HAL
open science

Une méthode de correction élastoplastique pour le calcul en fatigue des zones de concentration de contraintes sous chargement cyclique multiaxial non proportionnel

Thibault Herbland

To cite this version:

Thibault Herbland. Une méthode de correction élastoplastique pour le calcul en fatigue des zones de concentration de contraintes sous chargement cyclique multiaxial non proportionnel. Mécanique [physics.med-ph]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2009. Français. NNT : . tel-00479991

HAL Id: tel-00479991

https://pastel.hal.science/tel-00479991v1

Submitted on 3 May 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Collège doctoral

ED n°432 : Science des Métiers de l'Ingénieur

N° attribué par la bibliothèque
/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/

THESE

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Ecole des Mines de Paris
Spécialité Sciences et Génie des Matériaux

présentée et soutenue publiquement par

Thibault Herbland

le 14 Décembre 2009

Une méthode de correction élastoplastique pour le calcul en fatigue des zones de concentration de contraintes sous chargement cyclique multiaxial non proportionnel

Directeur de thèse : ***Georges CAILLETAUD***
Co-encadrant : ***Stéphane QUILICI***

Jury

Mme A.-M. HABRAKEN	Présidente	Université de Liège
M. F. MOREL	Rapporteur	ENSAM Angers
M. E. CHARKALUK	Rapporteur	Ecole Centrale de Lille
M. S. CALLOCH	Examinateur	ENSIETA
M. R. DESMORAT	Examinateur	ENS Cachan
M. A. GALTIER	Examinateur	Cetim
M. H. JAFFAL	Invité	Cetim
M. G. CAILLETAUD	Directeur de thèse	MINES ParisTech
M. S. QUILICI	Co-encadrant	MINES ParisTech

A mes parents

Remerciements

Cette étude s'est déroulée en partie au Cetim de Senlis et au Centre des Matériaux d'Evry. Je sais que j'oublierai de citer des personnes, qu'elles me pardonnent.

Tout d'abord, je remercie Georges Cailletaud pour avoir dirigé cette thèse. Merci d'avoir toujours été disponible malgré un emploi du temps des plus chargés. Les nombreuses discussions que nous avons échangées furent passionnantes et très enrichissantes. En particulier pendant les réunions avec Stéphane où nous tentions de comprendre ce sujet captivant.

Un grand merci à Stéphane Quilici pour m'avoir encadré tout au long de cette étude. Merci pour m'avoir fait partager ton immense expertise de ZeBuLoN, et d'avoir été toujours présent pour m'aider, même pendant les longs mois où nous étions dans l'impasse.

Je remercie Haidar Jaffal, qui m'a accueilli au Cetim, qui a suivi de près tout ce projet, et qui m'a toujours aidé à garder à l'esprit les objectifs industriels. Merci aussi à André Galtier qui, souvent surchargé, a accepté avec bonne humeur mes longues incursions à l'improviste dans son bureau pour des échanges captivants sur la fatigue.

Je tiens à remercier tous les membres du jury de thèse, en particulier Anne-Marie Habraken pour l'avoir présidé, Franck Morel et Eric Charkaluk pour l'avoir rapporté en un temps record.

Je ne saurais trop remercier les nombreux stagiaires, thésards et ingénieurs du Cetim qui m'ont aidé dans ce travail et sorti de situations bien délicates. Hakim, avec qui j'ai beaucoup échangé et passé 6 mois mémorables. Merci aussi à Menouar pour son aide inconditionnelle sur Abaqus et toutes ses connaissances ; et à Cécile pour les nombreuses collaborations entre veille technologique et essais. Je remercie aussi Romain et Alban (thésard compatissant) qui m'ont fourni une aide précieuse en fin de thèse pour les toutes dernières simulations, et Mohammed pour ses calculs sur NCode. Merci aussi aux ADV, Maria et Christelle, pour leur bonne humeur et l'atmosphère si chaleureuse qu'elles donnent au pôle. Et bien sûr à tout l'ex-pôle DSL qui m'a accueilli à bras ouverts pendant ces trois ans.

Parmi mes collaborateurs du CdM, je remercie Farida pour l'aide qu'elle m'a apporté, Odile pour des articles qu'elle seule peut trouver, Troy pour des cours d'Anglais mémorables et pour avoir filmé l'intégralité des deux heures de ma soutenance. Un grand merci à tous les thésards, stagiaires, post-docs du CdM. Beaucoup m'ont aidé, et chacun donne à ce lieu de travail une ambiance conviviale unique qui m'a (outre le travail bien sûr) motivé à faire le trajet pendant des heures dans le RER D. Je garde un très bon souvenir des délires avec mes voisins de la salle calcul, Marc, Eva, Djamel... ainsi que des pauses cafés très enrichissantes avec Marion, Serge, Ozgür, Guillaume... et bien d'autres.

Enfin, je souhaite remercier ma famille qui m'a moralement aidé pendant ces trois ans, ainsi que mes amis dont beaucoup savent, comme les thésards du CdM, ce que faire une thèse veut dire...

Notations

Notation [unité]	Signification
$a[a]$	scalaire [unité de a]
$\underline{\boldsymbol{a}}\,[\underline{\boldsymbol{a}}\,]$	vecteur [unité de chacune des composantes de $\underline{\boldsymbol{a}}\,$]
$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}[\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}]$	tenseur d'ordre 2 [unité de chacune des composantes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$]
$\underset{\approx}{\boldsymbol{A}}[\underset{\approx}{\boldsymbol{A}}]$	tenseur d'ordre 4 [unité de chacune des composantes de $\underset{\approx}{\boldsymbol{A}}$]
$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$	produit contracté $A_{ij}B_{ij}$
x_{min}, x_{max}	Valeurs minimale et maximale de la variable x sur un cycle
x_m, x_a	Valeur moyenne et amplitude de x sur un cycle
x^n	Valeur de x sur le plan de normale n
p	déformation plastique cumulée, $p = \sqrt{\frac{4}{3}J_2(\underset{\sim}{\varepsilon}^p)}$
$R_0[MPa]$	limite d'élasticité
$Q[MPa]$, b	coefficients d'évolution des variables d'écrouissage isotrope non linéaire
$C[MPa], D$	coefficients d'évolution des variables d'écrouissage cinématique non linéaire
ε^{el}	Déformation élastique
ε^p	Déformation plastique
ε	Déformation totale
σ, ε	Contrainte et déformation calculées dans l'hypothèse d'élastoplasticité
σ^e, ε^e	Contrainte et déformation calculées dans l'hypothèse de pure élasticité
n'	coefficient d'écrouissage cyclique
σ'_f, τ'_f	résistance à la fatigue en traction et en torsion
ε'_f, γ'_f	coefficient de ductilité en traction et en torsion
b, b_0	exposant de Basquin en traction et en torsion
c, c_0	exposant de Coffin en traction et en torsion
N_f	Nombre de cycles à rupture observé expérimentalement
N_r	Nombre de cycles à rupture calculé

Table des matières

Notations iii

Introduction ix

partie A Bibliographie 1

I Concepts utilisés en fatigue 3
I.1 Définition de la fatigue et des grandeurs caractéristiques des chargements uniaxiaux . . . 3
I.2 Courbes S-N . . . 4
I.3 Comportement cyclique et courbe de Manson-Coffin . . . 5
I.4 Démarche d'un calcul de durée de vie . . . 9
I.5 L'endommagement continu . . . 11

II Méthodes simplifiées de détermination de l'état stabilisé 13
II.1 Methode de Zarka . . . 13
II.2 Méthode des sauts de cycles . . . 16
II.3 Méthode cyclique directe . . . 17
II.3.1 Etape globale . . . 17
II.3.2 L'étape locale . . . 18

III Méthodes de type Neuber 19
III.1 Méthode de Neuber uniaxiale . . . 19
III.2 Position du problème pour les états de contrainte multiaxiaux . . . 21
III.3 Synthèse des hypothèses postulées dans la bibliograpie . . . 23
III.3.1 Postulats de Neuber et de Molski-Glinka . . . 23
III.3.2 Méthodes de Hoffmann-Seeger et de Barkey *et al.* . . . 24
III.3.3 Méthode de Moftakhar *et al.* . . . 24
III.3.4 Methode de Buczynski *et al.* . . . 25
III.4 Conclusion . . . 25

IV Méthodes de comptage en fatigue 27
IV.1 Méthode de comptage des variations (simple range counting) . . . 27
IV.2 Méthode de comptage des variations appariées (range-pair couting) . . . 28
IV.3 Méthode de comptage Rainflow en uniaxial . . . 29
IV.4 Conclusion . . . 29

V Endommagement en fatigue **33**
V.1 Approche en contrainte : la loi de Lemaitre-Chaboche . . . 33
V.1.1 Enoncé . . . 33
V.1.2 Avantages . . . 34
V.1.3 Inconvénients . . . 34
V.2 Critères en déformation . . . 34
V.2.1 Notion de plan critique . . . 34
V.2.2 Critère de Brown-Miller . . . 35
V.2.3 Critère de Fatemi-Socie . . . 37
V.3 Critères mixtes . . . 37
V.3.1 Critère de Smith-Watson-Topper (SWT) . . . 37
V.3.2 Critère de Lagoda-Macha . . . 38
V.4 Loi de cumul linéaire de Miner . . . 39
V.4.1 Enoncé de la loi . . . 39
V.4.2 Avantages . . . 40
V.4.3 Inconvénients . . . 41
V.5 Loi de cumul non linéaire . . . 41
V.6 Conclusion . . . 41

VI Méthodes de calcul de durée de vie **43**
VI.1 Méthode de Wang et Brown . . . 43
VI.2 Methode de Fatemi-Socie . . . 44
VI.3 Methode de Socie . . . 45
VI.4 Méthode de Lagoda-Macha . . . 46
VI.5 Conclusion . . . 47

partie B Proposition d'une méthode de calcul accéléré **49**

VII Position du problème **51**
VII.1 Méthodes de calcul accéléré de la bibliographie . . . 51
VII.1.1 Comparaison de la méthode des sauts de cycles et de la méthode cyclique directe sur un élément de volume en déformation cyclique imposée . . . 51
VII.1.2 Implémentation des méthodes de type Neuber . . . 54
VII.1.2.1 Lois de comportement . . . 54
VII.1.2.2 Méthode de Neuber uniaxiale . . . 57
VII.1.2.3 Dérivation du postulat de Hoffmann-Seeger . . . 58
VII.1.2.4 Dérivation du postulat de Barkey *et al.* . . . 59
VII.1.2.5 Dérivation du postulat de Moftakhar *et al.* . . . 60
VII.1.2.6 Méthode de Buczynski-Glinka . . . 61
VII.1.3 Résultats . . . 62
VII.1.3.1 Evaluation des méthodes de la bibliographie . . . 63
VII.2 Conclusion . . . 64

VIII Recherche de modèles empiriques **67**
VIII.1 Postulat de Gallerneau . . . 67
VIII.1.1 Observations . . . 67
VIII.1.2 Implémentation . . . 68
VIII.2 Postulat du K_3 . . . 70
VIII.2.1 Observations . . . 70

VIII.2.2 Implémentation et validation 70
VIII.3 Postulat de Chaboche 71
VIII.3.1 Observations 71
VIII.3.2 Implémentation 73
VIII.4 Conclusion 74

IX Proposition d'une nouvelle correction élasto-plastique 77
IX.1 Description du modèle initial 77
IX.2 Implémentation 79
IX.3 Adaptation de la correction aux entailles 80
IX.3.1 Traction sur éprouvette plate 80
IX.3.2 Introduction d'un terme linéaire δ dans la la correction de type NL . 81
IX.3.3 Traction sur éprouvette axisymétrique 83
IX.3.4 Introduction de couplages 83
IX.3.5 Torsion sur éprouvette axisymétrique 84
IX.3.6 Chargement de traction-torsion proportionnel 87
IX.4 Etude de la plasticité non confinée 91
IX.4.1 Application de la méthode de Neuber au non confinement en traction monotone sur éprouvette plate 92
IX.4.1.1 Cas du 30CND8 92
IX.4.1.2 Cas du matériau M 92
IX.4.2 Application de la correction de type L et de la méthode de Buczynski-Glinka au non confinement en traction monotone sur éprouvette axisymétrique 96
IX.5 Prise en compte d'un écrouissage cyclique 96
IX.6 Relaxation partielle de contrainte moyenne 100
IX.7 Conclusion 100

partie C Validation 103

X Traitement du signal 105
X.1 Algorithme de rainflow multiaxial 105
X.2 Plus petite hypersphère circonscrite à un trajet de chargement 110
X.3 Conclusion 112

XI Validation sur éprouvette entaillée axisymétrique 113
XI.1 Chargements proportionnels 113
XI.1.1 Traction simple 113
XI.1.2 Torsion simple 117
XI.2 Chargements de traction-torsion 117
XI.2.1 Chargement proportionnel 117
XI.2.2 Chargement proportionnel d'amplitude variable 118
XI.2.3 Chargement non proportionnel 1 119
XI.2.4 Chargement non proportionnel 2 120
XI.2.5 Chargement non proportionnel d'amplitude variable 121
XI.3 Conclusion 121

XII Validation sur un bras de châssis de grue 123
XII.1 Conclusion 130

Conclusion générale et perspectives **131**

References **135**

A Autres critères de type plan critique **1**
A.1 Critère de Socie 2
A.2 Critère de Nitta *et al.* 2
A.3 Critère de Chu *et al.* 2
A.4 Critère de Liu 3
A.5 Critère de Glinka 3
A.6 Critère de Rolovic et Tipton 5
A.7 Critère de Chen *et al.* 6
A.8 Critère de Varvani-Farahani 6
A.9 Critère de Lee *et al.* 6
A.10 Récapitulation des critères de type plan critique 8

B Méthode de Runge-Kutta **11**

C Procédure de calibration des paramètres C_{ii}^L et D_{ii}^L **13**

D Algorithme général des fonctions implémentées dans ZeBFRoNT **15**

E Fonction neuberlitterature.z pour les méthodes de la littérature **19**

F Fonction glinkamemoire.z pour la méthode de Buczynski-Glinka **27**

G Fonction corrections.z pour les corrections L et NL **35**

H Validation sur éprouvette entaillée : comparaison des courbes de comportement local **39**
H.1 Traction simple et torsion simple 40
H.2 Traction-torsion proportionnelle d'amplitude constante et variable 44
H.3 Traction-torsion non proportionnelle d'amplitude constante et aléatoire 46

Introduction

Pour calculer la durée de vie d'une structure en fatigue, il faut avant tout connaître les valeurs des contraintes et des déformations au point critique où la fissure est censée s'amorcer. En fatigue à grands nombres de cycles, où la structure reste globalement élastique, le calcul de ces variables est relativement simple. On peut les déterminer par exemple à l'aide de formules analytiques, impliquant des facteurs de concentration de contrainte, des facteurs géométriques, etc. Pour des structures et des chargements plus complexes ou des résultats plus précis on préférera la méthode des élements finis. Il y a plusieurs régimes de fonctionnement possibles pour les structures sous chargement cyclique. Si l'ensemble de la structure reste en permanence en élasticité, il ne se développe aucune contrainte résiduelle, et on retrouve l'état initial lors de la décharge. Le degré suivant correspond à une structure qui présente quelques zones qui se plastifient lors des premiers cycles, mais dont l'état stabilisé est élastique. Ce régime, dit adapté, comporte des contraintes résiduelles à la décharge, dans la mesure où des déformations plastiques sont apparues, mais il permet de supporter un grand nombre de cycles, car l'état courant est élastique. On passe au contraire dans un fonctionnement de type oligocyclique si, après la plasticité du premier chargement, l'état stabilisé présente une boucle ouverte. Il s'agit d'une accomodation. Le régime le plus dangereux, qui ne sera pas évoqué ici, est celui pour lequel il n'y a pas d'état stabilisé local, mais une déformation progressive. Ce phénomène de rochet conduit à la ruine de la structure. Le sujet de cette thèse porte essentiellement sur les deux états intermédiaires, accomodation et adaptation.

Pour connaître l'historique des variables locales, il ne suffit donc plus d'effectuer un simple calcul monotone par éléments finis. Il faut simuler toute l'histoire du chargement. Cela peut prendre beaucoup de temps, surtout quand la pièce et le comportement sont complexes. Multiplié par le nombre de re-conceptions d'une pièce donnée, ce temps de calcul devient prohibitif pour les industriels quand il s'ajoute à la difficulté d'obtenir des données matériau. Des méthodes de calcul accéléré peuvent alors être utilisées pour éviter ces calculs longs et coûteux. Elles donnent une approximation des variables locales, et peuvent être classées en deux groupes. Les premières méthodes déterminent les valeurs des contraintes et des déformations à l'état stabilisé en tout point de la structure. Cependant, seule une analyse au point critique est nécessaire pour un calcul en fatigue si l'on connaît ce point à l'avance. De plus, il est préférable que l'endommagement généré par les cycles précédant la stabilisation soit négligeable. Les autres méthodes calculent ces valeurs pour tout l'historique de chargement, mais seulement au point critique de la structure. Comme nous le verrons, ces méthodes dites "de type Neuber" ne sont, en revanche, pas entièrement fiables. Par contre, le gain de temps obtenu en appliquant une méthode de type Neuber est énorme. Ainsi, la simulation par éléments finis du bras de châssis présenté dans le chapitre XII dure une quinzaine d'heures. Les méthodes de type Neuber de la littérature, ainsi que les corrections qui seront proposées

dans cette thèse, fournissent une solution approchée au point critique en quelques secondes.

C'est pour répondre au besoin de ses industriels cotisants que le Cetim a financé cette thèse, qui vise à développer une nouvelle méthode de calcul accéléré plus fiable que les méthodes existantes. Cette méthode doit être applicable à des chargements aléatoires entraînant des états de contrainte multiaxiaux au fond des zones de concentration de contraintes. Le travail s'est déroulé à la fois au Cetim et au Centre des Matériaux de MINES-ParisTech.

Dans une première partie bibliographique, nous passerons d'abord en revue tous les éléments de la littérature qui ont servi de base au travail. Après une brève introduction à la fatigue, nous nous intéresserons en particulier aux méthodes de calcul accéléré existantes. Les méthodes de détermination du cycle stabilisé sont régulièrement utilisées dans certains domaines comme une alternative aux éléments finis. Trois d'entre elles : la méthode de Zarka, la méthode des sauts de cycles, et la méthode cyclique directe, seront décrites. Puis, on présentera les méthodes de type Neuber, qui se rapprochent plus dans leur principe des méthodes (ou corrections) proposées dans cette thèse. A partir d'un calcul par éléments finis de la structure avec un comportement élastique, elle permettent d'approcher les contraintes et déformations réelles que l'on obtiendrait par un calcul élasto-plastique. Un état de contrainte uniaxial en fond d'entaille n'offre pas de difficulté pour la méthode de Neuber proprement dite. Nous montrerons par contre le problème qui se pose quand un état de contrainte multiaxial apparaît, et passeront en revue les diverses solutions proposées dans la littérature. En conclusion de cette première partie, nous aborderons les autres étapes d'un calcul de durée de vie en fatigue, des méthodes de comptage de cycles aux lois d'endommagement.

Dans la deuxième partie, les méthodes de calcul accéléré évoquées dans la partie bibliographique seront testées et cataloguées selon leur précision, et les informations qu'elles fournissent, en ayant en perspective les étapes suivantes du calcul en fatigue. Puis, après avoir décrit quelques uns des premiers modèles formulés, nous aborderons les deux corrections proposées. L'une s'applique aux chargements d'amplitude constante, l'autre aux chargements d'amplitude variable. Elles se basent sur une approche totalement différente des méthodes de la littérature. Elles utilisent une méthodologie dérivée des modèles d'homogénéisation pour décrire l'évolution des contraintes résiduelles en fond d'entaille. Une variable tensorielle permet de prendre en compte la redistribution des contraintes. Des paramètres ajustables entrent dans la formulation des corrections. Ils sont calibrés à l'aide de deux courts calculs par éléments finis, qui correspondent à une pré-charge monotone de la structure :

- un calcul avec le comportement purement élastique du matériau, utilisé comme un pilotage du chargement par la correction, comme par toutes les méthodes de type Neuber ;
- un calcul avec le comportement réel, qui servira de référence pour la calibration du modèle.

Une fois ces paramètres identifiés pour une géométrie d'entaille et un matériau donné, ils peuvent être utilisés pour déterminer l'historique des variables au point critique pendant toute la durée de vie de la structure, sous un chargement quelconque.

Dans la troisième partie, nous proposerons d'abord un nouvel algorithme de rainflow multiaxial pouvant traiter des chargements non-proportionnels d'amplitude variable. Il permet de considérer le tenseur des contraintes (ou des déformations) locales en tant que

tel, sans avoir à choisir une variable de comptage équivalente. Puis, nous validerons les corrections proposées sur une éprouvette axisymétrique soumise à des chargements complexes, puis sur un bras de châssis de grue. Les résultats obtenus seront comparés à ceux d'un calcul élasto-plastique par éléments finis, et aux résultats fournis par la méthode la plus fiable de la littérature. Des calculs de durées de vie seront réalisés à l'aide de l'algorithme évoqué précédemment, et de la loi d'endommagement de Lemaitre-Chaboche. On pourra ainsi évaluer l'impact des erreurs commises par chacune des méthodes de calcul accéléré sur la précision des durées de vie calculées.

Première partie

Bibliographie

Chapitre -I-

Concepts utilisés en fatigue

Ce chapitre vise à définir quelques concepts de base de fatigue qu'il est nécessaire d'avoir assimilé pour comprendre le reste de l'étude. Nous aborderons tout d'abord les grandeurs qui caractérisent un signal de fatigue d'amplitude constante. Puis nous définirons ce qu'est une courbe S-N. Enfin nous rappelerons succinctement ce qu'est un comportement cyclique et une courbe de Manson-Coffin-Basquin.

I.1 Définition de la fatigue et des grandeurs caractéristiques des chargements uniaxiaux

La fatigue est le phénomène par lequel une structure rompt après avoir subi une succession de chargements qui se répètent dans le temps. Souvent, cette succession est périodique et se résume à une suite de cycles. Deux domaines peuvent être définis. On parle de fatigue à grand nombre de cycles (HCF : High Cycle Fatigue) pour des chargements qui aboutissent à des durées de vie au-delà de 10^5 cycles. Pour un plus faible nombre de cycles, on est en régime oligocyclique (LCF : Low Cycle Fatigue). La limite entre HCF et LCF correspond à la plastification macroscopique de la structure. Traditionnellement, la HCF, aussi dite fatigue d'endurance, se divise elle-même en deux sous-domaines : l'endurance limitée pour $N_f < 10^7$, et l'endurance illimitée pour $N_f > 10^7$. Au cours des dernières années est apparue la notion de fatigue gigacyclique pour caractériser la zone des 10^9 cycles.

Des lois permettent de calculer la durée de vie N_f d'une structure pour un chargement donné. Certaines sont dédiées aux grands nombres de cycles et sont formulées en contraintes. D'autres s'appliquent aux faibles nombres de cycles et utilisent les déformations comme variables critiques. Enfin, d'autres lois s'appliquent aux deux domaines et utilisent à la fois des contraintes et des déformations. Définissons maintenant les grandeurs que ces lois utilisent. Pour la fatigue HCF par exemple, un chargement uniaxial périodique d'amplitude constante peut être défini par sa contrainte moyenne σ_m, son amplitude σ_a et sa fréquence f.

On peut définir trois autres grandeurs caractéristiques de ce genre de signal, représentées sur la figure I.1 :

- la contrainte minimale σ_{min}
- la contrainte minimale σ_{max}
- le rapport de charge $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$

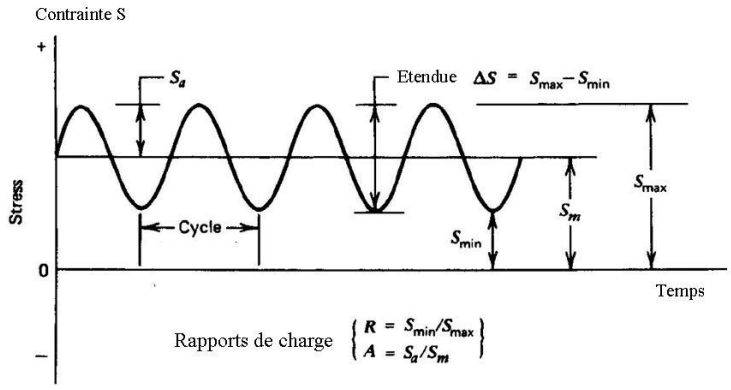


Figure I.1 – Variables caractéristiques en fatigue uniaxiale

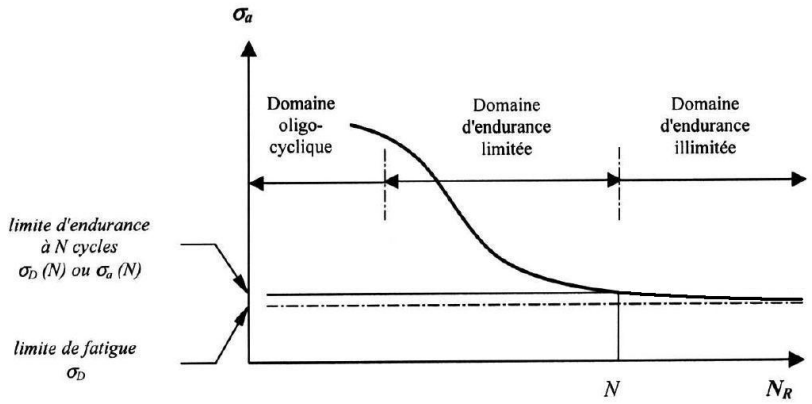


Figure I.2 – Courbe S-N et domaines de fatigue

Un chargement est dit alterné quand R = -1, répété quand $R = 0$. Les mêmes définitions s'appliquent sur la déformation. Parfois, les chargements de fatigue peuvent être multiaxiaux et d'amplitude variable. Dans ce cas, il convient d'utiliser des critères de fatigue multiaxiaux, qui font intervenir des invariants ou des variables équivalentes que nous aborderons plus tard.

I.2 Courbes S-N

Cette courbe est caractéristique d'un matériau, et intervient comme telle dans les lois de calcul de durée de vie en fatigue. Pour un chargement uniaxial d'amplitude constante, elle porte l'amplitude de contrainte σ_a pour laquelle il y a une probabilité de rupture de 50 % en fonction du nombre de cycles à rupture N_f. Cette courbe est aussi appelée courbe de Wöhler ou courbe de résistance en fatigue. Sa forme générale pour les aciers est représentée en figure I.2.

Pour les aciers, on considère que la courbe tend vers une asymptote dans le domaine des grandes durées de vie. La valeur de la contrainte admissible s'appelle alors limite de fatigue. Cependant, dans le cas des alliages d'aluminium par exemple, il n'y a pas d'asymptote : la courbe S-N décroît continuellement.

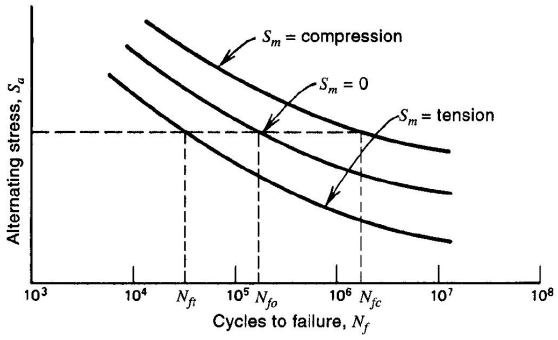


Figure I.3 – Effet de la contrainte moyenne sur les courbes S-N

En général les courbes S-N sont tracées à partir d'essais sur éprouvettes sollicitées à R = -1, et ne peuvent donc être utilisées telles quelles pour des chargements alternés. En effet, pour une amplitude donnée, l'augmentation de la contrainte moyenne abaisse l'amplitude de contrainte admissible, comme on le voit sur la figure I.3.

Il est cependant possible de réaliser un calcul de durée de vie pour un signal de contrainte moyenne non nulle avec une courbe S-N valable pour un rapport de charge R = -1. Pour cela, on effectue une correction de contrainte moyenne sur l'amplitude en contrainte à l'aide d'un critère de fatigue uniaxial. On utilise en général les critères de Goodman ou de Gerber, qui sont les plus connus, qui correspondent respectivement à des corrections linéaires ou quadratiques. Le critère de Gerber s'exprime par la relation :

$$\sigma_a = \sigma_a^* \left(1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)^2\right) \tag{I.1}$$

où R_m est la résistance maximale à la traction, et σ_a^* est l'amplitude du chargement alterné équivalent en terme de dommage au chargement initial. Dans le cas d'un acier et pour une durée de vie illimitée, σ_a^* est égale à σ_{-1}^D la limite de fatigue sous traction alternée. Le critère de Gerber prend alors la forme :

$$\left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)^2 + \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}^D} = 1 \tag{I.2}$$

L'équation I.1 est représentée en figure I.4 par une parabole. Le critère de Goodman est aussi régulièrement utilisé pour les corrections de contrainte moyenne. Il s'exprime sous forme d'une contrainte linéaire :

$$\sigma_a = \sigma_a^* \left(1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)\right) \tag{I.3}$$

I.3 Comportement cyclique et courbe de Manson-Coffin

Le comportement plastique d'un matériau peut être modélisé de façon élémentaire par la combinaison d'un écrouissage cinématique et d'un écrouissage isotrope. Alors que l'écrouissage cinématique opère une translation du domaine d'élasticité, l'écrouissage isotrope modifie la limite d'élasticité. En fatigue à faible nombre de cycles (LCF : low cycle fatigue), un cycle de

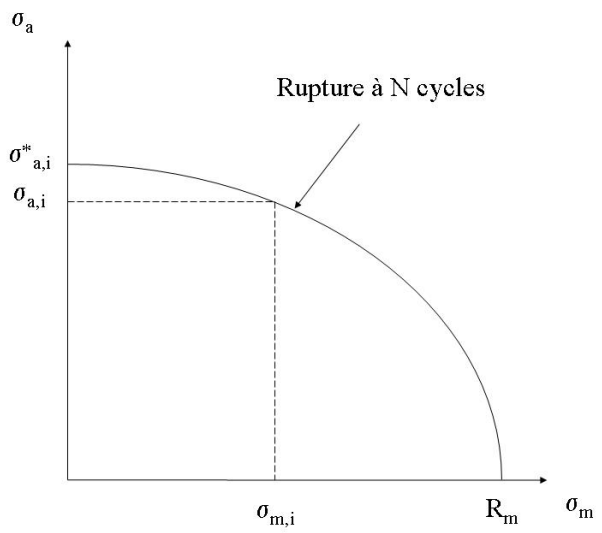


Figure I.4 – Parabole de Gerber

chargement entraîne la plastification lors de chaque cycle. L'écrouissage isotrope produit une évolution de la limite d'élasticité au cours des cycles. Pour la plupart des métaux, il s'agit d'une augmentation. On parle alors de durcissement cyclique, représenté sur la figure I.5. A déformation imposée, l'amplitude en contrainte augmente alors jusqu'à une certaine valeur où elle se stabilise. Dans quelques cas cependant, la limite d'élasticité diminue et on parle d'un adoucissement cyclique, comme dans le domaine des faibles nombres de cycles pour l'acier inox 316L utilisé dans les centrales nucléaires. Pour mieux observer cet écrouissage cyclique il est commode de reporter l'amplitude en contrainte du cycle en fonction du nombre de cycles, comme sur la figure I.6.

La valeur stabilisée σ_a de l'amplitude en contrainte du cycle dépend de l'amplitude de la déformation plastique ε_a^p. La représentation de Ramberg-Osgood propose par exemple :

$$\sigma_a = \sigma_a^0 (\varepsilon_a^p)^{n'} \tag{I.4}$$

où :

- σ_a est l'amplitude de contrainte stabilisée ;
- σ_a^0 est l'amplitude de contrainte initiale ;
- ε_a^p est l'amplitude de déformation plastique ;
- n' est le coefficient d'écrouissage cyclique.

Lorsque des microfissures apparaissent dans le matériau, l'amplitude de contrainte obtenue à déformation imposée chute jusqu'à la rupture, comme le montre la figure I.6.

Les résultats d'essais en fatigue LCF sont souvent présentés sous forme de courbes d'écrouissage cyclique, portant la contrainte maximale du cycle en fonction de la déformation totale. On obtient alors une courbe en-deçà de la courbe d'écrouissage monotone dans le cas d'un adoucissement cyclique, comme sur la figure I.7.

Alors que pour la fatigue à grand nombre de cycles la durée de vie est gouvernée par des amplitudes de contrainte et des contraintes moyennes, la durée de vie en fatigue LCF dépend

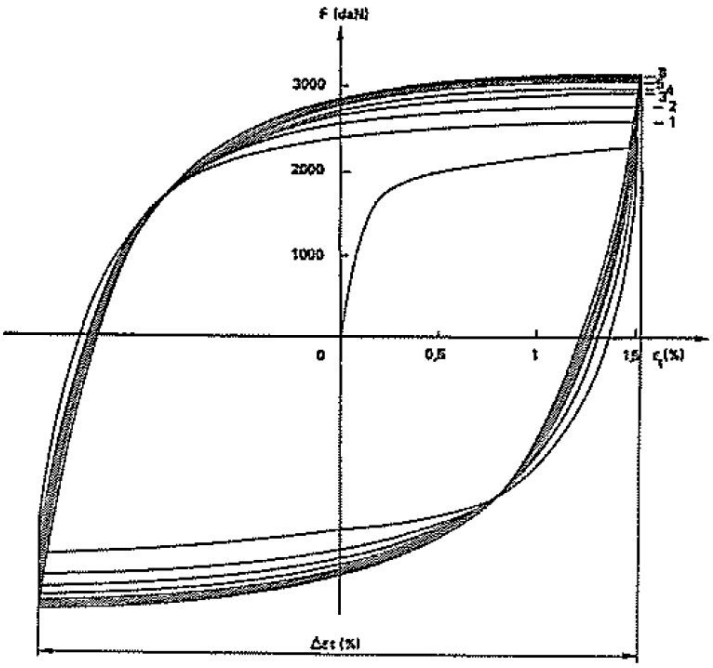


Figure I.5 – Boucles d'hystérésis contrainte-déformation, durcissement cyclique (Lemaitre et Chaboche, 1996)

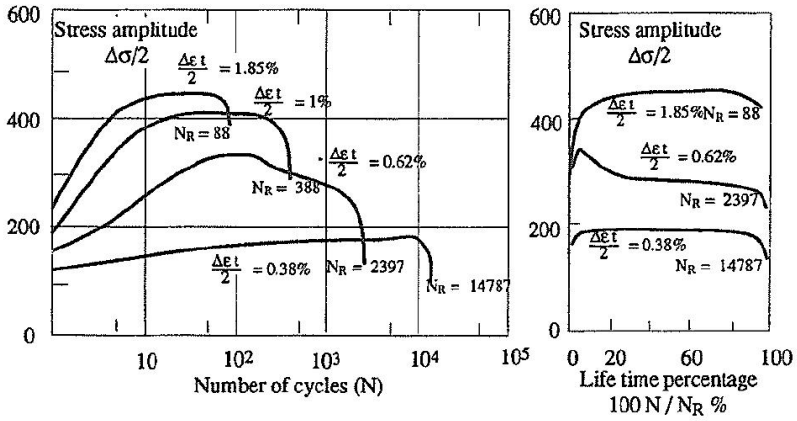


Figure I.6 – Evolution de l'amplitude en contrainte en fonction du nombre de cycles (Lemaitre et Chaboche, 1996)

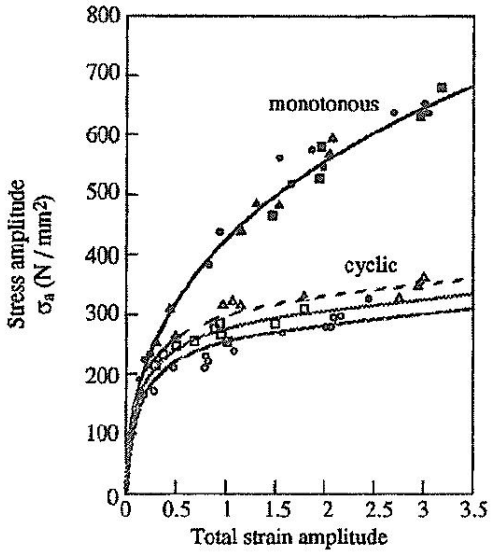


Figure I.7 – Courbes d'écrouissage cyclique et monotone (Lemaitre et Chaboche, 1996)

des amplitudes de déformation. C'est pourquoi les lois de fatigue LCF utilisent la courbe de Manson-Coffin-Basquin, représentée par l'équation I.5 :

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a^e + \varepsilon_a^p = \frac{\sigma'_f}{E}(2N_f)^b + \varepsilon'_f(2N_f)^c \tag{I.5}$$

où :

- ε_a est l'amplitude de la déformation totale
- ε_a^e est l'amplitude de la déformation élastique
- ε_a^p est l'amplitude de la déformation plastique
- σ'_f est la résistance à la fatigue
- ε'_f est le coefficient de ductilité
- b est l'exposant de Basquin
- c est l'exposant de Coffin

Comme la courbe S-N, cette courbe est caractéristique d'un matériau et entre dans la formulation des lois en fatigue. Les trois courbes correspondant à l'équation I.5 sont tracées sur la figure I.8. On remarque qu'aux faibles nombres de cycles c'est la déformation plastique qui prédomine, alors que pour les valeurs de N plus élevées c'est principalement de la déformation élastique que dépend la durée de vie : on se rapproche de la fatigue HCF.

Certaines méthodes de calcul de durée de vie se limitent à l'utilisation de cette loi telle quelle, d'autres effectuent une correction de Morrow (Morrow, 1965), comme on effectue une correction de Goodman ou de Gerber en fatigue HCF. Cette correction, qui traduit la forte influence de la contrainte moyenne en traction dans le domaine de l'endurance est cependant peu utile pour traiter les faibles nombres de cycles. On obtient :

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E}(2N_f)^b + C(2N_f)^c \tag{I.6}$$

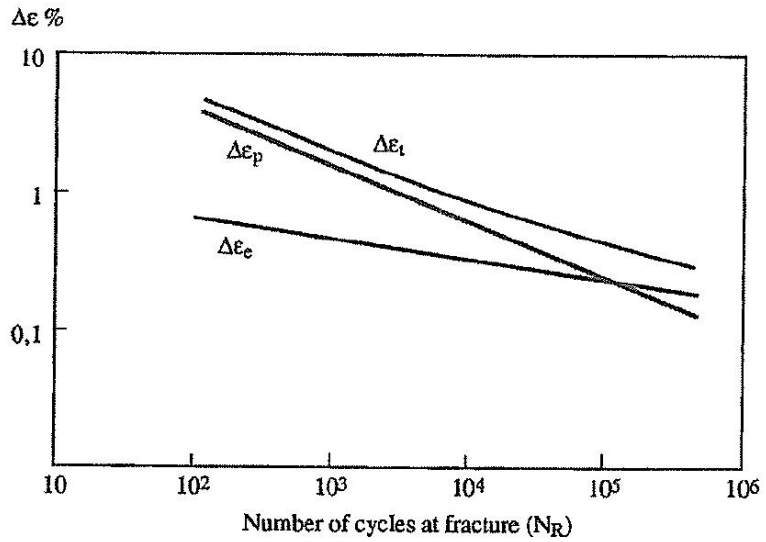


Figure I.8 – Droite de Manson-Coffin ($\Delta\varepsilon_p$), droite de Basquin ($\Delta\varepsilon_e$), et courbe de Manson-Coffin-Basquin $\Delta\varepsilon_t$ (Lemaitre et Chaboche, 1996)

I.4 Démarche d'un calcul de durée de vie

Dans la suite de la bibliographie nous détaillerons chacune des étapes d'un calcul en fatigue. Pour bien situer chaque étape dans son contexte et comprendre le rôle qu'elle joue, il est nécessaire d'expliquer succinctement le principe général d'un tel calcul. Ce principe est résumé dans l'organigramme I.9, dans le cas d'un chargement proportionnel en fatigue HCF.

La première étape (figure I.9 (a)) consiste à calculer l'historique des contraintes locales au point critique de la structure d'après sa géométrie, les forces extérieures, etc. Cela peut s'effectuer au moyen de la méthode des éléments finis ou des méthodes de calcul accéléré, qui feront l'objet des chapitres II et III.

Ce signal, dont l'amplitude est variable, n'est pas exploitable en tant que tel par un critère de fatigue. Il faut effectuer un traitement du signal dit "comptage de cycles", par exemple la méthode rainflow. Cela sur une des composantes du tenseur des contraintes comme ici, ou sur une variable équivalente au tenseur des contraintes en terme de dommage, etc. On obtient une suite de cycles extraits (figure I.9 (b)) équivalente au signal initial en terme de dommage. Chaque cycle a une certaine moyenne et une certaine amplitude. Les méthodes de comptage seront décrites dans le chapitre IV.

On peut alors appliquer un critère de fatigue (figure I.9 (d)). Le critère définit une contrainte σ_{eq} équivalente en terme de dommage au tenseur des contraintes. Il suffit alors de calculer l'amplitude de cette contrainte équivalente pour chaque cycle extrait, d'effectuer une correction de contrainte moyenne (figure I.9 (c)) et de porter la nouvelle amplitude sur une courbe S-N à R = -1. On obtient N_i, le nombre de fois que le cycle en question peut être imposé avant qu'une fissure ne s'amorce. L'endommagement élémentaire D_i occasionné par l'apparition de ce cycle peut alors être calculé par une loi d'endommagement. Les critères de fatigue et les lois d'endommagement seront présentés dans le chapitre V.

On répète les étapes (c) et (d) pour chaque cycle extrait, puis on cumule l'endommagement (figure I.9 (e)) généré par tous ces cycles. On obtient l'endommagement généré par la séquence entière (a). En considérant qu'une fissure s'amorce pour un endommagement D = 1, il est aisé de connaître le nombre de séquences admissibles avant amorçage d'une fissure. On peut

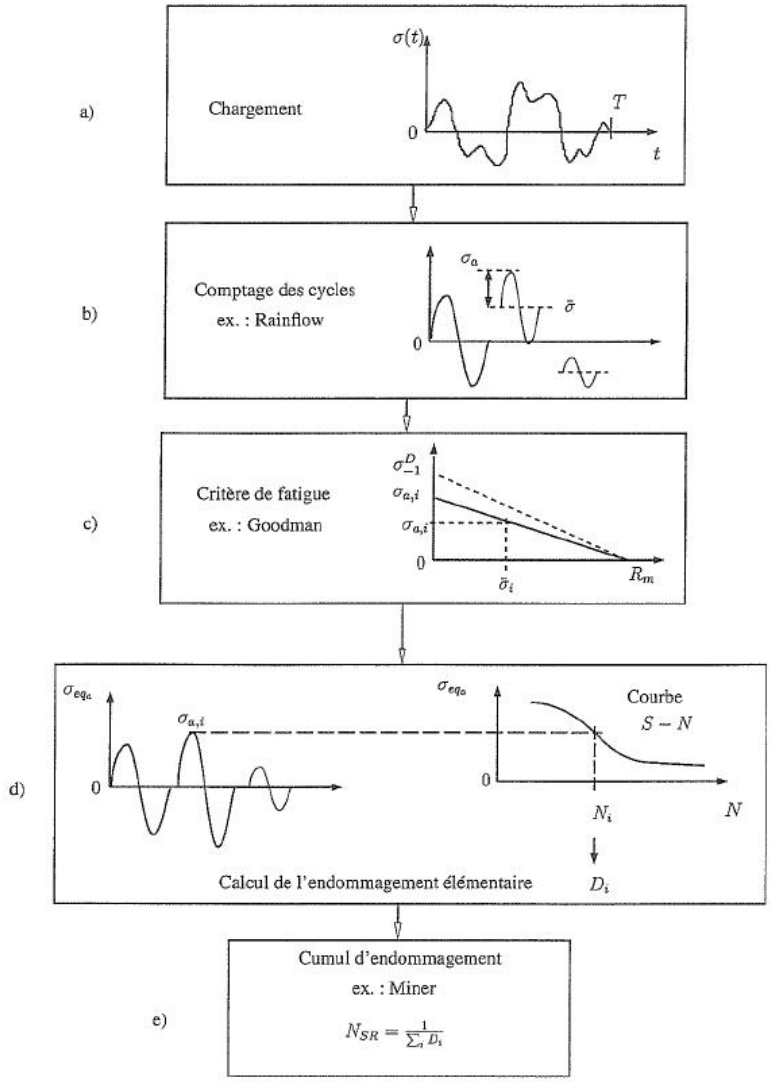


Figure I.9 – Schématique du calcul de durée de vie en fatigue sous chargement d'amplitude variable (Banvillet, 2001)

aussi remplacer les étapes (c), (d) et (e) par une seule loi d'endommagement, comme la loi de Lemaitre-Chaboche.

La même démarche peut être appliquée avec des déformations. La définition de la variable sur laquelle le comptage est effectué, la définition de la variable équivalente du critère de fatigue, le choix de la loi d'endommagement, du type de cumul... sont autant d'éléments qui différencient les nombreuses méthodes de calcul en fatigue proposées dans les dernières décades. Le chapitre VI décrit quelques unes de ces méthodes.

I.5 L'endommagement continu

En parallèle avec les techniques classiques qui introduisent la notion de cycles, il se développe une classe de méthodes dont le formalisme est apparenté à celui de la plasticité, et qui font évoluer l'endommagement en continu au cours du chargement (Lemaitre et Desmorat, 2005). La conséquence de cette formulation est une plus grande exigence en temps de calcul. Par contre, elles éliminent un certain nombre de difficultés : en cas de chargement multiaxial, elles prennent en compte de façon naturelle toutes les composantes du tenseur ; pour les histoires complexes, elles traitent le problème en effectuant une intégration continue. Pour notre étude, nous sommes cependant restés dans le cadre traditionnel.

Nous allons maintenant décrire les différentes étapes du principe général d'un calcul de durée de vie en fatigue à faible nombre de cycles. Comme nous l'avons vu dans l'introduction de cette partie bibliographique, la première étape consiste à calculer l'historique des contraintes et déformations en un point ou dans la totalité de la pièce, ceci de deux manières :

- soit par la méthode des éléments finis, qui fournit une solution précise mais coûteuse en temps ;
- soit par une méthode de calcul accéléré, qui fournit rapidement une solution approchée.

Le chapitre suivant détaille trois méthodes de calcul accéléré. Elles ont en commun de calculer les variables locales au cycle stabilisé en tout point de la structure.

Chapitre -II-

Méthodes simplifiées de détermination de l'état stabilisé

Dans ce chapitre, trois méthodes de calcul accéléré seront décrites : la méthode de Zarka, la méthode des sauts de cycles puis la méthode cyclique directe. Elle peuvent être utilisées en plus ou à la place de la méthode des éléments finis afin obtenir, pour le cycle stabilisé, une approximation des variables locales en tout point de la structure.

II.1 Methode de Zarka

Cette méthode, appelée par ses auteurs "Méthode d'analyse simplifiée des structures inélastiques" (Zarka et Casier, 1979), permet d'approcher rapidement l'état de contrainte élastoplastique d'une structure entière à partir d'un calcul élastique. Le formalisme défini par Zarka est trop long pour être développé ici, nous n'aborderons donc que les principes généraux de sa théorie. Elle est basée sur l'expression de la déformation totale en tout point de la structure :

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}^i + \underset{\approx}{\boldsymbol{M}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^e + \underset{\approx}{\boldsymbol{M}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{R}} + \underset{\sim}{\varepsilon}^p \tag{II.1}$$

où :

- $\underset{\approx}{\boldsymbol{M}}$ est la matrice de souplesse ;
- $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ est le tenseur des contraintes résiduelles ;
- $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^e$, $\underset{\sim}{\varepsilon}$, $\underset{\sim}{\varepsilon}^p$, $\underset{\sim}{\varepsilon}^i$ sont respectivement le tenseur des contraintes si la structure restait purement élastique, et les tenseurs déformations totales, plastiques et initiales ;
- $\underset{\sim}{\varepsilon}^i + \underset{\approx}{\boldsymbol{M}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^e = \underset{\sim}{\varepsilon}^e$ serait la déformation totale si la structure restait purement élastique ;
- $\underset{\approx}{\boldsymbol{M}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{R}} + \underset{\sim}{\varepsilon}^p = \underset{\sim}{\varepsilon}^{ine}$ est la déformation inélastique de la structure.

La solution élastique, à partir de laquelle la solution élastoplastique doit être déterminée, est calculée par éléments finis, d'après la géométrie, le chargement et la matrice de rigidité. Si la déformation plastique est connue, la déformation inélastique $\underset{\sim}{\varepsilon}^{ine}$ peut de même être déterminée par une analyse élastique avec un chargement nul et en introduisant $\underset{\sim}{\varepsilon}^p$ comme déformation initiale. Le plus souvent, $\underset{\sim}{\varepsilon}^p$ n'est pas connue. Les auteurs définissent le paramètre transformé interne $\underset{\sim}{\boldsymbol{y}}$, qui peut être assimilé à l'écrouissage cinématique :

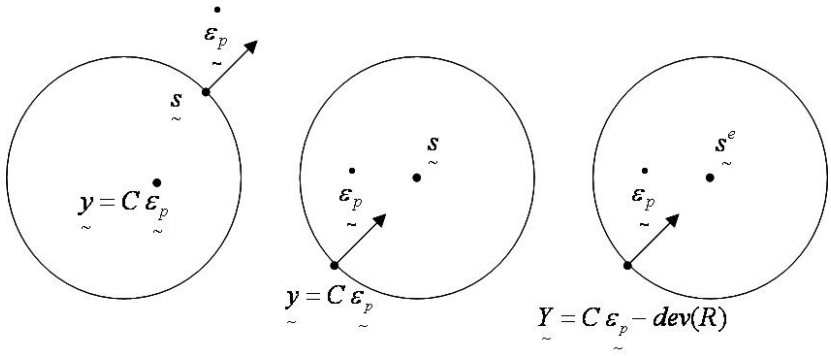


Figure II.1 – Loi d'écoulement dans les espaces de y, Y et s

$$\underset{\sim}{y} = C\underset{\sim}{\varepsilon}^p \tag{II.2}$$

Puis ils définissent le paramètre transformé structural :

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{y} - dev\underset{\sim}{R} \tag{II.3}$$

L'écoulement plastique est alors donné par :

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \lambda(\underset{\sim}{s}_e - \underset{\sim}{Y}) \tag{II.4}$$

La figure II.1 illustre la relation géométrique entre ces variables. Un exemple peut aider a comprendre le principe clé de cette méthode. Pour un état de contrainte planes, les figures II.2 et II.3 représentent l'évolution du paramètre $\underset{\sim}{Y}$ dans l'espace des $\underset{\sim}{Y}$ (qui est un plan ici), dans le cas d'une adaptation et d'une accommodation. Sur les deux figures II.2 et II.3, la surface de charge initiale est représentée par un convexe pointillé, les surfaces de charges aux instants min et max de l'état stabilisé par des convexes en traits pleins. Le chemin de s_e est illustré par des flèches pointillées et celui de $\underset{\sim}{Y}$ par des flèches en trait plein gras.

Dans les deux cas, tout se passe comme si $\underset{\sim}{Y}$ "suivait" le convexe de centre $\underset{\sim}{s}^e$. Dans le cas de l'adaptation, l'état stabilisé est atteint lorsque le paramètre $\underset{\sim}{Y}$ se trouve dans l'intersection des convexes "minimum" et "maximum", c'est-à-dire plastiquement admissible. Notons que suivant l'état initial ($\underset{\sim}{s}_0^e$,$\underset{\sim}{Y}$), l'état stabilisé est atteint lors du premier demi-cycle ($\underset{\sim}{Y}_L^1$) ou après une infinité de cycles ($\underset{\sim}{Y}_L^2$). Dans le cas de l'accommodation, il n'y a pas d'intersection entre les deux convexes "minimum" et "maximum". Pour calculer les valeurs de $\underset{\sim}{Y}_L^{min}$ et $\underset{\sim}{Y}_L^{max}$, Zarka recommande l'utilisation de la "solution ultime" si $\Delta\underset{\sim}{Y}_L = \underset{\sim}{Y}_L^{max} - \underset{\sim}{Y}_L^{min}$ est grand. Dans le cas contraire il faut déterminer l'état stabilisé par "projection radiale". Une fois les valeurs asymptotiques de $\underset{\sim}{Y}_L$ connues, on peut en déduire $\underset{\sim}{\varepsilon}^{ine}$:

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^{ine} = \underset{\approx}{M}^* : \underset{\sim}{R} + \frac{1}{C}\underset{\sim}{Y} \tag{II.5}$$

où :

$$\underset{\approx}{M}^* = \underset{\approx}{M} + \frac{1}{C}dev \tag{II.6}$$

Enfin :

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^t = \underset{\sim}{\varepsilon}^{el} + \underset{\sim}{\varepsilon}^{ine} \tag{II.7}$$

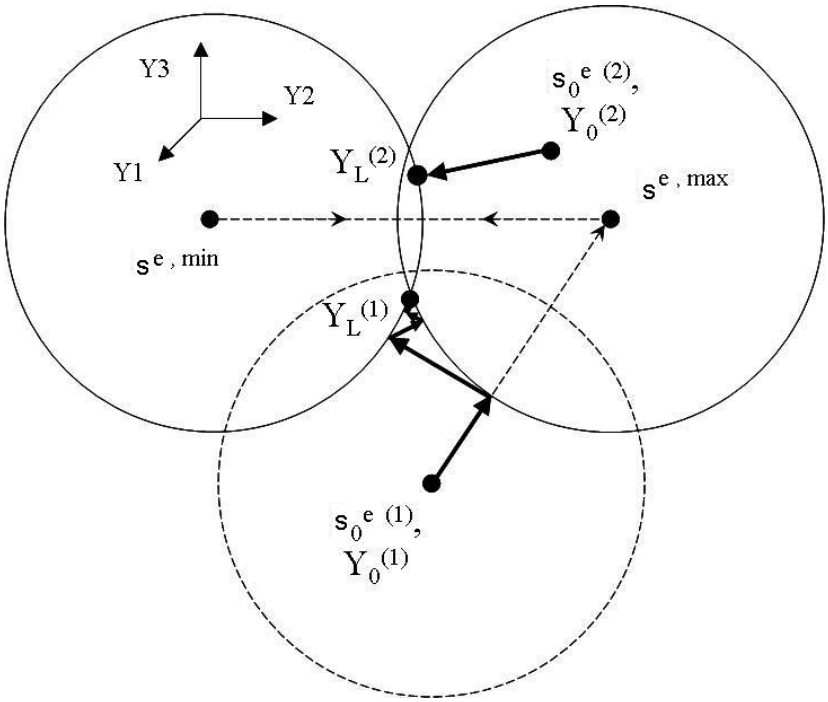


Figure II.2 – Evolution du paramètre Y dans le cas d'une adaptation

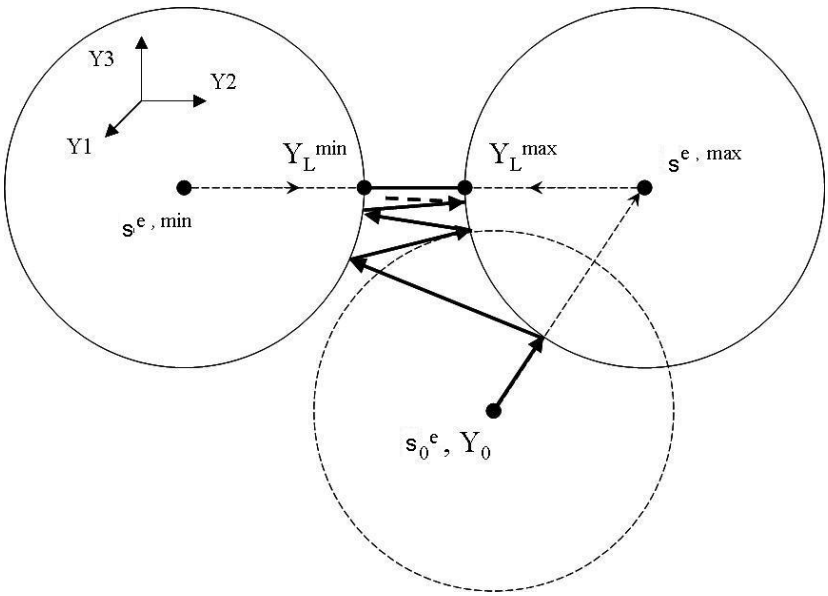


Figure II.3 – Evolution du paramètre Y dans le cas d'une accommodation

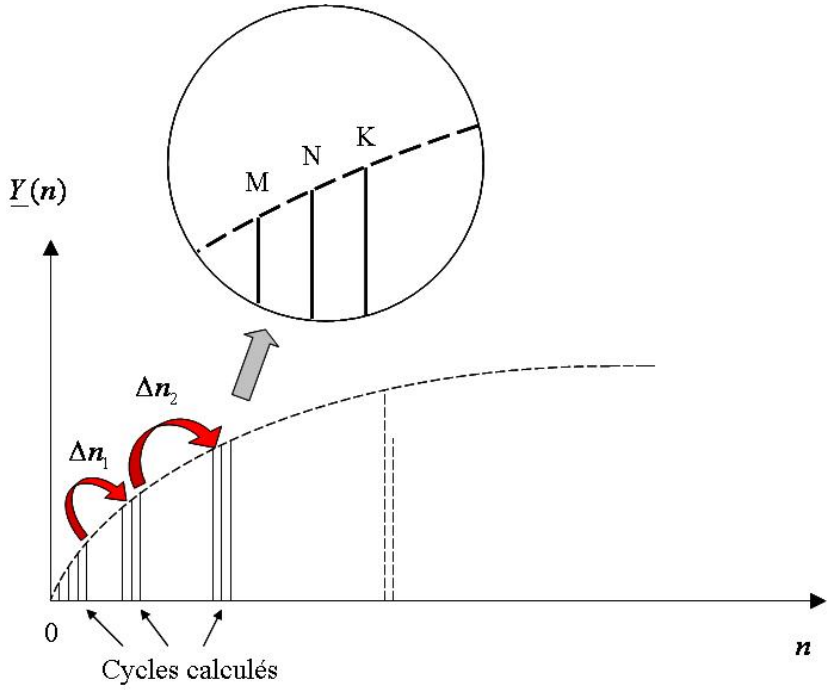


Figure II.4 – Principe de la méthode des sauts de cycles

Les chargements nonproportionnels peuvent aussi être traités, on se reportera à la littérature (Zarka et Casier, 1979) à ce sujet.

II.2 Méthode des sauts de cycles

Cette méthode (Savalle et Culié, 1978), (Lesne et Savalle, 1989), (Kruch, 1992) est implémentée (Saï, 1993) dans le code ZeBuLoN. Elle consiste à "sauter" des cycles par extrapolations successives, et à exprimer les variables internes en termes de nombres de cycles. Soit $\underline{\boldsymbol{Y}}$ un vecteur ayant pour composantes les variables internes exprimées en fonction du nombre de cycles. $\underline{\boldsymbol{y}}$ est un vecteur ayant pour composantes les même variables internes mais exprimées en fonction du temps. L'évolution d'une des composantes de ce vecteur est représentée en figure II.4.

Si T est la période, et τ ($0 < \tau < T$) un instant du cycle, de préférence dans le domaine élastique, nous avons donc :

$$\underline{\boldsymbol{Y}}(n) = \underline{\boldsymbol{y}}\big((n-1)T + \tau\big) \tag{II.8}$$

Il est possible de représenter l'évolution de Y par un développement de Taylor au second ordre, sur un intervalle ΔN plus ou moins restreint selon la vitesse à laquelle Y évolue :

$$\underline{\boldsymbol{Y}}(n + \Delta n) \approx \underline{\boldsymbol{Y}}(n) + \underline{\boldsymbol{Y}}'(n)\Delta n + \underline{\boldsymbol{Y}}''(n)\frac{(\Delta n)^2}{2} \tag{II.9}$$

En considérant 3 cycles M, N et K pour lesquels les composantes de $\underline{\boldsymbol{Y}}_M$, $\underline{\boldsymbol{Y}}_N$ et $\underline{\boldsymbol{Y}}_K$ sont connues, on peut écrire :

$$\underline{\boldsymbol{Y}}'(N) = \frac{\underline{\boldsymbol{Y}}(N) - \underline{\boldsymbol{Y}}(K)}{N - K} \tag{II.10}$$

$$\underline{\boldsymbol{Y}}''(N) = \frac{2}{(M-N)^2}\left[\underline{\boldsymbol{Y}}(N) - \underline{\boldsymbol{Y}}(M) + (N-M)\underline{\boldsymbol{Y}}'(N)\right] \tag{II.11}$$

On peut choisir un intervalle Δn tel que le terme de second ordre du développement de Taylor soit négligeable devant le premier. En introduisant un facteur de précision η, on écrit alors :

$$\eta\underline{\boldsymbol{Y}}'(N)\Delta n = \underline{\boldsymbol{Y}}''(N)\frac{(\Delta n)^2}{2} \tag{II.12}$$

Soit :

$$\Delta n_i = 2\eta\frac{\underline{\boldsymbol{Y}}'(N)}{\underline{\boldsymbol{Y}}''(N)} \tag{II.13}$$

On obtient un Δn_i pour chaque variable interne, il suffit alors de choisir le plus petit pour que l'intégration en cycles se fasse dans des conditions correctes.

II.3 Méthode cyclique directe

L'algorithme de la méthode cyclique directe (DCA : Direct Cycle Analysis) (Maitournam et al., 2002) est une boucle constituée de 2 étapes. Comme pour la méthode des éléments finis incrémentale classique, les équations d'équilibre sont résolues à l'échelle de la structure à l'étape globale. Puis, dans l'étape locale, les lois de comportement sont intégrées localement.

II.3.1 Etape globale

Connaissant la déformation plastique, cette étape consiste à déterminer les solutions statiquement et cinématiquement admissibles. D'après les équations d'équilibre on déduit une équation dont la forme simplifiée s'écrit :

$$[E][U_n] = [F] + [Q^p] \tag{II.14}$$

où :
- $[E]$ est l'opérateur de rigidité ;
- $[U_n]$ est le vecteur des déplacements en un nœud n de la structure ;
- $[F]$ est le vecteur des forces nodales résultantes des forces volumiques et surfaciques ;
- $[Q^p]$ est le vecteur des forces nodales résultantes de la déformation plastique.

La périodicité de la solution est imposée. Cela signifie qu'au début de l'étape globale, les valeurs de la déformation plastique et des variables internes sont celles déterminées dans l'étape locale. Cette condition de périodicité accélère la convergence de la solution. L'équation II.14 peut être résolue pour chaque incrément par la méthode incrémentale des éléments finis ; ou dans l'étape globale de la DCA que nous allons décrire ici. Alors que la méthode des éléments finis considère l'ensemble de l'histoire de chargement, la DCA ne considère qu'un cycle. Les variables de chargement et les variables plastiques sur ce cycle sont discrétisées en N incréments puis décomposées en série de Fourier. Pour X = U, F ou Q dans l'équation II.14, on a donc :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_k = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_0 + \sum_{n=1}^{N/2}\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_n^c cos(nwt_k) + \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_n^s sin(nwt_k) \tag{II.15}$$

où :

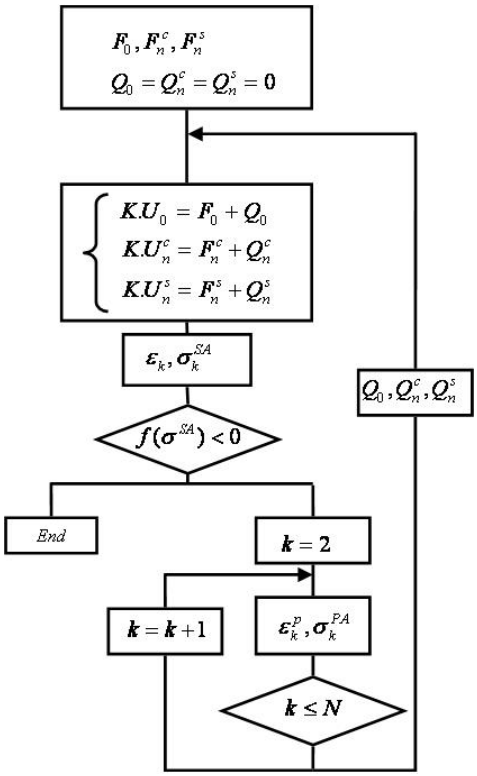


Figure II.5 – Algorithme de la méthode cyclique directe

$$\begin{cases} \underset{\sim}{X}_k^c = \sum_{k=1}^{N-1} \left[\underset{\sim}{X}_{k+1} cos(nwt_{k+1}) + \underset{\sim}{X}_k cos(nwt_k) \right] \frac{t_{k+1}-t_k}{2} \\ \underset{\sim}{X}_k^s = \sum_{k=1}^{N-1} \left[\underset{\sim}{X}_{k+1} sin(nwt_{k+1}) + \underset{\sim}{X}_k sin(nwt_k) \right] \frac{t_{k+1}-t_k}{2} \end{cases}$$

A partir des coefficients des déplacements U_0, U_n^c et U_n^s on peut déduire les coefficients des déformations ε_0, ε_n^c et ε_n^s. Puis une recomposition de Fourier permet d'obtenir la déformation totale et les champs de contrainte statiquement admissible tout le long du cycle.

II.3.2 L'étape locale

Pour k=1 à N, chaque incrément de déformation totale $\Delta\varepsilon$ entre t_k et t_{k+1} ainsi que la déformation plastique ε_k^p at t_k sont donnés par l'étape globale. Il s'agit maintenant de déterminer ε_{k+1}^p et le champ de contrainte statiquement admissible au temps t_{k+1} par retour radial. Comme nous l'avons vu, cette valeur remplacera l'ancienne valeur de la déformation plastique au début de l'étape globale. L'algorithme résumant l'ensemble de la méthode est représenté en figure II.5.

Ces trois méthodes ont en commun de déterminer les variables locales en tout point de la structure au cycle stabilisé. Mais on constate qu'elles sont radicalement différentes par leur principe. Ces méthodes seront testées dans le chapitre VII. L'autre grande famille des méthodes de calcul accéléré est le groupe des modèles de type Neuber, que nous allons maintenant aborder.

Chapitre -III-

Méthodes de type Neuber

Ce chapitre présente les méthodes de type Neuber les plus connues. Comme les méthodes de détermination du cycle stabilisé que nous venons d'aborder, ce sont aussi des méthodes de calcul accéléré qui peuvent être appliquées avant un calcul de durée de vie en fatigue. Mais elles diffèrent des méthodes du chapitre II en ce sens que :

- les variables locales ne sont calculées qu'en un point de la structure, le point critique où l'on prévoit que va s'amorcer la fissure qui conduira à la rupture de la pièce ;
- ces variables sont calculées tout au long de l'historique de chargement, et pas uniquement au cycle stabilisé ;
- le point critique doit se situer dans une zone de plasticité confinée.

