



HAL
open science

Construction de solutions exactes en élastoplasticité. Application à l'estimation d'erreur par apprentissage

Jean-Michel Hablot

► **To cite this version:**

Jean-Michel Hablot. Construction de solutions exactes en élastoplasticité. Application à l'estimation d'erreur par apprentissage. Modélisation et simulation. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1990. Français. NNT: . tel-00518462

HAL Id: tel-00518462

<https://pastel.hal.science/tel-00518462>

Submitted on 17 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

78941

NS 15715
(2)

T H E S E

présentée pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR

de

L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité : Structures et Matériaux

par

Jean-Michel HABLOT

Sujet de la thèse :

CONSTRUCTION DE SOLUTIONS EXACTES EN ELASTOPLASTICITE

APPLICATION A L'ESTIMATION D'ERREUR PAR APPRENTISSAGE

soutenue le 21 juin 1990

devant le Jury composé de :

MM. P. LADEVEZE	Président
J.C. NEDELEC	Rapporteur
J.M. REYNOUARD	Rapporteur
H.D. BUI	Examineur
P. GERMAIN-LACOUR	Examineur
J. ZARKA	Examineur

09



REMERCIEMENTS

Je remercie Messieurs Habib et Berest, Directeurs successifs du LMS, d'avoir accepté de m'accueillir au sein de leur Laboratoire.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à Monsieur Pierre Ladevèze, qui m'a fait l'honneur d'être Président de mon jury de thèse.

Je remercie vivement Gérard Coffignal, du LMT, de m'avoir prêté le mailleur automatique utilisé dans ce travail.

Je ne saurais trop remercier Monsieur J.C. Nedelec, Directeur du CMAP, et Monsieur J.M. Reynouard, Directeur du Département GCU à l'INSA de Lyon, d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, malgré leur importante charge de travail.

Je remercie mes collègues de l'équipe SEA : Michel Terrien, Marc Schoenauer, Michèle Sebag, pour leur collaboration à mes travaux et leur disponibilité.

Je remercie Messieurs Gonnard, Germain-Lacour et Blot, de PSA Etudes et Recherches, d'avoir soutenu mes travaux.

Je remercie de leurs encouragements Monsieur H.D. Bui et Monsieur J. Salençon.

Je pense aussi à mes collègues du Laboratoire, dont P. Navidi, S. Braham (instigateur des chargements de type roulement), M. Bulik (qui m'a apporté une aide appréciable), J. Frelat...

L'étude SEA a été effectuée en collaboration avec le CEA, le CNES, EDF, Renault, Sagem et PSA Etudes et Recherches. Je remercie cette dernière société d'avoir été mon employeur par l'intermédiaire d'un contrat CIFRE.

Enfin, je remercie de sa disponibilité mon directeur de thèse, J. Zarka. Il m'a fait confiance dès nos premiers contacts, en mai 1986, et ses conseils et encouragements permanents m'ont permis de mener mon travail à son état actuel.

CHAPITRE I

INTRODUCTION

1. POSITION DU PROBLEME

2. UNE APPROCHE POSSIBLE : L'APPRENTISSAGE

CHAPITRE II

RAPPELS SUR LE CALCUL DES STRUCTURES ELASTOPLASTIQUES

1. RAPPELS DE MECANIQUE

1.1. Le problème mécanique

1.1.1. Données du problème

1.1.2. Solution du problème

1.1.3. Formulation locale du problème mécanique

1.2. Lois de comportement

1.2.1. Comportement élastique linéaire

1.2.2. Comportement élastoplastique

1.2.2.1. Apparition des déformations plastiques : frontière limite d'élasticité

1.2.2.2. Lois d'écoulement plastique

1.2.2.3. Différents types d'écrouissage

1.3. Formulation variationnelle du problème mécanique

1.3.1. Principe des travaux virtuels (PTV)

1.3.1.1. Définitions

1.3.1.2. Expression générale du PTV en quasi-statique

1.3.2. Définition de quantités énergétiques

1.3.3. Formulation variationnelle en élasticité

1.3.4. Formulation variationnelle du problème élastoplastique

1.4. Problèmes bidimensionnels

1.4.1. Problèmes en déformations planes

1.4.2. Problèmes axisymétriques

1.4.3. Problèmes en contraintes planes

2. RESOLUTION ANALYTIQUE DES PROBLEMES MECANIQUES

2.1. Structures élastiques

2.2. Structures élastoplastiques

3. PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

3.1. Approximation d'une fonction par éléments finis

3.1.1. Géométrie de l'élément fini

3.1.2. Découpage en éléments

3.1.3. Les fonctions de forme

3.1.4. Transformations de coordonnées

3.2. Résolution par éléments finis du problème élastique quasi-statique

3.2.1. Construction de l'espace approché U_h

3.2.2. Discrétisation de la fonctionnelle

3.2.3. Prise en compte des conditions aux limites

3.2.4. Résolution du problème discrétisé

4. ANALYSE NUMERIQUE DES STRUCTURES ELASTOPLASTIQUES

4.1. Problème approché discrétisé uniquement en espace

4.2. Problème approché discrétisé en espace et en temps

- 4.3. Choix d'une discrétisation temporelle
- 4.4. Calcul lors d'un pas de charge
 - 4.4.1. Point de départ
 - 4.4.2. Principe général
 - 4.4.3. Méthodes de calcul des incréments Δq
 - 4.4.4. Méthodes heuristiques de recherche de Dq
- 4.5. Précision des algorithmes de correction plastique des contraintes
 - 4.5.1. Généralités
 - 4.5.2. Méthodes implicites et explicites
 - 4.5.3. Algorithmes de correction plastique

CHAPITRE III

ERREURS ET MAILLAGES

1. PRESENTATION DE QUELQUES METHODES DE MAILLAGE AUTOMATIQUE

- 1.1. Introduction
- 1.2. Maillage automatique d'un domaine quelconque
 - 1.2.1. Hypothèses de départ
 - 1.2.2. Méthodes de maillage
 - 1.2.2.1. Mailleurs frontaux
 - 1.2.2.2. Raccordement d'un semis de noeuds
 - 1.2.2.3. Rajout d'un noeud dans une triangulation de Delaunay existante
- 1.3. Amélioration géométrique de maillages existants
 - 1.3.1. Position du problème
 - 1.3.2. Techniques nécessitant un déplacement des noeuds
 - 1.3.3. Changement de topologie
- 1.4. Génération de maillages à partir d'un contour
- 1.5. Mailleurs tenant compte de critères de remaillage
 - 1.5.1. Terminologie
 - 1.5.2. Techniques diverses d'amélioration de maillages
 - 1.5.3. Mailleurs respectant un champ de tailles d'éléments (ou MRCT)
 - 1.5.3.1. Principe
 - 1.5.3.2. Algorithme de Carnet
 - 1.5.3.3. Algorithme de Coffignal
 - 1.5.3.4. Algorithme de Zienkiewicz
- 1.6. Techniques de transfert des résultats d'un maillage père au maillage fils

2. ETUDE DES ERREURS

- 2.1. Erreurs entre un champ exact et un champ approché
 - 2.1.1. Généralités
 - 2.1.2. Erreurs locales ponctuelles
 - 2.1.2.1. Erreur ponctuelle absolue
 - 2.1.2.2. Erreur ponctuelle normée
 - 2.1.2.3. Erreur ponctuelle relative
 - 2.1.3. Erreurs globales sur un domaine Ω
 - 2.1.3.1. Erreur globale absolue
 - 2.1.3.2. Erreur globale normée
 - 2.1.3.3. Erreur globale relative instantanée
 - 2.1.3.4. Second type d'erreur globale relative
 - 2.1.4. Erreurs élémentaires
 - 2.1.4.1. Erreur élémentaire absolue
 - 2.1.4.2. Erreur élémentaire normée
 - 2.1.4.3. Erreur élémentaire relative
 - 2.1.4.4. Contribution locale aux erreurs relatives globales
 - 2.1.4.5. Contribution locale à l'erreur globale normée
 - 2.1.4.6. Densités d'erreur relative
 - 2.1.5. Erreurs dans le cas d'un problème d'évolution

- 2.1.5.1. Généralités
- 2.1.5.2. Erreurs à un temps donné
- 2.1.5.3. Sup des erreurs globales
- 2.1.5.4. Erreurs enveloppes
- 2.1.5.5. Calcul pratique des erreurs enveloppes
- 2.2. Différents types et origines des erreurs**
 - 2.2.1. Erreurs et fautes
 - 2.2.2. Erreurs d'arrondi
 - 2.2.3. Erreurs dues à la discrétisation
 - 2.2.3.1. Discrétisation spatiale
 - 2.2.3.2. Discrétisation temporelle
- 2.3. Causes d'erreur particulières à l'analyse élastoplastique**
- 2.4. Définition d'une discrétisation optimale**
- 2.5. Quantités sur lesquelles on peut évaluer une erreur**
- 2.6. Erreurs, estimateurs d'erreur et indicateurs d'erreur**
- 2.7. Facteurs influençant le coût d'un calcul numérique élastoplastique**
 - 2.7.1. Facteurs communs à tous les calculs numériques par éléments finis
 - 2.7.2. Facteurs spécifiques à l'élastoplasticité

3. ESTIMATION DES ERREURS

- 3.1. Résultats classiques**
 - 3.1.1. Cas monodimensionnel
 - 3.1.2. Cas multidimensionnel : généralités
 - 3.1.3. Cas de l'élastoplasticité classique
- 3.2. Estimation de l'erreur**
 - 3.2.1. Estimations globales
 - 3.2.1.1. Estimation de l'erreur par différence d'énergie
 - 3.2.1.2. Encadrement de l'énergie
 - 3.2.1.3. Estimation par extrapolation
 - 3.2.2. Estimations locales
 - 3.2.2.1. Utilisation des résidus des équations d'équilibre
 - 3.2.2.2. Utilisation de champs de contraintes statiquement admissibles
- 3.3. Conclusion**

4. TECHNIQUES ADAPTATIVES D'AMELIORATION DE MAILLAGES

- 4.1. Introduction**
- 4.2. Techniques d'amélioration non reliées à une estimation de l'erreur**
 - 4.2.1. Méthodes de type r-version
 - 4.2.2. Ajout local de degrés de liberté par h- ou p-version
- 4.3. Remaillage global par h-version modifiée tiré d'indicateurs ou d'estimateurs d'erreur locaux**
- 4.4. Règles semi-empiriques indépendantes des erreurs**
 - 4.4.1. Utilisation des données de la géométrie et du chargement
 - 4.4.2. Utilisation des gradients d'un champ calculé sur la structure

5. DISCRETISATION TEMPORELLE EN ELASTOPLASTICITE

- 5.1. Généralités**
- 5.2. Contrôle de la taille des pas de temps**

Points essentiels du chapitre III

CHAPITRE IV

CONSTRUCTION DE SOLUTIONS EXACTES EN ELASTOPLASTICITE

1. NOTION DE SOLUTION EXACTE

2. METHODES CLASSIQUES DE RECHERCHE DE SOLUTIONS EXACTES

3. SOLUTIONS PSEUDO-EXACTES OBTENUES PAR EXTRAPOLATION

3.1. Principe de l'extrapolation

3.2. Extrapolation des champs approchés

3.2.1. Cas élastique linéaire

3.2.2. Cas élastoplastique

4. SOLUTIONS ANALYTIQUES EXACTES OBTENUES PAR UNE METHODE INVERSE

4.1. Principe des méthodes inverses

4.2. Solution indéfinie

4.2.1. Création des champs exacts

4.2.1.1. Cas élastique linéaire quasi-statique

4.2.1.2. Cas élastoplastique

4.2.2. Passage des déformations aux contraintes en élastoplasticité

4.2.2.1. Position du problème

4.2.2.2. Projection radiale (ou retour radial)

4.2.2.3. Définition d'un chargement radial

4.2.2.4. Intégration analytique

4.2.3. Calcul des forces de volume en plasticité

4.2.3.1. Cas de la projection radiale

4.2.3.2. Cas de l'intégration analytique

4.3. Continuité et dérivabilité des champs de déplacements

4.3.1. Continuité des contraintes

4.3.2. Cas des fonctions singulières

4.3.3. Evolution au cours du temps

4.4. Extension au cas des structures axisymétriques

4.5. Extension au cas des contraintes planes

4.5.1. Rappel sur l'approche contraintes planes

4.5.2. Passage des déformations aux contraintes en plasticité

4.6. Construction de problèmes aux limites

4.6.1. Géométrie

4.6.2. Chargement

4.6.3. Matériau

4.6.4. Conditions initiales

4.6.5. Résolution du problème aux limites

5. CONSTRUCTION PRATIQUE DES CHAMPS INDEFINIS PAR LA METHODE INVERSE

5.1. Choix des fonctions de déplacement

5.2. Notation standard des champs exacts indéfinis

5.3. Chargements radiaux et non radiaux

5.4. Convergence et précision des algorithmes de construction locale des champs exacts

5.4.1. Projection radiale

5.4.2. Cas des contraintes planes

5.5. Aspect de quelques champs exacts

5.5.1. Solutions connues

5.5.2. Evolution en temps de quelques champs exacts créés par la méthode inverse

5.5.2.1. Chargements pseudo-radiaux

5.5.2.2. Chargements non radiaux

6. CONSTRUCTION PRATIQUE DES PROBLEMES AUX LIMITES

6.1. Notation standard des géométries

6.2. Aspect de quelques champs exacts

6.3. Calcul des quantités exactes

6.3.1. Nombre de points d'intégration

6.3.2. Pas de temps

6.4. Forces nodales équivalentes aux forces de surface et de volume

- 6.4.1. Calcul proprement dit de ces forces nodales
- 6.4.2. Evolution des forces nodales au cours du temps
- 6.4.3. Précision du calcul des forces nodales

Points essentiels du chapitre IV

ANNEXE 1

Table des fonctions de déplacements (FD) et fonctions de charge (FC)

1. Fonctions découplées : termes d'espace

- 1.1. Polynômes (POLD3 à POLD7)
- 1.2. Fonction trigonométrique (TRIGO)
- 1.3. Fonction singulière (FISSURE)
- 1.4. Fonction polynomiale définie sur un rectangle (FREC1)
- 1.5. Seconde fonction polynomiale définie sur un rectangle (FREC2)
- 1.6. Fonction définie sur un cercle (BOSSE)
- 1.7. Fonction définie sur un rectangle et à déformation sphérique nulle (RECSPN1)
- 1.8. Fonction à déformation sphérique nulle définie sur un carré (CARSPN1)
- 1.9. Charge linéaire verticale ou horizontale sur milieu semi-infini (CHARVH)
- 1.10. Fonction singulière (FSING)
- 1.11. Force ponctuelle sur massif semi-infini (BOUSSI)
- 1.12. Plaque infinie percée (PLACTR)

2. Fonctions couplées

- 2.1. Sphère épaisse sous pression (SPHERE)

3. FONCTIONS DE CHARGE

- 3.1. Fonction linéaire par morceaux (LPM)
- 3.2. Fonction sinusoïde (SINUS)
- 3.3. Fonction exponentielle (EXPT)
- 3.4. Fonction spline cubique (SPLINE)

ANNEXE 2

Chargements utilisés dans ce travail

1. FONCTIONS DE DEPLACEMENTS INDEFINIES

- 1.1. à 1.27. Chargements SPH1, CR2, NR1, NR2, NR3, NR4, NR5, NR6, NR7, NR8, NR9, NR10, NR11, NR12, NR13, NR14, NR15, NR16, NR17, NR18, CR19, NR20, NR21, NR22, CR25, CR26 et CR30

2. DOMAINES

- 2.1. à 2.6. Domaines CAR1, REC64-1, REC64-2, REC64-3, FIS1, FIS2

CHAPITRE V

APPLICATIONS DES SOLUTIONS EXACTES ET RECHERCHE DE REGLES DE REMAILLAGE

1. REVUE DES UTILISATIONS POSSIBLES DES SOLUTIONS EXACTES

1.1. Tests et benchmarks

- 1.1.1. Choix des meilleurs paramètres du calcul élastoplastique
- 1.1.2. Test de codes de calcul
- 1.1.3. Test d'algorithmes
- 1.1.4. Test d'éléments
- 1.1.5. Validation d'outils en développement

1.2. Formation des utilisateurs

1.3. Recherche d'estimations de l'erreur

1.4. Recherche de règles de remaillage

2. RESULTATS RELATIFS AUX CALCULS NUMERIQUES

- 2.1. Cadre retenu pour tous les calculs élastoplastiques (sauf exception signalée)**
- 2.2. Aspect de différentes erreurs pour divers cas de charge**
 - 2.2.1. Comparaison entre les erreurs en contraintes, énergie, déviateur des déformations
 - 2.2.1.1. Exemples
 - 2.2.1.2. Remarques
 - 2.2.2. Comparaison entre les erreurs absolues normées et relatives
 - 2.2.2.1. Exemples
 - 2.2.2.2. Remarques
 - 2.2.3. Evolution au cours du temps
 - 2.2.3.1. Exemples
 - 2.2.3.2. Remarques
 - 2.2.4. Erreurs globales et erreurs ponctuelles
 - 2.2.4.1. Exemples
 - 2.2.4.2. Remarques
- 2.3. Précision du calcul des erreurs**
 - 2.3.1. Pas de temps de calcul de l'erreur
 - 2.3.2. Nombre de points de Gauss pour le calcul de l'erreur globale ou élémentaire
 - 2.3.3. Nombre de points de Gauss pour le calcul de l'erreur ponctuelle
- 2.4. Influence de divers paramètres sur les erreurs**

3. ETUDE DETAILLEE DE LA RECHERCHE DE REGLES DE REMAILLAGE

- 3.1. Forme et utilisation des règles de remailage**
 - 3.1.1. Types de règles
 - 3.1.2. Notion de courbe d'optimalité
- 3.2. Procédure générale de test des règles de remailage**
- 3.3. Applications de cette procédure**
 - 3.3.1. Cas de la sphère sous pression interne (SPH1)
 - 3.3.1.1. Nuages de points obtenus pour diverses erreurs
 - 3.3.1.2. Règles de remailage
 - 3.3.2. Cas de charge non radial NR1
 - 3.3.3. Cas de charge non radial NR2
 - 3.3.4. Cas de charge non radial NR3
 - 3.3.5. Cas de charge singulier NR5
 - 3.3.6. Cas de charge singulier NR6
- 3.4. Conclusion sur cette procédure**
 - 3.4.1. Remarques sur les erreurs trouvées
 - 3.4.2. Remarques sur les règles de remailage
 - 3.4.3. Remarques sur l'estimation de l'erreur a priori
- 3.5. Règles de remailage retenues de ces essais**

4. QUELQUES RESULTATS SUR LES PAS DE TEMPS

- 4.1. Chargements pseudo-radiaux**
- 4.2. Chargements non radiaux**
- 4.3. Incréments élastiques**

Points essentiels du chapitre V

CHAPITRE VI

MISE AU POINT DE DESCRIPTIONS UTILISABLES EN APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE

1. ADAPTATION DES EXEMPLES AUX TECHNIQUES D'APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE

- 1.1. Forme des exemples
- 1.2. Forme de la description d'un exemple
- 1.3. Propriétés d'une description
 - 1.3.1. Suffisance
 - 1.3.2. Coût
 - 1.3.3. Sens physique
 - 1.3.4. Stabilité et indépendance de l'observateur
- 1.4. Types de descripteurs

2. DESCRIPTION DE LA GEOMETRIE D'UN OBJET

- 2.1. Types d'objets à décrire
 - 2.1.1. Domaine Ω dans \mathbb{R}^n
 - 2.1.2. Champ ϕ scalaire défini sur Ω
 - 2.1.3. Champ ϕ vectoriel ou tensoriel
 - 2.1.4. Champ ϕ évoluant dans le temps
 - 2.1.4.1. Cas du temps réel
 - 2.1.4.2. Cas du paramètre d'évolution
- 2.2. Caractéristiques d'un objet
- 2.3. Description de la taille d'un objet
- 2.4. Description de la position d'un objet
 - 2.4.1. Choix d'un système d'axes de référence
 - 2.4.2. Paramètres de position
- 2.5. Description de la forme d'un objet
 - 2.5.1. Bibliographie sommaire sur la reconnaissance de formes
 - 2.5.1.1. Techniques de représentation
 - 2.5.1.2. Descripteurs proposés par divers auteurs
 - 2.5.2. Description d'objets par technologie de groupe
 - 2.5.3. Invariants géométriques
 - 2.5.3.1. Principe : moyennes et moments en statistiques
 - 2.5.3.2. Généralisation au cas multidimensionnel
 - 2.5.3.3. Retour aux paramètres de position
 - 2.5.4. Paramètres numériques divers
 - 2.5.5. Cas d'un champ ϕ défini sur un domaine Ω_0
- 2.6. Description de formes élémentaires
 - 2.6.1. Codage d'une surface plane
 - 2.6.2. Codage d'un volume compris entre un domaine plan Ω_0 et une surface gauche $\phi = f(x,y)$ appuyée sur ce domaine plan
 - 2.6.3. Codage d'une surface $\phi = f(x,y)$ s'appuyant sur un domaine plan Ω_0
 - 2.6.4. Remarque sur le calcul du périmètre d'une surface plane
 - 2.6.5. Généralisation au cas tridimensionnel

3. DESCRIPTION D'UN PROBLEME MECANIQUE

- 3.1. Quantités à décrire
- 3.2. Caractéristiques intrinsèques : description proposée
 - 3.2.1. Quelques notions d'analyse dimensionnelle
 - 3.2.2. La géométrie du domaine Ω_0
 - 3.2.3. Le matériau
 - 3.2.4. Le chargement
- 3.3. Description des caractéristiques non intrinsèques
 - 3.3.1. Maillage
 - 3.3.2. Pas de temps

- 3.3.3. Paramètres divers du calcul élastoplastique
- 3.4. Description des conclusions
- 3.4.1. Erreurs
- 3.4.2. Coût des calculs

4. FIABILITE DES DESCRIPTEURS PRESENTES

Points essentiels du chapitre VI

CHAPITRE VII

ESTIMATION DES ERREURS PAR APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE

1. DIFFERENTES TECHNIQUES D'APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE

- 1.1. Généralités
- 1.2. Techniques de l'analyse de données
 - 1.2.1. Régression multiple
 - 1.2.2. Analyse en Composantes Principales
 - 1.2.3. Analyse de Variance
 - 1.2.4. Analyse Discriminante
 - 1.2.5. Problèmes rencontrés
- 1.3. Apprentissage numérique
 - 1.3.1. Régression multiple non linéaire
 - 1.3.2. Réseaux neuronaux
- 1.4. Apprentissage symbolique
 - 1.4.1. Principe
 - 1.4.2. Paramètres spécifiques

2. APPLICATIONS DIVERSES EN CALCUL DES STRUCTURES

- 2.1. Choix optimal des paramètres d'un calcul élastoplastique
- 2.2. Estimation du coût

3. ESTIMATION D'ERREUR EN CALCUL DES STRUCTURES ELASTOPLASTIQUES

- 3.1. Différents types de problèmes à résoudre
 - 3.1.1. Les deux approches retenues
 - 3.1.2. Approche à deux niveaux
 - 3.1.3. Divers exemples de Problèmes d'Apprentissage
- 3.2. Prédiction de l'erreur en fonction du maillage
 - 3.2.1. Généralités
 - 3.2.2. Chargement NR1
 - 3.2.2.1. Classement par AMC
 - 3.2.2.2. Classement par analyse discriminante modifiée
 - 3.2.2.3. Prédiction numérique par analyse discriminante modifiée
 - 3.2.2.4. Apprentissage par régression multiple non linéaire
 - 3.2.3. Chargement NR2
 - 3.2.3.1. Classements par AMC et analyse discriminante modifiée
 - 3.2.3.2. Prédiction numérique par régression multiple
 - 3.2.4. Sphère sous pression SPH1
 - 3.2.4.1. Classements par AMC
 - 3.2.4.2. Prédiction par régression multiple
 - 3.2.5. Conclusion sur ce type d'apprentissage
- 3.3. Prédiction de la courbe d'optimalité en fonction du chargement
 - 3.3.1. Principes retenus pour l'apprentissage
 - 3.3.2. Exemples mis dans la base
 - 3.3.3. Descripteurs utilisés
 - 3.3.4. Quantités prédites
 - 3.3.5. Méthodologie de l'apprentissage

- 3.3.6. Prédiction numérique des erreurs par régression multiple
 - 3.3.6.1. Méthodologie
 - 3.3.6.2. Stabilité des prédictions
 - 3.3.6.3. Une méthode de prédiction plus stable
 - 3.3.6.4. Apprentissage à 33 descripteurs : qualité des prédictions
 - 3.3.6.5. Descripteurs utilisés
 - 3.3.6.6. Prédiction à 8 descripteurs
- 3.3.7. Classement par analyse discriminante modifiée
 - 3.3.7.1. Méthodologie
 - 3.3.7.2. Prédications à 33 descripteurs
 - 3.3.7.3. Descripteurs utilisés
 - 3.3.7.4. Prédiction à 8 descripteurs
- 3.3.8. Classement par apprentissage multicouches
 - 3.3.8.1. Méthodologie
 - 3.3.8.2. Prédications à 33 descripteurs
 - 3.3.8.3. Descripteurs utilisés
 - 3.3.8.4. Prédiction à 8 descripteurs
- 3.3.9. Conclusion sur cet apprentissage

Points essentiels du chapitre VII

CONCLUSION

Nomenclature des notations utilisées

Il peut arriver que quelques symboles identiques correspondent à des grandeurs différentes. Ils sont alors employés exclusivement l'un de l'autre et dans des contextes où la confusion entre les significations est impossible.

1. Notations génériques

Sont regroupées ici les notations valables pour toutes les grandeurs utilisées dans ce travail, sauf exception signalée.

ϕ	(en gras) : notation d'une grandeur ϕ vectorielle, matricielle ou tensorielle. Les caractères non gras sont utilisés pour désigner une composante de la quantité ϕ .
$\dot{\phi}$	dérivée par rapport au temps (vitesse) de la grandeur ϕ
ϕ_{ex}	valeur exacte de ϕ
ϕ_{h}	valeur approchée de ϕ
$D\phi$	pas de la quantité ϕ (à ne pas confondre avec l'incrément $\Delta\phi$)
$\Delta\phi$	$= \phi_{\text{ex}} - \phi_{\text{h}}$: erreur entre ϕ_{ex} et ϕ_{h}
$\Delta\phi$	$= \phi_{i+1} - \phi_i$: incrément de ϕ
ϕ'	déviateur de ϕ (à l'exception des contraintes)
$\ \phi\ $	une norme de ϕ .
$\nabla\phi$	gradient de ϕ
$\nabla^2\phi$	laplacien de ϕ
$\nabla^4\phi$	bilaplacien de ϕ
$\langle \phi \rangle$	partie positive de ϕ , soit : ϕ si $\phi \geq 0$; 0 sinon
$\phi_1 : \phi_2$	produit contracté des tenseurs ϕ_1 et ϕ_2

et pour les codes :

§II.4.3	est un paragraphe (le 4.3 du chapitre II)
§IV.A1	est l'annexe 1 du chapitre IV
(II.4.3)	est une formule (la 3e du chapitre II paragraphe 4)
II-4-3	est une figure ou une table (la 3e du chapitre II paragraphe 4)

2. Notations particulières

Symboles latins :

a_1	énergie élastique d'un champ de déplacements ou de déformations
a_2	énergie élastique d'un champ de contraintes
a_p	moments adimensionnels d'ordre p d'une variable
a_{ij}	invariants adimensionnels des tenseurs de forme
AMC	apprentissage multi-couches
b	caractéristique physique du matériau
B	matrice liant les déformations aux déplacements nodaux
c_E	contribution de l'élément E à l'erreur globale
c_Ω	erreur enveloppe calculée à partir des contributions élémentaires
C	module d'écrouissage
$C(\sigma)$	convexe de plasticité au point σ
C_i	classe i
C	coefficient arbitraire
d	densité d'erreur
d_{ij}	invariants des tenseurs de forme réduits par division
d_E	densité d'erreur sur l'élément E
D_x, D_y	déséquilibres en forces selon x et y
D_m	déséquilibre en moments
D	matrice liant les déformations aux déplacements
DDL	degré de liberté
e	erreur de tout type
e	écart

e_E	erreur sur un élément E
e_Ω	erreur globale sur un domaine Ω
e_p	erreur ponctuelle
E	module de Young
E'	module tangent en monodimensionnel
f	critère de plasticité
f	fonction quelconque
F	vecteur force ou second membre
F_s	force de surface appliquée sur la frontière $\partial_F \Omega$
g	fonction de $\Delta \epsilon$ en plasticité des contraintes planes
G_i	fonction de forme définissant la géométrie d'un élément, attachée au point géométrique i
G	centre de gravité d'un domaine ou d'un volume
h	côté d'un élément
h_p	module d'écroutissage
H^p	espace de Sobolev
imax	nombre maximal d'itérations plastiques
I_{xx}	moment d'inertie selon Ox
J	travail complémentaire des forces internes
J_Γ	saut des contraintes à la traversée des éléments
$ J $	jacobien d'une transformation
J	matrice jacobienne d'une transformation
k, K	constantes arbitraires
K	matrice de rigidité globale
K_e	matrice de rigidité élémentaire
K_c	constante matérielle
K_ψ	coefficient utilisé dans l'intégration analytique
L	tenseur d'élasticité
m_p	moment d'ordre p d'une variable
m_{ij}	invariants bruts des tenseurs de forme
M	tenseur des complaisances élastiques
MRCT	mailleur respectant un champ de tailles d'éléments
N_i	fonction de forme attachée au noeud i d'un élément
N_c	taille critique d'une règle
NDDL	nombre de degrés de liberté d'une structure discrétisée
NEN	nombre de noeuds d'un élément
NUMEL	nombre d'éléments d'un maillage
NUMNP	nombre de noeuds d'un maillage
N	matrice des fonctions de forme d'un élément
n	normale à un domaine
PA	problème d'apprentissage
q_e	vecteur des degrés de liberté attachés à un élément
r	rayon en coordonnées cylindriques ou sphériques
r_r	rayon de référence d'un domaine
r_g	rayon de giration d'un domaine
r_p	rapport périmétrique
r_e	résidu des équations d'équilibre sur un élément E
R	ensemble des réels
R_i	règle i
s	première coordonnée locale réduite dans un élément parent
s	allongement d'un triangle
s_{ij}	invariants des tenseurs de forme réduits par soustraction
S	déviateur des contraintes (exception à la notation standard)
S	surface d'un domaine plan
S_c	seuil cul-de-sac
SEA	système expert par apprentissage
SED	strain energy density = $\sqrt{\sigma \cdot M \cdot \sigma}$
t	deuxième coordonnée locale réduite dans un élément parent

t	temps
t_c	coefficient utilisé dans l'intégration analytique
t_C	temps de calcul numérique
t_E	temps de calcul de l'erreur
$T_{m,n}$	tenseur de forme d'ordre n sur un domaine de \mathbf{R}^m
TOL	tolérance (lors d'un calcul numérique élastoplastique)
u	vecteur déplacement
u_d	déplacement imposé sur $\partial_u \Omega$
U_h	espace des champs de déplacements approchés
v	valeur arbitraire
V_Ω	volume (ou surface en bidimensionnel) d'un domaine Ω de \mathbf{R}^n
V_{total}	volume contenu entre un domaine Ω et une fonction $\phi(\mathbf{x})$ définie sur Ω
w_i	poils du points de Gauss i
W	travail des forces internes
x	coordonnée cartésienne
\mathbf{x}	coordonnées d'un point
\mathbf{X}	vecteur des forces volumiques
X	variable statistique discrète ou descripteur
y	coordonnée cartésienne
y	paramètres d'écroutissage
y_0	$= \sigma_0^2/3$
z	coordonnée cartésienne ou cylindrique

Symboles grecs :

α	coefficient arbitraire
α	inclinaison d'un triangle
α_T	coefficient de dilatation thermique
α_ψ	coefficient utilisé dans l'intégration analytique
β	coefficient arbitraire
β_ψ	coefficient utilisé dans l'intégration analytique
δ	espacement des noeuds d'un triangle
δ_{ij}	symbole de Kronecker
δF	déséquilibre sur F
ϵ	tenseur des déformations
ϵ_I	déformations initiales
ϵ^e	déformations élastiques
ϵ^p	déformations plastiques
ϕ	fonction ou quantité arbitraire
$\phi(t)$	fonction de charge
ϕ_0	quantité de référence
ϕ_{moy}	moyenne sur un domaine d'un champ $\phi(\mathbf{x})$
Φ	fonction d'Airy
λ	coefficient de Lamé
λ_i	coefficient multiplicateur
λ_p	multiplicateur plastique
ν	coefficient de Poisson
μ	coefficient de Lamé
Π_1	fonctionnelle énergie potentielle
Π_2	fonctionnelle énergie complémentaire
ρ	masse volumique
ρ_p	déformation seuil
ψ	fonction arbitraire
ψ	angle entre la normale au convexe de plasticité et un incrément de contrainte
ψ	angle quelconque
σ	tenseur des contraintes
σ_0	limite élastique en traction simple

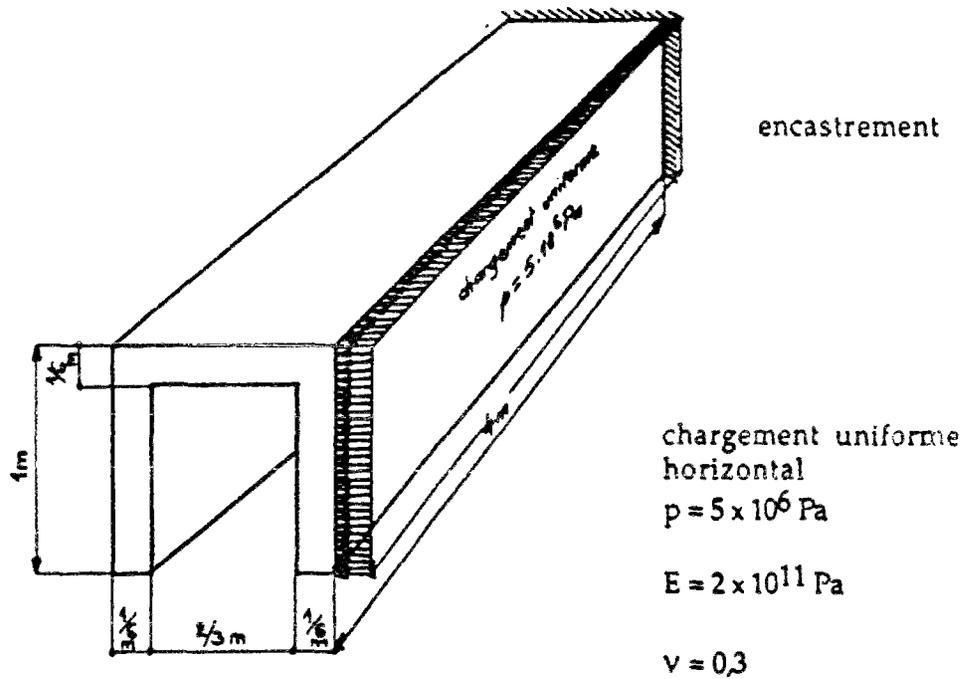
σ_c	contrainte de contact
σ^{el}	contrainte obtenue en supposant un comportement élastique dans toute la structure
σ^{eq}	contrainte équivalente (le plus souvent de Mises = $\sqrt{3/2 \mathbf{S} : \mathbf{S}}$)
σ_l	contrainte limite
τ	contrainte de cisaillement
τ	temps
τ_e	taux d'erreur
τ_r	taux de redondance
θ	angle en coordonnées cylindriques
θ	température
θ	angle quelconque
χ_E	rapport des tailles des éléments d'un maillage fils et du maillage père correspondant
Ω	domaine de \mathbf{R}^n
Ω_h	domaine discrétisé
$\partial\Omega$	frontière de Ω
$\partial_u \Omega$	frontière de Ω où u est fixé
$\partial_F \Omega$	frontière de Ω où \mathbf{F}_g est fixée

CHAPITRE I

INTRODUCTION

1. POSITION DU PROBLEME

Un groupe de travail réunissant les bureaux d'études de plusieurs grandes sociétés a cherché à comparer les solutions numériques du problème mécanique suivant :



On cherchera à obtenir les déplacements maximum à l'extrémité libre et les contraintes à l'encastrement

La solution exacte du problème est inconnue. Il a été demandé de faire l'analyse sous les hypothèses suivantes :

- on ne cherche pas à mettre en cause la validité du schéma mécanique retenu, c'est-à-dire discuter par exemple de la réalité d'un encastrement parfait à la base
- on admet une loi de comportement élastique linéaire, avec des coefficients mécaniques E et ν donnés et invariables. On ne peut donc pas chercher une solution par expérimentation sur un modèle physique. On sait en effet que les modèles mathématiques des lois de comportement des matériaux réels sont toujours approchés et que la détermination de leurs paramètres est affectée d'une dispersion. L'erreur qui en résulte n'est pas prise en compte dans l'analyse du problème précédemment présenté.

Le problème mathématique est ainsi posé sur une structure, un chargement et un comportement parfaitement définis. La liberté de choisir une résolution suivant la théorie des milieux continus tridimensionnels ou diverses théories simplifiées (coques, pièces longues en voile mince, poutres) a été laissée aux bureaux d'études.

Des solutions numériques de ce problème mathématique ont été obtenues par la méthode des éléments finis.

Les résultats de ce benchmark, trouvés avec plusieurs codes de calcul mis en oeuvre par des équipes différentes, sont les suivants :

Type	Logiciel	ARDT	CETIM	CISI	FRAMASOFT	GECI	IRCN	PAFEC	SOCOTEC	Université Compiègne	Université Liège	Université Valenciennes	DELAS
		SYSTUS	CASTOR	ALICE	SYSTUS	MSC NASTRAN	GIFTS	PAFEC	SYSTUS	MEF	SAMCEF	ANSYS	GIFTS 6.2
POUTRE	Maillage Nbr d'éléments	1	1	20		4	20		8	8	10	9	19
	Déplacement en cm	1,42	1,66	13,0		7,31	7,53		13,9	7,23	15,0	2,2	3,64
	Contrainte flexion - MPA					315	319						266
	Contrainte Von Mises - MPA		722				1206		331	899			803
PLAQUE	Maillage (type)	2208	Ahmad	COQ 8	2008		QB 4	Semiloof	2008	DKQ 24	Hybride	STIF 93	QB4
	Nbr d'éléments	20 x 6	4 x 1	18 x 10	6 x 3	16 x 4	20 x 5	24 x 6	4 x 2	32 x 8	5 x 2	8 x 2	19 x 4
	Déplacement en cm	8,66	7,20	8,82	7,06	7,09	8,43	8,29	7,98	6,47	7,58	8,00	7,49
	Contrainte Von Mises - MPA		762	830	921	880	1030	1200	1149	1422	591	1243	896
VOLUME	Maillage (type)	3020	brique 8	cube 20	3020	brique 8	SLD 8	brique 20	3020		brique 8	brique 20	SLD
	Nbr d'éléments	20 x 6 x 1	8 x 2 x 1	16 x 10 x 1	6 x 2 x 1	16 x 9 x 2	21 x 8 x 1	24 x 6 x 1	12 x 6 x 1		24 x 6 x 1	12 x 4 x 1	11 x 5 x 1
	Déplacement en cm	7,44	9,10	7,40	7,25	6,11	7,07	7,30	7,34		7,46	7,40	5,58
	Contrainte Von Mises - MPA		1360	831	1084	950	555	900	808		626	898	366

On constate la très grande dispersion des résultats trouvés. La variation des déplacements aux extrémités est de 1 à 10, et 1 à 4 pour les contraintes maximales. On ne sait pas *a priori* quel est le résultat numérique le plus précis. D'où la question qui vient à l'esprit : une telle dispersion permet-elle d'utiliser les résultats trouvés numériquement pour un dimensionnement ?

Nous venons de mettre en évidence sur cet exemple simple, en élasticité linéaire, le problème de la fiabilité des calculs numériques des structures. Dans le cas général, et notamment en élastoplasticité, on ne peut pas se permettre de lancer un calcul et de prendre ses résultats directement lors du dimensionnement. Il faut avoir des moyens d'estimer les erreurs.

Dans ce travail, nous nous efforcerons d'analyser divers moyens d'évaluer les erreurs entre le problème mathématique et sa solution numérique, dans le cadre du calcul des structures élastoplastiques.

Nous écarterons toute comparaison avec l'expérience, qui fait intervenir une erreur due à la représentation imparfaite de la réalité par le modèle mathématique. Même en cas de bon accord entre la théorie et l'expérience, on ne peut pas exclure le cas où les erreurs commises dans les diverses approximations se soient neutralisées.

Nous avons d'abord, dans le chapitre III, effectué un état de l'art sur l'estimation des erreurs en calcul des structures. La notion d'erreur est définie, puis diverses estimations de l'erreur disponibles dans la littérature sont présentées. En élasticité, on dispose de nombreuses références ; il n'en est pas de même dans le cas de l'élastoplasticité.

Il est nécessaire d'améliorer les discrétisations pour diminuer les erreurs. La notion de maillage optimal est introduite, et, après avoir présenté diverses méthodes de maillage automatique, nous concluons que la méthode la plus efficace est la construction d'un maillage fils entièrement nouveau par un mailleur capable de respecter un champ de tailles d'éléments.

Ce champ de tailles peut être déduit d'une estimation des erreurs sur chaque élément d'un maillage père, ou tiré d'une loi empirique. De telles lois peuvent utiliser les gradients des champs de contraintes calculés sur la structure : il est connu que les maillages doivent être affinés là où les gradients des contraintes sont élevés.

Le seul moyen fiable de calculer une erreur sur un champ quelconque est de mesurer la différence entre la valeur exacte de ce champ et la valeur approchée tirée d'un calcul numérique. Il est donc nécessaire de disposer de structures dont la solution exacte est connue. En élastoplasticité, les quelques solutions analytiques disponibles (sphères ou cylindres épais sous pression, barres en traction...) correspondent à des problèmes à une seule variable spatiale. Ces exemples ne sont pas en

nombre et de variété suffisants pour permettre un test fiable de règles de remaillage ou d'estimation d'erreur.

Nous étudions au chapitre IV la construction par une méthode inverse de problèmes aux limites bien posés, dont la solution exacte est connue. Il est alors possible de choisir les discrétisations spatiale et temporelle d'un problème et de le calculer par un code d'éléments finis quelconque. On obtient une solution approchée associée aux discrétisations et au code retenus. L'erreur entre cette solution approchée et la solution exacte peut être exactement évaluée par différence. Ces solutions peuvent être aussi variées qu'on peut le souhaiter : choix de domaines présentant des singularités géométriques, forts gradients de contraintes ou de déformation, etc.

Nous avons donc créé une base d'exemples regroupant des problèmes mécaniques, leurs discrétisations et les erreurs associées. Il reste à exploiter ces exemples.

2. UNE APPROCHE POSSIBLE : L'APPRENTISSAGE

L'apprentissage utilise ces exemples pour construire des méthodes *générales* d'estimation d'erreur ou d'amélioration de maillages.

Deux objectifs principaux ont été fixés à l'apprentissage :

- *la recherche manuelle de règles de remaillage*

Dans le chapitre V, nous pratiquons un "apprentissage manuel" sur les solutions exactes pour ajuster les paramètres d'une règle simple de remaillage, donnant pour un faible coût le champ de tailles d'un maillage fils quasi-optimal. Nous retenons la génération automatique d'un maillage fils par un mailleur automatique capable de respecter un champ de tailles d'éléments. Nous nous sommes limités au cas bidimensionnel.

Les tailles des éléments sont déduites des gradients des contraintes. Nous avons choisi de calculer ces contraintes sur la structure supposée élastique. Le coût de ces calculs est ainsi très faible devant une analyse élastoplastique.

- *l'estimation des erreurs a priori*

Nous retenons cette fois une approche par apprentissage automatique, qui se fixe pour but d'engendrer des connaissances à partir d'une base d'exemples. Cette base regroupe des exemples dont les données et les conclusions sont connues.

La base d'exemples est séparée en deux bases disjointes : une base d'apprentissage, sur laquelle sont générées les règles, et une base de test, sur laquelle les règles sont validées. Le but de l'apprentissage

automatique est de trouver des relations entre les données et les conclusions, suffisamment générales pour être valables non seulement sur les exemples de la base d'apprentissage, mais aussi sur la base de test ou pour des cas inconnus. Ces relations sont regroupées dans une base de règles, de nature variable suivant la technique d'apprentissage utilisée.

Il reste à appliquer cette approche à la prédiction des erreurs commises lors des analyses numériques élastoplastiques. On cherche donc des relations entre les caractéristiques d'un problème mécanique (géométrie, chargement, matériau, discrétisations) et les erreurs exactement évaluées par différence. L'application de ces relations aux caractéristiques d'un cas inconnu permet de prédire l'erreur *a priori*, avant d'avoir exécuté un calcul élastoplastique.

Dans le chapitre VI, nous présentons d'abord une technique de description permettant de représenter les caractéristiques de chaque exemple de la base d'une façon exploitable par les algorithmes d'apprentissage automatique. Cette description s'inspire en partie des méthodes de la reconnaissance de formes.

Dans le chapitre VII, nous utilisons ces techniques en vue de résoudre deux problèmes simples d'estimation d'erreur *a priori* :

i) la prédiction de l'erreur obtenue avec un maillage quelconque, pour un seul problème mécanique. Les données des exemples sont la description des maillages, et les conclusions, l'erreur associée à chacun d'eux.

ii) la prédiction du nombre de DDL du meilleur maillage respectant une erreur donnée, pour un problème mécanique quelconque. Nous avons présenté précédemment une règle simple capable de générer un maillage correct ayant un nombre quelconque de DDL ou d'éléments. L'apprentissage n'a donc à prédire que le nombre de DDL nécessaire pour atteindre une erreur fixée *a priori*.

CHAPITRE II

RAPPELS SUR LE CALCUL

DES STRUCTURES ELASTOPLASTIQUES

Nous présentons dans ce chapitre des rappels des notions de base utilisées dans l'ensemble de ce travail. Nous donnons aussi le principe des calculs numériques en élasticité et élastoplasticité. Les différentes notions exposées sont classiques et n'ont fait l'objet d'aucune recherche particulière. La présentation en est volontairement raccourcie ; l'objet étant de présenter l'essentiel sans s'attarder sur le détail des justifications, qui peuvent être trouvées dans la littérature.

1. RAPPELS DE MECANIQUE

Nous nous référons dans ce travail aux milieux continus solides, avec les hypothèses qui y sont rattachées. Les matériaux constitutifs des solides vérifient certaines lois de comportement, que nous supposons parfaitement définies. Les effets dynamiques sont aussi pris en compte.

Nous travaillons dans un repère orthonormé fixe et en petites transformations.

1.1. Le problème mécanique

Le problème fondamental consiste à trouver la réponse d'une structure soumise à des sollicitations données.

1.1.1. Données du problème

- la géométrie de la structure (un domaine Ω dans \mathbf{R}^2 ou \mathbf{R}^3 , supposé fixe au cours du temps). Ce domaine peut être infini. Il peut être limité dans l'espace par une frontière $\partial\Omega$ séparée en deux parties complémentaires (supposées fixes au cours du temps) $\partial_u\Omega$, où les déplacements sont fixés, et $\partial_F\Omega$, où les efforts sont imposés.
- le(s) matériau(x) constitutif(s) de la structure, leur loi de comportement est supposée connue.
- le chargement de la structure, qui peut comprendre par exemple :
 - les efforts appliqués sur le domaine Ω et ses frontières, décomposables en un champ de forces de volume \mathbf{X} appliquées en tout point intérieur de Ω , et un champ de forces de surface \mathbf{F}_s appliquées en tout point de la frontière $\partial_F\Omega$.
 - les déplacements imposés \mathbf{u}_d sur la frontière $\partial_u\Omega$
 - les champs de déformations "initiales" ϵ_I (que, le plus souvent, nous supposerons nulles dans la suite pour simplifier)

1.1.2. Solution du problème

La réponse de la structure, solution du problème, est constituée par la connaissance en tout point du domaine (tridimensionnel) Ω :

- du vecteur déplacement \mathbf{u} (3 composantes)
- du tenseur déformation ϵ (6 composantes)
- du tenseur contrainte σ (6 composantes).

1.1.3. Formulation locale du problème mécanique

On dispose, dans le cas tridimensionnel :

- de 6 relations déplacement / déformation

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{II.1.1})$$

Ces déformations vérifient les "équations de compatibilité" avec $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d$ sur $\partial_u \Omega$.

- de 3 équations du mouvement (en dynamique) ou d'équilibre (en quasi-statique)

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{X} = 0 \text{ (statique) ou } \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \text{ (dynamique)} \quad (\text{II.1.2 a et b})$$

et, pour tout point situé sur $\partial_F \Omega$:

$$\mathbf{F}_s = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (\text{II.1.3})$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure à $\partial_F \Omega$.

Il manque 6 relations pour relier les contraintes aux déformations. Ces relations sont les *relations de comportement* et sont caractéristiques des matériaux constitutifs de la structure.

L'ensemble de ces 15 relations valables en tout point de Ω est la *formulation locale* du problème mécanique.

Il reste maintenant à exposer les lois de comportement. Nous ne retiendrons ici que la loi élastique linéaire et la loi élastoplastique des matériaux standards.

1.2. Lois de comportement

1.2.1. Comportement élastique linéaire

Il y a une relation biunivoque linéaire entre la déformation et la contrainte, la loi de Hooke.

Cette loi s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_I) \quad (\text{II.1.4 a})$$

$$\text{ou } \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\epsilon}_I \quad (\text{II.1.4 b})$$

où $\boldsymbol{\epsilon}_I$ est une déformation initiale. En l'absence d'une telle déformation, on obtient

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{II.1.5 a})$$

$$\text{ou } \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{II.1.5 b})$$

Pour un matériau isotrope, les termes des tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{M} ne dépendent que de deux coefficients, que l'on peut choisir parmi le couple module de Young E et coefficient de Poisson ν , ou les coefficients de Lamé λ et μ .

1.2.2. Comportement élastoplastique

Pour de nombreux matériaux, le comportement d'une barre en traction simple dans le premier cycle de charge fait intervenir une contrainte σ_0 en-deçà de laquelle le comportement est élastique linéaire, et élastoplastique au-delà. Au début d'une décharge, le comportement redevient élastique ; à la fin de celle-ci, il reste une déformation permanente : la déformation plastique ϵ^P . Si

on recharge après avoir déchargé, le comportement est élastique linéaire jusqu'à une contrainte limite σ_1 qui n'est pas forcément égale à σ_0 .

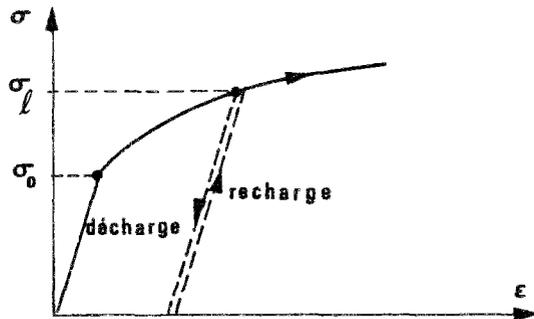


Fig. II-1-1. Comportement élastoplastique en monoaxial

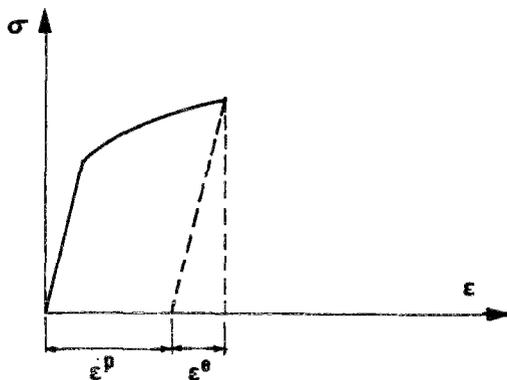


Fig. II-1-2. Déformations totale, élastique et plastique

La variation de σ_1 lors du chargement définit l'écroutissement du matériau. Lorsque $\sigma_1 > \sigma_0$, l'écroutissement est positif ; négatif si $\sigma_1 < \sigma_0$; nul (plasticité parfaite) si $\sigma_1 = \sigma_0$. Si la courbe est linéaire au-delà de la contrainte σ_0 , l'écroutissement est dit linéaire. La pente de la courbe dans la zone plastique permet de définir le module tangent E' .

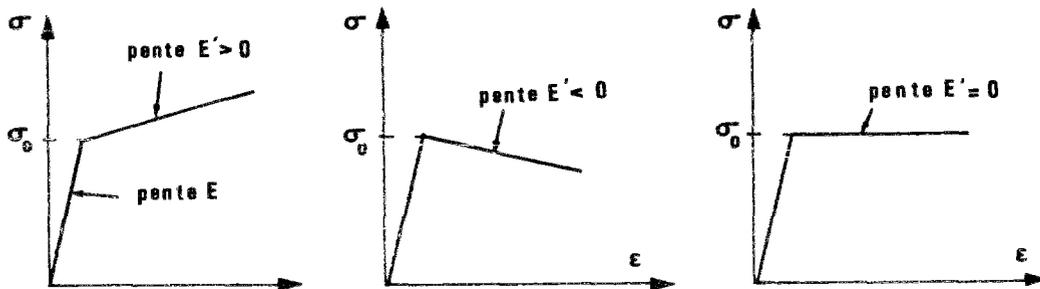


Fig. II-1-3. Ecroutissements linéaires positifs, négatifs, nul (parfaite plasticité)

On ne s'intéresse maintenant qu'à la seule modélisation mathématique du phénomène physique de la plasticité.

La modélisation classiquement retenue en petites déformations sépare les déformations ϵ en une partie élastique ϵ^e et une partie plastique ϵ^p (cf. Fig. II-1-2). En l'absence de déformations initiales, on peut écrire la loi de comportement sous la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^P) \quad (\text{II.1.5 c})$$

$$\text{ou } \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\epsilon}^P \quad (\text{II.1.5 d})$$

Il reste à voir :

- quand apparaissent ces déformations plastiques ;
- quelle est leur valeur lorsqu'elle n'est pas nulle.

1.2.2.1. Apparition des déformations plastiques : frontière limité d'élasticité

Il existe une fonction f , faisant intervenir des paramètres internes notés y . Ces paramètres caractérisent l'écroutissement du matériau. La fonction f est telle qu'on vérifie en tout point

- soit $f(\boldsymbol{\sigma}, y) < 0$, le comportement du point considéré est élastique ;
- soit $f(\boldsymbol{\sigma}, y) = 0$ et le comportement du point est plastique. Il peut apparaître une vitesse de déformation plastique.

La fonction f est appelée critère de plasticité. On dit que le critère est vérifié en un point lorsque

$$f(\boldsymbol{\sigma}, y) \leq 0. \quad (\text{II.1.6})$$

On peut citer les critères de plasticité les plus couramment utilisés pour les métaux (en parfaite plasticité) :

- critère de Tresca : la contrainte tangente maximale τ_{\max} est limitée

$$|\tau_{\max}| - \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \leq 0 \quad (\text{II.1.7})$$

- critère de Von Mises : la fonction $f(\boldsymbol{\sigma}, y)$ (qui peut être notée $f(\boldsymbol{\sigma})$ pour simplifier) est quadratique et de la forme

$$f(\boldsymbol{\sigma}, y) = f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} - y_0 \leq 0 \quad (\text{II.1.8 a})$$

sachant que $y_0 = \sigma_0^2/3$ et que \mathbf{S} est le déviateur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$.

On utilise diverses expressions équivalentes de ce critère, comme par exemple

$$\sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{II.1.8 b})$$

1.2.2.2. Lois d'écoulement plastique

On sait maintenant quand peuvent apparaître les déformations plastiques et on cherche à en déterminer la valeur.

La loi de comportement élastoplastique est incrémentale et fait intervenir toute l'histoire du chargement. Cette loi est définie lorsqu'on peut trouver une relation entre $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ et $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$. Cette relation doit être linéaire pour que le temps physique n'intervienne pas :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \mathbf{M}^P \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

où \mathbf{M}^P dépend *a priori* de $\boldsymbol{\sigma}$ et y .

On se limite au cas des matériaux standards. Ces matériaux vérifient par définition le principe du

travail maximal de Hill. Pour tout tenseur virtuel σ^* vérifiant le critère (II.1.6), ce principe revient à dire

$$(\sigma - \sigma^*) : \dot{\epsilon}^p \geq 0 \quad (\text{II.1.9})$$

Cette inégalité implique

- que le domaine élastique, défini dans l'espace des contraintes par $f(\sigma, y) \leq 0$, est un convexe
- que la vitesse de déformation plastique $\dot{\epsilon}^p$, si elle existe, est dirigée selon la normale extérieure (ou le cône des normales extérieures) à ce convexe au point considéré (loi de normalité). On écrit

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (\text{II.1.10})$$

où λ_p est un coefficient pour l'instant indéterminé.

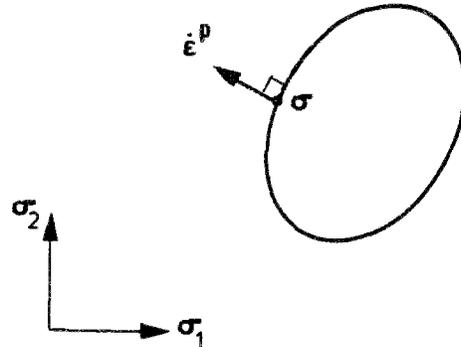


Fig. II-1-4. Vitesse de déformation plastique dans l'espace des contraintes

Tous les comportements possibles d'un point (élastique ou plastique, en charge ou en décharge) peuvent être résumés par l'équation différentielle multivoque (Son, 1973)

$$L \dot{\epsilon}^p \in \partial \Psi_{C_0}(\sigma) \quad (\text{II.1.11})$$

où C_0 est le convexe de plasticité attaché au point σ .

L'évolution des paramètres d'écrouissage éventuels est donnée par

$$\dot{y} = \lambda_p \cdot b$$

où b est une donnée physique du matériau.

Lors de la charge plastique, le critère reste vérifié ; on a donc $\dot{f}(\sigma, y) = 0$

soit, si f est dérivable : $\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} = 0$

On définit le module d'écrouissage h_p par

$$h_p = - b \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{II.1.12})$$

avec $h_p = 0$ en plasticité parfaite, $h_p > 0$ si l'écrouissage est positif, $h_p < 0$ si l'écrouissage est négatif.

Le coefficient λ_p est indéterminé en parfaite plasticité. Lorsque l'écrouissage est positif ($h_p > 0$) et que $f(\sigma, y) = 0$, λ_p se calcule par

$$\lambda_p = \frac{1}{h_p} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \right\rangle \quad (\text{II.1.13})$$

et on en déduit $\dot{\epsilon}^p$ par (II.1.10).

Quel que soit h_p , $\dot{\epsilon}^P$ s'exprime en fonction de $\dot{\epsilon}$ par

$$\dot{\epsilon}^P = \frac{\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathbf{L} \cdot \dot{\epsilon} \rangle}{h_p + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathbf{L} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (\text{II.1.14})$$

1.2.2.3. Différents types d'écrouissage

Il existe divers types d'écrouissage qui se différencient par l'évolution au cours du temps du convexe $C_0(\sigma)$ dans l'espace des contraintes. On cite les écrouissages isotrope, cinématique ou combiné.

L'écrouissage isotrope correspond à un convexe de "taille" variable et de centre fixe dans l'espace des contraintes. Cette taille est fixe en parfaite plasticité ($h_p = 0$), croissante si l'écrouissage est positif, décroissante si l'écrouissage est négatif.

L'écrouissage cinématique correspond à un convexe de plasticité dont la taille est constante mais dont le centre du convexe est mobile.

L'écrouissage combiné est une combinaison de ces deux effets. Il fait intervenir deux constantes.

L'écrouissage linéaire implique que la courbe contrainte/déformation (Fig. II-1-3) est constituée d'une seule droite au-delà de la contrainte limite σ_0 . Pour les trois types d'écrouissage linéaire, le critère de Mises peut s'écrire

- en cas d'écrouissage isotrope :

$$f(\sigma, y) = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} - \frac{1}{2} C \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^P : \dot{\epsilon}^P} dt} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \leq 0 \quad (\text{II.1.15})$$

où C est le module d'écrouissage défini par $C = \frac{2EE'}{3(E - E')}$ et utilisé en analyse triaxiale des contraintes.

- en cas d'écrouissage cinématique :

$$f(\sigma, y) = \sqrt{\frac{1}{2} (\mathbf{S} - C \epsilon^P) : (\mathbf{S} - C \epsilon^P)} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \leq 0 \quad (\text{II.1.16})$$

- en cas d'écrouissage combiné :

$$f(\sigma, y) = \sqrt{\frac{1}{2} (\mathbf{S} - C_1 \epsilon^P) : (\mathbf{S} - C_1 \epsilon^P)} - \frac{1}{2} C_2 \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^P : \dot{\epsilon}^P} dt - \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \leq 0 \quad (\text{II.1.17})$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes caractéristiques du matériau.

1.3. Formulation variationnelle du problème mécanique

1.3.1. Principe des travaux virtuels (PTV)

1.3.1.1. Définitions

Nous supposons l'absence de surfaces de discontinuité dans les champs de contraintes ou de déplacements.

i) Un champ de contraintes σ défini sur un domaine Ω est *statiquement admissible* (S.A.) avec \mathbf{X} dans Ω et \mathbf{F}_s sur $\partial_F \Omega$ si :

- ce champ est continu et dérivable presque partout dans Ω
- le vecteur contrainte est continu dans Ω
- l'équation d'équilibre interne (II.1.2) avec les forces de masse \mathbf{X} est vérifiée en tout point de Ω
- l'équation d'équilibre (II.1.3) avec la force de surface \mathbf{F}_s est vérifiée en tout point de $\partial_F \Omega$.

ii) Un champ de déplacements \mathbf{u} (ou de déformations ϵ dérivant d'un champ de déplacements \mathbf{u}) est *cinématiquement admissible* (C.A.) avec \mathbf{u}_d sur $\partial_u \Omega$ si

- le champ de déplacements est continu et dérivable presque partout dans Ω
- il vérifie $\mathbf{u} = \mathbf{u}_d$ sur $\partial_u \Omega$

1.3.1.2. Expression générale du PTV en quasi-statique

Soient \mathbf{u}_1 un champ de déplacements C.A. avec \mathbf{u}_d sur $\partial_u \Omega$, ϵ_1 le champ de déformations associé ; soit σ_2 un champ de contraintes S.A. avec \mathbf{X} et \mathbf{F}_s . Le PTV général s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{X} \cdot \mathbf{u}_1 \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma_2 \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1 \, dS \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{X} \cdot \mathbf{u}_1 \, d\Omega + \int_{\partial_u \Omega} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{u}_d \, dS + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{u}_1 \, dS = \int_{\Omega} \sigma_2 \cdot \epsilon_1 \, d\Omega \end{aligned} \quad (\text{II.1.18})$$

où \mathbf{F}_2 est force de surface (réaction d'appui) due à σ_2 sur $\partial_u \Omega$ et \mathbf{n} la normale à $\partial\Omega$.

Cette expression est valable moyennant certaines hypothèses de régularité sur les champs retenus, et notamment l'absence de surfaces de discontinuité.

Bien évidemment, on peut choisir pour \mathbf{u}_1 et/ou σ_2 les champs réels de déplacements ou de contraintes.

1.3.2. Définition de quantités énergétiques

Ces diverses quantités seront utilisées dans la suite, notamment pour présenter des estimations d'erreur.

Le travail des forces internes est défini par

$$W(t) = \int_{\Omega} \left[\int_0^t \sigma \cdot \dot{\epsilon} \, d\tau \right] d\Omega \quad (\text{II.1.19})$$

et le travail complémentaire de ces mêmes efforts par

$$J(t) = \int_{\Omega} \left[\int_0^t \epsilon \cdot \dot{\sigma} \, d\tau \right] d\Omega \quad (\text{II.1.20})$$

ces définitions étant indépendantes de la loi de comportement.

Les tenseurs \mathbf{L} et \mathbf{M} étant symétriques définis positifs, le produit scalaire de deux champs de déplacements \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 définis sur Ω peut en être déduit par

$$a_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = a_1(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_{\Omega} \epsilon_1 \cdot \mathbf{L} \cdot \epsilon_2 \, d\Omega \quad (\text{II.1.21 a})$$

$$\text{et la norme d'un champ de déplacements par } \|\mathbf{u}\| = \sqrt{a_1(\mathbf{u}, \mathbf{u})}. \quad (\text{II.1.21 b})$$

De même, le produit scalaire de deux champs de contraintes σ_1 et σ_2 peut être défini par

$$a_2(\sigma_1, \sigma_2) = \int_{\Omega} \sigma_1 \cdot \mathbf{M} \cdot \sigma_2 \, d\Omega \quad (\text{II.1.22 a})$$

$$\text{et la norme d'un champ de contraintes par } \|\sigma\| = \sqrt{a_2(\sigma, \sigma)}. \quad (\text{II.1.22 b})$$

1.3.3. Formulation variationnelle en élasticité

En élasticité linéaire et en l'absence de contraintes ou déformations initiales, les travaux interne et complémentaire ont la valeur

$$W(t) = J(t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma(t) \cdot \epsilon(t) \, d\Omega = \frac{1}{2} a_1(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (\text{II.1.23})$$

On définit l'énergie potentielle par

$$\Pi_1(\mathbf{u}_1) = \frac{1}{2} a_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_s \cdot \mathbf{u}_1 \, d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{X} \cdot \mathbf{u}_1 \, d\Omega \quad (\text{II.1.24})$$

et l'énergie complémentaire par

$$\Pi_2(\sigma_2) = \frac{1}{2} a_2(\sigma_2, \sigma_2) - \int_{\partial_u \Omega} \mathbf{n} \cdot \sigma_2 \cdot \mathbf{u}_d \, d\Gamma \quad (\text{II.1.25})$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure, \mathbf{u}_1 un champ de déplacements C.A. avec \mathbf{u}_d sur $\partial_u \Omega$ et σ un champ de contraintes S.A. avec \mathbf{X} dans Ω et \mathbf{F}_s sur $\partial_F \Omega$.

On vérifie l'inégalité

$$\Pi_1(\mathbf{u}_1) \geq \Pi_1(\mathbf{u}_{\text{ex}}) = -\Pi_2(\sigma_{\text{ex}}) \geq -\Pi_2(\sigma_2) \quad (\text{II.1.26})$$

On démontre que le champ réel \mathbf{u}_{ex} minimise la fonctionnelle $\Pi_1(\mathbf{u}_1)$ dans l'espace des champs \mathbf{u}_1 C.A. avec \mathbf{u}_d sur $\partial_u \Omega$.

On montre de même que, dans l'espace des champs de contraintes S.A. avec \mathbf{X} dans Ω et \mathbf{F}_g sur $\partial_F \Omega$, le champ réel σ_{ex} minimise la fonctionnelle Π_2 .

1.3.4. Formulation variationnelle du problème élastoplastique

Les principes de minima applicables en élastoplasticité classique portent sur le problème en vitesses et non sur les valeurs totales des contraintes et des déformations. Il existe une formulation en vitesses de déplacements $\dot{\mathbf{u}}$ et en vitesses de contraintes $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$. La présentation de ces méthodes peut être trouvée par exemple dans (Mandel, 1966) ou (Zarka, 1978).

1.4. Problèmes bidimensionnels

Les mécaniciens se ramènent très couramment à des modèles bidimensionnels de milieux continus, plus simples et moins coûteux à étudier.

1.4.1. Problèmes en déformations planes

Le tenseur déformation a comme composantes non nulles ϵ_{xx} , ϵ_{yy} et ϵ_{xy} , et le tenseur contrainte σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} et σ_{xy} . Le modèle est rigoureux pour des structures pour lesquelles la déformation selon z est identiquement nulle, ce qui implique que la géométrie, le chargement et les conditions aux limites soient indépendantes de z et que les déplacements selon cet axe soient bloqués. On peut écrire la loi de comportement élastique (II.1.5 a) sous la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}_{\text{dp}} \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{II.1.27 a})$$

où $\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy})$, $\boldsymbol{\epsilon}^T = (\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ 0 \ \epsilon_{xy})$

$$\text{et } \mathbf{L}_{\text{dp}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.27 b})$$

1.4.2. Problèmes axisymétriques

La géométrie, le chargement et les conditions aux limites sont supposés indépendants de l'angle de rotation autour d'un axe z . Dans un repère cylindrique (O, r, θ, z) , le tenseur des déformations se réduit à $\boldsymbol{\epsilon}^T = (\epsilon_{rr} \ \epsilon_{\theta\theta} \ \epsilon_{zz} \ \epsilon_{rz})$ et le tenseur des contraintes à $\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_{rr} \ \sigma_{\theta\theta} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{rz})$.

Les relations déplacement-déformation (II.1.1) deviennent dans le repère cylindrique

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}; \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad 2 \epsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \quad (\text{II.1.28 a à d})$$

$$\epsilon_{r\theta} = \epsilon_{\theta z} = 0$$

et les équations du mouvement (II.1.2 b)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + X_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (\text{II.1.29 a})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + X_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (\text{II.1.29 b})$$

On peut écrire la loi de comportement (II.1.5 a) sous la forme $\sigma = L_{axi} \epsilon$, avec les contraintes et déformations réduites et où $L_{axi} = L_{dp}$ est donné par (II.1.27 b).

1.4.3. Problèmes en contraintes planes

Un repère cartésien (O, x, y, z) est utilisé, l'axe z est l'axe orthogonal au domaine plan. Les efforts imposés à la structure n'ont aucune composante selon l'axe z et sont indépendants de cette variable. L'hypothèse de base est que les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sont σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} et sont indépendantes de z ; il n'y a pas de contrainte selon z et les déplacements selon cet axe sont libres.

Les 6 composantes du tenseur déformation complet peuvent être non nulles mais on ne s'intéresse pratiquement qu'à ϵ_{xx} , ϵ_{yy} et ϵ_{xy} . Seuls les déplacements u_x et u_y sont pris en compte ; u_z est généralement non nul. Les déformations ϵ_{xx} , ϵ_{yy} et ϵ_{xy} sont déduites de u_x et u_y par (II.1.1).

En général, les problèmes en contraintes planes n'ont pas de réalité physique. Le déplacement u_z selon l'axe Oz n'est pas défini. Le modèle des contraintes planes constitue cependant une bonne approximation pour le calcul de solides plans dont la dimension selon z est faible par rapport aux autres dimensions selon x et y.

La loi de Hooke (II.1.5 a) peut s'écrire en éliminant ϵ_{zz} et σ_{zz} :

$$(\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy})^T = L_{cp} (\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{xy})^T$$

avec
$$L_{cp} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.30})$$

et la déformation ϵ_{zz} vaut

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \quad (\text{II.1.31})$$

2. RESOLUTION ANALYTIQUE DES PROBLEMES MECANIQUES

On ne s'occupe que des problèmes mécaniques respectant les hypothèses suivantes :

- champs de déformations d'origine purement mécanique
- absence de déformations initiales
- sollicitations quasi-statiques.

Les méthodes de résolution partent de la formulation locale.

2.1. Structures élastiques

Plusieurs voies peuvent être suivies pour résoudre (exactement) les 15 équations (II.1.1), (II.1.2) et (II.1.4). On peut citer les méthodes suivantes, où un seul des champs u , ϵ ou σ est choisi

comme inconnue principale, les équations locales étant réécrites en fonction de ce seul champ :

- Déplacements comme inconnues principales

La résolution permet de trouver ϵ et σ à partir de \mathbf{u} .

- Déformations comme inconnues principales

La connaissance de ϵ permet de trouver σ mais généralement pas \mathbf{u} .

- Contraintes comme inconnues principales

Inversement, ϵ est déduit de σ , mais \mathbf{u} reste généralement indéterminé.

La formulation de ces méthodes est classique. Les quelques solutions connues correspondent à des chargements et des géométries simples, mais cependant variés : domaines illimités ou finis, charges ponctuelles ou réparties, etc.

2.2. Structures élastoplastiques

Les problèmes élastoplastiques ne pouvant (sauf exceptions, comme le cas des chargements radiaux, définis au §IV.4.2.2.3) qu'être traités de façon incrémentale, il faut poser le problème en vitesses et le résoudre à chaque temps de l'intervalle d'étude.

En un point, l'équation (II.1.11) définit tous les comportements possibles : charge plastique, décharge ou comportement élastique.

La résolution analytique de ce problème n'est en général possible que pour quelques cas extrêmement simples, bien moins nombreux qu'en élasticité : sphère ou cylindre épais sous pression, tube en traction-torsion...

3. PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

3.1. Approximation d'une fonction par éléments finis

On ne s'intéresse à ce niveau qu'au principe de la représentation d'une fonction par une approximation de type éléments finis, sans faire intervenir la nature de la fonction ou le problème dont elle peut être la solution.

On suppose donc connaître une fonction scalaire ϕ_{ex} définie sur un domaine Ω de \mathbb{R}^n . Pour une raison quelconque, on souhaite en avoir une approximation ϕ_h sous une forme simple. Il serait possible d'utiliser des fonctions simples définies sur tout Ω , comme (en bidimensionnel) des polynômes

$$\phi_h(x, y) = \sum \alpha_{ij} x^i y^j$$

ou des fonctions trigonométriques

$$\phi_h(x, y) = \sum \alpha_{ij} \sin k_1 i \pi x \sin k_2 j \pi y$$

Ces fonctions peuvent poser des problèmes si $\partial\Omega$ est de forme complexe. Elles peuvent nécessiter un nombre élevé de termes pour donner une précision convenable, et ont souvent des dérivées imprécises. Les coefficients α_{ij} n'ont pas de signification physique directement liée à la fonction approchée.

Une autre solution est de découper le domaine Ω en sous-domaines joiatifs de forme simple, les éléments. L'approximation de ϕ est faite dans chaque élément par des fonctions très simples (polynômes le plus souvent) qui sont nulles hors de l'élément, et qui dépendent des valeurs de la fonction approchée en certains points de l'élément. La précision de l'approximation dépend du degré des fonctions dans chaque élément mais aussi de leur nombre.

Nous allons rapidement expliciter chacune des étapes de la construction d'une telle approximation.

3.1.1. Géométrie de l'élément fini

Chaque élément E a une frontière ∂E constituée d'un nombre entier de faces (en tridimensionnel) ou d'arêtes (en bidimensionnel) planes (droites) ou courbes. La forme des éléments ne peut être quelconque. Les éléments doivent être simplement connexes ; leurs faces doivent être représentables par des courbes simples (segments de droite, arcs de parabole pour des faces courbes par exemple). Chaque face est définie par des *points géométriques* en nombre suffisant pour représenter sa géométrie (3 points pour un arc de parabole par exemple).



Fig. II-3-1. Triangles à côtés droits (2 points/face) et paraboliques (3 points/face)

3.1.2. Découpage en éléments

La forme des éléments est choisie et un découpage de Ω est effectué. Le domaine Ω_h est la réunion de ces éléments et n'est pas forcément confondu avec Ω . Il peut exister des manques, notamment lorsque la frontière de Ω est courbe ; ces manques sont dénommés lacunes géométriques. Ces lacunes doivent rester d'importance limitée. Elles peuvent être réduites par utilisation d'éléments à contour courbe ou en diminuant la taille des éléments.

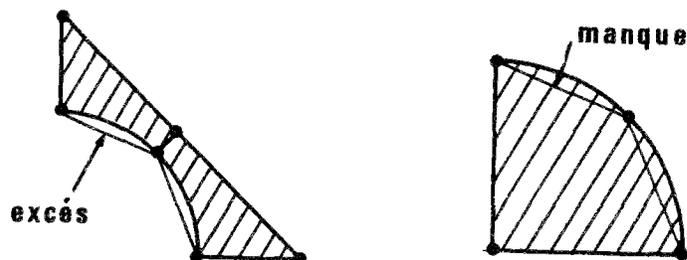


Fig. II-3-2. Les deux types de lacunes géométriques

Le découpage de Ω_h en éléments doit vérifier certaines propriétés :

- l'union de tous les éléments doit redonner Ω , aux lacunes géométriques près ;
- l'intersection de deux éléments distincts ne peut qu'être vide ou limitée à un point, une arête ou une face *entières* ;
- les points sommets des éléments adjacents doivent correspondre, il n'est pas permis de lier des éléments selon la figure suivante (à moins d'imposer des contraintes sur les déplacements des points intermédiaires, ce qui se fait dans quelques cas spéciaux).

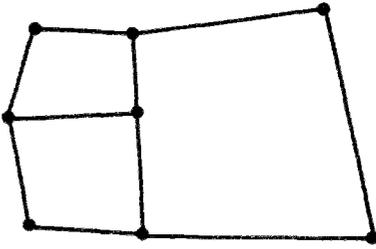


Fig. II-3-3. Exemples de raccordement d'éléments interdit (sauf précautions spéciales)

- toute face d'élément non adjacente à une autre face d'élément appartient à $\partial\Omega_h$;
- l'orientation des points qui décrivent les éléments doit être faite dans le sens direct (autrement le volume de l'élément serait négatif).

3.1.3. Les fonctions de forme

L'interpolation de ϕ_h dans un élément est obtenue par des fonctions de forme N_i attachées à chacun des noeuds i de l'élément, et des valeurs nodales q_e de la fonction approchée ϕ_h . Il ne faut pas confondre ces noeuds avec les points géométriques décrits au §II.3.1.1. Les fonctions de forme sont le plus souvent polynomiales ; leur degré et la dimension de l'élément (2 ou 3 dans notre cas) conditionnent le nombre de valeurs nodales nécessaires. On retient fréquemment pour celles-ci les valeurs de la fonction approchée aux noeuds mais il est aussi possible d'y ajouter ses dérivées.

Le champ approché $\phi_h(x, y)$ s'écrit en fonction des valeurs nodales q_e par

$$\phi_h(x, y) = \sum N_i(x, y) q_{i_e} = \mathbf{N} \mathbf{q}_e \quad (\text{II.3.1})$$

Dans le cas où ϕ est un champ vectoriel ou tensoriel, chacune de ses composantes est approchée par (II.3.1) et q_e est le vecteur des valeurs nodales de toutes les composantes du champ ϕ .

La fonction de forme N_j attachée au noeud j (dans les cas des éléments de type Lagrange) a la valeur 1 à ce noeud, 0 aux autres noeuds. Elle est définie en tout point de l'élément mais est nulle partout ailleurs.

La somme des fonctions de forme attachées à chaque noeud vérifie en tout point de l'élément

$$\sum N_i(x, y) = 1$$

Les propriétés de continuité et de dérivabilité de la fonction approchée ϕ_h sont directement déduites des propriétés correspondantes des fonctions de forme, dans l'élément mais aussi à la traversée des frontières entre les éléments.

Les éléments bidimensionnels les plus simples sont le triangle à 3 noeuds (dit triangle P1), où le champ approché est linéaire, et le parallélogramme rectangle à 4 noeuds. La fonction de forme du triangle P1 a l'aspect suivant

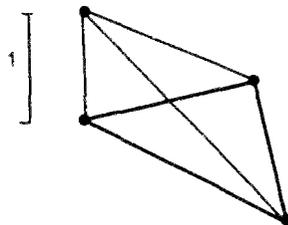


Fig. II-3-4. Aspect d'une fonction de forme d'un triangle à 3 noeuds

On utilise parfois la notion de support des fonctions de forme liées à un noeud. Ce support est un sous-domaine de Ω_h composé par l'union de tous les éléments reliés au noeud considéré, dans lesquels la fonction de forme liée au noeud étudié n'est pas nulle.

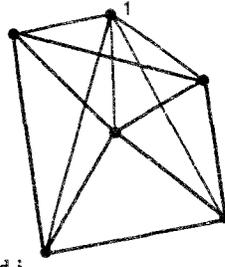


Fig. II-3-5. Support des fonctions de forme liées au noeud i

3.1.4. Transformations de coordonnées

Les éléments les plus simples à côtés droits (triangles), ou à angles droits et côtés parallèles aux axes de coordonnées (parallélépipèdes), ne permettent pas de décrire avec suffisamment de précision ou d'aisance les domaines de géométrie complexe ou de frontière courbe. L'utilisation de transformations de coordonnées permet de transformer les éléments simples en éléments plus généraux, à angles non droits et éventuellement à côtés courbes.

Le principe est de décrire les coordonnées des points intérieurs à l'élément par une transformation faisant passer d'un *élément parent* de forme simple, à un élément transformé de forme complexe.

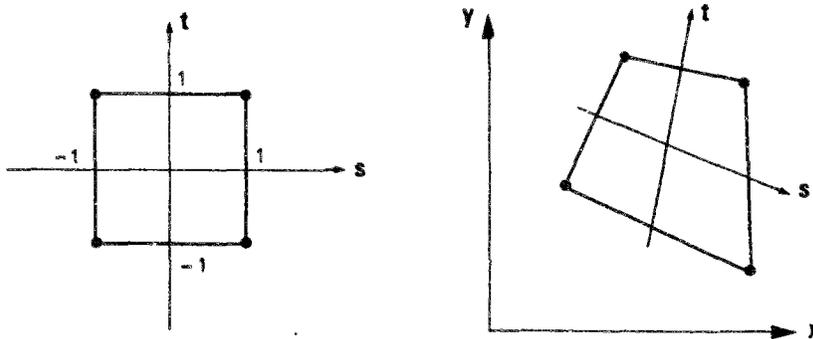


Fig. II-3-6. Eléments parent et transformé

Les coordonnées (x, y) d'un point de l'élément transformé s'expriment en fonction des coordonnées absolues x_i, y_i des *points géométriques* de l'élément réel et des coordonnées locales s et t du point dans l'élément parent :

$$\begin{aligned} x &= \sum G_i(s, t) x_i \\ y &= \sum G_i(s, t) y_i \end{aligned} \tag{II.3.2}$$

où les fonctions G_i sont des fonctions de forme définies sur l'élément et liées aux points géométriques. Ces derniers ne sont pas forcément les noeuds utilisés pour définir la variation du champ ϕ à l'aide des fonctions N . Lorsque ces deux ensembles de points sont égaux, l'élément est dit isoparamétrique ; super-paramétrique s'il y a plus de points que de noeuds ; sous-paramétrique s'il y a plus de noeuds que de points.

La transformation de coordonnées (II.3.2) a une matrice jacobienne $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$ (II.3.3)

et un jacobien $|J| = \det \mathbf{J}$. La dérivée $\frac{\partial x}{\partial s}$ se calcule aisément par dérivation des fonctions de forme en axes locaux de l'élément parent :

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i$$

et les dérivées du type $\frac{\partial s}{\partial x}$ se calcule en inversant la matrice jacobienne $\begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}$ (II.3.4)

La position des sommets doit être choisie de façon à conserver en tout point de l'élément transformé un jacobien positif (ou éventuellement nul en un nombre fini de points).



Fig. II-3-7. Exemple de transformation conduisant à un jacobien nul ou négatif

Par exemple, la transformation isoparamétrique du carré de côté 2 (cf. Fig. II-3-6) définit le quadrilatère à 4 points classique. La fonction G est de la forme

$$G_i = \frac{1}{4} (1 + s s_i)(1 + t t_i)$$

Lorsque les troisième et quatrième points sont confondus, le quadrilatère est réduit à un triangle à 3 points et le jacobien de la transformation est nul en tout point de l'élément parent situé sur la droite d'équation $t = 1$.

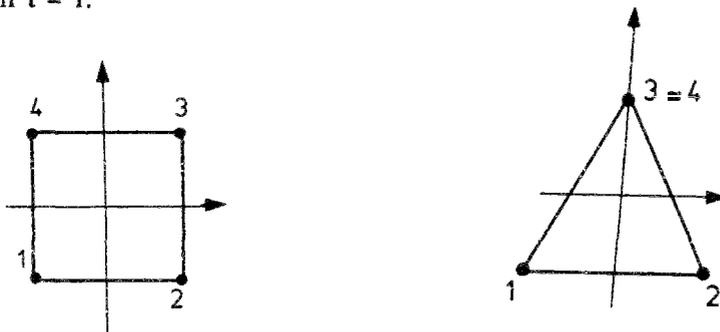


Fig. II-3-8. Triangle à 3 points construit à partir d'un élément parent quadrilatère

3.2. Résolution par éléments finis du problème élastique quasi-statique

3.2.1. Construction de l'espace approché U_h

Seule la formulation en déplacements est présentée.

La recherche du minimum de la fonctionnelle Π_1 (cf. §II.2.2.3) dans un espace de dimension infinie est envisageable analytiquement dans des cas simples mais n'est généralement pas possible par une méthode numérique.

