



HAL
open science

Développements théorique et numérique d'un modèle multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions

Quang Thai Son

► **To cite this version:**

Quang Thai Son. Développements théorique et numérique d'un modèle multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions. Matériaux. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2009. Français. NNT: . tel-00467893

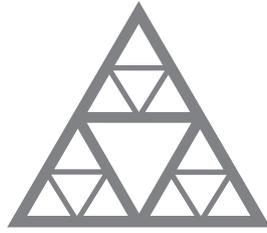
HAL Id: tel-00467893

<https://pastel.hal.science/tel-00467893>

Submitted on 29 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École des Ponts

ParisTech

THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : Structures et Matériaux

par

QUANG THAI SON

Sujet de la thèse :

DÉVELOPPEMENTS THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE
D'UN MODÈLE MULTIPHASIQUE POUR LE CALCUL DES
OUVRAGES RENFORCÉS PAR INCLUSIONS

soutenue à Champs-sur-Marne le 20 Novembre 2009

devant le jury composé de :

Alain Pecker	<i>Président</i>
Claude Boutin	<i>Rapporteur</i>
Jian-Fu Shao	<i>Rapporteur</i>
Bruno Simon	<i>Examineur</i>
Ghazi Hassen	<i>Examineur</i>
Patrick de Buhan	<i>Directeur de thèse</i>

THÈSE
présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTEUR
DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
Spécialité : Structures et Matériaux
par

QUANG THAI SON

Sujet de la thèse :

DÉVELOPPEMENTS THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE
D'UN MODÈLE MULTIPHASIQUE POUR LE CALCUL DES
OUVRAGES RENFORCÉS PAR INCLUSIONS

soutenue à Champs-sur-Marne le 20 Novembre 2009

devant le jury composé de :

Alain Pecker	<i>Président</i>
Claude Boutin	<i>Rapporteur</i>
Jian-Fu Shao	<i>Rapporteur</i>
Bruno Simon	<i>Examineur</i>
Ghazi Hassen	<i>Examineur</i>
Patrick de Buhan	<i>Directeur de thèse</i>

Résumé

La simulation numérique du comportement et l'analyse de stabilité des ouvrages de géotechnique renforcés par inclusions linéaires "rigides" ou "souples", c'est-à-dire capables ou non de reprendre des efforts de flexion et cisaillement, reste un problème difficile, en raison de la très forte hétérogénéité du sol renforcé combinée au grand nombre d'inclusions employées, ainsi qu'à leurs dimensions caractéristiques très petites vis à vis de celles de l'ouvrage dans son ensemble. Une approche alternative, fondée sur une modélisation dite "multiphasique", a été récemment développée, qui permet de s'affranchir des difficultés précédentes et d'aboutir ainsi à des méthodes de dimensionnement accessibles à l'ingénieur.

On s'intéresse dans le cadre de ce travail aux développements théorique et numérique de cette approche en prenant en compte non seulement les effets de flexion et de cisaillement des inclusions, mais également les différents types d'interaction entre ces dernières et le sol environnant.

La première partie du mémoire est consacrée à la construction des approches du calcul à la rupture et à la mise en œuvre numérique élasto-plastique du modèle multiphasique des ouvrages renforcés par inclusions "souples", qui est alors appliqué à l'analyse de la stabilité d'ouvrage en "terre armée".

L'extension de l'approche du calcul à la rupture et du code éléments finis en élasto-plasticité, développés dans la première partie, à la prise en compte des effets de flexion et de cisaillement fait l'objet de la seconde partie du mémoire. La version la plus complète du modèle multiphasique élaborée est appliquée à la simulation du comportement d'une fondation renforcée par inclusions "rigides", soumise à un séisme induisant un chargement latéral.

Partant de l'idée d'optimiser le schéma de renforcement de l'ouvrage traité à la deuxième partie, en inclinant les inclusions, un modèle "triphase" est formulé et développé. Ce modèle vise à décrire le comportement macroscopique d'un sol renforcé par deux familles d'inclusions ayant des orientations différentes.

Mots clés : ouvrages renforcés par inclusions, homogénéisation, modèle multiphasique, interaction sol-inclusions, élasto-plasticité, calcul à la rupture, analyse de stabilité, analyse sismique.

Abstract

The numerical simulation of the behaviour as well as the stability analysis of geotechnical structures reinforced by linear "rigid" or "flexible" inclusions, where shear and flexural behaviour is to be accounted for or not, remains a difficult task, due to the strong heterogeneity of the reinforced soil, combined with the relatively high number of inclusions, and their slenderness. An alternative approach, based on the so-called "multiphase" model, makes it possible to overcome such numerical difficulties and thus devise engineering design methods.

The present work is concerned with the theoretical and numerical developments of such an approach, taking into account not only the shear and flexural effects of inclusions, but also the different types of interaction between the latter and the surrounding soil.

The first part is devoted to the construction of the yield design approaches and to the elastoplastic implementation of the multiphase model of the structures reinforced by "flexible" inclusions, which is then applied to the stability analysis of reinforced earth structures.

In the second part, the yield design approach and finite element code are then extended in order to account for the shear and flexural effects of inclusions. The most complete version of the multiphase model is applied to simulate the behaviour of a foundation reinforced by "rigid" inclusions, subjected to an earthquake-induced lateral loading.

Finally, starting from the idea to optimize the reinforcement scheme of the structure treated in the second part, by inclining the inclusions, a "three-phase" model is formulated and developed. This model is aimed at describing the macroscopic behaviour of soils reinforced by two families of inclusions having different orientations.

Keywords : inclusions-reinforced structures, homogenization, multiphase model, soil-reinforcement interaction, elastoplasticity, yield design, stability analysis, seismic analysis.

A mes parents, à ma femme Trang

Remerciements

Je voudrais remercier tout d'abord le Professeur Alain Pecker qui m'a fait l'honneur de présider mon jury. Je remercie également les Professeurs Claude Boutin et Jian-Fu Shao pour leur lecture et leur lourde tâche de rapporteurs. J'adresse aussi mes remerciements à Bruno Simon, Directeur scientifique de Terrasol, qui a examiné mon travail, pour ses remarques constructives.

J'exprime toutes mes profondes reconnaissances à Patrick de Buhan, pour son accueil et sa direction scientifique au sein de l'équipe "Micromécanique et Calcul des Structures" - ENPC - UR Navier. La clarté de ses raisonnements scientifiques et ses qualités pédagogiques ont été pour moi très enrichissantes.

J'exprime de sincères remerciements à Ghazi Hassen pour son encadrement, ses conseils et sa disponibilité.

Je dois également remercier chaleureusement tous les membres de l'équipe "Micromécanique et Calcul des Structures" pour la très bonne ambiance de travail qui règne au sein du laboratoire.

Je réserve enfin une pensée chaleureuse à mes parents et à ma femme Trang qui n'ont cessé de m'encourager et de me pousser vers l'avant et qui ont su, malgré les distances, être toujours à mes côtés, et à mon frère et ma sœur Vinh et Hoa que j'adore.

Table des matières

1	Introduction bibliographique	1
1.1	Introduction	1
1.2	Les techniques de renforcement par inclusions linéaires "souples"	2
1.3	Les techniques de renforcement par inclusions "rigides"	5
1.4	Les méthodes de dimensionnement et de calcul	8
1.4.1	Les approches de type "modélisation mixte"	8
1.4.2	Les méthodes de calcul par éléments finis	10
1.4.3	L'approche par homogénéisation et ses limites (de Buhan et Hassen (2008) [21])	11
1.5	Vers une modélisation multiphasique des sols renforcés par inclusions linéaires	14
I	Ouvrages renforcés par inclusions "souples"	19
2	Modèle multiphasique élasto-plastique pour des ouvrages renforcés par inclusions "souples"	21
2.1	Introduction	21
2.2	Principe de la modélisation biphasique pour des sols renforcés par inclusions "souples"	22
2.3	Construction du modèle par la méthode des puissances virtuelles	23
2.3.1	Equations de la statique relatives au modèle biphasique	23
2.3.2	Comportement élasto-plastique	24
2.4	Implémentation numérique du modèle	26

2.4.1	Position du problème d'évolution élasto-plastique d'un milieu bi-phasique	27
2.4.2	Discrétisation temporelle de l'évolution et algorithme itératif	28
2.4.3	Formulation par la méthode des éléments finis	31
2.5	Conclusion	32
3	Analyse de stabilité des ouvrages renforcés par inclusions "souples" : l'approche calcul à la rupture	33
3.1	Domaine K des chargements potentiellement supportables pour un système biphasique	34
3.2	Approche statique par l'intérieur de K	37
3.3	Approche cinématique par l'extérieur de K	38
3.4	Un exemple de mise en œuvre : la résistance en compression d'une éprouvette renforcée	42
3.4.1	Position du problème	42
3.4.2	Approche statique du calcul à la rupture	45
3.4.3	Approche cinématique du calcul à la rupture	49
3.5	Identification du paramètre de résistance d'interaction (I_0) et validation du modèle biphasique avec interaction en calcul à la rupture	51
3.5.1	Modélisation directe par éléments finis	52
3.5.2	Identification de I_0	54
3.5.3	Validation du modèle biphasique en calcul à la rupture	57
3.6	Conclusions	58
4	Analyse de stabilité d'un mur de soutènement en terre armée	61
4.1	Position du problème	61
4.2	L'approche cinématique par l'extérieur	66
4.3	Mise en œuvre de l'approche cinématique par l'extérieur utilisant un mécanisme de rupture par bloc en rotation	68

4.4	Présentation des résultats de l'analyse et comparaison avec ceux d'une simulation élasto-plastique	74
4.5	Conclusions	80
II	Ouvrages renforcés par inclusions "rigides"	81
5	Modèle multiphasique en élasticité linéaire des sols renforcés par inclusions "rigides"	83
5.1	Introduction	83
5.2	Principe de la modélisation biphasique générale	84
5.2.1	Géométrie et cinématique du système biphasique	85
5.2.2	Statique du système biphasique	86
5.2.3	Comportement élastique linéaire en déformations planes	88
5.3	Exemple d'application : couche de sol renforcé sous chargement sismique	90
5.3.1	Position du problème	91
5.3.2	Paramètres du modèle biphasique et chargement	93
5.3.3	Solution en déplacement	94
5.3.4	Résultats	98
5.3.5	Solution analytique dans le cas du modèle biphasique adhérent	100
5.4	Validation du modèle biphasique général et identification des coefficients d'interaction	104
5.5	Conclusions	107
6	Mise au point d'un code de calcul biphasique général en élasticité linéaire et application	109
6.1	Introduction	109
6.2	Méthode variationnelle pour le milieu biphasique élastique	109
6.2.1	Energie potentielle d'un milieu biphasique	110
6.2.2	Principe du minimum de l'énergie potentielle	111
6.2.3	Formulation variationnelle	112

6.3	Formulation éléments finis appliquée au modèle biphasique général	113
6.3.1	Maillage	113
6.3.2	Approximation des champs de déplacement et de rotation	114
6.3.3	Principe du minimum discrétisé	116
6.3.4	Formes intégrales élémentaires	120
6.3.5	Assemblage et Résolution	122
6.4	Application au dimensionnement de fondations renforcées par inclusions rigides	123
6.4.1	Description du problème	124
6.4.2	Résultats des simulations numériques	128
6.4.3	Conclusions	132
7	Analyse de stabilité des ouvrages renforcés par inclusions "rigides" et soumis à un chargement sismique	135
7.1	Principe du renforcement des sols de fondation par inclusions rigides	135
7.2	Calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés par inclusions "rigides"	136
7.2.1	Domaine K des chargements potentiellement supportables	136
7.2.2	Approche cinématique par l'extérieur de K	137
7.3	Application au dimensionnement d'une fondation renforcée par inclusions "rigides" et soumise à un chargement sismique	141
7.3.1	Position du problème	141
7.3.2	Calcul à la rupture de l'ouvrage modélisé comme un système biphasique	142
7.3.3	L'approche cinématique par l'extérieur	146
7.3.4	Description du problème et choix des paramètres de calcul	149
7.3.5	Mise en oeuvre de l'approche cinématique	150
7.3.6	Résultats de l'analyse et comparaison avec la simulation élastoplastique	155
7.3.7	Conclusions	161

8	Modèle "triphase" pour le calcul de la résistance sismique des ouvrages renforcés par réseaux d'inclusions	163
8.1	Introduction	163
8.2	Position du problème et principe du modèle triphasique	164
8.2.1	Equations de la statique relatives au modèle triphasique	167
8.2.2	Comportement élasto-plastique	169
8.3	Analyse numérique élasto-plastique du problème	170
8.3.1	Choix des paramètres de calcul	170
8.3.2	Modèle numérique et résultats de la simulation	172
8.4	Comparaison avec les résultats du calcul à la rupture	173
8.5	Comparaison avec le cas des inclusions verticales rigides	177
8.6	Conclusions	179
9	Conclusions et perspectives	181
9.1	Conclusions	181
9.2	Perspectives	183

Table des figures

1.1	Mur en terre armée - d'après Schlosser (1983) [63]	3
1.2	Effort de cisaillement sol/armature	4
1.3	Répartition des tractions dans les armatures d'un ouvrage en terre armée	4
1.4	Principe du renforcement d'une couche de sol par des inclusions verticales, soumise à un chargement sismique	7
1.5	Stabilisation d'une pente soumise à son poids propre - d'après Hassen (2006) [37]	7
1.6	Analyse de la stabilité avec surface de rupture d'un talus renforcé par inclusions linéaires - d'après de Buhan (2004) [16]	8
1.7	(a) Mécanisme de rupture d'un ouvrage renforcé par inclusions linéaires avec la zone de cisaillement , (b) Facteur de stabilité d'un talus vertical renforcé évalué par le biais de différents mécanismes	10
1.8	Volume élémentaire représentatif (VER) d'un sol renforcé par inclusions linéaires	12
2.1	Description du matériau renforcé aux échelles (a) microscopique et (b) macroscopique	22
3.1	Convexité du domaine de résistance de la phase matrice	35
3.2	Domaine de résistance de la phase renforcement	36
3.3	Construction d'une approche statique par l'intérieur du domaine K	37
3.4	Approche par l'intérieur du domaine K par trajet de chargement radial	38
3.5	Interprétation géométrique de (3.19) dans l'espace des paramètres de chargement	41

3.6	Saut de vitesse à la traversée d'une surface discontinuë du champ de vitesse de la phase matrice (a) et de la phase renforcement (b)	41
3.7	Compression en déformations planes d'une éprouvette renforcée	42
3.8	Loi d'interaction élasto-plastique simplifiée	45
3.9	Contrainte dans la phase renforcement ($n_0^r \geq I_0L$)	47
3.10	Contrainte dans la phase renforcement ($n_0^r < I_0L$)	48
3.11	Modélisation "mixte" de l'éprouvette renforcée	52
3.12	Maillage utilisé pour $L=2m$ et $e=0,8m$	53
3.13	Courbes efforts-déformations du calcul direct par éléments finis de l'éprouvette renforcée	53
3.14	Problème de l'arrachement sur deux volumes représentatifs homothétiques	55
3.15	Calage des courbes analytique (trait plein) et numérique (points en carré) .	56
3.16	Comparaison de la résistance en compression de l'éprouvette renforcée donnée par le modèle biphasique et celle obtenue par les calculs numériques PLAXIS	57
3.17	Distributions de l'effort normal dans le renforcement pour différentes valeurs du facteur d'échelle ε	58
4.1	Mur de soutènement en sol renforcé (a) et modèle biphasique correspondant (b)	62
4.2	Caractéristiques géométriques des inclusions de renforcement dans le plan transversal	62
4.3	Interprétation de la densité volumique de l'effort d'interaction	63
4.4	Champs de vitesse virtuels de la phase matrice (a) et de la phase renforcement (b), dérivés d'un mécanisme de rupture par bloc en rotation	68
4.5	Champ de vitesse dans la phase renforcement montrant deux modes de rupture	70
4.6	Calcul de la puissance résistante maximale développée dans la "zone d'arrachement"	72
4.7	Zones du mur en terre armée correspondant à la rupture par "cassure" et par "arrachement" des armatures	73

4.8	Quadrillage du domaine admissible des paramètres (θ_1, θ_2) définissant le mécanisme	74
4.9	Majoration du facteur de stabilité K^+ pour différentes valeurs de l'angle de frottement du sol	75
4.10	Majoration du facteur de stabilité comme une fonction de la longueur relative du renforcement ($\phi = 30^\circ$)	76
4.11	Mécanisme de rupture optimisé pour $\phi = 30^\circ$, $L = H$ et $L/l_0 = 1,4$	77
4.12	Maillage par éléments finis du mur en sol renforcé modélisé comme un système biphasique	79
4.13	Comparaison entre les résultats de l'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture et ceux dérivés des simulations élasto-plastiques ($\phi = 30^\circ$)	79
4.14	Simulation par éléments finis : isovaleurs des taux de déformations plastiques relatives à la phase matrice(a), à l'interaction(b) et à la phase renforcement(c)	80
5.1	Modèle biphasique de sol renforcé par inclusions rigides	85
5.2	Efforts intérieurs pour un système biphasique général (cas bidimensionnel)	86
5.3	Efforts surfaciques d'interaction	87
5.4	Couche de sol renforcé soumise à un chargement sismique	92
5.5	Efforts d'interaction entre les phases	92
5.6	Couche de sol renforcé sous sollicitation sismique pseudo-statique - Déplacements horizontaux des phases matrice et renforcement	99
5.7	Couche de sol renforcé - Influence des constantes d'interaction c^I et c^P	100
5.8	Couche de sol renforcé - Rotation de la phase renforcement pour différentes valeurs de c^I , c^P	101
5.9	Couche de sol renforcé - Comparaison du modèle général et adhérent	103
5.10	Maillage par éléments finis de la moitié de la cellule élémentaire de sol renforcé	104
5.11	Déformée et isovaleurs du champ des déplacements latéraux de la structure	106
5.12	Comparaison du modèle biphasique adhérent et de la simulation directe par éléments finis	107

6.1	Technique de renforcement d'une fondation par l'incorporation d'inclusions rigides	123
6.2	Analyse sismique d'un remblai reposant sur une couche de sol renforcé par inclusions rigides	125
6.3	Maillage éléments finis utilisé dans la simulation numérique	126
6.4	Interaction volumique et surfacique entre phases : identification des coefficients d'interaction	127
6.5	Profil de tassement dans le sol le long de l'axe de symétrie de l'ouvrage sous poids propre	129
6.6	Comparaison entre les profils du tassement obtenus par la méthode d'homogénéisation et le modèle biphasique	130
6.7	Configuration initiale et déformée de l'ouvrage soumis à un chargement sismique	131
6.8	Isovaleurs du déplacement horizontal de l'ouvrage soumis à un chargement sismique	131
6.9	Profils des déplacements horizontaux dans le sol le long de l'axe central de l'ouvrage soumis à un chargement sismique	132
7.1	Interprétation géométrique de (7.11) dans l'espace des paramètres de chargement	139
7.2	Saut de vitesse à la traversée de la surface Σ_U du champ de vitesse	140
7.3	Saut de taux de rotation à la traversée de la surface Σ_ω du champ de taux de rotation de la phase renforcement	140
7.4	Vue générale d'un remblai reposant sur une couche de sol renforcée par inclusions rigides et soumis à un chargement sismique	141
7.5	Cinématiques en déformations planes associées à la description biphasique d'un sol renforcé	142
7.6	Caractéristiques de résistance des différentes composantes de l'ouvrage renforcé	143
7.7	Diagramme d'interaction d'une inclusion de renforcement en forme de tube "mince"	144
7.8	Calcul de la fonction $\pi^r(\hat{d}^r, 0, \hat{\chi}^r)$	148

7.9	Caractéristiques géométriques du problème	149
7.10	Mécanisme de rupture de l'ouvrage renforcé, utilisé dans l'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture	150
7.11	Champ de vitesse dans la zone de cisaillement n° 2 et saut de taux de rotation induit dans la phase renforcement	151
7.12	Cinématique de la zone n° 3	152
7.13	Zones de cisaillement triangulaires n° 4 et 5	153
7.14	Champ de vitesse dans la zone n° 6	153
7.15	Maillage éléments finis adopté pour la simulation élasto-plastique de l'ouvrage	157
7.16	Courbes charge-déplacement pour la structure non renforcée et renforcée sous l'action d'un séisme induisant un chargement horizontal	158
7.17	Mécanismes de rupture obtenus par calcul à la rupture (lignes pointillées) et simulation élastoplastique (isovaleurs) pour : (a) structure non renforcée et (b) le cas du renforcement par inclusions flexibles	159
7.18	Comparaison des mécanismes de rupture plastiques et de ceux issus du calcul à la rupture dans la zone renforcée lorsque la résistance à la flexion des inclusions du renforcement est prise en compte	159
7.19	Comparaison entre les résultats de l'approche cinématique du calcul à la rupture et ceux obtenus par des simulations élastoplastiques	161
8.1	Courbes charge-déplacement pour l'ouvrage non renforcé et l'ouvrage renforcé par inclusions soumis à un chargement sismique	164
8.2	Vue générale d'un remblai sous chargement sismique reposant sur une couche de sol renforcée par deux familles d'inclusions symétriquement inclinées	165
8.3	Cinématiques du modèle triphasique du sol renforcé	166
8.4	Contraintes, densités de forces d'interaction et forces extérieures impliquées dans une description triphasique d'un sol renforcé par deux familles d'inclusions	168
8.5	Maillage éléments finis utilisé pour la simulation du comportement élasto-plastique du problème	172

8.6	Courbes chargement-déplacement pour la structure non renforcée (courbe inférieure) et renforcée (courbe supérieure)	173
8.7	Mécanismes de rupture de la structure renforcée utilisés pour l'approche cinématique du calcul à la rupture	174
8.8	Mécanismes de rupture obtenus par le calcul à la rupture (ligne pointillée) et la simulation élasto-plastique (isovaleurs du taux de déformations plastiques) pour la structure renforcée par deux familles d'inclusions inclinées ($\theta = 5^\circ$)	176
8.9	Evaluation du coefficient sismique critique en fonction de l'angle d'inclinaison des inclusions de renforcement	176
8.10	Evaluation du coefficient sismique critique pour les inclusions inclinées flexibles et les inclusions verticales de diamètre croissant	178

Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques mécaniques des géomatériaux et des inclusions de renforcement	6
4.1	Stabilité d'un mur de soutènement en sol renforcé - valeurs sélectionnées des paramètres	78
5.1	Couche de sol renforcé - Valeurs numériques des paramètres	98
7.1	Caractéristiques géométriques des inclusions de renforcement	160
8.1	Caractéristiques géométriques des inclusions verticales rigides encastrées dans le substratum	177

Chapitre 1

Introduction bibliographique

1.1 Introduction

L'utilisation d'inclusions de renforcement dans les ouvrages de géotechnique s'est considérablement diversifiée au cours des trois dernières décennies. Cette technique, destinée à améliorer la performance des ouvrages, consiste à introduire dans de très faibles proportions, et selon des orientations précises, un matériau de renfort, souvent métallique ou polymérique, qui possède de bien meilleures caractéristiques mécaniques que le sol ou la roche qu'il renforce. Cependant, compte tenu de la complexité de ces ouvrages, les méthodes rationnelles de dimensionnement et de calcul en déplacement ou d'analyse de la stabilité relèvent encore souvent du domaine de la recherche. Ce travail de thèse constitue une contribution sur le sujet.

Ce chapitre introductif débute par une description rapide des techniques du renforcement des sols par inclusions "souples", suivie d'une présentation du renforcement des sols typique, les ouvrages en *terre armée*.

La deuxième partie est ensuite consacrée à la description des techniques de renforcement par inclusions "rigides", suivie de ses différentes applications dans le domaine de la géotechnique.

On passe ensuite en revue les méthodes de calcul couramment utilisées par les ingénieurs ou faisant l'objet de recherches actuelles. On distingue deux grandes familles, à savoir les méthodes de type "modélisation mixte" et les approches de type calcul par éléments finis. La description de ces différentes méthodes de calcul et la difficulté à les mettre en œuvre suggère la nécessité d'aller vers des approches consistant à homogénéiser de telles structures hétérogènes. Ce type de modélisation est également présenté, mettant en évidence

les avantages d'une telle approche pour le calcul du comportement global d'un ouvrage renforcé, mais aussi ses limites puisqu'elle peut s'avérer conservatrice dans certaines situations.

Enfin, cette étude bibliographique s'achève par l'exposé de l'objectif de ce mémoire dont on détaille les points forts.

1.2 Les techniques de renforcement par inclusions linéaires "souples"

On conviendra de caractériser comme "souples" des inclusions de renforcement linéaires, pour lesquelles la prise en compte des composantes de cisaillement et de flexion dans le fonctionnement de l'ouvrage peut être négligée, seuls les efforts axiaux de traction et éventuellement de compression jouant un rôle significatif dans le renforcement effectif de l'ouvrage.

Dans le domaine de la géotechnique, nous pouvons classer les ouvrages renforcés par inclusions linéaires "souples" en trois catégories :

- Les ouvrages de soutènement (mur en terre armée ou excavations en sol cloué), pour lesquels les inclusions de renforcement, travaillent essentiellement en traction, viennent donner une cohésion d'ensemble à l'échelle de l'ouvrage, alors que le sol initial ne possède généralement aucune résistance à la traction (Vidal (1966) [82]; Schlosser et Unterreiner (1994) [65]).
- Les tunnels boulonnés en paroi ou en front de taille : le renforcement des tunnels par boulonnage radial, permet de diminuer des déplacements radiaux (convergence) de la paroi du tunnel, tandis que le boulonnage frontal vient stabiliser le front de taille au fur et à mesure que le tunnel est excavé (Lunardi (1998) [49]; Al Hallak (1999) [3]).
- Les fondations de type radiers sur groupes de pieux ou micropieux, soumises à des chargements verticaux centrés. En raison de leur taille transversale, il peut paraître au premier abord étrange de rattacher ce type d'inclusions à la catégorie des inclusions "souples". Cette caractérisation provient du fait que pour des chargements *verticaux centrés*, les composantes de cisaillement et de flexion sont peu ou pas mobilisées. Le frottement latéral des inclusions joue en revanche un rôle important

pour la transmission des efforts, et notamment pour des pieux dont les pointes ne reposent pas sur un substratum rigide. Ce type de fondation permet de diminuer les tassements de l'ouvrage, et le cas échéant, d'assurer la stabilité de celui-ci.

Les éléments de renforcement linéaires "souples" travaillent donc essentiellement en traction et/ou en compression. Le mécanisme du transfert d'efforts entre le sol et l'inclusion étant le frottement latéral, l'interaction sol/renforcement s'exerce alors sur toute leur longueur et leur surface de contact. Dans les fondations, les renforcements verticaux travaillent le plus souvent en compression, tandis que ceux placés horizontalement (murs de soutènement) travaillent essentiellement en traction.

Parmi les trois types de renforcement des sols par inclusions "souples" décrits ci-dessus, on présente ci-après le premier, c'est-à-dire les ouvrages en *terre armée*. Nous traiterons d'ailleurs en détail au chapitre 4 l'exemple du calcul de stabilité d'un mur en terre armée.

La terre armée est un matériau résultant de l'association d'un sol de remblai et d'armatures métalliques sous la forme de bandes, généralement en acier galvanisé (figure (1.1)).

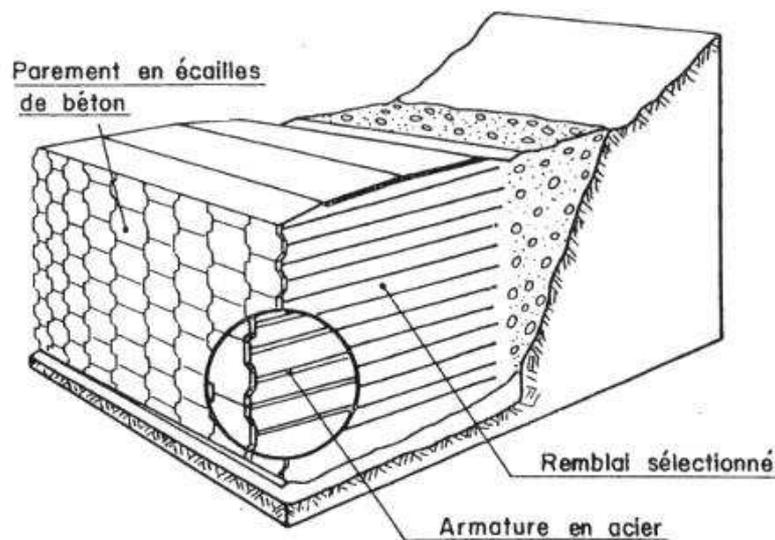


FIG. 1.1. Mur en terre armée - d'après Schlosser (1983) [63]

Sous l'action du poids du remblai et des surcharges appliquées, et quelle que soit la technique, les armatures travaillent *en traction*, de sorte que le sol ainsi renforcé possède une "cohésion anisotrope". Un parement (*peau*) doit être mis en place pour empêcher localement la terre de s'écouler entre les armatures. Les ouvrages réalisés avec ce matériau sont essentiellement des murs de soutènement et des culées de ponts. La première utilisation

de ce procédé de soutènement remonte à 1968, pour l'autoroute Roquebrune-Menton.

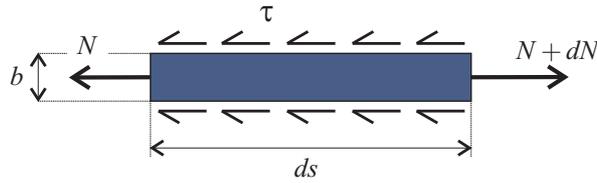


FIG. 1.2. Effort de cisaillement sol/armature

Les travaux expérimentaux et numériques (Frank (1998) [30]) sur ce type d'ouvrages ont permis d'expliquer leur fonctionnement et de constater que le maximum de l'effort de traction dans les armatures n'est pas situé au niveau du parement. On exprime la contrainte de cisaillement τ exercée par le sol sur chaque face de l'armature par la relation :

$$\tau = \frac{1}{2b} \frac{dN}{ds} \quad (1.1)$$

où b , N et s désignent respectivement la largeur de l'armature, l'effort de traction qui y règne, et l'abscisse curviligne le long de sa ligne moyenne (figure (1.2)).

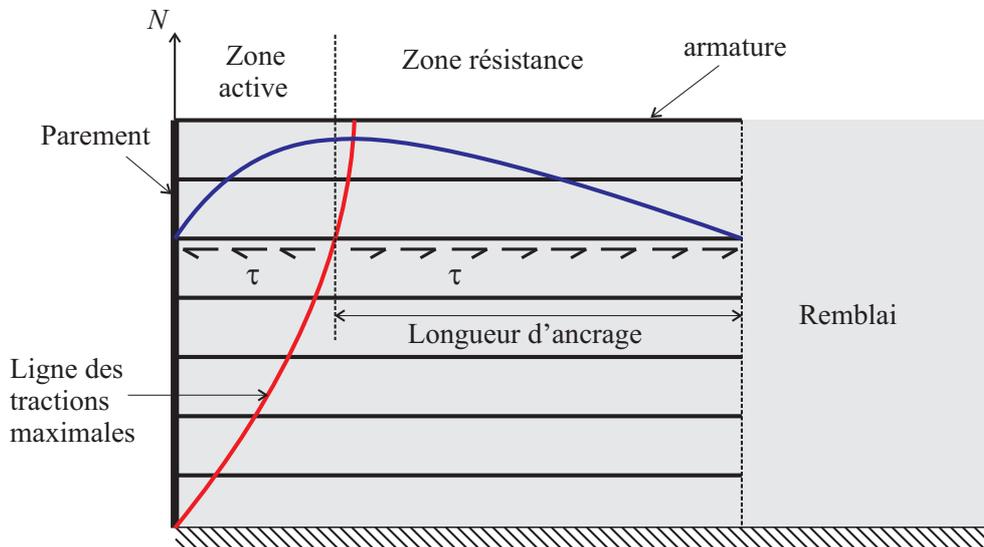


FIG. 1.3. Répartition des tractions dans les armatures d'un ouvrage en terre armée

La ligne des points où l'effort de traction dans les armatures est maximal, sépare l'ouvrage en deux zones (figure (1.3)) :

- Une zone située près du parement dans laquelle la contrainte de cisaillement exercée par le sol est dirigée vers le parement : la terre a tendance à "entraîner" les arma-

tures (ou ces dernières à "retenir" le sol), c'est la *zone active*.

- Une autre zone, située en arrière de la ligne des tractions maximales, dans laquelle le cisaillement exercé par le sol est dirigé vers l'intérieur de l'ouvrage de soutènement : la terre a tendance à retenir les armatures, c'est la *zone résistante*.

Le phénomène essentiel dans le fonctionnement des ouvrages de soutènement en *terre armée* est alors le frottement entre le sol et l'armature. Ce qui impose l'utilisation d'un remblai frottant.

L'étude de stabilité de ces ouvrages s'appuie essentiellement sur l'approche du *calcul à la rupture* (de Buhan (1986) [15] ; Siad (1987) [66]) par une méthode d'homogénéisation. Une telle méthode n'autorisant pas de prise en compte d'une condition de glissement entre le sol et les armatures, qui peut fortement affecter la tenue de l'ouvrage. On va revenir précisément sur ce problème dans le chapitre 4 du mémoire.

Le comportement de la terre armée en tant que matériau composite a été étudié notamment par Schlosser et Long (1973) [64] et Long et Ursat (1977) [46]. Il s'agit d'expériences au triaxial sur des éprouvettes en sable renforcé par des disques d'inclinaison variable.

Les essais triaxiaux ont permis de mettre en évidence deux modes de rupture :

- Rupture par *cassure* des armatures.
- Rupture par *défaut d'adhérence* entre le sol et les armatures.

1.3 Les techniques de renforcement par inclusions "rigides"

Les techniques de renforcement des sols par inclusions linéaires "rigides" possèdent un certain nombre de similitudes :

- ◇ Les inclusions de renforcement sont en *grand nombre*. Si les soutènements comportent en général une dizaine de lits des armatures, les groupes de pieux comprennent facilement de 50 à plusieurs centaines d'éléments.
- ◇ Les inclusions sont souvent disposées *périodiquement*.
- ◇ Les caractéristiques mécaniques sont très supérieures à celles du massif environnant. On donne dans le tableau (1.1) quelques ordres de grandeur courants.

- ◇ Même si elle est plus importante que dans le cas des ouvrages en terre armée, la proportion volumique des inclusions reste faible. Une densité des pieux de diamètre e espacés de $5e$, pour un radier de pieux, correspond à une valeur de 3%. Dans tous les cas courants, la fraction volumique ne dépasse jamais 10%.

TAB. 1.1. *Caractéristiques mécaniques des géomatériaux et des inclusions de renforcement*

Type	Module d'Young (MPa)	Résistance (MPa)
Argile	1 - 10	0,05 - 0,5 (Cohésion)
Sable	20 - 200	-
Roche	100 - 10000	0,1 - 5
Géotextile (/m)	1 - 5	0,01 - 0,5
Béton	10000 - 40000	20 - 80 (Compression)
Acier	200000	400 - 1000 (Traction)

Par ailleurs, tandis que les procédés de renforcement par inclusions "souples", pour lesquels on peut montrer que les contributions associées aux composantes de flexion et de cisaillement jouent un rôle négligeable dans la tenue des ouvrages, chaque inclusion "rigide" étant traitée comme un élément de structure unidimensionnel, son diamètre est suffisamment important pour que l'on puisse considérer qu'elle fonctionne comme une poutre susceptible de reprendre non seulement des efforts de traction et de compression, mais également des sollicitations de flexion et de cisaillement. Nous verrons ultérieurement que ces composantes ne se manifestent que pour des chargements autres que purement verticaux.

Nous décrivons ci-après quelques techniques de renforcement d'ouvrages faisant usage d'inclusions rigides.

- Les fondations sur groupes de pieux (fondations profondes ou fondations mixtes) (Borel (2001) [9]; Burland et al. (1977) [11]), soumises à des chargements latéraux.
- Le renforcement de sols de fondation par des inclusions verticales en contact avec un substratum, soumise à un séisme induisant un chargement latéral (voir figure

(1.4)). Le chargement étant partiellement transmis par l'intermédiaire d'un matelas de répartition formé d'un matériau granulaire destiné à répartir une partie du chargement sur les inclusions (Quigley et al. (2003) [55]; Wood (2003) [83]; Zanziger et Gartung (2002) [84]).

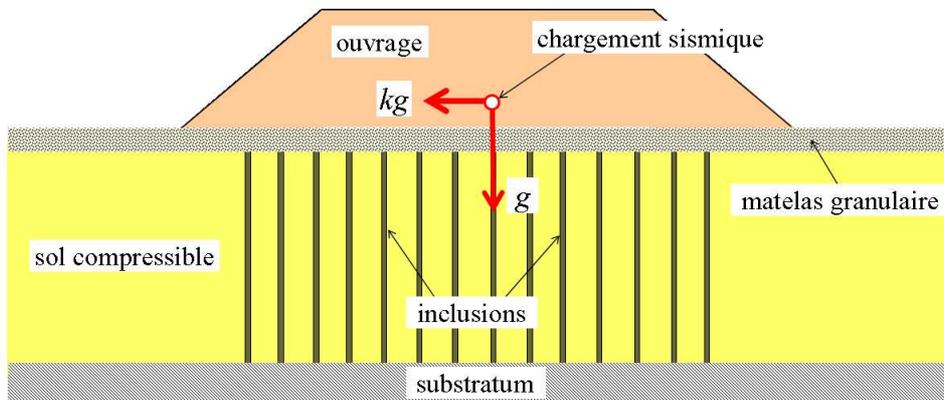


FIG. 1.4. Principe du renforcement d'une couche de sol par des inclusions verticales, soumise à un chargement sismique

Il est nécessaire pour ce type de renforcement de prendre en compte non seulement les composantes de flexion et de cisaillement dans les inclusions, notamment dans le cas d'un chargement latéral, mais également les interactions sol/inclusions relatives au frottement latéral d'une part, à la reprise des efforts en têtes d'inclusions d'autre part. Une analyse détaillée de ce problème sera effectuée au chapitre 5.

- Dans le même ordre d'idée, un concept original de renforcement par inclusions rigides a été développé pour assurer la stabilité des fondations des piles du pont de Rion-Antirion en zone sismique (Pecker (1998) [53]; Pecker et Teyssandier (1998) [54]).

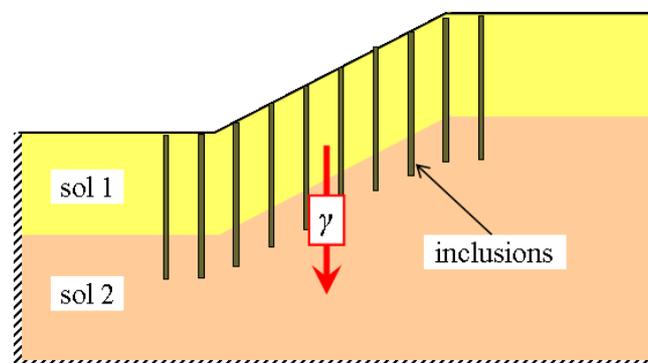


FIG. 1.5. Stabilisation d'une pente soumise à son poids propre - d'après Hassen (2006) [37]

- Un autre domaine d'utilisation de la technique de renforcement des sols par inclusions rigides concerne la stabilisation des pentes instables. L'utilisation de telles inclusions capables de reprendre des efforts de flexion a permis de diminuer fortement les mouvements des pentes (Gudehus et Schwarz (1985) [34] ; Guilloux (1993) [35]).

1.4 Les méthodes de dimensionnement et de calcul

1.4.1 Les approches de type "modélisation mixte"

Le caractère fortement composite des sols renforcés par inclusions, est source de bien des difficultés, notamment sur le plan numérique, quant à la mise au point de méthodes de calcul et de dimensionnement applicables à ce type d'ouvrages. L'approche par *modélisation mixte* vise à surmonter certaines de ces difficultés. Elle est par exemple sous-jacente à de nombreuses méthodes d'analyse de stabilité des ouvrages. Nous exposons ci-après les développements auxquels elle a donné lieu dans le contexte du calcul à la rupture.

L'idée directrice de la modélisation mixte consiste à traiter les inclusions de renforcement comme des éléments de structure *unidimensionnels* (*bidimensionnels* dans le cas de nappes de renforcement), plongés au sein d'un massif que l'on se propose de décrire comme un milieu continu *tridimensionnel*. La figure (1.6) montre un exemple d'étude de stabilité par surface de rupture d'un talus renforcé par inclusions linéaires (clouage).

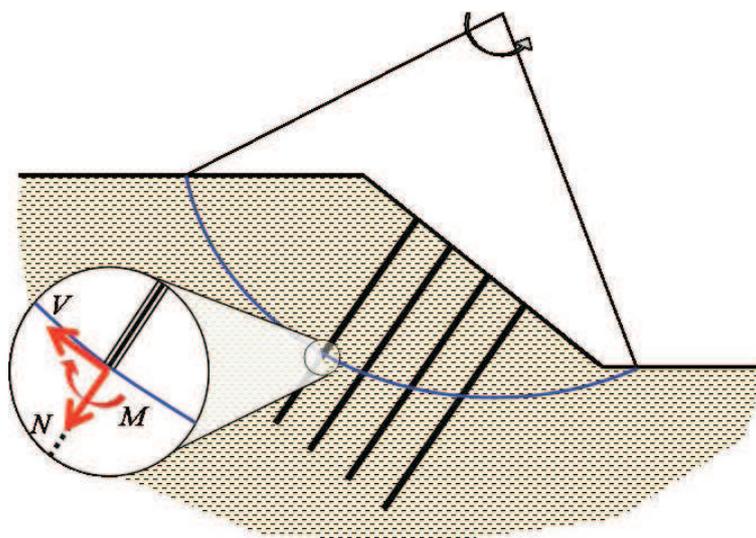


FIG. 1.6. Analyse de la stabilité avec surface de rupture d'un talus renforcé par inclusions linéaires - d'après de Buhan (2004) [16]

Une telle analyse est conduite en ajoutant aux efforts résistants développés par le sol le long de la surface de rupture, ceux développés par chaque inclusion à l'endroit de son intersection avec la surface de rupture, c'est-à-dire les efforts normal N et tranchant V , ainsi que le moment fléchissant M . Tout comme pour le sol dont les capacités de résistance sont classiquement exprimées par un critère de Mohr-Coulomb, la résistance des inclusions, modélisées comme des poutres, se traduit par une condition du type (Anthoine (1989) [4] ; de Buhan et Salençon (1993) [24]) :

$$\left(\frac{N}{N_0}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 + \left|\frac{M}{M_0}\right| - 1 \leq 0 \quad (1.2)$$

où N_0 , V_0 et M_0 désignent respectivement les résistances de l'inclusion vis-à-vis des sollicitations d'effort axial, d'effort tranchant et de moment fléchissant.

- a) *Cas des inclusions de renforcement "souples"*, telles que les armatures métalliques de la "terre armée", ou bien les nappes de renforcement géotextiles. On adopte alors un critère simplifié de la forme :

$$0 \leq N \leq N_0, \quad V_0 = 0, \quad M_0 = 0 \quad (1.3)$$

qui revient à négliger les résistances au cisaillement (effort tranchant), à la flexion, ainsi qu'à la compression des renforcements.

- b) *Cas des inclusions de renforcement "rigides" ou "raides"*, c'est-à-dire susceptibles de reprendre des efforts de flexion ($M_0 > 0$) et de cisaillement ($V_0 > 0$).

La théorie du calcul à la rupture et plus précisément l'approche cinématique par l'extérieur permet d'intégrer facilement et de façon parfaitement cohérente des critères de rupture de type (1.2) dans l'analyse de stabilité d'ouvrages renforcés par inclusions. Elle permet en particulier de clarifier la question de savoir dans quelle mesure il convient de prendre en compte les résistances au cisaillement et à la flexion des inclusions dans les calculs de stabilité. La figure (1.7) extraite de de Buhan (2004) [16] et de de Buhan et Salençon (1993) [24] montre les résultats d'une étude paramétrique obtenus par la méthode cinématique du calcul à la rupture utilisant des mécanismes mettant en jeu soit des surfaces de rupture, soit des zones en cisaillement (figure (1.7)(a)). On reviendra sur ce type de mécanisme de rupture comprenant des zones en cisaillement dans le chapitre 7

de ce mémoire, où l'on traitera le problème de dimensionnement d'une fondation renforcée par inclusions "rigides", soumise à un chargement sismique.

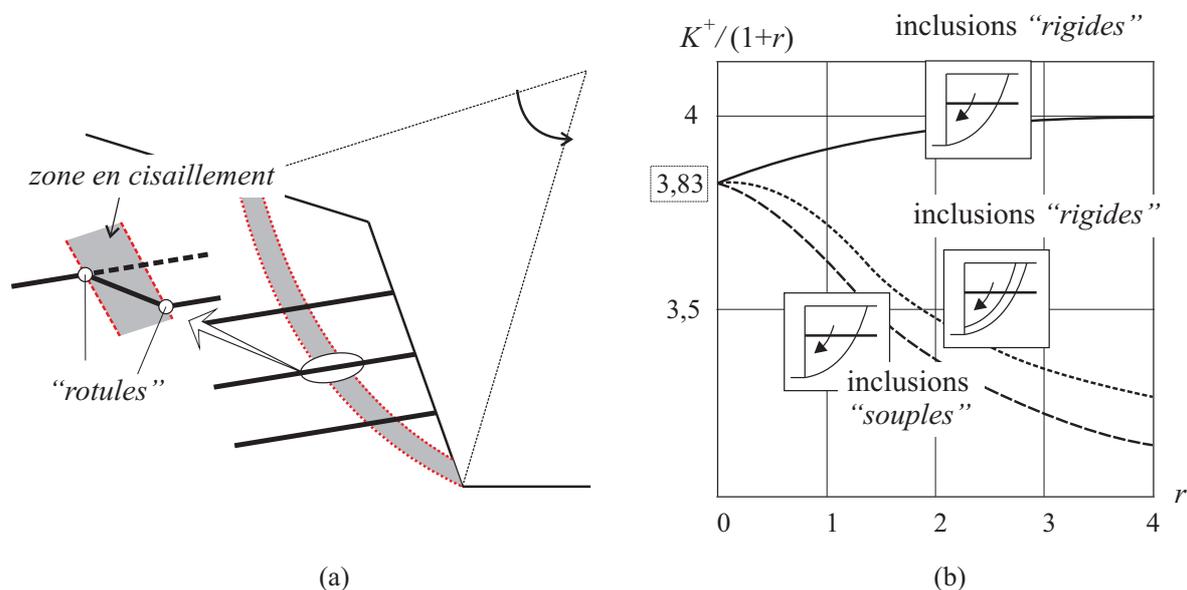


FIG. 1.7. (a) Mécanisme de rupture d'un ouvrage renforcé par inclusions linéaires avec la zone de cisaillement, (b) Facteur de stabilité d'un talus vertical renforcé évalué par le biais de différents mécanismes

L'exemple traité est celui d'un talus vertical de hauteur H en sol purement cohérent (cohésion C) renforcé sur toute sa hauteur par une distribution uniforme d'inclusions horizontales, pour lequel les surfaces de rupture sont circulaires. La figure (1.7)(b) représente les variations des différentes évaluations (majorants) du rapport $K^+/(1+r)$, où K^+ est le facteur de stabilité de l'ouvrage et $r = mN_0/2CH$ (N_0 : résistance en traction des inclusions, m : nombre d'inclusions de renforcement). La courbe inférieure correspond au cas où les inclusions sont "souples", c'est-à-dire que leur résistance au cisaillement et à la flexion est négligée ($V_0 = M_0 = 0$ dans (1.2)), tandis que les courbes intermédiaires et supérieures correspondent au calcul de stabilité prenant en compte ces résistances (inclusions "rigides").

1.4.2 Les méthodes de calcul par éléments finis

Concernant le calcul en déplacements des ouvrages, il convient de noter la difficulté à formuler de façon cohérente une telle modélisation mixte, consistant à schématiser les inclusions de renforcement comme des milieux *unidimensionnels* plongés au sein du massif du sol traité comme un milieu *tridimensionnel*. Il n'est en effet pas possible de raccorder

les distributions d'efforts intérieurs de type (N, V, M) , le long des renforcements, aux champs de contraintes, de type $\underline{\sigma}$, régnant dans le sol.

La mise en œuvre d'une technique de résolution par éléments finis pour la simulation du comportement d'un ouvrage en sol renforcé par inclusions linéaires, exige donc de traiter les inclusions de renforcement tout comme des éléments tridimensionnels. Les difficultés d'application tiennent :

- ◇ à la taille des inclusions vis-à-vis de la taille de l'ouvrage, nécessitant un maillage localement très fin en discrétisant séparément les inclusions et le sol environnant ;
- ◇ au nombre important d'inclusions utilisées conduisant à des systèmes linéaires à résoudre de taille rédhibitoire ;
- ◇ à la modélisation de l'interface sol/inclusions ;
- ◇ au contraste des propriétés des matériaux constituant le massif et l'inclusion ;
- ◇ au caractère fortement non-linéaire du comportement de sol qui doit forcément être pris en compte pour des calculs réalistes ;
- ◇ à la gestion du phasage des travaux alourdissant le traitement des données.

1.4.3 L'approche par homogénéisation et ses limites (de Buhan et Hassen (2008) [21])

Compte tenu des difficultés citées précédemment des méthodes de calcul par éléments finis, il est clair que l'utilisation actuelle des éléments finis n'est pas une réponse raisonnable à la question de la simulation du comportement des ouvrages renforcés par inclusions linéaires, pour lesquels le chargement est complexe (cas des sollicitations latérales induites par un séisme). En effet, même si la puissance des ordinateurs continue d'augmenter régulièrement, les phases de pré- et post-traitement des données, notamment la création des maillages restent très lourdes. Il devient alors préférable de recourir à une *méthode d'homogénéisation* qui consiste à appréhender le sol renforcé composite comme un milieu homogène équivalent, mais anisotrope en raison de la présence des inclusions de renforcement. L'idée d'employer une méthode d'homogénéisation pour modéliser un ouvrage renforcé par inclusions s'impose à partir du moment où deux conditions sont réunies.

- ◇ les inclusions de renforcement sont disposées de manière périodique au sein du massif ;

- ◇ l'échelle caractéristique du renforcement (l'espacement entre deux inclusions voisines par exemple) peut être raisonnablement considérée comme suffisamment faible vis-à-vis des dimensions d'ensemble de l'ouvrage.

Nous nous proposons de montrer rapidement, en nous limitant au cas de l'élasticité linéaire ¹, comment une telle méthode ne permet, ni de rendre compte du caractère "rigide", ni de prendre en compte des interactions sol/inclusions (défaut d'adhérence).

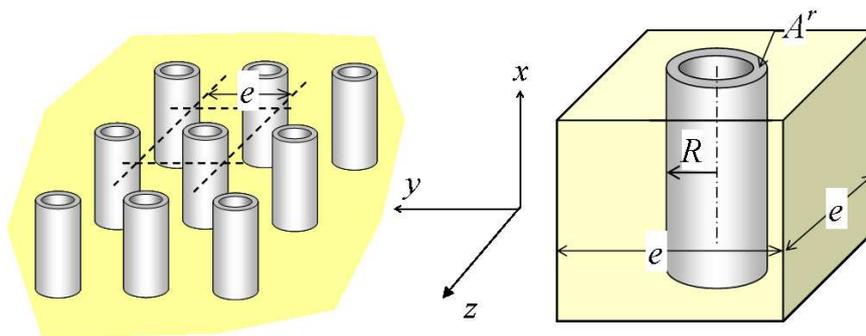


FIG. 1.8. Volume élémentaire représentatif (VER) d'un sol renforcé par inclusions linéaires

En se basant sur la résolution d'un problème auxiliaire d'élasticité défini sur la cellule de base du matériau renforcé, représentée sur la figure (1.8), on montre que, dans le cas où la fraction volumique du matériau de renforcement, notée η , définie comme le rapport :

$$\eta = \frac{A^r}{e^2} \quad (1.4)$$

(avec A^r : section de l'inclusion et e : espacement entre deux inclusions voisines) est faible, tandis que sa raideur représentée par son module d'Young E^r est beaucoup plus grande que celle du sol (module d'Young E^s), le *tenseur d'élasticité macroscopique* du sol renforcé s'écrit (Greuell (1993) [32]; Hashin (1983) [36]; Sudret (1999) [69]; de Buhan et Hassen (2008) [21]) :

$$\eta \ll 1, \quad E^r \gg E^s, \quad \underline{\underline{C}}^{\text{hom}} = \underline{\underline{C}}^s + \alpha^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (1.5)$$

avec $\alpha^r = \eta E^r$ et $\underline{\underline{C}}^s$ est le tenseur d'élasticité du sol, tandis que \underline{e}_x désigne le vecteur unitaire placé selon la direction des inclusions de renforcement.

¹On trouvera dans de Buhan et Hassen (2008) [21] une analyse complète de cette question

Exprimée sous la forme d'une relation contrainte-déformation, la *loi de comportement macroscopique* du sol renforcé s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{C}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{C}}^s : \underline{\underline{\epsilon}} + \alpha^r \epsilon_{xx} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x = \underline{\underline{\sigma}}^s + n^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (1.6)$$

C'est-à-dire que la contrainte "macroscopique" $\underline{\underline{\Sigma}}$ peut être additivement décomposée comme la somme d'une contrainte relative au sol et d'une *contrainte uniaxiale* associée au renforcement. La valeur de cette dernière, qui peut s'écrire, en tenant compte de (1.4) et (1.5) :

$$n^r = \alpha^r \epsilon_{xx} = \eta E^r \epsilon_{xx} = \frac{A^r E^r \epsilon_{xx}}{e^2} = \frac{N^r}{e^2} \quad (1.7)$$

peut s'interpréter alors comme l'*effort axial* N^r repris par les inclusions de renforcement par unité de *surface transversale* à ces dernières. On observe donc que l'approche par homogénéisation ne fait apparaître que l'effort axial dans les inclusions de renforcement, à l'exclusion des efforts de cisaillement et de flexion.

Le modèle d'homogénéisation décrit précédemment présente l'avantage considérable de la simplicité de mise en œuvre, en raison des formulations analytiques. Il convient néanmoins d'en souligner les limites, telles que celles décrites précédemment, et d'indiquer les développements nécessaires pour remédier à ces dernières.

1. La question de l'adhérence inclusions/matrice.

Les modèles précédents reposent sur l'hypothèse implicitement admise d'une *adhérence totale* entre les inclusions et le sol (ou la roche) environnant. Même si par le soin apporté à la mise en œuvre des procédés de renforcement, on s'efforce de se rapprocher le plus possible d'une telle situation idéale, on ne peut éviter de prendre en compte, dans les méthodes de dimensionnement d'ouvrages, un défaut d'adhérence susceptible de se manifester aux interfaces inclusions/matrice.

2. Effets de flexion et de cisaillement dans les inclusions.

Dans les situations où le renforcement est réalisé au moyen d'inclusions de fort diamètre, les effets de flexion et de cisaillement, implicitement négligés dans le modèle précédent, peuvent se révéler prépondérants.

Comme nous l'avons vu précédemment, ces effets peuvent être directement pris en compte dans le cas d'une modélisation mixte, à travers par exemple, dans le cadre d'une analyse de stabilité, l'adoption d'un critère d'interaction de type (1.2).

Se plaçant alors dans les conditions d'application de la méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture, c'est-à-dire en pratique dans la situation d'une distribution suffisamment dense des éléments de renforcement, il est possible d'homogénéiser directement un tel milieu initialement décrit dans le cadre de la modélisation mixte. On aboutit ainsi à un modèle de milieu continu *micropolaire ou de Cosserat* (de Buhan et al. (1998) [20]). La non-symétrie du tenseur des contraintes, ainsi que l'existence de couples-contraintes, mises classiquement en évidence pour de tels milieux, traduisent au plan macroscopique les distributions d'efforts tranchants et de moments fléchissants le long des inclusions, prises individuellement.

1.5 Vers une modélisation multiphasique des sols renforcés par inclusions linéaires

La modélisation multiphasique, dans le cadre de laquelle se situe le présent travail, permet de généraliser le point de vue de l'homogénéisation et ses avantages considérables en termes de gain en temps de calcul, à la prise en compte des effets de flexion et de cisaillement d'une part, de l'interaction matrice-inclusions d'autre part (de Buhan et Hassen (2008) [21]). L'intuition de départ qui préside à une telle modélisation consiste à remplacer le réseau d'inclusions réparties de façon *discrète* au sein du massif du sol (principe de la "modélisation mixte"), par une distribution *continue* de ces inclusions présentes en tout point du massif.

Le processus d'élaboration et de développement d'un tel modèle, tant sur le plan théorique que numérique, s'est déroulé en trois étapes successives :

- Les bases théoriques générales d'une telle modélisation ont fait l'objet de la thèse de Sudret (1999) [69]. Celle-ci a par ailleurs mis en œuvre ce modèle d'un point de vue numérique dans le cadre d'une méthode des éléments finis en élasto-plasticité. Elle a permis de déboucher sur un outil de calcul permettant de traiter les problèmes plans (déformations planes ou conditions axisymétriques) dans le cas où ne sont pris en compte que les efforts de traction-compression dans les renforcements (inclusions "souples"), sous l'hypothèse d'adhérence parfaite de ces derniers avec le sol environnant.

- La thèse de Bennis (2002) [6] a consisté à étendre le domaine d’application du modèle ”multiphasique” à la situation où, s’affranchissant de l’hypothèse d’adhérence parfaite entre le sol et les renforcements, une loi d’interaction de type élasto-plastique est intégrée pour les inclusions souples.
Ces deux premières ont donné lieu à des développements numériques dans le cadre du projet CASTOR, consistant à implémenter le modèle avec inclusions souples et loi d’interaction dans le logiciel CESAR du LCPC (Bourgeois et al. (2001) [10]).
- Enfin, la thèse de Hassen (2006) [37] porte sur l’adaptation du modèle au cas des ouvrages renforcés par des inclusions ”raides” ou ”rigides” (exemple des radiers des fondations sur pieux ou réseaux de micropieux), pour lesquelles les composantes de flexion et de cisaillement susceptibles de jouer un rôle prépondérant dans le comportement de l’ouvrage, doivent être pris en compte. L’implémentation numérique d’une telle version ”enrichie” du modèle multiphasique, limitée au cas de l’adhérence parfaite, a donné lieu à la mise au point d’un outil de calcul 2D prenant en compte le comportement tant élastique qu’élasto-plastique des matériaux.

Le présent travail vise à parachever le processus de développement et de mise au point d’un outil numérique capable de mettre en œuvre la version la plus complète du modèle multiphasique : celle où doivent être pris en compte aussi bien l’interaction entre les renforcements et le sol par le biais d’une loi de comportement appropriée, que les effets de flexion et de cisaillement des inclusions. Cette thèse qui s’appuie bien évidemment très largement sur les travaux précédents dont elle constitue le prolongement direct, comporte deux grandes parties, l’une concerne le développement d’un modèle multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions ”souples”, l’autre se réfère à la version la plus générale du modèle multiphasique où les renforcement sont considérés comme des inclusions ”rigides”.

