HAL
open science

Modélisation des Champs Magnétiques de Grandes Echelles dans les Intérieurs Stellaires Application aux étoiles de type solaire et aux étoiles Ap

Vincent Duez

To cite this version:

Vincent Duez. Modélisation des Champs Magnétiques de Grandes Echelles dans les Intérieurs Stellaires Application aux étoiles de type solaire et aux étoiles Ap. Astrophysique [astro-ph]. Ecole Polytechnique X, 2009. Français. NNT : . tel-00498360

HAL Id: tel-00498360

https://pastel.hal.science/tel-00498360v1

Submitted on 7 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Palaiseau
N°d'ordre : ****

ÉCOLE POLYTECHNIQUE — DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'École Polytechnique

Spécialité : *Astrophysique et Physique des Plasmas*

par

VINCENT DUEZ

Sujet :

Modélisation des Champs Magnétiques de Grandes Échelles dans les Intérieurs Stellaires

Application aux étoiles de type solaire et aux étoiles Ap

Soutenue le 11 décembre 2009 devant la commission d'examen composée de :

M.	C. CATALA	Examinateur
M.	J. -F. DONATI	Examinateur
M.	S. MATHIS	Responsable CEA
M.	G. MEYNET	Rapporteur
Mme.	L. REZEAU	Présidente
M.	M. RIEUTORD	Rapporteur
Mme.	S. TURCK-CHIÈZE	Directrice de thèse
M.	J. -P. ZAHN	Membre invité

Service d'Astrophysique, CEA/DSM/IRFU - Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette CEDEX

Aucun pessimiste n'a jamais découvert le secret des étoiles, navigué jusqu'à des terres inconnues, ni ouvert un nouveau chemin pour l'esprit humain.

– *Helen Keller*

Remerciements

Je souhaite tout d'abord adresser mes remerciements au service d'astrophysique du CEA dans sa globalité. Durant ce voyage de trois ans, j'ai peu à peu compris la chance que j'avais, non pas de passer, mais de gagner mon temps ici. Car j'ai été immergé dans un environnement que je peux dire exceptionnel, et le mot n'est pas trop fort.
En franchissant la porte du laboratoire tous les matins, la conscience d'entrer dans un de ces endroits sur Terre où exercent, malgré l'emprise matérialiste de notre société, des chercheurs, des ingénieurs au goût du rêve, bref des explorateurs, m'a poussé à vouloir encore plus partager ce bout d'aventure humaine. Cette thèse s'est ponctuée d'exploits scientifiques qui ont dû repousser des limites technologiques pour voir le jour, et destinés à repousser celles de la connaissance : au cours de ces trois ans, les lancements successifs des satellites Fermi, CoRoT, Herschel et Kepler et la promiscuité avec des personnes qui se sont personnellement impliquées dans ces projets spatiaux m'a permis de prendre conscience que l'on vit un âge d'or de la science, similaire à celui que vécurent les grands navigateurs au seizième siècle.
Merci donc à Sylvaine, ma directrice de thèse, pour m'avoir ouvert les portes de cette « caraque » rouge, le bâtiment 709 de l'Orme des Merisiers, ainsi que de m'avoir permis de travailler sur un sujet si passionnant. Merci surtout de m'avoir, grâce à votre bienveillante expérience, enseigné à interpréter au mieux les résultats et à savoir faire absence de tout compromis, pour atteindre la certitude de ce que l'on avance. De même, pour m'avoir forgé l'esprit critique et inculqué la rigueur le recul à tenir concernant la pratique de la science.
Stéphane, je ne saurais suffisamment te remercier pour tout le temps que tu m'as consacré. J'ai beaucoup appris sous ta responsabilité, ou plutôt en ta compagnie, tant au niveau technique que relationnel. Ce compagnonnage m'a permis de me forger un modèle sur lequel me calquer lorsque je me trouverai en difficultés face à un nouveau problème : il me suffira de me demander comment tu ferais dans ce cas là et je suis sûr que la question se trouvera déjà alors à moitié résolue ; complètement résolue si j'arrive à égaler ta persévérance et ton sens physique si intuitif et aiguisé. Merci aussi pour tous les jours où il tanguait un peu trop sur le bateau et où je ne me sentais pas d'un meilleur moral, pour m'avoir toujours redressé le menton et fait voir vers le large.
Je souhaiterais également remercier Phi, mon responsable initial, pour ta gentillesse et l'introduction que tu m'as offerte dans le milieu de la recherche. Tu es également à mes yeux un bel exemple de décloisonnement de la science.
Cher Sacha, je te remercie pour tous les bon conseils que tu m'as prodigués à de nombreuses reprises sur mon travail. J'ai bien apprécié ton dynamisme et ton entrain qui font que quand tu es là, on a envie de tout faire marcher au quart de tour.
Tous mes remerciements à tous les membres de la collaboration MiMeS pour m'avoir intégré, en particulier Coralie Neiner, Gregg Wade et Evelyne Alecian pour les échanges que

nous avons eu et pour cette merveilleuse conférence à Hawaii. Ce fut extrèmement enrichissant de me connecter avec des observateurs et de partager leur soif de découverte.

Mes remerciements s'adressent également à toutes les personnes avec qui j'ai eu la chance d'interagir, Jean-Paul Zahn et Sébastien Fromang, ainsi que Jean-Pierre Chièze (dont je garde un excellent souvenir des ses cours), Edouard Audit et Christophe Le Poncin-Laffitte ; en particulier je remercie Jonathan Braithwaite pour le travail que nous avons mené ensemble sur la fin de ma thèse et sur la collaboration que nous avons noué qui, je n'en doute pas se poursuivra bien au-delà.

Je remercie évidemment tous les membres de mon jury de thèse pour avoir accepté de se plonger dans les arcanes de ce travail, et en particulier MM. Rieutord et Meynet pour les rapports qu'ils ont émis et qui ont permis de préciser et d'enrichir le présent manuscrit.

J'exprime toute mon amitié à tous les (post-)doctorant(e)s du SAp (et les pièces rapportées !), en particulier Timea Csengeri, Maud Galametz, Sacha Hony, Diane Cormier, Sandrine Pires, Julien Salmon, Alain Gueguen, Arnaud Woiselle, Anaïs Rassat, Guillaume Loisel, Savita Mathur, Nicolas Clerc, Erwan Brillot, Laurène Jouve, Sandrine Lefèbvre, Yohan Dubois, Fadia Salmi, Fabio Acéro, Ana Palacios, Pascal Lambert, Laurie Riguccini, Rui Pinto, Jennifer Roffidal, Benoît Commerçon, Clément Baruteau, Jérôme Guilet, Antoine Strugarek, Kumiko Sato, Katrien Uytterhoeven, Juan Zuritaheras, Marco Pierbattista pour les nombreux moments de convivialité qu'on a partagés et qui entretiennent un esprit sympathique dans le laboratoire : les petits-déjeuners hebdomadaires, les déjeuners, les cafés, et enfin les soirées A&A (non il ne s'agit pas de la revue) en votre compagnie. Henri, j'espère qu'on refera une virée en voile prochainement. Samuel : merci pour m'avoir fait découvrir les blocs de Fontainebleau. Laurent et Rafa, j'ai bien apprécié votre compagnie, votre collaboration et votre humour à décaper le Titanic.

À mes amis de plus longue date, j'exprime ma sincère gratitude de m'avoir supporté depuis si longtemps, mais bon c'est vrai il doit y avoir pire. En particulier à Thomas, Cédric et Silvia qui font le déplacement de loin rien que pour mes beaux yeux le 11 ! Robin, Laurent je suis bien content d'avoir gardé les contacts avec vous depuis qu'on a essuyé les bancs ensemble en plasmas.
À mes autres ami(e)s (ariégois, belges, alsaciens, hauts-alpins, grenoblois, parisiens, marseillais, lyonnais, indiens, canadiens, ...) aussi qui m'en voudront de ne pas être ici je laisse un blanc pour que vous puissiez indiquer votre prénom ! : .

Sur un autre registre, merci à John Coltrane, Jimi Hendrix, Glenn Gould, Sonic Youth, Patricia Smith, Neil Young, Tindersticks, Herman Düne, Bobby McFerrin, Bratsch, Ornette Coleman, Catpower, Stan Getz, Nina Simone, Alain Souchon, Noir Désir, et les grands Jacques, Georges et Serge pour m'avoir souvent accompagné.

Enfin, et j'ai gardé le plus important pour la fin, je remercie du fond du cœur ma famille, tous mes fabuleux frères et sœurs, mon père (quand, selon la chanson de Brassens, on a la chance d'en avoir un « de ce tonneau là ») et mes deux mères, la première pour m'avoir donné la vie, la seconde pour avoir pris le relais.

Résumé

L'astrophysique stellaire nécessite aujourd'hui de modéliser les champs magnétiques de grandes échelles, observés par spectropolarimétrie à la surface d'étoiles de type Ap/Bp et pouvant expliquer la rotation uniforme dans la zone radiative solaire déduite de l'héliosismologie. Durant ma thèse, je me suis attaché à décrire les possibles états d'équilibre magnétique dans les intérieurs stellaires. Les configurations trouvées sont mixtes poloïdales-toroïdales et minimisent l'énergie à hélicité donnée, en analogie aux états de Taylor rencontrés dans les sphéromaks. La prise en compte de l'auto-gravité m'a conduit à des équilibres de type « non force-free », qui vont donc influencer la structure stellaire. J'ai dérivé toutes les quantités physiques associées au champ magnétique puis quantifié les perturbations qu'elles induisent sur la gravité, les quantités thermodynamiques et énergétiques, pour une structure solaire et une étoile Ap. Des simulations MHD 3D m'ont permis de démontrer que ces équilibres forment une première famille d'états stables, la généralisation de tels états restant une question ouverte. J'ai montré qu'un champ magnétique dans la zone radiative solaire est susceptible de déformations comparables à une rotation élevée dans le coeur. Son influence sur la convection a aussi été examinée. J'ai également étudié l'interaction séculaire champ magnétique-rotation différentielle-circulation méridienne dans le but d'implémenter ses effets dans un code d'évolution stellaire nouvelle génération. Par ailleurs, les processus hydrodynamiques ont été comparés à ceux de la diffusion et d'un changement de l'efficacité de la convection dans une étoile cible du satellite CoRoT.

Abstract

Stellar astrophysics needs today new models of large-scale magnetic fields, which are observed through spectropolarimetry at the surface of Ap/Bp stars, and thought to be an explanation for the uniform rotation of the solar radiation zone, deduced from helioseismic inversions. During my PhD, I focused on describing the possible magnetic equilibria in stellar interiors. The found configurations are mixed poloidal-toroidal, and minimize the energy for a given helicity, in analogy with Taylor states encountered in spheromaks. Taking into account the self-gravity leads us to the "non force-free" equilibria family, that will thus influence the stellar structure. I derived all the physical quantities associated with the magnetic field ; then I evaluated the perturbations they induce on gravity, thermodynamic quantities as well as energetic ones, for a solar model and an Ap star. 3D MHD simulations allowed me to show that these equilibria form a first stable states family, the generalization of such states remaining an open question. It has been shown that a large-scale magnetic field confined in the solar radiation zone can induce an oblateness comparable to a high core rotation law. I also studied the secular interaction between the magnetic field, the differential rotation and the meridional circulation in the aim of implementing their effects in a next generation stellar evolution code. The influence of the magnetism on convection has also been studied. Finally, hydrodynamic processes responsible for the mixing have been compared with diffusion and a change of convection's efficiency in the case of a CoRoT star target.

Table des matières

Remerciements **iii**

Résumé **v**

Abstract **v**

Table des figures **xiii**

Liste des tableaux **xix**

Présentation du manuscrit **xxi**

Première partie :
Mise en contexte **1**

1 Les Champs Magnétiques, présents sur tout le Diagramme HR **3**
1.1 Brève introduction : les étoiles dans le diagramme HR 4
1.2 Revue des objets célestes magnétiques 6
1.2.1 Le cas du Soleil 6
1.2.2 Les étoiles de type solaire 10
1.2.3 Des étoiles très particulières : les étoiles de type Ap 11
1.2.4 Les étoiles massives 15
1.2.5 Les étoiles jeunes 15
1.2.6 Les objets compacts 17
1.3 Manifestations du champ magnétique 19
1.3.1 L'effet Zeeman 19
1.3.2 L'effet Hanle 21
1.3.3 Les émissions en rayons X 22
1.3.4 Les émissions non-thermiques dans le domaine radio 23
1.4 Méthodes observationnelles 23
1.4.1 Méthodes conventionnelles 23
1.4.2 La spectropolarimétrie 23
1.4.3 L'hélio- et l'astérosismologie 24
1.5 Conclusion 24
Bibliographie 25

2 Origines et Phénoménologie des Champs Magnétiques Stellaires 31
2.1 Les instabilités MHD à l'œuvre . . . 32
2.1.1 L'approche magnéto-hydrodynamique . . . 33
2.1.2 L'instabilité de flottaison ou de Parker . . . 34
2.1.3 Instabilités « Pinch » . . . 35
2.1.4 Un petit mot sur l'instabilité magnéto-rotationnelle . . . 38
2.2 Les champs d'origines dynamo . . . 40
2.2.1 Les équations d'induction et de Navier-Stokes . . . 40
2.2.2 La dynamo dans les zones convectives . . . 41
2.2.3 La dynamo dans les zones radiatives . . . 43
2.3 Les champs fossiles . . . 47
2.3.1 L' effet « batterie Biermann » . . . 47
2.3.2 La conservation du flux . . . 49
2.4 Conclusion . . . 49
Bibliographie . . . 51

Deuxième partie :
Modélisation de configurations d'équilibre magnétique et de leur impact sur la structure stellaire . . . 55

3 Modélisation des Champs Magnétiques de Grandes Échelles 57
3.1 Motivations . . . 58
3.1.1 Faits observationnels . . . 58
3.1.2 Faits expérimentaux . . . 60
3.1.3 Modélisations numériques . . . 61
3.2 L'équilibre magnéto-hydrostatique « non force-free » . . . 62
3.2.1 Contexte historique . . . 62
3.2.2 Configuration du champ magnétique axisymétrique . . . 64
3.2.3 L'équilibre magnéto-hydrostatique barotrope . . . 64
3.2.4 Remarque concernant la densité de courant azimutale . . . 68
3.3 États relaxés auto-gravitants . . . 69
3.3.1 Definitions et invariants axisymétriques . . . 69
3.3.2 États relaxés barotropes . . . 70
3.3.3 Solution à l'aide de la méthode des fonctions de Green . . . 73
3.3.4 Configurations . . . 74
3.4 Application aux intérieurs stellaires . . . 76
3.4.1 Champ confiné dans la zone radiative solaire . . . 76
3.4.2 Champ confiné dans la zone radiative d'une étoile de type Ap . . . 77
3.5 Liens entre l'hélicité, la topologie et l'énergie du champ . . . 78
3.5.1 Hélicité *vs.* mixité . . . 78
3.5.2 Hélicité *vs.* énergie . . . 79
3.5.3 Applications . . . 80
3.6 Discussion . . . 81
3.7 Conclusion . . . 83
3.8 Publication reliée : article 1 . . . 84
Bibliographie . . . 85

4 Éléments d'Analyse de Stabilité **91**
4.1 Les différentes formulations . . . 92
4.1.1 Méthode des modes normaux . . . 93
4.1.2 Méthode variationnelle . . . 95
4.1.3 Lien entre les deux méthodes . . . 95
4.2 Analyse de stabilité des configurations MHS via la méthode variationnelle . 97
4.2.1 Cas de déplacements perturbatifs appartenant aux surfaces magnétiques . . . 98
4.2.2 Limitations concernant l'analyse dans le cas où les déplacements perturbatifs sont perpendiculaires aux surfaces magnétiques . . . 98
4.3 Analyse de stabilité des configurations MHS par simulation numérique MHD 3D . . . 100
4.3.1 Méthode numérique . . . 100
4.3.2 Résultats . . . 101
4.4 Perspectives . . . 103
Bibliographie . . . 104

5 Influence du Champ Magnétique sur la Structure Stellaire **105**
5.1 Le jeu d'équations de la structure stellaire . . . 106
5.1.1 L'équilibre hydrostatique . . . 106
5.1.2 La conservation de la masse . . . 107
5.1.3 L'équation de transfert de la chaleur . . . 108
5.1.4 L'équation d'énergie . . . 109
5.1.5 Le transport des éléments chimiques . . . 110
5.1.6 Les équations de la structure stellaire utilisées dans Cesam . . . 110
5.2 Effet du magnétisme sur les équations de la structure stellaire . . . 111
5.2.1 Travaux antérieurs : cas solaire . . . 111
5.2.2 Modification de l'équilibre hydrostatique . . . 114
5.2.3 Grandeurs énergétiques . . . 116
5.2.4 Les équations modifiées . . . 117
5.3 Perturbation de la structure stellaire . . . 118
5.3.1 Les deux cas d'application . . . 118
5.3.2 Quantités physiques perturbant la balance hydrostatique . . . 120
5.3.3 Perturbation de la balance hydrostatique . . . 124
5.3.4 Quantités physiques perturbant la balance énergétique . . . 128
5.3.5 Perturbation de la balance énergétique . . . 131
5.3.6 Perturbations en surface . . . 132
5.4 Comparaison avec les effets de la rotation . . . 134
5.4.1 Enjeux . . . 134
5.4.2 Modélisation . . . 135
5.4.3 Résultats . . . 137
5.5 Conclusion et perspectives . . . 138
5.6 Publications reliées : articles 2 et 3 . . . 142
Bibliographie . . . 154

Troisième partie :
Modélisation dynamique . . . **157**

6 Vers le Transport Magnéto-Rotationnel 159
6.1 Le transport MHD dans les codes d'évolution stellaire 160
6.1.1 Codes MHD multidimensionnels *vs.* codes d'évolution : limites technologiques 160
6.1.2 Les codes d'évolution stellaire avec rotation et champ magnétique : outils existants et en devenir 161
6.2 Le transport magnéto-rotationnel 165
6.2.1 Généralités 165
6.2.2 L'équation d'induction 165
6.2.3 L'équation du transport du moment cinétique 167
6.2.4 L'équation du vent thermique 169
6.2.5 L'équation du transport de la chaleur 171
6.3 Influence sur la convection 172
6.3.1 Description de la convection dans la cadre de la « MLT » 172
6.3.2 Influence du champ magnétique sur l'efficacité de la convection . . . 175
6.3.3 Influence du champ magnétique sur le critère de convection 177
6.4 Application : implémentation d'un champ magnétique initialement à l'équilibre MHS 178
6.4.1 Procédure d'implémentation dans CESAM 178
6.4.2 Résultats 182
6.4.3 La diffusivité magnétique 183
6.4.4 Implémentation de la diffusion du champ magnétique 183
6.5 Perspectives 184
Bibliographie 185

7 L'astérosismologie : une nouvelle sonde des intérieurs stellaires 189
7.1 La mission COROT 190
7.1.1 Description du satellite et de la mission 190
7.1.2 Observations marquantes 191
7.2 Théorie des oscillations 192
7.2.1 Les oscillations adiabatiques non-radiales 192
7.2.2 Théorie asymptotique des modes p et variables sismiques 200
7.3 Étude de l'impact de processus physiques sur la modélisation de l'étoile HD49933 202
7.3.1 HD49933 : données observationnelles 202
7.3.2 Outils employés pour l'étude 203
7.3.3 Résultats 203
7.3.4 Perspectives 204
7.4 Publication reliée : article 4 204
Bibliographie 212

Conclusion et perspectives 215

Annexes 218

A Algèbre utile en géométrie sphérique **219**
1. Opérateurs différentiels en coordonnées sphériques 219
2. Identités vectorielles 221

B Projections sur les harmoniques sphériques **223**
1. Les harmoniques sphériques 223
1.1 Quantités scalaires 223
1.2 Quantités vectorielles 226
1.3 Développement d'opérateurs différentiels 226
1.4 Produits d'harmoniques sphériques vectorielles 228
2. Projection des quantités magnétiques sur les harmoniques sphériques 231
3. Projection des quantités dynamiques sur les harmoniques sphériques 235
3.1 Terme d'advection 235
3.2 Coefficients de couplage pour les perturbations liées à la force centrifuge 236
Bibliographie 237

C Méthode des fonctions de Green **239**
1. Méthode générale 239
2. Application à la résolution de l'équation de Grad-Shafranov 240
2.1 Remise en forme 240
2.2 Solution de l'équation homogène 240
2.3 Mise en forme de l'équation radiale 242
2.4 Obtention de la solution particulière par la méthode des fonctions de Green 242
2.5 Solution générale 243
Bibliographie 244

D Autres Publications et Communications **245**
1. Communications 245
2. Publications à venir 245

Index **261**

Table des figures

1.1 Diagramme de Hertzsprung-Russel. 22 000 étoiles du catalogue Hipparcos et 1000 étoiles du catalogue Gliese ont été prises en compte. Crédit : adapté de Richard Powell 4

1.2 Coupe du Soleil montrant sa structure interne et externe. 7

1.3 Courbes représentant les cycles solaires depuis 1610 : le nombres de groupes de taches solaires et le nombre de Wolf [39, 29] ainsi que les occurences d'aurores polaires [36, 39] (au centre) ; variation de la surface solaire au cours d'un cycle d'activité quasi-complet, de 1980 à 1989 (bas et haut) . . . 8

1.4 Courbes représentant les cycles de Schwabe, Gleissberg, et Suess (à gauche) [60] ; variations en température au cours des 2000 dernières années, reconstruites d'après 10 modèles différents (au centre) [33, 41, 13, 10, 18, 42, 34, 30, 43, 46] ; variations des cours de farine sur le marché anglais au cours de la période 1259-1702, avec une période de transition de 1530 à 1610 (à droite) [53]. 9

1.5 Diagramme papillon : position (projection planaire) et polarité des taches solaires pour chaque rotation solaire depuis 1975 (à gauche). Crédit : NASA/MSFC/NSSTC. Tache solaire et planète Terre, à l'échelle. Crédit : Royal Swedish Academy of Sciences 10

1.6 Taux de rotation de populations d'étoiles de type A non magnétiques et de type Ap [1], pour les types spectraux A0-A1 (à gauche), A0-A4 (au centre) et A5-F0 (à droite). 12

1.7 Modèle du rotateur oblique, où l'axe de rotation (R) et celui du dipôle magnétique (M) sont inclinés d'un angle β. Des lignes de champ magnétique sont représentées en pointillés. L'angle i entre la ligne de visée de l'observateur et l'axe de rotation n'est pas représenté. Crédit : adapté de R. Townsend (2007) [58]. 13

1.8 (a) Distribution en intensité du champ magnétique pour 352 étoiles Ap [11] (à gauche) ; (b) distribution en intensité du champ magnétique pour 28 étoiles Ap faiblement magnétiques [4] (à droite, échelle semi-logarithmique) 14

1.9 Illustration de l'effet Zeeman normal sur les transitions électroniques, ici entre le niveau $\ell = 2$ et le niveau $\ell = 1$. Ici les neuf transitions permises ne donnent lieu qu'à trois énergies différentes, la différence d'énergie entre niveaux adjacents ne dépendant que de l'intensité du champ magnétique extérieur B. 19

1.10 Propagation hélicoïdale du vecteur $\mathbf{E}$ le long de la direction portée par $\hat{\mathbf{e}}_k$ et ellipse de polarisation dans le plan formé par ($\hat{\mathbf{e}}_1$,$\hat{\mathbf{e}}_2$). 20

2.1 Instabilité de flottaison : exemple d'un tube de flux de champ magnétique de la tachocline en ascension. 34

2.2 Configuration « pinch » 35

2.3 À gauche (a), instabilité kink pour un champ magnétique purement poloïdal (B_P) en géométrie sphérique ; à droite (b), instabilité de Tayler pour un champ magnétique purement toroïdal (B_T) à proximité des pôles. Crédits : (a) adapté de J. Braithwaite [4] ; (b) Spruit, 1999 [45]. 36

2.4 Instabilité magnéto-rotationnelle : cas d'un disque d'accrétion : (a) à gauche, illustration du rôle de la force de tension magnétique ; (b) à droite, représentation de la densité issue d'une simulation 3D d'un disque d'accrétion dans lequel la MRI s'est pleinement développée, crédit : J.F. Hawley. 39

2.5 Illustration de la dynamo solaire selon le scénario $\alpha-\Omega$. Crédit : M. Dikpati, P. Gilman & G. de Toma, HAO/UCAR. 41

2.6 Extension des zones radiatives et convectives (en fraction de masse de l'étoile) en fonction de la masse de l'étoile (en masse solaire). Crédit : R. Kippenhahn & A. Weigert, 1990 [30]. 43

2.7 À gauche (a), évolution de $B_\varphi^2/8\pi$ (ligne pleine) et $B_P^2/8\pi$ (en pointillés). À droite (b), évolution de $B^2/8\pi$ pour $\tau_f/\tau_s = 1$ (ligne pleine), $\tau_f/\tau_s = 10$ (en pointillés) et $\tau_f/\tau_s = 100$ (tirets). Crédit : J. Braithwaite [3]. 46

2.8 Boucles dynamo dans les zones radiatives selon Spruit, 2002 [46] (boucle A) et Braithwaite, 2006 [5] (boucle B), en pointillés. Le seul moyen de régénérer le champ poloïdal et/ou toroïdal moyen est par la force électromotrice $< \mathbf{v} \times \mathbf{b} >$ produite par le champ et les vitesses non-axisymétriques créés par instabilité et régénérant le champ poloïdal. Crédit : J.-P. Zahn [52]. 48

3.1 Profil de rotation interne du Soleil : inversion de la vitesse angulaire Ω à partir des modes $\ell \leq 25$, sur une série temporelle longue (2088 j.) de données issues de GOLF et du Michelson Doppler Imager (MDI), pour plusieurs latitudes. Les barres d'erreurs à 1 σ augmentent au fur et à mesure que l'on s'approche du centre, les modes p étant moins sensibles et les modes reconnus se faisant plus rares. Crédit : R. García *et al.*, 2007 [25]. 59

3.2 Configuration d'équilibre quasi-stable obtenue par relaxation d'un champ initialement distribué de manière uniforme. Les lignes de champ, en tout point tangentes au champ magnétique, sont tracées en représentation stéréoscopique : le lecteur peut voir l'image en trois dimensions, en louchant de manière à superposer les deux images. Celles se fermant à l'intérieur de l'étoile sont tracées en bleu, celles s'ouvrant à l'extérieur en rouge. Crédit : J. Braithwaite, 2004 [6] 63

3.3 Représentation schématique des deux systèmes de coordonnées utilisés et d'une surface iso-Ψ. Les invariants du système axisymétrique sont la masse totale de la zone radiative stellaire considérée M_{RZ}, la masse englobée par une surface iso-Ψ, le flux toroïdal $\mathcal{F}_\varphi$ associé au champ magnétique toroïdal B_φ, et l'hélicité $\mathcal{H}$. 70

3.4 À gauche (a), Représentation tridimensionnelle des lignes de champ pour la configuration de champ magnétique mixte poloïdale-toroïdale confinée dans la zone radiative du Soleil ; à droite (b), représentation de l'intensité du champ magnétique toroïdal (échelle de couleurs) et des lignes iso-Ψ dans le plan méridien. 77
3.5 Isocontours normalisés de la fonction de flux magnétique Ψ dans le plan méridien, pour le cas du Soleil, associées à la troisième valeur propre possible ($\lambda_1^{0,3}$, à gauche) et à la cinquième ($\lambda_1^{0,5}$, à droite). 77
3.6 Isocontours normalisés de la fonction de flux magnétique Ψ dans le plan méridien, pour le cas d'une étoile Ap, associées à la première valeur propre possible ($\lambda_1^{0,1}$, à gauche), à la troisième ($\lambda_1^{0,3}$, au milieu) et à la cinquième ($\lambda_1^{0,5}$, à droite). 78
3.7 Hélicités poloïdale, toroïdale et totale (normalisée) du champ magnétique le cas (a, à gauche) du Soleil et (b, à droite) d'une étoile Ap. 81
3.8 Rapports $\mathcal{E}_{\rm mag}/\mathcal{H}$ poloïdaux, toroïdaux et globaux avec prise en compte ou non de la contribution non force-free dans les cas (a, à gauche) du Soleil et (b, à droite) d'une étoile Ap. 81
3.9 Rapports $\mathcal{E}_{\rm mag}/\mathcal{H}$ globaux pour des modes latitudinaux $l = 1$ à $l = 8$ dans le cas de configurations force-free (a, à gauche) et représentation de la configuration correspondant au mode $l = 5$ (b, à droite). Crédit : Broderick & Narayan, 2008 [8]. 82
3.10 Facteur d'anisotropie γ mesurant les intensités relatives des contributions poloïdale et toroïdale du champ magnétique dans le plan méridien dans le cas (a, à gauche) du Soleil jeune et (b, à droite) d'une étoile Ap. 83

4.1 Les différents régimes de stabilité, linéaire ou non-linéaire. 92
4.2 Représentation schématique d'une surface magnétique. 97
4.3 Lignes de champ de la configuration magnéto-hydrostatique barotrope initiale dans un polytrope d'indice $n = 3$ (a, à gauche) vue de côté et (b, à droite) vue de dessus. 101
4.4 Lignes de champ de la partie poloïdale de la configuration magnéto-hydrostatique barotrope dans un polytrope d'indice $n = 3$ (a, à gauche) à $t = 0$ et (b, à droite) à $t = 10\,t_A$. L'instabilité hautement non-axisymétrique est observée. 102
4.5 Lignes de champ de la partie toroïdale de la configuration magnéto-hydrostatique barotrope dans un polytrope d'indice $n = 3$ (a, à gauche) à $t = 0$ et (b, à droite) à $t = 20\,t_A$. L'instabilité type kink de faible m est reconnue. 102
4.6 Lignes de champ de la configuration magnéto-hydrostatique barotrope dans un polytrope d'indice $n = 3$ (a, à gauche) à $t = 10\,t_A$ et (b, à droite) à $t = 20\,t_A$. 103

5.1 Rayonnement sortant d'une couche d'étoile de rayon r, dans une direction non radiale. 108
5.2 Représentation schématique des différents réservoirs présents dans les zones magnétisées et des processus physiques les reliant. Crédit : Brun *et al.*, 2004 [4]. 117

5.3 Panneau du haut : isocontours de la force de Lorentz radiale $\boldsymbol{F}_{\mathcal{L};r}(r,\theta)$ normalisée à $B_0^2/\mu_0 R_*$ en coupe méridienne ; (a, à gauche) dans le cas solaire et (b, à droite) dans celui de l'étoile Ap. Panneau du bas : isocontours de la force de Lorentz latitudinale $\boldsymbol{F}_{\mathcal{L};\theta}(r,\theta)$ normalisée à $B_0^2/\mu_0 R_*$ en coupe méridienne ; (c, à gauche) dans le cas solaire et (d, à droite) dans celui de l'étoile Ap. 120
5.4 Paramètre de Golreich ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap. 121
5.5 Isocontours de la pression magnétique $P_{\mathrm{mag}}(r,\theta)$ normalisée à $B_0^2/2\mu_0$ en coupe méridienne ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap. 122
5.6 Paramètre plasma β ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap. 122
5.7 Force de Lorentz radiale moyennée (ligne pleine), sa contribution due à la densité moyenne $\bar{\rho}$ et à $\nabla_r \Psi = \partial_r \Psi$ (normalisés à leur maximum) ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap. Panneau du haut : en échelle linéaire ; panneau du bas : en échelle logarithmique. . . 123
5.8 Force de Lorentz radiale moyennée (ligne pleine), sa contribution du gradient de pression magnétique ainsi que celle de la force de tension magnétique ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap. . 123
5.9 Perturbations modales en potentiel gravitationnel, densité, pression, température et rayon en fonction de ce dernier ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap. Panneau du haut : pour le mode $l = 0$; panneau du bas : pour le mode $l = 2$. 127
5.10 Termes constituant les perturbations de la balance hydrostatique moyenne (à $l = 0$), terme perturbateur $\mathcal{X}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}},0}$ et somme de tous les termes ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap. 128
5.11 Isocontours du chauffage ohmique $\mathcal{Q}_{\mathrm{Ohm}}(r,\theta)$ en coupe méridienne ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap. 130
5.12 Isocontours de $\nabla \cdot \mathcal{F}_{\mathrm{Poynt}}(r,\theta)$ en coupe méridienne ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap. 130
5.13 Contributions à la luminosité totale du chauffage ohmique, (ligne tiret-pointillés), du flux de Poynting (ligne point-point-trait) et de la perturbation des taux de réactions nucléaires (ligne tiretée) en fonction du rayon ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap. 130
5.14 Comparaison entre les profils internes de rotation solaire issus de différents modèles et celui déterminé d'après les observations des instruments Golf , Mdi et Gong [9], dont la rotation dans le cœur extraite des modes de gravité potentiellement observés (donnée avec de larges barres d'erreur à confirmer) [39, 11, 26, 37] Crédit : S. Turck-Chièze *et al.*. 135
5.15 Influence de la position et de l'extension de la région de transition (respectivement caractérisées par R_c et $\tilde{q}$) sur les moments gravitationnels quadrupolaires, pour plusieurs vitesses de rotation dans le cœur solaire Ω_c : (a, en haut) $\Omega_c = 7\,\Omega_s$; (b, au milieu) $\Omega_c = 5\,\Omega_s$; (c, en bas) $\Omega_c = 3\,\Omega_s$ 138
5.16 Influence de la vitesse de rotation du cœur solaire Ω_c sur le moment gravitationnel quadrupolaire J_2. 139

6.1 Échelles temporelles et spatiales couvertes : en vert, par les codes d'évolution stellaire ; en rouge, par les modélisations numériques 3D. Crédit : S. Mathis [11] 161
6.2 Interactions entre les différents processus magnéto-hydrodynamiques à l'œuvre dans les intérieurs stellaires. Crédit : S. Mathis [27] 165
6.3 Élément de matière se déplaçant de r vers $r + \delta r$. 172
6.4 Architecture du code CESAM mettant en lueur les différentes routines et leurs interconnexions. Celles ayant été modifiées pour inclure les effets du champ magnétique sont marquée d'une astérisque. 179
6.5 Organigramme décrivant la succession des opérations menées et l'invocation aux routines du module `mod_magnet` pour implémenter le magnétisme dans la routine `evol`. 181
6.6 Perturbations en rayon, densité, pression, température et luminosité en fonction du rayon solaire, en échelle semi-logarithmique. (a) à gauche, à l'issue d'un pas temporel et (b) à droite, à l'issue d'une évolution jusqu'à l'âge solaire actuel. Les valeurs positives sont représentées par un trait épais, les négatives par un trait fin. 182
6.7 Diffusivité magnétique microscopique en fonction du rayon normalisé de l'étoile. 184

7.1 Représentation du satellite CoRoT. Crédit : CNES 191

A.1 Repère cartésien et coordonnées sphériques 219

Liste des tableaux

1.1 Classification de Preston (1974) [52] des étoiles CP suivant leurs particularités chimiques 11

3.1 Valeurs propres des cinq premiers équilibres pour les deux configurations étudiées. 76

5.1 Perturbations induites par la présence d'un champ magnétique profond et d'un champ magnétique local de sous-surface dans un modèle solaire, sur sa structure interne et en surface. Crédit : Lydon & Sofia, 1995 [22] 112
5.2 Perturbations normalisées pour le mode $l = 0$ en potentiel gravitationnel, densité, pression, température et rayon, pour les deux cas étudiés. 133
5.3 Perturbations normalisées pour le mode $l = 2$ en potentiel gravitationnel, densité, pression, température et rayon, pour les deux cas étudiés. 133
5.4 Contributions du chauffage ohmique (L_{Ohm}) et du flux de Poynting (L_{Poynt}) à la perturbation de luminosité (en erg.s) ; contribution de la modification de l'efficacité des taux de réactions nucléaires induite par la modification de l'équilibre hydrostatique ($\mathcal{S}_{\mathrm{nuc}}$) ; luminosité standard L dans le cas solaire et de l'étoile Ap. 133
5.5 Perturbations normalisées pour les modes $l = 2, 4, 6, 8$ et 10 en potentiel gravitationnel, densité, pression, température et rayon dues à la rotation différentielle, pour les trois cas étudiés. 140

6.1 Perturbations en rayon, densité, pression, température et luminosité à la surface solaire à l'issue d'un pas temporel et à l'issue d'une évolution jusqu'à l'âge solaire actuel. 183

B.1 Valeurs numériques des coefficients ${}^{a}\Theta_l^j$ pour le calcul des perturbations jusqu'au mode $l = 10$. 237
B.2 Valeurs numériques des coefficients ${}^{b}\Theta_l^j$ pour le calcul des perturbations jusqu'au mode $l = 10$. 237

Présentation du manuscrit

Ce manuscrit est articulé en trois parties.

La première introduit le magnétisme stellaire tout d'abord sous l'œil d'un observateur (chapitre 1). Nous verrons quelles sont les multiples questions que peut se poser cet astronome face aux multiples phénomènes observés. Autant que possible, l'historique des observations marquantes sera retracé. J'ai montré quelles sont les problématiques qui ont finalement poussé les astronomes à développer des instruments toujours plus performants. Puis le regard du physicien sera adopté (chapitre 2). Celui qui consiste à comprendre l'origine des phénomènes à partir des premiers principes. Les plasmas, composant 99% de la masse visible de l'Univers, sont le siège de mouvements influencés par ses propriétés électro-magnétiques, celui-ci étant un milieu fortement ionisé. Aussi, je passerai en revue les principales instabilités magnéto-hydrodynamiques pouvant avoir des répercussions sur le comportement à grande échelle du plasma. En particulier, les dynamos présentes dans plusieurs objets célestes et terrestres seront passées en revue, car ce sont elles qui sont à l'origine de nombreuses manifestations du champ magnétique à la surface des astres, en particulier sur le soleil. La controverse entre les champs d'origine dynamo et ceux d'origine fossile, reliques du Big-Bang et piégés durant la contraction proto-stellaire de l'étoile, sera expliquée.
Le lecteur au faîte de la connaissance de ces problématiques pourra aisément sauter cette première partie pour se concentrer sur la deuxième et la troisième, qui constituent le cœur de mon travail.

La deuxième partie portera principalement sur la modélisation des champs magnétiques de grandes échelles susceptibles d'exister au sein des zones radiatives d'étoiles de type solaire, et de décrire des configurations initiales des champs observés à la surface d'étoiles chimiquement particulières. Un des grands enjeux de la physique stellaire aujourd'hui est d'expliquer la rotation quasi-uniforme de cette zone radiative solaire, mise en évidence par l'héliosismologie. En effet les modèles hydrodynamiques les plus avancés prédisent une rotation différentielle avec un fort gradient radial dans cette région. Il y a donc une source supplémentaire de transport de moment angulaire vers la surface, et la compréhension de ce mécanisme influencera fortement notre vision des astres dans le futur. Aussi, il est prioritaire aujourd'hui d'introduire notamment le champ magnétique dans des codes d'évolution stellaires, et d'en quantifier l'impact sur la structure. Je présenterai donc en premier lieu un modèle prenant en compte la géométrie du champ (chapitre 3).
Une analyse de stabilité des configurations obtenues sera présentée au chapitre 4.
Ensuite, je décrirai comment le champ magnétique interne va modifier la structure de l'étoile qui l'abrite (chapitre 5).

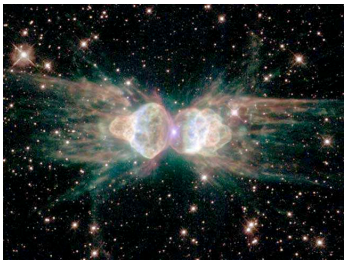
Enfin au cours de la troisième partie, une vision plus dynamique des étoiles sera adoptée : j'exposerai tout d'abord la démarche suivie pour implémenter les effets du magnétisme dans un code d'évolution stellaire afin de tendre vers une vision magnéto-hydrodynamique séculaire des étoiles, en précisant le couplage magnétisme-rotation différentielle-circulation méridienne. L'influence du champ magnétique sur la convection sera également détaillée (chapitre 6).
Enfin, nos travaux dans le cadre de la mission CoRoT seront présentés en chapitre 7.

Les publications à comité de lecture acceptées sont incluses à la fin des chapitres concernés ; celles concernant des communications ou n'ayant pas encore été acceptées sont incluses ou citées en Annexe D.

Première partie :
Mise en contexte

Chapitre 1

Les Champs Magnétiques, présents sur tout le Diagramme HR



Sommaire

1.1 Brève introduction : les étoiles dans le diagramme HR 4
1.2 Revue des objets célestes magnétiques 6
1.2.1 Le cas du Soleil 6
1.2.2 Les étoiles de type solaire 10
1.2.3 Des étoiles très particulières : les étoiles de type Ap 11
1.2.4 Les étoiles massives 15
1.2.5 Les étoiles jeunes 15
1.2.6 Les objets compacts 17
1.3 Manifestations du champ magnétique 19
1.3.1 L'effet Zeeman 19
1.3.2 L'effet Hanle 21
1.3.3 Les émissions en rayons X 22
1.3.4 Les émissions non-thermiques dans le domaine radio 23
1.4 Méthodes observationnelles 23
1.4.1 Méthodes conventionnelles 23
1.4.2 La spectropolarimétrie 23
1.4.3 L'hélio- et l'astérosismologie 24
1.5 Conclusion 24
Bibliographie 25

La connaissance du réel est une lumière qui projette toujours quelque part des ombres.
– Gaston Bachelard, La formation de l'esprit scientifique

Les champs magnétiques demeurent un acteur mystérieux de la vie des étoiles. Bien qu'ils soient observés en astronomie depuis un demi-siècle, leurs modes de génération, d'amplification et même de dissipation sont encore sujets à controverses. Je présenterai ici dans une première partie une revue des objets célestes manifestant la présence de champs magnétiques avec une emphase spéciale pour le cas de notre astre solaire. Soulignons d'emblée la diversité des caractères exhibés par les étoiles magnétiques : celles-ci peuvent en effet manifester une variabilité intrinsèque, comme c'est le cas pour le Soleil, ou bien présenter une structure magnétique plus statique, la rotation propre de l'astre induisant une variabilité pour l'observateur. Ce constat m'amènera dans la deuxième partie de ce chapitre à décrire quelles sont les différentes manifestations trahissant la présence de champs magnétiques, puis en troisième partie à détailler brièvement les méthodes observationnelles utilisées pour les détecter et les étudier.

1.1 Brève introduction : les étoiles dans le diagramme HR

En astrophysique, les étoiles sont généralement classées par luminosité et couleur, cette dernière propriété étant intimement associée à la température de surface de l'étoile. Cette classification, proposée aux alentours de 1910 indépendamment par Ejnar Hertzsprung et Henry N. Russell, permet de représenter l'ensemble des étoiles dans un même schéma (voir Fig. 1.1). Cela a permis d'étudier des populations d'étoiles possédant des caractéristiques différentes, et de poser les premières bases de la théorie de l'évolution stellaire.

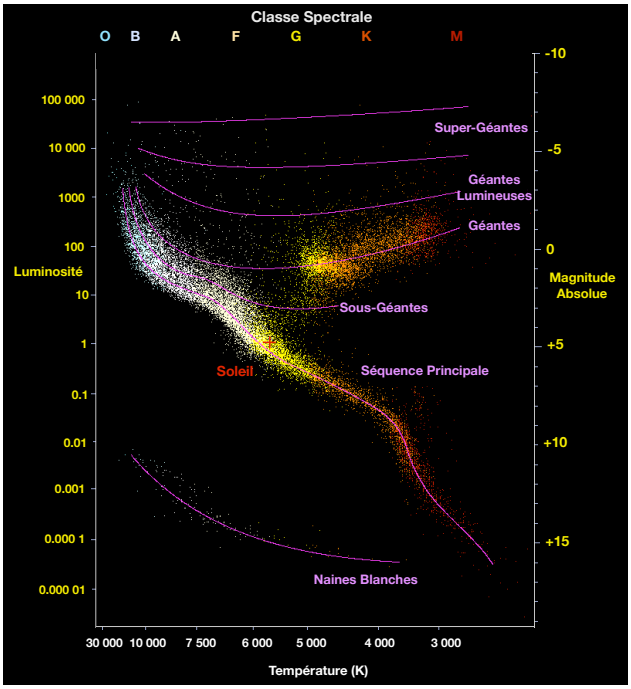


Figure 1.1 – Diagramme de Hertzsprung-Russel. 22 000 étoiles du catalogue Hipparcos et 1000 étoiles du catalogue Gliese ont été prises en compte. Crédit : adapté de Richard Powell

On constate que la majorité des étoiles se situent sur une diagonale, sur laquelle elles passent la plus grande partie de leur vie (par hypothèse d'ergodicité) : c'est la « séquence principale ». Apparaissent ensuite les géantes, étoiles en fin de vie, puis les naines blanches (qui ne sont pas toujours si blanches). Ces objets seront décrits à la fin de la section suivante.
La classe spectrale est désignée par une lettre par ordre de température décroissante, ou encore par couleur allant du bleu vers le rouge :

O, B, A, F, G, K, M : "Oh be a fine girl, kiss me!"

chacune subdivisée en type spectral allant de 0 à 9, toujours par ordre de température décroissante. Par abus de langage [1] , les étoiles tendant vers le bleu (*resp.* vers le rouge) sont parfois qualifiées de « précoces » (*resp.* de « tardives »). Le Soleil, avec une température de surface, dite température effective de 5778 K, est de classe G2. Une étoile de type A possède une température effective de l'ordre de 10 000 K.

Lorsqu'une étoile issue de la contraction d'un nuage d'hydrogène moléculaire a atteint la séquence principale, elle se met à brûler son hydrogène par réactions de fusion nucléaire pour former de l'hélium, soit *via* la chaîne $p-p$ (pour proton-proton), soit *via* le bi-cycle CNO (pour Carbone-Azote-Oxygène), si sa masse initiale excède $1.3\,M_\odot$ [2]. En fait l'essentiel des propriétés d'une étoile sur la séquence principale est déterminée par la masse totale qui la constitue. Par exemple, il existe des relations simples entre sa masse et son rayon ($R \propto M^{0.8}$) et sa masse et sa luminosité ($L \propto M^{3.5}$). Cela permet, une fois l'étoile identifiée sur le diagramme HR, de déterminer son rayon et son mode de production d'énergie.

Le destin d'une étoile de faible masse est lui aussi dicté par sa masse initiale. Une étoile de type solaire lambda quitte la séquence principale lorsque son coeur appauvri en hydrogène n'est plus composé que d'hélium inerte. Elle commence alors à brûler l'hydrogène des couches périphériques, dont la masse et la température augmentent jusqu'à des valeurs critiques à partir desquelles brutalement l'hélium du cœur se transforme en carbone : c'est le « flash de l'hélium ». Subitement l'étoile augmente son volume d'un facteur 100, sa luminosité d'un facteur 1000 et voit sa température chuter : c'est la phase de géante rouge. Une fois l'énergie du flash évacuée, l'hélium du cœur fusionne en carbone et oxygène à luminosité constante : l'étoile évolue sur la « branche horizontale ». Lorsque tout l'hélium du coeur est consommé, celui des couches externes se met à brûler. Cette phase s'accompagne d'importantes pertes de masse (d'environ $10^{-4} M_\odot$/an) par éjection de particules (vents stellaires) : c'est ce que l'on appelle la branche asymptotique des géantes (AGB). Finalement les couches périphériques composées d'hélium en fusion vont elles aussi subir un flash qui va cette fois-ci souffler toutes les couches supérieures pour former une magnifique nébuleuse et ne laisser au centre qu'une naine blanche qui va progressivement s'éteindre.

1. À l'époque de la construction des premiers catalogues d'étoiles vers les années 1890, les observations d'étoiles binaires permirent de mettre en évidence la relation masse-luminosité : la luminosité est une fonction puissance croissante de la masse. Une des premières théories de l'évolution stellaire soutenait alors que les étoiles commencent leurs vies en tant qu'étoiles jeunes, brillantes et massives de type O. Puis elles évoluent en perdant de la masse par combustion de leur « carburant » pour finir leur vie en tant qu'étoiles de faibles masses et luminosités de type M. Cette théorie n'a évidemment plus cours.
2. $1\,M_\odot$ représente une masse solaire.

Les autres étoiles connaissent un destin plus ou moins hollywoodien. Les étoiles de masse intermédiaire (entre 2.2 $M_\odot$ et 8 $M_\odot$) ne passent pas par la branche des géantes et ne connaissent pas de flash de l'hélium mais finissent en naines blanches. Enfin les étoiles les plus massives ($6\ M_\odot < M < 100\ M_\odot$) explosent en supernovæ, laissant derrière elles une relique compacte : une étoile à neutrons ou un trou noir. Par cette explosion elles permettent également la synthèse des éléments plus lourds que le fer et participent à la dissémination dans l'Univers des éléments chimiques, dont ceux nécessaires à la vie.

1.2 Revue des objets célestes magnétiques

1.2.1 Le cas du Soleil

Structure du Soleil

Sur le diagramme HR, le Soleil est une étoile de masse plutôt faible. Comme toute étoile de la séquence principale, son équilibre est régi par la compétition entre les réactions nucléaires ayant lieu dans le cœur, tendant à expulser la matière vers l'extérieur et la gravité, tendant à contracter la matière vers le centre. Une étoile de cette masse [3] et sur la séquence principale présente une structure interne composée d'une zone radiative interne (dont le cœur nucléaire) et d'une zone convective externe [4]. Dans la zone radiative l'énergie issue du cœur est transportée par absorption puis réémission (avec une direction différente) de photons par les atomes, principalement d'hydrogène et d'hélium. Ainsi, un photon moyen met environ un million d'années pour traverser cette zone. À mesure que l'on se dirige vers la surface, le gaz devient de moins en moins ionisé et l'opacité augmente : l'efficacité de ce mode de transfert d'énergie est moindre. Lorsque l'opacité du gaz devient trop élevée, la variation de la température du gaz en fonction de la pression est supérieure à ce qu'elle serait si le transfert d'énergie se faisait de manière adiabatique (sans transfert de chaleur) et le milieu devient instable : à ce moment des mouvements de matière apparaissent, qui permettent de transporter de l'énergie thermique par conversion en énergie cinétique. Ainsi les 30 % externes du rayon du Soleil[2] composent la zone convective.
La zone externe est composée de la photosphère, d'une épaisseur de quelques centaines de kilomètres et qui définit la surface, puis de la chromosphère, d'une épaisseur de l'ordre de quinze mille kilomètres et enfin d'une couronne se diluant dans l'espace sur plusieurs millions de kilomètres (voir Fig. 1.2).

Les cycles solaires

La cyclicité solaire, connue depuis le XVIIe siècle, a une période bien établie d'environ 11 ans. Depuis 1609, l'apparition des premières lunettes et des premiers téléscopes a en effet permis l'observation régulière des taches solaires, quelques observations ponctuelles à l'œil nu ayant toutefois été relevées auparavant (la plus ancienne, que l'on doit à Théophraste d'Athènes, remonte au milieu du quatrième siècle *a.C.n.*). Ces observations routinières consistant à dénombrer le nombre de taches solaires constituent une série de données des plus étendues dans le temps de l'histoire de la science. En Fig. 1.3 sont représentées leurs

3. La masse du Soleil est de $M_\odot = 1,9891 \times 10^{30}$ kg ; son rayon est de $R_\odot = 695\,500$ km.
4. L'interface zone radiative-zone convective solaire est située à 0.712 $R_\odot$.

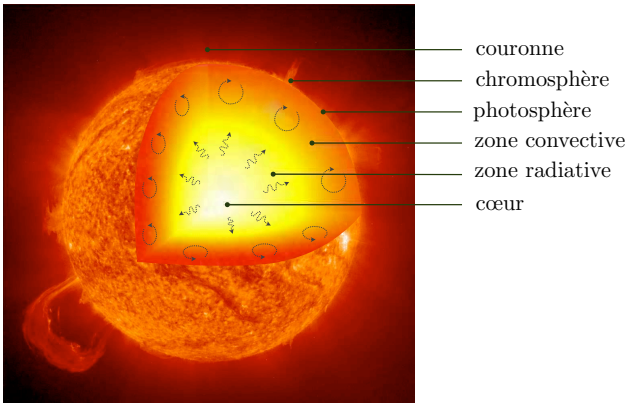


FIGURE 1.2 – Coupe du Soleil montrant sa structure interne et externe.

occurences depuis 400 ans. Sont également tracées les courbes représentant l'évolution du « nombre de Wolf » R_W et celle recensant les occurences d'aurores polaires. Le nombre de Wolf est un autre indicateur de l'activité solaire. On doit sa définition à l'astronome suisse Rudolf Wolf qui fut à l'origine de la procédure de comptage des taches en 1849 à Zurich. Ce nombre s'exprime par la relation suivante : $R_W = k\,(F + 10 \times G)$ où F est le nombre de taches individuelles, G le nombre de groupes de taches et k un facteur de l'ordre de 1 dépendant des conditions d'observations (lieux et instrumentation), qui permet d'homogénéiser des mesures effectuées à des époques et à des précisions différentes. Sur cette figure, la fréquence correspondant à une période de 11 ans est très claire (« cycle de Schwabe ») mais une modulation sur des temps plus longs apparaît également (cycles de Gleissberg et de Suess, de périodes respectives supposées de 90 et 200 ans) ; on remarque notamment la période d'absence totale de taches durant la deuxième moitié du XVIIe siècle connue sous le nom de minimum de Maunder. Aujourd'hui, nous savons que cette période fait partie de l'ensemble des grands minima dont fait également partie le minimum de Dalton du début du XIXe siècle, bien que moins flagrant. Des méthodes indirectes basées notamment sur les variations de taux d'isotopes cosmogéniques tels que le ^{14}C et le ^{10}Be dans les cernes des arbres ou dans les carottes glaciaires ont permis de corroborer les résultats obtenus par observations directes. Une revue exhaustive de l'ensemble des méthodes utilisées, permettant de remonter l'histoire des cycles solaires sur plusieurs millénaires et de ses conséquences est donnée par Usoskin (2008) [61].

Questions soulevées

La prise de conscience de tels cycles d'activité de notre astre le plus proche ne peut se concevoir sans provoquer des questions primordiales à propos de leur possible influence sur l'environnement terrestre. Tout d'abord, est-ce que ces cycles de plus grandes périodes, lorsqu'ils se retrouvent dans des phases d'interférences constructives ou destructrices avec le cycle de Schwabe, pourraient avoir une influence notable sur le climat terrestre ? Une réponse tout du moins partielle peut être donnée en évoquant les conditions climatiques qui ont régnées en Europe durant le minimum de Maunder. Il apparaît que cette période correspond à une ère appelée « petit âge glaciaire », au cours de laquelle les températures étaient anormalement basses. Quelle peut donc être l'influence d'un tel climat sur les activités humaines et sur son économie ?

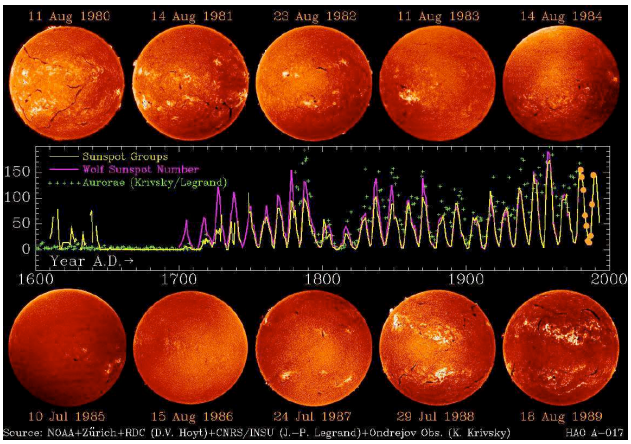


FIGURE 1.3 – Courbes représentant les cycles solaires depuis 1610 : le nombres de groupes de taches solaires et le nombre de Wolf [39, 29] ainsi que les occurences d'aurores polaires [36, 39] (au centre) ; variation de la surface solaire au cours d'un cycle d'activité quasi-complet, de 1980 à 1989 (bas et haut)

Si une réponse dénuée d'ambiguïté ne peut être donnée, soulignons toutefois qu'une corrélation forte entre le coût de la farine en Angleterre (au Moyen-Âge, soit à l'époque dans un système économique clos), et les prémices de l'apparition du minimum de Maunder a récemment été établie [53].
Enfin, nous voyons en FIG. 1.3 que les maxima d'activité solaire correspondent à un accroissement de taux d'apparition d'aurores polaires, qui sont des phénomènes magnétiques [5]. De fait, les orages magnétiques générés par les éjections de masse coronale lors de maximum d'activité solaire sont responsables de fluctuations de l'intensité du champ magnétique terrestre, principalement la composante horizontale ; de bruit électrique induit dans les câbles téléphoniques et électriques [6] ; finalement, de perturbations importantes de la propagation ionosphérique des ondes radioélectriques.
Il est donc primordial de comprendre les mécanismes moteurs de la cyclité solaire ; d'une part parce cette question possède des enjeux socio-économiques et environnementaux importants ; d'autre part, parce que la richesse des phénomènes observés à la surface solaire nécessite un cadre explicatif théorique qui constitue un défi que la physique moderne n'a pas (encore) été en mesure de relever, malgré l'abondance de théories explicatives. Nous savons grâce au satellite SOHO que c'est en comprenant la dynamique interne que nous pourrons caractériser ces mécanismes externes [60].

5. En effet lors d'un orage solaire faisant suite à une éruption chromosphérique, un afflux de particules chargées éjectées par le Soleil entrent en collision avec le bouclier que constitue la magnétosphère terrestre. Des particules électrisées à haute énergie peuvent alors être captées et canalisées par les lignes du champ magnétique terrestre du côté nuit de la magnétosphère (la queue) et aboutir dans les cornets polaires. Lors de reconnexion des lignes de champ magnétiques, ces particules sont réaccélérées en direction des pôles terrestres. Ces particules, (électrons et parfois protons), excitent ou ionisent les atomes de la haute atmosphère, en émettant un photon. La composition de ces ions (oxygène, hydrogène, azote, ...) dépendant de l'altitude est à l'origine des variations de teintes des nuages, draperies, rideaux, arcs, rayons qui se déploient dans le ciel à des altitudes comprises entre 80 et 1 000 km.

6. En 1965, une énorme panne de courant avait plongé les habitants du continent Nord-Américain dans l'obscurité, soit 30 millions de personnes sur 200 000 km^2. En 1989, une panne de même origine a touché 6 millions de personnes au Québec.

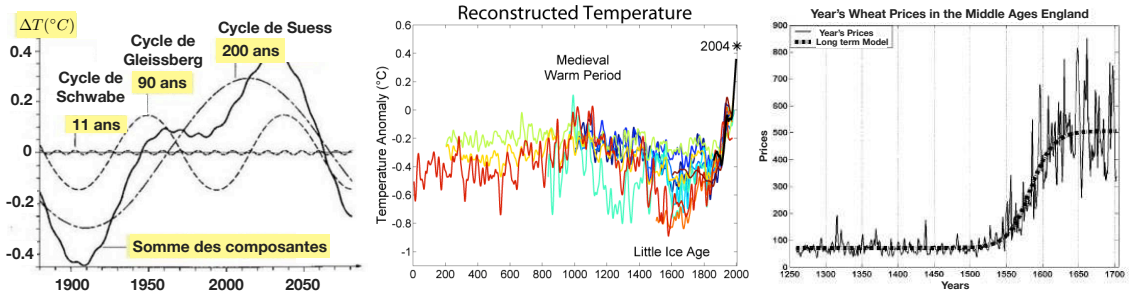


FIGURE 1.4 – Courbes représentant les cycles de Schwabe, Gleissberg, et Suess (à gauche) [60] ; variations en température au cours des 2000 dernières années, reconstruites d'après 10 modèles différents (au centre) [33, 41, 13, 10, 18, 42, 34, 30, 43, 46] ; variations des cours de farine sur le marché anglais au cours de la période 1259-1702, avec une période de transition de 1530 à 1610 (à droite) [53].

Découverte de l'activité magnétique solaire

En 1908, George Hellery Hale relate la première observation de champs magnétiques à la surface du Soleil, plus exactement sur les taches solaires [25]. Cette première observation fut motivée par un double constat physique : premièrement, qu'un disque en ébonite chargé et mis en rotation produisait un champ magnétique capable de défléchir une aiguille suspendue au dessus de celui-ci [54] ; deuxièmement, qu'un gaz composé notamment de carbone, lorsque soumis à de fortes températures, émet des charges négatives en grandes quantités. Si donc des mouvements de matière rapides sont présents dans ce gaz, tel que cela a été observé lors d'éruptions solaires, l'asymétrie entre la masse des particules chargées positivement et celle des particules chargées négativement serait susceptible de générer des perturbations électromagnétiques. Or les conditions à la surface du Soleil sont telles que le gaz y est partiellement ionisé ; de plus il était su que les taches solaires sont le siège de vortex, mouvements circulaires de matière. Toutes les conditions sont donc réunies pour qu'un champ magnétique y soit généré.

Peu de temps auparavant (en 1896), Pieter Zeeman découvrait l'effet qui porte aujourd'hui son nom : les raies spectrales d'une source de lumière soumise à un champ magnétique *se dédoublent* en plusieurs composantes, chacune d'elles présentant une certaine polarisation [67]. C'est cet effet qui fut exploité dans l'observation menée par Hale, qui aboutit à la découverte de composantes d'un doublet de polarisations circulaires opposées. Cette découverte permit d'interpréter l'origine des taches solaires : celles-ci correspondent en fait à l'émergence d'un tube de flux magnétique, la pression magnétique présente dans ce tube de flux repoussant la matière à l'extérieur (la matière dans le tube de flux, se retrouvant de densité moindre, présente alors un mouvement ascendant par rapport à son milieu environnant ainsi qu'une luminosité moindre). En effet les taches solaires émergent presque toujours deux à deux : une tache de tête (la plus à l'Est lorsque l'on regarde le disque solaire) et une tache dite de queue.
La polarité de ces régions actives obéit à la loi de Hale [26, 27], selon laquelle durant un cycle de 11 ans, la polarité de la tache de tête est la même pour toutes les régions bipolaires dans un même hémisphère et est opposée à la polarité de la tache de tête dans l'autre hémisphère. Cet ordre de polarité s'inverse à la fin d'un cycle de Schwabe, la polarité de

la tache de tête du cycle précédent devient alors la polarité de la tache de queue. Ainsi un cycle de Schwabe correspond à un demi-cycle magnétique, appelé cycle de Hale.
Les observations montrent en outre certaines propriétés particulières de l'évolution et de

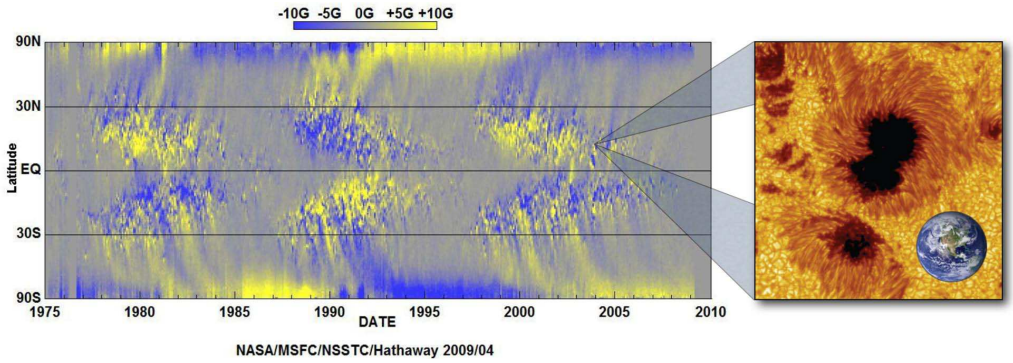


FIGURE 1.5 – Diagramme papillon : position (projection planaire) et polarité des taches solaires pour chaque rotation solaire depuis 1975 (à gauche). Crédit : NASA/MSFC/NSSTC. Tache solaire et planète Terre, à l'échelle. Crédit : Royal Swedish Academy of Sciences

la morphologie des taches : (i) celles-ci se forment essentiellement dans des latitudes situées aux alentours de 30° et migrent progressivement vers l'équateur au cours d'un demi-cycle magnétique ; (ii) statistiquement, la droite reliant les deux centres des taches de polarité opposées forme un petit angle avec la direction Est-Ouest. Cette inclinaison augmente approximativement linéairement avec la latitude d'émergence des taches : l'angle est d'environ 10° aux moyennes latitudes et n'est plus que de 4° près de l'équateur [64]. Cette règle est connue sous le nom de loi de Joy [26]. (iii) La tache de tête apparaît bien formée, alors que celle de queue possède un aspect plus dispersé et fragmenté. En parallèle de cette activité, on observe également une inversion de polarité aux pôles. Ces caractéristiques principales ainsi que l'inversion de polarité au cours d'un cycle sont illustrées en FIG. 1.5, à l'aide de ce que l'on appelle un diagramme papillon.

1.2.2 Les étoiles de type solaire

Les questions qui viennent naturellement à l'esprit en considérant l'activité magnétique du Soleil sont les suivante : « Quelle est la population d'étoiles manifestant le même type d'activité que le Soleil ? », « Est-ce que toutes les étoiles analogues au Soleil exhibent une cyclicité ? », « Y a-t-il des régimes de dynamo irréguliers ? »... En 1995, le projet H&K du Mont Wilson [8] a permis d'étudier l'activité magnétique de plus de 110 étoiles du type spectral F à K. Cette étude a révélé qu'environ 40% de ces étoiles possèdent une activité magnétique cyclique dont la moitié avec une période du cycle bien définie. Baliunas et al. (1996) [9] ; Saar et Brandenburg (1999)[55] ont de plus montré qu'il existe une diminution de la période du cycle magnétique lorsque la vitesse de rotation augmente. Cette corrélation nous donne ainsi l'indication que la rotation va probablement jouer un rôle dans l'établissement et le maintien du champ magnétique à grandes échelles. Il faut noter aussi que dans les étoiles en rotation plus lente, l'amplitude de la circulation méridienne diminue, ce qui défavorise certains scenarios de la dynamo. Récemment, Fares *et al.* ont mis en évidence pour la première fois un cycle *complet* d'activité sur l'étoile τ Bootis [20].

1.2.3 Des étoiles très particulières : les étoiles de type Ap

Quarante ans après l'observation de Hale et toujours au Mont Wilson, Babcock détecte les premières signatures de champs magnétiques à la surface d'étoiles de type A chimiquement particulières, en premier lieu sur l'étoile Virginis 78, en 1947 [5]. Ce sera le début d'investigations passionnantes portant sur les champs magnétiques dans des populations stellaires extrasolaires, et nous verrons que les propriétés exhibées par ces premières sont bien différentes de ce qui était connu jusqu'alors pour le Soleil.

Les étoiles « CP »

Les étoiles CP (chimiquement particulières) sont des étoiles qui présentent des anomalies d'abondances en éléments chimiques dans leur spectre par rapport aux abondances observées dans les étoiles normales à température effective et gravité égales. Ce sont généralement des étoiles à vitesse de rotation plus faible que leurs homologues.
En 1974, Preston en proposa une classification suivant leurs particularités chimiques en quatre groupes [52], présentés en Tab. 1.1. On y distingue les étoiles de type Am (métalliques), dont les abondances en Ca II et Sc II sont faibles alors que celles en métaux lourds sont anormalement élevées ; les étoiles de type Ap magnétiques (l'indice p indiquant la particularité chimique de ces étoiles), les étoiles HgMn, enrichies en mercure et manganèse et enfin les étoiles He-faibles, appauvries en hélium. Il a depuis lors été distingué un cinquième groupe, les He-riches, dont le spectre montre des raies intenses en He I et avec des températures comprises entre 21 000 K et 30 000 K. Finalement, il existe une autre classe d'étoiles CP, mais possédant une vitesse de rotation comparable aux étoiles A normales : ce sont les λ Boo, du nom de leur prototype (λ Boötis).

			Other Properties			
CP Group	Classical Name	Discovery Criteria	Rotation	Binary Frequency	Binary Periods	Temperature Domain
1	metallic line (Am)	wk Ca II and/or Sc II; enhanced heavy metals	slow	high	abnormal	7000–10,000°K
2	magnetic Ap	enhanced Si, Cr, Sr, Eu, et al	slow	low	abnormal	8000–15,000°K
3	HgMn	enhanced Hg II λ3984, Mn II	very slow	normal?	abnormal?	10,000–15,000°K
4	He-weak	Q(Sp) > $Q(UBV)$	slow?	?	?	13,000–20,000°K?

Table 1.1 – Classification de Preston (1974) [52] des étoiles CP suivant leurs particularités chimiques

Présentation des étoiles de type Ap magnétiques

Les étoiles de type Ap magnétiques[7] représentent une fraction comprise entre 1.7 et 2.8% de toutes les étoiles de masses intermédiaires [51]. Néanmoins à l'heure actuelle on en dénombre un peu plus de 300 [24, 11]. Elles peuvent à leur tour être subdivisées en plusieurs classes :

- les Ap SrCrEu, présentant des excès d'abondance pour le strontium, le chrome et l'europium ;
- les Ap Si, présentant des excès d'abondances pour le silicium ;
- les He-faibles SiSrTi, présentant des excès d'abondances pour le silicium, le strontium et le titane ;
- les He-riches ;

certaines étoiles Ap présentant plusieurs de ces caractéristiques simultanément. Elles possèdent comme toute étoile de type A un cœur convectif de faible extension radiale, une zone radiative étendue, et éventuellement une très fine couche convective en surface. Jusqu'à présent, toutes les étoiles Ap présumées ne pas présenter de champ magnétique se sont révélées en accueillir un, après observation suffisamment prolongée.

Caractéristiques/problématiques associées aux étoiles Ap magnétiques

Vitesse de rotation Cette caractéristique est résumée en Fig. 1.6, d'après les travaux de Abt & Morrell (1995) [1] recensant les vitesses de rotation dans un échantillon de 1700 étoiles de type A et démontrant la bimodalité des distributions pour les étoiles Ap et les étoiles A normales. Si chronologiquement la particularité chimique des étoiles Ap a été

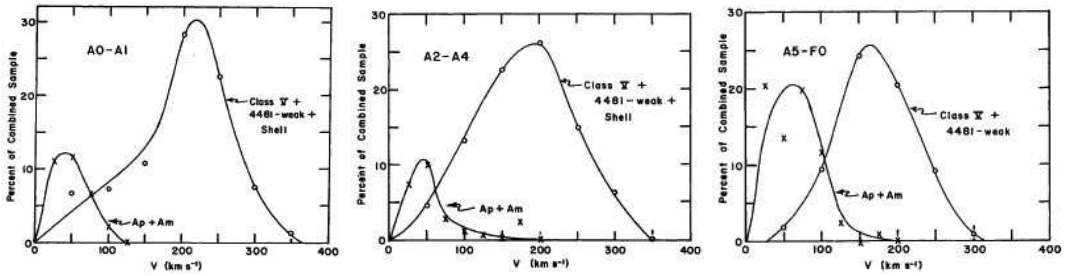


Figure 1.6 – Taux de rotation de populations d'étoiles de type A non magnétiques et de type Ap [1], pour les types spectraux A0-A1 (à gauche), A0-A4 (au centre) et A5-F0 (à droite).

observée avant leur faible taux de rotation, cette dernière propriété semble être la cause de la première. En effet, un faible taux de rotation permet de réduire l'efficacité de la circulation méridienne[8] qui brasse la composition du milieu, favorisant de fait le triage gravitationnel et la diffusion chimique des éléments.

7. Notons que la notation Ap s'est étendue à des catégories d'étoiles plus massives que celles de stricte classe spectrale A, avec la découverte d'étoiles plus massives présentant les mêmes grandes caractéristiques qu'elles (typiquement les étoiles He-faibles et He-riches magnétiques, de type B).

8. La circulation méridienne est un processus de transport de matière et de moment angulaire – de rotation – dans le plan méridien, constituant une boucle allant de la surface aux pôles, d'où elle redescend jusqu'à des couches plus internes pour revenir à la surface à proximité de l'équateur (du moins dans le cas solaire, la tendance pouvant s'inverser sous d'autres conditions). Ce processus sera détaillé précisément

Topologie du champ magnétique Bien que les observations révèlent une variabilité temporelle, il est clair que cette variabilité doit être attribuée à la rotation de l'étoile elle-même plutôt qu'à une variabilité intrinsèque du champ magnétique (comme le cycle solaire ou des étoiles de type solaire). Aussi, ces étoiles particulières présentent des champs magnétiques organisés à grandes échelles, avec une composante dipolaire souvent dominante. Le modèle dit du « rotateur oblique » , les représentant comme un dipôle dont l'axe magnétique est incliné d'un angle β par rapport à l'axe de rotation (voir Fig. 1.7) permet en général de reproduire relativement bien les caractéristiques géométriques observées. Cependant une description plus fine peut être nécessaire pour rendre compte des caractéristiques observées avant leur interprétation. Des modèles représentant les champs de surface comme la superposition d'un dipôle et d'un quadrupôle fournissent alors des résultats plus réalistes (*cf.* par exemple Landolfi *et al.*, 1998 [37]). Notons toutefois que les méthodes proposées ne peuvent garantir une inambiguïté totale entre certaines configurations en raison des propriétés intrinsèques de symétrie du dipôle et du quadrupôle. De surcroît la possibilité de recouvrir la véritable configuration magnétique est entravée par les biais observationnels. La détermination des topologies des étoiles CP magnétiques est nécessaire si l'on veut pouvoir répondre à ces questions, sans réponse tangible à ce jour : Quelle est l'origine de cette structuration à grande échelle ? Comment expliquer les disparités des configurations observées au sein de ces populations d'étoiles ? etc. Soulignons encore que Landstreet & Mathys (2000) [38] ont mis en évidence une corrélation entre la vitesse de rotation et l'angle β (celui-ci est inférieur à 20° pour les rotateurs lents, de périodes supérieures à 30 j.), elle aussi encore inexpliquée à ce jour.

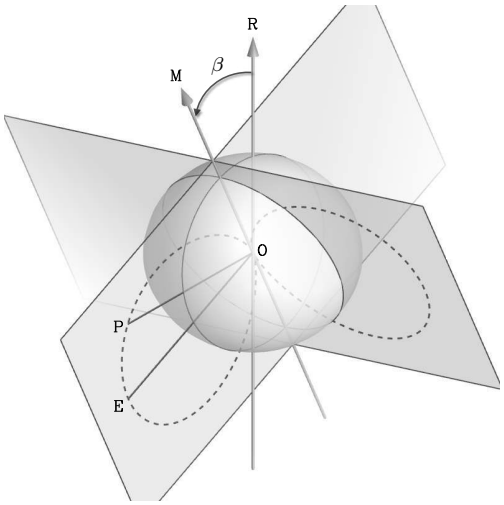


Figure 1.7 – Modèle du rotateur oblique, où l'axe de rotation (R) et celui du dipôle magnétique (M) sont inclinés d'un angle β. Des lignes de champ magnétique sont représentées en pointillés. L'angle i entre la ligne de visée de l'observateur et l'axe de rotation n'est pas représenté. Crédit : adapté de R. Townsend (2007) [58].

dans le chapitre dédié au transport rotationnel.

Intensité du champ magnétique Les étoiles Ap constituent les objets non-dégénérés [9] présentant les plus hautes intensités de champ magnétiques de surface. Tout récemment, des études portant sur des populations d'étoiles Ap ont permis de mettre en lumière des propriétés remarquables concernant leur distribution en intensité. En 2003, Bychkov *et al.* [11] publient un catalogue d'observations décrivant la topologie et l'intensité de la plupart des étoiles magnétiques non-dégénérées connues jusqu'alors.
Généralement deux quantités différentes définissent l'intensité du champ magnétique à la surface d'une étoile :

- le champ longitudinal moyen B_ℓ, composante parallèle à la ligne de visée, moyennée sur la surface de l'étoile ;
- le module du champ moyen B_S, module du champ moyenné sur la surface de l'étoile.

L'étude statistique à partir du champ longitudinal moyen (moyenné à son tour géométriquement sur le nombre d'observations) a permis d'établir que le nombre d'étoiles CP magnétiques décroît exponentiellement en fonction de l'intensité du champ magnétique (voir Fig. 1.8 (a)) ; ceci est en outre valable pour toute sous-catégorie particulière, *i.e.* à composition de surface donnée (le taux de décroissance différant cependant d'une catégorie à l'autre). Néanmoins les résultats en dessous de quelques centaines de gauss [10] demeuraient incertains. Une étude a donc été menée depuis pour mieux contraindre les distributions à faible intensité (travaux d'Aurière *et al.* [4] portant sur 28 étoiles). Il en est ressorti qu'il apparaît une limite d'environ 300 G en deçà de laquelle seules deux étoiles présentaient un champ magnétique (voir Fig. 1.8 (b)). L'interprétation de ce « seuil magnétique » comme une valeur critique nécessaire à la stabilité des champs de grandes échelles permet de rendre compte relativement simplement de la faible proportion d'étoiles magnétiques au sein des étoiles de faible masse et de leur quasi-absence parmi celles de types O et B.

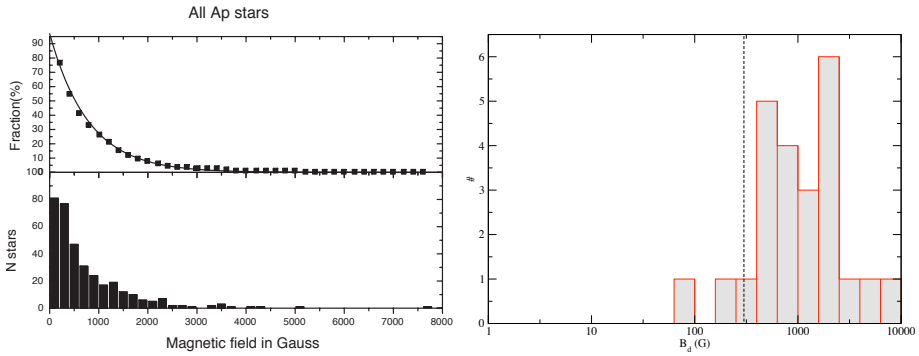


Figure 1.8 – (a) Distribution en intensité du champ magnétique pour 352 étoiles Ap [11] (à gauche) ; (b) distribution en intensité du champ magnétique pour 28 étoiles Ap faiblement magnétiques [4] (à droite, échelle semi-logarithmique)

9. voir la section de ce chapitre consacrée aux objets compacts.
10. le gauss (G) est l'unité couramment employée en astrophysique pour décrire l'intensité du champ magnétique. Le champ magnétique terrestre a une intensité égale à environ 1 gauss. L'unité du système international est le Tesla (T) ; 1 T = 10^4 G.

1.2.4 Les étoiles massives

La détection de champs magnétiques dans les étoiles massives est aujourd'hui l'objet de recherches soutenues, en particulier sous l'égide du consortium franco-canadien MiMeS (Magnetism in Massive Stars [63]). En effet, les étoiles de masse initiale supérieure à 3 $M_\odot$ ne connaissent pas de phase de pré-séquence principale au cours de laquelle la turbulence est susceptible de détruire l'organisation à grande échelle du champ magnétique. Ainsi l'hypothèse des champs fossiles se trouverait confortée si l'observation de champs magnétiques était confirmée dans ces objets. La mise en place de ce consortium a permis de mettre en place un large programme d'observation de 640h au téléscope CFH à Hawaï pour la période 2008-2012. À ce jour la présence de champs magnétiques d'amplitudes allant de 100 G à quelques kG a été mise en évidence dans 51 étoiles massives (liste mise à jour sur le site communautaire « wiki » MiMeS), parmi lesquelles 4 étoiles de type O, 13 étoiles de type B à pulsation lente, et une étoile β Cephei [44, 32, 31]. Ce nombre reste à l'heure actuelle trop faible pour pouvoir être en mesure de dresser des conclusions quant à d'éventuelles corrélations entre l'existence voire l'intensité du champ magnétique et l'âge des ces étoiles (d'autant plus que leur datation est très imprécise) ou leur vitesse de rotation.

1.2.5 Les étoiles jeunes

Une étoile est définie comme étant un objet autogravitant dont l'équilibre et l'évolution dépendent de la nature de la source d'énergie mise en jeu. Celle-ci peut être issue du processus de virialisation ou bien de réactions nucléaires. Cette définition a l'avantage de considérer les étoiles de la « pré-séquence principale » comme étant justement des étoiles, rayonnant leur lumière non par réactions de fusion nucléaire principalement (ce qui définit les étoiles de la « séquence principale », au cours de laquelle elles passent l'essentiel de leur vie) mais par contraction gravitationnelle. En effet le théorème du Viriel (terme proposé par le thermodynamicien R. Clausius, d'après le latin *vir*, force), stipule que dans un système à l'équilibre dynamique, l'énergie cinétique égale l'opposé de la moitié de l'énergie potentielle. On constate donc que si un nuage de gaz proto-stellaire se contracte de façon quasi-statique, l'énergie potentielle diminue et donc l'énergie cinétique augmente, ce qui a pour effet de chauffer la matière stellaire. On peut également montrer que lors de la contraction, l'énergie gravitationnelle perdue se répartit entre énergie cinétique et rayonnement. Néanmoins à l'heure actuelle, beaucoup de faits observés au cours de cette phase de l'évolution ne peuvent être interprétés à la lueur de ce seul mécanisme simple. Notamment, le besoin d'inclure les phénomènes liés à la possible présence de champs magnétiques se font de plus en plus ressentir, car si le champ magnétique n'a *a priori* qu'un effet perturbatif sur l'évolution des étoiles de la séquence principale, son rôle peut être très important au cours des stades précoces de l'évolution stellaire, où la pression magnétique et la pression gazeuse peuvent être du même ordre de grandeur.
Je décrirai ici rapidement les problématiques observationnelles associées à deux populations d'étoiles en pré-séquence principale, les étoiles de Herbig Ae et Be, ainsi que les étoiles de type T Tauri. Les premières sont de classe spectrale A et B, et sont progénitrices des étoiles A et B de la séquence principale ; les secondes sont de classe comprise entre M et F et sont progénitrices des étoiles de faible masse.

Les étoiles de Herbig Ae et Be

Les étoiles de Herbig Ae et Be (HAeBe) sont des étoiles de la pré-séquence principale, de classe généralement A ou B (bien qu'elles puissent s'étendre jusqu'à la classe F). Elles sont définies par un ensemble de propriétés permettant de les recenser, à l'heure actuelle au nombre de 108 [62]. Celles-ci sont les suivantes : l'étoile de Herbig possède un type spectral de type A ou plus précoce et possède des raies d'émission dans son spectre ; elle est localisée dans une région obscure ; elle illumine des nébulosités dans son entourage immédiat (ces trois premières définitions ayant été données initialement par Herbig) ; elle possède une loi d'extinction anormale ; elle possède un excès dans le domaine infra-rouge ; elle est photométriquement variable ; elle montre un profil de la raie MgII $\lambda 2800$ en émission (ces quatre dernières propriétés ayant été rajoutées par la suite). Ces étoiles en formation sont le siège de toute une panoplie de phénomène physiques : vents stellaires, jets bipolaires, accrétion de matière d'un disque circumstellaire ou d'une enveloppe (dont l'inhomogénéité est généralement responsable de la variabilité photométrique). Leur intérêt réside dans le fait qu'elles donnent lieu à des étoiles de type A et B de la séquence principale ; ainsi la détection de champs magnétiques dans ces étoiles permettrait d'avancer dans la compréhension du rôle que ceux-ci peuvent avoir sur la formation des étoiles, notamment Ap et Bp. J.F. Donati [16] fut le premier à rapporter l'observation d'un champ magnétique de 50 G dans l'étoile HAeBe prénommée HD104237 ; 8 autres cas ont depuis été identifiés [12]. Une description des campagnes observationnelles, de l'analyse des données obtenues lors de la recherche (et de la découverte) de ces champs magnétiques ainsi que leurs conséquences sur la compréhension de phénomènes physiques associés à la formation stellaire est donnée dans la thèse d'E. Alecian [2].

Les étoiles de type T Tauri

Les étoiles de type T Tauri (TTs) sont de jeunes étoiles de faible masse, ayant à peine émergé de leur nuage moléculaire natal. Parmi elles, les étoiles de type T Tauri classiques (cTTs) sont encore cernées par leur disque d'accrétion. Les cTTs hébergent de forts champs magnétiques (de quelques kilogauss) présumés être responsable du couplage entre le disque et l'étoile, notamment en provoquant une disruption du disque dans sa partie centrale et en drainant de la matière du disque *via* des canaux d'accrétion discrets, qui suivent la topologie des lignes de champ. Ces phénomènes vont influencer l'évolution du profil interne de rotation de l'étoile tout au long de sa formation. Les étoiles T Tauri étant les progénitrices notamment des étoiles de type solaire, nous concevons immédiatement qu'il est d'une grande importance de comprendre précisément quels sont les phénomènes à l'oeuvre dans ces objets, non seulement afin de fournir des contraintes sur l'évolution du profil de rotation solaire, mais aussi pour discerner les processus susceptibles de jouer sur la migration et la formation planétaire au sein de leur disque d'accrétion. Aussi la modélisation de tous les processus magnéto-hydrodynamiques à l'œuvre [11] est-elle l'objet d'intenses recherches où s'affrontent les simulations numériques multi-dimensionnelles (voir *e.g.* [49, 21]) et les observations [15].

11. Voir en particulier la section du chapitre suivant décrivant brièvement les instabilités magnéto-rotationnelles.

1.2.6 Les objets compacts

Les naines blanches

Les naines blanches forment le résidu des étoiles de petite masse (dont le Soleil) en fin de vie. À ce stade, ces étoiles ont fusionné la plus grande partie de leur hydrogène en hélium. Privées de combustible, elles s'effondrent sur elles-mêmes sous l'effet de la gravitation. La pression et la température du cœur augmentant, la fusion de l'hélium en élément plus lourds, en particulier en carbone, commence. Cette énergie nouvelle fait gonfler l'étoile, qui devient une géante rouge. Cependant, l'hélium est consommé très rapidement et lorsque sa fusion s'arrête, la contraction de l'étoile reprend. Sa faible masse ne permettant pas d'atteindre des températures et des pressions suffisantes pour démarrer la fusion du carbone, le cœur s'effondre jusqu'à former un objet dégénéré [12] appelé naine blanche, tandis que les couches externes de l'étoile viennent rebondir sur cette surface solide et sont projetées dans l'espace. Le résultat de ce processus est un astre très chaud entouré d'un nuage de gaz composé essentiellement de l'hydrogène et de l'hélium non consommés dans la fusion (ainsi que d'un peu de carbone) : c'est ce que l'on appelle une nébuleuse planétaire [13]. Cette naine blanche se refroidit ensuite très lentement en naine noire.
Babcock tenta après son observation sur Vir78 de démontrer l'existence de champs magnétiques dans le cas des naines blanches mais cet essai se solda par un échec (notamment en 1948 dans le cas de la naine blanche 40 Eridani B [6]). Deux décennies plus tard, la découverte de champs magnétiques d'intensités colossales dans les pulsars (voir la section suivante sur les pulsars et voir la section du chapitre suivant consacrée à la théorie des champs fossiles) a suscité un renouveau d'intérêt pour la recherche de naines blanches magnétiques [47, 23]. En 1970 enfin, Kemp rapporte la première détection d'un champ magnétique en provenance d'une naine blanche [35]. Depuis, il a été recensé plus d'une centaine de naines blanches magnétiques (MWDs), avec des champs dont l'intensité varie de la dizaine de kilogauss à quelques gigagauss [65]. Quelques faits notables méritent notre attention.
Premièrement, la topologie du champ magnétique est très similaire à celle des étoiles Ap, avec une contribution dominante des multipoles de bas ordre [19]. Le dipôle est généralement écarté de 10 à 30 % du rayon par rapport au centre de l'étoile (« offset »). Deuxièmement, l'on constate qu'une proportion en naines blanches magnétiques équivalente à celle des étoiles Ap parmi les étoiles du même type est observée, celles-ci représentant environ 5 % de toutes les naines blanches connues. Troisièmement, seules quatre d'entre-elles possèdent des champs dans la gamme du kilogauss, laissant suggérer une distribution en intensité du champ magnétique homothétique à celle des étoiles Ap. Finalement, les naines blanches magnétiques possèdent toutes une masse supérieure à $0.95\,\mathrm{M}_\odot$ (la masse limite,

12. On parle de dégénérescence de la matière lorsque celle-ci atteint une densité telle que son équation d'état est régie par le principe d'exclusion de Pauli : les électrons ne pouvant être en nombre supérieur à leur nombre prévu par la théorie quantique ($2\,n^2$ par niveau d'énergie n). Dans la matière ordinaire, les électrons s'organisent autour du noyau de manière à voir leurs spins alignés (un peu comme des boussoles que l'on placerait à une certaine distance et qui indiqueraient toutes le Nord) ; dans la matière dégénérée, les spins tendent à être anti-alignés afin de remplir au mieux les couches les plus proches du noyau, *i.e.* tous les niveaux de plus basse énergie (pour reprendre l'analogie, il faut s'imaginer à présent deux boussoles mises contre à contre, celles-ci vont s'aligner mais en sens opposé). Ainsi apparaît une pression dite « de dégénérescence quantique » modifiant la traditionnelle équation d'état reliant la pression à la densité pour un gaz parfait, en introduisant une densité critique.
13. Le terme planétaire n'a été conservé que pour des raisons historiques.

dite de Chandrasekhar, étant située aux alentours de $1.4\,M_\odot$), preuve que le champ magnétique agit notoirement sur la perte de masse et le transport de moment angulaire durant les phases de post-séquence principale.

Les étoiles à neutrons

La physique des étoiles à neutrons classe celles-ci parmi les objets les plus extrêmes de l'univers connu : leurs densités, taux de rotation et champs magnétiques sont plus élevés que n'importe quel autre objet astrophysique. Une étoile à neutron condense une masse de $1.4\,M_\odot$ dans une boule de 20 km de diamètre. Celles-ci se forment à partir d'étoiles de masses comprises entre $8\,M_\odot$ et $20\,M_\odot$(étoiles de type B et O). Pour des masses moindres, les étoiles terminent leur vie en naines blanches ; pour des masses supérieures, elles donnent lieu à un trou noir. Elles résultent de l'implosion-explosion de supernovæ de type Ib, Ic ou II : lorsque l'étoile progénitrice atteint la fin de fusion de tout son combustible nucléaire (qui s'arrête à la synthèse du ^{56}Ni au cœur, qui se désintègre en fer), elle se contracte à nouveau sous l'effet de la gravité. La matière présente dans l'enveloppe va alors entrer en collision avec la matière dégénérée du cœur, entraînant une explosion au mécanisme complexe (qui ne sera pas détaillé ici). Au centre, la pression est telle que les électrons dégénérés et les protons se recombinent en donnant lieu à un neutron ainsi qu'à un neutrino électronique participant au processus d'explosion. Soulignons que c'est au cours de cette explosion que les éléments plus lourds que le fer sont synthétisés et disséminés dans l'Univers (tels que le cuivre, le zinc, ou l'iode, nécessaires à notre organisme). Il subsistera éventuellement au centre une étoile à neutrons.
Ce sont des objets dégénérés, dans lesquels interviennent des effets physiques exotiques telles que la superfluidité et la supraconductivité à très haute température, et à grande échelles. Les champs magnétiques typiques des étoiles à neutrons sont d'intensité de l'ordre de $10^{12} - 10^{13}$ G ; ceux des magnétars allant jusqu'à 10^{15} G. Aussi les observations de ces objets sont d'un intérêt extrême, puisqu'elles permettent de dévoiler des secrets sur des phénomènes physiques dans des régimes qui ne pourront jamais être reproduits sur Terre et enrichissent nos connaissances notamment sur l'interaction entre l'électromagnétisme et la gravitation, dont on sait qu'il s'agit là de la pierre d'achoppement de la physique moderne, où s'affrontent le modèle standard et la théorie de la relativité générale.
Les observations des champs magnétiques de surface des étoiles à neutrons ont mis en évidence une corrélation entre l'âge et l'intensité du champ. Par exemple, les jeunes pulsars radio [14] et les binaires X massives [15] possèdent des champs magnétiques de l'ordre de 10^{12} G, alors que les pulsars millisecondes ainsi que les binaires X de faible masse, plus anciens, possèdent des champs de l'ordre de 10^8 G. Ces observations indiquent que le champ magnétique est certainement sujet à un processus dissipatif, même si certains scénarios indiquent qu'il pourrait s'agir de conséquences de l'accrétion.

14. Un pulsar est une étoile à neutrons en rotation rapide, présentant un champ magnétique dont l'angle est incliné par rapport à l'angle de rotation, comme dans le modèle du rotateur oblique décrit en page 13. Plus de 2 000 pulsars sont connus à l'heure actuelle ; parmi ceux-ci on dénombre 12 magnétars. Ceux-ci sont vraisemblablement responsables des « soft gamma repeaters » (SGRs) et des « anomalous X-ray pulsars » (AXPs).

15. Une binaire X est formée d'une étoile normale orbitant autour d'une étoile à neutrons ou d'un trou noir avec une courte période. Le rayonnement X provient de l'énorme quantité d'énergie dégagée par l'accrétion de la matière de l'étoile autour de l'objet compact.

1.3 Manifestations du champ magnétique

1.3.1 L'effet Zeeman

En 1896, Pieter Zeeman découvrit que les raies spectrales d'une source de lumière soumise à un champ magnétique *se dédoublent* en plusieurs composantes, chacune d'elles présentant une certaine polarisation [67]. Dans le cas d'un champ magnétique perpendiculaire à la ligne de visée, toutes les composantes sont polarisées linéairement, tandis que pour un champ magnétique orienté parallèlement à la ligne de visée la polarisation observée est circulaire. Ce phénomène, appelé par la suite effet Zeeman et à qui il valut le prix Nobel en 1902, constitua une des confirmations de la théorie électromagnétique de la lumière.
Le phénomène peut être basiquement décrit à partir de la représentation classique de l'électron orbitant circulairement autour de son noyau, perturbé par la présence d'un champ magnétique $\mathbf{B}$. Supposons que le champ magnétique soit parallèle à l'axe de rotation. La force totale subie par l'électron (dans la direction radiale définie par l'orbite) est alors :

$$F = m_e\omega_0^2 r + m_e\Omega\omega r \tag{1.1}$$

où $\omega_0 r$ est la vitesse de rotation de l'électron non perturbé situé à une distance r de son noyau, Ω la perturbation de la vitesse angulaire due au champ magnétique et ω la vitesse angulaire perturbée. En résolvant cette équation pour ω l'on obtient $2\omega = \Omega \pm \sqrt{\Omega^2 + 4\omega_0^2}$ qui, lorsque $\Omega \ll 2\omega_0$, donne simplement les deux solutions $\omega = \omega_0 \pm \frac{\Omega}{2}$. Les composantes du mouvement parallèles à $\mathbf{B}$ ne sont quant à elles pas affectées par sa présence (la force de Lorentz $\mathbf{F}_{\mathcal{L}} = -e\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ s'annulant), ainsi la fréquence ω_0 est inchangée pour la polarisation parallèle à $\mathbf{B}$. Ces trois vitesses angulaires donnent alors trois niveaux d'énergie possibles pour l'électron, qui lors d'une transition vers une orbite inférieure donneront lieu à l'émission d'un photon ayant trois fréquences possibles. Si ce modèle permet d'illustrer un cas simple, la description complète du phénomène ne peut être embrassée qu'avec l'aide de la théorie quantique, qui prévoit qu'un niveau d'énergie associé à un nombre quantique angulaire ℓ est subdivisé en présence de champ magnétique en $2\ell+1$ sous-niveaux pour l'effet Zeeman normal. Cet effet est représenté pour la transition d'un électron entre les niveaux $\ell = 2$ et $\ell = 1$ en Fig. 1.9.

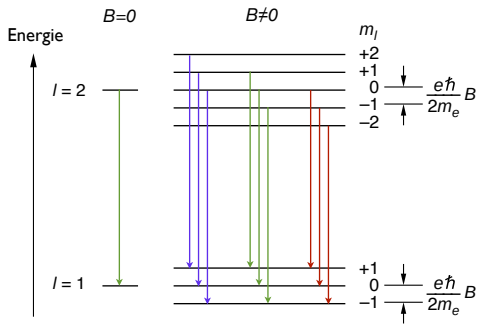


Figure 1.9 – Illustration de l'effet Zeeman normal sur les transitions électroniques, ici entre le niveau $\ell = 2$ et le niveau $\ell = 1$. Ici les neuf transitions permises ne donnent lieu qu'à trois énergies différentes, la différence d'énergie entre niveaux adjacents ne dépendant que de l'intensité du champ magnétique extérieur B.

Description de la lumière polarisée - Paramètres de Stokes

Le modèle que je viens d'exposer omet une caractéristique importante de l'effet Zeeman : l'influence du champ magnétique sur la polarisation des raies spectrales. Cela ne peut être expliqué qu'en prenant en compte la nature électromagnétique de la lumière. Un faisceau de lumière se déplaçant dans le vide peut être représenté par une superposition d'ondes planes électromagnétiques véhiculées chacune par un photon. Chacune de ces ondes est entièrement décrite par son champ électrique **E** qui, d'après les équations de Maxwell, est contenu dans un plan perpendiculaire à la direction de l'onde $\mathbf{e}_k$. Dans le cas général, l'extrémité du vecteur **E** décrit une hélice dont l'axe correspond à la direction de propagation et dont la projection sur le plan perpendiculaire à son axe (plan de polarisation, formé par les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{e}}_1$ et $\hat{\mathbf{e}}_2$) décrit une ellipse. On parle alors de polarisation elliptique (voir Fig. 1.10). Lorsque le petit et le grand axe de l'ellipse sont

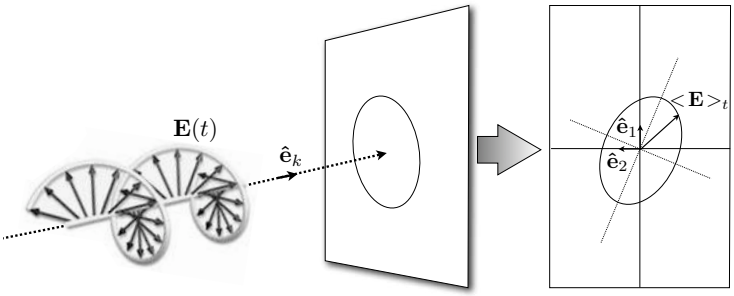


Figure 1.10 – Propagation hélicoïdale du vecteur **E** le long de la direction portée par $\hat{\mathbf{e}}_k$ et ellipse de polarisation dans le plan formé par ($\hat{\mathbf{e}}_1$,$\hat{\mathbf{e}}_2$).

égaux, la polarisation est circulaire et dans ce cas l'extrémité du vecteur **E** décrit une hélice parfaite ; lorsque le petit axe est nul, la polarisation est rectiligne et dans ce cas l'extrémité du vecteur **E** décrit une sinusoïde. L'onde plane en un point particulier de l'espace peut s'écrire en notation complexe :

$$\mathbf{E}(t) = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\, e^{i(\varphi_1 - \omega\, t)} \\ A_2\, e^{i(\varphi_2 - \omega\, t)} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

où A_1 et A_2 représentent les amplitudes, φ_1 et φ_2 les phases, resp. des composantes E_1 et E_2 du champ électrique et ω est la fréquence angulaire. Nous retrouvons la polarisation linéaire lorsque $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \mathbb{Z}\,\pi$ et la polarisation circulaire lorsque $\varphi = (2\,\mathbb{Z}\, + 1)\,\pi/2$. En pratique, les détecteurs (CCD, photomultiplicateurs, ...) ne sont toutefois sensibles qu'à l'intensité lumineuse I, proportionnelle au produit des composantes du champ électrique :

$$E_i^*(t)\, E_j(t) = A_i\, A_j\, e^{i(\varphi_j - \varphi_i)} \quad \text{avec} \quad (i,j) = (1,2) \tag{1.3}$$

où le symbole $*$ se réfère au complexe conjugué. De plus, le détecteur moyenne en général les contributions des différentes longueurs d'onde dans son domaine de sensibilité. Par extension, on définit alors le tenseur de polarisation I_{ij} par :

$$I_{ij} =< E_i^*(t)\, E_j(t) > \tag{1.4}$$

où le symbole $< .... >$ définit la moyenne sur l'ensemble des ondes planes. Ce tenseur peut se réécrire sous la forme matricielle :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} < E_1^*(t)\, E_1(t) > & < E_2^*(t)\, E_1(t) > \\ < E_1^*(t)\, E_2(t) > & < E_2^*(t)\, E_2(t) > \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

dont la trace I porte l'information sur l'intensité de l'onde électromagnétique. S'il n'y a aucune corrélation entre les composantes (en particulier si la phase φ est aléatoire) les termes non-diagonaux s'annulent et la lumière est non-polarisée. En revanche, lorsque la lumière est polarisée, l'identification des quatre termes de la matrice permettra de déterminer quel est l'état de polarisation. Évidemment cette identification ne peut pas être faite directement à partir des observations, aussi l'intermédiaire entre les paramètres observés et la matrice de polarisation constitue-t-elle la clef du problème. C'est à cette fin que l'on définit le vecteur de Stokes (appelé également $\mathbf{I}$) à quatre composantes I, Q, U, V :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

où

$$I = I_{11} + I_{22} = A_1^2 + A_2^2; \tag{1.7}$$
$$Q = I_{11} - I_{22} = A_1^2 - A_2^2; \tag{1.8}$$
$$U = I_{12} + I_{21} = 2\, A_1 A_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right); \tag{1.9}$$
$$V = i\left(I_{12} - I_{21}\right) = 2\, A_1 A_2 \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), \tag{1.10}$$

chacune de ces quatre quantités ayant l'avantage d'être directement mesurable. Une représentation plus imagée des paramètres de Stokes consiste à remarquer que I est l'intensité précédemment définie ; le paramètre Q est la différence entre deux lumières polarisées linéairement, dont l'une est orthogonale à l'autre ; le paramètre U également, mais dont les directions de polarisation font un angle de 45° par-rapport à celles du paramètre Q. Enfin le paramètre V représente la différence entre deux lumières polarisées circulairement, l'une droite, l'autre gauche.
En pratique, la composante circulaire droite d'un spectre est d'abord mesurée à l'aide d'un spectropolarimètre (voir section suivante), puis la composante circulaire gauche. La différence des deux polarisations, si elle est non-nulle à une certaine fréquence signale la présence d'une polarisation circulaire droite ou gauche. Étant donné que la composante bleue d'un triplet (celle d'énergie la plus élevée) est polarisée circulaire droite et que la composante rouge (de plus basse énergie) est polarisée circulaire gauche, le résultat est alors confirmé si la polarisation opposée est observée pour la raie du triplet symétrique par-rapport à la raie centrale, qui doit être de polarisation linéaire.

1.3.2 L'effet Hanle

Le désavantage de l'effet Zeeman en tant qu'outil de diagnostic est que les amplitudes des polarisations mesurées décroissent avec l'accroissement du degré d'annulation de polarités magnétiques mixtes dans l'élément de résolution de la fenêtre spatio-temporelle

d'observation. Ainsi, une polarisation Zeeman nulle ne signifie pas forcément une absence de champ magnétique et il est généralement admis que les observations effectuées sur les instruments actuels exploitant l'effet Zeeman ne révèlent que la partie émergée de l'iceberg du magnétisme stellaire (environ 1 % du volume photosphérique dans le cas du Soleil). Pour permettre l'investigation de champs magnétiques organisés à petite échelle ou rapidement variables (en particulier le champ magnétique présent dans les « spicules [16] » solaires ou dans son milieu inter-granulaire), l'effet Hanle est employé [57]. Son principe repose sur le fait qu'un champ magnétique peut agir de deux manières sur la polarisation causée par la diffusion cohérente [17] dans les raies spectrales : (i) par rotation du plan de polarisation ; (ii) par dépolarisation. Dans un milieu magnétique enchevêtré, où l'orientation du champ de vecteurs est aléatoire, il n'y a pas de direction privilégiée de rotation ; néanmoins l'effet de dépolarisation subsiste. W. Hanle (1924) [28] a été le premier à fournir une explication classique de cet effet ; cependant R. W. Wood et A. Ellett (1923) [66] furent les premiers à relever le fait que cet effet ne peut pas être interprété comme un effet Zeeman étant donné que les champs magnétiques suffisants pour dépolariser une source de lumière ne suffisent pas pour séparer les composantes spectrales.

1.3.3 Les émissions en rayons X

La première observation de champs magnétiques à la surface d'étoiles massives fut reportée en 2002 ; il s'agit d'une étoile de type O, θ^1 Ori C (Donati *et al.* 2002 [14]), l'étoile la plus brillante et la plus massive de la nébuleuse d'Orion. Celle-ci était notoirement connue pour ses fortes émissions en rayons X. Traditionnellement, les émissions en rayons X des étoiles de types O et B étaient expliquées par des phénomènes d'instabilités radiatives, générant une multitude de chocs dans le vent stellaire (Lucy & White 1980 [40], Owocki & Cohen 1999 [48]). Cependant, l'émission en rayons X intense et modulée par la rotation fut interprétée en 1997 de manière assez avant-gardiste par Babel et Montmerle [7] en termes de « chocs de vents confinés par champ magnétiques », dans le cas d'étoiles Ap-Bp. Ce modèle prévoit que les vents stellaires sont confinés par les lignes de champs magnétiques, et que les deux composantes des deux hémisphères génèrent un choc, qui permet d'expliquer les émissions en rayons X, dans le domaine radio (voir section suivante) et de rendre compte du taux de perte de masse. Les émissions en rayons X, observées en particulier par les observatoires spatiaux Chandra et XMM, sont depuis lors entrevues comme un signe possible de la présence de champs magnétiques dans les environnements stellaires. En 2005, Stelzer *et al.* ont observé des émissions en rayons X sur toutes les étoiles massives du cluster de la nébuleuse d'Orion (M42), parmi lesquelles beaucoup présentaient une modulation liée à la rotation. Depuis, huit autres étoiles massives de cette nébuleuse ont été confirmées comme présentant des champs magnétiques à leur surface, notamment par Neiner *et al.* (2003) [45], Petit *et al.* (2008) [50].

16. jet de matière émis à la surface solaire, apparaissant au limbe sous la forme d'un tube d'un diamètre d'environ 500 km. Sa durée de vie moyenne est d'environ 5 minutes.

17. processus de diffusion au cours duquel la réémission s'opère à la même fréquence que la radiation incidente.

1.3.4 Les émissions non-thermiques dans le domaine radio

En 1987, Drake *et al.* [17] rapportent la détection de 5 étoiles de type Ap-Bp sur les 34 de leur échantillon comme sources continues à 6 cm de longueur d'onde. Toutes possédaient des champs de l'ordre du kG ; malheureusement c'est aussi le cas d'autres étoiles de l'échantillon qui, elles, ont de bien plus faibles émissions radio intrinsèques. Parmi ces cinq étoiles, trois étaient des étoiles Bp He-riches. Des observations à trois fréquences sur les antennes du VLA (Very Large Array) ont permis d'affirmer que ces étoiles sont des sources variables non-thermiques : l'émission ne provient pas de radiations free-free dans l'enveloppe étendue formée par le vent stellaire, mais de particules semi-relativistes en mouvement gyro-synchrotron autour des lignes de champ magnétique de la magnétosphère.

1.4 Méthodes observationnelles

1.4.1 Méthodes conventionnelles

Seulement douze ans après la découverte de l'effet Zeeman, Hale met au point un appareil permettant de détecter la présence de champs magnétiques en analysant la lumière nous provenant du Soleil. Ayant déjà observé des doublets à certaines fréquences du spectre lumineux, Hale conçut et installa au Mont Wilson un dispositif composé d'une fente simple suivie d'un prisme de Nicol (polariseur) puis d'un polarisateur circulaire (rhomboèdre de Fresnel). L'observation (sur des plaques photographiques sensibilisées à une longueur d'onde proche du rouge) des raies spectrales mit alors en évidence que les deux composantes du doublet étaient bien de polarisation circulaires opposées. Le premier polarimètre était né.
Une autre méthode consiste à observer la polarisation circulaire dans les deux ailes d'une raie spectrale large (habituellement Hβ) avec un photopolarimètre à bande étroite [3]. Jusque dans le milieu des années quatre-vingt, ces principes furent appliqués pour mesurer la composante longitudinale du champ magnétique, moyennée sur l'hémisphère stellaire visible. Ces deux méthodes permirent en particulier de détecter et d'étudier le champ magnétique solaire ainsi que d'une centaine d'étoiles CP.

1.4.2 La spectropolarimétrie

Aujourd'hui installés au foyer du téléscope Bernard Lyot au Pic du Midi et au au téléscope du CFHT à Hawaï, les spectropolarimètres de dernière génération et à très haute résolution Narval et ESPaDOnS (respectifs) sont consacrés à l'observation et à la recherche des champs magnétiques sur une grande variété d'objets célestes. À la différence d'un polarimètre, un spectropolarimètre permet d'analyser d'éventuelles manifestation du champ magnétique à différentes longueurs d'onde, un spectrographe étant placé en aval du polarimètre (en pratique par l'intermédiaire d'une fibre optique et d'un dissecteur d'image). Le principe repose sur le fait que le champ magnétique produit sensiblement le même signal à toutes les longueurs d'onde (la séparation des raies Zeeman est proportionnelle à $B_0\,\lambda_0^2$, B_0 étant l'amplitude du champ magnétique et λ_0 la longueur d'onde). Ainsi, le spectre de l'étoile peut-il être modélisé par la convolution d'un spectre artificiel (somme pondérée des fonctions de Dirac représentant toutes les raies spectrales à prendre en compte) et d'une signature Zeeman moyenne. Par une méthode de déconvolution par moindres-carrés (LSD,

Least-Squares Deconvolution), il est alors possible d'extraire des signatures Zeeman de très faibles amplitudes. Une fois collectées sur une période de rotation complète, ces signatures permettent de reconstruire la topologie du champ, *i.e.* aussi bien l'orientation des lignes de champ magnétique que leurs localisations sur l'hémisphère stellaire visible.
Une description détaillée de ces instruments, de leur modes de fonctionnement ainsi que de la méthode de réduction et d'analyse des données est très bien décrite dans la thèse d'E. Alecian [2].

1.4.3 L'hélio- et l'astérosismologie

En analysant les variations de luminosité (photométrie) ou de vitesse de déplacement de la surface des astres (méthode de vélocité Doppler), il est possible de connaître les fréquences propres des ondes se propageant dans les couches internes de l'étoile. En effet celle-ci représente une cavité de résonance remplie de gaz, et à l'image d'une caisse de violoncelle, certaines fréquences vont être sélectionnées en fonction de la structure interne de l'étoile : ce sont les modes propres, ou pour conserver l'analogie, les harmoniques de l'instrument. Je ne donne ici qu'une image enfantine de l'astérosismologie ; cette méthode sera détaillée dans le dernier chapitre de la thèse.
Notons simplement que le champ magnétique peut avoir une influence sur les modes propres, aussi bien sur les ondes acoustiques (sensibles aux couches extérieures de l'étoile) que sur les ondes de gravité (l'autre grand type d'ondes mécaniques pouvant se développer dans un milieu fluide, elles sont sensibles aux propriétés à proximité du coeur de l'étoile). Les fréquences ω des modes propres acoustiques sont déplacées de $\delta\omega$ dans les deux cas suivant la loi approximative :

$$\frac{\delta\omega}{\omega} \propto \frac{B_0}{\rho\, R^2}, \tag{1.11}$$

B_0 étant l'amplitude du champ magnétique, ρ la densité caractéristique du milieu dans lequel se propage l'onde et R le rayon de l'étoile. Il est donc bien plus difficile de sonder les champs magnétiques par l'intermédiaire des modes de gravité que par celui des modes acoustiques, la fréquence des derniers étant bien supérieure à celle des premiers et la densité étant inférieure dans les couches superficielles de l'étoile, là où les modes acoustiques se manifestent. Effectivement en héliosismologie, des informations sont extraites de l'instrument MDI/SoHO (Scherrer *et al.*, 1995 [56]) pour le champ magnétique de sous-surface et l'instrument Golf /SoHO (Gabriel *et al.*, 1995 [22]) est de plus en plus utilisé pour étudier la variabilité du champ dans cette région (voir *e.g.* les travaux de Turck-Chièze *et al.*, 2009 [59]).

1.5 Conclusion

J'ai au cours de ce chapitre dressé un point de vue global des problématiques et des aspects observationnels liés à la présence de champs magnétiques dans les objets stellaires. Un point de vue externe a volontairement été adopté, afin d'introduire les faits tels qu'ils se présentent pour l'observateur. La vision populaire de l'étoile comme un simple objet brillant mais immuable semble désormais bien loin. Espérons que le lecteur sera conforté dans l'idée qu'une étoile constitue définitivement un objet vivant : naissant, mourant, et connaissant

une vie parfois tumultueuse ; du moins riche de phénomènes physiques à l'œuvre pour maintenir son subtil équilibre naturel.