La discrétisation Ω_h de Ω et le choix d'une approximation par éléments finis pour la solution exacte en déplacements permet de rechercher une solution approchée \mathbf{u}_h dans un espace de dimension finie \mathbf{U}_h . Ces champs \mathbf{u}_h doivent être C.A. avec \mathbf{u}_d sur $\partial_u \Omega_h$. Ils dépendent d'un nombre fini de paramètres, le nombre de degrés de liberté (DDL) de la structure discrétisée Ω_h .

Nous nous restreignons aux approximations par éléments finis *conformes*. Un champ \mathbf{u}_h conforme vérifie les propriétés suivantes :

- du fait que Π_1 fait intervenir les dérivées au premier ordre des champs de déplacements, \mathbf{u}_h doit être continu et dérivable une fois en tout point de Ω_h , à l'intérieur des éléments mais aussi à leurs frontières ;
- la formulation des fonctions de forme doit permettre l'existence d'un champ de déformations ϵ_h nul lorsque le déplacement des noeuds résulte d'un mouvement de corps rigide ;
- également, prise en compte d'un champ de déformations constant dans chaque élément.

Pour un problème mathématique bien posé, on peut prouver la convergence de la solution approchée vers la solution exacte lorsque les éléments sont conformes et leur taille maximale tend vers zéro.

L'utilisation d'éléments non conformes est possible moyennant certaines précautions.

3.2.2. Discrétisation de la fonctionnelle

La fonctionnelle Π_1 est discrétisée et minimisée dans \mathbf{U}_h .

Les champs \mathbf{u}_h s'expriment dans Ω_h par les fonctions de forme attachées aux éléments. On peut donc écrire en tout point d'un élément e

$$\mathbf{u}_h(x, y) = \mathbf{u}_h = \mathbf{N} \mathbf{q}_e \quad (\text{II.3.4})$$

où \mathbf{q}_e est le vecteur des déplacements aux noeuds de l'élément, et \mathbf{N} la matrice des fonctions de forme calculées au point étudié.

Le champ de déformations en tout point d'un élément se calcule à partir du champ de déplacements par l'opérateur \mathbf{D} :

$$\epsilon = \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (\text{II.3.5})$$

avec par exemple $\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}$ en déformation plane, si on a $\epsilon^T = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad 2\epsilon_{xy}]$

et $\mathbf{u}^T = [u_x \quad u_y]$.

Le calcul des déformations à partir des déplacements \mathbf{q}_e utilise la matrice \mathbf{B} , produit de \mathbf{D} et \mathbf{N} :

$$\epsilon = \mathbf{B} \mathbf{q}_e \quad (\text{II.3.6})$$

Le terme $a_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)$ s'écrit sur un élément de volume V_e

$$a_1 = \int_{V_e} \mathbf{q}_e^T \mathbf{B}^T \mathbf{L} \mathbf{B} \mathbf{q}_e \, d\Omega = \mathbf{q}_e^T \left[\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{L} \mathbf{B} \, d\Omega \right] \mathbf{q}_e$$

$$= \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e \quad (\text{II.3.7})$$

ce qui définit la matrice de rigidité \mathbf{K}_e , qui ne dépend que de la géométrie et du matériau constitutif de la structure.

Cette intégration sur le volume de l'élément peut être faite analytiquement pour les éléments de forme simple mais est le plus souvent effectuée numériquement par un schéma de Gauss. Un nombre minimum de points de Gauss doit être employé pour atteindre une précision suffisante (on montre que ce nombre doit permettre d'intégrer exactement le volume de l'élément).

Pratiquement, la matrice de rigidité globale \mathbf{K}_g est construite par assemblage de matrices élémentaires \mathbf{K}_e . Chaque matrice élémentaire est divisée en blocs relatifs à chaque degré de liberté relié à l'élément, et ajoutée dans la matrice globale après changement de repère éventuel.

Le terme de Π_1 dû aux efforts de volume \mathbf{X} se discrétise sous la forme

$$\int_{V_e} \mathbf{X}^T \mathbf{u} \, dV = \int_{V_e} \mathbf{X}^T \mathbf{N} \mathbf{q}_e \, d\Omega = \left[\int_{V_e} \mathbf{X}^T \mathbf{N} \, d\Omega \right] \mathbf{q}_e \quad (\text{II.3.8})$$

Le terme $\int_{V_e} \mathbf{X}^T \mathbf{N} \, d\Omega$ dépend de la variation des forces de volume \mathbf{X} dans la structure et donc

dans chaque élément. La force de volume peut être constante dans chaque élément, et le terme

(II.3.8) devient $\mathbf{X}^T \int_{V_e} \mathbf{N} \, d\Omega$. Si la variation de \mathbf{X} dans l'élément est trop complexe pour être cor-

rectement prise en compte par les procédures standard des logiciels d'éléments finis, il faut calculer les forces nodales équivalentes aux efforts de volume. Ce point sera traité plus loin (cf. §IV.6.3).

Un même raisonnement peut être tenu pour le terme de Π_1 dû aux forces de surface, avec une intégration sur le contour $\partial_F \Omega_h$. Les efforts trouvés pour chaque élément sont ensuite assemblés dans le repère global de la structure.

Le vecteur second membre ou vecteur des forces extérieures \mathbf{F}_g regroupe ces deux termes.

3.2.3. Prise en compte des conditions aux limites

L'introduction des conditions aux limites sur $\partial_u \Omega_h$ est faite par une relation linéaire

$$\mathbf{A} \mathbf{q} = \mathbf{q}_d$$

où \mathbf{q}_d contient les déplacements imposés sur $\partial_u \Omega_h$.

Il existe plusieurs techniques pour introduire cette relation dans la matrice \mathbf{K}_g et le vecteur \mathbf{F}_g (Ghour-Dhatt, 1984). Après cette introduction, l'expression discrétisée de Π_1 pour tout champ C.A. avec les déplacements imposés est devenue

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{F}^T \mathbf{q} \quad (\text{II.3.9})$$

où \mathbf{K} et \mathbf{F} tiennent compte des conditions aux limites sur $\partial_u \Omega_h$.

3.2.4. Résolution du problème discrétisé

On démontre que q est solution de

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (\text{II.3.10})$$

La résolution de (II.3.10) donne les déplacements aux noeuds du maillage. Les déplacements en tout point peuvent en être déduits par (II.3.4), les déformations par (II.3.6) puis les contraintes par la loi de Hooke.

4. ANALYSE NUMERIQUE DES STRUCTURES ELASTOPLASTIQUES

Nous nous limitons aux problèmes quasi-statiques. La résolution du problème mécanique élastoplastique discrétisé est plus délicate que dans le cas élastique, à cause de la non-linéarité de la loi de comportement.

4.1. Problème approché discrétisé uniquement en espace

Ce problème fictif est introduit pour séparer les effets des discrétisations du problème exact en espace et en temps.

La discrétisation du domaine en éléments conduit aux mêmes remarques que dans le cas élastique (cf. §II.3.1). La solution approchée de ce problème est constituée d'un champ de déplacements \mathbf{u}_h^* et d'un champ de déformations plastiques ϵ_h^* . Ces deux champs vérifient à tout instant les équations suivantes :

- l'équation d'équilibre, exprimée par le principe des travaux virtuels (II.1.18)
- les conditions aux limites : \mathbf{u}_h^* est cinématiquement admissible avec \mathbf{u}_d sur $\partial_u \Omega$
- la loi de comportement élastoplastique.

Dans la pratique, la loi de comportement n'est vérifiée le plus souvent qu'en un sous-ensemble fini de points de Ω_h , considérés comme "les plus représentatifs" du domaine. On retient les points de Gauss des éléments, d'ordre choisi par l'utilisateur. Leur nombre dépend du degré des fonctions de forme. Une partie de l'erreur entre la solution exacte du problème élastoplastique et la solution numérique vient de cette limitation, et n'a pas d'équivalent en analyse élastique.

On conçoit qu'il n'est pas non plus possible de vérifier les équations à tout instant de l'intervalle d'étude. Il va falloir se restreindre à un certain nombre d'instantanés et donc discrétiser en temps.

4.2. Problème approché discrétisé en espace et en temps

On part de la discrétisation spatiale précédemment définie et on découpe l'intervalle d'étude $[t_0, t_f]$ en incréments de temps de taille constante ou variable. On cherche les champs approchés \mathbf{u}_h et ϵ_h^p uniquement en un nombre fini de temps de l'intervalle d'étude, les "temps de calcul numérique" t_C . Ces temps sont généralement pris aux sommets de chaque incrément et éventuellement à plusieurs temps intérieurs à chacun d'eux. En-dehors de ces instants en nombre fini, on peut ne pas vérifier les équations du problème.

Le calcul des champs approchés à tout instant est fait par interpolation à partir des valeurs aux temps donnés. Le cas le plus simple est l'incrément sans temps intermédiaires ; les champs approchés $\phi_h(t)$ sont calculés numériquement à t_i et t_{i+1} et interpolés linéairement à partir de ces valeurs :

$$\phi_h(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} \phi_h(t_i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \phi_h(t_{i+1}) \quad (\text{II.4.1})$$

4.3. Choix d'une discrétisation temporelle

Il convient d'abord de préciser la terminologie relative à ce problème.

On appelle **pas de temps** et on note Dt chaque incrément découpé dans l'intervalle d'étude $[t_{\min}, t_{\max}]$. Un **pas de charge** noté DF correspond à l'augmentation des efforts au cours d'un pas de temps.

Dans le cas quasi-statique, on étudie un problème d'évolution où le temps réel n'intervient pas ; il peut être remplacé par un "temps cinématique". La dérivée par rapport au temps du phénomène est définie à une constante près. Il est possible de faire défiler l'évolution "en ralenti" ou "en accéléré". En conséquence, seuls les pas de charge ont un sens physique.

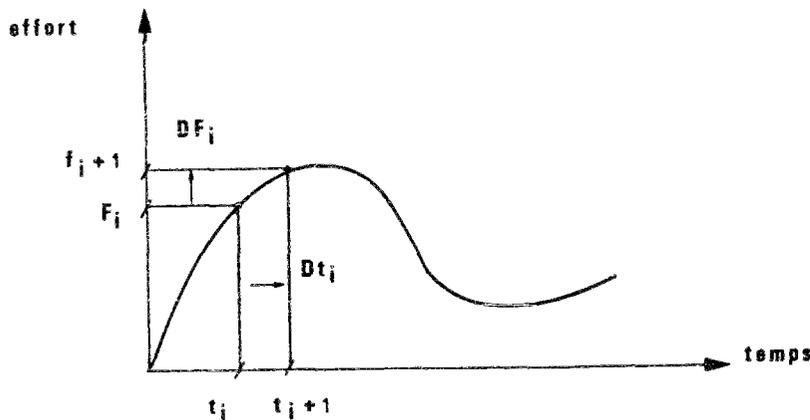


Fig. II-4-1. Pas de temps et pas de charge

Une telle liberté disparaît dans le cas dynamique élastique ou élastoplastique.

Le trajet de chargement est supposé découpé en pas de temps (donc en pas de charge). Indépendamment de toute allusion à une méthode de calcul non linéaire, la discrétisation du trajet est indispensable pour séparer les temps où il y a inversion ou fort changement du sens ou de la nature du chargement. Ce découpage minimal correspond à celui qui serait utilisé pour un calcul élastique, dans lequel on chercherait par exemple le maximum des contraintes. Il sera désigné par "discrétisation minimale élastique" et est supposé fait correctement dans ce qui suit.

En toute rigueur, il faudrait que le chargement évolue au cours d'un pas de temps, de la même façon que l'interpolation utilisée dans le code de calcul (par exemple (II.4.1)). Cela n'est pas toujours possible ; une partie de l'erreur est donc due à l'approximation du trajet de chargement. Il convient de limiter l'importance de cette erreur.

Les méthodes usuelles de calcul numérique élastoplastique nécessitent la discrétisation du trajet de

chargement. Le pas de charge peut devoir être pris plus fin que la discrétisation minimale élastique. A un temps donné t , la structure et les champs approchés σ_h et ϵ_h^P sont supposés connus. Au cours du pas de temps Dt , un pas de charge DF est ajouté. Il faut trouver la variation des champs approchés pendant Dt , due à ce pas de charge.

Le calcul suppose toujours que les champs approchés au temps t sont connus le mieux possible en regard des limites qui ont été fixées au calcul, et qu'en aucun cas un réexamen ou un recalcul de ces champs ne sera fait dans la suite de l'analyse. En cas de divergence des algorithmes ou d'arrêt anormal du calcul à un temps donné, dû par exemple au dépassement d'une charge limite de la structure, les résultats de tous les temps précédents sont supposés fiables et peuvent être réutilisés. Sur certains codes, un "relancement" (restart) du calcul peut être fait après modification des données mal choisies, et cela sans avoir à recalculer toute l'évolution du chargement.

Il existe également une autre approche, développée par (Boisse, 1987). Cette approche ne retient pas le principe du découpage du trajet de chargement en incréments et se base sur la notion de processus d'évolution. Les itérations se font sur ces processus.

4.4. Calcul lors d'un pas de charge

4.4.1. Point de départ

On suppose faites les discrétisations en espace et en temps ; le domaine Ω_h , les efforts sur $\partial_F \Omega$ et dans Ω , les déplacements imposés sur $\partial_u \Omega$ sont connus. La discrétisation de ces efforts et leur remplacement par des forces nodales à mettre dans le second membre F sont faits.

On suppose également connus au temps actuel t_k :

-les déplacements u_{h_k} , les déformations ϵ_{h_k} , les contraintes σ_{h_k} , les déformations plastiques $\epsilon_{h_k}^P$, résultats d'un calcul précédent ;

-les pas de charge : $DF = F_{k+1} - F_k$, imposés pendant le pas de temps Dt

On admet que l'équation d'équilibre (II.1.18) est vérifiée au temps t_k , et que le critère est vérifié aux points de Gauss de la structure.

Toutes ces valeurs sont prises comme point de départ et ne seront plus modifiées.

4.4.2. Principe général

Il faut trouver le pas de déplacement Dq tel que les pas $D\sigma_h$ et $D\epsilon_h^P$ qui en seront déduits, et par conséquent les champs approchés $\sigma_{h_{k+1}}$ et $\epsilon_{h_{k+1}}^P$, vérifient les équations d'équilibre et la loi de comportement au temps $t_{k+1} = t_k + Dt$.

La vérification de l'équilibre implique que le déséquilibre $\delta F = DF - B^T D\sigma$ soit nul.

Dans le cas élastique, Dq est cherché par résolution classique de l'équation

$$K^* Dq = DF$$

où $K^* = K$ est la matrice de rigidité élastique.

On écrit directement $\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + D\mathbf{q}$. Il n'est pas nécessaire de vérifier que le champ de contraintes $\sigma_{h_{k+1}}$ est plastiquement admissible. Aucun calcul de déséquilibre et aucune correction de $D\mathbf{q}$ ne sont nécessaires et on peut passer au pas de temps suivant.

En élastoplasticité, la loi de comportement doit être vérifiée aux temps représentatifs du pas Dt (en général, à la fin du pas) et aux points les plus significatifs de la structure (points de Gauss).

On est amené à procéder par itérations et à chercher de proche en proche la valeur correcte de $D\mathbf{q}$ qui vérifiera l'équilibre et la loi de comportement. Le schéma itératif le plus général est le suivant :

Schéma 1

$\mathbf{q}_k, Dt, DF, \sigma_k, \epsilon_k^p$ connus

imax connu (protection contre la divergence : arrêt du calcul à la imax-ième itération)

TOL connu : tolérance sur le déséquilibre δF

$i = 0$

$\delta F_i = DF$

$D\mathbf{q}_i = 0$

tant que $\|\delta F_i\| \geq TOL$ et $i \leq imax$:

- $i = i + 1$

- calculer $D\mathbf{q}_i$ meilleur que $D\mathbf{q}_{i-1}$

- calcul des déformations associées à $D\mathbf{q}_i$, puis des contraintes correspondantes $D\sigma_i$ qui vérifient le critère

- calcul du déséquilibre dû à cette correction : $\delta F_i = DF - \mathbf{B}^T D\sigma_i$

fin Tant que

$k = k + 1$: fin du pas de charge

Si la tolérance n'est pas atteinte à la dernière itération autorisée :

- soit il s'agit d'une divergence de l'algorithme ; le pas DF ne peut être équilibré et le calcul doit être stoppé ;

- soit l'algorithme converge mais trop lentement. On se contente dans ce cas du $D\mathbf{q}$ et des contraintes trouvés à la dernière itération autorisée et on passe au pas suivant.

Les méthodes les plus courantes de recherche d'un $D\mathbf{q}_i$ meilleur que le $D\mathbf{q}_{i-1}$ sont de type incrémental. Chaque $D\mathbf{q}_i$ est égal au $D\mathbf{q}_{i-1}$ augmenté d'un incrément $\Delta\mathbf{q}_i$. On est amené à procéder par itérations et à chercher de proche en proche la valeur correcte de $D\mathbf{q}$ qui vérifiera l'équilibre (II.1.18) et la loi de comportement (II.1.11), selon le schéma suivant :

Schéma 2

$\mathbf{q}_k, \mathbf{D}t, \mathbf{D}\mathbf{F}, \boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\epsilon}_k^p, \text{imax}, \text{TOL}$ connus

$i = 0$

$\delta\mathbf{F}_i = \mathbf{D}\mathbf{F}$

$\mathbf{D}\mathbf{q}_i = 0$

tant que $\|\delta\mathbf{F}_i\| \geq \text{TOL}$ et $i \leq \text{imax}$:

- $i = i + 1$

étape 1 - donnée ou calcul de \mathbf{K}^*

étape 2 - résolution de $\mathbf{K}^* \Delta\mathbf{q}_i = \delta\mathbf{F}_{i-1}$

étape 3 - calcul des déformations $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_i$ associées à $\Delta\mathbf{q}_i$

étape 4 - calcul des incréments $\Delta\boldsymbol{\sigma}_i$ et $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_i^p$

par intégration de la loi de comportement sur l'incrément de déformation $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_i$

étape 5 - calcul de l'incrément d'effort $\Delta\mathbf{F}_i = \mathbf{B}^T \Delta\boldsymbol{\sigma}_i$

et du nouveau déséquilibre $\delta\mathbf{F}_i = \delta\mathbf{F}_{i-1} - \Delta\mathbf{F}_i$

étape 6 - ajout des incréments $\Delta\mathbf{q}_i$ et $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_i^p$ aux déplacements et aux déformations plastiques

fin Tant que

$k = k + 1$: fin du pas de charge

Le calcul de l'incrément de contrainte plastiquement admissible à l'étape 4 est souvent fait en deux phases :

étape 4.1. calcul *élastique* des contraintes $\Delta\boldsymbol{\sigma}_i^*$ correspondant à $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_i$

étape 4.2. si le critère est violé pour cet incrément $\Delta\boldsymbol{\sigma}_i^*$:

- correction plastique : calculer $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_i^p$ qui ramène les contraintes dans le convexe de plasticité

- calculer $\Delta\boldsymbol{\sigma}_i = \Delta\boldsymbol{\sigma}_i^* - \mathbf{L} \Delta\boldsymbol{\epsilon}_i^p$

Les méthodes de correction des contraintes de l'étape 4.2. sont brièvement explicitées au §II.4.5.

4.4.3. Méthodes de calcul des incréments $\Delta\mathbf{q}$

Plusieurs classes de méthodes sont utilisées. Elles diffèrent par la façon dont est calculé l'incrément de déplacement $\Delta\mathbf{q}$ à partir du déséquilibre $\delta\mathbf{F}$, lors de l'étape 2 du Schéma 2.

- *Méthode de Newton-Raphson*

A la fin de l'incrément précédent, le comportement du matériau est connu à chaque point représentatif de la structure. On sait donc qui est plastifié et qui est resté élastique. Lors de l'application du nouvel incrément, la rigidité est calculée à partir du module tangent aux points plastifiés pour lesquels il y a charge plastique.

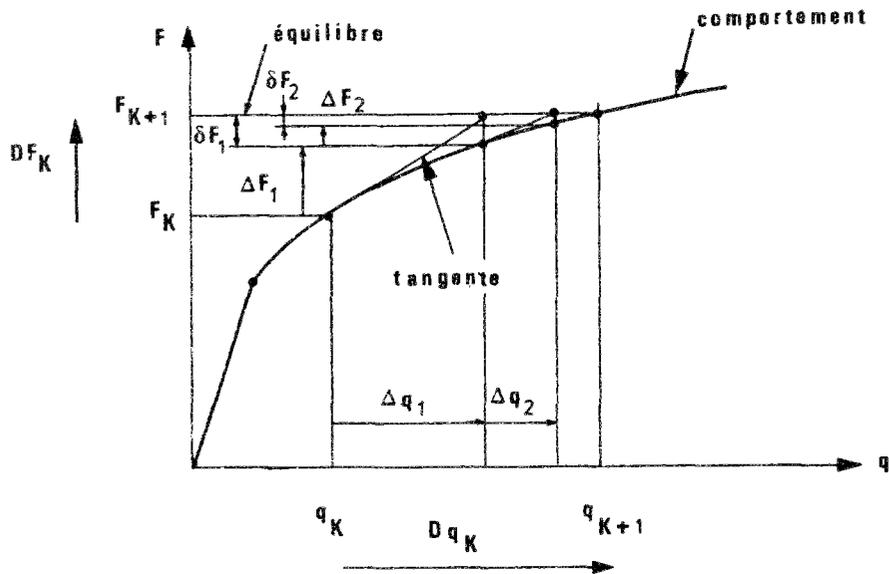


Fig. II-4-2. Principe de la méthode de Newton-Raphson en monodimensionnel

Lors de l'étape 1, la matrice de rigidité \mathbf{K}^* est recalculée en fonction du comportement de chacun des points de Gauss de la structure :

- module élastique en cas de comportement élastique ou de décharge élastique
- module tangent (E' en monodimensionnel) pour les points en charge plastique.

Le terme de rigidité calculé pour un élément plastifié est

$$\mathbf{K}_e^t = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{L}^t \mathbf{B} \, d\Omega = \sum_i \mathbf{B}^T \mathbf{L}^t \mathbf{B} \, w_i \quad (\text{II.4.2})$$

où \mathbf{L}^t est la matrice tangente calculée à partir du comportement de chaque point de Gauss i de l'élément, et w_i le poids de ce point de Gauss.

Cette méthode permet le nombre d'itérations minimal puisqu'à chacune d'elles, la tangente est recalculée et le schéma itératif "suit" au plus près le comportement. Le coût de la construction et de la factorisation de cette matrice \mathbf{K}^* lors de l'étape 3 peut être élevé et dépasser largement l'économie de calcul due au gain en nombre d'itérations. Enfin, en cas de comportement parfaitement plastique, la matrice tangente peut devenir nulle en certains points de la structure et l'algorithme diverger lors de l'application du pas de charge.

• *Méthode de la raideur initiale*

La matrice de rigidité \mathbf{K}^* est tout simplement prise égale à la matrice de rigidité élastique. Elle est factorisée une fois pour toutes et l'évaluation du $\Delta \mathbf{q}$ est faite par descente remontée.

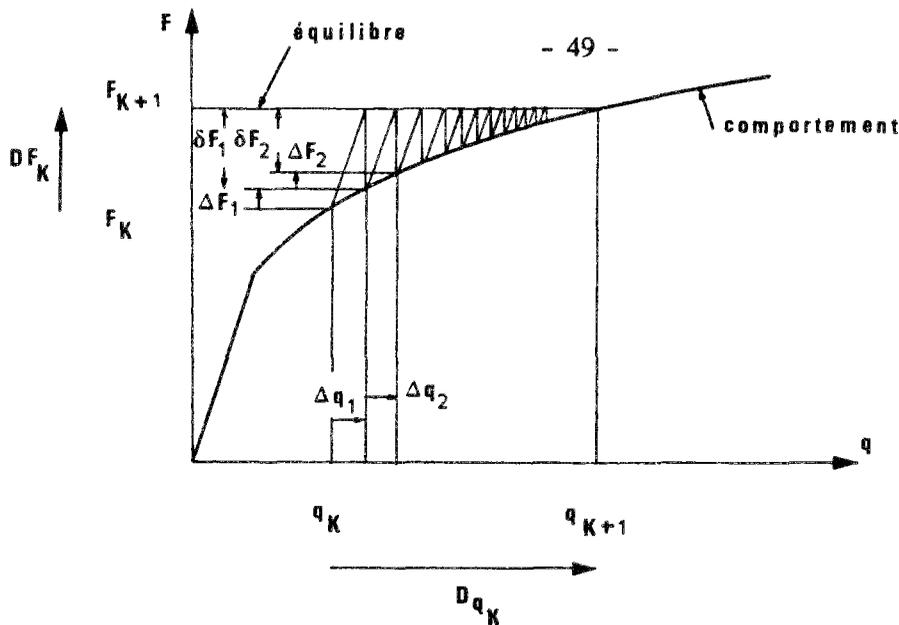


Fig. II-4-3. Principe de la méthode de la raideur initiale en monodimensionnel

Une telle méthode peut nécessiter un très grand nombre d'itérations lorsque l'écroutissage est faible.

- *Méthodes de type Newton modifiée*

Chacune des deux méthodes précédentes a un avantage et un inconvénient contradictoires : la rigidité variable diminue le nombre d'itérations (boucle Tant que... du Schéma 2) mais augmente le coût des constructions et factorisations de \mathbf{K}^* ; le contraire pour la rigidité initiale. Il est donc tentant de les combiner de façon à bénéficier de leurs avantages en limitant leurs inconvénients.

La plupart des codes permettent de choisir de reconstruire la matrice de rigidité tous les n_1 pas de charge ; entre temps, cette matrice est conservée constante. Pour une meilleure efficacité, le choix des temps de refactorisation doit être adapté au trajet de chargement.

- *Méthodes de type quasi-Newton*

Dans ces méthodes, on tente de trouver une matrice \mathbf{K}^* qui approche le mieux possible la matrice tangente \mathbf{K}^t ou une matrice sécante \mathbf{K}^s sans pour cela avoir à faire une nouvelle factorisation de la matrice. La modification de la matrice est de la forme

$$\mathbf{K}_i^* = \mathbf{K}_{i-1}^* + \Delta\mathbf{K}$$

ou $(\mathbf{K}_i^*)^{-1} = \mathbf{A}_1 (\mathbf{K}_{i-1}^*)^{-1} \mathbf{A}_2$

où les matrices \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 ou $\Delta\mathbf{K}$ sont construites à faible coût à partir entre autres des résultats obtenus lors des itérations précédentes. Les méthodes de Broyden ou BFGS (Broyden Fletcher Goldfarb Shanno) sont de ce type. On peut se reporter par exemple à (Coffignal, 1987) pour plus de détails.

4.4.4. Méthodes heuristiques de recherche de Dq

S'il était possible de connaître la partie plastique Dq^p du pas de déplacement Dq par un moyen quelconque, la recherche de Dq^e s'en déduirait directement par un simple calcul élastique

linéaire. De même, la connaissance préalable d'une approximation du vecteur Dq diminue le nombre d'itérations nécessaire pour sa détermination précise.

Toute liberté est laissée pour le choix de l'algorithme de recherche de Dq , dès l'instant que ce dernier donne la solution correcte ou qu'il annonce clairement qu'il ne peut trouver de solution.

Coffignal (1987) présente plusieurs techniques heuristiques d'accélération. Nous ne présentons que la *reprise de résultats précédents*, adaptée par exemple aux calculs successifs sur des maillages affinés.

Il peut être intéressant de reprendre les résultats des analyses précédentes pour amorcer le nouveau calcul. Les déplacements trouvés à chaque temps d'analyse lors du calcul préalable sont lissés puis adaptés au maillage utilisé lors de l'analyse actuelle. Le coût d'une telle procédure de reprise et de lissage n'est pas forcément négligeable.

Naturellement, toutes ces techniques ne sont intéressantes que si elles réduisent le coût global du calcul : nombre d'opérations mathématiques, stockage en mémoire réelle ou auxiliaire.

4.5. Précision des algorithmes de correction plastique des contraintes

4.5.1. Généralités

L'étape 4.2 du schéma itératif 2 (cf. §II.4.4.1) nécessite le retour dans le convexe de plasticité des points pour lesquels le critère est violé après application d'un incrément fini de déformation $\Delta\epsilon$ tiré de l'incrément de déplacement Δq appliqué à l'itération considérée.

Divers algorithmes ont été proposés et sont utilisés dans les codes de calcul élastoplastique. Il est nécessaire que cette étape génère une erreur la plus réduite possible sur la contrainte ou la déformation plastique. Des auteurs comme (Krieg & Krieg, 1977) ou (Yoder & Whirley, 1984) ont développé une solution exacte au problème de la correction plastique d'un point situé hors du convexe de plasticité, pour un matériau de Mises avec écrouissage combiné :

- soit σ, ϵ^P vérifiant le critère $f(\sigma, \epsilon^P) \leq 0$
- on impose un incrément de déformation $\Delta\epsilon$
- déterminer l'incrément de contrainte **exact** et l'incrément éventuel de déformation plastique $\Delta\epsilon^P$ tels que $f(\sigma + \Delta\sigma, \epsilon^P + \Delta\epsilon^P) \leq 0$

Nous détaillerons la solution de ce problème au chapitre IV. Ces auteurs ont développé cette solution analytique dans le but de tester les méthodes classiques de correction plastique, qui sont toutes non exactes dans le cas général.

4.5.2. Méthodes implicites et explicites

La correction plastique de l'étape 4.2 du schéma itératif 2 correspond en fait à la discrétisation de l'équation différentielle (II.1.10), qui peut s'écrire

$$\dot{\epsilon}^P = \psi(\epsilon^P, t) \tag{II.4.3}$$

Les conditions initiales sont connues : l'état de contrainte σ_k et de déformation plastique ϵ_k^P au début de l'incrément (on suppose pour simplifier que $f(\sigma_k, \epsilon_k^P) = 0$). La vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ est constante pendant le pas de temps ; on suppose que l'on peut écrire $\epsilon(t) = \epsilon_k + \dot{\epsilon}(t - t_k)$.

L'intégration de l'équation différentielle (II.4.3) peut être faite par un schéma d'Euler explicite :

$$\Delta \epsilon^P = \Delta t. \dot{\epsilon}_k^P = \Delta t. \psi(\epsilon_k^P, t_k) \quad (\text{II.4.4})$$

$$\text{ou implicite : } \Delta \epsilon^P = \Delta t. \dot{\epsilon}_{k+1}^P = \Delta t. \psi(\epsilon_k^P + \Delta \epsilon^P, t_{k+1}) \quad (\text{II.4.5})$$

Comme $\dot{\epsilon}^P$ est connu au temps t_k mais non au temps t_{k+1} , le schéma explicite a l'avantage de la simplicité ; l'incrément est directement calculé par (II.4.4). Le schéma implicite nécessite la résolution de l'équation (II.4.5).

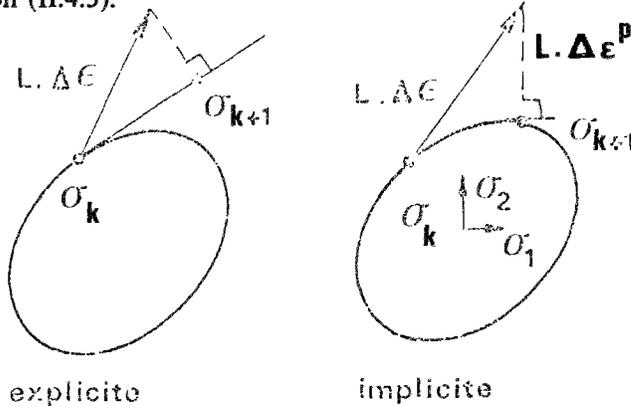


Fig. II-4-4. Schémas explicite et implicite en parfaite plasticité

Le schéma explicite revient à discrétiser la loi de comportement sous la forme

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon^e + \Delta \epsilon^P$$

$$\Delta \epsilon^P \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{\sigma = \sigma_k} = 0$$

$$\Delta \sigma = L \Delta \epsilon^e$$

autrement dit, le point de départ (σ_k, ϵ_k^P) vérifie bien le critère, mais pas le point d'arrivée.

Le schéma implicite revient à discrétiser la loi de comportement sous la forme

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon^e + \Delta \epsilon^P$$

$$\Delta \epsilon^P \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{\sigma = \sigma_{k+1}} = 0$$

$$\Delta \sigma = L \Delta \epsilon^e$$

L'incrément de déformation plastique est normal au convexe de plasticité au point d'arrivée ; ce dernier vérifie le critère. Le schéma implicite est donc plus satisfaisant du point de vue théorique, même s'il peut coûter plus cher.

4.5.3. Algorithmes de correction plastique

Ces algorithmes sont censés donner l'incrément de contrainte $\Delta \sigma$ vérifiant au moins de façon approchée le critère de plasticité, lorsqu'on impose un incrément de déformation $\Delta \epsilon$.

Il en existe plusieurs types. Certains utilisent la subincrémentation : pour accroître la précision, les incréments de déformation jugés trop grands sont subdivisés et une correction est appliquée à la fin de chaque sous-incrément. En se limitant aux méthodes sans subdivision, Krieg et Krieg (1977) étudient la précision de 3 algorithmes : le "retour radial" (que nous appellerons "projection radiale" au chapitre IV), la méthode "rigidité tangente-retour radial", la méthode "rigidité sécante-retour radial".

Les calculs ont été faits pour diverses valeurs du module de l'incrément de déformation $\Delta \epsilon$, dont la

composante normale ou tangente $2\mu \Delta\epsilon'$ pouvait varier de 0 à $5\sqrt{2/3} \sigma_0$, et de l'angle entre la direction de cet incrément et la normale $\partial f/\partial\sigma$ au convexe de plasticité. L'erreur est mesurée par la différence de module entre l'incrément de contrainte exact et l'incrément approché calculé par une des méthodes, et l'angle entre les incréments exact et approché dans l'espace des déviateurs des contraintes.

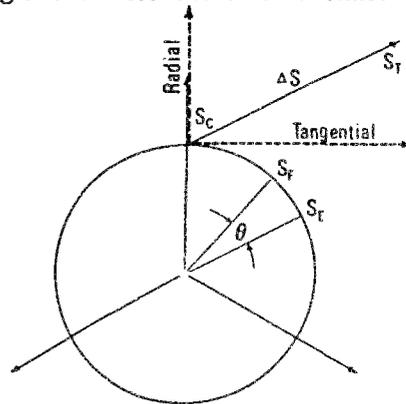


Fig. II-4-5. Erreur angulaire entre les solutions exacte et approchée (d'après Krieg et Krieg, 1977)

Yoder et Whirley (1984) généralisent la solution exacte et l'adaptent aux matériaux écrouissables. Loret (1986) présente une solution exacte et l'étude des erreurs pour un matériau de Drucker-Prager. L'exemple suivant montre l'erreur angulaire obtenue par Krieg et Krieg pour la méthode du retour radial, en fonction du module et de la direction de l'incrément.

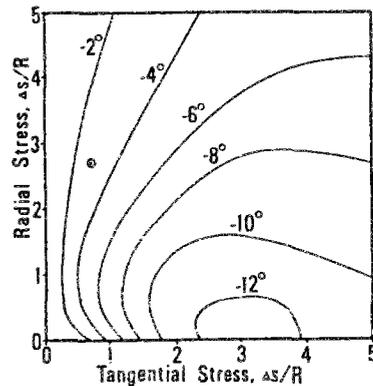


Fig. II-4-6. Erreurs angulaires (d'après Krieg et Krieg, 1977) avec $R = \sqrt{2/3} \sigma_0$

Les résultats de Krieg et Krieg montrent que les méthodes approchées sont toutes exactes pour des incréments radiaux, c'est-à-dire normaux au convexe de plasticité. Suivant l'angle et le module de l'incrément $2\mu \Delta\epsilon'$, les erreurs, notamment angulaires, peuvent être très importantes. On en déduit que les contraintes approchées σ_h ne sont pas exactement liées aux déformations approchées ϵ_h par la loi de comportement. Coffignal (1987) suppose dans son travail que ces erreurs sont rendues négligeables, ce qui n'est vrai que si les chargements sont radiaux ou si la solution exacte est implémentée dans le code de calcul. La notion de chargement radial est introduite au chapitre IV.

Les erreurs commises lors des corrections plastiques dans les codes de calcul industriels, qui n'utilisent généralement pas la solution exacte, sont une des raisons des erreurs obtenues lors des analyses numériques élastoplastiques. Elles n'ont pas d'équivalent dans les analyses élastiques.

CHAPITRE III

ERREURS

ET

MAILLAGES

Le but de notre travail est avant tout de pouvoir estimer l'erreur commise au cours de calculs numériques en élastoplasticité. Estimer cette erreur suppose également pouvoir proposer une discrétisation capable de la réduire, et si possible au coût le plus bas. Il ne sert à rien de dire "il suffit de raffiner le maillage à tel endroit" si on ne dispose pas d'outils informatiques capables de générer des maillages tenant compte de telles recommandations, la construction manuelle d'un maillage n'étant plus de mise (sauf exception) dans les bureaux d'études industriels. C'est pourquoi nous présentons rapidement quelques techniques de maillage automatique, en soulignant la difficulté de la tâche. Ensuite, après avoir défini ce qu'est une erreur et analysé leur provenance, nous étudierons diverses méthodes de détermination de l'erreur proposées dans la littérature.

1. PRESENTATION DE QUELQUES METHODES DE MAILLAGE AUTOMATIQUE

1.1. Introduction

Au fur et à mesure de la généralisation de l'utilisation du calcul numérique à la quasi-totalité des sciences de l'ingénieur, de plus en plus de gens sont amenés à utiliser des méthodes de type Eléments Finis, ceci en mécanique des solides ou des fluides, en électromagnétisme, en thermique, etc. Chaque analyse nécessite la discrétisation spatiale du domaine étudié Ω . Cette étape est appelée *maillage*.

Un maillage peut être construit manuellement ou par des outils informatiques plus ou moins évolués appelés *mailleurs automatiques*. Nous définirons plus loin les différents types d'algorithmes de maillage automatique. Il faut d'abord remarquer que le maillage manuel ou automatique est un problème difficile ; les possibilités de fautes sont multiples. Un maillage comportant des fautes graves ne peut être retenu pour un calcul numérique car les résultats correspondants n'ont aucune fiabilité. Les fautes inadmissibles correspondent au non-respect d'une ou plusieurs des propriétés d'un découpage en éléments finis vues au §II.3.1.2.

Un maillage doit posséder certaines "qualités" qui sont, par ordre de difficulté d'obtention croissante :

- l'absence de fautes inadmissibles ;
- la *régularité* des éléments générés : il vaut mieux éviter les éléments de forme trop allongée et en conséquence imprécis ;
- l'utilisateur peut souhaiter disposer des éléments grossiers ou fins aux endroits où il s'attend à une variation lente ou rapide des valeurs calculées ;
- le dernier souhait que l'on peut formuler est la recherche automatique par le programme d'un maillage qui s'adaptera au problème posé, en minimisant une fonction coût par rapport à une fonction objectif (par exemple en minimisant l'erreur pour un coût donné, ou un nombre de DDL donné). Un tel maillage est dénommé *maillage optimal* par rapport à la fonction coût (cf. §III.2.4).

A chacun de ces objectifs correspond un problème de plus en plus complexe.

Le premier échelon peut être traité manuellement tant que le nombre d'éléments n'est pas trop élevé.

Il existe à ce niveau des algorithmes capables de mailler une surface ou un volume sans fautes inadmissibles, même s'il peut subsister des éléments de forme non satisfaisante.

L'amélioration géométrique d'un maillage donné par régularisation des éléments trop déformés utilise une autre classe de méthodes dont les plus courantes sont le déplacement de noeuds et le changement de topologie.

D'autres mailleurs permettent à l'utilisateur de définir la taille des éléments qu'il souhaite sur les côtés d'un bloc, le programme se chargeant de mailler l'intérieur du bloc en respectant les tailles au contour.

Le dernier niveau fait appel à un critère de remaillage, qui peut être empirique ou tiré d'études théoriques, qui peut dépendre de la géométrie et du chargement donnés ou nécessiter un calcul préliminaire sur un maillage grossier. En tout point de la structure, ce critère fournit soit une taille d'élément, soit un espacement de noeuds. Si ce champ de tailles est calculé à partir d'un maillage initial, ce dernier est appelé maillage "père" et le nouveau maillage respectant les tailles, maillage "fils". D'évidentes limitations à la valeur de ces tailles ou à leur variation dans l'espace sont nécessaires : chaque élément doit pouvoir être contenu dans le domaine, ce qui limite les tailles maximales, et on ne peut accoler deux éléments dont le rapport des tailles dépasse une certaine valeur (par exemple 2 dans (Dubois, 1988)). Dans cette partie, nous ne nous préoccupons pas de la provenance d'un tel critère de remaillage. Nous admettons l'existence du champ de tailles ou d'espacements et cherchons un mailleur capable de le respecter. Nous désignerons dans ce travail un tel outil par l'expression "mailleur respectant un champ de tailles d'éléments" ou l'abréviation MRCT.

Les nombreux travaux menés depuis l'avènement de la Méthode des Eléments Finis et la généralisation des ordinateurs ont permis l'émergence de méthodes permettant de traiter chacun des points décrits précédemment. Nous allons décrire rapidement quelques unes de ces méthodes, sans avoir l'intention d'être exhaustif ni de présenter un cours de maillage automatique ; le lecteur désirant approfondir le sujet pourra se reporter à la littérature citée dans les références bibliographiques. En général, la présentation sera limitée au cas bidimensionnel, bien que quelques extensions au tridimensionnel puissent être brièvement citées. Le terme de "noeud" sera souvent utilisé pour désigner les "points géométriques" (cf. §II.3.1.1), la confusion étant ici impossible.

1.2. Maillage automatique d'un domaine quelconque

1.2.1. Hypothèses de départ

Le domaine est défini par son contour. On désire seulement le "remplir" d'éléments, sans prêter attention à la qualité de ceux-ci ni à un quelconque champ de tailles. Cette approche est amplement suffisante si on souhaite par exemple calculer la surface et les inerties d'un domaine de forme complexe, ou représenter graphiquement le domaine sur un écran d'ordinateur.

1.2.2. Méthodes de maillage

De nombreuses techniques existent pour la triangulation automatique d'un domaine, quelconque ou convexe ((George, 1988), (Thompson, 1985), etc). Les méthodes les plus triviales ne sont citées que pour mémoire : division d'un domaine topologiquement rectangulaire en quadrilatères ou triangles, maillage de bandes découpées dans le domaine, etc. Ces méthodes ont l'inconvénient de ne pas être adaptées à toutes les géométries initiales.

Les plus courantes des méthodes générales de maillage automatique sont de deux types : frontales ou par semis de noeuds reliés ensuite en éléments.

1.2.2.1. Mailleurs frontaux

Les mailleurs frontaux (George,1988) construisent une première rangée d'éléments à partir du contour du domaine et des tailles qui y sont définies ; une fois cette rangée générée, le contour est actualisé.

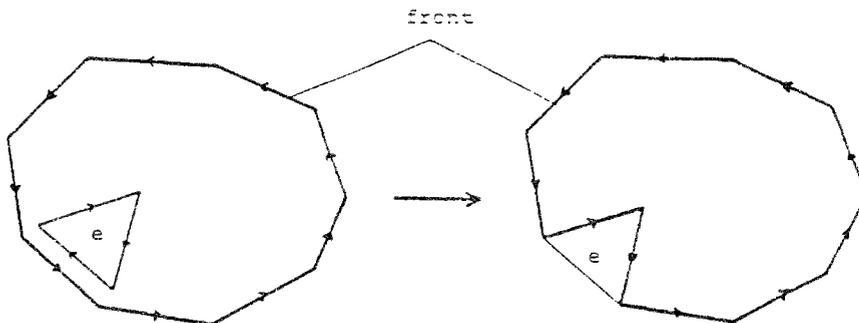


Fig. III-1-1. Création d'un élément sur le contour et actualisation de celui-ci

Le processus peut poser des difficultés vers la fin, pour le placement des derniers éléments.

1.2.2.2. Raccordement d'un semis de noeuds

• Raccordement des noeuds

Un semis de noeuds est effectué sur le domaine ; pour l'instant, on ne se préoccupe pas de sa provenance. On peut au pire se contenter des noeuds clés définissant la frontière $\partial\Omega_h$, ou en générer à l'intérieur du domaine.

Il faut ensuite relier ces noeuds pour en faire des triangles. Une méthode est présentée dans (Lo, 1985). Une autre méthode classique est l'algorithme de type Delaunay. Il permet, non pas de relier des noeuds pour en faire des triangles, mais de construire à partir de ces noeuds des éléments qui les contiennent, ces éléments étant les "meilleurs" possibles pour les points donnés.

On construit d'abord à partir des points les polyèdres de Voronoï. Un polyèdre de Voronoï V_i relatif au noeud i est défini par les points plus proches du noeud i que de tous les autres noeuds ; autrement dit c'est le polyèdre formé par l'intersection des lignes médiatrices de chacun des segments reliant le noeud i à ses voisins :

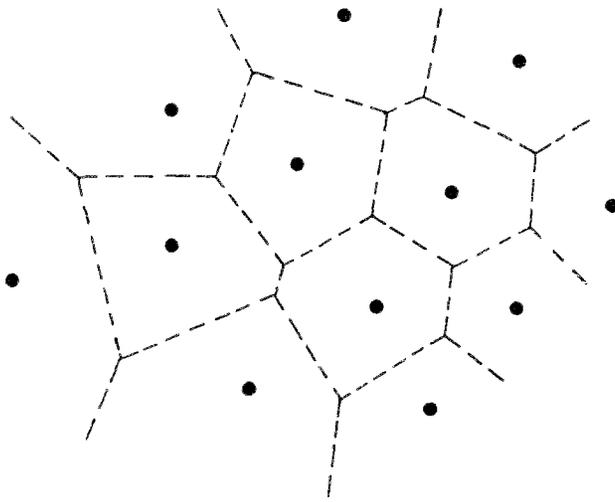


Fig. III-1-2. Polyèdres de Voronoï

Ensuite on génère les "polytopes" de Voronoï en reliant entre eux les centres de gravité des polyèdres de Voronoï

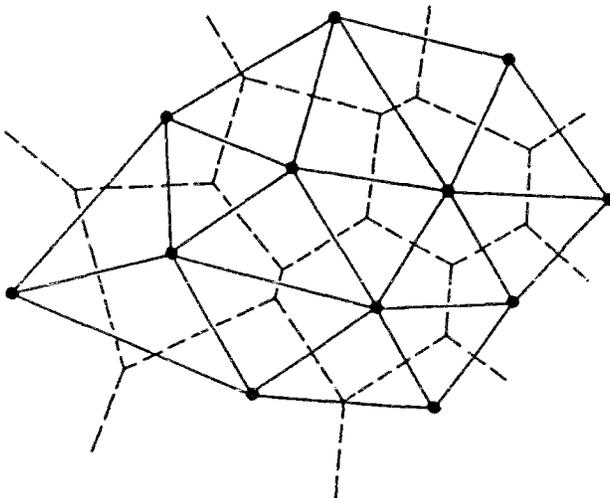


Fig. III-1-3. Polytopes de Voronoï

Enfin, si ces polytopes ne sont pas des triangles, on les divise jusqu'à ce qu'ils le deviennent.

La décomposition en polytopes de Voronoï est unique, mais pas la triangulation car chaque polytope non réduit à un triangle peut être divisé de différentes façons. Les triangulations qui en sont déduites ont une intéressante propriété : aucun cercle circonscrit à un triangle ne contient un autre noeud du maillage. Les éléments sont donc de bonne qualité si du moins les noeuds fournis n'ont pas une répartition trop défavorable (un triangle aplati a un cercle circonscrit qui peut tendre vers le demi-plan, et par conséquent a toutes les chances de contenir d'autres noeuds s'ils sont en nombre suffisant).

La triangulation de Delaunay fournit un maillage qui peut ne pas respecter les conditions aux limites du domaine (Coulomb, 1987). Il importe dans ce cas de corriger les côtés des éléments qui sortent du domaine en créant de nouveaux noeuds sur la frontière et en y ramenant ces côtés. Le maillage ainsi modifié peut perdre les propriétés des triangulations de Voronoï.

- *Création des noeuds*

Les noeuds utilisés par l'algorithme de Delaunay peuvent n'appartenir qu'à la frontière, leur génération est aisée mais les maillages qui en sont tirés sont généralement mauvais (ils vérifient toujours la propriété relative au cercle circonscrit mais les noeuds sont si éloignés que les éléments sont quand même allongés). On peut jeter des noeuds au hasard dans le volume, ou utiliser une grille uniforme ; Lo (1985) présente une méthode de remplissage d'un domaine quelconque. Enfin les noeuds peuvent provenir d'un critère de remaillage qui les dispose aux endroits qu'il juge optimaux, à charge pour un programme de les relier suivant la meilleure topologie.

La généralisation de l'algorithme de Delaunay aux maillages tétraédriques tridimensionnels existe et a les mêmes propriétés.

1.2.2.3. *Rajout d'un noeud dans une triangulation de Delaunay existante*

Il arrive qu'on désire rajouter un noeud à une triangulation de Delaunay et le relier aux noeuds existants de telle sorte que la nouvelle triangulation soit elle aussi de Delaunay. Cela nécessite la destruction des éléments voisins du noeud, puis la reconstruction d'un sous-maillage Delaunay à partir des noeuds libérés et du reste du maillage. On trouvera par exemple dans (Mavriplis, 1988) ou (Baker, 1988) le principe de l'algorithme de Bowyer, qui résoud ce problème avec un coût proportionnel au nombre d'éléments si ceux-ci sont rangés dans une structure arborescente.

1.3. Amélioration géométrique de maillages existants

1.3.1. Position du problème

On suppose disposer d'un maillage recouvrant un domaine, sans fautes inadmissibles mais avec des éléments dont la qualité est jugée insuffisante pour une analyse par éléments finis. Le problème est le suivant : améliorer la forme des éléments, sans recréer des fautes et sans trop modifier le nombre de noeuds et le nombre d'éléments. Le sens du mot "améliorer" est généralement pris comme rendre "les plus carrés possible" les quadrilatères et "les plus équilatéraux possible" les triangles ; il n'est pas fait référence à un critère de remaillage ou à un champ de tailles. Ce problème peut se traduire par la minimisation d'une fonction objective.

Deux notions peuvent être introduites :

- la "topologie optimale géométrique" contient les éléments les plus réguliers qu'il est possible de créer par changement de topologie des éléments d'un maillage donné, sans déplacer les noeuds ;
- le "semis de noeuds optimal géométrique" contient les éléments les plus réguliers qu'il est possible de créer par déplacement des noeuds d'un maillage donné, sans changer la topologie des éléments.

1.3.2. Techniques nécessitant un déplacement des noeuds

- *Barycentrage*

Une méthode simple et fréquemment utilisée est la technique du barycentrage à topologie constante. Chaque noeud est mis au centre de gravité du polygone constitué par l'union de tous les

éléments du maillage contenant ce noeud. Plusieurs itérations sont nécessaires pour obtenir un résultat satisfaisant.

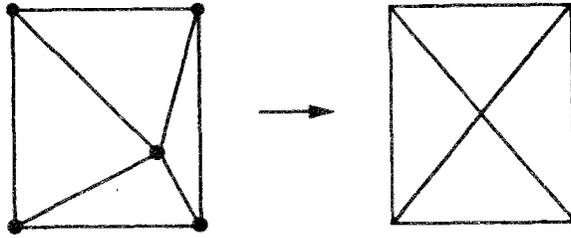


Fig. III-1-4. Principe du barycentrage

L'utilisation de nombreux barycentrages successifs tend à rendre un maillage uniforme ; il faut donc éviter d'abuser de cette technique pour améliorer un maillage créé par un MRCT. On peut aussi limiter le barycentrage aux éléments qui sont vraiment trop déformés (par exemples angles de moins de 20 degrés ou de plus de 120 degrés dans un triangle) en laissant tels quels les autres (barycentrage sélectif). Au bout de quelques itérations, tous les éléments auront une qualité bonne ou moyenne et un nouveau barycentrage sélectif ne modifiera plus aucun élément.

- *Approche de Jacquotte*

Jacquotte (1987) définit l'orthogonalité ORT et la régularité (smoothness) SM d'un élément d'un maillage de quadrilatères par

$$SM = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 \quad (\text{III.1.1})$$

$$ORT = (r_1 \cdot r_2)^2 + (r_2 \cdot r_3)^2 + (r_3 \cdot r_4)^2 + (r_4 \cdot r_1)^2 \quad (\text{III.1.2})$$

où les r_i sont les cotés successifs de l'élément.

Il serait possible de définir une fonction

$$F = \alpha SM + (1 - \alpha) ORT$$

mais l'auteur remarque que cette fonction n'a pas forcément de minimum correspondant à un maillage satisfaisant ; en particulier, elle prend mal en compte les éléments croisés.

Une autre fonction f est définie à partir de la transformation qui transforme le carré ou le cube unité de repère ξ en les éléments réels de repère x .

La fonction f est déduite des invariants du tenseur gradient TC de cette transformation

$$TC = \nabla x^T \cdot \nabla x$$

par la relation

$$f = k_1 (I_1 - 2J) + (k_2 - k_1) (J - 1)^2 \quad (\text{III.1.3})$$

avec $k_2 > k_1 > 0$ constantes assurant la convexité de la fonction dans le cas bidimensionnel ; $I_1 = \text{tr } TC$, $I_2 = \text{tr Cof } TC$, $I_3 = \det TC$ les invariants du tenseur TC ($\text{tr } TC$ désigne la trace du tenseur TC , et $\text{Cof } TC$ sa matrice des cofacteurs).

Toutes les démonstrations théoriques de convergence et de stabilité ne soient pas disponibles. L'expérience montre cependant que, même en partant d'un maillage initial inadmissible car comportant de nombreuses fautes, la minimisation de cette fonction par rapport aux coordonnées des

noeuds améliore le maillage ou le rend utilisable (fig. III-1-5). Le nombre d'itérations nécessaire à l'obtention d'un maillage correct peut atteindre plusieurs dizaines.

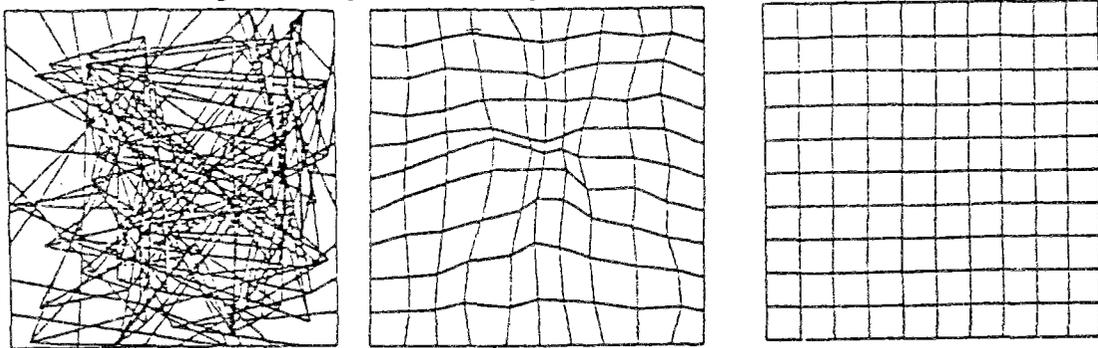


Fig. III-1-5. Amélioration du maillage au cours du processus itératif (d'après Jacquotte, 1987)

• *Approche de Bonomi*

Bonomi (1987) propose également une fonction FC décrivant la régularité d'un maillage. L'objectif est cette fois de déplacer un noeud au barycentre de ses voisins, mais ceci pour tous les noeuds à la fois. Cela revient à la recherche de la position d'équilibre d'un réseau de ressorts soumis à ses noeuds à des forces ponctuelles.

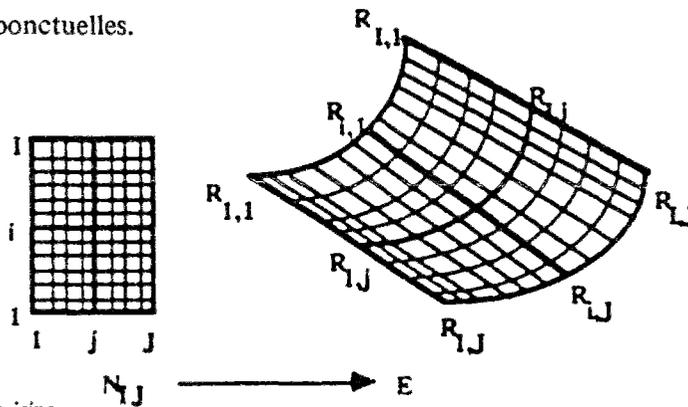


Fig. III-1-6. Noeud et ses voisins

Le maillage est supposé topologiquement rectangulaire à M colonnes et N lignes de points. Au point i,j on note $R_{i,j}$ le couple $(x_{i,j}, y_{i,j})$.

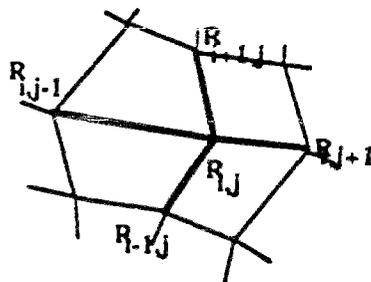


Fig. III-1-7. Notations relatives à un noeud

La fonction s'écrit au point (i,j) par

$$FC_{i,j} = \frac{1}{2} [\| R_{i+1,j} - R_{i,j} \|^2 + \| R_{i,j} - R_{i,j+1} \|^2 + \| R_{i,j} - R_{i-1,j} \|^2]$$

$$+ \left\| R_{i,j} - R_{i,j-1} \right\|^2 \quad (III.1.4)$$

et pour l'ensemble du maillage

$$FC = \sum_{i=2}^{M-1} \sum_{j=2}^{N-1} \frac{1}{2} \left[\left\| R_{i+1,j} - R_{i,j} \right\|^2 + \left\| R_{i,j} - R_{i,j+1} \right\|^2 \right] \\ + \sum_{j=2}^{N-1} \frac{1}{2} \left\| R_{2,j} - R_{1,j} \right\|^2 + \sum_{i=2}^{M-1} \frac{1}{2} \left\| R_{i,2} - R_{i,1} \right\|^2 \quad (III.1.5)$$

Cette fonction est polynomiale quadratique et admet un minimum unique.

La minimisation de (III.1.5) donne

$$\frac{\partial FC}{\partial R_{i,j}} = -F_{i,j} = 4(R_{i,j} - B_{i,j}) \quad (III.1.6)$$

avec $B_{i,j} = \frac{1}{4} (R_{i+1,j} + R_{i-1,j} + R_{i,j+1} + R_{i,j-1})$ position moyenne des 4 points voisins.

Le terme $F_{i,j}$ peut être interprété comme la force de rappel d'un ressort et l'expression (III.1.5) comme l'énergie potentielle d'un réseau de ressorts. La condition de stationarité $F_{i,j} = 0$ définit la solution du problème d'optimisation : Trouver les $R_{i,j}$ tels que l'on ait FC minimale.

La recherche de cet optimum est itérative et peut nécessiter quelques dizaines d'itérations.

1.3.3. Changement de topologie

En complément du barycentrage, ou seule, on utilise souvent la méthode du changement de topologie à position des noeuds constante, ce qui correspond à un changement de diagonale pour des triangles.



Fig. III-1-8. Changement de topologie

Talon (1987) étudie le cas des maillages bidimensionnels de triangles et montre que cette technique permet d'atteindre n'importe quelle topologie de maillage, donc *a fortiori* la topologie optimale géométrique. L'expérience montre qu'on atteint une topologie proche de l'optimum géométrique en ne permutant les diagonales que si on améliore les éléments modifiés, quitte à rater une amélioration plus forte en refusant une détérioration passagère de la qualité des éléments. En tridimensionnel, l'extension de cet algorithme par changement de facette est nettement moins efficace et l'auteur propose une amélioration du procédé.

1.4. Génération de maillages à partir d'un contour

La génération d'une rangée d'éléments triangulaires, pouvant ou non respecter une taille

d'éléments sur un contour donné, ne pose pas de gros problèmes si la taille éventuellement demandée est cohérente avec celle du côté du contour. Le principe est le même que celui des mailleurs frontaux. A partir de la première rangée d'éléments, les tailles ne sont plus imposées et le mailleur cherche seulement à raccorder les éléments entre eux, sans trop changer leur taille si c'est possible. L'application de cette méthode aux quadrilatères pose des problèmes supplémentaires, si on ne veut pas avoir de triangles dans le maillage. Le nombre d'éléments sur des côtés à raccorder ("en face" l'un de l'autre) doit vérifier certaines conditions.

1.5. Mailleurs tenant compte de critères de remaillage

1.5.1. Terminologie

A moins d'accepter de remailler manuellement, ce qui est actuellement difficilement envisageable dans un contexte industriel, les méthodes permettant d'obtenir de "bons" maillages reposent sur l'existence d'outils capables de générer un maillage fils à partir d'un maillage père et d'un critère de remaillage. Il ne s'agit plus de rendre les éléments plus proches de figures régulières partout dans le maillage, mais d'augmenter ou de diminuer localement la précision de l'approximation par ajout ou retrait de degrés de liberté.

Différentes formes de remaillage sont possibles et ont les dénominations suivantes :

- *La r-version* consiste à déplacer les noeuds d'un maillage père donné pour tenter de respecter le critère de remaillage. Le nombre de noeuds et d'éléments et leur type sont inchangés. Des précautions doivent être prises pour éviter que de trop grands déplacements ne créent des éléments croisés. La méthode permet aussi bien d'affiner que de rendre plus grossier le maillage père, mais dans un rapport relativement faible.

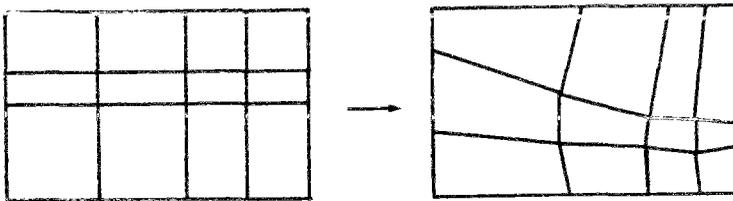


Fig. III-1-9. Principe de la r-version

L'inconvénient de cette méthode est que le maillage final dépend étroitement du maillage initial puisqu'il n'y a ni création de noeuds ou d'éléments ni changement de topologie. Un mauvais maillage de départ sera certes amélioré mais considérablement moins que si on avait la possibilité de faire des modifications plus profondes. Nous verrons plus loin que, dans le cas des quadrilatères, cette méthode garde un intérêt.

- *La r-version modifiée* est une généralisation de la r-version libérée des contraintes de la topologie initiale. On déplace toujours les noeuds du maillage initial selon un critère donné, cette fois sans contraintes de non-croisement d'éléments. Une fois les noeuds déplacés, on abandonne

totallement les éléments du maillage père et on reconstruit un maillage nouveau à partir du semis des points déplacés. Le nombre de noeuds reste inchangé mais la topologie et le nombre d'éléments varient. Les éléments générés sont les meilleurs pouvant être construits à partir du semis de points.

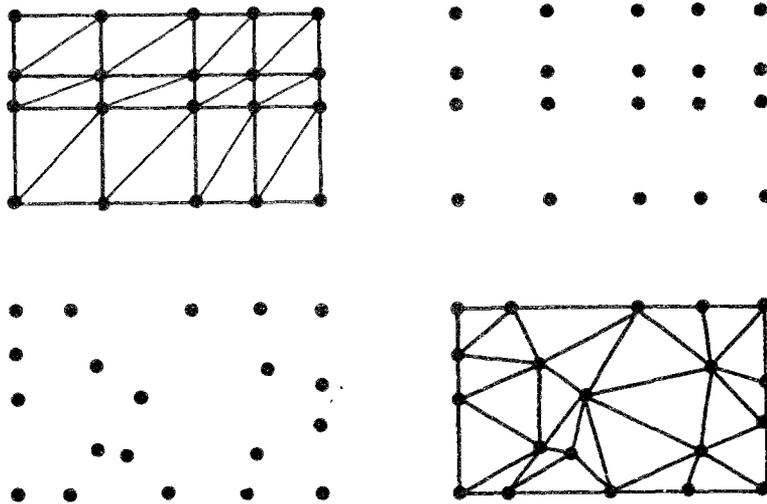


Fig. III-1-10. Principe de la r-version modifiée

La seule contrainte à laquelle reste soumise cette r-version modifiée est la limitation des espacements des noeuds. Les déplacements des noeuds ne sont plus contrôlés par la topologie initiale. Il peut arriver que deux noeuds deviennent quasi-confondus et donc créent au moins un élément plat. Quelques barycentrages sélectifs déplaçant les noeuds des éléments trop aplatis suffisent généralement à corriger les anomalies du maillage généré.

- La h-version consiste à changer localement la taille des éléments trop grands ou trop petits. Deux approches peuvent être suivies :
 - soit on ajoute des noeuds où il n'y en a pas assez, et ensuite on s'arrange pour y raccorder des éléments (par exemple par l'algorithme de Bowyer (cf. §III.1.2.2.3)) ;
 - soit on décide de diviser des éléments trop grands en éléments plus petits, par exemple en divisant un élément quadrangulaire en 4 sous-quadrilatères par ajout de 4 noeuds. L'ajout des noeuds peut être intérieur à l'élément ou sur ses frontières.

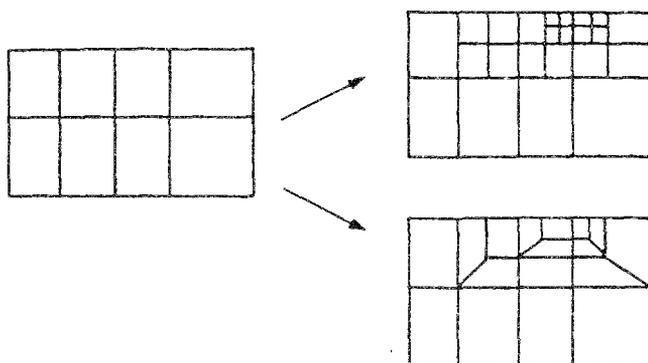


Fig. III-1-11. Principe de la h-version

Certains types de division sont interdits car, s'ils augmentent le nombre de noeuds et d'éléments, les mailles créées sont à chaque fois plus mauvaises que leurs parentes.

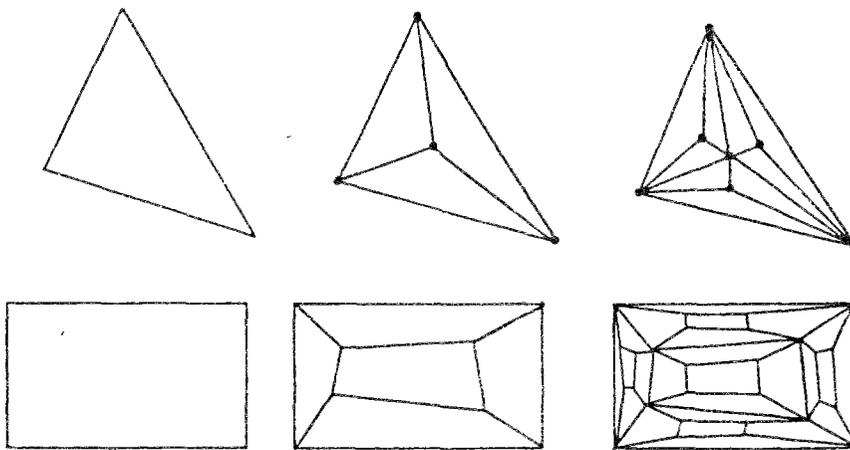


Fig. III-1-12. Mauvaises divisions d'un triangle et d'un quadrilatère

On peut vouloir générer des noeuds sur une frontière d'un élément A sans que l'élément B, adjacent à l'élément A par cette frontière, n'ait besoin d'être affiné. Le raccordement peut se faire soit en ajoutant malgré tout un noeud à B et en créant dans B le nombre minimal de sous-éléments reliés à ce nouveau noeud (fig III-1-13), soit en imposant à ce nouveau noeud de rester sur l'arête où il a été positionné (fig. II-3-3). Dans ce dernier cas, l'affinage d'un élément ne touche pas ses voisins.

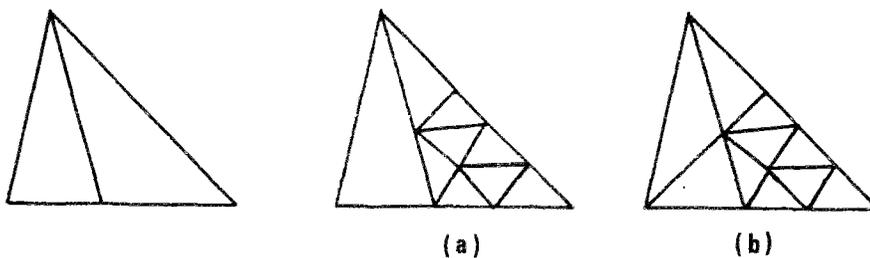


Fig. III-1-13. Division excédentaire d'un élément

La méthode est moyennement efficace et ne permet de diviser que dans des rapports de surface entiers supérieurs ou égaux à 2, par la division d'un élément en deux, trois, quatre ou plus éléments fils. A l'inverse, rendre plus grossier un maillage inutilement fin en supprimant des noeuds peut poser des problèmes de raccordement des noeuds restants. On peut toujours considérer l'ensemble de ces noeuds comme un semis de points à raccorder par une des méthodes citées au §III.1.2.2.2.

- *La h-version modifiée*, terme emprunté à Coffignal (1987), désigne la généralisation de la h-version à l'ensemble des éléments et en une seule fois. On sait quelles sont les tailles que devraient avoir les éléments du maillage fils. Plutôt que de tenter avec plus ou moins de bonheur un affinage par-ci et une suppression de noeuds par-là, on fait table rase du maillage père et on reconstruit un nouveau maillage tenant compte des tailles connues en tout point. La liberté de génération est

(presque) totale, il n'y a plus de rapport minimal ou maximal d'affinage. On peut générer soit directement des éléments respectant ces tailles, soit un semis de points séparés entre eux des tailles demandées et raccordés ensuite selon les méthodes du §III.1.2.2.2.

- La *p-version* consiste à augmenter le degré des fonctions de forme des éléments où on estime la précision insuffisante. De nouveaux degrés de liberté sont créés aux noeuds de ces éléments, qui peuvent ne pas exister dans leurs voisins. On peut éventuellement diminuer le degré des éléments où l'approximation est trop précise, sauf si leur degré est déjà minimal. La modification d'un élément ne touche pas ses voisins et est donc aisée.

- Enfin, on utilise aussi la *h-p version*, qui est un mélange de h-version classique et de p-version. La p-version pure a l'inconvénient d'avoir une erreur dépendant du maillage de départ, élevée si celui-ci est très mauvais. Il est donc judicieux d'améliorer d'abord le maillage, puis d'augmenter les degrés des éléments sur ce maillage amélioré. Les techniques de h-amélioration du maillage peuvent être assez grossières, la plus forte amélioration étant généralement de type p. Enfin, on peut envisager le cas de figure suivant : un code de calcul numérique dispose d'une bibliothèque d'éléments allant jusqu'à l'ordre p_{\max} . Le fait de porter le degré de tous les éléments du maillage initial de p_{actuel} à p_{\max} n'est pas suffisant pour atteindre la degré de raffinement souhaité. Il suffit alors de diviser les éléments puis d'augmenter leur degré.

- *Raffinement*

On utilise également le terme "raffinement" pour désigner divers procédés d'amélioration des maillages. Nous admettrons dans ce qui suit que ce terme implique que le maillage fils contient tous les degrés de liberté (donc tous les noeuds) du maillage père, plus de nouveaux. On peut raffiner par la h-version classique ou la p-version. Un raffinement uniforme équivaut à une augmentation identique du nombre de degrés de liberté pour tous les éléments (ce qui revient à diviser chaque élément en N nouveaux éléments en cas de h-version, ou à porter dans tous les éléments le degré du polynôme d'interpolation de p_1 à p_2 en p-version). Nous appelons raffinement sélectif un raffinement dans lequel seuls certains éléments sont améliorés.

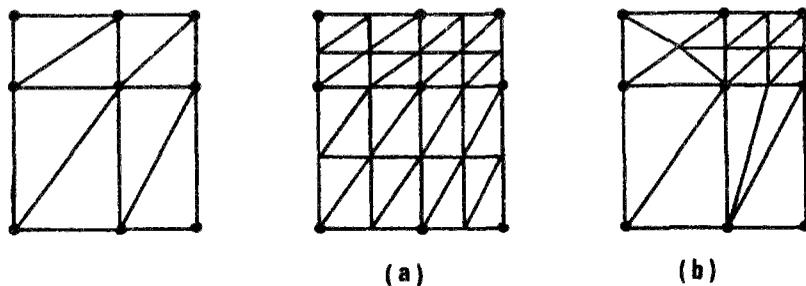


Fig. III-1-14. Raffinements uniforme (a) et sélectif (b)

Les suites de maillages obtenues par raffinement *uniforme* ont certaines propriétés, notamment de

convergence, qui seront discutées plus loin.

1.5.2. Techniques diverses d'amélioration de maillages

Nous décrivons rapidement quelques algorithmes qui tiennent compte d'un critère de remaillage mais qui ne sont pas des MRCT. La h-version ou la p-version ne posent aucune difficulté une fois que sont connus les endroits à raffiner.

Quelques-unes des méthodes vues au §III.1.3. sont transformables en de tels algorithmes. Il y avait une amélioration d'un maillage donné par minimisation d'une fonction, cette fonction étant minimale lorsque tous les éléments avaient une forme régulière. L'idée de base est de corriger la fonction pour qu'elle soit minimale lorsque les éléments ont la taille voulue, et accessoirement une forme pas trop mauvaise.

Jacquotte (1987) propose d'introduire dans sa fonction (III.1.3) un poids $w(x)$

$$f = k_1 (I_1 - 2J) + (k_2 - k_1) (w(x).J - 1)^2 \quad (\text{III.1.7})$$

Bonomi (1987) définit également un poids $w(R_{i,j})$ qui modifie la fonction locale (III.1.4) par

$$FC_{i,j} = \frac{1}{2} [w(R_{i+1,j}) || R_{i+1,j} - R_{i,j} ||^2 + w(R_{i,j+1}) || R_{i,j} - R_{i,j+1} ||^2 + w(R_{i-1,j}) || R_{i,j} - R_{i-1,j} ||^2 + w(R_{i,j-1}) || R_{i,j} - R_{i,j-1} ||^2] \quad (\text{III.1.8})$$

et les termes de force par

$$F_{i,j} = -\Gamma_{i,j} (R_{i,j} - B_{i,j})$$

avec $\Gamma_{i,j} = (w(R_{i+1,j}) + w(R_{i-1,j}) + w(R_{i,j+1}) + w(R_{i,j-1}))$

$$B_{i,j} = \frac{1}{\Gamma_{i,j}} (w(R_{i+1,j}) R_{i+1,j} + w(R_{i-1,j}) R_{i-1,j} + w(R_{i,j+1}) R_{i,j+1} + w(R_{i,j-1}) R_{i,j-1}) \text{ est la}$$

position moyenne pondérée des 4 points voisins.

Des exemples de modification d'un maillage uniforme par cette méthode, qui ne fait que déplacer les noeuds sans changer la topologie ou créer de nouveaux éléments, montrent une réduction de 50% des erreurs.

1.5.3. Maillages respectant un champ de tailles d'éléments (ou MRCT)

1.5.3.1. Principe

On admet qu'un champ de tailles d'éléments a été déterminé en tout point de la structure. Ce champ de tailles peut être défini sur un maillage d'arrière-plan construit sur un domaine quelconque Ω_b contenant le domaine Ω à mailler. Le maillage doit, dans la mesure du possible, respecter le champ de tailles sans générer d'éléments trop mauvais. Les meilleurs triangles, au sens des maillages éléments finis, sont les triangles équilatéraux, et les meilleurs quadrilatères sont les carrés. La taille d'un élément quelconque désignera le côté du triangle équilatéral ou du carré de même surface.

Le problème du maillage respectant un champ de tailles est complexe à résoudre et n'est pas encore totalement au point en tridimensionnel. En bidimensionnel, plusieurs algorithmes sont disponibles pour des triangles. Pour des quadrilatères, le problème est encore plus difficile car le changement de

densité du maillage est moins simple que pour des triangles. Le principe du raccordement est exposé sur la figure suivante

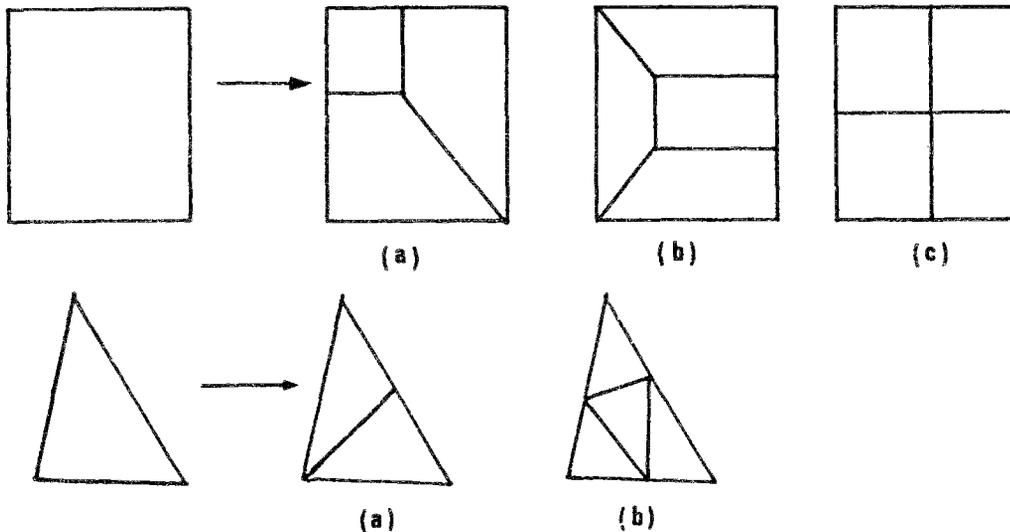


Fig. III-1-15. Affinage des quadrilatères et des triangles

On peut toujours faire un maillage de triangles par un MRCT puis ensuite relier deux à deux le plus possible de triangles pour en faire des quadrilatères. Il pourra rester quelques triangles non regroupables dans les zones d'affinage. Comme l'angle au sommet optimal des quadrilatères, $\pi/2$, est assez différent de l'angle optimal des triangles, $\pi/3$, on peut utiliser les techniques vues au §III.1.3, comme le barycentrage, pour améliorer les éléments obtenus par le groupage.

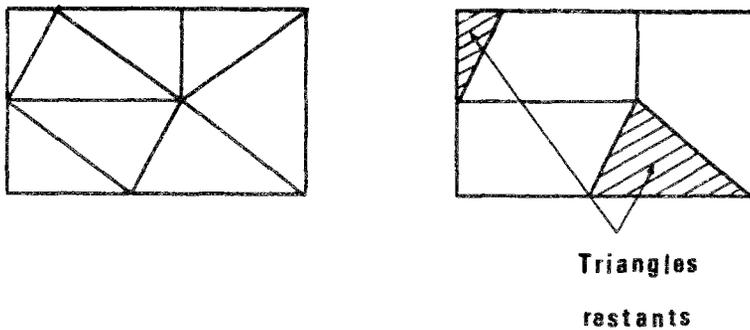


Fig. III-1-16. Schéma du groupage

Les algorithmes vus au §III.1.4, acceptant une densité d'éléments sur un contour fermé et se débrouillant pour mailler l'intérieur, ne peuvent être considérés comme des MRCT. Ils permettent de générer semi-manuellement un maillage "intelligent", à partir d'un découpage en blocs de la structure fait par l'utilisateur. Ce dernier donne les tailles sur les côtés des blocs et logiquement choisit les blocs pour permettre d'y obtenir à peu près les tailles désirées. L'automatisation de cette procédure ne semble pas évidente, il faudrait adapter la taille des blocs à celle des éléments pour que la génération à l'intérieur du bloc, qui n'est pas contrôlée et n'a pas de contrainte de taille, respecte grossièrement le champ de tailles demandé.

1.5.3.2. Algorithme de Carnet

Carnet (1978) a présenté un des premiers MRCT. L'algorithme utilisé est du type frontal.

1.5.3.3. Algorithme de Coffignal

Coffignal (1987) a développé et utilisé dans le cadre de sa thèse un MRCT. Ce mailleur, prêté par son auteur, a également généré tous les maillages que ce travail a nécessités.

Le domaine bidimensionnel à mailler est découpé en volumes-clés triangulaires ou quadrilatéraux. Ce découpage n'est nécessaire que pour la définition géométrique du domaine et ne dépend pas du champ de tailles. Les volumes-clés sont séparés de leurs voisins ou de l'extérieur par des faces-clés (des arêtes en 2D), qui sont elles-mêmes générées par des points-clés. Le champ de tailles peut être entré soit aux points-clés, soit en chaque élément d'un maillage père défini sur le même domaine.

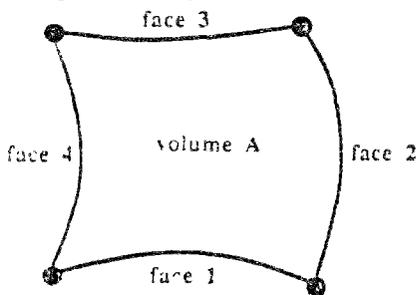


Fig. III-1-17. Volume-clé

Chaque volume-clé est maillé séparément en commençant par sa périphérie. Dans le cas de volumes adjacents, la face-clé commune contient les mêmes noeuds et il n'y a pas de problème de raccordement entre les volumes. On examine le nombre de noeuds à positionner sur chacune des faces-clés d'un volume. Ce nombre dépend évidemment du champ de tailles et est ajusté à la longueur de l'arête afin d'obtenir un nombre entier de côtés d'éléments.

Le mailleur n'utilise pas de méthode frontale. Il est adapté à la création d'un nombre réduit d'éléments dans un volume de forme simple. Tant qu'il y a plus d'éléments sur chaque face que le nombre maximum admis par l'algorithme de construction des éléments, le volume-clé est découpé en deux sous-volumes selon le schéma suivant

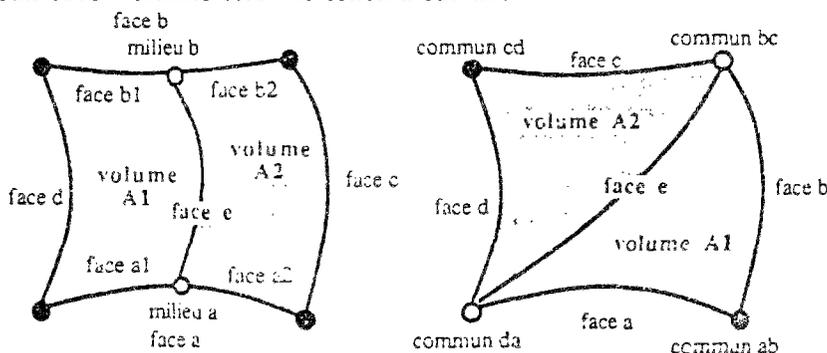


Fig. III-1-18. Séparation en sous-volumes (d'après Coffignal, 1987)

et un nouvel examen du nombre de noeuds par côté des nouveaux sous-volumes est fait.

Une fois que le sous-volume a atteint la taille nécessaire, une bande de faces d'éléments est générée

à partir d'un de ses côtés. Puis d'autres bandes sont construites jusqu'à atteindre le côté opposé du sous-volume. Une adaptation est généralement nécessaire pour achever le raccordement.

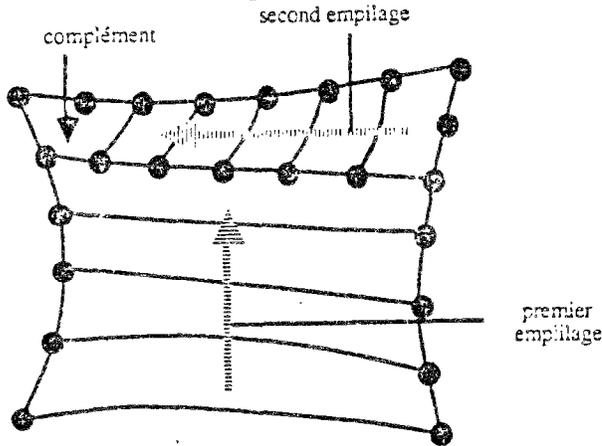


Fig. III-1-19. Découpage en bandes (d'après Coffignal, 1987)

Il est ensuite conseillé de faire quelques barycentrages sélectifs et changements de diagonale, pour réduire le nombre d'éléments allongés. L'auteur utilise un faible nombre de barycentrages et de changements de diagonale. Notre expérience assez poussée de l'utilisation de ce programme nous a conduit à faire environ 20 à 30 barycentrages, et 50 à 100 changements de diagonale.