Plus précisément, le présent mémoire est organisé comme suit.

Le chapitre 2 rappelle les travaux antérieurs relatifs à la construction du modèle multiphasique pour un sol renforcé par inclusions ”souples” avec prise en compte d’une loi d’interaction, ainsi qu’à son implémentation numérique dans un cadre élasto-plastique.

Le chapitre 3 présente en détail l’approche calcul à la rupture pour le modèle biphasique avec interaction, l’accent étant mis sur la formulation d’un critère d’interaction entre phases. L’approche cinématique par l’extérieur en particulier repose sur la considération

de mécanismes de rupture faisant intervenir deux champs de vitesse distincts relatifs aux deux phases. L'application de cette approche est effectuée sur l'exemple illustratif du calcul de la résistance en compression d'une éprouvette renforcée et le chapitre s'achève sur l'exposé d'une méthode permettant de déterminer le paramètre de résistance d'interaction.

Dans le chapitre 4, la mise en œuvre numérique du modèle biphasique décrite au chapitre 2 et l'approche du calcul à la rupture construite au chapitre 3 sont appliquées, au dimensionnement et à l'analyse de la stabilité d'un ouvrage en "terre armée". Cette analyse est conduite par l'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture à l'aide d'un mécanisme à deux champs de vitesse généralisant les mécanismes classiques par blocs en rotation, en faisant jouer la résistance à l'arrachement des armatures de renforcement.

La seconde partie du mémoire débute par le chapitre 5 qui traite de la description du modèle multiphasique général destiné à appréhender le comportement macroscopique d'un sol renforcé par inclusions "rigides" en élasticité linéaire, où l'on tient compte non seulement les effets de flexion et de cisaillement des inclusions de renforcement, mais aussi les différents types d'interaction entre ces dernières et le sol environnant. Ces interactions peuvent être d'une part transversales (et non plus seulement longitudinales comme dans le cas des inclusions souples), mais concerner également les extrémités des inclusions (interactions "de pointe").

Un code de calcul multiphasique général est alors mis au point, dans le chapitre 6, dans le cadre d'élasticité linéaire. Ce chapitre se termine par une application de ce code de calcul numérique au dimensionnement d'une fondation renforcée par inclusions "rigides", soumise à un chargement sismique. Les simulations numériques réalisées semblent suggérer que l'interaction transversale entre phases joue un rôle négligeable dans la réponse des ouvrages.

Le chapitre 7 porte sur le développement du modèle en calcul à la rupture, plus précisément l'approche cinématique par l'extérieur, appliqué aux systèmes en milieu multiphasique général, suivi d'une application à l'analyse de stabilité d'une fondation renforcée par inclusions verticales "rigides", soumise à un chargement sismique. Les résultats obtenus, comparés avec ceux obtenus à partir des simulations numériques élasto-plastiques par éléments finis en utilisant le modèle biphasique, mettent bien en évidence le rôle essentiel joué par la résistance à la flexion des inclusions dans la stabilisation de l'ouvrage.

Enfin, partant de l'idée d'optimiser le schéma de renforcement de l'ouvrage traité au chapitre précédent, en inclinant les inclusions, un modèle "triphase" est formulé et développé dans le chapitre 8. Ce modèle vise à décrire le comportement macroscopique d'un sol renforcé par deux familles d'inclusions ayant des orientations différentes. Le chapitre se termine par une application au calcul de la résistance sismique d'un ouvrage renforcé par un réseau d'inclusions inclinées, où il apparaît que le rôle de l'inclinaison est primordial.

Première partie

Ouvrages renforcés par inclusions

”souples”

Chapitre 2

Modèle multiphasique élasto-plastique pour des ouvrages renforcés par inclusions ”souples”

2.1 Introduction

Le renforcement d’ouvrages de soutènement par l’incorporation, en phase de construction, d’armatures métalliques (technique dite de la ”terre armée” ou de ”nappe géotextile”), est un procédé aujourd’hui couramment employé pour assurer la stabilité de ce type d’ouvrages. Avec cette technique, les propriétés mécaniques globales du sol ainsi renforcé sont considérablement améliorées par rapport à celles du sol initial qui ne possède par exemple pas de résistance en traction (sol pulvérulent).

En pratique, compte tenu du grand nombre d’inclusions de renforcement mises en jeu, mais du fait qu’en contrepartie ces inclusions sont réparties de manière *périodique* au sein du massif du sol, il est naturel de proposer une méthode d’homogénéisation visant à remplacer le composite ”sol renforcé” par un milieu homogène équivalent, dont les propriétés de résistance sont anisotropes en raison de la direction préférentielle des renforcements (de Buhan (1987) [23]; de Buhan et al. (1989) [22]).

D’un point de vue numérique, l’avantage d’une analyse par *homogénéisation* est le gain en temps de calcul, car il n’est pas nécessaire de discrétiser séparément le sol et chacun des éléments de renforcement, ce qui réduit considérablement la taille du problème à résoudre. Cependant, ces méthodes d’homogénéisation présentent certains inconvénients. Elles ne s’appliquent qu’à des structures où les éléments de renforcement sont identiques

et disposés de manière très régulière, avec le même espacement et la même orientation. De plus, cette méthode n'autorise pas la prise en compte d'une condition de glissement entre le sol et les armatures, qui peut fortement affecter la tenue de l'ouvrage.

On propose ici une modélisation *biphasique* permettant de surmonter ces inconvénients, présentée dans le cadre du comportement élasto-plastique.

2.2 Principe de la modélisation biphasique pour des sols renforcés par inclusions "souples"

On se limite dans ce qui suit, à la présentation du modèle *biphasique* avec interaction, c'est-à-dire au cas d'un milieu renforcé par une seule famille d'inclusions de renforcement parallèles à la direction de vecteur unitaire \underline{e}_x . La description d'un tel milieu composite, à l'échelle *microscopique*, est donnée sur la figure (2.1)(a).

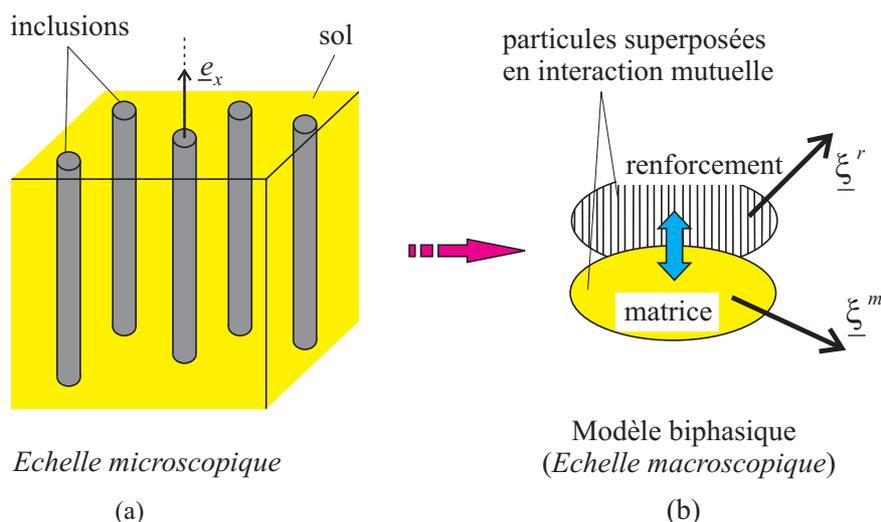


FIG. 2.1. Description du matériau renforcé aux échelles (a) *microscopique* et (b) *macroscopique*

Le modèle biphasique consiste à décrire le matériau renforcé à l'échelle *macroscopique* comme une superposition de deux milieux continus, dénommés *phase matrice* et *phase renforcement* représentant respectivement le sol et le réseau d'inclusions. En tout point géométrique de l'ouvrage ainsi modélisé coexistent donc deux particules appartenant à ces deux phases, auxquelles peuvent être attribuées des cinématiques différentes (figure (2.1)(b)), caractérisées dans le cas d'inclusions "souples" par les vecteurs déplacement respectifs $\underline{\xi}^m$ et $\underline{\xi}^r$, permettant ainsi de modéliser les glissements relatifs entre le sol et

les armatures dus au défaut d'adhérence, en particulier au voisinage de l'extrémité des inclusions.

2.3 Construction du modèle par la méthode des puissances virtuelles

La construction d'un modèle mécanique et en particulier du modèle biphasique consiste à représenter les efforts extérieurs et intérieurs correspondant à la modélisation géométrique adoptée, ainsi qu'à écrire les équations exprimant la loi fondamentale de la dynamique et la loi des actions mutuelles (voir pour un exposé général de la mise en œuvre de cette méthode (Salençon (2001) [60])).

On commence par définir l'espace vectoriel des *mouvements virtuels*, ainsi que celui des *mouvements virtuels rigidifiants*. Puis on postule les expressions des puissances virtuelles des efforts extérieurs et intérieurs. Ensuite, on applique successivement les deux énoncés du principe des puissances virtuelles (PPV) aux mouvements virtuels choisis pour exhiber la forme des efforts intérieurs, et exprimer enfin les équations d'équilibre et les conditions aux limites correspondantes. Cette méthode a été mise en œuvre par Sudret (1999) [69] et de Buhan et Sudret (2000) [26] dans le cas d'une modélisation biphasique des sols renforcés par inclusions souples. Nous donnons ci-après les équations de la statique du modèle qui résultent de l'application de cette méthode.

2.3.1 Equations de la statique relatives au modèle biphasique

Les équations d'équilibre et les conditions aux limites s'écrivent pour chaque phase séparément.

- ◇ **Phase matrice** : on retrouve pour cette phase, les équations classiques régissant, pour un milieu de Cauchy, l'équilibre et les conditions aux limites :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}, t) + \rho^m \underline{\underline{F}}^m(\underline{x}, t) + \underline{\underline{I}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{0}} \quad \text{sur} \quad \Omega^m \quad (2.1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}, t) \cdot \underline{\underline{\nu}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{T}}_d^m(\underline{\nu}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_T^m \quad (2.2)$$

$$\underline{\underline{\xi}}^m(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\xi}}_d^m(\underline{x}, t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_\xi^m \quad (2.3)$$

avec

$$\partial\Omega_T^m \cup \partial\Omega_\xi^m = \partial\Omega^m \quad \text{et} \quad \partial\Omega_T^m \cap \partial\Omega_\xi^m = \emptyset \quad (2.4)$$

où $\underline{\sigma}^m$ est le tenseur des contraintes dans la phase matrice, $\rho^m \underline{F}^m$ est la densité volumique d'efforts extérieurs et \underline{I} est la densité volumique d'efforts d'interaction appliquée par la phase renforcement sur la phase matrice. \underline{T}_d^m et $\underline{\xi}_d^m$ sont les données en efforts et en déplacements sur les parties complémentaires $\partial\Omega_T^m$ et $\partial\Omega_\xi^m$ de $\partial\Omega^m$. $\underline{\nu}$ est le vecteur normal extérieur unitaire.

◇ **Phase renforcement :**

$$\text{div} (n^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x(\underline{x}, t)) + \rho^r \underline{F}^r(\underline{x}, t) - \underline{I}(\underline{x}, t) = \underline{0} \quad \text{sur} \quad \Omega^r \quad (2.5)$$

$$n^r(\underline{x}, t)(\underline{e}_x \cdot \underline{\nu}(\underline{x}, t))\underline{e}_x = \underline{T}_d^r(\underline{\nu}) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_T^r \quad (2.6)$$

$$\underline{\xi}^r(\underline{x}, t) = \underline{\xi}_d^r(\underline{x}, t) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_\xi^r \quad (2.7)$$

avec

$$\partial\Omega_T^r \cup \partial\Omega_\xi^r = \partial\Omega^r \quad \text{et} \quad \partial\Omega_T^r \cap \partial\Omega_\xi^r = \emptyset \quad (2.8)$$

où n^r est la densité d'effort axial dans les inclusions par unité de surface transversale à la direction des inclusions, $\rho^r \underline{F}^r$ est la densité volumique d'efforts extérieurs. \underline{T}_d^r et $\underline{\xi}_d^r$ sont les données en efforts et en déplacements sur les parties complémentaires $\partial\Omega_T^r$ et $\partial\Omega_\xi^r$ de $\partial\Omega^r$. $\underline{\nu}$ est le vecteur normal extérieur unitaire.

2.3.2 Comportement élasto-plastique

La résolution des problèmes aux limites nécessite de compléter les équations précédentes par la donnée de *lois de comportement*. Tout comme dans le cas d'un milieu continu monophasique, ces dernières s'expriment sous la forme de relations entre les efforts intérieurs et les déformations associées à ces efforts. Se plaçant dans le cadre de l'*hypothèse des petites perturbations*, nous retenons ici, pour les phases matrice et renforcement, ainsi que l'interaction matrice/renforcement, un comportement *élastique parfaitement plastique*, avec une *règle d'écoulement plastique associée* ou non (Bennis (2002) [6]).

- ◇ **Phase matrice** : les déformations sont décrites par le tenseur de déformations linéarisées, défini comme la partie symétrique du gradient du champ de déplacement de cette phase :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^m = 1/2 \left\{ \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{\xi}}^m) + {}^T \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{\xi}}^m) \right\} \quad (2.9)$$

et la loi de comportement élasto-plastique correspondante peut être écrite sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \underline{\underline{C}}^m : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^m - \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m \right) \quad (2.10)$$

où $\underline{\underline{C}}^m$ désigne le tenseur des modules d'élasticité et $\underline{\underline{\varepsilon}}_p^m$ est le tenseur de déformations plastiques de la phase matrice, dont l'évolution vérifie la règle d'écoulement plastique :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p^m = \dot{\lambda}^m \frac{\partial g^m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^m} \quad \text{avec} \quad \dot{\lambda}^m \begin{cases} \geq 0 & \text{si } f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = \dot{f}^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.11)$$

où $\dot{\lambda}^m$ est le multiplicateur plastique, $f^m(\cdot)$ et $g^m(\cdot)$ sont respectivement la fonction de charge et le potentiel plastique de la phase matrice ($g^m(\cdot) \equiv f^m(\cdot)$ dans le cas d'une règle d'écoulement plastique associée).

- ◇ **Phase renforcement** : la variable déformation, définie à partir du champ de déplacement, est :

$$\varepsilon^r = \frac{\partial \xi_x^r}{\partial x} \quad (2.12)$$

et l'équation de comportement correspondante est la suivante :

$$n^r = \alpha^r (\varepsilon^r - \varepsilon_p^r) \quad (2.13)$$

où α^r désigne la raideur de la phase renforcement, qui peut être interprétée comme la rigidité axiale en traction des inclusions par unité de surface transversale, et ε_p^r est la déformation plastique de la phase renforcement, dont l'évolution vérifie la règle d'écoulement plastique :

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_p^r = \dot{\lambda}^r \frac{\partial f^r}{\partial n^r} \quad \text{avec} \quad \dot{\lambda}^r \begin{cases} \geq 0 & \text{si } f^r(n^r) = \dot{f}^r(n^r) = 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.14)$$

où $\dot{\lambda}^r$ est le multiplicateur plastique, et $f^r(\cdot)$ est la fonction de charge de la phase renforcement. Cette fonction de charge est formulée au moyen d'une condition de la forme :

$$f^r(n^r) \leq 0 \quad (2.15)$$

dont l'expression dépend de la forme des inclusions.

◇ **Loi d'interaction** : cette loi s'écrit sous la forme :

$$\underline{I} = \underline{c}^I \cdot (\Delta \underline{\xi} - \Delta \underline{\xi}_p) \quad (2.16)$$

où \underline{c}^I est le tenseur de rigidité d'interaction, $\Delta \underline{\xi} = \underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m$ est le déplacement relatif renforcement/matrice, qui apparaît en dualité avec la densité de force d'interaction \underline{I} , et $\Delta \underline{\xi}_p$ est sa partie plastique. L'évolution de cette dernière obéit à la règle d'écoulement plastique correspondante :

$$\dot{\Delta \underline{\xi}}_p = \dot{\lambda}^I \frac{\partial g^I}{\partial \underline{I}} \quad \text{avec} \quad \dot{\lambda}^I \begin{cases} \geq 0 & \text{si } f^I(\underline{I}) = \dot{f}^I(\underline{I}) = 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.17)$$

où $f^I(\cdot)$ et $g^I(\cdot)$ sont respectivement la fonction de charge et le potentiel plastique de la loi d'interaction ($f^I(\cdot) \equiv g^I(\cdot)$ dans le cas d'une règle d'écoulement plastique associée).

2.4 Implémentation numérique du modèle

Après avoir formulé les équations de comportement élasto-plastique du modèle biphasique, nous abordons ci-après la mise en œuvre numérique de la méthode des éléments finis biphasique pour la résolution des problèmes élasto-plastiques, pour des structures en milieu biphasique.

2.4.1 Position du problème d'évolution élasto-plastique d'un milieu biphasique

L'analyse du comportement d'un ouvrage en sol renforcé, par le modèle biphasique, nécessite la détermination, ou au moins la dérivation d'une approximation numérique, de la solution d'un problème aux limites élasto-plastique du système biphasique.

Soit un système biphasique élasto-plastique occupant un volume Ω , dont la cinématique est spécifiée par les vecteurs déplacements $\underline{\xi}^m$ et $\underline{\xi}^r$, attachés respectivement aux particules matrice et renforcement localisées en un même point \underline{x} de Ω .

A tout instant $t \in [0, T]$ de l'évolution, un couple de champs de déplacement $\{\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r\}(t)$ est dit *cinématiquement admissible* (\mathcal{CA}) pour le problème, s'il satisfait les conditions aux limites correspondantes :

$$0 \leq t \leq T : \underline{\xi}^m(t) = \underline{\xi}_d^m \text{ sur } \partial\Omega_\xi^m, \quad \underline{\xi}^r(t) = \underline{\xi}_d^r \text{ sur } \partial\Omega_\xi^r \quad (2.18)$$

où $\partial\Omega_\xi^m$ (resp. $\partial\Omega_\xi^r$) est la partie du bord extérieur $\partial\Omega$ où le déplacement de la phase matrice (resp. renforcement) est décrit en fonction du temps t .

De même, on définit l'ensemble des champs d'efforts intérieurs au système biphasique *statiquement admissible* (\mathcal{SA}), pour le même problème au temps t , comme l'ensemble des champs $\{\underline{\sigma}^m, n^r, \underline{I}\}(t)$ vérifiant :

- ◇ les équations d'équilibre par phase (2.1) et (2.5)
- ◇ les conditions aux limites en contraintes (2.2) et (2.6).

En outre, un tel ensemble des champs d'efforts intérieurs $\{\underline{\sigma}^m, n^r, \underline{I}\}(t)$ est dit *plastiquement admissible* (\mathcal{PA}) pour le problème, si les critères de plasticité des phases matrice et renforcement, ainsi que celui de l'interaction sont satisfaits en tout point de Ω :

$$f^m(\underline{\sigma}^m) \leq 0, \quad f^r(n^r) \leq 0 \text{ et } f^I(\underline{I}) \leq 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (2.19)$$

La résolution d'un problème d'évolution élasto-plastique pour un ouvrage en sol renforcé, modélisé comme un système biphasique, consiste à exhiber, à tout instant t de l'évolution, un champ d'efforts intérieurs $\{\underline{\sigma}^m, n^r, \underline{I}\}(t)$ \mathcal{SA} et \mathcal{PA} d'une part, et un couple de champs de déplacement $\{\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r\}(t)$ \mathcal{CA} d'autre part, ces champs étant associés

en tout point par les lois de comportement élasto-plastique de la phase matrice (2.10), la phase renforcement (2.13) et de l'interaction (2.16).

2.4.2 Discrétisation temporelle de l'évolution et algorithme itératif

On se limite dans le cadre de ce travail aux évolutions quasi-statiques. On soumet notre structure biphasique à un chargement $\{Q\}$ paramétré par le temps t variant de 0 à T . Ce chargement, qui peut être une combinaison d'un déplacement imposé et d'un effort volumique ou d'un effort surfacique, est ensuite subdivisé classiquement en petits *incrément de chargement* $\{\delta Q\} = \{Q\}(t + \delta t) - \{Q\}(t)$, et la procédure d'intégration numérique, décrite dans Bennis (2002) [6], est ici rappelée.

Supposant connue la solution du problème, correspondant à l'état de chargement $\{Q\}(t)$, en termes de champs de déplacement $\{\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r\}(t)$, champs d'efforts intérieurs $\{\underline{\sigma}^m, n^r, \underline{I}\}(t)$ et champs de déformations plastiques $\{\underline{\varepsilon}_p^m, \varepsilon_p^r, \Delta \underline{\xi}_p\}(t)$, le problème consiste à calculer la solution à l'instant $t + \delta t$ associée à l'incrément de chargement $\{\delta Q\}$. Cette solution peut être obtenue en ajoutant à la solution à l'instant t , la solution d'un problème *élastique* relatif à l'application de l'incrément de chargement $\{\delta Q\}$, *les incréments de déformations plastiques* $\{\delta \underline{\varepsilon}_p^m, \delta \varepsilon_p^r, \delta \Delta \underline{\xi}_p\}$ étant prescrits en tant que déformations anélastiques. Cela peut s'écrire sous la forme :

$$\left. \begin{array}{l} \{\delta \underline{\sigma}^m, \delta n^r, \delta \underline{I}\} \\ \{\delta \underline{\varepsilon}_p^m, \delta \varepsilon_p^r\} \end{array} \right\} = \text{Elas.} \left[\{\delta Q\}; \left\{ \delta \underline{\varepsilon}_p^m, \delta \varepsilon_p^r, \delta \Delta \underline{\xi}_p \right\} \right] \quad (2.20)$$

Ces incréments de déformations plastiques doivent par ailleurs satisfaire les règles d'écoulement plastique (2.11), (2.14) et (2.17), exprimées sous forme incrémentale :

$$\delta \underline{\varepsilon}_p^m = \delta \lambda^m \frac{\partial f^m}{\partial \underline{\sigma}^m} (\underline{\sigma}^m + \delta \underline{\sigma}^m) \quad \text{avec} \quad \delta \lambda^m \begin{cases} > 0 & \text{si } f^m(\underline{\sigma}^m + \delta \underline{\sigma}^m) = 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\delta \varepsilon_p^r = \delta \lambda^r \frac{\partial f^r}{\partial n^r} (n^r + \delta n^r) \quad \text{avec} \quad \delta \lambda^r \begin{cases} > 0 & \text{si } f^r(n^r + \delta n^r) = 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\delta \Delta \underline{\xi}_p = \delta \lambda^I \frac{\partial f^I}{\partial \underline{I}} (\underline{I} + \delta \underline{I}) \quad \text{avec} \quad \delta \lambda^I \begin{cases} > 0 & \text{si } f^I(\underline{I} + \delta \underline{I}) = 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.23)$$

La combinaison de ces relations avec les équations de comportement exprimées sous forme incrémentale donne finalement :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m + \delta \underline{\underline{\sigma}}^m = \text{proj.}_{C^m} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{C}}^m : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m \right\} \quad (2.24)$$

$$n^r + \delta n^r = \text{proj.}_{C^r} \{ n^r + \alpha^r \delta \varepsilon^r \} \quad (2.25)$$

$$\underline{I} + \delta \underline{I} = \text{proj.}_{C^I} \{ \underline{I} + \underline{c}^I \cdot \delta \Delta \underline{\xi} \} \quad (2.26)$$

où proj._{C^m} (resp. proj._{C^r} , proj._{C^I}) désigne la *projection* sur le domaine d'élasticité convexe C^m (resp. C^r , C^I) défini par le critère de plasticité correspondant. Ces projections sont calculées au sens des produits scalaires associés aux énergies élastiques de contraintes :

$$\forall \left(\underline{\underline{\sigma}}^m, \underline{\underline{\sigma}}^{m'} \right) \quad \langle \underline{\underline{\sigma}}^m, \underline{\underline{\sigma}}^{m'} \rangle_m = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^m : \left(\underline{\underline{C}}^m \right)^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}^{m'} \quad \text{pour la phase matrice} \quad (2.27)$$

$$\forall \left(n^r, n^{r'} \right) \quad \langle n^r, n^{r'} \rangle_r = \frac{1}{2\alpha^r} n^r n^{r'} \quad \text{pour la phase renforcement} \quad (2.28)$$

$$\forall \left(\underline{I}, \underline{I}' \right) \quad \langle \underline{I}, \underline{I}' \rangle_I = \frac{1}{2} \underline{I} \cdot \left(\underline{c}^I \right)^{-1} \cdot \underline{I}' \quad \text{pour l'interaction matrice/renforcement} \quad (2.29)$$

Ce système d'équations est classiquement résolu par une procédure itérative, dite *return mapping algorithm* (Crisfield (1991) [14]; Simo et Hughes (1998) [67]). Les champs d'incrément des *variables de déformations anélastiques imposées* étant inconnus, on effectue une série de calculs élastiques, grâce à la procédure suivante, appelée *algorithme de résolution global biphasique* : les incréments de déformations plastiques étant supposés connus à l'itération k (on prend ces incréments nuls à l'itération $k=0$), les valeurs de ces mêmes incréments à l'itération $k+1$ sont calculées en trois étapes décrites ci-après :

- (a) Calcul de la *solution élastique* correspondant à la résolution du système linéaire suivant :

$$\left. \begin{array}{l} \{ \delta \underline{\underline{\sigma}}^m, \delta n^r, \delta \underline{I} \} \\ \{ \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m, \delta \varepsilon^r \} \end{array} \right\} (k) = \text{Elas.} \left[\{ \delta Q \}; \left\{ \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m, \delta \varepsilon_p^r, \delta \Delta \underline{\xi}_p \right\} (k) \right] \quad (2.30)$$

(b) Détermination des états de contrainte plastiquement admissible (\mathcal{PA}) par projection des états de contrainte statiquement admissible (\mathcal{SA}) sur les domaines d'élasticité correspondants :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{p.a.}^m(k) = \text{proj.}_{C^m} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^m + \underline{\underline{C}}^m : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m(k) \right\} \quad (2.31)$$

$$n_{p.a.}^r(k) = \text{proj.}_{C^r} \{ n^r + \alpha^r \delta \varepsilon^r(k) \} \quad (2.32)$$

$$\underline{\underline{I}}_{p.a.}(k) = \text{proj.}_{C^I} \{ \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{c}}^I \cdot \delta \Delta \underline{\underline{\xi}}(k) \} \quad (2.33)$$

(c) Calcul des incréments de déformations plastiques relatifs à l'itération $k+1$ comme suit :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m(k+1) &= \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^m(k) + \left(\underline{\underline{C}}^m \right)^{-1} : \left(\underline{\underline{\sigma}}^m - \underline{\underline{\sigma}}_{p.a.}^m(k) \right) \\ &= \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_p^m(k) + \left(\underline{\underline{C}}^m \right)^{-1} : \left(\underline{\underline{\sigma}}^m + \delta \underline{\underline{\sigma}}^m(k) - \underline{\underline{\sigma}}_{p.a.}^m(k) \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \delta \varepsilon_p^r(k+1) &= \delta \varepsilon^r(k) + \frac{1}{\alpha^r} (n^r - n_{p.a.}^m(k)) \\ &= \delta \varepsilon_p^r(k) + \frac{1}{\alpha^r} (n^r + \delta n^r(k) - n_{p.a.}^r(k)) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \delta \Delta \underline{\underline{\xi}}_p(k+1) &= \delta \Delta \underline{\underline{\xi}}(k) + \left(\underline{\underline{c}}^I \right)^{-1} \cdot (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{I}}_{p.a.}(k)) \\ &= \delta \Delta \underline{\underline{\xi}}_p(k) + \left(\underline{\underline{c}}^I \right)^{-1} \cdot (\underline{\underline{I}} + \delta \underline{\underline{I}}(k) - \underline{\underline{I}}_{p.a.}(k)) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Cette procédure itérative est poursuivie jusqu'à la convergence, qui correspond au fait que les suites des champs de contrainte \mathcal{PA} et \mathcal{SA} tendent simultanément vers la solution :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}_{p.a.}^m; n_{p.a.}^r; \underline{\underline{I}}_{p.a.} \right\} (k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^m + \delta \underline{\underline{\sigma}}^m(k); n^r + \delta n^r(k); \underline{\underline{I}} + \delta \underline{\underline{I}}(k) \right\} \\ &= \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^m + \delta \underline{\underline{\sigma}}^m; n^r + \delta n^r; \underline{\underline{I}} + \delta \underline{\underline{I}} \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Il est à noter que, tandis que les étapes (b) et (c) correspondent à un traitement *local* de la plasticité, qui est suivi indépendamment pour chacune des phases, ainsi que pour l'interaction entre ces dernières, l'étape (a) correspond à un calcul élastique *global*.

2.4.3 Formulation par la méthode des éléments finis

Désignant par $\{\delta\underline{\xi}^m, \delta\underline{\xi}^r\}(k)$ la solution en déplacements à l'itération k , du problème élastique incrémental (2.30), et par $\{\delta\underline{\xi}^{m'}, \delta\underline{\xi}^{r'}\}$ un couple de champs de déplacements \mathcal{CA} quelconque pour ce même problème, le principe de minimum suivant peut être établi :

$$\mathcal{E}(\{\delta\underline{\xi}^m, \delta\underline{\xi}^r\}(k)) = \underset{\{\delta\underline{\xi}^{m'}, \delta\underline{\xi}^{r'}\} \in \mathcal{CA}}{\text{Min}} \mathcal{E}(\{\delta\underline{\xi}^{m'}, \delta\underline{\xi}^{r'}\}) \quad (2.38)$$

où \mathcal{E} est une fonctionnelle quadratique, appelée *énergie potentielle* du système, définie comme la différence entre :

- l'*énergie de déformation élastique*, qui prend en compte des incréments de déformations plastiques imposés :

$$\begin{aligned} W\{\delta\underline{\xi}^{m'}, \delta\underline{\xi}^{r'}\} &= \overbrace{\int_{\Omega} 1/2 \left[\delta\underline{\varepsilon}' : \underline{\underline{C}}^m : \delta\underline{\varepsilon}' \right] d\Omega}^{\text{matrice}} - \int_{\Omega} \left[\delta\underline{\varepsilon}' : \underline{\underline{C}}^m : \delta\underline{\varepsilon}_p^m \right] d\Omega \\ &+ \overbrace{\int_{\Omega} \left[\frac{\alpha^r}{2} (\delta\varepsilon^{r'})^2 \right] d\Omega}^{\text{renforcement}} - \int_{\Omega} \alpha^r \delta\varepsilon^{r'} \delta\varepsilon_p^r d\Omega \\ &+ \overbrace{\int_{\Omega} 1/2 \left[\delta\Delta\underline{\xi}' \cdot \underline{\underline{c}}^I \cdot \delta\Delta\underline{\xi}' \right] d\Omega}^{\text{interaction}} - \int_{\Omega} \delta\Delta\underline{\xi}' \cdot \underline{\underline{c}}^I \cdot \delta\Delta\underline{\xi}_p^r d\Omega \end{aligned} \quad (2.39)$$

- et une fonctionnelle linéaire associée aux incréments imposés des forces extérieures appliquées au système, correspondant à l'incrément de chargement $\{\delta Q\}$:

$$\begin{aligned} \Phi\{\delta\underline{\xi}^{m'}, \delta\underline{\xi}^{r'}\} &= \int_{\Omega} \left[\delta(\rho^m \underline{F}^m) \cdot \delta\underline{\xi}^{m'} + \delta(\rho^r \underline{F}^r) \cdot \delta\underline{\xi}^{r'} \right] d\Omega \\ &+ \int_{\Omega_T^m} \delta\underline{T}_d^m \cdot \delta\underline{\xi}^{m'} dS + \int_{\Omega_T^r} \delta\underline{T}_d^r \cdot \delta\underline{\xi}^{r'} dS \end{aligned} \quad (2.40)$$

En s'appuyant sur un tel principe de minimum, le modèle biphasique est alors numériquement implémenté dans le contexte de la *méthode des éléments finis*. La minimisation de l'énergie potentielle conduit donc naturellement à un système linéaire classique suivant :

$$[K] \{\delta U\}(k) = \{\delta F^{\text{ext.}}\} + \{\delta F^{\text{plas.}}\}(k) \quad (2.41)$$

où $[K]$ est la matrice de rigidité, $\{\delta U\}(k)$ est la matrice-colonne formée par tous les incréments de déplacements nodaux, tandis que $\{\delta F^{\text{ext.}}\}$ et $\{\delta F^{\text{plas.}}\}(k)$ désignent respectivement la matrice-colonne associée à l'incrément de chargement extérieur, et celle relative aux incréments de déformations plastiques.

2.5 Conclusion

La mise en œuvre numérique du modèle multiphasique relatif à un sol renforcé par inclusions "souples" a été élaborée dans le cadre d'un comportement élasto-plastique des différents constituants (sols et inclusions de renforcement).

Ce code de calcul sera utilisé par la suite pour quantifier l'apport du renforcement sur la raideur structurelle des ouvrages renforcés par inclusions souples et aussi sur leur résistance (charge de ruine).

Les résultats obtenus par cet outil seront comparés à ceux dérivés d'une approche du type "calcul à la rupture" qui sera introduite au chapitre suivant.

Chapitre 3

Analyse de stabilité des ouvrages renforcés par inclusions "souples" : l'approche calcul à la rupture

L'analyse du comportement d'ouvrages en sols renforcés par inclusions linéaires, comme dans la technique de la "terre armée", peut se fonder sur deux approches différentes.

Dans la première, appelée approche "structurale" (Michalowski (1995) [52]) ou "modélisation mixte" (Anthoine (1989) [4]), les renforcements sont perçus comme des éléments de structures *unidimensionnels* de type poutre, plongés au sein d'un massif décrit comme un milieu continu *tridimensionnel*. Cette approche est appropriée dans la mesure où un nombre relativement faible de renforcements est impliqué dans l'analyse, mais devient insoluble, notamment d'un point de vue numérique, dès que ce nombre augmente de manière significative.

La deuxième approche, appelée approche "continue" ou "homogénéisation" (Sawicki (1983) [61]; Sawicki et Lesniewska (1989) [62]; Siad (1987) [66]; de Buhan et al. (1989) [22]; di Prisco et Nova (1993) [29]; Verzura (1994) [81]; Michalowski (1997) [50]), tire parti du fait que, dans la plupart des cas, les renforcements sont répartis de manière régulière dans le massif de sol, de sorte que le sol renforcé peut être considéré, d'un point de vue macroscopique, c'est-à-dire à l'échelle de l'ouvrage, comme un milieu homogène, mais bien évidemment anisotrope en raison de l'orientation privilégiée des renforcements.

En ce qui concerne plus spécifiquement l'analyse de la stabilité ou le calcul à la rupture de tels ouvrages en "terre armée", l'application de la méthode d'homogénéisation conduit à la détermination d'un critère de rupture macroscopique du sol renforcé. La

formulation de ce dernier est simplement dérivée de celui du sol (généralement une condition de résistance de Mohr-Coulomb) auquel s'ajoute une contribution supplémentaire orientée, associée à la résistance des renforcements. La condition de rupture anisotrope ainsi obtenue peut donc facilement être incorporée dans une approche de type analyse limite ou calcul à la rupture, soit analytiquement par le biais de la méthode cinématique (de Buhan (1989) [25]; Michalowski (1997) [50]) soit numériquement grâce à une formulation éléments finis du problème (Abdi et al. (1994) [1]). Par ailleurs, une telle méthode d'homogénéisation a été étendue à la simulation élasto-plastique des ouvrages en sol renforcé (Greuell et al. (1994) [33]; Bernaud et al. (1995) [8]), la condition de rupture ultime du sol renforcé étant considérée comme une condition de parfaite plasticité, alors que le comportement élastique est modélisé par le biais d'un tenseur de rigidité anisotrope approprié.

Toutefois, en dépit de quelques tentatives partielles (de Buhan et Siad (1989) [25]; de Buhan et Taliencio (1991) [27]; Michalowski et Cermak (2002) [51]), la méthode d'homogénéisation ne tient pas compte de manière appropriée d'une rupture éventuelle par *glissement* à l'interface entre le sol et les inclusions de renforcement, car faisant implicitement l'hypothèse d'une adhérence parfaite entre le sol et les renforcements. Afin de surmonter cette difficulté, le modèle "multiphasique", conçu comme une généralisation de la méthode d'homogénéisation, a été développé (Sudret et de Buhan (2001) [71]; Benis et de Buhan (2003) [7]; de Buhan et Hassen (2008) [21]) pour les sols renforcés par inclusions linéaires.

Ce modèle, présenté au chapitre précédent dans le cadre d'un comportement élasto-plastique des phases ainsi que de la loi d'interaction entre ces dernières, est ici formulé dans le contexte de la *théorie du calcul à la rupture*, qui repose sur la seule donnée de critères de résistance assignés aux phases et à leur interaction. On verra en particulier que l'hypothèse d'adhérence parfaite entre phases permet de retrouver la méthode d'homogénéisation classique en calcul à la rupture.

3.1 Domaine K des chargements potentiellement supportables pour un système biphasique

Comme dans le cas d'un milieu continu, la définition des chargements potentiellement supportables d'une structure repose sur un raisonnement de *compatibilité "équilibre-résistance"* (Salençon (1983) [58]), que nous nous proposons maintenant d'explicitier dans

le cadre du formalisme de la mécanique des milieux biphasiques.

Considérons un système en milieu biphasique Ω décrit dans ce formalisme, soumis à un chargement dépendant de n paramètres $\underline{Q} = (Q_i, i = 1, ..n)$, et dont les critères de résistance de la phase matrice, de la phase renforcement, ainsi que de l'interaction entre ces dernières au point \underline{x} sont définis comme suit :

- **Phase matrice :**

$$f^m(\underline{x}; \underline{\sigma}^m(\underline{x})) \leq 0 \iff \underline{\sigma}^m \in G^m(\underline{x}) \quad (3.1)$$

où $G^m(\underline{x})$ représente le *domaine de résistance* de la phase matrice en ce point, constitué de l'ensemble des états de contrainte $\underline{\sigma}^m$ admissibles. Nous admettrons que ce domaine contient l'origine :

$$\underline{\sigma}^m(\underline{x}) = 0 \in G^m(\underline{x}) \quad (3.2)$$

et possède la propriété de *convexité* :

$$\underline{\sigma}_1^m(\underline{x}), \underline{\sigma}_2^m(\underline{x}) \in G^m(\underline{x}) \Rightarrow (1 - \lambda)\underline{\sigma}_1^m(\underline{x}) + \lambda\underline{\sigma}_2^m(\underline{x}) \in G^m(\underline{x}) \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad (3.3)$$

qui est géométriquement illustrée sur la figure (3.1).

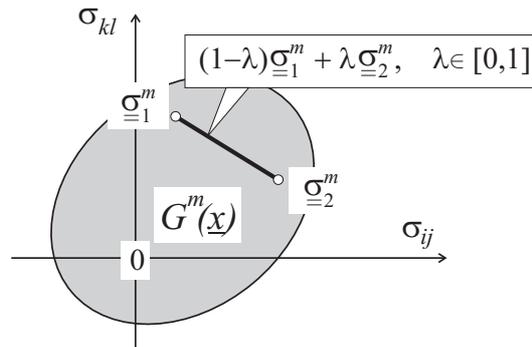


FIG. 3.1. *Convexité du domaine de résistance de la phase matrice*

- **Phase renforcement :**

$$f^r(\underline{x}; n^r) \leq 0 \iff n^r \in G^r(\underline{x}) \quad (3.4)$$

où $G^r(\underline{x})$ représente le domaine de résistance de la phase renforcement en ce point,

constitué de l'ensemble des états de densité d'effort normal n^r admissibles. Désignant par n_0^r (respectivement $n_0^{r'}$) la résistance en traction (respectivement en compression) de la phase renforcement, le domaine $G^r(\underline{x})$ est simplement l'intervalle fermé $[-n_0^{r'}, n_0^r]$ (figure (3.2)) :

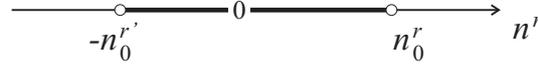


FIG. 3.2. *Domaine de résistance de la phase renforcement*

- **Critère d'interaction** : Ce critère s'écrit :

$$f^I(\underline{x}; \underline{I}) \leq 0 \iff \underline{I} \in G^I(\underline{x}) \quad (3.5)$$

où $G^I(\underline{x})$ représente le domaine de résistance de la loi d'interaction au point \underline{x} , constitué de l'ensemble des états de densité d'effort d'interaction \underline{I} admissibles. Nous admettrons que ce domaine contient l'origine :

$$\underline{I}(\underline{x}) = 0 \in G^I(\underline{x}) \quad (3.6)$$

et possède la propriété de *convexité*.

Tous comme dans le cas d'un milieu continu classique, nous définissons alors le *domaine K des chargements potentiellement supportables* pour le système en milieu biphasique, comme l'ensemble des chargement \underline{Q} tels qu'il existe un champ de contrainte $\underline{\sigma}^m$ dans la phase matrice, une densité d'effort normal n^r dans la phase renforcement et une densité d'effort d'interaction \underline{I} en équilibre (*statiquement admissibles* : $\mathcal{S.A.}$ (cf. §2.4.1)) avec \underline{Q} et vérifiant en tout point le critère de résistance (3.1) de la phase matrice, (3.4) de la phase renforcement et (3.5) de la loi d'interaction :

$$\underline{Q} \in K \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \{ \underline{\sigma}^m; n^r; \underline{I} \} \quad \mathcal{S.A.} \text{ avec } \underline{Q} & : \text{Equilibre} \\ \underline{\sigma}^m(\underline{x}) \in G^m(\underline{x}); n^r(\underline{x}) \in G^r(\underline{x}); \underline{I}(\underline{x}) \in G^I(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega & : \text{Résistance} \end{cases} \quad (3.7)$$

Il est facile de montrer à partir de la définition (3.7), que les propriétés, supposées valables en tout point, de $G^m(\underline{x})$, $G^r(\underline{x})$, $G^I(\underline{x})$, sont transposables au domaine K , qui contient donc le chargement $\underline{Q} = 0$ et vérifie la propriété de convexité.

3.2 Approche statique par l'intérieur de K

Cette approche revient tout simplement à appliquer la définition (3.7) du domaine K , en s'attachant, pour une valeur donnée du chargement, à mettre en évidence un champ de contrainte équilibrant ce chargement tout en respectant les critères de résistance de la phase matrice, de la phase renforcement et de loi d'interaction en tout point. Etant donné dans l'espace des paramètres de chargement \underline{Q} un ensemble de points représentatifs de tels chargements appartenant à K , la propriété de convexité de ce dernier permet d'affirmer que l'*enveloppe convexe* de ces points (définie comme le plus petit ensemble convexe les contenant) est incluse dans le domaine K : d'où la dénomination d'*approche "par l'intérieur"* (figure (3.3)).

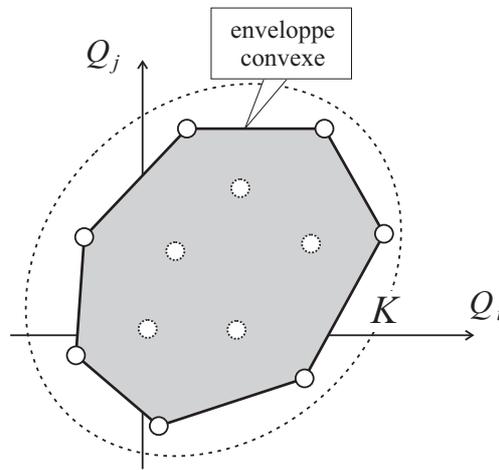


FIG. 3.3. Construction d'une approche statique par l'intérieur du domaine K

Une méthode possible consiste à procéder par *trajets de chargements radiaux* comme indiqué sur la figure (3.4). Etant donnée une valeur quelconque du chargement, notée \underline{Q}^* , on définit λ^+ par :

$$\lambda^+ = \sup \{ \lambda; \lambda \underline{Q}^* \in K \} \quad (3.8)$$

Désignant alors par $\{ (\underline{\sigma}^m)^*, (n^r)^*, (\underline{I})^* \}$ un champ d'efforts intérieurs quelconque, statiquement admissible avec \underline{Q}^* , il est clair que la valeur λ^s définie par :

$$\lambda^s = \sup \{ \lambda, \text{tel que } \lambda (\underline{\sigma}^m)^*(\underline{x}) \in G^m(\underline{x}), \lambda (n^r)^*(\underline{x}) \in G^r(\underline{x}), \lambda (\underline{I})^*(\underline{x}) \in G^I(\underline{x}), \forall \underline{x} \in \Omega \} \quad (3.9)$$

constitue un *minorant* de la valeur extrême λ^+ :

$$\lambda^s \leq \lambda^+ \quad (3.10)$$

puisque nous n'avons exploré qu'une *classe particulière* de champs de contrainte, de la forme $\{\lambda(\underline{\sigma}^m)^*; \lambda(n^r)^*$ et $\lambda(\underline{I})^*\}$. Les relations (3.9) et (3.10) montrent que l'approche statique par l'intérieur se traduit par un problème de recherche de maximum sous contraintes (figure (3.4)).

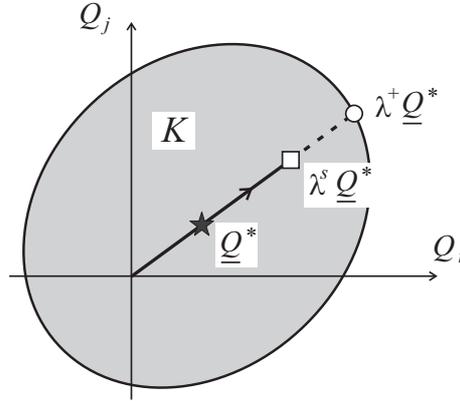


FIG. 3.4. Approche par l'intérieur du domaine K par trajet de chargement radial

3.3 Approche cinématique par l'extérieur de K

Tout comme dans le cas d'un milieu continu classique, cette approche repose sur la *dualisation des équations d'équilibre* par le biais de l'écriture du *principe des puissances virtuelles* (PPV). Désignant par $\{\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r\}$ un *champ de vitesse virtuel* quelconque cinématiquement admissible pour le problème considéré, c'est-à-dire vérifiant les conditions aux limites en vitesse, et que nous supposons provisoirement continûment différentiable, la *puissance virtuelle des efforts extérieurs* s'écrit dans le cas d'un mode de chargement à n paramètres \underline{Q} :

$$P_e(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) = \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m \cdot \hat{\underline{U}}^m + \rho^r \underline{F}^r \cdot \hat{\underline{U}}^r) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\underline{T}^m \cdot \hat{\underline{U}}^m + \underline{T}^r \cdot \hat{\underline{U}}^r) dS = \underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}} \quad (3.11)$$

où $\hat{\underline{q}}$ représente le vecteur des *paramètres cinématiques* apparaissant en dualité avec les

paramètres de chargement \underline{Q} .

La *puissance virtuelle de déformation* s'écrit dans ce même champ de vitesse virtuel (Bennis (2002) [6]) :

$$P_d(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) = \int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\hat{d}}}^m + n^r \hat{d}^r + \underline{I} \cdot \Delta \hat{\underline{U}} \right) d\Omega \quad (3.12)$$

avec

$$\begin{cases} \underline{\underline{\hat{d}}}^m = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}}(\hat{\underline{U}}^m) + {}^T \underline{\underline{\text{grad}}}(\hat{\underline{U}}^m) \right) \\ \hat{d}^r = \frac{\partial \hat{U}_x^r}{\partial x} \\ \Delta \hat{\underline{U}} = \hat{\underline{U}}^r - \hat{\underline{U}}^m \end{cases} \quad (3.13)$$

Le *principe des puissances virtuelles* s'écrit alors :

$$\left(\underline{\underline{\sigma}}^m; n^r; \underline{I} \right) \mathcal{S.A.} \text{ avec } \underline{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \left\{ \hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r \right\} \mathcal{C.A.} \text{ avec } \hat{\underline{q}} \\ \underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}} = \int_{\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}}^m : \underline{\underline{\hat{d}}}^m + n^r \hat{d}^r + \underline{I} \cdot \Delta \hat{\underline{U}} \right) d\Omega \end{cases} \quad (3.14)$$

Il en résulte que la définition (3.7) du domaine K des chargements potentiellement supportables peut être réécrite sous la forme :

$$\underline{Q} \in K \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \left\{ \underline{\underline{\sigma}}^m, n^r, \underline{I} \right\} \text{ tel que } \forall \left\{ \hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r \right\} \mathcal{C.A.} \text{ avec } \hat{\underline{q}} : \underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}} = P_d(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) \\ \quad \quad \quad : \text{Equilibre} \\ \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) \in G^m(\underline{x}), \quad n^r(\underline{x}) \in G^r(\underline{x}) \text{ et } \underline{I}(\underline{x}) \in G^I(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \\ \quad \quad \quad : \text{Résistance} \end{cases} \quad (3.15)$$

On introduit alors la *puissance résistante maximale* d'un milieu biphasique dans le champ de vitesse $\left\{ \hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r \right\}$, définie comme suit :

$$P_{rm}(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) = \underbrace{\int_{\Omega} \pi^m(\hat{\underline{d}}^m) d\Omega}_{P_{rm}^m} + \underbrace{\int_{\Omega} \pi^r(\hat{\underline{d}}^r) d\Omega}_{P_{rm}^r} + \underbrace{\int_{\Omega} \pi^I(\Delta\hat{\underline{U}}) d\Omega}_{P_{rm}^I} \quad (3.16)$$

où $\pi^m(\cdot)$, $\pi^r(\cdot)$ et $\pi^I(\cdot)$ désignent les *fonctions d'appui* des domaines de résistance de la phase matrice G^m , de la phase renforcement G^r et de l'interaction G^I définies, par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi^m(\hat{\underline{d}}^m) = \sup \left\{ \underline{\sigma}^m : \hat{\underline{d}}^m; \quad \underline{\sigma}^m \in G^m \right\} \\ \pi^r(\hat{\underline{d}}^r) = \sup \left\{ n^r \hat{\underline{d}}^r; \quad n^r \in G^r \right\} \\ \pi^I(\Delta\hat{\underline{U}}) = \sup \left\{ \underline{I} \cdot \Delta\hat{\underline{U}}; \quad \underline{I} \in G^I \right\} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Il découle immédiatement de (3.15), (3.16) et (3.17) que :

$$\underline{Q} \in K \Rightarrow \forall \left\{ \hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r \right\} \quad \underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}}(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) \leq P_{rm}(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) \quad (3.18)$$

ou de manière équivalente :

$$\exists \left\{ \hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r \right\} \text{ tel que } \underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}}(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) > P_{rm}(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) \Rightarrow \underline{Q} \notin K \quad (3.19)$$

Cette dernière inégalité donne lieu à l'interprétation géométrique suivante : le domaine K est inclus dans le demi-espace contenant l'origine et délimité par le plan d'équation (figure (3.5)) :

$$\underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}}(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) = P_{rm}(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) \quad (3.20)$$

L'approche cinématique peut être facilement généralisée au cas où le champ de vitesse $\hat{\underline{U}}^m$ (resp. $\hat{\underline{U}}^r$) comporte des *discontinuités* à la traversée de surfaces de la phase matrice (resp. renforcement). L'expression de la puissance virtuelle de déformation donnée en (3.12) doit être modifiée en :

$$P_d(\underline{\hat{U}}^m, \underline{\hat{U}}^r) = \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^m : \underline{\hat{d}}^m + n^r \hat{d}^r + \underline{I} \cdot \Delta \underline{\hat{U}}) d\Omega + \int_{\Sigma^m} (\underline{\sigma}^m \cdot \underline{\nu}) \cdot [\underline{\hat{U}}^m] d\Sigma + \int_{\Sigma^r} ((n^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) \cdot \underline{\nu}) \cdot [\underline{\hat{U}}^r] d\Sigma \quad (3.21)$$

où $[\underline{\hat{U}}^m]$ (resp. $[\underline{\hat{U}}^r]$) désigne la discontinuité de vitesse à la traversée de la surface Σ^m (resp. Σ^r) de la phase matrice (resp. de la phase renforcement) selon la normale unitaire $\underline{\nu}$ (figure (3.6)).

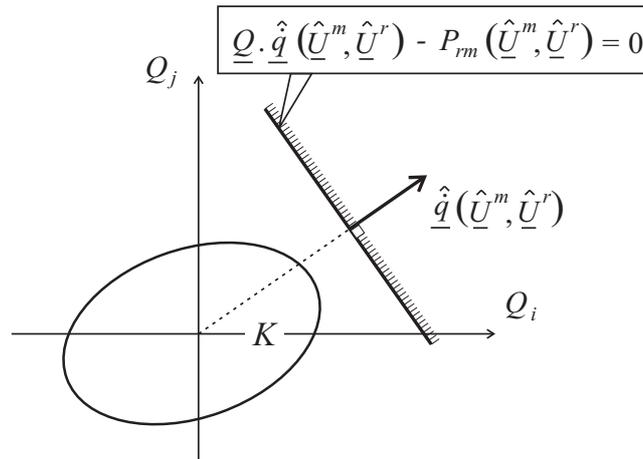


FIG. 3.5. Interprétation géométrique de (3.19) dans l'espace des paramètres de charge

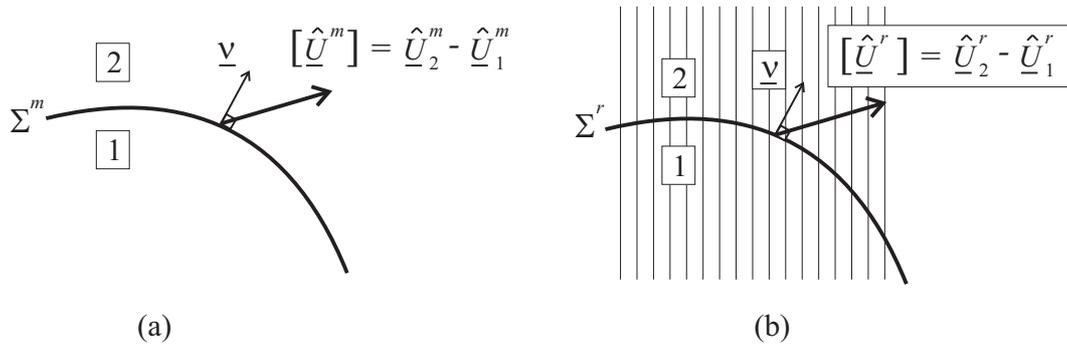


FIG. 3.6. Saut de vitesse à la traversée d'une surface discontinuité du champ de vitesse de la phase matrice (a) et de la phase renforcement (b)

L'expression de la puissance résistante maximale devient alors dans ce cas général :

$$P_{rm}(\underline{\hat{U}}^m, \underline{\hat{U}}^r) = \int_{\Omega} \pi^m(\underline{\hat{d}}^m) d\Omega + \int_{\Omega} \pi^r(\hat{d}^r) d\Omega + \int_{\Omega} \pi^I(\Delta \underline{\hat{U}}) d\Omega + \int_{\Sigma^m} \pi^m(\underline{\nu}; [\underline{\hat{U}}^m]) d\Sigma + \int_{\Sigma^r} \pi^r(\underline{\nu}; [\underline{\hat{U}}^r]) d\Sigma \quad (3.22)$$

les fonctions d'appui correspondantes étant :

$$\begin{cases} \pi^m (\underline{\nu}; [\hat{U}^m]) = \sup \left\{ (\underline{\sigma}^m, \underline{\nu}) \cdot [\hat{U}^m]; \quad \underline{\sigma}^m \in G^m \right\} \\ \pi^r (\underline{\nu}; [\hat{U}^r]) = \sup \left\{ n^r [\hat{U}_x^r] (\underline{e}_x, \underline{\nu}); \quad n^r \in G^r \right\} \end{cases} \quad (3.23)$$

3.4 Un exemple de mise en œuvre : la résistance en compression d'une éprouvette renforcée

On se propose ici de mettre en œuvre les approches du calcul à la rupture pour un milieu biphasique, sur l'exemple illustratif de la compression en déformations planes d'une éprouvette renforcée. On travaille dans le cadre d'une prise en compte d'une condition d'adhérence entre le sol et des armatures.

3.4.1 Position du problème

Il s'agit de l'essai de compression simple en déformations planes dans le plan (Oxy) d'une éprouvette parallélépipédique de hauteur H et de largeur $2L$, renforcée par des inclusions disposées parallèlement à Ox (figure (3.7)). Cet exemple a été traité par Sudret (1999) [69] dans le cadre de l'élasticité linéaire.

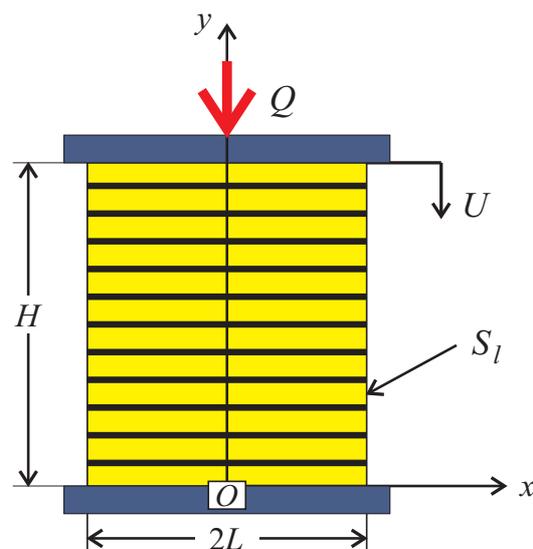


FIG. 3.7. Compression en déformations planes d'une éprouvette renforcée

Les faces latérales S_l situées dans les plans ($x = \pm L$), sont libres de contraintes pour chacune des phases séparément. La section inférieure de l'éprouvette est en contact lisse avec le plan fixe horizontal ($y = 0$), tandis que la section supérieure ($y = H$) est en contact sans frottement avec un plateau rigide auquel on impose un déplacement vertical $-U\mathbf{e}_y$. Les forces de volumes (pesanteur) sont négligées.

