans le domaine de Laplace est délicate mais ne pose pas de réel problème puisque qu'une dérivé 1/2 devient une multiplication par $s^{1/2}$ dans le domaine de Laplace (avec conditions initiales nulles).

Remarque 1.9. *Alors que des fractions rationnelles, données par des systèmes d'ordre entier, produisent des asymptotes de pentes multiples de 20 dB par décade , le fait que l'amortissement soit proportionnel à la racine carrée produit des asymptotes de pentes multiples de 10 dB par décade. Certaines fonctions mises en jeu par le modèle (telle que $\breve{D}$) sont dites irrationnelles (en raison de la racine carrée de s pour $\breve{D}$).*

Avec ce modèle la fonction représentant la dissipation due aux pertes viscothermiques lors de la propagation d'ondes à travers le tube, est donnée par $\breve{D}(s) = \mathrm{e}^{-\epsilon\sqrt{s}}$ (voir (1.33)) où $\epsilon = \frac{\kappa_0 L}{r_{eq}\sqrt{c_0}}$.

Nous verrons en partie 2.1.3 p.62 ou en annexe F p.168 que les pertes agissent principalement sur les facteurs de qualité des maxima et minima des impédances de tube. Les prendre en compte est nécessaire pour une modélisation fine de l'instrument à vent. Cependant la simulation numérique est plus délicate à obtenir, et nous verrons en partie 1.4 p.55 que les modèles cités ici sont mal adaptés pour leur simulation, et qu'il est nécessaire de les approximer par des systèmes de degré entier.

1.2.3.3 *Réécriture de la structure de Kelly-Lochbaum*

La structure obtenue en figure 1.9 pour les réseaux de cylindres est la structure dite de *Kelly-Lochbaum* obtenue originellement pour la modélisation du conduit vocal dans [KL62]. Elle est ici appliquée aux tubes acoustiques d'instruments à vent, et est étendue aux réseaux de cônes avec une réflexion d'ondes complexe.

Dans [MG73, page 115] la structure d'une cellule représentant une jonction de 2 tubes est modifiée par un changement de variables. On obtient alors la structure des filtres en treillis, parfois utilisée pour l'implémentation des filtres numériques récursifs. L'un des avantages de cette structure en treillis est qu'elle ne fait apparaître que 2 réflexions au lieu de 4, ce qui réduit le temps de calcul utilisé par le processeur.

Cependant, une autre factorisation de la réflexion k ou R_s, plus efficace et sans changement de variables, permet de ne plus faire apparaître qu'une réflexion à simuler. Les 2 formes de la jonctions de tubes de la figure 1.10 sont équivalentes du point de vue entrée/sortie.

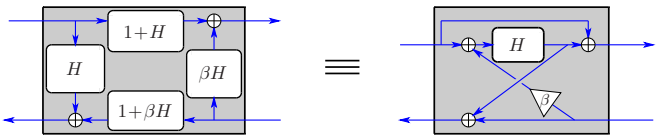


Fig. 1.10 – *Factorisation de la fonction de réflexion d'une cellule de* Kelly-Lochbaum. *Pour les jonctions de cylindres : $\beta = -1$ et $H(s) = k$, et pour les jonctions de cônes : $\beta = 1$ et $H(s) = R_s(s)$. Alors que la structure originale fait apparaître 4 réflexions H, la forme factorisée fait apparaître une seule fonction H. Ceci a pour intérêt de diminuer la complexité de calcul.*

Enfin une factorisation des opérateurs de propagation W_n peut être faite comme le montre la figure 1.11. Cette réécriture équivalente du point de vue entrée/sortie du réseau $(y^{\pm}/u)$, permet également de diminuer le nombre de retards à simuler, ce qui réduit évidemment le temps de calcul utilisé par le processeur. Cependant elle n'est utilisable que lorsqu'il n'y a pas d'entrée à droite du réseau, dans le cas d'un pavillon par exemple. Dans le cas contraire, il est nécessaire de simuler des avances (retards "négatifs"), donc anticausaux, ce que nous ne pouvons pas faire.

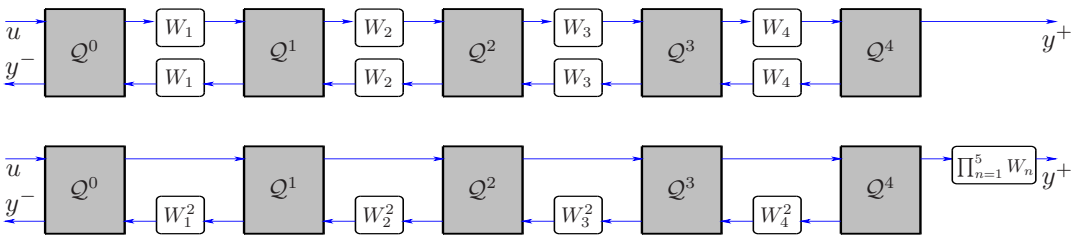


Fig. 1.11 – *Factorisation des propagateurs sur la ligne inférieure. Cette réécriture du réseau permet de réduire le nombre de propagateurs et donc de diminuer la complexité de calcul.*

1.3 Représentations mathématiques et réalisations numériques

Nous nous intéressons maintenant aux outils mathématiques permettant de représenter ces modèles physiques, dans le but de leur simulation numérique.

1.3.1 Lois d'interconnexions sur les fonctions de transfert

Connecter 2 portes de 2 quadripôles entre elles consiste à brancher la sortie d'une porte sur l'entrée de l'autre, et réciproquement comme la partie gauche de la figure 1.12 le montre.

Nous considérons ici la connexion des 2 quadripôles $\mathbf{Q}_A$ et $\mathbf{Q}_B$, dont les portes sont de taille 1. Le système défini par une telle connexion donne un nouveau quadripôle équivalent $\mathbf{Q}_C$. Avec l'algèbre d'interconnexion de Tassart (voir [Tas99]), on écrit : $\mathbf{Q}_C \equiv \mathbf{Q}_A \odot \mathbf{Q}_B$, où $\equiv$ est la relation d'équivalence et $\odot$ est l'opérateur d'interconnexion.

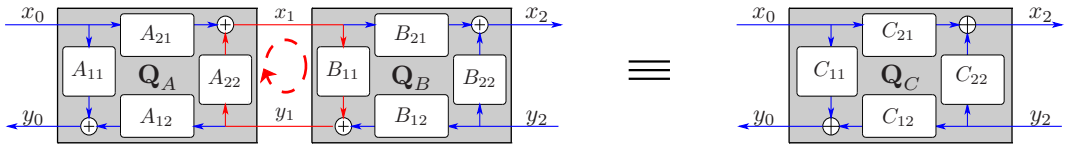


Fig. 1.12 – *Quadripôle équivalent de la connexion de 2 quadripôles*

Pour des systèmes linéaires, il est possible de calculer algébriquement les 4 fonctions de transfert du quadripôle équivalent $\mathbf{Q}_C$ à partir des 4 fonctions de transfert des 2 quadripôles $\mathbf{Q}_A$ et $\mathbf{Q}_B$. Que ce soit en temps continu (transformées de Laplace) ou en temps discret (transformées en Z), les expressions algébriques des fonctions de transfert de $\mathbf{Q}_C$ sont

$$C_{11} = A_{11} + \frac{A_{12}B_{11}A_{21}}{1 - A_{22}B_{11}}, \tag{1.35}$$

$$C_{12} = \frac{B_{12}A_{12}}{1 - A_{22}B_{11}}, \tag{1.36}$$

$$C_{21} = \frac{A_{21}B_{21}}{1 - A_{22}B_{11}}, \tag{1.37}$$

$$C_{22} = B_{22} + \frac{B_{12}A_{22}B_{21}}{1 - A_{22}B_{11}}. \tag{1.38}$$

Ce résultat est simplement l'équivalent de la fonction de transfert d'un asservissement en boucle fermée. Par exemple, la fonction de transfert en boucle fermée H_{BF} de l'asservissement de la figure 1.13, est donnée à partir de sa boucle ouverte H_{BO} et de la boucle G par la formule qui suit

$$H_{BF} := \frac{Y}{X} = \frac{H_{BO}}{1 - G\,H_{BO}}. \tag{1.39}$$

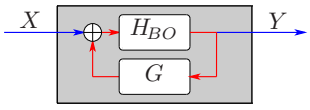


Fig. 1.13 – *Schéma d'un asservissement en boucle fermé*

Dans le cas simple de fractions rationnelles en la variable complexe (s pour le temps continu ou z pour le temps discret) et sans retard, une condition nécessaire pour la stabilité d'un tel asservissement est que $GH_{BO} \neq 1$ (ou $A_{22}B_{11} \neq 1$) dans la bande de convergence ($\mathbb{C}_0^+$ en temps continu ou

l'extérieur du disque unité en temps discret). L'étude de stabilité peut se faire par des outils standard de l'automatique tel que le critère de Nyquist.

Remarque 1.10. *Cependant dans la suite de ce travail, puisque nous étudions des systèmes linéaires passifs, il suffira alors de vérifier les conditions* $|A_{22}| < 1$ *et* $|B_{11}| < 1$ *dans la bande de convergence.*

Une telle réécriture du système est intéressante pour plusieurs raisons :

- Dans certains cas, l'écriture du quadripôle équivalent permet de simplifier sa structure (voir par exemple la partie 2.4 p.79).

- Cela peut être utile pour prouver l'équivalence du point de vue entrée/sortie de 2 formes différentes d'un système (voir par exemple la partie 2.3 p.71).

- Comme le montre la partie gauche de la figure 1.12, il y a la présence d'une boucle instantanée sans retard, qui ne peut pas être simulée en temps discret tel quelle. Une solution consiste donc à réécrire explicitement le système sans boucle instantanée, en utilisant les lois d'interconnexion (1.35-1.38). Nous parlerons de "débouclage".

- Considérant un réseau droit de N quadripôles, en itérant $N-1$ fois les calculs, il est possible de déduire les réflexions et transmissions globales du système comme le montre la figure 1.14. Ceci peut nous permettre de calculer l'impédance d'entrée et la transmittance d'un résonateur acoustique complet.

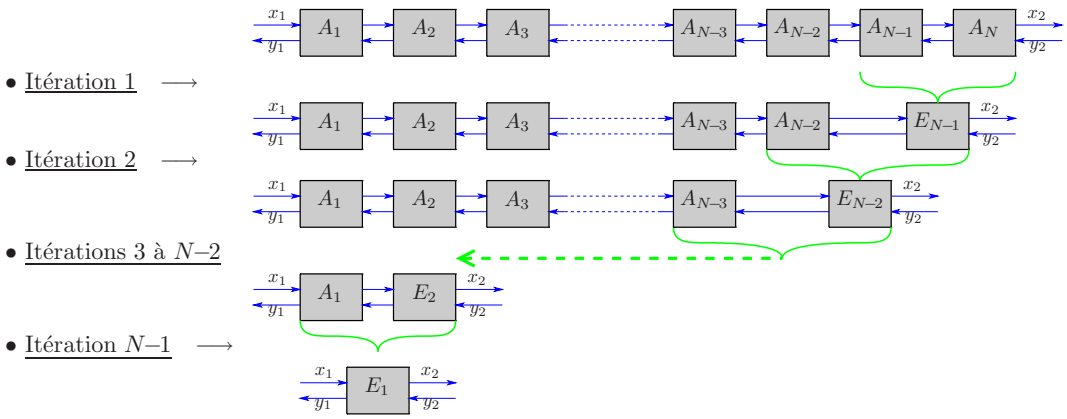


Fig. 1.14 – *Calcul itératif du quadripôle* E_1 *équivalent à un réseau droit de* N *quadripôles* A_n

Remarque 1.11. *Nous verrons en partie 1.3.5 page 46 d'autres lois d'interconnexion qui produisent la représentation d'état du système équivalent à partir des représentations d'état des sous-systèmes de départ.*

1.3.2 Introduction aux représentations diffusives et approximation

La modélisation de la partie 1.2.3 p.35 fait apparaître dans le réseau du tube avec pertes la fonction de transfert $\breve{D}(s) = \exp(-\epsilon\sqrt{s})$, qui tient compte de la dissipation due aux pertes visco-thermiques (cf. §1.2.3.2 p.37) lors de la propagation d'ondes dans les tronçons cylindriques ou coniques.

$\breve{D}$ est en fait la transformée de Laplace d'un opérateur pseudo-différentiel (voir [Sta94]) correspondant à un système linéaire de dimension infinie. Pour les représenter, dans [Mon98] et [Mat98], les *représentations diffusives* fournissent un formalisme adapté à leur modélisation. Dans ces travaux, de tels opérateurs sont représentés par la convolution sur une famille infinie d'exponentielles amorties

$\exp(-\xi t)$. Ainsi, la fonction de transfert $\breve{D}$ se comporte comme une somme infinie de fonctions de transfert du premier ordre. Dans [HM06b] on trouve[2] :

$$\breve{D}(s) = \mathrm{e}^{-\epsilon\sqrt{s}} = s\int_0^{+\infty} \frac{\breve{\mu}(\xi)}{s+\xi}\,\mathrm{d}\xi \; + \breve{D}(0), \tag{1.40}$$

avec $\breve{\mu}(\xi) = \frac{\sin(\epsilon\sqrt{\xi})}{\pi\xi}$ et $\breve{D}(0) = 1$.

Un système représenté par (1.40) est particulièrement difficile à simuler puisqu'il est de dimension infinie. Une solution est de discrétiser le spectre du système pour obtenir un système de dimension fini N approximant le système initial. Cela donne :

$$\widetilde{D}(s) \;=\; s\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu_n}{s+\xi_n} \;+\; \breve{D}(0) \;=\; -\sum_{n=1}^{N}\frac{\xi_n\mu_n}{s+\xi_n} \;+\; \left(\sum_{n=1}^{N}\mu_n + \breve{D}(0)\right), \tag{1.41}$$

où les réels ξ_n et μ_n sont à identifier. Pour $n \in [1,N]_{\mathbb{N}}$, $-\xi_n$ est le n-ième pôle de l'approximation $\widetilde{D}$ et μ_n est le poids associé.

Dans le cas des réseaux de *Kelly-Lochbaum* pour des connexions de cylindres ou de cônes (cf. §1.2.3 p.35), le nombre de tronçons impose de choisir un ordre N suffisament petit pour ne pas augmenter la charge de calcul nécessaire à la simulation numérique en temps-réel.

Prenons l'exemple des cônes : après la factorisation des réflexions (cf. §1.2.3.3 p.38), à chaque tronçon de tube sont associés : une jonction de tube simulée par un système d'ordre 1, un retard τ simulé par un tampon circulaire, et un amortissement simulé par (1.41) d'ordre N. Dans le cas sans perte, $N = 0$ est suffisant puisque $\breve{D}(s)_{\epsilon=0} = 1$. En conséquence avec pertes, prendre $N = 1$ revient à doubler le nombre de pôles à simuler par rapport au cas sans perte, $N = 2$ revient à le tripler, etc. Ainsi on peut considérer qu'un choix raisonnable serait $N \leq 4$.

Dans [HM06b], deux méthodes d'approximation sont comparées pour des cas généraux et sont appliquées sur plusieurs exemples d'opérateurs. Ici nous présentons les résultats obtenus par une optimisation non linéaire des ξ_n et μ_n pour $N \leq 4$, ce qui donne au plus 8 paramètres à optimiser. Le critère à miniser est l'erreur quadratique relative pondérée et calculée sur un intervale de l'axe de Fourier $[\omega_-, \omega_+]$:

$$\mathcal{C} = \sum_{m=1}^{m=M}\left|\frac{\breve{D}(i\omega_m) - \widetilde{D}(i\omega_m)}{\breve{D}(i\omega_m)}\right|^2 W_m, \tag{1.42}$$

où $\omega_- = \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_M < \omega_{M+1} = \omega_+$, et $W_m = \log\omega_{m+1} - \log\omega_m$ est la pondération favorisant les basses fréquences avec une échelle logarithmique. La procédure d'optimisation repose simplement sur la fonction *fminsearch* de *Matlab*© , mais nous ne la détaillons pas d'avantage ici. L'optimisation des *représentations diffusives* sera traitée en détail dans le chapitre 4.

La figure 1.15 présente les résultats de l'optimisation pour $\epsilon = 7.10^{-3}$ sur l'intervale des fréquences $[1, 22000]$Hz. $\breve{D}$ est approximée avec 1, 2 et 4 pôles. Ces résultats sont affichés dans le domaine de Fourier (module, phase et erreur relative), ainsi que dans le domaine temporel. Les réponses impulsionnelles des approximations sont comparées à la réponse impulsionnelle de $\breve{D}$ (transformée de Laplace inverse) qui est donnée par (voir par exemple [AS70, équation 29.3.82]) :

$$\breve{d}(t) = \mathcal{TL}^{-1}\left\{\breve{D}\right\}(t) = \frac{\epsilon}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{\epsilon^2}{4t}\right), \quad t > 0. \tag{1.43}$$

[2]Les détails sont présentés sur une fonction plus complexe en partie 3.2 p.96.

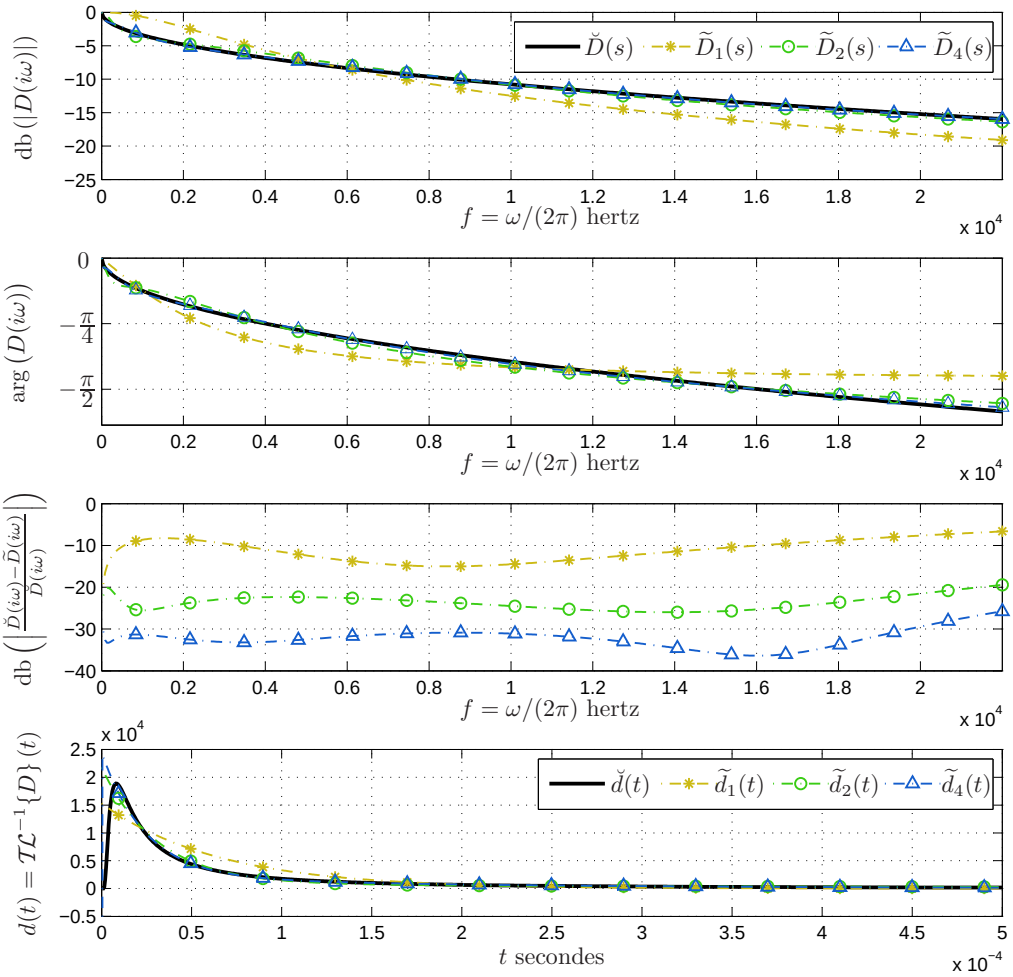


Fig. 1.15 – *Résultats de l'optimisation de la fonction $\breve{D}$ par des fonctions de transfert de dimension finie : $\widetilde{D}_n$ est l'approximation de $\breve{D}$ avec n pôles. Ici $\epsilon = 7.10^{-3}$ $s^{\frac{1}{2}}$, $\omega_- = 1$ Hz et $\omega_+ = 22$ kHz.*

1.3.3 Représentations d'état

Pour une construction automatique des résonateurs, l'utilisation des représentations d'état des éléments nous semble bien adaptée. Par exemple, ce formalisme nous permet de résoudre les problèmes de boucles instantanées de façon systématique et à partir de calculs matriciels en numérique (voir pour plus de précision 1.3.5 p.46). De plus ces représentations rendent possible l'utilisation de manipulations algébriques bien connues en automatique (cf. §1.3.6 p.47).

Notons U le vecteur d'entrée et Y le vecteur de sortie, de taille (N×1), rangés de sorte que l'entrée et la sortie de la n-ième porte sont respectivement U_n et Y_n. Nous cherchons à présent à réécrire chaque élément avec la *représentation d'état* qui a la forme suivante dans le domaine de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s\ X(s) & = & A\ X(s) + B\ U(s), \\ Y(s) & = & C\ X(s) + D\ U(s), \end{array} \right. \tag{1.44}$$

où X est le vecteur d'état de taille (J×1), A est la matrice (J×J) de la dynamique, B est la matrice (J×N) de contrôle, C est la matrice (N×J) d'observation, et D est la matrice (N×N) de lien direct. J (le nombre de sous-états) est la dimension du système.

Tous les éléments tels que l'embouchure, le rayonnement et les cellules de jonction de tubes sont

modélisables ou approchables par des systèmes de dimensions finie qui peuvent être représentés par une représentation d'état associée (voir [MHM09b]). Cependant les opérateurs de propagations sont traités différemment.

1.3.3.1 *Jonctions à N portes*

Les cellules $\mathbf{J}_N$ représentant la jonction entre N éléments ne contient que des coefficients réels constants. Par conséquent, ce système n'a pas de dynamique, ce qui conduit à une représentation d'état "dégénérée" pour laquelle $J=0$: $\dim(X)=(0,1)$, $\dim(A)=(0,0)$, $\dim(B)=(N,0)$ et $\dim(C)=(0,N)$. Cependant le formalisme des représentations d'état reste pratique, et de nombreux logiciels de calcul scientifique sont capables d'utiliser des matrices vides (*Matlab*© ou *Maple*© par exemple). A partir de (1.14) de la page 30, la représentation d'état "dégénérée" de la jonction $\mathbf{J}_N$ est donnée par

$$A=[\,],\quad B=[\,],\quad C=[\,],\quad D=J_N. \tag{1.45}$$

1.3.3.2 *Rayonnement acoustique*

En utilisant (1.22) et (1.20) de la page 34, les expressions de la réflexion et de la transmission, la forme canonique pour l'observation conduit à la représentation d'état suivante

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ C=\frac{2\omega_r Z_c Z_s}{(Z_s+Z_c)^2}\begin{bmatrix}-\omega_r\\ (\alpha_r-2\xi_r)\end{bmatrix}^T,\ D=\frac{1}{Z_s+Z_c}\begin{bmatrix}Z_s-Z_c\\ 2Z_s\end{bmatrix},$$

$$\text{avec } a_0=\frac{Z_c\omega_r^2}{Z_s+Z_c},\ \text{et } a_1=\frac{\omega_r(2Z_c\xi_r+Z_s\alpha_r)}{Z_s+Z_c}. \tag{1.46}$$

Si $a_1\neq 2\sqrt{a_0}$, la matrice A est diagonalisable[3] dans $\mathbb{C}$, alors le changement de variable $X'=P^{-1}X$ est calculé où P est la matrice des vecteurs propres de A. La matrice de la dynamique devient $P^{-1}AP$, et la forme diagonale équivalente est

$$\left\{\begin{array}{rcl} s\ X'(s) &=& (P^{-1}AP)\ X'(s)+(P^{-1}B)\ U(s),\\ Y(s) &=& (CP)\ X'(s)+\quad D\quad U(s).\end{array}\right. \tag{1.47}$$

1.3.3.3 *Embouchure*

A partir de l'expression des 4 fonctions de transfert du quadripôle de l'embouchure $\mathbf{Q}_{mp}$ (voir (1.18) de la page 33), la forme canonique pour l'observation conduit à la représentation d'état suivante

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -a_0 & -a_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -a_0 & -a_1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ C=\frac{2}{M_aC_a}\begin{bmatrix}1{+}R_aY_c & 1\\ M_aY_c & 0\\ 1 & -1\\ 0 & -\frac{C_a}{Y_c}\end{bmatrix}^T,\ D=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\text{avec } a_0=\frac{2{+}R_aY_c}{M_aC_a},\ \text{et } a_1=\frac{C_a/Y_c{+}R_aC_a{+}M_aY_c}{M_aC_a}. \tag{1.48}$$

Si $a_1\neq 2\sqrt{a_0}$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et sa diagonalisation est faite pour obtenir la forme diagonale du système.

[3] On vérifie que A a une valeur propre double si et seulement si $a_1=2\sqrt{a_0}$. Dans ce cas elle vaut $\lambda=-\sqrt{a_0}$ et l'espace propre est de dimension 1 ($\mathrm{rg}(\lambda I_2-A)=1$).

1.3.3.4 *Jonctions de cylindres*

Les cellules $\mathcal{Q}_a$ représentant la jonction entre 2 tronçons cylindriques contiennent un coefficient constant k. A partir de la factorisation des réflexions de la figure 1.10 (page 38), nous obtenons les matrices de la représentation d'état "dégénérée" :

$$A = [\,]\,, \quad B = [\,]\,, \quad C = [\,]\,, \quad D = \begin{bmatrix} k & 1-k \\ 1+k & -k \end{bmatrix}. \tag{1.49}$$

1.3.3.5 *Jonctions de cônes*

Les cellules $\mathcal{Q}_s$ représentant la jonction entre 2 tronçons coniques contiennent la fonction de réflexion $R_s(s)$. A partir de la factorisation des réflexions de la figure 1.10 (page 38), nous obtenons les matrices de la représentation d'état :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.50}$$

1.3.3.6 *Propagateurs*

Pour la partie contenant les opérateurs de propagation $W(s)$, nous procédons différemment. Premièrement nous séparons les retards purs $\mathrm{e}^{-\tau s}$ et les opérateurs de dissipation $\breve{D}(s)$ dus aux pertes visco-thermiques en 2 quadripôles différents. Ces quadipôles sont nommés $\mathcal{Q}_{disp}$ et $\mathcal{Q}_{del}$ comme le montre la figure 1.16.

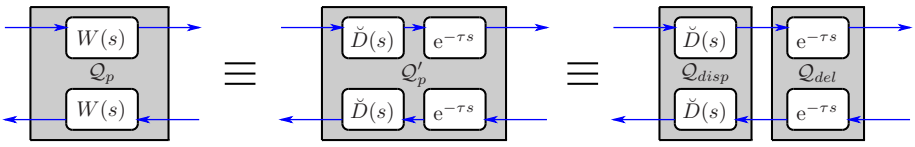


Fig. 1.16 – *Séparation des opérateurs de propagation en 2 quadripôles*

Le quadripôle $\mathcal{Q}_{del}$ contient deux opérateurs de retard τ. Dans ce cas il peut toujours être représenté par un système d'équations du type (1.44) pour les représentations d'état, mais avec des matrices A, B, C et D qui ne sont plus constantes mais contiennent $\mathrm{e}^{-\tau s}$. Les matrices associées à $\mathcal{Q}_{del}$ s'écrivent alors :

$$A = [\,]\,, \quad B = [\,]\,, \quad C = [\,]\,, \quad D'(s) = D\,\mathrm{e}^{-\tau s} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\tau s}. \tag{1.51}$$

Il s'agit donc de la représentation d'état "dégénérée" (avec des matrices vides) d'un système à retard où la matrice de lien direct D est multipliée par le retard $\mathrm{e}^{-\tau s}$. Notons que cette représentation n'est pas courante, mais reste néammoins pratique pour l'étude de stabilité et pour la simulation.

Pour la simulation, l'opérateur $\breve{D}(s)$ est approximé par un système de dimension finie K donné par sa fonction de transfert $\widetilde{D}(s)$. Avec l'expression (1.41), les matrices de la représentation de $\mathcal{Q}_{disp}$ sont données par

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_K \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad D = \left(\sum_{k=1}^{K} \mu_k + \breve{D}(0) \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.52}$$

avec $\boldsymbol{\alpha} = -\operatorname{diag}\Big(\Big[\xi_1,\ \xi_2\ \ldots,\ \xi_K\Big]\Big)$, $\boldsymbol{\gamma} = -\Big[\xi_1\mu_1,\ \xi_2\mu_2,\ \ldots,\ \xi_K\mu_K\Big]$, et $\mathbf{1}_K = \Big[1,\ 1, \ldots,\ 1\Big]^T$.

1.3.4 Discrétisation

Pour la simulation numérique, nous cherchons à obtenir les versions à temps discret des représentations d'état à temps continu obtenues précédemment.

Une représentation d'état d'un système à temps discret prend la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z\ X^d(z) & = & A^d\ X^d(z) + B^d\ U^d(z), \\ Y^d(z) & = & C^d\ X^d(z) + D^d\ U^d(z). \end{array} \right. \tag{1.53}$$

1.3.4.1 *Discrétisation des éléments sans retard*

Les précédentes représentations d'état conduisent à J filtres du premier ordre indépendants les uns des autres puisque A est diagonale. Ils s'écrivent chacun

$$sX_j = a_j X_j + V_j, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq J, \tag{1.54}$$

où $a_j = A_{j,j}$ et $V_j = \sum_{n=1}^{N} B_{(j,n)} U_n$. Alors l'utilisation de schémas de discrétisation sur les J équations scalaires (1.54) conduit à J équations scalaires à temps discret.

Les solutions standard de discrétisation sont les schémas d'*Euler implicites et explicites*, la *transformée bilinéaire* (ou *la transformée de Tustin*), les *bloqueurs d'ordre N*, l'*invariant impulsionnel*, la *transposition de pôles et de zéros*, etc. Nous ne les détaillons pas ici et renvoyons par exemple à [Pic89, FPW90, PB87, Neh52, Chu60] pour plus de détails.

Nous avons utilisé la méthode dite du *bloqueur d'ordre 1* (voir [FPW90]), qui correspond à la dynamique exacte calculée sur une entrée interpolée linéairement. Une bonne propriété de cette méthode est la possibilité de construire un "mapping" exact des pôles. De plus nous avons pu constater dans un cas particulier de cônes convergents, que ce schéma de discrétisation conduit à un système équivalent à temps discret stable, alors que la transformée bilinéaire ou le bloqueur d'ordre 0 par exemple, conduisent à un système à temps discret équivalent instable.

Les équations récurrentes scalaires équivalentes à (1.54) en temps discret sont pour le bloqueur d'ordre 1 :

$$zX_j^d = \alpha_j X_j^d + (z\lambda_{(j,1)} + \lambda_{(j,0)}) V_j^d, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq N, \tag{1.55}$$

$$\text{où } \alpha_j = \mathrm{e}^{a_j T_e}, \quad \lambda_{(j,1)} = -\frac{1-\alpha_j}{a_j^2\, T_e} - \frac{1}{a_j}, \quad \text{et } \lambda_{(j,0)} = \frac{1-\alpha_j}{a_j^2\, T_e} + \frac{\alpha_j}{a_j}. \tag{1.56}$$

La version matricielle s'écrit

$$zX^d = A^d X^d + (z\Lambda_1 + \Lambda_0) U^d, \tag{1.57}$$

$$Y^d = CX^d + DU^d, \tag{1.58}$$

où $\Lambda_l = \mathrm{diag}(\{\lambda_{(j,l)}\}_{1 \leq j \leq J}) B$ pour $l \in \{0, 1\}$, et $A^d = \mathrm{diag}(\{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq J})$.

L'équation (1.57) n'est pas une forme standard d'équation de la dynamique des représentations d'état parce que x_n dépend de u_n (dans le domaine temporel). Pour résoudre ce problème, définissons le nouveau vecteur d'état $W^d := X^d - \Lambda_1 U^d$. Ceci donne

$$\begin{array}{rl} zW^d & = (A^d X^d + (z\Lambda_1 + \Lambda_0) U^d) - z\Lambda_1 U^d = A^d X^d + \Lambda_0 U^d = A^d (W^d + \Lambda_1 U^d) + \Lambda_0 U^d \\ & = A^d W^d + (A^d \Lambda_1 + \Lambda_0) U^d. \end{array}$$

La représentation d'état devient alors standard et s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} zW^d & = & A^d W^d + B^d U^d, \\ Y^d & = & C^d W^d + D^d U^d, \end{array} \right. \tag{1.59}$$

avec $B^d = (A^d \Lambda_1 + \Lambda_0)$, $C^d = C$ et $D^d = (C\Lambda_1 + D)$.

1.3.4.2 *Discrétisation des retards*

Pour la simulation numérique dans le domaine temporel, les représentations d'état à temps discret de tous les éléments sans retard sont calculées. Cependant les retard purs $\mathrm{e}^{-\tau s}$ sont traités différemment : si τ est commensurable à la période d'échantillonnage T_e, c'est-à-dire si τ est un multiple entier de T_e ($\tau = MT_e$ avec $M \in \mathbb{N}$), alors ce retard pur est donné en temps discret par z^{-M}, qui sera alors simulé par un tampon circulaire à faible coût. Si τ n'est pas commensable à T_e alors il est nécessaire d'ajouter un filtre d'interpolation pour simuler des *retards fractionnaires* (voir par exemple [V95, Tas99]).

Donc, la mise en représentation d'état du quadripôle $\mathcal{Q}_{del}$ en temps discret n'est pas nécessaire pour la simulation avec le formalisme utilisé ici. Néammoins elle peut être utile pour une étude de stabilité à temps discret

Pour u^d et y^d l'entrée et la sortie scalaires et X^d un vecteur d'état de taille (M×1), $y^d = u^d z^{-M}$ devient

$$\left\{\begin{array}{rcl} zX^d &=& \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} X^d + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T u^d := A^d_{del} X^d + B^d_{del} u^d, \\ y^d &=& \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} X^d + 0\, u^d := C^d_{del} X^d + D^d_{del} u^d. \end{array}\right. \tag{1.60}$$

Ici, l'entrée u^d est injectée dans X^d_1, et la matrice A^d_{del} sert à décaler pas à pas les valeurs de X^d_m à X^d_{m+1}. L'observation prélève alors X^d_M qui vaut $z^{-M}u^d$. L'équation (1.60) représente une forme de *registre à décalage* qui permet de simuler un retard (mais avec un temps de calcul plus élevé qu'un tampon ciculaire).

A partir de (1.60) on écrit maintenant la représentation d'état à temps discret de $\mathcal{Q}_{del}$: avec U^d et Y^d les vecteurs (2×1) d'entrée et de sortie, et X^d un vecteur d'états ($2M$×1) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} zX^d &=& \begin{bmatrix} A^d_{del} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^d_{del} \end{bmatrix} X^d + \begin{bmatrix} B^d_{del} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^d_{del} \end{bmatrix} U^d, \\ Y^d &=& \begin{bmatrix} \mathbf{0} & C^d_{del} \\ C^d_{del} & \mathbf{0} \end{bmatrix} X^d. \end{array}\right. \tag{1.61}$$

1.3.5 Lois d'interconnexion sur les représentations d'état

Nous avons vu en partie 1.3.1 page 39 une méthode basée sur les fonctions de transfert pour "fusionner" deux quadripôles en un nouveau quadripôle équivalent. A partir de la représentation d'état en temps discret de deux éléments connectés ensemble, une autre méthode équivalente permet de déduire la représentation d'état du système global.

Nous considérons à nouveau la connexion des 2 quadripôles $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$ (cf. Fig. 1.17). Ici les dimensions des portes à la connexion sont quelconques. Le système défini par une telle connexion donne un nouveau quadripôle équivalent $\mathbf{Q}_e$. Dans [DT95], la notation suivante est introduite : $\mathbf{Q}_e \equiv \mathbf{Q}_1 \odot \mathbf{Q}_2$, où $\equiv$ est la relation d'équivalence et $\odot$ est l'opérateur d'interconnexion.

Avec la décomposition par blocs des matrices (A, B, C, D) de $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$ donnée par (1.62), la représentation d'état en temps discret de $\mathbf{Q}_e$ est déduite dans [Tas99, p.31-33] et donnée ici par (1.63)-(1.66).

$$\mathbf{Q}_k \left\{\begin{array}{rcl} z\ X_k = & A_k X_k & + \begin{bmatrix} B^+_k & B^-_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^+_k \\ u^-_k \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y^+_k \\ y^-_k \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} C^+_k \\ C^-_k \end{bmatrix} X_k & + \begin{bmatrix} d^k_{11} & d^k_{12} \\ d^k_{21} & d^k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^+_k \\ u^-_k \end{bmatrix}. \end{array}\right. \tag{1.62}$$

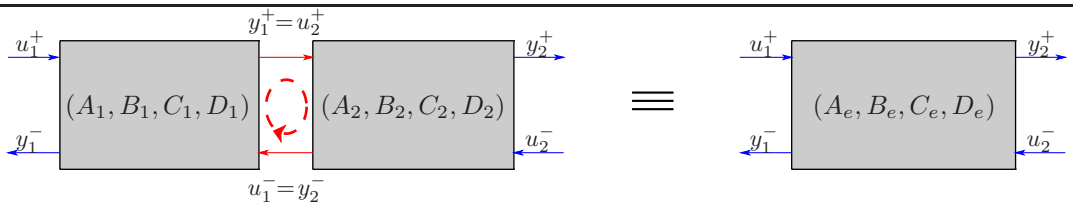


Fig. 1.17 – *Concaténation de 2 quadripôles avec les représentations d'état*

$$A_e = \begin{bmatrix} A_1 + B_1^- d_{11}^2 \gamma^+ C_1^+ & B_1^- \gamma^- C_2^- \\ B_2^+ \gamma^+ C_1^+ & A_2 + B_2^+ d_{22}^1 \gamma^- C_2^- \end{bmatrix}, \tag{1.63}$$

$$B_e = \begin{bmatrix} B_1^+ + B_1^- d_{11}^2 \gamma^+ d_{21}^1 & B_1^- \gamma^- d_{12}^2 \\ B_2^+ \gamma^+ d_{21}^1 & B_2^- + B_2^+ d_{22}^1 \gamma^- d_{12}^2 \end{bmatrix}, \tag{1.64}$$

$$C_e = \begin{bmatrix} C_1^- + d_{12}^1 d_{11}^2 \gamma^+ C_1^+ & d_{12}^2 \gamma^- C_2^- \\ d_{21}^1 \gamma^+ C_1^+ & C_2^+ + d_{21}^2 d_{22}^1 \gamma^- C_2^- \end{bmatrix}, \tag{1.65}$$

$$D_e = \begin{bmatrix} d_{11}^1 + d_{12}^1 d_{11}^1 \gamma^+ d_{21}^1 & d_{12}^1 \gamma^- d_{12}^2 \\ d_{21}^2 \gamma^+ d_{21}^1 & d_{22}^2 + d_{21}^2 d_{22}^1 \gamma^- d_{12}^2 \end{bmatrix}, \tag{1.66}$$

où γ^+ et γ^- sont les matrices inverses de $Id - d_{22}^1 d_{11}^2$ et $Id - d_{11}^2 d_{22}^1$ respectivement, avec pour hypothèse qu'elles sont inversibles.

Pour la construction modulaire d'instruments virtuels construits par blocs, cette procédure à comme premier avantage d'être facilement implémentable par calcul numérique (en langage C ou sous le logiciel *Matlab*©). La méthode de la partie 1.3.1 p.39 nécessite des calculs algébriques sur des fractions rationnelles qui sont plus délicats à mettre en oeuvre si l'on souhaite implémenter une procédure automatique de concaténation.

De plus, même si la figure 1.17 se restreint à l'exemple de deux quadripôles, cette méthode permet de considérer avec un formalisme commun la connexion d'éléments quelconques, autres que des quadripôles, avec des portes de dimension elles-même quelconques. La seule nécessité est de permutter les entrées de U et les sorties de Y afin de mettre les matrices (A, B, C, D) dans la forme de (1.62).

Cependant, une difficulté concerne les éléments non linéaires ou variables.

Remarque 1.12. *Dans [Tas99], ces lois d'interconnexion sont présentées en temps discret (en la variable z). Cependant il ne s'agit que de calculs algébriques, et les équations (1.63)-(1.66) restent valables si les matrices (A, B, C, D) sont les matrices d'une représentation en temps continu et de dimension finie de la variable s.*

1.3.6 Outils d'automatique linéaire

Nous présentons quelques résultats connus de l'automatique qui permettent soit de réduire la complexité de calcul, soit d'étudier la stabilité d'un système donné par une représentation d'état.

Les détails ne sont pas développés ici, seuls les résultats sont présentés et expliqués. Des précisions peuvent être trouvées dans la littérature : voir par exemple [Kai80], [Pic89] ou [BR05] pour des outils d'automatique, et [Nic97] pour des études de systèmes à retards.

Remarque 1.13. *Nombreux des résultats présentés ici sont identiques en temps continu et en temps discret. Sauf précision, les matrices (A, B, C, D) correspondent indifféremment à une représentation d'état à temps continu ou à temps discret.*

1.3.6.1 *Réalisation minimale*

Observabilité Supposons que les matrices A, B et C d'une représentation d'état soient décomposables par blocs de la manière suivante[4] :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_o & \mathbf{0} \\ A_{2,1} & A_{\overline{o}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\overline{o}} \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} C_o & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.67}$$

avec pour vecteur d'état $X = [X_o,\, X_{\overline{o}}]^T$.

Alors on constate que la partie $X_{\overline{o}}$ de l'état n'agit pas sur la partie X_o en raison du bloc $\mathbf{0}$ de A, et elle n'agit pas non plus directement sur la sortie en raison du bloc $\mathbf{0}$ de C. En conséquence cette partie $X_{\overline{o}}$ de l'état n'agit pas sur la sortie, que ce soit directement par l'équation de l'observation ou indirectement par l'intermédiare de X_o. On parle alors de partie *non observable* du système.

Du point de vue entrée/sortie, il n'est pas nécessaire de simuler cette partie, seule la partie *obervable* X_o agit sur la sortie, ainsi une réalisation réduite du système est donnée par les matrices (A_o, B_o, C_o). Notons que la matrice de lien directe reste inchangée.

Contrôlabilité Supposons que les matrices A, B et C d'une représentation d'état soient décomposables par blocs de la manière suivante[5] :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_c & A_{1,3} \\ \mathbf{0} & A_{\overline{c}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} C_c & C_{\overline{c}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.68}$$

avec pour vecteur d'état $X = [X_c,\, X_{\overline{c}}]^T$.

Alors on constate que l'entrée U n'agit pas sur la partie $X_{\overline{c}}$ de l'état en raison du bloc $\mathbf{0}$ de B. De plus en raison du bloc $\mathbf{0}$ de A, la partie X_c n'agit pas sur $X_{\overline{c}}$. Donc pour des conditions initiales nulles du système ($X = \mathbf{0}$ pour $t \leq 0$), la partie $X_{\overline{c}}$ reste à $\mathbf{0}$. On dit que $X_{\overline{c}}$ est une partie *non contrôlable* du système contrairement à X_c qui est une partie *contrôlable* du système.

Dans notre cas, nous considérons un système linéaire au repos pour $t < 0$, donc avec des conditions initiales nulles, il n'est pas nécessaire de simuler cette partie autonome qui n'est pas excitée. Ainsi une réalisation réduite du système est donnée par les matrices (A_c, B_c, C_c).

Forme canonique de Kalman La forme canonique de Kalman (voir [Kal61]) permet de séparer l'état en 4 parties selon le principe d'observabilité et de contrôlabilité. Elle est donnée par des matrices écrites par blocs de la manière suivante

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_{c,\overline{o}} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ \mathbf{0} & A_{c,o} & \mathbf{0} & A_{2,4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{\overline{c},\overline{o}} & A_{3,4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{\overline{c},o} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{c,\overline{o}} \\ B_{c,o} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & C_{c,o} & \mathbf{0} & C_{\overline{c},o} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.69}$$

avec pour vecteur d'état $X = [X_{c,\overline{o}},\, X_{c,o},\, X_{\overline{c},\overline{o}},\, X_{\overline{c},o}]^T$.

Du point de vue entrée/sortie, seule la partie à la fois observable et contrôlable, notée ici $X_{c,o}$, est nécessaire (cf. Fig. 1.18). Ainsi une réalisation réduite du système est donnée par les matrices $(A_{c,o}, B_{c,o}, C_{c,o})$. Cette réalisation est appelée la *réalisation minimale* du système.

A partir de matrices A, B et C quelconques, il est possible de déterminer un changement d'état $X' = P^{-1}X$ qui permet d'obtenir la forme canonique de Kalman et donc d'en déduire la réalisation

[4] Les indices o et $\overline{o}$ signifient respectivement *observable* et *non observable*.
[5] Les indices c et $\overline{c}$ signifient respectivement *contrôlable* et *non contrôlable*.

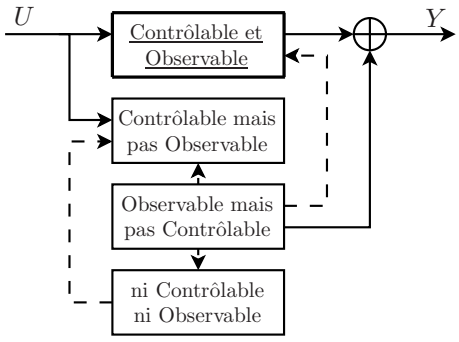


Fig. 1.18 – *Diagramme bloc de la forme canonique de* Kalman *(voir [Kha02, p133])*

minimale (voir [BR05, Kha02]). Le logiciel *Matlab*© possède plusieurs fonctions permettant de réaliser numériquement cette opération.

Si la dimension de $[\,X_{c,o},\, X_{\overline{c},\overline{o}},\, X_{\overline{c},o}]^T$ vaut $K \neq 0$, alors la réalisation minimale permet de réduire la dimension du système de J à $J-K$. Si $K=0$, alors le système est observable et contrôlable, il n'y a pas de réduction possible de la dimension.

Remarque 1.14. *La forme factorisée de la jonction de 2 cônes (cf. Fig. 1.10 p.38) peut être considérée comme la réalisation minimale du système.*

1.3.6.2 *Forme de Jordan*

Pour réduire le coût de calcul, il peut être utile de chercher un changement d'état qui rend la matrice A creuse.

Si la matrice A est diagonalisable, alors le changement d'état $X' = P^{-1}X$ est calculé où P est la matrice des vecteurs propres de A. Les matrices du système deviennent alors

$$(A'\ , B'\ , C'\ , D') = (P^{-1}AP,\ P^{-1}B,\ CP,\ D),$$

où $A' = P^{-1}AP$ est diagonale. Pour un système de dimension J, alors que la complexité du produit AX est de J^2, celle du produit $A'X'$ est de J. Le temps de calcul est alors considérablement réduit.

Cependant les matrices carrées ne sont pas toujours diagonalisables. En revanche, dans $\mathbb{C}^{J\times J}$ elles admettent toutes une décomposition de *Jordan*.

La réduction de *Jordan* (voir [DS88] ou [RB95, §1.5.5 p44]) consiste à décomposer un endomorphisme en la somme d'un endormorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent. Cette décomposition, dite de *Dunford* (voir [BS03, p540]), permet d'écrire $A = A_d + A_n$, avec A_d diagonalisable, et A_n nilpotente.

Ainsi, A est semblable à une matrice $A' = A'_d + A'_n$, avec A' diagonale constituée des valeurs propres de A, et A'_n correspondant à la partie nilpotente, constituée de 0 partout sauf sur la diagonale supérieure qui contient des 0 et des 1. C'est-à-dire qu'il existe un changement d'état $X' = P^{-1}X$ qui donne

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{\lambda_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & J_{\lambda_N} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \tag{1.70}$$

où λ_n sont les valeurs propres de A, et J_λ sont appelés *blocs de Jordan* .

Remarque 1.15. *Notons qu'il est possible que plusieurs λ_n aient la même valeur. C'est par exemple le cas quand la dimension du sous-espace propre E_{λ_n} est différente de 1.*

Exemple 1.2. *Si le sous-espace propre E_λ est de dimension égale à la multiplicité M de λ, alors l'endomorphisme est diagonalisable sur E_λ. Avec une matrice de passage P choisie convenablement, on voit apparaitre un bloc diagonale λI_M, formée par les M blocs de Jordan $J_\lambda = [\lambda]$ de dimension 1.*

Avec la décomposition de Jordan, le temps de calcul est également considérablement réduit : pour un système de dimension J, la complexité du produit $A'X'$ est de $2J$ au lieu de J^2 pour le produit AX. Le logiciel *Matlab*© possède plusieurs fonctions permettant de réaliser numériquement cette décomposition (en passant par du calcul symbolique). Notons cependant, qu'en pratique, les matrices A sont presque toujours diagonalisables.

1.3.6.3 *Etude de stabilité*

Systèmes de dimension finie Pour un système de dimension J donné par (A, B, C, D), pour des vecteurs d'entrée U et de sortie Y, la matrice G telle que $X = GU$ et la matrice de transfert H telle que $Y = HU$, sont données par :

$$G(\lambda) = (\lambda I_J - A)^{-1} B, \tag{1.71}$$

$$H(\lambda) = C (\lambda I_J - A)^{-1} B + D, \tag{1.72}$$

où I_J est la matrice identité de dimension J, et $\lambda = s$ pour le cas d'un système à temps continu ou $\lambda = z$ pour un système à temps discret.

Les fonctions de transfert du système ont alors un dénominateur commun $d(\lambda)$ égal au polynôme caractéristique de A :

$$d(\lambda) = \det (\lambda I_J - A). \tag{1.73}$$

L'étude de la stabilité entrée/sortie du système et de la stabilité des états du système est alors réalisée en étudiant les valeurs propres de A qui sont les racine de $d(\lambda)$. Selon des résultats connus :

- En temps continu, avec $\lambda = s$, si toutes les valeurs propres de A sont à parties réelles strictement négatives, alors le système est asymptotiquement stable, dans le cas contraire, il est instable.
- En temps discret, avec $\lambda = z$, si toutes les valeurs propres de A sont de modules strictement plus petits que 1, alors le système est asymptotiquement stable, dans le cas contraire, il est instable.

Remarque 1.16. *Il existe des cas où le système de départ n'est pas stable, mais où sa réalisation minimale est stable. Dans ces cas la partie instable du système correspond aux parties non observables ou non contrôlables, ainsi les retirer permet de rendre l'état du système stable. Nous avons fait cette remarque dans l'étude de la stabilité des cônes convergents (voir partie 3.1 p.87 ou [MHM08b]).*

Systèmes différentiels à retards Le système représentant un tronçon de tube cylindrique ou conique, fait intervenir 2 retards égaux $\exp(-\tau s)$. L'équation de la dynamique de ce système prend alors la forme en temps continu

$$sX(s) = \left(A + A_d \, \mathrm{e}^{-\tau s}\right) X(s) + \left(B + B_d \, \mathrm{e}^{-\tau s}\right) U(s). \tag{1.74}$$

Les valeurs propres du système sont alors les racines du quasi-polynôme

$$q(s) := \det \left(sI_J - A - A \, \mathrm{e}^{-\tau s}\right). \tag{1.75}$$

La stabilité du système est alors renseignée par la position des valeurs propres par rapport à l'axe imaginaire (voir [Nic01]). La difficulté est que ce système possède une infinité de valeurs propres, et cette étude est particulièrement délicate.

Il éxiste dans la littérature plusieurs méthodes pour étudier l'existence des valeurs propres à parties réelles positives : le critère de *Pontryagin* (voir [HL93]), l'approche des faisceaux matriciels (voir

[CGN94, Su94, Su95], la méthode de la *D-Subdivision* (voir [CM49, KN86]), etc. Dans le cas de l'étude de stabilité des cônes convergents, nous avons utilisé dans [MHM08b] la méthode de la *D-subdivision*, mais en partie 3.1 p.87 nous présentons une preuve plus courte. Des études de stabilité pour des systèmes à retard faisant intervenir des opérateurs diffusifs, tels que $\breve{D}(s)$, sont faites dans [Mat94, BP02].

Malheureusement, le système représentant un instrument complet fait intervenir un grand nombre de retards différents, et l'étude de stabilité en temps continu devient extrêmement difficile. Cependant, une approche adaptée à notre étude de tubes acoustiques représentés par un réseau d'éléments, consiste à étudier la stabilité et la passivité de chaque élément isolé et de propager le résultat par récurrence (voir partie 3.3 p.106) .

Pour les systèmes à temps discret avec retards donnés par z^{-N}, l'étude de stabilité est bien plus simple parce que le système est de dimension finie et la stabilité est caractérisée par un simple polynôme en la variable z de degré supérieur à N. On peut alors utiliser les outils standard pour étudier la stabilité : critère de Jury ou de Schur-Cohn [BR93, §7.2], ou bien numériquement par le calcul des racines du polynôme caractéristique.

Systèmes diffusifs couplés On s'intéressera dans la suite à une équation aux dérivées partielles en espace et en temps, avec dérivées fractionnaires en temps. Ce modèle est de la forme générale suivante : pour $z \in]0,\,1[$, avec $r(z) > 0$, $\eta(z), \varepsilon(z) \geq 0$, l'inconnue $w(t,z)$ vérifie :

$$\partial_t^2 w + \eta(z)\,\partial_t^{3/2} w + \varepsilon(z)\,\partial_t^{1/2} w - \frac{1}{r^2}\partial_z(r^2\,\partial_z w) = 0\,. \tag{1.76}$$

On ajoute à cela des conditions aux limites statiques en $z = 0$ et $z = 1$.

Ce modèle est non standard pour deux raisons : il n'y a pas de propriété simple de décroissance de l'énergie des ondes, à cause de la présence des termes fractionnaires en temps. De plus, les coefficients étant variables en espace $\eta \mapsto \eta(z)$, et $\varepsilon \mapsto \varepsilon(z)$, il n'y a pas d'espoir d'obtenir une formule analytique de la solution, contrairement à ce qui pouvait se passer dans le cas des cylindres (cf. [Md95]).

Cependant, en réutilisant la notion de *représentation diffusive* (voir partie 1.3.2), on peut prouver l'existence et l'unicité des solutions de (1.76), et garantir la *stabilité asymptotique* de cette solution. L'idée est de passer d'un nombre infini de degrés de libertés à un nombre fini, tout en prenant soin de préserver la propriété fondamentale de passivité de ces modèles. Ecrivons pour cela :

$$\int_0^\infty \mu_\beta(\xi)\,\frac{1}{s+\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{s^\beta}\,, \quad \text{avec} \quad \mu_\beta(\xi) \propto \frac{1}{\xi^\beta}\,,$$

pour $\Re\mathrm{e}(s) > 0$, et aussi :

$$\int_0^\infty \nu_\alpha(\xi)\,\frac{s}{s+\xi}\,\mathrm{d}\xi = s^\alpha\,, \quad \text{avec} \quad \nu_\alpha(\xi) \propto \frac{1}{\xi^{1-\alpha}}\,.$$

On voit qu'un intégrateur fractionnaire d'ordre $0 < \beta < 1$ ou un dérivateur fractionnaire d'ordre $0 < \alpha < 1$ ne sont rien d'autre qu'une aggrégation *positive* continue de circuits passe-bas (RC) ou passe-haut (RL). C'est précisément cette méthodologie qui a permis de résoudre les questions mathématiques d'existence, d'unicité et de stabilité dans les cas de pertes générales et de courbure quelconque, voir [HM08, Mat09, Mat06, MP05, MAM01].

De manière à mieux comprendre le principe, nous proposons en annexe D un *modèle réduit* de cela, qui consiste en la projection de l'équation des ondes précédentes sur un mode, avec la discrétisation des opérateurs diffusifs en leur approximation (voir (1.40) et (1.41) page 41).

$$\ddot{x} + z + \dot{x} + y + \omega^2\,x = 0\,, \tag{1.77}$$

où les amortissements sont de 3 types : $\dot{x} = v$, instantané en v, $y(v)$, avec mémoire, et comportement passe-bas, enfin $z(v)$, avec mémoire, et comportement passe-haut.

1.3.7 Simulations

Dans cette partie nous construisons des *guides d'ondes* pour un tube *test* donnés à partir du modèle de réseaux de cylindres (qu'on nomme ici (M1)) et du modèle de cônes (M2). Nous étudions également le pas d'échantillonnage spatial nécessaire pour obtenir une réponse impulsionnelle sans artefacts.

1.3.7.1 *Tube test et fréquence d'échantillonnage adaptée*

Le tube *test* est défini par $r(\ell) = R_0 + \ell^\alpha$ pour $\ell \in [0, L]$, avec $L = 49$ cm, $R_0 = 2.5$ mm, $\alpha = 4$. Ce tube est terminé par une impédance idéalement nulle. La réponse impulsionnelle exacte de la réflexion globale de ce tube *test* est notée $h_{test}(t)$ (cf. Fig. 1.19).

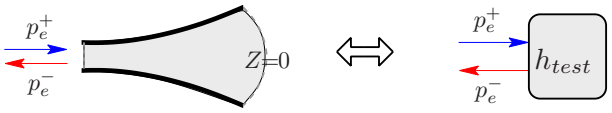


Fig. 1.19 – *La réponse impulsionnelle h_{test} représente la réflexion globale du tube* test

Définissons la longueur L_e par la distance parcourue par l'onde acoustique durant une période d'échantillonnage T_e. Elle est donnée par $L_e := T_e c_0$.

Maintenant nous choisissons la fréquence d'échantillonnage de sorte que $L = 64 L_e$. Pour une longueur de tube $L = 49$ cm et avec $K = 64$, la fréquence d'échantillonnage est donnée par $F_e = 1/T_e = c_0/L_e = K c_0/L \approx 44924$ Hz.

1.3.7.2 *Echantillonnage spatial "idéal" du tube test*

Pour (M1) sans perte, la réponse impulsionnelle h_1 associée à des tronçons de tubes de longueur δz donne

$$h_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \delta(t - 2n\,\delta z/c_0) \tag{1.78}$$

où $\delta(.)$ est la distribution de Dirac, et les coefficients a_n peuvent être déduits à partir des coefficients de réflexion k avec (1.30). Ainsi le choix $\delta z = c_0 T_e/2 = L_e/2$ conduit à une réponse impulsionnelle échantillonnée $h(t_n) = a_n$ qui évite de "capter les zéros" intercalés. En conséquence, selon ce résultat, un "échantillonnage" correct du tube *test* pour le modèle (M1) correspond à $2K = 128$ tronçons de tubes cylindriques.

Avec des pertes visco-thermiques ($\epsilon > 0$), la réponse impulsionnelle en temps continu devient plus lisse puisque les pertes introduisent de la dissipation via $\breve{D}$ qui correspond à une réponse impulsionnelle lentement décroissante. Mais cet effet n'est pas suffisant pour réduire les artefacts dus à l'échantillonnage du tube test, et le nombre de tronçons doit toujours être $2K = 128$ (voir figures 1.20-(a,b,c)). Cet échantillonnage spatial "idéal" correspond à des longueurs de tronçons cylindriques égales à $\delta z_1 := L_e/2$.

Pour (M2), la réponse impulsionnelle h_2 en temps continu implique des exponentielles décroissantes dues aux fonctions de transfert $R_s(s)$ (voir [GKP90, BKC99]). Choisir un nombre de tronçons coniques égal à $K = 64$ suffit pour éviter les artefacts que l'on observerait avec un échantillonnage moins fin (voir figures 1.20-(d,e,f)). Cet échantillonnage "idéal" correspond à des longueurs de tronçons coniques égales à $\delta z_2 := L_e$.

Notons que la simulation numérique de 128 cylindres est en fait approximativement équivalente à la simulation de 64 cônes en terme de complexité de calcul. Cela vient du fait que la version numérique de (M2) implique des filtres du premier ordre dans les cellules des jonctions de tube, et non plus de simples coefficients k pour (M1).

1.3.7.3 *Construction et simulation d'une version numérique*

La structure de *Kelly-Lochbaum* est construite pour chacun des modèles (M1) et (M2), avec la factorisation des réflexions et la factorisation des propagateurs (cf. §1.2.3.3 p.38).

- Les réflexions $R_s(s)$ sont discrétisées en $R_s^d(z)$ en utilisant le bloqueur d'ordre 1.
- La dispersion $\breve{D}(s)$ est approximée par $\widetilde{D}(s)$ avec 3 pôles (voir (1.41)), et discrétisée en $\widetilde{D}^d(z)$.
- Enfin les retards $\exp(-MT_e s)$ sont discrétisés en z^{-M} et simulés par des "tampons circulaires"[6].

La figure 1.20 compare les résultats obtenus pour les modèles (M1) et (M2) avec les 3 échantillonnages du tube test suivant : $\delta z = 16\delta z_k$, $\delta z = 4\delta z_k$ et $\delta z = \delta z_k$, pour $k \in \{1, 2\}$. Le dernier cas correspond à l'échantillonnage "idéal" du tube. On observe les artefacts de la réponse impulsionnelle avec de mauvais échantillonnages, qui disparaissent dans le dernier cas.

Remarque 1.17. *Pour l'échantillonnage "idéal" du modèle (M1), la longueur des tronçons cylindriques est $\delta z_1 = L_e/2$, qui correspond à un retard de $T_e/2$. Cependant la factorisation des retards dans la structure de* Kelly-Lochbaum *(cf. Fig. 1.11) fait apparaître des retards doubles sur la ligne retour. En conséquence les retards à simuler en temps discret sont z^{-1} et non $z^{-\frac{1}{2}}$.*

[6] Les tampons circulaires sont des "files d'attentes" FIFO (First In/First Out) gérées de façon circulaire. Ils permettent ici de simuler un retard Z^{-M} à faible coût avec 3 opérations à chaque étape : lecture du plus viel échantillon, écriture de l'entrée dans le tampon et incrémentation (modulo M) de l'indice.

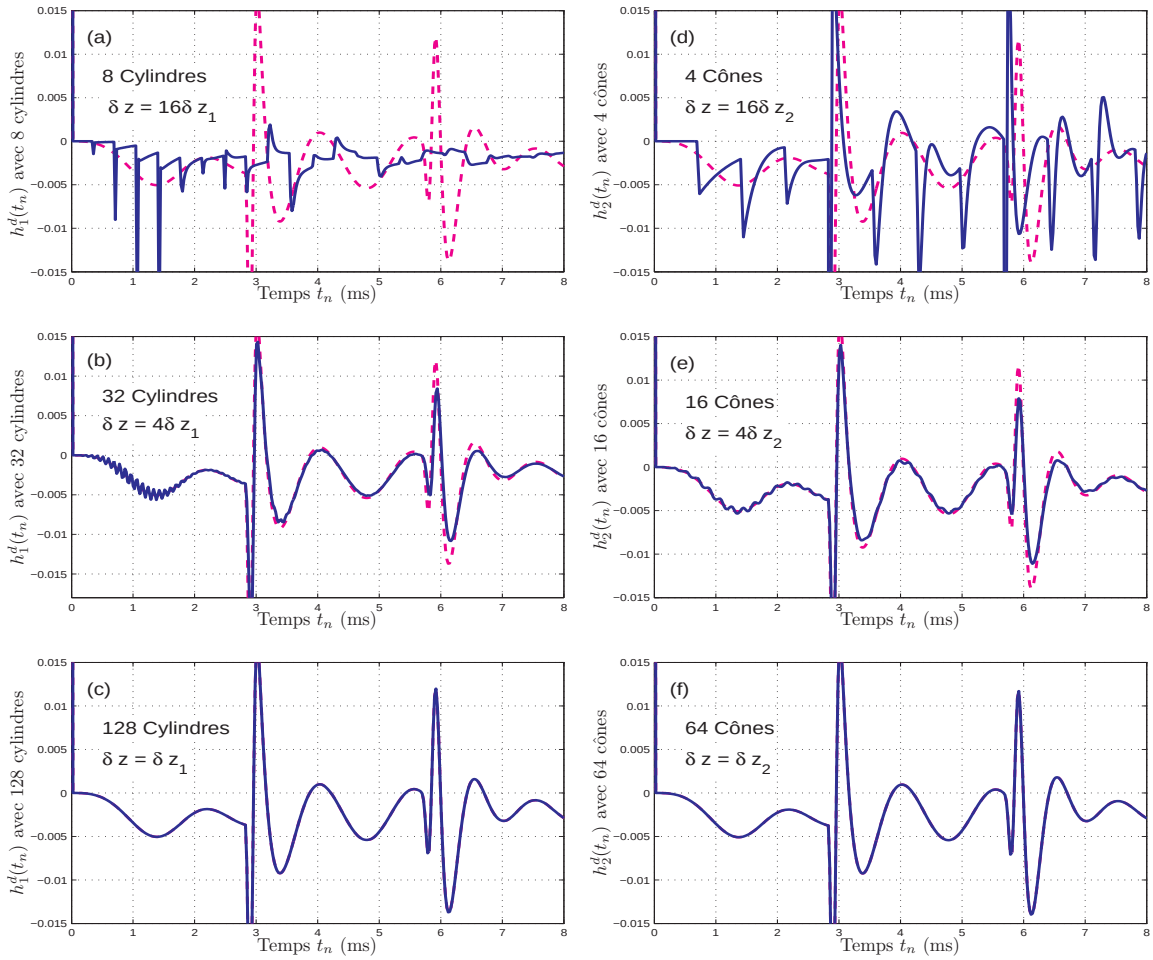


Fig. 1.20 – *Réponses impulsionnelles de la simulation de réseaux de cylindres ou de cônes dans le domaine temporel (le temps en abscisse (ms)) : (a) réseau de 8 cylindres, (b) réseau de 32 cylindres, (c) réseau de 128 cylindres, (d) réseau de 4 cônes, (e) réseau de 16 cônes, (f) réseau de 64 cônes. Les courbes pointillées correspondent à la réponse impulsionnelle du tube correctement échantillonnée pour les cylindres et les cônes.*

1.4 Problématique

Comme nous venons de voir, la modélisation des tubes acoustiques à section variable par un réseau de cylindres ou de cônes impose un échantillonnage du tube original relativement fin, et qui dépend de la fréquence d'échantillonnage utilisée.

Cependant la simulation des fonctions de dispersions dues aux pertes visco-thermiques occupe une importante part dans l'utilisation du processeur. En effet, pour une approximation avec 3 pôles, la simulation numérique des fonctions $\tilde{D}^d(z)$ demande approximativement les 3 quarts de l'utilisation totale du processeur.

Or une réduction du nombre de pôles de $\tilde{D}(s)$ diminue évidemment la qualité de l'approximation et donc de la modélisation du tube.

Pour tenter de réduire le coût de calcul sans réduire la qualité du modèle, une solution est de diminuer le nombre de tronçons de tube à simuler. Pour ce faire nous devons considérer un autre modèle acoustique qui permette d'approximer le profil original du tube test avec moins de tronçons.

Dans [Ber99], est étudié un modèle de tubes acoustiques permettant de prendre en compte la courbure du rayon. Avec l'approche des *Guides d'Ondes*, il est alors possible de sous-échantillonner spatialement le tube avec un nombre réduit de tronçons. Cependant les pertes visco-thermiques ne sont pas prises en compte.

Dans la partie suivante, nous allons étudier un modèle acoustique qui prend en compte à la fois les pertes visco-thermique et la courbure du tube. Nous allons également chercher et mettre en place une structure adaptée à la simulation en *Guides d'Ondes* à faible coût.

Chapitre 2

Modèle de Webster-Lokshin et décomposition en quadripôles

Ce chapitre présente un modèle physique de tubes acoustiques à symétrie de révolution, avec une section variable et la prise en compte des pertes visco-thermiques à la paroi. Contrairement aux modèles de réseaux de cylindres et de cônes, grâce à la courbure des tronçons, le modèle étudié ici permet d'échantillonner spatialement le rayon du tube avec un nombre plus petit de tronçons et sans contrainte sur le pas d'échantillonnage. Puisque le tube est approximé avec moins de tronçons, le nombre de fonctions de transfert à simuler est lui aussi réduit. Ainsi, il sera possible d'augmenter la dimension de l'approximation des pertes, et donc la qualité, sans augmenter le coût de calcul global pour le temps-réel par rapport aux deux modèles présentés dans le chapitre précédent.

Pour respecter le formalisme des *guides d'ondes*, il est intéressant d'obtenir une structure de la forme des réseaux de *Kelly-Lochbaum* pour le modèle étudié. Cependant avec ce modèle, le système modélisant un tronçon de tube fait intervenir des opérateurs non standard en acoustique, et l'obtention de ce type de structure n'est pas évidente.

Le sujet de ce chapitre est de présenter le modèle acoustique utilisé et la méthode que nous avons employée pour arriver à la structure de la forme des réseaux de *Kelly-Lochbaum*. Le chapitre est organisé de la façon suivante :

Dans la première partie, nous présentons le modèle acoustique utilisé, le modèle de *Webter-Lokshin*. Puis des solutions sont obtenues soit numériquement pour des tubes de rayon quelconque de classe $\mathcal{C}^1$ (c-à-d avec continuité de rayon et de pente), soit analytiquement pour des cas particuliers de tubes à courbure constante. De ces solutions analytiques on déduit pour un tronçon donné un système du type *quadripôle* qui a pour entrées et sorties des ondes progressives. Les fonctions de transfert de ce système représentent les effets globaux du tronçon sur les ondes.

Dans la deuxième partie, nous étudions ces effets globaux du tronçon et en isolons des effets acoustiques "élémentaires". Une interprétation physique de ces phénomènes acoustiques donne une écriture "symbolique" du système. Puis une identification mathématique permet de déterminer les expressions des fonctions de transfert de la structure. Nous présentons différentes formes de quadripôles obtenues à partir du modèle de *Webster-Lokshin*. L'une de ces formes est particulièrement intéressante puisqu'elle isole les 2 uniques retards associés au transport d'ondes progressives, et fait apparaître séparément les effets de la géométrie du tube : effet de rupture de section, de pente et de courbure. Nous appelons cette forme : la forme *décomposée*.

Dans la troisième partie, nous étudions les fonctions de transfert des réflexions et transmissions d'ondes aux jonctions lorsqu'on concatène deux tronçons de tubes. Pour 4 cas particuliers de jonctions de tubes, une simplification algébrique à l'interface de 2 quadripôles, mis sous la forme *décomposée*, fait apparaître des réseaux de *Kelly-Lochbaum* avec des fonctions de transfert connues dans la littérature. Ainsi cette structure permet de rassembler les résultats connus de la littérature avec un formalisme commun, et d'étendre la modélisation à des cas plus généraux.

2.1 Modèle de Webster-Lokshin et variables d'état

2.1.1 Équations du modèle pour la pression et le débit acoustique

Le modèle de *Webster-Lokshin* est un modèle à dépendance mono-spatiale, qui caractérise la propagation linéaire d'ondes acoustiques dans des tubes à symétrie axiale, avec l'hypothèse faible de quasi-sphéricité des isobares au voisinage de la paroi (voir [HÓ3, HÓ2]), et prenant en compte les pertes visco-thermiques à la paroi (voir [Pol91, LR78, Lok78]) avec l'hypothèse des tubes larges (cf. §1.2.3.2 p.37). La pression acoustique P et le débit acoustique U sont gouvernés par les 2 équations suivantes, données dans le domaine de Laplace :

$$\left(\left[\left(\frac{s}{c_0}\right)^2 + 2\varepsilon(\ell)\left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon(\ell)\right] - \frac{\partial^2}{\partial \ell^2}\right)\Big\{r(\ell)P(\ell,s)\Big\} = 0, \tag{2.1}$$

$$\rho_0\, s\, \frac{U(\ell,s)}{S(\ell)} + \frac{\partial}{\partial \ell}P(\ell,s) = 0, \tag{2.2}$$

où $s \in \mathbb{C}$ est la variable de Laplace ($\Im\mathrm{m}(s) = \omega$ est la pulsation), ℓ est l'abscisse curviligne à la paroi, $r(\ell)$ est le rayon du tube, $S(\ell) = \pi r(\ell)^2$ est l'aire d'une section, $\varepsilon(\ell)$ quantifie les pertes visco-thermiques et $\Upsilon(\ell) = r''(\ell)/r(\ell)$ représente la courbure du tube. L'équation (2.1) est appelée l'équation de *Webster-Lokshin*[1], et (2.2) est l'équation d'*Euler* satisfaite en dehors de la couche limite associée aux pertes visco-thermiques. Le coefficient des pertes $\varepsilon(\ell)$ est donné en $\mathrm{m}^{-\frac{1}{2}}$ par

$$\varepsilon(\ell) = \kappa_0 \frac{\sqrt{1 - r'(\ell)^2}}{r(\ell)}. \tag{2.3}$$

Remarquons que l'équation standard des pavillons (voir [Web19][2]) correspond à (2.1) sans perte ($\varepsilon(\ell) = 0$) et sous hypothèse d'ondes planes (ℓ est remplacée par la coordonnée axiale z). Les cylindres et les cônes sont caractérisés par $\Upsilon(\ell) = 0$. Dans la suite de ce chapitre, nous considérons Υ positif ou nul, ce qui correspond à des tubes cylindriques, coniques ou évasés. Le cas des courbures négatives nécessite une étude plus spécifique pour obtenir une réalisation stable en guides d'ondes (voir [Ber99]). Nous y reviendrons en partie 3.4 p.112.

En notant $\underline{r}(z)$ le rayon du tube en fonction de la coordonnée axiale z, l'abscisse curviligne vaut

$$\ell(z) = \int_0^z \sqrt{1 + \underline{r}'(z)^2}\, \mathrm{d}z \tag{2.4}$$

et $\underline{r}(z) = r(\ell(z))$. En conséquence, $|r'(\ell)| < 1$ et $r'(\ell) \to 1$ quand $\underline{r}'(z) \to +\infty$.

Pour des conditions standard, les constantes physiques sont données par : la masse volumique $\rho_0 = 1.2$ kg.m^{-3}, la célérité du son $c_0 = 344$ m.s^{-1}, le coefficient $\kappa_0 = \sqrt{l'_v} + (\gamma - 1)\sqrt{l_h} \approx 3.5\ 10^{-4}$ m$^{\frac{1}{2}}$ où l'_v et l_h sont les longueurs caractérisques des effets visqueux (l'_v) et thermiques (l_h) (voir [Bru98]).

2.1.2 Ondes progressives dans les tubes à section variable

En partie 1.1.2 page 28, un changement d'état est présenté. A partir de l'état acoustique (P, U), il définit de nouvelles variables $p^{\pm}$ qu'on appelle *ondes progressives* pour les cylindres. Cependant, nous avons vu qu'elles sont progressives et découplées uniquement pour les cylindres que nous avons nommés tubes de "référence".

Ici, nous rappelons ce changement de variables et nous en donnons deux autres. Nous verrons pour chacun d'entre eux leurs propriétés dans le cas du modèle de *Webster-Lokshin*, à savoir si les variables associées sont progressives et découplées.

[1] A notre connaissance l'équation (2.1) apparaît pour la première fois dans [HÓ3], et son nom dans [HM03]. L'origine du nom vient du fait que cette équation prend en compte deux phénomènes : la variation du profil (équation de Webster [Web19]) et les pertes visco-thermiques pour les tubes larges (équation de Lokshin [LR78, Lok78] en 1978).

[2] L'équation des pavillons est originellement due à Bernoulli [Ber64] et Lagrange [Lag61] dont les travaux ont été rassemblés dans [Eis67].

2.1.2.1 *Changement de variables de type ondes planes* $p^{\pm}$

Rappelons la définition des variables p^+ et p^- donnée en partie 1.1.2 et donnons la relation inverse

$$\begin{bmatrix} p^+(\ell,s) \\ p^-(\ell,s) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & Z_c \\ 1 & -Z_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P(\ell,s) \\ U(\ell,s) \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

$$\begin{bmatrix} P(\ell,s) \\ U(\ell,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y_c & -Y_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p^+(\ell,s) \\ p^-(\ell,s) \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

où $Z_c = 1/Y_c = \rho_0 c_0/S_c$ est l'impédance caractéristique d'un cylindre de *référence* sans perte de section $S_c = \pi r_c^2$ choisi arbitrairement.

Dans le cas du modèle de *Webster-Lokshin*, on montre que ces variables ne sont ni découplées ni parfaitement progressives avec pertes visco-thermiques ($\varepsilon(\ell) \neq 0$), néanmoins elles préservent le principe de causalité et gardent un sens physique aux jonctions de tubes. De plus, nous verrons en partie 2.4 p.79 qu'après connexion de 2 tubes, ces variables disparaissent de la structure de modélisation, si bien qu'elles ne sont pas simulées. En conséquence, la modélisation d'un réseau de tronçons de tubes, ne dépend pas du choix de Z_c qui est arbitraire.

Remarque 2.1. *Modéliser un élément par un système ayant comme variables d'entrée et de sortie p^+ et p^-, revient en réalité à considérer des conditions frontières imposées par des tubes cylindriques de rayon r_c semi-infinis (ou anéchoïques) connectés à chaque porte.*

Puis connecter un élément sur le système, permet de "remplacer" les conditions frontières du tube de référence*, par celles du nouvel élément.*

Remarque 2.2. *Nous verrons en partie 2.3.2 p.74, que l'utilisation de ces ondes comme variables d'échange, permet de faire apparaître explicitement l'effet de changement de sections entre deux tubes.*

Nous présentons maintenant deux changements d'états qui définissent des variables qui restent progressives pour le modèle de *Webster-Lokshin*.

2.1.2.2 *Changement de variables de type ondes planes* $\phi^{\pm}$

Les deux équations suivantes donnent la définition des variables ϕ^+ et ϕ^- à partir de l'état (P,U), et la relation inverse

$$\begin{bmatrix} \phi^+(\ell,s) \\ \phi^-(\ell,s) \end{bmatrix} = \frac{r(\ell)}{2}\begin{bmatrix} 1 & Z(\ell) \\ 1 & -Z(\ell) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P(\ell,s) \\ U(\ell,s) \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

$$\begin{bmatrix} P(\ell,s) \\ U(\ell,s) \end{bmatrix} = \frac{1}{r(\ell)}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Y(\ell) & -Y(\ell) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi^+(\ell,s) \\ \phi^-(\ell,s) \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

où $Z(\ell) = 1/Y(\ell) = \rho_0 c_0/S(\ell)$ avec $S(\ell) = \pi r(\ell)^2$. L'annexe E (page 166) donne ces deux équations sous forme de quadripôles de conversion.

Avec le modèle de *Webster-Lokshin* (voir les équations (2.1) et (2.2) en page 59), ces ondes sont gouvernées par le système couplé (voir [HÓ6])

$$\begin{cases} \left(\dfrac{s}{c_0} + \dfrac{\partial}{\partial \ell}\right)\phi^+(\ell,s) &= +\zeta(\ell)\phi^-(\ell,s) - \varepsilon(\ell)\left(\dfrac{s}{c_0}\right)^{\frac{1}{2}}\phi(\ell,s), \\ \left(\dfrac{s}{c_0} - \dfrac{\partial}{\partial \ell}\right)\phi^-(\ell,s) &= -\zeta(\ell)\phi^+(\ell,s) - \varepsilon(\ell)\left(\dfrac{s}{c_0}\right)^{\frac{1}{2}}\phi(\ell,s), \end{cases} \tag{2.9}$$

où $\phi = \phi^+ + \phi^- = rP$, et $\zeta = r'/r$. L'opérateur $\left(s/c_0 \pm \partial_\ell\right)$ est l'opérateur de transport et le membre de droite décrit le couplage de ces ondes progressives dû à $\zeta(\ell)$ et les pertes visco-thermiques.

Dans le cas d'ondes planes se propageant dans un tube cylindrique sans perte ($\varepsilon(\ell) = 0$ et $\zeta(\ell) = 0$), l'état acoustique $\phi^{\pm}$ correspond à des ondes progressives découplées. Pour le modèle de *Webster-Lokshin*, en plus de l'opérateur de transport, le second membre de (2.9) vient perturber ces ondes par des termes de couplage. Ces ondes peuvent encore être interprétées comme des ondes progressives couplées : elles sont compatibles avec le principe de causalité.

2.1.2.3 *Changement de variables de type ondes sphériques* $\psi^{\pm}$

Les deux équations suivantes donnent la définition des variables ψ^+ et ψ^- à partir de l'état (P,U), et la relation inverse (voir [HM06a, HÓ6])

$$\begin{bmatrix}\psi^+(\ell,s)\\ \psi^-(\ell,s)\end{bmatrix} = \frac{r(\ell)}{2}\begin{bmatrix}1 & Z(\ell)\\ 1 & -Z(\ell)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P(\ell,s)\\ U(\ell,s)\end{bmatrix} + \frac{c_0}{s}\frac{r'(\ell)}{2}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}P(\ell,s), \tag{2.10}$$

$$\begin{bmatrix}P(\ell,s)\\ U(\ell,s)\end{bmatrix} = \frac{1}{r(\ell)}\begin{bmatrix}1 & 1\\ Y(\ell) & -Y(\ell)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi^+(\ell,s)\\ \psi^-(\ell,s)\end{bmatrix} + \frac{c_0}{s}\frac{r'(\ell)}{r(\ell)^2}\begin{bmatrix}0\\ Y(\ell)\end{bmatrix}\psi(\ell,s), \tag{2.11}$$

avec $\psi = \psi^+ + \psi^- = rP$. L'annexe E (page 166) donne ces deux équations sous forme de quadripôles de conversion.

Ces variables permettent de réécrire le modèle de *Webster-Lokshin* par le système couplé suivant (voir [HM06a])

$$\begin{cases} \left(\frac{s}{c_0}+\frac{\partial}{\partial\ell}\right)\psi^+(\ell,s) &= -\left(\varepsilon(\ell)\left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{c_0}{s}\frac{\Upsilon(\ell)}{2}\right)\psi(\ell,s),\\ \left(\frac{s}{c_0}-\frac{\partial}{\partial\ell}\right)\psi^-(\ell,s) &= -\left(\varepsilon(\ell)\left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{c_0}{s}\frac{\Upsilon(\ell)}{2}\right)\psi(\ell,s). \end{cases} \tag{2.12}$$

Dans le cas des tubes cylindres ou coniques ($\Upsilon(\ell)=0$), et sans perte ($\varepsilon(\ell)=0$), l'état $\psi^{\pm}$ correspond à des ondes progressives découplées. Pour le modèle de *Webster-Lokshin*, ces ondes sont couplées mais restent progressives, ainsi leur définition permet de préserver le principe de causalité. De plus, en annexe A.4.1 page 155, nous montrons que le système représentant un tronçon avec les ondes $\psi^{\pm}$ pour $\Upsilon \geq 0$ est causal et stable au sens des espaces de *Hardy*.

Remarquons que les membres de droite de (2.12), qui décrivent le couplage, sont identiques, cela aura pour conséquences d'obtenir des quadripôles parfaitement symétriques. Notons aussi que ces ondes $\psi^{\pm}$ sont découplées dans les tubes coniques sans pertes, c'est pourquoi nous parlons d'un changement d'état du type *ondes sphériques*.

2.1.2.4 *Energie et stabilité des ondes progressives*

Définissons une densité d'énergie acoustique e_{ac} par la somme d'une énergie cinétique et d'une énergie potentielle. Son expression en fonction de la vitesse V et de la pression acoustique P, est donnée par

$$e_{ac} = \pi r^2\left(\frac{\rho_0}{2}V^2+\frac{1}{2\rho_0 c_0^2}P^2\right). \tag{2.13}$$

En remplaçant les variables P et V par les variables de type progressives (voir (2.6), (2.8) et (2.11) où $U(\ell,s)=V(\ell,s)S(\ell)$), nous obtenons 3 expressions équivalentes de la densité d'énergie :

$$e_{ac} = \frac{\pi r^2}{2\rho_0 c_0^2}\left[\left(1+\frac{Z^2}{Z_c^2}\right){p^+}^2+\left(1+\frac{Z^2}{Z_c^2}\right){p^-}^2+2\left(1-\frac{Z^2}{Z_c^2}\right)p^+p^-\right] \tag{2.14}$$

$$= \frac{\pi}{\rho_0 c_0^2}\left[{\phi^+}^2+{\phi^-}^2\right] \tag{2.15}$$

$$= \frac{\pi}{2\rho_0 c_0^2}\left[\left(1+\left(1+\zeta\frac{c_0}{s}\right)^2\right){\psi^+}^2+\left(1+\left(1-\zeta\frac{c_0}{s}\right)^2\right){\psi^-}^2+2\left(1+\left(1-\left(\zeta\frac{c_0}{s}\right)^2\right)\right)\psi^+\psi^-\right]. \tag{2.16}$$

avec $\zeta(\ell)=r'(\ell)/r(\ell)$.

Le modèle de *Webster* étant un modèle conservatif, et le modèle de *Webster-Lokshin* un modèle dissipatif, l'énergie acoustique est une quantité positive bornée ($0 \leq e_{ac} < \infty$).

Puisque l'équation (2.15) donne cette énergie sous la forme $e_{ac} = a_1{\phi^+}^2 + a_2{\phi^-}^2$, avec $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$, alors les variables ϕ^+ et ϕ^- sont elles aussi bornées ($-\infty < \phi^\pm < +\infty$). Cependant, en ce qui concerne les variables $p^\pm$ et $\psi^\pm$, les équations (2.14) et (2.16) font chacune apparaître un terme croisé en p^+p^- et $\psi^+\psi^-$ respectivement, ce qui ne permet pas de conclure directement.

Remarque 2.3. *Ceci ne donne pas de preuve rigoureuse sur la stabilité des systèmes, il est néammoins intéressant d'en faire mention. En pratique, en considérant les variables $\phi^\pm$ nous n'avons jusqu'à présent jamais observé d'instabilité dans les relations entrée/sortie pour des systèmes physiquement valides, alors que c'est parfois le cas en considérant les variables $\psi^\pm$ (cf. §3.5.1 p.117).*

2.1.3 Solutions numériques

On considère ici un tube de longueur L et de profil quelconque $r(\ell) > 0$ de classe $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire continu et continuement dérivable pour $0 < \ell < L$.

Si la variable de Laplace est considérée fixe à une fréquence donnée, $s = i\omega$, l'équation de *Webster-Lokshin* devient une *équation différentielle ordinaire*, il est alors possible de déduire par des méthodes numériques standard l'impédance d'entrée d'un tube en considérant un problème de Cauchy. Voici les étapes de la méthode.

Etape 1 : Pour $\underline{s} := s/c_0$ fixe, on définit $p(\ell) := P(\ell, s)$ et $\varphi(\ell) := r(\ell)P(\ell, s)$. L'équation de *Webster-Lokshin* devient alors

$$\varphi'' - \gamma^2\varphi = 0, \quad \text{avec } \gamma(\ell)^2 := \left(\underline{s}^2 + 2\varepsilon(\ell)\underline{s}^{3/2} + \Upsilon(\ell)\right). \tag{2.17}$$

Ceci donne

$$p''(\ell) = f(p', p, \ell) := -2\zeta(\ell)p'(\ell) + \left(\underline{s}^2 + 2\varepsilon(\ell)\underline{s}^{3/2}\right)p(\ell), \tag{2.18}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \zeta(\ell) & := & r'(\ell)/r(\ell), \\ \varepsilon(\ell) & := & \kappa_0\sqrt{1 - r'(\ell)^2}/r(\ell). \end{cases} \tag{2.19}$$

Etape 2 : Les conditions frontières sont données par une impédance *bouchon* $Z_b(s)$ qu'on impose à l'extrémité droite du tube, $\ell = L$. Cette impédance peut être une impédance de rayonnement par exemple. En utilisant l'équation d'Euler, $Z_b(s)$ nous donne une relation entre $p(L)$ et $p'(L)$:

$$Z_b(s) := \frac{P(\ell = L, s)}{U(\ell = L, s)} = -\frac{\rho_0 s}{S(L)}\frac{P(\ell = L, s)}{\partial_\ell P(\ell = L, s)} \quad \Rightarrow \quad p'(L) = -\frac{\rho_0 s}{S(L)Z_b(s)}p(L). \tag{2.20}$$

Pour le cas d'une impédance bouchon infinie (tube idéalement fermé à droite), la relation dégénère en $p'(L) = 0$ et $p(L)$ quelconque. Pour une impédance bouchon égale à zéro (tube idéalement ouvert à droite), on écrit $p(L) = 0$ et $p'(L)$ quelconque.