1.5.3.4. Algorithme de Zienkiewicz

Le dernier mailleur présenté, développé par Peraire, Peiro, Morgan et Zienkiewicz (1987) et utilisé notamment en mécanique des fluides, est capable non seulement de respecter un champ de tailles δ mais aussi un champ d'inclinaisons α et un champ d'allongements s . Les triangles ne sont plus quasi-équilatéraux. La taille correspond à l'espacement des noeuds, l'allongement est le rapport du grand côté sur la petite hauteur et l'inclinaison représente l'orientation du triangle dans le repère global. L'algorithme de maillage est du type frontal.

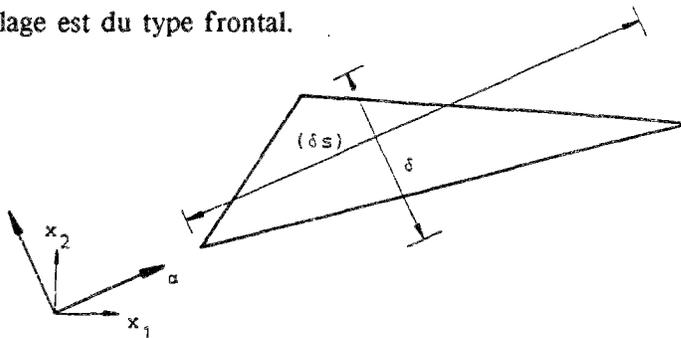


Fig. III-1-20. Allongement et inclinaison d'un triangle (d'après Zienkiewicz, 1987)

Il peut être utile de générer ce type d'éléments si on connaît, par exemple par un calcul préliminaire, le sens de variation d'une fonction. Les éléments doivent être fins dans le sens de la pente mais pourraient être allongés dans le sens de la courbe de niveau, où il n'y a pas de variation de la fonction. Cette façon de faire est inhabituelle en mécanique des solides mais semble utilisée en mécanique des fluides, par exemple pour des calculs d'ondes de choc.

Le champ de tailles est donné par un maillage d'arrière-plan défini sur un domaine Ω_b contenant le domaine étudié Ω . La variation des tailles est celle des fonctions de forme des éléments du maillage d'arrière-plan et s'obtient par (II.3.1).

La géométrie est donnée par un ou plusieurs contours orientés, les contours étant définis par des points clés et interpolés entre ces points par des splines cubiques.

L'idée de base du MRCT est de prendre en compte les 3 champs de tailles, d'allongements et d'inclinaisons par une transformation linéaire T définie par

$$T = \delta (s.\alpha \otimes \alpha + \alpha.\perp \otimes \alpha.\perp)$$

où \otimes est le produit tensoriel et $\alpha.\perp$ la direction orthogonale à α .

La transformation T^{-1} transforme localement le plan réel en un plan où l'espacement est égal à l'unité et l'allongement égal à 1.

L'espacement δ d'un noeud dans la direction d'une courbe est calculé par

$$\delta^2 = \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{t}^*$$

où \mathbf{t}^* est la transformation par T^{-1} du vecteur unitaire \mathbf{t} tangent à la courbe au point étudié.

La répétition de ce calcul en plusieurs points d'une courbe permet de calculer une valeur approchée du nombre N_p de points qui doivent y être générés par

$$N_p = \int_0^1 \frac{1}{\delta} ds$$

et ce nombre est rendu entier par adaptation des espacements. Les points sont générés sur le front.

La génération des éléments à partir des noeuds est faite de manière frontale : un élément est créé à partir de deux noeuds présents sur la frontière et d'un troisième placé à une distance donnée par les transformations précitées. Une fois cet élément créé, la frontière est actualisée à ses côtés et le volume de l'élément est rejeté du domaine restant à mailler.

Chaque élément allongé et incliné est généré comme un triangle équilatéral dans l'espace transformé par T^{-1} . Dans cet espace, la taille souhaitée est égale à 1.

On part (dans l'espace transformé) d'un segment reliant deux points voisins A et B du front, qui constituera la base du futur élément. Il peut être avantageux de choisir le plus petit segment parmi tous ceux disponibles sur le front. Une distance δ_1 doit être déterminée en fonction des 3 champs donnés pour achever le nouveau triangle.

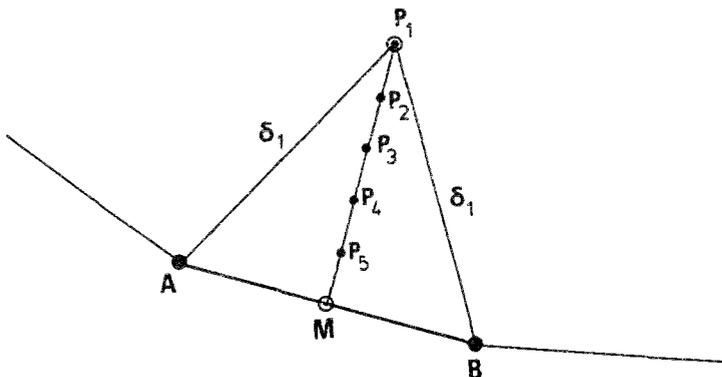


Fig. III-1-21. Détermination de la distance δ_1

La valeur de δ_1 est déterminée par

$$\delta_1 = 1 \text{ si } 0.55AB < 1 < 2AB$$

$$\delta_1 = 0.55AB \text{ si } 0.55AB > 1$$

$$\delta_1 = 2AB \text{ si } 2AB < 1$$

les valeurs $0.55AB$ et $2AB$ sont déterminées par l'expérience de l'auteur et évitent les éléments trop déformés. On peut choisir d'autres valeurs. Un point P_1 est défini à partir de A , B et δ_1 .

On détermine ensuite tous les noeuds du front qui sont contenus dans un cercle centré sur P_1 et de rayon δ_1 . Ces points sont mis dans une liste ordonnée en commençant par le plus proche de P_1 .

Quatre noeuds P_2 , P_3 , P_4 et P_5 sont disposés à intervalles réguliers sur le segment P_1M . Les points P_1 à P_5 sont rajoutés en fin de la liste contenant déjà les noeuds du front inclus dans le cercle.

Le point final à retenir pour générer le triangle dans l'espace transformé est le premier point de la liste précédente qui satisfait les conditions suivantes :

- le triangle généré avec ce point a une surface positive
- les côtés générés ne coupent aucun des côtés existants du front.

Le nouveau triangle et l'éventuel nouveau noeud sont ajoutés au maillage et le front est actualisé.

Cette méthode très générale n'a qu'une lacune : elle ne sait pas générer de quadrilatères. Son utilisation dans (Zienkiewicz, 1987) dans le cadre des ondes de choc en mécanique des fluides autorise une variation des tailles d'au moins 1 à 200. Un exemple de génération de maillages allongés est donné figure III-1-22.

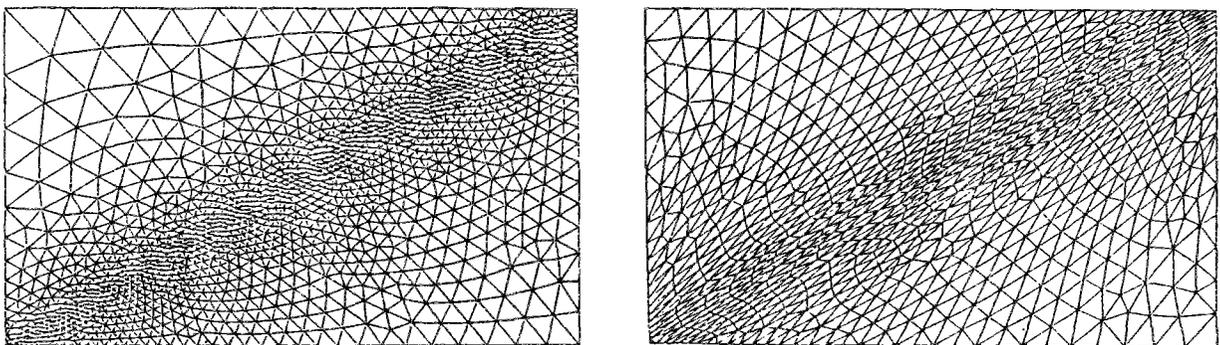


Fig. III-1-22. Exemples de maillage généré par cet algorithme (d'après Zienkiewicz, 1987)

Une généralisation de cet algorithme est présentée dans le cas tridimensionnel. Ce serait, à notre connaissance, le seul MRCT adapté aux problèmes de ce type. Un maillage bidimensionnel est d'abord généré sur les faces latérales du volume par le MRCT précédemment décrit, puis un maillage tridimensionnel à l'intérieur par le MRCT 3-D. Les auteurs remarquent que deux opérations deviennent coûteuses lorsque le nombre d'éléments croît :

- la recherche de la taille souhaitée à partir du maillage donnant le champ de tailles
- la recherche du point le plus proche dans le front.

Un algorithme de classement par arbres est implémenté afin de réduire l'ordre de grandeur du nombre d'opérations nécessaires de N^2 à $N \log N$, N étant le nombre d'éléments du maillage père où

sont définies les tailles, les allongements et les inclinaisons.

Un exemple de maillage de la peau d'un solide est décrit mais aucun exemple de maillage 3D généré par cet algorithme n'est présenté dans (Zienkiewicz, 1987).

Un logiciel industriel de maillage respectant des tailles d'éléments, des aplatissements et des inclinaisons en divers points d'un domaine, a été récemment mis sur le marché. Ce mailleur est capable de générer des maillages composés uniquement de quadrilatères. Il est toutefois probable que ces maillages respectent moins bien les tailles demandées, car la génération de quadrilatères de taille variable est moins aisée que la génération de triangles.

En conclusion, on peut dire qu'il existe maintenant des mailleurs efficaces dont il n'est pas nécessaire de contrôler manuellement les résultats. Des progrès sont encore à faire, notamment pour les MRCT en tridimensionnel. Une des tendances à venir du calcul de structures est la transparence totale de l'étape du maillage. L'utilisateur passera directement de la géométrie, créée par un logiciel de CAO, à la visualisation des champs d'efforts internes sans savoir quel maillage a été employé. Des codes industriels permettent cette approche mais gardent néanmoins possible la visualisation du maillage pour des raisons "psychologiques".

1.6. Techniques de transfert des résultats d'un maillage père au maillage fils

La recherche d'un maillage fils tiré des résultats calculés sur un maillage père plus grossier peut conduire à abandonner les résultats du père et à recalculer complètement la structure sur le maillage fils. Il peut également être intéressant de conserver les résultats du maillage grossier pour amorcer le calcul précis (cf. §II.4.4.4). Dans un calcul non linéaire, la qualité de la solution approchée peut se dégrader au cours du temps. On peut souhaiter modifier la discrétisation afin d'avoir une erreur plus faible, sans pour autant refaire les calculs pour les pas de temps précédents où l'erreur était acceptable. Une large classe de calculs non linéaires, notamment en mécanique des fluides, conduit à des déplacements si grands que la conservation du maillage père est virtuellement impossible tout au long du chargement et que des remaillages successifs sont nécessaires.

Dans tous les cas présentés ci-dessus, le transfert des résultats d'un maillage père vers un maillage fils doit être fait. Ce problème peut sembler secondaire et sans difficulté. En fait, une trop grande perte de précision lors d'un transfert ôte une partie de l'intérêt d'un remaillage destiné à contrôler l'erreur, et amène à mailler trop finement au départ lorsque les changements de géométrie imposent des remaillages. Zienkiewicz et Craig (1986) remarquent que le coût de ce transfert peut être élevé. Zienkiewicz (1987) utilise une technique arborescente pour réduire le coût de ce transfert (cf. §III.1.5.3). Des algorithmes améliorés de transfert sont présentés par exemple dans (Chou, 1988), (Meltz, 1987). Coffignal (1987) utilise un procédé assez simpliste mais qui ne semble pas trop mauvais au vu des résultats obtenus sur les maillages fils. Le transfert d'une donnée à un noeud du maillage fils se fait en prenant la valeur au noeud du maillage père le plus proche.

Dans ce travail, aucun transfert de résultats d'un maillage à un autre n'a été programmé, c'est pourquoi nous ne nous étendons pas trop sur ces techniques. Il nous a cependant semblé bon d'en signaler la difficulté.

2. ETUDE DES ERREURS

Comme nous allons être amenés à parler longuement des erreurs, la première chose à faire est de rappeler leur définition. Le terme est utilisé pour désigner des entités très différentes selon les auteurs. Nous allons exposer certaines définitions, en insistant sur celles utilisées dans ce travail.

2.1. Erreurs entre un champ exact et un champ approché

2.1.1. Généralités

On suppose l'existence, sur un domaine Ω , d'un champ de valeurs $v(\mathbf{x}, t)$. Les valeurs v peuvent être scalaires, vectorielles ou tensorielles. On ne s'intéresse pas pour l'instant à la nature du champ v mais il peut correspondre à la solution d'un problème mathématique bien posé, pour lequel il existe une solution unique. Ce problème peut être résolu par diverses méthodes, analytiques quand c'est possible, ou numériques ; dans ce dernier cas le champ solution v_h est une approximation de la solution exacte v_{ex} . Ce champ v_{ex} peut être un champ de déplacements, de température, de pression, de concentration...

On suppose qu'il est possible de définir une fonction $\phi : v \rightarrow \phi(v) \in \mathbf{R}^+$, qui permet dans tous les cas de calculer un équivalent scalaire positif à partir de v en tout point de Ω . Si v est un scalaire, il suffit de poser $\phi(v) = |v|$.

Le champ ϕ , calculé à partir de v , est supposé de carré sommable ainsi que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n . Ce champ et les champs dérivés sont définis presque partout dans Ω et à tous les temps d'un intervalle d'étude $[t_0, t_f]$.

Il est possible de calculer une norme du champ ϕ à un temps donné et sur n'importe quel domaine Ω_0 inclus dans Ω . Cette norme (de type L^2) est définie par

$$|| \phi ||^2_{\Omega_0, t} = \int_{\Omega_0} \phi^2(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (\text{III.2.1})$$

et on peut aussi définir la norme L^∞ par

$$||| \phi |||_{\Omega_0, t} = \text{Sup}_{\Omega_0} \phi(\mathbf{x}, t) \quad (\text{III.2.2})$$

On suppose maintenant connaître à la fois, sur le domaine Ω et à tout instant, la valeur exacte v_{ex} du champ v et sa valeur approchée v_h calculée par une méthode numérique, ou mesurée expérimentalement, ou obtenue par toute autre méthode.

L' "erreur" entre les champs v_{ex} et v_h doit être définie. On distingue plusieurs familles d'erreurs :

- les erreurs locales ou "ponctuelles", valables en un point de Ω ;
- les erreurs parfois appelées locales, mais calculées sur un sous-domaine de "faible taille" inclus dans Ω ;
- les erreurs globales, correspondant à une norme sur Ω de la différence entre les champs exact et approché ;
- les erreurs instantanées ou au contraire "enveloppes", où cette fois l'on étudie une erreur (locale ou globale) à un seul temps d'un processus d'évolution ou sur la totalité de ce processus ;
- les erreurs absolues ou au contraire relatives, suivant qu'on s'intéresse au module de l'erreur, ou au rapport entre ce module et le module de la solution exacte.

Nous notons Δv la différence entre une valeur exacte v_{ex} et une valeur approchée v_h . La mesure de cette erreur sur un domaine Ω calculée par (III.2.1) sera notée indifféremment $\|\Delta v\|_{\Omega}$ ou $\|\Delta\phi\|_{\Omega}$, bien qu'en principe la seconde notation soit la seule correcte. En effet, dans la majorité des cas, on vérifie que

$$\phi_{ex} - \phi_h = \phi(v_{ex}) - \phi(v_h) \neq \phi(\Delta v) = \phi(v_{ex} - v_h)$$

Nous utiliserons la notation $\Delta\phi$ pour désigner $\phi(\Delta v)$ et non pour $\phi_{ex} - \phi_h$.

2.1.2. Erreurs locales ponctuelles

L'erreur ponctuelle est l'erreur sur la quantité v en un point unique de Ω ; il n'y a pas d'intégration sur un quelconque sous-domaine. Les différents types d'erreurs ponctuelles utilisées dans la suite de ce travail sont maintenant présentés.

2.1.2.1. Erreur ponctuelle absolue

Cette erreur est calculée en un point par

$$e_{p1}(\mathbf{x}, t) = \phi[\Delta v(\mathbf{x}, t)] \quad (\text{III.2.3})$$

Elle peut être illimitée si la valeur exacte est illimitée au point considéré et si la valeur approchée est finie.

2.1.2.2. Erreur ponctuelle normée

L'erreur ponctuelle normée vaut

$$e_{p2}(\mathbf{x}, t) = \frac{\phi[\Delta v(\mathbf{x}, t)]}{\phi_0} \quad (\text{III.2.4})$$

et correspond à la division de l'erreur ponctuelle absolue par une valeur de référence ϕ_0 . Cette valeur est représentative de la quantité ϕ et indépendante de la solution du problème traité. Par exemple, pour un champ de contraintes, ϕ_0 peut être la limite d'écoulement ; pour un champ de pressions, la pression atmosphérique, etc.

Le sup de cette erreur sur le domaine Ω correspond à une norme de l'erreur de type L^∞ . C'est cette valeur que nous désignerons par e_p dans la suite de ce texte.

L'inconvénient de cette erreur est de ne pas tenir compte du niveau atteint par le champ exact sur Ω . Si le problème mathématique est linéaire et si on multiplie par 10 les données d'un exemple en

conservant les autres paramètres du calcul approché, l'erreur normée sera multipliée par 10.

L'erreur ponctuelle (absolue ou normée) peut par exemple être utilisée dans un dimensionnement.

Admettons qu'un règlement interdise à une quantité $\phi(v)$ (par exemple une contrainte équivalente) de dépasser localement un seuil ϕ_s . On suppose pour simplifier que $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$.

- Si l'équivalent maximal trouvé lors de l'analyse est $\phi_{h_{\max}}$ et que l'erreur ponctuelle maximale est $e_{p_{\max}}$, on est sûr de vérifier le règlement si $\phi_{h_{\max}} + e_{p_{\max}} \leq \phi_s$.
- On suppose maintenant que $\phi_{h_{\max}} + e_{p_{\max}} > \phi_s$. Tant que $e_{p_{\max}} < \phi_s$, on ne peut rien dire. On ne sait pas en effet où se trouve le point qui a la plus grande erreur, et notamment s'il est proche du point où la quantité ϕ_h est la plus grande.
- Si $e_{p_{\max}} > \phi_s$, il est certain que le règlement n'est pas vérifié.

2.1.2.3. Erreur ponctuelle relative

L'erreur ponctuelle relative est donnée par

$$e_{p3}(\mathbf{x}, t) = \frac{\phi[\Delta v(\mathbf{x}, t)]}{\phi[v_{\text{ex}}(\mathbf{x}, t)]} \quad (\text{III.2.5})$$

On pourrait croire que cette erreur constitue l'estimation de l'exactitude locale de la solution approchée. Elle amène plusieurs remarques.

Remarque 1. Du fait que cette erreur est relative, elle peut être grande alors que le module de l'erreur absolue et de la valeur exacte sont très faibles devant une quantité de référence comme ϕ_0 . Le pire des cas est celui où $\phi(v_{\text{ex}})$ est nul ; on ne peut plus définir d'erreur relative par (III.2.5). Pour éviter de tels problèmes, on peut décider de ne pas calculer d'erreur relative lorsque la norme du champ exact est inférieure à une certaine valeur.

Remarque 2. La quantité exacte est une valeur locale d'un champ exact défini sur Ω . Ce champ exact peut avoir une variation perturbée dans l'espace et passer par zéro ou par des valeurs faibles par rapport aux mêmes valeurs dans le reste du domaine. Cela peut conduire à une erreur relative locale élevée non significative au voisinage de ces points.

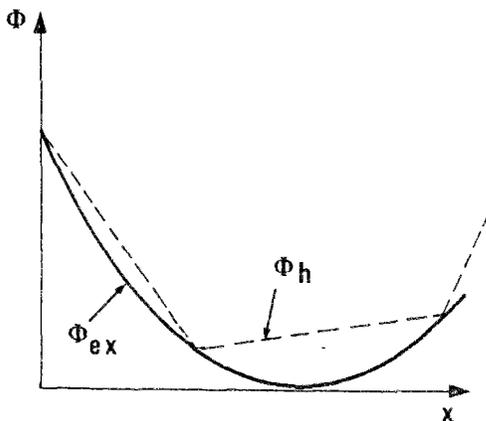


Fig. III-2-1. Evolution dans l'espace des quantités exacte et approchée (cas monodimensionnel)

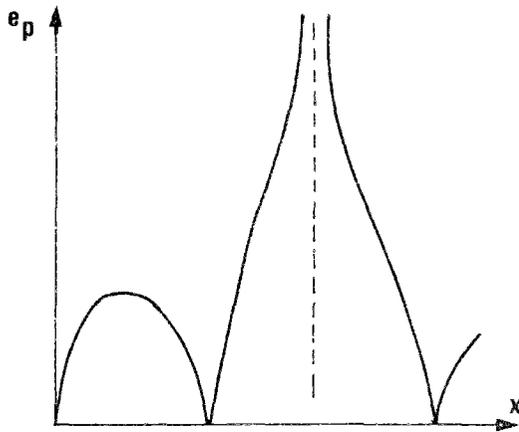


Fig. III-2-2. Erreur relative ponctuelle correspondante

Remarque 3. Le champ exact peut aussi évoluer dans le temps. Dans (III.2.5), on divise par la valeur exacte correspondante au même temps. Il peut se produire, si l'évolution dans le temps de $\phi(v_{ex})$ se rapproche puis s'éloigne de zéro, qu'au voisinage de la valeur minimale, l'erreur relative devienne élevée pour redécroître aussitôt. Le phénomène est semblable à celui décrit dans la Remarque 2, mais les évolutions sont dans le temps et non plus l'espace.

L'erreur relative ponctuelle, étroitement tributaire des variations des champs dans l'espace et le temps, n'a pas fait l'objet de développement dans ce travail.

2.1.3. Erreurs globales sur un domaine Ω

On s'intéresse dans cette partie aux différentes façons de définir une erreur de type "global", correspondant plus ou moins à une "moyenne" sur un domaine spatial Ω . On ne prend pas ici en compte une éventuelle évolution dans le temps des champs, on suppose les valeurs de v_{ex} et v_h fixées. Le champ v_h peut être connu en tout point de Ω ou en quelques points caractéristiques. Dans ce dernier cas, on fait l'hypothèse qu'il est possible de trouver les valeurs de ϕ_h en tout point par extrapolation des valeurs discrètes connues. Cette extrapolation introduit une certaine erreur qui est indiscernable de l'erreur globale entre ϕ_{ex} et ϕ_h telle qu'elle va être définie. Elle se retrouve par exemple dans le calcul des erreurs sur les contraintes en élastoplasticité (cf. §II.4.1).

Dans la mesure du possible, il faut éviter toute approximation du champ exact v_{ex} (par exemple par lissage), aussi bien dans l'espace que dans le temps. L'erreur étant calculée par différence entre les deux quantités voisines v_{ex} et v_h , une mauvaise estimation de la première quantité peut fausser complètement cette différence. La valeur de $\|v_{ex}\|$ serait aussi mal estimée mais les conséquences (sur les erreurs relatives) en seraient moins graves.

Un bon (mais coûteux) principe est de considérer qu'un champ exact est supposé connu à tout endroit et à tout instant où on peut avoir besoin de sa valeur.

2.1.3.1. Erreur globale absolue

L'erreur globale absolue instantanée au temps t , notée $e_{1\Omega}$, est définie comme la norme de la

différence entre v_{ex} et v_h calculée sur le domaine Ω à ce temps :

$$e_{1\Omega}^2 = \|\Delta v\|_{\Omega,t}^2 = \int_{\Omega} \phi^2[v_{\text{ex}}(\mathbf{x}, t) - v_h(\mathbf{x}, t)] d\Omega = \int_{\Omega} \phi^2[\Delta v(\mathbf{x}, t)] d\Omega \quad (\text{III.2.6})$$

autrement dit l'"intégration" sur Ω de l'erreur ponctuelle absolue e_{p1} . Le terme "intégration" doit être

pris au sens $e_{\Omega}^2 = \int_{\Omega} e_p^2 d\Omega$.

L'intégration doit-elle être faite sur Ω ou Ω_h ? En général, ϕ_h n'est connu que sur Ω_h . Pour plus de simplicité, on retient Ω_h lorsque ces deux domaines sont distincts, et s'il le faut on prolonge ϕ_{ex} par continuité de Ω à Ω_h .

L'erreur globale absolue est une quantité dimensionnée qui dépend du domaine Ω , du champ v et du temps t . Cela fait trop de termes variables et ne permet pas de comparer par exemple les erreurs pour deux champs différents sur le même domaine, ou pour des domaines différents. On peut chercher plusieurs façons de rendre cette erreur moins dépendante des données du problème. Les erreurs normée et relative peuvent répondre à cette attente.

2.1.3.2. Erreur globale normée

L'erreur globale absolue normée instantanée est définie par

$$e_{2\Omega} = \frac{\|\Delta v\|_{\Omega}}{\|v_0\|_{\Omega}} = \left[\frac{\int_{\Omega} \phi^2[\Delta v] d\Omega}{V_{\Omega} \cdot \phi_0^2} \right]^{1/2} \quad (\text{III.2.7})$$

où V_{Ω} est le volume du domaine Ω et ϕ_0 une valeur caractéristique de $\phi(v)$ (cf. §III.2.1.2.2). Cette expression revient à "intégrer" (au sens du §III.2.1.3.1) sur Ω l'erreur ponctuelle normée donnée par (III.2.4).

Comme pour l'erreur ponctuelle normée, cette erreur ne tient pas compte du niveau atteint par le champ exact sur Ω . Inversement, comme elle tient compte de l'ordre de grandeur des erreurs par rapport à la référence ϕ_0 , elle peut être préférée à une erreur relative pour justifier un dimensionnement dans les cas industriels.

2.1.3.3. Erreur globale relative instantanée

On fait toujours l'hypothèse que les champs v_{ex} et v_h sont connus à un seul temps. L'erreur globale absolue est calculée. L'erreur relative instantanée est définie par

$$e_{3\Omega}(t) = \frac{\|\Delta v(t)\|}{\|v_{ex}(t)\|} = \left[\frac{\int_{\Omega} \phi^2[\Delta v(x, t)] d\Omega}{\int_{\Omega} \phi^2[v_{ex}(x, t)] d\Omega} \right]^{1/2} \quad (III.2.8)$$

et consiste à diviser la norme de la différence entre les deux champs, par la norme du champ exact. Il ne s'agit généralement pas de l'"intégration" sur Ω de l'erreur ponctuelle relative (III.2.5).

Cette erreur relative est la plus utilisée dans les travaux actuellement menés sur les calculs d'erreurs ou d'estimateurs d'erreurs entre les solutions exactes de calculs numériques, généralement inconnues, et les solutions approchées. Le cadre le plus courant de ces travaux étant l'élasticité, des solutions pour lesquelles la détermination de $\|v_{ex}\|$ est aisée sont connues et servent généralement de benchmarks aux auteurs.

Les Remarques 1 et 3 du §III.2.1.2.3 s'appliquent aux erreurs relatives globales.

2.1.3.4. Second type d'erreur globale relative

Ici, les champs v_{ex} et v_h sont connus sur un intervalle $[t_0, t_f]$. A un temps t_k de cet intervalle, l'erreur absolue $\|\Delta v(t)\|$ est connue. On souhaite définir une erreur relative qui tienne compte de l'évolution du champ exact pour $t \leq t_k$. La façon la plus simple est de choisir la valeur maximale de $\|v_{ex}(t)\|$ pour $t \leq t_k$:

$$e_{4\Omega}(t) = \left[\frac{\int_{\Omega} \phi^2[\Delta v(x, t)] d\Omega}{\text{Sup}_{\tau \leq t} \left[\int_{\Omega} \phi^2[v_{ex}(x, \tau)] d\Omega \right]} \right]^{1/2} \quad (III.2.9)$$

Les problèmes cités à la Remarque 3 du §III.2.1.2.3 sont éliminés si la quantité exacte est plus élevée aux temps précédents. Cela revient à minorer l'importance des erreurs obtenues lorsque cette quantité est faible.

Cette erreur $e_{4\Omega}$ pourra être appelée "erreur relative en sup" pour la distinguer de l'erreur relative instantanée $e_{3\Omega}$.

2.1.4. Erreurs élémentaires

La connaissance de l'erreur globale n'est en fait que celle de la moyenne de l'erreur sur le domaine tout entier. En certains points de celui-ci, elle peut être plus faible et en d'autres nettement plus élevée. L'erreur ponctuelle est définie en tout point, ce qui est un avantage si on cherche ses bornes mais un inconvénient si on veut par exemple chercher les éléments d'un maillage qui "contribuent" le plus à l'erreur globale. L'erreur élémentaire permet cette recherche et est donc plutôt

complémentaire de l'erreur ponctuelle. Elle ne peut pas être illimitée, contrairement à l'erreur ponctuelle, car le champ exact ϕ_{ex} est supposé de carré sommable.

Les différents types d'erreurs élémentaires utilisées dans la suite de ce travail sont maintenant présentés.

2.1.4.1. Erreur élémentaire absolue

L'erreur élémentaire absolue pour l'élément E d'un maillage de Ω est donnée par

$$e_{1E} = \|\Delta v\|_E = \left[\int_{V_E} \phi^2[\Delta v(\mathbf{x}, t)] dV \right]^{1/2} \quad (\text{III.2.10})$$

On peut sommer les carrés des erreurs élémentaires absolues de chaque élément pour trouver le carré de l'erreur absolue sur le domaine complet. Cette erreur e_{1E} vérifie la règle de sommation

$$e_{\Omega}^2 = \sum_{\text{maillage}} e_E^2 \quad (\text{III.2.11})$$

2.1.4.2. Erreur élémentaire normée

Comme pour les erreurs globales normées, on divise l'erreur élémentaire absolue par une valeur fixe fonction du seuil ϕ_0 et de la surface de l'élément :

$$e_{2E} = \frac{\|\Delta v\|_E}{\phi_0 \sqrt{V_E}} \quad (\text{III.2.12})$$

L'erreur normée élémentaire e_{2E} ne vérifie pas la règle de sommation (III.2.11) sur les éléments d'un maillage.

2.1.4.3. Erreur élémentaire relative

Elle est définie par

$$e_{3E}^2 = \left[\frac{\|\Delta v(t)\|_E}{\|v_{\text{ex}}(t)\|_E} \right]^2 = \frac{\int_{V_E} \phi^2[\Delta v(\mathbf{x}, t)] dV}{\int_{V_E} \phi^2[v_{\text{ex}}(\mathbf{x}, t)] dV} \quad (\text{III.2.13})$$

Les Remarques 1 à 3 présentées pour les erreurs ponctuelles au §III.2.1.2.3 sont applicables à cette erreur. Elle ne sera pas utilisée pour ces raisons.

2.1.4.4. Contribution locale aux erreurs relatives globales

La contribution locale c_{3E} ou c_{4E} d'un élément E du maillage à l'erreur globale $e_{3\Omega}$ ou $e_{4\Omega}$ est définie par la part de l'erreur globale relative que prend cet élément :

$$c_{3E}(t) = \frac{\| \Delta v(t) \|_E}{\| v_{ex}(t) \|_\Omega} = \left[\frac{\int_{V_E} \phi^2[\Delta v] dV}{\int_{\Omega} \phi^2[v_{ex}] dV} \right]^{1/2} \quad (III.2.14)$$

$$c_{4E}(t) = \frac{\| \Delta v(t) \|_E}{\text{Sup}_{\tau \leq t} \| v_{ex}(\tau) \|_\Omega} \quad (III.2.15)$$

Ces contributions c_{3E} et c_{4E} vérifient la loi de sommation (III.2.11) relativement aux erreurs globales $e_{3\Omega}$ et $e_{4\Omega}$.

Cette contribution n'est ni l'erreur absolue élémentaire e_{1E} puisqu'on divise par une norme du champ exact, ni l'erreur relative élémentaire e_{3E} puisque cette norme exacte est évaluée sur l'ensemble de la structure et non sur l'élément considéré, ni la part relative de l'erreur globale prise par l'élément car dans ce cas on devrait avoir $\sum c_E^2 = 1$ et non l'erreur globale relative.

Cette erreur est utilisée par certains auteurs comme support à des critères de maillage optimal (cf. §III.3). Elle est rendue relative par un terme global et non local, donc ne pose pas les difficultés de la Remarque 2 du §III.2.1.2.3. Elle est plus adaptée à la philosophie des méthodes d'éléments finis et des problèmes variationnels, où on cherche le minimum d'une fonctionnelle dans un espace de dimension finie. Le minimum est recherché par rapport aux variables "les plus significatives" et ces dernières sont très bien approximées, tandis que les autres peuvent avoir une valeur plus grossièrement approchée.

2.1.4.5. Contribution locale à l'erreur globale normée

On applique aux erreurs normées une définition analogue à celle retenue pour les contributions locales aux erreurs relatives. La part $\| \Delta v \|_E$ de l'erreur absolue attribuée à chaque élément est divisée par la norme de la quantité de référence ϕ_0 sur le domaine complet :

$$c_{2E} = \frac{\| \Delta v \|_E}{\phi_0 \sqrt{V_\Omega}} \quad (III.2.16)$$

Cette contribution vérifie la règle de sommation (III.2.11) sur les éléments du maillage.

2.1.4.6. Densités d'erreur relative

Ladevèze et Leguillon (1983) définissent la densité d'erreur relative sur un élément d'un maillage par le rapport

$$d_{3E}(t) = \frac{\| \Delta v(t) \|_E}{\sqrt{V_E} \cdot \| v_{ex}(t) \|_\Omega} \quad (III.2.17)$$

Cette densité n'est pas une quantité adimensionnelle. Elle tente de faire intervenir l'effet de la taille des éléments sur leur contribution. On peut poser, comme critère d'optimalité, que la densité

d'erreur soit constante sur chaque élément.

Une densité d'erreur normée d_{2E} ou d'erreur relative en sup d_{4E} pourrait être définie selon ce principe.

La règle de sommation (III.2.11) ne s'applique pas aux densités ; il faut faire intervenir le volume des éléments. On a sur un maillage de Ω à NUMEL éléments :

$$e_{\Omega}^2 = \sum_{\text{maillage}} V_E \cdot d_E^2 \quad (\text{III.2.18})$$

$$\text{densité moyenne par élément : } d_{\text{moy}}^2 = \frac{\sum d_E^2}{\text{NUMEL}} \quad (\text{III.2.19})$$

$$\text{densité globale sur } \Omega : d_{\Omega}^2 = \frac{e_{\Omega}^2}{V_{\Omega}}$$

$$d_{\Omega}^2 = \sum_{\text{maillage}} \frac{V_E}{V_{\Omega}} \cdot d_E^2 \quad (\text{III.2.20})$$

2.1.5. Erreurs dans le cas d'un problème d'évolution

2.1.5.1. Généralités

Les champs exacts et approchés varient en fonction d'un temps, qui peut être le temps physique ou un paramètre d'évolution (ce qui est le cas en élastoplasticité quasi-statique avec le "temps cinématique", cf. §II.4.3). Il est souhaitable de définir de nouvelles quantités capables d'évaluer une mesure de l'erreur sur l'ensemble de l'évolution et non plus ponctuellement à un temps donné.

La plupart des calculs numériques adaptés aux problèmes d'évolution nécessitent une discrétisation temporelle pour l'évaluation des champs approchés. Ces champs sont déterminés à un nombre fini de temps de l'intervalle d'étude $[t_0, t_f]$. On admettra qu'il est possible d'interpoler les valeurs du champ approché entre ces instants. La plus simple manière est l'interpolation linéaire, mais des schémas plus complexes pouvant être retenus.

Le champ exact v_{ex} est supposé connu à tout instant et en tout point (cf. remarque du §III.2.1.3).

2.1.5.2. Erreurs à un temps donné

Pour tous les types d'erreurs locales ou globales définis aux §III.2.1.2, §III.2.1.3 ou §III.2.1.4, la valeur de l'erreur à un temps donné est la norme de la différence entre le champ exact et le champ approché déterminés à ce temps, sans tenir compte de ce qui se passe avant ou après dans le problème d'évolution. L'erreur à un temps donné peut varier au cours de l'évolution de façon quelconque, en diminuant ou en augmentant. Sa connaissance sur tout l'intervalle d'évolution est nécessaire pour avoir une idée des erreurs atteintes à tout instant du processus.

2.1.5.3. Sup des erreurs globales

Le sup d'une erreur globale à un temps t_k est défini comme la valeur maximale des erreurs

aux temps $t \leq t_k$. Ce sup ne peut que croître ou rester constant. Il correspond à une erreur réellement atteinte à au moins un temps de l'évolution.

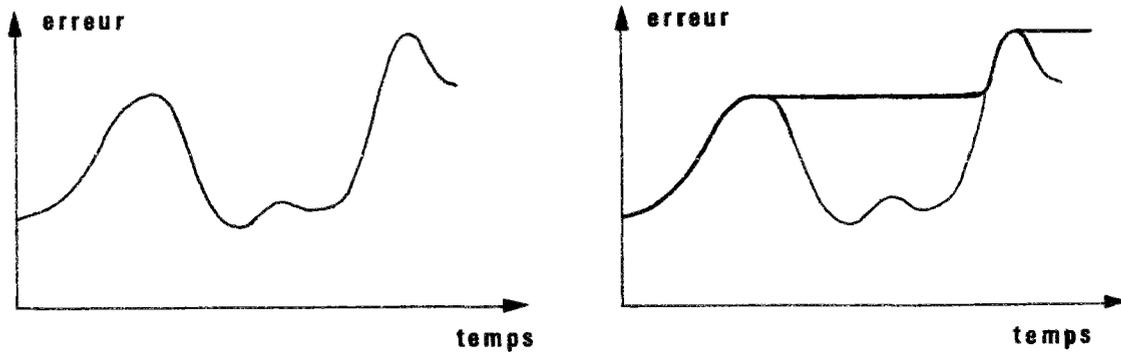


Fig. III-2-3. Exemple d'évolution de l'erreur à un temps donné et Sup correspondant

Le sup au temps t de l'erreur normée est $\text{Sup}_{\tau \leq t} e_{2\Omega}(\tau)$ (III.2.21)

le sup de l'erreur relative instantanée est $\text{Sup}_{\tau \leq t} e_{3\Omega}(\tau)$ (III.2.22)

et on peut également définir le sup de l'erreur relative "en sup" par $\text{Sup}_{\tau \leq t} e_{4\Omega}(\tau)$ (III.2.23)

2.1.5.4. Erreurs enveloppes

A un temps donné, l'erreur globale a une certaine valeur mais les erreurs locales ou élémentaires à ce même temps n'ont aucune raison d'être uniformes dans le domaine Ω . Les sups définis au §III.2.1.5.3 retiennent la plus grande des erreurs globales au cours de l'évolution sans se préoccuper de la localisation de ces erreurs dans Ω . Une partie de Ω qui a une faible erreur absolue locale, au temps où l'erreur globale est maximale, peut avoir une forte erreur à un autre temps. Cette erreur sera négligée par les sups (III.2.21 à 23). Il faut donc définir une erreur qui tienne compte à la fois des erreurs locales élevées trouvées à n'importe quel temps et des erreurs globales les plus fortes.

Les erreurs et contributions élémentaires e_{1E} , c_{2E} , c_{3E} , c_{4E} sont sommables sur les éléments d'un maillage selon (III.2.11). Les erreurs ponctuelles e_{p1} et e_{p2} sont "intégrables" sur le domaine (au sens défini au §III.2.1.3.1). Lorsqu'on calcule les erreurs élémentaires c_{2E} ou c_{3E} à un temps, leur dénominateur est commun et correspond à la norme exacte à ce temps, ou à une quantité de référence constante. La formule de sommation (III.2.11) ne tient pas compte de ce fait ; elle est valable si on somme des erreurs locales calculées à des temps différents.

Pour représenter l'erreur maximale, ces erreurs élémentaires seront choisies comme les plus élevées trouvées à tous les temps antérieurs au temps actuel pour l'élément considéré. La sommation de ces erreurs donnera un terme global "artificiel", supérieur ou égal à la plus grande des erreurs globales pour $t \leq t_k$. Ces erreurs expriment les maxima des erreurs locales enregistrés dans tout Ω et pour tout t ; elles seront appelées erreurs enveloppes. Leur application sera par exemple l'étude des chargements non radiaux en élastoplasticité.

On conçoit aisément, pour des raisons de stockage, que ces enveloppes ne peuvent être calculées qu'à partir des erreurs élémentaires et non des erreurs ponctuelles. Cette façon de faire a l'inconvénient de réduire la valeur des erreurs enveloppes obtenues sur les maillages grossiers. L'erreur élémentaire

est déjà une moyenne de l'erreur sur un sous-domaine, de taille assez élevée si le maillage est grossier. Cette moyenne peut masquer une variation de l'erreur au cours du temps, différente aux divers points de l'élément. Cette variation apparaîtra lorsque l'élément sera raffiné.

Nous retiendrons les enveloppes suivantes :

- les erreurs normées enveloppes

$$c_{2\Omega}(t) = \left[\sum_{\text{maillage}} \left[\text{Sup}_{\tau \leq t} c_{2E}(\tau) \right]^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III.2.24})$$

- les erreurs relatives enveloppes instantanées

$$c_{3\Omega}(t) = \left[\sum_{\text{maillage}} \left[\text{Sup}_{\tau \leq t} c_{3E}(\tau) \right]^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III.2.25})$$

- les erreurs relatives enveloppes "en sup"

$$c_{4\Omega}(t) = \left[\sum_{\text{maillage}} \left[\text{Sup}_{\tau \leq t} c_{4E}(\tau) \right]^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III.2.26})$$

Des enveloppes peuvent être définies à partir des densités, en cherchant au cours du temps le sup des densités d'erreur d_E de chaque élément et en les sommant par (III.2.20).

2.1.5.5. Calcul pratique des erreurs enveloppes

Les erreurs dont la définition implique le calcul d'un Sup au cours du temps ne peuvent évidemment être évaluées à tous les temps de l'intervalle d'étude. On choisit un nombre fini de temps de calcul de l'erreur t_E et on fait le sup sur ces temps. Les résultats exacts sont calculés à chaque temps où on peut avoir besoin d'eux ; les résultats approchés sont interpolés (dans le cadre de ce travail, par interpolation linéaire) en-dehors des temps t_C où ils ont été calculés.

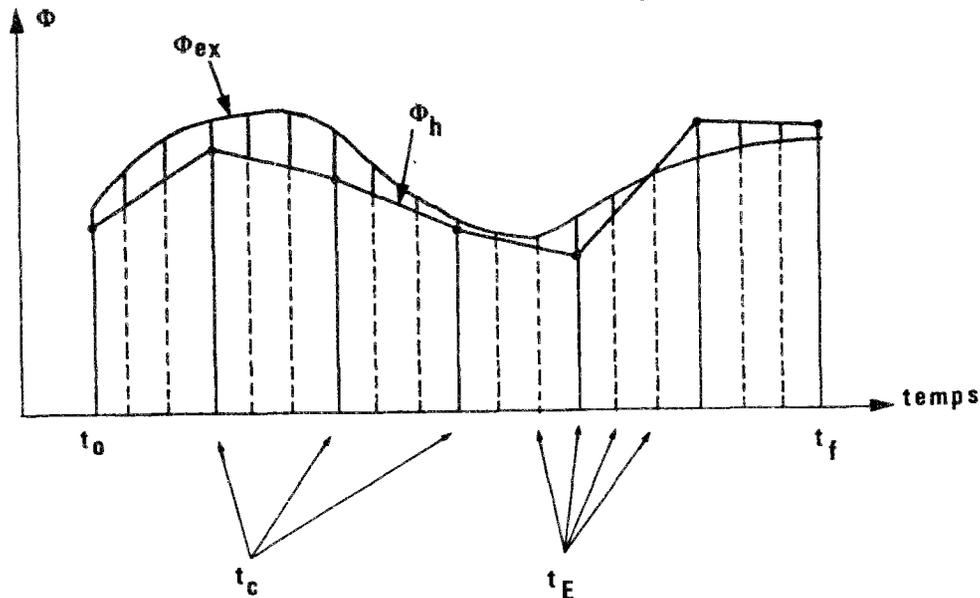


Fig. III-2-4. Interpolation des valeurs approchées et erreurs correspondantes

Ces temps t_E doivent vérifier quelques règles de bon sens :

- leur nombre doit être plus grand ou au moins aussi grand que le plus grand nombre de temps t_C de calcul approché, s'il y a par exemple plusieurs calculs faits avec des temps t_C différents.
- ils doivent contenir les temps t_C car c'est à ces temps que les résultats approchés sont les plus précis.

Au lieu de calculer le Sup des erreurs sur la totalité de l'évolution, l'utilisateur peut ne souhaiter calculer ces erreurs qu'à un quelques instants t_E définis par lui. Ces instants peuvent par exemple être les points extrêmes ou les changements de direction du trajet de chargement. L'enveloppe et les sups ne prendront donc en compte que ces instants et négligeront les autres temps.

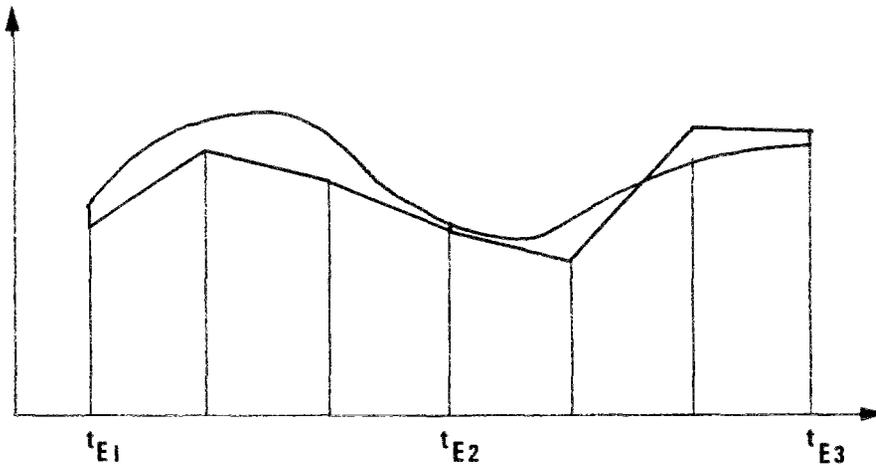


Fig. III-2-5. Enveloppe partielle des erreurs

2.2. Différents types et origines des erreurs

2.2.1. Erreurs et fautes

La conséquence des fautes et des erreurs est la même : les calculs ne donnent pas le résultat exact. Il faut cependant différencier la notion d'erreur de la notion de faute.

On appelle faute tout ce qui relève d'une mauvaise utilisation des outils disponibles, quelle qu'en soit la raison, et qui est évitable en effectuant avec soin les différentes phases du travail demandé. *A contrario*, une erreur n'est évitable ou réductible qu'en changeant les données du problème (par exemple, pour un calcul de structures, en raffinant le maillage).

Dans ce qui suit, nous ferons l'hypothèse que la différence entre les solutions approchées et exactes proviennent uniquement d'erreurs et non de fautes.

2.2.2. Erreurs d'arrondi

Bien que ces erreurs soient indépendantes de l'utilisateur pourvu qu'il ne tronque pas la précision des données, elles sont inévitables dès qu'un modèle numérique est employé et ne peuvent être rangées avec les fautes. Les conséquences en sont bien connues des numériciens. Deux termes en notation flottante simple ou double précision ne peuvent généralement jamais être considérés comme

égaux et en conséquence les tests d'égalité entre nombres flottants sont prohibés. Les effets des troncatures peuvent donner des résultats différents pour un même calcul et les mêmes données suivant l'ordre où sont écrites les opérations successives. Les fonctions spéciales comme la partie entière, la racine carrée d'un nombre "presque nul" donc pouvant être négatif ou l'arc cosinus d'un réel voisin de 1... par valeurs supérieures doivent être manipulées avec la plus extrême attention, sous peine d'obtenir des résultats aberrants. Il existe des pas limites à partir desquels le fait de diviser un pas lors de la résolution numérique d'une équation différentielle augmente plus les erreurs de troncature qu'il ne diminue les erreurs de discrétisation (Legras, 1971).

Un code de calcul bien conçu doit tenir compte de tous ces pièges ; cette hypothèse est faite dans tout ce qui suit. Il restera toujours les inévitables erreurs de troncature qui se propagent et s'amplifient au cours des calculs. L'emploi systématique de la double précision (64 bits), qui retient environ 15 chiffres significatifs exacts pour les données de départ, autorise dans la majorité des cas la limitation de la propagation de ces erreurs. Il peut y avoir des cas où la précision étendue (nombres codés sur 80 ou 128 bits) est nécessaire ; une telle option peut être disponible sur les ordinateurs de grande puissance.

2.2.3. Erreurs dues à la discrétisation

2.2.3.1. Discrétisation spatiale

On peut séparer deux effets des discrétisations spatiales : les erreurs de représentation des données et de discrétisation des opérateurs.

- *Erreur de représentation des données*

Cette erreur est une conséquence de la discrétisation des données du calcul. Elle peut être illustrée sur l'exemple du calcul des structures, où les données sont la géométrie, le matériau et le chargement.

La discrétisation de la géométrie peut introduire des lacunes géométriques (cf. §II.3.1.2).

En ce qui concerne la discrétisation des efforts, l'assimilation d'une force de volume ou d'une pression superficielle variant continûment dans l'espace à des forces ponctuelles nodales introduit là aussi une erreur de représentation. Les forces équivalentes ne peuvent pas toujours représenter exactement les efforts appliqués. Lorsqu'on changera de maillage, le problème exact à résoudre sera toujours le même mais le problème discrétisé sera différent à la fois du problème exact et du problème discrétisé traité précédemment. Une telle erreur doit rester limitée et est généralement faible, sauf avec des éléments extrêmement grossiers devant la complexité du chargement.

- *Erreur de discrétisation des opérateurs*

Les calculs numériques par éléments finis cherchent dans un espace de dimension finie U_h une solution approchée u_h à un problème aux limites dont la solution exacte u_{ex} appartient à un espace de dimension infinie. La forme de la solution approchée est donnée par la nature et le degré des fonctions de forme des éléments du maillage. Sauf dans le cas où la solution exacte peut être exprimée par ces mêmes fonctions, il existe une erreur entre la solution et son approximation par

éléments finis.

Pour un problème ne faisant pas intervenir d'évolution en temps, cette erreur est la partie principale de l'erreur totale. En modifiant les discrétisations spatiales, on agit sur elle et accessoirement sur l'erreur de représentation des données.

2.2.3.2. Discrétisation temporelle

Pour un problème d'évolution, la discrétisation temporelle crée une erreur de représentation et une erreur de discrétisation des opérateurs.

L'erreur de représentation est due à l'approximation de la variation exacte des données dans le temps, par le type de variation utilisé dans le code de calcul. Par exemple, une évolution continue dans le temps est remplacée par une variation en ligne brisée, dont chaque sommet correspond à un temps de calcul. L'erreur due à cette approximation est généralement limitée.

L'implémentation numérique d'un processus d'évolution nécessite une discrétisation en temps. Les équations différentielles de l'évolution sont remplacées par des équations aux différences entre des instants en nombre fini séparés par des pas de temps. L'erreur due à cette discrétisation dépend étroitement de la nature des équations discrétisées et du schéma d'intégration utilisé (Legras, 1965 par exemple).

Suivant le problème traité, les erreurs de discrétisation spatiale et temporelle peuvent évoluer indépendamment l'une de l'autre (découplage) et s'ajouter, ou être liées. C'est pourquoi il peut être difficile de prédire en même temps l'influence de ces deux discrétisations sur l'erreur totale.

2.3. Causes d'erreur particulières à l'analyse élastoplastique

Le principe de la résolution numérique des problèmes mécaniques élastoplastiques est présenté au §II.4. L'algorithme de résolution est par exemple le Schéma 2 du §II.4.2. Plusieurs étapes de ce schéma sont des causes d'erreur :

- la boucle "tant que le déséquilibre δF est trop fort" implique un arrêt des itérations lorsque le déséquilibre est acceptable (ou que le nombre maximal d'itérations est dépassé). Le déséquilibre n'en est pas nul pour autant et génère une erreur.
- à l'étape 2, les multiples résolutions de $K^* \Delta q = \delta F$ peuvent être entachées d'erreur. On sait cependant résoudre des systèmes d'équations linéaires pas trop mal conditionnés avec une précision correcte.
- à l'étape 4.2, à l'exception de cas bien particuliers, la correction plastique introduit une erreur (cf. §II.4.5).

2.4. Définition d'une discrétisation optimale

On suppose qu'un problème mathématique nécessitant une discrétisation des données est posé. Le choix de la discrétisation conditionne la qualité de la solution. Cette qualité est mesurée par

une fonction "objectif" qui est choisie pour diminuer lorsque la qualité augmente. L'effort nécessaire pour obtenir une solution approchée à partir d'une discrétisation donnée est mesurable par une fonction coût.

Par définition, la discrétisation est optimale si elle minimise la valeur de la fonction coût à fonction objectif constante, ou si elle minimise la fonction objectif à fonction coût constante.

En calcul des structures, la fonction objectif sera une erreur ou une combinaison de plusieurs erreurs, à choisir par exemple dans celles qui ont été décrites précédemment ; tout dépend des besoins de l'utilisateur. La fonction coût peut être choisie dans un ensemble beaucoup plus vaste : nombre d'éléments, nombre de DDL, nombre de pas de temps, temps CPU de calcul, espace disque nécessaire, temps d'ingénieur pour l'analyse, temps total (humain + machine) si un délai serré est demandé, coût financier regroupant plusieurs de ces critères, etc. Un industriel sera plus sensible à un coût financier, un mathématicien à un nombre de DDL, etc. Une discrétisation optimale selon un objectif et un coût donnés peut être mauvaise pour un autre couple objectif-coût.

Nous choisirons de considérer un maillage comme optimal s'il minimise une erreur à nombre de DDL constant, avec une discrétisation temporelle fixée. Une discrétisation temporelle sera optimale si elle minimise l'erreur obtenue sur un maillage donné, à temps CPU constant. Ce temps CPU regroupe en fait, dans le cas des calculs élastoplastiques, le nombre de pas de temps mais aussi le nombre de refactorisations de la matrice de rigidité et d'itérations plastiques au cours de chaque pas de temps (cf. §II.4).

2.5. Quantités sur lesquelles on peut évaluer une erreur

La solution du problème mécanique est constituée des champs de déplacements, de déformations et de contraintes. Lors d'une analyse élastique, un seul champ inconnu est cherché : le champ de déplacements. Les autres champs approchés (déformation et contrainte) s'en déduisent par (II.3.6) et (II.1.5). Ce fait ne signifie pas que les erreurs sur ces trois champs sont identiques.

Dans un calcul élastoplastique, la solution est constituée de deux champs, par exemple les déplacements et les paramètres internes (déformations plastiques dans le cas du critère de Mises avec écrouissage cinématique).

Nous avons choisi de calculer les erreurs sur plusieurs champs résultats, pour pouvoir comparer leur évolution au cours d'un chargement. Nous allons d'abord faire une liste non exhaustive des différents champs v pour lesquels une erreur peut être évaluée, en indiquant si nécessaire la fonction $\phi(v)$ définissant un équivalent scalaire de la quantité v . Cet équivalent est la plupart du temps choisi pour avoir la dimension de la racine carrée d'une contrainte.

Quelques exemples de quantités évaluées sur le domaine Ω et leurs équivalents associés sont :

- les déplacements \mathbf{u} ; $\phi(\mathbf{u}) = \sqrt{u_i u_i}$; (III.2.27)

- les contraintes σ ; $\phi(\sigma) = \sqrt{\sigma \cdot \mathbf{M} \cdot \sigma}$; (III.2.28)

- les déformations totales ϵ ; $\phi(\epsilon) = \sqrt{\epsilon \cdot L \cdot \epsilon}$; (III.2.29)

- les déformations plastiques ϵ^P ; $\phi(\epsilon^P) = \sqrt{\epsilon^P \cdot L \cdot \epsilon^P}$ (III.2.30)

Toute autre combinaison des champs précédents peut être calculée, par exemple :

- la composante sphérique du tenseur des contraintes : $\phi(\sigma) = \sqrt{\frac{1-2\nu}{3E}} \sigma_{ii}$ (III.2.31)

- le déviateur S des contraintes ; $\phi(S) = \sqrt{\frac{1}{2\mu} S : S}$ (III.2.32)

- le déviateur ϵ' des déformations ; $\phi(\epsilon') = \sqrt{2\mu} \epsilon' : \epsilon'$ (III.2.33)

- le critère de Mises $\phi(S, \epsilon^P) = \sqrt{\frac{3}{4\mu} (S - C \epsilon^P) : (S - C \epsilon^P)}$. (III.2.34)

Des quantités calculées sur des "énergies" peuvent être définies :

- travail des forces internes $W(t) = \int_{t_0}^t \sigma_{ij}(\tau) \dot{\epsilon}_{ij}(\tau) d\tau$ (III.2.35)

- travail complémentaire des forces internes $J(t) = \int_{t_0}^t \epsilon_{ij}(\tau) \dot{\sigma}_{ij}(\tau) d\tau$ (III.2.36)

les erreurs étant mesurées sur $\sqrt{W(t)}$ ou $\sqrt{J(t)}$.

Les erreurs sur ces quantités ont l'avantage de tenir compte de l'évolution à la fois des contraintes et des déformations sur tout le trajet de chargement, mais l'inconvénient d'être nulles si un seul des deux champs σ_h ou ϵ_h est exact. Ce dernier cas peut difficilement se produire : les contraintes σ_h sont liées aux déformations ϵ_h par la loi de comportement, ce lien étant cependant approché si les corrections plastiques ne sont pas exactes (cf. §II.4.5). Les erreurs en énergie (III.2.35) ou (III.2.36) ne permettent pas de discerner la répartition de l'erreur entre les contraintes et les déformations.

En élasticité, les erreurs en contraintes (III.2.28) ou en déformations (III.2.29) sont équivalentes à $\sqrt{2W}$ ou $\sqrt{2J}$. Ces quatre erreurs sont couramment appelées "erreurs en énergie" dans la littérature.

L'erreur sur les déplacements peut être primordiale dans certains cas comme les problèmes de jeu ou de contact entre plusieurs corps. Elle peut être élevée alors que les erreurs sur les déformations ou les contraintes sont faibles. Il arrive aussi que les endroits de la structure où le déplacement est le moins élevé soient les plus sollicités.

La connaissance du champ de contraintes est classiquement à la base des dimensionnements. Il est donc justifié de calculer une erreur en contraintes.

On utilise souvent la déformation plastique dans les études de fatigue et certains règlements de construction mécanique imposent de ne pas dépasser un seuil de déformation plastique équivalente. Il est donc logique de retenir une erreur sur la déformation plastique. Nous avons préféré le déviateur des déformations totales (III.2.33) pour la raison suivante : lorsque la structure est largement plastifiée, la partie élastique de ϵ' est négligeable devant ϵ^P . Inversement, lorsque la structure n'est pas encore plastifiée, (III.2.33) évite de calculer une erreur sur une quantité (la déformation plastique) qui n'existe pas encore.

Nous avons aussi évalué l'erreur sur le travail des forces internes (III.2.35) et parfois en critère (III.2.34). Les quantités absolues ϕ_0 servant à la définition des erreurs normées (cf. §III.2.1.2.2) que nous avons retenues sont les suivantes :

- pour l'erreur en déplacements (III.2.27) : $\phi_0 = \sqrt{S/\pi}$, où S est l'aire du domaine Ω ;
- pour l'erreur en contraintes (III.2.28) : $\phi_0 = \sigma_0/\sqrt{E}$;
- pour l'erreur en énergie (III.2.35) : $\phi_0 = \sigma_0/\sqrt{2E}$;
- pour l'erreur en critère (III.2.34) : $\phi_0 = \sigma_0/\sqrt{2\mu}$;
- pour l'erreur en déviateur des déformations (III.2.33) : $\phi_0 = \sigma_0/\sqrt{E}$.

2.6. Erreurs, estimateurs d'erreur et indicateurs d'erreur

L'erreur a été définie par la mesure de la différence entre un champ exact et un champ approché. Elle n'est accessible que si on dispose du champ exact ou si des méthodes d'évaluation *exacte* de l'erreur sans solution exacte correspondante sont disponibles.

En fait, il est rare de pouvoir calculer l'erreur exacte et on peut utiliser des "estimateurs d'erreur" ou des "indicateurs d'erreur".

L'estimateur d'erreur est une estimation, majorant ou minorant, de l'erreur réelle, obtenu à partir des équations analytiques et des propriétés mathématiques de leur discrétisation. Des exemples sont présentés au §III.3. On notera dès à présent qu'en général ces estimations font intervenir des constantes inconnues et par suite sont difficilement utilisables. Les estimations d'erreur e vérifient un encadrement du type

$$k_1 \|\Delta v\| \leq e \leq k_2 \|\Delta v\| \quad (\text{III.2.37})$$

où les constantes k_1 et k_2 vérifient $0 < k_1 \leq k_2 < \infty$ et sont indépendantes des discrétisations. Cet encadrement est analogue à la définition des normes équivalentes dans un espace vectoriel de dimension finie. L'existence d'un tel encadrement peut être démontrée mathématiquement ou vérifiée expérimentalement par calcul de k_1 et k_2 sur des exemples de solution exacte connue.

Des estimateurs d'erreur peuvent être trouvés de manière globale ou locale, sur un élément. Il est fréquent que les estimateurs élémentaires servent de base à un critère de remaillage.

L'indicateur d'erreur est une quantité qu'on ne cherche plus à relier à l'erreur réelle, mais dont on peut prouver qu'elle décroît quand la solution approchée se rapproche de la solution réelle, et est nulle si et seulement si la solution approchée est exacte. C'est plutôt un indice de qualité qui permet de comparer entre eux des résultats approchés.

Cet indicateur peut être calculé à partir de la solution approchée obtenue par une méthode numérique quelconque, sans avoir besoin de la solution exacte ni de constantes inconnues. Les indicateurs peuvent eux aussi être globaux ou locaux, et les indicateurs locaux peuvent être utilisés par des critères de remaillage.

2.7. Facteurs influençant le coût d'un calcul numérique élastoplastique

Nous présentons quelques indications sur le coût que peut atteindre un calcul élastoplastique, et les moyens de le faire baisser à précision constante. Ce coût peut être utilisé pour définir les discrétisations optimales (cf. §III.2.4). Certains paramètres du calcul numérique ont une importance fondamentale et un mauvais choix de leur valeur peut augmenter le coût, sans pour autant diminuer l'erreur.

2.7.1. Facteurs communs à tous les calculs numériques par éléments finis

Ces facteurs, très classiques, ne sont cités que pour mémoire.

Nous supposons un comportement élastique linéaire pour la structure. Il est évident que, lorsque le nombre d'éléments d'un maillage croît, les coûts suivants augmentent :

- construction et assemblage des rigidités locales K_e ,
- construction et assemblage du vecteur second membre F
- calcul et édition des contraintes à partir des déplacements nodaux q .

Lorsque le nombre de DDL croît, le coût de la résolution de l'équation matricielle (II.3.10) augmente.

Le coût de résolution de l'équation matricielle (II.3.10) dépend aussi de la méthode de résolution choisie, de la largeur de bande de la matrice K (d'où l'intérêt de renuméroter les noeuds), etc.

Si une discrétisation temporelle est nécessaire, la résolution de (II.3.10) est faite à chaque temps. La matrice K peut être construite puis factorisée une fois pour toutes. A chaque temps après le premier, on retrouve la construction de F , une descente-remontée et le retour aux éléments.

2.7.2. Facteurs spécifiques à l'élastoplasticité

Les causes d'erreur spécifiques à l'élastoplasticité sont citées au §III.2.3. On peut ici se ramener au Schéma 2 du §II.4.4.2 et citer les coûts de chacune de ses étapes.

La vérification du critère en chaque point de Gauss dépend directement du nombre de ceux-ci par élément et du nombre d'éléments.

Le calcul du vecteur déséquilibre δF nécessite l'évaluation du terme $B^T \sigma$ aux points de Gauss des éléments et son assemblage dans le vecteur δF .

Suivant l'algorithme retenu (cf. §II.4.4.3), une descente-remontée et éventuellement une refactorisation de K sont faits à chaque résolution du Schéma 2.

Les paramètres sur lesquels il est possible de jouer sont :

- l'algorithme de résolution. Les coûts respectifs des refactorisations d'une part, et des constructions de δF et des descentes-remontées associées d'autre part, varient avec la taille du problème. Leur nombre varie avec l'algorithme choisi (plus de refactorisations et moins de descentes-remontées avec la rigidité tangente ; le contraire avec la rigidité initiale).
- la tolérance TOL. Une tolérance faible nécessite plus d'itérations dans le Schéma 2 et donc un coût plus élevé. Nous ne savons pas pour autant si l'erreur est diminuée.

- le nombre maximum d'itérations. Ce terme permet au calcul de passer au pas suivant si la tolérance demandée n'est pas atteinte, sans boucler trop longtemps. Lorsque l'écroutissage est faible, la convergence peut nécessiter plusieurs dizaines voire centaines d'itérations, à certains instants du trajet de chargement. Un code bien fait sait distinguer cette convergence trop lente d'une divergence due par exemple au dépassement d'une charge limite : il arrêtera le calcul en cas de divergence, passera au temps suivant dans le cas contraire.

3. ESTIMATION DES ERREURS

Nous allons présenter rapidement quelques méthodes d'évaluation *a priori* ou *a posteriori* des erreurs lors de calculs numériques. Une partie appréciable de ce chapitre est tirée des travaux de Coffignal (1987) sur ce sujet.

3.1. Résultats classiques

3.1.1. Cas monodimensionnel

Il existe une borne théorique de l'erreur pour la plupart des schémas numériques de résolution d'équations différentielles (par exemple (Legras, 1971)). Les erreurs associées aux éléments monodimensionnels peuvent être trouvées par exemple dans (Ghoury-Dhatt, 1984).

3.1.2. Cas multidimensionnel : généralités

Dans le cas multidimensionnel, il faut définir rigoureusement les espaces et les notions d'erreur et de norme. On utilise classiquement les espaces de Sobolev $H^k(\Omega)$ et les normes qui y sont associées. Les champs exact et approché ϕ_{ex} et ϕ_h sont définis sur un domaine Ω ; la différence $\phi_{ex} - \phi_h$ est notée $\Delta\phi$.

Pour un problème mécanique, on note dans ce qui suit $\| \cdot \|$ la norme définie par (II.1.22 b) pour un champ de déplacements ou de déformations et par (II.1.21 b) pour un champ de contraintes. De nombreux auteurs utilisent le terme d'"erreur en énergie" pour désigner cette norme de l'erreur. La norme associée à l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ est notée $\| \cdot \|_{k,\Omega}$, et la semi-norme correspondante $| \cdot |_{k,\Omega}$. On montre cependant (Babuska, 1982) que, pour des solutions élastiques suffisamment régulières, la norme associée à l'espace de Sobolev est équivalente à la norme en énergie.

D'autres normes peuvent être nécessaires, elles seront notées $\| \cdot \|_s$ par exemple.

Babuska et Szabo (1982) donnent une borne de l'erreur valable en élasticité. Une solution approchée u_h est calculée par la méthode des éléments finis avec des éléments conformes et de qualité correcte (non aplatis). Si $u_{ex} \in H^k(\Omega)$ et p est le degré des polynômes d'interpolation des éléments, alors on a

$$\| u_{ex} - u_h \| \leq K_1 NDDL^{-1/2 \min(k-1,p)} \| u_{ex} \|_{k,\Omega} \quad (III.3.1)$$

On peut déduire de cette expression que l'utilisation d'éléments de degré $p \geq k - 1$ n'accélère pas le

taux de convergence, mais améliore la solution car la constante K_1 dépend de p .

Si les côtés des éléments du maillage choisi vérifient la relation

$$0 < \frac{h_{\max}}{h_{\min}} \leq K_2 < \infty \quad (\text{III.3.2})$$

on peut remplacer NDDL par une estimation de h_{moyen} ou h_{\max} . Pour un nombre d'éléments (supposés non aplatis) suffisant, le côté moyen h_{moyen} peut s'écrire

$$\text{en bidimensionnel } h^2 = \frac{k_2}{\text{NDDL}} \quad (\text{III.3.3 a})$$

$$\text{en tridimensionnel } h^3 = \frac{k_3}{\text{NDDL}} \quad (\text{III.3.3 b})$$

où k_i dépend du type d'élément choisi, de la proportion des noeuds actifs par rapport à ceux bloqués sur $\partial_u \Omega_h$, etc. Cette estimation permet d'exprimer (III.3.1) en fonction du côté des éléments. On trouve dans la littérature l'une ou l'autre de ces deux présentations.

Ce résultat montre que le raffinement **uniforme** d'un maillage par la h -version ou la p -version conduit à diminuer l'erreur, par diminution de h ou augmentation de p , sous réserve de ne pas dégrader la qualité des éléments au cours des raffinements (par exemple en divisant selon la figure III-1-12). Si h tend vers zéro ou p vers l'infini, la solution tend vers sa valeur exacte. Si un raffinement n'est pas uniforme mais vérifie (III.3.2), alors l'erreur tend aussi vers zéro mais pas forcément à la "vitesse" donnée par (III.3.1). Par exemple, une accélération de la décroissance de l'erreur est possible par utilisation d'une suite de maillages bien choisis.

Toutes ces estimations sont asymptotiques et peuvent nécessiter un nombre suffisamment grand de DDL pour être applicables. C'est pourquoi la mesure de la vitesse de convergence par la pente d'une courbe du type

$$\log \|\Delta u\| = f(\log \text{NDDL}) \quad (\text{III.3.4})$$

ne peut avoir une fiabilité suffisante que si NDDL atteint une valeur suffisamment "élevée", qui dépend de la nature du problème (Babuska, 1982).

Il est également connu que la mauvaise qualité des éléments (notamment leur trop grand aplatissement) est à elle seule une cause d'erreur. Une estimation (Carnet, 1978 par exemple) donne, pour la résolution du problème de Laplace homogène sur un domaine Ω (qui, comme le problème élastique quasi-statique, est de type elliptique) :

$$-\nabla^2 u = f \text{ sur } \Omega$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

$$u_{\text{ex}} \in H^2(\Omega)$$

une borne de l'erreur

$$\|u_{\text{ex}} - u_h\|_{1,\Omega} \leq K \sum_{E \in \text{maillage}} \frac{h^2}{l} \|u_{\text{ex}}\|_{2,V_E}$$

où l est le diamètre du cercle inscrit au triangle et h son côté maximum. Cette estimation est bornée sur un triangle par $K \frac{h}{\cos \frac{\alpha}{2}} \|u\|$ où α est le plus grand angle du triangle.

3.1.3. Cas de l'élastoplasticité classique

Le problème élastoplastique quasi-statique étant un problème d'évolution, l'erreur provient à la fois de la discrétisation spatiale et de la discrétisation temporelle. Il est important de savoir si, comme dans les problèmes paraboliques ou hyperboliques, la discrétisation spatiale et la discrétisation temporelle sont liées. On peut trouver dans (Nguyen Quoc Son, 1980) un résultat tiré des études théoriques de Moreau et qui dit que, si $u_d = 0$ sur $\partial_u \Omega$, les erreurs dues aux discrétisations spatiale et temporelle sont découplées et s'ajoutent :

$$\text{Sup}_n \| \sigma_{\text{ex}_n} - \sigma_{h_n} \| \leq k \left[\delta(h) + \sqrt{\Delta t} \right] \quad (\text{III.3.6})$$

avec k constante indépendante de h_{max} ; $\Delta t = t_n - t_{n-1}$, et $\delta(h)$ caractérise la finesse du maillage : $\lim_{h \rightarrow 0} \delta(h) = 0$.

L'erreur totale est la somme des erreurs dues aux discrétisations spatiale et temporelle. (III.3.6) permet de chercher par exemple la meilleure discrétisation temporelle adaptée à une discrétisation spatiale donnée (ou le contraire) selon le principe suivant :

- on suppose retenir de "bonnes" discrétisations spatiale et temporelle, pour que l'erreur décroisse lorsque chacune des discrétisations est affinée.

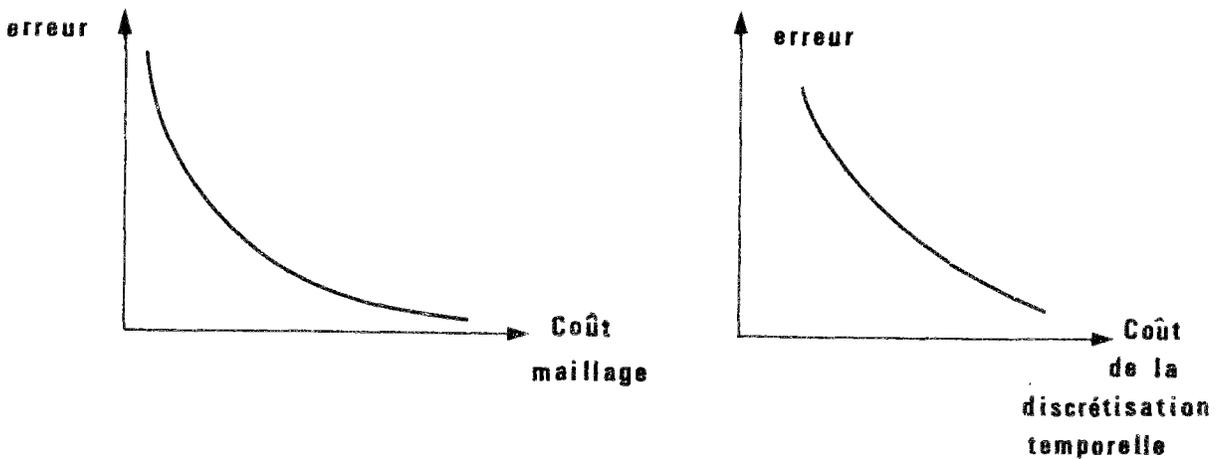


Fig. III-3-1. Courbes erreur-coût pour les discrétisations spatiale et temporelle supposées seules (unités arbitraires)

On peut assimiler la qualité d'un maillage à l'inverse de son erreur.

Si on se donne une discrétisation spatiale, l'erreur totale évolue en fonction de la discrétisation temporelle, selon la courbe suivante

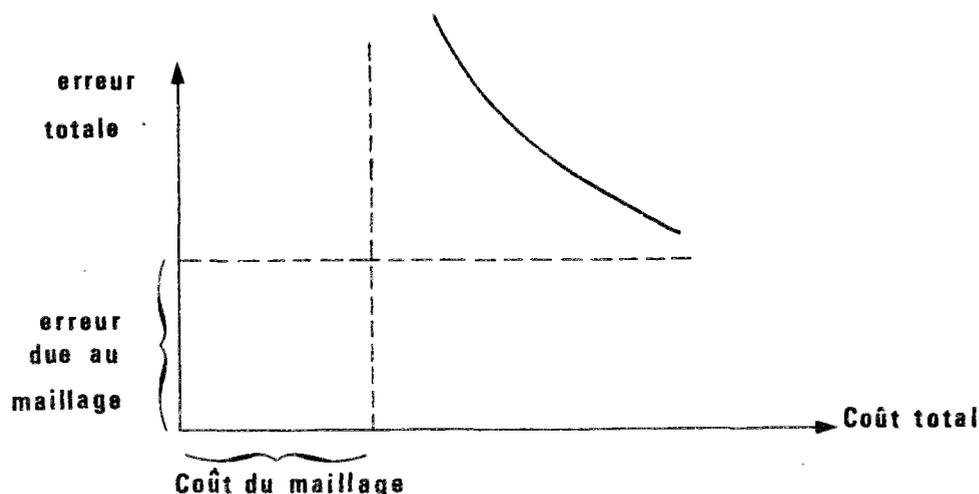


Fig. III-3-2. Courbe erreur totale-coût pour une discrétisation spatiale donnée et la discrétisation temporelle optimale maximise le rapport qualité/coût :

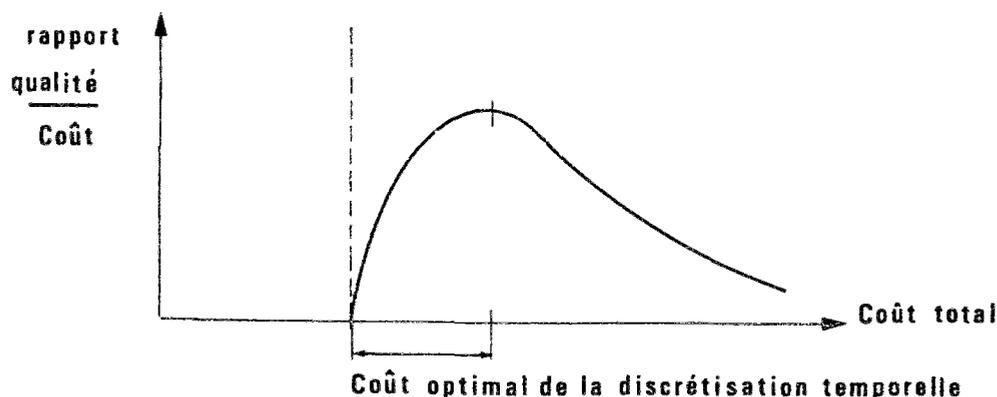


Fig.III-3-3. Rapport qualité/coût

Si on désire affiner le maillage pour réduire l'erreur totale, il faut également affiner la discrétisation temporelle pour conserver un rapport qualité/coût optimal. Dans les faits, une discrétisation temporelle optimale pour un maillage donné est encore bonne pour des maillages dont le nombre de DDL est d'ordre de grandeur voisin.

En conclusion, si la plupart de ces résultats théoriques sont inexploitable en pratique pour déterminer l'erreur car les constantes restent inconnues, ils n'en sont pas moins utiles pour constater les taux de convergence. Un taux observé plus faible que le taux théorique indique un mauvais choix des discrétisations, et inversement. Il faut cependant garder en tête les domaines de validité de ces expressions, comme par exemple le nombre minimal de DDL qui peut être nécessaire pour que l'estimation (III.3.1) soit valable.

3.2. Estimation de l'erreur

Nous allons décrire divers procédés permettant de trouver une estimation de l'erreur *a posteriori*, à partir des résultats d'un ou plusieurs calculs approchés de la structure. La quasi-totalité des résultats présentés sont valables uniquement en élasticité linéaire en petites transformations.

Nous ne retiendrons que les méthodes fournissant une estimation de l'erreur, que la validité de cette estimation ait été démontrée théoriquement ou résulte de constatations expérimentales.

3.2.1. Estimations globales

L'estimation de l'erreur à partir des résultats approchés est faite globalement, sans information sur des erreurs en un point ou sur un élément. On ne peut donc en déduire de règle de remaillage. Seul un nouveau calcul avec un raffinement uniforme ou sélectif du maillage père peut donner une erreur plus faible.

Les estimations présentées dans ce paragraphe sont tirées de quantités globales comme les énergies élastiques.

3.2.1.1. Estimation de l'erreur par différence d'énergie

On démontre en élasticité que, si $\mathbf{u}_d = 0$ sur $\partial_u \Omega$ et si \mathbf{u}_h est défini dans un espace vectoriel de dimension finie, alors on a

$$a_1(\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_h) = a_1(\mathbf{u}_{ex}, \mathbf{u}_{ex}) - a_1(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \quad (\text{III.3.7})$$

Cette règle découle des propriétés des projections orthogonales.

(III.3.7) permet de calculer très simplement l'erreur globale par différence entre l'énergie élastique approchée et l'énergie exacte, si on a un moyen quelconque d'évaluer celle-ci :

$$\|\Delta \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}_{ex}\|^2 - \|\mathbf{u}_h\|^2 \quad (\text{III.3.8})$$

3.2.1.2. Encadrement de l'énergie

On suppose toujours que $\mathbf{u}_d = 0$ sur $\partial_u \Omega$. On choisit un champ \mathbf{u}_1 C.A. avec les déplacements imposés et un champ σ_2 S.A. avec les efforts imposés.

Lorsque $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{h_1}$ est construit sur un espace de dimension finie, on montre (Lemaire, 1983) l'encadrement de l'énergie exacte de la structure :

$$a_1(\mathbf{u}_{h_1}, \mathbf{u}_{h_1}) \leq a_1(\mathbf{u}_{ex}, \mathbf{u}_{ex}) = a_2(\sigma_{ex}, \sigma_{ex}) \leq a_2(\sigma_2, \sigma_2) \quad (\text{III.3.9})$$

Il est bien sûr possible de choisir un champ $\sigma_2 = \sigma_{h_2}$ dans un espace de dimension finie et de le déterminer par une méthode d'éléments finis de type forces. Un majorant du carré de l'erreur est la différence des énergies élastiques trouvées par chacune des deux approches.

En pratique, cette méthode, qui nécessite 2 calculs complets, est très rarement employée, en raison de son coût et du caractère inusuel de l'approche éléments finis de type forces.

3.2.1.3. Estimation par extrapolation

Szabo (1986) montre, et on peut déduire des expressions comme (III.3.1) en tenant compte de leurs hypothèses et notamment de l'ordre de la solution exacte, que le taux de convergence de la méthode des éléments finis, dans le cas de la h-version, est de la forme

$$\|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_h\| \leq K \cdot \text{NDDL}^{-\beta} \quad (\text{III.3.10})$$

Cela revient à dire que, dans le cas élastique, les courbes

$$\log \frac{\| \mathbf{u}_{\text{ex}} - \mathbf{u}_h \|}{\| \mathbf{u}_{\text{ex}} \|} = f [\log (\text{NDDL})] \quad (\text{III.3.11})$$

sont des droites de pente variable selon le type d'élément utilisé, lorsque les maillages sont obtenus par raffinements uniformes successifs et que le nombre de DDL est suffisant.

La quantité $\| \mathbf{u}_h \|^2$ peut être écrite sous la forme

$$\| \mathbf{u}_h(\text{NDDL}) \|^2 = a - b (\text{NDDL})^{-c} \quad (\text{III.3.12})$$

où les constantes a , b , c sont indéterminées. La constante a vaut évidemment $\| \mathbf{u}_{\text{ex}} \|^2$ et le second terme tend vers zéro lorsque NDDL croît.

On peut calculer K et β , ou a , b et c , si on connaît les énergies approchées $\| \mathbf{u}_h \|^2$ de 3 maillages obtenus par raffinement uniforme. Si on en a plus et qu'ils ne correspondent pas à un tel raffinement, il est possible que ces points ne soient pas sur une même courbe (III.3.12). Dans ce cas, il faut en chercher l'enveloppe de telle manière à obtenir une asymptote qui soit au-dessus de tous les points. On fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de points erronés ou de solutions dont l'énergie est supérieure à l'énergie exacte (par exemple par utilisation d'éléments non conformes ou d'un modèle forces).

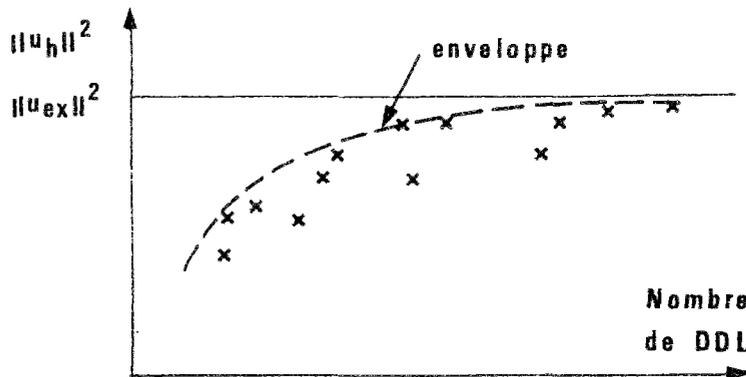


Fig. III-3-4. Enveloppe des énergies approchées

Soient $U_1 = a_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)$, U_2 et U_3 les énergies $\| \mathbf{u}_h \|^2$ trouvées pour trois maillages ayant N_1 , N_2 et N_3 degrés de liberté. K et β sont calculés par résolution des équations

$$K = \frac{U_1 - U_{i-1}}{N_{i-1}^{-\beta} - N_1^{-\beta}}$$

et
$$\frac{U_3 - U_2}{N_2^{-\beta} - N_3^{-\beta}} = \frac{U_2 - U_1}{N_1^{-\beta} - N_2^{-\beta}}$$

L'énergie pseudo-exacte $U_{\text{ex}} = \| \mathbf{u}_{\text{ex}} \|^2$ est calculée par

$$U_{\text{ex}} = \frac{U_i N_i^\beta - U_{i-1} N_{i-1}^\beta}{N_i^\beta - N_{i-1}^\beta} \quad (\text{III.3.13})$$

et la connaissance de U_{ex} permet de calculer une estimation de l'erreur par (III.3.8).