III.1 Méthode de Neuber uniaxiale

Cette méthode s'appuie sur la règle du même nom (Neuber, 1961). Elle permet d'approcher l'état de contrainte et de déformation réel en fond d'entaille à partir d'un calcul élastique, comme le montre la figure III.1. Si cette entaille, chargée par une contrainte nominale σ^{nom}, restait purement élastique (figure III.1(a)), ce chargement induirait une contrainte locale σ^e et une déformation locale ε^e en fond d'entaille. K_t étant le facteur d'intensité de contrainte, on peut écrire $\sigma^e = K_t\sigma^{nom}$. Les variables σ^e et ε^e peuvent être obtenues par un simple calcul élastique. Pour calculer la contrainte et la déformation réelles, σ et ε, Neuber postule que le produit de la contrainte par la déformation en fond d'entaille ne dépend pas de l'écoulement plastique :

$$\sigma^e\varepsilon^e = \sigma\varepsilon \tag{III.1}$$

La figure III.2(a) est une représentation de la règle de Neuber dans l'espace σ - ε. L'équation III.1 implique que l'aire du rectangle défini par σ^e et ε^e est égale à celle du rectangle défini par σ et ε. Aussi, les points (σ^e,ε^e) et (σ,ε) appartiennent à l'hyperbole $\sigma\varepsilon = \sigma^e\varepsilon^e$.

Cette méthode peut être appliquée aux chargements cycliques. L'approche classique consiste à effectuer la construction géométrique classique sur un diagramme cyclique, comme le montre la figure III.2(b), en utilisant les amplitudes de contrainte et de déformation dans l'équation III.1 :

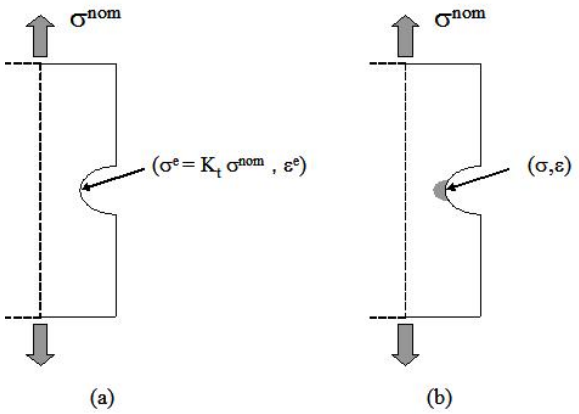


Figure III.1 – Illustration de la règle de Neuber : résultat d'un calcul élastique et résultat d'un calcul élasto-plastique

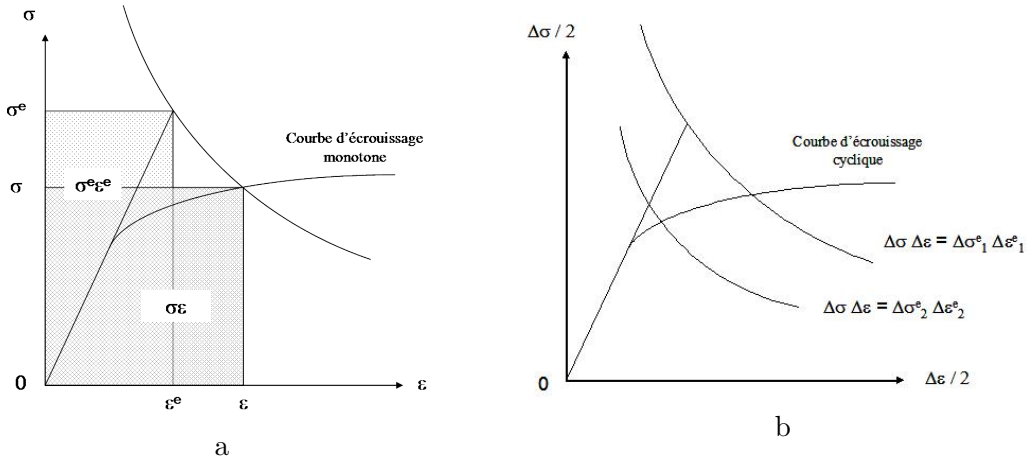


Figure III.2 – (a) Méthode de Neuber classique pour un chargement monotone (b) Extension classique aux chargements cycliques

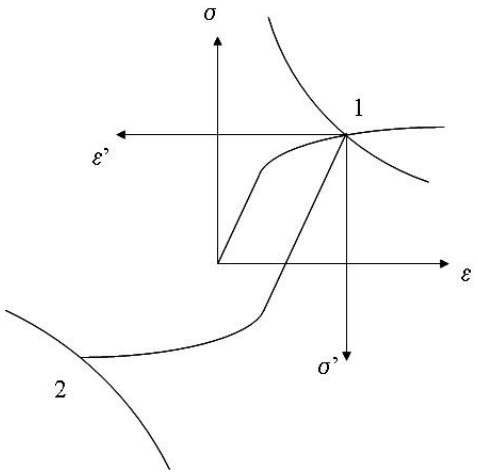


Figure III.3 – Application de la méthode de Neuber aux chargements cycliques avec changement d'origine

$$\Delta\sigma^e \Delta\varepsilon^e = \Delta\sigma\Delta\varepsilon \tag{III.2}$$

Cette solution ne permet pas de prendre en compte la contrainte moyenne. C'est pourquoi une autre méthode a été proposée (Chaudonneret et Culié, 1985) (Lemaitre et Chaboche, 1996) (figure III.3). Elle est basée sur un changement de repère à chaque extremum du chargement. L'équation III.3 remplace alors l'équation III.1. La figure III.3 illustre le premier changement d'origine. Pour calculer les contraintes et déformations au point 2, l'origine du repère est déplacée au point 1 et les axes sont inversés. La règle de Neuber s'écrit alors, pour la branche de chargement [i-1,i] :

$$\left(\sigma_i^e - \sigma_{i-1}^e\right)\left(\varepsilon_i^e - \varepsilon_{i-1}^e\right) = \left(\sigma_i - \sigma_{i-1}\right)\left(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}\right) \tag{III.3}$$

Dans les cas réels, le tenseur des contraintes est souvent multiaxial. Plusieurs formes modifiées du postulat de Neuber figurent dans la littérature pour traiter ce cas. Nous allons maintenant exposer les problèmes qui se posent quand on passe d'un état de contrainte uniaxial à un état de contrainte multiaxial.

III.2 Position du problème pour les états de contrainte multiaxiaux

Dans le cas d'un état de contrainte multiaxial en fond d'entaille, plusieurs formes modifiées du postulat de Neuber uniaxial ont été proposées, par exemple l'équation III.4 (Ellyin et Kujawski, 1989), qui généralise des travaux antérieurs (Neuber, 1961), (Molski et Glinka, 1981) :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^e : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{III.4}$$

En fait, on obtient de meilleurs résultats en considérant les invariants de von Mises des tenseurs. C'est la forme qui a été adoptée dans la majorité des postulats de type Neuber pour des états de contrainte multiaxiaux.

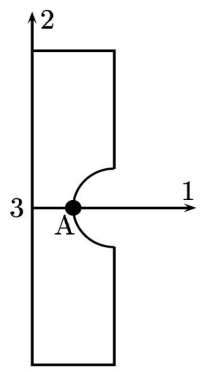


Figure III.4 – Demi-coupe d'éprouvette axisymétrique

$$J\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{e}\right) J\left(\underset{\sim}{\varepsilon}^{e}\right) = J\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\right) J\left(\underset{\sim}{\varepsilon}\right) \tag{III.5}$$

Considérons une éprouvette entaillée axisymétrique, dont une demi-coupe est représentée en figure III.4. Si l'éprouvette est sollicitée en traction, les tenseurs des contraintes et des déformations en fond d'entaille au point A s'expriment :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

En toute généralité, il s'agit d'un problème à 9 inconnues, respectivement trois composantes de contrainte, de déformation et de déformation plastique. Nous disposons pour les déterminer de trois équations données par les équations de l'élasticité (III.6), et de trois équations décrivant l'écoulement plastique (III.7).

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{E}} : \left(\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\varepsilon}^{p}\right) \tag{III.6}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}_{p} = f\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underset{\sim}{\varepsilon}_{p}, \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}\right) \tag{III.7}$$

Il reste à déterminer le pilotage du chargement. Il est de type mixte, et comprend une équation en contrainte ($\sigma_{11} = 0$) et une équation faisant intervenir les invariants (III.8).

$$J(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{e})\ J(\underset{\sim}{\varepsilon}^{e}) \ = \ J(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\ J(\underset{\sim}{\varepsilon}) \tag{III.8}$$

On observe qu'il manque une équation, pour que l'on soit à même de régler la direction du trajet de chargement dans le plan $22 - 33$. Il est donc nécessaire de faire une hypothèse heuristique supplémentaire prenant en compte l'évolution des contraintes et déformations

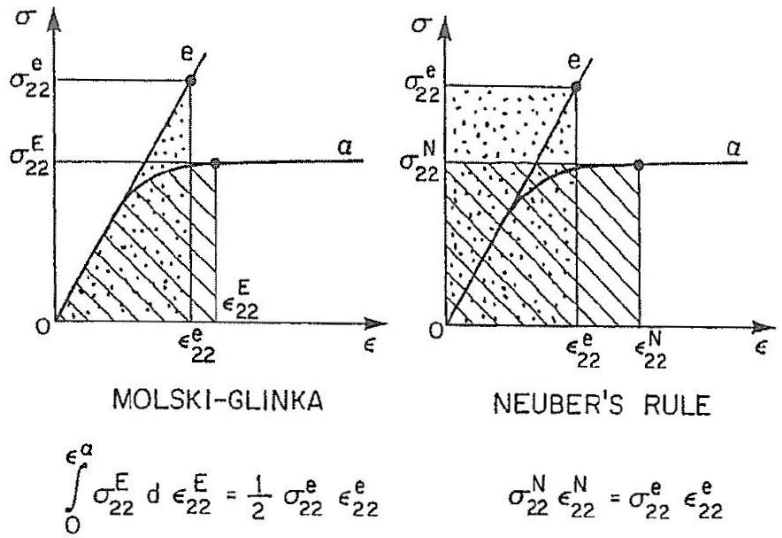


Figure III.5 – Hypothèses de Neuber et de Molski-Glinka (Moftakhar et al., 1995)

en fond d'entaille. C'est la démarche adoptée par la plupart des auteurs pendant les vingt dernières années. La section suivante présente plusieurs modèles formulés dans la littérature.

III.3 Synthèse des hypothèses postulées dans la bibliograpie

L'hypothèse de Neuber d'origine semble appropriée pour des états de contrainte uniaxiaux, mais surestime les contraintes dans les cas multiaxiaux ou encore de déformations planes (Sharpe et Wang, 1991), (Sharpe et al., 1992), (Sharpe, 1995). La prévision de durée de vie est alors conservative. Pour palier ce problème, Molski et Glinka ont formulé une autre hypothèse, basée non plus sur l'égalité de "rectangles" mais des aires sous la courbe. On obtient alors, à l'inverse, une hypothèse non conservative qui sous-estime en général les contraintes.

III.3.1 Postulats de Neuber et de Molski-Glinka

Ces hypothèses sont très proches par leur principe d'une équivalence énergétique entre l'état élastique et l'état plastique. Pour l'éprouvette et son repère considérés précédemment, la figure III.5 différencie bien les deux postulats. Alors que Neuber représente l'énergie par des rectangles, les auteurs (Molski et Glinka, 1981) (Glinka, 1985b) considèrent l'aire sous la courbe σ_{22}-ε_{22}.

- σ^e_{22}, σ^e_{22} sont la contrainte et la déformation locales si la structure restait parfaitement élastique ;
- σ^N_{22}, σ^N_{22} sont la contrainte et la déformation locales prévues par l'hypothèse uniaxiale de Neuber ;
- σ^E_{22}, σ^E_{22} sont la contrainte et la déformation locales prévues par l'hypothèse uniaxiale de Molski-Glinka.

Beaucoup d'auteurs (Shin, 1994) (Agnihotri, 1995) (Knop M., 1998) observent en chargement monotone que :

- la méthode de Neuber est plus précise pour des états de contraintes planes sous sollicitation de flexion ou de traction ;
- la méthode de Molski-Glinka est plus précise pour des états de déformations planes sous sollicitation de flexion ou de traction ;
- la méthode de Molski-Glinka est plus précise en torsion ;
- plus le coefficient de concentration de contraintes élastique augmente, plus la méthode de Molski-Glinka est précise.

D'autres auteurs (Knop et al., 2000) ont fait état des mêmes observations sous chargement cyclique. Ils observent aussi que la méthode de Neuber est plus fiable pour des états de traction que de flexion, et l'inverse pour la méthode de Molski-Glinka.

En combinant le postulat de Neuber à la loi de Ramberg-Osgood on obtient pour les matériaux présentant un comportement de type Masing :

$$\sigma^e \varepsilon^e = \sigma\big(\varepsilon_{el} + \varepsilon_p\big) = \frac{(\sigma)^2}{E} + \sigma\left(\frac{\sigma}{K}\right)^{1/n} \tag{III.9}$$

On obtient une loi similaire en dérivant l'équation de Molski-Glinka (Molski et Glinka, 1981) (Glinka, 1985b) :

$$\sigma^e \varepsilon^e = \sigma^E\big(\varepsilon^E_{el} + \varepsilon^E_p\big) = \frac{(\sigma^E)^2}{E} + \frac{2\sigma^E}{n+1}\left(\frac{\sigma^E}{K}\right)^{1/n} \tag{III.10}$$

Pour prendre en compte la redistribution des contraintes qui augmente la taille de la zone plastique, on peut (Glinka, 1985a) multiplier le terme de gauche de l'équation III.10 par un facteur correctif C_p fonction de la variation du rayon de la zone plastique r_p :

$$C_p = 1 + \frac{\Delta r_p}{r_p} \tag{III.11}$$

III.3.2 Méthodes de Hoffmann-Seeger et de Barkey *et al.*

Dans leur méthode, les premiers auteurs (Hoffmann et Seeger, 1985a) (Hoffmann et Seeger, 1985b) supposent que les directions principales sont fixes. Ils approximent l'écrouissage non linéaire du matériau par une loi d'écrouissage multi-linéaire "par morceaux". L'hypothèse qu'Hoffmann et Seeger formulent est la suivante : comme la plasticité est confinée, ils supposent que le rapport entre les deux plus grandes déformations principales ε_1 / ε_2 est constant et égal à celui observé pour un comportement purement élastique. D'autres auteurs (Barkey et al., 1994) proposent le même type d'hypothèse pour le rapport σ_1 / σ_2.

III.3.3 Méthode de Moftakhar *et al.*

Les auteurs (Moftakhar et al., 1995), (Singh et al., 1996), (Reinhardt et al., 1997) proposent d'encadrer la solution élastoplastique exacte par deux bornes. L'une est déterminée par une hypothèse de type Neuber, et surestime la solution exacte. L'autre est basée sur un postulat dérivé de celui de Molski-Glinka, et sous-estime la solution. Pour adapter le postulat de Neuber valable pour un état de contrainte uniaxial, les auteurs proposent d'utiliser l'équation III.4. Ils généralisent de même le postulat de Molski-Glinka au cas multiaxial :

$$\int_0^{\varepsilon^e_{ij}} \sigma^e_{ij}\, d\varepsilon^e_{ij} = \int_0^{\varepsilon^E_{ij}} \sigma^E_{ij}\, d\varepsilon^E_{ij} \tag{III.12}$$

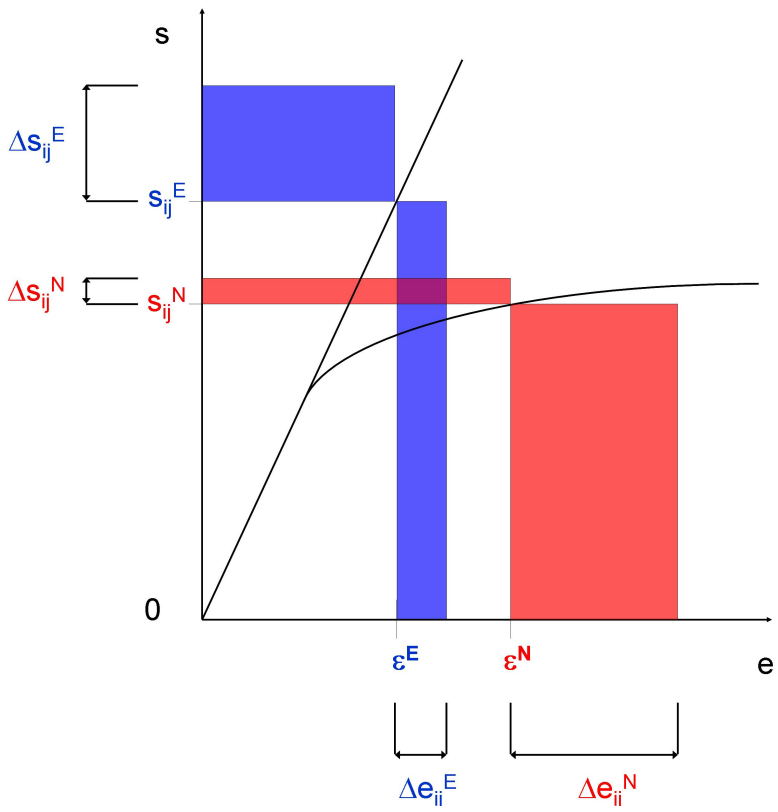


Figure III.6 – Equivalence de Buczynski-Glinka (Buczynski et Glinka, 2003)

Comme hypothèse supplémentaire ils supposent :

$$\frac{\sigma_2^e \varepsilon_2^e}{\sigma_2^e \varepsilon_2^e + \sigma_3^e \varepsilon_3^e} = \frac{\sigma_2^E \varepsilon_2^E}{\sigma_2^E \varepsilon_2^E + \sigma_3^E \varepsilon_3^E} \tag{III.13}$$

III.3.4 Methode de Buczynski *et al.*

Les auteurs (Buczynski et Glinka, 2003) proposent d'appliquer la méthode de Neuber de manière incrémentale aux déviateurs des contraintes et des déformations. Ils n'utilisent pas l'équation III.5 mais postulent une équation scalaire par composante non nulle du déviateur des contraintes. Si l'on écrit $\underset{\sim}{s}$ le déviateur des contraintes, $\underset{\sim}{e}$ le déviateur des déformations, et $\Delta\underset{\sim}{e}$ et $\Delta\underset{\sim}{s}$ leurs incréments respectifs, cela se traduit par :

$$s_{ij}^e \; \Delta e_{ij}^e \; + \; \Delta s_{ij}^e \; e_{ij}^e \; = \; s_{ij} \; \Delta e_{ij} \; + \; \Delta s_{ij} \; e_{ij} \tag{III.14}$$

Cette équivalence est illustrée par l'égalité des aires rouge et bleue en figure III.6.

Les auteurs utilisent des modèles de plasticité cyclique (Mroz, 1967) (Garud, 1981), mais selon eux n'importe quel modèle de plasticité peut être utilisé.

III.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons passé en revue les principales extensions de la méthode de Neuber (ou de Glinka) aux états de contrainte multiaxiaux proposées lors des deux dernières

décades. Il apparaît que toutes les méthodes suivent le même principe : poser une ou plusieurs hypothèses supplémentaires qui permettent de calculer toutes les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations. Excepté une proposition (Glinka, 1985a) pour prendre en compte la redistribution des contraintes due à la plasticité, aucune de ces méthodes ne fait intervenir directement de variable plastique, et se basent toujours sur une équivalence énergétique de type Neuber. On retiendra également que bon nombre de techniques font des hypothèses restrictives sur la loi de comportement (critère de von Mises, par exemple), et n'introduisent pas d'écrouissage cinématique, ce qui les rend de fait inutilisables sous chargement cyclique.

Après avoir obtenu les contraintes et déformations en fond d'entaille, il s'agit de traiter le signal qui peut être très complexe dans le cas de l'amplitude variable. Cela s'effectue au moyen d'algorithmes que nous allons aborder à présent.

Chapitre -IV-

Méthodes de comptage en fatigue

La plupart des composants mécaniques sollicités en fatigue ne subissent pas des cycles de chargement d'amplitude constante. Les signaux des variables locales sont donc d'amplitude variable, voire aléatoire dans le cas de séismes par exemple. Ils ne peuvent être utilisés tels quels par une loi de fatigue traditionnelle. Il est nécessaire d'effectuer un traitement du signal par des méthodes dites "de comptage". Elles consistent à extraire des cycles élémentaires du signal, qui pourront par la suite être analysés individuellement par la loi de fatigue. Les méthodes décrites ici s'appliquent à un seul signal. Avant leur application, il est donc nécessaire de réduire le tenseur des contraintes ou des déformations à une seule variable scalaire qui leur est équivalente en terme de dommage.

IV.1 Méthode de comptage des variations (simple range counting)

On appelle "variation" une branche du chargement reliant deux extrema (ASTM, 1985) (Grégoire, 1988). On peut compter :

- soit les variations de pente positive,
- soit les variations de pente négative,
- soit les deux types de variations.

Chaque variation représente un cycle dans les deux premiers cas, un demi-cycle dans le dernier cas. Ce type de comptage décrit en figure IV.1 ne prend pas en compte les effets de séquence, ni la forme du signal. D'autre part, c'est une méthode non conservative car elle sous-estime l'amplitude du chargement par rapport aux autres méthodes. En effet, le plus grand cycle du signal résultant de ce comptage a pour amplitude celle de la branche F-G, alors que les autres méthodes de comptage prévoient comme amplitude maximale celle séparant les extrema D et G.

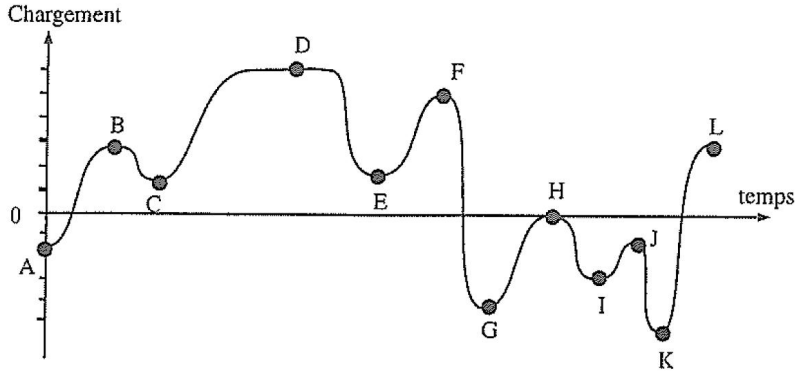
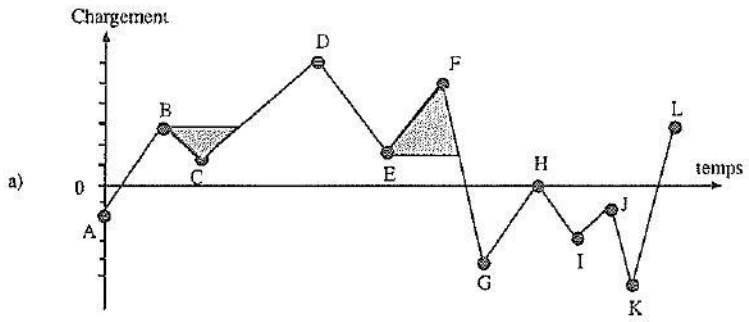


Figure IV.1 – Méthode de comptage des variations (Banvillet, 2001)

IV.2 Méthode de comptage des variations appariées (range-pair couting)

Dans cette méthode (ASTM, 1985) (Grégoire, 1988) décrite en figure IV.2, un cycle est défini comme deux variations consécutives, de pentes opposées et de même amplitude. En partant du premier point de la séquence, si l'amplitude de la variation i+1 est supérieure à celle de la variation i, les deux points délimitant la variation i sont supprimés, on "extrait" le cycle représenté par cette paire de variations en notant sa contrainte moyenne et son amplitude. On répète l'opération jusqu'à la fin de la séquence, après quoi on revient au point de départ et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des variations consécutivement inférieures les unes aux autres. On effectue alors tout le processus mais dans l'autre sens de la séquence. La méthode prend fin quand il ne reste plus que deux points, que l'on appelle "résidu".



Comme la méthode précédente, le comptage des variations appariées ne prend pas en compte les effets de séquence, ni la forme du signal. D'autre part, le résultat du comptage diffère en fonction du point de départ du comptage choisi dans la séquence. La méthode rainflow, présentée dans le prochain paragraphe, permet de s'affranchir de cet inconvénient. On part en effet soit du plus petit minimum, soit du plus grand maximum. Le résidu est alors nul, et le plus grand cycle du chargement résultant a la même amplitude que celle séparant les extrema les plus éloignés dans le chargement initial, ce qui rend cette méthode très conservative.

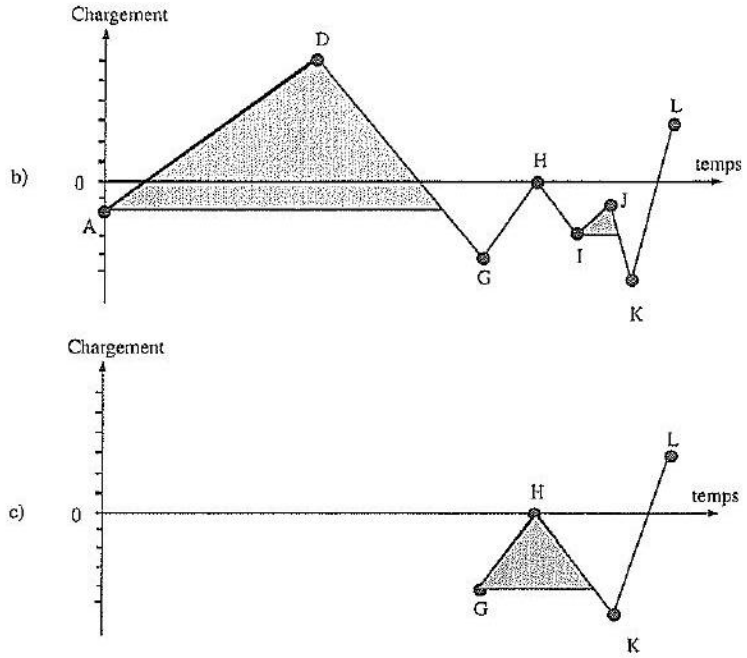


Figure IV.2 – Méthode de comptage des variations appariées (AFNOR, 1993)

IV.3 Méthode de comptage Rainflow en uniaxial

Cette méthode découle de la méthode des variations appariées abordée précédemment. En réalité, il existe plusieurs méthodes de type Rainflow qui présentent certaines nuances, nous n'aborderons ici que la méthode préconisée par l'AFNOR (AFNOR, 1993). Dans cette méthode, trois variations consécutives entrent en jeu dans l'extraction d'un cycle : si la variation i+1 est supérieure ou égale à la variation i, et si cette dernière est inférieure ou égale à la variation i-1, les deux points délimitant la variation i sont supprimés, et un cycle ayant pour amplitude et contrainte moyenne celles de la variation i est extrait. Ensuite, comme pour la méthode des variations appariées, on répète cette opération jusqu'à la fin de la séquence, etc. Si le comptage part du plus grand maximum ou du plus petit minimum, il ne reste aucun résidu et toutes les méthodes de type Rainflow donnent le même spectre résultant. Si ce n'est pas le cas, il reste un résidu et celui-ci est traité comme suit : il est dupliqué et les deux signaux sont raccordés par une branche "artificielle". Ensuite on recommence le comptage Rainflow sur ce nouveau signal, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux points. La méthode est résumée par la figure IV.3.

IV.4 Conclusion

Les méthodes de comptage se différencient par la manière dont un cycle extrait est défini. Elles se différencient donc aussi dans le spectre résultant (Dowling, 1983), (Grégoire, 1988). Toutes les méthodes de type rainflow donnent le même résultat en absence de résidu, quand le point de départ se situe au minimum ou au maximum du chargement initial. Aucune méthode de comptage ne tient compte des effets de séquence, c'est-à-dire de l'ordre d'apparition des cycles. Or, alors que des observations ont montré que ces effets sont négligeables dans le domaine des grands nombres de cycles (Bennebach, 1993), (Palin-Luc, 1996), on ne peut pas en dire autant pour la fatigue oligocyclique. Comme toutes les méthodes de comptage se

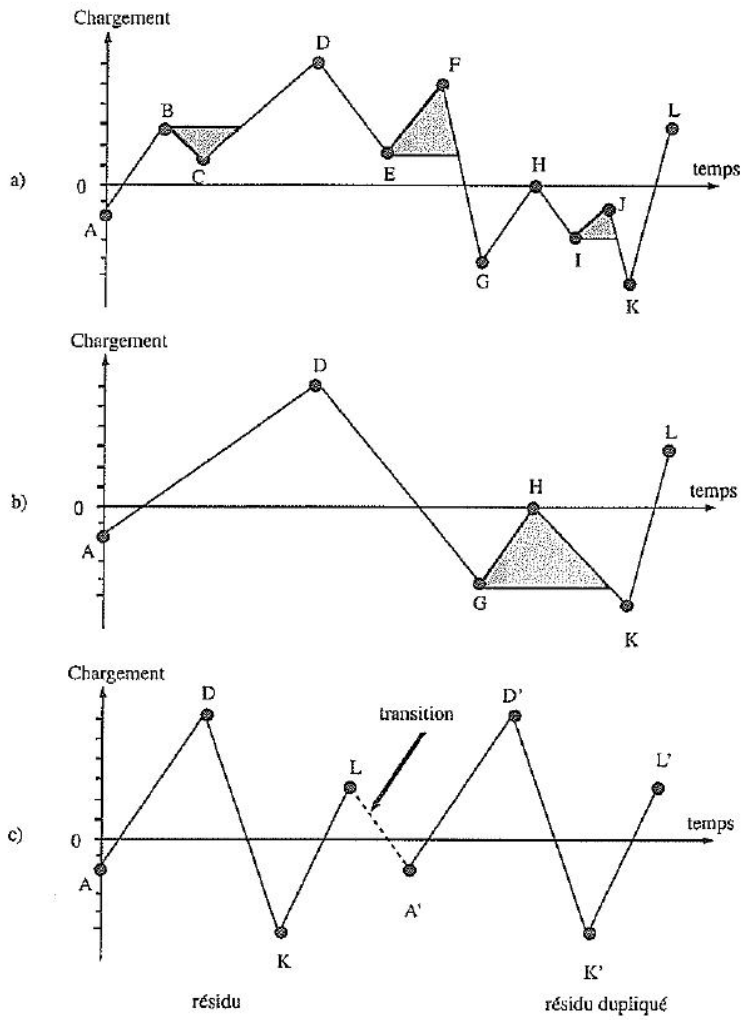


Figure IV.3 – Méthode de comptage Rainflow en uniaxial (AFNOR, 1993)

basent sur une discrétisation du signal sous forme de minima et maxima, aucune d'entre elles ne prend en compte la forme des cycles. Cette dernière n'a certes pas d'influence sur la limite d'endurance (Mielke, 1980) mais elle en a sur la durée de vie en endurance limitée (Brand et al., 1980). D'autres études montrent que la forme des cycles n'est pas sans effet pour des chargements non proportionnels (Dietmann et al., 1989), (McDiarmid, 1989). Enfin, il est évident que la fiabilité des méthodes de comptage d'une seule variable dépend de la définition même de cette variable, que l'on veut représentative du dommage engendré par l'ensemble des composantes du tenseur des contraintes.

Une fois les cycles extraits, il s'agit d'appliquer un critère de fatigue ou une loi d'endommagement sur chacun d'eux. Ces critères font l'objet du prochain chapitre. Les lois d'endommagement sont décrites dans le chapitre V.

Chapitre -V-

Endommagement en fatigue

Chaque cycle extrait par une méthode de comptage est défini par sa valeur moyenne et son amplitude en contrainte et en déformation. Avec un critère de fatigue, on peut alors calculer combien de fois un tel cycle peut être imposé à la structure avant qu'une fissure ne s'amorce. L'application d'une loi d'endommagement de type Miner permet alors de calculer le dommage élémentaire occasionné par chacun des cycles extraits par la méthode de comptage. On cumule ensuite ces dommages par une loi de cumul, linéaire ou non linéaire.

Cependant, certaines lois d'endommagement, comme celle de Lemaitre-Chaboche, peuvent aussi remplir le rôle du critère en exprimant l'endommagement élémentaire directement en fonction des grandeurs caractéristiques du cycle extrait. Elles sont donc directement applicables après la méthode de comptage.

Dans ce chapitre nous aborderons tout d'abord la loi d'endommagement de Lemaitre-Chaboche, impliquant des invariants du tenseur des contraintes. Puis nous décrirons deux critères de type plan critique formulés en déformations. Par la suite, deux critères mixtes de type plan critique, faisant intervenir à la fois des contraintes et des déformations, seront décrits. Nous n'abordons ici que les critères de type plan critique les plus connus, cependant de nombreux autres critères ont été formulés et sont décrits en annexe A. Enfin, les cumuls de dommage linéaire et non linéaire seront abordés.

V.1 Approche en contrainte : la loi de Lemaitre-Chaboche

V.1.1 Enoncé

Lemaitre et Chaboche (Chaboche et Lesne, 1988), (Lemaitre et Chaboche, 1996) ont constaté que le dommage évolue de façon non linéaire avec le nombre de cycles. Ce modèle est utilisé entre autres pour l'endommagement en fatigue et en fluage. Le modèle NLCD (Non Linear Cumulative Damage) cherche à décrire l'évolution du dommage de l'état initial (D=0, N=0) à l'initiation de la macrofissure (D=1, N=Nf) en fonction du nombre de cycles que subit la structure.

Pour des états de contrainte multiaxiaux, la loi d'endommagement s'écrit :

$$dD = \left(1 - (1-D)^{\beta+1}\right)^{\alpha\left(\Delta J, \bar{I}_1, J_{max}\right)} \left(\frac{\Delta J/2}{M\left(\bar{I}_1\right)}\right)^{\beta} dN \tag{V.1}$$

où :

- ΔJ est le diamètre du cercle circonscrit au chargement dans l'espace du déviateur des contraintes ;
- $\overline{I}_1$ est la valeur moyenne du premier invariant du tenseur des contraintes ;
- J_{max} est la valeur maximale de l'invariant de von Mises du tenseur des contraintes.

La fonction $\alpha\left(\Delta J, \overline{I}_1, J_{max}\right)$ caractérise la non linéarité de l'évolution du dommage, définit sa cumulation non linéaire, et permet de prendre en compte l'effet de contrainte moyenne :

$$\alpha\left(\Delta J, \overline{I}_1, J_{max}\right) = 1 - a\left\langle \frac{\Delta J/2 - \sigma_l\left(\overline{I}_1\right)}{\sigma_u - J_{max}} \right\rangle \tag{V.2}$$

Où $\sigma_l\left(\overline{I}_1\right) = \sigma_{l0}\left(1 - b\,\overline{I}_1/\sigma_u\right)$

L'expression de $M\left(\overline{I}_1\right)$ est dérivée du critère de fatigue uniaxiale de Goodman et introduit à nouveau un effet de contrainte moyenne :

$$M\left(\overline{I}_1\right) = \sigma_{l0}\left(1 - b\frac{\overline{I}_1}{\sigma_u}\right) \tag{V.3}$$

Pour obtenir la durée de vie de la structure, on intègre l'équation V.1 de D = 0 à D = 1. On peut alors exprimer Nf :

$$N_f = \frac{\left\langle \sigma_u - J_{max} \right\rangle}{a(\beta+1)\left\langle \Delta J/2 - \sigma_l\left(\overline{I}_1\right) \right\rangle}\left[\frac{\Delta J/2}{M\left(\overline{I}_1\right)}\right]^{-\beta} \tag{V.4}$$

V.1.2 Avantages

- La loi de Lemaitre-Chaboche décrit un cumul de dommage non linéaire.
- Les cycles dont l'amplitude est inférieure à la limite d'endurance peuvent être pris en compte dans le calcul du dommage dès que ce dernier est initié.
- Elle prend en compte l'effet de la contrainte moyenne à travers l'utilisation du critère de Goodman.
- Elle tient compte de l'histoire du chargement.

V.1.3 Inconvénients

Cette loi nécessite la détermination d'un certain nombre de paramètres, qui ne sont cependant pas tous indispensables à des prédictions fiables en durée de vie.

V.2 Critères en déformation

V.2.1 Notion de plan critique

Tout comme les lois d'endommagement, les critères de fatigue peuvent se classer de différentes manières. Il est courant de les distinguer selon le domaine de fatigue auquel ils s'appliquent : endurance, oligocyclique ou les deux. Nous ne nous intéressons ici qu'aux critères de ces deux dernières catégories, qui s'expriment respectivement en fonction de déformations seules - on parlera de critères en déformation, ou couplées à des contraintes - que l'on nomme critères mixtes. Un autre classement des critères de fatigue repose sur le type d'approche. Les plus anciens se basent sur des considérations empiriques et ne sont adaptés qu'à un nombre restreint de matériaux. D'autres font intervenir dans leur formulation

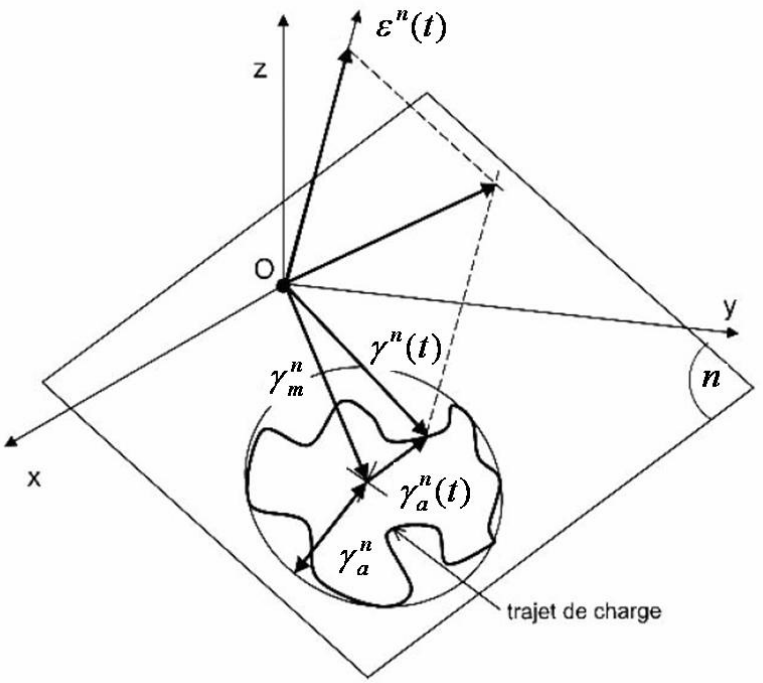


Figure V.1 – Variables utilisées dans les critères de type plan critique en déformation

des invariants, et considèrent ainsi le tenseur des contraintes et/ou des déformations dans sa globalité. C'est pourquoi cette approche est dite "globale". Les critères que nous abordons font appel au concept du plan critique. En effet, leur formulation n'implique que certaines composantes de tenseurs des contraintes et/ou des déformations rapporté à un plan sur lequel la fissure provoquant la ruine du matériau est censée s'amorcer. La figure V.1 illustre ce concept, ainsi que toutes les composantes du tenseur des déformations qui entrent dans la formulation des critères abordés. Leur signification est ici rappelée et est aussi valable pour le tenseur des contraintes.

- $\varepsilon^n(t)$: Déformation normale au plan critique à l'instant t
- γ_m^n, γ_a^n : Valeur moyenne, et amplitude du cycle en cisaillement sur le plan critique de normale n
- $\gamma^n(t)$, $\gamma_a^n(t)$: Cisaillement et amplitude du cisaillement à l'instant t

V.2.2 Critère de Brown-Miller

Les auteurs (Brown et Miller, 1973) observent que l'amorçage et la propagation d'une fissure s'effectuent dans le plan de cisaillement maximum, mais sont assistés par la contrainte normale à ce plan. En effet, celle-ci diminue les forces de friction entre les plans et facilite la fissuration. Ils proposent donc une relation se basant sur l'amorçage d'une fissure en mode II ou III (nous considérerons ces deux modes comme équivalents) :

$$\gamma_a^n = f(\varepsilon_a^n) \tag{V.5}$$

où γ_a^n est l'amplitude du cisaillement sur le plan n de cisaillement maximum, et ε_a^n est l'amplitude de la déformation normale à ce même plan. La figure V.2 représente le cercle de Mohr des déformations pour une sollicitation quelconque.

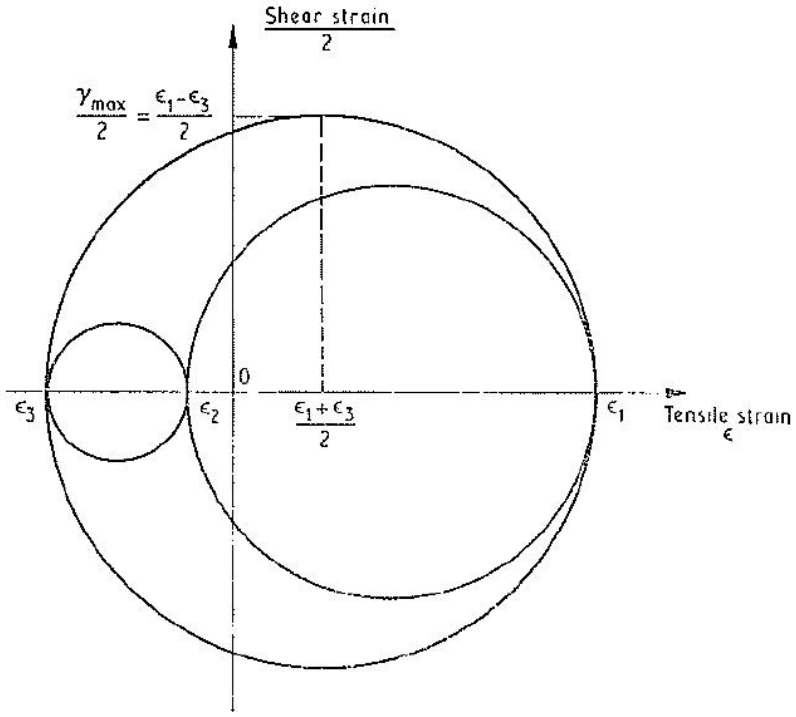


Figure V.2 – Cercles de Mohr des déformations (Brown et Miller, 1973)

Cette relation peut alors se formuler :

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} = f\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}\right) \tag{V.6}$$

Cette proposition n'est que la forme générale d'une fonction dont on peut (Kandil et al., 1982) donner une expression spécifique (critère KBM) :

$$\gamma_a^n + S\varepsilon_a^n = \frac{\tau_f'}{G}(2N_f)^{b_0} + \gamma_f'(2N_f)^{c_0} \tag{V.7}$$

où (Wang et Brown, 1993) :

$$S = 2\left(\frac{\tau_{fl}}{\sigma_{fl}} - 0,5\right)\frac{1+\nu}{1-\nu} \tag{V.8}$$

τ_{fl} et σ_{fl} étant les limites de fatigue en traction-compression et torsion alternées.

Dans le critère KBM, ε_a^n et γ_a^n sont supposées être proportionnelles et donc maximales au même instant, ce qui réduit le champ d'application aux chargements proportionnels. Selon les observations de certains auteurs (Jordan et al., 1985), seule l'amplitude de déformation normale entre les deux extrema du cisaillement influence l'ouverture de la fissure, comme l'explique la figure V.3. Par ailleurs, ε_a^n et γ_a^n ne sont pas censés être proportionnels. Sur la base de ces observations et des travaux de Kandil, Brown et Miller, un nouveau critère est proposé (Wang et Brown, 1993), où ε_a^n dans le critère de KBM est remplacée par "l'excursion" $\varepsilon^{*,n}$ définie sur la figure V.3. Le plan critique est toujours le plan où γ_a^n est maximal.

L'excursion s'exprime alors :

$$\varepsilon^{*,n} = \underset{t_A<t<t_E}{max}(\varepsilon_n(t)) - \underset{t_A<t<t_E}{min}(\varepsilon_n(t)) \tag{V.9}$$

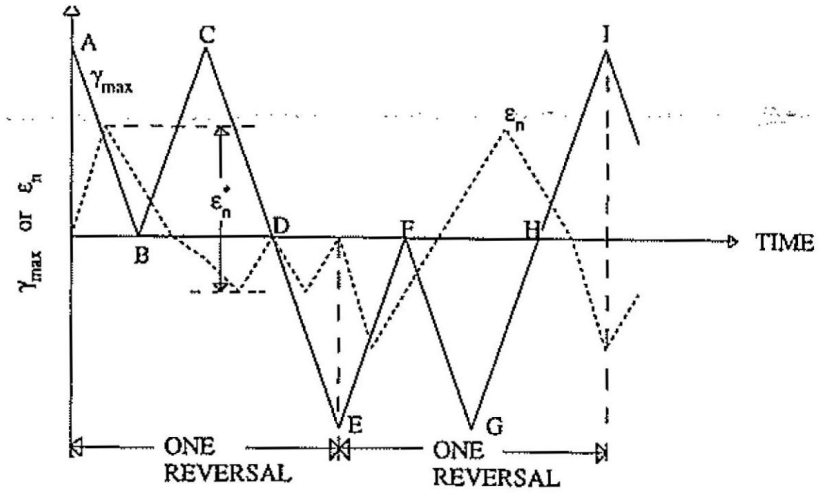


Figure V.3 – Evolution de γ^n et ε^n, définition de l'excursion $\varepsilon^{*,n}$ (Wang et Brown, 1993)

Il est à noter que, même si dans l'absolu ce critère peut ainsi être utilisé pour des chargements non proportionnels, il ne considère que des déformations et ne prend donc pas en compte l'écrouissage cyclique induit par de tels chargements. En effet, pour une même déformation, on peut observer après stabilisation une contrainte deux fois plus élevée que sous un chargement proportionnel. Une méthode complète de calcul de durée de vie a été proposée par les mêmes auteurs. Elle utilise ce critère et sera présentée en chapitre VI.

V.2.3 Critère de Fatemi-Socie

Pour palier le fait que le critère de Wang et Brown ne prend pas en compte l'écrouissage cyclique dû au déphasage des contraintes et son influence sur la durée de vie, les auteurs ont formulé (Fatemi et Socie, 1988), en introduisant la contrainte normale maximale :

$$\gamma_a^n \left(1 + k\frac{\sigma_{max}^n}{\sigma_y}\right) = \frac{\tau_f'}{G}(2N_f)^{b_0} + \gamma_f'(2N_f)^{c_0} \tag{V.10}$$

où k est une constante comparable à S, déterminée par des essais de traction et de torsion.

V.3 Critères mixtes

Ces critères sont basés sur des estimations de type énergétique. Ainsi, comme leur nom l'indique, ils font intervenir à la fois des contraintes et des déformations. Certains se basent sur l'énergie élastique et s'appliquent à la fatigue à grand nombre de cycles. D'autres impliquent la dissipation plastique et s'appliquent à la fatigue oligocyclique. Nous n'aborderons que les critères faisant intervenir l'énergie totale, qui permet de prendre en compte toute la gamme de cycles.

V.3.1 Critère de Smith-Watson-Topper (SWT)

Les auteurs (Smith et al., 1970) proposent pour une sollicitation de traction-compression uniaxiale :

$$\sigma_{max}\varepsilon_a = \frac{(\sigma'_f)^2}{E}\left(2N_f\right)^{2b} + \sigma'_f\varepsilon'_f(2N_f)^{b+c} \tag{V.11}$$

L'introduction de σ_{max} permet de prendre en compte l'écrouissage cyclique supplémentaire induit par des chargements proportionnels. Les auteurs ont validé leur critère pour une large gamme de matériaux : aciers SAE 1015, SAE 1045, SAE 4340, aluminiums 2024-T4, 24S-T3, 75S-T6.

Ce critère (nous le nommerons Socie 2) a été adapté (Socie, 1987) à des chargements multiaxiaux par le biais de l'approche de type plan critique :

$$\sigma^1_{max}\varepsilon^1_a = \frac{\sigma'^2_f}{E}(2N_f)^{2b} + \sigma'_f\varepsilon'_f(2N_f)^{b+c} \tag{V.12}$$

où σ^1_{max} est le maximum de la contrainte normale au plan critique. Ce plan est le plan de la plus grande déformation principale, dont l'amplitude est ε^1_a. L'application de ce critère à une méthode de prédiction de durée de vie, celle de Socie par exemple, sera détaillée plus loin. Socie insiste sur l'importance du déphasage en remarquant pour l'AISI 304 qu'une contrainte maximale doublée à cause d'une non proportionalité réduit la durée de vie d'un facteur 10.

Socie a validé ce critère sur l'acier inoxydable AISI 304. Cependant il préconise d'étudier le mode de fissuration avant d'appliquer son critère. Par exemple, l'AISI 304 présente (Socie, 1987) un mode de rupture I en torsion pour de faibles déformations et en traction ; et un mode II en torsion pour de plus grandes déformations. Dans ce cas le critère de Socie 2 (équation V.12) est plus fiable que le critère en déformation de Socie 1, présenté en annexe A (équation A.1), basé sur une fissuration en mode II assistée par une traction normale. En revanche, l'Inconel 708 présente un mode de rupture II quelle que soit la sollicitation. Le critère de Socie 1 est donc dans ce cas mieux adapté.

V.3.2 Critère de Lagoda-Macha

Ce critère (Lagoda et al., 1999) s'appuie sur les travaux de SWT que nous avons abordés précédemment, et ceux de Glinka présentés en annexe A. Le critère de Lagoda et Macha, introduit dans la méthode du même nom, fait intervenir les densités d'énergie volumique de la déformation de cisaillement et de la déformation normale au plan critique. Pour un état de contrainte uniaxial, la densité d'énergie de déformation volumique est définie comme :

$$W^n_{trac} = \sigma^n\varepsilon^n\frac{sgn[\sigma^n,\varepsilon^n]}{2} \tag{V.13}$$

L'utilité de la fonction signe est de différencier états de traction et de compression. Dans les deux cas le produit contrainte par déformation est positif, une charge et une décharge produiraient donc deux cycles sur W. Avec la fonction signe on n'en observe qu'un.

- $sgn[\sigma,\varepsilon] = 1$ quand $\varepsilon > 0$ et $\sigma > 0$
- $sgn[\sigma,\varepsilon] = -1$ quand $\varepsilon < 0$ et $\sigma < 0$
- $sgn[\sigma,\varepsilon] = 0$ quand ε et σ sont nuls ou de signe différents
- $sgn[\sigma,\varepsilon] = 0,5$ quand seule l'une des deux grandeurs est nulle

Pour un état de contrainte multiaxial, ils définissent une densité d'énergie de déformation volumique équivalente :

$$W_{eq} = \kappa W^n_{trac} + \beta W^n_{tors} = \frac{1}{2}\kappa\ \sigma^n\ \varepsilon^n\ sgn[\sigma^n,\varepsilon^n] + \frac{1}{2}\beta\ \tau^n\ \gamma^n\ sgn[\tau^n,\gamma^n] \tag{V.14}$$

Il y a rupture quand cette quantité dépasse une certaine valeur Q. Les paramètres β, γ, Q dépendent de la version du critère que l'on utilise. Il existe à ce jour quatre versions, dénommées ici C1, C2, C3 et C4. On fait intervenir la densité d'énergie de déformation normale pour C1, tangentielle pour C2, les deux sont utilisées pour C3 et C4.

$$\begin{cases} \text{C1 :} & W_{eq}(t) = W^n_{trac}(t) & \text{plan critique où } \underset{n,t}{max}(W^n_{trac}(t)) \\ \text{C2 :} & W_{eq}(t) = \frac{4}{1+\nu_{eff}} W^n_{tors}(t) & \text{plan critique où } \underset{n,t}{max}(W^n_{tors}(t)) \\ \text{C3 :} & W_{eq}(t) = W^n_{trac}(t) + \frac{4}{1+\nu_{eff}} W^n_{tors}(t) & \text{plan critique où } \underset{n,t}{max}(W^n_{trac}(t)) \\ \text{C4 :} & W_{eq}(t) = W^n_{trac}(t) + \frac{3+\nu}{1+\nu_{eff}} W^n_{tors}(t) & \text{plan critique où } \underset{n,t}{max}(W^n_{tors}(t)) \end{cases}$$

où :

$$\nu_{eff} = \frac{\nu^{el}\varepsilon^{el} + \nu^p\varepsilon^p}{\varepsilon^{el} + \varepsilon^p}$$

Le critère proprement dit s'exprime :

$$W_{eq,a} = \frac{\sigma_f'^2}{E}(2N_f)^{2b} + \sigma'_f\varepsilon'_f(2N_f)^{b+c} \tag{V.15}$$

V.4 Loi de cumul linéaire de Miner

V.4.1 Enoncé de la loi

La loi de Miner (Miner, 1945) suppose plusieurs hypothèses :

- l'amorçage d'une macrofissure est synonyme de rupture du matériau, donc d'un endommagement D=1
- le chargement est sinusoïdal
- tout le travail absorbé par le matériau conduit à la rupture

Soit un spectre de chargement cyclique composé de plusieurs blocs de différentes amplitudes. Miner suppose que le cumul de l'endommagement est linéaire, ce qui implique que les variables de chargement et d'endommagement sont séparables. Autrement dit, la relation endommagement D - nombre de cycles N est de la forme :

$$dD = f(\sigma_a, \sigma_m)g(D)dN \tag{V.16}$$

Ce cumul linéaire se traduit par l'expression suivante de la règle de Miner :

$$\sum_i D_i = \sum_i \frac{N_i}{N_{fi}} = 1 \tag{V.17}$$

où N_i est le nombre de cycles d'amplitude i subis par la structure, et N_{fi}, le nombre de cycles à rupture si la structure était soumise à un chargement d'amplitude i. Pour déterminer N_{fi}, il suffit de s'aider de la courbe S-N du matériau. Le problème qui se pose est que pour un bloc de cycles dont l'amplitude est inférieure à la limite d'endurance, le nombre de cycles à

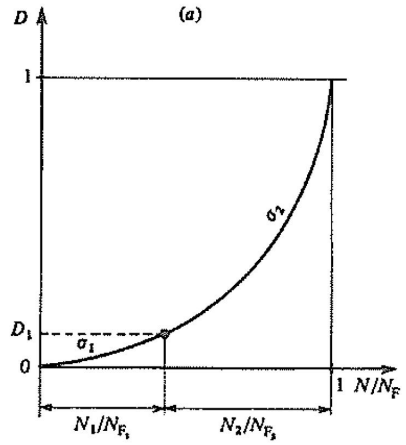


Figure V.4 – Cumul linéaire du dommage (Lemaitre et Chaboche, 1996)

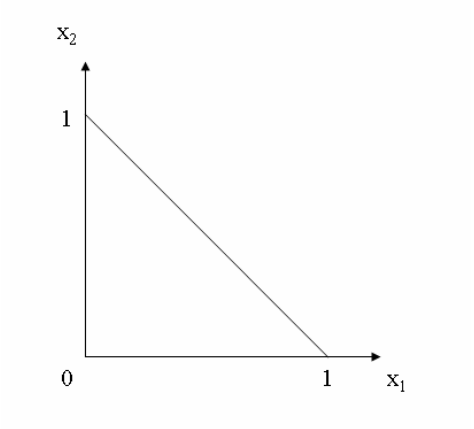


Figure V.5 – Droite de Miner

rupture tend vers l'infini. Cette loi ne prend donc pas ces cycles en compte. Même avec des blocs à plusieurs niveaux, la relation D-N reste biunivoque, et correspond à la figure V.4.

Dans le cas d'un chargement à deux niveaux, la règle de Miner implique :

$$\frac{N_2}{N_{f2}} = 1 - \frac{N_1}{N_{f1}} \tag{V.18}$$

Si on pose $x_1 = N_1/N_{f1}$ et $x_2 = N_2/N_{f2}$, l'équation V.18 est symbolisée par la figure V.5. La quantité N_2/N_{f2} est souvent dénommée "vie restante", ou "remaining life".

V.4.2 Avantages

Cette loi présente deux avantages :

- celui d'être simple d'utilisation
- celui de ne nécessiter qu'une courbe S-N pour unique donnée matériau

V.4.3 Inconvénients

Elle présente cependant plusieurs défauts :

- un bloc de cycles entraînera le même endommagement quelle que soit sa position dans l'histoire du chargement : l'effet de séquence n'est pas pris en compte ;
- cette loi empirique ne se base que sur des essais sur alliages d'aluminium ;
- les cycles d'amplitude inférieure à la limite d'endurance n'entraînent aucun endommagement.

Malgré les restrictions qui restent très gênantes au vu de la complexité des chargements rencontrés dans certains cas, cette loi reste la plus simple d'utilisation, c'est pour cette raison qu'elle est la plus employée aujourd'hui. Des études (Dowling, 1988) (Palin-Luc, 1996) ont montré que les cycles d'amplitude inférieure à la limite d'endurance entraînent un endommagement non négligeable. Pour prendre ces cycles en compte, plusieurs modifications ont été proposées :

- règle de Miner élémentaire : prolonger l'asymptote de la courbe de Wöhler dans le domaine d'endurance illimitée ;
- règle de Miner modifiée : effectuer le prolongement précédent mais seulement jusqu'à une amplitude égale à la moitié de la limite d'endurance, cette valeur limite se justifie par plusieurs observations expérimentales (Heuler et Seeger, 1986) ;
- règle de Miner-Haibach : prolonger l'asymptote de la courbe de Wöhler de pente m par une droite de pente 2m-1 (Haibach, 1970)

V.5 Loi de cumul non linéaire

Un cumul de dommage non linéaire d'un bloc de chargement à l'autre suppose que l'évolution de l'endommagement dépend du niveau de contrainte du bloc de cycles imposé. Cela se traduit par le fait que les variables de chargement et d'endommagement sont non séparables :

$$dD = f(\underset{\sim}{\sigma}_a, \underset{\sim}{\sigma}_m, D)dN \tag{V.19}$$

où :
- $\underset{\sim}{\sigma}_{max}$: contrainte maximale du cycle
- $\underset{\sim}{\sigma}_m$: contrainte moyenne du cycle
- D : endommagement
- n : nombre de cycles

Cette non linéarité du cumul d'endommagement est représentée par la figure V.6 où $\sigma_1 > \sigma_2$.

V.6 Conclusion

Nous nous sommes cantonnés à ne décrire que certains modèles applicables à la fatigue oligocyclique, en ne considérant que deux lois d'endommagement et quatre critères de type plan critique. Quelques critères de type plan critique moins connus sont décrits en annexe A. D'autres critères sont basés sur des contraintes et s'appliquent davantage aux grandes

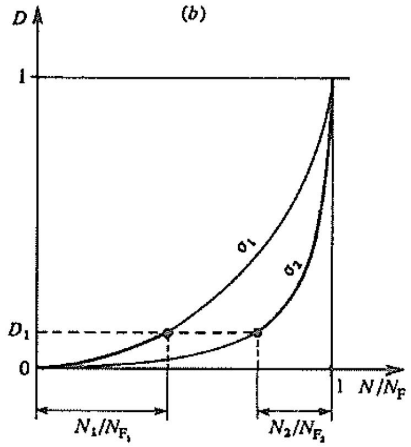


Figure V.6 – Cumul non linéaire du dommage (Lemaitre et Chaboche, 1996)

durées de vie. Le critère de Dang Van (Dang Van, 1973) considère une plastification à l'échelle mésoscopique, comme le critère de Morel (Morel, 1996) qui se base sur la déformation plastique microscopique accumulée. Les approches globales, elles, considèrent le tenseur dans sa globalité en faisant intervenir des invariants du tenseur des contraintes. Des approches dissipatives, basées sur l'échauffement du matériau, ont également été proposées (Charkaluk et Constantinescu, 2007).

La loi de Miner est de loin la plus simple d'utilisation tant en terme de calculs que de données matériau requises. C'est pourquoi elle est très majoritairement utilisée dans l'industrie. Cependant, dans le cas de chargements complexes, les lois de type Lemaitre-Chaboche proposent une approche plus fiable car elles sont basées sur un cumul non linéaire de l'endommagement, ainsi que sur le concept de contrainte effective. En revanche elles exigent plus de données matériaux et leur application est un peu plus ardue que celle de la loi de Miner.

Il n'existe à ce jour pas de modèle de fatigue parfait, applicable et fiable en toute circonstance. Il est d'abord difficile de prendre en compte tous les domaines de durées de vie. En effet, les mécanismes de fissuration changent pour la plupart des métaux des faibles aux grands nombres de cycles. De plus, pour une même durée de vie, les mécanismes changent d'un matériau à l'autre. C'est pourquoi, comme nous l'avons vu, certains critères sont plus adaptés à la rupture fragile que ductile, et inversement. Les chargements sont aussi une source de difficultés. Par exemple, des changements du plan de propagation de fissure peuvent être induits par des chargements non proportionnels, ce qui met à mal la plupart des critères de type plan critique.

Dans cette bibliographie, nous avons jusqu'ici décrit de manière générale toutes les étapes d'une méthode de calcul de durée de vie en fatigue. Des auteurs ont proposé de telles méthodes incluant leur critère. Nous allons en présenter quelques-unes dans le chapitre suivant.

Chapitre -VI-

Méthodes de calcul de durée de vie

L'objet de ce chapitre est de décrire quelques méthodes complètes de calcul de durée de vie. Elles font intervenir toutes les étapes abordées dans les chapitres précédents, incluant notamment le critère de l'auteur correspondant.

VI.1 Méthode de Wang et Brown

Cette méthode, (Wang et Brown, 1993) (Wang et Brown, 1996c) (Wang et Brown, 1996a) (Wang et Brown, 1996b) proposée en 1993, se réfère à des travaux antérieurs (Brown et Miller, 1973) (Kandil et al., 1982). Nous avons vu dans le chapitre V que Wang et Brown introduisent l'excursion ε_{n*} dans le critère KBM pour le calcul de la durée de vie sous chargement multiaxial :

$$\gamma_a^n + S\varepsilon^{n*} = \frac{\tau_f'}{G}(2N_f)^{b_0} + \gamma_f'(2N_f)^{c_0} \tag{VI.1}$$

Comme schématisé sur la figure VI.1, le calcul de durée de vie proprement dit consiste à considérer ε_{eqVM}, la déformation équivalente au sens de von Mises, comme la variable critique pour l'évolution de l'endommagement. On effectue alors un comptage de cycles sur cette grandeur. Pour chaque cycle i extrait il s'agit de rechercher le plan de cisaillement maximum, qui est le plan critique où la fissure s'amorcera. On peut ensuite calculer N_{ri} sur ce plan en résolvant l'équation VI.1, puis déterminer l'endommagement

$$D_i = \frac{1}{N_{fi}}$$

généré par ce cycle. En appliquant la règle de Miner, la rupture intervient quand le nombre de répétitions de cette séquence N_{seq} entraînant à chaque fois un endommagement $D = \sum_i D_i$ est tel que $N_{seq}D = 1$. On peut donc calculer le nombre de fois qu'il faudra répéter la séquence pour atteindre la rupture :

$$N_{seq} = \frac{1}{\sum_i D_i} \tag{VI.2}$$

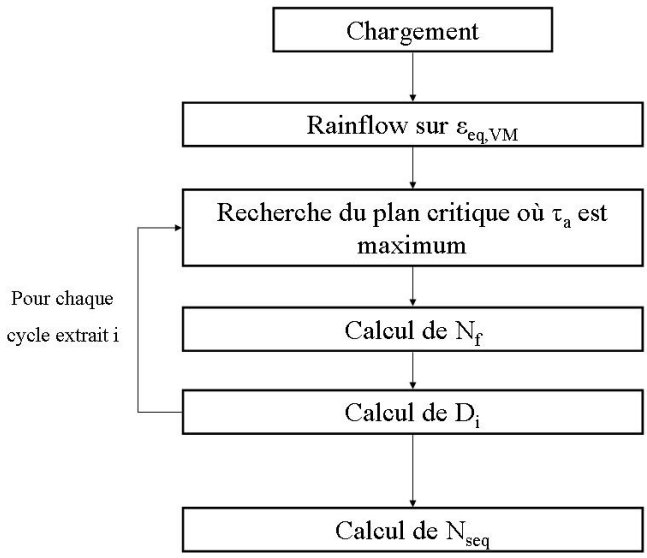


Figure VI.1 – Schéma de la méthode de Wang et Brown

Cette méthode, comme toutes les méthodes qui se basent sur une approche en déformation et donc sur la loi de Manson-Coffin, suppose que le rapport entre les limites d'endurance en flexion rotative et en torsion $\sigma^D_{fr,-1}$ / τ^D_{-1} ne dépend pas du matériau étudié. Cela semble raisonnable pour les matériaux ductiles où ce rapport est égal à $\sqrt{3}$ (Brand et al., 1980). Il et légèrement inférieur pour les matériaux fragiles (Papadopoulos, 1994).

Dans cette méthode, le calcul d'endommagement est effectué pour chaque cycle extrait sur le plan de cisaillement maximum. Les auteurs supposent donc que la contrainte de cisaillement moyenne n'a pas d'influence sur la durée de vie en fatigue oligocyclique, ce qui entre en contradiction avec les observations de plusieurs auteurs (Sines, 1959), (Wang et Miller, 1991)

VI.2 Methode de Fatemi-Socie

Cette méthode et la méthode de Socie que nous présenterons après ont été proposées en 1991 (Bannantine et Socie, 1991). Pour éviter toute confusion, nous donnerons à ces méthodes le nom des critères sur lesquels elles se basent. La présente méthode se base donc sur le critère de Fatemi-Socie présenté en chapitre V :

$$\gamma_a^n \left(1 + k\frac{\sigma^n_{max}}{\sigma_y}\right) = \frac{\tau'_f}{G}(2N_f)^{b_0} + \gamma'_f(2N_f)^{c_0} \tag{VI.3}$$

Elle s'applique pour les matériaux ductiles et est résumée par l'organigramme VI.2.

A partir de la séquence de chargement, on effectue pour chaque plan un comptage Rainflow sur γ. En résolvant l'équation VI.3, on détermine le nombre de cycles à rupture correspondant à l'amplitude en γ du cycle extrait. On calcule ensuite l'endommagement D_i généré par chaque cycle. L'endommagement D produit par la séquence entière est déterminé comme dans la méthode de Wang et Brown par la loi de Miner. Ce processus est réalisé sur chaque plan, le plan critique est alors le plan pour lequel l'endommagement total D est maximal. On calcule alors pour ce plan la durée de vie qui est telle que le dommage total D est égal à 1.