Etape 3 : On définit le vecteur $X(\ell) := [\, p(\ell)\ ,\ p'(\ell)\,]^T$. Le problème de Cauchy peut alors s'écrire

$$X' = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} = F(X, \ell) := \begin{bmatrix} X_2 \\ f(X_2, X_1, \ell) \end{bmatrix}, \tag{2.21}$$

avec f donnée par (2.18) est à valeur complexe. Pour tenir compte des conditions limites, on prend comme vecteur initial, avec $A \neq 0$ quelconque :

$$\begin{cases} \text{Si } Z_b = 0 : & X(L) = \begin{bmatrix} 0 & A \end{bmatrix}^T, & \text{(Cond. homogènes de Dirichlet)} \\ \text{Si } Z_b = \infty : & X(L) = \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}^T, & \text{(Cond. homogènes de Neumann)} \\ \text{Sinon :} & X(L) = \begin{bmatrix} A & -\dfrac{\rho_0 s}{S(L)Z_b(s)}A \end{bmatrix}^T. & \text{(Cond. limites de Robin)} \end{cases} \tag{2.22}$$

Etape 4 : Enfin, (2.21) est résolue numériquement pour $\ell \in [0, L]$, avec $X(L)$ pour valeur initiale définie par (2.22). En pratique nous utilisons les fonctions *ode23* ou *ode45* sous *Matlab*© , basées sur la méthode de *Runge-Kutta* (voir [BS89, DP80]).

Avec les fonctions citées précédemment, il est nécessaire de faire le changement de variable $x = L-\ell$ afin de ramener les conditions initiales en $x = 0$.

Pour chaque fréquence ω, la méthode donne la pression et sa dérivée à un coefficient près, A, en $\ell = 0$ ($x = L$). L'impédance d'entrée du tube s'en déduit alors par

$$Z_i(i\omega) = \frac{P(\ell = 0, i\omega)}{U(\ell = 0, i\omega)} = -\frac{\rho_0\, i\omega}{S(0)} \frac{P(\ell = 0, i\omega)}{\partial_\ell P(\ell = 0, i\omega)} = -i\frac{\rho_0\omega}{S(0)} \frac{p(0)}{p'(0)}. \tag{2.23}$$

Exemples : Nous avons choisi 2 profils de tubes quelconques, de régularité $\mathcal{C}^1$, pour lesquels les impédances d'entrée respectives sont calculées numériquement.

L'impédance bouchon imposée à droite des tubes est une impédance nulle, $Z_b(i\omega) = 0$ pour tout ω, ce qui correspond à des tubes idéalement ouverts à droite.

Pour chacun d'eux, deux courbes sont calculées : l'une tient compte des pertes visco-thermiques avec $\varepsilon(\ell)$ définie par (2.19), l'autre considère le modèle sans perte en forçant $\varepsilon(\ell)$ à valoir 0. L'affichage des courbes (cf. Fig. 2.1 et 2.2) permet de comparer le modèle avec et sans perte. Ces courbes montrent que l'effet des pertes agit principalement sur les coefficients de qualité des minima et maxima, mais aussi sur leur position fréquentielle.

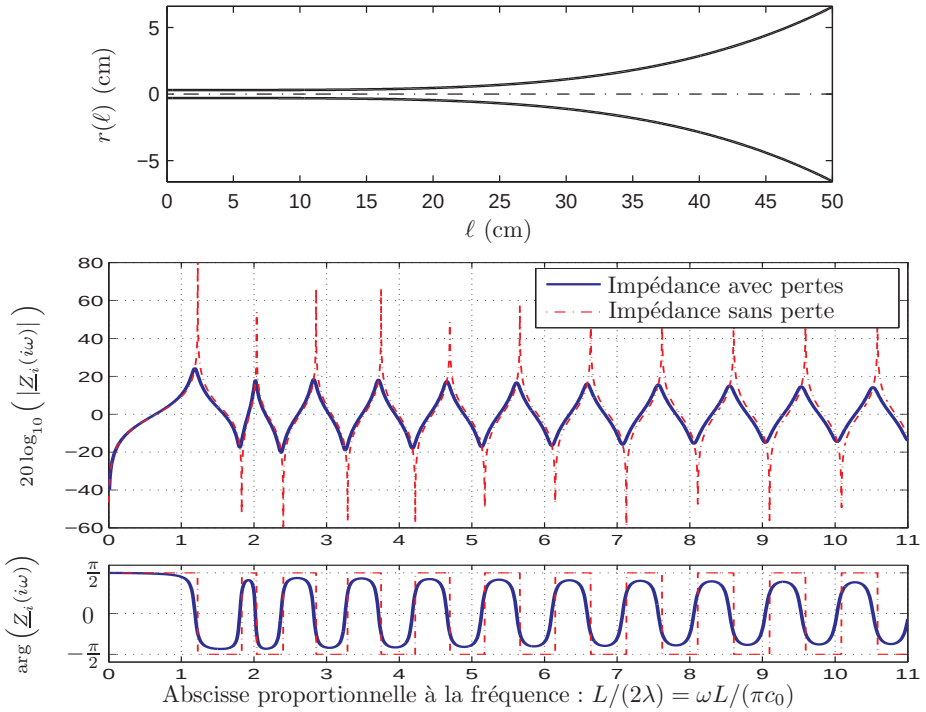


Fig. 2.1 – *Profil et impédance d'entrée du tube* test *de la partie 1.3.7. Le profil est donné par* $r(\ell) = R_0 + \ell^\alpha$ *pour* $\ell \in [0, L]$, *avec* $L = 49$ *cm*, $R_0 = 2.5$ *mm et* $\alpha = 4$. *L'abscisse affichée est* $k = L/(2\lambda)$ *où* λ *est la longueur d'onde associée à la pulsation* $\omega = \pi c_0/(2\lambda)$. *Pour un cylindre sans perte fermé-ouvert, les minima du module de l'impédance sont placés à chaque* k *entier* ($k_{min} \in \mathbb{Z}$), *et les maxima sont intercalés* ($k_{max} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$). *Ce choix permet donc de comparer la position des extréma du tube considéré par rapport à ceux d'un cylindre sans perte fermé-ouvert.*

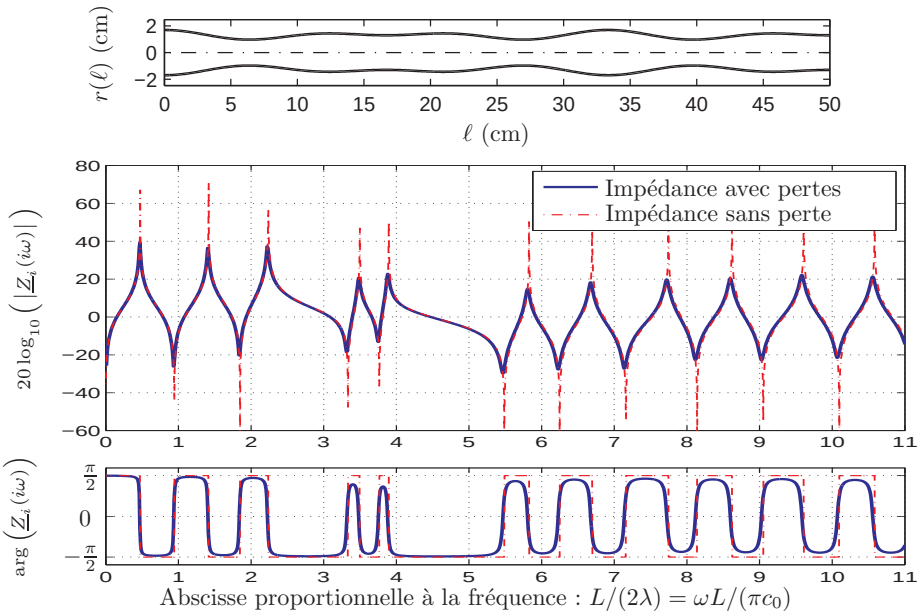


Fig. 2.2 – *Profil et impédance d'entrée d'un tube* fantaisiste *de profil* $r(\ell) = A\cos(\alpha\ell) + B\cos(\beta\ell) + C$. *Les valeurs choisies des paramètres sont* $L = 50$ *cm,* $C = 1.25$ *cm,* $A = 2$ *mm,* $B = 0.5$ *mm,* $\alpha = 12\pi\ m^{-1}$ *et* $\beta = 18\pi\ m^{-1}$. *Ce tube* fantaisiste *fait apparaître successivement des courbures tantôt positives, tantôt négatives. Son impédance d'entrée est calculée numériquement pour une impédance bouchon nulle. Le module et la phase de l'impédance normalisée sont affichés* ($\underline{Z}_i = Z_i S(0)/(\rho_0 c_0)$). *De même, l'abscisse est choisie pour comparer les positions des extréma par rapport à celles d'un cylindre sans perte fermé-ouvert.*

2.1.4 Tronçons de tube et solutions analytiques

Dans le paragraphe précédent, les impédances ont été calculées à l'aide de méthodes numériques standard de résolution d'équations différentielles ordinaires. Il est cependant possible d'avoir des solutions analytiques relativement simples pour des cas particuliers.

2.1.4.1 *Solutions analytiques pour des tubes à paramètres constants*

Soit un tronçon de tube de longueur L, considérons les coefficients de sa courbure et des pertes constants (c-à-d $\Upsilon(\ell) = \Upsilon$ et $\varepsilon(\ell) = \varepsilon$, $\forall \ell \in [0, L]$). Alors, la résolution de l'équation de *Webster-Lokshin* (eq. (2.1) p.59) donne la solution $P(\ell, s)$ sous la forme générale suivante :

$$P(\ell, s) = \frac{A(s)}{r(\ell)}\,\mathrm{e}^{\Gamma(s)\ell} + \frac{B(s)}{r(\ell)}\,\mathrm{e}^{-\Gamma(s)\ell}, \tag{2.24}$$

où $A(s)$ et $B(s)$ sont des fractions rationnelles de s qui dépendent des conditions aux limites, et $\Gamma(i\omega) = ik(\omega)$, pour lequel $k(\omega)$ est un nombre d'onde complexe standard. Γ est donné dans le domaine de Laplace par :

$$\Gamma(s) = \sqrt{\left(\frac{s}{c_0}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon}, \tag{2.25}$$

où $\sqrt{.} = (.)^{\frac{1}{2}}$ représente un prolongement analytique de la racine carrée positive de $\mathbb{R}^+$ vers le demi-plan droit du domaine de Laplace, que l'on nomme $\mathbb{C}_0^+ = \{s \in \mathbb{C} / \Re\mathrm{e}(s) > 0\}$. La partie 3.2 p.96 présente en détail l'analyse complexe de la fonction Γ. Notons pour le moment que dans $\mathbb{C}_0^+$, Γ est analytique et $\Re\mathrm{e}(\Gamma(s)) \geq 0$ si $\varepsilon \geq 0$.

L'expression des solutions de U est déduite de l'équation d'Euler (2.2) et de (2.24)

$$U(\ell,s) = S(\ell)\frac{(\zeta(\ell)-\Gamma(s))}{\rho_0 s}\,\frac{A(s)}{r(\ell)}\,\mathrm{e}^{\Gamma(s)\ell} + S(\ell)\frac{(\zeta(\ell)+\Gamma(s))}{\rho_0 s}\,\frac{B(s)}{r(\ell)}\,\mathrm{e}^{-\Gamma(s)\ell}. \tag{2.26}$$

Imposer une impédance nulle à droite, $P(L,s)=0$, donne $B(s) = -A(s)\exp(2\Gamma(s)L)$. En remplaçant B dans l'expression de P et U, après simplification on trouve l'expression analytique de l'impédance d'entrée d'un tube évasé à courbure et pertes constantes ouvert à droite

$$\begin{aligned} Z_i(s) \;&:=\; \frac{P(\ell=0,s)}{U(\ell=0,s)} \;=\; \frac{\rho_0 s}{S(\ell)}\,\frac{1-\exp(2\Gamma(s)L)}{\zeta(0)-\Gamma(s)-(\zeta(0)+\Gamma(s))\exp(2\Gamma(s)L)} \\ &=\; \frac{\rho_0 s}{S(\ell)}\,\frac{\sinh\left(\Gamma(s)L\right)}{\Gamma(s)\cosh\left(\Gamma(s)L\right)+\zeta(0)\sinh\left(\Gamma(s)L\right)}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

En figure 2.3, ce calcul analytique de l'impédance est comparé au calcul numérique.

2.1.4.2 *Tronçons de tubes à paramètres constants*

Les rayons des tronçons de tubes à courbures constantes ($r''/r = cst = \Upsilon$) peuvent se mettre sous la forme générale suivante

$$r(\ell) = C_c\cosh(\sqrt{\Upsilon}\ell) + C_s\frac{\sinh(\sqrt{\Upsilon}\ell)}{\sqrt{\Upsilon}}. \tag{2.28}$$

Cette forme a été utilisée dans [Dek08], parce qu'elle permet de définir à la fois les tubes à courbures positives, nulles ou négatives par une expression unique du rayon de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport aux paramètres C_c, C_s et Υ.

Parmi les tronçons de tubes évasés ($\Upsilon > 0$), nous trouvons 2 cas particuliers :

- Tubes caténoïdaux : $r(\ell) = C_c\cosh(\sqrt{\Upsilon}\ell)$, si $C_s = 0$,
- Tubes exponentiels : $r(\ell) = C_c\exp(\sqrt{\Upsilon}\ell)$, si $C_s = C_c\sqrt{\Upsilon}$.

Notons que par continuité en $\Upsilon = 0$, (2.28) donne naturellement l'expression d'un cylindre ou d'un cône $r(\ell) = C_c + C_s\ell$.

Dans le cas des courbures négatives, $\sqrt{\Upsilon} = \pm i\sqrt{|\Upsilon|}$, et (2.28) donne naturellement l'expression du rayon : $r(\ell) = C_c\cos(\sqrt{|\Upsilon|}\ell) + C_s\sin(\sqrt{|\Upsilon|}\ell)/\sqrt{|\Upsilon|}$. On constate donc que des tubes à courbures constantes négatives sont de forme sinusoïdale.

Dans la suite de ce travail, nous approximons des tubes à sections variables $\mathcal{R}(\ell)$ par une fonction de rayon $\tilde{r}(\ell)$ de courbure constante par morceaux. Ainsi pour construire le modèle du tube complet, il suffit de connecter les tronçons entre eux. Pour approcher au mieux le rayon "cible" $\mathcal{R}(\ell)$ par son approximation $\tilde{r}(\ell)$, il est nécessaire d'optimiser les positions des jonctions, ainsi que les paramètres C_c, C_s et Υ de chaque tronçon. Dans [Dek08] puis dans [Héz09], un travail d'optimisation du profil a été fait, la forme (2.28) a été utilisée afin de garantir la régularité $\mathcal{C}^\infty$ du modèle par rapport aux paramètres à optimiser.

Notons que ce modèle permet de modéliser un tube à section variable par une approximation $\tilde{r}(\ell)$ de classe $\mathcal{C}^1$ (par rapport à ℓ), alors que les modèles de connexions de cylindres et de cônes peuvent au mieux assurer la continuité mais pas la dérivabilité du rayon. Pour ce modèle, les jonctions sont caractérisées géométriquement par des ruptures de courbures.

Notons qu'à l'exception des cylindres, $\Upsilon(\ell)$ et $\varepsilon(\ell)$ ne peuvent être simultanément constants. Dans la pratique, nous considérons des tronçons de tubes de courbures constantes (décrits par (2.28)), et ε est choisi comme la moyenne de $\varepsilon(\ell)$ entre $\ell = 0$ et L. Cette approximation du coefficient des pertes fait sens au moins pour des longueurs et courbures réalistes pour les instruments à vent. La figure 2.3 compare l'impédance calculée numériquement, pour laquelle les variations de $\varepsilon(\ell)$ sont prises en compte, et l'impédance calculée analytiquement par (2.27), pour laquelle $\varepsilon(\ell)$ est constante.

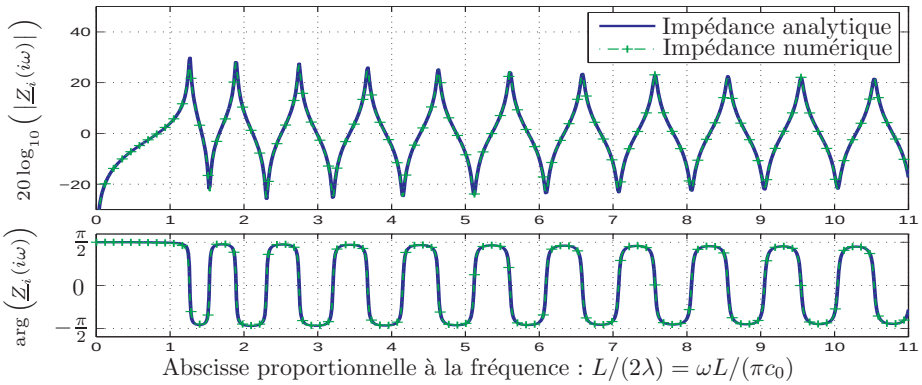


Fig. 2.3 – *Impédances normalisées d'un tronçon de tube caténoïdal ouvert. Ces impédances sont calculées analytiquement et numériquement. Les paramètres du tronçon sont donnés par* $r_l = 5mm$, $r_r = 10cm$, $L = 50$ *cm et* $\Upsilon \approx 54.4\ m^{-2}$. *Pour le calcul numérique,* $\varepsilon(\ell)$ *est donné par (2.19), et pour le calcul analytique* ε *est donné par la moyenne de* $\varepsilon(\ell)$ *entre* 0 *et* L *(ici* $\varepsilon \approx 0.0287\ m^{-\frac{1}{2}}$*). L'intérêt de cette comparaison est la validation de l'approximation du coefficient* $\varepsilon(\ell)$ *par sa valeur moyenne* ε. *Visuellement, la comparaison des 2 courbes montre que l'approximation du coefficient des pertes est valide. Notons que l'erreur relative moyenne des 2 impédances est d'environ 3%.*

2.1.4.3 *Fréquence de coupure*

Si $\Upsilon \geq 0$ et $\varepsilon = 0$, l'unique solution positive $\omega_c = \sqrt{\Upsilon}/c_0$ de $\Gamma(i\omega)^2 = 0$, correspond à la pulsation de coupure d'un tube sans perte à courbure constante positive. En effet, si $\omega > \omega_c$, $\Gamma(i\omega) \in i\mathbb{R}$, ce qui correspond à des *ondes propagatives*, et si ω est telle que $0 \leq \omega < \omega_c$, $\Gamma(i\omega) \in \mathbb{R}^+$, ce qui correspond cette fois-ci à des *ondes évanescentes* (voir (2.24) p.64).

Maintenant, si $\Upsilon \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, un comportement similaire est obtenu pour $\omega_c = \Im\mathrm{m}(s_c) > 0$ où $(s_c, \overline{s_c})$ sont les uniques solutions de $\Gamma(s)^2 = 0$; elles satisfont $\Re\mathrm{e}(s_c) < 0$ (voir [HM06a]). Ce comportement est représenté par la phase de Γ sur la figure 2.4.

L'annexe F montre pour plusieurs valeurs de courbure $\Upsilon > 0$ la fréquence de coupure associée.

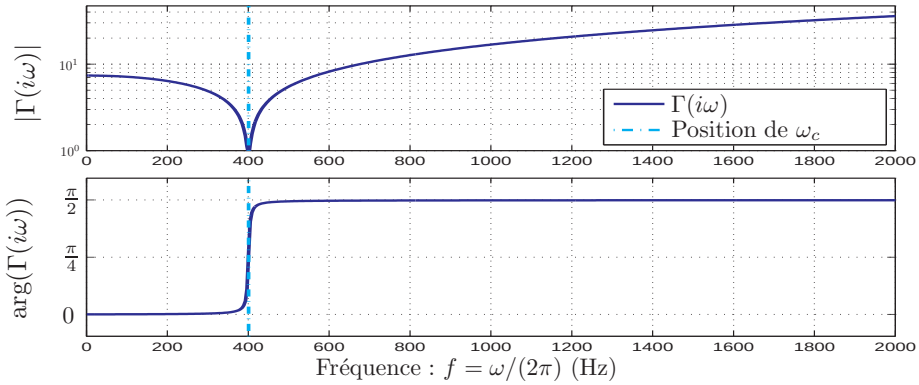


Fig. 2.4 – *Fonction* Γ. *Les paramètres utilisés sont ceux du tronçon de la figure 2.3 :* $\Upsilon \approx 54.4m^{-2}$ *et* $\varepsilon \approx 0.0287\ m^{-\frac{1}{2}}$. *Avec la fréquence de coupure* ω_c *représentée par le trait vertical pointillé, on remarque que* $\Gamma(i\omega)$ *est proche de l'axe des réels positifs pour* $0 \leq \omega < \omega_c$ *(*$\arg(\Gamma(i\omega)) \approx 0 \Rightarrow$ *ondes évanescentes) et qu'il passe brutalement sur l'axe imaginaire pour* $\omega > \omega_c$ *(*$\arg(\Gamma(i\omega)) \approx \pm\pi/2 \Rightarrow$ *ondes propagatives).*

2.2 Matrices de transfert et quadripôles équivalents

Nous cherchons désormais à obtenir des systèmes entrées/sorties qui représentent l'effet d'un tronçon de tube sur l'état acoustique (P, U) ou les variables de type progressives ($p^{\pm}$, $\phi^{\pm}$ ou $\psi^{\pm}$). Nous considérons un tronçon de tube de courbure constante positive ($\Upsilon = \Upsilon(\ell) \geq 0$) et avec comme coefficient des pertes $\varepsilon \geq 0$.

2.2.1 Quadripôles pour l'état acoustique (P, U)

Nous définissons P_0 et P_L comme étant respectivement la pression acoustique à l'extrémité gauche ($\ell = 0$) et à l'extrémité droite du tronçon ($\ell = L$). De la même façon nous définissons U_0 et U_L les débits acoustiques respectivement de gauche et de droite.

2.2.1.1 *Quadripôle en représentation admittance*

En écrivant $[U_0,\, U_L]$ en fonction de $[P_0,\, P_L]$, le tronçon de tube est modélisé par la matrice de transfert $\mathcal{H}(s)$ (de taille 2×2). La figure 2.5 représente le quadripôle correspondant $\mathbf{Q}_{PU}$.

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_L \end{bmatrix} = \mathcal{H} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_L \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

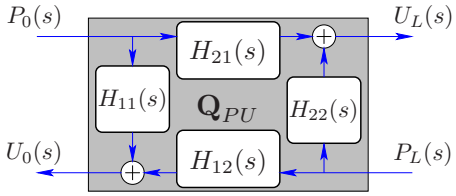


Fig. 2.5 – *Quadripôle $\mathbf{Q}_{PU}$, en représentation admittance.*

La résolution de (2.1) et (2.2) donne les expressions explicites des éléments de $\mathcal{H}$ (voir [H02]) :

$$H_{11}(s) = \frac{S_l}{\rho_0 s} \frac{\Gamma(s)\,\cosh(\Gamma(s)L) + \zeta_l \sinh(\Gamma(s)L)}{\sinh(\Gamma(s)L)}, \tag{2.30}$$

$$H_{22}(s) = \frac{S_r}{\rho_0 s} \frac{\Gamma(s)\,\cosh(\Gamma(s)L) - \zeta_r \sinh(\Gamma(s)L)}{\sinh(\Gamma(s)L)}, \tag{2.31}$$

$$H_{12}(s) = -\frac{r_l}{r_r} \frac{S_l}{\rho_0 s} \frac{\Gamma(s)}{\sinh(\Gamma(s)L)}, \tag{2.32}$$

$$H_{21}(s) = -\frac{r_r}{r_l} \frac{S_r}{\rho_0 s} \frac{\Gamma(s)}{\sinh(\Gamma(s)L)}, \tag{2.33}$$

où $\Gamma(s)$ est définie par (2.25) en page 64. Les notations suivantes sont introduites (avec pour indices $i = l$ et $i = r$, qui signifient *left* et *right*) : $r_i = r(\ell_i)$ (rayon), $S_i = \pi r_i^2$ (aire d'une section), $r_i' = r'(\ell_i)$ (pente), $\zeta_i = r_i'/r_i$, avec $\ell_l = 0$ et $\ell_r = L$.

Remarque 2.4. *Pour un tube idéalement ouvert à son extrémité droite, $P_L(s) = 0$; ceci donne $U_0(s) = H_{11}(s)P_0(s)$. Ainsi, H_{11} peut être interpétée comme l'admittance d'entrée d'un tronçon de*

tube ouvert à courbure constante (et avec prise en compte des pertes visco-thermiques). Inversement, l'impédance d'entrée d'un tel tube est donnée par $1/H_{11}(s)$*. Notons que par cette méthode, nous retrouvons bien l'expresssion donnée par (2.27) p.65. Une comparaison d'impédances* $1/H_{11}$ *avec plusieurs valeurs de* $\Upsilon > 0$ *est donnée en annexe F.*

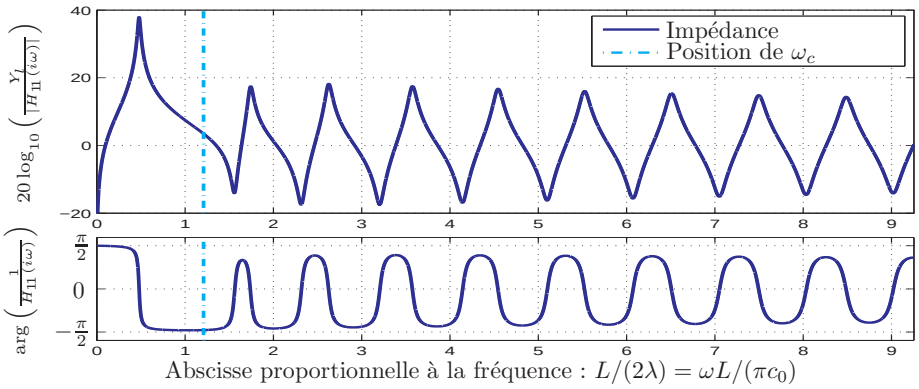
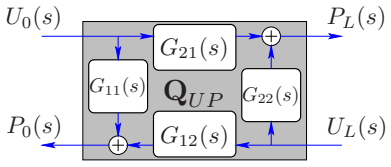


Fig. 2.6 – *Impédance d'un tronçon de tube ouvert,* $1/H_{11}$*. Les paramètres du tronçon sont donnés par* $r_l = 5mm$*,* $r_r = 1cm$*,* $L = 1m$*,* $\Upsilon = 15m^{-2}$ *et* $Y_l = S_l/(\rho_0 c_0)$*.*

2.2.1.2 *Quadripôle en représentation impédance*

Comme dans 2.2.1.1, maintenant le tronçon est modélisé par le quadripôle $\mathbf{Q}_{UP}$ où $[U_0(s), U_L(s)]^T$ est l'entrée et $[P_0(s), P_L(s)]^T$ est la sortie. La matrice de transfert associée est notée $\mathcal{G}(s)$.

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_L \end{bmatrix} = \mathcal{G} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_L \end{bmatrix}$$



La matrice de transfert en représentation impédance est donnée par la simple relation $\mathcal{G} = \mathcal{H}^{-1}$.

Remarque 2.5. *De la même manière que dans 2.2.1.1, si on considère un tube idéalement fermé à son extrémité droite,* $U_L = 0$*, alors,* $P_0(s) = G_{11}(s)U_0(s)$*, ainsi* G_{11} *peut être interpétée comme l'impédance d'entrée d'un tronçon de tube fermé à courbure contante (et avec prise en compte des pertes visco-thermiques). Inversement, l'admittance d'entrée d'un tel tube est donnée par* $1/G_{11}(s)$*.*

2.2.2 Quadripôles pour les variables de type progressives

Nous allons maintenant obtenir des systèmes entrées/sorties pour les variables de type progressives. Nous définissons $p_0^{\pm}$, $\phi_0^{\pm}$ et $\psi_0^{\pm}$ les variables de type progressives à gauche du tronçon ($\ell = 0$), et $p_L^{\pm}$, $\phi_L^{\pm}$ et $\psi_L^{\pm}$ les variables de type progressives à droite ($\ell = L$).

2.2.2.1 *Quadripôle* $\mathbf{Q}_\psi$

Le tronçon est ici modélisé par un système pour lequel les entrées sont $\psi_0^+(s)$ et $\psi_L^-(s)$ (ondes entrantes à $\ell = 0$ et $\ell = L$), et les sorties sont $\psi_0^-(s)$ et $\psi_L^+(s)$ (ondes sortantes). Ce système est représenté par la matrice de transfert $\mathcal{M}_\psi(s)$ et le quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$.

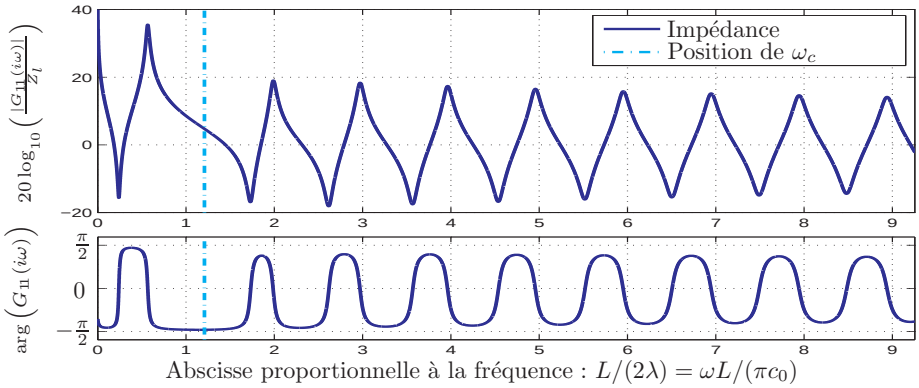
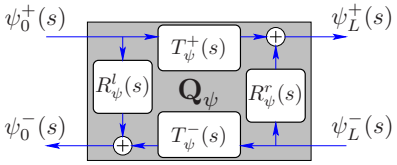


Fig. 2.7 – *Impédance d'un tronçon de tube fermé, G_{11}. Les paramètres du tronçon sont donnés par $r_l = 5mm$, $r_r = 1cm$, $L = 1m$, $\Upsilon = 15m^{-2}$ et $Z_l = (\rho_0 c_0)/S_l$.*

$$\begin{bmatrix}\psi_0^-\\ \psi_L^+\end{bmatrix} = \mathcal{M}_\psi \begin{bmatrix}\psi_0^+\\ \psi_L^-\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R_\psi^l & T_\psi^-\\ T_\psi^+ & R_\psi^r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_0^+\\ \psi_L^-\end{bmatrix}$$



La résolution du modèle de *Webster-Lokshin* pour ces ondes donne les expressions explicites des éléments de $\mathcal{M}_\psi$:

$$T_\psi^+(s) = T_\psi^-(s) = T_\psi(s) = \left\{\cosh(\Gamma(s)L) + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{c_0\Gamma(s)} + \frac{c_0\Gamma(s)}{s}\right)\sinh(\Gamma(s)L)\right\}^{-1}, \quad (2.34)$$

$$R_\psi^l(s) = R_\psi^r(s) = R_\psi(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{c_0\Gamma(s)} - \frac{c_0\Gamma(s)}{s}\right)\sinh(\Gamma(s)L)\ T_\psi(s). \quad (2.35)$$

Remarque 2.6. *Les fonctions de transfert R_ψ^l et R_ψ^r représentent respectivement les réflexions* globales *(indice g) de gauche (indice l) et de droite (indice r) du tube (de longueur L) sur les ondes progressives. "*Global*" signifie que tous les effets internes du tube sont pris en compte dans ces fonctions de transfert. Une analyse plus détaillée en partie 2.3 p.71 permet de séparer tous ces effets. T_g^+ et T_g^- représentent les transmissions* globales *des ondes progressives à travers le tube.*

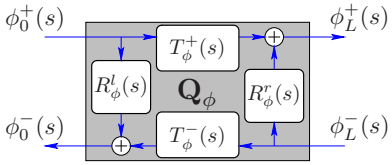
Remarque 2.7. *Notons que ce quadripôle est parfaitement symétrique : les 2 réflexions sont identiques ($R_\psi := R_\psi^l = R_\psi^r$) ainsi que les 2 transmissions ($T_\psi := T_\psi^+ = T_\psi^-$). Cela était prévisible en raison des équations de transport (cf. (2.12) p.61).*

Remarque 2.8. *Dans [HM06a], il est prouvé que la transmission peut s'écrire $T_\psi(s) = D_\psi(s)\,\mathrm{e}^{-\tau s}$ pour $\Upsilon \geq 0$, avec $\tau = L/c_0$ et $D_\psi(s)$ est une fonction de transfert associée à un sous-système causal et stable. La réponse impulsionnelle de T_ψ est donc égale à celle de D_ψ (causale) retardée d'un retard τ égal au temps de propagation à travers le tronçon.*

2.2.2.2 *Quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$*

En procédant de la même manière avec les ondes progressives $\phi^\pm$, nous obtenons la matrice de transfert $\mathcal{M}_\phi(s)$ et le quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ représentant l'effet du tronçon.

$$\begin{bmatrix}\phi_0^-\\ \phi_L^+\end{bmatrix} = \mathcal{M}_\phi \begin{bmatrix}\phi_0^+\\ \phi_L^-\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R_\phi^l & T_\phi^-\\ T_\phi^+ & R_\phi^r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_0^+\\ \phi_L^-\end{bmatrix}$$



La résolution du modèle de *Webster-Lokshin* pour ces ondes donne les expressions explicites des éléments de $\mathcal{M}_\phi$.

$$\begin{aligned}
T_\phi^+(s) &= T_\phi^-(s) = T_\phi(s)\\
&= \left\{\left[1+\frac{c_0}{2s}(\zeta_l-\zeta_r)\right]\cosh(\Gamma(s)L) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{c_0\Gamma(s)}{s}+\frac{s}{c_0\Gamma(s)}\right)\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.-\frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{c_0}{s}\zeta_l\zeta_r-\zeta_l+\zeta_r\right)\right]\sinh(\Gamma(s)L)\right\}^{-1}, \qquad (2.36)\\
R_\phi^l(s) &= \left\{-\left[\frac{c_0}{s}(\zeta_l-\zeta_r)\right]\cosh(\Gamma(s)L) - \left[\left(\frac{c_0\Gamma(s)}{s}-\frac{s}{c_0\Gamma(s)}\right)\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.-\frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{c_0}{s}\zeta_l\zeta_r-\zeta_l-\zeta_r\right)\right]\sinh(\Gamma(s)L)\right\}\frac{T_\phi(s)}{2}, \qquad (2.37)\\
R_\phi^r(s) &= \left\{-\left[\frac{c_0}{s}(\zeta_l-\zeta_r)\right]\cosh(\Gamma(s)L) - \left[\left(\frac{c_0\Gamma(s)}{s}-\frac{s}{c_0\Gamma(s)}\right)\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.-\frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{c_0}{s}\zeta_l\zeta_r+\zeta_l+\zeta_r\right)\right]\sinh(\Gamma(s)L)\right\}\frac{T_\phi(s)}{2}. \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

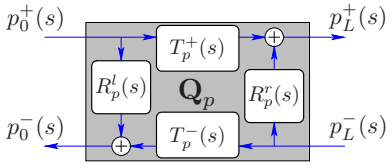
Remarque 2.9. *Ici, les transmissions du système sont identiques ($T_\phi := T_\phi^+ = T_\phi^-$), mais les réflexions sont différentes.*

Remarque 2.10. *Comme pour la transmission T_ψ, nous pouvons écrire $T_\phi(s) = D_\phi(s)\,\mathrm{e}^{-\tau s}$, avec $\tau = L/c_0$ et $D_\phi(s)$ est une fonction de transfert causale et stable pour $\Upsilon \geq 0$.*

2.2.2.3 *Quadripôle* $\mathbf{Q}_p$

Enfin, en considérant les variables de type progressives $p^\pm$ pour le modèle *Webster-Lokshin*, nous obtenons la matrice de transfert $\mathcal{M}_p(s)$ et le quadripôle $\mathbf{Q}_p$ représentant l'effet du tronçon. Les fonctions de transfert ne sont pas données en raison de leurs tailles. En partie 2.3.2.4 p.77, leurs expressions algébriques sont données en fonction des fonctions de transfert de $\mathbf{Q}_\phi$.

$$\begin{bmatrix}p_0^-\\ p_L^+\end{bmatrix} = \mathcal{M}_p \begin{bmatrix}p_0^+\\ p_L^-\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R_p^l & T_p^-\\ T_p^+ & R_p^r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_0^+\\ p_L^-\end{bmatrix}$$



Remarque 2.11. *Notons qu'ici les transmissions T_p^+ et T_p^- sont différentes, mais peuvent s'écrire $T_p^\pm(s) = D_p^\pm(s)\,\mathrm{e}^{-\tau s}$, avec $\tau = L/c_0$.*

2.3 Décomposition "physiquement informée" des quadripôles

Les matrices de transfert $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{M}_\psi$, $\mathcal{M}_\phi$ et $\mathcal{M}_p$ qui proviennent du modèle de *Webster-Lokshin* caractérisent le comportement *global* d'un tronçon de tube. Dans cette section, leur décomposition en quadripôles *élémentaires* est réalisée. Dans un premier temps, les opérateurs $\mathrm{e}^{-i\omega L/c_0}$ qui représentent une propagation "idéale" sont isolés des autres opérateurs sans retard interne. Dans un second temps, les effets acoustiques dus à la géométrie du tube (rayon, pente et courbure) sont isolés les uns des autres. Ces décompositions ne sont pas des manipulations purement algébriques : elles reposent sur un raisonnement physiquement sensé, et conduisent à des interprétations acoustiques. De plus, elles permettront de faciliter certaines opérations mathématiques.

2.3.1 Isolement des opérateurs de transport

En définissant

$$T(s) := \mathrm{e}^{-\Gamma(s)L} = D(s)\,\mathrm{e}^{-\frac{s}{c_0}L}, \tag{2.39}$$

$$\text{avec}\quad D(s) := \mathrm{e}^{-\left(\Gamma(s)-\frac{s}{c_0}\right)\,L}, \tag{2.40}$$

dans [HM06a], il est prouvé que $D(s)$ est causale et stable, en conséquence $T(s)$ représente le retard (e^{-sL/c_0}) de la propagation d'onde à travers le tronçon de tube, et l'effet associé $D(s)$ de la courbure et des pertes visco-thermiques.

Cette partie est consacrée à isoler les opérateurs de transport purs e^{-sL/c_0} qui sont contenus dans $T(s) = \mathrm{e}^{-\Gamma(s)L}$ et d'en déduire une structure pour la simulation en guides d'ondes.

2.3.1.1 *Décomposition de* $\mathbf{Q}_\phi$

Ici, nous choisissons de considérer le quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ pour réaliser cette décomposition, mais la méthode reste la même avec $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{Q}_\psi$, et donne des résultats similaires avec des expressions différentes.

Dans le quadipôle $\mathbf{Q}_\phi$, les fonctions de transfert R^l_ϕ, R^r_ϕ, T^+_ϕ and T^+_ϕ représentent les effets globaux d'un tronçon de tube sur les ondes progressives $\phi^\pm$. Néanmoins, des effets *élémentaires* peuvent être isolés selon l'interprétation suivante (cf. Fig. 2.8-(a)) : A l'interface de gauche ($\ell = 0$), l'onde incidente ϕ^+_0 est partiellement réfléchie dans la direction opposée (modélisée en figure 2.8-(b) par la fonction de transfert R_{le}) et est partiellement transmise à l'intérieur du tronçon (T_{le}). Puis, cette partie transmise voyage à l'intérieur du tube jusqu'à l'extrémité de droite localisée à $\ell = L$ (T^+), avant d'être partiellement réfléchie (R_{ri}) et partiellement transmise à l'extérieur du tronçon (T_{ri}). Symétriquement, l'onde incidente ϕ^-_L subit les mêmes phénomènes.

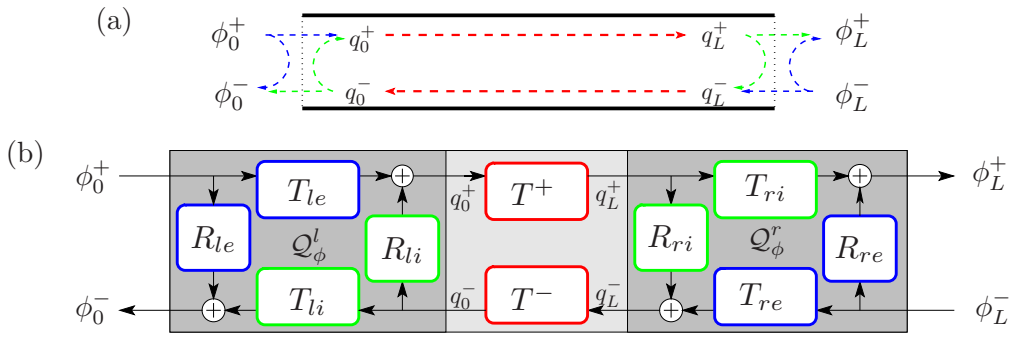


Fig. 2.8 – *(a) Interprétation physique, (b) Décomposition symbolique de* $\mathbf{Q}_\phi$*. Les indices utilisés ont les significations suivantes : i et e pour* **i**nternal *et* **e**xternal*, l et r pour* **l**eft *et* **r**ight*, et les fonctions* T^+ *et* T^- *représentent respectivement les transmissions aller* $(+)$ *et retour* $(-)$ *à travers le tube.*

La figure 2.8-(a) représente les différents effets acoustiques cités précédemment, et la figure 2.8-(b) montre une structure du système dans laquelle chacun des effets est modélisé par une fonction de transfert associée. Les différents indices utilisés ont les significations suivantes : i et e signifient respectivement *internal* et *external*, l et r signifient respectivement *left* et *right*, et les fonctions T^+ and T^- représentent respectivement les transmissions aller $(+)$ et retour $(-)$ à travers le tube.

Cette décomposition fait apparaître 2 quadripôles plus petits, $\mathcal{Q}_\phi^l$ et $\mathcal{Q}_\phi^r$ (cf. Fig. 2.8-(b)), qui modélisent respectivement les extrémités gauche et droite du tronçon.

Chacune des 10 fonctions de transfert de la figure 2.8-(b) ne font que *symboliser* les effets mentionnés précédemment. Nous n'en possédons pour le moment aucune expression analytique. C'est pourquoi nous pouvons parler d'une structure *symbolique*. Cependant, en utilisant les lois d'interconnexion donnés en partie 1.3.1 p.39, le quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ (cf. eqs. (2.36-2.38) p.70) et le système de la figure 2.8-(b) sont équivalents si les équations algébriques suivantes sont vérifiées :

$$T_\phi^+ = \frac{T_{le}\,T_{ri}\,T^+}{1-R_{ri}\,R_{li}\,T^-\,T^+}, \tag{2.41}$$

$$T_\phi^- = \frac{T_{re}\,T_{li}\,T^-}{1-R_{ri}\,R_{li}\,T^-\,T^+}, \tag{2.42}$$

$$R_\phi^l = R_{le} + \frac{R_{ri}\,T_{le}\,T_{li}\,T^+\,T^-}{1-R_{ri}\,R_{li}\,T^+\,T^-}, \tag{2.43}$$

$$R_\phi^r = R_{re} + \frac{R_{li}\,T_{re}\,T_{ri}\,T^+\,T^-}{1-R_{ri}\,R_{li}\,T^+\,T^-}. \tag{2.44}$$

A partir de ces 4 équations, nous cherchons maintenant à identifier les expressions de T_{li}, R_{li}, T_{le}, R_{le}, T^+, T^-, T_{ri}, R_{ri}, T_{re} et R_{re} à partir de celles connues de R_g^l, R_g^r, T_g^+ et T_g^-, données par (2.36-2.38). Afin que cette identification mène à un résultat unique, les hypothèses suivantes sont introduites :

(H1) La continuité de pression de part et d'autre d'une demi-interface nécessite que $\phi_\ell^+ + \phi_\ell^- = q_\ell^+ + q_\ell^-$ pour $\ell \in \{0, L\}$ (cf. Fig. 2.8). Cette hypothèse implique que *chaque réflexion r et chaque transmission t ayant la même entrée sont telles que* $t = 1 + r$. Par exemple : $T_{le} = 1 + R_{le}$.

(H2) Les fonctions du côté gauche (de $\mathcal{Q}_\phi^l$) dépendent uniquement des *paramètres de gauche* ζ_l. Respectivement, les fonctions du côté droit (de $\mathcal{Q}_\phi^r$) dépendent uniquement des *paramètres de droite* ζ_r.

(H3) Seules les fonctions de propagation $T^\pm$ incluent un opérateur de retard pur : $T^\pm(s) = D^\pm(s)\,\mathrm{e}^{-sL/c_0}$, où $D^\pm(s)$ sont causaux et stables.

Alors, sous ces hypothèses, nous prouvons qu'il existe une solution unique qui est

$$T^+(s) = T^-(s) = T(s) = \mathrm{e}^{-\Gamma(s)L}, \tag{2.45}$$

$$R_{le}(s) = \frac{\frac{s}{c_0} - \Gamma(s) - \zeta_l}{\frac{s}{c_0} + \Gamma(s) + \zeta_l} = T_{le}(s) - 1, \tag{2.46}$$

$$R_{re}(s) = \frac{\frac{s}{c_0} - \Gamma(s) + \zeta_r}{\frac{s}{c_0} + \Gamma(s) - \zeta_r} = T_{re}(s) - 1, \tag{2.47}$$

$$R_{li}(s) = -\frac{\frac{s}{c_0} - \Gamma(s) + \zeta_l}{\frac{s}{c_0} + \Gamma(s) + \zeta_l} = T_{li}(s) - 1, \tag{2.48}$$

$$R_{ri}(s) = -\frac{\frac{s}{c_0} - \Gamma(s) - \zeta_r}{\frac{s}{c_0} + \Gamma(s) - \zeta_r} = T_{ri}(s) - 1. \tag{2.49}$$

2.3.1.2 *Décomposition de* $\mathbf{Q}_{PU}$ *et* $\mathbf{Q}_{UP}$

Une décomposition similaire est obtenue avec les états acoustiques (P, U) et est présentée en figure 2.9. On l'obtient simplement en connectant les quadripôles de conversion de la figure E.2 p.167 de part et d'autre des sous-quadripôles $\mathcal{Q}^l_\phi$ et $\mathcal{Q}^r_\phi$. Par exemple, $\mathcal{Q}^l_{PU}$ (cf. Fig. 2.9) est obtenue en connectant $\mathcal{C}_{PU,\phi}$ avec $\mathcal{Q}^l_\phi$ (c-à-d $\mathcal{Q}^l_{PU} \equiv \mathcal{C}_{PU,\phi} \odot \mathcal{Q}^l_\phi$), selon les lois d'interconnexion données en partie 1.3.1 p.39.

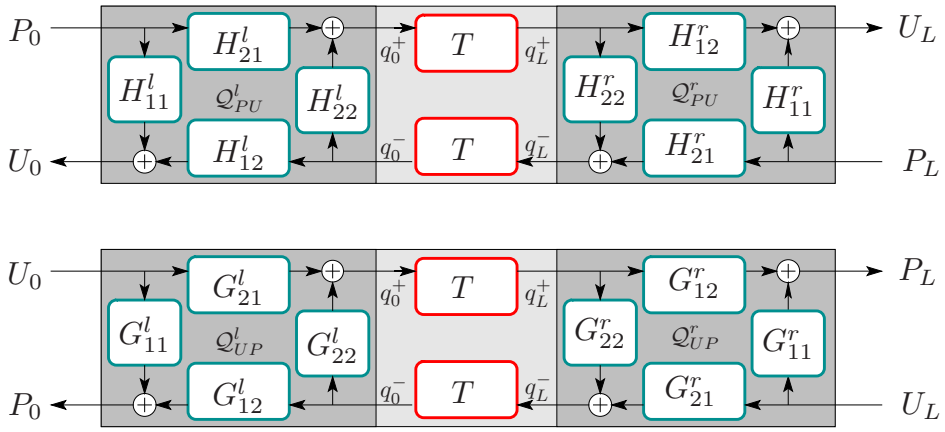


Fig. 2.9 – *Décomposition des quadripôles* $\mathbf{Q}_{PU}$ *and* $\mathbf{Q}_{UP}$.

Les fonctions de transfert H^x_{ij} et G^x_{ij} de la figure 2.9 (avec $x \in \{l, r\}$) sont des fractions rationnelles de s et $\Gamma(s)$. Elles ne sont pas toutes données, mais peuvent être facilement obtenues en utilisant les loi d'interconnexion données en partie 1.3.1 p.39.

Remarque 2.12. Puisque $\Re\mathrm{e}\,(\Gamma(s)) > 0$, pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\mathrm{e}(s) \geq 0$ (voir [HM06a]), alors $T(s) = \mathrm{e}^{-\Gamma(s)L} \to 0$ quand $L \to +\infty$. En conséquence $P_0(s) \approx G^l_{11}(s)U_0(s)$ (quand $L \to \infty$), et la fonction de transfert G^l_{11} peut être interprétée comme l'impédance d'entrée d'un tube évasé semi-infini avec prise en compte des pertes visco-thermiques de coefficient ε constant. H^l_{11} est son admittance.

Les expressions de G^l_{11} et H^l_{11} sont données par

$$G^l_{11}(s) = \frac{1}{H^l_{11}(s)} = \frac{Z_l}{c_0}\frac{s}{\Gamma(s)+\zeta_l}. \tag{2.50}$$

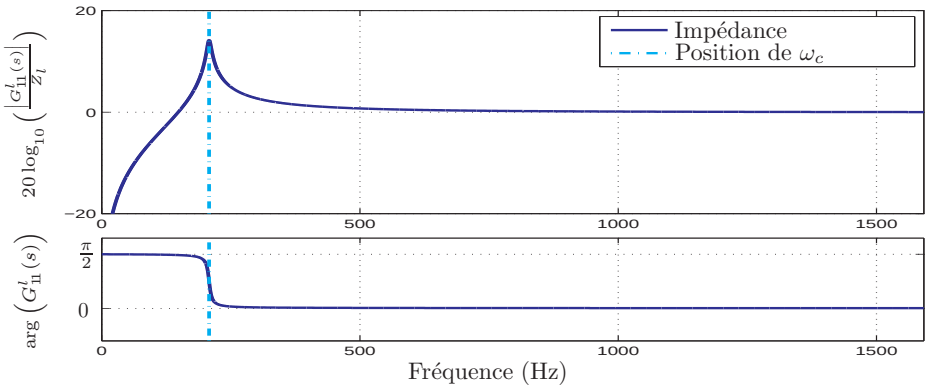


Fig. 2.10 – *Impédance d'un tube semi-infini,* $G^l_{11}(s = 2i\pi f)$ *pour* $r_l = 5$ *mm,* $\Upsilon = 15\ m^{-2}$, $\varepsilon = 0.0525\ m^{-\frac{1}{2}}$, $\zeta_l = 0\ m^{-1}$.

2.3.2 Séparation des effets dus à la géométrie du tube

Cette partie s'intéresse à séparer les effets acoustiques dus au rayon r, la pente r' et la courbure r''/r, ainsi que leurs éventuelles discontinuités. Nous introduisons les différents types de discontinuités par leur ordre respectif :

- L'*ordre* 0 correspond à une discontinuité de rayon r (ou de section S) aux jonctions de tubes,
- L'*ordre* 1 correspond à une discontinuité de pente r',
- L'*ordre* 2 correspond à une discontinuité de courbure $\Upsilon = r''/r$.

Remarque 2.13. *Contrairement aux connexions de tubes cylindriques ou coniques, le modèle employé ici, basé sur le modèle de* Webster, *permet de prendre en compte des connexions de tubes qui préservent la continuité* $\mathcal{C}^1$. *Ceci signifie : continuité de section et de pente, et discontinuité de courbure (discontinuité d'ordre 2).*

2.3.2.1 *Structure décomposée*

La partie supérieure de la figure 2.11 présente une structure dans laquelle les effets dus à la géométrie sont isolés dans des sous-systèmes : les cellules $\mathcal{Q}^l_a$ et $\mathcal{Q}^r_a$ prennent compte des effets de section à gauche et à droite respectivement, $\mathcal{Q}^l_s$ et $\mathcal{Q}^r_s$ tiennent compte de la pente, $\mathcal{Q}^l_{cl}$ et $\mathcal{Q}^r_{cl}$ tiennent compte de la courbure (voir [MHM09c]).

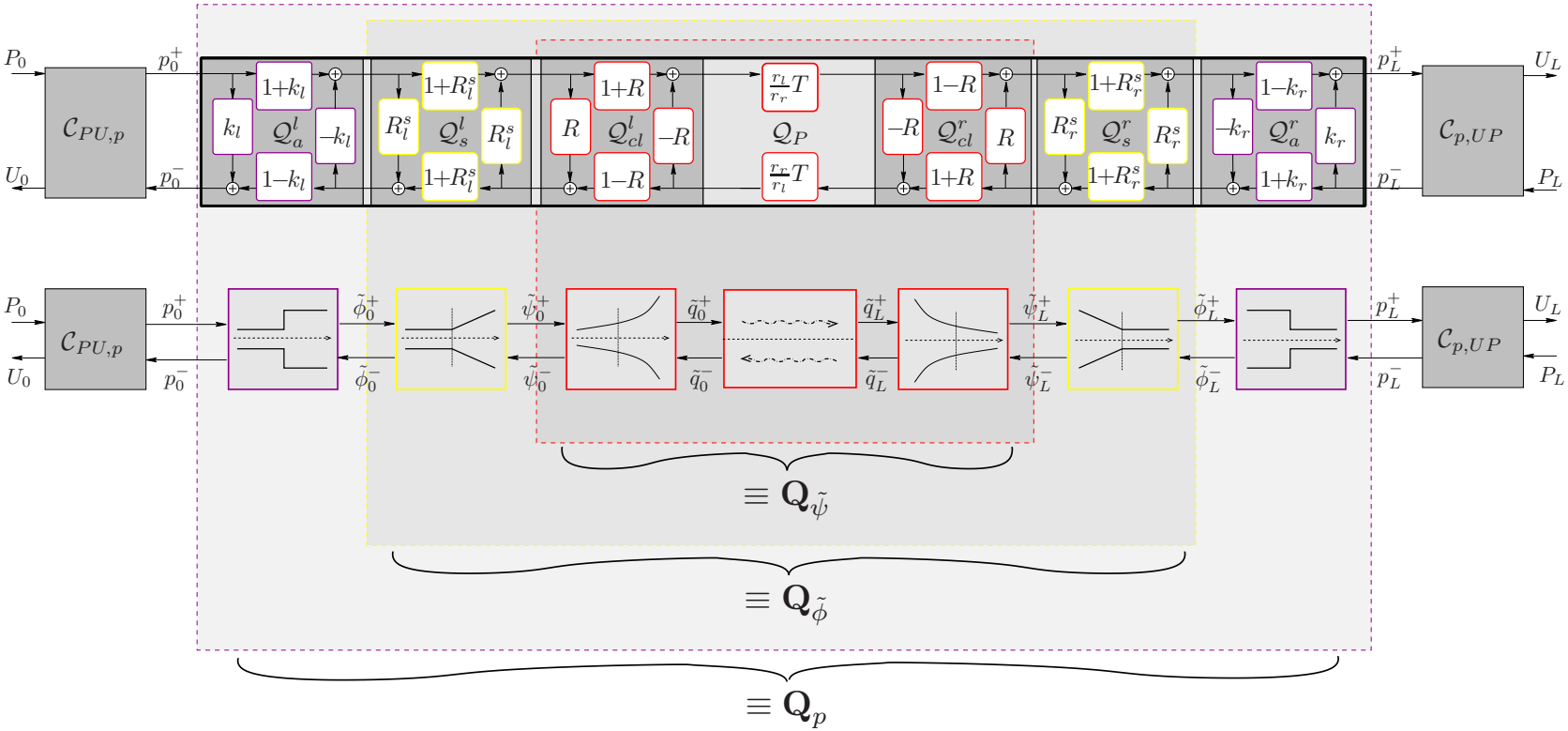


Fig. 2.11 – *Séparation des effets de la géométrie du profil d'un tronçon. La partie supérieure présente la structure décomposée du tronçon, la partie médiane présente l'interprétation des cellules, et la partie inférieure présente les équivalences entre plusieurs quadripôles. Une interprétation de chaque cellule est faite en partie 2.3.2.2. Les nouvelles variables $\tilde{\phi}^{\pm}$, $\tilde{\psi}^{\pm}$ et $\tilde{q}^{\pm}$ sont homogènes à $\phi^{\pm}$, $\psi^{\pm}$ et $q^{\pm}$ respectivement et sont données en remarque page 76. L'"encapsulation" des quadripôles $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{Q}_{\tilde{\phi}}$ et $\mathbf{Q}_{\tilde{\psi}}$ permet de donner de nouvelles expressions algébriques de leurs fonctions de transfert globales qui sont données en partie 2.3.2.4. Les nouveaux indices utilisés ont la signification suivante :* **a** *pour "***a***rea of section",* **s** *pour "***s***lope" et* **cl** *pour "***c***urvature and* **l***osses". Ces indices renseignent sur les effets pris en compte par les cellules.*

Avec $\mathcal{C}_{PU,p}$ le quadripôle de conversion de (P,U) vers $p^{\pm}$ et $\mathcal{C}_{p,UP}$ le quadripôle de conversion inverse, on prouve que cette structure est équivalente au quadripôle $\mathbf{Q}_{PU}$ (cf. §2.2.1.1 p.67). Cette preuve (que nous ne présentons pas) utilisent les lois d'interconnexion algébriques de la partie 1.3.1 p.39 itérées plusieurs fois.

Remarque 2.14. Notez que cette structure fait apparaître naturellement 4 changements de variables consécutivement :

$p^{\pm}$: variables de type ondes planes définies par (2.5) en page 60,

$\tilde{\phi}^{\pm}$: ondes progressives proportionnelles à $\phi^{\pm}$ définies par (2.7) avec $\phi^{\pm} = r\,\tilde{\phi}^{\pm}$,

$\tilde{\psi}^{\pm}$: ondes progressives proportionnelles à $\psi^{\pm}$ définies par (2.10) avec $\psi^{\pm} = r\,\tilde{\psi}^{\pm}$,

$\tilde{q}^{\pm}$: variables découplées.

La présence de $\tilde{\phi}^{\pm}$ et de $\tilde{\psi}^{\pm}$ (au lieu de $\phi^{\pm}$ et de $\psi^{\pm}$) vient du choix de placer les coefficients r_l/r_r et r_r/r_l au centre de la structure. Par factorisation, ces coefficients peuvent être déplacés à d'autres endroits sans modifier les relations entrées/sorties du système. Ce choix permet d'obtenir 6 cellules du type de *Kelly-Lochbaum* (cf. [MG76]), dont 4 sont bien connues (effets de section et de pente) et 2 le sont moins à notre connaissance.

2.3.2.2 *Interprétation des cellules*

Cellules $\mathcal{Q}_a^l$ et $\mathcal{Q}_a^r$:

$\mathcal{Q}_a^l$ et $\mathcal{Q}_a^r$, avec les coefficients k_l et k_r, prennent en compte les sections $S_l = \pi r_l^2$ et $S_r = \pi r_r^2$, aux extrémités du tronçon. L'indice "**a**" signifie "**a**rea of section". Elles rappellent les cellules d'un réseau de *Kelly-Lochbaum* après la connexion avec un cylindre de rayon r_c (voir par exemple [MG76, Mat94]).

$$k_l = \frac{S_c - S_l}{S_c + S_l} = -\frac{Z_c - Z_l}{Z_c + Z_l}, \tag{2.51}$$

$$k_r = \frac{S_c - S_r}{S_c + S_r} = -\frac{Z_c - Z_r}{Z_c + Z_r}. \tag{2.52}$$

Cellules $\mathcal{Q}_s^l$ et $\mathcal{Q}_s^r$:

$\mathcal{Q}_s^l$ et $\mathcal{Q}_s^r$, avec les fonctions de transfert R_l^s et R_r^s, prennent en compte les pentes $r_l' = r'(\ell{=}0)$ et $r_r' = r'(\ell = L)$ aux extrémités du tronçon. L'indice "**s**" signifie"**s**lope". Elles rappellent les cellules d'un réseau de *Kelly-Lochbaum* après la connexion avec un cône et avec continuité de section (voir par exemple [Vö95, Duc02]).

$$R_l^s(s) = \frac{\alpha_l}{s - \alpha_l}, \quad \text{avec } \alpha_l = -\frac{c_0}{2}\frac{r_l'}{r_l}, \tag{2.53}$$

$$R_r^s(s) = \frac{\alpha_r}{s - \alpha_r}, \quad \text{avec } \alpha_r = +\frac{c_0}{2}\frac{r_r'}{r_r}. \tag{2.54}$$

Si la pente est nulle (pour des cylindres par exemple), ces cellules deviennent des cellules identité, ce qui signifie $\phi_\ell^{\pm} = \psi_\ell^{\pm}$.

Cellules $\mathcal{Q}_{cl}^l$ et $\mathcal{Q}_{cl}^r$:

$\mathcal{Q}_{cl}^l$ et $\mathcal{Q}_{cl}^r$, avec la fonction de transfert R, prennent en compte la courbure et les pertes du tronçon. Les indices "**cl**" signifient "**c**urvature and **l**osses".

$$R(s) = \frac{\frac{s}{c_0} - \Gamma(s)}{\frac{s}{c_0} + \Gamma(s)}. \tag{2.55}$$

Dans le cas de cônes ou de cylindres sans perte ($\Upsilon = \varepsilon = 0$), $R = 0$, ainsi ces cellules deviennent identité ($\psi_\ell^\pm = q_\ell^\pm$).

Dans [MHM08a] (voir annexe J), nous avons mis en évidence que la fonction de transfert $R(s)$ peut être interprétée comme la réflexion à la jonction entre un cône sans perte et un tube semi-infini avec pertes et courbure constantes (et avec continuité de section et de pente). Dans [GKP90], une interprétation similaire est faite pour R_l^s et R_r^s dans le cas de cônes sans perte. Nous reviendrons sur ce point en partie 3.4 p.112.

2.3.2.3 *Intérêt de la structure*

La structure de la figure 2.11 est intéressante parce que les effets de la courbure et des pertes sont isolés des autres (de section et de pente), ainsi elle rend leur étude plus simple. En raison de la racine carré de la fonction Γ (cf. (2.25) p.64), leur étude nécessite des traitements particuliers (cf. §4.1 p.125).

Cette structure *décomposée* fait apparaître successivement les différents effets dus à la géométrie du tube ; ceci facilite la compréhension des effets acoustiques sur les ondes. Ces effets apparaissent sous formes de cellules "élémentaires" du type des jonctions de *Kelly-Lochbaum*.

De plus, comme il est expliqué en partie 2.4 p.79 elle permet de dériver certains modèles de tubes connus dans la littérature (voir par exemple [MG76, Mat94, V̈95, Duc01, vW02, HMM07b]). Mais, ce modèle permet aussi de prendre en compte un cas plus général de jonctions.

2.3.2.4 *Expressions algébriques des fonctions de transfert globales*

Comme l'illustre la partie inférieure de la figure 2.11, il y a une "imbrication" de systèmes équivalents à $\mathbf{Q}_\psi$, $\mathbf{Q}_\phi$ et $\mathbf{Q}_p$. Ainsi, non seulement cette "imbrication" permet de réécrire algébriquement les fonctions de transfert des quadripôles, mais permet aussi de mieux comprendre les effets qu'ils simulent.

Quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$:

Le quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ correspond à la partie centrale de la structure décomposée (sans les coefficients r_r/r_l et r_l/r_r). On peut donc réécrire les expressions algébriques des fonctions de transfert globales R_ψ et T_ψ à partir de R et T. Avec les lois d'interconnexion (1.35-1.38) et après simplifications, nous obtenons :

$$R_\psi = \frac{(1-T^2)R}{1-R^2T^2}, \tag{2.56}$$

$$T_\psi = \frac{(1-R^2)T}{1-R^2T^2}. \tag{2.57}$$

Ici, les coefficients r_r/r_l et r_l/r_r n'apparaissent pas en facteur de T parce que nous nous intéressons à $\psi^\pm$ et non $\tilde{\psi}^\pm$.

Ainsi, les effets inclus dans le quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ sont ceux dus à la courbure et aux pertes. Le système équivalent à $\mathbf{Q}_\psi$ modélise donc les effets d'un tube à courbure constante virtuellement branché à chaque extrémité sur des cônes sans perte avec continuité de section et de pente (discontinuité d'ordre 2).

Remarque 2.15. *Nous avons vu en partie 2.2.2.1 p.68 que T_ψ peut s'écrire $T_\psi(s) = D_\psi(s)\,\mathrm{e}^{-\tau s}$, avec $\tau = L/c_0$, sachant que $T(s) = D(s)\,\mathrm{e}^{-\tau s}$ on obtient alors une expression algébrique de D_ψ :*

$$D_\psi = \frac{(1-R^2)D}{1-R^2T^2}. \tag{2.58}$$

Quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$:
Puisque le quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ est imbriqué dans le système équivalent à $\mathbf{Q}_\phi$, on peut réécrire algébriquement les fonctions de transfert globales de $\mathbf{Q}_\phi$ à partir de celles de $\mathbf{Q}_\psi$ et de R_l^s et R_r^s. En utilisant (1.35-1.38) 2 fois successivement, et après simplifications, on trouve :

$$R_\phi^l = \Big((1-R_r^sR_\psi)R_l^s + (1+2R_l^s)\big(R_\psi + R_r^s(T_\psi^2 - R_\psi^2)\big)\Big)/d_\phi, \tag{2.59}$$

$$R_\phi^r = \Big((1-R_l^sR_\psi)R_r^s + (1+2R_r^s)\big(R_\psi + R_l^s(T_\psi^2 - R_\psi^2)\big)\Big)/d_\phi, \tag{2.60}$$

$$T_\phi = \Big((1+R_l^s)(1+R_r^s)T_\psi\Big)/d_\phi, \tag{2.61}$$

$$\text{avec} \quad d_\phi = 1 - \left(\left(R_l^sR_\psi + R_r^sR_\psi - R_l^sR_r^sR_\psi^2\right) + R_l^sR_r^sT_\psi^2\right). \tag{2.62}$$

Grâce à cette imbrication, nous comprenons que les effets inclus dans le quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ sont ceux dus à la courbure, aux pertes et aux pentes des extrémités. Le système équivalent à $\mathbf{Q}_\phi$ modélise donc les effets d'un tube à courbure constante virtuellement branché à chaque extrémité sur des cylindres sans perte avec continuité de section (discontinuité d'ordre 1).
Remarque 2.16. *Ici la fonction de transfert D_ϕ est données par :*

$$D_\phi(s) = T_\phi(s)\,\mathrm{e}^{+\tau s} = \Big((1+R_l^s)(1+R_r^s)D_\psi\Big)/d_\phi. \tag{2.63}$$

Quadripôle $\mathbf{Q}_p$:
Enfin, puisque le quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ est lui-même imbriqué dans $\mathbf{Q}_p$, on peut réécrire algébriquement les fonctions de transfert globales de $\mathbf{Q}_p$ à partir de celles de $\mathbf{Q}_\phi$ et de k_l et k_r. En utilisant (1.35-1.38) 2 fois successivement, et après simplifications, on trouve :

$$R_p^l = \Big(k_l + k_lk_rR_\phi^r + k_rR_\phi^lR_\phi^r + R_\phi^l - k_rT_\phi^2\Big)/d_p, \tag{2.64}$$

$$R_p^r = \Big(k_r + k_lk_rR_\phi^l + k_lR_\phi^lR_\phi^r + R_\phi^r - k_lT_\phi^2\Big)/d_p, \tag{2.65}$$

$$T_p^+ = \frac{r_l}{r_r}\Big((1+k_l)(1-k_r)T_\phi\Big)/d_p, \tag{2.66}$$

$$T_p^- = \frac{r_r}{r_l}\Big((1-k_l)(1+k_r)T_\phi\Big)/d_p, \tag{2.67}$$

$$\text{avec} \quad d_p = 1 + \left(k_lR_\phi^l + k_rR_\phi^r + k_lk_rR_\phi^lR_\phi^r - k_lk_rT_\phi^2\right). \tag{2.68}$$

Ainsi, les effets inclus dans le quadripôle $\mathbf{Q}_p$ sont ceux dus à la courbure, aux pertes, aux pentes et aux sections des extrémités. Le système équivalent à $\mathbf{Q}_p$ modélise donc les effets d'un tube à courbure constante virtuellement branché à chaque extrémité sur des cylindres de *référence* sans perte de rayon r_c (discontinuité d'ordre 0).

2.4 Jonction de 2 tronçons de tube

Pour construire le modèle du résonateur complet, il est nécessaire de connecter entre eux les différents systèmes représentant chacun un tronçon de tube à courbure constante. Ici nous nous intéressons aux modèles des jonctions qui sont obtenus en branchant 2 systèmes.

En utilisant les variables (p^+, p^-), il est nécessaire d'étudier comment les connexions doivent être faites.

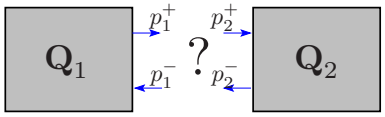


Fig. 2.12 – *Connexion de 2 quadripôles avec les variables (p^+, p^-).*

La porte droite du premier quadripôle $\mathbf{Q}_1$ est connectée à la porte gauche du second quadripôle $\mathbf{Q}_2$. Les variables associées à $\mathbf{Q}_n$ pour $n \in \{1, 2\}$, sont nommées (p_n^+, p_n^-). La continuité de débit et de pression nécessite que $P = p_1^+ + p_1^- = p_2^+ + p_2^-$ et $U = Y_c \left(p_1^+ - p_1^-\right) = Y_c \left(p_2^+ - p_2^-\right)$. Ceci conduit à :

$$p_1^+ = p_2^+ \quad \text{et} \quad p_1^- = p_2^- .$$

En conséquence, la connexion de 2 quadripôles est réalisée simplement en connectant la sortie de $\mathbf{Q}_1$ (p_1^+) sur l'entrée de $\mathbf{Q}_2$ (p_2^+), et réciproquement.

En considérant certaines hypothèses sur la nature des jonctions et des tronçons connectés, nous allons voir que la structure *décomposée* permet de retrouver simplement d'anciens modèles de tubes connus dans la littérature. De plus, ce modèle permet une extension à des cas plus généraux.

Nous notons L_1 et L_2 les longueurs respectives des 2 tronçons de tubes. Le temps τ_k est défini par le temps de propagation des ondes progressives à travers le tronçon k. Ils valent $\tau_k = L_k/c_0$ pour $k \in \{1, 2\}$.

2.4.1 Jonction de cylindres avec discontinuité d'ordre 0

Considérons la connexion de 2 cylindres sans perte, représentés par les quadripôles $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$, avec pour sections respectives $S_{r,1}$ et $S_{l,2}$.

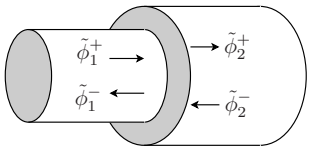


Fig. 2.13 – *Connexion de 2 cylindres, avec discontinuité d'ordre 0.*

Pour des cylindres sans perte, les cellules $\mathcal{Q}_s$ et $\mathcal{Q}_{cl}$ sont des cellules identités et seules les cellules $\mathcal{Q}_a$ ont un effet. "Fusionner" les 2 cellules $\mathcal{Q}_a^{r,1}$ et $\mathcal{Q}_a^{l,2}$ à l'interface des 2 cylindres conduit à un quadripôle équivalent $\mathcal{Q}_{j,a}^{1,2}$ qui modélise la jonction des cylindres (c-à-d $\mathcal{Q}_{j,a}^{1,2} \equiv \mathcal{Q}_a^{r,1} \odot \mathcal{Q}_a^{l,2}$). En utilisant les lois d'interconnexions algébriques (voir (1.35-1.38) en page 39) et les expressions de $k_{r,1}$ et $k_{l,2}$ (voir (2.51) et (2.52) en page 76), on obtient après simplifications la forme de $\mathcal{Q}_{j,a}^{1,2}$. La figure 2.14 représente la connexion des 2 cylindres et la jonction $\mathcal{Q}_{j,a}^{1,2}$ pour laquelle

$$k_{(1,2)} = \frac{S_{r,1} - S_{l,2}}{S_{r,1} + S_{l,2}}. \tag{2.69}$$

Dans le cas sans perte, on retrouve la structure de *Kelly-Lochbaum* qui modélise les réseaux de cylindres avec $W_k(s) = \mathrm{e}^{-\tau_k s}$ (voir par exemple [MG76]). En considérant les pertes visco-thermiques dans les opérateurs de propagation, on retrouve le modèle de [Mat94] avec $W_k(s) = \breve{D}_k(s)\,\mathrm{e}^{-\tau_k s}$ où $\breve{D}_k(s) = \mathrm{e}^{-\epsilon_k \sqrt{s}}$. Ces modèles correspondent à une discontinuité d'ordre 0.

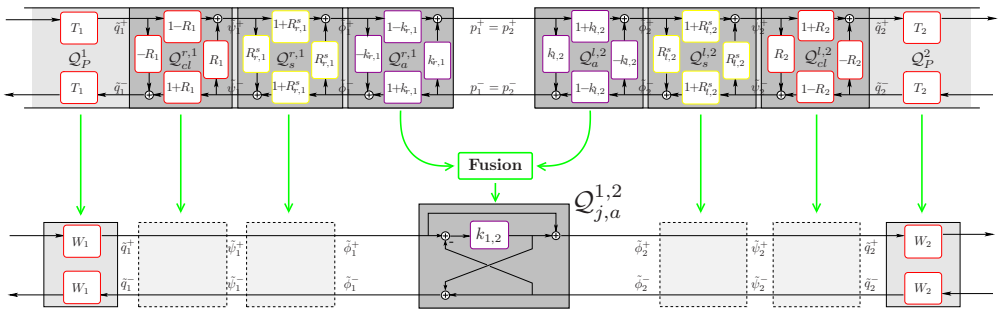


Fig. 2.14 – *Structure de la connexion de 2 cylindres, avec discontinuité d'ordre 0. La "fusion" des cellules $\mathcal{Q}_a^{r,1}$ et $\mathcal{Q}_a^{l,2}$ conduit au quadripôle $\mathcal{Q}_{j,a}^{1,2}$ et les cellules $\mathcal{Q}_s$ et $\mathcal{Q}_{cl}$ sont des cellules identités pour les cylindres sans perte. Les opérateurs T_k deviennent $W_k(s) = \breve{D}_k(s)\,\mathrm{e}^{-\tau_k s}$ avec $\breve{D}_k(s) = 1$ dans le cas sans perte ou $\breve{D}_k(s) = \mathrm{e}^{-\epsilon_k \sqrt{s}}$ avec prise en compte des pertes pour la propagation d'ondes.*

Remarque 2.17. Après fusion des cellules, les variables $p^{\pm}$ disparaissent de la structure. De plus, le paramètre Z_c, choisi abitrairement pour définir les ondes $p^{\pm}$, n'apparait plus dans l'expression de $k_{1,2}$. Par conséquent, le choix de Z_c n'a aucune incidence ni sur la modélisation des tubes, ni sur la simulation puisque les variables $p^{\pm}$ ne sont pas simulées.

2.4.2 Jonction de cônes avec discontinuité d'ordre 1

Nous considérons maintenant la connexion de 2 cônes sans perte avec continuité de section (discontinuité d'ordre 1). Les 2 cônes sont représentés par $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$, avec pour pentes $r'_{r,1}$ et $r'_{l,2}$.

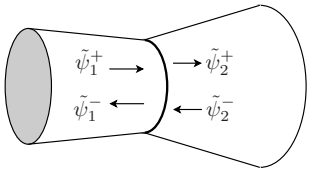


Fig. 2.15 – *Connexion de 2 cônes, avec discontinuité d'ordre 1.*

La continuité de section (ou rayon) implique que $S_{r,1} = S_{l,2} = S_j$ et donc que $k_{(1,2)} = 0$. On note r_j le rayon de tube à la jonction. Ainsi, dans le cas de discontinuité d'ordre supérieur ou égal à 1, le quadripôle $\mathcal{Q}_{j,a}^{1,2}$ est l'identité. De plus, pour les cônes sans perte ($\varepsilon = \Upsilon = 0$), les cellules $\mathcal{Q}_{cl}$ sont aussi des quadripôles identités. En conséquence, seuls les effets de pentes agissent. "Fusionner" les 2 cellules $\mathcal{Q}_s^{r,1}$ et $\mathcal{Q}_s^{l,2}$ conduit à un quadripôle équivalent $\mathcal{Q}_{j,s}^{1,2}$ qui modélise la jonction des cônes (c-à-d $\mathcal{Q}_{j,s}^{1,2} \equiv \mathcal{Q}_s^{r,1} \odot \mathcal{Q}_s^{l,2}$). En utilisant les lois d'interconnexions algébriques (1.35-1.38) et les expressions de $R_{r,1}^s$ et $R_{l,2}^s$ (voir (2.53) et (2.54) en page 76), on obtient après simplifications la forme de $\mathcal{Q}_{j,s}^{1,2}$. La figure 2.16 représente la connexion des 2 cônes et la jonction $\mathcal{Q}_{j,s}^{1,2}$ pour laquelle

$$R_{(1,2)}^s(s) = \frac{\alpha_{(1,2)}}{s - \alpha_{(1,2)}}, \qquad \text{avec} \quad \alpha_{(1,2)} = \alpha_{r,1} + \alpha_{l,2} = +\frac{c_0}{2}\left(\frac{r'_{r,1} - r'_{l,2}}{r_j}\right). \tag{2.70}$$

Dans le cas sans perte, on retrouve la structure de *Kelly-Lochbaum* qui modélise les réseaux de cônes avec $W_k(s) = \mathrm{e}^{-\tau_k s}$ (voir par exemple [V95]). En considérant les pertes visco-thermiques dans les opérateurs de propagation, nous retrouvons le modèle de [Duc01] avec $W_k(s) = \breve{D}_k(s)\,\mathrm{e}^{-\tau_k s}$ où $\breve{D}_k(s) = \mathrm{e}^{-\epsilon_k \sqrt{s}}$. Ces modèles correspondent à une discontinuité d'ordre 1.

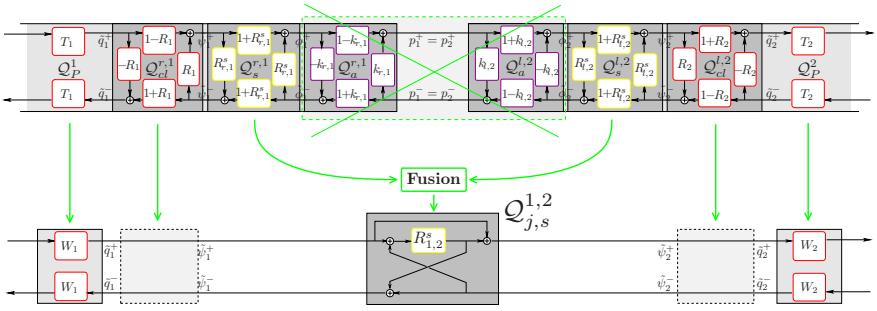


Fig. 2.16 – *Structure de la connexion de 2 cônes, avec discontinuité d'ordre 1. Dans le cas d'une discontinuité d'ordre 1, il n'y pas d'effet de section, la "fusion" des cellules $\mathcal{Q}_s^{r,1}$ et $\mathcal{Q}_s^{l,2}$ conduit au quadripôle $\mathcal{Q}_{j,s}^{1,2}$ et les cellules $\mathcal{Q}_{cl}$ sont des cellules identités pour les cônes sans perte. Les opérateurs T_k deviennent $W_k(s) = \breve{D}_k(s)\,\mathrm{e}^{-\tau_k s}$ avec $\breve{D}_k(s) = 1$ dans le cas sans perte ou $\breve{D}_k(s) = \mathrm{e}^{-\epsilon_k \sqrt{s}}$ avec prise en compte des pertes pour la propagation d'ondes.*

2.4.3 Jonction de tubes évasés avec discontinuité d'ordre 2

Nous considérons maintenant la connexion de 2 tubes évasés avec pertes et avec continuité de section et de pente (discontinuité d'ordre 2). La jonction est caractérisée par un changement de paramètres : $\Upsilon_1 \neq \Upsilon_2$ ou $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$.

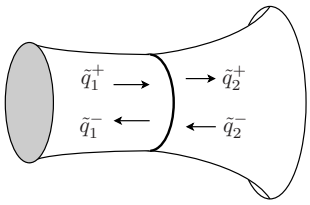


Fig. 2.17 – *Connexion de 2 tubes évasés, avec discontinuité d'ordre 2.*

La régularité $\mathcal{C}^1$ implique $k_{1,2} = 0$ et $R^s_{1,2} = 0$, ainsi seule la courbure du tube et les pertes ont un effet à la jonction des tubes. "Fusionner" les 2 cellules $\mathcal{Q}^{r,1}_{cl}$ et $\mathcal{Q}^{l,2}_{cl}$ conduit à un quadripôle équivalent $\mathcal{Q}^{1,2}_{j,cl}$ qui modélise la jonction des tubes évasés (c-à-d $\mathcal{Q}^{1,2}_{j,cl} \equiv \mathcal{Q}^{r,1}_{cl} \odot \mathcal{Q}^{l,2}_{cl}$). De même, en utilisant les lois d'interconnexions algébriques (1.35-1.38) et les expressions de R_1 et R_2 (voir (2.55) en page 77), on obtient après simplifications la forme de $\mathcal{Q}^{1,2}_{j,cl}$. La figure 2.18 représente la connexion des 2 tubes évasés et la jonction $\mathcal{Q}^{1,2}_{j,cl}$ pour laquelle

$$R_{(1,2)}(s) = \frac{\Gamma_1(s) - \Gamma_2(s)}{\Gamma_1(s) + \Gamma_2(s)}, \quad \text{avec } \Gamma_n(s) = \sqrt{\left(\frac{s}{c_0}\right)^2 + 2\varepsilon_n \left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon_n}, \ \forall n \in \{1,2\}. \tag{2.71}$$

On retrouve la structure de *Kelly-Lochbaum* qui modélise les réseaux de tubes évasés avec continuité de section et de pente (voir [HMM07b] en annexe H). Ici $W_k(s) = T_k(s) = \mathrm{e}^{-\Gamma_k(s)L_k} = D_k(s)\,\mathrm{e}^{-\tau_k s}$. Ce modèle correspond à une discontinuité d'ordre 2.

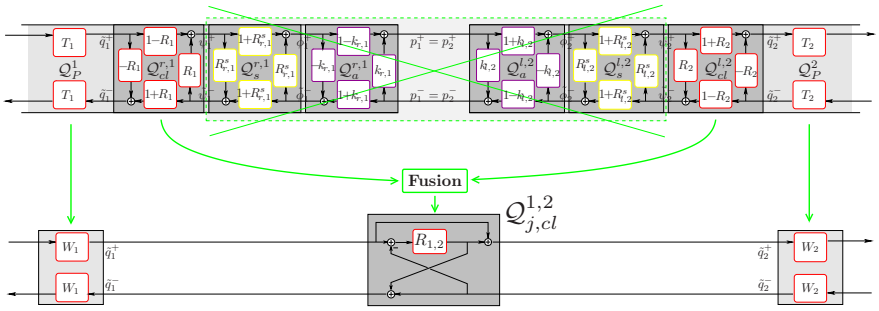


Fig. 2.18 – *Structure de la connexion de 2 tubes évasés, avec discontinuité d'ordre 2. Dans le cas d'une discontinuité d'ordre 2, il n'y pas d'effet de section et de pente. La "fusion" des cellules $\mathcal{Q}^{r,1}_{cl}$ et $\mathcal{Q}^{l,2}_{cl}$ conduit au quadripôle $\mathcal{Q}^{1,2}_{j,cl}$. Les opérateurs T_k sont $W_k(s) = \mathrm{e}^{-\Gamma_k(s)L_k}$.*

2.4.4 Jonction de cônes avec discontinuité d'ordre 0

Nous considérons maintenant la connexion de 2 cônes sans perte, avec une discontinuité éventuelle de section. Ces cônes sont représentés par $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$, et ont respectivement pour sections $S_{r,1}$ et $S_{l,2}$ et pour pentes $r'_{r,1}$ et $r'_{l,2}$.

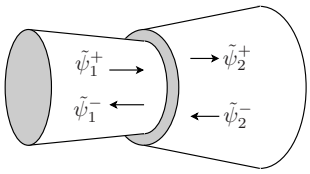


Fig. 2.19 – *Connexion de 2 cônes, avec discontinuité d'ordre 0.*

Pour les cônes sans perte ($\varepsilon = \Upsilon = 0$), les cellules $\mathcal{Q}_{cl}$ sont des quadripôles identités. Ici les sections et les pentes ont un effet, il est donc nécessaire de "fusionner" les 4 cellules respectives pour obtenir le quadripôle $\mathcal{Q}^{1,2}_{j,as}$ de la jonction. On écrit donc : $\mathcal{Q}^{1,2}_{j,as} \equiv \mathcal{Q}^{r,1}_s \odot \mathcal{Q}^{r,1}_a \odot \mathcal{Q}^{l,2}_a \odot \mathcal{Q}^{l,2}_s$. De même, en utilisant les lois d'interconnexions algébriques et les expressions de $k_{r,1}, k_{l,2}, R^s_{r,1}$ et $R^s_{r,1}$, on obtient après simplifications la forme de $\mathcal{Q}^{1,2}_{j,as}$. La figure 2.20 représente la connexion des 2 cônes et la jonction $\mathcal{Q}^{1,2}_{j,as}$ pour laquelle

$$R^{as}_{(1,2)}(s) = \frac{\alpha_{(1,2)}}{s - \alpha_{(1,2)}},\quad C_1 = \frac{2S_{r,1}}{S_{r,1}+S_{l,2}},\quad C_2 = \frac{2S_{l,2}}{S_{r,1}+S_{l,2}},\quad C_3 = \frac{S_{r,1}-S_{l,2}}{S_{r,1}+S_{l,2}}, \tag{2.72}$$

$$\text{avec}\quad \alpha_{(1,2)} = 2\left(\frac{\alpha_{r,1}S_{r,1} + \alpha_{l,2}S_{l,2}}{S_{r,1}+S_{l,2}}\right),\quad \alpha_{r,1} = +\frac{c_0}{2}\frac{r'_{r,1}}{r_{r,1}}\quad \text{et}\quad \alpha_{l,2} = -\frac{c_0}{2}\frac{r'_{l,2}}{r_{l,2}}. \tag{2.73}$$

Ici, une structure un peu différente de la forme habituelle de *Kelly-Lochbaum* est obtenue (voir [vW02]). Elle correspond à la jonction de 2 cônes avec discontinuité de section et de pente. De la même manière que pour les quadripôles des jonctions précédentes, cette forme ne fait apparaître qu'une seule fonction de transfert à simuler (du premier ordre), ce qui a pour intérêt de réduire le temps de calcul. Dans le cas sans perte $W_k(s) = \mathrm{e}^{-\tau_k s}$, mais en considérant les pertes visco-thermiques dans les opérateurs de propagation, nous retrouvons alors le modèle connu de [vW02] (avec des notations différentes) pour $W_k(s) = \breve{D}_k(s)\,\mathrm{e}^{-\tau_k s}$ où $\breve{D}_k(s) = \mathrm{e}^{-\epsilon_k\sqrt{s}}$. Ce modèle correspond à une discontinuité d'ordre 0.