On remarque cependant que cette estimation ne peut donner que l'erreur globale $\| \mathbf{u}_{\text{ex}} - \mathbf{u}_h \|$. Aucune erreur locale ne peut être calculée par différence entre les carrés des normes exacte et approchée mesurées par exemple sur un élément E :

$$\| \Delta \mathbf{u} \|^2_E \neq \| \mathbf{u}_{\text{ex}} \|^2_E - \| \mathbf{u}_h \|^2_E$$

Cette approche nécessite 3 calculs sur des maillages raffinés. Le coût des deux premiers est faible devant celui du dernier, qui utilise le maillage le plus fin.

Szabo (1986) trouve, avec cette technique appliquée à la p-version, une estimation correcte de l'erreur, qui peut aller de 0.8 à 1.5 fois environ sa valeur exacte. Le calcul a été fait sur deux problèmes où la solution analytique est connue : le cylindre épais sous pression et la fissure.

Dans (Babuska, 1982), d'autres résultats sont présentés pour des problèmes présentant des singularités ou des matériaux quasi-incompressibles. Dans ce dernier cas, sur l'exemple proposé, le raffinement par h-version de maillages constitués d'éléments de faible degré (triangles à 3 noeuds) ne diminue pas l'erreur pour $NDDL < 300$. Le nombre maximum de DDL utilisé est insuffisant pour atteindre la "zone asymptotique" où les estimations sont valables. Dans un autre exemple, la décroissance de l'erreur ne commence lentement qu'à partir de $NDDL = 500$ environ. Les erreurs sont calculées par différence selon (III.3.8).

3.2.2. Estimations locales

Nous présentons ici des estimations locales (élémentaires) de l'erreur obtenues par divers procédés. Elles permettent non seulement l'évaluation de l'erreur commise (les erreurs locales peuvent être sommées pour obtenir une erreur globale) mais aussi des informations sur la qualité du maillage. Les endroits où l'erreur locale est trop importante peuvent être affinés pour un éventuel calcul ultérieur. L'utilisation des erreurs locales pour un remaillage est traitée au §III.4.3.

3.2.2.1. Utilisation des résidus des équations d'équilibre

- *Préliminaire*

Dans le cas du problème élastique quasi-statique discrétisé par éléments finis, on définit le résidu r_E en tout point de l'élément E par

$$r_E = \text{div } \sigma_h + X \quad (\text{III.3.14})$$

Le résidu total r se décompose en un terme régulier r_E sur chaque élément, et en un terme singulier J_Γ localisé sur les frontières des éléments. On montre que J_Γ est le saut du vecteur contrainte approchée sur chaque face Γ d'élément n'appartenant pas à $\partial_u \Omega$:

$$\text{si } \Gamma \in \partial_F \Omega \text{ alors } J_\Gamma = F_s - n \cdot \sigma_h \quad (\text{III.3.15})$$

$$\text{si } \Gamma \in \Omega - \partial \Omega \text{ alors } J_\Gamma = n \cdot (\sigma_{h_1} - \sigma_{h_2}) \quad (\text{III.3.16})$$

où n est la normale à la face Γ et σ_{h_i} la contrainte sur cette face considérée comme appartenant à l'élément i .

Il reste à déduire de ces déséquilibres une estimation de l'erreur. On peut montrer que

$$\| \Delta u \|^2 = \sum_{\text{éléments}} \int_{V_E} r_E^T \Delta u \, d\Omega + \sum_{C_1} \int_{\Gamma} J_\Gamma^T \Delta u \, d\Gamma$$

où C_1 est l'ensemble des faces d'éléments n'appartenant pas à $\partial_u \Omega$. Cette expression ne peut être utilisée directement pour évaluer l'erreur mais est reprise par certains auteurs pour construire des majorations.

- *Estimation de Zienkiewicz, Gago et Kelly*

Ces auteurs (Kelly, 1983), (Zienkiewicz, 1986) généralisent un estimateur d'erreur présenté dans

(Babuska, 1979) et en déduisent un estimateur e_E sur l'élément E calculé par

$$e^2_E = \frac{1}{24} \frac{h^2}{Ap} \int_{V_E} r^2_E d\Omega + \frac{1}{24} \frac{h}{Ap} \sum_{\text{côtés de } E} \int_{\Gamma} J^2_{\Gamma} d\Gamma \quad (\text{III.3.17})$$

où h est le côté de l'élément, p est le degré des fonctions de forme de l'élément, et A une constante caractéristique du problème, par exemple $\frac{E}{1-\nu}$ en contraintes planes. L'estimation de l'erreur globale e est obtenue par la règle de sommation (III.2.11).

L'estimation initiale de Babuska n'était valable que pour des éléments bilinéaires carrés ($p = 1$). Sous cette condition, l'auteur prouvait que son estimation de l'erreur vérifie l'encadrement (III.2.37). L'estimation étant d'autant meilleure que les coefficients k_1 et k_2 sont proches de 1, on les appelle parfois coefficients d'efficacité (de l'estimation de l'erreur ; à ne pas confondre avec la précision du maillage). L'auteur vérifie expérimentalement que ces coefficients de qualité sont d'autant plus proches de 1 que le maillage est optimal, et considère qu'un maillage est optimal lorsque les estimateurs locaux sont égaux :

$$e_E = \text{constante} \quad \forall E \subset \Omega_h \quad (\text{III.3.18})$$

(III.3.18) n'est démontrée que dans le cas monodimensionnel. Une discrétisation est optimale si elle minimise l'erreur pour un nombre donné (suffisamment grand) de DDL.

Il n'est pas prouvé théoriquement que (III.3.17), généralisation de l'estimation de Babuska aux éléments de forme et degré quelconques, vérifie l'encadrement (III.2.37), ni la règle d'optimalité (III.3.18).

• *Estimation de Babuska et Rheinbolt*

Une autre estimation basée sur les résidus est donnée par ces auteurs dans (Babuska, 1979).

L'estimation locale pour le degré de liberté i est

$$e_i = \left\| \mathbf{u}_h - \mathbf{u}^*(\Omega_i, \mathbf{u}_h) \right\|_{\Omega_i}$$

où Ω_i est le support des fonctions de forme reliées au DDL i (cf. §II.3.1.3). Le champ \mathbf{u}^* est la solution exacte de $\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{X} = 0$ sur le domaine Ω_i , avec les conditions aux limites $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_h$ sur $\partial\Omega_i$. Cette solution exacte devrait être obtenue en résolvant analytiquement un problème aux limites sur le domaine Ω_i . En pratique, une solution approchée de ce problème est obtenue par raffinement de la discrétisation de Ω_i . L'estimation globale se calcule par

$$e^2 = \sum_{i=1}^{\text{NDDL}} e^2_i \quad (\text{III.3.19})$$

Une estimation e_E peut également être définie sur chaque élément en prenant en compte les estimations e_i de chacun des DDL auxquels il est relié, et les autres éléments qui partagent ces DDL. L'estimation globale est alors déduite des e_E par la règle de sommation (III.2.11). Elle vérifie l'encadrement (III.2.37). Il n'a pas été cherché si e_E vérifiait la règle d'optimalité (III.3.18).

• *Autre estimation de Zienkiewicz (1983)*

Une solution approchée u_h est obtenue avec un maillage donné. L'utilisation d'éléments hiérarchiques dans le cadre de la p-version est introduite et des indicateurs d'erreur décidant de l'ajout ou non d'un nouveau DDL à l'élément étudié (par augmentation du degré de ses fonctions de forme) sont présentés. Une estimation locale est obtenue en considérant les fonctions de forme ajoutées à celles utilisées pour la solution de départ u_h . Indicateurs et estimateurs sont déduits des résidus des équations d'équilibre. Les auteurs montrent que l'erreur réelle est surestimée par cette estimation. Les estimations locales vérifient une règle de sommation comme (III.3.19) mais seulement sur les DDL rajoutés.

• *Estimation de Specht*

Specht (1984) propose une autre estimation de l'erreur basée sur les résidus r_E et les sauts J_Γ aux frontières des éléments.

Un terme de résidu approché est évalué par

$$r_i = \int_{V_E} r_E n_i d\Omega + \sum_{\Gamma \in \Gamma_E^*} \int_{\Gamma} J_{\Gamma E} n_i d\Gamma$$

où $J_{\Gamma E}$ est évalué par (III.3.15) si Γ est inclus dans $\partial_F \Omega$, et par la moitié de (III.3.16) dans le cas contraire. La fonction n_i appartient à un ensemble de m fonctions de pondération polynomiales. Γ_E^* est l'ensemble des faces de l'élément E n'appartenant pas à $\partial_u \Omega$. Des précautions doivent être prises pour éviter que les fonctions n_i ne soient orthogonales aux résidus. L'estimation e_E sur un élément a la valeur

$$e^2_E = \sum_{i=1}^m r_i^T K_r^{-1} r_i$$

où K_r est une matrice de raideur destinée à donner à cette estimation la dimension d'une énergie. L'erreur globale se calcule par la règle de sommation (III.2.11). L'auteur vérifie expérimentalement un encadrement de l'estimation par (III.2.37), l'estimation semblant souvent par défaut. Il ne cherche pas à vérifier si la règle d'optimalité (III.3.18) est vérifiée.

3.2.2.2. *Utilisation de champs de contraintes statiquement admissibles*

En élasticité linéaire, le théorème de Prager-Synge relie un champ de déplacements u_1 C.A. avec les déplacements imposés et un champ de contraintes σ_2 S.A. avec les efforts imposés trouvés sur une structure par

$$a_2(\sigma_{ex} - \sigma_{12}, \sigma_{ex} - \sigma_{12}) = \int_{\Omega} (\sigma_{ex} - \sigma_{12}) M (\sigma_{ex} - \sigma_{12}) d\Omega = \frac{1}{2} (\Pi_1(u_1) + \Pi_2(\sigma_2)) \quad (III.3.20)$$

où $\sigma_{12} = \frac{1}{2} (\sigma_2 + L.\epsilon_1)$ est un champ moyenne.

Ce théorème permet à Ladevèze et ses collaborateurs de proposer la notion d'erreur en relation de

comportement. Dans le cadre classique de l'analyse par éléments finis de type déplacements, le résultat du calcul approché est un champ de déplacements u_h C.A. avec les déplacements imposés et un champ de contraintes σ_h non S.A. avec les efforts imposés, qui ne permet pas d'appliquer le théorème de Prager-Synge. Le champ de contraintes statiquement admissible $\hat{\sigma}_h$ nécessaire est tiré du champ de contraintes approchées σ_h . Diverses voies peuvent être suivies pour trouver un tel champ, en faisant intervenir un calcul global ou des calculs locaux. Le meilleur champ, à la fois S.A avec les efforts et le plus proche du champ σ_h , peut être trouvé par un calcul global. Pour des raisons de coût, un prolongement du champ σ_h utilisant uniquement des calculs locaux est retenu. Bien entendu, aucun de ces champs statiquement admissibles n'est déduit du champ de déformations ϵ_h par la loi de comportement élastique, ce qui justifie la dénomination d'erreur en relation de comportement. Coffignal (1987) a étendu cette erreur au cas élastoplastique statique en petites transformations.

Nous allons en développer succinctement la formulation.

On suppose la solution approchée (u_h, σ_h) obtenue par un calcul éléments finis de type déplacements. Cela permet de prendre u_h comme champ de déplacements \hat{u}_h C.A. avec les déplacements imposés. Le champ $\hat{\sigma}_h$ S.A. avec les efforts imposés est construit à partir de σ_h par un prolongement local décrit plus loin.

En élasticité linéaire, l'erreur en relation de comportement sur Ω peut être définie par

$$e_{\Omega} = \frac{\| \sigma_h - \hat{\sigma}_h \|_{\Omega}}{2 \| \sigma_h \|_{\Omega}} \quad (\text{III.3.21})$$

La contribution d'un élément E à l'erreur est

$$c_E = \frac{\| \sigma_h - \hat{\sigma}_h \|_E}{2 \| \sigma_h \|_{\Omega}} \quad (\text{III.3.22})$$

et l'erreur globale e_{Ω} vérifie la règle de sommation (III.2.11) pour les contributions élémentaires c_E .

Le théorème de Prager-Synge permet de montrer que l'on a

$$e_{\Omega} = \frac{\| \sigma_{ex} - \sigma_{12} \|}{\| \sigma_h \|} \quad (\text{III.3.23})$$

où $\sigma_{12} = \frac{1}{2} (\sigma_h + \hat{\sigma}_h)$.

Ce théorème permet donc le calcul de l'erreur sans la solution exacte correspondante. Mais, évidemment, aucune autre erreur que (III.3.23) ne peut être calculée.

Dans le cas de la plasticité, les résultats approchés et donc l'erreur dépendent du trajet de chargement suivi. On se limite ici aux matériaux standards. Plusieurs types d'erreur relative sont présentés ; nous décrivons seulement le suivant (Ladevèze, 1987) :

$$E^2(T) = \sup_{\tau \leq T} \frac{N(\tau)}{D(\tau)} \quad (\text{III.3.24 a})$$

$$\text{avec } N(t) = \int_{\Omega} \int_0^t (\sigma_h - \hat{\sigma}_h) (\dot{\epsilon}_h - \dot{\hat{\epsilon}}_h) d\tau d\Omega \quad (\text{III.3.24 b})$$

$$\text{et } D(t) = 2 \int_{\Omega} \int_0^t (\hat{\sigma}_h \dot{\epsilon}_h + \sigma_h \dot{\epsilon}_h) dt d\Omega \quad (\text{II.3.24 c})$$

où les couples $(\dot{\epsilon}_h, \sigma_h)$ et $(\dot{\epsilon}_h, \hat{\sigma}_h)$ vérifient la loi de comportement élastoplastique. Les auteurs ne semblent pas tenir compte du fait que la vérification du comportement peut n'être qu'approchée, à cause des erreurs dans les corrections plastiques vues au §II.4.5. Le champ ϵ_h est C.A. avec les déplacements imposés, et le champ $\hat{\sigma}_h$ est S.A. avec les efforts imposés. La formulation de cette erreur se ramène à l'erreur sur le travail des forces internes (III.2.35), où les champs exacts de contraintes et de vitesse de déformation sont remplacés par les champs construits par prolongement. Les erreurs élémentaires vérifient la règle de sommation (III.2.11). Il est démontré dans le cas élastique que la règle d'optimalité (III.3.18) est vérifiée. Coffignal (1987) l'admet pour ses calculs en élastoplasticité.

Le champ statiquement admissible $\hat{\sigma}_h$ est construit à partir des contraintes approchées σ_h trouvées lors du calcul par éléments finis, et des efforts X et F_n appliqués à la structure. Il doit être S.A. avec les efforts, donc continu à la traversée des frontières d'éléments et en équilibre avec les efforts imposés dans les éléments (en pratique des forces de volume de variation connue) et à la frontière. On obtient ce champ en ajoutant au champ approché σ_h un prolongement $\hat{\sigma}_h - \sigma_h$. Le prolongement vérifie sur l'élément E la relation

$$\int_{V_E} \mathbf{B}^T (\hat{\sigma}_h - \sigma_h) d\Omega = 0 \quad (\text{III.3.25})$$

puisque le champ approché σ_h vérifie les équations d'équilibre (II.1.2) en moyenne sur l'élément E. Dans le cas des triangles P1, le prolongement est obtenu en divisant chaque triangle en trois sous-triangles reliés à un noeud central. Le degré du polynôme d'interpolation de l'élément conditionne la variation possible des forces de volume X : par exemple, les forces de volume doivent être constantes sur l'élément pour le triangle P1.

Plusieurs méthodes de construction d'un prolongement sont possibles. La méthode retenue par Ladevèze et ses collaborateurs minimise l'effort de calcul nécessaire à la construction du prolongement. Ce dernier est construit par résolution de problèmes locaux dont la taille est de l'ordre de grandeur du nombre d'éléments reliés à un noeud du maillage. Pour des triangles, le nombre optimum est de 6 et des maillages pas très bons en contiennent rarement plus de 12 ; cela donne une idée de la faible taille du problème à résoudre. Pour des tétraèdres, le principe est identique.

Le détail de la construction de ce prolongement est donné en élasticité et en élastoplasticité dans (Coffignal, 1987).

3.3. Conclusion

Nous avons présenté dans ce paragraphe quelques méthodes de détermination approchée de l'erreur obtenue dans un calcul numérique. Nous verrons plus loin que plusieurs de ces méthodes

permettent de proposer une amélioration du maillage initial. Nous retiendrons que l'estimation de l'erreur en élasticité semble maintenant au point ; les différentes méthodes se rattachent toutes à l'erreur en énergie. Dès que l'on s'aventure dans les problèmes non linéaires, la littérature s'appauvrit très vite. La définition de l'erreur y est déjà plus délicate, et son calcul l'est encore plus. Enfin, en plasticité, d'autres paramètres non pris en compte en élasticité interviennent et ont une grande importance.

4. TECHNIQUES ADAPTATIVES D'AMELIORATION DE MAILLAGES

4.1. Introduction

Ce paragraphe expose diverses méthodes permettant d'améliorer de façon **non géométrique** un maillage donné (l'amélioration géométrique est traitée au §III.1.3). On suppose qu'un calcul a été fait sur la structure et que ses résultats sont connus et exploitables. On ne se préoccupe pas de savoir si les méthodes proposées sont étayées par une base mathématique solide, tirées de l'expérience d'un auteur ou totalement empiriques : elles sont présentées en bloc et "que la meilleure gagne", autrement dit la plus efficace est celle qui améliore le mieux un maillage pour le coût le plus bas possible. Pour juger leur qualité, l'idéal serait qu'elles soient toutes testées sur des cas où la solution exacte est connue, et que les erreurs obtenues et le coût de l'amélioration soient comparés. Il ne nous a pas été possible dans le cadre de ce travail, même si des solutions exactes en élasticité ou en élastoplasticité ont pu être construites, de reprogrammer tout ce qui a été fait dans le but d'améliorer les maillages. Nous nous limiterons donc à la présentation rapide des méthodes avec éventuellement quelques résultats donnés par les auteurs, et au test de quelques-unes d'entre elles.

Avant de présenter ces techniques d'amélioration, nous allons exposer quelques remarques sur les méthodes de remaillage qui leur sont liées. Une technique d'amélioration donnée peut n'être exploitable que par une partie des méthodes classiques de remaillage : p-, r- ou h-version classique ou modifiée. Or ces différentes méthodes n'ont pas le même domaine d'application.

Dans un contexte industriel, on éliminera d'abord toute amélioration qui nécessite un nombre d'itérations élevé avant d'atteindre un maillage correct, pour d'évidentes raisons de coût. L'idéal est d'atteindre un bon maillage fils à partir d'un maillage père en une seule itération (ou éventuellement un peu plus si le maillage père est très grossier ou le problème très perturbé). Ce maillage ne doit pas dépendre du maillage père, il doit être possible d'affiner ou au contraire de diminuer localement la précision de l'approximation de façon quelconque. Ces conditions éliminent la r-version et la h-version classique.

La p-version est envisageable même si elle ne permet pas en général de réduire le degré des fonctions de base là où la solution est trop précise. On peut ainsi définir dans un cadre de recherche des suites de maillages dont l'erreur décroît très vite en fonction du nombre de DDL. Dans un cadre industriel, il peut être difficile de retenir cette technique. La p-version nécessite en effet la formulation d'éléments de degré élevé. Les codes industriels disposent en général d'une bibliothèque

d'éléments très complète au sens des types de structure traitées (milieux continus, barres, plaques, coques, etc.) mais limitée pour les polynômes d'interpolation aux premiers ordres.

La h-p version est plus envisageable que la p-version car elle combine les avantages des deux méthodes (cf. remarque §III.1.5.1).

Il semble cependant que seul un remaillage de type h-version modifiée soit adapté à n'importe quel code de calcul. Il faut pour cela construire le champ de tailles d'éléments du "bon" maillage fils, à partir d'indicateurs d'erreur ou de tout autre procédé. Cela peut être fait par un postprocesseur spécialisé. Un MRCT génère le maillage à partir du champ de tailles et un nouveau calcul est fait à partir de ce maillage. Cette approche commence à être utilisée dans les codes du marché.

4.2. Techniques d'amélioration non reliées à une estimation de l'erreur

Nous présentons quelques résultats trouvés dans la littérature permettant d'améliorer par une méthode quelconque la qualité d'un maillage sans fournir d'estimation de l'erreur commise. Les méthodes sont classées en fonction des techniques de remaillage qui y sont associées. Les auteurs des articles les plus anciens peuvent présenter des algorithmes particuliers de construction automatique ou semi-automatique de maillages, rendus nécessaires par l'inexistence de MRCT généraux à la date où les articles ont été rédigés. Nous considérons que les algorithmes les plus performants, décrits au §III.1.5.3 pour la h-, r- et p-version, sont suffisants pour la compréhension et l'utilisation éventuelle de ces méthodes.

4.2.1. Méthodes de type r-version

Bien que leur intérêt pratique soit limité du fait de leur trop grande dépendance vis-à-vis du maillage initial, nous présentons quelques méthodes où seules les coordonnées des noeuds peuvent être modifiées en vue d'améliorer le maillage.

- *MFE ou éléments finis mobiles*

Dans la technique des éléments finis mobiles (MFE ou "moving finite elements" (Baines, 1987)), les inconnues du problème sont non seulement les valeurs nodales des champs à déterminer mais aussi les coordonnées de ces noeuds. La topologie est généralement supposée invariante, peu d'auteurs semblant utiliser la r-version modifiée ou au moins améliorer géométriquement après le déplacement des noeuds. Miller et Baines, entre autres, utilisent cette méthode en mono- ou multidimensionnel pour par exemple des problèmes de diffusion ou de chocs. La position variable des noeuds est corrigée par des termes de pénalisation empêchant la génération d'éléments plats ou croisés.

En élasticité, plusieurs auteurs [(Carrol, 1973) ou (Turcke, 1974) par exemple] écrivent la matrice de rigidité comme fonction des inconnues habituelles et des coordonnées des noeuds du maillage, dans le cas où $\mathbf{u}_d = 0$ sur $\partial_u \Omega_h$. L'énergie potentielle Π_1 donnée par (II.3.9) est écrite en fonction des déplacements nodaux \mathbf{u}_h et des coordonnées \mathbf{x} des noeuds mobiles (ceux de la frontière étant bloqués de façon à conserver la géométrie initiale) :

(II.3.9) est minimisée lorsque

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (\text{II.3.10})$$

et $\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_i} = 0$ pour tous les x_i mobiles (III.4.1)

Le problème de minimisation de l'énergie interne exprimée de cette façon n'est plus linéaire et nécessite l'utilisation de techniques itératives coûteuses d'optimisation multidimensionnelle. Chaque itération nécessite la construction d'une nouvelle matrice \mathbf{K} et la résolution de (II.3.10).

- *Approche de Bathe-Sussman*

Une autre approche cherchant toujours à minimiser l'énergie par déplacement des noeuds est exposée dans (Bathe, 1983). Les auteurs cherchent pour chaque noeud la direction qui maximise $\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_i}$, autrement dit qui, sur le maillage fils, donnera une fonctionnelle énergie la plus faible possible. La méthode ne donnant que la direction du déplacement et non son amplitude, un procédé heuristique de détermination de ce dernier est précisé. Les exemples présentés en 2-D nécessitent une dizaine d'itérations avec pour chacune d'elles une construction et résolution de (II.3.10).

Ces méthodes ne fournissent pas d'estimation de l'erreur. Chercher l'énergie exacte par extrapolation selon (III.3.13) afin de calculer l'erreur par différence selon (III.3.8) est même impossible car chaque maillage ne contient pas les noeuds de ses prédécesseurs, et le nombre de DDL est constant. Les améliorations sont surtout sensibles pour un maillage très grossier et à faible nombre de DDL. Un maillage amélioré par cette technique est intéressant par exemple pour une reprise par une p-version.

4.2.2. Ajout local de degrés de liberté par h- ou p-version

Divers auteurs proposent d'ajouter localement des DDL si un certain critère d'amélioration est satisfait par cet ajout.

- *Approche de Melosh (1977)*

Cet auteur mesure l'effet de l'ajout de degrés de liberté w_i sur l'énergie potentielle Π_1 évaluée sur un maillage père. Ces DDL supplémentaires sont obtenus par ajout d'un noeud central à un élément. Une répétition exagérée de cette technique peut conduire à de mauvais découpages vus au §III.1.5.1. L'évaluation d'un terme d'amélioration exprimé en fonction de l'énergie potentielle Π_1 décide de cet ajout :

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial w_i} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial w_i} \right]^T (\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{F}) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial w_i} \mathbf{q} \quad (\text{III.4.2})$$

qui, comme l'équation (II.3.10) est vérifiée et que w_i est intérieur à un élément, peut se réduire à

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial w_i} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_E^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}_E}{\partial w_i} \right] \mathbf{q}_E \quad (\text{III.4.3})$$

où \mathbf{q}_E est le vecteur des degrés de liberté reliés à l'élément E et \mathbf{K}_E sa matrice de rigidité. La dérivée (III.4.2) est approximée par la différence d'énergie entre l'élément initial et l'élément divisé.

Il en est déduit que :

- cette différence tend vers zéro si la taille des éléments tend vers zéro
- la solution exacte (locale ou globale) est atteinte si cette différence (locale ou globale) ne change pas après un raffinement (local ou global).

• *Approche de Peano*

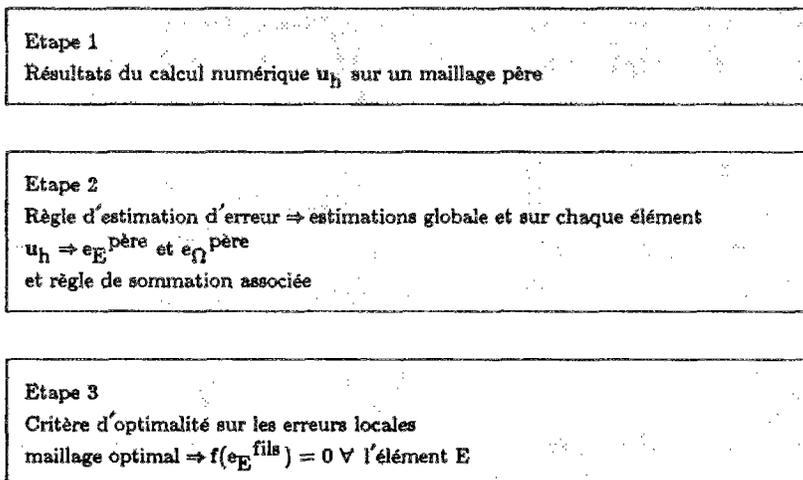
Basu et Peano (Basu, 1983) appliquent une idée analogue mais dans le cadre de la p-version par utilisation d'éléments hiérarchiques. Cette technique permet de séparer les termes de rigidité des DDL ajoutés de ceux du maillage père dans la matrice de rigidité, et donc l'utilisation d'une méthode de décomposition par blocs pour la résolution de (II.3.10).

L'expression $\frac{\partial \Pi_1}{\partial w_i}$ est tirée du second membre associé au nouveau DDL w_i et on décide de rajouter ou non le degré de liberté en fonction de la valeur de cette dérivée. Celle-ci peut servir d'indicateur d'erreur pour le DDL w_i . Les auteurs n'ont pas cherché d'expression de ces indicateurs valable sur un élément, ni si un tel indicateur vérifierait la règle d'optimalité (III.3.18).

4.3. Remaillage global par h-version modifiée tiré d'indicateurs ou d'estimateurs d'erreur locaux

Beaucoup d'estimateurs ou d'indicateurs d'erreur locaux e_i vérifient l'une des règles de sommation (III.2.11) ou (III.3.19). Il est également constaté par de nombreux auteurs la règle d'optimalité (III.3.18).

Nous avons précédemment remarqué l'insuffisance des méthodes de remaillage de type r-, p- ou h-version classique dans un contexte industriel. L'utilisation de la h-version modifiée est préférable mais il faut pouvoir déterminer le champ de tailles du maillage fils optimal. Ce maillage fils peut être déterminé par la procédure suivante :



<p>Etape 4 Donnée de l'erreur globale souhaitée sur le maillage fils e_{Ω}^{fils}</p>
<p>Etape 5 Loi de remaillage à partir des erreurs locales \Rightarrow Taille des éléments du maillage fils $e_E^{\text{père}}$ et $e_{\Omega}^{\text{fils}} \Rightarrow h_{\text{fils}}$</p>
<p>Etape 6 Maillage respectant un champ de tailles \Rightarrow Maillage fils "optimal" selon la règle retenue. h_{fils} et maillage père \Rightarrow maillage fils</p>

La règle (III.3.18) correspond, à l'étape 3, à une fonction $f(e_E^{\text{fils}}) = e_E^{\text{fils}} - \frac{e_{\Omega}^{\text{fils}}}{\sqrt{\text{NUMEL}_{\text{fils}}}}$.

Pour utiliser cette procédure, nous disposons déjà de divers MRCT, d'une règle de sommation, d'une règle d'optimalité et de plusieurs estimations de l'erreur locale vérifiant ces règles. Seule reste à trouver une loi de remaillage (étape 5) qui y soit adaptée.

La définition retenue ici d'un maillage optimal est la suivante : le maillage optimal minimise le nombre de degrés de liberté pour une erreur identique. En pratique, ce nombre de DDL est remplacé par le nombre d'éléments, ce qui est justifié si tous les éléments sont de même type et si le nombre d'éléments est suffisamment grand. En élastoplasticité, le coût du calcul dépend largement d'autres facteurs (cf. §III.2.7).

Le volume d'un élément est relié à sa "taille" par une loi de type

$$V_E = k \cdot h^d \tag{III.4.4}$$

où d est la dimension de l'espace physique traité. Nous choisirons k pour que h soit le côté du carré de surface V_E pour des quadrilatères, et le côté du triangle équilatéral de surface V_E pour des triangles. Cela donne $k = 1$ pour un carré et $\sqrt{3}/4$ pour un triangle.

Le coefficient χ_E de modification de la taille des n_E éléments fils contenus dans l'élément père E de volume V_E donne le nombre (non forcément entier) n_E par

$$n_E = \frac{1}{\chi_E^d} \tag{III.4.5}$$

et le maillage fils optimal au sens défini précédemment minimise

$$\text{NUMEL}_{\text{fils}} = \sum_{\text{maillage père}} n_E \tag{III.4.6}$$

Les hypothèses du problème de minimisation (III.4.6) sont :

- le critère d'optimalité (III.3.18)

- le comportement asymptotique de l'erreur pour l'élément utilisé est de l'ordre de h^p
- la solution exacte est censée être suffisamment régulière pour permettre l'application des formules asymptotiques comme (III.3.1)
- tous les éléments sont de même type (géométrie et degré du polynôme d'interpolation)
- on souhaite avoir sur le maillage fils une erreur globale e_{fils} (donc un indicateur d'erreur locale

$e_{E_{\text{fils}}} = \left(\frac{e_{\text{fils}}^2}{\text{NUMEL}_{\text{fils}}} \right)^{1/2}$ constant sur chaque élément), connaissant les indicateurs e_E du maillage père.

On trouve dans (Coffignal, 1987) l'expression du coefficient χ_E pour chaque élément du maillage père :

$$\chi_E = \frac{e_{\text{fils}}^{\frac{1}{p}}}{e_E^{\frac{2}{2p+d}} \left[\sum_{\text{maillage père}} e_i^{\frac{2d}{2p+d}} \right]^{\frac{1}{2p}}} \quad (\text{III.4.7})$$

Une variante de cette loi de remaillage est proposée dans (Ladevèze et Leguillon, 1983) en fonction des densités d'erreur. L'objectif est d'obtenir un maillage respectant une densité d'erreur fixée.

Il est maintenant clair qu'un maillage optimal respectant une précision fixée peut être obtenu à partir d'un maillage père en une seule itération. Il vaut mieux cependant éviter un trop grand changement d'ordre de grandeur du nombre de DDL en passant du maillage père aux maillages fils. Un maillage très grossier escamotera une partie des zones perturbées de la structure et fournira une information insuffisante pour avoir un maillage fils correct. Coffignal suggère de faire une procédure en deux étapes. Un premier calcul est fait sur un maillage père très grossier. Un premier maillage fils en est déduit, en demandant une erreur élevée. Ce maillage, encore grossier, tient déjà plus compte que son père des particularités de la structure. Enfin, un deuxième maillage fils est utilisé pour obtenir l'erreur souhaitée. Il faut aussi tenir compte du mailleur automatique qui ne peut pas respecter n'importe quel champ de tailles et qui lisse les variations trop rapides des dimensions des éléments.

Dans le cas d'un problèmes d'évolution, cette loi peut être utilisée pour remailler la structure en cours de calcul (remaillage *adaptatif*). Dans le cadre de l'élastoplasticité, Coffignal définit deux seuils d'erreur minimale et maximale au-delà desquels il est nécessaire de remailler. Si l'erreur dépasse le seuil maximal, on raffine afin de la diminuer ; si l'erreur descend en-dessous du seuil minimal, on remaille pour diminuer le nombre d'éléments. A la fin de chaque pas de temps, l'erreur en relation de comportement est évaluée et un remaillage a lieu si elle est située en-dehors de la fourchette admissible. Cette méthode est également intéressante pour des chargements non radiaux, lorsque la position des zones fortement sollicitées (et donc celle des éléments les plus fins) évolue au cours du chargement.

Seuls Coffignal et certains collaborateurs de Ladevèze ont utilisé (III.4.7) à partir de l'erreur en relation de comportement. L'application heuristique de cette relation à n'importe quel type d'indicateur d'erreur vérifiant la règle de sommation (III.2.11) et la règle d'optimalité (III.3.18), peut donner des maillages quasi-optimaux selon le même principe. En dehors du domaine où la validité de (III.4.7) est démontrée, seul le test de chaque estimation locale sur un nombre suffisant d'exemples permet de justifier ou non l'application de (III.4.7). Ces tests auraient pu être conduits à partir des solutions exactes construites dans le cadre de ce travail, mais, comme nous l'avons déjà dit, il ne nous a pas été possible d'entreprendre cette tâche.

4.4. Règles semi-empiriques indépendantes des erreurs

Nous présentons ici quelques-unes des différentes règles donnant un maillage plus ou moins bon et non reliées à une évaluation *a priori* ou *a posteriori* d'un indicateur d'erreur. Ces règles peuvent être justifiées en partie par le fait que l'erreur (globale) pour les discrétisations qui en sont déduites est plus faible à coût égal que pour d'autres maillages, ce qui est une présomption d'optimalité mais non une preuve.

4.4.1. Utilisation des données de la géométrie et du chargement

Dans le cadre de la construction automatique et quasi transparente pour l'utilisateur de maillages de structures bi- ou tridimensionnelles complexes, Dubois (1988) propose une approche à deux niveaux du problème du maillage. Il remarque que les méthodes de remaillage asymptotiques, nécessitant de nombreuses étapes avant l'obtention d'un maillage correct, sont trop coûteuses pour un calcul direct et n'ont éventuellement d'intérêt que pour des calculs eux-mêmes itératifs.

Il construit d'abord, à partir des caractéristiques géométriques de la pièce et de quelques données de l'utilisateur (comme une "taille moyenne" des éléments à respecter sur une zone), un automaillage et en déduit un champ de contraintes. Cet automaillage, s'il est grossier, n'est cependant pas arbitraire et tient compte de la géométrie et du chargement, sans pouvoir faire intervenir un champ d'isovaleurs puisque c'est lui qui va servir à sa détermination. Puis, à partir de ce champ de contraintes, le véritable maillage utilisé pour l'analyse fine est construit par une autre règle. L'erreur n'est cependant pas calculée.

La génération de l'auto-maillage tient compte de ce que remarquerait un spécialiste des éléments finis avant tout calcul. Par exemple, les zones à gradients élevés sont situées à proximité des singularités de la géométrie (entailles, angles rentrants, frontières à faible rayon de courbure, extrémités de zones d'appuis) ou des chargements (forces ponctuelles ou très concentrées).

Soit $d(x,y,z)$ le rapport de la taille souhaitée de l'élément à générer à la taille moyenne D fixée par exemple par l'utilisateur. Une première fonction donnant d à partir des rayons de courbure (positifs et négatifs) de la frontière et de l'angle des tangentes extérieures au contour, pondérés par des fonctions spéciales, est décrite. Une seconde fonction, reliant d aux perturbations du chargement, peut y être éventuellement ajoutée. L'auto-maillage est construit en respectant ces tailles.

4.4.2. Utilisation des gradients d'un champ calculé sur la structure

- *Préambule*

Il est connu qu'une discrétisation par éléments finis est plus précise lorsqu'elle est affinée, à l'exception de certains cas où les éléments sont non conformes ou le problème mathématique est mal posé. On sait également qu'il vaut mieux mettre des éléments fins où la variation du champ étudié est rapide, et des éléments plus grossiers où elle est lente ; autrement dit il faut mailler fin là où la norme du gradient est élevée.

En élasticité, le "champ étudié" dont le gradient doit servir de base à un remaillage n'est pas le champ de déplacements mais celui des contraintes ou des déformations (ou du moins un équivalent scalaire de ces quantités tensorielles), ce qui revient à affiner là où la dérivée *seconde* du champ calculé (le champ de déplacements en élasticité) est la plus élevée. Ce dernier point est remarqué par Bonomi (1987) dans le cadre de la *p*-version en mécanique des fluides.

Dans ce qui suit, on cherche à concentrer les éléments dans les zones de fort gradient d'un champ ϕ , qui sera par exemple le champ de contraintes en élasticité. Il faudra aussi distinguer le cas où on souhaite obtenir des éléments non allongés, du cas où les éléments allongés sont tolérés. Dans le premier cas, on générera un champ de tailles $h = f(x)$. Dans le second, on génère soit un champ de tailles h , d'allongements δ et d'inclinaisons θ traitable ensuite par un MRCT comme celui de (Zienkiewicz, 1987), soit un champ d'espacement de noeuds. Il faudra en déduire un semis de noeuds à relier ensuite par triangulation automatique (cf. §III.1.2.2.2).

- *Première loi empirique*

On peut décider de choisir une taille d'éléments telle qu'entre deux noeuds la variation du champ ϕ soit constante, ce qui donne en monodimensionnel la figure suivante :

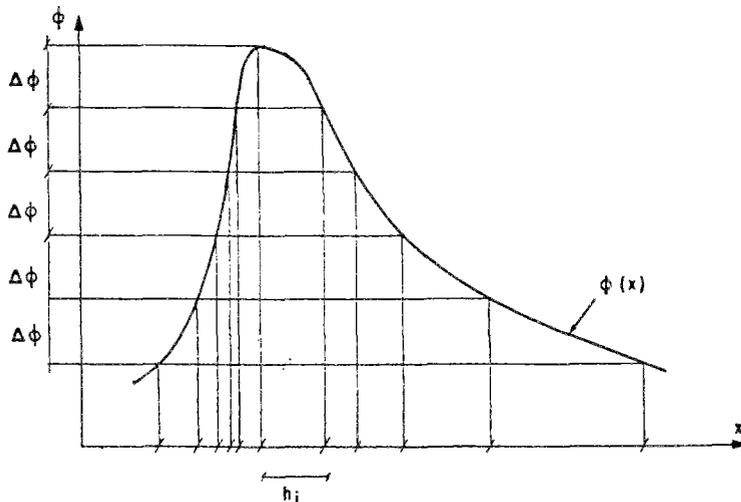


Fig. III-4-1. Espacement des noeuds pour avoir une variation de ϕ constante

et est équivalent à la relation

$$h = \frac{k}{|\text{grad } \phi|} \quad (\text{III.4.8})$$

La généralisation au cas bidimensionnel peut être faite de deux façons, équivalentes en monodimensionnel.

L'espacement des noeuds "dans le sens de la pente" est donné par

$$h = \frac{k_1}{\|\text{grad } \phi\|} \quad (\text{III.4.9})$$

où cette fois le gradient intervient par sa norme. Si on admet des éléments allongés, les noeuds dans l'autre direction sont positionnés pour suivre au mieux le tracé des courbes iso-valeurs.

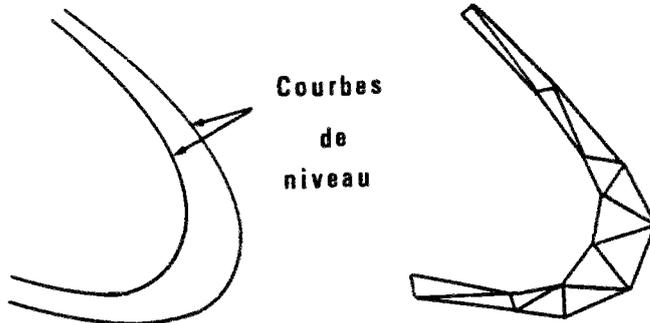


Fig. III-4-2. Eléments allongés placés dans "le sens de la pente"

Si on exige des éléments non aplatis, le volume de l'élément (bidimensionnel) est donné par

$$V_E = \frac{k_2}{\|\text{grad } \phi\|^2} \quad (\text{III.4.10})$$

Ces lois ont l'inconvénient de ne pas être homogènes ; même si la quantité ϕ est sans dimension, son gradient est homogène à l'inverse d'une longueur. On peut introduire une dimension caractéristique r_r de la structure, par exemple $r_r = \sqrt{S/\pi}$ où S est la surface du domaine Ω , et modifier les règles selon le modèle suivant

$$\frac{h}{r_r} = \frac{k}{(r_r \|\text{grad } \phi\|)^\alpha} \quad (\text{III.4.11})$$

On conçoit *a priori* que la première version (III.4.8) de cette règle a l'inconvénient de trop serrer les noeuds au voisinage par exemple d'une évolution rapide ou asymptotique de la valeur ϕ .

- *Seconde loi empirique*

On peut choisir de conserver un produit $h \cdot \Delta\phi$ constant, ce qui atténue l'effet d'une variation rapide de ϕ : la taille des éléments décroît, mais moins vite qu'avec (III.4.8). En monodimensionnel, cela revient à avoir les surfaces hachurées identiques pour tous les pas :

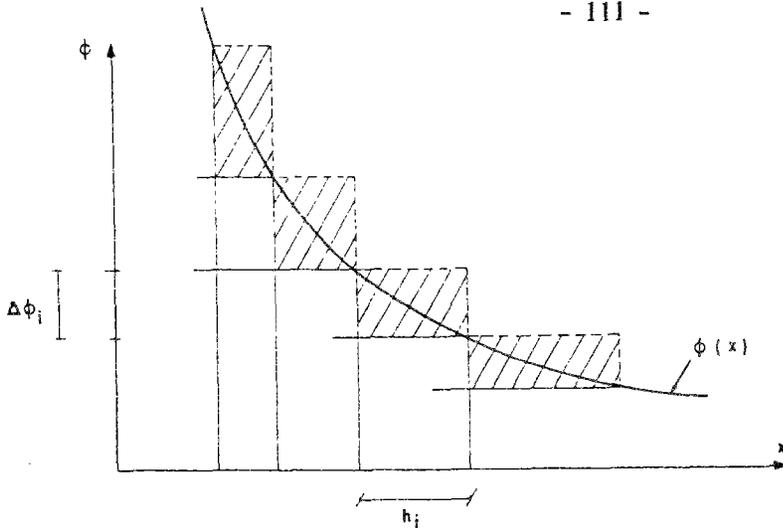


Fig. III-4-3. Espacement des noeuds aboutissant à $h \cdot \Delta\phi$ constant

L'expression donnant h s'écrit en monodimensionnel par

$$\frac{h}{r_r} = \frac{k}{(r_r |\text{grad } \phi|)^{1/2}} \quad (\text{III.4.12})$$

En multidimensionnel, l'espacement des noeuds vaut

$$\frac{h}{r_r} = \frac{k_1}{(r_r || \text{grad } \phi ||)^{1/2}} \quad (\text{III.4.13})$$

Comme précédemment, si on admet des éléments allongés, l'expression précédente donne seulement l'espacement des noeuds dans le sens du gradient maximal. Si on exige des éléments bidimensionnels non aplatis, leur volume est donné par

$$V_E = \frac{k_2}{|| \text{grad } \phi ||}$$

- *Troisième loi empirique*

On généralise les deux règles précédentes par

$$\frac{h}{r_r} = \frac{k}{(r_r || \text{grad } (\phi^\beta) ||)^\alpha} \quad (\text{III.4.14 a})$$

où k , α et β sont des coefficients sans dimension si ϕ est sans dimension. Par exemple, (III.4.13) est équivalente à (III.4.14) avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 1$.

Si le champ ϕ évolue au cours du temps, on peut retenir le sup des gradients de ϕ au cours de l'évolution, ce qui donne

$$\frac{h}{r_r} = \frac{k}{(r_r \text{Sup}_t || \text{grad } (\phi^\beta(t)) ||)^\alpha} \quad (\text{III.4.14 b})$$

Une expérimentation numérique sur cette règle a été faite dans le cas élastoplastique. Les résultats sont présentés chapitre V.

- *Loi de Turcke et McNeice*

Turcke et McNeice (1974) déduisent d'études de maillages améliorés déterminés par r-version en élasticité qu'il est intéressant de disposer les noeuds sur les lignes iso-SED. La SED est l'énergie de

déformation élastique locale, ou $\sqrt{\epsilon.L.\epsilon}$. Shepard (1980) considère la norme du gradient de la SED et propose une méthode de disposition des noeuds sur les lignes iso-valeurs, telle que la variation de la SED entre les noeuds soit constante. Il ne semble pas envisager l'utilisation de la loi (III.4.14) couplée à un MRCT.

Ces règles de disposition des noeuds sur les lignes iso-SED sont évidemment équivalentes à l'expression (III.4.14) dans laquelle ϕ est la SED, α vaut 1 et β vaut 1.

- *Méthode de Dubois*

Dubois (1988) propose une détermination des tailles à partir du champ d'iso-valeurs, calculé sur un automaillage initial (dont la technique de construction est décrite au §III.4.4.1), qui utilise la norme du gradient de ce champ. Les gradients g sont évalués, éventuellement lissés et moyennés. Le paramètre d est évalué par une fonction $G(g)$ monotone décroissante, par exemple en raison inverse des gradients. Comme les champs de tailles déterminés ainsi peuvent avoir des variations trop fortes, il est proposé de choisir les gradients moyens dans des sous-zones du maillage au lieu de prendre le gradient en chaque noeud. La fonction G et l'iso-valeur ne sont pas présentées dans l'article.

5. DISCRETISATION TEMPORELLE EN ELASTOPLASTICITE

Nous excluons *a priori* le cas dynamique, pour lequel il existe des relations entre les discrétisations spatiale et temporelle (conditions de Courant par exemple). Divers algorithmes d'intégration et les pas limites associés existent dans la littérature (par exemple Newmark, 1956).

5.1. Généralités

Dans le cas de l'élastoplasticité quasi-statique, le schéma implicite (cf. §II.4.5.2) est convergent et stable quelle que soit la discrétisation spatiale (Hoffmann et Nguyen, 1978). L'erreur est donnée par la formule (inapplicable) (III.3.6), où la discrétisation en espace est découplée de la discrétisation en temps.

Le pas de temps maximum utilisable est le "pas maximal élastique" introduit au §II.4.3 ; au-delà, le calcul peut perdre toute signification. Il n'y a pas de pas minimum théorique autre que celui lié aux erreurs de troncature.

Nguyen et Zarka (1974) notent qu'aucune étude sérieuse n'a été faite sur la taille des pas de temps Dt ou d'efforts DF à utiliser en élastoplasticité quasi-statique, et qu'en général on choisit ces pas de temps pour aboutir à des pas de déformation de l'ordre de 10^{-3} . Un tel pas correspond, pour un acier courant, à un incrément de contrainte élastique d'environ 0.2 à 0.5 σ_0 . Les auteurs envisagent, pour le matériau parfaitement plastique, une analogie avec la viscoplasticité parfaite. Aucune estimation d'erreur n'en est cependant tirée.

La solution exacte de Krieg et Krieg (1977), développée ultérieurement, a fourni une idée des erreurs dues à la taille et à la direction des pas de déformation (cf. §II.4.5).

Le choix de la discrétisation temporelle dépend également du type d'erreur désiré par l'utilisateur. Lorsque seule l'erreur à un instant donné du chargement (par exemple la fin d'un processus d'évolution) est prise en compte (cf. §III.2.1.5.5), la qualité de l'approximation n'a pas à être mesurée aux temps intermédiaires et il n'est pas nécessaire d'y avoir une grande précision. Nous avons remarqué au §II.4.5 que les méthodes de correction plastique par projection étaient exactes pour les chargements radiaux. On peut donc calculer un chargement monotone radial en un seul pas d'efforts, si on ne s'intéresse qu'à l'erreur à la fin du processus de chargement. Suivant la méthode retenue pour le calcul numérique élastoplastique, ce dernier pourra nécessiter un très grand nombre d'itérations plastiques avant de converger vers le résultat...

Inversement, si on retient la définition de l'erreur enveloppe sur tout le trajet de chargement, les champs approchés et leur interpolation doivent être corrects à tout instant. Le pas limite est celui pour lequel l'interpolation des champs approchés hors des temps t_C est à peine moins précise que leur valeur à ces mêmes temps.

5.2. Contrôle de la taille des pas de temps

Supposons pour simplifier que les efforts extérieurs évoluent au cours d'un pas de temps selon une loi linéaire, et qu'il en est de même pour l'approximation des résultats numériques dans ce pas de temps. On a donc

$$F_i(t) = F_i(t_1) \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} + F_i(t_2) \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \quad (\text{III.5.1})$$

$$\text{et} \quad \sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t_1) \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} + \sigma_{ij}(t_2) \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \quad (\text{III.5.2})$$

Coffignal (1987) remarque que, dans le calcul élastoplastique, il est possible de construire un champ de contraintes $\sigma^\#$ qui vérifie l'équation d'équilibre (II.3.8) à tout temps de l'intervalle $[t_1, t_2]$. Il présente une méthode qui consiste à rajouter une itération à la fin du schéma d'intégration, et donc un incrément $\Delta\sigma$ à la contrainte $\sigma_h(t_2)$. Cette contrainte $\sigma^\#$ ne vérifie plus la loi de comportement élastoplastique, mais son interpolation selon (III.5.2) vérifie l'équilibre à tout instant de $[t_1, t_2]$, sous réserve que les efforts vérifient (III.5.1).

Un contrôle de la taille du pas de temps peut être effectué à partir de cette contrainte $\sigma^\#$. Un équivalent de l'erreur en relation de comportement entre σ_h et $\sigma^\#$ est d'abord défini. L'auteur envisage de vérifier si le pas de temps n'est pas trop grand, en calculant cette erreur $e_{1/2}$ au milieu de l'incrément et en la comparant à sa valeur e_2 en fin d'incrément. Si le rapport $\frac{e_{1/2}}{e_2}$ est trop élevé, l'approximation des contraintes par (III.5.2) est grossière et il faut réduire le pas de temps.

Certains chargements non radiaux complexes conduisent à des efforts qui ne peuvent pas s'écrire au cours du temps par (III.5.1). Une erreur de représentation s'ajoute encore à toutes celles déjà citées, et la recherche d'une contrainte $\sigma^\#$ vérifiant l'équilibre à tout instant n'est plus possible.

Points essentiels du chapitre III

1. Maillage automatique

Le maillage d'une structure est indispensable avant son analyse par la méthode des éléments finis. Cette opération est généralement coûteuse à effectuer manuellement. On est donc amené à utiliser des mailleurs automatiques.

Le maillage automatique est une opération difficile. Le maillage généré ne doit contenir aucune faute sous peine d'ôter toute validité aux résultats des calculs s'appuyant sur lui.

L'amélioration d'un maillage donné est nécessaire lorsqu'on souhaite réduire l'erreur ou le coût d'un calcul numérique. Plusieurs techniques sont envisageables.

Il est d'abord possible d'améliorer géométriquement le maillage, autrement dit rendre "la plus régulière possible" la forme de ses éléments. Cette amélioration géométrique peut être faite localement (barycentrages ou changements de diagonale) ou globalement (à partir de fonctions dépendant de la position des noeuds ou de la régularité des éléments, par exemple).

On peut aussi disposer d'un critère d'amélioration capable d'indiquer les zones où le maillage doit être raffiné ou au contraire rendu plus grossier. Dans ce cas aussi, on peut entreprendre ces modifications de manière locale, ou pour tout le maillage à la fois.

La méthode la plus efficace et la plus polyvalente est la reconstruction totale d'un maillage à partir d'un champ de tailles d'éléments défini en tout point du domaine. Nous appellerons dans la suite "mailleurs respectant un champ de tailles d'éléments" (ou MRCT) les outils informatiques capables de résoudre ce problème. Tous nos maillages ont été construits par un tel outil.

2. Les erreurs

On suppose l'existence d'un champ scalaire exact $\phi_{\text{ex}}(\mathbf{x}, t)$ défini sur un domaine Ω , et d'une approximation ϕ_h de ce champ.

L'erreur entre ϕ_{ex} et ϕ_h est définie comme "une mesure de la différence entre les champs exact et approché". Plusieurs définitions de l'erreur peuvent être utilisées. On peut évaluer :

- une erreur ponctuelle e_p en un point
- une erreur globale e_Ω sur le domaine Ω
- une erreur e_E sur un sous-domaine E d'un domaine Ω . Le plus souvent, E est un élément d'un maillage. Il existe alors une règle de sommation liant les erreurs élémentaires à l'erreur globale. La contribution c_E d'un élément aux erreurs globales peut vérifier cette règle.

Les erreurs peuvent être rendues adimensionnelles en les divisant par une quantité indépendante de

ϕ_h . Cette quantité peut être :

- une valeur de référence ϕ_0 , qui définit l'erreur normée e_2 ;
- la norme du champ exact ϕ_{ex} , auquel cas on obtient une erreur relative e_3 ou e_4 .

Si le champ ϕ évolue dans le temps, on peut définir une erreur globale enveloppe c_Ω à partir des maxima des contributions élémentaires c_E .

Enfin, ces erreurs peuvent être calculées sur tout champ solution du problème, soit, en analyse des structures, les contraintes, les déformations, les déplacements, etc.

3. Estimations d'erreur et maillages optimaux

La plupart des estimations théoriques des erreurs sont inutilisables car elles font intervenir des constantes inconnues. Elles ont l'avantage de montrer les taux de convergence en fonction du degré de l'approximation choisie et de la régularité de la solution exacte du problème.

Divers auteurs ont proposé des estimations semi-empiriques contournant ces difficultés :

- les estimations globales donnent l'erreur sur Ω , sans indiquer quels sont les zones où l'approximation par éléments finis est mauvaise
- les estimations locales peuvent être définies sur chaque élément ou DDL du maillage. Une erreur globale en est déduite par une règle de sommation. Un critère d'optimalité peut y être associé. Un tel critère peut servir de base à la construction d'un maillage fils optimal.

En élastoplasticité, on dispose d'une estimation *a priori* liant les erreurs à la taille des éléments et au pas de temps utilisé, et d'une seule estimation *a posteriori* : l'erreur en relation de comportement de Coffignal (1987).

D'autres méthodes permettent l'amélioration d'un maillage, ou la construction d'un bon maillage, à partir des résultats d'un calcul, mais sans fournir d'estimation de l'erreur. Il est notamment possible de définir les tailles des éléments d'un bon maillage en raison inverse des gradients des contraintes trouvées sur la structure.

CHAPITRE IV

CONSTRUCTION DE SOLUTIONS EXACTES

EN ELASTOPLASTICITE

Nous avons longuement parlé du calcul d'erreurs et de discrétisations optimales. Un moyen fiable de calculer une erreur est de mesurer la différence entre une solution exacte et la solution approchée correspondante. Les méthodes d'estimation d'erreur présentées au §III.3 devraient être étayées sur plusieurs exemples où l'erreur est calculée ainsi ; cette démarche n'a pas été suivie par tous les auteurs présentés.

Il est possible que les solutions exactes connues ne soient pas en nombre suffisant pour permettre des tests représentatifs. Nous présenterons donc dans ce chapitre une méthode pour en construire autant qu'il peut en être nécessaire.

1. NOTION DE SOLUTION EXACTE

Nous ne nous intéresserons qu'au type de solutions exactes décrit au chapitre I. La validité de la modélisation du phénomène physique n'est pas prise en compte.

L'énoncé de la formulation locale du problème mécanique est présenté au §II.1.1.3 et une solution exacte qui correspond à ce problème est constituée des champs décrits au §II.1.1.2.

2. METHODES CLASSIQUES DE RECHERCHE DE SOLUTIONS EXACTES

Les méthodes de résolution analytique des problèmes mécaniques, citées au §II.2, permettent de trouver la solution à quelques problèmes simples. Il faut noter que la plupart des solutions analytiques qui peuvent être trouvées le sont déjà depuis longtemps. Les grands auteurs du XIXème siècle (Boussinesq, Navier, Lamé, Hertz, Saint-Venant, etc.) ou du XXème (Timoshenko, Hill, Mandel, etc.) ont laissé leur nom à des solutions classiques.

En général, ces solutions correspondent à des problèmes dont la géométrie et le chargement sont simples, voire élémentaires : symétries élevées, chargement unique "adapté" à la géométrie, etc. Ces solutions sont insuffisamment représentatives des structures réelles qui peuvent être rencontrées dans l'industrie.

On ne peut pas trop compter sur les méthodes du §II.2 pour trouver de nouvelles solutions. Il faut donc en construire par d'autres procédés.

3. SOLUTIONS PSEUDO-EXACTES OBTENUES PAR EXTRAPOLATION

3.1. Principe de l'extrapolation

Lorsqu'il est démontré que la théorie utilisée et la méthode numérique adaptée à cette théorie convergent lorsqu'on raffine les discrétisations (*raffinement* étant pris au sens défini au §III.1.5), si on fait abstraction des erreurs d'arrondi, la solution exacte est celle trouvée pour un maillage infiniment fin. Il ne peut être question de calculer une structure avec un tel maillage. Mais, s'il est possible de connaître ou d'estimer les taux de convergence, la solution exacte peut être approchée

en extrapolant les résultats calculés avec plusieurs maillages de plus en plus fins. Il peut être nécessaire que ces maillages soient obtenus par raffinement.

3.2. Extrapolation des champs approchés

3.2.1. Cas élastique linéaire

A partir d'une suite de maillages raffinés, il faut extrapoler les déplacements trouvés sur ces maillages. Les maillages les plus grossiers ne contiennent pas tous les noeuds du maillage le plus fin et le déplacement approché doit y être interpolé par les fonctions de forme des éléments.

Si on admet une évolution de chaque composante u_{h_i} des déplacements approchés u_h en fonction de la taille h des éléments du maillage, de la forme

$$u_{h_i} = u_{ex_i} [1 - \alpha h^\beta] \quad (IV.3.1)$$

alors on peut déduire une solution extrapolée pseudo-exacte de 3 calculs effectués avec des maillages obtenus par raffinement uniforme.

Comme on suppose que les éléments du maillage vérifient (III.3.2), (IV.3.1) peut s'exprimer en fonction du nombre NDDL de degrés de liberté par

$$u_{h_i} = u_{ex_i} [1 - \alpha_1 NDDL^{-\beta_1}] \quad (IV.3.2)$$

A priori, une extrapolation doit être faite pour chaque composante du déplacement en chaque noeud de la structure discrétisée le plus finement.

Une fois les déplacements extrapolés connus aux noeuds du maillage le plus fin (et donc en tout point par utilisation des fonctions de forme en-dehors des noeuds), une estimation de l'erreur par différence peut être tentée en considérant ces déplacements comme la solution pseudo-exacte du problème. Les déformations et les contraintes en sont déduites par (II.3.6) et (II.1.5). Tous les types d'erreur locale ou globale peuvent être calculés sur n'importe quel champ.

3.2.2. Cas élastoplastique

En élastoplasticité, la connaissance des déplacements à un instant donné n'est pas suffisante pour avoir l'état de la structure. Il faut y ajouter le champ de déformations plastiques. Ce champ peut être cherché de deux façons :

- soit on extrapole les contraintes trouvées à cet instant au cours des 3 calculs, selon (IV.3.1) ou (IV.3.2). Les contraintes sont connues uniquement aux points de Gauss des éléments. Leur évaluation hors de ces points nécessite un lissage et est moins précise que pour les déplacements (cf. remarque du §II.4.4.4). On en déduit immédiatement les déformations plastiques.

- soit on connaît les déplacements extrapolés à *tous les temps* du processus de chargement précédant l'instant étudié. On en revient à la connaissance d'un champ pseudo-exact en tout point de Ω et en tout temps, et à la recherche des champs de déformations et de contraintes qui en sont déduits. Ce problème est équivalent à la méthode inverse présentée au paragraphe suivant et peut être traité de la même façon.

On ne peut considérer comme exacte l'extrapolation des solutions obtenues avec des maillages raffinés, que si la contribution de la discrétisation temporelle à l'erreur est "négligeable". La relation (III.3.6) montre que l'erreur ne tend vers zéro que si les discrétisations spatiale et temporelle s'affinent simultanément. On peut toujours faire les 3 calculs avec un pas de temps très fin pour admettre que la part de l'erreur due à ce dernier est négligeable, et qu'en conséquence la solution extrapolée sera voisine de la solution exacte. Pour une discrétisation spatiale donnée, on peut aussi essayer d'extrapoler les solutions approchées obtenues avec plusieurs pas de temps, afin d'en déduire la solution approchée dont l'erreur n'est due qu'au seul maillage. L'extrapolation sur les maillages affinés est ensuite faite sur ces solutions.

L'expérimentation numérique sur des solutions réellement exactes permet de tester la validité de telles méthodes d'extrapolation. Ces solutions exactes auraient pu être construites selon la méthode inverse présentée au paragraphe suivant. Il ne nous a pas été possible de développer cette analyse pour des questions de temps.

4. SOLUTIONS ANALYTIQUES EXACTES OBTENUES PAR UNE METHODE INVERSE

Nous venons de constater que les solutions exactes connues en élastoplasticité sont insuffisamment nombreuses et que l'extrapolation de solutions approchées comporte une trop grande part d'incertitude sur l'exactitude de la solution extrapolée. Nous allons examiner la possibilité d'en construire par une méthode inverse.

4.1. Principe des méthodes inverses

Le principe de toute méthode inverse est de partir du résultat connu (le champ de déplacements en fonction du temps dans notre cas) et d'en déduire par des équations analytiques uniquement les données du problème dont ce résultat est la solution.

En pratique, il peut être difficile ou impossible de trouver d'une façon exclusivement analytique ces données, soit parce que les équations ne sont pas inversibles, soit parce qu'on ne dispose que d'approximations à un ordre insuffisant pour une résolution "exacte". Dans de tels cas, un calcul numérique approché est nécessaire. Sa précision doit toujours être meilleure que celle du calcul numérique classique fait dans la méthode directe, et il ne doit pas se poser de problèmes de convergence ou de stabilité.

La résolution des problèmes aux limites en mécanique des milieux continus solides consiste à trouver les champs (exacts ou approchés) de déplacements, de contraintes et de déformations à partir des efforts et déplacements imposés sur une structure.

Dans le cadre de la méthode inverse, le matériau et ses propriétés sont connus. Nous définissons a

priori un champ de déplacements \mathbf{u}_{ex} par des fonctions analytiques. Ce champ peut être valable dans tout l'espace, ou dans un domaine de définition plus restreint si les fonctions choisies l'exigent. A ce niveau, aucun domaine Ω n'est défini et n'importe quel domaine inclus dans le domaine de définition des fonctions analytiques peut convenir.

Les champs exacts ϵ_{ex} , σ_{ex} , \mathbf{X} déduits du champ de déplacement \mathbf{u}_{ex} sont définis dans tout le domaine de définition des déplacements, sous réserve de conditions suffisantes de dérivabilité de ces derniers. Le calcul des champs exacts est essentiellement *local*.

Nous désignerons donc par *solution indéfinie* la recherche des champs exacts en tout point, et par *solution particulière* la recherche du chargement appliqué à un domaine Ω et déduit des champs exacts indéfinis.

4.2. Solution indéfinie

4.2.1. Création des champs exacts

Nous explicitons d'abord la démarche dans le cas simple de l'élasticité linéaire quasi-statique en petites transformations. La loi de comportement autorise le calcul explicite des champs indéfinis à tout instant.

4.2.1.1. Cas élastique linéaire quasi-statique

i) Déplacements

Définition d'un champ de déplacements $\mathbf{u} = \mathbf{f}_u(\mathbf{x}, t)$ par des fonctions analytiques f_u .

ii) Déformations

En repère cartésien, les déformations sont déduites des fonctions déplacement par dérivation analytique :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.1.1})$$

iii) Contraintes

Les contraintes sont données à tout instant par la loi de HOOKE

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{II.1.5})$$

iv) Forces de volume

Enfin, les forces de masse \mathbf{X} sont obtenues en tout point en écrivant l'équation d'équilibre interne

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{X} = 0. \quad (\text{II.1.2})$$

Les 4 champs exacts sont définis en tout point sans aucune approximation et la solution indéfinie est construite.

4.2.1.2. Cas élastoplastique

Le passage des déformations aux contraintes ne se fait plus par la loi de Hooke. La loi de comporte-

ment est incrémentale et la détermination du tenseur des contraintes à un temps donné nécessite la connaissance de l'ensemble du trajet de chargement aux temps précédant l'instant étudié. Ce trajet de chargement est résumé par des paramètres internes actuels.

L'étude complète du passage déformations \rightarrow contraintes fait l'objet du paragraphe 4.2.2.

4.2.2. Passage des déformations aux contraintes en élastoplasticité

Dans ce qui suit, nous nous limitons au traitement complet du cas du critère de Von Mises en parfaite plasticité ou avec écrouissage cinématique linéaire. Un cadre plus général pourra être donné pour quelques points particuliers.

4.2.2.1. Position du problème

Nous connaissons en un point P, au temps t_k , les quantités suivantes :

u_k déplacement

ϵ_k déformation

ϵ_k^P déformation plastique

σ_k contrainte

X_k force volumique

La contrainte et la déformation plastique vérifient le critère de Mises (II.1.16) ou plus généralement

$$f(\sigma_k, \epsilon_k^P) \leq 0. \quad (\text{II.1.6})$$

Nous souhaitons obtenir les valeurs exactes de ces quantités au temps $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ avec Δt fini. Pendant Δt , l'évolution du déplacement est seule connue. Un incrément de déformation $\Delta \epsilon$ peut en être immédiatement déduit par (II.1.1). L'évolution du déplacement et par conséquent de la déformation peut être de forme quelconque entre t_k et t_{k+1} . Nous supposerons dans ce qui suit que le pas de temps Δt a été choisi pour que cette évolution soit monotone croissante ou décroissante (au sens large). Cette condition est indispensable sous peine de risquer de ne pas prendre en compte l'effet d'une décharge élastique ou d'une charge plastique sur la valeur des paramètres internes.

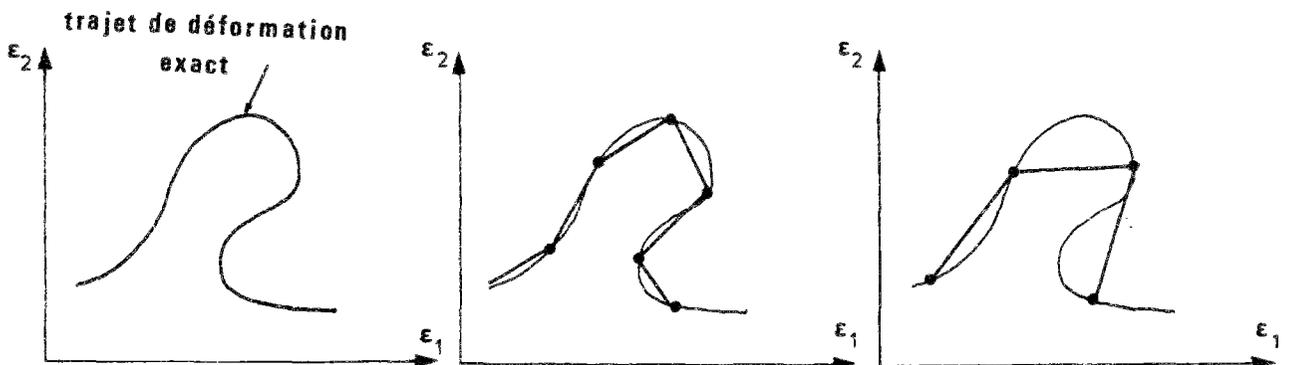


Fig. IV-4-1. Exemple d'incrément de déformation corrects et erronés

Il pourra être nécessaire de faire l'hypothèse supplémentaire de la linéarité de la dépendance des déformations en fonction du temps. Autrement dit, entre t_k et t_{k+1} , $\epsilon(t)$ s'écrit

$$\epsilon(t) = \epsilon_k \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} + \epsilon_{k+1} \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \quad (IV.4.1)$$

L'évolution de la contrainte et de la déformation plastique pendant Δt ne suivra pas forcément cette loi linéaire. Nous cherchons la contrainte σ_{k+1} et la déformation plastique ϵ_{k+1}^P vérifiant le critère au temps t_{k+1} , sans étudier leur variation précise dans l'intervalle $]t_k, t_{k+1}[$.

Classiquement, on estime l'incrément de contrainte en supposant le matériau élastique au point étudié ; on note σ^* la contrainte test (*trial stress* dans la littérature anglo-saxonne) obtenue avec cette hypothèse.

On a $\sigma^* = \sigma_k + L \cdot \Delta \epsilon$.

Si $f(\sigma^*, \epsilon_k^P) \leq 0$, on pose $\sigma_{k+1} = \sigma^*$; le comportement du matériau est réellement élastique dans tout l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ donc le problème est résolu. La déformation plastique ϵ_{k+1}^P reste égale à ϵ_k^P .

Si $f(\sigma^*, \epsilon_k^P) > 0$, il faut trouver $\Delta \epsilon^P$ tel que

$$f(\sigma_k + L \cdot \Delta \epsilon - L \cdot \Delta \epsilon^P, \epsilon_k^P + \Delta \epsilon^P) = 0 \quad (IV.4.2)$$

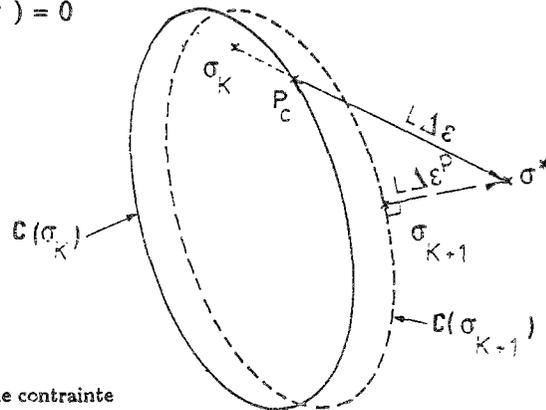


Fig. IV-4-2. Convexe de plasticité et incréments de contrainte

Nous allons présenter 2 méthodes classiques pour résoudre ce problème.

4.2.2.2. Projection radiale (ou retour radial)

a. Principe

Le principe est d'utiliser un développement au premier ordre des équations d'évolution (II.1.10) pour calculer $\Delta \epsilon^P$. La loi d'écoulement donne la vitesse de déformation plastique en un point. Son expression est discrétisée pour obtenir une valeur approchée de l'incrément fini de déformation plastique.

Seul est présenté le schéma implicite. La loi de normalité est vérifiée à la fin de l'incrément de déformation :

$$\Delta \epsilon^P = \Delta \lambda_p \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{\sigma = \sigma_{k+1}} \quad (IV.4.3)$$

b. Calcul de l'expression de l'incrément de contraintes

Il est possible d'écrire le critère de Mises pour que la quantité $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ ait la valeur $S - C \epsilon^P$. La loi d'écoulement (II.1.10) peut s'écrire sous la forme

$$\epsilon^P = \frac{\lambda_p}{2\mu} (S - C \epsilon^P) \quad (\text{II.4.4})$$

avec λ_p à déterminer.

Pour le calcul de $\Delta\epsilon^P$, le schéma implicite impose que le critère soit vérifié à la fin de l'incrément de charge :

$$f(\sigma_{k+1}, \epsilon_{k+1}^P) = 0$$

et en conséquence

$$\Delta\epsilon^P = \frac{\lambda_p}{2\mu} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=\sigma_{k+1}} = \frac{\lambda_p}{2\mu} (S_{k+1} - C \epsilon_{k+1}^P)$$

où les termes S_{k+1} et ϵ_{k+1}^P sont inconnus.

Ils peuvent être éliminés en remarquant que $S_{k+1} = S^* - 2\mu \Delta\epsilon^P$:

$$\Delta\epsilon^P = \frac{\lambda_p}{2\mu} (S^* - C \epsilon_k^P - \Delta\epsilon^P(2\mu + C))$$

$$\text{d'où } \Delta\epsilon^P = \frac{\lambda_p}{2\mu + (2\mu + C)\lambda_p} (S^* - C \epsilon_k^P) \quad (\text{IV.4.5})$$

où seule la valeur de λ_p reste inconnue.

Le développement de la quantité $S^* - C \epsilon_k^P$ permet de trouver λ_p . On obtient

$$S^* - C \epsilon_k^P = (S_{k+1} - C \epsilon_{k+1}^P) \left[1 + \lambda_p \left(1 + \frac{C}{2\mu} \right) \right] \quad (\text{IV.4.6})$$

Comme le couple inconnu $(S_{k+1}, \epsilon_{k+1}^P)$ vérifie le critère, on a

$$\frac{1}{2} (S_{k+1} - C \epsilon_{k+1}^P) : (S_{k+1} - C \epsilon_{k+1}^P) = y_0$$

Le produit contracté membre à membre de (IV.4.6) donne

$$(S^* - C \epsilon_k^P) : (S^* - C \epsilon_k^P) = 2y_0 \left[1 + \lambda_p \left(1 + \frac{C}{2\mu} \right) \right]^2$$

ce qui permet de trouver λ_p par

$$\lambda_p = \frac{\sqrt{\frac{1}{2y_0} (S^* - C \epsilon_k^P) : (S^* - C \epsilon_k^P) - 1}}{1 + \frac{C}{2\mu}} \quad (\text{IV.4.7})$$

et d'en déduire $\Delta\epsilon^P$ et σ_{k+1} .

La partie sphérique de l'incrément de contraintes n'est pas modifiée par la plasticité de type Mises et peut être déduite de l'incrément de déformation sphérique par la loi de comportement élastique.

Il est donc possible d'écrire directement l'expression de l'incrément de déviateur ΔS^{Pr} , valable lorsqu'il y a franchissement du domaine plastique

$$\Delta S^{Pr} = \frac{1}{1 + \frac{C}{2\mu}} \left[\Delta S^{el} \left(\frac{C}{2\mu} + \eta \right) + (S_k - C \epsilon_k^P) (\eta - 1) \right] \quad (\text{IV.4.8})$$

avec $\eta = \sqrt{\frac{2y_0}{\xi}}$; $\xi = (S^* - C \epsilon_k^P) : (S^* - C \epsilon_k^P)$; $\Delta S^{el} = 2\mu \text{ dév}(\Delta\epsilon)$.

L'évolution des contraintes et des déformations plastiques entre t_k et t_{k+1} n'est pas homothétique

avec l'évolution de ϵ . La déformation plastique ϵ_k^p est exactement associée aux états de contrainte se trouvant entre σ_k et σ_c , contrainte dite de contact définie par $f(\sigma_c, \epsilon_k^p) = 0$. Cette contrainte est l'intersection du vecteur σ_k σ^* avec la frontière du convexe associé à σ_k . Elle se calcule par résolution de l'équation

$$\frac{1}{2} (S_c - C \epsilon_k^p) : (S_c - C \epsilon_k^p) - y_0 = 0 \quad (IV.4.9)$$

avec $S_c = S_k + \gamma \cdot 2\mu \Delta\epsilon'$ et $0 \leq \gamma \leq 1$.

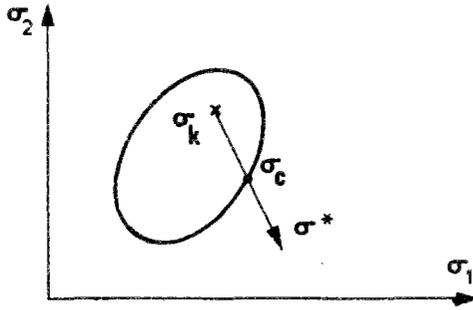


Fig. IV-4-3. Contrainte de contact

L'équation (IV.4.9) se ramène à une équation du deuxième degré en γ de la forme

$$k_1 \gamma^2 + 2 k_2 \gamma + k_3 - 2y_0 = 0 \quad (IV.4.10)$$

avec $k_1 = 4\mu^2 \Delta\epsilon' : \Delta\epsilon'$; $k_2 = 2\mu \Delta\epsilon' : (S_k - C\epsilon_k^p)$ et $k_3 = (S_k - C \epsilon_k^p) : (S_k - C \epsilon_k^p)$,

$$\text{dont la seule solution admissible est } \gamma = \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 - k_1(k_3 - 2y_0)}}{k_1} \quad (IV.4.11)$$

Ensuite ϵ^p évolue de façon continue mais non forcément proportionnelle à ϵ pour atteindre ϵ_{k+1}^p .

La projection radiale (IV.4.8) est valable que le point de départ σ_k soit ou non sur la frontière du convexe de plasticité, ce qui évite de calculer la contrainte de contact et de résoudre l'équation (IV.4.10).

La méthode est du premier ordre donc n'est exacte qu'en vitesses. On ne peut l'utiliser avec une précision convenable que pour des incréments élastiques $L \Delta\epsilon'$ "suffisamment petits" hors du convexe de plasticité (quelle que soit la longueur de l'incrément à l'intérieur de ce convexe). On note cependant une exception : si l'incrément $L \Delta\epsilon'$ est normal au convexe de plasticité dans l'espace des déviateurs des contraintes, (IV.4.8) donne la valeur exacte de ΔS^{pr} , quel que soit le module de $\Delta\epsilon'$.

4.2.2.3. Définition d'un chargement radial

La notion de chargement radial est importante en élastoplasticité. Plusieurs définitions peuvent être trouvées dans la littérature.

La définition de Mandel (1966) est la suivante :

"Le chargement d'une structure est dit radial si, au cours du chargement et en tout point de cette structure, les directions principales du tenseur des contraintes ne changent pas et si les valeurs principales du déviateur des contraintes restent dans des rapports fixes".

On trouve dans (Lemaitre et Chaboche, 1985) une définition similaire.

Il y est précisé que l'évolution du tenseur des contraintes en fonction du temps s'écrit, en tout point de la structure

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \sigma(\mathbf{x}) \phi_1(t) \quad (\text{IV.4.12})$$

On en déduit que, comme dans la définition de Mandel, le déviateur des contraintes reste homothétique à lui-même au cours du temps et s'écrit

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \phi_2(t) \quad (\text{IV.4.13})$$

où les $\phi_i(t)$ sont des fonctions scalaires du seul temps.

Ces deux définitions impliquent que le point représentant l'état de contraintes se déplace, dans l'espace des *déviateurs* des contraintes, sur une droite passant par l'origine.

Zarka (1988) propose une définition différente :

"Un chargement est radial *dans la direction* $\Delta\sigma^{el}$ si les contraintes $\sigma^{el}(t)$ trouvées dans la structure en supposant son comportement élastique peuvent s'écrire

$$\sigma^{el}(\mathbf{x}, t) = \sigma_1^{el}(\mathbf{x}) + \phi_3(t) \Delta\sigma^{el}(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.4.14})$$

où σ_1^{el} et $\Delta\sigma^{el}$ sont deux états de contraintes fixes au cours du temps mais dépendants du point, et $\phi_3(t)$ une fonction scalaire du temps".

Cette définition implique que le chargement, constitué des forces de volume et de surface, des déformations et déplacements imposés, etc., et représenté par $\underline{\mathbf{C}}(t)$, évolue lui aussi selon

$$\underline{\mathbf{C}}(t) = \underline{\mathbf{C}}_1 + \phi_3(t) \Delta\underline{\mathbf{C}} \quad (\text{IV.4.15})$$

On remarquera que, en général, la contrainte exacte σ_{ex} ne s'écrit pas au cours du temps selon

$$\sigma_{ex}(\mathbf{x}, t) = \sigma_{1ex}(\mathbf{x}) + \phi_3(t) \Delta\sigma_{ex}(\mathbf{x})$$

Un chargement radial est dit monotone si en plus l'évolution de $\phi_3(t)$ est monotone croissante ou décroissante.

Il est clair que (IV.4.8) donne la valeur exacte de l'incrément de contraintes en plasticité, quel que soit le module de l'incrément de déformation $\Delta\epsilon'$, pour un chargement radial vérifiant (IV.4.13).

A contrario, un chargement non radial engendre en tout point de la structure une contrainte exacte $\sigma(\mathbf{x}, t)$ dont l'évolution en espace et en temps de chaque composante σ_{ij} est indépendante.

On remarque que la projection radiale (IV.4.8) donne toujours la solution exacte si le déviateur s'écrit en tout point de la structure

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \phi_4(\mathbf{x}, t) \quad (\text{IV.4.16})$$

où ϕ_4 est une fonction scalaire qui cette fois dépend du point et du temps.

Le chargement correspondant à ces contraintes exactes ne peut généralement pas être écrit selon (IV.4.15) et donc ne peut être considéré comme radial.

Il n'est cependant pas quelconque car les contraintes qui en sont déduites peuvent être calculées exactement par une méthode approchée au premier ordre comme (IV.4.8). L'évolution en temps de toutes les composantes du tenseur déviateur des contraintes est identique en un point donné. Là aussi, le point représentant l'état de contrainte se déplace sur une droite dans l'espace des déviateurs

des contraintes.

Nous appellerons dans la suite "chargement pseudo-radial" tout chargement pour lequel le déviateur exact des contraintes s'écrit selon (IV.4.16).

4.2.2.4. Intégration analytique

• Introduction

Le critère de plasticité de Von Mises a l'avantage d'être écrit sous une forme mathématique simple. Il ne présente pas de points anguleux comme le critère de Tresca (II.1.7). L'équation d'évolution (II.1.10) a pu être intégrée par Krieg & Krieg (1977) dans le cas de la parfaite plasticité, et généralisée par Yoder & Whirley (1984) aux matériaux écrouissables.

Yoder et Whirley (1984) ont réécrit les équations de la plasticité dans l'espace des déviateurs des déformations. Les variables d'état sont les déformations et les paramètres internes sont les "contraintes résiduelles" σ^r . L'expression "contrainte résiduelle" est prise au sens local, comme relâchement des contraintes dû à la plasticité, et non au sens classique des contraintes auto-équilibrées dues à un champ de déformations non cinématiquement admissible avec les liaisons imposées à la structure. Le critère, la loi d'écoulement et toutes les autres relations sont réécrites en fonction de ces variables.

La loi de comportement devient

$$\epsilon = M.(\sigma - \sigma^r) \text{ avec } \sigma^r = 2\mu \epsilon^P.$$

le critère de Mises avec écrouissage cinématique linéaire

$$f_c(\epsilon, \sigma^r) = \frac{1}{2} (\epsilon' - K_c \sigma^r) : (\epsilon' - K_c \sigma^r) - \frac{\rho_p^2}{3}$$

et $\frac{\partial f_c}{\partial \epsilon} = \frac{\partial f_c}{\partial \epsilon'} = \epsilon' - K_c \sigma^r.$

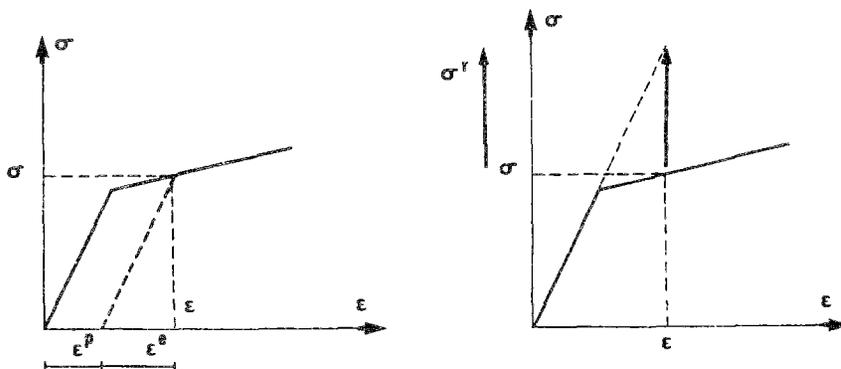


Fig. IV-4-4. Diagrammes contrainte/déformation en monoaxial pour les deux approches

On identifie les coefficients K_c et ρ_p par analogie avec le critère écrit classiquement en fonction des contraintes :

$$f(\sigma, \epsilon^P) = \frac{1}{2} (\mathbf{S} - \mathbf{C} \epsilon^P) : (\mathbf{S} - \mathbf{C} \epsilon^P) - y_0$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (2\mu (\epsilon' - \epsilon^p) - C \epsilon^p) : (2\mu (\epsilon' - \epsilon^p) - C \epsilon^p) - \frac{\sigma_0^2}{3} \\
 &= \frac{1}{8\mu^2} \left[\epsilon' - \left(1 + \frac{C}{2\mu} \right) \frac{\sigma^r}{2\mu} \right] : \left[\epsilon' - \left(1 + \frac{C}{2\mu} \right) \frac{\sigma^r}{2\mu} \right] - \frac{\sigma_0^2}{3}
 \end{aligned}$$

ce qui donne $K_c = \frac{2\mu + C}{4\mu^2}$ et $\rho_p = \frac{\sigma_0}{2\mu}$.