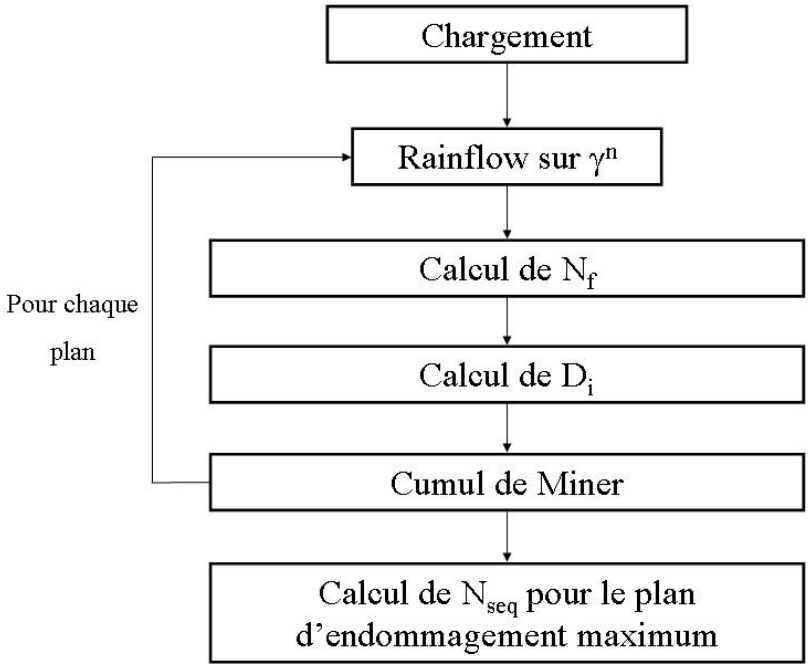


Figure VI.2 – Schéma de la méthode de Fatemi et Socie

A la différence de la méthode de Wang et Brown, le plan critique choisi est celui pour lequel l'endommagement occasionné par la séquence est maximal. Ce plan n'est donc pas forcément le plan de cisaillement maximum : cette méthode prend donc en compte l'influence de la contrainte normale maximale.

VI.3 Methode de Socie

Cette méthode (Bannantine et Socie, 1991) adopte l'hypothèse d'une fissuration en mode I. Les auteurs préconisent donc d'utiliser le critère que nous avons dénommé "Socie 2" (Socie, 1987) dans le chapitre V. Rappelons que c'est une adaptation du critère de Smith-Watson-Topper (SWT) à des chargements multiaxiaux par le biais de l'approche de type plan critique :

$$\sigma^n_{max}\varepsilon^n_a = \frac{\sigma_f'^2}{E}(2N_f)^{2b} + \sigma'_f\varepsilon'_f(2N_f)^{b+c} \tag{VI.4}$$

La méthode proprement dite est résumée sur l'organigramme de la figure VI.3. Pour chaque plan, on effectue un comptage Rainflow sur la déformation normale à ce plan. Pour chaque cycle extrait, on résout l'équation VI.4. On obtient alors le nombre de cycles à rupture N_{fi}, nombre de cycles au bout duquel la pièce se romprait en étant soumise à des cycles identiques au cycle extrait. Cela nous permet de déterminer l'endommagement D_i engendré par le cycle extrait i, égal à $1/N_{fi}$. Enfin on prédit la rupture pour $D = 1$, l'endommagement total D étant calculé par la règle de Miner. Ce processus est cyclé sur tous les plans, le plan critique retenu est le plan le plus endommageant.

La correction de contrainte moyenne s'effectue avec l'équation VI.5 et non le critère de Goodman :

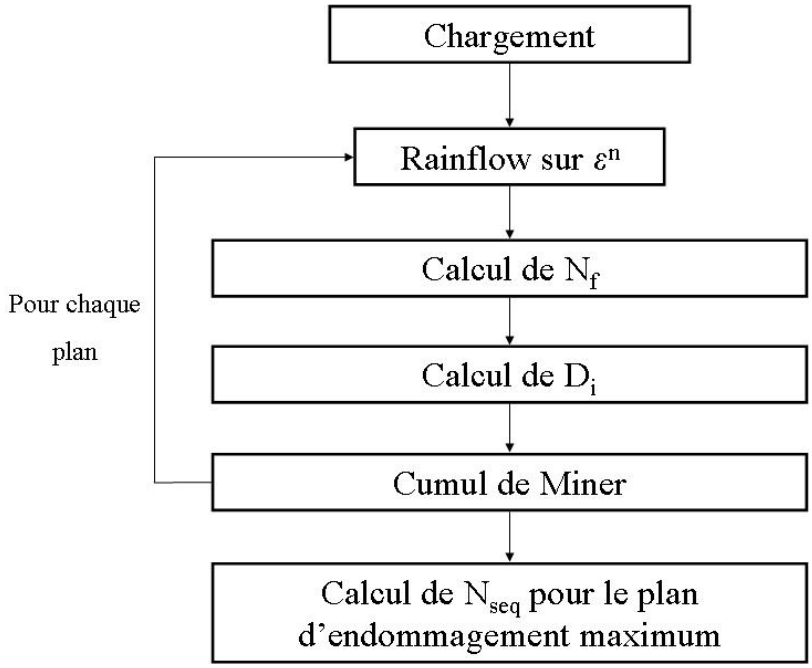


Figure VI.3 – Schématique de la méthode de Socie

$$\sigma_a \sigma_{max} = {\sigma_{-1}^{D}}^2 \tag{VI.5}$$

Son inconvénient est de ne pas différencier matériaux ductiles et fragiles : le rapport $\sigma_D^{-1}/\tau_D^{-1}$ est constant et égal à $\sqrt{1+\nu}$, ce qui correspond plutôt aux matériaux fragiles.

VI.4 Méthode de Lagoda-Macha

Cette méthode (Lagoda et al., 1999) se base sur le critère du même nom, abordé dans le chapitre V. Son organigramme est illustré en figure VI.4. Le principe général reste identique aux autres méthodes : les auteurs déterminent le plan critique par maximisation de $W_{n,t}$ ou $W_{ns,t}$. Ils effectuent ensuite un comptage de cycles rainflow sur W_{eq} définie dans le chapitre V. Puis il déterminent le nombre de cycles à rupture correspondant à l'amplitude de W_{eq} de chaque cycle extrait en résolvant l'équation VI.7 qui s'inspire du critère de SWT :

$$W_{eq,a} = \frac{\sigma_f'^2}{E}(2N_f)^{2b} + \sigma_f'\varepsilon_f'(2N_f)^{b+c} \tag{VI.6}$$

Puis ils supposent que le dommage généré par chaque cycle extrait i est de :

$$D_i = 1/N_{fi} \tag{VI.7}$$

Enfin ils appliquent la règle de cumul de Miner pour sommer le dommage généré par l'ensemble de la séquence. La méthode de Lagoda et Macha ne prend pas en compte les cycles d'amplitude inférieure à la moitié de la limite d'endurance. D'autre part, comme la méthode de Socie, elle ne différencie pas les métaux ductiles et fragiles.

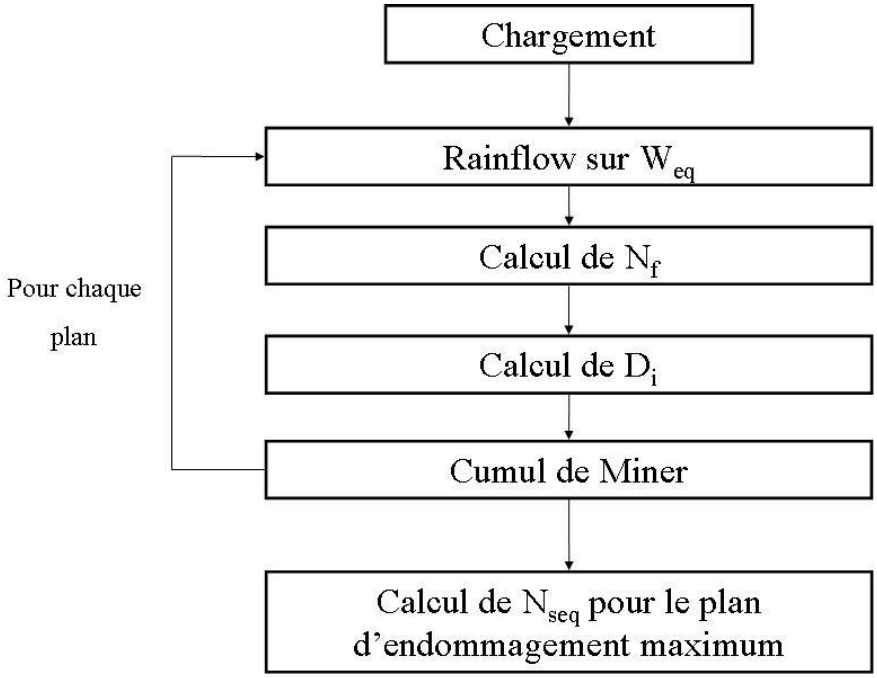


Figure VI.4 – Méthode de Lagoda et Macha

VI.5 Conclusion

Dans cette partie, nous nous sommes attachés à aborder de manière succincte les méthodes complètes de calcul de durée de vie correspondant aux critères de type plan critique du chapitre V. La définition de la variable de comptage joue sur la fiabilité de telle ou telle méthode. De même pour la variable qui doit être maximisée pour déterminer le plan critique. Certains auteurs, comme Wang et Brown, considèrent que le plan critique change d'un cycle à l'autre, et le déterminent donc pour chaque cycle en maximisant une variable équivalente au tenseur des déformations. D'autres considèrent qu'il ne change pas et le choisissent de telle manière que l'endommagement généré par la séquence de chargement soit maximal. Dans tous les cas, il est nécessaire de baser l'expression des variables de comptage ou relatives au choix du plan critique sur les grandeurs qui influencent la résistance à la fatigue du matériau. Pour prendre en compte tous les modes d'ouverture de fissure, cette variable fait donc intervenir en général un terme relatif à la contrainte et/ou à la déformation normale au plan critique, ainsi qu'une composante relative au cisaillement. Enfin, pour ces méthodes de type plan critique, on préférera l'utilisation de termes en déformation pour traiter de la fatigue oligocyclique, alors qu'une approche en contrainte sera mieux adaptée à la fatigue d'endurance. Quant aux modèles unifiés, qui permettent de traiter la zone de transition entre ces deux domaines, ils se basent nécessairement sur des variables mixtes.

Dans la prochaine partie nous allons aborder le travail effectué. Les méthodes de calcul accéléré de la littérature seront d'abord évaluées. Puis on évoquera quelques-uns des premiers modèles que nous avons formulés. Enfin, les deux corrections élasto-plastiques seront présentées.

Deuxième partie

Proposition d'une méthode de calcul accéléré

Chapitre -VII-

Position du problème

La première méthode de type Neuber a été développée par l'auteur du même nom (Neuber, 1961). Après avoir décrit son modèle dans la partie bibliographique, nous allons maintenant l'appliquer dans divers chargements sur une éprouvette entaillée. Nous ferons ensuite de même avec d'autres méthodes de la littérature.

VII.1 Méthodes de calcul accéléré de la bibliographie

VII.1.1 Comparaison de la méthode des sauts de cycles et de la méthode cyclique directe sur un élément de volume en déformation cyclique imposée

Cette section vise à comparer deux des méthodes de détermination du cycle stabilisé les plus connues : la méthode cyclique directe et la méthode des sauts de cycles. Pour éviter d'ajouter aux erreurs des méthodes les erreurs dues au maillage, les méthodes ont été appliquées à un élément de volume sollicité en traction-compression uniaxiale, à déformation cyclique imposée (Azzouz, 2007). Le matériau considéré est un alliage qui présente un écrouissage cinématique non linéaire modélisé par les coefficients C_i, D_i du modèle de Chaboche ; un adoucissement cyclique, modélisé par les coefficients Q et b du même modèle, ainsi qu'une relaxation partielle de la contrainte moyenne décrite par un seuil sur l'écrouissage cinématique. Ce type de seuil, modélisé par les paramètres ω, m_1, m_2, sera décrit en détail dans le paragraphe IX.6. Les solutions données par la méthode cyclique directe et la méthode des sauts de cycles sont comparées avec les résultats de simulations incrémentales. De par sa formulation, la méthode Zarka ne peut traiter d'écrouissage cinématique non linéaire, et ne peut donc pas être appliquée ici.

Pour observer l'effet d'un adoucissement sur la prévision du cycle stabilisé, on comparera des calculs effectués en déformation répétée ($R_\varepsilon = 0$) avec :

- un comportement adoucissant pour lequel la limite d'élasticité R_0 évolue vers $R_0 + Q$ ($Q < 0$) comme $R_0 + Q\left(1 - e^{-bp}\right)$;
- un comportement déjà adouci pour lequel la limite d'élasticité $R_0 + Q$ reste constante.

Pour observer l'effet d'une relaxation de contrainte moyenne, on comparera des calculs

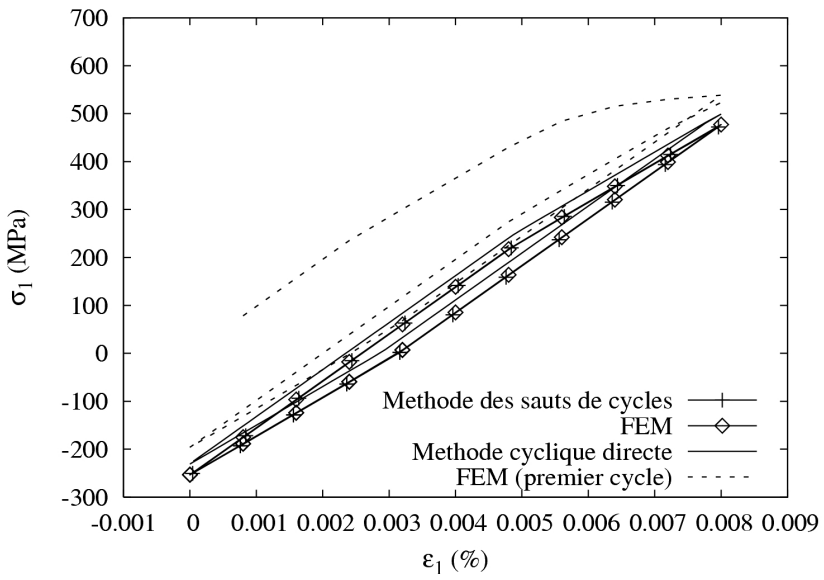


Figure VII.1 – Comparaison des cycles stabilisés prévus par les trois méthodes à $R_\varepsilon = 0$, pour un comportement adoucissant

effectués en déformation répétée ($R_\varepsilon = 0$) ou alternée (R_ε = -1). Le calcul incrémental à R = -1 avec un comportement adouci aboutit à une stabilisation au bout de deux cycles, il n'y a donc dans ce cas aucun intérêt à appliquer l'une de ces méthodes.

La figure VII.1 représente dans le cas d'un chargement répété à déformation contrôlée ($R_\varepsilon = 0$) le premier cycle de la simulation incrémentale, et les cycles stabilisés obtenus par la méthode incrémentale complète, par la méthode des sauts de cycles et la méthode cyclique directe.

On observe que, pour une contrainte moyenne non nulle et un comportement déjà adouci, la contrainte moyenne de l'état stabilisé déterminé par la DCA diffère de l'état réel calculé par méthode incrémentale. La méthode des sauts de cycles prévoit le cycle stabilisé avec une bonne précision. On observe le même décalage avec adoucissement, comme le montre la figure VII.2.

La figure VII.3 représente l'hystérésis de l'état stabilisé pour une traction-compression alternée (R_ε = -1). Comme la contrainte moyenne est nulle, aucun décalage en contrainte n'est observé. Cependant, en utilisant un comportement à adoucissement cyclique, il apparaît une légère erreur sur l'amplitude en contrainte du cycle prévu par la méthode cyclique directe. Cette erreur n'apparaît pas en utilisant la méthode des sauts de cycles, ou alors en utilisant un comportement déjà adouci (figure VII.2).

En conclusion, ces simulations ne permettent pas d'opter définitivement pour telle ou telle méthode : le choix doit être fonction de l'utilisation du résultat. Par exemple, même si la méthode Zarka est globalement plus rapide que la méthode des sauts de cycles, elle n'admet pas un écrouissage non linéaire. Pour modéliser le comportement avec un écrouissage linéaire, il faut se réduire à un petit intervalle de déformation plastique pour que l'extrapolation de la pente d'écrouissage à partir du point de fonctionnement moyen soit valable. Certes, cette méthode semble contraignante mais au vu du temps de calcul de la méthode de sauts de cycles pour un faible écrouissage, elle peut être un bon compromis dans certains cas. La méthode cyclique directe, quant à elle, est rapide et permet d'utiliser un écrouissage nonlinéaire. Cependant, on observe un décalage en contrainte moyenne à déformation répétée. c'est pourquoi cette méthode doit être utilisée avec précaution, la contrainte moyenne étant un

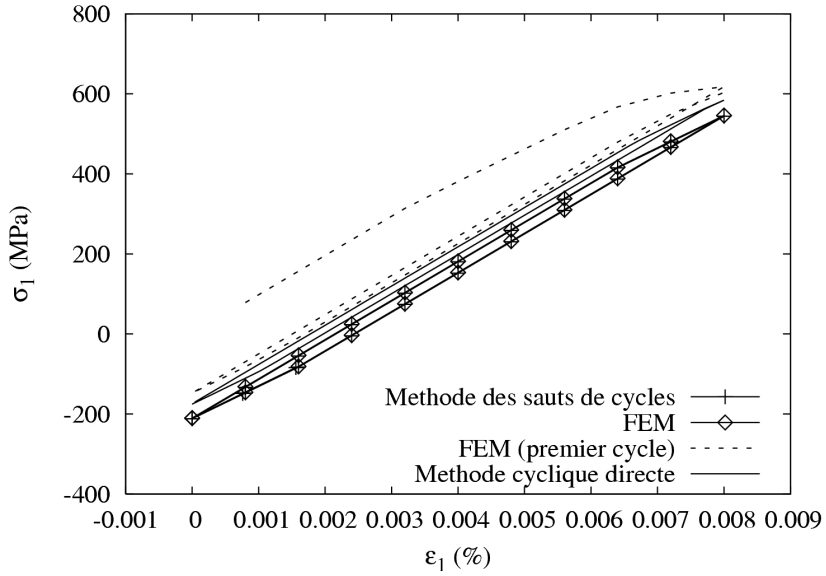


Figure VII.2 – Comparaison des cycles stabilisés prévus par les trois méthodes à $R_\varepsilon = 0$, pour un comportement adouci

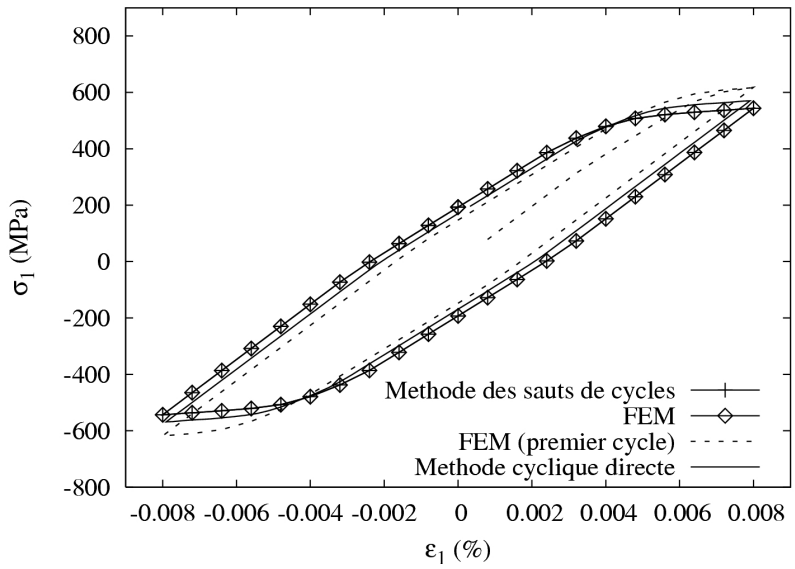


Figure VII.3 – Comparaison des cycles stabilisés prévus par les trois méthodes à R_ε = -1, pour un comportement adoucissant

ingrédient important des critères de fatigue. Comme il ne s'agit cependant que d'un décalage en contrainte ou en déformation, l'aire de la boucle calculée reste exacte et on peut a priori utiliser un critère en énergie, qu'il soit basé sur le plan critique ou la dissipation. Enfin, la méthode des sauts de cycles a l'avantage d'être paramétrable selon le temps de calcul et la précision voulue. Cela peut aussi être un inconvénient car on ne peut pas connaître à l'avance la précision du résultat en fonction du paramètre η.

On constate donc qu'aucune de ces méthodes n'apporte entièrement satisfaction. De plus, toutes ces méthodes déterminent le cycle stabilisé sans donner aucune information sur l'état transitoire, à l'exception de la méthode des sauts de cycles qui calcule quelques cycles. Elles ne seront donc vraiment efficaces que si la structure atteint rapidement un état stabilisé au cours de sa durée de vie. Il faudra éviter de les appliquer dans les cas où la structure s'endommage significativement avant de se stabiliser. On n'envisage évidemment pas l'application aux chargements aléatoires. Enfin, ces trois méthodes calculent les variables locales sur l'ensemble de la structure. Cela peut être utile pour réaliser une cartographie, mais c'est inutile pour calculer la durée de vie de la pièce si on connait le point critique d'où la fissure s'amorce.

A l'inverse, les méthodes de type Neuber calculent les variables au point critique cycle par cycle, incrément par incrément. On connaît donc l'évolution des variables locales pendant l'état transitoire et on peut envisager des chargements aléatoires. C'est donc vers ce type de méthode que nous nous sommes orientés. Dans les sections suivantes nous allons décrire la manière donc les modèles de la bibliographie ont été implémentés, et les comparer en les appliquant à des éprouvettes.

VII.1.2 Implémentation des méthodes de type Neuber

L'évaluation des différentes méthodes s'effectue simplement dans un code où l'on intègre les lois de comportement avec un mode de pilotage particulier, comme cela a été souligné au paragraphe III.2. On utilise les possibilités offertes par l'environnement ZeBFRONT du code ZSeT (Besson et al., 1998), qui met à disposition du développeur une panoplie de méthodes d'intégration. La description de l'environnement est fournie en annexe B. Le développement d'un modèle ne nécessite que l'écriture d'une fonction qui spécifie le modèle. Le principe de chaque fonction reste le même pour chaque modèle et pour les corrections de type L et NL proposées plus tard. Il est résumé par l'algorithme de l'annexe D. La seule différence entre chaque fonction réside dans la façon de déterminer $\dot{p}$ et de $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$.

Le code source de chaque fonction est présenté :

- en annexe E pour la méthode de Neuber uniaxiale, les méthodes de Hoffmann-Seeger, de Barkey-Socie-Hsia et de Moftakhar *et al.* et les modèles proposés dans le chapitre VIII ;
- en annexe F pour la méthode de Buczynski-Glinka ;
- en annexe G pour les corrections de type L et NL proposées dans le chapitre IX.

VII.1.2.1 Lois de comportement

Dans cette section, nous formulons les équations de comportement implémentées dans tous les programmes. La fonction de charge s'écrit :

$$f\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}, R\right) = J\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}\right) - R - \sigma_y \tag{VII.1}$$

En modélisant l'écrouissage par plusieurs jeux de paramètres (C_i, D_i) de la loi de comportement de Lemaitre-Chaboche, on pose :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{VII.2}$$

$$\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{X}}} = \sum_i \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{X}}}_i \tag{VII.3}$$

$$\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{X}}}_i = \frac{2}{3} C_i \underset{\sim}{\boldsymbol{m}}_i \dot{p} \tag{VII.4}$$

et :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{m}}_i = \underset{\sim}{\boldsymbol{n}} - \frac{3}{2}\frac{D_i}{C_i}\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_i \tag{VII.5}$$

où :

- p est la déformation plastique cumulée ;
- $\underset{\sim}{\boldsymbol{n}}$ est la normale à la surface de charge ;
- C_i, D_i sont les paramètres du modèle de comportement de Lemaitre-Chaboche pour un écrouissage cinématique nonlinéaire.

La condition de cohérence s'écrit $\dot{f} = 0$ soit :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} : \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} - \sum_i \underset{\sim}{\boldsymbol{n}}_i \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{X}}}_i - \dot{R} = 0 \tag{VII.6}$$

Si on pose $H_1 = \frac{2}{3}\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} : \sum_i C_i \underset{\sim}{\boldsymbol{m}}_i$ et $H_2 = \frac{\partial R}{\partial p}$ on peut écrire :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} : \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} - (H1 + H2)\,\dot{p} = 0 \tag{VII.7}$$

Toutes les méthodes de la littérature (à l'exception de la méthode de Buczynski-Glinka) et les méthodes proposées dans le chapitre VIII sont implémentées dans le programme `Neuberlitterature.z` de l'annexe E car elles se basent sur la même démarche de calcul. Dans le chapitre III.2 nous avons vu que le calcul de toutes les contraintes et déformations nécessite de poser des équations heuristiques supplémentaires. Pour ces méthodes, dans `Neuberlitterature.z`, `neuber[0]` prendra la valeur `ENERGY` si l'équation III.4 est utilisée, ou `MISES` pour l'équation III.5. `type[0]` aura pour valeur le nom du postulat utilisé.

Le tableau VII.1 résume pour chaque méthode la généralisation de la règle de Neuber en multiaxial qu'elle utilise et la valeur de `neuber[0]` qui s'y rapporte. Le tableau VII.2 résume pour chaque méthode le postulat qu'elle utilise, et la valeur de `type[0]` qui s'y rapporte.

L'implémentation de tous les modèles (les méthodes de la littérature, les méthodes proposées au chapitre VIII et les corrections proposées au chapitre IX) se base sur un même principe général résumé dans l'algorithme de l'annexe D. Les deux seules étapes qui différencient les méthodes entre elles sont :

- l'expression de $\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}$ (ou $\frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial p}$ dans le cas de la méthode de Neuber uniaxiale) ;
- l'expression de $\dot{p}$.

Dans le cas de la méthode de Neuber uniaxiale, on exprime donc d'abord $\frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial p}$ à l'aide de la condition de cohérence (équation VII.7), puis $\dot{p}$ en dérivant l'extension multiaxiale de Neuber en énergie (équation III.4).

Méthode	Règle de Neuber multiaxiale	`neuber[0]`
Neuber uniaxiale	$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^e : \underset{\sim}{\varepsilon}^e = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon}$	`ENERGY`
Hoffmann-Seeger	$J\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^e\right) J\left(\underset{\sim}{\varepsilon}^e\right) = J\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\right) J\left(\underset{\sim}{\varepsilon}\right)$	`MISES`
Barkey *et al.*	$J\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^e\right) J\left(\underset{\sim}{\varepsilon}^e\right) = J\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\right) J\left(\underset{\sim}{\varepsilon}\right)$	`MISES`
Moftakhar *et al.*	$J\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^e\right) J\left(\underset{\sim}{\varepsilon}^e\right) = J\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\right) J\left(\underset{\sim}{\varepsilon}\right)$	`MISES`
Gallerneau (chapitre VIII)	$J\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^e\right) J\left(\underset{\sim}{\varepsilon}^e\right) = J\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\right) J\left(\underset{\sim}{\varepsilon}\right)$	`MISES`
K3 (chapitre VIII)	$J\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^e\right) J\left(\underset{\sim}{\varepsilon}^e\right) = J\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\right) J\left(\underset{\sim}{\varepsilon}\right)$	`MISES`
Chaboche (chapitre VIII)	$J\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^e\right) J\left(\underset{\sim}{\varepsilon}^e\right) = J\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\right) J\left(\underset{\sim}{\varepsilon}\right)$	`MISES`

Table VII.1 – Type d'extension de la règle de Neuber en multiaxial utilisée par chaque méthode

Méthode	Postulat	`type[0]`
Neuber uniaxiale	Aucun	`PLANE_STRESS`
Hoffmann-Seeger	$\dfrac{\Delta\varepsilon_2}{\Delta\varepsilon_1} = \dfrac{\Delta\varepsilon_2^e}{\Delta\varepsilon_1^e}$	`HOFFMANN`
Barkey *et al.*	$\dfrac{\Delta\sigma_2}{\Delta\sigma_3} = \dfrac{\Delta\sigma_2^e}{\Delta\sigma_3^e}$	`BARKEY`
Moftakhar *et al.*	$\dfrac{\sigma_2^e\varepsilon_2^e}{\sigma_2^e\varepsilon_2^e + \sigma_3^e\varepsilon_3^e} = \dfrac{\sigma_2^E\varepsilon_2^E}{\sigma_2^E\varepsilon_2^E + \sigma_3^E\varepsilon_3^E}$	`MOFTAKHAR`
Gallerneau (chapitre VIII)	$\sigma_3 = \lambda\ \varepsilon_3$	`GALLERNEAU`
K3 (chapitre VIII)	$\Delta\sigma_{33}\Delta\varepsilon_{33} = (1 + K_3 p)\,\Delta\sigma_{33}^e\Delta\varepsilon_{33}^e$	`K3`
Chaboche (chapitre VIII)	$\dfrac{\Delta\sigma_3}{\Delta\sigma_2} = \dfrac{\Delta\sigma_3^e}{\Delta\sigma_2^e} f(p)$	`CHABOCHE`

Table VII.2 – Postulat, *id est* équation supplémentaire utilisée par chaque méthode

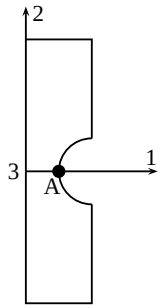


Figure VII.4 – Orientation du repère pour les éprouvettes entaillées

Pour les modèles de Hoffmann-Seeger, de Barkey *et al.*, de Moftakhar *et al.* et les modèles proposés dans le chapitre VIII, il s'agit :

- d'abord de dériver la généralisation de la règle de Neuber en multiaxial au sens de von Mises (équation III.5) pour exprimer $\dot{p}$ indépendamment des deux contraintes $\dot{\sigma}_2$ et $\dot{\sigma}_3$;
- puis, de dériver le postulat du modèle en question pour exprimer $\dot{\sigma}_2$ en fonction de $\dot{\sigma}_3$ et $\dot{p}$;
- enfin, d'utiliser la condition de cohérence pour exprimer $\dot{\sigma}_2$ et $\dot{\sigma}_3$ uniquement en fonction de $\dot{p}$.

Dans le cas de la méthode de Buczynski-Glinka, on détermine $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$ et $\dot{p}$ simultanément par la résolution d'une équation matricielle.
Nous allons maintenant écrire les développements qui permettent de résoudre ces étapes.

VII.1.2.2 Méthode de Neuber uniaxiale

Dans le cas de cette méthode, il faut déterminer l'expression de $\frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial p}$ puis de $\dot{p}$. Pour cela, nous utilisons respectivement la condition de cohérence et l'extension multiaxiale de Neuber en énergie (équation III.4). Considérons le cas d'une éprouvette plate, dont la moitié est représentée en figure VII.4, sollicitée en traction suivant l'axe 2.

Notons que par la suite, lorsque des cas de chargements sur éprouvettes plates ou axisymétriques seront abordés, le repère sera identique à celui de la figure VII.4. La direction 1 étant normale à la surface, et la direction 2 étant l'axe de l'éprouvette. On obtient un état de contrainte uniaxial en fond d'entaille. Seule σ_2 est nonnulle et $\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} = n_2\dot{\sigma}_2 = \dot{\sigma}_2$. L'équation VII.7 s'écrit alors :

$$\dot{\sigma}_2 - (H1 + H2)\,\dot{p} = 0 \tag{VII.8}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial p} = H1 + H2 \tag{VII.9}$$

Comme dans l'équation III.3, appelons $\Delta X = X_i - X_{i-1}$, la variation de X sur une branche du chargement. L'équation est l'adaptation aux chargements cycliques de la généralisation en énergie du postulat de Neuber en multiaxial (équation III.4). En effet, comme ici seule σ_2 est nonnulle, l'équation VII.10 revient à la règle de Neuber uniaxiale pour chargements cycliques avec changement d'origine (équation III.3). Nous l'utilisons pour déterminer l'expression de $\dot{p}$.

$$\Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^e : \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \tag{VII.10}$$

En dérivant l'équation VII.10 on obtient :

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} : \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^e : \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^e : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^e \tag{VII.11}$$

Le second membre est connu. On le note dPe. Si $\underset{\approx}{\boldsymbol{S}}$ est la matrice de souplesse l'équation VII.11 revient à :

$$\dot{p} \left[\frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial p} : \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \left(\underset{\approx}{\boldsymbol{S}} \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial p} + \underset{\sim}{\boldsymbol{n}} \right) \right] = dPe \tag{VII.12}$$

et enfin :

$$\dot{p} = \frac{dPe}{\frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial p} : \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{U}} : \Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{VII.13}$$

où :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{U}} = \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial p} = \underset{\approx}{\boldsymbol{S}} \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial p} + \underset{\sim}{\boldsymbol{n}} \tag{VII.14}$$

Connaissant l'expression de $\dot{p}$ on en déduit celle de $\dot{\sigma}_2$ d'après VII.8.

Abordons maintenant les méthodes de Hoffmann-Seeger, Barkey *et al.* et Moftakhar *et al.* Comme nous l'avons vu, il s'agit d'abord de dériver la généralisation de la règle de Neuber en multiaxial au sens de von Mises pour exprimer $\dot{p}$ indépendamment des deux contraintes $\dot{\sigma}_2$ et $\dot{\sigma}_3$. Cette étape est commune aux trois méthodes, et aux modèles proposés dans le chapitre VIII. La généralisation s'écrit :

$$J\big(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_0\big) J\big(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_0\big) = J\big(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^e - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_0^e\big) J\big(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^e\big) \tag{VII.15}$$

La détermination de $\dot{p}$ se fait ici sur le même principe que pour la méthode de Neuber uniaxiale, mais le développement fait intervenir des invariants de von Mises. La procédure est donc plus longue et ne sera pas détaillée. On dérive d'abord l'expression VII.15. On pose ensuite $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$ tels que $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}\dot{p} + \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$. Les valeurs de $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$ sont déterminées directement des équations VII.36 et VII.37 développées plus loin. Après quelques développements on obtient :

$$\dot{p} = \frac{\frac{2}{3} dPe - \frac{J(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})}{J(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})} dev(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) : dev(\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}) - \frac{J(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})}{J(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})} dev(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}) : dev(\underset{\approx}{\boldsymbol{E}}^{-1} \underset{\sim}{\boldsymbol{T}})}{\frac{J(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})}{J(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})} dev(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) : dev(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}) - \frac{J(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})}{J(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})} dev(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}) : dev(\underset{\approx}{\boldsymbol{E}}^{-1} \underset{\sim}{\boldsymbol{S}})} \tag{VII.16}$$

Il faut maintenant dériver le postulat de chaque modèle pour exprimer $\dot{\sigma}_2$ en fonction de $\dot{\sigma}_3$ et $\dot{p}$.

VII.1.2.3 Dérivation du postulat de Hoffmann-Seeger

Rappelons que ces auteurs (Hoffmann et Seeger, 1985a), (Hoffmann et Seeger, 1985b) supposent que le rapport des deux plus grandes déformations principales est constant ($|\varepsilon_2|>|\varepsilon_1|>|\varepsilon_3|$), que le comportement soit purement élastique ou élasto-plastique :

$$\frac{\Delta \varepsilon_2}{\Delta \varepsilon_1} = \frac{\Delta \varepsilon_2^e}{\Delta \varepsilon_1^e} \tag{VII.17}$$

Ils ne proposent donc qu'une équation en plus du postulat de Neuber généralisé de l'équation VII.15 et se limitent donc nonseulement aux chargements proportionnels, où les directions

principales sont fixes, mais aussi à deux contraintes principales nonnulles en fond d'entaille, comme en traction ou en flexion, mais pas en traction-torsion par exemple. Considérons un chargement de traction sur éprouvette axisymétrique, entraînant $\sigma_2 \neq 0$ et $\sigma_3 \neq 0$. Si l'on dérive l'équation VII.17, on obtient :

$$\frac{\dot{\varepsilon}_2 \Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2 \dot{\varepsilon}_1}{\left(\Delta\varepsilon_1\right)^2} = \frac{\dot{\varepsilon}_2^e \Delta\varepsilon_1^e - \Delta\varepsilon_2^e \dot{\varepsilon}_1^e}{\left(\Delta\varepsilon_1^e\right)^2} = \kappa \tag{VII.18}$$

Or,

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = -\frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_2 - \frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_3 + \dot{p}n_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{E}\dot{\sigma}_2 - \frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_3 + \dot{p}n_2 \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\dot{\sigma}_2 = \beta\dot{\sigma}_3 + \gamma\dot{p} - \delta \tag{VII.19}$$

avec :

$$\beta = \frac{\frac{\nu}{E}\left(\Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2\right)}{\frac{1}{E}\Delta\varepsilon_1 + \frac{\nu}{E}\Delta\varepsilon_2} \tag{VII.20}$$

$$\gamma = \frac{n_1\Delta\varepsilon_2 - n_2\Delta\varepsilon_1}{\frac{1}{E}\Delta\varepsilon_1 + \frac{\nu}{E}\Delta\varepsilon_2} \tag{VII.21}$$

$$\delta = \frac{\kappa\left(\Delta\varepsilon_1\right)^2}{\frac{1}{E}\Delta\varepsilon_1 + \frac{\nu}{E}\Delta\varepsilon_2} \tag{VII.22}$$

VII.1.2.4 Dérivation du postulat de Barkey *et al.*

En 1994, Barkey *et al.* posent un postulat très proche de celui de Hoffman et Seeger. Ils supposent que le rapport des deux plus grandes contraintes principales est constant ($|\sigma_2|>|\sigma_3|>|\sigma_1|$), que le comportement soit purement élastique ou élasto-plastique :

$$\frac{\Delta\sigma_2}{\Delta\sigma_3} = \frac{\Delta\sigma_2^e}{\Delta\sigma_3^e} \tag{VII.23}$$

De même que Hoffmann et Seeger, ils ne proposent donc qu'une équation en plus du postulat de Neuber généralisé. Ils se limitent donc aussi aux chargements proportionnels et à deux contraintes principales nonnulles en fond d'entaille. Le principe de l'implémentation est le même que pour la méthode de Hoffmann *et al.* Considérons le même chargement, entraînant $\sigma_2 \neq 0$ et $\sigma_3 \neq 0$. Si l'on dérive l'équation VII.23, on obtient :

$$\frac{\dot{\sigma}_2 \Delta\sigma_3 - \Delta\sigma_2 \dot{\sigma}_3}{\left(\Delta\sigma_3\right)^2} = \frac{\dot{\sigma}_2^e \Delta\sigma_3^e - \Delta\sigma_2^e \dot{\sigma}_3^e}{\left(\Delta\sigma_3^e\right)^2} = \kappa \tag{VII.24}$$

Et :

$$\dot{\sigma}_2 = \beta\dot{\sigma}_3 + \gamma\dot{p} - \delta \tag{VII.25}$$

avec :

$$\beta = \frac{\Delta\sigma_2}{\Delta\sigma_3} \tag{VII.26}$$

$$\gamma = 0 \tag{VII.27}$$

$$\delta = -\kappa \Delta\sigma_3 \tag{VII.28}$$

VII.1.2.5 Dérivation du postulat de Moftakhar *et al.*

Ces auteurs (Moftakhar et al., 1995) supposent que le rapport suivant est constant ($|\sigma_2|>|\sigma_3|>|\sigma_1|$), que le comportement soit purement élastique ou élasto-plastique :

$$P^G = \frac{\Delta\sigma_2\Delta\varepsilon_2}{\Delta\sigma_2\Delta\varepsilon_2 + \Delta\sigma_3\Delta\varepsilon_3} = \frac{\Delta\sigma_2^e\Delta\varepsilon_2^e}{\Delta\sigma_2^e\Delta\varepsilon_2^e + \Delta\sigma_3^e\Delta\varepsilon_3^e} = Pe^G \tag{VII.29}$$

Ils se limitent donc encore aux chargements proportionnels et à deux contraintes principales nonnulles en fond d'entaille.

Le principe de l'implémentation est toujours le même. Considérons le même chargement de traction sur éprouvette axisymétrique. Si l'on dérive l'équation VII.29 en posant $e_i = \sigma_i\varepsilon_i$ (ayant pour dérivée de_i) on obtient :

$$dP^G = \frac{de_2\big(e_2+e_3\big) + e_2\big(de_2+de_3\big)}{\big(e_2+e_3\big)^2} = \frac{de_2\big(e_2+e_3\big) + e_2\big(de_2+de_3\big)}{\big(e_2+e_3\big)^2} = dPe^G \tag{VII.30}$$

Soit :

$$\frac{de_2 + P^G\big(de_2+de_3\big)}{e_2+e_3} = dPeG \tag{VII.31}$$

On obtient alors :

$$\dot\sigma_2 = \beta\dot\sigma_3 + \gamma\dot p - \delta \tag{VII.32}$$

En posant :

$$\beta = \frac{\big(1+P^G\big)\frac{\nu}{E}\Delta\sigma_2 + P^G\big(\Delta\varepsilon_3 + \frac{\Delta\sigma_3}{E}\big)}{-P^G\frac{\nu}{E}\Delta\sigma_3 + \big(1+P^G\big)\big(\Delta\varepsilon_2 + \frac{\Delta\sigma_2}{E}\big)} \tag{VII.33}$$

$$\gamma = \frac{-\Delta\sigma_2 n_2 - P^G\big(\Delta\sigma_2 n_2 + \Delta\sigma_3 n_3\big)}{-P^G\frac{\nu}{E}\Delta\sigma_3 + \big(1+P^G\big)\big(\Delta\varepsilon_2 + \frac{\Delta\sigma_2}{E}\big)} \tag{VII.34}$$

$$\delta = \frac{-dPe^G\big(\Delta\sigma_2\Delta\varepsilon_2 + \Delta\sigma_3\Delta\varepsilon_3\big)}{-P^G\frac{\nu}{E}\Delta\sigma_3 + \big(1+P^G\big)\big(\Delta\varepsilon_2 + \frac{\Delta\sigma_2}{E}\big)} \tag{VII.35}$$

Nous avons obtenu les expressions de $\dot\sigma_2$ en fonction de $\dot\sigma_3$ et $\dot p$ pour les trois modèles. Il s'agit maintenant d'utiliser la loi de cohérence pour exprimer $\dot\sigma_2$ et $\dot\sigma_3$ uniquement en fonction de $\dot p$. Cette étape est commune aux trois méthodes, et aux modèles proposés dans le chapitre VIII. Il s'agit simplement d'introduire dans l'équation VII.7 l'expression de $\dot\sigma_2$ formulée précédemment pour chaque modèle. On obtient pour les trois méthodes :

$$\dot\sigma_2 = \frac{\beta(H_1+H_2) + \gamma n_3}{n_3 + \beta n_2}\dot p - \frac{n_3}{n_3+\beta n_2}\delta \tag{VII.36}$$

et

$$\dot\sigma_3 = \frac{H_1+H_2+\gamma n_2}{n_3+\beta n_2}\dot p - \frac{n_2}{n_3+\beta n_2}\delta \tag{VII.37}$$

Nous avons donc exprimé $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$ et $\dot{p}$ pour les modèles de Hoffmann-Seeger, Barkey *et al.*, et Moftakhar *et al.* Nous allons maintenant faire de même pour le modèle de Buczynski-Glinka en résolvant une équation matricielle.

VII.1.2.6 Méthode de Buczynski-Glinka

Cette méthode (Buczynski et Glinka, 2003) est implémentée dans le programme `Glinkamemoire.z` de l'annexe F. Le principe de la résolution est radicalement différent des méthodes précédentes. La généralisation de la règle de Neuber en multiaxial au sens de von Mises n'est plus utilisée. On utilise conjointement le postulat de Buczynski-Glinka formulé pour chaque composante nonnulle du déviateur des contraintes, et la condition de cohérence pour résoudre une équation matricielle. Cela permet d'obtenir un vecteur solution contenant les composantes de $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$ et $\dot{p}$.

Rappelons que leur postulat se base sur celui de Neuber, à ceci près qu'il est exprimé dans toutes les composantes ii, qu'il fait intervenir les déviateurs des contraintes et des déformations, et que la formulation est incrémentale :

$$s_i \Delta e_i + \Delta s_i e_i = s_i^e \Delta e_i^e + \Delta s_i^e e_i^e = P e_i \tag{VII.38}$$

Ces équations permettent de traiter tous les cas de charge, proportionnels ou non. Considérons le même chargement de traction sur éprouvette axisymétrique. Si l'on dérive l'équation VII.38 dans la direction 1, en posant $\underset{\sim}{\boldsymbol{s}} = dev\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{e}} = dev\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ on obtient, dans le cas de 3 composantes, 1, 2, 3 :

$$\dot{s}_1\big(e_1 + \Delta e_1\big) + \dot{e}_1\big(s_1 + \Delta s_1\big) = \dot{s}_1\big(e_1 + \Delta e_1\big) + \dot{e}_1\big(s_1 + \Delta s_1\big) = dPe_1 \tag{VII.39}$$

Or :

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{S}}\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} + \dot{p}\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} \tag{VII.40}$$

donc :

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{S}}\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{s}}} + \dot{p}\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} \tag{VII.41}$$

et enfin :

$$\begin{aligned} \dot{s}_1\left(e_1 + \Delta e_1 + \frac{1}{E}\big(s_1 + \Delta s_1\big)\right) \\ +\dot{s}_2\left(\frac{-\nu}{E}\big(s_2 + \Delta s_2\big)\right) \\ +\dot{s}_3\left(\frac{-\nu}{E}\big(s_3 + \Delta s_3\big)\right) \\ +\dot{p}n_1\big(s_1 + \Delta s_1\big) = dPe_1 \end{aligned} \tag{VII.42}$$

De même dans les directions 2 et 3. La loi d'écoulement peut s'exprimer :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{n}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{s}}} = n_1\dot{s}_1 + n_2\dot{s}_2 + n_3\dot{s}_3 - \big(H1 + H2\big)\dot{p} = 0 \tag{VII.43}$$

Si on choisit :

$$x = \begin{pmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \\ \dot{p} \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} dPe_1 \\ dPe_2 \\ dPe_3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{VII.44}$$

on peut exprimer ce système d'équations sous la forme $[H]\ [x] = [y]$, avec :

$$[H] = \begin{pmatrix} e_1 + \Delta e_1 + \frac{1}{E}(s_1 + \Delta s_1) & \frac{-\nu}{E}(s_1 + \Delta s_1) & \frac{-\nu}{E}(s_1 + \Delta s_1) & n_1(s_1 + \Delta s_1) \\ \frac{-\nu}{E}(s_2 + \Delta s_2) & e_2 + \Delta e_2 + \frac{1}{E}(s_2 + \Delta s_2) & \frac{-\nu}{E}(s_2 + \Delta s_2) & n_1(s_2 + \Delta s_2) \\ \frac{-\nu}{E}(s_3 + \Delta s_3) & \frac{-\nu}{E}(s_3 + \Delta s_3) & e_3 + \Delta e_3 + \frac{1}{E}(s_3 + \Delta s_3) & n_1(s_3 + \Delta s_3) \\ n_1 & n_2 & n_3 & -(H1 + H2) \end{pmatrix}$$

On en déduit $\dot{s}_1$, $\dot{s}_2$, $\dot{s}_3$ et $\dot{p}$ par la méthode du pivot de Gauss, puis $\dot{\sigma}_2$ et $\dot{\sigma}_3$.

Nous avons maintenant déterminé les expressions de $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$ et $\dot{p}$ pour la méthode de Buczynski-Glinka. Auparavant nous avions déterminé les expressions de $\frac{1}{\dot{p}}\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$ pour les autres méthodes de la littérature. Il ne manque donc plus que l'expression de $\dot{p}$ pour chacune de ces méthodes.

VII.1.3 Résultats

Nous comparerons les résultats fournis par chaque méthode à une simulation par éléments finis, prise comme référence. La méthode de Neuber d'origine sera testée sur un cas de traction sur une éprouvette entaillée plate. Les autres méthodes seront testées sur une éprouvette entaillée axisymétrique Les simulations par éléments finis sont effectuées avec le code de calcul Zset/ZeBuLoN (Besson et al., 1998). Ce type de géométrie est utilisé par tous les autres auteurs et permet d'obtenir des états de contrainte multiaxiaux en fond d'entaille. De plus, la plupart des modèles commettent une erreur sur la contrainte et la déformation circonférentielles.

La géométrie de l'éprouvette plate se résume au quart de la section longitudinale de l'éprouvette axisymétrique. Le même maillage (cf. figure VII.5) est donc utilisé dans les deux cas. On utilise des quadrilatères du second ordre à intégration réduite à contraintes planes ou axisymétriques selon le cas. Le plan de symétrie horizontal est fixé dans la direction x_2, et l'axe de l'éprouvette est fixé dans la direction x_1. Les résultats sont lus au fond de l'entaille, sur l'axe x_1. Le diamètre de la tête de l'éprouvette axisymétrique (ou la largeur de la tête de l'éprouvette plate) est de 9,2 mm ; le diamètre de l'éprouvette au fond d'entaille est de 7 mm. Le rayon du fond d'entaille est de 0,4 mm. Le facteur de concentration de contrainte de l'éprouvette axisymétrique est de 2,7 en traction et de 1,75 en torsion.

Le chargement est répété. Il consiste en une force de traction appliquée au sommet du maillage. Pour assurer les conditions de symétrie, les déplacements dans la direction x_2 sont bloqués au bas de l'éprouvette et dans la direction x_1 sur son axe. L'état de contrainte équivalent maximal au sommet de l'éprouvette est uniaxial, d'une valeur de 280 MPa pour σ_2. 30 cycles sont effectués pour atteindre la stabilisation. Les états de contrainte et de déformation au fond de l'entaille pour l'éprouvette plate sont les suivants :

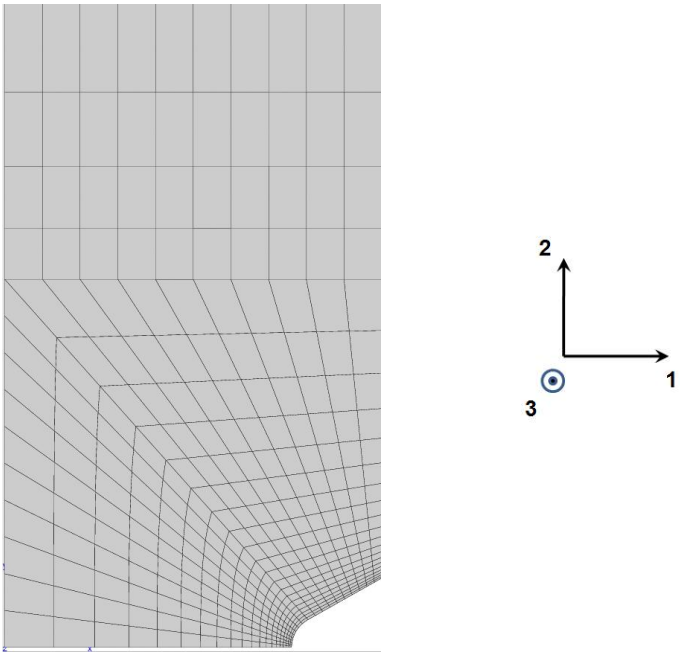


Figure VII.5 – Maillage utilisé pour le cas de la traction : 520 éléments, 3330 ddl

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{VII.45}$$

Et au fond de l'entaille de l'éprouvette axisymétrique, on a :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{VII.46}$$

VII.1.3.1 Evaluation des méthodes de la bibliographie

Le comportement utilisé pour une grande partie des simulations effectuées sur éprouvettes est celui de l'acier 30CrNiMo8, plus couramment nommé 30CND8. Les paramètres de la loi de Chaboche suivants ont été identifiés sur un essai de traction cyclique alternée sur éprouvette cylindrique à déformation totale imposée de 0,8 % :

- E = 189000 MPa
- R0 = 555 MPa

– C = 102200 MPa
– D = 294

A titre informatif, la figure VII.6 présente les résultats obtenus avec la méthode de Neuber uniaxiale testée en traction répétée sur l'éprouvette plate. Les figures VII.7 et VII.8 font de même pour les méthodes retenues de la littérature testées en traction répétée sur l'éprouvette axisymétrique.

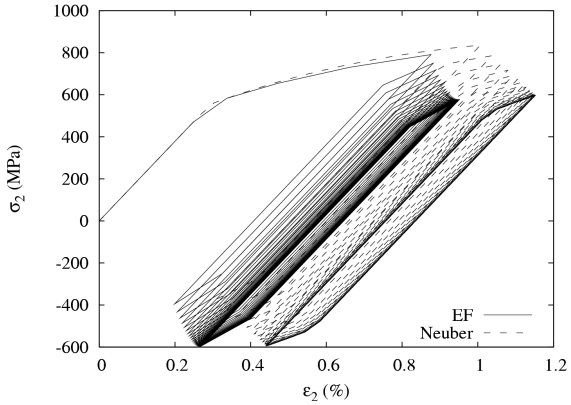


Figure VII.6 – Comparaison des courbes de comportement local $\sigma_2 - \varepsilon_2$ obtenues par éléments finis et par la méthode de Neuber uniaxiale pour une traction répétée sur éprouvette plate

La formulation des postulats de Hoffman-Seeger, Barkey *et al.*, et Moftakhar *et al.* nous montraient déjà que leur application à des chargements plus complexes impliquant plus de deux contraintes principales en fond d'entaille est exclue. Ces figures nous montrent maintenant que la contrainte et la déformation circonférentielle ne sont pas bien calculées. La méthode de Buczynski-Glinka reste la seule applicable lorsque les directions principales tournent autour de l'axe 1. La figure VII.8 compare les contraintes et déformations locales calculées par cette méthode et les éléments finis.
On constate cependant que, même pour cette dernière méthode, la contrainte et la déformation circonférentielles ne sont pas bien calculées.

VII.2 Conclusion

Les méthodes de détermination du cycle stabilisé, abordées au début de ce chapitre, ne permettent pas de connaître l'état transitoire qui précède la stabilisation de la structure. Les méthodes de type Neuber permettent de connaître cet état, et sont applicables à des signaux aléatoires. Elles ne permettent d'obtenir les variables locales qu'au point critique de la structure, ce qui est suffisant pour effectuer un calcul de durée de vie avec les méthodes classiques. Cependant, les méthodes existantes ne calculent pas bien la contrainte et la déformation circonférentielle sur une éprouvette entaillée axisymétrique. Ces constatations nous ont décidés à développer une nouvelle correction, en essayant de bien reproduire la contrainte et la déformation circonférentielle. Le chapitre suivant décrit les premières approches successives que nous avons formulées.

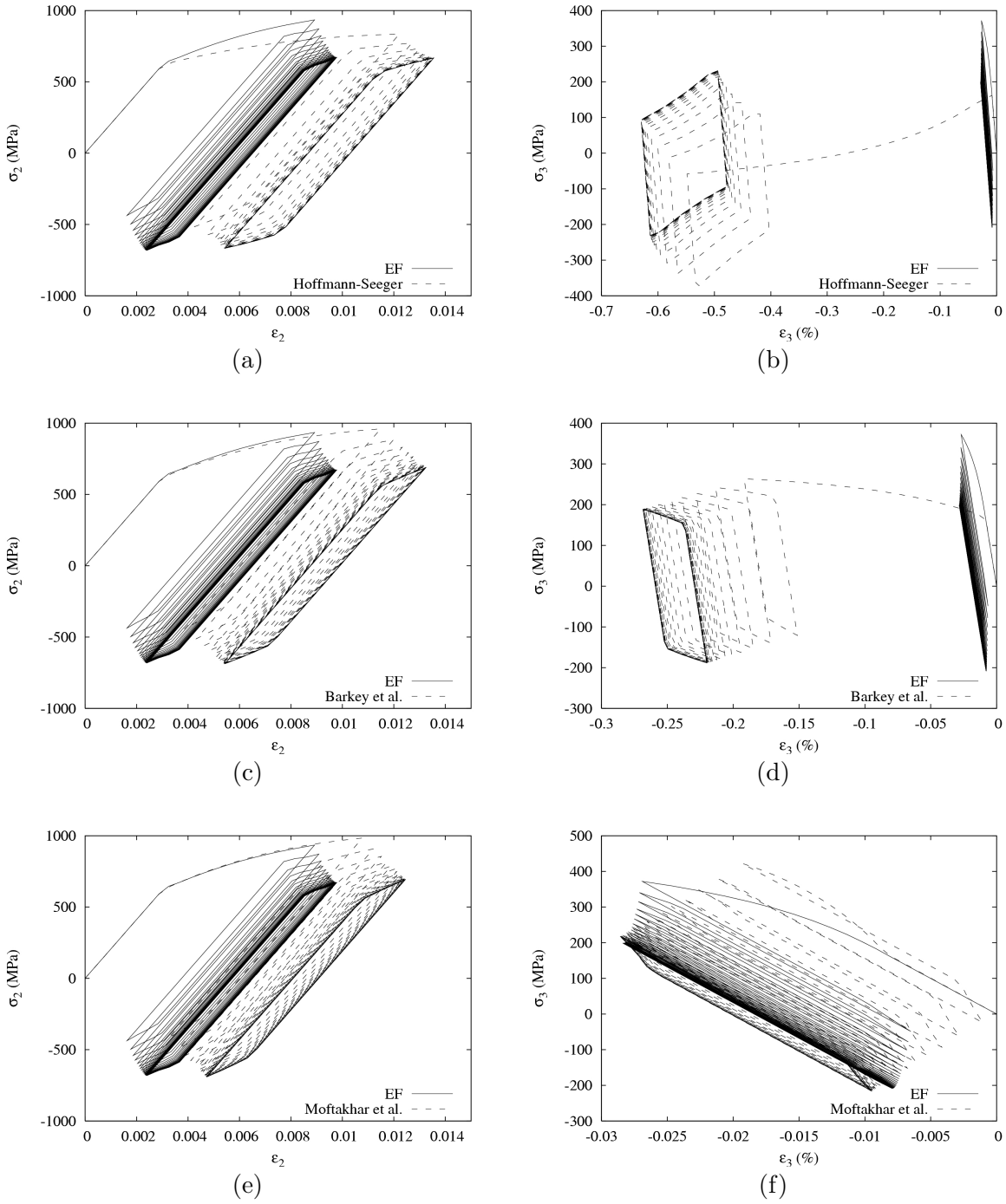


Figure VII.7 – Comparaison des courbes de comportement local $\sigma_2 - \varepsilon_2$ et $\sigma_3 - \varepsilon_3$ obtenues par éléments finis et par : (a,b) la méthode de Hoffmann-Seeger ; (c,d) la méthode de Barkey *et al.* ; (e,f) la méthode de Moftakhar *et al.*

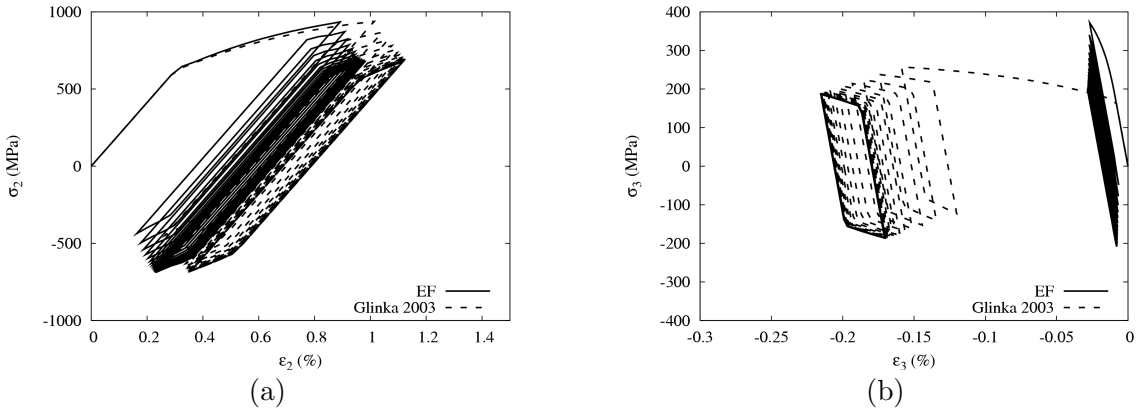


Figure VII.8 – Comparaison des courbes de comportement local (a) $\sigma_2 - \varepsilon_2$ et (b) $\sigma_3 - \varepsilon_3$ obtenues par éléments finis et par la méthode de Buczynski-Glinka

Chapitre -VIII-

Recherche de modèles empiriques

Dans le chapitre précédent, nous constatons que tous les auteurs postulent leur modèle à partir d'observations empiriques sur l'évolution des composantes des tenseurs de contrainte et de déformation. Nous avons d'abord choisi de suivre le même chemin en formulant de nouveaux postulats sur la base d'observations sur des simulations par éléments finis. Nous nous sommes en premier lieu intéressé aux chargements de traction sur éprouvettes axisymétriques. Une démarche identique avait été menée à l'ONERA.

VIII.1 Postulat de Gallerneau

VIII.1.1 Observations

En se basant sur le calcul par éléments finis de plusieurs géométries d'éprouvettes entaillées axisymétriques, on peut remarquér (Gallerneau, 2004) que la composante orthoradiale du tenseur de contrainte σ_3 reste linéaire en fonction de la déformation. Considérons par exemple le cas de l'une de ces éprouvettes, dont le maillage, réalisé avec des éléments cax8, est présenté en figure VIII.1. On applique les mêmes conditions aux limites que dans le paragraphe VII.1.3. Le diamètre de la tête de l'éprouvette est de 22 mm ; le diamètre de l'éprouvette au fond d'entaille est de 20 mm. Le rayon du fond d'entaille est de 1 mm. Pour l'étude de ce postulat, un chargement monotone suffit. Il consiste en une force de traction appliquée au sommet du maillage. L'état de contrainte équivalent maximal au sommet de l'éprouvette est uniaxial, d'une valeur de 250 MPa pour σ_2. On choisit un comportement élastoplastique défini par les paramètres suivants :

- E = 200 GPa
- $\nu = 0.3$
- R0 = 250 MPa
- C = 312500 MPa
- D = 1250

Si on trace σ_3 en fond d'entaille en fonction de ε_3, la figure VIII.2 (a) montre bien une relation linéaire. Pourtant, comme le montre la figure VIII.2 (b) le matériau se plastifie largement en fond d'entaille. L'équation VIII.1 peut donc être formulée :

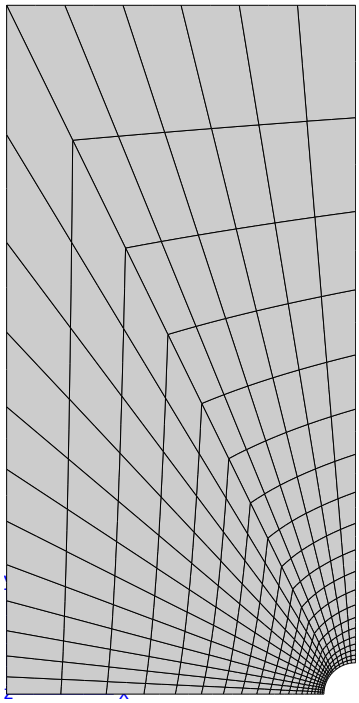


Figure VIII.1 – Maillage d'une éprouvette axisymétrique à entaille circulaire

$$\sigma_3 = \lambda\ \varepsilon_3 \tag{VIII.1}$$

On a alors :

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_3^{el} + \varepsilon_3^p = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E}\ \sigma_2 + \varepsilon_3^p = \frac{1}{\lambda}\ \sigma_3 \tag{VIII.2}$$

d'où :

$$\sigma_2 = \sigma_3\ \left(\frac{1}{\nu} - \frac{E}{\lambda\nu}\right) + \frac{E}{\nu}\ \varepsilon_3^p \tag{VIII.3}$$

équation que l'on récrit sous la forme :

$$\sigma_2 = \beta\ \sigma_3 + \frac{E}{\nu}\ \varepsilon_3^p \tag{VIII.4}$$

où β est le facteur de proportionalité entre composantes axiales et orthoradiales, mesuré dans le cas élastique :

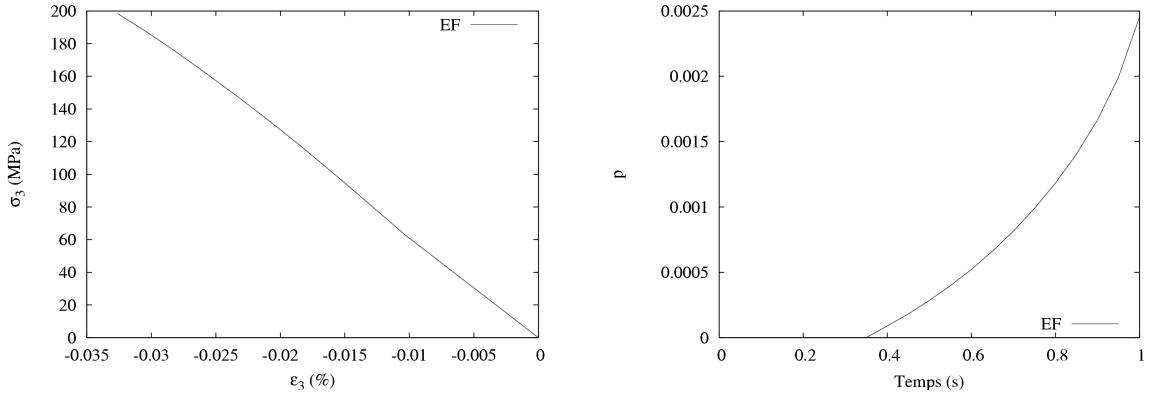
$$\beta = \frac{\sigma_2^e}{\sigma_3^e} \tag{VIII.5}$$

VIII.1.2 Implémentation

Cette méthode est implémentée dans le programme `Neuberlitterature.z` de l'annexe E. Comme pour les modèles de la littérature, il s'agit d'abord d'exprimer $\dot{\sigma}_2$:

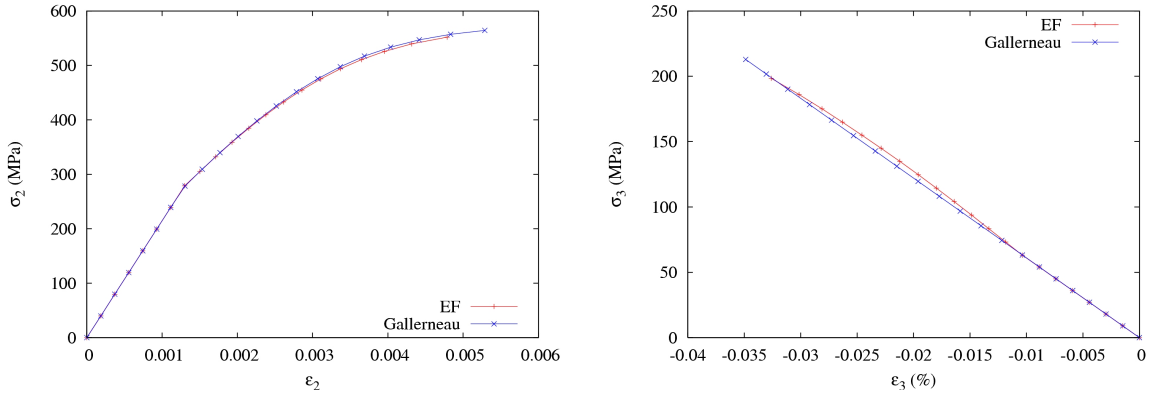
$$\dot{\sigma}_2 = \beta\dot{\sigma}_3 + \gamma\dot{p} \tag{VIII.6}$$

avec :



(a) (b)

Figure VIII.2 – (a) Observation d'une relation linéaire σ_3 - ε_3 (b) Evolution de la déformation plastique cumulée



(a) (b)

Figure VIII.3 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues pour une traction monotone par éléments finis et suivant l'hypothèse de Gallerneau : (a) σ_2 - ε_2 (b) σ_3 - ε_3

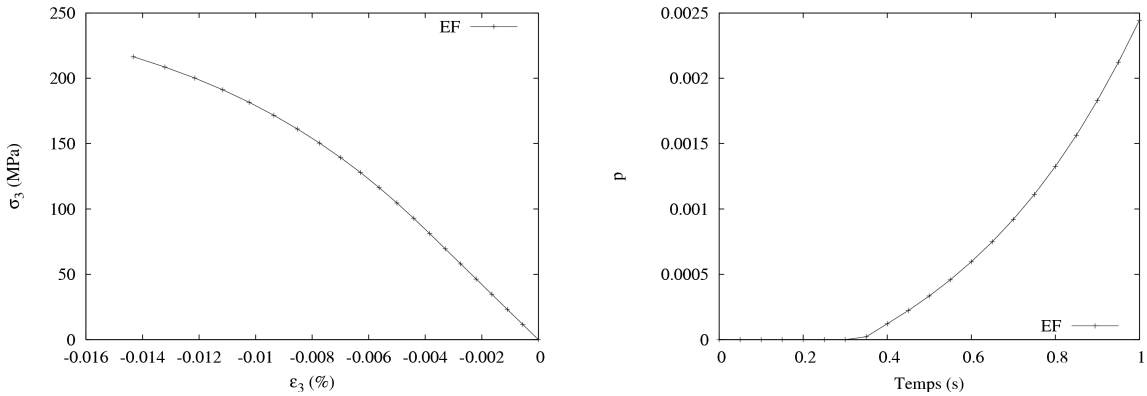
$$\beta = \frac{\sigma_2^e}{\sigma_3^e} \tag{VIII.7}$$

$$\gamma = \frac{E}{\nu} n_3 \tag{VIII.8}$$

Puis la condition de cohérence et la généralisation de la règle de Neuber au sens de von Mises aboutissent aux mêmes expressions de $\dot{\sigma}_2$, $\dot{\sigma}_2$ et $\dot{p}$ que pour les méthodes de la littérature. Cependant, en testant l'entaille considérée dans le chapitre précédent (figure VII.5) nous avons remarqué que ce postulat n'était plus valable, comme le montre la figure VIII.4. Le chargement imposé revient ici à un état de contrainte uniaxial maximal de 160 MPa sur la tête de l'éprouvette dans la direction x_2. Les conditions aux limites sont identiques.