Le matériau constitutif de l'éprouvette est un composite renforcé dans la direction \mathbf{e}_x (compression *transversale*). Il est modélisé comme un milieu biphasique, dont les caractéristiques élasto-plastiques sont les suivantes :

- **La phase matrice** est élastique parfaitement plastique. L'élasticité isotrope est représentée par le module d'Young E^m et le coefficient de Poisson ν^m . Le critère de (parfaite) plasticité est caractérisé par l'angle de frottement, l'angle de dilatance et la cohésion, notés respectivement, ϕ^m , ψ^m et C . Le critère de plasticité retenu est celui de Mohr-Coulomb. Notant $\sigma_I^m, \sigma_{II}^m, \sigma_{III}^m$ ($\sigma_I^m \geq \sigma_{II}^m \geq \sigma_{III}^m$) les contraintes principales, ce critère s'écrit :

$$f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) = \sigma_I^m (1 + \sin \phi^m) - \sigma_{III}^m (1 - \sin \phi^m) - 2C \cos \phi^m \leq 0 \quad (3.24)$$

- **La phase renforcement** est également élastique parfaitement plastique. Sa rigidité est notée α^r , sa limite d'élasticité en traction-compression n_0^r . On rappelle (cf. §2.3.2) que ces quantités sont obtenues en multipliant la fraction volumique des inclusions respectivement par le module d'Young et la limite d'élasticité en traction uniaxiale du matériau de renforcement. Le critère de plasticité s'écrit alors simplement :

$$f^r(n^r) = |n^r| - n_0^r \leq 0 \quad (3.25)$$

- **La loi d'interaction** : Dans le cas général, la *loi élasto-plastique d'interaction entre phases* s'écrit (cf. §2.3.2) :

$$\underline{I} = \underline{\underline{c}}^I \cdot (\Delta \underline{\underline{\xi}} - \Delta \underline{\underline{\xi}}_{\underline{\underline{s}}_p}) \quad (3.26)$$

avec

$$\dot{\Delta \underline{\underline{\xi}}}_{\underline{\underline{s}}_p} = \dot{\lambda}^I \frac{\partial f^I}{\partial \underline{I}} \quad \text{avec} \quad \dot{\lambda}^I \begin{cases} \geq 0 & \text{si } f^I(\underline{I}) = \dot{f}^I(\underline{I}) = 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.27)$$

Cette loi peut être écrite sous forme "unidimensionnelle". En effet, si l'on tient

compte du fait que les forces de volume extérieures sont négligées, l'équation d'équilibre (2.5) de la phase renforcement, devient :

$$\operatorname{div} (n^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) + \underbrace{\rho^r \underline{F}^r}_{=0} - \underline{I} = \underline{0} \quad (3.28)$$

soit

$$\underline{I} = I \underline{e}_x \quad \text{avec} \quad I = \frac{\partial n^r}{\partial x} \quad (3.29)$$

de sorte que la densité volumique des efforts d'interaction est orientée parallèlement à la direction des renforcements.

En supposant alors que le tenseur de rigidité d'interaction est de la forme :

$$\underline{\underline{c}}^I = c_{xx}^I \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + c_{yy}^I \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + c_{zz}^I \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (3.30)$$

la loi d'interaction (3.26) donne, compte tenu de (3.29) :

$$I = c_{xx}^I (\Delta \xi_x - \Delta \xi_{p,x}), \quad \Delta \xi_y - \Delta \xi_{p,y} = \Delta \xi_z - \Delta \xi_{p,z} = 0 \quad (3.31)$$

En supposant de même que la fonction de charge (critère) d'interaction $f^I(I)$ soit telle que la surface correspondante dans l'espace des forces d'interaction \underline{I} soit de révolution autour de l'axe I_x , la règle d'écoulement plastique (3.27) implique que $\dot{\Delta} \xi_p$ est parallèle à \underline{e}_x :

$$\dot{\Delta} \xi_p = \dot{\Delta} \xi_{p,x} \underline{e}_x \quad (3.32)$$

La loi d'interaction ainsi simplifiée s'écrit finalement (Bennis et de Buhan (2003) [7]) :

$$I = c^I (\Delta - \Delta_p) \quad (3.33)$$

avec

$$\Delta \xi = \Delta \underline{e}_x, \quad \Delta \xi_p = \Delta_p \underline{e}_x \quad (3.34)$$

et

$$\dot{\Delta}_p \geq 0 \quad \text{si} \quad I = I_0, \dot{I} = 0, \quad \dot{\Delta}_p \leq 0 \quad \text{si} \quad I = -I_0, \dot{I} = 0 \quad (3.35)$$

où $[-I_0, I_0]$ est le domaine d'élasticité, de sorte que :

$$f^I(I) \leq 0 \Leftrightarrow I \in [-I_0, I_0] \quad (3.36)$$

Cette loi d'interaction simplifiée que nous adoptons désormais pour les inclusions "souples" est illustrée sur la figure (3.8) ci-dessous.

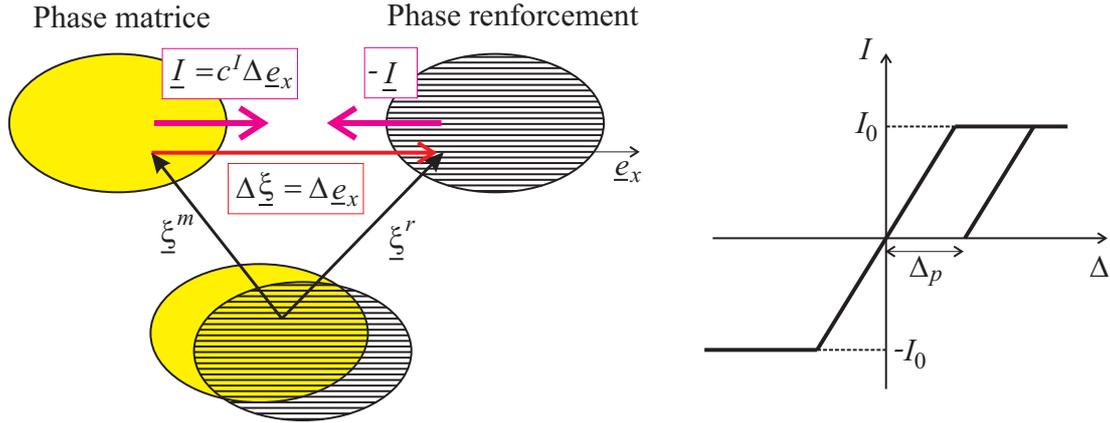


FIG. 3.8. Loi d'interaction élasto-plastique simplifiée

3.4.2 Approche statique du calcul à la rupture

Un champ d'efforts intérieurs $\{\underline{\sigma}^m; n^r; I\}$ est dit *statiquement admissible* avec le chargement Q , effort de compression de l'éprouvette, par unité de longueur selon Oz , s'il vérifie les conditions suivantes :

◇ Equations d'équilibre :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma}^m + I \underline{e}_x = \underline{0} & \text{pour la phase matrice} \\ \frac{\partial n^r}{\partial x} - I = 0 & \text{pour la phase renforcement} \end{cases} \quad (3.37)$$

◇ Conditions aux limites :

$$x = \pm L : \begin{cases} \underline{\sigma}^m \cdot \underline{e}_x = \underline{0} \\ n^r = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

$$y = 0, L : \sigma_{yx}^m = \sigma_{yz}^m = 0 \quad (3.39)$$

ainsi que :

$$Q = - \int_{-L}^L \sigma_{yy}^m dx \quad (3.40)$$

Le domaine $K = [Q^-, Q^+]$ des chargements potentiellement supportables est défini comme suit : $Q \in K \Leftrightarrow \exists \{\underline{\sigma}^m; n^r; I\} \mathcal{S.A.}$ avec Q , tel qu'il satisfait en tout point les conditions de résistance de la phase matrice (3.24), de la phase renforcement (3.25), ainsi que le critère d'interaction matrice/renforcement (3.36).

L'approche statique par l'intérieur est mise en œuvre en utilisant des champs d'efforts intérieurs de la forme :

$$n^r = f(x) \quad \text{avec} \quad f(x = \pm L) = 0 \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^m = -f(x) \\ \sigma_{yy}^m = \sigma_{zz}^m = -2C \frac{\cos \phi^m}{1 - \sin \phi^m} - f(x) \frac{1 + \sin \phi^m}{1 - \sin \phi^m} \\ \text{autres } \sigma_{ij}^m = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

$$I = \frac{dn^r}{dx} = f'(x) \quad (3.43)$$

Ces champs vérifient à l'évidence les équations d'équilibre (3.37) et les conditions aux limites (3.38) et (3.39), ainsi que le critère de résistance (3.24) de la phase matrice. Les conditions de résistance de la phase renforcement et de l'interaction s'écrivent :

$$x \in [-L, +L] \quad |f(x)| \leq n_0^r, \quad |f'(x)| \leq I_0 \quad (3.44)$$

L'effort de compression équilibré par un tel champ vaut :

$$\begin{aligned} Q &= - \int_{-L}^{+L} \sigma_{yy}^m dx = 4CL \frac{\cos \phi^m}{1 - \sin \phi^m} + \frac{1 + \sin \phi^m}{1 - \sin \phi^m} \int_{-L}^L f(x) dx \\ &= 4CL\sqrt{K_p} + K_p \int_{-L}^L f(x) dx \end{aligned} \quad (3.45)$$

où $K_p = \frac{1 + \sin \phi^m}{1 - \sin \phi^m}$ est le *coefficient de butée* du sol, représenté par la phase matrice.

On cherche alors à rendre maximum la valeur de Q en optimisant la fonction $f(x)$ compte tenu des conditions (3.44). Deux cas sont alors considérés.

◇ **Premier cas** : $n_0^r \geq I_0 L$

On choisit la fonction $f(x)$ suivante (figure (3.9)) :

$$n^r = f(x) = \begin{cases} I_0(L - x) & x \in [0, L] \\ I_0(L + x) & x \in [-L, 0] \end{cases} \quad (3.46)$$

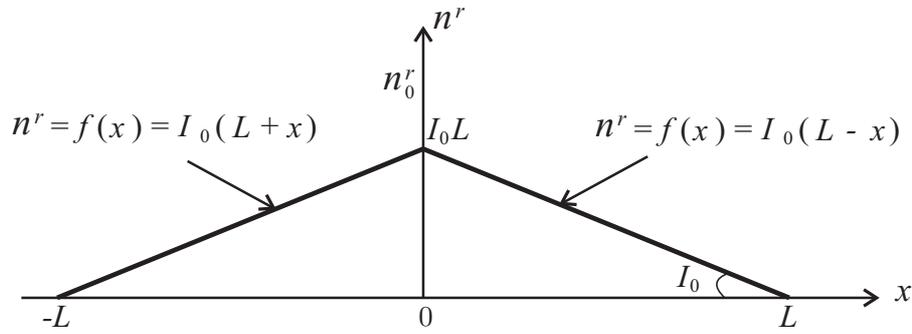


FIG. 3.9. Contrainte dans la phase renforcement ($n_0^r \geq I_0 L$)

Cette fonction vérifie bien les conditions (3.44) :

$$x \in [-L, +L] \quad |f(x)| \leq I_0 L \leq n_0^r, \quad |f'(x)| = I_0 \leq I_0 \quad (3.47)$$

et l'effort de compression équilibré vaut :

$$Q = - \int_{-L}^L \sigma_{yy}^m dx = 4CL\sqrt{K_p} + I_0 L^2 K_p \quad (3.48)$$

D'où le *minorant* de la résistance en compression Q^+ :

$$Q^+ \geq 4CL\sqrt{K_p} + I_0 L^2 K_p \quad (3.49)$$

◇ **Second cas** : $n_0^r < I_0L$

La fonction $f(x)$ retenue est représentée sur la figure (3.10) :

$$f(x) = \begin{cases} \text{Min} \{n_0^r, I_0(L-x)\} & x \in [0, L] \\ \text{Min} \{n_0^r, I_0(L+x)\} & x \in [-L, 0] \end{cases} \quad (3.50)$$

d'où

$$|f'(x)| = \begin{cases} 0 & |x| \leq L \left(1 - \frac{n_0^r}{I_0L}\right) \\ I_0 & |x| \geq L \left(1 - \frac{n_0^r}{I_0L}\right) \end{cases} \quad (3.51)$$

de sorte que les conditions (3.44) sont bien vérifiées.

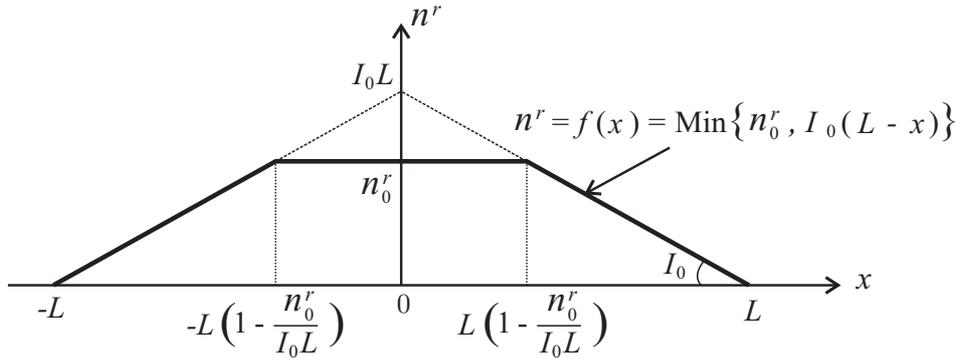


FIG. 3.10. Contrainte dans la phase renforcement ($n_0^r < I_0L$)

On trouve dans ce cas le *minorant* suivant de Q^+ :

$$Q^+ \geq 4CL\sqrt{K_p} + 2n_0^rL \left(1 - \frac{n_0^r}{2I_0L}\right) K_p \quad (3.52)$$

On a la *minoration* suivante de Q^+ :

$$\begin{cases} Q^+ \geq 4CL\sqrt{K_p} + I_0L^2K_p & \text{si } n_0^r \geq I_0L \\ Q^+ \geq 4CL\sqrt{K_p} + 2n_0^rL \left(1 - \frac{n_0^r}{2I_0L}\right) K_p & \text{si } n_0^r < I_0L \end{cases} \quad (3.53)$$

3.4.3 Approche cinématique du calcul à la rupture

Cette approche utilise les champs de vitesse virtuels suivants :

- Pour la *phase matrice*

$$\underline{\hat{U}}^m = -\frac{U}{H}y\mathbf{e}_y + \alpha\frac{U}{H}x\mathbf{e}_x; \quad \alpha \geq 0 \quad (3.54)$$

le taux de déformation virtuel est alors donné par :

$$\underline{\hat{d}}^m = -\frac{U}{H}\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \alpha\frac{U}{H}\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x \quad (3.55)$$

La condition de pertinence, qui permet de calculer la fonction $\pi^m(\cdot)$ définie en (3.17) où le critère est défini par (3.24), s'écrit alors :

$$\text{tr}\underline{\hat{d}}^m \geq \left(\left| \hat{d}_I^m \right| + \left| \hat{d}_{II}^m \right| + \left| \hat{d}_{III}^m \right| \right) \sin \phi^m \Leftrightarrow \alpha \geq K_p \quad (3.56)$$

où \hat{d}_I^m , \hat{d}_{II}^m et \hat{d}_{III}^m désignent les 3 valeurs principales du tenseur taux de déformation $\underline{\hat{d}}^m$.

- Pour la *phase renforcement*, le champ de vitesse est défini comme suit :

$$\underline{\hat{U}}^r = \begin{cases} -\frac{U}{H}y\mathbf{e}_y & \text{si } n_0^r \geq I_0L \\ \begin{cases} -\frac{U}{H}y\mathbf{e}_y + \alpha\frac{U}{H}x\mathbf{e}_x & |x| \leq L \left(1 - \frac{n_0^r}{I_0L}\right) \\ -\frac{U}{H}y\mathbf{e}_y + \alpha\frac{U}{H}L \left(1 - \frac{n_0^r}{I_0L}\right) \mathbf{e}_x & |x| \geq L \left(1 - \frac{n_0^r}{I_0L}\right) \end{cases} & \text{si } n_0^r < I_0L \end{cases} \quad (3.57)$$

La *puissance des efforts extérieurs* dans ce champ de vitesse virtuels est donnée par (3.11), soit :

$$P_e(\underline{\hat{U}}^m, \underline{\hat{U}}^r) = QU \quad (3.58)$$

tandis que la puissance résistante maximale s'écrit (voir (3.16)) :

$$P_{rm}(\hat{U}^m, \hat{U}^r) = P_{rm}^m(\hat{U}^m) + P_{rm}^r(\hat{U}^r) + P_{rm}^I(\Delta\hat{U}) \quad (3.59)$$

où

◇ Contribution de la phase matrice :

$$P_{rm}^m(\hat{U}^m) = \int_{\Omega} \pi^m(\underline{\hat{d}}^m) d\Omega \quad (3.60)$$

avec pour $\alpha \geq K_p$:

$$\pi^m(\underline{\hat{d}}^m) = \frac{C}{\tan \phi^m} \text{tr} \underline{\hat{d}}^m = \frac{C}{\tan \phi^m} (\alpha - 1) \frac{U}{H} \quad (3.61)$$

d'où

$$P_{rm}^m(\hat{U}^m) = 2CL \frac{(\alpha - 1)}{\tan \phi^m} U \quad (3.62)$$

◇ Contribution de la phase renforcement :

$$\begin{aligned} P_{rm}^r(\hat{U}^r) &= \int_{\Omega} \pi^r(\hat{d}^r) d\Omega = \int_{\Omega} n_0^r \left| \frac{d\hat{U}_x^r}{dx} \right| d\Omega \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n_0^r \geq I_0 L \\ 2n_0^r L \left(1 - \frac{n_0^r}{I_0 L}\right) \alpha U & \text{si } n_0^r < I_0 L \end{cases} \end{aligned} \quad (3.63)$$

◇ Contribution de l'interaction :

$$P_{rm}^I(\Delta\hat{U}) = \int_{\Omega} \pi^I(\Delta\hat{U}) d\Omega \quad (3.64)$$

avec, compte tenu du critère simplifié $|I| \leq I_0$:

$$\pi^I(\Delta\hat{U}) = I_0 \left| \Delta\hat{U}_x \right| \quad (3.65)$$

soit après calculs :

$$P_{rm}^I(\Delta\hat{U}) = \begin{cases} I_0L^2\alpha U & \text{si } n_0^r \geq I_0L \\ \frac{(n_0^r)^2}{I_0}\alpha U & \text{si } n_0^r < I_0L \end{cases} \quad (3.66)$$

On peut donc écrire :

$$Q \leq Q^+ \Rightarrow P_e(\hat{U}^m, \hat{U}^r) \leq P_{rm}(\hat{U}^m, \hat{U}^r) \quad (3.67)$$

Cela nous donne, en combinant les équations ci-dessus, et la condition de pertinence de la phase matrice (3.56), la *majoration* suivante de Q^+ :

$$\begin{cases} Q^+ \leq 4CL\sqrt{K_p} + I_0L^2K_p & \text{si } n_0^r \geq I_0L \\ Q^+ \leq 4CL\sqrt{K_p} + 2n_0^rL \left(1 - \frac{n_0^r}{2I_0L}\right) K_p & \text{si } n_0^r < I_0L \end{cases} \quad (3.68)$$

D'où par comparaison avec (3.53), la valeur exacte de Q^+ :

$$Q^+ = 4CL\sqrt{K_p} + \begin{cases} I_0L^2K_p & \text{si } n_0^r \geq I_0L \\ 2n_0^rL \left(1 - \frac{n_0^r}{2I_0L}\right) K_p & \text{si } n_0^r < I_0L \end{cases} \quad (3.69)$$

3.5 Identification du paramètre de résistance d'interaction (I_0) et validation du modèle biphasique avec interaction en calcul à la rupture

Si l'identification des paramètres élasto-plastiques relatifs au comportement de la phase matrice (simplement assimilés à ceux du sol) et à celui de la phase renforcement, ne pose pas de problème particulier, il n'en est pas de même en ce qui concerne les paramètres qui gouvernent la loi d'interaction, c'est-à-dire en pratique la raideur élastique d'interaction c^I et surtout, puisque nous nous intéressons ici avant tout au calcul à la rupture des ouvrages, le paramètre I_0 qui représente la *résistance d'interaction entre phases*. La présente section

propose, à partir de la résolution précédente du problème de la résistance en compression d'une éprouvette renforcée et par comparaison avec une résolution numérique directe de ce même problème, une procédure d'identification du paramètre I_0 . La démarche est analogue à celle suivie par Sudret (1999) [69] ou tout récemment par de Buhan et Hassen (2008) [21] dans le cas d'un comportement élastique linéaire, en vue de l'identification du paramètre c^I .

3.5.1 Modélisation directe par éléments finis

L'essai de compression en déformations planes traité précédemment dans ce chapitre à l'aide du modèle biphasique, est ici repris en adoptant une "modélisation mixte" du sol renforcé, dans laquelle les renforcements sont perçus comme des éléments unidirectionnels géométriquement distincts du sol. Plus précisément, on considèrera que l'éprouvette, ayant la forme d'un parallélépipède de hauteur H et de longueur $2L$ est renforcée par un certain nombre de lits de renforcements disposés régulièrement, et on désigne par e l'espacement entre deux lits de renforcements successifs.

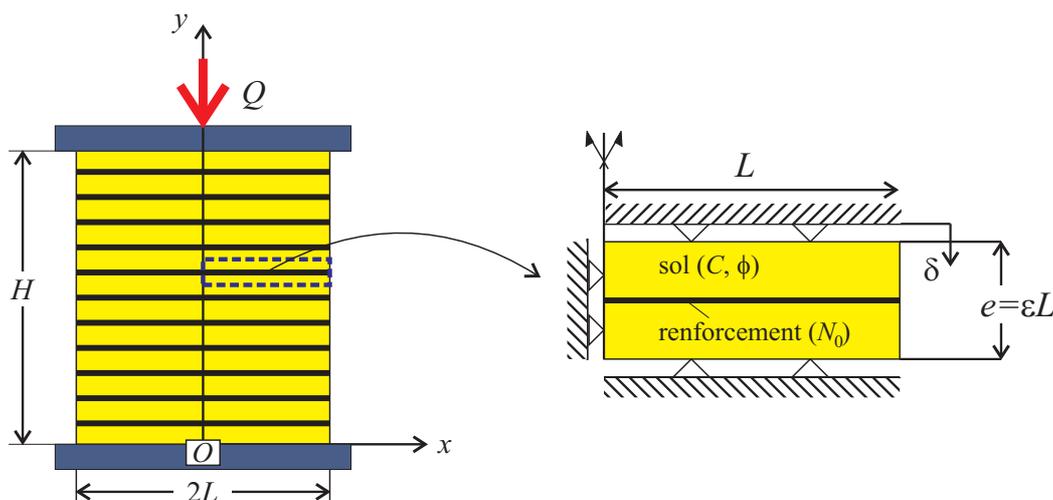


FIG. 3.11. Modélisation "mixte" de l'éprouvette renforcée

Le sol est un milieu continu dont la résistance est caractérisée par sa cohésion C et son angle de frottement ϕ , tandis que chaque renforcement est modélisé comme un élément linéaire dont la résistance en traction, par unité de longueur selon Oz , est égale à N_0 .

Compte tenu de la périodicité et des symétries du sol renforcé, il est facile de voir que la résolution de ce problème se ramène à celle du problème auxiliaire défini sur la partie droite de la figure (3.11), relatif à une "tranche" de sol renforcé de largeur L et d'épaisseur

e , égale à l'espacement entre deux renforcements. On désigne alors par $\varepsilon = e/L$ le "facteur d'échelle" que l'on fera varier entre les valeurs 0,4 et 0,05, en *gardant constante* la valeur $n_0^r = N_0/e = N_0/(\varepsilon L)$ de la résistance en traction de la phase renforcement associée. On désigne par $Q^+(\varepsilon)$ la résistance en compression de l'éprouvette en fonction de ε .

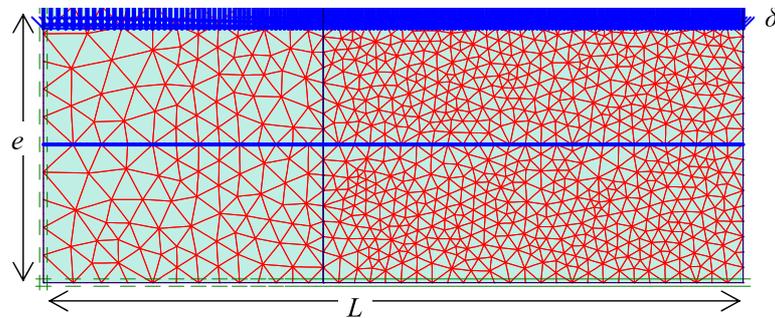


FIG. 3.12. Maillage utilisé pour $L=2m$ et $e=0,8m$

L'évaluation de $Q^+(\varepsilon)$ est effectuée par un calcul éléments finis en élasto-plasticité fondé sur l'utilisation du code PLAXIS 7.2. La figure (3.12) représente par exemple le maillage utilisé pour $L=2m$ et $e=0,8m$ (d'où $\varepsilon=0,4$).

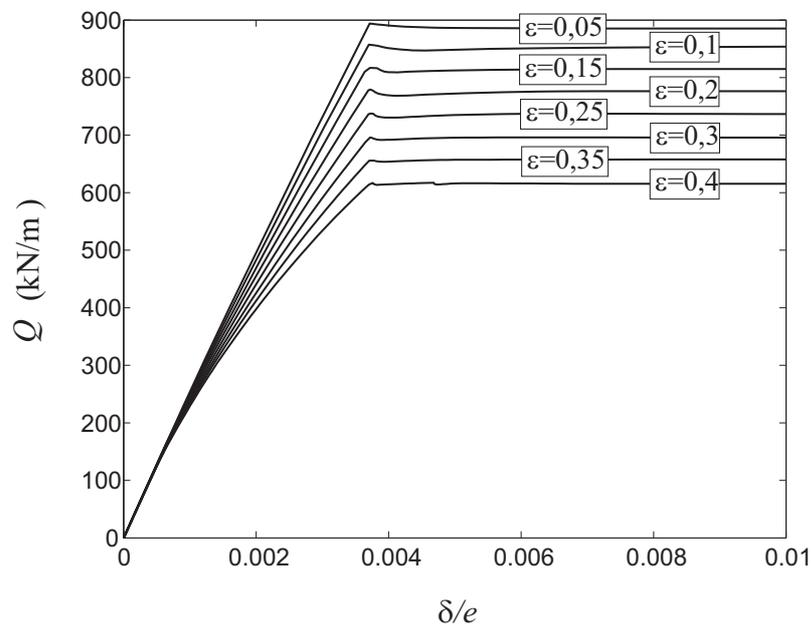


FIG. 3.13. Courbes efforts-déformations du calcul direct par éléments finis de l'éprouvette renforcée

Le calcul par éléments finis donne différentes courbes efforts-déformations pour différentes valeurs de ε , ces résultats sont présentés sur la figure (3.13), où l'on peut extraire les

valeurs de la résistance en compression de l'éprouvette renforcée $Q^+(\varepsilon)$ pour les comparer à celles de l'approche biphasique (Equation (3.69)).

3.5.2 Identification de I_0

On rappelle l'expression de la résistance en compression de l'éprouvette renforcée donnée dans la section précédente par l'approche biphasique :

$$Q^+ = 4CL\sqrt{K_p} + \begin{cases} I_0L^2K_p & \text{si } n_0^r \geq I_0L \\ 2n_0^rL \left(1 - \frac{n_0^r}{2I_0L}\right) K_p & \text{si } n_0^r < I_0L \end{cases} \quad (3.70)$$

les paramètres de la résistance du système biphasique sont déterminés comme suit :

$$C = 10\text{kPa}, \quad \phi^m = \phi = 20^\circ \Rightarrow K_p = 2,04 \quad (3.71)$$

pour la phase matrice et,

$$n_0^r = 100\text{kPa} \quad (3.72)$$

pour la phase renforcement, qui est maintenue *constante* dans tous les calculs.

Il nous reste donc à identifier le paramètre de résistance d'interaction I_0 . Cette identification est réalisée à partir d'un calage de la solution analytique donnée par (3.70) sur les résultats des simulations numériques du problème (présentés sur la figure (3.13)).

Nous allons tout d'abord montrer que la valeur du paramètre de résistance d'interaction I_0 est une fonction décroissante du facteur d'échelle ε , et même plus précisément qu'il varie en raison inverse de ce dernier.

On considère pour ce faire le problème de calcul à la rupture relatif à la simulation d'un *essai d'arrachement* sur un volume élémentaire représentatif de sol renforcé, de taille e comprenant un renforcement cylindrique de rayon R (figure (3.14)(a)). On désigne par F_0^1 la résistance à l'arrachement de l'inclusion, par unité de longueur de cette dernière. Cette résistance peut être calculée comme suit :

$$F_0^1 = \tau_0(2\pi R) \quad (3.73)$$

où τ_0 représente la *contrainte de cisaillement limite* à l'interface sol/inclusion. La valeur correspondante du paramètre de résistance d'interaction s'obtient en divisant cette force par la section du volume représentatif, soit :

$$I_0^1 = \frac{\tau_0(2\pi R)}{e^2} \quad (3.74)$$

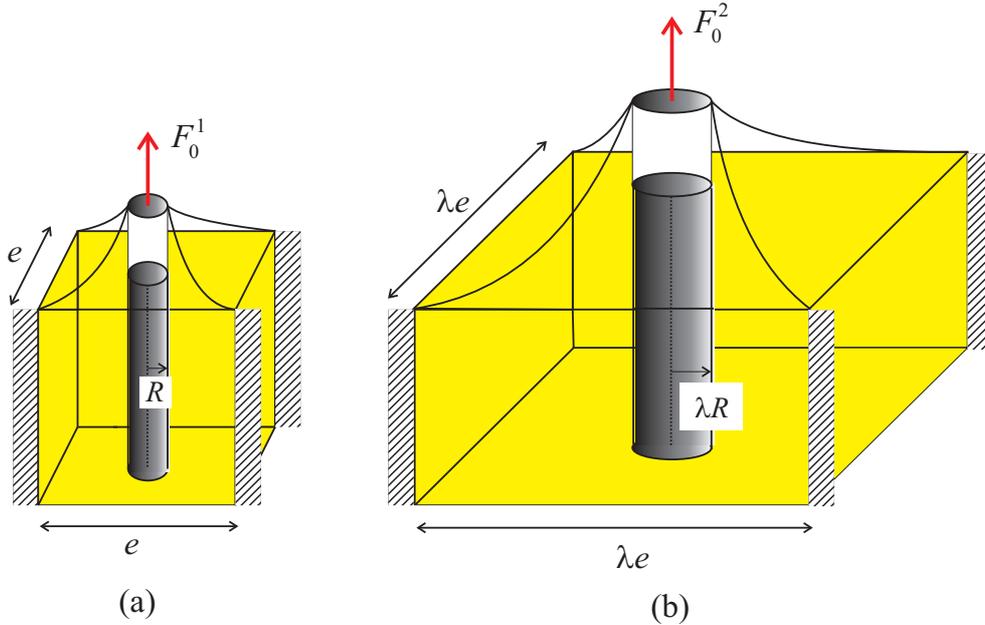


FIG. 3.14. Problème de l'arrachement sur deux volumes représentatifs homothétiques

Il est alors facile de voir que, la valeur de ce paramètre de résistance d'interaction relatif au volume représentatif déduit du volume initial par une *homothétie* de rapport λ (figure (3.14)(b)) s'obtient par la relation :

$$I_0^2 = \frac{\tau_0(2\pi\lambda R)}{\lambda^2 e^2} = \frac{I_0^1}{\lambda} \quad (3.75)$$

Cette relation peut s'interpréter comme un "effet d'échelle" : à caractéristiques de résistance des phases matrice et renforcement constantes, la résistance d'interaction I_0 est d'autant plus élevée que la taille caractéristique du volume représentatif est faible. On retrouve en particulier la condition d'*adhérence parfaite* (correspondant à $I_0 \rightarrow \infty$) lorsque cette taille caractéristique tend vers zéro. Cela signifie plus précisément que I_0 est nécessairement de la forme :

$$I_0 = \frac{A}{\varepsilon} \quad (3.76)$$

où il nous reste donc à identifier la constante A . Ceci est réalisé en approchant en mieux les points obtenus à partir des simulations numériques par éléments finis et de l'équation (3.70) par une fonction de la forme (3.76). Plus précisément, les points numériques sont obtenus comme suit, pour chaque valeur du facteur d'échelle ε , on a une valeur de la résistance en compression de l'éprouvette $Q^+(\varepsilon)$ (à partir des résultats présentés sur la figure (3.13)), cette dernière est ensuite reportée dans l'équation (3.70) pour trouver une valeur de la résistance d'interaction $I_0(\varepsilon)$ correspondante. L'ensemble de ces points numériques de $I_0(\varepsilon)$ sont représenté sur la figure ci-dessous où la courbe d'équation (3.76) est ajoutée pour trouver la valeur de la constante A , de façon à rendre minimum l'écart moyen quadratique.

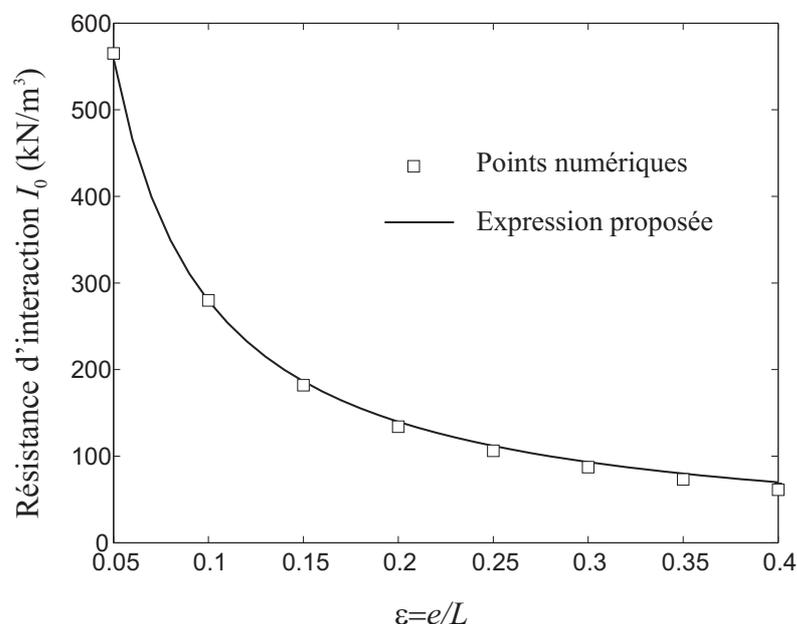


FIG. 3.15. Calage des courbes analytique (trait plein) et numérique (points en carré)

La constante A trouvée vaut :

$$A = 27,951 \text{ kN/m}^3 \quad (3.77)$$

d'où l'expression analytique de la résistance d'interaction $I_0(\varepsilon)$:

$$I_0 = \frac{27,951}{\varepsilon} \text{ kN/m}^3 \quad (3.78)$$

3.5.3 Validation du modèle biphasique en calcul à la rupture

A ce stade, d'un point de vue du calcul à la rupture, on a identifié tous les paramètres de résistance nécessaires des phases matrice et renforcement, ainsi que de l'interaction entre phases du problème de compression d'une éprouvette renforcée, présenté sur la figure (3.7).

Cette section consiste donc à valider le modèle biphasique avec interaction en calcul à la rupture. Plus précisément, on va comparer la résistance en compression de l'éprouvette renforcée, donnée par l'approche biphasique et celle issue du calcul numérique par éléments finis (PLAXIS).

La résistance en compression de l'éprouvette de l'approche biphasique est donnée par l'équation (3.70) avec les paramètres de résistance des phases matrice et renforcement donnés respectivement par les équations (3.71) et (3.72), ainsi que la résistance d'interaction donnée par l'équation (3.78).

Une telle comparaison est représentée sur la figure (3.16) où la résistance en compression de l'éprouvette Q^+ est une fonction décroissante du facteur d'échelle ε .

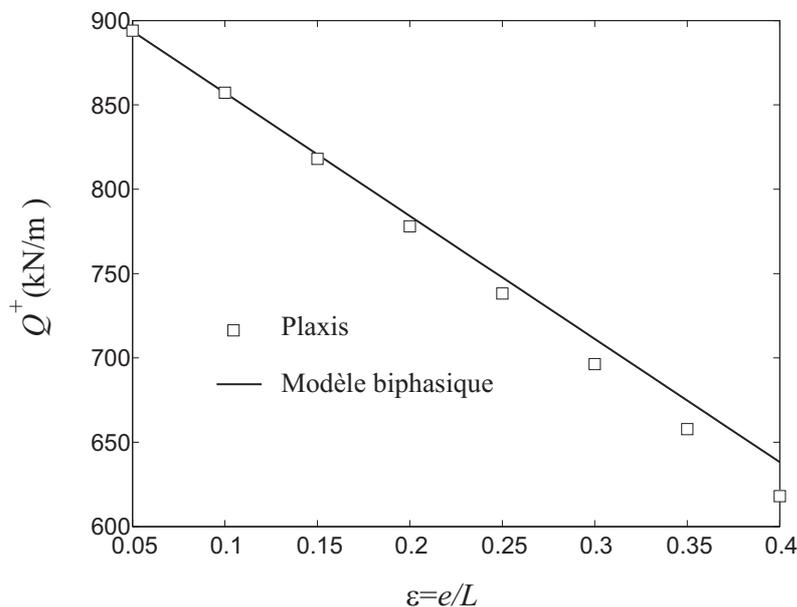


FIG. 3.16. Comparaison de la résistance en compression de l'éprouvette renforcée donnée par le modèle biphasique et celle obtenue par les calculs numériques PLAXIS

On observe un bon accord entre la courbe analytique du modèle biphasique et les points numériques PLAXIS (l'écart est moins de 3,5%). Cette bonne concordance est confirmée par l'observation de distributions de l'effort normal dans le renforcement pour

différentes valeurs du facteur d'échelle ε du calcul par éléments finis de PLAXIS (figure (3.17)). En effet, cette figure fait apparaître une augmentation de la zone de rupture par glissement entre le sol et les renforcements (ce qui signifie également une diminution de la zone de rupture par cassure de renforcement) quand le facteur d'échelle ε augmente (ce qui est équivalent à une diminution de la résistance d'interaction I_0), analogue à celle prévue par l'approche biphasique (voir figure (3.10)).

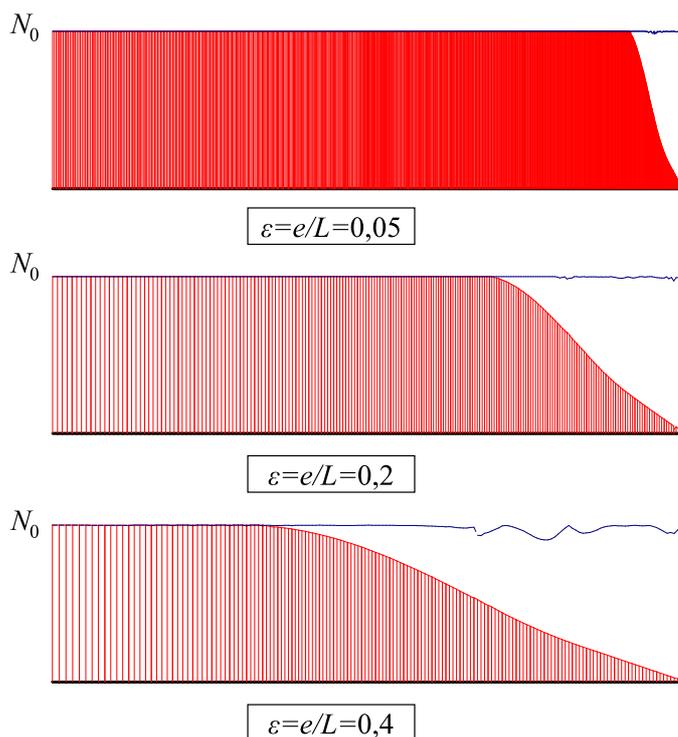


FIG. 3.17. Distributions de l'effort normal dans le renforcement pour différentes valeurs du facteur d'échelle ε

3.6 Conclusions

L'approche "calcul à la rupture" pour les structures biphasiques présentée dans ce chapitre constitue un outil d'estimation rapide du chargement de ruine d'une telle structure sans avoir recours aux outils numériques par éléments finis.

Par ailleurs une confrontation de la solution analytique du problème de compression en déformations planes d'une éprouvette renforcée par inclusions souples et des résultats de simulations numériques directes jusqu'à la rupture a permis de quantifier la résistance d'interaction I_0 .

L'approche cinématique du calcul à la rupture sera utilisée dans le chapitre suivant pour analyser la stabilité d'un mur de soutènement en terre armée. Les résultats obtenus seront comparés à ceux issus d'une approche numérique par éléments finis basée sur le code de calcul multiphasique décrit au chapitre 2.

Chapitre 4

Analyse de stabilité d'un mur de soutènement en terre armée

L'objectif du présent chapitre est d'appliquer le modèle biphasique au dimensionnement et à l'analyse de la stabilité d'ouvrages en "terre armée", l'accent étant mis sur le défaut d'adhérence entre le sol et les armatures de renforcement. Ce dernier est modélisé par l'introduction d'une loi constitutive appropriée régissant l'interaction entre la phase matrice (sol) et la phase renforcement. L'application ici traitée concerne l'analyse de la stabilité d'un mur de soutènement en terre armée, réalisée dans le cadre de la théorie du calcul à la rupture, et plus particulièrement de l'approche cinématique par l'extérieur, à l'aide de mécanismes de rupture par blocs en rotation. Les résultats ainsi obtenus sont ensuite comparés avec ceux issus de calculs numériques élasto-plastiques.

4.1 Position du problème

L'ouvrage considéré est un mur de soutènement vertical de hauteur H , et d'extension infinie dans la direction Oz , constitué d'un sol purement frottant (sable sec), d'angle de frottement ϕ et de poids volumique γ . Cet ouvrage est renforcé par des inclusions linéaires flexibles de longueur L orientées le long de l'axe horizontal Ox comme indiqué sur la figure (4.1)(a). Ces inclusions sont distribuées au sein d'un massif de sol en suivant un arrangement régulier comme présenté sur la figure (4.2), où h et ν sont respectivement l'espacement horizontal et vertical, tandis que t et w désignent l'épaisseur et la largeur de l'inclusion (bande) de renforcement (avec $t \ll w$). Il s'ensuit que la fraction volumique du matériau renforcé (matériau métallique ou polymère) est simplement calculée comme

suit :

$$\eta = \frac{tw}{h\nu} \quad (4.1)$$

cette quantité étant généralement très petite, c'est-à-dire en pratique inférieure à un pourcent.

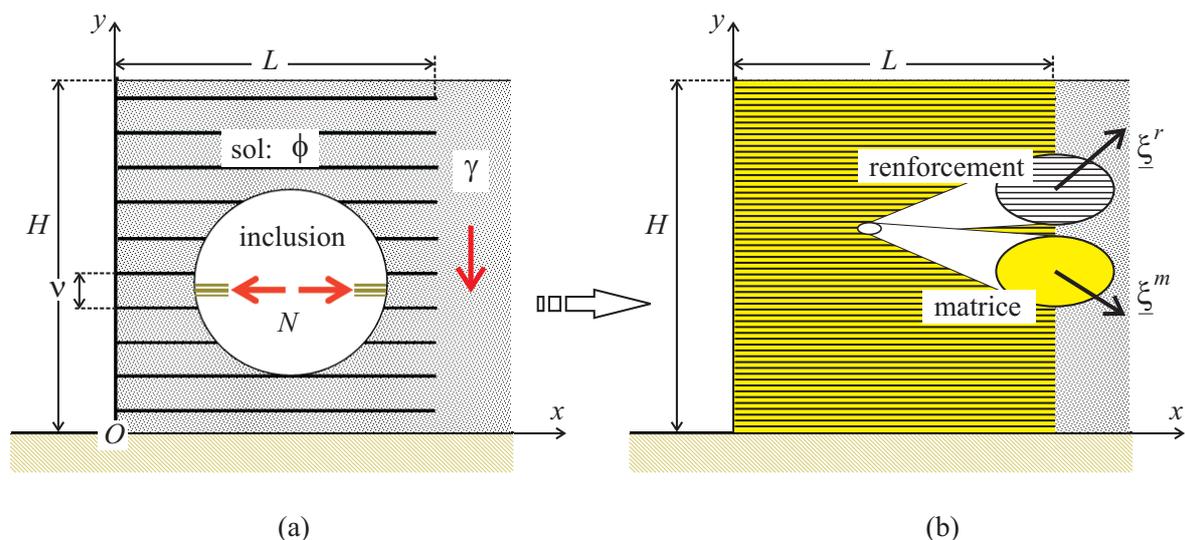


FIG. 4.1. Mur de soutènement en sol renforcé (a) et modèle biphasique correspondant (b)

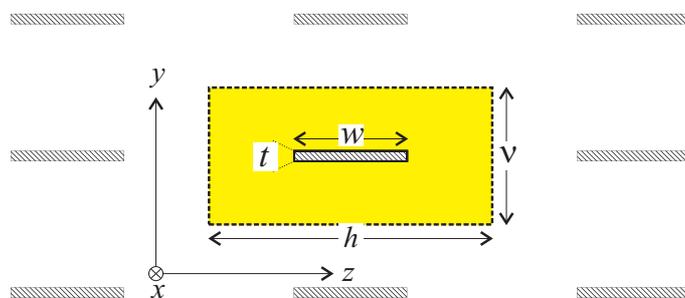


FIG. 4.2. Caractéristiques géométriques des inclusions de renforcement dans le plan transversal

Rappelons que la modélisation biphasique d'un tel ouvrage consiste à remplacer la zone renforcée de l'ouvrage, par la superposition de deux milieux continus (phase matrice et phase renforcement) décrivant respectivement, à l'échelle macroscopique, le sol et le réseau d'armatures. En tout point géométrique de l'ouvrage ainsi modélisé coexistent donc deux particules appartenant à ces deux phases, auxquelles sont attribuées des cinématiques différentes, permettant ainsi de modéliser les glissements relatifs entre le sol et les armatures dus au défaut d'adhérence, ce qui n'est pas possible dans le cadre d'une méthode

d'homogénéisation classique, où le composite du sol renforcé est modélisé comme un seul milieu continu.

◇ *Rappel des équations d'équilibre*

Les équations d'équilibre, établies pour chacune des phases, s'écrivent :

Phase matrice

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m - \gamma \underline{e}_y + I \underline{e}_x = \underline{0} \quad (4.2)$$

où, comme spécifié auparavant, γ est le poids volumique de la phase matrice (qui, en tenant compte de la très faible proportion volumique de renforcement η , est identique à celui du sol), alors que I est la densité volumique des forces d'interaction exercées par la phase renforcement sur la phase matrice.

Phase renforcement

$$\frac{\partial n^r}{\partial x} - I = 0 \quad (4.3)$$

où l'on tient compte du fait que, la fraction volumique du renforcement η étant très faible, la masse volumique et donc le poids volumique de la phase renforcement peut être négligée. La densité de force axiale n^r peut simplement être interprétée comme la force normale N dans une armature individuelle, divisée par l'aire de la section transversale du volume représentatif du sol renforcé (figure (4.2)), soit :

$$n^r = \frac{N}{h\nu} \quad (4.4)$$

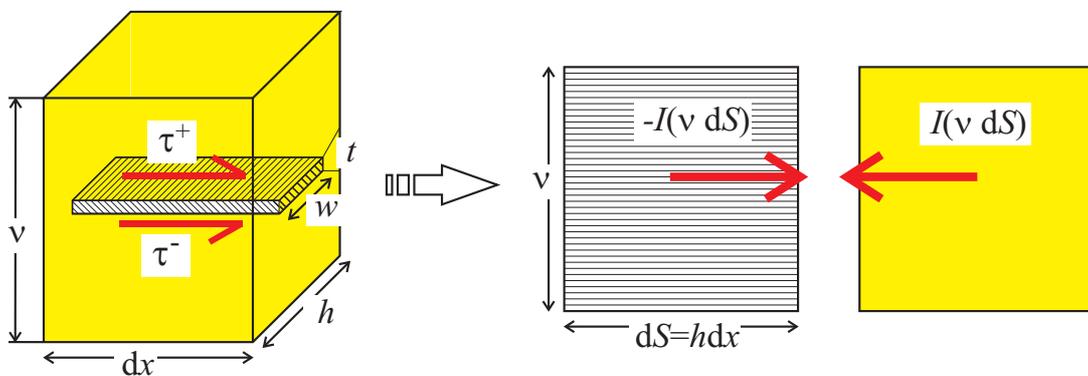


FIG. 4.3. *Interprétation de la densité volumique de l'effort d'interaction*

De même, se référant à la figure (4.3), $-I$ peut être identifié comme suit :

$$-I = \frac{(\tau^+ + \tau^-)w}{h\nu} \quad (4.5)$$

où τ^+ (resp. τ^-) désigne, à l'échelle *microscopique*, la contrainte tangentielle exercée par le sol sur la face supérieure (resp. inférieure) de l'armature de renforcement.

◇ *Les conditions aux limites*

Les conditions aux limites imposées sur le parement de l'ouvrage sont :

$$x = 0, y \in [0, H] : \quad \underline{U}^m = \underline{U}^r \quad \text{et} \quad \underline{T} = \underline{T}^m + \underline{T}^r = \underline{0} \quad (4.6)$$

signifiant ainsi que le sol et les armatures de renforcement sont rendus solidaires par la présence d'éléments de "peau", tandis que le vecteur contrainte totale y est nul. En outre les extrémités des renforcements sont supposées libres de contrainte, soit :

$$n^r(x = L) = 0 \quad (4.7)$$

Notre objectif est de déterminer, ou tout au moins d'évaluer avec la meilleure précision possible, la hauteur critique H^+ du mur de sol renforcé décrit sur la figure (4.1)(b), dans laquelle la zone renforcée est traitée comme un système biphasique. De façon générale, cette hauteur critique est définie comme la plus grande hauteur possible du mur en terre armée, pour laquelle il est possible de mettre en évidence une distribution de contraintes dans les deux phases $(\underline{\sigma}^m, n^r)$, ainsi qu'une densité de force d'interaction I , satisfaisant les conditions d'équilibre (4.2) et (4.3), ainsi que les conditions aux limites en contrainte, et les critères de résistance respectifs, que nous définissons ci-après :

- ◇ Le critère de résistance Mohr-Coulomb pour la **phase matrice**. Compte tenu de la faible proportion volumique du matériau de renforcement (inférieure à 1%) et donc du fait que celle du sol est très proche de l'unité, on convient d'adopter pour la phase matrice le même critère de résistance que celui du sol purement frottant (c'est-à-dire sans cohésion), caractérisé par son angle de frottement ϕ :

$$f^m(\underline{\sigma}^m) = \sigma_I^m(1 + \sin \phi) - \sigma_{III}^m(1 - \sin \phi) \leq 0 \quad (4.8)$$

où $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ sont les contraintes principales.

- ◇ Pour la **phase renforcement**, le critère de résistance, qui porte sur la contrainte n^r , s'écrit :

$$0 \leq n^r \leq n_0^r = \frac{N_0}{h\nu} \quad (4.9)$$

où N_0 désigne la résistance en traction d'une armature de renforcement individuelle, supposée ne pas résister en compression.

- ◇ En ce qui concerne l'**interaction entre phases**, le critère de résistance qui traduit, à l'échelle macroscopique, la rupture par glissement ou arrachement des armatures par rapport au sol, s'écrit :

$$|I| \leq I_0 \quad (4.10)$$

Nous avons vu au chapitre précédent, comment il était possible d'identifier le paramètre I_0 de résistance d'interaction à partir d'une procédure numérique. Une autre voie possible consiste à utiliser la formule simple suivante (déduite de l'interprétation de I donnée par l'équation (4.5)) :

$$I_0 = \frac{T_0}{h\nu} \quad (4.11)$$

où T_0 désigne la *résistance "à l'arrachement"* (par unité de longueur) d'une armature, qui peut être évaluée par des essais *in situ* ("pull-out test").

Il résulte alors d'une simple analyse dimensionnelle, que la hauteur critique du mur de soutènement en terre armée peut être écrite sous la forme :

$$H^+ = \frac{n_0^r}{\gamma} K^+ \left(\phi, \frac{L}{H}, \frac{I_0 L}{n_0^r} \right) \quad (4.12)$$

dans laquelle K^+ est un facteur sans dimension, fonction des trois paramètres sans dimension, que sont l'angle de frottement du sol de remblai, la longueur des armatures rapportée à la hauteur du mur et le rapport $I_0 L/n_0^r$ qui représente la résistance à l'arrachement des armatures vis-à-vis de leur résistance propre.

4.2 L'approche cinématique par l'extérieur

Rappelons que cette approche, décrite en §3.3, consiste à considérer des couples de champs de vitesse virtuels $\{\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r\}$, continûment différentiables par morceaux, à partir desquels sont calculées la puissance des efforts extérieurs d'une part, la puissance résistante maximale d'autre part. Dans le cas de l'ouvrage considéré ces quantités s'écrivent :

◇ *Puissance des efforts extérieurs*

En l'absence de surcharge, l'expression générale (3.11) s'écrit :

$$P_e(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) = \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m \cdot \hat{\underline{U}}^m + \rho^r \underline{F}^r \cdot \hat{\underline{U}}^r) d\Omega \quad (4.13)$$

avec $\rho^m \underline{F}^m = -\gamma \underline{e}_y$ et, en tenant compte du fait que la fraction volumique du renforcement est très faible, $\rho^m \underline{F}^m = \underline{0}$:

$$P_e(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) = -\gamma \int_{\Omega} \hat{U}_y^m d\Omega \quad (4.14)$$

◇ *Puissance résistante maximale*

Cette puissance se décompose en la somme de trois termes (voir (3.22)) :

$$P_{rm}(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) = P_{rm}^m(\hat{\underline{U}}^m) + P_{rm}^r(\hat{\underline{U}}^r) + P_{rm}^I(\Delta \hat{\underline{U}}) \quad (4.15)$$

avec

$$P_{rm}^m(\hat{\underline{U}}^m) = \int_{\Omega} \pi^m(\underline{\underline{\hat{d}}}^m) d\Omega + \int_{\Sigma^m} \pi^m(\underline{\nu}; [\hat{\underline{U}}^m]) d\Sigma \quad (4.16)$$

où, le sol constitutif et donc la phase matrice, étant de cohésion nulle :

$$\pi^m(\underline{\underline{\hat{d}}}^m) = 0 \quad \text{si} \quad \text{tr} \underline{\underline{\hat{d}}}^m \geq \left(|\hat{d}_{II}^m| + |\hat{d}_{III}^m| + |\hat{d}_{III}^m| \right) \sin \phi \quad (4.17)$$

ainsi que

$$\pi^m(\underline{\nu}; [\hat{\underline{U}}^m]) = 0 \quad \text{si} \quad [\hat{\underline{U}}^m] \cdot \underline{\nu} \geq \sin \phi \left| [\hat{\underline{U}}^m] \right| \quad (4.18)$$

Il en résulte que pour un champ de vitesse $\hat{\underline{U}}^m$ pertinent quelconque, la contribution de la phase matrice est nulle :

$$P_{rm}^m(\hat{\underline{U}}^m) = 0 \quad (4.19)$$

On a par ailleurs :

$$P_{rm}^r(\hat{\underline{U}}^r) = \int_{\Omega} \pi^r \left(\hat{d}^r = \frac{\partial \hat{U}_x^r}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Sigma^r} \pi^r \left(\underline{\nu}; [\hat{\underline{U}}^r] \right) d\Sigma \quad (4.20)$$

avec pour un critère de la forme : $0 \leq n^r \leq n_0^r$:

$$\begin{aligned} \pi^r \left(\frac{\partial \hat{U}_x^r}{\partial x} \right) &= \sup \left\{ n^r \frac{\partial \hat{U}_x^r}{\partial x}; \quad 0 \leq n^r \leq n_0^r \right\} \\ &= n_0^r \sup \left\{ 0, \frac{\partial \hat{U}_x^r}{\partial x} \right\} = n_0^r \langle \frac{\partial \hat{U}_x^r}{\partial x} \rangle \end{aligned} \quad (4.21)$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \pi^r \left(\underline{\nu}; [\hat{\underline{U}}^r] \right) &= \sup \left\{ n^r [\hat{U}_x^r] (\underline{e}_x \cdot \underline{\nu}); \quad 0 \leq n^r \leq n_0^r \right\} \\ &= n_0^r \langle \nu_x [\hat{U}_x^r] \rangle \end{aligned} \quad (4.22)$$

où $\langle . \rangle = \sup\{0, .\}$.

Enfin, la contribution des *forces d'interaction* à cette puissance résistante maximale a pour expression :

$$P_{rm}^I(\Delta \hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega} \pi^I(\Delta \hat{\underline{U}}) d\Omega \quad (4.23)$$

avec

$$\begin{aligned} \pi^I(\Delta \hat{\underline{U}}) &= \sup \left\{ (I \underline{e}_x) \cdot \Delta \hat{\underline{U}}; \quad |I| \leq I_0 \right\} \\ &= I_0 \left| \Delta \hat{U}_x \right| \end{aligned} \quad (4.24)$$

La mise en oeuvre de l'approche cinématique s'écrit sous la forme :

$$H \leq H^+ \Rightarrow \forall \left\{ \hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r \right\} \quad P_e(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) \leq P_{rm}(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) \quad (4.25)$$

conduisant à l'obtention d'un *majorant* de H^+ .

4.3 Mise en œuvre de l'approche cinématique par l'extérieur utilisant un mécanisme de rupture par bloc en rotation

Les champs de vitesse virtuels pris en considération dans l'analyse qui suit, constituent une généralisation au cas d'un mur en terre armée, regardé comme un système biphasique, du mécanisme de rupture par bloc en rotation classiquement utilisé pour l'analyse de la stabilité de ce type d'ouvrage.

Dans un tel mécanisme de rupture "généralisé", représenté sur la figure (4.4), un bloc OAB est animé d'un mouvement de corps rigide, de vitesse angulaire $\hat{\omega}$ autour d'un point Ω . La ligne de rupture OB étant un arc de spirale logarithmique d'angle égal à l'angle de frottement du sol ϕ et de foyer $\Omega(\xi, \eta)$, il s'ensuit que cette ligne est entièrement déterminée par deux paramètres angulaires θ_1 et θ_2 .