Dans le cas de l'écroutissage isotrope ou combiné, le rayon ρ_p du convexe de plasticité évolue au cours du chargement.

On déduit de cette formulation que, même en parfaite plasticité ($C = 0$), le convexe est mobile dans l'espace des déviateurs des déformations en cas de charge plastique.

Nous préférons cependant conserver les notations classiques et remplacerons dans les expressions tirées de (Yoder et Whirley, 1984) les variables en déformations par les variables en contraintes correspondantes.

• *La solution exacte*

L'incrément fini $\Delta\epsilon$ est supposé pouvoir s'écrire $\Delta\epsilon = \dot{\epsilon} \Delta t$. La condition (IV.4.1) trouve sa justification.

On part du point de contact P_c défini par (IV.4.9) tel que $f(\sigma_c, \epsilon_k^p) = 0$.

L'équation d'évolution est réécrite en fonction d'un seul paramètre, l'angle ψ entre la direction de la vitesse de contrainte \dot{S} (approche classique) ou de déformation $\dot{\epsilon}$ (approche en déformations), et la normale à la surface de charge au point étudié. Le point de contact est déjà sur la surface de charge et l'angle de départ a la valeur ψ_c . Lors de la charge plastique, le point se déplace sur la surface de charge, elle-même éventuellement mobile suivant l'approche choisie et la valeur de l'écroutissage. L'angle ψ évolue avec le point et atteint à la fin de l'incrément la valeur ψ_f . La solution analytique fournit l'évolution de ψ en fonction de ψ_c et du temps lors d'une charge plastique. La variation $\Delta\sigma^{ex}$ de σ entre t_c et t_{k+1} est ensuite directement déduite de celle de ψ .

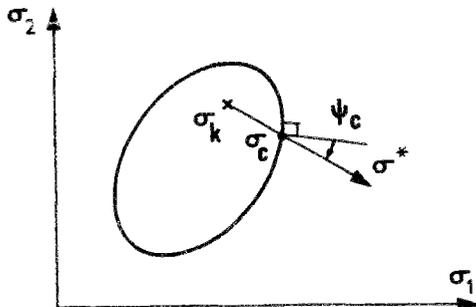


Fig. IV-4-5. Angle ψ

Si l'écroutissage est nul ou de type cinématique linéaire, l'équation d'évolution écrite en fonction de ψ est intégrable analytiquement. Les écroutissages isotrope ou combiné conduisent à une équation en $\dot{\psi}$ qui ne peut être intégrée que numériquement, avec une aussi grande précision que l'on veut, sous réserve d'y mettre le prix en temps de calcul. Yoder et Whirley citent une autre méthode de "pertur-

bations", plus rapide et un peu moins précise. Dans la suite, seule est présentée la solution exacte correspondant aux matériaux parfaitement plastique ou avec écrouissage cinématique linéaire.

Le point de départ est obligatoirement un point de contact ; $\epsilon_c, \epsilon_c^P, \sigma_c, \epsilon'_c$ sont connus. L'incrément connu $\Delta\epsilon_c$ de vitesse $\dot{\epsilon}$ est imposé pendant le pas de temps Δt_c ; la vitesse $\dot{\epsilon}'$ est supposée constante durant l'incrément de temps.

La définition de ψ , en un point de contact et lors d'une charge plastique, est donnée par

$$\frac{3}{2} (\epsilon' - K_c \sigma^r) : \dot{\epsilon}' = \rho_p \dot{\epsilon}'^{eq} \cos \psi \quad (IV.4.17)$$

ou
$$\frac{3}{2} \left[\epsilon' - \left(1 + \frac{C}{2\mu} \right) \epsilon^P \right] : \dot{\epsilon}' = \rho_p \dot{\epsilon}'^{eq} \cos \psi, \text{ avec } \dot{\epsilon}'^{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \dot{\epsilon}' : \dot{\epsilon}'} \text{ et } \Delta\epsilon'^{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \Delta\epsilon' : \Delta\epsilon'}$$

L'angle entre la normale et la direction $\Delta\epsilon'$ a au point de contact la valeur

$$\cos \psi_c = \frac{\frac{3}{2} \left[\epsilon'_c - \left(1 + \frac{C}{2\mu} \right) \epsilon_c^P \right] : \Delta\epsilon'}{\rho_p \Delta\epsilon'^{eq}} \quad (IV.4.18)$$

L'équation d'évolution écrite en fonction de ψ et $\dot{\epsilon}^P$ est

$$\dot{\epsilon}^P = \frac{\dot{\epsilon}'^{eq} \left[\epsilon' - \left(1 + \frac{C}{2\mu} \right) \epsilon^P \right] \cos \psi}{\left(1 + \frac{C}{2\mu} \right) \rho_p} \quad (IV.4.19)$$

et uniquement en fonction de ψ :
$$\dot{\psi} = - \frac{\dot{\epsilon}'^{eq} \sin \psi}{\rho_p} \quad (IV.4.20)$$

La condition initiale est $\psi(t=t_c) = \psi_c$. L'équation (IV.4.20) s'intègre sous la forme

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\psi_c}{2} \exp \left[-\dot{\epsilon}'^{eq} \frac{t - t_c}{\rho_p} \right] \quad (IV.4.21)$$

soit une valeur finale de l'angle ψ_f à $t = t_f$:

$$\operatorname{tg} \frac{\psi_f}{2} = \operatorname{tg} \frac{\psi_c}{2} \exp \left[-\frac{\Delta\epsilon'^{eq}}{\rho_p} \right] = K_\psi \operatorname{tg} \frac{\psi_c}{2} \quad (IV.4.22)$$

Comme pour la projection radiale, nous écrivons directement l'incrément (exact) de déviateur

$$\Delta S^{ex} = \frac{\alpha_\psi - 1}{K_c \epsilon'_c} + \Delta\epsilon' \left[2\mu - \frac{1 - \alpha_\psi \beta_\psi}{K_c} \right] + 2\mu (1 - \alpha_\psi) \epsilon_c^P \quad (IV.4.23)$$

avec les termes intermédiaires

$$\alpha_\psi = \frac{\sin \psi}{\sin \psi_c} = K_\psi \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\psi_c}{2}}{1 + K_\psi^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\psi_c}{2}} \text{ et } \beta_\psi = \frac{\rho_p}{\Delta\epsilon'^{eq}} \left[\frac{\cos \psi}{\alpha_\psi} - \cos \psi_c \right].$$

Cette solution est complètement déterminée par calcul analytique dans le cas de l'écrouissage cinématique ou de la parfaite plasticité. Elle est parfaitement exacte sous réserve des hypothèses choisies, quels que soient la valeur du module d'écrouissage, la direction ou le module de l'incrément de déformation. On peut constater au §II.4.5 qu'il n'en est pas de même pour les méthodes approchées, aussi raffinées soient-elles.

Cependant, les valeurs exactes du tenseur des contraintes trouvé en fin d'incrément au temps t_{k+1} et connu au temps t_k , ne permettent pas d'évaluer exactement les contraintes ou les déformations plastiques pour $t_c < t < t_{k+1}$. La déformation peut être interpolée linéairement par (IV.4.1). Cette interpolation n'est par contre pas exacte pour les contraintes et les déformations plastiques. Bien qu'en pratique l'écart puisse être faible, nous ferons l'hypothèse que, dans tout calcul de solution exacte, une valeur désirée à un temps donné fera l'objet d'un calcul à ce temps et non d'une interpolation.

4.2.3. Calcul des forces de volume en plasticité

Le calcul du champ de forces de volume, dernière étape du processus de construction des champs exacts, nécessite l'évaluation des dérivées des contraintes par rapport aux variables d'espace. La plasticité va évidemment modifier l'expression de ces dérivées. Nous allons également étudier le cas de la projection radiale et de l'intégration analytique.

4.2.3.1. Cas de la projection radiale

Les mêmes hypothèses que pour le calcul de l'incrément de contrainte sont adoptées. Le point de départ n'est pas forcément un point de contact et l'évolution de la déformation est supposée linéaire en fonction du temps selon (IV.4.1).

On connaît par (IV.4.8) la variation ΔS^{Pr} du déviateur des contraintes lorsqu'on ajoute un incrément de déformation $\Delta \epsilon$.

La dérivée de (IV.4.8) par rapport aux variables d'espace est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta S^{Pr})}{\partial x_i} & \quad \quad \quad (IV.4.24) \\ & = \frac{\left[\frac{C}{2\mu} + \eta \right] \frac{\partial(\Delta S^{el})}{\partial x_i} + \Delta S^{el} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + (\eta - 1) \frac{\partial(S_k - C \epsilon_k^P)}{\partial x_i} + (S_k - C \epsilon_k^P) \frac{\partial \eta}{\partial x_i}}{1 + \frac{C}{2\mu}} \end{aligned}$$

L'étude de cette dérivée montre qu'elle présente une discontinuité au franchissement de la frontière plastique, qui se retrouvera dans les forces de volume. Supposons le point σ_k point de contact "par valeurs inférieures" : $f(\sigma_k, \epsilon_k^P) = 0^-$ (le point atteint la frontière du convexe sans tenter de la franchir et est donc en domaine élastique).

Supposons maintenant ajouter un incrément $\Delta \epsilon$ tel que :

$$f(\sigma_k + L. \Delta \epsilon, \epsilon_k^P) > 0 \text{ et } \|\Delta \epsilon\| \rightarrow 0.$$

L'expression (IV.4.24) se réduit à

$$\frac{\partial(\Delta S^{Pr})}{\partial x_i} = - \frac{1}{1 + \frac{C}{2\mu}} \frac{(S_k - C \epsilon_k^P) : \frac{\partial(S_k - C \epsilon_k^P)}{\partial x_i}}{2y_0} (S_k - C \epsilon_k^P) \quad (IV.4.25)$$

qui peut ne pas tendre vers zéro lorsque $\|\Delta \epsilon\|$ tend vers zéro (ce dernier terme est éliminé de l'expression). Cette valeur résiduelle donnera un saut des forces de volume au franchissement de la frontière séparant la zone élastique de la zone plastique.

4.2.3.2. Cas de l'intégration analytique

Il faut partir d'un point de contact. Le contact est obtenu pour les contraintes en résolvant l'équation (IV.4.10), mais il doit être aussi vérifié pour leurs dérivées.

Pour cela, la relation de contact $f(\sigma_c, \epsilon_c^p) = 0$ est dérivée par rapport aux variables d'espace :

$$\frac{\partial f(\sigma_c, \epsilon_c^p)}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{IV.4.26})$$

Cette relation n'est pas en général vérifiée par les dérivées des contraintes. En effet, le contact correspond au passage de la frontière séparant la zone élastique de la zone plastique. Les contraintes pouvant présenter une rupture de pente, leurs dérivées présentent un saut qui ne peut être calculé par l'équation de contact.

Il faut se placer au point de contact "côté élastique" et appliquer un incrément $\Delta\epsilon$ de module tendant vers zéro ; la discontinuité (IV.4.25) trouvée par projection radiale est ajoutée aux dérivées des contraintes. Une fois corrigées, les dérivées vérifient effectivement (IV.4.26) ; le point se situe "côté plastique" du point de contact.

A partir de ce point, le calcul de l'incrément des dérivées des contraintes au cours de la charge plastique est obtenu en dérivant l'équation (IV.4.23) donnant ΔS^{ex} dans le cas de l'intégration analytique.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta S^{\text{ex}})}{\partial x_i} &= \frac{\alpha_\psi - 1}{K_c} \frac{\partial \epsilon'_c}{\partial x_i} + \frac{\epsilon'_c}{K_c} \frac{\partial \alpha_\psi}{\partial x_i} \\ &+ \left[2\mu - \frac{1 - \alpha_\psi \beta_\psi}{K_c} \right] \frac{\partial(\Delta \epsilon')}{\partial x_i} + \frac{\Delta \epsilon'}{K_c} \frac{\partial(\alpha_\psi \beta_\psi)}{\partial x_i} + 2\mu \left[(1 - \alpha_\psi) \frac{\partial \epsilon_c^p}{\partial x_i} - \epsilon_c^p \frac{\partial \alpha_\psi}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.4.27})$$

avec les dérivées des termes intermédiaires :

$$\frac{\partial \alpha_\psi}{\partial x_i} = (1 + t_c^2) \frac{1 - K_\psi^2 t_c^2}{(1 + K_\psi^2 t_c^2)^2} \frac{\partial K_\psi}{\partial x_i} + 2K_\psi t_c \frac{\partial t_c}{\partial x_i} \frac{1 - K_\psi^2}{(1 + K_\psi^2 t_c^2)^2} \text{ avec } t_c = \text{tg} \frac{\psi_c}{2} ;$$

$$\frac{\partial(\alpha_\psi \beta_\psi)}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial K_\psi}{\partial x_i} \left[\frac{(1 - K_\psi^2 t_c^2)(1 - t_c^2) + 4K_\psi t_c^2}{1 + K_\psi^2 t_c^2} - (1 - K_\psi) \frac{1 + K_\psi t_c^2}{K_\psi \ln K_\psi} \right] - \frac{2K_\psi (1 - K_\psi)^2 t_c}{1 + K_\psi^2 t_c^2} \frac{\partial t_c}{\partial x_i}}{(1 + K_\psi^2 t_c^2) \ln K_\psi}$$

$$\frac{\partial K_\psi}{\partial x_i} = -\frac{K_\psi}{\rho_p} \frac{\partial(\Delta \epsilon'^{\text{eq}})}{\partial x_i} ; t_c \frac{\partial t_c}{\partial x_i} = \frac{\xi_c \frac{\partial(\Delta \epsilon'^{\text{eq}})}{\partial x_i} - \Delta \epsilon'^{\text{eq}} \frac{\partial \xi_c}{\partial x_i}}{\left[\frac{2}{3} \Delta \epsilon'^{\text{eq}} + \frac{\xi_c}{\rho_p} \right]^2}$$

$$\xi_c = \left[\epsilon'_c - \left[1 + \frac{C}{2\mu} \right] \epsilon_c^p \right] ; \Delta \epsilon'$$

$$\frac{\partial \xi_c}{\partial x_i} = \left[\epsilon'_c - \left[1 + \frac{C}{2\mu} \right] \epsilon_c^p \right] ; \frac{\partial \Delta \epsilon'}{\partial x_i} + \left[\frac{\partial \epsilon'_c}{\partial x_i} - \left[1 + \frac{C}{2\mu} \right] \frac{\partial \epsilon_c^p}{\partial x_i} \right] ; \Delta \epsilon'$$

4.3. Continuité et dérivabilité des champs de déplacements

4.3.1. Continuité des contraintes

A priori, les champs de déplacements analytiques doivent être tels que les vecteurs contraintes qui en sont déduits soient continus dans l'espace. Nous écartons le cas des surfaces de discontinuité en déplacements ou en contraintes, comme par exemple les ondes de choc en dynamique.

La dérivabilité des contraintes est nécessaire si on souhaite calculer les forces de volume en tout point. Ces forces de volume constituent un chargement, comme pour n'importe quelle structure.

Nous verrons cependant plus loin que le calcul, sur une discrétisation d'un domaine, des efforts nodaux équivalents aux forces de volume et de surface est possible à partir des seules contraintes exactes. Il n'est pas nécessaire de calculer les forces de volume. Ce fait n'interdit pas de les évaluer, pour "donner une idée" du chargement auquel est soumise la structure étudiée. Ce chargement est la donnée principale dont dispose un ingénieur pour analyser une structure, et l'éliminer *a priori* n'est pas conforme à la démarche industrielle. Nous étudions dans la suite les conditions de dérivabilité nécessaires pour que le calcul des forces de volume soit possible.

L'évaluation des dérivées des contraintes par rapport aux axes de coordonnées se fait pratiquement par calcul des dérivées des déformations et application à ces dérivées de la loi de comportement

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = L \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon^P}{\partial x} \right) \quad (\text{IV.4.28})$$

Cette approche est correcte lorsque les champs de déformations totales et plastiques sont dérivables, mais est trop restrictive dans le cas général. Seul le vecteur contrainte doit être continu en tout point et pour toute direction pour permettre l'écriture des équations d'équilibre (II.1.2). Rien n'interdit que les déformations dont provient le vecteur contrainte ne soient pas dérivables.

Une formulation de type distribution des dérivées des déformations pourrait lever la difficulté causée par des champs de déformations discontinus. Nous n'avons pas jugé utile de poursuivre dans cette voie. Il faut en effet être sûr que la discontinuité de déformations ne conduira en aucun point à une discontinuité du vecteur contrainte et donc à une force de volume infinie, ou, ce qui revient au même, à une force de pression surfacique à l'intérieur du domaine.

Nous nous limiterons donc aux fonctions de déplacements à déformations continues dans l'espace. Par contre, il sera impossible d'éviter les sauts des forces de volume dus à la plasticité.

4.3.2. Cas des fonctions singulières

Les champs de déformations et de contraintes construits à partir des solutions exactes doivent rester de carré sommable (ou d'énergie finie). Il est possible de choisir les déplacements pour avoir en un ou plusieurs points des déformations illimitées, sous réserve de respecter la condition de sommabilité de l'énergie. De telles fonctions sont courantes en élasticité : fissures des 3 modes,

problèmes de Boussinesq sur un espace ou un demi-espace, etc. En plasticité, seule la valeur du déviateur des contraintes est limitée par le critère. La contrainte sphérique peut devenir illimitée, sous réserve que l'énergie élastique correspondante reste sommable. Nous désignerons de telles fonctions par le terme de "fonctions de déplacements singulières", même si en fait ce sont les déformations (et non les déplacements) qui présentent des évolutions illimitées.

Les forces de volume déduites des équations d'équilibre peuvent elles aussi présenter en divers points une évolution illimitée, sous réserve de rester sommables sur un domaine fini contenant ces points.

4.3.3. Evolution au cours du temps

Nous choisissons de définir les fonctions de déplacements en fonction d'un temps physique.

Dans le cas dynamique, les déplacements doivent être dérivables deux fois par rapport au temps, pour donner une accélération finie. Cette condition est superflue en quasi-statique, ce qui autorise l'emploi de fonctions linéaires par morceaux.

Au cours du temps physique, l'évolution des déplacements est supposée continue, il n'y a pas de "sauts de déplacements" à divers instants de l'évolution. En statique, la condition de continuité de l'évolution en temps n'est pas mathématiquement nécessaire. Elle est prise par commodité, pour éviter les sauts d'efforts déduits des sauts de déplacements. Les calculs numériques par éléments finis supposent le plus souvent l'existence d'un temps physique et demandent la variation du chargement en fonction de ce temps. Il peut arriver que ces calculs numériques divergent et nécessitent la division des pas de charge, donc des pas de temps employés. L'existence de sauts d'efforts, qui ne sont pas réduits quand on diminue le pas de temps, rend vaine toute division de ce dernier.

4.4. Extension au cas des structures axisymétriques

La formulation du problème axisymétrique est détaillée en II.1.4.2.

Les fonctions de déplacement s'expriment dans un repère (O, r, θ, z) à partir des variables d'espace r et z

$$u_r = f_r(r, z)$$

$$u_z = f_z(r, z)$$

$$u_\theta = 0$$

Les déformations sont données par (II.1.29) et les forces de volume par (II.1.30), les autres relations, et notamment le passage des déformations aux contraintes, restant inchangées.

Les fonctions de déplacement ne sont définies que dans le demi-plan $r \geq 0$. Des précautions doivent être prises pour la valeur des fonctions de déplacement et de leurs dérivées pour $r = 0$, si ces points sont dans le domaine étudié. Le déplacement doit d'abord être rigoureusement nul. Les déformations peuvent être infinies sous réserve que la force de volume qui en est déduite soit sommable sur le domaine, autrement dit que

$$\int_{\Omega} 2\pi X_r(r, z) dr dz \text{ soit borné.}$$

4.5. Extension au cas des contraintes planes

4.5.1. Rappel sur l'approche contraintes planes

Il a été remarqué au §II.1.4.3 que le problème élastique ou plastique en contraintes planes n'a pas de réalité physique. Cela n'empêche pas l'utilisation courante de cette approximation dans les calculs industriels et justifie que le problème de recherche de l'erreur en régime élastoplastique soit aussi posé.

Dans le cas dynamique, le déplacement u_z conduirait à l'apparition d'une force de volume X_z selon Oz, d'expression

$$X_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{IV.4.29}$$

ce qui ne respecte plus les conditions de contrainte plane et notamment l'absence de chargement selon l'axe z. La résolution numérique impliquerait l'utilisation d'un modèle tridimensionnel, ce qui ôterait tout intérêt à une telle solution. De plus, le déplacement u_z étant indéterminé, la solution exacte complète ne peut être établie. Par conséquent, nous ne construirons pas de solutions exactes dynamiques en contraintes planes.

Dans le cas de la parfaite plasticité, le critère peut être écrit en éliminant la composante identiquement nulle σ_{zz} . Cependant, pour des raisons de commodité et pour faciliter le traitement du cas de l'érouissage, nous conservons l'écriture classique des problèmes bidimensionnels, avec 4 composantes pour les contraintes et les déformations. Nous imposons seulement dans tous les cas $\sigma_{zz} = 0$; ϵ_{zz} et ϵ_{zz}^p ont la valeur nécessaire pour vérifier cette condition.

4.5.2. Passage des déformations aux contraintes en plasticité

Le problème général de résolution des équations de la plasticité est modifié. On ne cherche plus l'incrément de contrainte $\Delta\sigma$ vérifiant le critère lorsqu'on impose un incrément de déformation totalement connu $\Delta\epsilon$, mais un incrément de contrainte de la forme

$$\Delta\sigma^T = (\Delta\sigma_{xx} \ \Delta\sigma_{yy} \ 0 \ \Delta\sigma_{xy}) \tag{IV.4.30}$$

lorsqu'on impose un incrément de déformation de la forme

$$\Delta\epsilon^T = (\Delta\epsilon_{xx} \ \Delta\epsilon_{yy} \ \Delta\epsilon_{zz} \ \Delta\epsilon_{xy}) \tag{IV.4.31}$$

avec $\Delta\epsilon_{zz}$ indéterminé.

Il serait possible de chercher la valeur de $\Delta\epsilon_{zz}$ qui annule $\Delta\sigma_{zz}$ par une méthode itérative, en partant par exemple de sa valeur élastique $\Delta\epsilon_{zz}^{el} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\Delta\epsilon_{xx} + \Delta\epsilon_{yy})$. A chaque itération, $\Delta\sigma$ serait calculé, comme dans le cas de la déformation plane, par projection radiale (IV.4.8) ou intégration analytique (IV.4.23), et la valeur de $\Delta\epsilon_{zz}$ à l'itération suivante serait ajustée de façon à

faire diminuer $|\Delta\sigma_{zz}|$. Le schéma serait arrêté lorsque $|\Delta\sigma_{zz}|$ serait suffisamment faible, par exemple de l'ordre de $10^{-4} \sigma_0$.

En fait, un tel schéma itératif serait extrêmement coûteux à mettre en oeuvre. Krieg et Krieg (1977) remarquaient déjà que l'utilisation de l'intégration analytique dans un code de calcul numérique était trop coûteuse par rapport aux méthodes classiques de projection, alors que **un seul** calcul par intégration analytique est nécessaire pour une valeur donnée de $\Delta\epsilon$. L'utilisation du schéma précédent conduirait à quelques dizaines d'intégrations analytiques ou de projections pour trouver la valeur $\Delta\epsilon_{zz}$ de chaque incrément de déformation (IV.4.31).

Nous allons chercher une méthode plus directe de calcul de $\Delta\sigma$. On peut *a priori* se dispenser du calcul de ϵ_{zz} et rechercher une formulation en contraintes planes ne faisant intervenir que les 3 composantes utiles des tenseurs contrainte et déformation. Si on exprime le critère en fonction de ces trois composantes, les règles de projection sont fortement compliquées. On ne peut plus dire que $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \mathbf{S} - C \epsilon^P$ et la recherche directe de la solution selon un raisonnement analogue à celui décrit au §IV.4.2.2.2 n'est plus possible.

Akel (1987) propose un schéma itératif permettant de trouver ϵ_{zz} par résolution d'une équation implicite. Nous allons expliciter cette approche et l'étendre au calcul des dérivées des contraintes par rapport aux axes de coordonnées.

On suppose, au temps t_k , que les tenseurs ϵ_k , σ_k , ϵ_k^P vérifient le critère et la condition de contraintes planes. On ajoute un incrément de déformation $\Delta\epsilon_{cp}$ tel que $f(\sigma_k + L_{cp} \cdot \Delta\epsilon_{cp}, \epsilon_k^P) > 0$.

La valeur de $\Delta\epsilon_{zz}$ vérifiant le critère et la condition de contraintes planes est trouvée en résolvant

$$\Delta\epsilon_{zz} = \frac{g + \frac{1+\nu}{1-\nu}}{2g} (\Delta\epsilon_{xx} + \Delta\epsilon_{yy}) - \frac{3}{4} \frac{g+1}{\mu g} \left(S_{kzz} - C \epsilon_{kzz}^P \right) \quad (IV.4.32)$$

$$\text{avec } g(\Delta\epsilon) = \frac{2}{3} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{2\mu + C} < 2\mu - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{\epsilon'_2 : \epsilon'_2}} > - 1 \text{ et } \epsilon'_2 = \frac{S_k - C \epsilon_k^P}{2\mu} + \Delta\epsilon'$$

$$\text{On a } \Delta\epsilon^P = \frac{1}{2\mu + C} < 2\mu - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{\epsilon'_2 : \epsilon'_2}} > \epsilon'_2 \quad (IV.4.33)$$

Les dérivées de ces termes par rapport aux axes de coordonnées, nécessaires pour le calcul des forces de volume, s'expriment par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\epsilon_{zz}}{\partial x_i} &= \frac{g + \frac{1+\nu}{1-\nu}}{2g} \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta\epsilon_{xx} + \Delta\epsilon_{yy}) - \frac{3}{4} \frac{g+1}{\mu g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(S_{kzz} - C \epsilon_{kzz}^P \right) \\ &\quad - \frac{1}{2g^2} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} (\Delta\epsilon_{xx} + \Delta\epsilon_{yy}) - \frac{3}{2\mu} \left(S_{kzz} - C \epsilon_{kzz}^P \right) \right] \frac{\partial g}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (IV.4.34)$$

$$\text{avec } \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_0}{2\mu + C} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\epsilon'_2 : \frac{\partial \epsilon'_2}{\partial x_i}}{(\epsilon'_2 : \epsilon'_2)^{3/2}}$$

$$\text{et } \frac{\partial \Delta \epsilon^P}{\partial x_i} = \frac{1}{2\mu + C} \left[\left(2\mu - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{\epsilon'_2 : \epsilon'_2}} \right) \frac{\partial \epsilon'_2}{\partial x_i} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_0}{(\epsilon'_2 : \epsilon'_2)^{3/2}} \left(\epsilon'_2 : \frac{\partial \epsilon'_2}{\partial x_i} \right) \epsilon'_2 \right]$$

Akel propose d'utiliser une méthode de point fixe classique pour résoudre (IV.4.32) et trouver la valeur de g . Nous avons préféré employer une méthode de point fixe d'ordre 2, qui conduit à une convergence rapide (erreur de 10^{-15} à 10^{-10} en 3 ou 4 itérations, contrairement à la méthode d'ordre 1 où chaque chiffre significatif exact supplémentaire nécessite environ une itération).

Comme la projection radiale en déformation plane, cette méthode est du premier ordre et n'est valable que pour des incréments de contrainte $L \Delta \epsilon$ hors du domaine de plasticité, suffisamment petits. Il ne faut pas confondre la précision de la résolution de l'équation implicite (IV.4.32) avec la précision du calcul de $\Delta \sigma$. Dans le premier cas, $\Delta \epsilon$ est fixé et on cherche seulement la valeur exacte de g correspondant à cet incrément ; on a vu qu'on y parvenait très vite. Dans le second cas, on cherche la valeur exacte de $\Delta \sigma$ correspondant à l'ajout de l'incrément de déformation $\Delta \epsilon$ et on sait que le fait de résoudre ce problème en discrétisant au premier ordre les équations d'évolution introduit une erreur liée à la taille de $\Delta \epsilon$.

Enfin, on remarquera qu'il n'existe aucune méthode d'intégration analytique en contraintes planes.

4.6. Construction de problèmes aux limites

Les champs de déplacements, de déformations, de contraintes et de forces de volume exacts ou quasi-exacts sont supposés créés par les méthodes du paragraphe précédent.

Ces champs sont valables *a priori* dans tout l'espace ou dans le domaine de définition des fonctions de déplacement choisies.

Nous allons détailler le processus de construction d'un problème aux limites exposé §IV.4.2.1.1 dans le cas élastique et les points particuliers qui se posent à certaines étapes de ce processus.

4.6.1. Géométrie

Il est possible de choisir une infinité de domaines Ω inclus dans le domaine de définition des champs exacts, ainsi que leurs frontières $\partial_u \Omega$ et $\partial_F \Omega$. La forme des domaines peut être quelconque, avec de fortes discontinuités géométriques telles que angles rentrants, entailles, fissures... Nous nous limitons aux domaines de taille finie mais *a priori* rien n'interdit de choisir des domaines illimités. La forme des champs exacts n'est absolument pas affectée par le choix du domaine et ses singularités géométriques éventuelles. A une géométrie de type fond de fissure peut correspondre un champ de contraintes exact parfaitement uniforme...

Comme nous avons choisi l'hypothèse des petites transformations, la géométrie est invariante au cours du chargement.

Nous admettons que les frontières $\partial_u \Omega$ et $\partial_F \Omega$ n'évoluent pas au cours du temps, ce qui exclut les problèmes de type contact.

Le choix de la frontière $\partial_u \Omega$ doit être tel qu'aucun mouvement de corps rigide de la structure ne soit permis ; $\partial_u \Omega$ ne peut par exemple être vide.

Une manière simple de choisir $\partial_u \Omega$ est de prendre la partie de la frontière où les déplacements sont nuls. Rien n'interdit cependant de choisir une zone où il existe des déplacements non nuls et variables au cours du temps. Ces déplacements doivent être entrés en données lors du calcul numérique, comme déplacements imposés.

Les fonctions de déplacement doivent donner dans le domaine Ω des champs de contraintes d'énergie finie et des forces de volume sommables sur tout sous-domaine fini de Ω (cf. §IV.4.3). On peut néanmoins retenir des fonctions de déplacement telles que ces conditions ne sont pas vérifiées en certains points ou en certaines régions. Il faut alors exclure ces régions des domaines Ω choisis pour définir des problèmes aux limites.

4.6.2. Chargement

Le domaine retenu est soumis aux sollicitations suivantes :

- les forces de volume \mathbf{X} à l'intérieur de Ω , déduites du champ exact indéfini \mathbf{X} . Elles sont supposées sommables sur tout sous-domaine de volume fini inclus dans Ω ;

- les forces de surface \mathbf{F}_s sur $\partial_F \Omega$, de normale \mathbf{n} , calculées par l'équation d'équilibre à la frontière

$$\mathbf{F}_{s_i} = \sigma_{ij} \mathbf{n}_j \quad (\text{II.1.3})$$

- les déplacements imposés \mathbf{u}_d sur $\partial_u \Omega$, déduits des champs de déplacements \mathbf{u}_{ex} fixés comme point de départ de la méthode inverse. Dans le cas d'un calcul dynamique, il peut s'ajouter aux déplacements, des vitesses ou des accélérations imposées sur $\partial_u \Omega$.

L'évolution exacte au cours de tout le chargement de ces sollicitations est supposée parfaitement connue.

4.6.3. Matériau

Le matériau constitutif de la structure, supposée homogène et isotrope, est défini par les coefficients $E, \nu, \rho, C, \sigma_0$ dans le cas de l'élastoplasticité de Von Mises avec écrouissage cinématique linéaire. Ces coefficients sont supposés parfaitement déterminés et constants au cours du temps.

4.6.4. Conditions initiales

Au début du trajet de chargement, on suppose pour simplifier que le matériau est vierge, sans déformations initiales. Des déplacements initiaux peuvent être imposés. Pour un calcul dynamique, il peut également y avoir des vitesses initiales.

4.6.5. Résolution du problème aux limites

La connaissance du domaine Ω et de ses frontières, des caractéristiques mécaniques du matériau, du chargement en forces et en déplacements et des conditions initiales définit un problème aux limites bien posé, qui peut être résolu par n'importe quelle méthode analytique ou numérique adaptée aux structures élastoplastiques.

Dans notre cas, nous connaissons en plus des caractéristiques décrites au paragraphe précédent, les champs exacts de déplacements, de déformations et de contraintes, autrement dit la solution exacte du problème aux limites tel qu'il est défini classiquement, et que l'on cherche lorsqu'on fait un calcul analytique ou numérique.

Il est donc possible d'une part de faire un calcul numérique du problème aux limites, d'autre part d'évaluer rigoureusement l'erreur entre les résultats de ce calcul et la solution exacte du problème. Tout type d'erreur défini au §III.2 peut être calculé.

5. CONSTRUCTION PRATIQUE DES CHAMPS INDEFINIS PAR LA METHODE INVERSE

Nous avons exposé dans ses grandes lignes le principe général de construction des champs indéfinis constituant une solution analytique exacte. Les divers points vont à présent en être examinés en détail.

5.1. Choix des fonctions de déplacement

Les conditions de continuité des fonctions de déplacements ont été vues au §IV.4.3.

Nous nous restreindrons dans ce qui suit, sauf indication du contraire, aux fonctions où l'évolution dans l'espace est découplée de l'évolution en temps, autrement dit où le déplacement s'exprime en fonction des variables d'espace et du temps par

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum \lambda_i \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \phi_i(t) \quad (\text{IV.5.1})$$

en appelant chaque \mathbf{u}_i fonction de déplacement et chaque ϕ_i fonction de charge. Le paramètre λ_i n'est qu'un multiplicateur utilisé par commodité de notation, pour permettre l'affinité d'une fonction sans corriger tous ses coefficients.

Une telle notation permet de construire aussi bien des chargements radiaux que non radiaux (des éclaircissements sur ce point sont donnés au §IV.5.3). En séparant les termes en espace des termes en temps, elle a l'avantage de ne pas mélanger des quantités de dimension différente.

Le chargement déduit des fonctions de déplacement, en général, ne correspond pas à un chargement "classique" comme on en trouve dans les problèmes industriels.

La solution exacte des problèmes industriels n'est évidemment presque jamais connue et le dimensionnement est effectué d'après les résultats d'un ou de plusieurs calculs numériques. Nous avons vu au §III.3 que, dans le cas de l'élastoplasticité, l'évaluation des erreurs commises était difficile.

Les solutions analytiques créées par la méthode inverse n'ont pas pour objet de trouver la solution correspondant exactement à un problème industriel donné, ni même de chercher une solution "la plus proche possible" de ce problème.

Il serait tentant de se dire que ces chargements créés par la méthode inverse, avec leurs forces de masse aux évolutions complexes, "n'ont aucun rapport" avec les problèmes industriels et qu'en

conséquence ces solutions ne sont d'aucune utilité.

On remarquera d'abord que, pour une même géométrie, deux chargements sont voisins non pas lorsque leurs efforts sont ressemblants, mais lorsque les contraintes calculées à partir de ces chargements sont voisines. En théorie des poutres, il est par exemple courant de remplacer une charge uniformément répartie par quelques forces ponctuelles identiques et équidistantes. Les diagrammes des moments sont très voisins, alors que les efforts semblent différents *a priori*.

Il en est de même avec nos solutions exactes. Nous pouvons construire des champs de contraintes d'aspect suffisamment varié, avec des bosses, pics, zones à gradient élevé alternant avec des zones à gradient faible, etc. Les efforts d'où proviennent ces champs de contraintes nous intéressent moins.

Nous préférons utiliser des champs de contraintes et de déformations "réalistes". Nous limiterons (sauf pour les fonctions de déplacements singulières) la déformation équivalente à environ 5 pour cent, au-delà les effets de grandes déformations peuvent devenir non négligeables. Inversement, il est souhaitable qu'une majorité des solutions construites présente une déformation plastique maximale d'au moins 2 ou 3 fois la déformation élastique limite et une zone plastifiée de taille conséquente, pour éviter que l'effet de la plasticité ne soit négligeable dans le comportement global de la structure.

De même, comme la plasticité standard (Mises) ne modifie pas la valeur des déviateurs des contraintes, nous limiterons les modules des déformations sphériques à une faible fraction des déformations déviatoriques. Une déformation sphérique de 5 pour cent conduirait à une contrainte sphérique de 25000 MPa pour un matériau acier ($E = 200000$ MPa et $\nu = 0.3$). La plasticité limitera par contre à quelques centaines de mégapascals la contrainte résultant d'une déformation purement déviatorique de module 5 pour cent.

En règle générale, nous nous sommes arrangés pour que, pour tous les exemples testés, le domaine entier soit élastique au début du chargement. Pour les fonctions de déplacement singulières, nous imposons seulement une zone plastifiée "de faible taille" au temps initial. Dans le cas d'un chargement radial, cela permet de voir l'évolution de l'erreur entre la phase élastique et la phase élastoplastique du chargement ; pour un chargement non radial cette évolution a moins d'intérêt.

5.2. Notation standard des champs exacts indéfinis

Afin d'alléger la présentation des résultats appuyés sur des solutions exactes, nous allons définir une notation standard pour désigner une solution exacte, qui sera systématiquement employée dans la suite de ce travail.

Les fonctions de déplacement définissant le champ de déplacements exact peuvent être de type couplé ou découplé (cf. §IV.5.1) entre les fonctions de déplacement définissant l'évolution en espace, et les fonctions de charge définissant l'évolution en temps. Nous conviendrons cependant que, pour

une fonction couplée, il y a lieu de faire intervenir une fonction de charge, même si elle se réduit à une constante.

Un catalogue de fonctions de déplacement et de charge est présenté en Annexe. Chaque fonction y est repérée par un code, ce qui permet de ne faire intervenir que ce code et la valeur des paramètres de la fonction dans la description.

Le matériau constitutif est systématiquement supposé homogène, isotrope, élastoplastique parfait ou avec écrouissage cinématique linéaire.

La présentation finale d'un champ de déplacements exact est la suivante :

- nom du chargement
- Déformations planes (DP), contraintes planes (CP) ou axisymétrique (AXI); statique (S) ou dynamique (D)
- caractéristiques du matériau : E , ν , C , σ_0 , ρ
- nombre de fonctions de déplacement (FD)
 - pour chaque FD : un numéro d'ordre, le code et les coefficients de la FD
- nombre de fonctions de charge (FC)
 - pour chaque FC : un numéro d'ordre, le code et les coefficients de la FC
- nombre de couples fonction de déplacement/fonction de charge composant le chargement complet
 - pour chaque couple : numéros d'ordre de la FD et de la FC associée; coefficient multiplicateur
- temps de début et de fin de l'analyse

Dès qu'un chargement aura été défini par ces données, il pourra être appelé ailleurs dans le texte par son seul nom.

Ces données sont suffisantes pour définir rigoureusement à tout instant et en tout point du domaine de définition des FD, non seulement le champ de déplacements, mais aussi les champs de déformations, de contraintes et de forces de volume qui en sont déduits selon les méthodes du §IV.4.

Le catalogue des formulations analytiques des fonctions de déplacement et des fonctions de charge est donnée en Annexe. Les unités sont le mètre (m) pour les longueurs, le mégapascal (MPa) pour les contraintes et la seconde (s) pour les temps. Les autres unités s'en déduisent : MN pour les forces, MN/m³ pour les forces de volume, etc.

Les chargements utilisés ponctuellement sont décrits en partie courante du texte et ne sont plus réutilisés dans la suite. Les chargements qui ont servi à de nombreux calculs sont regroupés dans l'Annexe 2 de ce chapitre.

5.3. Chargements radiaux et non radiaux

La notion de "chargement radial" est définie au §IV.4.2.2.3. Nous y avons également introduit la notion de chargement pseudo-radial, pour lequel le tenseur des déviateurs des contraintes reste homothétique à lui-même au cours du chargement. En l'absence de déformations initiales, nous allons prouver qu'on a toujours un chargement pseudo-radial lorsque la fonction de déplacement découplée est écrite selon (IV.5.1) avec $i=1$, quels que soient u_1 et ϕ_1 .

Soit au temps t_1 un matériau supposé vierge. On impose à ce matériau un champ de déplacements de la forme

$$u(x, t) = u(x) \phi(t) \quad (IV.5.2)$$

avec $u(x)$ fonction de déplacements vérifiant les conditions de dérivabilité énoncées au §IV.4.3. La fonction du temps $\phi(t)$ est supposée valoir zéro pour $t=t_1$, puis évoluer ensuite de façon quelconque mais avec une valeur suffisamment élevée pour permettre une plastification du point étudié.

En un point quelconque de l'espace, on a un état de déformation ϵ pouvant s'écrire

$$\epsilon(x, t) = \epsilon_1(x) \phi(t)$$

Le chargement sera pseudo-radial si on peut écrire S sous la forme (IV.4.16), soit

$$S(x, t) = S_1(x) \phi_\sigma(x, t)$$

avec $\phi_\sigma(x, t)$ dépendant du point et *a priori* différent de $\phi(t)$.

La fonction $\phi(t)$ étant supposée partir de zéro pour $t=t_1$, il existe en ce point un temps t_m pour lequel le seuil σ_0 est atteint pour la première fois :

quel que soit $t_1 \leq t \leq t_m$ on a

$$\sigma(t) = L.\epsilon(t) = L.\epsilon_1.\phi(t) = \sigma_1.\phi(t)$$

$$\text{et } S(t) = 2\mu \epsilon'_1 \phi(t) = S_1 \phi(t)$$

On admet qu'après ce temps t_m la fonction ϕ continue de croître en valeur absolue. La contrainte calculée élastiquement par (II.1.5) va violer le critère et la plasticité va apparaître.

La valeur limite élastique ϕ_m de $\phi(t_m)$, au-delà de laquelle la plasticité apparaît, est telle que

$$\frac{1}{2} S(t_m) : S(t_m) - y_0 = 0$$

$$\text{soit } \frac{1}{2} \phi_m^2 S_1 : S_1 - y_0 = 0$$

$$\text{d'où } \phi_m = \sqrt{\frac{2y_0}{S_1 : S_1}} \text{ et } \sigma_m = \sigma_1 \phi_m.$$

On ajoute pendant l'intervalle de temps Δt un incrément de déformation $\Delta\epsilon = \Delta\phi \epsilon_1$. On a d'après (IV.4.8)

$$\Delta S^{\text{pr}} = \frac{1}{1 + \frac{C}{2\mu}} \left[\Delta S^{\text{el}} \left[\frac{C}{2\mu} + \sqrt{\frac{2y_0}{\psi}} \right] + S_m \left[\sqrt{\frac{2y_0}{\psi}} - 1 \right] \right]$$

avec $\psi = S^* : S^*$, $\Delta S^{\text{el}} = 2\mu \text{dév}(\Delta\epsilon)$; $S_m = \text{dév}(\sigma_m)$; $\sigma^* = \sigma_m + L.\Delta\epsilon$

ici, puisque $f(\sigma_m) = 0$, on a

$$\psi = \mathbf{S}^* : \mathbf{S}^* = (\phi_m + \Delta\phi)^2 \mathbf{S}_1 : \mathbf{S}_1$$

$$\begin{aligned} \text{et donc } \Delta S^{\text{pr}} &= \frac{1}{1 + \frac{C}{2\mu}} \left[\Delta\phi \cdot \mathbf{S}_1 \left[\frac{C}{2\mu} + \sqrt{\frac{2y_0}{\psi}} \right] + \phi_m \mathbf{S}_1 \left[\sqrt{\frac{2y_0}{\psi}} - 1 \right] \right] \\ &= \mathbf{S}_1 \frac{C}{2\mu + C} \Delta\phi = \mathbf{S}_1 \Delta\phi_\sigma \end{aligned}$$

En un autre point, le temps t_m et donc l'incrément $\Delta\phi_\sigma$ sont différents si le champ de contraintes n'est pas uniforme. On ne peut donc écrire en général

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \phi_\sigma(t)$$

et le chargement n'est donc pas radial au sens de Lemaitre-Chaboche.

On a par contre un chargement pseudo-radial lorsque la fonction de déplacement utilisée pour les solutions exactes est ou peut se ramener à la forme (IV.5.2). On ne peut avoir un chargement non radial avec (IV.5.1) que si $i \geq 2$, et que s'il existe au moins 2 fonctions de déplacement linéairement indépendantes associées à des fonctions de charge elles-mêmes linéairement indépendantes.

Un chargement non radial est également possible par l'utilisation de fonctions de déplacement non découplées, où $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ sans pouvoir séparer l'évolution en espace de l'évolution en temps.

5.4. Convergence et précision des algorithmes de construction locale des champs exacts

5.4.1. Projection radiale

Dans le cas du chargement non radial, la projection radiale ne donne l'incrément de contrainte en fonction de l'incrément de déformation que de manière approchée. L'intégration analytique donne la solution exacte si les incréments de déformation sont linéaires donc s'ils s'écrivent selon (IV.4.1). C'est le cas si le déplacement est écrit par (IV.5.1) avec des fonctions de charge $\phi(t)$ linéaires par morceaux, et si chaque sommet de la ligne brisée $\phi(t)$ correspond à la limite d'un pas de temps.

L'exemple suivant présente l'erreur commise sur les contraintes et les déformations plastiques, par utilisation de la projection radiale. Les fonctions de charge sont linéaires par morceaux et la solution exacte est donnée par intégration analytique.

Chargement retenu :

chargement NRDP1, en DP-S

E = 209664 MPa ; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400$ MPa ; C = 72 MPa

2 fonctions de déplacement

FD1 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 4*0. 1. -1. 10*0. 2. 3*0.$

FD2 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3*0. 1. 0. -1. 2*0. 1. -1. -1. 3*0. 1. 2*0. -1. 0. 1.$

2 fonctions de charge

FC1 : LPM 1 point avec C_1 à $C_2 = 0. 1.$

FC2 : LPM 2 points avec C_1 à $C_4 = 0. 0. 120. 1.$

2 combinaisons superposées

0.002480159 * FD1 * FC1

0.01 * FD2 * FC2

Analyse de t=0 à t=120

La fonction de déplacement FD1 crée en tout point un champ de déformations de la forme $\epsilon^T = (\epsilon \ \epsilon \ 0 \ 0)$. FD2 donne de même en tout point un champ $\epsilon^T = (0 \ 0 \ 0 \ \epsilon)$.

Les contraintes et déformations sont calculées au point $(x=0.5 ; y=1)$. Au temps $t=0$, le comportement de ce point est élastique.

La précision des résultats est étudiée au temps $t=120$, en fonction du nombre d'incrément. Les erreurs correspondent à la différence entre la composante trouvée par intégration analytique, et celle donnée par la projection radiale. On obtient les courbes suivantes

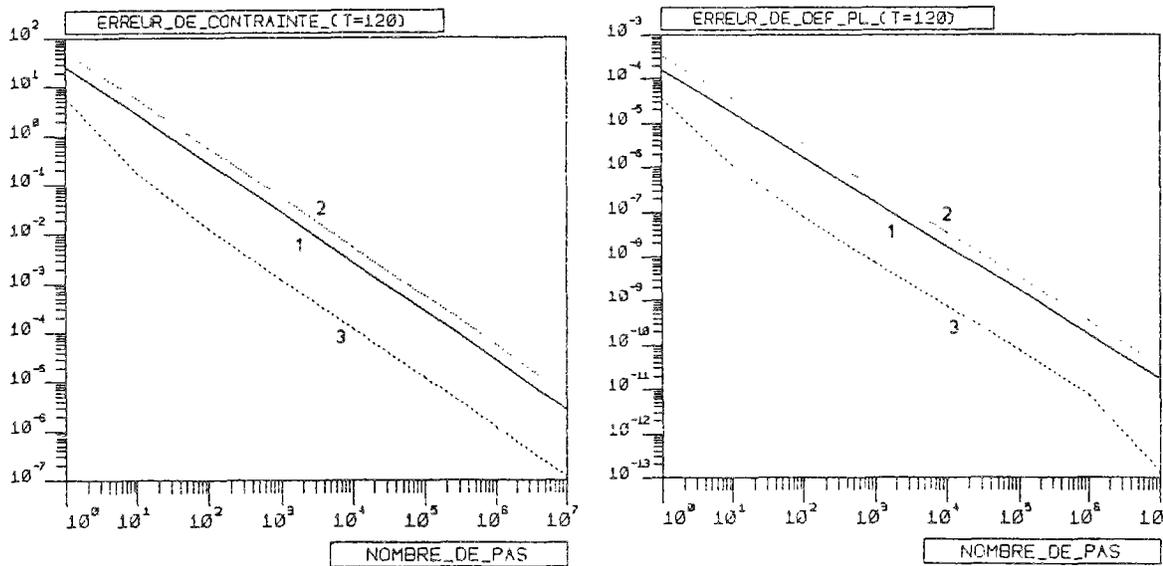


Fig. IV-5-1 a b. Erreur absolue sur les contraintes σ_{xx} (1), σ_{zz} (2) et σ_{xy} (3), puis sur ϵ_{xx}^P (1), ϵ_{zz}^P (2) et ϵ_{xy}^P (3)

On constate que le logarithme de l'erreur décroît linéairement avec le logarithme du nombre d'incrément, ce qui est logique car l'approximation de (IV.4.8) est d'ordre 1.

Si les fonctions de charge ne sont pas linéaires par morceaux, il est nécessaire de limiter la taille des incréments pour que l'écart entre la variation réelle de ϵ au cours du temps et sa linéarisation par (IV.4.1) reste faible (cf. Fig. IV-4-1).

5.4.2. Cas des contraintes planes

En contraintes planes, il peut arriver que le chargement ne soit pas pseudo-radial, même avec une seule fonction de déplacements. La détermination de ϵ_{zz} ne provenant pas de cette fonction de déplacements mais de la condition $\sigma_{zz} = 0$, l'hypothèse $\epsilon(t) = \epsilon \phi(t)$ n'est pas vérifiée. Les contraintes évoluent de façon pseudo-radiale en élasticité puis de manière plus complexe en élasto-plasticité, comme on peut le voir sur l'exemple suivant.

Chargement PRCP1, en CP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 72 \text{ MPa}$

2 fonctions de déplacement

FD1 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 4^*0. \ 1. \ -1. \ 10^*0. \ 2. \ 3^*0.$

FD2 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3^*0. \ 1. \ 0. \ -1. \ 2^*0. \ 1. \ -1. \ -1. \ 3^*0. \ 1. \ 2^*0. \ -1. \ 0. \ 1.$

1 fonction de charge

FC1 : LPM 2 points avec C_1 à $C_4 = 0. \ 0. \ 120. \ 1.$

2 combinaisons superposées

0.005 * FD1 * FC1

0.01 * FD2 * FC1

Analyse de t=0 à t=120

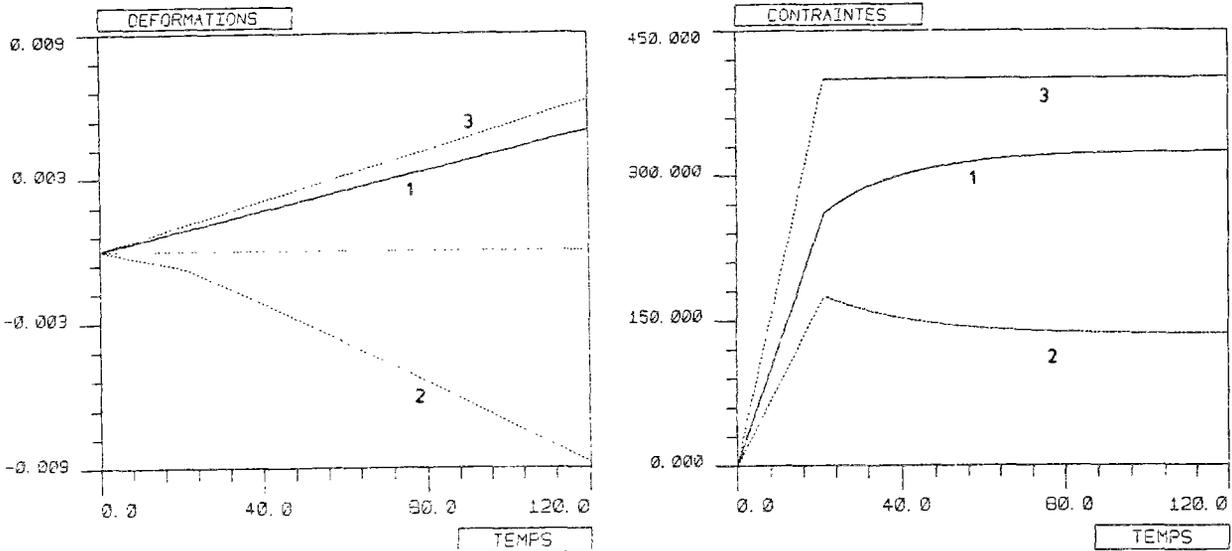


Fig. IV-5-2 a b. Exemples d'évolution au cours du temps des déformations $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}$ (1), ϵ_{zz} (2) et ϵ_{xy} (3), puis des contraintes $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ (1), σ_{xy} (2) et σ^{eq} (3)

Un aspect de l'évolution des déformations plastiques totales en fonction du nombre d'incrément est donné pour le chargement NRCP2. L'erreur n'est pas calculée vu qu'il n'existe pas de solution exacte. L'analyse est faite au temps t=18 et au point (x=0.5 ; y=1).

chargement NRCP2, en CP-S

E = 209664 MPa ; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400$ MPa ; C = 72 MPa

2 fonctions de déplacement

FD1 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 4*0.1. -1. 10*0. 2. 3*0.$

FD2 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3*0. 1. 0. -1. 2*0. 1. -1. -1. 3*0. 1. 2*0. -1. 0. 1.$

2 fonctions de charge

FC1 : LPM 1 point avec C_1 à $C_2 = 0. 1.$

FC2 : LPM 2 points avec C_1 à $C_4 = 0. 0. 120. 1.$

2 combinaisons superposées

0.002 * FD1 * FC2

0.002291072 * FD2 * FC1

Analyse de t=0 à t=18

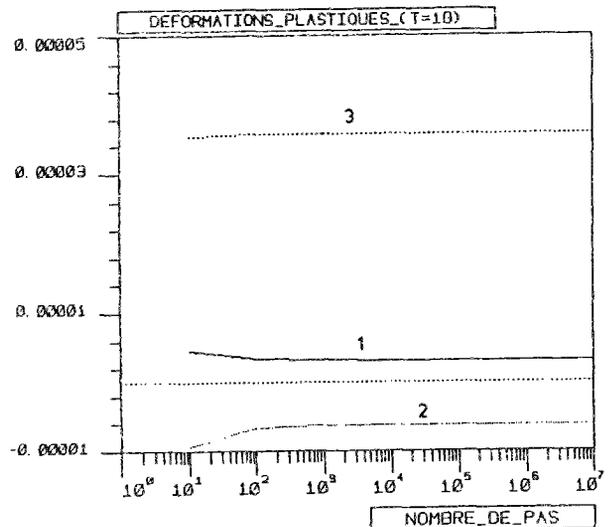


Fig. IV-5-3. Evolution des déformations plastiques $\epsilon_{xx}^p = \epsilon_{yy}^p$ (1), ϵ_{zz}^p (2) et ϵ_{xy}^p (3), en fonction du nombre d'incrément

5.5. Aspect de quelques champs exacts

5.5.1. Solutions connues

La sphère épaisse sous pression est la seule solution connue qui a été testée. La fonction de déplacement correspondante (SPHERE) est donnée en annexe 1, et le chargement SPHI en annexe 2. L'aspect de l'évolution des contraintes en fonction du rayon est classique (Mandel, 1966 par exemple). On notera que le gradient de contraintes est élevé, malgré l'apparente simplicité du problème.

5.5.2. Evolution en temps de quelques champs exacts créés par la méthode inverse

5.5.2.1. Chargements pseudo-radiaux

Les figures IV-5-4 et IV-5-5 tirées du chargement CR2 (cf. annexe 2) montrent que les composantes du tenseur déviateur des contraintes restent homothétiques au cours du temps. Le saut (IV.4.25) dû à la plastification du point étudié apparaît très nettement sur la figure IV-5-6. Il a se produit à des temps différents selon le point.

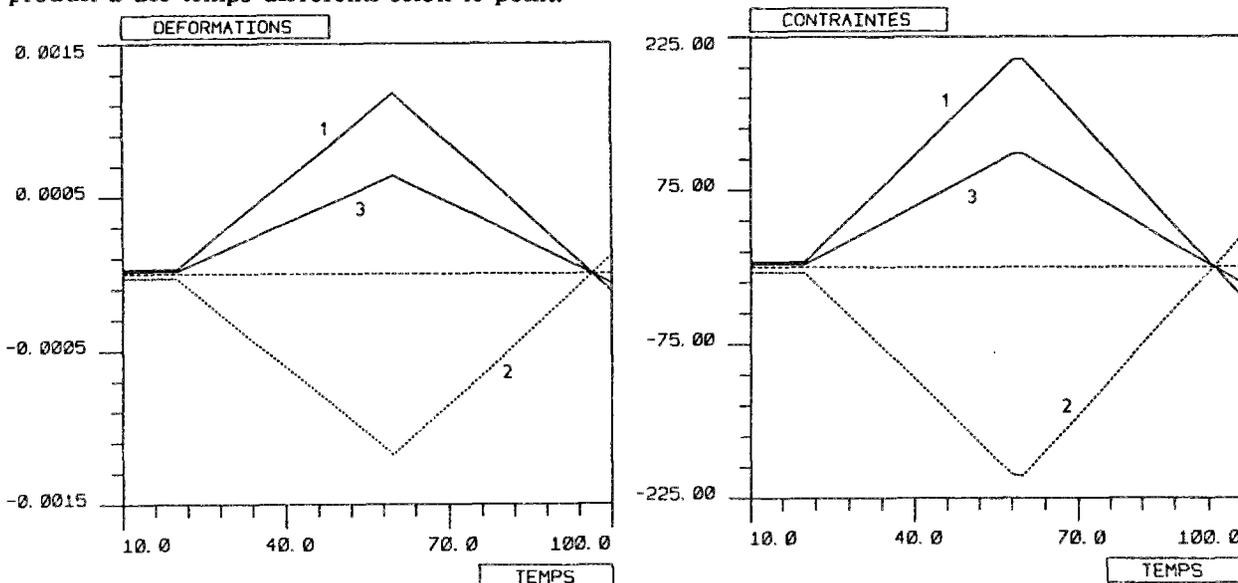


Fig. IV-5-4 a b. Evolution de ϵ_{xx} (1), ϵ_{yy} (2) et ϵ_{xy} (3), puis de $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ (1), σ_{zz} (2), σ_{xy} (3) au point ($x=0.2$; $y=0.2$)

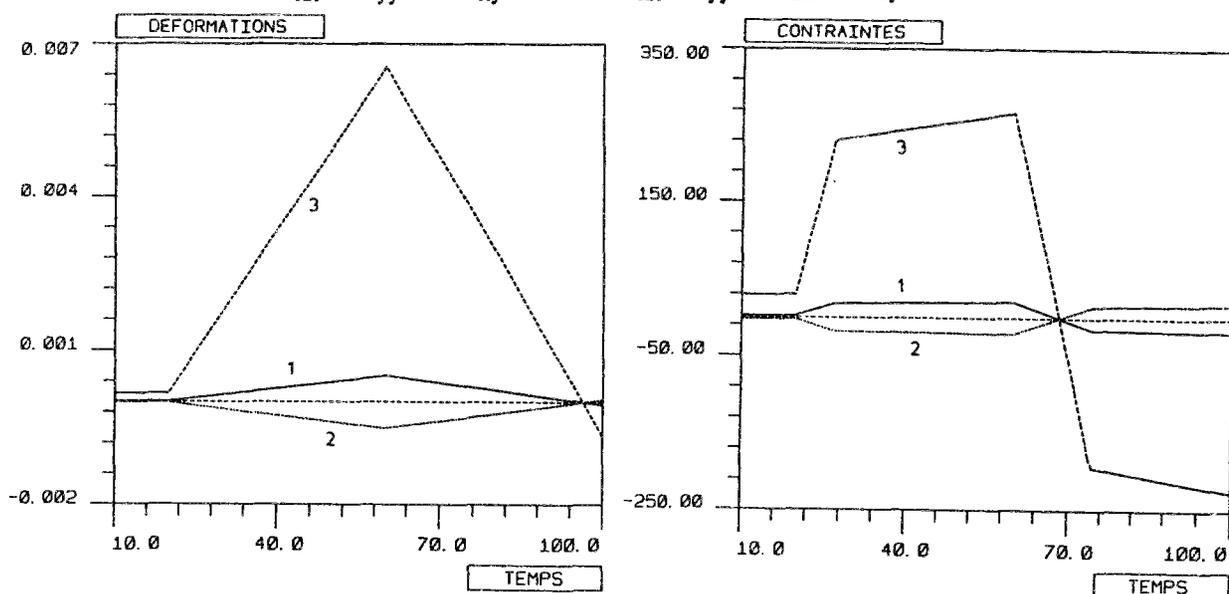


Fig. IV-5-5 a b. Idem au point ($x=2.4$, $y=2$)

Les forces de volume en ces deux points ont l'évolution suivante :

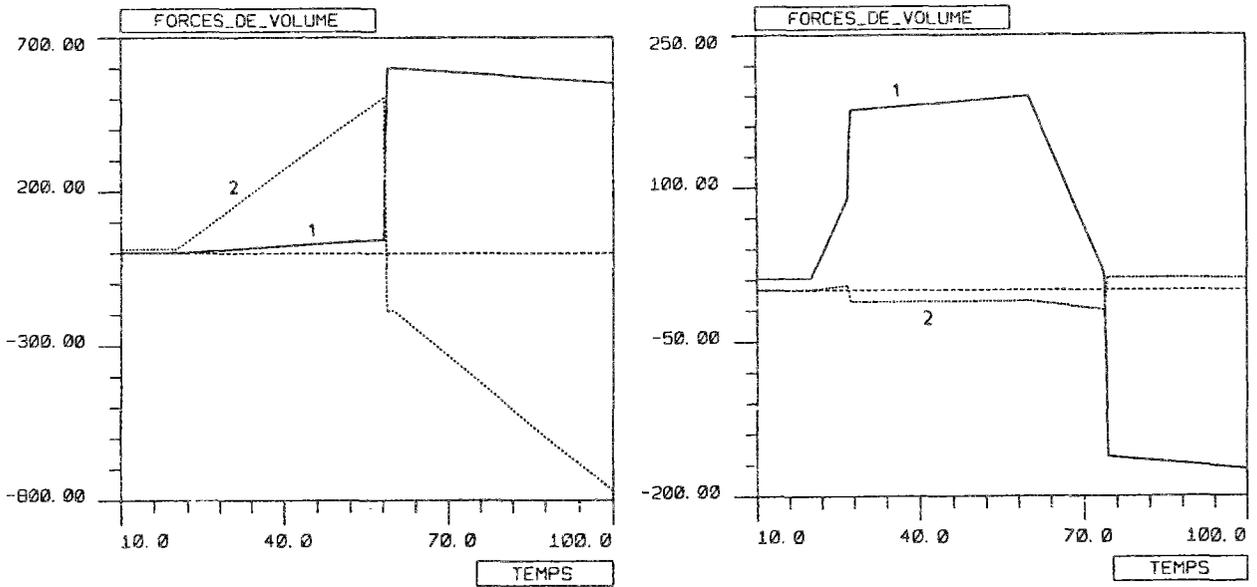


Fig. IV-5-6 a b. Forces de volume X_x (1) et X_y (2) aux deux points précédents

5.5.2.2. Chargements non radiaux

• Cas des déformations planes

L'évolution de chaque composante du tenseur contraintes est indépendante. Si nous choisissons une évolution linéaire par morceaux pour les déformations, l'évolution des contraintes peut être courbe. Elle est d'autant plus courbe que les directions principales des contraintes se modifient. On conçoit ici l'importance du pas de déformation lors de la correction plastique des contraintes (cf. §II.4.5). Nous présentons deux exemples.

Cas du chargement NR1 (cf. annexe 2) :

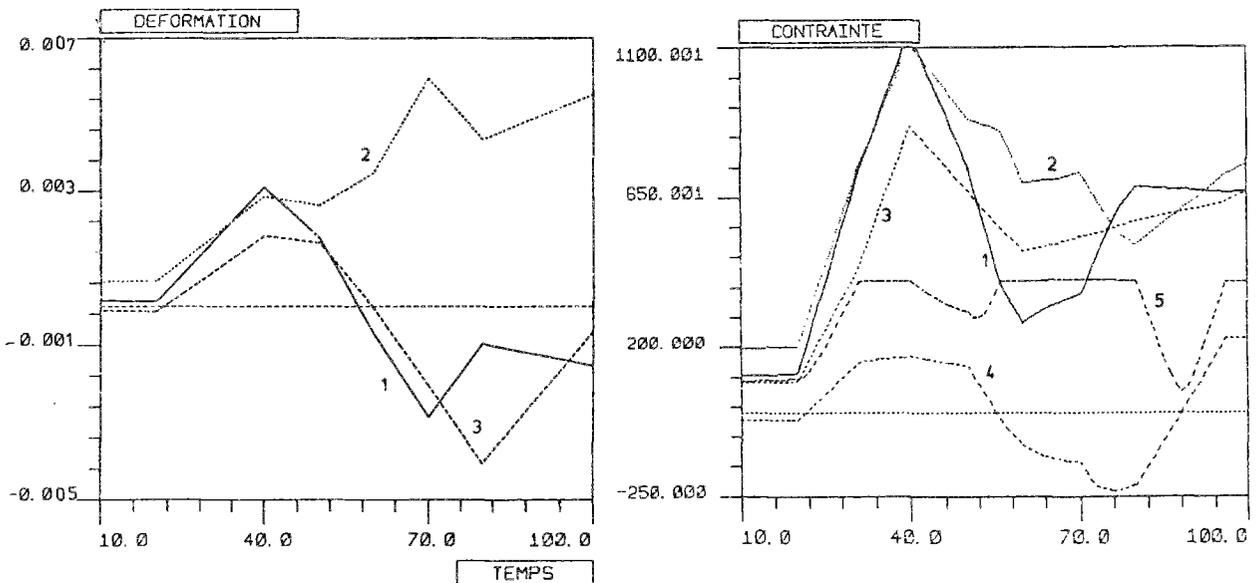


Fig. IV-5-7 a b. Evolution des déformations ϵ_{xx} (1), ϵ_{yy} (2), ϵ_{xy} (3) et des contraintes σ_{xx} (1), σ_{yy} (2), σ_{zz} (3), σ_{xy} (4) et σ_{eq} (5) au point ($x=2.6$; $y=3.2$)

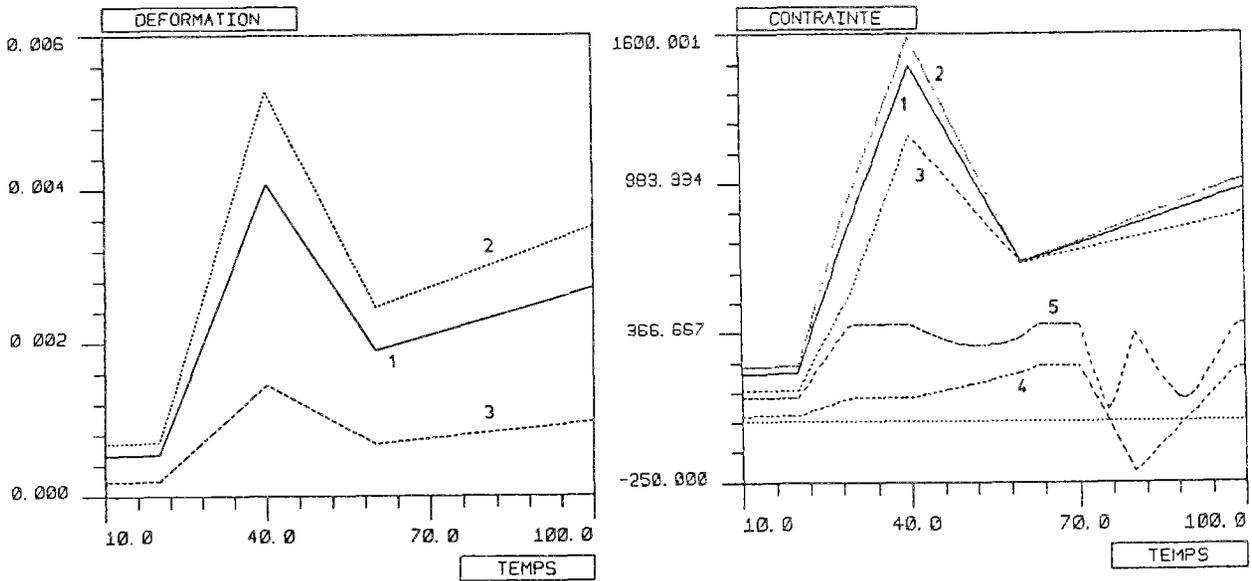


Fig. IV-5-8 a b. Mêmes évolutions au point (x=4.2 ; y=3.8)

L'évolution des contraintes au cours du temps est "faiblement courbée". Il y a peu de rotation des directions principales dans l'espace.

Le second exemple présenté est NR8. On constate sur les figures suivantes que la rotation des directions principales au cours du temps induit une courbure très nette de l'évolution des contraintes. Les forces de volume correspondantes ont aussi une évolution courbe, en plus des sauts habituels aux temps où le point étudié se plastifie :

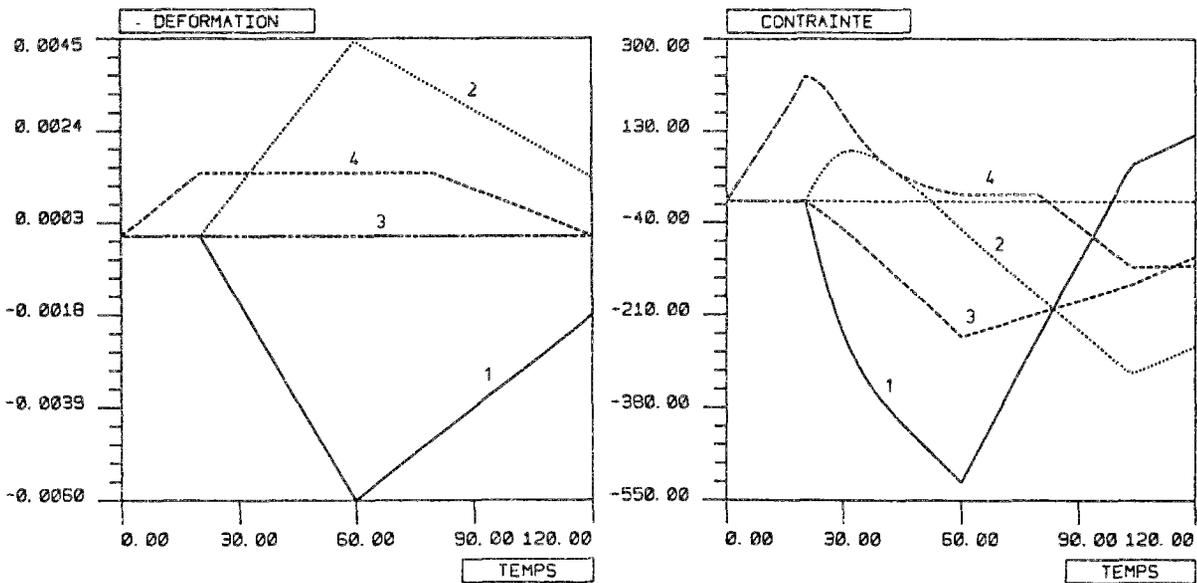


Fig. IV-5-9 a b. Evolution des déformations ϵ_{xx} (1), ϵ_{yy} (2), $\epsilon_{zz} = 0$ (3) et ϵ_{xy} (4), et des contraintes σ_{xx} (1), σ_{yy} (2), σ_{zz} (3) et σ_{xy} (4) au point (x=1 ; y=4)

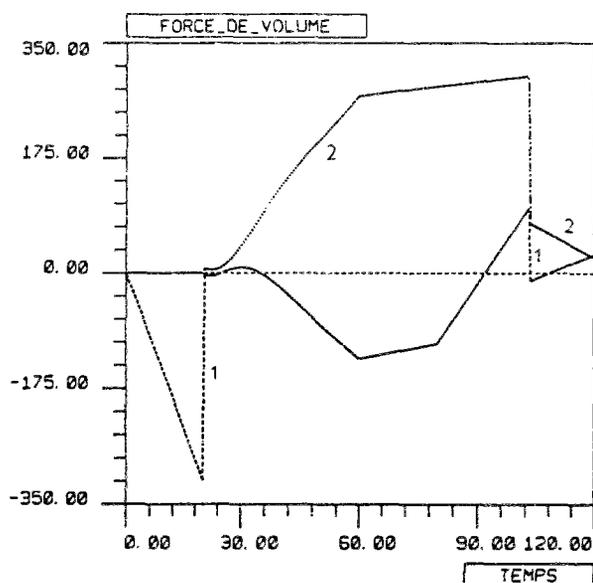


Fig. IV-5-10. Forces de volume X_x (1) et X_y (2) au point précédent

• Cas des contraintes planes

La sélection d'une combinaison de fonctions selon (IV.5.1) donne aussi, en contraintes planes, un chargement non radial. Un exemple, NRCPI, est présenté :

Chargement NRCPI, en CP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 72 \text{ MPa}$

2 fonctions de déplacement

FD1 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 4*0.1. -1. 10*0. 2. 3*0.$

FD2 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3*0. 1. 0. -1. 2*0. 1. -1. -1. 3*0. 1. 2*0. -1. 0. 1.$

2 fonctions de charge

FC1 : LPM 1 point avec C_1 à $C_2 = 0. 1.$

FC2 : LPM 2 points avec C_1 à $C_4 = 0. 0. 240. 2.$

2 combinaisons superposées

$0.001 * FD1 * FC1$

$0.01 * FD2 * FC2$

Analyse de $t=0$ à $t=240$

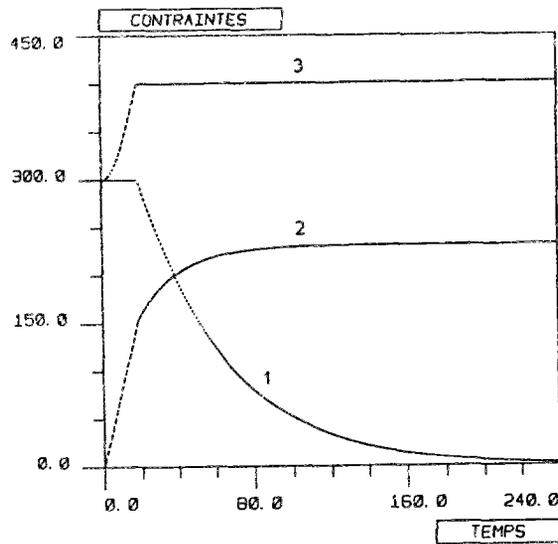
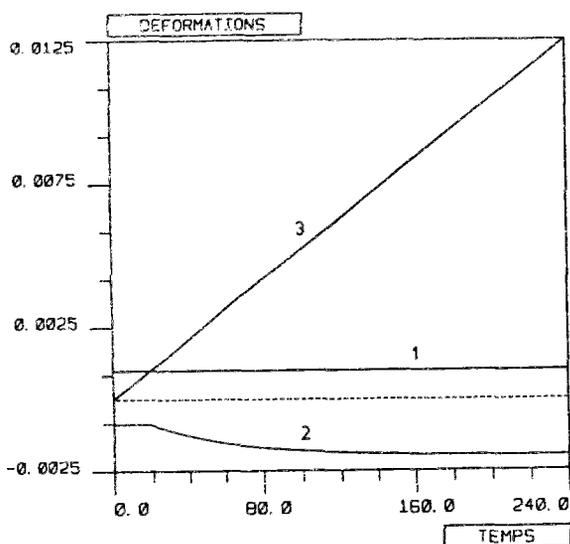


Fig. IV-5-11 a b. Evolution au cours du temps des déformations ϵ_{xx} (1), ϵ_{zz} (2), ϵ_{xy} (3) et des contraintes $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ (1), σ_{xy} (2), σ_{eq} (3) au point $(x=0.5 ; y=1)$

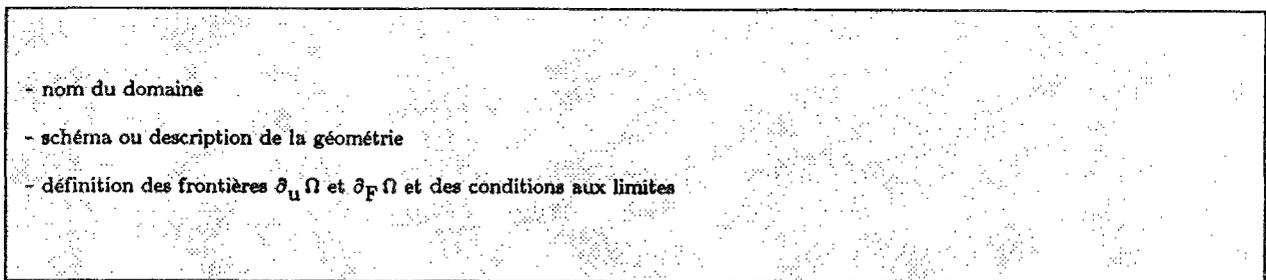
Dans ce cas, les composantes du tenseur des contraintes déduites de la fonction constante FC1 disparaissent lorsque l'autre fonction FC2 croît.

6. CONSTRUCTION PRATIQUE DES PROBLEMES AUX LIMITES

6.1. Notation standard des géométries

De même que pour les champs exacts, nous définissons une notation standard pour repérer rapidement chaque géométrie.

Un domaine Ω est défini par sa géométrie et ses frontières $\partial_u \Omega$ et $\partial_F \Omega$, supposées invariantes au cours du temps. La définition d'un domaine utilisé pour construire une solution particulière est faite selon la présentation systématique suivante :



De même que pour une solution exacte en déplacements (cf. §IV.5.2), dès qu'un domaine aura été défini par ces données, il pourra être désigné ailleurs dans le texte par son seul nom.

6.2. Aspect de quelques champs exacts

Nous présentons l'aspect de la variation dans l'espace de quelques champs de déplacements, de déformations, de contraintes et de forces de volume exacts. Les champs de forces de volume et de surface correspondent aux données auxquelles un ingénieur a accès lors d'un calcul classique.

- Cas CR2 sur domaine CAR1 (cf. annexe 2)

L'évolution des contraintes et des forces de volumes sur CAR1 est présentée à divers temps de l'évolution. Ce domaine est entièrement élastique à $t=20$.

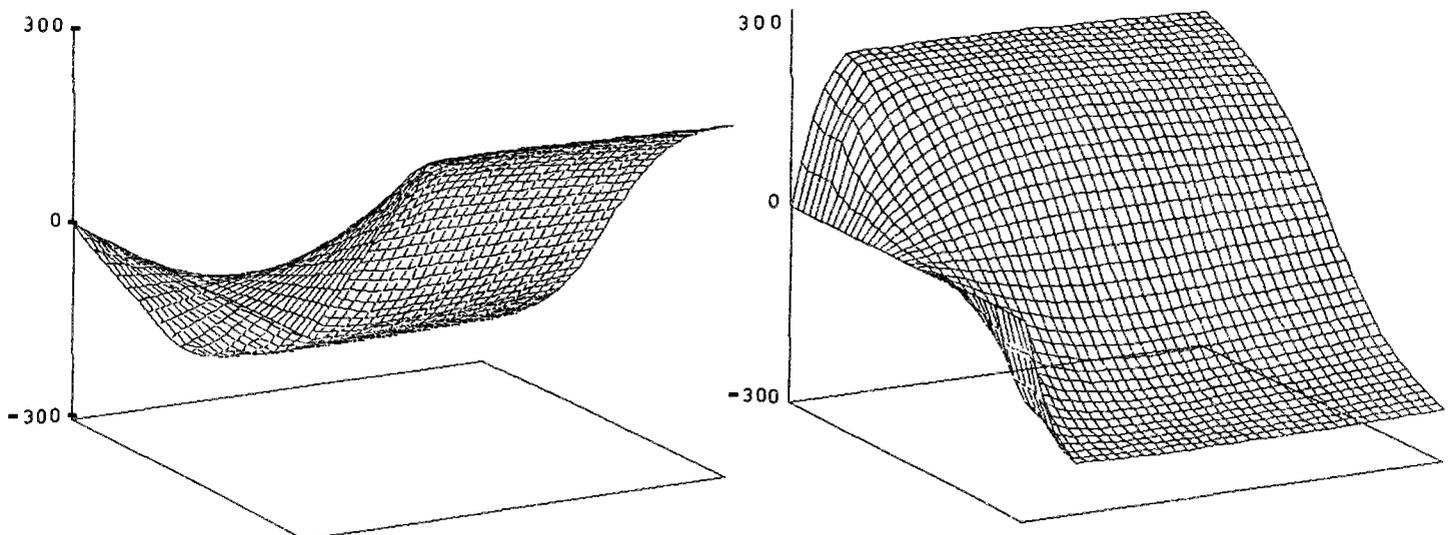


Fig. IV-6-1 a b. Aspect de σ_{yy} aux temps $t=25$ puis $t=100$

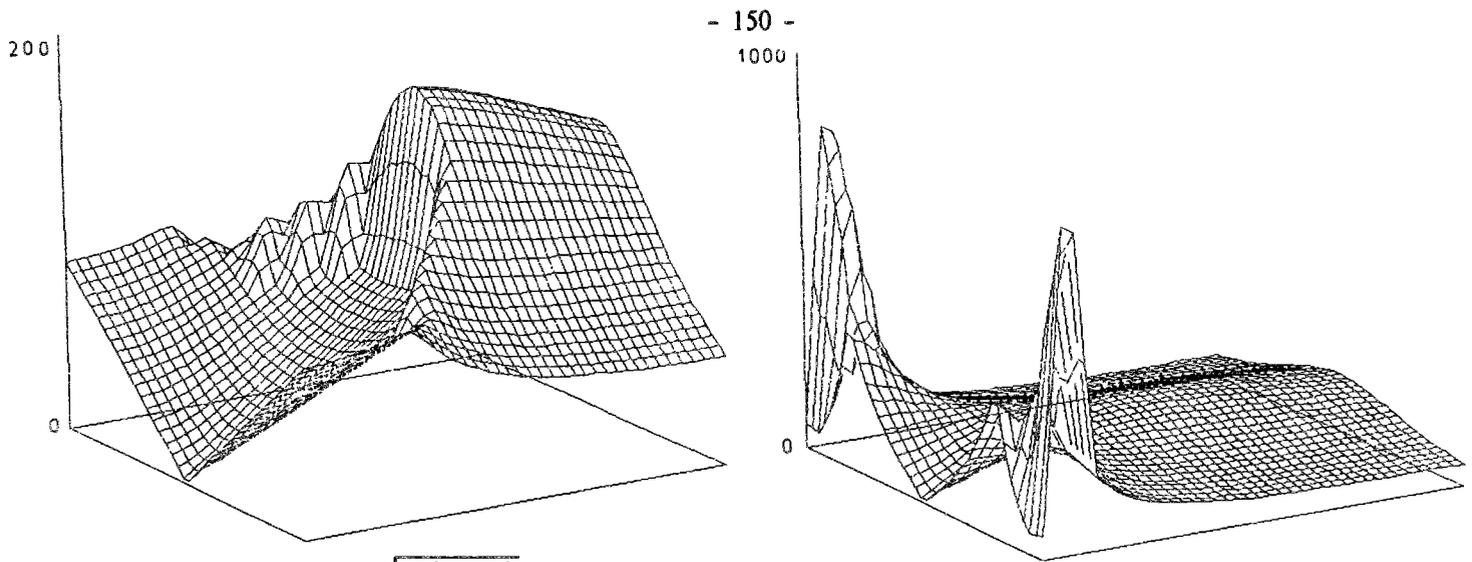


Fig. IV-6-2 a b. Aspect de $\sqrt{X_x^2 + X_y^2}$ aux temps $t=25$ puis $t=100$

• **Chargement NR4**

Ce chargement conduit à des déformations et contraintes illimitées en 2 points, les fonds des fissures. Les efforts sont représentés sur un rectangle $[0, 6] \times [0.0001, 4]$, d'où sont exclus les points singuliers.