La figure VIII.3 montre les résultats de la simulation sur élément de volume avec cette hypothèse. Comme prévu, la relation linéaire entre σ_3 - ε_3 est respectée.

La plastification est en effet limitée au fond de l'entaille circulaire. La redistribution y



(a) (b)

Figure VIII.4 – (a) Ecrouissage dans la direction 33 : σ_3 - ε_3 (b) Evolution de la déformation plastique cumulée

est très importante, et un chargement plus important ferait plastifier le matériau le long de l'axe de l'éprouvette. En revanche, les déformations plastiques restent bien concentrées autour du fond de l'entaille considérée dans le chapitre précédent. Nous avons chargé cette dernière éprouvette de manière à obtenir la même valeur de déformation plastique cumulée que pour l'entaille circulaire.

Il est évident que l'hypothèse $\sigma_3 = \lambda\ \varepsilon_3$ n'est pas valable, c'est pourquoi nous avons testé d'autres équations supplémentaires, comme le postulat du "K_3" que nous allons aborder maintenant.

VIII.2 Postulat du K_3

VIII.2.1 Observations

La dernière simulation du paragraphe VIII.1.2 sur l'éprouvette de la figure VII.5 nous a amenés à mettre en relation le produit de la contrainte et de la déformation circonférentielles dans le cas purement élastique et le cas élasto-plastique sur la figure VIII.5 en écrivant cette approximation :

$$\Delta\sigma_{33}\Delta\varepsilon_{33} = (1 + K_3 p)\,\Delta\sigma^e_{33}\Delta\varepsilon^e_{33} = (1 + K_3 p)\,P^e_3 \tag{VIII.9}$$

VIII.2.2 Implémentation et validation

Cette méthode est implémentée dans le programme `Neuberlitterature.z` de l'annexe E. Il s'agit d'abord d'exprimer $\dot{\sigma}_2$. En dérivant l'équation VIII.9 on obtient :

$$\dot{\sigma}_3\Delta\varepsilon_{33} + \Delta\sigma_{33}\dot{\varepsilon}_3 = K_3\dot{p}P^e_3 + (1 + K_3 p)\,dP^e_3 \tag{VIII.10}$$

Or :

$$\dot{\varepsilon}_3 = \frac{1}{E}\dot{\sigma}_3 - \frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_2\dot{p}n_3 \tag{VIII.11}$$

Donc :

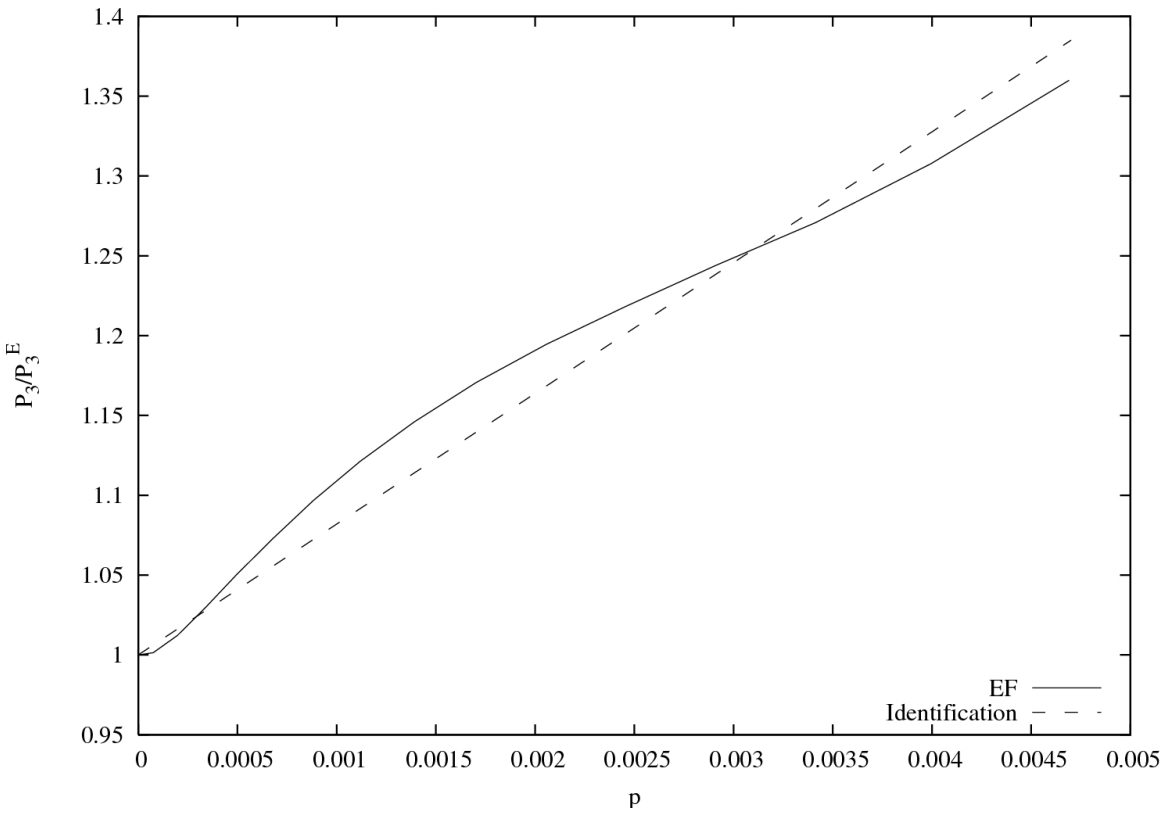


Figure VIII.5 – Observation d'une relation linéaire : $\sigma_3\varepsilon_3$ - $\sigma_3^e\varepsilon_3^e$

$$\dot{\sigma}_2 = \beta\dot{\sigma}_3 + \gamma\dot{p} - \delta \tag{VIII.12}$$

avec :

$$\beta = \frac{1}{\nu}\left(\frac{E\left(\Delta\varepsilon_{33}\right)}{\Delta\sigma_{33}} + 1\right) \tag{VIII.13}$$

$$\gamma = \frac{E}{\nu}\left(n_3 - K_3\frac{P_3^e}{\Delta\sigma_{33}}\right) \tag{VIII.14}$$

$$\delta = \frac{E}{\nu}\left(\frac{1 + K_3 p}{\Delta\sigma_{33}}\right) dP_3^e \tag{VIII.15}$$

Cette hypothèse a été testée sous un chargement alterné représenté en figure VIII.6. La force maximale imposée reste la même. Le coefficient K_3 a été identifié sur la branche 1. Comme le montre la figure VIII.7, celle-ci est assez bien reproduite en comparaison aux éléments finis. En revanche, la branche 2 simulée par éléments finis et fournie par la méthode du K_3 ne sont pas comparables. De même pour la branche 3. Cela est dû au fait que le coefficient K_3 varie d'une branche à l'autre, comme le montre la figure VIII.8.

VIII.3 Postulat de Chaboche

VIII.3.1 Observations

En observant les évolutions de σ_3 et ε_3 en fond d'entaille, une autre proposition a été formulée à l'ONERA (Chaboche, 2007). On considère la même simulation par éléments

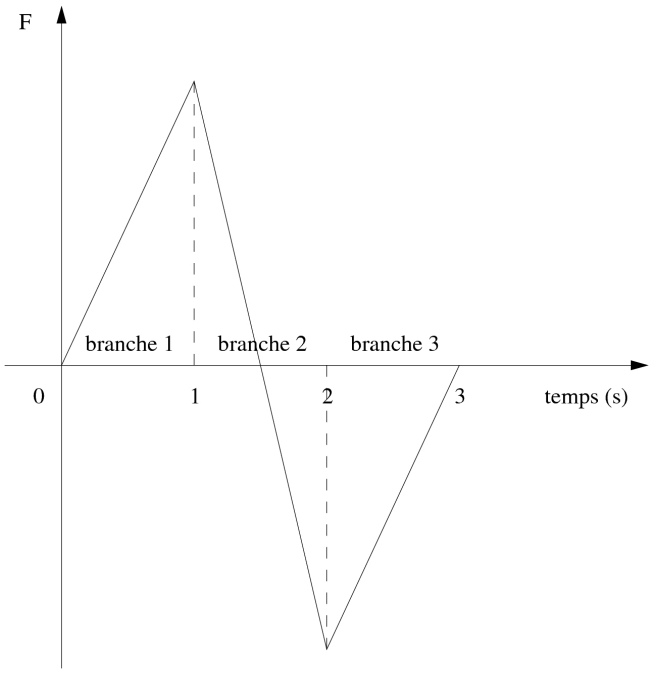
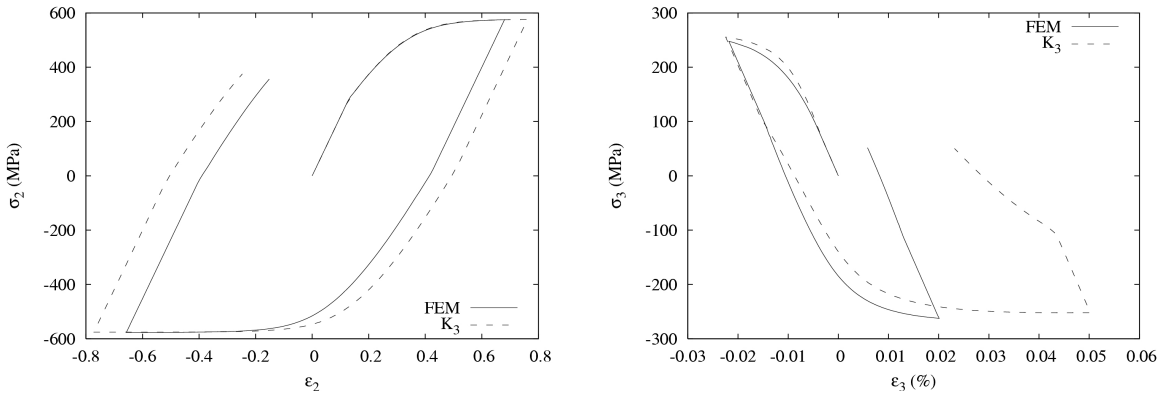


Figure VIII.6 – Chargement appliqué



(a) (b)

Figure VIII.7 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues pour une traction alternée par éléments finis et suivant le postulat du K_3 : (a) σ_2 - ε_2 (b) σ_3 - ε_3

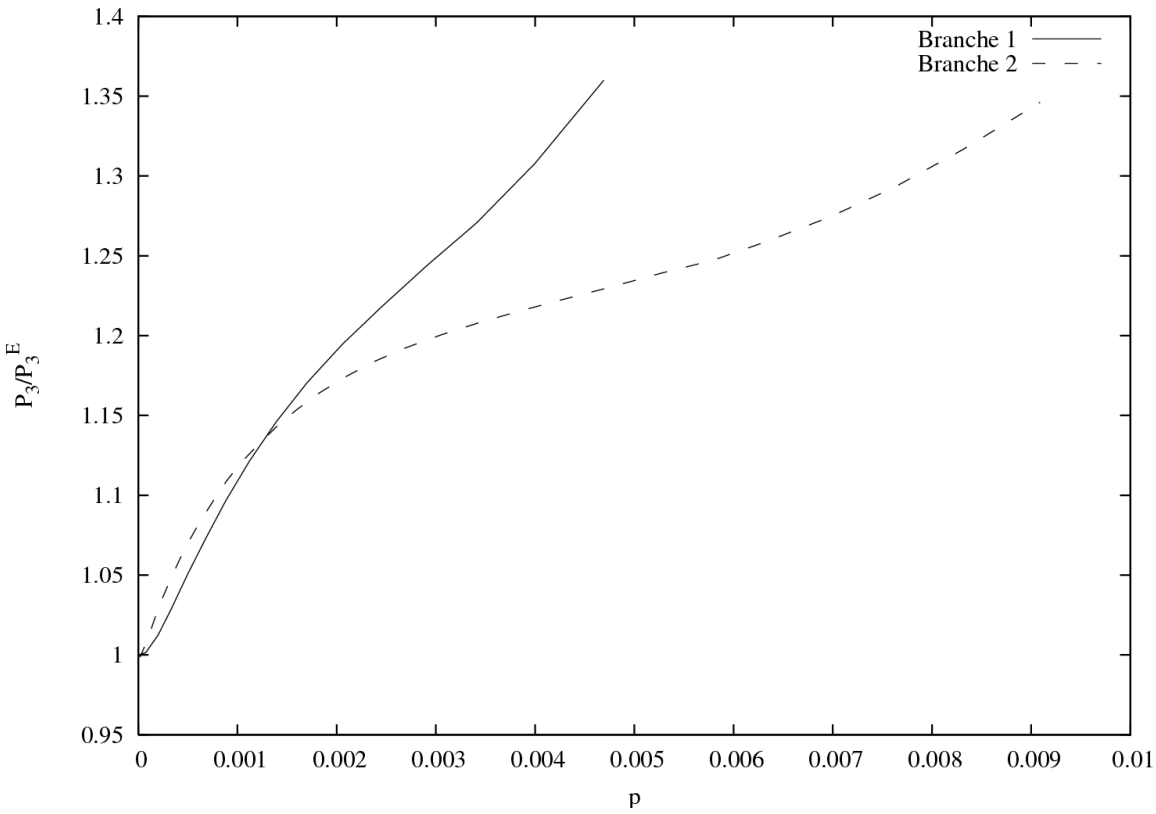


Figure VIII.8 – Relations $\sigma_3\varepsilon_3$ - $\sigma_3^e\varepsilon_3^e$ pendant la première et la seconde branche

finis que dans le paragraphe On VIII.2. On peut lisser le chemin suivi par une relation exponentielle, comme indiqué par l'équation VIII.16 :

$$\frac{\Delta\sigma_3}{\Delta\sigma_2} = \frac{\Delta\sigma_3^e}{\Delta\sigma_2^e} f(p) \tag{VIII.16}$$

avec :

$$f(p) = 1 + Q\left(1 - e^{-qp}\right) \tag{VIII.17}$$

En effet, on observe cette relation si on trace le membre de gauche en fonction de la déformation plastique cumulée pour la branche 1 en figure VIII.9.

VIII.3.2 Implémentation

Cette méthode est implémentée dans le programme `Neuberlitterature.z` de l'annexe E. Pour exprimer $\dot{\sigma}_2$, on peut réécrire l'équation VIII.18 comme suit :

$$\left(\sigma_3 - \sigma_3^0\right)\left(\sigma_2^e - \sigma_2^{e,0}\right) = \left(\sigma_3^e - \sigma_3^{e,0}\right)\left(\sigma_2 - \sigma_2^0\right) f(p) \tag{VIII.18}$$

En dérivant l'équation VIII.18 on obtient :

$$\dot{\sigma}_2 = \beta\dot{\sigma}_3 + \gamma\dot{p} - \delta \tag{VIII.19}$$

avec :

$$\beta = \frac{\Delta\sigma_2^e}{\Delta\sigma_3^e f(p)} \tag{VIII.20}$$

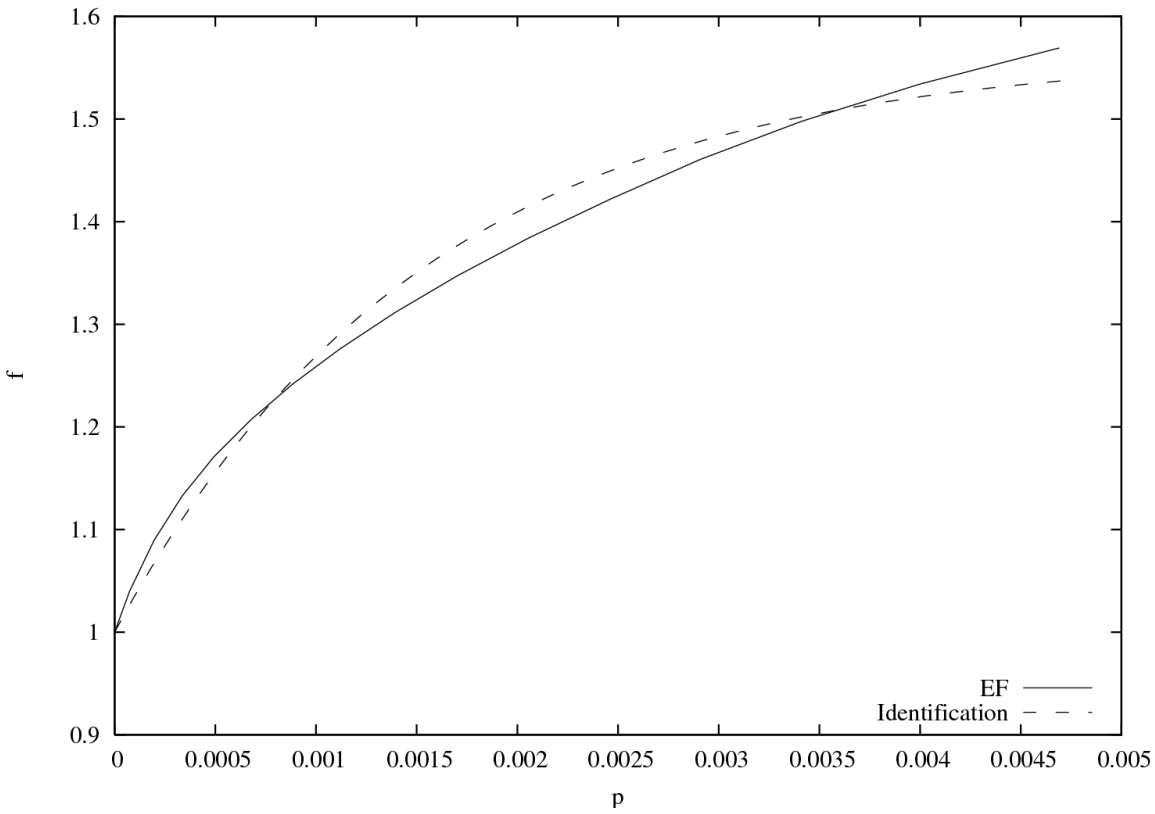


Figure VIII.9 – Relation exponentielle de l'équation VIII.8

$$\gamma = -qQ\Delta\sigma_2 \frac{e^{-qp}}{f(p)} \tag{VIII.21}$$

$$\delta = \frac{\Delta\sigma_2}{\Delta\sigma_3^e}\dot{\sigma}_3^e - \frac{\Delta\sigma_3\dot{\sigma}_2^e}{\Delta\sigma_3^e f(p)} \tag{VIII.22}$$

En effectuant un calcul accéléré avec cette hypothèse, pour le chargement complet de la figure VIII.6, on constate que la moindre erreur commise sur l'identification produit une erreur conséquente sur la prévision de la contrainte et de la déformation (figure VIII.10). L'identification des coefficients Q et q a été réalisée sur la branche 1 est n'est pas adaptée à la branche 2 ni à la branche 3, comme dans le cas du postulat du K_3.

VIII.4 Conclusion

Nous avons suivi dans cette partie de l'étude la même voie que les auteurs cités dans la partie bibliographique. Nous nous sommes basés sur la règle de Neuber généralisée au sens de von Mises et avons formulé plusieurs équations empiriques. Ce chapitre ne fait que résumer les hypothèses testées les plus pertinentes. Beaucoup d'autres équations supplémentaires ont été testées, sans succès. Le prochain chapitre est consacré au développement d'un modèle dont le principe est radicalement différent, et qui donne de meilleurs résultats. La règle de Neuber généralisée n'est plus utilisée et la résolution s'effectue au moyen d'un modèle appliqué dans toutes les directions puisqu'il s'exprime de manière tensorielle.

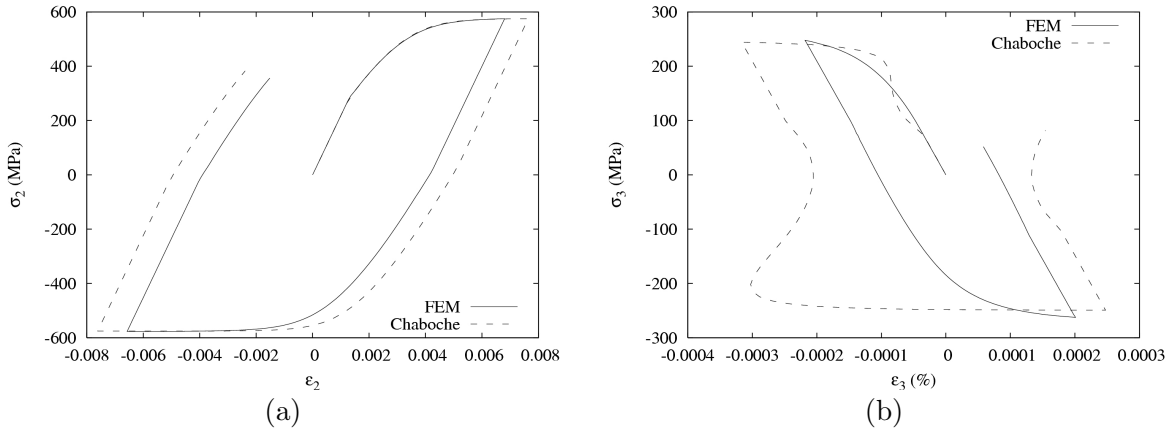


Figure VIII.10 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues pour une traction alternée par éléments finis et suivant le postulat de Chaboche : (a) σ_2 - ε_2 (b) σ_3 - ε_3

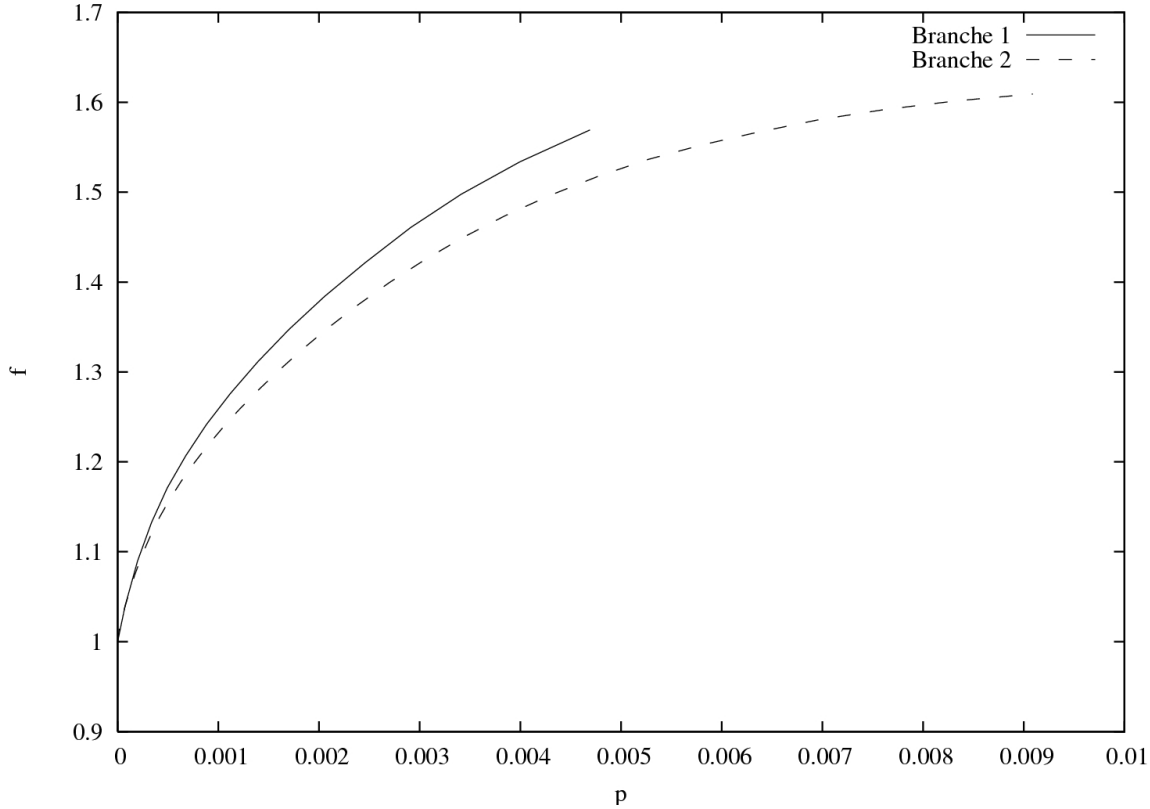


Figure VIII.11 – Relation de l'équation VIII.8 pendant la première et la seconde branche

Chapitre -IX-

Proposition d'une nouvelle correction élasto-plastique

IX.1 Description du modèle initial

En utilisant la solution du problème d'une inclusion sphérique I dans une matrice infinie M, le modèle de Kröner permet de déterminer la relation entre le tenseur de contrainte moyenne ($\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^M$), le tenseur de contrainte dans une inclusion ($\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^I$), le tenseur de déformation plastique moyenne ($\underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pM}$), et le tenseur de déformation plastique dans l'inclusion ($\underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pI}$) (Kröner, 1961). L'équation IX.1 est valide lorsque l'on considère que la déformation plastique moyenne reste faible (plasticité commençante) si bien que l'on peut se satisfaire d'une accommodation de type élastique, dont l'intensité est caractérisée par le tenseur $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}$, pour évaluer les contraintes résiduelles locales.

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^M = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^I + \underset{\approx}{\boldsymbol{C}} : \left(\underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pM} - \underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pI}\right) \tag{IX.1}$$

Le tenseur d'ordre 4 $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}$ dépend des propriétés élastiques et de la forme des inclusions. Dès que la plasticité s'étend dans la matrice, les contraintes résiduelles (*id est* la différence entre les contraintes moyennées et la contraintes dans l'inclusion) sont alors trop grandes (Berveiller et Zaoui, 1979). Il faut alors supposer une accommodation plastique, comme dans le cas de l'approche auto-cohérente développée par Hill (Hill, 1965), et aussi la "loi β" proposée par Cailletaud et Pilvin (Cailletaud, 1987, Cailletaud et Pilvin, 1994). L'intérêt de ce dernier modèle est de conserver une formulation explicite. Le modèle consiste à remplacer la déformation plastique par une variable auxiliaire d'évolution non linéaire, telle que le niveau de contraintes résiduelles est limité. La déformation plastique dans l'inclusion est remplacée par la variable $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^I$, dont l'évolution est :

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^I = \dot{\underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pI} - \underset{\approx}{\boldsymbol{D}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^I \dot{p}^I \tag{IX.2}$$

La figure IX.1 schématise la redistribution de contrainte obtenue en traction simple avec ces modèles. La redistribution liée au modèle de Kröner est représentée par une ligne droite sur un graphe σ-ε^p, alors qu'une courbe exponentielle décroissante décrit la règle β. La plasticité étant supposée isochore et l'élasticité isotrope, le seul module élastique qui intervient est le module de cisaillement μ.

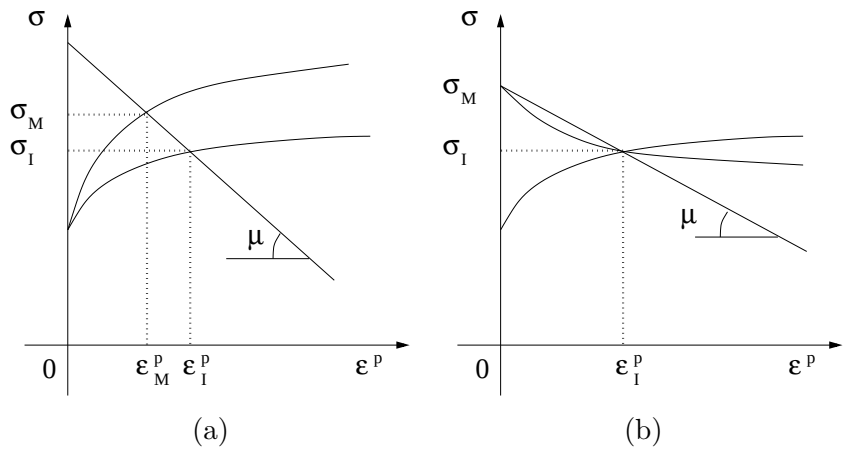


Figure IX.1 – (a) Modèle de Kröner pour une déformation plastique moyenne non nulle (b) Modèle de Kröner et règle en β pour une déformation plastique moyenne nulle

Au contraire des modèles de Kröner ou de Hill, la règle en β utilise des paramètres ajustables. La forme des tenseurs peut être modifiée pour prendre en compte différents types de matériaux (voir par exemple l'application aux alliages à solidification directionnelle (Sai et al., 2006)). Le but de la présente étude est d'étudier l'application d'un formalisme similaire aux entailles, c'est-à-dire des corps finis avec une surface libre. La zone de déformation plastique confinée est assimilée à l'inclusion, et la matrice entourant cet élément de matière joue le rôle du milieu équivalent. Les composantes des tenseurs d'ordre 4 $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}$, $\underset{\approx}{\boldsymbol{D}}$ doivent être déterminées à partir de simulations par éléments finis.

Dans le cas où l'on charge une éprouvette axisymétrique entaillée d'axe x_2, seules quelques composantes des tenseurs des contraintes et déformations sont non nulles. La forme de ces tenseurs est la suivante en notation de Voigt, avec $(x_1, x_2, x_3) \equiv (r, z, \theta)$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ 0 \\ \sigma_5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 0 \\ \varepsilon_5 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{IX.3}$$

Pour l'instant, la forme des tenseurs $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}$ et $\underset{\approx}{\boldsymbol{D}}$ est inconnue. Il est cependant évident que trois lignes et trois colonnes sont nulles pour assurer une contrainte nulle à la surface du fond de l'entaille, de normale x_1. On obtient donc :

$$\underset{\approx}{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ 0 & C_{32} & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{52} & C_{53} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\approx}{\boldsymbol{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & D_{23} & 0 & D_{25} & 0 \\ 0 & D_{32} & D_{33} & 0 & D_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{52} & D_{53} & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{IX.4}$$

Ces tenseurs sont introduits dans l'équation IX.1, où la déformation plastique macroscopique est annulée, car on suppose que l'on reste en plasticité confinée, et la déformation plastique locale est remplacée par $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^I$ car on souhaite néanmoins pouvoir bénéficier d'une accommodation non linéaire :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^I = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^M - \underset{\approx}{\boldsymbol{C}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^I \tag{IX.5}$$

Bien sûr, par la suite nous verrons que seules quelques composantes sont nécessaires. Ces paramètres devront cependant être calibrés. Pour cela nous utilisons un algorithme d'optimisation décrit dans l'annexe C. Cet algorithme se base sur les résultats de deux calculs par éléments finis, et le résultat de la procédure de calcul accéléré dont le principe figure en annexe D :

- un calcul par éléments finis de la structure en supposant un comportement purement élastique pour évaluer les contraintes en fond d'entaille que fournit un calcul en élasticité pour un chargement monotone ;
- le même calcul avec le vrai comportement élasto-plastique du matériau, fournissant l'évolution des contraintes et déformations locales durant un chargement monotone. Cette solution est considérée comme référence.

IX.2 Implémentation

Cette correction est implémentée dans le programme `Corrections.z` présenté dans l'annexe G. Il s'agit ici d'utiliser le modèle précédent pour exprimer $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$ en fonction de $\dot{p}$, puis $\dot{p}$.
En dérivant l'équation IX.5 et en la combinant avec l'équation IX.2 on obtient :

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^I = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^M - \underset{\approx}{\boldsymbol{C}} : \left(\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pI} - \underset{\approx}{\boldsymbol{D}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^I \dot{p}^I\right) \tag{IX.6}$$

Or, d'après l'équation IX.5 :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{-1} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^M - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^I\right) \tag{IX.7}$$

En posant $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pI} = \dot{p}^I \underset{\sim}{\boldsymbol{n}}$, on obtient donc l'expression :

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^I = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^M - \dot{p}^I \underset{\approx}{\boldsymbol{C}} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} - \underset{\approx}{\boldsymbol{D}} : \left(\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{-1} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^M - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^I\right)\right)\right) \tag{IX.8}$$

En utilisant la loi d'écoulement :

$$(H1 + H2)\,\dot{p}^I = \underset{\sim}{\boldsymbol{n}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^I = \underset{\sim}{\boldsymbol{n}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^M - \dot{p}^I \underset{\sim}{\boldsymbol{n}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{C}} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} - \underset{\approx}{\boldsymbol{D}} : \left(\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{-1} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^M - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^I\right)\right)\right) \tag{IX.9}$$

On peut donc exprimer :

$$\dot{p}^I = \frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^M}{\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{C}} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} - \underset{\approx}{\boldsymbol{D}} : \left(\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{-1} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^M - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^I\right)\right)\right) + H1 + H2} \tag{IX.10}$$

Où $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{-1}$ est calculé à partir de la partie inversible de $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}$. Nous pouvons donc déterminer l'expression de $\dot{p}$ puis de $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$.

On considère deux cas :

- une correction non linéaire, dite "de type NL" qui fait intervenir $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{NL}$ et $\underset{\approx}{\boldsymbol{D}}^{NL}$, représentée par l'équation IX.11 ;
- une correction linéaire, dite "de type L" qui fait intervenir $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{L}$, représentée par l'équation IX.12. Dans ce cas, la variable $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^{I}$ se réduit à la déformation plastique locale $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pI}$.

$$\dot{p}^I = \frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} : \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}^M}{\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{NL} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} - \underset{\approx}{\boldsymbol{D}}^{NL} : \left(\left(\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{NL}\right)^{-1} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^M - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^I)\right)\right) + H1 + H2} \tag{IX.11}$$

$$\dot{p}^I = \frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} : \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}^M}{\underset{\sim}{\boldsymbol{n}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{L} : \underset{\sim}{\boldsymbol{n}} + H1 + H2} \tag{IX.12}$$

IX.3 Adaptation de la correction aux entailles

Les deux corrections ont d'abord été testées sur des cas simples. Ceci a permis d'apporter quelques ajustements pour remédier à des défauts des formules initiales. Dans cette section nous nous proposons de décrire la démarche suivie.

IX.3.1 Traction sur éprouvette plate

Nous considérons ici le cas d'une éprouvette plate entaillée, identique à celle étudiée lors de l'évaluation de la méthode de Neuber uniaxiale (figure VII.5). Les conditions aux limites sont identiques. Les paramètres matériaux sont ceux considérés au chapitre VIII :

- E = 200 GPa
- $\nu = 0.3$
- R0 = 250 MPa
- C = 312500 MPa
- D = 1250

Le chargement est répété, on observe un état de contrainte uniaxial maximal de 160 MPa sur la tête de l'éprouvette. On effectue 30 cycles nécessaires à la stabilisation. L'état de contrainte est uniaxial, on observe donc en fond d'entaille :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{IX.13}$$

Les deux corrections ont été testées ici. Alors que la correction de type L ne fait intervenir que $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{L}$, l'autre fait intervenir $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{NL}$ et $\underset{\approx}{\boldsymbol{D}}^{NL}$. Dans notre démarche, nous avons choisi de

$$C_{22}^{L} = 1.22.10^5 MPa \text{ MPa} \quad C_{33}^{L} = 2,39.10^5 \text{ MPa}$$

Table IX.1 –

$C_{22}^{NL} = 1,27.10^5 MPa$ MPa	$C_{33}^{NL} = 2,51.10^5$ MPa
$D_{22}^{NL} = 7,21.10^1$	$D_{33}^{NL} = 1,02.10^2$

Table IX.2 –

minimiser le nombre de composantes des tenseurs $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{NL}$ et $\underset{\approx}{\boldsymbol{D}}^{NL}$ à calibrer. Dans le cas de la correction de type NL, et pour un état de contrainte uiaxial, nous avons annulé tous les coefficients sauf deux : C_{22}^{NL} et D_{22}^{NL}. La correction peut se résumer à une seule équation scalaire dans la direction 2 :

$$\sigma_2^I = \sigma_2^M - C_{22}^{NL}\left(\varepsilon_2^{pI} - D_{22}^{NL}\beta_{22}^I\dot{p}^I\right) - C_{33}^{NL}\left(\varepsilon_3^{pI} - D_{33}^{NL}\beta_{33}^I\dot{p}^I\right) \tag{IX.14}$$

De même pour la correction de type L, avec $\underset{\approx}{\boldsymbol{D}}^{NL} = 0$

Les deux corrections ont été testées sur une éprouvette plate sollicitée en traction. Les coefficients identifiés sont présentés en table IX.1 pour la correction de type L, et en table IX.2 pour la correction de type NL.

Puis 30 cycles sont simulés avec les mêmes paramètres. Les figures IX.2 (a) et (b) montrent respectivement ce qu'on obtient en appliquant la correction de type L et la correction de type NL.

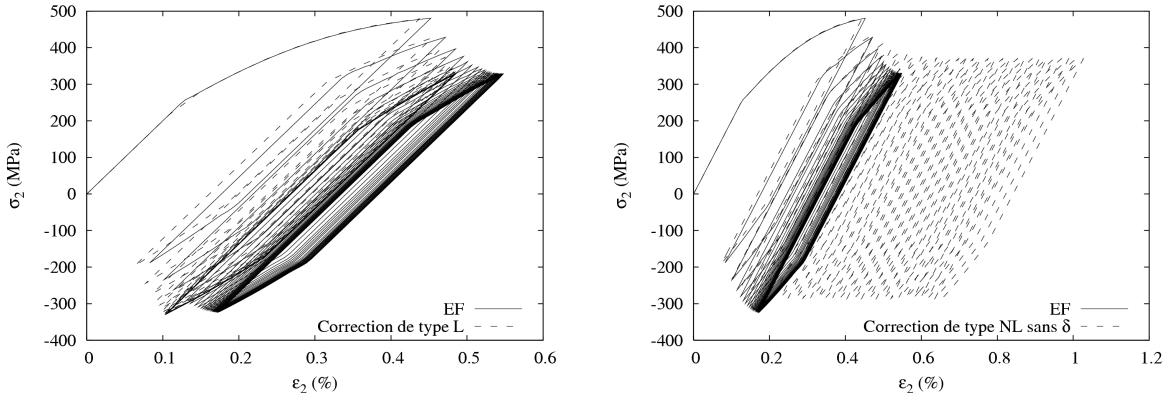
Alors que l'on atteint un cycle stabilisé en utilisant la correction de type L, l'application de la correction de type NL produit un rochet infini. Ce comportement n'est pas réaliste : il n'est jamais observé pendant des essais ou une simulation par éléments finis dans le cas d'une plasticité confinée. Même si le chargement nominal est imposé, les déformations sont contraintes par la matrice élastique entourant le fond d'entaille plastique, le chargement local est donc à déformation imposée. Ce rochet est seulement dû à la non linéarité de la correction de type NL. On observe également un tel rochet en appliquant un comportement de type Chaboche lors de la simulation d'un élément de volume soumis à un chargement répété.

IX.3.2 Introduction d'un terme linéaire δ dans la la correction de type NL

Pour éviter ce rochet, on superpose en général un écrouissage cinématique linéaire à l'écrouissage non linéaire. Nous appliquons cette modification à la correction de type NL :

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}}^I = \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{pI} - \underset{\approx}{\boldsymbol{D}}^{NL} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^I - \underset{\approx}{\boldsymbol{\delta}} : \underset{\sim}{\varepsilon}^{pI}\right) ||\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{pI}|| \tag{IX.15}$$

Le tenseur $\underset{\approx}{\boldsymbol{\delta}}$ est diagonal. Les valeurs des composantes relatives à la torsion sont égales à la moitié de celles qui sont relatives à la traction :



(a) (b)

Figure IX.2 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par : (a) éléments finis et la correction de type L (b) éléments finis et la correction de type NL sans δ pour une traction répétée sur éprouvette plate

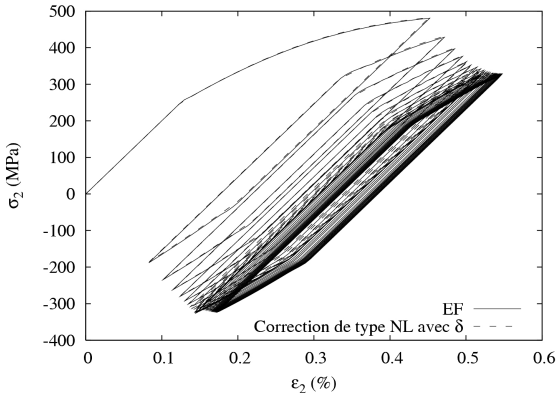


Figure IX.3 – Amélioration apportée par l'introduction du terme δ sur la prévision des courbes de comportement local par la correction de type NL pour une traction répétée sur éprouvette plate

$$\underset{\approx}{\boldsymbol{\delta}} \equiv \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta}{2} \end{pmatrix} \tag{IX.16}$$

Ce neuvième paramètre nécessite une calibration sur 3 branches d'un chargement répété. Dans le cas de la traction répétée sur éprouvette plate considéré précédemment dans le paragraphe IX.3.1, la figure IX.3 montre l'amélioration apportée par rapport à la figure IX.2 (b).

Nous avons observé qu'utiliser la correction de type L donne une bonne précision sur les variables critiques utilisées dans les critères de fatigue quand on l'applique à des chargements d'amplitude constante. De plus, pour un état de contrainte uniaxial elle nécessite

l'identification de seulement deux composantes (C_{22}^L et C_{33}^L) sur un chargement monotone, alors qu'il faut en calibrer 5 sur 3 branches pour la correction de type NL. Cependant, dans le cas de chargements aléatoires, la correction de type NL est plus précise. C'est pourquoi nous utiliserons la correction de type L dans le cas de l'amplitude constante, et de type NL dans le cas de chargements d'amplitude variable.

IX.3.3 Traction sur éprouvette axisymétrique

Un état de contrainte biaxial en fond d'entaille peut être engendré par une traction sur éprouvette entaillée axisymétrique. A la contrainte de traction se superpose une contrainte circonférentielle. La géométrie de l'éprouvette est identique à celle qui a été étudiée lors de l'évaluation des méthodes de type Neuber multiaxiales (figure VII.5). Les conditions aux limites sont identiques. Les paramètres matériaux sont ceux du 30CND8. Les tenseurs de contrainte et de déformation ont l'allure suivante en fond d'entaille :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{IX.17}$$

Le chargement est monotone, et revient à un état de contrainte uniaxial maximal de 280 MPa sur la tête de l'éprouvette. Nous avons commencé par utiliser 2 coefficients : C_{22}^L et C_{33}^L. La correction de type L, que nous utilisons dans ce cas de chargement répété, peut se résumer à deux équations dans les directions 2 et 3 :

$$\sigma_2^I = \sigma_2^M - C_{22}^L \varepsilon_2^{pI} \tag{IX.18}$$

et :

$$\sigma_3^I = \sigma_3^M - C_{33}^L \varepsilon_3^{pI} \tag{IX.19}$$

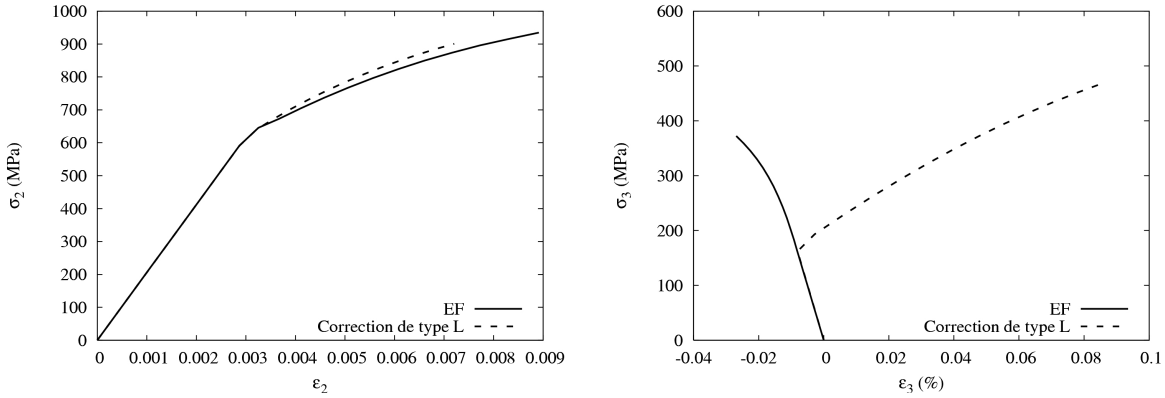
L'optimisation de ces paramètres sur une charge fournit les valeurs suivantes :

- $C_{22}^L = 1,82.10^5 MPa$
- $C_{33}^L = 3,20.10^5 MPa$

La figure IX.4 montre que la correction ne prédit pas du tout l'évolution des contraintes et déformations.

IX.3.4 Introduction de couplages

Les équations constitutives et la loi d'écoulement suggèrent une dépendance entre par exemple σ_2 et ε_3. Pour améliorer la correction, nous avons donc choisi d'établir une relation entre les contraintes et déformations de toutes les directions. Cela se traduit par l'ajout de composantes dans le tenseur $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^L$. Dans le cas de la traction sur éprouvette axisymétrique étudiée dans le paragraphe IX.3.3, on obtient :



(a) (b)

Figure IX.4 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis et par la correction de type L pour une charge monotone sur éprouvette axisymétrique : (a) $\sigma_2 - \varepsilon_2$; (b) $\sigma_3 - \varepsilon_3$

$$\underset{\approx}{C}^L \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22}^L & C_{23}^L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{23}^L & C_{33}^L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{IX.20}$$

Sur la figure IX.5 on constate que l'introduction de ce couplage améliore grandement la précision de la correction. En optimisant les paramètres sur une charge on obtient :

- $C_{22}^L = 1,34.10^5 MPa$
- $C_{33}^L = 2,39.10^5 MPa$
- $C_{23}^L = 4,91.10^4 MPa$

On peut maintenant effectuer un chargement répété pendant 30 cycles jusqu'à stabilisation. C'est ce qui est montré en figures IX.6 et IX.7. Le résultat est très satisfaisant pour les boucles σ_2-ε_2, et un peu moins bon pour la composante 3. Cependant, dans ce dernier cas, il n'y a un écart significatif que sur la déformation moyenne, toutes les autres caractéristiques du cycle stabilisé (valeur moyenne et amplitude de contrainte, amplitude de déformation plastique) étant bonnes.

IX.3.5 Torsion sur éprouvette axisymétrique

Pour étudier cet état de contrainte, un maillage plan axisymétrique ne suffit plus. Il est nécessaire de modéliser l'éprouvette en 3 dimensions. Toutefois, on peut se limiter à la moitié de l'éprouvette jusqu'à sa section transversale médiane. La géométrie de cette éprouvette axisymétrique reste la même, mais le maillage représenté en figure IX.8 se compose de tetraèdres quadratiques (10 noeuds, 4 points de Gauss).

Le bas de l'éprouvette est encastré pour respecter la condition de symétrie. Les paramètres matériaux sont ceux du 30CND8. Le chargement est répété, et revient imposer un moment

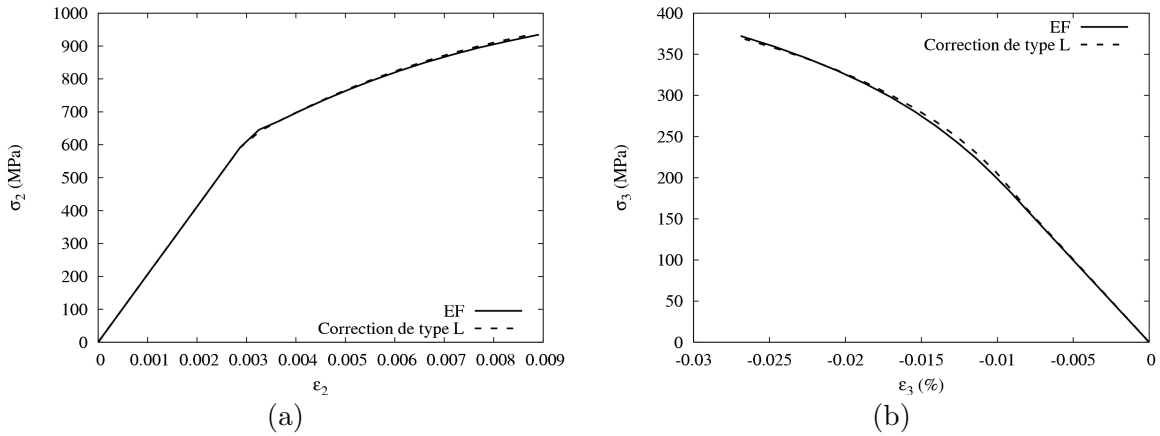


Figure IX.5 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis et par la correction de type L pour une charge monotone sur éprouvette axisymétrique après introduction du couplage : (a) $\sigma_2 - \varepsilon_2$; (b) $\sigma_3 - \varepsilon_3$

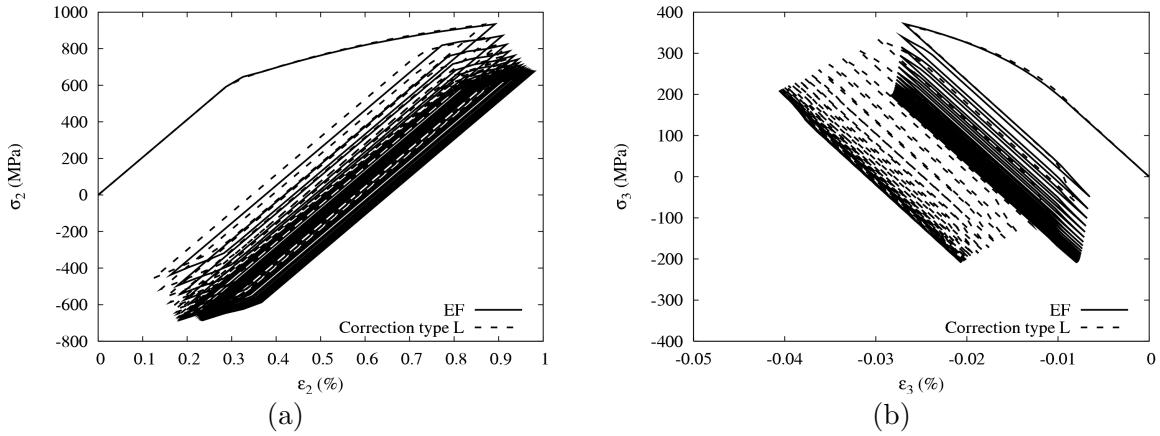


Figure IX.6 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis et par la correction de type L pour une traction répétée sur éprouvette axisymétrique après introduction du couplage : (a) $\sigma_2 - \varepsilon_2$; (b) $\sigma_3 - \varepsilon_3$

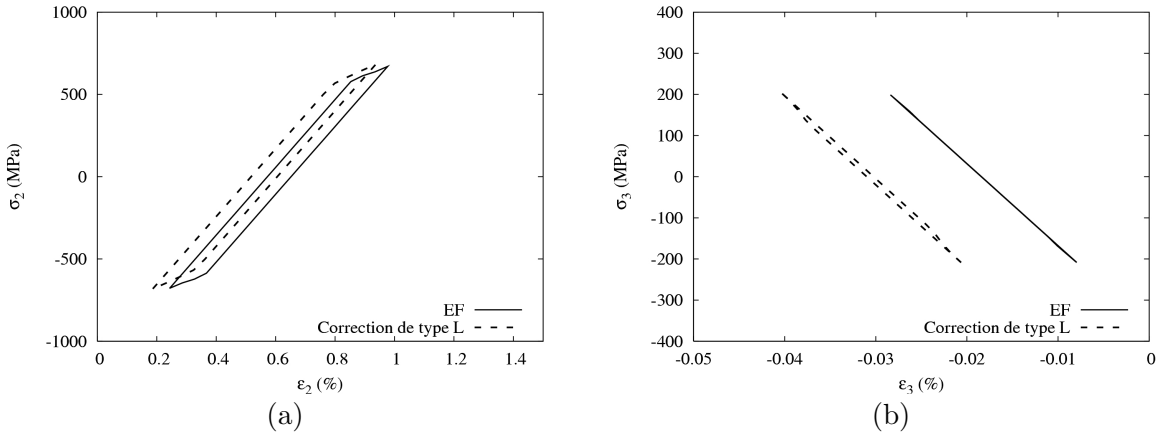


Figure IX.7 – Comparaison des cycles stabilisés obtenus par éléments finis et la correction de type L pour une traction répétée sur éprouvette axisymétrique après introduction du couplage : (a) $\sigma_2 - \varepsilon_2$; (b) $\sigma_3 - \varepsilon_3$

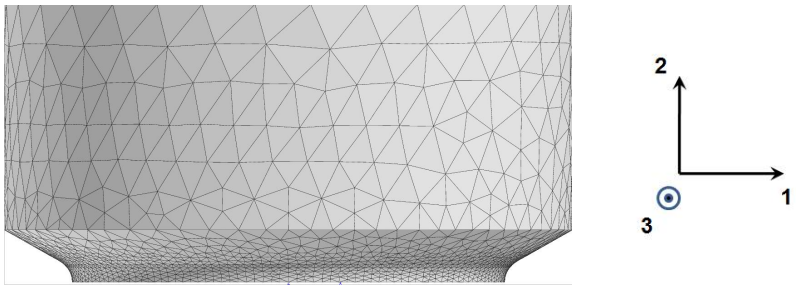
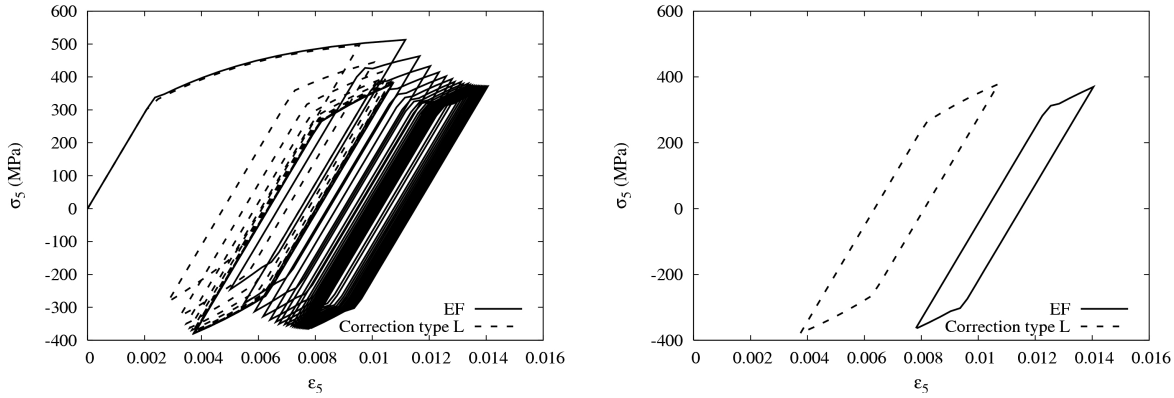


Figure IX.8 – Maillage pour le chargement de torsion : 20818 éléments, 99966 ddl



(a) (b)

Figure IX.9 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis et par la correction de type L pour une torsion répétée sur éprouvette axisymétrique : (a) Historique complet ; (b) Cycle stabilisé

de torsion maximal de 160 N.m sur la tête de l'éprouvette. On obtient en fond d'entaille les états de contrainte et de déformation suivants :

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_5 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{IX.21}$$

La correction de type L peut alors se résumer à une seule équation :

$$\sigma_5^I = \sigma_5^M - C_{55}^L \varepsilon_5^{pI} \tag{IX.22}$$

Après calibration des paramètres sur une charge monotone on obtient $C_{55}^L = 2,97.10^4$. On peut ensuite simuler une trentaine de cycles jusqu'à stabilisation (figure IX.9).
On observe que la calibration des paramètres ne permet pas de bien reproduire la charge monotone. Nous ne sommes pour l'instant pas arrivés à expliquer ce problème et à le résoudre.

IX.3.6 Chargement de traction-torsion proportionnel

On a choisi ici de modéliser l'intégralité de l'éprouvette en 3 dimensions. Le maillage, représenté en figure IX.10 se compose également de tétraèdres.

Le bas de l'éprouvette est encastré. Les paramètres matériaux sont ceux du 30CND8. D'une part on impose une traction répétée revenant à un état de contrainte uniaxial maximal de 200 MPa sur la tête de l'éprouvette dans la direction x_2. D'autre part on impose un moment de torsion répété dont la valeur maximale est de 114 N.m sur la tête de l'éprouvette. Ces valeurs ont été déterminées de manière à ce que le rapport σ_2/σ_5 soit égal à $\sqrt{3}$ en fond d'entaille pour un comportement purement élastique. Les signaux de traction et de torsion sont en phase. On obtient en fond d'entaille les états de contrainte et de déformation suivants :

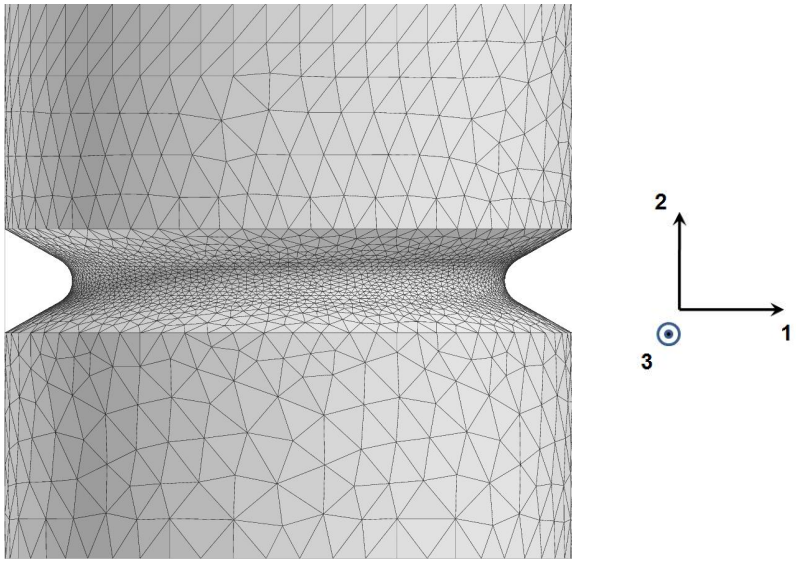


Figure IX.10 – Maillage pour le chargement proportionnel de traction-torsion : 60905 éléments, 267807 ddl

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ 0 \\ \sigma_5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{IX.23}$$

Pour assurer une relation entre toutes les composantes de ces deux tenseurs :

$$\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22}^L & C_{23}^L & 0 & C_{23}^L & 0 \\ 0 & C_{23}^L & C_{33}^L & 0 & C_{25}^L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{25}^L & C_{35}^L & 0 & C_{55}^L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{IX.24}$$

Toujours dans le but de réduire au minimum le nombre de coefficients et donc de faciliter leur calibration, nous avons essayé de nous affranchir des coefficients de couplage entre contraintes et déformations de traction et de torsion. En fixant C_{23}^L et C_{25}^L à 0, on obtient le même résultat. D'autre part :

- en affectant à C_{22}^L, C_{23}^L et C_{22}^L la valeur obtenue lors de leur identification en traction pure,
- en affectant à C_{55}^L la valeur obtenue lors de son identification en torsion pure,

on obtient un résultat satisfaisant (figures IX.11 et IX.12).

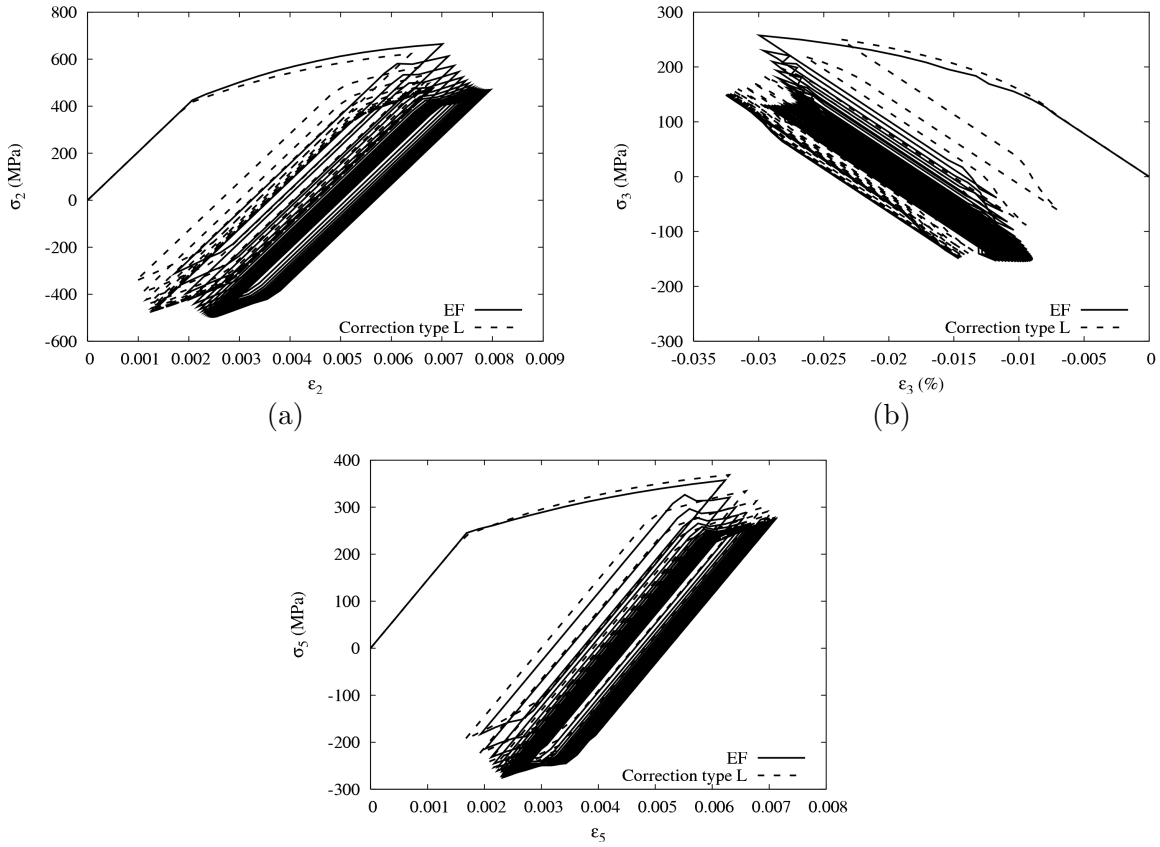


Figure IX.11 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis et par la correction de type L pour un chargement de traction-torsion proportionnel répété sur éprouvette axisymétrique : (a) $\sigma_2 - \varepsilon_2$; (b) $\sigma_3 - \varepsilon_3$; (c) $\sigma_5 - \varepsilon_5$

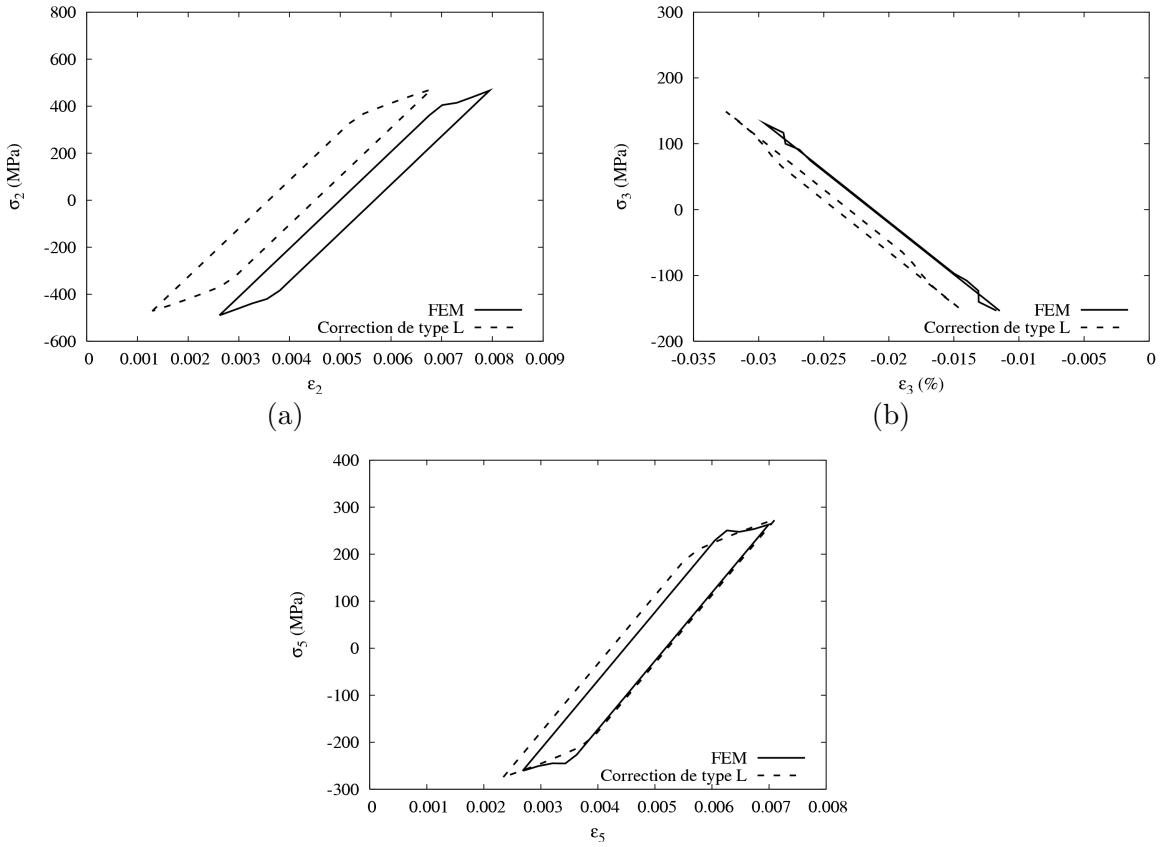


Figure IX.12 – Comparaison des cycles stabilisés obtenus par éléments finis et la correction de type L pour un chargement de traction-torsion proportionnel répété sur éprouvette axisymétrique : (a) $\sigma_2 - \varepsilon_2$; (b) $\sigma_3 - \varepsilon_3$; (c) $\sigma_5 - \varepsilon_5$

$$C_{22}^L = 1,34.10^5 MPa \quad C_{33}^L = 2,39.10^5 MPa \quad C_{23}^L = 4,91.10^4 MPa \quad C_{55}^L = 2,97.10^4$$

Table IX.3 – Paramètres de la correction de type L pour le 30CND8

$C_{22}^{NL} = 1,22.10^5$ MPa	$C_{33}^{NL} = 2,14.10^5$ MPa	$C_{23}^{NL} = 4,02.10^4$ MPa	$C_{55}^{NL} = 6,17.10^4$
$D_{22}^{NL} = 1,45.10^1$	$D_{33}^{NL} = 7,72.10^2$	$D_{23}^{NL} = 6,63.10^1$	$D_{55}^{NL} = 3,81.10^2$
$\delta = 0,92$			

Table IX.4 – Paramètres de la correction de type NL pour le 30CND8

Nous résumons ici tous les paramètres identifiés pour le 30CND8 :

- la table IX.3 résume les paramètres de la correction de type L, identifiés dans le paragraphe IX.3.4 pour C_{22}^L, C_{33}^L et C_{23}^L, et dans le paragraphe IX.3.5 pour C_{55}^L,
- la table IX.4 résume les paramètres de la correction de type NL, identifiés sur les trois premières branches du chargement du paragraphe IX.3.4 pour C_{22}^{NL}, C_{33}^{NL}, C_{23}^{NL}, D_{22}^{NL}, D_{33}^{NL} et D_{23}^{NL}, et sur les trois premières branches du paragraphe IX.3.5 pour C_{55}^{NL}, D_{55}^{NL}. Ces identifications des paramètres de $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{NL}$ et $\underset{\approx}{\boldsymbol{D}}^{NL}$ n'ont pas été décrites.