Bibliographie

[1] H. A. Abt et N. I. Morrell. « The Relation between Rotational Velocities and Spectral Peculiarities among A-Type Stars ». *ApJS*, 99 :135–+, juillet 1995. xiii, 12

[2] E. Alecian. « *Étude de l'évolution de la structure interne et du champ magnétique des étoiles pré-séquence principale de masse intermédiaire* ». Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, septembre 2006. 16, 24

[3] J. R. P. Angel et J. D. Landstreet. « Magnetic Observations of White Dwarfs ». *ApJ*, 160 :L147+, juin 1970. 23

[4] M. Aurière, G. A. Wade, J. Silvester, F. Lignières, S. Bagnulo, K. Bale, B. Dintrans, J. F. Donati, C. P. Folsom, M. Gruberbauer, A. H. Bon Hoa, S. Jeffers, N. Johnson, J. D. Landstreet, A. Lèbre, T. Lueftinger, S. Marsden, D. Mouillet, S. Naseri, F. Paletou, P. Petit, J. Power, F. Rincon, S. Strasser et N. Toqué. « Weak magnetic fields in Ap/Bp stars. Evidence for a dipole field lower limit and a tentative interpretation of the magnetic dichotomy ». *A&A*, 475 :1053–1065, décembre 2007. xiii, 14

[5] H. W. Babcock. « Zeeman Effect in Stellar Spectra. ». *ApJ*, 105 :105–+, janvier 1947. 11

[6] H. W. Babcock. « Test for a Magnetic Field in the White Dwarf 40 Eridani B ». *PASP*, 60 :368–+, décembre 1948. 17

[7] J. Babel et T. Montmerle. « X-ray emission from Ap-Bp stars : a magnetically confined wind-shock model for IQ Aur. ». *A&A*, 323 :121–138, juillet 1997. 22

[8] S. Baliunas et W. Soon. « Are Variations in the Length of the Activity Cycle Related to Changes in Solar-Type Stars Brightness ? ». *ApJ*, 450 :896–+, septembre 1995. 10

[9] S. L. Baliunas, E. Nesme-Ribes, D. Sokoloff et W. H. Soon. « A Dynamo Interpretation of Stellar Activity Cycles ». *ApJ*, 460 :848–+, avril 1996. 10

[10] K.R. Briffa, T.J. Osborn, F.H. Schweingruber, I.C. Harris, P.D. Jones, S.G. Shiyatov et E.A. Vaganov. « Low-frequency temperature variations from a northern tree-ring density network ». *J. Geophys. Res.*, 106 :2929–2941, 2001. xiii, 9

[11] V. D. Bychkov, L. V. Bychkova et J. Madej. « Catalogue of averaged stellar effective magnetic fields. I. Chemically peculiar A and B type stars ». *A&A*, 407 :631–642, août 2003. xiii, 12, 14

[12] C. Catala, E. Alecian, J. F. Donati, G. A. Wade, J. D. Landstreet, T. Böhm, J.-C. Bouret, S. Bagnulo, C. Folsom et J. Silvester. « The magnetic field of the pre-main sequence Herbig Ae star HD 190073 ». *A&A*, 462 :293–301, janvier 2007. 16

[13] T. J. Crowley et T.S. Lowery. « Causes of Climate Change Over the Past 1000 Years ». *Science*, 289 :270–277, 2000. xiii, 9

[14] J. F. Donati, J. Babel, T. J. Harries, I. D. Howarth, P. Petit et M. Semel. « The magnetic field and wind confinement of theta 1 Orionis C ». *MNRAS*, 333 :55–70, juin 2002. 22

[15] J. F. Donati, M. M. Jardine, S. G. Gregory, P. Petit, J. Bouvier, C. Dougados, F. Ménard, A. C. Cameron, T. J. Harries, S. V. Jeffers et F. Paletou. « Magnetic fields and accretion flows on the classical T Tauri star V2129 Oph ». *MNRAS*, 380 :1297–1312, octobre 2007. 16

[16] J. F. Donati, M. Semel, B. D. Carter, D. E. Rees et A. Collier Cameron. « Spectropolarimetric observations of active stars ». *MNRAS*, 291 :658–+, novembre 1997. 16

[17] S. A. Drake, D. C. Abbott, T. S. Bastian, J. H. Bieging, E. Churchwell, G. Dulk et J. L. Linsky. « The discovery of nonthermal radio emission from magnetic Bp-Ap stars ». *ApJ*, 322 :902–908, novembre 1987. 23

[18] J. Esper, E.R. Cook et F.H. Schweingruber. « Low-Frequency Signals in Long Tree-Ring Chronologies for Reconstructing Past Temperature Variability ». *Science*, 295(5563) :2250–2253, 2002. xiii, 9

[19] F. Euchner, K. Reinsch, S. Jordan, K. Beuermann et B. T. Gänsicke. « Zeeman tomography of magnetic white dwarfs. II. The quadrupole-dominated magnetic field of HE 1045-0908 ». *A&A*, 442 :651–660, novembre 2005. 17

[20] R. Fares, J.-F. Donati, C. Moutou, D. Bohlender, C. Catala, M. Deleuil, E. Shkolnik, A. C. Cameron, M. M. Jardine et G. A. H. Walker. « Magnetic cycles of the planet-hosting star τ Bootis - II. A second magnetic polarity reversal ». *MNRAS*, 398 :1383–1391, septembre 2009. 10

[21] S. Fromang, J. Papaloizou, G. Lesur et T. Heinemann. « Numerical Simulations of MHD Turbulence in Accretion Disks ». Dans N. V. Pogorelov, E. Audit, P. Colella et G. P. Zank, éditeurs, *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, volume 406 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pages 9–+, avril 2009. 16

[22] A. H. Gabriel, G. Grec, J. Charra, J.-M. Robillot, T. Roca Cortés, S. Turck-Chièze, R. Bocchia, P. Boumier, M. Cantin, E. Cespédes, B. Cougrand, J. Crétolle, L. Damé, M. Decaudin, P. Delache, N. Denis, R. Duc, H. Dzitko, E. Fossat, J.-J. Fourmond, R. A. García, D. Gough, C. Grivel, J. M. Herreros, H. Lagardère, J.-P. Moalic, P. L. Pallé, N. Pétrou, M. Sanchez, R. Ulrich et H. B. van der Raay. « Global Oscillations at Low Frequency from the SOHO Mission (GOLF) ». *Sol. Phys.*, 162 :61–99, décembre 1995. 24, 198

[23] V. L. Ginzburg, V. V. Zheleznyakov et V. V. Zajtsev. « Coherent mechanisms of radio emission and magnetic models of pulsars. ». *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 98 :201–236, 1969. 17

[24] Y. V. Glagolevskij et I. I. Romanyuk, éditeurs. *Magnetic Fields of Chemically Peculiar and Related Stars, Proceedings of the International Meeting*, 2000. 12

[25] G. E. Hale. « On the Probable Existence of a Magnetic Field in Sun-Spots ». *ApJ*, 28 :315–+, novembre 1908. 9

[26] G. E. Hale, F. Ellerman, S. B. Nicholson et A. H. Joy. « The Magnetic Polarity of Sun-Spots ». *ApJ*, 49 :153–+, avril 1919. 9, 10

[27] G. E. Hale et S. B. Nicholson. « The Law of Sun-Spot Polarity ». *ApJ*, 62 :270–+, novembre 1925. 9

[28] W. Hanle. « Über magnetische Beeinflussung der Polarisation der Resonanzfluoreszenz ». *Zeitschrift fur Physik*, 30 :93–105, décembre 1924. 22

[29] D. V. Hoyt et K. H. Schatten. « Group Sunspot Numbers : A New Solar Activity Reconstruction ». *Sol. Phys.*, 181 :491–512, août 1998. xiii, 8

[30] S. Huang. « Merging Information for New Insights into Climate Change in the Past and Future ». *Geophysical Research Letters*, 31, 2004. xiii, 9

[31] S. Hubrig, M. Briquet, P. De Cat, M. Schoeller, T. Morel et I. Ilyin. « New magnetic field measurements of beta Cephei stars and Slowly Pulsating B stars ». *ArXiv e-prints*, janvier 2009. 15

[32] S. Hubrig, M. Schöller, R. S. Schnerr, I. Ilyin, H. F. Henrichs, R. Ignace et J. F. González. « Magnetic fields in O-type stars measured with FORS 1 at the VLT ». Dans *IAU Symposium*, volume 259, pages 381–382, avril 2009. 15

[33] P.D. Jones, K.R. Briffa, T.P. Barnett et S.F.B. Tett. « High-resolution Palaeoclimatic Records for the last Millennium : Interpretation, Integration and Comparison with General Circulation Model Control-run Temperatures ». *The Holocene*, 8 :455–471, 1998. xiii, 9

[34] P.D. Jones et M.E. Mann. « Climate Over Past Millennia ». *Reviews of Geophysics*, 42, 2004. xiii, 9

[35] J. C. Kemp, J. B. Swedlund, J. D. Landstreet et J. R. P. Angel. « Discovery of Circularly Polarized Light from a White Dwarf ». *ApJ*, 161 :L77+, août 1970. 17

[36] L. Křivský et K. Pejml. « Solar activity, aurorae and climate in Central Europe in the last 1000 years. ». *Publications of the Astronomical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences*, 75, 1988. xiii, 8

[37] M. Landolfi, S. Bagnulo et M. Landi degl'Innocenti. « Modelling of magnetic fields of CP stars. I. A diagnostic method for dipole and quadrupole fields from Stokes I and V observations ». *A&A*, 338 :111–121, octobre 1998. 13

[38] J. D. Landstreet et G. Mathys. « Magnetic models of slowly rotating magnetic Ap stars : aligned magnetic and rotation axes ». *A&A*, 359 :213–226, juillet 2000. 13

[39] J. P. Legrand, M. Le Goff, C. Mazaudier et W. Schröder. « Solar and auroral activities during the seventeenth century ». *Acta Geophysics and Geodetica Hungarica*, 27(2-4) :251–282, 1992. xiii, 8

[40] L. B. Lucy et R. L. White. « X-ray emission from the winds of hot stars ». *ApJ*, 241 :300–305, octobre 1980. 22

[41] M.E. Mann, R.S. Bradley et M.K. Hughes. « Northern Hemisphere Temperatures During the Past Millennium : Inferences, Uncertainties, and Limitations ». *Geophysical Research Letters*, 26(6) :759–762, 1999. xiii, 9

[42] M.E. Mann et P.D. Jones. « Global Surface Temperatures over the Past Two Millennia ». *Geophysical Research Letters*, 30(15) :1820, 2003. xiii, 9

[43] A. Moberg, D.M. Sonechkin, K. Holmgren, N.M. Datsenko et W. Karlén. « Highly variable Northern Hemisphere temperatures reconstructed from low- and high-resolution proxy data ». *Nature*, 443(613-617), 2005. xiii, 9

[44] C. Neiner. « Magnetic Field Measurements in OB Stars ». Dans A. T. Okazaki, S. P. Owocki et S. Stefl, éditeurs, *Active OB-Stars : Laboratories for Stellar and Circumstellar Physics*, volume 361 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pages 91–+, mars 2007. 15

[45] C. Neiner, A.-M. Hubert, Y. Frémat, M. Floquet, S. Jankov, O. Preuss, H. F. Henrichs et J. Zorec. « Rotation and magnetic field in the Be star omega Orionis ». *A&A*, 409 :275–286, octobre 2003. 22

[46] J.H. Oerlemans. « Extracting a Climate Signal from 169 Glacier Records ». *Science*, 308 :675–677, 2005. xiii, 9

[47] J. P. Ostriker et F. D. A. Hartwick. « Rapidly Rotating Stars. IV. Magnetic White Dwarfs ». *ApJ*, 153 :797–+, septembre 1968. 17

[48] S. P. Owocki et D. H. Cohen. « A Simple Scaling Analysis of X-Ray Emission and Absorption in Hot-Star Winds ». *ApJ*, 520 :833–840, août 1999. 22

[49] M. E. Pessah, C.-k. Chan et D. Psaltis. « Angular Momentum Transport in Accretion Disks : Scaling Laws in MRI-driven Turbulence ». *ApJ*, 668 :L51–L54, octobre 2007. 16

[50] V. Petit, G. A. Wade, L. Drissen, T. Montmerle et E. Alecian. « Discovery of two magnetic massive stars in the Orion Nebula Cluster : a clue to the origin of neutron star magnetic fields ? ». *MNRAS*, 387 :L23–L27, juin 2008. 22

[51] J. Power. « Volume-Limited Sample of Ap/Bp Stars ». Mémoire de Master, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada, septembre 2007. 12

[52] G. W. Preston. « The chemically peculiar stars of the upper main sequence ». *ARA&A*, 12 :257–277, 1974. xix, 11

[53] L. A. Pustil'Nik et G. Y. Din. « Influence of solar activity on the state of the wheat market in medieval England ». *Sol. Phys.*, 223 :335–356, septembre 2004. xiii, 8, 9

[54] H. A. Rowland. « On the Magnetic Effect of Electric Convection ». *American Journal of Science*, 15(3) :30, 1878. 9

[55] S. H. Saar et A. Brandenburg. « Time Evolution of the Magnetic Activity Cycle Period. II. Results for an Expanded Stellar Sample ». *ApJ*, 524 :295–310, octobre 1999. 10

[56] P. H. Scherrer, R. S. Bogart, R. I. Bush, J. T. Hoeksema, A. G. Kosovichev, J. Schou, W. Rosenberg, L. Springer, T. D. Tarbell, A. Title, C. J. Wolfson, I. Zayer et MDI Engineering Team. « The Solar Oscillations Investigation - Michelson Doppler Imager ». *Sol. Phys.*, 162 :129–188, décembre 1995. 24

[57] J. O. Stenflo. « Solar Magnetic and Velocity-Field Measurements New Instrument Concepts ». *Appl. Opt.*, 23 :1267–1278, 1982. 22

[58] R. H. D. Townsend, S. P. Owocki et A. Ud-Doula. « A Rigid-Field Hydrodynamics approach to modelling the magnetospheres of massive stars ». *MNRAS*, 382 :139–157, novembre 2007. xiii, 13

[59] S. Turck-Chièze. « The Sun-Earth Connection ». Issi proposal, CEA, 2009. 24

[60] S. Turck-Chièze et P. Lambert. « Understanding the origin of the solar cyclic activity for an improved earth climate prediction ». *Advances in Space Research*, 40 :907–914, 2007. xiii, 8, 9

[61] I. G. Usoskin. « A History of Solar Activity over Millennia ». *Living Reviews in Solar Physics*, 5 :3–+, octobre 2008. 7

[62] S. L. A. Vieira, W. J. B. Corradi, S. H. P. Alencar, L. T. S. Mendes, C. A. O. Torres, G. R. Quast, M. M. Guimarães et L. da Silva. « Investigation of 131 Herbig Ae/Be Candidate Stars ». *AJ*, 126 :2971–2987, décembre 2003. 16

[63] G. A. Wade, E. Alecian, D. A. Bohlender, J.-C. Bouret, J. H. Grunhut, H. Henrichs, C. Neiner, V. Petit, N. S. Louis, M. Aurière, O. Kochukhov, J. Silvester et A. ud-Doula. « The MiMeS project : magnetism in massive stars ». Dans *IAU Symposium*, volume 259, pages 333–338, avril 2009. 15

[64] Y.-M. Wang, A. G. Nash et N. R. Sheeley, Jr. « Magnetic flux transport on the sun ». *Science*, 245 :712–718, août 1989. 10

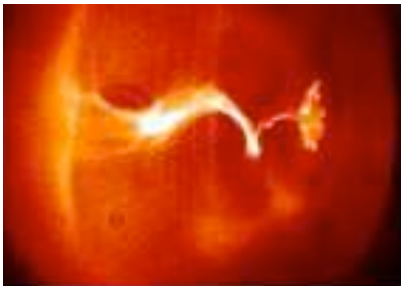
[65] D. T. Wickramasinghe et L. Ferrario. « Magnetism in Isolated and Binary White Dwarfs ». *PASP*, 112 :873–924, juillet 2000. 17

[66] R. W. Wood et A. Ellet. « Destruction of the Polarisation of Resonance Radiation by weak Magnetic Fields ». *Nature*, 111 :255–+, février 1923. 22

[67] P. Zeeman. « On the Influence of Magnetism on the Nature of the Light Emitted by a Substance. ». *ApJ*, 5 :332–+, mai 1897. 9, 19

Chapitre 2

Origines et Phénoménologie des Champs Magnétiques Stellaires



Sommaire

2.1 Les instabilités MHD à l'œuvre 32
2.1.1 L'approche magnéto-hydrodynamique 33
2.1.2 L'instabilité de flottaison ou de Parker 34
2.1.3 Instabilités « Pinch » 35
2.1.4 Un petit mot sur l'instabilité magnéto-rotationnelle 38
2.2 Les champs d'origines dynamo 40
2.2.1 Les équations d'induction et de Navier-Stokes 40
2.2.2 La dynamo dans les zones convectives 41
2.2.3 La dynamo dans les zones radiatives 43
2.3 Les champs fossiles 47
2.3.1 L' effet « batterie Biermann » 47
2.3.2 La conservation du flux 49
2.4 Conclusion 49
Bibliographie 51

Nous ne sommes savants que de la science présente.
– Montaigne, Les Essais

AUJOURD'HUI, NOUS CHERCHONS à comprendre quels sont les phénomènes physiques responsables des champs magnétiques présentés dans le chapitre précédent. Si la théorie dynamo (en particulier les modèles de champ moyen) semble être privilégiée pour expliquer la cyclicité solaire, l'origine des champs magnétiques observés dans les zones radiatives externes des étoiles de masses intermédiaires et massives demeure assez controversée : les théories dynamo s'affrontant avec les interprétations en termes de champs d'origine fossile. Je m'efforcerai ici de présenter quels sont les arguments des tenants de l'une ou l'autre théorie pour expliquer les observations. Ceci nécessitera d'introduire au préalable les différentes instabilités MHD souvent rencontrées dans les intérieurs stellaires et jouant un rôle aussi bien pour les champs dynamo (en particulier la régénération du champ toroïdal, l'« effet α ») que pour expliquer la stabilité des champs fossiles. Cet aspect-là sera traité de manière approfondie dans le chapitre suivant.

2.1 Les instabilités MHD à l'œuvre

« Connais premièrement la quadruple racine de toutes choses : Zeus aux feux lumineux, Héra mère de vie, et puis Aidônéus, Nestis enfin, aux pleurs dont les mortels s'abreuvent. » Ces vers d'Empédocle (aux alentours de 460 *a.C.n.*), introduisent les quatre éléments comme la façon de décrire et d'analyser le monde dans le cadre de la philosophie naturelle. Ces considérations n'étaient finalement pas si éloignées de notre vision contemporaine de la matière, si l'on considère que ses phases les moins exotiques sont le solide (la Terre), le liquide (l'eau), le gaz (l'air), et enfin le quatrième état : le plasma (le feu), gaz partiellement ou totalement ionisé (qui constitue aussi bien les flammes d'un feu de bois – plasma « froid » – que la matière composant les étoiles – plasma « chaud », ou de fusion).
Cet état de plasma possède des propriétés passionnantes : les électrons, extraits de leur puits de potentiel, sont sensibles aux champs électro-magnétiques extérieurs ou créés par le plasma environnant lui-même (les ions ne constituant qu'un milieu neutralisateur de par leur plus grande inertie) et guident la dynamique du plasma. Ce milieu peut alors révéler des comportements chaotiques ou organisés différents des fluides, à l'origine desquels se trouvent souvent une instabilité .

Je décrirai ici uniquement les instabilités magnétohydrodynamiques « de flottaison », de type « pinch » et l'instabilité magnétorotationnelle, celles-ci jouant un rôle important dans l'apparition et l'évolution de champs magnétiques de grandes échelles à tous les stades de l'évolution stellaire. Une description approfondie des instabilités fluides (essentiellement de Rayleigh-Taylor et Kelvin-Helmholtz) et des autres instabilités MHD fréquentes (par exemple l'instabilité de Kruskal-Schwartzchild, analogue de celle de Rayleigh-Taylor, en présence de champ magnétique) se trouvera dans de nombreux cours de physique avancée et ouvrages spécialisés. Citons en particulier Pedlosky (1982) [39], Rieutord (1997) [42] et Chièze (2008) [13] pour l'étude de la stabilité hydrodynamique, ainsi que Chandrasekhar (1961) [9], Cowling (1976) [14] et Moffatt (1978) [35] pour la stabilité magnétohydrodynamique. L'approche choisie ici est d'introduire chaque instabilité à partir du cas le plus simple, afin de pouvoir donner explicitement le critère d'instabilité. On étudiera la réponse d'un système sous l'influence d'une petite perturbation ayant une dépendance temporelle de la forme $e^{i\omega t}$, pour discuter la « relation de dispersion » : ses racines ω indiquent soit la fréquence des ondes se propageant dans le milieu si celui-ci est stable ($\omega^2 > 0$), soit le taux de croissance linéaire de l'instabilité s'il est instable ($\omega^2 < 0$).

2.1.1 L'approche magnéto-hydrodynamique

Dans notre étude nous allons faire un certain nombre de simplifications pour décrire le plasma. Celui-ci sera supposé être non-relativiste et à l'équilibre thermodynamique. Nous supposerons la neutralité du milieu, et nous supposerons que le plasma est suffisamment collisionnel (hypothèse en général vérifiée dans les intérieurs stellaires) pour que les électrons et les ions soient thermalisés : ainsi le plasma peut être décrit par un monofluide. Il s'agit de considérer le mouvement du centre de masse de l'ensemble des espèces présentes dans le plasma (ions + électrons) plutôt que de regarder le comportement individuel de chaque espèce. Cette approche est particulièrement justifiée si l'on s'intéresse au comportement du plasma à grande échelle et à basse fréquence. Ceci suppose que l'échelle de longueur des processus considérés soit bien supérieure à la longueur inertielle des ions, et que les fréquences de ces mêmes processus soient très inférieures à la fréquence gyromagnétique des ions [1]. Les équations régissant la dynamique du plasma dans un milieu conducteur de conductivité σ, de perméabilité magnétique μ_0 et dont l'écoulement est régi par le champ de vitesse $\mathbf{v}$ sont dans ce contexte

– les quatre équations de Maxwell :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \, \mathbf{j}, \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \approx 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.4}$$

où $\partial_t = \partial/\partial t$, c représente la célérité de la lumière, ρ la densité volumique de charges et $\mathbf{j}$ la densité volumique de courant. Dans la limite non-relativiste, le « courant de déplacement » $\mathbf{j}_D = \partial_t \mathbf{E}/c^2$ constituant le deuxième terme du membre de droite de l'équation (2.1) peut être négligé : à l'aide de (2.2) on trouve que $\|\mathbf{j}_D\| \sim (\mathbf{v}^2/c^2)\|\nabla \times \mathbf{B}\| \ll \|\nabla \times \mathbf{B}\|$. Notons que les deux dernières équations de Maxwell (Maxwell-Gauss et Maxwell-« flux ») ne sont que des contraintes initiales à l'évolution dynamique dictée par les deux premières (respectivement, Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday) et seront vérifiées par conservation de la charge [28].

– la loi d'Ohm simplifiée [2]

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \tag{2.5}$$

qui s'applique à un élément de matière en mouvement, ayant pour vitesse

$$\mathbf{v} = \dot{r} \, \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + \mathbf{v} \tag{2.6}$$

1. Le plasma est caractérisé par plusieurs fréquences. La fréquence typique des oscillations du plasma est pour les ions $\omega_{p_i} = (4\pi n_e/m_i)^{1/2}$ qui est la plus petite fréquence du plasma. La fréquence associée pour les électrons est $\omega_{p_{e^-}} = (m_i/m_e)^{1/2}\omega_{p_i}$. La longueur inertielle associée aux espèces du plasma est $l_{i,e} = c/\omega_{p_{i,e^-}}$. L'hypothèse MHD suppose que l'échelle des processus λ soit bien supérieure à la plus grande des échelle caractéristiques du plasma, soit $\lambda \gg l_i$ et que la fréquence caractéristique ω des processus soit bien inférieure à la plus basse des fréquences caractéristiques du plasma, soit $\omega \ll \omega_{p_i}$.

2. qui n'est autre que l'expression de la covariance de la force de Lorentz par transformation de référentiel galiléen : en effet soit une charge q de vitesse $\vec{v}$ par rapport à l'observateur soumise à un champ électrique $\vec{E}$; dans le référentiel de l'observateur la force subie par la charge est $\mathbf{F}_\mathcal{L} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$; dans son propre référentiel, la force est $\mathbf{F}'_\mathcal{L} = q\mathbf{E}'$ et doit être la même d'où $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

où $\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}$ est la vitesse de contraction ou d'expansion quasi-statique de la couche et $\mathbf{v}$ est le champ de vitesse macroscopique. Le tenseur de diffusivité magnétique [3] anisotrope $\eta \equiv \sigma^{-1}/\mu_0$ sera supposé prendre la forme :

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_v & 0 & 0 \\ 0 & \eta_h & 0 \\ 0 & 0 & \eta_h \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

2.1.2 L'instabilité de flottaison ou de Parker

Cette instabilité joue un rôle dans la dynamo solaire : c'est elle qui est supposée être responsable de l'émergence des tubes de flux de champ magnétique toroïdaux générés à la base de la zone convective, la « tachocline », vers la surface. Considérons donc un tube de flux de champ magnétique en équilibre de pression avec son environnement non-magnétique [27] :

$$P_i + \frac{B^2}{2\,\mu_0} = P_e, \tag{2.8}$$

où B représente l'intensité du champ magnétique, P_i et P_e représentent respectivement la pression intérieure et extérieure au tube ($P_i < P_e$). Supposons à présent que ce tube se déplace adiabatiquement vers la surface de z vers $z + \delta z$, ses caractéristiques φ variant de $\delta\varphi$, celles du milieu environnant de $d\varphi$ (voir Fig. 2.1).
Étant donné que la masse et le flux magnétique sont conservés, on a les relations suivantes :

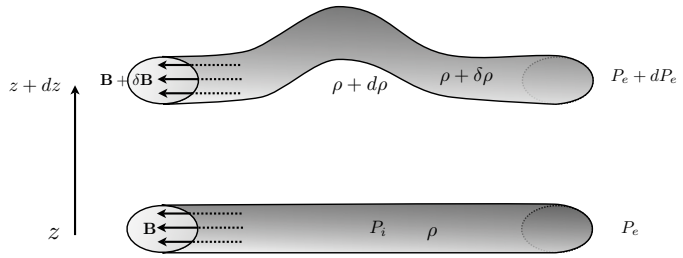


Figure 2.1 – Instabilité de flottaison : exemple d'un tube de flux de champ magnétique de la tachocline en ascension.

$$\frac{\delta B}{B} = \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad \frac{\delta P}{P} = \gamma\frac{\delta\rho}{\rho} \tag{2.9}$$

En supposant que l'élément se déplace suffisamment lentement pour maintenir l'équilibre de pression avec l'extérieur

$$\delta P + \frac{B\delta B}{\mu_0} = dP + \frac{BdB}{\mu_0}. \tag{2.10}$$

3. La diffusivité magnétique mesure le rapport entre la fréquence électronique et la fréquence moyenne de collision électrons-ions.

L'instabilité va avoir lieu si $\delta\rho < d\rho$. Après manipulation des deux expressions précédentes, on obtient le critère suivant pour l'instabilité :

$$\frac{-gv_A^2}{c^2}\frac{d}{dz}\ln\left(\frac{B}{\rho}\right) > \mathcal{N}^2, \tag{2.11}$$

où v_A est la vitesse d'Alfvén, c la vitesse du son adiabatique et $\mathcal{N}$ est la fréquence de Brunt-Väisälä (ou de flottaison), définies respectivement par :

$$v_A^2 = \frac{B^2}{\rho\mu_0}, \quad c^2 = \frac{\gamma P}{P}, \quad \mathcal{N}^2 = \frac{g}{\gamma}\frac{d}{dz}\ln\left(P\rho^{-\gamma}\right). \tag{2.12}$$

Ainsi un champ magnétique horizontal décroissant suffisamment vite en fonction de la hauteur peut déstabiliser le milieu stablement stratifié (*i.e.* avec $\mathcal{N}^2 > 0$).

2.1.3 Instabilités « Pinch »

Considérons à présent un cylindre de plasma de rayon a immergé dans un champ magnétique axial B_z donnant lieu à un champ intérieur $B_{z,i}$ ainsi qu'un champ orthoradial B_θ (voir Fig. 2.2).

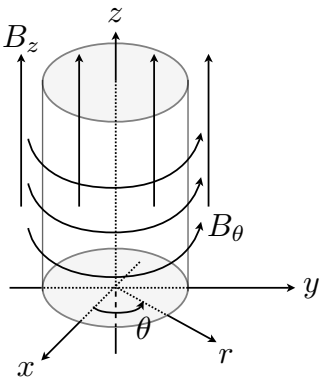


Figure 2.2 – Configuration « pinch »

Considérons de prime abord le cas sans champ magnétique vertical et sans gravité. Une analyse de stabilité peut être menée en considérant des déplacements infinitésimaux $\xi(r,\theta,z) = \xi(r)e^{i(m\theta+kz)}$ par rapport à la configuration d'origine et en examinant si ces déplacements vont engendrer une instabilité ($\omega^2 < 0$) ou non. Le détail de ces calculs ne sera pas donné ici, mais les outils sont donnés en chapitre 4. Ces calculs montrent que la configuration est instable pour tous les modes m :

- pour $m = 0$: l'instabilité « sausage » se développe. La perturbation donne lieu à des pincements périodiques selon z ;
- pour $m = 1$: l'instabilité « kink » se développe. La perturbation donne lieu à une déformation de l'axe du cylindre ; les lignes de champ magnétique les plus proche du côté concave du kink se trouvent compressées par conservation du flux magnétique,

ce qui augmente la pression magnétique dans cette région. Il se produit l'effet inverse du côté convexe.
– pour $m \geqslant 2$: des instabilités « fluting » se développent.

En configuration sphérique, on peut également extrapoler ces résultats à l'étude de stabilité de champs magnétiques purement poloïdaux (les lignes de champ, tangentielles en tout point au vecteur **B**, appartiennent à une section meridienne de la sphère) ou de champs purement toroïdaux (les lignes de champ sont parallèles à l'équateur). Parmi ces instabilités, l'instabilité type kink est la première à se déclencher dans le cas de champs purement poloïdaux. Cela a été démontré indépendamment par Wright (1973) et Markey & Tayler (1973, 1974) [50, 33, 34] (voir Fig. 2.3a). Une instabilité analogue (à mode $m = 1$), dite de Tayler, se manifeste dans le cas de champs purement toroïdaux, en particulier à proximité des pôles [47, 45] (voir Fig. 2.3b). Remarquons que cette instabilité de mode $m = 1$, transposée en configuration sphérique, devient une instabilité à haut mode pour le champ poloïdal : cela se conçoit bien au vu de la Fig. 2.3a. Cependant, il convient de modérer la facilité des modes $m \to \infty$ à générer l'instabilité du champ poloïdal : ces instabilités se manifestent en réalité sous forme de petites structures convectives qui se retrouvent amorties par les phénomènes dissipatifs (viscosité et diffusion ohmique).

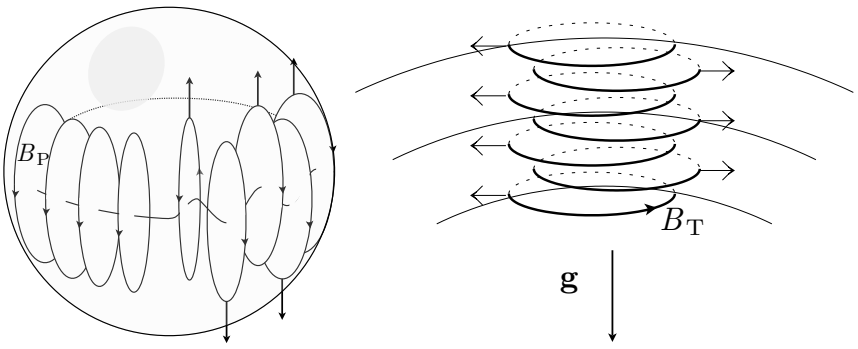


Figure 2.3 – À gauche (a), instabilité kink pour un champ magnétique purement poloïdal (B_P) en géométrie sphérique ; à droite (b), instabilité de Tayler pour un champ magnétique purement toroïdal (B_T) à proximité des pôles. Crédits : (a) adapté de J. Braithwaite [4] ; (b) Spruit, 1999 [45].

L'instabilité kink En présence de champ magnétique axial extérieur $B_{z,e}$, le champ magnétique axial intérieur s'exprime

$$B_{z,i}^2 = B_{z,e}^2 - 2\mu_0 P_0 + B_\theta^2, \tag{2.13}$$

où P_0 est la pression du plasma ; la relation de dispersion s'écrit alors

$$\omega^2 = \frac{k^2 B_{z,e}^2}{\mu_0 \bar{\rho}} \left[2\left(1 + \frac{1}{ka}\frac{B_\theta(a)}{B_{z,e}}\right) + \frac{B_\theta^2(a)}{B_{z,e}^2} - \beta_T \right], \tag{2.14}$$

où l'on a introduit $\beta_T = P_0/(B_{z,e}^2/2\mu_0)$. Le dernier terme étant toujours négatif quel que soit B_z mais les premiers termes pouvant être positifs et le contrebalancer, il apparaît que

la présence de champ magnétique axial joue un rôle stabilisateur.
De manière analogue, en géométrie sphérique l'adjonction d'une composante toroïdale au champ poloïdal présente un effet stabilisant ; cependant il n'a encore jamais été trouvé de manière analytique, ni semi-analytique de configuration mixte poloïdale-toroïdale ayant été prouvée être stable.

Les instabilités de Tayler et de Pitts-Tayler Dans des conditions d'intérieurs stellaires plus réalistes, *i.e.* en présence de gravité et dans un milieu stratifié, les instabilités pinch associées à la présence de champs magnétiques purement toroïdaux ont été étudiées par Tayler en 1973 [47]. H. Spruit [45] décida par la suite de leur donner le nom d'instabilités de Tayler.
Dans ce contexte, les mouvements les plus instables sont ceux correspondants à des mouvement quasi-horizontaux de modes $m = 0$ et $m = 1$. Ceux-ci se produisent à pression totale quasi-constante, *i.e.* la perturbation eulérienne $\delta(P + B^2/2\mu 0) = 0$. Ces instabilités sont essentiellement locales : lorsque la condition d'instabilité est vérifiée en un point (r, θ), des perturbations instables peuvent être trouvées au voisinage proche de ce point. Si Tayler a donné ces conditions en coordonnées cylindriques, Goossens *et al.*donnent en 1981 les conditions nécessaires et suffisantes d'instabilité en coordonnées sphériques suivantes [25] :

$$\cos\theta\, \partial_\theta \ln\left(B^2/\sin^2\theta\right) > 0 \qquad \text{(pour le mode } m = 0\text{);} \tag{2.15}$$

$$\partial_\theta \ln\left(B^2 \sin\theta\cos\theta\right) > 0 \qquad \text{(pour le mode } m = 1\text{).} \tag{2.16}$$

Celles-ci peuvent être vues comme le résultat de simplification de la relation de dispersion donnée par Acheson en 1978 [1] en l'absence de phénomènes dissipatifs ; voir aussi l'appendice de Spruit (1999) [45] pour un résultat plus général. Si l'on considère un champ magnétique azimutal créé par torsion de lignes de champ poloïdales, ce champ est de la forme $B_\varphi \sim \sin\theta\cos\theta$. Dans ce cas l'instabilité de mode $m = 1$ se déclenche en premier lieu à proximité des pôles et son taux de croissance (tel qu'un déplacement arbitraire $\xi(t)$ en un temps t soit proportionnel au déplacement initial $\xi(t_0)$ selon $\xi(t) = \xi(t_0)\, e^{\sigma\, t}$) est donné par la relation [47, 25] :

$$\sigma \approx \omega_A = v_A/R \tag{2.17}$$

où v_A est la vitesse d'Alfvén définie par

$$v_A = \frac{\bar{B}}{\sqrt{\bar{\rho}\mu_0}}, \tag{2.18}$$

$\bar{B}$ étant l'intensité moyenne du champ et $\bar{\rho}$ la densité moyenne.
En présence de rotation, de vitesse angulaire $\Omega = v_\varphi/r$, Pitts & Tayler ont montré en 1985 [40] que l'instabilité n'était pas supprimée, mais atténuée : son taux de croissance est désormais de

$$\sigma \approx \omega_A^2/\Omega. \tag{2.19}$$

Cela est dû au fait que la force de Coriolis, perpendiculaire à la vitesse, ne travaille pas et n'influence pas le budget énergétique de la perturbation ; cependant elle peut affecter la forme des perturbations et leur taux de croissance.
Cette instabilité présente un intérêt tout particulier : c'est elle qui permet d'expliquer la dynamo dans les zones radiatives, selon le scénario (controversé) proposé par Spruit en 2002 [46] (voir la section suivante).

2.1.4 Un petit mot sur l'instabilité magnéto-rotationnelle

Cette instabilité a été mise en évidence en premier lieu par E. Velikhov en 1959 [49]. Son résultat a été ensuite généralisé par S. Chandrasekhar en 1960 [8]. Ces travaux n'ont étrangement eu qu'un impact limité, jusqu'à ce qu'en 1991, Balbus et Hawley [2] découvrent qu'il s'agit d'un phénomène physique majeur gouvernant la dynamique des disques d'accrétion : même un faible champ magnétique peut altérer substantiellement leur stabilité. Le principe est rapidement le suivant. Considérons l'équation du mouvement pour un fluide en rotation différentielle, de vitesse angulaire $\Omega(r)$. Soit une particule fluide en orbite dans un disque située à r_0, de vitesse angulaire Ω_0. La force centripète nécessaire pour conserver cette particule en orbite est $F_c = -r_0\Omega^2(r_0)$. Si la force d'attraction gravitationnelle est créée en un point central de masse M, la force centripète est alors simplement $-GM/r_0^2$, G étant la constante gravitationnelle.
Considérons maintenant de petites perturbations engendrant un faible déplacement x parrapport à l'orbite d'équilibre en r_0 d'un élément de fluide (voir Fig. 2.4a). En se plaçant dans le repère associé à cet élément, nous devons prendre en compte dans les équations du mouvement le terme de la force de Coriolis $-2\,\Omega\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z} \times \mathbf{v}$ et celui associé à la force centrifuge $r\,\Omega_0^2\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}$, la vitesse $\mathbf{v}$ étant mesurée dans le repère tournant. Le déplacement étant faible nous avons au premier ordre

$$r\left[\Omega_0^2 - \Omega^2(r_0 + x)\right] \simeq xr\frac{d\,\Omega^2}{d\,r}. \tag{2.20}$$

Si l'on écrit les équations du mouvement en introduisant la dépendance temporelle des variables selon $e^{i\omega t}$, on obtient la relation de dispersion

$$\omega^2 = 4\,\Omega_0^2 + r\frac{d\,\Omega^2}{dr}. \tag{2.21}$$

Dans la suite, nous noterons le terme de droite κ^2, quantité connue sous le nom de fréquence épicyclique, du fait que les perturbations engendrent un mouvement épicyclique (une ellipse rétrograde) dans le référentiel centré sur l'orbite non perturbée. Considérons à présent le cas où l'élément de fluide est sujet à une force de rappel analogue à celle d'un ressort : $\mathbf{F}_r = -K\mathbf{x}$. La relation de dispersion est alors une équation bicarrée :

$$\omega^4 - \left(2\,K + \kappa^2\right)\omega^2 + K\left(K + r\frac{d\,\Omega^2}{dr}\right) = 0. \tag{2.22}$$

En présence de champ magnétique axial uniforme en rayon (ne dépendant que de z) c'est justement la tension magnétique [4] qui joue ce rôle : dans ce cas on peut exprimer K en fonction du nombre d'onde k associé à un déplacement vertical $e^{i\,k\,z}$, de la densité et de l'intensité du champ magnétique B selon

$$K = \frac{k^2\,B^2}{\rho\mu_0}, \tag{2.23}$$

dans ce cas de figure le gradient de pression magnétique [5] ne contrebalance pas la force de tension : sa direction est perpendiculaire au disque.

4. voir le chapitre suivant pour une définition de la tension magnétique
5. voir le chapitre suivant pour une définition de la pression magnétique

Ainsi lorsque $d\Omega^2/dr < 0$, l'équation de dispersion connaît une racine exponentiellement croissante pour des nombres d'onde k vérifiant $(k^2\, B^2/\mu_0\, \rho) < -Rd\Omega^2/dr$. Dans le cas typique du disque d'accrétion, l'équilibre entre l'attraction gravitationnelle est la force centrifuge donne immédiatement $\Omega^2 = GM/r^3$, ainsi $Rd\Omega^2/dr = -3\,\Omega^2 < 0$ et dès lors le disque est instable en présence de champ magnétique. Notons que ce résultat est également valable même en présence d'un champ magnétique faible, ce dernier n'intervenant dans la relation de dispersion que par le produit $k\,B$, de sorte que l'instabilité se manifeste quand même pour des nombres d'ondes élevés. Remarquons aussi que la géométrie du champ joue *a priori* peu, ses effets étants modélisés uniquement par le scalaire B.
Les travaux de Balbus et Hawley ont entraînés dans leur sillage de nombreuses études depuis [21, 22, 23]. Notamment, certains travaux (*e.g.* Ogilvie, 2007 [38]) tentent de comprendre quelle pourrait être l'influence de l'instabilité magnéto-rotationnelle (MRI) sur le transport de moment cinétique dans la tachocline, où l'on passe d'un régime de rotation différentielle en latitude et en rayon (dans la zone convective) à une rotation quasi-uniforme (dans la zone radiative).

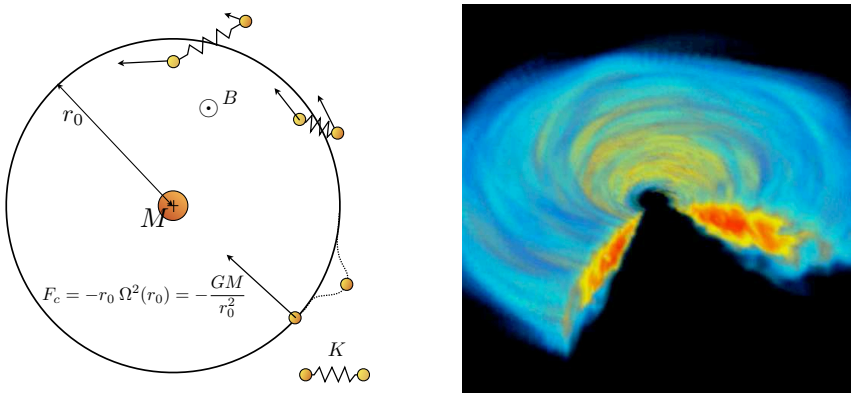


FIGURE 2.4 – Instabilité magnéto-rotationnelle : cas d'un disque d'accrétion : (a) à gauche, illustration du rôle de la force de tension magnétique ; (b) à droite, représentation de la densité issue d'une simulation 3D d'un disque d'accrétion dans lequel la MRI s'est pleinement développée, crédit : J.F. Hawley.

2.2 Les champs d'origines dynamo

La dynamo est, outre le générateur de courant alternatif que l'on branche sur sa bicyclette, une discipline de la magnétohydrodynamique qui consiste en premier lieu à étudier comment un champ magnétique peut être *amplifié* dans un champ de vitesses d'*un fluide conducteur en mouvement*. La cyclicité est à proprement parler un autre problème, bien qu'il soit intimement lié à la dynamo en particulier dans le cas solaire. Dans le cas du champ magnétique terrestre, il est ainsi communément admis que le champ dipolaire est créé par un phénomène dynamo dans le cœur de la Terre ; néanmoins s'il y a eu de nombreuses inversions de la direction de ce champ dipolaire au cours de l'histoire, celles-ci furent complètement chaotiques[6]. Je décrirai donc ici quels sont les outils théoriques et expérimentaux permettant d'interpréter premièrement ce phénomène d'amplification, et s'il y a lieu, la cyclicité de la dynamo.

2.2.1 Les équations d'induction et de Navier-Stokes

À partir des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm, on peut établir l'équation gouvernant l'évolution temporelle du champ magnétique $\mathbf{B}$ dans un fluide conducteur mû d'une vitesse $\mathbf{u}$. Nous avons d'une part d'après l'équation de Maxwell-Faraday (2.2)

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}, \tag{2.24}$$

et d'autre part d'après la loi d'Ohm,

$$\mathbf{E} = \sigma^{-1}\,\mathbf{j} - \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \tag{2.25}$$

Il reste à exprimer $\mathbf{j}$ en fonction de $\mathbf{B}$ à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère (2.1)

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B}. \tag{2.26}$$

D'où l'équation d'induction :

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times (\eta\,\nabla \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})\,, \tag{2.27}$$

où l'on a introduit la diffusivité magnétique $\eta = \sigma^{-1}/\mu_0$. Nous reconnaissons dans le premier terme du membre de droite un terme de diffusion (dans le cas où la diffusivité est constante), et dans le second le terme d'induction (de type advection). Le « but du jeu » est de savoir quel terme d'induction peut être capable de générer une évolution temporelle du champ qui ne soit pas dictée par le processus de diffusion : c'est la bifurcation. Le flot de vitesses est quant à lui gouverné en toute généralité par l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\,\partial_t\,\mathbf{u} + \rho\,(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + 2\,\rho\,(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}) = -\nabla\,P + \rho\,\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\mathcal{L}} + \mathbf{F}_{\mathcal{C}} + \nabla\cdot\tau, \tag{2.28}$$

où τ est le tenseur des contraintes visqueuses et les autres symboles ont déjà été introduits. Lorsque la dynamo est à l'œuvre, la force de Lorentz agit comme un effet non-linéaire et modère la croissance indéfinie du champ magnétique par saturation.

6. Les inversions du champ magnétique terrestre ont pu être reconstituées par découverte des roches volcaniques ferromagnétiques ayant conservé l'orientation du champ à différents âges géologiques.

2.2.2 La dynamo dans les zones convectives

La dynamo solaire

L'exemple de champ magnétique d'origine dynamo le plus évident est celui à l'œuvre dans la zone convective du Soleil. On s'intéresse donc ici en premier lieu à modéliser la cyclicité. Le scénario « $\alpha - \Omega$ » est illustré en FIG. 2.5. Dans ce scénario, un champ initialement poloïdal est advecté par la rotation différentielle (l'équateur tourne plus vite que les pôles : cet effet sera discuté plus en détail ultérieurement) et crée un champ toroïdal (a et b sur la figure) : c'est l'effet Ω ; ensuite ce champ toroïdal émerge à la surface sous l'effet de l'instabilité de flottaison (c), puis la conjugaison de plusieurs phénomènes « twistent » (torsadent) les lignes de champ toroïdal pour créer des structures poloïdales (d) : c'est l'effet α. Enfin sous l'effet de la circulation méridienne, le champ poloïdal est transporté vers les couches intérieures pour régénérer un champ poloïdal à grande échelle (e et f).

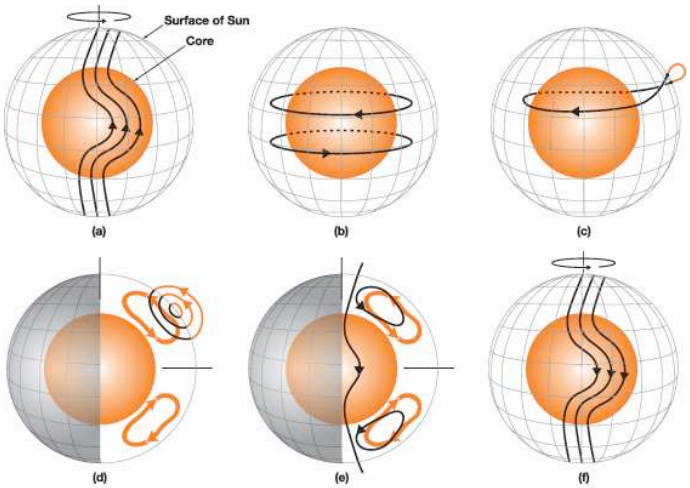


FIGURE 2.5 – Illustration de la dynamo solaire selon le scénario $\alpha - \Omega$. Crédit : M. Dikpati, P. Gilman & G. de Toma, HAO/UCAR.

Si l'effet Ω est aujourd'hui assez bien compris, l'effet α reste âprement discuté : les trois principaux modèles s'affrontant étant l'effet Babcock-Leighton, selon lequel l'instabilité de flottaison est responsable de l'émergence de tubes de flux qui se retrouvent ensuite twistés sous l'effet de la force de Coriolis ; l'effet α convectif qui donne lieu aux théories à champ moyen classiques et enfin des scénarios invoquant d'autres instabilités (magnéto-) hydrodynamiques dans la tachocline. L'origine du phénomène demeure elle aussi sujet à débats : les effets α et Ω sont-ils actifs dans la tachocline ou bien ont-ils leur source dans la zone convective ; enfin est-ce une combinaison de l'une ou l'autre de ces possibilités (théories de « dynamo distribuées ») ?
Je ne tenterai pas ici de fournir de réponse à ces questions. Néanmoins, le lecteur intéressé pourra consulter les ouvrages de référence tels que l'indispensable texte fondateur de H. K. Moffatt (1978) [35] et la revue de P. Charbonneau (2005) [10]. Voir aussi Brun (2004) [7] montrant à l'aide de simulations MHD tridimensionnelles la génération et la saturation de champs moyens à partir de champs turbulents en présence de rotation différentielle dans la zone convective solaire, ainsi qu'une sélection d'aspects de la dynamo solaire où il

y a eu de récents progrès par A. Brandenburg (2009) [6] ; enfin se reporter à la thèse de Laurène Jouve (2008) [29] et références associées pour un état de l'art récent de la discipline concernant le magnétisme solaire.

La dynamo dans les disques d'accrétion

En 1996, Hawley *et al.* [26] démontrent que l'instabilité magnéto-rotationnelle possède intrinsèquement un effet dynamo. Pour cela ils mènent une simulation tridimensionnelle dans une portion de disque dans laquelle le champ magnétique est initialement distribué de manière aléatoire (de moyenne nulle) et de faible intensité : typiquement, la vitesse d'Alfvén est très inférieure à la vitesse du son. L'instabilité magnéto-rotationnelle se développe rapidement et génère de la turbulence. Celle-ci donne lieu à des contraintes de Maxwell (magnétiques) et de Reynolds (hydrodynamiques) qui vont transporter du moment cinétique vers l'extérieur. Ils observent alors que l'énergie magnétique est amplifiée d'un facteur 20 et qu'elle est maintenue durant environ 200 périodes d'orbites, bien plus longtemps que le temps de décroissance caractéristique par dissipation en l'absence de mécanisme d'amplification. Ainsi l'instabilité magnéto-rotationnelle possède intrinsèquement un effet dynamo : elle parvient à amplifier puis à maintenir un champ magnétique aléatoire.

Les dynamos expérimentales

Une approche intéressante pour considérer l'équation d'induction (2.27) consiste à chercher les flots hydrodynamiques (topologies possibles du champ de vitesses $\mathbf{u}$) tels que le champ magnétique soit amplifié : c'est le problème de la « dynamo cinématique ». Aujourd'hui, il n'existe toujours pas de méthode générique permettant de trouver un tel flot. Cependant quelques solutions particulières existent : en 1970 G. O. Roberts [43] propose un champ de vitesses où le mouvement du fluide correspond à un pavage périodique de cellules en mouvements hélicoïdaux alternés (les sens de rotation et de translation sont inversés d'une cellule à l'autre) ; en 1973, Ponomarenko [41] a prouvé que le mouvement hélicoïdal d'un cylindre infini dans une matrice infinie de même conductivité conduit à une dynamo cinématique.

Ces deux solutions ont conduit à la réalisation de deux dynamos expérimentales. La première est l'expérience de Riga, en 2000, qui reproduit la solution analytique proposée par Ponomarenko. La seconde est l'expérience de Karlsruhe, qui reproduit le pavage alternatif de Roberts. Un enseignement important de ces expériences est que l'auto-entretien de la dynamo s'est produit pour des paramètres très proches du seuil calculé numériquement. Or, en raison de la très grande différence de diffusivité entre champ magnétique et champ de vitesse, l'écoulement du métal liquide est toujours très turbulent. Les simulations numériques ne peuvent pas atteindre ces régimes et ne mettent en jeu que l'écoulement moyen du fluide, comme s'il était laminaire. Il semble donc que la turbulence ait peu d'incidence sur le seuil de la bifurcation, au moins dans les expériences faites à Riga et Karlsruhe. Une autre conclusion est que le champ magnétique de saturation dépend, lui, du régime de turbulence.

Les expériences VKS, puis DTS et VKS2 à Grenoble et Cadarache ont ensuite exploité des flots de géométries moins contraintes, mais en conservant le rôle de l'hélicité du flot de vitesse et celui de la rotation différentielle comme ingrédients majeurs. Dans l'expérience

DTS, du sodium liquide circule dans une sphère en rotation, dans les expériences VKS et VKS2 [36], deux turbines contra-rotatives de part et d'autre d'un cylindre dirigent le flot de vitesses du sodium liquide. Dans la seconde expériences, les pales de la turbine sont constituées de fer doux, qui possède une rémanence magnétique.
Le 19 septembre 2006 [37], la première preuve de dynamo a été mise en évidence sur l'expérience VKS2. S'en sont suivis de nombreuses études et résultats. Plus particulièrement lorsque les deux turbines tournent en sens inverse à la même fréquence, l'effet dynamo observé (l'amplification du champ) ne peut pas être interprété en termes de champs de vitesses moyens comme c'était le cas pour les expérience de Riga et Karlsruhe. Lorsqu'une rotation globale est imprimée, des régimes intermittents (analogues à la dynamo terrestre) ou cycliques (analogues à la dynamo solaire) sont mis en évidence selon la fréquence relative de rotation des turbines.

2.2.3 La dynamo dans les zones radiatives

Je me concentrerai ici sur la possibilité de génération d'un champ magnétique de grande échelle dans les zones radiatives par un processus dynamo, à l'œuvre (i) dans une zone convective adjacente à la zone radiative, ou bien (ii) au sein même de la zone radiative. Pour fixer les idées, un graphique présentant les extensions des zones radiatives et des zones convectives en fonction de la masse est donné en Fig. 2.6.
Notons que dans le cas du Soleil si un champ magnétique est susceptible de jouer un rôle sur son évolution séculaire, il s'agit manifestement du champ magnétique présent dans la zone radiative : en effet si celle-ci s'étend jusqu'à environ 70% du rayon, elle représente plus de 98% de la masse solaire en raison du contraste de densité entre les couches internes et externes.

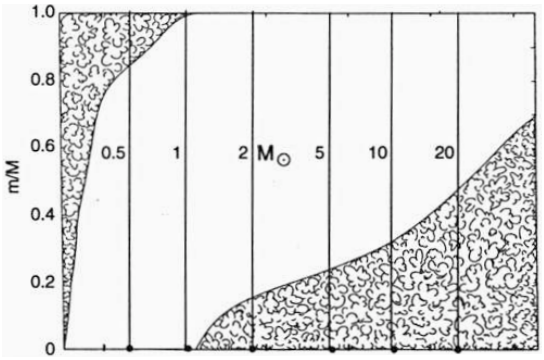


Figure 2.6 – Extension des zones radiatives et convectives (en fraction de masse de l'étoile) en fonction de la masse de l'étoile (en masse solaire). Crédit : R. Kippenhahn & A. Weigert, 1990 [30].

Les champs magnétiques d'origine dynamo diffusant vers les zones radiatives à partir d'une zone convective adjacente (l'enveloppe convective d'une étoile de type solaire ou bien le cœur convectif du fait des cycles nucléaires CNO d'étoiles plus massives) peuvent-ils reproduire les champs observés dans le cas typique d'étoiles Ap ou d'étoiles plus massives ? Peuvent-ils être à l'origine d'un champ magnétique global dans la zone radiative

solaire ?
En 1999, Pascale Garaud [24] étudie le processus de diffusion d'un champ magnétique variable initialement dans la tachocline solaire vers la zone radiative. En particulier, elle s'intéresse à la longueur de pénétration ainsi qu'à l'amplitude du champ diffusé à partir du champ magnétique d'origine dynamo dans la zone convective Pour cela elle considère un champ initialement poloïdal, dipolaire (les contributions de multipôles d'ordre supérieur étant plus faibles) dans la base de la zone convective, qui va être « pompé » vers l'intérieur par des mouvements turbulents dans la région de pénétration convective [7]. Le champ poloïdal va ensuite être cisaillé pour former un champ toroïdal (selon l'effet Ω décrit précédemment). En négligeant la diffusivité magnétique l'équation d'induction se transforme en équation d'advection :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \,. \tag{2.29}$$

À partir de la vitesse de rotation dans cette région déduites des données héliosismologiques, une relation entre le champ latitudinal B_θ et le champ longitudinal B_φ est obtenue. Connaissant une estimation de l'amplitude du champ magnétique toroïdal d'origine dynamo $B_\varphi \simeq 5 \times 10^4$ G, elle en déduit l'amplitude du champ B_θ, puis la valeur du champ magnétique radial est obtenue par nullité de la divergence du champ magnétique. Cela mène à une amplitude du champ magnétique total B_0 de l'ordre de 10^3 G. En prenant un profil de diffusivité magnétique réaliste pour la zone radiative solaire, elle trouve finalement que l'intensité du champ décroît d'environ 10^{-1} G juste sous la base de la zone convective (à 0.69 $R_\odot$) jusqu'à environ 10^{-3} G à 0.35 $R_\odot$. Ainsi un champ magnétique d'origine dynamo serait très peu susceptible de générer un champ magnétique de grande échelle d'intensité suffisamment élevée pour modifier de manière substantielle la structure solaire interne.
En ce qui concerne la diffusion d'un champ magnétique d'origine dynamo dans le cœur vers une zone radiative supérieure, peu de résultats ont été obtenus (voir essentiellement [11, 20, 19]) ; il semble peu probable que ce mécanisme soit seul à l'origine des champs magnétiques avec des intensités en surface de plusieurs kG observés notamment dans les étoiles Ap, d'autant plus que dans certaines d'entre elles l'extension de ce cœur convectif est très limitée (parfois moins d'un dixième du rayon de l'étoile). Soulignons que les tra-

7. Cette région communément appelée région d'overshoot correspond à un régime d'extension de la zone convective dans la zone radiative : en effet le critère de convection n'est plus vérifié si l'accélération des structures convectives est nulle, mais ce critère ne dit rien quant à leur vitesse. Ainsi il est possible que des cellules convectives en accélération nulle mais à vitesse non-nulle pénètrent dans la zone radiative en formant des structures locales appelées « plumes » en raison de leur géométrie effilée. Cet effet a notamment permis un meilleur accord entre les isochrones théoriques et observées (voir par exemple les travaux de Maeder, 1975 [32]), ainsi qu'une meilleure correspondance entre le profil de vitesse du son déduit des observations héliosismologiques avec celui issu de modèles d'évolution. Toutefois il y a lieu de distinguer deux régimes (voir la revue de Zahn, 2002 [51]) : celui de l'overshoot de celui de la pénétration convective. Le premier se produit à faible nombre de Peclet tandis que le second se produit à haut nombre de Peclet. Le nombre de Peclet , défini par $Pec = vd/K$, où v correspond à la vitesse verticale de la structure convective, d à la taille de la plume et K à la diffusivité thermique, détermine si la diffusion radiative doit être prise en compte ($Pec < 1$) ou non. Ainsi dans le cas de la pénétration convective (à l'œuvre dans la base de la zone convective solaire), les mouvements du fluide retiennent leur contenu calorifique et tendent à établir une stratification adiabatique au-delà de la zone instable, où ils sont ensuite ralentis par instabilité de flottaison. En revanche dans le cas de l'overshoot (à l'œuvre dans les couches superficielles d'étoiles de type A par exemple), les cellules convectives en mouvement ne conservent plus leur contraste de température et de densité. Ne ressentant pas l'instabilité de flottaison, elles peuvent pénétrer plus en profondeur dans la zone radiative, qui demeure en stratification radiative.

vaux de Featherstone *et al.* mettent en évidence un phénomène assez intéressant : la prise en compte d'un champ magnétique de grande échelle dans l'enveloppe radiative semble accroître l'efficacité de la dynamo à l'œuvre dans le cœur. Il y a deux autres arguments en la défaveur de la théorie basée uniquement sur un champ dynamo central. D'une part l'orientation du champ magnétique global, incliné par-rapport à celle de l'axe de rotation, est assez stable dans le temps ; cela favorise un scénario tel que la rotation et le champ magnétique soient moins intriqués que dans le cas dynamo. D'autre part la vitesse de rotation et l'intensité du champ magnétique de grande échelle ne montrent pas de corrélation, alors que le taux de rotation est un ingrédient déterminant de la théorie dynamo.

Les champs magnétiques d'origine dynamo dans les zones radiatives ont été longtemps suspectés être responsables des champs magnétiques de surface décrits plus haut. Un scénario pour ce modèle a été proposé en 2002 par H. Spruit [46]. Dans son article germinal de 1999, Hendrik Spruit mettait en évidence que la première instabilité à se déclencher dans une zone radiative en présence de champ magnétique azimutal est l'instabilité de Pitts-Tayler [45]. En 2002, Spruit exploite cet effet comme mécanisme capable d'amplifier le champ magnétique toroïdal au point d'empêcher sa diffusion. Le concept est similaire à celui de la dynamo conduite par la MRI dans les disques d'accrétion ; ici l'instabilité de Tayler joue le rôle de l'instabilité magnéto-rotationnelle. Appliqué au problème du transport de moment cinétique, le champ se retrouve advecté et génère un champ à composante majoritairement horizontale, susceptible d'expliquer pourquoi la zone radiative solaire est en rotation quasi-uniforme (*cf.* Eggenberger, 2005 [18]).
Spruit propose qu'un champ magnétique initialement poloïdal B_P se retrouve advecté en un champ purement toroïdal B_φ, la zone radiative étant supposée être en rotation différentielle « shellular » (de l'anglais « shell », coquille), *i.e.* ne dépendant que du rayon : $\Omega = \Omega(r)$. Cela se produit en un temps $\tau_a = \tau_{\rm dr} B_\varphi / B_P$, où l'échelle de temps de la rotation différentielle est donnée par $\tau_{\rm dr} = (r d\Omega/dr)^{-1}$. Dans le cas où la vitesse de rotation de l'étoile est inférieure à la vitesse de rupture et supérieure à la vitesse d'Alfvén ($N \gg \Omega \gg \omega_A$), l'instabilité de Pitts-Tayler se développe alors avec le taux de croissance $\sigma = \omega_A^2/\Omega$ donné précédemment et génère un champ magnétique à composantes radiale, latitudinale et azimutale. Cependant la composante radiale est faible en raison de la forte stratification du milieu (la fréquence de Brunt-Väisälä $\mathcal{N} = (g/H_{\rm P})^{1/2} (\nabla_{\rm ad} - \nabla)^{1/2} \gg 0$, g étant la gravité, $H_{\rm P}$ l'échelle caractéristique de hauteur de pression, et ∇ et $\nabla_{\rm ad}$ sont respectivement le gradient de température logarithmique usuel et sa valeur adiabatique). Ce champ magnétique radial de petite échelle est à moyenne nulle. La rotation différentielle agit néanmoins sur ce champ en l'advectant en une nouvelle contribution au champ magnétique azimutal. Celui-ci est alors à nouveau instable, ce qui maintient la boucle dynamo.

En 2006, Braithwaite [3] rapporte les résultats d'une expérience numérique mettant en évidence une telle dynamo à l'œuvre. Dans cette expérience, il s'intéresse à une portion d'étoile cylindrique au voisinage de l'axe de rotation, la rotation de celle-ci n'est donc plus qu'une fonction de la hauteur z du cylindre, dans un set-up « cylinder in a box », en coordonnées cartésiennes. Le champ magnétique initial est de la forme $\mathbf{B} = B_0\, \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z}$. Braithwaite étudie les effets indépendants de la présence de stratification et de la rotation rapide. Dans le cas non-stratifié, avec rotation, l'amplification du champ est bien observée, la saturation est atteinte après un ou deux temps d'Alfvén $\tau_A \simeq 10\, \tau_s$, où $\tau_s = c_s/L$, c_s

étant la vitesse du son et L la hauteur du cylindre. La rotation est mise en œuvre par l'intermédiaire d'une force azimutale massique appliquée sur tout le volume du cylindre et de la forme

$$\mathbf{F}\left(\varpi, z\right) = \left(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}\right)/\tau_f, \tag{2.30}$$

où ϖ est le rayon, $\mathbf{v}_0 = z\varpi\, d\Omega/dz\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ et τ_f est le temps d'amortissement arbitraire. Dans le cas stratifié, la saturation du champ magnétique se met en place dans un laps de temps environ cinq fois plus long. De plus le champ magnétique poloïdal est lui aussi amplifié, bien que celui-ci demeure bien plus faible que le champ toroïdal qui le dépasse rapidement (voir Fig. 2.7a). En accroissant la rotation différentielle, le champ de saturation devient plus élevé, plus ou moins en proportion du taux de rotation différentielle imposé. Lorsque les deux effets (rotation et stratification) sont présents, un effet intéressant apparaît : pour une rotation différentielle suffisamment élevée, lorsque le champ est arrivé à saturation il se met à osciller, les champs poloïdaux B_z et toroïdaux B_φ s'inversant (voir Fig. 2.7b).

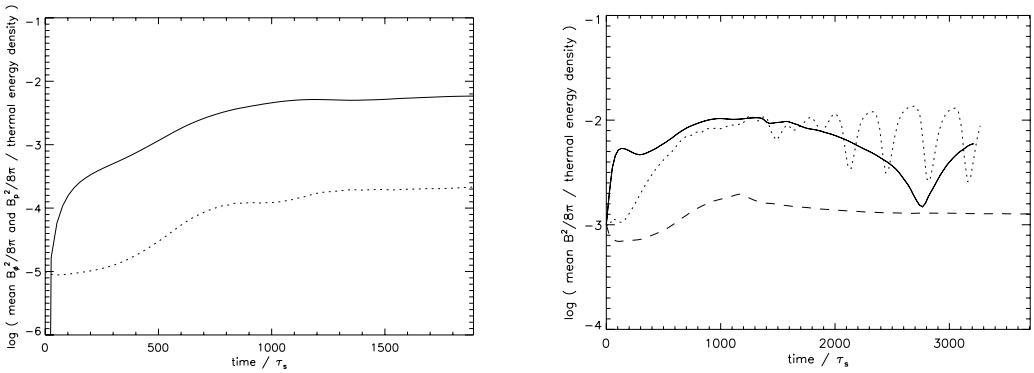


Figure 2.7 – À gauche (a), évolution de $B_\varphi^2/8\pi$ (ligne pleine) et $B_P^2/8\pi$ (en pointillés). À droite (b), évolution de $B^2/8\pi$ pour $\tau_f/\tau_s = 1$ (ligne pleine), $\tau_f/\tau_s = 10$ (en pointillés) et $\tau_f/\tau_s = 100$ (tirets). Crédit : J. Braithwaite [3].

En 2007, J.-P. Zahn, A.-S. Brun et S. Mathis [52] remettent en question la capacité de l'instabilité de Pitts-Tayler à entretenir une dynamo dans les zones radiatives. Tout d'abord ceux-ci examinent les conditions sous lesquelles cette instabilité se déclenche effectivement, pour des perturbations appliquées au champ magnétique toroïdal de la forme $\exp\left[i(l\varpi + m\varphi - nz - \sigma t)\right]$ en coordonnées cylindriques (ϖ, φ, z). En présence de stratification due à la fois au gradient d'entropie et à celui de composition chimique, dont les paramètres de stratification ont été introduits de sorte que

$$A_t = \frac{l^2}{n^2}\frac{\mathcal{N}_T^2}{\omega_A^2}, \quad A_\mu = \frac{l^2}{n^2}\frac{\mathcal{N}_\mu^2}{\omega_A^2}, \tag{2.31}$$

où $\mathcal{N}_T$ est la fréquence de Brunt-Väisälä définie ci-dessus et $\mathcal{N}_\mu = (g/H_P)\,(d\ln\mu/d\ln P)$, un critère général d'instabilité est dérivé. Celle-ci se déclenche lorsque B_φ excède la valeur donnée par

$$\left[A^*\, S(A^*)\right]\omega_A^4 = 2\Omega\eta l^2\left[\varepsilon\mathcal{N}_T^2 + \mathcal{N}_\mu^2\right], \tag{2.32}$$

où $\omega_A = m^2\, B_\varphi^2/4\pi\rho\varpi^2$, ε est le nombre de Roberts ($\varepsilon = \eta/\kappa$, η et κ étant respectivement les diffusivités ohmique et radiative), $A^* = \varepsilon A_t + A_\mu$ et $S = 2\Omega\eta n^2/\omega_A^2$ représente la

diffusivité ohmique mise à l'échelle en fonction des autres variables du problème. Cela a permis de préciser les nombres d'onde verticaux n pour lesquels les déplacements sont instables : ceux-ci le sont pour des valeurs de n vérifiant

$$(l/n)^2 \sim \omega_A^2/\mathcal{N}^2, \tag{2.33}$$

une condition moins restrictive que celles originalement données par Spruit, $\omega_A^2 > (l/n)^2\mathcal{N}^2$ et $\omega_A^2/\Omega > n^2\eta$. Finalement, il est montré que le processus de régénération du champ magnétique toroïdal invoqué par Spruit ne peut conceptuellement pas marcher. Si l'on écrit le champ magnétique et le champ de vitesses comme la somme de leur contribution axisymétrique $(\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{v}})$ et de leurs contributions non-axisymétriques $(\mathbf{b}, \mathbf{v})$, l'équation d'induction se réécrit

$$\frac{d\bar{\mathbf{B}}}{dt} = (\varpi \mathbf{B}_P \cdot \nabla\, \Omega)\, \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \nabla\, \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) - \nabla\, \times (\eta \nabla\, \times \bar{\mathbf{B}}). \tag{2.34}$$

Le premier terme du membre de droite représente l'effet Ω, le champ magnétique toroïdal étant créé par advection du champ poloïdal par la rotation différentielle. Le deuxième terme représente l'effet α, supposé régénérer le champ magnétique à la fois poloïdal et toroïdal. Enfin le dernier terme représente le terme de dissipation ohmique. Comme on le voit les seules contributions susceptibles d'amplifier le champ sont les deux premiers termes du membre de droite. Or le premier ne peut contribuer à la régénération d'un champ purement axisymétrique à partir de fluctuations du champ magnétique poloïdal non-axisymétriques, le gradient de vitesse angulaire étant lui-même axisymétrique. Le seul terme susceptible de régénérer le champ magnétique est donc le rotationnel de la force électromotrice moyenne $< \mathbf{v} \times \mathbf{b} >$ du membre de droite : cela ne correspond pas au scenario décrit par Spruit, bien que ce terme là puisse être produit par l'instabilité de Pitts-Tayler engendrant un champ de vitesses à petites échelles. Notons que de surcroît la dynamo doit régénérer le champ poloïdal afin que celui-ci puisse « nourrir », *via* la rotation différentielle, le champ toroïdal. La manière de clore la boucle dynamo est décrite en Fig. 2.8.

2.3 Les champs fossiles

Au vu de ce qui vient d'être exposé, les champs magnétiques observés à la surface des étoiles magnétiques présentant une zone radiative externe semblent donc tirer leur origine d'autres mécanismes que les dynamos. Un modèle remarquablement simple se base sur l'hypothèse de champs d'origines fossiles, reliques du Big Bang.

2.3.1 L' effet « batterie Biermann »

Différents mécanismes sont invoqués lorsqu'il s'agit de justifier l'existence d'un champ magnétique primordial [48]. Tout d'abord la théorie cosmologique standard n'interdit pas l'existence d'un champ magnétique uniforme comme condition initiale du Big Bang. Mais un champ magnétique supérieur à 10^{-7} G à notre époque conduirait à des anisotropies dans l'expansion de l'Univers [12], ce qui semble infirmer la possibilité d'un champ magnétique uniforme aussi intense. Un champ magnétique uniforme engendre aussi une transition sur les neutrinos gauches et droits (changement de spin) dans l'Univers primordial. Aussi la nucléosynthèse primordiale de l'abondance des neutrinos donne-t-elle une limite supérieure

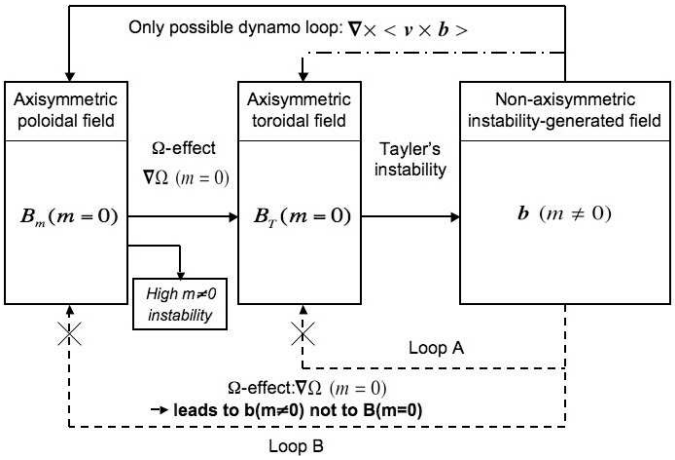


FIGURE 2.8 – Boucles dynamo dans les zones radiatives selon Spruit, 2002 [46] (boucle A) et Braithwaite, 2006 [5] (boucle B), en pointillés. Le seul moyen de régénérer le champ poloïdal et/ou toroïdal moyen est par la force électromotrice $< \mathbf{v} \times \mathbf{b} >$ produite par le champ et les vitesses non-axisymétriques créés par instabilité et régénérant le champ poloïdal. Crédit : J.-P. Zahn [52].

$B < 10^{-13}$ G [44]. Des mécanismes de génération du champ magnétique à petite échelle par des effets quantiques dans le Big Bang ont aussi été proposés, mais de tels procédés engendrent des champs magnétiques bien trop faibles dans les premières proto-galaxies pour permettre, seuls, de justifier les valeurs observées dans les galaxies proches (de l'ordre de la dizaine de μG). L'effet de batterie Biermann (*cf.* Kulsrud *et al.* 1997 [31]) permet d'adjoindre un terme supplémentaire indépendant du champ magnétique à l'équation d'induction. Celle-ci s'écrit (la diffusion magnétique est ici négligée) :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \underbrace{\frac{c\, k_{\mathcal{B}}}{n_e\, e} \nabla T \times \nabla n_e}_{\text{effet Biermann}}, \tag{2.35}$$

où c est la vitesse de la lumière, $k_{\mathcal{B}}$ la constante de Boltzmann et n_e la densité d'électrons. Ce nouveau terme source dans l'équation d'induction permet donc de créer du champ magnétique sans aucun champ préexistant. Cet effet de batterie Biermann se développe au niveau des chocs capables de générer de la vorticité et d'engendrer des courants électriques en découplant le mouvement des électrons de celui des protons. De tels effets de batterie sont capable de générer un champ magnétique de l'ordre de 10^{-21} G dans le milieu intergalactique, jusqu'à ce que la création de champ magnétique devienne négligeable devant les processus d'amplification. Enfin il est possible que ce champ magnétique intergalactique ait une origine primordiale à travers les premiers vents de supernovæ qui ont enrichi l'Univers. A l'heure actuelle, il n'existe aucune façon de déterminer directement et avec certitude la valeur du champ magnétique dans le milieu intergalactique. Seules les simulations cosmologiques peuvent prétendre prédire les valeurs dans ces vides cosmiques en remontant l'histoire de formation des amas et la structure du champ magnétique en leur sein (voir par exemple les travaux de Dolag *et al.* 2005 [15] ; Dubois et Teyssier 2008 [17], ainsi que la thèse récente de Y. Dubois sur le sujet [16]). Ces travaux semblent converger vers un

champ magnétique de l'ordre de 10^{-11} G dans le milieu intergalactique.

2.3.2 La conservation du flux

Ces champs magnétiques primordiaux, présents dans les nuages moléculaires protostellaires se retrouveraient ensuite amplifiés par simple conservation du flux magnétique. En considérant l'équation de Maxwell-« flux » (2.4), intégrée sur tout le volume, on a d'après le théorème de Green-Ostrogradski

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \tag{2.36}$$

qui indique que le flux magnétique est conservé à travers toute surface fermée (ceci est la conséquence directe de l'inexistence de monopôle magnétique).
Prenons un exemple simple. Considérons une étoile Ap typique (2.5 $M_\odot$), avec un champ magnétique de surface radial moyen $B_{r,1}$ de 1 kG et un rayon d'environ $r_1 = 2.25\,R_\odot$. Par conservation du flux, le champ magnétique radial à la surface de la sphère de rayon r_2 est donné par $B_{r,2} = B_{r,1}\,(r_1/r_2)^2$. Aussi, si le flux magnétique est conservé au cours de la contraction de cette étoile jusqu'en une naine blanche d'un rayon typique de $r_2 = 0.015 R_\odot$, le facteur entre les deux rayons étant de 150, le champ magnétique à la surface d'un tel objet serait de 22.5×10^6 G. Pour une étoile massive (10 $M_\odot$) de la séquence principale avec un rayon d'environ $5\,R_\odot$, un champ initial de 1 kG pourrait être à l'origine de champs de 10^{14} G pour une étoile à neutrons, d'un rayon typique de 10 km .
Considérons à présent une sphère homogène de rayon r_1 et de densité ρ_1 (typiquement, un nuage moléculaire d'hydrogène) en contraction, contenant un champ magnétique $\mathbf{B}_1$ supposé lui aussi homogène. Soit r_2 le rayon final de la sphère supposée à nouveau homogène, ρ_2 sa densité finale et $\mathbf{B}_2$ son champ magnétique final. La masse du nuage étant conservée, on a $\rho_1 r_1^3 = \rho_2 r_2^3$. Ainsi, le champ magnétique radial à la surface de la sphère contractée est donné par $B_{r,2} = B_{r,1}(\rho_2/\rho_1)^{2/3}$. La surface de la sphère initiale étant définie de manière arbitraire, on a donc la relation $B_r \propto \rho^{2/3}$.
Si ces prescriptions faites « au dos d'une enveloppe » permettent de se faire une idée sur les ordres de grandeur des quantités considérés et permettent de prendre en compte les effets des champs magnétiques de manière assez simple dans les modèles et simulations cosmologiques (pour étudier en particulier la formation des grandes structures), elles omettent un aspect essentiel des champs magnétiques : leur topologie.

2.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre j'ai dressé la liste de l'ensemble des processus responsables de la génération des champs magnétiques et introduit les deux théories tentant d'expliquer les ordres de grandeur en jeu : les champs magnétiques d'origine dynamo et ceux d'origine fossile. Il apparaît que si les théories dynamo sont capables de décrire un certain nombre de caractéristiques des champs magnétiques dans les zones convectives, en particulier celle du Soleil (telles que la cyclicité et l'orientation des taches d'après les modèles de champ moyen), elles se heurtent à un certain nombre de difficultés lors de leur mise en œuvre dans les zones radiatives. Aussi un travail supplémentaire mérite-t-il d'être fourni pour trancher sur leur existence. Ainsi, il apparaît à l'heure actuelle que les champs d'origine

fossile semblent les plus susceptibles d'être ceux responsables des intensités des champs magnétiques observés ou supposés exister dans les régions stablement stratifiées de la plupart des objets magnétiques décrits au cours du premier chapitre.

Bibliographie

[1] D. J. Acheson. « On the instability of toroidal magnetic fields and differential rotation in stars ». *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 289 :459–500, juin 1978. 37

[2] S. A. Balbus et J. F. Hawley. « A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution ». *ApJ*, 376 :214–233, juillet 1991. 38

[3] J. Braithwaite. « A differential rotation driven dynamo in a stably stratified star ». *A&A*, 449 :451–460, avril 2006. xiv, 45, 46, 63

[4] J. Braithwaite. « The stability of poloidal magnetic fields in rotating stars ». *A&A*, 469 :275–284, juillet 2007. xiv, 36, 101

[5] J. Braithwaite et Å. Nordlund. « Stable magnetic fields in stellar interiors ». *A&A*, 450 :1077–1095, mai 2006. xiv, 48, 61, 76, 100, 101, 103

[6] A. Brandenburg. « Paradigm shifts in solar dynamo modeling ». Dans *IAU Symposium*, volume 259 de *IAU Symposium*, pages 159–166, avril 2009. 42

[7] A. S. Brun, M. S. Miesch et J. Toomre. « Global-Scale Turbulent Convection and Magnetic Dynamo Action in the Solar Envelope ». *ApJ*, 614 :1073–1098, octobre 2004. 41, 116

[8] S. Chandrasekhar. « The Stability of Non-Dissipative Couette Flow in Hydromagnetics ». *Proceedings of the National Academy of Science*, 46 :253–257, février 1960. 38

[9] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability.* Dover Publications, 1961. 32

[10] P. Charbonneau. « Dynamo Models of the Solar Cycle ». *Living Reviews in Solar Physics*, 2 :2–+, juin 2005. 41

[11] P. Charbonneau et K. B. MacGregor. « Magnetic Fields in Massive Stars. I. Dynamo Models ». *ApJ*, 559 :1094–1107, octobre 2001. 44

[12] B. Cheng, D. N. Schramm et J. W. Truran. « Constraints on the strength of a primordial magnetic field from big bang nucleosynthesis ». *Phys. Rev. D*, 49 :5006–5018, mai 1994. 47

[13] J. P. Chièze. « Éléments d'hydrodynamique ». Dans *École d'Aussois : Physique Stellaire autour des Grands Lasers*, septembre 2008. 32

[14] T. G. Cowling. *Magnetohydrodynamics*, volume Monographs on Astronomical Subjects. Adam Hilger, Bristol, 1976. 32

[15] K. Dolag, D. Grasso, V. Springel et I. Tkachev. « Constrained simulations of the magnetic field in the local Universe and the propagation of ultrahigh energy cosmic rays ». *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics*, 1 :9–+, janvier 2005. 48

[16] Y. Dubois. « *Étude de l'évolution cosmologique du champ magnétique* ». Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, septembre 2008. 48

[17] Y. Dubois et R. Teyssier. « Cosmological MHD simulation of a cooling flow cluster ». *A&A*, 482 :L13–L16, mai 2008. 48

[18] P. Eggenberger, A. Maeder et G. Meynet. « Stellar evolution with rotation and magnetic fields. IV. The solar rotation profile ». *A&A*, 440 :L9–L12, septembre 2005. 45, 162

[19] N. Featherstone, M. K. Browning, A. S. Brun et J. Toomre. « Magnetic Dynamo Action In The Convective Cores Of A-type Stars In The Presence Of Fossil Fields ». Dans *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 38 de *Bulletin of the American Astronomical Society*, pages 117–+, mai 2007. 44

[20] N. A. Featherstone, M. K. Browning, A. S. Brun et J. Toomre. « Convective Core Dynamos of A-type Stars in the Presence of Fossil Magnetic Fields ». Dans R. J. Stancliffe, G. Houdek, R. G. Martin, & C. A. Tout, éditeur, *Unsolved Problems in Stellar Physics : A Conference in Honor of Douglas Gough*, volume 948 de *American Institute of Physics Conference Series*, pages 279–286, novembre 2007. 44

[21] S. Fromang. « *Évolution des disques d'accrétion proto-planétaires* ». Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, juin 2004. 39

[22] S. Fromang et J. Papaloizou. « MHD simulations of the magnetorotational instability in a shearing box with zero net flux. I. The issue of convergence ». *A&A*, 476 :1113–1122, décembre 2007. 39

[23] S. Fromang, J. Papaloizou, G. Lesur et T. Heinemann. « MHD simulations of the magnetorotational instability in a shearing box with zero net flux. II. The effect of transport coefficients ». *A&A*, 476 :1123–1132, décembre 2007. 39

[24] P. Garaud. « Propagation of a dynamo field in the radiative interior of the Sun ». *MNRAS*, 304 :583–588, avril 1999. 44

[25] M. Goossens, D. Biront et R. J. Tayler. « Additional Results for Unstable Stratified Toroidal Magnetic Fields in Stars ». *Ap&SS*, 75 :521–526, avril 1981. 37

[26] J. F. Hawley, C. F. Gammie et S. A. Balbus. « Local Three-dimensional Simulations of an Accretion Disk Hydromagnetic Dynamo ». *ApJ*, 464 :690–+, juin 1996. 42

[27] D. W. Hughes, R. Rosner et N. O. Weiss, éditeurs. *The Solar Tachocline*, 2007. 34

[28] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics, 3rd Edition.* John Wiley & Sons, juillet 1998. 33, 60

[29] L. Jouve. « *Modélisation du magnétisme solaire : de son origine interne à ses manifestations en surface* ». Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, décembre 2008. 42

[30] R. Kippenhahn et A. Weigert. *Stellar Structure and Evolution.* Stellar Structure and Evolution, XVI, 468 pp. 192 figs. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also Astronomy and Astrophysics Library, 1990. xiv, 43, 128, 170

[31] R. M. Kulsrud, R. Cen, J. P. Ostriker et D. Ryu. « The Protogalactic Origin for Cosmic Magnetic Fields ». *ApJ*, 480 :481–+, mai 1997. 48

[32] A. Maeder. « Stellar evolution. IV - Evolution of a star of 1.5 solar masses from the main-sequence to the red-giant branch with and without overshooting from convective core ». *A&A*, 43 :61–69, septembre 1975. 44

[33] P. Markey et R. J. Tayler. « The adiabatic stability of stars containing magnetic fields-II. Poloidal fields ». *MNRAS*, 163 :77–+, 1973. 36

[34] P. Markey et R. J. Tayler. « The adiabatic stability of stars containing magnetic fields-III. Additional results for poloidal fields ». *MNRAS*, 168 :505–514, septembre 1974. 36

[35] H. K. Moffatt. *Magnetic field generation in electrically conducting fluids.* 1978. 32, 41

[36] R. Monchaux, M. Berhanu, S. Aumaître, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, F. Ravelet, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, M. Bourgoin, P. Odier, J.-F. Pinton, N. Plihon et R. Volk. « The von Kármán Sodium experiment : Turbulent dynamical dynamos ». *Physics of Fluids*, 21(3) :035108–+, mars 2009. 43

[37] R. Monchaux, M. Berhanu, M. Bourgoin, M. Moulin, P. Odier, J.-F. Pinton, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, C. Gasquet, L. Marié et F. Ravelet. « Generation of a Magnetic Field by Dynamo Action in a Turbulent Flow of Liquid Sodium ». *Physical Review Letters*, 98(4) :044502–+, janvier 2007. 43

[38] G. I. Ogilvie. « Instabilities, angular momentum transport and magnetohydrodynamic turbulence ». Dans D. W. Hughes, R. Rosner et N. O. Weiss, éditeurs, *The Solar Tachocline*, pages 299–+, 2007. 39

[39] J. Pedlosky. *Geophysical fluid dynamics.* Springer-Verlag, New York and Berlin, 1982. 32

[40] E. Pitts et R. J. Tayler. « The adiabatic stability of stars containing magnetic fields. IV - The influence of rotation ». *MNRAS*, 216 :139–154, septembre 1985. 37

[41] Y. B. Ponomarenko. « Theory of the hydromagnetic generator ». *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 14 :775–778, novembre 1973. 42

[42] M. Rieutord. *Une introduction à la dynamique des fluides.* Masson, 1997. 32

[43] G. O. Roberts. « Dynamo Action of Fluid Motions with Two-Dimensional Periodicity ». *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 271 :411–454, février 1972. 42

[44] D. W. Sciama. « Neutrino decay and the primordial magnetic field. ». Dans D. Lynden-Bell, éditeur, *Cosmical Magnetism*, pages 128–133, 1994. 48

[45] H. C. Spruit. « Differential rotation and magnetic fields in stellar interiors ». *A&A*, 349 :189–202, septembre 1999. xiv, 36, 37, 45, 82

[46] H. C. Spruit. « Dynamo action by differential rotation in a stably stratified stellar interior ». *A&A*, 381 :923–932, janvier 2002. xiv, 37, 45, 48, 162

[47] R. J. Tayler. « The adiabatic stability of stars containing magnetic fields-I.Toroidal fields ». *MNRAS*, 161 :365–+, 1973. 36, 37, 97

[48] J. P. Vallée. « Astral magnetic fields as observed in starforming nurseries, in stars, and in the Solar system ». *New Astronomy Review*, 47 :85–168, août 2003. 47

[49] E. Velikhov. « Stability of an Ideally Conducting Liquid Flowing Between Cylinders Rotating in a Magnetic Field ». Dans *J. Exptl. Theoret. Phys.*, volume 36, pages 1398–1404, 11959. 38

[50] G. A. E. Wright. « Pinch instabilities in magnetic stars ». *MNRAS*, 162 :339–+, 1973. 36

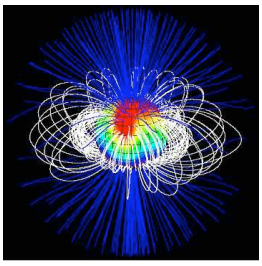
[51] J. P. Zahn. « Convective Overshooting : Physical Properties and Seismic Evidence (invited review) ». Dans C. Aerts, T. R. Bedding et J. Christensen-Dalsgaard, éditeurs, *IAU Colloq. 185 : Radial and Nonradial Pulsations as Probes of Stellar Physics*, volume 259 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pages 58–+, 2002. 44

[52] J. P. Zahn, A. S. Brun et S. Mathis. « On magnetic instabilities and dynamo action in stellar radiation zones ». *A&A*, 474 :145–154, octobre 2007. xiv, 46, 48, 162

Deuxième partie : Modélisation de configurations d'équilibre magnétique et de leur impact sur la structure stellaire

Chapitre 3

Modélisation des Champs Magnétiques de Grandes Échelles



Sommaire

3.1 Motivations **58**
3.1.1 Faits observationnels 58
3.1.2 Faits expérimentaux 60
3.1.3 Modélisations numériques 61
3.2 L'équilibre magnéto-hydrostatique « non force-free » **62**
3.2.1 Contexte historique 62
3.2.2 Configuration du champ magnétique axisymétrique 64
3.2.3 L'équilibre magnéto-hydrostatique barotrope 64
3.2.4 Remarque concernant la densité de courant azimutale 68
3.3 États relaxés auto-gravitants **69**
3.3.1 Definitions et invariants axisymétriques 69
3.3.2 États relaxés barotropes 70
3.3.3 Solution à l'aide de la méthode des fonctions de Green 73
3.3.4 Configurations 74
3.4 Application aux intérieurs stellaires **76**
3.4.1 Champ confiné dans la zone radiative solaire 76
3.4.2 Champ confiné dans la zone radiative d'une étoile de type Ap . . 77
3.5 Liens entre l'hélicité, la topologie et l'énergie du champ **78**
3.5.1 Hélicité *vs.* mixité 78
3.5.2 Hélicité *vs.* énergie 79
3.5.3 Applications 80
3.6 Discussion **81**
3.7 Conclusion **83**
3.8 Publication reliée : article 1 . . . . . **84**
Bibliographie **85**

La vérité ne se possède pas, elle se cherche. – Albert Jacquard

MODÉLISER LES POSSIBLES configurations du champ magnétique dans les intérieurs stellaires est l'un des défis posés à l'astrophysique du XXIe siècle. D'une part, les observations font état de la présence de ces champs à la surface d'objets célestes de plus en plus nombreux, ainsi que nous l'avons vu dans le premier chapitre. D'autre part, un certain nombre de questions en apparence simples, ou du moins à la portée de notre science, sont toujours sans solution claire. En premier lieu on ne sait toujours pas s'il existe une configuration magnétique particulière (ou bien une famille de configurations) pouvant être en équilibre stable dans une structure stellaire donnée, ainsi que semblent l'indiquer les observations. Seules des contraintes issues d'investigations théoriques ont été obtenues, et des simulations numériques ont permis d'approcher la forme que devraient avoir de telles configurations.
J'exposerai au cours de ce chapitre ces différents éléments de réponse sur lesquels je me suis fondé, avant d'exposer le travail que j'ai réalisé à partir de ceux-ci dans le but d'obtenir une meilleure description des possibles états d'équilibres magnétiques.

3.1 Motivations

3.1.1 Faits observationnels

Le profil de rotation interne du Soleil

Le développement de l'héliosismologie a permis dès ses premiers pas de sonder l'intérieur du Soleil (les 70% externes en rayon) en étudiant les variations de vitesse ou de luminosité à sa surface, associées à la propagation de modes acoustiques (dits modes « p », pour pression). Les méthodes d'inversion ont surtout profité de l'avènement de réseaux terrestres tels que GONG en mai 1995, puis de l'envoi de l'observatoire solaire spatial SOHO en 1996. L'analyse des ondes de basses fréquences a permis, après dix ans d'accumulation de données, de mettre en évidence la signature de modes de gravité (modes « g ») qui permettraient de sonder les couches centrales du Soleil [62, 41, 25, 40, 24].
Les inversions héliosismiques des modes acoustiques ont rendu accessible le profil de rotation interne du Soleil (voir FIG. 3.1) et mis en évidence deux propriétés ne pouvant être interprétées à partir des descriptions hydrodynamiques classiques. La première est la rotation quasi-uniforme présente dans toute la zone radiative [33, 15, 16], lorsque les modèles d'évolution prenant en compte les processus hydrodynamiques tels que la circulation méridienne et le mélange rotationnel par cisaillement [9] prédisent une rotation hautement différentielle [61]. Ceci est dû à la faible efficacité de la circulation méridienne et des instabilités purement hydrodynamiques dans la redistribution du moment angulaire. Cela met aussi en évidence le fait que l'échelle de temps caractéristique du transport de moment est bien inférieure à l'âge du Soleil.
La seconde caractéristique est la finesse de la région de transition, appelée tachocline, entre le régime de rotation différentielle, principalement dans la zone convective externe et la rotation uniforme, dans la zone radiative interne. En effet, si l'on impose que la rotation différentielle au sommet de la zone radiative en r_0 est maintenue et hyperdiffuse radiativement vers l'intérieur, selon le schéma proposé par Spiegel & Zahn en 1992 [55], l'épaisseur

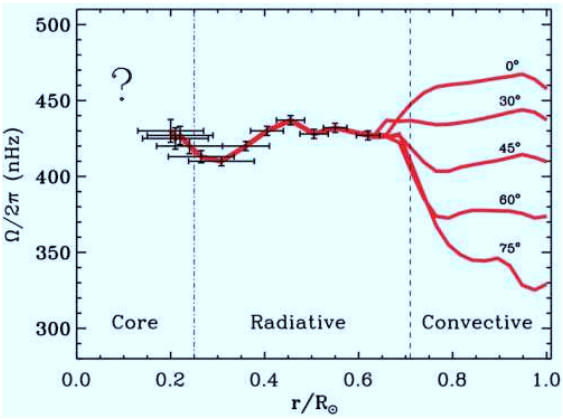


FIGURE 3.1 – Profil de rotation interne du Soleil : inversion de la vitesse angulaire Ω à partir des modes $\ell \leq 25$, sur une série temporelle longue (2088 j.) de données issues de GOLF et du Michelson Doppler Imager (MDI), pour plusieurs latitudes. Les barres d'erreurs à 1 σ augmentent au fur et à mesure que l'on s'approche du centre, les modes p étant moins sensibles et les modes reconnus se faisant plus rares. Crédit : R. García *et al.*, 2007 [25].

h de la région de transition devrait être

$$h \approx r_0 \left(t/t_{ES}\right)^{1/4}, \tag{3.1}$$

où t_{ES} est le temps d'Eddington-Sweet, caractérisant le temps de redistribution de chaleur par la circulation méridienne en l'absence de viscosité, défini par $t_{ES} = (\mathcal{N}/2\Omega)^2\, r_0^2/\kappa^2$, $\mathcal{N}$ étant la fréquence de flottaison, κ la diffusivité thermique et Ω la vitesse de rotation. Pour le Soleil actuel, cette valeur est de l'ordre du tiers de la zone radiative, alors que l'épaisseur de la tachocline déduite des observations héliosismiques est de l'ordre de 500 km.
Ces deux propriétés de la zone radiative ne peuvent aujourd'hui être expliquées qu'en introduisant un champ magnétique de grande échelle confiné dans la zone radiative (*cf.* Gough & McIntyre, 1998 [26]) ou bien les effets de transport de moment angulaire par les ondes internes (*cf.* Talon & Charbonnel, 2005 [58]). Il se peut finalement que la réalité soit une combinaison de ces deux processus.

Les champs magnétiques d'étoiles Ap/Bp

Ainsi que je l'ai détaillé au cours du premier chapitre, les étoiles Ap exhibent à leur surface d'intenses champs magnétiques à composante majoritairement dipolaire. En 2000, S. Hubrig *et al.* [30] ont placé un échantillon de 33 étoiles de types Ap et Bp magnétiques dans le diagramme HR. Ils ont ainsi pu relever qu'aucune de leurs étoiles n'était proche de la ZAMS [1] et ont trouvé que les champs magnétiques apparaissent seulement à la surface d'étoiles ayant complété au moins 30 % de leur vie sur la séquence principale. Cela semblait indiquer la possibilité qu'un champ magnétique confiné sous la surface de ces étoiles y soit présent dans des stades antérieurs puis diffuse vers la surface pour s'ouvrir en un champ

1. La ZAMS, Zero Age Main Sequence ou séquence principale d'âge zéro représente la courbe dans le diagramme HR sur laquelle se positionnent les étoiles lorsqu'elles commencent à rayonner majoritairement par réactions nucléaires et non plus par contraction virialisée.

potentiel, multipolaire, ce qui conforterait la théorie des champs magnétiques d'origine fossile, présentée comme privilégiée dans le chapitre précédent. Néanmoins ce scénario a depuis été réfuté par de nombreuses observations de champs magnétiques ouverts, pleinement développés aussi bien sur la ZAMS qu'en PMS.

3.1.2 Faits expérimentaux

Expériences de relaxation dans les sphéromaks

Les sphéromaks désignent des appareils expérimentaux contenant un plasma chauffé à très haute température (le record de température électronique est d'environ 350 eV, soit environ 4 millions de degrés). Ce plasma est confiné au moyen de champs magnétiques, tout comme les tokamaks et les stellarators. Au cours des années 1970 ce dispositif s'est avéré être moins prometteur que les tokamaks pour reproduire la fusion sur Terre car il ne permet pas de contrôler les instabilités susceptible de se développer. Malgré tout il reste un appareil de recherche apprécié car bien plus facile à mettre en œuvre. À la différence des tokamaks et des stellarators, le sphéromak ne possède en effet pas de bobine poloïdale mais seulement des bobines toroïdales assurant le confinement. Ainsi le plasma n'est pas contraint géométriquement en son centre, ce qui lui permet d'occuper tout le cylindre de confinement et d'acquérir plus facilement sa configuration d'équilibre naturel en fonction du champ extérieur appliqué.
Ces expériences sur les sphéromaks ont permis de mettre en évidence un certain nombre de propriétés fondamentales du plasma [2] : (i) celui-ci conserve l'hélicité au cours des reconnexions magnétiques, malgré la dissipation ; (ii) l'état d'équilibre atteint est proche de l'état dit « force-free », *i.e.* tel que la force de Lorentz est nulle, soit $\mathbf{j} = \alpha\,\mathbf{B}$, où α est un champ scalaire (pouvant être n'importe quelle fonction du temps et de l'espace) ; enfin (iii) cet état final est celui d'énergie minimale à hélicité donnée. Cette dernière propriété a été identifiée en premier lieu par J. B. Taylor en 1974 [59], aussi cet état est-il connu sous le nom d'*état de Taylor*.

La conservation de l'hélicité

L'hélicité magnétique est une caractéristique globale du plasma définie par

$$\mathcal{H} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\, d\mathcal{V}, \tag{3.2}$$

où $\mathcal{V}$ est le volume d'étude, $\mathbf{B}$ le vecteur champ magnétique et $\mathbf{A}$ le potentiel vecteur tel que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, son existence étant assurée par la divergence nulle de $\mathbf{B}$. En MHD idéale (non-résistive), l'hélicité est une quantité conservée.
Au cours du processus de relaxation (MHD non-idéale) on peut concevoir que la densité d'hélicité perdue aux petites échelles se retrouve aux plus grandes échelles lors des reconnexions magnétiques, menant en somme au terme d'un processus de cascade inverse à une hélicité globale (intégrée) conservée.
Cette quantité n'est pas définie de manière univoque : si l'on applique la transformation de jauge $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\,\Lambda$, Λ étant un champ scalaire [31], on a à nouveau $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}'$. Ainsi si $\int_{\mathcal{V}} \nabla\,\Lambda \cdot \mathbf{B}\, d\mathcal{V} \neq 0$, la valeur de l'hélicité est changée par la transformation, qui

laisse pourtant les grandeurs physiques observables (le champ magnétique) inchangées. Cependant l'hélicité peut avoir une valeur univoque de deux manières. La première advient naturellement lorsque le champ $\mathbf{B}$ vérifie $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ en tout point de la surface fermée orientée $\mathbf{S}$ délimitant le volume $\mathcal{V}$. Dans ce cas comme $\nabla \Lambda \cdot \mathbf{B} = \nabla\ (\Lambda\, \mathbf{B})$ on retrouve par le théorème de Green-Ostrogradski que le changement d'hélicité par la transformation est nul. Ainsi en coordonnées sphériques, si le champ est purement horizontal à la surface du domaine d'étude, l'hélicité est identique quelle que soit la jauge choisie.
Dans le cas où $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ est non nul, Berger & Field ont montré en 1984 [3] qu'il est possible de définir une hélicité relative en éliminant la partie potentielle du potentiel vecteur (voir aussi les travaux de Peyzaret, 1973 [22] en préliminaire aux travaux de Berger ainsi que ceux de Démoulin, 2007 [17]). Soit $\mathbf{B}_p$ le champ magnétique potentiel ayant la même distribution orthogonale à la surface que le champ $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}_p$ tel que $\mathbf{B}_p = \nabla\ \times \mathbf{A}_p$. L'expression générale pour $\mathcal{H}$ est alors donnée par

$$\mathcal{H} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p)\ d\mathcal{V}, \tag{3.3}$$

qui, si l'on impose que la composante tangentielle $\mathbf{A}_t$ du potentiel vecteur soit égale à celle de sa partie potentielle $\mathbf{A}_{p,t}$, se simplifie en

$$\mathcal{H} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\, d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B}_p\, d\mathcal{V}. \tag{3.4}$$

L'hélicité magnétique joue un rôle important dans la dynamique des protubérances solaires conduisant à l'éjection de masse coronale comme dans la dynamo solaire : A. Brandenburg a montré en 2004 [7] que la conservation de l'hélicité contrôle la saturation du champ, cet effet est à présent connu sous le nom d'« helicity driven α-quenching ».
Un autre effet important est que l'hélicité est à peu près conservée en MHD non-idéale (ce, malgré les reconnexions magnétiques), tel que c'est le cas dans les expériences de relaxation de champs magnétiques dans les sphéromaks [29]. Ainsi, elle joue un rôle de « modérateur » de la dissipation du champ magnétique : en effet si le champ $\mathbf{B}$ venait à tendre vers $\mathbf{0}$, l'hélicité s'annulerait également.

3.1.3 Modélisations numériques

Comme je l'ai évoqué précédemment, il n'a encore jamais été trouvé par la voie théorique de configuration magnétique en équilibre stable dans un intérieur stellaire. Cependant, aujourd'hui les supercalculateurs permettent d'explorer ce qui est resté inaccessible par la voie analytique. Les « expériences numériques » menées par Braithwaite & Spruit en 2004 [6], puis par Braithwaite & Nordlund en 2006 [5] ont de fait permis de mettre à jour une configuration magnétique s'étant auto-organisée vers un équilibre quasi-stable.
Je voudrais ici souligner que ces résultat sont toutefois à prendre avec précaution. D'une part les échelles de temps rencontrées dans la réalité sont bien loin de celles imposées pour la simulation : celle des processus hydrodynamiques est de l'ordre de $t_s = R_*/c_s$, celle des processus magnétiques de $t_A = R_*/v_A$, et celle de la dissipation ohmique de $t_{Ohm} = R_*^2/\eta$, avec $t_A/t_s \sim 10^4$, $t_{Ohm}/t_s \sim 10^{10}$, alors que dans la simulation $t_A/t_s \sim 10$ et dans le meilleur des cas $t_{Ohm}/t_A \sim 10$ (au lieu de 10^6). D'autre part ces modèles ne prennent en compte ni la production de chaleur dans le cœur, ni la rotation, ni du coup les effets de

transport associés à la présence de ces deux phénomènes. La simulation est discrétisée sur un nombre faible d'éléments (de l'ordre de 512^3) et le profil de densité est initialement polytropique ($P \propto \rho^{1+1/n}$), l'indice polytropique n étant pris égal à 3. La densité à la surface de ce polytrope est de 0.002 fois celle du centre, ce qui reste assez éloigné d'un contraste de densité réel. Enfin la loi d'état est celle d'un gaz parfait.
La boîte de simulation est un cube de côté égal à 4.5 R_*, l'étoile simulée, de rayon $R_* = 1.8\, R_\odot$ ayant une masse $M_* = 2\, M_\odot$ possède une température centrale de l'ordre de $9 \times 10^6 K$. Un champ magnétique est alors distribué de manière aléatoire dans le volume de la simulation, sous la forme de son potentiel vecteur initialisé de manière à contenir toutes les fréquences spatiales limitées par le pas de grille et la taille de la boîte. Le résultat est ensuite multiplié par $\exp\left(-r^2/r_m^2\right)$ de manière à ce que l'intensité du champ soit négligeable dans l'atmosphère. Le rapport entre l'énergie thermique et l'énergie magnétique (paramètre plasma)

$$\beta = \frac{P_{\text{gaz}}}{P_{\text{mag}}} \tag{3.5}$$

est à peu près constant sur le volume de l'étoile : $\beta \simeq 100$.

Résultats

Après quelques temps d'Alfvén, le champ magnétique initialement distribué de manière uniforme relaxe vers une configuration mixte poloïdale-toroïdale, globalement axisymétrique (voir Fig. 3.2) et quasi-stable au cours de la simulation. Son orientation et sa chiralité (le sens de l'orientation des lignes de champ le long du tore) dépendent de la distribution initiale du champ. Notons également que la composante dipolaire du champ est légèrement décentrée (« offset »). La composante toroïdale représente 90% de l'énergie magnétique dans les premières phases de la relaxation. Cependant, le champ étant potentiel à la surface (il existe un potentiel Φ tel que $\mathbf{B} = \nabla\, \Phi$), le champ magnétique toroïdal se doit d'être nul à l'extérieur. Or lorsque la diffusion est prise en compte, le champ magnétique diffuse progressivement vers l'extérieur (la diffusivité étant proportionnelle à $T^{-3/2}$, bien plus élevée vers l'extérieur que vers l'intérieur de l'étoile). Donc au cours de ce processus de diffusion le champ magnétique toroïdal se retrouve érodé et finalement les composantes poloïdale et toroïdale s'ajustent pour être à peu près d'intensité égale. Cela correspond à ce qu'avaient prédit Chandrasekhar, Mestel, Prendergast et Woltjer dans les années 1950 [10, 13, 11, 47, 12, 14, 42, 65, 67, 68] lorsqu'ils s'étaient intéressés aux équilibres magnétiques de manière analytique.

3.2 L'équilibre magnéto-hydrostatique « non force-free »

3.2.1 Contexte historique

Lüst & Schlüter ont été les premiers en 1954 [35] à proposer le modèle force-free. Ils allaient plus loin que ce qui était admis jusqu'alors en constatant que les atmosphères stellaires, malgré leur faible densité possèdent une conductivité suffisamment élevée pour permettre la propagation de courants. En postulant que dans les atmosphères stellaires, aucune force (ni le gradient de pression, ni la gravité) ne peut compenser la force de Lorentz, celle-ci doit s'annuler (mais pas le courant).

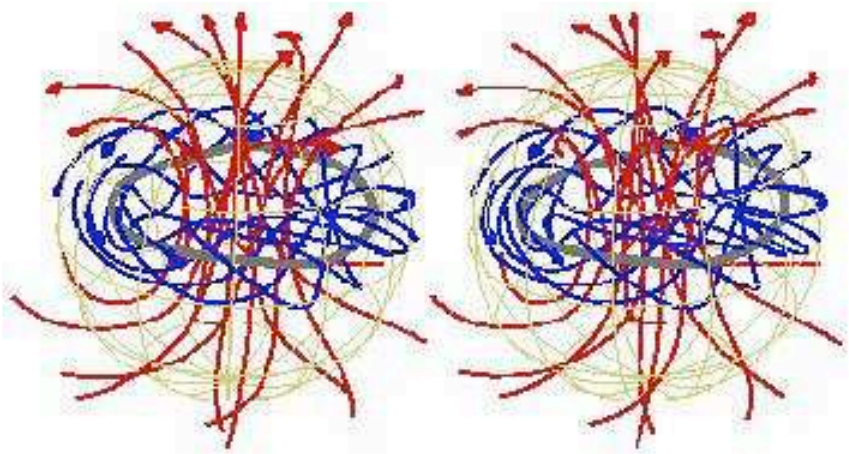


FIGURE 3.2 – Configuration d'équilibre quasi-stable obtenue par relaxation d'un champ initialement distribué de manière uniforme. Les lignes de champ, en tout point tangentes au champ magnétique, sont tracées en représentation stéréoscopique : le lecteur peut voir l'image en trois dimensions, en louchant de manière à superposer les deux images. Celles se fermant à l'intérieur de l'étoile sont tracées en bleu, celles s'ouvrant à l'extérieur en rouge. Crédit : J. Braithwaite, 2004 [6]

Ferraro (1954) [21] a étudié les configurations d'équilibre pour un champ poloïdal présent dans une sphère incompressible (de densité uniforme), afin de déduire l'écart à la sphéricité que sa présence induit. S'il n'a pas souligné ce point, son modèle était déjà par construction non force-free, sans quoi les perturbations seraient nulles. Pour une étoile de type solaire de 1 $M_\odot$ présentant un champ magnétique de surface d'intensité moyenne de 10 G, l'ellipticité est de $\mathcal{E} \simeq 4 \times 10^{-8}$; pour une étoile massive de 15 $M_\odot$ présentant un champ de surface de 1 kG, son ellipticité se ramène à 0.01.
Chandrasekhar et Prendergast (1956) [47, 13] ont ensuite étendu le modèle pour prendre en compte le champ magnétique toroïdal, toujours dans le cas incompressible. Dans ce cas ils ont montré premièrement que la force de Lorentz doit dériver d'un potentiel, ce qui a étendu le modèle force-free proposé initialement par Lüst & Schlüter. Ils ont également montré que les énergies poloïdale et toroïdale sont exactement égales dans le cas d'une configuration avec un champ magnétique radial nul et un champ horizontal continu pour conditions aux limites [10]. Prendergast a montré en 1958 [48] que ces solutions sont instables pour des énergies magnétiques excédant deux cinquièmes de l'énergie gravifique.
Finalement, Lodewijk Woltjer (1960) [68] a donné la solution dans le cas compressible.

Je montrerai ici que les solutions de Woltjer peuvent être étendues pour prendre en compte la structure stellaire, et comment ces nouvelles solutions peuvent être obtenues à partir d'une approche variationnelle de manière à vérifier la minimisation de l'énergie pour une hélicité donnée. Ces configurations semblent pertinentes en regard des simulations les plus récentes modélisant les champs magnétiques de grandes échelles dans la zone radiative solaire, les étoiles de type Ap/Bp, les naines blanches ou les étoiles à neutrons (*cf.* Braithwaite & Spruit 2004, Braithwaite & Nordlund 2006, Braithwaite & Spruit 2006 [6, 44, 4]) et des derniers développements théoriques concernant la relaxation et l'hélicité

(*cf.* Broderick & Narayan 2008 [8], Mastrano & Melatos 2008 [38]).

3.2.2 Configuration du champ magnétique axisymétrique

Dans le cas axisymétrique, où toutes les variables physiques sont indépendantes de l'angle azimutal φ, le champ magnétique $\mathbf{B}\,(r,\theta)$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r\sin\theta}\nabla\,\Psi\,(r,\theta)\times\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{1}{r\sin\theta}\,F\,(r,\theta)\;\hat{\mathbf{e}}_\varphi\,, \tag{3.6}$$

qui est à divergence nulle par construction. Ψ et F sont respectivement la fonction de flux poloïdal et le potentiel toroïdal ; (r,θ,φ) sont les coordonnées sphériques usuelles et $\{\hat{\mathbf{e}}_k\}_{k=r,\theta,\varphi}$ la base de leurs vecteurs unitaires.
Selon cette définition, la composante poloïdale du champ magnétique ($\mathbf{B}_\mathrm{P}$) est telle que $\mathbf{B}_\mathrm{P}\cdot\nabla\,\Psi = 0$, donc elle appartient aux surfaces iso-Ψ.

3.2.3 L'équilibre magnéto-hydrostatique barotrope

La condition d'équilibre magnéto-hydrostatique s'écrit

$$-\nabla\,P - \rho\nabla\,\Phi_\mathrm{grav} + \mathbf{F}_\mathcal{L} = \mathbf{0}, \tag{3.7}$$

où P est la pression du gaz, ρ sa densité, la force de Lorentz s'exprimant $\mathbf{F}_\mathcal{L} = \mathbf{j}\times\mathbf{B}$, $\mathbf{j}$ étant la densité de courant. Cette équation (3.7) doit être satisfaite dans l'intérieur d'une masse de fluide infiniment conducteur en présence de champ magnétique, avec l'équation de Poisson (Φ_grav étant le potentiel gravitationnel et G la constante gravitationnelle) :

$$\nabla^2\Phi_\mathrm{grav} = 4\,\pi\,G\,\rho \tag{3.8}$$

et les quatre équations de Maxwell (2.1 → 2.4) données dans le chapitre précédent. L'équilibre magnéto-hydrostatique (éq. 3.7) implique que la partie poloïdale $\mathbf{F}_{\mathcal{L};\mathrm{P}}$ (dans le plan méridien si l'on est dans le cas axisymétrique) de la force de Lorentz contrebalance le gradient de pression et la force gravitationnelle, qui sont également des vecteurs purement poloïdaux. À l'aide de l'éq. (3.6), on obtient

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L};\mathrm{P}} = -\frac{1}{\mu_0 r^2\sin^2\theta}\left[\left(F\partial_r F + \partial_r\Psi\Delta^*\Psi\right)\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + \frac{1}{r}\left(F\partial_\theta F + \partial_\theta\Psi\Delta^*\Psi\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta\right], \tag{3.9}$$

avec

$$\Delta^*\Psi \equiv \partial_{r^2}\Psi + \frac{\sin\theta}{r^2}\partial_\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\Psi\right) \tag{3.10}$$

définissant l'opérateur de Grad-Shafranov usuel en coordonnées sphériques et où l'on a employé la notation $\partial_{x^i} = \partial^i/\partial x^i$. En revanche en l'absence de toute autre force, la partie toroïdale de la force de Lorentz ($\mathbf{F}_{\mathcal{L};\mathrm{T}} = F_{\mathcal{L};\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi$) s'annule. On a donc

$$\mathbf{F}_\mathcal{L} = \mathbf{F}_{\mathcal{L};\mathrm{P}} + \mathbf{F}_{\mathcal{L};\mathrm{T}} = \mathbf{F}_{\mathcal{L};\mathrm{P}}. \tag{3.11}$$

On a donc $\partial_r\Psi\partial_\theta F - \partial_\theta\Psi\partial_r F = 0$ et les valeurs non-triviales pour F sont obtenues en requérant

$$F(r,\theta) = F(\Psi). \tag{3.12}$$

Dès lors, on vérifie $F\partial_r F = F\partial_\Psi F\partial_r\Psi$ et $F\partial_\theta F = F\partial_\Psi F\partial_\theta\Psi$, ce qui mène à l'expression finale pour la force de Lorentz

$$\mathbf{F}_\mathcal{L} = \mathcal{A}\,(r,\theta)\,\nabla\,\Psi, \tag{3.13}$$

où

$$\mathcal{A}(r,\theta) = -\frac{1}{\mu_0 r^2 \sin^2\theta}\left(F\partial_\Psi F + \Delta^*\Psi\right). \tag{3.14}$$

Ainsi la composante poloïdale de la force de Lorentz est non-nulle *a priori* et le modèle est non force-free.

Notons, ainsi que souligné récemment par A. Reisenegger [49], que dans un cas stellaire, de grande échelle, le champ magnétique en équilibre MHS possède nécessairement un caractère non force-free. En effet, considérons le travail de la force de Lorentz

$$\mathcal{W}_{\mathbf{F}_\mathcal{L}} = \int_\mathcal{V} \mathbf{F}_\mathcal{L}\cdot\mathbf{r}\,d\mathcal{V}, \tag{3.15}$$

celui-ci s'annule si le champ est force-free. Or, il peut se réexprimer en fonction du tenseur des contraintes magnétiques défini par $T_{ij} = -\frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}B^2\delta_{ij}\right)$ (*cf. e.g.* Kulsrud, 2005 [34]) selon :

$$\mathcal{W}_{\mathbf{F}_\mathcal{L}} = \int_\mathcal{V} T_{ii}\,d\mathcal{V} - \oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} r_i\,T_{ij}\,ds_j, \tag{3.16}$$

la convention d'Einstein ayant été adoptée pour la sommation des indices répétés. Sous cette forme, nous remarquons que le premier terme du membre de droite de l'éq. 3.16 correspond à l'opposé de l'énergie magnétique (strictement positive) contenue dans le volume $\mathcal{V}$. L'intégrale de surface se réécrit quant à elle dans le cas sphérique :

$$-\oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})} r_i\,T_{ij}ds_j = \frac{1}{\mu_0}\oint_{\mathcal{S}(\mathcal{V})}\left(\frac{1}{2}B_r^2 + B_rB_\theta + B_rB_\varphi\right)r^3\sin^2\theta d\theta d\varphi. \tag{3.17}$$

Le champ magnétique non-nul devant s'annuler à l'infini, sa dépendance radiale décroît au moins aussi rapidement que r^{-3}. Ainsi, cette intégrale tend vers zéro si l'on choisit une valeur du rayon suffisamment grande, et le travail de la force de Lorentz se ramène alors simplement à l'opposé de l'énergie magnétique.
Donc un champ magnétique ne peut pas être en tout point de l'étoile force-free.
La configuration « force-free » choisie par Broderick & Narayan [8] ne déroge pas à la règle : en effet elle possède une couche de courants en surface non alignés avec le champ magnétique, responsable alors de l'existence d'une force de Lorentz surfacique.
D'autre part, les champs non force-free sont observés dans les atmosphères des étoiles CP [54, 53] (*cf.* chapitre 4). Par conséquent, il est donc nécessaire de s'intéresser aux états non force-free dans les intérieurs stellaires. Prenons à présent le rotationnel de l'éq. (3.7), nous obtenons l'équation de la vorticité statique

$$-\frac{\nabla\,\rho\times\nabla\,P}{\rho^2} = \nabla\,\times\left(\frac{\mathbf{F}_\mathcal{L}}{\rho}\right). \tag{3.18}$$

Cette dernière éq. (3.18) gouverne l'équilibre entre le couple barocline (membre de gauche ; voir Rieutord, 2006 [51] pour une description détaillée) et le terme source magnétique. Comme l'a souligné Mestel (1956) [42] les différentes quantités structurelles telles que

la densité, le potentiel gravitationnel et la pression se réajustent de manière à vérifier l'équilibre (3.7) pour une configuration magnétique donnée (voir Sweet, 1950 [57] et Mathis & Zahn, 2005 §5 [39]).

Condition barotrope

Nous allons nous intéresser ici à la famille d'états d'équilibre qui vérifient la condition *barotrope*, ce qui permet de coupler *explicitement* la configuration magnétique avec la structure stellaire. Revenons sur la définition du terme barotrope.

D'une part, au sens hydrodynamique, la barotropie signifie que le gradient de densité et le gradient de pression sont alignés (contrairement à l'état barocline : voir Pedlosky, 1998 [46] dans le contexte géophysique et Zahn, 1992 [70] dans le contexte astrophysique) :

$$\nabla \rho \times \nabla P = \mathbf{0}; \tag{3.19}$$

en d'autres termes le couple barocline de l'équation de la vorticité (Eq. 3.18) est nul. Dès lors les surfaces isobares et les surfaces d'iso-densité sont confondues. Cela n'implique aucune contrainte concernant l'équation d'état qui dans les intérieurs stellaires peut prendre n'importe quelle forme $P = f(\rho, T, ...)$ (T étant la température). De plus cela ne présume rien quant à la stratification du fluide, qui peut être stablement stratifié ou non. Par exemple, une étoile en rotation cylindrique (ou par conséquent en rotation solide, comme c'est approximativement le cas dans au moins 50 % de la zone radiative solaire) est dans un état barotrope. Détaillons ce point dans le cas d'une zone radiative. Si l'étoile est dépourvue de champ magnétique mais en rotation différentielle de vitesse angulaire $\Omega\,(r, \theta)$, la balance hydrodynamique est donné par $\nabla P = -\rho \nabla \Phi_{\text{grav}} + \mathbf{F}_{\mathcal{C}}$, où la force centrifuge s'exprime $\mathbf{F}_{\mathcal{C}} = \rho\, \Omega^2 \nabla\, (r^2 \sin^2 \theta)/2$. Si l'on prend le rotationnel de cette équation, on peut vérifier après séparation des variables pour Ω, puis intégration, que la loi $\Omega(r, \theta) = \Omega_0\, (r\, \sin\theta)^K$ (Ω_0 et K étant des constantes réelles, $K \geq 0$) est la plus générale vérifiant la version simplifiée du vent thermique :

$$-\frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^2} = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{F}_{\mathcal{C}}}{\rho}\right) = \mathbf{0} \tag{3.20}$$

et l'étoile est donc dans ce cas en équilibre barotrope ; sa loi de rotation correspond à une rotation cylindrique (Ω est constante si $r\, \sin\theta$ est constant [2]).
De la même manière nous cherchons à établir les configurations d'équilibre magnétique vérifiant la condition barotrope

$$-\frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^2} = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{F}_{\mathcal{L}}}{\rho}\right) = \mathbf{0}. \tag{3.21}$$

D'autre part, cette définition de la barotropie doit être distinguée de celle employée du point de vue thermodynamique, où une équation d'état barotrope est telle que $P = f\,(\rho)$. Dans ce cas on vérifie *en conséquence* la barotropie au sens hydrodynamique. Notons enfin qu'un polytrope ($P \propto \rho^{1+1/n}$) est un barotrope ; ainsi J. Braithwaite et ses collaborateurs approximent initialement dans leurs simulations numériques les zones radiatives stables dans le cadre de la description théorique que nous adoptons.

2. Il s'agit là de la définition d'un cylindre de rayon r en géométrie sphérique, d'axe polaire donné par $\sin\theta = 0$.