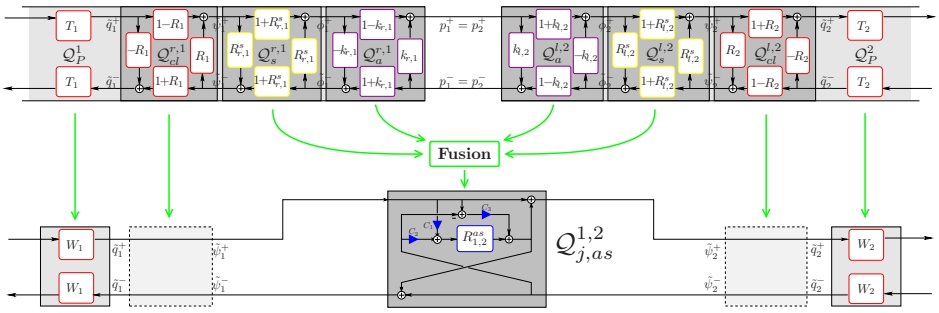


Fig. 2.20 – *Structure de la connexion de 2 cônes, avec discontinuité d'ordre 0. La "fusion" des cellules représentant les sections et pentes conduit au quadripôle $\mathcal{Q}^{1,2}_{j,as}$ et les cellules $\mathcal{Q}_{cl}$ sont des cellules identités pour les cônes sans perte. Les opérateurs T_k deviennent $W_k(s) = \breve{D}_k(s)\,\mathrm{e}^{-\tau_k s}$ avec $\breve{D}_k(s) = 1$ dans le cas sans perte ou $\breve{D}_k(s) = \mathrm{e}^{-\epsilon_k\sqrt{s}}$ avec prise en compte des pertes pour la propagation d'ondes.*

2.4.5 Jonction de tubes évasés avec discontinuité d'ordre 0

Enfin nous considérons le cas général de tubes évasés avec rupture de section, de pente et de courbure.

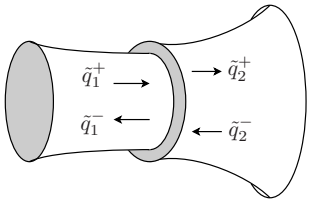


Fig. 2.21 – *Connection de 2 tubes évasés, avec discontinuité d'ordre 0.*

Ici toutes les cellules ont un effet à la jonction. Le quadripôle de la jonction est alors obtenu par la "fusion" suivante : $\mathcal{Q}_J^{1,2} \equiv \mathcal{Q}_{cl}^{r,1} \odot \mathcal{Q}_s^{r,1} \odot \mathcal{Q}_a^{r,1} \odot \mathcal{Q}_a^{l,2} \odot \mathcal{Q}_s^{l,2} \odot \mathcal{Q}_{cl}^{l,2}$. On trouve le quadripôle illustré en figure 2.22, pour lequel :

$$R_k^j = \frac{\beta_k \left(S_{r,1}\Gamma_1 - S_{l,2}\Gamma_2\right) + \frac{2}{c_0}\left(S_{r,1}\alpha_{r,1} + S_{l,2}\alpha_{l,2}\right)}{\left(S_{r,1}\Gamma_1 + S_{l,2}\Gamma_2\right) - \frac{2}{c_0}\left(S_{r,1}\alpha_{r,1} + S_{l,2}\alpha_{l,2}\right)} \quad \text{avec} \quad \beta_{(1,2)} = 1 \text{ et } \beta_{(2,1)} = -1. \tag{2.74}$$

Contrairement aux cas précédents, ici il n'est pas possible d'obtenir une forme qui ne fait apparaître une seule fonction de transfert et des coefficients réels. De plus, l'étude des singularités des fonctions $R_{1,2}^j$ et $R_{2,1}^j$, est délicate en raison de la présence des fonctions Γ_1 et Γ_2. Dans la suite, la "fusion" des six cellules sera réalisée à partir de leur représentation d'état en utilisant l'algèbre de Tassart (voir [Tas99] ou la partie 1.3.5 p.46), et non à partir de leurs fonctions de transfert.

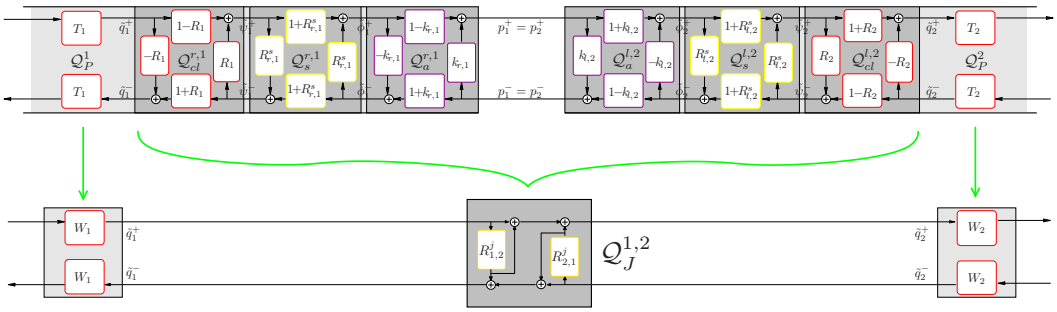


Fig. 2.22 – *Structure de la connexion de 2 tubes évasés, avec discontinuité d'ordre 0. La jonction est obtenue par* $\mathcal{Q}_J^{1,2} \equiv \mathcal{Q}_{cl}^{r,1} \odot \mathcal{Q}_s^{r,1} \odot \mathcal{Q}_a^{r,1} \odot \mathcal{Q}_a^{l,2} \odot \mathcal{Q}_s^{l,2} \odot \mathcal{Q}_{cl}^{l,2}$*, et les opérateurs* T_k *sont* $W_k(s) = \mathrm{e}^{-\Gamma_k(s)L_k} = D_k(s)\,\mathrm{e}^{-\tau_k s}$.

Chapitre 3

Analyse de stabilité et de passivité

Nous nous intéressons ici à la stabilité et à la passivité des modèles de tubes acoustiques présentés plus tôt : modèles par réseaux de cylindres, de cônes et de tubes avec courbure. Nous considérons la stabilité *EBSB*[1] des sorties et des sous-états internes de systèmes causaux. L'instabilité d'un système se caractérise par l'existence d'un ou plusieurs signaux qui divergent quand le système est soumis à des entrées bornées. Il n'est bien entendu pas envisageable de simuler de tels systèmes.

Un tube étant un élément passif, les modèles acoustiques utilisés doivent pouvoir conserver cette propriété de passivité et de stabilité. Pourtant, bien que la plupart des calculs numériques dans le domaine spectral montrent que le modèle de *Webster-Lokshin* conserve ces propriétés, les décompositions du système en plusieurs quadripôles, fait apparaître des sous-systèmes instables.

C'est là le paradoxe et une difficulté de cette étude de stabilité. Parce que malgré la présence de sous-systèmes instables dans la structure de simulation, on constate que la boucle avec retards a pour effet de stabiliser dans certains cas les sous-états internes du système.

De plus la fonction Γ liée au nombre d'onde k par la relation $\Gamma(i\omega) = ik(\omega)$, possède des ensembles infinis et continus de singularités dans le domaine de Laplace, qui ne sont pas du type pôles. Les systèmes associés sont dits de dimension infinie et ne permettent pas d'utiliser les outils standard connus en automatique ou en traitement du signal.

Dans une première partie, nous présentons une étude pour les réseaux de cylindres et de cônes. Nous commençons par un résumé de la preuve de stabilité donnée dans [Mat94] pour les cylindres. Puis nous développons la preuve pour les cônes. Cette étude fait apparaître un problème de jonctions instables pour un changement négatif de pentes. Pour ce problème connu, aucune preuve mathématique de stabilité pour la structure de *Kelly-Lochaum* n'avait été faite à notre connaissance.

Dans une deuxième partie, nous commençons par présenter en détail la fonction Γ du modèle de *Webster-Lokshin* ainsi que ses conséquences sur les fonctions de transfert associées. Cette partie est cruciale pour comprendre toute la difficulté de la simulation du modèle de *Webster-Lokshin*.

Nous faisons dans une troisième partie la preuve de stabilité et de passivité pour des réseaux de tubes évasés ($\Upsilon \geq 0$) avec profils de classe $\mathcal{C}^1$. Pour ce système, sachant que les fonctions mises en jeu sont de modules plus petits que 1, la preuve de stabilité est immédiate. Mais l'étude de la passivité est plus difficile, cependant nous pouvons limiter l'étude à l'axe de Fourier, et le *théorème du maximum* étent le résultat au demi-plan droit entier.

La quatrième partie traite du cas particulier des courbures négatives. Ce cas présente un ensemble infini de singularités à l'origine d'instabilités. Grâce à un raisonnement physique, confirmé par des calculs mathématiques, nous faisons une interprétation de cet ensemble que nous appelons *coupure*.

La dernière partie dresse un bilan des différentes sources d'instabilités dans le système. Nous n'avons pas pu démontrer rigoureusement la stabilisation de ces instabilités, alors nous poserons des conjectures qui ont été validées empiriquement par des calculs numériques dans le domaine de Laplace.

Remarque 3.1. *Dans ce chapitre nous parlons de* fonctions de transfert stables. *Il s'agit d'un abus de langage que nous faisons par commodité. Il faut comprendre que le système* SISO[2] *linéaire associé, a sa sortie bornée quand il est soumis à une entrée bornée. Il s'agit de la stabilité dite* EBSB.

De même nous parlons de sous-états stables *d'un système, quand les valeurs numériques de ces sous-états restent bornées pour des entrées bornées du sytème.*

[1] L'acronyme *EBSB* signifie : Entrées Bornées/Sorties Bornées

[2] L'acronyme *SISO* signifie : Single Input Single Output. Il désigne des systèmes à une entrée et une sortie scalaires.

3.1 Stabilité et passivité dans les cylindres et les cônes

Dans cette partie nous présentons l'étude de stabilité et de passivité pour les modèles de réseaux de tubes cylindriques et coniques de [MG76], [Mat94] et [VÖ95] (de la partie 1.2.3 page 35).

Ici nous considérons la stabilité *EBSB* du système qui équivaut à ce que les relations entrées/sorties soient données par des fonctions de transfert holomorphes dans le demi-plan droit du domaine de Laplace (pas de singularités dans $\mathbb{C}_0^+ := \{s \in \mathbb{C} / \ \Re\mathrm{e}(s) > 0\}$). Nous nous intéressons également à la stabilité des sous-états internes du réseau.

La passivité d'un système est caractérisée par des impédances à parties réelles positives dans le demi-plan droit de Laplace. En considérant les ondes progressives, la passivité est caractérisée par des fonctions de transfert strictement inférieures à 1 en module dans $\mathbb{C}_0^+$, et inférieures ou égales à 1 sur $i\mathbb{R}$.

La passivité d'un système est une propriété intéressante parce qu'elle nous permet de prouver la stabilité d'un réseau de systèmes connectés. En effet, après débouclage de 2 systèmes, on voit apparaître des dénominateurs tels que $1 - R_1 R_2$ (cf. §1.3.1 p.39), où R_1 et R_2 sont les réflexions des 2 systèmes. Ainsi, prouver que $|R_1| < 1$ et $|R_2| < 1$ dans $\mathbb{C}_0^+$ prouve que le dénominateur ne s'y annule pas et que le système global est stable.

Nous montrons ici que pour des tubes physiquement réalistes, la structure de *Kelly-Lochbaum* définit un système stable et passif. Nous montrons également que le branchement du réseau sur une réflexion R_r passive à droite (cf. Fig. 3.1-(a)) conserve la passivité, et donc que le système défini par la figure 3.1-(b) est stable.

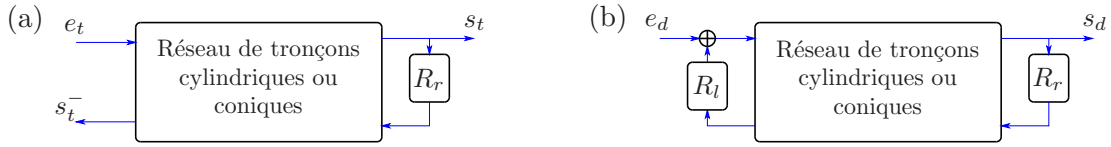


Fig. 3.1 – *Tripôle et Dipôle d'un réseau de tronçons connecté sur 1 ou 2 réflexions. (a) : Réseau branché sur une réflexion R_r passive à droite. (b) : Réseau branché sur 2 réflexions R_l et R_r passives.*

3.1.1 Réseau de cylindres

Dans [Mat94, annexe C], l'étude de stabilité est faite pour les réseaux de tronçons cylindriques avec pertes visco-thermiques. Nous faisons ici un bref résumé.

Dans un premier temps, par un changement de variables, la structure en treilli, équivalente à la structure de *Kelly-Lochbaum*, est obtenue (cf. Fig. 3.2). Les propagateurs $W_n(s)$ y sont remplacés par les variables complexes w_n.

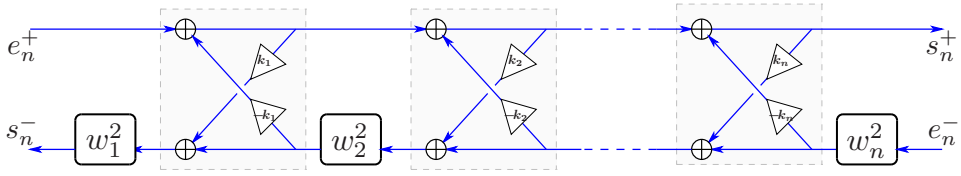


Fig. 3.2 – *Structure de filtre en treilli pour un réseau de cylindres*

Puis une représentation matricielle du système est construite par récurrence sur le nombre de tronçons. En utilisant un principe de *poly-réciprocité*, il est prouvé que le polynôme caractéristique ne s'annule pas si les k_n et les w_n sont de modules plus petits que 1.

Or les réflexions k_n et les propagateurs $W_n(s)$ sont donnés par

$$k_n = \frac{S_{n-1} - S_n}{S_{n-1} + S_n}, \qquad \text{et} \quad W_n(s) = \breve{D}_n(s)\,\mathrm{e}^{-\tau_n s} = \mathrm{e}^{-\epsilon_n \sqrt{s}}\,\mathrm{e}^{-\tau_n s}\,.$$

Avec $S_n > 0$ l'aire de la section du n-ième cylindre, $|k_n| < 1$ pour tout n. Et avec $\epsilon \geq 0$, le coefficient des pertes du modèle, on a $\Re\mathrm{e}(\sqrt{s}) > 0 \ \ \forall s \in \mathbb{C}_0^+$ (cf. §3.2.1 p.96), donc $|W_n(s)| \ < 1$ pour tout s dans $\mathbb{C}_0^+$. Par conséquent, pour $w_n = W_n(s)$, le système de la figure 3.2 est stable.

Remarque 3.2. *Dans le cas où les w_n représentent des retards purs $\mathrm{e}^{-\tau_n s}$ avec τ_n commensurables, la preuve de stabilité avait été donnée dans [MG76]. L'avantage de la preuve de [Mat94] est que les w_n sont "déconnectées" les uns des autres et sont seulement considérés de modules plus petits que 1 dans $\mathbb{C}_0^+$ et on peut donc prendre en compte l'effet des pertes et des retards non commensurables.*

Enfin, toujours dans [Mat94, annexe C], la preuve de stabilité est faite dans le cas du tripôle de la figure 3.2-(a), où une réflexion passive R_r est connectée à droite, et dans le cas du dipôle de la figure 3.2-(b), où une réflexion passive R_l est connectée à gauche.

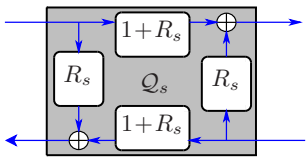
3.1.2 Réseau de cônes

Considérons le modèle de [V̈95] d'un réseau de cônes sans perte avec continuité de section. Dans un premier temps nous présentons un problème de stabilité qui apparaît à certaines jonctions de cônes. Puis nous apportons une compréhension du problème sur un exemple simple. Ensuite, après avoir étudié la stabilité et la passivité d'un cône seul, nous étudions la stabilité et la passivité du cône connecté sur une réflexion passive quelconque. Ce résultat nous permettra dans un dernier temps à prouver la stabilité d'un réseau de cônes.

3.1.2.1 *Problème de stabilité d'une jonction de cônes*

Les quadripôles aux jonctions de 2 cônes prennent la forme d'une cellule de la structure de *Kelly-Lochbaum* que nous redonnons ci dessous. Avec r'_1 la pente du cône de gauche, r'_2 la pente du cône de droite et r_j le rayon à la jonction, la fonction de transfert $R_s(s)$ de la réflexion d'onde est donnée par

$$R_s(s) = \frac{\alpha}{s-\alpha},$$
$$\text{avec} \quad \alpha = \frac{c_0}{2}\left(\frac{r'_1 - r'_2}{r_j}\right).$$



Dans le cas où $r'_1 < r'_2$, le pôle α de $R_s(s)$ est négatif, et la fonction $R_s(s)$ est de module plus petit que 1 pour $s \in \mathbb{C}_0^+$ ($\Re\mathrm{e}(s) > 0$), et elle définit un système causal et stable. Cependant un problème survient quand $r'_1 > r'_2$ car le pôle α est positif et la réponse impulsionnelle de $R_s(s)$ est une exponentielle divergente.

Fig. 3.3 – *(a) : Jonction de cônes avec un saut positif de pente ($\alpha < 0$), (b) : Jonction de cônes avec un saut négatif de pente ($\alpha > 0$). Dans le premier cas la jonction est stable, mais dans le second cas la jonction est instable.*

3.1.2.2 *Exemple d'un cône convergent tronqué*

Nous considérons ici l'exemple simple d'un cône convergent sans perte de longeur L, connecté à sa gauche sur un cylindre sans perte avec continuité de section, et connecté à sa droite sur une impédance idéalement nulle. On note r_0 son rayon à gauche, et r_L son rayon à droite.

La figure 3.4 présente le schéma du cône et la structure de simulation : la jonction est modélisée par un quadripôle $\mathcal{Q}_s$, les propagations par 2 retards $\mathrm{e}^{-\tau s}$ avec $\tau = L/c_0$, et l'impédance nulle en fin de tube est représentée par une réflexion -1 sur les ondes progressives sphériques $\psi^{\pm}$.

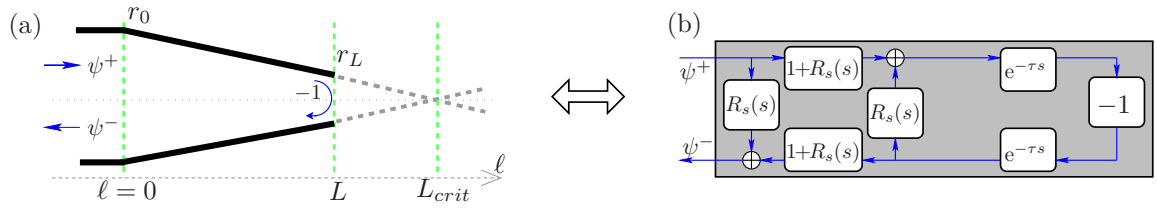


Fig. 3.4 – *Cône convergent tronqué. (a) : Schéma, (b) : Structure de modélisation.*

Pour $\alpha = -\frac{c_0}{2}\frac{r'}{r_0} > 0$ où $r' = (r_L - r_0)/L < 0$, on a $R_s(s) = \alpha/(s-\alpha)$, et pour $T = 2\tau$ le calcul de la réflexion globale donne :

$$\begin{aligned} R_g(s) &:= \frac{\psi^-(s)}{\psi^+(s)} = R_s(s) - \frac{\big(1+R_s(s)\big)^2\,\mathrm{e}^{-2\tau s}}{1+R_s(s)\,\mathrm{e}^{-2\tau s}} \\ &= \frac{\alpha - \big(s+\alpha\big)\,\mathrm{e}^{-Ts}}{s-\alpha+\alpha\,\mathrm{e}^{-Ts}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ce problème présente un paradoxe : alors que la fonction de réflexion $R_s(s)$ est instable (saut de pente négatif : $\alpha > 0$), on constate que la réflexion globale R_g du système est stable. C'est-à-dire que malgré l'apparition dans la structure d'une fonction de transfert instable, la relation entrée/sortie est stable.

Ce problème est bien connu et est présenté dans [ABM88, MA88, MAC88]. Une interprétation du phénomène est donnée dans [GKP90] : la réflexion $R_s(s)$ à la jonction y est interprétée comme la réflexion globale entre un cylindre et un cône semi-infini à droite (anéchoïque). Effectivement quand $L = c_0\tau \to \infty$, $\exp(-Ts) \to 0$ pour $\Re\mathrm{e}(s) > 0$, ce qui donne :

$$\lim_{T\to\infty} R_g(s) = \lim_{T\to\infty} \frac{\alpha - \big(s+\alpha\big)\,\mathrm{e}^{-Ts}}{s-\alpha+\alpha\,\mathrm{e}^{-Ts}} = \frac{\alpha}{s-\alpha} = R_s(s), \quad \text{pour } \Re\mathrm{e}(s) > 0 \text{ et } s \neq \alpha. \tag{3.2}$$

Or, un tel cône a un rayon qui s'annule en $\ell = L_{crit} := -r_0/r'$ et qui devient négatif au-delà. Un cône convergent semi-infini est donc irréaliste physiquement, et aucune stabilité ne peut être justifiée par un raisonnement physique pour la fonction $R_s(s)$ associée.

Cependant le cône considéré est tronqué en $\ell = L$, et avec $L < L_{crit}$ la boucle fermée avec retard, qui représente le retour d'ondes à travers le cône, a pour effet de "compenser" cette instabilité. Cette "compensation" d'instabilité est réalisée du point de vue entrée/sortie, mais pas nécessairement sur les sous-états internes du système.

Dans [GKP90] et [Duc02], des méthodes de calcul ont été proposées, mais aucune d'entre elles ne permet une simulation numérique à faible coût en temps-réel sur un horizon temporel infini. Dans [V̈95], le réseau de cônes est simulé en utilisant la structure des cellules où $R_s(s)$ est factorisée, et la stabilité interne de la simulation y est observée sans être prouvée.

Dans [MHM08b] (voir annexe I), en écrivant la représentation d'état du système avec retard de la structure donnée en figure 3.5-(a), nous avons montré que le déterminant possède une racine à partie réelle positive. Ce système possède donc au moins un sous-état instable. Cependant, en utilisant un changement de base orthogonale, nous avons pu séparer une partie observable de la partie non observable du système. Puis la réalisation minimale du système est obtenue en éliminant la partie

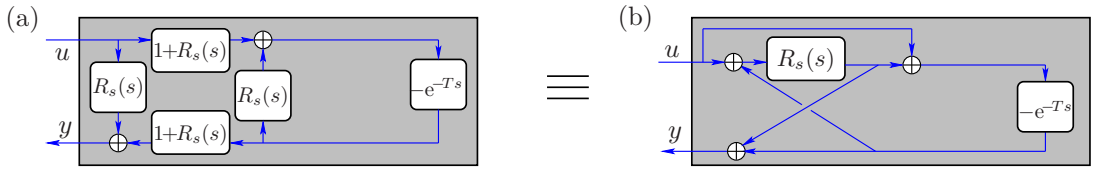


Fig. 3.5 – *Structures de simulation du cône convergent tronqué. La structure de la figure (b) est équivalente à celle de (a) avec factorisation de la fonction R_s.*

non observable de la simulation. Notons que cette réalisation correspond à la structure de la figure 3.5-(b).

Avec $u = \psi^+$ et $y = \psi^-$, une représentation d'état de la réalisation minimale est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s\,x(s) & = & \alpha\left(1-\mathrm{e}^{-Ts}\right)x(s) \;+\; \alpha\left(1-\mathrm{e}^{-Ts}\right)u(s), \\ y(s) & = & \left(1-\mathrm{e}^{-Ts}\right)x(s) \;-\; \mathrm{e}^{-Ts}\,u(s), \end{array} \right. \tag{3.3}$$

qui a pour équation caractéristique :

$$d(s) := s - \alpha + \alpha\,\mathrm{e}^{-Ts} = 0. \tag{3.4}$$

Dans [MHM08b], nous faisons l'étude de $d(s)$ avec la méthode de la *D-Subdivision* (voir [CM49, KN86]) et montrons que : $d(s)$ n'a pas de racine pour $s \in \mathbb{C}_0^+ \cup i\mathbb{R}^*$, si $\alpha T < 1$. Ici nous présentons une preuve plus courte[3] :

Démonstration. Selon le corollaire A.5 (du théorème du maximum), $\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{Ts}\right| < 1$, $\forall s \in \mathbb{C}_0^+ \cup i\mathbb{R}^*$.

Or l'équation $s - \alpha + \alpha\,\mathrm{e}^{-Ts} = 0$ se réécrit $\frac{1}{\alpha T} = \frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{Ts}$, ce qui est impossible pour $s \in \mathbb{C}_0^+ \cup i\mathbb{R}^*$ tant que $\alpha T < 1$. □

Nous montrons donc que pour $\alpha T < 1$, toutes les racines de d sont à partie réelle strictement négative, sauf une en $s = 0$. Cependant, cette racine qui se comporte comme un intégrateur pur, à la limite de la stabilité, est naturellement compensée par la boucle retardée. Le critère de stabilité est donc $\alpha T < 1$ qui équivaut à $L < L_{crit}$ (car on a aussi $\alpha = c_0/(2L_{crit})$).

Remarque 3.3. *Une remarque intéressante est que le système devient instable dès que L devient supérieur à L_{crit}. Dans ce cas, le cône tronqué devient physiquement irréaliste, ce qui confirme l'interprétation faite dans [GKP90]. Nous reverrons une interprétation semblable dans le cas de tubes avec courbure négative en partie 3.4 page 112.*

Remarque 3.4. *Ici, la réalisation minimale permet non seulement de réduire le temps de calcul du système, mais permet aussi de rendre stable la réalisation, puisque la partie instable du système original (de la figure 3.5-(a)) correspond à la partie non observable.*

Pour la simulation à temps discret, nous discrétisons séparément le retard e^{-Ts} et $R_s(s)$. La discrétisation de $R_s(s)$ par le bloqueur d'ordre 1 donne un système stable avec le même critère : $T\alpha < 1$. En faisant une récurrence sur la longueur du cône, on prouve que le critère de Jury (voir [Jur74]) n'est plus vérifié dès que $T\alpha > 1$. Nous ne donnons pas plus de détails ici, et nous renvoyons à [MHM08b, partie V et annexe] (voir annexe I p.183). Nous donnons les réponses impulsionnelles à temps discret et à temps continu en Fig. 3.6.

Remarque 3.5. *Cette preuve a pu être faite pour le bloqueur d'ordre 1, mais nous avons constaté que la transformée bilinéaire ou le bloqueur d'ordre 0 par exemple, produisent un système à temps discret dont le critère de stabilité est plus restrictif : $\alpha T < \rho < 1$.*

[3] Nous remercions Silviu-Iulian Niculescu pour nous avoir donné cette preuve plus courte.

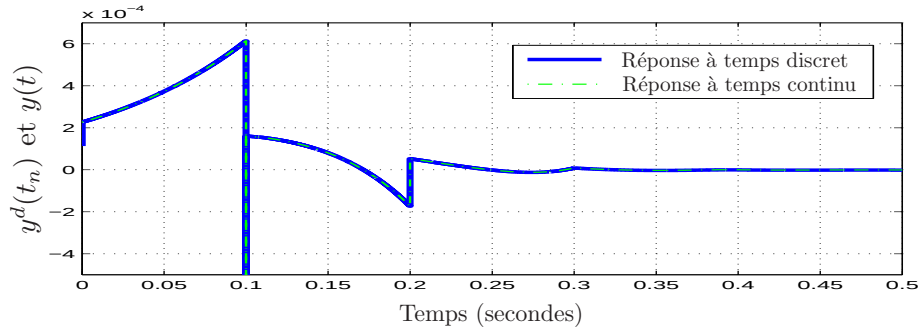


Fig. 3.6 – *Réponse impulsionnelle du cône convergent tronqué, avec $T = 0.1$ s et $\alpha = 9.99$ s^{-1}. Cette courbe montre que la réponse commence à diverger sur $[0, T[$, et les retours successifs compensent cette instabilité provenant de R_s. La réponse analytique à temps continue $y(t)$ est donnée dans [GKP90].*

3.1.2.3 *Stabilité et passivité d'un cône*

Stabilité Considérons un cône sans perte de longueur L, connecté à ses extrémités sur des cylindres sans perte avec continuité de rayon (cf. Fig. 3.7). Avec r_0 et r_L les rayons respectivement à gauche et à droite, la pente du cône est donnée par $r' = (r_L - r_0)/L$.

Selon le modèle de [VÖ95], ce système est modélisé par la structure de la figure 3.8-(a), qui correspond à la réalisation minimale du système comme nous venons de le voir. Remarquons que ce système est la forme décomposée du quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ (redonné en Fig. 3.8-(b)), avec $\varepsilon = 0$ et $\Upsilon = 0$, où $R^l_\phi := \phi^-_0/\phi^-_0$ et $R^r_\phi := \phi^+_L/\phi^-_L$ sont les réflexions globales et $T_\phi := \phi^+_L/\phi^+_0 = \phi^-_0/\phi^-_L$ est la transmission globale (cf. §2.3.1.1 p.71).

Comme le montre la figure 3.7, pour des rayons r_0 et r_L positifs, il y a un saut de pente positif et un autre négatif. Donc l'une des 2 jonctions est stable, et l'autre est instable. Nous retrouvons alors le même problème de stabilité à l'une des 2 jonctions.

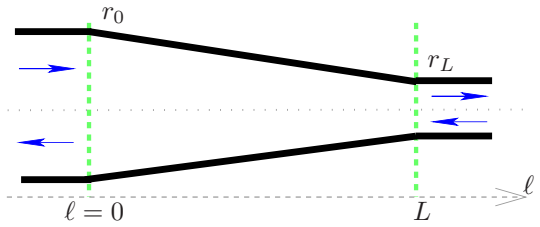


Fig. 3.7 – *Schéma du cône*

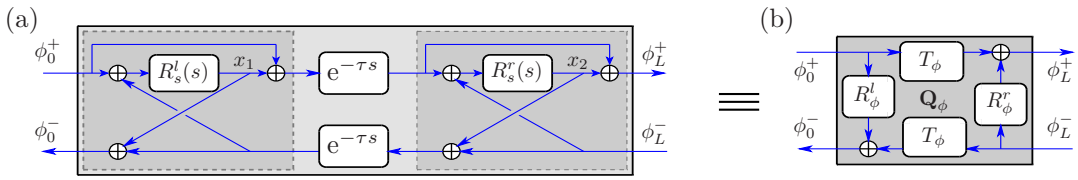


Fig. 3.8 – *(a) : Structure de simulation du cône, (b) : Quadripôle équivalent*

Rappelons les expressions des fonctions de transfert R^l_s et R^r_s :

$$R^l_s(s) = \frac{\alpha_l}{s - \alpha_l} \text{ et } R^r_s(s) = \frac{\alpha_r}{s - \alpha_r} \quad \text{avec } \alpha_l = -\frac{c_0}{2}\frac{r'}{r_0} \text{ et } \alpha_r = +\frac{c_0}{2}\frac{r'}{r_L}. \tag{3.5}$$

Avec $T = 2\tau = 2L/c_0$, notons que les pôles des réflexions sont liés par

$$\alpha_r = \frac{\alpha_l}{T\alpha_l - 1}. \tag{3.6}$$

Avec $U = [\phi_0^+, \phi_L^-]^T$, $Y = [\phi_0^-, \phi_L^+]^T$, et le vecteur d'état $X := [x_1, x_2]^T$ où x_1 et x_2 sont les sorties de R_s^l et R_s^r, une représentation d'état est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} sX(s) & = & \begin{bmatrix} \alpha_g & \alpha_g\,\mathrm{e}^{-\tau s} \\ \alpha_g\,\mathrm{e}^{-\tau s} & \alpha_d \end{bmatrix} X(s) + \begin{bmatrix} \alpha_g & \alpha_g\,\mathrm{e}^{-\tau s} \\ \alpha_g\,\mathrm{e}^{-\tau s} & \alpha_d \end{bmatrix} U(s), \\ Y(s) & = & \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-\tau s} \\ \mathrm{e}^{-\tau s} & 1 \end{bmatrix} X(s) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} U(s), \end{array} \right. \tag{3.7}$$

et l'équation caractéristique est alors donnée par :

$$d(s) := s^2 - as + b - b\,\mathrm{e}^{-Ts} = 0, \qquad \text{avec } \; a = \alpha_l + \alpha_r \;\text{ et } b = \alpha_l\,\alpha_r. \tag{3.8}$$

L'étude des racines donne le résultat suivant : $d(s)$ n'a pas de racine pour $s \in \mathbb{C}_0^+ \cup i\mathbb{R}^*$, si $\alpha_l T < 1$.

Démonstration. Selon le corollaire A.5 (du théorème du maximum), $\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{Ts}\right| < 1 \;\forall s \in \mathbb{C}_0^+ \cup i\mathbb{R}^*$.

Or l'équation $s^2 - as + b - b\,\mathrm{e}^{-Ts} = 0$ se réécrit $\frac{a-s}{bT} = \frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{Ts}$.

Avec $a = \alpha_l + \alpha_r$ et $b = \alpha_l\alpha_r$, et avec (3.6) qui lie α_l et α_r, le membre de gauche s'écrit : $\big(T\alpha_l^2 + s(1 - T\alpha_l)\big)/(T\alpha_l^2)$. Or, avec $s = \xi + i\omega$ $(\xi \geq 0)$ et pour $\alpha_l T < 1$ on a

$$\Big|T\alpha_l^2 + s(1-T\alpha_l)\Big| = \Big|\underbrace{T\alpha_l^2}_{>0} + \underbrace{\xi}_{\geq 0}\underbrace{(1-T\alpha_l)}_{>0} + i\omega(1-T\alpha_l)\Big| \geq \Big|T\alpha_l^2\Big|.$$

En conséquence $d(s) = 0$ n'a pas de solution pour $s \in \mathbb{C}_0^+ \cup i\mathbb{R}^*$ tant que $\alpha_l T < 1$. □

Cependant, en $s = 0$, $d(s)$ a une racine double. Mais les fonctions de transfert Y_n/U_m et X_n/U_m montrent qu'elle est compensée une fois (pour $(n, m) \in \{1, 2\}^2$). Le système conserve donc un pôle simple en $s = 0$, à la limite de la stabilité. Les réponses impulsionnelles associées sont alors bornées.

Le critère de stabilité du cône est donc $\alpha_l T < 1$ qui équivaut à $\alpha_r T < 1$ (voir (3.6)), ou bien à $L < L_{crit}$. Comme précédemment, les sous-états du système ainsi que les relations entrée/sortie du cône sont stables pour des paramètres physiquement réalistes.

Passivité Ici nous cherchons à démontrer que les 2 réflexions globales du système de la figure 3.8-(b) sont de modules plus petits que 1 pour $s \in \mathbb{C}_0^+$. Ces réflexions globales sont notées R_ϕ^l (gauche) et R_ϕ^r (droite). Pour cette étude, nous avons besoin du résultat intermédiaire suivant.

Lemme 3.1. *Considérons le branchement d'une jonction de cônes $\mathcal{Q}_s$ sur une réflexion $\mathcal{R}_p$ comme le montre la figure 3.9. La réflexion de la jonction est donnée par $\mathcal{R}_s(s) = \alpha/(s-\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{R}_p$ est telle que $|\mathcal{R}_p(s)| \leq 1$ pour $s \in i\mathbb{R}$.*

Alors la réflexion équivalente $\mathcal{R}_e(s) := y(s)/u(s)$, vérifie : $\forall s \in i\mathbb{R}, \;\; |\mathcal{R}_e(s)| \leq 1$.

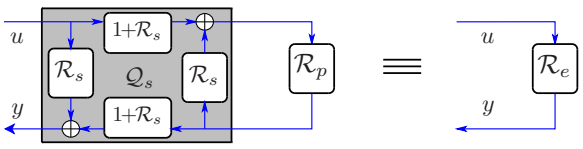


Fig. 3.9 – *Jonction de cônes connectée à une réflexion $\mathcal{R}_p$*

Démonstration. L'expression de $\mathcal{R}_e(s)$ est :
$\mathcal{R}_e(s) := \frac{y(s)}{u(s)} = \mathcal{R}_s(s) + \frac{(1+\mathcal{R}_s(s))^2\mathcal{R}_p(s)}{1-\mathcal{R}_p(s)\mathcal{R}_s(s)} = \frac{s+\alpha}{s-\alpha} \times \frac{\left(\frac{\alpha}{s+\alpha}\right)+\mathcal{R}_p(s)}{1+\left(\frac{\alpha}{-s+\alpha}\right)\mathcal{R}_p(s)} = \frac{s+\alpha}{s-\alpha} \times \frac{(-\mathcal{R}_s(-s))+\mathcal{R}_p(s)}{1+(-\mathcal{R}_s(-s))\mathcal{R}_p(s)}$.
Pour $s \in i\mathbb{R}$, on a $\mathcal{R}_s(-s) = \mathcal{R}_s(\overline{s}) = \overline{\mathcal{R}_s(s)}$, et donc $\mathcal{R}_e(s) = \frac{s+\alpha}{s-\alpha} \times \frac{-\overline{\mathcal{R}_s(s)}+\mathcal{R}_p(s)}{1+(-\mathcal{R}_s(s))\mathcal{R}_p(s)}$.
Premièrement $\left|\frac{i\omega+\alpha}{i\omega-\alpha}\right| = 1$, et deuxièmement $|\mathcal{R}_p(i\omega)| \leq 1$ et $|\mathcal{R}_s(i\omega)| = \left|\frac{\alpha}{i\omega-\alpha}\right| \leq 1$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$, donc selon la propriété A.6, on a $|\mathcal{R}_e(s)| = \left|\frac{s+\alpha}{s-\alpha}\right| \times \left|\frac{-\overline{\mathcal{R}_s(s)}+\mathcal{R}_p(s)}{1+(-\mathcal{R}_s(s))\mathcal{R}_p(s)}\right| \leq 1, \quad \forall s \in i\mathbb{R}.$ □

Maintenant, il suffit d'appliquer ce résultat à la structure de la figure 3.8-(a) :

- Pour montrer la passivité de la réflexion globale de gauche, $R^l_\phi(s)$, on applique le lemme 3.1 en remplaçant $\mathcal{R}_s(s)$ par $R^l_s(s)$, et $\mathcal{R}_p(s)$ par $\mathrm{e}^{-2\tau s}\, R^r_s(s)$, ce qui donne $|R^l_\phi(s)| \leq 1$ pour $s \in i\mathbb{R}$. De plus, sachant que le système est stable, R^l_ϕ est holomorphe dans $\mathbb{C}^+_0$, avec le corollaire A.2 (corollaire du théorème du maximum), on a $|R^l_\phi(s)| < 1$ pour $s \in \mathbb{C}^+_0$.
- Pour la réflexion de droite, $R^r_\phi(s)$, on applique à nouveau le lemme 3.1 en remplaçant $\mathcal{R}_s(s)$ par $R^r_s(s)$, et $\mathcal{R}_p(s)$ par $\mathrm{e}^{-2\tau s}\, R^l_s(s)$, et le corollaire A.2, donne $|R^r_\phi(s)| < 1$ pour $s \in \mathbb{C}^+_0$.

3.1.2.4 *Stabilité et passivité d'un cône connecté sur une réflexion passive*

La structure de la figure 3.8-(a) est maintenant écrite par le quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ de la figure 3.10, où R^l_ϕ et R^r_ϕ sont les réflexions globales (respectivement gauche et droite) et T_ϕ est la transmission globale (aller ou retour). Considérons la connexion du cône sur une réflexion passive R_p à sa droite telle que $|R_p(i\omega)| \leq 1$ et $|R_p(s)| < 1$ pour $s \in \mathbb{C}^+_0$.

Alors, la passivité de R^r_ϕ (donnée précédemment) et la passivité de R_p prouvent la stabilité de cette connexion (le dénominateur $1 - R^r_\phi(s)R_p(s)$ n'a pas de zéro dans $\mathbb{C}^+_0$). La réflexion équivalente $R_e(s)$ est donc holomorphe dans $\mathbb{C}^+_0$.

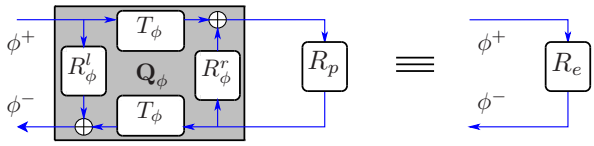


Fig. 3.10 – *Tronçon de cône connecté à une réflexion passive : forme globale du tronçon.*

De plus en redécomposant le quadripôle comme la figure 3.11-(a) le montre, on prouve maintenant la passivité de la réflexion équivalente $R_e := \phi^-/\phi^+$:

- En appliquant le lemme 3.1 en remplaçant $\mathcal{R}_s(s)$ par $R^r_s(s)$, et $\mathcal{R}_p(s)$ par $R_p(s)$, on prouve que $|\mathcal{R}_e(s)| \leq 1$ pour $s \in i\mathbb{R}$. Voir l'illustration sur les figures 3.11-(a) et 3.11-(b).
- On applique à nouveau le lemme 3.1, en remplaçant $\mathcal{R}_s(s)$ par $R^l_s(s)$, et $\mathcal{R}_p(s)$ par $\mathrm{e}^{-2\tau s}\,\mathcal{R}_e(s)$, ce qui prouve que $|R_e(s)| \leq 1$ pour $s \in i\mathbb{R}$. Voir l'illustration sur les figures 3.11-(b) et 3.11-(c).
- En conséquence, puisque $|R_e(s)| \leq 1$ pour $s \in i\mathbb{R}$, et que R_e est holomorphe dans $\mathbb{C}^+_0$, le corollaire A.2 (du théorème du maximum) prouve que $|R_e(s)| < 1$ pour $s \in \mathbb{C}^+_0$.

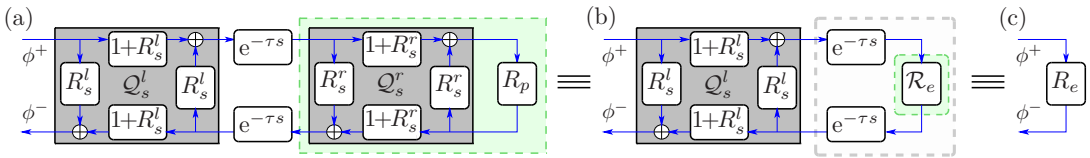


Fig. 3.11 – *Tronçon de cône connecté à une réflexion passive : forme décomposée et équivalences pour la preuve de passivité.*

3.1.2.5 *Stabilité du réseau*

Le résultat précédent est que la réflexion équivalente R_e de la connexion d'un quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ (avec $\varepsilon = 0$ et $\Upsilon = 0$) sur une réflexion passive R_p quelconque, est elle-même passive.

Ainsi si on reconnecte un autre quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ d'un autre cône sur ce système, on redémontre la stabilité et la passivité, puisque R_e est passive et stable.

Par récurrence, on démontre alors la stabilité et la passivité d'une concaténation d'un nombre quelconque de tronçons.

En bout de chaîne à droite, nous avons soit le choix de ne rien brancher, $R_p = 0$, soit de brancher une réflexion passive due à un rayonnement par exemple.

Finalement, la passivité du réseau permet de prouver la stabilité de celui-ci connecté à une réflexion passive quelconque à gauche.

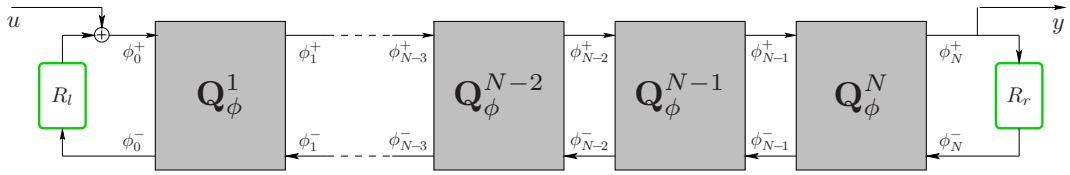


Fig. 3.12 – *Réseau droit de tronçons coniques avec continuité de section, connecté à gauche et à droite à des réflexions passives R_l et R_r respectivement.*

Exemple 3.1. *Les figures 3.13 et 3.14 présentent les simulations numériques de 2 réseaux de cônes contenant chacune un grand nombre de jonctions instables. Ces simulations se révèlent être asymptotiquement stables.*

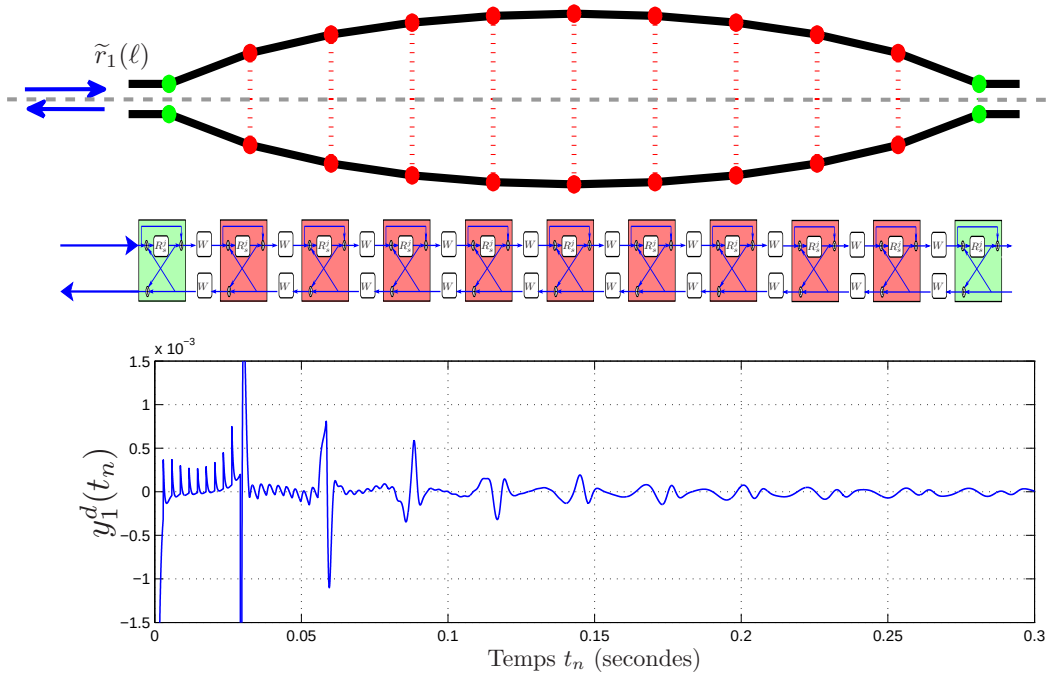


Fig. 3.13 – *Exemple (1) de simulation par un réseau de tronçons coniques : profil $\widetilde{r}_1(\ell)$ du tube, structure de Kelly-Lochbaum simulée et réponse impulsionnelle du système en temps discret $y_1^d(t_n)$. La structure de Kelly-Lochbaum correspondante contient 9 jonctions instables et 2 jonctions stables aux extrémités. La réponse impulsionnelle du système $y_1^d(t_n)$ converge vers 0.*

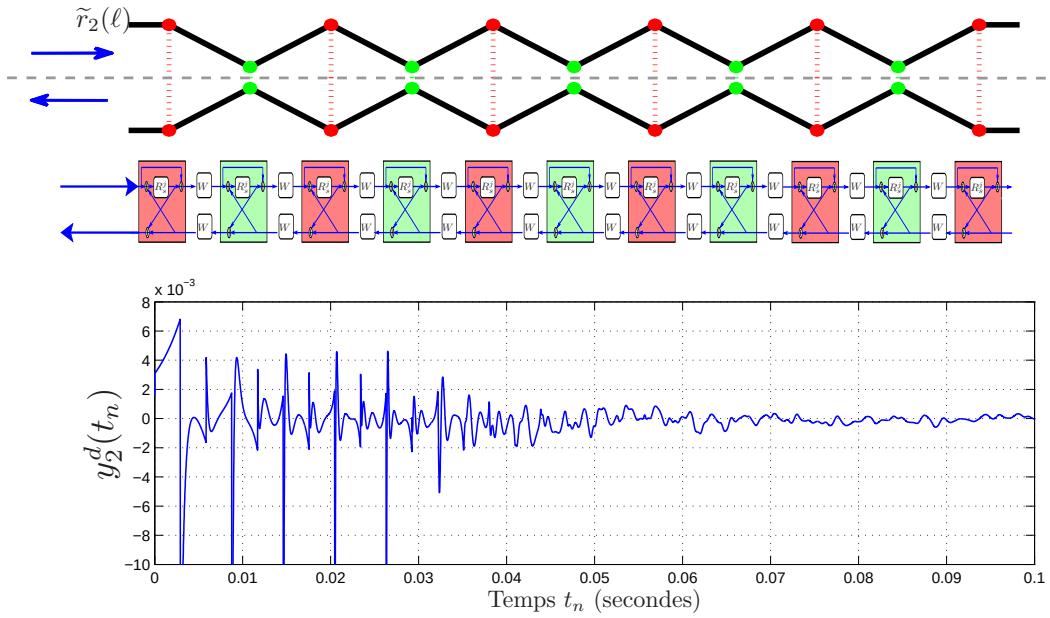


Fig. 3.14 – *Exemple (2) de simulation par un réseau de tronçons coniques : profil $\widetilde{r}_2(\ell)$ du tube, structure de Kelly-Lochbaum simulée et réponse impulsionnelle du système en temps discret $y_2^d(t_n)$. La structure de Kelly-Lochbaum correspondante contient 6 jonctions instables et 5 jonctions stables intercalées. La réponse impulsionnelle du système $y_2^d(t_n)$ converge vers 0.*

3.2 Analyse complexe de la fonction Γ

L'analyse de la stabilité des réseaux de tronçons à courbure constante et avec pertes est plus délicate que pour les tubes droits et les cônes. Une partie de la difficulté revient à la fonction Γ qui intervient dans le modèle de *Webster-Lokshin* et qui est donnée par (voir chapitre 2) :

$$\Gamma(s)^2 = \left(\frac{s}{c_0}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon. \tag{3.9}$$

Rappelons que cette fonction est liée au nombre d'onde k par la relation $\Gamma(i\omega) = ik(\omega)$. A cause de son rôle crucial dans le modèle de *Webster-Lokshin* et pour la stabilité des guides d'ondes associés, nous commençons préalablement par une étude analytique de cette fonction.

Non seulement Γ fait apparaître une racine carrée de s (via $s^{\frac{3}{2}}$) mais elle est elle-même définie comme une racine carrée de Γ^2. L'apparition de la racine carrée dans le plan complexe pose des problèmes de définition univoque de la fonction. Dans ce qui suit nous introduisons quelques notions d'analyse dans le plan complexe et leur conséquence dans notre cas. Puis nous présentons la notion de *représentations intégrales* qui est un outil mathématique bien adapté à notre étude.

Nous notons ici le demi-plan complexe droit ouvert $\mathbb{C}_0^+ := \{s \in \mathbb{C}/\ \Re\mathrm{e}(s) > 0\}$, et le demi-plan complexe gauche ouvert $\mathbb{C}_0^- := \{s \in \mathbb{C}/\ \Re\mathrm{e}(s) < 0\}$. Les domaines fermés correspondant sont $\overline{\mathbb{C}_0^+} := \mathbb{C}_0^+ \cup i\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{C}_0^-} := \mathbb{C}_0^- \cup i\mathbb{R}$.

3.2.1 Notions d'analyse dans le plan complexe

Beaucoup de fonctions complexes sont définies en prolongeant les propriétés qu'elles ont dans $\mathbb{R}$. Par exemple la fonction carrée $f(x) = x^2$ est une fonction au sens habituel et son prolongement analytique dans $\mathbb{C}$ est possible et immédiat. Mais il en est autrement de sa fonction inverse $g(x) = \sqrt{x}$. A une valeur $y \in \mathbb{R}^{*+}$ de la fonction $f(x)$, correspondent deux antécédents $g(y) = \sqrt{y}$ et $g(y) = -\sqrt{y}$. Autrement dit la racine carrée possède deux *branches* (ou *déterminations*) et on doit en choisir une pour définir une application dans $\mathbb{C}$. En utilisant la représentation polaire d'un nombre complexe $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$, une définition *naturelle* de sa racine est :

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\,. \tag{3.10}$$

Mais alors que le changement $\theta \mapsto \theta + 2\pi$ laisse z invariant, il change le signe de sa racine. Ainsi on dit que la racine carrée est *bivalente* contrairement à une application qui est, par définition, *univalente* (ou *univoque*). Pour définir la racine carrée de façon univoque, il faut pour chaque z dans $\mathbb{C}$ donner la détermination à laquelle il est rattaché.

Si on reprend (3.10) et qu'on fait varier θ de 0 à 2π, z décrit un cercle autour de l'origine, et l'argument de sa racine augmente de π, d'où le changement de signe. Ainsi, en tournant une fois autour de l'origine nous passons d'une détermination à une autre. Donc une façon de définir l'application est de choisir une frontière appelée *coupure* reliant l'origine ($z = 0$) à un point à l'infini. Dans ce cas, l'origine est appelée *point de branchement*.

La coupure sert donc à séparer les 2 déterminations de la racine carrée (on parle de *feuillets de Riemann*), il reste alors à spécifier lequel des 2 feuillets est choisi. Dans la suite nous préférerons le feuillet correspondant à la racine carrée positive sur $\mathbb{R}^+$.

Parmi les choix possibles (infinis) une coupure simple est une demi-droite donnée par son angle θ_0 par rapport à l'axe $\mathbb{R}^+$. De telles coupures sont obtenues par la définition suivante.

Définition 3.1. *Pour $\theta_0 \in \mathbb{R}$, la racine carrée ${}^{(\theta_0)}\!\sqrt{\cdot}$ est définie par :*

$${}^{(\theta_0)}\!\sqrt{s} = {}^{(\theta_0)}\!\sqrt{\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}} := \sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}, \qquad \textit{avec } \rho \in \mathbb{R}^+ \textit{ et } \theta \in]\theta_0, \theta_0 + 2\pi]. \tag{3.11}$$

Notons que (3.11) définit une application analytique pour tout complexe non nul dont l'argument appartient à $]\,\theta_0, \theta_0 + 2\pi\,[$, mais on observe une discontinuité le long de la coupure, c'est-à-dire pour $\theta = \theta_0$, caractérisée par un changement de signe.

Exemple : Soit la fonction complexe f définie par :

$$f(s) := \sqrt[(\alpha)]{s - s_1}\ \sqrt[(\beta)]{s - \overline{s_1}}, \tag{3.12}$$

avec $s_1 \in \mathbb{C}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La fonction f possède 2 points de branchement s_1 et $\overline{s_1}$ fixes et 2 coupures $\mathcal{C}_\alpha$ et $\mathcal{C}_\beta$ qui sont des demi-droites définies par le choix de α et β respectivement.

Remarque : Même si le nombre de choix possibles est infini, pour pouvoir représenter des systèmes réels, causaux et stables, il est intéressant de respecter ces 2 propriétés :

(i) Les systèmes réels sont représentés par des fonctions de transfert à symétrie hermitienne, ce qui signifie $f(\overline{s}) = \overline{f(s)}$. Tous les ensembles des coupures sont choisis symétriques par rapport à l'axe des réels.

(ii) Pour qu'un système soit causal et stable, une condition nécessaire est que ses fonctions de transfert associées soient analytiques dans le demi-plan complexe droit $\mathbb{C}_0^+$. Ainsi puisque les racines carrées ne sont pas holomorphes sur les coupures, si cela est possible, les coupures seront choisies dans $\overline{\mathbb{C}_0^-}$.

En conséquence, pour la racine carrée $\sqrt[(\theta_0)]{s}$, le seul choix respectant ces 2 contraintes est $\theta_0 = -\pi[2\pi]$ qui a $\mathbb{R}^-$ comme coupure. La définition la plus *naturelle* de la racine carrée est $\sqrt[(-\pi)]{s}$ qui correspond à la racine carrée positive sur $\mathbb{R}^+$. Nous la notons par la suite simplement $\sqrt{s}$.

Définition 3.2. *La racine carrée "naturelle" est définie par* $\sqrt{s} := \sqrt[(-\pi)]{s}$*, c'est-à-dire* $\forall s \in \mathbb{C}$ *:*

$$\sqrt{s} = \sqrt{\rho\, \mathrm{e}^{i\theta}} := \sqrt{\rho}\, \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}, \qquad \text{avec } \rho \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \theta \in]-\pi, \pi]. \tag{3.13}$$

Propriété 3.2. *Deux propriétés importantes de* $\sqrt{\cdot}$ *sont :*

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-, \qquad \Re\mathrm{e}(\sqrt{s}) > 0, \tag{3.14}$$

$$\forall s \in \mathbb{R}^-, \qquad \sqrt{s} \in i\mathbb{R}^+. \tag{3.15}$$

Pour la fonction f, si $s_1 \in \overline{\mathbb{C}_0^-}$, alors la causalité et la stabilité imposent que α et β appartiennent à $\left([-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi] + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, pour vérifier la symétrie hermitienne de f, on doit choisir $\beta = -\alpha[2\pi]$ ou bien $\beta = \alpha = \frac{1}{2}\pi[\pi]$. Ce dernier choix est particulier parce que f est alors discontinue sur le segment liant s_1 à $\overline{s_1}$, mais devient continue sur la demi-droite où se superposent les 2 coupures en raison de la compensation du changement de signe. La figure 3.16 illustre différents choix de α et β respectant ou non ces contraintes.

Notons que si $s_1 \in \mathbb{C}_0^+$, alors le système correspondant à f n'est pas causal et stable.

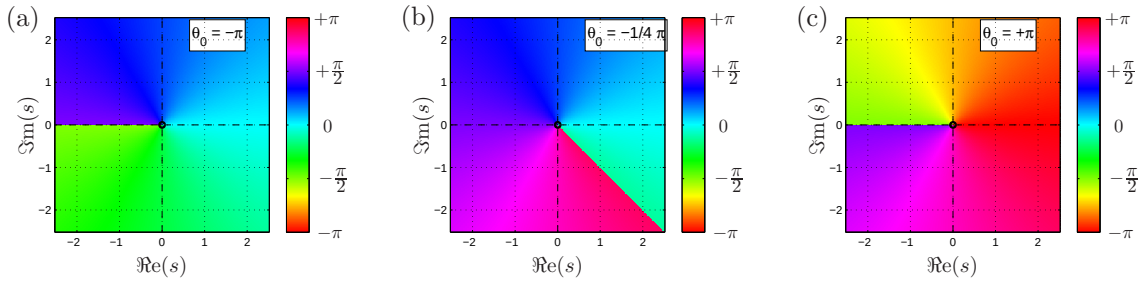


Fig. 3.15 – *Phase de* $\sqrt[(\theta_0)]{s}$ *dans le plan complexe. La phase est représentée par la teinte de la représentation HSV des couleurs. Ici nous illustrons 3 choix de coupures donnés par la valeur de* θ_0*. Les coupures apparaissent par les discontinuités. Notons que pour (a) et (c) la coupure est sur* $\mathbb{R}^-$*, mais (a) correspond à la racine carrée positive sur* $\mathbb{R}^+$ *et (c) à la racine carrée négative*

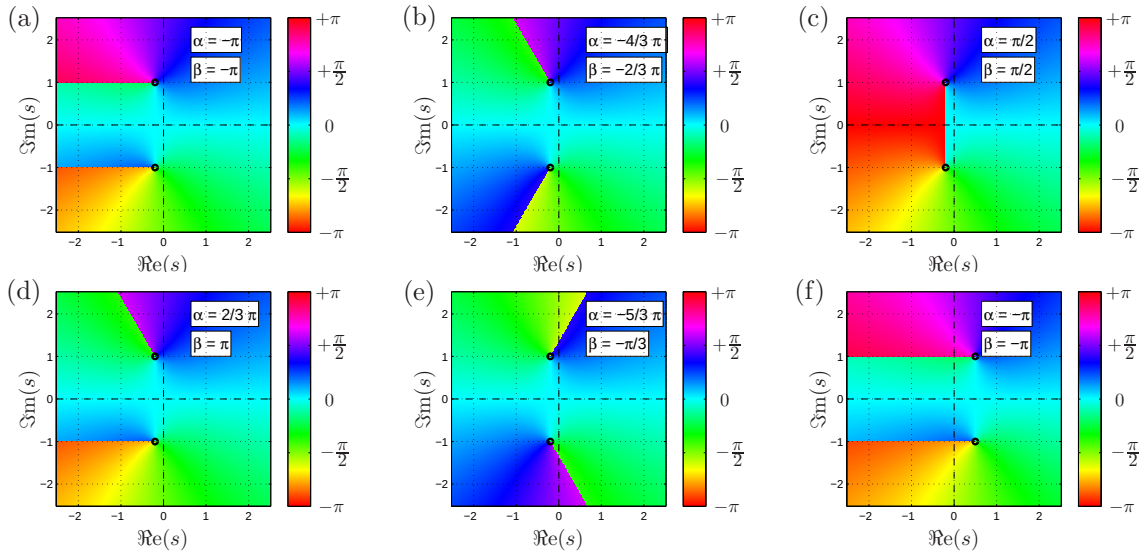


Fig. 3.16 – *Phase de* $f(s) = \sqrt[(\alpha)]{s - s_1}\,\sqrt[(\beta)]{s - \overline{s_1}}$ *dans le plan complexe. Pour les 5 premières figures* $s_1 = -0.2 + i$*, et pour la figure (f)* $s_1 = +0.5 + i$*. Notons que les choix de coupures pour les figures (a), (b) et (c) respectent la causalité, la stabilité et la symétrie hermitienne, alors que celui de la figure (d) ne respecte pas la symétrie hermitienne et celui de la figure (e) ne respecte pas la stabilité et la causalité. Pour la figure (f),* $\Re\mathrm{e}(s_1) > 0$*, f ne peut en aucun cas être analytique dans* $\mathbb{C}_0^+$*.*

3.2.2 Analyse des singularités de Γ

Avec pertes visco-thermiques, $\varepsilon > 0$, la fonction Γ possède un terme en $s^{\frac{3}{2}}$ qui implique un point de branchement en $s = 0$. Ainsi, pour respecter la symétrie hermitienne, la causalité et la stabilité, la seule coupure "autorisée" est $\mathbb{R}^-$, et nous écrivons donc $s^{\frac{3}{2}} := s\sqrt{s}$ qui correspond à la détermination positive sur $\mathbb{R}^+$.

En conséquence la fonction Γ possède une première coupure sur $\mathbb{R}^-$ qui provient de la présence des pertes visco-thermiques.

Mais puisque $\Gamma(s)$ est une racine carrée du nombre complexe $\Gamma(s)^2$ (voir (3.9)), la fonction possède d'autres points de branchement qui sont solutions de $\Gamma(s)^2 = 0$. Cherchons maintenant les autres points de branchement, et déterminons des coupures possibles.

3.2.2.1 *Points de branchement*

Pour σ complexe, nous définissons le polynôme suivant

$$G(\sigma) := \Gamma(c_0\sigma^2)^2 = \sigma^4 + 2\varepsilon\,\sigma^3 + \Upsilon. \tag{3.16}$$

Les points de branchement de Γ sont donnés par $s_n = c_0\sigma_n^2$ où σ_n est solution de $G(\sigma) = 0$ et tel que $\arg(\sigma_n) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. En effet, la dernière condition est nécessaire pour assurer que $\sigma_n = \sqrt{s_n/c_0}$ (voir (3.13)). Les autres racines de G ne la vérifiant pas ne correspondent pas aux points de branchement[4].
Remarque : Notons que si l'argument d'une racine σ_n est plus petit en module que $\frac{\pi}{4}$, alors le point de branchement correspondant s_n est dans $\mathbb{C}_0^+$ ($|\arg(s_n)| < \frac{\pi}{2}$), dans le cas contraire il est dans $\mathbb{C}_0^-$. Cette remarque est importante parce que cela nous permet d'étudier la position des points de branchement par rapport à l'axe imaginaire, et donc la stabilité des fonctions de transfert.

[4]Les autres racines de G correspondent aux points de branchement appartenant à l'autre feuillet. Mais ayant choisi $s^{\frac{1}{2}} := \sqrt[-]{s} = \sqrt{s}$ nous n'avons pas à les considérer.

Sans perte : Si $\varepsilon = 0$, on a $G(\sigma) = \sigma^4 + \Upsilon$. Les racines sont donc les racines 4-ième de $-\Upsilon$.

$\Upsilon < 0$: On choisit d'écrire les racines de G : $\sigma_n = -|\Upsilon|^{\frac{1}{4}}\, e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}} = -i(-i)^n|\Upsilon|^{\frac{1}{4}}$, et les points de branchement de Γ sont alors donnés par $s_1 = c_0\sigma_1^2 = c_0\sqrt{|\Upsilon|}$ et $s_2 = c_0\sigma_2^2 = -c_0\sqrt{|\Upsilon|} = -s_1$.

$\Upsilon > 0$: On choisit d'écrire les racines de G : $\sigma_n = \Upsilon^{\frac{1}{4}}\, e^{i(3-2n)\frac{\pi}{4}} = i(-i)^n|\Upsilon|^{\frac{1}{4}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$, et les points de branchement de Γ sont alors donnés par $s_1 = c_0\sigma_1^2 = ic_0\sqrt{\Upsilon}$ et $s_2 = c_0\sigma_2^2 = -ic_0\sqrt{\Upsilon} = -s_1$.

Ainsi, pour les courbures négatives, Γ a 2 points de branchement réels opposés (avec $s_1 > 0$), et pour les courbures positives, Γ a 2 points de branchement imaginaires purs opposés (avec $Im(s_1) > 0$). Notons que pour $\Upsilon = 0$, les 4 racines de G se rejoignent à l'origine. La figure 3.17 illustre l'évolution des racines de G et des points de branchement de Γ quand Υ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

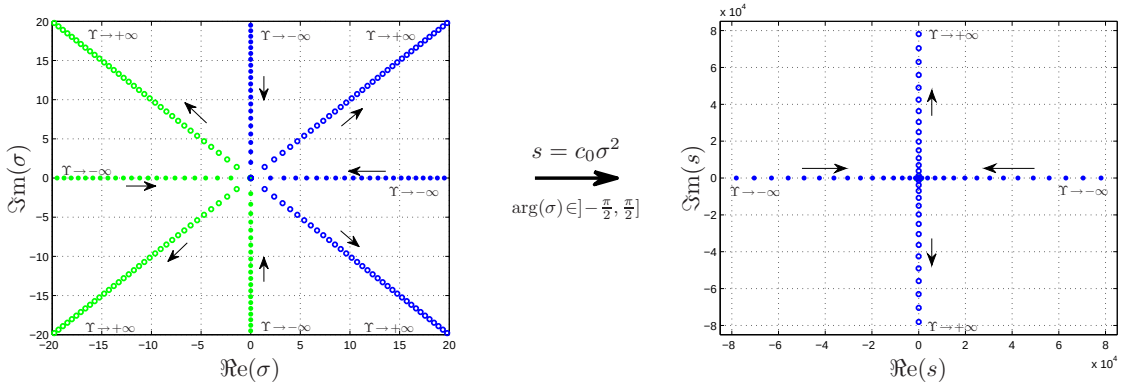


Fig. 3.17 – *Lieu des racines de G et des points de branchement de Γ quand $\varepsilon = 0$. Les figures de gauche et de droite présentent respectivement les évolutions des racines σ_n de G et des points de branchement s_n de Γ pour Υ variant de $-\infty$ à $+\infty$. Les points représentent les σ_n et les s_n pour $\Upsilon < 0$, et les cercles pour $\Upsilon > 0$. Seules les racines σ_n dont l'argument appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (représentées en bleu) correspondent à des points de branchement s_n de Γ. Les flèches noires représentent le sens des σ_n et des s_n quand Υ augmente.*

Avec pertes : Si $\varepsilon > 0$, on a $G(\sigma) = \sigma^4 + 2\varepsilon\sigma^3 + \Upsilon$. Les résultats suivants sont démontrés en annexe B :

$\Upsilon < 0$: Dans le cas des courbures négatives, G a une racine réelle positive σ_1, une racine réelle négative σ_2, et 2 racines complexes conjuguées σ_3 et σ_4 appartenant à $\mathbb{C}_0^-$. En conséquence, Γ a un unique point de branchement $s_1 \in \mathbb{R}^+$.

$\Upsilon > 0$: Dans le cas des courbures positives, G a 2 racines appartenant à $\mathbb{C}_0^-$ qui ne correspondent pas à des points de branchement, et 2 autres racines complexes conjuguées σ_1 et σ_2 (avec $\Im m(\sigma_1) > 0$) appartenant à $\mathbb{C}_0^+$ et d'argument plus grand en module que $\frac{\pi}{4}$. En conséquence, Γ a 2 points de branchement complexes conjugués $s_1 = c_0\sigma_1^2$ et $s_2 = c_0\sigma_2^2$ appartenant à $\mathbb{C}_0^-$.

En résumé, pour $\Upsilon < 0$, Γ a 1 point de branchement s_1 réel positif, et pour $\Upsilon > 0$, Γ a 2 points de branchement s_1 et s_2 complexes conjugués appartenant à $\mathbb{C}_0^-$. La figure 3.18 illustre l'évolution des racines de G et des points de branchement de Γ quand Υ varie de $-\infty$ à $+\infty$.
Remarque : Pour $\Upsilon > 0$, la projection du point de branchement sur l'axe imaginaire donne $\Im m(s_1) = \omega_1$ que nous avons défini comme la pulsation de coupure du tronçon de tube en partie 2.1.4.3 p.66.
Remarque : A ε fixé, le lieu de tous les points de branchement possibles de Γ est donné par $\Re e(\Gamma(s)) \in \mathbb{R}$ quel que soit Υ. Nous le notons

$$\mathcal{C}_\varepsilon := \left\{ s \in \mathbb{C} / \left[s^2 + 2\varepsilon\sqrt{c_0} s^{\frac{3}{2}} \right] \in \mathbb{R} \right\}. \tag{3.17}$$

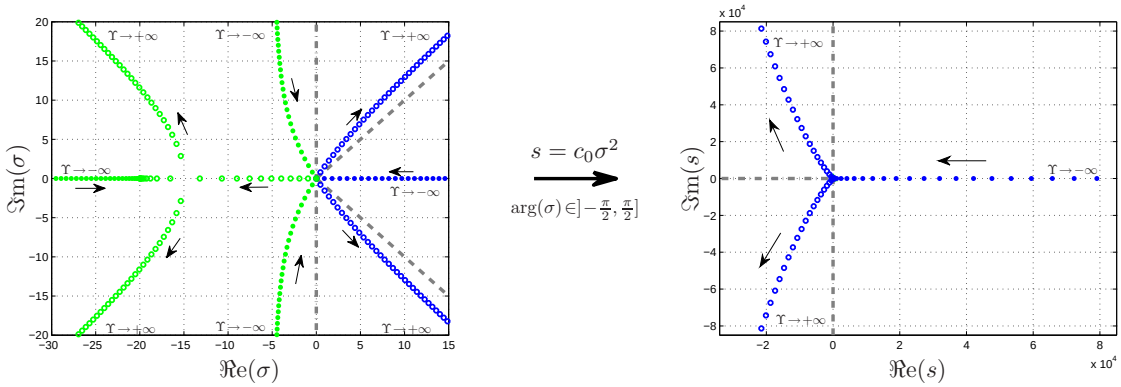


Fig. 3.18 – *Lieu des racines de G et des points de branchement de Γ quand $\varepsilon > 0$. Ici $\varepsilon = 10$. Les figures de gauche et de droite présentent respectivement les évolutions des racines σ_n de G et des points de branchement s_n de Γ pour Υ variant de $-\infty$ à $+\infty$. Les points représentent les σ_n et les s_n pour $\Upsilon < 0$, et les cercles pour $\Upsilon > 0$. Seules les σ_n dont l'argument appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (représentées en bleu) correspondent à des points de branchement s_n de Γ. Les flèches noires représentent le sens des σ_n et des s_n quand Υ augmente. Une autre étude de l'évolution des racines de G a été menée dans [HÓ2, annexe C.2], en fixant $\Upsilon > 0$ et faisant varier $\epsilon \geq 0$.*

3.2.2.2 *Coupures*

En présence de pertes visco-thermiques, nous avons déja vu que le terme $s\sqrt{s}$ implique une première coupure sur $\mathbb{R}^-$. Maintenant voyons les coupures possibles associées aux autres points de branchement.

Courbures positives ($\Upsilon > 0$) : La forme suivante de Γ^2 permet de faire apparaître explicitement les points de branchement s_1 et s_2 :

$$\Gamma(s)^2 = (s - s_1)(s - s_2)Q(\sqrt{s}), \qquad \text{avec } Q(\sigma) = \frac{(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_4)}{(\sigma + \sigma_1)(\sigma + \sigma_2)}, \tag{3.18}$$

où $Q(\sqrt{s})$ est à partie réelle positive (voir [HÓ2, Annexe C.2.2]).

Puisque que s_1 et s_2 appartiennent à $\mathbb{C}_0^-$, il est possible de définir des coupures préservant la symétrie hermitienne, et les conditions nécessaires pour la causalité et la stabilité. Parmi les choix infinis, présentons en 3 différents :

- Choix 1 : En définissant Γ par la forme suivante

$$\Gamma(s) = \sqrt[(-\pi)]{s - s_1}\,\sqrt[(-\pi)]{s - s_2}\sqrt{Q(\sqrt{s})}, \tag{3.19}$$

  l'ensemble des coupures obtenues est : $\mathbb{R}^- \cup (s_1 + \mathbb{R}^-) \cup (s_2 + \mathbb{R}^-)$. Nous avons alors la coupure sur $\mathbb{R}^-$ (provenant de $s\sqrt{s}$), et 2 autres coupures horizontales partant de s_1 et s_2 (cf. Fig. 3.19-(a)).

- Choix 2 : Avec la définition suivante

$$\Gamma(s) = \sqrt[(\frac{\pi}{2})]{s - s_1}\,\sqrt[(\frac{\pi}{2})]{s - s_2}\sqrt{Q(\sqrt{s})}, \tag{3.20}$$

  l'ensemble des coupures est : $\mathbb{R}^- \cup [s_1, s_2]$. Ici, la coupure partant de s_2 est "annulée" par celle partant de s_1 en raison de la compensation du changement de signe. Ainsi, il n'y a que 2 coupures apparentes : $\mathbb{R}^-$ et $[s_1, s_2]$, en forme de croix (cf. Fig. 3.19-(b)).

• Choix 3 : Définissons maintenant Γ par

$$\Gamma(s) = \sqrt{\Gamma(s)^2} = \sqrt{(s-s_1)(s-s_2)Q(\sqrt{s})}. \tag{3.21}$$

Ici, l'ensemble des coupures est $\mathbb{R}^- \cup \mathcal{C}$, où $\mathcal{C} := \left\{ s \in \mathbb{C} / \ \Gamma(s)^2 \in \mathbb{R}^- \right\}$ sera appelé la *coupure naturelle* de Γ. Notons que cette coupure est un sous-ensemble du lieu des points de branchement donné par (3.17), ce qui signifie $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_\varepsilon$. Cette définition "naturelle" de Γ a pour propriété

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}, \quad \Re\mathrm{e}(\Gamma(s)) > 0. \tag{3.22}$$

Cette propriété nous permet d'interpréter l'apparition de la coupure pour la fonction de transfert R (cf. §3.4 p.112).

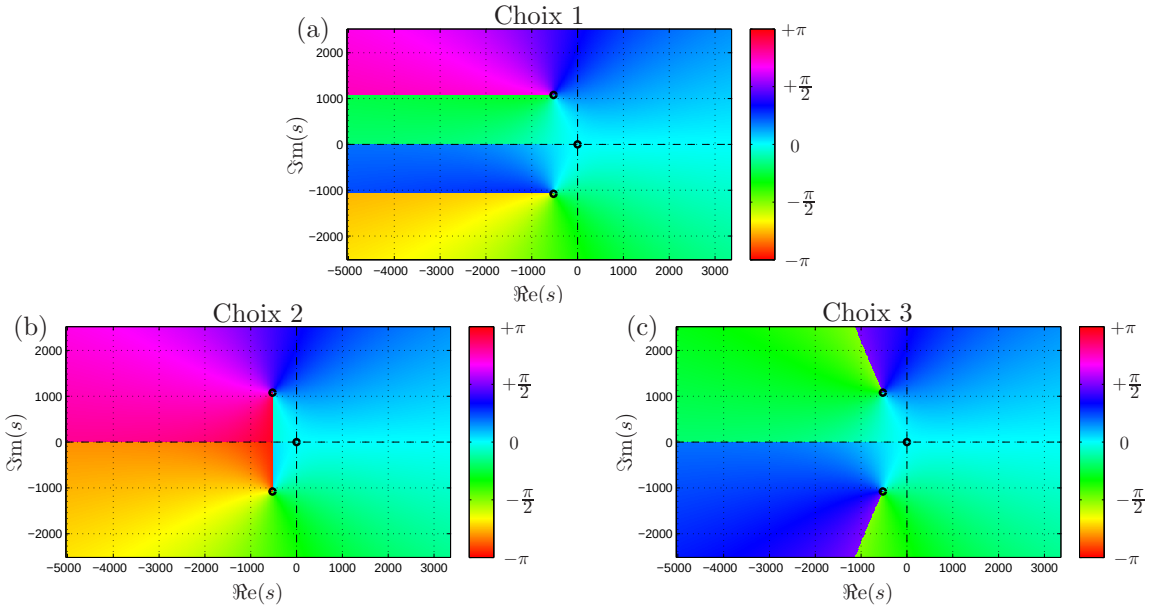


Fig. 3.19 – *Phase de* $\Gamma(s)$ *dans le plan complexe pour une courbure positive. Ici* $\varepsilon = 7\ m^{-\frac{1}{2}}$, *et* $\Upsilon = 100\ m^{-2}$. *Le coefficient des pertes* ε *est choisi abusivement élevé par rapport aux valeurs physiquement sensée afin de visualiser le décalage des 2 points de branchement par rapport à l'axe imaginaire. (a) : coupures horizontales, (b) : coupures en croix,(c) : coupures naturelles.*

Courbures négatives ($\Upsilon < 0$) : Faisons apparaître explicitement le point de branchement s_1 :

$$\Gamma(s)^2 = (s-s_1)Q(\sqrt{s}), \qquad \text{avec } Q(\sigma) = \frac{(\sigma-\sigma_2)(\sigma-\sigma_3)(\sigma-\sigma_4)}{(\sigma+\sigma_1)}. \tag{3.23}$$

Ici s_1 est un réel positif. Il est par conséquent impossible de définir des coupures respectant la contrainte de causalité et de stabilité. Malgré cela, nous présentons ici 2 choix possibles de coupures.

• Choix 1 : En définissant Γ par la forme suivante

$$\Gamma(s) = \sqrt[(-\pi)]{s-s_1}\sqrt{Q(\sqrt{s})}, \tag{3.24}$$

l'ensemble des coupures obtenues est : $\mathbb{R}^- \cup [s_1, -\infty] = [s_1, -\infty]$. Nous n'avons finalement qu'une coupure "apparente" partant de s_1. Notons que dans ce cas 2 coupures se chevauchent sur $\mathbb{R}^-$, mais il n'y pas de compensation (cf. Fig. 3.20-(a)).

- Choix 2 : Définissons maintenant Γ par

$$\Gamma(s) = \sqrt{\Gamma(s)^2} = \sqrt{(s-s_1)Q(\sqrt{s})}. \tag{3.25}$$

Ici, l'ensemble des coupures est $\mathbb{R}^- \cup \mathcal{C}$, où $\mathcal{C} := \left\{ s \in \mathbb{C} / \ \Gamma(s)^2 \in \mathbb{R}^- \right\}$ sera appelé la "coupure naturelle" de Γ. De la même façon que pour les courbures positives, $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble du lieu des points de branchement $\mathcal{C}_\varepsilon$ donné par (3.17). Avec $\Upsilon < 0$, Γ vérifie toujours la propriété donnée par (3.22) (cf. Fig. 3.20-(b)).

Quelle que soit la définition de Γ et le choix des coupures, la fonction Γ ne peut être analytique dans $\mathbb{C}_0^+$ ce qui pose des problèmes de causalité et de stabilité des fonctions de transfert. Pour les 2 définitions précédentes, Γ possède une infinité de singularités sur le segment $[0, s_1]$, sources d'instabilités pour les systèmes associés. Ce problème est connu de la littérature (voir [Ber99, Pag96]) et nous en donnons une interpétation en partie 3.4 page 112.

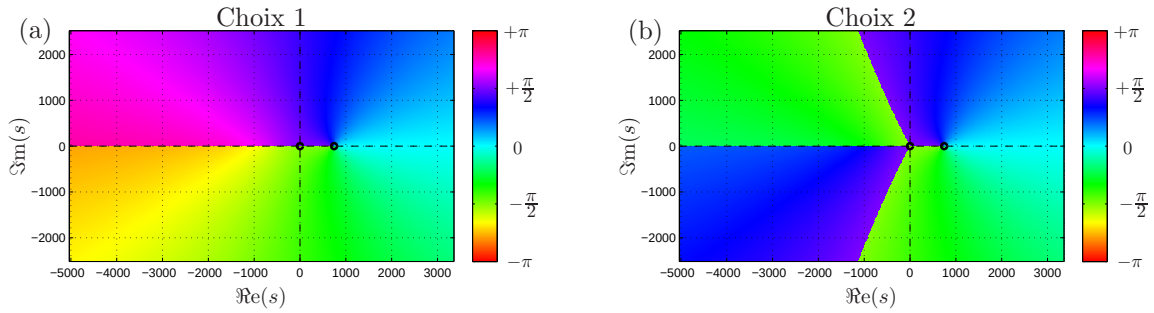


Fig. 3.20 – *Phase de $\Gamma(s)$ dans le plan complexe pour une courbure négative. La phase est représentée par la teinte de la représentation HSV des couleurs. Ici $\varepsilon = 7\ m^{-\frac{1}{2}}$, et $\Upsilon = -50\ m^{-2}$. (a) : coupures horizontales, (b) : coupures naturelles.*

Conclusion Le système est donné par des fonctions que nous devons choisir (via le choix des coupures) parmi un nombre infini de choix possibles. Cependant, tous les choix que nous avons faits laissent les fonctions de transfert inchangés dans $\mathbb{C}_0^+$ et sur le domaine de Fourier si $\varepsilon > 0$. Seule leur définition dans $\mathbb{C}_0^-$ change.

Pour résoudre les problèmes de simulation dus à la dimension infinie, on utilise un outil fondé sur les *représentation diffusives* et les *représentations intégrales* décrits ci-dessous. Pour le problème d'instabilité du cas $\Upsilon < 0$, on propose une solution viable qui permet une simulation qui conserve le formalisme des *Guides d'Ondes* en partie 4.3 page 136.

3.2.3 Représentations intégrales

En partie 1.3.2 page 40, nous avons étudié la fonction $\breve{D}(s) = \exp(-\epsilon\sqrt{s})$ et avons vu qu'elle se comporte comme une somme infinie de fonctions de transfert du premier ordre (voir (1.40)).

Ce phénomène provient de la coupure sur $\mathbb{R}^-$ en raison du $\sqrt{s}$. Nous détaillons maintenant l'analyse qui a conduit à cette représentation dans un cas plus général incluant les fonctions de transfert faisant apparaître Γ dans leur expression (R et T par exemple). D'autres détails sont donnés en annexe C à propos des transformées de Laplace inverses.

3.2.3.1 *Représentations diffusives*

Considérons dans un premier temps les fonctions de transfert possédant une seule coupure sur $\mathbb{R}^-$ (par exemple $\breve{D}$, R ou T pour les cylindres et les cônes).

Dans [Sta94, Mat98, Mon98, MZ09], il est expliqué que la spécificité des opérateurs associés à de telles fonctions de transfert est que leur réponse impulsionnelle peut se décomposer sur une famille continue d'exponentielles amorties $\mathrm{e}^{-\xi t}\,\mathbf{1}_{t>0}(t)$, associée à un poids $\mu(\xi)$ pour $-\xi \in \mathbb{R}^-$. En utilisant le théorème des résidus appliqué à une fonction H sur un contour fermé contournant $\mathbb{R}^-$ (voir l'annexe C.2), nous obtenons la représentation suivante de sa réponse impulsionelle $h(t)$:

$$h(t) = \int_0^\infty \mu_H(\xi)\,\mathrm{e}^{-\xi t}\,\mathbf{1}_{t>0}(t)\mathrm{d}\xi, \tag{3.26}$$

où le poids $\mu_H(\xi)$ associé est

$$\mu_H(\xi) = \lim_{\omega\to 0^+} \frac{1}{2i\pi}\Big(H(-\xi - i\omega) - H(-\xi + i\omega)\Big). \tag{3.27}$$

Le poids est donc proportionnel au saut de H d'un coté à l'autre de la coupure (cf. [Mat98]). Avec des conditions initiales nulles, à partir de (3.26) on écrit la fonction de transfert H

$$H(s) = \mathcal{TL}\left\{h\right\}(s) = \int_0^\infty \frac{\mu_H(\xi)}{s+\xi}\mathrm{d}\xi. \tag{3.28}$$

Pour assurer la bonne définition de ces intégrales dans $\mathbb{C}_0^+$, une condition suffisante est que le poids μ_H défini par (3.27) doit vérifier le critère suivant (cf. par exemple [Mon98, MZ09])

$$\int_0^\infty \frac{|\mu_H(\xi)|}{1+\xi}\mathrm{d}\xi < +\infty. \tag{3.29}$$

Le système dynamique considéré peut alors être représenté par le système d'équations suivant

$$\partial_t\phi(\xi,t) = -\xi\phi(\xi,t) + u(t) \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^+, \tag{3.30}$$

$$y(t) = \int_0^\infty \mu_H(\xi)\phi(\xi,t)\mathrm{d}\xi. \tag{3.31}$$

Ces équations montrent que la coupure $\mathbb{R}^-$ correspond au *spectre* du système qui est l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur associé. Le spectre étant de dimension infinie, le système considéré est de dimension infinie. Il se comporte comme une somme infinie et continue de systèmes du premier ordre dont les pôles sont sur $\mathbb{R}^-$ et les résidus sont égaux à μ_H le saut de H de part et d'autre de la coupure (voir [Hél00] et [HM06a]).

Si le critère (3.29) n'est pas vérifié la fonction H n'admet pas de représentation diffusive.

Exemple 3.2. *Le poids associé à la fonction $\breve{D}$ est donné par $\mu_H(\xi) = -\sin(\epsilon\sqrt{\xi})/\pi$, qui ne vérifie pas le critère de convergence. Dans ce cas, on peut encore trouver une réalisation bien posée. Ceci est l'objet de la partie suivante.*

3.2.3.2 *Extension par dérivation*

Soit une fonction $H(s) = s^b$ avec $b \in [0,1[$, H n'admet pas de représentation diffusive puisqu'elle ne vérifie pas le critère de convergence, mais son extension $H(s)/s$ le peut puisque $H(s)/s = s^{-a}$, avec $0 < a = 1 - b < 1$. Ainsi dans le cas des fonctions coupées seulement sur $\mathbb{R}^-$ dont $\mu_H(\xi)$ est analytique sur $\mathbb{R}^-$ et qui ont le même comportement asymptotique que s^b avec $0 \le b < 1$ en l'infini, on considère leur *extension par dérivation* définie par :

$$\breve{H}(s) := \frac{1}{s}\left[H(s) - H(0)\right]. \tag{3.32}$$

Si $\breve{H}$ admet une représentation diffusive associée au poids $\breve{\mu}_H(\xi) = \mu_H(\xi)/(-\xi)$, les équations (3.28), (3.30) et (3.31) ont pour équivalentes :

$$H(s) = s\int_0^\infty \frac{\breve{\mu}_H(\xi)}{s+\xi}\mathrm{d}\xi + H(0), \tag{3.33}$$

$$\partial_t\phi(\xi,t) = -\xi\phi(\xi,t) + u(t), \tag{3.34}$$

$$y(t) = \int_0^\infty \breve{\mu}_H(\xi)\partial_t\phi(\xi,t)\mathrm{d}\xi + H(0)u(t). \tag{3.35}$$

Exemple 3.3. *En partie 1.3.2 page 40, (1.40) correspond en réalité la représentation diffusive de l'extension par dérivation de $\breve{D}$.*

3.2.3.3 *Représentations intégrales associées à la fonction* Γ

Nous pouvons désormais associer une représentation intégrale aux fonctions de transfert faisant apparaître la fonction Γ.

Dans le cas des courbures positives, les réponses impulsionnelles sont décomposées en la somme d'une famille continue d'exponentielles amorties (en raison de la coupure sur $\mathbb{R}^-$) et d'une famille continues de sinusoïdes amorties (en raison des 2 autres coupures symétriques).

Dans le cas des courbures négatives, en considérant les solutions causales, les réponses impulsionnelles font apparaître également des exponentielles divergentes en raison de la portion de coupure incluse dans $\mathbb{C}_0^+$.