IX.4 Etude de la plasticité non confinée

L'un des inconvénients des méthodes de type Neuber est leur limitation aux cas de plasticité confinée. Il n'existe cependant pas de définition précise de cet état de confinement. Le but de cette section est donc de connaître la limite jusqu'à laquelle ces méthodes et la correction de type L sont applicables.

Nous étudierons une éprouvette plate entaillée et une éprouvette axisymétrique entaillée. La géométrie a déjà été étudiée dans le paragraphe VIII.1. Les conditions aux limites sont identiques et le maillage est rappelé en figure IX.13. Il est composé respectivement d'éléments c2d8 ou cax8 pour l'éprouvette plate et l'éprouvette axisymétrique.

Dans cette étude de la plasticité confinée, le chargement consistera toujours en une traction monotone, imposée sous forme d'une rampe de 1 seconde. Deux comportements seront étudiés : le comportement du 30CND8 et un comportement élasto-plastique avec un écrouissage moins non linéaire, qui sera appelé matériau M, dont les paramètres matériau sont :

- R0 = 250 MPa
- E = 200000 MPa
- C = 31250 MPa
- D = 125

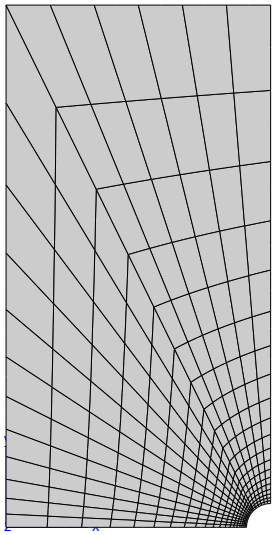


Figure IX.13 – Maillage de l'éprouvette plate à entaille circulaire

IX.4.1 Application de la méthode de Neuber au non confinement en traction monotone sur éprouvette plate

IX.4.1.1 Cas du 30CND8

Le chargement maximal revient ici à un état de contrainte uniaxial sur la tête de l'éprouvette de 700 MPa. La figure IX.14 représente l'évolution des contraintes et des déformations en fond d'entaille au cours du chargement, obtenue par éléments finis et par la méthode de Neuber uniaxiale pour le comportement du 30CND8.
Le comportement global de l'éprouvette change radicalement à l'instant t = 0,77 s. Cela coïncide avec l'apparition de la plasticité le long de l'axe de l'éprouvette, comme le montre la figure IX.15. La figure IX.16 montre la répartition de la déformation plastique cumulée sur l'éprouvette au chargement maximal, à t = 1 s.

IX.4.1.2 Cas du matériau M

Le chargement maximal revient ici à un état de contrainte uniaxial sur la tête de l'éprouvette de 350 MPa. La figure IX.17 représente l'évolution des contraintes et des déformations en fond d'entaille au cours du chargement, obtenue par éléments finis et par la méthode de Neuber uniaxiale pour le matériau M.
Comme dans le cas du 30CND8, le comportement global de l'éprouvette change radicalement à l'instant t = 0,67 s. Encore une fois, cela coïncide avec l'apparition de la plasticité le long de l'axe de l'éprouvette.

Les mêmes observations ont été faites dans le cas d'une traction sur éprouvette axisymétrique et ne seront pas montrées ici. Il apparaît donc que la méthode de Neuber reste fiable tant que la section ne se plastifie pas entièrement. Dans ce cas, la zone plastique est entourée par une zone élastique qui contient la plasticité locale. L'équivalence $\sigma^e\varepsilon^e = \sigma\varepsilon$, faisant l'hypothèse d'un même comportement global élastique de l'éprouvette pour chaque membre de l'équation, est donc valable.

On peut mettre en évidence ce changement de comportement global en étudiant le déplacement vertical U2 en haut de l'éprouvette axisymétrique (par exemple), sur l'axe. La figure IX.18 représente l'évolution de ce déplacement au cours du chargement, dans le cas

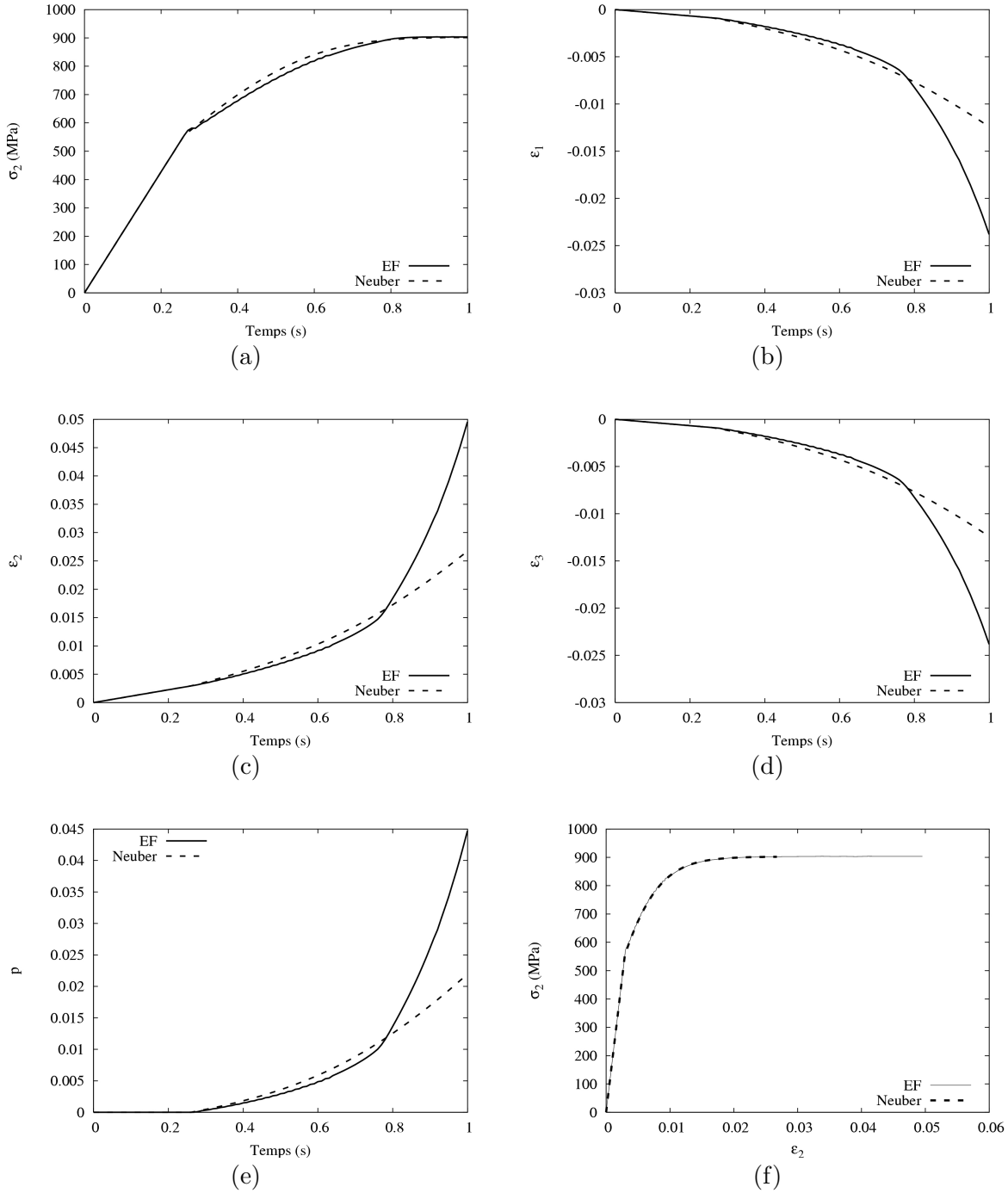


Figure IX.14 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis et par la méthode de Neuber uniaxial pour un chargement monotone de traction sur éprouvette plate avec le 30CND8 : (a) temps-σ_2 ; (b) temps-ε_1 ; (c) temps-ε_2 ; (d) temps-ε_3 ; (e) temps-$\dot{p}$; (f) $\varepsilon_2 - \sigma_2$

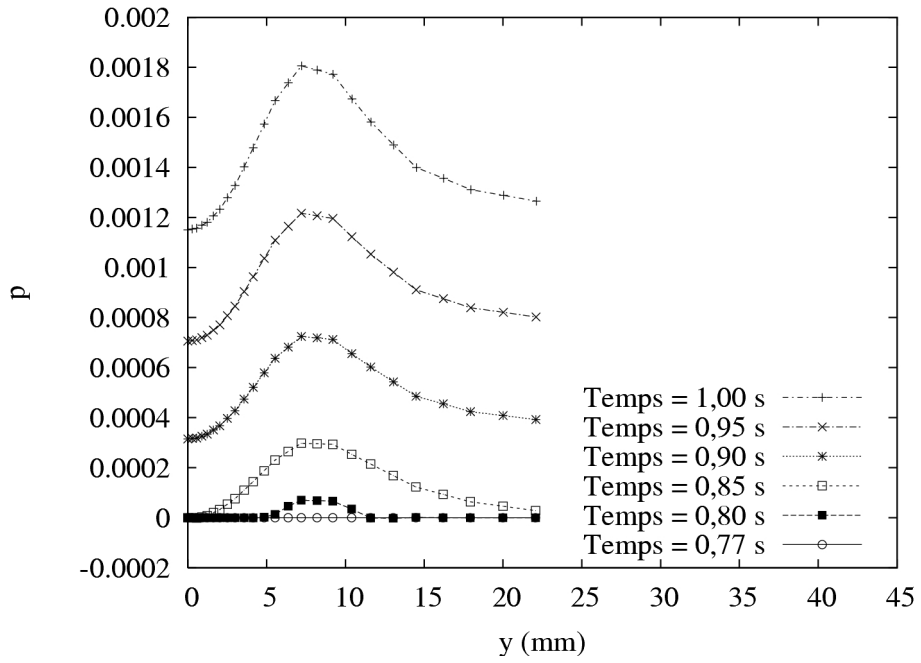


Figure IX.15 – Déformation plastique cumulée le long de l'axe de symétrie vertical au cours du chargement pour le 30CND8

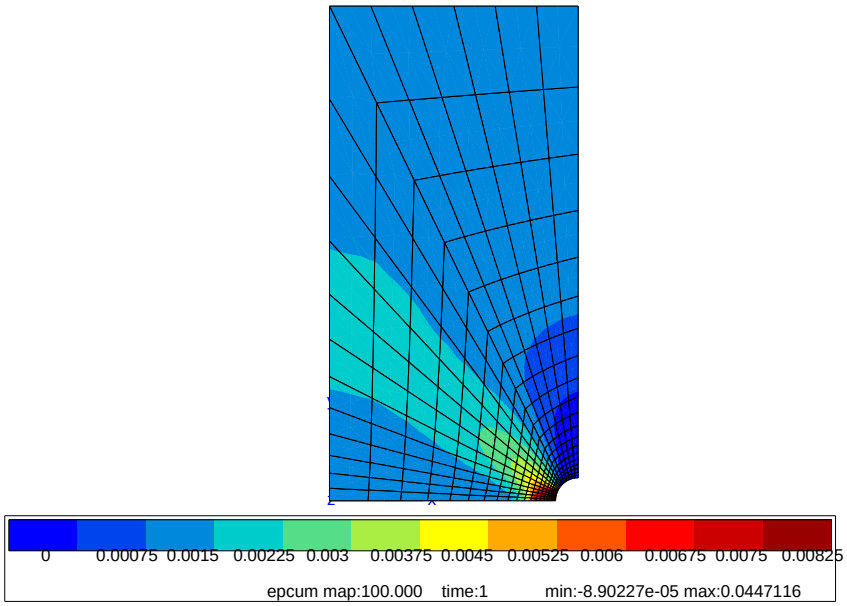


Figure IX.16 – Déformation plastique cumulée à t = 1 s pour le 30CND8 (échelle tronquée)

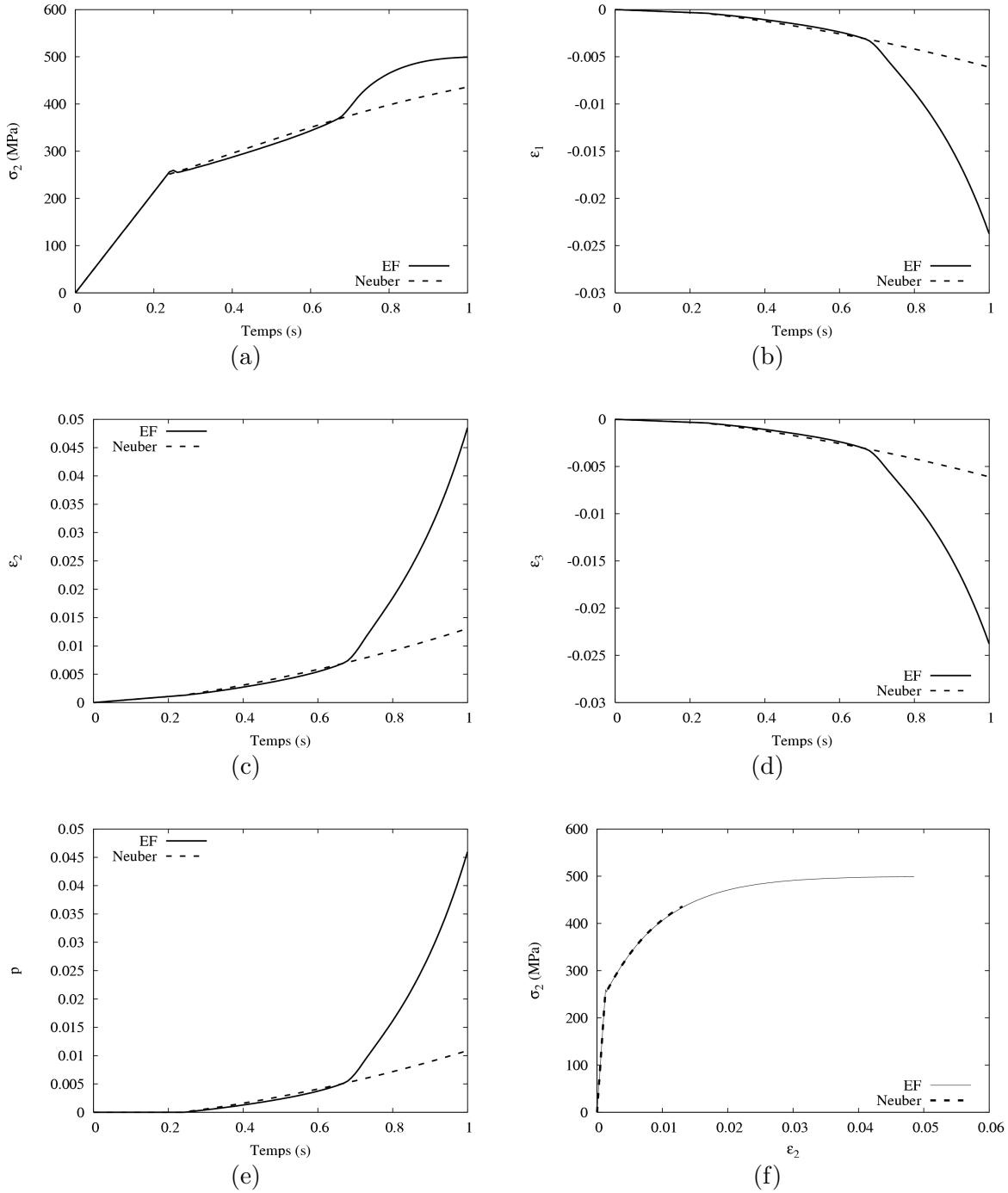


Figure IX.17 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis et la méthode de Neuber uniaxial pour un chargement monotone de traction sur éprouvette plate avec le matériau M : (a) temps-σ_2 ; (b) temps-ε_1 ; (c) temps-ε_2 ; (d) temps-ε_3 ; (e) temps-p ; (f) $\varepsilon_2 - \sigma_2$

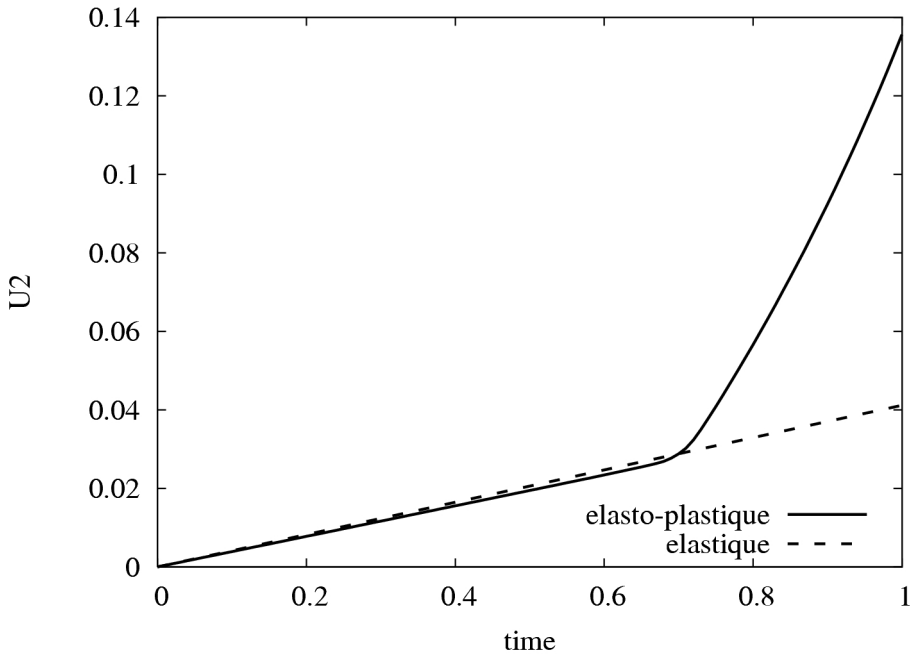


Figure IX.18 – Mise en évidence du changement de comportement global de l'éprouvette pour le matériau M

du matériau M purement élastique, et du matériau M réel (élasto-plastique). Avant t = 0.7 s, la zone de plasticité n'atteint pas encore l'axe de l'éprouvette. On observe alors le même déplacement si on adopte un comportement élastique ou élasto-plastique. La plastification n'a donc aucune influence sur le comportement global de l'éprouvette. En revanche, la vitesse de déplacement change radicalement à partir de t = 0.7 s, vraisemblablement à cause du fait que toute la section de l'éprouvette est entrée en plasticité.

IX.4.2 Application de la correction de type L et de la méthode de Buczynski-Glinka au non confinement en traction monotone sur éprouvette axisymétrique

Nous allons maintenant étudier la précision de la correction de type L et de la méthode de Buczynski-Glinka en cas de non confinement, pour une traction monotone sur éprouvette axisymétrique en 30CND8. Les paramètres du tenseur $\underset{\approx}{C}^L$ identifiés dans le paragraphe IX.3.4 sont appliqués ici. Le chargement maximal revient à un état de contrainte uniaxial sur la tête de l'éprouvette de 780 MPa. Les figures IX.19 et IX.20 présentent respectivement l'application de la méthode de Buckzynski-Glinka et de la correction de type L à un fort taux de plastification. Comme dans le cas de la méthode de Neuber uniaxiale, ces méthodes ne peuvent évidemment pas prévoir la plastification de l'ensemble de la section de l'éprouvette et le changement de son comportement global.

IX.5 Prise en compte d'un écrouissage cyclique

Le but de cette section est d'évaluer l'aptitude de la correction de type L à appréhender un comportement cyclique, typiquement un adoucissement cyclique. Les paramètres du tenseur $\underset{\approx}{C}^L$ identifiés dans le paragraphe IX.3.4 sont à nouveau appliqués ici. On étudie l'éprouvette

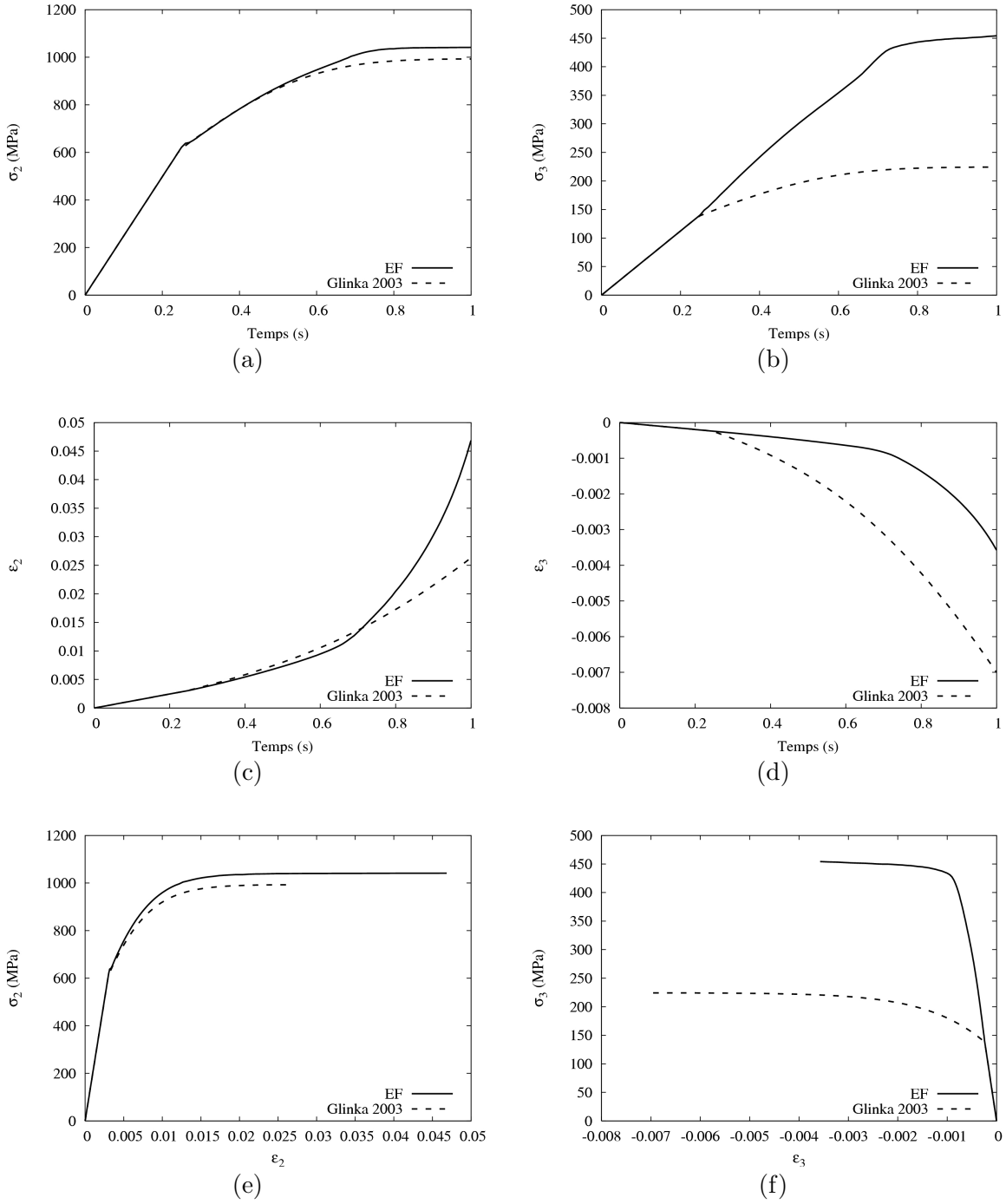


Figure IX.19 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis et par la méthode de Buczynski-Glinka pour un chargement monotone de traction sur éprouvette axisymétrique : (a) temps-σ_2 ; (b) temps-σ_3 ; (c) temps-ε_2 ; (d) temps-ε_3 ; (e) $\varepsilon_2 - \sigma_2$; (f) $\varepsilon_3 - \sigma_3$

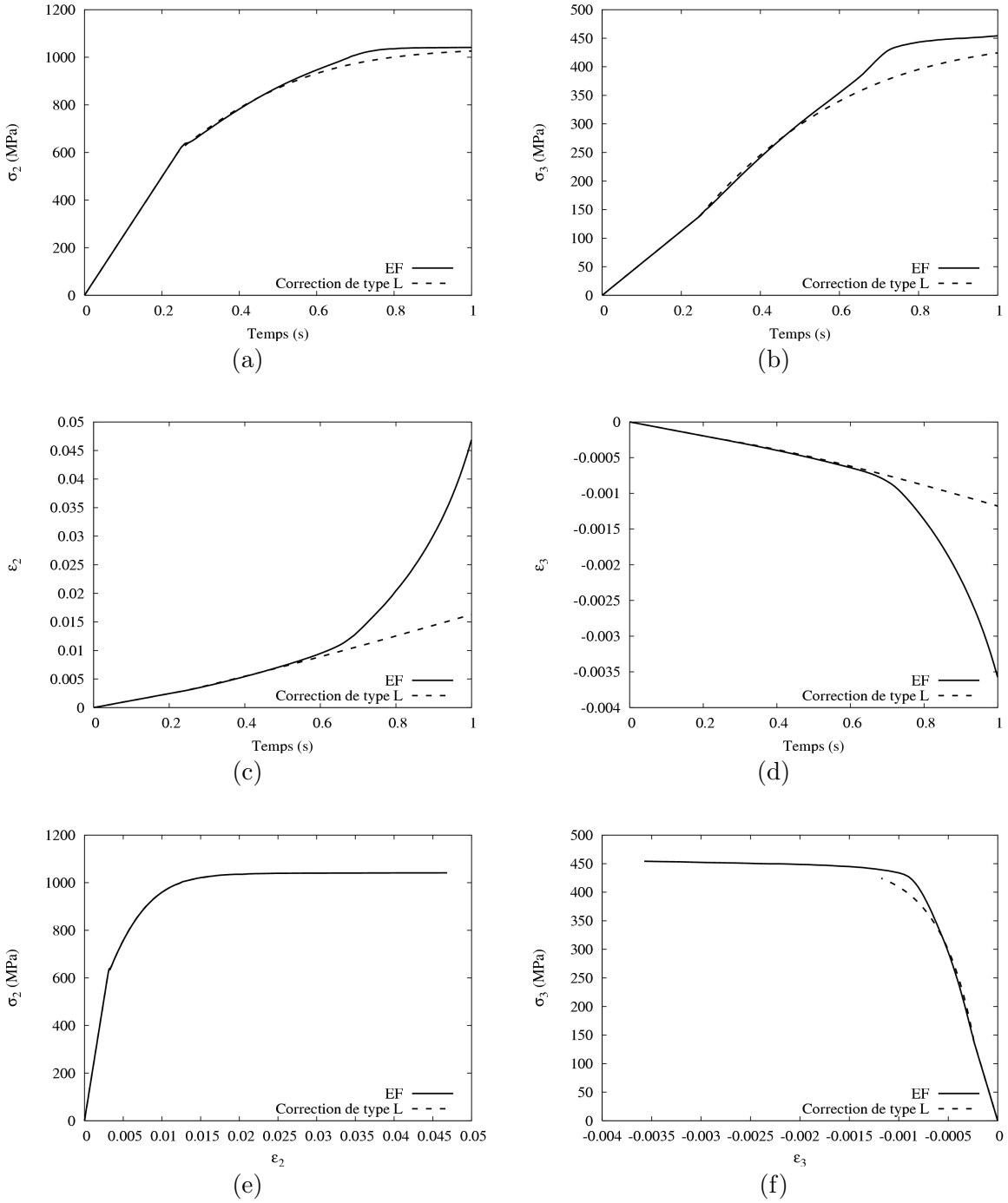
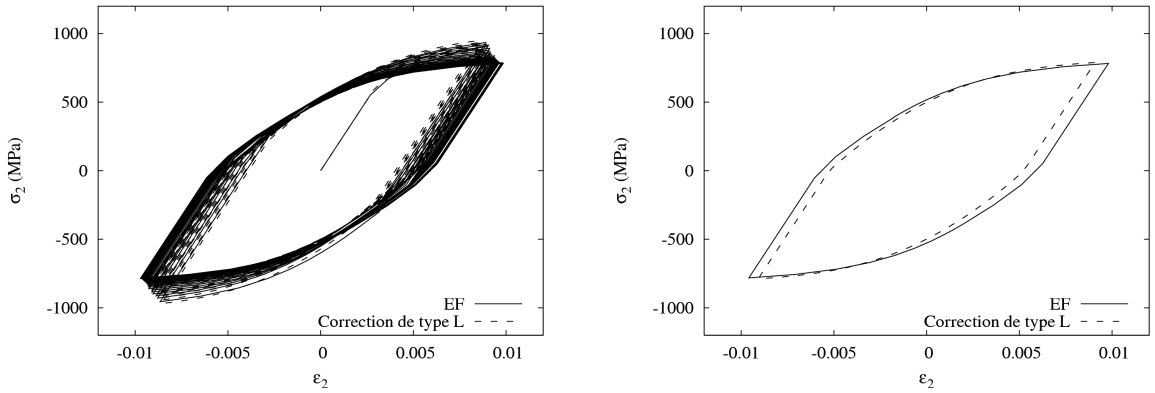
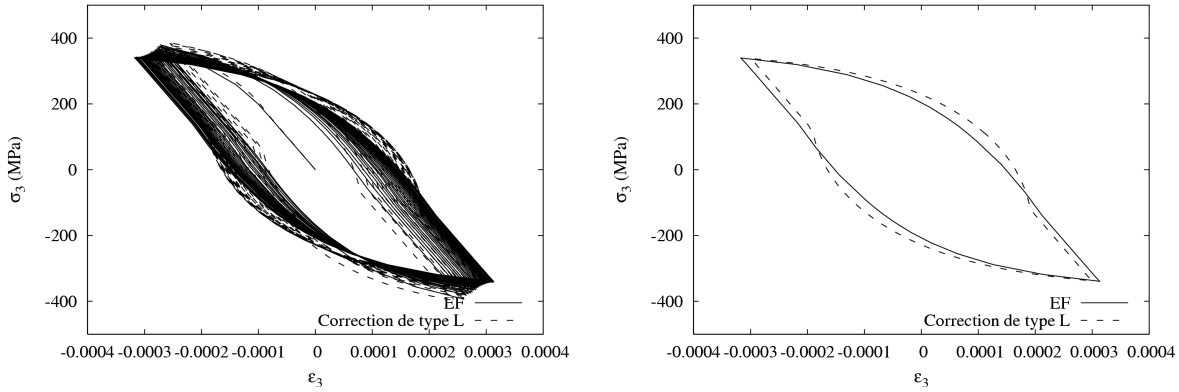


Figure IX.20 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis et par la correction de type L pour un chargement monotone de traction sur éprouvette axisymétrique : (a) temps-σ_2 ; (b) temps-σ_3 ; (c) temps-ε_2 ; (d) temps-ε_3 ; (e) $\varepsilon_2 - \sigma_2$; (f) $\varepsilon_3 - \sigma_3$



(a) (b)

Figure IX.21 – Comparaison des courbes de comportement local $\sigma_2 - \varepsilon_2$ obtenues par éléments finis et par la correction de type L pour une traction alternée sur éprouvette axisymétrique : (a) Historique complet ; (b) cycle stabilisé



(a) (b)

Figure IX.22 – Comparaison des courbes de comportement local $\sigma_3 - \varepsilon_3$ obtenues par éléments finis et par la correction de type L pour une traction alternée sur éprouvette axisymétrique : (a) Historique complet ; (b) cycle stabilisé

axisymétrique étudiée lors de l'évaluation des méthodes de type Neuber multiaxiales (figure VII.5). On impose une force de traction alternée, se résumant à un état de contrainte uniaxial maximal de 280 MPa en haut de l'éprouvette. Le comportement de base est celui du 30CND8 utilisé jusqu'ici, on lui superpose un écrouissage isotrope non linéaire dont voici les paramètres :

- R0 = 555 MPa
- Q = -200 MPa
- b = 6

Les figures IX.21 et IX.22 montrent que l'écrouissage isotrope est bien pris en compte par la correction de type L. La méthode de Buczynski-Glinka a aussi été appliquée avec succès.

IX.6 Relaxation partielle de contrainte moyenne

Dans la majorité des simulations effectuées jusqu'ici se produisait une relaxation de la contrainte moyenne. Elle apparaît en présence d'un écrouissage cinématique non linéaire, et lorsque le chargement nominal est asymétrique. Jusqu'à présent, cette relaxation était totale car l'écrouissage considéré était purement non linéaire, modélisé par deux coefficients C et D de la loi de comportement de Chaboche. Cependant, pour la plupart des matériaux, la redistribution des contraintes ne s'opère que pour les grandes amplitudes. On assiste donc à une relaxation partielle de contrainte moyenne. Pour modéliser un tel phénomène, on peut superposer un écrouissage linéaire au premier écrouissage. Une approche équivalente consiste à utiliser une forme d'évolution qui annule le terme de rappel aux faibles amplitudes (Chaboche et Jung, 1998) :

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{m}}\dot{p} \tag{IX.25}$$

avec :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{m}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{n}} - \frac{3}{2}\frac{D}{C}\underset{\approx}{\boldsymbol{\Phi}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{X}} \tag{IX.26}$$

et :

$$\underset{\approx}{\boldsymbol{\Phi}} = \left\langle \frac{DJ\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}\right) - \omega C}{1-\omega} \right\rangle^{m_1} \frac{1}{\left(DJ\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}\right)\right)^{m_2}} \underset{\approx}{\boldsymbol{I}} \tag{IX.27}$$

Nous allons maintenant observer la réponse de la correction de type L pour une relaxation partielle de la contrainte moyenne. Les paramètres du tenseur $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^L$ identifiés dans le paragraphe IX.3.4 sont à nouveau appliqués ici. L'éprouvette est à nouveau celle de la figure VII.5. On impose ici une force de traction répétée, se résumant à un état de contrainte uniaxial maximal de 280 MPa en haut de l'éprouvette. Le comportement de base est celui de 30CND8 utilisé jusqu'ici, on applique un seuil à l'écrouissage cinématique :

- $\omega = 0.2$
- m1 = 1
- m2 = 1

Une fois de plus, on constate sur les figures IX.23 et IX.24 que la relaxation de contrainte moyenne est bien prise en compte par la correction de type L. La méthode de Buczynski-Glinka a aussi été appliquée avec succès.

IX.7 Conclusion

A priori, il n'y avait aucune raison pour que l'application de la règle en β à des éprouvettes sollicitées en fatigue oligocyclique donne de bons résultats. Le modèle a été formulé pour des inclusions ellipsoïdales au sein d'une matrice infinie, alors que dans notre cas une surface libre borde l'inclusion. De plus, il ne s'agit pas vraiment d'une inclusion bien définie mais d'une zone plastique entourée par une matrice élastique. Cette matrice n'est d'ailleurs pas infinie mais limitée aux dimensions de la structure. Enfin, la forme de la zone plastique n'a rien d'un ellipsoïde.

Nous avons donc commencé par traiter des cas simples et, au fur et à mesure des difficultés rencontrées, opéré quelques modifications au modèle d'origine. D'une part, nous

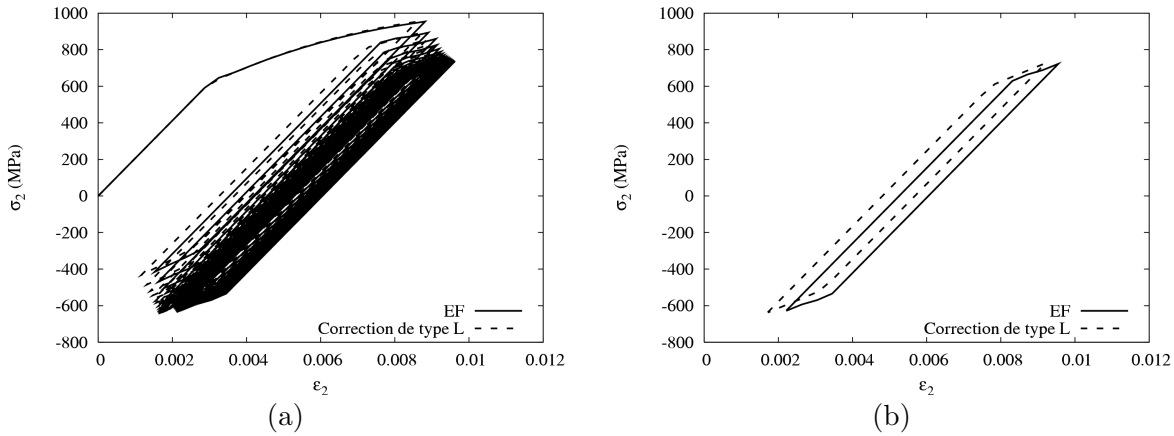


Figure IX.23 – Comparaison des courbes de comportement local $\sigma_2 - \varepsilon_2$ obtenues par éléments finis et par la correction de type L pour une traction alternée sur éprouvette axisymétrique : (a) Historique complet ; (b) cycle stabilisé

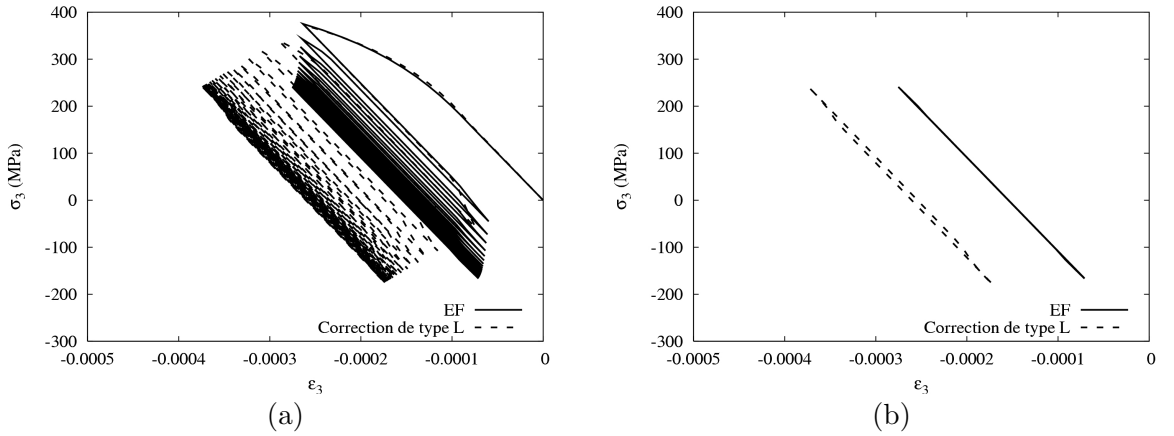


Figure IX.24 – Comparaison des courbes de comportement local $\sigma_3 - \varepsilon_3$ obtenues par éléments finis et par la correction de type L pour une traction alternée sur éprouvette axisymétrique : (a) Historique complet ; (b) cycle stabilisé

avons donné aux tenseurs $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}$ et $\underset{\approx}{\boldsymbol{D}}$ une forme anisotrope, ce qui a permis de prendre en compte la redistribution des contraintes autour de l'entaille. Trois colonnes et trois lignes ont été annulées pour prendre en compte la surface libre. Pour traduire la dépendance entre certaines contraintes et déformations de différentes directions, des termes de couplage ont été introduits. De plus, un terme linéaire δ a été introduit dans la correction de type NL pour éviter un rochet infini. Enfin, étant donné que la redistribution dépend de la forme de l'entaille, les composants des tenseurs doivent être identifiés. Un ensemble de coefficients identifiés est spécifique à une géométrie d'entaille et au comportement du matériau.

Les perspectives d'amélioration des méthodes proposées ici restent nombreuses et seront abordées dans la conclusion générale.

Après la description de la méthode du rainflow multiaxial nécessaire au calcul en fatigue sous chargements non proportionnels d'amplitude variable, nous allons dans la prochaine partie appliquer les corrections de type L et NL à diverses structures sous différents chargements :

- l'éprouvette considérée dans ce chapitre, sollicitée par des chargements plus complexes ;
- un bras de châssis de grue.

On comparera les résultats obtenus à ceux fournis par la méthode de Buczynski-Glinka et la méthode des éléments finis. Cela permettra notamment de constater l'impact sur la prévision de durée de vie des erreurs commises sur la contrainte et la déformation circonférentielle.

Troisième partie

Validation

Chapitre -X-

Traitement du signal

Après avoir déterminé les variables locales au point critique de la structure, dans le cas d'un chargement d'amplitude variable, il faut effectuer un traitement du signal préalablement à l'application d'un modèle de fatigue. Si le chargement est proportionnel, ou si on résume les composantes du tenseur des contraintes et des déformations à une seule variable équivalente, il est possible d'appliquer la méthode du rainflow uniaxial (chapitre IV). Dans le cas contraire, les signaux des différentes composantes ne sont pas concomitants et cette méthode n'est plus applicable. C'est dans ce contexte que la méthode du rainflow multiaxial, inspirée par la théorie de plasticité multisurface (Melnikov et Semenov, 1998) a été implémentée dans le code ZeBuLoN (Quilici et Musienko, 2004). On développe ici ce travail, en mettant au point par ailleurs un nouvel algorithme pour déterminer le centre de la plus petite hypersphère circonscrite à un ensemble de points, qui sera décrit plus loin.

X.1 Algorithme de rainflow multiaxial

A partir du trajet de chargement en contraintes (ou en déformations), l'algorithme fournit une série de centres et d'amplitudes qui caractérisent les cycles extraits. Il se base sur le concept de "surface active" utilisé dans certains modèles de plasticité, et sur une procédure d'extraction de cycles inspirée de la méthode du rainflow uniaxial.

Les différentes étapes de l'algorithme utilisé pour l'extraction de cycles sont données en figure X.1. Un simple trajet de chargement de traction uniaxiale (figure X.1 (a)) est choisi en exemple. L'algorithme débute avec un cercle réduit à un point en O. Pendant la première branche OA, le diamètre augmente en suivant le chargement, de manière à ce que la position finale corresponde à un cercle de diamètre OA (figure X.1 (b)). Juste après A, au début de la branche AB, une décharge est détectée, et une nouvelle surface active est créée, de diamètre AB (figure X.1 (c)). Une nouvelle décharge est détectée juste après B sur la branche BC, et une nouvelle surface active est créée à l'intérieur du cercle (AB). Une fois que l'on atteint le point C, la seconde et la troisième surface active coïncident, ce qui signifie qu'un cycle est fermé, et donc extrait (figure X.1 (d)). Après extraction, seul reste le cercle initial de diamètre OA. Il est réactivé et continue de grandir jusqu'au point D (figure X.1 (e)).

Dans ce cas uniaxial, une décharge est facile à détecter. Cependant des cas plus complexes nécessitent un critère, illustré en figure X.1 (f). Une surface active (trait plein) de centre $\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_{nd-1}$ et de rayon R a été créée. Il y a décharge lorsque :

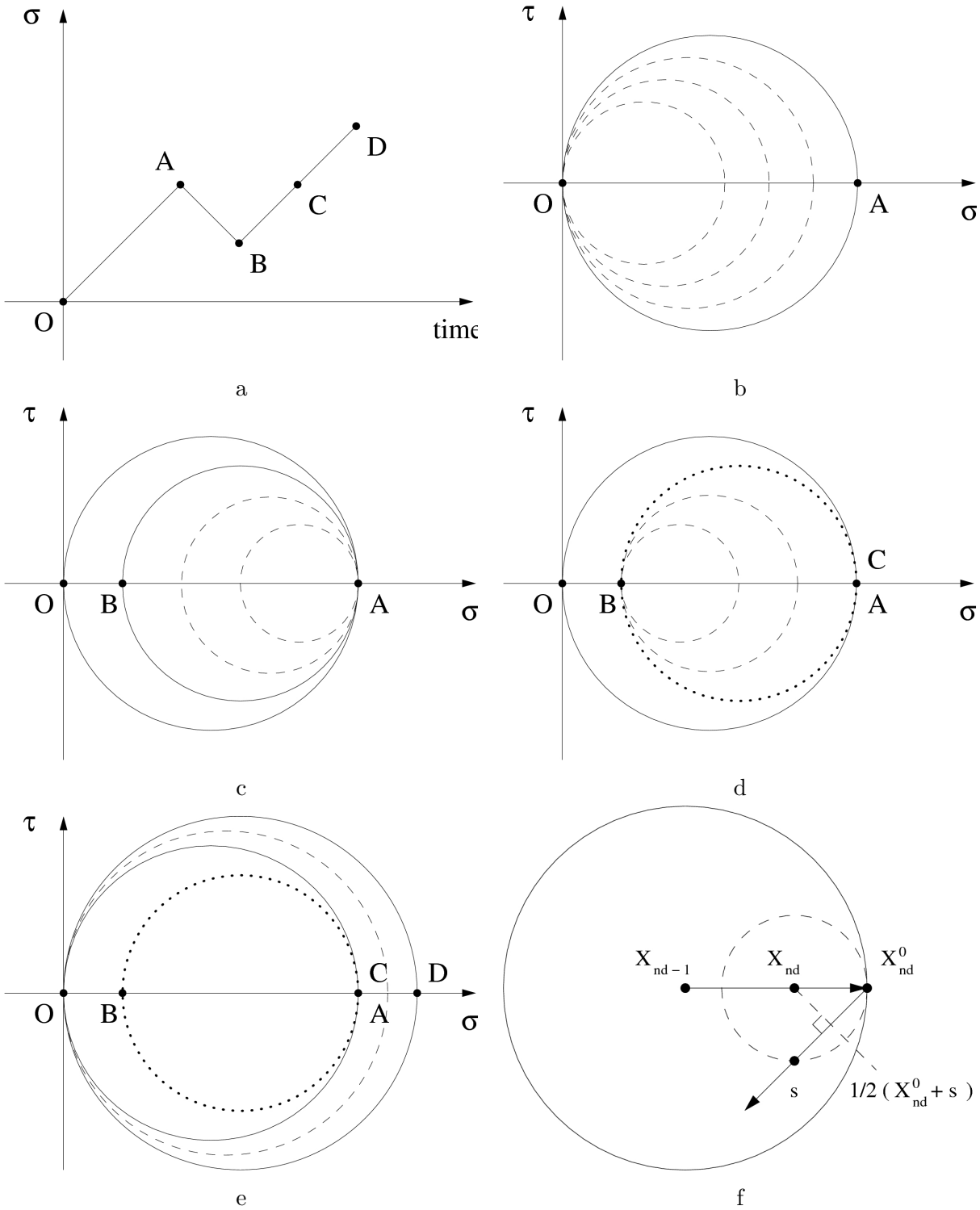


Figure X.1 – Illustration de la procédure d'extraction de cycle : (a) Exemple d'un trajet de chargement uniaxial ; (b) Positions successives (cercles en tirets) du domaine entourant le trajet de chargement pendant le premier chargement OA et sa position finale (cercle plein) ; (c) Positions successives et domaine final pendant la branche AB (d) Positions successives et domaine final pendant la branche BC (e) Elimination du cercle de diamètre AB et croissance du précédent cercle de diamètre OA pour atteindre OD (f) Détermination du centre de la surface active courante pour un chargement non proportionnel (Quilici et Musienko, 2004)

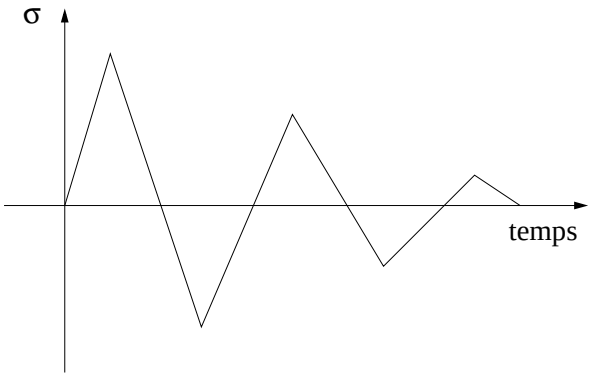


Figure X.2 – Trajet de chargement avec cycles d'amplitude décroissante

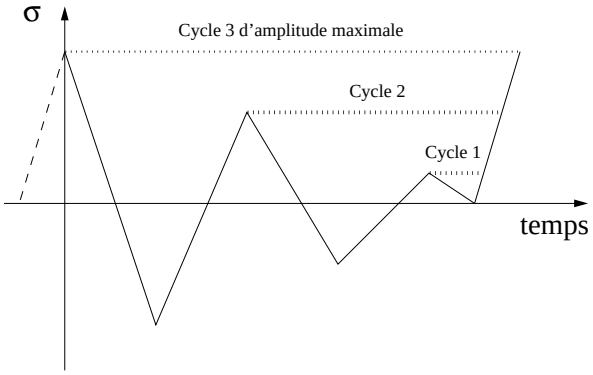


Figure X.3 – Réordonnancement de l'historique de contraintes précédent pour assurer un fonctionnement correct de la détection de cycles d'amplitudes décroissantes

$$(\underset{\sim}{\boldsymbol{s}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_{nd-1}) : d\underset{\sim}{\boldsymbol{s}} < 0 \tag{X.1}$$

Lorsqu'une décharge est détectée, l'origine $\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}^0_{nd}$ de la nouvelle surface active est gardée en mémoire. Puis le centre $\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_{nd}$ de cette surface se déplace entre $\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}^0_{nd}$ et le centre de la surface précédente $\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_{nd-1}$. Ce centre est à l'intersection de la médiatrice du segment $[s,X^0_{nd}]$ et de la droite (X_{nd-1},X^0_{nd}).

Sous la forme précédente, l'algorithme de comptage de cycles présente un certain nombre de défauts :

- i) Sur l'exemple précédent on peut remarquer que même si on ferme le cycle (c'est-à-dire si on revient à O après le point D), on ne détecte pas le cycle principal (celui d'amplitude correspondant à OD).
- ii) L'algorithme ne détecte pas des cycles d'amplitudes décroissantes du type de ceux décrits sur la figure X.2.
  Pour remédier à i) et ii) il suffit de réordonner l'historique de contraintes, de manière à débuter par le point correspondant à l'amplitude maximale. La figure X.3 illustre comment réordonner les cycles de la figure X.2 pour permettre une détection correcte des cycles élémentaires par le rainflow.
  Remarquons néammoins qu'il est alors nécessaire de remettre ultérieurement les cycles dans leur ordre naturel d'apparition, car cet ordre a une importance pour le cumul non linéaire de l'endommagement.
- iii) L'algorithme est en défaut sur le test du cycle biaxial triangulaire équilatéral. Ce

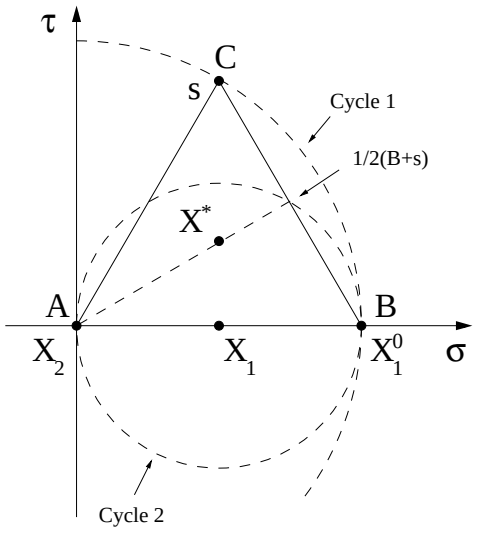


Figure X.4 – Surestimation de l'amplitude avec la version de base du rainflow multiaxial

test est un test de base pour les méthodes de calcul de l'amplitude d'un trajet de contraintes. En effet les méthodes simplifiées basées sur une double minimisation, qui sont généralement utilisées, conduisent au calcul d'une hypersphère d'amplitude AB et centrée sur un des côtés, soit une valeur inférieure au résultat recherché. En effet, comme le montre la figure X.4, un trouve on cycle d'amplitude 2 AB centré en A, au lieu du barycentre X^* du triangle ABC.
Pour remédier à ce problème de surestimation de l'amplitude du cycle externe, il suffit en fait de détecter préalablement ce dernier. Pour cela, on utilisera l'algorithme présenté dans la section suivante, qui fournit le centre $\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}^*$ et l'amplitude $\Delta\sigma$ du trajet de contraintes de manière robuste et efficace.
On initialisera alors l'algorithme de rainflow avec le centre détecté lors de cette phase préalable :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_0 = \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}^* \tag{X.2}$$

On montre facilement que l'initialisation de l'équation X.2 permet de corriger iii) et de retrouver correctement les cycles élémentaires dans le cas de ce chargement biaxial en triangle.

– iv) Il y a un problème lorsque la décharge se produit orthogonalement à la direction précédente (cas où $(X^0_{nd}\ S)$ est orthogonal à $(X_{nd-1}\ X^0_{nd})$ sur la figure X.5). Le centre X_{nd} de la surface active courante est alors indéfini.

Du fait de la correction iii), l'amplitude et le centre du cycle externe sont connus : on peut donc vérifier que les nouvelles surface actives construites par le rainflow, restent bien incluses dans le cycle externe. On se contentera alors d'ignorer les points de décharges qui définissent une surface active dont l'amplitude excède celle du cycle externe, comme représenté sur la figure X.5.

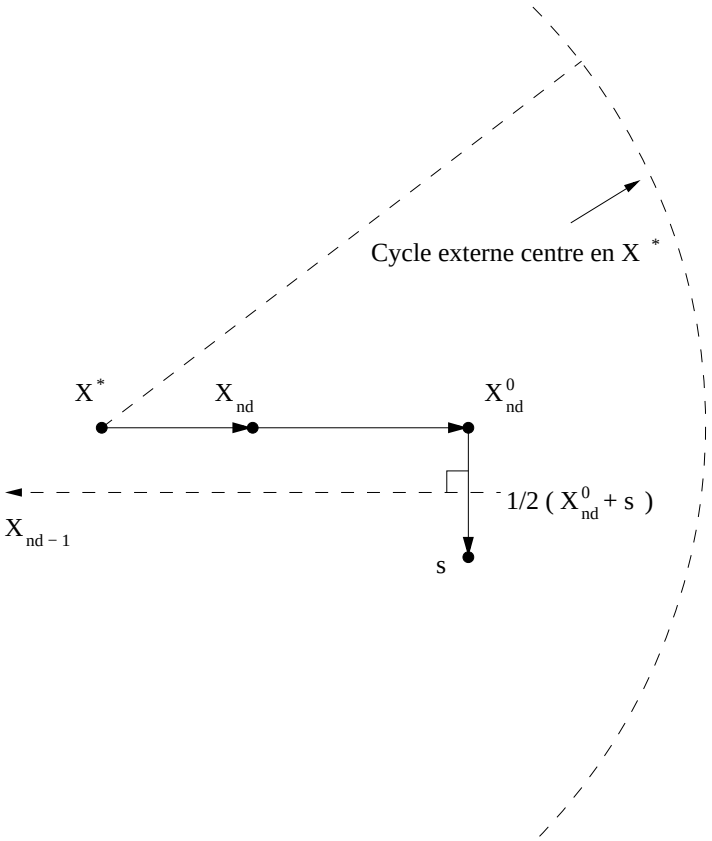


Figure X.5 – Cas de décharges orthogonales à la direction précédente : on rejette la décharge X_{nd}^{O} qui définit une surface active dont l'amplitude excède celle du cycle externe

X.2 Plus petite hypersphère circonscrite à un trajet de chargement

L'un des problèmes inhérents à l'algorithme du rainflow multiaxial est la surestimation de l'amplitude du cycle externe. Pour régler ce problème il suffit de déterminer préalablement le centre et l'amplitude du cycle externe. La détermination de la plus petite hypersphère circonscrite à un ensemble de points a suscité de nombreuses recherches durant les dernières décades. On peut comparer l'efficacité des différentes méthodes par certains critères : le nombre de dimensions de l'espace, le temps de calcul, la robustesse, et bien sûr le fait que le cercle trouvé soit bien le plus petit possible... Les applications sont très diverses, du traitement du signal en fatigue aux critères de fatigue, en passant par le traitement des données de localisation des satellites. Ce n'est pas le thème de recherche de cette thèse, c'est pourquoi nous ne nous étendrons pas sur la littérature. Une des méthodes les plus efficaces a été développée par Welzl (Welzl, 1991), améliorée et programmée par Gäertner (Gärtner, 1999). Les autres méthodes les plus connues ont été récapitulées (Bernasconi et Papadopoulos, 2005). Ce problème de la plus petite hypersphère est régulièrement abordé (Wang et al., 2007).

Une nouvelle méthode récursive a été proposée et développée ici (Quilici, 2009). Le principe est le suivant, et fait référence à la figure X.6. Soit un ensemble S de points P : $S = \{P\}$. Le but est de déterminer la plus petite hypersphère contenant tous ces points. Le centre de cette sphère est $\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}^*$, et son rayon. On choisit d'abord un point dit "de base", P_0^* quelconque dans S. P_0^* est inclus dans un sous-ensemble S^* de S. On détermine le point de $S - S^*$ le plus éloigné de P_0^*. Ce deuxième point devient P_1^*, le nouveau point de base, et on construit alors la plus petite hypersphère contenant P_1^* et $S^* = \{P_0^*\}$. P_1^* est alors inclus dans S^* et on cherche le point de $S - S^*$ le plus éloigné de X^*. On le désigne comme nouveau point de base P_2^*. On construit alors la plus petite hypersphère contenant P_2^* et $S^* = \{P_0^*, P_1^*\}$. Et ainsi de suite jusqu'à ce que l'hypersphère contienne tous les points de $S - S^*$ et donc de S. La dernière étape est représentée en figure X.7. On obtient la plus petite hypersphère contenant tous les points de S.

L'étape clé de chaque boucle est la construction de la plus petite hypersphère passant par le point de base P^* et contenant tous les points de S^*. Pour ce faire, on réalise une optimisation lagrangienne. Soit le lagrangien :

$$L(\lambda, \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}^*) = R(\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}^*, P^*) + \lambda \left[R(\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}^*, P^i) - R(\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}^*, P^*) \right] \tag{X.3}$$

où :

- P^* est le point de base courant ;
- P^i est un point de S^*.

La plus petite hypersphère passant par P^* et contenant tous les points P^i de S^* est telle que :

$$\underset{\lambda \geq 0}{Max} \left[\underset{\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}^*}{Min} \left(L(\lambda, \underset{\sim}{\boldsymbol{X}}^*) \right) \right] \tag{X.4}$$

Pour résoudre ce problème de Max-Min on dérive le lagrangien. Cette optimisation lagrangienne sera notée $O(P^*, S^*)$ dans l'algorithme suivant qui résume la méthode dans son ensemble.

<u>Initialisation</u>
$P_0^* \;=\; P_0$

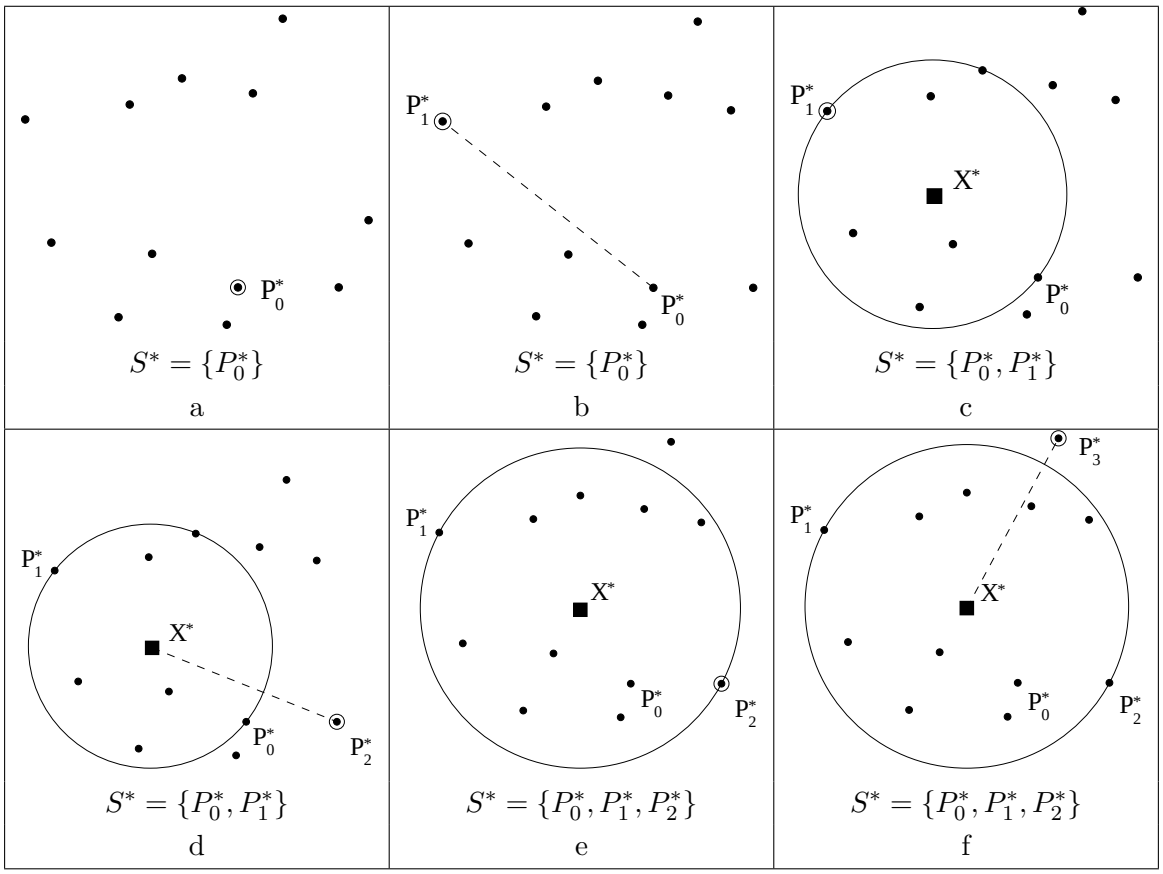


Figure X.6 – Détermination de la plus petite sphère circonscrite à un ensemble de points S : (a) Choix arbitraire du premier point de base P_0^*, intégration de P_0^* dans S^* ; (b) Le nouveau point de base P_1^* est le point de $S - S^*$ le plus éloigné de P_0^* ; (c) Construction de la plus petite hypersphère passant par P_1^* et contenant tous les points de S^*, intégration de P_1^* dans S^* ; (d) Le nouveau point de base P_2^* est le point de $S - S^*$ le plus éloigné de X^* ; (e) Construction de la plus petite hypersphère passant par P_2^* et contenant tous les points de S^*, intégration de P_2^* dans S^* ; (f) Le nouveau point de base P_3^* est le point de $S - S^*$ le plus éloigné de X^*

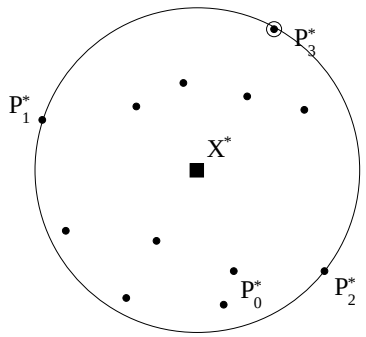


Figure X.7 – Construction de la plus petite hypersphère passant par P_3^* et contenant tous les points de S^*, $S^* = \{P_0^*, P_1^*, P_2^*, P_3^*\}$

$S^* = \{P_0^*\}$
$P_1^* \ = \ P_i$ tel que $\underset{P_i}{Max}\ d(P_0^*, P_i)$
$continuer = vrai$
<u>Détermination de la plus petite sphère circonscrite</u>
Tant que $(continuer)$
Résoudre $O(P^*, S^*)$
P_i tel que $\underset{P_i}{Max}\ d(X^*, P_i)$
Si $P_i \ \notin \ S^*$
$P^* \ = \ P_i$
$S^* = S^* \bigcup \{P^*\}$
Sinon $continuer = faux$
Fin Si
Fin Tant que

X.3 Conclusion

La méthode du rainflow multiaxial décrite ici permet de traiter le cas de chargements proportionnels en prenant en compte le tenseur des contraintes (ou des déformations) en tant que tel, sans le remplacer par une variable de comptage équivalente. Notons qu'il n'a pas été formellement démontré que pour n'importe quel trajet de chargement, c'est bien la plus petite hypersphère possible qui est déterminée par l'algorithme énoncé précédemment. Toutefois, de nombreux trajets ont été testés et l'algorithme n'a jamais été mis en défaut.