L'équation de Grad-Shafranov

Les intérieurs stellaires, excepté dans les couches de sous-surface, sont dans un régime dit à haut β (on rappelle que $\beta = P/P_{\text{mag}}$, $P_{\text{mag}} = B^2/2\mu_0$ étant la pression magnétique). Dans le domaine de valeurs du champ magnétique pertinent pour les étoiles classiques (*i.e.* les objets non-compacts), le rapport entre la force de Lorentz massique et la gravité est très faible. Ainsi, les perturbations sur la structure stellaire demeurent faibles. On peut donc écrire $\rho \approx \overline{\rho} + \widetilde{\rho}$, où $\overline{\rho}$ et $\widetilde{\rho}$ sont respectivement la densité moyenne sur l'isobare, qui est donnée en première approximation par le profil de densité radial de l'étoile non-magnétique, et sa perturbation induite par la présence de champ magnétique sur l'isobare (on a $\widetilde{\rho} \ll \overline{\rho}$). Ainsi au premier ordre l'éq. (3.21) devient

$$-\frac{\nabla\,\widetilde{\rho}\times\mathbf{g}_{\text{eff}}}{\overline{\rho}} = \nabla\,\times\left(\frac{\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}}}{\overline{\rho}}\right) = \mathbf{0}, \tag{3.22}$$

où la gravité effective $\mathbf{g}_{\text{eff}}$, telle que $\nabla\,\overline{P} = \overline{\rho}\,\mathbf{g}_{\text{eff}}$, a été introduite. En prenant donc en compte l'hypothèse de barotropie, on a d'après l'éq. (3.13)

$$\nabla\left(\frac{\mathcal{A}}{\overline{\rho}}\right)\times\nabla\,\Psi = \mathbf{0}, \tag{3.23}$$

qui se projette selon $\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$ en

$$\partial_r\left(\frac{\mathcal{A}}{\overline{\rho}}\right)\partial_\theta\Psi - \partial_\theta\left(\frac{\mathcal{A}}{\overline{\rho}}\right)\partial_r\Psi = 0. \tag{3.24}$$

Donc il existe une fonction G de Ψ telle que

$$\frac{\mathcal{A}}{\overline{\rho}} = G\left(\Psi\right). \tag{3.25}$$

Enfin, l'éq. (3.14) mène à celle gouvernant Ψ :

$$\Delta^*\Psi + F\left(\Psi\right)\partial_\Psi\left[F\left(\Psi\right)\right] = -\mu_0 r^2\sin^2\theta\,\overline{\rho}\,G\left(\Psi\right). \tag{3.26}$$

Cette équation est similaire à l'équation de Grad-Shafranov (Grad & Rubin, 1958 [27] ; Shafranov, 1966 [52]) utilisée pour décrire les états d'équilibre dans les plasmas par confinement magnétique, notamment ceux de fusion. En effet dans ce cas celle-ci est donnée par $\Delta^*\Psi + F\left(\Psi\right)\partial_\Psi\left[F\left(\Psi\right)\right] = -\mu_0 r^2\sin^2\theta\partial_\Psi\left[P\left(\Psi\right)\right]$, où la pression P est prescrite en fonction de Ψ. Seul le terme source change, le problème physique étant fondamentalement différent : dans notre cas nous sommes dans un régime à haut β et à confinement gravitationnel, la densité joue donc un rôle prépondérant tandis que dans le second cas nous sommes dans une machine à confinement magnétique, où le plasma est à bas β et où les effets de la gravité sont négligeables devant l'équilibre entre la pression magnétique et la pression gazeuse.

Penchons-nous à présent sur les développements de F et G en fonction de Ψ. Premièrement, comme F est une fonction régulière, nous pouvons la développer en série de puissances positives de Ψ :

$$F(\Psi) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda_i}{R}\Psi^i, \tag{3.27}$$

les λ_i étant des coefficients nécessitant d'être explicités et R le rayon caractéristique du système. D'autre part, B_φ doit être régulier au centre de la sphère : le premier terme ($i = 0$) du développement doit donc être exclu (*cf.* éq. 3.6). F s'exprime donc selon le développement

$$F(\Psi) = \sum_{i>0} \frac{\lambda_i}{R} \Psi^i. \tag{3.28}$$

De la même manière, G peut être développée sous la forme générale

$$G(\Psi) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \Psi^j. \tag{3.29}$$

L'équation de Grad-Shafranov (3.26) devient :

$$\Delta^* \Psi + \sum_{k>0} \frac{\Lambda_k}{R^2} \Psi^k = -\mu_0 r^2 \sin^2\theta\, \overline{\rho} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \Psi^j, \tag{3.30}$$

où $\Lambda_k = \sum_{i_1>0} \sum_{i_2>0} \{i_2 \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \delta_{i_1+i_2-1,k}\}$, δ étant le symbole de Kronecker tel que $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, 1 sinon. Cette équation est la généralisation de celle obtenue par Prendergast en 1956 [47] dans le cas d'états barotropes incompressibles. La présence du terme source est ici indispensable pour tenir compte du caractère non force-free du champ.

3.2.4 Remarque concernant la densité de courant azimutale

La démarche que nous avions adoptée lors des premières recherches de configurations magnétiques était de contraindre le problème en se prescrivant la densité de courant azimutal. En effet celle-ci est reliée à la fonction de flux poloïdal Ψ par l'équation de type Grad-Shafranov Poisson :

$$\Delta^* \Psi = -\mu_0\, r \sin\theta j_\varphi(r, \theta). \tag{3.31}$$

Si ce modèle présentait l'intérêt d'être non force-free (voir [19, 20] en Annexe D), il introduisait une fonction arbitraire. Aussi, dès lors qu'il s'est avéré que la condition de barotropie fournissait une condition de fermeture, cette description caduque a été abandonnée.

3.3 États relaxés auto-gravitants

Ours, according to Leibniz, is the best of all possible worlds, and the laws of nature can therefore be described in terms of extremal principles. – C.L. Siegel & J.K. Moser 1971, p.1

3.3.1 Definitions et invariants axisymétriques

Il reste à contraindre les paramètres associés aux fonctions indéterminées F et G. Dans ce but, nous suivons la méthode donnée dans le cas axisymétrique par Chandrasekhar (1958) [14] et Woltjer (1959) [67], qui permet de trouver l'état d'équilibre d'énergie minimale compatible avec la conservation des invariants du problème. Nous introduisons dans cette section les coordonnées cylindriques (s, φ, z), où $s = r \sin\theta$ et $z = r\cos\theta$. Alors, le champ $\mathbf{B}$ donné en éq. (3.6) devient

$$\mathbf{B}\left(s,z\right) = \frac{1}{s}\nabla\,\Psi\left(s,z\right)\times\,\hat{\mathbf{e}}_{\varphi} + \frac{1}{s}F\left(s,z\right)\,\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}. \tag{3.32}$$

Nous introduisons également le potentiel vecteur $\mathbf{A}\left(s,z\right) = A_{\varphi}\left(s,z\right)\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$ défini en §3.1.2 de sorte que

$$\mathbf{B} = \nabla\,\times\mathbf{A} + \frac{F}{s}\hat{\mathbf{e}}_{\varphi} \quad \text{avec} \quad A_{\varphi}\left(s,z\right) = \frac{\Psi}{s}. \tag{3.33}$$

On utilisera ici l'expression pour le champ magnétique $\mathbf{B}$ utilisée par Chandrasekhar (1958) [14] et Woltjer (1959) [66, 67] :

$$\mathbf{B} = -s\,\partial_z\Phi\left(s,z\right)\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\partial_s\left[s^2\Phi\left(s,z\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}} + s\,\mathcal{T}\left(s,z\right)\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}, \tag{3.34}$$

$\{\widehat{\mathbf{e}}_k\}_{k=s,\varphi,z}$ étant la base des vecteurs unitaire en coordonnées cylindriques, ce qui permet d'identifier en utilisant l'éq. (3.32)

$$\Psi = s^2\Phi \quad \text{et} \quad F = s^2\mathcal{T}. \tag{3.35}$$

L'opérateur de Grad-Shafranov appliqué à Ψ peut ensuite s'exprimer comme suit :

$$\Delta^*\Psi = s^2\,\nabla\,\cdot\left(\frac{\nabla\,\Psi}{s^2}\right) = \left[\partial_{s^2} - \frac{1}{s}\partial_s + \partial_{z^2}\right]\Psi = s^2\Delta_5\Phi, \tag{3.36}$$

avec $\Delta_5 = \partial_{s^2} + \frac{3}{s}\partial_s + \partial_{z^2}$.

Nous introduisons maintenant les deux familles générales d'invariants associés aux états d'équilibres magnéto-hydrostatiques barotropes, qui ont été introduits en premier lieu par Woltjer (1959) [67] dans le cas compressible (voir également Wentzel, 1960 [64]) :

$$\mathcal{I}_{\mathrm{I};n} = \int_{\mathcal{V}} M_n\left(s^2\Phi\right)\overline{\rho}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}}\left(s^2\Phi\right)^n\overline{\rho}\,d\mathcal{V}, \tag{3.37}$$

$$\mathcal{I}_{\mathrm{II};q} = \int_{\mathcal{V}} N_q\left(s^2\Phi\right)\,\mathcal{T}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}}\left(s^2\Phi\right)^q\mathcal{T}\,d\mathcal{V}, \tag{3.38}$$

où M_n et N_q sont des fonctions arbitraires (voir Fig. 3.3). Ces dernières sont conservées tant que l'on vérifie aux limites

$$\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} = 0 \quad (i.e.\ \Phi = \mathcal{T} = 0). \tag{3.39}$$

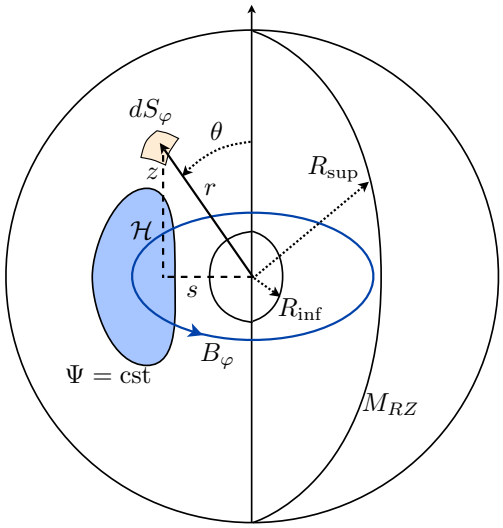


FIGURE 3.3 – Représentation schématique des deux systèmes de coordonnées utilisés et d'une surface iso-Ψ. Les invariants du système axisymétrique sont la masse totale de la zone radiative stellaire considérée $M_{\rm RZ}$, la masse englobée par une surface iso-Ψ, le flux toroïdal $\mathcal{F}_\varphi$ associé au champ magnétique toroïdal B_φ, et l'hélicité $\mathcal{H}$.

3.3.2 États relaxés barotropes

Concentrons-nous dans un premier temps sur $\mathcal{I}_{\mathrm{II};q}$ et N_q. Si l'on pose $N_0\left(s^2\Phi\right) = 1$, on obtient

$$\mathcal{I}_{\mathrm{II};0} = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{T}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = 2\,\pi \int_{\mathcal{S}} B_\varphi \mathrm{d}s\mathrm{d}z = 2\,\pi \int_{\mathcal{S}} B_\varphi\,\mathrm{d}\mathcal{S}_\varphi = 2\,\pi\,\mathcal{F}_\varphi \tag{3.40}$$

ce qui correspond à la conservation du flux du champ magnétique azimutal $\mathcal{F}_\varphi$ à travers une surface méridienne S de l'étoile en parfait équilibre MHD axisymétrique (notons que cet invariant a été isolé en premier lieu dans le cas incompressible par Chandrasekhar (1958) [14] qui l'a noté I_6).

Ensuite, si l'on pose $N_1\left(s^2\,\Phi\right) = s^2\,\Phi$, on obtient

$$\mathcal{I}_{\mathrm{II};1} = \int_{\mathcal{V}} \left(s^2\,\Phi\right)\mathcal{T}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} A_\varphi B_\varphi \mathrm{d}\mathcal{V} = \mathcal{H}/2, \tag{3.41}$$

où l'on identifie l'hélicité $\mathcal{H}/2$ (le fait qu'il s'agit de la moitié de l'hélicité globale sera discuté en section 3.5.1). Ainsi que nous l'avons décrit précédemment, celle-ci doit être conservée dans un fluide parfaitement conducteur, ainsi que dans des conditions réalistes, où même à très haute conductivité les reconnexions ayant lieu durant les premières phases de la relaxation se font à hélicité constante. En effet, lors des reconnexions, la densité d'hélicité perdue aux petites échelles se retrouve à plus grande échelle et ne modifie pas (ou très peu) la valeur globale, intégrée de l'hélicité. Pour cette raison, nous cherchons l'*état final d'équilibre* qui est l'état à énergie minimale que l'étoile peut atteindre en préservant l'axisymétrie et les invariants $\mathcal{I}_{\mathrm{I};n}$, $\mathcal{I}_{\mathrm{II};0} = \mathcal{F}_\varphi$ et $\mathcal{I}_{\mathrm{II};1} = \mathcal{H}/2$ dans le cas barotrope compressible.

Soit donc l'énergie totale du système

$$E = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \left\{ \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} + \rho\left[\Phi_{\text{grav}} + 2U\right] \right\} \mathrm{d}\mathcal{V}, \tag{3.42}$$

où U est l'énergie interne spécifique par unité de masse (*cf.* Woltjer, 1958, 1959 [65, 67] ; Broderick & Narayan, 2008 [8]). Celle-ci s'exprime après intégrations par parties (où l'on utilise le fait que Φ s'annule à la surface) :

$$E = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \left\{ \frac{1}{\mu_0}\left[-s^2\Phi\Delta_5\Phi + s^2\mathcal{T}^2\right] + \rho\left[\Phi_{\text{grav}} + 2U\right] \right\} \mathrm{d}\mathcal{V}. \tag{3.43}$$

Afin d'obtenir l'état d'énergie minimale pour les invariants donnés $\mathcal{I}_{\mathrm{I};n}$, à hélicité et flux magnétique azimutal donnés, on minimise E par rapport à $\mathcal{I}_{\mathrm{I};n}$, $\mathcal{I}_{\mathrm{II};0}$ et $\mathcal{I}_{\mathrm{II};1}$. Introduisons les multiplicateurs de Lagrange associés à ces invariants : $(a_{\mathrm{I};n}, a_{\mathrm{II};0}, a_{\mathrm{II};1})$. Cela mène à l'expression suivante pour la variation d'énergie :

$$\delta E + \sum_n a_{\mathrm{I};n}\,\delta\mathcal{I}_{\mathrm{I};n} + \sum_{q=0}^{1} a_{\mathrm{II};q}\,\delta\mathcal{I}_{\mathrm{II};q} = 0. \tag{3.44}$$

En suivant la méthode décrite dans Chandrasekhar (1958) [14] et appliquée dans le cas compressible par Woltjer (1959b) [67], on exprime δE et $\delta I_{J;r}$ en fonction de δP, $\delta\mathcal{T}$ et $\delta\rho$. Étant donné que ces variations sont indépendantes et arbitraires, leurs coefficients dans l'intégrande de l'éq. (3.44) doivent s'annuler séparément, ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0}\Delta_5\Phi &= \overline{\rho}\sum_n a_{\mathrm{I};n}\frac{\mathrm{d}M_n\left(s^2\Phi\right)}{\mathrm{d}\left(s^2\Phi\right)} + \sum_{q=0}^{1} a_{\mathrm{II};q}\,\mathcal{T}\,\frac{\mathrm{d}N_q\left(s^2\Phi\right)}{\mathrm{d}\left(s^2\Phi\right)} \\ &= \overline{\rho}\sum_n a_{\mathrm{I};n}\frac{\mathrm{d}M_n\left(s^2\Phi\right)}{\mathrm{d}\left(s^2\Phi\right)} + a_{\mathrm{II};1}\,\mathcal{T}, \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\frac{1}{\mu_0}s^2\,\mathcal{T} = -\sum_{q=0}^{1} a_{\mathrm{II};q}\,N_q\left(s^2\Phi\right) = -a_{\mathrm{II};0} - a_{\mathrm{II};1}s^2\Phi. \tag{3.46}$$

Concentrons nous d'abord sur la première famille d'invariants ($\mathcal{I}_{\mathrm{I}}$) donnés en éq. (3.37). Premièrement, la masse totale de la zone radiative M_{RZ} est une quantité globale non-magnétique, qui est un invariant de l'équilibre considéré. On pose donc $M_0\left(s^2\Phi\right) = 1$ ce qui mène naturellement à

$$\mathcal{I}_{\mathrm{I};0} = \int_{\mathcal{V}} \overline{\rho}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = M_{\mathrm{RZ}}. \tag{3.47}$$

Ensuite, comme le système est axisymétrique, les surfaces magnétiques $s^2\Phi = \text{cste}$ sont des surfaces fermées dont la masse qu'elles englobent reste constante. En posant $M_1\left(s^2\Phi\right) = s^2\Phi$, il est donc possible d'introduire le second invariant

$$\mathcal{I}_{\mathrm{I};1} = \int_{\mathcal{V}} \left(s^2\Phi\right)\overline{\rho}\,\mathrm{d}\mathcal{V}. \tag{3.48}$$

Convaincus du caractère nécessairement non force-free du champ, ce second invariant se doit d'être pris en compte, ainsi que proposé par Chandrasekhar (1956), Prendergast (1956)

et Woltjer (1958) [13, 47, 65]. Sa stricte conservation lors de reconnexions rapides se doit d'être vérifiée à partir de simulations de MHD résistive débordant du cadre de ce travail de thèse.
À partir des éqs. (3.45-3.46), on obtient donc les équations suivantes décrivant l'état d'équilibre axisymétrique barotrope d'énergie minimale que l'étoile puisse atteindre en conservant les invariants que sont la masse de la zone radiative ($\mathcal{I}_{\mathrm{I};0} = M_{\mathrm{RZ}}$), la masse contenue dans chaque tube de flux ($\mathcal{I}_{\mathrm{I};1}$), le flux de champ magnétique toroïdal ($\mathcal{I}_{\mathrm{II};0} = \mathcal{F}_\varphi$) et l'hélicité ($\mathcal{I}_{\mathrm{II};1} = \mathcal{H}/2$) :

$$\frac{1}{\mu_0}\Delta_5\Phi = a_{\mathrm{I};1}\,\overline{\rho} + a_{\mathrm{II};1}\,\mathcal{T}, \tag{3.49}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\mathcal{T} = -a_{\mathrm{II};1}\Phi - \frac{a_{\mathrm{II};0}}{s^2}. \tag{3.50}$$

Étant donné que le champ magnétique azimutal doit être nul à l'origine, on a d'après l'éq. (3.34) $a_{\mathrm{II};0} = 0$. En éliminant $\mathcal{T}$ entre les éqs. (3.49-3.50), on obtient

$$\Delta_5\Phi + \left[\mu_0 a_{\mathrm{II};1}\right]^2\Phi = \mu_0\, a_{\mathrm{I};1}\,\overline{\rho}, \tag{3.51}$$

qui devient, après multiplication par s^2 et à l'aide des éqs. (3.35) & (3.36)

$$\Delta^*\Psi + \left[\mu_0 a_{\mathrm{II};1}\right]^2\Psi = \mu_0\, a_{\mathrm{I};1}\,\overline{\rho}\, r^2 \sin^2\theta. \tag{3.52}$$

On peut donc identifier dans l'équation de Grad-Shafranov non-linéaire (3.30)

$$\left\{\begin{array}{l} k{=}1 \\ j{=}0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} a_{\mathrm{I};1} = \quad -\beta_0 \\ a_{\mathrm{II};1} = -\frac{1}{\mu_0}\lambda_1/R \end{array}\right. , \tag{3.53}$$

où l'on a contraint les fonctions arbitraires issues de l'équilibre magnéto-hydrostatique

$$F(\Psi) = -\mu_0 a_{\mathrm{II};1}\Psi \quad \text{et} \quad G(\Psi) = -a_{\mathrm{I};1}. \tag{3.54}$$

Enfin, l'équation (3.30) se réécrit

$$\Delta^*\Psi + \frac{\lambda_1^2}{R^2}\Psi = -\mu_0\,\overline{\rho}\, r^2 \sin^2\theta\,\beta_0, \tag{3.55}$$

les valeurs des coefficients réels λ_1 et β_0 étant donc contrôlés par l'hélicité ($\mathcal{H}$) et la conservation de la masse dans chaque tore magnétique défini par $\Psi = \mathrm{cst}$. Il apparaît donc, étant donné que $\mathcal{I}_{\mathrm{I};1} \neq 0$ dans le cas auto-gravitant que $\beta_0 \neq 0$ et donc le champ est non force-free dans le cas général axisymétrique auto-gravitant.

Cela correspond donc à l'*état d'énergie minimale à hélicité donnée* (*cf.* Bellan, 2000 [2] et Broderick & Narayan, 2008 [8]). Ainsi, les états d'équilibre régis par l'éq. (3.55) sont donc la *généralisation de l'état de relaxation de Taylor dans le cas compressible, avec champ magnétique non force-free* (*i.e.* $\nabla \times \mathbf{B} \neq \alpha\,\mathbf{B}$).

Remarquons que dans le cas où $\mathcal{I}_{\mathrm{I};1}$ n'est pas pris en compte ($a_{\mathrm{I};1} = \beta_0 = 0$), ou bien encore lorsque la densité tend vers 0, nous retrouvons l'état décrit par Chandrasekhar (1956) [10] dans la limite force-free (voir également les travaux de Marsh, 1992 [37] pour une généralisation de ses solutions) et l'état de Taylor usuel pour les plasmas à faible β.

3.3.3 Solution à l'aide de la méthode des fonctions de Green

Nous sommes maintenant prêts pour résoudre l'éq. (3.55). En introduisant $x = \cos\theta$ et $\mathcal{S}(r,\theta) = -\mu_0\,\beta_0\,\overline{\rho}\,r^2\sin^2\theta$, celle-ci se réexprime sous la forme :

$$\mathcal{L}_{\lambda_1}\Psi = \mathcal{S}, \tag{3.56}$$

où

$$\mathcal{L}_{\lambda_1} \equiv \left[\partial_{r^2} + \frac{1-x^2}{r^2}\partial_{x^2} + \frac{\lambda_1^2}{R^2}\right]. \tag{3.57}$$

L'équation homogène associée à l'éq. (3.56) s'écrit

$$\mathcal{L}_{\lambda_1}\Psi_{\mathrm{h}} = 0. \tag{3.58}$$

On peut montrer facilement que cette équation homogène peut se mettre sous forme séparable. Soit donc $\Psi_{\mathrm{h}} = \sum_l f_l(r)\,g_l(\theta)$ vérifiant

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2 g_l}{\mathrm{d}x^2} + (l+1)(l+2)\,g_l = 0 \tag{3.59}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_l}{\mathrm{d}r^2} + \left[\left(\frac{\lambda_1^l}{R_{\mathrm{sup}}}\right)^2 - \frac{(l+1)(l+2)}{r^2}\right] f_l = 0. \tag{3.60}$$

Les solutions respectives sont données par

$$g_l = \left(1-x^2\right) C_l^{3/2}(x) \tag{3.61}$$

et

$$f_l = K_1^l\,\lambda_1^l\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\,j_{l+1}\left(\lambda_1^l\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\right) + K_2^l\,\lambda_1^l\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\,y_{l+1}\left(\lambda_1^l\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\right), \tag{3.62}$$

j_l et y_l étant respectivement les fonctions de Bessel sphériques de première et de deuxième espèce (ces dernières sont également appelées fonctions de Neumann), tandis que les fonctions $C_l^{3/2}$ sont les polynômes de Gegenbauer ou polynômes « ultrasphériques » (*cf.* Abramowitz & Stegun, 1972 [1]). K_1^l et K_2^l sont des constantes réelles. R_{inf} et R_{sup} sont respectivement le rayon limite inférieur et supérieur (on a posé $R = R_{\mathrm{sup}}$). Notons que pour préserver la régularité de la solution au centre, il faut imposer $K_2^l = 0$.
Par ailleurs les valeurs λ_1^l sont les valeurs propres permettant de vérifier les conditions aux limites imposées.

En utilisant la méthode des fonctions de Green (voir Annexe C), on obtient la solution particulière associée au terme source $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathrm{p}}(r,x) \;=\; &-\mu_0\,\beta_0\sum_l \frac{\lambda_1^l}{R_{\mathrm{sup}}}\left[\frac{2l+3}{2(l+1)(l+2)}\right]\times\left(1-x^2\right)C_l^{3/2}(x)\times\\ &\left\{r\,j_{l+1}\left(\lambda_1^l\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\int_r^{R_{\mathrm{sup}}}\left[\xi\,y_{l+1}\left(\lambda_1^l\frac{\xi}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\mathcal{J}_l(\xi)\right]\mathrm{d}\xi\right.\\ &\left.+r\,y_{l+1}\left(\lambda_1^l\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\int_{R_{\mathrm{inf}}}^{r}\left[\xi\,j_{l+1}\left(\lambda_1^l\frac{\xi}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\mathcal{J}_l(\xi)\right]\mathrm{d}\xi\right\},\end{aligned} \tag{3.63}$$

avec

$$\mathcal{J}_l\left(\xi\right) = \int_{-1}^{1} \mathcal{S}\left(\xi, x'\right) C_l^{3/2}\left(x'\right) \mathrm{d}x'. \tag{3.64}$$

Appliqué à l'éq. (3.55), on obtient finalement la solution générale $\Psi = \Psi_\mathrm{h} + \Psi_\mathrm{p}$:

$$\begin{aligned}\Psi\left(r,\theta\right) \;=\; \sin^2\theta \;\times \Bigg\{ & \sum_{l=0}^{\infty} K_1^l \frac{\lambda_1^{l,i}}{R_\mathrm{sup}}\, r\, j_{l+1}\left(\lambda_1^{l,i}\frac{r}{R_\mathrm{sup}}\right) C_l^{3/2}\left(\cos\theta\right) \\ & - \mu_0\beta_0 \frac{\lambda_1^{0,i}}{R_\mathrm{sup}} r j_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{r}{R_\mathrm{sup}}\right)\int_r^{R_\mathrm{sup}}\left[y_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{\xi}{R_\mathrm{sup}}\right)\overline{\rho}\xi^3\right]\mathrm{d}\xi \\ & - \mu_0\beta_0 \frac{\lambda_1^{0,i}}{R_\mathrm{sup}} r y_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{r}{R_\mathrm{sup}}\right)\int_{R_\mathrm{inf}}^{r}\left[j_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{\xi}{R_\mathrm{sup}}\right)\overline{\rho}\xi^3\right]\mathrm{d}\xi \Bigg\}.\end{aligned} \tag{3.65}$$

Notons que la fonction Ψ_p présente une géométrie dipolaire en raison de sa dépendance angulaire en $\mathcal{S} = -\mu_0\,\beta_0\,\overline{\rho}\,r^2\sin^2\theta$ qui suit celle du terme source.
Par ailleurs, si l'on néglige la densité, on annule ce dernier et on se ramène alors à l'équation homogène, force-free, dont sont solutions les fonctions dites *de Chandrasekhar-Kendall* [12]. Ces dernières génèrent un champ magnétique $\mathbf{B}_{ff}$ que l'on qualifie de « champ de Beltrami », qui vérifie $\mathbf{B}_{ff}\cdot\nabla\,\times\mathbf{B}_{ff} = 0$. Autrement dit, $\mathbf{B}_{ff}$ et le courant associé $\mathbf{j}_{ff}$ sont colinéaires, ce qui représente bien l'état de Taylor. De surcroît, le terme source ne comportant qu'une composante dipolaire, il s'ensuit que *toutes les contributions non-dipolaires sont, selon ce modèle, force-free.*

Le champ magnétique est ensuite donné pour $r \leq R_\mathrm{sup}$ par

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\Psi\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} - \frac{1}{r\sin\theta}\partial_r\Psi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\lambda_1^{0,i}}{R_\mathrm{sup}}\frac{\Psi}{r\sin\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi. \tag{3.66}$$

Après quelques manipulations algébriques et à l'aide de l'éq. (2.1) on peut écrire

$$\mathbf{j}_\mathrm{P} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\,\times\mathbf{B}_\mathrm{T} = \underbrace{\frac{\lambda_1^{0,i}}{\mu_0\,R}\,\mathbf{B}_\mathrm{P}}_{force-free} \tag{3.67}$$

$$\mathbf{j}_\mathrm{T} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\,\times\mathbf{B}_\mathrm{P} = \underbrace{\frac{\lambda_1^{0,i}}{\mu_0\,R}\,\mathbf{B}_\mathrm{T}}_{force-free} + \underbrace{\beta_0\,\rho\,r\sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi}_{non\ force-free} \tag{3.68}$$

où l'on reconnaît dans le premier terme du membre de droite la contribution force-free et dans le second *la contribution non force-free, toute entière contenue dans la densité de courant azimutale.*
La force de Lorentz peut en effet s'écrire dès lors sous la forme remarquablement simple

$$\mathbf{F}_\mathcal{L} = \mathbf{F}_{\mathcal{L};\mathrm{P}} = \beta_0\,\rho\,\nabla\,\Psi. \tag{3.69}$$

3.3.4 Configurations

Les conditions aux limites pour Ψ déterminant les valeurs possibles pour K_1^l et $\lambda_1^{0,i}$ doivent à présent être discutées. Deux sortes de géométries sont pertinentes pour modéliser les champs magnétiques de grandes échelles dans les intérieurs stellaires : les configurations ouvertes et fermées.

Configurations confinées

Concentrons-nous de prime abord sur la solution mathématique la plus simple dans le cas d'une zone radiative : celle qui annule Ψ à la fois au centre ($R_{\rm inf} = 0$) et à un rayon de confinement donné $R_{\rm sup} = R_c$, *e.g.* l'interface ZR-ZC (zone radiative-zone convective). Dans ce cas, si l'on choisit d'annuler les coefficients K_1^l pour chaque mode l, la condition $\Psi(0,\theta) = 0$ est vérifiée étant donné que $\lim_{r\to 0} r\, j_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{r}{R_{\rm sup}}\right) = 0$. Cependant, si l'on examine le comportement du champ magnétique radial à proximité du centre, on peut montrer à l'aide de l'éq. (3.66) que si $K_1^0 = 0$, la valeur radiale de B_r est donnée par $\lim_{r\to 0} r^{-1} j_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{r}{R_{\rm sup}}\right)$ qui ne s'annule pas. Ainsi l'on aurait $\lim_{r\to 0} B_r\,(r,\theta) = C\,\cos\theta$ (où $C \in \mathbb{R}^*$) : donc en un point donné B_r serait multivalué. Donc, bien que le champ soit malgré tout à divergence nulle (par construction), cette solution est inacceptable et $K_1^0 \neq 0$.

Considérons maintenant le cas plus général d'un champ magnétique confiné entre deux rayons $R_{\rm inf} = R_{c_1}$ et $R_{\rm sup} = R_{c_2}$, en raison de la présence d'un cœur convectif et d'une enveloppe convective (tel que c'est le cas dans les étoiles Ap). On impose alors $\Psi\,(R_{c_1},\theta) = 0$ et $\Psi\,(R = R_{c_2},\theta) = 0$. Nous nous concentrerons ici sur le mode dipolaire, dont on sait qu'il s'agit de celui à énergie minimale par hélicité (*cf.* Broderick & Narayan, 2008 [8]) ; ce qui donne deux équations indépendantes pour $l = 0$:

$$K_1^0 = \mu_0\,\beta_0 \int_{R_{c_1}}^{R_{c_2}} \left[y_1\left(\lambda_1^{0,i}\,\frac{\xi}{R_{c_2}}\right)\overline{\rho}\,\xi^3\right] \mathrm{d}\xi \tag{3.70}$$

et

$$K_1^0 j_1\left(\lambda_1^{0,i}\right) = \mu_0\,\beta_0 y_1\left(\lambda_1^{0,i}\right) \int_{R_{c_1}}^{R_{c_2}} \left[j_1\left(\lambda_1^{0,i}\,\frac{\xi}{R_{c_2}}\right)\overline{\rho}\,\xi^3\right] \mathrm{d}\xi. \tag{3.71}$$

On peut reformuler ces deux équations portant sur K_1^0 et $\lambda_1^{0,i}$ de sorte à déterminer d'abord $\lambda_1^{0,i}$ selon [3]

$$j_1\left(\lambda_1^{0,i}\right) \int_{R_{c_1}}^{R_{c_2}} \left[y_1\left(\lambda_1^{0,i}\,\frac{\xi}{R_{c_2}}\right)\overline{\rho}\,\xi^3\right] \mathrm{d}\xi - y_1\left(\lambda_1^{0,i}\right) \int_{R_{c_1}}^{R_{c_2}} \left[j_1\left(\lambda_1^{0,i}\,\frac{\xi}{R_{c_2}}\right)\overline{\rho}\,\xi^3\right] \mathrm{d}\xi = 0, \tag{3.72}$$

et ensuite déterminer K_1^0 selon (3.70).

Finalement, dans le cas que nous avons discuté au préalable où l'on ne prend pas en compte la présence d'un cœur convectif, comme par exemple dans la zone radiative centrale d'une étoile de type solaire, les éqs. (3.70) & (5.108) doivent être appliquées avec $R_{c_1} \to 0$.

Configurations ouvertes

Cela correspond au cas de champs magnétiques qui se connectent à la surface (en $r = R_*$) avec un champ potentiel (donc force-free) multipolaire, tel que c'est le cas pour toutes les étoiles possédant des champs magnétiques de grandes échelles à leurs surfaces. Nous avons alors $\mathbf{B}_{\rm ext} = \nabla\,\Phi_{\rm M}$, $\Phi_{\rm M}$ étant le potentiel magnétique associé.

3. Numériquement on cherchera d'abord à inverser le signe du produit des deux termes du membres de gauche de (5.108), puis on raffinera la solution par dichotomie ou méthode de la sécante.

Dans le contexte de recherche de solutions correspondant aux états relaxés conservant les invariants $\mathcal{I}_{\mathrm{I};0}$, $\mathcal{I}_{\mathrm{I};1}$, $\mathcal{I}_{\mathrm{II};0}$, et $\mathcal{I}_{\mathrm{II};1}$, nous avons supposé que $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} = 0$ aux limites. Donc ici cette famille de solutions est *a priori* exclue. Cela nous ramène donc aux configurations confinées, qui peuvent être vues comme un prélude potentiel aux configurations ouvertes, que ces premières atteindraient après diffusion ohmique, tel que proposé dans le scenario de Braithwaite *et al.* [6, 5] et dont la mise en œuvre dans un code d'évolution stellaire sera détaillée dans les chapitres 5 et 6, tout aussi bien qu'une condition initiale au transport magnéto-rotationnel, qui sera traité plus en détail dans le chapitre 6.

3.4 Application aux intérieurs stellaires

Pour illustrer mon propos, j'ai appliqué ces résultats analytiques (i) pour modéliser un champ magnétique de grande échelle confiné dans la zone radiative du Soleil, le rayon de confinement situé à l'interface entre la zone convective et la zone radiative en $R_c = 0.7132\ \mathrm{R}_\odot$; puis (ii) pour modéliser le champ magnétique présent dans la zone radiative d'une étoile de type A de $2.40 M_\odot$ proche de la ZAMS, dont les limites des interfaces ZR-ZC sont localisées en $R_{c_1} = 0.1337\, R_*$ et $R_{c_2} = 0.9926\, R_*$.
Dans le premier cas, le paramètre β_0 est déterminé de sorte que l'amplitude maximale du champ atteigne la valeur $B_0 \simeq 2\,\mathrm{MG}$ [23]. Dans le second cas, l'amplitude du champ a été prise égale à $B_0 = 10\,\mathrm{kG}$, du même ordre de grandeur que l'intensité moyenne du champ magnétique à la surface de certaines étoiles Ap présentant une forte contribution dipolaire (tel que pour l'étoile HD12288 ; *cf.* Wade *et al.*, 2000 [63]).
Plus de détails concernant les choix de ces modèles ainsi que les amplitudes choisies seront fournis dans le chapitre 5, section 5.3.1. L'objet du propos ici est moins de s'intéresser à l'intensité du champ que de se représenter sa géométrie dans une structure réaliste. Les amplitudes respectives des champs poloïdaux et toroïdaux pourront ainsi être discutés, ainsi que la possible stabilité des configurations dérivées.

3.4.1 Champ confiné dans la zone radiative solaire

Nous donnons en Fig. 3.4a une représentation tridimensionnelle des lignes de champ (tangentes en tout point au champ magnétique) de la configuration mixte poloïdale-toroïdale associée au mode radial $l = 1$, obtenue grâce aux éqs. (3.65, 3.66, 3.70, 5.108). Sont représentées aussi en Fig. 3.4b les surfaces iso-Ψ et iso-B_φ associées à ce mode dans le plan méridien. En Fig. 3.5 deux autres configurations possibles pour Ψ sont représentées : celles correspondant à la troisième et la cinquième valeur propre ($\lambda_1^{0,l}$ où $l = \{3, 5\}$, données en table 3.1).

Valeur propre	Cas solaire	Cas de l'étoile Ap
$\lambda_1^{0,1}$	5.276	4.896
$\lambda_1^{0,2}$	9.157	8.833
$\lambda_1^{0,3}$	12.951	12.721
$\lambda_1^{0,4}$	16.291	16.545
$\lambda_1^{0,5}$	19.838	20.308

Table 3.1 – Valeurs propres des cinq premiers équilibres pour les deux configurations étudiées.

3.4.2 Champ confiné dans la zone radiative d'une étoile de type Ap

De même que dans le cas du Soleil, nous donnons en FIG. 3.6 les configurations pour Ψ correspondant à la première, la troisième et la cinquième valeur propre ($\lambda_1^{0,l}$ où $l = \{1, 3, 5\}$, données en table 3.1). Dans ce cas l'influence du cœur convectif est prise en compte dans le calcul des configurations.

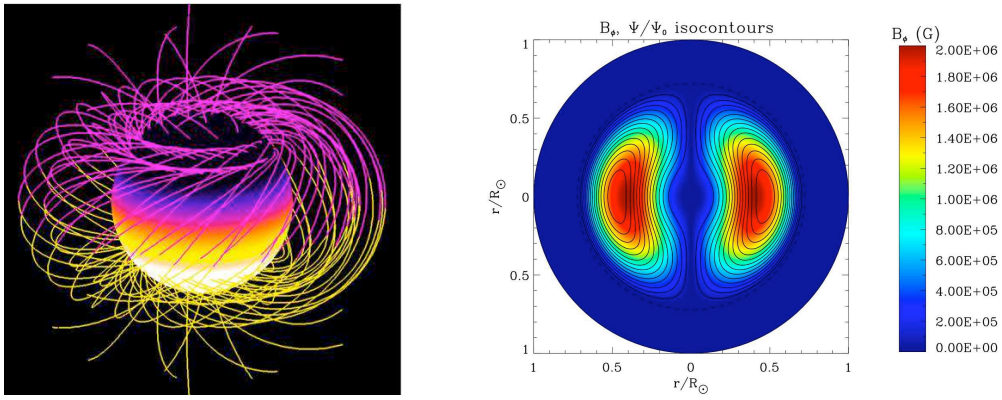


FIGURE 3.4 – À gauche (a), Représentation tridimensionnelle des lignes de champ pour la configuration de champ magnétique mixte poloïdale-toroïdale confinée dans la zone radiative du Soleil ; à droite (b), représentation de l'intensité du champ magnétique toroïdal (échelle de couleurs) et des lignes iso-Ψ dans le plan méridien.

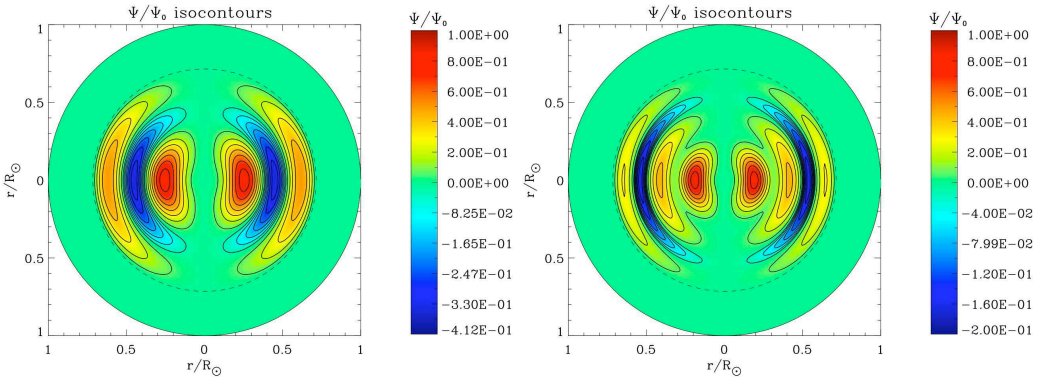


FIGURE 3.5 – Isocontours normalisés de la fonction de flux magnétique Ψ dans le plan méridien, pour le cas du Soleil, associées à la troisième valeur propre possible ($\lambda_1^{0,3}$, à gauche) et à la cinquième ($\lambda_1^{0,5}$, à droite).

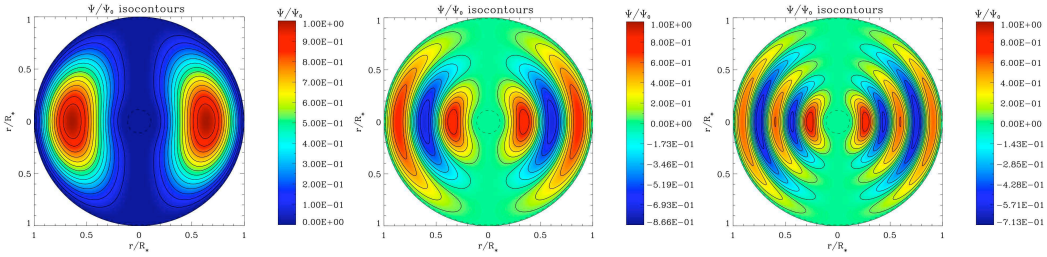


FIGURE 3.6 – Isocontours normalisés de la fonction de flux magnétique Ψ dans le plan méridien, pour le cas d'une étoile Ap, associées à la première valeur propre possible ($\lambda_1^{0,1}$, à gauche), à la troisième ($\lambda_1^{0,3}$, au milieu) et à la cinquième ($\lambda_1^{0,5}$, à droite).

3.5 Liens entre l'hélicité, la topologie et l'énergie du champ

3.5.1 Hélicité *vs.* mixité

Exprimons le champ magnétique $\mathbf{B}$ donné en terme de *fonctions de courant magnétiques* poloïdale ξ_{P} et toroïdale ξ_{T} :

$$\mathbf{B} = \nabla \times [\nabla \times (\xi_{\mathrm{P}}(r,\theta)\ \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}) + \xi_{\mathrm{T}}(r,\theta)\ \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}]\,. \tag{3.73}$$

Le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ est donné par la relation $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$; sachant que dans le cas confiné le choix de jauge est sans importance nous pouvons identifier sans autre forme de procès

$$\mathbf{A} = \nabla \times (\xi_{\mathrm{P}}(r,\theta)\ \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}) + \xi_{\mathrm{T}}(r,\theta)\ \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}. \tag{3.74}$$

On projette alors les fonctions de courant magnétique sur les harmoniques sphériques (*cf.* chapitre 5 et Annexe 2.) selon

$$\xi_{\mathrm{P}}(r,\theta) = \sum_{\ell} \xi_0^{\ell}(r)\ Y_{\ell}^0(\theta)\,; \tag{3.75}$$

$$\xi_{\mathrm{T}}(r,\theta) = \sum_{\ell} \chi_0^{\ell}(r)\ Y_{\ell}^0(\theta)\,. \tag{3.76}$$

Dans la suite nous adopterons la convention d'Einstein $A^{\ell}\,B_{\ell} = \sum_{\ell} A^{\ell}\,B_{\ell}$ ainsi que la base des harmoniques sphériques vectorielles $\left(\mathbf{R}_{\ell}^0, \mathbf{S}_{\ell}^0, \mathbf{T}_{\ell}^0\right)$ telle que tout champ de vecteurs $\mathbf{u}(\mathbf{r},\theta)$ axisymétrique peut se projeter suivant

$$\mathbf{u}(r,\theta,\varphi) = u_0^{\ell}(r)\,\mathbf{R}_{\ell}^0(\theta) + v_0^{l}(r)\,\mathbf{S}_{\ell}^0(\theta) + w_0^{\ell}(r)\,\mathbf{T}_{\ell}^0(\theta), \tag{3.77}$$

où les harmoniques sphériques vectorielles $\mathbf{R}_{\ell}^0(\theta)$, $\mathbf{S}_{\ell}^0(\theta)$ et $\mathbf{T}_{\ell}^0(\theta)$ sont définies par :

$$\mathbf{R}_{\ell}^0(\theta) = Y_{\ell}^0(\theta)\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}},\ \mathbf{S}_{\ell}^0(\theta) = \nabla_{\mathcal{S}} Y_{\ell}^0(\theta) \text{ et } \mathbf{T}_{\ell}^0(\theta) = \nabla_{\mathcal{S}} \wedge \mathbf{R}_{\ell}^{\mathbf{0}}(\theta)\,, \tag{3.78}$$

le gradient horizontal s'exprimant $\nabla_{\mathcal{S}} = \hat{\mathbf{e}}_{\theta}\,\partial_{\theta}$ (*cf.* Rieutord, 1987 [50]).
Sachant que $\nabla \times (\xi_{\mathrm{P}}\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}) = \nabla \times \left(\xi_0^{\ell}\,Y_{\ell}^0\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}\right) = \nabla \times \left(\xi_0^{\ell}\,\mathbf{R}_{\ell}^0\right) = \left(\xi_0^{\ell}/r\right)\mathbf{T}_{\ell}^0$, nous avons donc

$$\mathbf{A} = \chi_0^{\ell}\,\mathbf{R}_{\ell}^0 + \frac{1}{r}\xi_0^{\ell}\mathbf{T}_{\ell}^0. \tag{3.79}$$

Par ailleurs on a

$$\mathbf{B} = \frac{\ell\,(\ell+1)}{r^2}\xi_0^\ell\,\mathbf{R}_\ell^0 + \frac{1}{r}\partial_r\xi_0^\ell\,\mathbf{S}_\ell^0 + \frac{1}{r}\chi_0^\ell\mathbf{T}_\ell^0, \tag{3.80}$$

d'où l'expression de l'hélicité suivante :

$$\mathcal{H} = \int_0^{R_*}\int_\Omega \left[\chi_0^\ell\,\mathbf{R}_\ell^0 + \frac{1}{r}\xi_0^\ell\mathbf{T}_\ell^{\mathbf{0}}\right]\cdot\left[\frac{\ell'\,(\ell'+1)}{r^2}\xi_0^{\ell'}\,\mathbf{R}_{\ell'}^0 + \frac{1}{r}\partial_r\xi_0^{\ell'}\,\mathbf{S}_{\ell'}^0 + \frac{1}{r}\chi_0^{\ell'}\mathbf{T}_{\ell'}^{\mathbf{0}}\right]\,r^2 dr d\Omega. \tag{3.81}$$

Si l'on introduit alors l'hélicité « poloïdale » que l'on définit par $\mathcal{H}_\mathrm{P} = \int_\mathcal{V}\mathbf{A}_\mathrm{P}\cdot\mathbf{B}_\mathrm{P}\,d\mathcal{V}$ et l'hélicité « toroïdale » que l'on définit par $\mathcal{H}_\mathrm{T} = \int_\mathcal{V} A_\varphi B_\varphi\,d\mathcal{V}$, $\left(\mathbf{R}_\ell^0, \mathbf{S}_\ell^0, \mathbf{T}_\ell^0\right)$ constituant une base, on a en reprenant l'expression précédente :

$$\mathcal{H} = \int_0^{R_*}\left[\frac{\ell\,(\ell+1)}{r^2}\,\xi_0^\ell\,\chi_0^{\ell'}\int_\Omega \mathbf{R}_\ell^0\,\mathbf{R}_{\ell'}^0\,d\Omega + \frac{1}{r^2}\,\chi_0^\ell\,\xi_0^{\ell'}\int_\Omega \mathbf{T}_\ell^0\,\mathbf{T}_{\ell'}^0\,d\Omega\right]r^2 dr \tag{3.82}$$

et on vérifie par identification que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\mathrm{P} + \mathcal{H}_\mathrm{T}. \tag{3.83}$$

De l'expression (3.82) nous pouvons tirer deux conclusions :

1. Un champ doit être mixte (poloïdal et toroïdal) pour être hélicitaire : on le vérifie directement en imposant $\xi_\mathrm{P} = 0$ ou $\xi_\mathrm{T} = 0$;
2. Les hélicités poloïdale et toroïdale sont égales dans le cas où le champ radial est nul à la surface. En effet, d'après ce qui précède, on obtient en exploitant les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\int_\Omega \mathbf{R}_\ell^0\,\mathbf{R}_{\ell'}^0\,d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \quad \text{et} \quad \int_\Omega \mathbf{T}_\ell^0\,\mathbf{T}_{\ell'}^0\,d\Omega = \begin{cases} \ell\,(\ell+1) & \text{si} \quad \ell = \ell' \\ 0 & \text{si} \quad \ell \neq \ell' \end{cases}, \tag{3.84}$$

que finalement

$$\mathcal{H}_\mathrm{P} = \mathcal{H}_\mathrm{T} = \ell\,(\ell+1)\int_0^{R_*}\xi_0^\ell\,\chi_0^\ell\,dr = \mathcal{H}/2. \tag{3.85}$$

3.5.2 Hélicité *vs.* énergie

Intéressons-nous à présent à l'expression de l'hélicité en termes de la fonction de potentiel magnétique Ψ. On cherche à exprimer $\mathbf{B}$ comme le rotationnel d'un potentiel vecteur. Les éqs. (3.67) et (3.68) se réécrivent

$$\mathbf{B}_\mathrm{P} = \frac{R}{\lambda_1^{0,i}}\nabla\times\mathbf{B}_\mathrm{T}, \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_\mathrm{T} &= \frac{R}{\lambda_1^{0,i}}\nabla\times\mathbf{B}_\mathrm{P} - \frac{R}{\lambda_1^{0,i}}\,\mu_0\,\beta_0\,\rho\,r^2\,\sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ &= \frac{R}{\lambda_1^{0,i}}\nabla\times\left[\mathbf{B}_\mathrm{P} - \mu_0\,\beta_0\,\rho\,r^2\,\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}\right].\end{aligned} \tag{3.87}$$

Nous avons donc les deux potentiels vecteurs :

$$\mathbf{A}_{\mathrm{P}} = \frac{R}{\lambda_1^{0,i}} \left(\mathbf{B}_{\mathrm{P}} - \mu_0 \, \beta_0 \, \rho \, r^2 \, \cos\theta \, \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \right) + \nabla \, \Lambda_{\mathrm{P}}, \tag{3.88}$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{T}} = \frac{R}{\lambda_1^{0,i}} \mathbf{B}_{\mathrm{T}} + \nabla \, \Lambda_{\mathrm{T}}, \tag{3.89}$$

Λ_{P} et Λ_{T} étant des champs de jauge scalaires laissés libres. En calculant les hélicités poloïdale et toroïdale avec la condition $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} = 0$ à la surface, ceux-ci disparaissent après intégration et on trouve :

$$\mathcal{H}_{\mathrm{P}} = \frac{2 \, \mu_0 \, R}{\lambda_1^{0,i}} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{B}_{\mathrm{P}}^2}{2 \, \mu_0} \, d\mathcal{V} - \frac{\mu_0 \, R}{\lambda_1^{0,i}} \beta_0 \int_{\mathcal{V}} \rho \, \Psi \, d\mathcal{V}, \tag{3.90}$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{T}} = \frac{2 \, \mu_0 \, R}{\lambda_1^{0,i}} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{B}_{\mathrm{T}}^2}{2 \, \mu_0} \, d\mathcal{V}, \tag{3.91}$$

soit, en introduisant $\mathcal{E}_{\mathrm{mag,P}} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{B}_{\mathrm{P}}^2}{2 \, \mu_0} \, d\mathcal{V}$ et $\mathcal{E}_{\mathrm{mag,T}} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{B}_{\mathrm{T}}^2}{2 \, \mu_0} \, d\mathcal{V}$:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{P}} = \frac{2 \, \mu_0 \, R}{\lambda_1^{0,i}} \mathcal{E}_{\mathrm{mag,P}} - \frac{\mu_0 \, R}{\lambda_1^{0,i}} \beta_0 \, \mathcal{I}_{I;1}, \tag{3.92}$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{T}} = \frac{2 \, \mu_0 \, R}{\lambda_1^{0,i}} \mathcal{E}_{\mathrm{mag,T}}. \tag{3.93}$$

Finalement en additionnant ces deux dernières équations on obtient la relation globale liant l'hélicité et l'énergie magnétique :

$$\mathcal{H} = \frac{2 \, \mu_0 \, R}{\lambda_1^{0,i}} \left(\mathcal{E}_{\mathrm{mag}} - \frac{1}{2} \, \beta_0 \, \mathcal{I}_{I;1} \right), \tag{3.94}$$

où l'on reconnaît dans le dernier terme la contribution non force-free.

3.5.3 Applications

Sont tracées en Fig. 3.7a et 3.7b les hélicités poloïdale, toroïdale et totale en fonction du paramètre $\lambda_1^{0,i}$ respectivement dans le cas du Soleil et de l'étoile de type Ap. Il apparaît clairement que les hélicités poloïdales et toroïdales sont égales pour les valeurs propres données en Tab. 3.1 (indiquées par des diamants rouges). En Fig. 3.8a et 3.8b sont représentés les rapports $\mathcal{E}_{\mathrm{mag}}/\mathcal{H}$ poloïdaux, toroïdaux et globaux avec prise en compte ou non de la contribution non force-free en fonction du paramètre $\lambda_1^{0,i}$ respectivement dans le cas du Soleil et de l'étoile de type Ap. On constate que la première valeur propre $\lambda_1^{0,1}$ est bien celle donnant la configuration d'énergie minimale.

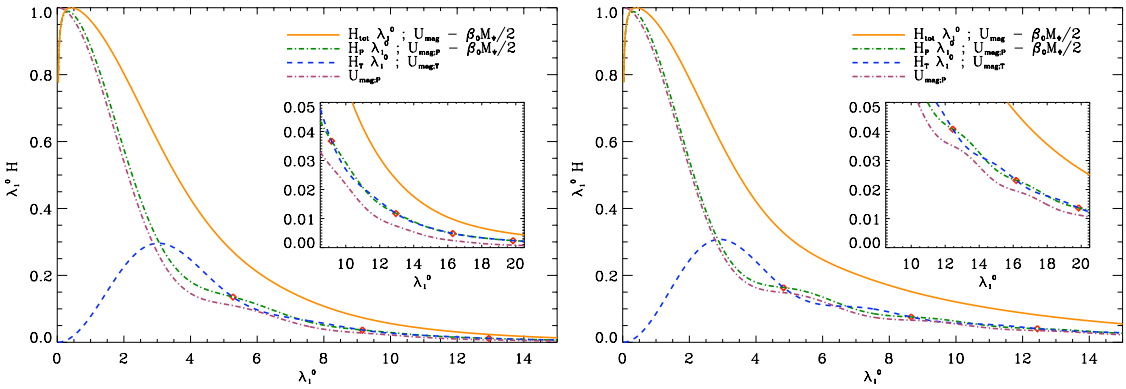


FIGURE 3.7 – Hélicités poloïdale, toroïdale et totale (normalisée) du champ magnétique le cas (a, à gauche) du Soleil et (b, à droite) d'une étoile Ap.

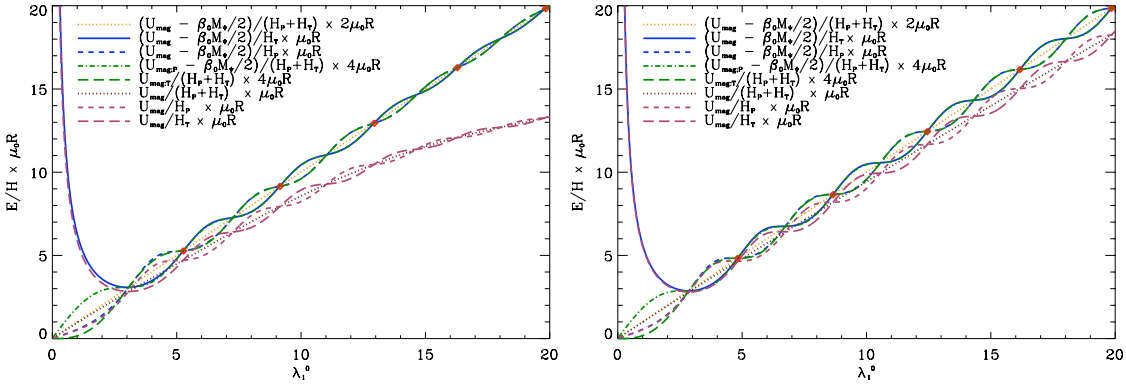


FIGURE 3.8 – Rapports $\mathcal{E}_{\mathrm{mag}}/\mathcal{H}$ poloïdaux, toroïdaux et globaux avec prise en compte ou non de la contribution non force-free dans les cas (a, à gauche) du Soleil et (b, à droite) d'une étoile Ap.

Question subsidiaire : quid des contributions des modes l supérieurs à 1 ? Nous donnons en FIG. 3.9a les rapports $\mathcal{E}_{\mathrm{mag}}/\mathcal{H}$ obtenus par Broderick & Narayan (2008) [8] pour une série de modes l allant de 1 à 8, dans le cas de solutions force-free appliquées dans un milieu incompressible. En FIG. 3.9b est représentée à titre indicatif la configuration magnétique correspondant au mode $l = 5$. On constate à nouveau que la première valeur propre $\lambda_1^{0,1}$ est bien celle donnant la configuration d'énergie minimale.

3.6 Discussion

Premièrement, comme nous savons que les configurations purement poloïdales ou purement toroïdales sont instables et que les solutions mixtes de Prendergast (1956) [47] ont des champs poloïdaux et toroïdaux d'intensités du même ordre de grandeur, il peut être intéressant de tracer le rapport entre ces deux contributions. Pour cela, nous introduisons

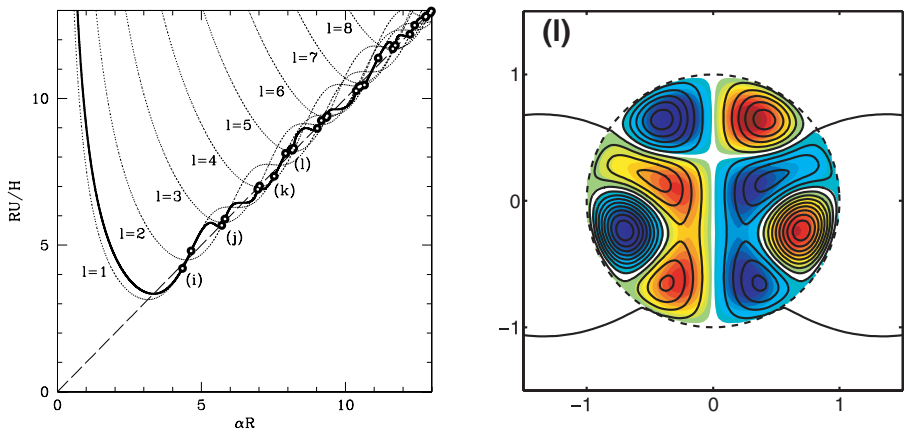


FIGURE 3.9 – Rapports $\mathcal{E}_{\mathrm{mag}}/\mathcal{H}$ globaux pour des modes latitudinaux $l = 1$ à $l = 8$ dans le cas de configurations force-free (a, à gauche) et représentation de la configuration correspondant au mode $l = 5$ (b, à droite). Crédit : Broderick & Narayan, 2008 [8].

un facteur d'anisotropie γ défini par [4]

$$\gamma\,(r,\theta) = \frac{B_{\mathrm{P}}^2 - B_{\mathrm{T}}^2}{B_{\mathrm{P}}^2 + B_{\mathrm{T}}^2}, \quad \text{avec} \quad B_{\mathrm{P}} = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2}\,. \tag{3.95}$$

Sa valeur va de -1 lorsque le champ est complètement toroïdal à 1 lorsque celui-ci est complètement poloïdal. Nous pouvons voir une représentation de ce facteur dans le plan méridien pour les deux cas étudiés en FIG. 3.10. Le champ est fortement toroïdal ($\gamma \approx -1$) au centre du tore, qui correspond au point neutre du champ poloïdal (*i.e.* $\partial_r \Psi = \partial_\theta \Psi = 0$), alors qu'il est fortement poloïdal ($\gamma \approx 1$) à proximité de l'axe magnétique de l'étoile où le champ toroïdal est faible (rappelons que Spruit, 1999 [56] a démontré qu'un champ magnétique toroïdal est instable à proximité de son axe). Entre ces deux régimes, les deux composantes sont d'intensités comparables, avec $\gamma \approx 0$.

Ainsi les configurations proposées présentent de nombreux indices indiquant qu'elles peuvent être des configurations stables dans les intérieurs stellaires :
- elles présentent une topologie mixte poloïdale-toroïdale ;
- elles minimisent l'énergie à hélicité donnée ;
- l'amplitude du champ magnétique toroïdal tend vers 0 à proximité de l'axe magnétique ;

Ces configurations semblent donc être de bonnes candidates pour modéliser les champs magnétiques de grandes échelles (d'origines dynamo ou plus vraisemblablement d'origines fossile) régnant dans les zones radiatives stellaires aussi bien que dans les objets dégénérés tels que les naines blanches et les étoiles à neutrons.

Discutons à présent du choix sur les conditions aux limites que nous avons opéré. Sachant que les états d'équilibre sont connus pour être ceux à rapport énergie/hélicité

4. Celui-ci peut s'inverser en $\frac{B_{\mathrm{T}}}{B_{\mathrm{P}}} = \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}$ et $\frac{E_{\mathrm{T}}}{E_{\mathrm{P}}} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$, où l'énergie magnétique associée au champ poloïdal est $E_{\mathrm{P}} = \frac{B_{\mathrm{P}}^2}{2\mu_0}$ et celle associée au champ toroïdal est $E_{\mathrm{T}} = \frac{B_{\mathrm{T}}^2}{2\mu_0}$.

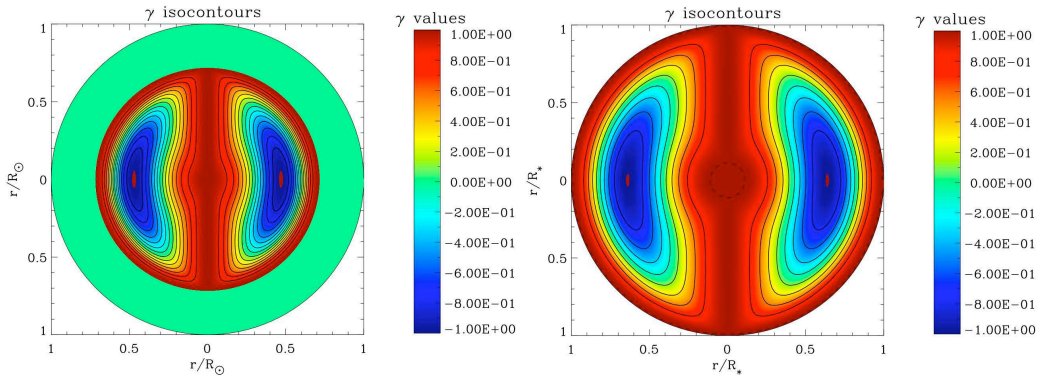


FIGURE 3.10 – Facteur d'anisotropie γ mesurant les intensités relatives des contributions poloïdale et toroïdale du champ magnétique dans le plan méridien dans le cas (a, à gauche) du Soleil jeune et (b, à droite) d'une étoile Ap.

minimale, nous avons suivi la procédure décrite par Chandrasekhar (1958) [14] et Woltjer (1959) [67] pour contraindre les fonctions arbitraires provenant de l'équilibre magnéto-hydrostatique. Au cours de cette procédure, nous avons fait l'hypothèse $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} = 0$, ce qui mène directement à une couche de courant azimutal en raison de la présence de champ latitudinal à la borne supérieure ($B_\theta(R_{\text{sup}}, \theta) \neq 0$). Ce point peut bien entendu être critiqué et deux améliorations peuvent être entrevues. D'abord, dans le contexte stellaire nous devons pouvoir autoriser les configurations ouvertes, qui connectent naturellement la solution interne avec des champs multipolaires, force-free en surface. Il reste dès lors à examiner si les invariants sont conservés dans ce cas, comme ils le sont dans le cas confiné (*cf.* Dixon *et al.*, 1989 [18]). Enfin, indépendamment du choix de la configuration (ouverte ou fermée), nous devons nous attacher à trouver des solutions permettant la continuité du champ magnétique et des courants associés à la surface. Cela mène à un problème mal posé qui ne peut être résolu qu'avec l'aide d'un autre choix pour la fonction $F(\Psi)$ (voir *e.g.* Monaghan, 1976 [43] ainsi que Lyutikov, 2009 [36]), mais qui ne conserverait alors pas forcément l'hélicité.

3.7 Conclusion

Dans le but d'améliorer les modèles stellaires en prenant en compte de la manière la plus consistante possible les processus dynamiques tels que la rotation et le champ magnétique, j'ai examiné les équilibres magnétiques possibles et en ai dérivé les configurations géométriques associées. Le travail pionnier de Prendergast (1956) [47] a été étendu en dérivant une équation de type Grad-Shafranov qui gouverne l'équilibre magnéto-hydrostatique barotrope.

Ce modèle décrivant un champ non force-free du fait de la prise en compte du profil de densité interne de l'étoile a été appliqué au cas d'un Soleil jeune (en début de séquence principale) et d'une étoile Ap sur la ZAMS. Notons qu'une telle approche a été employée pour décrire les états d'équilibre magnétiques dans des polytropes ou des objets compacts tels que des naines blanches ou des étoiles à neutrons (voir par exemple Monaghan, 1976 [43] ; Payne & Melatos, 2004 [45] ; Tomimura & Eriguchi, 2005 [60] ; Yoshida *et al.*, 2006

[69] ; Haskell *et al.*, 2008 [28] ; Kiuchi & Kotake, 2008 [32]).
Les fonctions arbitraires ont été contraintes en dérivant l'état d'énergie minimal en conservant les invariants du problème que sont la masse de la zone radiative, le flux azimutal, et l'hélicité. Cela généralise les états de relaxation de Taylor rencontrés dans les sphéromaks, dans le cas où le champ est non force-free.

Les configurations trouvées vont au cours de l'évolution être sujettes à une évolution régie par d'autres processus dynamiques tels que la rotation différentielle, la circulation méridienne, la turbulence et les instabilités MHD. Ainsi il faudra dans un premier temps dégager les grandeurs d'intérêt associées à ces configurations afin de les introduire ensuite dans un code d'évolution stellaire prenant en compte l'ensemble de ces processus.

3.8 Publication reliée : article 1

Relaxed Equilibrium Configurations to Model Fossil Fields. I – A first family
V. Duez & S. Mathis
Article soumis en octobre 2009 à la revue *Astronomy & Astrophysics.*
Voir Annexe D

Bibliographie

[1] M. Abramowitz et I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions.* Dover, ninth dover printing, tenth gpo printing édition, 1972. 73, 241, 243

[2] P. M. Bellan. *Spheromaks : a practical application of magnetohydrodynamic dynamos and plasma self-organization.* Imperial College Press, River Edge, NJ, 2000. 60, 72, 99

[3] M. A. Berger et G. B. Field. « The topological properties of magnetic helicity ». *Journal of Fluid Mechanics*, 147 :133–148, octobre 1984. 61

[4] J. Braithwaite. « A differential rotation driven dynamo in a stably stratified star ». *A&A*, 449 :451–460, avril 2006. xiv, 45, 46, 63

[5] J. Braithwaite et Å. Nordlund. « Stable magnetic fields in stellar interiors ». *A&A*, 450 :1077–1095, mai 2006. xiv, 48, 61, 76, 100, 101, 103

[6] J. Braithwaite et H. C. Spruit. « A fossil origin for the magnetic field in A stars and white dwarfs ». *Nature*, 431 :819–821, octobre 2004. xiv, 61, 63, 76

[7] A. Brandenburg et C. Sandin. « Catastrophic alpha quenching alleviated by helicity flux and shear ». *A&A*, 427 :13–21, novembre 2004. 61

[8] A. E. Broderick et R. Narayan. « Magnetic helicity and the relaxation of fossil fields ». *MNRAS*, 383 :943–956, janvier 2008. xv, 64, 65, 71, 72, 75, 81, 82

[9] B. Chaboyer, P. Demarque et M. H. Pinsonneault. « Stellar models with microscopic diffusion and rotational mixing. 1 : Application to the Sun ». *ApJ*, 441 :865–875, mars 1995. 58, 168

[10] S. Chandrasekhar. « On Force-Free Magnetic Fields ». *Proceedings of the National Academy of Science*, 42 :1–5, janvier 1956. 62, 63, 72

[11] S. Chandrasekhar. « On the Stability of the Simplest Solution of the Equations of Hydromagnetics ». *Proceedings of the National Academy of Science*, 42 :273–276, mai 1956. 62

[12] S. Chandrasekhar et P. C. Kendall. « On Force-Free Magnetic Fields. ». *ApJ*, 126 :457–+, septembre 1957. 62, 74

[13] S. Chandrasekhar et K. H. Prendergast. « The Equilibrium of Magnetic Stars ». *Proceedings of the National Academy of Science*, 42 :5–9, janvier 1956. 62, 63, 72

[14] S. Chandrasekhar et K. H. Prendergast. « The Axisymmetric Case in Hydromagnetics ». Dans B. Lehnert, éditeur, *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*, volume 6 de *IAU Symposium*, pages 46–+, 1958. 62, 69, 70, 71, 83

[15] W. J. Chaplin, J. Christensen-Dalsgaard, Y. Elsworth, R. Howe, G. R. Isaak, R. M. Larsen, R. New, J. Schou, M. J. Thompson et S. Tomczyk. « Rotation of the solar core from BiSON and LOWL frequency observations ». *MNRAS*, 308 :405–414, septembre 1999. 58

[16] S. Couvidat, R. A. García, S. Turck-Chièze, T. Corbard, C. J. Henney et S. Jiménez-Reyes. « The Rotation of the Deep Solar Layers ». *ApJ*, 597 :L77–L79, novembre 2003. 58, 113, 119

[17] P. Démoulin. « Recent theoretical and observational developments in magnetic helicity studies ». *Advances in Space Research*, 39 :1674–1693, 2007. 61

[18] A. M. Dixon, M. A. Berger, E. R. Priest et P. K. Browning. « A generalization of the Woltjer minimum-energy principle ». *A&A*, 225 :156–166, novembre 1989. 83

[19] V. Duez, S. Mathis, A. S. Brun et S. Turck-Chièze. « Impact of Large-Scale Magnetic Fields on Stellar Structure and Prospectives on Stellar Evolution ». Dans C. Charbonnel, F. Combes et R. Samadi, éditeurs, *SF2A-2008*, pages 459–+, novembre 2008. 68

[20] V. Duez, S. Mathis, A. S. Brun, S. Turck-Chièze et C. Le Poncin-Lafitte. « Impact of Large-Scale Magnetic Fields on Solar Structure ». Dans C. Charbonnel, F. Combes et R. Samadi, éditeurs, *SF2A-2008*, pages 463–+, novembre 2008. 68

[21] V. C. A. Ferraro. « On the Equilibrium of Magnetic Stars. ». *ApJ*, 119 :407–+, mars 1954. 63

[22] F'murrr. *Le Génie des Alpages*, volume 1. Dargaud, avril 1976. 61

[23] A. Friedland et A. Gruzinov. « Bounds on the Magnetic Fields in the Radiative Zone of the Sun ». *ApJ*, 601 :570–576, janvier 2004. 76, 118

[24] R. A. García, S. Mathur et J. Ballot. « Can We Constrain Solar Interior Physics by Studying the Gravity-Mode Asymptotic Signature ? ». *Sol. Phys.*, 251 :135–147, septembre 2008. 58

[25] R. A. García, S. Turck-Chièze, S. J. Jiménez-Reyes, J. Ballot, P. L. Pallé, A. Eff-Darwich, S. Mathur et J. Provost. « Tracking Solar Gravity Modes : The Dynamics of the Solar Core ». *Science*, 316 :1591–, juin 2007. xiv, xvi, 58, 59, 135, 168

[26] D. Gough et M. E. Mcintyre. « Inevitability of a magnetic field in the Sun's radiative interior ». *Nature*, 394 :755–+, août 1998. 59, 168

[27] H. Grad et H. Rubin. « Hydromagnetic equilibria and force free fields ». Dans *Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, volume 31, pages 190–197, Geneva, 1958. IAEA. 67

[28] B. Haskell, L. Samuelsson, K. Glampedakis et N. Andersson. « Modelling magnetically deformed neutron stars ». *MNRAS*, 385 :531–542, mars 2008. 84

[29] S. Hsu et P. Bellan. « Laboratory Study of Spheromak Formation and Magnetic Helicity Injection ». *APS Meeting Abstracts*, pages 1066P–+, novembre 2002. 61

[30] S. Hubrig, P. North et G. Mathys. « Magnetic Ap Stars in the Hertzsprung-Russell Diagram ». *ApJ*, 539 :352–363, août 2000. 59

[31] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics, 3rd Edition.* John Wiley & Sons, juillet 1998. 33, 60

[32] K. Kiuchi et K. Kotake. « Equilibrium configurations of strongly magnetized neutron stars with realistic equations of state ». *MNRAS*, 385 :1327–1347, avril 2008. 84

[33] A. G. Kosovichev, J. Schou, P. H. Scherrer, R. S. Bogart, R. I. Bush, J. T. Hoeksema, J. Aloise, L. Bacon, A. Burnette, C. de Forest, P. M. Giles, K. Leibrand, R. Nigam, M. Rubin, K. Scott, S. D. Williams, S. Basu, J. Christensen-Dalsgaard, W. Dappen, E. J. Rhodes, Jr., T. L. Duvall, Jr., R. Howe, M. J. Thompson, D. O. Gough, T. Sekii, J. Toomre, T. D. Tarbell,

A. M. Title, D. Mathur, M. Morrison, J. L. R. Saba, C. J. Wolfson, I. Zayer et P. N. Milford. « Structure and Rotation of the Solar Interior : Initial Results from the MDI Medium-L Program ». *Sol. Phys.*, 170 :43–61, 1997. 58

[34] R. M. Kulsrud. *Plasma physics for astrophysics.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 2005. 65, 115

[35] R. Lüst et A. Schlüter. « Kraftfreie Magnetfelder ». *Zeitschrift für Astrophysik*, 34 :263–+, 1954. 62

[36] M. Lyutikov. « Structure of magnetic fields in non-convective stars ». *ArXiv e-prints*, mars 2009. 83

[37] G. E. Marsh. « Axially symmetric solutions to the force-free magnetic-field equations in spherical and cylindrical coordinates ». *Phys. Rev. A*, 45 :7520–7525, mai 1992. 72

[38] A. Mastrano et A. Melatos. « Non-ideal evolution of non-axisymmetric, force-free magnetic fields in a magnetar ». *MNRAS*, 387 :1735–1744, juillet 2008. 64

[39] S. Mathis et J. P. Zahn. « Transport and mixing in the radiation zones of rotating stars. II. Axisymmetric magnetic field ». *A&A*, 440 :653–666, septembre 2005. xvii, 66, 125, 164, 165, 171, 231

[40] S. Mathur, J. Ballot, A Eff-Darwich, R. A. García, S. J. Jiménez-Reyes, S. G. Korzennik et S. Turck-Chièze. « What can we learn on the structure and the dynamics of the solar core with g modes ? ». *ArXiv e-prints*, octobre 2008. 58

[41] S. Mathur, S. Turck-Chièze, S. Couvidat et R. A. García. « On the Characteristics of the Solar Gravity Mode Frequencies ». *ApJ*, 668 :594–602, octobre 2007. 58

[42] L. Mestel. « On the equilibrium of magnetic stars ». *MNRAS*, 116 :324–+, 1956. 62, 65

[43] J. J. Monaghan. « Axisymmetric Stars with both Poloidal and Toroidal Magnetic Fields ». *Ap&SS*, 40 :385–391, avril 1976. 83

[44] Å. Nordlund. « Stable magnetic fields in stellar interiors ». *A&A*, 450 :1077–1095, mai 2006. 63

[45] D. J. B. Payne et A. Melatos. « Burial of the polar magnetic field of an accreting neutron star - I. Self-consistent analytic and numerical equilibria ». *MNRAS*, 351 :569–584, juin 2004. 83

[46] J. Pedlosky. *Geophysical fluid dynamics, 2nd edition.* Springer, 1998. 66

[47] K. H. Prendergast. « The Equilibrium of a Self-Gravitating Incompressible Fluid Sphere with a Magnetic Field. I. ». *ApJ*, 123 :498–+, mai 1956. 62, 63, 68, 72, 81, 83

[48] K. H. Prendergast. « The Equilibrium of a Self-Gravitating Incompressible Fluid Sphere with a Magnetic Field. II. ». *ApJ*, 128 :361–+, septembre 1958. 63

[49] A. Reisenegger. « Stable magnetic equilibria and their evolution in the upper main sequence, white dwarfs, and neutron stars ». *A&A*, 499 :557–566, mai 2009. 65

[50] M. Rieutord. « Linear theory of rotating fluids using spherical harmonics part I : Steady flows ». *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 39 :163–182, 1987. 78, 226, 227

[51] M. Rieutord. « On the dynamics of radiative zones in rotating stars ». Dans M. Rieutord et B. Dubrulle, éditeurs, *EAS Publications Series*, volume 21 de *EAS Publications Series*, pages 275–295, 2006. 65

[52] V. D. Shafranov. « Plasma Equilibrium in a Magnetic Field ». *Reviews of Plasma Physics*, 2 :103–+, 1966. 67

[53] D. Shulyak, O. Kochukhov, G. Valyavin, B. -. Lee, G. Galazutdinov, K. -. Kim, I. Han et T. Burlakova. « The Lorentz force in atmospheres of CP stars : 56 Arietis ». *ArXiv e-prints*, octobre 2009. 65, 103

[54] D. Shulyak, G. Valyavin, O. Kochukhov, B.-C. Lee, G. Galazutdinov, K.-M. Kim, I. Han, T. Burlakova, V. Tsymbal et D. Lyashko. « The Lorentz force in atmospheres of CP stars : θ Aurigae ». *A&A*, 464 :1089–1099, mars 2007. 65, 103

[55] E. A. Spiegel et J. P. Zahn. « The solar tachocline ». *A&A*, 265 :106–114, novembre 1992. 58, 168

[56] H. C. Spruit. « Differential rotation and magnetic fields in stellar interiors ». *A&A*, 349 :189–202, septembre 1999. xiv, 36, 37, 45, 82

[57] P. A. Sweet. « The importance of rotation in stellar evolution ». *MNRAS*, 110 :548–+, 1950. 66, 125, 136

[58] S. Talon et C. Charbonnel. « Hydrodynamical stellar models including rotation, internal gravity waves, and atomic diffusion. I. Formalism and tests on Pop I dwarfs ». *A&A*, 440 :981–994, septembre 2005. 59, 169

[59] J. B. Taylor. « Relaxation of Toroidal Plasma and Generation of Reverse Magnetic Fields ». *Physical Review Letters*, 33 :1139–1141, novembre 1974. 60

[60] Y. Tomimura et Y. Eriguchi. « A new numerical scheme for structures of rotating magnetic stars ». *MNRAS*, 359 :1117–1130, mai 2005. 83

[61] S. Turck-Chièze. « Seismic and Dynamical Solar Models - The Impact of the Solar Rotation History ». *ApJ*, 2009. xvi, 58, 134, 135, 168, 178

[62] S. Turck-Chièze, R. A. García, S. Couvidat, R. K. Ulrich, L. Bertello, F. Varadi, A. G. Kosovichev, A. H. Gabriel, G. Berthomieu, A. S. Brun, I. Lopes, P. Pallé, J. Provost, J. M. Robillot et T. Roca Cortés. « Looking for Gravity-Mode Multiplets with the GOLF Experiment aboard SOHO ». *ApJ*, 604 :455–468, mars 2004. 58

[63] G. A. Wade, D. Kudryavtsev, I. I. Romanyuk, J. D. Landstreet et G. Mathys. « Magnetic field geometries of two slowly rotating Ap/Bp stars : HD 12288 and HD 14437 ». *A&A*, 355 :1080–1086, mars 2000. 76, 119

[64] D. G. Wentzel. « Hydromagnetic Equilibria. ». *ApJS*, 5 :187–+, décembre 1960. 69

[65] L. Woltjer. « On Hydromagnetic Equilibrium ». *Proceedings of the National Academy of Science*, 44 :833–841, septembre 1958. 62, 71, 72

[66] L. Woltjer. « Hydromagnetic Equilibrium. III. Axisymmetric Incompressible Media. ». *ApJ*, 130 :400–+, septembre 1959. 69

[67] L. Woltjer. « Hydromagnetic Equilibrium IV. Axisymmetric Compressible Media. ». *ApJ*, 130 :405–+, septembre 1959. 62, 69, 71, 83

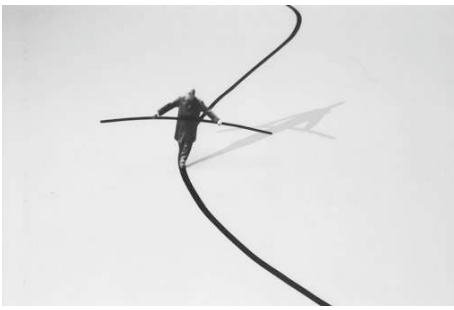
[68] L. Woltjer. « A Magnetostatic Model for a Compressible Star. ». *ApJ*, 131 :227–+, janvier 1960. 62, 63

[69] S. Yoshida, S. Yoshida et Y. Eriguchi. « Twisted-Torus Equilibrium Structures of Magnetic Fields in Magnetized Stars ». *ApJ*, 651 :462–474, novembre 2006. 84

[70] J. P. Zahn. « Circulation and turbulence in rotating stars ». *A&A*, 265 :115–132, novembre 1992. 66, 167

Chapitre 4

Éléments d'Analyse de Stabilité



Sommaire

4.1 Les différentes formulations 92

4.1.1 Méthode des modes normaux 93

4.1.2 Méthode variationnelle 95

4.1.3 Lien entre les deux méthodes 95

4.2 Analyse de stabilité des configurations MHS via la méthode variationnelle 97

4.2.1 Cas de déplacements perturbatifs appartenant aux surfaces magnétiques 98

4.2.2 Limitations concernant l'analyse dans le cas où les déplacements perturbatifs sont perpendiculaires aux surfaces magnétiques . . . 98

4.3 Analyse de stabilité des configurations MHS par simulation numérique MHD 3D 100

4.3.1 Méthode numérique 100

4.3.2 Résultats 101

4.4 Perspectives 103

Bibliographie 104

L'imagination est plus importante que le savoir. — Albert Einstein

En dépit de leur complexité, les équations de la magnéto-hydrodynamique engendrent certaines classes de flots remarquablement simples comme solutions. Néanmoins, si celles-ci décrivent des états possibles d'équilibre, elles ne sont valables que dans une certaine gamme de paramètres les caractérisant. Au-delà, elles ne peuvent pas se maintenir sous l'influence de perturbations aussi infinitésimales soient-elles (perturbations présentes dans tout système physique réaliste) : c'est l'instabilité.
Le problème de l'étude de la stabilité MHD est assez complexe. Il consiste donc à étudier l'amplitude de la réaction du fluide conducteur aux petites perturbations auxquelles il est soumis. Si cette amplitude croît (de manière exponentielle dans la phase linéaire), le système est instable ; dans le cas contraire si elle décroît graduellement, le système est stable. Clairement, le système peut-être considéré instable dès lors qu'un type de perturbation a été démontré être à l'origine de cette instabilité. En revanche, pour s'assurer que le système est stable, il faut étudier la réaction du système à toutes les perturbations possibles.

Ce problème est d'autant plus compliqué que suivant l'amplitude des perturbations, un système supposé instable pour certaines perturbations peut tendre vers un état stable par effets non-linéaires, certains termes des équations ne s'exprimant que dans des conditions rarement rencontrées. Aussi distingue-t-on la stabilité linéaire de la stabilité non-linéaire.

Pour se représenter le problème, on prend souvent l'image d'une bille dans un bol (représentant le puits de potentiel) : si on l'écarte de sa position d'équilibre (le fond du bol, ou la vallée de potentiel), elle va tendre à nouveau vers celle-ci : l'équilibre est stable. Si *a contrario* on retourne le bol et que l'on pose la bille en son sommet, à la moindre perturbation celle-ci va irrémédiablement s'écarter de sa position d'équilibre, celui-ci est instable.
Tout le problème se ramène à considérer la manière dont s'opère la conversion d'énergie potentielle en énergie cinétique (ou vice-versa). Dans la première image, un gain d'énergie cinétique (la perturbation) va se convertir en énergie potentielle (en l'occurrence gravitationnelle) lorsque la bille va monter sur les parois du bol, et par conséquent à *une diminution d'énergie cinétique : c'est là un critère de stabilité*. Dans le second cas, le gain d'énergie cinétique initial provoque une perte d'énergie potentielle (car la bille tombe) et donc *un gain d'énergie cinétique : c'est un critère d'instabilité*. Enfin si on pose la bille sur un plan horizontal, celle-ci ne va *ni gagner ni perdre d'énergie potentielle* lors d'une perturbation : le système est alors dit *marginalement stable*. On peut voir rapidement en Fig. 4.1 les différents types de régimes de stabilité.

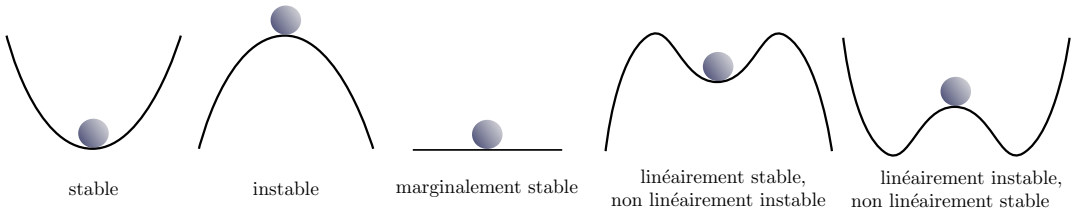


Figure 4.1 – Les différents régimes de stabilité, linéaire ou non-linéaire.

4.1 Les différentes formulations

J'introduirai ici les différents outils pour étudier la réponse linéaire d'un système à une perturbation. Les deux grandes méthodes utilisées sont la méthode des modes normaux et

la méthode variationnelle. Dans la première on détermine les modes propres de réaction d'un système à la perturbation $\boldsymbol{\xi}$. Si le système est stable généralement cette perturbation génère une onde, dont le mode propre correspond à la fréquence. S'il est instable, le mode propre correspond au taux de croissance linéaire de l'instabilité. Cet outil est donc très puissant mais relativement complexe à mettre en œuvre .
En 1958, Bernstein *et al.* [2] ont proposé un outil plus simple mais ne permettant pas de déterminer les modes propres : il s'agit de la méthode variationnelle, qui consiste à déterminer le signe de la variation d'énergie cinétique du système associé à la perturbation.

4.1.1 Méthode des modes normaux

L'opérateur des petits mouvements

Reprenons l'équation du mouvement

$$\rho\,[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla\,)\,\mathbf{v}] = -\nabla\ P - \rho\nabla\,\Phi_{\text{grav}} + \mathbf{F}_{\mathcal{L}}. \tag{4.1}$$

À l'équilibre on a

$$-\nabla\ P_0 - \rho_0\nabla\,\Phi_{\text{grav},0} + \frac{1}{\mu_0}\,(\nabla\ \times \mathbf{B}_0)\times\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}, \tag{4.2}$$

c'est l'équilibre magnéto-hydrostatique. On considère alors une petite perturbation du système de sorte que les quantités perturbées f s'écrivent $f_0 + \delta f$ [1], exceptée la vitesse qui est égale à sa perturbation du fait de l'équilibre à l'ordre 0 : $\mathbf{v} = \delta\mathbf{v}$.
On se place dans le cadre de l'approximation de Cowling, où l'on néglige la perturbation du potentiel gravitationnel :

$$\delta\Phi_{\text{grav}} = 0. \tag{4.3}$$

Au premier ordre on a donc :

$$\rho_0\,\partial_t\mathbf{v} = -\nabla\,\delta P - \delta\rho\,\nabla\,\Phi_{\text{grav},0} + \frac{1}{\mu_0}\,(\nabla\ \times \mathbf{B}_0)\times\delta\mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0}\,(\nabla\ \times \delta\mathbf{B})\times\mathbf{B}_0, \tag{4.4}$$

le terme d'advection, du deuxième ordre, ayant été négligé. Or en dérivant $\boldsymbol{\xi}$ par rapport au temps on a la vitesse $\mathbf{v}$ à l'origine du mouvement :

$$\partial_t\boldsymbol{\xi} = \mathbf{v}. \tag{4.5}$$

ainsi l'équation de continuité s'écrit, à l'ordre 1 :

$$\delta\rho = -\nabla\ \cdot(\rho_0\,\boldsymbol{\xi}). \tag{4.6}$$

On obtient donc l'*équation des petits mouvements*

$$\rho_0\,\partial_{t^2}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) \tag{4.7}$$

où *l'opérateur des petits mouvements* (homogène à une force volumique) est défini par

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = \nabla\,\delta P - \nabla\ \cdot(\rho_0\,\boldsymbol{\xi})\,\nabla\,\Phi_{\text{grav}} + \frac{1}{\mu_0}\,[(\nabla\ \times \delta\mathbf{B})\times\mathbf{B}_0 + (\nabla\ \times \mathbf{B}_0)\times\delta\mathbf{B}]\,. \tag{4.8}$$

1. Nous employons dans ce chapitre la notation δ pour les perturbations plutôt que le prime utilisé dans le chapitre 7 afin de ne pas entrer en confusion avec les dérivées (temporelles essentiellement), et parce cette notation est employée dans les textes fondateurs.

À ce stade-ci, il peut être utile d'expliciter la perturbation en pression δP et celle du champ magnétique $\delta\mathbf{B}$.

D'une part l'équation de Maxwell-Faraday (2.2) donne en considérant la loi d'Ohm idéale dans la limite où le courant ohmique est négligé [2] (ainsi $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{4.9}$$

Intégrée par-rapport au temps, cette équation donne la perturbation du champ magnétique :

$$\delta\mathbf{B} = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}). \tag{4.10}$$

D'autre part, on se prescrit une équation d'état adiabatique pour les perturbations (on considère que celles-ci sont suffisamment rapides pour être traitées de la sorte ; *cf.* chapitre 7) $P\,\rho^{-\Gamma_1} = c^{ste}$. Dérivée par rapport au temps, celle-ci s'écrit

$$\frac{1}{P}\,(\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla)\,P = \frac{\Gamma_1}{\rho}\,(\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla)\,\rho, \tag{4.11}$$

qui intégrée par rapport au temps donne l'équation à l'ordre 1 :

$$\frac{1}{P_0}\,(\delta P + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla P_0) = \frac{\Gamma_1}{\rho_0}\,(\delta\rho + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\rho_0) \tag{4.12}$$

On suppose que l'advection de la pression et celle de la densité sont essentiellement verticales en raison de la forte stratification : $\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla P_0 \simeq \xi_r\partial_r P$ et $\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\rho_0 \simeq \xi_r\partial_r\rho$. En introduisant la définition de la fréquence de Brunt-Väissälä : $\mathcal{N}^2 = g_0\,(\partial_r P/\Gamma_1 P - \partial_r\rho/\rho)$, et d'après l'éq. (4.6) on a alors l'équation suivante :

$$\delta P = -c_s^2\,\nabla\,(\rho_0\,\boldsymbol{\xi}) - \xi_r\left(\frac{\Gamma_1\,P_0}{g_0}\right)\mathcal{N}^2, \tag{4.13}$$

où l'on rappelle que la vitesse du son adiabatique est donnée par $c_s^2 = \Gamma_1\,P_0/\rho_0$.

Les modes normaux

Pour résoudre l'équation des petits mouvements de la manière la plus simple, on suppose que l'on peut séparer les variables en espace et en temps :

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t) = T(t)\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}) \tag{4.14}$$

et décomposer la fonction temporelle $T(t)$ en ses harmoniques ω_k de sorte que

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t) = \sum_k a_k\,e^{i\,\omega_k\,t}\,\boldsymbol{\xi}_k(\mathbf{r}); \tag{4.15}$$

on obtient donc l'équation pour le mode k :

$$-\rho_0\,\omega_k^2\,\boldsymbol{\xi}_k(\mathbf{r}_0) = \mathbf{F}\left[\boldsymbol{\xi}_k(\mathbf{r}_0)\right], \tag{4.16}$$

2. Bien que cette approximation soit grossière, elle permet de simplifier considérablement le formalisme. De surcroît, celle-ci représente le cas le plus contraignant pour le critère d'instabilité, l'existence du courant étant due à la prise en compte de la diffusivité magnétique or cette dernière présente un effet généralement stabilisant.

dont la solution générale associée à la valeur propre ω_k est le vecteur propre $\boldsymbol{\xi}_k(\mathbf{r}_0, t)$. Pour vérifier la stabilité, il faut s'assurer que toutes les valeurs propres sont réelles[3].
Les vecteurs propres $\boldsymbol{\xi}_k$ sont orthogonaux entre eux ; de plus ils peuvent être choisis de manière à remplir la condition de normalisation $\frac{1}{2}\int \rho_0\, \boldsymbol{\xi}_n \cdot \boldsymbol{\xi}_m d\mathcal{V} = \delta_{nm}$ (ce qui dans les unités usuelles assure la faible amplitude des perturbations), d'où la dénomination de la méthode.

4.1.2 Méthode variationnelle

On cherche ici à déterminer le signe de la variation de l'énergie potentielle $\delta\mathcal{W}$ associée à une perturbation $\boldsymbol{\xi}$ engendrant une énergie cinétique $\delta\mathcal{K}$. D'une part, l'énergie totale du système s'écrit :

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \int \left\{ \frac{1}{2}\rho\, \mathbf{v}^2 + \frac{\delta \mathbf{B}^2}{2\,\mu_0} + \frac{1}{\Gamma_1 - 1} P + \rho\, \Phi_{\text{grav}} \right\} d\mathcal{V}, \tag{4.17}$$

dans laquelle l'on reconnaît l'énergie cinétique $\mathcal{K} = \int \frac{1}{2}\rho\, \mathbf{v}^2 d\mathcal{V}$. L'énergie totale étant constante on a $\delta\mathcal{E}_{\text{tot}} = \delta\mathcal{W} + \delta\mathcal{K} = 0$. Pour montrer que le système est stable, il faut donc montrer que la variation d'énergie potentielle $\delta\mathcal{W} > 0$ pour tout type de perturbation.
La variation d'énergie potentielle est donnée par

$$\delta\mathcal{W} = -\frac{1}{2}\int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})\, d\mathcal{V}. \tag{4.18}$$

Celle-ci s'écrit alors d'après les éqs. (4.7)–(4.8), après quelques manipulations algébriques :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W} = \frac{1}{2}\int \Big\{ & \frac{\delta \mathbf{B}^2}{\mu_0} - (\mathbf{j} \times \delta\mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\xi} \\ & + c_s^2\, \nabla\, \cdot (\rho_0\, \boldsymbol{\xi}) + \xi_r \left(\frac{\Gamma_1\, P_0}{g} \right) \mathcal{N}^2 + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\, \Phi_{\text{grav}})\, \nabla\, \cdot (\rho_0\, \boldsymbol{\xi}) \Big\} d\mathcal{V}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

En pratique, l'examen du signe de $\delta\mathcal{W}$ s'effectue dans la plupart des cas en choisissant une condition de normalisation sur $\boldsymbol{\xi}$ (qui n'est pas nécessairement celle choisie pour la méthode des modes normaux), avant de tenter de minimiser $\delta\mathcal{W}$. S'il s'avère alors que $\delta\mathcal{W}_{\text{min}} > 0$, la configuration est bien stable.

4.1.3 Lien entre les deux méthodes

Je propose dans ce qui suit une réinterprétation de la démarche suivie par Bernstein [2] pour développer la méthode variationnelle. Reprenons l'équation des petits mouvements (4.7). En la multipliant par $\partial_t \boldsymbol{\xi}$ on obtient :

$$\rho_0\, \partial_t \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) \cdot \partial_{t^2} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\, \rho_0\, \partial_t \left[(\partial_t \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t))^2 \right] = \partial_t \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{F}\left(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t)\right) \tag{4.20}$$

3. *N.B. Les valeurs propres telles que $\omega_k^2 < 0$ conduisent à des solutions instables* ; cependant ce critère signifie que ω_k doit appartenir à la région délimitée par les première et deuxième bissectrices dans le plan complexe et incluant l'axe des imaginaires purs. Or en fait toutes les solutions complexes avec partie imaginaire négative sont instables ; les solutions complexes avec partie imaginaire positive sont amorties. Les solutions réelles sont stables.

En intégrant sur tout le volume $\mathcal{V}$ et sur l'intervalle de temps allant de 0 à t on a

$$\int_{\mathcal{V}}\int_0^t \frac{1}{2}\,\rho_0\,\partial_t\left[(\partial_t\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t))^2\right]\,d\mathcal{V}\,dt = \int_{\mathcal{V}}\int_0^t \partial_t\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{F}\left(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)\right)\,d\mathcal{V}\,dt, \tag{4.21}$$

d'où

$$\int_{\mathcal{V}}\frac{1}{2}\,\rho_0\,\left[(\partial_t\boldsymbol{\xi})^2\,(\mathbf{r},t)\right]\,d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}}\frac{1}{2}\,\rho_0\,\left[(\partial_t\boldsymbol{\xi})^2\,(\mathbf{r},0)\right]\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}}\int_0^t \partial_t\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{F}\left(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)\right)\,d\mathcal{V}\,dt. \tag{4.22}$$

Par ailleurs, les déplacements perturbatifs étant arbitraires on peut écrire l'équation des petits mouvements (4.7) en fonction de $\partial_t\boldsymbol{\xi}$. En la multipliant alors par $\boldsymbol{\xi}$ on obtient :

$$\rho_0\,\partial_{t^2}\left[\partial_t\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)\right]\cdot\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{F}\left(\partial_t\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)\right) \tag{4.23}$$

En intégrant sur tout le volume $\mathcal{V}$ et sur l'intervalle de temps allant de 0 à t on trouve, après une double intégration par parties

$$\int_{\mathcal{V}}\frac{1}{2}\,\rho_0\,\left[(\partial_t\boldsymbol{\xi})^2\,(\mathbf{r},t)\right]\,d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}}\frac{1}{2}\,\rho_0\,\left[(\partial_t\boldsymbol{\xi})^2\,(\mathbf{r},0)\right]\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}}\int_0^t \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{F}\left(\partial_t\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)\right)\,d\mathcal{V}\,dt. \tag{4.24}$$

On a donc

$$\int_{\mathcal{V}}\int_0^t \partial_t\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{F}\left(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)\right) - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{F}\left(\partial_t\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)\right)\,d\mathcal{V}\,dt = 0. \tag{4.25}$$

D'après l'équation (4.7), on vérifie de plus que

$$\int_t \mathbf{F}\left(\partial_t\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)\right)\,dt = \mathbf{F}\left(\boldsymbol{\xi}\right). \tag{4.26}$$

On vérifie donc que l'opérateur des petits mouvements est auto-adjoint (hermitien) et on obtient finalement

$$\partial_t\mathcal{K} = -\partial_t\delta\mathcal{W}, \tag{4.27}$$

l'énergie cinétique valant $\mathcal{K} = \int \frac{1}{2}\,\rho_0\,\left(\partial_t\boldsymbol{\xi}\right)^2\,d\mathcal{V}$ et la variation d'énergie potentielle, qui correspond au travail des l'opérateur des petits mouvements, s'écrit quant à elle comme une fonctionnelle des perturbations $\boldsymbol{\xi}$ selon :

$$\delta\mathcal{W} = -\frac{1}{2}\int \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})d\mathcal{V}. \tag{4.28}$$

Le facteur 1/2 provient du fait qu'en dérivant l'énergie potentielle par rapport au temps, les deux termes égaux (vus ci-dessus) apparaissent.

4.2 Analyse de stabilité des configurations MHS via la méthode variationnelle

Nous faisons ici l'hypothèse anélastique, selon laquelle $\nabla \cdot (\rho\, \mathbf{v}) = 0$. En intégrant la vitesse de la perturbation sur un temps δt celle-ci s'écrit $\nabla \cdot (\rho\, \boldsymbol{\xi}) = 0$. Cette hypothèse est moins contraignante pour le flot que celle de la stratification forte (générant des mouvements purement horizontaux) ou d'incompressibilité $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$ généralement faites (*cf. e.g.* Tayler *et al.*, 1973 [11]). La différence ici est que ces derniers travaux ont démontré l'instabilité de configurations magnétiques (en l'occurrence des champs purement toroïdaux ou purement poloïdaux), tandis qu'ici nous cherchons à démontrer la stabilité de configurations données (mixtes poloïdales-toroïdales). Conscients que la réponse ne sera pas conclusive quant à la stabilité, car se restreignant à une classe de perturbations, il est toutefois intéressant d'étudier la réponse du système à ces perturbations : si une instabilité particulière se déclenchait, l'analyse présente permettrait d'en déterminer les conditions.
Sous cette hypothèse anélastique, si l'on examine l'intégrale d'énergie (4.19), on constate que le troisième et le cinquième intégrande s'annulent tout simplement. Il reste alors, en plus des deux premiers intégrandes magnétiques, le quatrième qui correspond à l'énergie de rappel due à la stratification du milieu. Afin de simplifier l'étude qui vient, nous ferons abstraction de ce terme dans la suite de cette analyse, en considérant qu'il présente une influence stabilisatrice. Dès lors, on se ramène à n'étudier que la partie magnétique de la variation d'énergie potentielle qui se réduit à

$$\delta\mathcal{W} = \frac{1}{2}\int \left\{ \frac{\delta \mathbf{B}^2}{\mu_0} - (\mathbf{j} \times \delta\mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\xi} \right\} d\mathcal{V}, \tag{4.29}$$

où l'on reconnaît dans le premier terme de l'intégrande la variation d'énergie magnétique et dans le second le travail de la force de Laplace.

Dans ce qui suit j'examinerai la stabilité successivement en réponse à une perturbation le long de surfaces magnétiques (surfaces iso-Ψ, engendrées par $\mathbf{B}$ et $\mathbf{j}$) puis perpendiculairement à ces surfaces. Une représentation schématique d'une surface magnétique est donnée en Fig. 4.2

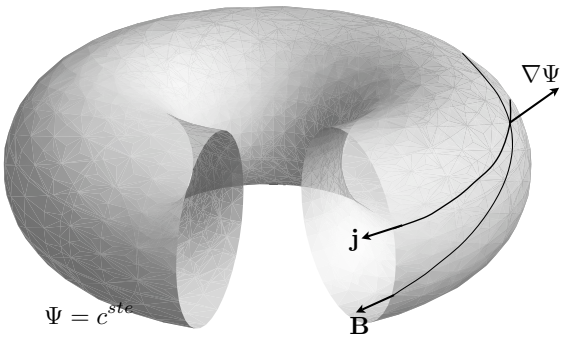


Figure 4.2 – Représentation schématique d'une surface magnétique.

4.2.1 Cas de déplacements perturbatifs appartenant aux surfaces magnétiques

Soit $\boldsymbol{\xi} = \alpha(r,\theta,\varphi,t)\,\mathbf{B} + \beta(r,\theta,\varphi,t)\,\mathbf{j}/\rho$. Alors

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{B} &= \nabla\,\times(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B})\\ &= \nabla\,\times\left(\alpha\,\mathbf{B}\times\mathbf{B} + \beta\,\frac{\mathbf{j}}{\rho}\times\mathbf{B}\right)\\ &= \beta\,\nabla\,\times\left(\frac{\mathbf{j}\times\mathbf{B}}{\rho}\right) + \nabla\,\beta\times\left(\frac{\mathbf{j}\times\mathbf{B}}{\rho}\right)\end{aligned} \tag{4.30}$$

Le premier terme s'annule alors en raison de l'hypothèse d'état barotrope choisie dans le chapitre 3. Finalement, en reprenant l'expression de la force de Lorentz (3.69), nous obtenons

$$\delta\mathbf{B} = \beta_0\,\nabla\,\beta\times\nabla\,\Psi. \tag{4.31}$$

Ainsi le premier terme de l'intégrande dans l'expression pour δW (éq. (4.29)) s'écrit

$$(\delta\mathbf{B})^2 = \beta_0^2\,\left(\nabla\,\beta\times\nabla\,\Psi\right)^2. \tag{4.32}$$

Par ailleurs,

$$\delta\mathbf{B}\times\boldsymbol{\xi} = \beta_0\,\left(\nabla\,\beta\times\nabla\,\Psi\right)\times\left(\alpha\,\mathbf{B} + \beta\,\frac{\mathbf{j}}{\rho}\right), \tag{4.33}$$

donc on a simplement

$$(\mathbf{j}\times\delta\mathbf{B})\cdot\boldsymbol{\xi} = \mathbf{j}\cdot(\delta\mathbf{B}\times\boldsymbol{\xi}) = \alpha\,\beta_0\,\mathbf{j}\cdot\left[(\nabla\,\beta\times\nabla\,\Psi)\times\mathbf{B}\right], \tag{4.34}$$

le deuxième terme du membre de droite de l'éq. (4.33), proportionnel à $(\nabla\,\beta\times\nabla\,\Psi)\times\mathbf{j}$, étant perpendiculaire à $\mathbf{j}$, celui-ci n'apparaît pas dans la dernière expression.
Celle-ci peut alors se reformuler :

$$\mathbf{j}\cdot(\delta\mathbf{B}\times\boldsymbol{\xi}) = -\alpha\,\beta_0\,\left(\mathbf{B}\times\mathbf{j}\right)\cdot\left(\nabla\,\beta\times\nabla\,\Psi\right), \tag{4.35}$$

or $(\mathbf{B}\times\mathbf{j})$ est perpendiculaire aux surfaces magnétiques, tandis que $(\nabla\,\beta\times\nabla\,\Psi)$ appartient aux surfaces magnétiques. Le produit scalaire des deux est donc nul et on trouve finalement que

$$\mathbf{j}\cdot(\delta\mathbf{B}\times\boldsymbol{\xi}) = 0. \tag{4.36}$$

L'expression de la variation d'énergie potentielle (magnétique) est donc strictement positive :

$$\delta\mathcal{W} = \frac{1}{2\,\mu_0}\int_{\mathcal{V}}\beta_0^2\,\left(\nabla\,\beta\times\nabla\,\Psi\right)^2\,d\mathcal{V} > 0 \tag{4.37}$$

et la configuration est stable en regard de perturbations appartenant aux surfaces magnétiques.

4.2.2 Limitations concernant l'analyse dans le cas où les déplacements perturbatifs sont perpendiculaires aux surfaces magnétiques

Soit à présent $\boldsymbol{\xi} = \eta\,\nabla\,\psi$ où $\eta(r,\theta,\varphi)$ est quelconque. Après manipulations algébriques, la variation d'énergie potentielle s'écrit (les indices P et T dénotent respectivement l'appartenance à la composante poloïdale ou toroïdale) :

$$\delta\mathcal{W} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}}\frac{\delta B_{\mathrm{P}}^2}{\mu_0} + \frac{\delta B_{\mathrm{P}}^2}{\mu_0} - \mathbf{j}_{\mathrm{P}}\cdot(\delta\mathbf{B}\times\boldsymbol{\xi})_{\mathrm{P}} - \mathbf{j}_{\mathrm{T}}\cdot(\delta\mathbf{B}\times\boldsymbol{\xi})_{\mathrm{T}}\,d\mathcal{V}, \tag{4.38}$$

où

$$\delta B_{\mathrm{P}}^2 = \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\left\{\frac{1}{r}\partial_\theta\left(\eta\left[\left(\frac{\partial_\theta\Psi}{r}\right)^2+(\partial_r\Psi)^2\right]\right)-\frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\lambda_1^0}{R}\Psi\,\partial_r\Psi\partial_\varphi\eta\right\}^2$$
$$+\frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\left\{\partial_r\left(\eta\left[\left(\frac{\partial_\theta\Psi}{r}\right)^2+(\partial_r\Psi)^2\right]\right)+\frac{1}{r^2\,\sin\theta}\frac{\lambda_1^0}{R}\Psi\,\partial_\theta\Psi\partial_\varphi\eta\right\}^2, \quad (4.39)$$

$$\delta B_{\mathrm{T}}^2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\lambda_1^0}{R}\right)^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\partial_r\left(\eta\Psi\partial_r\Psi\right)+\frac{1}{r^2}\partial_\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\Psi\,\partial_\theta\Psi\right)\right\}^2 \quad (4.40)$$

et

$$\mathbf{j}_{\mathrm{P}}\cdot(\delta\mathbf{B}\times\boldsymbol{\xi})_{\mathrm{P}} = \frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\left(\frac{\lambda_1^0}{R}\right)^2\eta\left[\partial_r\left(\eta\Psi\partial_r\Psi\right)+\frac{\sin\theta}{r^2}\partial_\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\eta\,\Psi\,\partial_\theta\Psi\right)\right]\times$$
$$\left[\left(\frac{\partial_\theta\Psi}{r}\right)^2+(\partial_r\Psi)^2\right] \quad (4.41)$$

$$\mathbf{j}_{\mathrm{T}}\cdot(\delta\mathbf{B}\times\boldsymbol{\xi})_{\mathrm{T}} = -\frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\left(\frac{\lambda_1^0}{R}\right)^2\eta\left\{\frac{1}{r^2\,\sin\theta}\partial_\theta\left(\eta\left[\left(\frac{\partial_\theta\Psi}{r}\right)^2+(\partial_r\Psi)^2\right]\right)(\Psi+\Psi_{nff})\,\partial_\theta\Psi\right.$$
$$\left.+\,\partial_r\left(\eta\left[\left(\frac{\partial_\theta\Psi}{r}\right)^2+(\partial_r\Psi)^2\right]\right)(\Psi+\Psi_{nff})\,\partial_r\Psi\right\}, \quad (4.42)$$

avec $\Psi_{nff} = \mu_0\,r\,\sin\theta\left(\frac{R}{\lambda_1^0}\right)^2\beta_0\,\rho\,r\,\sin\theta$. Cette expression pour $\delta\mathcal{W}$, rendue ici sous sa forme la plus lisible, peut encore être simplifiée en prenant en compte le fait que l'hélicité est conservée (soit $\delta\mathcal{H}=0$). Ainsi

$$\delta\mathcal{W} = \delta\mathcal{W}+\alpha\,\delta\mathcal{H} \quad (4.43)$$

(où α est une constante), la variation d'hélicité étant donnée selon Bellan, 2000 [1], par :

$$\delta\mathcal{H} = \int_{\mathcal{V}}\delta\mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{B}\,d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B})\cdot\delta\mathbf{B}\,d\mathcal{V}. \quad (4.44)$$

Après calculs, on obtient

$$\delta\mathcal{H} = \int_{\mathcal{V}}\eta\frac{\lambda_1^0}{R}\left\{-\frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\partial_r\left(\eta\left[\left(\frac{\partial_\theta\Psi}{r}\right)^2+(\partial_r\Psi)^2\right]\right)\Psi\,\partial_r\Psi\right.$$
$$-\frac{1}{r^4\,\sin^2\theta}\partial_\theta\left(\eta\left[\left(\frac{\partial_\theta\Psi}{r}\right)^2+(\partial_r\Psi)^2\right]\right)\Psi\,\partial_\theta\Psi$$
$$\left.+\frac{1}{r^2\,\sin^2\theta}\left[\frac{\sin\theta}{r^2}\partial_\theta\left(\eta\frac{1}{\sin\theta}\Psi\,\partial_\theta\Psi\right)-\partial_r\left(\eta\,\Psi\partial_r\Psi\right)\right]\left[\left(\frac{\partial_\theta\Psi}{r}\right)^2+(\partial_r\Psi)^2\right]\right\}d\mathcal{V}. \quad (4.45)$$

En faisant le bon choix : $\alpha = \lambda_1^0/\mu_0\,R$, l'expression pour $\delta\mathcal{W}$ se simplifie effectivement : on obtient alors

$$\delta\mathcal{W} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}}\frac{\delta B_{\mathrm{P}}^2}{2}+\frac{\delta B_{\mathrm{P}}^2}{2}-\mathbf{j}_{\mathrm{P}}\cdot(\delta\mathbf{B}\times\boldsymbol{\xi})_{\mathrm{P}}-\mathbf{j}_{\mathrm{T}}\cdot(\delta\mathbf{B}\times\boldsymbol{\xi})_{\mathrm{T}}\;d\mathcal{V}, \quad (4.46)$$

où à présent

$$\mathbf{j}_{\mathrm{P}} \cdot (\delta\mathbf{B} \times \boldsymbol{\xi})_{\mathrm{P}} = 0, \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_{\mathrm{T}} \cdot (\delta\mathbf{B} \times \boldsymbol{\xi})_{\mathrm{T}} = & -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\lambda_1^0}{R}\right)^2 \eta \left\{\frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_\theta\left(\eta\left[\left(\frac{\partial_\theta\Psi}{r}\right)^2 + (\partial_r\Psi)^2\right]\right)\partial_\theta\Psi \right. \\ & \left. + \partial_r\left(\eta\left[\left(\frac{\partial_\theta\Psi}{r}\right)^2 + (\partial_r\Psi)^2\right]\right)\partial_r\Psi\right\}\Psi_{nff}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Ainsi dans la limite où l'auto-gravité n'est pas prise en compte, les termes non force-free s'annulent et on obtient

$$\delta\mathcal{W} = \frac{1}{2\,\mu_0}\int_{\mathcal{V}} \delta B^2\, d\mathcal{V} > 0 \tag{4.49}$$

et la configuration relaxée est stable vis-à-vis des perturbations considérées, perpendiculaires aux surfaces magnétiques. Dans le cas où les termes non force-free sont pris en compte, le terme $\mathbf{j}_{\mathrm{T}} \cdot (\delta\mathbf{B} \times \boldsymbol{\xi})_{\mathrm{T}}$ peut-être responsable d'instabilités conduites par courant (de type kink) si sa valeur absolue est supérieure à la variation d'énergie magnétique $\delta B^2/2\,\mu_0$ (intégrées sur tout le volume).
L'expression de $\delta\mathcal{W}$ est une fonctionnelle de η ainsi que de ses dérivées par-rapport à r et θ. En l'état, son signe ne peut donc pas être déterminé de manière directe.
Aussi, nous décidons à ce stade de recourir à des simulations numériques pour tester la stabilité. Le travail analytique sera poursuivi ultérieurement.

4.3 Analyse de stabilité des configurations MHS par simulation numérique MHD 3D

4.3.1 Méthode numérique

Ce travail a été effectué dans le cadre d'une collaboration avec J. Braithwaite (Université de Bonn). La configuration d'équilibre MHS donnée par l'éq. (3.65) est appliquée au cas d'un polytrope ($P \propto \rho^{1+1/n}$) d'indice polytropique $n = 3$, assez représentatif de la distribution en densité de la zone radiative d'une étoile de type A [4]. L'équation d'état est celle d'un gaz parfait monoatomique. Le code employé est une version fortement modifiée du code Stagger (Nordlund & Galsgaard, [6]). Celui-ci utilise une grille cartésienne ; les interpolations et les dérivées spatiales sont calculées respectivement avec des schémas du cinquième et du sixième ordre. L'intégration temporelle utilise un schéma de type « prédicteur-correcteur » du troisième ordre. La densité de surface du polytrope est de l'ordre de 0.002 fois celle au centre. La configuration magnétique est confinée sous la surface selon les conditions aux limites décites en §3.3.4. La haute diffusivité est prise en compte dans l'atmosphère entourant le modèle sur le reste de la boîte de simulation. Plus de détails sur les techniques numériques implémentées dans le code pourront être trouvés dans Braithwaite *et al.*, 2006 [4].

4.3.2 Résultats

Sont représentées en Fig. 4.3 les lignes de champ en 3D dans la configuration initiale de côté (a) et de dessus (b), afin de visualiser l'enchevêtrement des lignes magnétiques.

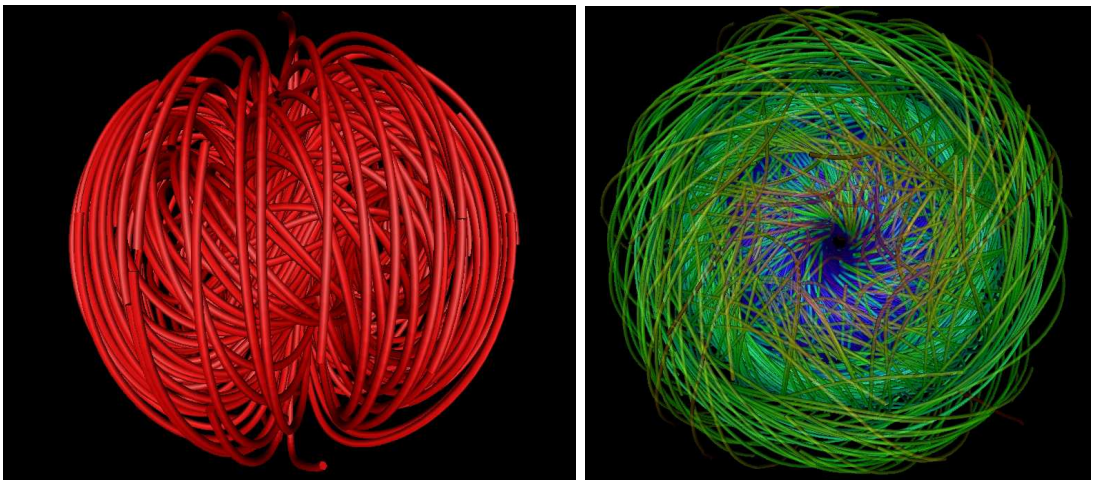


Figure 4.3 – Lignes de champ de la configuration magnéto-hydrostatique barotrope initiale dans un polytrope d'indice $n = 3$ (a, à gauche) vue de côté et (b, à droite) vue de dessus.

Le modèle est ensuite soumis à des perturbations de type « bruit blanc » en densité : la densité à chaque point grille est multipliée par un nombre aléatoire (suivant une distribution uniforme) entre 0.99 et 1.01. Ainsi, une perturbation de 1 % est appliquée. Il faut noter que les perturbations à faibles nombres d'ondes azimutaux sont faibles étant donnée la moyenne effectuée suivant cette direction. Néanmoins, si la configuration est instable, l'instabilité doit se déclencher, aussi faible que soit l'amplitude de la perturbation initiale.
Pour s'assurer de la stabilité de telles configurations, les champs mixtes d'équilibre MHS non force-free ont été comparés à leurs composantes poloïdales et toroïdales seules, dont on sait qu'elles sont instables (*cf.* chapitre 2). Les simulations ont été menées sur une durée de l'ordre de 20 temps d'Alfvén $t_A = R/v_A$ (v_A étant la vitesse d'Alfvén), ce qui est suffisant pour voir une instabilité apparaître [4, 3]. Une représentation de leur état initial et de leur état final est donnée en Fig. 4.4 et en Fig. 4.5 respectivement pour la composante poloïdale et la toroïdale seules. L'échelle de couleur caractérise la densité : le rouge indique une densité faible, le bleu des densités élevées. La surface de l'étoile est légèrement en dehors du champ de vue des images. Dans le cas de la composante poloïdale seule, le champ évolue rapidement vers un état fortement non-axisymétrique, ce qui vérifie l'instabilité à haut m des champs poloïdaux. D'autre part, concernant la composante toroïdale seule, nous reconnaissons les instabilités de type kink à l'œuvre, en particulier autour de l'axe et des pôles [4, 5].