En notant $\mathcal{C}$ l'ensemble de toutes les coupures de Γ, nous considérons une fonction F dépendant de s et de $\Gamma(s)$ analytique dans $\mathbb{C}\setminus\mathcal{C}$. Nous définissons a le plus petit majorant des parties réelles des singularités de F. Pour les courbures positives $a = 0$, et pour les courbures négatives a est le point de branchement de Γ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Si $\mathcal{C}$ admet une paramétrisation $\xi \mapsto \gamma(\xi)$ de régularité $\mathcal{C}^1$ pour $\xi \in \mathbb{R}$, et vérifiant $\gamma'(\xi) \neq 0$, le poids μ_F est calculé de la manière suivante (cf. [HMM07a] ou [HMM06] en annexe G)

$$\mu_F(\gamma) = \lim_{\lambda \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{2i\pi}\Big(F(\gamma + i\gamma'\lambda) - F(\gamma - i\gamma'\lambda)\Big). \tag{3.36}$$

Notons que le nombre $i\gamma'(\xi)$ représente la direction normale à la coupure au point $\gamma(\xi)$, si bien que μ_F est bien le saut de F de part et d'autre de la coupure.

Le changement de variable $\xi \mapsto \gamma$ donne $\int_{\mathcal{C}} f(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\gamma(\xi))\gamma'(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ pour une fonction f quelconque. Si la paramétrisation $\gamma(\xi)$ respecte le sens de l'intégration sur le contour de Bromwich (voir annexe C) alors le critère de convergence (3.29) devient pour F

$$\int_{\mathcal{C}} \left|\frac{\mu_F(\gamma)}{a+1-\gamma}\right| \mathrm{d}\gamma < +\infty. \tag{3.37}$$

Sous cette condition, les équations (3.28), (3.30) et (3.31) deviennent :

$$F(s) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\mu_F(\gamma)}{s-\gamma}\,\mathrm{d}\gamma, \tag{3.38}$$

$$\partial_t\phi(\gamma,t) = \gamma\phi(\gamma,t) + u(t) \quad \forall\gamma \in \mathcal{C}, \tag{3.39}$$

$$y(t) = \int_{\mathcal{C}} \mu_F(\gamma)\,\phi(\gamma,t)\,\mathrm{d}\gamma. \tag{3.40}$$

Remarque 3.6. *Comme nous avons vu précédemment, il existe une infinité de choix de $\mathcal{C}$ vérifiant les contraintes de symétrie hermitienne, de causalité et de stabilité (pour $\Upsilon > 0$). Par conséquent il existe une infinité de représentations intégrales de ce type là, correspondant pourtant toutes à la même réponse impulsionnelle causale.*

Remarque 3.7. *Les phénomènes mis en jeu par de telles fonctions ne sont pas nécessairement à caractère diffusif, c'est notamment le cas de l'effet de la courbure. On ne peut donc plus parler de* représentations diffusives*, c'est pourquoi désormais nous parlons de* représentations intégrales *(voir par exemple [Duf94]).*

Remarque 3.8. *Dans le cas où la fonction F ne vérifie pas le critère de convergence (3.37), mais que son extension par dérivation $\breve{F}$ le vérifie, on peut alors associer une représentation intégrale à $\breve{F}$. $\breve{F}$ est définie par une adaptation de (3.32) aux fonctions de Γ.*

Exemple 3.4. *Les développements asymptotiques de $R(s)$ et $D(s)$ quand $|s|$ tend vers l'infini sont*

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{\frac{s}{c_0} - \Gamma(s)}{\frac{s}{c_0} + \Gamma(s)} = -\frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{\frac{c_0}{s}} + O\left(\frac{1}{s}\right), \quad \textit{quand } |s| \to = \infty, \\ D(s) &= \exp\left(-\left(\Gamma(s) - \frac{s}{c_0}\right) L\right) = O(1)\exp\left(\varepsilon\sqrt{\frac{s}{c_0}}L\right), \quad \textit{quand } |s| \to = \infty. \end{aligned}$$

De plus, en partie 3.3 page 106 nous vérifions que R et D sont analytiques dans $\mathbb{C}_0^+$ pour $\Upsilon > 0$.

Par conséquent, le poids μ_R de R vérifie le critère (3.37), et la fonction R admet donc une représentation intégrale du type (3.38). Cependant, alors que μ_D de D ne vérifie pas ce critère de convergence, son extension par dérivation $\frac{1}{s}(D(s) - D(0))$ admet une représentation intégrale, alors la fonction D sera représentée par une représentation intégrale du type de (3.33)

Maintenant, si F présente en plus K singularités de type pôles, nous écrivons

$$F(s) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=1}^{M_k} \frac{r_{k,m}}{(s - s_k)^m} + \int_{\mathcal{C}} \frac{\mu_F(\gamma)}{s - \gamma} \, \mathrm{d}\xi, \tag{3.41}$$

où M_k est l'ordre de multiplicité du k-ième pôle s_k, et $r_{k,m}$ est son résidu associé à la multiplicité m. Le résidu $r_{k,m}$ est donné par

$$r_{k,m} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \to s_k} \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} (s - s_k)^m F(s). \tag{3.42}$$

3.3 Stabilité et passivité dans les tubes évasés avec profil $\mathcal{C}^1$

Dans cette partie nous démontrons la stabilité et la passivité d'un système modélisant un réseau droit de tronçons de tubes évasés (à courbure positive) avec continuité $\mathcal{C}^1$ du profil. Il s'agit donc de l'étude du réseau de *Kelly-Lochbaum* de tubes évasés de [HMM07b] (voir annexe H) présenté en partie 2.4.3 p.82.

Ici nous considérons la stabilité *EBSB* de systèmes causaux qui nécessite que les relations entrées/-sorties soient données par des fonctions de transfert holomorphes dans le demi-plan droit (pas de singularités dans $\mathbb{C}_0^+$).

Rappelons que la passivité d'un système est caractérisée par des impédances à parties réelles positives dans le demi-plan droit. En considérant les ondes progressives $\psi^{\pm}$, la passivité est caractérisée par des fonctions de transfert strictement inférieures à 1 en module dans $\mathbb{C}_0^+$, et inférieures ou égales à 1 sur $i\mathbb{R}$.

La passivité d'un système est intéressante à étudier parce qu'elle permet de prouver la stabilité d'un réseau de systèmes connectés les uns aux autres. En effet, après débouclage de 2 systèmes, on voit apparaître des dénominateurs tels que $1 - R_1R_2$ (cf. §1.3.1 p.39), où R_1 et R_2 sont les réflexions des 2 systèmes. Ainsi, prouver que $|R_1| < 1$ et $|R_2| < 1$ dans $\mathbb{C}_0^+$ prouve que le dénominateur ne s'y annule pas.

La preuve se déroule comme suit : en partie 3.3.1, nous définissons les systèmes à étudier. Puis en partie 3.3.2 nous considérons un tronçon de tube isolé, et prouvons la stabilité et la passivité du système associé. Enfin en partie 3.3.3, nous considérons ce même tronçon connecté à un réflexion R_p quelconque passive et stable, et prouvons la stabilité et la passivité de la réflexion de ce système. Puisque cette réflexion R_p peut représenter un réseau acoustique quelconque, la preuve la stabilité du réseau total s'obtient par récurrence.

3.3.1 Préliminaires

Nous considèrons les ensembles ouverts non bornés suivant :

$$\mathbb{C}_0^+ := \{s \in \mathbb{C} / \ \Re\mathrm{e}(s) > 0\}, \tag{3.43}$$
$$\mathbb{C}_0^{++} := \{s \in \mathbb{C}_0^+ / \ \Im\mathrm{m}(s) > 0\}, \tag{3.44}$$
$$\mathbb{C}_0^{+-} := \{s \in \mathbb{C}_0^+ / \ \Im\mathrm{m}(s) < 0\}. \tag{3.45}$$

Pour tout ouvert Ω, nous notons l'ensemble fermé associé $\overline{\Omega}$. Par exemple, $\overline{\mathbb{C}_0^+} = \{s \in \mathbb{C} / \ \Re\mathrm{e}(s) \geq 0\}$.

3.3.1.1 *Quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ isolé*

Puisque nous considérons un réseau de tronçons avec continuité $\mathcal{C}^1$ aux jonctions (discontinuité d'ordre 2), il n'y a pas d'effet de rupture de sections ou de pentes et pour simplifier l'étude nous considérons les ondes progressives ψ^+ et ψ^- (cf. Fig. 2.18). Rappelons qu'ici nous étudions des tronçons à courbures positives ou nulles ($\Upsilon \geq 0$).

Alors nous pouvons représenter tout tronçon de tube isolé de longueur L par le quadripôle symétrique $\mathbf{Q}_\psi$ ou par sa forme décomposée de la figure 3.21.

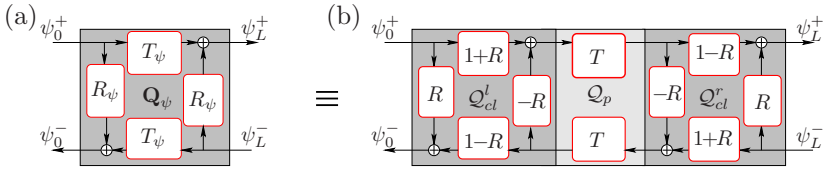


Fig. 3.21 – *(a) : quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$, (b) : sa forme décomposée.*

Rappelons les expressions algébriques des fonctions globales R_ψ et T_ψ :

$$R_\psi := \frac{\psi_0^-}{\psi_0^+} = \frac{\psi_L^-}{\psi_L^+} = \frac{(1-T^2)R}{1-R^2T^2} \quad \text{et} \quad T_\psi := \frac{\psi_L^+}{\psi_0^+} = \frac{\psi_0^-}{\psi_L^-} = \frac{(1-R^2)T}{1-R^2T^2}. \tag{3.46}$$

Remarque : En intervertissant R et T dans l'expression de R_ψ (respectivement T_ψ) nous retrouvons l'expression de T_ψ (respectivement R_ψ). Cette remarque est utile parce qu'il nous suffira de faire la démonstration sur R_ψ, et la preuve sur T_ψ sera immédiate.

3.3.1.2 *Quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ branché sur une réflexion passive*

Pour étudier la passivité d'un réseau de quadripôles du type $\mathbf{Q}_\psi$, nous avons besoin d'étudier le système constitué d'un quadripôle connecté à une réflexion passive quelconque R_p. La passivité de la réflexion R_p signifie qu'elle est stable et que

$$\forall \omega \in \mathbb{R},\ |R_p(i\omega)| \leq 1 \quad \text{et} \quad \forall s \in \mathbb{C}_0^+,\ |R_p(s)| < 1. \tag{3.47}$$

Dans la suite nous considérerons R_p comme un paramètre complexe indépendant de s et de module inférieur à 1 ($|R_p| \leq 1$). Le système à étudier est celui de la figure 3.22, pour lequel on définit la réflexion équivalente

$$R_e := \frac{\psi_0^-}{\psi_0^+} = R_\psi + \frac{R_p T_\psi^2}{1-R_pR_\psi} = \frac{R+\left(AT^2\right)}{1+R\left(AT^2\right)}, \quad \text{où} \quad A = \frac{R_p-R}{1-R_pR}. \tag{3.48}$$

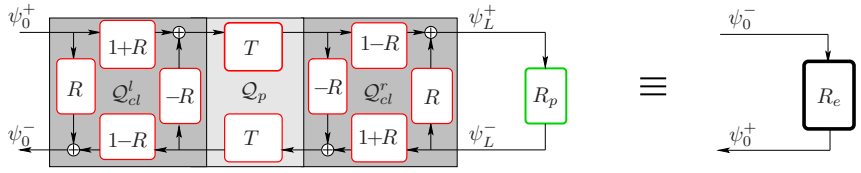


Fig. 3.22 – *Forme décomposée de $\mathbf{Q}_\psi$ connectée à une réflexion R_p, et réflexion équivalente R_e.*

3.3.1.3 *"Déconnexion" de s et Γ*

Dans la suite nous aurons besoin de "déconnecter" s et $\Gamma(s)$ que nous renommons s et γ, selon la même idée de déconnexion des propagateurs W_n de [Mat94]. Pour cela nous définissons des fonctions de plusieurs variables complexes indépendantes.

$$\forall (s,\gamma) \in (\overline{\mathbb{C}_0^+})^2 \ /\ s \neq -c_0\gamma, \qquad \mathcal{R}(s,\gamma) := \frac{s-c_0\gamma}{s+c_0\gamma} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(0,0) := -1, \tag{3.49}$$

$$\forall (s,\gamma) \in (\overline{\mathbb{C}_0^+})^2, \qquad \mathcal{T}(s,\gamma) := \mathrm{e}^{-\gamma L}. \tag{3.50}$$

La valeur de $\mathcal{R}$ en $(0,0)$ permet d'assurer pour $s=0$ la continuité par rapport à γ en $\gamma=0$. Remarquons que $R(s) = \mathcal{R}(s,\Gamma(s))$ et $T(s) = \mathcal{T}(s,\Gamma(s))$.

$$\mathcal{R}_\psi(s,\gamma) := \frac{(1-\mathcal{T}(s,\gamma)^2)\mathcal{R}(s,\gamma)}{1-\mathcal{R}(s,\gamma)^2\mathcal{T}(s,\gamma)^2}, \qquad \mathcal{T}_\psi(s,\gamma) := \frac{(1-\mathcal{R}(s,\gamma)^2)\mathcal{T}(s,\gamma)}{1-\mathcal{R}(s,\gamma)^2\mathcal{T}(s,\gamma)^2}, \tag{3.51}$$

$$\mathcal{R}_e(s,\gamma,\rho) := \mathcal{R}_\psi(s,\gamma) + \frac{\rho\mathcal{T}_\psi(s,\gamma)^2}{1-\rho\mathcal{R}_\psi(s,\gamma)}, \qquad \mathcal{A}(s,\gamma,\rho) := \frac{\rho-\mathcal{R}(s,\gamma)}{1-\rho\mathcal{R}(s,\gamma)}. \tag{3.52}$$

Ici $R_\psi(s) = \mathcal{R}_\psi(s,\Gamma(s))$, $T_\psi(s) = \mathcal{T}_\psi(s,\Gamma(s))$, $R_e(s) = \mathcal{R}_e(s,\Gamma(s),R_p(s))$ et $A(s) = \mathcal{A}(s,\Gamma(s),R_p(s))$.

Les preuves qui suivent utilisent des théorèmes, corollaires et propriétés qui sont donnés et démontrés en annexe A (il n'est cependant pas indispensable de les consulter). Les figures 3.23-3.25 résument les propriétés de $\Gamma(s)$, $R(s)$ et $T(s)$.

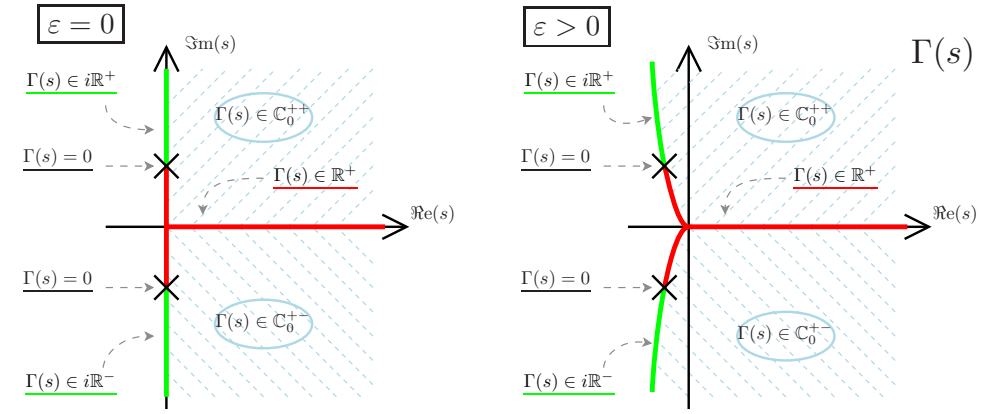


Fig. 3.23 – *Résumé des propriétés de* $\Gamma(s)$ *(voir annexe A).*

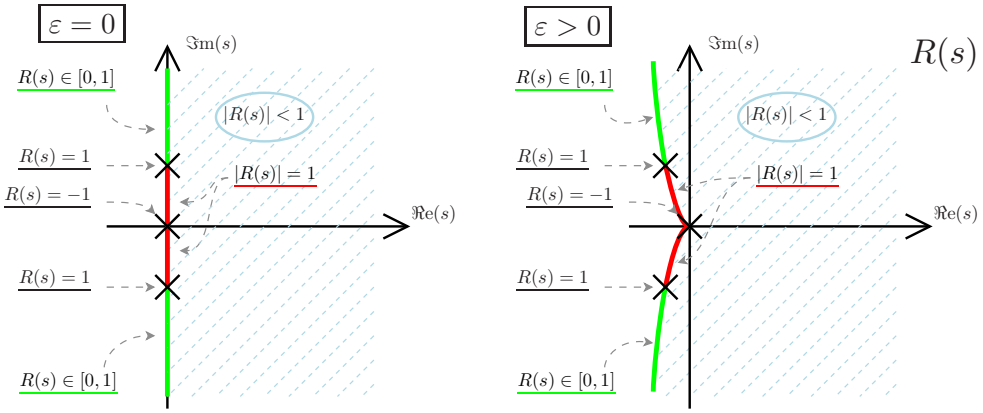


Fig. 3.24 – *Résumé des propriétés de* $R(s)$ *(voir annexe A).*

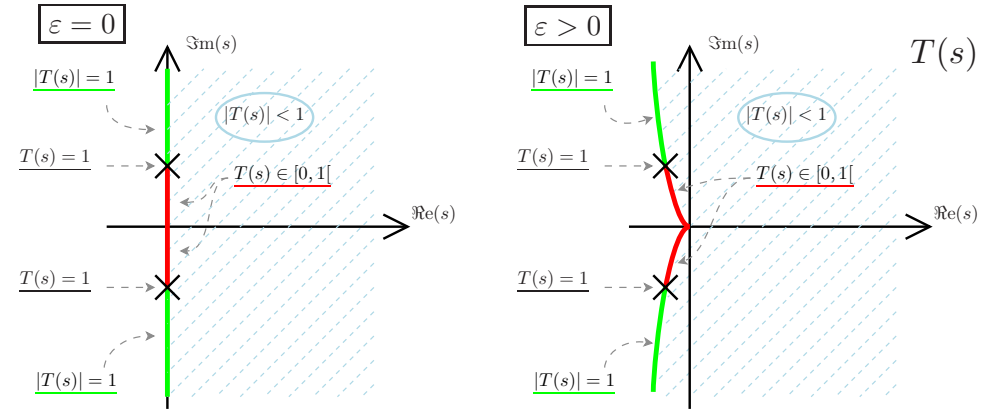


Fig. 3.25 – *Résumé des propriétés de* $T(s)$ *(voir annexe A).*

Remarque : Rappelons que l'ensemble $\mathcal{C}_\varepsilon := \{s \in \mathbb{C}/\ \Gamma^2(s) \in \mathbb{R}\}$ inclut les coupures dites naturelles notées $\mathcal{C}$ (cf. p.101). Ces coupures partent des points de branchement, solutions de $\Gamma(s) = 0$, représentés par des croix. Elles sont données par $\mathcal{C} := \{s \in \mathbb{C}/\Gamma(s) \in i\mathbb{R}\}$, et sont représentées ici en vert.

3.3.2 Stabilité et passivité de R_ψ et T_ψ

3.3.2.1 *Stabilité*

En annexe A.4.1 page 155, nous montrons que les fonctions R_ψ et T_ψ appartiennent à des espaces de *Hardy* de $\mathbb{C}_0^+$, ainsi nous savons qu'elles sont holomorphes dans $\mathbb{C}_0^+$ et qu'elles sont associées à des systèmes causaux et stables.

3.3.2.2 *Passivité pour $s \in i\mathbb{R}$ sans perte*

Nous traitons ici le cas sans perte. Selon (A.24), (A.25) et (A.26) (voir figure 3.23), quand s est sur l'axe imaginaire, $\Gamma(s)$ est soit imaginaire soit réel positif ($\Gamma(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R} \cup \mathbb{R}^+$). Donc nous "déconnectons" s et Γ et étudions le module de $\mathcal{R}_\psi$ et $\mathcal{T}_\psi$ pour $s \in i\mathbb{R}$ et $\gamma \in i\mathbb{R} \cup \mathbb{R}^+$.

- $\underline{\gamma \in i\mathbb{R}}$: On écrit $|\mathcal{R}_\psi| = \left|\frac{\mathcal{R}-(\mathcal{R}\mathcal{T}^2)}{1-\mathcal{R}(\mathcal{R}\mathcal{T}^2)}\right| = \left|\frac{a-B}{1-aB}\right|$. Pour $(s,\gamma) \in (i\mathbb{R}^+ \times i\mathbb{R}^+) \cup (i\mathbb{R}^- \times i\mathbb{R}^-)$, selon les propriétés (A.21) et (A.18), on a $a = \mathcal{R} \in [-1,1]$, donc $a = \overline{a}$ car réel, et $|B| = \left|\mathcal{R}\mathcal{T}^2\right| \leq 1$. Ainsi la propriété A.6 implique $|\mathcal{R}_\psi| \leq 1$.
- $\underline{\gamma \in \mathbb{R}^+}$: On écrit $|\mathcal{R}_\psi| = |\mathcal{R}| \left|\frac{1-(\mathcal{T}^2)}{1-(\mathcal{T}^2)(\mathcal{R}^2)}\right| = |\mathcal{R}| \left|\frac{1-a}{1-aB}\right|$. Pour $(s,\gamma) \in\ i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, les propriétés (A.22) et (A.17) donnent : $a = \mathcal{T}^2 \in [0,1]$, et $|B| = \left|\mathcal{R}^2\right| = 1$, la propriété A.7 implique $|\mathcal{R}_\psi| \leq 1$.

De manière similaire, on obtient le même résultat sur $\mathcal{T}_\psi$. En résumé :

$$\underline{|\mathcal{R}_\psi(s,\gamma)| \leq 1 \text{ et } |\mathcal{T}_\psi(s,\gamma)| \leq 1,\ \forall (s,\gamma) \in (i\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+ \cup i\mathbb{R}^+)) \cup (i\mathbb{R}^- \times (\mathbb{R}^+ \cup i\mathbb{R}^-)).}$$

Avec les propriétés (A.24), (A.25) et (A.26) (cf. Fig. 3.23), on peut relier s et $\gamma = \Gamma(s)$, et déduire qu'avec $\varepsilon = 0$, $|R_\psi(s)| \leq 1$ et $|T_\psi(s)| \leq 1$ pour $s \in i\mathbb{R}$.

3.3.2.3 *Passivité pour $s \in i\mathbb{R}$ avec pertes*

Dans le cas sans perte nous avons $\Gamma(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R} \cup \mathbb{R}^+$, mais en ajoutant des pertes ($\varepsilon > 0$) : $\Gamma(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}_0^+$. Donc nous étudions les modules de $\mathcal{R}_\psi$ et $\mathcal{T}_\psi$ pour $s \in i\mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{C}_0^+$.

- $\underline{s \in i\mathbb{R}^+}$: En fixant s sur $i\mathbb{R}^+$, on vérifie facilement que $\mathcal{R}_\psi$ est holomorphe par rapport à γ pour $\gamma \in \mathbb{C}_0^{++}$, continue et bornée pour $\gamma \in \overline{\mathbb{C}_0^{++}}$ (faire un développement asymptotique pour $|\gamma| \to +\infty$ dans $\mathbb{C}_0^+$). De plus $|\mathcal{R}_\psi(s,\gamma)| \leq 1$ pour $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup i\mathbb{R}^+$ (voir précédemment). Alors avec le corollaire A.3 (du théorème du maximum), on a $|\mathcal{R}_\psi(s,\gamma)| < 1$ pour $\gamma \in \mathbb{C}_0^{++}$.
- $\underline{s \in i\mathbb{R}^-}$: On considère ici $\gamma \in \mathbb{C}_0^{+-}$ et le corollaire A.4 donne résultat annoncé.

De manière similaire, on obtient le même résultat sur $\mathcal{T}_\psi$. En résumé :

$$\underline{\forall (s,\gamma) \in (i\mathbb{R}^+ \times \overline{\mathbb{C}_0^{++}}) \cup (i\mathbb{R}^- \times \overline{\mathbb{C}_0^{+-}}),\ |\mathcal{R}_\psi(s,\gamma)| \leq 1 \text{ et } |\mathcal{T}_\psi(s,\gamma)| \leq 1.}$$

Maintenant on reconnecte s et $\gamma = \Gamma(s)$ en utilisant les propriétés (A.33) et (A.34) (résumées en figure 3.23), et on déduit

$$\underline{\forall s \in i\mathbb{R},\ |R_\psi(s)| \leq 1 \text{ et } |T_\psi(s)| \leq 1.}$$

3.3.2.4 *Passivité pour $s \in \overline{\mathbb{C}_0^+}$*

On peut vérifier que R_ψ est holomorphe pour $s \in \mathbb{C}_0^+$, continue et bornée pour $s \in \overline{\mathbb{C}_0^+}$. De plus avec le résultat précédent, $\forall s \in i\mathbb{R}$, $|R_\psi(s)| \leq 1$. Donc le corollaire A.2 (du théorème du maximum) implique que : pour $s \in \mathbb{C}_0^+$, $|R_\psi(s)| < 1$. On fait de même pour $|T_\psi(s)| < 1$. En résumé :

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{C}_0^+,\ |R_\psi(s)| < 1 \text{ et } |T_\psi(s)| < 1,\ \text{ et } \forall s \in \overline{\mathbb{C}_0^+},\ |R_\psi(s)| \leq 1 \text{ et } |T_\psi(s)| \leq 1.}$$

Remarque 3.9. *Au final nous sommes obligés de reconnecter s et $\gamma = \Gamma(s)$, parce que l'affirmation " $\forall (s,\gamma) \in (\mathbb{C}_0^{++} \times \mathbb{C}_0^{++}) \cup (\mathbb{C}_0^{+-} \times \mathbb{C}_0^{+-})$, $|\mathcal{R}_\psi(s,\gamma)| < 1$ " est fausse, car on sait trouver des contre-exemples.*

3.3.3 Stabilité et passivité de R_e

Les résultats précédents sur les réflexions globales R_ψ et T_ψ ainsi que leur fonctions associées $\mathcal{R}_\psi$ $\mathcal{T}_\psi$ sont des résultats intermédiaires pour la suite.

3.3.3.1 *Stabilité*

Rappelons que $R_e = R_\psi + \dfrac{R_p T_\psi}{1 - R_p R_\psi}$.

Avec $|R_\psi| < 1$ et $|R_p| < 1$, on montre que R_e est holomorphe dans $\mathbb{C}_0^+$, et donc le système d'un quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ connecté à une résistance passive est stable. Il reste à étudier la passivité.

3.3.3.2 *Passivité pour $s \in i\mathbb{R}$ sans perte*

Nous traitons ici le cas sans perte pour s sur l'axe imaginaire. Sachant que $\Gamma(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R} \cup \mathbb{R}^+$, nous "déconnectons" s et Γ et étudions le module de $\mathcal{R}_e$ pour $s \in i\mathbb{R}$ et $\gamma \in i\mathbb{R} \cup \mathbb{R}^+$.

- $\underline{\gamma \in i\mathbb{R}}$: Pour $(s, \gamma) \in (i\mathbb{R}^+ \times i\mathbb{R}^+) \cup (i\mathbb{R}^- \times i\mathbb{R}^-)$, les propriétés (A.21) et (A.18) impliquent $\mathcal{R} \in [-1, 1]$ et $|\mathcal{T}| = 1$. Avec $|\rho| \leq 1$, $|\mathcal{A}| = \left|\frac{\rho - \overline{\mathcal{R}}}{1 - \rho\mathcal{R}}\right| \leq 1$ (voir la propriété A.6). Ainsi, $\left|\mathcal{A}\mathcal{T}^2\right| \leq 1$, et donc $|\mathcal{R}_e| = \frac{|\overline{\mathcal{R}} + (\mathcal{A}\mathcal{T}^2)|}{|1 + \mathcal{R}(\mathcal{A}\mathcal{T}^2)|} \leq 1$, (voir la propriété A.6).
- $\underline{\gamma \in \mathbb{R}^+}$: Pour $(s, \gamma) \in i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, Les propriétés (A.22) et (A.17) impliquent $\mathcal{T} \in [-1, 1]$ et $|\mathcal{R}| = 1$. Considérons $|\rho| = 1$: puisque $|\mathcal{R}| = 1$, on a $\mathcal{A} = \frac{\rho - \mathcal{R}}{1 - \rho\mathcal{R}} \in \mathbb{R}$ (voir la propriété A.8). Et donc $|\mathcal{R}_e| = \frac{|\mathcal{R} + \overline{\mathcal{A}\mathcal{T}^2}|}{|1 + \mathcal{R}(\mathcal{A}\mathcal{T}^2)|} = 1$, parce que $|\mathcal{R}| = 1$ et $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$ (voir la propriété A.6). $\mathcal{R}_e$ est holomorphe pour $\rho \in D(0,1)$ (disque unité ouvert), continue et bornée pour $\rho \in \overline{D(0,1)}$. Alors avec le corollaire A.1, pour $s \in i\mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}^+$, on trouve : $|\mathcal{R}_e(s, \gamma, \rho)| \leq 1, \forall \rho \in \overline{D(0,1)}$.

En conclusion :

$$\underline{|\mathcal{R}_e(s, \gamma, \rho)| \leq 1,\ \forall (s, \gamma, \rho) \in ((i\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+ \cup i\mathbb{R}^+)) \cup (i\mathbb{R}^- \times (\mathbb{R}^+ \cup i\mathbb{R}^-))) \times \overline{D(0,1)}.}$$

Avec les propriétés (A.24), (A.25) et (A.26) (voir figure 3.23), on peut relier s et Γ, et déduire qu'avec $\varepsilon = 0$, $|R_e(s)| \leq 1$ pour $s \in i\mathbb{R}$ et $|R_p| \leq 1$.

3.3.3.3 *Passivité pour $s \in i\mathbb{R}$ avec pertes*

Dans le cas sans perte nous avons $\Gamma(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R} \cup \mathbb{R}^+$, mais en ajoutant des pertes ($\varepsilon > 0$) : $\Gamma(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}_0^+$. Donc nous étudions le module de $\mathcal{R}_e$ pour $s \in i\mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{C}_0^+$.

- $\underline{s \in i\mathbb{R}^+}$: En fixant s sur $i\mathbb{R}^+$ et ρ sur $\overline{D(0,1)}$, on vérifie que $\mathcal{R}_e$ est holomorphe pour $\gamma \in \mathbb{C}_0^{++}$, continue et bornée pour $\gamma \in \overline{\mathbb{C}_0^{++}}$, de plus $|\mathcal{R}_e(s, \gamma, \rho)| \leq 1$ pour $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup i\mathbb{R}^+$. Alors avec le corollaire 3, on a $|\mathcal{R}_e(s, \gamma, \rho)| < 1$ pour $\gamma \in \mathbb{C}_0^{++}$.
- $\underline{s \in i\mathbb{R}^-}$: On fait de même pour $\gamma \in \mathbb{C}_0^{+-}$, avec le corollaire 4, on a le résultat.

En résumé :

$$\underline{|\mathcal{R}_e(s, \gamma, \rho)| \leq 1,\ \forall (s, \gamma, \rho) \in ((i\mathbb{R}^+ \times \overline{\mathbb{C}_0^{++}}) \cup (i\mathbb{R}^- \times \overline{\mathbb{C}_0^{+-}})) \times \overline{D(0,1)}.}$$

Maintenant on reconnecte s et $\gamma = \Gamma(s)$ (voir (A.33) et (A.34) ou figure 3.23), et on déduit

$$\underline{\forall s \in i\mathbb{R},\ |R_e(s)| \leq 1.}$$

3.3.3.4 *Passivité pour $s \in \overline{\mathbb{C}_0^+}$*

On peut vérifier que R_e est holomorphe pour $s \in \mathbb{C}_0^+$, continue et bornée pour $s \in \overline{\mathbb{C}_0^+}$. De plus avec le résultat précédent, $\forall s \in i\mathbb{R}$, $|R_e(s)| \leq 1$. Donc le corollaire A.2 (du théorème du maximum) implique que :

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{C}_0^+,\ |R_e(s)| < 1,\ \text{ et } \forall s \in \overline{\mathbb{C}_0^+},\ |R_e(s)| \leq 1.}$$

3.3.4 Stabilité du réseau

Le résultat précédent est que la réflexion équivalente R_e de la connexion d'un quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ sur une réflexion passive R_p quelconque, est elle-même passive.

Ainsi si on reconnecte un autre quadripôle sur ce système, on redémontre la stabilité et la passivité, puisque R_e est passive et stable.

Par récurrence, on démontre alors la stabilité et la passivité d'une concaténation d'un nombre quelconque de tronçons.

En bout de chaîne à droite, nous avons soit le choix de ne rien brancher, $R_p = 0$, soit de brancher une réflexion passive due à un rayonnement par exemple.

Finalement, la passivité du réseau permet de prouver la stabilité de celui-ci connecté à une réflexion passive quelconque à gauche.

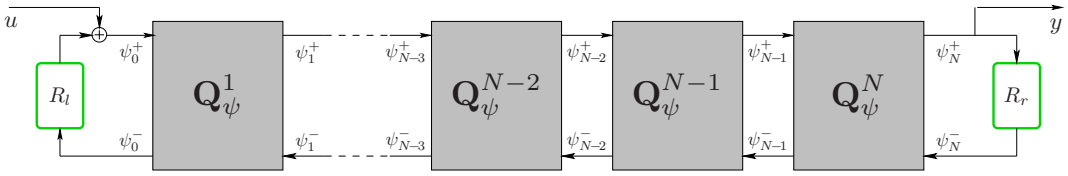


Fig. 3.26 – *Réseau droit de tronçons de tube avec profil $\mathcal{C}^1$ connecté à gauche et à droite à des réflexions passives R_l et R_r respectivement.*

3.4 Interprétation des coupures

Pour comprendre la raison de la partie instable de la coupure avec $\Upsilon < 0$, nous faisons ici une interprétation physique de l'apparition des coupures de la fonction R.

Dans [MHM09a] ou [MHM08a] (voir annexe J), nous mettons en parallèle notre problème de coupure pour les tubes acoustiques, à un phénomène rencontré avec l'équation de la chaleur dans une barre. Considérant une barre finie de longueur L, l'une des fonctions de transfert est donnée dans [CZ95] :

$$H_L(s) := \frac{\tanh(\sqrt{s}L)}{\sqrt{s}}. \tag{3.53}$$

Bien que cette expression fasse apparaître une racine de s, on constate que H_L est une fonction méromorphe en s, et donc H_L n'a pas de coupure, mais seulement des singularités isolées de types pôles sur $\mathbb{R}^-$.

Cependant, si $\sqrt{.}$ est définie par (3.13) qui est la racine carrée "naturelle" (voir page 97), on a $\forall s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ $H_L(s) \to 1/\sqrt{s}$ quand $L \to +\infty$, et on observe alors une densification des pôles et des zéros sur $\mathbb{R}^-$. La coupure de $\sqrt{s}$ y est donc interprétée comme une succession de pôles et de zéros infiniment proches, ce qui renforce l'interprétation faite par les représentations diffusives (cf. §3.2.3.3 p.104).

Avec un raisonnement similaire, nous traitons ici dans un premier temps le cas des tubes évasés à courbures positives : nous faisons une interprétation de R et expliquons alors l'apparition de certaines coupures. Puis nous verrons que ce raisonnement permet d'expliquer l'apparition d'une infinité d'instabilités dans le cas des courbures négatives.

3.4.1 Interprétation de R

Considérons un tronçon de tube évasé de longueur L, de courbure Υ et de coefficient de pertes ε. Nous redonnons le quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ et sa forme décomposée en figure 3.27, pour lesquelles

$$R_\psi(s) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{s}{c_0\Gamma(s)} - \frac{c_0\Gamma(s)}{s}\right)\sinh(\Gamma(s)L),}{\cosh(\Gamma(s)L) + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{c_0\Gamma(s)} + \frac{c_0\Gamma(s)}{s}\right)\sinh(\Gamma(s)L)} \tag{3.54}$$

$$= \frac{\left(1 - T(s)^2\right)R(s)}{1 - R(s)^2T(s)^2}, \tag{3.55}$$

$$R(s) = \frac{\frac{s}{c_0} - \Gamma(s)}{\frac{s}{c_0} + \Gamma(s)}. \tag{3.56}$$

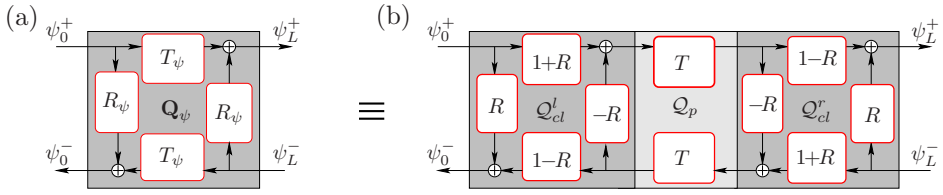


Fig. 3.27 – *(a) : Quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ et (b) : sa forme décomposée.*

Nous constatons que la transformation $\Gamma \mapsto -\Gamma$, laisse R_ψ invariant. Si bien qu'en réalité R_ψ est une fonction de Γ^2 et de s seulement, et non de Γ. En conséquence R_ψ n'a qu'une seule coupure sur $\mathbb{R}^-$, alors que R en a 3 comme nous avons vu en partie 3.2.2.2 p.100. De la même manière T_ψ, ne possède qu'une seule coupure sur $\mathbb{R}^-$ (voir (2.34)).

Ainsi les fonctions de transfert globales du tronçon n'ont pas les 2 coupures dues à la courbure. Ces 2 coupures apparaissent lors de la décomposition en structure de *Kelly-Lochbaum* adaptée pour les

guides d'ondes (cf. Fig. 3.27-(b)). Cependant, cette apparition n'est pas un "artifice" mathématique causé par une manipulation purement algébrique : on peut en faire une interprétation physiquement sensée.

En effet, choisissons de définir Γ par (3.21), pour laquelle la racine carrée est le prolongement naturel dans $\mathbb{C}$ de la racine carrée positive sur $\mathbb{R}^+$ (cf. §3.2.2.2 p.100). Cette définition produit les coupures que nous avons qualifiées de *naturelles*, et que nous notons $\mathcal{C}$. De plus, $\Gamma(s)$ ainsi définie a pour propriété d'être à partie réelle positive pour $s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$ (voir (3.22)). Ainsi, avec $\tau = L/c_0$ on a la propriété suivante pour $T(s)$:

$$\lim_{L\to+\infty} T(s) = \lim_{L\to+\infty} \mathrm{e}^{-\Gamma(s)L} = 0, \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}. \tag{3.57}$$

Avec R indépendante de L, pour $s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$, la limite de la réflexion globale devient :

$$\lim_{L\to+\infty} R_\psi(s) = \lim_{L\to+\infty} \frac{\left(1 - T(s)^2\right) R(s)}{1 - R(s)^2 T(s)^2} = R(s). \tag{3.58}$$

La fonction de transfert $\boldsymbol{R(s)}$ **est** alors interprétée comme **la réflexion globale d'un *tube évasé semi-infini*** à droite (ou anéchoïque) connecté à gauche sur un cône sans perte avec continuité de section et de pente. Cela signifie, que sur un intervalle $[0, 2\tau]$ la réponse impulsionnelle de la réflexion du tube de longeur L est celle d'un tube anéchoïque simulée par $R(s)$. Les retours successifs venant de la boucle retardée de la structure de *Kelly-Lochbaum* (cf. Fig. 3.27) ont alors pour rôle de prendre en compte la longueur L finie du tronçon. Nous retrouvons alors un raisonnement similaire à celui de [GKP90] pour les cônes.

3.4.2 Apparition des coupures

Cherchons maintenant l'évolution des singularités et des zéros de R_ψ quand L devient grand. L'ensemble des singularités de R_ψ est $\mathbb{R}^- \cup \mathcal{P}_L$ où[5]

$$\mathcal{P}_L = \left\{ s \in \mathbb{C} / \ \frac{\tanh(\Gamma(s)L)}{\Gamma(s)} = \frac{-2sc_0}{s^2 + c_0^2 \Gamma(s)^2} \right\}, \tag{3.59}$$

est l'ensemble où le dénominateur de R_ψ s'annule. Malheureusement, il est difficile d'étudier $\mathcal{P}_L$ explicitement, cependant des calculs numériques rendent la conjecture suivante vraisemblable :

Conjecture 3.1. *Les éléments de $\mathcal{P}_L$ sont des singularités isolées, et il y en a une infinité dénombrable. $\mathcal{P}_L$ est donc l'ensemble des pôles de R_ψ.*

A partir de (3.54), l'ensemble des zéros de R_ψ est $\mathcal{Z}_L \cup \left\{\zeta_0, \overline{\zeta_0}\right\}$, où

$$\mathcal{Z}_L = \left\{ \zeta_n \text{ et } \overline{\zeta_n} \in \mathbb{C} / \ \Gamma(\zeta_n)^2 = -n^2\pi^2/L^2 \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}, \tag{3.60}$$

$$\zeta_0 = c_0 \, \Upsilon^{2/3} \, (2\varepsilon)^{-2/3} \, \mathrm{e}^{2i\pi/3}. \tag{3.61}$$

ζ_0 est un zéro de R_ψ solution de $\Gamma(s) + s/c_0 = 0$, il est donc aussi un pôle de R dans $\mathbb{C}_0^-$. On remarque que quand Γ est définie par (3.21), les éléments de $\mathcal{Z}_L$ appartiennent à $\mathcal{C}$ quelle que soit la valeur de L (c-à-d $\mathcal{Z}_L \subset \mathcal{C}$).

Même s'il est difficile d'étudier explicitement la convergence des pôles de R_ψ quand $L \to \infty$, on a le résultat suivant :

Propriété 3.3. *Les pôles de R_ψ se rapprochent continuement de $\mathcal{C}$ ou de $\left\{\zeta_0, \overline{\zeta_0}\right\}$ quand L augmente continuement.*

[5] Les notations et les équation de [MHM08a] (voir annexe J) sont différentes parce que les variables y sont adimensionnées.

Démonstration. En utilisant l'expression (3.55) de R_ψ, on obtient une définition équivalente de $\mathcal{P}_L$ qui est $\left\{s \in \mathbb{C}/\ R(s)^2 T(s)^2 = 1\right\}$. Puisque $\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C},\ \lim_{L\to\infty} T(s) = 0$, les pôles de R_ψ se rapprochent soit de $\mathcal{C}$, soit des "solutions" de $|R(s)| = \infty$ qui sont ζ_0 et $\overline{\zeta_0}$. □

En conséquence, quand L augmente jusqu'à $+\infty$ on voit apparaître une densification naturelle des pôles et des zéros le long de $\mathcal{C}$, qui devient alors la coupure dite *naturelle* de R. La figure 3.28 illustre la convergence des pôles et des zéros de R_ψ quand L augmente.

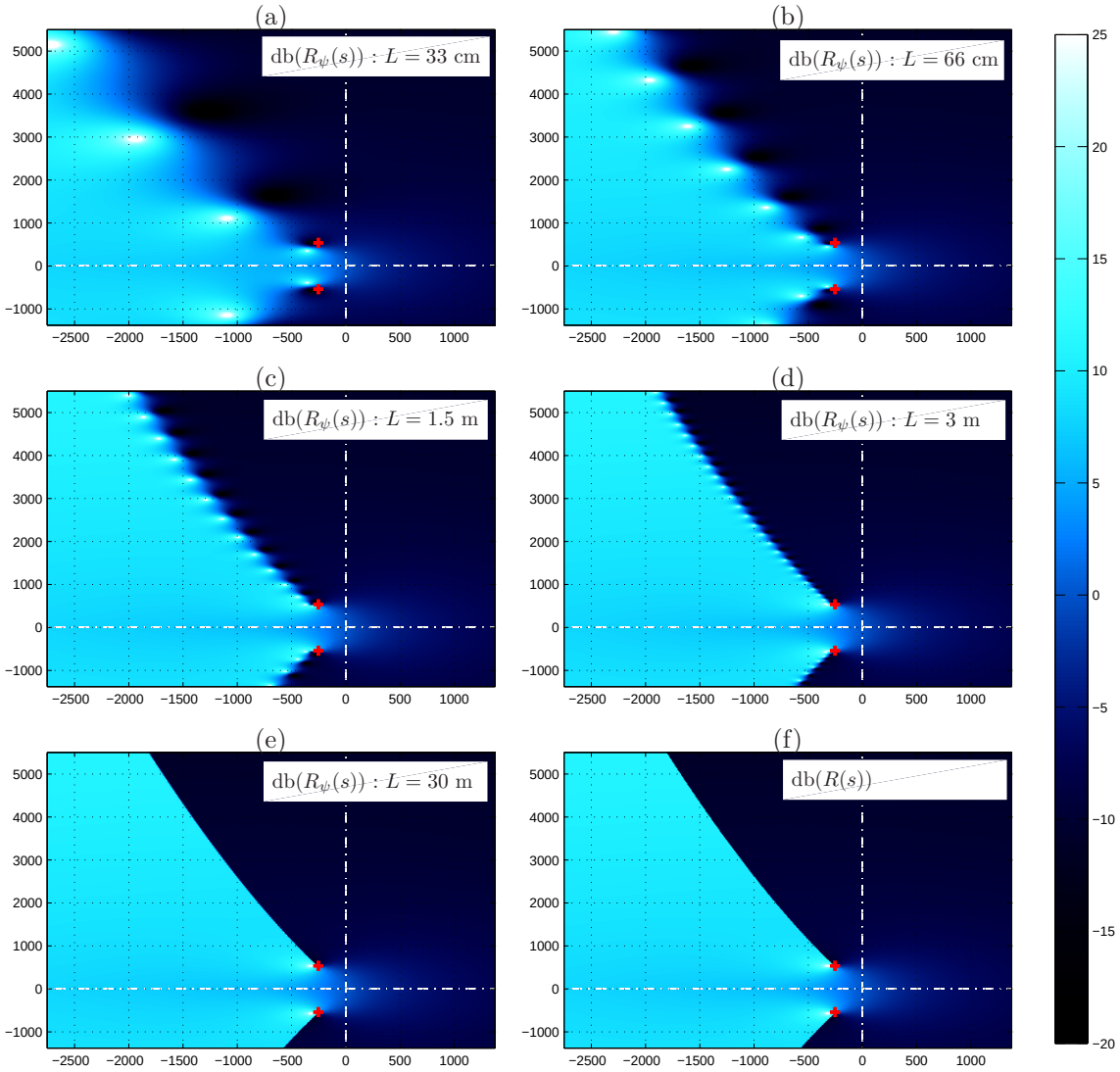


Fig. 3.28 – *Densification des pôles et zéros quand $L \to \infty$. Les pôles sont représentés par des points blancs et les zéros par des points noirs. Les croix rouges représentent les points de branchement de Γ. $\varepsilon = 4$ et $\Upsilon = 20$.*

3.4.3 Interprétation des instabilités pour les courbures négatives

Pour les tronçons à courbure négative, nous faisons la même interprétation de R : pour Γ défini par (3.25) pour laquelle la racine carrée est le prolongement naturel dans $\mathbb{C}$ de la racine carrée positive sur $\mathbb{R}^+$ (cf. §3.2.2.2 p.100), R est encore interprétée comme la réflexion globale d'un tube semi-infini à droite et de courbure constante. Mais alors que pour $\Upsilon > 0$ les coupures sont dans $\mathbb{C}_0^-$, pour $\Upsilon < 0$, avec $\xi_1 > 0$ le point de branchement, on a une infinité de singularités instables sur le segment $[0, \xi_1]$. Dans cette partie nous observons comment cette coupure se forme sur ce segment.

Rappelons que les tubes à courbure négative constante sont de forme sinusoïdale (cf. §2.1.4.2 p.65) : $r(\ell) = C_c \cos(\sqrt{|\Upsilon|}\ell) + C_s \sin(\sqrt{|\Upsilon|}\ell)/\sqrt{|\Upsilon|}$. En définissant $L_{crit} = \pi/\sqrt{|\Upsilon|}$, si la longueur L du tronçon est inférieure à L_{crit}, alors on peut définir un tube de longueur L et de rayon strictement positif pour $\ell \in [0, L]$. Il suffit de déterminer convenablement C_c et C_s en fonction de r_0 et r_L. Mais si $L > L_{crit}$, alors le rayon s'annule une ou plusieurs fois et devient par endroits négatif.

Bien entendu un tel tube est physiquement irréaliste, et comme pour le cas des cônes de la partie 3.1.2.2 p.89, aucune stabilité ne peut être physiquement justifiée.

En figure 3.29, nous faisons l'observation suivante : cette figure présente le module de la fonction R_ψ avec $\Upsilon < 0$. On y voit l'évolution de ses pôles et zéros à mesure que L augmente. On y voit la densification de zéros et pôles comme pour les courbures positives, mais en plus on constate que quand la longueur L du tube devient plus grande qu'un multiple entier de L_{crit}, un pôle passe de $\mathbb{C}_0^-$ à $\mathbb{R}^+$ et devient donc instable.

Par exemple, le pôle noté s_2 est dans $\mathbb{C}_0^-$ pour $L = 1.9L_{crit}$ (figure 3.29-(c)), il arrive en $s = 0$ pour $L = 2L_{crit}$ et passe dans $\mathbb{R}^+$ pour $L = 2.1L_{crit}$ (figure 3.29-(d)).

On constate donc qu'il y a un lien direct entre le nombre de pôles instables de R_ψ et le nombre de *noeuds* du rayon $r(\ell)$ (c-à-d de changements de signe). C'est-à-dire qu'à chaque *noeud* de $r(\ell)$ correspond un pôle dans $\mathbb{R}^+$. Et à mesure que L augmente, on a une densification de pôles sur le segment $[0, \xi_1]$.

Or R est interprétée comme la réflexion d'un tube semi-infini : puisque le rayon d'un tel tube posséde une infinité de *noeuds*, R possède une infinité de singularités instables.

En résumé, les instabilités (singularités dans $\mathbb{C}_0^+$) proviennent de l'incompatibilité entre une fonction de transfert (R par exemple) qui n'a de sens que pour un tronçon de longueur (semi-)infinie et une paramétrisation géométrique qui n'est physiquement valide que pour une longueur L finie et inférieure à L_{crit}.

Remarque 3.10. *En réalité, avec $k \in \mathbb{N}$ quand $L \xrightarrow{<} kL_{crit}$, il y a un ensemble de deux pôles complexes conjugués et de deux zéros complexes conjugués qui se rejoignent en $s = 0$. Pour $L > kL_{crit}$ un pôle (noté s_k) et un zéro passent dans $\mathbb{R}^+$, alors que l'autre pôle et l'autre zéro passent sur $\mathbb{R}^-$ si $\varepsilon = 0$ ou disparaissent[6] si $\varepsilon > 0$.*

Remarque 3.11. *Sur la figure 3.29-(a), on remarque l'existence d'un pôle instable $s_0 \approx 500$ rad.s^{-1}. Or dans ce cas $L < L_{crit}$, ce qui "contredirait" notre analyse. Nous proposons ici une explication possible de la présence de ce pôle instable : le quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ modélise un tronçon de courbure constante en ne prenant compte que les effets géométriques de la courbure. Il n'a donc pas d'information sur les rayons aux extrémités, et peut par conséquent représenter un tube avec un noeud (par exemple si $r_0 > 0$ et $r_L < 0$). Mais on observe qu'en rajoutant les effets de pentes (branchement des quadripôles $\mathcal{Q}_s$ aux extrémités), cette information manquante est ajoutée, et le quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ est stable.*

[6] L'autre pôle et l'autre zéro ne disparaissent pas vraiment quand L dépasse kL_{crit}, en réalité ils passent dans l'autre feuillet de la racine carrée. Notons qu'on peut observer leur influence le long de $\mathbb{R}^-$, avec ε faible

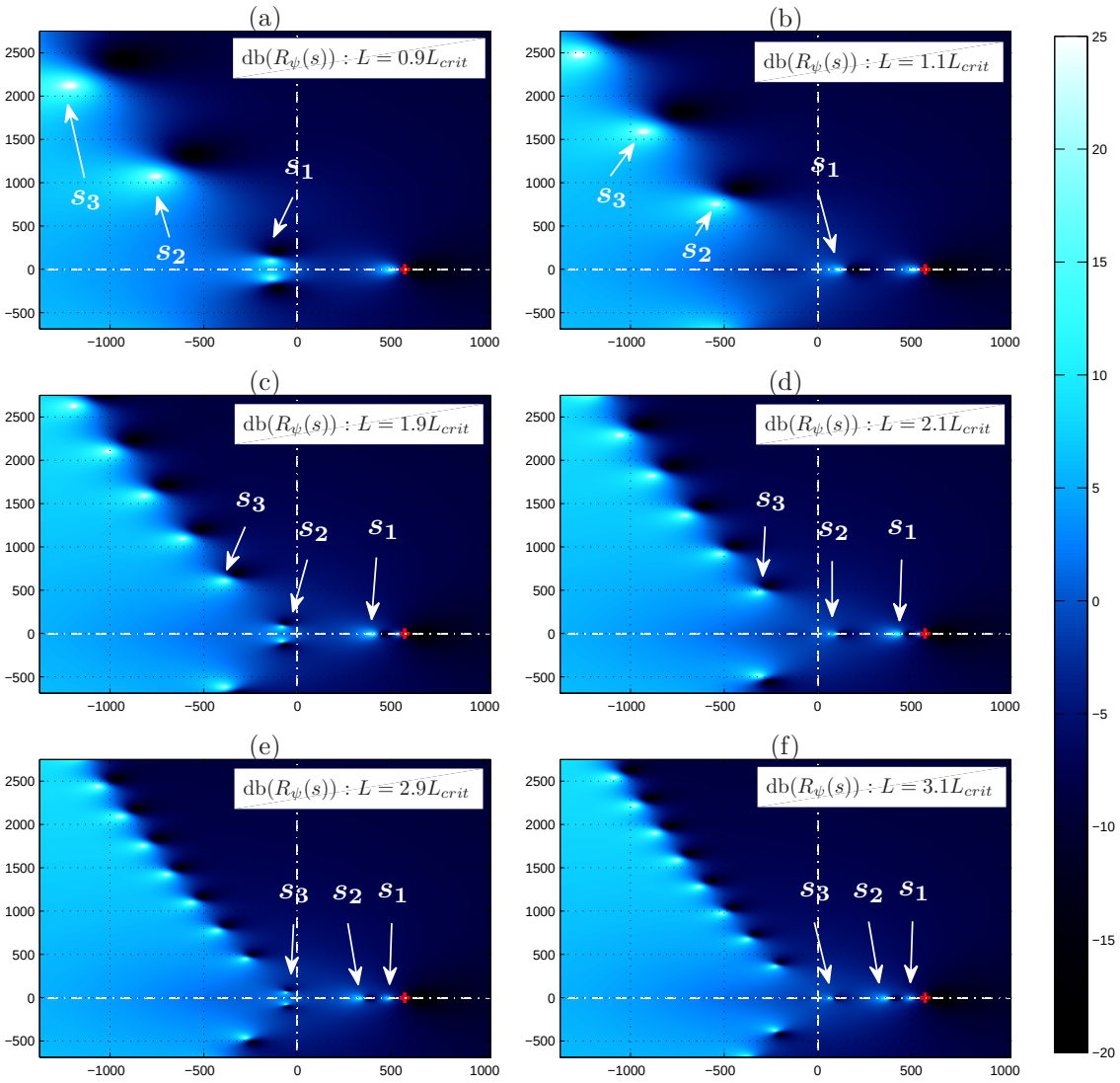


Fig. 3.29 – *Passage des pôles de $\mathbb{C}_0^-$ vers $\mathbb{R}^+$ quand L augmente (avec courbure négative). Les pôles sont représentés par des points blancs et les zéros par des points noirs. Ici nous suivont l'évolution des 3 pôles s_1, s_2 et s_3 qui deviennent chacun leur tour instables. La croix rouge représente le point de branchement ξ_1 de Γ dans $\mathbb{R}^+$. ici $\varepsilon = 4$, $\Upsilon = -20$ et $L_{crit} = \pi/\sqrt{|\Upsilon|} \approx 70$ cm.*

3.5 Stabilités et passivités : bilan et observations

Considérons un tronçon de tube avec courbure Υ quelconque, et pertes $\varepsilon \geq 0$. Nous représentons ce tronçon avec les variables $\phi^{\pm}$ par la structure de la figure 3.30, où les quadripôles $\mathcal{Q}_s^l$ et $\mathcal{Q}_s^r$ des effets de pente "encadrent" le quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ représentant les effets de courbure et de pertes.

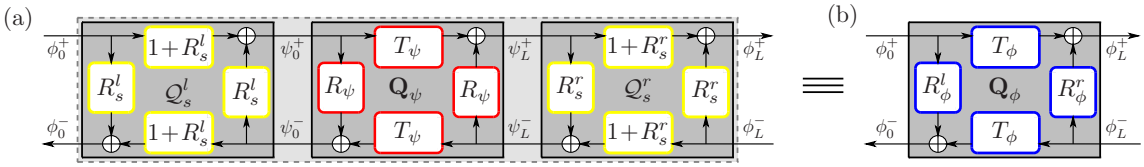


Fig. 3.30 – *Quadripôle* $\mathbf{Q}_\phi$ *décomposé :* $\mathbf{Q}_\phi \equiv \mathcal{Q}_s^l \odot \mathbf{Q}_\psi \odot \mathcal{Q}_s^r$

Dans un premier temps, nous faisons un point sur les différentes singularités à l'origine d'instabilités dans les tubes avec courbure et pertes. Ensuite nous rappelerons quelques résultats de preuves à propos de leur compensation, et ferons quelques observations numériques et conjectures lorsque cela est nécessaire et justifié.

3.5.1 Bilan des instablités

Nous rencontrons 3 types de singularités à l'origine d'instabilités :

Effets de pentes Le premier type de singularités instables vient des effets de changement de pentes quand celui-ci est négatif. Les fonctions associées aux effets de pentes sont données par

$$R_s^l(s) = \frac{\alpha_l}{s-\alpha_l} \text{ et } R_s^r(s) = \frac{\alpha_r}{s-\alpha_r} \quad \text{avec } \alpha_l = -\frac{c_0}{2}\frac{r_0'}{r_0} \text{ et } \alpha_r = +\frac{c_0}{2}\frac{r_L'}{r_L}.$$

où r_0' et r_L' sont les pentes respectivement aux extrémités gauche et droite du tronçon et r_0, r_L leurs rayons.

Si $r_0' < 0$ et $r_L' > 0$ alors les fonctions R_s^l et R_s^r sont instables. Cela s'explique en interprétant ces fonctions comme les réflexions globales à la jonction d'un cylindre connecté à un cône anéchoïque de pente r_0' ou r_L' (cf. §3.1.2.2 p.89).

Dans le cas des courbures positives, au moins une des 2 fonctions est instable.

Dans le cas des courbures négatives, au plus une des 2 fonctions est instable.

Coupure sur $\mathbb{R}^+$ avec $\Upsilon < 0$ Dans le cas des courbures négatives, la décomposition du quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ fait apparaître des fonctions de transfert R et T (ou D), ayant un ensemble continu de singularités sur le segment $[0, \xi_1]$ où $\xi_1 > 0$ est un point de branchement de la fonction Γ (voir parties 3.2.2.2 ou 3.4.3).

Ces fonctions de transfert sont alors associées à des systèmes causaux instables.

Pôle instable des fonctions R_ψ et T_ψ avec $\Upsilon < 0$ En partie 3.4.1 p.112 nous avons vu que puisque les fonctions R_ψ et T_ψ sont fonctions de s et de Γ^2, et non de Γ, elles n'ont qu'une seule coupure sur $\mathbb{R}^-$, et ne présentent pas le type de singularités précédent.

Cependant, dans le cas des courbures négatives, nous avons vu en partie 3.4.3 p.115 la présence d'un pôle nommé s_0 réel positif dans les fonctions de transfert R_ψ et T_ψ. Ce pôle instable est présent même si la longueur L du tronçon est inférieure à la longueur critique L_{crit}.

En conséquent, le système associé au quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ possède un pôle instable réel positif.

3.5.2 Observations et conjectures

Nous avons donné en partie 3.3.2 p.109 la preuve de stabilité et de passivité du quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ pour $\Upsilon > 0$. La preuve de stabilité du quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ est plus délicate, nous ne disposons aujourd'hui que d'observations et de quelques conjectures.

3.5.2.1 *Paramètres de tronçons physiquement réalistes*

Nous avons vu dans le cas des cônes et dans le cas de tubes à courbure négative, que l'apparition d'un "noeud" avec changement de signe du profil $r(\ell)$ provoque une instabilité. Une interprétation physique est que de tels tubes sont physiquement irréalistes et aucune stabilité ne peut être justifiée.

Ici nous donnons (ou rappelons) les contraintes à respecter pour que les paramètres géométriques définissent un tronçon de tube physiquement réaliste. Ces paramètres sont : L la longueur, r_0 et r_L les rayons aux extrémités gauche et droite respectivement, et Υ la courbure. De ces 4 paramètres on peut déterminer les constantes C_c et C_s de l'expression (2.28) p.65 et les pentes r'_0 et r'_L. Les contraintes sont :

(C1) Les rayons du tube r_0 et r_L doivent être positifs.

(C2) Dans le cas des cônes, la longueur L doit être inférieure à une longueur critique $L_{crit} := -r_0/r'$ (cf. §3.1.2.2 p.89).

(C3) Dans le cas des tronçons avec courbure négative, la longueur L doit être inférieure à une longueur critique $L_{crit} := \pi/\sqrt{|\Upsilon|}$ (cf. §3.4.3 p.115).

(C4) Le modèle de *Webster-Lokshin* a pour variable spatiale l'abscisse curviligne à la paroi. Avec z l'abscisse sur l'axe, nous avons vu en partie 2.1.1 p.59 que $r'(\ell) \to 1$ quand $\underline{r}'(z) \to +\infty$. Puisque le module de la pente du tronçon est maximum à l'une de ses extrémités, nous devons vérifier que les paramètres choisis donnent $|r'_0| < 1$ et $|r'_L| < 1$. Notons que selon (2.3) p.59, $|r'(\ell))| > 1$ donnerait un $\varepsilon(\ell)$ complexe.

Pour la suite, nous qualifions des paramètres géométriques du tronçon de "*physiquement réalistes*", s'ils vérifient chacune des 4 contraintes précédentes.

3.5.2.2 *Stabilité de* $\mathbf{Q}_\phi$

La preuve de stabilité du quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ n'a pas pu être faite. Elle est rendue particulièrement difficile par la présence de la ou des fonctions instables dues à l'effet de pente aux extrémités du tronçon pour les courbures positives, ou du pôle instable s_0 de $\mathbf{Q}_\psi$ pour les courbures négatives.

Cependant, le raisonnement fait sur l'énergie acoustique donné pour les ondes $\phi^\pm$ (cf. §2.1.2.4 p.61) nous donne un premier "renseignement" rassurant sur la stabilité du système, mais ne constitue pas encore une preuve.

De plus, quel que soit le signe de la courbure, si les paramètres géométriques du tronçon définissent une portion de tube physiquement réaliste, les calculs numériques des fonctions globales R^l_ϕ, R^r_ϕ et T_ϕ n'ont jamais montré de singularité dans le demi-plan droit de Laplace. Nous faisons la conjecture suivante :

Conjecture 3.2. *Pour tout $\Upsilon \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon \geq 0$, si les paramètres géométriques du tronçon sont physiquement réalistes, alors :*
- *Les fonctions R^l_ϕ, R^r_ϕ et T_ϕ sont holomorphes dans $\mathbb{C}^+_0 = \{s \in / \ \Re\mathrm{e}(s) > 0\}$.*
- *Le système donné par $\mathbf{Q}_\phi$ est causal et stable du point de vue entrée/sortie.*

Remarque 3.12. *Cela signifie donc que le ou les pôles instables introduits par les effets de pentes sont stabilisés entre autres par la boucle interne avec retard du quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$. Dans le cas des cônes sans perte ($\Upsilon = 0$ et $\varepsilon = 0$) nous en avons fait la preuve en partie 3.1.2.3 p.91.*

Remarque 3.13. *Dans le cas des courbures négatives, cette conjecture signifie donc aussi que l'ajout des effets de pentes permet de stabiliser le pôle instable s_0 de $\mathbf{Q}_\psi$.*

Remarque 3.14. *Notons qu'en partie 2.1.2.4 p.61, nous avions constaté que l'énergie donne une indication rassurrante sur la stabilité des ondes $\phi^\pm$ mais pas sur celle des ondes $\psi^\pm$. On a ici une observation et une conjecture de cette remarque.*

La figure 3.31 illustre pour $\Upsilon < 0$, la stabilisation du pôle instable s_0 de R_ψ et celle du pôle instable α_r de R_s^r pour l'effet de pente à droite. Cette stabilisation est effectuée en faisant la connexion : $\mathbf{Q}_\phi \equiv \mathcal{Q}_s^l \odot \mathbf{Q}_\psi \odot \mathcal{Q}_s^r$. On observe alors que les singularités de R_ϕ^l sont passées à gauche de l'axe imaginaire, comme le prévoit la conjecture.

3.5.2.3 *Passivité de $\mathbf{Q}_\phi$*

De même, la preuve de passivité du quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ n'a pas pu être faite. Cependant, nous pourrions aisément la démontrer si la preuve de la conjecture 3.2 était faite.

En effet, le lemme 3.1 de la page 92 étudie la fonction $\mathcal{R}_e$ qui est la réflexion équivalente à la connexion d'une jonction de cônes et d'une réflexion $\mathcal{R}_p$. Si $\mathcal{R}_p$ est de module inférieur à 1 sur $i\mathbb{R}$ alors $\mathcal{R}_e$ est aussi de module inférieur à 1 sur $i\mathbb{R}$. Ensuite le corollaire A.2, permet d'étendre le résultat à $\mathbb{C}_0^+$ si la fonction en question y est holomorphe.

En prenant $\mathcal{R}_p = R_\psi$ (qui est de module inférieur à 1) et $\mathcal{R}_e = R_\phi$ nous aurions alors la preuve de la conjecture suivante :

Conjecture 3.3. *Pour tout $\Upsilon \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon \geq 0$, si les paramètres géométriques du tronçon sont physiquement réalistes, alors :*

- *Les fonctions R_ϕ^l, R_ϕ^r et T_ϕ sont de modules inférieurs ou égaux à 1 sur $i\mathbb{R}$ et strictement inférieurs à 1 dans $\mathbb{C}_0^+$.*

La figure 3.32 illustre cette conjecture en affichant la courbe du niveau à 1 de $|R_\phi^l|$ et $|T_\phi|$.

3.5.3 Vers une réalisation numérique stable

Selon toutes ces observations et la conjecture 3.2 qui en est déduite, on constate que toutes les instabilités citées sont compensées dans les relations entrées/sorties "globales" du quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$.

- D'une part pour $\Upsilon < 0$, la partie instable de la coupure $[0, \xi_1]$ est éliminée des fonctions globales de $\mathbf{Q}_\psi$ (elles sont fonctions de s et Γ^2 seulement, voir (3.55) p.112).
- D'autre part le pôle instable s_0 de $\mathbf{Q}_\psi$, avec $\Upsilon < 0$, et les éventuels pôles instables dus aux effets de pentes, quel que soit Υ, sont également compensés dans les fonctions globales de $\mathbf{Q}_\phi$.

Ces instablités proviennent de la décomposition du système global $\mathbf{Q}_\phi$ en plusieurs sous-systèmes. Cette décomposition qui fait apparaître une structure de *Kelly-Lochbaum* est bien adaptée à la simulation en *guides d'ondes*, mais elle fait apparaître des sous-systèmes instables.

Pour surmonter ce problème, plusieurs solutions ont été proposées dans le passé et ont consisté à considérer le système dans sa "globalité" : soit par convolution ou "multi-convolution" temporelle par les réponses impulsionnelles du système global, (voir par exemple [Duc01, MAC88] pour les réseaux de cônes avec pertes), soit par des méthodes modales ou "multi-modales" (voir par exemple [PAK96, APK97, Kem02]).

Bien qu'un peu différents, nous pouvons faire le lien de ces phénomènes d'instabilités avec les *modes capturés* (voir par exemple [Ber99, Pag96]).

Cependant ces méthodes modales ou par convolution sont coûteuses en terme de temps de calcul du processeur et ne permettent pas toujours de prendre en compte facilement les changements de paramètres.

Dans ce travail, nous cherchons à conserver le formalisme des *guides d'ondes* pour unifier l'écriture modulaire indépendamment du profil de la perce. Nous devrons pour cela prendre suffisament de

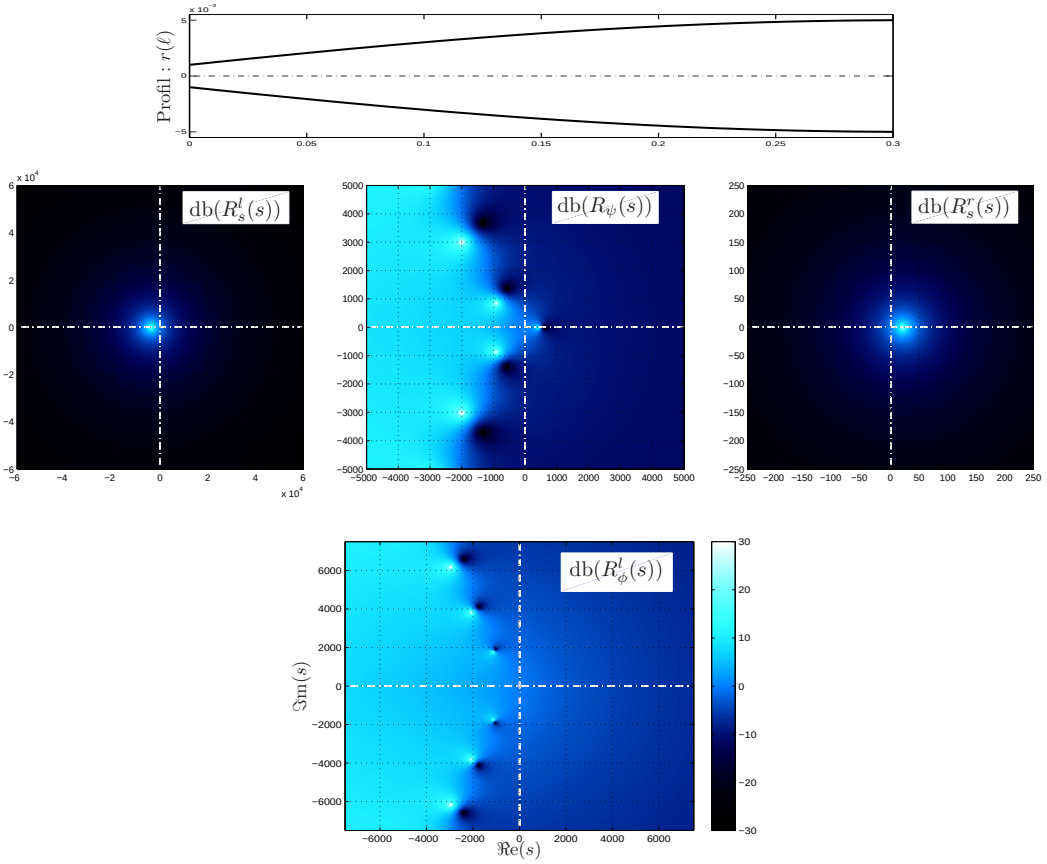


Fig. 3.31 – *Modules des fonctions R_s^l, R_ψ, R_s^r et R_ϕ^l (cf. Fig. 3.30) pour un tronçon à courbure négative. La figure de la partie supérieure présente le profil du tronçon. Le module de R_ψ fait apparaître le pôle instable s_0 pour les courbures négatives. Ce tronçon a des pentes r'_0 et r'_L à ses extrémités positives, donc R_s^l est stable et R_s^r est instable. Leurs pôles apparaissent respectivement à gauche et à droite de l'axe imaginaire. La fonction R_ϕ^l n'a quant à elle pas de singularité dans le demi-plan droit de Laplace. Ici $\Upsilon = -20\ m^{-2}$, $\varepsilon \approx 4\ m^{-\frac{1}{2}}$, $L = 30cm$.*

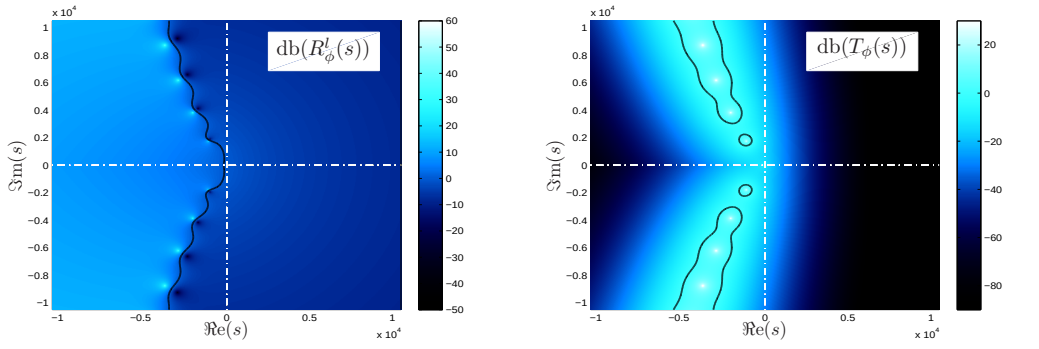


Fig. 3.32 – *Courbes de niveau à 0 dB des fonctions R_ϕ^l et T_ϕ. Les courbes noires représentent la courbe de niveau où le module des fonctions vaut 1 (0 dB). On constate qu'elles restent dans $\mathbb{C}_0^-$, et le module reste inférieur à 1 dans $\mathbb{C}_0^+$. Ici $\Upsilon = -20\ m^{-2}$, $\varepsilon \approx 4\ m^{-\frac{1}{2}}$, $L = 50cm$.*

précautions. Comme nous avons vu pour le cas des cônes où une réalisation particulière produit une simulation stable, dans le cas des tubes avec courbure positive ou négative, nous devrons trouver une réalisation qui garantit la stabilité du système y compris pour sa version à temps discret simulée en temps-réel.

Chapitre 4

Stabilisation et réalisations numériques

Ce chapitre traite de la réalisation numérique stable du modèle de tronçons de tubes acoustiques donné en partie 2.3.2 p.74, pour sa décomposition adaptée à l'approche des *guide d'ondes*.

Dans une première partie nous nous intéressons au passage du modèle représenté par une structure contenant des fonctions de transfert, vers une réalisation numérique en variables d'état à temps discret. La difficulté est la présence de sous-systèmes de dimension infinie représentables par des *représentations intégrales* (cf. §3.2.3.3 p.104). Pour surmonter ce problème nous réalisons une approximation de ces systèmes en systèmes de dimension finie. Nous présentons ici un cas général de fonctions dépendant de Γ. Puis la représentation d'état à temps continu est présentée pour ces systèmes, et nous pouvons alors en déduire leur version à temps discret comme la partie 1.3.4 p.45 le présente.

La deuxième partie s'intéresse à construire une nouvelle forme de la structure du tronçon. Cette forme met en évidence le fait que l'on peut paramétrer le système par 2 fonctions de transfert que l'on peut choisir arbitrairement sans modifier les relations entrées/sorties du système global.

Dans la troisième partie, nous nous intéressons aux courbures négatives. Nous utilisons alors la forme standard et cherchons 2 fonctions paramètres qui permettent de stabiliser les sous-états du système, de conserver les relations entrées/sorties du système et de rendre possible l'approximation. Le résultat obtenu est intéressant parce qu'il conserve dans une certaine mesure l'approche des *guides d'ondes* et respecte intégralement le formalisme présenté jusqu'à présent et la modularité de la construction. Des résultats d'approximation pour un tronçon à courbure négative y sont présentés.

La dernière partie s'intéresse à construire des résonateurs complets. Un premier tube est construit avec 4 tronçons de tubes évasés (à $\Upsilon > 0$ et ε constants). Le tube modélisé est le tube *test* de la partie 1.3.7 p.52, pour lequel nous avons déja construit des modèles à partir de réseaux de cylindres et de cônes. Nous ferons alors une comparaison des simulations des 3 modèles. Un second résonateur est construit. Celui-ci correspond à un vrai trombone pour lequel nous avons des mesures de perces et d'impédances. Nous pourrons alors comparer la modélisation faite avec des données physiques. De plus nous comparerons deux constructions différentes du trombone virtuel.

4.1 Approximation finie de systèmes de dimension infinie

4.1.1 Procédure d'optimisation

Nous avons vu en partie 3.2.3 page 102, que les fonctions de transfert contenant la fonction Γ sont représentées par une somme infinie de fonctions de transfert du premier ordre, ayant leur pôle sur les coupures de Γ.

Cependant, la simulation d'une infinité de pôles le long des coupures est irréalisable numériquement. Dans [Mon98, GB98, Dun00, HM06a] il est proposé d'approximer cette infinité de singularités par une famille finie de pôles. L'approximation consiste en une optimisation par les moindres carrés avec pondération. Dans le cas de la seule coupure sur $\mathbb{R}^-$ le modèle de l'approximation est :

$$\widetilde{H}_\mu(s) = \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\mu_j}{s+\xi_j}, \tag{4.1}$$

où J est le nombre de pôles, μ_j est le poids associé au pôle j et $-\xi_j$ le pôle j.

L'approximation permet de déterminer les poids que l'on doit associer à chaque pôle pour que le modèle soit le plus proche possible de la fonction analytique. Actuellement, l'optimisation n'est pas faite sur la position des pôles. Il faudra alors placer ces pôles le plus judicieusement possible (on peut toutefois optimiser localement ce placement par des algorithmes standard de descente de gradient). Le critère d'optimisation est évalué dans le domaine de Fourier :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\mu}) = \int_{\mathbb{R}^+} \left| \left(\widetilde{H}_\mu(i\omega) - H(i\omega) \right) w_H(\omega) \right|^2 M(\mathrm{d}\omega). \tag{4.2}$$

4.1.1.1 *Pondération*

La mesure M et le poids w_H sont choisis selon les règles simples suivantes :

(i) Les fréquences sont perçues par l'oreille humaine entre 20 Hz et 20 kHz selon une échelle logarithmique. Nous choisissons

$$M(\mathrm{d}\omega) := \mathbf{1}_{\omega_- < \omega < \omega_+}(\omega) \mathrm{dln}\omega = \mathbf{1}_{\omega_- < \omega < \omega_+}(\omega) \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}, \tag{4.3}$$

avec par exemple $\omega_- = 20 \times 2\pi$ et $\omega_+ = 20000 \times 2\pi$ rad/s.

(ii) La perception de l'intensité est également selon une échelle logarithmique. Ici nous considérons l'*erreur relative* entre l'approximation $\widetilde{H}_\mu$ et la fonction exacte H plutôt que l'erreur absolue. Pour cette raison le poids est : $w_H(\omega) := 1/|H(i\omega)|$.

(iii) La pondération précédente a pour effet de ramener *artificiellement* le niveau sonore de chaque partiel à 0dB, mais il n'est pas raisonnable de réhausser des gains trop faibles qui sont très mal perçus. Ainsi, le poids précédent est corrigé par :

$$w_H(i\omega) = 1/\mathrm{Sat}_{H,T_r}(i\omega), \tag{4.4}$$

où $\mathrm{Sat}_{H,Tr}$ est une saturation limitant la dynamique à T_r (en décibels), tel que pour $T_H = T_r \mathrm{sup}_{\omega_- < \omega < \omega_+} |H(i\omega)|$:

$$\mathrm{Sat}_{H,T_r}(i\omega) \quad = \quad \begin{cases} |H(i\omega)|, & \text{pour } |H(i\omega)| \geq T_H, \\ T_H, & \text{pour } |H(i\omega)| < T_H. \end{cases} \tag{4.5}$$

On prendra par exemple T_r égale à 80 dB.

(iv) Dans le cas d'une extension par dérivation, l'optimisation est réalisée sur $\breve{H}$ qui produit les $\breve{\mu}_j$ optimaux, mais le poids $w_H(i\omega)$ appliqué à $\breve{H}$ est paramétré par H. Son expression vaut :

$$\breve{w}_H(i\omega) = \omega/\mathrm{Sat}_{H,T_r}(i\omega). \tag{4.6}$$

4.1.1.2 *Modèle de l'approximation*

Pour une réalisation numérique, nous réalisons l'optimisation sur un nombre fini de pulsations, ainsi pour l'ensemble $\{\omega_n\}_{1\leq n\leq N}$ rangé par ordre croissant, avec $\omega_1 = \omega_-$ et $\omega_{N+1} = \omega_+$, le critère devient :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{n=1}^{N} \left| \left(\widetilde{H_\mu}(i\omega_n) - H(i\omega_n) \right) w_H(\omega_n) \right|^2 \left[\ln \omega_{n+1} - \ln \omega_n \right]. \tag{4.7}$$

Dans le cas général des trois coupures, nous avons à optimiser des paramètres μ'_k complexes. Pour ce faire on optimise séparémment leur partie réelle et imaginaire en considérant le modèle :

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_\mu(s) &= \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\mu_j}{s+\xi_j} + \sum_{k=1}^{k=K} \left[\frac{\mu'_k}{s-\gamma_k} + \frac{\overline{\mu'_k}}{s-\overline{\gamma_k}} \right] \\
&= \sum_{j=1}^{j=J} \mu_j \left[\frac{1}{s+\xi_j} \right] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{k=K} \mu_k^R \left[\frac{1}{s-\gamma_k} + \frac{1}{s-\overline{\gamma_k}} \right] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{k=K} \mu_k^I \left[\frac{i}{s-\gamma_k} - \frac{i}{s-\overline{\gamma_k}} \right],
\end{aligned} \tag{4.8}$$

où J est le nombre de pôles réels, K le nombre de paires de pôles complexes conjugués, μ_k^R est la partie réelle du poids associé au pôle complexe γ_k, μ_k^I sa partie imaginaire et μ_j le poids associé au pôle réel $-\xi_j$.

La forme matricielle équivalente à (4.8) est :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\mu}) = (\boldsymbol{M\mu - H})^* \boldsymbol{W}^* \boldsymbol{W} (\boldsymbol{M\mu - H}), \tag{4.9}$$

où $\boldsymbol{M}^* := \overline{\boldsymbol{M}}^t$ est la matrice conjuguée transposée de $\boldsymbol{M}$. La matrice $\boldsymbol{M}$ est définie par $M(n,m) = [1/(i\omega_n + \xi_m)]$ pour $m \in [1,J]_\mathbb{N}$, par $M(n,m) = [1/(i\omega_n - \gamma_{m-J}) + 1/(i\omega_n - \overline{\gamma_{m-J}})]$ pour $m \in [J+1, J+K]_\mathbb{N}$, et par $M(n,m) = [i/(i\omega_n - \gamma_{m-(J+K)}) - i/(i\omega_n - \overline{\gamma_{m-(J+K)}})]$ pour $m \in [J+K+1, J+2K]_\mathbb{N}$. $\boldsymbol{H}$ est le vecteur colonne $(H(i\omega_n))_{1\leq n\leq N}$. La matrice du poids $\boldsymbol{W}$ est une matrice diagonale à éléments positifs définis par $W(n,n) = w_H(\omega_n)\sqrt{\ln \omega_{n+1} - \ln \omega_n}$.

4.1.1.3 *Résolution*

La résolution par les moindres carrés conduit à l'équation donnant le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ des paramètres optimisés :

$$\boldsymbol{\mu} = \left[\mathcal{R}e\left(\boldsymbol{M^* W^* W M} \right) \right]^{-1} \left[\mathcal{R}e\left(\boldsymbol{M^* W^* W H} \right) \right]. \tag{4.10}$$

Le vecteur réel $\boldsymbol{\mu}$ de taille $J+2K$ est composé comme suit : $\boldsymbol{\mu}(j) = \mu_j$, pour $j \in [1,J]_\mathbb{N}$, $\boldsymbol{\mu}(k) = \mu^R_{k-J}$, pour $k \in [J+1, J+K]_\mathbb{N}$, et $\boldsymbol{\mu}(k) = \mu^I_{k-(J+K)}$, pour $k \in [J+K+1, J+2K]_\mathbb{N}$.

4.1.1.4 *Régularisation*

Pour résoudre d'éventuels problèmes de conditionnement lors de l'inversion de matrice (par décomposition en valeurs singulières), nous utilisons des paramètres de régularisation que nous règlons par méthode dichotomique. Le conditionnement est le rapport de la valeur minimale par la valeur maximale des valeurs propres de la matrice $\boldsymbol{M^* W^* W M}$. Quand il est inférieur à la précision des nombres flottants (2.2204×10^{-16} en précision double) la procédure d'inversion n'est pas fiable, on relève chaque

valeur propre d'une constante ϵ tel que le conditionnement soit supèrieur à cette précision. La méthode dichotomique que nous avons utilisée permet d'obtenir le plus petit paramètre de régularisation rendant le conditionnement bon. Les équations (4.9) et (4.10) sont modifiées en :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\mu}) = (\boldsymbol{M\mu - H})^* \boldsymbol{W}^* \boldsymbol{W} (\boldsymbol{M\mu - H}) + \boldsymbol{\mu}^t \boldsymbol{E\mu} \tag{4.11}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\mu} = [\mathcal{R}e (\boldsymbol{M}^* \boldsymbol{W}^* \boldsymbol{W M} + \boldsymbol{E})]^{-1} [\mathcal{R}e (\boldsymbol{M}^* \boldsymbol{W}^* \boldsymbol{W H})], \tag{4.12}$$

où $\boldsymbol{E} = \epsilon I_{J+2K}$ est la matrice diagonale de régularisation où ϵ est un paramètre de régularisation positif obtenu par méthode dichotomique.

Remarque 4.1. *Pour les extensions par dérivation, le modèle de l'approximation est :*

$$\widetilde{\breve{H}}_{\breve{\mu}}(s) = \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\breve{\mu}_j}{s + \xi_j} + \sum_{k=1}^{k=K} \left[\frac{\breve{\mu}'_k}{s - \gamma_k} + \frac{\overline{\breve{\mu}'_k}}{s - \overline{\gamma_k}} \right], \tag{4.13}$$

où les $\breve{\mu}_j$ et $\breve{\mu}'_k$ sont les paramètres optimisés sur $\breve{H}$ avec le poids adapté à H. Le modèle de l'approximation sur H s'écrit alors $\widetilde{H}_{\breve{\mu}}(s) = s\widetilde{\breve{H}}_{\breve{\mu}}(s) + H(0)$.

Remarque 4.2. *Pour des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}_0^+$, si le critère de l'optimisation était calculé sur tout l'axe imaginaire $i\mathbb{R}$, alors selon le corollaire A.2 du* théorème du maximum*, nous savons que l'erreur entre H et $\widetilde{H}$ dans $\mathbb{C}_0^+$, au sens du critère, est majorée par son maximum prélevé sur $i\mathbb{R}$.*

4.1.1.5 *Applications et résultats*

Les figures 4.1, 4.2 et 4.3 illustrent des résultats d'approximations des fonctions R et D. Notons que la fonction R définie par (2.55) en page 77, admet une représentation intégrale, et que la fonction D définie par (2.40) en page 71 doit être entendue par dérivation. Ces 2 fonctions sont représentées par exemple sur la structure de la figure 3.27-(b) en page 112.