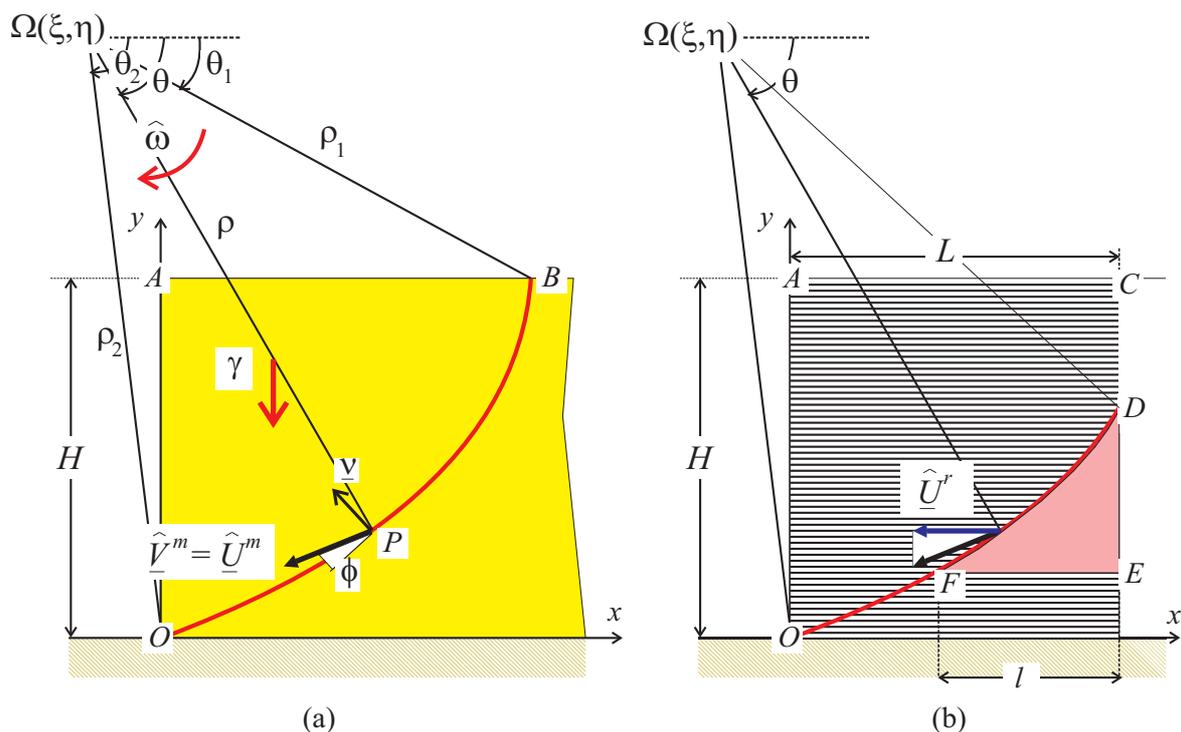


FIG. 4.4. Champs de vitesse virtuels de la phase matrice (a) et de la phase renforcement (b), dérivés d'un mécanisme de rupture par bloc en rotation

Les autres grandeurs géométriques qui apparaissent sur la figure (4.4), sont reliées aux paramètres θ_1 et θ_2 par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{H}{\rho_1} = \sin \theta_2 \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \phi) - \sin \theta_1 \\ \frac{AB}{\rho_1} = \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \phi) \\ \frac{\xi}{H} = \frac{-\exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \phi)}{\sin \theta_2 \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \phi) - \sin \theta_1} \cos \theta_2 \\ \frac{\eta}{H} = \frac{-\sin \theta_1}{\sin \theta_2 \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \phi) - \sin \theta_1} \end{array} \right. \quad (4.26)$$

Les champs de vitesse virtuels dans la phase matrice et la phase renforcement, sont alors définis comme suit :

- ◇ En ce qui concerne la **phase matrice** (représentant le sol), le champ de vitesse retenu s'écrit :

$$\underline{\hat{U}}^m(M) = \begin{cases} (-\hat{\omega} \underline{e}_z) \wedge \underline{\Omega M} & \text{si } M \in OAB \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.27)$$

de sorte que le tenseur taux de déformation correspondant est partout égal à zéro ($\underline{\hat{d}}^m = 0$), tandis qu'un saut de vitesse apparaît en tout point P de la ligne de rupture OB , en suivant la normale $\underline{\nu}$ (figure (4.4)(a)) :

$$\hat{\underline{V}}^m(P) = [\underline{\hat{U}}^m](P) = \underline{\hat{U}}^m(P^+) - \underbrace{\underline{\hat{U}}^m(P^-)}_{=0} = \underline{\hat{U}}^m(P) \quad \forall P \in OB \quad (4.28)$$

- ◇ Pour la **phase renforcement**, la vitesse virtuelle d'un point de cette phase (qui coïncide avec la zone renforcée) est donnée par :

$$\underline{\hat{U}}^r(M) = \begin{cases} (\underline{\hat{U}}^m(P) \cdot \underline{e}_x) \underline{e}_x & \text{si } M \in DEF \\ \underline{\hat{U}}^m(M) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.29)$$

c'est-à-dire que celle-ci est identique au champ de vitesse de la phase matrice, sauf dans le triangle curviligne DEF , d'extension horizontale l , représenté sur la figure (4.4)(b). Dans l'expression ci-dessus, P est l'intersection avec OB de la ligne horizontale passant par le point M situé dans la région DEF . Par conséquent, le saut de vitesse subi par la phase renforcement le long de la ligne de rupture OD est :

$$\hat{V}^r(P) = \begin{cases} \hat{U}^m(P) & \text{si } P \in OF \\ \hat{U}^m(P) - \hat{U}_x^m(P)\underline{e}_x & \text{si } P \in FD \end{cases} \quad (4.30)$$

tandis que le taux de déformation correspondant est partout égal à zéro, notamment dans la zone DEF :

$$\hat{d}^r = \frac{\partial U_x^r}{\partial x} = 0 \quad (4.31)$$

◇ Enfin, le taux de déformation associé à la densité de force d'**interaction** est partout égal à zéro, sauf dans la région triangulaire DEF , où sa valeur est :

$$\Delta \hat{U} = (\hat{U}_x^r - \hat{U}_x^m)\underline{e}_x = \hat{U}_x^m(P)\underline{e}_x - \underline{0} = \hat{V}_x^m(P)\underline{e}_x \quad (4.32)$$

Il apparait ainsi que OF constitue une *ligne de rupture par "cassure"* des armatures de renforcement, tandis que DEF est une *zone de rupture par "arrachement" ou "glissement"* des armatures (voir figure (4.5)).

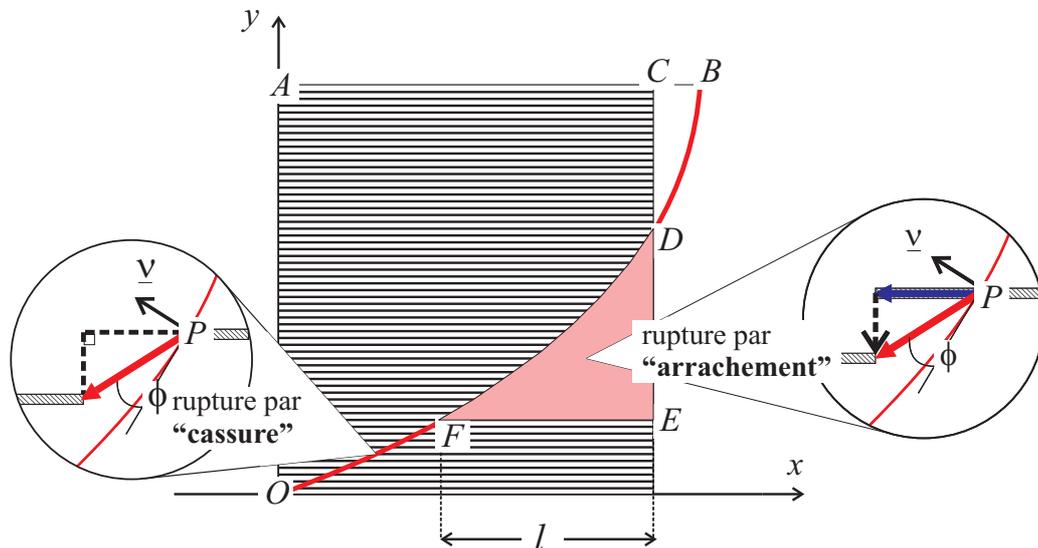


FIG. 4.5. Champ de vitesse dans la phase renforcement montrant deux modes de rupture

La *puissance résistante maximale* développée dans un tel mécanisme peut donc être calculée comme suit.

◇ Le matériau constituant le remblai étant purement frottant et le champ de vitesse étant pertinent, la puissance résistante maximale de la phase matrice dans

le mécanisme décrit ci-dessus est nulle.

- ◇ En raison de (4.31), la contribution de la phase renforcement se réduit au terme associé à la discontinuité le long de la ligne OD .

$$P_{rm}^r(\hat{\underline{U}}^r) = \int_{OD} \pi^r(\underline{\nu}; \hat{\underline{V}}^r) ds \quad (4.33)$$

soit, en tenant compte de (4.22) et (4.30) :

$$P_{rm}^r = \int_{OF} n_0^r \langle \nu_x \hat{U}_x^m(P) \rangle ds + \int_{FD} n_0^r \underbrace{\langle \nu_x (\hat{U}_x^m(P) - \hat{U}_x^m(P)) \rangle}_{=0} ds \quad (4.34)$$

- ◇ La troisième contribution correspond à la mobilisation du critère d'interaction dans la zone DEF , elle s'écrit :

$$P_{rm}^I(\Delta \hat{\underline{U}}) = \int_{DEF} \pi^I(\Delta \hat{\underline{U}}) dS = \int_{DEF} I_0 |\hat{U}_x^m(P)| dS \quad (4.35)$$

En résumé, la *puissance résistante maximale* totale développée dans un tel mécanisme de rotation généralisé, s'écrit :

$$\begin{aligned} P_{rm}(\hat{\underline{U}}^m, \hat{\underline{U}}^r) &= P_{rm}^r(\hat{\underline{U}}^r) + P_{rm}^I(\Delta \hat{\underline{U}}) \\ &= \int_{OF} n_0^r \langle \nu_x \hat{U}_x^m(P) \rangle ds + \int_{DEF} I_0 |\hat{U}_x^m(P)| dx dy \end{aligned} \quad (4.36)$$

La seconde intégrale de surface, relative à la zone de glissement, peut être transformée en une intégrale curviligne le long de FD comme suit (figure (4.6)) :

$$\int_{DEF} I_0 |\hat{U}_x^m(P)| dx dy = \int_{FD} I_0 |\hat{U}_x^m(P)| (-\nu_x) l(P) ds \quad (4.37)$$

avec $dy = -\nu_x ds$

On peut facilement voir que, pour un arc de spirale logarithmique OD et une valeur fixée de $\hat{\omega}$, le minimum de la puissance résistante maximale à l'égard de l'extrémité l de la "zone de glissement" est obtenu pour :

$$l_0 = \frac{n_0^r}{I_0} \quad (4.38)$$

et l'expression de la puissance résistante maximale totale, ainsi partiellement optimisée, peut se mettre sous la forme :

$$P_{rm}(\hat{U}^m, \hat{U}^r) = \int_{OD} \text{Min} \{n_0^r; I_0 l(P)\} < \nu_x \hat{U}_x^m(P) > ds \quad (4.39)$$

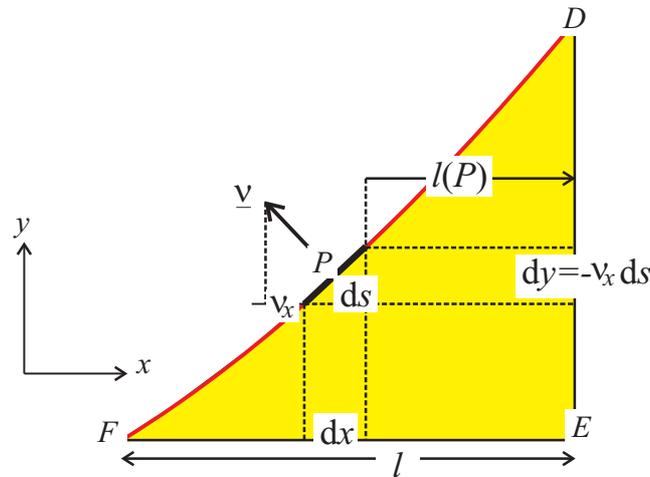


FIG. 4.6. Calcul de la puissance résistante maximale développée dans la "zone d'arrachement"

L'expression ci-dessus signifie que le calcul de la puissance résistante maximale peut être réalisé en utilisant un mécanisme par bloc en rotation classique, dans lequel la résistance initiale n_0^r du renforcement est remplacée par la *valeur minimale entre cette résistance et la résistance à l'arrachement* $I_0 l(P)$, où $l(P)$ peut être interprétée comme la "longueur d'ancrage" du renforcement au point P le long de la ligne de rupture. En d'autres termes, en tenant compte d'une condition de rupture par glissement, par le biais du paramètre I_0 , on aboutit à la définition d'une zone de largeur l_0 indiquée sur la figure (4.7), où la rupture par "arrachement", au lieu de la rupture par "cassure" des armatures, se produit.

On obtient alors tous calculs faits :

$$P_{rm}(\hat{U}^m, \hat{U}^r) = n_0^r |\hat{\omega}| H^2 p_{rm} \left(\phi, \frac{L}{H}, \frac{I_0 L}{n_0^r}; \theta_1, \theta_2 \right) \quad (4.40)$$

La puissance des efforts extérieurs (pesanteur) se met également sous la forme suivante :

$$P_e(\hat{U}^m, \hat{U}^r) = -\gamma \int_{\Omega} \hat{U}_y^m d\Omega = \gamma \hat{\omega} H^3 p_e(\phi; \theta_1, \theta_2) \quad (4.41)$$

Dans les expressions précédentes p_{rm} et p_e sont des quantités sans dimension, fonctions de paramètres sans dimension.

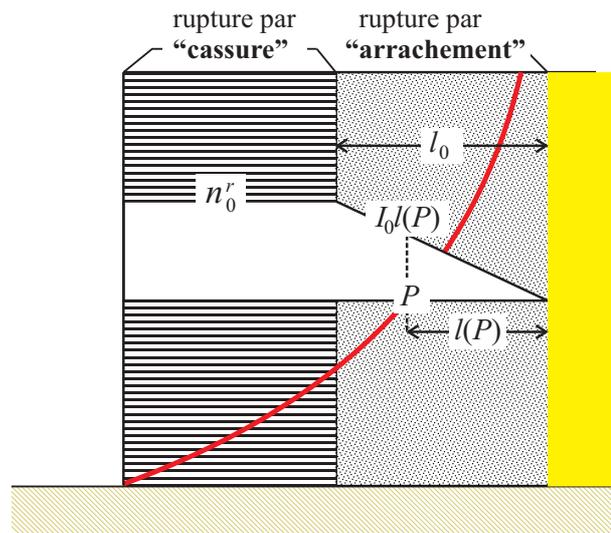


FIG. 4.7. Zones du mur en terre armée correspondant à la rupture par "cassure" et par "arrachement" des armatures

L'application de l'approche cinématique du calcul à la rupture donne alors :

$$H \leq H^+ \Rightarrow \forall \hat{\omega}, \forall (\theta_1, \theta_2) \quad \gamma \hat{\omega} H^3 p_e(\phi; \theta_1, \theta_2) \leq n_0^r |\hat{\omega}| H^2 p_{rm} \left(\phi, \frac{L}{H}, \frac{I_0 L}{n_0^r}; \theta_1, \theta_2 \right) \quad (4.42)$$

et donc en prenant $\hat{\omega} > 0$, on obtient le majorant suivant de la hauteur critique du mur en terre armée :

$$H^+ = \frac{n_0^r}{\gamma} K^+ \leq \frac{n_0^r}{\gamma} \text{Min}_{(\theta_1, \theta_2)} \left\{ K^c = \frac{p_{rm}}{p_e} \right\} \quad (4.43)$$

dont l'optimum est recherché par minimisation par rapport aux angles θ_1 et θ_2 qui définissent le mécanisme. Cette minimisation s'effectue sous les conditions suivantes :

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \\ \theta_1 \leq \theta_2 \\ \cos \theta_2 e^{(\theta_2 - \theta_1) \tan \phi} - \cos \theta_1 \leq 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

la dernière inégalité correspondant à la condition que l'arc de spirale débouche sur le plan supérieur du mur ($AB \geq 0$). La minimisation est effectuée à partir des valeurs du majorant K^c calculées aux noeuds (θ_1^i, θ_2^j) d'un quadrillage du domaine défini par les conditions ci-dessus et représenté sur la figure (4.8).

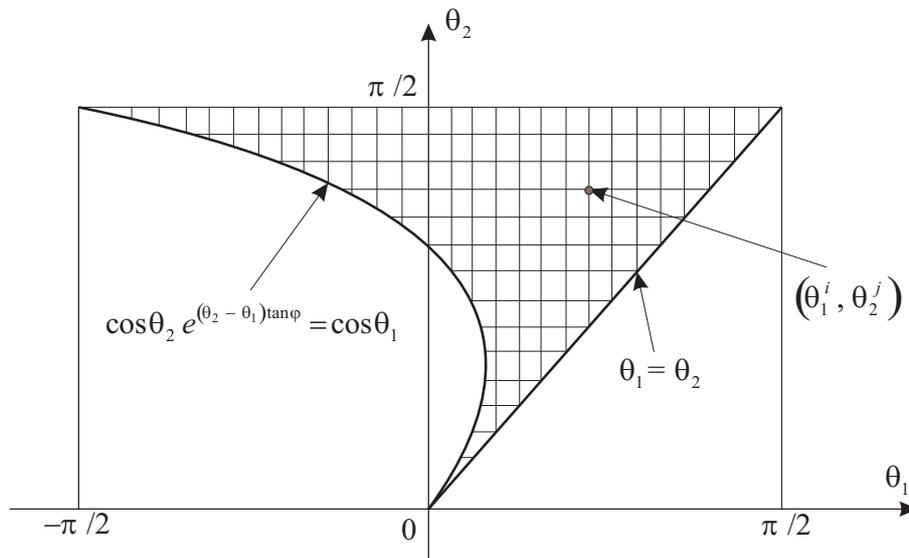


FIG. 4.8. Quadrillage du domaine admissible des paramètres (θ_1, θ_2) définissant le mécanisme

4.4 Présentation des résultats de l'analyse et comparaison avec ceux d'une simulation élasto-plastique

On considère, comme première application de cette approche cinématique par l'extérieur, un mur de soutènement de hauteur H renforcé par des bandes linéaires de longueur $L = H$. Le sol est un sable purement frottant et la minimisation ci-dessus est faite pour différentes valeurs de l'angle de frottement interne : $\phi = 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ$ et 40° . Pour chaque valeur de cet angle de frottement, la valeur K^c correspondante au majorant du facteur sans dimension K^+ , est donnée comme une fonction du paramètre adimensionnel $I_0 L / n_0^r = L / l_0$.

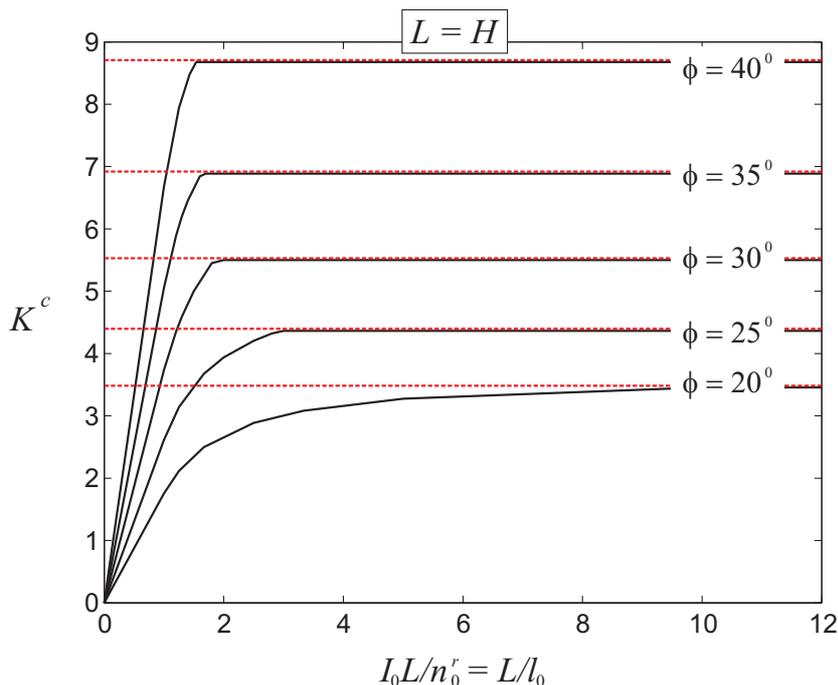


FIG. 4.9. Majoration du facteur de stabilité K^+ pour différentes valeurs de l'angle de frottement du sol

Les résultats sont présentés sur la figure (4.9), sous la forme des cinq courbes tracées pour des valeurs croissantes de l'angle de frottement du sol. Comme on pouvait s'y attendre, l'estimation du facteur adimensionnel de stabilité augmente avec l'angle de frottement du sol, mais aussi avec le paramètre sans dimension L/l_0 qui évalue la résistance de l'interaction relativement à celle des renforcements. Dans tous les cas, l'estimation de la valeur du facteur de stabilité tend vers une valeur asymptotique (représentée par la ligne pointillée horizontale), qui correspond à la situation où le critère de rupture d'interaction n'a plus d'influence sur la stabilité du mur en terre armée.

Il est à noter que ces valeurs asymptotiques correspondent parfaitement à celles calculées par Siad (1987) [66], de Buhan et al. (1989) [22], ou Abdi et al. (1994) [1] à partir d'une approche par homogénéisation, dans laquelle la résistance de la terre armée est décrite par le biais d'un critère de rupture *macroscopique*, et en utilisant le même type de mécanisme de rupture que celui employé ici. Il est également à noter que l'influence de la résistance d'interaction sur la stabilité du mur en terre armée est d'autant plus marquée que la valeur de l'angle de frottement du sol est faible. A titre d'exemple, pour $\phi = 40^\circ$, la stabilité du mur de soutènement n'est plus influencée par le critère de rupture d'interaction dès que $L/l_0 > 1,5$, c'est-à-dire pour $l_0 < 2L/3$, tandis que cette condition devient $l_0 < L/10$ lorsque l'angle de frottement chute à 20° .

Cette dernière conclusion doit toutefois être considérée avec prudence, car il est probable que le critère de rupture sol-armatures dépende de l'angle de frottement du sol. En effet, l'utilisation de l'équation (4.5), qui exprime la densité de force d'interaction en fonction des contraintes exercées à l'échelle microscopique par le sol sur les faces supérieure et inférieure du renforcement, ainsi que de l'équation (4.1), le paramètre de résistance d'arrachement peut être évalué comme :

$$I_0 = \frac{2\tau_0 w}{hv} = \frac{2\tau_0 \eta}{t} \quad (4.45)$$

où τ_0 est la résistance de cisaillement à interface sol-armature, qui est susceptible de dépendre de l'angle de frottement du sol.

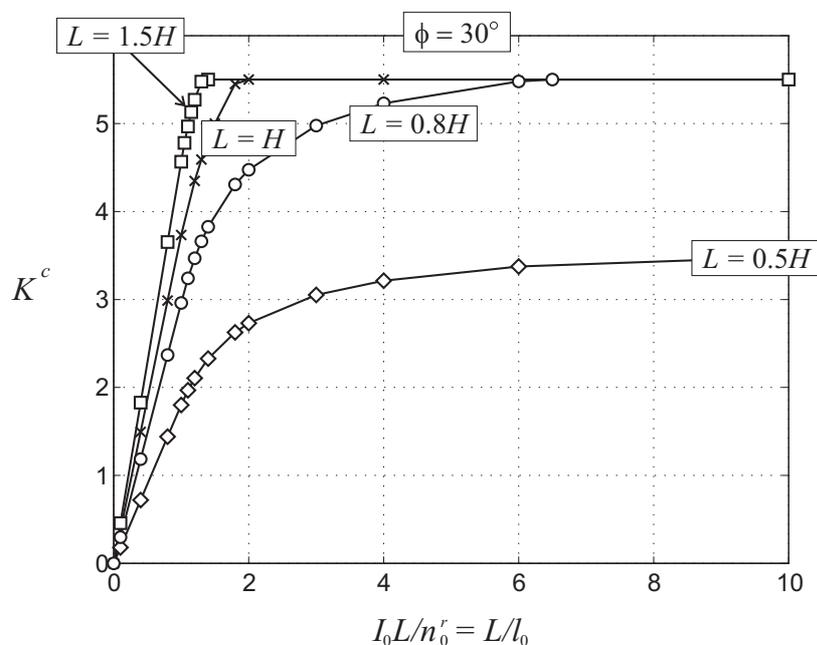


FIG. 4.10. Majoration du facteur de stabilité comme une fonction de la longueur relative du renforcement ($\phi = 30^\circ$)

Ces résultats sont complétés par la figure (4.10) représentant le même type des courbes que celles présentées sur la figure (4.9), tracées pour différentes valeurs de l'extension relative L/H de la zone renforcée, l'angle de frottement du sol restant constant, égal à 30° . Comme on peut le voir sur cette figure, et comme on pouvait s'y attendre, l'augmentation de la zone renforcée améliore la stabilité du mur en terre armée, avec une réduction corrélative de l'influence du critère de rupture d'interaction sol-armatures.

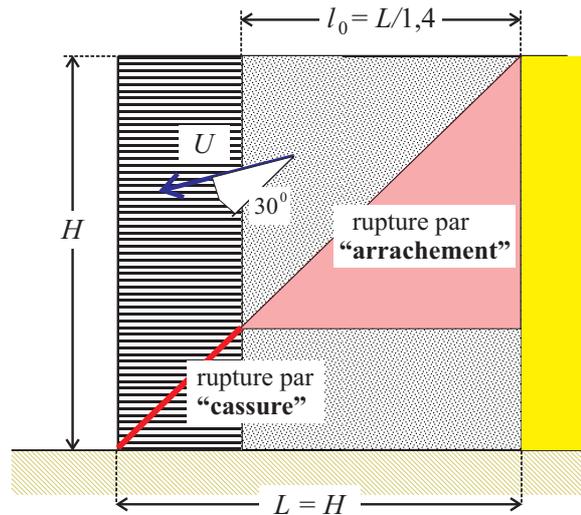


FIG. 4.11. Mécanisme de rupture optimisé pour $\phi = 30^\circ$, $L = H$ et $L/l_0 = 1,4$

La figure (4.11) représente le mécanisme de rupture conduisant à la meilleure majoration pour $\phi = 30^\circ$, $L = H$ et le paramètre adimensionnel $L/l_0 = 1,4$. Ce mécanisme correspond à la translation du bloc triangulaire, ce qui signifie que le centre de rotation est rejeté à l'infini, tandis que l'arc de spirale logarithmique dégénère en un segment incliné à 45° par rapport à la verticale ($\theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$). Ce mécanisme met en évidence les deux modes de rupture mentionnés ci-dessus, la rupture par "cassure" dans la partie inférieure de la ligne de rupture, tandis qu'une rupture par "arrachement" se produit dans la zone triangulaire située en arrière de la partie supérieure de cette même ligne de rupture.

Il a paru enfin intéressant de comparer ces résultats avec ceux en provenance d'une simulation par éléments finis de la dernière configuration, réalisée en utilisant le modèle multiphasique de sol renforcé, dans lequel tous les matériaux constitutifs (sol et renforcement, ainsi que leur interaction) sont supposés obéir à un comportement élastique parfaitement plastique, tel que décrit au chapitre 2. Les critères de plasticité sont identiques aux critères de résistance respectifs, caractérisés par trois paramètres scalaires ϕ , n_0 et I_0 et une règle d'écoulement plastique associée est choisie pour le comportement du sol (phase matrice), c'est-à-dire que $\phi = \psi = 30^\circ$. Puisque nous nous sommes seulement intéressés à l'évaluation de la rupture finale du mur en terre armée, et non pas à la simulation proprement dite de son comportement, les paramètres élastiques peuvent être arbitrairement sélectionnés¹. Le jeu de valeurs numériques sélectionnées est donné sur le tableau (4.1).

¹La charge limite de l'ouvrage, associée à la valeur critique de la hauteur (H^+), est en effet indépendante des caractéristiques élastiques du comportement

TAB. 4.1. *Stabilité d'un mur de soutènement en sol renforcé - valeurs sélectionnées des paramètres*

Matrice	Module d'Young	$E = 50\text{MPa}$
	Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
	Cohésion	$C = 0$
	Angle de frottement	$\phi = 30^0$
	Angle de dilatance	$\psi = 30^0$
Renforcement	Rigidité	$\alpha = 20\text{MPa}$
	Limite en traction	$n_0^r = 0,1\text{MPa}$
Interaction	Coefficient d'interaction	$c' = 408\text{MPa/m}^2$
Géométrie	Hauteur du mur	H
	Largeur des armatures	$L=H$

L'ouvrage considéré est discrétisé en 1672 éléments triangulaires à 6 noeuds (T6) (figure (4.12)), où il convient de souligner que le maillage utilisé n'est pas plus raffiné que celui qui pourrait être utilisé pour un mur de soutènement homogène (non renforcé). Le chargement de la structure (gravité) est progressivement augmenté par application successive d'incrémentes suffisamment petits, jusqu'à l'observation d'une rupture par écoulement plastique libre, correspondant au plateau horizontal de la courbe charge-déplacement. Les calculs numériques sont effectués pour un sol d'angle de frottement $\phi = 30^0$ et une longueur relative du renforcement égale à $L/H = 1$, en faisant varier le paramètre adimensionnel $I_0L/n_0^r = L/l_0$ entre 0 et 5.

Les résultats de ces simulations numériques sont reportés sur la figure (4.13), où la courbe correspondant à ces simulations a été tracée sur le même graphique que celle associée à l'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture conduite précédemment. Un bon accord est ainsi observé entre les résultats obtenus par les deux méthodes, les résultats de l'approche du calcul à la rupture étant légèrement supérieurs à ceux issus de la simulation par éléments finis, ce qui est cohérent avec le statut de l'approche cinématique du calcul à la rupture qui fournit des majorants.

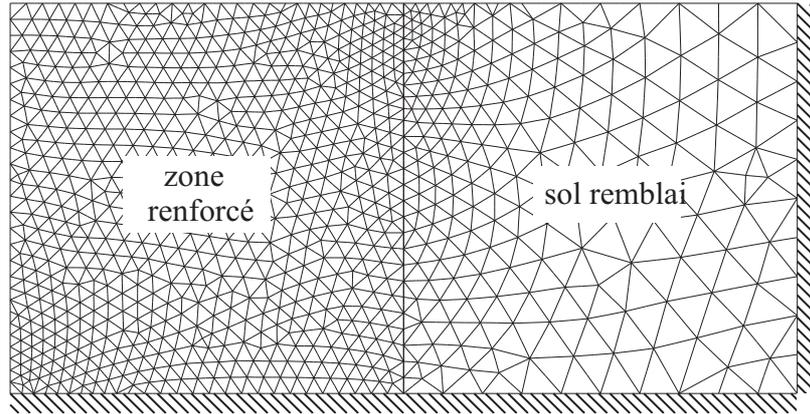


FIG. 4.12. Maillage par éléments finis du mur en sol renforcé modélisé comme un système biphasique

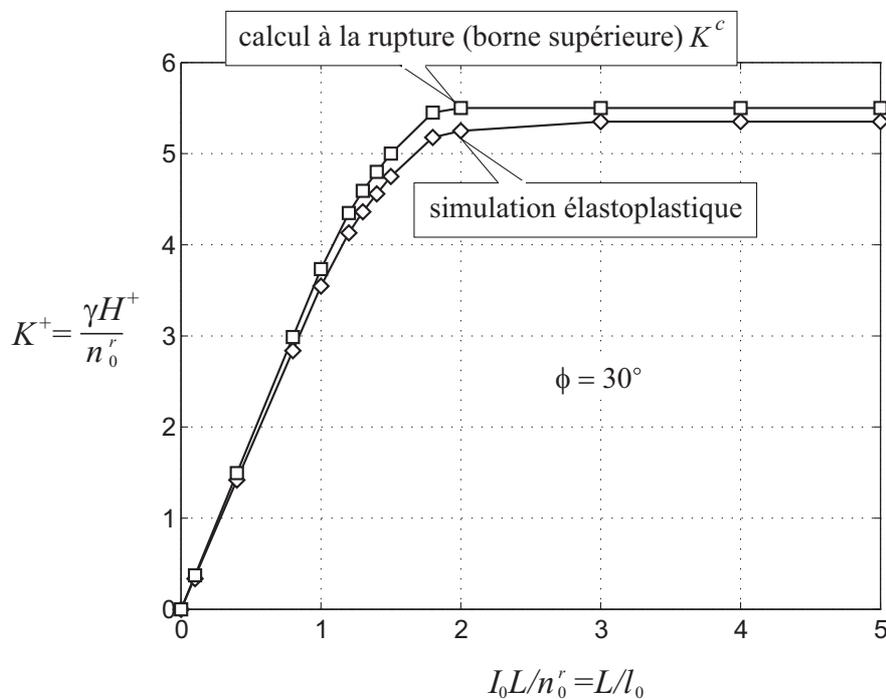


FIG. 4.13. Comparaison entre les résultats de l'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture et ceux dérivés des simulations élasto-plastiques ($\phi = 30^\circ$)

Cette bonne concordance est confirmée par l'observation du mécanisme de rupture représenté sur la figure (4.14), sous la forme d'une série d'images donnant les isovaleurs des taux de déformations plastiques à la rupture de la phase matrice (sol) (a), de l'interaction (b) et de la phase renforcement (c), pour $L/l_0 = 1, 4$. En effet, cette figure fait apparaître une bonne coïncidence entre les zones de localisation des déformations plastiques ainsi mises en évidence et les mécanismes optimaux de l'approche cinématique représentés par les traits pointillés.

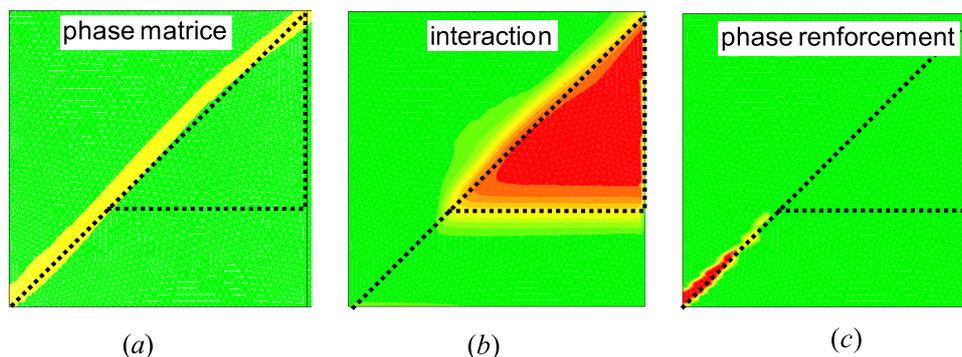


FIG. 4.14. Simulation par éléments finis : isovaleurs des taux de déformations plastiques relatives à la phase matrice(a), à l'interaction(b) et à la phase renforcement(c)

4.5 Conclusions

Le chapitre présent constitue une application directe du modèle multiphasique à l'analyse de stabilité d'ouvrages renforcés par inclusions souples.

L'approche cinématique du calcul à la rupture pour les milieux biphasiques a été mise en œuvre, permettant de trouver un majorant du facteur de stabilité d'un mur en terre armée. Les résultats de cette analyse ont été confrontés à ceux obtenus par calcul élastoplastique utilisant le code de calcul par éléments finis décrit brièvement au chapitre 2. Cette comparaison montre une bonne concordance des résultats (moins de 5%) tout en respectant le statut des résultats de l'approche cinématique du calcul à la rupture qui constituent des majorants des chargements de ruine de l'ouvrage.

La seconde partie de ce mémoire s'intéresse à la modélisation multiphasique des ouvrages renforcés par inclusions "rigides" pour lesquels les efforts de cisaillement et de flexion dans les inclusions de renforcement peuvent jouer un rôle essentiel dans la stabilité de l'ouvrage renforcé.

Deuxième partie

Ouvrages renforcés par inclusions

”rigides”

Chapitre 5

Modèle multiphasique en élasticité linéaire des sols renforcés par inclusions ”rigides”

5.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter les équations générales du modèle multiphasique général destiné à appréhender le comportement macroscopique d’un sol renforcé par une famille d’inclusions ”rigides”, dans le cadre de l’élasticité linéaire. Reprenant les travaux de Sudret (1999) [69], de Buhan et Sudret (2000) [26] et Hassen et de Buhan (2006) [39], on explicite tout d’abord les efforts intérieurs (contraintes) propres à chacune des phases représentant le sol et les inclusions de renforcement, ainsi que de l’interaction entre des phases. Les équations d’équilibre et conditions aux limites correspondantes sont alors explicitées pour chacune des phases séparément.

Nous verrons que la modélisation ainsi établie fait ressortir plusieurs différences importantes par rapport au modèle ”inclusions souples” qui a fait l’objet de la première partie de ce travail :

- ◇ les contraintes dans la phase renforcement intègrent explicitement les efforts de *cisaillement et de flexion* dans les inclusions, en plus des efforts axiaux ;
- ◇ les forces volumiques d’interaction peuvent avoir des composantes transversales à la direction des renforcements ;

- ◇ Enfin, à ces forces d'interaction de type volumique, s'ajoutent des efforts de type surfacique localisés aux extrémités ("pointes") des inclusions de renforcement.

Il apparaît donc que le modèle multiphasique relatif aux sols renforcés par "inclusions souples" est un cas particulier d'un modèle multiphasique qualifié de "général" qui s'applique aux sols renforcés par "inclusions rigides".

Les équations constitutives du modèle sont ensuite développées dans le cadre d'un comportement élastique linéaire des constituants, et donc des phases ainsi que leur interaction. Elles permettent alors d'introduire la formulation d'un problème d'élasticité pour le milieu biphasique en condition de déformations planes parallèlement à la direction des renforcements.

Ce chapitre se termine par l'analyse d'un exemple illustratif de résolution d'un problème d'élasticité biphasique, consistant à soumettre une couche de sol renforcée par inclusions rigides à une sollicitation sismique, modélisée comme un chargement pseudo-statique. Cet exemple met clairement en évidence le rôle essentiel joué par les efforts de cisaillement et de flexion, ainsi que l'interaction sol/inclusions dans la réponse globale de ce type de structure renforcée, montrant ainsi la capacité du modèle multiphasique à rendre compte du caractère "rigide" des inclusions de renforcement et du défaut d'adhérence éventuel entre le sol et les inclusions.

5.2 Principe de la modélisation biphasique générale

Tout comme le modèle multiphasique des sols renforcés par inclusions "souples", le modèle multiphasique général consiste à décrire à une *échelle macroscopique* le comportement global d'un sol renforcé par inclusions "rigides" en homogénéisant séparément le sol et les inclusions de renforcement. Une telle démarche aboutit, à l'échelle macroscopique, à une superposition de plusieurs milieux, appelés *phases*, représentant le sol et les différentes familles d'inclusions de même direction, en interaction mutuelle. On se limitera dans ce qui suit, pour alléger l'exposé, à la présentation du modèle *biphasique* avec flexion et interaction, c'est-à-dire au cas où une seule famille d'inclusions de renforcement de même direction est considérée.

5.2.1 Géométrie et cinématique du système biphasique

On s'intéresse ici à la situation où le sol occupant un volume Ω^m est partiellement renforcé par des inclusions rigides parallèles à la direction Ox . Plus précisément on désigne $\Omega^r = \Omega_r^m$ le volume renforcé et par Ω_0^m le volume complémentaire de sorte que :

$$\Omega^m = \Omega_r^m \cup \Omega_0^m \quad (5.1)$$

et l'on désigne par Σ la surface, intérieure à Ω^m , séparant la partie renforcée de la partie non renforcée (figure (5.1)). Cette surface représente le lien géométrique des extrémités d'inclusions en contact avec le sol.

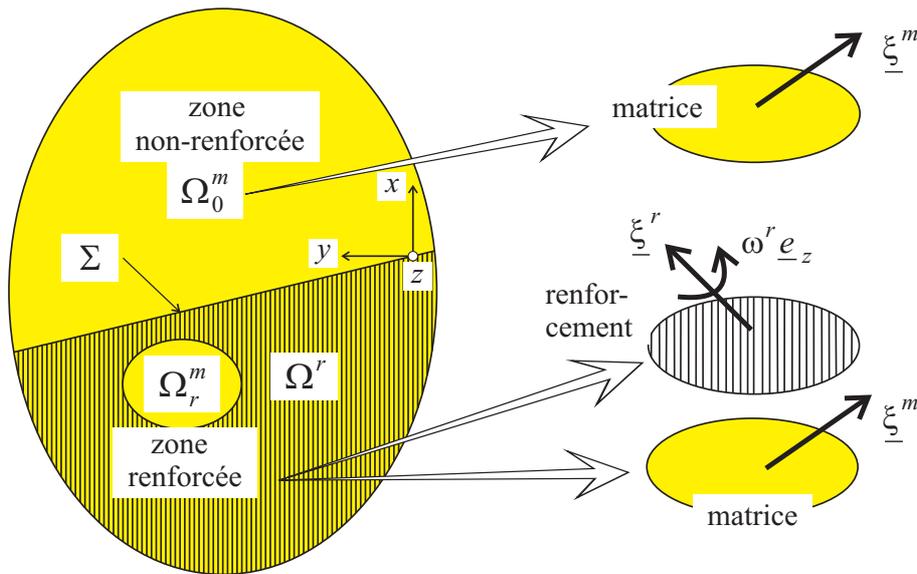


FIG. 5.1. Modèle biphasique de sol renforcé par inclusions rigides

Conformément au principe de la modélisation biphasique qui s'applique à la zone renforcée $\Omega^r = \Omega_r^m$ de l'ouvrage, en tout point de cette zone coexistent deux particules. L'une, dont la cinématique est caractérisée par le vecteur déplacement $\underline{\xi}^m$, représente la phase matrice, tandis que l'autre, associée à la phase renforcement, est dotée d'une cinématique caractérisée d'une part par un déplacement $\underline{\xi}^r$, d'autre part par une rotation qui, dans l'hypothèse de déformations planes dans le plan Oxy , est de la forme $\omega^r \underline{e}_z$ (figure (5.1)).

5.2.2 Statique du système biphasique

Partant de la description cinématique précédente, la modélisation des efforts intérieurs à chaque phase, et des efforts d'interaction ainsi que l'écriture des équations d'équilibre correspondantes peuvent être établies par exemple par la méthode des puissances virtuelles (de Buhan et Sudret (2000) [26]). Nous donnons le résultat d'une telle démarche dans laquelle sont intégrés les efforts d'interaction surfaciques en Σ .

- L'équation d'équilibre en tout point de la phase matrice de la zone renforcée Ω_r^m s'écrit :

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}}^m + \rho^m \underline{F}^m + \underline{I} = \underline{0} \quad \text{sur } \Omega_r^m \tag{5.2}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}^m$ est le tenseur des contraintes dans la phase matrice, $\rho^m \underline{F}^m$ est la densité volumique d'efforts extérieurs et \underline{I} est la densité volumique d'efforts d'interaction appliquée par la phase renforcement sur la phase matrice.

- Les efforts intérieurs à la phase renforcement, modélisée comme un milieu de Cosserat, sont (figure (5.2))
 - n^r : densité d'effort normal par unité de surface transversale à la direction des inclusions ;
 - v^r : densité d'effort tranchant suivant \underline{e}_y par unité de surface transversale à la direction des inclusions ;
 - m^r : densité de moment de flexion suivant \underline{e}_z par unité de surface transversale à la direction des inclusions.

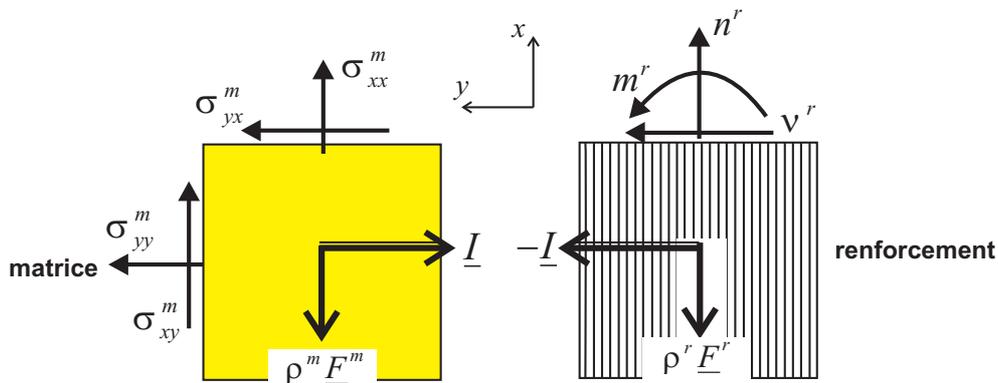


FIG. 5.2. Efforts intérieurs pour un système biphasique général (cas bidimensionnel)

et les équations d'équilibre correspondantes s'écrivent (Hassen et de Buhan (2006) [39]) :

$$\operatorname{div} (n^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + v^r \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \rho^r \underline{F}^r - \underline{I} = \underline{0} \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} (m^r \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) + v^r \underline{e}_z = \underline{0} \quad (5.4)$$

Il nous reste à décrire les efforts d'interaction surfaciques s'appliquant sur la surface Σ et la façon dont elles modifient les équations d'équilibre par phase. Désignant par $-\underline{p}$ la densité d'efforts surfaciques exercés par la phase matrice sur la surface Σ localisée sur le bord de la phase renforcement (figure (5.3)), on obtient la *condition aux limites* suivante pour la phase renforcement :

$$(n^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + v^r \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \cdot \underline{\nu} = -\underline{p} \quad (5.5)$$

soit

$$(n^r \underline{e}_x + v^r \underline{e}_y) (\underline{e}_x \cdot \underline{\nu}) = -\underline{p} \quad (5.6)$$

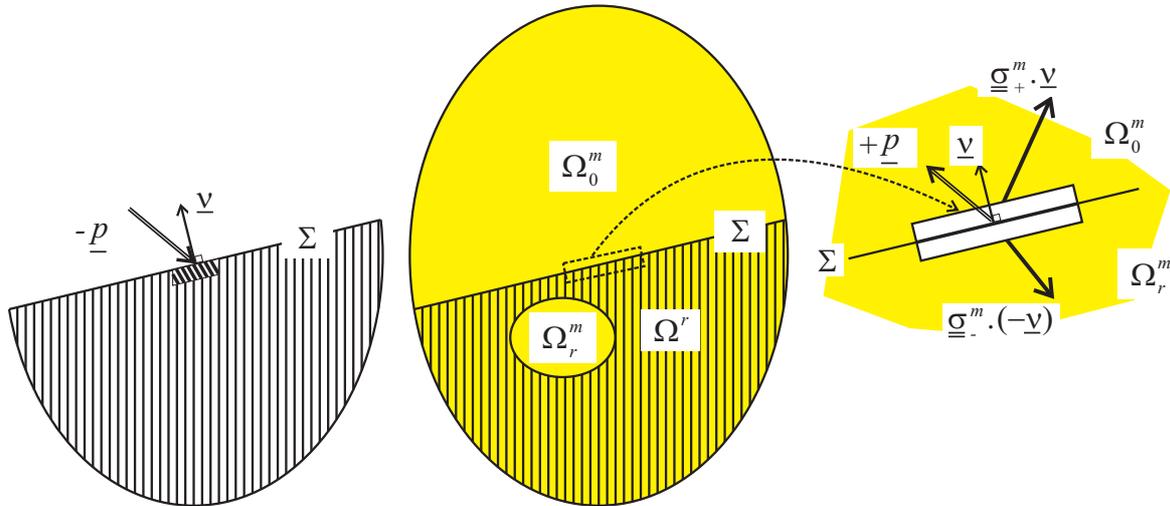


FIG. 5.3. Efforts surfaciques d'interaction

Il en résulte par application de la loi des actions mutuelles que la phase matrice est soumise de la part de la phase renforcement à une densité surfacique \underline{p} d'efforts d'interaction exercée le long de la surface Σ . Cette densité continue représente à l'échelle macroscopique de la modélisation biphasique les efforts exercés par les extrémités des inclusions sur le sol (les efforts "de pointe" aux extrémités des inclusions, d'où la notation \underline{p}). Cette densité surfacique va induire une discontinuité

du champ de contrainte à la traversée de la surface Σ . Cette discontinuité peut être reliée à \underline{p} par un raisonnement classique d'équilibre d'un petit volume cylindrique dont les faces (de section dS) sont situées de part et d'autre de la surface Σ (figure (5.3)). L'équilibre en résultante de ce volume dont on fait tendre l'épaisseur vers zéro, donne :

$$\left(\underline{\underline{\sigma}}_+^m \cdot \underline{\underline{\nu}}\right) dS + \left(\underline{\underline{\sigma}}_-^m \cdot (-\underline{\underline{\nu}})\right) dS + \underline{p} dS = 0 \quad (5.7)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}_+^m$ (resp. $\underline{\underline{\sigma}}_-^m$) désigne la valeur de la contrainte en un point de la phase matrice appartenant à Ω_0^m (resp. Ω_r^m). Par conséquent :

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}^m\right] \cdot \underline{\underline{\nu}} + \underline{p} = \underline{0} \quad \text{sur } \Sigma \quad (5.8)$$

qui constitue l'équation aux discontinuités dans la phase matrice, où :

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}^m\right] = \underline{\underline{\sigma}}_+^m - \underline{\underline{\sigma}}_-^m \quad (5.9)$$

5.2.3 Comportement élastique linéaire en déformations planes

La recherche de la solution d'un problème d'élasticité formulé pour le milieu biphasique général, revient à la mise en évidence d'un champ d'efforts intérieurs $\{\underline{\underline{\sigma}}^m; (n^r, v^r, m^r)\}$ statiquement admissible avec les efforts extérieurs donnés et d'un champ de déplacement-rotation $\{\underline{\underline{\xi}}^m, (\underline{\underline{\xi}}^r, \omega^r)\}$ cinématiquement admissible, associés en tout point par la loi de comportement élastique de chaque phase séparément ainsi que de leurs interactions. Ces lois s'écrivent comme suit :

- ◇ Pour la **phase matrice**, les déformations sont décrites par le tenseur de déformations linéarisées, défini par la partie symétrique du gradient du champ de déplacement :

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^m = 1/2 \left\{ \underline{\underline{\underline{\text{grad}}}}(\underline{\underline{\underline{\xi}}})^m + {}^T \underline{\underline{\underline{\text{grad}}}}(\underline{\underline{\underline{\xi}}})^m \right\} \quad (5.10)$$

et le comportement élastique linéaire s'exprime, sous l'hypothèse d'isotropie, par :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^m = \lambda^m \text{tr}(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}})^m \underline{\underline{I}} + 2\mu^m \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^m \quad (5.11)$$

où λ^m et μ^m sont les coefficients de Lamé de la *phase matrice*.

- ◇ Pour la **phase renforcement**, on retrouve les variables de déformation analogues à celles introduites pour les poutres, soit dans le cas de la déformation plane dans le plan Oxy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^r = \frac{\partial \xi_x^r}{\partial x} \\ \theta^r = \frac{\partial \xi_y^r}{\partial x} - \omega^r \\ \chi^r = \frac{\partial \omega^r}{\partial x} \end{array} \right. \quad (5.12)$$

où ε^r désigne la *déformation axiale*, θ^r la *déformation de cisaillement* et χ^r la *déformation de courbure*.

Le comportement *élastique linéaire* de la phase renforcement, s'exprime alors à travers 3 équations reliant les efforts intérieurs aux variables de déformation associées :

$$\left\{ \begin{array}{l} n^r = \alpha^r \varepsilon^r \\ v^r = \beta^r \theta^r \\ m^r = \gamma^r \chi^r \end{array} \right. \quad (5.13)$$

où α^r est la *raideur à l'effort axial*, β^r la *raideur à l'effort tranchant* et γ^r *raideur à la flexion*. Ces quantités étant définies comme la raideur à l'effort axial, la raideur au cisaillement et la raideur en flexion d'une inclusion individuelle, *par unité de surface transversale*.

- ◇ Pour ce qui concerne l'**interaction volumique**, la variable déformation qui apparaît en dualité avec l'*effort d'interaction volumique* est l'écart des champs de déplacement des deux phases, défini en tout point de la zone biphasique par :

$$\Delta \underline{\xi} = \underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m \quad (5.14)$$

et la loi de comportement d'interaction volumique est donnée, dans le cas de l'élasticité linéaire, par une relation du type :

$$\underline{I} = \underline{c}^I \cdot \Delta \underline{\xi} \quad (5.15)$$

où \underline{c}^I désigne le *tenseur de rigidité d'interaction volumique* entre les deux phases, dont les termes peuvent être évalués à partir de simulations numériques sur des volumes élémentaires représentatifs du matériau renforcé (Sudret (1999) [69]; Bennis et de Buhan (2003) [7]).

Le cas de l'*adhérence parfaite* entre phases correspond à l'hypothèse où les particules des deux phases localisées au même point sont animées du *même déplacement* :

$$\Delta \underline{\xi} = \underline{\xi}^r - \underline{\xi}^m = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{\xi} = \underline{\xi}^r = \underline{\xi}^m \quad (5.16)$$

A noter que ce cas particulier peut être retrouvé à partir de la loi d'interaction générale (5.15) en faisant tendre vers l'infini les termes du tenseur de rigidité \underline{c}^I

- ◇ La variable déformation associée à l'**interaction de surface** (ou de "**pointe**"), est le déplacement relatif de la phase renforcement par rapport à la phase matrice au niveau de la surface Σ (voir figure (5.3)), c'est-à-dire au front de la zone renforcée :

$$\Delta \underline{\xi}^p = \underline{\xi}^{r,p} - \underline{\xi}^{m,p} \quad \text{sur } \Sigma \quad (5.17)$$

et la loi de comportement d'*interaction de pointe* est donnée par :

$$\underline{p} = \underline{c}^p \cdot \Delta \underline{\xi}^p \quad (5.18)$$

où \underline{c}^p est le tenseur de rigidité correspondant.

5.3 Exemple d'application : couche de sol renforcé sous chargement sismique

En vue de se familiariser avec le modèle multiphasique général avec flexion et interaction ainsi introduit, on étudie ici l'exemple d'une couche de sol renforcé sous chargement

latéral en déformations planes. Cet exemple peut représenter une modélisation simplifiée d'une fondation de grande extension soumise à un chargement sismique (chargements volumiques et surfaciques latéraux).

5.3.1 Position du problème

Une couche de sol d'épaisseur H , renforcée par un réseau d'inclusions "rigides" verticales parallèles à (Ox) , et supposée infinie le long de (Oy) , est assujettie dans le plan (Oxy) à un chargement sismique. La partie renforcée du sol est séparée de l'ouvrage par un matelas granulaire d'épaisseur h destiné à mieux répartir la surcharge de l'ouvrage sur les inclusions (figure (5.4)).

Partant d'un état initial, l'ouvrage est soumis à la pesanteur d'une part, une surcharge verticale uniforme appliquée en surface d'autre part, la sollicitation sismique se traduit par l'application :

- ◇ *D'un chargement volumique horizontal*, appliqué non seulement sur le sol (phase matrice) et le matelas granulaire, mais aussi sur les inclusions (phase renforcement). Il est caractérisé par le coefficient sismique k :

$$\underline{F} = kge_y \quad (5.19)$$

- ◇ *D'un chargement surfacique horizontal*, appliqué sur la surface supérieure du matelas granulaire (plan : $x = H + h$), représenté par une contrainte de cisaillement imposée : $\sigma_{xy}^g(x = H + h) = q$.
- ◇ Les deux phases, matrice et renforcement, sont par ailleurs encastrées dans le plan ($x = 0$). Soit :

$$\underline{\xi}^m(x = 0, y, z) = \underline{\xi}^r(x = 0, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad \omega^r(x = 0, y, z) = 0 \quad (5.20)$$

En vertu du principe de superposition découlant du comportement élastique linéaire retenu ici, la réponse de l'ouvrage, en terme de champs de déplacements, à la sollicitation sismique peut être calculée en appliquant le chargement ci-dessus à l'ouvrage dans son état initial naturel (c'est-à-dire en l'absence de chargement vertical).

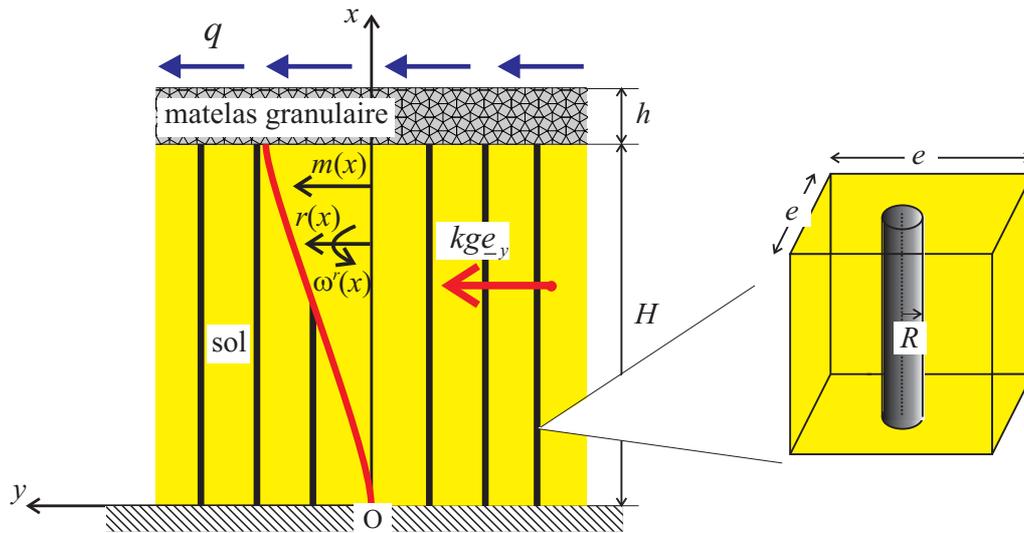


FIG. 5.4. Couche de sol renforcé soumise à un chargement sismique

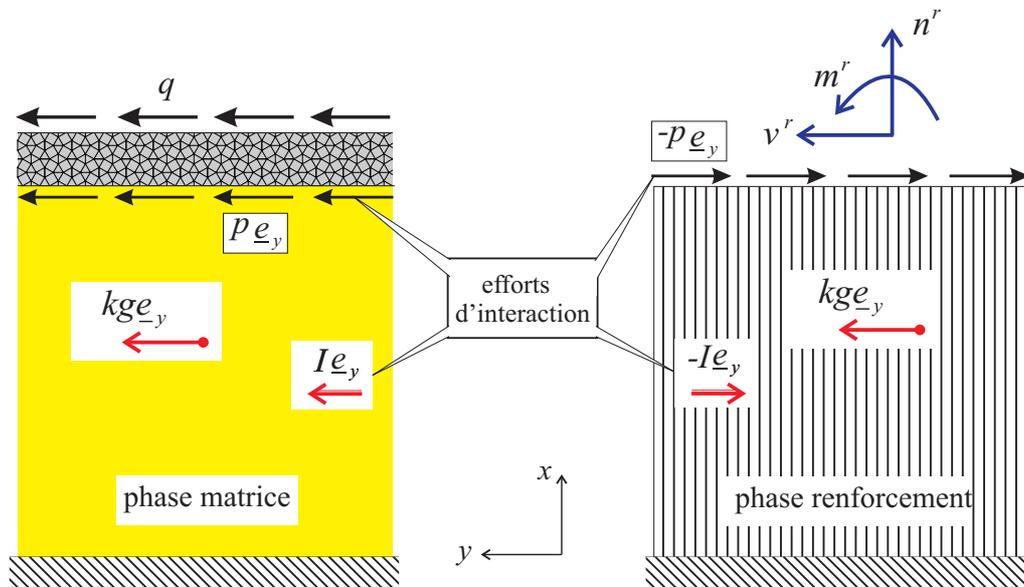


FIG. 5.5. Efforts d'interaction entre les phases

Conformément à la modélisation multiphasique (en l'occurrence ici biphasique), le massif de la figure (5.4) est ainsi modélisé par deux systèmes disjoints (mais géométriquement superposés) (figure (5.5)) :

- ✓ le premier système est constitué de la phase matrice relative à la couche de sol renforcée, surmontée du matelas granulaire ;
- ✓ le second système est la phase renforcement représentant le réseau d'inclusions.