Enfin, sont représentées en Fig. 4.6 les lignes de champ en 3D pour la configuration d'équilibre magnéto-hydrostatique barotrope (a) à $t = 10\,t_A$ et (b) à $t = 20\,t_A$. Visuellement, l'effet observé est lié aux dissipations ohmiques et thermiques prises en compte

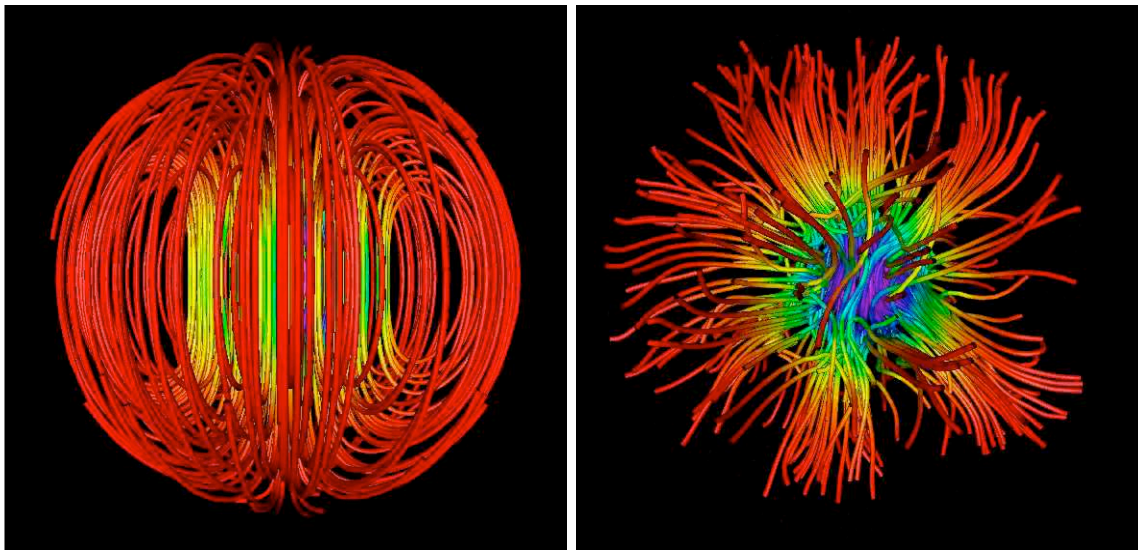


FIGURE 4.4 – Lignes de champ de la partie poloïdale de la configuration magnéto-hydrostatique barotrope dans un polytrope d'indice $n = 3$ (a, à gauche) à $t = 0$ et (b, à droite) à $t = 10\,t_A$. L'instabilité hautement non-axisymétrique est observée.

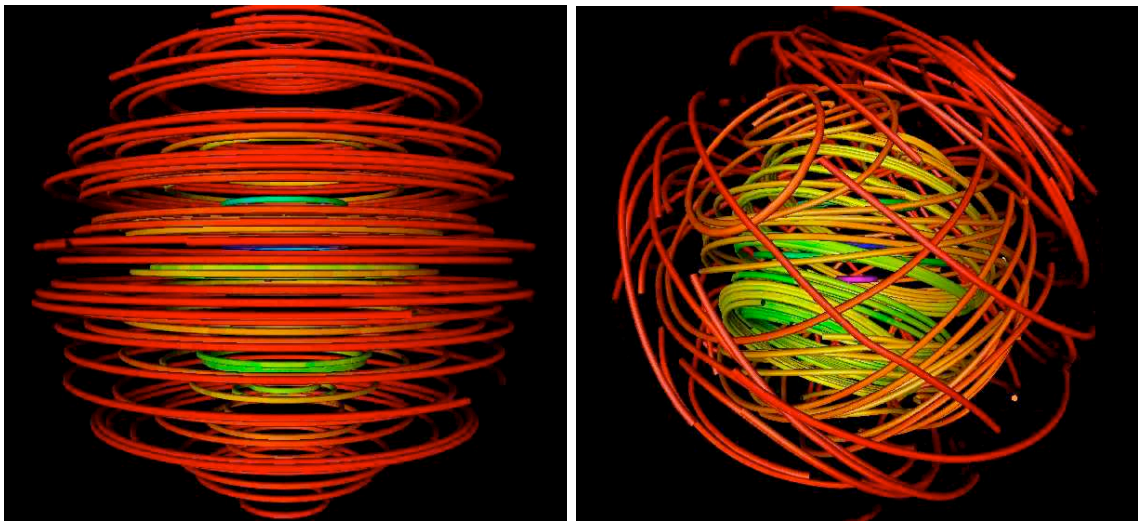


FIGURE 4.5 – Lignes de champ de la partie toroïdale de la configuration magnéto-hydrostatique barotrope dans un polytrope d'indice $n = 3$ (a, à gauche) à $t = 0$ et (b, à droite) à $t = 20\,t_A$. L'instabilité type kink de faible m est reconnue.

dans la simulation. Si en réalité les temps caractéristiques de diffusion sont de plusieurs ordres de grandeurs supérieurs aux temps dynamiques et d'Alfvén, pour les besoins de la simulation ceux-ci sont relativement proches. En revanche, nous n'observons ici ni l'"instabilité de type kink (qui serait la source d'instabilité d'après l'approche analytique qui précède et observée pour la composante toroïdale seule), ni la tendance flagrante vers un état non-axisymétrique. La structure à grande échelle du champ mixte est conservée et

la configuration MHS barotrope non force-free reste donc stable, de la même façon que la configuration obtenue numériquement par Braithwaite & Nordlund (2006) [4].

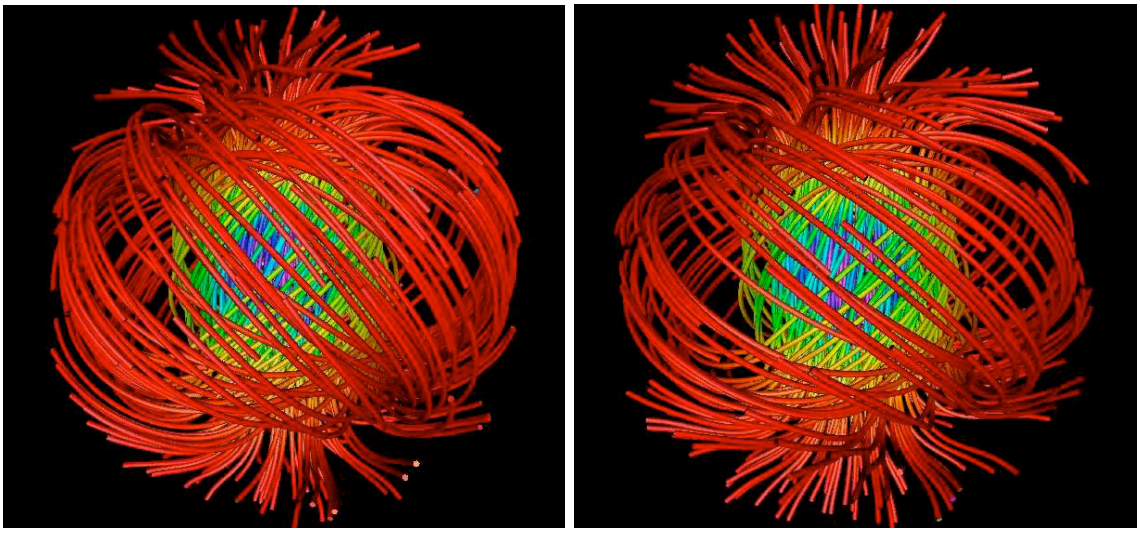


FIGURE 4.6 – Lignes de champ de la configuration magnéto-hydrostatique barotrope dans un polytrope d'indice $n = 3$ (a, à gauche) à $t = 10\,t_A$ et (b, à droite) à $t = 20\,t_A$.

Finalement, nous constatons qu'à la surface, les lignes de champ (coupées sur la FIG. 4.6) conservent leur aspect mixte. Cette propriété peut être mise en parallèle avec les travaux observationnels récents de Shulyak *et al.* [10, 9], qui indiquent la présence d'un champ non force-free dans les atmosphères d'une étoile Ap (θ Aurigae) et d'une étoile Bp (56 Arietis), par l'étude de variabilité des raies hydrogène Balmer. De plus, remarquons que leurs observations rapportent dans les deux cas une force de Lorentz dirigée vers l'extérieur (centrifuge) ; cette propriété est également présente dans les régions externes des étoiles dans le cadre du modèle non force-free proposé dans cette thèse.

4.4 Perspectives

Le travail mené, aussi bien sur le plan analytique que numérique mérite d'être approfondi. Au niveau analytique, l'intégrale d'énergie (potentielle), fonctionnelle des perturbations et de ses dérivées doit être minimisée et effectivement intégrée, afin de pouvoir conclure sur son signe. Par ailleurs, une analyse à l'aide de la méthode des modes normaux mérite elle aussi d'être explorée, afin de déterminer les fréquences propres des ondes (de type magnéto-gravifiques) se propageant dans le milieu. Ce travail pourrait bénéficier de la collaboration avec le Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse-Tarbes, ayant développé une méthode de détermination des modes normaux ([8, 7]).

En ce qui concerne la démarche numérique, nous n'avons présenté que des résultats préliminaires d'un travail qui se poursuit actuellement avec J. Braithwaite. Nous comptons mettre en place un ensemble de diagnostics plus quantitatifs que ceux présentés ici, en traçant l'évolution de l'énergie magnétique en fonction du temps pour plusieurs modes azimutaux, afin de vérifier les critères concernant les instabilités MHD en zone radiative.

L'ensemble de ces travaux fera l'objet d'une publication dans les mois à venir.

Bibliographie

[1] P. M. Bellan. *Spheromaks : a practical application of magnetohydrodynamic dynamos and plasma self-organization.* Imperial College Press, River Edge, NJ, 2000. 60, 72, 99

[2] I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal et R. M. Kulsrud. « An Energy Principle for Hydromagnetic Stability Problems ». *Royal Society of London Proceedings Series A*, 244 :17–40, février 1958. 93, 95

[3] J. Braithwaite. « The stability of poloidal magnetic fields in rotating stars ». *A&A*, 469 :275–284, juillet 2007. xiv, 36, 101

[4] J. Braithwaite et Å. Nordlund. « Stable magnetic fields in stellar interiors ». *A&A*, 450 :1077–1095, mai 2006. xiv, 48, 61, 76, 100, 101, 103

[5] A. S. Brun. « Physical Processe at the Origin of Dynamo Action and Magnetic FieldTransport in a MHD Plasma ». Dans *Informel*, 2007. 101

[6] Å. Nordlund et K. Galsgaard. « http ://www.astro.ku.dk/ aake/papers/95.ps.gz ». Rapport Technique, 1995. 100

[7] D. Reese, F. Rincon et M. Rieutord. « Oscillations of magnetic stars. II. Axisymmetric toroidal and non-axisymmetric shear Alfvén modes in a spherical shell ». *A&A*, 427 :279–292, novembre 2004. 103

[8] F. Rincon et M. Rieutord. « Oscillations of magnetic stars : I. Axisymmetric shear Alfvén modes of a spherical shell in a dipolar magnetic field ». *A&A*, 398 :663–675, février 2003. 103

[9] D. Shulyak, O. Kochukhov, G. Valyavin, B. -. Lee, G. Galazutdinov, K. -. Kim, I. Han et T. Burlakova. « The Lorentz force in atmospheres of CP stars : 56 Arietis ». *ArXiv e-prints*, octobre 2009. 65, 103

[10] D. Shulyak, G. Valyavin, O. Kochukhov, B.-C. Lee, G. Galazutdinov, K.-M. Kim, I. Han, T. Burlakova, V. Tsymbal et D. Lyashko. « The Lorentz force in atmospheres of CP stars : θ Aurigae ». *A&A*, 464 :1089–1099, mars 2007. 65, 103

[11] R. J. Tayler. « The adiabatic stability of stars containing magnetic fields-I.Toroidal fields ». *MNRAS*, 161 :365–+, 1973. 36, 37, 97

Chapitre 5

Influence du Champ Magnétique sur la Structure Stellaire

Sommaire

5.1 Le jeu d'équations de la structure stellaire 106
5.1.1 L'équilibre hydrostatique 106
5.1.2 La conservation de la masse 107
5.1.3 L'équation de transfert de la chaleur 108
5.1.4 L'équation d'énergie 109
5.1.5 Le transport des éléments chimiques 110
5.1.6 Les équations de la structure stellaire utilisées dans Cesam . . . 110
5.2 Effet du magnétisme sur les équations de la structure stellaire 111
5.2.1 Travaux antérieurs : cas solaire 111
5.2.2 Modification de l'équilibre hydrostatique 114
5.2.3 Grandeurs énergétiques 116
5.2.4 Les équations modifiées 117
5.3 Perturbation de la structure stellaire 118
5.3.1 Les deux cas d'application 118
5.3.2 Quantités physiques perturbant la balance hydrostatique 120
5.3.3 Perturbation de la balance hydrostatique 124
5.3.4 Quantités physiques perturbant la balance énergétique 128
5.3.5 Perturbation de la balance énergétique 131
5.3.6 Perturbations en surface 132
5.4 Comparaison avec les effets de la rotation 134
5.4.1 Enjeux 134
5.4.2 Modélisation 135
5.4.3 Résultats 137
5.5 Conclusion et perspectives 138
5.6 Publications reliées : articles 2 et 3 142
Bibliographie 154

On fait la science avec des faits, comme on fait une maison avec des pierres : mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison.
– Henri Poincaré

Bien que l'équilibre entre les processus de libération d'énergie par réactions nucléaires et l'interaction gravitationnelle soit connu depuis un siècle, de nombreux travaux posent aujourd'hui la question du rôle que la rotation et le champ magnétique peuvent avoir sur la structure interne d'une étoile et dès lors sur ses paramètres observables. Peuvent-ils influencer les taux de réactions nucléaires, expliquer les anomalies d'abondances en certains éléments chimiques, voire modifier les isochrones et les propriétés observables d'une étoile telles que sa masse, son rayon ou son âge ? Pour tenter de répondre ne serait-ce qu'à ces quelques questions, il est nécessaire de mettre en œuvre l'ensemble de ces processus dans un code d'évolution stellaire qui aille au-delà des modèles standards.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, la structure du champ magnétique est profondément multi-dimensionnelle. Il est donc important d'en avoir une représentation géométrique acceptable avant de vouloir prétendre inclure ses effets dans un code d'évolution stellaire. À présent qu'un début de démarche a été effectué dans ce sens, je vais décrire comment le champ magnétique va pouvoir agir sur la structure stellaire. Pour cela je détaillerai successivement quelles sont les équations mises en œuvre dans un code d'évolution stellaire de dernière génération ainsi que les méthodes de résolution numérique employées, puis comment nous pouvons incorporer les effets du champ magnétique dans ce cadre. Enfin, je décrirai quelle peut être l'influence d'un champ magnétique donné sur une structure stellaire donnée à l'aide d'une méthode perturbative, en particulier sur les grandeurs entrant dans l'équilibre hydro-statique et la balance énergétique, l'étude de ces dernières étant un préliminaire important à l'implémentation des processus de transport. .

5.1 Le jeu d'équations de la structure stellaire

Cinq équations régissent l'évolution d'une étoile selon le modèle traditionnel sans rotation ni champ magnétique. L'équilibre hydrostatique gouverne l'équilibre entre les forces de pression du gaz et la force gravitationnelle ; l'équation de continuité relie la masse au rayon ; l'équation de la température (ou de transport de la chaleur) détermine la relation entre la température et la pression (calculée à partir des équations d'état dans la zone radiative et éventuellement prescrit par la théorie de longueur de mélange dans la zone convective) ; l'équation de la chaleur (de l'énergie ou de la luminosité) indique comment l'énergie créée par les réactions nucléaires et l'énergie gravifique se redistribuent sous forme de luminosité et d'énergie interne ; enfin une équation décrit la manière dont les éléments chimiques sont redistribués sous l'effet de la force de pression radiative et de la diffusion microscopique.

5.1.1 L'équilibre hydrostatique

Considérons une coquille fluide sphérique d'épaisseur dr et de densité $\rho(r)$ située à un rayon r du centre de l'étoile. Les surfaces inférieure $S_{\rm inf}$ et supérieure $S_{\rm sup}$ sont égales à $S = 4\,\pi\,r^2$ dans la limite $dr \to 0$, avec $dr = R_{\rm sup} - R_{\rm inf}$. Son volume est alors $V = S\,dr$. Celle-ci est soumise à une force de pression surfacique en dessous (*resp.* au dessus) $\mathbf{F}_{P,\rm inf} = P_{\rm inf}\,S\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$ (*resp.* $\mathbf{F}_{P,\rm sup} = -P_{\rm sup}\,S\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$), dirigée vers l'extérieur (*resp.* vers l'intérieur). La

force volumique exercée par les contributions des forces de pression sur cette coquille est alors $\mathbf{F}_P = (\mathbf{F}_{P,\mathrm{inf}} + \mathbf{F}_{P,\mathrm{sup}}) \,/\, (S\, dr)\ \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}$, autrement dit en introduisant $dP = P_{\mathrm{sup}} - P_{\mathrm{inf}}$: $\mathbf{F}_P = -dP/dr\ \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}$. En suivant le même raisonnement, on peut montrer qu'en général la somme des contributions des forces de pression volumiques s'écrit comme le gradient d'une énergie volumique :

$$\mathbf{F}_P = -\nabla\, P. \tag{5.1}$$

Par ailleurs la masse M_r située en dessous de cette coquille d'étoile est prise en son barycentre, *i.e.* au centre de l'étoile. La masse située au dessus exerce quant à elle une force dont la somme des composantes s'annule. L'interaction gravitationnelle volumique à laquelle est soumise cette coquille est donc de $\mathbf{F}_G = -\rho(r)\, G\, M_r/r^2\ \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}$. On peut alors exprimer l'accélération de la gravité comme dérivant d'un potentiel Φ_{grav} selon :

$$\mathbf{F}_G = -\rho\, \nabla\, \Phi_{\mathrm{grav}}. \tag{5.2}$$

D'après la seconde loi de Newton :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_G, \tag{5.3}$$

$\mathbf{v}$ étant la vitesse de déplacement de la coquille : on suit ici l'élément de fluide au cours de son déplacement (en un temps δt, celui-ci s'est déplacé de $\delta\mathbf{r} + \mathbf{v}\, \delta t$). On a donc introduit la dérivée particulaire (lagrangienne)

$$\begin{aligned} \frac{D\, \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial\, (\mathbf{v}(r,t)\cdot \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i})}{\partial\, (\mathbf{r}\cdot \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i})} \frac{\partial\, (\mathbf{r}\cdot \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i})}{\partial t}\ \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \\ &= \partial_t\, \mathbf{v}(\mathbf{r},t) + (\mathbf{v}\cdot \nabla\,)\, \mathbf{v}(\mathbf{r},t). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Ainsi en général l'équilibre hydrodynamique s'écrit :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla\, P - \rho \nabla\, \Phi_{\mathrm{grav}}. \tag{5.5}$$

Et dans le cas statique on retrouve l'équilibre hydrostatique

$$\nabla\, P = -\rho\, \nabla\, \Phi_{\mathrm{grav}}. \tag{5.6}$$

5.1.2 La conservation de la masse

La masse contenue dans une sphère de rayon r et de densité volumique ρ est

$$M_r = \frac{4}{3} \pi\, \rho\, r^3 \tag{5.7}$$

d'où on tire immédiatement en différentiant

$$\frac{d\, M_r}{dr} = 4\, \pi\, \rho\, r^2 \tag{5.8}$$

qui signifie simplement que lorsque l'on ajoute des couches d'épaisseur dr à une sphère de rayon r sa masse augmente de $4\,\pi\,\rho r^2\, dr$. Si pour la première équation l'on a supposé que la densité doit être uniforme, cette hypothèse n'est pas nécessaire dans le cas de la seconde, l'épaisseur de la couche considérée étant infinitésimale. Cette dernière équation peut donc se généraliser en

$$\frac{d\, M_r}{dr} = 4\, \pi\, \rho(r)\, r^2. \tag{5.9}$$

5.1.3 L'équation de transfert de la chaleur

Le transport d'énergie par rayonnement traduit l'énergie rayonnée à travers une couche d'épaisseur dr et de température $T(r)$. Considérons l'équation de transfert radiatif

$$\frac{dI}{d\tau} = -I + B \tag{5.10}$$

où les intensités spécifiques I et B (B est la fonction source caractérisant le corps noir) sont ici moyennées sur toutes les fréquences. On relie la profondeur optique τ à la profondeur linéaire r par la relation $d\tau = \kappa\,\rho\,ds$, κ étant ici le coefficient d'absorption. Si s mesure la longueur sur la ligne de visée (voir FIG. 5.1), on a $dr = ds/\cos\theta$, ce qui permet de réécrire l'équation de transfert (5.10) sous la forme $\cos\theta\,dI/\kappa\,\rho\,dr = -I + B$, qui traduit la variation de rayonnement dans la direction θ de l'observateur.

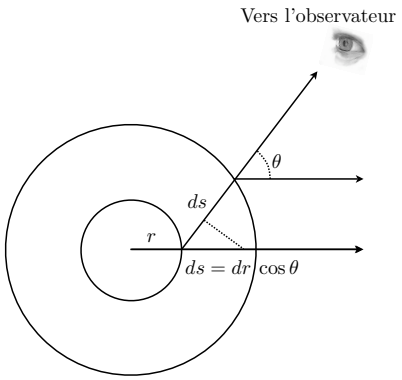


FIGURE 5.1 – Rayonnement sortant d'une couche d'étoile de rayon r, dans une direction non radiale.

En multipliant cette équation par $\cos\theta$ et en intégrant sur l'angle solide $d\Omega = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ on obtient

$$\int_\Omega \frac{dI}{\kappa\,\rho\,dr}\cos^2\theta d\Omega = \int_\Omega (-I + B)\,\cos\theta d\Omega. \tag{5.11}$$

Comme le rayonnement de corps noir est isotrope dans les intérieurs stellaires, l'intégrale faisant intervenir B s'annule. De plus, le flux sortant de la couche d'étoile en r étant donné par $F_\nu = \int_\Omega I_\nu\,\cos\theta d\Omega$, il vient après intégration sur l'angle solide et les fréquences ν :

$$F = -\frac{4\,\pi}{3}\frac{dI}{\kappa\,\rho\,dr}; \tag{5.12}$$

or selon la loi de Stefan-Boltzmann, $I = a\,c\,T^4/4\,\pi$ (a étant la constante de radiation et c la célérité de la lumière), ce qui permet d'obtenir

$$F = -\frac{c}{3\,\kappa\,\rho}\frac{d\left(a\,T^4\right)}{dr} = -\frac{4\,a\,c}{3\,\kappa\,\rho}T^3\frac{dT}{dr}. \tag{5.13}$$

L'énergie transmise et le flux sont également liés selon $L = 4\pi\,r^2 F$, de sorte que finalement

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\,\kappa\,\rho}{4\,a\,c\,T^3}\frac{L}{4\,\pi\,r^2}. \tag{5.14}$$

Le transport d'énergie par convection se déclenche basiquement lorsque le gradient radiatif $\nabla_{\rm rad} = (\partial \ln T/\partial \ln P)_{\rm rad}$ est supérieur au gradient adiabatique $\nabla_{\rm ad} = (\partial \ln T/\partial \ln P)_{\rm ad}$. Considérons deux isobares définissant des rayons $r_{\rm P_1}$ et $r_{\rm P_2}$, avec $r_{\rm P_1} < r_{\rm P_2}$. Alors la condition énoncée ci-dessus stipule que l'écart en température entre $r_{\rm P_1}$ et $r_{\rm P_2}$ est plus important que le cas adiabatique, autrement dit si l'on imagine qu'en $r_{\rm P_1}$ les températures dans les deux cas de figure sont égales, $T\left(r_{\rm P_2}\right)_{\rm rad}$ est supérieure à $T\left(r_{\rm P_2}\right)$ adiabatique. Or l'efficacité maximale de tout processus de transport de la chaleur est atteinte lorsqu'il n'y a pas de perte de celle-ci, donc dans le régime adiabatique. Il doit donc y avoir une source supplémentaire de transport d'énergie pour expliquer cet excès : ce rôle est tenu par la convection. Ainsi, l'énergie radiative excédentaire est transformée en énergie cinétique et transportée jusqu'à la surface (dans le cas des étoiles de type solaire).
En pratique le critère utilisé, qui ne dit rien quant à la possibilité des cellules convectives de pénétrer dans la zone radiative (cette propriété étant implémentée par une prescription phénoménologique), peut en première approche se comprendre en dérivant l'équation adiabatique $T \propto \rho^{1-1/\gamma}$ par rapport à r :

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}. \tag{5.15}$$

Ce mécanisme sera approfondi dans le chapitre suivant, section 6.3.

5.1.4 L'équation d'énergie

Si l'on fait le bilan énergétique d'une couche d'étoile d'épaisseur dr, l'énergie libérée par unité de temps sous forme de chaleur $\mathcal{Q}$ dans cette couche par unité de masse est donnée d'après le premier principe de la thermodynamique par

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + P \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{5.16}$$

où $\mathcal{U}$ représente l'énergie interne par unité de masse et $\mathcal{W}$ le travail par unité de masse nécessaire à la contraction ou à la dilatation de la couche. Par ailleurs cette chaleur libérée par unité de temps correspond aux gains énergétiques ($\varepsilon_{\rm nuc}$, issus des réactions nucléaires) auxquels on soustrait les pertes par neutrinos ($\varepsilon_\nu > 0$, les neutrinos n'interagissant quasiment pas avec la matière) et par radiation, soit

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = \varepsilon_{\rm nuc} - \varepsilon_\nu - \frac{\partial L}{\partial M_r}, \tag{5.17}$$

l'énergie libérée par radiation contribuant à la luminosité L de la couche en question. On obtient donc, en notant le taux de production nucléaire par unité de masse $\varepsilon = \varepsilon_{\rm nuc} - \varepsilon_\nu$:

$$\frac{\partial L}{\partial M_r} = \varepsilon - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} - \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{5.18}$$

Notons que selon l'approximation de Kippenhahn (*N.B.* celle-ci n'est formellement pas exacte dans le cas où le cœur convectif évolue : *cf.* Strittmatter *et al.*, 1970 [35] ; Cox & Giuli, 2005 [8], sec. 9.12 & 17.6), la variation d'énergie gravifique ε_G s'exprime

$$\varepsilon_G = -T\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) = c_{\rm P}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\delta}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}, \tag{5.19}$$

S étant l'entropie spécifique, $c_{\mathrm{P}} = (d\mathcal{Q}/dT)_P$ la capacité calorifique à pression constante et $\delta = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_P$. La variation de luminosité totale peut alors être exprimée explicitement en fonction des variations de pression et de température :

$$\frac{\partial L}{\partial M_r} = \varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{G}} = \varepsilon - \left(c_{\mathrm{P}} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \right). \tag{5.20}$$

5.1.5 Le transport des éléments chimiques

L'évolution temporelle de l'abondance X_i d'un élément chimique i est régie par l'équation

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = -\frac{\partial F_i}{\partial M} + \Psi_i(P, T; \mathcal{X}) \tag{5.21}$$

où F_i est le flux diffusif pour l'élément i et Ψ_i est le taux de variation de l'abondance de l'élément chimique i par les réactions nucléaires, dépendant de la température, de la pression et de $\mathcal{X} = \{X_i\}$, vecteur de composition chimique.

5.1.6 Les équations de la structure stellaire utilisées dans Cesam

Exprimer les variations des quantités en fonction du rayon (par des dérivées « eulériennes ») n'est pas le choix le plus judicieux en évolution stellaire : par exemple au voisinage de la surface les quantités physiques telles que la densité et la pression chutent sur une portion du rayon très fine. Il apparaît alors plus approprié d'exprimer les dérivées en fonction de la masse (dérivées « lagrangiennes »). On a la relation reliant les deux coordonnées :

$$\frac{\partial}{\partial M_r} = \frac{1}{4\,\pi\,r^2\,\rho} \frac{\partial}{\partial r}. \tag{5.22}$$

Les cinq équations de structure, telles qu'elles sont employées dans le code d'évolution stellaire Cesam (« Code d'Évolution Stellaire Adaptatif et Modulaire », P. Morel, 1997 [28]) s'écrivent donc

$$\frac{\partial P}{\partial M} = -\frac{GM}{4\pi r^4} \tag{5.23}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial T}{\partial M} = \frac{\partial P}{\partial M} \frac{T}{P} \nabla \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial L}{\partial M} = \varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{G}} = \varepsilon - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = -\frac{\partial F_i}{\partial M} + \Psi_i(P, T; \mathcal{X}) \qquad (1 \leq i \leq n_{\mathrm{elem}}) \tag{5.27}$$

avec, si l'on prend en compte la pression turbulente : $P = P_{\mathrm{gaz}} + P_{\mathrm{tur}}$, sinon $P = P_{\mathrm{gaz}}$.

5.2 Effet du magnétisme sur les équations de la structure stellaire

5.2.1 Travaux antérieurs : cas solaire

Prescription de Lydon et Sofia pour un champ de sous-surface

Les premières tentatives d'incorporation du champ magnétique dans un code d'évolution stellaire ont été initiées par le groupe de l'Université de Yale, afin d'en étudier les effets sur la structure des couches de sous-surface du Soleil. En 1995, Lydon & Sofia [22] proposent d'introduire une « perturbation magnétique » χ laissée arbitraire et définie de sorte que

$$\frac{B^2}{2\,\mu_0} = \chi\,\rho, \tag{5.28}$$

si bien que son intégrale sur la masse de l'étoile vaille l'énergie magnétique prise en compte :

$$\int_{M_*} \chi\, dM = E_{\rm mag}. \tag{5.29}$$

La pression magnétique $P_{\rm mag}$, composante radiale du tenseur de pression magnétique est alors reliée à la densité d'énergie magnétique par une relation

$$P_{\rm mag} = (\gamma - 1)\,\chi\,\rho, \tag{5.30}$$

γ étant un facteur d'anisotropie supposé contenir l'anisotropie du champ (les auteurs renvoient par exemple au facteur d'ansotropie défini par Goldreich, 1991 [12]).

Le premier principe de la thermodynamique est alors selon leur approche modifié pour tenir compte de la présence de champ magnétique :

$$d\mathcal{U}_{\rm tot} = T\,dS_{\rm tot} - P_{\rm tot}\,dV + (\gamma - 1)\,\frac{\chi}{V} dV, \tag{5.31}$$

où l'énergie interne totale $\mathcal{U}_{\rm tot} = \mathcal{U} + \mathcal{U}_{\rm mag}$, l'entropie totale $S_{\rm tot} = S + S_{\rm mag}$ et la pression totale $P_{\rm tot} = P + P_{\rm mag}$ (les grandeurs associées au champ magnétique étant désignée par l'indice mag). Les capacités calorifiques sont en conséquence modifiées (par une relation implicite, ce qui complique la mise en œuvre du formalisme) ainsi que le critère et l'efficacité de la convection.

Dans cet article, les auteurs se limitent au cas $\gamma = 2$ et choisissent un profil de χ gaussien, de la forme

$$\chi = \chi_{\rm max}\, e^{-\frac{1}{2}[(M_D - M_{DC})/\sigma]^2}, \tag{5.32}$$

où la profondeur de masse M_D est définie par $M_D = \log_{10}(1 - M_r/M_*)$.

Les effets sur un ensemble de quantités observables induits par la présence de (i) un champ magnétique « profond » mais localisé ($M_{DC} = -1.45$ et $\sigma = 0.20$, ce qui correspond à un champ localisé en $M_r = 0.964^{+0.092}_{-0.026}\, M_*$) et (ii) un champ de sous-surface mais proportionnellement plus étendu ($M_{DC} = -7.20$ et $\sigma = 0.90$, ce qui correspond à un champ localisé en $M_r = (1 - 10^{-7.2})^{+1.96\times10^{-5}}_{-6.29\times10^{-8}}\, M_*$), sont présentés en Tab. 5.1.

RESULTS OF MAGNETIC PERTURBATIONS

Property	Deep Perturbation	Shallow Perturbation
Location	$M_{Dc} = -1.45$, $\approx 0.04\ R_\odot$ below convection zone	$M_{Dc} = -7.20$, $\approx 0.004\ R_\odot$ below the surface
Width	$\sigma = 0.20$	$\sigma = 0.90$
Maximum magnetic field	10^6 G	10^3 G
Total energy	1.100×10^{43} ergs	2.672×10^{36} ergs
Change in surface luminosity	$+2.299 \times 10^{29}$ ergs s^{-1} + $5.969 \times 10^{-5}\ L_\odot$	-7.916×10^{28} ergs s^{-1}, $-2.055 \times 10^{-5}\ L_\odot$
Change in surface radius	$+3.566 \times 10^6$ cm, $+5.124 \times 10^{-5}\ R_\odot$	$+6.791 \times 10^4$ cm, $+9.759 \times 10^{-7}\ R_\odot$
Change in surface temperature	-0.0618 K	-0.0325 K
$W \equiv \Delta \ln L_{surf}/\Delta \ln R_{surf}$	$+0.8582$	-0.0475
Change in location of convection zone base	none	none
Change in convective turnover time	$+5.9$ days	$+0.002$ days
Average relative change in neutrino fluxes (Δflux/flux)	-6×10^{-5}	$<+10^{-9}$

TABLE 5.1 – Perturbations induites par la présence d'un champ magnétique profond et d'un champ magnétique local de sous-surface dans un modèle solaire, sur sa structure interne et en surface. Crédit : Lydon & Sofia, 1995 [22]

Le facteur d'anisotropie de Goldreich (1991) [12] pourrait constituer une extension au modèle de Lydon & Sofia pour prendre en compte de manière plus consistante la géométrie du champ magnétique. Il est défini par

$$\gamma_G = \frac{< B_h >^2 - < B_r >^2}{< B_h >^2 + < B_r >^2} \tag{5.33}$$

où la moyenne $< f >$ d'un champ scalaire f est définie par

$$< f >= \frac{1}{4\,\pi} \int_\Omega f\, d\Omega, \tag{5.34}$$

$d\Omega = \sin\theta\, d\theta d\varphi$ générant l'angle solide sur tout l'espace $\Omega = 4\,\pi$ et les indices h et r indiquent respectivement les directions horizontale et radiale. γ_G prend des valeurs comprises entre -1 (champ purement radial) et 1 (champ purement horizontal). En particulier, Goldreich note qu'un champ force-free présente une valeur de $\gamma_G = 0$ et un champ statistiquement aléatoire donne $\gamma_G = 1/3$.

Le code YREC

En 2001, Li & Sofia [21] améliorent la méthode proposée par Lydon & Sofia [22]. L'influence du champ magnétique sur les opacités radiatives est prise en compte, ainsi q'une équation d'état plus générale ; enfin ils appliquent la méthode dans la nouvelle version du code d'évolution stellaire de l'Université de Yale, YREC (« Yale Rotating stellar Evolution Code »), dans le cas sans rotation. Ce code est modifié pour pouvoir suivre l'évolution stellaire sur des pas de temps aussi faibles qu'un an dans le cas du Soleil, ce qui permet de mettre en évidence l'influence des cycles solaires sur sa structure interne. Le profil de la pression magnétique est défini d'après une gaussienne comme précédemment, ce qui leur a permis, à partir des mesures d'irradiance totale et de température effective de 1978 à 1992, d'en déduire l'amplitude et la localisation du champ magnétique de sous-surface responsable de ces variations. Celui-ci se situe aux alentours de 0.96 $R_\odot$ et possède une amplitude (intensité maximale) allant de 20 à 47 kG. Cependant les auteurs n'excluent pas une composante de l'ordre de 300 kG dans la région d'overshoot, sa contribution étant négligeable en regard de la précision sur les observations.

Introduction d'une pression magnétique pour simuler la présence de champs magnétiques internes

Dans le but de voir si l'on peut fixer une limite à l'amplitude du champ magnétique à partir de la différence entre la vitesse du son déduite des inversions héliosismiques et celle obtenue à partir des codes d'évolution stellaires classiques, S. Couvidat, S. Turck-Chièze et A. G. Kosovichev [6] ont introduit une pression magnétique reproduisant les effets d'un champ magnétique (purement toroïdal) dans un code d'évolution stellaire. Cette pression magnétique était paramétrée de sorte à pouvoir modéliser l'influence d'un champ présent dans la zone radiative, dans la tachocline et dans les régions de sous-surface, *i.e.* là où le désaccord entre la vitesse du son observée et celle obtenue des modèles est le plus important.
En suivant Gough & Thompson (1990) [13], le champ simulé est de la forme $\mathbf{B}_\varphi = a(r)\,\frac{d}{d\theta}P_k(\cos\theta)\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, où la composante angulaire est supposée quadrupolaire ($k = 2$). De plus la vitesse du son est modifiée par le champ magnétique pour donner des ondes magnéto-sonores qui, dans le cas où le champ est perpendiculaire aux ondes acoustiques, possèdent une vitesse de $c_{ms} = \sqrt{c_s^2 + v_A^2}$, où v_A est la vitesse d'Alfvén définie par $v_A^2 = B^2/(\mu_0\,\rho)$.
Deux profils radiaux sont ensuite considérés :

- premièrement, pour simuler le champ dans la zone radiative, la dépendance radiale est en

$$a(r) = \begin{cases} K_\lambda \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^\lambda & \text{si} \quad r \leq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{5.35}$$

  où $K_\lambda = (A + \lambda)(1 + 1/\lambda)^\lambda\, B_0$, $\lambda = 10\, r_0 + 1$ et r_0 est le rayon de la base de la zone convective, pris à 0.712 $\mathrm{R}_\odot$;
- enfin, la loi choisie pour modéliser le champ dans la tachocline ou dans les couches de sous-surface s'écrit :

$$a(r) = \begin{cases} B_0 \left[1 - \left(\frac{r - r_0}{d}\right)^2\right] & \text{si} \quad |r - r_0| \leq d, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{5.36}$$

  d représentant la demi-largeur de la zone dans laquelle est présent le champ magnétique et r_0 étant le centre de cette zone.

Les intensités varient de 10 MG à 100 MG pour le champ dans la zone radiative, de 300kG à 500kG dans la tachocline et de 3 kG à 20 KG dans la région de sous-surface. Il est alors mis en évidence qu'un champ de 100 MG est exclus dans la zone radiative. Une limite de 30 MG est donnée d'après la variation maximale sur la vitesse du son compatible avec les barres d'erreur observationnelles. Par le même diagnostic, les amplitudes maximales dans la tachocline et la région de sous-surface sont limitées à 500 kG et 30 kG respectivement. Des travaux ultérieurs ont montré que l'amplitude du champ fossile ne devrait pas dépasser 2 MG, c'est la valeur que nous adopterons dans notre étude.

5.2.2 Modification de l'équilibre hydrostatique

J'exposerai à présent comment nous introduisons dans ce travail les effets associés au champ magnétique à partir d'une approche plus fondamentale qui permet de maintenir sa géométrie : au lieu de ne considérer que le terme de pression magnétique ou de modifier la thermodynamique (tel que l'ont fait Lydon & Sofia) régissant la structure stellaire nous préférons partir des équations de l'hydrodynamique en incluant progressivement les effets du champ magnétique.

La force de Laplace

Considérons un gaz complètement ionisé, composé d'électrons et d'ions de charges respectives $q_s = (-e, e)$. La force subie par l'une de ces particules s en mouvement dans un champ électromagnétique est la force de Lorentz

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L}s} = q_s(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{5.37}$$

Cette expression peut être vue comme la définition des champs électriques et magnétiques : dans le référentiel galiléen associé au mouvement rectiligne uniforme d'une particule, la force subie n'est plus que $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, et le champ électrique peut se définir comme la force subie par une particule dans ce référentiel divisée par sa charge. Le champ magnétique peut alors être défini relativement au champ électrique par la valeur qu'il faut ajouter à celui-ci (en effectuant le produit scalaire par la vitesse) pour préserver la covariance de la force lorsque le mouvement de la particule devient quelconque par rapport au référentiel galiléen précédemment choisi (voir également la discussion dans la section 2.1.1). Tout cela n'est évidemment vrai que dans les limites non-relativistes, le principe de relativité galiléen restant dans ce cas une bonne approximation de la relativité restreinte. Comme nous l'avons aussi discuté dans la section 2.1.1, dans la limite non-relativiste on peut négliger le premier terme du membre de droite.
Si l'on considère les deux espèces composant un fluide conducteur on a donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\mathcal{L}} &= \mathbf{F}_{\mathcal{L}i} + \mathbf{F}_{\mathcal{L}e} \\ &= (n_i q_i + n_e q_e)\,\mathbf{E} + (n_i q_i \mathbf{v}_i + n_e q_e \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} \\ &\simeq e\,(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B}\end{aligned} \tag{5.38}$$

où n_s et $\mathbf{v}_s$ sont respectivement la densité de charges et la vitesse moyenne de l'espèce s. Nous avons supposé que tous les ions ont la même charge ; il peut être aisément montré que la généralisation à des ions de charges différentes n'affecte pas le résultat. De plus, considérons le fluide à des échelles supérieures à la longueur de Debye, *i.e.* à partir desquelles les effets d'écrantage rendent le fluide globalement neutre ($n_i = n_e = n$). Disons que ce fluide est mû d'une vitesse moyenne $\mathbf{u}$. Les ions étant les espèces les plus massives, ce sont eux qui définissent la vitesse moyenne du fluide, *i.e.* $\mathbf{u} \simeq \mathbf{v}_i$. On définit alors la « vitesse de dérive » (en anglais, *drift velocity*) $\mathbf{v}_\mathrm{d}$ des électrons par $\mathbf{v}_\mathrm{d} = \mathbf{v}_e - \mathbf{u}$. Il vient finalement, en identifiant la densité de courant électronique $\mathbf{j} = -n\,e\,\mathbf{v}_\mathrm{d}$:

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L}} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \tag{5.39}$$

On reconnaît la force de Laplace, que nous nommons par abus de langage force de Lorentz (ici volumique). Dans ce manuscrit j'aurai peu de scrupules à utiliser cette dénomination,

moins par préférence du fondement physique d'une expression à sa référence patriotique que dans le but de s'accorder avec l'usage le plus répandu.

L'équilibre MHS

Ainsi l'équilibre magnéto-hydrodynamique s'obtient en ajoutant à l'équilibre hydrodynamique (5.5) la force de Lorentz :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla\, P - \rho \nabla\, \Phi_{\text{grav}} + \mathbf{F}_{\mathcal{L}} \tag{5.40}$$

et l'équilibre MHS (magnéto-hydrostatique) s'écrit

$$\nabla\, P = -\rho\, \nabla\, \Phi_{\text{grav}} + \mathbf{F}_{\mathcal{L}}. \tag{5.41}$$

Remarquons alors qu'à l'aide de la loi de Maxwell-Ampère (2.1), la force de Lorentz peut s'écrire

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\mu_0}\, (\nabla\, \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \tag{5.42}$$

En utilisant alors l'identité vectorielle sur le produit mixte (A.20), on peut écrire celle-ci sous la forme

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\mu_0}\, (\mathbf{B} \cdot \nabla\,)\, \mathbf{B} - \nabla\, \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\, \mu_0} \right), \tag{5.43}$$

avec $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = B^2$. On identifie dans le deuxième terme du membre de droite, de même que pour la pression gazeuse le gradient d'une énergie volumique. Cette densité d'énergie définit la pression magnétique

$$P_{\text{mag}} = \frac{\mathbf{B}^2}{2\, \mu_0}, \tag{5.44}$$

alors que le premier terme du membre de droite de (5.43) correspond à la force de tension magnétique.

N.B. **Le tenseur de pression magnétique** permet d'unifier les notations précédentes et de mettre la force de Lorentz sous la forme conservative [19] :

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L}} = -\nabla\, \cdot \mathcal{T}, \tag{5.45}$$

où le tenseur $\mathcal{T}$ est défini par

$$\mathcal{T}_{i,j} = -\frac{B_i\, B_j}{\mu_0} + \delta_{i,j} \frac{B^2}{2\, \mu_0} \tag{5.46}$$

(c'est la partie magnétique du tenseur de Maxwell). Cependant il ne faut pas voir dans l'expression (5.45) une condition pour imposer que $\nabla\, \times \mathbf{F}_{\mathcal{L}} = \mathbf{0}$, ce qui invaliderait l'hypothèse sur la barotropie (3.22) et tout le travail qui en résulte (*cf.* chapitre 3). Ici il faut être précautionneux avec les notations : ce n'est pas le gradient d'un scalaire dont le rotationnel (un vecteur) s'annule toujours ; il s'agit de la divergence d'un tenseur de rang deux dont le rotationnel (deux vecteurs) ne s'annule pas *a priori* .

5.2.3 Grandeurs énergétiques

Examinons le travail de la force de Lorentz volumique[1] par unité de temps $\mathbf{F}_{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{v} &= (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} && (5.47)\\
&= -\,\mathbf{j} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) && (5.48)\\
&= -\,\mathbf{j} \cdot \left(\sigma^{-1}\,\mathbf{j} - \mathbf{E}\right) && (5.49)\\
&= \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \sigma^{-1}\mathbf{j}^2 && (5.50)\\
&= \frac{1}{\mu_0}\,(\nabla\ \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} - \mu_0\,\eta\,\mathbf{j}^2 && (5.51)\\
&= \frac{1}{\mu_0}\,(\nabla\ \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} - \nabla\ \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}\right) - \mu_0\,\eta\,\mathbf{j}^2 && (5.52)\\
&= -\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\,\mu_0}\right) - \nabla\ \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}\right) - \mu_0\,\eta\,\mathbf{j}^2 && (5.53)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé successivement[2] les éqs. (5.39), (A.20), (2.5), (2.1), (A.17) et (2.2).
En la multipliant par $\mathbf{v}$, l'équation (5.40) devient alors l'équation rendant compte de la balance énergétique (par unité de volume) magnéto-hydrodynamique (*N.B.* que l'on pourrait aussi obtenir en prenant le moment d'ordre deux de l'équation de Vlasov) :

$$\underbrace{\frac{\rho}{2}\frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial t}}_{E_k} + \underbrace{\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t}}_{E_{\mathrm{mag}}} = -\underbrace{\mathbf{v} \cdot \left(\frac{\rho}{2}\nabla\,\mathbf{v}^2\ + \nabla\,P + \rho\nabla\,\Phi_{\mathrm{grav}}\right)}_{\text{Advection d'energie}} - \underbrace{\nabla\ \cdot \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}\right)}_{\nabla\cdot\mathcal{S}} - \underbrace{\mu_0\,\eta\,\mathbf{j}^2}_{\mathcal{Q}_{\mathrm{Ohm}}}. \quad (5.54)$$

de laquelle l'on peut tirer quelques remarques. Tout d'abord, il apparaît dans le terme de gauche que l'énergie cinétique E_k constitue le réservoir d'énergie magnétique E_{mag}, ainsi que souligné par Brandenburg *et al.*, 1996 [3] et Brun *et al.*, 2004 [5] (voir Fig. 5.2). On peut faire l'expérience de pensée de conserver le membre de droite constant pour s'en convaincre. Ensuite, le membre de droite comporte les termes d'advection de l'énergie cinétique, l'énergie de pression et l'énergie potentielle gravitationnelle, ainsi que la divergence du flux de Poynting $\nabla\ \cdot \mathcal{S}$ ($\mathcal{F}_{\mathrm{Poynt}} = \mathcal{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\,/\mu_0$ étant le flux ou vecteur de Poynting) et finalement le terme de chauffage ohmique $\mathcal{Q}_{\mathrm{Ohm}} = \mu_0\,\eta\,\mathbf{j}^2$. L'énergie magnétique sera donc perdue par rayonnement *via* le flux de Poynting et sous forme de chaleur par dissipation ohmique, qui se retrouvera *in fine* convertie en énergie interne.
En outre, dans l'approximation de Cowling, les fluctuations du champ gravitationnel sont négligées. Le bilan d'énergie total, prenant en compte l'énergie interne s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{tot}}{\partial t} &= \int_{\mathcal{V}} \left\{\rho T \left[\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla\,)\,S\right]\right\} d\mathcal{V} && (5.55)\\
&= -\,\nabla\ \cdot \mathcal{F}_{\mathrm{tot}}\ + \rho\,\varepsilon_{\mathrm{tot}} && (5.56)
\end{aligned}$$

où le taux de production d'énergie volumique $\varepsilon_{\mathrm{tot}}$ comporte toutes les sources et pertes d'énergie, à savoir nucléaire, neutrinique et ohmique :

1. Il est vrai que « la force de Lorentz ne travaille pas », lorsqu'elle est définie à l'échelle électronique par $\mathbf{F}_{\mathcal{L}} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$: celle-ci est dans ce cas orthogonale au déplacement de la particule chargée et on vérifie alors aisément que $\mathbf{F}_{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{v} = 0$. Cependant si l'on reprend sa définition macroscopique donnée par l'éq. (5.39), il n'y a aucune raison pour que celle-ci ait un bilan énergétique nul.
2. Cette équation aurait aussi bien pu être établie à partir de l'équation d'induction et de la loi d'Ohm.

$$\varepsilon_{\rm tot} = \varepsilon_{\rm nuc} - \varepsilon_\nu + \mathcal{Q}_{\rm Ohm}/\rho \tag{5.57}$$

et où le flux total est la somme du flux radiatif $\mathcal{F}_{\rm rad}$, convectif $\mathcal{F}_{\rm conv}$, d'énergie cinétique $\mathcal{F}_{E_k}$, de pression $\mathcal{F}_P$ et de Poynting $\mathcal{F}_{\rm Poynt}$:

$$\mathcal{F}_{\rm tot} = \mathcal{F}_{\rm rad} + \mathcal{F}_{\rm conv} + \mathcal{F}_{E_k} + \mathcal{F}_P + \mathcal{F}_{\rm Poynt}. \tag{5.58}$$

La luminosité totale s'écrit alors comme la somme des luminosités associées à ces flux :

$$L_{\rm tot} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathcal{F}_{\rm tot}\, d\mathcal{V} \tag{5.59}$$

$$= L_{\rm rad} + L_{\rm conv} + L_{\rm E_k} + L_P + L_{\rm Poynt}. \tag{5.60}$$

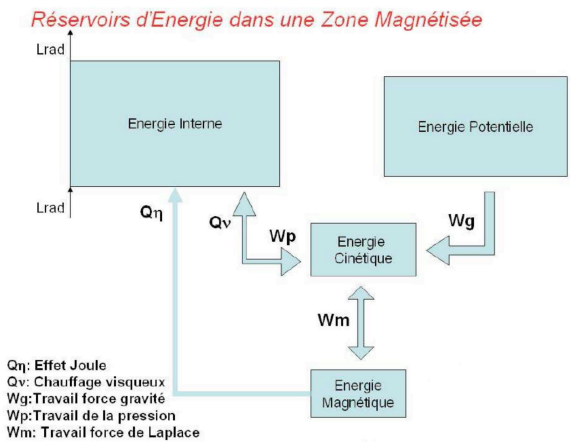


FIGURE 5.2 – Représentation schématique des différents réservoirs présents dans les zones magnétisées et des processus physiques les reliant. Crédit : Brun *et al.*, 2004 [4].

5.2.4 Les équations modifiées

Au vu de ce qui vient d'être montré, les cinq équations de structure, telles qu'elles sont employées dans le code d'évolution stellaire CESAM s'écrivent donc en présence de champ magnétique de densité d'énergie $\mathcal{U}_{\rm mag}$:

$$\frac{\partial P}{\partial M} = -\frac{GM}{4\pi r^4} + \frac{1}{4\,\pi\,\rho\,r^2}\left\langle F_{\mathcal{L};r}\right\rangle, \tag{5.61}$$

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}, \tag{5.62}$$

$$\frac{\partial T}{\partial M} = \frac{\partial P}{\partial M}\frac{T}{P}\nabla, \tag{5.63}$$

$$\frac{\partial L}{\partial M} = \varepsilon - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{U}_{\rm mag}}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\left\langle \nabla \cdot \mathcal{F}_{\rm Poynt} + \mathcal{Q}_{\rm Ohm}\right\rangle, \tag{5.64}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = -\frac{\partial F_i}{\partial M} + \Psi_i(P, T; \mathcal{X}) \qquad (1 \le i \le n_{\rm elem}). \tag{5.65}$$

On peut légitimement se poser la question de la prise en compte de la pression magnétique dans la pression totale, comme cela est fait dans le cas de la pression turbulente. Nous n'avons pas fait ce choix ici, considérant que la force de Lorentz joue son rôle par l'intermédiaire de la force de tension aussi bien que par celui du gradient de pression magnétique. De même nous n'avons pas pris en compte le champ magnétique dans l'équation d'état : celle-ci relève de la physique microscopique, sur laquelle il peut pourtant avoir une influence (en diminuant par exemple les sections efficaces en contraignant le mouvement des espèces chargées à spiraler le long des lignes de champ magnétique). Cependant, pour examiner ces effets, il faudrait disposer d'outils tels que par exemple des codes radiatifs qui sont actuellement en plein développement dans la communauté des plasmas de fusion, en y incluant les effets du champ magnétique. Il s'agit là d'une démarche suffisamment éloignée de nos préoccupations pour que nous nous en remettions à espérer que cet aspect soit étudié dans des travaux ultérieurs à cette thèse.

5.3 Perturbation de la structure stellaire

Avant de mettre en œuvre les équations dérivées plus haut dans un code d'évolution stellaire, il peut être intéressant de quantifier l'impact de chaque terme associé à la présence de champ magnétique sur l'équilibre (mécanique ou énergétique) que celui-ci modifie. Je présenterai donc au fil de cette section ces différentes modifications sur la structure, en prenant à l'appui deux modèles d'application des solutions dérivées dans le chapitre précédent : (i) le cas d'un champ magnétique confiné dans la zone radiative d'un Soleil jeune ; (ii) celui d'un champ présent dans une étoile de type A, également confiné dans la zone radiative. Bien sûr, ce champ va tendre à diffuser ohmiquement vers l'extérieur, de même qu'il va être modifié par la circulation méridienne et la rotation différentielle. C'est pourquoi des modèles d'étoiles jeunes ont été choisis.

5.3.1 Les deux cas d'application

Paramètres du modèle solaire

La structure est calculée à l'aide du code Cesam [28], à partir des paramètres du modèle solaire de référence sans rotation, calibré à 10^{-5} en rayon et luminosité de surface et le plus proche possible de donnéees héliosismiques suivant Couvidat *et al.* (2003) [7] et Turck-Chièze *et al.* (2004) [38]. Il a été calculé en utilisant les abondances de Grevesse & Noels (1993) [14] et en prenant en compte la diffusion microscopique selon le formalisme simplifié de Michaud et Profitt (1993) [27]. Les équations d'état Opal et la dernière version des tables d'opacité Opal2001 ont été utilisées [15, 31]. La fraction initiale en hydrogène est $X_0 = 0.70642$, celle en hélium de $Y_0 = 0.27468$. L'âge du Soleil jeune est de 500 millions d'années.

En ce qui concerne l'amplitude du champ, nous avons supposé que les contraintes dérivées dans le cas su Soleil actuel pouvaient être transposable au Soleil jeune. Nous nous sommes donc fondés sur les travaux de Couvidat (2003) [7] et Friedland & Gruzinov (2004) [10] pour avoir une estimation de la limite supérieure d'un tel champ interne. Ceux-ci ont étudié quelle pourrait être l'amplitude du champ magnétique au travers de différents indicateurs :

la mesure de la vitesse du son trouvée par les observations héliosismologiques permet, en supposant simplement que $\delta c_s/c_s \simeq P_{\rm mag}/P_{\rm gaz}$, de contraindre l'amplitude du champ qui est alors $B_0 < 0.4 \times 10^8$ G ; Ici également, une contrainte est donnée par les travaux de Couvidat *et al.* (2003) [6], qui ont trouvé qu'un champ interne devrait avoir une amplitude inférieure à 30 MG.

l'écart à la sphéricité : il est connu que le Soleil n'est pas parfaitement sphérique mais *oblate*[3], le facteur d'aplatissement estimé est de $\varepsilon = 1 - R_{\rm pole}/R_{\rm equateur} \simeq 9 \times 10^{-6}$. En supposant que l'écart à la sphéricité induit par le champ magnétique n'excède pas 30 % de celui induit par la rotation, une valeur limite de $B_0 < 7$ MG peut alors être donnée.
N.B. Le satellite PICARD , qui sera lancé au cours de l'année 2009, devrait pouvoir apporter des contraintes plus précises sur l'amplitude du champ interne en fournissant des mesures extrèmement précises du diamètre solaire grâce à l'un des trois instruments embarqués, SODISM (Solar Diameter Imager and Surface Mapper) ;

les instabilités MHD susceptibles de se développer sont finalement passées en revue pour un champ purement azimutal, en particulier l'instabilité de flottaison et l'instabilité double diffusive[4]. Il est apparu que l'instabilité double-diffusive fournissait une contrainte plus basse, avec $B_0 < 2.1$ MG.

Nous retenons ici la valeur la plus restrictive de 2.1 MG : l'amplitude du champ magnétique dans la zone radiative solaire a donc été calibrée de sorte que l'intensité du champ soit de 2 MG à son maximum (cette précision suffit dans ce contexte), qui se situe ici à 35.2 % de son rayon.

Paramètres du modèle de l'étoile de type A magnétique

Le modèle est typique d'une étoile de type A2p présentant une forte composante dipolaire (*cf. e.g.* [40]), avec une masse initiale de $M_{A_{\rm p}} = 2.40\,{\rm M}_\odot$. La métallicité initiale est simplement prise égale à la métallicité solaire. Le modèle issu de CESAM est sur la ZAMS ; la fraction en hydrogène au centre est de $X_c = 0.6718$. Son âge est alors de 50 millions d'années et sa luminosité de $L_* = 34.5\,{\rm L}_\odot$. Sa température effective est de $T_{\rm eff} = 10\,390$ K, son rayon est de $R_* = 1.814\ {\rm R}_\odot$. L'étoile tire son énergie à 31 % des chaînes $p-p$ et à 69 % des cycles CNO ; elle possède un cœur convectif s'étendant jusqu'à $0.1337\,R_*$ et une fine enveloppe convective descendant vers d'intérieur jusqu'à $0.9926 R_*$ soit 0.74 % du rayon.

L'amplitude de son champ magnétique est telle que l'intensité du champ magnétique vaut 10 kG à son maximum, qui se situe à $0.3838\,R_*$.

3. Un ellipsoïde de révolution est *oblate* (du latin *ob latum*) s'il est aplati ; par contraste à *prolate* (de *pro latum*), allongé (en forme de ballon de rugby).

4. L'instabilité double-diffusive (voir Schubert, 1968 [33]) se déclenche lorsque

$$-\frac{K}{\eta}\frac{P_{\rm mag}}{P_{\rm gaz}}\frac{\partial\,\ln\left(B_\varphi/\rho\,r\right)}{\partial r} > \frac{\partial\left(P\,\rho^{-\gamma}\right)}{\partial r}. \tag{5.66}$$

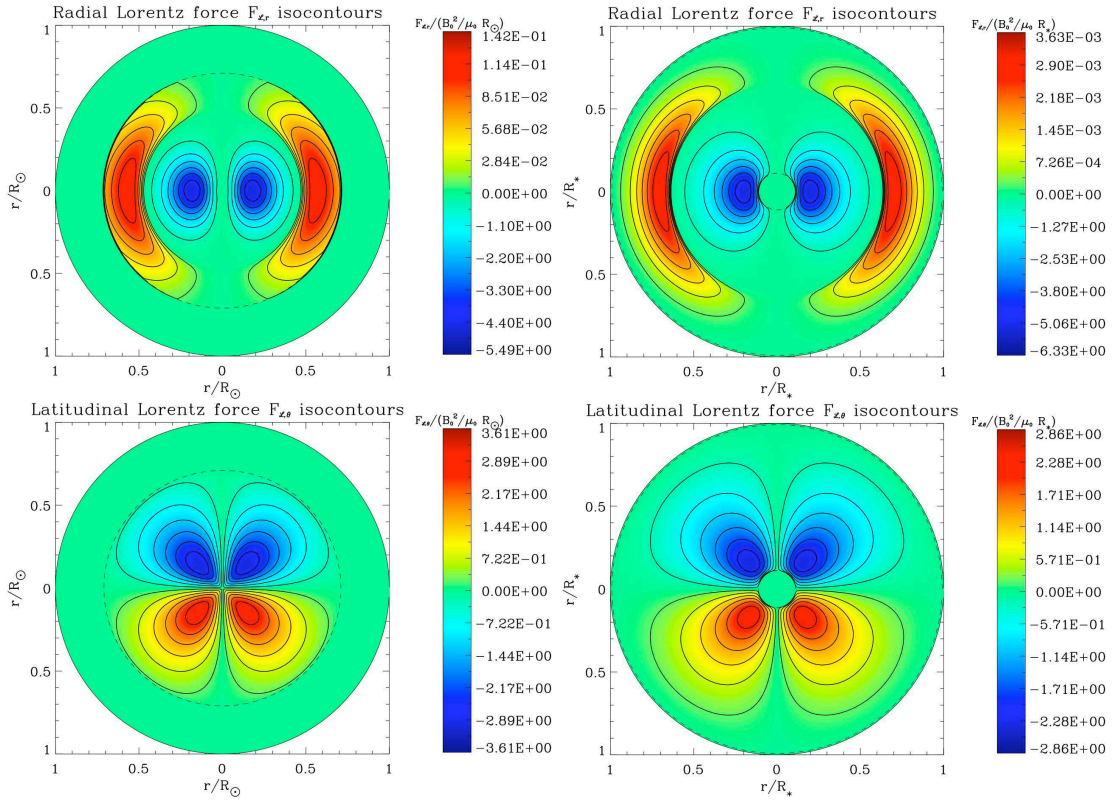


FIGURE 5.3 – Panneau du haut : isocontours de la force de Lorentz radiale $\boldsymbol{F}_{\mathcal{L};r}(r,\theta)$ normalisée à $B_0^2/\mu_0 R_*$ en coupe méridienne ; (a, à gauche) dans le cas solaire et (b, à droite) dans celui de l'étoile Ap. Panneau du bas : isocontours de la force de Lorentz latitudinale $\boldsymbol{F}_{\mathcal{L};\theta}(r,\theta)$ normalisée à $B_0^2/\mu_0 R_*$ en coupe méridienne ; (c, à gauche) dans le cas solaire et (d, à droite) dans celui de l'étoile Ap.

5.3.2 Quantités physiques perturbant la balance hydrostatique

La force de Lorentz

Pour mieux cerner le rôle que la force de Lorentz exerce sur la balance hydrostatique, nous avons tracé ses composantes selon $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}$ et $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ normalisées par-rapport à $B_0^2/\mu_0 R_*$ en FIG. 5.3 (respectivement dans le panneau du haut et celui du bas). De plus, sa moyenne latitudinale est donnée en Fig. 5.8.

Il apparaît qu'elle exerce une influence centripète dans la partie interne de la zone radiative (jusqu'à $0.47\,R_\odot$ dans le cas solaire et $0.64\,R_*$ dans le cas de l'étoile Ap) et une influence centrifuge dans sa partie externe. De plus, les composantes latitudinales de la force de Lorentz sont dirigées vers les pôles de l'étoile, ce qui va nécessiter un excès de force gravitationnelle dirigée vers l'équateur pour la contrebalancer. Cela va avoir pour effet d'accroître la densité aux basses latitudes. Ainsi, son effet global sera d'induire une déformation *oblate*.

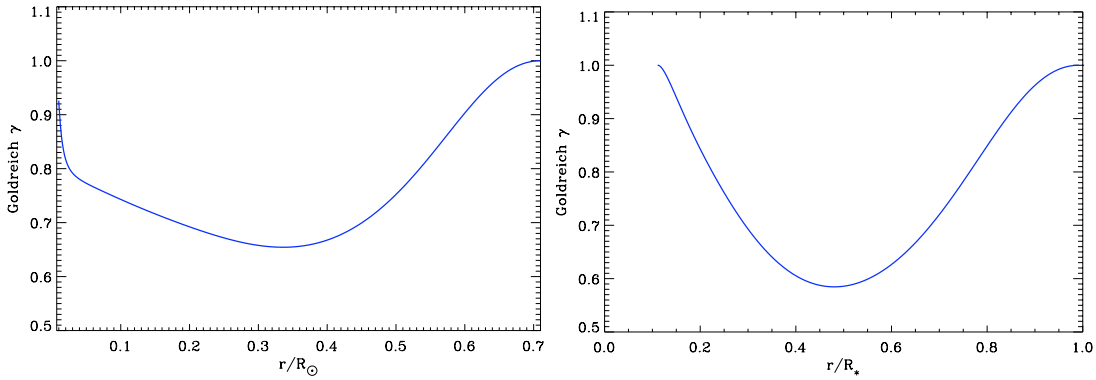


FIGURE 5.4 – Paramètre de Golreich ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap.

Le facteur d'anisotropie

Examinons le facteur d'anisotropie de Goldreich défini par l'éq. (5.33). Ainsi que mentionné par certains auteurs, celui-ci permettrait de paramétrer la géométrie du champ magnétique dans un code d'évolution stellaire 1D. Nous avons tracé son profil en FIG. 5.4 pour les deux cas étudiés ici. On peut immédiatement se rendre compte qu'une valeur de ce paramètre ne peut pas être donnée sans connaissance *a priori* de la configuration du champ.

La pression magnétique

La pression magnétique $P_{\text{mag}} = \mathbf{B}^2/2\mu_0$ normalisée par sa valeur maximale $B_0^2/2\mu_0$ (définissant l'amplitude du champ B_0) est donnée en FIG. 5.5. Nous pouvons constater que la force de pression, par définition perpendiculaire aux surfaces iso-P_{mag} va tendre à expulser le gaz des régions à forte pression magnétique (régions rouges) et à les concentrer vers celles de plus basse pression magnétique (régions bleues). Cela confirme l'affirmation donnée précédemment : une étoile sphérique va tendre vers un état *oblate* en présence de champ magnétique. Le paramètre plasma $\beta = P_{\text{gaz}}/P_{\text{mag}}$ est représenté en FIG. 5.6.
Dans les deux cas d'études, nous restons dans le régime à haut plasma (typiquement, $\beta > 10^3$) dans les zones radiatives. Ainsi nous pourrons considérer par la suite que la force de Lorentz n'exerce qu'une influence perturbatrice par rapport à l'état auto-gravitant de l'étoile.

Contributions à la force de Lorentz

Rappelons l'expression (3.69) : $\mathbf{F}_{\mathcal{L}} = \beta_0\,\bar{\rho}\nabla\,\Psi$; $\bar{\rho}$ étant la densité en l'absence de champ magnétique. On en déduit que lorsque la densité tend vers 0, la force de Lorentz doit s'annuler également. Nous avons donc tracé pour mettre en valeur l'influence de chacun des deux facteurs leurs contributions respectives $\bar{\rho}$ et $\langle\nabla_r\,\Psi\rangle = \langle\partial_r\,\Psi\rangle$ en FIG. 5.7 : le profil de la force de Lorentz radiale est clairement régi par celui de la densité.

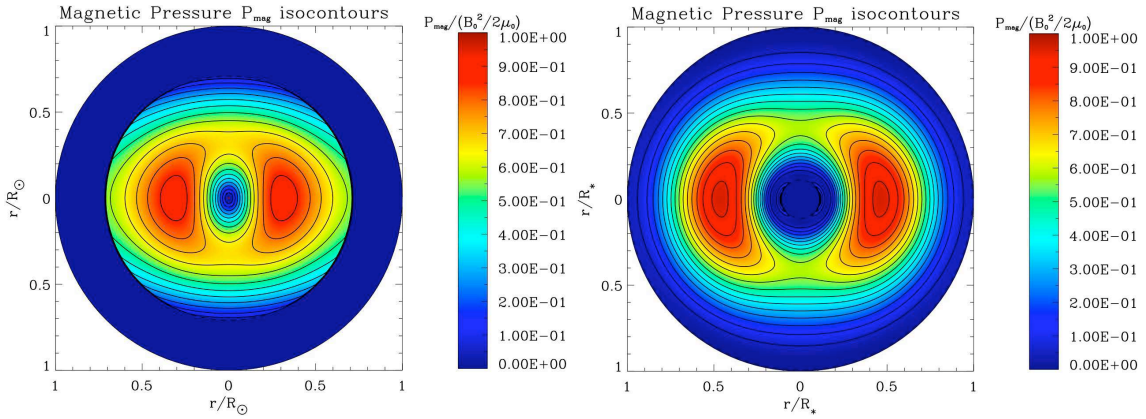


FIGURE 5.5 – Isocontours de la pression magnétique $P_{\mathrm{mag}}(r,\theta)$ normalisée à $B_0^2/2\mu_0$ en coupe méridienne ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap.

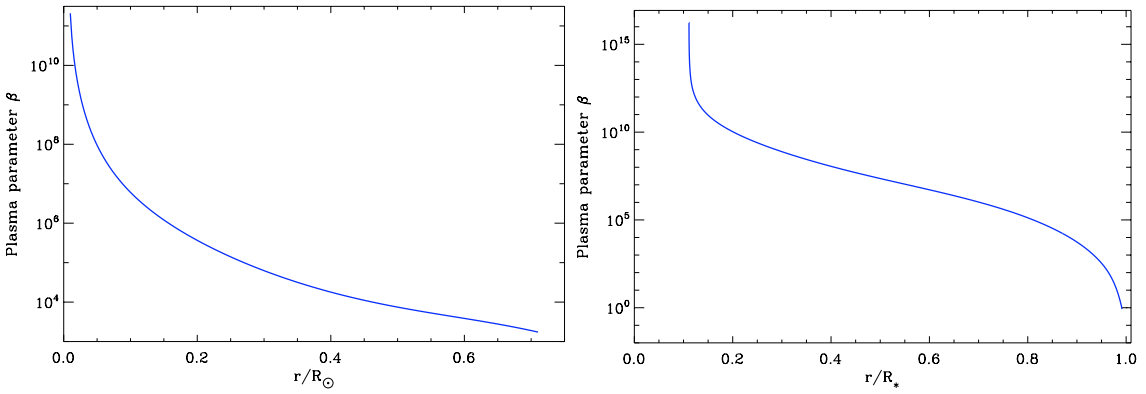


FIGURE 5.6 – Paramètre plasma β ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap.

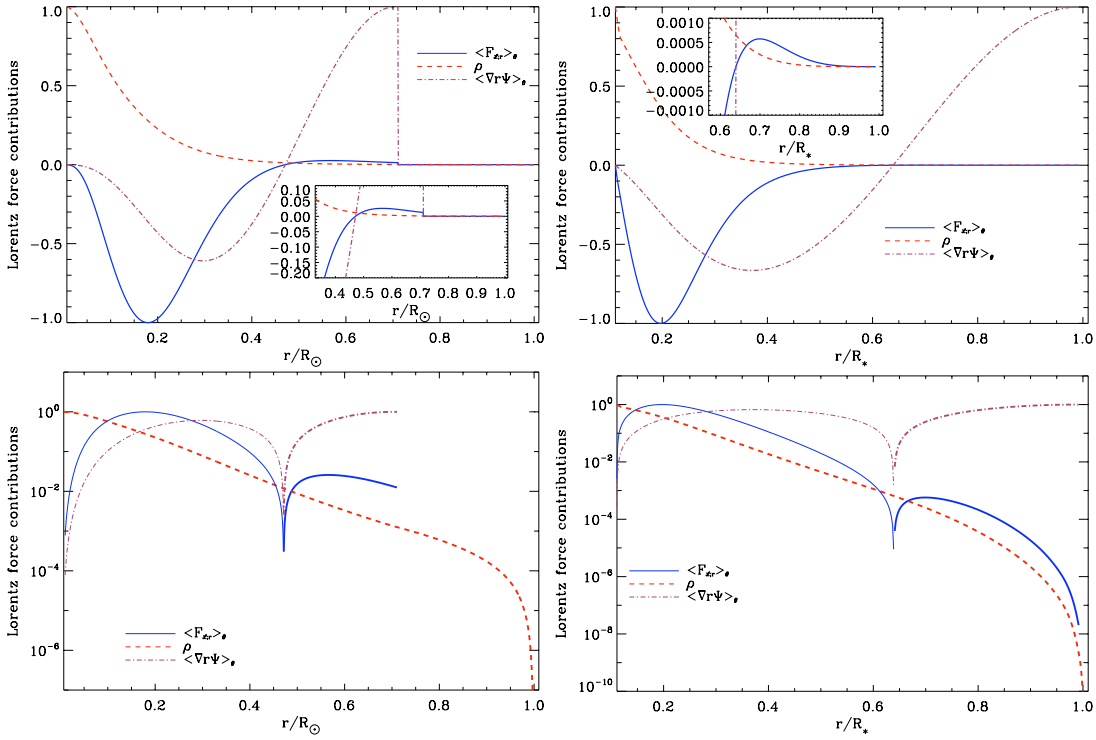


FIGURE 5.7 – Force de Lorentz radiale moyennée (ligne pleine), sa contribution due à la densité moyenne $\bar{\rho}$ et à $\nabla_r \Psi = \partial_r \Psi$ (normalisés à leur maximum) ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap. Panneau du haut : en échelle linéaire ; panneau du bas : en échelle logarithmique.

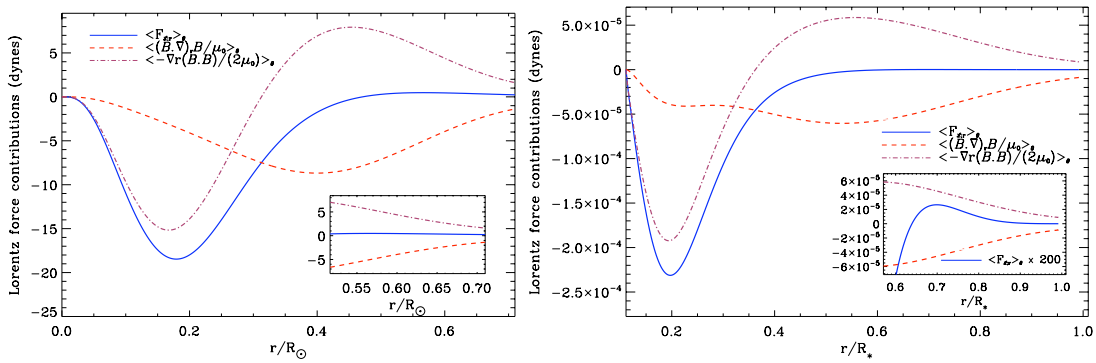


FIGURE 5.8 – Force de Lorentz radiale moyennée (ligne pleine), sa contribution du gradient de pression magnétique ainsi que celle de la force de tension magnétique ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap.

Examinons maintenant la force de tension magnétique

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L}}^{T} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \mathbf{F}_{\mathcal{L}} + \nabla P_{\text{mag}}. \tag{5.67}$$

Sa contribution moyennée horizontalement[5] (*cf.* éq. (5.34)) est représentée en FIG. 5.8 ainsi que celles de la force de pression magnétique et de la force de Lorentz totale. Si le gradient de pression magnétique prédomine sur la force de tension dans les parties internes de l'étoile, cette dernière contribution est toutefois nécessaire pour contrebalancer cette première à proximité de l'axe magnétique et de la surface : les deux termes deviennent alors du même ordre de grandeur et se contrebalancent pour aboutir à un état force-free.

5.3.3 Perturbation de la balance hydrostatique

Formalisme

D'après ce qui précède, nous pouvons mener une approche perturbative au premier ordre, la force de Lorentz étant faible devant les autres termes de l'équilibre MHS. Nous allons d'abord dériver l'équation de Poisson modifiée pour le potentiel gravifique ce qui nous permettra d'en déduire les perturbations en densité, pression et rayon. Dans le régime haut β, la structure de l'étoile n'est que faiblement bi-dimensionnelle et les variations horizontales de toutes les quantités sont suffisamment petites et régulières pour permettre leur linéarisation. On développe donc le potentiel gravitationnel autour de l'état non-magnétique selon

$$\Phi_{\text{grav}}(r,\theta) = \Phi_0\left(r\right) + \Phi^{(1)}\left(r,\theta\right) = \Phi_0(r) + \sum_{l\geqslant 0} \widehat{\Phi}_l(r) P_l\left(\cos\theta\right) \tag{5.68}$$

où $\Phi_0(r) = -GM(r)/r$ est le potentiel gravitationnel associé à l'étoile non-magnétique, $\widehat{\Phi}_l$ la fluctuation pour le mode l due au champ magnétique et $P_l\left(\cos\theta\right)$ les polynômes de Legendre associés dans le cas axisymétrique. De la même manière on développe la densité ρ et la pression P selon :

$$\rho\left(r,\theta\right) = \rho_0\left(r\right) + \rho^{(1)}\left(r,\theta\right) = \rho_0\left(r\right) + \sum_{l\geqslant 0} \widehat{\rho}_l\left(r\right) P_l\left(\cos\theta\right); \tag{5.69}$$

$$P\left(r,\theta\right) = P_0\left(r\right) + P^{(1)}\left(r,\theta\right) = P_0\left(r\right) + \sum_{l\geqslant 0} \widehat{P}_l\left(r\right) P_l\left(\cos\theta\right). \tag{5.70}$$

Considérons maintenant la balance magnéto-hydrostatique

$$\frac{\nabla P}{\rho} = -\nabla\,\Phi_{\text{grav}} + \frac{\mathbf{F}_{\mathcal{L}}}{\rho} \tag{5.71}$$

et l'équation de Poisson

$$\nabla^2\Phi_{\text{grav}} = 4\pi G\rho. \tag{5.72}$$

Nous avons au premier ordre :

$$\nabla\,P^{(0)} = -\rho_0\nabla\,\Phi_0 \tag{5.73}$$

$$\nabla^2\Phi^{(0)} = 4\pi G\rho_0 \tag{5.74}$$

5. La fonction f étant axisymétrique, sa moyenne horizontale $< f >$ est égale à sa moyenne latitudinale $< f >_\theta = \int_0^\pi f\,\sin\theta\,d\theta/2$.

et

$$\nabla P^{(1)} = -\rho_0 \nabla \Phi^{(1)} - \rho^{(1)} \nabla \Phi_0 + \mathbf{F}_{\mathcal{L}} \tag{5.75}$$

$$\nabla^2 \Phi^{(1)} = 4\pi G \rho_1. \tag{5.76}$$

La fluctuation en pression est éliminée en prenant le rotationnel de l'expression (5.75), ce qui mène à :

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{1}{g_0} \left[\frac{\partial \rho_0}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial F_{\mathcal{L},r}}{\partial \theta} - \frac{\partial \left(r F_{\mathcal{L},\theta} \right)}{\partial r} \right] \tag{5.77}$$

où $g_0 = -\mathrm{d}\Phi_0/\mathrm{d}r$. Ensuite, on y insère les fluctuations modales en densité $\rho^{(1)}$ ainsi que celles des composantes de la force de Lorentz

$$F_{\mathcal{L},r}(r,\theta) = \sum_l \mathcal{X}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l}(r) P_l(\cos\theta), \tag{5.78}$$

$$F_{\mathcal{L},\theta}(r,\theta) = -\sum_l \mathcal{Y}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l}(r) \partial_\theta P_l(\cos\theta). \tag{5.79}$$

Après intégration selon θ, on obtient la perturbation modale pour la densité autour de son état non-magnétique :

$$\widehat{\rho}_l = \frac{1}{g_0} \left[\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}r} \widehat{\Phi}_l + \mathcal{X}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r \mathcal{Y}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l} \right) \right]. \tag{5.80}$$

En injectant cette équation dans celle de Poisson $\nabla^2 \widehat{\Phi}_l = 4\pi G \widehat{\rho}_l$; nous retrouvons le résultat de Sweet :

$$\frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} \left(r \widehat{\Phi}_l \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \widehat{\Phi}_l - \frac{4\pi G}{g_0} \frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}r} \widehat{\Phi}_l = \frac{4\pi G}{g_0} \left[\mathcal{X}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r \mathcal{Y}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l} \right) \right]. \tag{5.81}$$

Rappelons que Sweet (1950) [36] fût le premier à dériver ce résultat pour une force perturbatrice générale, Moss (1974) [29] ayant introduit le cas spécifique de la force de Lorentz pour le cas d'un champ poloïdal. Le cas de configurations axisymétriques général (à la fois poloïdal et toroïdal) a été traité par Mathis & Zahn (2005) [25]. Notons par ailleurs que la force de Lorentz étant proportionnelle à $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$, *les amplitudes des perturbations sont donc proportionnelles au carré de celle du champ magnétique.*

Les conditions aux limites appliquées à (5.81) sont :

$$\widehat{\Phi}_0 = K \quad \text{and} \quad \widehat{\Phi}_{l>0} = 0 \tag{5.82}$$

au centre ($r = 0$), où K est une constante réelle, et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \widehat{\Phi}_l - \frac{(l+1)}{r} \widehat{\Phi}_l = 0 \tag{5.83}$$

à la surface, ce qui correspond à la continuité du potentiel gravifique avec celui à l'extérieur (pour $r \geq R_*$), multipolaire et qui peut être exprimé en suivant Roxburgh (2001) [32] :

$$\Phi_{\mathrm{grav}} = -\frac{GM_*}{r} \left[1 - \sum_{l \geqslant 0} J_l \left(\frac{R_*}{r} \right)^{l+1} P_l(\cos\theta) \right] \tag{5.84}$$

où J_l est le moment multipolaire gravitationnel d'ordre l, qui n'est autre que la perturbation de potentiel gravitationnel, normalisée à sa valeur non perturbée à la surface. Celui-ci peut être mesuré à l'aide d'accéléromètres embarqués à bord de sondes spatiales et à l'aide de l'équation ci-dessus. Bien que ces quantités aient été calculées jusqu'au mode $l = 8$ par Ajabshirizadeh & Rozelot (2006) [1] à l'aide de la théorie des figures, notre approche est ici différente, dans le sens où nous avons fondé notre dérivation sur un modèle MHD global. La méthode est générale et permet de calculer les moments gravitationnels associés à une géométrie angulaire complexe.

La perturbation modale en pression $\widehat{P}_l$ est ensuite obtenue par la projection de l'équation d'équilibre MHS selon θ, qui donne

$$\widehat{P}_l = -\rho_0 \widehat{\Phi}_l - r\mathcal{Y}_{\mathbf{E}_\mathcal{L};l}. \tag{5.85}$$

Enfin, on est en mesure d'établir un diagnostic de la variation du rayon stellaire. À partir de la définition du rayon sur une isobare :

$$r_P(r,\theta) = r\left[1 + \sum_{l\geqslant 0} c_l(r) P_l(\cos\theta)\right] \tag{5.86}$$

on peut identifier à l'aide de l'éq. (5.85) [24] :

$$c_l = -\frac{1}{r}\frac{\widehat{P}_l}{\mathrm{d}P_0/\mathrm{d}r} = \frac{\rho_0}{\mathrm{d}P_0/\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\widehat{\Phi}_l + \frac{\mathcal{Y}_{\mathbf{E}_\mathcal{L};l}}{\rho_0}\right). \tag{5.87}$$

Méthode Numérique

L'équation de Sweet a été intégrée dans les deux cas d'étude par un schéma à différences finies de type Runge-Kutta du 4ème ordre, couplé à une méthode du tir afin de se ramener à un problème aux conditions initiales. Les quantités ont été interpolées sur un vecteur de 10 000 composantes afin d'avoir un pas constant pour l'intégration. Une fois la perturbation de potentiel gravitationnel obtenue, celle-ci est réinterpolée sur le maillage original de Cesam , plus raffiné dans les régions de sous-surface. Cela est possible du fait que la perturbation en potentiel gravitationnel varie peu dans cette région (*cf.* Fig. 5.9). Les autres perturbations sont alors calculées à partir de la perturbation du potentiel gravitationnel. Les dérivées ont été calculées à l'aide de différences finies du deuxième ordre, une extrapolation quadratique ayant été effectuée hors des limites pour préserver l'ordre de précision. La méthode du tir a été supposée avoir convergé lorsque l'erreur relative entre deux modèles consécutifs (de perturbations du potentiel gravitationnel) est inférieure à 10^{-9}. Nous avons vérifié que la méthode est insensible à une variation raisonnable du nombre de points d'interpolation ou de l'erreur relative.

Discussion

Définissons à présent la perturbation normalisée d'un champ scalaire X par rapport à sa valeur non-perturbée par

$$\tilde{X}_l = \widehat{X}_l / X_0. \tag{5.88}$$

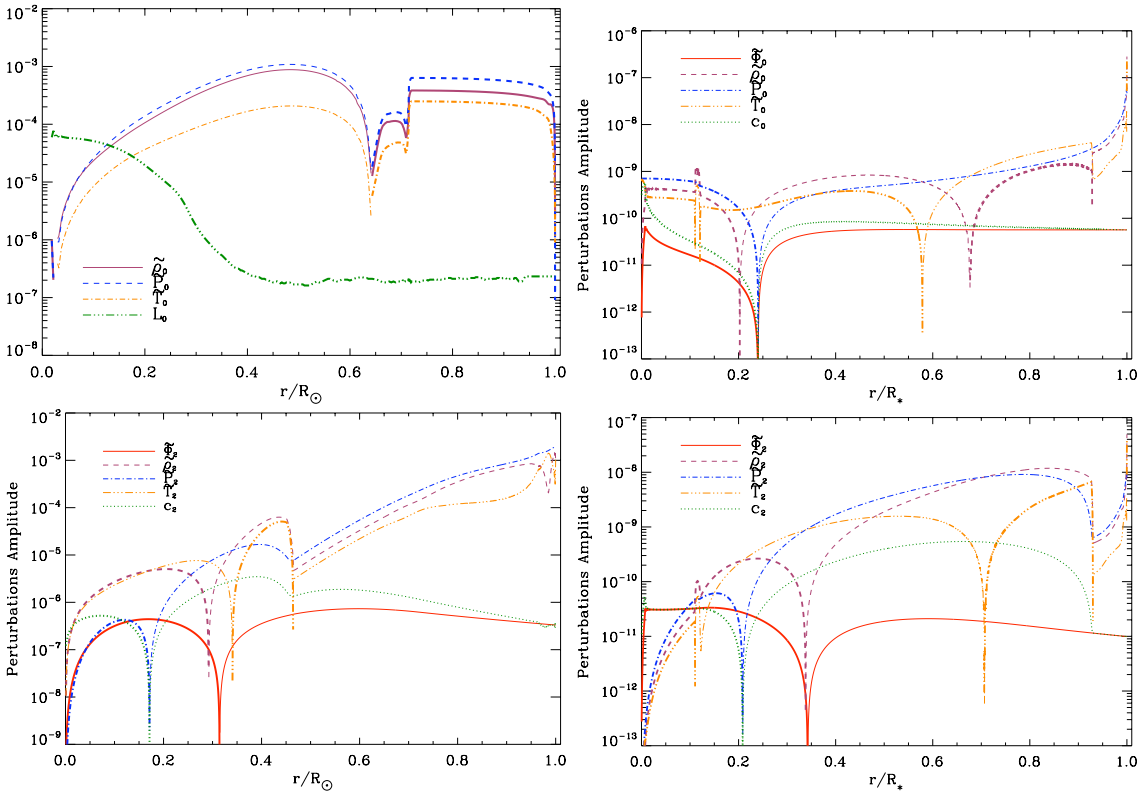


FIGURE 5.9 – Perturbations modales en potentiel gravitationnel, densité, pression, température et rayon en fonction de ce dernier ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap. Panneau du haut : pour le mode $l = 0$; panneau du bas : pour le mode $l = 2$.

Les résultats obtenus pour les perturbations modales normalisées en potentiel gravitationnel $\tilde{\Phi}_l$, densité $\tilde{\rho}_l$, pression $\tilde{P}_l$, et rayon c_l pour le mode $l = 0$ (*resp.* $l = 2$) sont montrés en FIG. 5.9, panneau du haut (*resp.* panneau du bas).
En raison du nombre de magnitudes couvertes, les perturbations sont représentées en échelle semi-logarithmique. La convention suivante a alors été adoptée : les courbes fines représentent des valeurs négatives, les épaisses des valeurs positives. Si la perturbation en potentiel gravitationnel ainsi que celle du rayon par-rapport à l'isobare est plutôt douce, en particulier dans les couches de sous-surface, les autres variables sont plus sensibles dans ces régions : cela est dû à la chute subite de pression, température et densité, là où le rayon et le potentiel gravifique varient *a contrario* peu.
Les perturbations de l'équilibre hydrostatique moyennes (*i.e.* pour le mode $l = 0$) induites par le champ magnétique sont représentées en FIG. 5.10. La somme des différents termes perturbés est aussi tracée en tant que vérification de la méthode utilisée. D'une part, on remarque que la source des perturbations est du même ordre de grandeur que les variables perturbées dans le premier cas, alors que les secondes sont bien plus importante que la première dans le cas de l'étoile Ap. De plus, on peut observer que dans les deux cas étudiés, la structure répond par une perturbation de la force gravitationnelle (les termes $\rho_0 \nabla \Phi^{(1)}$ et $\rho^{(1)} \nabla \Phi_0$) opposée à la force de Lorentz, là où cette dernière présente sa contribution

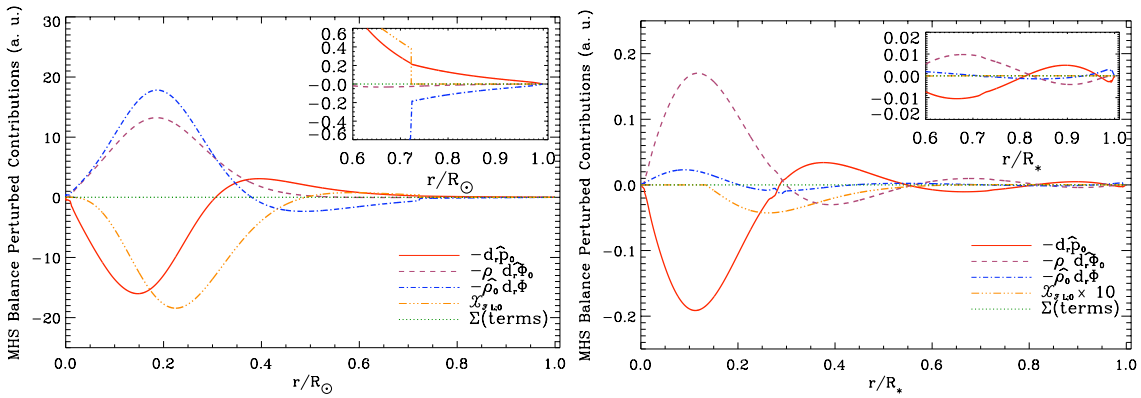


FIGURE 5.10 – Termes constituant les perturbations de la balance hydrostatique moyenne (à $l = 0$), terme perturbateur $\mathcal{X}_{\mathbf{F}_\mathcal{L},0}$ et somme de tous les termes ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap.

majoritaire (*i.e.* dans la région centrale). La même remarque peut être dressée pour la perturbation en densité. En revanche, la perturbation de la force de pression va dans le même sens que sa cause ($\mathcal{X}_{\mathbf{F}_\mathcal{L},0}$ et $-d\widehat{P}_0/dr$ sont globalement de même signe dans la région centrale).

5.3.4 Quantités physiques perturbant la balance énergétique

La température

Afin de confronter les modèles stellaires présentant des champs magnétiques avec les observations d'étoiles de type Ap/Bp par exemple, il peut être intéressant de calculer les perturbations en température induites par le magnétisme. En suivant Kippenhahn & Weigert (1990) [17], on introduit une équation d'état générale pour le plasma

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \alpha_s \frac{\mathrm{d}P}{P} - \delta_s \frac{\mathrm{d}T}{T} + \varphi_s \frac{\mathrm{d}\mu_s}{\mu_s}, \tag{5.89}$$

où $\alpha_s = (\partial \ln \rho / \partial \ln P)_{T,\mu_s}$, $\delta_s = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_{P,\mu_s}$ et $\varphi_s = (\partial \ln \rho / \partial \ln \mu_s)_{P,T}$. Dans le cas présent où la force de Lorentz est une perturbation par rapport à la gravité, la température (T) et le poids moléculaire moyen (μ_s) peuvent se développer de la même manière que Φ, ρ, et P :

$$T(r,\theta) = T_0(r) + T^{(1)}(r,\theta) = T_0(r) + \sum_{l\geq 0} \widehat{T}_l(r) P_l(\cos\theta); \tag{5.90}$$

$$\mu_s(r,\theta) = \mu_{s;0}(r) + \mu_s^{(1)}(r,\theta) = \mu_{s;0}(r) + \sum_{l\geq 0} \widehat{\mu}_{s;l}(r) P_l(\cos\theta). \tag{5.91}$$

En utilisant la linéarisation de l'éq. (5.89) autour de l'état non-magnétique, on obtient alors pour chaque mode l :

$$\frac{\widehat{\rho}_l}{\rho_0} = \alpha_s \frac{\widehat{P}_l}{P_0} - \delta_s \frac{\widehat{T}_l}{T_0} + \varphi_s \frac{\widehat{\mu}_{s;l}}{\mu_{s;0}} \tag{5.92}$$

d'où il vient

$$\widehat{T}_l = \frac{T_0}{\delta_s}\left[\alpha_s \frac{\widehat{P}_l}{P_0} - \frac{\widehat{\rho}_l}{\rho_0} + \varphi_s \frac{\widehat{\mu}_{s;l}}{\mu_{s;0}}\right]. \tag{5.93}$$

Les perturbations en température $\widetilde{T}_0 = \widehat{T}_0/T_0$ et $\widetilde{T}_2 = \widehat{T}_2/T_0$ sont tracées en FIG. 5.9 pour le modèle solaire et l'étoile Ap. Nous avons supposé que $\alpha_s = \delta_s = 1$, ce qui est acceptable pour une étoile de la séquence principale, et avons choisi de ne pas prendre en compte la fluctuation de poids moléculaire moyen ($\varphi_s = 0$) (*cf.* Kippenhahn & Weigert, 1990). Les deux termes qu'il nous reste maintenant à examiner sont le chauffage ohmique volumique et le flux de Poynting qui représente le flux transporté par le champ électromagnétique.

Le chauffage ohmique

Dans le cas où la diffusivité magnétique (η) est supposée isotrope celui-ci s'écrit

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{Ohm}}(r,\theta) = \mu_0\, \eta\, \mathbf{j}^2\,(r,\theta)\,. \tag{5.94}$$

En considérant la loi de diffusivité de Spitzer (1962) [34], dépendante de la température selon

$$\eta = 5.2 \times 10^{11}\ \log\Lambda\, T^{-3/2}\ \mathrm{cm^2 s^{-1}} \tag{5.95}$$

où nous prenons pour le logarithme coulombien $\log\Lambda \approx 10$, l'on peut calculer de manière semi-analytique le chauffage ohmique pour les deux cas d'étude. Celui-ci est représenté dans le plan méridien en FIG. 5.11. On constate que dans le deuxième cas celui-ci augmente progressivement en allant vers la surface, étant donné que nous n'avons pas pris la contribution principale du cœur. Le contraste en température important au voisinage de la surface est alors responsable de l'augmentation subite de Q_{Ohm} dans cette région.

Le flux de Poynting

Reprenons la définition du flux de Poynting donnée en éq. (5.54) ; dans le cas statique la loi d'Ohm simplifiée donne

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \tag{5.96}$$

À l'aide de la relation liant la conductivité σ et la diffusivité magnétique $\eta = (\mu_0\sigma)^{-1}$, la divergence du flux de Poynting se réduit à

$$\nabla\ \cdot \mathcal{F}_{\mathrm{Poynt}} = \nabla\ \cdot (\eta\, \mathbf{F}_{\mathcal{L}})\,. \tag{5.97}$$

Cette grandeur est représentée dans le plan méridien pour les deux cas en FIG. 5.12.

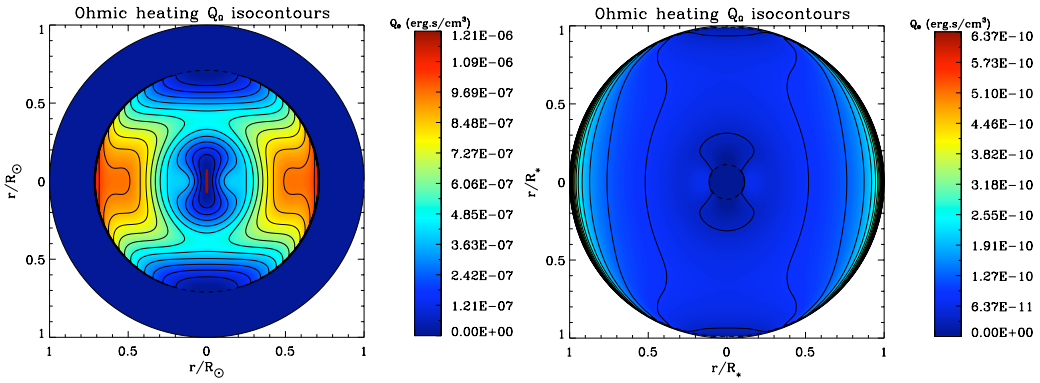


FIGURE 5.11 – Isocontours du chauffage ohmique $\mathcal{Q}_{\mathrm{Ohm}}(r,\theta)$ en coupe méridienne ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap.

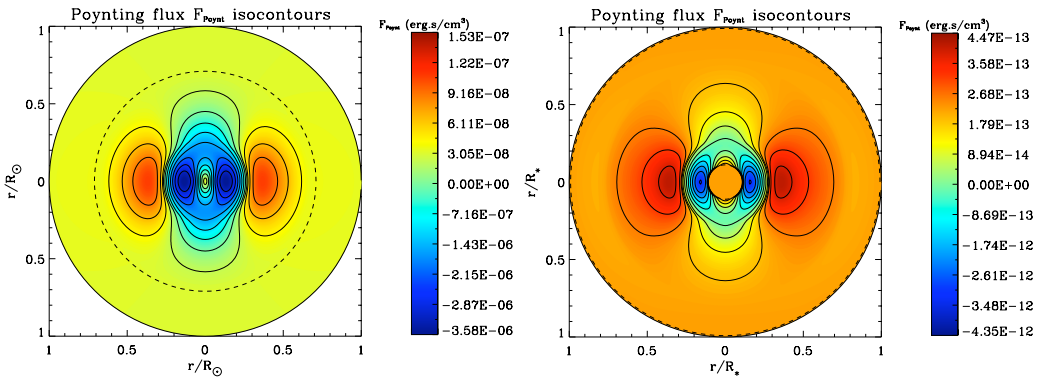


FIGURE 5.12 – Isocontours de $\nabla \cdot \mathcal{F}_{\mathrm{Poynt}}(r,\theta)$ en coupe méridienne ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap.

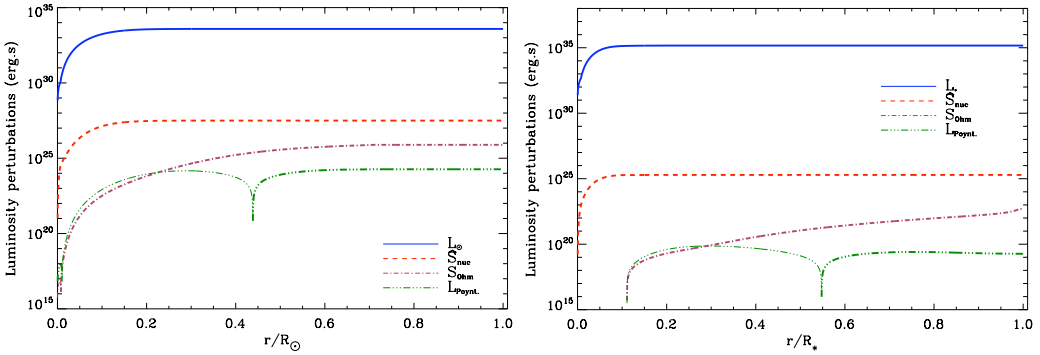


FIGURE 5.13 – Contributions à la luminosité totale du chauffage ohmique, (ligne tiret-pointillés), du flux de Poynting (ligne point-point-trait) et de la perturbation des taux de réactions nucléaires (ligne tiretée) en fonction du rayon ; (à gauche) dans le cas solaire et (à droite) dans celui de l'étoile de type Ap.

5.3.5 Perturbation de la balance énergétique

Considérons maintenant la modification de la balance énergétique. Rappelons le bilan énergétique (5.64) :

$$\frac{\partial L}{\partial M} = \varepsilon - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\left\langle \nabla \cdot \mathcal{F}_{\text{Poynt}} + \mathcal{Q}_{\text{Ohm}} \right\rangle . \tag{5.98}$$

Cette équation est modifiée si l'on tient compte des perturbations engendrées par le champ magnétique en [6] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial M} &= \left\langle \varepsilon - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{\text{mag}}}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle \varepsilon - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\left(\nabla \cdot \mathcal{F}_{\text{Poynt}} + \mathcal{Q}_{\text{Ohm}}\right) \right\rangle . \end{aligned} \tag{5.100}$$

Nous cherchons à quantifier l'excès d'énergie perdu par rayonnement et dissipé par chauffage ohmique. En intégrant sur le volume défini par la sphère de rayon r :

$$L_{\text{Ohm}}(r) = \int_0^r \int_\Omega \mathcal{Q}_{\text{Ohm}}(r', \theta')\, \mathrm{d}\Omega\, r'^2 \mathrm{d}r'; \tag{5.101}$$

$$L_{\text{Poynt}}(r) = \int_0^r \int_\Omega \nabla \cdot \mathcal{F}_{\text{Poynt}}(r', \theta')\, \mathrm{d}\Omega\, r'^2 \mathrm{d}r'; \tag{5.102}$$

nous sommes en mesure de comparer leurs contributions respectives à la luminosité totale en fonction du rayon.

Enfin, pour avoir un diagnostic complet on considère la modification du taux de production d'énergie spécifique par les réactions nucléaires (ε), qui dépend de ρ et T. Premièrement, la dérivée logarithmique de ε est développée comme celle de ρ (*cf.* éq. (5.89) ; Mathis & Zahn , 2004 et références incluses) :

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon} = \lambda \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \nu \frac{\mathrm{d}T}{T}, \tag{5.103}$$

où $\lambda = (\partial \ln \varepsilon / \partial \ln \rho)_T$ et $\nu = (\partial \ln \varepsilon / \partial \ln T)_\rho$. Ensuite, comme nous l'avons fait pour ρ et T, on développe ε sur la base des polynômes de Legendre

$$\varepsilon\,(r, \theta) = \varepsilon_0\,(r) + \varepsilon^{(1)}\,(r, \theta) = \varepsilon_0\,(r) + \sum_{l \geq 0} \widehat{\varepsilon}_l\,(r)\, P_l\,(\cos\theta)\,. \tag{5.104}$$

En linéarisant l'éq. (5.103) autour de l'état non-perturbé, on obtient :

$$\widehat{\varepsilon}_l = \varepsilon_0 \left[\lambda \frac{\widehat{\rho}_l}{\rho_0} + \nu \frac{\widehat{T}_l}{T_0} \right]. \tag{5.105}$$

6. Dans le cas où le champ magnétique est pris en compte, l'étoile perd sa géométrie sphérique. De fait, la luminosité (L) est définie par $L\,(r) = \int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{\Sigma}$ where $\mathbf{F} = -K\nabla T$, K étant la diffusivité thermique. En prenant la moyenne horizontale du membre de droite de l'équation sur l'énergie :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \rho\varepsilon + \nabla \cdot \mathbf{S} + Q_{\text{Ohm}}, \tag{5.99}$$

on forme l'éq. (5.100).

Étant donné que $L_{\rm Ohm}+L_{\rm Poynt} \ll L_0$, L_0 étant la luminosité dans le cas non-magnétique (ici $L_\odot$ ou L_* données en FIG. 5.13), on peut mener une approche perturbative et développer la luminosité selon

$$L = L_0 + \widehat{L}, \tag{5.106}$$

où $\widehat{L}$ représente la perturbation de luminosité due aux termes magnétiques.

Linéarisons l'éq. (5.100) autour de son état non-magnétique ; on obtient

$$\frac{\partial L_0}{\partial M_r} = \varepsilon_0\,; \tag{5.107}$$

$$\frac{\partial \widehat{L}}{\partial M_r} = \left\langle \varepsilon^{(1)} + \frac{1}{\rho_0}\left(\nabla\cdot\mathcal{F}_{\rm Poynt} + \mathcal{Q}_{\rm Ohm}\right)\right\rangle. \tag{5.108}$$

Ensuite, en intégrant l'éq. (5.108), il vient :

$$\widehat{L}\left(r\right) = \widehat{S}_{\rm nuc}\left(r\right) + L_{\rm Poynt}\left(r\right) + S_{\rm Ohm}\left(r\right), \tag{5.109}$$

où

$$\widehat{S}_{\rm nuc}\left(r\right) = \int_\Omega \varepsilon^{(1)}\rho_0 {\rm d}\Omega = \int_0^{m(r)} \left\langle \varepsilon^{(1)}\right\rangle {\rm d}M_r = 4\pi\int_0^r \left\{\varepsilon_0\left[\lambda\frac{\widehat{\rho}_0}{\rho_0} + \nu\frac{\widehat{T}_0}{T_0}\right]\right\}\rho_0\, r'^2 {\rm d}r'. \tag{5.110}$$

Les résultats obtenus dans le cas solaire et de l'étoile de type A sont donnés en FIG. 5.13. Les différentes contributions sont extrêmement faibles dans les deux cas. Néanmoins, cet effet induit par un champ est plus grand que l'évolution naturelle du champ sur des durées de l'ordre du siècle ($10^{-8}\,{\rm L}_\odot$ sur 100 ans) et est donc susceptible de modifier l'évolution sur de plus longues durées. Finalement, l'intérêt de ce travail réside surtout dans la méthode de dérivation des perturbations énergétique, originale, et qui peut être appliquée tout aussi bien dans la zone convective. Dans ce cas elle permet de dériver la grandeur observable $W = d\,\ln L/d\ln R$ et éventuellement de donner des contraintes sur les fluctuations en rayon et luminosité en complément des inversions héliosismiques des modes acoustiques f de sous-surface (voir notamment les travaux de Lefèbvre *et al.*, 2009 [20]).

5.3.6 Perturbations en surface

Perturbations structurelles à la surface

En utilisant la continuité du potentiel gravifique à la surface, on dérive l'expression des moments gravitationnels multipolaires J_l (*cf.* éq. (5.84)) :

$$J_l = \left(\frac{R_*}{GM_*}\right)\widehat{\Phi}_l\left(r = R_*\right). \tag{5.111}$$

La perturbation du rayon peut alors être exprimée selon

$$c_l\left(R_*\right) = \frac{\rho_0}{{\rm d}P_0/{\rm d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{GM_*}{R_*}J_l + \frac{\mathcal{Y}_{\mathbf{E}_\mathcal{L};l}}{\rho_0}\right). \tag{5.112}$$

Perturbation	Soleil jeune	Étoile Ap jeune
J_0	-1.68×10^{-6}	1.17×10^{-9}
$\tilde{\rho}_0$	4.57×10^{-3}	-2.48×10^{-6}
$\tilde{P}_0$	9.78×10^{-3}	-2.53×10^{-8}
$\tilde{T}_0$	5.21×10^{-3}	2.45×10^{-6}
c_0	1.73×10^{-6}	-5.71×10^{-12}

TABLE 5.2 – Perturbations normalisées pour le mode $l = 0$ en potentiel gravitationnel, densité, pression, température et rayon, pour les deux cas étudiés.

Perturbation	Soleil jeune	Étoile Ap jeune
J_2	3.31×10^{-7}	2.16×10^{-9}
$\tilde{\rho}_2$	-9.04×10^{-4}	-4.55×10^{-6}
$\tilde{P}_2$	-1.93×10^{-3}	-4.65×10^{-8}
$\tilde{T}_2$	-1.03×10^{-3}	4.50×10^{-6}
c_2	-3.42×10^{-7}	-1.05×10^{-11}

TABLE 5.3 – Perturbations normalisées pour le mode $l = 2$ en potentiel gravitationnel, densité, pression, température et rayon, pour les deux cas étudiés.

Leurs valeurs ainsi que celles des perturbations en densité, pression et température à la surface sont données en TAB. 5.2 pour le mode $l = 0$ et en TAB. 5.3 pour le mode $l = 2$, à chaque fois pour le cas du Soleil et de l'étoile de type A.

Remarquons que la perturbation de température effective, donnée par $\tilde{T}_0$ est toujours positive.

Perturbations de la luminosité

Les valeurs en surface des termes perturbatifs énergétiques sont données en TAB. 5.4. Dans les deux cas étudiés, les perturbations magnétiques sont très faibles. Pour les deux

Perturbation	Soleil	Étoile Ap
S_{Ohm}	6.59×10^{25}	4.93×10^{22}
L_{Poynt}	2.12×10^{24}	1.85×10^{19}
$\widehat{S}_{\mathrm{nuc}}$	6.73×10^{26}	1.94×10^{25}
L	2.93×10^{33}	1.46×10^{35}

TABLE 5.4 – Contributions du chauffage ohmique (L_{Ohm}) et du flux de Poynting (L_{Poynt}) à la perturbation de luminosité (en erg.s) ; contribution de la modification de l'efficacité des taux de réactions nucléaires induite par la modification de l'équilibre hydrostatique ($\mathcal{S}_{\mathrm{nuc}}$) ; luminosité standard L dans le cas solaire et de l'étoile Ap.

applications, la luminosité standard est plus grande de plusieurs ordres de grandeurs que L_{Ohm}, L_{Poynt} et $\widehat{L}_{\mathrm{nuc}}$ (donc de $\widehat{L}_{\mathrm{tot}}$). Dans le cas solaire on a $L_{\odot}/\widehat{L}_{\mathrm{nuc}} = 4.35 \times 10^6$, alors que $\widehat{L}_{\mathrm{nuc}}/\left(L_{\mathrm{Ohm}} + L_{\mathrm{Poynt}}\right) = 9.89$. dans le cas de l'étoile de type A, $L_*/\widehat{L}_{\mathrm{nuc}} = 7.53 \times 10^9$, alors que $\widehat{L}_{\mathrm{nuc}}/\left(L_{\mathrm{Ohm}} + L_{\mathrm{Poynt}}\right) = 3.93 \times 10^2$. Donc dans les deux cas exposés ici, nous pouvons

négliger les contributions directes du champ magnétique dans la balance énergétique. En effet celles-ci sont faibles par rapport à l'effet prédominant du champ magnétique sur le bilan énergétique qui est de modifier les taux de réactions nucléaires *via* les perturbations en densité et pression induites par la force de Lorentz. Donc en première approche, il sera légitime de ne considérer que l'impact d'un champ magnétique sur l'équilibre mécanique, celui sur l'équilibre énergétique étant une perturbation d'ordre supérieur.

5.4 Comparaison avec les effets de la rotation

5.4.1 Enjeux

Si l'existence et la topologie du champ magnétique dans l'intérieur solaire sont encore soumises à de nombreuses questions, l'héliosismologie a apporté durant les quinze dernières années des contraintes très fortes sur la rotation interne du Soleil. Son profil est connu avec précision jusqu'à 0.2 $R_\odot$. Tous les travaux effectuées sur le transport de moment cinétique au cours de l'évolution tendent à montrer que même en présence de freinage magnétique externe, pour des rotations initiales couramment admises, la rotation dans la zone radiative solaire devrait être bien supérieure à ce qu'elle est aujourd'hui. Récemment, l'étude de Turck-Chièze *et al.* (2009) [37] a mis en évidence cette problématique de façon plus quantitative (voir Fig. 5.15, tirée de [37]). Les auteurs ont calculé des modèles de Soleil prenant en compte le transport rotationnel selon Mathis & Zahn (2004) [24] à l'aide de deux codes d'évolution stellaire, Starevol et Cesam . Le modèle A explore l'évolution d'un rotateur extrêmement lent en pré-séquence principale (PMS), avec une vitesse équatoriale d'environ 2.2 km.s^{-1}, qui reste quasiment constante de la ZAMS jusqu'à l'âge présent du Soleil. Les modèles B et C sont repectivement des rotateurs dans un régime intermédiaire et élevé, avec des vitesses de rotations initiales respectives de 20 km.s^{-1} et 50 km.s^{-1}. Tous ces modèles sont initiés avec une rotation uniforme. Dans les modèles B et C, un freinage magnétique de surface est appliqué selon la loi de Kawaler, 1988 ([16] ; voir également [2, 30]). Les indices c ou s des modèles indiquent que le modèle a été calculé d'après Cesam ou Starevol .

Tel que l'on peut le voir sur la figure, le désaccord entre les modèles et les observations est flagrant dans toute la zone radiative. Il est donc primordial, d'une part de mieux contraindre le profil de rotation dans le cœur (uniquement accessible par les modes g), et d'autre part de prendre en compte des processus non-standards dans les modèles d'évolution stellaire (essentiellement le champ magnétique et les ondes internes). Un autre indicateur de la rotation interne, en complément de l'héliosismologie, est la mesure des écarts à la sphéricité induits par la prise en compte de cette première. Ainsi que souligné en section 5.3.3, la méthode exposée précédemment est générale et peut s'appliquer pour n'importe quelle force perturbatrice. Je présenterai ici les résultats obtenus lorsque l'on prend en compte la force centrifuge à l'origine des perturbations liées à la rotation.

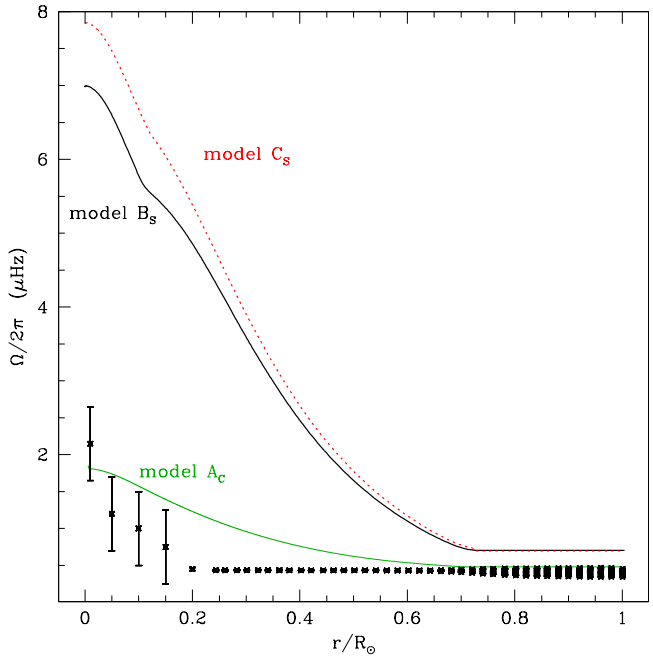


FIGURE 5.14 – Comparaison entre les profils internes de rotation solaire issus de différents modèles et celui déterminé d'après les observations des instruments GOLF , MDI et GONG [9], dont la rotation dans le cœur extraite des modes de gravité potentiellement observés (donnée avec de larges barres d'erreur à confirmer) [39, 11, 26, 37] Crédit : S. Turck-Chièze *et al.*.

5.4.2 Modélisation

Le profil de rotation différentielle solaire est modélisé d'après la loi empirique (*cf.* [23] et références associées) :

$$\Omega(r,\theta) = \Omega_s\, A_c \left[1 - \mathrm{Erf}\left(\frac{r-R_c}{l_c}\right)\right] + \Omega_s + \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{Erf}\left(\frac{r-R_T}{l_T}\right)\right]\left(A + B\,\cos^2\theta + C\cos^4\theta - \Omega_s\right), \quad (5.113)$$

où $\Omega_s = 433$ nHz est la rotation moyenne dans la zone radiative, $A = 456$ nHz, $B = -42$ nHz, $C = -72$ nHz, $R_T = 0.7132$ $\mathrm{R}_\odot$ est le rayon de la tachocline, $l_T = 0.05\, R_T$ son épaiseur (volontairement exagérée pour des raisons numériques), et A_c, R_c et l_c sont des paramètres caractérisant respectivement la vitesse de rotation du cœur, la position du régime de transition cœur/zone radiative de la rotation et l'extension de cette région de transition. Le paramètre A_c peut être réexprimé en fonction du taux de rotation dans le cœur par rapport à celle dans la zone radiative ($n = \Omega(0,\theta)/\Omega_s$) selon

$$A_c = \frac{-1}{2\,\Omega_s}\frac{1}{\mathrm{Erf}\,(R_c/l_c) + 1}\left[A + \Omega_s\,(1 - 2\,n) + \mathrm{Erf}\left(\frac{R_T}{l_T}\right)(1 - A)\right]. \quad (5.114)$$

Posons alors

$$\Omega = \Omega_c(r) + \Omega_s + \Omega_T(r)\left(A - \Omega_s + B\,\cos^2\theta + C\,\cos^4\theta\right), \tag{5.115}$$

où l'on identifie le profil de rotation shellular dans le cœur $\Omega_c = \Omega_s\,A_c\,\left[1 - \mathrm{Erf}\left(\frac{r-R_c}{l_c}\right)\right]$, et la dépendance radiale de la rotation différentielle dans la zone convective : $\Omega_T = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{Erf}\left(\frac{r-R_T}{l_T}\right)\right]$.