Avec cette méthode, des cas de chargements non proportionnels d'amplitude variable peuvent maintenant être considérés. Dans le chapitre suivant, nous nous attacherons à comparer les résultats fournis par les corrections proposées, la méthode de Buczynski-Glinka et la méthode des éléments finis sur une éprouvette entaillée sous des chargements simples puis complexes. Des calculs de durées de vie seront effectués par la loi d'endommagement de Lemaitre-Chaboche pour évaluer l'impact des erreurs commises sur la prévision du nombre de cycles à rupture.

Chapitre -XI-

Validation sur éprouvette entaillée axisymétrique

Avant de valider les corrections proposées sur des cas industriels, nous allons les appliquer à des chargements sur éprouvettes. Quelques tests ont déjà été effectués sur une éprouvette axisymétrique dans le chapitre IX, en traction, en torsion et pour un chargement combiné proportionnel. Tout en prenant des simulations par éléments finis pour référence, nous allons maintenant comparer nos corrections avec la méthode de Buczynski-Glinka sur ces chargements. Nous appliquerons aussi des chargements plus complexes : proportionnels aléatoires, non proportionnels d'amplitude constante, et non proportionnel aléatoire. Enfin, nous évaluerons l'impact des erreurs commises par les deux méthodes de calcul accéléré sur la précision du calcul de durée de vie en fatigue par la loi d'endommagement de Lemaitre-Chaboche. Pour l'application des corrections de type L et NL, les coefficients de $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{L}$, $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{NL}$ et $\underset{\approx}{\boldsymbol{D}}^{NL}$ des tables IX.3 et IX.4 sont réutilisés pour tous les cas de chargement.

XI.1 Chargements proportionnels

Nous considérerons pendant tout ce chapitre l'éprouvette axisymétrique du chapitre IX.

XI.1.1 Traction simple

Nous effectuons d'une part des simulations de traction répétée, comme dans le paragraphe IX.3.3 mais le travail porte ici sur trois amplitudes différentes (1, 2 et 3) de chargement. On observe un état de contrainte uniaxial maximal sur la tête de l'éprouvette de :

- 250 MPa pour l'amplitude 1,
- 280 MPa pour l'amplitude 2, déjà testée dans le paragraphe IX.3.3,
- 360 MPa pour l'amplitude 3.

D'autre part, pour le même chargement maximal de l'amplitude 2, deux rapports de charge R = -0.3 et R = -0.7 ont été testés en plus de $R = 0$. Sur les figures H.1, H.2, H.3, H.4, H.5 et H.6 de l'annexe H on compare les courbes de comportement local obtenues en traction simple par la correction de type L et la méthode de Buczynski-Glinka, que nous abrégerons

		EF	Erreur B-G (%)	Erreur correction type L (%)
Amplitude 1	$\Delta\sigma_2$ (MPa)	1289.4	0.7	0.6
	$\Delta\sigma_3$ (MPa)	364.4	3.7	0.7
	$\Delta\varepsilon_2$ (10^{-3})	0.65	1.3	0.9
	$\Delta\varepsilon_3$ (10^{-4})	0.18	44.2	1.1
Amplitude 2	$\Delta\sigma_2$ (MPa)	1348.8	0.7	1.1
	$\Delta\sigma_3$ (MPa)	407.3	8.5	2.5
	$\Delta\varepsilon_2$ (10^{-3})	0.73	3.5	2.1
	$\Delta\varepsilon_3$ (10^{-4})	0.20	119.0	2.2
Amplitude 3	$\Delta\sigma_2$ (MPa)	1529.2	2.5	2.7
	$\Delta\sigma_3$ (MPa)	519.7	17.3	4.8
	$\Delta\varepsilon_2$ (10^{-3})	1.00	5.6	1.4
	$\Delta\varepsilon_3$ (10^{-4})	0.28	257.1	4.6

Table XI.1 – Comparaison des erreurs commises par la méthode de B-G et la correction de type L pour une traction répétée sur éprouvette axisymétrique à différentes amplitudes

		EF	Erreur B-G (%)	Erreur correction type L (%)
R = -0,3	$\Delta\sigma_2$ (MPa)	1537.7	2.6	2.8
	$\Delta\sigma_3$ (MPa)	525.1	17.6	4.8
	$\Delta\varepsilon_2$ (10^{-3})	1.01	5.7	1.4
	$\Delta\varepsilon_3$ (10^{-4})	0.28	262.3	4.7
R = -0,7	$\Delta\sigma_2$ (MPa)	1762.8	3.8	3.5
	$\Delta\sigma_3$ (MPa)	668.8	25.0	4.3
	$\Delta\varepsilon_2$ (10^{-3})	1.43	7.7	1.3
	$\Delta\varepsilon_3$ (10^{-4})	0.41	374.3	7.0

Table XI.2 – Comparaison des erreurs commises par la méthode de B-G et la correction de type L pour une traction sur éprouvette axisymétrique à différents rapports de charge

B-G, avec la simulation par éléments finis (EF) de référence. Les résultats de traction simple répétée obtenus avec la correction de type L avaient déjà été présentés dans le chapitre IX. On représente aussi quantitativement les erreurs relatives commises par l'une et l'autre de ces deux méthodes. Pour un rapport de charge $R = 0$, le tableau XI.1 compare les erreurs commises par les deux méthodes de calcul accéléré sur les amplitudes de contrainte et déformation du cycle stabilisé, suivant toutes les composantes de contrainte non nulles et pour trois amplitudes de chargement.

On constate que les erreurs relatives commises par les deux méthodes sur la contrainte σ_2 sont comparables. Mais la méthode de Buczynski-Glinka commet une erreur plus importante sur ε_2 et ε_3. Cette dernière déformation est cependant faible. Mais elle commet aussi une erreur sur σ_3 ce qui, comme nous allons le voir, a une influence non négligeable sur la prévision de durée de vie. On observe que les erreurs augmentent avec l'amplitude. Le tableau XI.2 compare les erreurs commises pour la même valeur maximale du chargement mais avec les deux autres rapports de charge.

		EF	B-G	Correction type L
Amplitude 1	J_{max} (MPa)	584.8	584.2	584.4
	ΔJ (MPa)	1149.9	1145.5	1143.9
Amplitude 2	J_{max} (MPa)	601.2	607.8	604.9
	ΔJ (MPa)	1197.5	1215.5	1209.7
Amplitude 3	J_{max} (MPa)	673.2	701.5	690.8
	ΔJ (MPa)	1346.0	1403.0	1381.7
R = -0.3	J_{max} (MPa)	676.7	706.0	694.9
	ΔJ (MPa)	1353.1	1412.0	1389.9
R = -0.7	J_{max} (MPa)	787.4	818.4	797.1
	ΔJ (MPa)	1574.6	1636.9	1594.2

Table XI.3 – Comparaison des variables critiques de la loi de Lemaître-Chaboche obtenues après calcul par éléments finis et par les deux méthodes de calcul accéléré

On observe ici que les erreurs commises augmentent avec le rapport de charge, et que la méthode de Buczysnki-Glinka commet toujours une forte erreur sur la contrainte σ_3. D'après ces observations, on peut supposer que l'équivalence sur laquelle se base cette méthode n'est pas valable dans les directions où la contrainte est induite par l'effet "Poisson". Cela reste à confirmer sur les cas industriels que nous aborderons plus tard. Nous allons maintenant évaluer l'impact de ces erreurs sur la durée de vie en fatigue calculée par la loi d'endommagement de Lemaitre-Chaboche. Seul le chargement répété d'amplitude 1, le plus "favorable" à la méthode de Buczynski-Glinka, a été considéré. Le tableau XI.3 récapitule les valeurs des variables critiques intervenant dans la formulation de la loi d'endommagement de Lemaitre-Chaboche obtenues par post-traitement des résultats EF. On observe aussi des erreurs sur ces valeurs correspondant à chaque méthode de calcul accéléré, et répercutant les erreurs précédentes. Le comportement choisi est purement cinématique non linéaire, la relaxation de la contrainte moyenne est donc totale. La valeur moyenne de la trace du tenseur des contraintes au cycle stabilisé, $\overline{I}_1$ est donc nulle et n'est pas présentée ici.

Une courbe S-N a été identifiée à partir d'essais de traction alternée sur le 30CND8, et est représentée en figure XI.1. Les paramètres du modèle de Lemaitre-Chaboche (chapitre V) sont les suivants :

- $M(\overline{I}_1) = 22462.3$ MPa
- $\beta = 2.94$
- $\sigma_{l0} = 480$ MPa
- $\sigma_u = 969$ MPa
- $a = 1$

Un calcul de durée de vie a été réalisé pour ce cas de charge après application des 3 méthodes, les durées de vie théoriques sont présentées en table XI.4.

On constate donc que la correction de type L apporte une plus grande précision dans le calcul de durée de vie. Cette amélioration est notamment due à une meilleure précision sur l'amplitude de la contrainte circonférentielle σ_3, comme le montre la figure XI.2 pour R = -0,7. La durée de vie évaluée après la correction L est plus proche de celle obtenue après simulation par éléments finis, tout en restant conservative.

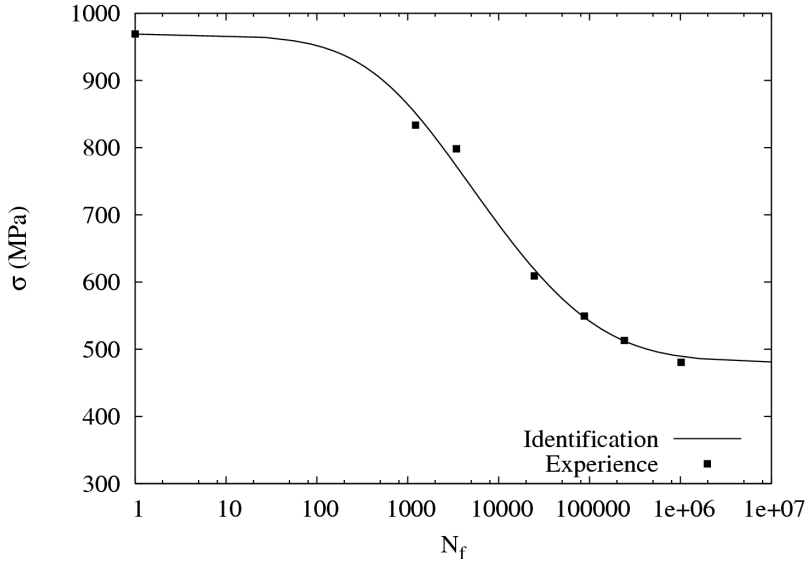


Figure XI.1 – Identification de la courbe S-N du 30CND8

	EF	B-G	Correction type L
Amplitude 1	39007	41784	41613
Amplitude 2	27074	23355	24022
Amplitude 3	8068	5647	6150
R = -0,3	7646	5282	5769
R = -0,7	1062	691	833

Table XI.4 – Durées de vie calculées après simulation par éléments finis, par la méthode de Buczynski-Glinka, et par la correction de type L

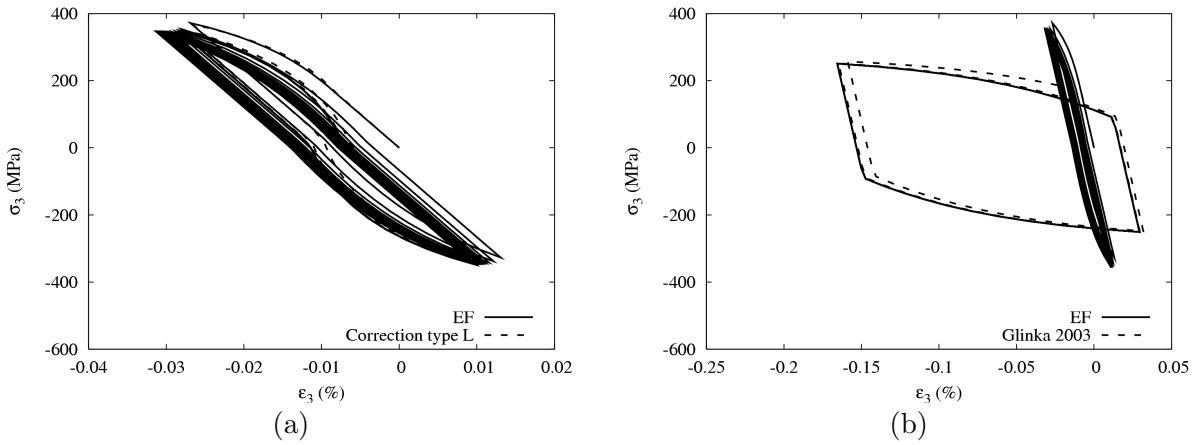


Figure XI.2 – Comparaison des courbes de comportement local dans la direction circonférentielle obtenues par éléments finis, par la méthode de Buczynski-Glinka et par la correction de type L pour une traction à R = -0.7

		EF	Erreur B-G (%)	Erreur correction type L (%)
$R = 0$	$\Delta\sigma_5$ (MPa)	733.4	2.3	3.2
	$\Delta\varepsilon_5$ (10^{-3})	0.62	9.2	11.5

Table XI.5 – Comparaison des erreurs commises par la méthode de B-G et la correction de type L pour une torsion répétée sur éprouvette axisymétrique

	EF	B-G	Correction type L
J_{max} (MPa)	640.5	649.8	655.3
ΔJ (MPa)	1270.2	1299.6	1310.5

Table XI.6 – Comparaison des variables critiques de la loi de Lemaitre-Chaboche obtenues après calcul par éléments finis et par les deux méthodes de calcul accéléré

XI.1.2 Torsion simple

Les courbes de comportement local obtenues en torsion simple par la correction de type L et la méthode de Buczynski-Glinka sont comparées avec la simulation EF de référence sur la figure H.6 de l'annexe H. Les résultats obtenus avec la correction de type L avaient déjà été présentés dans le chapitre IX. De même que pour la traction simple, les erreurs relatives commises par les deux méthodes sont présentées dans le tableau XI.5.
On constate ici que les deux méthodes commettent des erreurs relatives comparables. Il en résulte que les variables critiques de la loi d'endommagement de Lemaitre-Chaboche sont comparables aussi (table XI.6). Un calcul de durée de vie a été réalisé pour ces trois cas, les prévisions sont les suivantes :

- 35168 cycles par la méthode des éléments finis ;
- 29581 cycles par la méthode de Buczynski-Glinka ;
- 27812 cycles par la correction de type L.

XI.2 Chargements de traction-torsion

XI.2.1 Chargement proportionnel

La figure H.7 de l'annexe H présente la comparaison entre les courbes de comportement local obtenues par la correction de type L, la méthode de Buczynski-Glinka et la simulation EF de référence. Les résultats obtenus avec la correction de type L avaient déjà été présentés dans le chapitre IX. Les erreurs relatives figurent dans le tableau XI.7. De nouveau, la méthode de Buczynski-Glinka commet une erreur importante sur σ_3. Les valeurs des variables critiques du calcul de durée de vie en fatigue figurent dans le tableau XI.8.La durée de vie en fatigue a été calculée pour les trois méthodes, on trouve :

- 25527 cycles par la méthode des éléments finis ;
- 22051 cycles par la méthode de Buczynski-Glinka ;
- 22353 cycles par la correction de type L.

		EF	Erreur B-G (%)	Erreur correction type L (%)
$R = 0$	$\Delta\sigma_2$ (MPa)	956.2	1.2	1.4
	$\Delta\sigma_3$ (MPa)	284.5	11.1	4.7
	$\Delta\sigma_5$ (MPa)	523.8	3.9	4.7
	$\Delta\varepsilon_2$ (10^{-3})	0.53	5.3	3.4
	$\Delta\varepsilon_3$ (10^{-4})	0.18	139.2	1.0
	$\Delta\varepsilon_5$ (10^{-3})	0.43	10.2	10.4

Table XI.7 – Comparaison des erreurs commises par la méthode de B-G et la correction de type L pour une traction-torsion répétée en phase sur éprouvette axisymétrique

	EF	B-G	Correction type L
J_{max} (MPa)	625.6	633.8	632.3
ΔJ (MPa)	1248.2	1267.5	1264.6

Table XI.8 – Comparaison des variables critiques de la loi de Lemaître-Chaboche obtenues après calcul par éléments finis et par les deux méthodes de calcul accéléré

XI.2.2 Chargement proportionnel d'amplitude variable

Nous allons considérer ici le chargement représenté en figure XI.3. C'est la correction de type NL qui a été appliquée ici. Pour plus de visibilité, la comparaison entre les historiques des huit dernières branches sont présentés sur la figure H.8 de l'annexe H. Des calculs de durée de vie ont été effectués et on obtient :

- 178 séquences par la méthode des éléments finis ;
- 148 séquences par la méthode de Buczynski-Glinka ;
- 167 séquences par la correction de type NL.

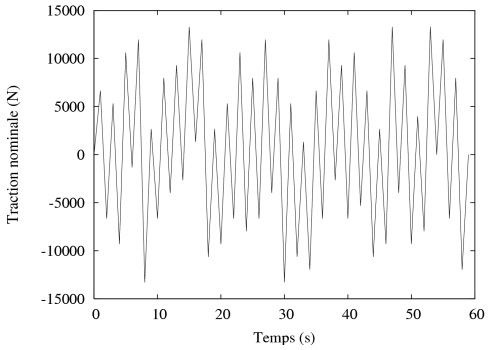


Figure XI.3 – Trajet de chargement proportionnel d'amplitude variable

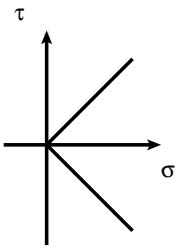


Figure XI.4 – Trajet de chargement non proportionnel 1

	EF	Erreur B-G (%)	Erreur correction type L (%)
$\Delta\sigma_2$ (MPa)	932.8	1.1	0.8
$\Delta\sigma_3$ (MPa)	296.7	16.7	1.5
$\Delta\sigma_5$ (MPa)	860.6	1.8	0.4
$\Delta\varepsilon_2$ (10^{-3})	0.57	0.6	3.2
$\Delta\varepsilon_3$ (10^{-4})	0.22	120.0	19.2
$\Delta\varepsilon_5$ (10^{-3})	1.09	8.8	5.9

Table XI.9 – Comparaison des erreurs commises par la méthode de B-G et la correction de type L pour le chargement 1 sur éprouvette axisymétrique

XI.2.3 Chargement non proportionnel 1

Nous allons maintenant tester les deux méthodes de calcul accéléré sous un chargement utilisé par Buczynski et Glinka (Buczynski et Glinka, 2003) dans leur étude de 2003. Le trajet est présenté en figure XI.4. La figure H.9 de l'annexe H présente la comparaison entre les courbes de comportement local obtenues par la correction de type L, la méthode de Buczynski-Glinka et la simulation EF de référence. Les erreurs relatives figurent dans le tableau XI.9. Les valeurs suivantes correspondent aux amplitudes du cycle stabilisé dans son ensemble. Elles ne correspondent pas aux sous-cycles détectés par la méthode du Rainflow multiaxial. Il ne faut donc pas corréler directement les erreurs relatives du tableau XI.9 avec les erreurs sur les variables critiques de la loi d'endommagement de Lemaitre-Chaboche, et les erreurs sur les durées de vie. En effet, les variables critiques de la loi et les durées de vie en fatigue sont calculées à partir des cycles extraits par le rainflow multiaxial. Il en est de même pour tous les chargements non proportionnels considérés, d'amplitude constante ou variable. Le tableau XI.10 présente les variables critiques pour le calcul de durée de vie en fatigue calculées sur les cycles extraits par le rainflow multiaxial.
La durée de vie en fatigue a été calculée pour les trois méthodes, on trouve :

	EF	B-G	Correction type L
J_{max} (MPa)	811.5	822.1	815.5
ΔJ (MPa)	1505.4	1529.3	1509.9

Table XI.10 – Comparaison des variables critiques de la loi de Lemaître-Chaboche obtenues après calcul par éléments finis et par les deux méthodes de calcul accéléré

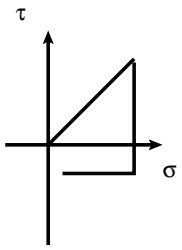


Figure XI.5 – Trajet de chargement non proportionnel 2

	EF	Erreur B-G (%)	Erreur correction type L (%)
$\Delta\sigma_2$ (MPa)	961.1	0.3	0.3
$\Delta\sigma_3$ (MPa)	261.5	0.1	3.9
$\Delta\sigma_5$ (MPa)	620.8	2.3	3.2
$\Delta\varepsilon_2$ (10^{-3})	0.48	5.4	3.6
$\Delta\varepsilon_3$ (10^{-4})	0.20	86.5	28.2
$\Delta\varepsilon_5$ (10^{-3})	0.47	15.3	17.3

Table XI.11 – Comparaison des erreurs commises par la méthode de B-G et la correction de type L pour le chargement 2 sur éprouvette axisymétrique

- 3394 cycles par la méthode des éléments finis ;
- 3040 cycles par la méthode de Buczynski-Glinka ;
- 3211 cycles par la correction de type L.

XI.2.4 Chargement non proportionnel 2

Nous allons maintenant tester les deux méthodes de calcul accéléré sous un autre chargement utilisé par Buczynski et Glinka (Buczynski et Glinka, 2003) dans leur étude de 2003. Le trajet est présenté en figure XI.5. La figure H.10 de l'annexe H présente la comparaison entre les courbes de comportement local obtenues par la correction de type L, la méthode de Buczynski-Glinka et la simulation EF de référence. Les erreurs relatives figurent dans le tableau XI.11. Le tableau XI.12 présente les variables critiques pour le calcul de durée de vie en fatigue calculées sur les cycles extraits par le rainflow multiaxial.
La durée de vie en fatigue a été calculée pour les trois méthodes, on trouve :

	EF	B-G	Correction type L
J_{max} (MPa)	642.9	655.3	657.1
ΔJ (MPa)	1246.1	1266.8	1269.0

Table XI.12 – Comparaison des variables critiques de la loi de Lemaître-Chaboche obtenues après calcul par éléments finis et par les deux méthodes de calcul accéléré

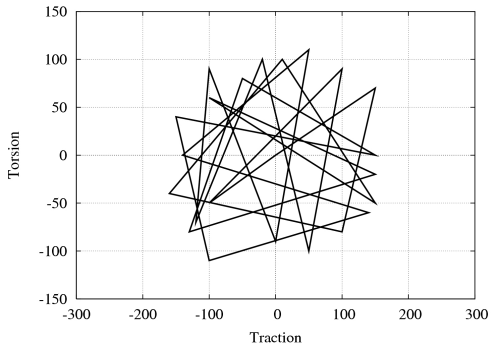


Figure XI.6 – Trajet de chargement non proportionnel d'amplitude variable

- 9382 cycles par la méthode des éléments finis ;
- 8006 cycles par la méthode de Buczynski-Glinka ;
- 7971 cycles par la correction de type L.

XI.2.5 Chargement non proportionnel d'amplitude variable

Nous allons considérer ici le chargement représenté en figure XI.6. C'est la correction de type NL qui a été appliquée ici. Pour les chargements d'amplitude variable, l'application de la méthode de Buczynski-Glinka nécessite l'application d'un traitement de l'historique du signal en fond d'entaille basé sur la méthode du rainflow uniaxial. Comme le rainflow, ce traitement est identique sur toutes les composantes du tenseur des contraintes et n'est donc applicable qu'aux chargements proportionnels. La méthode de Buczynski-Glinka ne peut donc pas être appliquée aux chargements non proportionnels aléatoires. La comparaison entre les historiques fournis par la méthode des éléments finis et la correction de type NL est présentée pour les huit dernières branches de la séquence, pour plus de visibilité, sur la figure H.11 de l'annexe H. Des calculs de durée de vie ont été effectués et on obtient :

- 857 séquences par la méthode des éléments finis ;
- 744 séquences par la correction de type NL.

XI.3 Conclusion

Dans le chapitre IX nous avions déjà constaté une bonne précision dans le calcul de la contraintes et de la déformation circonférentielle par les corrections proposées. Les calculs de durée de vie effectués ici nous montrent que la sous-estimation de cette contrainte par la méthode de Buczynski-Glinka résulte en une surestimation des invariants de von Mises qui entrent dans le calcul de durée de vie par la loi de Lemaitre-Chaboche. Cela résulte en une prévision de durée de vie trop conservative. Les durées de vie calculées après application des corrections de type L et NL sont aussi conservatives, mais sont plus proches de celles obtenues par la méthode des éléments finis.

Il est à noter que la méthode de Buczynski-Glinka ne peut pas être appliquée à un chargement non proportionnel aléatoire. Les corrections de type L et NL sont les seules méthodes de calcul accéléré pouvant appréhender ce type de chargement.

Nous allons à présent appliquer les différentes méthodes à une structure industrielle.

Chapitre -XII-

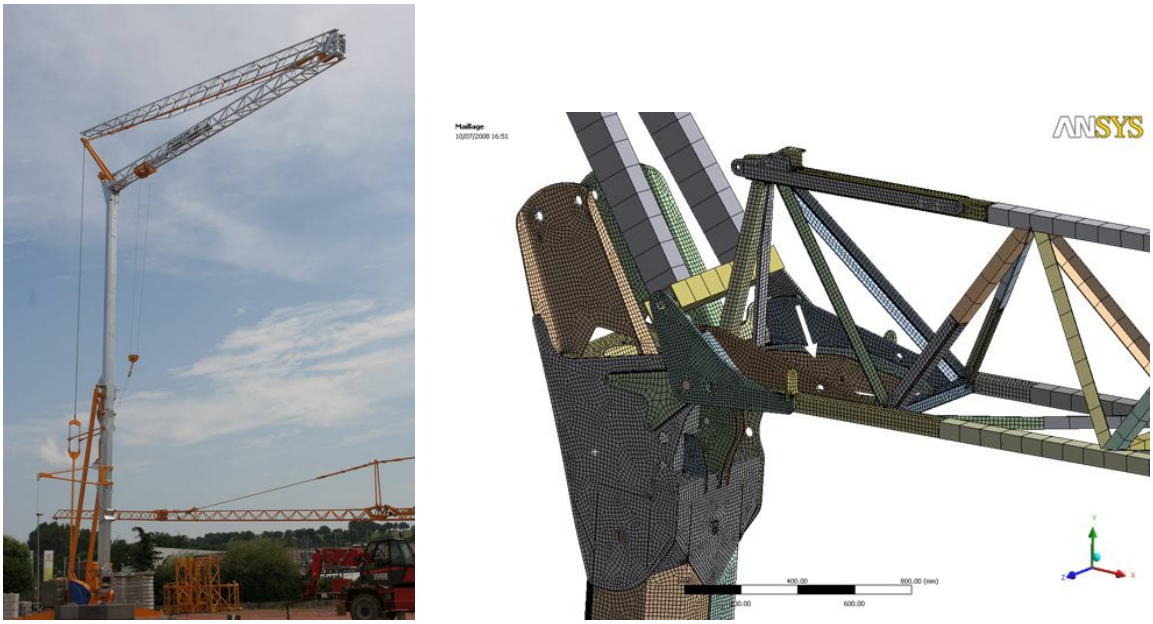
Validation sur un bras de châssis de grue

La société Manitowoc conçoit et construit des engins de travaux publics. Elle participe à la commission Manutention-Levage du Cetim et rencontre des problèmes de fatigue sur ses grues, par exemple la grue B40. Des fissures apparaissent dans les congés du bras de châssis, l'une des pièces les plus sollicitées dans une grue. Il relie la flèche de la grue et le châssis. Les figures XII.1 représentent (a) la grue réelle et (b) son modèle numérique, sur lequel on peut localiser le bras de châssis (flèche). La définition du cycle subi par cette pièce est très simple. La grue soulève une charge, sa flèche tourne, et la charge est déposée. Puis elle effectue le mouvement inverse sans la charge, comme le montre la figure XII.2.

Les calculs par éléments finis de cette pièce ont été effectués sur Ansys Workbench et Ansys classic. Le soulèvement de la charge produit un effort de flexion sur le bras de châssis qui est directement relié à la flèche. Les figures XII.3 (a) et (b) représentent les conditions aux limites et les efforts extérieurs imposés au bras. Celui-ci subit une force verticale à une de ses extrémités (a,b). Le bras est encastré de l'autre coté dans le châssis par ses deux tourillons inférieur et supérieur, et au niveau d'un trou pour bloquer la rotation du bras pendant que la flèche tourne. Cela résulte en un blocage radial de la demi-circonférence sur les tourillons supérieur (b) et inférieur (a) ; et un blocage radial du trou (a). De plus, on bloque le déplacement suivant Y en un point de la butée (b).

Pour la validation de cette grue, différents cas de charge ont été étudiés. Par exemple, l'un des cas de charge consiste en l'application à l'extrémité de la grue du chargement de la figure XII.4 avec une force verticale allant de $F_{min} = 59772$ N à $F_{max} = 268976$ N et une force latérale due à la rotation de la flèche de $|T_{min}| = |T_{max}| = 5507$ N. C'est ce cas de charge que nous allons étudier.

Le bras de chassis se compose en partie de tôles soudées modélisées par des éléments coques. Les deux blocs dont font partie les tourillons sont moulés par fonderie. Le matériau qui constitue l'ensemble du bras de châssis est l'acier S355, laminé ou fondu selon la partie. Pour calculer la durée de vie de cette pièce, Manitowoc réalise des calculs par éléments finis élastiques, puis évalue les contraintes et déformations réelles à l'aide de corrections indépendantes du matériau. La société n'a donc pas été en mesure de nous fournir les paramètres du comportement plastique du matériau. J'ai cependant pu identifier ces paramètres sur des essais de traction alternée à déformation imposée sur des éprouvettes de S355 de fonderie. On obtient les paramètres suivants pour la loi de comportement de



(a) (b)

Figure XII.1 – (a) Grue B40 (b) Maillage et emplacement du bras de châssis

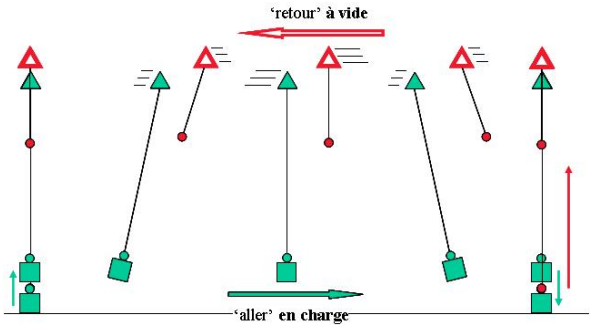
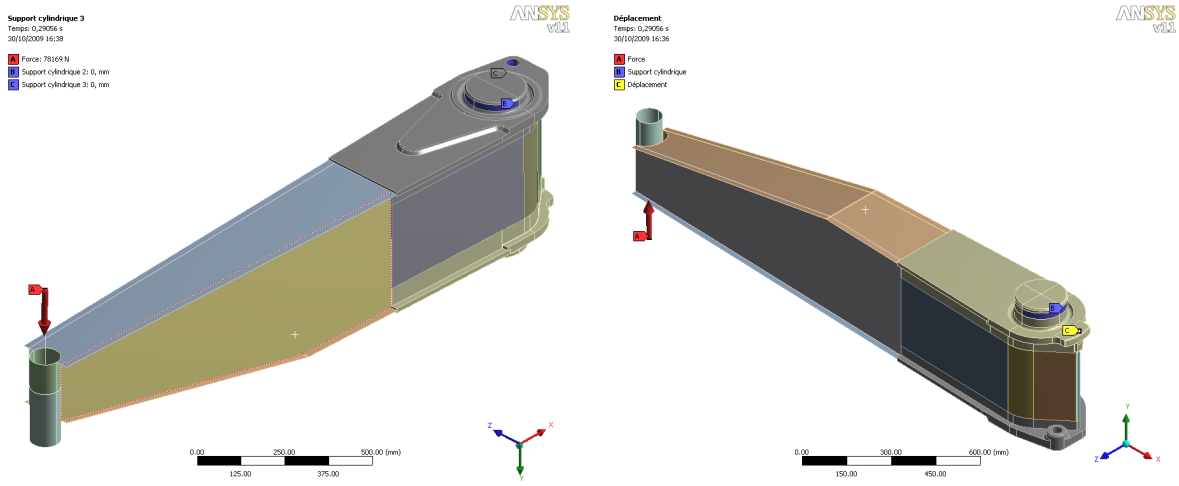


Figure XII.2 – Cycle élémentaire effectué par la grue



(a) (b)

Figure XII.3 – Forces et conditions aux limites imposées au bras

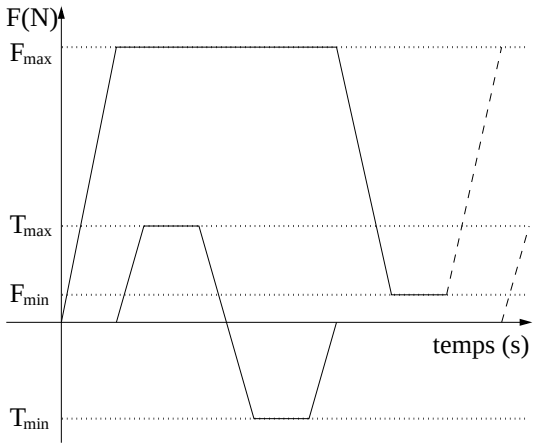
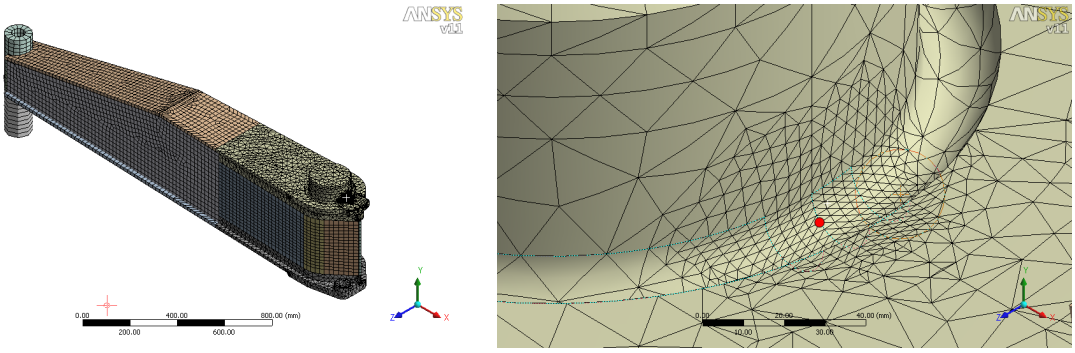


Figure XII.4 – Chargement subi par le bras



(a) (b)

Figure XII.5 – Forces et conditions aux limites imposées au bras

$$C_{22}^L = 1,38.10^5 \text{ MPa} \quad C_{33}^L = 2,51.10^5 \text{ MPa} \quad C_{23}^L = 6,37.10^4 \text{ MPa}$$

Table XII.1 – Paramètres de la correction de type L

Chaboche :

- E = 190000 MPa
- R0 = 250 MPa
- C = 92749 MPa
- D = 534

Le maillage d'origine fourni par la société Manitowoc était trop volumineux, la structure a donc été remaillée avec moins d'éléments mais un raffinement local qui introduit une portion de maillage régulier dans la partie du congé supérieur sujette aux fissurations. Le maillage est représenté par les figures XII.5 (a) et (b). Nous nous intéresserons au point critique représenté par un point rouge où la contrainte de von Mises est maximale (b).

Le chargement a été imposé pendant 15 cycles nécessaires à la stabilisation de la structure. La figure XII.6 représente la contrainte de von Mises sur l'ensemble du bras à la fin de la première charge. La figure XII.7 représente la déformation plastique cumulée apparaissant dans le congé supérieur.

L'application des corrections proposées doit s'effectuer dans un repère dont l'une des directions est normale à la surface. Un repère local a donc été crée dans Ansys classic, tel que la direction 1 soit normale à la surface, et la direction 3 soit la direction circonférentielle.

Ansys classic ne permet apparemment pas de post-traiter un historique de variables dans un repère local. La démarche étant donc fastidieuse, les valeurs des contraintes et déformations locales ont été relevées seulement pendant la première charge et le cycle stabilisé. La force T due à la rotation de la flèche a un effet négligeable car les seules contraintes non nulles apparaissent dans les directions 2 et 3.

Les paramètres de la correction de type L ont été identifiés sur la première charge et sont présentés dans la table XII.1. Puis 15 cycles ont été simulés avec la correction de type L et la méthode de Buczynski-Glinka. La figure XII.8 présente les courbes de comportement local obtenues par les trois méhodes de calcul. Seule la première branche et le cycle stabilisé sont représentés pour la méthode des éléments finis.

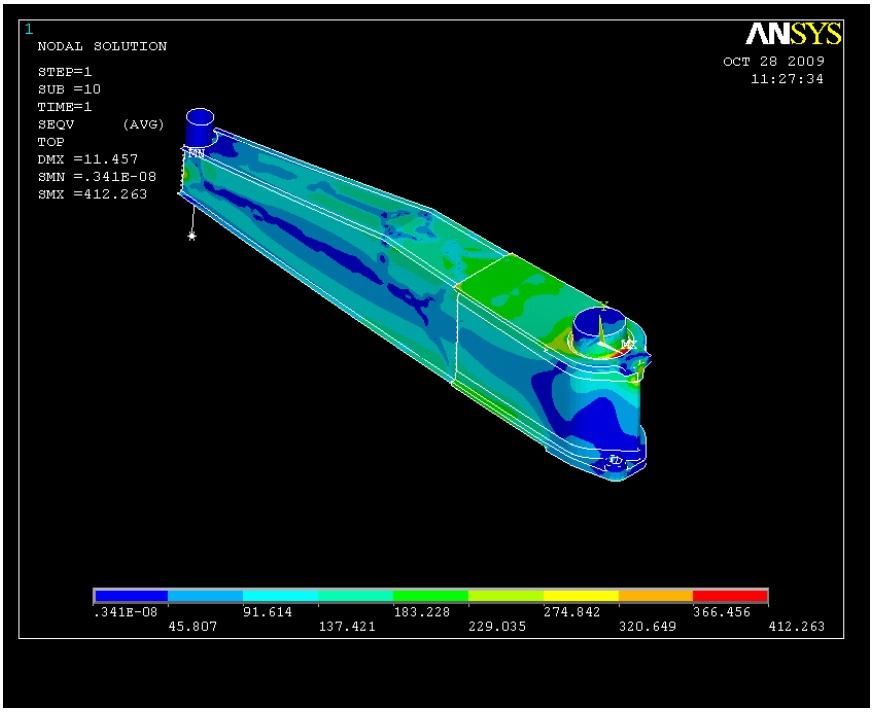


Figure XII.6 – Contrainte de von Mises à la fin de la première charge

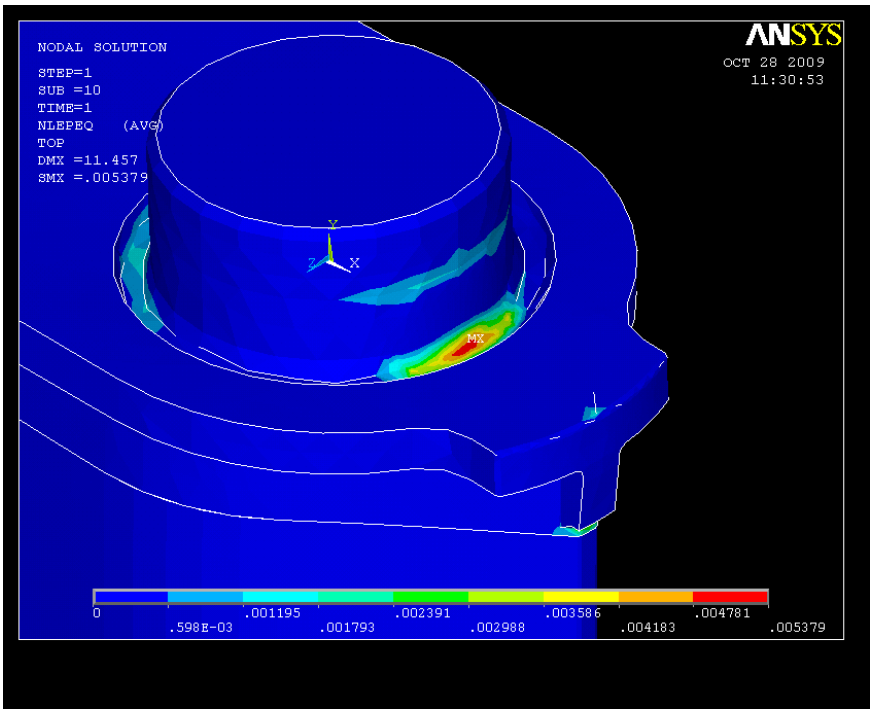


Figure XII.7 – Déformation plastique cumulée à la fin de la première charge

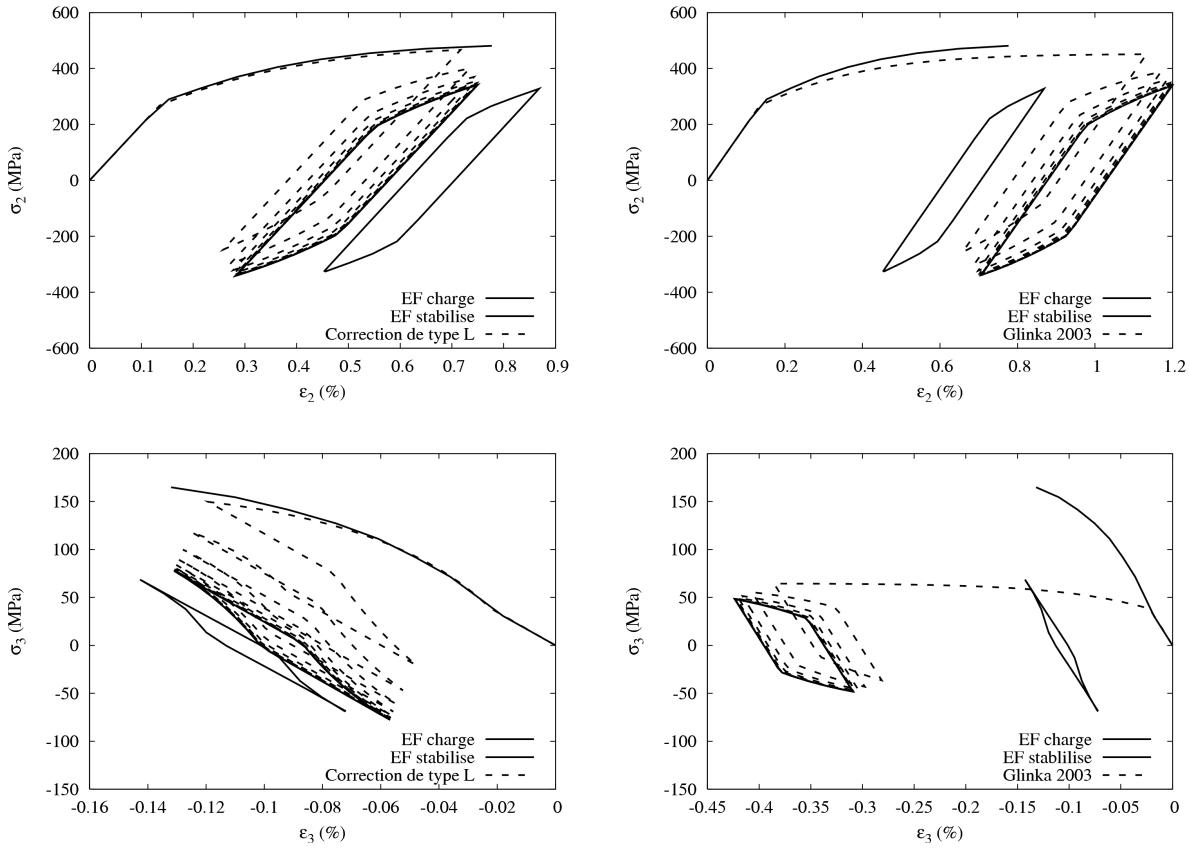


Figure XII.8 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis, par la méthode de Buczynski-Glinka et par la correction de type L sur le bras de châssis

	FEM	B-G	Correction type L
J_{max} (MPa)	299.3	317.1	309.7
ΔJ (MPa)	597.4	634.1	619.3

Table XII.2 – Comparaison des variables critiques de la loi de Lemaitre-Chaboche obtenues après calcul par éléments finis et par les deux méthodes de calcul accéléré

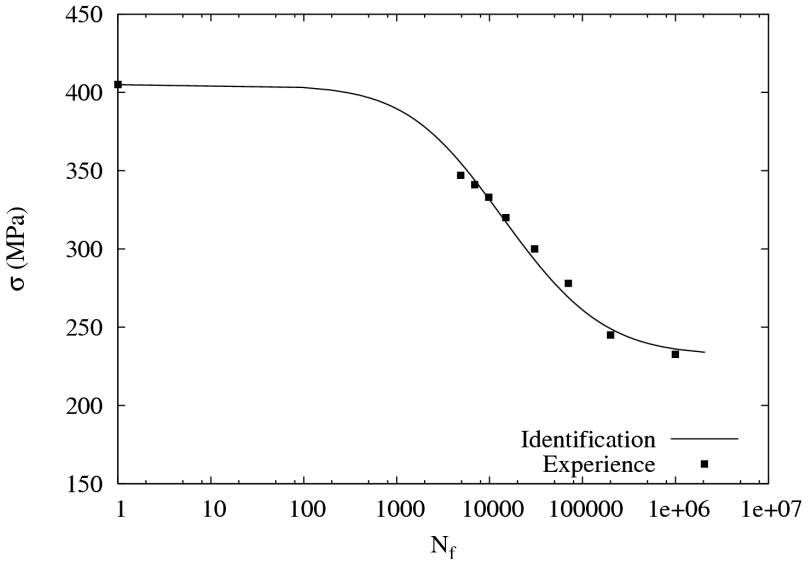


Figure XII.9 – Identification de la courbe S-N du S355

La table XII.2 permet de comparer les valeurs des paramètres critiques de la loi de Lemaitre-Chaboche obtenus sur le cycle stabilisé. Comme dans le cas de l'éprouvette entaillée, la méthode de Buczynski-Glinka sous-estime la contrainte circonférentielle, et sur-estime donc les paramètres critiques de la loi d'endommagement.

Une courbe S-N a été identifiée à partir d'essais de traction alternée sur le S355, et est représentée en figure XII.9. Les paramètres du modèle de Lemaitre-Chaboche (chapitre V) sont les suivants :

- $M(\overline{I}_1) = 163425$ MPa
- $\beta = 1.69$
- $\sigma_{l0} = 232$ MPa
- $\sigma_u = 405$ MPa
- $a = 1$

Les durées de vie ont été calculées pour les trois méthodes, on obtient les résultats suivants :

- 18632 cycles par la méthode des éléments finis ;
- 11359 cycles par la méthode de Buczynski-Glinka ;
- 12426 cycles par la correction de type L.

XII.1 Conclusion

Dans cette partie nous avons pu confronter les corrections proposées et la méthode de Buczynski-Glinka à des cas plus complexes que ceux abordées dans la partie précédente. Nous nous étions alors limités à des chargements simples : traction, torsion, et traction-torsion combinées sur éprouvettes axisymétriques. Les exemples que nous avons abordés ici sont plus complexes. Tout d'abord nous avons considéré une éprouvette axisymétrique soumise à des chargements plus complexes. Un chargement proportionnel d'amplitude variable n'a pas posé de problème particulier à la correction de type NL, et la correction de type L a bien calculé les historiques de contraintes et de déformations dans le cas des trajets non proportionnels, d'amplitude "constante" ou aléatoire. Des calculs de durée de vie ont été effectués d'après la loi d'endommagement multiaxiale de Lemaitre-Chaboche. Pour la majorité des cas, les résultats des corrections proposées sont proches de ceux obtenus par la méthode des éléments finis. L'erreur sur le calcul de la contrainte et de la déformation circonférentielle est plus petite que celle commise par la méthode de Buczynski-Glinka. En conséquence, les valeurs des paramètres critiques de la loi de Lemaitre-Chaboche sont plus précises, de même pour les durées de vie calculées. Nous n'avons pas eu le temps d'appliquer des critères de type plan critique basés sur des variables mixtes ou de déformation. Cependant, on peut supposer que l'amélioration de la prévision de la déformation circonférentielle améliorera la précision du calcul de durée de vie. En particulier dans le cas du bras de châssis, pour lequel cette déformation n'est pas négligeable. La correction de type L a donc été appliquée avec succès à une structure industrielle, un bras de châssis de grue. La méthode de Buczynski-Glinka commet une fois de plus une erreur sur les variables circonférentielles.

Conclusion générale et perspectives

Ce travail a porté sur la première étape d'un calcul de durée de vie en fatigue. Avant d'appliquer des critères, des lois d'endommagement... cette étape consiste à déterminer l'historique des variables locales d'après le chargement, la géométrie de la structure, etc. Cette première étape est couramment résolue à l'aide de la méthode des éléments finis. Le temps de calcul est relativement faible dans le cas de la fatigue d'endurance, en revanche il explose dans le cas de la fatigue oligocyclique.

Nous nous sommes donc intéressés à la fatigue à faible nombre de cycles, et en particulier aux chargements aléatoires provoquant des états de contraintes multiaxiaux. Des méthodes alternatives de calcul accéléré ont été proposées dans les dernières décades pour réduire les temps de calcul. Elles ont été détaillées dans la partie bibliographie, implémentées puis testées. Nous avons alors constaté qu'aucune d'entre elles ne donnait entière satisfaction.

Tout d'abord, les méthodes de détermination du cycle stabilisé ne permettent pas de connaître l'état transitoire, qui peut n'apparaître qu'après un nombre de cycles non négligeable. Elles sont pour cette raison même inadaptées aux chargements d'amplitude variable ou aléatoires. Certes, elles présentent l'avantage de calculer les variables locales en tout point de la structure, mais ce calcul peut être réduit au point critique si celui-ci est connu à l'avance.

De ce point de vue, les méthodes de type Neuber continuent de constituer une voie digne d'intérêt. Les variables locales sont calculées uniquement au point critique de la structure mais tout au long de l'historique de chargement. La méthode de type Neuber elle même, cependant, est précise uniquement dans le cas d'un état de contrainte uniaxial. Des extensions de cette méthode ont été proposées récemment. Nous avons vu qu'elles commettent systématiquement des erreurs dans le calcul des variables locales, en particulier dans la direction circonférentielle pour des éprouvettes entaillées.

Cette première étape du calcul de durée de vie est tout aussi cruciale que le traitement du signal et l'application de critères de fatigue ou de lois d'endommagement. En effet, une erreur dans l'estimation de ces variables peut avoir une influence non négligeable dans la précision du calcul de durée de vie. L'étude des cas de validation nous a d'ailleurs permis de le confirmer. La recherche de meilleurs critères et lois d'endommagement, des caractérisations en fatigue du matériau pointues... n'ont de sens que si le calcul des variables locales, qui seront utilisées par les critères et les lois d'endommagement, est correct. C'est pourquoi cette étape ne doit pas être négligée.

Le présent travail répond donc à cette problématique. Il s'agissait de développer une méthode de calcul accéléré plus précise que les méthodes existantes. Parmi les méthodes de la littérature, celle de Buczynski-Glinka nous a paru la plus efficace. Elle nous a donc servi de base de comparaison. La méthode des éléments finis, dont les résultats sont considérés comme exacts, a été prise comme référence.

Les premières recherches se sont orientées vers la formulation de modèles empiriques. Nous avons emprunté la même voie que les auteurs de la littérature, en posant des équations supplémentaires couplées à la règle de Neuber généralisée dans l'implémentation. Ce type d'approche n'a pas donné de résultats satisfaisants.

Nous proposons donc d'appliquer des modèles de localisation de la contrainte, qui prennent en compte une accommodation élastique ou élasto-plastique. La forme choisie assure la nullité du vecteur contrainte en surface, et interdit toute déformation progressive exagérée. Selon que l'on souhaite introduire une accommodation élastique ou élasto-plastique, il y a un ($\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^L$) ou deux ($\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}^{NL}$ et $\underset{\approx}{\boldsymbol{D}}^{NL}$) tenseurs d'ordre 4 dont il faut identifier 4 composantes pour pouvoir simuler des chargements quelconques. Un paramètre supplémentaire (δ) permet de limiter le rochet. Ces 4 ou 9 paramètres sont identifiés sur un calcul élasto-plastique. Une seule mise en charge suffit lorsqu'il y a 4 paramètres à déterminer, alors que trois branches sont nécessaires lorsqu'il y en a 9.

La méthode a été testée de façon extensive sur de nombreux cas de charge et plusieurs types de géométrie. Elle s'applique aux chargements les plus complexes, multiaxiaux, non proportionnels et aléatoires. Elle est en général meilleure que la méthode de Buczynski-Glinka, qui fait référence dans le domaine. La validation sur éprouvette axisymétrique et sur bras de châssis a montré qu'elle reproduit mieux les contraintes et déformations induites par l'effet Poisson.

Les perspectives de recherche sont nombreuses. Des simulations en amplitude variable avec la correction de type NL pourraient d'abord être effectuées sans le terme linéaire δ. En effet, ce terme avait été proposé pour annuler le rochet infini lorsque la correction de type NL était encore utilisée sous chargement d'amplitude constante. Un tel rochet n'apparaîtrait peut-être pas en amplitude variable, même sans δ. Le nombre de branches sur lesquelles les paramètres de la correction de type NL doivent être identifiés pourrait ainsi être réduit à une seule, au lieu de trois.

L'identification des paramètres constitue indéniablement le point faible de ces corrections. Elles nécessitent non seulement une optimisation, qui s'effectue rapidement, mais surtout le calcul élasto-plastique de la première branche du chargement par éléments finis qui peut être assez long. L'idée serait alors d'exprimer les paramètres de $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}$ et $\underset{\approx}{\boldsymbol{D}}$ en fonction :

- des paramètres du comportement du matériau, en premier lieu le module plastique ;
- de la matrice des coefficients de concentration de contrainte de l'entaille, qui peut être déduite du calcul élastique par éléments finis.

L'aboutissement de cette idée serait une bonne avancée car elle réduirait le temps de calcul des corrections proposées à celui de la méthode de Buczynski-Glinka. Cela nécessite cependant l'établissement d'une base de données conséquente, sur des entailles et des comportements variés. Notons cependant que le temps d'exécution actuel des corrections proposées reste très inférieur à celui de la méthode des éléments finis.

Enfin, seul un comportement élasto-plastique a pour l'instant été testé. Nous n'avons pas appliqué les corrections de type L et NL avec un comportement élasto-visco-plastique. Les composants des tenseurs $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}$ et $\underset{\approx}{\boldsymbol{D}}$ dépendent du comportement, et ce comportement dépend de la température. Il est donc évident que l'identification des paramètres des corrections ne sera valable que pour une température donnée. L'expression de ces paramètres en fonction du comportement, évoquée précédemment, pourrait cependant remédier à ce problème.

Bibliographie

AFNOR (1993). *Fatigue sous sollicitations d'amplitude variable. Méthode Rainflow de comptage.* vol. A 03-406, pp 1–32.

Agnihotri G.G. (1995). *Calculation of elastic-plastic strains and stresses in notches under torsion load.* Engng Fracture Mechanics, vol. 51 n° 5, pp 823–835.

ASTM (1985). *Standard practices for cycle fatigue counting in fatigue analysis. Designation E 1049-85.* Metal test methods and analytical procedure, vol. 03.01, pp 836–848.

Azzouz F. (2007). Application of the direct cycle analysis to an elementary volume.

Bannantine J. et Socie D. (1991). *A variable amplitude multiaxial fatigue life prediction method.* In : Fatigue under biaxial and multiaxial loading, ESIS 10, pp 35–51. Mechanical Engineering Publications, London.

Banvillet A. (2001). *Prévision de durée de vie en fatigue multiaxiale sous chargements réels : vers des essais accélérés.* Thèse de Doctorat.

Barkey M.E., Socie D.F., et Hsia K.J. (1994). *A Yield Surface Approach to the Estimation of Notch Strains for Proportional and Nonproportional Cyclic Loading.* J. of Engng. Mat. Technol., vol. 116, pp 173–180.

Bennebach M. (1993). *Fatigue d'une fonte GS. Influence de l'entaille et d'un traitement de surface.* Thèse de Doctorat.

Bernasconi A. et Papadopoulos I.V. (2005). *Efficiency of algorithms for shear stress amplitude calculation in critical plane class fatigue criteria.* Computational Materials Science, vol. 34, pp 355–368.

Berveiller M. et Zaoui A. (1979). *An Extension of the Self–Consistent Scheme to Plastically Flowing Polycrystal.* J. Mech. Phys. Sol., vol. 26, pp 325–344.

Besson J., Le Riche R., Foerch R., et Cailletaud G. (1998). *Object–Oriented Programming Applied to the Finite Element Method. Part II : Application to Material Behaviors.* Revue Européenne des Éléments Finis, vol. 7 n° 5, pp 567–588.

Brand A., Flavenot J.F., Grégoire R., et Tournier C. (1980). *Recueil de données technologiques sur la fatigue.* Technical report, CETIM.

Brown M.W. et Miller K. (1973). *A theory for fatigue under multiaxial stress-strain conditions.* Proc. of Inst. Mech. Engrs., vol. 187, pp 745–755.

Buczynski A. et Glinka G. (2003). *An analysis of elasto-plastic strains and stresses in notched bodies subjected to cyclic non-proportional loading paths.* Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture, vol. , pp 265–283.

Cailletaud G. (1987). *Une approche micromécanique phénoménologique du comportement inélastique des métaux.* Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.

Cailletaud G. et Pilvin P. (1994). *Utilisation de modèles polycristallins pour le calcul par éléments finis.* Revue Européenne des Éléments Finis, vol. 3 n° 4, pp 515–541.

Chaboche J.L. (2007). A new heuristic method to compute local stresses and strains at notch tip for multiaxial stress states.

Chaboche J.L. et Jung O. (1998). *Application of kinematic hardening viscoplasticity model with thresholds to the residual stress relaxation.* Int. J. of Plasticity, vol. 13, pp 785–807.

Chaboche J.L. et Lesne P.M. (1988). *A non-linear continuous fatigue damage model.* Fatigue Fract. Engng Mater. Struct., vol. 11 n° 1, pp 1–17.

Charkaluk E. et Constantinescu A. (2007). *Approche dissipative en fatigue : influence de la contrainte moyenne en fatigue polycyclique.* Proceedings National MECAMAT Symposium 2007 on Fatigue of Materials and Structures.

Chaudonneret M. et Culié J.P. (1985). *Adaptation of Neuber's theory to stress concentration in viscoplasticity.* La Recherche Aérospatiale, vol. 4, pp 33–40.

Chen X., Xu S., et Huang D. (1999). *Critical plane strain energy density criterion of multi-axial low-cycle fatigue life under non-proportional loading.* Fatigue and Fracture of Engng Mat and Struct, vol. 22, pp 679Ű686.

Chu C.C., Conle F.A., et Bonnen J.J. (1993). *Multiaxial stress-strain modelling and fatigue life prediction of SAE axle shafts*, pp pp. 37–54. ASTM, Philadelphia.

Dang Van K. (1973). *Sur la résistance à la fatigue des métaux.* Sciences et techniques de l'armement, Mémorial de l'Artillerie française, 3ème fascicule.

Dietmann H., Bonghibhat T., et Schmid A. (1989). *Multiaxial fatigue behavior of steels under in-phase and out-of-phase loading including different wave forms and frequencies.* 3rd Conf. on Biaxial/Multiaxial Fatigue, vol. 61, pp 1–17.

Dowling N. (1983). *Fatigue life prediction for complex load versus time histories.* Trans. of American Society of Mechanical Engineers, vol. 105, pp 206–214.

Dowling N.E. (1988). *Estimation and correlation of fatigue lives for random loading.* IJF, vol. 10 n° 3, pp 179–185.

Ellyin F. et Kujawski D. (1989). *Generalization of notch analysis and its extension to cyclic loading.* Engng Fracture Mechanics, vol. 32 n° 5, pp 819–826.

Fatemi A. et Socie D.F. (1988). *A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading.* Fatigue and Fracture of Engng Mat and Struct, vol. 11, pp 149–165.

Gallerneau F. (2004). *Méthode de Neuber généralisée en viscoplasticité multiaxiale.* Technical Report RTS 4/7283 DMSE/Y, ONERA.

Gärtner B. (1999). *Fast and robust smallest enclosing balls.* Lecture Notes in Computer Science, vol. 1643, pp 693.

Garud Y.S. (1981). *A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loadings.* J. of Engng. Mat. Technol., vol. 103, pp 118–125.

Glinka G. (1985a). *Calculation of inelastic notch-tip strain-stress history under cyclic loading.* Engng Fracture Mechanics, vol. 22 n° 5, pp 839–854.

Glinka G. (1985b). *Energy density approach to calculation of inelastic strain-stress near notches and cracks.* Engng Fracture Mechanics, vol. 22 n° 3, pp 485–508.

Glinka G., Shen G., et Plumtree A. (1995a). *A multiaxial fatigue strain energy density parameter related to the critical fracture plane.* Fatigue Fract. Engng Mater. Struct., vol. 18, pp 37–46.

Glinka G., Wang G., et Plumtree A. (1995b). *Mean stress effects in multiaxial fatigue.* Fatigue and Fracture of Engng Mat and Struct, vol. 18, pp 755–764.

Grégoire R. (1988). *La prévision de durée de vie en service des structures travaillant en fatigue.* Revue française de mécanique 1, vol. , pp 29–41.

Haibach E. (1970). *Modifizierte lineare Schadensakkumulations - Hypothese zu Berücksichtigung des Dauerfestigkeitabfalls mit fortschreitender Schädigung.* Technische Mitteilungen, n° 50/70.

Han C., Chen X., et Kim K.S. (2002). *Evaluation of multiaxial fatigue criteria under irregular loading.* IJF, vol. 24, pp 913–922.

Heuler P. et Seeger T. (1986). *A criterion for omission of variable amplitude loading histories.* IJF, vol. 8 n° 4, pp 225–230.

Hill R. (1965). *A self–consistent mechanics of composite materials.* J. Mech. Phys. Sol., vol. 13, pp 213–222.

Hoffmann M. et Seeger T. (1985a). *A generalized method for estimating multiaxial elastic-plastic notch stresses and strains - Part I : theory.* J. of Engng. Mat. Technol., vol. 107, pp 250–254.

Hoffmann M. et Seeger T. (1985b). *A generalized method for estimating multiaxial elastic-plastic notch stresses and strains - Part II : application.* J. of Engng. Mat. Technol., vol. 107, pp 255–260.

Jordan E. H., Brown M. W., et Miller K. J. (1985). *Fatigue under severe non-proportional loading.* ASTM STP 853, pp 569–585.

Kandil F.A., Brown M.W., et Miller K.J. (1982). *Biaxial low-cycle fatigue fracture of 316 stainless steel at elevated temperatures.*, pp pp. 203–210. The Metals Society, London.

Knop M., Jones R., Molent L., et Wang C. (2000). *On the Glinka and Neuber methods for calculating notch tip strains under cyclic load spectra.* Int. J. Fat., vol. 22, pp 743–755.

Knop M. Jones R. (1998). *On the Glinka and Neuber methods for calculating notch tip strains*, pp pp. 93–101. Australian Fracture Group Inc Publishers, Australia.

Kröner E. (1961). *Zur plastischen Verformung des Vielkristalls.* Acta Metall., vol. 9, pp 155–161.

Kruch S. (1992). *Numerical analysis of an engine turbine disk loaded with a large number of thermomecanical cycles.* pp 1733–1744.

Lagoda T., Macha E., et Bedkowski W. (1999). *A critical plane approach based on energy concepts : Application to biaxial random tension-compression high-cycle fatigue regime.* IJF, vol. 21, pp 431–443.

Lee B.L., Kim K.S., et Nam K.M. (2003). *Fatigue analysis under variable amplitude loading using an energy parameter.* IJF, vol. 25, pp 621–631.

Lemaitre J. et Chaboche J.L. (1996). *Mécanique des matériaux solides.* Dunod. 2e édition.

Lemaitre J. et Desmorat R. (2005). *Engineering damage mechanics : ductile, creep, fatigue and brittle failures.* Springer.

Lesne P.M. et Savalle S. (1989). *An efficient cycles jump technique for viscoplastic structures calculations involving large number of cycles.* Proceedings of 2nd International Conference on Computational Plasticity, pp 591–602.

Liebster T.D. et Glinka G. (1997). *Multiaxial fatigue life prediction methods for engineering components*, pp pp. 101–136. Kluver Academic.

Liu K.C. (1993). *A method based on virtual strain-energy parameters for multiaxial fatigue life prediction.* Advances in Multiaxial Fatigue, ASTM STP 1191, pp 67–84.

Maitournam H. M., Pommier B., et Thomas J. J. (2002). C.R. Mécanique, vol. 330, pp 703–708.

McDiarmid D. (1989). *The effect of mean stress on biaxial fatigue where the stresses are out of phase and at different frequencies.* Biaxial and Multiaxial Fatigue, vol. EGF 3, pp 605–619.

Melnikov B.E. et Semenov A.S. (1998). *Multisurface theory of plasticity with one active surface.* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 78, pp 615–616.

Mielke S. (1980). *Festigkeitsverhalter metallischer Werkstoffe unter zweiachsig-schwingender Beanspruchung mit verschiedenen Spannungszeitverlaufen.* Thèse de Doctorat, Université RWTH d'Aix-la-Chapelle.

Miner M.A. (1945). *Cumulative damage in fatigue.* J. of Applied Mechanics, vol. 67, pp 159–164.

Moftakhar A., Buczynski A., et Glinka G. (1995). *Calculation of elasto-plastic strains and stresses in notches under multiaxial loading.* Int. J. of Fract., vol. 70, pp 357–373.

Molski K. et Glinka G. (1981). *A method of elastic-plastic stress and strain calculation at a notch root.* Material Science and Engineering, vol. 50, pp 93–100.

Morel F. (1996). *Fatigue multiaxiale sous chargement d'amplitude variable.* Thèse de Doctorat, Université de Poitiers.

Morrow J. (1965). *Low cycle fatigue behavior of quenched and tempered SAE 1045 steel.* Technical report, University of Illinois at Urbana-Champaign.

Mroz Z. (1967). *On the description of anisotropic hardening.* J. Mech. Phys. Solids, vol. 15, pp 163–175.