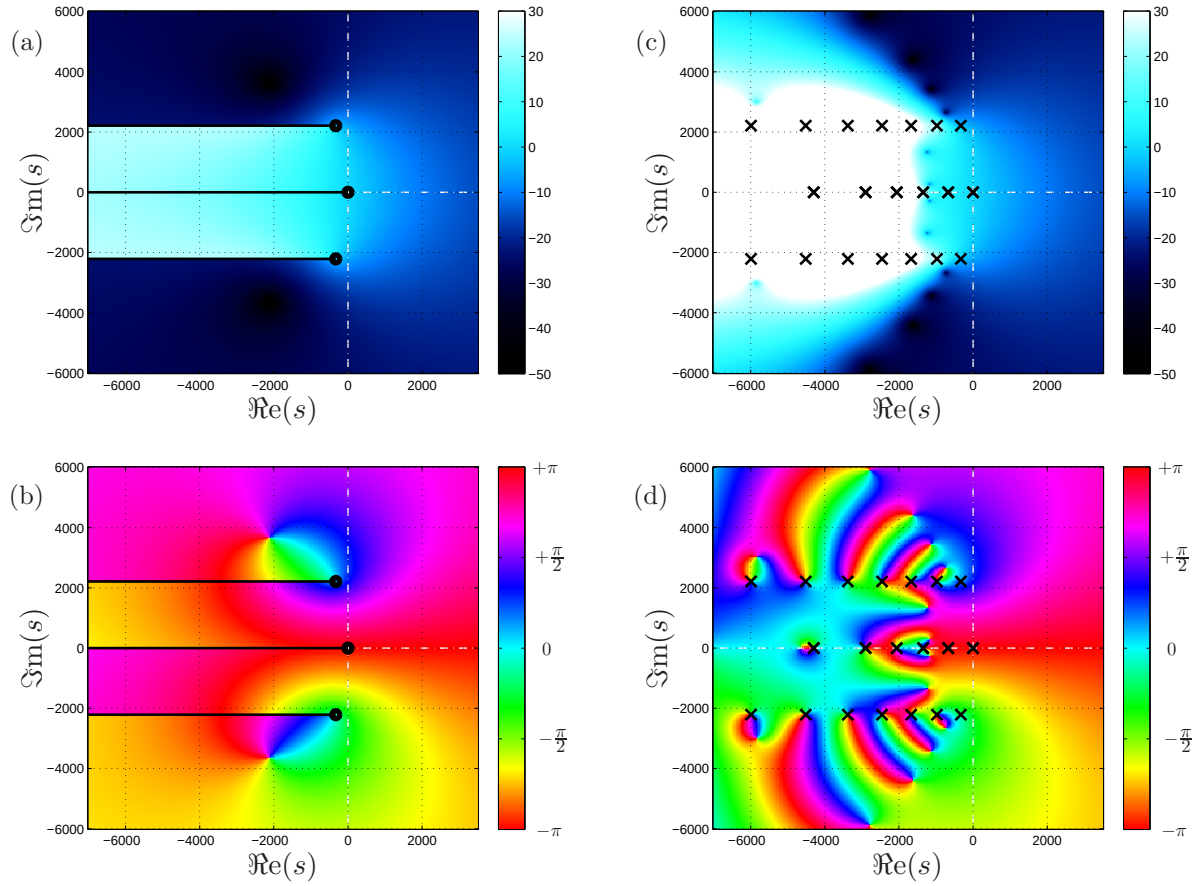


Fig. 4.1 – *Illustration de l'approximation des Représentations Intégrales dans le plan de Laplace. Ces figures représentent les transformées de Laplace dans le plan complexe de la fonction R (avec $\Upsilon > 0$) et de son approximation $\widetilde{R}$. Avec R à gauche : (a) donne le module en décibels et (b) la phase en radians. $\widetilde{R}$ à droite : (c) le module et (d) la phase. Ici les coupures de R sont choisies horizontales, on les distingue par les singularités sur 3 demi-droites. Pour l'approximation, des pôles sont placés empiriquement sur les coupures, et les poids associés sont optimisés. Sur cet exemple, l'approximation est faite avec $J = 6$ pôles réels placés sur $\mathbb{R}^-$, et $K = 7$ paires de pôles complexes conjugués placés sur les 2 autres coupures (voir (c) et (d)). Cela fait une complexité totale de 20 pôles. On constate que dans $\mathbb{C}_0^-$, R et $\widetilde{R}$ sont très différentes, mais qu'elles sont très semblables dans $\mathbb{C}_0^+$. Leur comparaison sur le domaine de Fourier est faite sur la figure 4.2.*

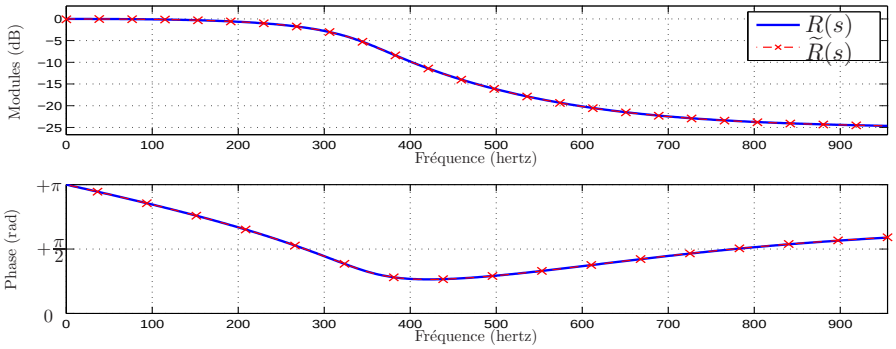


Fig. 4.2 – *Illustration de l'approximation des Représentations Intégrales dans le domaine de Fourier. Ces figures comparent la fonction R et son approximation $\widetilde{R}$. Sur cet exemple, l'approximation est faite avec $J = 6$ pôles réels placés sur $\mathbb{R}^-$, et $K = 7$ paires de pôles complexes conjugués placés sur les 2 autres coupures (voir les figures 4.1-(c) et 4.1-(d)). Cela fait une complexité totale de 20 pôles. Pour cet exemple : $\varepsilon = 0.7\ m^{-\frac{1}{2}}$, $\Upsilon = 60\ m^{-2}$, $L = 1m$.*

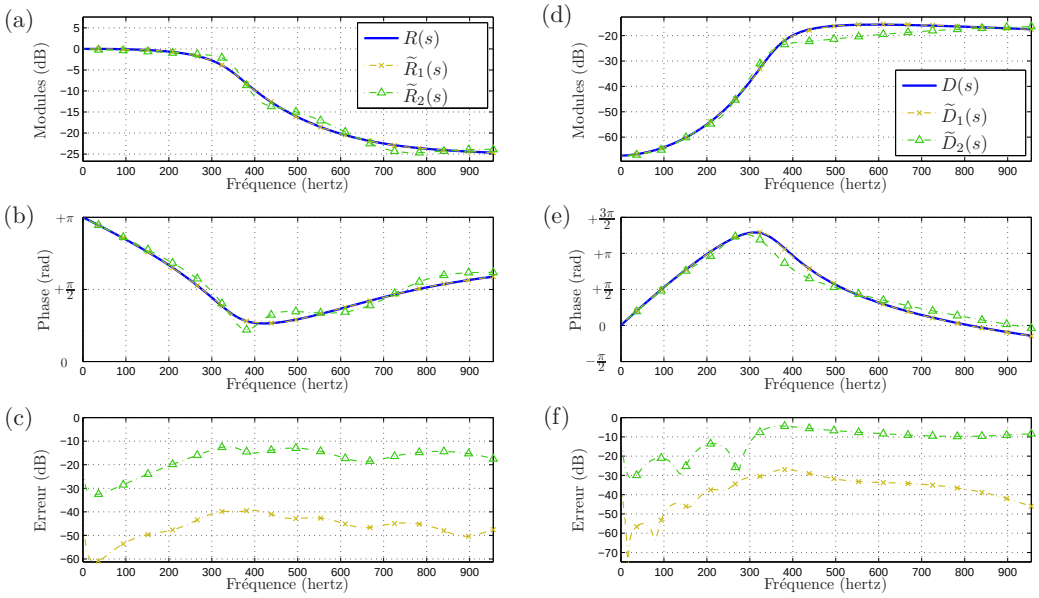


Fig. 4.3 – *Ces figures comparent les fonctions R et D avec leurs approximations $\widetilde{R}$ et $\widetilde{D}$. (a), (b) et (c) correspondent à R et (d), (e) et (f) correspondent à D. Deux séries d'approximations ont été faites : la première de bonne qualité avec un nombre suffisant de pôles, et une seconde avec moins de pôles. Pour $\widetilde{R}_1$: $J = 4$ et $K = 5$ (total de 14 pôles), pour $\widetilde{R}_2$: $J = 2$ et $K = 3$ (total de 8 pôles), pour $\widetilde{D}_1$: $J = 5$ et $K = 7$ (total de 19 pôles), et pour $\widetilde{D}_2$: $J = 2$ et $K = 3$ (total de 8 pôles). Les paramètres de R et D sont : $\varepsilon = 0.7\ m^{-\frac{1}{2}}$, $\Upsilon = 60\ m^{-2}$, $L = 1m$. L'erreur affichée par les courbes du bas est l'erreur relative donnée en décibels :* $\mathrm{db}(|(H(i\omega) - \widetilde{H}(i\omega))/H(i\omega)|)$.

4.1.2 Mise en représentation d'état et discrétisation

Considérons dans un premier temps un système linéaire à une entrée scalaire et une sortie scalaire, dont la fonction de transfert est l'approximation $\widetilde{H}_\mu$ de H donnée par (4.8), et que nous redonnons ici

$$\widetilde{H}_\mu(s) = \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\mu_j}{s+\xi_j} + \sum_{k=1}^{k=K} \left[\frac{\mu'_k}{s-\gamma_k} + \frac{\overline{\mu'_k}}{s-\overline{\gamma_k}} \right]. \tag{4.14}$$

En notant $u(s)$ l'entrée, $y(s)$ la sortie et $X(s)$ un vecteur d'état de dimension $((J+2K)\times 1)$, une représentation d'état du système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s\ X(s) & = & \boldsymbol{a}_H\ X(s) + \boldsymbol{b}_H\ u(s), \\ y(s) & = & \boldsymbol{c}_H\ X(s) + \boldsymbol{d}_H\ u(s), \end{array} \right. \tag{4.15}$$

avec pour matrices

$$\boldsymbol{a}_H = \mathrm{diag}\left(\left[-\xi_1, \ldots,\ -\xi_J,\ \gamma_1, \ldots,\ \gamma_K,\ \overline{\gamma_1}, \ldots,\ \overline{\gamma_K} \right] \right), \tag{4.16}$$

$$\boldsymbol{b}_H = \left[1, \ldots,\ 1 \right]^T \text{ de dimension } ((J+2K)\times 1), \tag{4.17}$$

$$\boldsymbol{c}_H = \left[\mu_1, \ldots,\ \mu_J,\ \mu'_1, \ldots,\ \mu'_K,\ \overline{\mu'_1}, \ldots,\ \overline{\mu'_K} \right], \tag{4.18}$$

$$\boldsymbol{d}_H = 0. \tag{4.19}$$

Dans le cas où le système est donné par l'approximation de l'extension par dérivation $\widetilde{\breve{H}}_{\breve{\mu}}$ de H, l'approximation à simuler est donnée par $\widetilde{H}_{\breve{\mu}}(s) = s\widetilde{\breve{H}}_{\breve{\mu}}(s) + H(0)$, qu'on réécrit sous la forme suivante :

$$\widetilde{H}_{\breve{\mu}}(s) = -\sum_{j=1}^{j=J} \frac{\xi_j \breve{\mu}_j}{s+\xi_j} + \sum_{k=1}^{k=K} \left[\frac{\gamma_k \breve{\mu}'_k}{s-\gamma_k} + \frac{\overline{\gamma_k \breve{\mu}'_k}}{s-\overline{\gamma_k}} \right] + \left(\sum_{j=1}^{j=J} \breve{\mu}_j + 2\,\Re\mathrm{e} \sum_{k=1}^{k=K} \breve{\mu}'_k + H(0) \right). \tag{4.20}$$

Une représentation d'état est alors donnée par les matrices suivantes :

$$\boldsymbol{a}_H = \mathrm{diag}\left(\left[-\xi_1, \ldots,\ -\xi_J,\ \gamma_1, \ldots,\ \gamma_K,\ \overline{\gamma_1}, \ldots,\ \overline{\gamma_K} \right] \right), \tag{4.21}$$

$$\boldsymbol{b}_H = \left[1, \ldots,\ 1 \right]^T \text{ de dimension } ((J+2K)\times 1), \tag{4.22}$$

$$\boldsymbol{c}_H = \left[-\xi_1 \breve{\mu}_1, \ldots,\ -\xi_J \breve{\mu}_J,\ \gamma_1 \breve{\mu}'_1, \ldots,\ \gamma_K \breve{\mu}'_K,\ \overline{\gamma_1 \breve{\mu}'_1}, \ldots,\ \overline{\gamma_K \breve{\mu}'_K} \right], \tag{4.23}$$

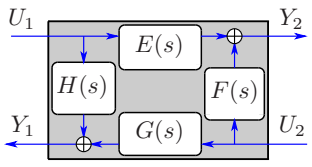
$$\boldsymbol{d}_H = \left(\sum_{j=1}^{j=J} \breve{\mu}_j + 2\,\Re\mathrm{e} \sum_{k=1}^{k=K} \breve{\mu}'_k + H(0) \right). \tag{4.24}$$

Maintenant nous pouvons construire les représentations d'état d'éléments quelconques contenant des fonctions approximées et données par les matrices $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{d}$ de leur approximation. Prenons l'exemple de 4 structures différentes de quadripôles :

– La forme du quadripôle de la figure suivante est la forme générale avec 4 fonctions de transfert que l'on note ici E, F, G et H. La représentation d'état du quadripôle est donnée par les matrices A, B, C et D qui suivent

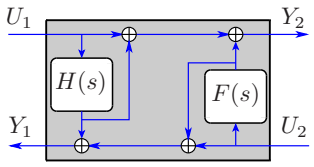
$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_H & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a}_G & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a}_E & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a}_F \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_H & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b}_G \\ \boldsymbol{b}_E & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b}_F \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_H & \boldsymbol{c}_G & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c}_E & \boldsymbol{c}_F \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_H & \boldsymbol{d}_G \\ \boldsymbol{d}_E & \boldsymbol{d}_F \end{bmatrix}.$$



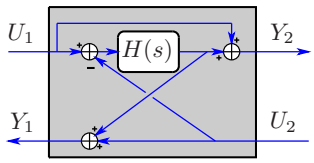
– Dans le cas du quadripôle précédent avec $E = 1 + H$ et $G = 1 + F$, on peut réécrire la structure de la manière suivante (qui correspond à la réalisation minimale), et sa représentation d'état est donnée par les matrices suivantes

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a}_F \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{b}_F \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_H & \boldsymbol{c}_F \\ \boldsymbol{c}_H & \boldsymbol{c}_F \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_H & 1 + \boldsymbol{d}_F \\ 1 + \boldsymbol{d}_H & \boldsymbol{d}_F \end{bmatrix}.$$



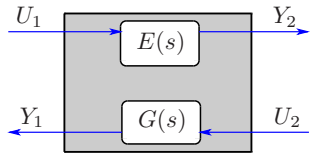
– Maintenant $E = 1 + H$ et $G = 1 - H$ et $F = -H$, on réécrit la structure du quadripôle avec la factorisation de H. Dans le cas des tronçons avec courbure, cette forme est celle du quadripôle $\mathcal{Q}_{cl}$ avec $H = R$ (voir partie 2.3.2.2 p.76). La représentation d'état du quadripôle $\mathcal{Q}_{cl}$ est donnée dans [MHM09b] ou [MHM09e] (voir annexe K). Les matrices sont alors données par

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_H \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_H & -\boldsymbol{b}_H \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_H \\ \boldsymbol{c}_H \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_H & 1 - \boldsymbol{d}_H \\ 1 + \boldsymbol{d}_H & \boldsymbol{d}_H \end{bmatrix}.$$



– Enfin prenons l'exemple où $H = F = 0$. Si $E(s) = G(s) = D(s) = \mathrm{e}^{-(\Gamma(s) - s/c_0)L}$ sont les effets de dispersion dus aux pertes et à la courbure, on retrouve l'exemple du quadripôle $\mathcal{Q}_{disp}$ (voir partie 1.3.3.6 p.44), adapté au modèle de *Webster-Lokshin*. Notons que D doit être représentée par une extension par dérivation (voir partie 3.2.3.3). Les matrices du système sont les suivantes

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a}_F \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{b}_F \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{c}_F \\ \boldsymbol{c}_E & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{d}_F \\ \boldsymbol{d}_E & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$



Discrétisation Les matrices de la dynamique A des représentations d'état données précédemment sont toutes diagonales, la discrétisation est alors immédiate en utilisant la méthode donnée en partie 1.3.4 page 45.

Discussion sur la stabilité

$\Upsilon > 0$: Dans le cas des tronçons à courbure positive nous avons étudié la stabilité du modèle pour des profil $\mathcal{C}^1$ en partie 3.3 p.106, et avons donné quelques conjectures en partie 3.5 p.117 validées pour le modèle exact par des calculs numériques. Cette stabilité vient de propriétés particulières des fonctions de transfert mises en jeu. Malheureusement, ces propriétés ne sont pas nécessairement conservées lors de l'approximation et de la discrétisation.
Par exemple, les fonctions de la boucle retardée du tronçon, $R(s)$ et $T(s) = D(s)\,\mathrm{e}^{-\tau s}$ sont de modules inférieurs à 1 dans $\mathbb{C}_0^+$, ce qui assure la stabilité interne du tronçon à courbure positive. Ainsi, pour conserver cette stabilité après approximation et discrétisation, il peut être utile d'ajouter cette contrainte sur les approximations $\widetilde{R}$ et $\widetilde{D}$.
Cependant cela n'est pas suffisant pour garantir également la passivité du modèle approximé du tronçon, et donc la stabilité d'une connexion sur un autre élément. Il serait nécessaire d'ajouter d'autres contraintes qui lient les fonctions du tronçon entre elles. Mais celles-ci sont difficiles à déterminer.
Dans la pratique, la stabilité de la réalisation numérique des tubes à profil $\mathcal{C}^1$ est souvent obtenue sans ajouter de contraintes, mais pour des tubes à profil $\mathcal{C}^0$ avec d'éventuelles ruptures de pentes aux jonctions, la stabilité n'est pas systématiquement obtenue.
Nous n'avons malheureusement pas pu approfondir ce problème. Dans la pratique, nous vérifions a posteriori la stabilité de la réalisation numérique, et dans le cas où elle est instable nous modifions empiriquement les paramètres de l'approximation (placement et nombre des pôles, fréquences ω_- et ω_+, etc.) et recommençons la construction jusqu'à en obtenir une stable. Nous discuterons de ce point en conclusion.

$\Upsilon < 0$: Dans le cas des tronçons à courbure négative, le problème est d'autant plus difficile que nous ne pouvons a priori pas obtenir de modèle exact stable avec la décomposition que nous faisons jusqu'à présent. De plus pour ce modèle le nombre de sous-états internes instables est infini.
Par conséquent, nous n'avons a priori aucun espoir d'obtenir des réalisations numériques stables en approximant et en discrétisant les fonctions R et D avec $\Upsilon < 0$, par l'approche développée jusqu'à présent.

Dans les parties suivantes nous proposons une autre décomposition qui a l'avantage non seulement de garantir la stabilité interne du système modélisant un tronçon, **y compris pour des courbures négatives**, mais en plus permet de conserver intégralement le formalisme que nous avons présenté jusqu'à présent.

Nous appliquerons cette décomposition à la simulation de tronçons à courbure négative, et nous verrons en conclusion en quoi elle peut être intéressante également pour les tronçons à courbure positive.

4.2 Structure généralisée simplifiée

4.2.1 Forme globale et forme décomposée

Considérons la représentation d'un tronçon avec les ondes progressives $\phi^{\pm}$. Le système associé peut être donné par le quadripôle $\mathbf{Q}_\phi$ et ses 4 fonctions globales représentées sur la figure 4.4-(a). Mais nous pouvons également le décomposer comme nous avons fait en partie 2.3.1.1 p.71, et obtenir la structure de la figure 4.4-(b). Ces deux représentations équivalentes prennent en compte les effets de pertes, de courbure et aussi des pentes du tronçon à ses extrémités.

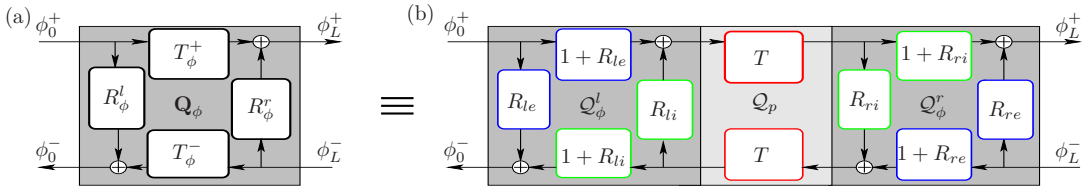


Fig. 4.4 – *Quadripôle* $\mathbf{Q}_\phi$ *et une forme décomposée.*

Forme globale : **Que ce soit pour les courbures positives ou négatives**, ce système à des relations entrées/sorties stables. Donc les 4 fonctions de transfert globales R_ϕ^l, R_ϕ^r, T_ϕ^+ et T_ϕ^- sont holomorphes dans $\mathbb{C}_0^+$. De plus nous savons qu'elles n'ont qu'une coupure sur $\mathbb{R}^-$ due aux pertes. Les simuler telles quelles permettrait d'obtenir une réalisation stable du tronçon. Mais nous devrions alors utiliser une méthode modale, et pour obtenir une réalisation faible coût simulable en temps-réel nous devrions "tronquer" les modes, ce qui pose des problèmes de réalisme. Rappelons que $T_\phi^+ = T_\phi^- = T_\phi$.

Forme décomposée : Cette forme a l'avantage d'être adaptée à la modélisation par *guide d'ondes*, mais pose plusieurs problèmes de stabilité. Pour les courbures négatives, il y a l'apparition d'une partie de coupure instable dans $\mathbb{R}^+$. Pour les courbures positives, il y a la présence d'une ou de deux instabilités en raison du saut de pente négatif à au moins une extrémité. Ces instabilités sont en théorie compensées par le retour de la boucle, mais cette compensation n'est plus nécessairement assurée après approximation et discrétisation.

D'un coté, la forme globale donne une réalisation stable mais mal adaptée à la modélisation de *guides d'ondes*, de l'autre coté, la forme décomposée produit une réalisation instable ou difficilement stabilisable, mais bien adaptée à la simulation.

Nous voyons dans la prochaine partie qu'il éxiste une infinité de représentations du tronçon et nous en obtenons une paramétrisation qui nous permettra de trouver une réalisation stable respectant dans une certaine mesure le formalisme développé jusqu'à présent.

4.2.2 Forme standard du quadripôle

Dans un premier temps nous cherchons à représenter les deux formes de la figure 4.4 par une structure commune : la structure de la figure 4.5 est équivalente à l'une des 2 formes globale ou décomposée si les égalités suivantes sont vérifiées :

Forme globale : $\mathcal{R}_{le} = R_\phi^l$, $\mathcal{R}_{re} = R_\phi^r$, $\mathcal{R}_{li} = \mathcal{R}_{ri} = 0$, $\mathcal{T}_{le} = \mathcal{T}_{li} = \mathcal{T}_{le} = \mathcal{T}_{li} = 1$, et $\mathcal{D}^+ = \mathcal{D}^- = D_\phi$.

Forme décomposée : $\mathcal{R}_{le} = R_{le}$, $\mathcal{R}_{re} = R_{re}$, $\mathcal{R}_{li} = R_{li}$, $\mathcal{R}_{ri} = R_{ri}$, $\mathcal{T}_{le} = 1 + R_{le}$, $\mathcal{T}_{re} = 1 + R_{re}$, $\mathcal{T}_{li} = 1 + R_{li}$, $\mathcal{T}_{ri} = 1 + R_{ri}$, et $\mathcal{D}^+ = \mathcal{D}^- = D$,

où D et D_ϕ correpondent aux transmissions T et T_ϕ sans le retard en facteur : $T(s) = D(s)\,\mathrm{e}^{-\tau s}$ et $T_\phi(s) = D_\phi(s)\,\mathrm{e}^{-\tau s}$ (voir l'équation (2.63) p.78). Les autres fonctions de la forme décomposée sont

données par (2.46-2.49) p.73.

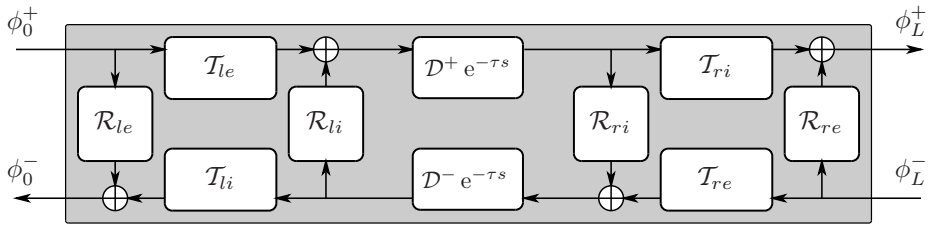


Fig. 4.5 – *Forme standard du quadripôle*

Cette première structure standard met en jeu 10 fonctions de transfert, cependant par la factorisation illustrée en figure 4.6, nous mettons en forme la nouvelle structure équivalente de la figure 4.7 mettant en jeu 6 fonctions de transfert que l'on nomme : $\mathcal{H}_l$, $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{F}_l$, $\mathcal{F}_r$, $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$.

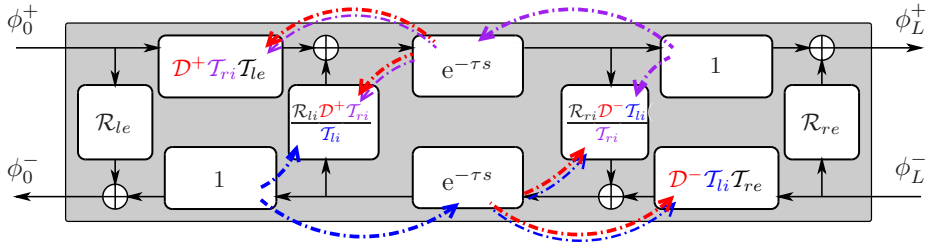


Fig. 4.6 – *Réduction de la forme standard du quadripôle*

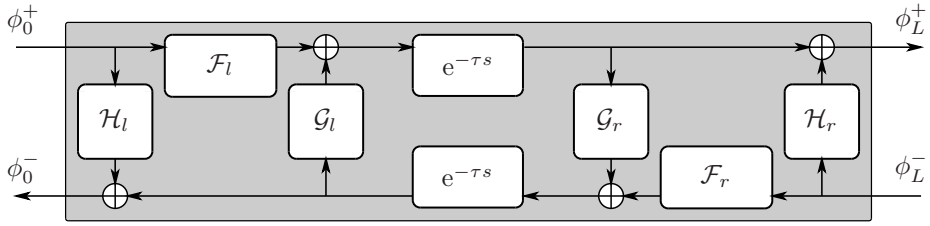


Fig. 4.7 – *Forme standard réduite du quadripôle*

Pour chacune des 2 formes globale ou décomposée, les 6 fonctions de transfert valent :

Forme globale :

$$\mathcal{H}_l = R_\phi^l, \qquad \mathcal{F}_l = D_\phi, \qquad \mathcal{G}_l = 0,$$
$$\mathcal{H}_r = R_\phi^r, \qquad \mathcal{F}_r = D_\phi, \qquad \mathcal{G}_r = 0.$$

Forme décomposée :

$$\mathcal{H}_l = \mathcal{R}_{le}, \qquad \mathcal{F}_l = D(1+R_{ri})(1+R_{le}), \qquad \mathcal{G}_l = \frac{R_{li}D(1+R_{ri})}{1+R_{li}},$$
$$\mathcal{H}_r = R_{re}, \qquad \mathcal{F}_r = D(1+R_{li})(1+R_{re}), \qquad \mathcal{G}_r = \frac{R_{ri}D(1+R_{li})}{1+R_{ri}}.$$

4.2.3 Paramétrisation

Nous cherchons maintenant d'autres représentations que la forme globale ou que la forme décomposée. Notons que quelle que soit la forme considérée, elle doit redonner les fonctions globales. A partir

de la forme réduite de la figure 4.7, on écrit les fonctions globales R^l_ϕ, R^r_ϕ, D^+_ϕ et D^-_ϕ en fonction des 6 fonctions de la forme standard :

$$R^l_\phi(s) = \mathcal{H}_l(s) + \frac{\mathcal{F}_l(s)\,\mathcal{G}_r(s)\;\mathrm{e}^{-2\tau s}}{1-\mathcal{G}_l(s)\,\mathcal{G}_r(s)\;\mathrm{e}^{-2\tau s}}, \tag{4.25}$$

$$R^r_\phi(s) = \mathcal{H}_r(s) + \frac{\mathcal{F}_r(s)\,\mathcal{G}_l(s)\;\mathrm{e}^{-2\tau s}}{1-\mathcal{G}_l(s)\,\mathcal{G}_r(s)\;\mathrm{e}^{-2\tau s}}, \tag{4.26}$$

$$D^+_\phi(s) = \frac{\mathcal{F}_l(s)}{1-\mathcal{G}_l(s)\,\mathcal{G}_r(s)\;\mathrm{e}^{-2\tau s}}, \tag{4.27}$$

$$D^-_\phi(s) = \frac{\mathcal{F}_r(s)}{1-\mathcal{G}_l(s)\,\mathcal{G}_r(s)\;\mathrm{e}^{-2\tau s}}. \tag{4.28}$$

Ceci donne 6 inconnues ($\mathcal{H}_l$, $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{F}_l$, $\mathcal{F}_r$, $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$) et 4 équations non linéaires (4.25)-(4.28). On remarque alors que l'on peut choisir $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ comme degré de liberté, et la résolution du système d'équations donne les fonctions $\mathcal{H}_l$, $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{F}_l$ et $\mathcal{F}_r$:

$$\mathcal{H}_l(s) = R^l_\phi(s) - D^+_\phi(s)\,\mathcal{G}_r(s)\,\mathrm{e}^{-2\tau s}, \tag{4.29}$$

$$\mathcal{H}_r(s) = R^r_\phi(s) - D^-_\phi(s)\,\mathcal{G}_l(s)\,\mathrm{e}^{-2\tau s}, \tag{4.30}$$

$$\mathcal{F}_l(s) = D^+_\phi(s)\left(1-\mathcal{G}_l(s)\,\mathcal{G}_r(s)\,\mathrm{e}^{-2\tau s}\right), \tag{4.31}$$

$$\mathcal{F}_r(s) = D^-_\phi(s)\left(1-\mathcal{G}_l(s)\,\mathcal{G}_r(s)\,\mathrm{e}^{-2\tau s}\right). \tag{4.32}$$

Ainsi, il est possible de choisir arbitrairement les fonctions $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$, et de retrouver exactement les mêmes relations entrées/sorties du système. Nous avons donc une paramétrisation du système par 2 fonctions.

Par exemple les formes globale et décomposée correspondent aux choix :

Forme globale :	$\mathcal{G}_l = 0,$	$\mathcal{G}_r = 0,$
Forme décomposée :	$\mathcal{G}_l = \frac{R_{li}(1+R_{ri})}{1+R_{li}}D,$	$\mathcal{G}_r = \frac{R_{ri}(1+R_{li})}{1+R_{ri}}D.$

Dans le cas de la forme décomposée, les 6 fonctions de transfert n'ont pas de retard, les modes du tronçon sont simulés par la boucle du système. Pour la forme globale, $\mathcal{G}_l = \mathcal{G}_r = 0$, la boucle est dans ce cas ouverte, les modes sont alors simulés par les retards contenus dans les dénominateurs des 4 autres fonctions.

Remarque 4.3. *Remarquons que, quel que soit le choix de $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ causales et stables, $\mathcal{H}_l$, $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{F}_l$ et $\mathcal{F}_r$ définies par (4.25)-(4.28) sont elles aussi causales et stables. Cela n'est pas le cas si nous choisissons $\mathcal{H}_l$, $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{F}_l$ ou $\mathcal{F}_r$ comme degrés de liberté.*

Remarque 4.4. *De plus, choisir $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ inférieurs à 1 en module dans $\mathbb{C}^+_0$ permet de garantir la stabilité de la boucle interne du système.*

Il nous faut donc chercher des fonctions $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ qui permettent d'assurer la stabilité du système, et de conserver le formalisme des *guides d'ondes*.

Dans la partie suivante nous proposons une idée pour obtenir ces fonctions dans le cas des courbures négatives, et en conclusion nous discutons de l'utilité de cette forme *standard* dans le cas des courbures positives pour d'une part réduire la dimension de l'optimisation et garantir systématiquement la stabilité des tronçons en variables $\phi^\pm$.

4.3 Réalisation numérique stable de tronçons convexes

Cette partie propose une idée pour obtenir deux fonctions paramètres $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ de la forme standard (cf. §4.2.3 p.134) qui permettent de garantir la stabilité du système à simuler, et de conserver l'approche des *guides d'ondes*. Les résultats donnés ici sont pragmatiques et relativement empiriques, et nécessiteraient probablement par la suite d'être approfondis et mieux formalisés.

4.3.1 Stabilisation des tubes à courbure négative

Pour conserver l'approche des *guides d'ondes*, le choix "idéal" est celui qui donne la forme décomposée. En définissant

$$R^*_{li} = \frac{R_{li}(1+R_{ri})}{1+R_{li}}D, \tag{4.33}$$

$$R^*_{ri} = \frac{R_{ri}(1+R_{li})}{1+R_{ri}}D, \tag{4.34}$$

ce choix "idéal" est donné par $\mathcal{G}_l = R^*_{li}$ et $\mathcal{G}_r = R^*_{ri}$.

Ces fonctions sont des fonctions de Γ et ont donc des singularités le long d'une coupure $\mathcal{C}$ (cf. §3.2.2.2 p.100). Pour les courbures négatives, il existe une partie instable qui est $[0, \xi_1]$ où $\xi_1 > 0$ est un point de branchement de Γ. Ces fonctions ont donc une infinité de singularités à l'origine d'instabilités. Nous devons donc faire un autre choix.

4.3.1.1 *Que peut être un "bon choix" ?*

Pour comprendre qualitativement ce que peut être un "bon choix" de $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ regardons par exemple l'expression de la fonction $\mathcal{F}_l$ donnée par (4.31) qui en dépend :

$$\mathcal{F}_l(s) = D^+_\phi(s)\left(1 - \mathcal{G}_l(s)\,\mathcal{G}_r(s)\,\mathrm{e}^{-2\tau s}\right).$$

La fonction D^+_ϕ possède une coupure sur $\mathbb{R}^-$ en raison des pertes, et une infinité de paires de pôles complexes conjugués dans $\mathbb{C}^-_0$ qui correspondent chacune à un mode du tronçon. Ces pôles sont les zéros du dénominateur de D^+_ϕ qui est : $1 - R^*_{li}R^*_{ri}\,\mathrm{e}^{-2\tau s}$. Choisir $\mathcal{G}_l = R^*_{li}$ et $\mathcal{G}_r = R^*_{ri}$, permet de compenser exactement les pôles de D^+_ϕ. Avec ce choix, $\mathcal{F}_l$ n'a plus de pôle comme singularité, mais uniquement la coupure $\mathcal{C}$ de Γ. Malheureusement cette coupure introduit des instabilités.

L'idée que nous proposons et testons ici, est de simuler les pôles du système en hautes fréquences par la boucle de la structure en faisant un choix qui vérifie $\mathcal{G}_l(i\omega) \approx R^*_{li}(i\omega)$ et $\mathcal{G}_l(i\omega) \approx R^*_{ri}(i\omega)$ pour $|\omega|$ grand, mais avec $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ holomorphes dans $\mathbb{C}^+_0$.

Les quelques pôles restant du système en basses fréquences sont alors simulés tels quels par les 4 fonctions $\mathcal{H}_l$, $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{F}_l$ et $\mathcal{F}_r$ données en fonction de $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ par (4.29-4.32).

Nous considérons ici Γ défini par (3.24) p.101, qui donne une seule coupure "apparente" sur $]-\infty, \xi_1]$.

4.3.1.2 *Comment trouver un "bon choix" ?*

Pour simplifier les choses, nous modifions artificiellement les fonctions R^*_{li} et R^*_{ri} par une transformation $s \mapsto \gamma(s)$ du plan de Laplace. Ceci donne

$$\mathcal{G}_l(s) := R^*_{li}(\gamma(s)), \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_r(s) := R^*_{ri}(\gamma(s)). \tag{4.35}$$

Maintenant le choix ne réside plus que dans celui de cette "transformation". Pour assurer le bon comportement en hautes fréquences ($\mathcal{G}_l(i\omega) \approx R^*_{li}(i\omega)$ et $\mathcal{G}_l(i\omega) \approx R^*_{ri}(i\omega)$), on pose pour γ :

$$\forall s \in \overline{\mathbb{C}^+_0} \text{ avec } |s| \text{ grand} : \quad \gamma(s) \approx s. \tag{4.36}$$

Remarque 4.5. *L'expression "$|s|$ grand" est volontairement imprécise. Dans la théorie, nous souhaitons que $\gamma(i\omega)$ tende très rapidement vers $i\omega$ quand $|\omega|$ augmente, mais dans la pratique nous verrons en partie 4.3.2.1 que l'on souhaite approcher R_{li}^* et R_{ri}^* dès la fréquence du deuxième mode pour avoir le moins de pôles en basses fréquences à simuler.*

4.3.1.3 *Propriété d'une "bonne transformation"*

En plus de vérifier (4.36), il est intéressant de maîtriser les singularités de $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ par le choix de γ. Dans un premier temps la transformation choisie doit assurer la stabilité et la passivité de $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$, et si possible limiter l'ensemble de leurs singularités. Pour garantir la bonne définition des fonctions, nous donnons les contraintes suivantes :

- (P1) : γ est à symétrie hermitienne,
- (P2) : γ est analytique dans $\mathbb{C}_0^+$,
- (P3) : $]-\infty, \xi_1] \cap \gamma\left(\mathbb{C}_0^+\right) = \{\varnothing\}$,
- (P4) : $\forall s \in \mathbb{C}_0^+,\ |R_{li}^*(\gamma(s))| < 1$ et $|R_{ri}^*(\gamma(s))| < 1$.

Avec ces propriétés, choisir $\mathcal{G}_l(s) := R_{li}^*(\gamma(s))$ et $\mathcal{G}_r(s) := R_{ri}^*(\gamma(s))$ définit des fonctions à symétrie hermitienne (grâce à (P1)), holomorphes dans $\mathbb{C}_0^+$ (avec (P2), (P3) et parce que R_{li}^* et R_{li}^* ont leur singularités sur $]-\infty, \xi_1]$ uniquement) et passives (avec (P4)).

Remarquons que l'ensemble des coupures de $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ devient $\mathcal{C}^\dagger := \{s \in \mathbb{C} / \ \gamma(s) \in]-\infty, \xi_1]\}$ (avec $\mathcal{C}^\dagger \subset \mathbb{C}_0^-$ grâce à (P3)), et il peut y avoir de nouvelles singularités dans $\mathbb{C}_0^-$ provenant de γ. Avec une transformation mal choisie, les représentations intégrales de $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ peuvent ainsi devenir très complexes et l'optimisation nécessite dans ce cas une dimension élevée pour obtenir une bonne approximation.

On introduit maintenant des variantes des propriétés (P2) et (P3) qui permettent, si elles sont vérifiées, de définir $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ analytiques dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$:

- (P2') : γ est analytique dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$,
- (P3') : $]-\infty, \xi_1] \cap \gamma\left(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-\right) = \{\varnothing\}$.

De cette manière la coupure $\mathcal{C} =]-\infty, \xi_1]$ de R_{li}^* et R_{ri}^* est "envoyée" sur $\mathbb{R}^-$ pour $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$.

Exemple 4.1. *Nous donnons ici un exemple de "transformation" :*

$$\gamma : s \mapsto s + \frac{A}{1 + s/\beta}, \tag{4.37}$$

Avec $\beta > 0$ et $A > \xi_1$, on vérifie que : cette transformation est à symétrie hermitienne, elle est analytique dans $\mathbb{C} \setminus \{-\beta\}$, et elle vérifie $\lim_{|s|\to+\infty} \gamma(s) = s$. De plus en choisissant convenablement A et β, elle peut vérifier (P3) et (P4), mais la vérification de (P3') est plus délicate.

4.3.2 Réalisation numérique stable d'un tronçon

Nous donnons dans cette partie des premiers résultats de réalisations stables d'un tronçon à courbure négative en utilisant l'idée présentée précédemment mais avec un certain nombre de considérations obtenues empiriquement.

La procédure est résumée par les étapes suivantes :

- Nous choisissons les fonctions paramètres $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ en définissant la transformation γ. Cette transformation permet de se rapprocher des fonctions R_{li}^* et R_{ri}^* en hautes fréquences.
- Nous en déduisons les 4 autres fonctions de la forme standard : $\mathcal{H}_l$, $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{F}_l$ et $\mathcal{F}_r$.

– Nous approximons chacune des 6 fonctions par la méthode donnée en partie 4.1.1 p.125 : $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ sont approximées avec un placement de pôles sur $\mathbb{R}^-$, et pour les autres fonctions on place aussi des pôles pour les premiers modes de D_ϕ (basses fréquences).

– Enfin nous construisons les représentations d'état en temps continu que nous discrétisons ensuite (cf. §4.1.2 p.130).

4.3.2.1 *Définition de la transformation*

Dans la pratique, plutôt que de chercher γ bien défini dans $\mathbb{C}$, nous limitons notre recherche à $i\mathbb{R}$. Donc nous cherchons un contour défini par $\gamma(i\mathbb{R})$.

En hautes fréquences, ce contour doit se rapprocher au plus près de l'axe imaginaire (voir (4.36)), alors nous le choisissons tel que $\gamma(i\omega) = i\omega$ pour $|\omega| > \omega_0$, où ω_0 est une pulsation que nous nommons *pulsation de raccord*.

En basses fréquences, il doit non seulement contourner la partie de la coupure $[0, \xi_1]$, mais aussi contourner l'ensemble des $s \in \mathbb{C}$ tels que $|R^*_{li}(s)| > 1$ et $|R^*_{ri}(s)| > 1$ afin de garantir la passivité de $\mathcal{G}_l$ et de $\mathcal{G}_r$.

De plus, même si nous ne nous intéressons pas à la définition de γ dans $\mathbb{C}$, cette fonction doit vérifier une contrainte de régularité $\mathcal{C}^\infty$ sur $i\mathbb{R}$. Ainsi le "raccord" en ω_0 (et $-\omega_0$) entre les basses fréquences et les hautes fréquences doit se faire avec la continuité de toutes ses dérivées.

Pour cela nous définissons γ sur $i\mathbb{R}$ à partir d'une fonction $g(\omega)$ de la classe de Gevrey[1]. γ et g sont données par

$$\gamma(i\omega) = i\omega + \rho\ \xi_1\ \frac{g(\omega)}{g(0)}, \tag{4.38}$$

$$g(\omega) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{(\omega_0-\omega)^a} + \dfrac{-1}{(\omega_0+\omega)^a}\right), & \forall \omega \in]-\omega_0, \omega_0[, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{4.39}$$

où $\rho > 1$ et $a > 0$ sont des paramètres à déterminer. On peut déja remarquer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ même en $\pm\omega_0$ car toutes ses dérivées sont continues en $\pm\omega_0$ (et valent 0).

Les paramètres $\rho > 1$ et $a > 0$ doivent être choisis tels que le contour $\gamma(i\mathbb{R})$ contourne $[0, \xi_1]$ par la droite et l'ensemble des $s \in \mathbb{C}$ tels que $|R^*_{li}(s)| > 1$ et $|R^*_{ri}(s)| > 1$.

Dans la pratique, pour éviter d'ajouter des contraintes de passivité pour les approximation de $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$, nous laissons une marge d'erreur et choisissons ρ et a tels que $|R^*_{li}(\gamma(i\omega))| < \beta$ et $|R^*_{ri}(\gamma(i\omega))| < \beta$ avec $\beta < 1$. De plus, nous avons constaté empiriquement que pour améliorer la qualité des approximations, a doit être choisi de telle sorte que $g(\omega)$ soit le plus régulier possible, au sens où il varie le plus lentement possible.

Comme nous avons vu précédemment, les premiers modes du tronçon, qui ne sont pas produits par la boucle, seront simulés par des pôles des 4 fonctions $\mathcal{H}_l$, $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{F}_l$ et $\mathcal{F}_r$. Ainsi pour en avoir le moins à simuler, nous devons choisir ω_0 le plus petit possible. Dans la suite nous choisissons ω_0 égal au deuxième mode du tronçon, ce qui nécessite la simulation de 4 pôles supplémentaires.

La figure 4.8 illustre le contour $\gamma(i\omega)$ qui contourne la coupure, et la courbe de niveau à 1.

4.3.2.2 *Approximation et discrétisation des 6 fonctions*

La définition de la transformation γ, permet de donner les 2 fonctions paramètres $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$. Ceci détermine $\mathcal{H}_l$, $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{F}_l$ et $\mathcal{F}_r$ par les relations (4.29-4.32).

[1] Nous ne détaillons pas la théorie des fonctions de la classe de Gevrey. L'idée d'utiliser de telles fonctions pour obtenir un raccord régulier vient en fait de [Ver00, p.97] pour une toute autre utilité.

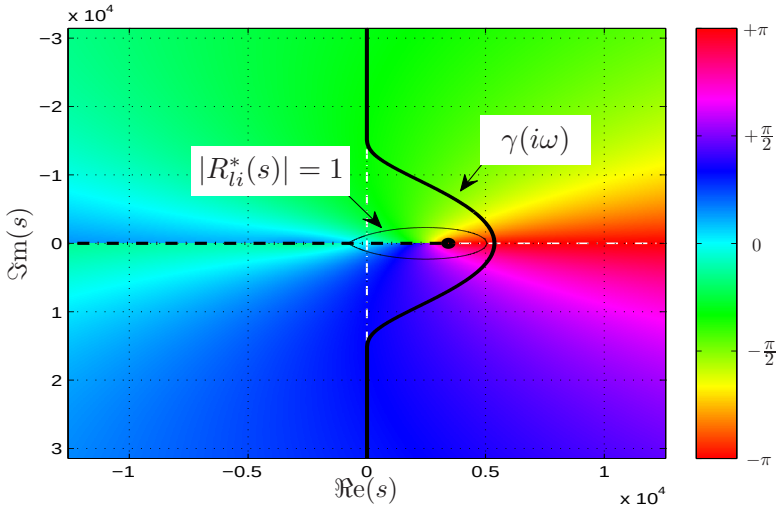


Fig. 4.8 – *Phase de R^*_{li} dans le domaine de Laplace et illustration du contour $\gamma(i\omega)$. Cette figure montre le contour $\gamma(i\omega)$ qui contourne la partie instable de la coupure $[0, \xi_1]$, et la courbe de niveau à 1, c-à-d $|R^*_{li}(s)| = 1$ (0 dB). Le contour $\gamma(i\omega)$ rejoint $i\mathbb{R}$ en $\pm\omega_0 \approx \pm 17\ 10^3$ rad.s^{-1}. La coupure $]-\infty, \xi_1]$ est représentée en trait pointillé noir.*

Maintenant nous optimisons les fonctions $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ par la méthode donnée en 4.1.1 p.125 avec un placement de pôles sur $\mathbb{R}^-$. Ceci produit les approximations que nous nommons respectivement $\widetilde{\mathcal{G}_l}$ et $\widetilde{\mathcal{G}_r}$.

Remarque 4.6. *Puisque le contour γ n'est ici défini que sur l'axe imaginaire par (4.38), rien ne garantit que les fonctions $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ associées n'aient pas d'autres singularités que celles sur $\mathbb{R}^-$ (si γ ne vérifie pas (P2') et (P3')). Si c'est le cas, l'approximation avec un placement de pôles sur $\mathbb{R}^-$ est mal posé (cf. §3.2.3 p.102). Bien que la pratique montre des résultats satisfaisants, un approfondissement de cette remarque pourrait améliorer l'approximation.*

Maintenant $\mathcal{H}_l$, $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{F}_l$ et $\mathcal{F}_r$ doivent être approximées. Leurs singularités sont celles de D_ϕ (les pôles associés aux modes et $\mathbb{R}^-$ pour les pertes visco-thermiques) et celles de $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ (nous considérons qu'elles sont toutes sur $\mathbb{R}^-$, cf. remarque 4.6). Cependant les pôles en hautes fréquences de D_ϕ sont déja simulés par la boucle, si bien qu'ils ne s'expriment pas, ou peu, dans $\mathcal{H}_l$, $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{F}_l$ et $\mathcal{F}_r$.

En conséquence, pour leur approximation nous utilisons encore une fois l'optimisation de la partie 4.1.1 p.125, avec un placement de pôles sur $\mathbb{R}^-$ et sur la position des premiers modes de D_ϕ. Nous nommons les approximations obtenues : $\widetilde{\mathcal{H}_l}$, $\widetilde{\mathcal{H}_r}$, $\widetilde{\mathcal{F}_l}$ et $\widetilde{\mathcal{F}_r}$.

Remarque 4.7. *Rappelons que $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ est un choix, et que les relations (4.29-4.32) permettent de conserver les relations globales du système. Le choix fait ici permet de simuler les modes en hautes fréquence par la boucle. Une idée pour améliorer l'approximation, est de remplacer dans (4.29-4.32) $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ par $\widetilde{\mathcal{G}_l}$ et $\widetilde{\mathcal{G}_r}$. Ceci a pour avantage de compenser les éventuelles erreurs d'approximation de $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$. Dans la pratique, cette idée améliore effectivement la procédure.*

Finalement, nous construisons les représentations d'état en temps continu des 2 extrémités de la forme standard, et nous les discrétisons selon les procédures déja données (cf. §4.1.2 p.130).

4.3.2.3 *Résultats*

Nous avons construit la réalisation d'un tube convexe avec les paramètres suivant : $r_0 = 7$ cm, $r_L = 10$ cm, $\Upsilon = -100$ m^{-2}, $L = 15$ cm, et $\varepsilon = 0.0033$ m$^{-\frac{1}{2}}$.

La pulsation de raccord est calée sur le deuxième mode du tube qui a son pôle à environ $\omega_0 \approx 17\,10^3$ rad.s^{-1} ($F_0 = \omega_0/(2\pi) \approx 2700$ Hz). Les valeurs de a et ρ ont été déterminées expérimentalement et valent $a = 0.75$ et $\rho = 1.5$.

Les résultats sont présentés en figures 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 et 4.13.

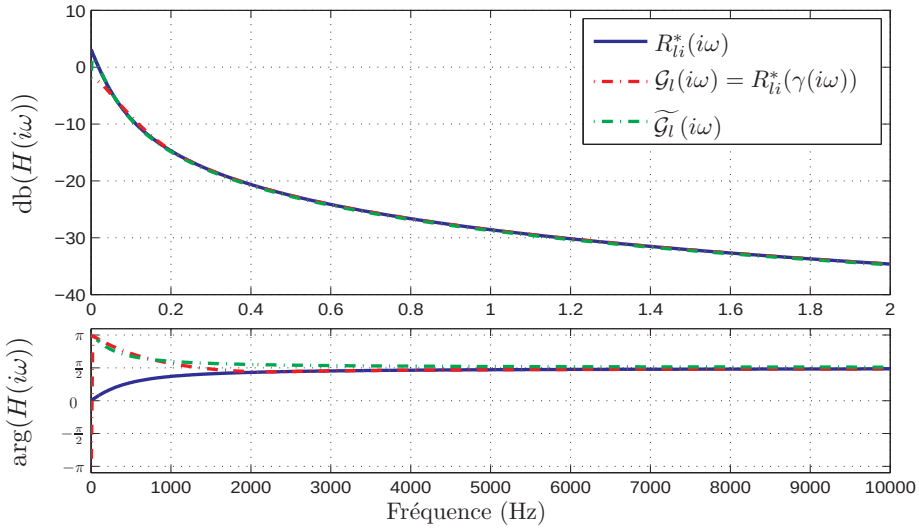


Fig. 4.9 – *Affichage de R^*_{li}, $\mathcal{G}_l$ et de son approximation $\widetilde{\mathcal{G}_l}$. Nous remarquons qu'en basses fréquences, R^*_{li} et $\mathcal{G}_l$ sont très différentes.*

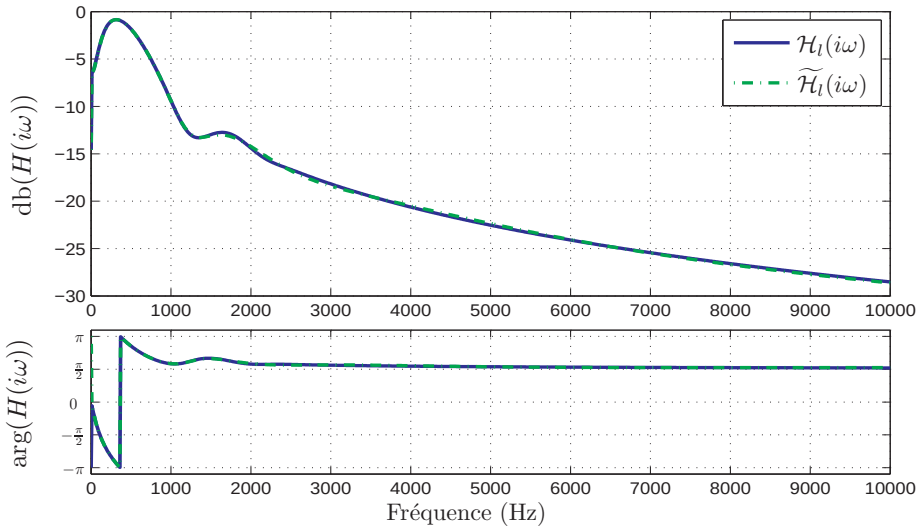


Fig. 4.10 – *Affichage de $\mathcal{H}_l$ et de son approximation $\widetilde{\mathcal{H}_l}$. Ayant choisi ω_0 correspondant à la résonance du deuxième mode, la fonction $\mathcal{H}_l$ fait apparaître les 2 résonances des 2 premiers modes. Notons que le deuxième mode est très atténué. Les autres modes sont totalement supprimés, parce qu'ils sont simulés par la boucle via $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$, et ne s'expriment donc pas dans $\mathcal{H}_l$.*

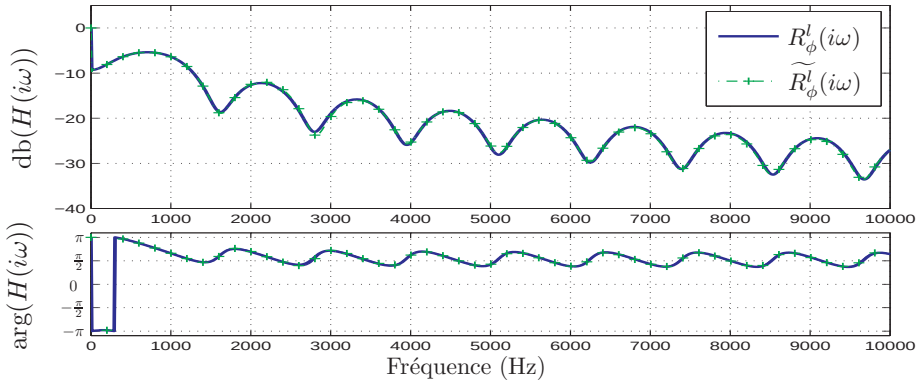


Fig. 4.11 – *Affichage de R^l_ϕ et de sa version simulée. $\widetilde{R^l_\phi}$ est la réflexion globale gauche du système simulable (après approximations).*

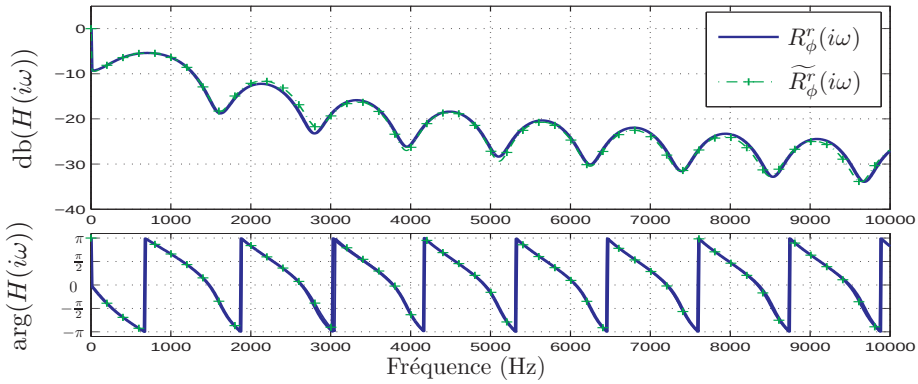


Fig. 4.12 – *Affichage de R^r_ϕ et de sa version simulée. $\widetilde{R^r_\phi}$ est la réflexion globale droite du système simulable (après approximations).*

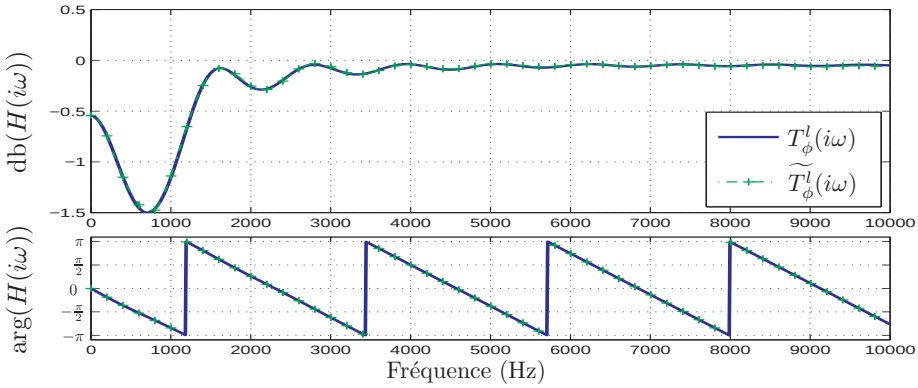


Fig. 4.13 – *Affichage de T_ϕ et de sa version simulée. $\widetilde{T_\phi}$ est la transmission globale du système simulable (après approximations).*

4.4 Approximations et simulations de tubes évasés

4.4.1 Comparaison de 3 modèles

Dans cette section nous construisons un résonateur virtuel avec le modèle de *Webster-Lokshin*. Ce résonateur à simuler est le tube *test* de la partie 1.3.7 p.52 pour lequel nous avons déja construit 2 simulations à partir des modèles de cylindres et de cônes avec pertes. La structure réalisée ici est celle d'un réseau de *Kelly-Lochbaum* avec un profil de classe $\mathcal{C}^1$ (voir la partie 2.4.3 p.82 ou [HMM07b] en annexe H). Pour une complexité à peu près égale (du point de vue du coût de calcul pour le processeur), nous allons maintenant comparer les impédances des 3 résonateurs virtuels construits par les 3 modèles différents.

Pour le modèle en tronçons de tube avec courbure, le tube *test* est échantillonné avec 4 tronçons de tube. Pour cet exemple, nous avons déterminé empiriquement les paramètres des tronçons de sortes à garantir la continuité $\mathcal{C}^1$ et à s'approcher au plus près du rayon original. Notons qu'il existe désormais des outils d'optimisation de profils que l'on trouve dans [Dek08, Héz09] et qui ont été faits lors de stages que nous avons encadrés.

En figure 4.14, nous constatons qu'il n'y a pas d'artefacts dans la réponse impulsionnelle même avec un petit nombre de tronçons, contrairement à ce qu'il se passerait avec les modèles de cylindres ou de cônes. L'un des avantages du modèle utilisé ici est qu'il n'impose pas de contraintes sur l'échantillonnage spatial et qu'il permet de modéliser le tube original avec peu de tronçons.

Pour chaque modèle, la structure correspondante de *Kelly-Lochbaum* est construite. Pour les deux autres modèles, nous choisissons le cas de l'échantillonnage "idéal", c'est-à-dire 128 cylindres ou 64 cônes (cf. §1.3.7.2 p.52).

La figure 4.15 présente les impédances d'entrée normalisées des tubes virtuels avec les 3 modèles approximés. Ces impédances sont déduites par la transformée de Fourier des réponses impulsionnelles simulées numériquement. Ces résultats sont comparés entre eux et aussi avec l'impédance Z^* calculée par la méthode numérique de la partie 2.1.3 p.62 sur le profil non approximé.

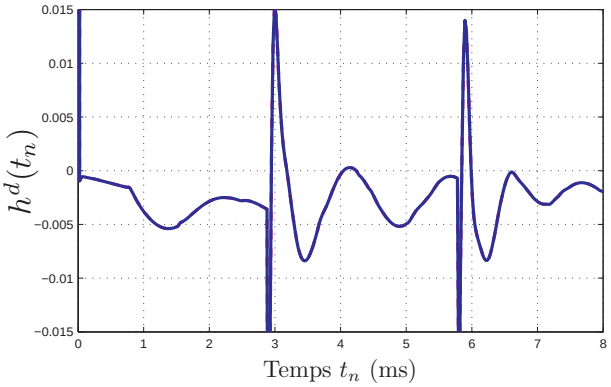


Fig. 4.14 – *Réponse impulsionnelle du tube virtuel construit avec 4 tronçons.*

Pour aider la compréhension de la figure 4.15, les enveloppes spectrales des impédances sont affichées. En comparant avec Z^*, que nous considérons comme impédance "témoin", les positions des maxima correspondent visiblement bien, mais pas les amplitudes. Par exemple, pour les modèles de cylindres et de cônes, les amplitudes sont trop grandes entre 4000 et 6000 Hz. Au contraire le modèle de tronçons évasés a une enveloppe spectrale qui s'approche mieux de celle de Z^*, avec une précision de 2 dB.

La raison principale est que, à complexité équivalente, à cause du grand nombre de tronçons de cylindres et de cônes nécessaires (128 ou 64), l'ordre d'approximation de $\breve{D}$ des effets des pertes doit être faible (cf. §1.3.2 p.40). Puisque le modèle de tubes évasés n'utilise ici que 4 tronçons, à complexité égale, nous pouvons approximer les fonctions R et T avec un ordre plus élevé, ce qui améliore la qualité.

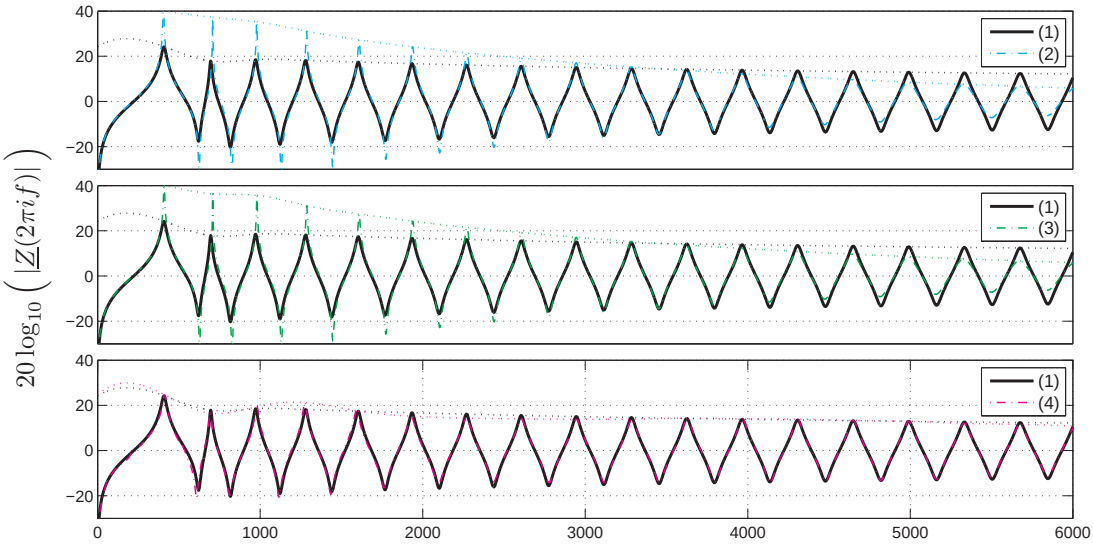


Fig. 4.15 – *Comparaisons des impédances calculées pour le tube* test. *(1) : Impédance Z^* calculée par la méthode numérique de la partie 2.1.3 p.62 sur le profil original. (2) : Impédance calculée par la simulation du réseau de 128 cylindres. (3) : Impédance calculée par la simulation du réseau de 64 cônes. (4) : Impédance calculée par la simulation du réseau de 4 tronçons évasés.*

4.4.2 Construction de deux trombones virtuels

Dans cette section, deux trombones virtuels sont construits avec une embouchure (cf. §1.2.1.1 p.32), un tube à section variable et un rayonnement acoustique (cf. §1.2.1.2 p.33). Le trombone cible est un trombone *Courtois* pour lequel le profil et l'impédance à l'entrée de l'embouchure ont été mesurés.

Dans le premier cas, le tube est décomposé en 11 tronçons de tube, avec d'éventuelles discontinuités de section et de pente pour avoir une approximation très fine du profil original mesuré. Ce modèle est nommé M_1. Ce tube virtuel se termine par 3 tubes évasés pour la fin du pavillon.

Le second cas, M_2, est une simplification du profil avec seulement 1 cylindre et 4 tronçons évasés, et avec continuité de section et de pente. Ce modèle conduit donc au réseau de *Kelly-Lochbaum* de [HMM07b], en raison de la régularité $\mathcal{C}^1$ du rayon.

Les paramètres des tronçons, pour les 2 modèles, ont été choisis pour approcher au mieux le profil original dont on a les mesures.

La figure 4.16 présente la comparaison des impédances calculées par simulation (M_1 et M_2) et l'impédance mesurée sur un trombone. Les mesures ont été réalisées[2] sur un trombone *Courtois* avec le banc d'impédance du CTTM[3].

La principale amélioration du modéle M_1 (avec 11 tronçons de tube) comparé à celui de M_2 (avec 5 tronçons) concerne l'enveloppe spectrale. Alors que les enveloppes des maxima et minima de M_2 sont régulières, celles des mesures présentent des irrégularités (voir par exemple le 5-ième et le 6-ième maximum). Avec un meilleur raffinement du profil, on retrouve à peu près la même allure d'irrégularités sur l'enveloppe de M_1. Cependant, en raison de la simplification de M_2, la complexité est plus faible et donc mieux adaptée à la simulation.

[2]Nous remercions Thomas Hézard pour avoir fait les mesures d'impédance.
[3]Centre de Transfert de Technologie du Mans (CTTM), Le Mans, France. http ://www.cttm-lemans.com.

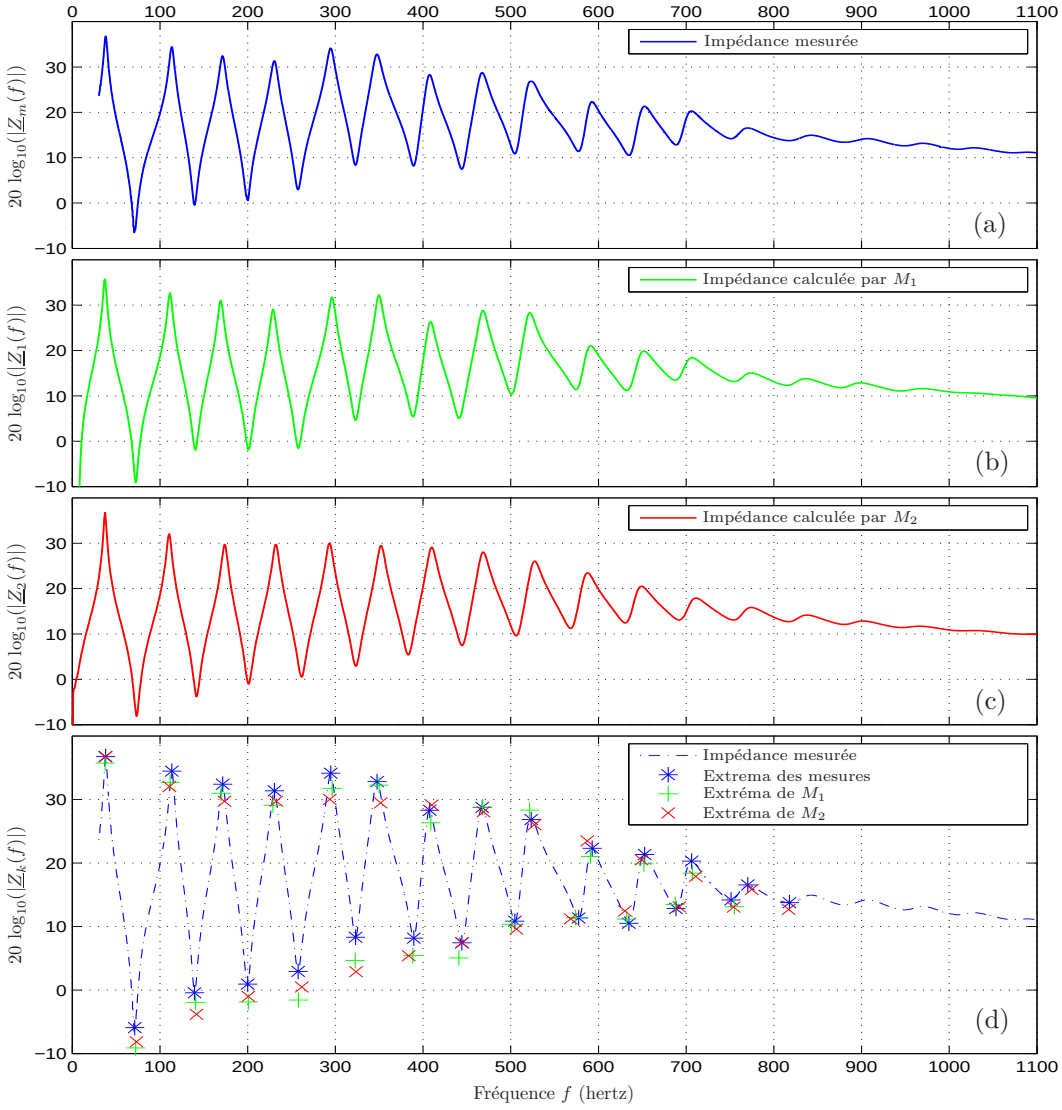


Fig. 4.16 – *Impédances calculées et mesurée d'un trombone. Comparaison (d) entre l'impédance d'entrée (a) mesurée sur un trombone réel et les impédances calculées (b, pour M_1) et (c, pour M_2). Les deux dernières courbes sont calculées à partir de la représentation d'état à temps-discret (qui inclut les approximations et la discrétisation). Rappelons que M_1 est construit avec 11 tronçons de tube, et M_2 avec seulement 5.*

Conclusion

Résultats

Le modèle acoustique développé dans ce travail repose sur l'équation de *Webster-Lokshin* qui permet de prendre en compte à la fois la courbure des tronçons de tube modélisés, mais aussi les effets des pertes visco-thermiques (cf. §2.1.1 p.59). Nous avons montré que ce modéle reste compatible avec l'approche des *guides d'ondes numériques*, puisqu'on obtient une structure de simulation de la forme des réseaux de *Kelly-Lochbaum*. L'un des points majeurs de ce travail est l'obtention de la structure décomposée de la figure 2.11 page 75, qui à notre connaissance est nouvelle, mais fait apparaître certains sous-systèmes bien connus dans la littérature. Cette structure sépare les effets dus aux sections, aux pentes (de chaque extrémité du tronçon), à la courbure et aux pertes, et isole au centre les propagateurs d'ondes à travers le tube. Elle permet non seulement de donner une interprétation élégante des effets acoustiques mis en jeu dans un tronçon de tube, mais elle permet, du point de vue de la simulation, de séparer les opérateurs standard (effets de section et de pentes) des opérateurs non standard (effets de la courbure et des pertes). Il est alors plus facile de faire l'étude de ces derniers. De plus, en considérant certains cas particuliers de connexions de tubes, nous avons montré que ce modèle permet de retrouver d'autres modèles connus dans la littérature (connexion de cylindres et de cônes). Ainsi, il ne prétend pas les remplacer, mais permet d'étendre ces modèles à un degré de raffinement supérieur, en considérant la courbure et les pertes visco-thermiques du tube. Enfin, nous avons vu qu'avec les modèles précédents, le nombre de tronçons est imposé par la fréquence d'échantillonnage (cf. §1.3.7.2 p.52) ; le modèle étudié ici n'a pas de contrainte sur l'échantillonnage spatial du tube. De plus, le nombre de tronçons à simuler est considérablement réduit.

Une difficulté du modèle utilisé dans ce travail est la présence d'opérateurs non standard, qui donnent des fonctions de transfert irrationnelles. Par exemple le modèle des pertes visco-thermiques fait apparaître dans l'équation de *Webster-Lokshin* une dérivée fractionnaire d'ordre 3/2. Ces fonctions de transfert ont des ensembles infinis et continus de singularités, indénombrables, appelés *coupures* (cf. §3.2.2.2 p.100). Nous avons montré grâce au formalisme des *représentations intégrales* (cf. §3.2.3 p.102), que les sous-systèmes associés sont de dimension infinie. Ces sous-systèmes ne sont pas simulables tels quels, c'est pourquoi nous les approximons en systèmes de dimension finie, simulables en temps discret par des filtres du type ARMA (cf. §4.1 p.125). L'un des avantages du modèle utilisé ici pour la modélisation d'un tube acoustique avec prise en compte des pertes visco-thermiques, est que grâce à la courbure, le nombre de tronçons de tube requis est significativement réduit comparé aux connexions de cylindres et de cônes. Ainsi, pour l'exemple développé en partie 1.3.7 p.52, au lieu de 128 cylindres ou de 64 cônes, seulement 4 tronçons de tube suffisent. Ainsi il est possible d'augmenter la dimension des approximations, et donc la qualité du modèle numérique, tout en conservant un coût de calcul raisonnable et compatible avec le temps-réel. De plus, il est possible de faire un ajustement entre complexité de calcul et la finesse de la modélisation en choisissant le degré d'approximation. Remarquons que l'approximation de certaines fonctions est facilitée par la forme décomposée d'un tronçon. En effet, la séparation des opérateurs standard et des opérateurs non standard permet de séparer également les différents types de singularités : singularités de type pôles pour les effets de pentes, et singularités de type coupures pour les effets des pertes et de la courbure.

Pour la construction d'un tube complet nous devons reconnecter ensemble les systèmes des tronçons isolés. La présence des fonctions irrationnelles approximées ne facilite pas cette tâche. Cependant, nous avons vu que l'utilisation des *représentations d'état* permet de simplifier cette opération de concaténation grâce à l'algèbre d'interconnexion donnée en section 1.3.5 p.46. En effet, à partir des représentations d'état des sous-systèmes à fusionner, on obtient celle du système équivalent par de simples calculs matriciels par blocs, facilement implémentables dans la plupart des langages de programmation (*Matlab*© ou langage C++ par exemple). De plus nous avons présenté quelques outils standard, issus du domaine de l'automatique, qui permettent d'aboutir à un système simulable en temps discret : discrétisation, réduction d'ordre par réalisation minimale, et diagonalisation par exemple (cf. §1.3.6 p.47). Enfin, en construisant la représentation d'état du système global à temps discret, il est possible de connaître sa stabilité par l'étude des racines de son polynôme caractéristique (via le critère de Jury par exemple).

Rappelons que nous avions cherché à réconcilier 3 aspects : **réalisme**, **faible coût** et **modularité**. Le modèle de Webster-Lokshin nous a permis d'améliorer le réalisme de la modélisation, par rapport à d'autres modèles en guides d'ondes, en prenant compte à la fois des pertes visco-thermiques et de la courbure des tronçons de tube. De plus, puisqu'il requiert moins de tronçons, il nous permet d'améliorer la qualité de l'approximation sans augmenter la complexité globale. Enfin, les représentations d'état avec l'algèbre d'interconnexion et les outils d'automatique appropriés, donnent un formalisme commun et puissant pour améliorer la modularité de la construction et réduire la complexité de la simulation des tubes acoustiques.

L'étude de stabilité et de passivité a été faite. Pour des cas particuliers, la stabilité et la passivité des systèmes représentant des tronçons de tube ont été prouvées. Cette preuve pour les réseaux de cônes avec continuité de section est délicate en raison de la présence de fonctions de transfert du premier ordre instables à certaines jonctions (cf. §3.1.2.1 p.88). Mais nous avons montré qu'en utilisant la *réalisation minimale* du système, les aller-retour successifs de la boucle d'un tube stabilisent tous les états internes du système. Pour les réseaux de tubes évasés ($\Upsilon \geq 0$) avec continuité de section et de pente, les fonctions de transfert mises en jeu dans la structure sont stables, mais le fait qu'elles soient irrationnelles rend la preuve plus difficile. Pour faire face à ce problème, nous avons limité d'abord notre étude de passivité à l'axe des nombres imaginaires purs (domaine de Fourier), puis, grâce au *théorème du maximum* nous avons pu retrouver le résultat souhaité dans tout le demi-plan droit de Laplace. Ceci nous a permis par la suite de prouver la stabilité du système complet (cf. §3.3 p.106). En considérant les ondes $\phi^{\pm}$ dans le cas général, nous avons observé que les relations entrées/sorties d'un tronçon de tube sont toujours stables et passives. Ceci est observé quelque soit la courbure, y compris pour des courbures négatives (cf. §3.5.2 p.118).

Cependant, dans le cas des courbures négatives, la décomposition que nous faisons fait apparaître des sous-systèmes avec une infinité de singularités sur $\mathbb{R}^+$ à l'origine d'instabilités (cf. §3.2.2.2 p.100). Contrairement au cas des cônes où les instabilités sont compensées par les aller-retour successifs, ici cette compensation ne semble pas se faire en interne. Pour résoudre ce problème, au premier abord paradoxal, nous avons d'abord cherché à le comprendre. Nous avons montré que certaines fonctions de transfert mises en jeu dans la forme décomposée représentent des réflexions d'ondes pour des tubes semi-infinis, ou *anéchoïques*. Ce genre d'interprétations avait déja été fait pour les cônes (voir par exemple [GKP90]). Ainsi, dans le cas d'un cône convergent, la fonction de transfert du premier ordre R_s représente la réflexion à la jonction d'un cylindre et d'un cône convergent semi-infini. Or, un tel cône a son rayon qui change de signe et devient négatif au-delà d'une certaine longueur critique L_{crit} (cf. §3.1.2.2 p.89). Un tel cône est physiquement irréaliste, et aucune stabilité ne peut être justifiée par un raisonnement physique, ce que nous avons démontré mathématiquement. De manière similaire, pour les tubes avec courbure constante, la fonction de transfert R représente la réflexion d'un tube semi-infini (cf. §3.4.1 p.112). Or les profils à courbure négative s'écrivent sous la forme $r(\ell) = A\sin(\alpha\ell + C)$, où $\Upsilon = -\alpha^2$, alors ils possèdent une infinité de changements de signe et nous avons constaté que ces "noeuds" sont chacun à l'origine d'un pôle instable, ce qui explique l'infinité de singularités instables (cf. §3.4.3 p.115). Cette dernière interprétation constitue un point important et particulier de ce travail.

Enfin, les deux derniers points majeurs de ce travail sont d'une part l'obtention de la *forme standard* paramétrée par 2 fonctions de transfert, $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$, choisies arbitrairement (cf. §4.2 p.133), et d'autre part, pour les tubes à courbure négative, le choix de 2 fonctions permettant d'assurer la stabilité interne du système et de conserver le formalisme présenté plus tôt (cf. §4.3 p.136). Le choix des fonctions paramètres, que nous avons fait ici, permet à la fois de stabiliser le système pour les courbures négatives, mais garde en hautes fréquences les propriétés adaptées aux *guides d'ondes*. En fait, on peut comprendre que le problème est décomposé en 2. D'un côté, en hautes fréquences le système est simulé par l'approche des guides d'ondes, c'est-à-dire que les fonctions paramètres choisies, $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$, sont proches (voir égales) aux fonctions de transfert issues de la décomposition (avec des singularités sur $\mathbb{R}^+$). D'un autre côté, en basses fréquences le système est simulé par une approche similaire à une approche "modale", en plaçant des pôles correspondant aux tous premiers modes du tronçon de tube. Puisque ses modes sont stables, alors nous n'introduisons pas d'instabilités.

Perspectives :

Au terme de ce travail, des questions restent posées :

- ✓ En ce qui concerne l'approximation des *représentations intégrales*, jusqu'à présent les pôles (ξ_j et γ_k) sont placés grâce à une heuristique et seuls les poids (μ_j et μ'_k) sont optimisés (cf. §4.1 p.125). Afin d'améliorer la qualité de ces approximations, il peut être envisagé d'optimiser également le placement de pôles.

- ✓ Pour les versions numériques approchées, la stabilité n'est pas assurée pour des tubes à section quelconque. Pour le moment, la stabilisation doit encore être faite par de faibles modifications empiriques a posteriori. Il reste à étudier cette question et à proposer par exemple des contraintes sur les poids et le placement des pôles.
  Une idée serait d'utiliser la forme standard pour réduire la dimension de l'approximation et de permettre a posteriori une optimisation non linéaire des paramètres et avec contraintes pour la stabilité.

- ✓ Les résultats de modélisation d'un profil donné, voir les sections 4.4.1 p.142 et 4.4.2 p.143, ont été obtenus en choisissant empiriquement les paramètres géométriques des tronçons de tube, de sorte à approcher au mieux le profil original.
  Les travaux successifs de [Dek08] et de [Héz09], ont permis d'avoir une procédure automatique d'optimisation de ces paramètres en approchant le profil du tube. Une extension de ce travail serait non pas de minimiser l'erreur faite sur le profil, mais sur l'impédance d'entrée du tube, obtenue soit par des mesures soit par des calculs. De plus nous pouvons imaginer de calculer le critère à miniser à partir de descripteurs tels que les positions fréquentielles et les amplitudes des maxima et/ou minima.

- ✓ Le choix des fonctions "paramètres", nommées $\mathcal{G}_l$ et $\mathcal{G}_r$ (cf. §4.2 p.133), pour les courbures négatives nécessiterait un travail plus approfondi et plus rigoureux. Les choix proposés ici donnent des résultats prometteurs, mais la méthode employée est encore empirique.

- ✓ Enfin, le formalisme des représentations d'état est pratique pour des systèmes linéaires statiques (c'est-à-dire dont les paramètres ne changent pas dans le temps). L'extension aux sous-systèmes non linéaires (tels que les lèvres du trompettiste) ou variables (tels que les pistons) est à considérer pour construire un vrai instrument jouable en temps-réel.
  Des idées ont été développées mais n'ont pas été décrites dans ce document, nous renvoyons le lecteur à [Héz09] pour une présentation de quelques unes de ces idées pour le cas des sous-systèmes variables dans le temps.

Annexe A

Résultats annexes pour la stabilité des réseaux $\mathcal{C}^1$

Cette annexe présente quelques résultats nécessaires pour la preuve de stabilité et de passivité des réseaux de tronçons de tube avec profil de classe $\mathcal{C}^1$ (voir partie 3.3 page 106).

A.1 Théorème du Maximum et Corollaires

Le *Théorème du Maximum* permet de caractériser le module d'une fonction holomorphe dans un domaine du plan complexe, par le module mesuré sur son contour. Par exemple en partie 3.3 p.106, la connaissance du module d'une fonction de transfert sur le domaine de Fourier ($s \in i\mathbb{R}$), permet de majorer le module dans le demi-plan droit $\mathbb{C}_0^+$.

A.1.1 Théorème du Maximum

Dans [Rud75, page 206], le *Théorème du Maximum* est donné par l'énoncé suivant :

Soient un ensemble ouvert borné Ω de $\mathbb{C}$, $f \in \mathbf{H}(\Omega)$ (f est une fonction complexe holomorphe sur Ω) et $a \in \Omega$. Ou bien f est constante dans Ω, ou bien tout voisinage de a contient un point b de Ω tel que $|f(a)| < |f(b)|$.

En d'autres termes, ou bien f est constante, ou $|f|$ n'a de maximum local en aucun point de Ω.

Une autre formulation du *Thèorème du maximum*, est que si f est une fonction non constante, holomorphe sur un ensemble ouvert borné Ω et continue sur l'ensemble fermé borné $\overline{\Omega}$, et que son module est borné sur le contour $\partial\Omega$ par A (c'est-à-dire $|f(s)| \leq A \ \ \forall s \in \partial\Omega$), alors $|f(s)| < A \ \ \forall s \in \Omega$.

Si il existe s dans Ω tel que $|F(s)| = A$, alors f est une fonction constante sur $\overline{\Omega}$.

Démonstration. La preuve est donnée dans [Rud75, page 206]. □

A.1.2 Corollaires

Corollaire A.1. *Soit $D(0,1)$ le disque unité ouvert, et soit F une fonction complexe telle que :*

(A) *F est holomorphe dans $D(0,1)$,*

(B) *F est continue dans $\overline{D(0,1)}$,*

(C) *F n'est pas constante dans $D(0,1)$,*

(D) *$\forall s \in \partial D(0,1), \ |F(s)| \ \leq \ 1$.*

Alors sous ces hypothèses :

$$|F(s)| < 1 \ \ \forall s \in D(0,1).$$

Démonstration. Conséquence directe du théorème du maximum pour $\Omega = D(0,1)$. □

Le *Théorème du Maximum* ne s'applique qu'aux ensembles bornés. En effet, le théorème du maximum n'est pas systématiquement vrai dans le cas d'ensembles non bornés. Ainsi, il ne peut pas directement s'appliquer dans le cas de fonctions de transfert où l'ensemble à étudier est $\mathbb{C}_0^+$, donc non borné. Nous proposons donc d'utiliser la méthode de *Phragmen-Lindelöf* (voir [Rud75, page 235]) pour étudier la passivité des fonctions de transfert.

Maintenant on considère les ensembles ouverts non bornés suivant :

$$\mathbb{C}_0^+ \quad := \{s \in \mathbb{C} / \ \Re\mathrm{e}(s) > 0\}, \tag{A.1}$$

$$\mathbb{C}_0^{++} \quad := \{s \in \mathbb{C}_0^+ / \ \Im\mathrm{m}(s) > 0\}, \tag{A.2}$$

$$\mathbb{C}_0^{+-} \quad := \{s \in \mathbb{C}_0^+ / \ \Im\mathrm{m}(s) < 0\}. \tag{A.3}$$

Pour tout ouvert Ω on note l'ensemble fermé associé $\overline{\Omega}$. Par exemple $\overline{\mathbb{C}_0^+} = \{s \in \mathbb{C} / \ \Re\mathrm{e}(s) \geq 0\}$.

Corollaire A.2. *Soit F une fonction complexe telle que :*
(A) *F est holomorphe dans $\mathbb{C}_0^+$,*
(B) *F est continue dans $\overline{\mathbb{C}_0^+}$,*
(C) *F n'est pas constante dans $\mathbb{C}_0^+$,*
(D) *$\forall s \in i\mathbb{R}, |F(s)| \leq 1$,*
(E) *F est bornée dans $\overline{\mathbb{C}_0^+}$.*
Alors sous ces hypothèses :

$$|F(s)| < 1 \quad \forall s \in \mathbb{C}_0^+.$$

Démonstration. Ce corollaire est une extension du *Théorème du Maximum* au domaine non-borné $\mathbb{C}_0^+$ qui utilise la méthode de *Phragmen-Lindelöf*. Remarquons que $i\mathbb{R} \neq \partial\Omega$.

• Soit ξ et ω les parties réelle et imaginaire de s ($s = \xi + i\omega$). Pour un réel $\varepsilon > 0$ donné, nous définissons la fonction auxiliaire :

$$\forall s \in \mathbb{C}_0^+, \quad h_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+\varepsilon s}. \tag{A.4}$$

• Précisons dans un premier temps que h_ε est holomorphe dans $\mathbb{C}_0^+$ et continue dans $\overline{\mathbb{C}_0^+}$. Ainsi il en va de même pour le produit Fh_ε. De plus, Fh_ε n'est pas constante. En effet, si $\forall s \in \mathbb{C}_0^+, \ F(s)h_\varepsilon(s) = K \in \mathbb{C}$ constante, alors $F(s) = K(1+\varepsilon s)$. Dans ce cas, ou bien $K \neq 0$ et F ne vérifie pas (E) ($|K(1+\varepsilon s)| \to \infty$ quand $|s| \to \infty$), ou bien $K = 0$ et $F = 0$ ne vérifie pas (C).

Dans ce qui suit, nous allons chercher un contour sur lequel nous pouvons démontrer que $Fh_\varepsilon \leq 1$, afin d'appliquer le *Théorème du Maximum* sur l'ensemble qu'il entoure.