La force centrifuge $\mathbf{F}_{\mathcal{C}}(r,\theta)$ s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2}\Omega^2\,\nabla\left(r^2\,\sin^2\,\theta\right) \tag{5.116}$$

$$= \Omega^2\left(r\,\sin^2\theta\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + r\,\sin\theta\,\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\right). \tag{5.117}$$

Le facteur $\Omega^2(r,\theta)$ s'écrit en terme des fonctions trigonométriques selon

$$\Omega(r,\theta)^2 = \sum_{j=\{0,2,4,6,8\}} \Omega_j^2(r)\cos^j\theta. \tag{5.118}$$

Par ailleurs la force de Lorentz peut se projeter sur les harmoniques sphériques ; il vient en fonction des polynômes de Legendre :

$$\mathbf{F}_{\mathcal{C}} = \sum_{l>0}\left\{a_l(r)\,P_l(\cos\theta)\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} - b_l\,\partial_\theta P_l(\cos\theta)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\right\}, \tag{5.119}$$

les coefficients a_l et b_l étant donnés par

$$a_l(r) = \frac{\int_0^\pi \Omega^2(r)\,r\,P_l(\cos\theta)\,\sin^3\theta\,d\theta}{\int_0^\pi \left[P_l(\cos\theta)\right]^2\,\sin\theta\,\,d\theta} \quad \text{et} \quad b_l(r) = \frac{\int_0^\pi \Omega^2(r)\,r\,P_l^1(\cos\theta)\,\sin^2\theta\,\cos\theta d\theta}{\int_0^\pi \left[P_l^1(\cos\theta)\right]^2\,\sin\theta\,\,d\theta}. \tag{5.120}$$

On peut alors réexprimer ceux-ci en terme des fonction $\Omega_j(r)$:

$$a_l(r) = \sum_{j=\{0,2,4,6,8\}} r\,\Omega_j^2(r)\,{}^a\Theta_l^j \quad \text{et} \quad b_l(r) = \sum_{j=\{0,2,4,6,8\}} r\,\Omega_j^2(r)\,{}^b\Theta_l^j. \tag{5.121}$$

Les coefficients ${}^a\Theta_l^j$ et ${}^b\Theta_l^j$ sont donnés en annexe 3.2 (éqs. (B.101) et (B.102)) et leurs valeurs numériques sont tabulées en Tab. B.1 et Tab. B.2.
Notons qu'ici la dépendance angulaire en Ω^2 étant paire et son ordre le plus élevé étant en $\cos^8\theta$, les projections de la force centrifuge sur les polynômes de Legendre feront intervenir tous les modes pairs jusqu'à $l = 10$.
Pour cela il suffit de remplacer le coefficients $\mathcal{X}_{\mathbf{F}_{\mathcal{C}};l}$ et $\mathcal{Y}_{\mathbf{F}_{\mathcal{C}};l}$ dans l'équation de Sweet (5.81) respectivement par $\rho_0\,a_l$ et $\rho_0\,b_l$, la procédure de projection suivie étant identique pour la force de Lorentz massique $\mathbf{F}_{\mathcal{L}}/\rho_0$ et la force centrifuge par unité de masse $\mathbf{F}_{\mathcal{C}}$. On résout alors de la même manière que précédemment l'équation de Sweet [36] donnée par :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(r\widehat{\Phi}_l\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\widehat{\Phi}_l - \frac{4\pi G}{g_0}\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}r}\widehat{\Phi}_l = \frac{4\pi G}{g_0}\left[\rho_0 a_l\left(\Omega_l\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\rho_0 b_l\left(\Omega_l\right)\right]\right]. \tag{5.122}$$

5.4.3 Résultats

Dans un premier temps il peut être intéressant de calculer les moments gravitationnels quadrupolaires en fonction de différents profils pour la rotation centrale. Nous dérivons les valeurs de J_2 en fonction de différentes valeurs de R_c qui correspond au point d'inflexion fixant la position de la transition cœur - zone radiative supérieure ; nous choisissons quatre cas : $R_c = \{0.05, 0.1, 0.15, 0.175\}$. Pour ces valeurs données, nous faisons varier la largeur de la région de transition l_c. Nous introduisons à ce stade la grandeur

$$q = \left(\frac{d\ln\Omega}{d\ln r}\right)_{R_c} = \frac{R_c\,(1-n)}{l_c\,\left[n + \mathrm{Erf}\,(R_c/l_c)\right]}, \tag{5.123}$$

plus explicite, qui caractérise la pente de la courbe. Celle-ci se ramène simplement dans le cas où $l_c < R_c/2$ à $q \simeq \tilde{q} = q_0 \frac{1-n}{1+n}\frac{R_c}{l_c}$, avec $q_0 \simeq 1.128$. Les profils de rotation interne pour $\Omega_c = 3\,\Omega_s$, $\Omega_c = 5\,\Omega_s$ et $\Omega_c = 7\,\Omega_s$ sont tracés pour les paramètres R_c choisis plus haut et la valeur maximale de l_c telle que $\Omega(0.2\ \mathrm{R}_\odot) = 433 \pm 15$ nHz [26] respectivement en Fig. 5.15a, 5.15c et 5.15e.
En regard de chaque profil (Fig. 5.15b, 5.15d et 5.15f), sont tracées les valeurs de J_2 pour chaque choix de Ω_c en faisant varier la valeur caractéristique $\tilde{q}$ pour les quatre valeurs de R_c. En trait gras sont représentées les valeurs compatibles avec l'erreur de 15 nHz donnée ci-dessus. La valeur minimale de $\tilde{q}$ vérifiant cette contrainte correspond à celle choisie pour le tracé du profil de rotation. En trait fin est représentée la valeur de J_2 en l'absence de cette contrainte : si l'on autorisait au saut de rotation de pénétrer plus loin dans la zone radiative, la valeur de J_2 croîtrait, ce qui semble intuitif. On constate que les valeurs de J_2 restent dans une fourchette assez étroite malgré des valeurs de Ω_c pouvant aller jusqu'à $7\,\Omega_s$. Pour préciser ce point, nous traçons en Fig. 5.16 les valeurs de J_2 en fonction de Ω_c.

Par ailleurs, en appliquant la méthode perturbative que nous avons auparavant utilisé pour étudier l'influence du champ magnétique sur le Soleil jeune, nous pouvons donner les valeurs des perturbations sur toutes les quantités structurales jusqu'au mode $l = 10$. Celles-ci sont données en Tab. 5.5 pour les deux cas extrêmes $\Omega_c = \Omega_s$ et ($\Omega_c = 7\,\Omega_s$, $R_c = 0.175\ \mathrm{R}_\odot$, $l_c = 0.0140\,\mathrm{R}_\odot$), ainsi que pour les paramètres intermédiaires ($\Omega_c = 5\,\Omega_s$, $R_c = 0.10\ \mathrm{R}_\odot$, $l_c = 0.0593\,\mathrm{R}_\odot$) correspondant à la courbe en tirets verts sur la Fig. 5.15c. Pour le profil de rotation plat, nous obtenons $J_2 = 2.218 \times 10^{-7}$, en parfait accord avec la valeur obtenue par A. Kosovichev (1997) [18], de $J_2 = 2.217 \times 10^{-7}$ et $J_2 = 2.220 \times 10^{-7}$ selon le modèle, néanmoins pour une rotation uniforme (avec $\Omega_s = 435$ nHz). En prenant en compte la rotation différentielle (uniquement dans la zone convective), Roxburgh (2001) [32] obtenait quant à lui, $J_2 = 2.206 \times 10^{-7}$ ou $J_2 = 2.208 \times 10^{-7}$ selon le modèle.

La valeur extrême que nous obtenons pour $\Omega_c = 7\,\Omega_s$ est, elle, de $J_2 = 2.936 \times 10^{-7}$. À titre de comparaison, en appliquant la méthode perturbative en prenant un champ magnétique d'amplitude de 2 MG qui serait confiné dans la zone radiative du Soleil actuel, on obtient un moment quadrupolaire de $J_2 = 3.008 \times 10^{-7}$. Un tel champ pourrait donc avoir des effets sur la structure solaire pouvant entrer en compétition avec ceux engendrés par la rotation différentielle.

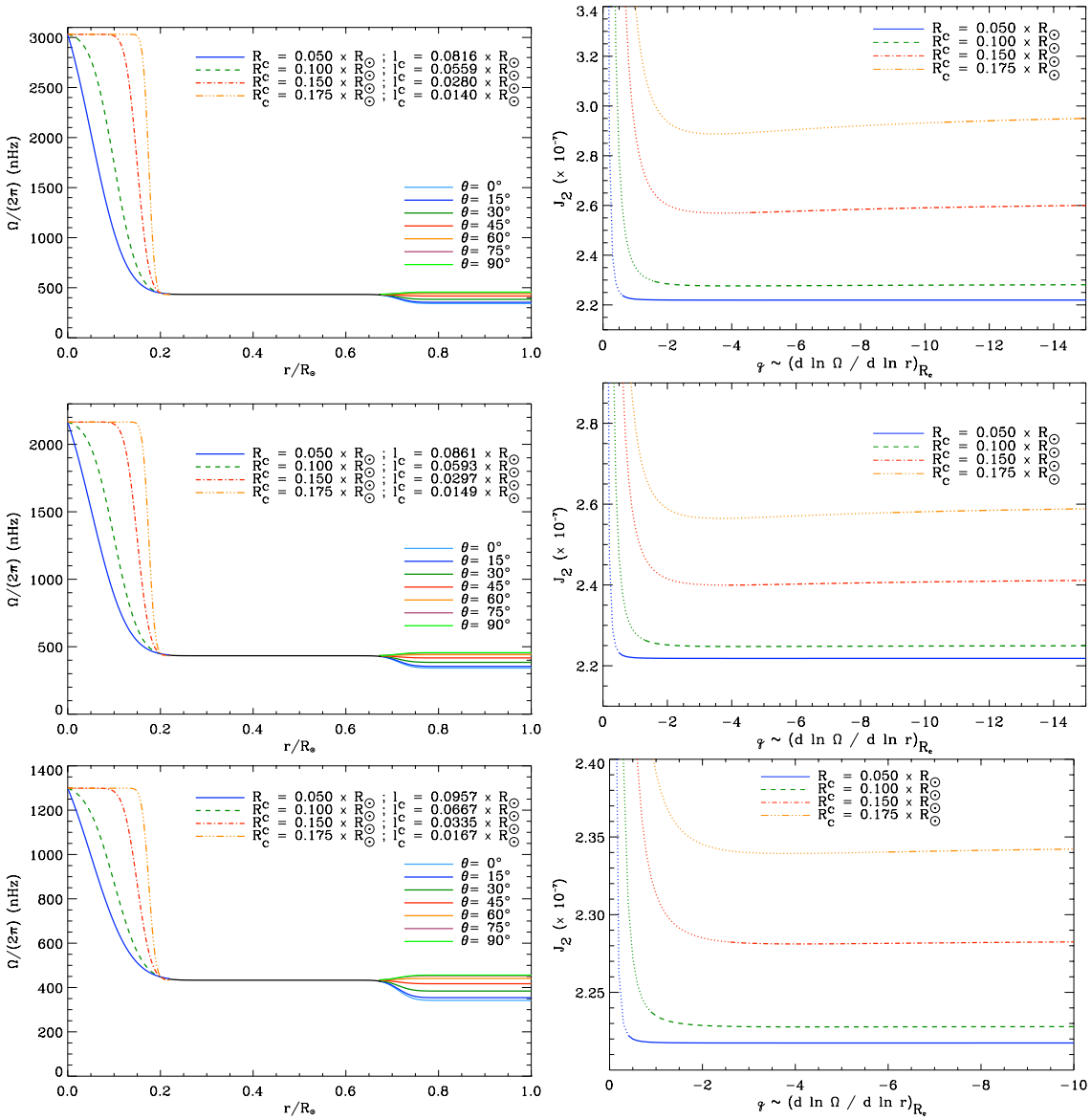


FIGURE 5.15 – Influence de la position et de l'extension de la région de transition (respectivement caractérisées par R_c et $\tilde{q}$) sur les moments gravitationnels quadrupolaires, pour plusieurs vitesses de rotation dans le cœur solaire Ω_c : (a, en haut) $\Omega_c = 7\,\Omega_s$; (b, au milieu) $\Omega_c = 5\,\Omega_s$; (c, en bas) $\Omega_c = 3\,\Omega_s$

5.5 Conclusion et perspectives

J'ai dégagé ici dans un premier temps les quantités d'intérêt pour l'implémentation du magnétisme dans un code d'évolution stellaire, à partir de configurations provenant d'un modèle physique consistant et en évaluant systématiquement les propriétés géométriques de chaque terme modifiant la structure stellaire.
J'ai en particulier montré la nécessité de prendre en compte la force de tension magnétique

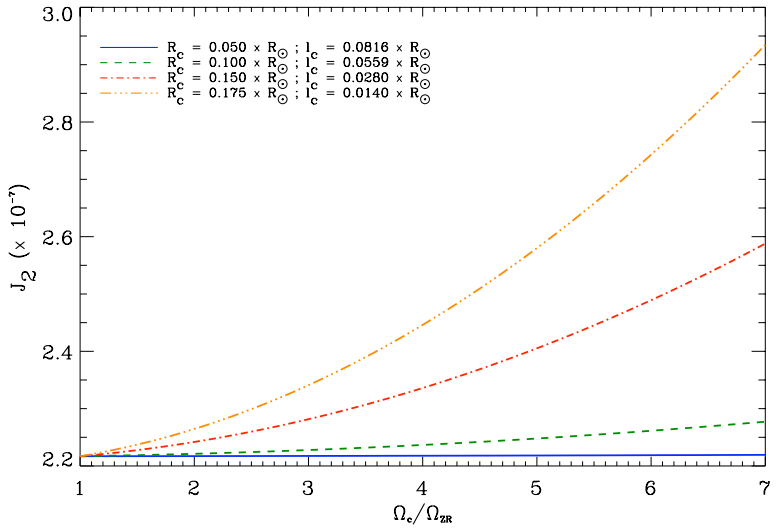


FIGURE 5.16 – Influence de la vitesse de rotation du cœur solaire Ω_c sur le moment gravitationnel quadrupolaire J_2.

dans la balance magnéto-hydrostatique plutôt que les effets d'une « pression magnétique effective » ; en effet cette première est indispensable pour contrebalancer le gradient de pression magnétique en particulier à proximité de l'axe magnétique et de la surface, où le champ tend vers un état force-free.

Ensuite, dans la limite où la force de Lorentz est une perturbation (ce qui est vérifié pour les ordres de grandeurs admis des champs magnétiques dans les zones radiatives stellaires), un traitement perturbatif au premier ordre a été effectué, mettant en évidence les perturbations pour les modes $l = 0$ et $l = 2$ associées aux configurations magnétiques dipolaires choisies et appliquées aux zones radiatives du Soleil et d'une étoile de type Ap. Cette approche m'a permis de dériver les perturbations en pression, densité, température, potentiel gravitationnel et rayon ; en particulier, les variations du rayon sur l'isobare et les moments gravitationnels multipolaires ont été calculés.
Si cette approche est valide dans le régime à haut β, elle ne peut cependant pas s'appliquer dans le cas de champs magnétiques élevés, où l'implémentation complète du magnétisme dans un code d'évolution stellaire est requise, les équations de la structure stellaire étant non-linéaires.

Puis, le flux de Poynting et le chauffage ohmique ont été calculés. Aussi, s'il peut certainement être démontré d'une manière plus simple que ceux-ci contribuent peu à la balance énergétique dans le cas de champs magnétiques raisonnables, il n'est pas trivial de distinguer lequel de ces termes prédomine sur l'autre ou encore sur des perturbations indirectes liées à la modification de la balance mécanique.
En se prescrivant une équation d'état, les perturbations sur la température ont pu être dégagées à partir de celles en pression et densité, ce qui a permis d'en déduire la modification des taux de réactions nucléaires liée à la présence d'un champ magnétique.

Perturbation	$\Omega_c = \Omega_s$	$\Omega_c = 5\,\Omega_s$	$\Omega_c = 7\,\Omega_s$
J_0	-1.08×10^{-5}	1.71×10^{-6}	6.14×10^{-5}
$\tilde{\rho}_0$	3.95×10^{-2}	-6.27×10^{-3}	-2.26×10^{-1}
$\tilde{P}_0$	5.42×10^{-2}	-8.60×10^{-3}	3.10×10^{-1}
$\tilde{T}_0$	1.47×10^{-2}	-2.33×10^{-3}	-8.38×10^{-2}
c_0	1.11×10^{-5}	-1.76×10^{-6}	-6.34×10^{-5}
J_2	2.21×10^{-7}	2.27×10^{-7}	2.94×10^{-7}
$\tilde{\rho}_2$	-8.15×10^{-4}	-8.33×10^{-4}	-1.08×10^{-3}
$\tilde{P}_2$	-1.12×10^{-3}	-1.14×10^{-3}	-1.48×10^{-3}
$\tilde{T}_2$	-3.03×10^{-4}	-3.09×10^{-4}	-4.01×10^{-4}
c_2	-2.89×10^{-7}	-2.33×10^{-7}	-3.03×10^{-7}
J_4	-3.62×10^{-9}	-3.62×10^{-9}	-3.62×10^{-9}
$\tilde{\rho}_4$	1.33×10^{-5}	1.33×10^{-5}	1.33×10^{-5}
$\tilde{P}_4$	1.82×10^{-5}	1.82×10^{-5}	1.82×10^{-5}
$\tilde{T}_4$	4.93×10^{-6}	4.93×10^{-6}	4.93×10^{-6}
c_4	3.73×10^{-9}	3.73×10^{-9}	3.73×10^{-9}
J_6	-3.31×10^{-10}	-3.31×10^{-10}	-3.31×10^{-10}
$\tilde{\rho}_6$	1.22×10^{-6}	1.22×10^{-6}	1.22×10^{-6}
$\tilde{P}_6$	1.67×10^{-6}	1.67×10^{-6}	1.67×10^{-6}
$\tilde{T}_6$	4.52×10^{-7}	4.52×10^{-7}	4.52×10^{-7}
c_6	3.41×10^{-10}	3.41×10^{-10}	3.41×10^{-10}
J_8	4.78×10^{-12}	4.78×10^{-12}	4.78×10^{-12}
$\tilde{\rho}_8$	-1.76×10^{-8}	-1.76×10^{-8}	-1.76×10^{-8}
$\tilde{P}_8$	-2.41×10^{-8}	-2.41×10^{-8}	-2.41×10^{-8}
$\tilde{T}_8$	-6.52×10^{-9}	-6.52×10^{-9}	-6.52×10^{-9}
c_8	-4.93×10^{-12}	-4.93×10^{-12}	-4.93×10^{-12}
J_{10}	-9.27×10^{-15}	-9.27×10^{-15}	-9.27×10^{-15}
$\tilde{\rho}_{10}$	3.41×10^{-11}	3.41×10^{-11}	3.41×10^{-11}
$\tilde{P}_{10}$	4.67×10^{-11}	4.67×10^{-11}	4.67×10^{-11}
$\tilde{T}_{10}$	1.26×10^{-11}	1.26×10^{-11}	1.26×10^{-11}
c_{10}	9.56×10^{-15}	9.56×10^{-15}	9.56×10^{-15}

TABLE 5.5 – Perturbations normalisées pour les modes $l = 2, 4, 6, 8$ et 10 en potentiel gravitationnel, densité, pression, température et rayon dues à la rotation différentielle, pour les trois cas étudiés.

Cela m'a permis de démontrer que cette perturbation indirecte est en fait supérieure aux perturbations directes associées aux pertes par rayonnement électromagnétique et dissipation ohmique.

Ce travail peut tout aussi bien être appliqué à des planètes gazeuses pour y étudier l'influence de la rotation (les coefficients de la force centrifuge se substituant à ceux de la force de Lorentz) et/ou du champ magnétique sur les quantités de surface ; notamment pour extraire les moments gravitationnels multipolaires virtuellement jusqu'à un ordre illimité.

Afin d'avoir une estimation des perturbations dues à la rotation et au champ magné-

tique, la méthode a notamment été appliquée à un profil de rotation différentielle dans l'intérieur du Soleil, en prenant en compte non seulement la rotation différentielle en latitude dans la zone convective, mais aussi le gradient radial de rotation dans son cœur. Il a été montré que la valeur du moment gravitationnel quadrupolaire est assez insensible à cette dernière, et est compris entre 2.218×10^{-7} et 2.936×10^{-7} pour une rotation dans le cœur inférieure à sept fois celle de la zone radiative. La valeur de ce moment est de 3.312×10^{-7} dans le cas d'un champ magnétique de 2 MG confiné dans la zone radiative d'un Soleil jeune et serait de 3.008×10^{-7} s'il s'agissait du Soleil actuel. Ainsi les deux effets sont comparables.

Enfin la dépendance temporelle des quantités perturbatrices variant dans le temps n'étant pas exclue, la méthode peut être appliquée dans les zones convectives stellaires, en particulier celle du Soleil. Elle permet donc de donner des contraintes sur les quantités observables qui seront mesurées par les missions spatiales à venir ; notamment SDO et Picard, tous deux programmés pour être lancés en février 2010 (à l'heure de rédaction de cette thèse).

5.6 Publications reliées : articles 2 et 3

Article 2 « Effect of a fossil magnetic field on the structure of a young Sun »
V. Duez, S. Mathis & S. Turck-Chièze
Article publié en février 2010 dans la revue *MNRAS*, volume 402, pp. 271-281 (ci-joint).

Article 3 « MHD determination of the gravitational multipole moments of stars and gazeous planets »
S. Mathis, C. Le Poncin-Lafitte & V. Duez
Article soumis prochainement à la revue *A&A*.

Monthly Notices of the ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY

Mon. Not. R. Astron. Soc. **402,** 271–281 (2010) doi:10.1111/j.1365-2966.2009.15955.x

Effect of a fossil magnetic field on the structure of a young Sun

V. Duez,[1,2★] S. Mathis[1,2★] and S. Turck-Chièze[1,2★]

[1]*DSM/IRFU/SAp, CEA Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France*
[2]*AIM, UMR 7158, CEA - CNRS - Université Paris 7, France*

Accepted 2009 October 23. Received 2009 October 7; in original form 2009 July 22

ABSTRACT

We study the impact of a fossil magnetic field on the physical quantities which describe the structure of a young Sun of 500 Myr. We consider for the first time a non-force-free field composed of a mixture of poloidal and toroidal magnetic fields and propose a specific configuration to illustrate our purpose. In this paper, we estimate the relative role of the different terms which appear in the modified stellar structure equations. We note that the Lorentz tension plays a non-negligible role in addition to the magnetic pressure. This is interesting because most of the previous stellar evolution codes ignored that term and the geometry of the field. The solar structure perturbations are, as already known, small and consequently we have been able to estimate each term semi-analytically. We develop a general treatment to calculate the global modification of the structure and of the energetic balance. We also estimate the gravitational multipolar moments associated with the presence of a fossil large-scale magnetic field in radiative zone. The values given for the young Sun help the future implementation in stellar evolution codes. This work can be repeated for any other field configuration and prepares the achievement of a solar magnetohydrodynamic model where we will follow the transport of such field on secular time-scales and the associated transport of momentum and chemicals. The described method will be applied at the present Sun and the results will be compared with the coming balloon or space measurements.

Key words: magnetic fields – MHD – Sun: interior – Sun: magnetic fields.

1 INTRODUCTION

Stellar magnetic fields, although they are observed more and more extensively at stellar surfaces through spectropolarimetry, remain subtle physical actors in stellar evolution. Intense researches are today devoted to understand their role in convective layers, in particular for the Sun (Cattaneo 1999; Brun, Miesch & Toomre 2004; Brun, Browning & Toomre 2005; Featherstone et al. 2007; Vögler & Schüssler 2007) as well as in radiative zones (Mestel & Moss 1977; Moss 1984; Charbonneau & McGregor 1993; Rüdiger & Kitchatinov 1997; Spruit 1999, 2002; Garaud 2002; Braithwaite & Spruit 2004; Braithwaite 2006a; Braithwaite & Nordlund 2006; Brun & Zahn 2006; Zahn., Brun & Mathis 2007; Garaud & Garaud 2008), but few work has been devoted to the effects of a fossil field in radiative zone on the stellar structure and its evolution (Maeder & Meynet 2004; Eggenberger, Maeder & Meynet 2005).

In the previous works, the magnetic field is generally treated rather simply and the geometry totally ignored (Lydon & Sofia 1995; Couvidat, Turck-Chièze & Kosovichev 2003; Rashba, Semikoz & Valle 2006). This fact is due to the lack of constraints on its magnitude and configuration. Nevertheless, today more activity is focused on the radiative zone (Burgess et al. 2004; Rashba et al. 2007), so it becomes useful to improve our approach.

In this context, two-dimensional models are in construction (see Li et al. 2006; Rieutord 2006) and begin to give some preliminary results for the rotation (Espinosa Lara & Rieutord 2007) and for the magnetic field (Li et al. 2009). An alternative approach resides in the implementation in a unidimensional code of the perturbations of the structure due to the dynamical phenomena. This approach is justified for solar-like stars where they are known to be small. In this case, one considers the projection on the first low-order spherical harmonics of the equations of the angular momentum transport, the heat transport and of the induction for the magnetic field (Mathis & Zahn 2005). The corresponding dynamical model contains all the refinements of the microscopic physics present in one-dimensional stellar evolution codes (see Talon et al. 1997; Meynet & Maeder 2000; Decressin et al. 2009; Turck-Chièze et al. 2009 for the case of rotation).

This paper prepares the implementation in a stellar evolution code of the different terms induced by the presence of a magnetic field. With this objective, we choose a specific configuration which may result from a fossil field, evaluate the order of the magnitude of the different terms induced by the field and estimate the impact of the magnetic field on the structure in developing some semi-analytic calculations well adapted to the small effects that we obtain for a solar fossil field.

★E-mail: vincent.duez@cea.fr (VD); stephane.mathis@cea.fr (SM); sylvaine.turck-chieze@cea.fr (STC)

© 2009 The Authors. Journal compilation © 2009 RAS

Section 2 shows how the stellar structure equations are modified by the presence of a large-scale magnetic field. Then, we propose a relaxed non-force-free fossil magnetic field configuration located in the solar radiative zone. It will be used in a model at its arrival on the main sequence. In Section 3, the modification of the mechanical balance is studied. Radial perturbations of the gravitational potential, density, pressure and radius are computed up to the surface. The method used is described in the Appendix. Then, in Section 4, the perturbation of the energetic balance is examined. We establish the change in temperature owing to the perturbation in density and pressure. We investigate the energetic perturbations generated by the Ohmic heating, Poynting's flux and the change in nuclear reaction rates induced by the modification of the mechanical balance. In Section 5, we estimate the surface perturbations and the gravitational multipolar moments induced by the presence of the magnetic field. Finally, Section 6 summarizes the results and shows the perspectives.

It is important to remark that although our study is focused on some specific solar fossil field, the formalism that we derive is general and can be applied to any non-axisymmetric or/and time-dependent magnetic fields.

2 THE DEEP FOSSIL MAGNETIC FIELD

2.1 The modified stellar structure equations

We recall first how the stellar structure equations are modified by the presence of a magnetic field $\boldsymbol{B}\,(r, \theta, \varphi, t)$:

$$\frac{\partial \langle P_{\rm gas}\rangle_{\theta,\varphi}}{\partial M_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} + \frac{1}{4\pi r^2}\left\langle \frac{F_{\mathcal{L};r}}{\rho}\right\rangle_{\theta,\varphi}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} = 4\pi r^2 \langle \rho\rangle_{\theta,\varphi}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial M_r} = \left\langle \varepsilon - \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{P_{\rm gas}}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}Q_{\rm Ohm} + \frac{1}{\rho}F_{\rm Poynt}\right\rangle_{\theta,\varphi}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \langle T\rangle_{\theta,\varphi}}{\partial M_r} = \frac{\partial P_{\rm gas}}{\partial M_r}\frac{\langle T\rangle_{\theta,\varphi}}{P_{\rm gas}}\nabla; \tag{4}$$

with ρ being the density, M_r the mass contained in a sphere with a radius r, G the gravitational constant, $P_{\rm gas}$ the gas pressure, L the luminosity, ε the energy production rate per unit of mass, U the internal energy per unit of mass, T the temperature, ∇ is $\nabla_{\rm rad}$ in radiative zones and $\nabla_{\rm ad}$ in convective zones. The new terms are $P_{\rm mag} = \boldsymbol{B}^2/2\,\mu_0$, the Lorentz force $\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$, the Ohmic heating $Q_{\rm Ohm} = (1/\mu_0)[||\eta||\otimes(\nabla\times\boldsymbol{B})]\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$ and Poynting's flux $F_{\rm Poynt} = (1/\mu_0)\,\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{j}$ being the current density, $||\eta||$ the magnetic diffusivity tensor and μ_0 the vacuum magnetic permeability. (r, θ, φ) are the usual spherical coordinates.

In a classical stellar evolution code, the equations of the mechanical (equation 1) and the energetic (equation 3) balances are solved only radially. However, when the topology of the magnetic field is introduced, the star becomes three-dimensional. So the multidimensional quantities are averaged over the colatitudes (θ) and the azimuthal angle (φ) according to $\langle Z\rangle_{\theta,\varphi} = 1/4\pi\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Z(r,\theta,\varphi)\sin\theta\,{\rm d}\theta\,{\rm d}\varphi$.

2.2 The magnetic field topology

In this work, we consider a large-scale magnetic field geometry likely to exist in stellar interiors, especially in radiative zones of solar-like stars on the main sequence. Tayler (1973) has shown that purely toroidal fields are unstable (see also Braithwaite 2006b). Moreover, Markey & Tayler (1973, 1974), and in parallel Wright (1973), deduced that purely poloidal fields are also unstable (see also Braithwaite 2007). So, we consider a mixed poloidal–toroidal configuration which can survive over evolution time-scales (Tayler 1980; Braithwaite & Nordlund 2006).

When the Sun arrives on the main sequence, the magnetic field is probably only a perturbation compared with the gravitational potential and the gaseous pressure gradient (high-β regime) and the fossil magnetic field are constrained to relax in a non-force-free equilibrium. Hence, we focus on such relaxed fossil configurations to predict its influence upon the solar structure. In this first study, we do not consider the rotation history (see Turck-Chièze et al. 2009) to isolate the effect of the magnetic field. The magnetic field is chosen axisymmetric in a magnetohydrostatic (MHS) equilibrium as an initial condition and is expressed as a function of a poloidal flux $\Psi(r,\theta)$ and a toroidal potential $F(r,\theta)$, so it remains divergence-free by construction:

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{r\sin\theta}\nabla\Psi\times\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi + \frac{1}{r\sin\theta}\,F\,\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi, \tag{5}$$

where in spherical coordinates the poloidal direction is in the meridional plane $(\widehat{\boldsymbol{e}}_r, \widehat{\boldsymbol{e}}_\theta)$ and the toroidal direction is along the azimuthal one (along $\widehat{\boldsymbol{e}}_\varphi$), $\{\widehat{\boldsymbol{e}}_k\}_{k=r,\theta,\varphi}$ being the spherical coordinates unit vectors basis. Without any known constraint on its topology and its strength, we have adopted the following magnetic field's poloidal flux (Prendergast 1956; Woltjer 1959; Woltjer 1960; Wentzel 1961):

$$\begin{aligned}\Psi(r,\theta) = {} & \\ & \sin^2\theta\times\left\{\sum_{l=0}^{\infty}K_1^l\frac{\lambda_1^{l,i}}{R_{\rm sup}}\,r\,j_{l+1}\left(\lambda_1^{l,i}\frac{r}{R_{\rm sup}}\right)C_l^{3/2}(\cos\theta)\right. \\ & -\mu_0\beta_0\frac{\lambda_1^{0,i}}{R_{\rm sup}}r\,j_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{r}{R_{\rm sup}}\right)\int_r^{R_{\rm sup}}\left[y_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{\xi}{R_{\rm sup}}\right)\overline{\rho}\,\xi^3\right]{\rm d}\xi \\ & \left.-\mu_0\beta_0\frac{\lambda_1^{0,i}}{R_{\rm sup}}r\,y_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{r}{R_{\rm sup}}\right)\int_{R_{\rm inf}}^{r}\left[j_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{\xi}{R_{\rm sup}}\right)\overline{\rho}\,\xi^3\right]{\rm d}\xi\right\},\end{aligned} \tag{6}$$

where $\overline{\rho}$ is the non-magnetic equilibrium density, j_l and y_l being, respectively, the spherical Bessel and Neumann functions of latitudinal order l. The $C_l^{3/2}$ are the classical Gegenbauer functions. The eigenvalues $\lambda_1^{l,i}$ $(i \geq 1)$ and the constants $K_1^l (l \geq 0)$ are given by the boundary conditions at the bottom of the considered radiation zone (at $r = R_{\rm inf}$) and at its upper limit (at $r = R_{\rm sup}$) and the parameter β_0 is constrained by the magnetic field strength. The chosen boundary conditions are $(\boldsymbol{B}\cdot\widehat{\boldsymbol{e}}_r) = 0 (\Psi = 0)$ at the radiation-convection zones interfaces (i.e. at $r = R_{\rm inf/sup}$) and at the centre for the solar case. We focus here on the dipolar mode $l = 1$.

Then, we choose to derive the toroidal potential in the following manner:

$$F(\Psi) = \lambda_1^0\,\Psi. \tag{7}$$

The field is buried in the radiative zone. Of course, this field will tend to diffuse outwards due to Ohmic dissipation, as observed in the numerical experiment performed by Braithwaite & Nordlund (2006). It will also be modified by the meridional circulation and the differential rotation. This is why we choose here to focus on its impact on a young Sun.

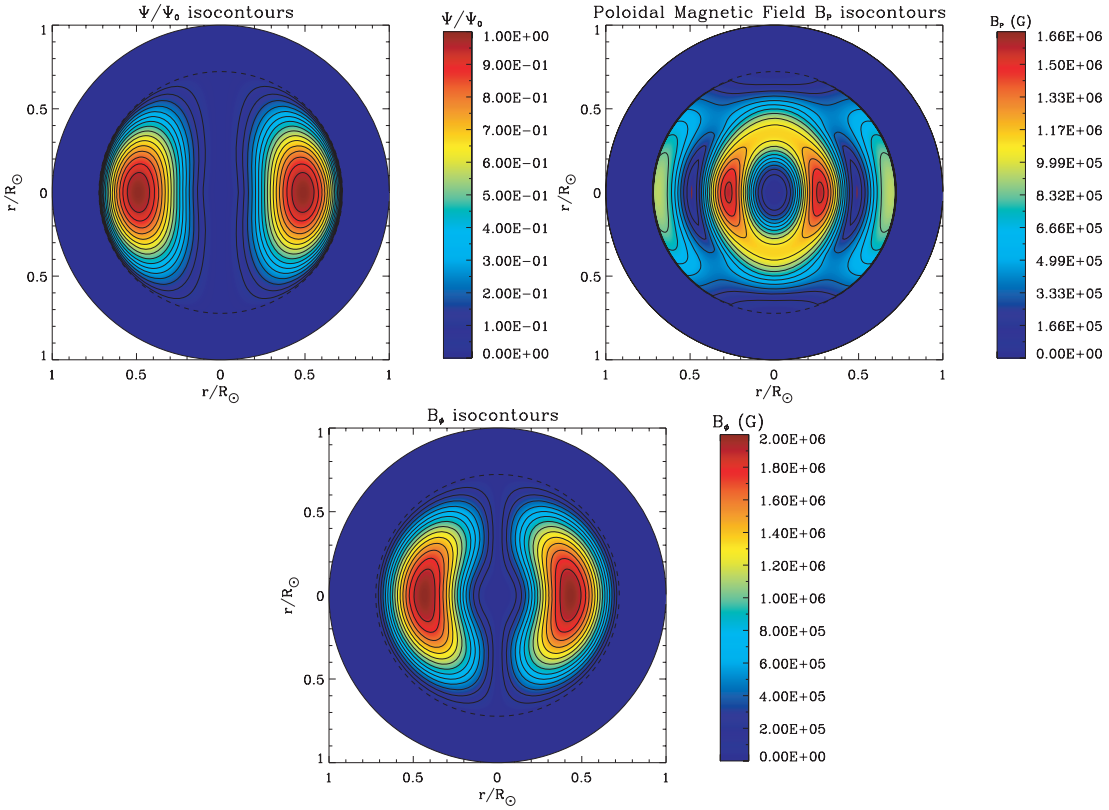


Figure 1. (a) Isocontours of the flux function $\Psi(r, \theta)$ normalized to its maximum in meridional cut. The poloidal magnetic field is tangent to the isocontours. (b) Isocontours of the poloidal magnetic field $B_\varphi(r, \theta)$ (in G) in meridional cut. (c) Isocontours of the azimuthal magnetic field $B_\varphi(r, \theta)$ (in G) in meridional cut.

2.3 The solar model and the related magnetic field strength

We first calculate the solar structure using the CESAM code (Morel 1997). We consider a non-rotating model at the arrival on the main sequence with initial conditions determined for the solar seismic model following Couvidat et al. (2003) and Turck-Chièze et al. (2004). It was computed using Grevesse & Noels (1993) abundances, taking into account the microscopic diffusion according to the Michaud & Profitt (1993) formalism, and using OPAL equation of state and opacity tables (Iglesias & Rogers 1996; Rogers, Swenson & Iglesias 1996). The initial hydrogen fraction is $X_0 = 0.7001$ an the initial helium one is $Y_0 = 0.272$. We let this model evolved up to 500 Myr. At this age, the radius (here called $R_\odot$ in the figures) is 0.886 of the present solar radius and the luminosity is 76.2 per cent of the present solar luminosity.

In this study, we consider a magnetic field strength of $B_0 = 2$ mG at its maximum (Friedland & Gruzinov 2004), located around 0. 35 $R_\odot$. This is a pure example, and other cases can be studied if we discover good arguments to prefer some other topologies and strengths. These initial values will evolve with time but we need to determine them to estimate the momentum transport by rotation and magnetic field. The chosen isocontours of the function Ψ and the resulting poloidal B_P and azimuthal magnetic fields B_φ are plotted in Fig. 1. As shown by Goldreich et al. (1991), an anisotropy factor γ_G can be defined as

$$\gamma_G = \frac{\langle B_h^2 \rangle - \langle B_r^2 \rangle}{\langle B_h^2 \rangle + \langle B_r^2 \rangle}. \quad (8)$$

Its values are ranged between -1 (pure radial field) and 1 (pure horizontal field). Several authors did mention this parameter as a way to include the geometrical aspects of the field in order to implement its effect in a one-dimensional code. Fig. 2 shows the radial dependence of the anisotropy factor for the considered configuration: it can be immediately understood that prescribing a realistic value of this parameter cannot be achieved without starting from a genuine latitudinally dependent magnetic field.

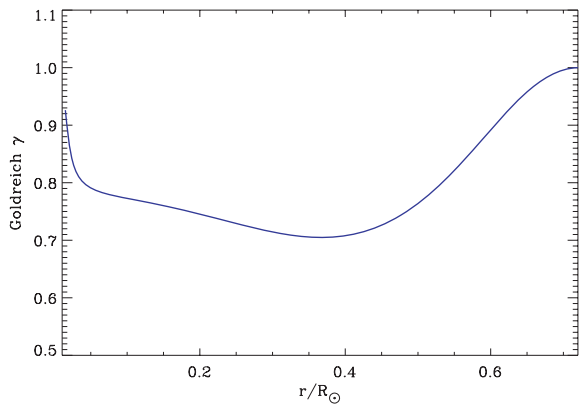


Figure 2. Golreich's parameter. In this application, one supposes a mixed field of 2 mG located around 0.3 $R_\odot$.

3 THE MODIFIED MECHANICAL BALANCE

In this section, we first examine the physical quantities associated with the presence of the magnetic field that are likely to modify the

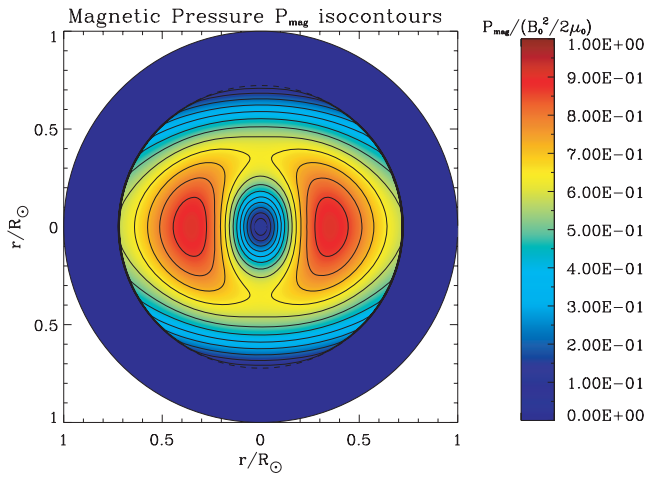


Figure 3. Isocontours of the magnetic pressure $P_{\rm mag}(r,\,\theta)$ normalized to $B_0^2/2\,\mu_0$ in meridional cut.

mechanical balance. Their two-dimensional profiles are drawn to highlight their latitudinal dependence and their radial mean profiles, obtained by averaging over the latitudes, are discussed in the relevant cases. Then, the perturbations induced by the inclusion of the Lorentz force in the hydrostatic balance are derived and discussed.

3.1 Physical quantities modifying the classical equilibrium

3.1.1 The magnetic pressure

The magnetic pressure is defined by $P_{\rm mag} = \boldsymbol{B}^2/2\mu_0$ and its normalized profile with respect to $B_0^2/2\,\mu_0$ is given in Fig. 3. This is a quantity of special interest that may play a key role over secular time-scales. At first, it disturbs the hydrostatic balance through the contribution of its gradient to the Lorentz force. From Fig. 3, we can infer, owing to the direction of the magnetic pressure gradient which is orthogonal to the magnetic pressure iso-surfaces, that the main effect of $P_{\rm mag}$ is to expel the gas from high-magnetic-pressure regions (red regions) and concentrate it in low-magnetic-pressure regions (blue regions). The Sun remains in the strong β regime ($\beta = P_{\rm gas}/P_{\rm mag}$), $\beta \geqslant 10^3$ in the radiative zone where the gas pressure strongly dominates the magnetic one. So, the Lorentz force is assumed to be only a perturbation compared with the self-gravitation of the star.

3.1.2 The Lorentz force

The Lorentz force is here axisymmetric. It modifies the stellar structure through the perturbation of the hydrostatic balance both in the radial and latitudinal directions. Its expression is given by

$$\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}} = -\nabla(B^2/2\mu_0) + \frac{1}{\mu_0}\,(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B}. \tag{9}$$

To understand precisely its influence, its components along $\widehat{\boldsymbol{e}}_r$ and $\widehat{\boldsymbol{e}}_\theta$ normalized with respect to $B_0^2/\mu_0\,{\rm R}_\odot$ are plotted in Fig. 4. Furthermore, the averaged Lorentz force is drawn in Fig. 5. The Lorentz force exerts a centripetal influence in the inner part of the radiative zone (up to $0.47\,{\rm R}_\odot$) and a centrifugal one in the external part of the star. Furthermore, the latitudinal component of the Lorentz force is negative in the Northern hemisphere and positive in the Southern one, then directed towards the poles. This will necessitate a counterbalancing gravitational force directed towards the equator that will increase the density at low latitudes. Therefore, the sphere deformation will be oblate.

3.1.3 Effect of the magnetic tension

We now focus on the second part of the Lorentz force, namely, the magnetic tension one, which is defined by

$$\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}}^{T} \equiv \frac{1}{\mu_0}\,(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}_{\mathcal{L}} + \nabla P_{\rm mag}. \tag{10}$$

Therefore, a complete treatment of the mechanical balance modification by the Lorentz force cannot be achieved by taking into account only the magnetic pressure gradient. In Fig. 5(a), we draw the average over latitudes of the radial component of the complete Lorentz force together with the averaged magnetic pressure radial gradient and the averaged radial component of the magnetic tension force. We note that the magnetic pressure gradient dominates the magnetic tension in the internal part of the stars. However, the latter strength becomes of the same order of the magnitude that those of the magnetic pressure term, in particular on the symmetry axis and in the vicinity of the surface where one counterbalancing each other as the total Lorentz force tends to vanish. In the model presented here, the Lorentz force can be stated as

$$\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}} = \beta_0\,\bar{\rho}\,\nabla\,\Psi, \tag{11}$$

from which it arises that the Lorentz force vanishes if the density tends towards zero. The respective contributions of the two factors $\bar{\rho}$ and $\langle\nabla_r\,\Psi\rangle_\theta = \langle\partial_r\,\Psi\rangle_\theta$ to the radial component of the Lorentz

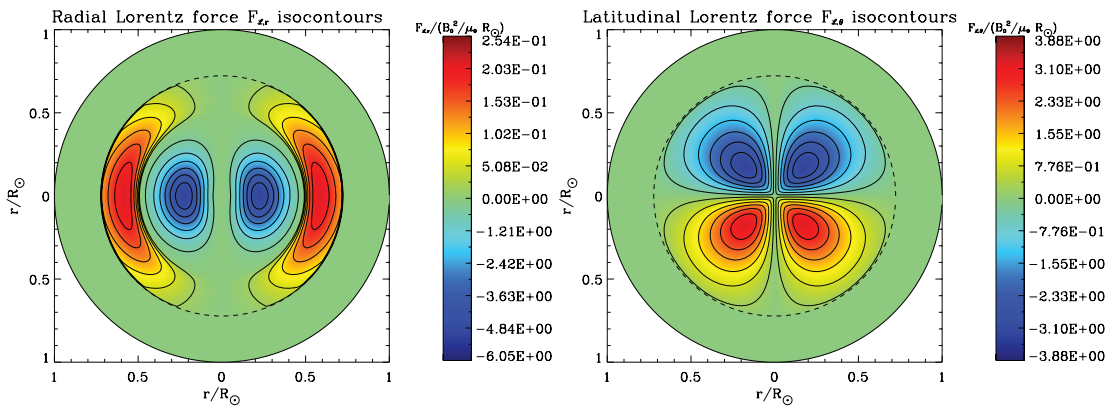


Figure 4. (a) Isocontours of the radial Lorentz force $\boldsymbol{F}_{\mathcal{L};r}(r,\theta)$ normalized to $B_0^2/\mu_0\,{\rm R}_\odot$ in meridional cut. (b) Isocontours of the latitudinal Lorentz force $\boldsymbol{F}_{\mathcal{L};\theta}(r,\theta)$ normalized to $B_0^2/\mu_0\,{\rm R}_\odot$ in meridional cut.

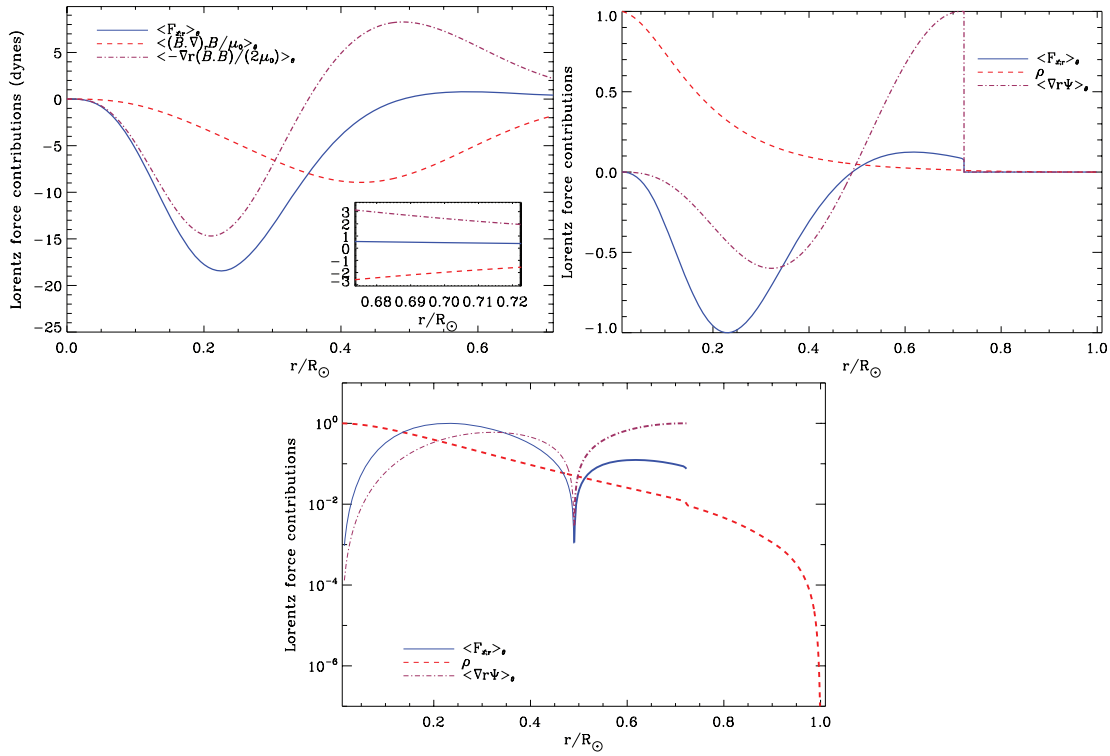


Figure 5. (a) Mean radial Lorentz force $\langle F_{\mathcal{L};r}\rangle_\theta$ (solid line) and its magnetic pressure gradient contribution compared with the magnetic tension term. (b) Mean radial Lorentz force (solid line), and the contribution of the factor $\bar{\rho}$ and of $\langle\nabla_r\,\Psi\rangle_\theta = \langle\partial_r\Psi\rangle_\theta$ (normalized to their maximum). (c) Same than the previous one in log scale. Bold lines represent positive values, whereas thin lines represent negative ones.

force are drawn in Fig. 5(b). In Fig. 5(c), it is clearly shown that the Lorentz force is mainly driven by the density evolution.

3.2 Influence of the deep field on the solar structure

3.2.1 The perturbative approach

The previous section has shown through the β-parameter that the Lorentz force is only a perturbation compared with the gravitational one and with the gaseous pressure gradient. So a first-order perturbative treatment can be performed to compute the structural perturbations associated with the modification of the hydrostatic equilibrium due to the magnetic field. We now derive the modified Poisson's equation for the perturbed gravific potential and deduce the density-, pressure- and radius-related perturbations.

This work can be applied to any star in the high-β regime. In this case, the stellar structure is only weakly two-dimensional and the horizontal variations of all quantities are small and smooth enough to allow their linearization. Their generalized expressions are given in Appendix A. Let us recall that Sweet (1950) was the first to derive this result for a general perturbing force, Moss (1974) having introduced the special case of the Lorentz force in the case of a poloidal field while the case of a general axisymmetric configuration (both poloidal and toroidal) has been treated in Mathis & Zahn (2005). Note also that since the Lorentz force is proportional to $(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}$, the perturbation amplitude is proportional to the square of the field's strength.

Although the quantities estimated in Appendix A have been computed up to $l = 8$ by Ajabshirizadeh, Rozelot & Fazel (2008) using the theory of figures, our purpose is different. We prepare a complete global magnetohydrodynamic (MHD) solar model and would like only here to estimate the relative influence of the different terms. We are interested in the dipolar mode of the magnetic field, so we derive the J_l for the modes $l = 0$ and 2 only, but the method could be extended for a more general angular geometry.

Sweet's equation for the gravitational potential is integrated using a finite difference, fourth-order Runge–Kutta scheme coupled to a shooting method to deal with an initial value problem. The gravitational potential perturbation has been obtained by interpolating over an array with 10 000 constant radial steps. It has then been interpolated back on the original CESAM mesh. This latter, more resolved in the subsurface, allows us to compute the perturbations of the other parameters with a greater accuracy, which was not necessary for the gravitational potential since that one does not vary steeply in this region (cf. Fig. 6). Derivatives have been computed using a second-order centred-difference scheme with a quadratic extrapolation outside the domain to conserve the precision at the boundaries. The shooting method is assumed to converge when the relative error between two consecutive models (of gravitational potential perturbation) is lower than 10^{-9}. It has been checked that the results are not sensitive to the number of interpolation points, nor to the relative error.

3.2.2 Results

Let us define the normalized perturbation of a scalar X to its unperturbed value by

$$\tilde{X}_l = \widehat{X}_l / X_0. \tag{12}$$

Results for the normalized perturbations in gravitational potential ($\tilde{\Phi}_l$), density ($\tilde{\rho}_l$), pressure ($\tilde{P}_l$) and radius (c_l) are shown in Fig. 6 for the modes $l = 0$ and 2. We note that the sign of the normalized perturbation in gravitational potential is the opposite of its

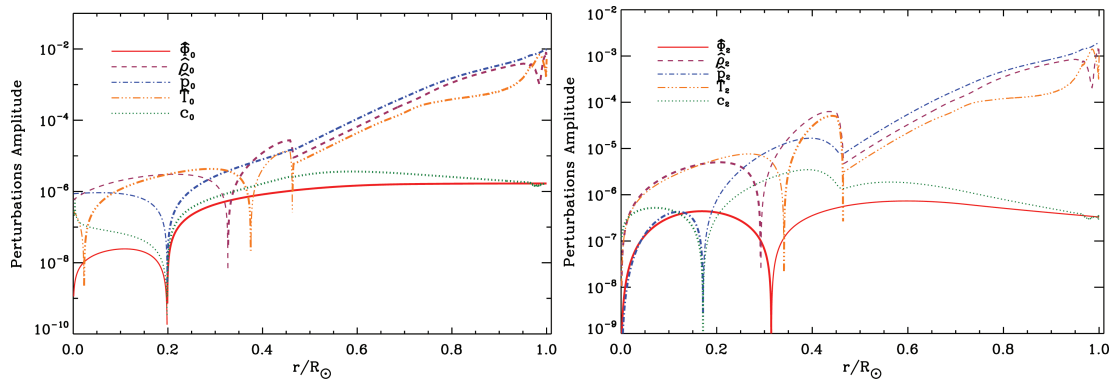


Figure 6. Left-hand panel: normalized perturbations for the mode $l = 0$ of gravitational potential, density, pressure, temperature and radius as a function of the radius. Right-hand panel: normalized perturbations for the mode $l = 2$ of gravitational potential, density, pressure, temperature and radius as a function of the radius. Negative values are drawn using thin curves while positive ones are drawn using bold curves.

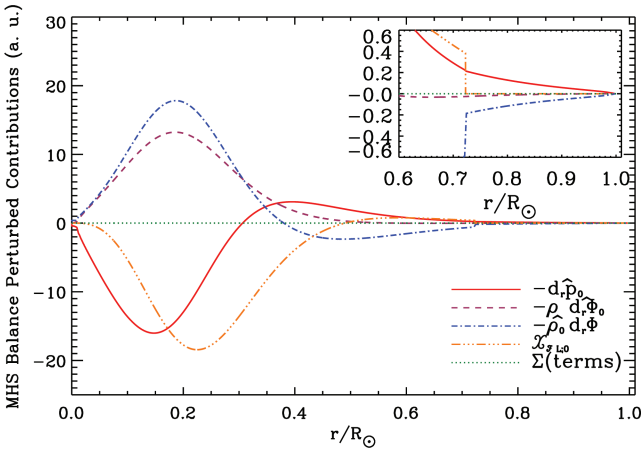


Figure 7. Perturbations of the terms constituting the hydrostatic balance for the mode $l = 0$, and their vanishing sum expressing the new equilibrium (here $\phi = -GM_r/r$).

unperturbed value, that one being negative. Negative values are drawn using thin lines while positive ones are drawn using bold lines.

The perturbations to the mean hydrostatic balance ($l = 0$ terms) induced by the magnetic field are drawn in Fig. 7. The sum of the different terms constituting the MHS balance (equation A8) is also drawn as a verification of the new equilibrium settled in presence of magnetic field. One can observe the following features. First, the induced perturbation is of the same order of the magnitude than the cause of the perturbation where the Lorentz force has its major contribution (i.e. in the central part), namely, here the Lorentz force coefficient $\mathcal{X}_{F_{\mathcal{L}};0}$. Secondly, the structure responds by increasing the perturbation in gravity: the term $\rho_0 \nabla\Phi^{(1)}$ is positive since $-\rho\, \mathrm{d}\widehat{\Phi}_0/\mathrm{d}r$ is negative. The same remark can be given for the perturbation in density. On the contrary, the pressure force perturbation is opposed to the Lorentz force in this region.

The fact that the radial component of the Lorentz force changes sign leads to opposite effects in the outer part of the star. Finally, the value of the quadrupolar gravitational multipolar moment J_2 is positive, which confirms our preceding intuition based on the sign of the Lorentz force that the sphere deformation would be oblate. Furthermore, its value is 3.3×10^{-7} for the 2 mG magnetic field imposed. Note that this value is proportional to the square of the magnetic field amplitude. In contrast, actual estimates for the gravitational multipolar moment due to the solar internal rotation are close to the value of 2.2×10^{-7} (see e.g. Paterno et al. 1996; Roxburgh 2001). Assuming that the values would be of the same order of the magnitude for a young or the present Sun, with a magnetic field of same intensity, it thus arises that an internal magnetic field with mG strength might be a non-negligible source of oblateness.

4 THE MODIFIED ENERGETIC BALANCE

We look first for the temperature perturbation induced by the presence of the magnetic field. Following Kippenhahn & Weigert (1990), we introduce the general equation of state for the stellar plasma

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \alpha_s \frac{\mathrm{d}P}{P} - \delta_s \frac{\mathrm{d}T}{T} + \varphi_s \frac{\mathrm{d}\mu_s}{\mu_s}, \tag{13}$$

where $\alpha_s = (\partial \ln \rho/\partial \ln P)_{T,\mu_s}$, $\delta_s = -(\partial \ln \rho/\partial \ln T)_{P,\mu_s}$ and $\varphi_s = (\partial \ln \rho/\partial \ln \mu_s)_{P,T}$. In the framework in which the volumetric Lorentz force is a perturbation compared with the gravity, the stellar temperature (T) and the mean molecular weight (μ_s) can be expanded like ϕ, ρ and P following the expressions:

$$\begin{aligned} T(r,\theta) &= T_0(r) + T^{(1)}(r,\theta) \\ &= T_0(r) + \sum_{l\geq 0} \widehat{T}_l(r)\, P_l(\cos\theta)\,; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \mu_s(r,\theta) &= \mu_{s;0}(r) + \mu_s^{(1)}(r,\theta) \\ &= \mu_{s;0}(r) + \sum_{l\geq 0} \widehat{\mu}_{s;l}(r)\, P_l(\cos\theta)\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Using the linearization of equation (13) around the non-magnetic state, we then get for each l:

$$\frac{\widehat{\rho}_l}{\rho_0} = \alpha_s \frac{\widehat{P}_l}{P_0} - \delta_s \frac{\widehat{T}_l}{T_0} + \varphi_s \frac{\widehat{\mu}_{s;l}}{\mu_{s;0}} \tag{16}$$

that leads finally to

$$\widehat{T}_l = \frac{T_0}{\delta_s}\left[\alpha_s \frac{\widehat{P}_l}{P_0} - \frac{\widehat{\rho}_l}{\rho_0} + \varphi_s \frac{\widehat{\mu}_{s;l}}{\mu_{s;0}}\right]. \tag{17}$$

$\widetilde{T}_0 = \widehat{T}_0/T_0$ and $\widetilde{T}_2 = \widehat{T}_2/T_0$ are, respectively, plotted in Fig. 6 for the considered solar model. We assume that $\alpha_s = \delta_s = 1$ which is acceptable for main-sequence stars and choose here not to take into account the mean molecular weight fluctuation ($\varphi_s = 0$) (see Kippenhahn & Weigert 1990).

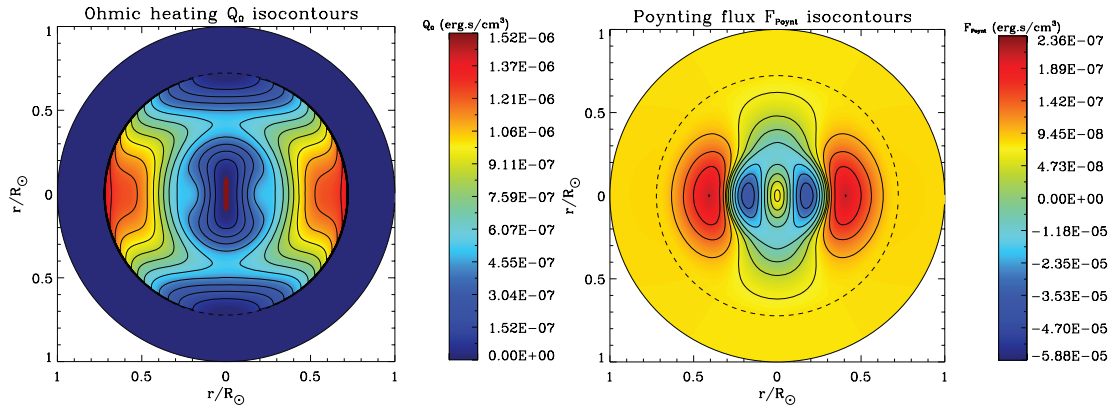


Figure 8. (a) Isocontours of the Ohmic heating $Q_{\rm Ohm}(r,\theta)$ in meridional cut. (b) Isocontours of Poynting's flux $F_{\rm Poynt}(r,\theta)$ in meridional cut.

4.1 Physical quantities modifying the energetic balance

The two terms that now have to be examined are, respectively, the volumetric ohmic heating and the flux transported by the electromagnetic field, namely, Poynting's flux. The Ohmic heating becomes in the case of an isotropic magnetic diffusivity (η)

$$Q_{\rm Ohm}(r,\theta) = \mu_0\,\eta\,\boldsymbol{j}^2\,(r,\theta)\,. \tag{18}$$

Considering the following temperature-dependent law for η (Spitzer 1962),

$$\eta = 5.2\times 10^{11}\ \log\Lambda\ T^{-3/2}\ {\rm cm^2\,s^{-1}} \tag{19}$$

where we take for the Coulombian logarithm $\log\Lambda \approx 10$, we can semi-analytically compute the Ohmic heating (see Fig. 8a). The Ohmic heating increases steadily as we go up to the radiation–convection transition. Poynting's flux is given by $F_{\rm Poynt} = \nabla\cdot\boldsymbol{S}$, where Poynting's vector is defined by $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/\mu_0$. In the static case, the simplified Ohm's law gives $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$. Using the identity between the conductivity (σ) and the magnetic diffusivity $\eta = (\mu_0\sigma)^{-1}$, Poynting's flux reduces then to

$$F_{\rm Poynt} = \nabla\cdot(\eta\,\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}})\,. \tag{20}$$

This term is shown for the considered configuration in Fig. 8(b).

4.2 Perturbation of the energetic balance

Let us now consider the modification of the energetic balance. First, according to Poynting's theorem:

$$\frac{\partial U_{\rm mag}}{\partial t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{S} - Q_{\rm Ohm}, \tag{21}$$

where $U_{\rm mag}$ is the volumic electromagnetic energy density and $\boldsymbol{S}$ is Poynting's vector. Then, the classical energy equation

$$\frac{\partial L}{\partial M_r} = \varepsilon - \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_{\rm int}}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{22}$$

(L being the total luminosity, M_r the mass, ε the specific energy production rate per unit mass and $U_{\rm int}$ the volumic gas internal energy density, such that $U_{\rm int} = \rho\,U$) is modified into[1]

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial M_r} &= \left\langle \varepsilon - \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_{\rm int}}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_{\rm mag}}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right\rangle_\theta \\ &= \left\langle \varepsilon - \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_{\rm int}}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{S} + \frac{1}{\rho}Q_{\rm Ohm}\right\rangle_\theta .\end{aligned} \tag{23}$$

The purpose is here to quantify the exceeding amount of energy radiated away through Poynting's flux (this quantity representing the energy generated by the work of the Lorentz force which is converted in electromagnetic radiation)[2] and dissipated by the Ohmic heating. We integrate the Ohmic heating and Poynting's flux over the spherical shells of radius r

$$\mathcal{S}_{\rm Ohm}(r) = \int_0^r\int_\Omega Q_{\rm Ohm}(r',\theta')\,{\rm d}\Omega\,r'^2{\rm d}r'; \tag{24}$$

$$L_{\rm Poynt}(r) = \int_0^r\int_\Omega F_{\rm Poynt}(r',\theta')\,{\rm d}\Omega\,r'^2{\rm d}r'; \tag{25}$$

where ${\rm d}\Omega = \sin\theta'\ {\rm d}\theta'\ {\rm d}\phi'$, r' thus ranging from 0 to r, θ' from 0 to π and ϕ' from 0 to 2π. This then allows us to compare their respective contribution on the total luminosity in function of the radius.

To get a complete diagnosis, we finally consider the modification of the specific energy production rate per unit mass (ε), which depends on ρ and T, due to magnetic field. First, the logarithmic derivative of ε is expanded like the one of ρ (cf. equation 13 and Mathis & Zahn 2004 and references therein):

$$\frac{{\rm d}\varepsilon}{\varepsilon} = \lambda\frac{{\rm d}\rho}{\rho} + \nu\frac{{\rm d}T}{T}, \tag{26}$$

where $\lambda = (\partial\,\ln\varepsilon/\partial\,\ln\rho)_T$ and $\nu = (\partial\,\ln\varepsilon/\partial\,\ln T)_\rho$. Then, like ρ and T, we expand ε as

$$\begin{aligned}\varepsilon\,(r,\theta) &= \varepsilon_0\,(r) + \varepsilon^{(1)}\,(r,\theta) \\ &= \varepsilon_0\,(r) + \sum_{l\geq 0}\widehat{\varepsilon}_l\,(r)\,P_l\,(\cos\theta)\,.\end{aligned} \tag{27}$$

[1] In the case where the magnetic field is taken into account, the star loses its spherical geometry. Conversely, the luminosity (L) is defined as $L(r) = \int_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot{\rm d}\boldsymbol{\Sigma}$, where $\boldsymbol{F} = -\chi\nabla T$, χ being the thermal diffusivity. Therefore, we have to take the horizontal average of the right-hand side of the energy equation: $\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \rho\varepsilon + \nabla\cdot\boldsymbol{S} + Q_{\rm Ohm}$ to form equation (23).

[2] In the static case, Poynting's flux can be expressed as $\boldsymbol{S} = \eta\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} = \eta\,\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}}$.

© 2009 The Authors. Journal compilation © 2009 RAS, MNRAS **402,** 271–281

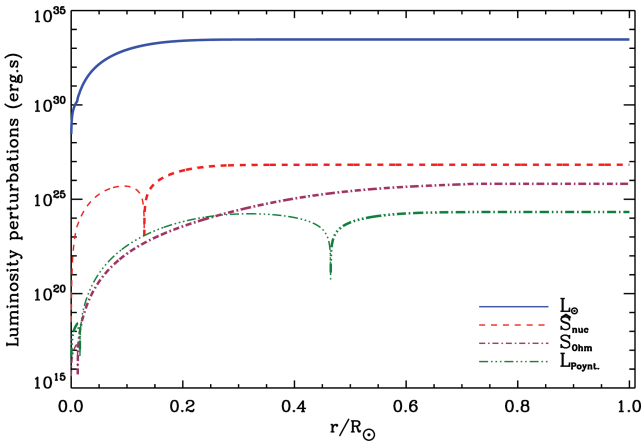


Figure 9. Contribution to the luminosity perturbation through the Ohmic heating (dash–dotted line), Poynting's flux (dash-dot-dotted line) and nuclear reaction rates perturbations (dashed line) as a function of the radius. Negative values are drawn using thin curves, while positive ones are drawn using bold curves.

Linearizing equation (26) around the non-magnetic state, we obtain

$$\widehat{\varepsilon}_l = \varepsilon_0 \left[\lambda \frac{\widehat{\rho}_l}{\rho_0} + \nu \frac{\widehat{T}_l}{T_0} \right]. \tag{28}$$

Since $L_{\rm Ohm} + L_{\rm Poynt} << L_0$, L_0 being the luminosity in the non-magnetic case (here $L_\odot$ given in Fig. 9), a perturbative approach can be used and we can expand the luminosity as $L = L_0 + \widehat{L}$, where $\widehat{L}$ is the luminosity perturbation due to the magnetic terms.

Linearizing equation (23) around the non-magnetic state, we get

$$\frac{\partial L_0}{\partial M_r} = \varepsilon_0 \,; \tag{29}$$

$$\frac{\partial \widehat{L}}{\partial M_r} = \left\langle \varepsilon^{(1)} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \boldsymbol{S} + \frac{1}{\rho_0} Q_{\rm Ohm} \right\rangle_\theta . \tag{30}$$

Next, integrating equation (30), we obtain

$$\widehat{L}\,(r) = \widehat{\mathcal{S}}_{\rm nuc}\,(r) + L_{\rm Poynt}\,(r) + \mathcal{S}_{\rm Ohm}\,(r)\,, \tag{31}$$

where

$$\widehat{\mathcal{S}}_{\rm nuc}\,(r) = \int_\Omega \varepsilon^{(1)} \rho_0 {\rm d}\Omega = \int_0^{m(r)} \left\langle \varepsilon^{(1)} \right\rangle_\theta {\rm d}M_r$$
$$= 4\pi \int_0^r \left\{ \varepsilon_0 \left[\lambda \frac{\widehat{\rho}_0}{\rho_0} + \nu \frac{\widehat{T}_0}{T_0} \right] \right\} \rho_0\, r'^2 {\rm d}r'. \tag{32}$$

Results obtained are given in Fig. 9. The different contributions stay extremely small. Note that the solar case is very interesting because it demonstrates (if it is confirmed by a complete solar model) that these perturbations cannot affect the cyclic 11-year magnetic effect connected to the convective zone. Nevertheless, this luminosity effect is greater than the natural evolution of the solar luminosity (10^{-8} on 100 years) and influences the long trend evolution. Moreover, this work shows the relationship between the luminosity and the radius fluctuations and could be also applied to a magnetic perturbation in the subsurface layers (see below).

5 SURFACE PERTURBATIONS

5.1 Structural surface perturbations

Using the continuity of the gravific potential (ϕ) at the surface, we derive the expression to evaluate the gravitational multipolar moments J_l (cf. equation A17):

$$J_l = \left(\frac{{\rm R}_\odot}{G{\rm M}_\odot} \right) \widehat{\phi}_l (r = {\rm R}_\odot). \tag{33}$$

The radius perturbation can then be expressed as

$$c_l({\rm R}_\odot) = \frac{\rho_0}{{\rm d}P_0/{\rm d}r} \left(\frac{1}{r} \frac{G{\rm M}_\odot}{{\rm R}_\odot} J_l + \frac{\mathcal{Y}_{F_{\mathcal{L}};l}}{\rho_0} \right). \tag{34}$$

Their surface values, together with the perturbations in density, pressure and temperature, are presented in Table 1 for the modes $l = 0$ and 2, for the magnetic field buried in the solar radiative zone.The effective temperature change owing to the presence of a large-scale magnetic field is positive in this solar case, of course the real effect for the present Sun could be different due to the total luminosity constraint. The same kind of study will be conducted for the present Sun after implementation in a stellar evolution code.

Table 1. First-order (FO) and second-order (SO) structural perturbations due to the presence of a fossil field. Normalized modal surface perturbations for the gravitational potential (J), density (ρ), pressure (P), temperature (T) and radius (c).

FO perturbation	Young Sun	SO perturbation	Young Sun
J_0	-1.68×10^{-6}	J_2	3.31×10^{-7}
$\tilde{\rho}_0$	4.57×10^{-3}	$\tilde{\rho}_2$	-9.04×10^{-4}
$\tilde{P}_0$	9.78×10^{-3}	$\tilde{P}_2$	-1.93×10^{-3}
$\tilde{T}_0$	5.21×10^{-3}	$\tilde{T}_2$	-1.03×10^{-3}
c_0	1.73×10^{-6}	c_2	-3.42×10^{-7}

Table 2. Luminosity perturbations compared with the total present solar luminosity (reduced by 24 per cent at 500 Myr). Contributions of the Ohmic heating ($\mathcal{S}_{\rm Ohm}$) and of Poynting's flux ($L_{\rm Poynt}$) to the luminosity perturbation (in erg s); contribution of the nuclear efficiency modification induced by the perturbation of the hydrostatic equilibrium ($\mathcal{S}_{\rm nuc}$).

Perturbation to the luminosity	Young Sun
$L_{\rm Ohm}$	6.59×10^{25}
$L_{\rm Poynt}$	2.12×10^{24}
$\widehat{L}_{\rm nuc}$	6.73×10^{26}
$L_{\rm tot}$	2.93×10^{33}

5.2 Luminosity perturbations

The surface values of the respective contributions to the total luminosity are given in Table 2. It is clear that the impact of the magnetic terms on the energetic balance appears to be very weak as it is well known.In this application, $L_\odot/\widehat{L}_{\rm nuc}$ is about 10^6, whereas $\widehat{L}_{\rm nuc}/(L_{\rm Ohm} + L_{\rm Poynt})$ is around 40. Hence, it is found that the direct contribution of the magnetic field to the change in the energetic balance through the Ohmic heating or Poynting's flux is weak compared with the indirect modification to the energetic balance induced by the change in temperature and density over the nuclear reaction rate. So as a first step, we can thus consider the impact of the large-scale magnetic field only upon the mechanical balance while the modification of the energetic one by the Ohmic heating and Poynting's flux is a higher order perturbation.

6 CONCLUSION AND PERSPECTIVES

In this paper, we suggest an initial typical topology of the magnetic field in the radiation zones of stellar models. We consider a mixed poloidal–toroidal configuration. Thus, we do some progress in comparison with previous works which did not consider the topology of the magnetic field. This configuration is a good candidate to be stable (Tayler 1980; Braithwaite 2009). Its stability analysis, being out of the scope of this work, will be studied in a forthcoming paper. We assume here that such configuration can survive over evolution time-scales.

We show its consequences and quantify the different terms appearing in the modified structural equations of stellar evolution. To be quantitative, we have discussed a possible configuration of fossil field located in the solar radiative zone. We have chosen this configuration for a young Sun supposing that a transition region between convection and radiation like a tachocline is already established (Gough 2009 and references therein).

This paper clearly shows that one needs to take into account, in addition to the magnetic pressure, both effects of magnetic pressure and magnetic tension in the hydrostatic balance through the Lorentz force. Fig. 5 shows the relative importance of each of them. In the vicinity of the base of the convective zone, the magnetic tension has an important role since it compensates the magnetic pressure gradient and tends to a force-free state; this is also the case near the magnetic field axis.

A first-order perturbative treatment has been performed. It puts in evidence the radial and latitudinal perturbations of the structural quantities. This approach is valid in high-β regime which is totally justified for the present case. The modal fluctuations in structural quantities, namely, the gravific potential, the density, the pressure, the temperature, the gravitational multipole moments and the isobar radius are computed.

Finally, we show that Poynting's flux and the Ohmic heating have approximately the same order of magnitude. Nevertheless, their contributions to the modification of the energetic balance remain extremely weak in comparison with the modified nuclear energetic contribution. This last one is also small but may influence the determination of the present solar luminosity.

This study is the first step to get a real MHD approach in stellar evolution. It allows to introduce the useful terms in a stellar code. We will then consider the secular transport equations along the evolution to estimate the real role of a magnetic configuration on the transport of angular momentum along the different stages of evolution. Such work will be done in a coming paper to estimate the magnetic field impact on the solar internal rotation profile and also to better quantify all the superficial observed quantities which will be measured by the coming space solar missions SDO and PICARD.

As it has already be emphasized, the formalism derived here to quantify the mechanical and energetic balance modifications is general and can also be applied to non-axisymmetric or/and time-dependent magnetic fields. This will be done in the future. Moreover, the topology of the field and its intensity is only one example of a reasonable configuration, nobody knows today what it must be, so in the future certainly other configurations will be looked for.

One can see already that the present order of the magnitude of the different terms calculated for this young Sun in Tables 1 and 2 is not so far from what could be already estimated (see Rozelot 2009) but of course it stays a long route before introducing all the dynamical effects (rotation and magnetic field in the radiative zone, rotation and magnetic field in the convective zone) in the stellar evolution code. The hierarchy of all these effects will be useful, and the formalism we have developed is totally general.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to thank A. S. Brun and T. Rashba for valuable discussions on the subject, as well as the anonymous referee for her/his constructive remarks.

REFERENCES

Ajabshirizadeh A., Rozelot J. P., Fazel Z., 2008, Sci. Iran., 144
Braithwaite J., 2006a, A&A, 449, 451
Braithwaite J., 2006b, A&A, 453, 687
Braithwaite J., 2007, A&A, 469, 275
Braithwaite J., 2009, MNRAS, 397, 763
Braithwaite J., Nordlund A., 2006, A&A, 450, 1077
Braithwaite J., Spruit H. C., 2004, Nat, 431, 819
Brun A.-S., Zahn J.-P., 2006, A&A, 457, 665
Brun A.-S., Miesch M. S., Toomre J., 2004, ApJ, 614, 1073
Brun A.-S., Browning M. K., Toomre J., 2005, ApJ, 629, 461
Burgess C. P., Dzhalilov N. S., Rashba T. I., Semikoz V. B., Valle J. W. F., 2004, MNRAS, 348, 609
Cattaneo F., 1999, ApJ, 515, L39
Charbonneau P., MacGregor K. B., 1993, ApJ, 417, 762
Couvidat S., Turck-Chièze S., Kosovichev A.-G., 2003, ApJ, 599, 1434
Decressin T., Mathis S., Palacios A., Siess L., Talon S., Charbonnel C., Zahn J.-P., 2009, A&A, 495, 271
Eggenberger P., Maeder A., Meynet G., A&A, 440, L9
Espinosa Lara F., Rieutord M., 2007, A&A, 470, 1013
Featherstone N. A., Browning M. K., Brun A.-S., Toomre J., 2007, Astron. Nach., 328, 1126
Friedland A., Gruzinov A., 2004, ApJ, 601, 570
Garaud P., 2002, MNRAS, 329, 1
Garaud P., Garaud J. D., 2008, MNRAS, 391, 1239
Goldreich P., Murray N., Willette G., Kumar P., 1991, ApJ, 370, 752
Grevesse N., Noels A., 1993, Cosmic Abundances of the Elements. Cambridge Univ. Press, Cambridge, p. 14
Gough D., 2009, in Hasan S. S., Rutten R. J., eds, Astrophysics and Space Science Proc., Magnetic Coupling between the Interior and the Atmosphere of the Sun. Springer, Berlin, p. 67
Iglesias C. A., Rogers F. J., 1996, ApJ, 464, 943
Kippenhahn R., Weigert A., 1990, Stellar Structure and Evolution. Springer-Verlag, Berlin
Li L. H., Ventura P., Basu S., Sofia S., Demarque P., 2006, ApJS, 164, 215
Li L., Sofia S., Ventura P., Penza V., Bi S., Basu S., Demarque P., 2009, ApJS, 182, 584
Lydon T. J., Sofia S., 1995, ApJ, 101, 357
Maeder A., Meynet G., 2004, A&A, 422, 225
Markey P., Tayler R. J., 1973, MNRAS, 163, 77
Markey P., Tayler R. J., 1974, MNRAS, 168, 505
Mathis S., Zahn J.-P., 2004, A&A, 425, 229
Mathis S., Zahn J.-P., 2005, A&A, 440, 653
Mestel L., Moss D. L., 1977, MNRAS, 178, 27
Meynet G., Maeder A., 2000, A&A, 361, 101
Michaud G., Proffitt C. R., 1993, in Baglin A., Weiss W.W., eds, IAU Colloq. 137, Inside the Stars. Astron. Soc. Pac., San Francisco, p. 246
Morel P., 1997, A&AS, 124, 597
Moss D. L., 1974, MNRAS, 168, 61
Moss D. L., 1984, MNRAS, 209, 607
Paterno L., Sofia S., Di Mauro M. P., 1996, A&A, 315, 940
Prendergast K. H., 1956, ApJ, 123, 498
Rashba T. I., Semikoz V. B., Valle J. W. F., 2006, MNRAS, 370, 845
Rashba T. I., Semikoz V. B., Turck-Chièze S., Valle J. W. F., 2007, MNRAS, 377, 453
Rieutord M., 2006, A&A, 451, 1025
Rogers F. J., Swenson F. J., Iglesias C. A., 1996, ApJ, 456, 902

Roxburgh I. W., 2001, A&A, 377, 688
Rozelot J. P., in Rozelot J. P., Neiner C., eds, The Rotation of Sun and Stars. Springer, Berlin, p. 15
Rüdiger G., Kitchatinov L. L., 1997, Astron. Nachr., 318, 273
Spitzer L., 1962, Physics of Fully Ionized Gases. Wiley, New York
Spruit H. C., 1999, A&A, 349, 189
Spruit H. C., 2002, A&A, 381, 923
Sweet P. A., 1950, MNRAS, 110, 548
Talon S., Zahn J.-P, Maeder A., Meynet G., 1997, A&A, 322, 209
Tayler R. J., 1973, MNRAS, 161, 365
Tayler R. J., 1980, MNRAS, 191, 151
Turck-Chièze S., Couvidat S., Piau L., Ferguson J., Lambert P., Ballot J., Garcìa R. A., Nghiem P. A. P., 2004, Phys. Rev. Lett., 93, 211102
Turck-Chièze S., Palacios A., Marques J., Nghiem P. A. P., 2009, ApJ, submitted
Vögler A., Schüssler M., 2007, A&A, 465, L43
Wentzel D. G., 1961, ApJ, 133, 170
Woltjer L., 1959, ApJ, 130, 405
Woltjer L., 1960, ApJ, 131, 227
Wright G. A. E., 1973, MNRAS, 162, 339
Zahn J.-P., Brun A.-S., Mathis S., 2007, A&A, 474, 145

APPENDIX A: THE PERTURBATION TERMS FOR THE STELLAR STRUCTURAL MODIFICATION

We first expand the gravific potential around the non-magnetic state as

$$\begin{aligned}\phi(r,\theta) &= \phi_0(r) + \phi^{(1)}(r,\theta)\\ &= \phi_0(r) + \sum_{l\geqslant 0}\widehat{\phi}_l(r)P_l(\cos\theta),\end{aligned} \tag{A1}$$

where $\phi_0(r) = -GM(r)/r$ is the potential of the non-magnetic star, $\widehat{\phi}_l$ is the fluctuation for the mode l due to the magnetic field and $P_l(\cos\theta)$ is the associated Legendre polynomial in the axisymmetric case. Likewise, we expand the density ρ and the pressure P as

$$\begin{aligned}\rho(r,\theta) &= \rho_0(r) + \rho^{(1)}(r,\theta)\\ &= \rho_0(r) + \sum_{l\geqslant 0}\widehat{\rho}_l(r)P_l(\cos\theta);\end{aligned} \tag{A2}$$

$$\begin{aligned}P(r,\theta) &= P_0(r) + P^{(1)}(r,\theta)\\ &= P_0(r) + \sum_{l\geqslant 0}\widehat{P}_l(r)P_l(\cos\theta).\end{aligned} \tag{A3}$$

We now consider the self-gravitating hydrostatic balance which is ruled by

$$\frac{\nabla P}{\rho} = -\nabla\phi + \frac{\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}}}{\rho} \tag{A4}$$

and Poisson's equation

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \tag{A5}$$

Expanded to the first order, these leads to

$$\nabla P^{(0)} = -\rho_0\nabla\phi_0 \tag{A6}$$

$$\nabla^2\Phi^{(0)} = 4\pi G\rho_0 \tag{A7}$$

and

$$\nabla P^{(1)} = -\rho_0\nabla\phi^{(1)} - \rho^{(1)}\nabla\phi_0 + \boldsymbol{F}_{\mathcal{L}} \tag{A8}$$

$$\nabla^2\Phi^{(1)} = 4\pi G\rho_1. \tag{A9}$$

The pressure fluctuation is eliminated by taking the curl of equation (A8), which gives

$$\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial\theta} = \frac{1}{g_0}\left[\frac{\partial\rho_0}{\partial r}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\theta} + \frac{\partial F_{\mathcal{L},r}}{\partial\theta} - \frac{\partial\left(rF_{\mathcal{L},\theta}\right)}{\partial r}\right], \tag{A10}$$

where $g_0 = -\,\mathrm{d}\,\Phi_0/\mathrm{d}\,r$. Next, we insert the modal expansion of $\rho^{(1)}$ and those of the components of the Lorentz force:

$$F_{\mathcal{L},r}(r,\theta) = \sum_l \mathcal{X}_{\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}};l}(r)P_l(\cos\theta), \tag{A11}$$

$$F_{\mathcal{L},\theta}(r,\theta) = -\sum_l \mathcal{Y}_{\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}};l}(r)\partial_\theta P_l(\cos\theta). \tag{A12}$$

After integration in θ, this yields to the modal amplitude of the density perturbation around the non-magnetic state:

$$\widehat{\rho}_l = \frac{1}{g_0}\left[\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}r}\widehat{\phi}_l + \mathcal{X}_{\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}};l} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\mathcal{Y}_{\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}};l}\right)\right]. \tag{A13}$$

It remains to insert this expression in the perturbed Poisson equation $\nabla^2\widehat{\phi}_l = 4\pi G\widehat{\rho}_l$ to retrieve Sweet's result

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(r\widehat{\phi}_l\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\widehat{\phi}_l - \frac{4\pi G}{g_0}\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}r}\widehat{\phi}_l\\ &= \frac{4\pi G}{g_0}\left[\mathcal{X}_{\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}};l} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\mathcal{Y}_{\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}};l}\right)\right].\end{aligned} \tag{A14}$$

The boundary conditions applied to (A14) are

$$\widehat{\phi}_0 = K \quad \text{and} \quad \widehat{\phi}_{l>0} = 0 \tag{A15}$$

at the centre ($r = 0$), where K is a real, and

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\widehat{\phi}_l - \frac{(l+1)}{r}\widehat{\phi}_l = 0 \tag{A16}$$

at the surface that corresponds to the continuity of the gravific potential with the external multipolar one (for $r \geq R_*$) which can be expressed as in Roxburgh (2001):

$$\phi = -\frac{GM_*}{r}\left[1 - \sum_{l\geqslant 0} J_l\left(\frac{R_*}{r}\right)^{l+1}P_l(\cos\theta)\right] \tag{A17}$$

where M_* is the stellar mass and J_l are the gravitational multipolar moments for the mode l, which are therefore the gravitational potential perturbations at the surface. The perturbation in pressure $\widehat{P}_l$ is then obtained from the θ-component of the hydrostatic equation, which gives

$$\widehat{P}_l = -\rho_0\widehat{\phi}_l - r\mathcal{Y}_{\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}};l}. \tag{A18}$$

Finally, the diagnosis from the stellar radius variation induced by the magnetic field can be established. Beginning with the definition of the radius of an isobar given by

$$r_P(r,\theta) = r\left[1 + \sum_{l\geqslant 0} c_l(r)P_l(\cos\theta)\right], \tag{A19}$$

we can identify using equation (A18) as in Mathis & Zahn (2004) (cf. equations 4 and 6 in this paper):

$$c_l = -\frac{1}{r}\frac{\widehat{P}_l}{\mathrm{d}P_0/\mathrm{d}r} = \frac{\rho_0}{\mathrm{d}P_0/\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\widehat{\phi}_l + \frac{\mathcal{Y}_{\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}};l}}{\rho_0}\right). \tag{A20}$$

APPENDIX B: MAGNETIC EQUILIBRIUM CONFIGURATION

Following the work by Woltjer (1959), the following Grad–Shafranov equation is obtained in the case of zero-torque Lorentz force per unit mass $\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}}/\rho$:

$$\Delta^{*}\Psi + F(\Psi)\,\partial_{\Psi}\left[F(\Psi)\right] = -\mu_0 r^2 \sin^2\theta\,\overline{\rho}\,G(\Psi), \tag{B1}$$

where F and G are arbitrary functions to be determined. Assuming that these quantities are regular, they can be expanded in the general way according to

$$F(\Psi) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{R}\Psi^i; \tag{B2}$$

$$G(\Psi) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \Psi^j. \tag{B3}$$

Then, equation (B1) becomes

$$\Delta^{*}\Psi + \sum_{k>0} \frac{\Lambda_k}{R^2}\Psi^k = -\mu_0 r^2 \sin^2\theta\,\rho \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \Psi^j, \tag{B4}$$

where $\Lambda_k = \sum_{i_1>0}\sum_{i_2>0}\left\{i_2\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\delta_{i_1+i_2-1,k}\right\}$, δ being the usual Kronecker symbol. This is the generalization of the Grad–Shafranov-type equation obtained by Prendergast (1956) for the compressible states.

Looking at the simplest linear solution non-singular for the field at the origin, this equation takes on the form [3]

$$\Delta^{*}\Psi + \frac{\lambda_1^2}{R^2}\Psi = -\mu_0\,\rho r^2 \sin^2\theta\,\beta_0, \tag{B5}$$

whose solution can be found using Green's function method for the specified set of boundary conditions.

[3] It can be shown that this linear equation arises from the conservation of the invariants of the problem which are the global helicity, the mass encompassed in potential flux surfaces and the total mass of the considered stellar region.

This paper has been typeset from a TEX/LATEX file prepared by the author.

Bibliographie

[1] A. Ajabshirizadeh et J. P. Rozelot. « The contribution of solar magnetic potential on the gravitational moments (Jn) ». Dans *36th COSPAR Scientific Assembly*, volume 36 de *COSPAR, Plenary Meeting*, pages 340–+, 2006. 126

[2] J. Bouvier, M. Forestini et S. Allain. « The angular momentum evolution of low-mass stars. ». *A&A*, 326 :1023–1043, octobre 1997. 134

[3] A. Brandenburg, R. L. Jennings, Å. Nordlund, M. Rieutord, R. F. Stein et I. Tuominen. « Magnetic structures in a dynamo simulation ». *Journal of Fluid Mechanics*, 306 :325–352, janvier 1996. 116

[4] A. S. Brun. « On the interaction between differential rotation and magnetic fields in the Sun ». *Sol. Phys.*, 220 :333–345, avril 2004. xv, 117

[5] A. S. Brun, M. S. Miesch et J. Toomre. « Global-Scale Turbulent Convection and Magnetic Dynamo Action in the Solar Envelope ». *ApJ*, 614 :1073–1098, octobre 2004. 41, 116

[6] S. Couvidat, R. A. García, S. Turck-Chièze, T. Corbard, C. J. Henney et S. Jiménez-Reyes. « The Rotation of the Deep Solar Layers ». *ApJ*, 597 :L77–L79, novembre 2003. 58, 113, 119

[7] S. Couvidat, S. Turck-Chièze et A. G. Kosovichev. « Solar Seismic Models and the Neutrino Predictions ». *ApJ*, 599 :1434–1448, décembre 2003. 118

[8] J. P. Cox et R. T. Giuli. *Cox & Giuli's Principles of Stellar Structure, Extended Second Edition*, volume Advances in Astronomy and Astrophysics. Cambridge Scientific Publishers, 2005. 109

[9] A. Eff-Darwich, S. G. Korzennik, S. J. Jiménez-Reyes et R. A. García. « Analysis of the Sensitivity of Solar Rotation to Helioseismic Data from GONG, GOLF, and MDI Observations ». *ApJ*, 679 :1636–1643, juin 2008. xvi, 135

[10] A. Friedland et A. Gruzinov. « Bounds on the Magnetic Fields in the Radiative Zone of the Sun ». *ApJ*, 601 :570–576, janvier 2004. 76, 118

[11] R. A. García, S. Turck-Chièze, S. J. Jiménez-Reyes, J. Ballot, P. L. Pallé, A. Eff-Darwich, S. Mathur et J. Provost. « Tracking Solar Gravity Modes : The Dynamics of the Solar Core ». *Science*, 316 :1591–, juin 2007. xiv, xvi, 58, 59, 135, 168

[12] P. Goldreich, N. Murray, G. Willette et P. Kumar. « Implications of solar p-mode frequency shifts ». *ApJ*, 370 :752–762, avril 1991. 111, 112

[13] D. O. Gough et M. J. Thompson. « The effect of rotation and a buried magnetic field on stellar oscillations ». *MNRAS*, 242 :25–55, janvier 1990. 113

[14] N. Grevesse et A. Noels. « Cosmic abundances of the elements. ». Dans S. Kubono et T. Kajino, éditeurs, *Origin and Evolution of the Elements*, pages 15–25, janvier 1993. 118

[15] C. A. Iglesias et F. J. Rogers. « Updated Opal Opacities ». *ApJ*, 464 :943–+, juin 1996. 118

[16] S. D. Kawaler. « Angular momentum loss in low-mass stars ». *ApJ*, 333 :236–247, octobre 1988. 134

[17] R. Kippenhahn et A. Weigert. *Stellar Structure and Evolution.* Stellar Structure and Evolution, XVI, 468 pp. 192 figs. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also Astronomy and Astrophysics Library, 1990. xiv, 43, 128, 170

[18] A. G. Kosovichev, J. Schou, P. H. Scherrer, R. S. Bogart, R. I. Bush, J. T. Hoeksema, J. Aloise, L. Bacon, A. Burnette, C. De Forest, P. M. Giles, K. Leibrand, R. Nigam, M. Rubin, K. Scott, S. D. Williams, S. Basu, J. Christensen-Dalsgaard, W. Däppen, E. J. Rhodes, Jr., T. L. Duvall, Jr., R. Howe, M. J. Thompson, D. O. Gough, T. Sekii, J. Toomre, T. D. Tarbell, A. M. Title, D. Mathur, M. Morrison, J. L. R. Saba, C. J. Wolfson, I. Zayer et P. N. Milford. « Internal structure and rotation of the Sun : First results from MDI data ». Dans E. Fossat, éditeur, *Sounding Solar and Stellar Interiors*, volume 181 de *IAU Symposium*, pages 203–+, 1997. 137

[19] R. M. Kulsrud. *Plasma physics for astrophysics.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 2005. 65, 115

[20] S. Lefebvre, P. A. P. Nghiem et S. Turck-Chièze. « Impact of a Radius and Composition Variation on Stratification of the Solar Subsurface Layers ». *ApJ*, 690 :1272–1279, janvier 2009. 132

[21] L. H. Li et S. Sofia. « Measurements of Solar Irradiance and Effective Temperature as a Probe of Solar Interior Magnetic Fields ». *ApJ*, 549 :1204–1211, mars 2001. 112

[22] T. J. Lydon et S. Sofia. « A Method for Incorporating the Effects of Large-Scale Magnetic Fields in the Study of Stellar Structure and Variability ». *ApJS*, 101 :357–+, décembre 1995. xix, 111, 112

[23] S. Mathis. « Wave transport in differentially rotating stellar radiation zones ». *Communications in Asteroseismology*, 157 :209–215, décembre 2008. 135

[24] S. Mathis et J. P. Zahn. « Transport and mixing in the radiation zones of rotating stars. I. Hydrodynamical processes ». *A&A*, 425 :229–242, octobre 2004. 126, 134, 164

[25] S. Mathis et J. P. Zahn. « Transport and mixing in the radiation zones of rotating stars. II. Axisymmetric magnetic field ». *A&A*, 440 :653–666, septembre 2005. xvii, 66, 125, 164, 165, 171, 231

[26] S. Mathur, A. Eff-Darwich, R. A. García et S. Turck-Chièze. « Sensitivity of helioseismic gravity modes to the dynamics of the solar core ». *ArXiv e-prints*, 803, mars 2008. xvi, 135, 137

[27] G. Michaud et C. R. Proffitt. « Particle transport processes ». Dans W. W. Weiss et A. Baglin, éditeurs, *IAU Colloq. 137 : Inside the Stars*, volume 40 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pages 246–259, janvier 1993. 118

[28] P. Morel. « CESAM : A code for stellar evolution calculations ». *A&AS*, 124 :597–614, septembre 1997. 110, 118, 163, 178, 203

[29] D. L. Moss. « Magnetic stars with a slow meridional circulation ». *MNRAS*, 168 :61–72, juillet 1974. 125

[30] A. Palacios, S. Talon, C. Charbonnel et M. Forestini. « Rotational mixing in low-mass stars. I Effect of the mu-gradients in main sequence and subgiant Pop I stars ». *A&A*, 399 :603–616, février 2003. 134

[31] F. J. Rogers, F. J. Swenson et C. A. Iglesias. « OPAL Equation-of-State Tables for Astrophysical Applications ». *ApJ*, 456 :902–+, janvier 1996. 118

[32] I. W. Roxburgh. « Gravitational multipole moments of the Sun determined from helioseismic estimates of the internal structure and rotation ». *A&A*, 377 :688–690, octobre 2001. 125, 137

[33] G. Schubert. « The Stability of Toroidal Magnetic Fields in Stellar Interiors ». *ApJ*, 151 :1099–+, mars 1968. 119

[34] L. Spitzer. *Physics of Fully Ionized Gases.* New York : Interscience (2nd edition), 1962. 129, 183

[35] P. A. Strittmatter, J. Faulkner, J. W. Robertson et D. J. Faulkner. « A Question of Entropy ». *ApJ*, 161 :369–+, juillet 1970. 109

[36] P. A. Sweet. « The importance of rotation in stellar evolution ». *MNRAS*, 110 :548–+, 1950. 66, 125, 136

[37] S. Turck-Chièze. « Seismic and Dynamical Solar Models - The Impact of the Solar Rotation History ». *ApJ*, 2009. xvi, 58, 134, 135, 168, 178

[38] S. Turck-Chièze, S. Couvidat, L. Piau, J. Ferguson, P. Lambert, J. Ballot, R. A. García et P. Nghiem. « Surprising Sun : A New Step Towards a Complete Picture ? ». *Physical Review Letters*, 93(21) :211102–+, novembre 2004. 118, 168

[39] S. Turck-Chièze, R. A. García, S. Couvidat, R. K. Ulrich, L. Bertello, F. Varadi, A. G. Kosovichev, A. H. Gabriel, G. Berthomieu, A. S. Brun, I. Lopes, P. Pallé, J. Provost, J. M. Robillot et T. Roca Cortés. « Looking for Gravity-Mode Multiplets with the GOLF Experiment aboard SOHO ». *ApJ*, 604 :455–468, mars 2004. xvi, 135

[40] G. A. Wade, D. Kudryavtsev, I. I. Romanyuk, J. D. Landstreet et G. Mathys. « Magnetic field geometries of two slowly rotating Ap/Bp stars : HD 12288 and HD 14437 ». *A&A*, 355 :1080–1086, mars 2000. 76, 119

Troisième partie : Modélisation dynamique

Chapitre 6

Vers le Transport Magnéto-Rotationnel

Sommaire

6.1 Le transport MHD dans les codes d'évolution stellaire 160
6.1.1 Codes MHD multidimensionnels *vs.* codes d'évolution : limites technologiques 160
6.1.2 Les codes d'évolution stellaire avec rotation et champ magnétique : outils existants et en devenir 161
6.2 Le transport magnéto-rotationnel 165
6.2.1 Généralités 165
6.2.2 L'équation d'induction 165
6.2.3 L'équation du transport du moment cinétique 167
6.2.4 L'équation du vent thermique 169
6.2.5 L'équation du transport de la chaleur 171
6.3 Influence sur la convection 172
6.3.1 Description de la convection dans la cadre de la « MLT » 172
6.3.2 Influence du champ magnétique sur l'efficacité de la convection . 175
6.3.3 Influence du champ magnétique sur le critère de convection . . . 177
6.4 Application : implémentation d'un champ magnétique initialement à l'équilibre MHS 178
6.4.1 Procédure d'implémentation dans Cesam 178
6.4.2 Résultats 182
6.4.3 La diffusivité magnétique 183
6.4.4 Implémentation de la diffusion du champ magnétique 183
6.5 Perspectives 184
Bibliographie 185

La recherche est un processus sans fin dont on ne peut jamais dire comment il évoluera. L'imprévisible est dans la nature même de la science. — François Jacob

De nombreux travaux ont déjà été consacrés à l'étude de l'influence de la rotation sur l'évolution stellaire, mais plus rares sont ceux qui concernent celle du champ magnétique. En regard du caractère multidimensionnel de ces phénomènes, les codes d'évolution unidimensionnels classiques deviennent insuffisants. Les modèles 2D en cours de développement à l'heure actuelle semblent très prometteurs (*cf.* Rieutord, 2006 [33] ; Espinosa Lara & Rieutord, 2007 [13] pour la rotation et Li *et al.*, 2006-2009 [22, 21] pour le champ magnétique), car un modèle d'évolution stellaire magnéto-hydrodynamique tridimensionnel est aujourd'hui hors de portée.
Une approche alternative prometteuse consiste à implémenter les effets magnéto-rotationnels dans un code unidimensionnel, en projetant leurs contributions (dans un premier temps axisymétriques) sur les harmoniques sphériques de bas ordre. Cela mène à un modèle spectral dynamique tirant parti de toute la richesse de la physique microscopique d'ores et déjà incorporée dans les code d'évolution 1D (*cf.* Talon *et al.*, 1997 [43] ; Meynet & Maeder, 2000 [28] ; Decressin *et al.*, 2009 [11] dans le cas de la rotation).
Je me propose ici de décrire cette méthode. Il y a trois phases d'implémentation : (i) la mise en place d'un champ statique, (ii) celle de sa diffusion et (iii) le transport magnéto-rotationnel. L'équation d'induction régissant l'évolution du champ magnétique et couplant le champ magnétique avec la rotation (avec l'équation du vent thermique et celle du moment cinétique) est une équation de type advection-diffusion : dans le cas sans rotation on a simplement la diffusion du champ magnétique. D'autre part, en supposant qu'une configuration magnétique initialement confinée aux interfaces zones radiatives-zones convectives va progressivement diffuser vers les zones convectives, ce champ magnétique va donc y modifier la convection. Je présenterai donc aussi comment je propose de prendre compte son influence (à la fois sur le critère et l'efficacité de la convection) dans le cadre de la théorie de longueur de mélange.

6.1 Le transport MHD dans les codes d'évolution stellaire

Malgré les progrès exponentiels de l'outil informatique ces dernières décennies, celui-ci reste limité et une modélisation tridimensionnelle de ces processus sur des temps d'évolution n'est à l'heure actuelle pas envisageable. Aussi faut-il recourir à des modèles bidimensionnels ou à des projections qui prennent en compte ces processus à très grandes échelles par une approche spectrale.

6.1.1 Codes MHD multidimensionnels *vs.* codes d'évolution : limites technologiques

Parce qu'un dessin vaut parfois mieux que de longs discours, la Fig. 6.1 représente les limites actuelles atteignables par les simulations numériques directes 3D et les codes d'évolution stellaires. Il est clair que les deux sont complémentaires : les codes d'évolution stellaires classiques ne permettent pas de résoudre la richesse des phénomènes liés à la turbulence (nombres de modes angulaires $l_{\rm th} < 10$), ce que les simulations 3D permettent d'explorer dans des détails de plus en plus fins ($l_{\rm th} \simeq 680$, la turbulence solaire sera considérée être correctement représentée pour $l_{\rm nat} \gtrsim 4000$) ; mais ces derniers sont rapidement limités dans les échelles de temps qu'ils permettent d'étudier ($t \simeq t_{\rm dyn} \simeq 1$ mois ; les codes d'évolution stellaire permettent de décrire la physique sur des durées de $t_{\rm evol} \gtrsim 10^9$ ans).

Ils sont toutefois indispensables pour valider les prescriptions faites, voire en fournir de nouvelles à destination des codes unidimensionnels, de manière à tendre vers une description MHD sur des temps séculaires. Réciproquement, ces derniers sont indispensables aux simulations 3D car ils fournissent le « squelette » de structure stellaire à partir duquel le modèle est initié.

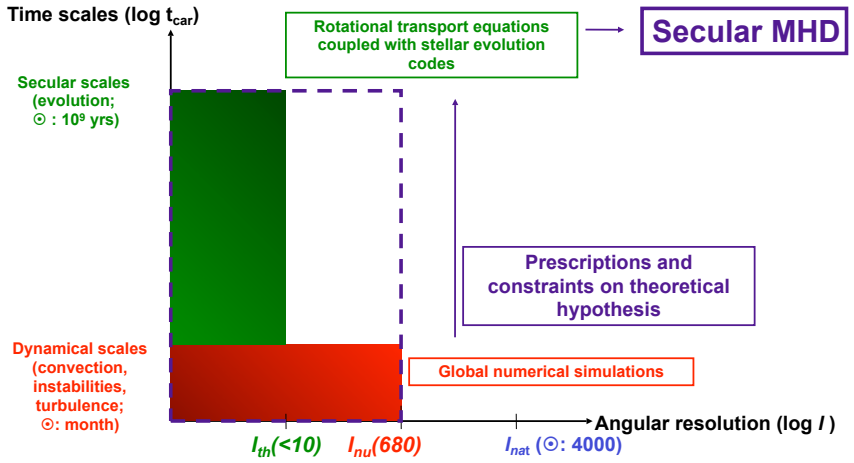


FIGURE 6.1 – Échelles temporelles et spatiales couvertes : en vert, par les codes d'évolution stellaire ; en rouge, par les modélisations numériques 3D. Crédit : S. Mathis [11]

6.1.2 Les codes d'évolution stellaire avec rotation et champ magnétique : outils existants et en devenir

Le code de Yale

En 2006, Li *et al.* ont étendu le code YREC 1D au cas 2D afin d'étudier les effets MHD sur des temps d'évolution, sans prendre en compte la rotation [22]. En 2009 [21], la méthode est généralisée pour tenir compte de la rotation et de la turbulence. Je ne détaillerai pas ici les raffinements des méthodes numériques utilisées mais me concentrerai sur la physique implémentée.

Les équations de structure s'écrivent après transformation des coordonnées de (r, θ) en $(s = \ln(M_{\Phi_{\rm grav}}), \theta)$, $M_{\Phi_{\rm grav}}$ étant la masse contenue dans une équipotentielle $\Phi_{\rm grav} = c^{st}$:

$$\frac{dr'}{ds} = \frac{r}{4\,\pi\,\rho\,r^3}\frac{\rho}{\rho_{\Phi_{\rm grav}}}, \tag{6.1}$$

$$\frac{dP'}{ds} = -\frac{M_{\Phi_{\rm grav}}}{4\,\pi\,r^2\,P_{\rm tot}}\frac{\rho}{\rho_{\Phi_{\rm grav}}}\left(\frac{G\,M_{\Phi_{\rm grav}}}{r^2} + U - \mathcal{H}_r - \mathcal{T}_r - \mathcal{R}_r\right), \tag{6.2}$$

$$\frac{dT'}{ds} = \frac{dP'}{ds}\nabla, \tag{6.3}$$

$$\frac{dL}{ds} = \frac{M_{\Phi_{\rm grav}}}{L_\odot}\left(\varepsilon - T\frac{dS_{\rm tot}}{dt}\right)\frac{\rho}{\rho_{\Phi_{\rm grav}}} - \frac{1}{L_\odot}\frac{M_{\Phi_{\rm grav}}\,F_\theta\,\cot\theta}{r\,\rho_{\Phi_{\rm grav}}} - \frac{1}{L_\odot}\frac{M_{\Phi_{\rm grav}}}{r\,\rho_{\Phi_{\rm grav}}}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}, \tag{6.4}$$

$$\frac{dU}{ds} = \frac{G\,M_{\Phi_{\rm grav}}}{r^2}\left(\frac{\rho}{\rho_{\Phi_{\rm grav}}} - 1\right) - \frac{M_{\Phi_{\rm grav}}}{4\,\pi\,\rho_{\Phi_{\rm grav}}\,r^3}\left(2\,U + \mathcal{G}\,\cot\theta + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\theta}\right), \tag{6.5}$$

avec $P' = \ln P_{\rm tot}$, $T' = \ln T$, $r' = \ln r$, $L = 4\,\pi\,r^2\,F_r/L_\odot$ et $U = \delta g$; F_r et F_θ sont les composantes radiale et latitudinale du flux d'énergie ; $\rho_{\Phi_{\rm grav}}$ définit la densité sur une surface équipotentielle ; $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{R}_r$ sont *resp.* le tenseur de pression magnétique (paramétré par des fonctions arbitraires), le tenseur de pression turbulente et le tenseur de Reynolds ; $\mathcal{G} = \mathcal{H}_\theta + \mathcal{T}_\theta + \mathcal{R}_\theta - \frac{1}{r\,\rho}\frac{dP_{\rm tot}}{d\theta}$; $\delta G = g - GM_{\Phi_{\rm grav}}/r^2$; les autres notations sont conventionnelles. Dans un souci de simplification, la dérivée seconde du potentiel gravitationnel par rapport à la colatitude θ, de même que la dérivée seconde de la perturbation de potentiel gravitationnel par rapport au rayon ont été négligées.

On remarque principalement que l'équation d'induction n'est ici pas résolue explicitement. Le couplage du champ magnétique avec le champ de vitesses n'est donc pas pris en compte dans ce code. La stratégie adoptée a été de prendre en compte les effets du champ magnétique par la modification qu'il induit sur la balance énergétique et hydrodynamique.

Le code de Genève

A. Maeder et G. Meynet (2003) [23] de l'Université de Genève ont étudié les effets de la dynamo de H. Spruit [38] sur l'évolution des étoiles massives. Ils ont montré qu'un champ magnétique peut être créé durant la séquence principale dans le cas d'une étoile massive de 15 $\mathrm{M}_\odot$. Ils ont examiné les échelles de temps associées à la création du champ, son amplitude au cours de l'évolution et les coefficients de diffusion associés. En 2004 [24] , ils ont étendu les équations de la dynamo pour y incorporer les cas généraux avec gradient de composition chimique et de température, de même que tous les cas de la solution adiabatique à la solution non-adiabatique. La méthode suivie a consisté à introduire les effets de la dynamo sur le transport de moment angulaire en prenant en compte son rôle sous la forme d'un coefficient de diffusion. L'expression de ce coefficient ν est donnée par

$$\nu = \frac{S}{\rho\,q\,\Omega} = \frac{\Omega\,r^2}{q}\left(\frac{\omega_A}{\Omega}\right)^3\left(\frac{\Omega}{\mathcal{N}}\right), \tag{6.6}$$

où la fréquence d'Alfvén ω_A est solution de la relation de dispersion quartique suivante :

$$\frac{r^2\,\Omega}{q^2\,K}\left(\mathcal{N}_T^2 + \mathcal{N}_\mu^2\right)x^4 - \frac{r^2\,\Omega^3}{K}x^3 + 2\,\mathcal{N}_\mu^2\,x - 2\,\Omega^2\,q^2 = 0. \tag{6.7}$$

Ici $x = (\omega_A/\Omega)^2$, K représente la diffusivité radiative, $K = 4\,a\,c\,T^3/3\,\kappa\,\rho^2\,c_{\rm P}$, les autres quantités ayant été définies dans la section 2.2.3, § 2. L'effet résultant de la présence d'un tel champ magnétique est assez important : le couplage magnétique dû à la dynamo de Tayler-Spruit aboutit à un régime de rotation uniforme dans les étoiles massives. En 2005, P. Eggenberger [12] a ensuite étudié l'effet d'un tel champ sur une étoile de type solaire. Celui-ci a mis en évidence que le champ magnétique d'origine dynamo a pour effet de contraindre le profil de rotation vers une rotation uniforme dans la zone $0.2 \rightarrow 0.7\,\mathrm{R}_\odot$, en bon accord avec les observations déduites de l'héliosismologie.
Suite aux travaux ultérieurs de Zahn *et al.* (2007) [47], il est apparu qu'en raison de la faiblesse physique du modèle il serait plus judicieux d'étudier le problème en incorporant le jeu complet d'équations de la magnéto-hydrodynamique dans un code d'évolution stellaire que d'y incorporer la prescription décrite ci-dessus. Rappelons que les principales limites pointées par ces derniers auteurs sont (i) l'impossibilité de régénérer un champ magnétique toroïdal de grande échelle à partir de l'instabilité de Pitts-Tayler (ceux-ci n'excluent

toutefois pas la régénération du champ moyen par les petites échelles) et (ii) l'incapacité de ce phénomène à induire un mélange (l'instabilité étant « wave-like », de type onde) ; or ce dernier point est crucial pour modéliser l'influence du champ comme un processus de diffusion.

Le code Cesam

Je me focaliserai ici dans un premier temps sur les méthodes de résolution numérique employées dans le code, puis je défricherai la méthode d'implémentation des nouveaux processus, le détail de celle-ci étant l'objet des sections suivantes.

Changement de variables opéré dans le code Les variables naturelles par rapport auxquelles sont écrites les équations (5.63)→(5.65) ne sont pas bien adaptées au calcul numérique. En particulier, les dérivées de la pression et du rayon ont des singularités en $M \equiv 0$, *i.e.* au centre. On peut montrer (Morel, 1997 [29]) que les singularités sont levées et qu'une utilisation optimale de l'approximation numérique est obtenue lorsqu'on utilise respectivement pour la masse, le rayon et la luminosité les variables suivantes : $M^{2/3}$, r^2 et $L^{2/3}$. Il est apparu pratique d'utiliser des variables normalisées aux valeurs solaires :

$$\xi = \ln P,\ \xi_{\mathrm{g}} = \ln P_{\mathrm{gaz}},\ \eta = \ln T,\ \nu = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{\frac{2}{3}},\ \zeta = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2,\ \lambda = \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{\frac{2}{3}},\ \gamma = \ln \rho.$$

Les opérateurs différentiels s'expriment alors après application de la règle de la chaîne et de l'équation (5.24) en terme des nouvelles variables :

– pour la dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \frac{\partial f}{\partial M_r}, \tag{6.8}$$

– pour la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \left(\frac{8\pi R_\odot^2}{3M_\odot}\right)^2 \frac{r^2\rho}{\sqrt{\nu}} \left[\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{r^2\rho}{\sqrt{\nu}}\right)\frac{\partial f}{\partial \nu} + \frac{r^2\rho}{\sqrt{\nu}}\frac{\partial^2 f}{\partial \nu^2}\right]. \tag{6.9}$$

Maillage adaptatif Afin d'adapter la discrétisation aux variations des grandeurs physiques, une fonction d'espacement $Q(\nu, t)$ est utilisée. Par exemple à l'instant t on cherche une répartition $\nu_{i;i=\{1,\ldots n\}}$ des abscisses ν telle que l'incrément d'espacement soit constant d'un nœud à l'autre de la grille : soit $Q(\nu_{i+1}, t) - Q(\nu_i, t) = \psi(t)$ où ψ est une constante à déterminer à chaque instant t (Q doit du coup être monotone). On cherche donc $q(\nu, t)$ tel que $(\partial Q/\partial q)_t = \psi(t)$, et on a donc

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = 0. \tag{6.10}$$

Or $(\partial Q/\partial q)_t = \theta\,(\partial \nu/\partial q)_t$ avec $\theta = (\partial Q/\partial \nu)_t$ (nous avons introduit la fonction de répartition θ), autrement dit

$$\frac{\partial \nu}{\partial q} = \frac{\psi}{\theta}. \tag{6.11}$$

La fonction d'espacement Q est quant à elle définie par la relation empirique : $Q = a\xi + b\nu$ avec $a = -1$ et $b = 15$. En pratique, les éqs. (6.10) et (6.11) sont résolues à chaque pas de temps, ce qui ramène le nombre d'équations intégrées à sept.

Intégration numérique Les équations de l'évolution stellaire constituent un problème intégro-différentiel non linéaire aux dérivées partielles : c'est un problème aux conditions aux limites de conditions initiales. La méthode de résolution retenue consiste, pour chaque pas temporel à résoudre itérativement et de façon découplée, le problème de conditions aux limites (problème de Dirichlet) puis le problème de conditions initiales (problème de Cauchy) : il s'agit de la méthode des « lignes » (*cf. e.g.* Henrici, 1962 [18]).

Le problème des conditions aux limites, non linéaire, est résolu par itération de Newton-Raphson (qualifiée en évolution stellaire de méthode d'Henyey ; *cf.* [19]). L'originalité du code Cesam est de résoudre ce problème non pas dans l'espace physique mais dans l'espace des *B-splines*, ce qui permet de conserver la continuité des fonctions, voire de leurs dérivées malgré les interpolations. Le principe est celui de toute méthode spectrale : les fonctions inconnues sont développées sur une base, en l'occurence celle des B-splines. Pour calculer les coefficients, on écrit que le développement de la fonction sur la base des B-splines satisfait aux équations en un nombre *ah-hoc* de points : ce sont les points de collocation. Un choix particulier peut alors être fait à ce niveau (*cf.* C. de Boor, 1978 [10]) : entre deux points de grille, les variables dépendantes sont interpolées par des morceaux d'ordre $m + r = 2$ (droite) ou 3 (parabole), m étant l'ordre des B-splines et $r = 1$ l'ordre des équations différentielles résolues. Il y alors m points de collocation entre deux points de raccord. Si ces points sont disposés aux zéros des polynômes de Legendre (dans un intervalle ramené à $[-1, 1]$), on obtient la propriété dite de *superconvergence*.

Le problème de valeurs initiales est un problème raide car les diverses échelles de temps diffèrent entre elles par plusieurs ordres de grandeur (par exemple, l'échelle de temps caractéristique de la combustion du deutérium est de l'ordre de l'année, celle de l'hydrogène est de l'ordre d'une centaine de millions d'années). Dans ce cas les schémas d'intégration classiques type Runge-Kutta ou schémas à pas liés, pour lesquels la fonction d'incrémentation dépend linéairement des dérivées temporelles estimées en divers points, sont à proscrire (d'autant plus que les limites zones radiatives-zones convectives se déplacent). Dans Cesam , deux types de résolution sont envisagés selon que la la diffusion microscopique des éléments chimiques est prise en compte ou non :

- sans prise en compte de la diffusion, la méthode d'intégration est une variante du schéma de Runge-Kutta, il s'agit de la formule IRK Lobatto IIIC ;
- avec prise en compte de la diffusion, Cesam utilise la méthode des éléments finis pour leur intégration numérique, dite « méthode de Petrov-Galerkin », où il est tiré avantage de l'utilisation des B-splines.

Nous renvoyons le lecteur au manuel d'utilisation de Cesam ainsi qu'aux références citées dans l'ouvrage pour plus de détails concernant ces méthodes de résolution.

Implémentation des équations du transport Ainsi que nous allons le décrire en détail dans ce qui vient, nous projetons toutes les quantités associées au champ magnétique et à la rotation sur les harmoniques sphériques vectorielles (voir Mathis & Zahn, 2004, 2005 [26, 27]), cette procédure étant effectuée pour l'équation de transport du moment cinétique, l'équation du transport de la chaleur et l'équation d'induction, clef de voûte du transport MHD. Ces équations sont ensuite intégrées indépendamment des équations de la structure stellaire par un schéma de relaxation (*cf.* Numerical Recipes [32], § 17.3). La rétroaction sur la structure est alors traitée après calcul du transport. Toutes les interpolations d'un modèle à l'autre sont effectuées grâce aux B-splines.

6.2 Le transport magnéto-rotationnel

6.2.1 Généralités

Au cours de cette section je présenterai le mélange rotationnel complet tel qu'il a été décrit principalement par Mathis & Zahn (2005) [27]. Je simplifierai au maximum les dérivations pour pouvoir décrire comment est pris en compte le champ magnétique et insister sur la manière dont celui-ci va se coupler avec la rotation au cours de l'évolution stellaire pour donner lieu à un système dynamique. Nous verrons aussi en quoi les configurations d'équilibre magnétique dérivées dans le chapitre 3 sont spéciales, en tant qu'elles ne modifient pas l'équation du vent thermique donnant lieu à un état barocline, responsable de la circulation méridienne. Néanmoins, l'équation d'induction va au cours de l'évolution stellaire agir sur une telle configuration d'équilibre du champ magnétique qui doit être donc vue comme une condition initiale au transport. Tous ces processus s'interpénètrent alors pour donner le transport magnéto-rotationnel complet ; voir la Fig. 6.2.