Sur la figure (5.5) apparaissent les efforts d'interaction transversale entre les deux

phases. On désigne par I la valeur de l'effort volumique d'interaction horizontal appliqué par la phase renforcement sur la phase matrice, tandis que p désigne la force surfacique d'interaction horizontale exercée au niveau de la tête des inclusions.

5.3.2 Paramètres du modèle biphasique et chargement

Compte tenu de la faible fraction volumique de renforcement ($\eta = \pi R^2/e^2$: voir figure (5.4)), on affecte à la phase matrice les propriétés élastiques du sol, repérées par ses coefficients de Lamé λ et μ . Le comportement de la phase matrice est donc exprimé par :

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}^m \quad (5.21)$$

Concernant la phase renforcement, les raideurs à l'effort axial, à l'effort tranchant et à la flexion sont simplement calculées en divisant les quantités correspondantes relatives à une inclusion individuelle de renforcement par la section (e^2) du volume élémentaire représentatif (voir figure (5.4)). On obtient à partir de cette procédure :

$$\begin{cases} \alpha^r = \frac{AE^b}{e^2} = \eta E^b \\ \beta^r = \frac{A^* \mu^b}{e^2} \\ \gamma^r = \frac{IE^b}{e^2} \end{cases} \quad (5.22)$$

où $A = \pi R^2$ est la section de l'inclusion, A^* sa section réduite ($A^* = (27/32)A$ dans le cas d'une inclusion de section circulaire) (Frey (1994) [31]), $I = \pi R^4/4$ est son moment d'inertie par rapport à son diamètre, E^b est le module d'Young du matériau de renforcement (béton) et μ^b son module de cisaillement. Le comportement de la phase renforcement est donc donné par :

$$\begin{cases} n^r = \alpha^r \varepsilon^r = \alpha^r \frac{\partial \xi_x^r}{\partial x} \\ v^r = \beta^r \theta^r = \beta^r \left(\frac{\partial \xi_y^r}{\partial x} - \omega^r \right) \\ m^r = \gamma^r \chi^r = \gamma^r \frac{\partial \omega^r}{\partial x} \end{cases} \quad (5.23)$$

En ce qui concerne les paramètres du chargement volumique horizontal du système biphasique, on a :

✓ Pour la phase matrice

$$\rho^m \underline{F}^m = k \rho^m g \underline{e}_y \quad (5.24)$$

où la masse volumique de la phase matrice est égale à :

$$\rho^m = (1 - \eta) \rho^s \quad (5.25)$$

ρ^s désignant la masse volumique du sol.

✓ Pour la phase renforcement :

$$\rho^r \underline{F}^r = k \rho^r g \underline{e}_y \quad (5.26)$$

avec

$$\rho^r = \eta \rho^b \quad (5.27)$$

où ρ^b est la masse volumique du matériau constituant les inclusions rigides (béton par exemple).

5.3.3 Solution en déplacement

Compte tenu de l'invariance du problème biphasique dans le plan horizontal, la solution en déplacement est recherchée sous la forme :

– Phase matrice :

$$\underline{\xi}^m = m(x) \underline{e}_y \quad (5.28)$$

– Phase renforcement :

$$\underline{\xi}^r = r(x) \underline{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{\omega}^r = \omega(x) \underline{e}_z \quad (5.29)$$

Les champs de déformation associés sont donnés par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^m = \frac{1}{2} m'(x) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad (5.30)$$

pour la phase matrice, et

$$\varepsilon^r = 0, \quad \theta^r = r'(x) - \omega(x), \quad \chi^r = \omega'(x) \quad (5.31)$$

pour la phase renforcement.

Reportant ces expressions dans les équations de comportement, on obtient les efforts intérieurs correspondants :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^m = \mu m'(x) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \\ n^r = 0, \quad v^r = \beta^r (r'(x) - \omega(x)), \quad m^r = \gamma^r \omega'(x) \end{cases} \quad (5.32)$$

Ces expressions sont alors reportées dans les équations d'équilibre :

◇ **Phase matrice :**

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m + k\rho^m g \underline{e}_y + \underline{I} = \underline{0} \quad (5.33)$$

Soit en tenant compte de l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}^m$ donnée par (5.32) :

$$\mu m'' \underline{e}_y + k\rho^m g \underline{e}_y + \underline{I} = \underline{0} \quad (5.34)$$

de sorte que l'effort d'interaction volumique est *transversal* aux renforcements, et la loi d'interaction élastique s'écrit alors :

$$\underline{I} = c^I (r - m) \underline{e}_y \quad (5.35)$$

où $c^I = c_{yy}^I$.

La combinaison de (5.34) et (5.35) donne finalement :

$$\mu m''(x) + kg\rho^m + c^I (r(x) - m(x)) = 0 \quad (5.36)$$

◇ Pour la **phase renforcement**, on obtient les deux équations d'équilibre couplées :

$$\begin{cases} \frac{dv^r}{dx} \underline{e}_y + kg\rho^r \underline{e}_y - I \underline{e}_y = \underline{0} \\ \frac{dm^r}{dx} \underline{e}_z + v^r \underline{e}_z = \underline{0} \end{cases} \quad (5.37)$$

Soit en tenant compte de (5.32) et (5.35) :

$$\begin{cases} \beta^r (r''(x) - \omega'(x)) + kg\rho^r - c^I (r(x) - m(x)) = 0 \\ \gamma^r \omega''(x) + \beta^r (r'(x) - \omega(x)) = 0 \end{cases} \quad (5.38)$$

D'après les conditions aux limites (5.20), les fonctions $r(x)$, $m(x)$ et $\omega(x)$ vérifient les conditions :

$$m(x=0) = 0, \quad r(x=0) = 0 \quad \text{et} \quad \omega(x=0) = 0 \quad (5.39)$$

Par ailleurs, un second type d'effort d'interaction entre les deux phases est à prendre en compte au niveau du plan supérieur de la couche renforcée, où sont localisées les têtes d'inclusions (plan : $x = H$). Celui-ci est représenté par une densité surfacique ($p\underline{e}_y$), qui agit sur la phase matrice, de sorte que l'équation d'équilibre (5.36) doit être complétée par l'équation de saut (5.8) qui s'écrit :

$$\sigma_{xy}^m(x = H^+) - \sigma_{xy}^m(x = H^-) + p = 0 \quad (5.40)$$

qui fait donc apparaître une discontinuité de la contrainte de cisaillement horizontale dans la phase matrice au franchissement du plan ($x = H$) (voir figure (5.4)).

L'expression de la loi d'interaction de pointe s'écrit :

$$\underline{p} = p\underline{e}_y = c^p (r(x = H) - m(x = H)) \underline{e}_y \quad (5.41)$$

Compte tenu de (5.32), la condition (5.40) devient :

$$\mu m'(x = H) = (q + kg\rho^g h) + p \quad (5.42)$$

ou bien

$$\mu m'(x = H) = (q + kg\rho^g h) + c^p (r(x = H) - m(x = H)) \quad (5.43)$$

où q est la contrainte de cisaillement appliquée sur la surface supérieure de la couche de matelas granulaire et ρ^g est la masse volumique du matelas granulaire.

En ce qui concerne la phase renforcement, l'existence de cette densité surfacique de forces d'interaction se traduit par la condition aux limites (5.6) :

$$v^r(x = H)\underline{e}_y = -p\underline{e}_y \quad (5.44)$$

à laquelle s'ajoute la condition suivante :

$$m^r(x = H) = 0 \quad (5.45)$$

traduisant l'absence de couple appliqué à l'extrémité de la phase renforcement, soit :

$$\begin{cases} \beta^r (r'(x = H) - \omega(x = H)) = -c^p (r(x = H) - m(x = H)) \\ \omega'(x = H) = 0 \end{cases} \quad (5.46)$$

On obtient donc finalement, en combinant (5.36), (5.38), (5.39), (5.43) et (5.46), le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \mu m''(x) + kg\rho^m + c^I (r(x) - m(x)) = 0 \\ \beta^r (r''(x) - \omega'(x)) + kg\rho^r - c^I (r(x) - m(x)) = 0 \\ \gamma^r \omega''(x) + \beta^r (r'(x) - \omega(x)) = 0 \end{cases} \quad (5.47)$$

associé aux conditions aux limites :

$$\begin{cases} m(x = 0) = 0, \quad r(x = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \omega(x = 0) = 0 \\ \mu^m m'(x = H) = (q + kg\rho^g h) + c^p (r(x = H) - m(x = H)) \\ \beta^r (r'(x = H) - \omega(x = H)) = -c^p (r(x = H) - m(x = H)) \\ \omega'(x = H) = 0 \end{cases} \quad (5.48)$$

5.3.4 Résultats

Le système différentiel (5.47) ne peut pas être résolu analytiquement. On va donc se donner un jeu de valeurs pour les paramètres du problème, et effectuer une résolution numérique par la *méthode des différences finies*. Les valeurs numériques choisies sont reportées dans le tableau (5.1).

TAB. 5.1. Couche de sol renforcé - Valeurs numériques des paramètres

Géométrie	épaisseur de la couche de sol	$H=10\text{m}$
	épaisseur du matelas granulaire	$h=1\text{m}$
Chargements	coefficient séisme	$k=0,3$
	charge surfacique	$q=0,01\text{MPa}$
Sol	coefficients de Lamé	$\lambda=2,9\text{MPa}$
		$\mu=1,9\text{MPa}$
	masse volumique	$\rho^s=1800\text{kg/m}^3$
Inclusions (en béton)	rayon	$R=0,175\text{m}$
	espacement	$e=2\text{m}$
	module d'Young	$E^b=30000\text{MPa}$
	masse volumique	$\rho^b=2500\text{kg/m}^3$
Interaction volumique	coefficient d'élasticité	$c^l=0,1\text{MPa/m}^2$
Interaction de "pointe"	coefficient d'élasticité	$c^p=0,1\text{MPa/m}$

Les résultats du calcul numérique sont donnés sur la figure (5.6), où l'on a représenté les déplacements latéraux des phases matrice et renforcement en fonction de la hauteur de couche de sol. On peut observer très nettement deux zones dans le massif :

- Dans la partie base de la couche de sol renforcé ($0 \leq x \leq 8,5\text{m}$), le déplacement latéral de la phase matrice est plus grand que celui de la phase renforcement ($m(x) > r(x)$). Les inclusions y jouent un rôle *actif* en ce sens qu'elles "retiennent" la masse du sol.
- A l'inverse, dans la partie supérieure du massif ($8,5\text{m} \leq x \leq 10\text{m}$), les inclusions viennent en "butée" sur le sol, qui les retient.

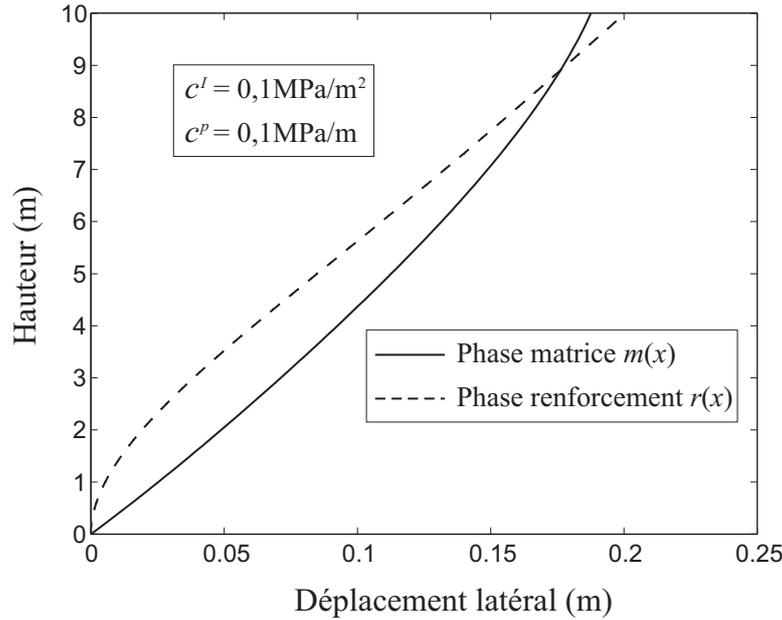


FIG. 5.6. Couche de sol renforcé sous sollicitation sismique pseudo-statique - Déplacements horizontaux des phases matrice et renforcement

Le fait que le sol vienne "buter" sur les renforcements dans la plus grande partie de la couche de sol, tient notamment au fait que la phase matrice est bien soumise à un chargement volumique horizontal d'intensité égale à $k\rho^m g$, tandis que la phase renforcement est soumise au même type de chargement d'intensité $k\rho^r g$. Or, compte tenu des valeurs numériques choisies, et notamment de la valeur très faible de la fraction volumique du renforcement, il apparaît que $\rho^m = (1 - \eta)\rho^s \approx \rho^s = 1800\text{kg/m}^3$, tandis que $\rho^r = \eta\rho^b \approx 60\text{kg/m}^3$. C'est-à-dire que la phase renforcement subit une force volumique horizontale trente fois moindre que celle subie par le sol. Ce qui explique que les renforcements sont beaucoup moins sollicités par le séisme que le sol et ont donc tendance à "retenir" ce dernier par le biais des forces d'interaction volumique et surfacique.

L'étendue de la *zone active* dépend bien évidemment des valeurs des constantes d'interaction volumique c^I et d'interaction de pointe c^p . On représente sur la figure (5.7) les courbes de déplacements latéraux des deux phases, et sur la figure (5.8) les courbes de rotation de la phase renforcement, pour différentes valeurs des constantes d'interaction c^I et c^p .

Il importe de remarquer que, lorsque $c^I \rightarrow \infty$ et $c^p \rightarrow \infty$, on retrouve le *modèle adhérent* pour lequel les deux champs de déplacement latéral $m(x)$ et $r(x)$ sont identiques. Ce cas est traité analytiquement ci-après.

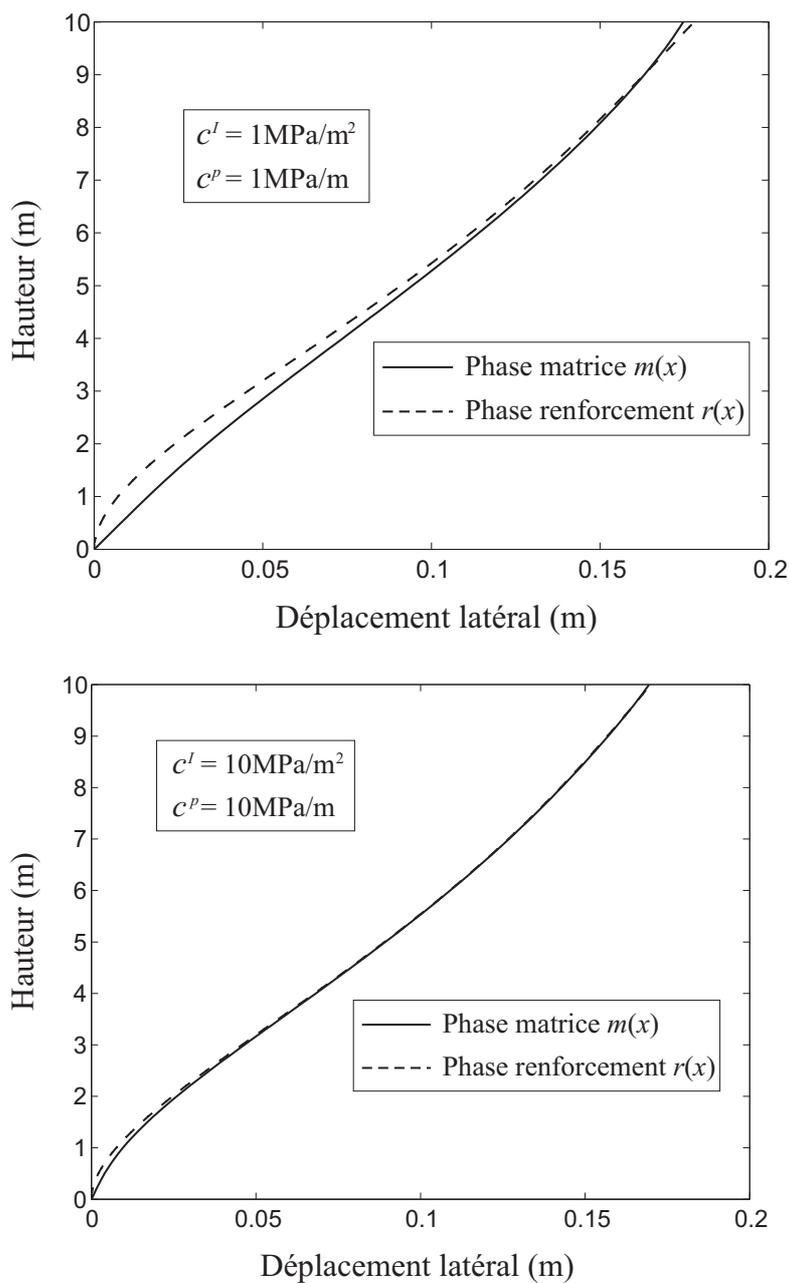


FIG. 5.7. Couche de sol renforcé - Influence des constantes d'interaction c^I et c^P

5.3.5 Solution analytique dans le cas du modèle biphasique adhérent

La condition d'adhérence parfaite conduit à introduire un seul champ de déplacement pour les deux phases, soit $\underline{\xi} = f(x)\underline{e}_y$, ainsi qu'une rotation de la phase renforcement $\underline{\omega}^r = \omega(x)\underline{e}_z$.

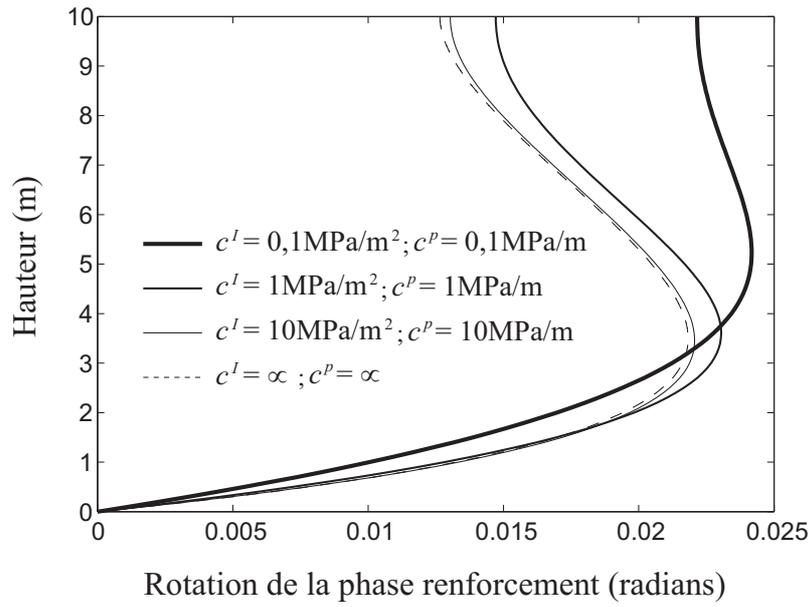


FIG. 5.8. Couche de sol renforcé - Rotation de la phase renforcement pour différentes valeurs de c^I , c^p

Le système général d'équations différentielles (5.47) se réduit alors à :

$$\begin{cases} \mu f''(x) + kg\rho^m + I = 0 \\ \beta^r (f''(x) - \omega'(x)) + kg\rho^r - I = 0 \\ \gamma^r \omega''(x) + \beta^r (f'(x) - \omega(x)) = 0 \end{cases} \quad (5.49)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} f(x=0) = 0 \quad \text{et} \quad \omega(x=0) = 0 \\ \mu f'(x=H) = q + kg\rho^g h + p \\ \beta^r (f'(x=H) - \omega(x=H)) = -p \\ \omega'(x=H) = 0 \end{cases} \quad (5.50)$$

En éliminant l'effort d'interaction I entre les deux premières équations de (5.49) puis en intégrant et en tenant compte de la condition aux limites en $x = H$ obtenue par sommation des équations correspondantes (ce qui permet d'éliminer p), on obtient :

$$\mu f'(x) + \beta^r [f'(x) - \omega(x)] = -kg(\rho^m + \rho^r)x + kg(\rho^m + \rho^r)H + q + kg\rho^g h \quad (5.51)$$

Remplaçant $f'(x)$ par son expression en fonction de $\omega(x)$ et $\omega''(x)$ à partir de la troisième équation du système (5.49), on aboutit à l'équation différentielle suivante en $\omega(x)$:

$$\omega''(x) - \frac{\mu\beta^r}{(\mu + \beta^r)\gamma^r}\omega(x) = -\frac{\beta^r q_{tot}}{(\mu + \beta^r)\gamma^r} \left[-\alpha_0 \frac{x}{H} + (\alpha_0 + 1) \right] \quad (5.52)$$

où

✓ $q_{tot} = (q + kg\rho^g h)$ est la contrainte de cisaillement du sol à la surface supérieure du massif renforcé $x = H$;

✓ $\alpha_0 = \frac{kg(\rho^m + \rho^r)H}{q_{tot}}$ est un facteur sans dimension qui décrit l'intensité du chargement volumique par rapport à celle du chargement en surface.

Il est alors commode d'introduire les *paramètres adimensionnels* suivants (Hassen et de Buhan (2005) [38]) :

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu\beta^r H^2}{(\mu + \beta^r)\gamma^r}} \quad (5.53)$$

et

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\mu + \beta^r}} \quad (5.54)$$

qui caractérisent respectivement, l'influence relative du module de cisaillement de la phase matrice par rapport à la raideur en flexion et au cisaillement de la phase renforcement pour ce qui concerne η_1 , et l'influence relative du module de cisaillement de la phase matrice par rapport au module de cisaillement de la phase renforcement pour η_2 .

L'équation différentielle (5.52) devient, en y substituant l'expression (5.53) du paramètre adimensionnel η_1 :

$$\omega''(x) - \frac{\eta_1^2}{H^2}\omega(x) = -\frac{\eta_1^2}{H^2} \frac{q_{tot}}{\mu} \left[-\alpha_0 \frac{x}{H} + (\alpha_0 + 1) \right] \quad (5.55)$$

En tenant compte des conditions aux limites en rotation en $x = 0$ ($\omega = 0$) et en $x = H$ ($\omega' = 0$), on trouve l'expression de la rotation :

$$\omega(x) = \frac{q_{tot}}{\mu} \left\{ \begin{array}{l} -\alpha_0 \frac{x}{H} + (\alpha_0 + 1) - (\alpha_0 + 1) \cos\left(\frac{\eta_1 x}{H}\right) \\ + \left(\frac{\alpha_0 + (\alpha_0 + 1)\eta_1 \sinh(\eta_1)}{\eta_1 \cosh(\eta_1)} \right) \sinh\left(\frac{\eta_1 x}{H}\right) \end{array} \right\} \quad (5.56)$$

En injectant cette expression dans la troisième équation du système (5.49) et en utilisant la condition aux limites en déplacement en $x = 0$ ($f = 0$), on trouve l'expression du déplacement qui fait intervenir le paramètre adimensionnel η_2 :

$$f(x) = \frac{q_{tot}H}{\mu} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\alpha_0}{2} \left(\frac{x}{H}\right)^2 + (\alpha_0 + 1) \frac{x}{H} - \frac{\alpha_0 + 1}{\eta_1} (1 - \eta_2^2) \sinh\left(\frac{\eta_1 x}{H}\right) \\ + \left(\frac{\alpha_0 + (\alpha_0 + 1)\eta_1 \sinh(\eta_1)}{\eta_1^2 \cosh(\eta_1)} \right) (1 - \eta_2^2) \left(\cosh\left(\frac{\eta_1 x}{H}\right) - 1 \right) \end{array} \right\} \quad (5.57)$$

La figure (5.9) représente les profils de déplacement de la phase matrice $m(x)$ et de la phase renforcement $r(x)$ pour le modèle général (avec $c^I = 0, 1\text{MPa/m}^2$ et $c^P = 0, 1\text{MPa/m}$) et celui du déplacement $f(x)$ obtenu par le modèle adhérent.

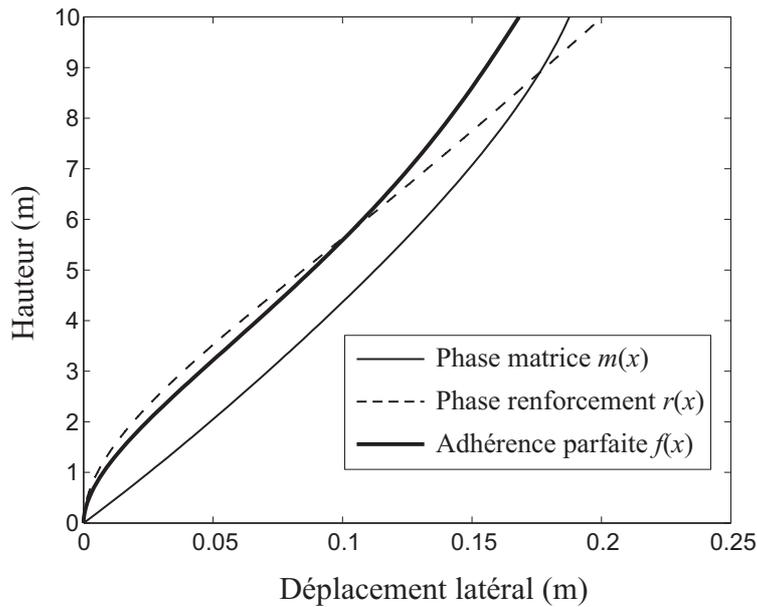


FIG. 5.9. Couche de sol renforcé - Comparaison du modèle général et adhérent

5.4 Validation du modèle biphasique général et identification des coefficients d'interaction

On se propose de valider le modèle biphasique général à partir d'une comparaison entre les résultats de la section précédente et ceux provenant d'une simulation numérique par éléments finis du même problème, dans lequel les inclusions de renforcement sont modélisées comme des éléments cylindriques placés au sein du sol (figure (5.10)). Cette comparaison nous permettra d'identifier les coefficients d'interaction c^I et c^p du modèle biphasique.

Une telle comparaison repose sur le fait que la valeur des déplacements latéraux respectifs des phases matrice et renforcement à la hauteur x peut être évaluée comme la moyenne calculée sur la section droite de la *cellule élémentaire représentative du sol renforcé* (figure (5.10)), de la distribution des déplacements latéraux du sol et de l'inclusion de renforcement à cette même hauteur x .

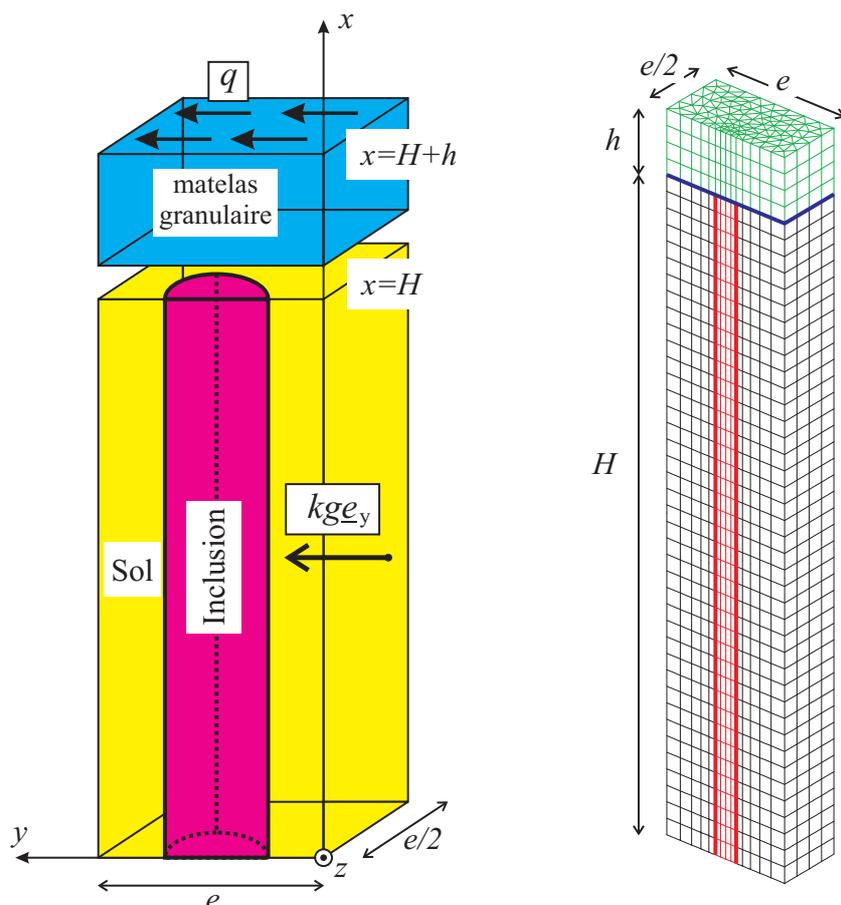


FIG. 5.10. Maillage par éléments finis de la moitié de la cellule élémentaire de sol renforcé

Ce que l'on peut écrire :

$$m(x) = \frac{1}{|A^s|} \int_{A^s} \xi_y(x, y, z) dy dz \quad (5.58)$$

et

$$r(x) = \frac{1}{|A^r|} \int_{A^r} \xi_y(x, y, z) dy dz \quad (5.59)$$

où $A^s(x)$ et $A^r(x)$ désignent respectivement les sections transversales à la hauteur x des parties de la cellule occupées par le sol et l'inclusion. En pratique, compte tenu des symétries du problème, cette opération de moyenne des déplacements est réalisée à partir de l'exploitation des résultats des calculs par éléments finis effectuée sur la moitié de la cellule élémentaire de sol renforcé. Cette dernière est soumise à une distribution de forces volumiques horizontales ($kg\mathbf{e}_y$), ainsi qu'à une distribution d'effort surfacique horizontal ($\sigma_{xy}(x = H + h) = q$) correspondant au chargement sismique (voir la partie gauche de la figure (5.10)), avec des conditions aux limites appropriées suivantes :

- Faces $z = 0, -e/2$ en contact sans frottement avec les plans fixes correspondants.
- Condition de *périodicité* des déplacements en deux points homologues situés sur les faces $y = 0$ et $y = e$.

Une simulation numérique à l'aide du code des éléments finis Castem 3D est faite avec les mêmes paramètres géométriques et mécaniques que ceux décrits dans la section précédente (tableau (5.1)). La structure, maillée par des éléments prismatiques à 15 nœuds (PR15), est représentée sur la partie droite de la figure (5.10).

La figure (5.11) représente d'une part la déformée de la structure due à l'application du chargement sismique (partie gauche), d'autre part les isovaleurs du déplacement latéral (ξ_y) de la structure dans le plan (Oxy) (partie droite).

Vingt paliers de mesure répartis sur toute la hauteur de la cellule sont définis au sein du maillage, où sont calculés la moyenne des déplacements latéraux dans le sol et dans l'inclusion par intégration numérique des équations (5.58) et (5.59). La figure (5.12) montre les profils de déplacement latéral des phases matrice et renforcement en fonction de la hauteur, déterminés par la simulation numérique directe Castem 3-D (points "carrés" et "circulaires") et par le modèle biphasique adhérent (ligne continue).

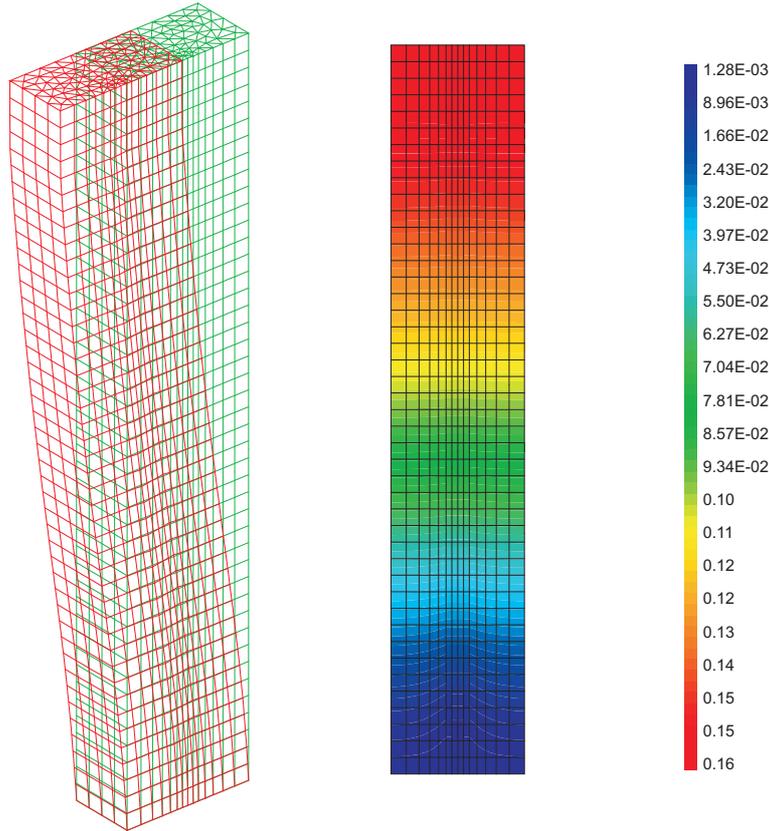


FIG. 5.11. Déformée et isovalues du champ des déplacements latéraux de la structure

On observe clairement que, hormis dans la partie basse de la couche de sol renforcée, les déplacements latéraux moyens du sol et du renforcement sont quasiment identiques. Cela signifie que l'hypothèse d'adhérence parfaite entre phases est ainsi validée, ainsi que le confirme la courbe correspondante reportée sur la même figure, même si la modélisation biphasique adhérente a tendance à surestimer légèrement le déplacement latéral dans la partie supérieure de la couche.

La conclusion pratique de ce qui précède est que, s'il convient bien de prendre en compte une interaction "longitudinale" (c'est-à-dire dans la direction des renforcements) entre les phases matrice et renforcement, comme cela a été démontré par Cartiaux et al. (2007) [12] et tout récemment par Hassen et al. (2009) [40] dans le cas d'un chargement vertical, on peut considérer qu'il y a adhérence parfaite "transversale" entre ces mêmes phases, c'est-à-dire que le déplacement relatif entre phases est de la forme :

$$\Delta \underline{\xi} = \Delta \xi_x \underline{e}_x \quad (5.60)$$

ou encore de façon équivalente que le tenseur des coefficients d'interaction est de la forme :

$$\underline{\underline{c}}^I = c_{xx}^I \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + c_{yy}^I \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + c_{zz}^I \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (5.61)$$

où les termes d'interaction "transversale" c_{yy}^I et c_{zz}^I sont infinis, c'est-à-dire en pratique beaucoup plus grands que le coefficient d'interaction "longitudinale" c_{xx}^I .

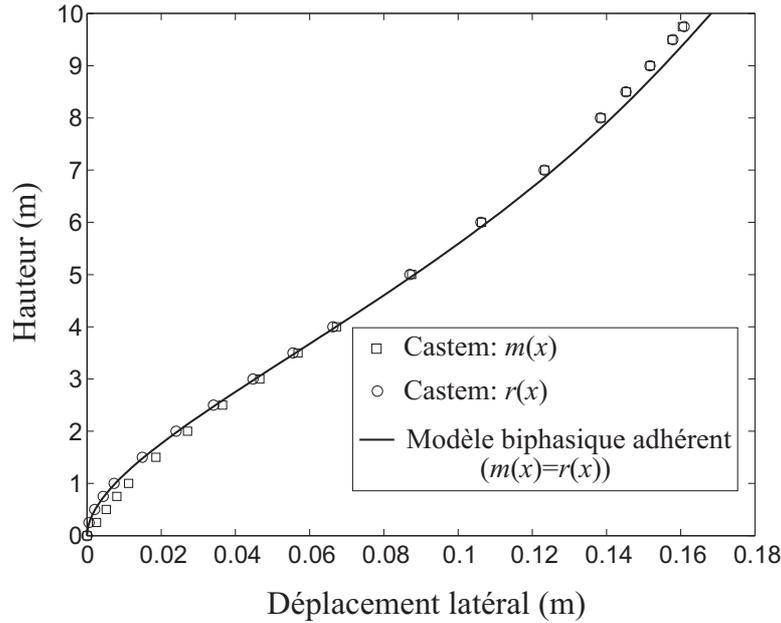


FIG. 5.12. Comparaison du modèle biphasique adhérent et de la simulation directe par éléments finis

5.5 Conclusions

Le modèle multiphasique présenté dans ce chapitre, permettant de rendre compte des effets de flexion et de cisaillement des inclusions de renforcement, apparaît comme une généralisation du modèle développé au chapitre 2 et qui est destiné à l'analyse du comportement macroscopique d'ouvrages renforcés par inclusions souples. Outre les efforts du type cisaillement et flexion dans la phase renforcement, un autre type d'effort a été introduit et baptisé "effort de pointe", permettant de prendre en compte de la façon dont se transmettent les efforts aux têtes des inclusions. La loi de comportement associée à cet effort est ainsi identifiée et la raideur correspondante c^P ainsi que le coefficient d'interaction volumique c^I sont calculés à partir d'un calcul élastique par éléments finis sur une cellule élémentaire représentative du sol renforcé.

Le chapitre suivant sera dédié à la mise en œuvre numérique du modèle multiphasique général présenté ici dans le cadre de la méthode des éléments finis et à l'application du code de calcul obtenu à l'analyse de la stabilité d'ouvrages renforcés par inclusions rigides.

Chapitre 6

Mise au point d'un code de calcul biphasique général en élasticité linéaire et application

6.1 Introduction

La première partie de ce chapitre est consacrée à la mise en œuvre numérique du modèle biphasique général que nous avons présenté dans le chapitre précédent, en élasticité linéaire, dans le cadre de la méthode des éléments finis.

Partant du principe du minimum de l'énergie potentielle d'un système en milieu biphasique, une formulation variationnelle est établie. Cette formulation est discrétisée et mise en œuvre numériquement.

La dernière partie de ce chapitre porte sur l'application du code de calcul ainsi développé d'un problème de dimensionnement d'une fondation renforcée par inclusions rigides, soumise à un chargement sismique.

6.2 Méthode variationnelle pour le milieu biphasique élastique

La méthode variationnelle sur les déplacements pour le milieu biphasique élastique, sous l'hypothèse de déformations planes, consiste à rechercher les solutions en déplacement des deux phases $(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r)$ et en rotation de la phase renforcement ω^r , en minimisant

une fonctionnelle scalaire quadratique sur l'espace des champs de déplacements-rotations cinématiquement admissibles (\mathcal{CA}).

La minimisation de cette fonctionnelle assure alors le caractère statiquement admissible des champs de contrainte $\{\underline{\underline{\sigma}}^m; (n^r, v^r, m^r); \underline{I}\}$.

6.2.1 Energie potentielle d'un milieu biphasique

L'énergie potentielle d'un milieu biphasique est une fonction des champs de déplacement $\underline{\underline{\xi}}^m$ et $\underline{\underline{\xi}}^r$ des deux phases et du champ de rotation ω^r de la phase renforcement. Elle s'écrit dans le cas général : (Sudret (1999) [69])

$$\mathcal{E}(\underline{\underline{\xi}}^m, \underline{\underline{\xi}}^r, \omega^r) = W(\underline{\underline{\xi}}^m, \underline{\underline{\xi}}^r, \omega^r) - \Phi(\underline{\underline{\xi}}^m, \underline{\underline{\xi}}^r, \omega^r) \quad (6.1)$$

où W est l'énergie de déformation du milieu biphasique et Φ est le potentiel des efforts extérieurs donnés qui lui sont appliqués, soit :

$$W(\underline{\underline{\xi}}^m, \underline{\underline{\xi}}^r, \omega^r) = \int_{\Omega} \Psi(\underline{\underline{\xi}}^m, \underline{\underline{\xi}}^r, \omega^r) d\Omega + \int_{\Sigma} \Psi^p(\Delta \underline{\underline{\xi}}) d\Sigma \quad (6.2)$$

et

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{\underline{\xi}}^m, \underline{\underline{\xi}}^r, \omega^r) &= \int_{\Omega} (\rho^m \underline{F}^m \cdot \underline{\underline{\xi}}^m + \rho^r \underline{F}^r \cdot \underline{\underline{\xi}}^r) d\Omega + \int_{\partial\Omega_T^m} \underline{T}_d^m \cdot \underline{\underline{\xi}}^m dS \\ &+ \int_{\partial\Omega_T^r} \underline{T}_d^r \cdot \underline{\underline{\xi}}^r dS + \int_{\partial\Omega_C} C_d^r \omega^r dS \end{aligned} \quad (6.3)$$

où $\partial\Omega_T^m$ (resp. $\partial\Omega_T^r$) est la partie du bord $\partial\Omega$ de la structure sur laquelle sont données les densités surfaciques d'efforts appliquées à la phase matrice (resp. à la phase renforcement), tandis que $\partial\Omega_C$ désigne la partie du bord $\partial\Omega$ où sont données les densités de couples appliquées à la phase renforcement. Σ représente la surface où se manifeste l'interaction "de pointe" (voir §5.2).

Ψ désigne la densité volumique d'énergie libre du système biphasique, qui s'écrit comme la somme des énergies libres des deux phases et de leur interaction volumique, soit avec les notations introduites au chapitre 5 :

$$\Psi = \Psi^m(\underline{\underline{\xi}}^m) + \Psi^r(\varepsilon^r, \theta^r, \chi^r) + \Psi^I(\Delta \underline{\underline{\xi}}) \quad (6.4)$$

– Ψ^m est la *densité volumique d'énergie libre de la phase matrice* donnée par :

$$\Psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{C}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m \quad (6.5)$$

– Ψ^r est la *densité volumique d'énergie libre de la phase renforcement*, elle s'écrit :

$$\Psi^r(\varepsilon^r, \theta^r, \chi^r) = \frac{1}{2} (\alpha^r (\varepsilon^r)^2 + \beta^r (\theta^r)^2 + \gamma^r (\chi^r)^2) \quad (6.6)$$

– Ψ^I est la *densité d'énergie libre d'interaction volumique* donnée par :

$$\Psi^I(\Delta \underline{\underline{\xi}}) = \frac{1}{2} \Delta \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{c}}^I \cdot \Delta \underline{\underline{\xi}} \quad (6.7)$$

Par ailleurs, Ψ^p est la *densité surfacique d'énergie libre d'interaction surfacique* (ou "de pointe") définie en tout point de Σ , donnée par :

$$\Psi^p(\Delta \underline{\underline{\xi}}) = \frac{1}{2} \Delta \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{c}}^p \cdot \Delta \underline{\underline{\xi}} \quad \text{sur } \Sigma \quad (6.8)$$

Compte tenu des expressions du potentiel des efforts extérieurs et des énergies libres des phases matrice et renforcement ainsi que de leurs interactions, l'énergie potentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\underline{\underline{\xi}}^m, \underline{\underline{\xi}}^r, \omega^r) = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{C}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^m + \alpha^r (\varepsilon^r)^2 + \beta^r (\theta^r)^2 + \gamma^r (\chi^r)^2 + \Delta \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{c}}^I \cdot \Delta \underline{\underline{\xi}} \right] d\Omega + \int_{\Sigma} \frac{1}{2} \Delta \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{c}}^p \cdot \Delta \underline{\underline{\xi}} d\Sigma \\ & - \int_{\Omega} (\rho^m \underline{\underline{F}}^m \cdot \underline{\underline{\xi}}^m + \rho^r \underline{\underline{F}}^r \cdot \underline{\underline{\xi}}^r) d\Omega - \int_{\partial\Omega_T^m} \underline{\underline{T}}_d^m \cdot \underline{\underline{\xi}}^m dS - \int_{\partial\Omega_T^r} \underline{\underline{T}}_d^r \cdot \underline{\underline{\xi}}^r dS - \int_{\partial\Omega_C} C_d^r \omega^r dS \end{aligned} \quad (6.9)$$

6.2.2 Principe du minimum de l'énergie potentielle

Comme dans le cas de la modélisation biphasique prenant en compte les effets de flexion et de cisaillement des renforcements pour des ouvrages renforcés par inclusions

”rigides”, la fonctionnelle *énergie potentielle* définie par (6.9) vérifie le principe de minimum suivant (voir Hassen et de Buhan (2006) [39] pour plus de détails) :

Soit $(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r, \omega^r)$ la *solution en déplacement-rotation* du problème d'élasticité, alors :

$$\forall (\underline{\xi}^{m'}, \underline{\xi}^{r'}, \omega^{r'}) \in \mathcal{C.A.} \quad \mathcal{E}(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r, \omega^r) \leq \mathcal{E}(\underline{\xi}^{m'}, \underline{\xi}^{r'}, \omega^{r'}) \quad (6.10)$$

où $\mathcal{C.A.}$ désigne l'ensemble des champs de déplacement-rotation *cinématiquement admissibles* pour le problème :

$$\mathcal{C.A.} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\xi}^{m'} = \underline{\xi}_d^m \quad \text{sur} \quad \partial\Omega^m \setminus \partial\Omega_T^m \\ (\underline{\xi}^{m'}, \underline{\xi}^{r'}, \omega^{r'}) ; \quad \underline{\xi}^{r'} = \underline{\xi}_d^r \quad \text{sur} \quad \partial\Omega^r \setminus \partial\Omega_T^r \\ \omega^{r'} = \omega_d^r \quad \text{sur} \quad \partial\Omega^r \setminus \partial\Omega_C^r \end{array} \right\} \quad (6.11)$$

6.2.3 Formulation variationnelle

La recherche de la solution d'un problème d'élasticité revient, de part le principe du minimum établi ci-dessus, à la recherche du *minimum de l'énergie potentielle* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r, \omega^r) \in \mathcal{C.A.} \quad \text{tel que :} \\ \forall (\underline{\xi}^{m'}, \underline{\xi}^{r'}, \omega^{r'}) \in \mathcal{C.A.} : \mathcal{E}(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r, \omega^r) \leq \mathcal{E}(\underline{\xi}^{m'}, \underline{\xi}^{r'}, \omega^{r'}) \end{array} \right. \quad (6.12)$$

qui est équivalente à la recherche de la solution du *problème variationnel* suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r, \omega^r) \in \mathcal{C.A.} \quad \text{tel que :} \\ \forall (\underline{\xi}^{m'}, \underline{\xi}^{r'}, \omega^{r'}) \in \mathcal{C.A.} : a\left((\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r, \omega^r), (\underline{\xi}^{m'}, \underline{\xi}^{r'}, \omega^{r'})\right) = \Phi(\underline{\xi}^{m'}, \underline{\xi}^{r'}, \omega^{r'}) \end{array} \right. \quad (6.13)$$

où $a(.,.)$ est la *forme bilinéaire associée à la forme quadratique* définie par la fonctionnelle énergie potentielle, elle s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
a\left(\left(\underline{\xi}^m, \underline{\xi}^r, \omega^r\right), \left(\underline{\xi}^{m'}, \underline{\xi}^{r'}, \omega^{r'}\right)\right) = \\
\int_{\Omega} \left[\underline{\underline{\varepsilon}}^m : \underline{\underline{C}}^m : \underline{\underline{\varepsilon}}^{m'} + \varepsilon^r \alpha^r \varepsilon^{r'} + \theta^r \beta^r \theta^{r'} + \chi^r \gamma^r \chi^{r'} + \Delta \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{c}}^I \cdot \Delta \underline{\underline{\xi}}' \right] d\Omega + \int_{\Sigma} \Delta \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{c}}^p \cdot \Delta \underline{\underline{\xi}}' d\Sigma
\end{aligned} \tag{6.14}$$

et $\Phi(.,.)$ est la *forme linéaire* exprimant le travail des efforts extérieurs :

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\underline{\xi}^{m'}, \underline{\xi}^{r'}, \omega^{r'}\right) = \int_{\Omega} \left(\rho^m \underline{F}^m \cdot \underline{\xi}^{m'} + \rho^r \underline{F}^r \cdot \underline{\xi}^{r'} \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega_T^m} \underline{T}_d^m \cdot \underline{\xi}^{m'} dS \\
+ \int_{\partial\Omega_T^r} \underline{T}_d^r \cdot \underline{\xi}^{r'} dS + \int_{\partial\Omega_C} C_d^r \omega^{r'} dS
\end{aligned} \tag{6.15}$$

6.3 Formulation éléments finis appliquée au modèle biphasique général

La recherche de la solution d'un problème d'élasticité par éléments finis consiste à trouver les champs de déplacement-rotation qui minimisent la fonctionnelle énergie potentielle sur un *espace d'approximation inclus dans l'ensemble des champs cinématiquement admissibles*, ou d'une manière équivalente à résoudre le problème variationnel (6.13) sur cet espace d'approximation.

L'espace d'approximation est déterminé par la discrétisation géométrique de la structure en éléments finis (maillage), la donnée du degré d'approximation polynomiale n des champs sur chaque élément fini et l'ordre de la continuité de l'approximation (voir Hassen (2006) [37] pour plus de détails).

6.3.1 Maillage

On se limitera dans ce qui suit au cas d'un milieu renforcé par une seule famille d'inclusions de renforcement parallèles à la direction Ox , sollicité en *déformations planes* dans le plan (Oxy) . On discrétise la structure en réalisant un maillage unique pour les deux phases comprenant N_e éléments polygonaux \mathcal{V}_e constituant une partition du domaine Ω occupé par la structure.

En tenant compte de la conclusion tirée au chapitre précédent concernant la forme du déplacement relatif entre la phase matrice et la phase renforcement (voir l'équation (5.60)), les seuls degrés de liberté d'un tel système sont donc les trois déplacements des phases $(\xi_x^m, \xi_y, \xi_x^r)$ dans le plan et la rotation (ω^r) autour de l'axe (Oz) . Le couple de déplacements-rotation peut s'écrire sous la forme d'un vecteur $\{\xi\}$ que l'on appelle vecteur déplacement généralisé :

$$\{\xi\}(x, y) = \begin{pmatrix} \xi_x^m(x, y) \\ \xi_y(x, y) \\ \xi_x^r(x, y) \\ \omega^r(x, y) \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

Ainsi, chaque nœud du maillage a *quatre degrés de liberté* : ξ_x^m, ξ_y, ξ_x^r et ω^r qui sont les variables nodales.

Pour chaque élément \mathcal{V}_e à n_e nœuds, on définit *le vecteur des déplacements-rotations nodaux* $\{u_e\}$ suivant :

$${}^t \{u_e\} = \{\xi_{x,1}^m, \xi_{y,1}, \xi_{x,1}^r, \omega_1^r; \dots; \xi_{x,n_e}^m, \xi_{y,n_e}, \xi_{x,n_e}^r, \omega_{n_e}^r\} \quad (6.17)$$

qui comporte $4n_e$ composantes.

6.3.2 Approximation des champs de déplacement et de rotation

Les champs de déplacement et de rotation sont continus sur chaque élément et aux nœuds. Les expressions littérales des champs de déplacement et de rotation peuvent être retrouvées à partir du vecteur des déplacements et rotations élémentaires et de la matrice des fonctions de forme par la relation :

$$\{\xi\}(x, y)|_{\mathcal{V}_e} = [N]_e(x, y) \cdot \{u_e\} \quad (6.18)$$

avec

$$[N]_e(x, y) = \left[\dots \begin{pmatrix} N_k(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_k(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_k(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_k(x, y) \end{pmatrix} \dots \right] \quad (6.19)$$

où $N_k(x, y)$ est le polynôme de degré n tel que :

$$N_k(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{au noeud } k \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad k = 1, \dots, n_e \quad (6.20)$$

les polynômes d'interpolation peuvent facilement se calculer sur chaque élément en fonction des coordonnées de ses nœuds, mais par souci d'optimisation des programmes de calcul, ils sont calculés sur l'*élément de référence* associé aux éléments finis employés, puis transformés pour obtenir les polynômes d'interpolation de l'élément donné .

Désignant par τ_e la transformation géométrique permettant de passer de l'élément de référence \mathcal{V}_R à l'élément réel \mathcal{V}_e :

$$\tau_e : (\xi, \eta) \rightarrow (x, y) \quad (6.21)$$

on introduit la matrice jacobienne de la transformation τ_e :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

et le jacobien de la transformation :

$$J = \det [J] > 0 \quad (6.23)$$

Les dérivées des fonctions de forme peuvent aussi être calculées à partir des dérivées des fonctions de forme définies sur l'élément de référence par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_k}{\partial x} = \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} = \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{array} \right. \quad (6.24)$$

L'intégration des fonctions de formes sur un élément quelconque peut ainsi être calculée sur l'élément de référence par :

$$\int_{\nu_e} N_i(x, y) dx dy = \int_{\nu_R} N_i(\xi, \eta) J d\xi d\eta \quad (6.25)$$

où ν_e désigne un élément réel quelconque.

A ce stade, la description des *éléments finis biphasiques* adoptés est achevée. On explique ci-après la démarche de la résolution par la méthode des éléments finis biphasiques inspirée de la méthode des éléments finis classiques. Le lecteur trouvera le détail du fondement de la dite méthode dans la littérature (Dhatt et Touzot (1984) [28]). On se contentera, dans le cadre de ce mémoire, de souligner les spécificités liées au traitement d'un système en milieu biphasique.

6.3.3 Principe du minimum discrétisé

La discrétisation du principe du minimum consiste à restreindre la recherche du minimum de la fonctionnelle \mathcal{E} (définie par équation (6.9)) à un sous-ensemble \mathcal{CA}_n des vecteurs $\{U\}$ des déplacement-rotations nodaux cinématiquement admissibles pour toute la structure Ω . La construction de sous-ensembles de minimisation \mathcal{CA}_n s'appuie sur la discrétisation de la géométrie du système décrite dans les sections précédentes et du degré d'interpolation.

En décomposant les intégrales sur les éléments du maillage, l'énergie potentielle discrétisée $\mathcal{E}_n(\{U\})$ (restriction de la fonctionnelle \mathcal{E} à \mathcal{CA}_n) s'exprime par :

$$\mathcal{E}_n(\{U\}) = W|_{\mathcal{CA}_n}(\{U\}) - \Phi|_{\mathcal{CA}_n}(\{U\}) \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned}
W_{|C\mathcal{A}_n}(\{U\}) &= \sum_{e=1}^{N_e} \left(\int_{\nu_e} [\Psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) + \Psi^r(\varepsilon^r, \theta^r, \chi^r) + \Psi^I(\Delta\underline{\underline{\xi}})] d\Omega + \int_{\nu_e \cap \Sigma} \Psi^p(\Delta\underline{\underline{\xi}}) d\Sigma \right) \\
&= \sum_{e=1}^{N_e} (\psi_e(\{u_e\}) + \psi_e^p(\{u_e\}))
\end{aligned} \tag{6.27}$$

$$\Phi_{|C\mathcal{A}_n}(\{U\}) = \sum_{e=1}^{N_e} \phi_e(\{u_e\}) \tag{6.28}$$

avec

$$\begin{aligned}
\phi_e(\{u_e\}) &= \int_{\nu_e} (\rho^m \underline{F}^m \cdot \underline{\xi}^m + \rho^r \underline{F}^r \cdot \underline{\xi}^r) d\omega + \int_{\nu_e \cap \partial\Omega_T^m} \underline{T}_d^m \cdot \underline{\xi}^m ds \\
&\quad + \int_{\nu_e \cap \partial\Omega_T^r} \underline{T}_d^r \cdot \underline{\xi}^r ds + \int_{\nu_e \cap \partial\Omega_C} C_d^r \omega^r ds
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Le terme $\psi_e(\{u_e\})$ de l'équation (6.27) est l'intégrale volumique sur l'élément ν_e de la densité d'énergie libre du système biphasique, elle est la somme de trois termes relatifs aux phases matrice et renforcement ainsi qu'à leur interaction volumique, soit :

$$\psi_e(\{u_e\}) = \psi_e^m(\{u_e\}) + \psi_e^r(\{u_e\}) + \psi_e^I(\{u_e\}) \tag{6.30}$$

Par ailleurs, $\psi_e^p(\{u_e\})$ est une intégrale surfacique sur la surface $(\nu_e \cap \Sigma)$ de la densité d'énergie libre d'interaction "de pointe" entre les phases matrice et renforcement.

Afin de simplifier la représentation de densités d'énergie libre du système biphasique général sous forme matricielle, on introduit les vecteurs contraintes *généralisées* suivants :

$${}^t\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}^m, \sigma_{yy}^m, \sigma_{zz}^m, \sigma_{xy}^m, n^r, v^r, m^r, I\} \quad \text{et} \quad \{p\} \tag{6.31}$$

où I est la composante suivant Ox de la densité d'efforts d'interaction volumique \underline{I} ($\underline{I} = I_x \underline{e}_x + I_y \underline{e}_y + I_z \underline{e}_z$), tandis que p est la composante suivant Ox de la densité d'efforts d'interaction surfacique \underline{p} , localisés au niveau de la surface Σ ($\underline{p} = p_x \underline{e}_x + p_y \underline{e}_y + p_z \underline{e}_z$) (voir §5.2.3).

les vecteur déformations *généralisées* associés sont introduits comme suit :

$${}^t\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, \varepsilon^r, \theta^r, \chi^r, \Delta\} \quad \text{et} \quad \{\Delta^p\} \quad (6.32)$$

où Δ et Δ^p sont les composantes suivant Ox des déplacements relatifs entre phases, qui sont définies comme suit :

$$\Delta = \xi_x^r - \xi_x^m \quad (6.33)$$

et

$$\Delta^p = \begin{cases} \Delta & \text{sur } \Sigma \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6.34)$$

de sorte que le comportement élastique du système peut être exprimé par :

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} \quad \text{et} \quad \{p\} = [c^p] \cdot \{\Delta^p\} \quad (6.35)$$

où $[D]$ désigne la *matrice d'élasticité généralisée* :

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda^m + 2\mu^m & \lambda^m & \lambda^m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m & \lambda^m + 2\mu^m & \lambda^m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^m & \lambda^m & \lambda^m + 2\mu^m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^I \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

et $[c^p]$ est une matrice à une seule composante c^p .

En adoptant ces notations matricielles, il vient :

$$\begin{cases} \Psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) + \Psi^r(\varepsilon^r, \theta^r, \chi^r) + \Psi^I(\Delta) = \frac{1}{2} {}^t\{\varepsilon\} \cdot [D] \cdot \{\varepsilon\} \\ \Psi^p(\Delta^p) = \frac{1}{2} \{\Delta^p\} \cdot [c^p] \cdot \{\Delta^p\} \end{cases} \quad (6.37)$$

Les déformations généralisées s'écrivent, en fonction des champs de déplacements-rotation par élément, comme suit :

$$\{\varepsilon\}(x, y) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^m \\ \varepsilon_{yy}^m \\ \varepsilon_{zz}^m \\ 2\varepsilon_{xy}^m \\ \varepsilon^r \\ \theta^r \\ \chi^r \\ \Delta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_x^m \\ \xi_y \\ \xi_x^r \\ \omega^r \end{pmatrix} = [L] \cdot \{\xi\}(x, y) \quad (6.38)$$

et

$$\{\Delta^p\}(x, y) = [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot \{\xi\}(x, y) = [L^p] \cdot \{\xi\}(x, y) \quad (6.39)$$

soit compte tenu de (6.18) :

$$\begin{cases} \{\varepsilon\}(x, y) = [L] \cdot [N]_e(x, y) \cdot \{u_e\} = [B]_e \cdot \{u_e\} \\ \{\Delta^p\}(x, y) = [L^p] \cdot [N]_e(x, y) \cdot \{u_e\} = [B]_e^p \cdot \{u_e\} \end{cases} \quad (6.40)$$

où $[B]_e$ est une matrice formée de n_e matrice $[B]_k$ de taille (8 x 4) :

$$[B]_e = [\dots, [B]_k, \dots] \quad k = 1, \dots, n_e \quad (6.41)$$

avec d'après (6.19) :

$$[B]_k = \begin{bmatrix} N_{k,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{k,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{k,y} & N_{k,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{k,x} & 0 \\ 0 & N_{k,x} & 0 & -N_k \\ 0 & 0 & 0 & N_{k,x} \\ -N_{k,x} & 0 & N_{k,x} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

tandis que $[B]_e^p$ est une matrice formée de n_e matrice $[B]_k^p$ de taille (1 x 4) :

$$[B]_e^p = [\dots, [B]_k^p, \dots] \quad k = 1, \dots, n_e \quad (6.43)$$

avec

$$[B]_k^p = \begin{bmatrix} -N_{k,x} & 0 & N_{k,x} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

où les expressions de $N_{k,x} = \frac{\partial N_k}{\partial x}$ et $N_{k,y} = \frac{\partial N_k}{\partial y}$ sont données par (6.24).