• Comme $\mathcal{R}e\{1+\varepsilon s\} = 1 + \varepsilon\xi \geq 1$ dans $\overline{\mathbb{C}_0^+}$, on a $|1+\varepsilon s| \geq 1$, et donc $|h_\varepsilon(s)| \leq 1$. Ainsi

$$\forall s \in i\mathbb{R}, \ |F(s)h_\varepsilon(s)| \leq 1. \tag{A.5}$$

D'autre part $\forall s \in \mathbb{C}_0^+$, $|1+\varepsilon s|^2 = (1+\varepsilon\xi)^2 + (\varepsilon\omega)^2 > (\varepsilon\xi)^2 + (\varepsilon\omega)^2 = \varepsilon^2 |s|^2$ (car $\varepsilon > 0$ et $\xi > 0$), alors $|1+\varepsilon s| > \varepsilon |s|$, et $|h_\varepsilon(s)| < 1/(\varepsilon |s|)$. En conséquence, selon (E), $\exists B < +\infty$ tel que

$$\forall s \in \mathbb{C}_0^+, \ |F(s)h_\varepsilon(s)| < \frac{B}{\varepsilon |s|}. \tag{A.6}$$

• Soit $\mathcal{D}_\varepsilon$ le demi-disque ouvert dans $\mathbb{C}_0^+$ délimité par l'axe imaginaire et le demi-cercle de rayon B/ε à droite de l'axe imaginaire. D'après (A.5) et (A.6), $|Fh_\varepsilon| \leq 1$ sur $\partial\mathcal{D}_\varepsilon$.

Fh_ε est holomorphe dans $\mathcal{D}_\varepsilon$ et continue dans $\overline{\mathcal{D}_\varepsilon}$. Comme Fh_ε n'est pas constante dans $\mathbb{C}_0^+$, elle ne l'est pas non plus dans $\mathcal{D}_\varepsilon$.

Le *Théorème du Maximum* appliqué à cette fonction dans l'ouvert connexe et borné $\mathcal{D}_\varepsilon$, donne $|Fh_\varepsilon| < 1$, dans $\mathcal{D}_\varepsilon$.

• De plus (A.6) montre que $|Fh_\varepsilon| < 1$, dans tout le reste de $\mathbb{C}_0^+$. Ainsi, nous venons de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $|Fh_\varepsilon\ | < 1$ dans $\mathbb{C}_0^+$.

• Si nous fixons $s \in \mathbb{C}_0^+$ et si nous faisons tendre ε vers 0, $h_\varepsilon(s)$ tend vers 1, et nous avons alors $|F(s)| \leq 1 \ \ \forall s \in \mathbb{C}_0^+$.

• De plus, par l'absurde nous pouvons prouver l'inégalité stricte. En effet s'il existe $s \in \mathbb{C}_0^+$ tel que $|F(s)| = 1$, alors selon le *Théorème du Maximum* (cf. §A.1.1) pour tout $\Omega \subset \mathbb{C}_0^+$ contenant s, ou bien F n'est pas holomorphe, ou bien F est constante, ce qui est contraire aux hypothèses (A) et (C).

Finalement, nous obtenons le résultat $|F(s)| < 1 \ \ \forall s \in \mathbb{C}_0^+$. □

Corollaire A.3. *Soit F une fonction complexe telle que :*

(A) *F est holomorphe dans $\mathbb{C}_0^{++}$,*

(B) *F est continue dans $\overline{\mathbb{C}_0^{++}}$,*

(C) *F n'est pas constante dans $\mathbb{C}_0^{++}$,*

(D) *$\forall s \in \mathbb{R}^+ \cup i\mathbb{R}^+, \ |F(s)| \leq 1$,*

(E) *F est bornée dans $\overline{\mathbb{C}_0^{++}}$.*

Alors sous ces hypothèses :

$$|F(s)| < 1 \ \ \forall s \in \mathbb{C}_0^{++}.$$

Corollaire A.4. *Soit F une fonction complexe telle que :*

(A) *F est holomorphe dans $\mathbb{C}_0^{+-}$,*

(B) *F est continue dans $\overline{\mathbb{C}_0^{+-}}$,*

(C) *F n'est pas constante dans $\mathbb{C}_0^{+-}$,*

(D) *$\forall s \in \mathbb{R}^+ \cup i\mathbb{R}^-, \ |F(s)| \leq 1$,*

(E) *F est bornée dans $\overline{\mathbb{C}_0^{+-}}$.*

Alors sous ces hypothèses :

$$|F(s)| < 1 \ \ \forall s \in \mathbb{C}_0^{+-}.$$

Démonstration. Les preuves des corollaires A.3 et A.4 sont les mêmes que celle du corollaire A.2, mais en considérant les quarts de disque dans $\mathbb{C}_0^{++}$ et $\mathbb{C}_0^{+-}$ et non plus le demi-disque dans $\mathbb{C}_0^+$. □

Corollaire A.5. *Ce corollaire est un exemple d'application sur une fonction complexe :*

$$\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\right| < 1, \quad \forall \lambda \in \overline{\mathbb{C}_0^+} \setminus \{0\}. \tag{A.7}$$

Démonstration. Considérons la fonction $F(\lambda) := \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$ pour $\Re\mathrm{e}(\lambda) \geq 0$ et $\lambda \neq 0$.

D'abord, contrairement aux apparences, il n'y a pas de singularité en $\lambda = 0$ et on a $\lim_{\lambda=0} F(\lambda) = 1$. Ainsi, $F(\lambda)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}_0^+$ et son prolongement $\widetilde{F}$ est continu dans $\overline{\mathbb{C}_0^+}$.

De plus, $|\widetilde{F}(\lambda = 2i\pi f)| = |\operatorname{sinc}(f)| \leq 1$, et on a une majoration en l'infini de $|F(\lambda)|$ en $O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$.

Ainsi, selon le corollaire A.3 (du théorème du maximum), $|F(\lambda)|$ est majorée dans $\mathbb{C}_0^+$ par le maximum de $|\widetilde{F}(i\omega)|$ qui est atteint en $\omega = 0$ uniquement et qui vaut 1.

Par conséquent : $\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\right| < 1, \ \forall \lambda \in \overline{\mathbb{C}_0^+} \setminus \{0\}$. □

A.2 Des propriétés algébriques

Les 3 propriétés algébriques suivantes permettent en partie 3.3 p.106 de connaître certaines propriétés intéressantes des fonctions de transfert, en les écrivant sous des formes algébriques particulières.

Propriété A.6. *Pour $A \in \mathbb{C}$ et $B \in \mathbb{C}$ tels que $AB \neq -1$, soit*

$$G = \frac{\overline{A} + B}{1 + AB}.$$

(i) $|A| = 1$ *ou* $|B| = 1$ $\Rightarrow |G| = 1,$

(ii) $\big(|A| < 1$ *et* $|B| < 1\big)$ *ou* $\big(|A| > 1$ *et* $|B| > 1\big)$ $\Rightarrow |G| < 1,$

(iii) $\big(|A| < 1$ *et* $|B| > 1\big)$ *ou* $\big(|A| > 1$ *et* $|B| < 1\big)$ $\Rightarrow |G| > 1.$

Démonstration. On pose $B = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$|G|^2 = \left|\frac{\overline{A} + \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}}{1 + A\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}}\right|^2 = \left|\mathrm{e}^{i\theta}\right|^2 \times \left|\frac{\overline{(A\,\mathrm{e}^{i\theta})} + \rho}{1 + (A\,\mathrm{e}^{i\theta})\rho}\right|^2 = \frac{\Big(\overline{(A\,\mathrm{e}^{i\theta})} + \rho\Big)\,\overline{\Big(\overline{(A\,\mathrm{e}^{i\theta})} + \rho\Big)}}{(1 + (A\,\mathrm{e}^{i\theta})\rho)\,\overline{(1 + (A\,\mathrm{e}^{i\theta})\rho)}},$$

$$|G|^2 = \frac{\rho^2 + b\rho + a^2}{1 + b\rho + a^2\rho^2} := \frac{N(\rho, a, b)}{D(\rho, a, b)}, \quad \text{avec } a = |A| \geq 0 \text{ et } b = 2\,\Re\mathrm{e}(A\,\mathrm{e}^{i\theta}) \in \mathbb{R}.$$

Donc $D(\rho, a, b) - N(\rho, a, b) = \big(1 + b\rho + a^2\rho^2\big) - \big(\rho^2 + b\rho + a^2\big) = \big(\rho^2 - 1\big)\big(a^2 - 1\big) := P(\rho, a)$ définit une fonction indépendante de b dont le signe est donné dans le tableau suivant

	$\rho < 1$	$\rho = 1$	$\rho > 1$
$a < 1$	$P > 0$	$P = 0$	$P < 0$
$a = 1$	$P = 0$	$P = 0$	$P = 0$
$a > 1$	$P < 0$	$P = 0$	$P > 0$

Puisque $a = |A|$, $\rho = |B|$, $|G|^2 = N/D$ et $D \neq 0$ ($AB \neq -1$) nous trouvons le résultat attendu. □

Propriété A.7. *Pour* $a \in \mathbb{R}$ *et* $B \in \mathbb{C}$*, soit*

$$H = \frac{1 - a}{1 - aB},$$

alors $a \in [0, 1]\,et\,|B| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |H| \leq 1.$

Démonstration. On pose $B = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $0 \leq \rho \leq 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$|H|^2 = \frac{(1 - a)\overline{(1 - a)}}{(1 - aB)\overline{(1 - aB)}} = \frac{(1 - a)^2}{1 - 2a\rho\cos\theta + a^2\rho^2} := \frac{N}{D(\rho, \cos\theta)}.$$

On définit $P(\rho, k) := D(\rho, k) - N = \big(1 - 2a\rho k + a^2\rho^2\big) - \big((1 - a)^2\big) = a\left[2(1 - \rho k) - a(1 - \rho^2)\right].$

$P(\rho, +1) = a\left[2(1 - \rho) - a(1 - \rho^2)\right] = a(1 - \rho)\big(2 - (1 + \rho^2)\big) = a(1 - \rho)(1 - \rho^2) \geq 0,\ \forall\rho \in [0, 1],$
$P(\rho, -1) = a\left[2(1 + \rho) - a(1 - \rho^2)\right] = a(1 + \rho)\big(2 - (1 - \rho^2)\big) = a(1 + \rho)(1 + \rho^2) \geq 0,\ \forall\rho \in [0, 1].$

Donc $P(\rho, k) \geq 0$ pour $k \in \{-1, 1\}$ et $\forall\rho \in [0, 1]$.
Or $P(\rho, k)$ est affine en k donc $P(\rho, k) \geq 0,\ \forall k \in [-1, 1]$.
En remplaçant k par $\cos\theta \in [-1, 1],\ \forall\theta \in \mathbb{R}$, on trouve $D(\rho, \cos\theta) \geq N \geq 0$.
Si $D \neq 0$, alors $|H|^2 = N/D \leq 1$.
Le cas où $D = 0$ correspond à $a = 1$ et $B = 1$, or par continuité on trouve $H = 1$.
En conclusion, on démontre le résultat annoncé : $|H| \leq 1$. □

Propriété A.8. *Pour* $C \in \mathbb{C}$ *et* $D \in \mathbb{C}$*, soit*

$$K = \frac{C + D}{1 + CD},$$

alors $|C| = 1\ et\ |D| = 1 \quad \Rightarrow \quad K \in \mathbb{R}.$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\overline{K} = K$, en utilisant le fait que $\overline{C} = C^{-1}$ et $\overline{D} = D^{-1}$. □

A.3 Des propriétés spécifiques des fonctions Γ, R et T

Ici nous donnons des propriétés sur les fonctions $\Gamma(s)$, $R(s)$ et $T(s)$, utiles pour la partie 3.3 p.106.

Définitions :

Avec $c_0 > 0$, pour un tronçon de tube de longueur L, et de coefficients des pertes et de courbure constants et positifs ou nuls (respectivement $\varepsilon \geq 0$ et $\Upsilon \geq 0$), on définit la fonction Γ :

$$\begin{aligned} \Gamma : \quad \overline{\mathbb{C}_0^+} &\to \mathbb{C} \\ s &\mapsto \sqrt{\left(\frac{s}{c_0}\right)^2 + 2\varepsilon \left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon}, \end{aligned} \tag{A.8}$$

où la racine carrée est choisie comme le prolongement analytique de la racine carrée positive de $\mathbb{R}^+$ sur le demi-plan droit $\mathbb{C}_0^+$, et avec un prolongement continu de Γ sur $i\mathbb{R}$ (notons que ce dernier prolongement respecte la symétrie hermitienne de Γ sur $\overline{\mathbb{C}_0^+}$).

On définit maintenant, $\forall s \in \overline{\mathbb{C}_0^+}$:

$$R(s) := \frac{s - c_0\Gamma(s)}{s + c_0\Gamma(s)} \qquad \text{et} \qquad T(s) := \mathrm{e}^{-\Gamma(s)L}. \tag{A.9}$$

Dans la suite nous aurons besoin de "déconnecter" s et Γ, pour cela nous définissons les fonctions $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ de 2 variables complexes indépendantes s et γ :

$$\forall (s,\gamma) \in (\overline{\mathbb{C}_0^+})^2 \ / \ s \neq -c_0\gamma, \qquad \mathcal{R}(s,\gamma) := \frac{s - c_0\gamma}{s + c_0\gamma} \ \text{ et } \ \mathcal{R}(0,0) := -1, \tag{A.10}$$

$$\forall \gamma \in \overline{\mathbb{C}_0^+}, \qquad \mathcal{T}(s,\gamma) := \mathrm{e}^{-\gamma L}. \tag{A.11}$$

La valeur de $\mathcal{R}$ en $(0,0)$ permet d'assurer pour $s = 0$ la continuité par rapport à γ en $\gamma = 0$. Remarquons que $R(s) = \mathcal{R}(s,\Gamma(s))$ et $T(s) = \mathcal{T}(s,\Gamma(s))$.

Premières propriétés de Γ :

$$\forall s \in \mathbb{C}_0^+, \qquad \Re\mathrm{e}(\Gamma(s) - s/c_0) > 0, \tag{A.12}$$

$$\forall s \in \mathbb{C}_0^+, \qquad \Re\mathrm{e}(\Gamma(s)) > 0, \tag{A.13}$$

$$\forall s \in i\mathbb{R}, \qquad \Re\mathrm{e}(\Gamma(s)) \geq 0. \tag{A.14}$$

Démonstration. Les éléments de la preuve sont donnés dans [HM06a, annexe B] pour $\Upsilon \geq 0$. □

Premières propriétés de R et T :

$$R \text{ et } T \text{ sont holomorphes dans } s \in \mathbb{C}_0^+. \tag{A.15}$$

Démonstration. $\mathcal{R}$ est holomorphe pour $s \neq -c_0\gamma$. De plus pour $\Upsilon \geq 0$ et $\varepsilon \geq 0$, $\Gamma(s)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}_0^+$ (voir partie 3.2 p.96), et (A.12) donne $s \neq \Gamma/c_0$ dans $\mathbb{C}_0^+$. Ainsi R est holomorphe pour $s \in \mathbb{C}_0^+$.

$\mathcal{T}$ est holomorphe par rapport à γ dans $\mathbb{C}$, et Γ est holomorphe par rapport à s dans $\mathbb{C}_0^+$, donc T est holomorphe pour $s \in \mathbb{C}_0^+$. □

Propriétés de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$:

$$\forall \gamma \in \mathbb{C}_0^+ \qquad |\mathcal{T}(\gamma)| < 1, \tag{A.16}$$
$$\forall \gamma \in \mathbb{R}^+ \qquad \mathcal{T}(\gamma) \in [0,1], \tag{A.17}$$
$$\forall \gamma \in i\mathbb{R} \qquad |\mathcal{T}(\gamma)| = 1. \tag{A.18}$$

Démonstration. Il suffit de rappeler que $\mathcal{T}(\gamma) = \mathrm{e}^{-\gamma L}$. □

$$\forall (s,\gamma) \in \left(\overline{\mathbb{C}_0^{++}} \times \overline{\mathbb{C}_0^{++}}\right) \cup \left(\overline{\mathbb{C}_0^{+-}} \times \overline{\mathbb{C}_0^{+-}}\right), |\mathcal{R}(s,\gamma)| \leq 1, \tag{A.19}$$
$$\forall (s,\gamma) \in \left(\mathbb{C}_0^{++} \times \mathbb{C}_0^{++}\right) \cup \left(\mathbb{C}_0^{+-} \times \mathbb{C}_0^{+-}\right), |\mathcal{R}(s,\gamma)| < 1, \tag{A.20}$$
$$\forall (s,\gamma) \in (i\mathbb{R}^+ \times i\mathbb{R}^+) \cup (i\mathbb{R}^- \times i\mathbb{R}^-), \quad \mathcal{R}(s,\gamma) \in [\,-1,1], \tag{A.21}$$
$$\forall (s,\gamma) \in i\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad |\mathcal{R}(s,\gamma)| = 1, \tag{A.22}$$
$$\forall (s,\gamma) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, \quad |\mathcal{R}(s,\gamma)| < 1. \tag{A.23}$$

Démonstration. Pour $s = \xi + i\omega$ et $\gamma = a + ib$, avec $(\xi, \omega, a, b) \in \mathbb{R}^4$, on écrit :

$$|\mathcal{R}(s,\gamma)|^2 = \frac{(\xi - a)^2 + (\omega - b)^2}{(\xi + a)^2 + (\omega + b)^2}.$$

En raisonnant au cas par cas selon les signes de ξ, ω, a et b, on retrouve les résultats annoncés. □

Propriétés pour $\varepsilon = 0$:

$\exists! \omega_c \geq 0 /\ \Gamma(i\omega_c) = \Gamma(-i\omega_c) = 0$. ω_c est la fréquence de coupure (voir partie 2.1.4.3 p.66).

$$\forall \omega \in [-\omega_c, \ \omega_c], \qquad \Gamma(i\omega) \in \mathbb{R}^+, \tag{A.24}$$
$$\forall \omega \in [+\omega_c, +\infty[, \qquad \Gamma(i\omega) \in i\mathbb{R}^+, \tag{A.25}$$
$$\forall \omega \in]-\infty, -\omega_c], \qquad \Gamma(i\omega) \in i\mathbb{R}^-. \tag{A.26}$$

Ou bien

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^+, \qquad \Gamma(i\omega) \in \mathbb{R}^+ \cup i\mathbb{R}^+, \tag{A.27}$$
$$\forall \omega \in \mathbb{R}^-, \qquad \Gamma(i\omega) \in \mathbb{R}^+ \cup i\mathbb{R}^-. \tag{A.28}$$

Démonstration. Pour $\omega_c = c_0\sqrt{\Upsilon}$ (avec $\varepsilon = 0$), on écrit $c_0\Gamma(i\omega) = \sqrt{\omega_c + \omega}\sqrt{\omega_c - \omega}$. Avec la définition (A.8), on démontre le résultat au cas par cas. □

$$\forall \omega \in [-\omega_c, \ \omega_c], \qquad T(i\omega) \in [0,1], \tag{A.29}$$
$$\text{et} \quad |R(i\omega)| = 1. \tag{A.30}$$

Démonstration. Conséquences de (A.24), (A.17) et (A.22). □

$$\forall \omega \in]-\infty, -\omega_c] \cup [+\omega_c, +\infty[, \qquad |T(i\omega)| = 1, \tag{A.31}$$
$$\text{et} \quad R(i\omega) \in [-1,1]. \tag{A.32}$$

Démonstration. Conséquences de (A.25), (A.26), (A.18) et (A.21). □

Propriétés pour $\varepsilon \geq 0$:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^+, \qquad \Gamma(i\omega) \in \overline{\mathbb{C}_0^{++}}, \tag{A.33}$$
$$\forall \omega \in \mathbb{R}^-, \qquad \Gamma(i\omega) \in \overline{\mathbb{C}_0^{+-}}, \tag{A.34}$$
$$\text{donc } \forall \omega \in \mathbb{R}, \qquad \Re\mathrm{e}(\Gamma(i\omega)) \geq 0. \tag{A.35}$$

$$\forall s \in \mathbb{C}_0^{++}, \qquad \Gamma(s) \in \mathbb{C}_0^{++}, \tag{A.36}$$
$$\forall s \in \mathbb{C}_0^{+-}, \qquad \Gamma(s) \in \mathbb{C}_0^{+-}, \tag{A.37}$$
$$\forall s \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad \Gamma(s) \in \mathbb{R}^{+*}. \tag{A.38}$$

$$\forall s \in i\mathbb{R}, \qquad |R(i\omega)| \leq 1, \tag{A.39}$$
$$\textit{et} \quad |T(i\omega)| \leq 1. \tag{A.40}$$

Démonstration. Avec (A.33), (A.34), (A.19), (A.16) et (A.18). □

$$\forall s \in \mathbb{C}_0^{+}, \qquad |R(i\omega)| < 1, \tag{A.41}$$
$$\textit{et} \quad |T(i\omega)| < 1. \tag{A.42}$$

Démonstration. Avec (A.36), (A.37), (A.38), (A.20), (A.23), et (A.16). □

Remarque A.1. *Les propriétés précédentes de $\Gamma(s)$, $R(s)$ et $T(s)$ sont résumées par les figures 3.23-3.25 page 108 de la partie 3.3.*

A.4 Stabilité, causalité et espaces de Hardy

Maintenant nous cherchons à étudier la stabilité et la causalité des systèmes associés aux fonctions de transfert R, T, et des fonctions de transfert globales du quadripôle $\mathbf{Q}_\psi$ qui sont R_ψ et T_ψ. Nous considérons $\Upsilon \geq 0$. Nous étudions ces propriétés au sens des espaces de *Hardy* que nous définirons. De plus nous montrons que les fonctions T et T_ψ contiennent du retard pur en facteur : $T(s) = D(s)\,\mathrm{e}^{-\tau s}$ et $T_\psi(s) = D_\psi(s)\,\mathrm{e}^{-\tau s}$ avec D et D_ψ associées à des systèmes causaux et stables. Plusieurs des résultats présentés ici sont issus de [HM06a].

A.4.1 Stabilité

A.4.1.1 *Fonctions R et T*

Pour $\Upsilon \geq 0$, nous choisissons les coupures de Γ dans $\mathbb{C}_0^-$, ainsi la fonction Γ est holomorphe dans $\mathbb{C}_0^+$. De plus, avec (A.13) on sait que le dénominateur de R ne s'annule pas dans $\mathbb{C}_0^+$. En conséquence, puisque T et R sont des fonctions composées de Γ, elles sont elles-mêmes holomorphes dans $\mathbb{C}_0^+$ si $\Upsilon \geq 0$. Elles définissent donc des systèmes stables.

La fonction $D(s)$ représentant la dispersion due aux pertes visco-thermiques et à la courbure, qui est donnée par $T(s) = D(s)\,\mathrm{e}^{-sL/c_0}$, est également holomorphe dans $\mathbb{C}_0^+$.

A.4.1.2 *Fonctions* R_ψ *et* T_ψ

Soient R_ψ, T_ψ et D_ψ les fonctions de transfert globales d'un tronçon. Nous rappellons leurs expressions algébriques données par (2.57) et (2.58) de la page 77 :

$$R_\psi = \frac{(1-T^2)R}{1-R^2T^2}, \quad T_\psi = \frac{(1-R^2)T}{1-R^2T^2}, \quad D_\psi = \frac{(1-R^2)D}{1-R^2T^2}. \tag{A.43}$$

Dans $\mathbb{C}_0^+$, puisque R et T sont de modules plus petits que 1, le dénominateur $1-R^2T^2$ ne s'annule pas. De plus R, T et D sont holomorphes dans $\mathbb{C}_0^+$ alors R_ψ, T_ψ et D_ψ le sont aussi, et le système d'un tronçon est stable du point de vue entrées/sorties.

A.4.2 Causalité

A.4.2.1 *Espaces de* Hardy

Soit $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+) = \left\{h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C} / \ h \text{ est mesurable et } \int_{\mathbb{R}^+} |h(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty\right\}$ l'espace des fonctions d'énergie finie, et

$$\mathbb{H}^m\left(\mathbb{C}_0^+\right) = \Big\{ \ H : \mathbb{C}_0^+ \to \mathbb{C} \text{ tel que } \quad H \quad \text{est holomorphe et tel que}$$
$$\| \ H\|_{\mathbb{H}^m} = \sup_{\zeta>0} \left[\int_{\mathbb{R}} \left|H\left(\zeta + i\omega\right)\right|^m\right]^{\frac{1}{m}} < \infty \Bigg\}$$

les espaces de *Hardy* pour $m > 0$. Les espaces de *Hardy* définissent des fonctions de transfert H de systèmes causaux, c'est-à-dire associés à des noyaux de convolution (réponse impulsionnelle) h nulle pour $t < 0$ (voir [Dup77]). Le théorème de Paley-Wiener donne un résultat particulier : pour la transformée de Laplace, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+)$ est isomorphique à $\mathbb{H}^2(\mathbb{C}_0^+)$ (voir [CZ95, p.645] et [Par04]). C'est-à-dire qu'une réponse impulsionnelle causale h est d'énergie finie si et seulement si sa fonction de transfert H appartient à $\mathbb{H}^2(\mathbb{C}_0^+)$.

A.4.2.2 *Fonctions* R *et* T

Dans le cas des courbures positives ou nulles, nous venons de montrer que les fonctions R et T sont holomorphes et bornées dans $\mathbb{C}_0^+$. Il reste à étudier leur comportement asymptotique quand $|s|$ tend vers l'infini.

Commençons par l'étude du comportement asymptotique de Γ en l'infini pour $s \in \mathbb{C}_0^+$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \sqrt{\left(\frac{s}{c_0}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\frac{s}{c_0}\right)^{3/2} + \Upsilon} = \frac{s}{c_0}\sqrt{1 + 2\varepsilon\sqrt{\frac{c_0}{s}} + \Upsilon\left(\frac{c_0}{s}\right)^2} \\
&= \frac{s}{c_0}\sqrt{1+u} = \frac{s}{c_0}\left[1 + \frac{u}{2} \ - \frac{u^2}{8} + O(u^3)\right] \text{ pour } u = \frac{1}{s} \to 0, \\
&= \frac{s}{c_0} + \varepsilon\sqrt{\frac{s}{c_0}} + O(1), \text{ quand } |s| \to \infty \ \ \forall s \in \ \mathbb{C}_0^+.
\end{aligned}$$

Etudions maintenant la fonction D de la dispersion :

$$\begin{aligned}
D(s) &:= \mathrm{e}^{-(\Gamma(s) - s/c_0)L} = \mathrm{e}^{\varepsilon\sqrt{\frac{s}{c_0}}L + O(1)} \\
&= O(1)\,\mathrm{e}^{-\varepsilon\sqrt{\frac{s}{c_0}}L} \text{ quand } |s| \to \infty \ \ \forall s \in \ \mathbb{C}_0^+.
\end{aligned} \tag{A.44}$$

Or $\exp\left(-\varepsilon\sqrt{sL/c_0}\right)$ est une fonction d'un espace de Hardy dans $\mathbb{C}_0^+$ pour $m > 0$ et pour des pertes visco-thermiques non nulles ($\varepsilon > 0$).

Pour $T(s) := D(s)\,\mathrm{e}^{-sL/c_0}$, il en est alors de même : $T \in \mathbb{H}^m(\mathbb{C}_0^+)$ $\forall m > 0$. Cette fonction est donc une fonction stable, causale et retardée de L/c_0.

En ce qui concerne la fonction de réflexion R :

$$\begin{aligned} R &= \frac{s/c_0 - \Gamma(s)}{s/c_0 + \Gamma(s)} = \left(\frac{c_0}{2s}\right) \frac{-\varepsilon\sqrt{\frac{s}{c_0}} + O(1)}{1 + \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{\frac{c_0}{s}} + O(\frac{1}{s})} \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{\frac{c_0}{s}} + O\left(\frac{1}{s}\right) \text{ quand } |s| \to \infty \ \ \forall s \in \mathbb{C}_0^+. \end{aligned}$$

Puisque R est en $O(\sqrt{1/s})$, sa norme de Hardy est finie pour $m > 2$. Nous en déduisons donc que R appartient à tout espace de Hardy $\mathbb{H}^m\left(\mathbb{C}_0^+\right)$, pout tout $m > 2$. En conclusion, la réflexion R est une fonction stable et causale.

A.4.2.3 *Fonctions R_ψ et T_ψ*

Puisque $\Re\mathrm{e}(\Gamma(s)) > 0$ dans $\mathbb{C}_0^+$ (voir (A.13)), $\lim_{|s|\to\infty} T(s) = 0$. Ainsi, avec les expressions algébriques de R_ψ, T_ψ et D_ψ (voir (A.43)), R_ψ est équivalente à R, D_ψ est équivalente à T et T_ψ est équivalente à T.

Donc le système d'un tronçon représenté par les variables $\psi^\pm$ avec $\Upsilon \geq 0$ est un système causal et stable, avec une fonction T_ψ retardée de L/c_0.

Fonction globale	équivaut à (pour $\|s\| \to \infty$ avec $s \in \mathbb{C}_0^+$)	appartient à $\mathbb{H}^m(\mathbb{C}_0^+)$	système causal	noyau d'énergie finie
$R_\psi(s)$	$R(s)$	$m > 2$	oui	non
$D_\psi(s)$	$D(s)$	$m > 0$	oui	oui
$T_\psi = D_\psi\, \mathrm{e}^{-sL/c_0}$	$T = D\, \mathrm{e}^{-sL/c_0}$	$m > 0$	oui et retardée de L/c_0	oui

Tab. A.1 – *Tableau récapitulatif des résultats sur la causalité et la stabilité*

Annexe B

Position des racines du polynôme G

Pour $\Upsilon \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \geq 0$, nous étudions le polynôme complexe suivant :

$$G(\sigma) := \sigma^4 + 2\varepsilon\sigma^3 + \Upsilon. \tag{B.1}$$

Etudier les racines de G nous permet de connaître les points de branchement de la fonction Γ et notamment leur position par rapport à l'axe imaginaire (cf. §3.2.2.1 p.98). Parmi les 4 racines du polynôme G, nous souhaitons savoir combien sont à partie réelle positive (parce que celles-ci appartiennent au premier feuillet), et combien ont leur argument compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ (parce que celles-ci correpondent à des points de branchement $s = \sigma^2$, avec $\Re\mathrm{e}(s) > 0$).

Définissons les 3 domaines suivant :

$$\mathbb{C}_0^+ := \{\sigma \in \mathbb{C} \ / \ \Re\mathrm{e}(\sigma) > 0\}, \tag{B.2}$$

$$\mathbb{C}_0^- := \{\sigma \in \mathbb{C} \ / \ \Re\mathrm{e}(\sigma) < 0\}, \tag{B.3}$$

$$\Omega := \left\{\sigma \in \mathbb{C} \ / \ -\frac{\pi}{4} < \arg(\sigma) < \frac{\pi}{4} \text{ et } \sigma \neq 0\right\}. \tag{B.4}$$

• $\underline{\varepsilon = 0}$:

Les racines de G sont simplement les racines 4-ième de $-\Upsilon$.

$\Upsilon = 0$: Les 4 racines valent toutes $\sigma = 0$.

$\Upsilon < 0$: Les racines s'écrivent $\sigma_k = (-i)^k \sqrt[4]{-\Upsilon}$ (pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$). On trouve donc une racine réelle positive σ_0, 2 imaginaires pures conjuguées (σ_1 et σ_3), et une quatrième racine réelle négative σ_2.

$\Upsilon > 0$: Les racines s'écrivent $\sigma_k = (-i)^k \, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt[4]{\Upsilon}$. On trouve donc 2 racines complexes conjuguées dans $\mathbb{C}_0^+$ d'argument $\pm\frac{\pi}{4}$ (σ_0 et σ_1), et 2 autres dans $\mathbb{C}_0^-$.

• $\underline{\varepsilon > 0 \text{ et } \Upsilon = 0}$:

Dans ce cas, $G(\sigma) = \sigma^3(\sigma + 2\varepsilon)$, et on trouve une racine triple en $\sigma = 0$ et une racine simple réelle négative $\sigma = -2\varepsilon$.

• $\underline{\varepsilon > 0 \text{ et } \Upsilon \neq 0, \text{ pour } \sigma \in \Omega}$:

Ecrivons $\sigma = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Nous cherchons ici le nombre de racines dans Ω. Notons que $\sigma \in \Omega$ équivaut à $a > |b| \geq 0$.

Pour $\sigma = a + ib \in \Omega$, la partie imaginaire de G s'écrit après simplification

$$\Im\mathrm{m}(G(a+ib)) = b\left(2\underbrace{(2a+\varepsilon)}_{>0}\underbrace{(a^2-b^2)}_{>0} + \underbrace{4\varepsilon a^2}_{>0}\right), \tag{B.5}$$

de sorte que les seules racines possibles sont sur $\mathbb{R}^{+*}$ ($b = 0$). Or sur $\mathbb{R}^{+*}$, G s'écrit

$$G(a) = a^4 + 2\varepsilon a^3 + \Upsilon.$$

Pour $\Upsilon > 0$, $G(a)$ ne s'annule pas avec $a > 0$. Pour $\Upsilon < 0$, $G(a)$ s'annule une fois exactement car $G(0) = \Upsilon < 0$ et $\lim_{a\to\infty} G(a) = \infty$ et $G'(a) = 4a^3 + 6\varepsilon a^2 > 0$. Ainsi il n'y a qu'une racine sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En résumé, pour $\Upsilon > 0$, G ne possède aucune racine dans Ω, et pour $\Upsilon < 0$, G possède exactement 1 racine dans Ω qui est réelle positive.

• $\varepsilon > 0$ et $\Upsilon < 0$, pour $\sigma \in \mathbb{C}_0^+$:

Les racines (notée $\sigma = a + ib$) de G vérifient $\Im\mathrm{m}(G(\sigma)) = 0$. Avec $a > 0$ et $b \neq 0$, on a d'après (B.5)

$$b = \pm a\sqrt{\frac{2\varepsilon}{2a+\varepsilon} + 1}.$$

En injectant cette expression de b dans G, on constate alors que $\Re\mathrm{e}(G(a + ib)) < 0$. Si bien que pour $\sigma \in \mathbb{C}_0^+ \setminus \mathbb{R}^{+*}$, les parties réelle et imaginaire ne s'annulent jamais simultanément. Il n'y a donc pas d'autre racine dans $\mathbb{C}_0^+$ que celle trouvée précédemment sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus, puisque $G(ib) = (b^4 + \Upsilon) - i2\varepsilon b^3$, pour $\varepsilon > 0$ il n'y a pas non plus d'autres racines sur l'axe imaginaire. Les 3 racines restantes sont donc dans $\mathbb{C}_0^-$.

• $\varepsilon > 0$ et $\Upsilon > 0$, pour $\sigma \in \mathbb{C}_0^+$:

Rappelons que pour $\varepsilon = 0$ nous avions 2 racines complexes conjuguées dans $\mathbb{C}_0^+$ et deux autres complexes conjuguées dans $\mathbb{C}_0^-$. Cependant sur l'axe imaginaire, G donne

$$\Re\mathrm{e}(G(ib)) = b^4 + \Upsilon > 0. \tag{B.6}$$

G ne s'annule pas sur $i\mathbb{R}$. Ainsi, en faisant varier $\varepsilon \geq 0$ ou $\Upsilon > 0$ les racines ne franchissent jamais l'axe imaginaire, elles restent donc dans le demi-plan de départ (pour $\varepsilon = 0$).

En résumé, pour $\Upsilon > 0$, G a 2 racines dans $\mathbb{C}_0^-$, et 2 racines complexes conjuguées dans $\mathbb{C}_0^+ \setminus \Omega$.

	$\Upsilon < 0$	$\Upsilon = 0$	$\Upsilon > 0$
$\varepsilon = 0$	$\sigma_0 = -\sigma_2 \in \mathbb{R}^{+*}$ $\sigma_3 = -\sigma_1 \in i\mathbb{R}^{+*}$	$\sigma_k = 0,\ \forall k \in \{0,1,2,3\}$	$\sigma_0 = \overline{\sigma_1} \in \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\mathbb{R}^{+*}$ σ_2 et $\sigma_3 \in \mathbb{C}_0^-$
$\varepsilon > 0$	$\sigma_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ $\sigma_1,\ \sigma_2$ et $\sigma_3 \in \mathbb{C}_0^-$	$\sigma_k = 0,\ \forall k \in \{0,1,2\}$ $\sigma_3 \in \mathbb{R}^{-*}$	$\sigma_0 = \overline{\sigma_1} \in \mathbb{C}_0^+ \setminus \overline{\Omega}$ σ_2 et $\sigma_3 \in \mathbb{C}_0^-$

Tab. B.1 – *Tableau récapitulatif des racines G au cas par cas. Attention, l'ordre des indices des racines n'est pas le même que dans la partie 3.2.2.1 page 98. Une illustration est donnée par les figures 3.17 p.99 et 3.18 p.100.*

Annexe C

Représentations intégrales

Nous détaillons ici la démarche qui permet d'écrire certaines fonctions de transfert, avec coupures, sous la forme de représentations intégrales (cf. §3.2.3.3 p.104). Nous commençons par rappeler des résultats bien connus sur la transformée de Laplace inverse de fractions rationnelles en s (voir par exemple [Pic89] pour un cours d'introduction), puis nous détaillons la démarche pour une fonction seulement coupées sur $\mathbb{R}^-$, et enfin nous généralisons à des cas présentant plusieurs coupures telles que les fonctions de transfert de Γ. Ces résultats sont donnés par exemple dans [HM06a] et dans [HMM06] (voir annexe G).

C.1 Transformée de Laplace inverse d'une fraction rationnelle

Considérons une fraction rationnelle H de la variable complexe de Laplace s. La réponse impulsionnelle $h(t)$ associée à $H(s)$ est donnée par la transformée de Laplace inverse définie pour H par

$$h(t) := \mathcal{TL}^{-1}\{H\}(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathrm{e}^{st}\, H(s)\,\mathrm{d}s, \tag{C.1}$$

où a est un réel quelconque. Nous nous intéressons ici uniquement aux solutions causales ($h(t) = 0$, pour tout $t < 0$), ainsi a est choisi comme un majorant des parties réelles des pôles de H.

Pour calculer cette inversion, nous utilisons alors le théorème des résidus appliqué à un contour dit de *Bromwich* (voir par exemple [AMP08, p.302]). Ce contour $\mathcal{B}$ est un demi-cercle enfermant tous les pôles de H. Il est orienté dans le sens trigonométrique et caractérisé par r son rayon et λ (cf. Fig. C.1-(a)).

En considérant les pôles s_k de H simples, le théorème des résidus donne pour t positif

$$\oint_{\mathcal{B}} \mathrm{e}^{st}\, H(s)\,\mathrm{d}s = \underbrace{\int_{a+\lambda-ir}^{a+\lambda+ir} \mathrm{e}^{st}\, H(s)\,\mathrm{d}s}_{\mathcal{J}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_r} \mathrm{e}^{st}\, H(s)\,\mathrm{d}s}_{\mathcal{I}} = 2i\pi \sum_{k=1}^{K} r_k\, \mathrm{e}^{s_k t}, \tag{C.2}$$

où r_k est le résidu du k-ième pôle s_k de H donné par

$$r_k = \frac{1}{2i\pi}\lim_{s\to s_k}(s - s_k)H(s). \tag{C.3}$$

Quand r tend vers l'infini, selon le *lemme de Jordan* (voir par exemple [AMP08, p.302]), $\mathcal{I}$ tend vers 0 (car $t > 0$), et quand λ tend vers 0, $\mathcal{J}$ tend vers $2i\pi h(t)$. Ainsi la réponse impulsionnelle causale est donnée par

$$h(t) = \sum_{k=1}^{K} r_k\, \mathrm{e}^{s_k t}\, \mathbf{1}_{t>0}(t). \tag{C.4}$$

Remarque C.1. *Si il existe au moins un pôle de H à partie réelle positive, la réponse impulsionnelle $h(t)$ diverge, et le système associé est instable. Si tous les pôles de H sont à partie réelle négative, le système associé est stable. Dans ce dernier cas, nous prenons habituellement $a = 0$, la transformée de Laplace inverse est alors donnée par la transformée de Fourier inverse.*

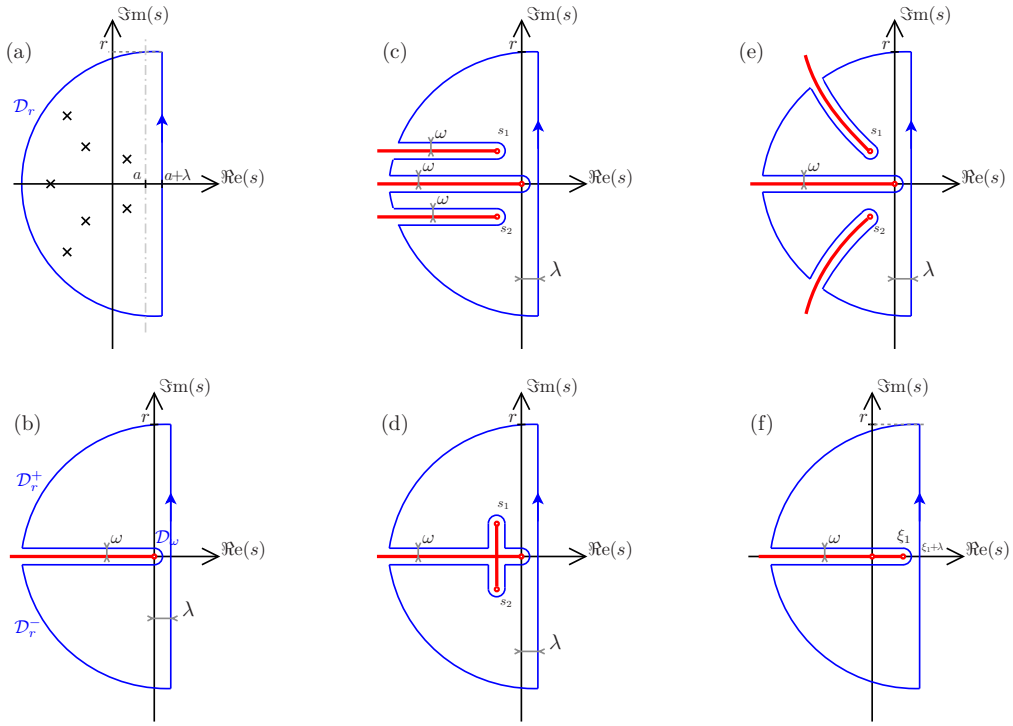


Fig. C.1 – *Contours de Bromwich pour plusieurs configurations de singularités : (a) pôles simples (fraction rationnelle), (b) 1 seule coupure sur $\mathbb{R}^-$ ($\Upsilon = 0$), (c) 3 coupures horizontales pour $\Upsilon > 0$, (d) configuration en croix pour $\Upsilon > 0$, (e) coupures "naturelles" pour $\Upsilon > 0$, (f) coupure horizontale pour $\Upsilon < 0$.*

C.2 Transformée de Laplace inverse pour une coupure sur $\mathbb{R}^-$

Considérons maintenant une fonction G présentant une coupure sur $\mathbb{R}^-$ et analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Pour calculer sa réponse impulsionnelle causale $g(t)$ nous considérons le contour de Bromwich $\mathcal{B}$ donné par la figure C.1-(b). Ce contour n'enferme pas de singularité, alors l'intégrale sur $\mathcal{B}$ vaut 0. Pour t positif :

$$\oint_{\mathcal{B}} \mathrm{e}^{st}\, G(s)\,\mathrm{d}s = \quad 0 \quad = \underbrace{\int_{\lambda-ir}^{\lambda+ir} \mathrm{e}^{st}\, G(s)\mathrm{d}s}_{\mathcal{J}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_r^+} \mathrm{e}^{st}\, G(s)\mathrm{d}s}_{\mathcal{I}^+} + \underbrace{\int_{-r+i\omega}^{i\omega} \mathrm{e}^{st}\, G(s)\mathrm{d}s}_{\mathcal{K}^+}$$
$$+ \underbrace{\int_{\mathcal{D}_\omega} \mathrm{e}^{st}\, G(s)\mathrm{d}s}_{\mathcal{Q}} + \underbrace{\int_{i\omega}^{-r+i\omega} \mathrm{e}^{st}\, G(s)\mathrm{d}s}_{\mathcal{K}^-} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_r^-} \mathrm{e}^{st}\, G(s)\mathrm{d}s}_{\mathcal{I}^-}. \qquad \text{(C.5)}$$

Quand r tend vers l'infini, selon le *lemme de Jordan*, $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ tendent vers 0 (car $t > 0$), quand λ tend vers 0, $\mathcal{J}$ tend vers $2i\pi g(t)$, et quand ω tend vers 0, $\mathcal{Q}$ tend vers 0. Il reste alors $\mathcal{K}^+$ et $\mathcal{K}^-$ qui

tendent vers

$$\lim_{\omega \xrightarrow{>} 0} \mathcal{K}^+ = \lim_{\omega \xrightarrow{>} 0} \int_{-\infty+i\omega}^{i\omega} \mathrm{e}^{st}\, G(s)\mathrm{d}s, \tag{C.6}$$

$$\lim_{\omega \xrightarrow{>} 0} \mathcal{K}^- = \lim_{\omega \xrightarrow{>} 0} \int_{i\omega}^{-\infty+i\omega} \mathrm{e}^{st}\, G(s)\mathrm{d}s. \tag{C.7}$$

En conséquence, la réponse impulsionnelle $g(t)$ vaut (sous réserve de convergence des intégrales) :

$$g(t) = \lim_{\omega \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{2i\pi}\left(-\mathcal{K}^+ - \mathcal{K}^-\right) = \int_0^{+\infty} \mu_G(\xi)\, \mathrm{e}^{-\xi t}\, \mathbf{1}_{t>0}(t)\mathrm{d}\xi, \tag{C.8}$$

$$\text{avec} \qquad \mu_G(\xi) := \lim_{\omega \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{2i\pi}\Big(G(-\xi - i\omega) - G(-\xi + i\omega)\Big). \tag{C.9}$$

La réponse impulsionnelle se décompose donc en une famille continue d'exponentielles amorties de poids μ_G qui est proportionnel au saut de part et d'autre de la coupure.

La transformée de Laplace de $g(t)$ écrite par (C.8) donne une représentation intégrale de G :

$$G(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\mu_G(\xi)}{s+\xi}\mathrm{d}\xi. \tag{C.10}$$

Un critère qui assure la convergence absolue des intégrales est donné par

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\mu_G(\xi)|}{1+\xi}\mathrm{d}\xi < +\infty. \tag{C.11}$$

Remarque C.2. *Si la fonction G possède en plus des singularités de type pôles simples, on a alors les représentations intégrales de $g(t)$ et de $G(s)$:*

$$g(t) = \sum_{k=1}^{K} r_k\, \mathrm{e}^{s_k t}\, \mathbf{1}_{t>0}(t) + \int_0^{+\infty} \mu_G(\xi)\, \mathrm{e}^{-\xi t}\, \mathbf{1}_{t>0}(t)\, d\xi, \tag{C.12}$$

$$G(s) = \sum_{k=1}^{K} \frac{r_k}{s - s_k} + \int_0^{+\infty} \frac{\mu_G(\xi)}{s+\xi} d\xi. \tag{C.13}$$

C.3 Transformée de Laplace inverse pour une coupure $\mathcal{C}$

Dans le cas d'une fonction F présentant un ensemble $\mathcal{C}$ de coupures quelconques, on procède de la même manière en définissant un contour de Bromwich qui entoure les coupures comme le montrent les figures C.1-(c) à C.1-(f).

Considérons une paramétrisation de $\mathcal{C}$ notée $\xi \mapsto \gamma(\xi)$, de régularité $\mathcal{C}^1$ pour $\xi \in \mathbb{R}$, et vérifiant $\gamma'(\xi) \neq 0$. Si F est analytique dans $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$, le théorème des résidus donne à la limite :

$$f(t) = \int_{\mathcal{C}} \mu_F(\gamma)\, \mathrm{e}^{\gamma t}\, \mathbf{1}_{t>0}(t)\mathrm{d}\gamma, \tag{C.14}$$

$$F(s) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\mu_F(\gamma)}{s-\gamma}\mathrm{d}\gamma, \tag{C.15}$$

$$\text{avec} \qquad \mu_F(\gamma) = \lim_{\lambda \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{2i\pi}\Big(F(\gamma + i\gamma'\lambda) - F(\gamma - i\gamma'\lambda)\Big). \tag{C.16}$$

Notons que le nombre $i\gamma'(\xi)$ représente la direction normale à la coupure au point $\gamma(\xi)$, si bien que μ_F est bien associé au saut de F de part et d'autre de la coupure (cf. Fig. C.2).

Ces intégrales sont bien posées si le critère de convergence suivant est vérifié :

$$\int_{\mathcal{C}} \left| \frac{\mu_F(\gamma)}{a+1-\gamma} \right| \mathrm{d}\gamma < +\infty, \tag{C.17}$$

où a est un majorant des parties réelles des singularités de F. Pour $\Upsilon > 0$, $a \geq 0$, et pour $\Upsilon < 0$, $a \geq \xi_1 > 0$.

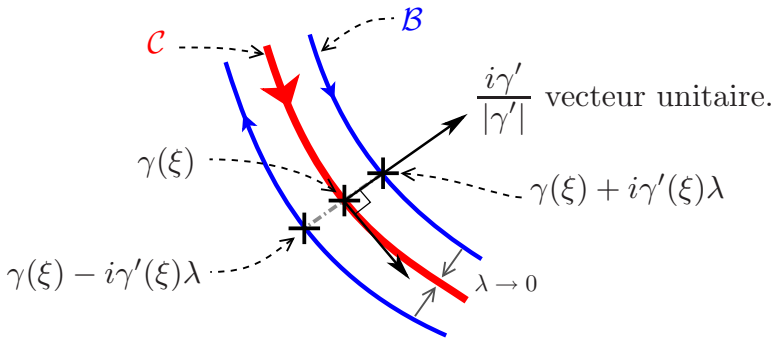


Fig. C.2 – *Illustration de la mesure du saut le long d'une coupure. La coupure $\mathcal{C}$ est paramétrée par $\xi \mapsto \gamma$, dans le sens représenté par la flèche. $\gamma(\xi) \pm i\gamma'(\xi)$ représente la direction normale à la coupure en $\gamma(\xi)$, avec pour vecteur unitaire $i\gamma'/|\gamma'|$. Pour une fonction F, le saut vaut* $\lim_{\lambda \xrightarrow{>} 0} (F(\gamma + i\gamma'\lambda) - F(\gamma - i\gamma'\lambda))$.

Annexe D

Représentations diffusives pour l'analyse de stabilité (principe)

Cette analyse est directement empruntée à [BM09].

D.1 Modèle

On analyse un oscillateur à un degré de liberté, modélisé par :

$$\ddot{x} + z + \dot{x} + y + \omega^2\, x = 0\,, \tag{D.1}$$

et comportant 3 differents types d'amortissement :
- $\dot{x} = v$, instantané en v,
- $y(v)$, avec mémoire, et comportement passe-bas,
- $z(v)$, avec mémoire, et comportement passe-haut.

Nous présentons en détails les deux types de filtres et donnons une réalisation minimale et passive pour chacun d'entre eux.

Filtres passe-bas Un nombre K de circuits de type RC d'entrée v et de sortie y a comme réalisation le système dynamique suivant :

$$\dot{\phi_k}(t) = -\xi_k\, \phi_k(t) + v(t), \quad \phi_k(0) = 0, \tag{D.2}$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{K} \mu_k\, \phi_k(t), \tag{D.3}$$

dont l'énergie associée est ($\mu_k > 0$) :

$$E_\phi(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} \mu_k\, {\phi_k}^2(t).$$

Le bilan d'énergie suivant peut être effectué :

$$\dot{E}_\phi = -\sum_{k=1}^{K} \mu_k\, \xi_k\, \phi_k^2 + v\, y. \tag{D.4}$$

Une aggrégation *positive* de circuits RC reste passive et passe-bas (-6 dB/oct) :

$$H_{RC}^K(s) = \sum_{k=1}^{K} \mu_k\, \frac{1}{s + \xi_k} \quad \text{avec } \mu_k > 0, \tag{D.5}$$

car un circuit RC est passif et passe-bas (−6 dB/oct) : cela provient de la propriété $\Re e(H_{RC}(s)) = \frac{\Re e(s)+\xi}{|s+\xi|^2} \geq 0$ pour $\Re e(s) \geq 0$.

Filtre passe-haut Un ensemble L de circuits RL d'entrée v et de sortie z a pour réalisation le système dynamique suivant :

$$\dot{\psi}_l(t) = -\xi_l\,\psi_l(t) + v(t), \quad \psi_l(0) = 0, \tag{D.6}$$

$$z(t) = \sum_{l=1}^{L} \nu_l\,(v(t) - \xi_l\,\psi_l)(t), \tag{D.7}$$

dont l'énergie associée est ($\nu_l > 0$) :

$$E_\psi(t) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L} \nu_l\ \xi_l\,{\psi_l}^2(t).$$

Le bilan d'énergie suivant peut être effectué :

$$\dot{E_\psi} = -\sum_{l=1}^{L} \nu_l\,(v - \xi_l\,\psi_l)^2 + v\,z. \tag{D.8}$$

Une aggrégation *positive* de circuits RL reste passive et passe-haut (+6 dB/oct) :

$$H_{RL}^L(s) = \sum_{l=1}^{L} \nu_l\,\frac{s}{s+\xi_l} \quad \text{avec } \nu_l > 0, \tag{D.9}$$

car un circuit RL est passif et passe-haut (+6 dB/oct) : cela provient de la propriété $\Re e(H_{RL}(s)) = \frac{|s|^2+\Re e(s)\,\xi}{|s+\xi|^2} \geq 0$, pour $\Re e(s) \geq 0$.

D.2 Analyse du système couplé

L'analyse de l'oscillateur à 1 degré de liberté (D.1) peut être facilement effectuée en définissant une énergie augmentée, ou *fonction de Lyapunov* :

$$\mathcal{E} := E_m + E_\phi + E_\psi$$

du système global, dont les variables internes sont $[x, v, \phi, \psi]$. En utilisant (D.4) et (D.8), on trouve en effet le bilan suivant :

$$\dot{\mathcal{E}} = -v^2 - \sum_{k=1}^{K} \mu_k\,\xi_k\,\phi_k^2 - \sum_{l=1}^{L} \nu_l\,(v - \xi_l\,\psi_l)^2 \leq 0\,.$$

Ainsi, on conclut à la stabilité asymptotique, c-à-d $\mathcal{E}(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, par exemple grâce au principe d'invariance de LaSalle, qui est facile à appliquer en dimension finie.

Il faut bien prendre garde cependant à ne pas conclure trop hâtivement que l'énergie mécanique $E_m(t) := \frac{1}{2}v^2(t) + \frac{1}{2}\omega^2\,x^2(t)$ est une fonction décroissante du temps : elle tend a fortiori vers 0, mais pas forcément de façon monotone. Ce comportement peut s'illustrer numériquement. Le comportement des composantes diffusives dépend fortement des valeurs des ξ_k : mémoire à court terme pour les grandes valeurs de ξ_k, et mémoire à long terme pour les petites valeurs de ξ_k.

Annexe E

Quadripôles de conversion

Pour convertir un élément représenté par l'état (P, U) en une représentation équivalente par des variables progressives, $p^{\pm}$, $\phi^{\pm}$ ou $\psi^{\pm}$, à partir de leur définition (voir partie 2.1.2 page 59), il est possible d'obtenir des quadripôles de conversion donnés par les figures E.1, E.2 et E.3. Ici le débit U est pris par convention dans le sens des ℓ croissants.

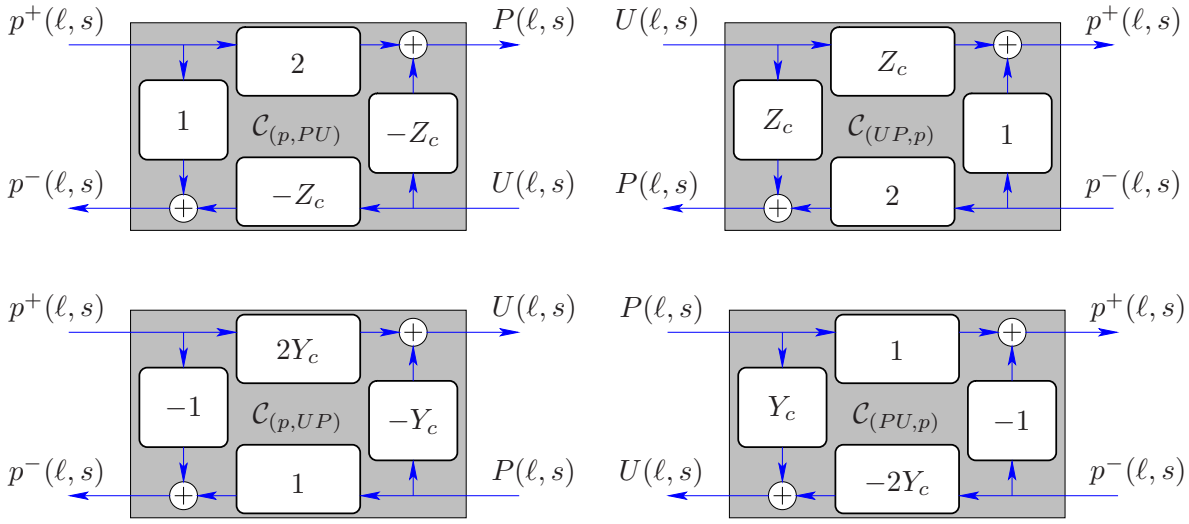


Fig. E.1 – *Quadripôles de conversion pour les ondes* $p^{\pm}$ *:* $\mathcal{C}_{(p,PU)}$, $\mathcal{C}_{(UP,p)}$, $\mathcal{C}_{(p,UP)}$ *et* $\mathcal{C}_{(PU,p)}$.

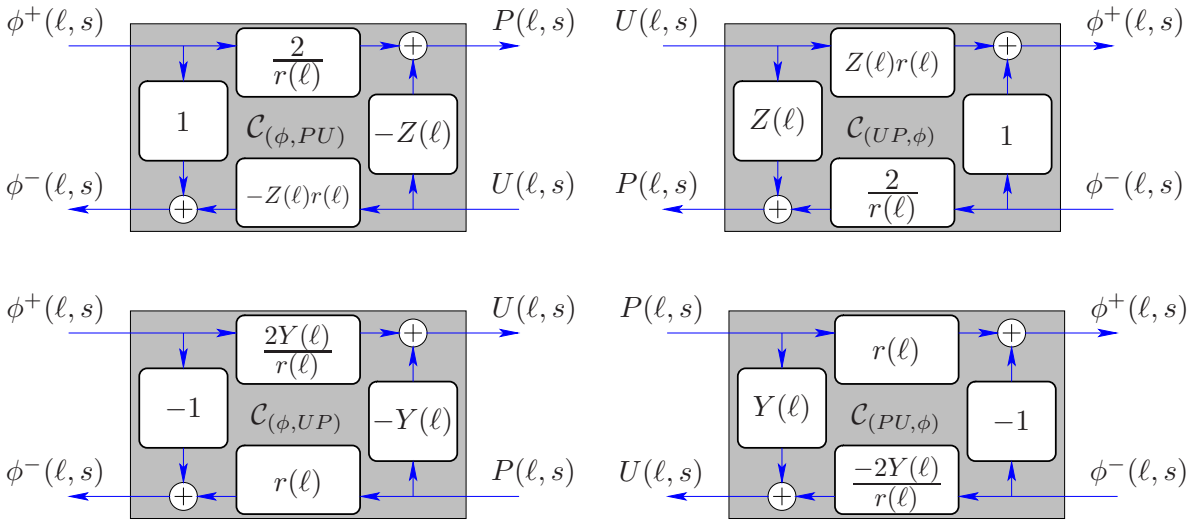


Fig. E.2 – *Quadripôles de conversion pour les ondes* $\phi^{\pm}$ *:* $\mathcal{C}_{(\phi,PU)}$, $\mathcal{C}_{(UP,\phi)}$, $\mathcal{C}_{(\phi,UP)}$ *et* $\mathcal{C}_{(PU,\phi)}$.

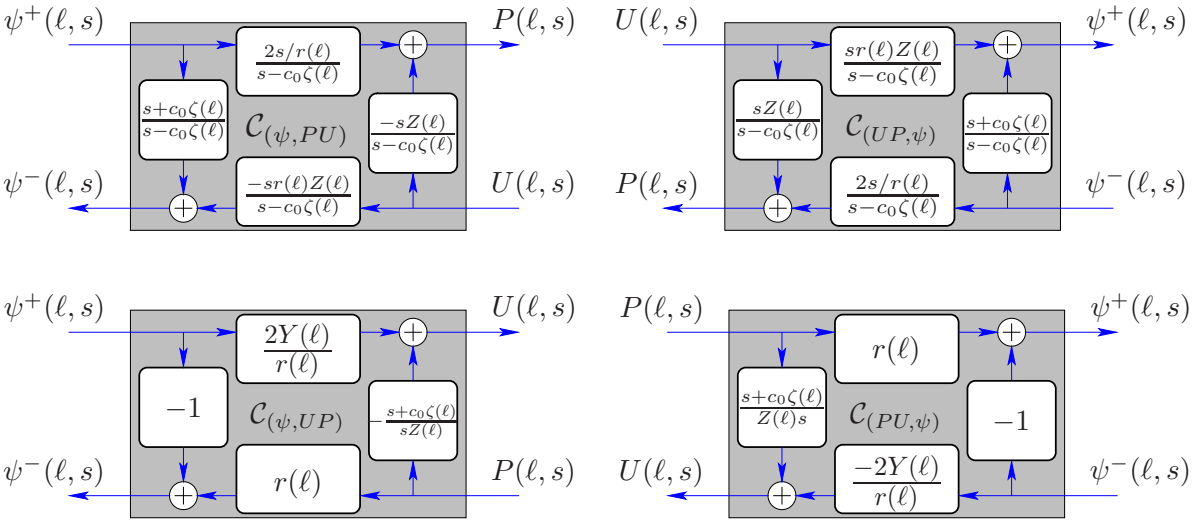


Fig. E.3 – *Quadripôles de conversion pour les ondes* $\psi^{\pm}$ *:* $\mathcal{C}_{(\psi,PU)}$, $\mathcal{C}_{(UP,\psi)}$, $\mathcal{C}_{(\psi,UP)}$ *et* $\mathcal{C}_{(PU,\psi)}$. $\zeta(\ell) := r'(\ell)/r(\ell)$.

Annexe F

Effet de la courbure et des pertes sur les impédances

L'impédance d'entrée d'un cylindre idéalement ouvert à droite (c-à-d $P_L = 0$, cf. §2.2.1.1 p.67) est donnée en figure F.1 pour plusieurs valeurs de coefficients : $\varepsilon = 0$ (sans perte), $\varepsilon = \varepsilon^*$ (calculé à partir de la valeur physique standard), et $\varepsilon = 3\varepsilon^*$ (valeur sur-estimée articiellement).

On remarque l'effet des pertes sur la courbe principalement pour le facteur de qualité. Pour $\varepsilon = 0$ les maxima et minima sont infinis (en décibels), et deviennent amortis quand $\varepsilon > 0$. On remarque également que les fréquences de résonances diminuent à mesure que ε augmente.

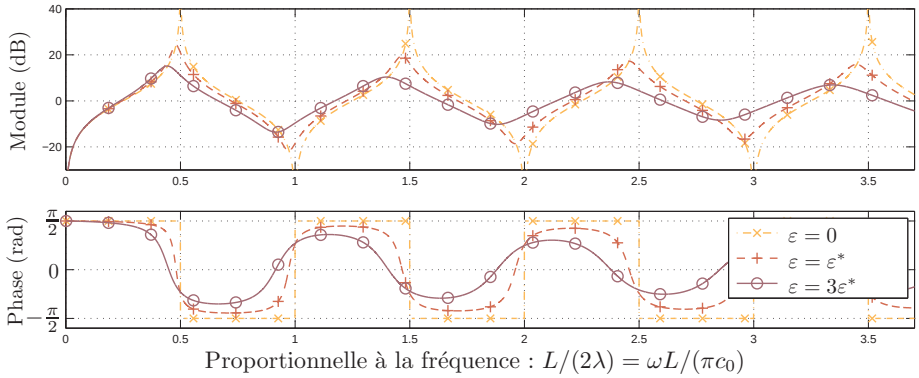


Fig. F.1 – *Influence des pertes sur l'impédance d'un tube ouvert : H_{11}^{-1} (cf. §2.2.1.1 p.67). Paramètres : $r_0 = r_L = 5mm, L = 1m$, $\Upsilon = 0m^{-2}$.*

La figure F.2 compare les effets de la valeur de la courbure sur l'impédance d'entrée $Z_{in} = 1/H_{11}$ d'un tube idéalement ouvert (voir aussi la figure 2.6 p.68). Les lignes verticales pointillées représentent la fréquence de coupure ω_c pour chaque courbure (cf. §2.1.4.3 p.66) et les courbes pointillées superposées représentent l'impédance pour $\Upsilon = 0$.

La figure F.3 compare les effets de la valeur de la courbure sur l'impédance d'entrée $Z_{in} = 1/H_{11}^l$ d'un tube semi-infini (voir aussi la figure 2.10 p.74). Les lignes verticales pointillées représentent la fréquence de coupure ω_c pour chaque courbure.

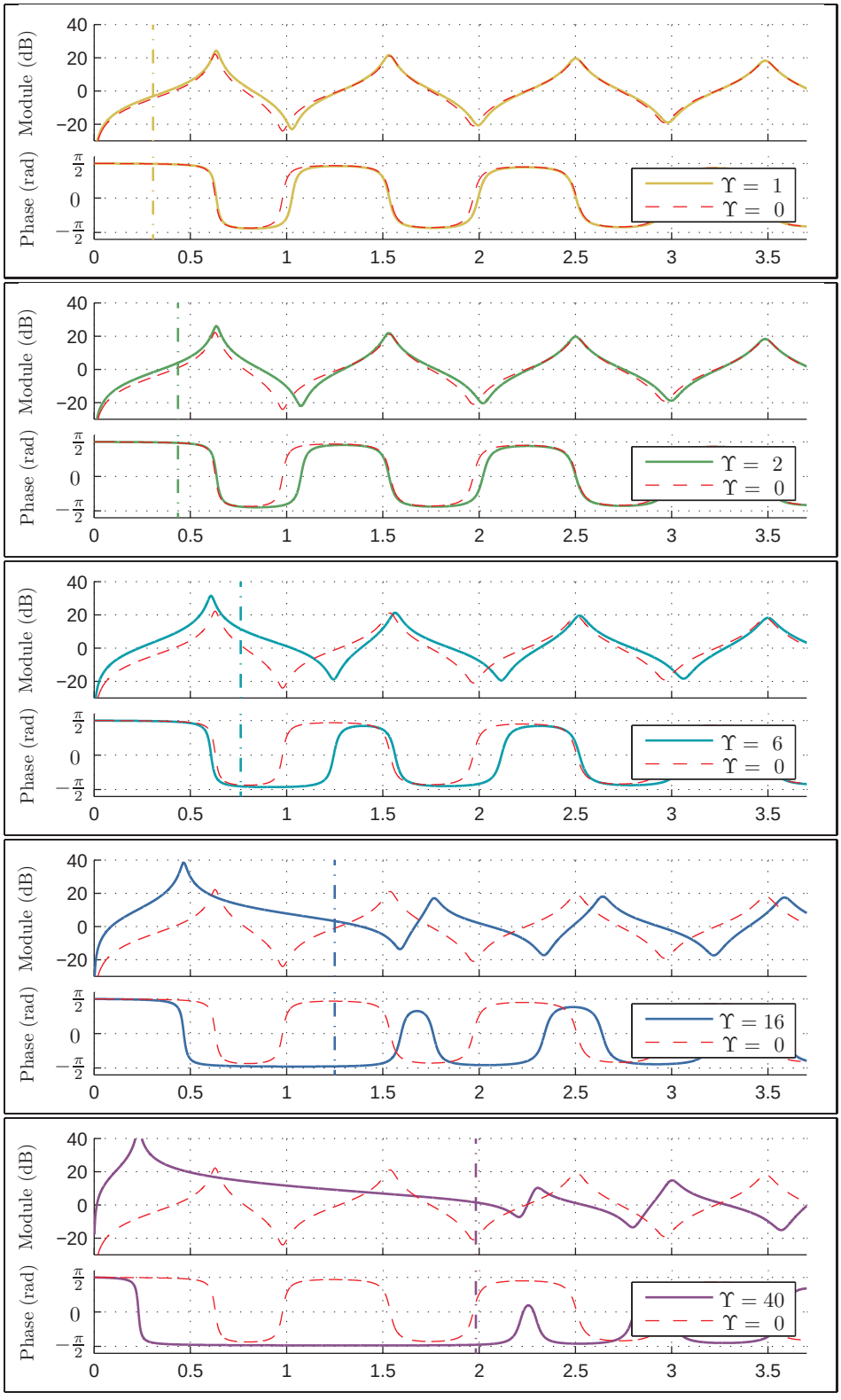


Fig. F.2 – *Influence de la courbure sur l'impédance d'un tube ouvert,* H_{11}^{-1}. *Paramètres :* $r_0 = 5mm$, $r_L = 10mm$, $L = 1m$. *Abscisse :* kL/π.

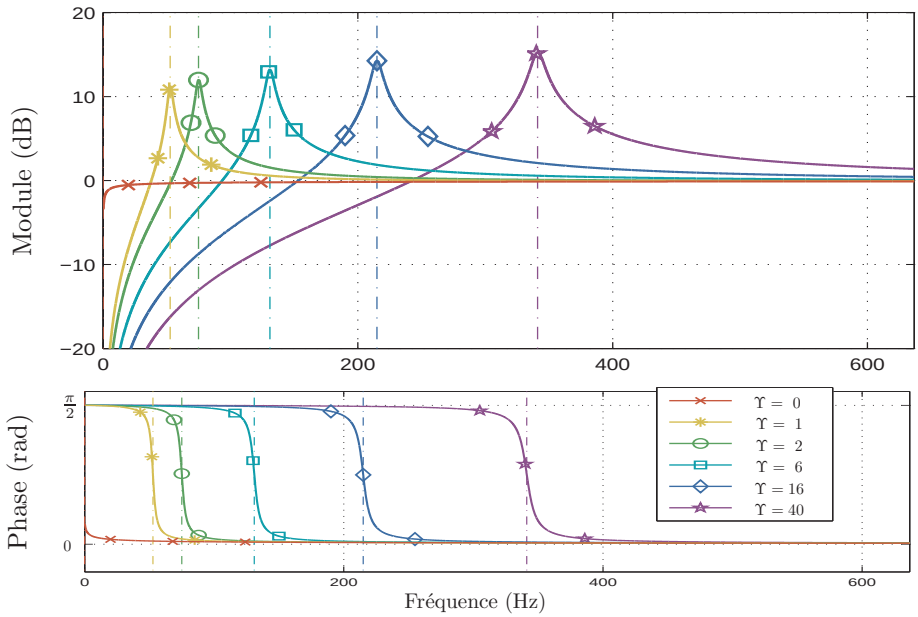


Fig. F.3 – *Influence de la courbure sur une impédance d'un tube semi-infini,* $G^l_{11}(s = 2i\pi f)$*. Paramètres :* $r_l = 5mm$*,* $\varepsilon = 0.0525m^{-\frac{1}{2}}$*,* $\zeta_l = 0m^{-1}$*.*

Annexe G

Article de congrès (CAO 2006) : Criterion design for optimizing low-cost approximations of infinite-dimensional systems : Towards efficient real-time simulation (référence [HMM06])

CRITERION DESIGN FOR OPTIMIZING LOW-COST APPROXIMATIONS OF INFINITE-DIMENSIONAL SYSTEMS: TOWARDS EFFICIENT REAL-TIME SIMULATION.

Thomas Hélie * **Denis Matignon** ** **Rémi Mignot** *

* *Laboratoire des Sciences et Technologie de la Musique et du Son, Equipe Analyse/Synthèse. CNRS UMR 9912 - Ircam, Centre Georges Pompidou. 1, place Igor Stravinsky. 75004 Paris, France.*
Thomas.Helie@ircam.fr, Remi.Mignot@ircam.fr
** *Laboratoire Traitement et Communication de l'Information, Département Traitement du Signal et des Images. CNRS UMR 5141 - Télécom Paris. 37-39, rue Dareau 75014 Paris, France.* matignon@tsi.enst.fr

Copyright© 2006 IFAC

Abstract: Linear systems with irrational transfer functions are difficult to simulate in the time domain. We consider causal systems which can be represented with poles and cuts in some left half-plane of the Laplace domain. Whereas standard interpolation methods yield convergent but high-dimensional approximations, it is possible to derive efficient low-cost approximations thanks to optimization procedures. Defining the criterion (choice of weightening measure, regularization and contraints) is however of utmost importance: this must be carefully designed and driven by each application. Two examples will illustrate the methodology, and a third one will present an extension to a compound system with delays.

Keywords: infinite-dimensional systems, integral representations, non-uniform least-square criterion, constrained and regularized optimization, real-time simulation.

NB: *Results described in § 4.3 are to be submitted to the INPI for a patent.*

1. INTRODUCTION

Real-time simulation of many complex physical systems is an issue that has significantly evolved: as an example, building up a virtual musical instrument has now become within reach on home computers. The purpose of this paper is to shed a new light on some aspects of the methodological process which starts from the equations of the physical model, goes through an exact representation of the solution from which a well-suited approximation is optimized, and, ends up with real-time simulations.

Standard methods of numerical analysis of PDEs are not so well oriented towards real-time simulation: given a prescribed accuracy, the order of the finite-dimensional model, coming e.g. from finite

difference schemes or finite element methods, is often quite large in practice. This situation contrasts with the so-called optimal approach, for which a low-order model is being searched for in a certain class, with a distance to be minimized between the infinite-dimensional ideal system and the low-order model. In this approach, two steps are of main interest, namely the choice of structure of the finite-dimensional model and the choice of the distance between these models.

The first step can be viewed as an off-line preprocessing of the physical model itself: it takes advantage of the flexibility of state-space representations for infinite-dimensional linear systems (Zwart, 2004). Transfer functions between inputs and outputs are first computed and then carefully analyzed using tools of complex variable theory (Duffy, 1994): for irrational transfer functions, the choice of appropriate cuts and poles, which are highly not unique, helps establish a state-space representation which reveals the very structure of the exact dynamical system to be simulated.

The second step consists in defining optimal low-cost representations of the exact one: choosing useful frequency points together with a measurement scale leads to user-oriented optimization procedures, which are carefully designed and driven by the underlying application. In the very end, a finite-dimensional discrete-time linear system is found to fit best for the on-line real-time simulation of the original system.

The paper is organized as follows: in § 2, a description of the systems under consideration is given; firstly their representation with poles and cuts is presented in § 2.1, secondly the structure of their finite-dimensional approximations is recalled in § 2.2. Based on these structures, specialized optimization procedures are derived in § 3: care is taken of the definition of the functional spaces and measures in § 3.1, whereas regularization procedures and equality constraints are presented in § 3.2. Three applications are then investigated in § 4: the first one is a somewhat academic example of fractional integral (§ 4.1), while the second one is a more involved example stemming from acoustics of ducts with viscothermal losses (§ 4.2). Finally in § 4.3, we show how to apply the whole methodology to a compound system decomposed into pure delays and elementary transfer functions that can be represented with poles and cuts; this last example gives rise to real-time simulations.

2. SYSTEMS UNDER CONSIDERATION

2.1 Representations with poles and cuts

2.1.1. General framework We consider linear systems with transfer functions which can be decomposed as follows, in some right-half complex plane $\mathbb{C}_a^+ = \{s \in \mathbb{C} \,|\, \Re e(s) > a\}$,

$$H(s) = \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{l=1}^{L_k} \frac{r_{k,l}}{(s-s_k)^l} + \int_{\mathcal{C}} \frac{M(\mathrm{d}\gamma)}{s-\gamma}, \qquad (1)$$

where the set of poles $\mathcal{K}$ is finite. This translates in the time domain into the following decomposition of the impulse response, for $t > 0$,

$$h(t) = \sum_{k\in\mathcal{K}} \sum_{l=1}^{L_k} \frac{r_{k,l}}{l!}\, t^{l-1}\, e^{s_k\, t} + \int_{\mathcal{C}} e^{\gamma\, t}\, M(\mathrm{d}\gamma), \quad (2)$$

For systems which map real inputs to real outputs, transfer functions satisfy the hermitian symmetry $H(s) = \overline{H(\overline{s})}$, $s \in \mathbb{C}_a^+$. In this case, the same symmetry for the set of poles and the set $\mathcal{C}$ can be chosen for any analytic continuation of $(H(s) + \overline{H(\overline{s})})/2$; thus decompositions (1-2) can reduce to:

$$\begin{aligned} H(s) = {} & \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathcal{K}_+} \sum_{l=1}^{L_k} \left[\frac{r_{k,l,+}}{(s-s_k)^l} + \frac{\overline{r_{k,l,+}}}{(s-\overline{s_k})^l} \right] \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}_+} \left[\frac{M_+(\mathrm{d}\gamma)}{s-\gamma} + \frac{\overline{M_+(\mathrm{d}\gamma)}}{s-\overline{\gamma}} \right], \qquad (3) \\ h(t) = {} & \Re e \Bigg(\sum_{k\in\mathcal{K}_+} \sum_{l=1}^{L_k} \frac{r_{k,l,+}}{l!}\, t^{l-1}\, e^{s_k\, t} \\ & + \int_{\mathcal{C}_+} e^{\gamma\, t}\, M_+(\mathrm{d}\gamma) \Bigg), \qquad (4) \end{aligned}$$

for $t > 0$, where $\mathcal{K}_+ = \mathcal{K} \cap \mathcal{I}_+$ and $\mathcal{C}_+ = \mathcal{C} \cap \mathcal{I}_+$ with $\mathcal{I}_+ = \{s \in \mathbb{C} \,|\, \Im m(s) \geq 0\}$, and where $r_{k,l,+} = n_+(s_k)\, r_{k,l}$ and $M_+(\mathrm{d}\gamma) = n_+(\gamma) M(\mathrm{d}\gamma)$ with

$$n_+(s) = \begin{cases} 1 \text{ if } s \in \mathbb{R} \\ 2 \text{ otherwise} \end{cases} \qquad (5)$$

This latter formulation could appear quite heavy at first glance, but presents many advantages: it ensures the hermitian symmetry; it also yields concise realizations in the time domain without redundancy; finally, it will prove most useful for optimization procedures.

The time-domain simulation of the *finite-dimensional part* of size $\sum_{k=1}^{K} L_k$ is really standard and will not be detailed in the sequel. The time-domain simulation of the *infinite-dimensional part* of these systems can quite easily be done through the following continuous family of *first-order differential systems*, parametrized by $\gamma \in \mathcal{C}_+$:

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(\gamma, t) &= \gamma\, \phi(\gamma, t) + u(t), \quad \phi(\gamma, 0) = 0, \quad (6) \\ y(t) &= \Re e \left(\int_{\mathcal{C}_+} \phi(\gamma, t)\, M_+(\mathrm{d}\gamma) \right), \qquad (7) \end{aligned}$$

which is nothing but an *input* u / *state* ϕ / *output* y representation in the sense of systems theory.

In all the integral equations above, $\mathcal{C}$ is a contour in some left-half complex plane and M is a *measure* on this contour. Once a parametrization has been chosen for the contour, the measure can be decomposed into different parts, such as a purely discrete part (Dirac measures at some points in some left-half *complex* plane) and an absolutely continuous part $\mu(\gamma)$ with respect to the Lebesgue measure $\mathrm{d}\gamma$. A straightforward interpretation can therefore be proposed: $\mu(\gamma)$ plays the role of the residue at the pole $s=\gamma$.

But of course, these representations make sense only if a *well-posedness condition* is fulfilled:

$$\int_{\mathcal{C}_+} \left| \frac{M_+(\mathrm{d}\gamma)}{a+1-\gamma} \right| < \infty \,. \tag{8}$$

We refer to (Staffans, 1994, §5 and §6) for the general theory and (Matignon and Zwart, 2004) for the implications of the well-posedness condition.

When M has a density μ, and the curve $\mathcal{C}$ admits a $\mathcal{C}^1$-regular parametrization $\xi \mapsto \gamma(\xi)$ which is non-degenerate ($\gamma'(\xi) \neq 0$), an analytical computation of μ can be performed from H with

$$\mu(\gamma) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{H(\gamma + \mathrm{i}\gamma'\varepsilon) - H(\gamma - \mathrm{i}\gamma'\varepsilon)}{2i\pi}. \tag{9}$$

Note that $\mu_+(\gamma) = n_+(\gamma)\,\mu(\gamma)$, $\gamma \in \mathcal{C}_+$ (cf. (5)).

2.1.2. Extension of the framework When the well-posedness condition (8) is not met, the representation (1) fails. Nevertheless, an extension can be proposed in some larger mathematical framework, that is, when $\breve{H}(s) = (H(s) - H(0))/s$ admits a representation with $\breve{M}$ satisfying (8). This yields

$$H(s) = s \int_{\mathcal{C}} \frac{\breve{M}(\mathrm{d}\gamma)}{s-\gamma} + H(0)\,, \tag{10}$$

which gives rise to the following representation in the time domain, for $t>0$ and $\gamma \in \mathcal{C}$:

$$\partial_t \phi(\gamma,t) = \gamma\,\phi(\gamma,t) + u(t), \quad \phi(\gamma,0) = 0, \tag{11}$$

$$z(t) = \int_{\mathcal{C}} \partial_t \phi(\gamma,t)\,\breve{M}(\mathrm{d}\gamma) + H(0)\,u(t). \tag{12}$$

In the sequel, the notations $\mathcal{K}_+$,$\mathcal{C}_+$, M_+ and μ_+ are replaced by $\mathcal{K}$,$\mathcal{C}$, M and μ respectively, for sake of conciseness.

2.2 Finite dimensional approximations in continuous and discrete time domain

2.2.1. Continuous time A first method consists in approximating $\phi(\gamma,t)$, $\gamma \in \mathcal{C}$ by

$$\widetilde{\phi}(\gamma,t) = \sum_{p=1}^{P} \phi_p(t)\,\Lambda_p(\gamma), \tag{13}$$

where $\phi_p(t) = \phi(\gamma_p,t)$, $(\gamma_p)_{0\le p\le P+1}$ are sorted with respect to the oriented cut $\mathcal{C}$, and $\{\Lambda_p\}_{1\le p\le P}$ defines *continuous piecewise linear interpolating functions* which are non zero on the piece $]\gamma_{p-1},\gamma_{p+1}[_{\mathcal{C}}$ of the cut $\mathcal{C}$ and such that $\Lambda_p(\gamma_p) = 1$. Convergence results can be proven, see e.g. (Heleschewitz, 2000) for the purely diffusive case $\gamma = -\xi \in \mathbb{R}^-$.

The realizations (6-7) and (12) yield the first-order linear systems of dimension P ($\phi_p(0)=0$),

$$\partial_t \phi_p(t) = \gamma_p\,\phi_p(t) + u(t),\ 1 \le p \le P, \tag{14}$$

$$\widetilde{y}(t) = \Re\mathrm{e} \sum_{p=1}^{P} \mu_p\,\phi_p(t) \tag{15}$$

$$\text{with } \mu_p = \int_{[\gamma_{p-1},\gamma_{p+1}]_{\mathcal{C}}} \mu(\gamma)\Lambda_p(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma. \tag{16}$$

$$\text{or } \widetilde{z}(t) = \Re\mathrm{e} \sum_{p=1}^{P} (\gamma_p \breve{\mu}_p)\phi_p(t) + \breve{\lambda} u(t), \tag{17}$$

$$\text{with } \breve{\lambda} = H(0) + \Re\mathrm{e} \sum_{p=1}^{P} \breve{\mu}_p \tag{18}$$

where $\breve{\mu}_p$ is defined from $\breve{\mu}(\gamma)$ as in (16). Contribution of poles can be performed in the same way with standard finite-order systems, see e.g. (Dauphin *et al.*, 2000). Thus, the *general structure* of the approximated tranfer function is

$$\widetilde{H}_\mu(s) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{P} \left[\frac{\mu_p}{s-\gamma_p} + \frac{\overline{\mu_p}}{s-\overline{\gamma_p}} \right] + \breve{\lambda} \tag{19}$$

with the convention $\mu_p \in \mathbb{R}$ whenever $\gamma_p \in \mathbb{R}$ and where $\breve{\lambda} = 0$ in the non-extended case.

2.2.2. Discrete time We model $u(t)$ as the output of a causal interpolation filter of order Q fed by $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \delta(t-nT_s)$. Classical examples are: a *sample and hold filter (SH)*, namely $u(t) \approx u_n$ for $t_n \le t < t_{n+1}$, or a *linear interpolation (LI)*, namely $u(t) \approx u_n + \frac{t-t_n}{T_s}(u_{n+1}-u_n)$. Then, analytical solutions of (14-19) exist and yield discrete-time models of the form:

$$\phi_p(t_n) = \alpha_p\,\phi_p(t_{n-1}) + \sum_{q=0}^{Q} \beta_{p,q} u(t_{n-q}) \tag{20}$$

$$\widetilde{y}(t_n) = \Re\mathrm{e} \sum_{p=1}^{P} \nu_p \phi_p(t_n), \tag{21}$$

$$\widetilde{z}(t_n) = \Re\mathrm{e} \left(\sum_{p=1}^{P} \alpha_p \breve{\nu}_p \phi_p(t_n) + \breve{\lambda} u(t_n) \right) \tag{22}$$

with the (z-transformed) transfer function $\widetilde{H}_{\lambda,\alpha}(z) =$

$$\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{P} \left[\frac{\sum_{q=0}^{Q} \lambda_{p,q} z^{-q}}{1-\alpha_p z^{-1}} + \frac{\sum_{q=0}^{Q} \overline{\lambda_{p,q}} z^{-q}}{1-\overline{\alpha_p} z^{-1}} \right] + \breve{\lambda} \tag{23}$$

where $\alpha_p = \mathrm{e}^{\gamma_p T_s}$, Q is the order of the filter, and T_s is the sampling period. Coefficients $\beta_{p,q}$ and ν_p are given in tab.1 for (SH) and (LI). Note that

	$\beta_{p,0}$	$\beta_{p,1}$	ν_p
SH	0	1	$\frac{\alpha_p - 1}{\gamma_p}\mu_p$
LI	1	$-\frac{\alpha_p(1-\gamma_p T_s)-1}{\alpha_p-(1+\gamma_p T_s)}$	$\frac{\alpha_p-(1+T_s\gamma_p)}{T_s\gamma_p}\mu_p$

Table 1. Coefficients $\beta_{p,q}$.

coefficients $\beta_{p,q}$ only depend on the choice of the interpolation method, while ν_p depends moreover on the transfer function through the weights μ_p.

3. SPECIALIZED OPTIMIZATION PROCEDURES

More accurate approximations can be performed by optimizing the weights μ_p rather than deriving them from the interpolated state (13), see e.g. (Garcia and Bernussou, 1998; Dunau, 2000). This section is dedicated to define distances that are adapted to each application, taking the performances of main interest into consideration.

3.1 Functional spaces and measures

Thanks to Parseval equality, the norm of a causal distribution h in Sobolev spaces H^s, with $s \in \mathbb{R}$, reads:

$$\|h\|^2_{H^s(\mathbb{R}_t)} = \int_{\mathbb{R}_f} (1 + 4\pi^2 f^2)^s \, |H(2\mathrm{i}\pi f)|^2 \, \mathrm{d}f$$

where H is the Laplace transform of h. Defining $d_s(h, \widetilde{h}) = \|h - \widetilde{h}\|_{H^s(\mathbb{R}_t)}$ gives a family of distances between ideal (h) and approximated ($\widetilde{h}$) systems, for which spectral weightenings $w_s(f) = (1 + 4\pi^2 f^2)^s$ act in very different ways. The case $s = 0$ corresponds to the classical L^2-norm, for which the weightening is uniform on the whole frequency range. The H^1-norm, which requires $h - \widetilde{h}$ to be a $\mathcal{C}^0$-function in the time domain, is more sensitive to high frequencies than low ones. This is the opposite for the H^{-1}-norm, which allows $h - \widetilde{h}$ to be a distribution. More generally, s can be seen as a tuning parameter of the low-and-high frequency balance.

Weightenings can also be viewed as the result of scalings: for instance, considering a logarithmic scale for frequencies, such as in Bode diagrams, results in choosing the measure $\mathrm{d}lnf = \mathrm{d}f/f$, which amounts to use $w(f) = 1/f$.