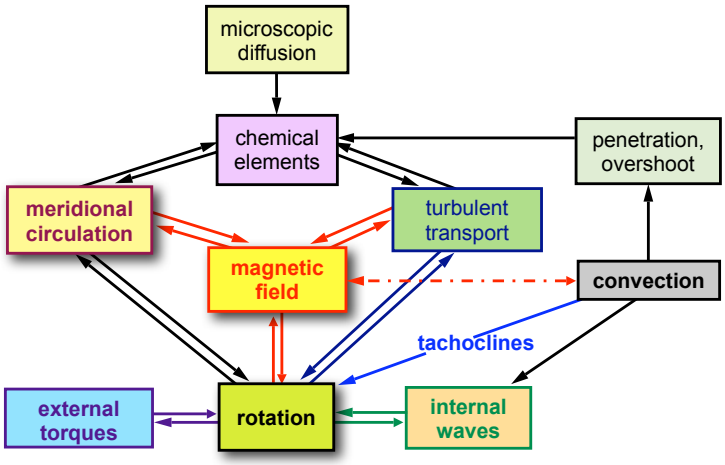


Figure 6.2 – Interactions entre les différents processus magnéto-hydrodynamiques à l'œuvre dans les intérieurs stellaires. Crédit : S. Mathis [27]

6.2.2 L'équation d'induction

Ainsi que nous l'avons déjà vu, l'évolution du champ magnétique est, dans le cadre de la MHD, gouvernée par l'équation d'induction, de type advection-diffusion :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (||\eta|| \otimes \nabla \times \mathbf{B}) \,, \tag{6.12}$$

dans laquelle nous laissons la diffusivité magnétique $||\eta||$ anisotrope.
Le champ de vitesses macroscopique $\mathbf{v}$ est constitué d'un flot zonal $\mathcal{U}_\varphi = r \sin\theta \, \Omega \, (r, \theta) \, \hat{\mathbf{e}}_\varphi$ et d'un flot méridien $\mathcal{U} \, (r, \theta)$:

$$\mathbf{v} \, (r, \theta) = r \sin\theta \, \Omega \, (r, \theta) \, \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \mathcal{U} \, (r, \theta) \,. \tag{6.13}$$

Ce dernier peut-être scindé en une composante à grande échelle, de symétrie sphérique et représentant la contraction ou la dilatation des couches en fonction du temps, à laquelle

s'ajoute le flot donnant principalement lieu à de la circulation méridienne

$$\mathcal{U}\left(r,\theta\right)=\dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}+\mathcal{U}_M\left(r,\theta\right), \tag{6.14}$$

Ce flot méridien peut être développé sur les polynômes de Legendre selon

$$\mathcal{U}_M=\sum_{l>0}\left[U_l(r)P_l\left(\cos\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}+V_l(r)\frac{\mathrm{d}P_l(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta\right]. \tag{6.15}$$

Nous avons par ailleurs l'équation de continuité $\nabla\cdot(\rho\mathcal{U}_M)=0$ (dans l'approximation anélastique) qui permet de relier $U_l(r)$ et $V_l(r)$:

$$V_l=\frac{1}{l(l+1)\rho r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\rho r^2U_l\right). \tag{6.16}$$

En introduisant ces dernières quantités dans l'éq. (6.12) on obtient une nouvelle expression de l'équation d'induction :

$$\partial_t\mathbf{B}-\nabla\times(\dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}\times\mathbf{B})=\nabla\times[(\mathcal{U}_\varphi+\mathcal{U}_M)\times\mathbf{B}]-\nabla\times(||\eta||\otimes\nabla\times\mathbf{B}). \tag{6.17}$$

De la même manière que nous l'avons fait lorsque nous avons discuté de la condition de mixité de l'hélicité, nous exprimons alors le champ magnétique en terme de fonctions de courant magnétiques développées sur les harmoniques sphériques $\mathbf{R}_l^0\left(\theta\right)$, $\mathbf{S}_l^0\left(\theta\right)$, $\mathbf{T}_l^0\left(\theta\right)$ (*cf.* Chapitre 3, § 3.5.1 et Annexe B.2.) selon

$$\mathbf{B}=\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{l(l+1)}{r^2}\xi_0^l\right]\mathbf{R}_l^0(\theta)+\left[\frac{1}{r}\partial_r\xi_0^l\right]\mathbf{S}_l^0(\theta)+\left[\frac{1}{r}\chi_0^l\right]\mathbf{T}_l^0(\theta)\right\}. \tag{6.18}$$

De même, le flot total $(\mathcal{U}_\varphi+\mathcal{U}_M)$ est développé selon

$$\mathcal{U}_\varphi+\mathcal{U}_M=\sum_{l=0}^{\infty}\left\{u_0^l\left(r\right)\mathbf{R}_l^0\left(\theta\right)+v_0^l\left(r\right)\mathbf{S}_l^0\left(\theta\right)+w_0^l\left(r\right)\mathbf{T}_l^0\left(\theta\right)\right\} \tag{6.19}$$

où l'on identifie grâce à (6.15) la partie méridienne

$$u_0^l\left(r\right)=\frac{U_l\left(r\right)}{\mathcal{N}_l^0}\quad\text{et}\quad v_0^l\left(r\right)=\frac{V_l\left(r\right)}{\mathcal{N}_l^0}; \tag{6.20}$$

la partie toroïdale (le flot zonal) est quant à elle exprimée en décomposant la rotation en sa composante moyenne et sa composante différentielle :

$$\Omega\left(r,\theta\right)=\overline{\Omega}\left(r\right)+\widehat{\Omega}\left(r,\theta\right)=\overline{\Omega}\left(r\right)+\sum_{l>0}\Omega_l\left(r\right)Q_l\left(\theta\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\Omega_l^*\left(r\right)P_l\left(\cos\theta\right), \tag{6.21}$$

avec $\overline{\Omega}\left(r\right)=\int_0^\pi\Omega\left(r,\theta\right)\sin^3\theta\mathrm{d}\theta/\int_0^\pi\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$ et $Q_l\left(\theta\right)=P_l\left(\cos\theta\right)-\delta_{l,0}+\delta_{l,2}/5$. On a donc

$$\begin{cases}\Omega_0^*\left(r\right)=\overline{\Omega}\left(r\right)-\sum_{l>0}\Omega_l\left(r\right)I_l=\Omega_0\left(r\right)+\frac{1}{5}\Omega_2\left(r\right)\\ \Omega_l^*\left(r\right)=\Omega_l\left(r\right)\ \text{pour}\ l>0.\end{cases} \tag{6.22}$$

Le flot zonal s'exprime finalement en fonction de $w_0^l\,(r)$:

$$\mathcal{U}_\varphi = \sum_{l>0} w_0^l\,(r)\,\mathbf{T}_l^0\,(\theta)\,, \tag{6.23}$$

où à l'aide de l'identité (B.10), w_0^l s'écrit

$$w_0^l(r) = r\left[\frac{D_{l-1}^0}{\mathcal{N}_{l-1}^0}\Omega_{l-1}^*(r) - \frac{C_{l+1}^0}{\mathcal{N}_{l+1}^0}\Omega_{l+1}^*(r)\right]. \tag{6.24}$$

Le terme d'advection prend ainsi la forme, à l'aide des relations (B.52) et (B.40) :

$$\begin{aligned}\nabla\,\times[(\mathcal{U}_\varphi+\mathcal{U}_M)\times\mathbf{B}] \;=\; \sum_{l=1}^{\infty}\Bigg\{&\left[\frac{l(l+1)}{\mathcal{N}_l^0}\frac{\mathcal{Z}_{\mathbf{Ad};l}}{r}\right]\mathbf{R}_l^0(\theta) + \left[\frac{1}{\mathcal{N}_l^0}\frac{1}{r}\partial_r\left(r\mathcal{Z}_{\mathbf{Ad};l}\right)\right]\mathbf{S}_l^0(\theta)\\ &+\left[\frac{1}{\mathcal{N}_l^0}\left(\frac{\mathcal{X}_{\mathbf{Ad};l}}{r}+\frac{1}{r}\partial_r\left(r\mathcal{Y}_{\mathbf{Ad};l}\right)\right)\right]\mathbf{T}_l^0\,(\theta)\Bigg\};\end{aligned} \tag{6.25}$$

ses coefficients $\mathcal{X}_{\mathbf{Ad};l}$, $\mathcal{Y}_{\mathbf{Ad};l}$ et $\mathcal{Z}_{\mathbf{Ad};l}$ sont donnés en Annexe B.3.
Nous avons réuni les ingrédients pour donner la forme de l'équation d'induction sous la forme de deux équations spectrales unidimensionnelles régissant indépendamment l'évolution du champ magnétique poloïdal et du champ toroïdal :

$$\frac{\mathrm{d}\xi_0^l}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathcal{N}_l^0}r\mathcal{Z}_{\mathbf{Ad};l} + \eta_h r\Delta_l\left(\frac{\xi_0^l}{r}\right); \tag{6.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}\chi_0^l}{\mathrm{d}t} + \partial_r\left(\dot{r}\right)\chi_0^l = \frac{1}{\mathcal{N}_l^0}\left[\mathcal{X}_{\mathbf{Ad};l} + \partial_r\left(r\mathcal{Y}_{\mathbf{Ad};l}\right)\right] + \left[\partial_r\left(\eta_h\partial_r\chi_0^l\right) - \eta_v l(l+1)\frac{\chi_0^l}{r^2}\right]. \tag{6.27}$$

Notons que dans un code d'évolution stellaire, la dérivée lagrangienne $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \partial_t + \dot{r}\,\partial_r$ est aussi généralement employée.

6.2.3 L'équation du transport du moment cinétique

Reprenons l'équation du mouvement complète :

$$\rho\left[\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla\,)\,\mathbf{v}\right] = -\nabla\,P - \rho\nabla\,\Phi_{\mathrm{grav}} + \nabla\,\cdot||\tau|| + \mathbf{F}_{\mathcal{L}}\,, \tag{6.28}$$

où $||\tau||$ est le tenseur des contraintes turbulent, supposé être correctement modélisé par une viscosité anisotrope (*cf.* Zahn, 1992 [46]) de composante nette horizontale (*resp.* verticale) ν_h (*resp.* ν_v) jouant le rôle d'une « diffusivité de vitesses ». Les autres notations ont déjà été introduites. En insérant l'expression de la vitesse $\mathbf{v}$ donnée ci-dessus en (6.13, 6.14) dans cette équation, et en prenant sa composante azimutale, nous obtenons à nouveau une équation de type advection-diffusion, gouvernant cette fois-ci le transport de moment cinétique :

$$\begin{aligned}&\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\sin^2\theta\,\Omega\right) + \nabla\,\cdot\left(\rho r^2\sin^2\theta\,\Omega\,\mathcal{U}_M\right)\\ &= \frac{\sin^2\theta}{r^2}\partial_r\left(\rho\nu_v r^4\partial_r\Omega\right) + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\rho\nu_h\sin^3\theta\,\partial_\theta\Omega\right) + \Gamma_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}}}\left(r,\theta\right).\end{aligned} \tag{6.29}$$

Ici $\Gamma_{\mathbf{F}_\mathcal{L}}$ représente le couple de la force de Lorentz :

$$\Gamma_{\mathbf{F}_\mathcal{L}}(r,\theta) = r\sin\theta\, F_{\mathcal{L},\varphi} = r\sin\theta \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{Z}_{\mathbf{F}_\mathcal{L};l}(r) P_l^1(\cos\theta)\,, \tag{6.30}$$

son expression sur les polynômes de Legendre associés axisymétriques est donnée en (B.77). À partir de cette équation, on peut s'intéresser à l'évolution de la vitesse angulaire moyenne (différentielle en rayon), ou encore à la rotation différentielle en latitude.

Évolution de la vitesse angulaire moyenne

Il suffit de prendre la moyenne horizontale de l'équation du moment angulaire (6.29) sur une isobare, en supposant que la vitesse moyenne est très supérieure à ses variations : $\overline{\Omega}(r) \gg \Omega_l(r)$. On obtient alors l'équation d'advection-diffusion dans la direction radiale :

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\overline{\Omega}) = \frac{1}{5r^2}\partial_r\left(\rho r^4\overline{\Omega}U_2\right) + \frac{1}{r^2}\partial_r\left(\rho\nu_v r^4\partial_r\overline{\Omega}\right) + \overline{\Gamma}_{\mathbf{F}_\mathcal{L}}(r)\,, \tag{6.31}$$

le couple de Lorentz moyen étant $$\overline{\Gamma}_{\mathbf{F}_\mathcal{L}}(r) = \frac{\int_0^\pi \Gamma_{\mathbf{F}_\mathcal{L}}(r,\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\int_0^\pi \sin^3\theta\mathrm{d}\theta} = \left[\Gamma_0(r) - \frac{1}{5}\Gamma_2(r)\right]. \tag{6.32}$$

Cette équation (6.31) est très importante car elle met en relief les quantités susceptibles de transporter du moment angulaire (donc susceptibles d'expliquer notamment le profil de rotation plat de la zone radiative solaire) :

1. la composante $l = 2$ de la circulation méridienne [1], formant des cellules quadrupolaire transportant à l'équateur du moment cinétique vers l'extérieur (dans le cas solaire du moins, *cf.* Meynet & Maeder, 2000 [28] ; le sens d'extraction du moment angulaire peut être inversé sous d'autres conditions). S'il s'agit du seul terme d'advection du moment, son action reste toutefois insuffisante : lorsqu'elle est prise seule en compte (avec les instabilités de cisaillement associées) dans les modèles d'évolution stellaires, ceux-ci prédisent que le cœur du Soleil doit tourner bien plus rapidement que la surface, avec un fort gradient de vitesses dans la zone radiative (*cf.* Pinsonneault *et al.*, 1989 [31] ; Chaboyer *et al.*, 1995 [8] ; Talon, 1997 [43], Talon & Zahn, 1998 [42], Turck-Chièze *et al.*, 2009 [44]), or l'on sait bien que cette solution est incompatible avec les données issues de l'héliosismologie (*cf.* Brown *et al.*, 1989 [2] ; Turck-Chièze *et al.*, 2004 [45] ; García *et al.*, 2007 [15] ;
2. le couple de la force de Lorentz. Rappelons que dans le cas d'équilibres MHS barotropes, celui-ci est nul. Cependant si l'on considère ce modèle comme une condition initiale au transport, la composante d'équilibre du champ magnétique va se retrouver modifiée par sa propre diffusion et sous l'effet de l'advection par le champ de vitesses (*cf.* éq. (6.27)) et un couple de la force de Lorentz va apparaître. Ce terme source peut alors modifier l'évolution du moment cinétique (*cf.* Gough & McIntyre [16] ; Garaud, 2002 [14] ; Brun & Zahn, 2006 [4]).

1. Notons que les contributions d'ordres supérieurs de la circulation méridienne $\mathcal{U}_M$ ne participent pas au transport de moment, *cf.* Spiegel & Zahn, 1992 [36]

Le deuxième terme du membre de droite de (6.31) constitue le terme de diffusion turbulente. Enfin, soulignons que les ondes internes (voire gravito-inertielles) ne sont pas prises en compte par ce modèle, or il peut s'agir d'une source de transport supplémentaire (*cf.* Schatzman, 1993 [34] ; Zahn *et al.*, 1997 [48] ; Talon *et al.*, 2002 [41] ; Talon & Charbonnel, 2005 [40] ; Mathis *et al.*, 2008 [25]) : le transport net par les ondes est différent suivant que celles-ci soient progrades (dans le sens du flot) ou rétrogrades (dans le sens opposé).

Évolution de la rotation différentielle en latitude

En soustrayant l'équation moyenne (6.31) (multipliée par $\sin^2\theta$) à l'équation du transport générale (6.29), en supposant ici encore que $\overline{\Omega}(r) \gg \widehat{\Omega}(r,\theta)$, on obtient celle décrivant l'évolution de la rotation différentielle en latitude :

$$\begin{aligned}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\sin^2\theta\,\widehat{\Omega}\right) + \nabla\cdot\left(\rho r^2\sin^2\theta\,\overline{\Omega}\,\mathcal{U}_M\right) + \frac{\sin^2\theta}{5r^2}\partial_r\left(\rho r^4\overline{\Omega}\,U_2\right)\\ = \frac{\sin^2\theta}{r^2}\partial_r\left(\rho\nu_v r^4\partial_r\widehat{\Omega}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\rho\nu_h\sin^3\theta\,\partial_\theta\widehat{\Omega}\right) + \Gamma_{\mathbf{F}_\mathcal{L}} - \sin^2\theta\,\overline{\Gamma}_{\mathbf{F}_\mathcal{L}}.\end{aligned} \tag{6.33}$$

En utilisant ensuite le développement des fluctuations de vitesse angulaire (6.21) sur les fonctions horizontales $Q_l(\theta)$, on obtient pour $l = 2$

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\Omega_2\right) - 2\rho\overline{\Omega}r\left[2V_2 - \alpha(r)U_2\right] = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(\rho\nu_v r^4\partial_r\Omega_2\right) - 10\rho\nu_h\Omega_2 + \Gamma_2 \tag{6.34}$$

$$\text{avec}\quad V_2 = \frac{1}{6\rho r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\rho r^2 U_2\right)\qquad\text{et}\qquad \alpha(r) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\ln\left(r^2\overline{\Omega}\right)}{\mathrm{d}\ln r}. \tag{6.35}$$

En remarquant que la stratification du milieu entraîne un transport plus efficace dans les directions horizontales que verticale (soit $\nu_v \ll \nu_h$) :

$$\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\Omega_2\right) - 2\rho\overline{\Omega}r\left[2V_2 - \alpha U_2\right] = -10\rho\nu_h\Omega_2 + \Gamma_2. \tag{6.36}$$

Dans la limite asymptotique $t \gg r^2/\nu_h$ où la diffusion a érodé le profil de vitesses jusqu'à son maximum, l'état stationnaire suivant est atteint :

$$\nu_h\Omega_2 = \frac{1}{5}r\left[2V_2 - \alpha U_2\right]\overline{\Omega} + \frac{\Gamma_2}{10\rho}, \tag{6.37}$$

où la diffusion horizontale (membre de gauche) équilibre l'advection horizontale et le couple de la force de Lorentz (termes du membre de droite). Pour les modes l>2, la situation est plus complexe du fait du couplage entre les différents modes, en particulier à cause du couple magnétique.

6.2.4 L'équation du vent thermique

Reprenons l'équation magnéto-hydrostatique (nous négligeons les termes dynamiques dans la partie méridienne de l'équation du mouvement) :

$$\frac{1}{\rho}\nabla P = \mathbf{g} = -\nabla\Phi_{\mathrm{grav}} + \mathbf{F}_\mathcal{C} + \frac{\mathbf{F}_{\mathcal{L};\mathrm{P}}}{\rho}, \tag{6.38}$$

où l'on a pris en compte la force centrifuge $\mathbf{F}_{\mathcal{C}} = \Omega^2 \nabla \left(r^2 \sin^2\theta\right)/2$ et la force de Lorentz poloïdale $\mathbf{F}_{\mathcal{L};\mathrm{P}}$. En prenant le rotationnel de cette équation on obtient

$$-\frac{1}{\rho^2}\nabla\,\rho \times \nabla\,P = -\frac{1}{\rho}\nabla\,\rho \times \mathbf{g} = \frac{1}{2}\nabla\,(\Omega)^2 \times \nabla\,(r\sin\theta)^2 + \nabla\,\times\left(\frac{\mathbf{F}_{\mathcal{L};\mathrm{P}}}{\rho}\right). \tag{6.39}$$

Nous allons maintenant développer toutes les perturbations par-rapport à l'isobare sur les harmoniques sphériques. Nous avons respectivement pour la densité, la température et la fluctuation du poids moléculaire moyen :

$$\left\{\begin{array}{lllll} \rho\,(r,\theta) & = & \bar{\rho}(r) + \rho^{'}\,(r,\theta) & = & \bar{\rho}(r)\left[1 + \sum_{l>1}\Theta_l(r)\,(r)\,P_l(\cos\theta)\right] \\ T\,(r,\theta) & = & \bar{T}(r) + T^{'}\,(r,\theta) & = & \bar{T}(r)\left[1 + \sum_{l>1}\Psi_l(r)\,(r)\,P_l(\cos\theta)\right] \\ \mu\,(r,\theta) & = & \bar{\mu}(r) + \mu^{'}\,(r,\theta) & = & \bar{\mu}(r)\left[1 + \sum_{l>1}\Lambda_l(r)\,(r)\,P_l(\cos\theta)\right] \end{array}\right. \tag{6.40}$$

les fluctuations relatives étant

$$\Theta_l = \tilde{\rho}_l/\bar{\rho}, \quad \Psi_l = \tilde{T}_l/\bar{T} \quad \text{et} \quad \Lambda_l = \tilde{\mu}_l/\bar{\mu}. \tag{6.41}$$

L'éq. (6.39) se réduit alors au premier ordre en perturbations :

$$-\frac{\nabla\,\rho^{'} \times \mathbf{g}}{\bar{\rho}} = \left[\partial_r(\Omega^2) r\cos\theta\sin\theta - \partial_\theta(\Omega^2)\sin^2\theta\right]\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \nabla\,\times\left(\frac{\mathbf{F}_{\mathcal{L};\mathrm{P}}}{\bar{\rho}}\right). \tag{6.42}$$

Reprenons l'équation d'état ([20]) donnée en éq. (5.89) :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha\frac{dP}{P} - \delta\frac{dT}{T} + \varphi\frac{d\mu}{\mu} \tag{6.43}$$

Les perturbations modales en densité s'écrivent alors d'après (6.40) :

$$\frac{\widetilde{\rho_l}}{\bar{\rho}} = \Theta_l = \varphi\Lambda_l - \delta\Psi_l. \tag{6.44}$$

En insérant ce développement ainsi que celui de la force de Lorentz (éqs. (B.67), (B.69), (B.71), (B.72)→ (B.74)) dans l'équation barocline (6.42), en notant que celle-ci se projette uniquement sur l'harmonique sphérique vectorielle $\mathbf{T}_l^0\,(\theta)$ on obtient l'*équation du vent thermique*, donnant la perturbation de densité sur l'isobare :

$$\frac{\widetilde{\rho_l}\,(r)}{\bar{\rho}} = \varphi\Lambda_l - \delta\Psi_l = \frac{r}{\bar{g}}\left[\mathcal{D}_l(r) + \frac{\mathcal{X}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l}\,(r)}{r\bar{\rho}\,(r)} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathcal{Y}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l}\,(r)}{\bar{\rho}\,(r)}\right)\right]. \tag{6.45}$$

On constate que cette dernière va être générée d'une part par la présence de rotation différentielle, modélisée par l'intermédiaire du coefficient $\mathcal{D}_l\,(r)$ (donné en Annexe B.3.), d'autre part par la force de Lorentz. Soulignons que nous avons pris comme premier pas de la dérivation, le rotationnel de l'équilibre hydrostatique massique. Donc pour les configurations MHS dérivées en chapitre 3, la force de Lorentz n'aura aucune influence sur la fluctuation de la densité, donc sur celles en température et poids moléculaire moyen. De même, une rotation cylindrique n'exercerait pas d'influence ici. Néanmoins après advection-diffusion du champ par l'équation d'induction, le régime atteint est différent du régime d'équilibre initial et la baroclinicité apparaît, générant alors les perturbations décrites par l'équation ci-dessus.

6.2.5 L'équation du transport de la chaleur

Il reste à examiner le rôle du champ magnétique dans l'équation de la chaleur. Je renvoie ici le lecteur à Mathis & Zahn, 2005 [27] pour une description complète de sa dérivation en présence de rotation différentielle et de champ magnétique. Une fois projetée sur les harmoniques sphériques, cette équation prend la forme :

$$\overline{T}C_p\left[\frac{\mathrm{d}\Psi_l}{\mathrm{d}t}+\Phi\frac{\mathrm{d}\ln\overline{\mu}}{\mathrm{d}t}\Lambda_l+\frac{U_l(r)}{H_P}\left(\nabla_{ad}-\nabla\right)\right]=\frac{L(r)}{M(r)}\mathcal{T}_l(r)+\frac{\mathcal{J}_l\left(r\right)}{\overline{\rho}}. \tag{6.46}$$

Rappelons que ∇ est le gradient radiatif, H_P est l'échelle de hauteur de pression caractéristique définie par $H_P=(d\ \ln P/dr)^{-1}$, Φ caractérise la composition chimique du milieu, $\mathcal{J}_l\left(r\right)$ représente la projection du chauffage ohmique sur le mode latitudinal l. L'expression du coefficient $\mathcal{T}_l$ est donné dans l'article indiqué, celui-ci fait en particulier intervenir la composante de la divergence du flux radiatif engendrée par l'accélération centrifuge et la force de Lorentz poloïdale, la diffusion de la chaleur, le transport de chaleur par la turbulence horizontale, la génération d'énergie nucléaire et enfin celle due aux contractions/dilatations de l'étoile. Les autres notations ont été définies précédemment.

Nous voyons qu'au membre de gauche figure le terme d'advection de la circulation méridienne, générée par toutes les perturbations prises en compte dans le terme comprenant $\mathcal{T}_l$. Aussi, on peut mettre cette équation sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\overline{T}C_p}\left[\frac{L(r)}{M(r)}\mathcal{T}_l(r)+\frac{\mathcal{J}_l\left(r\right)}{\overline{\rho}}\right]-\frac{\mathrm{d}\Psi_l}{\mathrm{d}t}-\Phi\frac{\mathrm{d}\ln\overline{\mu}}{\mathrm{d}t}\Lambda_l=\frac{U_l(r)}{H_P}\left(\nabla_{ad}-\nabla\right), \tag{6.47}$$

et l'on constate que la composante verticale de la circulation méridienne U_l est reliée à la perturbation thermique Ψ_l et à la fluctuation du poids moléculaire moyen sur l'isobare Λ_l. En résumé, la température relaxe alors pour équilibrer l'advection de l'entropie moyenne par la circulation méridienne.

6.3 Influence sur la convection

6.3.1 Description de la convection dans la cadre de la « MLT »

Le traitement de la convection dans le code CESAM est effectué par l'approche de la MLT (Mixing Length Theory), où l'on paramètre l'échelle sur laquelle a eu lieu le transfert d'énergie thermique par convection. Même si une telle description peut être dite archaïque à l'aune des connaissances actuelles sur la convection, elle n'en reste pas moins d'une efficacité et d'une simplicité déconcertantes. La rapidité à laquelle se succèdent les modèles ambitionnant de décrire la convection de manière plus réaliste dans les codes d'évolution a longtemps contribué au maintien de ce traitement élaboré par Böhm-Vitense (1958) [1]. Même si des descriptions bien plus réalistes sont en cours d'implémentation dans les codes d'évolution stellaire (en particulier les modèles de « turbulence plein spectre » ; *cf. e.g.* Canuto & Matizzelli, 1999 [6, 7, 5]), je me placerai ici dans le cadre de la MLT. Nous allons en décrire les grandes lignes puis nous allons suivre la démarche de Cox & Giuli (1968) [9] pour l'obtention de l'équation appelée couramment « cubique de la MLT » dont est solution la grandeur Γ associée à l'efficacité de la convection, en prenant en compte le rôle du champ magnétique.

Les quatre gradients de la MLT

Soit un élément de matière en ascension dans la zone convective :

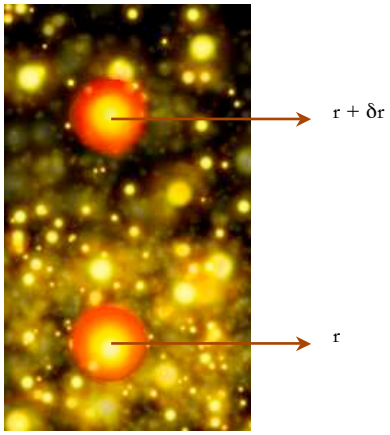


FIGURE 6.3 – Élément de matière se déplaçant de r vers $r + \delta r$.

On suppose que l'élément de matière, compressible, se déplace adiabatiquement et on suppose qu'il est à l'équilibre de pression avec son milieu. Identifions les caractéristiques en son sein par un prime. On a :

$$T'(r) = T(r); \quad P'(r) = P(r); \quad \rho'(r) = \rho(r) \tag{6.48}$$

en r et en $r + \delta r$ on a :

$$T'(r+\delta r) \approx T'(r) > T(r+\delta r); \quad P'(r+\delta r) = P(r+\delta r) < P(r); \quad \rho'(r+\delta r) < \rho(r+\delta r). \tag{6.49}$$

Quand l'élément de matière a parcouru la distance δr dans la zone d'instabilité convective, il présente l'excès en température, au premier ordre :

$$\Delta T(\delta r) = \delta r \left[\left(\frac{dT'}{dr} \right) - \left(\frac{dT}{dr} \right) \right] \tag{6.50}$$

$$= \delta r \nabla (\Delta T) \tag{6.51}$$

et en considérant que $T' \approx T$ en r et en $r + \delta r$

$$\Delta T(\delta r) = \delta r T \left[\left(\frac{d \ln T'}{dr} \right) - \left(\frac{d \ln T}{dr} \right) \right]. \tag{6.52}$$

Soit l'échelle de pression totale, λ_P de $P = P_{gaz} + P_{turb} + P_{mag}$. On a

$$\lambda_P \equiv \left(\frac{-d \ln P}{dr} \right)^{-1} = \frac{P}{\rho g} \tag{6.53}$$

en raison de l'équilibre hydrostatique[2]. On a alors

$$\Delta T(\delta r) = \delta r \frac{T}{\lambda_P} \left(\nabla - \nabla' \right) \tag{6.54}$$

avec

$$\nabla \equiv \frac{d \ln T}{d \ln P}, \tag{6.55}$$

$$\nabla' \equiv \frac{d \ln T'}{d \ln P}. \tag{6.56}$$

On définit aussi le gradient adiabatique ∇_{ad} d'un élément se déplaçant adiabatiquement par :

$$\nabla_{ad} \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P_{gaz}} \right)_{ad} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2}, \tag{6.57}$$

où l'on a introduit la définition du deuxième exposant adiabatique Γ_2. Mais pour tenir compte de la pression turbulente (*cf.* Thèse de doctorat d'A. S. Brun, 1998 [3]) et de la pression magnétique, on introduit

$$\nabla'_{ad} \equiv \nabla_{ad} \left(\frac{d \ln P_{gaz}}{d \ln P} \right). \tag{6.58}$$

Enfin, à partir du flux radiatif

$$F_{rad} = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr} \tag{6.59}$$

$$= \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \left(-\frac{d \ln P}{dr} \right) \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right) \tag{6.60}$$

$$= \frac{4acT^4}{3\kappa P} g \nabla, \tag{6.61}$$

on définit le gradient radiatif hypothétique, tel qu'il serait si toute l'énergie était transportée par radiation dans la zone convective :

$$F_{tot} = F_r + F_{conv} + F_{E_k} + F_{mag} \equiv \frac{4acT^4}{3\kappa P} g \nabla_{rad}. \tag{6.62}$$

2. si équilibre magnéto-hydrostatique, $\lambda_P = \frac{P}{\rho g + \mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \approx \frac{P}{\rho g}$ dans le cas où la force de Lorentz reste faible.

Le flux convectif

On considère qu'un élément conserve son "identité" sur la distance Δr, après quoi il se mélange au milieu en libérant son énergie calorifique. Pour prendre en compte le fait qu'un élément en $r + \Delta r$ peut aussi redescendre en r, on factorise le flux par 1/2, ce qui donne :

$$F_{conv}(\Delta r) = \frac{1}{2}\rho v C_p \Delta r \left[\left(\frac{dT'}{dr}\right) - \left(\frac{dT}{dr}\right)\right] = \frac{1}{2}\rho v C_p \Delta r \Delta\nabla T \tag{6.63}$$

où v est la vitesse de l'élément, ρ sa densité, g la gravité, C_p la chaleur spécifique à pression constante et $\delta = -\left(\frac{d\ln\rho}{d\ln T}\right)_P$ étant donné que le poids moléculaire moyen est constant dans les zones convectives. Pour prendre en compte toutes les valeurs de Δr possibles, nous allons moyenner $F_{conv}(\Delta r)$:

$$F_{conv}(\Delta r) = \frac{1}{2}\rho \bar{v} C_p \Lambda \Delta\nabla T \tag{6.64}$$

où Λ est la longueur de mélange. En utilisant l'équation (6.54) et l'expression pour la vitesse moyenne d'un élément convectif suivante (*cf.* Cox & Giuli, 1968 [9], §14.3) :

$$\bar{v} = \frac{1}{2\sqrt{2}} g \delta^{1/2} \left(\frac{\rho}{P}\right)^{1/2} \Lambda \left(\nabla - \nabla'\right)^{1/2}, \tag{6.65}$$

on trouve pour le flux convectif l'expression suivante

$$F_{conv} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \rho^{5/2} \delta^{1/2} g^2 C_p T P^{-3/2} \Lambda^2 \left(\nabla - \nabla'\right)^{3/2}. \tag{6.66}$$

Le flux net

En regroupant les expressions des flux radiatif (6.61) et convectif (6.66), on a

$$F_{tot}(r) = \frac{L(r)}{4\pi r^2} = F_{rad} + F_{conv} + F_{E_k} + F_{mag} \tag{6.67}$$

$$= \frac{4acT^4}{3\kappa P} g\nabla + \frac{1}{4\sqrt{2}} \rho^{5/2} \delta^{1/2} g^2 C_p T P^{-3/2} \Lambda^2 \left(\nabla - \nabla'\right)^{3/2}, \tag{6.68}$$

d'où, d'après l'équation exprimant le flux total (6.62) :

$$\nabla_{rad} = \nabla + \frac{3\kappa g \rho^{5/2} C_p \Lambda^2 \delta^{1/2}}{16\sqrt{2} acT^3 P^{1/2}} \left(\nabla - \nabla'\right)^{-3/2} + \nabla^*. \tag{6.69}$$

où l'on a introduit le gradient ∇^* prenant en compte les flux supplémentaires :

$$\nabla^* \equiv \frac{3\kappa\rho}{4acT^3} \left(F_{E_k} + F_{mag}\right) \tag{6.70}$$

6.3.2 Influence du champ magnétique sur l'efficacité de la convection

On définit le paramètre Γ par :

$$\Gamma \equiv \frac{\text{Excès d'énergie calorifique avant mélange}}{\text{Énergie rayonnée pendant le temps de vie}} \text{ de l'élément} \tag{6.71}$$

$$\Gamma = \frac{F_{conv}}{F_{rad}} \frac{V/\Lambda}{A} = \frac{2}{9} \frac{F_{conv}}{F_{rad}} \tag{6.72}$$

où l'on a utilisé la prescription de Böhm-Vitense (1958) pour le rapport $V/A = 2\Lambda/9$. Ainsi

$$\Gamma = \frac{C_p \kappa \rho^2 \bar{v} \Lambda}{6acT^3} \tag{6.73}$$

i.e.

$$\Gamma = A \left(\nabla - \nabla'\right)^{1/2} \quad \text{avec} \quad A = \frac{C_p \kappa g \delta^{1/2} \rho^{5/2} \Lambda^2}{12\sqrt{2} acT^3 P^{1/2}}. \tag{6.74}$$

En identifiant avec l'expression (6.69), on en déduit une relation entre Γ et les quatre gradients :

$$\nabla_{rad} = \nabla + \nabla^* + \Phi_0 \Gamma \left(\nabla - \nabla'\right) \qquad \text{avec} \qquad \Phi_0 = \frac{9}{4}. \tag{6.75}$$

Nous allons maintenant chercher une autre équation sur Γ : on peut exprimer le gradient en température de l'élément convectif ∇' en fonction d'un autre gradient connu. Considérons, ainsi que le proposent Cox & Giuli (1968) [9] l'exposant polytropique :

$$\frac{\Gamma_2'}{\Gamma_2' - 1} \equiv \frac{d \ln P_{gaz}'}{d \ln T'} \tag{6.76}$$

et le deuxième exposant adiabatique :

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \equiv \left(\frac{d \ln P_{gaz}'}{d \ln T'}\right)_{ad}. \tag{6.77}$$

On a

$$\frac{\Gamma_2'}{\Gamma_2' - 1} = \left(1 - \frac{C}{C_p}\right) \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1}, \tag{6.78}$$

où $C \equiv \frac{dQ}{dT}$ dépend du type de transformation suivi. Par ailleurs,

$$\frac{dQ}{dt} = \Delta\varepsilon - \Delta \left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{F}}{\rho}\right) \tag{6.79}$$

autrement dit la variation de chaleur est due à l'excès d'énergie généré dans l'élément auquel on soustrait l'excès d'énergie perdu par radiation. Dès lors :

$$C = \frac{\Delta\varepsilon - \Delta \left(\nabla \cdot \mathbf{F}/\rho\right)}{dT'/dt} \tag{6.80}$$

d'où, après emploi de la relation $dT/dt = -T\nabla\bar{v}/\lambda_P$ et quelques manipulations algébriques :

$$\frac{C}{C_P} = \frac{-\left(1-\eta\right)/\Gamma}{1-\frac{\nabla}{\nabla-\nabla'}} \tag{6.81}$$

où l'on a introduit le paramètre η correspondant au rapport de l'excès d'énergie généré dans l'élément sur l'excès d'énergie perdu par radiation :

$$\eta \equiv \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta\left(\nabla\cdot\mathbf{F}/\rho\right)} \tag{6.82}$$

Ce qui conduit à

$$\Gamma = \left(1-\eta\right)\frac{\nabla-\nabla'}{\nabla'-\nabla'_{ad}} \tag{6.83}$$

Notons qu'en présence de champ magnétique, le paramètre η devra tenir compte du chauffage ohmique au numérateur et du flux de Poynting au dénominateur.

Obtention de l'équation de la MLT modifiée

Nous avons donc à présent trois équations reliant les quatre gradients : (6.74), (6.75) et (6.83). Étant connus ∇_{rad} et ∇_{ad} (et donc $\nabla'_{ad} = \nabla_{ad}\frac{d\ln P_{gaz}}{d\ln P_{tot}}$), on cherche à résoudre l'équation permettant de déterminer Γ afin de retrouver les autres quantités physiques, en particulier le gradient de température réel ∇. De (6.75) on obtient

$$\nabla = \frac{\nabla_{rad}-\nabla^*+\Phi_0\Gamma\nabla'}{1+\Phi_0\Gamma} \tag{6.84}$$

et de (6.83) on tire

$$\Gamma = \left(1-\eta\right)\frac{\nabla_{rad}-\nabla^*-\nabla'}{\left(1+\Phi_0\Gamma\right)\left(\nabla'-\nabla'_{ad}\right)} \tag{6.85}$$

d'où en réemployant (6.83)

$$\nabla_{rad}-\nabla' = \frac{\Gamma\left(1+\Phi_0\Gamma\right)\left(\nabla_{rad}-\nabla'_{ad}\right)+\left(1-\eta\right)\nabla^*}{\Gamma\left(1+\Phi_0\Gamma\right)+\left(1-\eta\right)} \tag{6.86}$$

et par ailleurs (6.83) donne :

$$\nabla-\nabla_{rad} = \frac{\Phi_0\Gamma\nabla'\left(\nabla'-\nabla_{rad}\right)-\nabla^*}{1+\Phi_0\Gamma} \tag{6.87}$$

d'où

$$\nabla_{rad}-\nabla = \frac{\Phi_0\Gamma}{1+\Phi_0\Gamma}\frac{\Gamma\left(1+\Phi_0\Gamma\right)\left(\nabla_{rad}-\nabla'_{ad}\right)+\left(1-\eta\right)\nabla^*}{\Gamma\left(1+\Phi_0\Gamma\right)+\left(1-\eta\right)}+\frac{\nabla^*}{1+\Phi_0\Gamma} \tag{6.88}$$

Enfin d'après (6.74) et (6.75) il vient

$$\nabla_{rad}-\nabla = \nabla^*+\frac{\Phi_0\Gamma^3}{A^2} \tag{6.89}$$

Après identification des deux équations précédentes et simplification, on obtient finalement l'équation cubique en Γ :

$$\Phi_0\Gamma^3 + \Gamma^2 + (1-\delta)\,\Gamma - A^2\left(\nabla_{rad} - \nabla'_{ad} - \nabla^*\right) = 0. \tag{6.90}$$

où l'on rappelle que

$$A = \frac{C_p \kappa g \delta^{1/2} \rho^{5/2} \Lambda^2}{12\sqrt{2} a c T^3 P^{1/2}},$$
$$\Phi_0 = \frac{9}{4},$$
$$\text{et} \qquad \eta = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta\left(\nabla\ \cdot \mathbf{F}/\rho\right)}.$$

L'effet du champ magnétique se ressentira donc sur l'efficacité de la convection *via* la modification de pression (A), de gains et pertes énergétiques (η) et en modifiant l'écart entre le gradient adiabatique au sein de l'élément en déplacement et le gradient radiatif.

6.3.3 Influence du champ magnétique sur le critère de convection

Selon la méthode décrite par Gough & Tayler (1966) [17], le critère d'instabilité de Schwarzschild (1906) [35] pour un fluide compressible est donné par

$$\frac{1}{\gamma} - \frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dP} > 0, \tag{6.91}$$

qui s'écrit également, si le rapport des chaleurs spécifiques γ et la gravité g sont constants, sous la forme : $\nabla > \nabla_{ad}$. Celui-ci se retrouve modifié en présence d'un champ magnétique vertical B sous la forme la plus simple suivante :

$$\nabla - \nabla_{ad} > \frac{B^2}{B^2 + \gamma P}. \tag{6.92}$$

Nous remarquons que le champ magnétique a naturellement tendance à stabiliser le milieu en élevant le seuil à partir duquel la convection est activée. Mettons en emphase le fait que ce critère n'est pas valide en tant que tel dans les couches externe de l'étoile où le taux d'ionisation est important. En particulier dans ce cas, l'hypothèse $\gamma = c^{ste}$ n'est plus forcément vérifiée car on a $dP/dt + \gamma P \nabla\ \cdot \mathbf{v} = 0$, où d/dt représente la dérivation dans le référentiel du fluide en mouvement et où $\mathbf{v}$ est la vitesse de cet élément. Si $u\left(P, \mathcal{V}\right)$ est l'énergie interne par unité de masse, où $\mathcal{V} = 1/\rho$ est le volume spécifique, l'équation pour une transformation adiabatique s'écrit :

$$\frac{du}{dt} + P\frac{d\mathcal{V}}{dt} = 0 \tag{6.93}$$

et alors l'équation de continuité s'exprime, après utilisation des deux équations précédentes :

$$\gamma = \mathcal{V}\frac{P + \frac{\partial u}{\partial \mathcal{V}}}{P}\frac{\partial u}{\partial P} \tag{6.94}$$

et le critère d'instabilité prend la forme générale :

$$\frac{1}{\gamma} - \frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dP} > \frac{B^2}{B^2 + \gamma P}. \tag{6.95}$$

6.4 Application : implémentation d'un champ magnétique initialement à l'équilibre MHS

Actuellement, plusieurs codes d'évolution stellaire unidimensionnels incluent la rotation (en particulier CESAM, le code de Genève, STAREVOL). En ce qui concerne le code CESAM, l'implémentation a été faite par Pierre Morel. Une intercomparaison entre STAREVOL et CESAM pour le Soleil ([44] et pour des étoiles de 1.5 $M_\odot$ ont montré certaines difficultés liées aux conditions aux limites qui ont été récemment résolues grâce au travail de J. Marquès (Observatoire de Paris - LESIA). La stratégie d'implémentation a été modifiée, les équations de structure étant désormais résolues dans l'espace des B-splines tandis que celles décrivant le transport le sont dans l'espace physique, les B-splines restant utilisées pour effectuer les interpolations. Ce choix s'est révélé être payant, car au prix d'une moindre précision sur les dérivées des variables, l'évolution vérifie désormais précisément la conservation du moment cinétique.

Dès lors, l'implémentation du champ magnétique pour étendre les routines existantes est justifiée. Ce travail est actuellement en cours. Le schéma de relaxation employé pour intégrer les équations de transport (*cf.* thèses de S. Talon et de A. Palacios [39, 30]) est modifié pour prendre en compte le champ magnétique seul dans un premier temps. Le problème se résume alors à mettre en œuvre la diffusion du champ magnétique, le terme d'advection de l'équation d'induction étant mis de côté. Ce développement n'est pas sans intérêt parce qu'il permet d'une part, sur un plan technique, d'échelonner l'implémentation (délicate lorsqu'il s'agit de rajouter une équation aux équations de structure et de transport existantes) et d'autre part parce qu'il permet de savoir comment la diffusion va opérer sur un champ de grande échelle tel que celui probablement présent dans la zone radiative solaire ou dans celle d'étoiles Ap.

6.4.1 Procédure d'implémentation dans CESAM

Le code d'évolution stellaire CESAM [29] a été modifié à plusieurs niveaux pour inclure le champ magnétique. L'architecture du code est représentée en FIG. 6.4, elle indique les endroits où les routines originales ont été modifiées.

Lecture des paramètres associés au champ magnétique La routine de lecture du fichier de données comprend à présent les informations sous la forme suivante :

```
&NL_MAG
MAGNETISM = T
B_0 = 1.d4
STAGE_MAG_SET= 'pms'
STAGE_MAG_DIFF= 'zams'
CONFIG_MAG= 'conf_rad'
R_MAG1=0.d0
R_MAG2=0.71d0
```

où ici `MAGNETISM` prend les valeurs `T` ou `F` selon que le champ magnétique est pris en compte dans le modèle ou non ; `B_0` représente l'intensité maximale du champ (en G) ; `STAGE_MAG_SET` détermine le stade évolutif de l'étoile à partir duquel est pris en compte

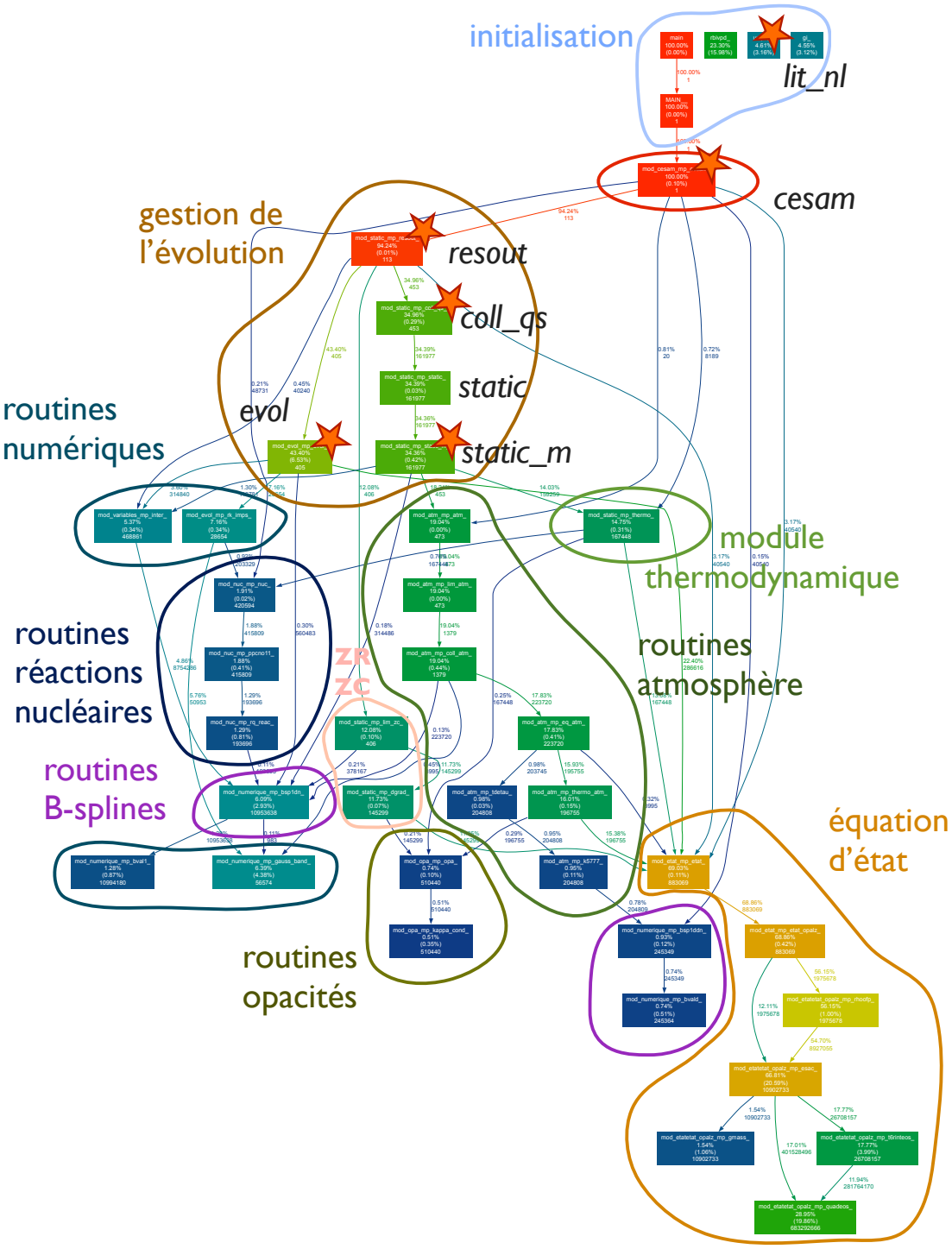


FIGURE 6.4 – Architecture du code CESAM mettant en lueur les différentes routines et leurs interconnexions. Celles ayant été modifiées pour inclure les effets du champ magnétique sont marquée d'une astérisque.

le champ magnétique (prend les valeurs `'pms'` ou `'zams'`) ; `STAGE_MAG_DIFF` détermine le stade évolutif de l'étoile à partir duquel est pris en compte la diffusion du champ magnétique (prend les valeurs `'pms'`, `'zams'` ou `'no_diff'`), `CONFIG_MAG` spécifie la configuration initiale du champ magnétique (`'open'` représente un champ de grande échelle dipolaire ne vérifiant pas les hypothèses de conservation des invariants propres aux équilibres MHS barotropes, `'conf_rad'` représente un champ confiné dans la zone radiative, `'conf_rlim'` représente un champ magnétique confiné entre deux rayons spécifiés par `R_MAG1` et `R_MAG2`, sans effet si une des deux autres options est choisie).

Gestion de l'évolution Le programme principal `cesam` interprète les données d'entrées et les confronte avec le stade évolutif du modèle d'étoile en cours. Il retourne alors pour la sous-routine `evol` la variable logique donnant le « feu vert » (ou non) pour la prise en compte du magnétisme.

Calcul de la force de Lorentz Dans la routine `evol`, un ensemble de tests pour déterminer la configuration à calculer, puis la force de Lorentz associée, a été mis en place (voir l'organigramme en Fig. 6.5). Cette partie est implémentée après la détermination des interfaces zone radiative – zone convective, juste avant la diffusion du moment cinétique afin de faciliter le couplage ultérieurement. La diffusion des espèces chimiques a lieu après la diffusion du moment cinétique. L'ensemble des routines associées au champ magnétique est regroupé dans un module `mod_magnet` permettant d'actualiser toutes les variables à tout instant par les différentes routines. Celui-ci comporte douze sous-routines (incluant de nombreuses procédures de test et totalisant environ 5000 lignes de code en Fortran90) :

- `mag_crit` donne les critères de calcul en fonction du stade évolutif ;
- `mag_etat` retourne une matrice dont les colonnes représentent le rayon, la masse, la densité, la pression, la température et enfin s'il y a convection ou non, pour préparer le calcul des configurations ainsi que de la diffusivité ;
- `mag_lims` retourne les limites en rayon normalisé des zones radiatives - zones convectives et celles choisies pour la configuration à calculer ;
- `mag_psi` calcule la partie radiale de la fonction de flux poloïdal $\Psi_r(r)$ (*cf.* chapitre 3) ainsi que ses deux premières dérivées ;
- `mag_diffusivity` retourne la diffusivité magnétique ;
- `mag_B` calcule la partie radiale des trois composantes du champ magnétique ;
- `mag_calib` calibre l'intensité du champ magnétique (au premier appel) ;
- `mag_stream` retourne les fonctions de courant magnétique selon Mathis & Zahn (2005) ;
- `mag_lorentz` calcule la force de Lorentz à partir de la densité et de la fonction Ψ ;
- `mag_coeffs` calcule tous les coefficients de couplage entre harmoniques sphériques pour le calcul de la force de Lorentz à partir des fonctions de courant magnétique selon Mathis & Zahn (2005) ;
- `mag_lorentz_mz` retourne la force de Lorentz selon Mathis & Zahn (2005) ;
- `mag_eq_diff` comporte les termes du jacobien pour l'intégration des équations de diffusion par le schéma de relaxation.

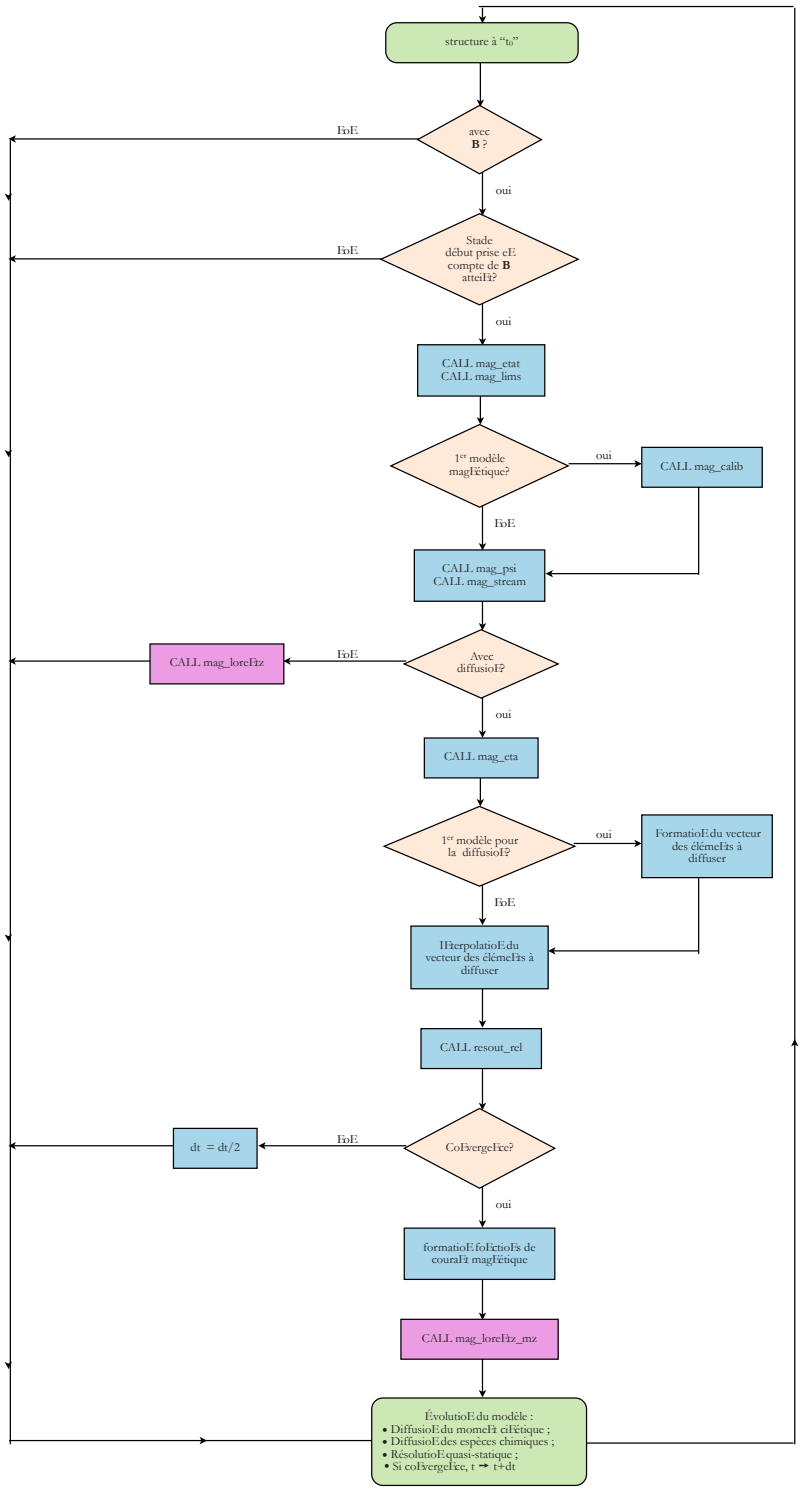


FIGURE 6.5 – Organigramme décrivant la succession des opérations menées et l'invocation aux routines du module `mod_magnet` pour implémenter le magnétisme dans la routine `evol`.

Diffusion du champ magnétique Celle-ci est opérée dans la routine de relaxation `resout_rel` (voir Press *et al.*, 2007 [32], chapitre 17.3).

Calcul du modèle quasi-statique Enfin, la routine `static_m` calculant la structure du modèle à un instant donné en fonctions des variables lagrangiennes a été modifiée pour inclure les termes du jacobien associés à la force de Lorentz.

6.4.2 Résultats

En première application, un champ magnétique à l'équilibre MHS barotrope a été pris en compte dans l'évolution d'un modèle solaire. D'une amplitude de 2 MG, celui-ci est initialisé à 85 millions d'années (à partir de quand la zone radiative est suffisamment bien établie), puis évolué sur un pas temporel. L'objet est ici simplement de tester l'évolution et de comparer les résultats obtenus avec ceux issus de l'approche perturbative. Puis l'évolution est poursuivie jusqu'à 4.6 milliards d'années. Dans un cas plus réaliste, la configuration sera initialisée dès la pré-séquence principale et la diffusion prise en compte. Les résultats obtenus sur le rayon, la densité, la pression, la température et la luminosité sont présentés en Fig. 6.6 ; leurs valeurs en surface sont données en Tab. 6.1. Il est évident que ces dernières sont différentes de celles obtenues par la méthode perturbative, car au cours de l'évolution l'étoile se réajuste. Notons que la valeur obtenue sur la perturbation de luminosité à l'issue du premier pas temporel tend vers une valeur quasi-nulle car les perturbations structurelle n'ont pas encore été prises en compte dans l'évolution des taux de réaction nucléaire. Nous remarquons que les perturbations en rayon, densité, température, et pression sont de l'ordre de 10^{-7} alors qu'elles sont de l'ordre de 10^{-3} par la méthode perturbative : l'évolution tend à « amortir » les perturbations au voisinage de la surface, en revanche l'intérieur est plus affecté par ce champ magnétique, qui dans la réalité va diffuser.

Ces résultats préliminaires doivent maintenant pour être validés, être comparés à ceux issus de l'implémentation du champ magnétique dans un autre code d'évolution stellaire.

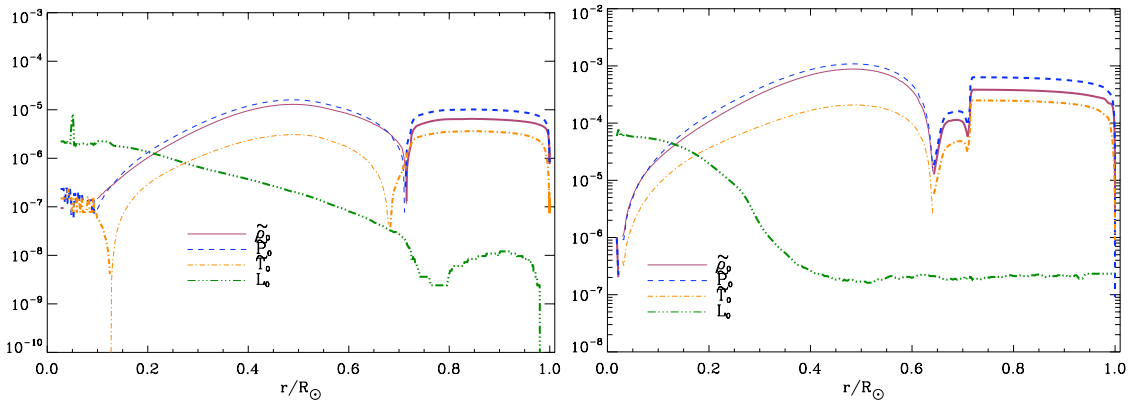


Figure 6.6 – Perturbations en rayon, densité, pression, température et luminosité en fonction du rayon solaire, en échelle semi-logarithmique. (a) à gauche, à l'issue d'un pas temporel et (b) à droite, à l'issue d'une évolution jusqu'à l'âge solaire actuel. Les valeurs positives sont représentées par un trait épais, les négatives par un trait fin.

Perturbation	1 time step evolution	evolution until actual solar age
$\widehat{r}_0$	3.210×10^{-7}	5.790×10^{-7}
$\widehat{\rho}_0$	2.361×10^{-7}	3.080×10^{-7}
$\widehat{P}_0$	9.706×10^{-8}	-2.025×10^{-6}
$\widehat{T}_0$	-2.108×10^{-7}	-2.511×10^{-7}
$\widehat{L}_0$	5.254×10^{-11}	2.325×10^{-7}

Table 6.1 – Perturbations en rayon, densité, pression, température et luminosité à la surface solaire à l'issue d'un pas temporel et à l'issue d'une évolution jusqu'à l'âge solaire actuel.

6.4.3 La diffusivité magnétique

La diffusivité magnétique est calculée dans la zone radiative d'après la loi de diffusivité de Spitzer (1962) [37] ; son expression est donnée en éq. 5.95. En Fig. 6.7, sont tracés plusieurs profils de diffusivité magnétique calculés d'après cette loi en fonction du rayon normalisé : pour le Soleil, une étoile A de 2.5 $M_\odot$ et une étoile de 10 $M_\odot$. Celle-ci étant en puissance $-3/2$ de la température, sa forme générale est très similaire pour les différents cas présentés, mais varie de sept ordres de grandeur entre le cœur et la surface, ce qui rend les simulations 3D délicates dans ce cas. La vision traditionnelle se résumant à dire que le champ va diffuser sur des échelles de plusieurs milliards d'années doit être précisée. De surcroît dans les zones convectives, il faut rajouter à la diffusivité magnétique microscopique la diffusivité turbulente. N'ayant pas accès aux paramètres de vitesse de petite échelle dans le code, une modélisation paramétrique est nécessaire pour inclure cet effet. Ce point fera l'objet d'une étude ultérieure, où les tenseurs de Maxwell et de Reynolds seront caractérisés à l'aide de simulations magnéto-hydrodynamiques afin d'en dégager la contribution turbulente.
Par ailleurs, notons que le champ toroïdal évoluera différemment du champ poloïdal : en effet, l'évolution de la fonction de courant magnétique toroïdale χ_0^l est soumise au terme supplémentaire $\partial_r \chi_0^l \, \partial_r \eta$, or $\partial_r \chi_0^l > 0$ et $\partial_r \eta > 0$ pour $r > R_n$ (R_n étant le rayon de la ligne neutre, l'« œil » de la configuration magnétique), là où le gradient de diffusivité est le plus marqué.

6.4.4 Implémentation de la diffusion du champ magnétique

À l'heure de rédaction de ce manuscrit, les routines implémentées pour mettre en œuvre la diffusion du champ magnétique sont en phase de tests et de finalisation. Le schéma de relaxation a convergé (le front de diffusion est observé dans les données) mais le modèle quasi-statique, lui ne converge pas encore. Des difficultés numériques dans le choix des conditions aux limites ont en effet été relevées. Des conditions aux limites à l'interface de la zone radiative et de la zone convective pourraient être imposées mais seraient tout-à-fait arbitraires (par exemple, il n'y a pas de raison spécifique pour y choisir un champ potentiel). En revanche, il est plus judicieux de choisir un champ potentiel à la surface de l'étoile, car cela est relativement bien vérifié dans le cas de la photosphère solaire (où les courants sont faibles) et cela permettrait de prendre en compte le profil de diffusivité sur l'ensemble de la zone convective. Néanmoins, un champ magnétique initialement présent

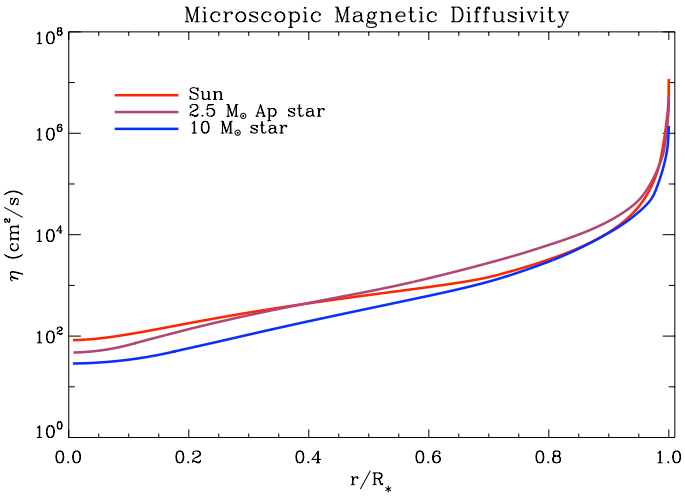


FIGURE 6.7 – Diffusivité magnétique microscopique en fonction du rayon normalisé de l'étoile.

dans la zone radiative et diffusant dans la zone convective correspond à une discontinuité numérique à l'interface entre les deux zones. De plus le schéma de relaxation réagit mal à des valeurs nulles sur plusieurs pas spatiaux, la matrice à inverser se retrouvant singulière. Il reste à implémenter un profil de diffusivité réaliste dans la zone convective (ainsi que mentionné plus haut) ainsi qu'à mettre en œuvre la modification des routines de convection. Toutefois ces modifications sont mineures en regard de celles déjà effectuées. Notons que le traitement de l'interface radiation-convection nécessite une compréhension approfondie des mouvements qui y prennent place. L'image d'un champ fossile diffusant simplement dans la zone convective gagnera des études en cours et des nouvelles observations.

6.5 Perspectives

J'ai au cours de ce chapitre insisté sur la méthode de mise en œuvre du champ magnétique dans un code d'évolution stellaire et de la manière dont celui-ci va se coupler avec la rotation. Une approche logique consiste à découpler le problème et à traiter dans un premier temps indépendamment les effets du champ magnétique et ceux de la rotation. L'implémentation d'un champ à l'équilibre magnéto-hydrostatique a été faite et mise en application dans le cas solaire. La diffusion d'une configuration initialement à l'équilibre MHS barotrope a été décrite, ainsi que les limitations concernant son implémentation. L'élément principal de ce travail a été l'implémentation de la topologie du champ magnétique et la modification des équations de structure ont été réalisés, et le schéma de relaxation a été adapté.
Ces routines serviront de base à la mise en œuvre de la diffusion complète et du transport magnéto-rotationnel séculaire ; elles seront alors interfacées avec celles décrivant la rotation. Il faudra encore rajouter le terme d'induction dans l'équation de diffusion pour le champ magnétique, ainsi que le couple de la force de Lorentz dans l'équation du moment angulaire. Nous disposerons alors d'un code d'évolution intégrant les effets magnéto-hydrodynamiques sur des temps évolutifs, dont on sait qu'ils sont nécessairement à l'œuvre.

Bibliographie

[1] E. Böhm-Vitense. « Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte. ». *Zeitschrift für Astrophysik*, 46 :108–+, 1958. 172

[2] T. M. Brown, J. Christensen-Dalsgaard, W. A. Dziembowski, P. Goode, D. O. Gough et C. A. Morrow. « Inferring the sun's internal angular velocity from observed p-mode frequency splittings ». *ApJ*, 343 :526–546, août 1989. 168

[3] A. S. Brun. « *Étude théorique de la structure interne du Soleil* ». Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, décembre 1998. 173

[4] A. S. Brun. « Magnetic Instabilities In Stellar Radiation Zones ». Dans *SF2A procceding*, 2006. 168

[5] V. M. Canuto, I. Goldman et I. Mazzitelli. « Stellar Turbulent Convection : A Self-consistent Model ». *ApJ*, 473 :550–+, décembre 1996. 172

[6] V. M. Canuto et I. Mazzitelli. « Stellar turbulent convection - A new model and applications ». *ApJ*, 370 :295–311, mars 1991. 172

[7] V. M. Canuto et I. Mazzitelli. « Further improvements of a new model for turbulent convection in stars ». *ApJ*, 389 :724–730, avril 1992. 172

[8] B. Chaboyer, P. Demarque et M. H. Pinsonneault. « Stellar models with microscopic diffusion and rotational mixing. 1 : Application to the Sun ». *ApJ*, 441 :865–875, mars 1995. 58, 168

[9] J. P. Cox et R. T. Giuli. *Principles of stellar structure.* 1968. 172, 174, 175

[10] C. de Boor. *A practical guide to splines.* 1978. 164

[11] T. Decressin, S. Mathis, A. Palacios, L. Siess, S. Talon, C. Charbonnel et J.-P. Zahn. « Diagnoses to unravel secular hydrodynamical processes in rotating main sequence stars ». *A&A*, 495 :271–286, février 2009. xvii, 160, 161

[12] P. Eggenberger, A. Maeder et G. Meynet. « Stellar evolution with rotation and magnetic fields. IV. The solar rotation profile ». *A&A*, 440 :L9–L12, septembre 2005. 45, 162

[13] F. Espinosa Lara et M. Rieutord. « The dynamics of a fully radiative rapidly rotating star enclosed within a spherical box ». *A&A*, 470 :1013–1022, août 2007. 160

[14] P. Garaud. « Dynamics of the solar tachocline - I. An incompressible study ». *MNRAS*, 329 :1–17, janvier 2002. 168

[15] R. A. García, S. Turck-Chièze, S. J. Jiménez-Reyes, J. Ballot, P. L. Pallé, A. Eff-Darwich, S. Mathur et J. Provost. « Tracking Solar Gravity Modes : The Dynamics of the Solar Core ». *Science*, 316 :1591–, juin 2007. xiv, xvi, 58, 59, 135, 168

[16] D. Gough et M. E. Mcintyre. « Inevitability of a magnetic field in the Sun's radiative interior ». *Nature*, 394 :755–+, août 1998. 59, 168

[17] D. O. Gough et R. J. Tayler. « The influence of a magnetic field on Schwarzschild's criterion for convective instability in an ideally conducting fluid ». *MNRAS*, 133 :85–+, 1966. 177

[18] P. Henrici. *Discrete variable methods in ordinary differential equations.* 1962. 164

[19] L. G. Henyey, J. E. Forbes et N. L. Gould. « A New Method of Automatic Computation of Stellar Evolution. ». *ApJ*, 139 :306–+, janvier 1964. 164

[20] R. Kippenhahn et A. Weigert. *Stellar Structure and Evolution.* Stellar Structure and Evolution, XVI, 468 pp. 192 figs. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also Astronomy and Astrophysics Library, 1990. xiv, 43, 128, 170

[21] L. Li, S. Sofia, P. Ventura, V. Penza, S. Bi, S. Basu et P. Demarque. « Two-Dimensional Stellar Evolution Code Including Arbitrary Magnetic Fields. II. Precision Improvement and Inclusion of Turbulence and Rotation ». *ApJS*, 182 :584–607, juin 2009. 160, 161

[22] L. H. Li, P. Ventura, S. Basu, S. Sofia et P. Demarque. « Two-dimensional Stellar Evolution Code Including Arbitrary Magnetic Fields. I. Mathematical Techniques and Test Cases ». *ApJS*, 164 :215–254, mai 2006. 160, 161

[23] A. Maeder et G. Meynet. « Stellar evolution with rotation and magnetic fields. I. The relative importance of rotational and magnetic effects ». *A&A*, 411 :543–552, décembre 2003. 162

[24] A. Maeder et G. Meynet. « Stellar evolution with rotation and magnetic fields. II. General equations for the transport by Tayler-Spruit dynamo ». *A&A*, 422 :225–237, juillet 2004. 162

[25] S. Mathis, S. Talon, F.-P. Pantillon et J.-P. Zahn. « Angular Momentum Transport in the Sun's Radiative Zone by Gravito-Inertial Waves ». *Sol. Phys.*, 251 :101–118, septembre 2008. 169

[26] S. Mathis et J. P. Zahn. « Transport and mixing in the radiation zones of rotating stars. I. Hydrodynamical processes ». *A&A*, 425 :229–242, octobre 2004. 126, 134, 164

[27] S. Mathis et J. P. Zahn. « Transport and mixing in the radiation zones of rotating stars. II. Axisymmetric magnetic field ». *A&A*, 440 :653–666, septembre 2005. xvii, 66, 125, 164, 165, 171, 231

[28] G. Meynet et A. Maeder. « Stellar evolution with rotation. V. Changes in all the outputs of massive star models ». *A&A*, 361 :101–120, septembre 2000. 160, 168

[29] P. Morel. « CESAM : A code for stellar evolution calculations ». *A&AS*, 124 :597–614, septembre 1997. 110, 118, 163, 178, 203

[30] A. Palacios. « *Modélisation de l'évolution et de la nucléosynthèse stellaire* ». Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2002. 178

[31] M. H. Pinsonneault, S. D. Kawaler, S. Sofia et P. Demarque. « Evolutionary models of the rotating sun ». *ApJ*, 338 :424–452, mars 1989. 168

[32] W. H. Press, S. A. Teukolky, W. T. Vetterling et B. P. Flannery. *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing, Third Edition.* Cambridge University Press, 2007. 164, 182

[33] M. Rieutord. « The dynamics of the radiative envelope of rapidly rotating stars. I. A spherical Boussinesq model ». *A&A*, 451 :1025–1036, juin 2006. 160

[34] E. Schatzman. « Transport of angular momentum and diffusion by the action of internal waves ». *A&A*, 279 :431–446, novembre 1993. 169

[35] K. Schwarzschild. « Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphere ». *Göttinger Nachrichten*, 1 :41, 1906. 177

[36] E. A. Spiegel et J. P. Zahn. « The solar tachocline ». *A&A*, 265 :106–114, novembre 1992. 58, 168

[37] L. Spitzer. *Physics of Fully Ionized Gases.* New York : Interscience (2nd edition), 1962. 129, 183

[38] H. C. Spruit. « Dynamo action by differential rotation in a stably stratified stellar interior ». *A&A*, 381 :923–932, janvier 2002. xiv, 37, 45, 48, 162

[39] S. Talon. « *Hydrodynamique des étoiles en rotation* ». Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris, 1997. 178

[40] S. Talon et C. Charbonnel. « Hydrodynamical stellar models including rotation, internal gravity waves, and atomic diffusion. I. Formalism and tests on Pop I dwarfs ». *A&A*, 440 :981–994, septembre 2005. 59, 169

[41] S. Talon, P. Kumar et J.-P. Zahn. « Angular Momentum Extraction by Gravity Waves in the Sun ». *ApJ*, 574 :L175–L178, août 2002. 169

[42] S. Talon et J.-P. Zahn. « Towards a hydrodynamical model predicting the observed solar rotation profile ». *A&A*, 329 :315–318, janvier 1998. 168

[43] S. Talon, J.-P. Zahn, A. Maeder et G. Meynet. « Rotational mixing in early-type stars : the main-sequence evolution of a 9 $M_\odot$ star. ». *A&A*, 322 :209–217, juin 1997. 160, 168

[44] S. Turck-Chièze. « Seismic and Dynamical Solar Models - The Impact of the Solar Rotation History ». *ApJ*, 2009. xvi, 58, 134, 135, 168, 178

[45] S. Turck-Chièze, S. Couvidat, L. Piau, J. Ferguson, P. Lambert, J. Ballot, R. A. García et P. Nghiem. « Surprising Sun : A New Step Towards a Complete Picture ? ». *Physical Review Letters*, 93(21) :211102–+, novembre 2004. 118, 168

[46] J. P. Zahn. « Circulation and turbulence in rotating stars ». *A&A*, 265 :115–132, novembre 1992. 66, 167

[47] J. P. Zahn, A. S. Brun et S. Mathis. « On magnetic instabilities and dynamo action in stellar radiation zones ». *A&A*, 474 :145–154, octobre 2007. xiv, 46, 48, 162

[48] J.-P. Zahn, S. Talon et J. Matias. « Angular momentum transport by internal waves in the solar interior. ». *A&A*, 322 :320–328, juin 1997. 169

Chapitre 7

L'astérosismologie : une nouvelle sonde des intérieurs stellaires

Sommaire

7.1 La mission CoRoT 190
7.1.1 Description du satellite et de la mission 190
7.1.2 Observations marquantes 191
7.2 Théorie des oscillations 192
7.2.1 Les oscillations adiabatiques non-radiales 192
7.2.2 Théorie asymptotique des modes p et variables sismiques 200
7.3 Étude de l'impact de processus physiques sur la modélisation de l'étoile HD49933 202
7.3.1 HD49933 : données observationnelles 202
7.3.2 Outils employés pour l'étude 203
7.3.3 Résultats 203
7.3.4 Perspectives 204
7.4 Publication reliée : article 4 204
Bibliographie 212

Et j'aime la nuit écouter les étoiles.
C'est comme cinq cent millions de grelots ...
– Antoine de Saint-Éxupéry, le Petit Prince, ch. XXVII

À LA FIN du XVIe siècle (en 1595), l'astronome danois David Fabricius observa un accroissement de la luminosité de l'étoile *o* Ceti. Celle-ci fut alors présumée être une nova, le concept d'étoiles pulsantes n'existant pas encore. Lorsqu'il observa une recrudescence de la luminosité de cette étoile en 1609, celle-ci fut baptisée *Mira* (« magnifique »).

La possibilité d'utiliser ces variations pour obtenir des informations sur les propriétés stellaires a été suggérée bien plus tard par H. Shapley en 1914. En effet, quelques années plus tôt, H. Levitt, en 1908, mettait en évidence la relation période–luminosité des étoiles Céphéides, montrant ainsi l'importance de ces objets pour mesurer les distances dans l'Univers. Mais il semblait encore impossible alors de voir l'intérieur des étoiles et Eddington disait en 1926 [15] : *"It is not too much to hope that in a not too distant future we shall be competent to understand so simple a thing as a star"*. Pourtant il a fallu attendre les années 1950 [37, 11] pour identifier la cause de la pulsation des Céphéides et la fin des années 1960 pour mesurer les premières oscillations solaires : c'est grâce à R. Ulrich [30] et Unno [31, 33] que la théorie de la sismologie stellaire s'est imposée.

Aujourd'hui l'héliosismologie apporte de manière indiscutable des contraintes utiles à l'introduction des processus dynamiques stellaires internes. J'ai illustré ce fait dans les chapitres précédents. Apparaît maintenant l'âge d'or de l'astérosismologie avec les missions spatiales CoRoT et Kepler .

Pour cette thèse, j'ai choisi l'exemple d'une étoile de type solaire, HD49933, pour illustrer la sensibilité des modes à la physique stellaire. C'est un premier travail sur une étoile observée par le satellite CoRoT . Ce satellite a permis de mettre en évidence les pulsations de bien d'autres types d'étoiles tels que, par exemple, les géantes rouges et les β Cépheides. Contrairement au Soleil, la masse et le rayon des étoiles sont souvent mal connus, aussi mesurer une vingtaine ou une quarantaine de modes pour des milliers d'étoiles va faire progresser fortement notre connaissance de l'évolution stellaire en termes de processus microscopiques mais aussi macroscopiques tels que la convection, la rotation interne et les effets magnétiques. Dans ce chapitre, je résumerai les caractéristiques de ce minisatellite principalement français, les bases de la théorie des oscillations et l'approche classique que nous avons adopté pour étudier les modes de l'étoile HD49933. Je montrerai finalement ce que l'on attend de l'étude de ces étoiles.

7.1 La mission CoRoT

CoRoT (pour Convection, Rotation et Transits planétaires, et en référence au peintre pré-impressionniste) est une mission du CNES (P.I. : Annie Baglin [1]). Ce télescope spatial a été lancé le 27 décembre 2006, du cosmodrome de Baïkonour (Kasakhstan).
Sa mission est double : la recherche de planètes extra-solaires et l'astérosismologie sur un grand nombre d'étoiles.

7.1.1 Description du satellite et de la mission

La plate-forme utilisée est du type Proteus. Sa charge utile de 300 kilogrammes est composée d'un télescope afocal de 30 cm de diamètre et d'une caméra numérique grand champ ($2,7 \times 3$) fonctionnant dans le domaine visible et sensible à de très faibles variations de la lumière.
La matrice CCD est composé de quatre capteurs à transfert de trame de 8 millions de

pixels chacun. Deux des capteurs sont consacrés à l'astérosismologie, les deux autres à la recherche des planètes extrasolaires. Le logiciel de vol est en charge des traitements des mesures de photométrie. La stabilité de la ligne de visée est de l'ordre de 0,2 seconde d'arc. Chaque jour, 1.5 Gbits de données peuvent être transmises vers les trois stations de réception françaises et brésilienne et 2 Gbits de données peuvent être stockées à bord du satellite.

La durée initiale de la mission, de deux années et demi, a été étendue. Le satellite est placé en orbite polaire inertielle à 896 km d'altitude. Cette orbite, inédite pour un satellite d'observation du ciel, permet des campagnes d'observation de longue durée et sans interruption, mais pose également quelques problèmes : le satellite doit se retourner tous les six mois afin de ne pas être ébloui par le Soleil ; par ailleurs, à cette altitude, la lumière diffusée par la surface de la Terre est encore relativement importante. Cette dernière a imposé une étude préalable qui a conduit à la spécification et la conception d'un baffle optique à haut coefficient d'atténuation (meilleure que 10^{12}) à l'entrée du télescope. Le satellite étudie alternativement, durant 6 mois chacune, deux zones du ciel situées à l'intersection du plan galactique et de l'équateur céleste (les « yeux » de CoRoT).
Le satellite intégré est représenté en Fig. 7.1.

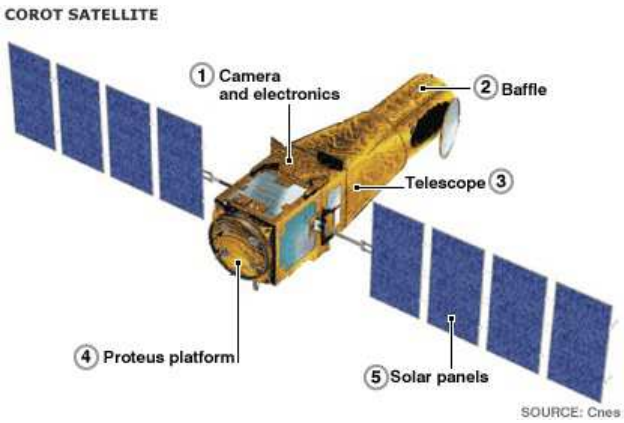


Figure 7.1 – Représentation du satellite CoRoT. Crédit : CNES

7.1.2 Observations marquantes

CoRoT devait permettre de détecter la première planète extrasolaire tellurique. Cette mission a été accomplie avec succès, car après détection de plusieurs exoplanètes massives de type « Jupiter-chaud », une première planète « super-Terre » a enfin été découverte, CoRoT-Exo-7b [16].

Concernant le volet astérosismologique, les premières observations –d'une qualité exceptionnelle par rapport aux observations terrestres–, ont notamment mis en évidence des oscillations montrant clairement la signature sismique typique d'étoiles de type solaire sur des étoiles de type F et G. Récemment, des oscillations de type solaire ont également été mises en évidence [2] sur une étoile bien plus massive, V1449 Aql, qui se rajoutent à un

autre mécanisme de pulsation connu sur ces objets (le mécanisme κ, cette étoile étant de type β Cephei).

7.2 Théorie des oscillations

7.2.1 Les oscillations adiabatiques non-radiales

Hypothèses de travail

Pour comprendre et quantifier les oscillations stellaires, il faut étudier l'évolution de petites perturbations dans une étoile autour d'un état d'équilibre. Nous allons pour cela faire quelques hypothèses :

1. ***Oscillations indépendantes de l'évolution*** La structure de l'étoile n'évolue pas pendant les oscillations, *i.e.* que l'échelle de temps dynamique, caractérisant les oscillations, est négligeable par rapport à celui de l'évolution . Pour une étoile de la séquence principale, cela revient à comparer le temps de chute libre $t_{\rm ff} = \sqrt{R^3/GM}$ et le temps nucléaire $t_{\rm nuc} = r\ f\ M\ c^2/L$ (où r est la proportion de l'étoile où se déroulent les réactions nucléaires, et f leur rendement). Dans le cas solaire, $t_{\rm ff} \simeq$ 1600s ; $t_{\rm nuc} \simeq 10^{10}$ ans.
2. ***Gravitation et force de pression seules*** On néglige tout champ magnétique ainsi que tout effet de la rotation. Vu la faiblesse de la viscosité des plasmas, le fluide est considéré comme parfait, *i.e.* les forces de contact se réduisent au gradient de pression.
3. ***Petites perturbations*** On considère que les perturbations se propageant dans la structure sont faibles. Comme ici nous ne considérerons pas la rotation ni le champ magnétique, les grandeurs d'équilibre f_0 ($f = P, \rho, \Phi_{\rm grav}$,...) sont donc à symétrie sphérique. La grandeur perturbée f est alors la somme de sa grandeur à l'équilibre f_0 et de la perturbation f' qui lui est appliquée :
$$f(r,\theta,\varphi,t) = f_0(r) + f'(r,\theta,\varphi,t) \quad \text{avec} \quad f' \ll f_0 \tag{7.1}$$
Les mouvements générés sont de très faible amplitude au vu du rayon de l'étoile.
4. ***Adiabaticité*** Enfin on se place dans le cadre des oscillations adiabatiques, c'est-à-dire que l'onde n'échange pas d'énergie avec la structure, étant donné que l'échelle de temps caractéristique des phénomènes dynamiques est $t_{dyn} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \simeq 10^3 s.$, donc très inférieure au temps de Kelvin-Helmholtz (durée d'ajustement thermique), $t_{KH} = \frac{GM^2}{2LR} \simeq 10^7 s$. En revanche, localement, le temps d'ajustement thermique devient voisin de l'échelle de temps des oscillations dans les couches les plus superficielles où effectivement on constate un écart à l'adiabaticité. L'existence de cette région superadiabatique va donc entraîner un écart entre fréquences d'oscillations observées et théoriques, estimé à 10^{-3} [8]. Cette approximation est relativement bien vérifiée dans le cas solaire ; dans le cas de l'étoile HD49933 elle sera donc d'autant meilleure que la courbe d'opacités est plus « plate » que celle du soleil, donc les zones partiellement ionisées sont moins susceptibles d'emmagasiner de l'énergie, ce qui engendrerait des oscillations non-adiabatiques. *N.B.* cette hypothèse n'est pas aussi bien vérifiée pour d'autres pulsateurs, en particulier ceux de la bande d'instabilité (Slowly Pulsating B stars, RR Liræ, ...) où intervient le phénomène de « pompe d'Eddington ».

Equations linéarisées dans l'approximation adiabatique

Les équations de base sont les équations de l'hydrodynamique (desquelles dérivent celles de la structure stellaire) :

– l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \mathbf{v}) = 0 \tag{7.2}$$

– l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g} \tag{7.3}$$

– l'équation de Poisson :

$$\mathbf{g} = -\nabla\ \Phi_{\text{grav}} \qquad \text{où} \qquad \nabla^2 \Phi_{\text{grav}} = 4\,\pi\, G\, \rho \tag{7.4}$$

– l'équation d'énergie sous hypothèse adiabatique :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, P = c_s^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \rho \right) \tag{7.5}$$

où la vitesse du son adiabatique c_s vaut $c_s = \sqrt{\Gamma_1 P/\rho}$.

De la même manière que dans le chapitre 4, nous pouvons linéariser ces équations à l'ordre 1, sous l'hypothèse des petits mouvements. Pour alléger les notations on notera $\Phi_{\text{grav}} = \Phi_0 + \Phi'$. Au premier ordre on a donc :

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho_0\, \boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{7.6}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = -\nabla P' - \rho_0 \nabla \Phi' - \rho' \nabla \Phi_0 \tag{7.7}$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho' \tag{7.8}$$

$$P' + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\, P_0 = c_s^2 \left(\rho' + [\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla]\, \rho_0 \right). \tag{7.9}$$

Solutions harmoniques

En suivant le principe de Fourier, nous allons chercher les solutions périodiques de ces équations, de la forme

$$f'(r, \theta, \varphi, t) = \underline{f'}(r, \theta, \varphi)\ e^{-i\omega t}. \tag{7.10}$$

Étant donnée la symétrie sphérique de l'étoile, on décompose le vecteur déplacement en ses composantes radiale et horizontale :

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_r(r, \theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\xi}_h(r, \theta, \varphi))\ e^{-i\omega t}. \tag{7.11}$$

Le système d'équations à résoudre devient alors

$$\underline{\rho}' = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho_0 r^2 \xi_r\right) - \rho_0 \nabla_\perp \cdot \boldsymbol{\xi}_h \tag{7.12}$$

$$-\omega^2 \rho_0 \boldsymbol{\xi}_h = -\nabla_\perp \underline{P}' - \rho_0 \nabla_\perp \underline{\Phi}' \tag{7.13}$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_r = -\frac{\partial \underline{P}'}{\partial r} - \underline{\rho}' g_0 - \rho_0 \frac{\partial \underline{\Phi}'}{\partial r} \tag{7.14}$$

$$-\nabla \Phi_0 = -g_0\, \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} \tag{7.15}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \underline{\Phi}'}{\partial r}\right) \Delta_\perp \underline{\Phi}' = 4\pi G \underline{\rho}' \tag{7.16}$$

$$\underline{P}' + \xi_r \frac{\partial p_0}{\partial r} = c_s^2 \left(\underline{\rho}' + \xi_r \frac{\partial \rho_0}{\partial r}\right) \tag{7.17}$$

où $\nabla_\perp$, $\nabla_\perp \cdot$ et $\Delta_\perp$ sont les parties horizontales (dérivées selon φ et θ) du gradient, de la divergence et du laplacien. Notons qu'en raison de la symétrie sphérique des grandeurs f_0 à l'équilibre, $\nabla_\perp f_0 = \mathbf{0}$, celles-ci étant indépendantes de θ et φ.

On peut ramener ce système de six équations (à six inconnues) à quatre seulement. En appliquant l'opérateur $\nabla_\perp \cdot$ à l'éq. (7.13) et en injectant le résultat dans l'éq. (7.12), $\boldsymbol{\xi}_h$ disparaît et on obtient :

$$\omega^2 \left[\underline{\rho}' + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \rho_0 \xi_r\right)\right] = -\Delta_\perp \underline{P}' - \rho_0 \Delta_\perp \underline{\Phi}'. \tag{7.18}$$

Dans le nouveau système d'équations (7.14)–(7.18), on constate que les variables θ et φ interviennent seulement à travers le Laplacien horizontal $\Delta_\perp$. On peut donc effectuer une séparation des variables, *i.e.* écrire les fonctions inconnues $\underline{P}'$, $\underline{\rho}'$, $\underline{\Phi}'$ et ξ_r sous la forme d'un produit $f_1(r) f_2(\theta, \varphi)$. On peut ensuite les décomposer sur une base de fonctions propres de $\Delta_\perp$.

On remarque ainsi qu'on ne se restreint pas aux seules oscillations radiales, puisqu'on autorise des variations des grandeurs en fonction de θ ou φ. Les oscillations radiales sont celles pour lesquelles $f_2 \equiv$ cte.

Projection sur les harmoniques sphériques Les harmoniques sphériques $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ constituent une base propre de l'opérateur $\Delta_\perp$. Les principales propriétés de ses fonctions sont données en annexe B. Elles vérifient l'équation aux valeurs propres

$$\Delta_\perp Y_\ell^m = -\frac{L^2}{r^2} Y_\ell^m = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} Y_\ell^m \tag{7.19}$$

Les harmoniques sphériques sont quantifiées par deux nombres entiers : leur *degré* ($\ell \geqslant 0$) et leur *ordre azimutal* (m, tel que $-\ell \leqslant m \leqslant \ell$).
On projette les quatre fonctions inconnues ξ_r, ρ', P' et Φ' sur cette base, ce qui revient à les rechercher sous la forme

$$f' = \tilde{f}'(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi). \tag{7.20}$$

En substituant ces expressions dans le système (7.14)–(7.18) et en utilisant l'éq. (7.19), on

aboutit à

$$\omega^2\left[\tilde{\rho}' + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\rho_0\tilde{\xi}_r\right)\right] = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}(\tilde{P}' + \rho_0\tilde{\Phi}') \tag{7.21}$$

$$-\omega^2\rho_0\tilde{\xi}_r = -\frac{\mathrm{d}\tilde{P}'}{\mathrm{d}r} - \tilde{\rho}' g_0 - \rho_0\frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}r} \tag{7.22}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\tilde{\Phi}'}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\tilde{\Phi}' = 4\pi G\tilde{\rho}' \tag{7.23}$$

$$\tilde{P}' + \tilde{\xi}_r\frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}r} = c_s^2\left(\tilde{\rho}' + \tilde{\xi}_r\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}r}\right) \tag{7.24}$$

Nombre d'onde horizontal On constate que, de par la propriété des harmoniques sphériques donnée par l'éq. (7.19), pour toutes perturbations $f' = P', \rho', \Phi', \xi_r$, on a la relation

$$\Delta_\perp f' + \underbrace{\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}}_{k_h^2(r)} f' = 0, \tag{7.25}$$

équation d'onde stationnaire classique. Ainsi si l'on considère les ondes comme localement planes, k_h apparaît comme la composante horizontale du vecteur d'onde.

Déplacement horizontal À partir de l'éq. (7.13), on peut maintenant déduire une expression pour la partie horizontale du déplacement $\boldsymbol{\xi}_h$:

$$\boldsymbol{\xi}_h = \tilde{\xi}_h(r) r\nabla_\perp Y_\ell^m(\theta,\varphi) \quad \text{avec} \quad \tilde{\xi}_h = \frac{1}{r\omega^2}\left(\frac{1}{\rho_0}\tilde{P}' + \tilde{\Phi}'\right) \tag{7.26}$$

Système final d'équations En résumé, après quelques manipulations mathématiques, on obtient le système d'équations différentielles du quatrième[1] ordre suivant (pour alléger les notations, l'indice $_0$ et le tilde ($\tilde{}$) ont été supprimés) :

$$\frac{\mathrm{d}\xi_r}{\mathrm{d}r} = -\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1 P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\right)\xi_r + \frac{1}{\rho {c_s}^2}\left(\frac{{S_\ell}^2}{\omega^2} - 1\right)P' + \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2 r^2}\Phi' \tag{7.27}$$

$$\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}r} = \rho(\omega^2 - \mathcal{N}^2)\xi_r + \frac{1}{\Gamma_1 P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}P' - \rho\frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}r} \tag{7.28}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}r}\right) = 4\pi G\left(\frac{P'}{{c_s}^2} + \frac{\rho\xi_r}{g}\mathcal{N}^2\right) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\Phi' \tag{7.29}$$

où l'on a défini S_ℓ, la pulsation de Lamb, comme

$$S_\ell^2 = \frac{\ell(\ell+1)c^2}{r^2} \tag{7.30}$$

et $\mathcal{N}$, la pulsation de Brunt-Väissälä, comme

$$\mathcal{N}^2 = g\left(\frac{1}{\Gamma_1 P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\right). \tag{7.31}$$

1. Les quatre fonctions inconnues sont ξ_r, P', Φ' et $\frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}r}$. Il y a donc une quatrième équation implicite $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\Phi') = \frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}r}$.

Fréquence de Lamb La fréquence de Lamb dépend de la compressibilité du milieu. Elle contient à la fois une information physique, la vitesse du son (c_s), et une information sur la géométrie que nous imposons, à savoir une géométrie sphérique, qui apparaît sous la forme des facteurs $\ell(\ell+1)$ et $1/r^2$. Cette fréquence intervient, comme nous le verrons plus loin, dans la propagation des modes de pression.

Fréquence de Brunt-Väissälä La fréquence de Brunt-Väissälä définie ci-dessus correspond à la fréquence d'oscillation d'une particule fluide écartée de sa position d'équilibre, oscillant sous l'effet de la gravité et de la force d'Archimède. Si $\mathcal{N}^2 > 0$, $\mathcal{N}$ est réel et la particule fluide oscille autour d'une position d'équilibre : la zone est stable du point de vue de la convection, donc radiative. En revanche, si $\mathcal{N}^2 < 0$, $\mathcal{N}$ est imaginaire, la région est donc instable par rapport à la convection. Cette fréquence joue un rôle important pour les modes de gravité.

Conditions aux limites Pour résoudre ce système du quatrième ordre, il faut fixer quatre conditions aux limites. Au centre, on fixe deux conditions de régularité des solutions : $\xi_r = \ell\xi_h$ et $\frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}r} = \ell\frac{\Phi'}{r}$ [10]. À la surface, le problème est plus complexe, en particulier à cause de la présence de la la région superadiabatique. Usuellement, deux types de conditions sont utilisées :

- ***limite zéro*** On considère la variation lagrangienne δP nulle à la surface ($r = R_*$). Cette approximation est utile car permet de faire des calculs variationnels à la base de certaines techniques d'inversion.
- ***Atmosphère isotherme*** On considère, dans ce cas, que la structure de l'étoile est reliée à une atmosphère isotherme dont on déduit deux conditions aux limites. Pour plus d'informations, *cf.* Christensen-Dalsgaard (1982) [6].

Modes propres et fréquences propres

Le système d'équations (7.27)–(7.29), avec ses quatre conditions aux limites, forme un problème aux valeurs propres qui n'admet des solutions non triviales que pour des valeurs discrètes de ω. Cette quantification est faite à l'aide d'un nombre n caractérisant le nombre de nœuds de la fonction ξ_r. Pour résumer, le problème des oscillations stellaires a pour solution un ensemble d'ondes, stationnaires par construction, constituant les *modes propres* d'oscillations, caractérisés par les trois entiers n, ℓ et m :

- ℓ ($\geqslant 0$), son degré, représentant le nombre de lignes de nœuds du mode sur la sphère ; les modes $\ell = 0$ sont les modes radiaux ;
- m ($-\ell \leqslant m \leqslant \ell$), son ordre azimutal, donnant le nombres de lignes passant par les pôles ;
- n, l'ordre radial, indiquant le nombre de nœuds le long d'un rayon. Par convention, on note $n > 0$ les modes p et $n < 0$ les modes g, quant aux modes f, ce sont ceux dont $n = 0$ (*cf.* § 7.2.1).

A chaque mode propre correspond une *fréquence propre* $\nu_{n\ell m} = \omega_{n\ell m}/2\pi$. Or les équations (7.27)–(7.29) sont indépendantes de m. Ceci est dû à la symétrie sphérique que nous avons supposée : en effet, une dépendance en m signifie qu'on peut privilégier un axe de l'espace. Le problème est donc dégénéré en m : les fréquences propres n'en dépendent pas,

i.e.

$$\nu_{n\ell m} = \nu_{n\ell}$$

Une brisure de symétrie, comme la rotation de l'étoile ou le champ magnétique, lève cette dégénérescence, ce qui va induire un « splitting » donnant lieu à un multiplet en fréquences de $2\ell + 1$ modes.

Approximation de Cowling

Cowling [9] fait en 1941 une approximation supplémentaire consistant à négliger les perturbations eulériennes du potentiel gravitationnel :

$$\Phi' \simeq 0 \tag{7.32}$$

(cette approximation porte désormais son nom). Le système (7.27)–(7.29) se réduit alors à un système d'ordre 2 :

$$\frac{\mathrm{d}\xi_r}{\mathrm{d}r} = -\left(\frac{2}{r} - \frac{g}{c_s^2}\right)\xi_r + \frac{1}{\rho c_s^2}\left(\frac{S_\ell^2}{\omega^2} - 1\right)P', \tag{7.33}$$

$$\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}r} = \rho(\omega^2 - \mathcal{N}^2)\xi_r - \frac{g}{c_s^2}P'. \tag{7.34}$$

Cette approximation n'est valable que pour un mode de degré et d'ordre ℓ et n élevés [7]. En effet, lorsque le potentiel gravitationnel augmente localement à cause d'une augmentation de la densité du milieu, il diminue à un autre endroit. Ainsi, si la fluctuation ρ' change de nombreuses fois de signe, les variations de Φ' se compensent. Cette compensation s'effectue donc mal pour les modes d'ordre n faibles, car les échelles spatiales d'un tel mode ne sont pas beaucoup plus petites que celles de la structure de l'étoile. Cette approche est également très grossière pour les modes de bas degré ℓ ainsi que pour les modes de gravité, car ces modes pénètrent profondément l'étoile, dans les couches les plus denses de l'étoile. Toutefois, bien que parfois grossière, cette approche analytique va nous permettre de comprendre le comportement et la nature des modes propres.

Modes de pression et de gravité

Cavité résonnante Dans l'approximation de Cowling (éqs. (7.33) & (7.34)) et en considérant que la structure varie lentement par rapport à l'onde qui la parcourt, on peut se ramener à une équation différentielle du second degré, classique équation d'onde à une dimension, appelée équation « aux points tournants » :

$$\frac{\mathrm{d}\xi_r}{\mathrm{d}r^2} = K(r)\xi_r \quad \text{avec} \quad K(r) = \frac{\omega^2}{c_s^2}\left(1 - \frac{\mathcal{N}^2}{\omega^2}\right)\left(\frac{S_\ell^2}{\omega^2} - 1\right) \equiv k_r^2. \tag{7.35}$$

De la même manière qu'on a fait apparaître k_h (éq. (7.25)), on fait apparaître ici la composante radiale du vecteur d'onde k_r.

On constate ainsi que l'onde ne peut se propager qu'à la seule condition que $K(r) > 0$, sans quoi l'onde est amortie (on parle d'onde évanescente). Cela peut se réaliser dans deux domaines de fréquences :

1. soit $\omega < \mathcal{N}$ et $\omega < S_\ell$: il s'agit alors de mode de gravité (mode g) ;
2. soit $\omega > \mathcal{N}$ et $\omega > S_\ell$: il s'agit alors de mode de pression (mode p).

Les modes g Ces modes sont ceux dont la force de rappel principale est la poussée d'Archimède [2]. Les modes de gravité sont donc des modes de basse fréquence (pour le Soleil, inférieures à $\sim 470\,\mu$Hz, maximum de $\mathcal{N}$), piégés dans la zone radiative – puisque $\mathcal{N}^2 < 0$ dans une zone convective par définition –, bien qu'une partie de l'énergie de ces modes doit réussir à s'échapper de cette cavité sous forme d'ondes évanescentes, entraînant des oscillations d'amplitude extrêmement faible à la surface de l'étoile. La fréquence des modes de gravité décroît avec n et il n'existe pas de mode g à $\ell = 0$.

Ces modes sont très sensibles aux conditions physiques régnant dans le cœur nucléaire, d'où tout l'intérêt que leur porte la communauté scientifique héliosismique et même au delà. On comprend aussi toute la difficulté pour les détecter à cause de leur très faible amplitude à la surface du Soleil et donc la nécessité de développer des instruments de très haute précision dédiés à leur détection, comme les instruments Golf [17], et désormais Golf-NG [29].

Les modes p Les modes de pression (ou acoustiques) sont des modes de haute fréquence dont la force de rappel est la force de pression. En effet, pour ces modes de haute fréquence $\omega \gg \mathcal{N}$, $k_r^2 = K(r) \sim \frac{1}{c_s^2}\left(S_\ell^2 - \omega^2\right)$. N'intervient donc plus dans l'équation que le terme en S_ℓ lié à la compressibilité. On obtient le même résultat en négligeant le terme de poussée d'Archimède dans les équations et en redéveloppant le calcul.

Point de retournement interne Les modes de pression sont confinés dans l'étoile dans une coquille sphérique allant de la surface jusqu'à une profondeur dépendant de S_ℓ (donc du degré latitudinal ℓ) et de ω. La limite intérieure de la cavité est simplement définie grâce à l'équation 7.35 comme le point où $K(r) = 0$ (le vecteur d'onde radial s'annule alors). On appelle ce point *le point de retournement interne* r_t. Il vérifie l'équation

$$\frac{c_s(r_t)}{r_t} = \frac{\omega}{L} \tag{7.36}$$

avec $L^2 = \ell(\ell+1)$. On constate deux choses :

- plus le degré ℓ est faible, plus la cavité est étendue ;
- à degré ℓ fixé, plus la fréquence est élevée, *i.e.* plus l'ordre n l'est, plus l'onde rentre profondément dans l'étoile.

Les modes acoustiques que nous étudions sont, par définition, des ondes stationnaires. On peut se les représenter comme une superposition d'ondes progressives constructives, localement planes de vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Les ondes, excitées par la convection superficielle, pénètrent quasiment radialement ($k_r \gg k_h$). Au fur et à mesure que l'onde pénètre, le rapport k_r/k_h change car le milieu n'est pas uniforme. En allant vers l'intérieur, ce rapport décroît du fait *primo* de ce que la vitesse du son c_s croît et *secundo* de la croissance de $1/r^2$. Cette décroissance est d'autant plus rapide que ℓ est grand. Lorsque $k_r = 0$ l'onde change alors de sens de propagation et se redirige vers la surface. Lorsqu'elle l'atteint, la chute brutale de la densité du milieu l'empêche de se propager, l'obligeant à se réfléchir, un peu comme une onde se propageant sur une corde et arrivant à une extrémité libre. L'onde, replongeant à nouveau, recommence un semblable parcours.

2. En effet, pour ces modes de basses fréquences $\omega \ll S_\ell$, ainsi $K(r) \sim \frac{S_\ell^2}{c_s^2}\left(1 - \frac{\mathcal{N}^2}{\omega^2}\right)$. C'est donc bien le terme lié à la fréquence de Brunt-Väisälä qui domine l'équation différentielle dans ce cas-là.

Toutefois nous avons vu que l'approximation de Cowling était peu adaptée aux ondes entrant profondément dans l'étoile. On peut tenir compte des fluctuations du potentiel gravitationnel en modifiant la relation de dispersion des ondes planes ($\omega^2/c_s^2 = k^2 = k_r^2 + k_h^2$, vérifiée ici) par [19] :

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G\rho \tag{7.37}$$

conduisant pour le point de retournement interne à la relation

$$\frac{c_s(r_t)}{r_t} = \frac{\sqrt{\omega^2 + 4\pi G\rho(r_t)}}{L}. \tag{7.38}$$

Point de retournement externe et fréquence de coupure Comme nous venons de le voir, à proximité de la surface, l'onde va se réfléchir du fait de la chute brutale de la densité et de la pression. Toutefois, à la surface d'une étoile, il n'y a pas de discontinuité des grandeurs physiques et la notion de « chute brutale » va dépendre de la longueur de l'onde incidente, *i.e.* de ω. Ainsi en un point donné de l'atmosphère, en fonction des dérivées de ρ (ou P), une onde sera réfléchie ou non selon sa fréquence. On appelle la fréquence limite la fréquence de coupure ω_c : si $\omega > \omega_c$, l'onde peut continuer à se propager ; elle se réfléchit sinon. On peut montrer que dans une atmosphère isotherme,

$$\omega_c = \frac{c_s}{2H_P}. \tag{7.39}$$

On peut définir ainsi un point de retournement externe r_e pour chaque mode, ce point vérifiant la relation $\omega = \omega_c(r_e)$ (On notera que cette relation est indépendante de ℓ). On peut faire deux constats majeurs :

- plus ω est grand, plus le retournement externe est élevé ;
- au-delà d'une fréquence de coupure ($\sim 5600\,\mu$Hz pour le Soleil), les ondes ne sont pas réfléchies à la surface solaire : il n'y a donc pas de modes possibles au-delà de cette fréquence (nous n'entrerons pas dans le détail des modes chromosphériques).

Mode $n = 0$: mode f Les modes f – pour fondamental – correspondent aux modes sans nœud radial. Ils ne peuvent dons évidemment pas être purement radiaux ($\ell = 0$), comme les modes g. Il ne peuvent non plus être de degré $\ell = 1$, ce qui correspondrait à un déplacement du centre de masse. Les modes f de haut degré sont similaires à des ondes de gravité de surface, tout comme les ronds dans l'eau...
Ils sont utilisés en héliosismologie locale [14].

Notion de modes mixtes Cette distinction entre modes de gravité et modes de pression n'est pas toujours si nette dans la réalité, puisque force de pression et poussée d'Archimède peuvent exercer toutes les deux un rappel en même temps. En particulier, les modes de pression dont la fréquence est plus petite que $\sim 470\,\mu$Hz présentent un caractère mixte, à savoir un comportement proche d'un mode p en surface et d'un mode g proche du cœur. Ils sont donc particulièrement intéressants à mesurer, car très sensibles au cœur et très peu amortis dans la zone convective.

7.2.2 Théorie asymptotique des modes p et variables sismiques

Pour pouvoir décrire et comprendre l'ensemble des modes observés pour le Soleil, des méthodes analytiques asymptotiques (l'on suppose que le nombre de modes radiaux est très supérieur au degré : $n \gg \ell$, pour avoir une meilleure « résolution » sur le rayon que sur la sphère) ont été développées. Elles permettent d'étudier les solutions du système d'éqs. (7.27)–(7.29) sans avoir à faire le calcul numérique complet [25, 35, 27, 12]. Puis des méthodes, valables au deuxième ordre, ont été développées pour les modes de bas degré dans les années 1990, dans le contexte de l'astérosismologie [28, 36, 22, 26].

Je ne n'entrerai pas ici dans le détail de ces développements, mais me contenterai d'exposer le nécessaire pour pouvoir introduire les variables sismiques.

Approche analytique

En posant la variable $X = c_s^2 \rho^{1/2} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = \rho^{-1/2}(\rho g \xi_r - P')$ [12], on peut se ramener à l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}r} + k_r^2\, X = 0 \tag{7.40}$$

$$\text{avec} \quad k_r^2 = \frac{1}{c_s^2}\left[{S_\ell}^2\left(\frac{\mathcal{N}^2}{\omega^2} - 1\right) + \omega^2 - \omega_c^2\right] \tag{7.41}$$

où ω_c, la fréquence de coupure, s'exprime comme ${\omega_c}^2 = \dfrac{c_s^2}{4H_\rho^2}\left(1 - 2\dfrac{\mathrm{d}H_\rho}{\mathrm{d}r}\right)$. (Cette expression est assez proche de celle obtenue à l'éq. 7.39).

On peut résoudre l'équation 7.40 avec une méthode BKWJ [3] (*cf.* Unno, 1989 [32]). On trouve alors que les fréquences propres vérifient la relation

$$\int_{r_1}^{r_2} k_r = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \ \textit{i.e.} \tag{7.42}$$

$$\omega \int_{r_1}^{r_2} \left[1 - \frac{{\omega_c}^2}{\omega^2} - \frac{{S_\ell}^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{\mathcal{N}^2}{\omega^2}\right)\right]^{1/2} \frac{\mathrm{d}r}{c_s} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \tag{7.43}$$

où r_1 et r_2 sont les points de retournement externe et interne du mode. On obtient un résultat similaire en intégrant l'équation d'onde (7.40) entre ses points tournants, avec une condition aux limites fixe et une libre. En supposant $\mathcal{N}^2$ négligeable, on peut mettre cette équation sous la forme

$$F\left(\frac{\omega}{L}\right) = \frac{n + \alpha(\omega)}{\omega}\pi \tag{7.44}$$

$$\text{avec} \quad F\left(\frac{\omega}{L}\right) = \int_{r_t}^{R_*} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2}\right)^{1/2} \frac{\mathrm{d}r}{c_s} \tag{7.45}$$

où l'on rappelle que $L^2 = \ell(\ell+1)$. Pour aboutir à cette expression, on a dû compenser le changement de borne de r_2 en R_* par un terme de *déphasage* α. En héliosismologie, cette relation porte le nom de loi de Duvall [13].

3. Brillouin, Kramers, Wentzel et Jeffreys

Profondeur et rayon acoustique On définit la profondeur acoustique comme l'intégrale

$$\tau(r) = \int_r^R \frac{\mathrm{d}r}{c_s}. \tag{7.46}$$

Cela correspond au temps mis par une onde radiale pour parcourir la distance séparant la surface d'un point situé au rayon r. On définit de même le *rayon acoustique de l'étoile* $\tau_c = \tau(0)$ correspondant au temps nécessaire à une onde partie du centre pour atteindre la surface. On définit naturellement le *rayon acoustique* $t(r) = \tau_c - \tau(r)$.

Expressions asymptotiques de la fréquence

Des expressions au deuxième ordre ont été développées dans les travaux cités en introduction de cette section. Les fréquences sont développées au premier ordre

$$\nu_{n\ell} = \Delta\nu_0 \left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{4} + \alpha(\nu)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right), \tag{7.47}$$

et au second

$$\nu_{n\ell} = \Delta\nu_0 \left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{4} + \alpha(\nu)\right) + \frac{\Delta\nu_0}{4\pi^2\nu_{n\ell}} \left(L^2 A + 2\psi\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right), \tag{7.48}$$

avec

$$\Delta\nu_0 = \frac{1}{2\tau_c} \text{ et} \tag{7.49}$$

$$A = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{c_s(R_*)}{R_*} - \int_0^{R_*} \frac{\mathrm{d}c_s}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{r}\right). \tag{7.50}$$

La fonction Ψ, et de manière générale le terme du second ordre, dépend des approximations réalisées. L^2 ne vaut généralement pas $\ell(\ell+1)$ mais $(\ell+1/2)^2$ [36, 22]. Cette substitution permet de meilleurs résultats lorsqu'on utilise la méthode BKWJ dans ce contexte [20].

Variables sismiques

Cette approche asymptotique nous permet de construire des variables sismiques, *i.e.* des combinaisons de fréquences, particulièrement sensibles à certains éléments de structure.

Grande différence $\Delta\nu_{n\ell}$ et différences $\delta_k\nu$

On appelle la *grande différence*, $\Delta\nu$, la différence de fréquence entre deux modes radiaux successifs :

$$\delta_1\nu_{n\ell} \equiv \Delta\nu_{n\ell} = \nu_{n+1,\ell} - \nu_{n,\ell} \approx \frac{\partial\nu_{n\ell}}{\partial n}. \tag{7.51}$$

On constate qu'asymptotiquement $\Delta\nu \to \Delta\nu_0 = \frac{1}{2\tau_c}$, soit environ 135 μHz pour le Soleil. Pour l'étoile CoRoT HD49933, elle est d'environ 86 μHz. Cette quantité est sensible aux propriétés globales de l'étoile, en particulier sa masse et son âge.

La *seconde différence* $\delta_2\nu$, s'écrit comme

$$\delta_2\nu_{n\ell} = \nu_{n+1,\ell} - 2\nu_{n,\ell} + \nu_{n-1,\ell} = \Delta\nu_{n\ell} - \Delta\nu_{n-1,\ell} \approx \frac{\partial^2\nu_{n\ell}}{\partial n^2}. \tag{7.52}$$

Dans le cas solaire, ses variations autour de zéro fournissent une information sur la base de la zone convective ou l'abondance en hélium.

On définit également les différences d'ordre supérieur $\delta_k\nu$ qui s'expriment, suivant la parité de k comme

$$\delta_{2p}\nu_{n\ell} = \delta_{2p-1}\nu_{n\ell} - \delta_{2p-1}\nu_{n-1,\ell} \text{ ou} \tag{7.53}$$

$$\delta_{2p+1}\nu_{n\ell} = \delta_{2p}\nu_{n+1,\ell} - \delta_{2p}\nu_{n\ell}. \tag{7.54}$$

Petites différences $\delta_{\ell,\ell+2}\nu$ On appelle *petites différences* les différences

$$\delta_{\ell,\ell+2}\nu_{n,\ell} = \nu_{n,\ell} - \nu_{n-1,\ell+2}. \tag{7.55}$$

Au premier ordre, cette différence est presque nulle. Au second ordre, on trouve

$$\delta_{\ell,\ell+2}\nu_{n,\ell} \approx \frac{(4\ell+6)\Delta\nu}{4\pi^2\nu}\int_0^{R_*}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Cette différence reste, comme l'indique son nom, petite : pour le Soleil, la différence $\delta_{02}\nu$ est de l'ordre de $10\,\mu$Hz. Cela signifie que les modes $(\ell, n+1)$ et $(\ell+2, n)$ sont très proches dans le spectre et qu'ils peuvent se chevaucher.

En astérosismologie, seuls les modes de bas degré sont mesurables, on ne s'intéresse donc en général pour l'instant qu'à la petite différence $\delta_{02}\nu$, voire $\delta_{13}\nu$.

7.3 Étude de l'impact de processus physiques sur la modélisation de l'étoile HD49933

Cette étoile a été étudiée car il s'agit d'une étoile de type solaire dans une voisinage proche de la Terre. Sa masse, comprise entre 1.15 et 1.35 $\mathrm{M}_\odot$ selon les modèles, suppose l'existence d'un cœur et d'une enveloppe convectifs. Sa faible vitesse de rotation ($v \sin i =$ 10.9 km.s^{-1}), étonnamment lente en regard de son activité élevée (variations des profils de lignes spectrales importantes) en fait un objet d'intérêt, susceptible en particulier d'abriter des champs magnétiques de type dynamo dans sa fine enveloppe convective.

7.3.1 HD49933 : données observationnelles

Température effective et métallicité

De nombreuses études basées sur des spectres synthétiques et de mesures de spectrophotométrie ont permis de déterminer T_{eff}. Citons en particulier :

- l'étude de Gillon & Magain (2006) [18] mettant en évidence une température effective $T_{eff} = 6700 \pm 65K$ ou $T_{eff} = 6735 \pm 53K$ selon les mesures effectuées sur ELODIE ou HARPS ;
- l'étude de Bruntt *et al.*(2008) [5] utilisant le logiciel VWA met en évidence une température effective $T_{\mathrm{eff}} = 6780 \pm 130K$;

– l'étude de Lastennet *et al.* (2001) [21] basée sur une analyse détaillée de la librairie BaSeL dans les deux systèmes photométriques (Johnson et Strömgen) et concluant que les meilleurs résultats, fournis par une combinaison des indices photométriques B-V, U-B (Johnson) et b-y (Strömgen), donnent $T_{\text{eff}} = 6600 \pm 130K$;
– la valeur préconisée dans la banque de données GAUDÍ (utilisant uniquement les indices de Strömgen) est, elle, de $T_{\text{eff}} = 6543 \pm 200K$.

Magnitude, luminosité

Pour une magnitude visuelle de $mv = 5.77$, une parallaxe de 33.7±0.4 mas, (par HIPPARCOS *cf.* van Leeuwen, 2007 [34]) et une correction bolométrique $BC = 0.025 \pm 0.005$ [4], nous suggérons une luminosité $\text{Log}(L/L_{\odot}) = 0.53 \pm 0.01$.