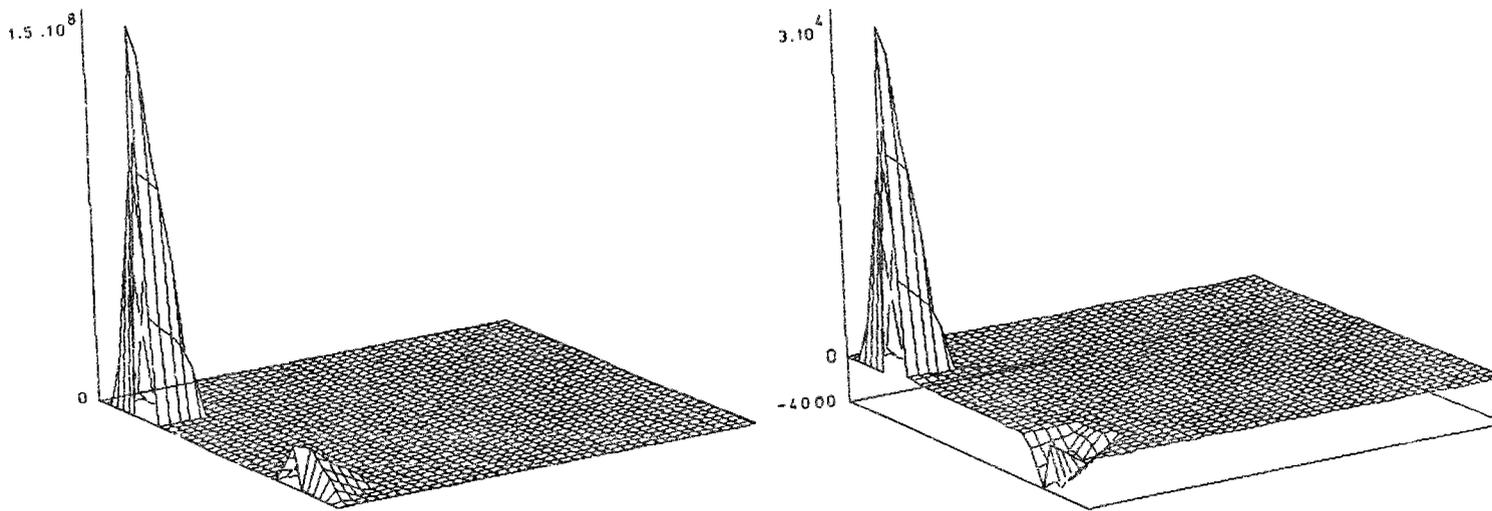


Fig. IV-6-3 et IV-6-4. Force de volume X_x au temps $t=40$, puis contrainte σ_{xx} au même temps

6.3. Calcul des quantités exactes

6.3.1. Nombre de points d'intégration

Les quantités exactes ou "normes exactes" nécessaires pour calculer les erreurs relatives (cf. §III.2) sont calculées par intégration numérique (de Gauss le plus souvent) sur le domaine discrétisé. Un nombre minimum de points d'intégration est nécessaire pour obtenir un résultat correct. Une grande précision n'est cependant pas indispensable. Ces quantités ne servent pas à construire le problème aux limites discrétisé et leur évaluation grossière ne fausse pas les résultats approchés. Dans le cas axisymétrique, l'intégration est faite sur la section plane de la structure et il n'est pas

tenu compte du terme $2\pi r$ dû à la symétrie axiale autour de Oz.

Il faut trouver la "densité" de points de Gauss nécessaire pour obtenir un calcul de ces normes avec un nombre suffisant de chiffres significatifs exacts (en pratique 3 ou 4 chiffres suffisent). Cette "densité" correspond, pour des maillages quasi-uniformes, au nombre de points de calcul par unité de surface. Pour des maillages avec des tailles d'éléments très différentes ou des chargements complexes et présentant de fortes variations, il est inévitable que le nombre optimum de points ne soit pas identique pour tous les éléments. Il est alors nécessaire de retenir le plus élevé.

Exemple pour NR2 défini sur le domaine REC64-2.

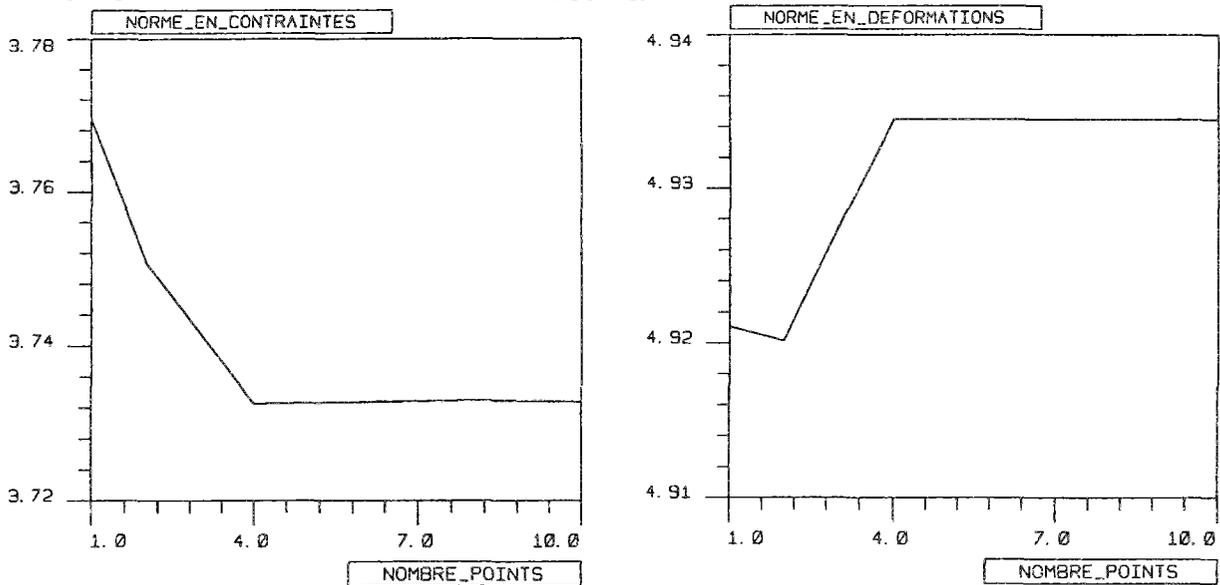


Fig. IV-6-5 a b. Maillage de 149 éléments : normes exactes en contraintes et en déviateur des déformations au temps $t=70$, en fonction du nombre de points de Gauss

6.3.2. Pas de temps

Le calcul de quantités énergétiques (travail interne (III.2.35) ou complémentaire (III.2.36)) nécessite une intégration en temps. Il faut également connaître le pas de temps pour lequel l'interpolation des résultats exacts n'est pas trop mauvaise. En effet, l'intégration analytique donne les champs exacts à la fin d'incrément de déformation de module quelconque s'écrivant selon (IV.4.1), mais une interpolation linéaire aux temps intermédiaires peut être grossièrement approchée. Il convient de retenir un pas de temps qui approxime correctement la variation de σ et ϵ au cours du chargement. Quelques essais avec des pas de temps de plus en plus grossiers montrent en général la limite à ne pas franchir.

Les déplacements ou les déformations sont calculables à un instant donné sans qu'il soit nécessaire de suivre un trajet de chargement, il en est de même pour leurs normes sur un domaine.

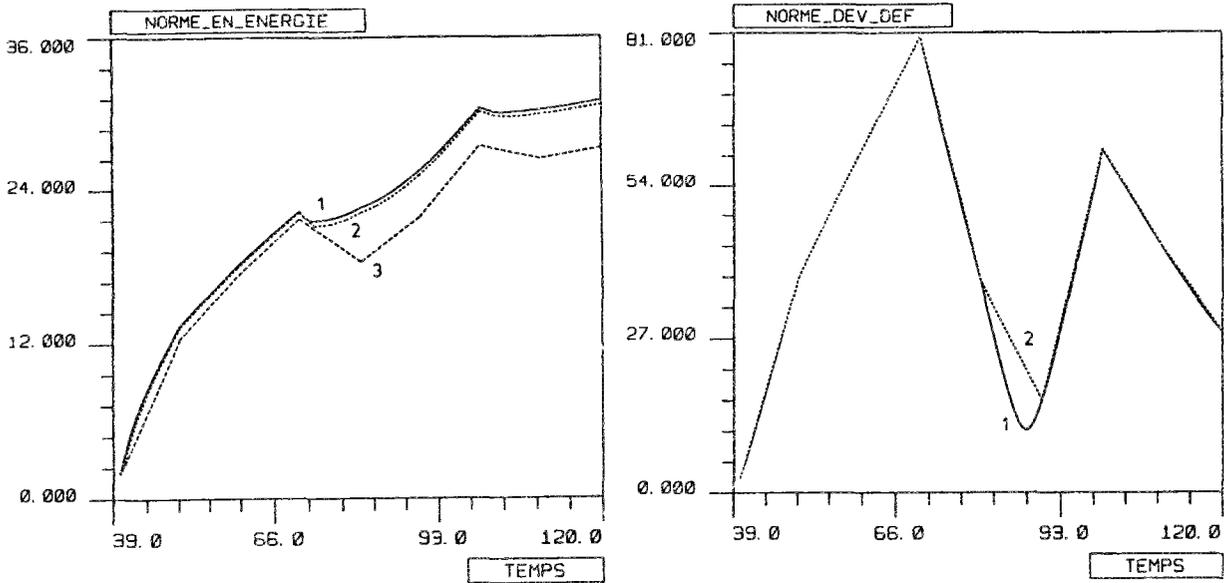


Fig. IV-6-6 et IV-6-7. Evolution en temps du travail des forces internes, pour différents pas de temps de calcul exact ($\Delta t = 0.625$ (1), 2.5 (2) et 10 (3))

puis : Evolution en temps de la norme en déviateur des déformations, pour différents pas de temps (0.625 (1) et 10 (2))

Les figures IV-6-6 et IV-6-7 correspondent à NR4 défini sur le domaine FIS1. La première figure montre l'erreur d'évaluation (cumulative) sur le travail des forces internes, due à un pas de temps trop grossier. Dans la Figure IV-6-7, le choix d'un grand pas de temps implique seulement une mauvaise interpolation de la norme exacte. Les valeurs de la norme exacte aux temps de calcul t_C communs sont identiques.

6.4. Forces nodales équivalentes aux forces de surface et de volume

6.4.1. Calcul proprement dit de ces forces nodales

Nous avons explicité au §IV.4.2 la détermination du chargement en forces de volume et de surface. Ces forces sont définies en tout point respectivement du volume Ω et de sa frontière $\partial_F \Omega$. Leur variation dans l'espace peut être rapide, avec des sauts et des discontinuités. Cependant, si on se limite aux fonctions à champ de déformations continu, il n'y a pas d'efforts "ponctuels" au sens où on l'entend en mécanique des milieux continus, comme pour les problèmes de Boussinesq par exemple.

Le calcul par éléments finis se faisant sur une structure discrétisée, il ne peut être question de fournir en données au code de calcul numérique, ces forces en tous les points de la structure.

Les codes classiques d'éléments finis permettent généralement au moins d'introduire en données une force de volume constante par élément et une pression constante ou éventuellement linéaire sur le côté d'un élément. Pour des éléments de degré élevé, il peut être admis des efforts définis aux points de Gauss. Une autre possibilité est de donner les efforts aux noeuds en supposant une variation dans l'espace qui utilise les fonctions de forme des éléments.

Aucune de ces possibilités ne permet de décrire avec suffisamment de précision les variations des

champs exacts calculés par la méthode inverse. Nous sommes censés disposer de solutions "exactes". Les 4 champs sont exactement connus (sous réserve des approximations éventuelles dues à la discrétisation de la loi d'écoulement, mais on peut rendre l'imprécision aussi petite qu'on veut en divisant les pas de temps). Pour une structure discrétisée donnée, il faut que le chargement soit lui aussi exact. S'il ne l'était pas, une partie de l'erreur commise entre la solution numérique et la solution exacte serait due à l'imprécision du chargement. Si on préfère, deux maillages différents de la même structure donneraient un résultat correspondant à deux chargements différents.

Nous ne pouvons donc pas nous contenter de fournir la valeur des efforts en quelques points de la structure, puis de laisser le code calculer de façon grossièrement approchée la force nodale résultante à mettre dans le second membre. Nous allons étudier dans ce qui suit la recherche des forces nodales équivalentes aux efforts appliqués sur le volume d'un élément, dans le cas bidimensionnel. Les forces nodales aux noeuds d'une structure discrétisée s'obtiennent évidemment par sommation des forces nodales équivalentes de chacun des éléments de la structure.

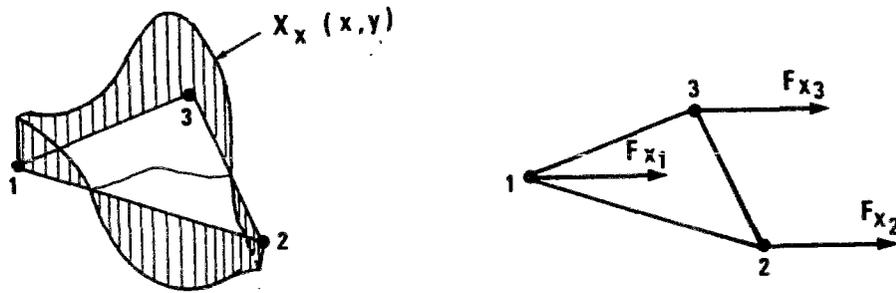


Fig. IV-6-8. Forces nodales équivalentes (schéma de principe)

Le calcul de forces nodales équivalentes à un champ de forces de volume X sur un élément de volume V_e peut être fait selon deux approches :

- les forces énergétiquement équivalentes aux efforts de volume ou de surface

On écrit le principe des travaux virtuels sur l'élément. Le travail virtuel des forces nodales F_e équivalentes aux forces de volume X doit être égal au travail virtuel des forces de volume sous n'importe quel champ de déplacements cinématiquement admissible :

$$\int_{V_e} \mathbf{X}^T \delta \mathbf{u} \, dV = \mathbf{F}_e^T \delta \mathbf{q}_e \quad (\text{IV.6.1})$$

Les déplacements virtuels $\delta \mathbf{u}$ dans l'élément peuvent être écrits

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}^T \delta \mathbf{q}_e$$

Les forces nodales se calculent par

$$\mathbf{F}_e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{X} \, dV = \int_{V_{\text{parent}}} \mathbf{N}^T \mathbf{X} |J| \, dV_{\text{parent}} \quad (\text{IV.6.2})$$

où $|J|$ est le jacobien de la transformation paramétrique (cf. §II.3.1.4).

Les forces nodales équivalentes aux forces de surface se calculent aussi selon ce principe, avec des fonctions de forme sur les côtés des éléments.

Pour une structure axisymétrique, on doit utiliser dans les intégrales un élément de volume axisymétrique, de la forme $2\pi r dV$.

Cette méthode suppose connus seulement les champs d'efforts de surface et de volume. Elle est utilisée de façon classique dans les codes de calcul.

• *les forces équivalentes calculées à partir des contraintes*

Dans le cas où les contraintes exactes sont connues, l'application du PTV aux contraintes exactes, par définition S.A. avec les efforts imposés, et à un champ de déplacements virtuel C.A. avec les déplacements imposés, permet d'écrire (Hinton, 1989)

$$\int_{V_e} \sigma_{ex}^T \delta \epsilon dV = F_e^T \delta q_e \quad (IV.6.3)$$

où cette fois-ci les forces équivalentes F_e contiennent à la fois les termes dus aux forces de volume X et aux forces de surface F_s sur les côtés de l'élément, qui est en sorte considéré comme une structure isolée du reste de l'univers. Le champ de déplacements virtuel est écrit à partir des fonctions de forme N . Les déformations virtuelles $\delta \epsilon$ se calculent par (II.3.6)

ce qui donne

$$F_e = \int_{V_e} B^T \sigma_{ex} dV = \int_{V_{parent}} B^T \sigma_{ex} |J| dV_{parent} \quad (IV.6.4)$$

Si on développe, la valeur de la force équivalente par exemple selon x à un noeud i est, dans le cas plan

$$F_{x_i} = \int_{V_e} \left(\sigma_{xx} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx dy$$

Dans le cas axisymétrique, les forces équivalentes ont l'expression

$$F_{r_i} = \int_{V_e} \left(\sigma_{rr} \frac{\partial N_i}{\partial r} + \sigma_{\theta\theta} \frac{N_i}{r} + \sigma_{rz} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) 2\pi r dr dz$$

$$F_{z_i} = \int_{V_e} \left(\sigma_{rz} \frac{\partial N_i}{\partial r} + \sigma_{zz} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) 2\pi r dr dz$$

Cette technique n'est utilisée par aucun code d'éléments finis, pour la simple raison que le champ de contraintes est inconnu et que le but du calcul numérique est justement de le déterminer. Dans le cas de la méthode inverse, les champs de contraintes et de forces de volume sont parfaitement déterminés. Cette méthode ne permet pas de distinguer la contribution des forces de volume aux forces nodales, de la contribution des contraintes aux frontières de l'élément. L'assemblage des forces

élémentaires F_e dans le vecteur global F élimine ces forces de surface, sauf sur le contour extérieur de Ω_h , où aucun élément n'a de voisin.

6.4.2. Evolution des forces nodales au cours du temps

Les forces nodales sont calculées par intégration sur un domaine fini des forces de volume et de surface. Leur évolution au cours du temps peut être complexe. En effet, supposons que l'on choisisse un champ de déplacements de la forme (IV.5.2) avec en plus $\phi(t) = t$, ce qui conduit à un chargement pseudo-radial.

En un point donné, les contraintes croissent linéairement jusqu'à atteindre le seuil de plasticité ; ensuite leur évolution est encore linéaire avec une pente différente. L'évolution des forces de volume se fait avec un saut, comme on l'a vu au §IV.4.2.3.1 (cf. Fig. IV-4-25).

Si le champ de déformations déduit de $u(x)$ n'est pas uniforme dans l'espace, les temps où se produisent les plastifications sont différents pour chaque point du domaine d'intégration.

La sommation des efforts pour obtenir une force nodale donne donc en fonction du temps une allure courbe totalement imprévisible, même lorsque la fonction de charge est simple. C'est pourquoi nous nous refusons à interpoler les forces nodales au cours du temps. Cela justifie également le fait qu'un tel chargement ne soit pas radial au sens de Zarka (cf. §IV.4.2.2.3).

L'exemple suivant montre l'évolution de quelques forces nodales pour le chargement pseudo-radial CR2 défini sur le domaine CAR1, pour un maillage (grossier) de 220 noeuds et 410 éléments :

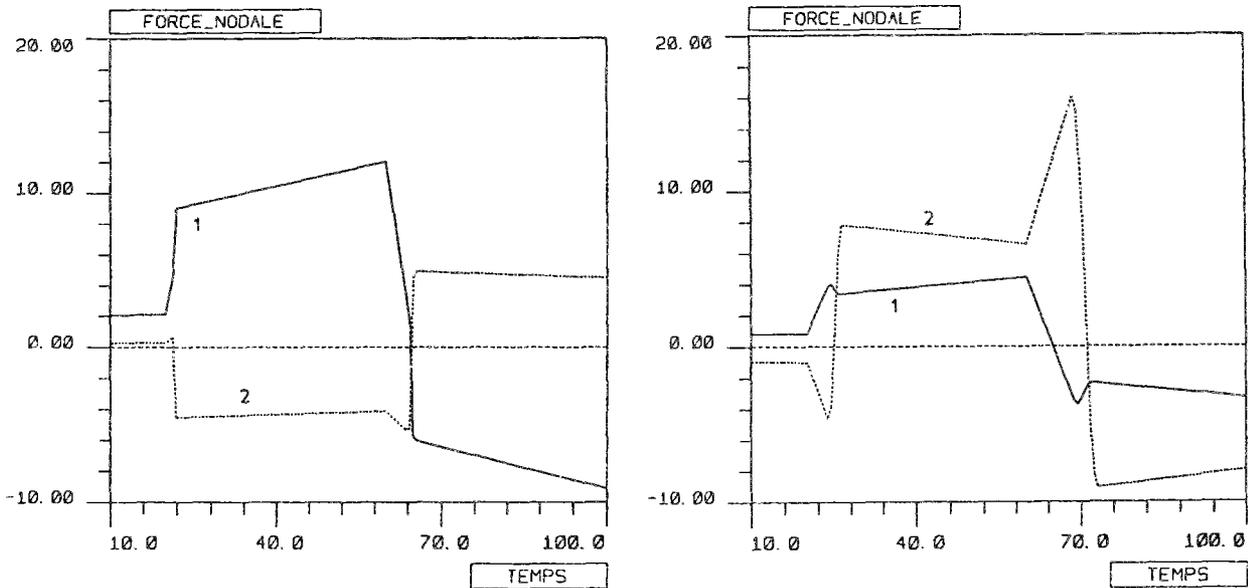


Fig. IV-6-9 a b. Evolution des forces nodales F_x (1) et F_y (2) en fonction du temps, pour les noeuds 77 et 211

On peut constater qu'il est difficile d'interpoler linéairement avec précision ces forces, bien que l'évolution des déformations en fonction du temps soit linéaire par morceaux, avec un intervalle $\Delta t=20$.

L'aspect de l'évolution des forces nodales d'un chargement non radial est encore plus complexe. L'exemple de NR1, où là encore les fonctions de charge sont linéaires par morceaux avec des intervalles $\Delta t=10$, donne sur un maillage d'environ 400 éléments les courbes suivantes :

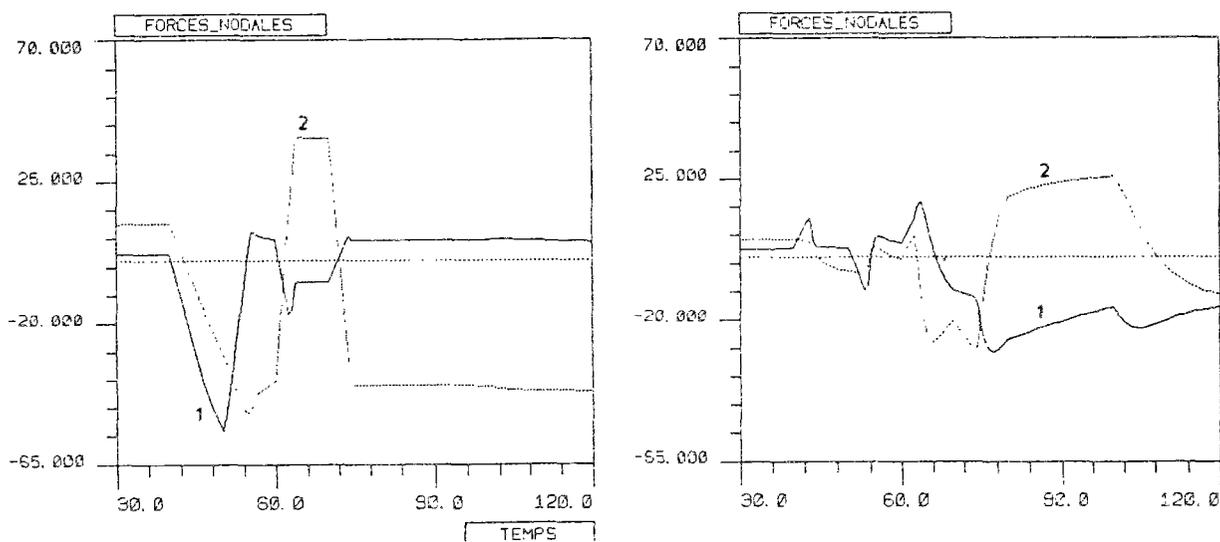


Fig. IV-6-10 a b. Evolution des forces nodales F_x (1) et F_y (2) aux noeuds 91 et 187

6.4.3. Précision du calcul des forces nodales

Nous avons remarqué que l'exactitude des forces nodales était capitale.

Le calcul des forces nodales par la méthode du §IV.6.3.1. revient à nous mettre dans la situation de l'utilisateur du code de calcul, qui évalue ses efforts sans connaître les contraintes. Cette démarche est plus "conforme" à la réalité industrielle.

Nous verrons plus loin que, sauf dans des cas particuliers, ces calculs sont bien moins précis que la technique vue au §IV.6.3.2. La première nécessite l'intégration de forces de volume d'aspect très complexe, avec des discontinuités. La seconde intègre des contraintes continues et des dérivées de fonctions de forme qui présentent des discontinuités à la frontière des éléments. Comme l'intégration de Gauss est faite à l'intérieur des éléments, ces sauts ne sont jamais apparents et la précision de l'intégration est fortement améliorée.

Il peut cependant se produire que cette remarque soit fautive, par exemple si les forces de volume exactes sont identiquement nulles dans Ω (que l'on soit en élasticité ou en plasticité). Il est évident qu'intégrer les forces de surface sur le contour par l'une des deux premières méthodes devient plus précis. Les erreurs numériques dans l'intégration approchée de (IV.6.4) conduisent presque toujours à de (faibles) forces intérieures, alors que l'intégration, même grossière, d'une force de volume nulle sur un domaine quelconque, donne toujours zéro.

Il peut se produire que le maillage choisi ne contienne pas parfaitement le domaine Ω : il y a des lacunes géométriques. Par exemple, des frontières courbes sont approximées par des côtés d'éléments rectilignes. Le calcul des forces nodales dues aux termes de volume est peu sensible aux lacunes géométriques, tant que celles-ci sont de faible taille par rapport aux éléments qui leur sont immédiatement voisins.

Le calcul des forces équivalentes aux efforts de surface est plus sensible à ces lacunes. La discrétisation d'un contour courbe en ligne brisée introduit trois erreurs qui le plus souvent se cumulent :

- les points n'étant plus situés sur le contour réel, les contraintes exactes qui y sont calculées par la

méthode inverse ne correspondent plus aux contraintes aux limites du problème analytique sur la géométrie exacte. La différence peut être sensible si la variation de la contrainte est rapide près de la frontière ;

- les normales au contour discrétisé ne sont pas les normales au contour réel ;
- la longueur du contour discrétisé est différente (et généralement plus faible) que celle du contour réel.

Nous étudions maintenant l'intégration des forces de volume avec la première méthode de calcul des efforts équivalents. Pour intégrer une force de volume présentant des sauts, l'utilisation d'une méthode de Gauss n'est pas la plus optimale. Cette intégration revient à chercher le polynôme multidimensionnel qui passe par tous les points d'intégration. Ce polynôme est très perturbé lorsque une partie des points est d'un côté du saut et les autres au sommet de celui-ci. En fait, aucune méthode d'intégration ne convient vraiment si on se refuse de chercher le lieu géométrique du saut.

Prenons d'abord un cas d'école : le calcul approché par intégration de Gauss du volume représenté par cette figure

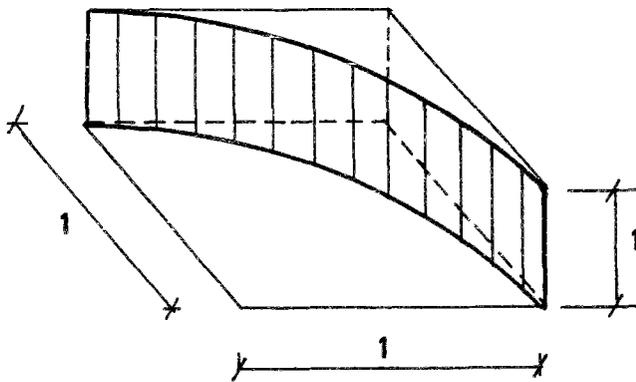


Fig. IV-6-11. Volume retenu : trou rond dans une plaque carrée

qui se calcule analytiquement sans difficulté. Du fait que le saut a un tracé courbe, ni une intégration de Gauss ni une intégration classique du type méthode des rectangles en bidimensionnel ne peut cerner sa forme. L'évolution de l'erreur relative d'intégration en fonction du nombre de points de calcul pour ces deux méthodes est décrite figure IV-6-12.

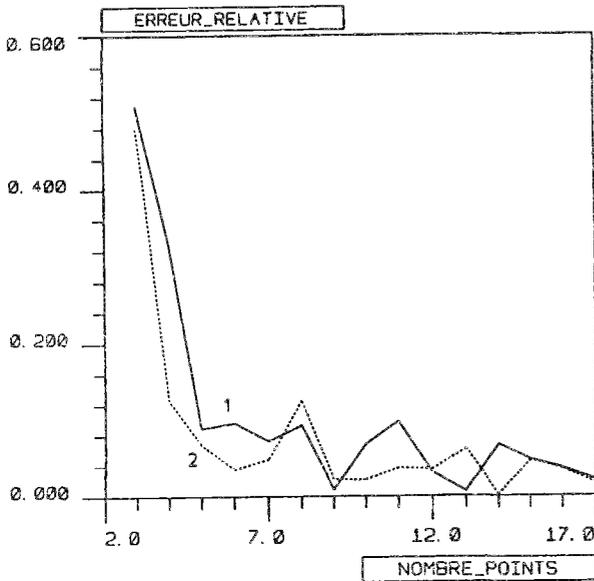


Fig. IV-6-12. Erreur lors du calcul de l'intégrale avec un schéma de Gauss (1) ou par la méthode des rectangles (2)

Le calcul des efforts équivalents par le deuxième schéma (cf. §IV.6.3.2) élimine les difficultés liées aux sauts des efforts internes. Il ne faut pas en déduire que l'intégration est exacte avec peu de points de Gauss ; la convergence est seulement (en général) plus rapide.

En l'absence de lacunes géométriques, le seul moyen d'estimer les forces exactes est d'extrapoler les valeurs obtenues avec un nombre de points d'intégration croissant. Il est également possible de comparer, pour un même maillage, l'évolution de la somme des valeurs absolues des forces nodales $\Sigma | F_x |$ et $\Sigma | F_y |$, lorsque le nombre de points d'intégration croît.

Exemple sur le chargement NR2 défini sur REC64-2, pour un maillage grossier à 92 noeuds et 149 éléments :

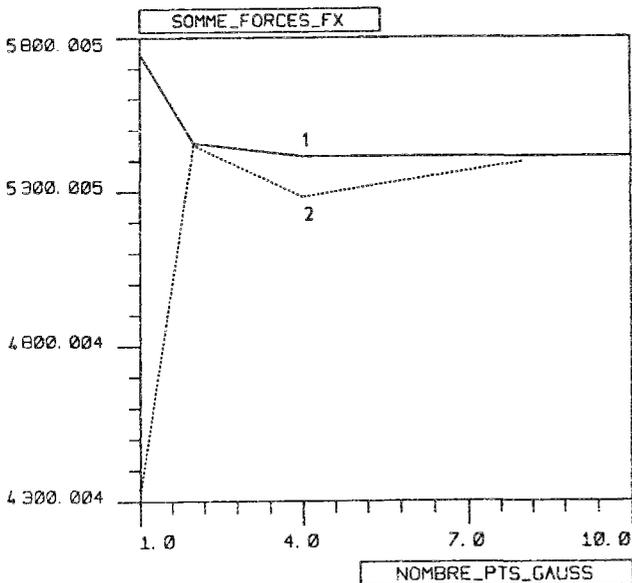


Fig. IV-6-13. $\Sigma | F_x |$ au temps $t=50$ calculées selon (IV.6.4) (1) et (IV.6.2) (2), en fonction du nombre de points de Gauss

Points essentiels du chapitre IV

1. Construction de solutions exactes par une méthode inverse

Les solutions analytiques connues sont en nombre très réduit. Nous cherchons à construire des solutions exactes en élastoplasticité.

L'extrapolation de solutions approchées obtenues en raffinant les discrétisations ne garantit pas de trouver une solution exacte.

Nous avons donc retenu une méthode inverse. Son principe est le suivant :

- définition *a priori* d'un champ de déplacements \mathbf{u}_{ex} par des fonctions analytiques.
- calcul des déformations ϵ_{ex}
- calcul des contraintes σ_{ex} par la loi de comportement
- calcul des forces de volume \mathbf{X} par les équations d'équilibre interne.

Un problème aux limites peut être défini à partir de cette solution indéfinie et d'un domaine quelconque Ω de frontières $\partial_u \Omega$ et $\partial_F \Omega$.

Le chargement est constitué

- dans Ω : les forces de volume \mathbf{X} tirées du champ indéfini
- sur $\partial_u \Omega$: les déplacements imposés sont tirés du champ \mathbf{u}_{ex}
- sur $\partial_F \Omega$: les forces de surface \mathbf{F}_s sont calculées par l'équation d'équilibre à la frontière.

La solution exacte de ce problème aux limites bien posé est constituée de la restriction à Ω des champs exacts indéfinis de déplacements, de déformations et de contraintes.

2. Passage des déformations aux contraintes en plasticité

La loi de comportement élastoplastique est incrémentale et la détermination du tenseur des contraintes à un temps donné nécessite la connaissance de l'ensemble du trajet de chargement aux temps précédant l'instant étudié. Dans ce qui suit, nous nous limitons au critère de Von Mises en parfaite plasticité ou avec écrouissage cinématique linéaire.

A un instant donné, l'état du matériau est représenté par σ_k , ϵ_k , ϵ_k^P . On impose un incrément de déformation fini $\Delta\epsilon$ et on en déduit d'abord la contrainte élastique σ^* . Si cette contrainte viole le critère, il faut trouver la valeur des incréments $\Delta\sigma$ et $\Delta\epsilon^P$ tels que les tenseurs σ_{k+1} et ϵ_{k+1}^P vérifient la loi de comportement.

On peut d'abord utiliser une discrétisation au premier ordre de la loi d'écoulement élastoplastique. Un schéma implicite est retenu. L'incrément de déviateur des contraintes $\Delta\sigma^{pr}$ dû à l'imposition de $\Delta\epsilon'$ a la valeur

$$\Delta S^{pr} = \frac{1}{1 + \frac{C}{2\mu}} \left[\Delta S^{el} \left(\frac{C}{2\mu} + \eta \right) + (S_k - C \epsilon_k^P) (\eta - 1) \right]$$

avec $\eta = \sqrt{\frac{2y_0}{\xi}}$; $\xi = (S^* - C \epsilon_k^P) : (S^* - C \epsilon_k^P)$; $\Delta S^{el} = 2\mu \Delta\epsilon'$.

La loi d'écoulement associée au critère de Mises a été intégrée analytiquement. Une valeur exacte de l'incrément de contraintes peut en être déduite, quel que soit le module de l'incrément de déformations :

$$\Delta S^{\text{ex}} = \frac{\alpha_\psi - 1}{K_c} \epsilon'_c + \Delta \epsilon' \left[2\mu - \frac{1 - \alpha_\psi \beta_\psi}{K_c} \right] + 2\mu (1 - \alpha_\psi) \epsilon_c^p$$

Le calcul des forces de volume nécessite l'évaluation des dérivées des contraintes par rapport aux variables d'espace, donc de ces expressions. Il peut apparaître un saut des forces de volume au franchissement de la frontière séparant les zones élastique et plastique.

Une extension au cas des contraintes planes est présentée. L'incrément de contraintes plastiquement admissible est trouvé par résolution d'une équation implicite et non plus par ces règles simples.

3. Aspect pratique de la construction de solutions exactes

Les solutions exactes sont construites numériquement. Il est donc important de maîtriser les calculs effectués lors de la construction des champs exacts et des problèmes aux limites.

Les solutions indéfinies doivent être calculées à des temps adaptés aux fonctions de déplacements analytiques choisies. Nous partons du principe que toute valeur exacte nécessaire à un temps ou un lieu donné doit faire l'objet d'un calcul à ces lieu et temps et non d'une interpolation.

Les problèmes aux limites sont construits sur des domaines discrétisés. Les forces nodales équivalentes aux efforts de surface et de volume sont directement calculées à partir des champs indéfinis. Ces forces peuvent être évaluées de deux façons :

- soit on cherche séparément, sur chaque élément, les forces équivalentes aux efforts internes, puis aux efforts de surface
- soit on considère l'élément comme une structure isolée du reste du domaine et on calcule à partir des contraintes les forces équivalentes à la fois aux efforts internes et de surface. L'assemblage de ces forces élimine les forces de surface entre les éléments contigus. Il n'est plus nécessaire de calculer le champ des forces de volume X . Il peut malgré tout être intéressant de connaître son aspect, ce champ étant une des données dont dispose un ingénieur pour son dimensionnement.

L'exactitude du calcul des forces nodales équivalentes est de la plus haute importance, et il faut évaluer avec précision le nombre de points d'intégration nécessaire. On est ainsi sûr que l'erreur entre la solution numérique, calculée sur ce domaine discrétisé, et la solution exacte, ne provient pas des imprécisions faites lors de la construction du problème aux limites.

ANNEXE 1

Table des fonctions de déplacements (FD) et des fonctions de charge (FC)

Nous avons choisi de classer les déplacements exacts en deux catégories :

- le cas où les termes en espace sont découplés des termes en temps; le déplacement s'écrit donc

$$u(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) \phi(t)$$

où $u(\mathbf{x})$ est la fonction de déplacement et $\phi(t)$ la fonction de charge.

Les dérivées en espace sont

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} = \phi(t) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

et en temps :

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = u(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- les fonctions non découplées (FDND). Il n'est plus possible de faire complètement cette séparation; le déplacement s'écrit $u(\mathbf{x}, t)$. La majorité des fonctions utilisées sont du type découplé. Les fonctions couplées sont prévues pour être quand même rattachées à une fonction de charge $\phi(t)$ (qui peut être prise constante).

Les coefficients de chaque fonction sont repérés par un terme C_i ; dans la description standard d'un cas de charge (cf. §IV.5.2), les C_i sont cités dans l'ordre où ils sont présentés dans cette annexe.

1. Fonctions découplées : termes d'espace

1.1. Polynômes (POLD3 à POLD7)

Le type le plus simple de fonction de déplacement bidimensionnelle est polynomial à 2 variables. La fonction et ses dérivées sont définies partout.

Nous avons regroupé les 3 premiers degrés dans la fonction POLD3 à 20 paramètres :

$$\begin{aligned} u_x &= C_1 x^3 + C_2 x^2 y + C_3 x y^2 + C_4 y^3 + C_5 x^2 + C_6 y^2 + C_7 x y + C_8 x + C_9 y + C_{10} \\ u_y &= C_{11} x^3 + C_{12} x^2 y + C_{13} x y^2 + C_{14} y^3 + C_{15} x^2 + C_{16} y^2 + C_{17} x y + C_{18} x + C_{19} y + C_{20} \end{aligned}$$

La fonction POLD4 retient les termes d'ordre 4 et a 10 paramètres

$$\begin{aligned} u_x &= C_1 x^4 + C_2 x^3 y + C_3 x^2 y^2 + C_4 x y^3 + C_5 y^4 \\ u_y &= C_6 x^4 + C_7 x^3 y + C_8 x^2 y^2 + C_9 x y^3 + C_{10} y^4 \end{aligned}$$

La fonction POLD5 retient les termes d'ordre 5 et a 12 paramètres

$$\begin{aligned} u_x &= C_1 x^5 + C_2 x^4 y + C_3 x^3 y^2 + C_4 x^2 y^3 + C_5 x y^4 + C_6 y^5 \\ u_y &= C_7 x^5 + C_8 x^4 y + C_9 x^3 y^2 + C_{10} x^2 y^3 + C_{11} x y^4 + C_{12} y^5 \end{aligned}$$

La fonction POLD6 retient les termes d'ordre 6 et a 14 paramètres

$$\begin{aligned} u_x &= C_1 x^6 + C_2 x^5 y + C_3 x^4 y^2 + C_4 x^3 y^3 + C_5 x^2 y^4 + C_6 x y^5 + C_7 y^6 \\ u_y &= C_8 x^6 + C_9 x^5 y + C_{10} x^4 y^2 + C_{11} x^3 y^3 + C_{12} x^2 y^4 + C_{13} x y^5 + C_{14} y^6 \end{aligned}$$

La fonction POLD7 retient les termes d'ordre 7 et a 16 paramètres

$$\begin{aligned} u_x &= C_1 x^7 + C_2 x^6 y + C_3 x^5 y^2 + C_4 x^4 y^3 + C_5 x^3 y^4 + C_6 x^2 y^5 + C_7 x y^6 + C_8 y^7 \\ u_y &= C_9 x^7 + C_{10} x^6 y + C_{11} x^5 y^2 + C_{12} x^4 y^3 + C_{13} x^3 y^4 + C_{14} x^2 y^5 + C_{15} x y^6 + C_{16} y^7 \end{aligned}$$

Le calcul des dérivées est immédiat.

1.2. Fonction trigonométrique (TRIGO)

L'utilisation de fonctions trigonométriques de la forme

$$u_x = \alpha_i \sin m_i \pi \frac{x}{a} \sin n_i \pi \frac{y}{b}$$

avec m_i et n_i entiers, vérifie $u = 0$ sur un rectangle de côtés a et b . La dérivation est immédiate.

La fonction choisie TRIGO a en plus la possibilité de décaler et de tourner le rectangle de base $[a, b]$ où est définie cette fonction.

Ce décalage introduit 3 paramètres supplémentaires : x_G , y_G et θ .

TRIGO a donc finalement 13 paramètres et s'écrit sous la forme

$$u_x = C_1 \sin C_2 \pi \frac{X}{C_3} \sin C_4 \pi \frac{Y}{C_5}$$

$$u_y = C_6 \sin C_7 \pi \frac{X}{C_8} \sin C_9 \pi \frac{Y}{C_{10}}$$

avec $C_{11} = x_G$; $C_{12} = y_G$; $C_{13} = \theta$

$$X = (x - x_G) \cos \theta + (y - y_G) \sin \theta$$

$$Y = -(x - x_G) \sin \theta + (y - y_G) \cos \theta$$

(IV.A1.1)

(IV.A1.2)

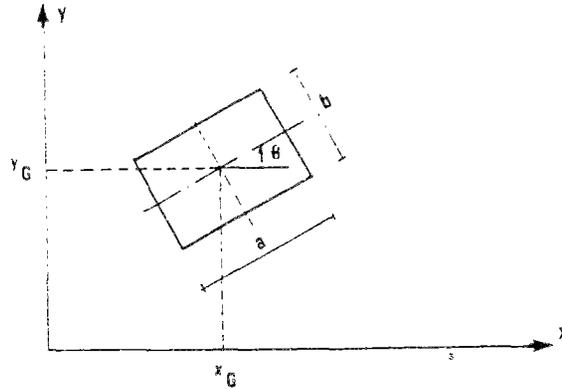


Fig. IV-A1-1. Rotation et décalage du rectangle de définition de la fonction

1.3. Fonction singulière (FISSURE)

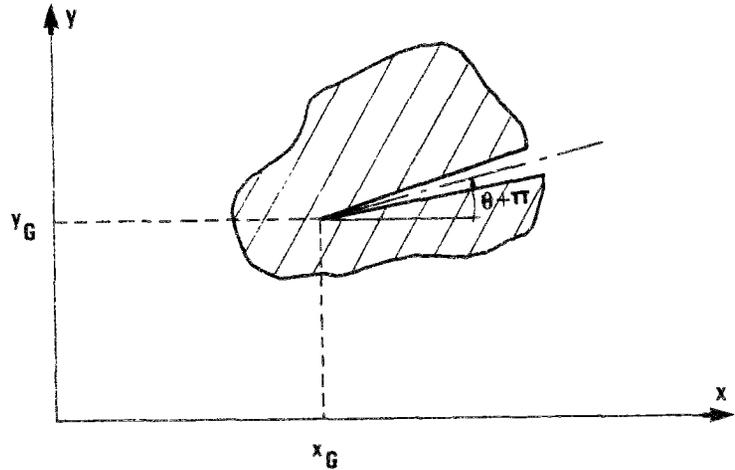


Fig. IV-A1-2. Notations retenues pour la fissure

Les déplacements d'un massif fissuré en mode I ou II peuvent être exprimés à partir des fonctions suivantes :

$$f_1 = r^{1/2} \cos \psi / 2$$

$$f_2 = r^{1/2} \sin \psi \sin \psi / 2$$

$$f_3 = r^{1/2} \sin \psi / 2$$

$$f_4 = r^{1/2} \sin \psi \cos \psi / 2$$

avec $u_x = C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + C_4 f_4$

$$u_y = C_5 f_1 + C_6 f_2 + C_7 f_3 + C_8 f_4$$

et $C_9 = x_G ; C_{10} = y_G ; C_{11} + \pi = \theta$

X et Y donnés par (IV.A1.1 et 2)

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

IV.A1.3)

$$\psi = \arctg \frac{Y}{X}$$

(IV.A1.4)

Pour représenter une fissure mode I en déformations planes dans un matériau élastique, il faut choisir

$$C_1 = K(2 - 4\nu) ; C_2 = K ; C_3 = 0 ; C_4 = 0 ; C_5 = 0 ; C_6 = 0 ; C_7 = K(4 - 4\nu) ; C_8 = -K$$

En contraintes planes, il faut prendre les valeurs suivantes :

$$C_1 = \frac{K(2 - 2\nu)}{1 + \nu} ; C_2 = K ; C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0 ; C_7 = \frac{4K}{1 + \nu} ; C_8 = -K$$

où K est lié au facteur d'intensité des contraintes. Avec ces coefficients, les forces de volume sont identiquement nulles en élasticité. La prise en compte de la plasticité modifie les contraintes et ôte toute correspondance entre cette solution et celle du problème de la fissure élastoplastique. Des forces de volume très importantes apparaissent.

1.4. Fonction polynomiale définie sur un rectangle (FREC1)

Cette fonction donne des déplacements et leurs dérivées définis sur un rectangle et identiquement nuls sur son contour et à l'extérieur. Elle peut donc être utilisée pour construire des "bosses" et des "pics", sans avoir à se soucier des conditions aux limites et de la valeur de la fonction hors de son domaine de définition. Les déformations sont continues à la frontière du rectangle et il n'y a pas de sauts des contraintes à craindre. Les forces de volume peuvent par contre présenter un saut (sans conséquence gênante).

Le rectangle [2a, 2b] peut lui aussi être décalé et tourné selon la figure IV-A1-1.

FREC1 a 17 paramètres et ses déplacements s'écrivent

$$u_x = (C_1 X^2 + C_2 XY + C_3 Y^2 + C_4 X + C_5 Y + C_6) (X^2 - a^2)^2 (Y^2 - b^2)^2$$

$$u_y = (C_7 X^2 + C_8 XY + C_9 Y^2 + C_{10} X + C_{11} Y + C_{12}) (X^2 - a^2)^2 (Y^2 - b^2)^2$$

avec $C_{13} = a$; $C_{14} = b$;

$$C_{15} = x_G$$
 ; $C_{16} = y_G$; $C_{17} = \theta$

X et Y donnés par (IV.A1.1 et 2)

1.5. Seconde fonction polynomiale définie sur un rectangle (FREC2)

FREC2 a 17 paramètres et est définie sur un rectangle de côtés 2a et 2b, décalé et tourné selon la Fig. IV-A1-1. Elle supporte les mêmes remarques que FREC1.

Les déplacements de FREC2 s'écrivent

$$u_x = (C_1 X^2 + C_2 XY + C_3 Y^2 + C_4 X + C_5 Y + C_6) (X^2 - a^2)^3 (Y^2 - b^2)^2$$

$$u_y = (C_7 X^2 + C_8 XY + C_9 Y^2 + C_{10} X + C_{11} Y + C_{12}) (X^2 - a^2)^3 (Y^2 - b^2)^2$$

avec $C_{13} = a$; $C_{14} = b$;

$$C_{15} = x_G$$
 ; $C_{16} = y_G$; $C_{17} = \theta$

X et Y donnés par (IV.A1.1 et 2)

1.6. Fonction définie sur un cercle (BOSSE)

Cette fonction et ses dérivées sont définies à l'intérieur d'un cercle et nulles sur son contour ; elle ressemble donc à une "bosse". Les remarques de FREC1 lui sont applicables.

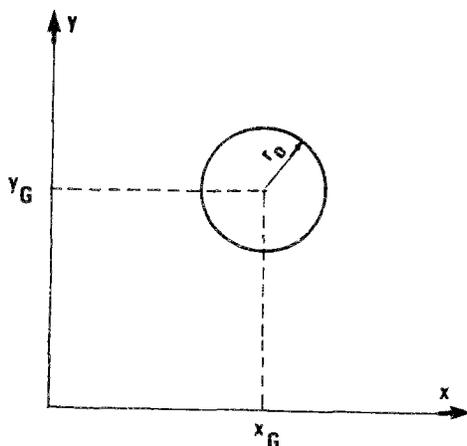


Fig. IV-A1-3. Domaine de définition des déplacements non nuls

BOSSE a 5 paramètres et ses déplacements s'écrivent

$$u_x = C_4 \left[-\frac{r^4}{2C_3} + C_3 r^2 - \frac{C_3^3}{2} \right]$$

$$u_y = C_5 \left[-\frac{r^4}{2C_3} + C_3 r^2 - \frac{C_3^3}{2} \right]$$

avec $C_1 = x_G$; $C_2 = y_G$; $C_3 = r_0$

$$r = \sqrt{(x - x_G)^2 + (y - y_G)^2}$$

1.7. Fonction définie sur un rectangle et à déformation sphérique nulle (RECSPN1)

La fonction choisie vérifie $\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y}$. Elle conduit à une déformation sphérique nulle en déformations planes. Elle permet de bâtir des fonctions de déplacements qui conduisent à d'importantes déformations plastiques, sans pour autant donner des contraintes sphériques démesurées.

Les déplacements déduits de RECSPN1, ainsi que leurs dérivées, sont nuls sur le contour d'un rectangle de côtés 2a et 2b (cf. figure IV-A1-1).

RECSPN1 a 8 paramètres et ses déplacements ont l'expression

$$u_x = C_1 [(X^2 - C_4^2)^2 Y (Y^2 - C_5^2)] + C_2 [(X^2 - C_4^2)^3 Y (Y^2 - C_5^2)^2]$$

$$+ C_3 [(X^2 - C_4^2)^4 Y (Y^2 - C_5^2)^3]$$

$$u_y = -C_1 [(X^2 - C_4^2) X (Y^2 - C_5^2)^2] - C_2 [(X^2 - C_4^2)^2 X (Y^2 - C_5^2)^3]$$

$$- C_3 [(X^2 - C_4^2)^3 X (Y^2 - C_5^2)^4]$$

avec $C_6 = x_G$; $C_7 = y_G$; $C_8 = \theta$
 X et Y donnés par (IV.A1.1 et 2)
 $a = C_4$; $b = C_5$

1.8. Fonction à déformation sphérique nulle définie sur un carré (CARSPN1)

La fonction CARSPN1 est similaire à RECSPN1. Elle est de type sinusoïdal.

Elle a 6 paramètres, est définie sur un carré de côté $2a$ décalé selon la figure IV-A1-1. Ses déplacements s'écrivent

$$u_x = C_1 [(1 + \cos P) (1 + \cos Q) \cos \frac{P}{2} \sin \frac{Q}{2}]$$

$$u_y = -C_1 [(1 + \cos P) (1 + \cos Q) \cos \frac{Q}{2} \sin \frac{P}{2}]$$

avec $P = (2k + 1) \pi \frac{X}{a}$; $Q = (2k + 1) \pi \frac{Y}{a}$
 X et Y donnés par (IV.A1.1 et 2) ;
 k entier positif ou nul ;
 $C_2 = a$; $C_3 = k$; $C_4 = x_G$; $C_5 = y_G$; $C_6 = \theta$.

1.9. Charge linéaire horizontale ou verticale sur milieu semi-infini (CHARVH)

Cette fonction, avec des coefficients appropriés, donne la répartition des contraintes sous une charge linéaire indéfinie. Suivant la valeur des coefficients, au moins un des deux déplacements nuls au point P, de profondeur H, peuvent être nuls.

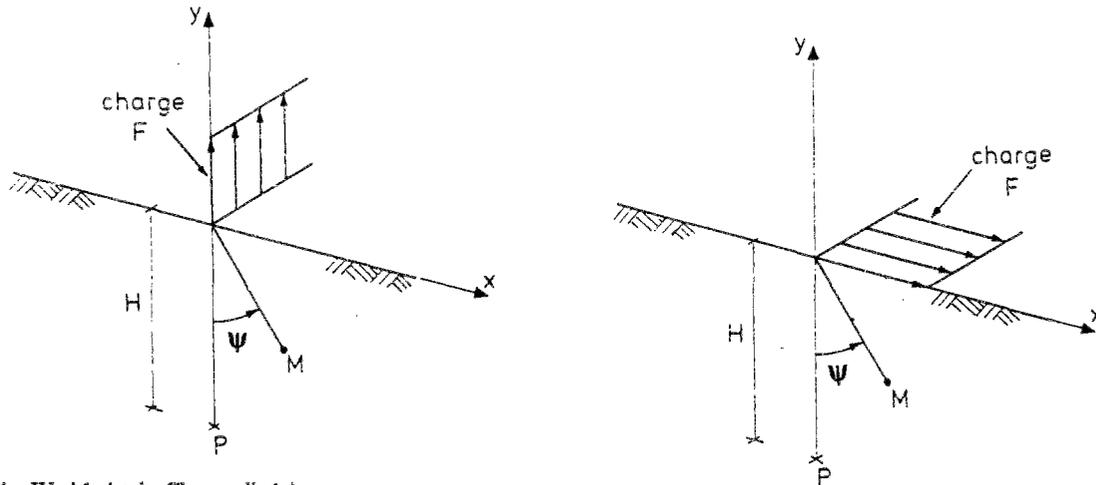


Fig. IV-A1-4 a b. Charges linéaires

La fonction a 12 paramètres. L'expression des déplacements au point M est

$$u_x = C_1 \sin \psi \cos \psi + C_2 \psi + C_3 \sin^2 \psi + C_4 \ln \frac{r}{H}$$

$$u_y = C_5 \sin \psi \cos \psi + C_6 \psi + C_7 \sin^2 \psi + C_8 \ln \frac{r}{H}$$

avec $H = C_9$, $C_{10} = x_G$, $C_{11} = y_G$ et $C_{12} = \theta$. X et Y sont déduits de x et y par (IV.A1.1 et 2), r et ψ sont déduits de X et Y par (IV.A1.3 et 4).

Pour représenter une force verticale linéaire FV en déformations planes, il faut avoir

$$C_1 = -\frac{FV}{\pi E} (1 + \nu), C_2 = \frac{FV}{\pi E} (1 + \nu)(1 - 2\nu), C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0, C_7 = C_1, C_8 = -2 \frac{FV}{\pi E} (1 - \nu^2)$$

Pour une force linéaire horizontale FH :

$$C_1 = C_2 = 0, C_3 = \frac{FH}{\pi E} (1 + \nu), C_4 = -2 \frac{FH}{\pi E} (1 - \nu^2), C_5 = -\frac{FH}{\pi E} (1 + \nu), C_6 = -\frac{FH}{\pi E} (1 + \nu)(1 - 2\nu), C_7 = C_8 = 0$$

Il faudrait rajouter un déplacement constant $u_y = -\frac{FH}{\pi E} (1 - \nu^2)$. On peut néanmoins s'en passer sans modifier les forces nodales.

1.10. Fonction singulière (FSING)

Cette fonction ressemble à CHARVH et peut aussi donner en élasticité des forces de volume nulles, mais ne correspond à aucun problème mécanique simple.

La fonction FSING a 10 paramètres. L'expression des déplacements est

$$u_x = C_1 \cos 2\psi \ln \frac{r}{H} + C_2 \psi \sin 2\psi + C_3 (1 + \cos 2\psi)$$

$$u_y = C_4 \sin 2\psi \ln \frac{r}{H} + C_5 \psi \cos 2\psi + C_6 \sin 2\psi$$

avec $H = C_7$, $C_8 = x_G$, $C_9 = y_G$ et $C_{10} = \theta$. X et Y sont donnés par (IV.A1.1 et 2), r et ψ par (IV.A1.3 et 4).

1.11. Force ponctuelle sur massif semi-infini (BOUSSIN)

Cette fonction, attribuée à Boussinesq, donne en axisymétrie les déplacements dans un massif semi-infini soumis à une force ponctuelle.

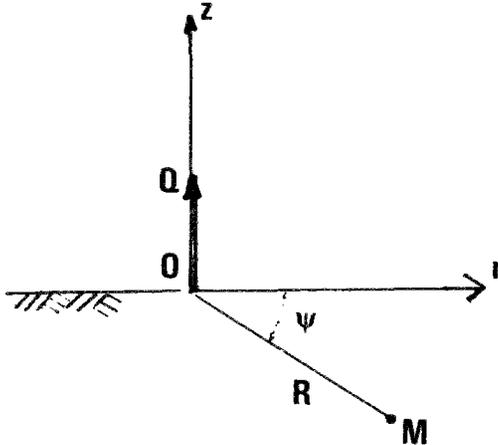


Fig. IV-A1-5. Charge ponctuelle

La fonction a 7 paramètres et l'expression des déplacements est

$$u_r = C_1 \frac{\cos \psi}{R (1 - \sin \psi)} + C_2 \frac{\sin 2\psi}{R}$$

$$u_z = \frac{C_3}{R} + C_4 \frac{\cos 2\psi}{R}$$

avec $C_5 = r_G$, $C_6 = z_G$, $C_7 = \theta$, les coordonnées ρ et ζ tirées de r et z par (IV.A1.1 et 2) et $R = \sqrt{\rho^2 + \zeta^2}$. L'axe de symétrie axiale reste z (ce qui implique que, pour conserver la validité de la fonction de Boussinesq, il faut avoir $r_G = 0$ et $\theta = 0$ ou π).

1.12. Plaque infinie percée (PLACTR)

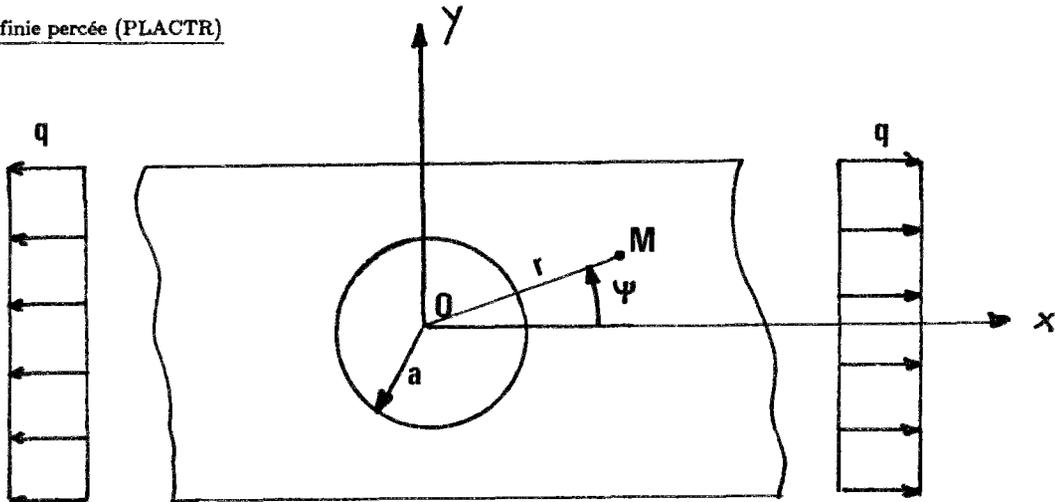


Fig. IV-A1-6. Plaque percée

La fonction a 9 paramètres dont 3 pour le décalage. L'expression des déplacements est

$$u_x = C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2$$

$$u_y = C_3 \phi_3 + C_4 \phi_4 + C_5 \phi_5$$

où
$$\phi_1(r, \psi) = 2 \frac{r^2 + 2a^2}{r} \cos \psi$$

$$\phi_2 = \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{a^2}{r} \cos 3\psi$$

$$\phi_3 = -2 \frac{a^2}{r} \sin \psi$$

$$\phi_4 = -2 r \sin \psi = -2 Y$$

$$\phi_5 = \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{a^2}{r} \sin 3\psi$$

avec $a = C_6 =$ rayon du trou, $C_7 = x_G$, $C_8 = y_G$ et $C_9 = \theta$. X et Y sont déduits de x et y par (IV.A1.1 et 2), r et θ sont déduits de X et Y par (IV.A1.3 et 4).

En déformations planes, il faut avoir

$$C_1 = \frac{q}{2E} (1 - \nu^2), C_2 = \frac{q}{2E} (1 + \nu), C_3 = \frac{q}{2E} (1 + \nu)(1 - \nu^2), C_4 = \frac{q}{2E} \nu(1 + \nu), C_5 = \frac{q}{2E} (1 + \nu)$$

2. Fonctions couplées

2.1. Sphère épaisse sous pression (SPHERE)

La fonction SPHERE, tirée de (Mandel, 1966), correspond à la solution exacte d'une sphère épaisse parfaitement élastoplastique soumise à une pression interne croissante.

Un temps "physique" y a été introduit, de façon à autoriser tout chargement, allant d'une pression nulle à la plastification partielle ou totale de la sphère. Les déplacements sont exprimés dans un repère axisymétrique.

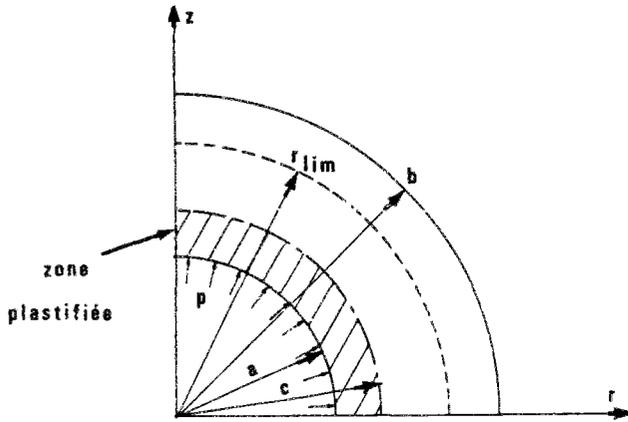


Fig. IV-A1-7. Sphère sous pression

Les 9 paramètres sont

$$C_1 = \nu ; C_2 = E ; C_3 = \sigma_0 ; C_4 = a ; C_5 = b ; C_6 = t_p ; C_7 = t_2 ; C_8 = t_1 ; C_9 = r_{lim}$$

$$\text{et on a } \rho_s = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Au temps t_1 , aucun chargement n'est appliqué. Au temps t_p , la sphère a atteint la charge limite élastique (la plasticité est à la limite d'apparaître pour $\rho_s = a$). Au temps $t = t_2$, le rayon de la zone plastifiée est égal à r_{lim} (avec $r_{lim} < b$). Ce temps correspond à la fin du chargement (ensuite le déplacement conserve sa valeur à $t = t_2$). A chaque temps $t \geq t_p$, il existe un rayon c tel que la partie de la sphère pour laquelle $\rho_s < c$ est élastoplastique, et l'autre partie pour laquelle $\rho_s \geq c$ est élastique.

Les déplacements ont les expressions suivantes :

- en zone élastique, lorsque $t \leq t_p$: $a \leq \rho_s \leq b$

$$u_r = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{E} \frac{t - t_1}{t_p - t_1} a^3 \left[(1 - 2\nu) \frac{r}{b^3} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

$$u_z = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{E} \frac{t - t_1}{t_p - t_1} a^3 \left[(1 - 2\nu) \frac{z}{b^3} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

- en zone élastique avec $t > t_p$: $c \leq \rho_s \leq b$

$$u_r = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{E} c^3 \left[(1 - 2\nu) \frac{r}{b^3} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

$$u_z = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{E} c^3 \left[(1 - 2\nu) \frac{z}{b^3} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

- en zone plastique (pour $a \leq \rho_s \leq c$ et $t > t_p$) :

$$u_r = 2\sigma_0 \frac{1 - 2\nu}{E} r \left[\ln \left(\frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{c} \right) - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{c^3}{b^3} \right) \right] + \frac{1 - \nu}{E} \sigma_0 c^3 \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$u_z = 2\sigma_0 \frac{1 - 2\nu}{E} z \left[\ln \left(\frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{c} \right) - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{c^3}{b^3} \right) \right] + \frac{1 - \nu}{E} \sigma_0 c^3 \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

avec c donné par

$$c = \frac{(t - t_1)(r_{\text{lim}} - a) - r_{\text{lim}} t_p + a t_2}{t_2 - t_p} \text{ si } t_p \leq t \leq t_2.$$

$$c = a \text{ si } t \leq t_p$$

$$c = r_{\text{lim}} \text{ si } t > t_2$$

3. FONCTIONS DE CHARGE

3.1. Fonction linéaire par morceaux (LPM)

La fonction LPM contient au moins 1 point, et 2 fois plus de paramètres que de points. A chaque point i correspondent un temps t_i et une valeur $\phi_i = \phi(t_i)$. Les temps successifs sont supposés entrés par ordre croissant.

On a $\phi(t < t_1) = \phi(t_1)$

et $\phi(t > t_{\text{max}}) = \phi(t_{\text{max}})$

t_1 et t_{max} correspondant aux temps des premier et dernier points.

Pour $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, la fonction $\phi(t)$ a la valeur

$$\phi(t) = \phi_i \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} + \phi_{i+1} \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$$

Les coefficients de la fonction sont dans l'ordre

$$C_1 = t_1, C_2 = \phi_1, C_3 = t_2, C_4 = \phi_2, \dots, C_{2n-1} = t_n, C_{2n} = \phi_n$$

3.2. Fonction sinusoidale (SINUS)

La fonction SINUS a 3 paramètres et s'écrit, quel que soit le temps t :

$$\phi(t) = C_1 \sin(C_2 t + C_3)$$

3.3. Fonction exponentielle (EXPT)

La fonction EXPT a 3 paramètres et s'écrit, quel que soit le temps t :

$$\phi(t) = C_1 \exp(C_2 t + C_3)$$

3.4. Fonction spline cubique (SPLINE)

Cette fonction est définie par morceaux, comme LPM, mais a des dérivées continues à chaque franchissement de segment. Elle a 3 paramètres par point de définition : le temps t_i , la valeur ϕ_i de la fonction de charge à ce temps, la valeur ϕ'_i de la dérivée.

Dans un intervalle $[t_1, t_2]$, l'expression de la fonction $\phi(t)$ est

$$\begin{aligned} \phi(t) = & \phi_1 \left[1 + \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right)^2 \left(\frac{2t + t_1 - 3t_2}{t_2 - t_1} \right) \right] + \phi'_1 \left[t - t_1 + \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right)^2 (t + t_1 - 2t_2) \right] \\ & + \phi_2 \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right)^2 \left(\frac{3t_2 - 2t - t_1}{t_2 - t_1} \right) + \phi'_2 \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right)^2 (t - t_2) \end{aligned}$$

ANNEXE 2

Chargements utilisés dans ce travail

Les champs de déplacements indéfinis sont d'abord présentés, ensuite viennent les domaines Ω attachés à chacun d'eux. A partir de NR7, tous les chargements sont définis sur une seule géométrie, mais avec des conditions d'appui variables. Nous ne précisons pas la nature exacte de ces conditions aux limites. Elles peuvent être retrouvées en cherchant les points de la frontière du domaine pour lesquels les fonctions de déplacement choisies donnent des déplacements nuls, à tout instant de l'intervalle d'étude.

1. FONCTIONS DE DEPLACEMENTS INDEFINIES

1.1. Chargement SPH1 : sphère sous pression

Chargement SPH1, en AXI-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 0 \text{ MPa}$

1 fonction de déplacement

FD1 : SPHERE avec C_1 à $C_9 = 209664. 0.3 400. 1. 3. 2.5 0. 40. 120.$

1 fonction de charge

FC1 : LPM 1 point avec C_1 à $C_2 = 0. 1.$

1 combinaison

1. * FD1 * FC1

Analyse de $t=0$ à $t=120$

Ce chargement est monotone radial. La sphère a un rayon intérieur $a = 1$, un rayon extérieur $b = 3$, est non chargée à $t=0$, soumise à la pression élastique limite à $t=40$, et a un rayon plastifié de 2.5 à $t=120$.

1.2. Chargement pseudo-radial CR2

Chargement CR2, en DP-S

$E = 216000 \text{ MPa}$; $\nu = 0.2$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 7200 \text{ MPa}$

1 fonction de déplacement

FD1 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 0. -0.032 4*0. 0.16 5*0. 0.032 2*0. -0.08 4*0.$

1 fonction de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0. 0.00095 20. 0.001 60. 0.04 100. -0.004$

1 combinaison

1. * FD1 * FC1

Analyse de $t=0$ à $t=100$

La fonction de déplacement correspond à un tenseur déformation purement déviatorique. Les contraintes exactes sont donc aussi déviatoriques.

CR2 est utilisé défini sur le domaine CAR1. Ce domaine est totalement élastique de $t=0$ à $t=20$.

1.3. Chargement non radial NR1

Le chargement NR1 a une évolution complexe dans l'espace et au cours du temps. Des fonctions "bosses" locales (FD2, FD3 et FD4) sont superposées à un déplacement polynomial. Ce chargement est utilisé défini sur le domaine REC64-1. Ce domaine est élastique de $t=0$ à $t=20$.

Chargement NR1, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

4 fonctions de déplacement

FD1 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 0. 0.000076 4*0. 0.000076 6*0. 0.000074 2*0. 0.000074 3*0.$

FD2 : FREC1 avec C_1 à $C_{17} = 5*0. 0.01 5*0. 0.02 2. 0.5 5. 1.2 0.1$

FD3 : CARSPN1 avec C_1 à $C_6 = 0.00318 1.5 0. 2. 2. 0.$

FD4 : CARSPN1 avec C_1 à $C_6 = 0.000795 0.75 0. 3. 3.6 0.$

4 fonctions de charge

FC1 : LPM 5 points avec C_1 à $C_{10} = 0. 0.19 20. 0.2 40. 1.5 60. 0.7 100. 1.$

FC2 : LPM 5 points avec C_1 à $C_{10} = 0. 0.03 30. 0.04 50. 0.9 70. 0.1 100. -0.1$

FC3 : LPM 7 points avec C_1 à $C_{14} = 0. 0.05 20. 0.06 40. -0.3 50. -0.3 60. 0.1 80. 1.2 100. 0.3$

FC4 : LPM 5 points avec C_1 à $C_{10} = 0. 0. 40. 0. 70. 1. 80. -0.5 100. 1.$

4 combinaisons superposées

1. * FD1 * FC1 + 0.1 * FD2 * FC2 + 2. * FD3 * FC3 + 1. * FD4 * FC4

Analyse de $t=0$ à $t=100$

1.4. Chargement non radial NR2

Ce chargement est utilisé défini sur le domaine REC64-2. Ce domaine est élastique de $t=0$ à $t=40$. NR2 ne conduit pas à des gradients de contrainte très élevés.

Chargement NR2, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

3 fonctions de déplacement

FD1 : POLD4 avec C_1 à $C_{10} = 4^*0. -0.0003187 \ 5^*0.$

FD2 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3^*0. 0.00255 \ 0. -0.0051 \ 14^*0.$

FD3 : POLD4 avec C_1 à $C_{10} = 0. \ 0. 0.000023 \ 0.000003 \ 0.000004 \ 0. -0.00001533 \ -0.00000645 \ -0.000016 \ 0.$

2 fonctions de charge

FC1 : LPM 7 points avec C_1 à $C_{14} = 0. 0.235 \ 40. 0.24 \ 60. 0.7 \ 70. -0.9 \ 100. 0.45 \ 110. 0.8 \ 120. 0.8$

FC2 : LPM 7 points avec C_1 à $C_{14} = 0. 0.255 \ 40. 0.26 \ 50. 2. \ 60. 1.5 \ 70. 1.8 \ 80. -1. \ 120. 0.8$

3 combinaisons superposées

$0.6 * \text{FD1} * \text{FC2} + 0.6 * \text{FD2} * \text{FC2} + 0.532 * \text{FD3} * \text{FC1}$

Analyse de $t=0$ à $t=100$

1.5. Chargement non radial NR3

Ce chargement est utilisé défini sur le domaine REC64-3. Ce domaine est élastique de $t=0$ à $t=40$. Deux "bosses" (FC3 et FC4) sont superposées à un déplacement polynomial.

Chargement NR3, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

4 fonctions de déplacement

FD1 : POLD4 avec C_1 à $C_{10} = 4^*0. -0.0003187 \ 5^*0.$

FD2 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3^*0. 0.00255 \ 0. -0.0051 \ 14^*0.$

FD3 : CARSPN1 avec C_1 à $C_6 = -0.00318 \ 1.5 \ 0. 2.5 \ 2.5 \ 0.$

FD4 : CARSPN1 avec C_1 à $C_6 = 0.00318 \ 1.5 \ 0. 2.5 \ 2.5 \ 1.54$

3 fonctions de charge

FC1 : LPM 5 points avec C_1 à $C_{10} = 0. 0.2115 \ 40. 0.235 \ 70. 0.75 \ 100. 0.65 \ 120. 0.8$

FC2 : LPM 7 points avec C_1 à $C_{14} = 0. 0.225 \ 40. 0.25 \ 60. 0.5 \ 70. 0.9 \ 80. 0.66 \ 100. 0.48 \ 120. 0.4$

FC3 : LPM 7 points avec C_1 à $C_{14} = 40. 0. 50. 2. \ 60. -1. \ 70. 1.4 \ 80. 0.6 \ 100. 0.2 \ 120. 2.$

4 combinaisons superposées

$1.25 * \text{FD1} * \text{FC3} + 1.25 * \text{FD2} * \text{FC3} + 6. * \text{FD3} * \text{FC1} + 6. * \text{FD4} * \text{FC2}$

Analyse de $t=0$ à $t=120$

1.6. Chargement non radial NR4

Ce chargement fait intervenir deux fonctions de déplacement de type fissure. Ces fonctions conduisent en élasticité à des forces de volume nulles dans tout l'espace, et à des déformations et contraintes illimitées au fond de la fissure. La plasticité limite la valeur des déviateurs des contraintes, ce qui implique l'apparition de forces de volume et de surface très importantes. La solution indéfinie construite en plasticité n'a plus aucune analogie avec le problème de la fissure élastique ou élastoplastique.

Chargement NR4, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 72 \text{ MPa}$

5 fonctions de déplacement

FD1 : FISSURE avec C_1 à $C_{11} = 6.4 \ 8. \ 4^*0. 22.4 \ -8. 0.9999 \ 0. 3.14159265359$

FD2 : FISSURE avec C_1 à $C_{11} = 6.4 \ 8. \ 4^*0. 22.4 \ -8. 5.0001 \ 0. 0.$

FD3 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 8^*0. 0.02 \ 11^*0.$

FD4 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 9^*0. -0.064 \ 10^*0.$

FD5 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 9^*0. 12.80016 \ 10^*0.$

3 fonctions de charge

FC1 : LPM 6 points avec C_1 à $C_{12} = 0. 0.0075 \ 40. 0.0076 \ 70. 0.13 \ 80. 0.1 \ 100. -0.07 \ 120. 0.$

FC2 : LPM 7 points avec C_1 à $C_{14} = 0. 0.00099 \ 40. 0.001 \ 50. -0.06 \ 70. -0.1 \ 80. 0. 100. 0.1 \ 120. 0.06$

FC3 : LPM 5 points avec C_1 à $C_{10} = 0. 0.19999 \ 40. 0.2 \ 70. 0.05 \ 80. 1. \ 120. 3.4$

5 combinaisons superposées

$0.042 * \text{FD1} * \text{FC1} + 0.042 * \text{FD4} * \text{FC1} + 0.2 * \text{FD3} * \text{FC3} - 0.042 * \text{FD2} * \text{FC2} - 0.042 * \text{FD5} * \text{FC2}$

Analyse de $t=0$ à $t=120$

NR4 est utilisé défini sur le domaine FIS1. Bien que les fonds des fissures aient été rejetés de FIS1, le chargement conduit à des contraintes exactes très élevées. Dans FIS1, il apparaît de la plasticité dès le début du chargement ($t=0$), limitée à "une faible zone" autour des fonds des fissures.

1.7. Chargement non radial NR5

NR5 est utilisé sur le domaine FIS2. Il conduit aux mêmes remarques que NR4. Le trajet de chargement a été abrégé.

Chargement NR5, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

5 fonctions de déplacement

FD1 : FISSURE avec C_1 à $C_{11} = 6.4 \ 8. \ 4^*0. \ 22.4 \ -8. \ 0.999 \ 0. \ 3.1415926535898$

FD2 : FISSURE avec C_1 à $C_{11} = 6.4 \ 8. \ 4^*0. \ 22.4 \ -8. \ 5.001 \ 0. \ 0.$

FD3 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 8^*0. \ 0.02 \ 11^*0.$

FD4 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 7^*0. \ -3.149803532 \ 0. \ 2.947417762 \ 10^*0.$

FD5 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 7^*0. \ -3.149803532 \ 0. \ 15.95140343 \ 10^*0.$

3 fonctions de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0. \ 0.0075 \ 10. \ 0.0076 \ 20. \ 0.03 \ 30. \ 0.1$

FC2 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0. \ 0.00099 \ 10. \ 0.001 \ 20. \ -0.1 \ 30. \ 0.$

FC3 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0. \ 0.19999 \ 10. \ 0.2 \ 20. \ 0.05 \ 30. \ 1. \ 120. \ 3.4$

5 combinaisons superposées

$0.042 * FD1 * FC1 + 0.042 * FD4 * FC1 + 0.4 * FD3 * FC3 - 0.042 * FD2 * FC2 - 0.042 * FD5 * FC2$

Analyse de $t=0$ à $t=30$

1.8. Chargement non radial NR6

Lorsqu'il est défini sur le domaine FIS2 (cf. §IV.A2.2.5), ce chargement est assez spécial : il combine deux singularités de liaisons et une seule singularité de chargement. Les champs de déformations et de contraintes exacts sont quasi-uniformes au voisinage de la seconde singularité géométrique.

Comme pour NR4 et NR5, le point singulier de la FD FISSURE est rejeté de FIS2.

Il apparaît de la plasticité dès le début du chargement ($t=0$). Une fonction bosse (FC2) s'ajoute à la fissure et aux polynômes.

Chargement NR6, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

4 fonctions de déplacement

FD1 : FISSURE avec C_1 à $C_{11} = 6.4 \ 8. \ 4^*0. \ 22.4 \ -8. \ 0.99 \ 0. \ 3.1415926535898$

FD2 : CARSPN1 avec C_1 à $C_6 = 0.015 \ 0.7 \ 0. \ 4.5 \ 3. \ 0.$

FD3 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 8^*0. \ 0.02 \ 11^*0.$

FD4 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 7^*0. \ -3.0439975 \ 0. \ 2.4039975 \ 10^*0.$

3 fonctions de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0. \ 0.005 \ 2.5 \ 0.0051 \ 12.5 \ 0.05 \ 22.5 \ 1.5$

FC2 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0. \ 0. \ 2.5 \ 0. \ 12.5 \ -1. \ 22.5 \ 0.4$

FC3 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0. \ 0.1 \ 2.5 \ 0.102 \ 12.5 \ 0.05 \ 22.5 \ 0.4$

4 combinaisons superposées

$0.04 * FD1 * FC1 + 0.04 * FD4 * FC1 + 0.2 * FD3 * FC3 + 1. * FD2 * FC2$

Analyse de $t=0$ à $t=22.5$

1.9. Chargement non radial NR7

Le chargement NR7 comprend une fonction bosse superposée à deux déplacements polynomiaux. Il conduit à des rotations assez nettes des directions principales des contraintes.

Chargement NR7, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

3 fonctions de déplacement

FD1 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3^*0. \ 0.000925925925 \ 0. \ -0.0058333333 \ 2^*0. \ 0.01 \ 11^*0.$

FD2 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 2^*0. \ -0.00375 \ 2^*0. \ -0.0003125 \ 5^*0. \ 0.00375 \ 0. \ 0.000625 \ 0. \ 0. \ 0.000625 \ 0. \ 0.01 \ 0.$

FD3 : CARSPN1 avec C_1 à $C_6 = 1. \ 0.6 \ 0. \ 4. \ 1.3 \ 0.$

3 fonctions de charge

FC1 : LPM 2 points avec C_1 à $C_4 = 10. \ 0.1 \ 20. \ 0.3681$

FC2 : LPM 2 points avec C_1 à $C_4 = 20. \ 0. \ 30. \ 0.4$

FC3 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0. \ 0.0002 \ 10. \ 0.00025 \ 20. \ 0.008 \ 30. \ 0.0008$

3 combinaisons superposées

$1. * FD1 * FC1 + 1. * FD2 * FC2 + 1. * FD3 * FC3$

Analyse de $t=0$ à $t=30$

La fonction FD1 correspond à une déformation de cisaillement identiquement nulle, FD2 à un cisaillement pur.

1.10. Chargement non radial NR8

Comme NR7, NR8 conduit à des rotations assez nettes des directions principales des contraintes.

Chargement NR8, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

2 fonctions de déplacement

FD1 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3^*0.000925925925 \text{ } 0. -0.0058333333 \text{ } 2^*0.0.01 \text{ } 11^*0.$

FD2 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 2^*0. -0.00375 \text{ } 2^*0. -0.0003125 \text{ } 5^*0.0.00375 \text{ } 0.0.000625 \text{ } 0.0.0.000625 \text{ } 0.0.01 \text{ } 0.$

2 fonctions de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0.0.001 \text{ } 20.0.3681 \text{ } 80.0.3681 \text{ } 120.0.$

FC2 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 20.0.60.0.1 \text{ } 120.0.03$

2 combinaisons superposées

1. * FD1 * FC1 + 1. * FD2 * FC2

Analyse de $t=0$ à $t=120$

La fonction FD1 correspond à une déformation de cisaillement identiquement nulle, FD2 à un cisaillement pur.

1.11. Chargement non radial NR9

Chargement NR9, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

3 fonctions de déplacement

FD1 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3^*0.000925925925 \text{ } 0. -0.0058333333 \text{ } 2^*0.0.01 \text{ } 11^*0.$

FD2 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 2^*0. -0.00375 \text{ } 2^*0. -0.0003125 \text{ } 5^*0.0.00375 \text{ } 0.0.000625 \text{ } 0.0.0.000625 \text{ } 0.0.01 \text{ } 0.$

FD3 : CARSPN1 avec C_1 à $C_6 = 1.0.6 \text{ } 0.5.2.3 \text{ } 0.$

3 fonctions de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0.0.001 \text{ } 10.0.01 \text{ } 20.0.09 \text{ } 30.0.$

FC2 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 10.0.20.0.025 \text{ } 30.0.0075$

FC3 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0.0.0002 \text{ } 10.0.00025 \text{ } 20.0.032 \text{ } 30.0.01$

3 combinaisons superposées

1. * FD1 * FC1 + 1. * FD2 * FC2 + 1. * FD3 * FC3

Analyse de $t=0$ à $t=30$

La fonction FD1 correspond à une déformation de cisaillement identiquement nulle, FD2 à un cisaillement pur. FD3 est une bosse qui conduit à d'importantes contraintes très localisées.

1.12. Chargement non radial NR10

Chargement NR10, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

4 fonctions de déplacement

FD1 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3^*0.000925925925 \text{ } 0. -0.0058333333 \text{ } 2^*0.0.01 \text{ } 11^*0.$

FD2 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 2^*0. -0.00375 \text{ } 2^*0. -0.0003125 \text{ } 5^*0.0.00375 \text{ } 0.0.000625 \text{ } 0.0.0.000625 \text{ } 0.0.01 \text{ } 0.$

FD3 : CARSPN1 avec C_1 à $C_6 = 1.0.5 \text{ } 0.1.5 \text{ } 3.3 \text{ } 0.$

FD4 : CARSPN1 avec C_1 à $C_6 = 1.0.6 \text{ } 0.6.4.1.577$

3 fonctions de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0.0.001 \text{ } 10.0.01 \text{ } 20.0.04 \text{ } 30.0.02$

FC2 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 10.0.20.0.01 \text{ } 30.0.015$

FC3 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 0.0.0002 \text{ } 10.0.00025 \text{ } 20.0.0012$

4 combinaisons superposées

1. * FD1 * FC1 + 1. * FD2 * FC2 + 1. * FD3 * FC3 + 1. * FD4 * FC2

Analyse de $t=0$ à $t=30$

1.13. Chargement non radial NR11

Le chargement NR11 comprend une fonction de déplacement (CHARVH) ressemblant à un roulement. Une fonction de déplacement polynomiale y est ajoutée, en vue d'annuler les déplacements sur le côté qui servira d'appui fixe. Bien que les déplacements n'y soient pas rigoureusement nuls, il a été vérifié que l'influence de cette approximation sur le champ de contraintes exact était faible (de l'ordre de 10 MPa).