In practice, such considerations can be used to build *weightenings based on each application*. For instance, $w(f)$ can be adapted and modified according to the following requirements:

- a bounded frequency range $f \in [f^-, f^+]$: $w(f)\mathbf{1}_{[f^-,f^+]}(f)$;
- a frequency log-scale: $w(f)/f$;
- a relative error measurement: $w(f)/|H(2\mathrm{i}\pi f)|^2$
- a relative error on a bounded dynamics: $w(f)/\left(\mathrm{Sat}_{H,\Theta}(f)\right)^2$ where the saturation function $\mathrm{Sat}_{H,\Theta}$ with threshold Θ is defined by

  $$\mathrm{Sat}_{H,\Theta}(f) = \begin{cases} |H(2\mathrm{i}\pi f)| & \text{if } |H(2\mathrm{i}\pi f)| \geq \Theta_H \\ \Theta_H & \text{otherwise} \end{cases}$$

  with $\Theta_H = \Theta \sup_{\{f \,|\, w(f) \neq 0\}} |H(2\mathrm{i}\pi f)|$. Note that a 80 dB-dynamics corresponds to $\Theta = 10^{-4}$;
- a conversion for the extension § 2.1.2: the distance between h and $\widetilde{h}$ for $w(f)$ is the same as the distance between $\breve{h}$ and $\breve{\widetilde{h}}$ for the adapted weightening $4\pi^2 f^2 \, w(f)$.

All these requirements can be cumulated in the appropriate order.

3.2 Regularized criterion with equality constraints

Such distances can lead to ill-conditionned problems. We use standard regularization techniques to cope with this (Walter and Pronzato, 1997), introducing the regularized criterion $\mathcal{C}_R(\mu)$:

$$\mathcal{C}_R(\mu) = \mathcal{C}(\mu) + \sum_{p=1}^{P} \epsilon_p |\mu_p|^2, \tag{24}$$

$$\mathcal{C}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^+} \left| \widetilde{H_\mu}(2\mathrm{i}\pi f) - H(2\mathrm{i}\pi f) \right|^2 w(f) \, \mathrm{d}f. \tag{25}$$

The convention in (19) expresses a realness constraint. But rather than expressing it by means of a Lagrange multiplier, it is more straightforward to decompose the set of poles into the real ones ($1 \leq p \leq P_1$) and others ($1 \leq p - P_1 \leq P_2$ with $P = P_1 + P_2$), and to rewrite and optimize the criterion for the real parameters $\boldsymbol{\mu} = \left(\mu_1, \ldots, \mu_{P_1}, \Re\mathrm{e}(\mu_{P_1+1}), \ldots, \Re\mathrm{e}(\mu_P), \Im\mathrm{m}(\mu_{P_1+1}), \ldots, \Im\mathrm{m}(\mu_P)\right)^t \in \mathbb{R}^{P+P_2}$, as detailed in § 3.3.

Nevertheless, in some applications, it is required for some derivatives $\widetilde{H_\mu}^{(d_j)}$ of an approximation $\widetilde{H_\mu}$ to be exact at prescribed frequency points η_j, $1 \leq j \leq J \leq \frac{1}{2}P_1 + P_2$. Such properties are achieved thanks to a Lagrangian criterion $\mathcal{C}_{R,L}$ by adding

$$\Re\mathrm{e}\left(\boldsymbol{\ell}^* \begin{bmatrix} H^{(d_1)}(2\mathrm{i}\pi\eta_1) - \widetilde{H_\mu}^{(d_1)}(2\mathrm{i}\pi\eta_1) \\ \vdots \\ H^{(d_J)}(2\mathrm{i}\pi\eta_J) - \widetilde{H_\mu}^{(d_J)}(2\mathrm{i}\pi\eta_J) \end{bmatrix} \right), \tag{26}$$

to (24), and optimizing with respect to both the $(P + P_2) \times 1$ vector $\boldsymbol{\mu}$, and $J \times 1$ vector $\boldsymbol{\ell} = [\ell_1, \ldots, \ell_J]^t \in \mathbb{C}^J$. We denote $\boldsymbol{\ell}^* \triangleq \overline{\boldsymbol{\ell}}^t$ as the transpose conjugate.

3.3 Numerical optimization

Numerically, the criterion (25) is computed for frequencies increasing from $f_1 = f_-$ to $f_{N+1} = f_+$, using the approximation

$$\mathcal{C}(\mu) \approx \sum_{n=1}^{N} w_n \left| \widetilde{H_\mu}(s_n) - H(s_n) \right|^2,$$

with $w_n = \int_{f_n}^{f_{n+1}} w(f)\,\mathrm{d}f$ and $s_n = 2\mathrm{i}\pi f_n$ for $1 \le n \le N$. Thus, with matrix notations, the criterion rewrites

$$\mathcal{C}_{R,L}(\boldsymbol{\mu}) = (\boldsymbol{M}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{h})^* \boldsymbol{W} (\boldsymbol{M}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{h}) + \boldsymbol{\mu}^t \boldsymbol{E} \boldsymbol{\mu} + \Re\mathrm{e}\Big(\boldsymbol{\ell}^* \left[\boldsymbol{k} - \boldsymbol{N}\boldsymbol{\mu}\right]\Big), \quad (27)$$

still with $\boldsymbol{M}^* \triangleq \overline{\boldsymbol{M}}^t$ and where

- $\boldsymbol{M}$ is an $N \times (P + P_2)$ matrix, with $M_{n,p} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s_n - \gamma_p} + \frac{1}{s_n - \overline{\gamma_p}}\right]$ for $1 \le p \le P$, and $M_{n,p} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{i}}{s_n - \gamma_{p-P_2}} - \frac{\mathrm{i}}{s_n - \overline{\gamma_{p-P_2}}}\right]$ for $1 \le p - P \le P_2$,
- $\boldsymbol{N}$ is a $J \times (P + P_2)$ matrix, with $N_{j,p} = \frac{(-1)^{d_j}}{2\,d_j!}\left[\frac{1}{(2\mathrm{i}\pi\eta_j - \gamma_p)^{d_j+1}} + \frac{1}{(2\mathrm{i}\pi\eta_j - \overline{\gamma_p})^{d_j+1}}\right]$ if $1 \le p \le P$, and if $P + 1 \le p \le P + P_2$, by $N_{j,p} = \frac{(-1)^{d_j}}{2\,d_j!}\left[\frac{\mathrm{i}}{(2\mathrm{i}\pi\eta_j - \gamma_{p-P_2})^{d_j+1}} - \frac{\mathrm{i}}{(2\mathrm{i}\pi\eta_j - \overline{\gamma_{p-P_2}})^{d_j+1}}\right]$,
- $\boldsymbol{E}$ is a $(P+P_2) \times (P+P_2)$ diagonal matrix, with $E_{p,p} = \epsilon_p$ for $1 \le p \le P$ and, $E_{p,p} = \epsilon_{p-P_2}$ for $P+1 \le p \le P+P_2$,
- $\boldsymbol{W}$ is the $N \times N$ diagonal matrix $\mathbf{diag}(w_n)$,
- $\boldsymbol{h}$ is the $N \times 1$ vector $h_n = H(s_n)$,
- $\boldsymbol{k}$ is the $J \times 1$ vector $k_j = H^{(d_j)}(2\mathrm{i}\pi\eta_j)$.

Solving this least squares problem with the constraint that $\boldsymbol{\mu}$ is real valued yields

$$\boldsymbol{\mu} = \mathcal{M}^{-1}\left[\mathcal{H} + \underline{\boldsymbol{N}}^t \mathcal{N}^{-1}\left(\underline{\boldsymbol{k}} - \underline{\boldsymbol{N}}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{H}\right)\right], \quad (28)$$

where $\mathcal{M} = \Re\mathrm{e}\Big(\boldsymbol{M}^*\boldsymbol{W}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{E}\Big)$, $\mathcal{H} = \Re\mathrm{e}\Big(\boldsymbol{M}^*\boldsymbol{W}\boldsymbol{h}\Big)$ and $\mathcal{N} = \underline{\boldsymbol{N}}\mathcal{M}^{-1}\underline{\boldsymbol{N}}^t$ with $\underline{\boldsymbol{N}}^t = [\Re\mathrm{e}(\boldsymbol{N}^t), \Im\mathrm{m}(\boldsymbol{N}^t)]$ and $\underline{\boldsymbol{k}}^t = [\Re\mathrm{e}(\boldsymbol{k}^t), \Im\mathrm{m}(\boldsymbol{k}^t)]$. Note that (28) reduces to $\boldsymbol{\mu} = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{H}$ without constraints ($J = 0$) and that $\mathcal{N}$ is invertible for non-redundant constraints.

4. APPLICATION TO LOW-COST SIMULATION OF COMPLEX SYSTEMS

4.1 Example 1: an integral representation on $\mathbb{R}^-$

The causal integral operators of fractional order have irrational transfer functions $H(s) = s^{-\beta}$, $0 < \Re\mathrm{e}(\beta) < 1$, with impulse response $h(t) = t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$. Choosing $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ = \mathbb{R}^-$ and $\gamma = -\xi$ yields $\mu(\text{-}\xi) = \mu_+(\text{-}\xi) = \frac{\sin(\beta\pi)}{\pi}\frac{1}{\xi^\beta}$, which fulfills (8), see (Matignon, 1998) for details.

The interpolation method (13-16) is applied with a logarithmic grid from $\xi_{min} = 5.10^{-4}$ to $\xi_{max} = 5.10^3$, first for $P = 10$ ($\circ$), second for $P = 16$ ($\times$, see fig. 1ⓐ). Optimization is applied with $w_{BLR}(f) = \mathbf{1}_{[f_-, f^+]}(f)/(f\,|H(2\mathrm{i}\pi f)|^2)$, which corresponds to a bounded frequency range with a logarithmic scale, combined with a relative error measurement. Results with $P = 10$ only are much better than those of interpolation with $P = 16$ (see fig. 1ⓑ). Other examples with the same cut, such

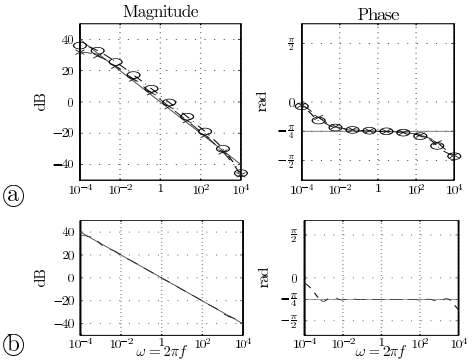


Fig. 1. ⓐ: interpolation. ⓑ: optimization.

as $\tanh(\sqrt{s})/\sqrt{s}$, s^α, $e^{-\sqrt{s}}/\sqrt{s}$ or $e^{-\sqrt{s}}$ detailed in (Hélie and Matignon, 2005b), prove optimization to be more efficient than interpolation.

4.2 Example 2: an integral representation on $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^-$

Some more intricate transfer functions can be met. This is the case for an acoustic bell, the transmission of which is accurately modelled (up to a global delay) by the transfer function H:

$$H(s) = \frac{2R(s)\,e^{s - R(s)}}{s + R(s)} \text{ with } R(s) = \sqrt{s^2 + \varepsilon\, s^{\frac{3}{2}} + 1},$$

where $\varepsilon > 0$ accounts for visco-thermal losses. This function is derived from a PDE with frac-

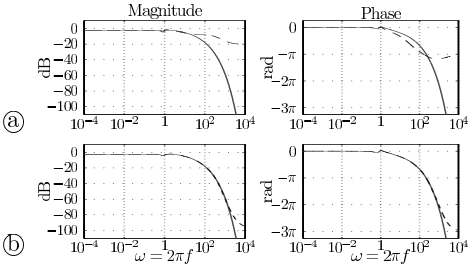


Fig. 2. ⓐ: interpolation. ⓑ: optimization.

tional derivatives (see (Hélie, 2003) for the model and (Haddar *et al.*, 2003) for its theoretical study). It has 3 branching points (0, s_1, $\overline{s_1}$ with $\Re e(s_1) < 0$); two different cuts are investigated (Hélie and Matignon, 2005a): $\mathcal{C} = \mathbb{R}^- \cup \left(s_1 + \mathbb{R}^-\right) \cup \left(\overline{s_1} + \mathbb{R}^-\right)$ and $\mathcal{C} = \mathbb{R}^- \cup [s_1, \overline{s_1}]$. Fig. 2 gives results for $(P_1, P_2) = (4, 8)$. The optimization yields accurate approximations on more than 7 decades and a dynamics of 80dB, with $w_{BLR}(f)$.

4.3 Example3: a compound system with delays

A trumpet-like intrument has been built by chaining a cup, straight and flared pipes and a radiation impedance (Hélie *et al.*, 2003). Algebraic calculations allow to derive a structure composed of pure delays and quadripoles (Mignot, 2005) (see fig. 3). Quadripole $\mathcal{Q}_1$ involves 7 transfer functions with

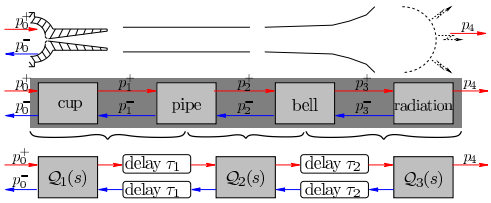


Fig. 3. Trumpet-like instrument

$\mathcal{C}=\mathbb{R}^-$ optimized on $[f_-, f_+] = [20\text{Hz}, 20\text{kHz}]$ with $w_{BLR}(f)$; one is extended (§2.1.2) and $P_1 = 7$; six are not and $P_1 = 5$. $\mathcal{Q}_2$ involves 11 transfer functions; three with $\mathcal{C}=\mathbb{R}^-$ and $P_1=5$; eight with $\mathcal{C}\subset\mathbb{C}^-$ and $(P_1, P_2)=(6, 8)$. $\mathcal{Q}_3$ involves 3 transfer functions with $\mathcal{C}\subset\mathbb{C}^-$ and $(P_1, P_2)=(0, 7)$.

A simulation in real-time has been performed in the Pure-Data environment, using circular buffers for delays and systems (20-22) with (LI)-filters. The impulse response of the transmission ($p_0^+ \mapsto p_4$) is given in fig.4ⓐ for the sampling frequency $f_s = 44.1$kHz. A comparison between its Fourier transform (--) and the exact transmission (-) is displayed on fig.4ⓑ. For Single-Input/Multiple-

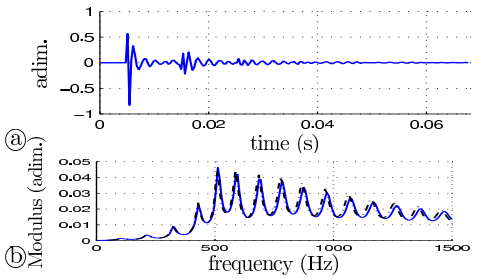


Fig. 4. Transmission. ⓐ: time. ⓑ: frequency.

Ouput systems approximated for the same poles, a cheap state-space representation shares a *common state* (20) from which each output is observed (21-22). This efficiently reduces the cost in $\mathcal{Q}_{1,2,3}$.

5. PERSPECTIVE

The reflexion function is badly approximated in the low frequency range because of its high sensitivity to both the value and the first derivative of transfer functions at $f=0$. So far, adding a high-pass filter is required. Using equality constraints at $f=0$ should properly overcome this problem.

REFERENCES

Dauphin, G., D. Heleschewitz and D. Matignon (2000). Extended diffusive representations and application to non-standard oscillators. In: *Mathematical Theory of Networks and Systems*. Perpignan, France. 10 p.

Duffy, D. G. (1994). *Transform methods for solving partial differential equations*. CRC Press.

Dunau, M. (2000). Représentations diffusives de seconde espèce. DEA Auto. Univ. Toulouse.

Garcia, G. and J. Bernussou (1998). Identification of the dynamics of a lead acid battery by a diffusive model. *ESAIM: Proc.* **5**, 87–98.

Haddar, H., Th. Hélie and D. Matignon (2003). A Webster-Lokshin model for waves with viscothermal losses and impedance boundary conditions: strong solutions. In: *Int. conf. on math. and numerical aspects of wave propagation phenomena*. INRIA. Finland. pp. 66–71.

Heleschewitz, D. (2000). Analyse et simulation de systèmes différentiels fractionnaires et pseudo-différentiels linéaires sous représentation diffusive. PhD thesis. ENST.

Hélie, Th. (2003). Mono-dimensional models of the acoustic propagation in axisymmetric waveguides. *J. Acoust. Soc. Amer.*. **114**, 2633–2647.

Hélie, Th. and D. Matignon (2005a). Diffusive reprentations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS)*. to appear.

Hélie, Th. and D. Matignon (2005b). Representations with poles and cuts for the time-domain simulation of fractional systems and irrational transfer functions *Signal Processing*. to appear.

Hélie, Th. and X. Rodet (2003). Radiation of a pulsating portion of a sphere: application to horn radiation. *Acta Acustica*. **89**, 565-577.

Matignon, D. (1998). Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM: Proc.* **5**, 145–158.

Matignon, D. and H. Zwart (2004). Diffusive systems as well-posed linear systems. In: *Mathematical Theory of Networks and Systems*. Leuven, Belgium.

Mignot, R. (2005). Simulation de propagation d'ondes dans les tubes évasés avec pertes visco-thermiques pour la synthèse sonore en temps réel . Master SDI. Univ. Paris VI.

Staffans, O. J. (1994). Well-posedness and stabilizability of a viscoelastic equation in energy space. *Trans. AMS*. **345**(2), 527–575.

Walter, E. and L. Pronzato, (1997). *Identification of parametric models from experimental data*. Springer-Verlag.

Zwart, H. (2004). Transfer functions for infinite-dimensional systems. *Systems & Control Letters* **52**(3-4), 247–255.

Annexe H

Article de congrès (IEEE WASPAA 2007) : Waveguide Modeling of Lossy Flared Acoustic Pipes : Derivation of a Kelly-Lochbaum Structure for real-time simulations (référence [HMM07b])

WAVEGUIDE MODELING OF LOSSY FLARED ACOUSTIC PIPES: DERIVATION OF A KELLY-LOCHBAUM STRUCTURE FOR REAL-TIME SIMULATIONS

Thomas Hélie, Rémi Mignot[2]

IRCAM & CNRS, UMR 9912,
1, place Igor Stravinsky, 75004 Paris, France
{helie,mignot}@ircam.fr

Denis Matignon

Télécom Paris/TSI & CNRS, UMR 5141
37-39, rue Dareau, 75014 Paris, France
denis.matignon@enst.fr

ABSTRACT

This paper deals with the theory and application of waveguide modeling of lossy flared acoustic pipes. The novelty lies in a refined 1D-acoustic model: the Webster-Lokshin equation. This model describes the propagation of longitudinal waves in axisymmetric acoustic pipes with a varying cross section, visco-thermal losses at the walls, and without assuming plane waves or spherical waves. Solving this model for a section of pipe leads to a quadripole made of four transfer functions which imitate the global acoustic effects. Moreover, defining progressive waves and introducing some "relevant" physical interpretations enable the isolation of elementary transfer functions associated with elementary acoustic effects. From this decomposition, a standard Kelly-Lochbaum structure is recovered and efficient low-cost digital simulations are obtained. Thus, this work improves the realism of the sound synthesis of wind instruments, while it preserves waveguide techniques which only involve delay lines and digital filters.

1. INTRODUCTION

Because sound synthesis by physical models describes the acoustic mechanism of a musical instrument, it faithfully reproduces the behavior of the instrument, especially during attacks and note transitions, contrary to signal processing approaches. Moreover, parametric models allow makers to obtain new virtual instruments and explore new sounds, together with physical validation. However, digital time simulations require intensive computation from signal processors. That is why special care must be taken on the algorithmic complexity to perform real-time sound synthesis.

The aim of the present work is to build the whole resonator of a wind instrument by connecting several systems which imitate the acoustic of sections of pipes. To preserve the causality, the standard digital waveguide approach is used (see e.g. [2, 3]). The difficulty and the novelty is to include subtle, but perceptible, phenomena due to visco-thermal losses at the wall and continuously varying cross-sections (see e.g. [4, 5, 6]). The Webster-Lokshin equation is a 1D-acoustic model which describes the propagation of longitudinal waves in axisymmetric acoustic pipes involving such phenomena [5]. The following work therefore concentrates on recovering a standard Kelly-Lochbaum structure from this model and efficient low-cost digital simulations. The goal is to improve the realism of the sound synthesis of wind instruments using standard waveguide techniques.

[1] This work was carried out during a Masters degree program at University of Paris 6, see [1], and is supported by the CONSONNES project, ANR-05-BLAN-0097-01

[2] Ph.D. student at Telecom Paris / TSI

This paper is organized as follows. In section 2, the acoustic model, the acoustic state, and its decomposition into traveling waves are presented. The quadripole describing a section of pipe is defined and the corresponding analytic transfer functions in the Laplace domain are given. Section 3 describes how a physical interpretation allows the isolation of some elementary acoustic phenomena, leading to a physically meaningful structure of the quadripole. This structure is made of causal filters and a factorization isolates pure delays. In section 4, the concatenation of quadripoles is performed and produces infinite instantaneous loops. This problem is removed using an algebraic computation, allowing for digital time simulation. The analysis of causality and stability are discussed. Section 5 presents the digital approximation of the transfer functions, the simulated structure, and the result of the real-time simulation in the time-domain. Then, this work is validated by comparing the impedance measured on a real instrument to that computed from the model. In section 6, we discuss the case of pipes with a varying cross-section characterized by a negative curvature, a case which involves unstable functions.

2. ACOUSTIC MODEL AND INPUT-OUTPUT REPRESENTATION OF A PIPE SECTION

2.1. Webster-Lokshin model

The Webster-Lokshin model is a mono-dimensional model which characterizes linear waves propagation in axisymmetric pipes, assuming only the quasi-sphericity of isobars near the inner wall (rather than plane waves or spherical waves), and taking into account visco-thermal losses [7, 5, 6]. The acoustic pressure p and the particle velocity v are governed by the following models, given in the Laplace domain:

$$\left(\left[\left(\frac{s}{c_0}\right)^2 + 2\varepsilon(l)\left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon(l)\right] - \partial_l^2\right) r(l)p(l,s) = 0, \quad (1)$$

$$\rho_0\, s\, v(l,s) + \partial_l p(l,s) = 0, \quad (2)$$

where s is the Laplace variable, $l \in [0, L]$ is the space variable measuring the arclength of the wall (but not the usual axis coordinate z, see [5]), $r(l)$ is the radius of the pipe, $\varepsilon(l) = \kappa_0\sqrt{1-r'(l)^2}/r(l)$ quantifies the visco-thermal losses ($\varepsilon(l) \geq 0$, because $|r'(l)| \leq 1$), and $\Upsilon(l) = r''(l)/r(l)$ accounts for the curvature of the pipe.

Note that the standard horn equation [8] corresponds to the nonlossy case $\varepsilon(l) = 0$ with a plane wave approximation so that the arclength l is approximated by the axis coordinate z. Bores and conical pipes are characterized by $\Upsilon(l) = 0$. If $\Upsilon(l)$ is negative, the transfer functions are unstable (see e.g.[9]). This problem is

discussed in section 6. In this paper, unless otherwise stated $\Upsilon(l)$ is assumed to be positive (straight, conical or flared pipes).

For standard conditions, the physical constants are the mass density $\rho_0 = 1.2$ kg.m^{-3}, the speed of sound $c_0 = 344$ m.s^{-1} and the coefficient $\kappa_0 \approx 3.5\ 10^{-4}$ m$^{-\frac{1}{2}}$.

2.2. Traveling waves

Let $\phi^+(l,t)$, $\phi^-(l,t)$ be defined by

$$\begin{bmatrix}\phi^+(l,s)\\ \phi^-(l,s)\end{bmatrix} = \frac{r(l)}{2}\begin{bmatrix}1 & \rho_0 c_0\\ 1 & -\rho_0 c_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p(l,s)\\ v(l,s)\end{bmatrix}. \quad (3)$$

For planar waves traveling inside a nonlossy bore, the acoustic state $\phi^\pm$ corresponds to the standard decoupled progressive planar waves. For the Wester-Lokshin model, these waves are still progressive so that they preserve the causality principle. They are governed by the following equations (see [7, p.59 & apdx. B1]):

$$\left[\frac{s}{c_0} \pm \partial_l\right]\phi^\pm(l,s) = \pm\zeta(l)\phi^\mp(l,s) - \varepsilon(l)\left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{1}{2}}\phi(l,s), \quad (4)$$

where $\zeta(l) = r'(l)/r(l)$. The operator $[s/c_0 \pm \partial_l\,]$ is the traveling operator, and the right-hand side describes the coupling due to the curvature and the visco-thermal losses. Moreover, for bounded excitations, these progressive waves are also bounded, if $\varepsilon \geq 0$ (independently from the sign of Υ, see [10]).

2.3. Transfer matrix of the quadripole

Consider a section of pipe of length L with nearly constant curvature and losses $\Upsilon(l) = \Upsilon$ and $\varepsilon(l) = \varepsilon$, $\forall l \in [0, L]$. The acoustic model (1-2) can be solved analytically [7, p.63]. Then, from (3), the transfer matrix which characterizes the quadripole system with inputs $\phi^+(l=0,s)$, $\phi^-(l=L,s)$ and outputs $\phi^+(l=L,s)$ $\phi^-(l=0,s)$ (see fig. 1) can also be analytically derived [7, p.65]. It yields

$$\begin{bmatrix}\phi^+(L,s)\\ \phi^-(0,s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}T(s) & R^r(s)\\ R^l(s) & T(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi^+(0,s)\\ \phi^-(L,s)\end{bmatrix}, \quad (5)$$

where the transmission T (independent from the direction), the

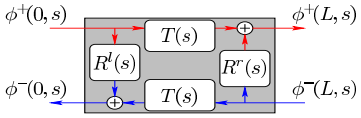


Figure 1: Representation of the quadripole.

left and right reflections, R^l and R^r respectively, are given by

$$T(s) = \left[A_T(s)\cosh(\Gamma(s)L) + B_T(s)\frac{\sinh(\Gamma(s)L)}{\Gamma(s)}\right]^{-1}, \quad (6)$$

$$R^l(s) = \left[A_{R^l}(s)\cosh(\Gamma(s)L) + B_{R^l}(s)\frac{\sinh(\Gamma(s)L)}{\Gamma(s)}\right]\frac{T(s)}{2}, \quad (7)$$

$$R^r(s) = \left[A_{R^r}(s)\cosh(\Gamma(s)L) + B_{R^r}(s)\frac{\sinh(\Gamma(s)L)}{\Gamma(s)}\right]\frac{T(s)}{2}, \quad (8)$$

where $\Gamma(s)$ is a square root of $\Gamma(s)^2 = (\frac{s}{c_0})^2 + 2\varepsilon(\frac{s}{c_0})^{\frac{3}{2}} + \Upsilon$, and A_T, B_T, A_R, B_{R^l}, and B_{R^r} are simple functions of: s, ζ_0, ζ_L, $\Gamma(s)^2$ and c_0.

3. DECOMPOSITION INTO FILTERS AND DELAYS

3.1. Acoustic interpretation of the progressive waves

The transfer functions R^r, R^l, and T represent the global effect of the whole section of pipe on the progressive waves $\phi^\pm$. Nevertheless, some elementary effects can be isolated using the following physical interpretations (see Fig.2):

At the left extremity ($l = 0$), the incident wave ϕ_0^+ is partially reflected in the opposite direction (modeled in Fig.2 by the transfer function R_{le}) and is partially transmitted into the pipe section (T_{le}). Then, this *transmitted part* travels inside the pipe until the right extremity located at $l = L$ (T_p^+), before being partially reflected (R_{ri}) and partially transmitted (T_{ri}) outside the pipe. Symmetrically, the incident wave ϕ_L^- undergoes similar phenomena.

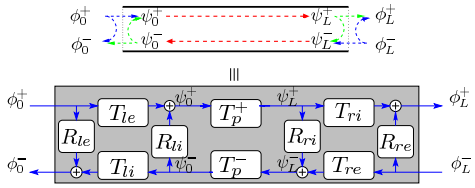


Figure 2: Physical interpretation and its representation with filters

The figure 2 compiles these phenomena and includes all the contributions (the indexes i and e mean respectively *internal* and *external*; the functions T_p^+ and T_p^- symbolize respectively the forward and the backward propagation transmission through the pipe).

The quadripoles described in figures 1 and 2 are equivalent if the following algebraic equations holds:

$$T = T^+ = \frac{T_{le}\,T_{ri}\,T_p^+}{1 - R_{ri}\,R_{li}\,T_p^-\,T_p^+} \quad (9)$$

$$= T^- = \frac{T_{re}\,T_{li}\,T_p^-}{1 - R_{ri}\,R_{li}\,T_p^-\,T_p^+}, \quad (10)$$

$$R^l = R_{le} + \frac{R_{ri}\,T_{le}\,T_{li}\,T_p^+\,T_p^-}{1 - R_{ri}\,R_{li}\,T_p^-\,T_p^+}, \quad (11)$$

$$R^r = R_{re} + \frac{R_{li}\,T_{re}\,T_{ri}\,T_p^+\,T_p^-}{1 - R_{ri}\,R_{li}\,T_p^-\,T_p^+}. \quad (12)$$

These equations do not lead to a unique identification of (T_{li}, R_{li}, T_{le}, R_{le}, T_p^+, T_p^-, T_{ri}, R_{ri}, T_{re}, R_{re}) from (6-8). Nevertheless, additional meaningful assumptions cope with this problem.

3.2. Identification of the transfer functions

Assuming the following hypotheses yields a unique identification:

(H1) The pressure continuity $\phi_l^+ + \phi_l^- = \psi_l^+ + \psi_l^-$ for $l \in \{0, L\}$ is required (see Fig. 2), so that *every reflection r and every transmission t fed by the same input are such that $t = 1 + r$*.

(H2) The left-hand side functions depend only on the *left parameter* ζ_0. Respectively, the right-hand side functions depend only on the *right parameter* ζ_L.

(H3) The propagation transfer functions $T_p^\pm$ include a pure delay operator: $T_p(s) = \widetilde{T}_p(s)\,e^{-sL/c_0}$, where $\widetilde{T}_p(s) = e^{-(\Gamma(s) - s/c_0)L}$ stays causal and stable, see section 4.3.

In this case, the unique solution is:

$$T_p^+(s) = T_p^-(s) = T_p(s) = \mathrm{e}^{-\Gamma(s)L}, \quad (13)$$

$$R_{re}(s) = -\frac{\Gamma(s) - \frac{s}{c_0} - \zeta_L}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} - \zeta_L} = 1 - T_{re}(s), \quad (14)$$

$$R_{le}(s) = -\frac{\Gamma(s) - \frac{s}{c_0} + \zeta_0}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} + \zeta_0} = 1 - T_{le}(s), \quad (15)$$

$$R_{ri}(s) = \frac{\Gamma(s) - \frac{s}{c_0} + \zeta_L}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} - \zeta_L} = 1 - T_{ri}(s), \quad (16)$$

$$R_{li}(s) = \frac{\Gamma(s) - \frac{s}{c_0} - \zeta_0}{\Gamma(s) + \frac{s}{c_0} + \zeta_0} = 1 - T_{li}(s). \quad (17)$$

Note that, contrary to (6-8), these functions are not functions of $\Gamma(s)^2$. In the following, we choose to define $\Gamma(s)$ for $s \in \mathbb{C}_0^+ = \{s \in \mathbb{C} \,|\, \mathcal{R}e(s) > 0\}$, as the unique analytic continuation of the positive square root of $\Gamma(s)^2$ for $s \in \mathbb{R}^+$. The analyticity for $\mathcal{R}e(s) > 0$ holds because $\Gamma(s)$ has no branching points in $\mathbb{C}_0^+$, if $\Upsilon \geq 0$. This defines causal stable systems (see [6] for details).

4. BUILDING A WHOLE RESONATOR

4.1. Concatenating quadripoles

The whole resonator of a wind instrument with radius $r^*(l)$ is first approximated by the concatenation of K sections of pipes with constant parameters ϵ_k, Υ_k and length L_k ($1 \leq k \leq K$), such that the approximated radius $r(l)$ is $\mathcal{C}^1$-regular. This implies that $\zeta = r'/r$ is continuous with respect to l, that is, $\zeta_r^{(k)} = \zeta_l^{(k+1)}$.

Assuming the continuity of the pressure and the flow, the virtual resonator is built by successively connecting the quadripoles $\mathbf{Q}_k$ (see Fig.3), associated to the corresponding sections of pipe.

4.2. Removing infinite instantaneous loops

Connecting two quadripoles creates an instantaneous loop which cannot be simulated digitally (see Fig.3, top). This difficulty is overcome using algebraic calculations (see [6]) which lead to the structure presented in Fig.3 (bottom), where a reflection function

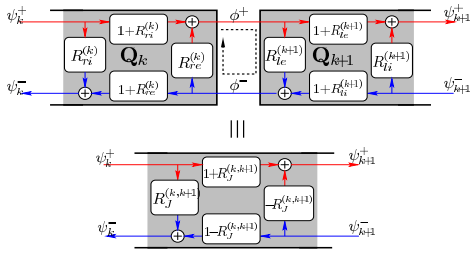


Figure 3: Connecting quadripoles and removing instantaneous loops

of the junction $R_J^{(k,k+1)}$ is introduced and given by:

$$R_J^{(k,k+1)}(s) = \frac{\Gamma_{k+1}(s) - \Gamma_k(s)}{\Gamma_{k+1}(s) + \Gamma_k(s)}, \quad (18)$$

and where Γ_k is the function Γ with the losses and the curvature coefficients of the quadripole k, characterized by a length L_k and coefficients $\varepsilon_k, \Upsilon_k$.

4.3. Stability and causality analysis

It is proven in [1] that for all section k such that $\Upsilon_k \geq 0$, the function $\Gamma_k(s)$ satisfies $\mathcal{R}e(\Gamma_k(s)) > 0$ and $\mathrm{sign}(\mathcal{I}m(\Gamma_k(s))) = \mathrm{sign}(\mathcal{I}m(s))$, for all $s \in \mathbb{C}_0^+$. From this, it can be deduced that the functions $R_J^{(k,k+1)}$ and T_p^k are such that $|R_J^{(k,k+1)}(s)| < 1$ and $|T_p^k(s)| < 1$, for all $s \in \mathbb{C}_0^+$ and that they both define stable systems. Moreover, their asymptotic expansions for $|s| \to +\infty$ with $s \in \mathbb{C}_0^+$ make it possble to prove the causality of the associated systems (see [6, 1]).

Finally, the whole system (including all the quadripoles) is proven to be causal. Nevertheless, its global stability must still be proven (from the previous inequalities). This will be the object of a future, in-depth study. At present, all numerical simulations have satisfied this property.

5. APPROXIMATION AND DIGITAL SIMULATION

5.1. Diffusive representation and approximation

If $\Upsilon = 0$, the function Γ has one branching point $s = 0$. We choose the cut as $\mathbb{R}^-$ to preserve the hermitian symmetry. Thereof, every transfer function has a continuous line of singularities on $\mathbb{R}^-$. The residues theorem shows that these functions are represented by a class of infinite-dimensional system, called *Diffusive Representations* [11]. For any diffusive representation $H(s)$ which is analytic on $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$:

$$H(s) = \int_0^\infty \frac{\mu_H(\xi)}{s + \xi} \mathrm{d}\xi, \quad (19)$$

$$\mu_H(\xi) = \frac{1}{2i\pi}\{H(-\xi + i0^-) - H(-\xi + i0^+)\}. \quad (20)$$

In [12], it is proposed to approximate such diffusive representations by finite-dimensional approximations, given by $\widetilde{H}_\mu(s) = \sum_{j=1}^{j=J} \frac{\mu_j}{s+\xi_j}$, where J is the number of poles, $-\xi_j \in \mathbb{R}^-$ is the position of the pole number j and μ_j is its weight. The poles are placed in $\mathbb{R}^-$ with a logarithmic scale, and the weights μ_j are obtained by a least-square optimization in the Fourier domain.

If $\Upsilon > 0$, Γ has two more branching points, which are complex conjugate. In this case, the diffusive representations are approximated with a finite sum of first and second order differential systems. Finally, a digital version is implemented using standard numerical approximations (see [6]).

5.2. Real-time simulation

According to [13],the quadripole in figure 3 (bottom) can be rewritten as in figure 4. This structure allows a significant reduction of the number of filters implemented and so decreases the processor use for the real-time simulation.

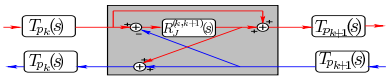


Figure 4: Simulated structure of the junction quadripole

The figure 5 shows the impulse responses of a virtual instrument made of a mouth-piece[3], a bore, a bell with constant curvature, and a radiation impedance [15]. P_{mp}^{-} is the backward pressure from the mouth-piece, and P_r is the radiated pressure.

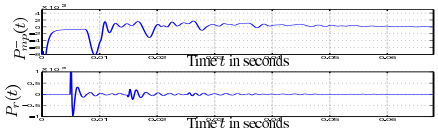


Figure 5: Impulse responses of the resonator

The figure 6 shows the comparison of the input impedance measured on a real trombone[4] with the input impedance computed from the model (with or without losses) for a resonator described by five sections of pipe. The parameters of the pipe sections have been tuned from the geometrical shape measured on the real instrument. The computed impedance fits with measurements if realistic losses are included ($\varepsilon > 0$). Otherwise ($\varepsilon = 0$), the quality factor of the resonances are significantly overestimated. Furthermore, using cones rather than flared pipes would shift the frequencies of the resonances, unless the number of sections of pipe are increased. This highlights the accuracy of the Webster-Lokshin model compared to more simplified and approximated models: in terms of sound quality, using five cones would detune the instrument and discarding losses would lead to more metallic and synthetic sounds.

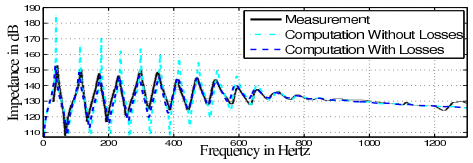


Figure 6: Measured and computed impedances with/without losses

A real-time version of this has been implemented in C-language (plug-in for Pure Data).

6. CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES

In this paper, an efficient real-time simulation of flared acoustic pipes using a Kelly-Lochbaum structure and digital waveguides has been proposed for a Webster-Lokshin acoustic model. Comparisons between numerical results and experimental measures on a trombone prove to be accurate.

For negative curvatures Υ, the stability of the quadripole in fig.1 is preserved, but the elementary transfer functions (13-17) are unstable. As a consequence, the Kelly-Lochbaum structure in Fig.4 is useless in this case. This problem is well-known [16, 9] and understood [17]: the elementary functions govern the waves propagation in pipes with infinite length; they are unstable if the pipe is convergent. Nevertheless, as the global quadripole proves to be stable, stable decompositions is not hopeless: further works will be carried out to cope with this problem.

[3]The mouth-piece is modeled by an acoustic mass, resistance and compliance in the low frequency approximation, see [14]

[4]These data correspond to a *Courtois* trombone. The authors thank René Caussé for having given these data.

Acknowledgment

The authors thank Deborah Lopatin for proofreading this paper.

7. REFERENCES

[1] R. Mignot, "Modélisation de résonateurs d'instruments à vent," Master M2 ATIAM, Université Paris 6, Paris, 2006.

[2] J. O. Smith, "Physical modeling synthesis update," *Computer Music Journal*, vol. 20, no. 2, pp. 44–56, 1996, MIT Press.

[3] V. Välimäki, "Discrete-time modeling of acoustic tubes using fractional delay filters," Ph.D. dissertation, Helsinski University of Technology, 1995.

[4] J.-D. Polack, "Time domain solution of Kirchhoff's equation for sound propagation in viscothermal gases: a diffusion process," *J. Acoustique*, vol. 4, pp. 47–67, Feb. 1991.

[5] T. Hélie, "Unidimensional models of acoustic propagation in axisymmetric waveguides," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 114, pp. 2633–2647, 2003.

[6] T. Hélie and D. Matignon, "Diffusive reprentations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with viscothermal losses," *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 16, pp. 503–536, jan 2006.

[7] T. Hélie, "Modélisation physique des instruments de musique en systmes dynamiques et inversion," Ph.D. dissertation, Université Paris-Sud, Orsay, France, 2002.

[8] A. Webster, "Acoustic impedance and the theory of horns and of the phonograph," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S*, vol. 5, 1919.

[9] E. Ducasse, "An alternative to the traveling-wave approach for use in two-port descriptions of acoustic bores," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 112, pp. 3031–3041, 2002.

[10] T. Hélie, "Ondes découplées et ondes progressives pour les problèmes mono-dimensionnels d'acoustique linéaire," in *CFA*, Tours, France, 2006.

[11] G. Montseny, "Diffusive representation of pseudo-differential time-operators," *ESAIM*, vol. 5, pp. 159–175, 1998.

[12] T. Helie, D. Matignon, and R. Mignot, "Criterion design for optimizing low-cost approximations of infinite-dimensional systems: Towards efficient real-time simulation," *Int. Journal of Tomography and Statistics*, pp. 13–18, 2007.

[13] J. D. Markel and A. H. Gray, "On autocorrelation equations as applied to speech analysis," *IEEE Trans. Audio and Electroacoust.*, vol. AU-21, no. 2, pp. pp. 69–79, Apr 1973.

[14] N. H. Fletcher and T. D. Rossing, *Physics of musical instruments*. New York: Springer Verlag, 1991.

[15] T. Hélie and X. Rodet, "Radiation of a pulsating portion of a sphere: application to horn radiation," *Acta Acustica*, vol. 89, pp. 565–577, 2003.

[16] D. Berners, "Acoustics and signal processing techniques for physical modeling of brass instruments," Ph.D. dissertation, Standford University, 1999.

[17] J. Gilbert, J. Kergomard, and J. D. Polack, "On the reflection functions associated with discontinuities in conical bores," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 04, 1990.

Annexe I

Article de congrès (IEEE Med 2008) : Stable Realization of a Delay System Modeling a Convergent Acoustic Cone (référence [MHM08b])

Stable Realization of a Delay System Modeling a Convergent Acoustic Cone

Rémi Mignot, Thomas Hélie, and Denis Matignon

***Abstract*— This paper deals with the physical modeling and the digital time simulation of acoustic pipes. We will study the simplified case of a single *convergent* cone. It is modeled by a linear system made of delays and a transfer function which represents the wave reflection at the entry of the cone.**

According to [1], the input/output relation of this system is causal and stable whereas the reflection function is *unstable*.

In the continuous time-domain, a first state space representation of this delay system is done. Then, we use a change of state to separate the unobservable subspace and its orthogonal complement, which is observable. Whereas the unobservable part is unstable, it is proved that the observable part is stable, using the *D-Subdivision* method. Thus, isolating this latter observable subspace, to build the minimal realization, defines a stable system. Finally, a discrete-time version of this system is derived and is proved to be stable using the *Jury criterion*.

The main contribution of this work is neither the minimal realization of the system nor the proofs of stability, but it is rather the solving of an old problem of *acoustics* which has been achieved using standard tools of *automatic control*.

I. INTRODUCTION

We are interested in the physical modeling of wind instruments in order to perform the digital time simulation of the acoustic behavior of the resonator. We use the digital waveguides approach (cf. [2]), which is well adapted for sound synthesis. In two references (cf. [3], [4]), it has been proposed to concatenate elementary conical pipes, in order to build the complete tube with a refined approximation of the tube radius. Wave propagations are modeled by a pure delay operator (with or without damping), and the wave reflections at junctions of cones are modeled by first-order transfer functions.

Unfortunately, if the slope difference between two adjoining cones is negative, a problem occurs: although the wave propagation and the physics is conservative (and thus input/output relations for a piece of pipe define stable systems), the reflection at the junction is unstable and cannot yield, at least straightforwardly, stable numerical simulations.

In [1], this paradox is explained for a single *convergent* cone and a calculation method is proposed. But, this solution is not satisfactory for numerical simulation in time domain on an infinite time range. In [3], a simulation which proves to be stable in practice is proposed. But, the stability of the digital system is only "qualitatively justified" (because of the physical stability of the modeled system) and no proof is given. In [4], the digital time-simulation is performed using a numerical convolution by the impulse response of the global reflection of pieces of pipe. Because the global reflection is stable, this method ensures the stability for digital simulation on an infinite horizon. But the CPU cost is so high that it prevents real-time simulation.

In this paper, we consider the simplified case of the convergent cones as in [1], we derive a low-cost simulation which reveals to be similar to that of [3], and we prove stability.

The paper is organized as follows: in section II, we present the truncated convergent cone, and according to the acoustic equations, we give the analytical expressions of the transfer function in the Laplace domain. In section III, we build a state space representation of this system, and we show that the unobservable subpart is unstable. Then we derive the minimal realization with its orthogonal complementary subspace which corresponds to an observable substate. Section IV gives the proof of the stability of this observable substate, using the D-Subdivision method. Section V briefly presents the discrete-time approximation of the minimal realization and gives outlines of the proof of stability of this digital system, using the Jury criterion. In section VI, we discuss future works for the stability proof of concatenation of several conical pieces of pipe.

II. ACOUSTIC MODEL OF A SINGLE CONE

A. Acoustics Equations

In lossless conical pipes, the acoustic pressure p and the particular velocity v are characterized by the *horn equation* (cf. [5], [4]) and Euler equation:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(p(x,t)) = -2\frac{r'(x)}{r(x)}\frac{\partial}{\partial x}p(x,t), \quad (1)$$

$$\rho_0\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}p(x,t) = 0. \quad (2)$$

In this one-dimensional acoustic model, x is the axis coordinate of the cone, r is the radius, $c_0 = 340 m.\mathrm{s}^{-1}$ is the speed of sound and $\rho_0 = 1.2 kg.m^{-3}$ is the mass density.

B. Traveling Waves

Let $\phi^+(x,t)$ and $\phi^-(x,t)$ be defined by:

$$\begin{bmatrix}\phi^+(x,t)\\ \phi^-(x,t)\end{bmatrix} := \frac{r(x)}{2}\begin{bmatrix}1 & \rho_0 c_0\\ 1 & -\rho_0 c_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p(x,t)\\ v(x,t)\end{bmatrix}. \quad (3)$$

This work is supported by the CONSONNES project, ANR-05-BLAN-0097-01

Rémi Mignot and Thomas Hélie are with IRCAM & CNRS, UMR 9912, 1, place Igor Stravinsky, 75004 Paris, France {mignot,helie}@ircam.fr

D. Matignon is with University of Toulouse; Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, Applied Mathematics training unit; 10, av. E. Belin 31055 Toulouse Cedex 4, France. denis.matignon@isae.fr

Rémi Mignot is a Ph.D. student at Télécom Paris/TSI.

For planar waves traveling inside a lossless bore, the acoustic state $\phi^{\pm}$ corresponds to the standard decoupled progressive planar waves. Inside conical bore, these waves are still progressive so that they preserve the causality principle.

C. Junction of Pipes

At the junction of a cylinder and a cone, the traveling waves are partially reflected in the opposite direction and are partially transmitted to the other side of the junction. In this work, we only consider junction with section continuity.

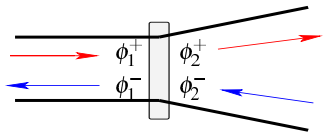


Fig. 1. Junction of a cylinder and a cone

With the pressure and the flow continuity on both sides, we get the analytical expressions of the reflections and transmissions at junctions (cf. [4]), which leads to the following scattering matrix in the Laplace domain:

$$\begin{bmatrix} \phi_1^-(s) \\ \phi_2^+(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) & 1+R(s) \\ 1+R(s) & R(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^+(s) \\ \phi_2^-(s) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\text{with } R(s) = \frac{\alpha}{s-\alpha}, \tag{5}$$

where $\alpha := -\frac{c_0}{2}\frac{r'}{r_j}$, r' is the slope of the cone, r_j is the radius at the junction and s is the Laplace variable.

In the case of a convergent cone, $r' < 0$, α is positive and the junction reflection $R(s)$ is unstable.

D. Case of a Truncated Convergent Cone

To simplify the study, consider a simple case where a truncated convergent cone of length L is connected to a cylinder and is terminated by a zero impedance, as Fig. 2 shows. In [1] the same case is presented (with different notations).

The progressive waves are decoupled, the traveling effect is modeled by a pure delay operator $e^{-\tau s}$, where $\tau = L/c_0$, and the zero impedance corresponds to a reflection coefficient which is -1. Figure 3 represents the structure of the system.

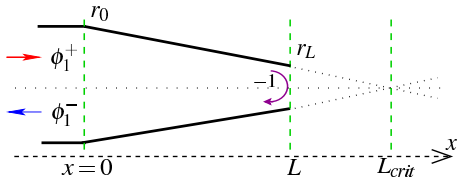


Fig. 2. Truncated convergent cone

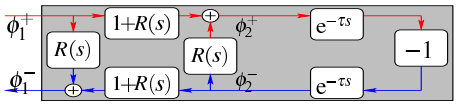


Fig. 3. Structure of the truncated convergent cone

The calculation of the *global* reflection, $R_g(s)$, of the system gives the following analytical expressions:

$$\begin{aligned} R_g(s) &:= \frac{\phi_1^-(s)}{\phi_1^+(s)} = R(s) - \frac{\left(1+R(s)\right)^2 e^{-2\tau s}}{1+R(s)\,e^{-2\tau s}} \\ &= \frac{\alpha - (s+\alpha)\,e^{-Ts}}{s-\alpha+\alpha e^{-Ts}}. \end{aligned} \tag{6}$$

where $T := 2\tau$. We define L_{crit} the length for which the radius of the right end is zero, $r(L_{crit}) = 0$. It is given by $L_{crit} = -r_0/r' = c_0/(2\alpha)$, as $r' = (r_L - r_0)/L$.

Whereas the junction reflection $R(s)$ is unstable, numerical study reveals that the *global* reflection $R_g(s)$ is stable with $L < L_{crit}$. This **paradox** is well-known and has been explained in [1]. The transfer function $R(s)$ represents the reflection due to the slope discontinuity at the junction of two anechoic tubes. However, a convergent cone cannot be physically anechoic, and the stability, or the causality, cannot be ensured. Nevertheless, the successive forward and backward waves propagations through the truncated cone stabilize the *global* reflection of the system.

In spite of the input/output stability, for the simulation of the system, it is absolutely necessary to study the stability of the relations between the input and the substates.

E. Adimensional Problem

Now we define the following adimensional problem:

Original variable (unit)	T (s)	s (s^{-1})	α (s^{-1})
Adimensional variable	$\underline{T} := 1$	$\underline{s} := sT$	$\xi := \alpha T$

and we define the adimensional version of every function X by $\underline{X}(\underline{s}) := X(\underline{s}/T)$.

Remarks: Firstly, we can notice that the case $\xi = 1$ corresponds to the critical case where $T = T_{crit} := 2L_{crit}/c_0$. Secondly, the expressions of $\underline{R}(\underline{s})$ and $\underline{R}_g(\underline{s})$ depend only on one coefficient ξ. This shows that stability results will be expressed in terms of $\alpha T = \xi$ only.

The change of variable $\underline{s} = sT$ preserves the Laplace domain of stability ($\Re e(\underline{s}) > 0 \Leftrightarrow \Re e(s) > 0$), since $T > 0$.

To simplify notations, except notification, $\underline{s}$ is renoted s in the following.

III. STATE-SPACE REPRESENTATION AND MINIMAL REALISATION

A. Equations of the System

In the adimensional version of equation (4), let's replace the notation $\underline{\phi}_1^+$, $\underline{\phi}_1^-$, $\underline{\phi}_2^+$ and $\underline{\phi}_2^-$ by respectively: u, y, e_1 and e_2. Where u is the input of the system and y is the output. Equation (4) of the junction becomes:

$$\begin{cases} y &= \underline{R}(s)u + \underline{R}(s)e_2 + e_2, \\ e_1 &= \underline{R}(s)u + \underline{R}(s)e_2 + u, \end{cases}$$

with $\underline{R}(s)=\xi/(s-\xi)$. Defining the substates of the system x_1 and x_2 as $x_1:=\underline{R}(s)u$ and $x_2:=\underline{R}(s)e_2$, and replacing e_2 by $e_2=-\mathrm{e}^{-s}e_1$, we get the following representation of the system:

$$\left\{\begin{array}{rcl} sX(s) &=& A(s)X(s)+B(s)u(s),\\ y(s) &=& C(s)X(s)+D(s)u(s),\end{array}\right. \tag{7}$$

with $X=[x_1,x_2]^{\mathrm{T}}$ is the state vector. A,B,C and D correspond to linear operators, they are given by the following matrices:

$$A(s) = \begin{bmatrix}\xi & 0\\ -\xi\mathrm{e}^{-s} & \xi(1-\mathrm{e}^{-s})\end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$B(s) = \begin{bmatrix}\xi\\ -\xi\mathrm{e}^{-s}\end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$C(s) = \begin{bmatrix}1-\mathrm{e}^{-s} & 1-\mathrm{e}^{-s}\end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$D(s) = -\mathrm{e}^{-s}. \tag{11}$$

Thus (7) is a state-space representation of a linear delay-differential system. In order to study the stability of all internal variables of the system, outputs and substates, we must study the eigen-values of the matrix $A(s)$ which are the roots of the characteristic function:

$$\det\left(sI_2-A(s)\right)=(s-\xi)\left(s-\xi+\xi\mathrm{e}^{-s}\right). \tag{12}$$

In the case of convergent cones, $\xi>0$, the matrix $A(s)$ has at least one positive eigen-value, and the input/state relation is not stable. In a first step, it is necessary to rewrite the system in order to isolate this instability.

B. Kalman's Form

By studying the observability of the previous system, we notice that the dimension of the unobservable subspace is 1. So, because we are only interested in the input/output relation, it is possible to reduce the dimension of the system by isolating the unobservable subspace. We define the following change of variables:

$$Z=\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=QX=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, \tag{13}$$

thus the dynamic matrix and the observation matrix become:

$$A^z(s) = \begin{bmatrix}\xi(1-\mathrm{e}^{-s}) & 0\\ \xi\mathrm{e}^{-s} & \xi\end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$C^z(s) = \begin{bmatrix}1-\mathrm{e}^{-s} & 0\end{bmatrix}. \tag{15}$$

This form of the system is the canonical form for the observability, which is here the Kalman's form (cf. [6]). We notice that z_1 is decoupled from z_2, and the latter does not affect the output. z_1 is an observable substate and z_2 is an unobservable substate. So it is not necessary to simulate z_2, because only z_1 acts on the output.

C. Minimal Realization

Eliminating the substate z_2, we get the *minimal realization* which leads to:

$$\left\{\begin{array}{rcl} sz_1(s) &=& \xi(1-\mathrm{e}^{-s})z_1(s)+\xi(1-\mathrm{e}^{-s})u(s),\\ y(s) &=& (1-\mathrm{e}^{-s})z_1(s) - \mathrm{e}^{-s}u(s).\end{array}\right. \tag{16}$$

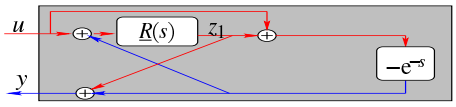


Fig. 4. Structure of the minimal realization

This system corresponds to the structure in Fig.4, where $\underline{R}(s)=\xi/(s-\xi)$. We notice that the minimal realization corresponds to the so-called *Kelly-Lochbaum* structure which is very efficient and used in waveguide simulations (cf. [7]).

Remark: This result is not new and the system (7) seems naive and artificial, but the reasoning explained here, is interesting in the case of more complex acoustic models as discussed in conclusion.

The characteristic equation of this system is:

$$d(s):=s-\xi+\xi\mathrm{e}^{-s}=0. \tag{17}$$

From this system, we define two transfer functions:

$$\underline{F}(s) := \frac{z_1(s)}{u(s)}=\frac{\xi(1-\mathrm{e}^{-s})}{s-\xi+\xi\mathrm{e}^{-s}}, \tag{18}$$

$$\underline{R}_g(s) := \frac{y(s)}{u(s)}=\frac{\xi-(s+\xi)\mathrm{e}^{-s}}{s-\xi+\xi\mathrm{e}^{-s}}. \tag{19}$$

We notice that this reduction has removed an unstable root because the factor $(s-\xi)$ has disappeared. Now we must study the roots of the characteristic equation (17), (which include the poles of the two previous transfer functions).

IV. STABILITY STUDY IN CONTINUOUS TIME

A. Numerical Observations and Interpretation

Numerically, we noticed that all roots of the characteristic equation, $d(s)=0$ (cf. (17)), are stable (negative real part), except one, which is stable when $\xi<1$ but which becomes unstable when $\xi>1$.

According to this observation, the upper boundary of ξ which ensures the system stability, is $\xi=1$. It corresponds to the critical length, L_{crit}, for which the radius of the convergent cone is zero (and becomes negative beyond L_{crit}). Thus a pipe with $L>L_{crit}$ is physically unrealizable, and the stability cannot be guaranteed by a physical validation.

The whole section is devoted to prove what we have brought to light by a numerical way.

B. D-Subdivision Method

To study the stability of the system, we have to determine the position of the roots of the characteristic function with respect to the imaginary axis. But it is not necessary to express them analytically, we just have to check how many roots have positive real part. The *D-Subdivision* method makes such an analysis possible (cf. [8], [9]).

Consider a general system characterized by a characteristic polynomial of the dependent variables $s\in\mathbb{C}$ and e^{-s}, with real coefficients $\{a_j\}$. Since the roots position moves continuously when the values of parameters vary continuously, the number of unstable roots changes when one or several roots appear on the imaginary axis. So it is possible to divide the

space of parameters $\{a_j\}$ into *domains* in which the number of unstable roots is constant. Their *boundaries* are thus given, for one fixed T, by:

$$\left\{a_j \in \mathbb{R} / \exists \omega \in \mathbb{R}, d(i\omega) = 0\right\}. \tag{20}$$

Using the *D-Subdivision* method we prove the following

Theorem: **Characteristic equation (17) has no root with strictly positive real part when $\xi < 1$.** That is,

$$\forall \xi < 1 \text{ and } \forall s \in \mathbb{C} / \Re\mathrm{e}(s) > 0, \quad d(s) = s - \xi + \xi \mathrm{e}^{-s} \neq 0.$$

C. Proof

Let's define the following function:

$$G_{\beta,\gamma}(s) := s - \beta + \gamma \mathrm{e}^{-s}. \tag{21}$$

For educational purposes, it is interesting to duplicate the coefficient ξ into (β,γ); it allows to represent every root.

To know the stability *domain* of the function $G_{\beta,\gamma}(s)$ we have to determine the *boundaries* of *domains* in the β,γ-*plane*. That is obtain a characterization of all the solutions of "$\exists \omega \in \mathbb{R} / G_{\beta,\gamma}(i\omega) = 0$" in function of β and γ.

A first obvious *boundary* is given by $\beta = \gamma$. It corresponds to a single root at $s = 0$. Using the case where $\gamma = 0$ and $\beta < 0$, we can verify that this root is on the left side of the imaginary axis for $\gamma < \beta$ and goes to the right side for $\gamma > \beta$. This *boundary* is represented by curve (b1) in Fig. 5.

The other *boundaries* are given by solving $G_{\beta,\gamma}(i\omega) = 0$ with respect to ω:

$$G_{\beta,\gamma}(i\omega) := i\omega + \beta - \gamma(\cos(\omega) - i\sin(\omega)) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta - \gamma\cos(\omega) &= 0, \\ \omega - \gamma\sin(\omega) &= 0. \end{cases} \tag{22}$$

This gives the *boundaries* curves, parametrized by $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \beta(\omega) &= \omega\cot(\omega), \\ \gamma(\omega) &= \omega/\sin(\omega). \end{cases} \tag{23}$$

$\beta(\omega)$ and $\gamma(\omega)$ are even functions, these curves are identically described once for $\omega \in \mathbb{R}^-$ and once for $\omega \in \mathbb{R}^+$. They correspond to the passing of two complex conjugate roots through the imaginary axis, $-i\omega$ and $i\omega$. Figure 5 shows the *boundaries* and the number P of unstable roots in each *domain*. Curve (b2) represents the first boundary $(\omega \in]-\pi,\pi[)$.

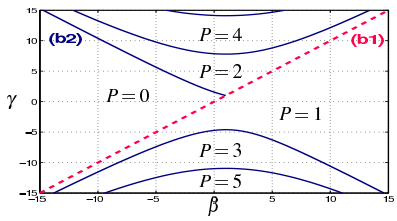


Fig. 5. Domains of Subdivision.

Since $d(s) = G_{\xi,\xi}(s)$, our particular case is on boundary (b1) (i.e. $\xi = \beta = \gamma$), and so it is at the limit of the stability because there is a single root at $s = 0$.

This line crosses boundary (b2) at the point $(\beta(0), \gamma(0)) = (1,1)$, another root which is stable when $\beta = \gamma < 1$ becomes unstable when $\beta = \gamma > 1$. Thus, with $\beta = \gamma = \xi$, the condition of stability of the convergent cone is $\xi < 1$.

Consequently, the characteristic function $d(s)$ has a *single* root at $s = 0$ for all ξ, infinitely many stable roots, and one root which is stable when $\xi < 1$ and unstable when $\xi > 1$.

Remark: Because of the single root at $s = 0$, the system under study is at the limit of stability. Nonetheless, the Taylor series expansions of the functions $\underline{R_g}$ et $\underline{F}$ (cf. (18)- (19)) at this point are: $\underline{R_g}(s) = -1 + O(s)$ and $\underline{F}(s) = \xi/(1-\xi) + O(s)$, when $s \sim 0$. It means that this root, which behaves as a pure integrator, is compensated with numerators of $\underline{R_g}$ and $\underline{F}$.

V. STABLE SIMULATION IN DISCRETE TIME

A. Derivation of a Digital Simulation

In this section, we use the dimensional variables (cf. section II-E).

For numerical simulations, we must discretize the system. As (7) (and Fig. 3) involves unstable states, it is hopeless to derive a stable digital version. It is the reason why we choose to get a discrete-time system from (16) (and Fig. 4).

For low-cost simulations, we discretize e^{-sT} and $R(s)$ separately. If $T = NT_e$ (where T_e is the sampling period and $N \in \mathbb{N}$) the operator e^{-sT} becomes Z^{-N} in the *Z-Transform* domain, which is simulated by an economical circular buffer.

About the discretization of $R(s)$ to its digital version $R^d(Z)$, even if the chosen method conserves the stability properties of $R(s)$, the digital version of the global system (with loop) may become unstable. For example, numerical simulations reveal that using the standard *bilinear transform* (cf. [10]) makes the system unstable for some α and T.

Here, we propose to use the *triangle approximation* (modified first-order hold cf. [11]) given by

$$R(s) = \frac{\alpha}{s - \alpha} \quad \Rightarrow \quad R^d(Z) = \frac{b_0 Z + b_1}{Z - a},$$

with $a = \mathrm{e}^{\alpha T_e}$, $b_0 = -\frac{1-a}{\alpha T_e} - 1$ and $b_1 = \frac{1-a}{\alpha T_e} + a$. This method leads to a stable digital system as detailed in next section.

Calculating the dynamic equation of the discrete-time system, we obtain the following characteristic polynomial:

$$P(Z) := Z^{N+1} - aZ^N + b_0 Z + b_1 = \sum_{i=0}^{N+1} p_i Z^{N+1-i}. \tag{24}$$

In order to study stability, we have to know if at least one root has its modulus higher than 1. We propose to use Jury criterion to prove the stability of this discrete-time system.

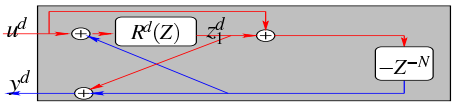


Fig. 6. Structure of the digital system

B. Jury Criterion

Here, we give the *Jury criterion* (cf. [12]). Considering the polynomial $P(Z)=\sum_{j=0}^{N+1} p_j Z^{N+1-j}$, with $p_0=1>0$, *Jury criterion* proves that it has no complex root outside the unity circle if and only if all the following assumptions are verified:

C1: $P(Z=1)>0$,
C2: $(-1)^{N+1}P(Z=-1)>0$,
C3: $p_0 > |\, p_{N+1}\,|$,
C4: Defining the following inductive relation:

$$\begin{cases} p_{(k+1,j)} := p_{(k,0)}p_{(k,j)} - p_{(k,N+1-k)}p_{(k,N+1-k-j)}, \\ \forall k \in [0,N-2]_{\mathbb{N}} \text{ and } \forall j \in [0,N-k]_{\mathbb{N}}, \end{cases}$$

with $p_{(0,j)} := p_j$, $\forall j \in [0,N+1]_{\mathbb{N}}$, last assumptions are:

$$p_{(k,0)} > \left|p_{(k,N+1-k)}\right|, \quad \forall k \in [1,N-1]_{\mathbb{N}}.$$

Next, we present the outlines of the proof of the stability using the *Jury criterion*. Assumption (C1) needs a few precisions, that's why we will deal with it at the end.

C. Proof Outlines

(C2): Separating the cases $\alpha>0$, $\alpha<0$, $\alpha=0$, we prove that (C2) is verified for all real α.

(C3): The case $\alpha=0$ is straightforward. Otherwise since $p_0=1$, we study the sign of $B(Y)=1-p_{N+1}$ with $Y=1-\alpha T_e$ for Y in $]0,1[$ and $]1,\infty[$. (C3) is verified if $\alpha T_e<1$.

(C4): This proof seems difficult, but the characteristic polynomial $P(Z)$ is sparse (cf. (24)), and it implies $p_{(k,j)}=0$ $\forall k \in [1,N-1]_{\mathbb{N}}$ and $\forall j \in [2,N-k]_{\mathbb{N}}$. Then, we can simplify the inductive relation as follows:

$$\begin{cases} f_{k+1} := p_{(k+1,0)} = f_k{}^2 - h_k{}^2, \\ g_{k+1} := p_{(k+1,1)} = f_k\, g_k, \\ h_{k+1} := p_{(k+1,N-k)} = -h_k\, g_k. \end{cases} \tag{25}$$

We have succeeded to prove that the upper boundary of T is $T_{crit}=1/\alpha$ (cf. appendix). That means if $\alpha T<1$:

$$p_{(k,0)} > \left|p_{(k,N+1-k)}\right|, \quad \forall k \le N-1.$$

(C1): The first assumption is not verified because $P(Z=1)=0$. However, that means the characteristic polynomial has a root at $Z=1$, thus the system has a pure integrator and it is at the limit of stability. Nonetheless we notice that, like with the continuous time system, the numerators of the two digital transfer functions which are equivalent to $F(s)$ and $R_g(s)$ (cf. (18) and (19)) are 0 at $Z=1$. As a result, the pure integrator is theoretically compensated.

Strictly speaking, the rigorous proof should be carried out on the polynomial Q such as $P(Z)=(Z-1)Q(Z)$. This has also been checked.

In conclusion, according to the discretization we have chosen, we reach the same result as in continuous time, that is the system is stable with $\xi=\alpha T<1$ and the pure integrator is theoretically compensated with the loop.

D. Digital Simulation

We have programmed in C-language the digital simulation of the system shown in Fig. 6, in order to check the previous results in practice.

Figure 7 shows the impulse response of the system, that is the output y_n^d when the input u_n^d is an impulse at $n=0$. The sampling frequency is $1/Te=44100Hz$, the delay value is $T=0.1s$ and $\alpha=9.99$ (this gives $a\simeq 1.000226$ and $N=4410$). We have chosen α and T such as $\alpha T<1$ and $\alpha>0$.

This graph reveals that the impulse response grows exponentially in the range $[0,T[$, and then the successive returns of the delay line compensate for this instability. A longer simulation shows that the simulated system is globally stable.

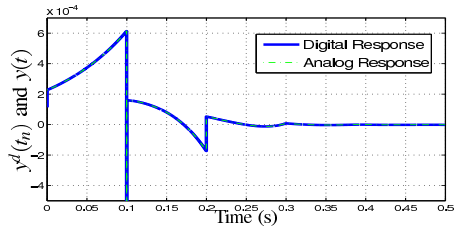


Fig. 7. Impulse response (with $T=0.1s$ and $\alpha=9.99s^{-1}$)

The comparison of Fig. 7 between the computed digital response and the analog response (given analytically in [1]) shows that they are very close. The relative mean error is less than 1 percent in the range $t\in[0,0.5]$.

Because of assumption (C1), in section V-C we have noticed a pole at $Z=1$ which may behave like a pure integrator, but which is theoretically compensated. For digital simulations, we had anticipated that the numerical approximation due to the truncation could produce an instability, fortunately computations revealed that the step response remains stable in practice.

VI. CONCLUSIONS AND FUTURE WORKS

A. Conclusions

In this paper, we have studied a 1D-model of propagation in a truncated convergent acoustic cone. Solving the equations leads to a simulation structure which includes a delay and the transfer function of an unstable system. The analysis of this structure reveals the system is input/output stable, whereas the internal state cannot be stabilized. As a consequence, this structure cannot be used to simulate the system.

To cope with this problem, a change of variables is performed and a Kalman's form is derived. While the unobservable subspace corresponds to an unstable part of the system, we prove that its orthogonal complement corresponds to a stable part. Then, isolating this observable part yields to a minimal realization, which both reduces the cost of simulation and defines a stable realization.

Thus, this paper illustrates how a tool of control engineering has helped to solve a well-known problem of acoustics with guaranteed stability and fully proved results.

B. Future Works

In order to simulate the model of a complete acoustic resonator of a wind instrument, we have to study the concatenation of cones, as it is done in [3], and in future works, we have to prove the stability of the whole structure.

With a refined acoustic model of lossy pipes with varying cross section (cf. [13], [14]), we have to study linear fractional differential systems with delay. But we are confronted with very similar problems of stability, with a higher level of complexity.

Even if the derived structure (cf. Fig. 4) is not new, the noticeable conclusion of this paper is the understanding of the instability. In the first system (cf. (7)), only the observable part is needed to describe the acoustic behavior. The unobservable part, which is unstable, is not justified physically. It has been introduced by the theoretical model, but has to be removed for simulation. We hope that what we have understood in this paper will help us to also derive stable realizations in the more complex case of lossy pipes with varying cross section.

APPENDIX

We define the following inductive relation:

$$\left\{\begin{array}{lll} f_{k+1} & := & {f_k}^2 - {h_k}^2, \quad \forall k>0, \\ g_{k+1} & := & f_k\, g_k, \\ h_{k+1} & := & -h_k\, g_k, \end{array}\right. \tag{26}$$

with the initialisation:

$$\left\{\begin{array}{lll} f_1 & := & 1-{b_0}^2 \quad = {p_0}^2 \quad - {p_{N+1}}^2, \\ g_1 & := & -a-b_0\, b_1 \quad = p_0\, p_1 - p_{N+1}\, p_N, \\ h_1 & := & b_0+a\, b_1 \quad = p_0\, p_N - p_{N+1}\, p_1, \end{array}\right.$$

and for $X := \alpha T_e$:

$$\left\{\begin{array}{lll} a(X) & = & \mathrm{e}^X, \qquad\qquad\quad \forall X\in\mathbb{R}, \\ b_0(X) & = & -\left(\frac{1-\mathrm{e}^X}{X}\right)-1, \quad \forall X\in\mathbb{R}^*, \\ b_1(X) & = & \left(\frac{1-\mathrm{e}^X}{X}\right)+\mathrm{e}^X, \quad \forall X\in\mathbb{R}^*. \end{array}\right.$$

To ensure continuity: $b_1(0)=b_0(0)=0$.

Lemma: For all $k>0$ and X in $\left]-\infty,\frac{1}{k+1}\right[$, f_k and h_k defined by (26) verify:

$$f_k(X) > |h_k(X)|. \tag{27}$$

► With $X=0$, the proof is straightforward, but with $X\neq 0$ we have to define:

$$\eta_k(X) := \frac{f_k(X)}{h_k(X)}, \tag{28}$$

$\forall k>0$ and $\forall X\in\chi_k := \{X\in\mathbb{R} \,/\, f_k(X)\, h_k(X)\neq 0\}$.

In first time, by developing the expressions of h_k and h_{k+1}, we obtain the following relations $\forall k>1$ and $\forall X\in\chi_{k+1}\cap\chi_k\cap\chi_{k-1}$:

$$h_{k+1}(X) = h_k(X)^2\,\eta_{k-1}(X), \tag{29}$$

$$\eta_{k+1}(X) = \frac{1}{\eta_k(X)}\Big(\eta_{k-1}(X)^2-1\Big). \tag{30}$$

Using the definition of f_{k+1} (cf. (26)), (29) and (30), we prove by induction that $\forall k>0$:

- $$\left\{\begin{array}{ll} f_k(X) & >0, \quad \forall X\in\left]-\infty,\frac{1}{k}\right[, \\ h_k(X) & <0, \quad \forall X<0, \\ & >0, \quad \forall X\in\left]0,\frac{1}{k}\right[, \end{array}\right. \tag{31}$$

  and thus $\chi_k \supset \left]-\infty,\frac{1}{k}\right[\setminus\{0\}$.

- $$\eta_k(X) = \frac{1-kX}{X}, \quad \forall X\in\left]-\infty,\frac{1}{k}\right[\setminus\{0\}. \tag{32}$$

- Equation (32) implies (27) $\forall X\in\left]-\infty,\frac{1}{k+1}\right[\setminus\{0\}$. ◄

Finally, since $f_k = p_{(k,0)}$ and $h_k = p_{(k,N+1-k)}$ $\forall k\in[1,N-1]_{\mathbb{N}}$ (cf. (25)), (27) is equivalent to:

$$p_{(k,0)} > \left|p_{(k,N+1-k)}\right|, \ \forall X<\tfrac{1}{k+1}. \tag{33}$$

However, $\frac{1}{N}\leq\frac{1}{k+1}$, $X=\alpha T_e$ and $T=NT_e$, as a result if $\alpha T<1$, the assumption (C4) is verified:

$$p_{(k,0)} > \left|p_{(k,N+1-k)}\right|, \ \forall k\in[1,N-1]_{\mathbb{N}}.$$

REFERENCES

[1] J. Gilbert, J. Kergomard, and J. D. Polack. On the reflection functions associated with discontinuities in conical bores. *J. Acoust. Soc. Am.*, 04, 1990.

[2] J. O. Smith. Physical modeling synthesis update. *Computer Music Journal*, 20(2):44–56, 1996. MIT Press.

[3] V. Välimäki. *Discrete-time modeling of acoustic tubes using fractional delay filters*. PhD thesis, Helsinski University of Technology, 1995.

[4] E. Ducasse. An alternative to the traveling-wave approach for use in two-port descriptions of acoustic bores. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112:3031–3041, 2002.

[5] A. Webster. Acoustic impedance and the theory of horns and of the phonograph. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S*, 5, 1919.

[6] R. Kalman. Canonical structure of linear dynamical systems. In *Proceedings of the National Academy of Sciences*, pages 596–600, 1961.

[7] J. D. Markel and A. H. Gray. On autocorrelation equations as applied to speech analysis. *IEEE Trans. Audio and Electroacoust.*, AU-21(2):pp. 69–79, Apr 1973.

[8] V. B. Kolmanovskii and V. R. Nosov. *Stability of Functional Differential Equations*. Academic press, New York, 1986.

[9] S. Niculescu. *Delay Effects on Stability. A Robust Control Approach*. Springer, Berlin New York, 2001.

[10] T. W. Parks and C. S. Burrus. *Digital Filter Design*. Inc., New York, 1987.

[11] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. L. Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*. p.151, Addison-Wesley, 1990.

[12] E. I. Jury. *Inners and Stability of Dynamic Systems*. Wiley-Interscience, New York, 1974.

[13] Th. Hélie and D. Matignon. Diffusive reprentations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 16:503–536, jan 2006.

[14] Th. Hélie, R. Mignot, and D. Matignon. Waveguide modeling of lossy flared acoustic pipes: Derivation of a Kelly-Lochbaum structure for real-time simulations. In *IEEE WASPAA*, pages 267–270, Mohonk, USA, 2007.

Annexe J

Article de congrès (IFAC FDA 2008) : On the appearance of branch cuts for fractional systems as a mathematical limiting process based on physical grounds (référence [MHM08a])

On the appearance of branch cuts for fractional systems as a mathematical limiting process based on physical grounds ⋆

Rémi Mignot *,1 **Thomas Hélie** * **Denis Matignon** **

* *IRCAM & CNRS, UMR 9912, 1, pl. Igor Stravinsky, 75004 Paris, France (e-mail: {mignot,helie}@ircam.fr).*
** *Université de Toulouse; ISAE, Applied Mathematics training unit, 10, av. E. Belin, B.P. 54032. F-31055 Toulouse Cedex 4, France (e-mail: denis.matignon@isae.fr)*

Abstract: Contrarily to finite-dimensional systems, fractional systems have irrational transfer functions with non unique analytic continuations (from some right-half Laplace plane to a maximal domain). They involve continuous sets of singularities, namely cuts, which can be chosen arbitrarily between fixed branching points. This paper presents an academic example of the 1D heat equation and a realistic model of an acoustic pipe, both on bounded domains, which involve transfer function with a unique analytic continuation with singularities of pole type. When the length of the domain becomes infinite, these sets of singularities degenerate into *uniquely* defined cuts. From a mathematical point of view, both the convergence in the Hardy space of some left half-complex plane and the pointwise convergence are studied and proved.

Keywords: Boundary value problem, Generalized linear systems, Integral representations, Laplace transforms, Singularities, Heat, Scattering problems.

1. INTRODUCTION

This paper is devoted to enlight links between some fractional differential systems and physical phenomena modelled by partial differential equations in unbounded domains. Two problems are considered: first, in § 2, the academic example of the 1D heat equation; second, in § 3, a realistic model of an acoustic pipe including visco-thermal losses at the walls and a varying cross-section with constant curvature.

On the one hand, the complex analysis of the transfer functions related to these problems reveals that singularities involve cuts between fixed branching points. On the other hand, the same problems considered on a bounded domain give rise to a countable set of poles. These are standard results.

The main point of this paper is to exhibit in which mathematical sense the cuts of the fractional systems under consideration can be viewed as the limit of a densification of the set of poles when the boundary of the domain goes towards infinity.

As a result, whereas the cuts of the transfer function of fractional systems can be chosen arbitrarily (starting from and ending at fixed branching points), the cuts defined from the limit of the countable set of poles are uniquely defined.

From a mathematical point of view, two types of convergence are examined: first, the convergence of the transfer functions in the Hardy space of some left half-complex plane is proved, second the pointwise convergence of some analytic continuation of the transfer functions is obtained over the whole Laplace plane except on these cuts.

2. A TOY MODEL: THE HEAT EQUATION

2.1 Physical model

Consider the following adimensional heat conduction problem on $I_\varepsilon = (0, 1/\varepsilon)$, described by,

$$\forall x \in I_\varepsilon, \forall t > 0, \quad \partial_t T(x,t) - \partial_x^2 T(x,t) = 0, \tag{1}$$

with null initial conditions,

$$\forall x \in I_\varepsilon, \quad T(x, t=0) = 0, \tag{2}$$

a *controlled* Neumann boundary condition at $x = 0$,

$$\forall t > 0, \quad -\partial_x T(x=0,t) = u(t), \tag{3}$$

a free Dirichlet boundary condition at $x = 1/\varepsilon$,

$$\forall t > 0, \quad T(x = 1/\varepsilon, t) = 0, \tag{4}$$

and a Dirichlet *observation* at $x = 0$ as output,

$$\forall t > 0, \quad y(t) := T(x=0,t). \tag{5}$$

This models a finite bar, at rest before $t = 0$, controlled by a heat flux u and observed by the temperature at the left end $x = 0$, and for which the temperature is kept equal to zero at the right end $x = 1/\varepsilon$.

⋆ This work is supported by the CONSONNES project, ANR-05-BLAN-0097-01

[1] Rémi Mignot is a Ph.D. student at Télécom Paris/TSI.

2.2 Transfer function and Hardy spaces

Following e.g. Curtain and Zwart (1995), this problem can be solved in the Laplace domain and yields the transfer function $H_\varepsilon(s) := \hat{y}(s)/\hat{u}(s)$ given by

$$\forall s \in \mathbb{C}_0^+, \quad H_\varepsilon(s) := \frac{\tanh(\sqrt{s}/\varepsilon)}{\sqrt{s}}, \tag{6}$$

where $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}_\alpha^+ := \{s \in \mathbb{C} \,|\, \Re\mathrm{e}(s) > \alpha\}$, and where $\hat{T}$ and $\hat{u}$ respectively denote the one-sided Laplace transforms of T and u with respect to the time variable.

In (6), the square-root denotes the analytic continuation of the positive square-root on $\mathbb{R}^+$ on a domain compatible with the one-sided Laplace transform,namely $\mathbb{C}_0^+$.

$$\sqrt{\cdot}: \quad s = \rho\exp(i\theta) \mapsto \sqrt{\rho}\exp(i\theta/2) \tag{7}$$

with $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times (-\pi/2, \pi/2)$.

Following e.g. Partington (2004), let us introduce:

Definition 1. For $\alpha > 0$ and $m > 0$, $\mathbb{H}^m(\mathbb{C}_\alpha^+)$ denotes the Hardy space defined by

$$\mathbb{H}^m(\mathbb{C}_\alpha^+) = \Big\{ H : \mathbb{C}_\alpha^+ \to \mathbb{C} \,\Big|\, H \text{ is holomorphic in } \mathbb{C}_\alpha^+, \text{ and } \sup_{\zeta>\alpha} \int_{\mathbb{R}} |H(\zeta + i\omega)|^m \mathrm{d}\omega < \infty \Big\}. \tag{8}$$

The norm of $H \in \mathbb{H}^m(\mathbb{C}_\alpha^+)$ is then defined by

$$\|H\|_{\mathbb{H}^m(\mathbb{C}_\alpha^+)} := \sup_{\zeta>\alpha} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |H(\zeta + i\omega)|^m \,\mathrm{d}\omega \right]^{\frac{1}{m}}. \tag{9}$$

Then, the following theorem holds.

Theorem 2. Let $\varepsilon > 0$, then

$$\forall \alpha \geq 0, \forall m > 2, \quad H_\varepsilon \in \mathbb{H}^m(\mathbb{C}_\alpha^+). \tag{10}$$

Proof. Let $\varepsilon > 0$, $\alpha \geq 0$ and $m > 2$. Since

$$\forall s \in \mathbb{C}_\alpha^+, \quad H_\varepsilon(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{1 - \exp(-2\sqrt{s}/\varepsilon)}{1 + \exp(-2\sqrt{s}/\varepsilon)}, \tag{11}$$

with (7), it follows that

$$|H_\varepsilon(s)|^m \sim |s|^{-\frac{m}{2}} \text{ as } |s| \to \infty, \tag{12}$$

$$|H_\varepsilon(s)|^m \sim \varepsilon^{-m} \text{ as } s \to 0. \tag{13}$$

Hence, $\int_{\zeta+i\mathbb{R}} |H_\varepsilon(s)|^m \,\mathrm{d}s$ is a finite integral for $m > 2$ (due to (12)) and $\alpha \geq 0$. □

Theorem 3. Function H_0 defined by

$$\begin{aligned} H_0 : \mathbb{C}_0^+ &\to \mathbb{C} \\ s &\mapsto 1/\sqrt{s} \end{aligned} \tag{14}$$

is analytic over $\mathbb{C}_0^+$.

$$\forall \alpha > 0, \forall m > 2, \quad H_0 \in \mathbb{H}^m(\mathbb{C}_\alpha^+). \tag{15}$$

Moreover,

$$H_\varepsilon \overset{\mathbb{H}^m(\mathbb{C}_\alpha^+)}{\longrightarrow} H_0 \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0^+. \tag{16}$$

Proof. Using (7), H_0 is well defined, and analytic in $\mathbb{C}_0^+$. Proving (15) is analogous to proving (10), but contrarily to theorem 2, the case $\alpha = 0$ cannot be included here: condition $\alpha > 0$ ensures the convergence of the integral in (9) for $\omega \to 0$.

Now, as for (16), the behaviour of $\frac{1}{\sqrt{s}} \frac{2\exp(-2\sqrt{s}/\varepsilon)}{1+\exp(-2\sqrt{s}/\varepsilon)}$ has to be studied as $\varepsilon \to 0^+$. Denoting $z = \sqrt{s}/\varepsilon$, we get $|s^{-1/2} \frac{2e^{-2z}}{1+e^{-2z}}| \leq 2|s|^{-1/2} e^{-2\Re\mathrm{e}(z)}$, since $|1+e^{-2z}| \geq |1+\Re\mathrm{e}(e^{-2z})| \geq 1$. Then, for $s = \zeta + i\omega$ and $\zeta \geq \alpha$, we have $e^{-2\Re\mathrm{e}(z)} \leq e^{-2\cos(\pi/4)\sqrt{\alpha}/\varepsilon}$. Raising the latter bound to power m and using (15) yields the result. □

2.3 Complex analysis and analytic continuations

The transformation $\sqrt{s} \mapsto -\sqrt{s}$ keeps H_ε invariant, so that H_ε is a function of s only. More precisely, H_ε can be analytically continued on the domain $\mathcal{D}_\varepsilon$ given by

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \mathbb{C} \setminus \mathcal{P}_\varepsilon, \tag{17}$$

$$\mathcal{P}_\varepsilon = \{ s_n = -\varepsilon^2 (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \,|\, n \in \mathbb{N} \}, \tag{18}$$

where $\mathcal{P}_\varepsilon$ is the countable set of poles of H_ε. Note that $0 \notin \mathcal{P}_\varepsilon$ and $H_\varepsilon(0) = 1$. The set of zeros of H_ε is given by

$$\mathcal{Z}_\varepsilon = \{ \zeta_n = -\varepsilon^2 n^2 \pi^2 \,|\, n \in \mathbb{N}^* \}. \tag{19}$$

Using formula $\tanh(z)/z = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{z^2 + (n+\frac{1}{2})^2 \pi^2}$ from e.g. Cartan (1961), H_ε proves to be a meromorphic function which can be expanded into

$$\begin{aligned} H_\varepsilon : \mathbb{C} \setminus \mathcal{P}_\varepsilon &\to \mathbb{C} \\ s &\mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{s + \varepsilon^2 (n+\frac{1}{2})^2 \pi^2} \end{aligned} \tag{20}$$

Note the difference between (6) and (20): the latter is the unique maximal analytic continuation of the former.

Remark: Poles $\mathcal{P}_\varepsilon$ and zeroes $\mathcal{Z}_\varepsilon$ are *intertwined* on the negative real axis $\mathbb{R}^-$, as already noticed in e.g. Oustaloup (1983). Moreover, in a way which must be made mathematically rigorous,

$$\overline{\cup_{\varepsilon>0} \mathcal{P}_\varepsilon} = \mathbb{R}^-. \tag{21}$$

This is the reason why we now define $\mathcal{D}_0 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ and

$$\begin{aligned} H_0 : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- &\to \mathbb{C} \\ s &\mapsto \int_0^\infty \frac{1}{\pi\sqrt{\xi}} \frac{1}{s+\xi} \,\mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{22}$$

Using the links between fractional calculus and *diffusive representations*, as in Matignon (1998), it can be proved [2] that $H_0(s)$ as defined by (22) also has the value $s^{-1/2}$, as expected, once definition (7) has been *analytically continued* to $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times (-\pi, \pi)$.

Note the difference between (14) and (22): the latter is *a* maximal analytic continuation of the former, but it is certainly not unique! It is well known that *any* branch cut between the branchpoints $s = 0$ and another branchpoint at infinity in $\Re\mathrm{e}(s) < 0$ would also do (see e.g. Matignon (1998) and Zwart (2004)). Among these analytic continuations, (22) defines the unique limit of H_ε on $\mathcal{D}_\varepsilon$, for $\varepsilon \to 0^+$, as stated in the following theorem.

[2] an elementary proof goes as follows: substitute $x = \sqrt{\xi/s}$ in the numerical identity $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ for any $s \in \mathbb{R}^{+*}$, and get (22); then perform an analytic continuation from $\mathbb{R}^{+*}$ to $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ for both sides of the identity.