Métallicité

La métallicité en surface donnée par Mosser *et al.* (2005) [24] et Gillon & Magain (2006) [18], de $\left[\frac{Fe}{H}\right] = -0.37 \pm 0.03$ dex a été retenue.

7.3.2 Outils employés pour l'étude

Au cours de ces travaux, nous avons été amenés à calculer les caractéristiques des oscillations stellaires – essentiellement les fréquences des modes propres – pour les modèles de structure d'étoiles calculées avec le code CESAM (Morel, 1997) [23] dans le but de les confronter à des oscillations issues du satellite COROT . Pour cela, nous avons utilisé le code Adipack (*Aarhus adiabatic pulsation package*[4]) (Christensen-Dalsgaard, 1982) [6]. Nous nous sommes servis de ce code pour résoudre le système (7.27)–(7.29) avec une condition d'atmosphère isotherme.
L'étude des transferts d'énergie radiatifs et convectifs a bénéficié du code STAGGER (Stein & Nordlund, 1998)

7.3.3 Résultats

HD49933 étant une étoile simple, l'estimation de sa masse (et par conséquent de nombreuses autres de ses caractéristiques) repose sur la modélisation de son parcours évolutif. Elle est donc sensible non seulement à l'approche choisie dans la modélisation (*e.g.* description de la diffusion, mélange rotationnel, overshooting, ...) mais aussi aux paramètres d'entrée de ces modèles, tels que la métallicité ou la fraction en hydrogène. Nous avons donc examiné l'influence de la masse sur la signature sismique de cette étoile, ainsi que celle de sa composition chimique. Puis nous avons regardé comment la modification des processus physiques tels que la diffusion, la rotation et le changement de l'efficacité de la convection peuvent affecter la signature sismique de l'étoile. Premièrement, il est apparu que les incertitudes sur la masse et la composition ont un impact bien plus élevé sur les variables sismiques considérées que la rotation. À partir de simulations MHD radiatives, nous avons montré que l'efficacité de la convection croît en fonction de la température et que cet excès doit être pris en compte pour la calibration des modèles d'étoiles dans la paramétrisation de la longueur de mélange. Cependant, lorsque l'on calcule les grandes différences à partir

4. accessible librement sur l'internet à l'adresse : `http ://www.phys.au.dk/~jcd/adipack.n/`

de modèles prenant en compte un accroissement d'efficacité de la convection, leurs valeurs deviennent en désaccord avec les grandes différences observées (déduites de l'identification des fréquences observées). Cela contraint l'excès du paramètre de la longueur de mélange à 0.2. L'impact des différents processus sur la détermination de la grande différence a été finalement été mis en évidence, ce qui a permis d'en dresser une hiérarchie : l'incertitude sur la masse jouera un rôle prédominant, puis la grandeur caractéristique du changement de phase à la surface, puis la fraction en oxygène, puis l'influence de la longueur de mélange et enfin la vitesse de rotation à l'équateur. Tous les détails des méthodes de résolution employées sont décrites dans l'article joint.

7.3.4 Perspectives

Une des difficultés de l'astérosismologie est l'identification des modes, tout d'abord leur degré. Celui-ci est connu sans ambigüité pour le Soleil car une observation longue permet de bien voir les composantes des degrés $\ell = 1$ et 2, mais pour HD49933 qui tourne probablement cinq fois plus vite, cette identification a été plus complexe car elle nécessite une intégration assez longue. Les données utilisées pour notre étude laissaient une ambigüité entre $\ell = 0$ et $\ell = 1$ aujourd'hui résolue (Benomar *et al.*, 2009 [3]). En revanche l'ordre du mode n'est pas accessible par l'analyse. C'est pourquoi la modélisation d'une telle étoile doit être poursuivie en étudiant de près l'éventuel rôle du champ magnétique en sous-surface. Ceci pourrait être estimé dans les prochaines années même si l'activité de cette étoile est faible. Dans le cas du Soleil il y a une différence d'environ 20-30 μHz qui provient d'un traitement de la sous-surface insatisfaisant : est-ce l'effet du champ magnétique ou celui de la convection turbulente ?

7.4 Publication reliée : article 4

« Impact of the physical processes in the modeling of HD49933 »
L. Piau, S. Turck-Chièze, V. Duez & R .F. Stein
Article publié en octobre 2009 dans la revue *A&A*, volume 506, pp. 175-181 (ci-joint).

A&A 506, 175–181 (2009)
DOI: 10.1051/0004-6361/200911947
© ESO 2009

The CoRoT space mission: early results

Astronomy & Astrophysics
Special feature

Impact of the physical processes in the modeling of HD 49933

L. Piau[1], S. Turck-Chièze[1], V. Duez[1], and R. F. Stein[2]

[1] CEA-Saclay, DSM/IRFU/SAp, L'Orme des merisiers, Bâtiment 709, 91191 Gif-sur-Yvette, France
e-mail: laurent.piau@cea.fr
[2] Michigan State University, Department of Physics & Astronomy East Lansing, MI 48824-2320, USA

Received 25 February 2009 / Accepted 25 June 2009

ABSTRACT

Context. On its asteroseismic side, the initial run of CoRoT was partly devoted to the solar like star HD 49933. The eigenmodes of this F dwarf have been observed with unprecedented accuracy.
Aims. We investigate quantitatively the impact of changes in the modeling parameters like mass and composition. More importantly we investigate how a sophisticated physics affects the seismological picture of HD 49933. We consider the effects of diffusion, rotation and the changes in convection efficiency.
Methods. We use the CESAM stellar evolution code coupled to the ADIPLS adiabatic pulsation package to build secular models and their associated oscillation frequencies. We also exploited the hydrodynamical code STAGGER to perform surface convection calculations. The seismic variables used in this work are: the large frequency separation, the derivative of the surface phase shift, and the eigenfrequencies $\nu_{\ell=0,n=14}$ and $\nu_{\ell=0,n=27}$.
Results. Mass and uncertainties on the composition have much larger impacts on the seismic variables we consider than the rotation. The derivative of the surface phase shift is a promising variable for the determination of the helium content. The seismological variables of HD 49933 are sensitive to the assumed solar composition and also to the presence of diffusion in the models.

Key words. stars: late-type – stars: oscillations – stars: interiors – stars: rotation – convection

1. Introduction

The accurate measurements of oscillation frequencies by CoRoT (Baglin et al. 2006) in nearby solar-like stars such as HD 49933 (Appourchaux et al. 2008) aims at constraining their internal dynamics. First, the global parameters of the star (age, mass, composition) must be determined. For this, the seismic data complement the information that already exists. Second, a comparison with sophisticated models is required. In this work we use an updated version of the CESAM stellar evolution code (Morel 1997). CESAM can take into account microscopic diffusion and the radiative accelerations of heavy elements. It also optionally includes the secular effects of rotation in the radiation zones (Mathis & Zahn 2004). The resulting mixing slightly changes the temperature profile of otherwise stably stratified regions and modifies the structure and evolution of the star (Maeder & Meynet 2000; Decressin et al. 2009).

Like helioseismology for the Sun, asteroseismology can constrain the helium fraction in solar analogs. In this respect stars slightly more massive than the Sun are especially interesting targets. Asteroseismology can also constrain convection: the depth of the outer convection zone depends on the efficiency of convective energy transport in the subsurface layers and in turn affects the seismic signal. In the current work, we compute the relation between the effective temperature and the specific entropy in the deep convection zone where the motions become adiabatic. To this purpose, we use the STAGGER hydrodynamical code (Stein & Nordlund 1998). This computation gives an idea of the magnitude of the change of the mixing length main parameter $\alpha_{\rm mlt}$ with the effective temperature for stars having surface conditions close to the solar ones like HD 49933.

Although some of our models are in fair agreement with the current classical and seismological observations of HD 49933, our purpose is not to find the model that best fits them. We intend to estimate the influence of mass, composition and of different internal processes on the seismic indicators and the surface properties of HD 49933. Section 2 presents our secular models of HD 49933 and explores the impact of mass, composition, microscopic diffusion and rotation. Section 3 presents the effects of a modified surface convection efficiency and conclusion follows in Sect. 4.

2. Secular models of HD 49933

We build models of HD 49933 using the CESAM stellar evolution code (Morel 1997). The models are initiated on the zero age main sequence. We use the NACRE compilation of nuclear reaction rates (Angulo et al. 1999). The equation of state (OPAL2001) and high temperature opacities come from the OPAL group (Rogers et al. 1996; Iglesias & Rogers 1996). Below 5800 K we use the opacities of Ferguson et al. (2005). The equation of state and opacity tables were computed for the recent solar metal repartition advocated by Asplund et al. (2005). The atmosphere is buildt using the Hopf law (Mihalas 1978). It is connected to the envelope at the optical depth 20. Finally, the convection zone is fully homogeneous and modeled using

mixing-length theory (hereafter MLT) in a formalism close to Böhm-Vitense (1958) (see Piau et al. 2005, for the exact description of the current MLT formalism). Our Sun calibrated value for the main MLT parameter is $\alpha_{\rm MLT} = 1.587$.

Solano et al. (2005) find [Fe/H] = −0.37. If we assume the Asplund et al. (2005) solar surface composition ($X = 0.7392$, $Z = 0.0122$) and metal repartition then HD 49933 should currently exhibit $X = 0.7664$, $Z = 5.4 \times 10^{-3}$ provided the helium and metals surface abundances follow the typical Galactic enrichment law $\frac{\Delta Y}{\Delta Z} = 3$ (Fernandes et al. 1998)[1]. The effective temperature found in the literature ranges from $T_{\rm eff} = 6780 \pm 130$ K (Bruntt et al. 2008) to $T_{\rm eff} = 6700 \pm 65$ K (Gillon & Magain 2006) but values as low as $T_{\rm eff} = 6600 \pm 130$ K have also been suggested (Lastennet et al. 2001). For a visual magnitude of $m_{\rm v} = 5.77$, the HIPPARCOS parallax (33.7 ± 0.4 mas, van Leeuwen 2007) and bolometric correction (BC = 0.025 ± 0.005, Bessell et al. 1998) suggest $\log(L/L_\odot) = 0.53 \pm 0.01$. The following models have been calibrated in luminosity in the sense that we stop the evolution once they reach the observed luminosity. Unless explicitly mentioned all the models include overshooting of 0.2 pressure scale height (hereafter $H_{\rm p}$) that is typical of the expected mass range of the star (Claret 2007). We investigate the impact of the mass, the composition and the rotation on the seismic properties of the star. The oscillation frequencies are computed using the Aarhus adiabatic pulsation package ADIPLS (Christensen-Dalsgaard & Berthomieu 1991). We focus our attention on three seismic quantities: the large frequency separation ($\Delta\nu = \nu_{\ell,n+1} - \nu_{\ell,n}$) that is sensitive to the global properties of the star such as mass and age, the lowest degree lowest and highest order modes frequency currently observed ($\nu_{\ell=0,n=14}$ and $\nu_{\ell=0,n=27}$) and the derivative of the surface phase shift with frequency ($\beta^\star(\nu)$) in order to address the helium ionization effects. We do not investigate the small separation or other seismic variables. To determine the averages of these quantities, we exclude frequencies below a cut off of 1 mHz in order to be in the asymptotic regime.

2.1. Mass effects

HD 49933 being a single star, its mass estimate relies on evolutionary tracks. It is therefore sensitive not only to the approach chosen in the modelling (e.g. description of diffusion, rotation mixing, overshooting ...) but also to the input parameters of the models such as the metallicity and the helium fraction. For these reasons it is interesting to address the influence of the mass on the seismic signature of this star. Mosser et al. (2005) suggested $M/M_\odot \approx 1.2$ and we explore the effect of mass variation around this value. No diffusion or rotation effects are taken into account in the models of this subsection. The convection overshooting in the core is 0.2 $H_{\rm p}$, however the overshooting has a very moderate impact on the variables we consider here. As illustrated by the work of Goupil et al. (2009), overshooting mostly influences the small seismic separation which we have not considered here. As an indication of the overshooting impact, we provide a 1.17 $M_\odot$ model without overshooting on the last line of Table 1.

Table 1 shows the values of the large separation and the frequencies of the modes of degree $\ell = 0$ and radial orders $n = 14$ and $n = 27$. These modes should respectively minimize and maximize the surface effects. The recent analysis of Benomar et al. (2009) suggests two slightly different observational solutions owing to the modes identification. The first mode identification, named $M_{\rm A}$ by Benomar et al., corresponds to the work of Appourchaux et al. (2008) $\Delta\nu = 85.92 \pm 0.43$ μHz, $\nu_{\ell=0,n=14} = 1244.43 \pm 3.90$ μHz and $\nu_{\ell=0,n=27} = 2363.81 \pm 3.90$ μHz. The other mode identification, $M_{\rm B}$, provides $\Delta\nu = 85.81 \pm 0.29$ μHz, $\nu_{\ell=0,n=14} = 1290.55 \pm 6.97$ μHz and $\nu_{\ell=0,n=27} = 2405.90 \pm 3.48$ μHz (2σ error bars). The models in Table 1 all have the same composition: $X = 0.7664$, $Z = 5.4 \times 10^{-3}$. A 0.2 $H_{\rm p}$ core convection overshooting is included in all models except the one mentioned by † where there is no overshooting. The second part of the table displays the current seismic observations following the two possible mode identification $M_{\rm A}$ and $M_{\rm B}$ of Benomar et al. (2009). The best fit with seismic data is obtained for 1.17 $M_\odot$. Within error bars, the large separation of this model agrees with identification $M_{\rm A}$ of Benomar et al. (2009) and is marginaly above their identification $M_{\rm B}$. The absolute frequencies of our model and of this second solution agree at low and high order. Figure 1 displays the difference in eigenfrequencies between our model and the two observational solutions for degree $\ell = 0$, as a function of the radial order. The difference is always below 40 μHz. Note that in the solar case, predicted and observed eigenmodes frequencies agree at low frequencies but differ by ∼20 μHz at high frequencies most likely because of surface effects (Turck-Chièze et al. 1997). The average difference between the model and the first and second observed solutions of Benomar et al. (2009) are respectively −32.6 μHz and 12.2 μHz. In both cases there is a clear trend in the model/observations difference with increasing frequency which might be due to the absence of subphotospheric turbulence and/or magnetic surface effects as in the solar case.

Table 1. Mass effect on the large frequency separation, $\nu_{\ell=0,n=14}$ and $\nu_{\ell=0,n=27}$.

$M/M_\odot$	$T_{\rm eff}$ [K]	$\Delta\nu$ [μHz]	$\nu_{\ell=0,n=14}$ [μHz]	$\nu_{\ell=0,n=27}$ [μHz]	Model
1.25	6924	100.1	1480	2780	1
1.2	6746	92.1	1359	2561	2
1.17	6610	86.2	1270	2403	3
1.17†	6638	87.1	1280	2424	3bis
Mode identification					
$M_{\rm A}$		85.9	1244	2364	
$M_{\rm B}$		85.8	1290	2406	

The large separation, $\nu_{\ell=0,n=14}$ and $\nu_{\ell=0,n=27}$ decreases rapidly with mass and with current modeling assumptions suggests a mass slightly below 1.2 $M_\odot$. The logarithmic derivative of the large separation with mass around 1.17 $M_\odot$ is $\frac{\partial \ln \Delta\nu}{\partial \ln \Delta M} = 2.6$ which means a significant dependence of $\Delta\nu$ on mass (see hereafter). If we extrapolate this result to the average large separation observed by Benomar et al. (2009) 85.92 μHz, we find that the mass of HD 49933 should be 1.168 $M_\odot$. We note that the effective temperature of our 1.17 $M_\odot$ model is between 100 and 150 K below the current estimates but in agreement with the previous determination of Lastennet et al. (2001). We recall that this model was obtained assuming [Fe/H] = −0.37, the solar Asplund et al. (2005) metal repartition and $\frac{\Delta Y}{\Delta Z} = 3$ as the metal vs. helium relation. In the next section we study the effects of composition.

2.2. Composition effects

As recent developments in solar physics have shown, helioseismological results are very sensitive to the solar composition and

[1] It should be noted that the absolute $Z/X = 7.04 \times 10^{-3}$ we adopt is smaller than the one adopted in the study of Goupil et al. (2009) $Z/X = 0.0106$. Unlike us these authors consider the solar metal abundance and mixture of Grevesse & Noels (1993).

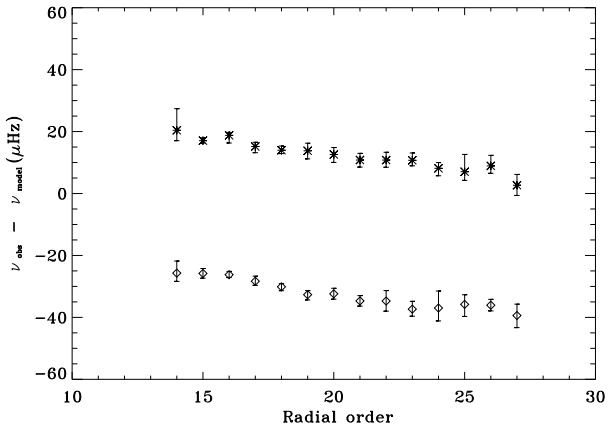


Fig. 1. Differences between the observed eigenfrequencies and the model eigenfrequencies vs. the radial order for degree modes $\ell = 0$. The model considered is model 3, losanges and stars respectively correspond to the M_A and M_B modes identifications of Benomar et al. (2009). We also indicated the 2σ error bars from these authors.

therefore stand as key indicators of it (Turck-Chièze et al. 2004; Bahcall et al. 2005). On the one hand the metals are the main contributors to the opacities in low mass stars (Turck-Chièze et al. 2009, 1993) which directly affects the structure and the seismic signal. On the other hand, because of the low effective temperature, the helium fraction is only accessible through seismology (Basu & Antia 1995). Yet the mass and the age of stars other than the Sun have to be known if one wants to constrain their metals or helium fractions (Basu et al. 2004). In the case of HD 49933 we can therefore only give qualitative indications on the composition.

We addressed the composition issue using the 1.17 $M_\odot$ models, as the mass effects suggest this is the best fit for HD 49933. The A05 and GS98 respectively stand for Asplund et al. (2005) and Grevesse & Sauval (1998) solar metal repartitions. In both cases the assumed metallicity is [Fe/H] = −0.37 dex but in the former case this corresponds to a smaller absolute amount of metals other than iron (mostly oxygen and carbon) than in the later case. If we assume the A05 metal repartition then $X = 0.7664$ and $Z = 5.4 \times 10^{-3}$ (model 3) whereas if we assume the GS98 metal repartition $X = 0.7638$, $Z = 8.02 \times 10^{-3}$ (model 4). These are the current *and* initial convection zone compositions because no microscopic diffusion is taken into account in this subsection. As illustrated in Table 2 the metal repartition and helium abundance have significant impacts on $\Delta\nu$ although smaller than the impact of mass (Sect. 2.1). Please note that the models in Table 2 all have the same mass: 1.17 $M_\odot$. The main difference between A05 and GS98 metal repartition is the [O/Fe] ratio. The logarithmic derivative of the large separation with [O/Fe] is $\frac{\partial \ln \Delta\nu}{\partial \ln \Delta[\mathrm{O/Fe}]} = 0.83$[2]. We mention that variations of the [O/Fe] ratio are observed in nearby stars, the scatter of [O/Fe] across the Galactic disk being the order of 0.2 dex (Edvardsson et al. 1993).

The decrease in the global metal content from GS98 to A05 creates a drop in opacity and therefore a somewhat higher effective temperature at a given luminosity. This corresponds to a smaller radius and a higher interior temperature and is consistent with a larger large separation as:

$$\frac{1}{2\Delta\nu} \sim \int_0^R \frac{\mathrm{d}r}{c}.$$

[2] Asplund et al. (2005) provide [O/Fe] = 1.21 for the Sun and a variation of [O/Fe] of ≈ − 0.2 with respect to Grevesse & Sauval (1998) earlier work.

Table 2. Composition effects on the large frequency separation, $\nu_{\ell=0,n=14}$ and $\nu_{\ell=0,n=27}$.

Metal repartition & $\frac{\Delta Y}{\Delta Z}$	T_{eff} [K]	$\Delta\nu$ [μHz]	$\nu_{\ell=0,n=14}$ [μHz]	$\nu_{\ell=0,n=27}$ [μHz]	Model
A05 $\frac{\Delta Y}{\Delta Z} = 3$	6610	86.2	1270	2403	3
GS98 $\frac{\Delta Y}{\Delta Z} = 3$	6230	74.4	1160	2139	4
A05 $\frac{\Delta Y}{\Delta Z} = 1$	6742	90.8	1338	2525	5

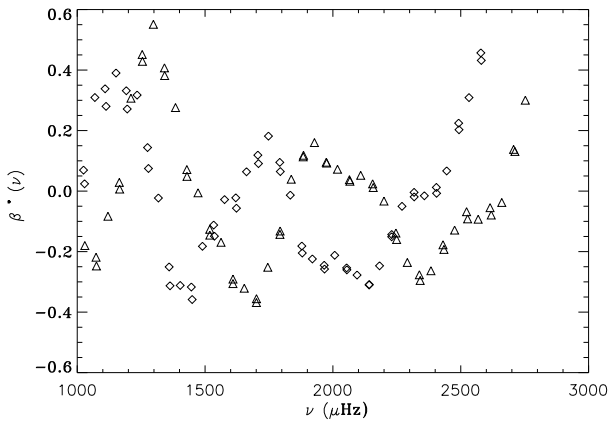


Fig. 2. Losanges: $\beta^\star(\nu)$ vs. ν for the model having $M_\star = 1.17\ M_\odot$ and $X = 0.7664$, $Y = 0.2282$ and $Z = 5.4 \times 10^{-3}$ (model 3). Triangles: $\beta^\star(\nu)$ vs. ν for the same mass but $X = 0.7529$, $Y = 0.2417$ and $Z = 5.3 \times 10^{-3}$ (model 5).

Thus more metal rich models (GS98) suggest a mass higher than 1.17 $M_\odot$. Quantitatively, going from the A05 to the GS98 composition lowers the large difference by ∼8 μHz which is comparable to the mass effect between models 2 and 3 (0.03 $M_\odot$ difference).

The region of the helium second ionization, located right below the photosphere, appears as a discontinuity to the internal waves. As such it creates an oscillatory pattern in the eigenmodes frequencies (Gough 1990) that has been used for some time to infer, for instance, the solar photosphere abundance in helium (Vorontsov et al. 1991). The oscillatory pattern is clearly visible in the second difference seismic variable $\delta_2\nu_{\ell,n} = \nu_{\ell,n-1} - 2\nu_{\ell,n} + \nu_{\ell,n+1}$ especially in stars slightly more massive than the Sun (Piau et al. 2005). While $\delta_2\nu_{\ell,n}$ is probably easier to determine from the observations than the surface phase shift $\alpha(\nu)$, this later variable and its derivatives are less sensitive to uncertainties in frequency determinations (Lopes et al. 1997).

Following Lopes et al. (1997) we compute $\beta(\nu) = \alpha(\nu) - \nu\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\nu}$ to extract the effect of helium in the cases of three stars: models 2, 3 and 5 (see Tables 1 and 2). $\beta(\nu)$ is estimated for the low degree modes $\ell = 0, 1, 2$. Then it is corrected by a linear fit in order to obtain $\beta^\star(\nu)$ whose mean value is 0. $\beta^\star(\nu)$ vs. ν is shown in Figs. 2 and 3. The differences between models 2 and 3 account for the effects of mass whereas the differences between the models 3 and 5 account for the effect of the helium fraction. Models 2 and 3 have an helium mass fraction of $Y = 0.2282$. Because of a different $\frac{\Delta Y}{\Delta Z}$ law model 5 is richer in helium than the other models with $Y = 0.2417$. Note that all our models have the same metallicity [Fe/H] = −0.37.

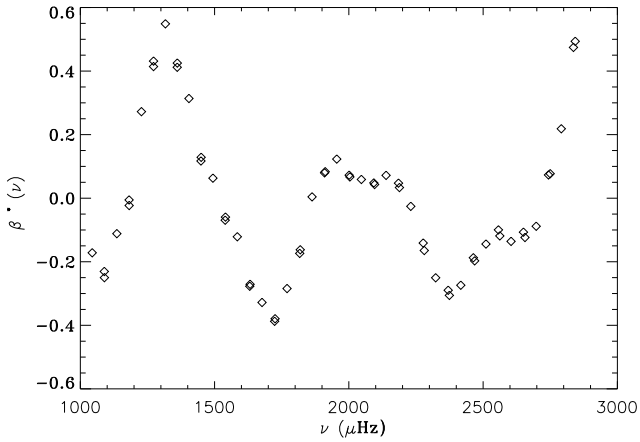


Fig. 3. $\beta^{\star}(\nu)$ vs. ν for the model having $M_{\star} = 1.2\ M_{\odot}$, $X = 0.7664$, $Y = 0.2282$ and $Z = 5.4 \times 10^{-3}$ (model 2).

Figure 2 illustrates the strong dependence of the peaks of $\beta^{\star}(\nu)$ and therefore $\beta(\nu)$ on the helium mass fraction. The increase of $\Delta Y = 0.0135$ from models 3 to 5 increases the frequency of the first peak of $\beta^{\star}(\nu)$ above 1 mHz by $\approx$150 μHz. The second peak of $\beta^{\star}(\nu)$ is shifted by $\approx$200 μHz. However Fig. 3 shows that the position of the peaks in $\beta^{\star}(\nu)$ is also strongly related to the mass. Based on the differences from models 3 to 5, the logarithmic derivative of the large separation with the helium mass fraction is $\frac{\partial \ln \Delta\nu}{\partial \ln \Delta Y} = 0.90$.

2.3. Diffusion effects

The consequences of microscopic diffusion in the enveloppes of solar-like stars are clearly observed. In the case of the Sun it has been known for some time that it improves the agreement between theoretical and observed sound speed profiles (Christensen-Dalsgaard et al. 1993) and it is a necessary process to explain the current photospheric helium abundance (Basu & Antia 1995). Besides this, diffusion is the best candidate to explain the ^{7}Li abundance in Population II solar analogs (Piau 2008; Richard et al. 2005). Finally refined calculations by Turcotte et al. (1998) have shown that a significant change in surface composition through diffusion is expected between 1.1 $M_{\odot}$ and 1.5 $M_{\odot}$ (the typical mass range of HD 49933). We calculate the joint effects of microscopic diffusion (following the formalism of Burgers 1969) and radiative accelerations. We consider that the initial composition is the initial composition of our calibrated solar models including diffusion i.e. $X = 0.7195$ and $Y = 0.2664$ (Turck-Chièze et al. 2004).

Because diffusion takes the metals away from the surface, the diffusive models for a given mass and Z/X surface ratio are cooler than the non diffusive models with the same Z/X surface ratio. For instance a 1.25 $M_{\odot}$ non diffusive model with $Z/X = 1.15 \times 10^{-2}$ and $Y = 0.2664$ has an effective temperature of $T_{\rm eff} = 6856$ K when it reaches the luminosity $\log(L/L_{\odot}) = 0.53$ at 1.12 Gyr. The corresponding 1.25 $M_{\odot}$ diffusive model exhibits $T_{\rm eff} = 6151$ K at the same luminosity which it reaches at 3.32 Gyr (see Table 3). Because of this effect, the diffusive models complying with the observed effective temperature of HD 49933 are more massive than the non diffusive ones. Table 3 shows that they lie around 1.35 $M_{\odot}$ while the non diffusive model with the correct effective temperature have masses around 1.2 $M_{\odot}$. Regarding the seismic properties of diffusive models the same remark can be done. The diffusive model that best agrees with the observations is significantly more massive (1.3 $M_{\odot}$) than the non diffusive one (1.17 $M_{\odot}$). Being more massive than the non diffusive models, the diffusive models fitting the observations are also younger: the 1.3 $M_{\odot}$ diffusive model is 1.79 Gyr whereas the 1.17 $M_{\odot}$ non diffusive model is 3.59 Gyr.

Table 3. Microscopic diffusion and radiative acceleration effects on the large frequency separation, $\nu_{\ell=0,n=14}$ and $\nu_{\ell=0,n=27}$.

$M/M_{\odot}$	$T_{\rm eff}$ [K]	Z/X	$\Delta\nu$ [μHz]	$\nu_{\ell=0,n=14}$ [μHz]	$\nu_{\ell=0,n=27}$ [μHz]	Model
1.35	6668	4.1×10^{-3}	94.0	1401	2627	6
1.3	6480	4.2×10^{-3}	85.7	1280	2401	7
1.25	6151	1.15×10^{-2}	76.3	1216	2209	8

Note 1. The models all have the same initial composition ($X = 0.7195$, $Y = 0.2664$ and thus $Z/X = 1.959 \times 10^{-2}$) and are stopped at the same luminosity ($\log L/L_{\odot} = 0.53$). Then the ages of the 1.25, 1.3 and 1.35 $M_{\odot}$ models are respectively 3.32, 1.79 and 0.54 Gyr.

As stated above, if we assume the Asplund et al. (2005) solar composition, then in HD 49933 we have $Z/X = 7.04 \times 10^{-3}$. Table 3 shows that the diffusive models that meet this condition are too cool, or equivalently that the diffusive models in the right range of the effective temperature are too metal poor. The physical reason for this being that in the higher mass regime the outer convection zone becomes too shallow for convection to brake significantly the gravitational settling of the heavy elements. This drawback suggests that the microscopic diffusion (and radiative acceleration) effects are moderated by an additional mixing process in the radiation envelope below the outer convection zone. There is actually a strong evidence of such a mixing as, with $T_{\rm eff} = 6780$ K HD 49933, nearly stands to the middle of the so-called lithium dip (Boesgaard & Tripicco 1986; Boesgaard & King 2002). The stars of the lithium dip show lithium and beryllium depletion which implies deep mixing in their radiation zones. A likely candidate to this is the shear turbulence induced by the angular momentum loss (Talon & Charbonnel 1998; Decressin et al. 2009). The occurence of such a process within HD 49933 would brake the microscopic diffusion. Similarly the tachocline mixing (Spiegel & Zahn 1992) in the transition region between convection and radiation zones brakes the metals and helium diffusion in the Sun (Turck-Chièze et al. 2004). The interplay between diffusion and this process – or another non standard mixing phenomenon – appears necessary to build the observed ^{7}Li abundance in Population II (Piau 2008; Richard et al. 2005). In the next subsection we briefly address the effects of rotation and of the interaction between diffusion and rotation.

2.4. Rotation effects

The power spectrum of HD 49933 suggests a surface rotation period of 3.4 days (Appourchaux et al. 2008). If, following Thévenin et al. (2006), we consider $R_{\star}/R_{\odot} = 1.43$ this leads to an equatorial velocity $V_{\rm eq} = 21.3$ km s^{-1}. This result is in agreement with direct estimates of $v \sin i$ (Solano et al. 2005; Mosser et al. 2005).

We have applied the theory of Mathis & Zahn (2004) for two 1.17 $M_{\odot}$ models evolving without angular momentum loss and showing equatorial velocities $V_{\rm eq} = 10$ km s^{-1} (model 9) and $V_{\rm eq} = 20$ km s^{-1} (model 10) at 4.35 Gyr and 3.97 Gyr respectively. These ages correspond to $\log(L/L_{\odot}) = 0.53$. The Mathis & Zahn (2004) transport equations account for the modifications in temperature, mean molecular weight and gravitational potential induced by rotation. The meridional circulation is calculated

Table 4. Rotation and microscopic diffusion effects on the large frequency separation, $\nu_{\ell=0,n=14}$ and $\nu_{\ell=0,n=27}$.

$M/M_\odot$	Z/X	$T_{\rm eff}$ [K]	$\Delta\nu$ [μHz]	$\nu_{\ell=0,n=14}$ [μHz]	$\nu_{\ell=0,n=27}$ [μHz]	$V_{\rm eq}$ [km s^{-1}]	Model
1.17	7.04×10^{-3}	6610	86.2	1270	2403	0.0	3
1.17	7.04×10^{-3}	6614	86.2	1283	2410	10.	9
1.17	7.04×10^{-3}	6613	86.1	1282	2408	20.	10
1.30	7.04×10^{-3}	6480	85.7	1280	2401	0.0	7
1.30†	5.28×10^{-3}	6480	85.7	1281	2401	20.	11

as well. Table 4 provides information similar to the preceeding ones. The model 11 mentionned with † includes both rotation and microscopic diffusion. Its initial composition is $X = 0.7195$, $Y = 0.2664$ ($Z/X = 1.959\times10^{-2}$). All the other models of the table have rotation but no microscopic diffusion effects and an initial composition $X = 0.7664$, $Z = 5.4\times10^{-3}$. The impact of rotation effects on the large frequency separation is hardly visible. The logarithmic derivative of the large separation with the equatorial velocity computed from models 9 and 10 is tiny $\frac{\partial \ln\Delta\nu}{\partial \ln V_{\rm eq}} = 1.1\times10^{-3}$.

Thus the rotation effects seem negligible. However when tested in diffusive models they diminish the diffusion efficiency and therefore help improving the issue outlined in Sect. 2.3. The physics used in building models 7 and 11 is similar except for rotation. Table 4 shows that they nearly are identical except their difference in the surface Z/X ratio. Model 11 is not our best fit to the observational constrains but it is the most sophisticated secular model of this work as it includes both of the significant diffusion and rotation effects expected in HD 49933. Its large frequency separation and surface metallicity lie very close to the observations. Even tough model 11 is too cool, it points out that the mass of HD 49933 predicted by refined models is higher than the mass predicted by simple models (e.g. model 3).

3. Surface convection of HD 49933

3.1. Dynamical models

We use the STAGGER code (Stein & Nordlund 1998) to investigate the convective and the radiative energy transfer from 500 km above the photosphere downto 2500 km below. The computational domain extends over 6000 by 6000 km horizontaly. The current grid has 63 points in each direction. We solve the fully compressible equations of hydrodynamics and use the same equation of state – OPAL – as in the CESAM calculations. As far as possible, we use the same opacities as well. Near and above the photosphere, the diffusion approximation for radiative energy transport breaks down and one has to solve the radiative energy transfer equation. We adopted the binning method to solve this equation (Nordlund 1982). This widely used method (see e.g. Ludwig et al. 2006) requires 1D atmosphere model structure as well as monochromatic opacities. For both we use the Kurucz data and programs (Castelli 2005a,b). Thus the opacities near and above the photosphere are not the OPAL opacities. The equation of state and opacity tables were computed for the composition $X = 0.7664$, $Z = 5.4\times10^{-3}$ (see Sect. 2.2).

We run STAGGER over the typical Kelvin-Helmholtz timescale of the computational box that is 10^4 s. The effective temperature is computed using the surface radiative flux. The efficiency of the surface convection is a priori dependent on the total energy flux (i.e. the $T_{\rm eff}$) and the surface gravity. We considered three simulations: a reference one for the Sun (model A), a model where the specific entropy of the deep convection zone was slightly increased with respect to the Sun (model B) and a model where the surface gravity was slightly lowered (model C). Model B is obtained by increasing the internal energy entering the lower boundary of the domain by 2%. The gravity field in model B is kept to its solar surface value and constant throughout the simulation box. Model C is obtained by decreasing the surface gravity by 2% but the specific entropy of the deep convection zone keeps its solar value of model A.

Table 5. Surface gravity, effective temperature and deep convection zone specific entropy for the hydrodynamical surface convection models of HD 49933 and the best fit model, model 3, computed with CESAM.

	STAGGER model A	STAGGER model B	STAGGER model C	CESAM model 3
g[cm s^{-2}]	2.75×10^4	2.75×10^4	2.70×10^4	1.618×10^4
$T_{\rm eff}$[K]	5774	5639	5640	6610
$s_{\rm ad}$[erg K^{-1} g^{-1}]	1.9365×10^9	1.9462×10^9	1.9363×10^9	2.3370×10^9

Table 6. Convection efficiency effect on the large frequency separation, $\nu_{\ell=0,n=14}$ $\nu_{\ell=0,n=27}$.

$\alpha_{\rm mlt}$	$T_{\rm eff}$ [K]	$\Delta\nu$ [μHz]	$\nu_{\ell=0,n=14}$ [μHz]	$\nu_{\ell=0,n=27}$ [μHz]	Model
1.787	6672	88.9	1316	2484	8
1.587	6610	86.2	1270	2403	3
1.387	6541	83.5	1471	2317	9

Table 5 gives the surface conditions and the specific entropy in the deep convection zone (adiabatic regime) in the hydrodynamical models A−C and our stellar evolution code best fit model. The increase of the specific entropy in the adiabatic regime ($s_{\rm ad}$) or the decrease of the surface gravity induce a decrease in the effective temperature. Around the solar surface conditions, the logarithmic derivative of $s_{\rm ad}$ with $T_{\rm eff}$ is $\frac{\partial \ln s_{\rm ad}}{\partial \ln\Delta T_{\rm eff}} = -0.225$ between models A and B.

If we extrapolate this to the case of HD 49933 ($T_{\rm eff}$ = 6780 K) it provides $s_{\rm ad\,HD\,49933} = 1.8605\times10^9$ erg K^{-1} g^{-1}. Our best fit model of HD 49933 (model 3 see Table 1) based on a solar calibrated value of $\alpha_{\rm mlt}$ exhibits $s_{\rm ad} = 2.3370\times10^9$ erg K^{-1} g^{-1}. This suggests that the efficiency of convection increases when going from the Sun to the HD 49933 surface effective temperature (decreasing $s_{\rm ad}$ corresponds to increasing $\alpha_{\rm mlt}$). However the effects of changing the surface gravity are not accounted for.

3.2. The mixing length parameter

Our hydrodynamical models suggest that the efficiency of convection is higher in HD 49933 than in the Sun. This means that the $\alpha_{\rm mlt}$ adopted for HD 49933 should be larger. Table 6 estimates the effects of a modified $\alpha_{\rm mlt}$ on $\Delta\nu$, $\nu_{\ell=0,n=14}$ and $\nu_{\ell=0,n=27}$ for 1.17 $M_\odot$ models with $X = 0.7664$ and $Z = 5.4\times10^{-3}$. As for the other models, core convection overshooting over 0.2 $H_{\rm p}$ is included. The specific entropies $s_{\rm ad}$ of the deep convection zones in models 8, 3 and 9 are respectively: 2.2962×10^9 erg K^{-1} g^{-1}, 2.3370×10^9 erg K^{-1} g^{-1} and 2.4371×10^9 erg K^{-1} g^{-1}. Our hydrodynamical models (Sect. 3.1) qualitatively predict a typical change ($s_{\rm ad\,HD\,49933} - s_{\rm ad\,Model\,A}$) in $s_{\rm ad}$ larger than what changes of 0.2 in $\alpha_{\rm mlt}$ would induce. We conclude that a variation of 0.2 in $\alpha_{\rm mlt}$ between the Sun and HD 49933 is plausible.

The trend in $\Delta\nu$ and frequency for an increasing efficiency of convection disagrees with the observations.

Table 7. Logarithmic derivatives of the large separation with various modeling parameters: mass, metal fraction, helium fraction, rotation and mixing length parameter.

$\frac{\partial \ln\Delta\nu}{\partial \ln\Delta M}$	$\frac{\partial \ln\Delta\nu}{\partial \ln\Delta[\mathrm{O/Fe}]}$	$\frac{\partial \ln\Delta\nu}{\partial \ln\Delta Y}$	$\frac{\partial \ln\Delta\nu}{\partial \ln V_{\mathrm{eq}}}$	$\frac{\partial \ln\Delta\nu}{\partial \ln\alpha_{\mathrm{mlt}}}$
2.6	0.83	0.90	1.1×10^{-3}	0.21

Benomar et al. (2009) favored identification is $\Delta\nu = 85.92 \pm 0.43$ μHz, $\nu_{\ell=0,n=14} = 1244.43 \pm 3.90$ μHz and $\nu_{\ell=0,n=27} = 2363.81 \pm 3.90$ μHz. For a model slightly below 1.2 $M_\odot$ this is consistent with a smaller α_{mlt} throughout the evolution. The logarithmic derivative of the large separation with α_{mlt} computed from models 8 and 9 is $\frac{\partial \ln\Delta\nu}{\partial \ln\alpha_{\mathrm{mlt}}} = 0.213$.

4. Conclusion

In the context of the first CoRoT results, we build secular and dynamical models of the solar type star HD 49933. We use the CESAM stellar evolution code, the hydrodynamical code STAGGER and the Aarhus ADIPLS oscillation package to compute the eigenfrequencies. The purposes of this work are to calculate the impact of mass, composition, diffusion, rotation and convection on classical and seismological parameters. We do not aim at finding the best fit to the current observational constraints but to explore physical effects on the models. We focus on the (average) large frequency separation $\Delta\nu$. In particular we give the logarithmic derivatives of $\Delta\nu$ with mass, composition, rotation and α_{mlt} in order to compare quantitavely their seismic influences. Table 7 sums up the corresponding results.

We also investigate the derivative of the surface phase shift ($\beta(\nu)$) that is sensitive to the helium content of the star. We finally give the frequencies of the modes of orders $n = 14$, $n = 27$ and degree $\ell = 0$ as they respectively minimize and maximize the surface effects on oscillations. With one exception all the models include a core convection overshooting of 0.2 H_{p}. In the case of the models with rotation the angular momentum loss is not taken into account. The results are as follows:

1. Mass: $\Delta\nu$ is very sensitive to mass (Table 1). It is a factor ~3 less sensitive to composition effects and a further factor ~3 less sensitive to convection efficiency effects. The mass of HD 49933 has to be tighly constrained if one wants to tackle composition or convection efficiency issues.
2. Composition: the assumed solar composition strongly influences the *absolute* metal content of HD 49933 and therefore its seismic properties (Table 2). If using seismology, a mass estimate to better than a few 0.01 $M_\odot$ will not be reliable as long as the solar composition is not settled. The derivative $\beta(\nu)$ of the surface phase shift depends on the helium content (Table 2). However the $\beta(\nu)$ dependence on mass shows once more that mass should be precisely constrained.
3. Diffusion: diffusion effects are expected to be more important in HD 49933 than in our Sun. The models taking diffusion into account suggest that HD 49933 is more massive than the models that do not take diffusion into account (Table 3). The diffusive models rise an issue: when having the correct effective temperature they are too metal poor, when having the right metallicity they are too cool.
4. Rotation: the rotational effects appear negligible on both classical and seismological parameters describing HD 49933 except for the Z/X ratio (Table 4). This point is also observed for the Sun. The interplay between rotation and diffusion improves the situation of purely diffusive models by braking the gravitational settling of heavy elements.
5. Outer convection: our hydrodynamical calculations suggest that the efficiency of convection in HD 49933 should be slightly higher than in the Sun. This contradicts the better agreement of small α_{mlt} models than large α_{mlt} models with the observed large frequency separation. The seismic observations of HD 49933 favor a decrease in the efficiency of convection with increasing mass.
6. Our best fit model has a mass of 1.17 $M_\odot$. It includes neither diffusion or rotation. Its initial composition is $X = 0.7664$ and $Z = 5.4 \times 10^{-3}$. This mass estimate is unchanged if core overshooting is suppressed. It is also not sensitive to the two current possible mode identification.

This work points out the role of sophisticated physics in the seismological modeling of HD 49933. It stresses the need for an accurate mass and composition determination before the observational data can be used to constrain the internal dynamics. Moreover it shows that diffusive effects and their interplay with rotational effects significantly change the mass and age estimates of the star. Both diffusion and rotation effects have to be taken into account in HD 49933 to draw reliable conculsions. Thus there is a need for sophisticated modelling of this CoRot target. That is especially important as with respect to its temperature the star lies in the middle of the so-called lithium dip. Therefore the future modelling works should include the angular momentum loss as well as the possible rotationally induced shear turbulence in the upper radiation zone of the star. For the same reason it would be interesting to investigate the current surface abundance in lithium and beryllium from the observational point of view.

Acknowledgements. We thank the anonymous referee whose remarks helped to expand and improve the content of this article. L. Piau is member of the UMR7158. This work was supported by the French *Centre National de la Recherche Scientifique, CNRS* and the *Centre National d'Etudes Spatiales, CNES*.

References

Angulo, C., Arnould, M., Rayet, M., et al. 1999, Nucl. Phys. A, 656, 3
Appourchaux, T., Michel, E., Auvergne, M., et al. 2008, A&A, 488, 705
Asplund, M., Grevesse, N., & Sauval, A. J. 2005, ASPC, Vol. XXX
Baglin, A., Auvergne, M., Barge, P., et al. 2006, ESA SP, 1306, 33
Bahcall, J. N., Basu, S., Pinsonneault, M., & Serenelli, A. M. 2005, ApJ, 618, 1049
Basu, S., & Antia, H. M. 1995, MNRAS, 276, 1402
Basu, S., Mazumdar, A., Antia, H. M., & Demarque, P. 2004, MNRAS, 350, 277
Benomar, O., Appourchaux, T., & Baudin, F. 2009, A&A, 506, 15
Bessell, M. S., Castelli, F., & Plez, B. 1998, A&A, 333, 231
Böhm-Vitense, E. 1958, Zs. f. Ap., 46, 108
Boesgaard, A. M., & King, J. R. 2002, ApJ, 565, 587
Boesgaard, A. M., & Tripicco, M. J. 1986, ApJ, 303, 724
Bruntt, H., De Cat, P., & Aerts, C. 2008, A&A, 478, 487
Burgers, J. M. 1969, Flow equations for composite gases (New York and London: Academic Press)
Castelli, F. 2005a, Mem. S. A. It. Suppl., 8, 25
Castelli, F. 2005b, Mem. S. A. It. Suppl., 8, 34
Christensen-Dalsgaard, J., & Berthomieu, G. 1991, Solar Interior and atmosphere (University of Arizona Press), 401
Christensen-Dalsgaard, J., Proffitt, C. R., & Thompson, M. J. 1993, ApJ, 403, L75
Claret, A. 2007, A&A, 475, 1019
Decressin, T., Mathis, S., Palacios, A., et al. 2009, A&A, 495, 271
Edvardsson, B., Andersen, J., Gustafsson, B., et al. 1993, A&A, 275, 101
Fernandes, J., Lebreton, Y., Baglin, A., & Morel, P. 1998, A&A, 338, 455
Ferguson, J. W., Alexander, D. R., Allard, F., et al. 2005, ApJ, 623, 585
Gillon, M., & Magain, P. 2006, A&A, 448, 341

Gough, D. O. 1990, Comments on helioseismic inference, Progress of seismology of the Sun and stars, ed. Y. Osaki, & H. Shibahashi (Springer Verlag), 283
Goupil, M. J., Deheuvels, S., Miglio, A., et al. 2009, A&A, submitted
Grevesse, N., & Noels, A. 1993, Origin and Evolution of the Elements, ed. N. Prantzos, E. Vangioni-Flam, & M. Cassé (Cambridge University Press), 15
Grevesse, N., & Sauval, A. J. 1998, Space Sci. Rev., 85, 161
Iglesias, C. A., & Rogers, F. J. 1996, ApJ, 464, 943
Lastennet, E., Lignières, F., Buser, R., et al. 2001, A&A, 365, 535
Lopes, I., Turck-Chièze, S., Michel, E., & Goupil, M.-J. 1997, ApJ, 480, 794
Ludwig, H.-G., Allard, F., & Hauschildt, P. H. 2006, A&A, 459, 599
Maeder, A., & Meynet, G. 2000, ARA&A, 38, 143
Mathis, S., & Zahn, J.-P. 2004, A&A, 425
Mihalas, D. 1978, Stellar atmospheres, 2nd edn. (Freeman and Cie)
Morel, P. 1997, A&AS, 124, 597
Mosser, B., Bouchy, F., Catala, C., et al. 2005, A&A, 431, 13
Nordlund, A. 1982, A&A, 107, 1
Piau, L. 2008, ApJ, 689, 1279
Piau, L., Ballot, J., & Turck-Chièze, S. 2005, A&A, 430, 571
Rogers, F. J., Swenson, F. J., & Iglesias, C. A. 1996, ApJ, 456, 902
Richard, O., Michaud, G., & Richer, J. 2005, ApJ, 619, 538
Solano, E., Catala, C., Garrido, R., et al. 2005, AJ, 129, 547
Spiegel, E. A., & Zahn, J.-P. 1992, A&A, 265, 106
Stein, R. F., & Nordlund, A. 1998, ApJ, 499, 914
Talon, S., & Charbonnel, C. 1998, A&A, 335, 959
Thévenin, F., Bigot, L., Kervella, P., et al. 2006, MmSAI, 77, 411
Turck-Chièze, S., Däppen, W., Fossat, E., et al. 1993, Phys. rep., 230, 58
Turck-Chièze, S., Basu, S., Brun, A. S., et al. 1997, Sol. Phys., 175, 247
Turck-Chièze, S., Couvidat, S., Piau, L., et al. 2004, Phys. Rev. Lett., 93, 1102
Turck-Chièze, S., Delahaye, F., Gilles, D., Loisel, G., & Piau, L. 2009, High Energy Density Physics, submitted
Turcotte, S., Richer, J., & Michaud, G. 1998, ApJ, 504, 559
van Leeuwen, F. 2007, A&A, 474, 653
Voronstov, S. V., Baturin, V. A., & Pamyathnykh, A. A. 1991, Nature, 349, 49

Bibliographie

[1] A. Baglin, M. Auvergne, P. Barge, M. Deleuil, C. Catala, E. Michel, W. Weiss et The COROT Team. « Scientific Objectives for a Minisat : CoRoT ». Dans M. Fridlund, A. Baglin, J. Lochard, & L. Conroy, éditeur, *ESA Special Publication*, volume 1306 de *ESA Special Publication*, pages 33–+, novembre 2006. 190

[2] K. Belkacem, R. Samadi, M.-J. Goupil, L. Lefèvre, F. Baudin, S. Deheuvels, M.-A. Dupret, T. Appourchaux, R. Scuflaire, M. Auvergne, C. Catala, E. Michel, A. Miglio, J. Montalban, A. Thoul, S. Talon, A. Baglin et A. Noels. « Solar-Like Oscillations in a Massive Star ». *Science*, 324 :1540–, juin 2009. 191

[3] O. Benomar, F. Baudin, T. L. Campante, W. J. Chaplin, R. A. García, P. Gaulme, T. Toutain, G. A. Verner, T. Appourchaux, J. Ballot, C. Barban, Y. Elsworth, S. Mathur, B. Mosser, C. Régulo, I. W. Roxburgh, M. Auvergne, A. Baglin, C. Catala, E. Michel et R. Samadi. « A fresh look at the seismic spectrum of HD49933 : analysis of 180 days of CoRoT photometry ». *A&A*, 507 :L13–L16, novembre 2009. 204

[4] M. S. Bessell, F. Castelli et B. Plez. « Model atmospheres broad-band colors, bolometric corrections and temperature calibrations for O - M stars ». *A&A*, 333 :231–250, mai 1998. 203

[5] H. Bruntt, P. De Cat et C. Aerts. « A spectroscopic study of southern (candidate) γ Doradus stars. II. Detailed abundance analysis and fundamental parameters ». *A&A*, 478 :487–496, février 2008. 202

[6] J. Christensen-Dalsgaard. « On solar models and their periods of oscillation ». *MNRAS*, 199 :735–761, mai 1982. 196, 203

[7] J. Christensen-Dalsgaard et G. Berthomieu. « *Theory of solar oscillations* », pages 401–478. 1991. 197

[8] J. Christensen-Dalsgaard et S. Frandsen. « Radiative transfer and solar oscillations /Invited review/ ». *Sol. Phys.*, 82 :165–204, janvier 1983. 192

[9] T. G. Cowling. « The non-radial oscillations of polytropic stars ». *MNRAS*, 101 :367–+, 1941. 197

[10] J. P. Cox. *Theory of stellar pulsation.* 1980. 196

[11] J. P. Cox et C. Whitney. « Stellar Pulsation.IV. a Semitheoretical Period-Luminosity Relation for Classical Cepheids. ». *ApJ*, 127 :561–+, mai 1958. 190

[12] F.-L. Deubner et D. Gough. « Helioseismology : Oscillations as a Diagnostic of the Solar Interior ». *ARA&A*, 22 :593–619, 1984. 200

[13] T. L. Duvall, Jr. « A dispersion law for solar oscillations ». *Nature*, 300 :242–+, novembre 1982. 200

[14] T. L. Duvall, Jr. et L. Gizon. « Time-Distance Helioseismology with f Modes as a Method for Measurement of Near-Surface Flows ». *Sol. Phys.*, 192 :177–191, mars 2000. 199

[15] A. S. Eddington. *The Internal Constitution of the Stars.* Cambridge University Press, 1926. 190

[16] F. Fressin, S. Aigrain, D. Charbonneau, M. Fridlund, T. Guillot, H. Knutson, T. Mazeh, F. Pont, H. Rauer et G. Torres. « CoRoT-Exo-7b : Confirming the first transiting rocky planet ». Dans *Spitzer Proposal ID #534*, pages 534–+, mars 2009. 191

[17] A. H. Gabriel, G. Grec, J. Charra, J.-M. Robillot, T. Roca Cortés, S. Turck-Chièze, R. Bocchia, P. Boumier, M. Cantin, E. Cespédes, B. Cougrand, J. Crétolle, L. Damé, M. Decaudin, P. Delache, N. Denis, R. Duc, H. Dzitko, E. Fossat, J.-J. Fourmond, R. A. García, D. Gough, C. Grivel, J. M. Herreros, H. Lagardère, J.-P. Moalic, P. L. Pallé, N. Pétrou, M. Sanchez, R. Ulrich et H. B. van der Raay. « Global Oscillations at Low Frequency from the SOHO Mission (GOLF) ». *Sol. Phys.*, 162 :61–99, décembre 1995. 24, 198

[18] M. Gillon et P. Magain. « High precision determination of the atmospheric parameters and abundances of the COROT main targets ». *A&A*, 448 :341–350, mars 2006. 202, 203

[19] J. H. Jeans. *Astronomy and cosmogony.* 1928. 199

[20] R. E. Langer. « On the Connection Formulas and the Solutions of the Wave Equation ». *Physical Review*, 51 :669–676, avril 1937. 201

[21] E. Lastennet, F. Lignières, R. Buser, T. Lejeune, T. Lüftinger, F. Cuisinier et C. van't Veer-Menneret. « Exploration of the BaSeL stellar library for 9 F-type stars COROT potential targets. Comparisons of fundamental stellar parameter determinations ». *A&A*, 365 :535–544, janvier 2001. 203

[22] I. Lopes et S. Turck-Chièze. « The second order asymptotic theory for the solar and stellar low degree acoustic mode predictions ». *A&A*, 290 :845–860, octobre 1994. 200, 201

[23] P. Morel. « CESAM : A code for stellar evolution calculations ». *A&AS*, 124 :597–614, septembre 1997. 110, 118, 163, 178, 203

[24] B. Mosser, F. Bouchy, C. Catala, E. Michel, R. Samadi, F. Thévenin, P. Eggenberger, D. Sosnowska, C. Moutou et A. Baglin. « Seismology and activity of the F type star HD 49933 ». *A&A*, 431 :L13–L16, février 2005. 203

[25] F. W. J. Olver. « The Asymptotic Solution of Linear Differential Equations of the Second Order in a Domain Containing One Transition Point ». *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 249 :65–97, avril 1956. 200

[26] I. W. Roxburgh et S. V. Vorontsov. « An asymptotic description of solar acoustic oscillation of low and intermediate degree ». *MNRAS*, 278 :940–946, février 1996. 200

[27] M. Tassoul. « Asymptotic approximations for stellar nonradial pulsations ». *ApJS*, 43 :469–490, août 1980. 200

[28] M. Tassoul. « Second-order asymptotic approximations for stellar nonradial acoustic modes ». *ApJ*, 358 :313–327, juillet 1990. 200

[29] S. Turck-Chièze, P.-H. Carton, J. Ballot, J.-C. Barrière, P. Daniel-Thomas, A. Delbart, D. Desforges, R. A. García, R. Granelli, S. Mathur, F. Nunio, Y. Piret, P. L. Pallé, A. J. Jiménez, S. J. Jiménez-Reyes, J. M. Robillot, E. Fossat, A. M. Eff-Darwich et B. Gelly. « GOLF-NG spectrometer, a space prototype for studying the dynamics of the deep solar interior ». *Advances in Space Research*, 38 :1812–1818, 2006. 198

[30] R. K. Ulrich. « The Five-Minute Oscillations on the Solar Surface ». *ApJ*, 162 :993–+, décembre 1970. 190

[31] W. Unno. « Stellar Radial Pulsation Coupled with the Convection ». *PASJ*, 19 :140–+, 1967. 190

[32] W. Unno, Y. Osaki, H. Ando, H. Saio et H. Shibahashi. *Nonradial oscillations of stars*. 1989. 200

[33] W. Unno, Y. Osaki, H. Ando et H. Shibahashi. *Nonradial oscillations of stars*. University of Tokyo Press, 1979. 190

[34] F. van Leeuwen. « Validation of the new Hipparcos reduction ». *A&A*, 474 :653–664, novembre 2007. 203

[35] Y. V. Vandakurov. « The Frequency Distribution of Stellar Oscillations. ». *AZh*, 44 :786–+, 1967. 200

[36] S. V. Vorontsov. « Asymptotic Theory of Acoustic Oscillations of the Sun and Stars ». *Soviet Astronomy*, 35 :400–+, août 1991. 200, 201

[37] S. A. Zhevakin. « On a Unified Interpretation of Different Types of Pulsating Variable Stars ». *Soviet Physics Doklady*, 3 :225–+, mars 1958. 190

Conclusion et perspectives

Il ne sera jamais conçu d'avion plus grand – Un ingénieur de chez Boeing, après le premier vol du 247, un bi-moteur pouvant emporter jusqu'à dix personnes

Dans cette thèse, j'ai examiné sur la base des travaux pionniers de Chandrasekhar et Woltjer les équilibres magnétiques possibles dans les régions radiatives d'étoiles telles que le Soleil ou les étoiles Ap. J'en ai dérivé les configurations géométriques associées en vue d'améliorer les modèles stellaires en prenant en compte de la manière la plus consistante possible les processus dynamiques tels que la rotation et le champ magnétique. Les configurations proposées sont l'extension « non force-free » des configurations « force-free » rencontrées dans les expériences de plasmas confinés par champs magnétiques de type sphéromaks. Dans le contexte astrophysique, les solutions de l'équation de type Grad-Shafranov qui gouverne l'équilibre magnéto-hydrostatique dans les états barotropes décrivent un champ non force-free du fait de la prise en compte du profil de densité interne et de l'auto-gravité de l'étoile (plasmas à haut beta), qui sont généralement négligés dans la modélisation des sphéromaks (plasmas à bas beta).

Ce formalisme a été appliqué au cas d'un Soleil jeune (en début de séquence principale) et d'une étoile Ap sur la séquence principale d'âge zéro. Dans le premier cas, l'existence d'un tel champ reste une question ouverte mais des indicateurs tendent à montrer qu'il s'agit d'une des explications privilégiées du profil de rotation interne plat observé dans la zone radiative solaire. Dans le second cas, des champs magnétiques sont observés de plus en plus régulièrement par spectropolarimétrie haute résolution sur les grands téléscopes à la surface d'étoiles de type Ap/Bp. Or ceux-ci peuvent difficilement être expliqués en terme de champs d'origine dynamo : ils sont donc vraisemblablement d'origine fossile et stables sur des temps séculaires.

Les fonctions arbitraires du modèle ont été contraintes en dérivant l'état d'énergie minimale en conservant les invariants du problème que sont la masse de la zone radiative, le flux azimutal, et l'hélicité. De nouvelles relations énergie-hélicité ont été obtenues, qui généralisent les états de relaxation de Taylor rencontrés dans les sphéromaks, dans le cas où le champ est non force-free.

Néanmoins, les configurations d'équilibre dérivées constitue une première étape, dans la limite où elles sont axisymétriques. De plus, nous n'avons pas tenu compte de la rotation de l'étoile. Or les champs magnétiques de grandes échelles observés à la surface d'étoiles de type Ap/Bp sont inclinés par rapport à l'axe géométrique donné par la rotation de l'étoile. Il sera donc intéressant dans le futur d'étendre le modèle au cas incluant la rotation (uniforme ou cylindrique pour préserver l'état barotrope) puis d'étudier le cas non-axisymétrique. Le cas général des états baracolines sera alors étudié.

Le problème de la stabilité des configurations d'équilibre magnétique dans les intérieurs stellaires est aussi aujourd'hui une question ouverte. En effet si de nombreux travaux analytiques ont conduit à des configurations d'équilibres, celles-ci se sont à chaque fois révélées être instables ; seule une simulation numérique avait mis en évidence une configuration stable, formée par relaxation d'un champ initialement stochastique.

Une analyse de stabilité a été effectuée sur les configurations d'équilibre que nous avons étudiées, qui tend à montrer que les configurations trouvées sont stables et seraient de bonnes candidates pour expliquer un éventuel champ fossile piégé dans la zone radiative solaire et les champs magnétiques d'étoiles Ap, après que ce champ initialement confiné sous la surface eut diffusé. Toutefois ces résultats préliminaires méritent une étude approfondie. Une collaboration a été engagée avec un spécialiste de la modélisation MHD 3D des champs de grandes échelles, le Dr. J. Braithwaite, pour faire une étude par la voie numérique. Les configurations d'équilibre semblent être stables à toutes les perturbations testées jusqu'à présent, ce qui constitue une première.

Cependant, en présence de rotation différentielle la situation est plus complexe. Aussi faudra-t-il chercher si l'existence d'états stationnaires régissant la balance rotation différentielle-circulation méridienne-champ magnétique est possible, et si oui, sous quelles conditions. C'est le cas des états baroclines.

Les configurations trouvées vont en effet être sujettes au cours de l'évolution stellaire à une évolution régie par d'autres processus dynamiques tels que la rotation différentielle, la circulation méridienne, la turbulence et les instabilités MHD. Ainsi il était nécessaire de dégager dans un premier temps l'ordre de grandeur des quantités associées à ces configurations avec l'objectif final de les introduire ensuite dans un code d'évolution stellaire prenant en compte l'ensemble des processus dynamiques. Cela a été effectué à partir de configurations issues du modèle physique consistant que je viens de décrire, en évaluant systématiquement les propriétés géométriques de chaque terme modifiant la structure stellaire. J'ai en particulier montré la nécessité de prendre en compte la force de tension magnétique dans la balance magnéto-hydrostatique plutôt que les effets d'une pression magnétique effective ; en effet cette première est indispensable pour contrebalancer le gradient de pression magnétique en particulier à proximité de l'axe magnétique et de la surface, où le champ tend vers un état force-free.

Le modèle étant non force-free, le champ magnétique va légèrement modifier la balance hydrostatique et la structure interne des étoiles, en particulier leur champ de gravité. Dans la limite où la force de Lorentz est une perturbation (ce qui est vérifié pour les ordres de grandeurs admis des champs magnétiques dans les zones radiatives stellaires), un traitement perturbatif au premier ordre a été effectué, mettant en évidence les perturbations associées aux configurations magnétiques dipolaires choisies et appliquées aux zones radiatives du Soleil et d'une étoile de type Ap. Cette approche m'a permis de dériver les perturbations en pression, densité, température, potentiel gravitationnel et rayon ; en particulier, les variations du rayon sur l'isobare et les moments gravitationnels multipolaires (observables par sondes spatiales) ont été calculés.

Cette approche a également été utilisée pour calculer toutes les perturbations associées à la prise en compte d'un profil radial de rotation différentielle interne solaire réaliste. J'ai

en particulier fait varier les régimes de rotation dans le coeur, là où les plus grandes incertitudes subsistent. Ceci permet de quantifier les déformations de surface générées par la rotation et de montrer.que la prise en compte du champ magnétique peut modifier significativement ces valeurs. Ceci constituera peut être une façon d'en quantifier l'amplitude, ce fut d'ailleurs un guide dans notre étude pour choisir un champ d'environ 2MG en région radiative d'un soleil jeune. La méthode développée dans cette thèse constitue un complément intéressant à l'héliosismologie, et bénéficiera des observations issues des prochaines missions spatiales SDO et PICARD (lancés tous deux début 2010).

Enfin, toute interprétation d'observations d'étoiles repose sur un modèle calculé à partir d'un code d'évolution stellaire. Aujourd'hui, il est donc indispensable de prendre en compte la rotation et le champ magnétique dans ces outils. J'ai exposé comment nous incluons ces effets dans un code d'évolution de prochaine génération prenant en compte l'ensemble des processus dynamiques. En projetant toutes les quantités sur les harmoniques sphériques de bas degré, les termes de couplage entre les différents processus hydrodynamiques et le champ magnétique peuvent être pris en compte dans un modèle unidimensionnel spectral en conservant la nature profondément géométrique de ces processus, tout en conservant la richesse de la physique microscopique incluse dans les codes d'évolution stellaire. J'ai en particulier détaillé le couplage champ magnétique-rotation différentielle et champ magnétique-circulation méridienne ainsi que la méthode d'implémentation du magnétisme dans un code d'évolution stellaire incluant d'ores et déjà la rotation. J'ai aussi décrit l'influence du champ magnétique sur la convection dans le cadre de la MLT et proposé une modification de l'équation régissant l'efficacité de la convection dans ce contexte.

Un des principaux intérêts des configurations d'équilibre dérivées est qu'elles permettent d'initier le transport magnéto-rotationnel, là où une carence prévalait auparavant, le transport étant initié par des configurations purement poloïdales (dipolaires) alors que nous savons que celles-ci sont instables.

Par ailleurs, en addition du travail entrepris sur la modélisation du magnétisme stellaire, une partie de mon temps a été dévolue à l'astérosismologie. Nous avons étudié quantitativement l'impact que peut avoir un changement des paramètres tels que la masse et la composition, pour la modélisation de l'étoile cible de CoRoT HD49933. En particulier, nous nous sommes attachés à décrire comment l'inclusion d'une physique sophistiquée dans sa modélisation peut influencer sa signature sismique. À l'aide d'outils numériques avancés, nous avons considéré les effets de la diffusion, de la rotation et d'un changement de l'efficacité de la convection, sur les grandes différences, variables sismiques sensibles aux propriétés globales d'un modèle. Premièrement, il est apparu que les incertitudes sur la masse et la composition avaient un impact plus élevé sur les quantités sismiques regardées que la prise en compte de la rotation. Puis, nous avons confirmé que la dérivée du changement de phase à la surface pouvait être indicateur intéressant de la composition de l'étoile, en particulier celle en hélium qui donne des renseignements sur l'histoire de l'étoile. Concernant la convection, il a été montré que le paramètre de la longueur de mélange doit être modifié, car l'efficacité de la convection est plus élevée dans l'étoile HD49933 que dans le Soleil, ayant une température effective supérieure à celui-ci. Cette étoile étant magnétique nous pouvons espérer utiliser cette approche pour aussi regarder comment traiter des champs de sous surface.

Annexe A
Algèbre utile en géométrie sphérique

1. Opérateurs différentiels en coordonnées sphériques

Dans les identités ci-après, $f = f(\mathbf{r})$ représente une fonction scalaire ; $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ est un vecteur. Celui-ci s'exprime selon $\mathbf{V} = V_r\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + V_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + V_\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ où $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ et $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ sont les vecteurs unitaires orthonormés, respectivement dans les directions radiale, latitudinale et azimutale, et représentés en Fig. A.1.

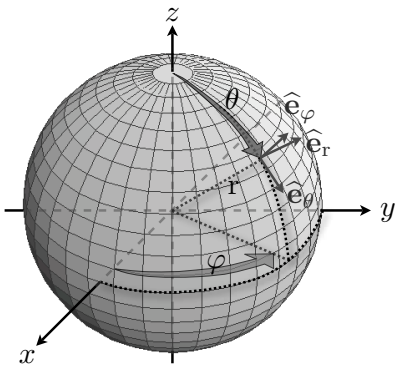


Figure A.1 – Repère cartésien et coordonnées sphériques

Gradient d'un scalaire

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{A.1}$$

Divergence d'un vecteur

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{A.2}$$

Rotationnel d'un vecteur

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{A} = & \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta A_\varphi\right)}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} \\ & + \left[-\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{aligned} \tag{A.3}$$

Laplacien d'un scalaire

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \tag{A.4}$$

N.B. le premier terme peut aussi s'exprimer : $\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rf\right)$.

Laplacien d'un vecteur

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{A} = & \left[\Delta A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{2\cot\theta A_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} \\ & + \left[\Delta A_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + \left[\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{aligned} \tag{A.5}$$

Opérateur "$(\mathbf{V}\cdot\nabla)$" appliqué à un scalaire

$$\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)f = \mathbf{V}\cdot\left(\nabla f\right) = V_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{V_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi} \tag{A.6}$$

Opérateur "$(\mathbf{V}\cdot\nabla)$" appliqué à un vecteur

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{A} = & \left[V_r\frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} + \frac{V_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{V_\theta A_\theta + V_\varphi A_\varphi}{r}\right]\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} \\ & + \left[V_r\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{V_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} + \frac{V_\theta A_r - \cot\theta V_\varphi A_\varphi}{r}\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + \left[V_r\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta} + \frac{V_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{V_\varphi A_r + \cot\theta V_\varphi A_\theta}{r}\right]\hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{aligned} \tag{A.7}$$

2. Identités vectorielles

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) \tag{A.8}$$

$$\Delta \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) \tag{A.9}$$

$$\nabla \wedge \nabla f = 0 \tag{A.10}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0 \tag{A.11}$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f \tag{A.12}$$

$$\nabla \wedge (f\mathbf{A}) = f\nabla \wedge \mathbf{A} + \nabla f \wedge \mathbf{A} \tag{A.13}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)(f\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla f)\mathbf{B} + f(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \tag{A.14}$$

$$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{C} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{C} \tag{A.15}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \tag{A.16}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned} \nabla \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ &\quad + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned} \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{B} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) \\ &\quad + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \end{aligned} \tag{A.19}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} = (\nabla \wedge \mathbf{A}) \wedge \mathbf{A} + \frac{1}{2}\nabla \left(\mathbf{A}^2\right) \tag{A.20}$$

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \tag{A.21}$$

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) = [(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}]\,\mathbf{C} - [(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}]\,\mathbf{D} \tag{A.22}$$

Annexe B
Projections sur les harmoniques sphériques

1. Les harmoniques sphériques

1.1 Quantités scalaires

Définitions et propriétés fondamentales

Les harmoniques sphériques sont définies par [1] :

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \mathcal{N}_l^m P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}, \tag{B.1}$$

où $P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$ est la fonction de Legendre associée, et le coefficient de normalisation s'écrit

$$\mathcal{N}_l^m = (-1)^{\frac{(m+|m|)}{2}} \left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{B.2}$$

Elles obéissent à la condition d'orthogonalité :

$$\int_\Omega \left(Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\varphi)\right)^* Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\Omega = \delta_{l_1,l_2}\delta_{m_1,m_2}, \tag{B.3}$$

où $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ et où les harmoniques sphériques complexes conjuguées sont données par :

$$\left(Y_l^m(\theta,\varphi)\right)^* = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta,\varphi). \tag{B.4}$$

À l'aide de ces propriétés, nous pouvons développer toute fonction $f(\theta,\varphi)$ selon :

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} f_m^l Y_l^m(\theta,\varphi) \quad \text{où} \quad f_m^l = \int_\Omega f(\theta,\varphi)\left(Y_l^m(\theta,\varphi)\right)^*\mathrm{d}\Omega. \tag{B.5}$$

Cas particulier des harmoniques sphériques axisymétriques

Dans ce cas nous avons :

$$Y_l^0(\theta,\varphi) = \mathcal{N}_l^0 P_l(\cos\theta) \tag{B.6}$$

et

$$\partial_\theta Y_l^0(\theta,\varphi) = \mathcal{N}_l^0 \partial_\theta P_l(\cos\theta) = \begin{cases} 0 \text{ pour } l=0, \\ -\mathcal{N}_l^0 P_l^1(\cos\theta) \text{ pour } l>0. \end{cases} \tag{B.7}$$

Equation différentielle et relations de récurrence

Rappelons que les harmoniques sphériques sont solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta Y_l^m\left(\theta,\varphi\right)\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 Y_l^m\left(\theta,\varphi\right)=-l\left(l+1\right)Y_l^m\left(\theta,\varphi\right). \tag{B.8}$$

Nous pouvons en déduire les relations de récurrence, notamment pour $m=0$:

$$\cos\theta Y_l^0(\theta)=A_l^0Y_{l-1}^0(\theta)+B_l^0Y_{l+1}^0(\theta) \tag{B.9}$$
$$\sin\theta Y_l^0(\theta)=C_l^0\partial_\theta Y_{l-1}^0(\theta)-D_l^0\partial_\theta Y_{l+1}^0(\theta) \tag{B.10}$$
$$\cos\theta\partial_\theta Y_l^0(\theta)=E_l^0\partial_\theta Y_{l-1}^0(\theta)+F_l^0\partial_\theta Y_{l+1}^0(\theta) \tag{B.11}$$
$$\sin\theta\partial_\theta Y_l^0(\theta)=G_l^0Y_{l+1}^0(\theta)-H_l^0Y_{l-1}^0(\theta) \tag{B.12}$$

où

$$A_l^0=\frac{l}{\sqrt{(2l+1)(2l-1)}}\quad\text{et } B_l^0=\frac{(l+1)}{\sqrt{(2l+3)(2l+1)}}, \tag{B.13}$$
$$C_l^0=\frac{1}{\sqrt{(2l+1)(2l-1)}}\quad\text{et } D_l^0=\frac{1}{\sqrt{(2l+3)(2l+1)}}, \tag{B.14}$$
$$E_l^0=\frac{l+1}{\sqrt{(2l+1)(2l-1)}}\quad\text{et } F_l^0=\frac{l}{\sqrt{(2l+3)(2l+1)}}, \tag{B.15}$$
$$G_l^0=\frac{l(l+1)}{\sqrt{(2l+3)(2l+1)}}\quad\text{et } H_l^0=\frac{l(l+1)}{\sqrt{(2l+1)(2l-1)}}. \tag{B.16}$$

Les identités (B.10) et (B.11) ont été déduites des deux autres (B.9-B.12) avec l'aide de (B.8).

Développement d'un produit d'harmoniques sphériques

D'après les relations de normation et d'orthogonalité des harmoniques sphériques (*cf.* (B.3-B.5)) et de leur complexes conjuguées (*cf.* (B.4)), nous pouvons écrire :

$$Y_{l_1}^{m_1}\left(\theta,\varphi\right)Y_{l_2}^{m_2}\left(\theta,\varphi\right)=(-1)^{(m_1+m_2)}\sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2}\mathcal{I}_{l_1,l_2,l}^{m_1,m_2,-(m_1+m_2)}Y_l^{m_1+m_2}\left(\theta,\varphi\right) \tag{B.17}$$

où l'on peut définir l'intégrale $\mathcal{I}_{l_1,l_2,l}^{m_1,m_2,m}$ comme selon Edmonds (1974) [2] ou Varshalovich *et al.* (1975) [7] :

$$\mathcal{I}_{l_1,l_2,l}^{m_1,m_2,m}=\int_\Omega Y_{l_1}^{m_1}\left(\theta,\varphi\right)Y_{l_2}^{m_2}\left(\theta,\varphi\right)Y_l^m\left(\theta,\varphi\right)d\Omega \tag{B.18}$$
$$=\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l+1)}{4\pi}}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l\\ m_1 & m_2 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{B.19}$$

où l'on a introduit les coefficients de Wigner "3-j" qui sont liés aux coefficients de Clebsch-Gordan par la relation :

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l\\ m_1 & m_2 & m\end{pmatrix}=\frac{(-1)^{l_1-l_2-m}}{\sqrt{2l+1}}C_{l_1,m_1,l_2,m_2}^{l,-m} \tag{B.20}$$

avec pour expression explicite des coefficients de Clebsch-Gordan :

$$C^{j,m}_{j1,m1,j2,m2} = \sqrt{\frac{(2j+1)(j+j1-j2)!(j-j1+j2)!(j+j2-j)!(j+m)!(j-m)!}{(j1+j2+j+1)!(j1-m1)!(j2+m1)!(j2-m2)!(j2-m2)!}}$$
$$\sum_{k=0}^{j+m}(-1)^{k+j2+m2}\frac{(j2+j+m1-k)!(j1-m1+k)!}{k!(j-j1+j2+k)!(j+m-k)!(k+j1-j2-m)!}. \tag{B.21}$$

En définitive, nous obtenons le développement suivant pour le produit de deux harmoniques sphériques :

$$Y^{m_1}_{l_1}(\theta,\varphi)\,Y^{m_2}_{l_2}(\theta,\varphi) = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} c^l_{l_1,m_1,l_2,m_2} Y^{m_1+m_2}_l(\theta,\varphi) \tag{B.22}$$

où le coefficient $c^l_{l_1,m_1,l_2,m_2}$ est donné par :

$$c^l_{l_1,m_1,l_2,m_2} = \tag{B.23}$$
$$(-1)^{(m_1+m_2)}\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l+1)}{4\pi}}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -(m_1+m_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Alors, en utilisant la définition initiale des harmoniques sphériques (*cf.* B.1-B.2), on en déduit le développement du produit de deux fonctions de Legendre associées :

$$P^{m_1}_{l_1}(\cos\theta)\,P^{m_2}_{l_2}(\cos\theta) = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} d^l_{l_1,m_1,l_2,m_2} P^{m_1+m_2}_l(\cos\theta) \tag{B.24}$$

où

$$d^l_{l_1,m_1,l_2,m_2} = (-1)^{(m_1+m_2)}(2l+1)\sqrt{\frac{(l_1+m_1)!\,(l_2+m_2)!\,(l-(m_1+m_2))!}{(l_1-m_1)!\,(l_2-m_2)!\,(l+(m_1+m_2))!}}$$
$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -(m_1+m_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{B.25}$$

Notons que l'expression précédente est symétrique, ainsi :

$$d^l_{l_1,m_1,l_2,m_2} = d^l_{l_2,m_2,l_1,m_1}. \tag{B.26}$$

1.2 Quantités vectorielles

Définitions et propriétés fondamentales

On peut développer tout champ de vecteurs $\mathbf{u}(r,\theta,\varphi)$ selon les harmoniques sphériques vectorielles suivant

$$\mathbf{u}(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left\{u_m^l(r)\,\mathbf{R}_l^m(\theta,\varphi) + v_m^l(r)\,\mathbf{S}_l^m(\theta,\varphi) + w_m^l(r)\,\mathbf{T}_l^m(\theta,\varphi)\right\}, \tag{B.27}$$

où les harmoniques sphériques vectorielles $\mathbf{R}_l^m(\theta,\varphi)$, $\mathbf{S}_l^m(\theta,\varphi)$, $\mathbf{T}_l^m(\theta,\varphi)$ sont définies par :

$$\mathbf{R}_l^m(\theta,\varphi) = Y_l^m(\theta,\varphi)\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r},\ \mathbf{S}_l^m(\theta,\varphi) = \nabla_{\mathcal{S}} Y_l^m(\theta,\varphi) \text{ et } \mathbf{T}_l^m(\theta,\varphi) = \nabla_{\mathcal{S}} \wedge \mathbf{R}_l^m(\theta,\varphi), \tag{B.28}$$

le gradient horizontal s'exprimant [6]

$$\nabla_{\mathcal{S}} = \hat{\mathbf{e}}_\theta\,\partial_\theta + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi. \tag{B.29}$$

Ces fonctions vectorielles obéissent aux relations d'orthogonalité suivantes

$$\int_\Omega \mathbf{R}_{l_1}^{m_1}\cdot\mathbf{S}_{l_2}^{m_2}d\Omega = \int_\Omega \mathbf{R}_{l_1}^{m_1}\cdot\mathbf{T}_{l_2}^{m_2}d\Omega = \int_\Omega \mathbf{S}_{l_1}^{m_1}\cdot\mathbf{T}_{l_2}^{m_2}d\Omega = 0; \tag{B.30}$$

$$\int_\Omega \mathbf{R}_{l_1}^{m_1}\cdot\left(\mathbf{R}_{l_2}^{m_2}\right)^* d\Omega = \delta_{l_1,l_2}\delta_{m_1,m_2}; \tag{B.31}$$

et

$$\int_\Omega \mathbf{S}_{l_1}^{m_1}\cdot\left(\mathbf{S}_{l_2}^{m_2}\right)^* d\Omega = \int_\Omega \mathbf{T}_{l_1}^{m_1}\cdot\left(\mathbf{T}_{l_2}^{m_2}\right)^* d\Omega = l_1(l_1+1)\delta_{l_1,l_2}\delta_{m_1,m_2}. \tag{B.32}$$

La fonction vectorielle $\mathbf{u}$ peut se projeter selon les coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Bigg\{&u_m^l(r)Y_l^m(\theta,\varphi)\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + \left[v_m^l(r)\partial_\theta Y_l^m(\theta,\varphi) + w_m^l(r)\frac{im}{\sin\theta}Y_l^m(\theta,\varphi)\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &+ \left[v_m^l(r)\frac{im}{\sin\theta}Y_l^m(\theta,\varphi) - w_m^l(r)\partial_\theta Y_l^m(\theta,\varphi)\right]\hat{\mathbf{e}}_\varphi\Bigg\},\end{aligned} \tag{B.33}$$

$\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ et $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ étant les vecteurs unitaires respectivement dans les directions r, θ et φ. Notons que $\mathbf{R}_l^m(\theta,\varphi)$ et $\mathbf{S}_l^m(\theta,\varphi)$ représentent la partie poloidale et $\mathbf{T}_l^m(\theta,\varphi)$ la partie toroidale de $\mathbf{u}$.

1.3 Développement d'opérateurs différentiels

Gradient :

Prenons une fonction $f(r,\theta,\varphi)$ exprimée en termes de $Y_l^m(\theta,\varphi)$:

$$f(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} f_m^l(r)Y_l^m(\theta,\varphi). \tag{B.34}$$

À partir de l'expression du gradient connue sur les coordonnées sphériques, l'on obtient immédiatement :

$$\nabla f(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left\{\partial_r f_m^l \mathbf{R}_l^m(\theta,\varphi) + \frac{f_m^l}{r}\mathbf{S}_l^m(\theta,\varphi)\right\}. \tag{B.35}$$

Divergence :

Prenons un champ de vecteurs $\mathbf{u}$ développé selon (B.27), sa divergence est donnée par :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 u_m^l\right) - l(l+1)\frac{v_m^l}{r}\right] Y_l^m(\theta,\varphi), \tag{B.36}$$

où l'on remarque que, si $\mathbf{u}$ est à divergence nulle, comme le champ magnétique $\mathbf{B}$ ou la densité de quantité de mouvement $\rho\,\mathcal{U}_{\mathbf{M}}$ dans l'approximation anélastique, on a la relation suivante entre u_m^l et v_m^l :

$$v_m^l = \frac{1}{l(l+1)}\frac{1}{r}\partial_r\left(r^2 u_m^l\right). \tag{B.37}$$

Laplacien d'une quantité scalaire

Muni de ces expressions décrivant le gradient d'une quantité scalaire et la divergence d'une quantité vectorielle, l'on peut aisément en déduire l'expression du laplacien d'une quantité scalaire à l'aide de la relation $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$. On obtient :

$$\nabla^2 f = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[\frac{1}{r}\partial_{r^2}\left(r f_m^l\right) - l(l+1)\frac{f_m^l}{r^2}\right] Y_l^m(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Delta_l f_m^l Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{B.38}$$

où Δ_l est l'opérateur laplacien :

$$\Delta_l = \partial_{r,r} + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{l\,(l+1)}{r^2}. \tag{B.39}$$

Rotationnel

Cet opérateur se retrouve dans l'expression du champ magnétique en termes de fonction de courant, sous la forme de densité de courant, etc. Si l'on prend $\mathbf{u}$ développé selon (B.27), l'on retrouve l'expression de Rieutord (1987) [6] :

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{u} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Bigg\{ & \left[l(l+1)\frac{w_m^l}{r}\right]\mathbf{R}_l^m(\theta,\varphi) + \left[\frac{1}{r}\partial_r(r w_m^l)\right]\mathbf{S}_l^m(\theta,\varphi) \\ & + \left[\frac{u_m^l}{r} - \frac{1}{r}\partial_r\left(r v_m^l\right)\right]\mathbf{T}_l^m(\theta,\varphi)\Bigg\},\end{aligned} \tag{B.40}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Bigg\{ & \left[\frac{l(l+1)}{r}\left(\frac{u_m^l}{r} - \frac{1}{r}\partial_r\left(r v_m^l\right)\right)\right]\mathbf{R}_l^m(\theta,\varphi) \\ & + \left[\frac{1}{r}\partial_r u_m^l - \frac{1}{r}\partial_{r^2}(r v_m^l)\right]\mathbf{S}_l^m(\theta,\varphi) + \left[-\Delta_l w_m^l\right]\mathbf{T}_l^m(\theta,\varphi)\Bigg\}\end{aligned} \tag{B.41}$$

et donc

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{u} &= \nabla\ (\nabla\ \cdot \mathbf{u}) - \nabla\ \wedge (\nabla\ \wedge \mathbf{u}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Bigg\{\left[\Delta_l u_m^l - \frac{2}{r^2}\left(u_m^l - l(l+1)v_m^l\right)\right]\mathbf{R}_l^m(\theta,\varphi) \\ &\quad + \left[\Delta_l v_m^l + 2\frac{u_m^l}{r^2}\right]\mathbf{S}_l^m(\theta,\varphi) + \left[\Delta_l w_m^l\right]\mathbf{T}_l^m(\theta,\varphi)\Bigg\},\end{aligned} \tag{B.42}$$

ce qui, dans le cas où $\mathbf{u}$ est à divergence nulle (*cf.* (B.37)), donne

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{u} &= -\nabla\ \wedge (\nabla\ \wedge \mathbf{u}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Bigg\{\left[\frac{1}{r}\Delta_l(ru_m^l)\right]\mathbf{R}_l^m(\theta,\varphi) + \left[\frac{1}{r}\partial_r\left(r\frac{\Delta_l(ru_m^l)}{l(l+1)}\right)\right]\mathbf{S}_l^m(\theta,\varphi) \\ &\qquad \left[\Delta_l w_m^l\right]\mathbf{T}_l^m(\theta,\varphi)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{B.43}$$

Enfin, en utilisant à nouveau l'opérateur rotationnel (B.40), on obtient l'opérateur "triple rotationnel" :

$$\begin{aligned}(\nabla\wedge)^3\,\mathbf{u} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}&\Bigg\{\left[-l(l+1)\frac{\Delta_l w_m^l}{r}\right]\mathbf{R}_l^m(\theta,\varphi) + \left[-\frac{1}{r}\partial_r\left(r\Delta_l w_m^l\right)\right]\mathbf{S}_l^m(\theta,\varphi) \\ &+ \left[\Delta_l z_m^l\right]\mathbf{T}_l^m(\theta,\varphi)\Bigg\}\end{aligned} \tag{B.44}$$

où

$$z_m^l = \frac{1}{r}\partial_r(rv_m^l) - \frac{u_m^l}{r}, \tag{B.45}$$

qui devient dans le cas où $\mathbf{u}$ est à divergence nulle (*cf.* (B.37)) :

$$\begin{aligned}(\nabla\wedge)^3\,\mathbf{u} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}&\Bigg\{\left[-l(l+1)\frac{\Delta_l w_m^l}{r}\right]\mathbf{R}_l^m(\theta,\varphi)\left[-\frac{1}{r}\partial_r\left(r\Delta_l w_m^l\right)\right]\mathbf{S}_l^m(\theta,\varphi) \\ &+ \left[\frac{1}{l(l+1)}\Delta_l\Delta_l(ru_m^l)\right]\mathbf{T}_l^m(\theta,\varphi)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{B.46}$$

1.4 Produits d'harmoniques sphériques vectorielles

Avant de nous pencher sur les termes non-linéaires dans lesquels interviennent le champ magnétique nous allons effectuer la projection du produit scalaire de deux vecteurs axisymétriques génériques et de leur produit vectoriel, et allons déterminer les coefficients de couplage associés.

Produit Scalaire

Prenons deux vecteurs axisymétriques génériques $\mathbf{X}_1(r,\theta)$ et $\mathbf{X}_2(r,\theta)$, que nous allons développer selon (B.27) :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_1(r,\theta) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \left\{ \mathcal{A}_0^{l_1}(r)\mathbf{R}_{l_1}^0(\theta) + \mathcal{B}_0^{l_1}(r)\mathbf{S}_{l_1}^0(\theta) + \mathcal{C}_0^{l_1}(r)\mathbf{T}_{l_1}^0(\theta) \right\} \\ \mathbf{X}_2(r,\theta) = \sum_{l_2=0}^{\infty} \left\{ \mathcal{D}_0^{l_2}(r)\mathbf{R}_{l_2}^0(\theta) + \mathcal{E}_0^{l_2}(r)\mathbf{S}_{l_2}^0(\theta) + \mathcal{F}_0^{l_2}(r)\mathbf{T}_{l_2}^0(\theta) \right\}, \end{cases} \tag{B.47}$$

et allons effectuer leur produit scalaire. Après un peu d'algèbre (*cf.* §A.1.4.), on obtient

$$\mathbf{X}_1(r,\theta)\cdot\mathbf{X}_2(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}_{(\mathbf{X}_1\cdot\mathbf{X}_2);l}(r)\, P_l(\cos\theta) \tag{B.48}$$

avec les expressions pour $\mathcal{P}_{(\mathbf{X}_1\cdot\mathbf{X}_2);l}(r)$ suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(\mathbf{X}_1\cdot\mathbf{X}_2);l}(r) = \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty} \mathcal{N}_{l_1}^0\mathcal{N}_{l_2}^0 \Bigg\{ & \left[\mathcal{A}_0^{l_1}(r)\,\mathcal{D}_0^{l_2}(r)\right] \sum_{j=I(l_1,0,l_2,0)}^{l_1+l_2} d_{l_1,0,l_2,0}^{j}\delta_{l,j} \\ & + \frac{2}{3}\left[\mathcal{B}_0^{l_1}(r)\,\mathcal{E}_0^{l_2}(r) + \mathcal{C}_0^{l_1}(r)\,\mathcal{F}_0^{l_2}(r)\right] X_{l_1,l_2}^{l} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{B.49}$$

Ici X_{l_1,l_2}^{l} est défini en termes des coefficients de couplage d_{l_1,m_1,l_2,m_2}^{l} (B.25) (*cf.* [4]) :

$$X_{l_1,l_2}^{l} = \sum_{j=I(l_1,1,l_2,1)}^{l_1+l_2} \left(d_{l_1,1,l_2,1}^{j} \sum_{p=0}^{E\left[\frac{j-1}{2}\right]} \left[(2j-4p-1)\cdot X\right] \right) \tag{B.50}$$

avec

$$\begin{aligned} X = \sum_{q=0}^{E\left[\frac{(j-2p-1)-1}{2}\right]} \Bigg\{ & \left[2(j-2p-1)-4q-1\right]\cdot\Bigg(\delta_{l,[(j-2p-1)-2q-1]} \\ & - \sum_{r=I(2,0,[(j-2p-1)-2q-1],0)}^{[(j-2p-1)-2q-1]+2} \left[d_{2,0,[(j-2p-1)-2q-1],0}^{r}\delta_{l,r}\right]\Bigg)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{B.51}$$

Nous avons employé la notation traditionnelle $\delta_{i,j}$ pour le symbole de Kronecker ; $E[x]$ est la partie entière de x et $I(l_1,m_1,l_2,m_2) = \max(|l_1-l_2|, m_1+m_2)$.

Produit vectoriel

On opère de même pour le produit vectoriel de deux vecteurs axisymétriques génériques $\mathbf{X}_1(r,\theta)$ et $\mathbf{X}_2(r,\theta)$, en développant à nouveau selon (B.27). On obtient finalement

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1(r,\theta)\wedge\mathbf{X}_2(r,\theta) &= \mathcal{X}_{(\mathbf{X}_1\wedge\mathbf{X}_2);0}(r)\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + \sum_{l=1}^{\infty}\Big\{\mathcal{X}_{(\mathbf{X}_1\wedge\mathbf{X}_2);l}(r)P_l(\cos\theta)\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \\ &\quad + \mathcal{Y}_{(\mathbf{X}_1\wedge\mathbf{X}_2);l}(r)P_l^1(\cos\theta)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \mathcal{Z}_{(\mathbf{X}_1\wedge\mathbf{X}_2);l}(r)P_l^1(\cos\theta)\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi\Big\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\Bigg\{\left[\frac{\mathcal{X}_{(\mathbf{X}_1\wedge\mathbf{X}_2);l}(r)}{\mathcal{N}_l^0}\right]\mathbf{R}_l^0(\theta) + \left[\frac{-\mathcal{Y}_{(\mathbf{X}_1\wedge\mathbf{X}_2);l}(r)}{\mathcal{N}_l^0}\right]\mathbf{S}_l^0(\theta) \\ &\quad + \left[\frac{\mathcal{Z}_{(\mathbf{X}_1\wedge\mathbf{X}_2);l}(r)}{\mathcal{N}_l^0}\right]\mathbf{T}_l^0(\theta)\Bigg\},\end{aligned} \tag{B.52}$$

où l'on a utilisé la propriété des fonctions de Legendre suivante (Gradshteyn & Ryzhik 2007 [3]) :

$$\frac{\mathrm{d}P_l(\mu)}{\mathrm{d}\mu} = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{l-1}{2}\right)}(2l-4k-1)\,P_{l-2k-1}(\mu). \tag{B.53}$$

Les fonctions radiales $\mathcal{X}_{(\mathbf{X}_1\wedge\mathbf{X}_2);l}(r)$, $\mathcal{Y}_{(\mathbf{X}_1\wedge\mathbf{X}_2);l}(r)$ et $\mathcal{Z}_{(\mathbf{X}_1\wedge\mathbf{X}_2);l}(r)$ sont données par :

$$\mathcal{X}_{(\mathbf{X}_1\wedge\mathbf{X}_2);l}(r) = \frac{2}{3}\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\mathcal{N}_{l_1}^0\mathcal{N}_{l_2}^0\left\{\left[\mathcal{C}_0^{l_1}(r)\mathcal{E}_0^{l_2}(r) - \mathcal{B}_0^{l_1}(r)\mathcal{F}_0^{l_2}(r)\right]X_{l_1,l_2}^l\right\}, \tag{B.54}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{(\mathbf{X}_1\wedge\mathbf{X}_2);l}(r) = \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\mathcal{N}_{l_1}^0\mathcal{N}_{l_2}^0\Bigg\{&\left[\mathcal{C}_0^{l_1}(r)\mathcal{D}_0^{l_2}(r)\right]\sum_{j=I(l_1,1,l_2,0)}^{l_1+l_2}d_{l_1,1,l_2,0}^j\delta_{l,j} \\ &- \left[\mathcal{A}_0^{l_1}(r)\mathcal{F}_0^{l_2}(r)\right]\sum_{j=I(l_1,0,l_2,1)}^{l_1+l_2}d_{l_1,0,l_2,1}^j\delta_{l,j}\Bigg\}\end{aligned} \tag{B.55}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{(\mathbf{X}_1\wedge\mathbf{X}_2);l}(r) = \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\mathcal{N}_{l_1}^0\mathcal{N}_{l_2}^0\Bigg\{&\left[\mathcal{B}_0^{l_1}(r)\mathcal{D}_0^{l_2}(r)\right]\sum_{j=I(l_1,1,l_2,0)}^{l_1+l_2}d_{l_1,1,l_2,0}^j\delta_{l,j} \\ &- \left[\mathcal{A}_0^{l_1}(r)\mathcal{E}_0^{l_2}(r)\right]\sum_{j=I(l_1,0,l_2,1)}^{l_1+l_2}d_{l_1,0,l_2,1}^j\delta_{l,j}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{B.56}$$

Le coefficient X_{l_1,l_2}^l ayant été donné en (B.50).

2. Projection des quantités magnétiques sur les harmoniques sphériques

Projection du champ magnétique

Le champ magnétique $\mathbf{B}$ est donné en terme de fonctions de courant magnétiques poloïdale ξ_{P} et toroïdale ξ_{T} sous la forme à divergence nulle [5] :

$$\mathbf{B} = \nabla \times [\nabla \times (\xi_{\mathrm{P}}(r,\theta)\ \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}) + \xi_{\mathrm{T}}(r,\theta)\ \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}]\,. \tag{B.57}$$

On projette alors les fonctions de courant magnétique sur les harmoniques sphériques (*cf.* § 3.5.1) selon

$$\xi_{\mathrm{P}}(r,\theta) = \sum_{\ell} \xi_0^{\ell}(r)\ Y_{\ell}^0(\theta)\,; \tag{B.58}$$

$$\xi_{\mathrm{T}}(r,\theta) = \sum_{\ell} \chi_0^{\ell}(r)\ Y_{\ell}^0(\theta)\,. \tag{B.59}$$

Le champ peut donc être exprimé selon

$$\vec{B}_{\mathrm{P}} = \sum_{l=1}^{\infty} \nabla \times \nabla \times \left[\xi_0^l\, \mathbf{R}_l^0(\theta)\right] \quad \text{et} \quad \vec{B}_{\mathrm{T}} = \sum_{l=1}^{\infty} \nabla \times \left[\chi_0^l\, \mathbf{R}_l^0(\theta)\right]. \tag{B.60}$$

Ensuite nous développons le rotationnel comme explicité dans les équations (B.40) et (B.41) pour obtenir le développement suivant du champ magnétique :

$$\mathbf{B} = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\xi_0^{\ell}\,\mathbf{R}_{\ell}^0 + \frac{1}{r}\partial_r\xi_0^{\ell}\,\mathbf{S}_{\ell}^0 + \frac{1}{r}\chi_0^{\ell}\mathbf{T}_{\ell}^0, \tag{B.61}$$

Ce développement en champs de vecteurs nous permet de séparer explicitement les coordonnées spatiales (r,θ) dans les équations vectorielles aux dérivées partielles qui gouvernent le problème. Cette décomposition spectrale est en pratique effectuée sur un nombre d'harmoniques sphériques limitées : en utilisant cette décomposition on scinde le problème en des dérivées partielles en t et en r seulement pour chaque mode. Ce point est non sans importance d'un point de vue numérique, parce que nous avons besoin d'obtenir une bien meilleure précision dans la direction radiale qu'horizontale.

Projection de la densité de courant

En utilisant l'expression (B.57) pour le champ, on peut réexprimer $\mathbf{j}$ selon :

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0}\left[\nabla \times \nabla \times \nabla \times (\xi_P\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}) + \nabla \times \nabla \times (\xi_T\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}})\right], \tag{B.62}$$

qui, en projetant à nouveau selon $\mathbf{R}_l^0(\theta)$, $\mathbf{S}_l^0(\theta)$ et $\mathbf{T}_l^0(\theta)$ (*cf.* éqs. (B.41) et (B.44)) donne :

$$\mathbf{j}(r,\theta) = \mathbf{j}_{\mathrm{P}}(r,\theta) + \mathbf{j}_{\mathrm{T}}(r,\theta) \tag{B.63}$$

avec

$$\mathbf{j}_{\mathrm{P}}(r,\theta) = \frac{1}{\mu_0}\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\left[l(l+1)\frac{\chi_0^l}{r^2}\right]\mathbf{R}_l^0(\theta) + \left[\frac{1}{r}\partial_r\chi_0^l\right]\mathbf{S}_l^0(\theta)\right\}, \tag{B.64}$$

$$\mathbf{j}_{\mathrm{T}}(r,\theta) = -\frac{1}{\mu_0}\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\left[\Delta_l\left(\frac{\xi_0^l}{r}\right)\right]\mathbf{T}_l^0(\theta)\right\}, \tag{B.65}$$

où Δ_l est le laplacien :

$$\Delta_l = \partial_{r,r} + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{l(l+1)}{r^2}. \tag{B.66}$$

Projection de la force de Lorentz

Comme nous l'avons fait auparavant pour le champ magnétique $\mathbf{B}$ et pour le courant $\mathbf{j}$, on scinde la force en ses composantes poloïdale et toroïdale. On remplace $\mathbf{B}$ par son développement (B.61) et $\mathbf{j}$ par son développement (éqs. (B.63) → (B.65)) et à l'aide de la formule permettant d'exprimer le produit vectoriel de deux vecteurs axisymétriques (B.52), on aboutit à

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L}} = \mathbf{F}_{\mathcal{L};\mathrm{P}} + \mathbf{F}_{\mathcal{L};\mathrm{T}} \tag{B.67}$$

où

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L};\mathrm{P}} = \mathbf{j}_{\mathrm{T}} \times \mathbf{B}_{\mathrm{P}} + \mathbf{j}_{\mathrm{P}} \times \mathbf{B}_{\mathrm{T}} \tag{B.68}$$

$$= \left[\frac{\mathcal{X}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};0}}{\mathcal{N}_0^0}\right] \mathbf{R}_0^0(\theta) + \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\mathcal{X}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l}}{\mathcal{N}_l^0}\right] \mathbf{R}_l^0(\theta) + \left[-\frac{\mathcal{Y}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l}}{\mathcal{N}_l^0}\right] \mathbf{S}_l^0(\theta) \right\}, \tag{B.69}$$

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L};\mathrm{T}} = \mathbf{j}_{\mathrm{P}} \times \mathbf{B}_{\mathrm{P}} \tag{B.70}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\mathcal{Z}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l}}{\mathcal{N}_l^0}\right] \mathbf{T}_l^0(\theta) \right\}. \tag{B.71}$$

Nous donnons les expressions explicites pour les fonctions radiales $\mathcal{X}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l}(r)$, $\mathcal{Y}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l}(r)$ et $\mathcal{Z}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l}(r)$ en termes des fonctions de courant magnétique ξ_0^l et χ_0^l :

$$\mathcal{X}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l} = \frac{2}{3}\frac{1}{\mu_0} \sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty} \mathcal{N}_{l_1}^0 \mathcal{N}_{l_2}^0 \left\{ \left(\left[-\Delta_{l_1}\left(\frac{\xi_0^{l_1}}{r}\right)\right] \left[\frac{1}{r}\partial_r \xi_0^{l_2}\right] - \left[\frac{1}{r}\partial_r \chi_0^{l_1}\right] \left[\frac{\chi_0^{l_2}}{r}\right] \right) X_{l_1,l_2}^l \right\} \tag{B.72}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty} \mathcal{N}_{l_1}^0 \mathcal{N}_{l_2}^0 \Bigg\{ & \left(\left[-\Delta_{l_1}\left(\frac{\xi_0^{l_1}}{r}\right)\right] \left[l_2(l_2+1)\frac{\xi_0^{l_2}}{r^2}\right] \right) \sum_{j=I(l_1,1,l_2,0)}^{l_1+l_2} d_{l_1,1,l_2,0}^j \delta_{l,j} \\ & - \left(\left[l_1(l_1+1)\frac{\chi_0^{l_1}}{r^2}\right] \left[\frac{\chi_0^{l_2}}{r}\right] \right) \sum_{j=I(l_1,0,l_2,1)}^{l_1+l_2} d_{l_1,0,l_2,1}^j \delta_{l,j} \Bigg\}\end{aligned} \tag{B.73}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty} \mathcal{N}_{l_1}^0 \mathcal{N}_{l_2}^0 \Bigg\{ & \left(\left[\frac{1}{r}\partial_r \chi_0^{l_1}\right] \left[l_2(l_2+1)\frac{\xi_0^{l_2}}{r^2}\right] \right) \sum_{j=I(l_1,1,l_2,0)}^{l_1+l_2} d_{l_1,1,l_2,0}^j \delta_{l,j} \\ & - \left(\left[l_1(l_1+1)\frac{\chi_0^{l_1}}{r^2}\right] \left[\frac{1}{r}\partial_r \xi_0^{l_2}\right] \right) \sum_{j=I(l_1,0,l_2,1)}^{l_1+l_2} d_{l_1,0,l_2,1}^j \delta_{l,j} \Bigg\}.\end{aligned} \tag{B.74}$$

Les coefficients $d_{l_1,0,l_2,0}^j$ et X_{l_1,l_2}^l sont donnés respectivement en (B.25) et en (B.50) -(B.51) et $I(l_1, m_1, l_2, m_2) = \max(|l_1 - l_2|, m_1 + m_2)$. Les coefficients de normalisation $\mathcal{N}_l^0$ son donnés en (B.2).

Couple de la force de Lorentz

Celui-ci est défini par

$$\Gamma_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}}}(r,\theta) = r\sin\theta\, F_{\mathcal{L},\varphi} = r\sin\theta \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{Z}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};l}(r) P_l^1(\cos\theta)\,, \tag{B.75}$$

où $F_{\mathcal{L},\varphi}$ est la composante azimutale de $\mathbf{F}_{\mathcal{L}}$. Il peut être utile d'exprimer ce couple en fonction des polynômes de Legendre associés axisymétriques. Pour ce faire, on utilise leur propriété suivante :

$$P_l^1(\cos\theta) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} P_l(\cos\theta) = \sin\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} P_l(\mu) \tag{B.76}$$

(où $\mu = \cos\theta$), ainsi que la propriété vérifiée par $dP_l(\mu)/d\mu$, donnée en (B.53). On peut alors exprimer $\Gamma_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}}}$ sous sa forme finale :

$$\Gamma_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_l(r) \sin^2\theta\, P_l(\cos\theta) \tag{B.77}$$

où

$$\Gamma_l(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r\mathcal{Z}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};k}(r) \left[\sum_{j=0}^{E\left[\frac{k-1}{2}\right]} (2k-4j-1)\,\delta_{l,k-2j-1} \right], \tag{B.78}$$

$E[x]$ désignant la partie entière de x, et $\mathcal{Z}_{\mathbf{F}_{\mathcal{L}};k}$ est défini en éq. (B.67).

Projection de la pression magnétique

À partir de l'expression du champ magnétique (B.61) sur la base des harmoniques sphériques vectorielles et en utilisant l'expression pour le produit scalaire de deux fonctions dans cette base (B.48) et (B.49), on obtient finalement comme expression

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \sum_{l=0}^{\infty} \Bigg(\sum_{l_1=1}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{\infty} \mathcal{N}_{l_1}^0 \mathcal{N}_{l_2}^0 \Bigg\{ \left[l_1(l_1+1) l_2(l_2+1) \frac{\xi_0^{l_1}(r)}{r^2} \frac{\xi_0^{l_2}(r)}{r^2} \right] \sum_{j=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} d_{l_1,0,l_2,0}^{j} \delta_l^j \\ + \frac{2}{3}\frac{1}{r^2} \left[\partial_r \xi_0^{l_1}(r) \partial_r \xi_0^{l_2}(r) + \chi_0^{l_1}(r) \chi_0^{l_2}(r) \right] X_{l_1,l_2}^{l} \Bigg\} P_l(\cos\theta) \Bigg). \end{aligned} \tag{B.79}$$

Projection des termes énergétiques

Nous donnons ici des expressions explicites des quantités énergétiques associées au champ magnétique. Le lecteur intéressé par l'implémentation de champs magnétiques forts à l'aide de méthodes spectrales pourra ainsi se référer à ce qui suit.

Le chauffage ohmique

Nous avons dans le cas d'une diffusion magnétique anisotrope :

$$\mathcal{Q}(r,\theta) = \mu_0 \,||\eta|| \otimes (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B})\,, \tag{B.80}$$

Soit finalement après substitution par les valeurs de $\nabla \times \mathbf{B}$ obtenues lors du calcul de $\mathbf{j}$ et utilisation de la formule pour le produit scalaire de deux fonctions projetées sur les harmoniques sphériques (éqs. (B.48) → (B.51)) :

$$\mathcal{Q}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{Q}_l(r) P_l(\cos\theta), \tag{B.81}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_l = \frac{1}{\mu_0}\sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty}\mathcal{N}_{l_1}^0\mathcal{N}_{l_2}^0\Bigg\{&\left(\eta_v\left[l_1(l_1+1)\frac{\chi_0^{l_1}}{r^2}\right]\left[l_2(l_2+1)\frac{\chi_0^{l_2}}{r^2}\right]\right)\sum_{j=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} d^j_{l_1,0,l_2,0}\delta_{l,j}\\ &+\frac{2}{3}\eta_h\left(\left[\frac{1}{r}\partial_r\chi_0^{l_1}\right]\left[\frac{1}{r}\partial_r\chi_0^{l_2}\right]+\left[\Delta_{l_1}\left(\frac{\xi_0^{l_1}}{r}\right)\right]\left[\Delta_{l_2}\left(\frac{\xi_0^{l_2}}{r}\right)\right]\right)X^l_{l_1,l_2}\Bigg\}\end{aligned} \tag{B.82}$$

Le flux de Poynting
Soit

$$\nabla\cdot\mathcal{S} = \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0}\right) \tag{B.83}$$

ou encore

$$\nabla\cdot\mathcal{S} = \nabla\cdot\mathcal{S}_1 + \nabla\cdot\mathcal{S}_2 \tag{B.84}$$

avec

$$\nabla\cdot\mathcal{S}_1 \equiv \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot[(||\eta||\otimes(\nabla\times\mathbf{B}))\times\mathbf{B}] \tag{B.85}$$

$$\text{et}\qquad \nabla\cdot\mathcal{S}_2 \equiv -\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot[(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}] \tag{B.86}$$

où l'on a utilisé à nouveau l'équation de Maxwell-Ampère. On peut chercher une expression explicite de chacun de ces deux termes :

- **Expression du terme $\nabla\cdot\mathcal{S}_1$**
  Après application de la formule (B.52) sur le produit vectoriel de deux fonctions projetées sur les harmoniques sphériques vectorielles, puis de la formule (B.36) établissant la divergence d'une telle fonction on trouve :

$$\nabla\cdot\mathcal{S}_1 = \frac{1}{\mu_0}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\frac{\mathcal{X}_{\mathcal{S}_1,l}}{\mathcal{N}_l^0}(r)\right) - l(l+1)\frac{1}{r}\frac{\mathcal{Y}_{\mathcal{S}_1,l}}{\mathcal{N}_l^0}(r)\right]Y_l^0(\theta), \tag{B.87}$$

  où

$$\mathcal{X}_{\mathcal{S}_1,l} = \frac{2}{3}\sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty}\mathcal{N}_{l_1}^0\mathcal{N}_{l_2}^0\left\{\left[-\eta_h\Delta_{l_1}\left(\frac{\xi_0^{l_1}}{r}\right)\frac{1}{r}\partial_r\xi_0^{l_2} - \frac{\eta_h}{r}\partial_r\left(\chi_0^{l_1}\right)\frac{\chi_0^{l_2}}{r}\right]X^l_{l_1,l_2}\right\} \tag{B.88}$$

et

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{S}_1,l} = \sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty}\mathcal{N}_{l_1}^0\mathcal{N}_{l_2}^0\left\{\left[-\eta_h\Delta_{l_1}\left(\frac{\xi_0^{l_1}}{r}\right)l_2(l_2+1)\xi_0^{l_2}\right]\sum_{j=I(l_1,1,l_2,0)}^{l_1+l_2} d_{l_1,1,l_2,0}^{j}\delta_{l,j}\right.$$
$$\left.-\left[\eta_v l_1(l_1+1)\frac{\chi_0^{l_1}}{r^2}\frac{\chi_0^{l_2}}{r^2}\right]\sum_{j=I(l_1,0,l_2,1)}^{l_1+l_2} d_{l_1,0,l_2,1}^{j}\delta_{l,j}\right\}. \tag{B.89}$$

– **Expression du terme $\nabla\cdot\mathcal{S}_2$**
De même après utilisation des formules (B.52) et (B.36) on trouve comme expression pour le second terme du flux de Poynting

$$\nabla\cdot\mathcal{S}_2 = \frac{1}{\mu_0}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\frac{\mathcal{X}_{\mathcal{S}_2,l}}{\mathcal{N}_l^0}(r)\right) - l(l+1)\frac{1}{r}\frac{\mathcal{Y}_{\mathcal{S}_2,l}}{\mathcal{N}_l^0}(r)\right]Y_l^0(\theta), \tag{B.90}$$

où

$$\mathcal{X}_{\mathcal{S}_2,l} = \frac{2}{3}\sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty}\mathcal{N}_{l_1}^0\mathcal{N}_{l_2}^0\left\{\left[\frac{\dot r}{r}\partial_r\left(\xi_0^{l_1}\right)\frac{\chi_0^{l_2}}{r} + \frac{\dot r}{r^2}\chi_0^{l_1}\chi_0^{l_2}\right]X_{l_1,l_2}^{l}\right\} \tag{B.91}$$

et

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{S}_2,l} = \sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty}\mathcal{N}_{l_1}^0\mathcal{N}_{l_2}^0\left\{\left[\frac{\dot r}{r}\partial_r\left(\xi_0^{l_1}\right)l_2(l_2+1)\frac{\xi_0^{l_2}}{r^2}\right]\sum_{j=I(l_1,1,l_2,0)}^{l_1+l_2} d_{l_1,1,l_2,0}^{j}\delta_{l,j}\right\}. \tag{B.92}$$

3. Projection des quantités dynamiques sur les harmoniques sphériques

3.1 Terme d'advection

Reprenons la définition du terme d'advection dans l'équation d'induction :

$$(\mathcal{U}_\varphi + \mathcal{U}_M)\times\mathbf{B}, \tag{B.93}$$

où $\mathcal{U}_\varphi(r,\theta) = r\sin\theta\,\Omega(r,\theta)\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ et $\mathcal{U}_M$ représentent respectivement les flots zonal et méridien moyen, dont les développements sont donnés en (6.19). Ainsi

$$\mathbf{X}_1(r,\theta) = \mathcal{U}_\varphi(r,\theta) + \mathcal{U}_M(r,\theta) = \sum_{l_1>0}^{\infty}\left\{\mathcal{A}_0^{l_1}(r)\mathbf{R}_{l_1}^0(\theta) + \mathcal{B}_0^{l_1}(r)\mathbf{S}_{l_1}^0(\theta) + \mathcal{C}_0^{l_1}(r)\mathbf{T}_{l_1}^0(\theta)\right\}$$
$$= \sum_{l_1>0}^{\infty}\left\{u_0^{l_1}(r)\,\mathbf{R}_{l_1}^0(\theta) + v_0^{l_1}(r)\,\mathbf{S}_{l_1}^0(\theta) + w_0^{l_1}(r)\,\mathbf{T}_{l_1}^0(\theta)\right\} \tag{B.94}$$

et (*cf.* (B.61))

$$\mathbf{X}_2(r,\theta) = \mathbf{B}(r,\theta) = \sum_{l_2=1}^{\infty}\left\{\mathcal{D}_0^{l_2}(r)\mathbf{R}_{l_2}^0(\theta) + \mathcal{E}_0^{l_2}(r)\mathbf{S}_{l_2}^0(\theta) + \mathcal{F}_0^{l_2}(r)\mathbf{T}_{l_2}^0(\theta)\right\}$$
$$= \sum_{l_2=1}^{\infty}\left\{\left[l_2(l_2+1)\frac{\xi_0^{l_2}}{r^2}\right]\mathbf{R}_{l_2}^0(\theta) + \left[\frac{1}{r}\partial_r\xi_0^{l_2}\right]\mathbf{S}_{l_2}^0(\theta) + \left[\frac{\chi_0^{l_2}}{r}\right]\mathbf{T}_{l_2}^0(\theta)\right\}. \tag{B.95}$$

Explicitons le champ de vitesses et le champ magnétique :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0^{l_1} = u_0^{l_1} = \frac{U_{l_1}}{\mathcal{N}_{l_1}^0} \\ \mathcal{B}_0^{l_1} = v_0^{l_1} = \frac{V_{l_1}}{\mathcal{N}_{l_1}^0} \\ \mathcal{C}_0^{l_1} = w_0^{l_1} = r\left[\frac{D_{l_1-1}^0}{\mathcal{N}_{l_1-1}^0}\Omega_{l_1-1}^* - \frac{C_{l_1+1}^0}{\mathcal{N}_{l_1+1}^0}\Omega_{l_1+1}^*\right] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathcal{D}_0^{l_2} = \left[l_2(l_2+1)\frac{\xi_0^{l_2}}{r^2}\right] \\ \mathcal{E}_0^{l_2} = \left[\frac{1}{r}\partial_r\xi_0^{l_2}\right] \\ \mathcal{F}_0^{l_2} = \left[\frac{\chi_0^{l_2}}{r}\right]. \end{cases} \tag{B.96}$$

Dès lors, en utilisant (B.52-B.54-B.55-B.56) il vient :

$$\begin{aligned} &(\mathcal{U}_\varphi(r,\theta) + \mathcal{U}_M(r,\theta)) \times \mathbf{B}(r,\theta) = \mathbf{X}_1(r,\theta) \times \mathbf{X}_2(r,\theta) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{\mathcal{X}_{\mathbf{Ad};\mathrm{l}}(r)}{\mathcal{N}_l^0}\right]\mathbf{R}_l^0(\theta) + \left[\frac{-\mathcal{Y}_{\mathbf{Ad};\mathrm{l}}(r)}{\mathcal{N}_l^0}\right]\mathbf{S}_l^0(\theta) + \left[\frac{\mathcal{Z}_{\mathbf{Ad};\mathrm{l}}(r)}{\mathcal{N}_l^0}\right]\mathbf{T}_l^0(\theta)\right\}, \end{aligned} \tag{B.97}$$

où $\mathcal{X}_{\mathbf{Ad};\mathrm{l}}(r)$, $\mathcal{Y}_{\mathbf{Ad};\mathrm{l}}(r)$ et $\mathcal{Z}_{\mathbf{Ad};\mathrm{l}}(r)$ sont donnés par :

$$\mathcal{X}_{\mathbf{Ad};\mathrm{l}} = \frac{2}{3}\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty}\mathcal{N}_{l_1}^0\mathcal{N}_{l_2}^0\left\{\left(w_0^{l_1}\left[\frac{1}{r}\partial_r\xi_0^{l_2}\right] - v_0^{l_1}\left[\frac{\chi_0^{l_2}}{r}\right]\right)X_{l_1,l_2}^l\right\}, \tag{B.98}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\mathbf{Ad};l} = &\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty}\mathcal{N}_{l_1}^0\mathcal{N}_{l_2}^0\left\{\left(w_0^{l_1}\left[l_2(l_2+1)\frac{\xi_0^{l_2}}{r^2}\right]\right)\sum_{j=I(l_1,1,l_2,0)}^{l_1+l_2} d_{l_1,1,l_2,0}^j\delta_{l,j}\right. \\ &\left. - \left(u_0^{l_1}\left[\frac{\chi_0^{l_2}}{r}\right]\right)\sum_{j=I(l_1,0,l_2,1)}^{l_1+l_2} d_{l_1,0,l_2,1}^j\delta_{l,j}\right\}, \end{aligned} \tag{B.99}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\mathbf{Ad};l} = &\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty}\mathcal{N}_{l_1}^0\mathcal{N}_{l_2}^0\left\{\left(v_0^{l_1}\left[l_2(l_2+1)\frac{\xi_0^{l_2}}{r^2}\right]\right)\sum_{j=I(l_1,1,l_2,0)}^{l_1+l_2} d_{l_1,1,l_2,0}^j\delta_{l,j}\right. \\ &\left. - \left(u_0^{l_1}\left[\frac{1}{r}\partial_r\xi_0^{l_2}\right]\right)\sum_{j=I(l_1,0,l_2,1)}^{l_1+l_2} d_{l_1,0,l_2,1}^j\delta_{l,j}\right\}. \end{aligned} \tag{B.100}$$

3.2 Coefficients de couplage pour les perturbations liées à la force centrifuge

D'après les expressions (5.120) et (5.121) des coefficients des projections a_l et b_l sur les polynômes de Legendre, les coefficients ${}^a\Theta_l^j$ et ${}^b\Theta_l^j$ sont définis par

$${}^a\Theta_l^j = \frac{\int_0^\pi cos^j\theta\, P_l(\cos\theta)\, \sin^3\theta\, d\theta}{\int_0^\pi \left[P_l(\cos\theta)\right]^2\, \sin\theta\, d\theta}, \tag{B.101}$$

$${}^b\Theta_l^j = \frac{\int_0^\pi \cos^{j+1}\theta\, P_l^1(\cos\theta)\, \sin^2\theta\, \cos\theta d\theta}{\int_0^\pi \left[P_l^1(\cos\theta)\right]^2\, \sin\theta\, d\theta}. \tag{B.102}$$

Leurs valeurs en fonction de j et l sont données en Tab. B.1 et Tab. B.2.