En substituant (6.40) dans (6.37), on trouve l'expression matricielle de la densité volumique d'énergie libre du système biphasique et la densité surfacique d'énergie libre de l'interaction "de pointe" :

$$\begin{cases} \Psi^m(\underline{\underline{\varepsilon}}^m) + \Psi^r(\varepsilon^r, \theta^r, \chi^r) + \Psi^I(\Delta) = \frac{1}{2} {}^t \{u_e\} \cdot {}^t [B]_e \cdot [D] \cdot [B]_e \cdot \{u_e\} \\ \Psi^p(\Delta^p) = \frac{1}{2} {}^t \{u_e\} \cdot {}^t [B]_e^p \cdot [c^p] \cdot [B]_e^p \cdot \{u_e\} \end{cases} \quad (6.45)$$

6.3.4 Formes intégrales élémentaires

- **Matrice de rigidité élémentaire** : pour exprimer la forme intégrale de l'énergie élastique élémentaire, on reporte (6.45) dans (6.27). Il vient :

$$\psi_e(\{u_e\}) + \psi_e^p(\{u_e\}) = \frac{1}{2} {}^t\{u_e\} \cdot \left[\int_{\nu_e} {}^t[B]_e \cdot [D] \cdot [B]_e \, d\Omega + \int_{\nu_e \cap \Sigma} {}^t[B]_e^p \cdot [C^p] \cdot [B]_e^p \, d\Sigma \right] \cdot \{u_e\} \quad (6.46)$$

Si l'on écrit cette énergie élastique élémentaire sous la forme :

$$\psi_e(\{u_e\}) + \psi_e^p(\{u_e\}) = \frac{1}{2} {}^t\{u_e\} \cdot [k_e] \cdot \{u_e\} \quad (6.47)$$

où $[k_e]$ est la matrice de rigidité élémentaire donnée par :

$$[k_e] = \int_{\nu_e} {}^t[B]_e \cdot [D] \cdot [B]_e \, d\Omega + \int_{\nu_e \cap \Sigma} {}^t[B]_e^p \cdot [C^p] \cdot [B]_e^p \, d\Sigma \quad (6.48)$$

• **Vecteur force élémentaire** : en ce qui concerne les efforts extérieurs, on associe aux densités volumiques et surfaciques d'efforts extérieurs, ainsi que la densité de couple intervenant dans (6.29) les vecteurs : $\underline{\rho F}$, \underline{T}^m , \underline{T}^r et \underline{C}^r , définis par :

$${}^t\underline{\rho F} = \{ \rho^m F_x^m, \rho^m F_y^m, 0, 0 \} \quad (6.49)$$

$${}^t\underline{T}^m = \{ T_x^{m,d}, T_y^{m,d}, 0, 0 \} \quad (6.50)$$

$${}^t\underline{T}^r = \{ 0, T_y^{r,d}, T_x^{r,d}, 0 \} \quad (6.51)$$

$${}^t\underline{C}^r = \{ 0, 0, 0, C^{r,d} \} \quad (6.52)$$

La contribution élémentaire $\phi(\{u_e\})$ à l'énergie potentielle prend alors la forme :

$$\phi(\{u_e\}) = {}^t\{u_e\} \cdot \left[\int_{\nu_e} {}^t[N]_e \cdot \underline{\rho F} \, d\Omega + \int_{\nu_e \cap \partial\Omega_T^m} {}^t[N]_e \cdot \underline{T}^m \, dS + \int_{\nu_e \cap \partial\Omega_T^r} {}^t[N]_e \cdot \underline{T}^r \, dS + \int_{\nu_e \cap \partial\Omega_C} {}^t[N]_e \cdot \underline{C}^r \, dS \right] \quad (6.53)$$

On définit alors :

◇ le vecteur force élémentaire associé aux forces volumiques sur \mathcal{V}_e :

$$\{f_e^V\} = \int_{\nu_e} {}^t [N]_e \cdot \underline{\rho F} d\Omega \quad (6.54)$$

◇ le vecteur force élémentaire associé aux forces surfaciques données :

$$\{f_e^{S_T}\} = \int_{\nu_e \cap \partial\Omega_T^m} {}^t [N]_e \cdot \underline{T}^m dS + \int_{\nu_e \cap \partial\Omega_T^r} {}^t [N]_e \cdot \underline{T}^r dS \quad (6.55)$$

◇ le vecteur force élémentaire associé à la densité de couples pour la seule phase renforcement :

$$\{f_e^{S_C}\} = \int_{\nu_e \cap \partial\Omega_C} {}^t [N]_e \cdot \underline{C}^r dS \quad (6.56)$$

Le vecteur force élémentaire est obtenu en sommant les termes (6.54), (6.55) et (6.56) :

$$\{f_e\} = \{f_e^V\} + \{f_e^{S_T}\} + \{f_e^{S_C}\} \quad (6.57)$$

En reportant ces expressions dans (6.26), l'énergie potentielle s'exprime finalement sous la forme matricielle :

$$\mathcal{E}_n(\{U\}) = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\frac{1}{2} {}^t \{u_e\} \cdot [k_e] \cdot \{u_e\} - {}^t \{u_e\} \cdot \{f_e\} \right) \quad (6.58)$$

On s'intéresse ci-après à la forme intégrale globale de l'énergie potentielle \mathcal{E}_n

6.3.5 Assemblage et Résolution

L'étape de construction de la matrice de rigidité globale $[K]$ et du vecteur sollicitation global $\{F\}$ correspond à l'assemblage des matrices de rigidité élémentaire $[k_e]$ et des vecteurs sollicitations élémentaires $\{f_e\}$ respectivement. Finalement, le problème à résoudre consiste à minimiser sur \mathcal{CA}_n la fonction scalaire :

$$\mathcal{E}_n(\{U\}) = \frac{1}{2} {}^t \{U\} \cdot [K] \cdot \{U\} - {}^t \{U\} \cdot \{F\} \quad (6.59)$$

$\{U\}$ étant le vecteur de déplacements nœuds global, obtenu par addition des vecteurs de déplacements nœuds élémentaires après avoir adopté une numérotation globale des nœuds.

La recherche du minimum de l'énergie potentielle conduit au système linéaire classique :

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (6.60)$$

6.4 Application au dimensionnement de fondations renforcées par inclusions rigides

L'incorporation d'inclusions rigides verticales dans un sol mou très compressible, est une technique de renforcement de plus en plus répandue, destinée à réduire les tassements du sol de fondation et donc à améliorer les performances globales de l'ouvrage. Cette technique consiste à transférer les chargements appliqués en surface (remblais, bâtiments,...) à un substratum rigide par l'intermédiaire d'un matelas granulaire de répartition placé au sommet des inclusions de renforcement elles-mêmes en contact avec le substratum rigide (figure (6.1)).

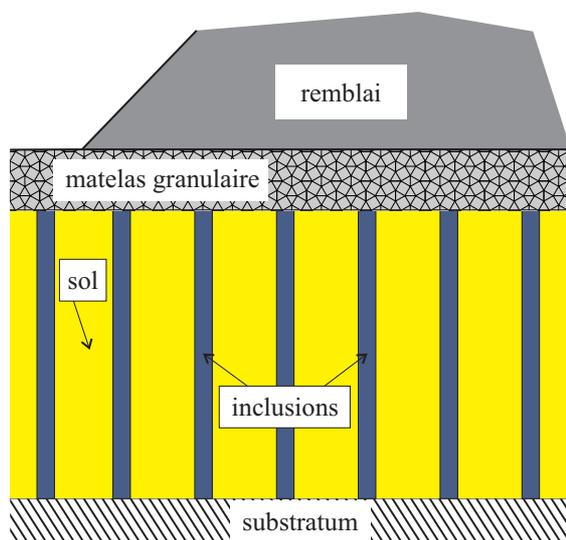


FIG. 6.1. Technique de renforcement d'une fondation par l'incorporation d'inclusions rigides

Le modèle biphasique avec interaction a été récemment appliqué à ce type de problème (Rospars et al. (2005) [56], Cartiaux et al. (2007) [12] et Hassen et al. (2008) [40]). Il permet

notamment d'appréhender de façon quantitative les phénomènes d'interaction entre le sol et les inclusions que cette technique met en jeu, et qui jouent un rôle décisif dans la façon dont les charges appliquées sont transmises au substratum par l'intermédiaire des inclusions de renforcement, et donc dans la performance du schéma de renforcement retenu.

Si on se limite au cas de chargements verticaux, une version simplifiée de ce modèle, dans laquelle les inclusions de renforcement travaillent essentiellement en traction compression (inclusions "souples"), est suffisante. En revanche, dans le cas où ce type d'ouvrage est soumis à des chargements où la composante horizontale est prédominante (cas des chargements sismiques), une telle simplification est susceptible d'être trop conservative, dans le sens où elle ne prend pas en compte les effets bénéfiques possibles en termes de renforcement, des sollicitations de flexion et de cisaillement que ce type de chargement engendre dans les inclusions. Voilà pourquoi un modèle biphasique plus sophistiqué (modèle biphasique "général") a été développé, dans lequel les renforcements sont considérés comme des poutres 1D en flexion distribuées de façon continue dans le sol.

Dans cette section, une simulation d'une couche de sol renforcée par inclusions rigides et soumise à un chargement sismique, est réalisée en utilisant le code de calcul biphasique général décrit dans les sections précédentes, où les effets de flexion des renforcements et les phénomènes d'interaction sol-renforcement sont tous pris en compte. L'analyse est effectuée dans le cadre d'élasticité linéaire.

6.4.1 Description du problème

L'avantage principal du modèle biphasique réside dans sa capacité à traiter tout type de problème impliquant une structure de sol renforcé par inclusions rigides, sans aucune restriction particulière concernant la géométrie de la zone renforcée ou le type du chargement appliqué à la structure. Un code de calcul par éléments finis basé sur l'implémentation numérique d'un tel modèle biphasique (voir section 6.3 du même chapitre) a été élaboré, qui permet la simulation du comportement de ce type de structure soumise à son poids propre, auquel vient s'ajouter un chargement volumique latéral d'origine sismique, tel que celui représenté sur la figure (6.2), où seulement la moitié de la structure a été représentée.

Dans l'exemple considéré, le sol de fondation a été renforcé par un groupe d'inclusions verticales de sections circulaires de rayon $R=0,4\text{m}$ et de longueur $L=20\text{m}$ égale à

l'épaisseur de la couche de sol. Les inclusions de renforcement sont placées dans le massif de sol suivant un maillage régulier carré de côté égal à $e=4\text{m}$, de sorte que la proportion volumique du matériau renforcé (béton) est égale $\eta = 3,14\%$. Tous les autres paramètres géométriques ainsi que mécaniques relatifs à ce problème sont résumés sur la même figure.

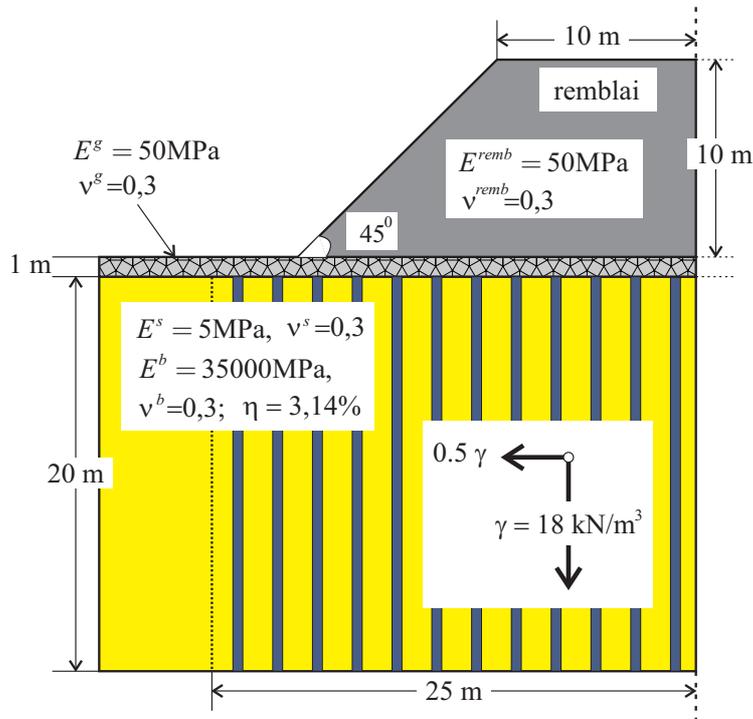


FIG. 6.2. Analyse sismique d'un remblai reposant sur une couche de sol renforcé par inclusions rigides

L'outil de calcul par éléments finis mentionné ci-dessus dédié à l'analyse des problèmes en deux dimensions (déformations planes), a été utilisé pour simuler le comportement de cette structure, qui a été discrétisée en 1874 éléments triangulaires à six nœuds et 3861 nœuds comme le montre la figure (6.3).

Compte tenu de l'hypothèse d'adhérence parfaite transversale et d'interaction longitudinale, il apparaît que dans la zone biphasique, qui représente le sol renforcé, quatre variables cinématiques indépendantes (deux déplacements verticaux, un déplacement horizontal et une rotation) sont attachées à chaque nœud du maillage éléments finis.

L'avantage décisif du modèle biphasique par rapport à une modélisation directe est donc clairement apparent sur la figure (6.3), car l'implémentation directe de la méthode des éléments finis sur la structure renforcée aurait nécessité une discrétisation beaucoup plus fine de la structure dans la zone renforcée, afin de modéliser les interactions complexes qui prévalent entre le sol et le réseau dense d'inclusions cylindriques. Il convient

de souligner en particulier que la taille typique des éléments du maillage dans la zone renforcée n'est pas différente de celle adoptée en l'absence du renforcement, et aucune procédure de remaillage n'est nécessaire quand les différentes caractéristiques du renforcement (espacement, diamètre,...) doivent être changées.

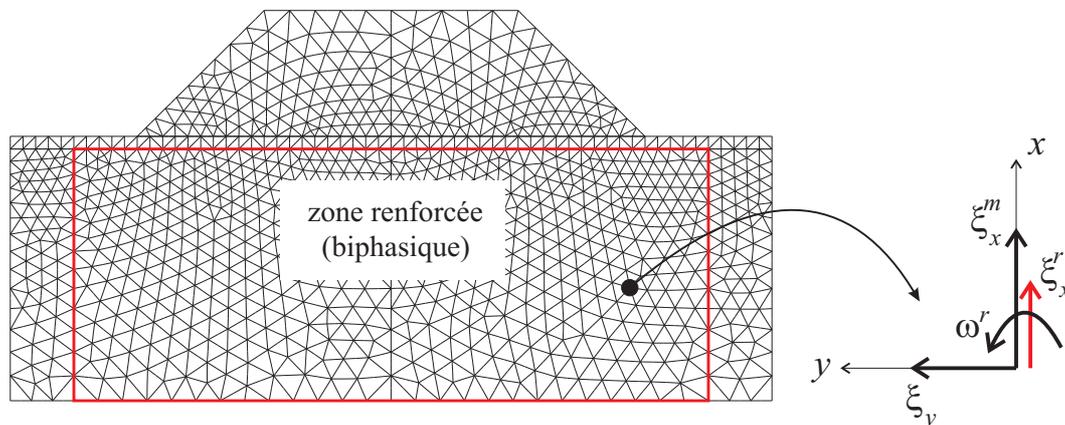


FIG. 6.3. Maillage éléments finis utilisé dans la simulation numérique

Les paramètres élastiques du milieu biphasique introduits dans le calcul peuvent être déterminés comme suit. Il est de noter que, la fraction volumique du renforcement est très faible ($\eta = 3.14\%$), la fraction volumique du sol ($1 - \eta$) est donc proche de l'unité. Par conséquent, il semble raisonnable d'adopter pour la phase matrice les mêmes caractéristiques élastiques que celles de la couche de sol. Concernant la phase de renforcement, les densités de rigidité axiale (α^r), de cisaillement (β^r) et de flexion (γ^r) sont tout simplement calculées, en divisant les quantités correspondantes relatives à une inclusion individuelle par la section droite (e^2) du volume élémentaire représentatif. On obtient ainsi à partir de cette procédure simple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^r = \frac{AE^b}{e^2} = \eta E^b = 1100\text{MPa} \\ \beta^r = \frac{A^* \mu^b}{e^2} = 357\text{MPa} \\ \gamma^r = \frac{IE^b}{e^2} = 44\text{MPa.m}^2 \end{array} \right. \quad (6.61)$$

où $A = \pi R^2$ est l'aire de la section droite d'inclusion, $A^* = (27/32)A$ est son aire réduite, $I = \pi R^4/4$ est son moment d'inertie par rapport à son diamètre et μ^b est le module de cisaillement du béton ($\mu^b = E^b/2(1 + \nu^b)$).

Il reste à évaluer les coefficients d'interaction c^I et c^p . Le premier relatif à l'interaction longitudinale volumique, est associé au frottement latéral sol-inclusions, tandis que le

second qui correspond à l'interaction de pointe (surfactive), est associé aux efforts repris en tête d'inclusions (figure (6.4)).

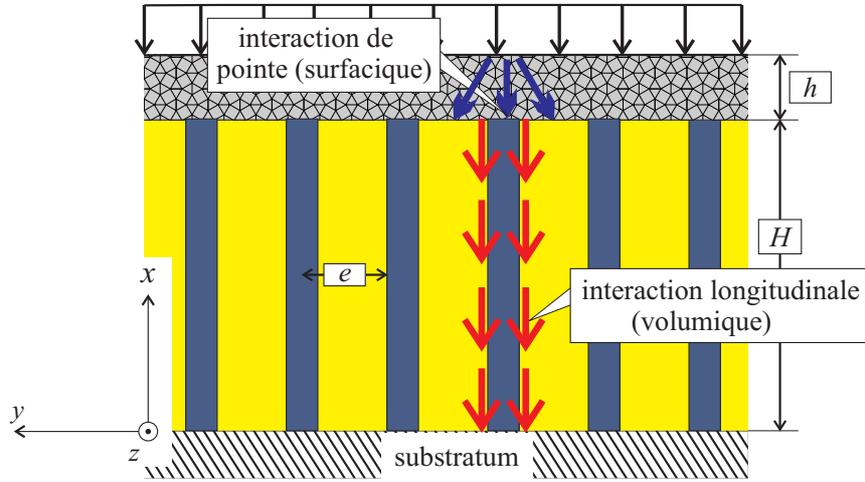


FIG. 6.4. Interaction volumique et surfactive entre phases : identification des coefficients d'interaction

Cartiaux et al. (2007) [12] ont montré comment une telle identification des coefficients d'interaction peut être effectuée à partir d'un calage de la solution analytique en déplacement donnée par le modèle biphasique, sur les simulations numériques d'un cas de référence simple (couche de sol renforcé soumise à un chargement vertical uniforme, comme représenté sur la figure (6.4)).

Une étude paramétrique a été réalisée, qui a permis d'établir des formules analytiques simples donnant la valeur de ces paramètres d'interaction du modèle multiphasique en fonction des différents paramètres géométriques et mécaniques qui définissent le problème considéré ci-dessus. Les expressions trouvées sont les suivantes :

- ◇ Coefficient d'interaction longitudinale (volumique)

$$c^I = c_0^I \eta \left(\frac{\eta + \eta_0^I + \eta_1^I}{\eta + \eta_1^I} \right) (1 - 2\nu^s/3) \frac{E^s}{e^2} \quad (6.62)$$

où c_0^I , η_0^I et η_1^I sont des paramètres sans dimension qui valent :

$$c_0^I = 35; \quad \eta_0^I = 0,055; \quad \eta_1^I = 0,0025 \quad (6.63)$$

- ◇ Coefficient d'interaction de pointe (surfactive)

$$c^p = \eta \left(\frac{\eta + \eta_0^p + \eta_1^p}{\eta + \eta_1^p} \right) \left(\frac{e_0}{e} + \frac{h_0}{h} \right) E^g \quad (6.64)$$

où h désigne l'épaisseur du matelas granulaire placé sur la couche de sol renforcé et η_0^p , η_1^p , e_0 et h_0 sont des paramètres adimensionnels donnés par :

$$\eta_0^p = 0,025; \quad \eta_1^p = 0,0025; \quad e_0 = 5; \quad h_0 = 0,7 \quad (6.65)$$

Par application de ces formules à notre problème, les valeurs des paramètres de rigidité d'interaction introduites dans les simulations par éléments finis sont finalement :

$$c^I = 2,16 \text{ MPa/m}^2 \quad \text{et} \quad c^p = 5,32 \text{ MPa/m} \quad (6.66)$$

6.4.2 Résultats des simulations numériques

Notre objectif est d'appliquer le modèle biphasique et l'outil numérique associé à la simulation du comportement de l'ouvrage décrit ci-dessus soumis successivement à deux types de chargement.

- ◇ Un chargement purement vertical, correspondant à l'application simultanée du poids propre des différentes composantes qui constituent l'ouvrage (remblais, matelas granulaire et fondation de couche de sol) ;
- ◇ L'application d'un champ de forces volumiques horizontales, qui représente le chargement sismique, caractérisé par un coefficient sismique égal à $k = 0,5$.

Les résultats de la première simulation correspondant au chargement purement vertical sont présentés sur les figures (6.5) et (6.6), sous la forme de courbes donnant le tassement vertical dans la couche renforcée le long de l'axe de symétrie vertical Ox .

Les différentes courbes montrent les profils du tassement calculé selon les hypothèses suivantes :

- ◇ Cas du sol non renforcé, où la valeur maximale du tassement en surface (au bas du remblai) est environ égale à 38 cm (figure (6.5) : courbe avec les symboles carrés).

- ◇ Le second calcul (figure (6.5) : courbe avec les symboles ”+”) se réfère à la version simplifiée du modèle biphasique, où les effets de cisaillement et de flexion du renforcement ont été négligés ($\beta^r = \gamma^r = 0$), de sorte que les inclusions renforcées peuvent être considérées comme ”flexibles” ou ”souples”.
- ◇ La courbe avec les symboles circulaires de la figure (6.5) est associée à la situation où les rigidités de cisaillement et de flexion sont prises en compte dans l’analyse. Dans ce cas, les renforcements sont caractérisés comme des inclusions ”raides”.
- ◇ Enfin les résultats de la simulation où le sol renforcé est considéré comme un milieu homogène anisotrope, situation qui peut être obtenue à partir du modèle biphasique en prenant de très grandes valeurs pour les coefficients de rigidité d’interaction c^I et c^p , ont été reportés sur la figure (6.6) (courbe avec les symboles en losange : homogénéisation)

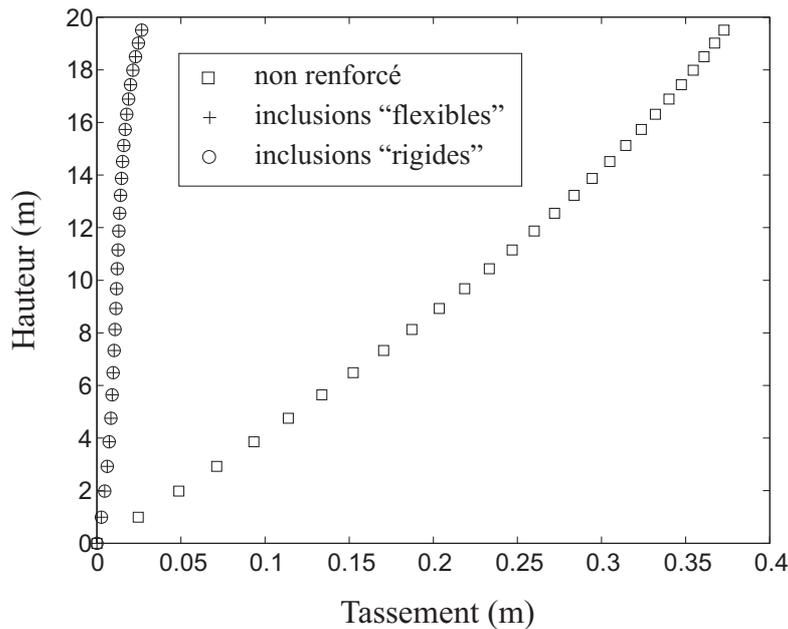


FIG. 6.5. Profil de tassement dans le sol le long de l’axe de symétrie de l’ouvrage sous poids propre

Ces résultats appellent plusieurs commentaires :

- ◇ Quel que soit le modèle adopté pour effectuer la simulation, l’utilisation des inclusions renforcées a abouti à une amélioration considérable de la performance du sol de fondation, exprimée en terme de réduction du tassement vertical, passé de 38 cm à environ 3 cm, comme on peut constater sur la figure (6.5).

- ◇ Le fait de prendre en compte le comportement en cisaillement et en flexion des renforcements joue un rôle négligeable pour un tel chargement vertical, où seule la rigidité axiale α'' des renforcements joue un rôle important dans la réduction du tassement (courbes avec les symboles circulaires ou "+" quasi coïdentes sur la figure (6.5)).
- ◇ En ce qui est donné par la comparaison faite sur la figure (6.6) entre les prédictions du tassement de la méthode d'homogénéisation et de celles issues du modèle biphasique, il est intéressant de noter que les deux prédictions divergent très sensiblement quand l'on s'approche de la surface. En effet, le tassement en surface calculé à partir du modèle biphasique, c'est-à-dire en tenant compte de l'interaction sol-inclusions, est presque quatre fois plus élevé que celui estimé par la méthode d'homogénéisation.

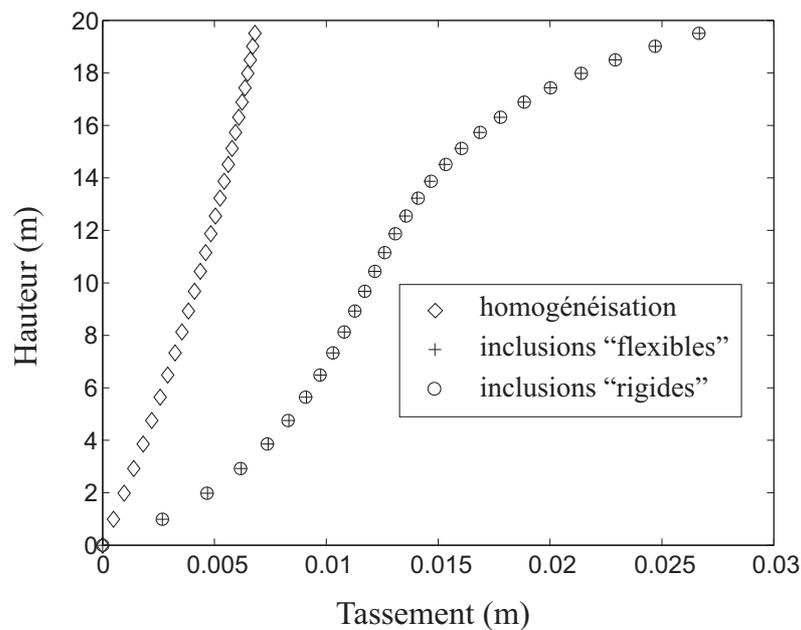


FIG. 6.6. Comparaison entre les profils du tassement obtenus par la méthode d'homogénéisation et le modèle biphasique

Partant de la situation où la fondation renforcée a été chargée verticalement grâce à la pleine application de la gravité, la réponse de l'ouvrage est maintenant analysée sous l'action d'un séisme induisant le chargement horizontal caractérisé par un coefficient sismique égal à $k = 0,5$ (voir figure (6.2)). La configuration initiale et déformée de l'ouvrage, ainsi que les isovaleurs du déplacement horizontal d'un tel chargement sont présentées sur les figures (6.7) et (6.8), respectivement.

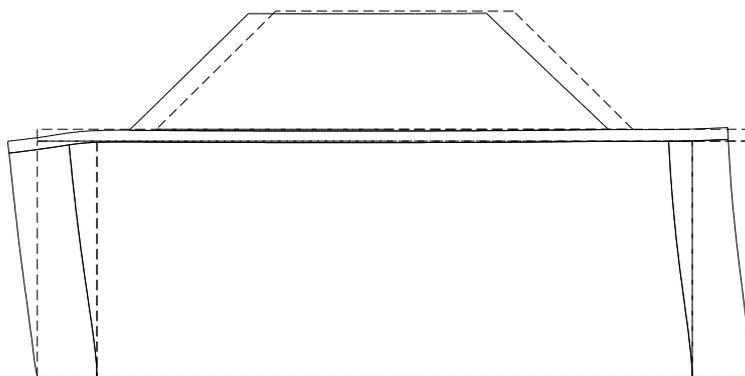


FIG. 6.7. Configuration initiale et déformée de l'ouvrage soumis à un chargement sismique

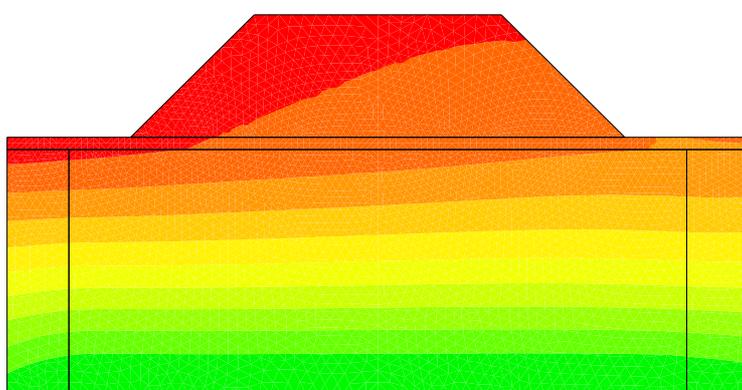


FIG. 6.8. Isovaleurs du déplacement horizontal de l'ouvrage soumis à un chargement sismique

Comme dans le cas précédent du chargement gravitaire vertical, quatre situations ont été considérées pour les simulations numériques : le cas du sol non renforcé, celui du sol renforcé traité par la méthode d'homogénéisation, l'application du modèle biphasique du sol renforcé par des inclusions "flexibles" ou "raides", qui prend ou non en compte les comportements de cisaillement et de flexion des renforcements. En outre, dans le cas où les renforcements sont modélisés par les inclusions "raides", deux types de conditions aux limites peuvent être considérés à la base de la zone renforcée, où les extrémités inférieures du renforcement sont en contact avec le substratum rigide.

- Les inclusions sont reliées au substratum rigide par les *rotules* : $\underline{\xi}^r(x = 0) = \underline{0}$ et $m^r(x = 0) = 0$.
- Les inclusions sont *parfaitement encastrées dans le substratum*, ce qui signifie que les déplacements et la rotation y sont imposés égaux à zéro : $\underline{\xi}^r(x = 0) = \underline{0}$ et $\omega^r(x = 0) = 0$.

La figure (6.9) montre les profils des déplacements horizontaux dans le sol le long de l'axe central de l'ouvrage, dûs au séisme, dans les différentes situations décrites ci-dessus. Il convient de noter que la méthode d'homogénéisation donne une prévision des profils du déplacement latéral qui est presque identique à celle prédite par le modèle biphasique avec l'hypothèse des inclusions "flexibles". Ceci est cohérent avec l'hypothèse que deux phases sont parfaitement adhérentes dans la direction transversale aux renforcements, prenant seulement en compte un déplacement relatif dans la direction longitudinale (c'est-à-dire ici verticale) Ox .

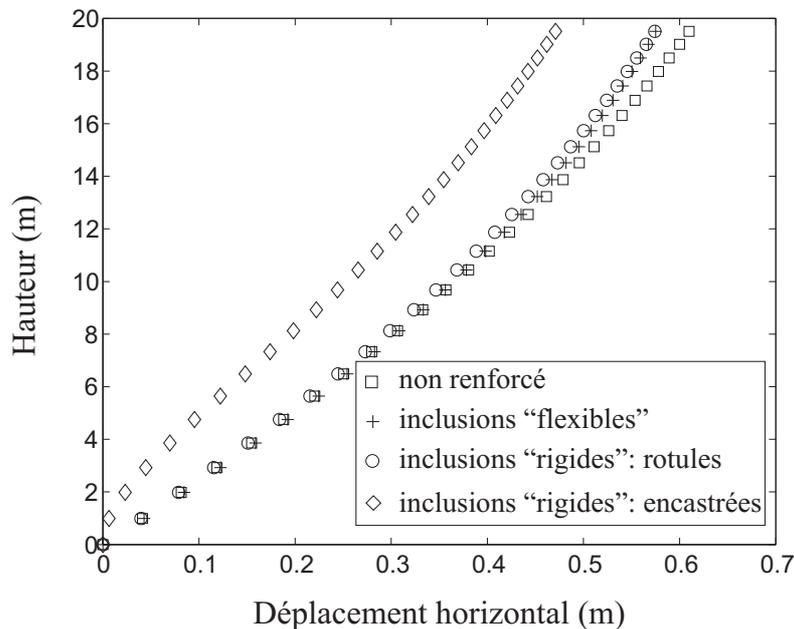


FIG. 6.9. Profils des déplacements horizontaux dans le sol le long de l'axe central de l'ouvrage soumis à un chargement sismique

Il peut être observé que la réduction du déplacement qui peut être attendue des renforcements est beaucoup moins prononcée que dans le cas de la charge verticale. Cette réduction du déplacement horizontal est appréciable seulement dans la situation où les inclusions "raides" sont encastrées dans le substratum (courbe avec les symboles en losange sur la figure (6.9)). En effet, même dans un tel cas, la valeur maximale du déplacement horizontal du sol passe seulement de 62 cm à 48 cm.

6.4.3 Conclusions

Les résultats obtenus ci-dessus confirment tout d'abord que les composantes de cisaillement et de flexion dans les renforcements ont un effet négligeable sur la réponse

d'une couche de sol chargée verticalement. A l'inverse, les comportements de cisaillement et de flexion du renforcement jouent un rôle crucial dans la réduction du déplacement horizontal dû à un chargement latéral. Ceci a des conséquences importantes en termes d'ingénierie de conception et de procédures d'optimisation pour les fondations en sol renforcé. En effet, se référant aux formules (6.61), les rigidités axiale et de flexion de la phase de renforcement peuvent s'écrire comme suit :

$$\alpha^r = \eta E^b, \quad \gamma^r = \alpha^r \frac{R^2}{4} \quad (6.67)$$

Ces relations montrent que, à caractéristique élastique (E^b) du matériau (béton) et fraction volumique du renforcement (η) constants, la rigidité axiale (α^r) est fixée, tandis que la rigidité à la flexion (γ^r) est directement proportionnelle au carré du rayon des inclusions (R). En ce qui concerne le problème d'une couche de sol renforcé soumise au chargement sismique latéral, un renforcement du sol par relativement peu d'inclusions "raides" de "grand diamètre" semble potentiellement plus efficace que l'utilisation un plus grand nombre d'inclusions "flexibles" de "petit diamètre".

Malheureusement, les calculs effectués dans cette section tendent à montrer que l'introduction des inclusions raides verticales dans le sol n'est pas aussi bénéfique en termes de réduction de déplacement/tassement dans le cas d'un chargement latéral comme dans la situation du chargement vertical. Un moyen possible pour améliorer la performance du schéma de renforcement serait d'envisager l'utilisation d'inclusions de plus grand diamètre. En outre, la conclusion tirée de cette analyse préliminaire, réalisée dans le cadre d'un comportement élastique, devrait être réévaluée à la lumière d'une analyse de stabilité de la structure, où la résistance au cisaillement et à la flexion des inclusions serait mobilisée en plus de la résistance au cisaillement du sol seule. C'est à ce problème que nous allons maintenant nous attacher.

Chapitre 7

Analyse de stabilité des ouvrages renforcés par inclusions ”rigides” et soumis à un chargement sismique

7.1 Principe du renforcement des sols de fondation par inclusions rigides

L'amélioration de la performance de sols de fondation de mauvaise qualité, par l'incorporation d'inclusions verticales, constitue une solution appropriée tant en terme de réduction du tassement que d'augmentation de la capacité portante. Cette technique est notamment appliquée pour les remblais routiers ou ferroviaires construits sur une couche de sol mou (Quigley et al. (2003) [55]; Wood (2003) [83]; Zanziger et Gartung (2002) [84]).

Jusqu'à présent, les méthodes d'analyse et de conception visant à prédire la performance de ce type d'ouvrages en sol renforcé ont été principalement centrées sur le cas particulier où le chargement est appliqué verticalement, avec une attention particulière accordée aux mécanismes régissant la façon dont les charges de surface (poids du remblai) sont transférées à un substratum rigide par l'intermédiaire du groupe d'inclusions. Ce problème a été étudié en ayant recours à des méthodes plus ou moins empiriques (Low et al. (1994) [48]; Russell et Pierpoint (1997) [57]; Hewlett et Randolph (1988) [41]; Kempfert et al. (2004) [43]; Jenck et al. (2005)[42]), ou à des modèles numériques permettant de prendre en compte tous les aspects de ce problème tridimensionnel complexe (Laurent et al. (2003) [44]; Stewart et Filz (2005) [68]). Ce type de simulation numérique reste très difficile, sinon impossible, à mettre en œuvre, et donc peu compatible avec des méthodes

de dimensionnement de type ingénieur.

Peu d'attention a été accordée en revanche jusqu'à présent à l'analyse et au dimensionnement de ce type d'ouvrages soumis à des chargements latéraux, tels que ceux provoqués par un séisme. L'objectif de ce chapitre est de mettre en œuvre l'approche du calcul à la rupture, et plus spécifiquement la méthode cinématique par l'extérieur que nous allons maintenant décrire, sur l'exemple du dimensionnement d'une fondation renforcée par inclusions rigides, déjà traité au chapitre 6 dans le cas de l'élasticité linéaire.

7.2 Calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés par inclusions "rigides"

7.2.1 Domaine K des chargements potentiellement supportables

L'introduction de l'approche du calcul à la rupture développée dans le chapitre 3, est ici étendue au modèle biphasique adhérent qui prend en compte les effets du cisaillement et de la flexion. De façon générale, le domaine K des chargements potentiellement supportables d'un ouvrage est constitué des chargements \underline{Q} pour lesquels il existe un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^m$ dans la phase matrice, des densités d'efforts et de moment généralisés (n^r, v^r, m^r) dans la phase renforcement, qui soient *statiquement admissibles* avec \underline{Q} et vérifient en tout point les critères de résistance respectifs de la phase matrice et de la phase renforcement.

$$\underline{Q} \in K \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\underline{\sigma}}^m; (n^r, v^r, m^r) \text{ S.A. avec } \underline{Q} : \text{Equilibre} \\ \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) \in G^m(\underline{x}); (n^r, v^r, m^r)(\underline{x}) \in G^r(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega : \text{Résistance} \end{cases} \quad (7.1)$$

où $G^m(\underline{x})$ et $G^r(\underline{x})$ désignent respectivement les *domaines de résistance* de la phase matrice et de la phase renforcement. Ces deux domaines sont entièrement déterminés par la donnée d'un critère de résistance pour chacune des deux phases, analogues (et même identiques dans le cas de la plasticité parfaite) aux critères de plasticité.

L'approche statique par l'intérieur consiste alors classiquement à mettre en œuvre la définition (7.1) du domaine K des chargements potentiellement supportables. Elle permet d'approcher le domaine K par l'intérieur, aboutissant à des *minorants* des chargements extrêmes situés sur la frontière de K .

7.2.2 Approche cinématique par l'extérieur de K

On se place dans la situation d'un système biphasique *adhérent* en *déformations planes*. Tout comme dans le cas où les inclusions de renforcement sont souples, déjà présenté dans le chapitre 3, l'approche cinématique repose sur la *dualisation des équations d'équilibre* par le biais du *principe des puissances virtuelles*. Désignant par $(\hat{\underline{U}}, \hat{\omega})$ un *champ de vitesse virtuel* cinématiquement admissible pour le problème considéré, c'est-à-dire vérifiant les conditions aux limites en vitesse et en rotation, et que nous supposons provisoirement continu et continûment différentiable, la *puissance virtuelle des efforts extérieurs* s'écrit :

$$P_e(\hat{\underline{U}}, \hat{\omega}) = \int_{\Omega} \rho \underline{F} \cdot \hat{\underline{U}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\underline{T} \cdot \hat{\underline{U}} + C \hat{\omega}) dS = \underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}} \quad (7.2)$$

où $\hat{\underline{q}}$ représente le vecteur des *paramètres cinématiques* apparaissant en dualité avec les *paramètres de chargement* \underline{Q} et $\rho \underline{F} = \rho^m \underline{F}^m + \rho^r \underline{F}^r$.

La *puissance virtuelle de déformation* s'écrit dans ce même champ de vitesse virtuel :

$$P_d(\hat{\underline{U}}, \hat{\omega}) = \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^m : \hat{\underline{d}} + n^r \hat{d}^r + v^r \hat{\theta}^r + m^r \hat{\chi}^r) d\Omega \quad (7.3)$$

avec

$$\begin{cases} \hat{\underline{d}} = \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}}(\hat{\underline{U}}) + {}^T \underline{\text{grad}}(\hat{\underline{U}})) \\ \hat{d}^r = \frac{\partial \hat{U}_x}{\partial x}, \quad \hat{\theta}^r = \frac{\partial \hat{U}_y}{\partial x} - \hat{\omega}, \quad \hat{\chi}^r = \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} \end{cases} \quad (7.4)$$

Le *principe des puissances virtuelles* s'écrit alors :

$$\{\underline{\sigma}^m; (n^r, v^r, m^r)\} \mathcal{S.A.} \text{ avec } \underline{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \{\hat{\underline{U}}, \hat{\omega}\} \mathcal{C.A.} \text{ avec } \hat{\underline{q}} \\ \underline{Q} \cdot \hat{\underline{q}} = \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^m : \hat{\underline{d}} + n^r \hat{d}^r + v^r \hat{\theta}^r + m^r \hat{\chi}^r) d\Omega \end{cases} \quad (7.5)$$

Il en résulte que la définition (7.1) du domaine K des chargements potentiellement supportables peut être réécrite sous la forme :

$$\underline{Q} \in K \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\sigma}^m, (n^r, v^r, m^r); \forall \{\hat{U}, \hat{\omega}\} \text{ C.A. } \underline{Q} \cdot \hat{q} = P_d(\hat{U}, \hat{\omega}) : \text{Equilibre} \\ \text{tels que} \\ \underline{\sigma}^m(\underline{x}) \in G^m(\underline{x}) \text{ et } (n^r, v^r, m^r)(\underline{x}) \in G^r(\underline{x}) \forall \underline{x} \in \Omega : \text{Résistance} \end{cases} \quad (7.6)$$

On introduit alors la *puissance résistante maximale* du milieu biphasique dans le champ de vitesse $\{\hat{U}, \hat{\omega}\}$, définie par :

$$P_{rm}(\hat{U}, \hat{\omega}) = \int_{\Omega} \pi^m(\hat{d}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \pi^r(\hat{d}^r, \hat{\theta}^r, \hat{\chi}^r) \, d\Omega \quad (7.7)$$

où $\pi^m(\cdot)$ et $\pi^r(\cdot)$ désignent les *fonctions d'appui* des domaines de résistance de la phase matrice G^m et de la phase renforcement G^r , définies par :

$$\begin{cases} \pi^m(\hat{d}) = \sup \left\{ \underline{\sigma}^m : \hat{d}; \quad \underline{\sigma}^m \in G^m \right\} \\ \pi^r(\hat{d}^r, \hat{\theta}^r, \hat{\chi}^r) = \sup \left\{ n^r \hat{d}^r + v^r \hat{\theta}^r + m^r \hat{\chi}^r; \quad (n^r, v^r, m^r) \in G^r \right\} \end{cases} \quad (7.8)$$

Il découle immédiatement de (7.6), (7.7) et (7.8) que :

$$\underline{Q} \in K \Rightarrow \forall \{\hat{U}, \hat{\omega}\} \quad \underline{Q} \cdot \hat{q}(\hat{U}, \hat{\omega}) \leq P_{rm}(\hat{U}, \hat{\omega}) \quad (7.9)$$

ou de manière équivalente :

$$\exists \{\hat{U}, \hat{\omega}\}; \quad \underline{Q} \cdot \hat{q}(\hat{U}, \hat{\omega}) > P_{rm}(\hat{U}, \hat{\omega}) \Rightarrow \underline{Q} \notin K \quad (7.10)$$

Cette dernière inégalité donne encore une fois lieu à l'interprétation géométrique suivante : le domaine K est inclus dans le demi-espace contenant l'origine et délimité par le plan d'équation (figure (7.1)) :

$$\underline{Q} \cdot \hat{q}(\hat{U}, \hat{\omega}) = P_{rm}(\hat{U}, \hat{\omega}) \quad (7.11)$$

L'approche cinématique par l'extérieur peut être facilement généralisée au cas où le champ de vitesse \hat{U} ainsi que le champ de vitesse de rotation $\hat{\omega}$ comportent des *discontinuités* à

travers des surfaces notées respectivement Σ_U et $\Sigma_{\hat{\omega}}$, cette dernière ne concernant que la phase renforcement.

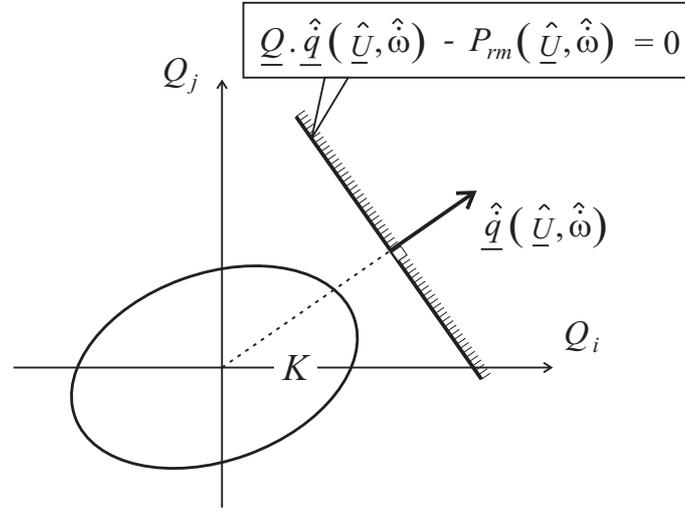


FIG. 7.1. Interprétation géométrique de (7.11) dans l'espace des paramètres de charge-ment

L'expression de la puissance virtuelle de déformation devient alors :

$$\begin{aligned}
 P_d(\hat{U}, \hat{\omega}) = & \int_{\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^m : \hat{\underline{d}} + n^r \hat{d}^r + v^r \hat{\theta}^r + m^r \hat{\chi}^r) d\Omega + \int_{\Sigma_U} (\underline{\underline{\sigma}}^m \cdot \underline{\nu}) \cdot [\hat{U}] d\Sigma \\
 & + \int_{\Sigma_U} ((n^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + v^r \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \cdot \underline{\nu}) \cdot [\hat{U}] d\Sigma + \int_{\Sigma_{\hat{\omega}}} m^r [\hat{\omega}] (\underline{e}_x \cdot \underline{\nu}) d\Sigma
 \end{aligned} \quad (7.12)$$

où

- ◇ $[\hat{U}]$ désigne la discontinuité de vitesse à la traversée de la surface Σ_U dans les phases matrice et renforcement ¹ en suivant la normale unitaire $\underline{\nu}$ (figure (7.2)) ;
- ◇ $[\hat{\omega}]$ désigne la discontinuité du taux de rotation à la traversée de la surface $\Sigma_{\hat{\omega}}$ de la phase renforcement (figure (7.3)). La surface $\Sigma_{\hat{\omega}}$ (courbe dans le plan Oxy) constitue une ligne sur laquelle est distribuée une *densité continue de "rotules"*, analogue à des "rotules" ponctuelles apparaissant dans les calculs en plasticité des systèmes de poutres (de Buhan (2007) [18]).

¹A noter que compte tenu de la condition d'adhérence parfaite, la surface Σ_U est la même pour les phases matrice et renforcement. Les surfaces Σ_U et $\Sigma_{\hat{\omega}}$ peuvent par contre être distinctes.

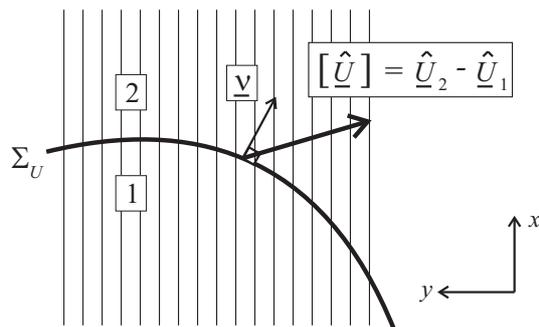


FIG. 7.2. Saut de vitesse à la traversée de la surface Σ_U du champ de vitesse

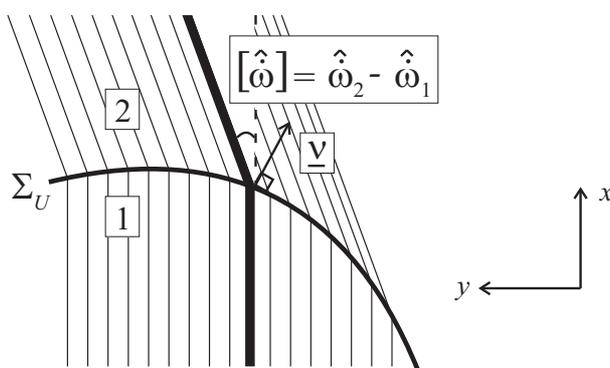


FIG. 7.3. Saut de taux de rotation à la traversée de la surface Σ_ω du champ de taux de rotation de la phase renforcement

L'expression de la puissance résistante maximale devient alors dans ce cas général :

$$\begin{aligned}
 P_{rm}(\hat{U}, \hat{\omega}) &= \int_{\Omega} \pi^m(\underline{\hat{d}}) d\Omega + \int_{\Omega} \pi^r(\hat{d}^r, \hat{\theta}^r, \hat{\chi}^r) d\Omega \\
 &+ \int_{\Sigma_U} \pi^m(\underline{\nu}; [\hat{U}]) d\Sigma + \int_{\Sigma_U} \pi^r(\underline{\nu}; [\hat{U}]) d\Sigma + \int_{\Sigma_{\hat{\omega}}} \pi^r(\underline{\nu}; [\hat{\omega}]) d\Sigma
 \end{aligned} \quad (7.13)$$

où les fonctions d'appui π sont données par :

$$\begin{cases}
 \pi^m(\underline{\nu}; [\hat{U}]) = \sup \left\{ (\underline{\sigma}^m \cdot \underline{\nu}) \cdot [\hat{U}]; \quad \underline{\sigma}^m \in G^m \right\} \\
 \pi^r(\underline{\nu}; [\hat{U}]) = \sup \left\{ (n^r e_x + v^r e_y) \cdot [\hat{U}] (\underline{\nu} \cdot e_x); \quad (n^r, v^r, m^r) \in G^r \right\} \\
 \pi^r(\underline{\nu}; [\hat{\omega}]) = \sup \left\{ m^r [\hat{\omega}] (\underline{\nu} \cdot e_x); \quad (n^r, v^r, m^r) \in G^r \right\}
 \end{cases} \quad (7.14)$$

7.3 Application au dimensionnement d'une fondation renforcée par inclusions "rigides" et soumise à un chargement sismique

7.3.1 Position du problème

La figure (7.4) présente une vue générale du problème considéré : un remblai, reposant sur une couche de sol qui a été renforcée par un groupe d'inclusions verticales équidistantes, est soumis à un séisme induisant un chargement latéral. Dans l'analyse présente, l'approche "pseudo-statique" classique a été adoptée (voir, par exemple, dans le contexte de l'analyse de stabilité des pentes : Ling et al. (1997) [45]; Loukidis et al. (2003) [47]; Baker et al. (2006) [5]). Conformément à cette approche simplifiée, les effets dynamiques induits par le séisme sur la structure sont modélisés par le biais d'un coefficient adimensionnel horizontal (et éventuellement vertical), l'intensité de ce dernier étant exprimée en pourcentage de la pesanteur. Désignant par g le champ de pesanteur, le chargement sismique est donc modélisé comme une densité de force volumique uniforme horizontale étant égale à kg , où le facteur k est le coefficient sismique.

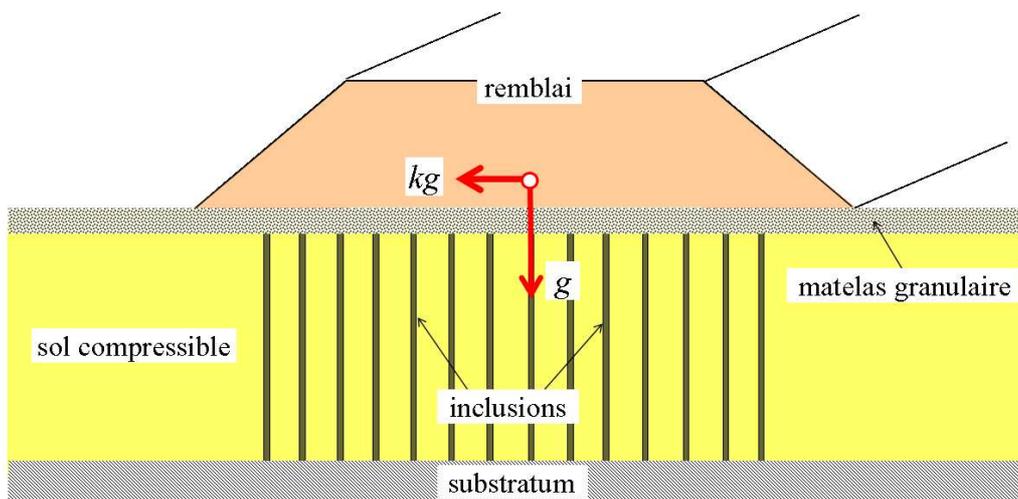


FIG. 7.4. Vue générale d'un remblai reposant sur une couche de sol renforcée par inclusions rigides et soumise à un chargement sismique

Notre objectif est d'effectuer l'analyse de stabilité d'une telle structure, qui vise à déterminer (ou au moins à en obtenir une approximation) la valeur critique de k , notée k^+ , au-delà de laquelle la rupture de l'ouvrage va se produire. Plus précisément, l'analyse développée ici vise à apprécier de manière quantitative le rôle joué par les inclusions de renforcement dans l'augmentation de stabilité de l'ouvrage.

La figure (7.5) ci-dessous rappelle le principe de la modélisation biphasique de l'ouvrage et plus précisément de sa zone renforcée, qui prend en compte les effets de flexion et de cisaillement des inclusions.

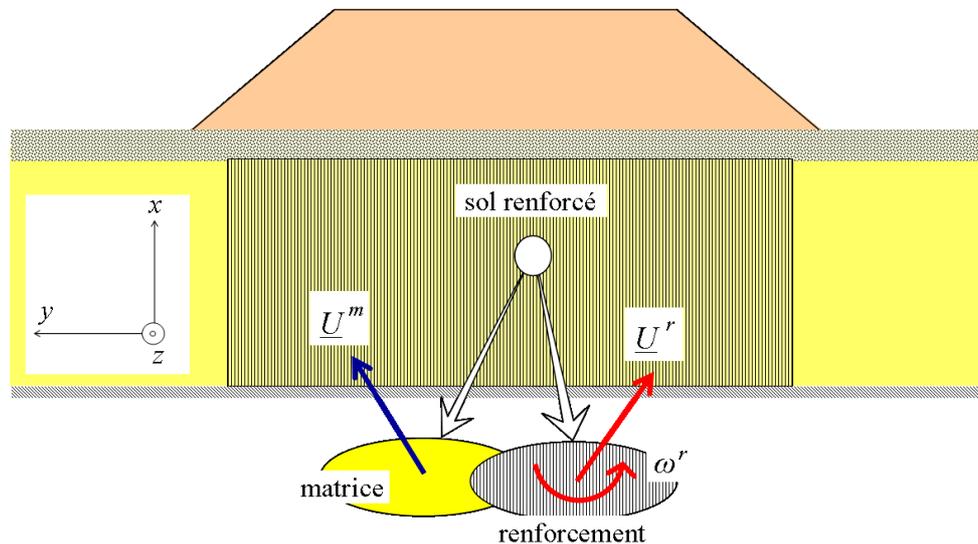


FIG. 7.5. Cinématiques en déformations planes associées à la description biphasique d'un sol renforcé

7.3.2 Calcul à la rupture de l'ouvrage modélisé comme un système biphasique

Se référant au raisonnement du calcul à la rupture (Salençon (1990) [59]), la valeur critique k^+ est définie comme la valeur maximale possible du coefficient sismique, pour laquelle il est possible de mettre en évidence des distributions de contraintes dans les deux phases $\{\underline{\sigma}^m; (n^r, v^r, m^r)\}$, satisfaisant les conditions d'équilibre, avec les conditions aux limites en contrainte correspondantes, tout en respectant les différents critères de résistance des matériaux constitutifs, qui sont maintenant spécifiés (voir figure (7.6)).

Le sol de fondation est une argile molle supposée *purement cohérente* (critère de Tresca de cohésion C), alors que la couche de matelas granulaire intermédiaire et le remblai sont constitués d'un sol *purement frottant* (critère de Mohr-Coulomb avec un angle de frottement ϕ et une cohésion nulle). Ces critères peuvent être écrits comme suit :

$$f^s(\underline{\sigma}^s) = \begin{cases} (\sigma_I^s - \sigma_{III}^s) - 2C \leq 0 & \text{pour le sol de fondation} \\ (\sigma_I^s - \sigma_{III}^s) - (\sigma_I^s + \sigma_{III}^s) \sin \phi \leq 0 & \text{pour le matelas granulaire et remblai} \end{cases} \quad (7.15)$$

où $\sigma_I^s \geq \sigma_{II}^s \geq \sigma_{III}^s$ sont les contraintes principales.