Neuber H. (1961). *Theory of stress concentration for shear-strained prismatic bodies with arbitrary non-linear stress-strain law.* J. of Applied Mechanics, vol. 28, pp 544–551.

Nitta A., Ogata T., et Kuwabara K. (1989). *Fracture mechanisms and life assessment under high-strain biaxial cyclic loading of type 304 stainless steel.* Fatigue and Fracture of Engng Mat and Struct, vol. 12 n° 2, pp 77–92.

Palin-Luc T. (1996). *Fatigue multiaxiale d'une fonte GS sous sollicitations combinées d'amplitude variable.* Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux II.

Pan W.-F., Hung C.-Y., et Chen L.-L. (1999). *Fatigue life estimation under multiaxial loadings.* IJF, vol. 21 n° 1, pp 3–10.

Papadopoulos I. (1994). *A new criterion of fatigue strength for out-of-phase bending and torsion of hard metals.* IJF, vol. 16 n° 6, pp 377–384.

Quilici S. (2009). A new method to determine the smallest ball enclosing n points in d dimensions.

Quilici S. et Musienko A. (2004). *Calcul de durées de vie en fatigue HCF avec le modèle ONERA, application à un spectre d'accélération de type CARLOS.* Technical report, ARMINES - Centre des matériaux - Ecole des Mines de Paris.

Reinhardt W., Moftakhar A., et Glinka G. (1997). *An efficient method for calculating multiaxial elasto-plastic notch tip strains and stresses under proportional loading.* ASTM 1296, pp 613–629.

Rolovic R. et Tipton S.M. (1999). *An energy based critical plane approach to multiaxial fatigue analysis.* Proceedings of the 29th National Symposium on Fatigue and Fracture Mechanics, pp 599–613.

Saï K. (1993). *Modèles à grand nombre de variables internes et méthodes numériques associées.* Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de paris.

Sai K., Cailletaud G., et Forest S. (2006). *Micro-mechanical modeling of the inelastic behavior of directionally solidified materials.* Mech. of Materials, vol. 38, pp 203–217.

Savalle S. et Culié J.P. (1978). *Méthodes de calcul associées aux lois de comportement cyclique et d'endommagement.* La Recherche Aérospatiale, vol. 5, pp 263–278.

Sharpe Jr W.N. (1995). *American Society of Mechanical Engineers 1993 Nadai lecture - Elastic-plastic stress and strain concentrations.* J. of Engng. Mat. Technol., vol. 117, pp 1–7.

Sharpe Jr W.N. et Wang K.C. (1991). *Evaluation of a modified monotonic Neuber relation.* J. of Engng. Mat. Technol., vol. 113, pp 1–8.

Sharpe Jr W.N., Yang C.H., et Tregoning R.L. (1992). *An evaluation of Neuber and Glinka relations for monotonic loading.* J. of Applied Mechanics, vol. 59, pp 50–56.

Shin C.S. (1994). *Fatigue crack growth from stress concentrations and fatigue life prediction in notched components.* Handbook of fatigue crack propagation in metallic structures, pp 613–652.

Sines G. (1959). *Behavior of metals under complex static and alternating stresses*, pp 145–159. Mc Graw-Hill.

Singh M.N.K., Glinka G., et Dubey R.N. (1996). *Elastic-plastic stress-strain calculation in notched bodies subjected to non-proportional loading.* Int. J. of Fract., vol. 76, pp 39–60.

Smith K. N., Watson P., et Topper T. H. (1970). *A stress-strain function for the fatigue of metals.* J. of Materials Science, vol. 5 n° 4, pp 767–776.

Socie D. (1987). *Multiaxial fatigue damage models.* J. of Engng. Mat. Technol., vol. 109, pp 293–298.

Socie D.F., Wail L.E., et Dittmer D.F. (1985). *Biaxial fatigue of Inconel 718 including mean stress effects*, pp pp. 463–481. ASTM.

Varvani-Farahani A. (2000). *A new energy critical plane parameter for fatigue life assessment of various metallic materials subjected to in-phase and out-of-phase multiaxial fatigue loading conditions.* IJF, vol. 22, pp 295–305.

Wang C.H. et Brown M.W. (1993). *A path-independent parameter for fatigue under proportional and non-proportional loading.* Fatigue and Fracture of Engng Mat and Struct, vol. 16, pp 1285–1293.

Wang C.H. et Brown M.W (1996a). *Life prediction techniques for variable amplitude multiaxial fatigue - Part I : Theories.* J. of Engng. Mat. Technol., vol. 118, pp 367–370.

Wang C.H. et Brown M.W (1996b). *Life prediction techniques for variable amplitude multiaxial fatigue - Part II : Comparison with experimental results.* J. of Engng. Mat. Technol., vol. 118, pp 371–374.

Wang C.H. et Brown M.W (1996c). *Multiaxial random load fatigue : life prediction techniques and experiments.* In : Multiaxial fatigue and design, ESIS 21, pp 513–527.

Wang C. et Miller K. (1991). *The effect of mean shear stress on torsional fatigue behavior.* Fat. Fract. Engng. Mater. Struct., vol. 14, pp 293–307.

Wang J., Neskovic P., et Cooper L.N. (2007). *Bayes classification based on minimum bounding spheres.* vol. 70 n° 4-6, pp 801–808.

Welzl E. (1991). *Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids).* New Results and New Trends in Computer Science, vol. 555, pp 359–370.

Zarka J. et Casier J. (1979). *Elastic-plastic response of a structure subjected to cyclic loading : practical rules.* Mechanics Today, vol. 6, pp 93–198.

Annexe -A-

Autres critères de type plan critique

A.1 Critère de Socie

Socie formula en 1985 (Socie et al., 1985) un critère proche de celui de KBM, à ceci près qu'il considère le paramètre S égal à l'unité, et introduit un troisième terme impliquant la contrainte moyenne normale pour prendre en compte son influence sur l'ouverture de fissure :

$$\gamma_a^n + \varepsilon_a^n + \frac{\sigma_m^n}{E} = \frac{\tau_f'}{G}(2N_f)^{b_0} + \gamma_f'(2N_f)^{c_0} \tag{A.1}$$

où :
- G est le module de cisaillement
- γ_a^n est l'amplitude du cisaillement sur le plan critique de normale n
- ε_a^n est l'amplitude de déformation normale au plan
- σ_m^n est la contrainte moyenne normale au plan

Le plan critique est le plan de γ_a^n maximale. L'influence de la contrainte moyenne est aussi prise en compte. Pour éviter toute confusion avec un autre critère du même auteur, nous nommerons ce critère Socie 1.

A.2 Critère de Nitta *et al.*

Ce critère, formulé en 1989 (Nitta et al., 1989) prend deux formes différentes sous chargement proportionnel. Si l'amorçage s'effectue en mode I, c'est-à-dire si le plan critique est le plan où l'amplitude de la déformation normale est maximale (γ_a^n / $\varepsilon_a^n \leq 1.7$), on écrit :

$$E_a^I = \sigma_a^1 \varepsilon_a^1 = A N_f^{-\alpha} \tag{A.2}$$

Dans le cas contraire c'est le cisaillement qui est prépondérant, l'amorçage s'effectue en mode II et le critère prend la forme suivante :

$$E_a^{II} = \tau_a^{13} \Delta\gamma_{13} = B N_f^{-\beta} \tag{A.3}$$

Sous chargement non proportionnel l'amorçage se produit en mode mixte, on utilise alors les deux formes précédentes mais le nombre de cycles à rupture est calculé comme suit :

$$\frac{1}{N_f} = \frac{1}{N_f^I} + \frac{1}{N_f^{II}} \tag{A.4}$$

Selon que l'amorçage s'effectue en mode I ou II, le plan critique est respectivement celui où E_a^I ou E_a^{II} est maximale.

A.3 Critère de Chu *et al.*

En 1993, Chu *et al.* ont proposé (Chu et al., 1993) un critère dérivant de celui de SWT. Le terme de droite dans l'équation V.11 reste le même, mais le paramètre de dommage du terme de gauche s'écrit cette fois :

$$C_{SWT} = 2\tau_{max}^n \gamma_a^n + \sigma_{max}^n \varepsilon_a^n \tag{A.5}$$

En introduisant un facteur 2, traction et cisaillement causent le même dommage. Le plan critique choisi est celui où C_{SWT} est maximum. Ce critère manque cependant de corrélation avec des essais. Les auteurs disent ne pas prendre en compte les chargements hors-phase.

A.4 Critère de Liu

L'énergie de déformation virtuelle (VSE - virtual strain energy) est proposée en 1993 (Liu, 1993) pour décrire des chargements proportionnels :

$$W_a = W^n_{norm,a} + W^n_{cis,a} = \sigma^n_a \varepsilon^n_a + \tau^n_a \gamma^n_a \tag{A.6}$$

où $W^n_{norm,a}$ et $W^n_{cis,a}$ sont respectivement l'énergie de déformation normale et de cisaillement sur le plan critique. Comme pour tous les critères abordés dans cette partie, chacune de ces énergies comprend une composante élastique et une composante plastique. Dans le cas d'une fissuration en mode I, le plan critique est évidemment le plan pour lequel l'énergie de déformation normale est maximale. L'énergie totale s'exprime alors :

$$W^n_{I,a} = max\big(W^n_{norm,a}\big) + W^n_{cis,a} \tag{A.7}$$

Dans le cas d'une fissuration en mode II le plan critique est le plan d'énergie de cisaillement maximale et on obtient :

$$W^n_{II,a} = W^n_{norm,a} + max\big(W^n_{cis,a}\big) \tag{A.8}$$

Dans ce cas, si la fissure se propage le long de la surface (alors dite de type A par l'auteur) le second terme est calculé à l'aide du cercle de Mohr par les composantes ε_1, ε_3, σ_1 et σ_3. Pour une fissure se propageant vers l'intérieur de l'éprouvette (type B) on utilise ε_1, ε_2, σ_1 et σ_2 ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ et $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)

L'auteur propose d'utiliser d'autres paramètres VSE pour des chargements non proportionnels, alors notés $\hat{W}^n_{I,a}$ et $\hat{W}^n_{II,a}$. Supposons un chargement biaxial sinusoidal présentant un déphasage de 90°entre les deux contraintes principales. Comme on le voit sur la figure A.1 (a), le trajet de chargement tracé dans l'espace des contraintes normale et de cisaillement sur le plan critique forme une ellipse, il en est de même dans l'espace des déformations.

Si le chargement consiste en une traction ou une torsion pure, le trajet de chargement est respectivement horizontal ou vertical. Pour traiter de tels chargements déphasés, l'auteur fait l'hypothèse selon laquelle imposer un trajet de chargement ellipsoïdal est équivalent en terme de dommage à superposer deux chargements proportionnels "virtuels" dont les trajets suivent les axes de l'ellipse. Ainsi, pour une fissuration en mode I le VSE $\hat{W}^n_{I,a}$ est égal à la somme du $W^n_{I,a}$ calculé en traction pure et du $W^n_{I,a}$ calculé en torsion pure. De même en mode II pour le VSE $\hat{W}^n_{II,a}$.

Pour un déphasage différent différent de 90°, le grand axe de l'ellipse fait un angle non nul avec l'axe des contraintes, comme le montre la figure A.1 (b). L'équivalence reste toujours valable ainsi que le calcul des VSE. Enfin, pour des chargements non sinusoïdaux produisant des trajets trapezoïdaux dans l'espace des déformations, l'auteur suggère d'utiliser les diagonales du trapèze comme trajets virtuels, comme le montre la figure A.1 (c).

A.5 Critère de Glinka

En posant le plan 1-2 comme plan critique, Glinka *et al.* proposent en 1995 (Glinka et al., 1995a) un nouveau paramètre à introduire dans l'équation de SWT :

$$W^* = \sigma^n_a \varepsilon^n_a + \tau^n_a \gamma^n_a \tag{A.9}$$

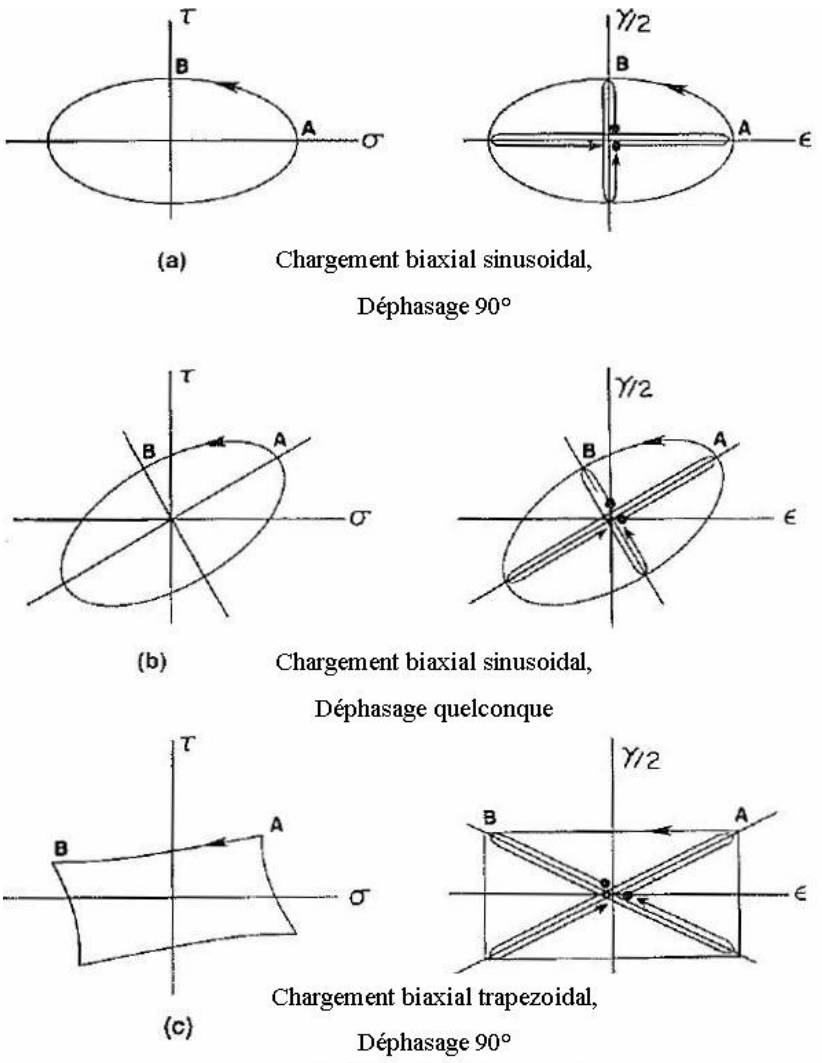


Figure A.1 – Trajets de chargement et de déformation biaxiaux sinusoïdaux non proportionnels (Liu, 1993)

où σ_a^n et ε_a^n sont les amplitudes des contrainte et déformation normales au plan critique, τ_a^n et γ_a^n étant les amplitudes de la cission et du cisaillement sur ce même plan. Le plan critique est le plan de cisaillement γ_a^n maximal.

Une modification de l'expression de W^* a été proposée (Glinka et al., 1995b) (Liebster et Glinka, 1997) afin de prendre en compte la contrainte normale moyenne et le cisaillement moyen :

$$W^* = \tau_a^n \gamma_a^n \left(\frac{1}{1 - \frac{\tau_{max}}{\tau'_f}} + \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{max}}{\sigma'_f}} \right) \tag{A.10}$$

Nous noterons ce critère Glinka 2. Pan *et al.* montrent que l'influence de l'énergie de cisaillement $\tau_a^n \gamma_a^n$ et celle de l'énergie de déformation normale $\sigma_a^n \varepsilon_a^n$ sont différentes (Pan et al., 1999). C'est pourquoi ils ont affecté à l'équation A.9 deux coefficients :

$$W^* = k_1 k_2 \sigma_a^n \varepsilon_a^n + \tau_a^n \gamma_a^n \tag{A.11}$$

où :

$$k_1 = \frac{\sigma'_f}{\tau'_f}$$

$$k_2 = \frac{\gamma'_f}{\varepsilon'_f}$$

Le critère complet s'exprime comme (Han et al., 2002) :

$$k_1 k_2 \sigma_a^n \varepsilon_a^n + \left(1 + \frac{\sigma_m^n}{\sigma'_f}\right) \tau_a^n \gamma_a^n = \frac{(\tau'_f)^2}{G} \left(2N_f\right)^{2b_0} + \tau'_f \gamma'_f (2N_f)^{b_0 + c_0} \tag{A.12}$$

Nous noterons ce critère Glinka 3.

A.6 Critère de Rolovic et Tipton

Les auteurs (Rolovic et Tipton, 1999) proposent un critère prenant en compte l'effet de contrainte moyenne sous chargement multiaxial proportionnel ou non proportionnel. La forme généralisée à tous types de métaux s'écrit :

$$\left[\tau_a^n + f_1(\sigma_{max}^n)\right] \gamma_a^n + \left[\sigma_a^n + f_2(\sigma_{max}^n)\right] \varepsilon_a^n = f_3(N_f) \tag{A.13}$$

Ce critère a été validé par les auteurs sur trois métaux, pour lesquels l'équation A.13 s'écrit :

$$\left(\tau_a^n + 0,3\sigma^n\right) \gamma_a^n + \sigma_{max}^n \varepsilon_a^n = \frac{(\sigma'_f)^2}{E} \left(2N_f\right)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f (2N_f)^{b+c} \tag{A.14}$$

Le plan critique est le plan pour lequel le dommage calculé est le plus grand. Cela exige d'effectuer le calcul du dommage sur tous les plans, ce qui multiplie le temps de calcul. De plus, seuls les auteurs ont testé leur critère : pour d'autres matériau il faut redéterminer les fonctions f_1, f_2, f_3.

A.7 Critère de Chen *et al.*

Les auteurs (Chen et al., 1999) proposent ce critère qui s'inspire fortement de celui de Glinka *et al.* Mais plutot que de tenir compte des influences différentes des énergies de cisaillement et de déformation normale au plan critique comme Pan *et al.*, ils préfèrent différencier les deux modes de rupture en question. Pour une fissuration en mode I, le plan critique est le plan ayant pour normale la direction de la déformation principale de plus grande amplitude $\varepsilon_{1,a}$. Le critère s'écrit alors :

$$\sigma_a^n \varepsilon_a^n + \tau_a^n \gamma_a^n = \frac{(\sigma'_f)^2}{E}\big(2N_f\big)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f (2N_f)^{b+c} \tag{A.15}$$

A l'inverse, si la rupture s'effectue en mode II, le plan critique est celui pour lequel γ_a^n est maximal, et le critère s'écrit :

$$\sigma_a^n \varepsilon_a^n + \tau_a^n \gamma_a^n = \frac{(\tau'_f)^2}{E}\big(2N_f\big)^{2b_0} + \tau'_f \gamma'_f (2N_f)^{b_0+c_0} \tag{A.16}$$

A.8 Critère de Varvani-Farahani

L'auteur (Varvani-Farahani, 2000) propose un paramètre prenant en compte des chargements cycliques proportionnels ou non proportionnels :

$$\frac{1}{\sigma'_f \varepsilon'_f}\sigma_a^n \varepsilon_a^n + \frac{\left(1+\frac{\sigma_m^n}{\sigma'_f}\right)}{\tau'_f \gamma'_f}\tau_{a,max}^n \frac{\gamma_{a,max}^n}{2} = f(N_f) \tag{A.17}$$

où $\Delta\tau_{max}$ et $\Delta\gamma_{max}$ sont obtenus à partir des cercles de Mohr en contrainte et en déformation aux instants extrêmes du chargement. Le plan critique est le plan où $\Delta\tau = \Delta\tau_{max}$. σ_a^n et ε_a^n sont les amplitudes des contrainte et déformation normales à ce plan. Le plan critique est le plan de plus grande amplitude de cisaillement $\Delta\gamma_{max}$, mais l'auteur ne définit pas la fonction $f(N_f)$.

Cependant des auteurs (Han et al., 2002) expriment le critère complet comme :

$$\frac{\tau'_f \gamma'_f}{\sigma'_f \varepsilon'_f}\sigma_a^n \varepsilon_a^n + \Big(1+\frac{\sigma_m^n}{\sigma'_f}\Big)\Delta\tau_{max}\frac{\Delta\gamma_{max}}{2} = 2\frac{(\tau'_f)^2}{G}\big(2N_f\big)^{2b_0} + 2\tau'_f \gamma'_f (2N_f)^{b_0+c_0} \tag{A.18}$$

A.9 Critère de Lee *et al.*

Les auteurs (Lee et al., 2003) proposent un paramètre mettant en jeu l'énergie élastique en plus de l'énergie plastique dans l'expression de l'énergie totale W^* :

$$W^* = W^{el,*} + W^{p,*} \tag{A.19}$$

où :

$$W^{el,*} = \frac{1}{2E}\left(\sigma_a^n\right)^2 + w\frac{1}{2G}\left(\tau_a^n\right)^2 \tag{A.20}$$

et :

$$W^{p,*} = \int_{cycle} \sigma_n \, d\varepsilon_n^p + w\int_{cycle} \tau_n \, d\gamma_n^p \tag{A.21}$$

w étant un paramètre variant selon la direction n normale au plan étudié. Le critère proprement dit s'écrit :

$$W^* = \frac{(\sigma'_f - \sigma^n_m)}{2E}(2N_f)^{2b} + 4(\sigma'_f - \sigma^n_m)\varepsilon'_f \frac{c-b}{c+b}\big(2N_f\big)^{b+c} \tag{A.22}$$

où σ^n_m est la contrainte normale moyenne sur le plan critique et σ'_f, ε'_f, b, c les coefficients de l'équation de Manson-Coffin-Basquin.

Nous allons maintenant récapituler tous les critères de type plan critique décrits dans le chapitre V et dans cette annexe. On rappelle notamment leur formulation, la variable qui doit être maximisée pour déterminer le plan critique, le mode de rupture pris en compte, la prise en compte ou non de l'effet de contrainte moyenne, du déphasage, et les données matériau nécessaires.

A.10 Récapitulation des critères de type plan critique

N°	Auteur(s)	Année	Formulation
1	Brown et Miller	1973	$\gamma_a^n = f(\varepsilon_a^n)$
2	Kandil, Brown et Miller	1982	$\gamma_a^n + S\varepsilon_a^n = C_{tors}^1$
3	Wang-Brown	1993	$\gamma_a^n + S\varepsilon_a^{n*} = C_{tors}^1$
4	Socie 1	1985	$\gamma_a^n + \varepsilon_a^n + \frac{\sigma_m^n}{E} = C_{tors}^1$
5	Fatemi-Socie	1988	$\gamma_a^n\left(1 + k\frac{\sigma_{max}^n}{\sigma_y}\right) = C_{tors}^1$
6	SWT uniaxial	1970	$\sigma_{max}\varepsilon_a = C_{trac}^2$
7	SWT multiaxial (Socie 2)	1987	$\sigma_{max}^1\varepsilon_a^1 = C_{trac}^2$
8	Nitta *et al.*	1989	$\sigma_a^n\varepsilon_a^n = AN_f^{-\alpha}$ $\tau_a^n\gamma_a^n = BN_f^{-\beta}$ $\frac{1}{N_f} = \frac{1}{N_f^I} + \frac{1}{N_f^{II}}$
9	Chu *et al.*	1993	$K_{Chu} = 2\tau_{max}^n\gamma_a^n + \sigma_{max}^n\varepsilon_a^n = C_{trac}^2$
10	Liu	1993	$W_a^{I,n} = max\left(\sigma_a^n\varepsilon_a^n\right) + \tau_a^n\gamma_a^n = C_{trac}^2$ $W_a^{II,n} = \sigma_a^n\varepsilon_a^n + max\left(\tau_a^n\gamma_a^n\right)C_{tors}^2$ $\hat{W}_a^{I,n} = W_{a,trac}^{I,n} + W_{a,tors}^{I,n}$ $\hat{W}_a^{II,n} = W_{a,trac}^{II,n} + W_{a,tors}^{II,n}$
11	Glinka *et al.*	1995	$\sigma_a^n\varepsilon_a^n + \tau_a^n\gamma_a^n = C_{tors}^2$
12	Glinka 2	1995	$\tau_a^n\gamma_a^n\left(\frac{1}{1-\frac{\tau_{max}}{\tau_f'}} + \frac{1}{1-\frac{\sigma_{max}}{\sigma_f'}}\right) = C_{tors}^2$
13	Glinka 3 (Pan *et al.*)	1999	$\frac{\sigma_f'}{\tau_f'}\frac{\gamma_f'}{\varepsilon_f'}\sigma_a^n\varepsilon_a^n + \tau_a^n\gamma_a^n = C_{tors}$
14	Rolovic et Tipton	1999	$\left[\tau_a^n + f_1(\sigma_{max}^n)\right]\gamma_a^n + \left[\sigma_a^n + f_1(\sigma_{max}^n)\right]\varepsilon_a^n = f_3(N_f)$
15	Lagoda et Macha	1999	$\left(\frac{1}{2}\sigma^n\varepsilon^n sgn[\sigma^n, \varepsilon^n]\right)_a = C_{trac}^2$ $\left(\frac{4}{1+\nu_{eff}}\frac{1}{2}\tau^n\gamma^n sgn[\tau^n, \gamma^n]\right)_a = C_{trac}^2$ $\left(\frac{1}{2}\sigma^n\varepsilon^n sgn[\sigma^n, \varepsilon^n] + \frac{4}{1+\nu_{eff}}\frac{1}{2}\tau^n\gamma^n sgn[\tau^n, \gamma^n]\right)_a = C_{trac}^2$ $\left(\frac{1}{2}\sigma^n\varepsilon^n sgn[\sigma^n, \varepsilon^n] + \frac{3+\nu_{eff}}{1+\nu_{eff}}\frac{1}{2}\tau^n\gamma^n sgn[\tau^n, \gamma^n]\right)_a = C_{trac}^2$
16	Chen *et al.*	1999	$\sigma_a^n\varepsilon_a^n + \tau_a^n\gamma_a^n = C_{trac}^2$ $\sigma_a^n\varepsilon_a^n + \tau_a^n\gamma_a^n = C_{tors}^2$
17	Lee *et al.*	2003	$\frac{1}{2E}\left(\sigma_a^n\right)^2 + w\frac{1}{2G}\left(\tau_a^n\right)^2$ $+ \int_{cycle}\sigma_n\, d\varepsilon_n^p + w\int_{cycle}\tau_n\, d\gamma_n^p = C_{Lee}$

où :

$$C^1_{trac} = \frac{\sigma'_f}{E}(2N_f)^b + \varepsilon'_f(2N_f)^c$$
$$C^1_{tors} = \frac{\tau'_f}{G}(2N_f)^{b_0} + \gamma'_f(2N_f)^{c_0}$$
$$C^2_{trac} = \frac{(\sigma'_f)^2}{E}\left(2N_f\right)^{2b} + \sigma'_f\varepsilon'_f(2N_f)^{b+c}$$
$$C^2_{tors} = \frac{(\tau'_f)^2}{G}\left(2N_f\right)^{2b_0} + \tau'_f\gamma'_f(2N_f)^{b_0+c_0}$$
$$C_{Lee} = \frac{(\sigma'_f-\sigma^n_m)}{2E}(2N_f)^{2b} + 4(\sigma'_f - \sigma^n_m)\varepsilon'_f\frac{c-b}{c+b}\left(2N_f\right)^{b+c}$$

N°	Variable	Rupture	σ_m	Déphasage	Données matériau
1	γ^n_a	II/III	Non	Non	/
2	γ^n_a	II/III	Non	Non	S, τ'_f, γ'_f, b_0, c_0
3	γ^n_a et ε^{n*}_a	II/III	Non	Oui	S, τ'_f, γ'_f, b_0, c_0
4	γ^n_a	II/III	Oui	Oui	τ'_f, γ'_f, b_0, c_0
5	γ^n_a	II/III	Oui	Oui	k, τ'_f, γ'_f, b_0, c_0
6	/	I	Oui	/	σ'_f, ε'_f, b, c
7	ε^1_a	I	Oui	Oui	σ'_f, ε'_f, b, c
8	ε^n_a γ^n_a /	I II/III Mixte	Non	Non Non Oui	A, B, α, β
9	K_{Chu}	I, II, III, mixte	Oui	Non	σ'_f, ε'_f, b, c
10	$\sigma^n_a\varepsilon^n_a$ $\tau^n_a\gamma^n_a$ / /	I II/III I II/III	Non	Non Oui (trajets ellipsoïdaux)	
11	γ^n_a	II/III	Non	Non	σ'_f, ε'_f, b, c
12	γ^n_a	II/III	Oui	Oui	σ'_f, ε'_f, b, c
13	γ^n_a	II/III	Non	Oui	σ'_f, ε'_f, b, c
14	Dommage	I, II, III, mixte	Oui	Oui	f_1,f_2,f_3, σ'_f, ε'_f, b, c
15	W^n_{trac} W^n_{tors} W^n_{trac} W^n_{tors}	I II I II	Non	Oui	σ'_f, ε'_f, b, c
16	ε^n_a γ^n_a	I II	Non	Oui	$\sigma'_f, \varepsilon'_f, b, c$ $\tau'_f, \gamma'_f, b_0, c_0$
17	Dommage	I, II, III, mixte	Oui	Oui	σ'_f, ε'_f, b, c

Annexe -B-

Méthode de Runge-Kutta

Soit un vecteur $\underline{y}$ dont les composantes sont les variables à intégrer :

$$\underline{y} \equiv \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon}_{el} \\ p \\ \boldsymbol{\alpha}_i \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

Considérons en premier lieu la méthode de Runge-Kutta d'ordre 1, que nous noterons RK1. Elle est équivalente à la méthode d'Euler et consiste à déterminer $\underline{y}_{i+1}$ d'après $\underline{y}_i$ par extrapolation linéaire :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y} + \underline{y}'_i \Delta t_i \tag{B.2}$$

avec :

- $\underline{y}'_i$ la dérivée du vecteur $\underline{y}$ au temps t_i
- Δt_i l'incrément de temps

Considérons maintenant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 (notée RK2). Comme dans RK1, d'après la valeur de $\underline{y}'_i$ il faut d'abord calculer une valeur "provisoire" $\underline{y}_{i+1}$, ce qui nous permet de calculer $\underline{y}'_{i+1}$. Alors, on en déduit la valeur "finale" de $\underline{y}_{i+1}$ d'après la moyenne des deux dérivées :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y} + \frac{\underline{y}'_i + \underline{y}'_{i+1}}{2} \Delta t_i \tag{B.3}$$

Il faut donc deux estimations de la fonction pour effectuer un incrément, mais la méthode est bien du second ordre. La figure B.1 illustre ce calcul.

Il existe d'autres versions de la méthode de Runge-Kutta selon l'ordre souhaité. La plus couramment utilisée est celle d'ordre 4 (RK4), que nous n'aborderons pas ici. Elle nécessite quatre estimations de la fonction pour effectuer un incrément, mais elle est précise à l'ordre 4. Elle peut être intéressante lorsque la fonction à intégrer est très non linéaire, ou lorsque la dérivée à l'instant initial est nulle. Elle est cependant plus coûteuse que RK2, c'est pourquoi cette dernière lui est en général préférée. Il faut en effet noter qu'un ordre élevé ne fournit pas forcément une bonne précision, par exemple si l'incrément de temps choisi est trop large pour

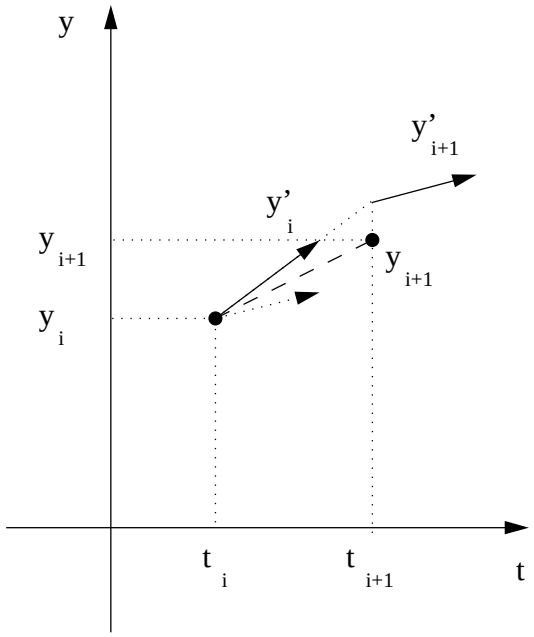


Figure B.1 – Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

un $\underline{y}''$ élevé. Il est alors utile de déterminer l'incrément de temps d'après l'erreur commise dans le calcul précédent. Dans le cas de la méthode RK2, si la différence entre les deux dérivées calculées est supérieure à un certain seuil, on divise le pas de temps Δt_i par 2, et ainsi de suite jusqu'à ce que celui-ci soit assez petit pour obtenir une différence entre les deux dérivées acceptable. Ainsi, toutes les méthodes de calcul accéléré présentées ici sont basées sur la méthode RK2 à pas de temps adaptatifs. Cette caractéristique sera par la suite implicite dans l'appellation RK2.

Dans notre cas, pour un incrément Δt donné, la méthode RK2 est utilisée pour calculer les valeurs de $\underset{\sim}{\varepsilon}_{el}$, p et α_i à l'instant $t_0 + \Delta t$ à partir de leurs valeurs à l'instant t_0. Comme nous venons de le voir, il faut pour cela lui fournir les dérivées de ces variables au début et à la fin de l'incrément. Ces dérivées sont calculées par une fonction C++ que j'ai développée pour chaque modèle dans l'environnement Z-mat du code ZeBuLoN.

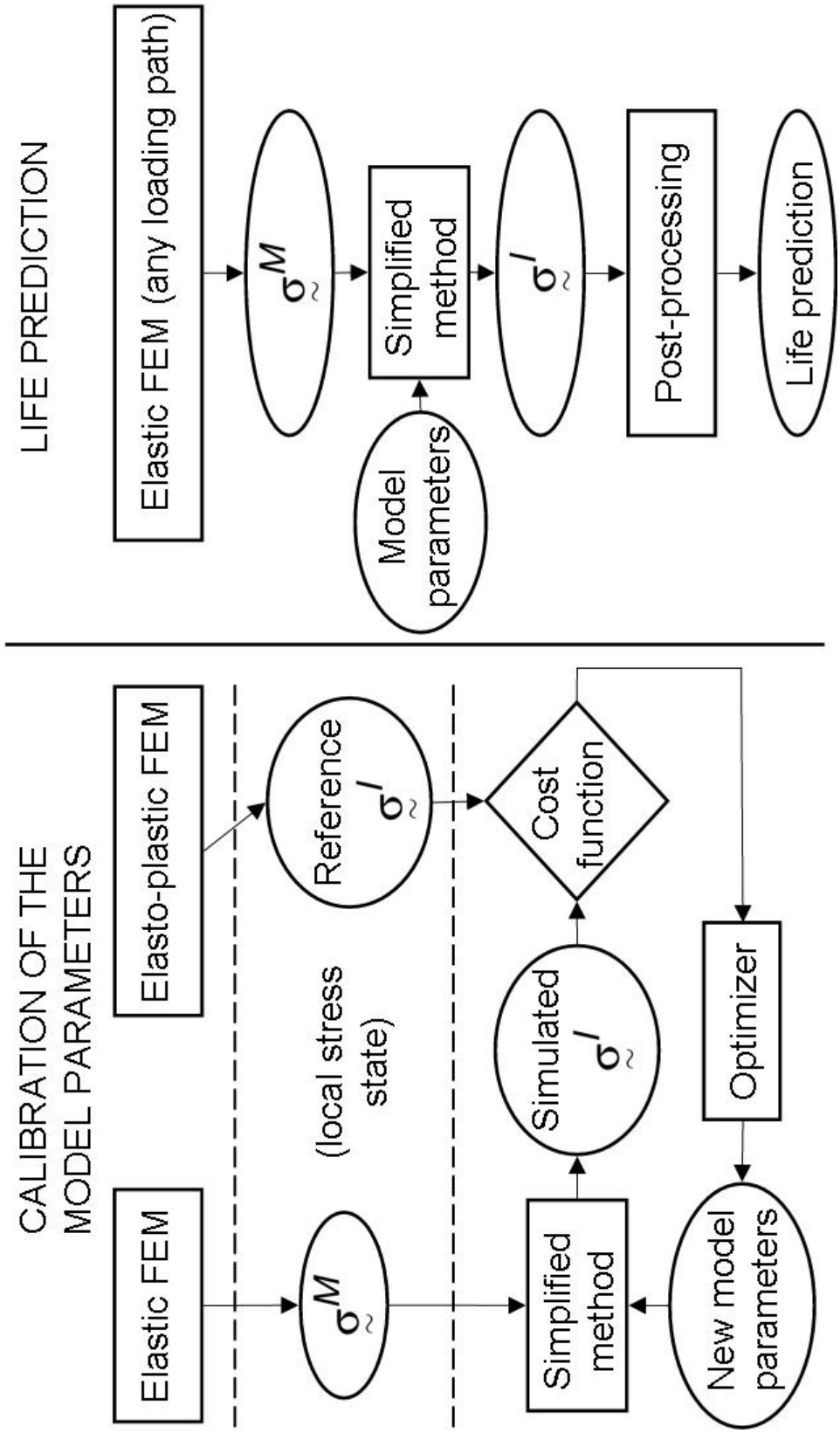
Annexe -C-

Procédure de calibration des paramètres C_{ii}^L et D_{ii}^L

Ci-après nous expliquons le principe de la procédure figurant sur la page suivante.

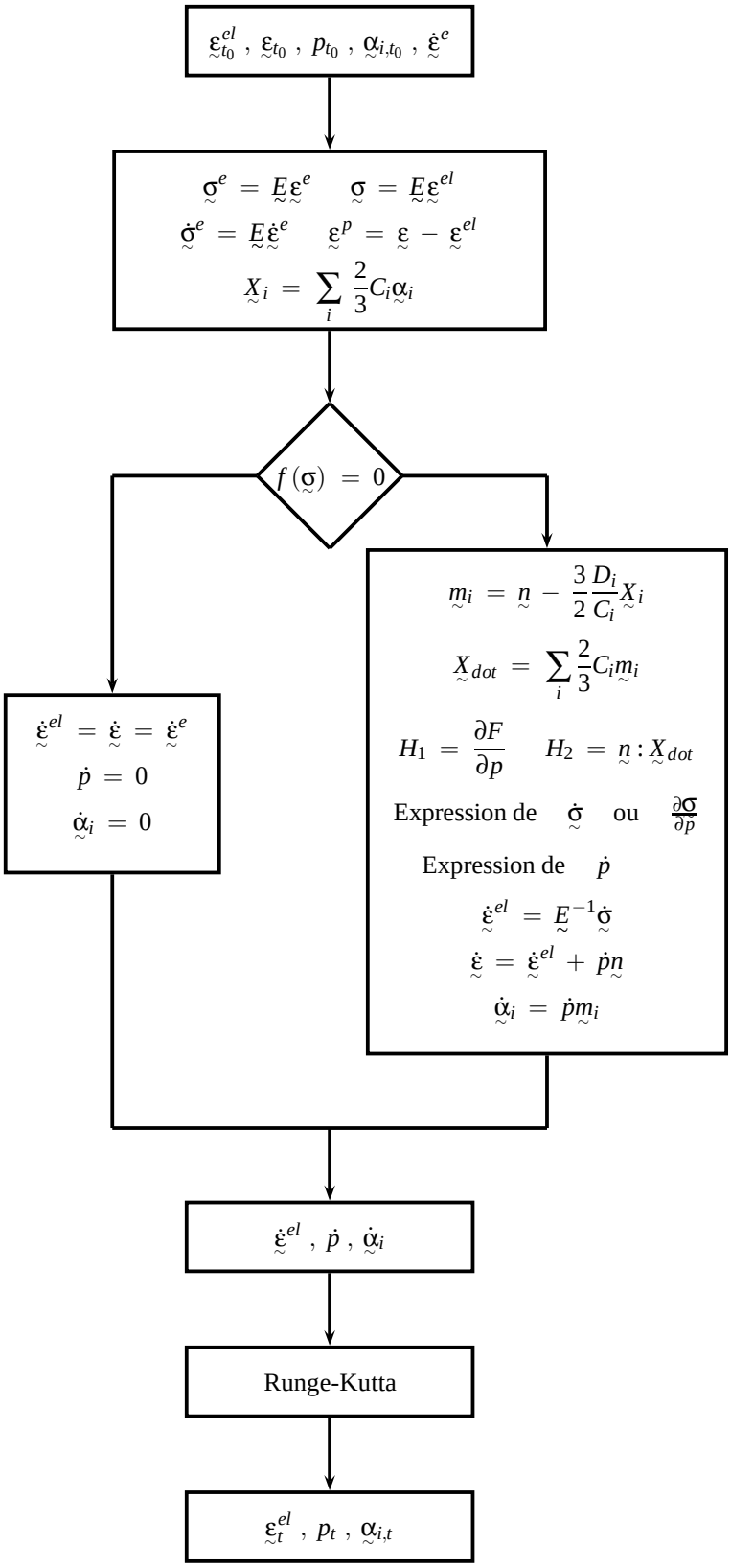
Cette procédure consiste principalement à identifier les paramètres du modèle.
D'une part, comme dans toute méthode de type Neuber, il faut effectuer un calcul par éléments finis de la structure sous un certain chargement F en supposant un comportement purement élastique. On obtient ainsi $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^M$ en fond d'entaille. Il s'agit ensuite de choisir un jeu initial de paramètres du modèle (C_{ij},D_{ij},δ pour la correction de type NL, C_{ij} pour la correction de type L). L'historique $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^M$ et le jeu de paramètres sont ensuite utilisés par la correction de type L ou NL implémentée dans Z-mat, l'environnement de développement de modèles matériaux de Zebulon. On obtient une approximation du signal des variables réelles (entre autres $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{I}}$) en fond d'entaille pendant la première branche si on applique la correction de type L, les trois premières branches si on applique la correction de type NL.
Le même calcul par éléments finis doit être effectué avec le comportement élasto-plastique du matériau. Ce calcul fournit le signal "référence" $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\boldsymbol{I}}$.
Puis, un optimiseur compare la solution simulée par le modèle et la référence. Celà au moyen d'une fonction coût : la différence entre le signal simulé et la référence pour chaque contrainte et déformation en fonction du temps. Il choisit alors un nouveau jeu de paramètre et une autre simulation est effectuée. Ainsi de suite jusqu'à ce que la fonction coût atteigne une valeur satisfaisante. C'est l'identification du terme de correction δ qui doit s'effectuer sur trois branches dans le cas de la correction de type NL. Si on applique la correction de type L, une seule branche suffit pour calibrer les composantes du tenseur $\underset{\approx}{\boldsymbol{C}}$.

Une fois cette valeur atteinte, le jeu de paramètres et l'historique de la solution "élastique" en fond d'entaille est fourni au modèle. L'historique de la solution élasto-plastique en est déduit pour la durée de vie complète de la structure.


LIFE PREDICTION
Elastic FEM (any loading path)
$\underset{\sim}{\sigma}^{M}$
Simplified method
Model parameters
$\underset{\sim}{\sigma}^{I}$
Post-processing
Life prediction
CALIBRATION OF THE MODEL PARAMETERS
Elastic FEM
Elasto-plastic FEM
$\underset{\sim}{\sigma}^{M}$
(local stress state)
Reference $\underset{\sim}{\sigma}^{I}$
Simplified method
Simulated $\underset{\sim}{\sigma}^{I}$
Cost function
New model parameters
Optimizer

Annexe -D-

Algorithme général des fonctions implémentées dans ZeBFRoNT


$\underset{\sim}{\varepsilon}^{el}_{t_0}$, $\underset{\sim}{\varepsilon}_{t_0}$, p_{t_0} , $\underset{\sim}{\alpha}_{i,t_0}$, $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{e}$
$\underset{\sim}{\sigma}^{e} = \underset{\sim}{E}\underset{\sim}{\varepsilon}^{e}$ $\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{E}\underset{\sim}{\varepsilon}^{el}$
$\dot{\underset{\sim}{\sigma}}^{e} = \underset{\sim}{E}\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{e}$ $\underset{\sim}{\varepsilon}^{p} = \underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\varepsilon}^{el}$
$\underset{\sim}{X}_i = \sum_i \frac{2}{3} C_i \underset{\sim}{\alpha}_i$
$f(\underset{\sim}{\sigma}) = 0$
$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{el} = \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{e}$
$\dot{p} = 0$
$\dot{\underset{\sim}{\alpha}}_i = 0$
$\underset{\sim}{m}_i = \underset{\sim}{n} - \frac{3}{2}\frac{D_i}{C_i}\underset{\sim}{X}_i$
$\underset{\sim}{X}_{dot} = \sum_i \frac{2}{3} C_i \underset{\sim}{m}_i$
$H_1 = \frac{\partial F}{\partial p}$ $H_2 = \underset{\sim}{n} : \underset{\sim}{X}_{dot}$
Expression de $\dot{\underset{\sim}{\sigma}}$ ou $\frac{\partial \underset{\sim}{\sigma}}{\partial p}$
Expression de $\dot{p}$
$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{el} = \underset{\sim}{E}^{-1}\dot{\underset{\sim}{\sigma}}$
$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{el} + \dot{p}\underset{\sim}{n}$
$\dot{\underset{\sim}{\alpha}}_i = \dot{p}\underset{\sim}{m}_i$
$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{el}$, $\dot{p}$, $\dot{\underset{\sim}{\alpha}}_i$
Runge-Kutta
$\underset{\sim}{\varepsilon}^{el}_{t}$, p_t , $\underset{\sim}{\alpha}_{i,t}$

Nous allons maintenant décrire le principe de l'algorithme de la figure D dans le cas d'un chargement monotone. Nous adoptons les notations suivantes :

- $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}_i}^M$ et $\underset{\approx}{\varepsilon}_i^M$ sont respectivement les états de contrainte et déformation locales en fond d'entaille à la fin de l'incrément i dans l'hypothèse d'un comportement purement élastique
- $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}_i}^I$ et $\underset{\approx}{\varepsilon}_i^I$ sont écrites $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}_i}$ et $\underset{\sim}{\varepsilon}_i$ et sont respectivement les états de contrainte et déformation locales en fond d'entaille à la fin de l'incrément i dans l'hypothèse du comportement élasto-plastique du matériau
- R_0 and $\underset{\approx}{\boldsymbol{E}}$ sont respectivement la limite d'élasticité et le tenseur des modules d'élasticité
- $\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}$ est la variable d'écrouissage cinématique
- p est la déformation plastique cumulée

Cet algorithme constitue seulement une partie de la procédure d'optimisation décrite dans l'annexe C et se réfère à l'étape "Méthode simplifiée". Rappelons qu'avant de lancer cette fonction, un calcul par éléments finis monotone pour la correction L, ou sur trois branches pour la correction NL, doit être effectué avec un comportement purement élastique. Il fournit l'état de contrainte en fond d'entaille quand un chargement donné F est appliqué.

Abordons maintenant l'algorithme proprement dit. Il est générique pour tous les modèles décrits : ceux de la littérature ou les corrections proposées. Dans l'annexe B nous avons décrit la méthode d'intégration de Runge-Kutta. Celle-ci utilise la fonction que nous allons décrire pour obtenir les dérivées des variables à intégrer : $\underset{\sim}{\varepsilon}^{el}$, $\dot{p}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i$. La procédure algorithmique incrémentale fournit pour cela les valeurs de ces variables au début de l'incrément de temps, à l'instant t_0, ainsi que la vitesse de déformation $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e$ calculée d'après le calcul par éléments finis de la structure effectué au préalable avec un comportement purement élastique. On définit tout d'abord des variables auxiliaires comme la contrainte $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^e$ et sa vitesse $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}^e$, calculées respectivement d'après $\underset{\sim}{\varepsilon}^e$ et $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e$. De même pour la contrainte σ et la déformation plastique $\underset{\sim}{\varepsilon}^p$ qui serviront à calculer $\underset{\sim}{\varepsilon}^{el}$ puis $\underset{\sim}{\varepsilon}$. Enfin on définit la variable d'écrouissage cinématique $\underset{\sim}{\boldsymbol{X}_i}$. On effectue ensuite un test de plasticité. Si on ne viole pas le critère de von Mises, les variables plastiques n'évoluent pas et on déduit directement les dérivées à fournir à partir de $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e$. En revanche, si on viole le critère de von Mises, il faut définir d'autres variables auxiliaires ($\underset{\sim}{\boldsymbol{m}}_i$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{X}}_{dot}$, H_1 et H_2). Puis on calcule $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$ et $\dot{p}$ d'après leurs expressions respectives développées dans le chapitre VII pour les méthodes de la littérature, et dans IX pour les corrections de type L et NL proposées. On en déduit $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{el}$, $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ et $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}}_i$. Les valeurs des dérivées sont fournies à la méthode de Runge Kutta qui peut calculer les variables à intégrer à la fin de l'incrément de temps.

Annexe -E-

Fonction neuberlitterature.z pour les méthodes de la littérature

```
#include <Elasticity.h>
#include <External_parameter.h>
#include <Basic_nl_behavior.h>
#include <Flow.h>
#include <Criterion.h>
#include <Isotropic.h>
#include <Coefficient_T4_models.h>
#include <Print.h>

static int _neuber_warning=1;
extern int DeBuG;

@Class NEUBER_BEHAVIOR_neuber_hoffmann_imprim:BASIC_NL_BEHAVIOR,BASIC_SIMULATOR{
   @Name     neuber_hoffmann_imprim;
   @SubClass ELASTICITY elasticity;
   @SubClass CRITERION  criterion;
   @SubClass FLOW       flow;
   @SubClass ISOTROPIC_HARDENING  isotropic;

   @Coefs    Q3, q3, Q4, q4, K, k, w, sig_orig22, sig_orig33, z;
   @Coefs    C [0-N] @Factor 1./1.5;
   @Coefs    D [!C];
   @Coefs    omega [!C];
   @sVarAux  Pe, Pn;
   @tVarAux  nsig;
   @tVarInt  neel, neto, alpha [!C];
   @sVarInt  nevcum;
   @tVarAux  X [!C], nevi;
   @tVarAux  Xtot;
   @tVarUtil m [!C];
   @tVarUtil Xdot, dsig, dnsig;
   int remove_reverse,a;
   BUFF_LIST<TENSOR2> keep_sig_0,keep_eto_0,keep_nsig_0,keep_neto_0,keep_nevi_0;
   BUFF_LIST<double>  keep_Pe;
   BUFF_LIST<double>  keep_evcum_0;
   double delta_ep_0;
   double Y,pabs_0,pabs_temp,e,kappa,c,b,ce,be;

   TENSOR4   S;

   enum TYPE {PLANE_STRESS, PLANE_STRAIN, GALLERNEAU, K3, CHABOCHE, MOFTAKHAR,
   HOFFMANN, BARKEY};
   enum NEUBER {ENERGY, MISES};
   ARRAY<TYPE> type;
   ARRAY<NEUBER> neuber;
   ARRAY<bool>   no_origin_detection;
   ARRAY<double> mult_glinka;
};

@UserRead {

   if(!type==0) { type.resize(1); type[0]=PLANE_STRESS; }
   if(!neuber==0) { neuber.resize(1); neuber[0]=ENERGY; }
   if(!no_origin_detection==0) {
      no_origin_detection.resize(1); no_origin_detection[0] = FALSE;
   }
   if(!mult_glinka==0) {
      mult_glinka.resize(1); mult_glinka[0]=0.0;
   }

   if(str.end_with("*plane_stress"))      type[0]=PLANE_STRESS;
   else if(str.end_with("*plane_strain")) type[0]=PLANE_STRAIN;
   else if(str.end_with("*axi"))          type[0]=GALLERNEAU;
   else if(str.end_with("*glinka")) {
       type[0]=K3;
       double ff = file.getdouble();
       if(!file.ok) file.back();
       else mult_glinka[0]=ff;
   }
   else if(str.end_with("*glinka3"))      type[0]=MOFTAKHAR;
   else if(str.end_with("*chaboche")) {   type[0]=CHABOCHE;}
   else if(str.end_with("*hoffmann"))      type[0]=HOFFMANN;
   else if(str.end_with("*barkey"))      type[0]=BARKEY;
   else if(str.end_with("*mises"))        neuber[0]=MISES;
   else if(str.end_with("*energy"))       neuber[0]=ENERGY;
   else if(str.end_with("*no_origin"))    no_origin_detection[0]=TRUE;
   else return FALSE;
   return TRUE;

}

@SetUp {
   if(!elasticity->areYouA("ISOTROPIC_COEFF_TENSOR4"))
     ERROR("Neuber correction is only implemented for isotropic elasticity");

   remove_reverse = 0;
   dnsig = 0.0;

   TENSOR2 sig_0(tsz());
   sig_0 = 0.0;
   keep_sig_0.add(sig_0);
   TENSOR2 eto_0(tsz());
```

```
   eto_0 = 0.0;
   keep_eto_0.add(eto_0);
   TENSOR2 nsig_0(tsz());
   nsig_0 = 0.0;
   keep_nsig_0.add(nsig_0);
   TENSOR2 neto_0(tsz());
   neto_0 = 0.0;
   keep_neto_0.add(neto_0);
   TENSOR2 nevi_0(tsz());
   nevi_0 = 0.0;
   keep_nevi_0.add(nevi_0);
   keep_evcum_0.add(0.0);
   delta_ep_0 = 0.0;

   sig_0  = 0.0; eto_0  = 0.0;
   nsig_0 = 0.0; neto_0 = 0.0;
   nevi_0 = 0.0;
   Out<<endl<<"Neuber 2D correction under ";
   if(type[0]==PLANE_STRESS)
Out<<"plane stress condition";
   else if(type[0]==PLANE_STRAIN)
Out<<"plane strain condition";
   else if(type[0]==GALLERNEAU)
Out<<"axisymmetric condition with Gallerneau hypothesis";
   else if(type[0]==CHABOCHE)
Out<<"axisymmetric condition with Chaboche hypothesis";
   else if(type[0]==MOFTAKHAR)
Out<<"axisymmetric condition with Glinka3 hypothesis";
   else if(type[0]==HOFFMANN)
Out<<"axisymmetric condition with Hoffmann hypothesis";
   else if(type[0]==BARKEY)
Out<<"axisymmetric condition with Barkey hypothesis";
   else
Out<<"axisymmetric condition with Glinka hypothesis";
   Out<<endl;
   Out<<"Neuber hypothesis based upon ";
   if(neuber[0]==ENERGY) Out<<"energy";
   else Out<<"mises";
   Out<<" equivalent"<<endl<<endl;
}

@PostStep {
  nevi  = neto - neel;
  nsig  = *elasticity*neel;
  Pe   = sig|eto;
  Pn   = nsig|neto;
}

@Derivative {
  VECTOR& vint_ini = curr_mat_data->var_int_ini()[0];
TENSOR2 zero;
zero = 0.0;

  double m1,m2;
  m1=m2=1.0;

  if(DeBuG) Out<<"==================================="<<endl;
  if(DeBuG) Out<<"Time="<<Time<<" Time_ini="<<Time_ini<<" dt="<<Dtime<<
            " t runge="<<zf__tau<<endl;
  if(DeBuG) Out<<"dgrad="<<deto;
  bool strain_control = TRUE;
  @Simulation {
    if(num_sig!=0) {
      if(num_sig!=tsz()) ERROR("mixed loadings are not allowed");
      strain_control=FALSE;
    }
  }

  int c;
  ELASTICITY& E=*elasticity;
  double young=((ISOTROPIC_COEFF_TENSOR4*)elasticity())->get_young();
  double poisson=((ISOTROPIC_COEFF_TENSOR4*)elasticity())->get_poisson();
  S=inverse(E);

  sig  = E*eto;
  nsig = E*neel;

  if(DeBuG) { Out<<"sig="<<sig; Out<<"nsig="<<nsig; }

  if(!strain_control) {
    dsig = deto;
    TENSOR2 resolve_strain = S*deto;
    deto = resolve_strain;
  }
  else {
    dsig = E*deto;
  }

    TENSOR2 eto_prev = eto - deto*(zf__tau-Time_ini);
    TENSOR2 sig_prev = E*eto_prev;
    TENSOR2 neto_prev(tsz(),vint_ini,neto.start_pos);
    TENSOR2 neel_prev(tsz(),vint_ini,neel.start_pos);
```

```
  TENSOR2 nsig_prev = E*neel_prev;

if(type[0]==PLANE_STRAIN) {
  if((fabs(deto[2])>1.e-9)&&_neuber_warning) {
     Out<<endl<<endl;
     Out<<"Warning: loading is not strictly plane strain.
     Got eto33="<<deto[2]<<endl;
     Out<<"Setting eto33=0.0"<<endl<<endl;
     _neuber_warning=0;
  }
  deto[2]=0.0;
}
else if(type[0]==PLANE_STRESS) {
  if((fabs(dsig[2])>1.e-9)&&_neuber_warning) {
     Out<<endl;
     Out<<"Warning: loading is not strictly plane stress.
     Got sig33="<<dsig[2]<<endl;
     Out<<"Setting sig33=0.0"<<endl<<endl;
     _neuber_warning=0;
  }
  dsig[2]=0.0;
}

if(_neuber_warning) {
  if(fabs(dsig[0])>1.e-9) {
     Out<<endl;
     Out<<"Warning: sig11 should be zero at notch tip.
     Got sig11="<<dsig[0]<<endl;
  }
  _neuber_warning=0;
}
dsig[0]=0.0;

TENSOR2 sig_0, eto_0, nsig_0, neto_0, nevi_0;
double evcum_0;

nevi = neto - neel;
double delta_ep = nevi.mises();

if(zf__tau==Time_ini) {

// To get the last converged solution at the first derivative() call of each
increment

  for(c=0;c<remove_reverse;c++) {
    // Removing reverses vanished during the last converged increment
  keep_sig_0.suppress(); keep_eto_0.suppress();
  keep_nsig_0.suppress(); keep_neto_0.suppress();
  keep_nevi_0.suppress();
  keep_Pe.suppress();
  keep_evcum_0.suppress();
}
if(DeBuG && remove_reverse) Out<<"Removing "<<remove_reverse<<" reverses"<<
endl;

sig_0 = keep_sig_0.last();
eto_0 = keep_eto_0.last();
nsig_0 = keep_nsig_0.last();
neto_0 = keep_neto_0.last();
nevi_0 = keep_nevi_0.last();
evcum_0 = keep_evcum_0.last();

double tdPe;
if(neuber[0]==ENERGY) tdPe = (dsig|(eto-eto_0)) + ((sig-sig_0)|deto);
else {
  TENSOR2 tdelta_sig = sig-sig_0;
  TENSOR2 tdelta_eto = eto-eto_0;
  double tsigmises = tdelta_sig.mises();
  double tetomises = tdelta_eto.mises();
  if((tsigmises<1.e-12)||(tetomises<1.e-12)) tdPe = 0.0;
  else {
    double tdsigmises =  1.5*(deviator(tdelta_sig)|deviator(dsig))/tsigmises;
    double tdetomises =  1.5*(deviator(tdelta_eto)|deviator(deto))/tetomises;
    tdPe  = tdsigmises*tetomises + tsigmises*tdetomises;
  }
}
if(DeBuG) Out<<"tdPe="<<tdPe<<endl;
if(tdPe<0.) {
  if(DeBuG) {
     Out<<"----------------------------------------------"<<endl;
     Out<<"Unloading at time "<<Time<<endl;
  }
  sig_0 = sig; eto_0 = eto; nsig_0 = nsig; neto_0 = neto; nevi_0 = nevi;
  keep_sig_0.add(sig);
  keep_eto_0.add(eto);
  keep_nsig_0.add(nsig);
  keep_neto_0.add(neto);
  keep_nevi_0.add(nevi);
  keep_Pe.add(Pe);
  keep_evcum_0.add(nevcum);
  if(delta_ep>delta_ep_0) delta_ep_0 = delta_ep;
  if(DeBuG) {
```

```
      Out<<"Storing "<<!keep_sig_0-1<<" reverses"<<endl;
      for(int ii=1;ii<!keep_sig_0;ii++) {
         Out<<"-> Reverse "<<ii<<endl;
         Out<<"   sig : "<<keep_sig_0[ii];
         Out<<"   Pe  : "<<keep_Pe[ii-1]<<endl;
      }
      Out<<"--------------------------------------------------"<<endl;
    }
  }
}

double dPe;
TENSOR2 delta_sig, delta_eto, delta_nsig, delta_neto, delta_nevi;
double delta_evcum;

remove_reverse = 0;
for(;;) {

  int rk_reverse = !keep_sig_0-1-remove_reverse;

  sig_0 = keep_sig_0[rk_reverse];
  eto_0 = keep_eto_0[rk_reverse];
  nsig_0 = keep_nsig_0[rk_reverse];
  neto_0 = keep_neto_0[rk_reverse];
  nevi_0 = keep_nevi_0[rk_reverse];
  evcum_0 = keep_evcum_0[rk_reverse];

  delta_sig = sig-sig_0;
  delta_eto = eto-eto_0;
  delta_nsig = nsig-nsig_0;
  delta_neto = neto-neto_0;
  delta_nevi = nevi-nevi_0;
  delta_evcum = nevcum - evcum_0;

  if(neuber[0]==ENERGY) {
    Pe   = delta_sig|delta_eto;
    dPe  = (dsig|delta_eto) + (delta_sig|deto);
  }
  else {
    double sigmises = delta_sig.mises();
    double etomises = delta_eto.mises();
    Pe   = sigmises*etomises;
    if((sigmises<1.e-12)||(etomises<1.e-12)) dPe = 0.0;
    else {
      double dsigmises =  1.5*(deviator(delta_sig)|deviator(dsig))/sigmises;
      double detomises =  1.5*(deviator(delta_eto)|deviator(deto))/etomises;
      dPe  = dsigmises*etomises + sigmises*detomises;
    }
  }

  if(rk_reverse<=1 || no_origin_detection[0]==TRUE ) break;

  double max_Pe = keep_Pe[rk_reverse-1];
  if(Pe>max_Pe) {
    remove_reverse += 2;
    if(DeBuG) {
       Out<<"------------------------------------------------------------"<<endl;
       Out<<"Ignoring reverse : "<<keep_sig_0[rk_reverse];
       Out<<"Ignoring reverse : "<<keep_sig_0[rk_reverse-1];
       Out<<"------------------------------------------------------------"<<endl;
    }
  }
  else break;
}

if(DeBuG) { Out<<"sig_0="<<sig_0; Out<<"Pe="<<Pe<<endl; }

Xtot = 0.0;
for (c=0;c<!C;c++) Xtot += X[c] = C[c]*alpha[c];
double    radius = isotropic->radius(nevcum);
TENSOR2   sigeff = deviator(nsig) - Xtot;
double    f      = criterion->yield(sigeff, radius);
if(DeBuG) Out<<"f="<<f<<endl;

int yld = (flow->plasticity()) ? (f>=0.0) : (f>0.0);

if (yld&&fabs(dPe)>1.e-12) {

   m.resize(!C);
   TENSOR2          norm     = criterion->normal();
   if(DeBuG) { Out<<"norm="<<norm; }

   Xdot = 0.0;
   for (c=0;c<!C;c++) {
       if((!omega==0)||(omega[c]==0.0)) {
//           Classical nonlinear kinematic
          m[c] = norm - X[c]*(D[c]/C[c]);
       }
       else {
//          Nonlinear with crit
          double J2X  = sqrt((alpha[c]|alpha[c])/1.5);
          double trm1 = (D[c]*J2X - omega[c])/(1.0-omega[c]);
```

```
            if(trm1>0.0) {
              double trm2 = D[c]*J2X;
              double trm3 = pow(trm1,m1);
              double trm4 = pow(trm2,-m2);
              double phi  = trm3*trm4;
              m[c] = norm - X[c]*(D[c]*phi/C[c]);
            }
            else m[c] = norm;
         }
         Xdot += C[c]*m[c];
      }

      dnsig = 0.0;
      double beta  = 0.0;
      double gamma = young*norm[2]/poisson;
      double delta = 0.0;
      // such that dnsig[1] = beta*dnsig[2] + gamma*devcum - delta
      bool needs_add_term = FALSE;
      if(type[0]==GALLERNEAU) beta=sig[1]/sig[2];


      else if(type[0]==K3) {
         needs_add_term = TRUE;
         double dPe33 = dsig[2]*delta_eto[2]+delta_sig[2]*deto[2];
         beta         = (1.0/poisson)*(1.0+young*delta_neto[2]/delta_nsig[2]);
         delta = young*dPe33/(poisson*delta_nsig[2]);

if(mult_glinka[0]>0.0) {
if(Time_ini<=1.0){
            double f33 = mult_glinka[0];
gamma -= young*f33*delta_sig[2]*delta_eto[2]/(poisson*delta_nsig[2]);
            delta *= 1.0+f33*nevcum;
}
else{
            double f33 = mult_glinka[0];
gamma -= young*f33*delta_sig[2]*delta_eto[2]/(poisson*delta_nsig[2]);
            delta *= 1.0+f33*nevcum;
}
}
      }
      else if(type[0]==CHABOCHE) {
         needs_add_term = TRUE;

Out<<"Chaboche"<<endl;

         double f3p = 1.0 + Q3*(1-exp(-q3*delta_evcum));
         beta       = delta_sig[1]/(delta_sig[2]*f3p);
         gamma      = -q3*Q3*exp(-q3*delta_evcum)*delta_nsig[1]/f3p;
         delta      = (1.0/delta_sig[2])*(delta_nsig[1]*dsig[2]
      - delta_nsig[2]*dsig[1]/f3p);
      }
      else if(type[0]==MOFTAKHAR) {
         needs_add_term = TRUE;
         double e22  = delta_sig[1]*delta_eto[1];
         double e33  = delta_sig[2]*delta_eto[2];
         double de22 = dsig[1]*delta_eto[1]+delta_sig[1]*deto[1];
         double de33 = dsig[2]*delta_eto[2]+delta_sig[2]*deto[2];
         double PeG  = e33/(e22+e33);
         double dPeG = (de33-e33*(de22+de33)/(e22+e33))/(e22+e33);
         double facg1 = PeG*(delta_neto[1]+(delta_nsig[1]
                        -poisson*delta_nsig[2])/young)
           + poisson*delta_nsig[2]/young;
         double facg2 = delta_neto[2]+delta_nsig[2]/young
           - PeG*(delta_neto[2]+(delta_nsig[2]-poisson*delta_nsig[1])/young);
         double facg3 = delta_nsig[2]*norm[2]
                        -PeG*(delta_nsig[1]*norm[1]+delta_nsig[2]*norm[2]);
         beta  = facg2/facg1;
         gamma = facg3/facg1;
         delta = dPeG*(delta_nsig[1]*delta_neto[1]+delta_nsig[2]*delta_neto[2])/facg1;
      }

      else if(type[0]==HOFFMANN) {
         needs_add_term = TRUE;
kappa        = (deto[1]*delta_eto[0]-deto[0]*delta_eto[1])
                        /(pow(delta_eto[0],2));
         beta         = (poisson*(delta_neto[0]-delta_neto[1]))
                        /(delta_neto[0]+poisson*delta_neto[1]);
         gamma        = young*(norm[0]*delta_neto[1]-norm[1]*delta_neto[0])
                        /(delta_neto[0]+poisson*delta_neto[1]);
delta        = -young*kappa*((pow(delta_neto[0],2)))
                        /(delta_neto[0]+poisson*delta_neto[1]);

      }

      else if(type[0]==BARKEY) {
         needs_add_term = TRUE;
kappa        = (dsig[1]*delta_sig[2]-dsig[2]*delta_sig[1])
                        /(pow(delta_sig[2],2));
         beta         = delta_nsig[1]/delta_nsig[2];
         gamma        = 0.;
delta        = -kappa*delta_nsig[2];
```

```
}


else if(type[0]==PLANE_STRAIN) beta=1.0/poisson;

if (flow->plasticity()) {

   double          H1        = isotropic->dradius_dflow();
   double          H2        = norm|Xdot;
   // dsnsig is really dsig/dp
   if(type[0]==PLANE_STRESS) {
     dnsig[1]                = (H1+H2)/norm[1];
   }
   else  {
     double        dd        = beta*norm[1]+norm[2];
     dnsig[2]                = (H1+H2-norm[1]*gamma)/dd;
     dnsig[1]                = (beta*(H1+H2)+norm[2]*gamma)/dd;
   }

   TENSOR2         U         = S*dnsig + norm;

   double    fact_glinka   = 0.0;
   TENSOR2   Ts, Te;
   if(needs_add_term) {
      Ts.resize(tsz());
      Ts           = 0.0;
      double gg    = beta*norm[1]+norm[2];
      Ts[1]        = -norm[2]/gg;
      Ts[2]        = norm[1]/gg;
      Ts          *= delta;
      Te           = S*Ts;
   }

   if(neuber[0]==ENERGY) {
     double          fact1   = dnsig|delta_neto;
     double          fact2   = delta_nsig|U;

     if(needs_add_term) {
        fact_glinka  = Ts|delta_neto; fact_glinka += delta_nsig|Te;
     }

     dnevcum                 = (dPe-fact_glinka)/(fact1+fact2);
     if(dnevcum<0.0) Out<<"negative dnevcum"<<endl;
   }
   else {
     double  nsigmises = delta_nsig.mises();
```

```
     double  netomises = delta_neto.mises();

     double          fact1   = netomises*(deviator(delta_nsig)
                               |deviator(dnsig))/nsigmises;
     double          fact2   = nsigmises*(deviator(delta_neto)
                               |deviator(U))/netomises;

     if(needs_add_term) {
        fact_glinka  = netomises*(deviator(delta_nsig)
                       |deviator(Ts))/nsigmises;
        fact_glinka += nsigmises*(deviator(delta_neto)
                       |deviator(Te))/netomises;
     }

     dnevcum                 = ((2.0/3.0)*dPe-fact_glinka)/(fact1+fact2);
   }
   dneel                     = S*dnsig; dneel*=dnevcum;
   if(needs_add_term) dneel += Te;

 } else {

   if(neuber[0]==MISES) ERROR("Mises equivalent not yet implemented.
                        Use *energy");

   dnevcum                   = flow->flow_rate(nevcum,f);
   TENSOR2         temp      = delta_neto + neel;
                   temp     -= S*nsig_0;
   double          fact1     = dPe - dnevcum*(delta_nsig|norm);
   if(type[0]==PLANE_STRESS) {
     dnsig[1]                = fact1/temp[1];
   }
   else {
     double        fact2     = beta*temp[1]+temp[2];
     double        fact3     = young*norm[2]*dnevcum/poisson;
     dnsig[2]                = (fact1-fact3*temp[1])/fact2;
     dnsig[1]                = (beta*fact1+fact3*temp[2])/fact2;
   }
   dneel                     = S*dnsig;

 }
 if(type[0]==PLANE_STRAIN) dneel[2]=-dnevcum*norm[2];
 dneto = dneel+dnevcum*norm;
 for (c=0;c<!C;c++) dalpha[c] = dnevcum*m[c];
}
else {
  dneel   = dneto = deto;
```

```
  dnevcum = 0.0;
  for (c=0;c<!C;c++) dalpha[c] = 0.0;
  a = 1;
 }

 if(neuber[0]==ENERGY) Pn = (nsig-nsig_0)|(neto-neto_0);
 else {
  double nsigmises = delta_nsig.mises();
  double netomises = delta_neto.mises();
  Pn  = nsigmises*netomises;
 }
 if(DeBuG) { Out<<"Pn="<<Pn<<endl; }

}
```