	${}^a\Theta_l^j$					
j \ l	0	2	4	6	8	10
0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0	0
2	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{21}$	$-\frac{8}{35}$	0	0	0
4	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{21}$	$-\frac{32}{385}$	$-\frac{16}{231}$	0	0
6	$\frac{2}{63}$	$\frac{50}{693}$	$-\frac{24}{1001}$	$-\frac{208}{3465}$	$-\frac{128}{6435}$	0
8	$\frac{2}{99}$	$\frac{70}{1287}$	0	$-\frac{32}{765}$	$-\frac{256}{9405}$	$-\frac{256}{46189}$

TABLE B.1 – Valeurs numériques des coefficients ${}^a\Theta_l^j$ pour le calcul des perturbations jusqu'au mode $l = 10$.

	${}^b\Theta_l^j$				
j \ l	2	4	6	8	10
0	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
2	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{35}$	0	0	0
4	$-\frac{5}{63}$	$-\frac{4}{77}$	$-\frac{8}{693}$	0	0
6	$-\frac{5}{99}$	$-\frac{6}{143}$	$-\frac{8}{495}$	$-\frac{16}{6435}$	0
8	$-\frac{5}{143}$	$-\frac{24}{715}$	$-\frac{16}{935}$	$-\frac{64}{13585}$	$-\frac{128}{230945}$

TABLE B.2 – Valeurs numériques des coefficients ${}^b\Theta_l^j$ pour le calcul des perturbations jusqu'au mode $l = 10$.

Bibliographie

[1] C. COHEN-TANNOUDJI, B. DUI et F. LALOE. *Mecanique quantique.* Herman, 1973. 223

[2] A. R. EDMOND. *Angular Momentum in Quantum Mechanics (3rd printing, with corrections).* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1974. 224

[3] I. S. GRADSHTEYN, I. M. RYZHIK, A. JEFFREY et D. ZWILLINGER. *Table of Integrals, Series, and Products.* 2007. 230

[4] S. MATHIS. « *Effet du mélange interne sur l'évolution des étoiles : processus de transport dans les zones radiatives* ». Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, septembre 2005. 229

[5] S. MATHIS et J. P. ZAHN. « Transport and mixing in the radiation zones of rotating stars. II. Axisymmetric magnetic field ». *A&A*, 440 :653–666, septembre 2005. xvii, 66, 125, 164, 165, 171, 231

[6] M. RIEUTORD. « Linear theory of rotating fluids using spherical harmonics part I : Steady flows ». *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 39 :163–182, 1987. 78, 226, 227

[7] D. A. VARSHALOVICH, A. N. MOSKALEV et V. K. KHERSONSKII. *Quantum Theory of Angular Momentum.* World Scientific, 1975. 224

Annexe C
Méthode des fonctions de Green

1. Méthode générale

La méthode de Green permet de résoudre une équation différentielle inhomogène avec des conditions aux limites complexes. Elle joue à peu près le même rôle dans les équations aux dérivées partielles que l'analyse de Fourier pour la recherche de solutions d'équations différentielles ordinaires.
Soit donc dans le cas général l'équation différentielle de type

$$\mathcal{L}\,\Psi(\mathbf{x},t) = \mathcal{S}(\mathbf{x},t), \tag{C.1}$$

à résoudre, où $\mathcal{L}$ est un opérateur différentiel linéaire (de type Sturm-Liouville) et $\mathcal{S}$ est le terme source ayant n'importe quelle dépendance en temps t et en espace $\mathbf{x} = \Big(\{x_i\}_{i=\{1,\dots 3\}}\Big)$. Sont données pour conditions aux limites

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j}\alpha_{i,j}\frac{\partial^j\Psi}{x_i^j}(\mathbf{x},t) = 0. \tag{C.2}$$

La fonction de Green G est la solution de l'équation

$$\mathcal{L}\,G(\mathbf{x},\mathbf{x}',t,t') = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}',t-t'), \tag{C.3}$$

δ étant la distribution de Dirac, compatible avec les conditions aux limites (C.2). Autrement dit la fonction de Green[1] (aussi appelé « noyau de Green ») incarne la manière dont l'opérateur $\mathcal{L}$ réagit (« effet ») à une impulsion localisée (« cause ») en $(\mathbf{x}',t')$ pour des conditions aux limites données. La solution à l'équation inhomogène (C.5) se trouve alors en intégrant le noyau de Green, convolué par le terme source sur tout le domaine $\mathcal{V}$ défini par les conditions aux limites selon (*cf. e.g.* [2], [3], [4], [5], [6], [7])

$$\Psi(\mathbf{x},t) = \int_{\mathcal{V},t} G(\mathbf{x},\mathbf{x}',t,t')\mathcal{S}(\mathbf{x}',t')J(\mathbf{x}')d\mathbf{x}'dt', \tag{C.4}$$

J étant le jacobien tel que $J(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ est l'élément de volume infinitésimal $d\mathcal{V}$ générant le volume $\mathcal{V}$.

1. À proprement parler, G étant homogène à la distribution de Dirac δ, c'est donc aussi une distribution. Néanmoins, dans la plupart des situations cette distribution est en fait une fonction, d'où le nom « fonction de Green ».

2. Application à la résolution de l'équation de Grad-Shafranov

Soit à résoudre l'équation différentielle linéaire

$$\mathcal{L}_{\lambda_1}\Psi(\mathbf{x},t) = \mathcal{S}(\mathbf{x},t), \tag{C.5}$$

où $\mathcal{L}_{\lambda_1}$ est l'opérateur différentiel elliptique

$$\mathcal{L}_{\lambda_1} = \Delta^* + \frac{\lambda_1^2}{R^2} \equiv \left[\partial_{r^2} + \frac{1-x^2}{r^2}\partial_{x^2} + \frac{\lambda_1^2}{R^2}\right]. \tag{C.6}$$

Le terme source $\mathcal{S}(\mathbf{x},t)$ est ici indépendant du temps et s'écrit

$$\mathcal{S}(\mathbf{x},t) = -\mu_0\,\beta_0\,r^2\,\bar{\rho}\,\sin^2\,\theta. \tag{C.7}$$

2.1 Remise en forme

Faisons le changement de variables $\mu = \cos\theta$:

$$\frac{\partial}{\partial\mu} = \frac{\partial\mu}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\mu} = -\sqrt{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial\mu}, \tag{C.8}$$

ainsi que $x = r/R$: on obtient finalement

$$\Delta^* = \frac{1}{R^2}\left(\partial_{x^2} + \frac{1-\mu^2}{x^2}\partial_{\mu^2}\right); \tag{C.9}$$

d'où finalement l'équation suivante à résoudre :

$$\left(\partial_{x^2} + \frac{1-\mu^2}{x^2}\partial_{\mu^2} + \lambda_1^2\right)\Psi = \mathcal{S}(x,\mu), \tag{C.10}$$

où l'on a redéfini

$$\mathcal{S}(x,\mu) = -\mu_0\,\beta_0\,R^4\,x^2\,\bar{\rho}\,\left(1-\mu^2\right). \tag{C.11}$$

2.2 Solution de l'équation homogène

Soit Ψ_{h} la solution de l'équation homogène associée à l'éq. (C.10) :

$$\left(\partial_{x^2} + \frac{1-\mu^2}{x^2}\partial_{\mu^2} + \lambda_1^2\right)\Psi_{\mathrm{h}} = 0. \tag{C.12}$$

Celle-ci peut se réexprimer sous la forme :

$$\left(x^2\,\partial_{x^2} + \lambda_1^2\right)\Psi_{\mathrm{h}} = \left(\mu^2-1\right)\partial_{\mu^2}\,\Psi_{\mathrm{h}} \tag{C.13}$$

ainsi l'opérateur est à variables séparables ; on pose donc $\Psi_{\mathrm{h}}(x,\mu) = f(x)\,g(\mu)$ et l'on a, dans le cas où ni f ni g ne s'annule :

$$\underbrace{\frac{1}{f(x)}\,\left(x^2\,\partial_{x^2} + \lambda_1^2\right)\Psi_{\mathrm{h}}}_{fonction\ de\ x\ seulement} = \underbrace{\frac{1}{g(\mu)}\,\left(\mu^2-1\right)\partial_{\mu^2}\,\Psi_{\mathrm{h}}}_{fonction\ de\ \mu\ seulement} = \underbrace{K}_{\Rightarrow constant}, \tag{C.14}$$

le membre de gauche étant indépendant de μ et celui de droite indépendant de x, ils sont égaux à une constante K. On a donc les deux équations :

$$\frac{d^2}{dx^2}f + \left(\lambda_1^2 - \frac{K}{x^2}\right) f = 0, \tag{C.15}$$

$$\left(1-\mu^2\right)\frac{d^2}{d\mu^2}g + K\, g = 0. \tag{C.16}$$

Considérons l'éq. (C.16) Abramowitz & Stegun (1972) [1] donnent l'équation elliptique générale dont sont solutions les polynômes de Gegenbauer :

$$\begin{aligned}(1-\mu^2)\frac{d^2}{d\mu^2}\left[(1-\mu^2)^{\alpha-1/2}C_l^{\alpha}(\mu)\right] + (2\,\alpha-3)\mu\,\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)^{\alpha-1/2}C_l^{\alpha}(\mu)\right]\\ + (l+1)(l+2\,\alpha-1)\left[(1-\mu^2)^{\alpha-1/2}C_l^{\alpha}(\mu)\right] = 0\end{aligned} \tag{C.17}$$

où l'on reconnaît pour $\alpha = 3/2$ l'équation

$$\frac{d^2}{d\mu^2}\left[(1-\mu^2)C_l^{3/2}(\mu)\right] + \frac{(l+1)(l+2)}{(1-\mu^2)}\left[(1-\mu^2)C_l^{3/2}(\mu)\right] = 0. \tag{C.18}$$

La solution de (C.16) est donc donnée par

$$g\,(\mu) = (1-\mu^2)\,C_l^{3/2}(\mu) \tag{C.19}$$

et la constante K dépend du mode latitudinal l selon $K_l = (l+1)(l+2)$.

Considérons à présent l'éq. (C.15) Celle-ci devient

$$\frac{d^2}{dx^2}f + \left[\lambda_1^2 - \frac{(l+1)(l+2)}{x^2}\right] f = 0; \tag{C.20}$$

posons alors $\ell = (l+1)$ et faisons le changement de variables $w = \lambda_1\, x$: on reconnaît immédiatement l'équation dite de Riccati-Bessel

$$r^2\frac{d^2}{dr^2}w + \left[r^2 - \ell(\ell+1)\right] w = 0, \tag{C.21}$$

dont les solutions s'expriment en fonction des fonctions de Bessel sphériques j_ℓ et y_ℓ (respectivement du premier et du second ordre, cette dernière étant aussi appelée fonction de Neumann) selon :

$$w\, j_\ell(w) \quad \text{avec} \quad j_\ell(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{w}}J_{\ell+1/2}(w), \tag{C.22}$$

$$w\, y_\ell(w) \quad \text{avec} \quad y_\ell(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{w}}Y_{\ell+1/2}(w), \tag{C.23}$$

J_ℓ et Y_ℓ étant les fonctions de Bessel (respectivement du premier et du second ordre) cylindriques classiques. La solution de (C.15) est donc

$$f(x) = K_1\,\lambda_1 x\, j_{l+1}(\lambda_1 x) + K_2\,\lambda_1 x\, y_{l+1}(\lambda_1 x), \tag{C.24}$$

K_1 et K_2 étant des constantes réelles.

2.3 Mise en forme de l'équation radiale

Les fonctions définies par $(1-\mu^2)C_l^{3/2}(\mu)$ constituant une base, on peut développer la solution particulière selon :

$$\Psi_{\mathrm{p}}(x,\mu) = \sum_l f_l(x)(1-\mu^2)C_l^{3/2}(\mu) \tag{C.25}$$

où f_l est la fonction radiale pour le mode l de la solution particulière à déterminer. On a donc

$$\Psi_{\mathrm{p}}(x,\mu) = \sum_l f_l(x)(1-\mu^2)C_l^{3/2}(\mu) \tag{C.26}$$

qui, réinjectée dans l'éq. (C.10), donne

$$\sum_l \Big\{ \partial_{x^2} f_l(x)(1-\mu^2)C_l^{3/2}(\mu) + \lambda_1^2 f_l(x)(1-\mu^2)C_l^{3/2}(\mu) + \frac{1}{x^2}\left[(1-\mu^2)\partial_{\mu^2}\left[(1-\mu^2)C_l^{3/2}(\mu)\right]\right] f_l(x)\Big\} = \mathcal{S}(x,\mu). \tag{C.27}$$

D'après (C.18), celle-ci se ramène à

$$\sum_l \left\{ \partial_{x^2} f_l(x) + \left[\lambda_1^2 - \frac{(l+1)(l+2)}{x^2}\right] f_l(x)\right\}(1-\mu^2)C_l^{3/2}(\mu) = \mathcal{S}(x,\mu). \tag{C.28}$$

Or on a la formule d'orthogonalité

$$\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)\, C_l^{3/2}(\mu)C_{l'}^{3/2}(\mu)d\mu = \mathcal{N}_l\, \delta_{l\,l'} \quad \text{avec} \quad \mathcal{N}_l = \frac{2(l+1)(l+2)}{2\,l+3}, \tag{C.29}$$

$\delta_{l\,l'}$ étant le symbole de Kronecker. Donc en multipliant l'équation précédente (C.28) par $C_{l'}^{3/2}(\mu)$ et en l'intégrant sur un méridien (μ allant de -1 à 1), on trouve finalement :

$$\partial_{x^2} f_l(x) + \left[\lambda_1^2 - \frac{(l+1)(l+2)}{x^2}\right] f_l(x) = \mathcal{N}_l^{-1}\int_{-1}^{1}\mathcal{S}(x,\mu')\, C_l^{3/2}(\mu')\, d\mu'. \tag{C.30}$$

2.4 Obtention de la solution particulière par la méthode des fonctions de Green

On cherche donc à intégrer

$$\partial_{x^2} f_l(x) + \left[\lambda_1^2 - \frac{(l+1)(l+2)}{x^2}\right] f_l(x) = S_l(x) \;\; \text{avec} \;\; S_l(x) = \mathcal{N}_l^{-1}\int_{-1}^{1}\mathcal{S}(x,\mu')\, C_l^{3/2}(\mu')\, d\mu'. \tag{C.31}$$

En reprenant Hildebrand [4], on écrit le Liouvillien $\mathcal{L} = \partial_{r^2} + \lambda_1^2 - \frac{(l+1)(l+2)}{r^2}$ dans l'équation précédente sous la forme :

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dr}\left(p\,\frac{d}{dr}\right) + q \tag{C.32}$$

où on reconnaît donc

$$p(r) = 1 \quad \text{et} \quad q(r) = \lambda_1^2 - \frac{(l+1)(l+2)}{r^2}. \tag{C.33}$$

Le wronskien associé à cette équation différentielle s'écrit

$$W\left[f_l^{(1)}(\xi), f_l^{(2)}(\xi)\right] = p(\xi)\left[f_l^{(1)}(\xi)\,\frac{d}{d\xi}f_l^{(2)}(\xi) - f_l^{(2)}(\xi)\,\frac{d}{d\xi}f_l^{(1)}(\xi)\right], \tag{C.34}$$

$f_l^{(1)}$ et $f_l^{(2)}$ étant les solutions de l'équation homogène $\mathcal{L}\,f_l = 0$ vérifiant les conditions aux limites. La solution à l'équation (C.31) est donnée par

$$f_l(r) = \int_0^r G_l(r,\xi)\,S_l(\xi)\,d\xi, \tag{C.35}$$

G_l étant la fonction de Green. Celle-ci est donnée selon Hildebrand par

$$G_l(r,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{A}f_l^{(1)}(r)f_l^{(2)}(\xi) & \text{pour} \quad r<\xi \\ \frac{1}{A}f_l^{(1)}(\xi)f_l^{(2)}(r) & \text{pour} \quad r>\xi \end{cases}, \tag{C.36}$$

où la grandeur A est liée au Wronskien $W(f_l^{(1)}, f_l^{(2)})$ *via* $A = p(\xi)\,W(f_l^{(1)}, f_l^{(2)})$. De plus $G_l(r,\xi)$ doit être continue en $r=\xi$. Ici on identifie :

$$\begin{cases} f_l^{(1)}(x) &= (\lambda_1\,x)\,j_{l+1}(\lambda_1\,x) \\ f_l^{(2)}(x) &= (\lambda_1\,x)\,y_{l+1}(\lambda_1\,x) \end{cases}. \tag{C.37}$$

Par ailleurs, Abramowitz & Stegun (1972) [1] donnent

$$W\left[z\,j_n(z), z\,y_n(z)\right] = 1, \tag{C.38}$$

donc $W(f_l^{(1)}, f_l^{(2)}) = \lambda_1$. Il s'ensuit que la fonction de Green s'écrit, finalement :

$$G_l(x,\xi) = \lambda_1^{-1}\begin{cases} (\lambda_1\,x)\,j_{l+1}(\lambda_1\,x)\,(\lambda_1\,\xi)\,y_{l+1}(\lambda_1\,\xi) & \text{pour} \quad x<\xi \\ (\lambda_1\,\xi)\,j_{l+1}(\lambda_1\,\xi)\,(\lambda_1\,x)\,y_{l+1}(\lambda_1\,x) & \text{pour} \quad x>\xi \end{cases}. \tag{C.39}$$

Ainsi, on trouve pour solution particulière à l'éq. (C.31) :

$$\begin{aligned} f_l(x) = \lambda_1^{-1}\Bigg[&(\lambda_1\,x)y_{l+1}(\lambda_1\,x)\int_0^x(\lambda_1\,\xi)j_{l+1}(\lambda_1\,\xi)\,S_l(\xi)\,d\xi \\ &+ (\lambda_1\,x)j_{l+1}(\lambda_1\,x)\int_r^R(\lambda_1\,\xi)y_{l+1}(\lambda_1\,\xi)\,S_l(\xi)\,d\xi\Bigg]. \end{aligned} \tag{C.40}$$

2.5 Solution générale

De ce qui suit, la solution à l'équation différentielle linéaire

$$\mathcal{L}_{\lambda_1}\Psi(r,\theta) = \mathcal{S}(r,\theta), \tag{C.41}$$

où

$$\mathcal{L}_{\lambda_1} = \Delta^* + \frac{\lambda_1^2}{R^2} \equiv \left[\partial_{r^2} + \frac{1-\mu^2}{r^2}\partial_{\mu^2} + \frac{\lambda_1^2}{R^2}\right] \tag{C.42}$$

et

$$\mathcal{S}(r,\theta) = -\mu_0\,\beta_0\,r^2\,\bar{\rho}\,\sin^2\,\theta \tag{C.43}$$

s'écrit $\Psi = \Psi_{\mathrm{h}} + \Psi_{\mathrm{p}}$ soit :

$$\begin{aligned}\Psi\,(r,\theta) \;=\; \sin^2\theta \;\times \Bigg\{ & \sum_{l=0}^{\infty} K_1^l \frac{\lambda_1^{l,i}}{R_{\mathrm{sup}}}\, r\, j_{l+1}\left(\lambda_1^{l,i}\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\right) C_l^{3/2}\,(\cos\theta) \\ & - \mu_0\beta_0 \frac{\lambda_1^{0,i}}{R_{\mathrm{sup}}} r j_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\int_r^{R_{\mathrm{sup}}}\left[y_1\left(\lambda_1^{0,i}\,\frac{\xi}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\overline{\rho}\xi^3\right]\mathrm{d}\xi \\ & - \mu_0\beta_0 \frac{\lambda_1^{0,i}}{R_{\mathrm{sup}}} r y_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\int_{R_{\mathrm{inf}}}^{r}\left[j_1\left(\lambda_1^{0,i}\,\frac{\xi}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\overline{\rho}\xi^3\right]\mathrm{d}\xi \Bigg\}.\end{aligned} \tag{C.44}$$

Bibliographie

[1] M. Abramowitz et I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions.* Dover, ninth dover printing, tenth gpo printing édition, 1972. 73, 241, 243

[2] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed.* Academic Press, Orlando, FL, 1985. 239

[3] R. Courant et D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, volume 1. John Wiley & Sons, 1953. 239

[4] F. B. Hildebrand. *Methods of Applied Mathematics, 2nd edition.* Dover Publications, Mineola, NY, 1982. 239, 242

[5] P. M. Morse et H. Feshbach. *Methods of theoretical physics.* International Series in Pure and Applied Physics, New York : McGraw-Hill, 1953. 239

[6] G. F. Roach. *Green's Functions, 2nd Edition.* Cambridge University Press, 1982. 239

[7] E. W. Weisstein. « Green's Function, from MathWorld – A Wolfram Web Resource », septembre 2009. 239

Annexe D
Autres Publications et Communications

1. Communications

Impact of a Large-Scale Magnetic Field on Stellar Structure V. Duez, S. Mathis, A.-S. Brun et S. Turck-Chièze.
Dans I. Zhelyazkov, éditeur, American Institute of Physics Conference Series, volume 1121, pages 55–60, 2009.
En ligne sur ADS.

Influence of a global magnetic field on stellar structure V. Duez, A. S. Brun, S. Mathis, P.A.P. Nghiem et S. Turck-Chièze.
Dans Memorie della Societa Astronomica Italiana, volume 79, pages 716−+, 2008.
En ligne sur ADS.

Impact of Large-Scale Magnetic Fields on Stellar Structure and Prospectives on Stellar Evolution V. Duez, S. Mathis, A.-S. Brun et S. Turck-Chièze.
Dans C. Charbonnel, F. Combes et R. Samadi, éditeurs, SF2A-2008, pages 459−+, novembre 2008.
En ligne sur ADS.

Impact of Large-Scale Magnetic Fields on Solar Structure V. Duez, S. Mathis, A.-S. Brun, S. Turck-Chièze et C. Le Poncin-Lafitte.
Dans C. Charbonnel, F. Combes et R. Samadi, éditeurs, SF2A-2008, pages 463−+, novembre 2008.
En ligne sur ADS.

2. Publications à venir

MHD determination of the gravitational multipole moments of stars and gazeous planets S. Mathis, C. Le Poncin-Lafitte & V. Duez.
Article soumis prochainement à la revue *Astronomy & Astrophysics*.

Gravitational Multipolar Moments and Radius Deformation deduced from the Central Core Rotation of the Sun V. Duez, S. Turck-Chièze & S. Mathis.
Article soumis prochainement à la revue *ApJL*.

Relaxed Equilibrium Configurations to Model Fossil Fields. I – A first family V. Duez & S. Mathis.
Article soumis en octobre 2009 à la revue *Astronomy & Astrophysics*, accepté pour publication sous réserve de révisions mineures (version révisée ci-jointe).

Astronomy & Astrophysics manuscript no. msDuezMathisprinterRev
March 10, 2010
© ESO 2010

Relaxed Equilibrium Configurations to Model Fossil Fields I – A first family

V. Duez and S. Mathis

CEA/DSM/IRFU/SAp, CE Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France; AIM, UMR 7158, CEA - CNRS - Université Paris 7, France
e-mail: vincent.duez@cea.fr,stephane.mathis@cea.fr

Received ; accepted

ABSTRACT

Context. The understanding of fossil fields origin, topology and stability is one of the corner stones of the stellar magnetism theory. On one hand, since they survive over secular time-scales, they may modify the structure and the evolution of their host stars. On the other hand, they must have a complex stable structure since it has been demonstrated by Tayler and collaborators that simplest purely poloidal or toroidal fields are unstable on dynamical time-scales. In this context, the only stable configuration which has been found today is the one resulting of a numerical simulation by Braithwaite and collaborators who have studied the evolution of an initial stochastic magnetic field, which is found to relax on a mixed stable configuration (poloidal and toroidal) that seems to be in equilibrium and then diffuses.
Aims. In this work, we thus go on the track of such type of equilibrium field in a semi-analytical way.
Methods. In this first article, we study the barotropic magnetohydrostatic equilibrium states; the problem reduces to a Grad-Shafranov-like equation with arbitrary functions. Those latters are constrained by deriving the lowest-energy equilibrium states for given invariants of the considered axisymmetric problem and in particular for a given helicity which is known to be one of the main actor of such problems. Then, we obtain the generalization of the force-free Taylor's relaxation states obtained in laboratory experiments (in spheromaks) that become non force-free in the self-gravitating stellar case. The case of general baroclinic equilibrium states will be studied in Paper II.
Results. Those theoretical results are applied to realistic stellar cases, namely to the solar radiative core and to the envelope of an Ap star, and discussed. In both cases we assume that the field is initially confined in the stellar radiation zone.

Key words. Magnetohydrodynamics (MHD) – Plasmas – Magnetic fields – Sun: magnetic fields – Stars: magnetic fields

1. Introduction

Spectropolarimetry is nowadays exploring the stellar magnetism across the whole Hertzsprung-Russel diagram (Donati et al. 1997, 2006; Neiner 2007; Landstreet et al. 2008; Petit et al. 2008). Furthermore, helioseismology and asteroseismology are providing new constraints on internal transport processes occuring in stellar interiors (Turck-Chièze & Talon 2008; Aerts et al. 2008). In this context, even if standard stellar models explain the main features of stellar evolution, it is now crucial to go beyond this modelling to introduce dynamical processes such as magnetic field and rotation to investigate their effects on stellar structure and secular evolution (Maeder & Meynet 2000; Talon 2008). To achieve this aim, secular MHD transport equations have been derived in order to be introduced in stellar evolution codes. They take into account in a coherent way the interaction between differential rotation, turbulence, meridional circulation, and magnetic field (Spruit 2002; Maeder & Meynet 2004; Mathis & Zahn 2005), while non-linear numerical simulations provide new insight on these mechanisms (Charbonneau & MacGregor 1993; Rudiger & Kitchatinov 1997; Garaud 2002; Brun & Zahn 2006). If we want to go further, the simplest modifications of static structural properties such as density, gravity, pressure, temperature, and luminosity induced by the magnetic field have also to be systematically quantified as a function of the field geometry and strength (Moss 1973; Mestel & Moss 1977; Lydon & Sofia 1995; Couvidat et al. 2003; Li et al. 2006; Duez et al. 2008; Li et al. 2009; Duez et al. 2010).

However, an infinity of possible magnetic configurations can be investigated since the different observation techniques only lead to indirect indications on the internal field topologies through the surface field properties they provide. Furthermore, since the simplest geometrical configurations like purely poloidal and purely toroidal fields are known to be unstable (Acheson 1978; Tayler 1973; Markey & Tayler 1973, 1974; Goossens & Veugelen 1978; Goossens & Tayler 1980; Goossens et al. 1981; van Assche et al. 1982; Spruit 1999; Braithwaite 2006, 2007), the best candidates for stable geometries are mixed poloidal-toroidal fields (Wright 1973; Markey & Tayler 1974; Tayler 1980; Braithwaite 2009).

Therefore, it is necessary to go on the track of possible stable magnetic configurations in stellar interiors to evaluate their effects on stellar structure and to use them as potential initial conditions to study secular internal transport processes.

In this work, we thus revisit the pioneer works by Ferraro (1954); Mestel (1956); Prendergast (1956) and Woltjer (1960). Ferraro (1954) studied the equilibrium configurations of an incompressible star with a purely poloidal field. Prendergast (1956) (see also Chandrasekhar 1956a; Chandrasekhar & Prendergast 1956; Chandrasekhar 1956b) then extended the model to take into account the toroidal field, by solving the magneto-hydrostatic equilibrium of incompressible spheres. The

obtained configurations seem to be relevant in regard of the most recent numerical simulations that may explain fossil fields in early-type stars, white dwarfs or neutron stars (Braithwaite & Spruit 2004; Braithwaite & Nordlund 2006; Braithwaite 2006) and of theoretical studies of their helicity relaxation (Broderick & Narayan 2008; Mastrano & Melatos 2008). The main generalization of Prendergast's work we achieve here consists in relaxing the incompressible hypothesis in order to take into account the star's structure (see also Woltjer 1960), which differs as a function of its stellar type and of its evolution stage, and to derive the minimum energy equilibrium configuration for a given mass and helicity, which are then applied to realistic models of stellar interiors.

Assuming that the Lorentz volumetric force is a perturbation compared with the gravity, we derive the non force-free magnetohydrostatic equilibrium. In this first article, we then focus on the barotropic equilibrium states family [1], for which the possible field configurations and the stellar structure are explicitely coupled; these may correspond to the numerical experiments by Braithwaite and collaborators. In this case, the problem reduces to a Grad-Shafranov-like equation (Grad & Rubin 1958; Shafranov 1966; Kutvitskii & Solov'ev 1994), similar to the one intensively used in fusion plasma physics. We then focus on its minimum energy eigenmodes for a given mass and helicity, which are derived and applied in order to model relaxed stellar fossil magnetic fields which are found to be non force-free. Arguments in favor of the stability of the obtained configurations are finally discussed (Wright 1973; Tayler 1980; Braithwaite 2009; Reisenegger 2009) and we compare their properties with those of relaxed fields obtained in numerical simulations (Braithwaite 2008). The case of general baroclinic equilibrium states will be studied in Paper II (Wright 1969; Moss 1975).

2. The Non Force-Free Magneto-Hydrostatic Equilibrium

In this work, we focus on the magnetic equilibrium of a self-gravitating spherical shell to model fossil fields in stellar interiors. To achieve this goal, we start from

$$\boldsymbol{0} = -\boldsymbol{\nabla} P - \rho \boldsymbol{\nabla} V + \boldsymbol{F}_{\mathcal{L}}, \text{ where } \boldsymbol{F}_{\mathcal{L}} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}. \tag{1}$$

Eq. (1) must be satisfied in the interior of an infinitely conducting mass of fluid in the presence of a large-scale field together with the Poisson equation, $\nabla^2 V = 4\,\pi\,G\,\rho$, and the Maxwell equations, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ (Maxwell flux) and $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0\,\boldsymbol{j}$ (Maxwell-Ampère).
P, ρ and V are respectively the pressure, the density and the gravitational potential of the considered plasma. $\boldsymbol{B}$ is the magnetic field and $\boldsymbol{j}$ is the associated current, which is given in the classical MHD approximation by the Maxwell-Ampère's equation. μ_0 is the magnetic permeability of the plasma and $\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}}$ is the Lorentz force.

[1] Barotropic states are such that their density and pressure gradients are aligned. They can be convectively stable or not, depending on their entropy stratification. We will precisely introduce their definition in §2.2.

2.1. Magnetic field configuration and the magnetohydrostatic equilibrium

If we consider only the axisymmetric case, where all physical variables are independent of the azimuthal angle (φ), $\boldsymbol{B}\,(r,\theta)$ can be written in the form

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{r\sin\theta}\boldsymbol{\nabla}\Psi\,(r,\theta)\times\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{1}{r\sin\theta}\,F\,(r,\theta)\;\hat{\mathbf{e}}_\varphi\,, \tag{2}$$

which is divergenceless. Ψ and F are respectively the poloidal flux function and the toroidal potential; (r,θ,φ) are the usual spherical coordinates and $\{\hat{\mathbf{e}}_k\}_{k=r,\theta,\varphi}$ their unit-vector basis. Finally, the poloidal component of the magnetic field ($\boldsymbol{B}_{\rm P}$) is such that $\boldsymbol{B}_{\rm P}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Psi = 0$, so it belongs to iso-$\Psi$ surfaces. The magnetohydrostatic equilibrium (Eq. 1) implies that the poloidal part (in the meridional plane in the axisymmetric case) of the Lorentz force ($\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}_{\rm P}}$) balances the pressure gradient and the gravitational force, which are also purely poloidal vectors, while, in the absence of any other force, its toroidal component ($\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}_{\rm T}} = F_{\mathcal{L}_\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi$) vanishes. We thus have

$$\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}} = \boldsymbol{F}_{\mathcal{L}_{\rm P}} + F_{\mathcal{L}_\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \boldsymbol{F}_{\mathcal{L}_{\rm P}}. \tag{3}$$

Using Eq. (2), we obtain

$$\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}_{\rm P}} = -\frac{1}{\mu_0 r^2\sin^2\theta}\Bigg\{\left(F\partial_r F + \partial_r\Psi\Delta^*\Psi\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\left(F\partial_\theta F + \partial_\theta\Psi\Delta^*\Psi\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta\Bigg\}, \tag{4}$$

with $\partial_x = \partial/\partial x$, and

$$\Delta^*\Psi \equiv \partial_{rr}\Psi + \frac{\sin\theta}{r^2}\partial_\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\Psi\right) \tag{5}$$

is the usual Grad-Shafranov operator in spherical coordinates. On the other hand, since $F_{\mathcal{L}_\varphi} = 0$, we get $\partial_r\Psi\partial_\theta F - \partial_\theta\Psi\partial_r F = 0$; the non-trivial values for F are therefore obtained by setting

$$F(r,\theta) = F(\Psi). \tag{6}$$

Then, we obtain $F\partial_r F = F\partial_\Psi F\partial_r\Psi$ and $F\partial_\theta F = F\partial_\Psi F\partial_\theta\Psi$, leading to the final expansion of the Lorentz force

$$\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}} = \mathcal{A}\,(r,\theta)\,\boldsymbol{\nabla}\Psi, \tag{7}$$

where

$$\mathcal{A}(r,\theta) = -\frac{1}{\mu_0 r^2\sin^2\theta}\left(F\partial_\Psi F + \Delta^*\Psi\right). \tag{8}$$

Therefore, the poloidal component of $\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}}$ is nonzero a priori, the field being thus non force-free in this case.

This point has here to be discussed. First, Reisenegger (2009) demonstrated that the magnetic field can not be force-free everywhere in stellar interiors (see the demonstration in the appendix A of his paper). Note in this context that the "force-free" configurations obtained by Broderick & Narayan (2008) verify this theorem because they have current sheets with a non-zero Lorentz force on the stellar surface. Moreover, Shulyak et al. (2007, 2009) showed how the atmosphere of a CP star can be the host of a non-zero Lorentz force. Therefore, from now on, we consider the non force-free equilibrium.

Now, if we take the curl of Eq. (1), we get the static vorticity equation

$$-\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho\times\boldsymbol{\nabla}P}{\rho^2}=\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}}}{\rho}\right), \tag{9}$$

that governs the balance between the baroclinic torque (left-hand side; see Rieutord (2006) for a detailed description) and the magnetic source term. Then, as has been emphasized by Mestel (1956), the different structural quantities such as the density, the gravitational potential, and the pressure relax in order to verify Eq. (1) for a given field configuration (see Sweet (1950); Moss (1975), and Mathis & Zahn (2005) §5.). Thus, the choice for Ψ is left free.

2.2. The barotropic equilibrium state family

Magnetic initial configurations are one of the crucial unanswered question for the modelling of MHD transport processes in stellar interiors. To examine this question, Braithwaite and collaborators (Braithwaite & Spruit 2004; Braithwaite & Nordlund 2006) studied the relaxation of an initially stochastic field in models of convectively stable stellar radiation zones. The field is found to relax, after several Alfvén times, to a mixed poloidal-toroidal equilibrium configuration, which then diffuses towards the exterior.

We choose here, using an analytical approach, to find such field geometries, which are governed at the beginning by the magnetohydrostatic equilibrium.

To achieve this aim, we focus in this first article on the particular barotropic equilibrium states (in the hydrodynamic meaning of the term) for which the field configuration is explicitely coupled with the stellar structure, since we have in this case

$$-\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho\times\boldsymbol{\nabla}P}{\rho^2}=\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}}}{\rho}\right)=\boldsymbol{0}. \tag{10}$$

Those are the generalization of the Prendergast's equilibria which take into account the compressibility and which have been studied in polytropic cases by Woltjer (1960); Wentzel (1961); Roxburgh (1966); Monaghan (1976).

Let us first recall the definition of the barotropic states. In fluid mechanics, a fluid is said to be in a barotropic state if the following condition is satisfied (see Pedlosky (1998) in a geophysical context and Zahn (1992) in a stellar one):

$$\boldsymbol{\nabla}\rho\times\boldsymbol{\nabla}P=\boldsymbol{0}; \tag{11}$$

in other words, the baroclinic torque in the vorticity equation (Eq. 9) vanishes. Then, the surfaces of equal density coincide with the isobars since the density and the pressure gradients are aligned. This does not imply any question of equation of state, which in stellar interiors can take the most general form $P=f(\rho,T,\cdots)$ (T being the temperature). Moreover, this does not presume anything about the stratification of the fluid, which can be stably stratified or not. For example, a star in solid body rotation is in a barotropic state (as opposed to baroclinic) (see once again Zahn 1992). Let us illustrate this point with the simplest case of a non-rotating and non-magnetic stellar radiation zone. In this case, the hydrostatic balance is given by $\boldsymbol{\nabla}P/\rho=-\boldsymbol{\nabla}V=\boldsymbol{g}$. If we take the curl of this equation, we obtain the stationary version of the thermal-wind equation:

$$-\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho\times\boldsymbol{\nabla}P}{\rho^2}=-\boldsymbol{\nabla}\times[\boldsymbol{\nabla}V]=\boldsymbol{0} \tag{12}$$

and the star is thus in a barotropic state in the hydrodynamic meaning of the term.

This has to be distinguished from the point of view of thermodynamics where a barotropic equation of state is such that $P=f(\rho)$ while a non-barotropic equation of state is such that $P=f(\rho,T,\cdots)$.

Then, it is clear that a fluid with a barotropic equation of state is automatically in an hydrodynamical barotropic state. However, in the case of a fluid with a non-barotropic equation of state, the situation is more subtle: in the case where the curl of the volumetric perturbing force vanishes (i.e. $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}}/\rho)=0$) the fluid is in an hydrodynamical barotropic state, while in the general case it is in a baroclinic situation. Then, a fluid with a non-barotropic equation of state can be in a barotropic state even if it is only for a specific form of the perturbing force. In this first work, we choose to examine the first equilibrium family in which the Lorentz force verify the barotropic balance described by Eq. (11) in a stably stratified radiation zone. The second general case (cf. Mestel 1956) will be studied in paper II.

Stellar interiors, except just under the surface, are in a regime where $\beta=P/P_{\rm Mag}\gg 1$, $P_{\rm Mag}=B^2/(2\mu_0)$ being the plasma's magnetic pressure. On the other hand, in the domain of fields amplitudes relevant for classical stars (i.e. the non-compact objects), the ratio of the volumetric Lorentz force by the gravity is very weak. Therefore, the stellar structure modifications induced by the field can be considered as perturbations only from a spherically symmetric background (Haskell et al. 2008). Then, we can write $\rho\approx\overline{\rho}+\widetilde{\rho}$, where $\overline{\rho}$ and $\widetilde{\rho}$ are respectively the mean density on an isobar, which is given at the first order by the standard non-magnetic radial density profile of the considered star, and its magnetic-induced perturbation on the isobar (with $\widetilde{\rho}\ll\overline{\rho}$). Thus to the first order, Eq. (10) on an isobar becomes

$$-\frac{\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\rho}\times\boldsymbol{g}_{\rm eff}}{\overline{\rho}}=\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}}}{\overline{\rho}}\right)=\boldsymbol{0}, \tag{13}$$

where the effective gravity ($\boldsymbol{g}_{\rm eff}$), such that $\boldsymbol{\nabla}\overline{P}=\overline{\rho}\,\boldsymbol{g}_{\rm eff}$, has been introduced. This gives, using Eq. (7)

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\mathcal{A}}{\overline{\rho}}\right)\times\boldsymbol{\nabla}\Psi=\boldsymbol{0}, \tag{14}$$

which projects only along $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ as

$$\partial_r\left(\frac{\mathcal{A}}{\overline{\rho}}\right)\partial_\theta\Psi-\partial_\theta\left(\frac{\mathcal{A}}{\overline{\rho}}\right)\partial_r\Psi=0, \tag{15}$$

so that there exists a function G of Ψ such that

$$\frac{\mathcal{A}}{\overline{\rho}}=G(\Psi). \tag{16}$$

Then, Eq. (8) leads to the following one ruling Ψ

$$\Delta^*\Psi+F(\Psi)\,\partial_\Psi[F(\Psi)]=-\mu_0 r^2\sin^2\theta\,\overline{\rho}\,G(\Psi). \tag{17}$$

This equation is similar to the well-known Grad-Shafranov equation[2] which is used to find equilibria in magnetically confined plasmas such as those in tokamaks or in spheromaks (Grad & Rubin 1958; Shafranov 1966). However, here the source term is different and is directly related to the internal structure of the

[2] The usual Grad-Shafranov equation is given by:
$\Delta^*\Psi+F(\Psi)\,\partial_\Psi[F(\Psi)]=-\mu_0 r^2\sin^2\theta\partial_\Psi[P(\Psi)]$,
where the pressure P is prescribed in function of Ψ. These describes the equilibrium between the magnetic force and the pressure gradient only.

star through its density profile ($\overline{\rho}$) (the general form of the Grad-Shafranov equation in an astrophysical context is discussed for example in Heinemann & Olbert (1978) and Ogilvie (1997)). Moreover, since the field has to be non force-free in stellar interiors $G \neq 0$ (see the previous discussion in §2.1. and Eqs. 16, 7 and 8).

It is only applicable to the case of the barotropic state family. The equations for the general case will be studied in paper II.

2.3. F and G expansion

Let us now focus on the respective expansion of F and G as a function of Ψ.

First, since F is a regular function, we can expand it in power series in Ψ:

$$F(\Psi) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{R} \Psi^i, \tag{18}$$

the λ_i being the expansion coefficients that have to be determined and R a characteristic radius which will be identified below. On the other hand, B_φ must be regular at the center of the sphere; the first term ($i = 0$) of the previous expansion is then excluded (cf. Eq. 2), the above expansion thus reducing to $F(\Psi) = \sum_{i>0} (\lambda_i/R)\, \Psi^i$.

In the same way, G can be expanded as

$$G(\Psi) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \Psi^j. \tag{19}$$

Then, Eq. (17) becomes:

$$\Delta^* \Psi + \sum_{k>0} \frac{\Lambda_k}{R^2} \Psi^k = -\mu_0 r^2 \sin^2\theta\, \overline{\rho} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \Psi^j, \tag{20}$$

where $\Lambda_k = \sum_{i_1>0} \sum_{i_2>0} \{ i_2 \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \delta_{i_1+i_2-1,k} \}$, δ being the usual Kronecker symbol. This is the generalization of the Grad-Shafranov-type equation obtained by Prendergast (1956) for the barotropic compressible states.

Thus, having assumed the non force-free barotropic magneto-hydrostatic equilibrium state leads to undetermined arbitrary functions (F and G) that must be constrained. To achieve this aim, we follow the method given in the axisymmetric case by Chandrasekhar & Prendergast (1958) and Woltjer (1959b) that allows to find the equilibrium state of lowest energy compatible with the constancy of given invariants for the studied axisymmetric system.

3. Self-Gravitating Relaxation States

3.1. Definitions and axisymmetric invariants

We first introduce the cylindrical coordinates (s, φ, z) where $s = r \sin\theta$ and $z = r\cos\theta$. Then, $\boldsymbol{B}$ given in Eq. (2) becomes

$$\boldsymbol{B}(s,z) = \frac{1}{s} \boldsymbol{\nabla} \Psi(s,z) \times \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{1}{s} F(s,z)\, \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \tag{21}$$

Then, we define the potential vector $\boldsymbol{A}(s,z) = A_\varphi(s,z)\, \hat{\mathbf{e}}_\varphi$ such that $\boldsymbol{B}_{\mathrm{P}} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ and we get

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} + \frac{F}{s} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \quad \text{where} \quad A_\varphi(s,z) = \frac{\Psi}{s}. \tag{22}$$

Next, we insert the expansion for the magnetic field $\boldsymbol{B}$ used by Chandrasekhar & Prendergast (1958) and Woltjer (1959a,b):

$$\boldsymbol{B} = -s\, \partial_z \Phi(s,z)\, \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{s}} + \frac{1}{s} \partial_s \left[s^2 \Phi(s,z) \right] \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}} + s\, \mathcal{T}(s,z)\, \hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{23}$$

where $\{\widehat{\boldsymbol{e}}_k\}_{k=s,\varphi,z}$ is the cylindrical unit-vector basis and where we identify using Eq. (21)

$$\Psi = s^2 \Phi \quad \text{and} \quad F = s^2 \mathcal{T}. \tag{24}$$

The Grad-Shafranov operator applied to Ψ can then be expressed as follow

$$\Delta^* \Psi = s^2\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\Psi}{s^2} \right) = \left[\partial_{ss} - \frac{1}{s} \partial_s + \partial_{zz} \right] \Psi = s^2 \Delta_5 \Phi, \tag{25}$$

where $\Delta_5 = \partial_{ss} + \frac{3}{s}\partial_s + \partial_{zz}$.

We now introduce the two general families of invariants of the barotropic axisymmetric magneto-hydrostatic equilibrium states, which have been introduced by Woltjer (1959b) for the compressible case (see also Wentzel 1960):

$$\mathcal{I}_{\mathrm{I};n} = \int_{\mathcal{V}} M_n \left(s^2 \Phi \right) \overline{\rho}\, \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left(s^2 \Phi \right)^n \overline{\rho}\, \mathrm{d}\mathcal{V}, \tag{26}$$

$$\mathcal{I}_{\mathrm{II};q} = \int_{\mathcal{V}} N_q \left(s^2 \Phi \right) \mathcal{T}\, \mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \left(s^2 \Phi \right)^q \mathcal{T}\, \mathrm{d}\mathcal{V}, \tag{27}$$

where M_n and N_q are arbitrary functions that have to be specified. Those latters are conserved as long as

$$\boldsymbol{B} \cdot \widehat{\boldsymbol{e}}_r = 0 \quad (i.e.\ \Phi = \mathcal{T} = 0) \tag{28}$$

on the boundaries.

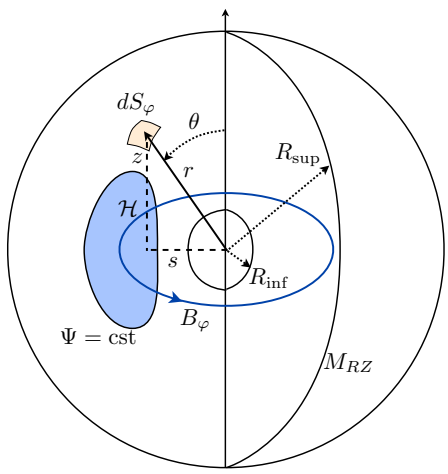


Fig. 1. Schematic representation of the two coordinates systems used and of a constant Ψ surface. The invariants of the axisymmetric system are the total mass of the considered stellar radiative region (M_{RZ}), the mass enclosed in a constant Ψ surface, the toroidal flux ($\mathcal{F}_\varphi$) associated with the toroidal magnetic field (B_φ), and the global helicity ($\mathcal{H}$).

3.2. Fossil fields barotropic relaxation states

Let us first concentrate on $\mathcal{I}_{\mathrm{II};q}$ and N_q relevant for fossil fields relaxation. First, if we set $N_0\left(s^2\Phi\right) = 1$, we obtain

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathrm{II};0} &= \int_{\mathcal{V}} \mathcal{T}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = 2\,\pi \int_{\mathcal{S}} B_\varphi \mathrm{d}s\mathrm{d}z \\ &= 2\,\pi \int_{\mathcal{S}} B_\varphi\,\mathrm{d}\mathcal{S}_\varphi = 2\,\pi\,\mathcal{F}_\varphi \end{aligned} \tag{29}$$

that corresponds to the conservation of the flux of the azimuthal field across the meridional plane of the star ($\mathcal{F}_\varphi$) in perfect axisymmetric MHD equilibria.

Then, if we set $N_1\left(s^2\,\Phi\right) = s^2\,\Phi$, we get

$$\mathcal{I}_{\mathrm{II};1} = \int_{\mathcal{V}} \left(s^2\,\Phi\right)\mathcal{T}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} A_\varphi B_\varphi \mathrm{d}\mathcal{V} = \mathcal{H}/2, \tag{30}$$

where we thus identify the magnetic helicity ($\mathcal{H}$; see §5.1.) of the field configuration which is a global quantity integrated over the volume of the studied radiation zone.

Let us briefly discuss the peculiar role of this quantity in the search of stable equilibria. As emphasized by Spruit (2008), the magnetic helicity is a conserved quantity in a perfectly conducting fluid with fixed boundary conditions. However, in realistic conditions, rapid reconnection can take place even at very high conductivity, especially when the field is dynamically evolving, for example during its initial relaxation phase. Nevertheless, in laboratory experiments, like for example in spheromaks, the helicity is often observed to be approximately conserved, which leads to the existence of stable equilibrium configurations. In fact, if the helicity is conserved a dynamical or unstable field with a finite initial helicity ($\mathcal{H}_0$) cannot decay completely, the helicity of vanishing field being zero. This is precisely what has been observed in the numerical experiment performed by Braithwaite & Spruit (2004) and Braithwaite & Nordlund (2006), where an initial stochastic field with a finite helicity decays initially but relaxes into a stable equilibrium.

In the context of laboratory low-β plasmas, this process has been identified by Taylor (1974) and is thus called the Taylor's relaxation.

For this reason, we now search as Chandrasekhar & Prendergast (1958) the *final state of equilibrium*, which is the state of lowest energy that the compressible star, preserving its axisymmetry, can attain while conserving the invariants $\mathcal{I}_{\mathrm{I};n}$, $\mathcal{I}_{\mathrm{II};0} = \mathcal{F}_\varphi$ and $\mathcal{I}_{\mathrm{II};1} = \mathcal{H}/2$ in barotropic states.

To achieve this, we thus introduce the total energy of the system

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \left\{\frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu_0} + \rho\left[V + 2\mathcal{U}\right]\right\}\mathrm{d}\mathcal{V} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \left\{\frac{1}{\mu_0}\left[-s^2\Phi\Delta_5\Phi + s^2\mathcal{T}^2\right] + \rho\left[V + 2\mathcal{U}\right]\right\}\mathrm{d}\mathcal{V}, \end{aligned} \tag{31}$$

where $\mathcal{U}$ is the specific internal energy per unit mass (Woltjer 1958, 1959b; Broderick & Narayan 2008). To obtain the minimal energy equilibrium state for the given invariants $\mathcal{I}_{\mathrm{I};n}$ and a given helicity and azimuthal flux, we thus minimize E with respect to $\mathcal{I}_{\mathrm{I};n}$, $\mathcal{I}_{\mathrm{II};0}$ and $\mathcal{I}_{\mathrm{II};1}$. This leads, introducing the associated Lagrangian multipliers $(a_{\mathrm{I};n}, a_{\mathrm{II};0}, a_{\mathrm{II};1})$, to the following condition for a stationary energy:

$$\delta E + \sum_n a_{\mathrm{I};n}\,\delta\mathcal{I}_{\mathrm{I};n} + \sum_{q=0}^{1} a_{\mathrm{II};q}\,\delta\mathcal{I}_{\mathrm{II};q} = 0. \tag{32}$$

Following the method described in Chandrasekhar & Prendergast (1958) and Woltjer (1959b), we express δE and $\delta I_{J;r}$ in function of $\delta\Phi$, $\delta\mathcal{T}$ and $\delta\rho$. Since these variations are independent and arbitrary, their coefficients in the integrand of Eq. (32) must separately vanish, which gives

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0}\Delta_5\Phi &= \overline{\rho}\sum_n a_{\mathrm{I};n}\frac{\mathrm{d}M_n\left(s^2\Phi\right)}{\mathrm{d}\left(s^2\Phi\right)} + \sum_{q=0}^{1} a_{\mathrm{II};q}\,\mathcal{T}\,\frac{\mathrm{d}N_q\left(s^2\Phi\right)}{\mathrm{d}\left(s^2\Phi\right)} \\ &= \overline{\rho}\sum_n a_{\mathrm{I};n}\frac{\mathrm{d}M_n\left(s^2\Phi\right)}{\mathrm{d}\left(s^2\Phi\right)} + a_{\mathrm{II};1}\,\mathcal{T}, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\frac{1}{\mu_0}s^2\,\mathcal{T} = -\sum_{q=0}^{1} a_{\mathrm{II};q}\,N_q\left(s^2\Phi\right) = -a_{\mathrm{II};0} - a_{\mathrm{II};1}\,s^2\Phi. \tag{34}$$

These equations thus describe the minimal non force-free energy equilibrium states for a given helicity and azimuthal flux. From Eq. (17), we identify that $F(\Psi)$ is now constrained while $G(\Psi)$ required to ensure the non force-free character of the field is still arbitrary.

Let us now consider the first invariants family ($\mathcal{I}_{\mathrm{I}}$) given in Eq. (26) which are thus necessary to constrain $G(\Psi)$. First, the non-magnetic global quantity, which is an invariant of the considered equilibrium, is the total mass of the stellar radiation zone M_{RZ}. We thus set $M_0\left(s^2\Phi\right) = 1$, leading naturally to consider the mass

$$\mathcal{I}_{\mathrm{I};0} = \int_{\mathcal{V}} \overline{\rho}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = M_{\mathrm{RZ}}. \tag{35}$$

However, since $\mathrm{d}M_0\left(s^2\Phi\right)/\mathrm{d}\left(s^2\Phi\right) = 0$, we have thus to consider the highest-order invariant

$$\mathcal{I}_{\mathrm{I};1} = \int_{\mathcal{V}} \left(s^2\Phi\right)\overline{\rho}\,\mathrm{d}\mathcal{V} \tag{36}$$

because of the non force-free behaviour of the field. This last invariant has been introduced by Prendergast (1956) in the axisymmetric non force-free magneto-hydrostatic incompressible equilibrium and it corresponds to the mass conservation in each flux tube described by the closed magnetic surface $s^2\Phi = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}}$.

Furthermore, the considered radiation zone is stably stratified. Since in stellar interiors the magnetic pressure is very much less than the thermal one, the Lorentz force have only a negligible effect on the gas pressure ($\beta \gg 1$). Moreover, energy is required to move fluid elements in the radial direction because work has to be done against the buoyant restoring force which is thus very strong compared to the magnetic one. Therefore, the radial component of the displacement ($\boldsymbol{\xi}$) which takes place during the adjustment to equilibrium is inhibited $\boldsymbol{\xi}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_r \approx 0$ and $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\overline{\rho}\boldsymbol{\xi}) \approx 0$ due to the anelastic approximation justified in stellar radiation regions. Therefore, as emphasized by Braithwaite (2008), the mass transport in the radial direction is frozen (no matter can leave or enter in the flux tube) and $\mathcal{I}_{\mathrm{I};1}$ can be used as a supplementary constrain in our variational method.

From Eqs. (33-34), we thus get the following equations describing the barotropic axisymmetric equilibrium state of lowest energy that the compressible star can reach while conserving its radiation zone mass ($\mathcal{I}_{\mathrm{I};0} = M_{\mathrm{RZ}}$), the mass in each flux tube ($\mathcal{I}_{\mathrm{I};1}$), the flux of the toroidal field ($\mathcal{I}_{\mathrm{II};0} = \mathcal{F}_{\varphi}$), and a given helicity ($\mathcal{I}_{\mathrm{II};1} = \mathcal{H}/2$):

$$\frac{1}{\mu_0}\Delta_5\Phi = a_{\mathrm{I};1}\,\overline{\rho} + a_{\mathrm{II};1}\,\mathcal{T}, \tag{37}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\mathcal{T} = -a_{\mathrm{II};1}\Phi - \frac{a_{\mathrm{II};0}}{s^2}. \tag{38}$$

Since the azimuthal field is regular at the origin, we get from Eq. (23) $a_{\mathrm{II};0} = 0$. Eliminating $\mathcal{T}$ between Eqs. (37-38), we obtain

$$\Delta_5\Phi + \left[\mu_0 a_{\mathrm{II};1}\right]^2\Phi = \mu_0\, a_{\mathrm{I};1}\,\overline{\rho} \tag{39}$$

that becomes, multiplying it by s^2 and using Eq. (24) & (25)

$$\Delta^*\Psi + \left[\mu_0 a_{\mathrm{II};1}\right]^2\Psi = \mu_0\, a_{\mathrm{I};1}\,\overline{\rho}\, r^2\sin^2\theta. \tag{40}$$

We thus identify in Eq. (20)

$$\begin{cases} k{=}1 \\ j{=}0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} a_{\mathrm{I};1} = \quad -\beta_0 \\ a_{\mathrm{II};1} = -\frac{1}{\mu_0}\lambda_1/R \end{cases}, \tag{41}$$

where we have constrained the initial arbitrary functions of the magnetohydrostatic equilibrium

$$F(\Psi) = -\mu_0 a_{\mathrm{II};1}\Psi \quad \text{and} \quad G(\Psi) = -a_{\mathrm{I};1}. \tag{42}$$

So, it reduces to

$$\Delta^*\Psi + \frac{\lambda_1^2}{R^2}\Psi = -\mu_0\,\overline{\rho}\, r^2\sin^2\theta\,\beta_0, \tag{43}$$

the values of the real coefficients λ_1 and β_0 being thus controled by the helicity ($\mathcal{H}$) and the mass conservation in each axisymmetric flux tube defined by $\Psi = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}}$ because of the non force-free stably stratified behaviour of the reached equilibrium.

This corresponds, as has already been emphasized, to the lowest energy equilibrium state for a given helicity (Bellan 2000; Broderick & Narayan 2008). The equilibrium state ruled by Eq. (43) are thus the generalization of the Taylor relaxation states in a self-gravitating star where the field is not force-free (*i.e.* $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} \neq \alpha\,\boldsymbol{B}$). Note also that some non force-free relaxed states have been identified in plasma physics (Montgomery & Phillips 1988, 1989; Dasgupta et al. 2002; Shaikh et al. 2008) that should be studied in a stellar context in a near future.

Let us note that in the case where $\mathcal{I}_{\mathrm{I};1}$ is not considered ($a_{\mathrm{I};1} = \beta_0 = 0$) we recover the Chandrasekhar (1956a) force-free limit (see also Marsh 1992, for a generalization of the solutions) and the usual Taylor's states for low-β plasmas. The Prendergast's model is recovered assuming a constant density profile (incompressible).

3.3. Green's function solution

We are now ready to solve Eq. (43). If we introduce $x = \cos\theta$ and if we set $\mathcal{S}(r,\theta) = -\mu_0\,\beta_0\,\overline{\rho}\, r^2\sin^2\theta$, it is recast in

$$\mathcal{L}_{\lambda_1}\Psi = \mathcal{S}, \tag{44}$$

where

$$\mathcal{L}_{\lambda_1} \equiv \left[\partial_{rr} + \frac{1-x^2}{r^2}\partial_{xx} + \frac{\lambda_1^2}{R^2}\right]. \tag{45}$$

Using Green's function method (Morse & Feshbach 1953) , we then obtain the particular solution associated with $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathrm{p}}(r,x) = -\mu_0\beta_0\sum_l \frac{\lambda_1^l}{R_{\mathrm{sup}}}\left[\frac{2l+3}{2(l+1)(l+2)}\right]\times \\ \left\{r\, j_{l+1}\left(\lambda_1^l\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\int_r^{R_{\mathrm{sup}}}\left[\xi\, y_{l+1}\left(\lambda_1^l\frac{\xi}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\mathcal{J}_l(\xi)\right]\mathrm{d}\xi \right. \\ \left. + r\, y_{l+1}\left(\lambda_1^l\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\int_{R_{\mathrm{inf}}}^r\left[\xi\, j_{l+1}\left(\lambda_1^l\frac{\xi}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\mathcal{J}_l(\xi)\right]\mathrm{d}\xi\right\} \\ \times\left(1-x^2\right)C_l^{3/2}(x),\end{aligned} \tag{46}$$

where

$$\mathcal{J}_l(\xi) = \int_{-1}^{1}\mathcal{S}(\xi,x')\,C_l^{3/2}(x')\,\mathrm{d}x'; \tag{47}$$

j_l and y_l are respectively the spherical Bessel functions of the first and the second kind (also called Neumann functions) while $C_l^{3/2}$ are the Gegenbauer polynomials (Abramowitz & Stegun 1972). R_{inf} and R_{sup}, which are respectively the bottom and the top radius of the considered radiation zone, are introduced and we identify $R = R_{\mathrm{sup}}$.

These functions (j_l, y_l, and $C_l^{3/2}$) are respectively the radial and the latitudinal eigenfunctions of the homogeneous equation associated with Eq. (44) :

$$\mathcal{L}_{\lambda_1}\Psi_{\mathrm{h}} = 0. \tag{48}$$

Then, if we express the solutions of this equation as $\Psi_{\mathrm{h}} = \sum_l f_l(r)\,g_l(\theta)$, we get respectively

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2 g_l}{\mathrm{d}x^2} + (l+1)(l+2)\,g_l = 0 \tag{49}$$

and

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_l}{\mathrm{d}r^2} + \left[\left(\frac{\lambda_1^l}{R_{\mathrm{sup}}}\right)^2 - \frac{(l+1)(l+2)}{r^2}\right]f_l = 0, \tag{50}$$

giving

$$g_l = \left(1-x^2\right)C_l^{3/2}(x) \tag{51}$$

and

$$\begin{aligned} f_l \;=\; & K_1^l\,\lambda_1^l\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\,j_{l+1}\left(\lambda_1^l\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\right) \\ & + K_2^l\,\lambda_1^l\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\,y_{l+1}\left(\lambda_1^l\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\right), \end{aligned} \tag{52}$$

K_1^l and K_2^l being real constants. λ_1^l are eigenvalues that allow to verify the boundary conditions discussed hereafter. One has to notice that K_2^l has to vanish in order to preserve the regularity of the solution at the center. Applying this to Eq. (43), we finally obtain the general solution

$$\begin{aligned} & \Psi(r,\theta) = \Psi_{\mathrm{h}} + \Psi_{\mathrm{p}} \\ & = \sin^2\theta\times\left\{\sum_{l=0}^{\infty}K_1^l\frac{\lambda_1^{l,i}}{R_{\mathrm{sup}}}\,r\,j_{l+1}\left(\lambda_1^{l,i}\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\right)C_l^{3/2}(\cos\theta)\right. \\ & - \mu_0\beta_0\frac{\lambda_1^{0,i}}{R_{\mathrm{sup}}}r\,j_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\int_r^{R_{\mathrm{sup}}}\left[y_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{\xi}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\overline{\rho}\xi^3\right]\mathrm{d}\xi \\ & \left. - \mu_0\beta_0\frac{\lambda_1^{0,i}}{R_{\mathrm{sup}}}r\,y_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{r}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\int_{R_{\mathrm{inf}}}^r\left[j_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{\xi}{R_{\mathrm{sup}}}\right)\overline{\rho}\xi^3\right]\mathrm{d}\xi\right\}. \end{aligned} \tag{53}$$

Notice that the particular solution for the poloidal flux function $\left(\Psi_{\rm p}\right)$ presents a dipolar geometry, owing to its angular dependence that follows the one from the source term $\mathcal{S} = -\mu_0\,\beta_0\,\overline{\rho}\,r^2\sin^2\theta$.
Neglecting the density, we end up with the linear homogeneous equation, whose solutions are Chandrasekhar-Kendall functions (Chandrasekhar & Kendall 1957). Moreover, the source term being constituted only of a dipolar component, all the non-dipolar contributions are, according to this model, force-free.

The magnetic field is then given for $r \leq R_{\rm sup}$ by

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\Psi\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} - \frac{1}{r\sin\theta}\partial_r\Psi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\lambda_1^{0,i}}{R_{\rm sup}}\frac{\Psi}{r\sin\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi. \tag{54}$$

After a few manipulations, we can then express the current density as

$$\boldsymbol{j}_{\rm P} = \tfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}_{\rm T} = \underbrace{\frac{\lambda_1^{0,i}}{\mu_0\,R}\,\boldsymbol{B}_{\rm P}}_{\text{force-free}}, \tag{55}$$

$$\boldsymbol{j}_{\rm T} = \tfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}_{\rm P} = \underbrace{\frac{\lambda_1^{0,i}}{\mu_0\,R}\,\boldsymbol{B}_{\rm T}}_{\text{force-free}} + \underbrace{\beta_0\,\overline{\rho}\,r\sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi}_{\text{non force-free}}, \tag{56}$$

where we recognize in the first term of the right hand side the force-free contributions and in the second the non force-free one, fully contained in the toroidal component.

The Lorentz force can as a matter of fact be written **in** the very simple form:

$$\boldsymbol{F}_{\mathcal{L}} = \boldsymbol{F}_{\mathcal{L}_{\rm P}} = \beta_0\,\overline{\rho}\,\boldsymbol{\nabla}\Psi. \tag{57}$$

3.4. Configurations

The boundary conditions for Ψ which determine possible values for K_1^l and $\lambda_1^{0,i}$ have now to be discussed. Two major types of geometry are relevant for large-scale fossil magnetic fields in stellar interiors: initially confined and open configurations.

3.4.1. Initially confined configurations

Let us first concentrate on the simplest mathematical solution in the case of a central radiation zone that initially cancels Ψ both at the center ($R_{\rm inf} = 0$) and at a given confinement radius ($R_{\rm sup} = R_c$).

Then, if we choose to cancel the K_1^l coefficients for every l, the condition $\Psi(0,\theta) = 0$ is verified since $\lim_{r\to 0} r\,j_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{r}{R_{\rm sup}}\right) = 0$. However, if we look at the magnetic field radial component behaviour at the center, it is easily shown, using Eq. (54), that if $K_1^0 = 0$ it is given by $\lim_{r\to 0} r^{-1}\,j_1\left(\lambda_1^{0,i}\frac{r}{R_{\rm sup}}\right)$ which does not cancel so that $B_r\,(0,\theta) \neq 0 = C\,\cos\theta$ (where $C \in \mathbb{R}^*$). Therefore, this solution is multivaluated, thus physically inadmissible and $K_1^0 \neq 0$.

Then, we consider the general case of a field initially confined between two radii $R_{\rm inf} = R_{c_1}$ and $R_{\rm sup} = R_{c_2}$, owing to the presence of both a convective core and a convective envelope (as it is the case e.g. in A-type stars). We impose $\Psi\,(R_{c_1},\theta) = 0$ and $\Psi\,(R = R_{c_2},\theta) = 0$, which gives the two independent equations for $l = 0$

$$K_1^0 = \mu_0\,\beta_0\int_{R_{c_1}}^{R_{c_2}}\left[y_1\left(\lambda_1^{0,i}\,\frac{\xi}{R_{c_2}}\right)\overline{\rho}\,\xi^3\right]{\rm d}\xi \tag{58}$$

and

$$K_1^0\,j_1\left(\lambda_1^{0,i}\right) = \mu_0\,\beta_0 y_1\left(\lambda_1^{0,i}\right)\int_{R_{c_1}}^{R_{c_2}}\left[j_1\left(\lambda_1^{0,i}\,\frac{\xi}{R_{c_2}}\right)\overline{\rho}\xi^3\right]{\rm d}\xi; \tag{59}$$

we here focus on the dipolar mode which is known to be the lowest energy per helicity ratio state (cf. Broderick & Narayan 2008). These can be formulated so that one first determines the value of $\lambda_1^{0,i}$ according to

$$\begin{aligned} &j_1\left(\lambda_1^{0,i}\right)\int_{R_{c_1}}^{R_{c_2}}\left[y_1\left(\lambda_1^{0,i}\,\frac{\xi}{R_{c_2}}\right)\overline{\rho}\,\xi^3\right]{\rm d}\xi \\ &-y_1\left(\lambda_1^{0,i}\right)\int_{R_{c_1}}^{R_{c_2}}\left[j_1\left(\lambda_1^{0,i}\,\frac{\xi}{R_{c_2}}\right)\overline{\rho}\,\xi^3\right]{\rm d}\xi = 0 \end{aligned} \tag{60}$$

and next computes K_1^0 following (59).

In the case where there is no convective core, as for example in central radiation zones of late-type stars such as the Sun, Eqs. (59) & (60) must be applied setting $R_{c_1} = 0$.

3.4.2. Open configurations

This corresponds to the case of fields that match at the stellar surface (at $r = R_*$, R_* being the star's radius) with a potential field as observed now in some cases of early-type stars such as Ap stars. Then, we have $\boldsymbol{B}_{\rm ext} = \boldsymbol{\nabla}\Phi_{\rm M}$, $\Phi_{\rm M}$ being the associated potential.

In the case studied here, we focus on the first configuration (initially confined) since the search of relaxed solutions for given $\mathcal{I}_{\rm I;0}$, $\mathcal{I}_{\rm I;1}$, $\mathcal{I}_{\rm II;0}$, and $\mathcal{I}_{\rm II;1}$ assumes that $\boldsymbol{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} = 0$ on the stellar radiation zones boundaries. This initial confined configuration will then become open one through Ohmic diffusion as in the Braithwaite and collaborators scenario.

4. Application to Realistic Stellar Interiors

To illustrate our purpose, we apply our analytical results (i) to model an initial fossil field buried below the convective envelope of the young Sun on the ZAMS, and then (ii) to model an initial field present in the radiation zone of a ZAMS 2.40 $M_\odot$ magnetic Ap-star, whose lower and upper radiation-convection interfaces are respectively located at $R_{c_1} = 0.111\,R_*$ and at $R_{c_2} = 0.992\,R_*$. In the first case, the parameter β_0 is determined such that the maximum field strength reaches the amplitude of $B_0 = 2.1\,$MG, which is one of the upper limits given by Friedland & Gruzinov (2004) for the present Sun's radiative core. In the second case, it is obtained such that it reaches the arbitrary value of $B_0 = 10\,$kG. This value is approximatively of the same order of magnitude that the mean surface amplitude observed using spectropolarimetry for magnetic Ap-star which exhibits strong external dipolar magnetic behaviour (such as HD12288 (Wade et al. 2000)). We thus assume implicitly that such an initial confined internal field is a potential prelude to the multipolar one observed now at the surface, the latter state being acheived after a diffusive process that will be studied in a forthcoming paper.

4.1. Fossil fields buried in late-type stars radiative cores

The young Sun model used as a reference is a CESAM non-rotating standard one (Morel 1997), following inputs from the work of Couvidat et al. (2003) and Turck-Chièze et al. (2004).

In Fig. 2, three possible configurations for Ψ are given. We choose those corresponding to the first, the third and the fifth eigenvalues (given in table 1). Those are the generalization of the well-known Grad-Shafranov equation linear eigenmodes obtained in the force-free case (cf. Marsh 1992). The field is then of mixed-type (B_φ is given for $\lambda_1^{0,1}$), both poloidal and toroidal, and non force-free, properties already obtained by Prendergast (1956) in the incompressible case. The respective amplitudes ratio between the poloidal and the toroidal components will be described in §5., where the possible stability of such configurations will be discussed.

Table 1. Eigenvalues of the first five equilibria for the two configurations illustrated.

Eigenvalue	Solar case	Ap star case
$\lambda_1^{0,1}$	5.276	4.826
$\lambda_1^{0,2}$	9.157	8.657
$\lambda_1^{0,3}$	12.951	12.444
$\lambda_1^{0,4}$	16.290	16.174
$\lambda_1^{0,5}$	19.839	19.849

4.2. Fossil fields in early-type stars

Respective corresponding possible configurations in the case of an Ap star are given in Fig. 3.

The model is typical of an A2p-type star, with an initial mass $M_{\rm A} = 2.40\,{\rm M}_\odot$. The solar metallicity is chosen as the initial one and the model is taken on the ZAMS, its luminosity being $L_* = 38.0\,{\rm L}_\odot$.

Obtained configurations are then mixed poloidal-toroidal (twisted) fields which may be stable in stellar radiation zones (cf. Braithwaite & Spruit 2004; Braithwaite & Nordlund 2006). Their configurations are thus given in both cases by concentric torus, the neutral poloidal points (where $\partial_r\Psi = \partial_\theta\Psi = 0$ so that $B_r = B_\theta = 0$) positions being function of the internal density profile of the star.

Let us emphasize here that the original approach of this work first consists in deriving the Grad-Shafranov-like equation adapted to treat the barotropic magnetohydrostatic equilibrium states for realistic models of stellar interiors. Such approach has already been applied to investigate the internal magnetic configurations in polytropes and in compact objects such that white dwarfs or neutron stars (see e.g. Monaghan 1976; Payne & Melatos 2004; Tomimura & Eriguchi 2005; Yoshida et al. 2006; Haskell et al. 2008; Akgün & Wasserman 2008; Kiuchi & Kotake 2008).

Then, the obtained arbitrary functions are constrained with deriving minimal energy equilibrium configurations for a given conserved mass, azimuthal flux and helicity that generalizes the relaxation Taylor's states to the self-gravitating case where the field is non-force free.

5. Links between the field's helicity, topology and energy

5.1. Helicity *vs.* mixity

Let us express the magnetic field ($\boldsymbol{B}$) in terms of magnetic stream functions $\xi_{\rm P}$ (for the poloidal component of the field) and $\xi_{\rm T}$ (for its toroidal part):

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\left[\boldsymbol{\nabla}\times\left[\xi_{\rm P}\left(r,\theta\right)\widehat{\mathbf{e}}_r\right] + \xi_{\rm T}\left(r,\theta\right)\widehat{\mathbf{e}}_r\right]. \tag{61}$$

Next, the vector potential $\boldsymbol{A}$ is given by the relation $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$. Knowing that in the confined case the gauge choice is inconsequential, we can identify without further ado

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\times\left[\xi_{\rm P}\left(r,\theta\right)\widehat{\mathbf{e}}_r\right] + \xi_{\rm T}\left(r,\theta\right)\widehat{\mathbf{e}}_r. \tag{62}$$

The magnetic stream functions are then projected on the spherical harmonics

$$\xi_{\rm P}\left(r,\theta\right) = \sum_{\ell>0}\xi_0^\ell\left(r\right)Y_\ell^0\left(\theta\right), \tag{63}$$

$$\xi_{\rm T}\left(r,\theta\right) = \sum_{\ell>0}\chi_0^\ell\left(r\right)Y_\ell^0\left(\theta\right). \tag{64}$$

From now on, we use Einstein summation convention where $A^\ell\,B_\ell = \sum_\ell A^\ell\,B_\ell$ and the vectorial spherical harmonics basis $\left(\mathbf{R}_\ell^0\left(\theta\right),\mathbf{S}_\ell^0\left(\theta\right),\mathbf{T}_\ell^0\left(\theta\right)\right)$ such that any axisymmetric vector field $\boldsymbol{u}(r,\theta)$ can be expanded as

$$\boldsymbol{u}(r,\theta) = u_0^\ell(r)\,\mathbf{R}_\ell^0\left(\theta\right) + v_0^l(r)\,\mathbf{S}_\ell^0\left(\theta\right) + w_0^\ell(r)\,\mathbf{T}_\ell^0\left(\theta\right), \tag{65}$$

where the vectorial spherical harmonics $\mathbf{R}_\ell^0\left(\theta\right)$, $\mathbf{S}_\ell^0\left(\theta\right)$, and $\mathbf{T}_\ell^0\left(\theta\right)$ are defined by:

$$\mathbf{R}_\ell^0\left(\theta\right) = Y_\ell^0\left(\theta\right)\widehat{\mathbf{e}}_r,\ \mathbf{S}_\ell^0\left(\theta\right) = \boldsymbol{\nabla}_{\mathcal{S}}Y_\ell^0\left(\theta\right),\ \mathbf{T}_\ell^0\left(\theta\right) = \boldsymbol{\nabla}_{\mathcal{S}}\times\mathbf{R}_\ell^0\left(\theta\right), \tag{66}$$

the horizontal gradient being defined as $\boldsymbol{\nabla}_{\mathcal{S}} = \hat{\mathbf{e}}_\theta\partial_\theta$. (cf. Rieutord (1987)). Since

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\xi_{\rm P}\widehat{\mathbf{e}}_r\right) = \boldsymbol{\nabla}\times\left(\xi_0^\ell\,Y_\ell^0\widehat{\mathbf{e}}_r\right) = \boldsymbol{\nabla}\times\left(\xi_0^\ell\,\mathbf{R}_\ell^0\right) = \frac{\xi_0^\ell}{r}\mathbf{T}_\ell^0, \tag{67}$$

we get from Eq. (62)

$$\boldsymbol{A} = \chi_0^\ell\,\mathbf{R}_\ell^0 + \frac{\xi_0^\ell}{r}\mathbf{T}_\ell^0. \tag{68}$$

On the other hand, we have

$$\boldsymbol{B} = \frac{\ell\left(\ell+1\right)}{r^2}\xi_0^\ell\,\mathbf{R}_\ell^0 + \frac{1}{r}\partial_r\xi_0^\ell\,\mathbf{S}_\ell^0 + \frac{\chi_0^\ell}{r}\mathbf{T}_\ell^0, \tag{69}$$

from which we finally obtain the expression for the helicity

$$\mathcal{H} = \int_0^{R_*}\int_\Omega\left\{\left[\chi_0^\ell\,\mathbf{R}_\ell^0 + \frac{\xi_0^\ell}{r}\mathbf{T}_\ell^0\right]\cdot \left[\frac{\ell'\left(\ell'+1\right)}{r^2}\xi_0^{\ell'}\,\mathbf{R}_{\ell'}^0 + \frac{1}{r}\partial_r\xi_0^{\ell'}\,\mathbf{S}_{\ell'}^0 + \frac{\chi_0^{\ell'}}{r}\mathbf{T}_{\ell'}^0\right]\right\}{\rm d}\Omega\,r^2{\rm d}r. \tag{70}$$

At this point, we define a "poloidal helicity" defined by

$$\mathcal{H}_{\rm P} = \int_{\mathcal{V}}\boldsymbol{A}_{\rm P}\cdot\boldsymbol{B}_{\rm P}\,d\mathcal{V} \tag{71}$$

and a "toroidal helicity" by

$$\mathcal{H}_{\rm T} = \int_{\mathcal{V}}A_\phi B_\phi\,d\mathcal{V}. \tag{72}$$

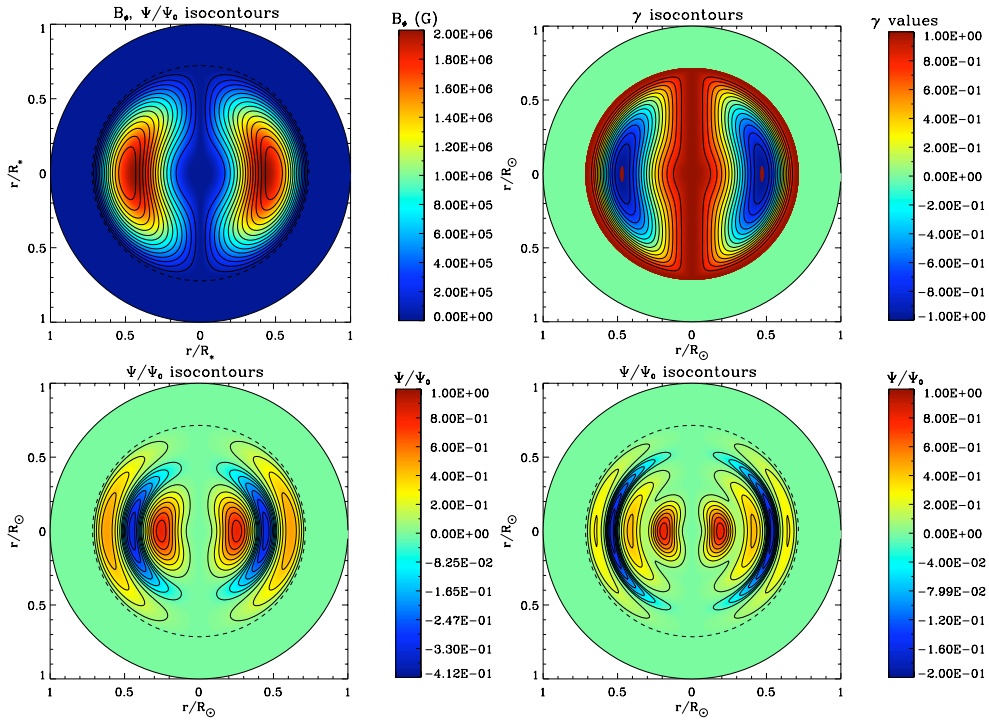


Fig. 2. Upper panel: (left) toroidal magnetic field strength in colorscale and normalized isocontours of the poloidal flux function Ψ in meridional cut in the solar case where the field is buried in the radiative core (below $0.726R_*$) for the first equilibrium configuration ($\lambda_1^{0,1}$); (right) anisotropy factor γ (Eq. 88). Lower panel: normalized isocontours of the flux function Ψ in meridional cut (left) for the third possible eigenvalue ($\lambda_1^{0,3}$) in the same case, (right) for the fifth possible eigenvalue ($\lambda_1^{0,5}$). The dashed circles indicate the radiation-convection limits.

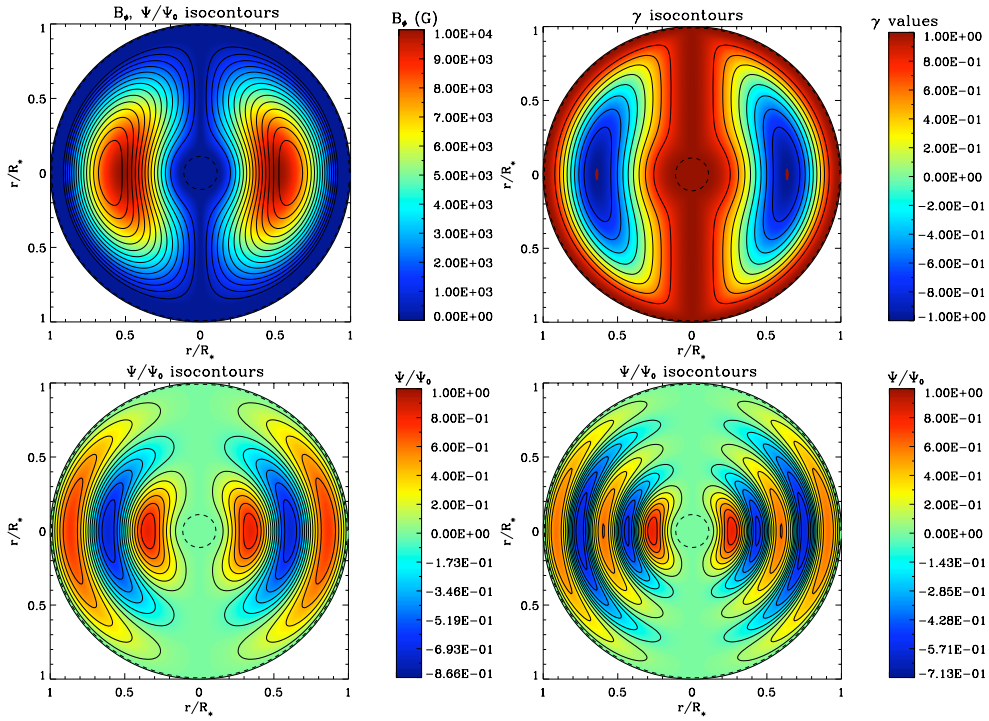


Fig. 3. Upper panel: (left) toroidal magnetic field strength in colorscale and normalized isocontours of the poloidal flux function Ψ in meridional cut in the Ap star's case where the field is confined between $R_{c_1} = 0.111\,R_*$ and $R_{c_2} = 0.992\,R_*$ for the first equilibrium configuration ($\lambda_1^{0,1}$); (right) anisotropy factor γ (Eq. 88). Lower panel: normalized isocontours of the flux function Ψ in meridional cut (left) for the third possible eigenvalue ($\lambda_1^{0,3}$) in the same case, (right) for the fifth possible eigenvalue ($\lambda_1^{0,5}$). The dashed circles indicate the radiation-convection limits.

Since $\left(\mathbf{R}_\ell^0, \mathbf{S}_\ell^0, \mathbf{T}_\ell^0\right)$ constitutes an orthogonal basis,

$$\int_\Omega \mathbf{R}_\ell^0 \cdot \mathbf{S}_\ell^0 \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \mathbf{R}_\ell^0 \cdot \mathbf{T}_\ell^0 \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \mathbf{S}_\ell^0 \cdot \mathbf{T}_\ell^0 \mathrm{d}\Omega = 0, \tag{73}$$

we get from the previous expression:

$$\mathcal{H} = \int_0^{R_*} \left[\frac{\ell' \left(\ell' + 1\right)}{r^2} \chi_0^\ell \, \xi_0^{\ell'} \int_\Omega \mathbf{R}_\ell^0 \cdot \mathbf{R}_{\ell'}^0 \, d\Omega \right.$$

$$+ \frac{1}{r^2}\,\xi_0^\ell\,\chi_0^{\ell'}\int_\Omega \mathbf{T}_\ell^0\cdot\mathbf{T}_{\ell'}^0\,d\Omega\Bigg]\,r^2\mathrm{d}r \tag{74}$$

and we verify that

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\mathrm{P} + \mathcal{H}_\mathrm{T}. \tag{75}$$

From this expression (74) we can draw two conclusions:

1. A magnetic field has to be mixed (both poloidal and toroidal) to be helical;
2. The poloidal and the toroidal helicities are equal. This can be verified, exploiting the orthogonality relations

$$\int_\Omega \mathbf{R}_\ell^0\cdot\mathbf{R}_{\ell'}^0\,d\Omega = \delta_{\ell,\ell'} \tag{76}$$

and

$$\int_\Omega \mathbf{T}_\ell^0\cdot\mathbf{T}_{\ell'}^0\,d\Omega = \ell\,(\ell+1)\,\delta_{\ell,\ell'}, \tag{77}$$

$\delta_{\ell,\ell'}$ being the usual Kronecker symbol. Then, we get

$$\mathcal{H}_\mathrm{P} = \mathcal{H}_\mathrm{T} = \ell\,(\ell+1)\int_0^{R_*}\xi_0^\ell\,\chi_0^\ell\,dr = \mathcal{H}/2. \tag{78}$$

5.2. Helicity *vs.* energy

Now, we focus back again on the helicity expression in terms of the poloidal flux function Ψ. The equations (55) and (56) are rewritten as

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{P} = \frac{R}{\lambda_1^{0,i}}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}_\mathrm{T}, \tag{79}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_\mathrm{T} &= \frac{R}{\lambda_1^{0,i}}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}_\mathrm{P} - \frac{R}{\lambda_1^{0,i}}\,\mu_0\,\beta_0\,\overline{\rho}\,r^2\,\sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi\\ &= \frac{R}{\lambda_1^{0,i}}\boldsymbol{\nabla}\times\Big[\boldsymbol{B}_\mathrm{P} - \mu_0\,\beta_0\,\overline{\rho}\,r^2\,\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}\Big].\end{aligned} \tag{80}$$

We thus obtain the two vector potentials

$$\boldsymbol{A}_\mathrm{P} = \frac{R}{\lambda_1^{0,i}}\Big(\boldsymbol{B}_\mathrm{P} - \mu_0\,\beta_0\,\overline{\rho}\,r^2\,\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}\Big) + \boldsymbol{\nabla}\Lambda_\mathrm{P}, \tag{81}$$

$$\boldsymbol{A}_\mathrm{T} = \frac{R}{\lambda_1^{0,i}}\boldsymbol{B}_\mathrm{T} + \boldsymbol{\nabla}\Lambda_\mathrm{T}, \tag{82}$$

Λ_P and Λ_T being scalar gauge fields left free. When deriving the poloidal and toroidal helicities with the boundary condition $\boldsymbol{B}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_r = 0$ at the surface, these ones disappear after integration and we find :

$$\mathcal{H}_\mathrm{P} = \frac{2\,\mu_0\,R}{\lambda_1^{0,i}}\int_\mathcal{V}\frac{\boldsymbol{B}_\mathrm{P}^2}{2\,\mu_0}\,d\mathcal{V} - \frac{\mu_0\,R}{\lambda_1^{0,i}}\beta_0\int_\mathcal{V}\overline{\rho}\,\Psi\,d\mathcal{V}, \tag{83}$$

$$\mathcal{H}_\mathrm{T} = \frac{2\,\mu_0\,R}{\lambda_1^{0,i}}\int_\mathcal{V}\frac{\boldsymbol{B}_\mathrm{T}^2}{2\,\mu_0}\,d\mathcal{V}. \tag{84}$$

So, introducing the poloidal and toroidal magnetic energies $U_\mathrm{mag;P} = \int_\mathcal{V}\frac{\boldsymbol{B}_\mathrm{P}^2}{2\,\mu_0}\,\mathrm{d}\mathcal{V}$ and $U_\mathrm{mag;T} = \int_\mathcal{V}\frac{\boldsymbol{B}_\mathrm{T}^2}{2\,\mu_0}\,\mathrm{d}\mathcal{V}$ (respectively), we obtain:

$$\mathcal{H}_\mathrm{P} = \frac{2\,\mu_0\,R}{\lambda_1^{0,i}}\left(U_\mathrm{mag;P} - \frac{1}{2}\beta_0 M_\Psi\right), \tag{85}$$

where we identify $M_\Psi = \mathcal{I}_{I;1} = \int_\mathcal{V}\overline{\rho}\,\Psi\,d\mathcal{V}$, and

$$\mathcal{H}_\mathrm{T} = \frac{2\,\mu_0\,R}{\lambda_1^{0,i}}U_\mathrm{mag;T}. \tag{86}$$

Finally, adding these two last equations, we get the global relation between the helicity and the magnetic energy in the non force-free case

$$\mathcal{H} = \frac{2\,\mu_0\,R}{\lambda_1^{0,i}}\left(U_\mathrm{mag} - \frac{1}{2}\beta_0 M_\Psi\right), \tag{87}$$

where we recognize in the second term the non force-free contribution, which is the first invariant: the mass enclosed in magnetic flux surface.

5.3. Helicity *vs.* topology

The $l > 1$ latitudinal modes contributions

As shown by Broderick & Narayan (2008) for a set of modes l ranging from 1 to 8 in the case of force-free solutions applied in an incompressible media, the first dipolar eigenvalue $\lambda_1^{0,1}$ corresponds to the minimum energy configuration. Furthermore, from the Eq. (87), it arises directly that adding contributions from the higher multipolar components of the field (force-free) will result in adding a positive amount of magnetic energy to the total energy, and this one will not be the minimal state.

Lowest energy radial mode

We plotted in Figure 4a and 4b the poloidal, toroidal and total helicity in the case of the Sun and of the Ap star. It clearly stems from this figure that the poloidal and the toroidal helicities are equal (cf. Eq. 78) for the eigenvalues given in Tab 1 (represented by red diamonds). Moreover, the energy of the poloidal component of the field ($U_\mathrm{mag;P}$) can be compared to the one correponding to the toroidal part ($U_\mathrm{mag;T}$) and we see that they are of the same order of magnitude.

In Figure 5a and 5b are represented the ratios $\mathcal{E}_\mathrm{mag}/\mathcal{H}$ for the poloidal, toroidal and global contributions, with and without the non force-free term, as a function of the parameter $\lambda_1^{0,i}$ respectively in the case of the Sun and of the Ap type star. The first dipolar eigenvalue $\lambda_1^{0,1}$ present the minimum energy compared with highest radial modes. It is thus the most probable configuration achieved after relaxation and from now on we focus on it.

6. Discussion

6.1. Stability criteria

First, it is interesting to examine the ratio of the field's poloidal component amplitude with its toroidal one. Then, we define the anisotropy factor (γ) of the configuration[3] by

$$\gamma\,(r,\theta) = \frac{B_\mathrm{P}^2 - B_\mathrm{T}^2}{B_\mathrm{P}^2 + B_\mathrm{T}^2},\quad\text{where}\quad B_\mathrm{P} = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2}\,. \tag{88}$$

It runs between -1 when the field is completely toroidal to 1 when it is completely poloidal. In Figs. 2 & 3, it is shown for

[3] This can be inverted as
$\frac{B_\mathrm{T}}{B_\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}$ and $\frac{u_\mathrm{mag;T}}{u_\mathrm{mag;P}} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$,
where the magnetic energy densities associated respectively with the poloidal field ($u_\mathrm{mag;P} = B_\mathrm{P}^2/2\mu_0$) and with the toroidal one ($u_\mathrm{mag;T} = B_\mathrm{T}^2/2\mu_0$) have been introduced.

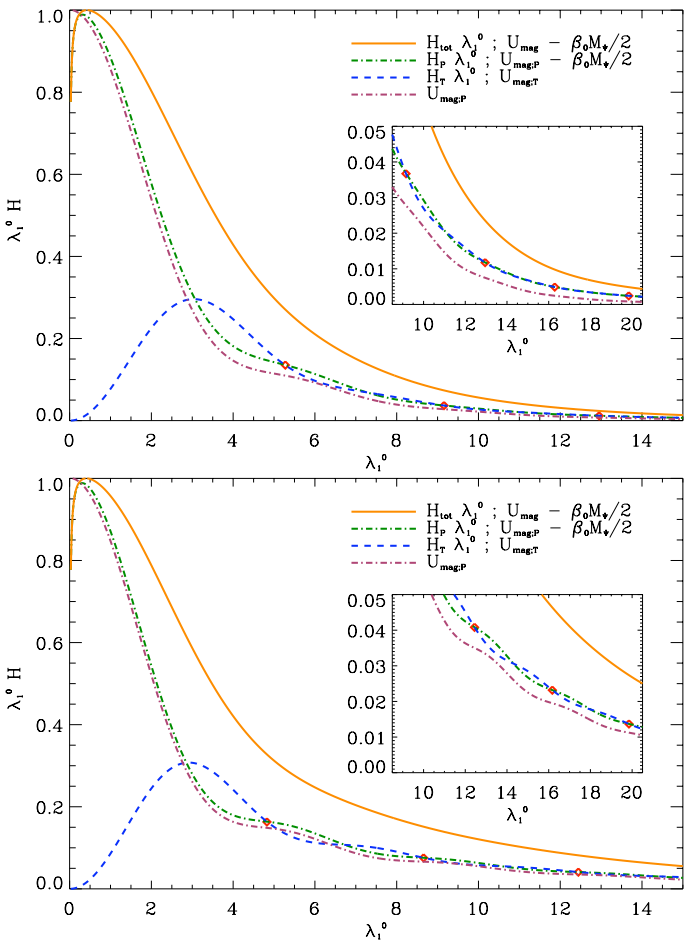


Fig. 4. Normalized total, poloidal, and toroidal helicities as a function of the eigenvalue (λ_1^0) in the case (a, top) of the young Sun and (b, bottom) of the studied Ap star. The red diamonds represent the eigenvalues ($\lambda_1^{0,i}$) given in Tab 1 for which Eq. (78) is verified. Using Eq. (86), we directly deduce $U_{\rm mag;T}$ while $U_{\rm mag;P}$ is given in purple.

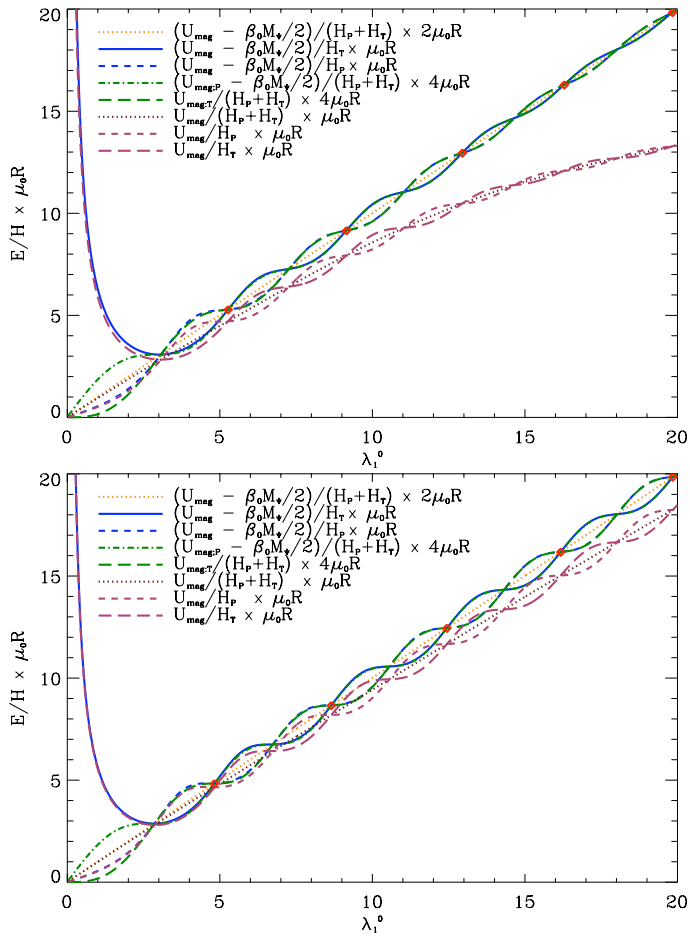


Fig. 5. Magnetic energy/helicity ratios for the total, poloidal, and toroidal contributions as a function of the eigenvalue (λ_1^0) with (first five curves) and without (last three curves) the non-force-free term in the case (a, top) of the young Sun and (b, bottom) of the studied Ap star. For the eigenvalues ($\lambda_1^{0,i}$) represented by the red diamonds (cf. Tab 1), Eqs. (78,87,85,86) are simultaneously verified.

the first configurations obtained in the solar and in the Ap star cases. In both ones, the field is strongly toroidal ($\gamma \approx -1$) in the center of the torus, which corresponds to the neutral point of the poloidal field (where we recall that $\partial_r \Psi = \partial_\theta \Psi = 0$), while it is strongly poloidal ($\gamma \approx 1$) around the magnetic axis of the star where the toroidal field is weak. Between those two regimes, both components have comparable strengths where $\gamma \approx 0$. Then, proposed configurations may be stable since poloidal and toroidal fields can stabilize each other respectively (Wright 1973; Tayler 1980; Braithwaite 2009). The complete stability analysis following the analytical method given in Bernstein et al. (1958) and using 3D numerical simulations will be achieved in a near future.

6.2. Comparison to numerical simulations

Next, let us compare in more details our analytical configuration to those obtained using numerical simulations (see Braithwaite & Spruit (2004); Braithwaite & Nordlund (2006); Braithwaite (2008)).

Braithwaite and collaborators performed numerical magnetohydrodynamical simulations of the relaxation of an initially random magnetic field in a stably stratified star. Then, this initial magnetic field is always found to relax on the Alfvén timescale into a stable magneto-hydrostatic equilibrium mixed configuration consisting of twisted flux tube(s). Two families are then identified: in the first one, the equilibria configurations are roughly axisymmetric with one flux tube forming a circle around the equator such as our configuration; in the second family, the relaxed fields are non-axisymmetric consisting of one or more flux tubes forming a complex structure with their axis lying at roughly constant depth under the surface of the star. Whether an axisymmetric or non-axisymmetric equilibrium forms depends on the initial condition chosen for the radial profile of the initial stochastic field strength $|\boldsymbol{B}| \propto \overline{\rho}^p$: a centrally concentrated one evolves into an axisymmetric equilibrium as in our configuration while a more spread-out field with a stronger connection to the atmosphere relaxes into a non-axisymmetric one. Braithwaite (2008) indicates that, using an ideal-gas star modelled initially with a polytrope of index $n = 3$, the threshold is $p \approx 1/2$.

Moreover, as shown in Fig. 7 in Braithwaite (2008), a selective decay of the total helicity ($\mathcal{H}$) and of the magnetic energy ($U_{\rm Mag}$) occurs during the initial relaxation with a stronger decrease of $U_{\rm Mag}$ than that of $\mathcal{H}$. This hierarchy well known in plasma physics (see for example Biskamp (1997) and Shaikh et al. (2008)) justifies the variational method used to derive our configuration (Montgomery & Phillips (1988)) while the introduction of $\mathcal{I}_{\rm I;1}$ is justified by the non force-free character of the field in stellar interiors (Reisenegger 2009) and by the stratifica-

tion which inhibits the transport of flux and mass in the radial direction (see §3.2. and Braithwaite (2008)).

Finally, note that our analytical configuration for which $U_{\mathrm{mag;P}}/U_{\mathrm{mag}} \approx 0.45$ verifies the stability criterion derived by Braithwaite (2009) for axisymmetric configurations:

$$\mathcal{A}\frac{U_{\mathrm{mag}}}{U_{\mathrm{grav}}} < \frac{U_{\mathrm{mag;P}}}{U_{\mathrm{mag}}} \leq 0.8, \tag{89}$$

where U_{grav} is the gravitational energy in the star and $\mathcal{A}$ a dimensionless factor whose value is of order 10 in a main-sequence star and of order 10^3 in a neutron star while we expect $U_{\mathrm{mag}}/U_{\mathrm{grav}} < 10^{-6}$ in a realistic star (see for example Duez et al. (2010)).

Our analytical solution is thus similar to the axisymmetric non force-free relaxed solutions family obtained by Braithwaite & Spruit (2004) and Braithwaite & Nordlund (2006).

Those types of configurations can thus be relevant to model initial equilibrium conditions for evolutionary calculations involving large-scale fossil fields in stellar radiation zones. First, they can be used to initiate MHD rotational transport in dynamical stellar evolution codes where it is implemented (cf. Mathis & Zahn 2005) . There, axisymmetric transport equations have been derived to study the secular dynamics of the mean axisymmetric component of the magnetic field, the magnetic instabilities being treated using phenomenological prescriptions (Spruit 1999, 2002; Maeder & Meynet 2004) that have to be verified and improved by numerical experiments (Nordlund (2006) and subsequent works; Zahn et al. (2007); Gellert et al. (2008)). On the other hand, those can also be used as initial conditions for large-scale numerical simulations of stellar radiation zones (Garaud 2002; Brun & Zahn 2006).

6.3. Relaxed configurations and boundary conditions

Let us now discuss the boundary conditions we choosed. Since equilibrium states are known to minimize the energy/helicity ratio, we follow the procedure established by Chandrasekhar & Prendergast (1958) and Woltjer (1959b) to constrain the arbitrary functions of the magnetohydrostatic equilibrium. This procedure, which minimizes the energy with respect to given invariants of the system (and in particular the helicity), assumes the following boundary condition $\boldsymbol{B}\cdot\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} = 0$ that leads to an azimuthal current sheet due to the non-zero latitudinal field at the upper boundary ($B_\theta\left(R_{\mathrm{sup}},\theta\right) \neq 0$). This is a potential source of instability and in the case of our configuration we have to evaluate its effect on the stability (cf. Bellan 2000).

Next, in a stellar context, we have to allow open configurations as observed and thus to match the internal solution with an external multipolar one. It remains then to be seen whether the invariants are conserved, as they are in the confined case (Dixon et al. 1989).

Finally, independently from the chosen type of configuration (confined or matched with a multipolar external field), we have to search solutions that allow the continuity of the magnetic field and of the associated currents at the boundaries to cancel the possible induced instabilities. This leads to an ill-posed problem which must be solved in a subtle way (see Monaghan 1976; Lyutikov 2009). In the present state of art, no solution has been derived that both minimizes the energy/helicity ratio and satisfies this type of surface boundary conditions. This will be the next step and it is out of the scope of the present paper.

7. Conclusion

In the context of improving stellar models by taking into account in the most consistent way as possible dynamical processes such as rotation and magnetic field, we examine possible magnetic equilibrium configurations to model initial fossil fields.

We generalize the pioneer work by Prendergast (1956) in deriving the barotropic magnetohydrostatic equilibrium states of realistic stellar interiors which are a first equilibrium family. These will then evolve due to other dynamical processes such as Ohmic diffusion, differential rotation, meridional circulation, and turbulence. Relaxed minimum energy equilibrium configurations are then obtained for a given conserved mass and helicity that correspond to the Taylor's relaxation states in the self-gravitating non force-free case. These are then applied to the internal radiation zone of the young Sun and to the radiative interior of an Ap star on the ZAMS. Mixed poloidal and toroidal magnetic configurations, potentially stable in stellar radiation zones, are obtained.

Now, we have thus to study the stability of these magnetic topologies. Moreover, the case of general baroclinic equilibrium states have to be studied (Paper II).

These equilibrium configurations have then to be used as possible initial conditions for rotational transport processes in stellar radiative regions that will allow to study internal stellar MHD over secular time-scales.

Acknowledgements. We thank the referee for her/his remarks and suggestions that improved and clarified the original manuscript. We would like to thank S. Turck-Chièze, A.-S. Brun, J.-P. Zahn, and M. Rieutord who kindly commented on the manuscript and suggested improvements and C. Neiner and G. Wade for valuable discussions on the subject. This work was supported in part by the Programme National de Physique Stellaire (CNRS/INSU).

References

Abramowitz, M. & Stegun, I. A. 1972, Handbook of Mathematical Functions, ninth dover printing, tenth gpo printing edn. (Dover)
Acheson, D. J. 1978, Royal Society of London Philosophical Transactions Series A, 289, 459
Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., Cunha, M., & Kurtz, D. W. 2008, ArXiv e-prints, 803
Akgün, T. & Wasserman, I. 2008, MNRAS, 383, 1551
Bellan, P. M. 2000, Spheromaks: a practical application of magnetohydrodynamic dynamos and plasma self-organization (River Edge, NJ: Imperial College Press)
Bernstein, I. B., Frieman, E. A., Kruskal, M. D., & Kulsrud, R. M. 1958, Royal Society of London Proceedings Series A, 244, 17
Biskamp, D. 1997, Nonlinear Magnetohydrodynamics (Cambridge, UK: Cambridge University Press, August 1997)
Braithwaite, J. 2006, A&A, 449, 451
Braithwaite, J. 2007, A&A, 469, 275
Braithwaite, J. 2008, MNRAS, 386, 1947
Braithwaite, J. 2009, MNRAS, 397, 763
Braithwaite, J. & Nordlund, Å. 2006, A&A, 450, 1077
Braithwaite, J. & Spruit, H. C. 2004, Nature, 431, 819
Broderick, A. E. & Narayan, R. 2008, MNRAS, 383, 943
Brun, A. S. & Zahn, J. P. 2006, A&A, 457, 665
Chandrasekhar, S. 1956a, Proceedings of the National Academy of Science, 42, 1
Chandrasekhar, S. 1956b, Proceedings of the National Academy of Science, 42, 273
Chandrasekhar, S. & Kendall, P. C. 1957, ApJ, 126, 457
Chandrasekhar, S. & Prendergast, K. H. 1956, Proceedings of the National Academy of Science, 42, 5
Chandrasekhar, S. & Prendergast, K. H. 1958, in IAU Symposium, Vol. 6, Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics, ed. B. Lehnert, 46–+
Charbonneau, P. & MacGregor, K. B. 1993, ApJ, 417, 762
Couvidat, S., Turck-Chièze, S., & Kosovichev, A. G. 2003, ApJ, 599, 1434
Dasgupta, B., Janaki, M. S., Bhattacharyya, R., et al. 2002, Phys. Rev. E, 65, 046405

Dixon, A. M., Berger, M. A., Priest, E. R., & Browning, P. K. 1989, A&A, 225, 156
Donati, J. F., Howarth, I. D., Jardine, M. M., et al. 2006, MNRAS, 370, 629
Donati, J. F., Semel, M., Carter, B. D., Rees, D. E., & Collier Cameron, A. 1997, MNRAS, 291, 658
Duez, V., Brun, A. S., Mathis, S., Nghiem, P. A. P., & Turck-Chièze, S. 2008, Memorie della Societa Astronomica Italiana, 79, 716
Duez, V., Mathis, S., & Turck-Chièze, S. 2010, MNRAS, 402, 271
Ferraro, V. C. A. 1954, ApJ, 119, 407
Friedland, A. & Gruzinov, A. 2004, ApJ, 601, 570
Garaud, P. 2002, MNRAS, 329, 1
Gellert, M., Rüdiger, G., & Elstner, D. 2008, A&A, 479, L33
Goossens, M., Biront, D., & Tayler, R. J. 1981, Ap&SS, 75, 521
Goossens, M. & Tayler, R. J. 1980, MNRAS, 193, 833
Goossens, M. & Veugelen, R. 1978, A&A, 70, 277
Grad, H. & Rubin, H. 1958, in Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Vol. 31, IAEA, Geneva, 190–197
Haskell, B., Samuelsson, L., Glampedakis, K., & Andersson, N. 2008, MNRAS, 385, 531
Heinemann, M. & Olbert, S. 1978, J. Geophys. Res., 83, 2457
Kiuchi, K. & Kotake, K. 2008, MNRAS, 385, 1327
Kutvitskii, V. A. & Solov'ev, L. S. 1994, Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics, 78, 456
Landstreet, J. D., Silaj, J., Andretta, V., et al. 2008, A&A, 481, 465
Li, L., Sofia, S., Ventura, P., et al. 2009, ApJS, 182, 584
Li, L. H., Ventura, P., Basu, S., Sofia, S., & Demarque, P. 2006, ApJS, 164, 215
Lydon, T. J. & Sofia, S. 1995, ApJS, 101, 357
Lyutikov, M. 2009, ArXiv e-prints 0903.1109
Maeder, A. & Meynet, G. 2000, ARA&A, 38, 143
Maeder, A. & Meynet, G. 2004, A&A, 422, 225
Markey, P. & Tayler, R. J. 1973, MNRAS, 163, 77
Markey, P. & Tayler, R. J. 1974, MNRAS, 168, 505
Marsh, G. E. 1992, Phys. Rev. A, 45, 7520
Mastrano, A. & Melatos, A. 2008, MNRAS, 387, 1735
Mathis, S. & Zahn, J. P. 2005, A&A, 440, 653
Mestel, L. 1956, MNRAS, 116, 324
Mestel, L. & Moss, D. L. 1977, MNRAS, 178, 27
Monaghan, J. J. 1976, Ap&SS, 40, 385
Montgomery, D. & Phillips, L. 1988, Phys. Rev. A, 38, 2953
Montgomery, D. & Phillips, L. 1989, Physica D Nonlinear Phenomena, 37, 215
Morel, P. 1997, A&AS, 124, 597
Morse, P. M. & Feshbach, H. 1953, Methods of theoretical physics (International Series in Pure and Applied Physics, New York: McGraw-Hill)
Moss, D. L. 1973, MNRAS, 164, 33
Moss, D. L. 1975, MNRAS, 173, 141
Neiner, C. 2007, in Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 361, Active OB-Stars: Laboratories for Stellar and Circumstellar Physics, ed. A. T. Okazaki, S. P. Owocki, & S. Stefl, 91–+
Nordlund, Å. 2006, A&A, 450, 1077
Ogilvie, G. I. 1997, MNRAS, 288, 63
Payne, D. J. B. & Melatos, A. 2004, MNRAS, 351, 569
Pedlosky, J. 1998, Geophysical fluid dynamics, 2nd edition (Springer)
Petit, P., Dintrans, B., Solanki, S., et al. 2008, ArXiv e-prints, 804
Prendergast, K. H. 1956, ApJ, 123, 498
Reisenegger, A. 2009, A&A, 499, 557
Rieutord, M. 1987, Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 39, 163
Rieutord, M. 2006, in EAS Publications Series, Vol. 21, EAS Publications Series, ed. M. Rieutord & B. Dubrulle, 275–295
Roxburgh, I. W. 1966, MNRAS, 132, 347
Rudiger, G. & Kitchatinov, L. L. 1997, Astronomische Nachrichten, 318, 273
Shafranov, V. D. 1966, Reviews of Plasma Physics, 2, 103
Shaikh, D., Dasgupta, B., Zank, G. P., & Hu, Q. 2008, Physics of Plasmas, 15, 012306
Shulyak, D., Kochukhov, O., Valyavin, G., et al. 2009, ArXiv e-prints
Shulyak, D., Valyavin, G., Kochukhov, O., et al. 2007, A&A, 464, 1089
Spruit, H. C. 1999, A&A, 349, 189
Spruit, H. C. 2002, A&A, 381, 923
Spruit, H. C. 2008, in American Institute of Physics Conference Series, Vol. 983, 40 Years of Pulsars: Millisecond Pulsars, Magnetars and More, ed. C. Bassa, Z. Wang, A. Cumming, & V. M. Kaspi, 391–398
Sweet, P. A. 1950, MNRAS, 110, 548
Talon, S. 2008, in EAS Publications Series, Vol. 32, EAS Publications Series, ed. C. Charbonnel & J.-P. Zahn, 81–130
Tayler, R. J. 1973, MNRAS, 161, 365
Tayler, R. J. 1980, MNRAS, 191, 151
Taylor, J. B. 1974, Physical Review Letters, 33, 1139
Tomimura, Y. & Eriguchi, Y. 2005, MNRAS, 359, 1117
Turck-Chièze, S., Couvidat, S., Piau, L., et al. 2004, Physical Review Letters, 93, 211102
Turck-Chièze, S. & Talon, S. 2008, Advances in Space Research, 41, 855
van Assche, W., Goossens, M., & Tayler, R. J. 1982, A&A, 109, 166
Wade, G. A., Kudryavtsev, D., Romanyuk, I. I., Landstreet, J. D., & Mathys, G. 2000, A&A, 355, 1080
Wentzel, D. G. 1960, ApJS, 5, 187
Wentzel, D. G. 1961, ApJ, 133, 170
Woltjer, L. 1958, Proceedings of the National Academy of Science, 44, 833
Woltjer, L. 1959a, ApJ, 130, 400
Woltjer, L. 1959b, ApJ, 130, 405
Woltjer, L. 1960, ApJ, 131, 227
Wright, G. A. E. 1969, MNRAS, 146, 197
Wright, G. A. E. 1973, MNRAS, 162, 339
Yoshida, S., Yoshida, S., & Eriguchi, Y. 2006, ApJ, 651, 462
Zahn, J. P. 1992, A&A, 265, 115
Zahn, J. P., Brun, A. S., & Mathis, S. 2007, A&A, 474, 145

Index

A

Alfvén
- fréquence d' . . . 37
- vitesse d' . . . 37

Am, étoiles . . . voir étoiles de type Am
Ap, étoiles . . . voir étoiles de type Ap

B

barotropie . . . 66
batterie Biermann, effet . . . 47
Brunt-Väisälä, fréquence de . . . 195

C

champ
- force-free . . . 63
- magnétique axisymétrique . . . 64
- non force-free . . . 65

chauffage ohmique . . . 129
Cowling, approximation de . . . 197
CP, étoiles . . . voir étoiles de type CP
cylicité solaire . . . voir Soleil, cyclicité

D

Dalton, minimum de . . . 7
différence
- grande . . . 201
- seconde . . . 202

différences
- petites . . . 202

difffusivité magnétique . . . 40
dipôle . . . 13
Dynamo
- dans les disques d'accrétion . . . 42
- dans les zones radiatives . . . 43
- expérimentales . . . 42
- solaire . . . 41

E

émissions
- en rayons X . . . 22
- radio non-thermiques . . . 23

équation(s)
- barocline . . . 170
- cubique de la MLT . . . 177
- d'induction . . . 40
- de Grad-Shafranov . . . 67
- de la structure stellaire . . . 110
- de Maxwell . . . 33
- de Poisson . . . 125
- de Sweet . . . 125
- du moment cinétique . . . 167
- du transport de la chaleur . . . 171
- du vent thermique . . . 170

équilibre
- magnéto-hydrostatique . . . 115

étoiles
- à neutrons . . . 18
- Am . . . 11
- Ap . . . 11, 12
- classification . . . 6
- CP . . . 11
- de Herbig . . . 16
- He-faibles SiSrTi . . . 12
- He-riches . . . 12, 23
- Si . . . 12
- SrCrEu . . . 12
- T Tauri . . . 16

F

flux de Poynting . . . 129
force
- de Laplace . . . 114
- de Lorentz . . . 114

force-free, champ 63

G

Gleissberg, cycle de 7

H

hélicité 60
Hale
    cycle de 10
    loi de 9
Hanle, effet 21
Herbig
    étoiles de 16

I

Instabilité
    « fluting » 36
    « kink » 35
    « sausage » 35
    de flottaison 34
    de Parker 34
    de Tayler 37
    double-diffusive 119
    magnéto-rotationnelle 38

L

Lamb, fréquence de 196
Laplace, force de 114
Lorentz, force de 114

M

Maunder, minimum de 7
Maxwell
    équations de 33
modes
    f 199
    g 198
    mixtes 199
    p 198
modes normaux, méthode des 93
moment gravitationnel multipolaire 126

N

naines blanches 17
neutrons, étoiles à 18
non force-free, champ 65

O

Ohm, loi de 33
ohmique, chauffage 129

P

papillon, diagramme 10
polarimètre 23
Poynting
    flux de 129
pression magnétique 121
Preston, classification de 11

Q

quadrupôle 13

R

relaxés, états 60
rotateur oblique, modèle du 13

S

Schwabe, cycle de 7
Soleil
    cyclicité 6
spectropolarimétrie 23
sphéromaks 60
Stokes, paramètres 21
Suess, cycle de 7

T

T Tauri, étoiles de type 16
Taylor, état de 60
tension magnétique 123

V

variationnelle, méthode 97

W

Wolf, nombre de 7

Z

Zeeman, effet 19

Cette thèse a été rédigée avec LaTeX 2_ε.