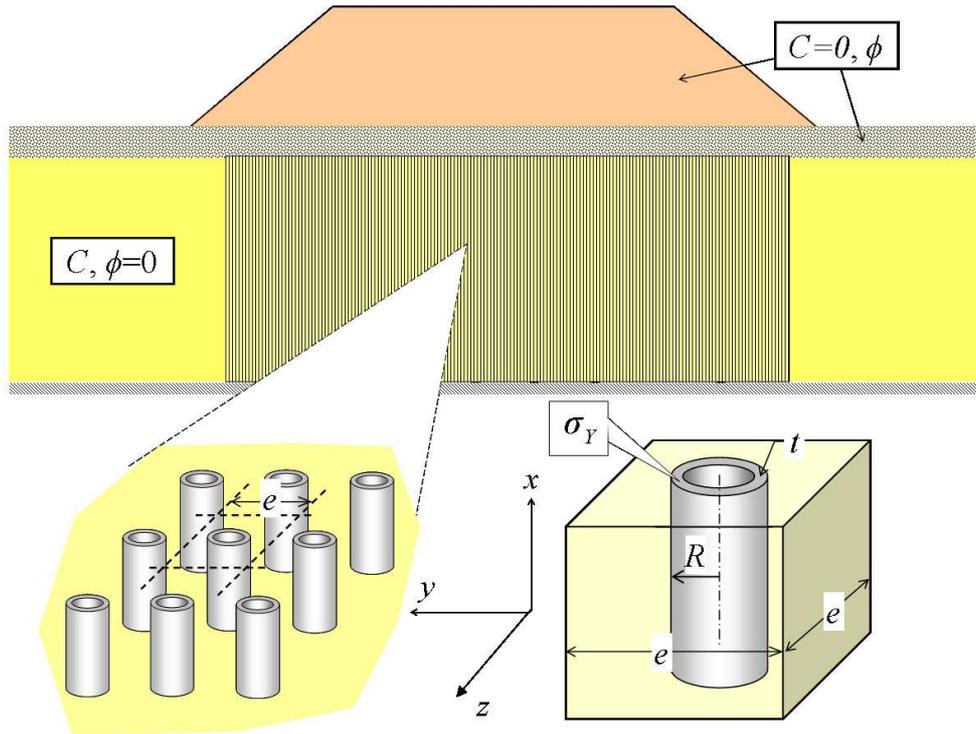


FIG. 7.6. Caractéristiques de résistance des différentes composantes de l'ouvrage renforcé

Le sol de fondation est renforcé par des tubes creux métalliques circulaires de rayon R et d'épaisseur t , disposés dans le sol suivant un maillage carré régulier, caractérisé par un espacement horizontal e dans les directions y et z du plan horizontal (figure (7.6)). Désignant par σ_Y la résistance en traction uniaxiale du matériau de renforcement (acier), le critère de résistance de chaque inclusion tubulaire individuelle peut être exprimé au moyen de la formule d'interaction suivante (voir, par exemple Challamel et de Buhan (2003) [13], où une telle formule est déduite de la considération de distributions de contrainte uniaxiale dans une section de l'inclusion de renforcement, comme schématisé sur la figure (7.7)).

$$\left| \frac{M}{M_0} \right| - \cos \left(\frac{\pi N}{2 N_0} \right) \leq 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_0 = 2\pi R t \sigma_Y \\ M_0 = 4R^2 t \sigma_Y \end{cases} \quad (7.16)$$

où N et M sont l'effort normal et le moment de flexion, respectivement, et où l'on a supposé que $t \ll R$ (tube "mince"). Cette *formule d'interaction*, qui est représentée sur la figure (7.7), suppose implicitement que chaque inclusion de renforcement est infiniment résistante à l'effort tranchant.

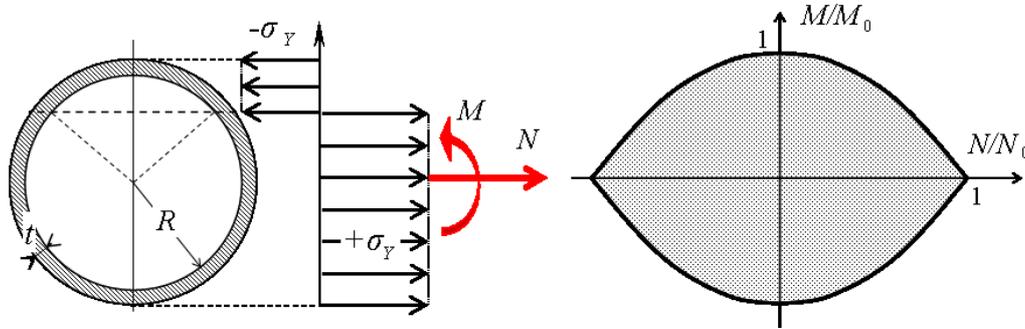


FIG. 7.7. Diagramme d'interaction d'une inclusion de renforcement en forme de tube "mince"

Les caractéristiques de résistance des phases matrice et renforcement peuvent alors être simplement obtenues comme suit. Du fait que la fraction volumique du renforcement est faible :

$$\eta = \frac{2\pi Rt}{e^2} \ll 1 \quad (7.17)$$

la fraction volumique du sol dans la zone renforcée est proche de l'unité, et les propriétés de résistance de la phase matrice correspondantes sont donc identifiées à celles du sol de fondation :

$$f^m(\underline{\underline{\sigma}}^m) \cong f^s(\underline{\underline{\sigma}}^s) \quad (7.18)$$

En ce qui concerne la phase renforcement, en raison de l'interprétation de n^r et m^r comme des *densités d'effort normal et de moment de flexion* par unité de surface transversale :

$$n^r = \frac{N}{e^2}, \quad m^r = \frac{M}{e^2} \quad (7.19)$$

il vient de (7.16) :

$$f^r(n^r, m^r) = \left| \frac{m^r}{m_0^r} \right| - \cos \left(\frac{\pi n^r}{2 n_0^r} \right) \leq 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_0^r = 2\pi R t \sigma_Y / e^2 = \eta \sigma_Y \\ m_0^r = 4R^2 t \sigma_Y / e^2 = \frac{2}{\pi} \eta R \sigma_Y \end{cases} \quad (7.20)$$

où n_0^r et m_0^r sont les *résistances à l'effort normal et à la flexion* de la phase renforcement, respectivement.

Enfin, l'hypothèse d'*adhérence parfaite entre phases* sera retenue tout au long de ce chapitre, ce qui signifie du point de vue de calcul à la rupture qu'il n'y a aucune limite sur la densité d'effort d'interaction \underline{I} . Par conséquent, l'analyse de stabilité d'un remblai renforcé sous chargement sismique peut être formulée dans le cadre conjoint du calcul à la rupture et de l'approche biphasique comme suit.

Il convient tout d'abord de préciser que le chargement correspondant de la structure est associé à l'application de densités d'effort volumique égales à :

$$\rho^m \underline{F}^m = (1 - \eta) \rho^s (-g \underline{e}_x + k g \underline{e}_y) \cong \gamma (-\underline{e}_x + k \underline{e}_y) \quad (7.21)$$

pour la phase matrice, où $\gamma = \rho^s g$ est le *poinds volumique* du sol, tandis que la densité d'effort volumique appliquée à la phase renforcement qui s'écrit :

$$\rho^r \underline{F}^r = \eta \tilde{\rho}^r (-g \underline{e}_x + k g \underline{e}_y) \cong 0 \quad (7.22)$$

où $\tilde{\rho}^r$ est la masse volumique du *matériau de renforcement* (acier) et η sa fraction volumique, peut être négligée, car cette dernière est très faible (Equation(7.17)).

Dans ces conditions, la stabilité de l'ouvrage, définie par la condition $k \leq k^+$, est assurée si et seulement si on peut mettre en évidence, une distribution de contraintes généralisées $\{\underline{\underline{\sigma}}^m; (n^r, v^r, m^r)\}$ dans la zone renforcée et un champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^m$ en dehors de cette zone, satisfaisant :

◇ les équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \text{div} [\underline{\underline{\sigma}}^m + n^r \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + v^r \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x] + \gamma (-\underline{e}_x + k \underline{e}_y) = \underline{0} \\ \text{div} [m^r \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x] + v^r \underline{e}_z = \underline{0} \end{cases} \quad (7.23)$$

dans la zone renforcée, et

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m + \gamma(-\underline{e}_x + k\underline{e}_y) = \underline{0} \quad (7.24)$$

partout ailleurs, avec les conditions aux limites correspondantes ;

- ◇ les *critères de résistance* des différentes phases donnés par (7.15) et (7.18) pour la phase matrice, et (7.20) pour la phase renforcement.

7.3.3 L'approche cinématique par l'extérieur

Cette approche repose sur l'utilisation de champs de vitesse virtuels définis par :

$$\underline{\hat{U}}^m = \underline{\hat{U}}^r = \underline{\hat{U}}, \quad \hat{\omega}^r = \hat{\omega} \quad (7.25)$$

dans la zone renforcée et un seul champ de vitesse $\underline{\hat{U}} = \underline{\hat{U}}^m$ en dehors de la zone renforcée.

La puissance des forces extérieures appliquées à l'ouvrage dans un tel champ de vitesse cinématiquement admissible, est donc :

$$P_e(\underline{\hat{U}}, \hat{\omega}) = \int_{\Omega} \gamma(-\underline{e}_x + k\underline{e}_y) \cdot \underline{\hat{U}} d\Omega \quad (7.26)$$

tandis que la puissance résistante maximale établie en section 7.2 s'écrit (voir Equation (7.13)) :

$$\begin{aligned} P_{rm}(\underline{\hat{U}}, \hat{\omega}) &= \int_{\Omega} \pi^m(\underline{\hat{d}}) d\Omega + \int_{\Omega} \pi^r(\hat{d}^r, \hat{\theta}^r, \hat{\chi}^r) d\Omega \\ &+ \int_{\Sigma_U} \pi^m(\underline{\nu}; [\underline{\hat{U}}]) d\Sigma + \int_{\Sigma_U} \pi^r(\underline{\nu}; [\underline{\hat{U}}]) d\Sigma + \int_{\Sigma_{\hat{\omega}}} \pi^r(\underline{\nu}; [\hat{\omega}]) d\Sigma \end{aligned} \quad (7.27)$$

où l'on rappelle que Σ_U est une surface de discontinuité de vitesse pour les phases matrice et renforcement, tandis que $\Sigma_{\hat{\omega}}$ est une surface de discontinuité du taux de rotation pour la phase renforcement.

Compte tenu des différents critères de résistance adoptés en (§7.3.2), les différentes fonctions π peuvent être calculées comme suit.

Pour la phase matrice représentant les différents sols impliqués dans l'ouvrage, on a (voir, par exemple Salençon (1990) [59]) :

$$\pi^m(\underline{\hat{d}}) = \begin{cases} C \left(|\hat{d}_I| + |\hat{d}_{II}| + |\hat{d}_{III}| \right) & \text{si } \text{tr} \underline{\hat{d}} = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.28)$$

en tout point du sol de fondation (critère de *Tresca*), et :

$$\pi^m(\underline{\hat{d}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{tr} \underline{\hat{d}} \geq \left(|\hat{d}_I| + |\hat{d}_{II}| + |\hat{d}_{III}| \right) \sin \phi \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.29)$$

en tout point du remblai ou de la couche de matelas granulaire intermédiaire.

De même :

$$\pi^m(\underline{\nu}; [\hat{U}]) = \begin{cases} C \left| [\hat{U}] \right| & \text{si } \underline{\hat{U}} \cdot \underline{\nu} = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.30)$$

dans le sol de fondation et

$$\pi^m(\underline{\nu}; [\hat{U}]) = \begin{cases} 0 & \text{si } [\hat{U}] \cdot \underline{\nu} \geq \left| [\hat{U}] \right| \sin \phi \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.31)$$

dans le remblai ou le matelas granulaire.

En ce qui concerne la phase renforcement, on a (voir figure (7.8)) :

$$\pi^r(\hat{d}^r, \hat{\theta}^r, \hat{\chi}^r) = n_0^r \left| \hat{d}^r \right| \quad \text{si } \hat{\theta}^r = 0 \quad \text{et} \quad \left| \frac{n_0^r \hat{d}^r}{2m_0^r \hat{\chi}^r} \right| \geq 1 \quad (7.32)$$

où il conviendra de vérifier la dernière condition, qui correspond au fait que le vecteur $(\hat{d}^r, \hat{\chi}^r)$ appartient au cône des normales extérieures au domaine de résistance de la phase

renforcement aux points anguleux ($n^r = \pm n_0^r, m^r = 0$).

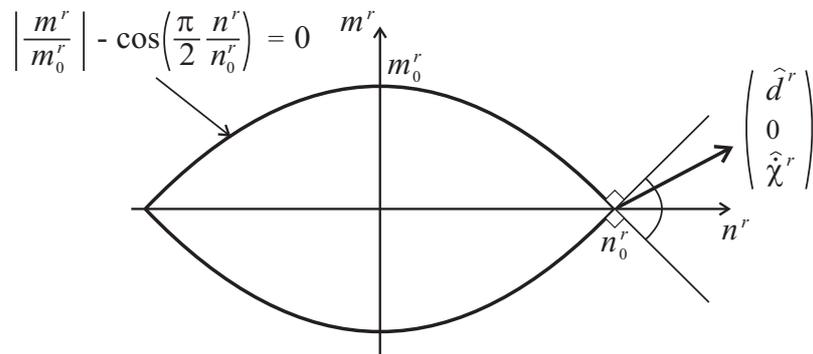


FIG. 7.8. Calcul de la fonction $\pi^r(\hat{d}^r, 0, \hat{\chi}^r)$

De même dans le cas d'une discontinuité de vitesse $[\hat{U}]$ dans la phase renforcement, on obtient, compte tenu de la condition de résistance de cette phase :

$$\pi^r(\underline{\nu}; [\hat{U}]) = \begin{cases} n_0^r |[\hat{U}_x] \nu_x| & \text{si } [\hat{U}_y] = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.33)$$

Enfin la fonction π relative à une discontinuité du taux de rotation (à la traversée d'une surface $\Sigma_{\hat{\omega}}$) vaut :

$$\pi^r(\underline{\nu}; [\hat{\omega}]) = m_0^r |[\hat{\omega}] \nu_x| \quad (7.34)$$

On obtient en définitive la condition *nécessaire* suivante pour que l'ouvrage reste stable au sens du calcul à la rupture :

$$\text{stabilité}(k \leq k^+) \Rightarrow \forall (\hat{U}, \hat{\omega}) \quad P_e(\hat{U}, \hat{\omega}) = \int_{\Omega} \gamma (-\hat{U}_x + k\hat{U}_y) d\Omega \leq P_{rm}(\hat{U}, \hat{\omega}) \quad (7.35)$$

Les deux conditions suivantes étant réalisées :

$$\int_{\Omega} -\gamma \hat{U}_x d\Omega \leq P_{rm}(\hat{U}, \hat{\omega}) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \gamma \hat{U}_y d\Omega \geq 0 \quad (7.36)$$

l'inéquation (7.35) conduit à la *majoration* suivante de la valeur critique du coefficient sismique :

$$k^+ \leq \frac{P_{rm}(\hat{U}, \hat{\omega}) + \int_{\Omega} \gamma \hat{U}_x d\Omega}{\int_{\Omega} \gamma \hat{U}_y d\Omega} \quad (7.37)$$

7.3.4 Description du problème et choix des paramètres de calcul

Les caractéristiques géométriques du problème analysé par le biais de l'approche cinématique par l'extérieur mise en œuvre dans le cadre du modèle biphasique, sont résumées sur la figure (7.9).

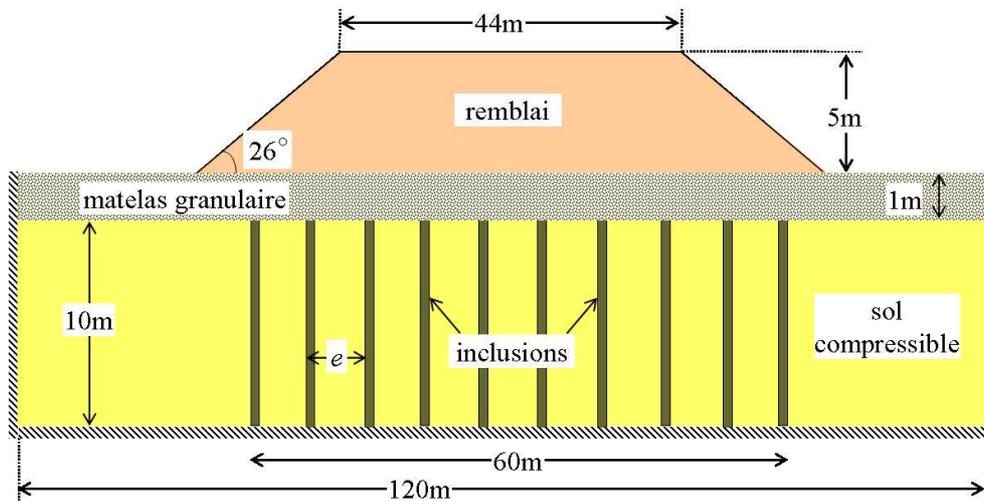


FIG. 7.9. Caractéristiques géométriques du problème

Tous les sols ont le même poids volumique γ^s égal à 18kN/m^3 . Le matelas granulaire et le remblai sont constitués d'un matériau purement frottant avec un angle de frottement égal à $\phi = 35^\circ$, tandis que la cohésion du sol de fondation est égale à $C=20\text{kPa}$. Il est renforcé sur une largeur égale à 60m par un groupe d'inclusions tubulaires verticales de 10m de hauteur introduites dans le sol jusqu'au substratum, dans lequel elles sont encastrées (déplacements et rotation nuls).

Chaque inclusion a les caractéristiques géométriques suivantes (voir les notations sur la figure (7.6)) :

$$e = 1,25\text{m}, \quad R = 0,25\text{m}, \quad t = 0,005\text{m} \quad (7.38)$$

de sorte que la fraction volumique du renforcement est :

$$\eta = \frac{2\pi Rt}{e^2} \cong 0,5\% \quad (7.39)$$

Les inclusions sont en acier dont la résistance sous sollicitation uniaxiale est égale à $\sigma_Y=200\text{MPa}$. Les résistances à l'effort normal et à la flexion de la phase renforcement sont donc calculées comme suit :

$$n_0^r = \eta\sigma_Y \cong 1\text{MPa}, \quad m_0^r = \frac{2}{\pi}\eta R\sigma_Y \cong 0,16\text{MPa.m} \quad (7.40)$$

7.3.5 Mise en oeuvre de l'approche cinématique

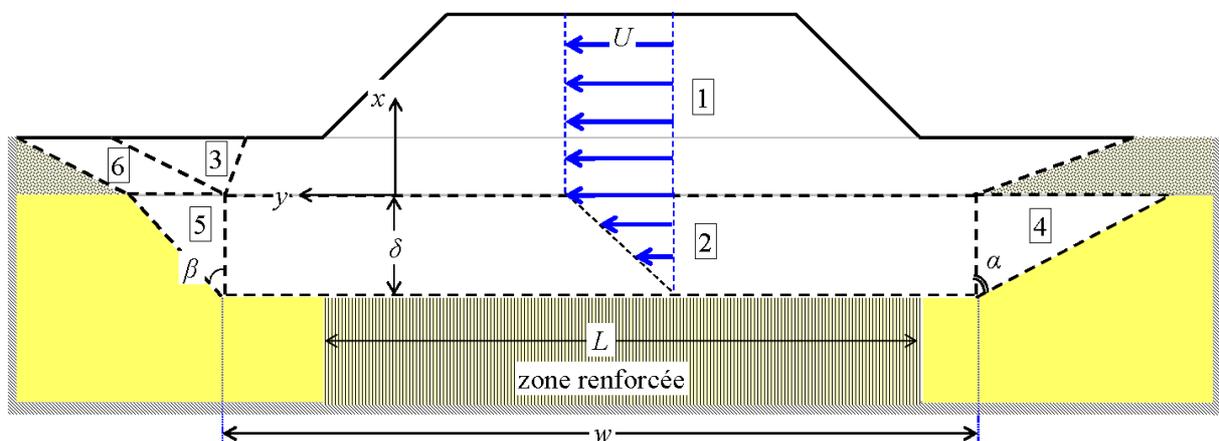


FIG. 7.10. Mécanisme de rupture de l'ouvrage renforcé, utilisé dans l'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture

Le mécanisme considéré dans l'analyse est représenté sur la figure (7.10). Ce mécanisme est entièrement déterminé par quatre paramètres : deux longueurs, w et δ , ainsi que deux paramètres angulaires α et β .

Le champ de vitesse correspondant à un tel mécanisme est défini comme suit :

- La zone n° 1 qui comprend le remblai et une partie du matelas granulaire sous-jacent est animée d'une vitesse horizontale égale à U (bloc en *translation*).
- La zone n° 2 est une "bande de cisaillement" d'épaisseur δ , entièrement localisée dans le sol purement cohérent en dessous du bloc n° 1, à la traversée de laquelle la vitesse varie linéairement de zéro à U :

$$\hat{U}_x = 0, \quad \hat{U}_y = U(1 + x/\delta) \quad (7.41)$$

d'où

$$\underline{\hat{d}} = \frac{U}{2\delta}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad (7.42)$$

et donc la fonction π correspondante calculée à partir de l'équation (7.28) :

$$\pi^m(\underline{\hat{d}}) = C|U|/\delta \quad \text{car } \text{tr}\underline{\hat{d}} = 0 \quad (7.43)$$

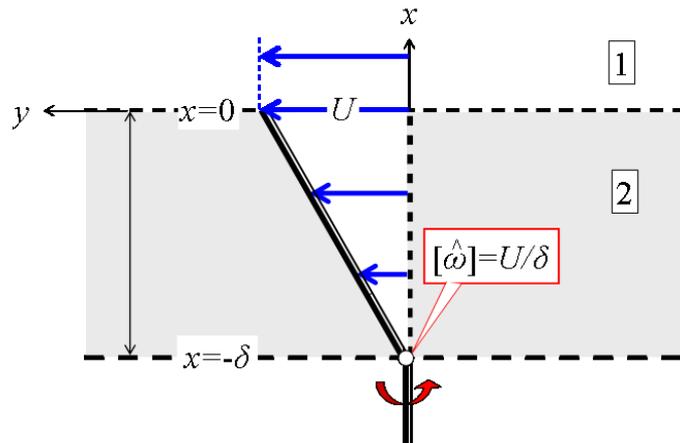


FIG. 7.11. Champ de vitesse dans la zone de cisaillement n° 2 et saut de taux de rotation induit dans la phase renforcement

En ce qui concerne la phase renforcement, le champ de vitesse de rotation virtuelle retenu pour la phase renforcement est défini par : $\hat{\omega} = \partial \hat{U}_y / \partial x$ (condition de type Navier-Bernoulli). Compte tenu de ce que $\hat{d}^r = \partial \hat{U}_x / \partial x = 0$; $\hat{\theta}^r = 0$ et $\hat{\chi}^r = \partial^2 \hat{U}_y / \partial x^2 = 0$, il vient que :

$$\pi^r(\hat{d}^r, \hat{\theta}^r, \hat{\chi}^r) = 0 \quad (7.44)$$

tandis que le taux de rotation $\hat{\omega} = \partial \hat{U}_y / \partial x = U/\delta$ étant constant dans la zone de cisaillement ($0 \geq x > -\delta$), mais égal à zéro pour $x \leq -\delta$, une discontinuité de ce taux de rotation apparaît à la traversée du plan inférieur de la zone de cisaillement (figure (7.11)).

$$[\hat{\omega}] = \hat{\omega}(x = -\delta^+) - \hat{\omega}(x = -\delta^-) = U/\delta \quad (7.45)$$

La valeur de la fonction π correspondante est donc d'après (7.34) :

$$\pi^r \left(\underline{\nu} = \underline{e}_x; \left[\hat{\omega} \right] \right) = m_0^r \left| \left[\hat{\omega} \right] \right| = m_0^r |U| / \delta \quad (7.46)$$

et la contribution de toute la zone en cisaillement n° 2 à la *puissance résistante maximale* développée dans un tel mécanisme peut être en conséquence calculée par intégration.

Commentaire. Ce type de mécanisme de rupture comprenant une zone en cisaillement à travers laquelle les renforcements se "déforment" continûment, au lieu de subir d'une discontinuité de vitesse, a été déjà utilisé pour effectuer l'analyse de stabilité de l'ouvrage en sol renforcé, en particulier dans le cas où non seulement la résistance à l'effort normal mais également les résistances au cisaillement et à la flexion des inclusions de renforcement doivent être prises en compte (de Buhan et Salençon (1993) [24]; de Buhan et al. (1998) [20]), ce qui est évidemment le cas des inclusions "rigides" considérées ici.

- La zone n° 3 est un bloc triangulaire également animée d'un mouvement de translation, dont la vitesse correspondante est :

$$\underline{\hat{U}}^{(3)} = \frac{U}{\tan \beta} \underline{e}_x + U \underline{e}_y \quad (7.47)$$

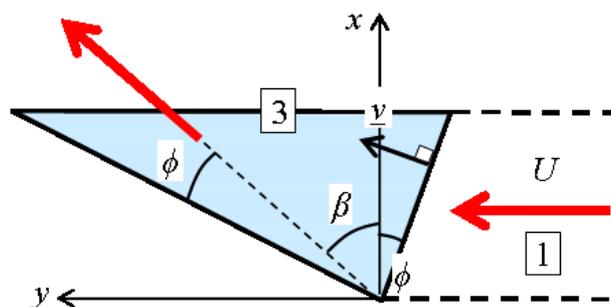


FIG. 7.12. Cinématique de la zone n° 3

de sorte qu'un saut de vitesse apparaît en tout point de la surface de discontinuité entre les blocs n° 1 et 3 (voir figure (7.12)) :

$$\left[\underline{\hat{U}} \right] = \underline{\hat{U}}^{(3)} - \underline{\hat{U}}^{(1)} = \frac{U}{\tan \beta} \underline{e}_x \quad (7.48)$$

et donc en conséquence de (7.30) :

$$\pi^m(\underline{\nu}; [\hat{U}]) = 0 \quad \text{car} \quad [\hat{U}] \cdot \underline{\nu} \geq \left| [\hat{U}] \right| \sin \phi \quad (7.49)$$

- Les régions n° 4 et 5, définies par les angles α et β , respectivement, sont des zones de cisaillement triangulaires, où les taux de déformation correspondants sont homogènes, égaux à (voir figure (7.13)) :

$$\begin{cases} \underline{\underline{d}}^{(4)} = \frac{U}{\delta \sin^2 \alpha} (\underline{e}_{X_4} \otimes \underline{e}_{Y_4} + \underline{e}_{Y_4} \otimes \underline{e}_{X_4}) \\ \underline{\underline{d}}^{(5)} = \frac{U}{\delta \sin^2 \beta} (\underline{e}_{X_5} \otimes \underline{e}_{Y_5} + \underline{e}_{Y_5} \otimes \underline{e}_{X_5}) \end{cases} \quad (7.50)$$

tandis que les sauts de vitesse entre ces zones et la zone de cisaillement rectangulaire n°2 sont purement tangentiels.

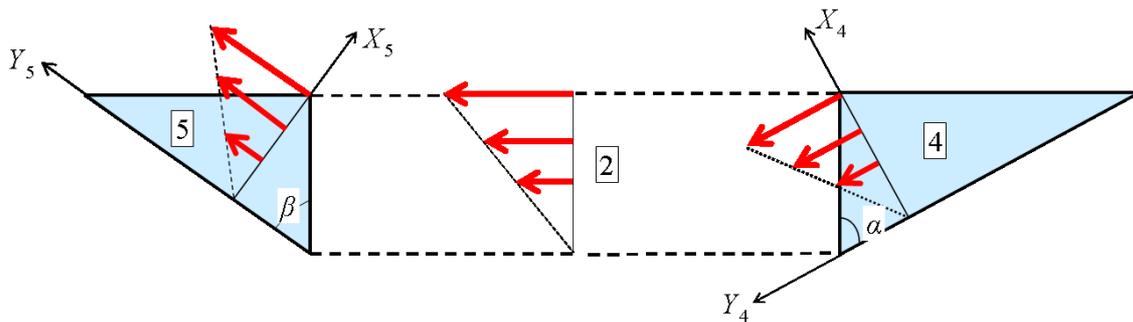


FIG. 7.13. Zones de cisaillement triangulaires n° 4 et 5

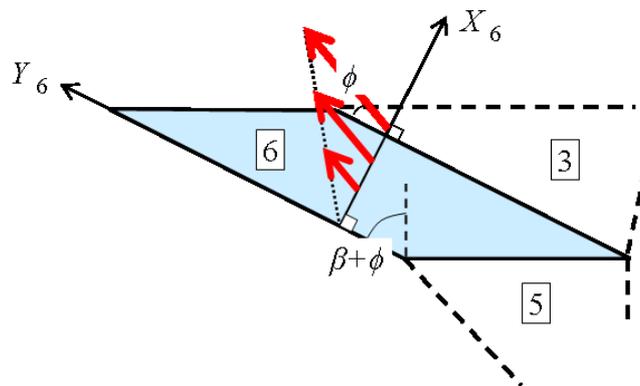


FIG. 7.14. Champ de vitesse dans la zone n° 6

- Enfin, la zone n° 6 située dans la couche de matelas granulaire est également une zone en cisaillement. Le champ de vitesse dans cette zone (représenté sur la figure

(7.14)) est défini par continuité avec ceux définis précédemment dans des zones n° 3 et 5.

Tous calculs faits, il ressort que la puissance résistante maximale développée dans le mécanisme de rupture décrit ci-dessus peut être additivement décomposée en :

$$P_{rm}(\hat{U}, \hat{\omega}) = P_{rm}^m(\hat{U}) + P_{rm}^r(\hat{U}, \hat{\omega}) \quad (7.51)$$

où $P_{rm}^m(\hat{U})$ désigne la contribution de la phase matrice, représentant les différents sols (renforcés ou non), elle s'écrit :

$$\begin{aligned} P_{rm}^m(\hat{U}) &= C|U| \left[w + \delta \left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\beta} + \frac{1}{2 \tan \alpha} + \frac{1}{2 \tan \beta} \right) \right] \\ &= C|U|Hf \left(\frac{w}{H}, \frac{\delta}{H}, \alpha, \beta \right) \end{aligned} \quad (7.52)$$

où, H étant l'épaisseur de la couche de sol de fondation.

La contribution de la phase renforcement s'écrit tout simplement :

$$P_{rm}^r(\hat{U}, \hat{\omega}) = m_0 \frac{|U|}{\delta} L \quad (7.53)$$

Par ailleurs, l'expression de la puissance des forces extérieures développée dans le même mécanisme peut être mise sous la forme :

$$P_e(\hat{U}, \hat{\omega}) = \int_{\Omega} \gamma(-\underline{e}_x + k\underline{e}_y) \cdot \hat{U} d\Omega = \gamma H^2 U \left\{ kg \left(\frac{w}{H}, \frac{\delta}{H}, \alpha, \beta \right) - h \left(\frac{w}{H}, \frac{\delta}{H}, \alpha, \beta \right) \right\} \quad (7.54)$$

où g et h sont des fonctions sans dimension.

L'inégalité fondamentale (7.37) conduit à la majoration suivante du coefficient sismique critique (U est une quantité strictement positive) :

$$k^+ \leq k^c \left(\frac{w}{H}, \frac{\delta}{H}, \alpha, \beta \right) = \frac{\frac{C}{\gamma H} f \left(\frac{w}{H}, \frac{\delta}{H}, \alpha, \beta \right) + \frac{m_0^r L}{\gamma H^2 \delta} + h \left(\frac{w}{H}, \frac{\delta}{H}, \alpha, \beta \right)}{g \left(\frac{w}{H}, \frac{\delta}{H}, \alpha, \beta \right)} \quad (7.55)$$

La meilleure majoration est alors recherchée par le biais d'une minimisation par rapport aux paramètres géométriques qui définissent le mécanisme de rupture.

$$k^+ \leq \underset{(w/H, \delta/H, \alpha, \beta)}{\text{Min}} k^c \left(\frac{w}{H}, \frac{\delta}{H}, \alpha, \beta \right) \quad (7.56)$$

7.3.6 Résultats de l'analyse et comparaison avec la simulation élasto-plastique

A la suite de la minimisation de la fonction k^c définie ci-dessus (qui peut être facilement effectuée en raison du petit nombre de paramètres), la valeur suivante de la borne supérieure du coefficient sismique critique est obtenue pour le jeu de données sélectionné :

$$k^+ \leq k^c(w = 90\text{m}, \delta = H = 10\text{m}, \alpha = 45^\circ, \beta = 55^\circ) \cong 0,23 \quad (7.57)$$

le mécanisme de rupture correspondant étant tel que son extension horizontale totale est égale à celle de l'ensemble de la structure, tandis que l'épaisseur δ la zone de cisaillement n°2 coïncide avec l'épaisseur H du sol de fondation. Cette valeur est à comparée avec celle correspondante à la structure non-renforcée, soit :

$$k^+(n_0^r = m_0^r = 0) \leq 0,046 \quad (7.58)$$

obtenue par le biais d'un mécanisme de rupture avec des blocs en rotation représenté sur la figure (7.17)(a). Même s'il faut garder présent à l'esprit que les valeurs ci-dessus ne sont que des majorants, on peut néanmoins conclure que, en conséquence du renforcement par des inclusions, le coefficient sismique critique, et donc la stabilité de l'ouvrage sous chargement sismique, est multiplié par un facteur proche de 5.

De plus, si l'on néglige la résistance à la flexion du renforcement, c'est-à-dire si l'on prend $m_0^r = 0$ (inclusions "flexibles" : voir première partie de ce mémoire), la valeur du majorant devient :

$$k^+(m_0^r = 0) \leq 0,118 \quad (7.59)$$

Afin de pouvoir juger de la validité et de la qualité de l'approche cinématique par l'extérieur ci-dessus, une simulation élasto-plastique par éléments finis de la dernière configuration a été effectuée en utilisant le modèle biphasique pour la fondation renforcée par inclusions rigides, où tous les matériaux constitutifs (sol et renforcement) sont supposés obéir à un comportement élastique parfaitement plastique, avec la règle d'écoulement associée, y compris le remblai et le matelas granulaire frottant, par le choix d'un angle de dilatance égal à l'angle de frottement. Plus précisément, les critères de plasticité des différents matériaux choisis pour cette simulation ont été pris identiques aux critères de résistance respectifs ci-dessus (cohésion et angle de frottement). Par ailleurs, comme la valeur de la charge limite n'est pas influencée par les caractéristiques élastiques des différents matériaux, ces derniers peuvent être donc choisis arbitrairement.

Même si beaucoup plus de détails peuvent être trouvés dans Hassen et de Buhan (2005) [38], Hassen et de Buhan (2006) [39], quelques explications méritent d'être données relatives à la formulation par éléments finis du modèle biphasique dans le contexte de l'élasto-plasticité.

Le chargement de l'ouvrage (caractérisé dans ce cas par le coefficient sismique k qui est progressivement augmenté comme une fonction du temps t , à partir de zéro) est classiquement subdivisé en petits *incrément de chargement* (pas de chargement) successifs, de la forme :

$$\delta k = k(t + \delta t) - k(t) \quad (7.60)$$

Supposant connue la solution du problème, correspondant à l'état de chargement $k(t)$, en termes de champs de déplacements-rotation, champs de contraintes et champ de déformations plastiques, le problème consiste à calculer la solution à l'instant $t + \delta t$ associée à l'incrément de chargement δk . Cette solution peut être obtenue en ajoutant à la solution à l'instant t , la solution d'un problème *élastique* relatif à l'application de l'incrément de chargement δk , les *incrément de déformations plastiques* étant prescrits

en tant que déformations anélastiques. Ces dernières sont ensuite déterminées par le biais d'une procédure itérative, appelée *algorithme de retour radial* (*return mapping algorithm*) (Crisfield (1991) [14]; Simo et Hughes (1998) [67]), mise en œuvre ici pour chaque phase indépendamment, jusqu'à la convergence. Cette procédure utilise la projection sur les domaines d'élasticité respectifs des différentes phases.

Par ailleurs, la formulation par éléments finis du problème d'élasticité incrémental décrit ci-dessus est basée sur le principe du minimum de l'énergie potentielle de l'ouvrage exprimée comme la différence entre une fonctionnelle quadratique des champs de déplacement-rotation cinématiquement admissible et une fonctionnelle linéaire de déformations plastiques imposées et les incréments de chargement extérieurs. Un maillage éléments finis des éléments triangulaires à 6 nœuds, avec une approximation de second degré à la fois pour les déplacements et la rotation, est adopté de manière à éviter les difficultés numériques communément connues comme phénomène "verrouillage de cisaillement" dans le domaine de simulation par éléments finis de poutres et plaques.

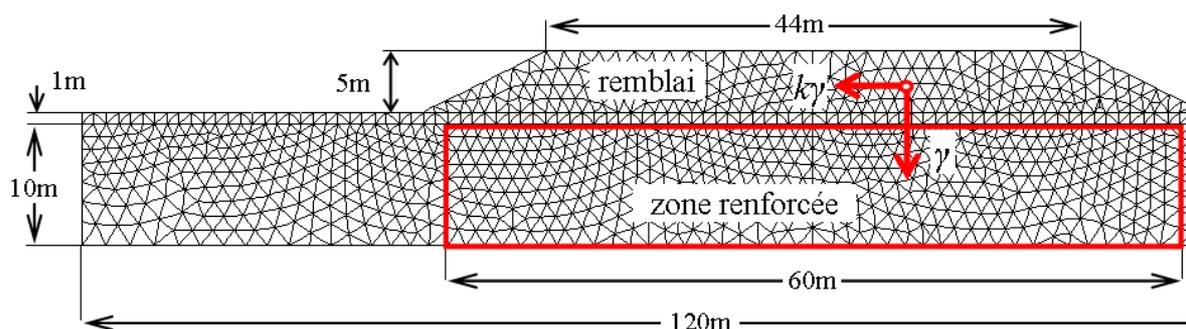


FIG. 7.15. Maillage éléments finis adopté pour la simulation élasto-plastique de l'ouvrage

Comme on peut le voir sur la figure (7.15), la structure considérée a été discrétisée en 2268 éléments triangulaires à 6 nœuds (T6). Il convient de souligner que le maillage dans la zone renforcée ne doit pas être plus fin que celui qui serait utilisé pour une fondation homogène (non renforcée). La seule différence réside dans le fait que la cinématique de chaque nœud dans la zone renforcée est caractérisée par trois variables (deux déplacements et une rotation), au lieu de deux variables.

Partant de la situation où l'ouvrage a été pré-chargé par l'application de la gravité, la réponse de l'ouvrage est alors analysée sous l'action du séisme induisant la charge horizontale, c'est en augmentant le coefficient sismique par l'application successive d'incrémentes suffisamment petits, jusqu'à la rupture par l'apparition d'un *mécanisme d'écoulement plastique libre*. Les résultats de cette simulation par éléments finis sont présentés sous

la forme de l'évolution du coefficient sismique (k) en fonction du déplacement horizontal d'un point représentatif situé à la base du remblai, sur l'axe de symétrie de l'ouvrage. Les résultats sont représentés sur la figure (7.16) sous la forme de trois courbes dont les valeurs asymptotiques sont, comme prévu, légèrement inférieures aux majorations correspondantes obtenues à partir de l'approche cinématique du calcul à la rupture (lignes continues horizontales). Le cas ($n_0^r = m_0^r = 0$) correspond à l'analyse de stabilité de la structure non renforcée, ($n_0^r; m_0^r = 0$) correspond à l'étude du renforcement par inclusions souples, tandis que ($n_0^r; m_0$) correspond au cas d'étude décrit en §7.3.4.

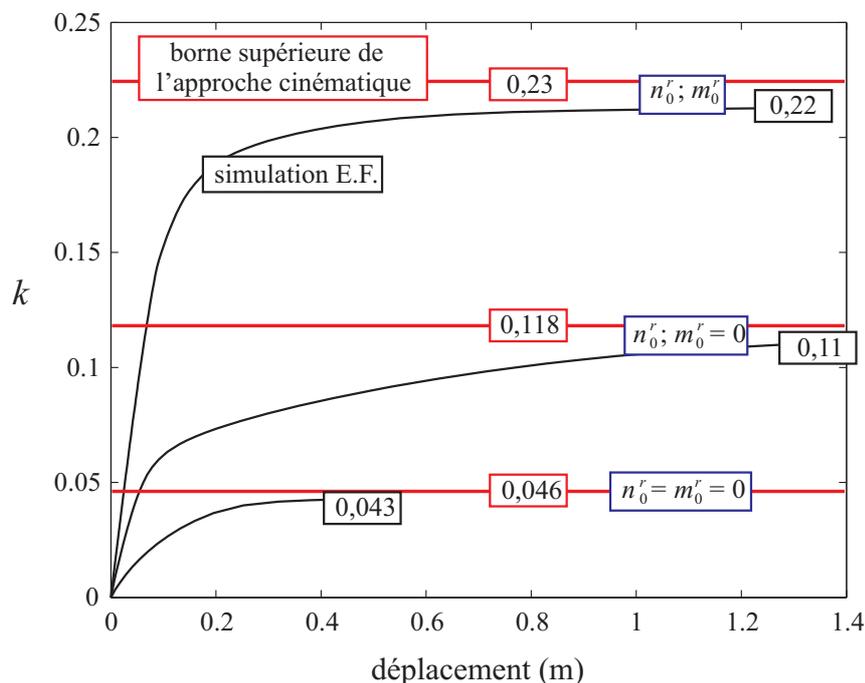


FIG. 7.16. Courbes charge-déplacement pour la structure non renforcée et renforcée sous l'action d'un séisme induisant un chargement horizontal

Ce bon accord entre les résultats de l'approche cinématique du calcul à la rupture et ceux de la simulation numérique élasto-plastique est confirmé par la comparaison entre les mécanismes de rupture associés à la mise en œuvre de l'approche cinématique du calcul à la rupture et les distributions de taux de déformations plastiques à la rupture issues des simulations élasto-plastiques par éléments finis, visualisées sous la forme d'isovaleurs. La figure (7.17) présente une telle comparaison dans le cas de la fondation non renforcée (figure (7.17)(a)) et dans le cas où les inclusions du renforcement sont supposées être flexibles (figure (7.17)(b)). Ces figures montrent une correspondance presque parfaite entre le calcul à la rupture (lignes pointillées) et les modes de ruine plastique localisés.

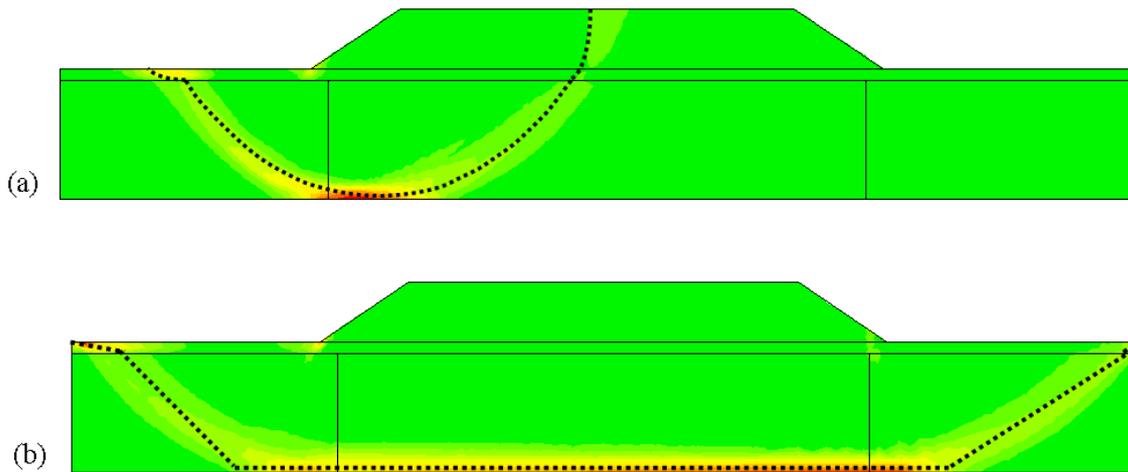


FIG. 7.17. Mécanismes de rupture obtenus par calcul à la rupture (lignes pointillées) et simulation élastoplastique (isovaleurs) pour : (a) structure non renforcée et (b) le cas du renforcement par inclusions flexibles

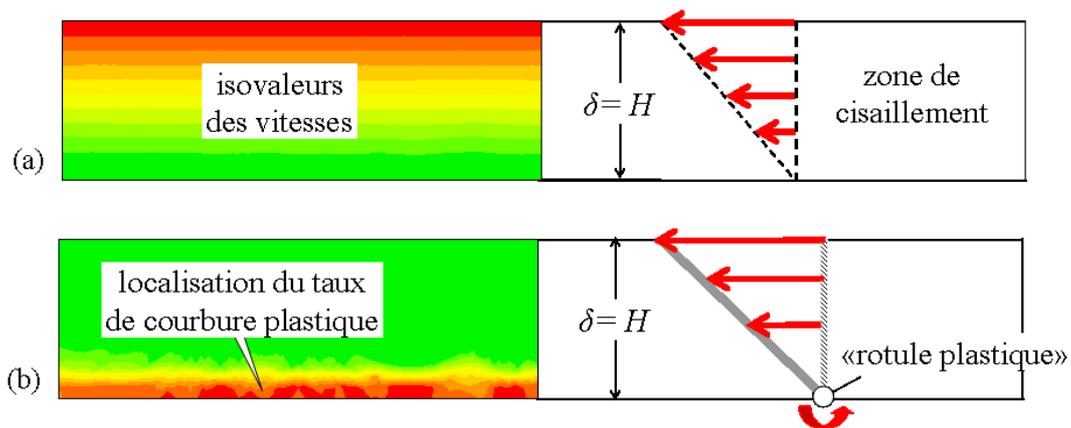


FIG. 7.18. Comparaison des mécanismes de rupture plastiques et de ceux issus du calcul à la rupture dans la zone renforcée lorsque la résistance à la flexion des inclusions du renforcement est prise en compte

Une comparaison similaire a été effectuée pour le cas où la résistance à la flexion et non pas seulement la résistance à l'effort normal du renforcement sont prises en compte, en se concentrant uniquement sur la zone renforcée comme le montre la figure (7.18). La figure (7.18)(a) compare la distribution des vitesses à la rupture dans la zone renforcée extraite de la simulation élasto-plastique par éléments finis (côté gauche de la figure), avec la cinématique de la zone de cisaillement attachée au mécanisme de rupture optimal utilisé dans l'approche cinématique par l'extérieur (côté droit). De même, la figure (7.18)(b) présente la même comparaison relative à la distribution du taux de courbure de la phase

renforcement localisée sous la forme de "rotules plastiques" au bas de la couche de sol où les renforcements sont encastrés dans le substratum.

Enfin, une étude paramétrique a été effectuée pour évaluer l'influence spécifique de la résistance à la flexion du renforcement sur la stabilité de l'ouvrage dans son ensemble. Deux situations (notées A et B) ont été prises en considération, en plus du cas de référence traité ci-dessus. Plus précisément, dans tous les trois cas, on fait varier proportionnellement l'espacement, le rayon et l'épaisseur des inclusions tubulaires métalliques (voir tableau (7.1)), de sorte que la fraction volumique η du matériau de renforcement, et donc la résistance à l'effort normal n_0^r de la phase renforcement restent constants, tandis que le paramètre de la résistance à la flexion donné par (voir l'équation (7.40)) :

$$m_0^r = \frac{2}{\pi} \eta R \sigma_Y \quad (7.61)$$

qui est directement proportionnel aux caractéristiques géométriques du renforcement (R , t , ou e) évolue d'une situation à l'autre, comme on peut le voir sur le tableau (7.1).

TAB. 7.1. *Caractéristiques géométriques des inclusions de renforcement*

Cas	inclusions tubulaires verticales					
	R (m)	t (m)	e (m)	η (%)	n_0^r (MPa)	m_0^r (MPa.m)
A	0,125	0,0025	0,675	0,5	1,0	0,08
Référence	0,25	0,005	1,25			0,16
B	0,5	0,01	2,5			0,32

Les résultats de l'analyse du calcul à la rupture, ainsi que la simulation élasto-plastique par éléments finis effectuées pour cinq situations différentes sont représentés sur la figure (7.19), où il est à noter que le cas des inclusions "flexibles" ($m_0^r = 0$) correspond au cas limite où R , t et e tendent simultanément vers zéro. Il est à observer qu'un très bon accord est obtenu entre les simulations élasto-plastiques et les analyses du calcul à la rupture, les résultats de cette dernière approche étant légèrement supérieurs (entre 4 et 7%) à ceux obtenus par la simulation par éléments finis, ce qui est parfaitement cohérent avec le fait que l'approche du calcul à la rupture donne des majorants. Ces résultats soulignent à nouveau le rôle essentiel joué par les caractéristiques de résistance à la flexion des renforcements dans l'augmentation de la stabilité de l'ouvrage sous chargement sismique.

Ils confirment les conclusions tirées de l'analyse purement élastique linéaire, exprimés en termes de déplacements horizontaux induits par les chargements sismiques, déjà présentés dans le chapitre 6 de ce mémoire.

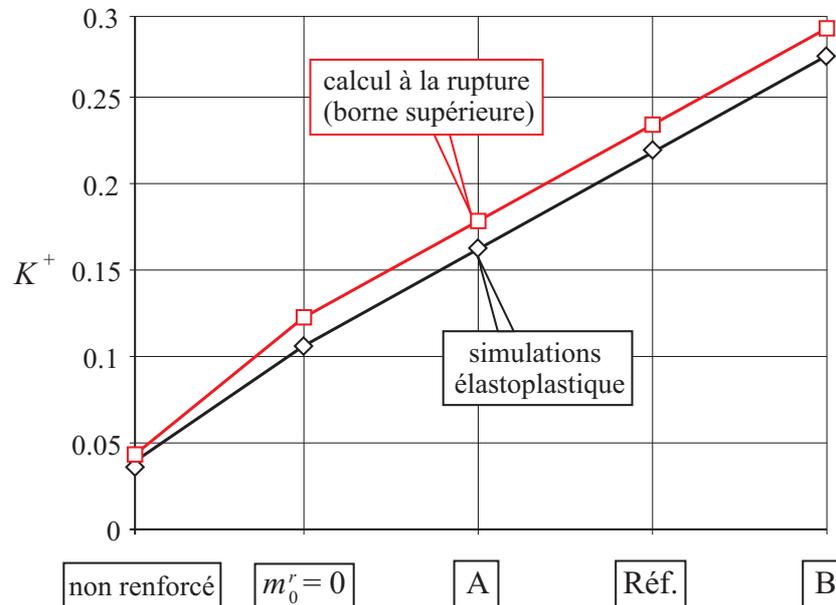


FIG. 7.19. Comparaison entre les résultats de l'approche cinématique du calcul à la rupture et ceux obtenus par des simulations élastoplastiques

7.3.7 Conclusions

Cette partie du travail a clairement montré que l'emploi d'une approche biphasique pour l'analyse de stabilité d'un remblai renforcé par inclusions sous chargement sismique a permis de concevoir une méthode de dimensionnement semi-analytique simple, fondée sur la considération de mécanismes de rupture choisis de manière appropriée. La caractéristique principale de ces derniers comparés à ceux généralement utilisés pour les ouvrages non renforcés, réside dans l'introduction de schémas de rupture dans lesquels les inclusions de renforcement subissent des déformations continues à la traversée d'une zone de cisaillement d'épaisseur finie, générant donc les surfaces localisées de "rotules plastiques". Cela a été confirmé et validé par la comparaison des résultats de l'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture avec ceux provenant de la simulation élasto-plastique basée sur le code numérique par éléments finis mis au point dans le cadre de ce travail. En effet, outre que cette comparaison a permis de montrer un très bon accord entre ces résultats en termes de prévision de la charge limite, il a été observé que les mécanismes de rupture optimaux obtenus de l'approche cinématique, sont très proches

de ceux résultant de la simulation élasto-plastique.

Par ailleurs, l'analyse paramétrique effectuée dans ce chapitre a mis en évidence le rôle crucial joué par les capacités de résistance à la flexion des inclusions dans l'augmentation de la stabilité de l'ouvrage. Elle a notamment permis de conclure que, sous l'hypothèse d'adhérence parfaite, à fraction volumique de renforcement constante et donc pour la même capacité de résistance à l'effort normal de la phase renforcement, un renforcement par relativement peu d'inclusions de grand diamètre est beaucoup plus bénéfique pour la stabilité globale de l'ouvrage que l'utilisation d'un plus grand nombre des inclusions "flexibles", de petit diamètre. Une alternative possible à l'utilisation d'inclusions verticales de grand diamètre, consiste à renforcer le sol de fondation par les inclusions symétriquement inclinées, afin de mieux mobiliser ses capacités de résistance à l'effort normal, comme dans la technique de renforcement par des réseaux de "micropieux" (ADSC (2008) [2]). Les détails de cette analyse font l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 8

Modèle "triphase" pour le calcul de la résistance sismique des ouvrages renforcés par réseaux d'inclusions

8.1 Introduction

Les résultats trouvés dans le chapitre précédent ont mis en évidence le rôle crucial joué par les caractéristiques de flexion des renforcements, puisque la valeur critique du coefficient sismique est augmentée de 0,11 dans le cas des inclusions "flexibles" à 0,22 pour des inclusions "rigides" comme on peut le voir sur la figure (7.16) et que nous rappelons sur la figure (8.1).

Il convient toutefois de souligner que l'effet important de stabilisation de l'ouvrage associée à la mobilisation des capacités de résistance à la flexion des inclusions dépend fortement de la condition d'encastrement des inclusions dans le substratum, ce qui est rarement réalisé en pratique, de sorte que la simulation précédente semble quelque peu optimiste. Ceci est clairement démontré par la troisième courbe intermédiaire de la figure (8.1), où l'on a supposé que les inclusions sont simplement connectées au substratum, mais libres en rotation aux points de connexion (moment de flexion égal à zéro), comme illustré par le petit pictogramme superposé à la courbe. En effet, dans une telle configuration, la valeur critique du coefficient sismique chute de 0,22 à 0,13, c'est-à-dire à peine supérieur à la valeur correspondant à l'hypothèse d'inclusions flexibles (0,11).

Cette analyse préliminaire nous conduit à penser qu'une alternative intéressante possible à l'utilisation d'inclusions encastées de grand diamètre, pourrait consister à renforcer la couche de sol de fondation par des inclusions symétriquement inclinées (configuration en "réseau") d'un petit angle par rapport à la verticale, avec l'objectif de mobiliser pleinement leur résistance axiale lorsque l'ouvrage est soumis à un chargement latéral, de la même manière que dans la technique de renforcement par des réseaux de "micropieux" (ADSC (2008) [2]).

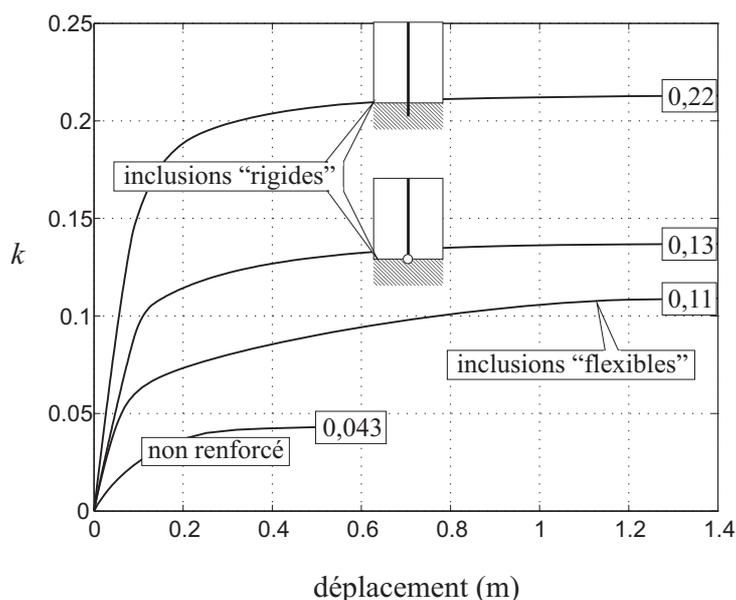


FIG. 8.1. Courbes charge-déplacement pour l'ouvrage non renforcé et l'ouvrage renforcé par inclusions soumis à un chargement sismique

L'objectif central de ce chapitre est de formuler et de développer un modèle "triphase" visant à décrire de manière appropriée le comportement macroscopique d'un sol renforcé par deux familles d'inclusions ayant des orientations différentes. La procédure est fondée sur une extension directe du modèle biphasique appliqué aux sols renforcés par une seule famille d'inclusions linéaires parallèles (de Buhan et Sudret (2000) [26]) et rappelé au chapitre 2 de ce mémoire.

8.2 Position du problème et principe du modèle triphasique

Le problème considéré est présenté sur la figure (8.2) : un remblai reposant sur une couche de sol renforcée par deux familles d'inclusions parallèles, symétriquement inclinées

d'un angle θ par rapport à la verticale, est soumis à un chargement sismique. Comme dans l'analyse faite au chapitre précédent, l'approche "pseudo-statique" a été adoptée, et les effets dynamiques induits par le séisme sur la structure sont modélisés par le biais d'un coefficient adimensionnel k , appelé coefficient sismique, exprimé en pourcentage de la pesanteur g . Le chargement sismique est donc modélisé comme une densité de force volumique uniforme horizontale égale à kg , appliquée sur tout l'ouvrage.