Annexe -F-

Fonction glinkamemoire.z pour la méthode de Buczynski-Glinka

```
#include <Elasticity.h>
#include <External_parameter.h>
#include <Basic_nl_behavior.h>
#include <Flow.h>
#include <Criterion.h>
#include <Isotropic.h>
#include <Coefficient_T4_models.h>
#include <Print.h>

static int _neuber_warning=1;

@Class NEUBER_BEHAVIOR_neuber_glinka_2003_memoire_imprim :
BASIC_NL_BEHAVIOR, BASIC_SIMULATOR {
   @Name     neuber_glinka2003_memoire_imprim;
   @SubClass ELASTICITY elasticity;
   @SubClass CRITERION  criterion;
   @SubClass FLOW       flow;
   @SubClass ISOTROPIC_HARDENING  isotropic;

   @Coefs    C [0-N] @Factor 1./1.5;
   @Coefs    D [!C];
   @Coefs    omega [!C];
   @sVarAux  Pe, Pn;
   @tVarAux  nsig;
   @tVarInt  neel, neto, alpha [!C];
   @sVarInt  nevcum;
   @tVarAux  X [!C], nevi;
   @tVarAux  Xtot;
   @tVarUtil m [!C];
   @tVarUtil Xdot, dsig, dnsig, sig_0, eto_0, nsig_0, neto_0, nevi_0, dsig_prev;
   int remove_reverse;
   BUFF_LIST<TENSOR2> keep_sig_0,keep_eto_0,keep_nsig_0,
   keep_neto_0,keep_nevi_0;
   BUFF_LIST<double>  keep_Pe;
   BUFF_LIST<double>  keep_evcum_0;
   TENSOR4   S;
   int decharge;
};

@SetUp {
   if(!elasticity->areYouA("ISOTROPIC_COEFF_TENSOR4"))
     ERROR("Neuber correction is only implemented for isotropic elasticity");

   remove_reverse = 0;
   dnsig = 0.0;
   sig_0 = 0.0;
   eto_0 = 0.0;
   nsig_0 = 0.0;
   neto_0 = 0.0;
   dsig_prev = 0.0;

   keep_sig_0.add(sig_0);
   keep_eto_0.add(sig_0);
   keep_nsig_0.add(sig_0);
   keep_neto_0.add(sig_0);
   keep_nevi_0.add(nevi_0);
   keep_evcum_0.add(0.0);
}

@PostStep {
  nevi  = neto - neel;
  nsig  = *elasticity*neel;
}

@Derivative {

  decharge = 0;
  dnevcum = 0.;
  SMATRIX HH;
  int i,j;
  double m1,m2;
  m1=m2=1.0;

  bool strain_control = TRUE;
  @Simulation {
    if(num_sig!=0) {
        if(num_sig!=tsz()) ERROR("mixed loadings are not allowed");
       strain_control=FALSE;
    }
  }

  VECTOR x,y;
  HH = 0.0;
  VECTOR& vint_ini = curr_mat_data->var_int_ini()[0];

  int c;
  ELASTICITY& E=*elasticity;
  double young=((ISOTROPIC_COEFF_TENSOR4*)elasticity())->get_young();
  double poisson=((ISOTROPIC_COEFF_TENSOR4*)elasticity())->get_poisson();
  S=inverse(E);
```

```
  sig  = E*eto;
  nsig = E*neel;

  if(!strain_control) {
    dsig = deto;
    TENSOR2 resolve_strain = S*deto;
    deto = resolve_strain;
  }
  else {
    dsig = E*deto;
  }

  if(_neuber_warning) {
    if(fabs(dsig[0])>1.e-9) {
       Out<<endl;
       Out<<"Warning: sig11 should be zero at notch tip. Got sig11="<<dsig[0]
<<endl;
    }
    _neuber_warning=0;
  }
  dsig[0]=0.0;

  double evcum_0;
  nevi = neto - neel;

  if((dsig[1]*(sig[1]-sig_0[1]))<0.){

  decharge = 1;
  sig_0[0] = sig[0];
  eto_0[0] = eto[0];
  nsig_0[0] = nsig[0];
  neto_0[0] = neto[0];
  sig_0[1] = sig[1];
  eto_0[1] = eto[1];
  nsig_0[1] = nsig[1];
  neto_0[1] = neto[1];
  sig_0[2] = sig[2];
  eto_0[2] = eto[2];
  nsig_0[2] = nsig[2];
  neto_0[2] = neto[2];
  }

  if((dsig[4]*(sig[4]-sig_0[4]))<0.){

  decharge = 1;
  sig_0[4] = sig[4];
  eto_0[4] = eto[4];
  nsig_0[4] = nsig[4];
  neto_0[4] = neto[4];
  }

    TENSOR2 eto_prev = eto - deto*(zf__tau-Time_ini);
    TENSOR2 sig_prev = E*eto_prev;

    TENSOR2 neto_prev(tsz(),vint_ini,neto.start_pos);
    TENSOR2 neel_prev(tsz(),vint_ini,neel.start_pos);
    TENSOR2 nsig_prev = E*neel_prev;

    TENSOR2 dev_sig = deviator(sig);
    TENSOR2 dev_eto = deviator(eto);

    TENSOR2 dev_nsig = deviator(nsig);
    TENSOR2 dev_neto = deviator(neto);

    TENSOR2 dev_sig_0 = deviator(sig_0);
    TENSOR2 dev_eto_0 = deviator(eto_0);

    TENSOR2 dev_nsig_0 = deviator(nsig_0);
    TENSOR2 dev_neto_0 = deviator(neto_0);

    TENSOR2 dev_sig_prev = deviator(sig_prev);
    TENSOR2 dev_eto_prev = deviator(eto_prev);

    TENSOR2 dev_nsig_prev = deviator(nsig_prev);
    TENSOR2 dev_neto_prev = deviator(neto_prev);

    TENSOR2 ddev_sig = deviator(dsig);
    TENSOR2 ddev_eto = deviator(deto);

  if(zf__tau==Time_ini) {

  // To get the last converged solution at the first derivative() call
of each increment

    for(c=0;c<remove_reverse;c++) {
      // Removing reverses vanished during the last converged increment
      keep_sig_0.suppress(); keep_eto_0.suppress();
      keep_nsig_0.suppress(); keep_neto_0.suppress();
      keep_nevi_0.suppress();
      keep_Pe.suppress();
      keep_evcum_0.suppress();
    }
```

```
    if(DeBuG && remove_reverse) Out<<"Removing "<<remove_reverse<<" reverses"
<<endl;

    sig_0 = keep_sig_0.last();
    eto_0 = keep_eto_0.last();
    nsig_0 = keep_nsig_0.last();
    neto_0 = keep_neto_0.last();
    nevi_0 = keep_nevi_0.last();
    evcum_0 = keep_evcum_0.last();

    double tdPe;
    tdPe = (dsig|(eto-eto_0)) + ((sig-sig_0)|deto);

    if(DeBuG) Out<<"tdPe="<<tdPe<<endl;
    if(tdPe<0.) {
      if(DeBuG) {
         Out<<"---------------------------------"<<endl;
         Out<<"Unloading at time "<<Time<<endl;
      }
      sig_0 = sig; eto_0 = eto; nsig_0 = nsig; neto_0 = neto; nevi_0 = nevi;
      keep_sig_0.add(sig);
      keep_eto_0.add(eto);
      keep_nsig_0.add(nsig);
      keep_neto_0.add(neto);
      keep_nevi_0.add(nevi);
      keep_Pe.add(Pe);
      keep_evcum_0.add(nevcum);

      if(DeBuG) {
        Out<<"Storing "<<!keep_sig_0-1<<" reverses"<<endl;
        for(int ii=1;ii<!keep_sig_0;ii++) {
           Out<<"-> Reverse "<<ii<<endl;
           Out<<"   sig : "<<keep_sig_0[ii];
           Out<<"   Pe  : "<<keep_Pe[ii-1]<<endl;
        }
        Out<<"---------------------------------"<<endl;
      }
    }
  }

  double dPe;
  TENSOR2 delta_sig, delta_eto, delta_nsig, delta_neto, delta_nevi;
  double delta_evcum;

  remove_reverse = 0;
  for(;;) {

    int rk_reverse = !keep_sig_0-1-remove_reverse;

    sig_0 = keep_sig_0[rk_reverse];
    eto_0 = keep_eto_0[rk_reverse];
    nsig_0 = keep_nsig_0[rk_reverse];
    neto_0 = keep_neto_0[rk_reverse];
    nevi_0 = keep_nevi_0[rk_reverse];
    evcum_0 = keep_evcum_0[rk_reverse];

    delta_sig = sig-sig_0;
    delta_eto = eto-eto_0;
    delta_nsig = nsig-nsig_0;
    delta_neto = neto-neto_0;
    delta_nevi = nevi-nevi_0;
    delta_evcum = nevcum - evcum_0;

      Pe   = delta_sig|delta_eto;
      dPe  = (dsig|delta_eto) + (delta_sig|deto);

    if(rk_reverse<=1) break;

    double max_Pe = keep_Pe[rk_reverse-1];
    if(Pe>max_Pe) {
      remove_reverse += 2;
      if(DeBuG) {
         Out<<"---------------------------------"<<endl;
         Out<<"Ignoring reverse : "<<keep_sig_0[rk_reverse];
         Out<<"Ignoring reverse : "<<keep_sig_0[rk_reverse-1];
         Out<<"---------------------------------"<<endl;
      }
    }
    else break;
  }

  Xtot = 0.0;
  for (c=0;c<!C;c++) Xtot += X[c] = C[c]*alpha[c];
  double    radius = isotropic->radius(nevcum);
  TENSOR2   sigeff = deviator(nsig) - Xtot;
  double    f      = criterion->yield(sigeff, radius);

  int yld = (flow->plasticity()) ? (f>=0.0) : (f>0.0);

  if (yld&&(fabs(dsig[1])>1.e-12||fabs(dsig[4])>1.e-12)&&decharge==0) {

     m.resize(!C);
```

```
     TENSOR2          norm     = criterion->normal();

     Xdot = 0.0;
     for (c=0;c<!C;c++) {
         if((!omega==0)||(omega[c]==0.0)) {
//            Classical nonlinear kinematic
            m[c] = norm - X[c]*(D[c]/C[c]);
         }
         else {
//           Nonlinear with crit
            double J2X  = sqrt((alpha[c]|alpha[c])/1.5);
            double trm1 = (D[c]*J2X - omega[c])/(1.0-omega[c]);
            if(trm1>0.0) {
              double trm2 = D[c]*J2X;
              double trm3 = pow(trm1,m1);
              double trm4 = pow(trm2,-m2);
              double phi  = trm3*trm4;
              m[c] = norm - X[c]*(D[c]*phi/C[c]);
            }
            else m[c] = norm;
         }
         Xdot += C[c]*m[c];
     }

     dnsig = 0.0;

     if (flow->plasticity()) {

        double          H1        = isotropic->dradius_dflow();
        double          H2        = norm|Xdot;


//si traction pure

if(fabs(dsig[4])<1.e-9){

x.resize(4),y.resize(4);
   HH.resize(4);
HH = 0.0;
double i, j;

for(i=0;i<3;i++){
for(j=0;j<3;j++){

if(i==j){
HH(i,j)=(2.*dev_neto[i]-dev_neto_0[i]-dev_neto_prev[i])
+(2.*dev_nsig[i]-dev_nsig_0[i]-dev_nsig_prev[i])/young;

}
else{

HH(i,j)=-poisson*(2.*dev_nsig[i]
-dev_nsig_0[i]-dev_nsig_prev[i])/young;

}
}
}
for(i=0;i<3;i++){

HH(i,3)=norm[i]*(2.*dev_nsig[i]
-dev_nsig_0[i]-dev_nsig_prev[i]);

}
for(j=0;j<3;j++){

HH(3,j)=norm[j];

}

HH(3,3)=-(H1+H2);
for(i=0;i<3;i++){

y[i] = ddev_sig[i]*(2*dev_eto[i]-dev_eto_0[i]
-dev_eto_prev[i])+ddev_eto[i]*(2*dev_sig[i]
-dev_sig_0[i]-dev_sig_prev[i]);

}
y[3] = 0.;

int ret = HH.gauss_solver(y,x,TRUE);
if(!ret) {
ERROR("probleme de solveur");
}
dnsig[1] = 2*x[1]+x[2];
dnsig[2] = 2*x[2]+x[1];
dnevcum = x[3];
if(dnevcum<0.){
dnevcum = 0.;
dnsig = dsig;
ERROR("dnevcum < 0");
}
```

```
}

//si torsion pure

else if(fabs(dsig[1])<1.e-9){
x.resize(2),y.resize(2);
   HH.resize(2);
HH = 0.0;
double i, j;

HH(0,0)=(2.*dev_neto[4]-dev_neto_0[4]-dev_neto_prev[4])
+(2.*dev_nsig[4]-dev_nsig_0[4]-dev_nsig_prev[4])*(1+poisson)/young;
HH(0,1)=norm[4]*(2.*dev_nsig[4]-dev_nsig_0[4]-dev_nsig_prev[4]);
HH(1,0)=norm[4];
HH(1,1)=-(H1+H2);
y[0] = ddev_sig[4]*(2*dev_eto[4]-dev_eto_0[4]-dev_eto_prev[4])
+ddev_eto[4]*(2*dev_sig[4]-dev_sig_0[4]-dev_sig_prev[4]);
y[1] = 0.;

int ret = HH.gauss_solver(y,x,TRUE);
if(!ret) {
ERROR("probleme de solveur");
}
dnsig[4] = x[0];
dnevcum = x[1];
if(dnevcum<0.){
dnevcum = 0.;
dnsig = dsig;
ERROR("dnevcum < 0");
}
}

//si traction-torsion combin\'ee

else{

x.resize(5),y.resize(5);
   HH.resize(5);
HH = 0.0;
double i, j;

for(i=0;i<3;i++){
for(j=0;j<3;j++){
if(i==j){

HH(i,j)=(2.*dev_neto[i]-dev_neto_0[i]-dev_neto_prev[i])
+(2.*dev_nsig[i]-dev_nsig_0[i]-dev_nsig_prev[i])/young;

}
else{

HH(i,j)=-poisson*(2.*dev_nsig[i]-dev_nsig_0[i]-dev_nsig_prev[i])/young;

}
}
}
for(i=0;i<3;i++){

HH(i,3) =0.;

}
for(j=0;j<3;j++){

HH(3,j) =0.;

}
for(i=0;i<3;i++){

HH(i,4)=norm[i]*(2.*dev_nsig[i]-dev_nsig_0[i]-dev_nsig_prev[i]);

}
for(j=0;j<3;j++){

HH(4,j)=norm[j];

}

HH(3,3)=(2.*dev_neto[4]-dev_neto_0[4]-dev_neto_prev[4])
+(2.*dev_nsig[4]-dev_nsig_0[4]-dev_nsig_prev[4])*(1+poisson)/young;
HH(3,4)=norm[4]*(2.*dev_nsig[4]-dev_nsig_0[4]-dev_nsig_prev[4]);
HH(4,3)=norm[4];
HH(4,4)=-(H1+H2);

for(i=0;i<3;i++){
y[i] = ddev_sig[i]*(2*dev_eto[i]-dev_eto_0[i]-dev_eto_prev[i])
+ddev_eto[i]*(2*dev_sig[i]-dev_sig_0[i]-dev_sig_prev[i]);
}
y[3] = ddev_sig[4]*(2*dev_eto[4]-dev_eto_0[4]-dev_eto_prev[4])
+ddev_eto[4]*(2*dev_sig[4]-dev_sig_0[4]-dev_sig_prev[4]);
y[4] = 0.;

int ret = HH.gauss_solver(y,x,TRUE);
```

```
if(!ret) {
ERROR("probleme de solveur");
}
dnsig[1] = 2*x[1]+x[2];
dnsig[2] = 2*x[2]+x[1];
dnsig[4] = x[3];
dnevcum = x[4];

if(dnevcum<0.){
dnevcum = 0.;
dnsig = dsig;
ERROR("dnevcum < 0");
}
}
     }
```

```
     dneel = S*dnsig;
     dneto = dneel+dnevcum*norm;
     for (c=0;c<!C;c++) dalpha[c] = dnevcum*m[c];
  }
  else {
    dneel   = dneto = deto;
    dnevcum = 0.0;
    for (c=0;c<!C;c++) dalpha[c] = 0.0;
  }
}
```

Annexe -G-

Fonction corrections.z pour les corrections L et NL

```
#include <Elasticity.h>
#include <External_parameter.h>
#include <Basic_nl_behavior.h>
#include <Flow.h>
#include <Criterion.h>
#include <Isotropic.h>
#include <Coefficient_T4_models.h>
#include <Print.h>

static int _neuber_warning=1;

@Class NEUBER_BEHAVIOR_neuber_herbland_kroner_directe_imprim :
BASIC_NL_BEHAVIOR, BASIC_SIMULATOR {
   @Name     neuber_herbland_kroner_directe_imprim;
   @SubClass ELASTICITY elasticity;
   @SubClass ELASTICITY CK;
   @SubClass ELASTICITY DK;
   @SubClass CRITERION  criterion;
   @SubClass FLOW       flow;
   @SubClass ISOTROPIC_HARDENING  isotropic;

   @Coefs    C [0-N] @Factor 1./1.5;
   @Coefs    D [!C];
   @Coefs    gamma [0-N];
   @Coefs    omega [!C];
   @tVarAux  nsig;
   @tVarInt  neel, neto, alpha [!C];
   @sVarInt  nevcum;
   @tVarAux  X [!C], nevi;
   @tVarAux  Xtot;
   @tVarUtil m [!C];
   @tVarUtil Xdot, dsig, dnsig, beta, eta, sig_0, eto_0, nsig_0, neto_0;

   TENSOR4   S;
   TENSOR4   CitK;
   TENSOR4   tgamma;

   int decharge;

};


@SetUp {
   if(!elasticity->areYouA("ISOTROPIC_COEFF_TENSOR4"))
     ERROR("Neuber correction is only implemented for isotropic elasticity");
   dnsig = 0.0;
   tgamma.resize(tsz());
   tgamma = 0.0;
   decharge = 0;
   sig_0 = 0.0;
   eto_0 = 0.0;
   nsig_0 = 0.0;
   neto_0 = 0.0;
}

@PostStep {
  nevi  = neto - neel;
  nsig  = *elasticity*neel;
}

@Derivative {

  decharge = 0;
  dnevcum = 0.;

  ELASTICITY& tCK=*CK;
  ELASTICITY& tDK=*DK;

  for(int i=0;i<tsz();i++){
   for(int j=0;j<tsz();j++){
if(i==j&&i<3){
tgamma(i,j)=gamma[0];
}
   if(i==j&&i>=3){
tgamma(i,j)=gamma[0]/2.;
}
}
  }

  double m1,m2;
  m1=m2=1.0;

  bool strain_control = TRUE;
  @Simulation {
    if(num_sig!=0) {
        if(num_sig!=tsz()) ERROR("mixed loadings are not allowed");
       strain_control=FALSE;
    }
  }

  int c;
```

```
  ELASTICITY& E=*elasticity;
  double young=((ISOTROPIC_COEFF_TENSOR4*)elasticity())->get_young();
  double poisson=((ISOTROPIC_COEFF_TENSOR4*)elasticity())->get_poisson();
  S=inverse(E);

  TENSOR4 temp = tCK;

  for(int i=0;i<tsz();i++) {
     if(temp(i,i)<1.e-9) temp(i,i)+=1.e19;
  }

  CitK = inverse(temp);

  sig  = E*eto;
  nsig = E*neel;

  if(!strain_control) {
    dsig = deto;
    TENSOR2 resolve_strain = S*deto;
    deto = resolve_strain;

  }
  else {
    dsig = E*deto;
  }

  if(_neuber_warning) {
    if(fabs(dsig[0])>1.e-9) {
       Out<<endl;
       Out<<"Warning: sig11 should be zero at notch tip. Got sig11="<<dsig[0]
<<endl;
    }
    _neuber_warning=0;
  }
  dsig[0]=0.0;

  nevi = neto - neel;

  if((dsig[1]*(sig[1]-sig_0[1]))<0.){

  decharge = 1;

  sig_0[0] = sig[0];
  eto_0[0] = eto[0];
  nsig_0[0] = nsig[0];
  neto_0[0] = neto[0];

  sig_0[1] = sig[1];
  eto_0[1] = eto[1];
  nsig_0[1] = nsig[1];
  neto_0[1] = neto[1];

  sig_0[2] = sig[2];
  eto_0[2] = eto[2];
  nsig_0[2] = nsig[2];
  neto_0[2] = neto[2];

  }

  if((dsig[4]*(sig[4]-sig_0[4]))<0.){

  decharge = 1;

  sig_0[4] = sig[4];
  eto_0[4] = eto[4];
  nsig_0[4] = nsig[4];
  neto_0[4] = neto[4];

  }

  Xtot = 0.0;
  for (c=0;c<!C;c++) Xtot += X[c] = C[c]*alpha[c];
  double    radius = isotropic->radius(nevcum);
  TENSOR2   sigeff = deviator(nsig) - Xtot;
  double    f      = criterion->yield(sigeff, radius);

  int yld = (flow->plasticity()) ? (f>=0.0) : (f>0.0);

  if (yld&&(fabs(dsig[1])>1.e-12||fabs(dsig[4])>1.e-12)&&decharge==0) {

     m.resize(!C);
     TENSOR2          norm     = criterion->normal();

     Xdot = 0.0;
     for (c=0;c<!C;c++) {
         if((!omega==0)||(omega[c]==0.0)) {
//           Classical nonlinear kinematic
            m[c] = norm - X[c]*(D[c]/C[c]);
         }
         else {
//           Nonlinear with crit
            double J2X  = sqrt((alpha[c]|alpha[c])/1.5);
```

```
          double trm1 = (D[c]*J2X - omega[c])/(1.0-omega[c]);
          if(trm1>0.0) {
            double trm2 = D[c]*J2X;
            double trm3 = pow(trm1,m1);
            double trm4 = pow(trm2,-m2);
            double phi  = trm3*trm4;
            m[c] = norm - X[c]*(D[c]*phi/C[c]);
          }
          else m[c] = norm;
        }
        Xdot += C[c]*m[c];
     }

     dnsig = 0.0;

     if (flow->plasticity()) {

        double          H1        = isotropic->dradius_dflow();
        double          H2        = norm|Xdot;

        beta = CitK*(sig-nsig);
eta = tCK*(norm-(tDK*(beta-tgamma*nevi)));
dnevcum = (norm|dsig)/((norm|eta)+H1+H2);

        if(dnevcum<0.){
   dnevcum = 0.;
           //ERROR("dnevcum < 0");
        }

        dnsig = dsig - dnevcum*eta;

      }

      dneel = S*dnsig;
      dneto = dneel+dnevcum*norm;
      for (c=0;c<!C;c++) dalpha[c] = dnevcum*m[c];

  }
  else {

    dneel   = dneto = deto;
    dnevcum = 0.0;
    for (c=0;c<!C;c++) dalpha[c] = 0.0;

  }

}
```

Annexe -H-

Validation sur éprouvette entaillée : comparaison des courbes de comportement local

H.1 Traction simple et torsion simple

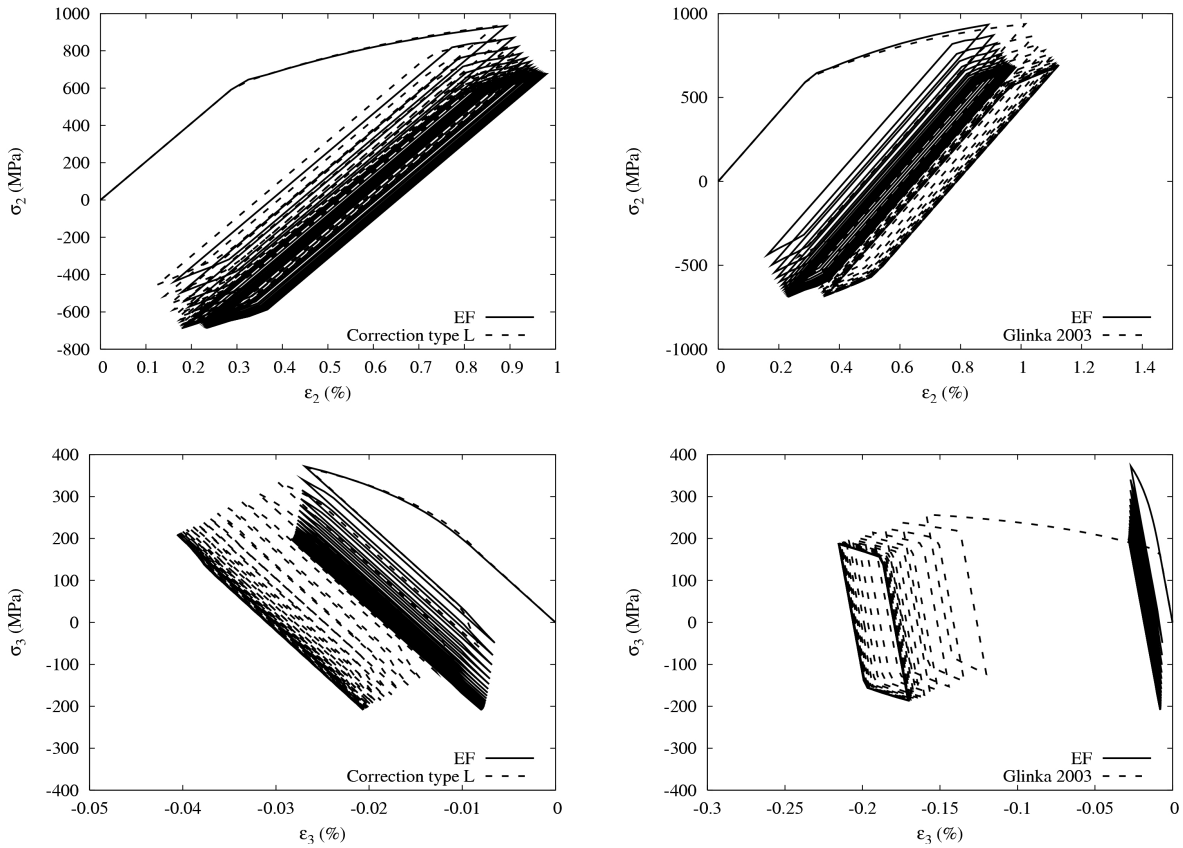


Figure H.1 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis, par la méthode de Buczynski-Glinka et par la correction de type L pour une traction répétée d'amplitude 2

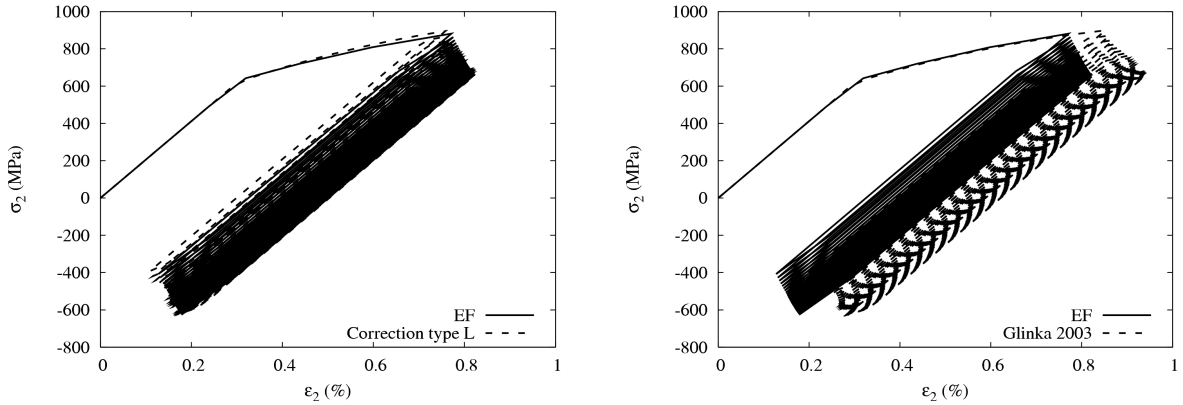


Figure H.2 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis, par la méthode de Buczynski-Glinka et par la correction de type L pour une traction répétée d'amplitude 1

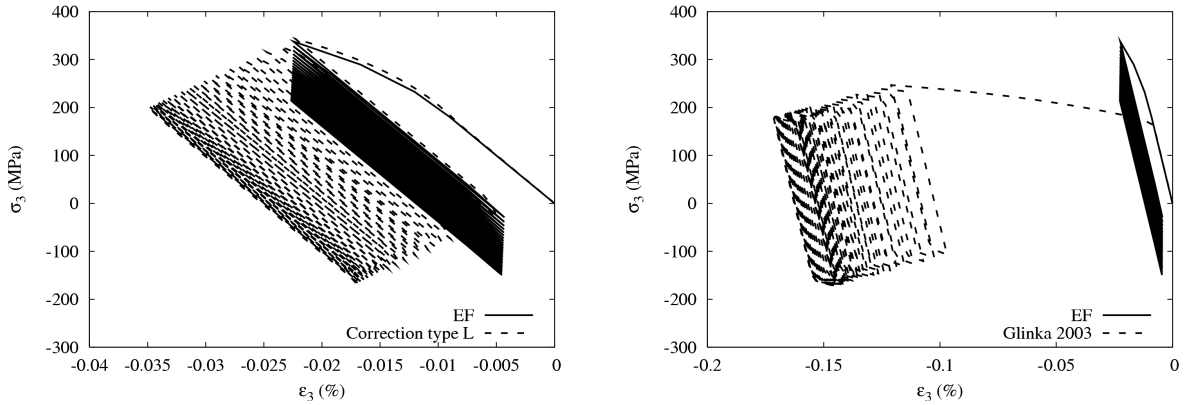


Figure H.3 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis, par la méthode de Buczynski-Glinka et par la correction de type L pour une traction répétée d'amplitude 1

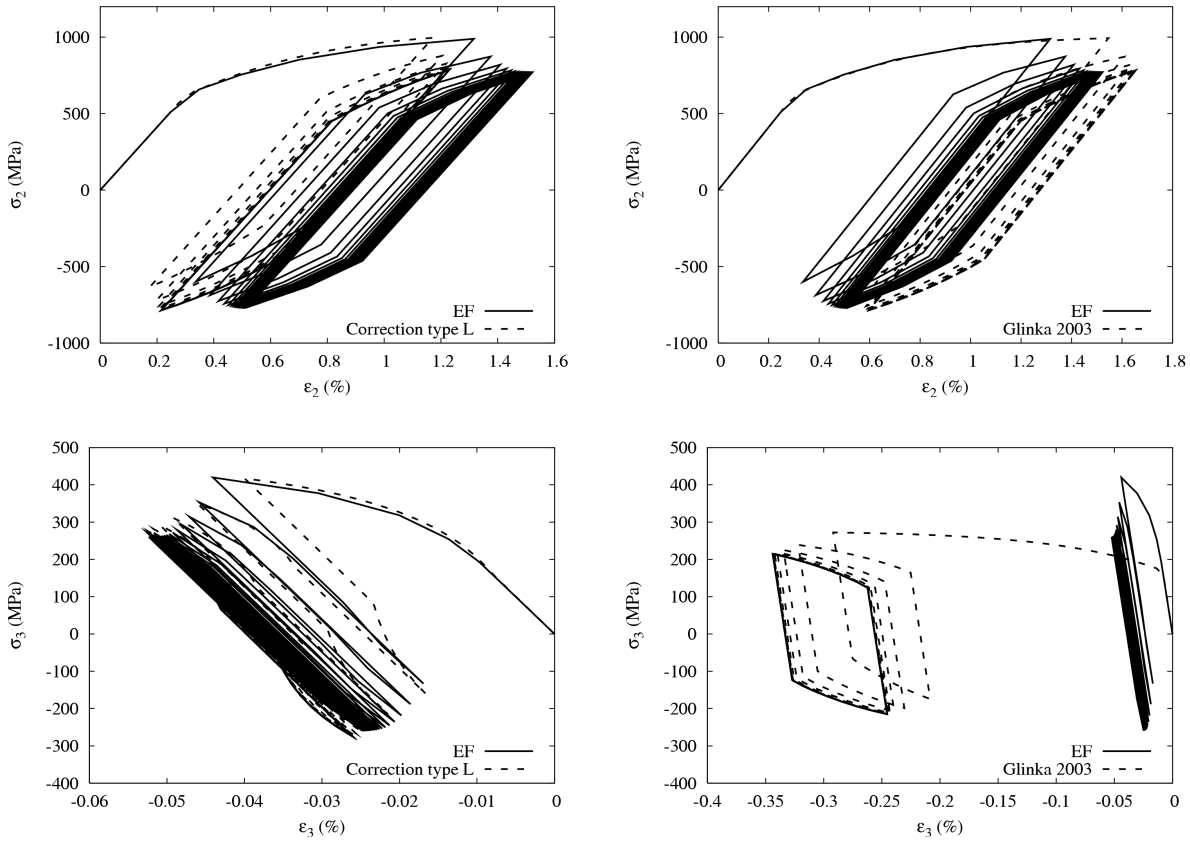


Figure H.4 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis, par la méthode de Buczynski-Glinka et par la correction de type L pour une traction répétée d'amplitude 3

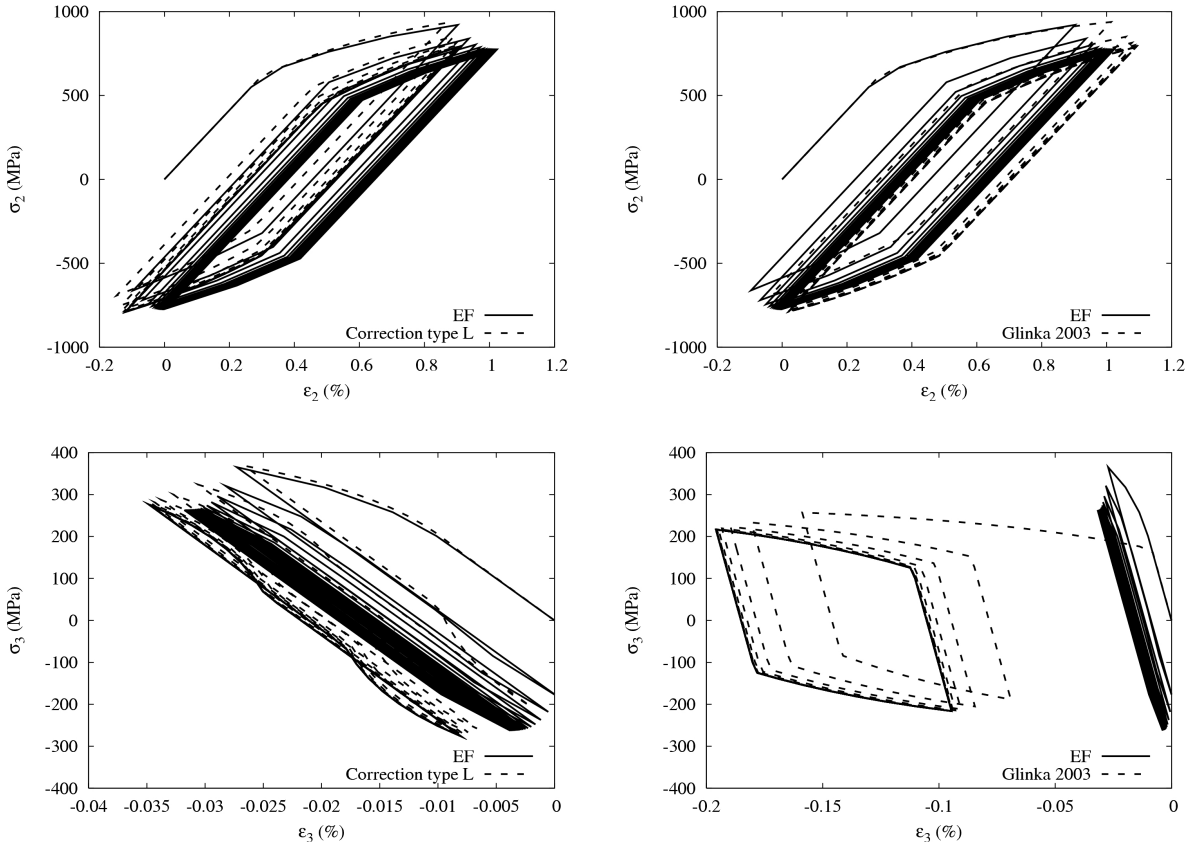


Figure H.5 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis, par la méthode de Buczynski-Glinka et par la correction de type L pour une traction à $R =$ -0.3

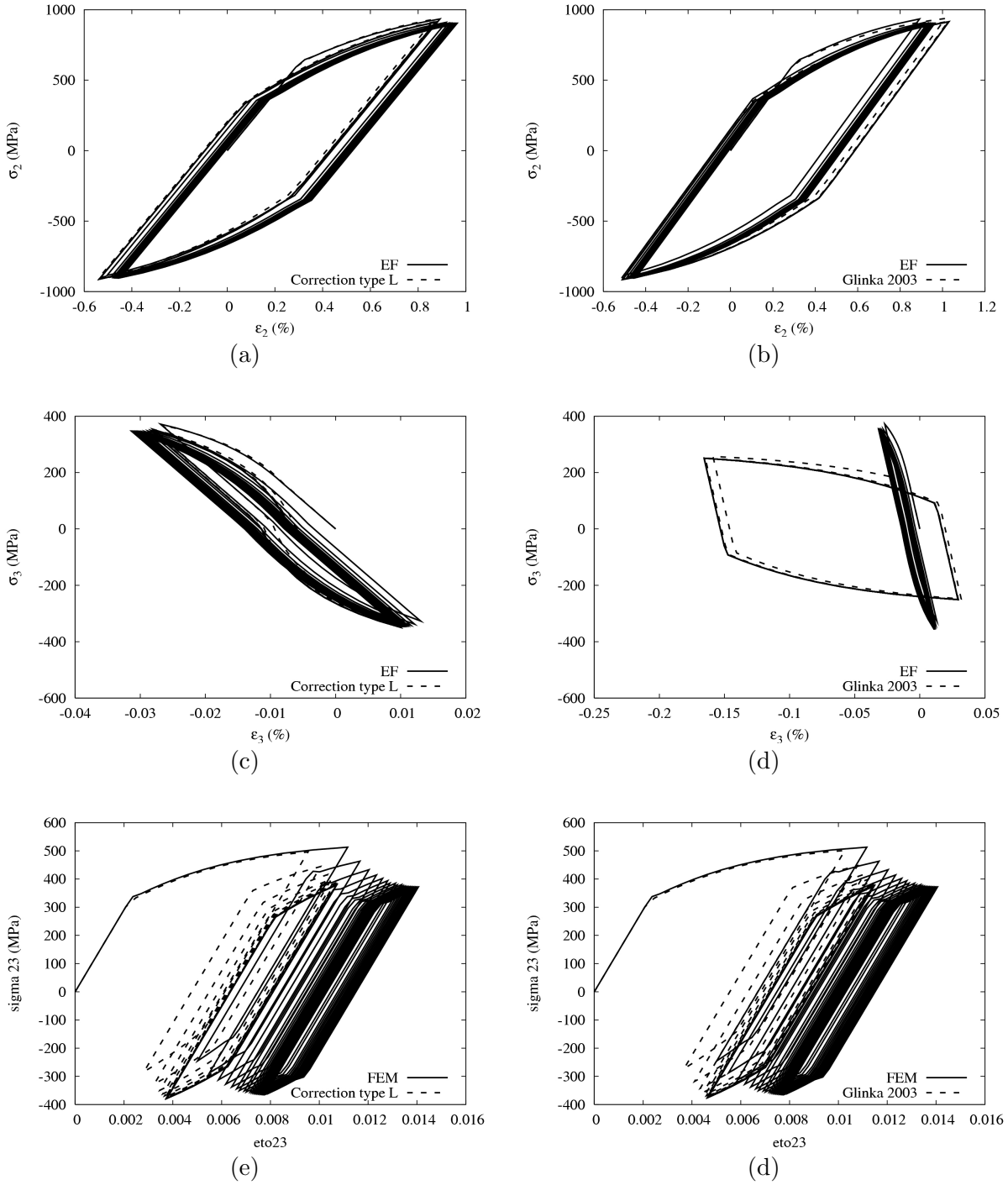


Figure H.6 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis, par la méthode de Buczynski-Glinka et par la correction de type L : (a,b,c,d) pour une traction à R = -0.7 ; (e,f) pour une torsion répétée

H.2 Traction-torsion proportionnelle d'amplitude constante et variable

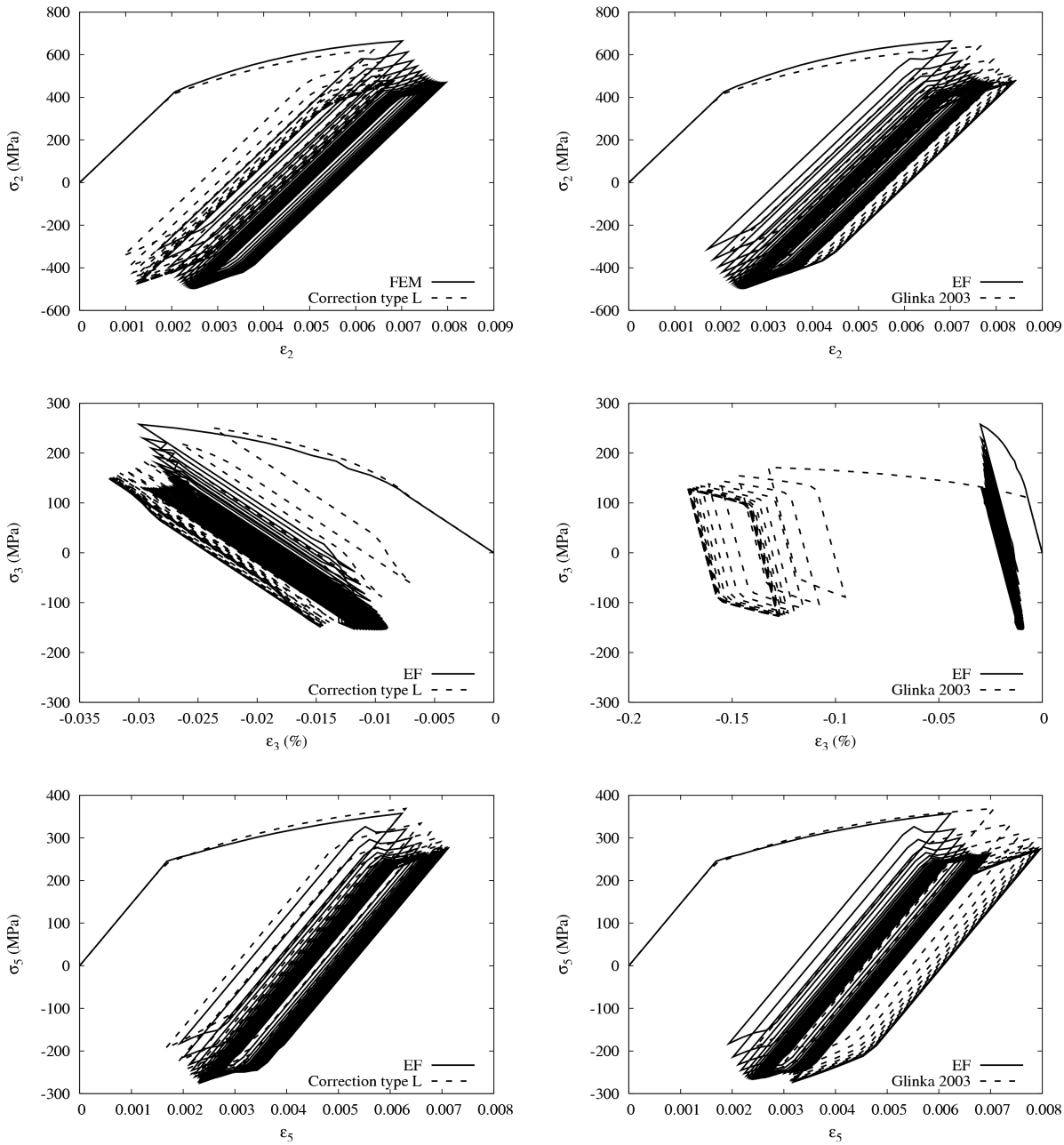


Figure H.7 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis, par la méthode de Buczynski-Glinka et par la correction de type L pour un chargement de traction-torsion proportionnel répété

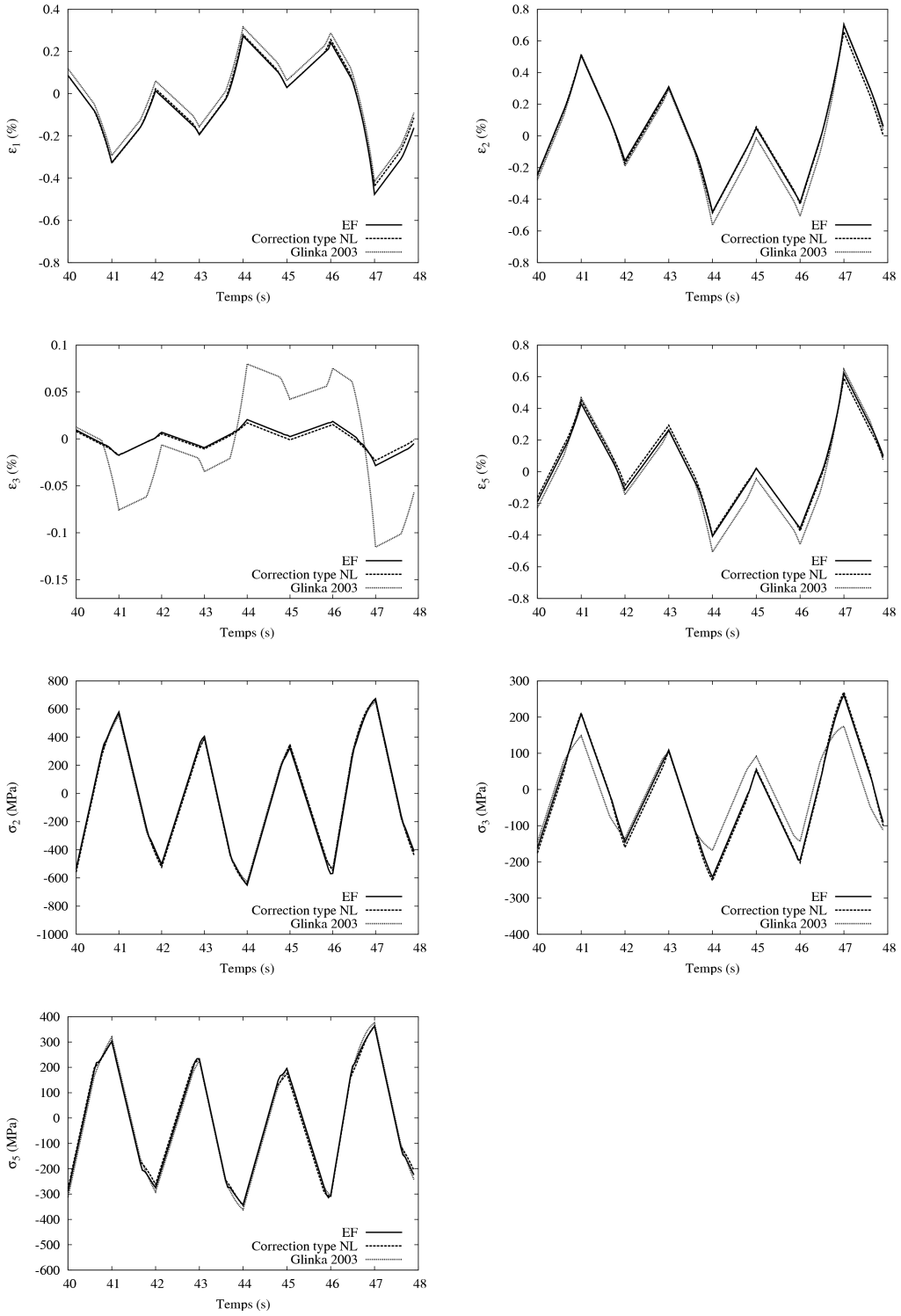


Figure H.8 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis, par la méthode de Buczynski-Glinka et par la correction de type NL pour un chargement de traction-torsion proportionnel aléatoire

H.3 Traction-torsion non proportionnelle d'amplitude constante et aléatoire

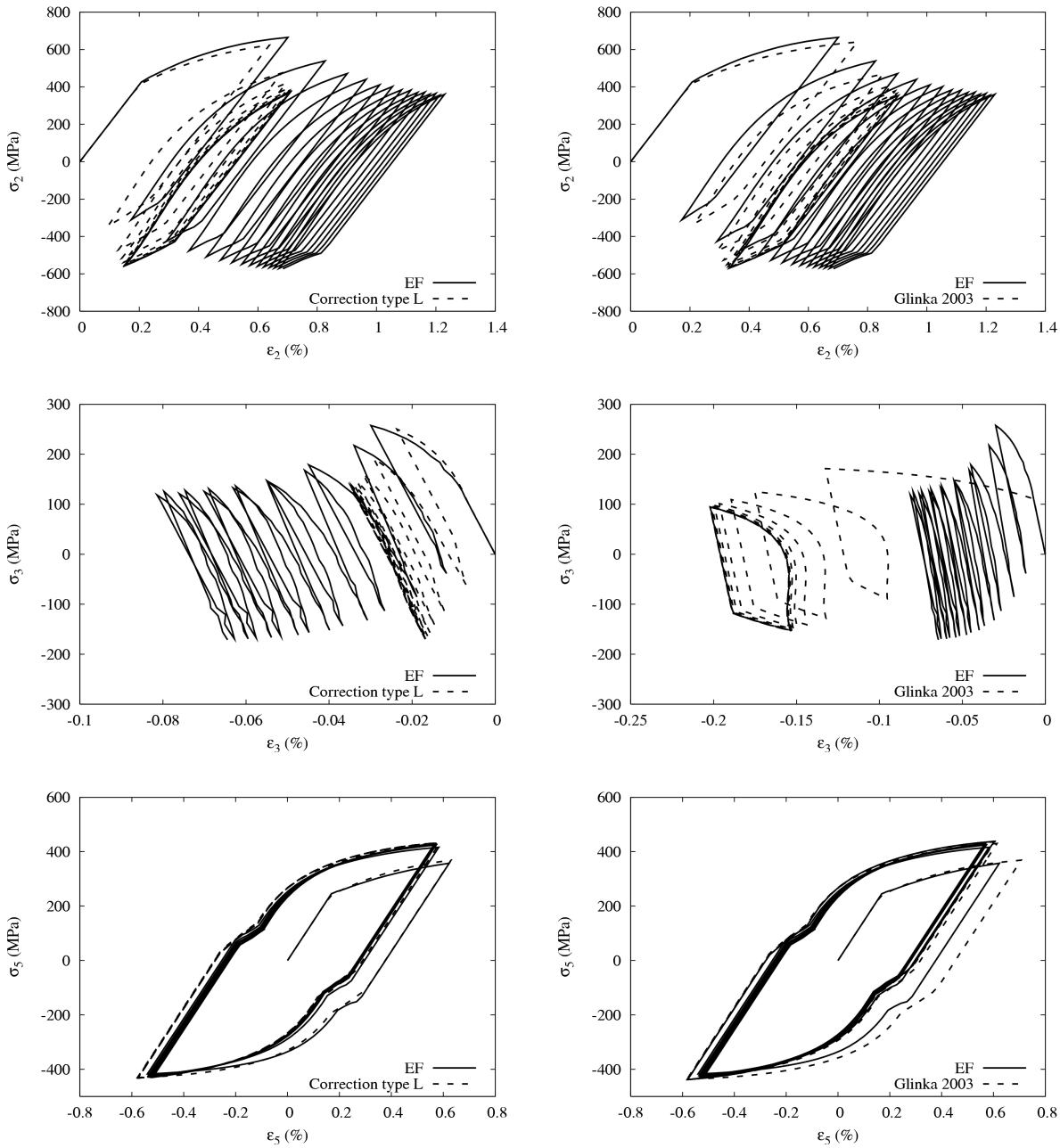


Figure H.9 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis, par la méthode de Buczynski-Glinka et par la correction de type L pour le chargement de traction-torsion non proportionnel 1

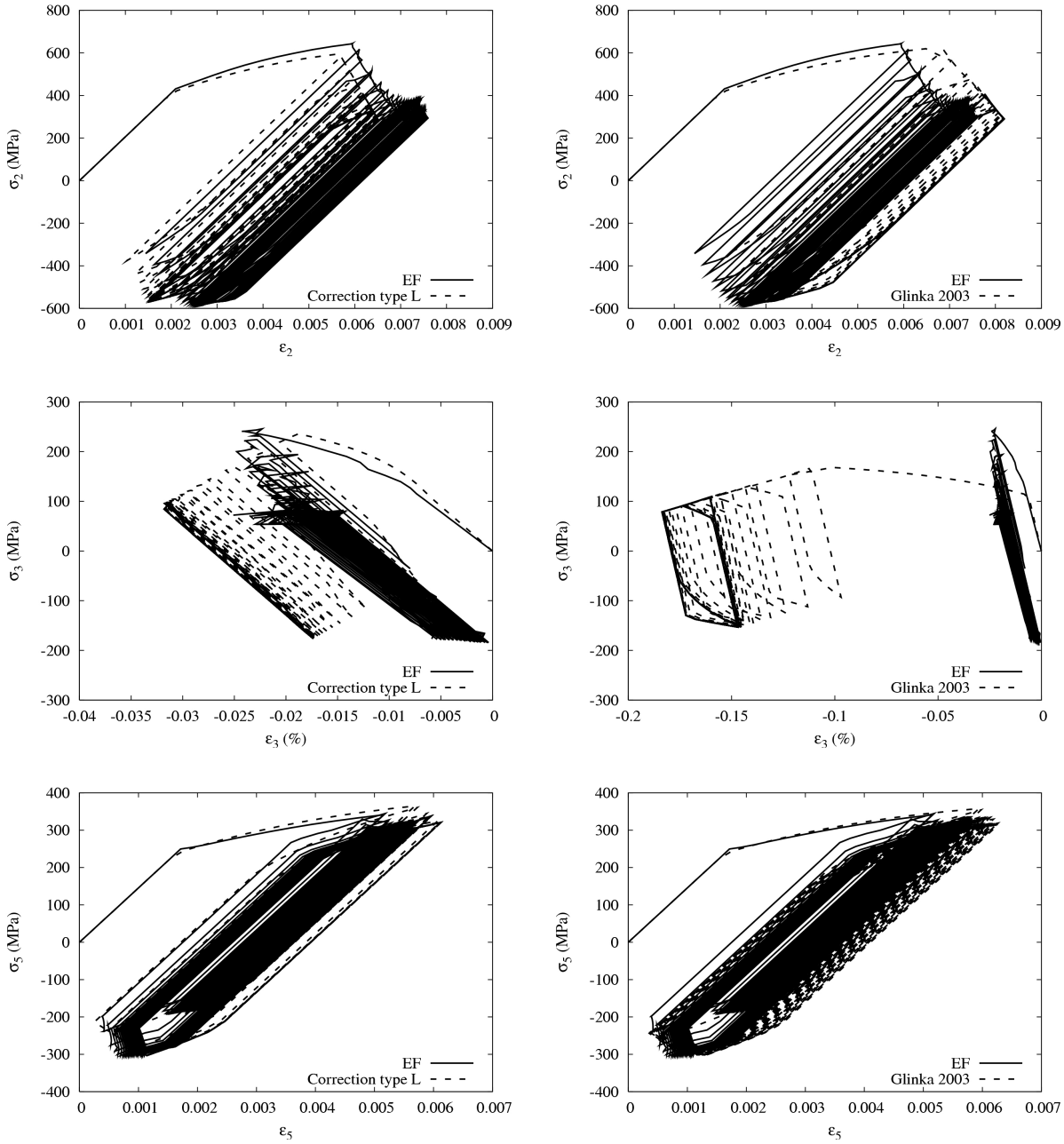


Figure H.10 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis, par la méthode de Buczynski-Glinka et par la correction de type L pour le chargement de traction-torsion non proportionnel 2

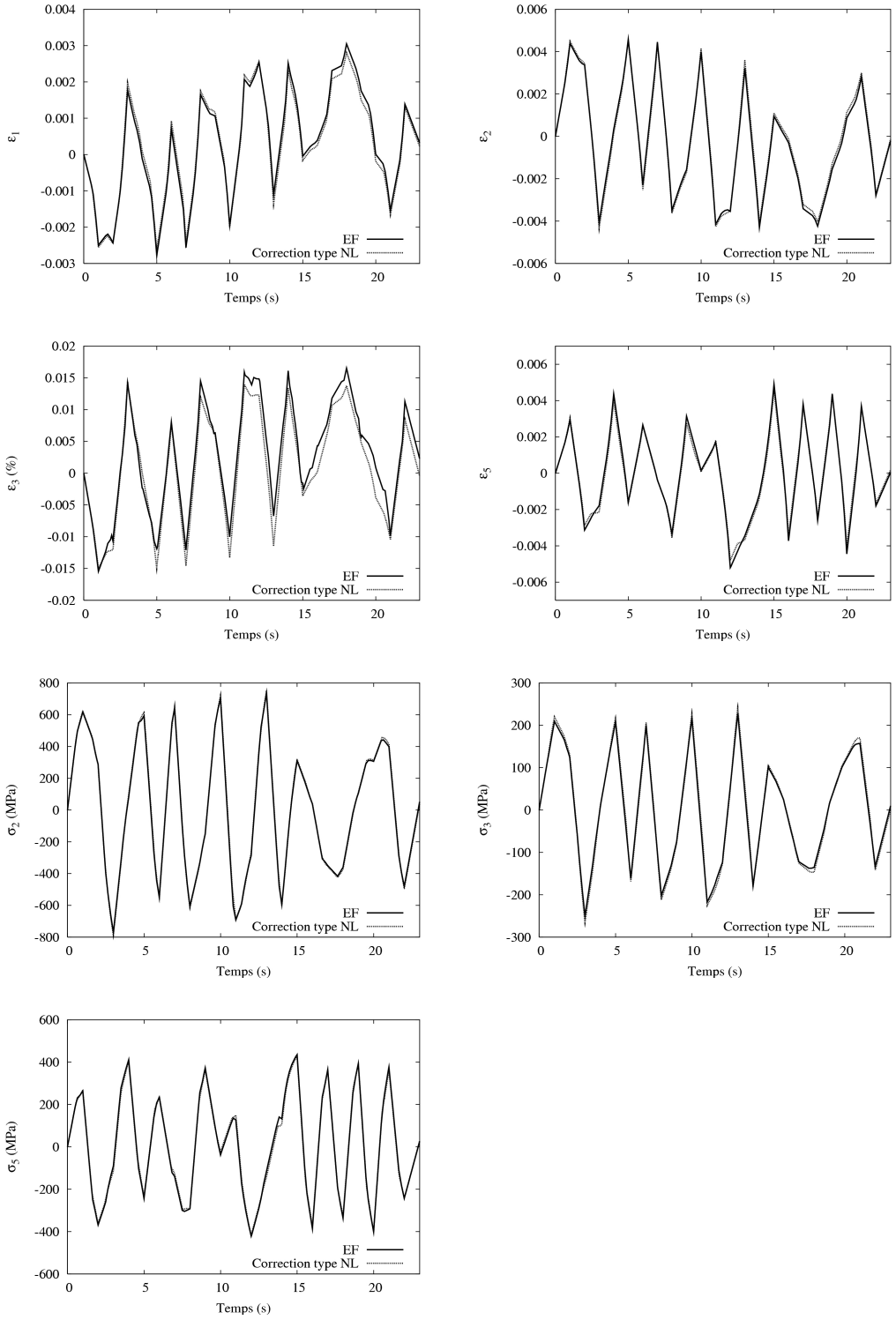


Figure H.11 – Comparaison des courbes de comportement local obtenues par éléments finis et par la correction de type NL pour un chargement de traction-torsion non proportionnel aléatoire

Une methode de correction elastoplastique pour le calcul en fatigue des zones de concentration de contraintes sous chargement cyclique multiaxial non proportionnel

La première étape d'un calcul de durée de vie en fatigue oligocyclique consiste à obtenir l'historique des contraintes et des déformations sur des points jugés critiques. Pour éviter des calculs complets par éléments finis (force brute) particulièrement longs, les corrections élasto-plastiques locales évaluent ces historiques en un temps très court. Les approches existantes manquant de précision, une nouvelle méthode de calcul qui s'inspire des modèles d'homogénéisation a été proposée. Elle a été implémentée dans le code de calcul ZéBuLoN et validée sur des cas de charge quelconques en multiaxial non proportionnel aléatoire, ce qui n'est le cas d'aucune autre méthode de la littérature. Ces historiques servent d'entrée aux méthodes de prévision de durée de vie. Un nouvel algorithme de comptage de cycles a été utilisé pour extraire une série de cycles d'un chargement multiaxial aléatoire. Il s'agit d'une technique de rainflow qui permet de conserver toutes les composantes du chargement, et de définir un « cycle » dans l'espace des contraintes déviatoriques. Des calculs de durée de vie ont été réalisés pour évaluer la pertinence de l'ensemble de la chaîne de calcul ainsi constituée. On montre pour finir des applications à une pièce industrielle (bras de châssis de grue).

Mots-clés : Fatigue multiaxiale, chargement aléatoire, plasticité confinée, calcul accéléré, correction élasto-plastique locale, non-proportionnalité, comptage de cycles multiaxial

---

An elasto-plastic correction for the fatigue design of notched components under multiaxial non proportional cyclic loading

The first step of a low cycle fatigue life calculation consists in determining the stress and strain histories at critical points. To avoid time-consuming complete finite element computations, local elasto-plastic corrections may be used to evaluate those histories in a very short time. Existing approaches are not accurate enough, thus a new method inspired from homogenisation models is proposed. It was implemented in the ZeBuLoN FE code, and validated through multiaxial non proportional random loadings, which is not the case for any existing method. The obtained histories are used as an input for fatigue life calculation methods. A new cycle counting algorithm was also implemented to extract cycles from a multiaxial random loading sequence. It is a rainflow technique, which takes into account all components of the loading, and defines a "cycle" in the deviatoric stresses space. Fatigue life calculations have been performed to evaluate the relevance of this calculation chain. Finally, we apply the method to an industrial component (crane frame arm).

Keywords : Multiaxial fatigue, random loading, confined plasticity, accelerated computation, local elasto-plastic correction, non proportionality, multiaxial cycle counting