Chargement NR11, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

9 fonctions de déplacement

FD1 : CHARVH avec C_1 à $C_{12} = -1.9746487\text{e-}6 \text{ } 7.8985946\text{e-}7 \text{ } 4^*0. -1.9746487\text{e-}6 \text{ } -2.7645081\text{e-}6 \text{ } 6.04 \text{ } 6.04 \text{ } 0. -1.570796327$

FD2 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 2^*0. -0.020833333 0. 0. 0.0625 14^*0.$

FD3 : POLD4 avec C_1 à $C_{10} = 0. 0. 0.0017361111 7^*0.$

FD4 : CHARVH avec C_1 à $C_{12} = -1.9746487e-6 7.8985946e-7 4^*0. -1.9746487e-6 -2.7645081e-6 6.04 6.04 0.1 -1.570796327$

FD5 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 0. -0.0003472222 -0.02083333 0. 0.00001736111 0.0625 0.0041666667 -0.0002083333 -0.0125 0.000625 10^*0.$

FD6 : CHARVH avec C_1 à $C_{12} = -1.9746487e-6 7.8985946e-7 4^*0. -1.9746487e-6 -2.7645081e-6 6.04 6.04 0.2 -1.570796327$

FD7 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 0. -0.000694444 -0.020833333 0. 0.0000694444 0.0625 0.008333333 -0.000833333 -0.025 0.0025 10^*0.$

FD8 : CHARVH avec C_1 à $C_{12} = -1.9746487e-6 7.8985946e-7 4^*0. -1.9746487e-6 -2.7645081e-6 6.04 6.04 0.3 -1.570796327$

FD9 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 0. -0.00104166667 -0.020833333 0. 0.00015625 0.0625 0.0125 -0.001875 -0.0375 0.005625 10^*0.$

4 fonctions de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0. 0.001 10. 0.0011 20. 1. 30. 0.$

FC2 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 20. 0. 30. 1. 40. 0.$

FC3 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 30. 0. 40. 1. 50. 0.$

FC4 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 40. 0. 50. 1. 60. 0.$

12 combinaisons superposées

-4000. * FD1 * FC1 - 0.0045 * FD2 * FC1 - 0.0045 * FD3 * FC1

-4000. * FD4 * FC2 - 0.0045 * FD5 * FC2 - 0.0045 * FD3 * FC2

-4000. * FD6 * FC3 - 0.0045 * FD7 * FC3 - 0.0045 * FD3 * FC3

-4000. * FD8 * FC4 - 0.0045 * FD9 * FC4 - 0.0045 * FD3 * FC4

Analyse de $t=0$ à $t=60$

1.14. Chargement non radial NR12

Le chargement NR12 comprend une fonction de déplacement (FSING). Comme pour NR11, une fonction de déplacement polynomiale y est ajoutée, en vue d'annuler les déplacements sur le côté qui servira d'appui fixe.

Chargement NR12, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

13 fonctions de déplacement

FD1 : FSING avec C_1 à $C_{10} = -2. -0.7 0.65 -2. 0.7 0.65 4.5 0.0 4.5 0.$

FD2 : FSING avec C_1 à $C_{10} = -2. -0.7 0.65 -2. 0.7 0.65 4.5 0.5 4.5 0.$

FD3 : FSING avec C_1 à $C_{10} = -2. -0.7 0.65 -2. 0.7 0.65 4.5 1.0 4.5 0.$

FD4 : FSING avec C_1 à $C_{10} = -2. -0.7 0.65 -2. 0.7 0.65 4.5 1.5 4.5 0.$

FD5 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 13^*0. 0.30643215 0. -0.22783819 0. -0.226685 0.4486105 0.$

FD6 : POLD4 avec C_1 à $C_{10} = 9^*0. -0.14934224$

FD7 : POLD5 avec C_1 à $C_{12} = 11^*0. 0.036990108$

FD8 : POLD6 avec C_1 à $C_{14} = 13^*0. -0.0046683176$

FD9 : POLD7 avec C_1 à $C_{16} = 15^*0. 0.00023890363$

FD10 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 9^*0. -1.3 11^*0.$

FD11 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 9^*0. -0.8303880604 7^*0. -0.369213914 0. 2.215283486$

FD12 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 9^*0. -0.4159280518 7^*0. -0.358197771 0. 2.149186628$

FD13 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 9^*0. -0.06995473086 7^*0. -0.338721314 0. 2.032327884$

5 fonctions de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0. 0.001 10. 0.0011 20. 1. 30. 0.$

FC2 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 20. 0. 30. 1. 40. 0.$

FC3 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 30. 0. 40. 1. 50. 0.$

FC4 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 40. 0. 50. 1. 60. 0.$

FC5 : LPM 5 points avec C_1 à $C_{10} = 0. 0.001 10. 0.0011 20. 1. 50. 1. 60. 0.$

13 combinaisons superposées

-0.005 * FD1 * FC1 -0.005 * FD10 * FC1 -0.005 * FD2 * FC2 -0.005 * FD11 * FC2

-0.005 * FD3 * FC3 -0.005 * FD12 * FC3 -0.005 * FD4 * FC4 -0.005 * FD13 * FC4

-0.005 * FD5 * FC5 -0.005 * FD6 * FC5 -0.005 * FD7 * FC5 -0.005 * FD8 * FC5 -0.005 * FD9 * FC5

Analyse de $t=0$ à $t=60$

1.15. Chargement non radial NR13

Le chargement NR13 comprend une fonction de déplacement (CHARVH) de type roulement. Une fonction de déplacement polynomiale y est ajoutée, en vue d'annuler les déplacements sur le côté qui servira d'appui fixe.

Chargement NR13, en DP-S

E = 209664 MPa ; ν = 0.3 ; σ₀ = 400 MPa ; C = 720 MPa

7 fonctions de déplacement

FD1 : CHARVH avec C₁ à C₁₂ = -1.9746487e-6 7.8985946e-7 4*0. -1.9746487e-6 -2.76450813e-6 7. 7. 0. -1.570796327

FD2 : POLD3 avec C₁ à C₂₀ = 0. 0. 0.00011375 0. 0. -0.00034125 14*0.

FD3 : POLD4 avec C₁ à C₁₀ = 0. 0. -0.94791666e-5 7*0.

FD4 : CHARVH avec C₁ à C₁₂ = -1.9746487e-6 7.8985946e-7 4*0. -1.9746487e-6 -2.76450813e-6 7. 7. 0.4 -1.570796327

FD5 : POLD3 avec C₁ à C₂₀ = 0. 7.563333e-6 0.00011375 0. -1.516666e-6 -0.00034125 -0.000091 0.0000182 0.000273 -0.0000546 10*0.

FD6 : CHARVH avec C₁ à C₁₂ = -1.9746487e-6 7.8985946e-7 4*0. -1.9746487e-6 -2.76450813e-6 7. 7. 0.8 -1.570796327

FD7 : POLD3 avec C₁ à C₂₀ = 0. 1.5166667e-6 0.00011375 0. -6.06666e-6 -0.00034125 -0.000182 0.0000728 0.000546 -0.0002184 10*0.

3 fonctions de charge

FC1 : LPM 4 points avec C₁ à C₈ = 0. 0.001 10. 0.0011 20. 1. 30. 0.

FC2 : LPM 3 points avec C₁ à C₆ = 20. 0. 30. 1. 40. 0.

FC3 : LPM 3 points avec C₁ à C₆ = 30. 0. 40. 1. 50. 0.

9 combinaisons superposées

-6000. * FD1 * FC1 + 1. * FD2 * FC1 + 1. * FD3 * FC1

-6000. * FD4 * FC2 + 1. * FD5 * FC2 + 1. * FD3 * FC2

-6000. * FD6 * FC3 + 1. * FD7 * FC3 + 1. * FD3 * FC3

Analyse de t=0 à t=50

1.16. Chargement non radial NR14

Le chargement NR14 comprend entre autres la fonction de déplacement FSING. Comme pour NR11, une fonction de déplacement polynomiale y est ajoutée, en vue d'annuler les déplacement ssur le côté qui servira d'appui fixe.

Chargement NR14, en DP-S

E = 209664 MPa ; ν = 0.3 ; σ₀ = 400 MPa ; C = 720 MPa

9 fonctions de déplacement

FD1 : FSING avec C₁ à C₁₀ = -2. -0.7 0.65 -2. 0.7 0.65 4.5 1.0 4.5 0.

FD2 : FSING avec C₁ à C₁₀ = -2. -0.7 0.65 -2. 0.7 0.65 4.5 1.5 4.5 0.

FD3 : POLD3 avec C₁ à C₂₀ = 13*0. 0.30643215 0. -0.22783819 0. -0.226685 0.4486105 0.

FD4 : POLD4 avec C₁ à C₁₀ = 9*0. -0.14934224

FD5 : POLD5 avec C₁ à C₁₂ = 11*0. 0.036990108

FD6 : POLD6 avec C₁ à C₁₄ = 13*0. -0.0046683176

FD7 : POLD7 avec C₁ à C₁₆ = 15*0. 0.00023890363

FD8 : POLD3 avec C₁ à C₂₀ = 9*0. -0.4159280518 7*0. -0.358197771 0. 2.149186628

FD9 : POLD3 avec C₁ à C₂₀ = 9*0. -0.06995473086 7*0. -0.338721314 0. 2.032327884

3 fonctions de charge

FC1 : LPM 4 points avec C₁ à C₈ = 0. 0.001 10. 0.0011 20. 1. 30. 0.

FC2 : LPM 3 points avec C₁ à C₆ = 20. 0. 30. 1. 40. 0.

FC3 : LPM 5 points avec C₁ à C₁₀ = 0. 0.001 10. 0.0011 20. 1. 30. 1. 40. 0.

9 combinaisons superposées

-0.0015 * FD1 * FC1 -0.0015 * FD8 * FC1 -0.0015 * FD2 * FC2 -0.0015 * FD9 * FC2

-0.0015 * FD3 * FC3 -0.0015 * FD4 * FC3 -0.0015 * FD5 * FC3 -0.0015 * FD6 * FC3 -0.0015 * FD7 * FC3

Analyse de t=0 à t=40

1.17. Chargement non radial NR15

Le chargement NR15 comprend une fonction de déplacement (CHARVH) correspondant au déplacement d'une force linéaire tangentiellement à un massif semi-infini. Comme pour NR11, une fonction de déplacement polynomiale y est ajoutée, en vue d'annuler les déplacements sur le côté qui servira d'appui fixe.

Chargement NR15, en DP-S

E = 209664 MPa ; ν = 0.3 ; σ₀ = 400 MPa ; C = 720 MPa

16 fonctions de déplacement

FD1 : CHARVH avec C₁ à C₁₂ = 0. 0. 1.3 -1.82 -1.3 -0.52 0. 0. 4.5 0. 4.5 0.

FD2 : CHARVH avec C₁ à C₁₂ = 0. 0. 1.3 -1.82 -1.3 -0.52 0. 0. 4.5 0.8 4.5 0.

FD3 : CHARVH avec C_1 à $C_{12} = 0. 0. 1.3 -1.82 -1.3 -0.52 0. 0. 4.5 1.6 4.5 0.$
FD4 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 0. -3.37847 0. 0. 13.5139 0. 0. 0. -1.002973 4.01189 10^*0.$
FD5 : POLD4 avec C_1 à $C_{10} = -0.8443566 9^*0.$
FD6 : POLD5 avec C_1 à $C_{12} = 0. 0.2110891 10^*0.$
FD7 : POLD6 avec C_1 à $C_{14} = 0.01087787 13^*0.$
FD8 : POLD7 avec C_1 à $C_{16} = 0. -0.002719467 14^*0.$
FD9 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 2.5905517 -2.584601 0. 0. 10.338404 0. 4.978596 -19.914384 -3.0794475 12.31779 9^*0.$
1766.1702
FD10 : POLD4 avec C_1 à $C_{10} = -0.739929 -0.647637925 8^*0.$
FD11 : POLD5 avec C_1 à $C_{12} = -0.052213776 0.18498225 10^*0.$
FD12 : POLD6 avec C_1 à $C_{14} = 0.01087787 0.013053444 12^*0.$
FD13 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 4.51276713 -0.4034802 0. 0. 1.613920756 0. 7.52372948 -30.0949179 -8.3141 33.256399$
9^*0. 1866.3346
FD14 : POLD4 avec C_1 à $C_{10} = -0.4266464 -1.1281918 8^*0.$
FD15 : POLD5 avec C_1 à $C_{12} = -0.10442755 0.1066618 10^*0.$
FD16 : POLD6 avec C_1 à $C_{14} = 0.01087787 0.0261068875 12^*0.$
4 fonctions de charge
FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0. 0.001 10. 0.0011 20. 1. 30. 0.$
FC2 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 20. 0. 30. 1. 40. 0.$
FC3 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 30. 0. 40. 1. 50. 0.$
FC4 : LPM 5 points avec C_1 à $C_{10} = 0. 0.001 10. 0.0011 20. 1. 40. 1. 50. 0.$
16 combinaisons superposées
-0.005 * FD1 * FC1 -0.000005 * FD4 * FC1 -0.000005 * FD5 * FC1 -0.000005 * FD6 * FC1 -0.000005 * FD7 * FC1
-0.005 * FD2 * FC2 -0.000005 * FD9 * FC2 -0.000005 * FD10 * FC2 -0.000005 * FD11 * FC2 -0.000005 * FD12 * FC2
-0.005 * FD3 * FC3 -0.000005 * FD13 * FC3 -0.000005 * FD14 * FC3 -0.000005 * FD15 * FC3 -0.000005 * FD16 *
FC3
-0.000005 * FD8 * FC4
Analyse de t=0 à t=50

1.18. Chargement non radial NR16

NR16 contient la fonction de déplacement d'une force horizontale qui se déplace sur un axe vertical.

Chargement NR16, en DP-S

E = 209664 MPa ; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400$ MPa ; C = 720 MPa

3 fonctions de déplacement

FD1 : CHARVH avec C_1 à $C_{12} = 0. 0. 1.3 -1.82 -1.3 -0.52 0. 0. 4.2 0. 4.2 0.$
FD2 : CHARVH avec C_1 à $C_{12} = 0. 0. 1.3 -1.82 -1.3 -0.52 0. 0. 4.5 0. 4.5 0.$
FD3 : CHARVH avec C_1 à $C_{12} = 0. 0. 1.3 -1.82 -1.3 -0.52 0. 0. 5. 0. 5. 0.$

3 fonctions de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0. 0.001 10. 0.0011 20. 1. 30. 0.$
FC2 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 20. 0. 30. 1. 40. 0.$
FC3 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 30. 0. 40. 1. 50. 0.$

3 combinaisons superposées

-0.0105 * FD1 * FC1 -0.0105 * FD2 * FC2 -0.0105 * FD3 * FC3

Analyse de t=0 à t=50

1.19. Chargement non radial NR17

NR17 contient la fonction de déplacement d'une plaque trouée chargée uniformément à l'infini, dont on fait tourner la direction de la charge. Un polynôme est ajouté pour annuler les déplacements sur les appuis.

Chargement NR17, en DP-S

E = 209664 MPa ; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400$ MPa ; C = 720 MPa

9 fonctions de déplacement

FD1 : PLACTR avec C_1 à $C_{12} = 0.91 1.3 0.52 0.39 1.3 3. 6. 7. 0.$
FD2 : PLACTR avec C_1 à $C_{12} = 0.91 1.3 0.52 0.39 1.3 3. 6. 7. 0.3927$
FD3 : PLACTR avec C_1 à $C_{12} = 0.91 1.3 0.52 0.39 1.3 3. 6. 7. 0.78539816$
FD4 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3^*0. -0.000093242 0. -0.000282412 0. 0. -0.002283442 -0.061336788 9^*0. 0.028164176$
FD5 : POLD4 avec C_1 à $C_{10} = 4^*0. 0.000012751 5^*0.$
FD6 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3^*0. -0.000049943 0. -0.000230147 0. 0. 0.001797055 -0.08957018 9^*0. -0.02306916616$
FD7 : POLD4 avec C_1 à $C_{10} = 4^*0. 0.000015098 5^*0.$

FD8 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3^*0.000017489\ 0. -0.000074625\ 0. 0. 0.004423497\ -0.076891534\ 9^*0. -0.0742721405$
FD9 : POLD4 avec C_1 à $C_{10} = 4^*0.000009724\ 5^*0.$

3 fonctions de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0.0001\ 10.00011\ 20.1.30.0.$
FC2 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 20.0.30.1.40.0.$
FC3 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 30.0.40.1.50.0.$

9 combinaisons superposées

$0.005 * FD1 * FC1 -1. * FD4 * FC1 -1. * FD5 * FC1$
 $+ 0.005 * FD2 * FC2 -1. * FD6 * FC2 -1. * FD7 * FC2$
 $+ 0.005 * FD3 * FC3 -1. * FD8 * FC3 -1. * FD9 * FC3$

Analyse de $t=0$ à $t=50$

1.20. Chargement non radial NR18

NR18 contient la fonction de déplacement d'une plaque trouée chargée uniformément à l'infini, dont on fait tourner la direction de la charge. Un polynôme est ajouté pour annuler les déplacements sur les appuis.

Chargement NR18, en DP-S

$E = 209664\ \text{MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400\ \text{MPa}$; $C = 720\ \text{MPa}$

9 fonctions de déplacement

FD1 : PLACTR avec C_1 à $C_{12} = 0.91\ 1.3\ 0.52\ 0.39\ 1.3\ 3.6.7.0.$
FD2 : PLACTR avec C_1 à $C_{12} = 0.91\ 1.3\ 0.52\ 0.39\ 1.3\ 3.6.7.0.3927$
FD3 : PLACTR avec C_1 à $C_{12} = 0.91\ 1.3\ 0.52\ 0.39\ 1.3\ 3.6.7.0.78539816$
FD4 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3^*0. -0.000093242\ 0. -0.000282412\ 0. 0. -0.002283442\ -0.061336788\ 3^*0. -0.000000477\ 0. -0.000110334\ 0. 0. -0.005025288\ 0.028164176$
FD5 : POLD4 avec C_1 à $C_{10} = 4^*0.000012751\ 4^*0.00000066$
FD6 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3^*0. -0.000049943\ 0. -0.000230147\ 0. 0. 0.001797055\ -0.08957018\ 3^*0.000040158\ 0. -0.000043472\ 0. 0. -0.003435804\ -0.02306916616$
FD7 : POLD4 avec C_1 à $C_{10} = 4^*0.000015098\ 4^*0.000002024$
FD8 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3^*0.000017489\ 0. -0.000074625\ 0. 0. 0.004423497\ -0.076891534\ 3^*0.000063288\ 0.0 0.000069039\ 0. 0.001629414\ -0.0742721405$
FD9 : POLD4 avec C_1 à $C_{10} = 4^*0.000009724\ 4^*0. -0.000003466$

3 fonctions de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0.0001\ 10.00011\ 20.1.30.0.$
FC2 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 20.0.30.1.40.0.$
FC3 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 30.0.40.1.50.0.$

9 combinaisons superposées

$0.0008 * FD1 * FC1 -0.16 * FD4 * FC1 -0.16 * FD5 * FC1$
 $+ 0.0008 * FD2 * FC2 -0.16 * FD6 * FC2 -0.16 * FD7 * FC2$
 $+ 0.0008 * FD3 * FC3 -0.16 * FD8 * FC3 -0.16 * FD9 * FC3$

Analyse de $t=0$ à $t=50$

1.21. Chargement pseudo-radial CR19

CR19 contient la fonction de déplacement d'une plaque trouée chargée uniformément à l'infini. Un polynôme est ajouté pour annuler les déplacements sur les appuis.

Chargement CR19, en DP-S

$E = 209664\ \text{MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400\ \text{MPa}$; $C = 720\ \text{MPa}$

3 fonctions de déplacement

FD1 : PLACTR avec C_1 à $C_{12} = 0.91\ 1.3\ 0.52\ 0.39\ 1.3\ 3.6.7.0.$
FD2 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 3^*0. -0.000093242\ 0. -0.000282412\ 0. 0. -0.002283442\ -0.061336788\ 3^*0. -0.000000477\ 0. -0.000110334\ 0. 0. -0.005025288\ 0.028164176$
FD3 : POLD4 avec C_1 à $C_{10} = 4^*0.000012751\ 4^*0.00000066$

1 fonction de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0.0001\ 10.00011\ 20.1.30.0.$

3 combinaisons superposées

$0.0012 * FD1 * FC1 -0.24 * FD2 * FC1 -0.24 * FD3 * FC1$

Analyse de $t=0$ à $t=20$

1.22 Chargement uniforme non radial NR20

NR20 contient un champ de contraintes exact constant. En conséquence, un maillage quelconque est correct.

Chargement NR20, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

2 fonctions de déplacement

FD1 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 7*0.0035 \ 9*0.0. -0.015 \ 0.$

FD2 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 7*0.0. \ 9*0. -0.05 \ 0. \ 0.$

2 fonctions de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0.0001 \ 10.00011 \ 20. \ 1. \ 30. \ 0.$

FC2 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 20. \ 0. \ 30. \ 1. \ 40. \ 0.01$

2 combinaisons superposées

$1. * FD1 * FC1 + 1. * FD2 * FC2$

Analyse de $t=0$ à $t=40$.

1.23. Chargement uniforme non radial NR21

NR21 contient un champ de contraintes exact constant. En conséquence, un maillage quelconque est correct.

Chargement NR21, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

2 fonctions de déplacement

FD1 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 7*0.0035 \ 9*0.0. -0.015 \ 0.$

FD2 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 7*0.0. \ 9*0. -0.05 \ 0. \ 0.$

2 fonctions de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0.0001 \ 10.00011 \ 20. \ 1. \ 30. \ 0.2$

FC2 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 20. \ 0. \ 30. \ 1. \ 40. \ 0.$

2 combinaisons superposées

$0.2 * FD1 * FC1 - 0.3 * FD2 * FC2$

Analyse de $t=0$ à $t=40$.

1.24. Chargement uniforme non radial NR22

NR22 contient un champ de contraintes exact constant. En conséquence, un maillage quelconque est correct.

Chargement NR22, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

2 fonctions de déplacement

FD1 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 7*0.0035 \ 9*0.0. -0.015 \ 0.$

FD2 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 17*0. -0.05 \ 0. \ 0.$

2 fonctions de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0.0001 \ 10.00011 \ 20. \ 1. \ 30. \ 0.2$

FC2 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 20. \ 0. \ 30. \ 1. \ 40. \ 0.$

2 combinaisons superposées

$0.12 * FD1 * FC1 + 0.07 * FD2 * FC2$

Analyse de $t=0$ à $t=40$.

1.25. Chargement pseudo-radial CR25

CR25 contient la fonction de déplacement d'une bosse à sphère nulle.

Chargement CR25, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

1 fonction de déplacement

FD1 : CARSPN1 avec C_1 à $C_6 = 1. \ 3. \ 0 \ 3. \ 3. \ 0.$

1 fonction de charge

FC1 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 0.0001 \ 2.5 \ 0.0011 \ 12.5 \ 1.$

1 combinaison

$0.02 * FD1 * FC1$

Analyse de $t=0$ à $t=12.5$

1.26. Chargement pseudo-radial CR26

CR26 contient la fonction de déplacement d'une bosse à sphère nulle.

Chargement CR26, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

1 fonction de déplacement

FD1 : CARSPN1 avec C_1 à $C_6 = 1. 6. 0. 6. 6. 0.$

1 fonction de charge

FC1 : LPM 3 points avec C_1 à $C_6 = 0. 0.001 2.5 0.0011 12.5 1.$

1 combinaison

$0.01 * \text{FD1} * \text{FC1}$

Analyse de $t=0$ à $t=12.5$

1.27. Chargement uniforme pseudo-radial CR30

CR30 contient un champ de contraintes exact constant. En conséquence, un maillage quelconque est correct.

Chargement CR30, en DP-S

$E = 209664 \text{ MPa}$; $\nu = 0.3$; $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$; $C = 720 \text{ MPa}$

1 fonction de déplacement

FD1 : POLD3 avec C_1 à $C_{20} = 7*0. 0.035 9*0. 0. -0.015 0.$

1 fonction de charge

FC1 : LPM 4 points avec C_1 à $C_8 = 0. 0.001 10. 0.0011 20. 1. 30. 0.$

1 combinaison

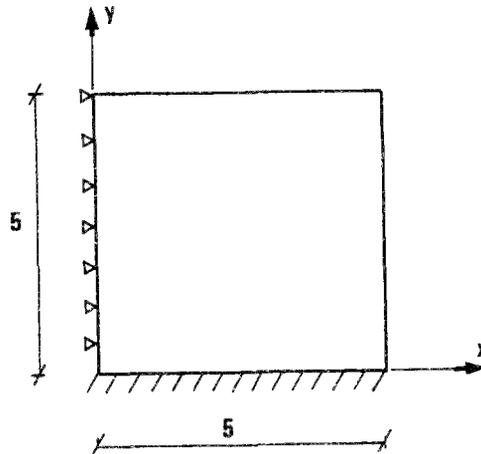
$1. * \text{FD1} * \text{FC1}$

Analyse de $t=0$ à $t=30.$

2. DOMAINES

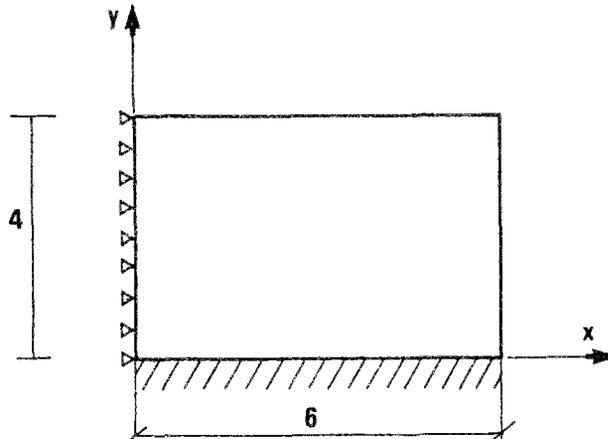
2.1. Domaine CAR1

Domaine CAR1 : carré de côté 5

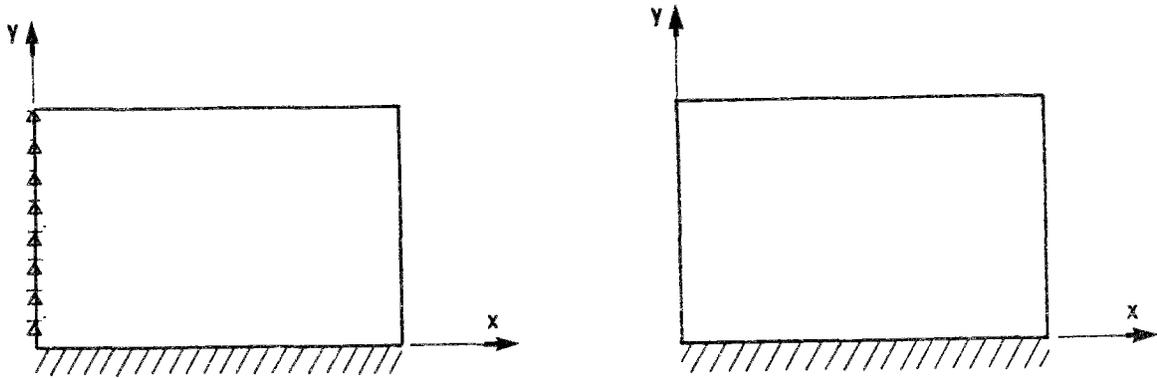


2.2. Domaine REC64-1

Domaine REC64-1 : rectangle de côtés 6 et 4 appuyé sur 2 côtés

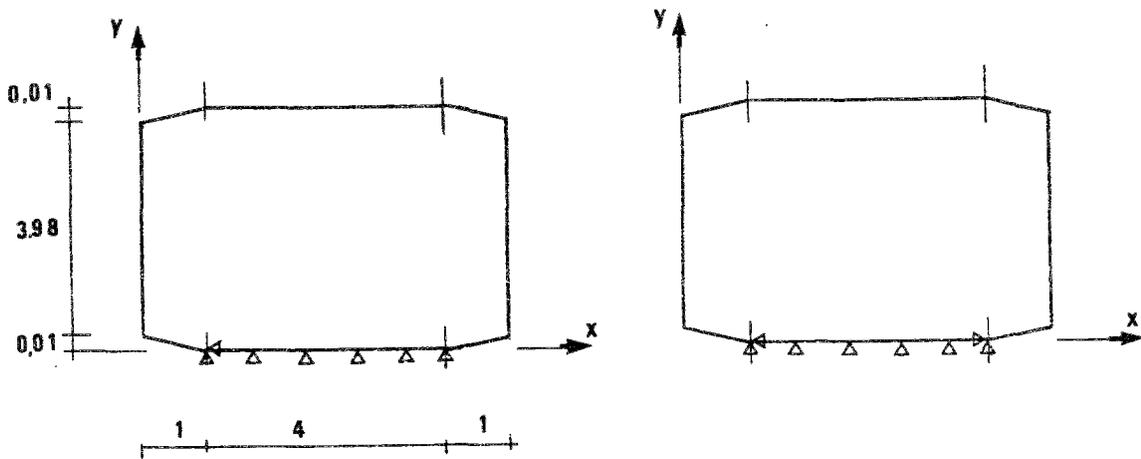


2.3. Domaines REC64-2 et REC64-3



2.4. Domaines FIS1 et FIS2

Le domaine FIS1 est un rectangle amputé de 4 minces entailles. Des fonctions singulières peuvent être définies au voisinage de ces entailles. Les appuis choisis conduisent à la présence de 2 singularités géométriques de liaison. Le domaine FIS2 se ramène à FIS1 à l'exception des appuis.



CHAPITRE V

APPLICATIONS DES SOLUTIONS EXACTES

ET RECHERCHE

DE REGLES DE REMAILLAGE

I. REVUE DES UTILISATIONS POSSIBLES DES SOLUTIONS EXACTES

Nous excluons pour l'instant l'apprentissage automatique, qui sera traité aux chapitres VI et VII.

I.1. Tests et benchmarks

I.1.1. Choix des meilleurs paramètres du calcul élastoplastique

Les hypothèses de base du calcul numérique par éléments finis en élastoplasticité ont été décrites au §II.4.4.2. Les différents paramètres que l'on doit choisir, une fois les discrétisations spatiale et temporelle fixées, peuvent être rapidement rappelés :

- type d'algorithme de correction plastique
- type d'algorithme de résolution
- valeur de la tolérance
- nombre maximum d'itérations plastiques.

Aucun de ces paramètres n'est à définir lors d'un calcul élastique. Leur choix n'est pas toujours évident. Si, en général, l'influence sur le coût du calcul est plus ou moins connue (plus faible est la tolérance et plus élevé est le nombre maxi d'itérations, plus le coût est élevé), l'influence de ces choix sur l'erreur l'est beaucoup moins (cf. §III.2.7.2).

Si on peut disposer de solutions exactes, il est possible de faire une étude systématique de l'influence de ces paramètres sur un ou plusieurs types d'erreur obtenues à la fin du calcul numérique.

Les solutions analytiques connues ne sont pas suffisantes pour de tels tests. Elles correspondent le plus souvent à des chargements radiaux, pour lesquels l'influence de plusieurs de ces paramètres est réduite ou éliminée. Nous avons par exemple remarqué au §II.4.5 que les méthodes usuelles de correction plastique implicite étaient exactes pour un chargement radial. Les solutions construites par la méthode inverse peuvent par contre avoir n'importe quel degré de complexité, voire même être choisies pour amplifier l'effet de tel ou tel paramètre sur l'exactitude de la solution.

Il est possible qu'on ne puisse pas trouver des règles simples de choix optimal de ces paramètres. A défaut, on peut tenter d'utiliser les techniques d'apprentissage automatique à partir d'une série d'exemples pour lesquels on a fait varier leur valeur, et calculé l'erreur et le coût correspondants.

Une étude approfondie de l'influence de ces paramètres sur l'erreur et le coût n'a pu être menée dans le cadre de ce travail.

I.1.2. Test de codes de calcul

Dans ce cas, la démarche s'apparente aux essais comparatifs effectués par exemple par des organisations de consommateurs sur divers produits du marché. Plusieurs codes sont mis en concurrence sur le calcul d'une série de problèmes aux limites bien définis, et on utilise pour chaque calcul les mêmes paramètres (cf. §V.1.1.1) pour tous les codes. Les résultats fournis peuvent être comparés sur leurs erreurs mais aussi sur les coûts de tous types : temps de calcul, espace mémoire et disque nécessaire, facilité de mise en oeuvre du logiciel et temps d'ingénieur correspondant, etc.

De même, le test des performances de différents matériels informatiques peut être mené à partir d'une série d'exemples et d'un code de calcul donné.

La construction de solutions exactes et le calcul d'erreur doivent être adaptés aux différents codes utilisés. Les principes théoriques ne sont pas changés, mais les formats de construction des fichiers de données et de lecture des résultats numériques varient suivant les logiciels. Une telle tâche, qui semble secondaire, peut être complexe à mettre en oeuvre, surtout s'il est nécessaire de modifier le code.

1.1.3. Test d'algorithmes

L'efficacité et la précision de divers algorithmes de calcul numérique élastoplastique (en fait, toute étape du Schéma 2 du §II.4.4.2 spécifique au calcul élastoplastique) peuvent être étudiées à partir des solutions exactes, calculées en un point ou sur une structure suivant le type d'algorithme testé.

Krieg et Krieg (1977) l'ont fait (cf. §II.4.5) pour l'influence des algorithmes de correction plastique sur l'exactitude des contraintes.

1.1.4. Test d'éléments

Les éléments finis les plus courants sont développés depuis plusieurs dizaines d'années et leurs qualités, leurs défauts et leurs particularités sont bien connus dans le cas élastique. Par exemple, le triangle P1 est connu pour être un des plus mauvais qui soient ((Zienkiewicz, 1973) par exemple) et nécessite une discrétisation très fine pour donner des résultats acceptables. L'influence des transformations isoparamétriques et de la distorsion des éléments qui en résulte a fait aussi l'objet d'études dans le cas élastique.

En plasticité, il y a lieu d'ajouter à toutes les caractéristiques des éléments en élasticité, le nombre de points de vérification du critère. Ce nombre est choisi par l'utilisateur et n'est pas forcément égal au nombre de points de Gauss utilisés pour les intégrations numériques dans les calculs des rigidités et des efforts.

Des problèmes exacts peuvent être définis sur un seul élément ou un ensemble d'éléments de mêmes caractéristiques. La variations de celles-ci sur la qualité de la solution obtenue, aussi bien en erreur qu'en coût, peut en être déduite (Hinton, 1989).

1.1.5. Validation d'outils en développement

Les tests de codes de calcul complets (§V.1.1.2), d'algorithmes particuliers (§V.1.1.3) ou d'éléments (§V.1.1.4) peuvent aussi être effectués sur de nouveaux outils en cours de développement ou de recherche, pour détecter et éliminer les fautes de conception, de programmation ou les cas imprévus où les outils sont mis en défaut. Les fautes détectées sont bien sûr éliminées, les cas de mise en défaut sont traités soit en interrompant le calcul s'il n'y a pas d'alternative possible, soit en changeant de méthode de calcul après en avoir informé l'utilisateur.

1.2. Formation des utilisateurs

Presque tous les utilisateurs d'un code de calcul par éléments finis ont fait quelques essais sur des problèmes très connus (poutres modélisées en contraintes planes, plaques carrées, sphère sous pression, etc.) afin de voir d'une part s'ils n'ont pas fait d'erreur dans leur préparation des données, d'autre part pour vérifier si les résultats s'approchent bien de la théorie et de juger de la précision des éléments utilisés. Dans les stages de formation aux éléments finis en général ou à un code en particulier, il y a toujours au moins au début des problèmes "didactiques" dont la solution exacte est connue.

En élastoplasticité, il est inutile de revenir sur le faible nombre de solutions connues (cf. §IV.2) ou au moins approchées. Apprendre aux praticiens à maîtriser un code et tous les paramètres spécifiques à la plasticité énoncés au §V.1.1.1 est autrement plus complexe qu'en élasticité. L'utilisation du code est alourdie et moins fiable : un mauvais choix pour l'un de ces paramètres peut donner des résultats médiocres voire catastrophiques, sans qu'on puisse forcément s'en rendre compte, même lors d'un essai avec les solutions connues.

Pour la vérification de l'exactitude des données, un exemple comme la sphère sous pression peut suffire. Mais la possibilité de disposer de solutions exactes plus variées et de calculer l'erreur permet à l'élève de voir lui-même l'influence de toutes les données du calcul, de la discrétisation aux paramètres spécifiques à la plasticité.

1.3. Recherche d'estimations de l'erreur

Nous avons présenté au §III.3 différents estimateurs d'erreur en élasticité, ainsi que l'erreur en relation de comportement développée par Coffignal (1987) en élastoplasticité. Cette dernière, qui reste à notre connaissance la seule estimation valable en plasticité, n'a pas été testée par rapport aux solutions connues analytiquement, ce qui aurait permis d'en définir le coefficient de qualité.

Nous n'avons pas cherché à introduire un nouvel estimateur d'erreur *a posteriori* valable en plasticité, ni à tester ceux existants sur les solutions créées par la méthode inverse, ou à extrapoler ceux valables en élasticité. Cette tâche est cependant faisable en ajoutant au logiciel actuel les estimateurs d'erreur que l'on désire tester.

Nous présentons aux chapitres VI et VII une approche totalement différente : la recherche d'une estimation *a priori* de l'erreur qui sera commise avec une discrétisation donnée, par des techniques d'apprentissage automatique.

1.4. Recherche de règles de remaillage

Quelques règles donnant "un bon maillage" en fonction d'un champ trouvé par un calcul

grossier d'une structure ont été proposées en élasticité (cf. §III.4.4). Ces règles ont l'avantage d'être peu coûteuses à construire : un calcul élastique donne un champ d'isovaleurs, dont un champ de tailles d'éléments est déduit. L'idéal est d'utiliser un MRCT pour générer le maillage respectant ce champ de tailles. Plusieurs des auteurs de ces règles, établies avant que ces maillages ne se répandent, ont été amenés à créer des algorithmes de positionnement plus ou moins automatique des noeuds, respectant les espacements déduits des règles proposées.

L'inconvénient est que ces règles ne donnent pas d'estimation de l'erreur. On est "à peu près sûr" qu'on aura l'erreur la plus faible possible pour le coût employé, mais sans en connaître l'ordre de grandeur.

En élastoplasticité, les solutions exactes permettent la vérification de toute règle de remaillage. Il suffit pour cela de générer des maillages respectant ces règles. La meilleure règle est celle qui conduit aux maillages possédant le meilleur rapport qualité-prix pour (presque) tous les exemples testés.

Nous développons plus en détail cette approche au §V.3.

2. RESULTATS RELATIFS AUX CALCULS NUMERIQUES

2.1. Cadre retenu pour tous les calculs élastoplastiques (sauf exception signalée)

Le code de calcul élastoplastique utilisé dans tous nos calculs est DYNAFLOW, de l'université de Princeton (Prevost, 1983). Ce programme permet entre autres le calcul des modèles élastoplastiques classiques en parfaite plasticité et avec écrouissage cinématique, isotrope ou combiné, selon les lois de Mises ou Drucker-Prager. Le calcul élastoplastique est possible en déformations planes, axisymétriques ou tridimensionnel mais n'est pas implémenté dans le cas des contraintes planes. Dans ce dernier cas, il faut utiliser une couche d'éléments tridimensionnels avec des conditions aux limites adéquates : déplacements libres dans le sens de l'épaisseur. Le coût de calcul d'une couche d'éléments tridimensionnels est nettement plus élevé que celui du modèle bidimensionnel équivalent.

Nous avons restreint notre étude au cas des matériaux de Von Mises en parfaite plasticité ou avec un écrouissage cinématique positif linéaire. Le code a été adapté pour l'entrée automatique des forces nodales calculées selon le §IV.6.3 et la sortie automatique des résultats approchés, directement retraités par un postprocesseur de calcul de l'erreur absolue. Du fait de l'absence dans le code de modèle bidimensionnel en contraintes planes, très peu de calculs ont été faits dans ces conditions.

Les paramètres communs à tous les calculs élastoplastiques sont les suivants :

- algorithme *implicite* pour la correction plastique des contraintes
- méthode de la rigidité initiale pour le calcul des incréments Δq (étape 2 du Schéma 2, cf. §II.4.4.2). Ce choix a été fait pour éviter de comparer des coûts de calcul faits avec des méthodes différentes : il est difficile de séparer le coût des refactorisations du coût des descentes-remontées

effectuées à chaque incrément.

Le schéma de la rigidité initiale nécessite une seule factorisation de la matrice de rigidité, mais de nombreuses itérations plastiques pour converger vers une solution. L'efficacité d'une discrétisation temporelle peut par exemple être comparée sur le nombre d'itérations et l'erreur correspondante.

- la tolérance $TOL = \frac{\| \delta F \|_{max}}{\| DF \|}$ a souvent été prise égale à 1 pour cent, mais quelques calculs ont pu retenir une autre valeur

- le nombre d'itérations *imax* au cours d'un pas de charge a été limité. La borne retenue est plus ou moins arbitraire, en général augmentée lorsque le pas de temps est augmenté. Le calcul continue et passe au pas suivant lorsque le nombre d'itérations atteint *imax*, même si la tolérance demandée n'est pas encore atteinte. Dans le cas où *imax* est décrit comme "illimité", sa valeur a été choisie pour qu'aucun calcul ne soit arrêté avant que la tolérance demandée n'ait été atteinte.

- les éléments ont été presque exclusivement des triangles à 3 noeuds, donc à contrainte constante (1 point de Gauss). Ils sont obtenus par dégénérescence de quadrilatères isoparamétriques à 4 noeuds (cf. §II.3.1.4). Il a pu être fait quelques calculs avec des quadrilatères isoparamétriques à 4 noeuds et 4 points de Gauss. Les éléments de degré plus élevé, non implémentés dans le code, n'ont pas été utilisés.

On ne peut comparer la précision de maillages utilisant des triangles et des quadrilatères que par rapport au coût et non au nombre de DDL. L'élément quadrilatère est, à nombre de DDL fixé, intrinsèquement meilleur mais plus coûteux. Le coût dépend largement des autres paramètres du calcul (cf. §V.1.1.1) et comparer sur le coût nécessite de maîtriser son évolution en fonction de ces paramètres.

- lors de l'évolution du chargement, l'interpolation de efforts comme de résultats au cours d'un pas de temps (physique) est linéaire ; il n'y a pas de subincrémentation ou de temps intermédiaires. Les pas de temps physique sont constants au cours du chargement.

Les paramètres d'un calcul élastoplastique seront présentés dans ce qui suit sous la forme de la notation standard suivante :

- Algorithme de résolution :

NRM *i* (Newton-Raphson modifié avec refactorisation tous les *i* pas)

NR (Newton-Raphson ou rigidité tangente)

QNB *i* (quasi-Newton : Broyden), refactorisation tous les *i* pas

Si *i* = ∞ alors aucune refactorisation (rigidité initiale)

- Tolérance TOL

- Nombre maximum d'itérations plastiques au cours d'un pas : *imax* ($1 \leq imax \leq \infty$)

- Pas de temps physique (supposé constant).

et on prend par défaut NRM ∞ et TOL = 0.01. Le terme *imax* est variable suivant les chargements

(entre 20 et 200 ; 50 le plus souvent). La valeur $imax = \infty$ n'a été utilisée que dans des cas exceptionnels.

Le maillage utilisé est décrit par éventuellement son nom, son nombre de noeuds, d'éléments et de DDL. Il peut être représenté graphiquement si cela a un intérêt, par exemple pour présenter les tailles extrêmes des éléments et leur répartition dans le domaine.

Les seules erreurs qui ont été calculées sont dans la liste suivante :

- erreur en déplacements (III.2.27) ;
- erreur en contraintes (III.2.28) ;
- erreur en déviateur des déformations (III.2.33) ;
- erreur en critère (III.2.34) ;
- erreur sur le travail des forces internes (III.2.35), aussi appelée erreur en énergie.

2.2. Aspect de différentes erreurs pour divers cas de charge

Nous présentons dans ce paragraphe l'évolution dans l'espace et dans le temps de plusieurs types d'erreurs. Cette présentation n'est faite que pour comparer l'aspect des erreurs, et non chercher dans quel cas elles sont minimales.

2.2.1. Comparaison entre les erreurs en contraintes, énergie, déviateur des déformations

2.2.1.1. Exemples

Le chargement NR2 défini sur REC64-2 est calculé avec un maillage de 1322 noeuds et 2501 éléments et un pas de temps $Dt = 2.5$.

Les erreurs relatives $e_{3\Omega}$ et $e_{4\Omega}$ ont l'aspect suivant

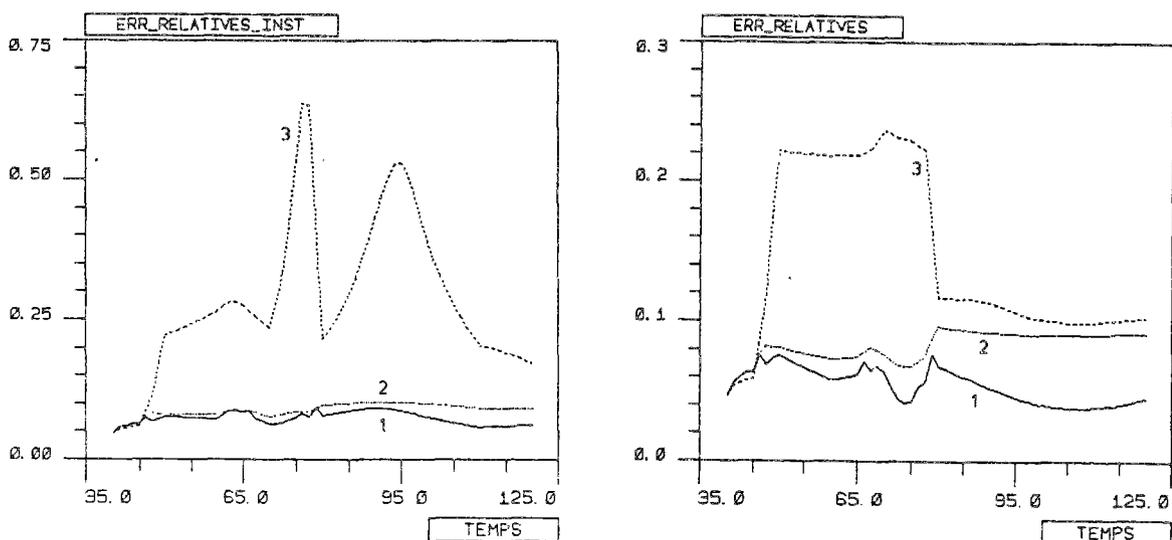


Fig. V-2-1 a b. Erreurs relatives $e_{3\Omega}$ puis $e_{4\Omega}$ en contraintes (1), énergie (2), déviateur des déformations (3)

2.2.1.2. Remarques

En plasticité, les déformations peuvent être élevées alors que le déviateur des contraintes n'évolue plus, au-delà du seuil, qu'en fonction du module d'érouissage. On conçoit donc que les erreurs sur ϵ' soient le plus souvent plus grandes que celles sur σ .

2.2.2. Comparaison entre les erreurs absolues normées et relatives

2.2.2.1. Exemples

Le chargement NR6 appliqué sur le domaine FIS2 avec un maillage de 3860 éléments et un pas de temps de 0.625 donne les erreurs suivantes :

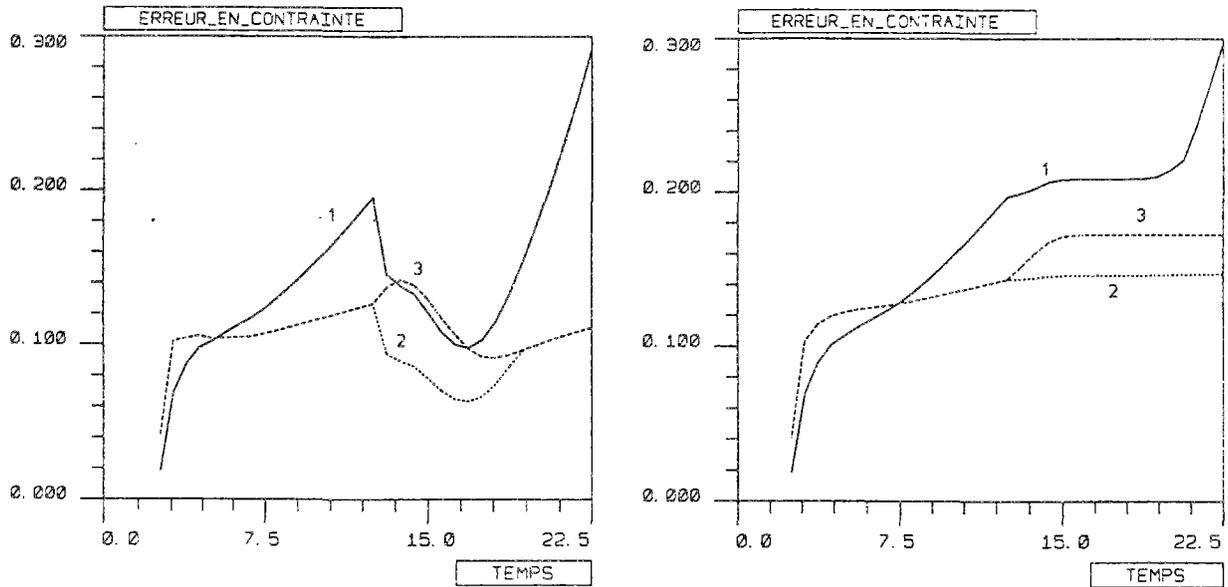


Fig. V-2-2 a b. Erreurs en contraintes $e_{2\Omega}$ (1), $e_{3\Omega}$ (2) et $e_{4\Omega}$ (3), puis $c_{2\Omega}$ (1), $c_{3\Omega}$ (2) et $c_{4\Omega}$ (3)

Le cas NR2 appliqué sur REC64-2 donne les erreurs relatives suivantes :

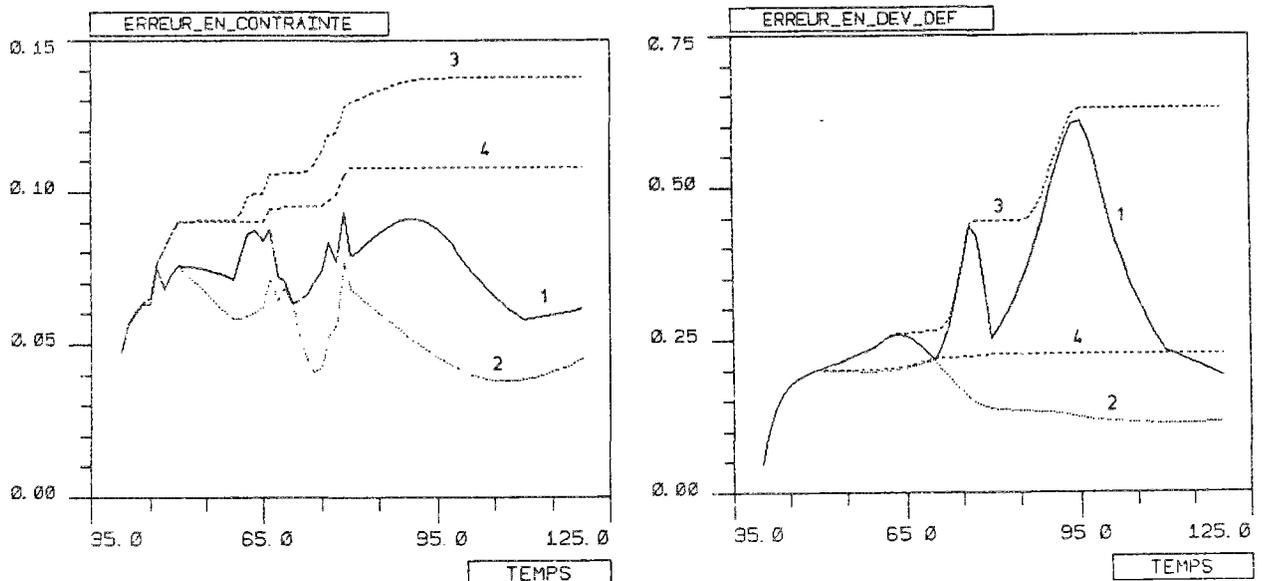


Fig. V-2-3 a b. Erreurs $e_{3\Omega}$ (1), $e_{4\Omega}$ (2), $c_{3\Omega}$ (3), $c_{4\Omega}$ (4) en contraintes puis en déformations

2.2.2.2. Remarques

Les erreurs relatives $e_{4\Omega}$ sont inférieures aux erreurs $e_{3\Omega}$ et ont une évolution au cours du temps moins perturbée. Les erreurs absolues dépendent du niveau du chargement et n'ont pas de relation directe avec les erreurs relatives. Elles peuvent être arbitrairement plus élevées ou plus faibles, croître quand les erreurs relatives décroissent ou inversement. Les erreurs enveloppes ne peuvent que croître. Il leur arrive de rester quasi-constantes lorsque les erreurs instantanées augmentent fortement, ce qui implique que les zones d'erreur locale élevée ne se sont pas déplacées.

2.2.3. Evolution au cours du temps

2.2.3.1. Exemples

La figure suivante montre, pour le chargement NRI défini sur REC64-1, un maillage à 859 noeuds et 1634 éléments, et un calcul avec $Dt = 5$, les erreurs relatives en contraintes et en critère suivantes

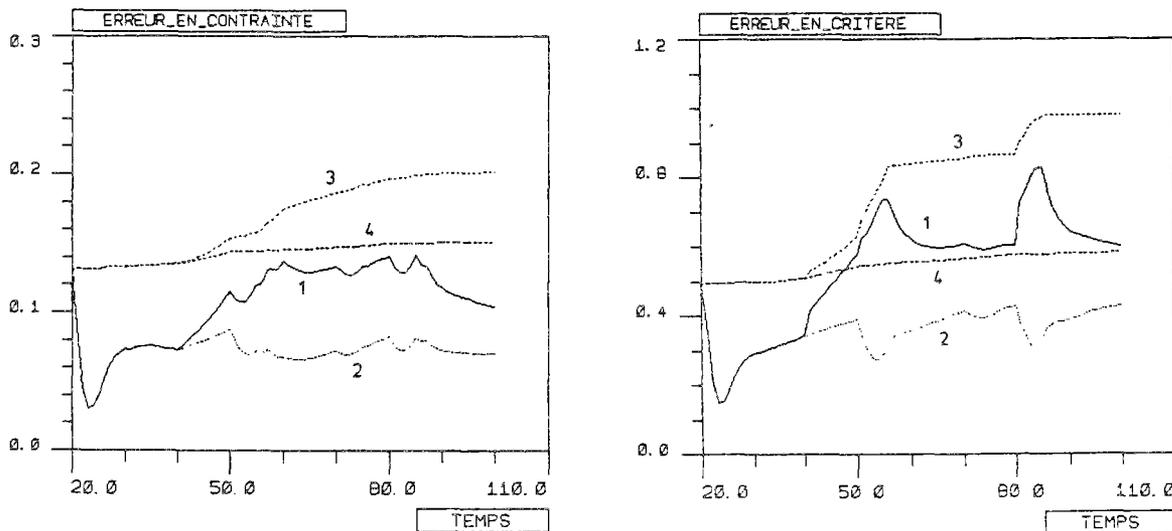


Fig. V-2-4 a b. Erreurs en contraintes $e_{3\Omega}$ (1), $e_{4\Omega}$ (2) et leurs enveloppes (3) (4), puis les mêmes erreurs en critère. D'autres évolutions sont visibles sur les figures des paragraphes précédents.

2.2.3.2. Remarques

L'évolution au cours du temps d'une erreur dépend naturellement de l'évolution du chargement. Indépendamment de ce fait, on peut noter que :

- l'erreur relative trouvée en élastoplasticité peut être plus forte, mais aussi plus faible, que l'erreur au premier temps du chargement, lorsque la totalité de la structure est élastique. C'est le cas pour NRI, élastique à $t=20$ et où la plasticité apparaît après ce temps. L'erreur relative décroît très vite pour ensuite rattraper le niveau atteint en élasticité.
- les évolutions des erreurs absolues ne peuvent généralement pas être du même aspect que celles des erreurs relatives : lorsque la structure est élastique, les champs de contraintes et de déformations sont limités par les seuils ; en plasticité, les déformations peuvent croître très au-dessus des valeurs élastiques limites.

- l'erreur croît, mais peut aussi décroître, au cours du temps. Il est difficile de donner *a priori* une tendance générale.

- en général, les erreurs en contraintes, en déformations, en critère croissent en même temps mais pas forcément à la même vitesse.

2.2.4. Erreurs globales et erreurs ponctuelles

2.2.4.1. Exemples

Le chargement NR1 défini sur REC64-1, calculé avec un maillage de 3951 noeuds et 7792 éléments, et un pas de temps $\Delta t = 5$, donne pour les erreurs en contraintes et en déviateur des déformations les évolutions suivantes :

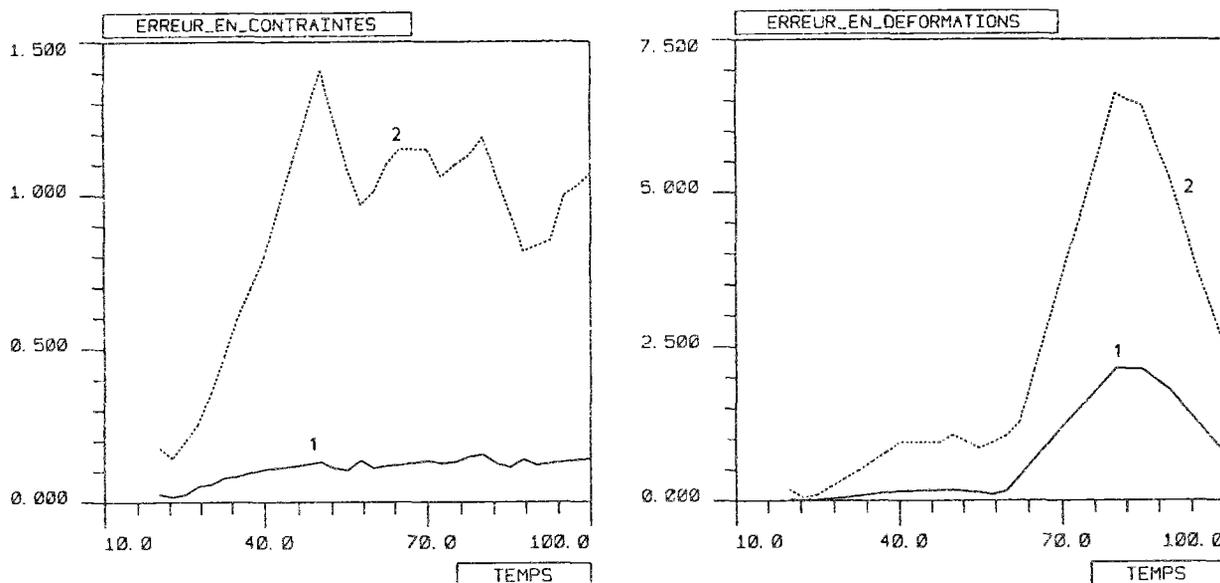


Fig. V-2-5 a b. Erreurs $e_{2\Omega}$ (1) et e_{p2} (2) en contraintes et en déviateur des déformations

2.2.4.2. Remarques

L'erreur globale $e_{2\Omega}$ étant une moyenne sur Ω_0 de la différence entre les champs exact et approché, elle aura forcément un ordre de grandeur inférieur au sup sur Ω_0 de l'erreur ponctuelle. Elle reste finie pour un chargement singulier.

Les chargements singuliers conduisent à des erreurs ponctuelles très élevées, infinies si le point singulier est inclus dans le domaine Ω . Nous avons préféré laisser "une certaine distance" entre Ω et ces points, pour éviter des problèmes numériques. La quantité exacte (et donc l'erreur ponctuelle maximale) peut néanmoins atteindre plusieurs dizaines ou centaines de fois le seuil ϕ_0 au point le plus sollicité.

2.3. Précision du calcul des erreurs

2.3.1. Pas de temps de calcul de l'erreur

Les discrétisations spatiale et temporelle de la structure sont fixées et les résultats approchés

sont connus. Les temps de calcul de l'erreur sont les temps t_E présentés au §III.2.1.5.5. Nous supposons que ces temps contiennent au moins les temps t_C de calcul numérique. Entre les temps t_C , les résultats approchés sont interpolés linéairement. Il est nécessaire de connaître le pas de temps nécessaire au calcul des erreurs (quel que soit celui retenu lors du calcul numérique élastoplastique). L'erreur (instantanée et non enveloppe) trouvée aux temps t_E situés entre les temps de calcul numérique t_C est le plus souvent plus élevée que l'erreur calculée aux temps t_C . Il existe un pas de temps de calcul *numérique* Dt en-deçà duquel les erreurs enveloppes ne décroissent plus. Il est donc inutile de choisir un pas de temps plus fin.

L'exemple suivant montre l'influence du pas de temps Δt_E sur l'erreur en énergie (effet similaire au calcul de la norme exacte en énergie, cf. fig IV-6-6 §IV.6.3.2) et en contraintes :

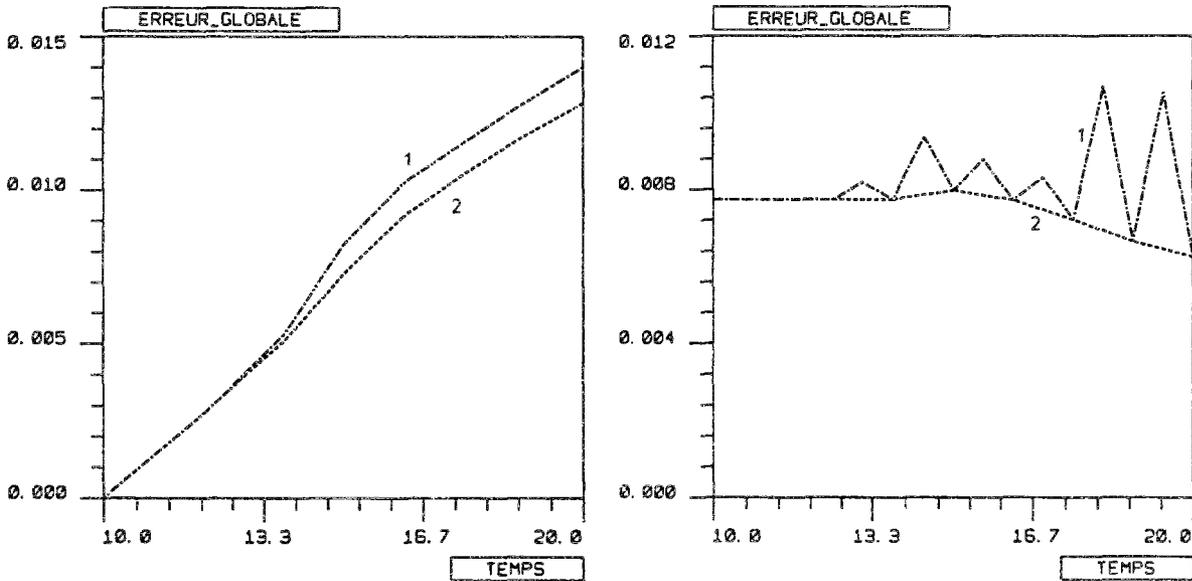


Fig. V-2-6 a b. Cas CR19, maillage 4070 DDL, $Dt = 1.25$. Erreur $e_{2\Omega}$ en énergie avec $\Delta t_E = 0.625$ (1) et 1.25 (2), puis erreur en contraintes $e_{4\Omega}$ avec les mêmes Δt_E

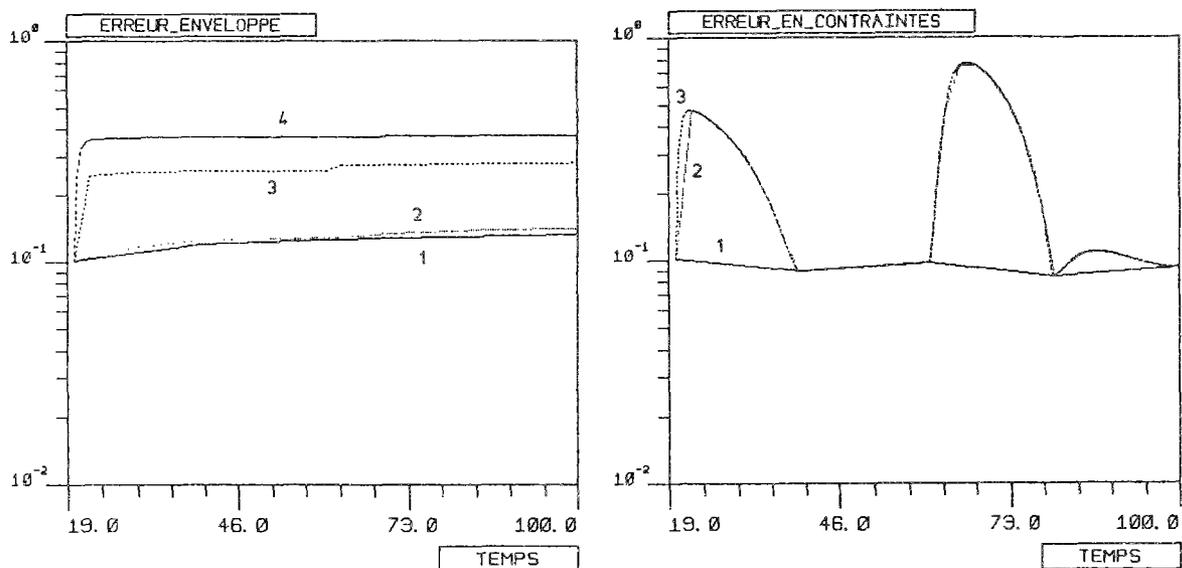


Fig. V-2-7 a b. Cas CR2 avec $Dt = 5$: erreur enveloppe $c_{4\Omega}$ en critère avec $\Delta t_E = 20$ (1), 5(2), 2.5 (3) et 0.25 (4)

Puis erreurs $e_{4\Omega}$ en critère avec $Dt=20$ et $\Delta t_E = 20$ (1), 2.5 (2) et 0.25 (3)

La Fig. V-2-7 présente l'influence du pas Δt_E sur la valeur des erreurs, pour le cas pseudo-radial CR2 défini sur le domaine CAR1 avec un maillage à 250 éléments. On constate que les erreurs enveloppes croissent quand Δt_E décroît, jusqu'à une limite qui semble atteinte avec la valeur $\Delta t_E = 0.25$ si $Dt=5$, et 2.5 si $Dt=20$.

2.3.2. Nombre de points de Gauss pour le calcul de l'erreur globale ou élémentaire

Comme pour le calcul des forces nodales (cf. §IV.6.4.3), le calcul des erreurs globales correspond à l'intégration sur le volume de chaque élément d'une quantité (la différence entre un champ exact et sa valeur approchée) dont la variation peut être complexe.

Par contre, une précision élevée est moins nécessaire ici. On peut tolérer une certaine "erreur sur l'erreur", pourvu qu'elle ne dénature pas l'ordre de grandeur du résultat final, pour lequel 2 chiffres significatifs exacts sont suffisants. On se ramène au cas de l'intégration des normes exactes (cf. §IV.6.2) : le nombre de points de Gauss nécessaire pour l'un conviendra pour l'autre.

Dans le cas des erreurs utilisant des quantités évaluées aux seuls points de Gauss des éléments (contraintes, déformations plastiques), le fait d'utiliser plus de points d'intégration que lors du calcul numérique impose l'extrapolation de la quantité approchée dans tout l'élément. Cette démarche est cependant inutile pour les éléments où les champs approchés sont constants (le triangle P1 dans notre cas). Nous avons remarqué (cf. §III.3.1.6) que ce problème pouvait faire perdre une partie de la précision des résultats. Nous avons utilisé le plus souvent des triangles P1 à 1 point de Gauss donc ne nécessitant pas d'extrapolation. Dans les quelques cas où des quadrilatères à 4 points de Gauss ont été retenus, nous avons prévu 2 moyens d'évaluer l'erreur :

- soit un calcul de l'erreur avec $2*2$ points de Gauss. Les mêmes points sont utilisés dans le calcul éléments finis pour vérifier le critère, et dans le calcul de l'erreur pour mesurer celle-ci. En conséquence, aucune moyenne ni extrapolation ne sont nécessaires ;
- soit les résultats aux 4 points ont été moyennés et rendus constants dans l'élément. Ensuite, un nombre quelconque de points de calcul de l'erreur est utilisé, comme pour un élément à 1 point de Gauss.

Dans le cas axisymétrique, de même que lors du calcul des normes exactes, les erreurs sont intégrées sur la section droite de la structure sans faire intervenir le terme $2\pi r$.

Nous présentons un exemple de calcul d'erreur sur un cas singulier : NR4 et le domaine FIS1. Le maillage est grossier (386 éléments) mais cependant adapté au problème : les éléments fins sont aux sommets des 2 fissures. La figure suivante montre qu'il faut 5 points de Gauss par dimension (donc 9650 dans la structure) pour stabiliser la valeur de l'erreur en contraintes, et seulement 2 par dimension pour l'erreur en déviateur des déformations :

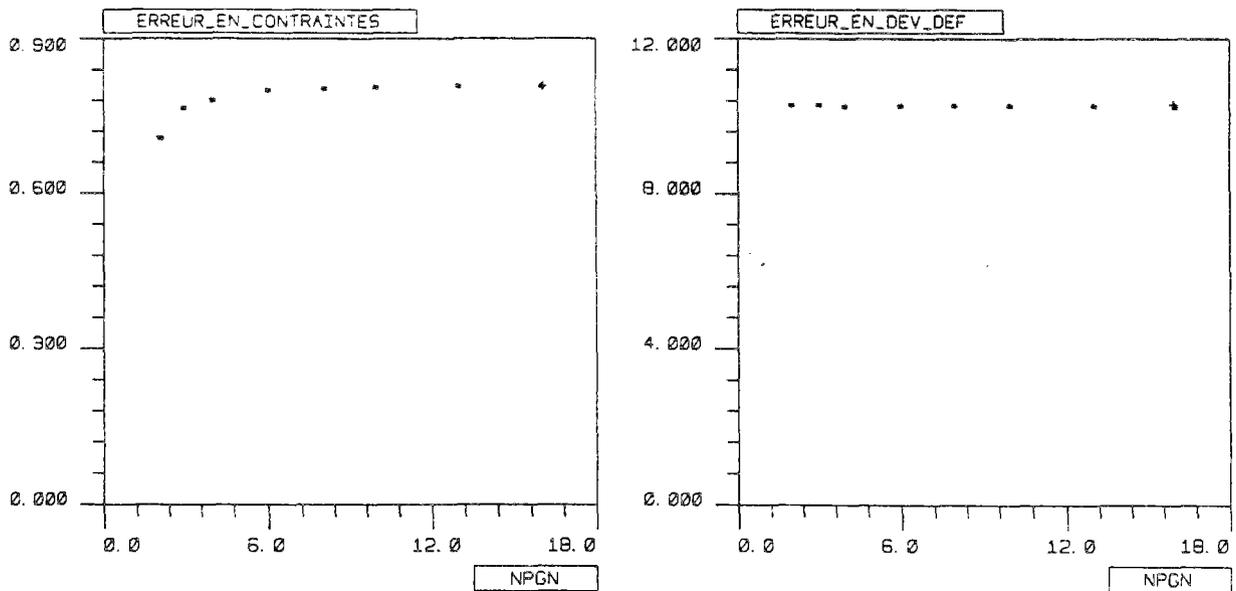


Fig. V-2-8 a b. Erreurs globales $e_{2\Omega}$ en contraintes et en déviateur des déformations, en fonction du nombre de points de calcul de l'erreur (NPGN)

2.3.3. Nombre de points de Gauss pour le calcul de l'erreur ponctuelle

Dans le cas de l'erreur ponctuelle, le fait de chercher le sup sur "l'ensemble du domaine" de la différence entre un champ exact et un champ approché implique de calculer cette différence en un nombre suffisamment grand de points. Pour ne pas alourdir le calcul, ces points seront les points de Gauss utilisés pour le calcul des erreurs globales et élémentaires. Il pourra ainsi être nécessaire de choisir plus de points par élément que le strict calcul des erreurs globales n'en nécessiterait. Pratiquement, nous avons utilisé entre 10000 et 200000 points dans la structure, suivant la complexité du chargement. Une fois de plus, le nombre optimum de points sur la structure peut être évalué en examinant l'évolution des erreurs globales et ponctuelles lorsqu'augmente le nombre de points de Gauss.

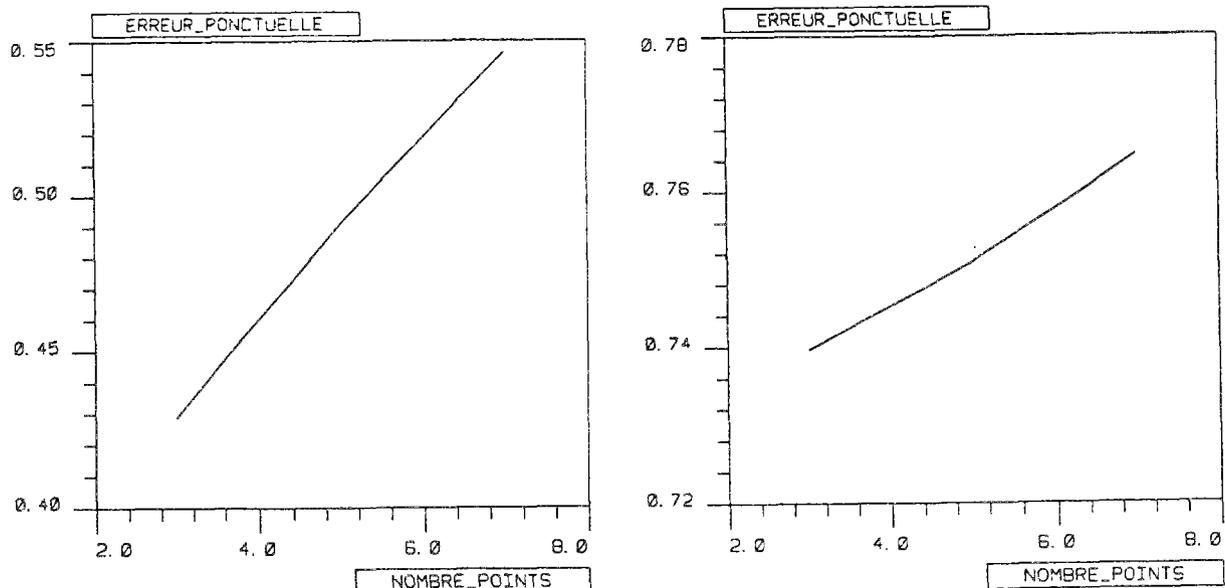


Fig. V-2-9 a b. Erreur ponctuelle $e_{p2}(\sigma)$ et $e_{p2}(\epsilon')$ pour le chargement NR2 sur REC64-2,

un maillage de 768 éléments et un pas de temps $Dt = 2.5$

Note : les erreurs globales calculées avec 3 et 7 points de Gauss sont égales à 10^{-5} près

La présence d'une singularité dans la fonction de déplacement peut empêcher un calcul de l'erreur

ponctuelle. Si le résultat exact est illimité au point considéré, l'erreur ponctuelle absolue est infinie, quelle que soit la finesse du maillage. Si l'erreur est calculée à des points "voisins" de cette singularité, sa valeur dépendra de la distance entre le point de Gauss le plus proche et le point singulier. Cette distance varie aléatoirement suivant le nombre de points par élément et la taille de ceux-ci.

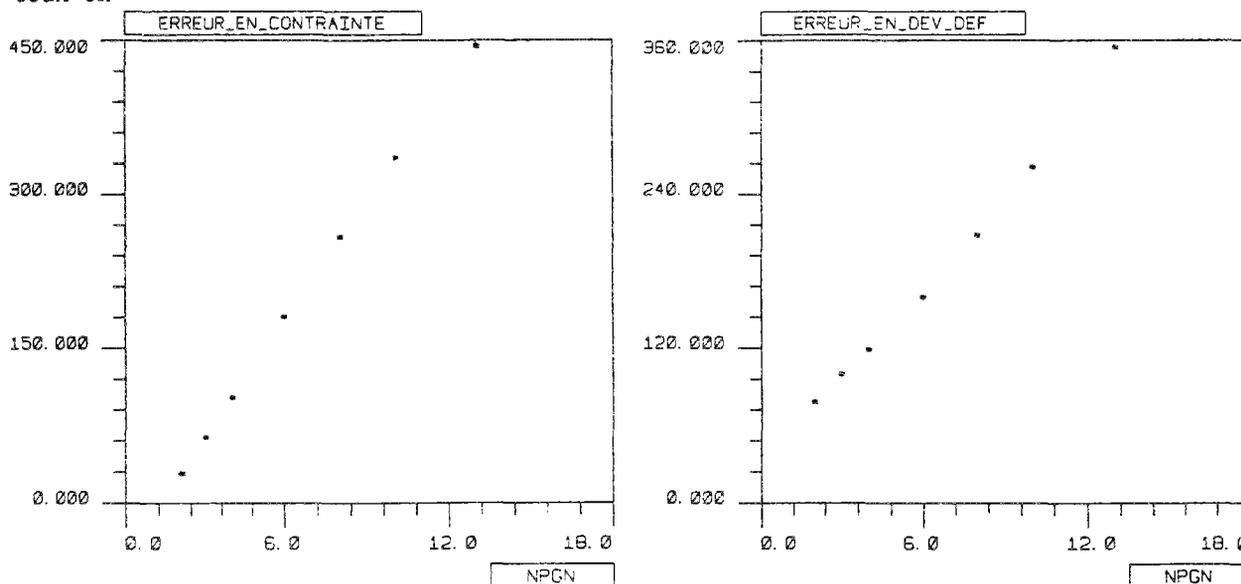


Fig. V-2-10 a b. Cas NR4 sur FIS1, maillage 384 éléments et pas de temps $\Delta t=1.25$: erreurs ponctuelles e_{p2} en contraintes et en déviateur des déformations, en fonction du nombre de points de calcul de l'erreur NPGN

On peut tenter de remédier à ce fait en extrapolant les contraintes trouvées dans les éléments entourant le point singulier. En général, l'extrapolation est mauvaise au voisinage d'un tel point et peut faire perdre une partie importante de la précision du résultat approché. Nous n'avons pas retenu cette approche et avons estimé plus ou moins arbitrairement les erreurs ponctuelles associées aux chargements singuliers.

2.4. Influence de divers paramètres sur les erreurs

Nous étudions ici l'influence que peuvent avoir d'autres paramètres que les discrétisations spatiale et temporelle, sur les erreurs trouvées.

Forces nodales imprécises

Nous avons remarqué au §IV.6.4.1. l'importance de l'exactitude des forces nodales. Nous cherchons l'influence d'une mauvaise évaluation de ces forces, sur la valeur de l'erreur trouvée.

L'exemple suivant, pris sur le cas de charge régulier NR2 défini sur REC64-2 avec un maillage (très grossier) de 60 noeuds et 89 éléments et un pas de temps $\Delta t = 5$, montre l'évolution des erreurs en fonction du nombre de points de Gauss de calcul des efforts. Le nombre de points pour le calcul de l'erreur est 4, ce qui est largement suffisant au vu des résultats de la figure V-2-9 a. Les forces nodales sont calculées selon (IV.6.2), qui est la moins précise des méthodes d'évaluation des efforts.

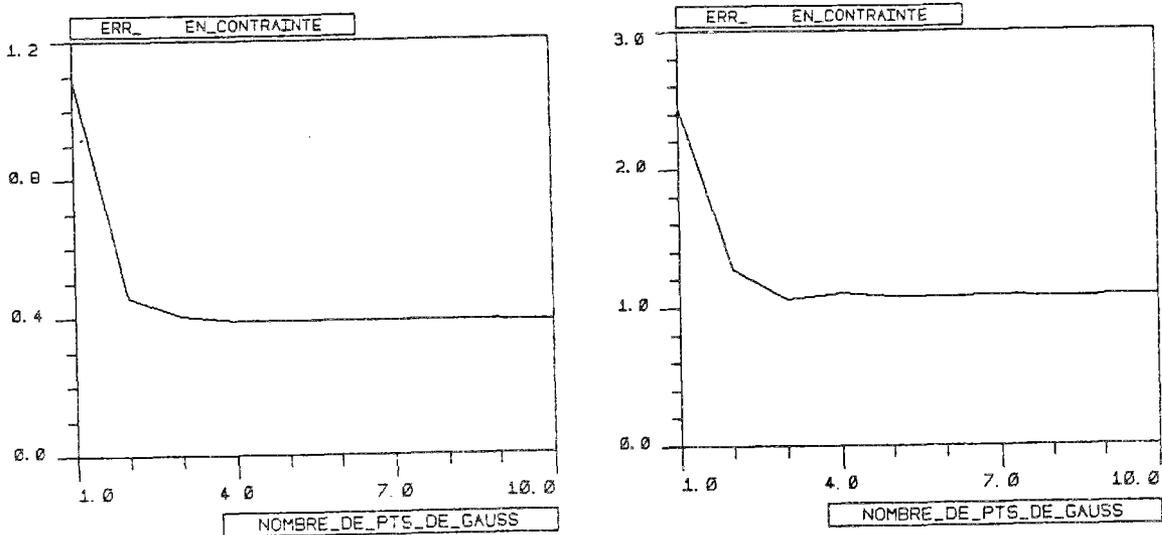


Fig. V-2-11 a b. Erreurs globale $e_{2\Omega}$ et ponctuelle e_{p2} en contraintes

On constate qu'une précision suffisante est atteinte pour environ 3 points de Gauss / dimension, soit 800 points sur l'ensemble de la structure. Au-delà, l'erreur entre les solutions exacte et approchée n'est due qu'au calcul approché lui-même. Un chargement d'évolution plus complexe que NR2 (par exemple, un cas singulier comme NR4) pourrait nécessiter un nombre de points largement plus élevé. Si le maillage est (correctement) affiné, le nombre de points nécessaire dans chaque élément décroît avec la taille des éléments.

Il peut aussi se produire que des forces imprécises donnent une erreur (un peu) plus faible que les forces calculées avec précision. Un tel cas ne doit pas être généralisé : le problème calculé numériquement, différent du problème exact, a "par hasard" une solution approchée plus proche du problème exact que la solution numérique obtenue avec de "parfaites" forces nodales.

3. ETUDE DETAILLEE DE LA RECHERCHE DE REGLES DE REMAILLAGE

Nous éliminons de ce paragraphe les effets des discrétisations temporelles. Une étude sommaire de leur influence sur les erreurs est présentée au §V.4.

3.1. Forme et utilisation des règles de remaillage

3.1.1. Types de règles

Nous avons présenté au chapitre III plusieurs règles de remaillage.

La possibilité de calculer, à partir de maillages construits selon ces règles, autant de solutions exactes qu'il peut être nécessaire et, pour chacune d'elles, n'importe quel type d'erreur entre ces solutions et les résultats approchés, nous permet de tester ces règles et d'en déduire "les meilleures" selon un critère quelconque.

En pratique, nous avons retenu comme critère de qualité des règles, la minimisation d'une erreur en

fonction du nombre de degrés de liberté. Suivant le type d'erreur retenu, les meilleures règles pourront varier. D'autres critères de coût auraient pu être pris en compte : nombre d'éléments, coût brut du calcul (temps CPU pour une machine identique), nombre d'itérations plastiques, etc.

Nous distinguons 2 familles de règles :

- les règles d'optimalité déduites d'erreurs locales ou d'estimations d'erreurs locales (par exemple (III.4.7)) ;
- les règles empiriques de remaillage déduites de champs d'isovaleurs calculés sur la structure (par exemple (III.4.14)).

La règle de remaillage (III.4.7) déduite de la règle d'optimalité (III.3.18) est notamment utilisée par Coffignal pour construire ses maillages optimaux en élastoplasticité, à partir des erreurs en relation de comportement calculées sur chaque élément. Nous avons remarqué au §III.4.3 que certaines estimations d'erreur proposées par d'autres auteurs pourraient aussi utiliser (III.4.7) comme règle de remaillage. Comme nous disposons des solutions exactes, nous avons appliqué (III.4.7) à partir des erreurs *réelles* calculées sur chaque élément de la structure. Nous n'avons pas utilisé d'estimateurs. Divers types d'erreurs ont été testés.