Theorem 4. Let $\varepsilon > 0$, then $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_\varepsilon$, and

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-, \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} H_\varepsilon(s) = H_0(s). \tag{23}$$

Proof. Let s be fixed in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Then, $\forall \varepsilon > 0$, H_ε is analytic at s, and from the *extended* definition of (7) above, $\Re\mathrm{e}(\sqrt{s}) > 0$, so that $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \exp(-2\sqrt{s}/\varepsilon) = 0$. The limit of (11) for $\varepsilon \to 0^+$ yields the desired result. □

Remark: The cut $\mathcal{C}$, which appears as the *limit set* of singularities of physical problems on bounded domains, is characterized by

$$\Re\mathrm{e}(\sqrt{s}) = 0 \Leftrightarrow s \in \mathcal{C} := \mathbb{R}^-. \tag{24}$$

2.4 Integral representations and interpretations

Well-posed integral representations of both H_ε and H_0 are given by

$$H_\varepsilon(s) = \int_0^\infty \frac{1}{s+\xi} \, \mathrm{d}\mu_\varepsilon(\xi). \tag{25}$$

From e.g. Matignon and Zwart (2008), the well-posedness condition reads $\int_0^\infty \frac{1}{1+\xi} \, \mathrm{d}\mu(\xi) < \infty$; it is fulfilled by the associated measures μ_ε and μ_0, defined as follows:

$$\mu_\varepsilon = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2\varepsilon \, \delta_{-s_n}(\xi), \quad \text{for } \varepsilon > 0, \tag{26}$$

$$\mathrm{d}\mu_0(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{\xi}} \, \mathrm{d}\xi. \tag{27}$$

For $\varepsilon > 0$, μ_ε is a *discretely supported* measure at points $\xi_n = -s_n = \varepsilon^2(n+\frac{1}{2})^2\pi^2$, $n \in \mathbb{N}$; whereas μ_0 is *absolutely continuous* w.r.t Lebesgue measure on $\mathbb{R}^+$. Both these systems are presented in examples 2.1 and 2.2 of Hélie and Matignon (2006b), and fully analysed as well-posed systems in examples 3.2 and 3.4 of Matignon and Zwart (2008).

We have the following convergence theorem for the associated measures:

Theorem 5. The *weak* convergence of measures holds:

$$\mu_\varepsilon \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu_0, \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0^+ \tag{28}$$

Hence, for $s \in \mathcal{D}_0$ and with $\varphi_s(\xi) := \frac{1}{s+\xi}$ as test function in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+)$, we recover $H_\varepsilon(s) \longrightarrow H_0(s)$, as $\varepsilon \to 0^+$.

Proof. Let $\varphi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^+_\xi)$, we compute $< \mu_0, \varphi > = \int_0^\infty \frac{1}{\pi\sqrt{\xi}} \varphi(\xi) \, \mathrm{d}\xi$ on the one hand, and $< \mu_\varepsilon, \varphi > = \sum_{n=0}^\infty 2\varepsilon \varphi(\xi_n)$ on the other hand. With the change of variables $\xi = x^2\pi^2$, the test function reads $\psi(x) := \varphi(\xi)$ and still belongs to $\mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^+_x)$. The only thing to prove is then

$$2\varepsilon \sum_{n=0}^\infty \psi(\varepsilon\,(n+\frac{1}{2})) \longrightarrow 2\int_0^\infty \psi(x) \, \mathrm{d}x \, ,$$

as $\varepsilon \to 0^+$, which is nothing but the limit of a Riemann sum. One can also try to extend the previous result to $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+_\xi)$, and not only $\mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^+_\xi)$.

Nevertheless, the well-posedness conditions help prove the last item, even if $\varphi_s \notin \mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^+_\xi)$, but $\varphi_s \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^+_\xi)$. □

3. A MORE INVOLVED MODEL IN ACOUSTICS

3.1 Acoustic model of a piece of pipe

Acoustic model Consider a mono-dimensional model of linear acoustic propagation in axisymmetric pipes, which takes into account the visco-thermal losses and the varying cross section. The acoustic pressure p and velocity v are governed by the *Webster-Lokshin* equation (cf. Hélie (2003)) and Euler equation, given by, in the Laplace domain,

$$\left[\left(\left(\frac{s}{c_0}\right)^2 + 2\eta(\ell)\left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon(\ell)\right) - \partial_\ell^2\right](r(\ell)p(\ell,s)) = 0, \tag{29}$$

$$\rho_0 \, s \, v(\ell,s) + \partial_\ell p(\ell,s) = 0, \tag{30}$$

where s is the Laplace variable, ℓ is the *curvilinear* abscissa of the wall, c_0 is the speed of sound, ρ_0 is the mass density, $r(\ell)$ is the radius of the pipe. η quantifies the effect of the visco-thermal losses, and $\Upsilon = r''/r$ is the curvature of the horn.

Note that the symbol $s^{3/2}$ is the Laplace transform of the fractional time derivative $\partial_t^{3/2}$, as introduced in e.g. Polack (1991). The role of the parameter η alone, when $\Upsilon = 0$ has been fully understood in Matignon and d'Andréa-Novel (1995), in which three closed-form solutions of this problem have been obtained. The diffusive phenomenon in which we are interested in this section, is actually due to the curvature $\Upsilon(\ell)$ and requires special treatment.

Let $\psi^+(\ell,s)$ and $\psi^-(\ell,s)$ be defined by

$$\begin{bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{bmatrix} = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} 1 & \rho_0 c_0 \\ 1 & -\rho_0 c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix} + \frac{c_0 r'}{2rs} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} p. \tag{31}$$

This alternative acoustic state defines travelling waves ψ^+ and ψ^- which extend the usual decoupled ingoing and outgoing planar or spherical waves propagating in straight or conical lossless pipes respectively ($\eta = 0, \Upsilon = 0$).

Adimensional problem for a piece of pipe Consider a section of horn with length L, constant positive curvature $\Upsilon > 0$, and constant losses coefficient η. Let us define the adimensional variables and coefficients for this horn:

$$\underline{\boldsymbol{\ell}} = \frac{\ell}{L}, \; \underline{\boldsymbol{s}} = \frac{s}{c_0\sqrt{\Upsilon}}, \; \varepsilon = \frac{1}{L\sqrt{\Upsilon}}, \text{ and } \beta = \frac{\eta}{\sqrt[4]{\Upsilon}}.$$

and for any dimensional function F, let us define its adimensional version $\underline{F}$ such as $\underline{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{\ell}}, \underline{\boldsymbol{s}}) = F(\ell, s)$.

Coefficient Υ becomes $\underline{\Upsilon} = 1$ and equations (29), (30) and (31) become, for all $\underline{\boldsymbol{\ell}} \in (0,1)$,

$$\left[\left(\underline{\boldsymbol{s}}^2 + 2\,\beta\underline{\boldsymbol{s}}^{\frac{3}{2}} + 1\right) - \varepsilon^2\partial_{\underline{\ell}}^2\right] (\underline{\boldsymbol{r}}\,\underline{\boldsymbol{p}}) = 0, \tag{32}$$

$$\rho_0 c_0 \, \underline{\boldsymbol{s}} \, \underline{\boldsymbol{v}} + \varepsilon \partial_{\underline{\boldsymbol{\ell}}} \underline{\boldsymbol{p}} = 0, \tag{33}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{\psi}}^+ \\ \underline{\boldsymbol{\psi}}^- \end{bmatrix} = \frac{\underline{\boldsymbol{r}}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \rho_0 c_0 \\ 1 & -\rho_0 c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{p}} \\ \underline{\boldsymbol{v}} \end{bmatrix} + \frac{c_0 \underline{\boldsymbol{r}}'}{2\underline{\boldsymbol{r}}\,\underline{\boldsymbol{s}}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{\boldsymbol{p}}. \tag{34}$$

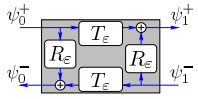
Note that $\varepsilon = 1/(L\sqrt{\Upsilon})$ is conversely proportional to L: it will play the same role as ε in section 2 to compute some limit transfer function when $\varepsilon \to 0^+$.

In the following we only consider adimensional problem, the notation $\underline{\boldsymbol{X}}$ is re-noted X for sake of legibility.

3.2 Transfer functions and Hardy spaces

Two-port representation and reflection function Solving (32)-(34) for $\ell \in (0,1)$ with zero initial conditions, controlled boundary conditions $\psi_0^+(s) := \psi^+(\ell{=}0,s)$ (incoming wave at $\ell=0$) and $\psi_1^-(s) := \psi^-(\ell=1,s)$ (incoming wave at $\ell{=}1$), and observing the outgoing travelling waves (ψ_1^+, ψ_0^-), lead to the solution $[\psi_1^+, \psi_0^-]^T = \mathbf{Q}_\varepsilon.[\psi_0^+, \psi_1^-]^T$. The *scattering matrix* $\mathbf{Q}_\varepsilon$ is given by (cf. Hélie (2002); Hélie and Matignon (2006a))

$$\mathbf{Q}_\varepsilon(s) = \begin{bmatrix} T_\varepsilon(s) & R_\varepsilon(s) \\ R_\varepsilon(s) & T_\varepsilon(s) \end{bmatrix}.$$



Both T_ε and R_ε are intricate transfer functions which are not convenient to use for simulation purposes in time domain. Moreover, everything depends on ε, which mixes the effects and make things difficult to analyse.

In the following we are only interested in the transfer function $R_\varepsilon(s) = \psi_0^-(s)/\psi_0^+(s)$, which represents the global reflection on the travelling waves of the horn at the left end ($\ell{=}0$).

The function R_ε is given by, $\forall s \in \mathbb{C}_0^+$,

$$R_\varepsilon(s) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\Gamma(s)} - \frac{\Gamma(s)}{s}\right)\sinh\left(\frac{\Gamma(s)}{\varepsilon}\right)}{\cosh\left(\frac{\Gamma(s)}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{\Gamma(s)} + \frac{\Gamma(s)}{s}\right)\sinh\left(\frac{\Gamma(s)}{\varepsilon}\right)}, \quad (35)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\Gamma(s)} - \frac{\Gamma(s)}{s}\right)\tanh\left(\frac{\Gamma(s)}{\varepsilon}\right)}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{\Gamma(s)} + \frac{\Gamma(s)}{s}\right)\tanh\left(\frac{\Gamma(s)}{\varepsilon}\right)}, \quad (36)$$

where, as for equation (7) of section 2, in (35), $\Gamma(s)$ denotes the analytic continuation of the positive square-root of

$$\Gamma(s)^2 = s^2 + 2\beta s^{\frac{3}{2}} + 1, \quad (37)$$

on the domain $\mathbb{C}_0^+$ which is compatible with the one-sided Laplace transform.

Remark: Now, in the part of the complex plane for which $\Re e(\Gamma(s)) > 0$, letting $z := \Gamma(s)/\varepsilon$, working on formula (36), we find as in section 2, that, as $\varepsilon \to 0^+$,

$$R_\varepsilon(s) \to \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\Gamma(s)} - \frac{\Gamma(s)}{s}\right)}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{\Gamma(s)} + \frac{\Gamma(s)}{s}\right)},$$

$$= \frac{s^2 - \Gamma(s)^2}{2s\Gamma(s) + s^2 + \Gamma(s)^2}$$

$$= \frac{s - \Gamma(s)}{s + \Gamma(s)} := R_0(s). \quad (38)$$

Physical interpretation To reduce the simulation cost, a decomposition of the two-port $\mathbf{Q}_\varepsilon$ into elementary transfer functions can be looked for. Using the method recently presented in Hélie et al. (2007), we get the structure of figure 1.

Here, $R_0(s)$, already defined by (38), represents the wave reflection at the interfaces of the horn and

$$W_\varepsilon(s) := \mathrm{e}^{-\Gamma(s)/\varepsilon} \quad (39)$$

represents the propagation trough the horn. For the present work, this structure is of interest because the parameter ε is now clearly *isolated* in W_ε only. We obtain another algebraic expression for R_ε, namely:

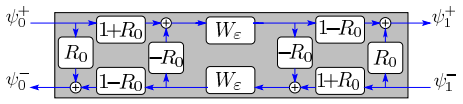


Fig. 1. Decomposition of the two-port $\mathbf{Q}_\varepsilon$

$$R_\varepsilon = R_0 \frac{1 - W_\varepsilon^2}{1 - {R_0}^2 W_\varepsilon^2}, \quad (40)$$

which helps prove the pointwise convergence result below. Note that, whereas the functions R_0 and W_ε of the decomposition depend on $\Gamma(s)$, R_ε is a function of $\Gamma(s)^2$, and s only, see (36).

Since $L = 1/(\varepsilon\sqrt{\Upsilon})$, $L \to \infty$ as $\varepsilon \to 0$. The pointwise convergence allows us to interpret function R_0 as the waves reflection of a *semi-infinite* horn, which is anechoic ($W_\varepsilon(s) \to 0$ as $\varepsilon \to 0^+$, as soon as $\Re e(\Gamma(s)) > 0$).

We are now in a position to perform a detailed complex analysis of both R_ε and R_0 in terms of poles, zeroes, branching points and cuts, and analyse their evolution with respect to ε.

Hardy spaces Now, we give some properties of the transfer functions in $\mathbb{C}_0^+$. In Hélie and Matignon (2006a), the following results have been proved for $\varepsilon > 0$:

$$\forall s \in \mathbb{C}_0^+, \quad \Re e(\Gamma(s) - s) > 0, \quad (41)$$

$$\forall s \in \mathbb{C}_0^+, \quad |R_0(s)| < 1 \text{ and } |W_\varepsilon(s)| < 1, \quad (42)$$

$$\forall m > 0, \quad W_\varepsilon \in \mathbb{H}^m(\mathbb{C}_0^+), \quad (43)$$

$$\forall m > 2, \quad R_0 \in \mathbb{H}^m(\mathbb{C}_0^+) \text{ and } R_\varepsilon \in \mathbb{H}^m(\mathbb{C}_0^+). \quad (44)$$

Moreover, the following result holds:

Theorem 6. Let $\varepsilon > 0$,

$$\forall \alpha > 0, \forall m > 2, \quad R_\varepsilon \overset{\mathbb{H}^m(\mathbb{C}_\alpha^+)}{\longrightarrow} R_0 \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0^+. \quad (45)$$

Proof. Let $s \in \mathbb{C}_\alpha^+$. From (41), $|W_\varepsilon(s)| < \mathrm{e}^{-\Re e(s)/\varepsilon} < \mathrm{e}^{-\alpha/\varepsilon}$, then with (42), we get $|\frac{1-R_0^2}{1-R_0^2 W_\varepsilon^2}| < \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\alpha/\varepsilon}}$.

Consequently $|R_0 - R_\varepsilon| = |R_0 \frac{1-R_0^2}{1-R_0^2 W_\varepsilon^2} W_\varepsilon^2| < |R_0| \frac{\mathrm{e}^{-2\alpha/\varepsilon}}{1-\mathrm{e}^{-2\alpha/\varepsilon}}$.

Now, from (44), $R_0 \in \mathbb{H}^m(\mathbb{C}_0^+) \subset \mathbb{H}^m(\mathbb{C}_\alpha^+)$.

Finally, $\|R_0 - R_\varepsilon\|_{\mathbb{H}^m(\mathbb{C}_\alpha^+)} < \|R_0\|_{\mathbb{H}^m(\mathbb{C}_\alpha^+)} \frac{\mathrm{e}^{-2\alpha/\varepsilon}}{1-\mathrm{e}^{-2\alpha/\varepsilon}} \to 0$, when $\varepsilon \to 0^+$ for $m > 2$. □

3.3 Branching points and Cuts of $\Gamma(s)$

In this subsection, we discuss the possible analytic continuations of function Γ in the whole Laplace domain.

Cut on $\mathbb{R}^-$ From (37) and because of $s^{3/2}$, Γ^2 has a cut which links $s{=}0$ and $s{=}\infty$ in $\mathbb{C}_0^-$. As it has been done in section 2, we choose the cut on $\mathbb{R}^-$. Note that this choice is required to ensure the hermitian symmetry, causality and stability of the transfer functions.

Symmetric cut Function $\Gamma(s)$ has some other branching points, which are solutions of $\Gamma(s)^2 = 0$. In the appendix of Hélie (2002), it has been checked that there are 2 conjugate solutions with negative real part. Now we must choose a cut which links these branching points.

To ensure hermitian symmetry, causality and stability of transfer functions, the cut must satisfy two constraints:

(C1) the cut must be symmetric w.r.t $\mathbb{R}$,
(C2) the cut must lie in $\mathbb{C}_0^-$ only.

Figure 2 below shows two different such choices.

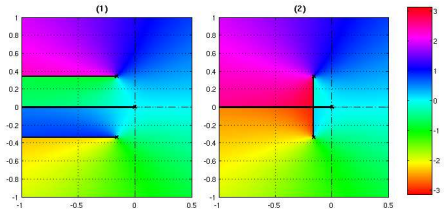


Fig. 2. Phase of $\Gamma(s)$ in the complex plane ($\beta = 2$). (1) horizontal cut, (2) vertical cut.

Positive square root In the sequel, we will make use of a special choice of the symmetric cut, given by:

$$\Gamma(s) := \sqrt{s^2 + 2\beta s^{\frac{3}{2}} + 1}, \tag{46}$$

where $\sqrt{\cdot}$ stands for *the* holomorphic extension to $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times (-\pi, \pi)$ of the square root defined by (7).

Defining $\Gamma(s)$ by (46), function Γ is holomorphic in $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \mathcal{C})$, with $\mathcal{C} := \{s \in \mathbb{C} / \Gamma(s)^2 \in \mathbb{R}^-\}$. The cuts are $\mathbb{R}^-$ and $\mathcal{C}$ (cf. Fig. 3). Note that $\mathcal{C}$ has been proved to be included in $\mathbb{C}_0^-$, and its geometry only depends on the coefficient $\beta > 0$ (for the adimensional problem).

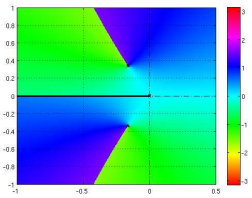


Fig. 3. Phase of $\Gamma(s)$, as defined by (46), ($\beta = 2$).

The important property of definition (46) of Γ, is that

$$\Re e(\Gamma(s)) > 0, \ \forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}. \tag{47}$$

3.4 Poles, zeroes and convergence

Poles and Zeroes of R_ε Recall that the transformation $\Gamma \mapsto -\Gamma$ keeps R_ε invariant, so that R_ε is a function of Γ^2 only; more precisely, R_ε can be analytically continued on the domain $\mathcal{D}_\varepsilon$ given by

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \mathcal{P}_\varepsilon), \tag{48}$$

$$\mathcal{P}_\varepsilon = \left\{ s \in \mathbb{C} \ / \ \frac{\tanh(\Gamma(s)/\varepsilon)}{\Gamma(s)} = \frac{-2s}{s^2 + \Gamma(s)^2} \right\}. \tag{49}$$

$\mathcal{P}_\varepsilon$ is a set singularities of R_ε. Unfortunately, it is difficult to study them explicitly, however numerical simulation makes the following conjecture plausible

Conjecture: Elements of $\mathcal{P}_\varepsilon$ are isolated singularities, and there are infinitely many such poles, corollary with no accumulated point. Let $\mathcal{P}_\varepsilon$ denote the set of *poles* of R_ε.

From (35), the set of zeroes of R_ε is $\mathcal{Z}_\varepsilon \cup \{\zeta_0, \overline{\zeta_0}\}$, where

$$\mathcal{Z}_\varepsilon = \left\{ \zeta_n \text{ and } \overline{\zeta_n} \in \mathbb{C} \ / \ \Gamma(\zeta_n)^2 = -\varepsilon^2 n^2 \pi^2 \mid n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

$$\zeta_0 = (2\beta)^{-3/2} \, \mathrm{e}^{2i\pi/3}. \tag{50}$$

ζ_0 is solution of $\Gamma(s) + s = 0$, when Γ is defined by (46), and we notice that elements of $\mathcal{Z}_\varepsilon$ lie on $\mathcal{C}$ (ie. $\mathcal{Z}_\varepsilon \subset \mathcal{C}$).

Pointwise convergence As already discussed in section 3.3 (§2), the analytic continuation of Γ is not unique, and so for R_0. Nevertheless, similarly to section 2, R_0 with Γ defined by (46), corresponds to the unique limit of R_ε defined in $\mathcal{D}_\varepsilon$, for $\varepsilon \to 0^+$, as stated in the following theorem

Theorem 7. Let the open set $\mathcal{D}_0$ and the analytic function R_0 be defined by

$$\mathcal{D}_0 := \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{R}^- \cup \mathcal{C} \cup \{\zeta_0, \overline{\zeta_0}\} \right) \tag{51}$$

$$R_0 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{C}, \quad s \mapsto \frac{s - \Gamma(s)}{s + \Gamma(s)} \tag{52}$$

with the function Γ, as defined by (46).

Then, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\forall s \in \mathcal{D}_0, \ \lim_{\varepsilon \to 0^+} R_\varepsilon(s) = R_0(s). \tag{53}$$

Proof. Let $s \in \mathcal{D}_0$, and $\Gamma(s)$ defined by (46); from (47), $\Re e(\Gamma(s)) > 0$, so that $\mathrm{e}^{-2\Gamma(s)/\varepsilon} \to 0$ when $\varepsilon \to 0^+$, as first noted in section 3.2 (§3). □

Note that ζ_0 and $\overline{\zeta_0}$, which are two zeroes of R_ε, are actually the two unique poles of R_0.

Remark: The cut $\mathcal{C}$, which appears as the *limit set* of singularities of physical problems on bounded domains, is characterized by

$$\Re e(\Gamma(s)) = 0 \Leftrightarrow s \in \mathcal{C}. \tag{54}$$

Unfortunately, we have not succeeded to prove the convergence of poles of R_ε to the cut $\mathcal{C}$ and $\{\zeta_0, \overline{\zeta_0}\}$ (poles of R_0). However numerical simulations illustrate this phenomenon: see Fig. 4 where poles and zeroes are represented by white and black dots respectively.

Proposition 8. The poles of R_ε move continuously towards the cut $\mathcal{C}$ when parameter ε varies continuously.

Proof. Using the analytical continuation of (40) defined by (46), we get an equivalent definition of P_ε which is $\{s \in \mathbb{C} \ / \ R_0(s)^2 W_\varepsilon(s)^2 = 1\}$. Since $W_\varepsilon(s) \to 0$ when $\varepsilon \to 0^+ \ \forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$, the poles of R_ε move to $\mathcal{C}$ or to the solutions of $|R_0(s)| = \infty$, which are ζ_0 and $\overline{\zeta_0}$. □

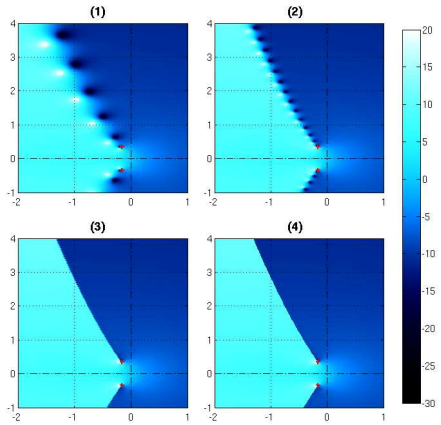


Fig. 4. Modulus $|R_\varepsilon(s)|$ in the complex plane ($\beta = 2$). (1) $\varepsilon = 0.4$, (2) $\varepsilon = 0.15$, (3) $\varepsilon = 0.03$, (4) $\varepsilon = 0$.

4. CONCLUSION

Irrational transfer functions H_0 have been derived as the limit of solutions H_ε of physical boundary problems, on domains $(0, 1/\varepsilon)$. The convergence of H_ε towards H_0 in Hardy spaces for some Laplace right half-plane has been proved.

On the one hand, the limit transfer functions H_0 are those of causal fractional systems, for which infinitely many analytic continuations are available. Indeed, the set of singularities involve cuts which can be arbitrarily chosen between fixed branching points, in $\Re\mathrm{e}(s) \leq 0$.

On the other hand, the maximal analytic continuations of H_ε and their singularities of pole type are unique. As a main result of this paper (theoretically for model 1 and numerically for model 2), their pointwise limit uniquely defines a particular maximal analytic continuation of H_0 for which the cuts are hermitian symmetrical and described by a characteristic equation (see (24) and (54)). Moreover, integral representations of H_ε and of H_0 are available, and their corresponding measures are such that μ_ε converges towards μ_0, in a *weak* sense.

However, open questions arise from this preliminary work. First, we still have to prove the conjecture (numerically observed) stating that, for $\varepsilon > 0$, the singularities of the acoustic model define an infinite countable set of isolated poles. Second, estimating these poles and their residues should be studied to define discrete measures μ_ε and analyze their weak convergence towards a limit measure. Third, for both examples, we observe that the cuts correspond to a limit set of poles but also to a limit set of zeros (which are intertwined with poles for example 1). This matches with widely-used approximations of fractional operators which use placement of intertwined poles and zeros. A question is then: is this property generally satisfied, or are there some cases for which cuts correspond to limit sets of singularities exclusively (but not zeros) ? Fourth, the unique limit sets of singularities are obtained from the sequence of physically meaningful problems. Questions are then: can distinct sequences of physically meaningful causal problems lead to the same transfer function in $\mathbb{C}_0^+$ but different limit sets of singularities in $\mathbb{C}_0^-$? If not, how can this limit set be characterized ? It should be noted that once a state-space representation $\dot{X} = \mathcal{A}_\varepsilon X$ has been chosen for a sequence of physically meaningful PDE problems, then all the singularities of any transfer functions built from a system with a control operator $\mathcal{B}_\varepsilon$ and an observation operator $\mathcal{C}_\varepsilon$ do belong to spec($\mathcal{A}_\varepsilon$): only point spectrum for $\varepsilon > 0$ and continuous spectrum for $\varepsilon = 0$. Hence, spec($\mathcal{A}_\varepsilon$) fixes the general location of singularities, see *e.g.* Zwart (2004): this last remark should help obtain relevant information for our questions.

REFERENCES

H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Coll. Enseignement des Sciences. Hermann, 1961.

R. F. Curtain and H. J. Zwart. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, volume 21 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer Verlag, 1995.

Th. Hélie. Mono-dimensional models of acoustic propagation in axisymmetric waveguides. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 114(5):2633–2647, 2003.

Th. Hélie. *Modélisation physique des instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion*. PhD thesis, Univ. Paris Sud XI, 2002.

Th. Hélie and D. Matignon. Diffusive reprentations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses. *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, 16: 503–536, jan 2006a.

Th. Hélie and D. Matignon. Representations with poles and cuts for the time-domain simulation of fractional systems and irrational transfer functions. *Signal Processing*, 86:2516–2528, jul 2006b.

Th. Hélie, R. Mignot, and D. Matignon. Waveguide modeling of lossy flared acoustic pipes: derivation of a Kelly-Lochbaum structure for real-time simulations. In *Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, pages 267–270, New Paltz, USA, oct 2007. IEEE.

D. Matignon. Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM Proc.*, 5:145–158, December 1998.

D. Matignon and B. d'Andréa-Novel. Spectral and time-domain consequences of an integro-differential perturbation of the wave PDE. In *WAVES'95*, pages 769–771, Mandelieu, France, April 1995. INRIA, SIAM.

D. Matignon and H. Zwart. Standard diffusive systems as well-posed linear systems. 2008. submitted.

A. Oustaloup. *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*. Série Automatique. Masson, 1983.

J. R. Partington. *Linear Operators and Linear Systems*, volume 60 of *London Math. Soc. Student Texts*. Cambridge University Press, 2004.

J.-D. Polack. Time domain solution of Kirchhoff's equation for sound propagation in viscothermal gases: a diffusion process. *J. Acoustique*, 4:47–67, Feb. 1991.

H. Zwart. Transfer functions for infinite-dimensional systems. *Systems Control Lett.*, 52(3-4):247–255, July 2004.

Annexe K

Article de congrès (DAFx 2009) : State-space representation for digital waveguide networks of lossy flared acoustic pipes (référence [MHM09e])

STATE-SPACE REPRESENTATIONS FOR DIGITAL WAVEGUIDE NETWORKS OF LOSSY FLARED ACOUSTIC PIPES

Rémi Mignot [*] [†], *Thomas Hélie*,
IRCAM & CNRS, UMR 9912
1, pl. Igor Stravinsky,
75004 Paris, France
{mignot,helie}@ircam.fr

Denis Matignon
ISAE, Applied Mathematics Training Unit,
10, av. E. Belin, B.P. 54032.
F-31055 Toulouse cedex4, France
denis.matignon@isae.fr

ABSTRACT

This paper deals with digital waveguide modeling of wind instruments. It presents the application of state-space representations to the acoustic model of *Webster-Lokshin*. This acoustic model describes the propagation of longitudinal waves in axisymmetric acoustic pipes with a varying cross-section, visco-thermal losses at the walls, and without assuming planar or spherical waves. Moreover, three types of discontinuities of the shape can be taken into account (radius, slope and curvature), which can lead to a good fit of the original shape of pipe. The purpose of this work is to build low-cost digital simulations in the time domain, based on the *Webster-Lokshin* model. First, decomposing a resonator into independent elementary parts and isolating delay operators lead to a network of input/output systems and delays, of *Kelly-Lochbaum* network type. Second, for a systematic assembling of elements, their state-space representations are derived in discrete time. Then, standard tools of automatic control are used to reduce the complexity of digital simulations in time domain. In order to validate the method, simulations are presented and compared with measurements.

1. INTRODUCTION

Studying physical modeling for sound synthesis allows to simulate the behavior of musical instruments. Consequently it naturely leads to realistic sounds, especially during attacks and note transitions, compared to signal processing approaches. However, digital simulations in time domain require intensive computations from signal processors, and simplifications of the physical model have to be considered to make real-time simulations possible. Moreover, because of interactions between elements of an instrument, building a modular synthetizer proves difficult.

With the approach of digital waveguides (cf. eg. [1]), some works have considered 1D acoustic model of axisymmetric pipes based on the *Webster* horn equation (cf. [2]). Approximating a varying cross-section pipe by some cylinders or cones leads to the *Kelly-Lochbaum* scattering network (cf. eg. [3, 4]), which allows a low-cost digital simulation in time domain. These models assume planar and spherical waves respectively. For a more realistic behavior of the virtual instrument, in [5] and [6] visco-thermal losses have been taken into account. This model of losses (cf. [7]) involves fractional derivatives, and is more accurate than more standard dampings based on integer order derivatives. In [8], the *Kelly-Lochbaum* network has been derived for pipes with continuity of radius and slope ($\mathcal{C}^1$-regularity of the shape), using the *Webster-Lokshin* acoustic model of lossy flared pipes which does not assume planar or spherical waves (cf. [9]).

After modeling each piece of pipe separately, it is necessary to put them together in order to build the whole resonator. In [10] and [11], the following modular method is proposed: deriving *state-space representations* of every pieces of pipe in discrete time domain, interconnection laws allow to calculate the state-space representation of the whole resonator. This formalism facilitates the modularity of the building of a virtual trombone.

In a recent work [12], a framework (based on the *Webster-Lokshin* equation) has been derived and allows to recover all models mentioned above ([3, 5, 4, 6, 8]). Moreover, it allows to obtain a good level of accuracy with a small number of pipes. The novelty of the present work is the use of the formalism of [11], starting from the unifying model of [12]. Thanks to the modularity of the method, virtual wind instruments can be built connecting additional models such as: mouth-piece, radiation, tone-hole, lips and reed (which are not studied in this paper). For example, Fig. 1 presents the network of a possible virtual resonator built by connecting such acoustic elements.

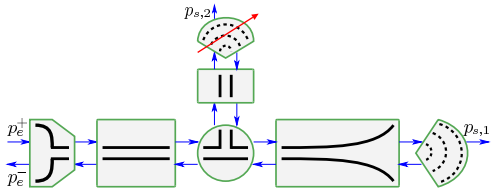


Figure 1: Example of an acoustic network modeling a resonator with a mouth-piece, a horn and a tone-hole.

This document is organized as follows. In section 3, a pipe with varying cross-section is separated into some pieces of pipe. Using the *Webster-Lokshin* model, each piece of pipe is modeled by an input/output network of the *Kelly-Lochbaum* type. In section 4, a state-space representation is derived for the network of section 2, in continuous time and in discrete time. Section 5 presents standard tools of automatic control which allow to optimize numerical realizations in order to obtain low-cost digital simulations in the time domain. Section 6 presents the digital simulations of virtual trombones and a comparison between computed impedances and the measured impedance of a real trombone. The last section concludes this paper and deals with perspectives.

[*] Rémi Mignot is Ph.D. student at Télécom ParisTech/TSI

[†] This work is supported by the CONSONNES project, ANR-05-BLAN-0097-01

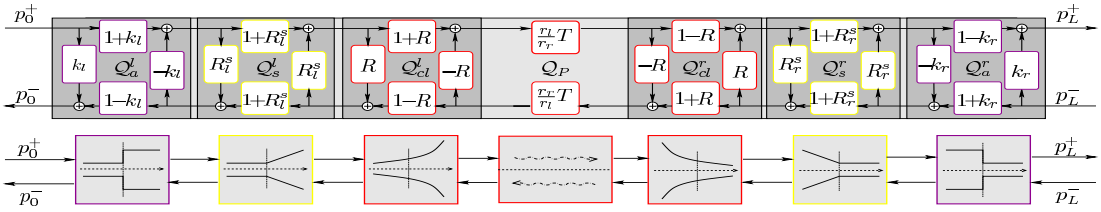


Figure 2: *Separation of the effects of pipe geometry.*

2. MODELING A PIECE OF PIPE

2.1. Webster-Lokshin model and traveling waves

The Webster-Lokshin model is a mono-dimensional model which characterizes linear waves propagation in axisymmetric pipes, assuming the quasi-sphericity of isobars near the inner wall (cf. [9, 13]), and taking into account visco-thermal losses (cf. [7]) at the wall. The acoustic pressure P and the particle flow U are governed by the following equations, given in the Laplace domain:

$$\left[\left(\left(\frac{s}{c_0}\right)^2+2\varepsilon(\ell)\left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{3}{2}}+\Upsilon(\ell)\right)-\partial_\ell^2\right]r(\ell)P(\ell,s)=0, \qquad (1)$$

$$\rho_0\, s\, \frac{U(\ell,s)}{S(\ell)}+\partial_\ell p(\ell,s)=0, \qquad (2)$$

where $s\in\mathbb{C}$ is the Laplace variable, ℓ is the space variable measuring the arclength of the wall, $r(\ell)$ is the radius of the pipe, $S(\ell)=\pi r(\ell)^2$ is the section area, $\varepsilon(\ell)=\kappa_0\sqrt{1-r'(\ell)^2}/r(\ell)$ quantifies the visco-thermal losses and $\Upsilon(\ell)=r''(\ell)/r(\ell)$ is the curvature. Eq. (1) is called the *Webster-Lokshin* equation, and (2) is the *Euler* equation satisfied outside the boundary layer. The physical constants are the mass density ρ_0, the speed of sound c_0, and $\kappa_0=\sqrt{l_v'}+(\gamma-1)\sqrt{l_h}$ where l_v' and l_h denote characteristic lengths of viscous (l_v') and thermal (l_h) effects.

With the formalism of *Digital Waveguides*, it is usual to describe acoustic effects with traveling waves rather than P and U. In this work, we define the change of variables by introducing a virtual *reference pipe*: a lossless cylinder with (arbitrary) radius r_c. Its characteristic impedance is $Z_c=\rho_0\, c_0/S_c$, with $S_c=\pi r_c^2$, for which corresponding planar traveling waves would be defined by

$$\begin{bmatrix}p^+(\ell,s)\\ p^-(\ell,s)\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & Z_c\\ 1 & -Z_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P(\ell,s)\\ U(\ell,s)\end{bmatrix}. \qquad (3)$$

In the case of lossy varying cross-section pipes, these variables are neither decoupled nor perfectly progressive inside the pipe. Nevertheless, they remain "physically meaningful" at interfaces of the pipe (cf. [12]), and respect the causality principle.

2.2. Two-port system of a piece of pipe

In this paper, a pipe with varying cross-section is approximated by a concatenation of pieces of pipe with constant parameters. Thus, a piece of pipe is defined as a finite pipe with length L, and with constant curvature (Υ) and losses (ε) parameters.

The piece of pipe is modeled by a system, the inputs of which are $p_0^+(s):=p^+(\ell=0,s)$ and $p_L^-(s):=p^-(\ell=L,s)$ (incoming waves at $\ell=0$ and $\ell=L$). Outputs are $p_0^+(s)$ and $p_L^-(s)$ (outgoing waves).

In [12], a detailed analysis gives a framework which represents the system of a piece of pipe. In this framework, delays and effects of geometry of the pipe are isolated from each others. The geometrical parameters are the radii at ends r_0 and r_L, the slopes at ends r_0' and r_L', the curvature and the visco-thermal losses of the piece of pipe (Υ and ε). The framework is presented in Fig. 2 where

$$k_l=\frac{Z_l-Z_c}{Z_l+Z_c},\quad\text{and}\quad k_r=\frac{Z_r-Z_c}{Z_r+Z_c}, \qquad (4)$$

$$R_l^s(s)=\frac{\alpha_l}{s-\alpha_l},\quad\text{with}\ \alpha_l=-\frac{c_0}{2}\frac{r_l'}{r_l}, \qquad (5)$$

$$R_r^s(s)=\frac{\alpha_r}{s-\alpha_r},\quad\text{with}\ \alpha_r=+\frac{c_0}{2}\frac{r_r'}{r_r}, \qquad (6)$$

$$R(s)=\frac{s/c_0-\Gamma(s)}{s/c_0+\Gamma(s)}, \qquad (7)$$

$$T(s)=e^{-\Gamma(s)L}=D(s)\,e^{-\frac{s}{c_0}L}, \qquad (8)$$

$$\text{with}\quad D(s)=e^{-\left(\Gamma(s)-\frac{s}{c_0}\right)L}, \qquad (9)$$

$$\text{and}\quad \Gamma(s)=\sqrt{\left(\frac{s}{c_0}\right)^2+2\varepsilon\left(\frac{s}{c_0}\right)^{\frac{3}{2}}+\Upsilon}, \qquad (10)$$

and where $\sqrt{.}$ denotes an analytical continuation of the positive square root of $\mathbb{R}^+$ on a domain compatible with the one-sided Laplace transform, namely $\mathbb{C}_0^+=\{s\in\mathbb{C}/\Re e(s)>0\}$ (see Ref. [14, 15] for more details). The function Γ is proved to be analytical in $\mathbb{C}_0^+$, and such that $\Re e(\Gamma(s))\geq 0$ if $\varepsilon\geq 0$.

Brief interpretations of cells of Fig.2 are

- Cells $\mathcal{Q}_a^l$ and $\mathcal{Q}_a^r$, with k_l and k_r (cf. (4)), remind *Kelly-Lochbaum* junctions between two lossless cylinders (cf. eg. [3, 5]) with discontinuities of sections.
- Cells $\mathcal{Q}_s^l$ and $\mathcal{Q}_s^r$, with R_l^s and R_s^r (cf. (5-6)), are similar to *Kelly-Lochbaum* junctions between lossless cones (cf. eg. [4, 6]) with discontinuities of slopes.
- Cells $\mathcal{Q}_{cl}^l$ and $\mathcal{Q}_{cl}^r$, with $R(s)$, remind *Kelly-Lochbaum* junctions between lossy pipes with constant curvature of [8].
- $T(s)$ (cf. (8)), of the cell $\mathcal{Q}_{cl}^l$, represents the delay L/c_0 of wave propagation through the piece of pipe, and the effect $D(s)$ (cf. (9)) due to the visco-thermal losses and the curvature. In [14] $D(s)$ is proved to be causal and stable.

The framework of Fig. 2 is interesting because the effects of the curvature and losses are isolated from the others (section and slope), and it makes their study easier. Because of the square roots in the function Γ (cf. (10)), the study requires special treatments (see sec. 3.1).

3. STATE-SPACE REPRESENTATION

For a systematic building of resonators, it is proposed to derive state-space representations for each cell of Fig. 2. These representations allow algebraic manipulations on the system using well-known tools of automatic control (see sec. 4). Introducing the input vector U ($N\times 1$), the output vector Y ($N\times 1$), and the state vector X ($J\times 1$), each cell is rewritten with the following representation in continuous time

$$\left\{\begin{array}{rcl} s\,X(s) &=& A\,X(s)+B\,U(s),\\ Y(s) &=& C\,X(s)+D\,U(s).\end{array}\right. \tag{11}$$

3.1. Finite-dimensional systems

Because of the square roots in $\Gamma(s)$, transfer functions such as $R(s)$ and $T(s)$ (see sec. 2.2) are irrational. These functions have continuous lines of singularities in $\mathbb{C}$, which are named *cuts*. These cuts join some points (*branching points*) and the infinity.

If $\Upsilon=0$, the function Γ has one branching point at $s=0$. The cut $\mathbb{R}^-$ is chosen to preserve the hermitian symmetry. Thereof, transfer functions have a continuous line of singularities on $\mathbb{R}^-$. The residues theorem shows that these functions are represented by a class of infinite-dimensional systems, called *Diffusive Representations* (cf. [16, 17, 15]). For any diffusive representation $H(s)$ which is analytic on $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$:

$$H(s) = \int_0^\infty \frac{\mu_H(\xi)}{s+\xi}\mathrm{d}\xi, \tag{12}$$

$$\mu_H(\xi) = \frac{1}{2i\pi}\{H(-\xi+i0^-)-H(-\xi+i0^+)\}. \tag{13}$$

For simulation in time domain, eg. in [17], it is proposed to approximate such diffusive representations by finite-dimensional approximations, given by $\widetilde{H}(s)=\sum_{j=1}^{j=L}\frac{\mu_j^H}{s+\xi_j}$, where L is the number of poles, $-\xi_j\in\mathbb{R}^-$ is the position of the jth pole and μ_j^H is its weight. The poles are placed in $\mathbb{R}^-$ with a logarithmic scale, and the weights μ_j^H are obtained by a least-square optimization in the Fourier domain.

If $\Upsilon>0$, Γ has two more branching points, which are complex conjugate. In this case, diffusive representations are approximated with a finite sum of 1st and 2nd order differential systems:

$$\widetilde{H}(s)=\sum_{j=1}^{j=L}\frac{\mu_j^H}{s+\xi_j}+\sum_{j=1}^{j=M}\left(\frac{w_j^H}{s+\gamma_j}+\frac{\overline{w}_j^H}{s+\overline{\gamma}_j}\right). \tag{14}$$

R and D can be approximated with $L+2M=10$ or 15.

3.2. State-space representations in continuous time

Cells $\mathcal{Q}_a^l$ and $\mathcal{Q}_a^r$ These Cells only contain constant coefficients k_l and k_r. With $\mathcal{Q}_a^l$ for example, the state-space representation is

$$A=[\,],\quad B=[\,],\quad C=[\,],\quad D=\begin{bmatrix} k_l & 1-k_l\\ 1+k_l & -k_l\end{bmatrix}. \tag{15}$$

A, B, C are degenerated (empty) matrices, but this convenient notation is used to standardize the procedures in the sequel.

Cells $\mathcal{Q}_s^l$ and $\mathcal{Q}_s^r$ They contain one first-order transfer function, the state-space representation of $\mathcal{Q}_s^l$ is

$$A=[\alpha_l],\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}\alpha_l\\ \alpha_l\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}. \tag{16}$$

Cells $\mathcal{Q}_{cl}^l$ and $\mathcal{Q}_{cl}^r$ The transfer function R of the type (12) is approximated by $\widetilde{R}$ of the type (14). The state-space representation of $\mathcal{Q}_{cl}^l$ is given by the following diagonal form

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{diag}(\begin{bmatrix}\xi_1, ..., \xi_L, \gamma_1, ..., \gamma_M, \overline{\gamma}_1, ..., \overline{\gamma}_M\end{bmatrix}),\\ C &= \begin{bmatrix}\mu_1^R, ..., \mu_L^R, w_1^R, ..., w_M^R, \overline{w}_1^R, ..., \overline{w}_M^R\\ \mu_1^R, ..., \mu_L^R, w_1^R, ..., w_M^R, \overline{w}_1^R, ..., \overline{w}_M^R\end{bmatrix},\\ B &= \begin{bmatrix}1, & ... & 1\\ -1, & ... & -1\end{bmatrix}^T \text{ and } D=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{17}$$

Cell $\mathcal{Q}_p$ In the central cell $T(s)=D(s)\,\mathrm{e}^{-\frac{L}{c_0}s}$. The transfer function $D(s)$ of type (12) is approximated by $\widetilde{D}(s)$ of type (14) for which the state-space representation can be written

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{diag}(\begin{bmatrix}\xi_1, ..., \xi_L, \gamma_1, ..., \gamma_M, \overline{\gamma}_1, ..., \overline{\gamma}_M\end{bmatrix}),\\ C &= \begin{bmatrix}\mu_1^D, ... \mu_L^D, w_1^D, ... w_M^D, \overline{w}_1^D, ... \overline{w}_M^D\end{bmatrix},\\ B &= \begin{bmatrix}1, & ... & 1\end{bmatrix}^T \text{ and } D=[0].\end{aligned} \tag{18}$$

Pure delay operators are treated differently : for $\mathrm{e}^{-\tau s}$, if $\tau=MT_s$ with $M\in\mathbb{N}^*$ and T_s is the sampling period, its discrete-time version is Z^{-M} and is performed by a circular buffer. If M is fractional, interpolation filters are needed (cf. eg. [4, 11]).

3.3. State-space representations in discrete time

Since every state-space representation are written in diagonal form, the dynamics equation behaves as J independent first order equations with poles $a_j=A_{j,j}$. This leads to

$$sX_j = a_jX_j+V_j,\quad \text{for } 1\le j\le J, \tag{19}$$

where $V_j=\sum_{n=1}^N B_{(j,n)}U_n$.

Using any standard discretization schemes, J discrete-time equations of the first order are derived from (19). The corresponding difference equations are[1]

$$zX_j^d=\alpha_jX_j^d+(z\lambda_{(j,1)}+\lambda_{(j,0)})V_j^d,\ \text{for } 1\le j\le J. \tag{20}$$

With $\Lambda_l=\mathrm{diag}(\{\lambda_{(j,l)}\}_{1\le j\le J})B$ for $l\in\{0,1\}$, and $A^d=\mathrm{diag}(\{\alpha_j\}_{1\le j\le J})$, the matrix version is

$$zX^d = A^dX^d+(z\Lambda_1+\Lambda_0)U^d, \tag{21}$$

$$Y^d = CX^d+DU^d. \tag{22}$$

Equation (21), is not a standard dynamics equation of state-space representation, because x_n depends upon u_n in the time domain. To cope with this problem, let's define the new state vector: $W^d=X^d-\Lambda_1U^d \Rightarrow zW^d=A^dX^d+\Lambda_0U^d$,

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcl} zW^d &=& A^dW^d+B^dU^d,\\ Y^d &=& C^dW^d+D^dU^d,\end{array}\right. \tag{23}$$

with $B^d=(A^d\Lambda_1+\Lambda_0)$, $C^d=C$ and $D^d=(C\Lambda_1+D)$.

To simplify notations, vectors and matrices of the discrete-time systems are renoted U, Y, X, A, B, C and D.

[1] For example, choosing the triangle approximation (modified first-order hold, cf. [18]), the coefficients of (20) are:
$\alpha_j=\mathrm{e}^{a_jT_s}$, $\lambda_{(j,0)}=-\frac{1-\alpha_j}{a_j^2T_s}-\frac{1}{a_j}$, and $\lambda_{(j,1)}=\frac{1-\alpha_j}{a_j^2T_s}+\frac{\alpha_j}{a_j}$.

4. REALIZABLE NETWORK

To build the network of a whole pipe, two-port systems of pieces of pipe (cf. Fig. 2) are connected together. This section is devoted to obtain a computationally realizable network of the whole system.

4.1. Concatenating systems

In Fig. 3 (top part), delay-free loops appear at interfaces of two systems which represent some cells of Fig. 2. These instantaneous loops cannot be simulated numerically as such, and it is necessary to remove them. To cope with this problem, it is possible to derive an equivalent two-port as the bottom of Fig. 3 shows.

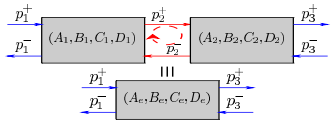


Figure 3: *Concatenating two two-ports*

In [11, p. 31-33], the interconnection laws are performed from state-space representations. This leads to the matrices A_e, B_e, C_e and D_e of the equivalent two-port. This operation is performed recursively to remove every instantaneous loop, until the network only contains intertwined two-port systems (without delay) and cells $\mathcal{Q}_P$ (with delay operators).

4.2. Minimal realization

At this stage of the building, a well-known result in automatic control allows to reduce the dimensions of the systems, in order to reduce the cost of numerical computation.

For an original state-space representation, the study of its observability allows to know if a change of state exists, which defines observable and *non-observable* sub-states. From an input/output point of view it is not necessary to simulate the last substates, because they have no influence on the output.

Similarly, the study of reachability allows to separate reachable and *unreachable* sub-states. With zero initial conditions, unreachable sub-states remain zero for bounded excitations U.

Using the canonical Kalman's form (cf. [19]), the *minimal realization* is derived by eliminating non-observable or unreachable sub-states. If they exist, the dimension of this minimal realization is lower than the original.

Remark: the minimal realization can be required for stability reasons in some particular cases (cf. eg. [20]).

4.3. Jordan decomposition

To reduce the calculation cost, it is useful to look for a new change of state which makes the matrix A sparse.

Considering the minimal realization of a system of the network, if its matrix A is diagonalizable over $\mathbb{C}^{J\times J}$, the modal form of the system is computed. If this matrix is not diagonalizable, it always admits a *Jordan* decomposition over $\mathbb{C}^{J\times J}$.

Then, the appropriate change of variable is done to lead to the new dynamics matrix A' with the diagonal form or the Jordan normal form. This matrix contains its complex eigenvalues on its diagonal, some 0 or 1 on its super-diagonal and 0 everywhere else.

4.4. Last reduction

Whereas all systems are real-valued (u_n and $y_n \in \mathbb{R}^N$), matrices of the state-space representation are complex-valued. From a numerical point of view, computation with complex numbers is more expensive than with real numbers. However using the hermitian symmetry of input/output transfer matrix ($\overline{H(s)} = H(\overline{s})$), it is possible to reduce the number of sub-states to calculate.

The matrix A is with the Jordan normal form, then its Jordan blocks are sorted with respect to their eigenvalues:

$$A' = \mathrm{diag}(A_R, A_C, A_{\overline{C}}),$$

with A_R is a Jordan matrix composed with real eigenvalues, A_C is a Jordan matrix composed with complex eigenvalues with positive imaginary part, and $A_{\overline{C}} = \overline{A_C}$. Then $H(s)$ is decomposed:

$$H(s) = H_R(s) + H_C(s) + H_{\overline{C}}(s) + D.$$

The hermitian symmetry of $H(s)$ and identifications prove that $\overline{H_R(\overline{s})} = H_R(s)$ and $\overline{H_C(\overline{s})} = H_{\overline{C}}(s)$. Thus, the contribution of $H_{\overline{C}}(s)$ can be deduced from that of $H_C(s)$.

Decomposing matrices with respect to eigenvalues of A', $B' = [B_R, B_C, B_{\overline{C}}]^T$, $C' = [C_R, C_C, C_{\overline{C}}]$ and $X' = [X_R, X_C, X_{\overline{C}}]^T$, the equivalent scheme for simulation is, in time domain:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \begin{bmatrix} x_R(n+1) \\ x_C(n+1) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} A_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(n) \\ x_C(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_R \\ B_C \end{bmatrix} u(n), \\ y(n) & = & C_R x_R(n) + 2\Re e\Big(C_C x_C(n)\Big) + Du(n). \end{array} \right.$$

5. RESULTS OF SIMULATIONS

From the geometry of a real trombone, two virtual trombones are built numerically. The varying cross-section pipe of the first virtual trombone, M_1, is built with 11 pieces of pipe, for a refined fit with the original shape of pipe. The second model, M_2, is a simplified version with 5 pieces of pipe. Additionally, the mouthpiece and the radiation impedance are modeled, but these models are not detailed here.

From the geometrical parameters of M_1 and M_2, the state-space representations of the networks of simulation are built with the procedures described in sections 3 and 4. These global systems which represent the resonator of a trombone, have one input and two outputs: the input is the incoming traveling wave p_e^+ at the entry of the mouth-piece, and their outputs are the traveling wave p_e^- outgoing from the mouth-piece and the radiated pressure p_s from the horn. Simulating the impulse response of the input reflexion of the resonator, p_e^-/p_e^+, in time domain, the computed input impedance, P/U, is deduced in frequency domain from (3).

Computed impedances are compared with the measured impedance of the real trombone[1] in Fig. 4. As we can see, the main improvement of the model M_1 (with 11 pieces of pipes) compared to that of M_2 (with 5 pieces) is about the spectral envelop. Whereas the envelop of maxima and minima of M_2 is smooth, that one of the measurements have some irregularities (see the fifth and the sixth maxima for example). With a best fit of the real shape of pipe, the envelop of M_1 has the same type of irregularities. However, because of the simplification of M_2, the complexity of the network of simulation is reduced.

[1] Measurements was done with the impedance sensor of the *Centre de Transfer de Technologie du Mans* (CTTM), Le Mans, France.

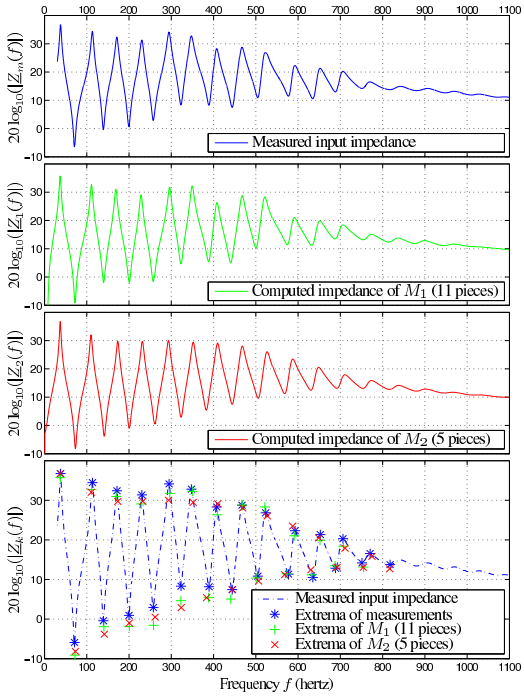


Figure 4: *Comparison between impedances.*

6. CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES

Using the formalism of state-space representations for digital waveguide networks leads to a good modularity for the assembling of elements, and an automatic building of the network of simulation. Moreover, standard tools of automatic control are used to reduce the calculation cost.

Considering the refined model of *Webster-Lokshin* for lossy flared pipes, it has been shown that this formalism can be applied with approximations of the diffusive representations by finite-dimensional systems. Compared to models based on cylinders or cones, this model requires much fewer pieces of pipes to obtain good geometrical fits and realistic computed impedances.

At present, the global complexity of computation is equivalent to former models mentioned above. But the dimension of approximation (cf. sec. 3.1) can be reduced with a different method.

In this paper, only linear resonators with static parameters have been presented. In order to have a complete computer-aided maker of virtual wind instruments, nonlinear or time-varying system must be considered: trombone slide, valves, lips, reed, tone-holes. The modularity of the formalism should make an easy integration possible with only a few differences.

7. ACKNOWLEDGMENT

The authors thank René Caussé, Thomas Hézard and Pierre-Damien Dekoninck for their collaboration.

8. REFERENCES

[1] J. O. Smith, *Applications of Digital Signal Processing to Audio and Acoustics*, pp. 417–466, Kluwer Academic Publishers, February 1998.

[2] A. Webster, "Acoustic impedance and the theory of horns and of the phonograph," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S*, 1919.

[3] J. D. Markel and A. H. Gray, "On autocorrelation equations as applied to speech analysis," *IEEE Trans. Audio and Electroacoust.*, vol. AU-21, no. 2, pp. 69–79, April 1973.

[4] V. Välimäki, *Discrete-time modeling of acoustic tubes using fractional delay filters*, Ph.D. thesis, Helsinski University of Technology, 1995.

[5] D. Matignon, *Représentations en variables d'état de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire*, Ph.D. thesis, Université Paris-Sud, 1994.

[6] E. Ducasse, "An alternative to the traveling-wave approach for use in two-port descriptions of acoustic bores," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 112, pp. 3031–3041, 2002.

[7] J.-D. Polack, "Time domain solution of Kirchhoff's equation for sound propagation in viscothermal gases: a diffusion process," *J. Acoustique*, vol. 4, pp. 47–67, February 1991.

[8] T. Hélie, R. Mignot, and D. Matignon, "Waveguide modeling of lossy flared acoustic pipes: Derivation of a Kelly-Lochbaum structure for real-time simulations," in *IEEE WASPAA*, Mohonk, USA, 2007, pp. 267–270.

[9] T. Hélie, "Unidimensional models of acoustic propagation in axisymmetric waveguides," *J. Acoust. Soc. Am.*, 2003.

[10] D. Matignon, "Physical modelling of musical instruments: analysis/synthesis by means of state space representations," in *ISMA95*, pp. 496–502.

[11] S. Tassart, *Modélisation, simulation et analyse des instruments à vent avec retards fractionnaires*, Ph.D. thesis, Université Paris VI, Paris, 1999.

[12] R. Mignot, T. Hélie, and D. Matignon, "From the Webster-Lokshin equation to a general framework for simulation of digital waveguides," Submitted, 2009.

[13] T. Hélie, *Modélisation physique des instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion*, Ph.D. thesis, Université Paris-Sud, Orsay, France, 2002.

[14] T. Hélie and D. Matignon, "Diffusive reprentations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with viscothermal losses," *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, 2006.

[15] D. Matignon, "Stability properties for generalized fractional differential systems," *ESAIM: Proc*, vol. 5, 1998.

[16] O. J. Staffans, "Well-posedness and stabilizability of a viscoealistic in energy space," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 345, no. 2, pp. 527–575, 1994.

[17] G. Montseny, "Diffusive representation of pseudo-differential time-operators," *ESAIM: Proc*, vol. 5, 1998.

[18] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, p.151, Addison-Wesley, 1990.

[19] R. Kalman, "Canonical structure of linear dynamical systems," in *Proc. of the Nat. Ac. of Sciences*.

[20] R. Mignot, T. Hélie, and D. Matignon, "Stable realization of a delay system modeling a convergent acoustic cone," in *MED08*.

Annexe L

Résumé étendu de congrès (IFAC CDPS 2009) : Puzzles in pipes with negative curvature : from the Webster PDE to stable numerical simulation in real time (référence [MHM09d])

Puzzles in pipes with negative curvature: from the Webster PDE to stable numerical simulation in real time*

R. Mignot, T. Hélie†
IRCAM & CNRS, UMR 9912: Analysis-Synthesis team.
D. Matignon‡
Université de Toulouse; ISAE, Applied Mathematics training unit.

Abstract

Minimal realizations of a class of delay-differential systems are derived for the digital simulation of waveguides, modelled by the Webster horn equation. Studying their stability is an interesting issue, since *negative* curvatures could lead to unstable systems. Spectral properties of Toeplitz matrix play a key role.

Keywords

Webster equation, delay-differential systems, BIBO-stability, simulation.

1 Introduction

The wave equation with space-varying coefficients that models propagation in horns is the Webster PDE, which is known to be *conservative*, whatever the shape of the horn; hence, stable numerical schemes can be derived for it, e.g. forward Euler on the vector (pressure, flow) with a CFL condition. But, in the case of *negative curvature*, the waveguide decompositions usually used for real-time simulations introduces unstable subsystems. A similar paradox in the case of a convergent cone has been recently fixed in [1] using minimal realization of a delay system. In the present work, the same methodology is applied to a pipe with negative (constant) curvature, the discretization of which now gives rise to a delay-differential system of retarded type.

2 1D propagation in a convex acoustic pipe

Consider a pipe with radius $r(\ell)=\cos(\ell)$ for $\ell \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, $L < \pi$ (see Fig. 1a). Inside the pipe, the acoustic pressure p is governed by the (adimensionnal) Webster PDE

*This work is supported by the CONSONNES project, ANR-05-BLAN-0097-01
†1, pl. Igor Stravinsky, 75004 Paris, France. e-mail: {mignot,helie}@ircam.fr
‡10, av. E. Belin, F-31055 Toulouse Cedex 4, France. e-mail: denis.matignon@isae.fr

$\{\partial_\ell^2 + 2\frac{r'(\ell)}{r(\ell)}\partial_\ell - \partial_t^2\}p(\ell,t) = 0$, the velocity v by the (adimensionnal) Euler PDE $\partial_t v(\ell,t) = -\partial_\ell p(\ell,t)$, and travelling waves $\phi^\pm := r(p \pm v)$ by the coupled equations

$$\partial_\ell \phi^\pm(\ell,t) \pm \partial_t \phi^\pm(\ell,t) = \left(r'(\ell)\,/\,r(\ell)\right)\phi^\mp(\ell,t). \tag{1}$$

The scattering matrix M such that $Y(s)=M(s)U(s)$ with $U(s)=[\hat\phi^+(\frac{-L}{2},s),\hat\phi^-(\frac{L}{2},s)]^T$ and $Y(s)=[\hat\phi^-(\frac{-L}{2},s),\hat\phi^+(\frac{L}{2},s)]^T$ in the Laplace domain is meromorphic in $\Gamma(s)^2=s^2-1$, and though defining a BIBO stable system, as expected. But, the standard decomposition of M used for waveguide implementations involves functions of Γ with branching points 1 and –1. Hence, contrarily to flared pipes for which $\Gamma(s)^2=s^2+1$, the analyticity is lost over $\mathbb{C}_0^+$: such a decomposition involves unstable sub-systems.

3 Approximation with pieces of conical pipes

Consider the piecewise affine approximations $\widetilde{r}_N$ of r with discretization step $\epsilon_N = \frac{L}{N}$. Waves in conical pieces of pipes are assumed to be ideally spherical and $\phi^\pm$ to be

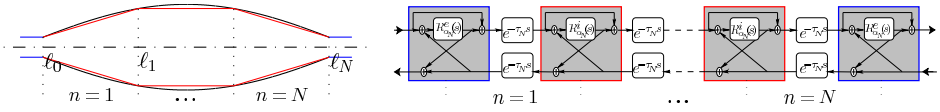


Figure 1: (a) Approximated shape of pipe, (b) Stable realization for simulation.

continuous at junctions. It leads to the network in Fig. 1b where reflection functions are $R_\alpha(s) = \frac{\alpha}{s-\alpha}$ with $\alpha_N^i = \frac{\pi}{2\epsilon_N}(1-\cos\epsilon_N) > 0$ for junctions inside the pipe and with $\alpha_N^e = \frac{\pi}{4\epsilon_N}(1-\frac{\cos(L/2-\epsilon_N)}{\cos(L/2)}) < 0$ at both ends. This system corresponds to a delay differential system of retarded type with the following state-space representation

$$\begin{aligned} s\,X_N(s) &= A_N(e^{-\tau_N s})X_N(s) + B_N(e^{-\tau_N s})U(s), &(2)\\ Y(s) &= C_N(e^{-\tau_N s})X_N(s) + D_N(e^{-\tau_N s})U(s), &(3)\end{aligned}$$

where X_N is defined from $\hat\phi=\hat\phi^+ + \hat\phi^-$ by $X_N(s) = \frac{\Delta_N}{s}[\hat\phi(\ell_0,s),\hat\phi(\ell_1,s),\ldots,\hat\phi(\ell_N,s)]^T$, and where $A_N(w)=\Delta_N W_N(w)$, $W_N(w)$ is the $(N+1)\times(N+1)$-symmetrical Toeplitz matrix such that $[W_N(w)]_{ij} = w^{|i-j|}$, and $\Delta_N = \mathrm{diag}([\alpha_N^e,\alpha_N^i,\ldots,\alpha_N^i,\alpha_N^e])$.

For fixed N, the set $\mathcal{P}_N$ of roots of $\det\left(sI_{(N+1)} - A_N(e^{-\tau_N s})\right)$ is countable, belongs to $\mathbb{C}_0^-$ and the system in Fig. 1b proves to be stable. The theoretical question of the behaviour of the set of poles $\mathcal{P}_N$ as N goes towards infinity is left open, so far. Simulation results will be presented to illustrate and help understand their behaviour.

References

[1] R. Mignot, T. Hélie, D. Matignon. *Stable Realization of a Delay System Modeling a Convergent Acoustic Cone*. IEEE MED08. Ajaccio, France, 2008. p 1574-1579.

[2] E. Ducasse. *An alternative to the traveling-wave approach for use in two-port descriptions of acoustic bores*. J. Acoust. Soc. Am. 2002, Vol. 112. p 3031-3041.

Bibliographie

[ABM88] J. Agulló, A. Barjau, and J. Martínez. Alternatives to the impulse response h(t) to describe the acoustical behavior of conical ducts. *J. Acoust. Soc. Am.*, 84 :1606–1612, 1988.

[AMP08] A. Alastuey, M. Magro, and P. Pujol. *Physique et outils mathématiques : Méthodes et exemples*. EDP Sciences Editions, 2008. 391 pages.

[APK97] N. Amir, V. Pagneux, and J. Kergomard. A study of wave propagation in varying crosssection waveguides by modal decomposition. Part II. Results. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(5) :2504–2517, 1997.

[AS70] M. Abramowitz and I A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, 1970.

[Bai94] H. Bailliet. Modeling of the French horn-player system. Master's thesis, INSA Toulouse, 1994.

[Ber64] D. Bernoulli. Sur le son et sur le tons des tuyaux d'orgues différement construits. *Mém. Acad. Sci. (Paris)*, 1764. (référence extraite de [Eis67]).

[Ber99] D. P. Berners. *Acoustics and signal processing techniques for physical modeling of brass instruments*. PhD thesis, Standford University, 1999.

[BHKP89] M. Bruneau, Ph. Herzog, J. Kergomard, and J.-D. Polack. General formulation of the dispersion equation in bounded visco-thermal fluid, and application to some simple geometries. *Wave Motion*, 11 :441–451, 1989.

[Bil04] S. Bilbao. *Waves and Scattering Methods for Numerical Simulation*. John Wiley and Sons, Chichester, 2004.

[BKC99] A. Barjau, D. H. Keefe, and S. Cardona. Time-domain simulation of acoustical waveguides with arbitrarily spaced discontinuities. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(3) :1951–1964, March 1999.

[BM09] B. d'Andréa Novel and D. Matignon. Systems control theory applied to natural and synthetic musical sounds. 2009. soumis.

[BP02] C. Bonnet and J. R. Partington. Analysis of fractional delay systems of retarded and neutral type. *Automatica*, 38 :1133–1138, 2002.

[BR93] P. Borne and J.-P. Richard. *Analyse et régulation des processus industriels, volume 2*. Editions TECHNIP, 1993.

[BR05] F. Bonnans and P. Rouchon. *Commande et optimisation de systémes dynamiques*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.

[Bru98] M. Bruneau. *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermès, Paris, 1998.

[BS89] P. Bogacki and L. F. Shampine. A 3(2) pair of Runge-Kutta formulas. *Appl. Math. Letters*, 2 :1–9, 1989.

[BS03] S. Balac and F. Sturm. *Algèbre et analyse : cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés*. PPUR presses polytechniques, 2003.

[BT86] R. L. Bagley and P. J. Torvik. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *J. Rheology*, 30(1) :133–155, 1986.

[Cap76] M. Caputo. Vibrations of an infinite plate with a frequency independent Q. *J. Acoust. Soc. Am.*, 60(3) :634–639, 1976.

[CGN94] J. Chen, G. Gu, and C. N. Nett. A new method for computing delay margins for stability of linear delay systems. In *IEEE CDC*, pages 433–437, Florida, USA, 1994.

[Chu60] R. V. Churchill. *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill, New York, 1960.

[CM49] N. G. Chebotarev and N. N. Meiman. *The Routh-Hurwitz problem for polynomials and entire functions*. Acad. Sci. USSR, Moscow–Leningrad, 1949. 332 pages.

[CZ95] R. F. Curtain and H. J. Zwart. *An introduction to infinite–dimensional linear systems theory*, volume 21 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer Verlag, 1995.

[Dek08] P.-D. Dekoninck. Lutherie virtuelle et synthèse sonore d'instruments à vent. Master's thesis, INSA de Rouen, 2008.

[DGK00] J.-P. Dalmont, J. Gilbert, and J. Kergomard. Reed instruments, from small to large amplitude periodic oscillations and the Helmholtz motion analogy. *Acta Acus.*, 86 :685–703, 2000.

[DNJ01] J.-P. Dalmont, C. J. Nederveen, and N. Joly. Radiation impedance of tubes with different flanges : numerical and experimental investigations. *J. Sound Vib.*, 244(3) :505–534, 2001.

[DP80] J. R. Dormand and P. J. Prince. A family of embedded Runge-Kutta formulae. *J. Comp. Appl. Math.*, 6 :19–26, 1980.

[DRMP92] Ph. Depalle, X. Rodet, D. Matignon, and P. Pouillieute. Premiers résultats sur les modèles en variables d'état et leur identification. In *Colloque Modèles physiques, Création musicale et Ordinateurs*, volume 2, pages 317–350, 1992.

[DS88] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear Operators, part 3, Spectral Operator*. Wiley, 1988.

[DT95] P. Depalle and S. Tassart. State space sound synthesis and a state space synthesiser builder. In *Int. Computer Music Conf. (ICMC'95)*, pages 88–95. Computer Music Association, September 1995.

[Duc01] E. Ducasse. *Modélisation et simulation dans le domaine temporel d'instruments à vent à anche simple en situation de jeu : méthodes et modèles*. PhD thesis, Université du Maine, 2001.

[Duc02] E. Ducasse. An alternative to the traveling-wave approach for use in two-port descriptions of acoustic bores. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112 :3031–3041, 2002.

[Duf94] D. G. Duffy. *Transform methods for solving partial differential equations*. CRC Press, Annapolis, Maryland, USA, 1994.

[Dun00] M. Dunau. Représentations diffusives de seconde espèce : introduction et expérimentation. Master's thesis, DEA d'Automatique, Toulouse, 2000.

[Dup77] J. Dupraz. *La théorie des distributions et ses applications*. Cépadues, Toulouse, France, 1977.

[Eis67] E. Eisner. Complete solutions of the "Webster" horn equation. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 41(4) :1126–1146, 1967.

[FD00] Z. E. A. Fellah and C. Depollier. Transient acoustic wave propagation in rigid porous media : A time-approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(2) :683–688, 2000.

[Fet86] A. Fettweis. Wave digital filters : theory and practice. *Proceedings of the IEEE*, 74(2) :270–327, February 1986.

[FPW90] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. L. Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, 1990. 841 pages.

[FR91] N. H. Fletcher and T. D. Rossing. *Physics of musical instruments*. Springer Verlag, New York, 1991.

[GB98] G. Garcia and J. Bernussou. Identification of the dynamics of a lead acid battery by a diffusive model. *ESAIM : Proceedings*, 5 :87–98, December 1998. URL : `http ://www.edpsciences.org/articles/proc/Vol.5/`.

[GGA95] B. Gazengel, J. Gilbert, and N. Amir. Time domain simulation of single reed wind instruments. from the measured input impedance to the synthesis signal. Where are the traps ? *Acta Acust.*, 3 :445–472, 1995.

[GKP90] J. Gilbert, J. Kergomard, and J.-D. Polack. On the reflection functions associated with discontinuities in conical bores. *J. Acoust. Soc. Am.*, 87(4) :1773–1780, 1990.

[GKV05] P. Guillemain, J. Kergomard, and T. Voinier. Real-time synthesis of clarinet-like instruments using digital impedance models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 118(1) :483–494, 2005.

[Gru63] V. V. Grushin. On Sommerfeld-type conditions for a certain class of partial differential equations. *Mat. Sb. (N.S.)*, 61(103) :147–174, 1963.

[HÓ2] T. Hélie. *Modélisation physique des instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion*. PhD thesis, Université Paris-Sud, Orsay, France, 2002.

[HÓ3] T. Hélie. Unidimensional models of acoustic propagation in axisymmetric waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.*, 114 :2633–2647, 2003.

[HÓ6] T. Hélie. Ondes découplées et ondes progressives pour les problèmes mono-dimensionnels d'acoustique linéaire. In *CFA*, Tours, France, 2006.

[HL93] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel. *Introduction to functional differential equations*. Applied Mathematical Sciences Ser. Springer, 1993.

[HM03] T. Hélie and D. Matignon. Numerical simulation of acoustic waveguides for Webster-Lokshin model using diffusive representations. In *Waves - the 6th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena (INRIA)*, pages 72–77, Jyvaskyla, Finland, 2003.

[HM06a] T. Hélie and D. Matignon. Diffusive reprentations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 16 :503–536, Jan. 2006.

[HM06b] T. Hélie and D. Matignon. Representation with poles and cuts for the time-domain simulation of fractional systems and irrational transfer functions. *Signal Processing, Special Issue on Fractional Calculus Applications in Signals and Systems*, 86 :2516–2528, 2006.

[HM08] H. Haddar and D. Matignon. Theoretical and numerical analysis of the Webster-Lokshin model. Technical Report Research report RR6558, INRIA, June 2008. 30 pages.

[HMM06] T. Hélie, D. Matignon, and R. Mignot. Criterion design for optimizing low-cost approximations of infinite-dimensional systems : Towards efficient real-time simulation. In *IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation (CAO'06)*, Cachan, France, 2006. 6 pages. (voir l'annexe G).

[HMM07a] T. Hélie, D. Matignon, and R. Mignot. Criterion design for optimizing low-cost approximations of infinite-dimensional systems : towards efficient real-time simulation. *Int. Journal of Tomography and Statistics*, 7 :13–18, 2007.

[HMM07b] T. Hélie, R. Mignot, and D. Matignon. Waveguide modeling of lossy flared acoustic pipes : Derivation of a Kelly-Lochbaum structure for real-time simulations. In *IEEE WASPAA*, pages 267–270, Mohonk, USA, 2007. (voir l'annexe H).

[How76] M. S. Howe. On the Helmhotz resonator. *J. Sound Vib.*, 45 :427–440, 1976.

[HR03] T. Hélie and X. Rodet. Radiation of a pulsating portion of a sphere : application to horn radiation. *Acta Acustica*, 89 :565–577, 2003.

[Hél00] D. Héleschewitz. *Analyse et simulation de systèmes différentiels fractionnaires et pseudo-différentiels linéaires sous représentation diffusive.* PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 2000.

[Héz09] T. Hézard. Construction de familles d'instruments à vent virtuels. Master's thesis, ENSEA, 2009.

[IF72] K. Ishizaka and J. Flanagan. Synthesis of voiced sounds from a two-mass model of the vocal cords. Technical report, Bell. Syst. Techn. J., 1972.

[JB71] P. J. Johns and R. L. Beurle. Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix. *Proceeding of the IEEE*, 118 :1203–1208, September 1971.

[Jur74] E. I. Jury. *Inners and stability of dynamic systems.* Wiley-Interscience, New York, 1974.

[Kai80] T. Kailath. *Linear systems.* Prentice Hall International, 1980. 682 pages.

[Kal61] R. Kalman. Canonical structure of linear dynamical systems. In *Proceedings of the National Academy of Sciences*, pages 596–600, 1961.

[Kem02] J. Kemp. *Theoretical and experimental study of wave propagation in brass musical instruments.* PhD thesis, University of Edinburgh, 2002.

[Kha02] H. K. Khalil. *Nonlinear systems.* Pearson Education, New Jersey, 2002. 750 pages.

[KL62] J. L. Kelly and C. C. Lochbaum. Speech synthesis. In *Proc. 4th Int. Cong. Acoust.*, pages 1–4, Copenhagen, Denmark, 1962.

[KN86] V. B. Kolmanovskii and V. R. Nosov. *Stability of Functional Differential Equations.* Mathematics in Science and Eng., 1986.

[Koe84] R. C. Koeller. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *J. Appl. Mech.*, 51 :299–307, June 1984.

[Lag61] J. L. Lagrange. *Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son.* Misc. Taurinensia (Mélanges Phil. Math., Soc, Roy. Turin), 1760-1761. (référence extraite de [Eis67]).

[Lok78] A. A. Lokshin. Wave equation with singular retarded time. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 240 :43–46, 1978. (in Russian).

[LR78] A. A. Lokshin and V. E. Rok. Fundamental solutions of the wave equation with retarded time. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 239 :1305–1308, 1978. (in Russian).

[LS48] H. Levine and J. Schwinger. On the radiation of sound from an unflanged circular pipe. *Physical Review*, 73(4) :383–406, 1948.

[MA88] J. Martínez and J. Agulló. Conical bores. Part I : Reflection functions associated with discontinuities. *J. Acoust. Soc. Am.*, 84 :1613–1619, 1988.

[MAC88] J. Martínez, J. Agulló, and S. Cardona. Conical bores. Part II : Multiconvolution. *J. Acoust. Soc. Am.*, 84 :1620–1627, 1988.

[Mae82] S. Maeda. A digital simulation method of the vocal-tract system. *Speech Communication*, 1(3-4) :199–229, 1982.

[MAM98] D. Matignon, J. Audounet, and G. Montseny. Energy decay for wave equations with damping of fractional order. In *the Fourth international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation phenomena*, pages 638–640. INRIA, SIAM, June 1998.

[MAM01] G. Montseny, J. Audounet, and D. Matignon. Diffusive representation for pseudo-differentially damped non-linear systems. *Nonlinear Control in the Year 2000*, 2 :163–182, 2001.

[Mar05] W. Marshall Leach. *Introduction to electroacoustics and audio amplifier design.* Kendall Hunt Pub Co, 2005. Edition 3.

[Mat94] D. Matignon. *Représentations en variables d'état de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 1994.

[Mat95] D. Matignon. Physical modelling of musical instruments : analysis/synthesis by means of state space representations. In *International Symposium on Musical Acoustics*, pages 496–502. SFA, July 1995.

[Mat98] D. Matignon. Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM Proc.*, 5 :145–158, 1998.

[Mat02] D. Matignon. *Introduction au calcul fractionnaire et applications*, volume 1 de Fractals et lois d'Echelle of *Traité "Information - Commande - Communication"*. Hermès, 2002.

[Mat06] D. Matignon. Asymptotic stability of the Webster-Lokshin model. In *Mathematical Theory of Networks and Systems symposium (MTNS)*, Kyoto, Japan, August 2006. 11 pages.

[Mat09] D. Matignon. *An introduction to fractional calculus, in Scaling, Fractals and Wavelets*, chapter 7, pages 237–278. ISTE & Wiley, January 2009. ISBN : 9781848210721.

[Md95] D. Matignon and B. d'Andréa-Novel. Spectral and time-domain consequences of an integro-differential perturbation of the wave PDE. In *WAVES'95*, pages 769–771, Mandelieu, France, April 1995. INRIA, SIAM.

[MG73] J. D. Markel and A. H. Gray. On autocorrelation equations as applied to speech analysis. *IEEE Trans. Audio and Electroacoust.*, 21(2) :69–79, April 1973.

[MG76] J. D. Markel and A. H. Gray. *Linear Prediction of speech*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[MHM08a] R. Mignot, T. Hélie, and D. Matignon. On the appearance of branch cuts for fractional systems as a mathematical limiting process based on physical grounds. In *IFAC Fractional Differentiation and its Applications*, Ankara, Turkey, 2008. 6 pages. (voir l'annexe J).

[MHM08b] R. Mignot, T. Hélie, and D. Matignon. Stable realization of a delay system modeling a convergent acoustic cone. In *IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1574–1579, Ajaccio, France, 2008. (voir l'annexe I).

[MHM09a] R. Mignot, T. Hélie, and D. Matignon. On the singularities of fractional differential systems, using a mathematical limiting process based on physical grounds. *Physica Scripta*, accepted for publication in 2009.

[MHM09b] R. Mignot, T. Hélie, and D. Matignon. Digital waveguide modeling for wind instruments : building a state-space representation based on the webster-lokshin model. *IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing*, 2009. (accepté mais pas encore publié).

[MHM09c] R. Mignot, T. Hélie, and D. Matignon. From the webster-lokshin equation to a general framework for simulation of digital waveguides. 2009. (soumis en Août 2009).

[MHM09d] R. Mignot, T. Hélie, and D. Matignon. Puzzles in pipes with negative curvature : from the Webster PDE to stable numerical simulation in real time. In *IFAC Workshop on Control of Distributed Parameter Systems*, Toulouse, France, Juillet 2009. (voir l'annexe L).

[MHM09e] R. Mignot, T. Hélie, and D. Matignon. State-space representations for digital waveguide networks of lossy flared acoustic pipes. In *Conference on Digital Audio Effects (DAFx-09)*, Como, Italie, Septembre 2009. (voir l'annexe K).

[Mon98] G. Montseny. Diffusive representation of pseudo-differential time-operators. *ESAIM : Proc*, 5 :159–175, 1998.

[MP05] D. Matignon and C. Prieur. Asymptotic stability of linear conservative systems when coupled with diffusive systems. In *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, volume 11, pages 487–507, 2005.

[MR93] K. S. Miller and B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. John Wiley & Sons, 1993.

[MZ09] D. Matignon and H. Zwart. Standard diffusive systems as well-posed linear systems. *Int. J. Control*, accepted for 2009.

[Neh52] Z. Nehari. *Conformal Mapping*. Dover, 1952. 396 pages.

[Nic97] S.-I. Niculescu. *Systèmes à retard. Aspects qualitatifs sur la stabilité et la stabilisation*. Nouveaux essais. Diderot, 1997. 243 page.

[Nic01] S.-I. Niculescu. *Delay effects on stability. A robust control approach*. Springer, Berlin New York, 2001.

[OS74] K. B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York and London, 1974. 450 pages.

[Pag96] V. Pagneux. *Propagation acoustique dans les guides à section variable et effet d'écoulement*. PhD thesis, Université du Maine, 1996.

[PAK96] V. Pagneux, N. Amir, and J. Kergomard. A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. Part I : Theory and validation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100(4) :2034–2048, 1996.

[Par04] J. R. Partington. *Linear operators and linear systems*. London Mathematical Society Student Texts (No. 60). Cambridge University Press, London, 2004.

[PB87] T. W. Parks and C. S. Burrus. *Digital Filter Design*. John Wiley and Sons, 1987.

[Pic89] B. Picinbono. *Théorie des signaux et des systèmes avec problèmes résolus*. Dunod Université, Dunod Université. Bordas, Paris, 1989. 259 pages.

[Pol91] J.-D. Polack. Time domain solution of Kirchhoff's equation for sound propagation in viscothermal gases : a diffusion process. *J. Acoustique*, 4 :47–67, February 1991.

[RB95] F. Rotella and P. Borne. *Théorie et pratique du calcul matriciel*. Editions TECHNIP, 1995. 338 pages.

[RDFL90] X. Rodet, P. Depalle, G. Fleury, and F. Lazarus. Modèles de signaux et modèles physiques d'instruments : études et comparaisons. In *Actes du Colloque Modèles Physique, création musicale et ordinateur*, Grenoble, 1990.

[Rud75] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Maîtrise de mathématique pures. Masson, 1975. 397 pages.

[Sca97] G. P. Scavone. *An Acoustic Analysis of Single-Reed Woodwind Instruments with an Emphasis on Design and Performance Issues and Digital Waveguide Modeling Techniques*. PhD thesis, Music Dept., Stanford University, 1997.

[Sch81] R. T. Schumacher. Ab initio calculations of the oscillation of a clarinet. *Acustica*, 48 :71–85, 1981.

[SGK+09] F. Silva, P. Guillemain, J. Kergomard, B. Mallaroni, and A. N. Norris. Approximation formulae for the acoustic radiation impedance of a cylindrical pipe. *J. Sound Vib.*, 322 :255–263, 2009.

[SKM87] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*. Gordon & Breach, 1987. transl. from Russian, 1993.

[Smi87] J. O. Smith. Music applications of digital waveguides. Technical Report STAN-M-39, Center for Computer Research in Music and Acoustics (CCRMA), Department of Music, Stanford University, 1987.

[Smi98] J. O. Smith. *Applications of Digital Signal Processing to Audio and Acoustics*, chapter Principles of Digital Waveguide Models of Musical Instruments, pages 417–466. Kahrs, M. and Brandenburg, K., February 1998.

[Som12] A. Sommerfeld. Die Greensche Funktionen der Schwingungsgleichung. *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.*, 1912.

[Sta94] O. J. Staffans. Well-posedness and stabilizability of a viscoealistic in energy space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 345(2) :527–575, 1994.

[Str90] W. J. Strong. Computer simulation of a trumpet. *J. Acoust. Soc. Am.*, 87(1), 1990.

[Su94] J.-H. Su. On the stability of time-delay systems. In *IEEE CDC*, pages 429–430, Florida, USA, 1994.

[Su95] J.-H. Su. The asymptotic stability of linear autonomous systems with commensurate time delays. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 40 :1114–1118, 1995.

[Tas99] S. Tassart. *Modélisation, simulation et analyse des instruments à vent avec retards fractionnaires*. PhD thesis, Université Paris VI, Paris, 1999.

[TR03] L. Trautmann and R. Rabenstein. *Digital sound synthesis by physical modeling using the functional transformation method*. Springer, 2003. 226 pages.

[V95] V. Välimäki. *Discrete-time modeling of acoustic tubes using fractional delay filters*. PhD thesis, Helsinki University of Technology, 1995.

[Ver00] C. Vergez. *Trompette et Trompettiste : un système dynamique non linéaire analysé, modélisé et simulé dans un contexte musical*. PhD thesis, Université Paris 6, Paris, 2000.

[VPEK06] V. Välimäki, J. Pakarinen, C. Erkut, and M. Karjalainen. Discrete-time modelling of musical instruments. *Reports on Progress in Physics*, 69(1) :1–78, 2006.

[VR98] C. Vergez and X. Rodet. Experiments with an artificial mouth for trumpet. In *ISMA98*, Leavenworth, Washington State, USA, 1998.

[vW02] M. van Walstijn. *Discrete-Time Modelling of Brass and Reed Woodwind Instruments with Application to Musical Sound Synthesis*. PhD thesis, University of Edinburgh, 2002.

[vW07] M. van Walstijn. Wave-based simulation of wind instrument resonators. *IEEE Signal Processing Magazine*, 24 :21–31, March 2007.

[vWC03] M. van Walstijn and M. Campbel. Discrete-time modelling of woodwind instrument bores using wave variables. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113 :575–585, 2003.

[Web19] A. Webster. Acoustic impedance and the theory of horns and of the phonograph. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S*, 5 :275–282, 1919.

Réalisation en guides d'ondes numériques stables d'un modèle acoustique réaliste pour la simulation en temps-réel d'instruments à vent.

Ce travail porte sur la modélisation physique des tubes acoustiques pour la simulation numérique en temps-réel. Le but principal est la synthèse sonore d'instruments à vent, avec un modèle réaliste, une méthode modulaire et une implémentation numérique faible coût. Le modèle acoustique de "Webster-Lokshin", utilisé ici, est un modèle à 1 dimension prenant en compte à la fois la "courbure" du profil et les "pertes visco-thermiques" à la paroi. Pour ce modèle acoustique, une structure de simulation compatible avec l'approche des "Guides d'Ondes" est obtenue : un tube y est représenté par un système bouclé, avec retards, faisant intervenir plusieurs sous-systèmes sans retard interne. Une difficulté est la présence de sous-systèmes de dimension infinie qui se comportent comme des sommes infinies de systèmes du premier ou du second ordre. Dans un premier temps, ils sont approximés par des systèmes de dimension finie, puis leur "représentation d'état" à temps discret est obtenue. Enfin, en utilisant des outils standard de l'automatique, ces représentations nous permettent de faciliter la connexion d'éléments acoustiques et de réduire les coûts de calcul de la simulation numérique. Dans ce travail, l'étude de la stabilité et de la passivité est faite. Pour des cas paticuliers de tubes, un problème survient : même si les relations entrées/sorties du tube sont stables, certains sous-systèmes internes possèdent une infinité de singularités à l'origine d'instabilités internes. Nous présentons une explication de ce phénomène et ceci nous amène à proposer une nouvelle décomposition en sous-systèmes pour lever ce problème.

Realization of stable digital waveguides with a realistic acoustic model for the real-time simulation of wind instruments

This work deals with the physical modelling of acoustic tubes for digital simulation in real-time. The main application is the sound synthesis of wind instruments, with a realistic model, a modular method and a low-cost digital implementation. The acoustic model of "Webster-Lokshin", used in this work, is an unidimensional model which takes into account the "curvature" of the profile and the "visco-thermal losses" at the wall. With this acoustic model, we obtain a framework for simulation which is compatible with the "Waveguides" approach: a tube is then represented by a system with delays and closed loops, involving several sub-systems without internal delay. A difficulty is the presence of infinite-dimensional sub-systems which behave as infinite sums of first or second order systems. First, they are approximated by finite-dimensional systems, then their "state-space representation" in the discrete time domain is determined. Finally, using standard tools of automatic control, these representations facilitate the connection of acoustic elements and reduce the computational complexity of the digital simulation. In this work, an analysis of the stability and passivity of this approach is described. For some particular cases of tubes, a problem occurs: even if the input/output relations of the tube are stable, some sub-systems have an infinity of singularities which produce internal instabilities in the system. We present an explanation of this phenomenon and to solve this problem, a new decomposition into sub-systems is performed.