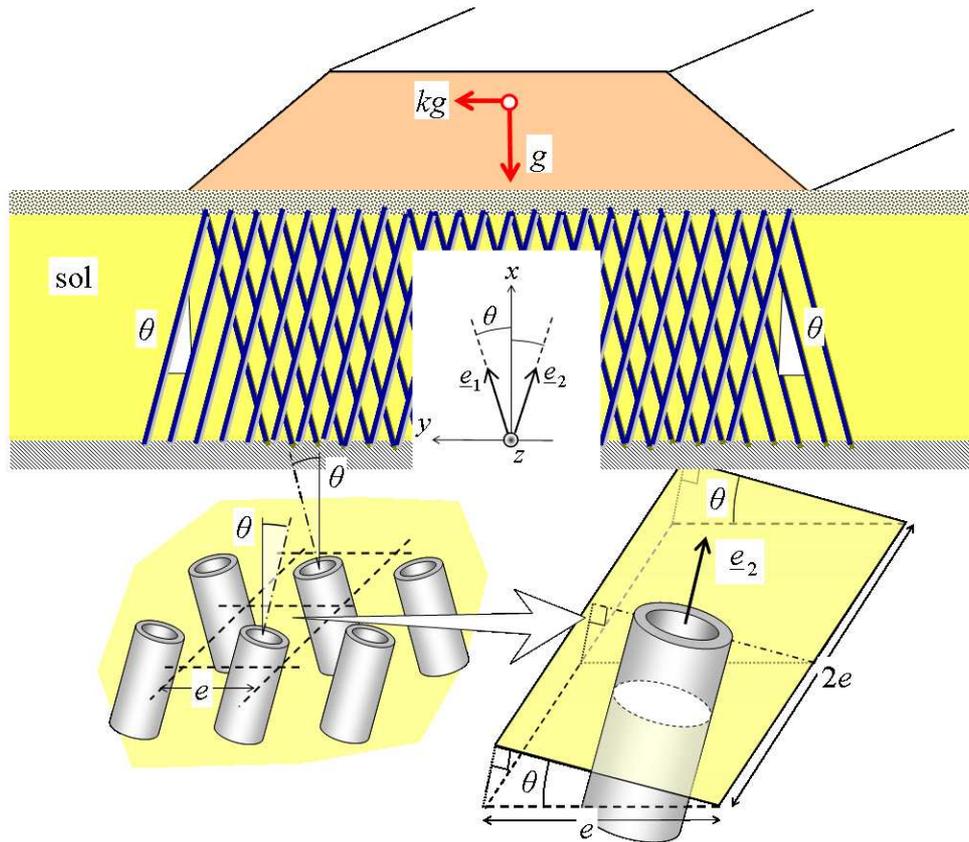


FIG. 8.2. Vue générale d'un remblai sous chargement sismique reposant sur une couche de sol renforcée par deux familles d'inclusions symétriquement inclinées

Partant de la configuration d'un groupe d'inclusions verticales placées dans le sol suivant un arrangement régulier (périodique) carré caractérisé par l'espacement e entre deux inclusions voisines, la configuration en "réseau" est schématisée dans la partie inférieure de la figure (8.2) : chaque rangée d'inclusions parallèle au plan Oxy est alternativement inclinée d'un angle $+\theta$ (famille n° 1 parallèle au vecteur unitaire \underline{e}_1) or $-\theta$ (famille n° 2 parallèle au vecteur unitaire \underline{e}_2). Il s'ensuit que, en désignant par A^r l'aire de la section transversale d'une inclusion individuelle, la proportion volumique de chacune de deux familles de renforcements est égale à :

$$\eta = \frac{A^r}{2e^2 \cos \theta} \quad (8.1)$$

Selon le modèle multiphasique adopté ici pour décrire le comportement macroscopique d'un tel sol renforcé par inclusions, ce dernier est perçu comme une superposition de *trois* milieux continus, dénommés phase matrice, représentant le sol, et *deux phases renforcement* attachées à chaque famille de renforcements. Cela signifie en particulier qu'une particule de la phase matrice et deux particules des phases renforcement sont géométriquement coïncidentes en tout point, mais peuvent être animées de cinématiques différentes : la cinématique de la phase matrice est caractérisée par un vecteur déplacement $\underline{\xi}^m$, tandis que les cinématiques de deux phases renforcement sont caractérisées par le biais de vecteurs déplacement distincts $\underline{\xi}^1$ et $\underline{\xi}^2$ (figure (8.3)).

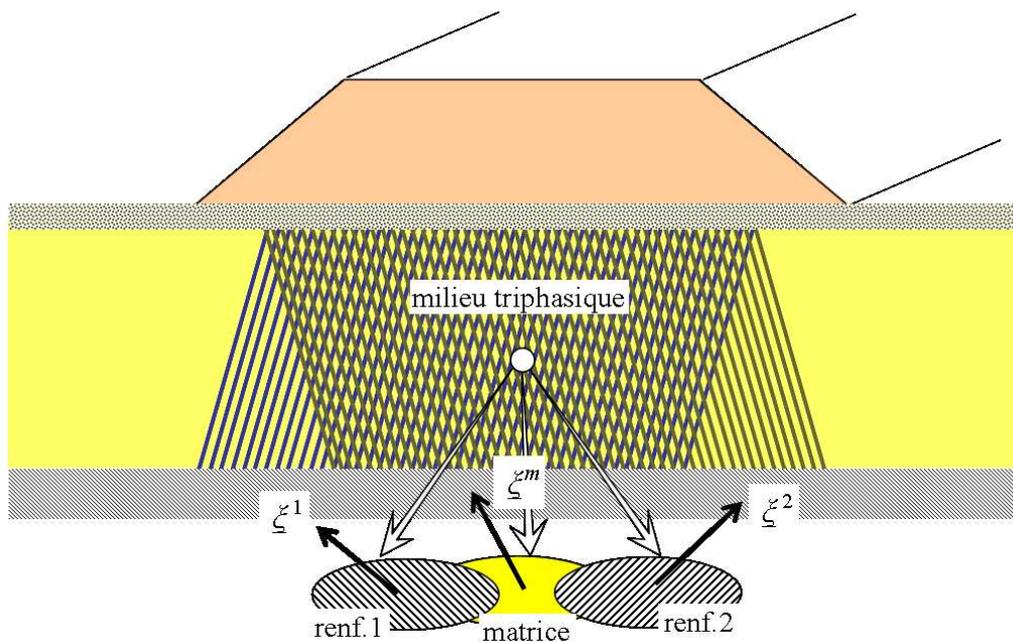


FIG. 8.3. Cinématiques du modèle triphasique du sol renforcé

S'appuyant sur une telle description cinématique, la méthode des puissances virtuelles permet d'exprimer de manière cohérente l'ensemble des équations régissant l'équilibre d'un tel système triphasique. On se reportera pour plus de détails à Sudret et de Buhan (1999) [70], où une telle méthode est appliquée à la modélisation multiphasique d'un matériau renforcé par plusieurs familles d'inclusions linéaires parallèles. Nous donnons ci-après les résultats d'une telle démarche.

8.2.1 Equations de la statique relatives au modèle triphasique

A la suite de la construction du modèle par la méthode des puissances virtuelles, les efforts intérieurs sont représentés par un tenseur de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^m$ pour la phase matrice, tandis qu'ils sont décrits par un tenseur de contraintes *uniaxiales* de la forme :

$$\underline{\underline{n}}^r = n^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r, \quad r = 1, 2 \quad (8.2)$$

pour chaque phase renforcement, où n^r peut être interprétée comme la force axiale N^r dans une inclusion individuelle divisée par l'aire de la section transversale du volume représentatif de sol renforcé attaché à ce renforcement (figure (8.2)) :

$$n^r = \frac{N^r}{2e^2 \cos \theta} \quad (8.3)$$

Les équations d'équilibre correspondantes sont données pour chaque phase séparément comme suit :

◇ *Phase matrice* :

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}}^m + \rho^m \underline{F}^m + \sum_{r=1}^2 \underline{I}^r = \underline{0} \quad (8.4)$$

où $\rho^m \underline{F}^m$ est la densité volumique d'efforts extérieurs appliquée sur la phase matrice et \underline{I}^r désigne la densité volumique d'efforts d'interaction appliquée par la phase renforcement n° r sur la phase matrice.

◇ *Phases renforcement* :

$$r = 1, 2 : \quad \text{div} (n^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) + \rho^r \underline{F}^r - \underline{I}^r = 0 \quad (8.5)$$

où $\rho^r \underline{F}^r$ est la densité volumique d'efforts extérieurs appliquée sur la phase renforcement n° r .

Dans le cas particulier considéré ici, le chargement de la structure est associé à l'application d'une densité d'effort volumique uniforme égale à la somme de la pesanteur (verticale vers le bas) et du chargement sismique (horizontal). D'où :

$$\underline{F}^m = \underline{F}^r = g(-\underline{e}_x + k\underline{e}_y) \quad (8.6)$$

Par ailleurs, désignant par $\tilde{\rho}^s$ (resp. $\tilde{\rho}^r$) la masse volumique du sol (resp. du matériau de renforcement), les quantités correspondantes relatives aux différentes phases à l'échelle macroscopique peuvent être calculées comme suit :

$$\rho^m = (1 - \eta)\tilde{\rho}^s \cong \tilde{\rho}^s \quad \text{et} \quad \rho^r = \eta\tilde{\rho}^r \cong 0 \quad (8.7)$$

où il a été tenu compte du fait que la fraction volumique de renforcement η (définie par (8.1)) reste généralement très faible. Par conséquent, les équations d'équilibre (8.5) deviennent :

$$r = 1, 2 : \quad \text{div}(n^r \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) - \underline{I}^r \cong 0 \quad (8.8)$$

ou

$$r = 1, 2 : \quad \underline{I}^r \cong \frac{\partial n^r}{\partial x_r} \underline{e}_r \quad (8.9)$$

prouvant ainsi que la densité de force d'interaction volumique entre la phase matrice et la phase renforcement n° r est parallèle à la direction de la famille d'inclusions correspondante.

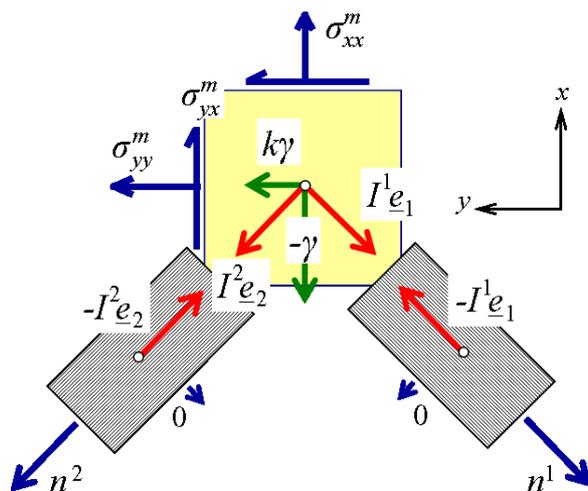


FIG. 8.4. Contraintes, densités de forces d'interaction et forces extérieures impliquées dans une description triphasique d'un sol renforcé par deux familles d'inclusions

De même, l'équation d'équilibre (8.4) peut être réécrite comme suit :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^m + \gamma (-e_x + k e_y) + \sum_{r=1}^2 I^r e_r = 0 \quad (8.10)$$

où γ est le poids volumique du sol.

La figure (8.4) illustre toutes les variables de contraintes, densités de forces d'interaction et forces extérieures attachées à un tel modèle "triphase". Il est à noter qu'un tel modèle ne comporte aucune interaction entre les deux phases renforcement, ce qui est cohérent avec le fait que les inclusions d'une famille ne sont pas connectées à celles de l'autre famille.

8.2.2 Comportement élasto-plastique

Dans le cadre des petites perturbations, on adoptera un comportement simplifié élastique parfaitement plastique pour tous les matériaux constitutifs et donc pour les phases correspondantes.

Pour la phase matrice, une loi de comportement de type élastique parfaitement plastique est exprimée comme celle déjà décrite par les équations (2.10) et (2.11) à la section 2.3.2 du chapitre 2.

Pour chaque phase renforcement, le comportement élastique parfaitement plastique peut être exprimé comme suit.

$$r = 1, 2 \quad n^r = \alpha (\varepsilon^r - \varepsilon_p^r) \quad \text{avec} \quad \varepsilon^r = \frac{\partial (\underline{\xi}^r \cdot \underline{e}_r)}{\partial x_r} \quad (8.11)$$

où α est la raideur axiale de la phase renforcement n° r , qui peut être interprétée comme la raideur axiale d'une inclusion individuelle par unité de surface transversale. Elle s'écrit donc :

$$\alpha = \frac{E^r A^r}{(2e^2 \cos \theta)} = \eta E^r \quad (8.12)$$

(E^r est le module d'Young du matériau de renforcement). L'évolution de la déformation plastique est donnée par :

$$\dot{\varepsilon}_p^r = \dot{\lambda}^r \quad \text{avec} \quad \dot{\lambda}^r \begin{cases} \geq 0 & \text{si } n^r = +n_0, \dot{n}^r = 0 \\ \leq 0 & \text{si } n^r = -n_0, \dot{n}^r = 0 \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.13)$$

où n_0 est la résistance axiale de la phase renforcement r , définie comme la résistance à l'effort normal d'une inclusion individuelle (N_0) par unité de surface transversale :

$$n_0 = \frac{N_0}{(2e^2 \cos \theta)} = \frac{A^r \sigma_Y}{(2e^2 \cos \theta)} = \eta \sigma_Y \quad (8.14)$$

où σ_Y est la résistance en traction-compression du matériau constitutif des inclusions (acier par exemple).

On retiendra l'hypothèse simplificatrice d'*adhérence parfaite* entre la phase matrice et chacune des phases renforcement. Une telle condition signifie que la cinématique du système triphasique sera caractérisée par un seul champ de déplacements :

$$\underline{\xi}^m = \underline{\xi}^1 = \underline{\xi}^2 \quad (8.15)$$

qui sera désormais noté $\underline{\xi}$.

8.3 Analyse numérique élasto-plastique du problème

8.3.1 Choix des paramètres de calcul

Le sol de fondation est une argile molle supposée *purement cohérente* (critère de Tresca de cohésion C), tandis que la couche de matelas granulaire intermédiaire et le remblai sont constitués d'un sol *purement frottant* (critère de Mohr-Coulomb avec un angle de frottement ϕ et une cohésion nulle). Ces critères peuvent être écrits comme suit :

$$f^s(\underline{\sigma}^s) = \begin{cases} (\sigma_I^s - \sigma_{III}^s) - 2C \leq 0 & \text{pour le sol de fondation} \\ (\sigma_I^s - \sigma_{III}^s) - (\sigma_I^s + \sigma_{III}^s) \sin \phi \leq 0 & \text{pour le matelas granulaire et remblai} \end{cases} \quad (8.16)$$

où $\sigma_I^s \geq \sigma_{II}^s \geq \sigma_{III}^s$ sont les contraintes principales.

Le matelas granulaire et le remblai ont les caractéristiques de rigidité et de résistance suivantes :

$$E^s = 50\text{MPa}, \nu^s = 0,3, \phi = \psi = 35^\circ, \gamma = 18\text{kN/m}^3 \quad (8.17)$$

Le sol de fondation est modélisé comme un matériau élastique parfaitement plastique ayant les caractéristiques suivantes :

$$E^s = 5\text{MPa}, \nu^s = 0,3, C = 20\text{kPa}, \gamma = 18\text{kN/m}^3 \quad (8.18)$$

Les inclusions de renforcement sont des tubes creux métalliques ayant les caractéristiques géométriques suivantes :

$$e = 2\text{m}, R = 0,095\text{m}, t = 0,02\text{m} \quad (8.19)$$

où R est leur rayon et t leur épaisseur. Ces inclusions sont symétriquement inclinées d'un angle $\theta = 5^\circ$ par rapport à la verticale, de sorte que la fraction volumique de chaque famille d'inclusions, donnée par (8.1), est :

$$\eta = \frac{A^r}{2e^2 \cos \theta} = \frac{2\pi Rt}{2e^2 \cos \theta} \cong 0,15\% \quad (8.20)$$

Les caractéristiques élastique et plastique du matériau constitutif (acier) des inclusions sont :

$$E^r = 200\text{GPa}, \sigma_Y = 200\text{MPa} \quad (8.21)$$

Il résulte alors de (8.12) et (8.14) que les paramètres constitutifs de chaque phase renforcement sont :

$$\alpha = \eta E^r \cong 300\text{MPa}, \text{ et } n_0 = \eta \sigma_Y \cong 0,3\text{MPa} \quad (8.22)$$

8.3.2 Modèle numérique et résultats de la simulation

Le maillage éléments finis de la structure considérée comprenant 2294 éléments triangulaires à 6 nœuds (T6) et 4785 nœuds, est représenté sur la figure (8.5). La zone renforcée localisée en dessous du remblai est constituée d'une zone trapézoïdale centrale où le sol renforcé par les deux familles d'inclusions est modélisé comme un système triphasique, avec de part et d'autre de petites zones triangulaires correspondant à un renforcement par une seule famille d'inclusions inclinées. Ces deux zones latérales sont décrites par des systèmes biphasiques, c'est-à-dire une phase matrice et l'une des deux phases renforcements.

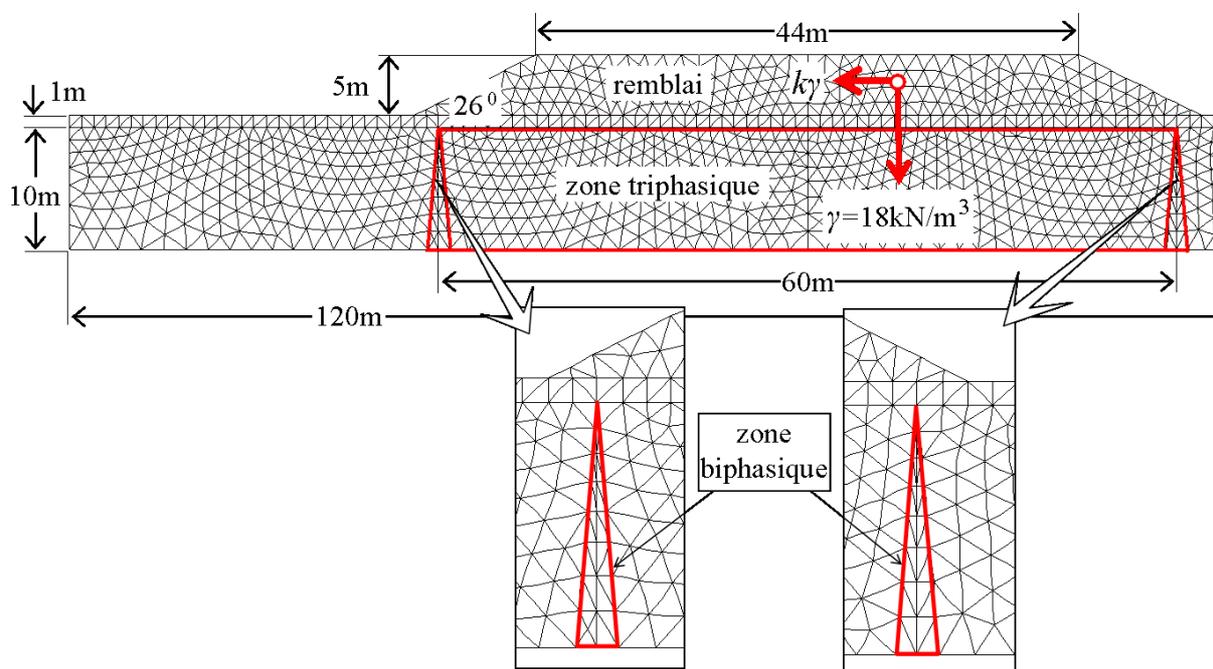


FIG. 8.5. Maillage éléments finis utilisé pour la simulation du comportement élasto-plastique du problème

Un code éléments finis permettant de simuler le comportement des ouvrages renforcés par inclusions a été développé. Plus de détails peuvent être trouvés dans Sudret (1999) [69], ou Sudret et de Buhan (2001) [71], où une telle procédure est mise en œuvre pour des sols renforcés par une seule famille d'inclusions, modélisés comme des systèmes biphasiques et peuvent être facilement généralisés à des systèmes triphasiques.

Nous suivons la même procédure d'application du chargement que celle décrite au chapitre précédent, c'est-à-dire, partant de la situation où l'ouvrage a été pré-chargé par l'application de la pesanteur (verticale), la réponse de l'ouvrage est ensuite analysée sous l'action du séisme induisant le chargement horizontal, en augmentant le coefficient sismique

k par l'application successive d'incrémentes suffisamment petits, jusqu'à la rupture. Les résultats des simulations sont présentés sur la figure (8.6) sous la forme de deux courbes chargement-déplacement relatives respectivement à la structure non renforcée et celle renforcée. Le déplacement présenté sur cette figure est le déplacement horizontal d'un point représentatif localisé à la base du remblai, sur l'axe de symétrie vertical de l'ouvrage.

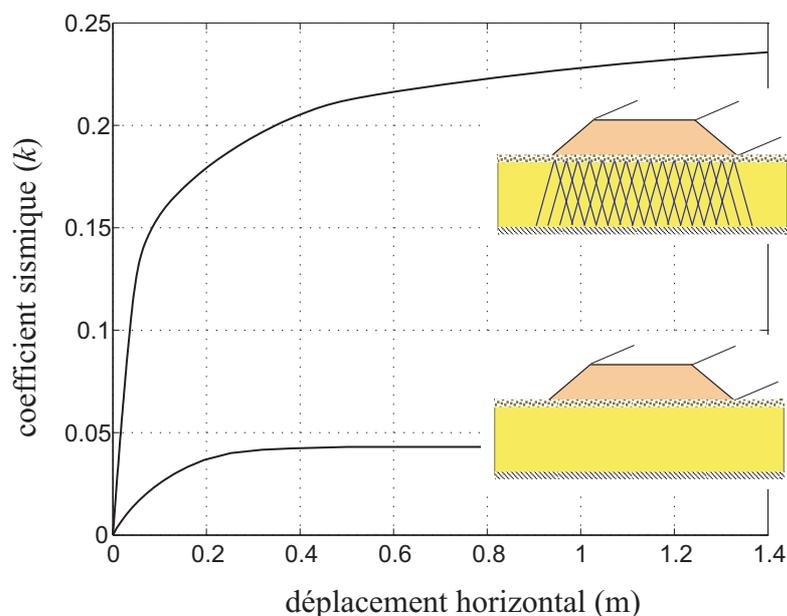


FIG. 8.6. Courbes chargement-déplacement pour la structure non renforcée (courbe inférieure) et renforcée (courbe supérieure)

On observe immédiatement que l'utilisation d'inclusions inclinées conduit à une augmentation spectaculaire de la performance de l'ouvrage, tant en termes de rigidité structurale (pente de la tangente à la courbe à l'origine) que de résistance (valeur asymptotique des courbes), puisque le coefficient sismique critique, et donc la stabilité de l'ouvrage soumis à un chargement sismique, passe de 0,043 à 0,235.

8.4 Comparaison avec les résultats du calcul à la rupture

Les résultats ci-dessus des simulations élasto-plastiques par éléments finis sont alors comparés à ceux obtenus par l'approche cinématique du calcul à la rupture, conduisant à une majoration k^c du coefficient sismique critique k^+ . Le mécanisme de rupture considéré dans l'analyse est représenté sur la figure (8.7).

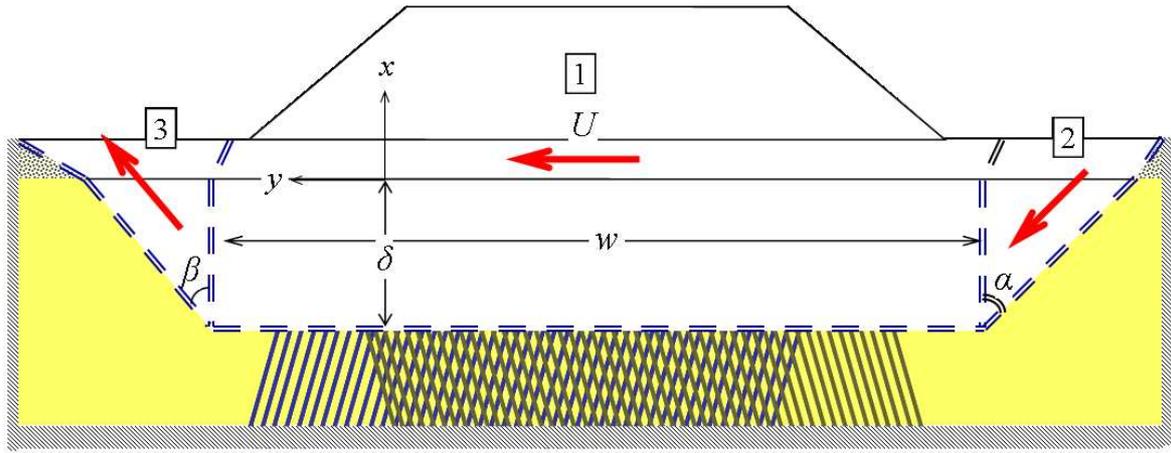


FIG. 8.7. Mécanismes de rupture de la structure renforcée utilisés pour l'approche cinématique du calcul à la rupture

Ce mécanisme est composé de trois blocs en translation, numérotés de 1 à 3, il est entièrement déterminé par quatre paramètres : deux longueurs, w et δ , ainsi que deux paramètres angulaires α et β . Le champ de vitesse correspondant à un tel mécanisme est défini comme suit :

- ◇ Le bloc n° 1 qui comprend le remblai, un bloc rectangulaire de sol renforcé de largeur horizontale w , et d'épaisseur δ , et une partie de la couche de matelas granulaire intermédiaire, est animé d'une vitesse horizontale $\hat{U}^{(1)} = U e_y$. Un saut de vitesse apparaît donc en bas de cette zone, et la fonction d'appui π^m de la phase matrice correspondante est calculée comme suit (voir Equation (3.23) du chapitre 3) :

$$\pi_{(1)}^m(\underline{\nu}; [\hat{U}]) = C |U| \quad \text{car} \quad [\hat{U}] \cdot \underline{\nu} = 0 \quad (8.23)$$

En ce qui concerne les deux phases renforcement incluses dans le bloc n° 1, le taux de déformation axiale de chaque phase vaut :

$$r = 1, 2 \quad \hat{d}^r = \frac{\partial (\hat{U}^{(1)} \cdot e_r)}{\partial x_r} = 0 \quad (8.24)$$

d'où la fonction d'appui π^r correspondante nulle (voir Equation (3.17) du chapitre 3).

$$r = 1, 2 \quad \pi^r(\hat{d}^r) = 0 \quad (8.25)$$

tandis qu'une discontinuité de vitesse à la traversée de la surface inférieure de cette zone conduit à (voir Equation (3.23) du chapitre 3) :

$$r = 1, 2 \quad \pi^r \left(\underline{\nu}; \left[\hat{\underline{U}} \right] \right) = n_0 |\sin \theta \cos \theta| |U| \quad (8.26)$$

- ◇ Les deux blocs latéraux n° 2 et 3, définis par les angles α et β , respectivement, sont animés des champs de vitesse suivants :

$$\hat{\underline{U}}^{(2)} = U \underline{e}_y - \frac{U}{\tan \alpha} \underline{e}_x \quad \text{et} \quad \hat{\underline{U}}^{(3)} = U \underline{e}_y + \frac{U}{\tan \beta} \underline{e}_x \quad (8.27)$$

de sorte que les discontinuités de vitesse à la traversée des surfaces verticales séparant le bloc n° 1 des blocs n° 2 et 3, ainsi que la surface inclinée entre les derniers blocs et le reste du sol de fondation, soient *purement tangentielles*.

Les fonctions d'appui π^m de la phase matrice correspondantes sont les suivantes :

$$\pi_{(2)}^m \left(\underline{\nu}; \left[\hat{\underline{U}} \right] \right) = C |U| \left(\frac{1}{|\tan \alpha|} + \frac{1}{|\sin \alpha|} \right) \quad (8.28)$$

et

$$\pi_{(3)}^m \left(\underline{\nu}; \left[\hat{\underline{U}} \right] \right) = C |U| \left(\frac{1}{|\tan \beta|} + \frac{1}{|\sin \beta|} \right) \quad (8.29)$$

Par ailleurs, les orientations de différentes surfaces de discontinuité dans le matelas granulaire, sont choisies de telle manière que les discontinuités de vitesse sont inclinées d'un angle égal à ϕ par rapport à ces surfaces.

Les expressions ci-dessus des fonctions d'appui des phases matrice et renforcement nous permettent de calculer la *puissance résistante maximale* développée dans un tel mécanisme.

L'optimisation d'un tel mécanisme de rupture conduit aux majorations suivantes du coefficient sismique : $k^c=0,048$ pour l'ouvrage non renforcé et $k^c=0,245$ pour l'ouvrage renforcé, qui sont légèrement supérieures aux valeurs correspondantes obtenues précédemment par les calculs éléments finis (0,043 et 0,235).

Ce bon accord est confirmé par la comparaison des mécanismes de rupture obtenus par l'approche cinématique du calcul à la rupture et les distributions des taux de déformations plastiques, à la rupture, issues des simulations élasto-plastiques par éléments finis, visualisées sous forme d'isovaleurs, et représentée sur la figure (8.8).



FIG. 8.8. Mécanismes de rupture obtenus par le calcul à la rupture (ligne pointillée) et la simulation élasto-plastique (isovaleurs du taux de déformations plastiques) pour la structure renforcée par deux familles d'inclusions inclinées ($\theta = 5^\circ$)

Ces résultats préliminaires sont prolongés par une étude paramétrique effectuée pour évaluer l'influence spécifique de l'angle d'inclinaison θ des inclusions de renforcement sur la stabilité de la structure. Les résultats de l'analyse du calcul à la rupture, ainsi que ceux des imulations élasto-plastiques sont représentés sur la figure (8.9), pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison θ .

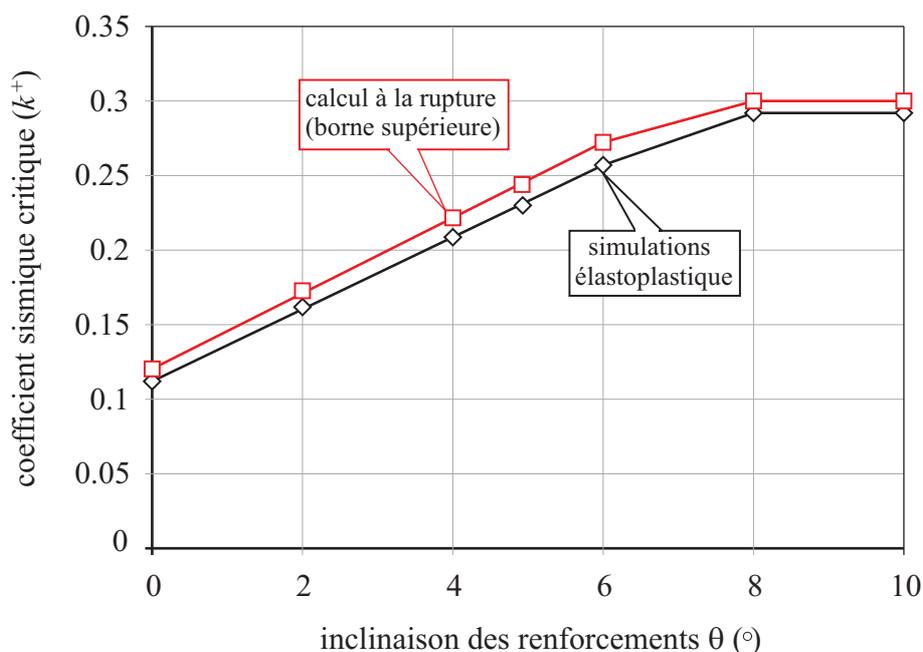


FIG. 8.9. Evaluation du coefficient sismique critique en fonction de l'angle d'inclinaison des inclusions de renforcement

On constate là encore qu'un bon accord est obtenu entre les simulations élasto-plastiques et le calcul à la rupture, les résultats de ce dernier étant légèrement supérieurs (moins de 5%) à ceux obtenus par la simulation élasto-plastique, ce qui est bien conforme au fait que l'approche du calcul à la rupture conduit à des majorations.

En outre, la figure ci-dessus montre clairement que la valeur critique du coefficient sismique, et donc la stabilité de la structure sous chargement sismique, est augmenté

très fortement avec l'angle d'inclinaison, jusqu'à la valeur maximale de 0,3 obtenue pour $\theta \geq 8^\circ$. Cette valeur maximale peut s'expliquer par le fait que, pour une plus grande valeur d'angle d'inclinaison des inclusions, le mécanisme de rupture optimal est localisé en dehors de la zone renforcée, de sorte que l'évaluation du coefficient sismique critique n'est plus affectée par l'angle d'inclinaison des inclusions.

8.5 Comparaison avec le cas des inclusions verticales rigides

Il est intéressant de comparer l'effet de stabilisation de l'ouvrage obtenu par inclinaison des inclusions avec celui résultant de l'utilisation d'inclusions verticales "rigides" dans lesquelles sont mobilisés les effets de flexion.

TAB. 8.1. Caractéristiques géométriques des inclusions verticales rigides encastrées dans le substratum

Cas	inclusions verticales "rigides"					
	R (m)	t (m)	e (m)	η (%)	n_0^r (MPa)	m_0^r (MPa.m)
Référence	0,095	0,02	2	0,3	0,6	0,036
A	0,19	0,04	4			0,072
B	0,38	0,08	8			0,108
C	0,76	0,16	16			0,216

Pour ce faire, une étude paramétrique a été effectuée permettant d'évaluer l'influence de la taille des inclusions verticales "rigides", encastrées en partie inférieure, sur la stabilité de l'ouvrage. La fraction volumique et donc la résistance en traction de la phase renforcement, étant maintenues constantes. Partant du cas de référence déjà présenté sur la figure (8.2) et en prenant $\theta = 0^\circ$ (inclusions verticales), trois autres situations (notées A, B et C) ont été prises en considération. Plus précisément, dans tous les cas, on fait varier proportionnellement l'espacement, le rayon et l'épaisseur des inclusions verticales rigides métalliques (voir le tableau (8.1)), de sorte que la fraction volumique η du matériau de renforcement, et donc la résistance à l'effort normal n_0^r de la phase renforcement (une seule phase) restent inchangées, tandis que le paramètre de résistance à la flexion donné par (voir (7.40)) :

$$m_0^r = \frac{2}{\pi} \eta R \sigma_Y \quad (8.30)$$

directement proportionnel aux caractéristiques géométriques du renforcement (R , t ou e), varie d'une situation à l'autre.

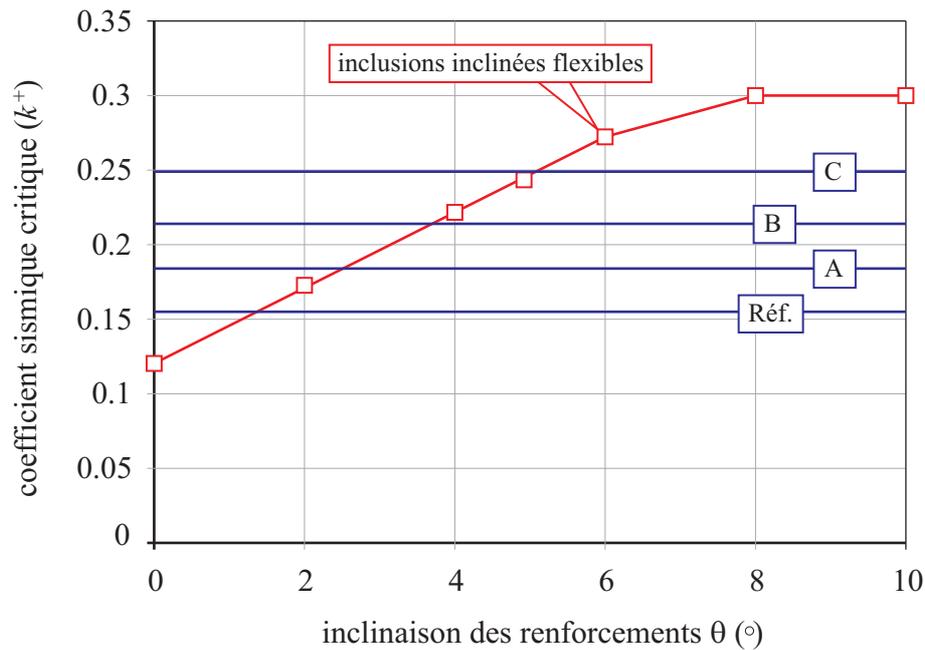


FIG. 8.10. Evaluation du coefficient sismique critique pour les inclusions inclinées flexibles et les inclusions verticales de diamètre croissant

Les résultats de l'analyse du calcul à la rupture effectuée pour les quatre situations différentes (Réf., A, B et C) sont représentés sur la figure (8.10), où l'on a ajouté la courbe du calcul à la rupture obtenue dans le cas des inclusions inclinées flexibles, déjà présentée sur la figure (8.9).

Cette figure montre clairement l'avantage qu'il y a à incliner (même faiblement) les inclusions de renforcement par rapport à l'utilisation d'inclusions verticales de fort diamètre encastrées dans le substratum. On constate par exemple que pour aboutir à un coefficient sismique critique de 0,25, il suffit d'incliner de 5° les inclusions, même de faible rayon (typiquement $R=0,095m$), alors qu'il est nécessaire d'utiliser des inclusions verticales de fort rayon ($R=0,76m$: cas C) encastrées (condition qu'il n'est pas facile de réaliser en pratique) pour aboutir au même résultat.

8.6 Conclusions

Les différents résultats obtenus dans ce chapitre nous permettent de conclure que le renforcement des sols de fondation par des familles d'inclusions inclinées conduit à une amélioration considérable de la performance globale de l'ouvrage soumis à un chargement sismique, même si l'on considère les renforcements comme des inclusions flexibles, c'est-à-dire, si l'on néglige leur résistance à la flexion.

Par ailleurs, la dernière partie de ce chapitre a mis en évidence l'avantage du renforcement par des inclusions inclinées, par rapport à celui des inclusions "rigides" verticales. Cela conduit, à fraction volumique constante, à privilégier l'utilisation d'inclusions symétriquement inclinées de petit diamètre plutôt que de prendre des inclusions verticales de grand diamètre.

Cette technique de renforcement par inclusions inclinées est d'autant plus intéressante qu'il n'est pas nécessaire d'encastrier les inclusions dans le substratum, condition qu'il n'est pas facile de réaliser en pratique.

Chapitre 9

Conclusions et perspectives

9.1 Conclusions

Ce travail a permis de développer, tant sur le plan théorique que numérique, la version la plus complète du modèle multiphasique pour décrire le comportement élasto-plastique, ainsi qu'à la rupture, d'un sol (ou d'une roche) renforcé par inclusions linéaires. Ce modèle autorise la prise en compte, à l'échelle macroscopique, non seulement de l'interaction sol/inclusion mais également des effets de flexion et de cisaillement des inclusions de renforcement.

La formulation variationnelle des problèmes en milieux biphasiques pour les ouvrages en terre renforcés par inclusions souples et sa mise en œuvre numérique dans le cadre de la méthode des éléments finis décrites brièvement au chapitre 2 ont donné naissance à un code de calcul bidimensionnel en déformations planes permettant de quantifier l'apport du renforcement sur la raideur structurelle de l'ouvrage et sur la résistance (stabilité) de celui-ci.

L'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture, développée au chapitre 3, constitue un outil d'estimation rapide du chargement de ruine des ouvrages renforcés par inclusions souples, sans avoir recours aux outils numériques par éléments finis, ce qui est notamment intéressant du point de vue de l'ingénieur. Cette approche est appliquée au calcul de la résistance en compression d'une éprouvette renforcée, la comparaison des résultats obtenus avec ceux provenant d'une simulation numérique directe par éléments finis constitue une méthode possible de détermination du paramètre de résistance d'interaction I_0 que l'on peut alors retenir dans le calcul de stabilité d'ouvrages plus complexes.

Au chapitre 4, le code de calcul par éléments finis biphasique décrit au chapitre 2 et

l'approche du calcul à la rupture développée au chapitre 3, sont mis en œuvre dans l'analyse de stabilité d'un mur en terre armée. A travers ce problème, il a été mis clairement en évidence que la rupture de l'ouvrage s'effectue selon deux modes : rupture par "cassure" des armatures de renforcement et rupture par "arrachement" ou "glissement" des armatures, ce qui est parfaitement cohérent avec les résultats expérimentaux que l'on trouve dans la littérature. Il convient de souligner que la loi d'interaction adoptée à l'échelle macroscopique, qui implique des cinématiques différentes pour les deux phases, peut être introduite même dans le cas où le sol (ou la roche) et les inclusions sont parfaitement adhérents à l'échelle microscopique (continuité du champ de déplacement microscopique à la traversée des interfaces de contact).

Une comparaison entre les résultats de l'approche cinématique du calcul à la rupture et ceux issus de la simulation numérique élasto-plastique par éléments finis a été effectuée. Cette comparaison montre une bonne concordance des résultats (moins de 5%) confirmant le statut de l'approche cinématique du calcul à la rupture qui fournit des majorants.

La seconde partie de ce mémoire s'intéresse à la modélisation multiphasique générale des ouvrages renforcés par inclusions "rigides", pour lesquels l'on tient compte non seulement des effets de flexion et de cisaillement des inclusions de renforcement, mais également les différents types d'interaction entre ces dernières et le sol environnant. Ces interactions peuvent être d'une part transversales (et non plus seulement longitudinales comme dans le cas des inclusions souples), mais concerner également les extrémités des inclusions (interactions "de pointe").

Une comparaison entre les résultats analytiques du modèle multiphasique et ceux obtenus provenant des simulations numériques directes nous a permis de valider le modèle multiphasique général. La conclusion tirée de ce chapitre est que, s'il convient bien de prendre en compte une interaction "longitudinale" (c'est-à-dire dans la direction des renforcements) entre les phases matrice et renforcement, on peut considérer qu'il y a adhérence parfaite "transversale" entre ces mêmes phases.

La mise en œuvre d'un code de calcul par éléments finis multiphasique général est décrite au chapitre 6, dans le cadre d'élasticité linéaire. Ce code est ensuite appliqué à la simulation du comportement d'une fondation renforcée par inclusions "rigides", soumise à un chargement sismique. L'avantage décisif du modèle multiphasique par rapport à une modélisation directe réside dans le fait que, tandis que l'implémentation directe de la méthode des éléments finis sur la structure renforcée aurait nécessité une discrétisation beaucoup plus fine dans la zone renforcée, afin de modéliser les interactions complexes

qui prévalent entre le sol et les inclusions, le maillage dans la zone renforcée utilisé pour le modèle multiphasique n'est pas différent de celui adopté en l'absence du renforcement.

Les résultats obtenus montrent clairement l'importance de la prise en compte des effets de flexion et de cisaillement sur la réduction du déplacement horizontal dû à un chargement latéral.

Une approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture a été également développée, appliquée aux systèmes en milieu multiphasique général (chapitre 7). La deuxième partie de ce chapitre a permis de concevoir une méthode de dimensionnement semi-analytique fondée sur l'application d'une approche cinématique, pour l'analyse de stabilité d'un remblai renforcé par inclusions rigides sous chargement sismique. Une analyse paramétrique effectuée dans ce chapitre a mis en évidence le rôle essentiel joué par la résistance à la flexion des inclusions dans l'augmentation de la stabilité de l'ouvrage, permettant de conclure que, à fraction volumique de renforcement constante, et donc pour la même résistance à l'effort normal de la phase renforcement, un renforcement par relativement peu d'inclusions de grand diamètre est beaucoup plus efficace pour la stabilité de l'ouvrage que l'utilisation d'un plus grand nombre des inclusions "flexibles", de petit diamètre.

Une alternative à l'utilisation d'inclusions verticales de grand diamètre, consiste à renforcer le sol de fondation par les inclusions symétriquement inclinées, afin de mieux mobiliser ses capacités de résistance à l'effort normal et pour ce faire, un modèle "triphase" a été formulé et développé au chapitre 8. Ce modèle nous permet de simuler le comportement global d'un sol renforcé par deux familles d'inclusions ayant des orientations différentes. Il est ensuite appliqué au calcul de la résistance sismique d'un ouvrage renforcé par un réseau d'inclusions inclinées, où il apparaît que le rôle de l'inclinaison est primordial.

9.2 Perspectives

La suite de ce travail peut être envisagée dans trois directions principales :

- Une question importante concerne l'identification des paramètres de raideur et de résistance relatifs à l'interaction entre phases. Une voie possible (utilisée au chapitre 3 pour déterminer le paramètre I_0) consiste à comparer les résultats du modèle multiphasique avec ceux provenant de simulations numériques pour un problème de référence (exemple de la compression de l'éprouvette). L'autre voie se réfère bien

évidemment à des essais in situ de type "arrachement" visant à tester les propriétés d'interaction entre une inclusions individuelle et le sol environnant.

- Si dans la réponse d'un ouvrage renforcé par inclusions *verticales* rigides, soumis à un chargement latéral, on a montré que l'interaction "transversale" (ou horizontale dans ce cas) entre phases joue un rôle négligeable, elle pourrait être essentielle dans la réponse d'un ouvrage renforcé par inclusions *inclinées* (par exemple ouvrage renforcé par inclusions symétriquement inclinées, traité au chapitre 8) sous chargement sismique.
- Enfin concernant le développement de l'outil numérique proprement dit, l'extension du code de calcul, dont on dispose, au traitement de problèmes tridimensionnels doit être envisagée. Un tel outil permettra de quantifier des effets, non accessibles à un code bidimensionnel, comme par exemple les effets de la torsion, mais aussi le calcul de structures dans des configurations réelles.

Bibliographie

- [1] R. Abdi, P. de Buhan, and J. Pastor. Calculation of the critical height of a homogenized reinforced soil wall : a numerical approach. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 18 :485–505, 1994.
- [2] ADSC. *The International Association of Foundation Drilling*. Forever-Synthesis of the Results and Recommendations of the French National Project on Micropiles. Schnabel Engineering : Dallas ; TX, 2008.
- [3] R. Al Hallak. *Etude expérimentale et numérique du renforcement du front de taille par boulonnage dans les tunnels en terrains meubles*. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussée - Paris, 1999.
- [4] A. Anthoine. Mixed modelling of reinforced soils within the framework of yield design. *Comp. Geotech*, 7 :67–82, 1989.
- [5] R. Baker, R. Shukha, V. Operstein, and S. Frydman. Stability charts for pseudo-static slope stability analysis. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 26 :813–823, 2006.
- [6] M. Bennis. *Un modèle multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions, avec prise en compte de l'interaction matrice/inclusions*. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussée - Paris, 2002.
- [7] M. Bennis and P. de Buhan. A multiphase constitutive model of reinforced soils accounting for soil-inclusion interaction behaviour. *Math. Comp. Model.*, 37 :469–475, 2003.
- [8] D. Bernaud, P. de Buhan, and S. Maghous. Numerical simulation of the convergence of a bolt-supported tunnel through a homogenization method. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 19 :267–288, 1995.
- [9] S. Borel. *Comportement et dimensionnement des fondations mixtes*. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussée - Paris, 2001.

- [10] E. Bourgeois, J.-F. Semblat, D. Garnier, and B. Sudret. Multiphase model for the 2d and 3d numerical analysis of pile foundations. *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, pages 1435–1440, 2001.
- [11] J.B. Burland, B.B. Broms, and V.F.B. De Mello. Behaviour of foundations and structures. In *Proc. 9th Int. Conf. on Soil Mech. And Found. Eng, Tokyo*, volume 2, pages 495–546, 1977.
- [12] F.B. Cartiaux, A. Gellée, P. de Buhan, and G. Hassen. A multiphase model for the design of soils reinforced by rigid inclusions. *Rev. Fr. Géotech.*, (118) :43–52, 2007.
- [13] N. Challamel and P. de Buhan. Mixed modelling applied to soil-pipe interaction. *Computers and Geotechnics*, 30 :205–216, 2003.
- [14] M.A. Crisfield. Non linear finite element analysis of solids and structures. *John Wiley & Sons*, 1, 1991.
- [15] P. de Buhan. *Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sol renforcés*. Université Paris VI (Thèse d’Etat ès Sciences Physiques), 1986.
- [16] P. de Buhan. Renforcement par inclusions des sols et des roches : De la modélisation mécanique au calcul des ouvrages. *Revue française de génie civil*, 8 :1033–1069, 2004.
- [17] P. de Buhan. De l’approche par homogénéisation au développement d’un modèle multiphasique : le cas des sols renforcés par inclusions linéaires. *Proc. Microstructure et Propriétés des Matériaux*, pages 29–38, 2005.
- [18] P. de Buhan. *Plasticité et Calcul à la rupture*. Presses de l’école nationales des ponts et chaussées, 2007.
- [19] P. de Buhan, E. Bourgeois, and G. Hassen. Numerical simulation of bolt-supported tunnels by means of a multiphase model conceived as an improved homogenization procedure. *Submitted for publication to Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech*, 2007.
- [20] P. de Buhan, L. Dormieux, and J. Salençon. Modélisation micropolaire de la résistance d’un milieu renforcé par inclusions. *C.R. Ac. Sc., t. 326, Série II-b*, pages 163–170, 1998.
- [21] P. de Buhan and G. Hassen. Multiphase approach as a generalized homogenization procedure for modelling the macroscopic behavior of soils reinforced by linear inclusions. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 27 :662–679, 2008.
- [22] P. de Buhan, R. Mangiavacchi, R. Nova, G. Pellegrini, and J. Salençon. Yield design of reinforced earth walls by a homogenization method. *Géotechnique*, 39, (2) :189–201, 1989.

- [23] P. de Buhan and J. Salençon. Analyse de stabilité des ouvrages en sols renforcés par une méthode d'homogénéisation. *Revue Française de Géotechnique*, (41) :29–43, 1987.
- [24] P. de Buhan and J. Salençon. A comprehensive stability analysis of soil nailed structures. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 9(5) :477–500, 1993.
- [25] P. de Buhan and L. Siad. Influence of a soil-trip interface failure condition on the yield strength of reinforced earth. *Comp. Geotech.*, 7 :469–475, 1989.
- [26] P. de Buhan and B. Sudret. Micropolar multiphase model for unidirectionally reinforced materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 19, (4) :669–687, 2000.
- [27] P. de Buhan and A. Taliercio. A homogenization approach to the yield strength of composite materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 10(2) :129–154, 1991.
- [28] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. Editeur, 1984.
- [29] C. di Prisco and R. Nova. A constitutive model for soil reinforced by continuous threads. *Geotext. Geomembr.*, 12 :161–178, 1993.
- [30] R. Frank. *Fondations et soutènement*. Cours de mécanique des sol, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1998.
- [31] F. Frey. *Analyse des structures et milieux continus*, volume 2. Presses Polytechniques et Universitaires Romande, 1994.
- [32] E. Greuell. *Etude du soutènement des tunnels par boulons passifs dans les sols et les roches tendres, par une méthode d'homogénéisation*. Thèse de l'Ecole polytechnique, 1993.
- [33] E. Greuell, P. De Buhan, M. Panet, and J. Salençon. Behavior of tunnels reinforced by un tensioned bolts. *XIII ICSMFE, New-Dehli*, pages 869–872, 1994.
- [34] G. Gudehus and W. Schwarz. Stabilization of creeping slopes by dowels. In *Proc. 11th ICSMFE, San Francisco*, 1985.
- [35] A. Guilloux. Slope stabilization using soil nailing in france ; design methods and cares histories for the foundations of the rion-antirion bridge. In *72nd Annual meeting of Transportation Research Board, Washington DC*, 1993.
- [36] Z. Hashin. Analysis of composite materials-a-survey. *J. Appl. Mech.*, 50 :481–505, 1983.
- [37] G. Hassen. *Modélisation multiphasique pour le calcul des ouvrages renforcés par inclusions rigides*. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées - Paris, 2006.

- [38] G. Hassen and P. de Buhan. A two-phase model and related numerical tool for the design of soil structures reinforced by stiff linear inclusions. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 24 :987–1001, 2005.
- [39] G. Hassen and P. de Buhan. Elastoplastic multiphase model for simulating the response of piled raft foundations subject to combined loadings. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 30 :843–864, 2006.
- [40] G. Hassen, D. Dias, and P. de Buhan. Implementation of a multiphase constitutive model for the design of piled-embankments and comparison with 3d numerical simulation. *Submitted on the International Journal of Geomechanics*, 2008.
- [41] WJ. Hewlett and MF. Randolph. Analysis of piled embankment. *Ground Engineering*, 21(3) :12–18, 1988.
- [42] O. Jenck, D. Dias, and R. Kastner. Soft ground improvement by vertical stiff piles - two-dimensional physical modelling and comparison with current design methods. *Soil and Foundations*, 45(6) :15–30, 2005.
- [43] HG. Kempfert, C. Göbel, D. Alexiew, and C. Heitz. German recommendations for reinforced embankments on pile-similar elements. In *Proceedings of the 3rd European Geosynthetics Conference, Munich*, pages 279–284, 2004.
- [44] Y. Laurent, D. Dias, B. Simon, and R. Kastner. A 3d finite difference analysis of embankments over pile-reinforced soft soil. In *Proceedings of the International Workshop on Geotechnics of Soft Soils-Theory and Practice, Noordwijkerhout*, pages 271–276, 2003.
- [45] HI. Ling, D. Leshchinsky, and Y. Mori. Soil slopes under combined horizontal and vertical seismic acceleration. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 26 :1231–1241, 1997.
- [46] N.T. Long and P. Ursat. Comportement du sol renforcé. *Laboratoire Régionale des Ponts et Chaussées - Strasbourg*, 1977.
- [47] D. Loukidis, P. Bandini, and R. Salgado. Stability of seismically loaded slopes using limit analysis. *Géotechnique*, 53(5) :463–479, 2003.
- [48] BK. Low, SK. Tang, and V. Choa. Arching in piled embankments. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 120(11) :1917–1938, 1994.
- [49] P. Lunardi. Conception et exécution des tunnels : rôle et résultats de la recherche expérimentale. *Revue Française de Géotechnique*, 84 :49–64, 1998.
- [50] R. L. Michalowski. Stability of uniformly reinforced slopes. *J. Geotech. Eng.*, 123(6) :546–556, 1997.

- [51] R. L. Michalowski and J. Cermak. Strength anisotropy of fiber-reinforced sand. *Comp. Geotech.*, 29 :279–299, 2002.
- [52] R. L. Michalowski and A. Zhao. A continuum vs. structural approach to stability of reinforced soil. *J. Geotech. Eng., ASCE*, 121(2) :152–162, 1995.
- [53] A. Pecker. Capacity design principles for shallow foundations in seismic areas. In *Keynote lecture, 11th European Conference on Earthquake Engineering, Paris*, 1998.
- [54] A. Pecker and J.P. Teyssandier. Seisms design for the foundations of the rion-antirion brige. paper number : 11311. *Proc. ICE, geotechnical Engineering, 131*, pages 4–11, 1998.
- [55] P. Quigley, J. O'Malley, and M. Rodgers. Performance of a trial embankment constructed on soft compressible estuarine deposits at shannon, ireland. In *Proceedings of the International Workshop on Geotechnics of Soft Soils, Theory and Practice, Noordwijkerhout*, pages 619–624, 2003.
- [56] C. Rospars, E. Bourgeois, P. Humbert, and P. de Buhan. A simplified calculation procedure for evaluating the settlement of a foundation reinforced by rigid inclusions. In *Proc. 16th Int. Conf. Soil. Mech. Geotech. Eng., Osaka*, pages 855–858, 2005.
- [57] D. Russell and N. Pierpoint. An assessment of design methods for piled embankments. *Ground Engineering*, pages 39–44, 1997.
- [58] J. Salençon. *Calcul à la rupture et analyse limite* Salençon 1983. Presse de l'Ecole National des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [59] J. Salençon. An introduction to the yield design theory and its application to soil mechanics. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 9(5) :477–500, 1990.
- [60] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus, tome I. Conceptions généraux*. Les éditions de l'école polytechnique, 2001.
- [61] A. Sawicki. Plastic limit behavior of reinforced earth. *J. Geotech. Eng., ASCE*, 129(7) :1000–1005, 1983.
- [62] A. Sawicki and D. Lesniewska. Limit analysis of cohesive slopes reinforced with geotextiles. *Comp. Geotech.*, 7 :53–66, 1989.
- [63] F. Schlosser. Analogies et différences dans le comportement et le calcul des ouvrages de soutènement en terre armée et par clouage de sol. *Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, 418, série Sols et Fondations, n° 184, 1983.
- [64] F. Schlosser and N.T. Long. Etude du comportement du matériau terre armée. *Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, 304, supplément au numéro, 1973.

- [65] F. Schlosser and P. Unterreiner. Renforcement des sols par inclusions. *Techniques de l'ingénieur*, C-245, 1994.
- [66] L. Siad. *Analyse de stabilité des ouvrages en terre armée par une méthode d'homogénéisation*. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées - Paris, 1987.
- [67] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational inelasticity*. Springer, 1998.
- [68] ME. Stewart and GM. Filz. Influence of clay compressibility on geosynthetic loads in bridging layers for column-supported embankments. In *Proceedings of the Geo-Frontiers, Austin*, 2005.
- [69] B. Sudret. *Modélisation multiphasique des ouvrages renforcés par inclusions*. Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées - Paris, 1999.
- [70] B. Sudret and P. de Buhan. Modélisation multiphasique de matériaux renforcés par inclusions linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 327, Série II b :7–12, 1999.
- [71] B. Sudret and P. de Buhan. Multiphase model for inclusion-reinforced geostuctures. application to rock-bolted tunnels and piles raft foundations. *Int. J. Num. Anal. Meth.*, 25 :155–182, 2001.
- [72] Q. Thai Son, G. Hassen, and P. de Buhan. Modélisation multiphasique appliquée à l'analyse de stabilité d'ouvrages en sols renforcés avec pris en compte d'une condition d'adhérence sol-armatures. In *18ème Congrès Français de Mécanique, 27-31 août*, 2007.
- [73] Q. Thai Son, G. Hassen, and P. de Buhan. Modélisation multiphasique appliquée à l'analyse de stabilité d'ouvrages en sols renforcés avec prise en compte d'une condition d'adhérence sol-armatures. *Studia geotechnica et mechanica*, 1-2 :51–57, 2008.
- [74] Q. Thai Son, G. Hassen, and P. de Buhan. A multiphase model for the seismic design of foundations reinforced by rigid inclusions. In *Second Euro Mediterranean Symposium on Advances in Geomaterials and Structures, AGS'08 - Hammamet 5-7 May, Tunisia*, pages 367–377, 2008.
- [75] Q. Thai Son, G. Hassen, and P. de Buhan. Macroscopic behaviour of pile-reinforced soils as anisotropic cosserat media. In *International Conference on the legacy of Théorie des Corps Déformables by Eugène and François Cosserat in the centenary of its publication, Ecole des Ponts Paris-Tech, Paris, France, July 15th-17th*, 2009.
- [76] Q. Thai Son, G. Hassen, and P. de Buhan. A multiphase approach to the stability analysis of reinforced earth structures accounting for a soil-strip failure condition. *Computers and Geotechnics*, 36 :454–462, 2009.

- [77] Q. Thai Son, G. Hassen, and P. de Buhan. Seismic design of pile-reinforced foundations using a multiphase approach. In *The first Internatinal Symposium on Computational Geomechanics (ComGeo I), Juan-les-Pins, France, April 29 - May 1st, 2009*.
- [78] Q. Thai Son, G. Hassen, and P. de Buhan. Seismic stability analysis of piled embankments : A multiphase approach. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, DOI : 10.1002/nag.816, 2009.
- [79] Q. Thai Son, G. Hassen, and P. de Buhan. A three-phase model for evaluating the seismic resistance of soils reinforced by a network of symmetrically inclined piles. *Submitted on Computers and Geotechnics*, 2009.
- [80] Q. Thai Son, P. Hassen, G. andde Buhan, U.S. Okyay, and D. Dias. Seismic design of foundation soils reinforced by rigid inclusions. In *17th Internatinal Conference on Soil Mechanics & Geotechnical Engineering, Alexandria, Egypt, 5-9 Octobre, 2009*.
- [81] L. Verzura. A macroscopic strength criterion for continuous thread reinforced soil. *Mech. Res. Com.*, 2(4) :353–359, 1994.
- [82] H. Vidal. *La terre armée*. Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, 1966.
- [83] H. J. Wood. The design and construction of pile-supported embankment for the a63 selby bypass, bga. In *Int. Conf. Found., Dundee*, pages 941–950, 2003.
- [84] H. Zanziger and E. Gartung. Performance of a geogrid reinforced railway embankment on piles. In *Proceedings of the 7th International Conference on Geosynthetics, Nice*, pages 381–386, 2002.