L'inconvénient de notre démarche est qu'il est nécessaire de disposer de la solution exacte pour calculer nos erreurs locales et utiliser (III.4.7). Cette procédure ne peut donc pas être retenue dans un contexte industriel. Mais elle a l'avantage de permettre la vérification de la règle d'optimalité en élastoplasticité. Si cette règle s'applique bien, les maillages qui en seront déduits seront quasi-optimaux et les règles empiriques comme (III.4.14), qui ne nécessitent pas de solution exacte, pourront être comparées à ces maillages optimaux.

Nous cherchons à éliminer les effets de la discrétisation temporelle dans le calcul de l'erreur en fonction du maillage. Nous avons vu au §III.3.1.3 que les erreurs dues aux discrétisations spatiale et temporelle pouvaient s'ajouter. Nous cherchons d'abord pour quelques maillages la discrétisation temporelle en-deçà de laquelle l'erreur ne décroît quasiment plus.

Tous les maillages sont ensuite calculés avec une discrétisation temporelle au moins aussi fine. Si on se réfère à (III.3.6), il serait nécessaire d'affiner simultanément le pas de temps et le maillage. Ce fait peut être vérifié en divisant le pas de temps pour un maillage à nombre élevé de DDL, et en comparant les erreurs trouvées avant et après division.

Tous les calculs faits pour une structure donnée ont les mêmes paramètres de calcul numérique élastoplastique (cf. §II.4).

3.1.2. Notion de courbe d'optimalité

On conçoit que le tracé d'un nuage de points erreur = $f(\text{NDDL})$, pour des maillages construits de n'importe quelle façon, ne peut avoir une "allure" quelconque. On peut l'obtenir en calculant les erreurs pour des maillages de tout type : uniformes, arbitraires, optimaux au sens de (III.3.18), issus de règles censées donner de bons mais aussi de mauvais maillages [(III.4.14) avec α négatif par exemple].

Ce nuage est limité en haut et en bas :

- en partie haute :

Si on fait abstraction des erreurs de troncature, aucun maillage ne peut avoir une erreur plus élevée que les maillages qui décrivent la géométrie du domaine Ω avec le minimum d'éléments (un seul pour un domaine plan triangulaire par exemple). Le cas des frontières courbes est à traiter à part : le nombre minimum d'éléments (à côtés droits) dépend de la taille des lacunes géométriques qu'on est disposé à accepter. Ces lacunes géométriques ne peuvent dépasser une certaine taille sans conduire à une approximation grossière.

- en partie basse :

Les maillages donnant pour un nombre donné de DDL l'erreur la plus faible sont par définition les maillages optimaux par rapport au nombre de DDL (quelle que soit la façon dont ils ont été construits).

La "courbe d'optimalité" des maillages pour une géométrie, un chargement, un matériau, des paramètres de calcul et un type d'erreur donnés est donc l'enveloppe inférieure des points trouvés avec tous les maillages.

Evidemment, pour que cette courbe ait un sens, il convient qu'il y ait un minimum de "bons maillages" dans le nuage de points représenté sur une figure comme V-3-1. Cela est le cas s'ils ont été bien choisis, avec plusieurs règles différentes et "de bon sens".

Pour la comparaison des règles de remaillage, le fait qu'aucun maillage ne soit meilleur que ceux d'une règle donnée n'est pas une preuve mais seulement une présomption d'optimalité de la règle étudiée. Les maillages situés sur la courbe d'optimalité ne sont pas forcément tous construits par la même règle de remaillage.

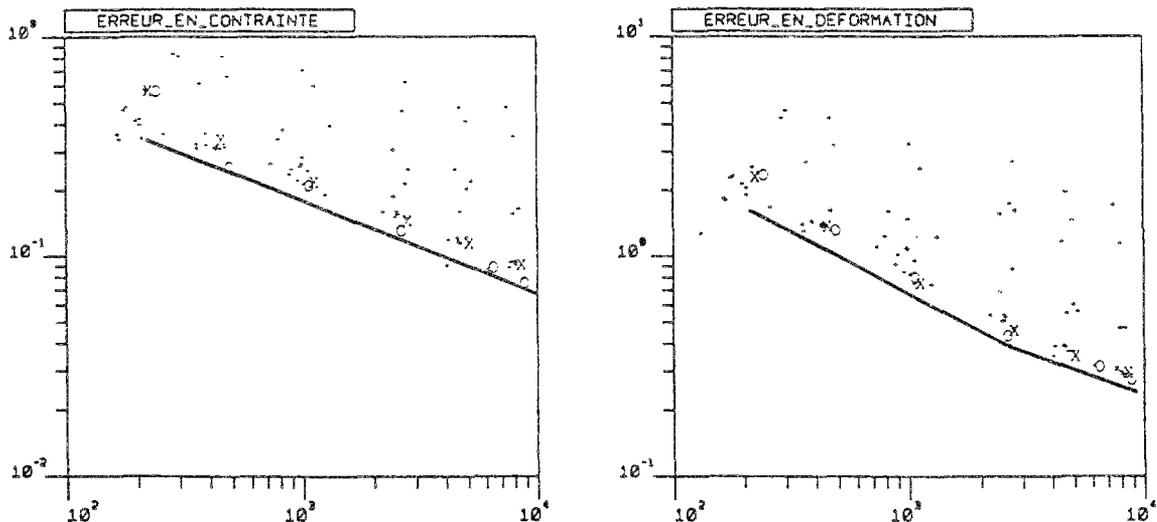


Fig. V-3-1 a b. Chargement SPH1 : exemple de nuage de points (nombre de DDL; erreur) et courbe d'optimalité associée pour $c_{2\Omega}$ en contraintes puis en déviateur des déformations

La connaissance des courbes d'optimalité pour un type d'erreur donné et différentes valeurs des géométries, des chargements, des matériaux peut fournir une information du type : "pour obtenir telle valeur de l'erreur, il faut *au moins* tel nombre de DDL". Une telle connaissance ne fournit pas

le maillage optimal à l'utilisateur, mais ce dernier sait que, quoi qu'il fasse, il devra utiliser au moins ce nombre de DDL pour obtenir son erreur.

De telles courbes ne sont valables que pour un type d'éléments donné (les triangles P1 dans notre cas), une seule erreur et les autres caractéristiques du calcul maintenues constantes.

3.2. Procédure générale de test des règles de remaillage

La courbe d'optimalité est supposée connue. Nous cherchons à comparer la qualité des maillages construits par une règle de remaillage quelconque, à cette courbe d'optimalité.

Nous avons mis au point une procédure automatique de test dont le déroulement est le suivant :

- étape 1 choix des paramètres de la règle de remaillage
 exemple : ϕ , α et β pour la règle (III.4.14)
- étape 2 donnée d'une directive pour le premier maillage fils
- étape 3 construction d'un maillage de départ arbitraire et grossier
- étape 4 calcul de la solution pour ce maillage
- étape 5 construction d'un champ de tailles d'éléments à partir :
 - de la règle de remaillage
 - de la solution approchée obtenue sur le maillage père
 - de la directive sur le maillage fils
- étape 6 construction automatique du maillage fils par un MRCT
- étape 7 calcul de la solution pour ce maillage
- étape 8 calcul de l'erreur entre cette solution et la solution exacte ; stockage de l'erreur et du nombre de DDL du maillage
- étape 9 modification de la directive pour le maillage suivant
- étape 10 tant qu'il y a des maillages fils à construire : retour à l'étape 5

Cette procédure abandonne le premier maillage car son champ de tailles n'est pas déduit de la règle de remaillage. Il pourrait donc soit la pénaliser, soit la favoriser.

La directive peut être de plusieurs types. Soit on souhaite que le maillage fils ait un certain nombre, fixé à l'avance, de DDL ou d'éléments, et le champ de tailles est construit pour respecter au mieux ce nombre (par la loi (III.4.5)). Soit la règle de remaillage est déduite d'une estimation de l'erreur, et dans ce cas la directive consiste à donner une erreur que le maillage fils devra respecter.

En pratique, les maillages construits par cette procédure sont demandés de plus en plus fins, et le rapport des nombres d'éléments des maillages père et fils sont raisonnables. Nous obtenons donc des séries de maillages tous générés par la règle demandée (sous réserve que le MRCT utilisé respecte le champ de tailles demandé). Il est aisé de tracer l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de DDL pour ces maillages, et ceci pour un chargement donné. La règle la plus efficace pour ce chargement est celle qui se rapproche le plus de la courbe d'optimalité.

Ceci devrait être vérifié quel que soit le nombre de DDL. En fait, il y a des règles qui ont une

qualité optimum pour un certain nombre de DDL, et qui sont moins bonnes pour un nombre plus grand ou plus petit. A défaut de disposer d'une règle valable dans tous les cas, nous préférons retenir les règles qui donnent la meilleure discrétisation pour les maillages à nombre élevé de DDL, les plus coûteux.

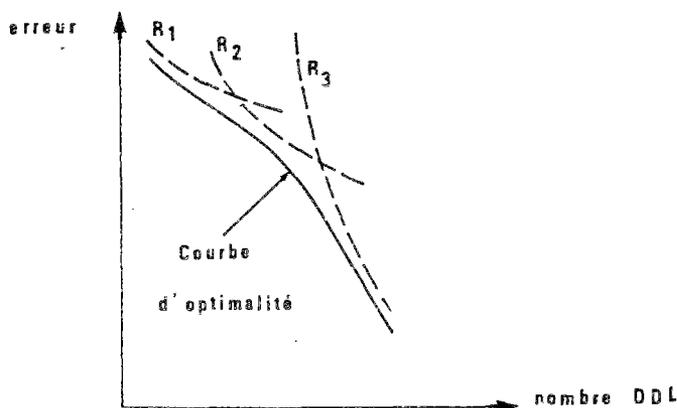


Fig. V-3-2. Règles optimales pour diverses valeurs de NDDL, et courbe d'optimalité

Un tel schéma n'est valable que pour une seule géométrie, un seul matériau et un seul chargement, et de plus un seul type d'erreur. Ce n'est pas suffisant pour déduire que la meilleure règle de maillage trouvée dans ce cas est optimale pour les autres chargements possibles. L'essai d'un nombre suffisant de chargements variés est donc nécessaire. S'il s'avère qu'une règle donne quasi-systématiquement de bons résultats, elle pourra être proposée comme règle générale.

Nous prenons en général, pour les maillages les plus grossiers, de l'ordre de 100 à 200 éléments au moins. Il ne sert à rien au niveau industriel d'optimiser un maillage de quelques dizaines d'éléments dont le calcul a un coût insignifiant. Les méthodes de type r-version (cf. §III.4.2.1) sont plus adaptées à ce cas.

Le nombre maximum d'éléments est limité par le coût du calcul de la solution exacte, de la résolution numérique et de l'évaluation des erreurs. Nous avons pu aller de 3000 à 9000 éléments suivant les chargements adoptés. Il nous a paru excessif, vu les ressources matérielles dont nous disposons, de dépasser 24 heures de calcul et un stockage temporaire de l'ordre de 100 Mo pour un seul maillage. D'autres remarques sur l'obtention des courbes d'optimalité sont présentées au §VII.3.3.2.

3.3. Applications de cette procédure

3.3.1. Cas de la sphère sous pression interne (SPH1)

Le test de ce cas, un des rares connus en élastoplasticité, permet de confirmer ou d'infirmer les lois empiriques qui pourraient être déduites des autres chargements artificiels construits par la méthode inverse. Le problème est à symétrie sphérique ; sa modélisation est bidimensionnelle axi-symétrique. Les maillages construits sur la section droite sont tous à symétrie de révolution : la taille des éléments ne varie qu'en fonction du rayon.

Des lacunes géométriques de manque, sur le côté extérieur, et d'excès sur le côté intérieur, sont

inévitables. Elles interviennent dans la construction de la solution exacte à plusieurs niveaux :

- le déplacement exact n'est pas défini dans les lacunes d'excès. Il est pris égal à celui du rayon intérieur. Les déformations calculées selon (II.1.29) et les forces de volume selon (II.1.30), qui font intervenir le rayon $r < a$ (cf. Fig. IV-A1-7 Annexe IV.1), sont faussées.
- même en supposant négligeables les effets précédents, les forces nodales, calculées par intégration sur un domaine inexact, sont faussées (cf. §IV.6.3.3). L'influence des lacunes géométriques dans l'erreur globale n'a pas été isolée. Nous en ignorons l'ordre de grandeur.

3.3.1.1. Nuages de points obtenus pour diverses erreurs

Nous ne cherchons pas à séparer les règles. Les nuages de points présentent l'aspect des erreurs et les courbes d'optimalité. Des règles générant de bons, mais aussi de mauvais maillages ont volontairement été utilisées. Les erreurs $c_{2\Omega}$ en contraintes et déviateur des déformations sont présentées figure V-3-1.

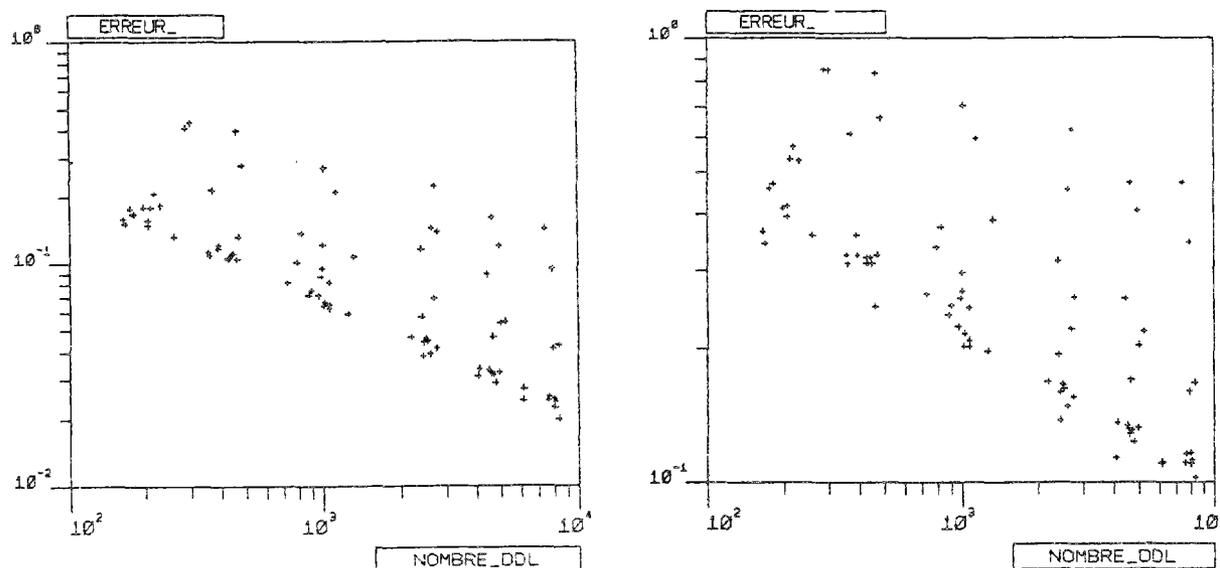


Fig. V-3-3 a b. Erreurs $c_{4\Omega}$ en contraintes, au début du chargement ($t=40$: la structure est élastique) puis à la fin du chargement ($t=120$)

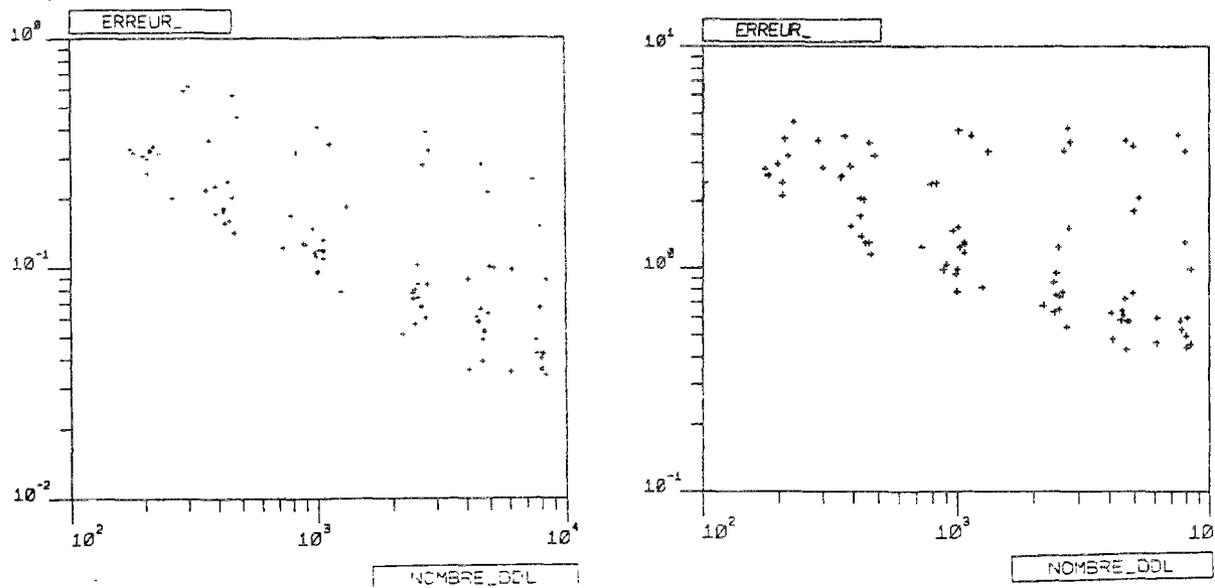


Fig. V-3-4 a b. Erreurs ponctuelles e_{p2} en contraintes, en phases élastique ($t=40$) et plastique ($t=120$)

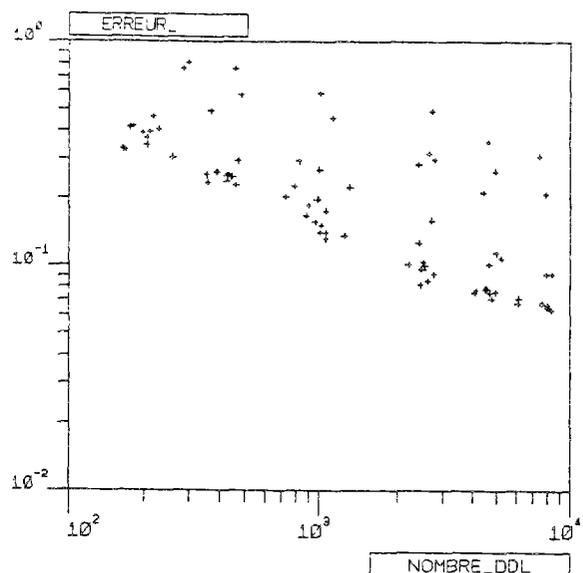
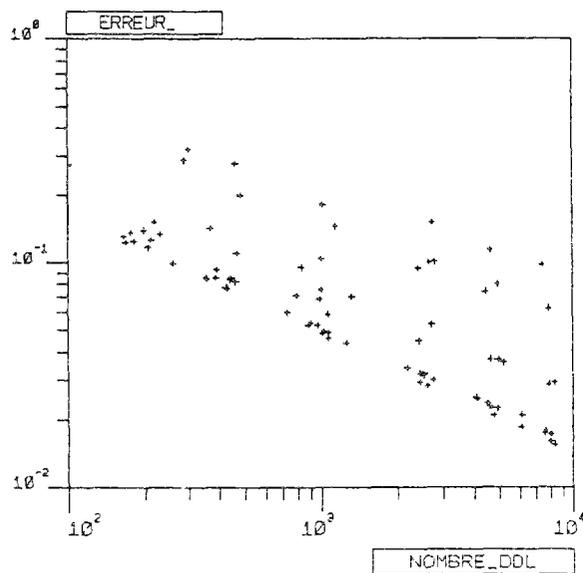


Fig. V-3-5 a b. Erreurs $c_{4\Omega}$ sur les déviateurs des déformations en phase élastique ($t=40$) et plastique ($t=120$)

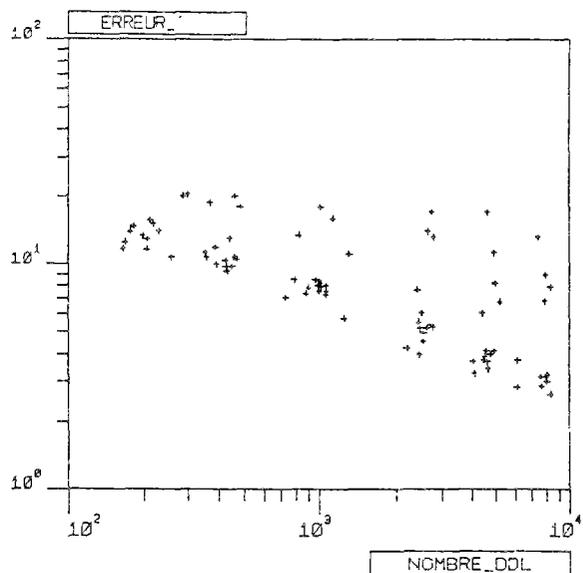
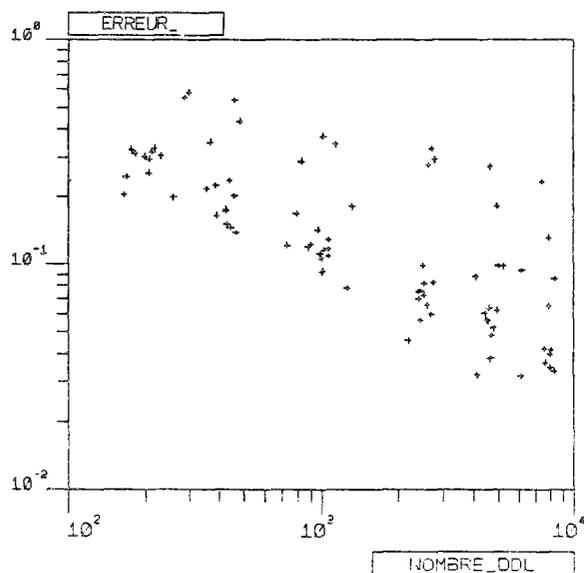


Fig. V-3-6 a b. Erreurs e_{p2} sur le déviateur des déformations, en phases élastique ($t=40$) et plastique ($t=120$)

3.3.1.2. Règles de remaillage

Les courbes d'optimalité sont déduites des figures précédentes. Nous cherchons maintenant les règles s'approchant le plus de ces courbes. Pour conserver la lisibilité des figures, nous ne dessinons que les meilleures règles, les meilleures comme les plus mauvaises étant montrées en bloc dans les nuages de points des figures précédentes. Les 9 règles présentées sont les suivantes :

- R1 : symbole * \rightarrow règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{2\Omega}$ en contraintes
- R2 : symbole \circ \rightarrow règle (III.4.14) avec $\alpha = 0.5$ et $\beta = 1$
- R3 : symbole \times \rightarrow règle (III.4.14) avec $\alpha = 0.66$ et $\beta = 1$
- R4 : symbole $-$ \rightarrow règle (III.4.14) avec $\alpha = 1$ et $\beta = 1$
- R5 : symbole $=$ \rightarrow maillages uniformes
- R6 : symbole \rightarrow \rightarrow règle (III.4.14) avec $\alpha = 0.33$ et $\beta = 1$
- R7 : symbole H \rightarrow règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{2\Omega}$ en énergie
- R8 : symbole I \rightarrow règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{4\Omega}$ en déviateur des déformations

R9 : symbole Y ou \rightarrow règle (III.4.14) avec $\alpha = 1$ et $\beta = 0.5$

sachant que (III.4.14) n'a été utilisée qu'avec $\phi =$ équivalent Mises absolu.

Nous présentons en bloc ces diverses règles sur 6 erreurs différentes :

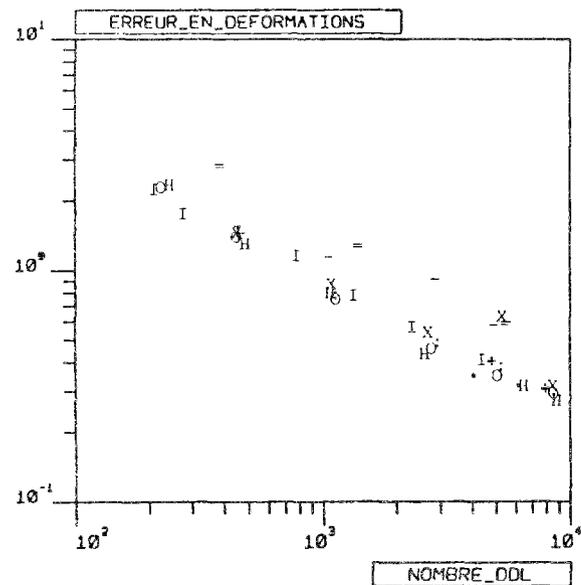
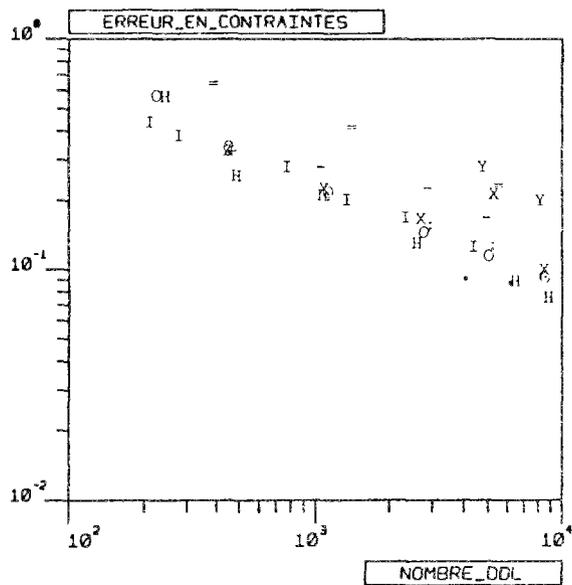


Fig. V-3-7 a b. Erreurs $c_{2\Omega}$ en contraintes et en déviateur des déformations, à $t=120$

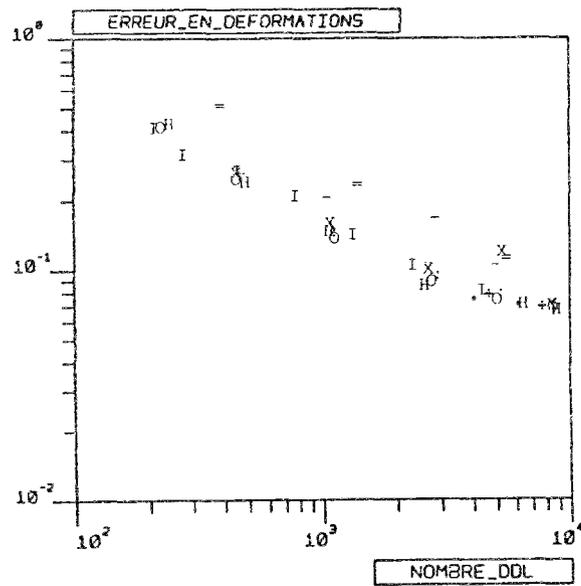
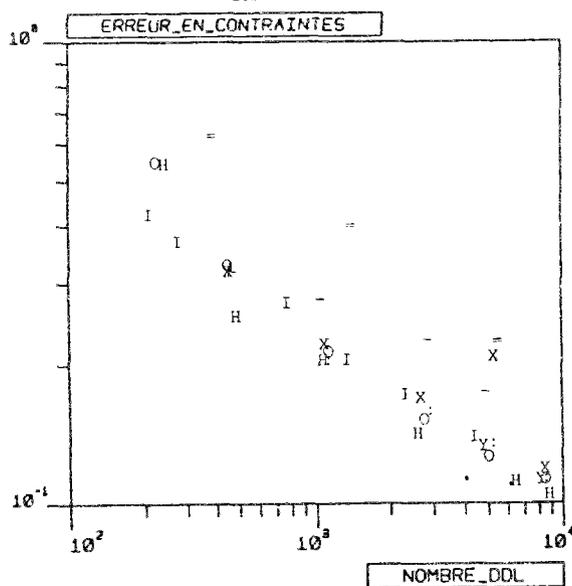


Fig. V-3-8 a b. Erreurs relatives $c_{4\Omega}$ en contraintes et en déviateur des déformations

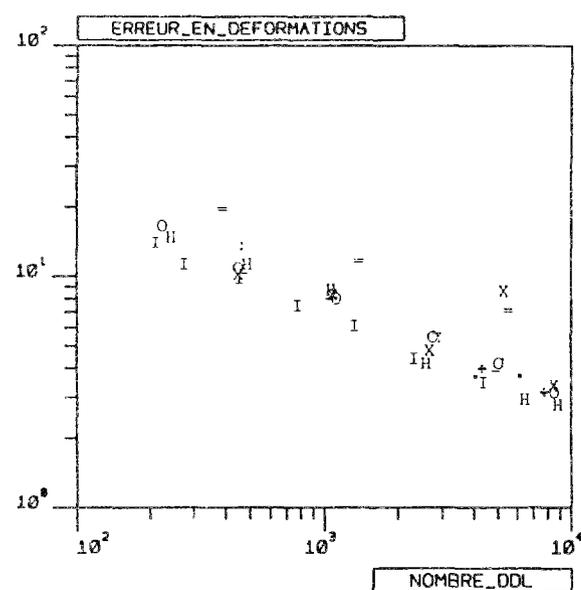
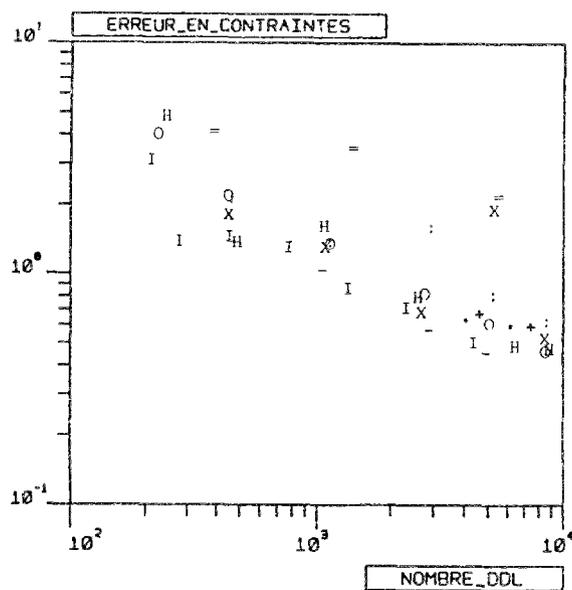


Fig. V-3-9 a b. Erreur ponctuelle e_{p2} sur les contraintes et les déviateurs des déformations

Une remarque importante doit être faite sur les lacunes géométriques d'excès. Ces dernières sont importantes lorsque la taille des éléments est trop grande au voisinage du rayon intérieur. Des points de calcul des erreurs y sont alors définis et l'erreur ponctuelle locale y est élevée. Les règles qui réduisent fortement les tailles au voisinage du rayon intérieur (pratiquement, (III.4.14) avec $\alpha=1$, soit R4) sont donc bonnes pour les erreurs ponctuelles. Leurs erreurs globales sont élevées, car cette répartition des tailles concentre trop d'éléments vers le rayon intérieur et met des éléments trop grossiers vers le rayon extérieur.

Les règles d'optimalité R7 et, dans une moindre mesure, R1 et R8, donnent les erreurs de tout type les plus basses. Les règles empiriques R2 et R3 sont à peu près équivalentes pour toutes les erreurs (à l'exception d'un point erroné pour R3, visible dans toutes les courbes). La règle empirique R6 s'éloigne des précédentes pour les erreurs ponctuelles. Les maillages uniformes (R5) sont mauvais. Les meilleurs paramètres des règles empiriques sont environ $\alpha=0.33$ à 0.66 et $\beta=1$, ou, dans une moindre mesure, $\alpha=1$ et $\beta=0.5$. Les maillages qui en sont déduits sont légèrement moins bons que les optimaux.

Prendre dans (III.4.14) le paramètre $\alpha < 0.5$ (par exemple 0.33) conduit à des éléments dont la taille n'est pas assez différenciée ; $\alpha > 0.5$ donne le contraire. Plus $|\alpha|$ est faible et plus le maillage tend à devenir uniforme.

Evidemment, prendre $\alpha < 0$ conduit à mettre des éléments grossiers là où il faut des fins, et inversement. Cela permet de construire de mauvais maillages, dans un but d'apprentissage (cf. §VII). En ce qui concerne l'aspect des maillages, la figure suivante présente la typologie des maillages optimaux.

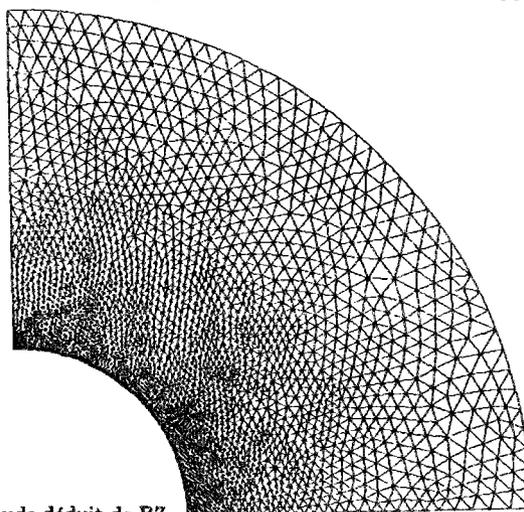


Fig. V-3-10. Maillage à 5881 éléments et 3052 noeuds déduit de R7

3.3.2. Cas de charge non radial NR1

Les calculs sont faits sur la géométrie REC64-1 avec un pas de temps $Dt = 5$. Seule l'erreur globale en contraintes a été calculée pour tous les maillages. L'erreur en déviateur des déformations et les erreurs ponctuelles de tout type n'étaient pas implémentées pour une partie des règles testées ; l'erreur en critère a été calculée pour certaines règles. Les nuages de points et les courbes d'optimalité ont les allures suivantes :

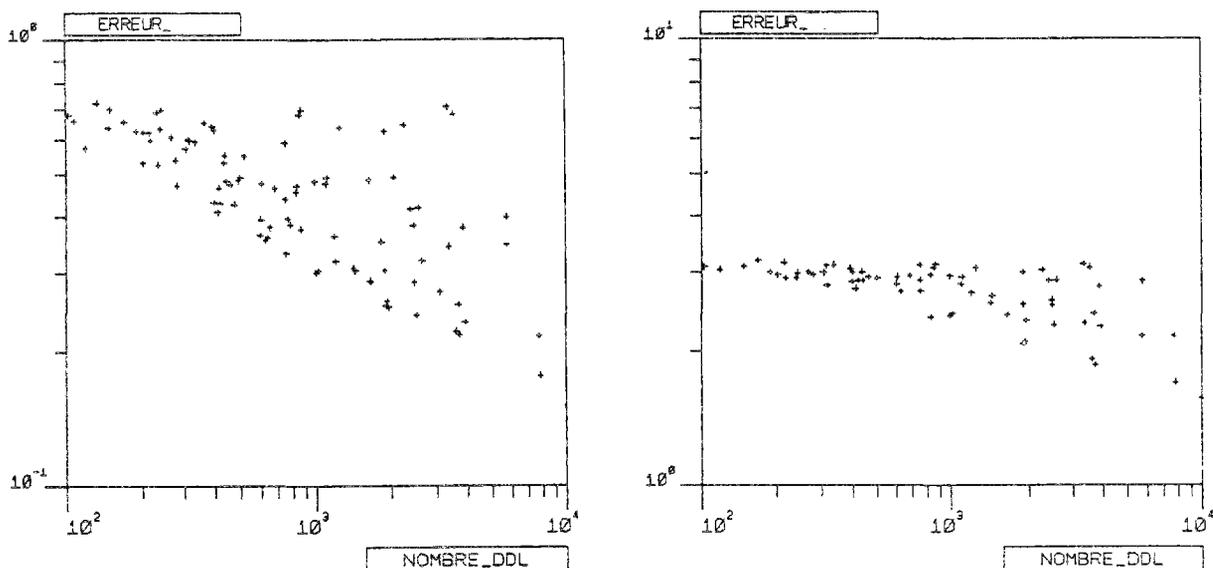


Fig. V-3-11 a b. Erreur $c_{2\Omega}$ en contraintes et en déviateur des déformations

La décroissance de l'erreur en déformations avec le nombre de DDL est très lente en élastoplasticité. Le module de cette erreur est élevé.

Nous avons testé 10 "bonnes" règles. Une partie est manquante pour certaines erreurs, comme nous venons de l'expliquer. Ces 10 règles sont les suivantes :

R1 : symbole + → règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{2\Omega}$ en contraintes

R2 : symbole * → règle (III.4.14) avec ϕ_a , $\alpha=0.33$ et $\beta=1$

R3 : symbole O → maillages uniformes

R4 : symbole x → règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{4\Omega}$ en critère

R5 : symbole - → règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{2\Omega}$ en déformations

R6 : symbole = → règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{4\Omega}$ en énergie

R7 : symbole : → règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{2\Omega}$ en énergie

R8 : symbole H → règle (III.4.14) avec ϕ_r , $\alpha=0.5$ et $\beta=1$

R9 : symbole I → règle (III.4.14) avec ϕ_a , $\alpha=1$ et $\beta=1$

R10 : symbole Y ou → règle (III.4.14) avec ϕ_a , $\alpha=1$ et $\beta=0.33$

sachant que ϕ_a est l'équivalent Mises absolu $\sigma^{eq}(t)$ et ϕ_r est l'équivalent relatif, défini par

$$\phi_r(t) = \frac{\sigma^{eq}(t)}{\text{Sup}_{\Omega} \sigma^{eq}(t)} \tag{V.3.1}$$

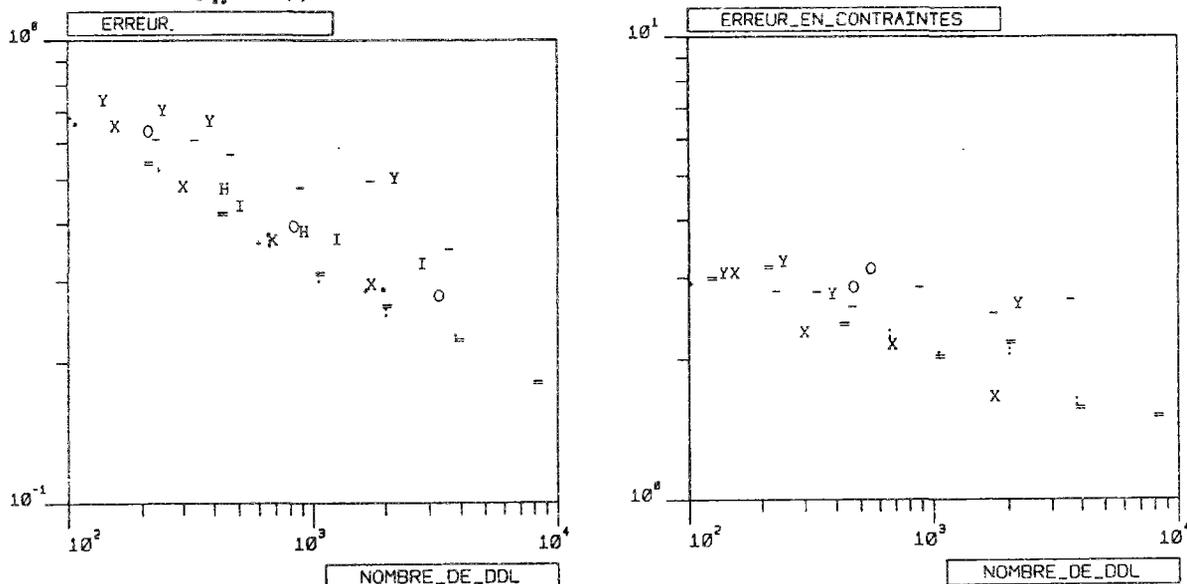


Fig. V-3-12 a b. Erreurs $c_{2\Omega}$ et e_{p2} en contraintes, à la fin du chargement

Les meilleures règles pour l'erreur en contraintes sont R1, R7 et R8, donc les maillages optimaux en contraintes ou en énergie. R6 est assez mauvaise. Les meilleures règles empiriques, R2 et R8, correspondent à un exposant α allant de 0.33 à 0.5.

3.3.3. Cas de charge non radial NR2

Les calculs sont faits sur la géométrie REC64-2 et avec un pas de temps $Dt = 2.5$. Les nuages de points et les courbes d'optimalité ont les allures suivantes :

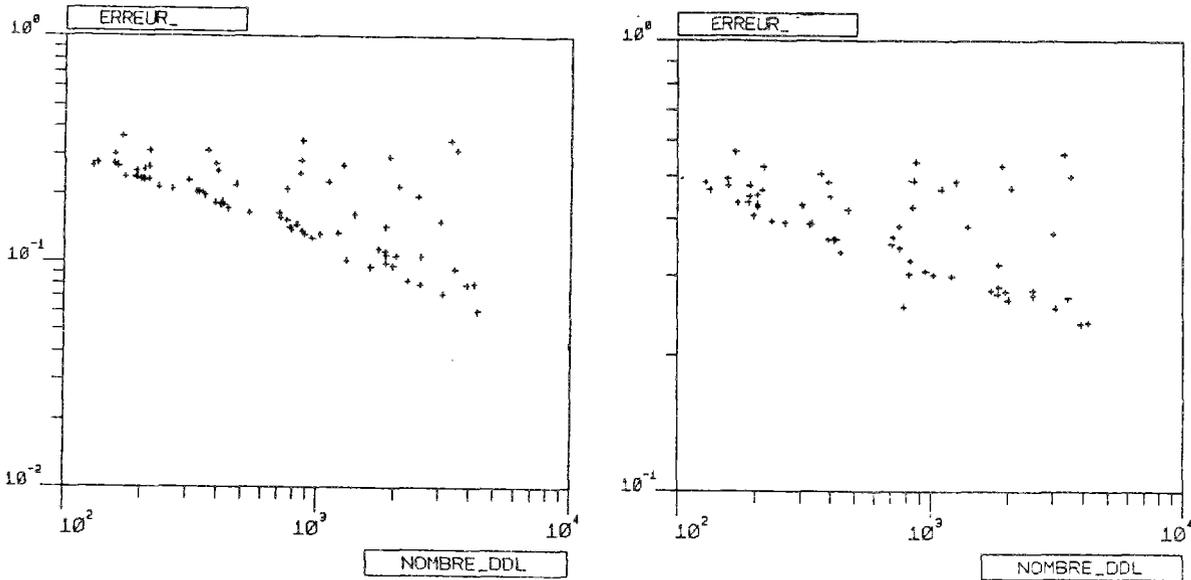


Fig. V-3-13 a b. Erreur $c_{2\Omega}$ en contraintes et en déviateur des déformations

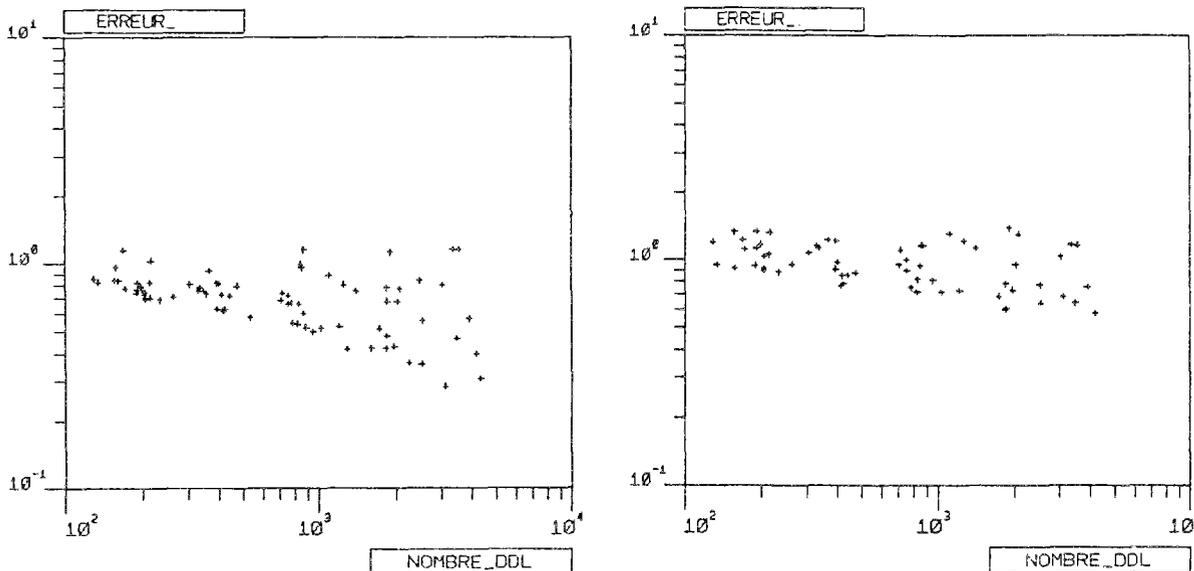


Fig. V-3-14 a b. Sup au cours du temps des erreurs e_{p2} en contraintes et en déviateur des déformations

Nous avons testé 7 "bonnes" règles. Comme pour NR1, une partie est manquante pour certaines erreurs.

R1 : symbole \circ \rightarrow (III.4.14) avec ϕ_r , $\alpha=0.5$ et $\beta=1$

R2 : symbole \times \rightarrow règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{2\Omega}$ en contraintes

- R3 : symbole - → règle (III.4.14) avec ϕ_s , $\alpha=1$ et $\beta=2$???
 - R4 : symbole = → règle (III.4.14) avec ϕ_a , $\alpha=1$ et $\beta=1$
 - R5 : symbole : → maillages uniformes
 - R6 : symbole H → règle (III.4.14) avec ϕ_a , $\alpha=0.33$ et $\beta=1$
 - R7 : symbole I → règle (III.4.14) avec ϕ_a , $\alpha=1$ et $\beta=0.5$
- Les quantités ϕ_a et ϕ_r sont définies dans l'exemple NR1. ϕ_s est la SED.

Ces diverses règles sont présentées pour 4 erreurs différentes :

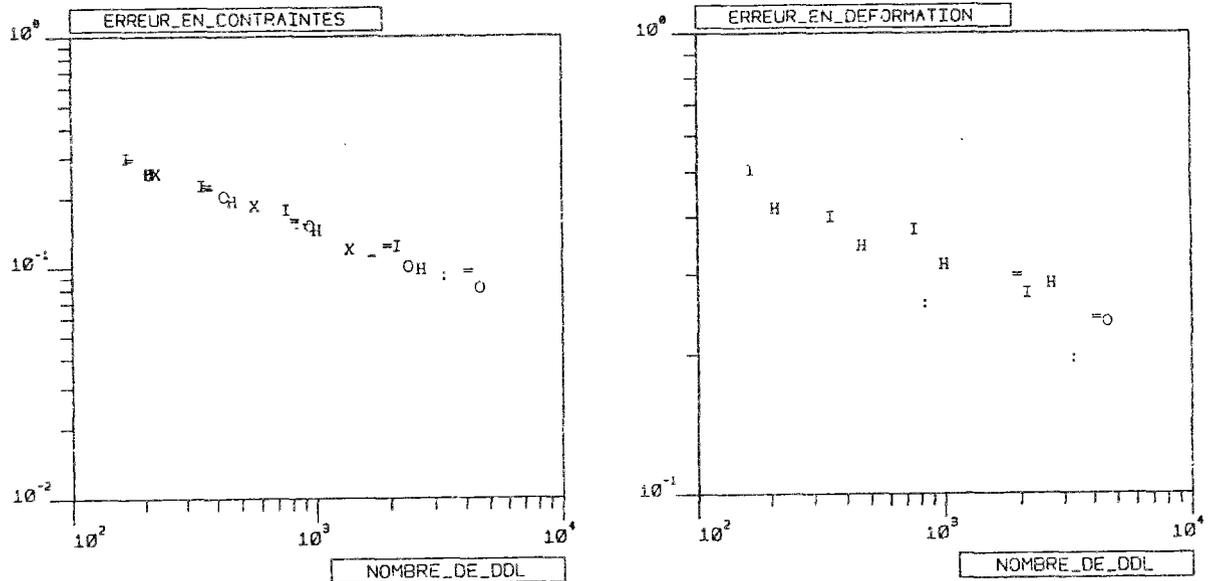


Fig. V-3-15 a b. Erreurs $c_{2\Omega}$ en contraintes et en déviateur des déformations, à la fin du chargement

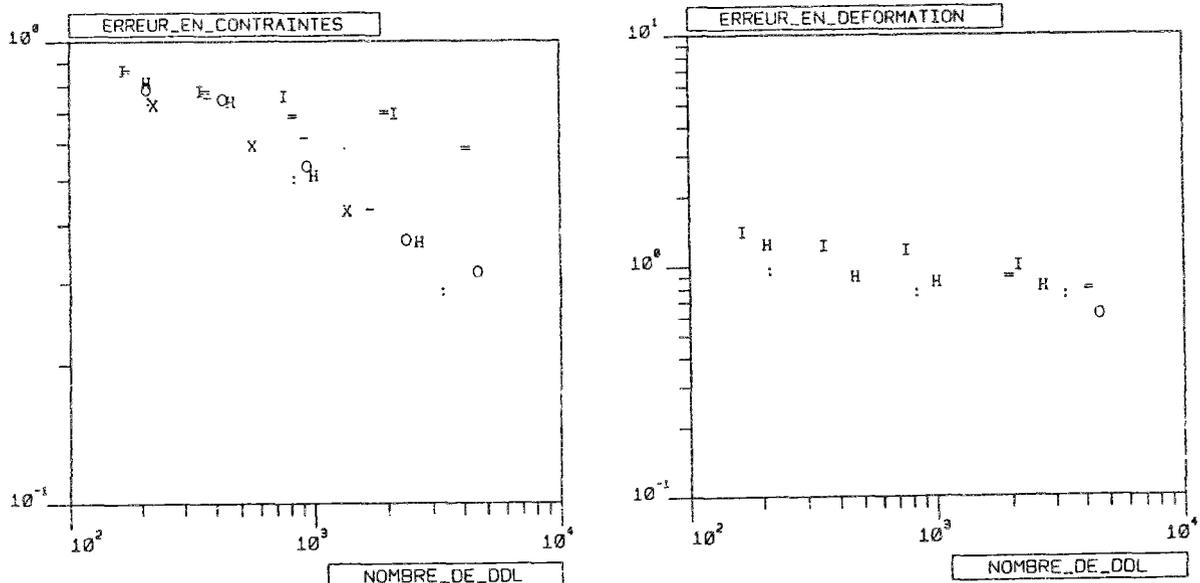


Fig. V-3-16 a b. Erreurs ponctuelles e_{p2} en contraintes et déviateur des déformations

Les aspects de $c_{4\Omega}$ et $c_{2\Omega}$ en contraintes sont quasi identiques. On voit que l'ensemble des règles présentées est équivalent pour l'erreur globale en contraintes. Les autres erreurs permettent de distinguer... les maillages uniformes (R5), les maillages optimaux en contraintes (R2), la règle empirique avec ϕ =équivalent Mises, $\alpha=0.33$ (R6) ou 0.5 (R1) et $\beta=1$. R6 et R9 sont mauvaises.

3.3.4. Cas de charge non radial NR3

Ce chargement est défini sur le domaine REC64-3 et est calculé avec un pas de temps $\Delta t = 2.5$. Dans cet exemple comme dans les suivants, nous n'avons testé que les meilleures règles : les maillages optimaux et (III.4.14) avec $\beta=1$ et $\phi=Mises$, α pouvant varier. Pour NR3, nous présentons

- R1 : symbole \circ \rightarrow règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{2\Omega}$ en contraintes
- R2 : symbole \times \rightarrow (III.4.14) avec ϕ_a , $\alpha=0.5$ et $\beta=1$
- R3 : symbole $-$ \rightarrow règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{2\Omega}$ en déviateur des déformations
- R4 : symbole $=$ \rightarrow règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{2\Omega}$ en énergie

Il n'y a pas eu construction de mauvais maillages. Nous ne présentons que les erreurs en déformations, les erreurs en contraintes étant assez "serrées" pour les 4 règles utilisées, comme sur la figure V-3-15 de NR2 :

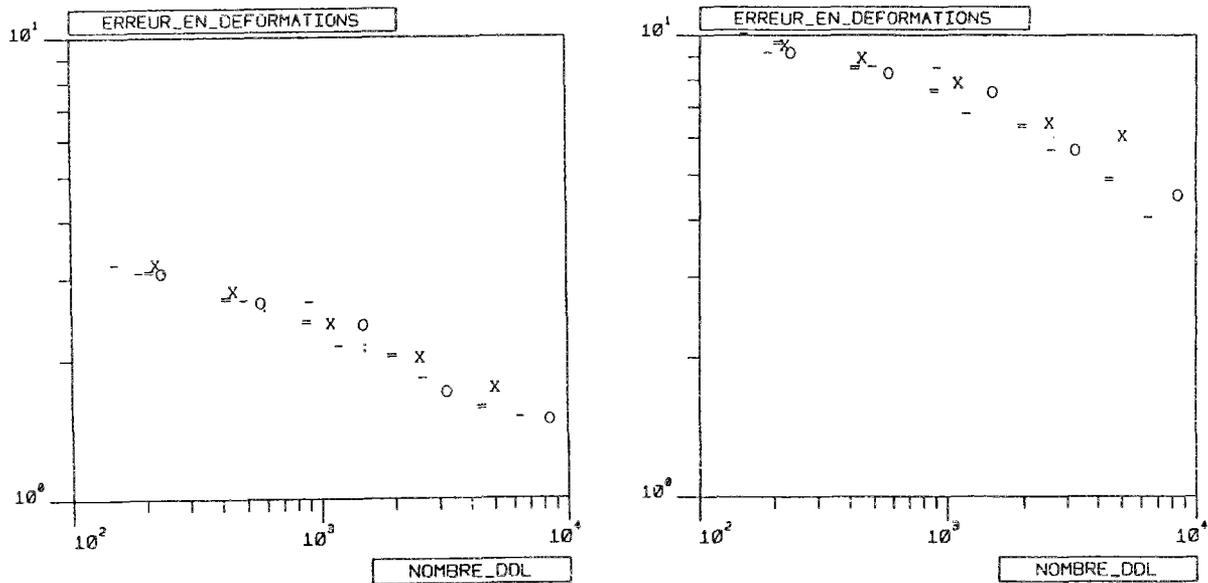


Fig. V-3-17 a b. Erreurs globale $c_{2\Omega}$ et ponctuelle e_{p2} en déviateur des déformations

La règle empirique R2 est un peu moins bonne que les 3 règles d'optimalité. L'exposant $\alpha=0.5$ confirme sa qualité.

3.3.5. Cas de charge singulier NR5

Ce chargement est défini sur FIS2 et est calculé avec $\Delta t = 1.25$. Au début du chargement, une "faible partie" de la structure est plastifiée.

Les erreurs ponctuelles n'ont pas été évaluées (cf. remarque §V.2.3.3). Elles ne peuvent dépasser l'équivalent maxi des contraintes et déformations exactes sur le domaine et au cours du temps, soit plusieurs centaines de fois le seuil ϕ_0 .

Quatre règles de remaillage sont utilisées :

- R1 : symbole \circ \rightarrow règle (III.4.14) avec $\phi=Mises$, $\alpha=0.5$ et $\beta=1$
- R2 : symbole \times \rightarrow règle (III.4.14) avec $\phi=SED$, $\alpha=0.5$ et $\beta=1$
- R3 : symbole $-$ \rightarrow règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{2\Omega}$ en contraintes
- R4 : symbole $=$ \rightarrow règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{2\Omega}$ en déviateur des déformations

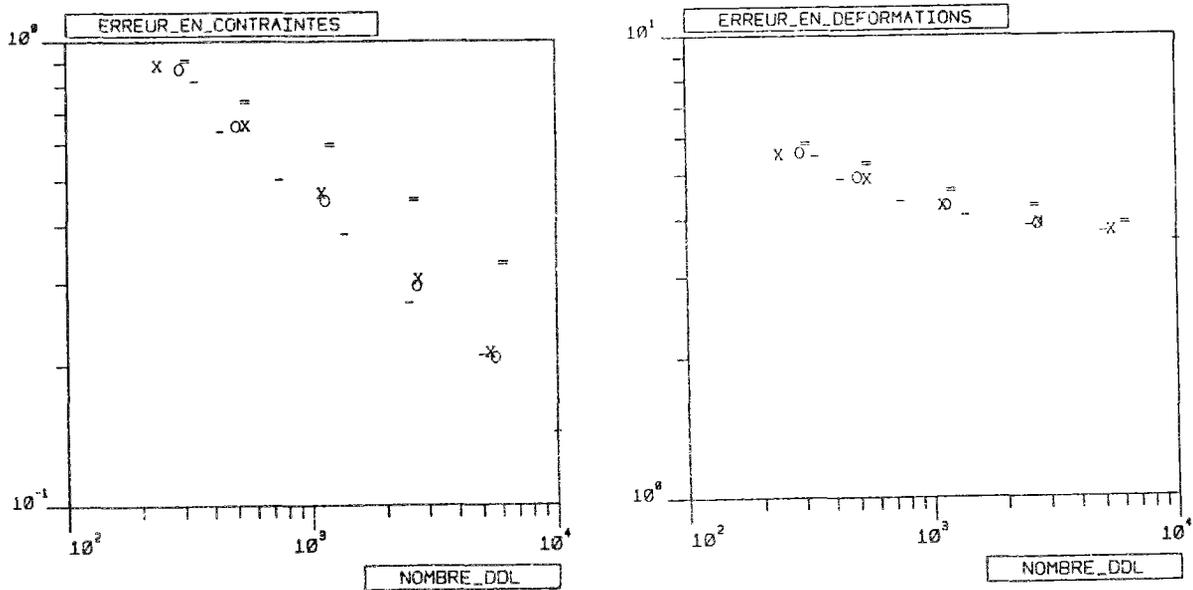


Fig. V-3-18 a b. Erreur $c_{2\Omega}$ en contraintes et en déviateur des déformations

Les maillages optimaux en contraintes sont les meilleurs. La règle d'optimalité en déviateur des déformations est ici mauvaise. Les deux règles empiriques sur le Mises ou la SED sont équivalentes et très proches de l'optimum, l'exposant $\alpha=0.5$ confirmant sa qualité. Ici, une faible modification de l'exposant conduit à changer fortement la répartition des tailles.

3.3.6. Cas de charge singulier NR6

Ce chargement, défini sur FIS2 et calculé avec $Dt=0.625$, est assez spécial : il combine les deux singularités de liaisons de FIS2 et la seule singularité de chargement de NR6. Les champs de déformations et de contraintes exacts sont quasi-uniformes au voisinage de la seconde singularité géométrique.

Trois règles ont été testées :

- R1 : symbole \circ → règle (III.4.14) avec ϕ =Mises, $\alpha=0.5$ et $\beta=1$
- R2 : symbole \times → règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{2\Omega}$ en contraintes
- R3 : symbole $-$ → règle d'optimalité (III.4.7) sur $c_{2\Omega}$ en déviateur des déformations

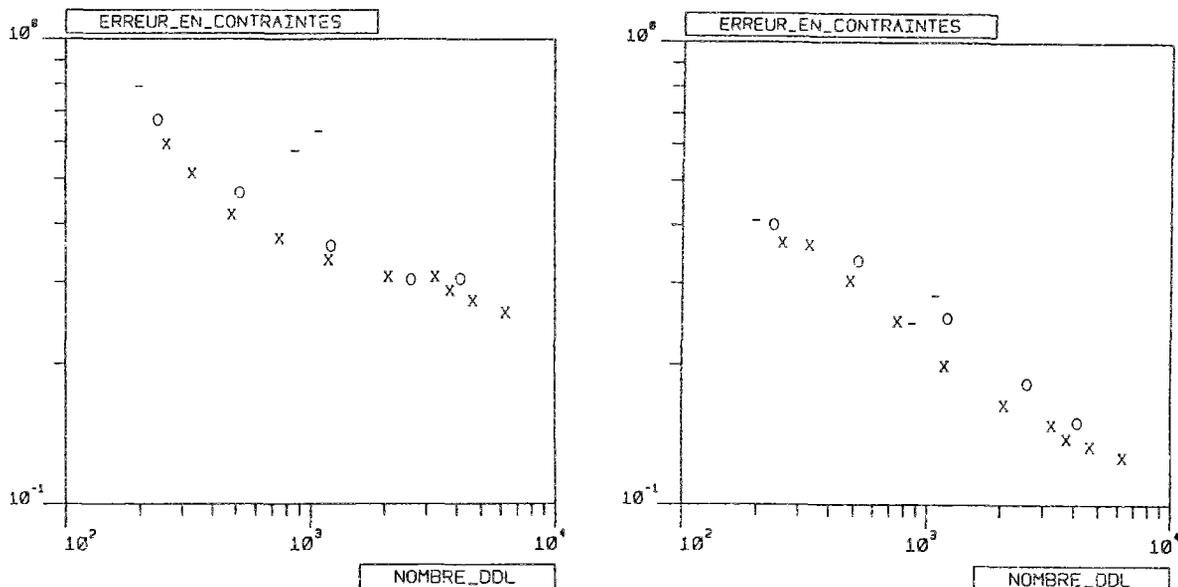


Fig. V-3-19 a b. Erreurs $c_{2\Omega}$ et $c_{4\Omega}$ en contraintes

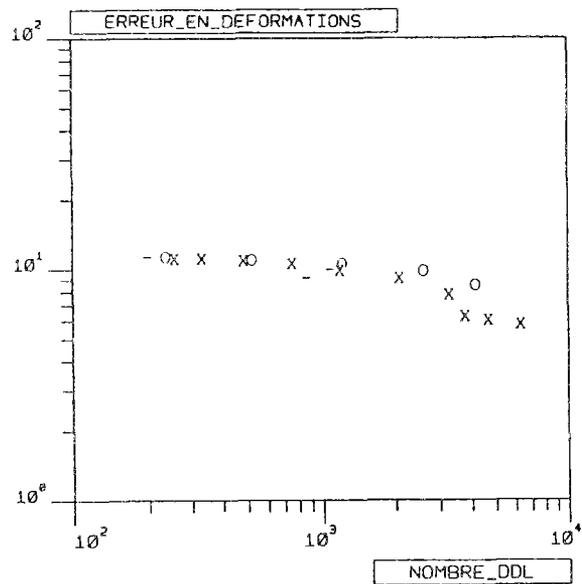
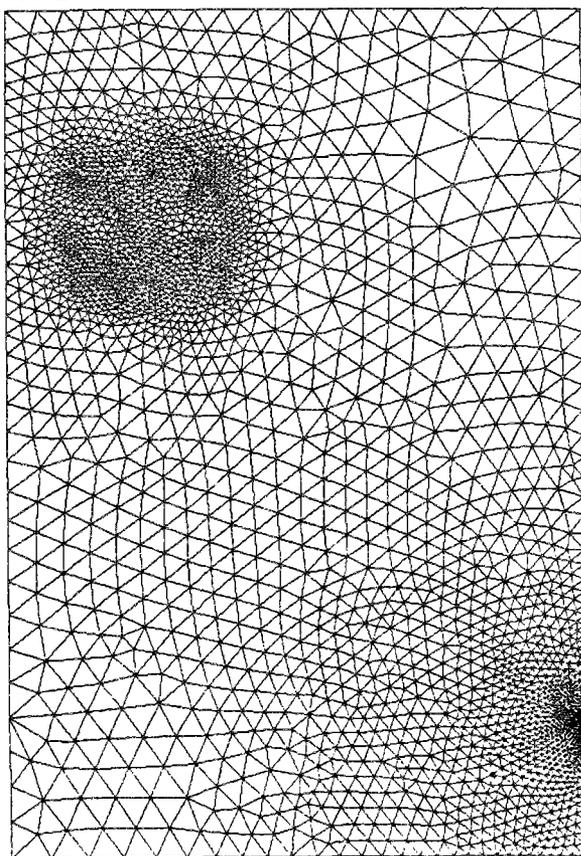


Fig. V-3-20. Erreur $c_2\Omega$ en déviateur des déformations

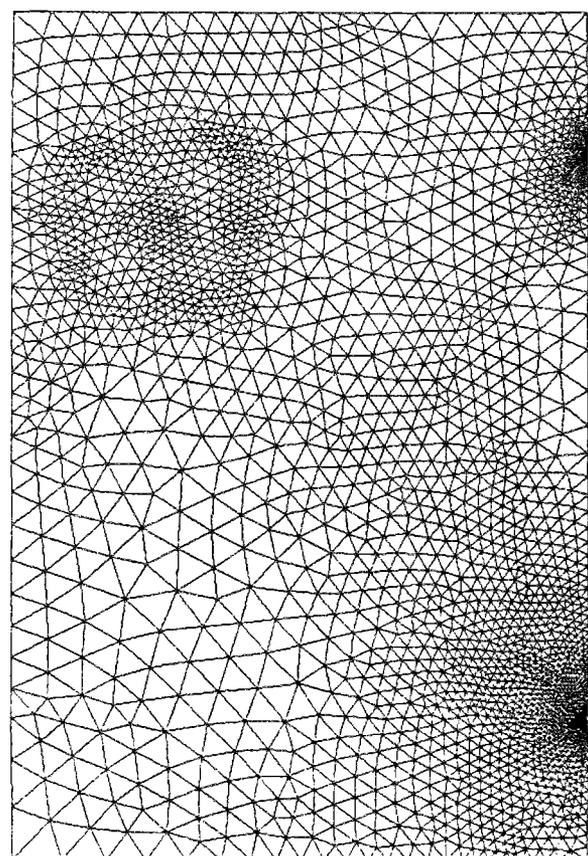
L'erreur en déformation décroît très lentement, mais ce phénomène a déjà été constaté pour plusieurs des chargements précédents. Par contre, l'allure de la courbe d'optimalité en erreur absolue en contraintes est plus surprenante. La décroissance est d'abord rapide puis devient brusquement linéaire, avec une pente nettement plus faible. La règle R3 d'optimalité en erreur en déformations donne des maillages totalement inutilisables.

On peut se dire *a priori* que la singularité géométrique du domaine FIS2, où le champ de contraintes exact est quasi-uniforme, va modifier le champ de contraintes calculé sur la structure supposée élastique. En conséquence, les maillages construits avec la règle empirique devraient être inutilement fins au voisinage de cette singularité. L'allure des maillages construits avec ces 3 règles est la suivante



5828 TRIANGLES 3000 NOEUDS

a



7035 TRIANGLES 3659 NOEUDS

c

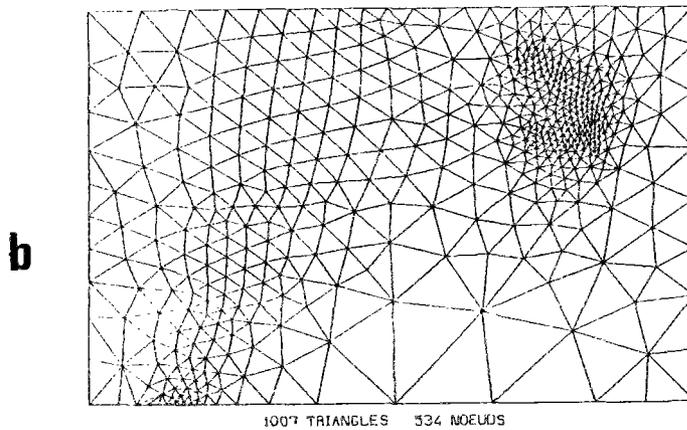


fig. V-3-21 a b c. Aspect de maillages construits avec (III.4.7) en erreur $e_{2\Omega}$ en contraintes, en déformations, puis (III.4.14) avec $\alpha=0.5$ et $\beta=1$

La règle empirique (III.4.14) raffine inutilement le maillage aux alentours de la seconde singularité géométrique, où pourtant la contrainte exacte est parfaitement régulière. Ce gaspillage d'éléments explique l'écart entre les courbes, qui semble faible au niveau des erreurs mais représente un nombre de DDL assez élevé. La progression des tailles des éléments au voisinage de la "vraie" singularité est par contre ressemblante à la règle d'optimalité en contraintes. La règle empirique maille la bosse située en partie haute avec des éléments un peu trop grossiers.

3.4. Conclusion sur cette procédure

Nous avons présenté plusieurs exemples et remarqué pour chacun d'eux les erreurs obtenues et les meilleures règles de remaillage. Il faut maintenant faire une synthèse de ces observations.

3.4.1. Remarques sur les erreurs trouvées

Les niveaux des erreurs sont représentables par les courbes d'optimalité tracées sur le même graphe pour tous les chargements simultanément. Nous avons approché ces courbes par des droites, en cherchant la meilleure approximation pour les nombres de DDL élevés. Nous avons fixé empiriquement un seuil d'erreur quasi-nulle à 10^{-3} , et un seuil d'erreur quasi-infinie à 10^3 . Le premier seuil est valable pour les chargements dont le champ de contraintes est constant (NR20, NR21, NR22, CR30) : dans un tel cas, l'erreur due au maillage est nulle. Le second seuil correspond aux erreurs ponctuelles trouvées sur les chargements singuliers (NR4, NR5 et NR6). Nous avons remarqué au §V.2.3.3. la difficulté de leur évaluation précise ; nous avons retenu pour chacun d'eux la valeur de ce seuil.

Les figures suivantes montrent les courbes d'optimalité pour différentes erreurs. Les chargements non représentés sur chacune d'elles sont soit au seuil inférieur (-3), soit au seuil supérieur (+3), l'un ou l'autre de ces seuils ne pouvant être représenté sur la figure pour des raisons de taille.

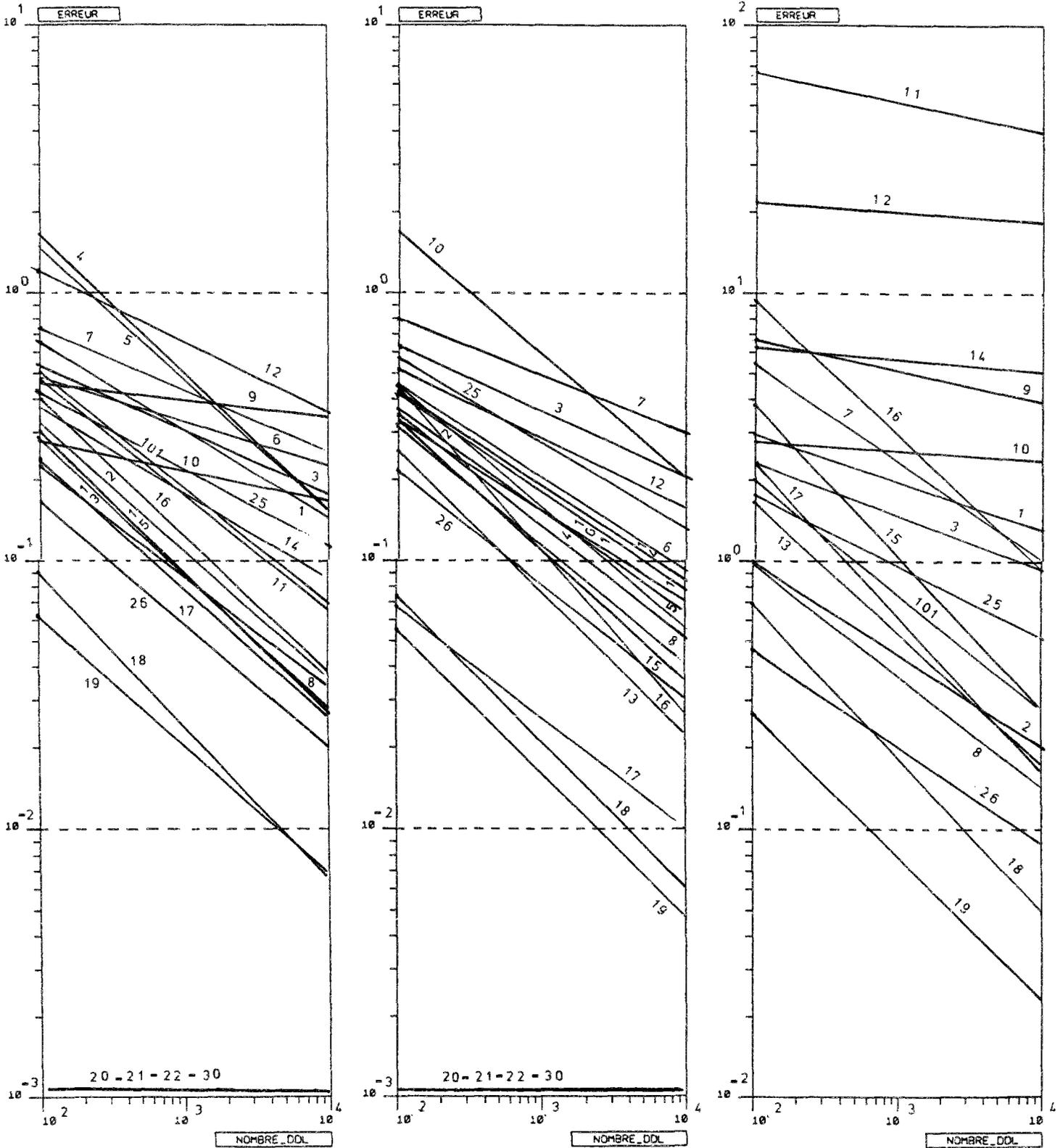


Fig. V-3-22 a b c. Courbes d'optimalité pour les erreurs en contraintes $c_{2\Omega}$, $c_{4\Omega}$ et e_{p2}

Symboles 1, 2, ..., 30 : chargements NR1, NR2, ..., CR30

Symbole 101 : chargement SPH1

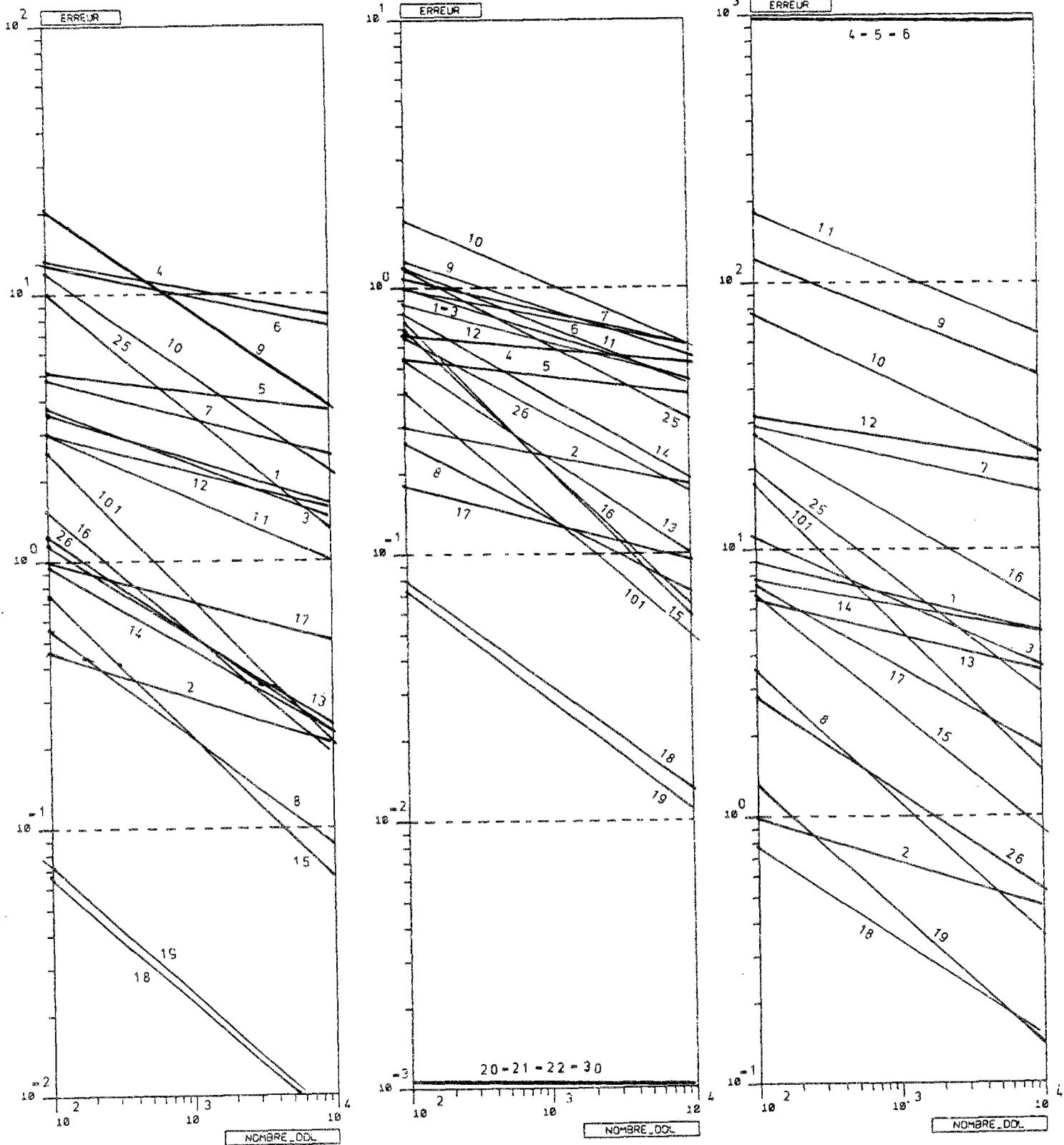


Fig. V-3-23 a b c. Courbes d'optimalité pour les erreurs en déviateur des déformations $c_{2\Omega}$, $c_{4\Omega}$ et e_{p2}

Comme on pouvait s'y attendre, les niveaux des erreurs dépendent du chargement. La concentration apparemment élevée (à l'exception des seuils de -3 et +3) des erreurs relatives $c_{4\Omega}$ en contraintes est due au faible nombre d'exemples traités et ne peut être généralisée. De par leur définition, les erreurs absolues en déformations sont largement plus élevées que les erreurs en contraintes.

Sur les deux figures précédentes, les erreurs de tout type associées aux divers chargements, varient entre des valeurs minimales et maximales. Les valeurs minimales valent systématiquement 10^{-3} et correspondent aux chargements uniformes. Les valeurs maximales varient entre 10 et 10^3 , suivant le type d'erreur choisie. Elles correspondent le plus souvent aux chargements singuliers.

Les vitesses de décroissance sont aussi variables, quoique moins que les niveaux des erreurs.

Les erreurs en déformations décroissent souvent très lentement. En élasticité, un tel phénomène n'existe pas. Nous ignorons si le choix d'éléments plus précis que les triangles P1 utilisés aurait pu augmenter cette vitesse de décroissance.

On constate sur ces figures que les exemples ne sont pas uniformément répartis entre les valeurs minimales et maximales : il y a des "blancs". Il est permis de supposer qu'il existe des chargements dont les courbes d'optimalité tomberaient dans ces blancs ; nos 26 exemples ne sont pas assez nombreux pour couvrir uniformément l'intervalle de variation probable des erreurs.

3.4.2. Remarques sur les règles de remaillage

Dans le cas des chargements trop réguliers (NR1 ou NR2), on remarquera le faible écart qui peut séparer les erreurs globales de maillages d'aspect très différent. On en arrive à se demander s'il n'est pas plus simple de conserver des maillages uniformes... Certains maillages, obtenus par retour de maillages optimaux (les domaines ont été choisis symétriques dans ce but), ont des erreurs à peine supérieures (par exemple 23% contre 17% pour le maillage optimal, dans le cas de NR1).

Les variations plus rapides des champs calculés dans l'espace (par exemple sphère, NR3, chargements singuliers) conduisent à retenir des maillages qui y sont adaptés. Les exemples singuliers, cas extrêmes, montrent l'importance d'un choix correct pour les tailles des éléments. La variation des tailles des éléments au voisinage d'un point singulier est la mieux approchée par la règle (III.4.14) avec $\alpha=0.5$ et $\beta=1$.

Les règles de remaillage à partir des erreurs locales (III.4.7) calculées à partir des erreurs en contraintes ou en énergie sont celles qui donnent le plus souvent les meilleures discrétisations, au sens de la plupart des erreurs globales. La règle d'optimalité appliquée aux erreurs en déformations peut être très mauvaise, ce qui interdit de la proposer comme règle générale.

Les règles d'optimalité ont l'inconvénient de nécessiter une estimation de l'erreur (par exemple, à défaut de solution exacte, celle de (Coffignal, 1987)) et une analyse élastoplastique préalable, sur un maillage qui ne peut pas être trop grossier si on souhaite obtenir un champ de tailles significatif. Le coût de cette analyse n'est pas forcément faible devant celui du calcul final, fait avec le maillage

optimal.

Les règles empiriques de la forme (III.4.14) sont souvent bonnes lorsque les paramètres sont $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$ et $\phi =$ équivalent Mises ou SED. Leur coût est très bas : une simple analyse élastique et le calcul d'un gradient. Elles ne sont pas optimales : il reste un écart, souvent faible, entre la courbe d'optimalité et les maillages qui sont tirés de ces règles. L'exemple des maillages construits sur NR6 le prouve.

Comme ces règles sont tirées d'une analyse élastique, elles ne prennent pas en compte la redistribution des efforts qui se produit en plasticité. Coffignal (1987) remarque que les maillages optimaux en élasticité et en élastoplasticité peuvent être d'aspect nettement différent. Cette différence explique l'écart entre la courbe d'optimalité et la meilleure règle empirique, et le phénomène constaté pour NR6 : les efforts appliqués induisent des contraintes élevées dans la seconde singularité lors du calcul élastique, alors qu'ils l'ignorent si l'analyse est élastoplastique.

Il serait tentant de penser que cette règle donne le maillage optimal élastique. Pour les solutions construites par la méthode inverse en élastoplasticité, la solution exacte élastique correspondant au même chargement est inconnue. Des solutions exactes élastiques pourraient être créées sans difficulté par la méthode inverse, pour valider cette règle. Nous n'avons pas jugé utile d'approfondir dans ce sens, le nombre de travaux sur les maillages optimaux élastiques étant déjà élevé.

3.4.3. Remarques sur l'estimation de l'erreur a priori

La règle (III.4.7) permet, selon ses auteurs, de construire un maillage fils respectant une erreur donnée, à partir de la solution approchée construite sur un maillage père et des erreurs évaluées sur chaque élément.

Il nous est possible de vérifier cette propriété. Un maillage fils optimal au sens d'une certaine erreur est donc demandé en imposant un coefficient de réduction à l'erreur trouvée sur son maillage père. Il est aisé de vérifier si le maillage fils respecte l'erreur demandée. Il sera de plus optimal s'il est situé au voisinage de la courbe d'optimalité du chargement étudié.

Nous avons appliqué ce principe pour construire les séries de maillages selon la règle d'optimalité (III.4.7). Les résultats sont variés, les exemples suivants le prouvent :

- Chargement NR15 :

- maillage 578 DDL : erreurs $c_{2\Omega}(\sigma) = 0.12$; $c_{4\Omega}(\sigma) = 0.1352$; $c_{2\Omega}(\epsilon') = 0.2875$; $c_{4\Omega}(\epsilon') = 0.2812$
- maillage 1919 DDL : erreurs $c_{2\Omega}(\sigma) = 0.0662$; $c_{4\Omega}(\sigma) = 0.0748$; $c_{2\Omega}(\epsilon') = 0.1414$; $c_{4\Omega}(\epsilon') = 0.1387$

Le maillage de 1919 DDL a été construit à partir du maillage à 578 DDL en imposant une division par 2 de l'erreur $c_{2\Omega}(\sigma)$. On constate la très bonne concordance, non seulement sur cette erreur, mais aussi sur les 3 autres.

La taille minimale adimensionnelle d'éléments du champ de tailles calculé pour le maillage fils (la plus importante car elle conditionne son nombre de DDL et donc son erreur) est de 0.0472. La taille minimale effectivement obtenue sur le maillage construit par le mailleur automatique est de 0.0479.

- Chargement NR14 :

- maillage 2442 DDL : erreurs $c_{2\Omega}(\sigma) = 0.1361$; $c_{4\Omega}(\sigma) = 0.1398$; $c_{2\Omega}(\epsilon') = 0.3535$; $c_{4\Omega}(\epsilon') = 0.2943$
- maillage 2835 DDL : erreurs $c_{2\Omega}(\sigma) = 0.1276$; $c_{4\Omega}(\sigma) = 0.1315$; $c_{2\Omega}(\epsilon') = 0.3269$; $c_{4\Omega}(\epsilon') = 0.2724$

Le maillage de 2835 DDL a été construit à partir du maillage à 2442 DDL en imposant là aussi une division par 2 de l'erreur $c_{2\Omega}(\sigma)$. On constate ici une très mauvaise concordance.

L'explication peut être fournie par le mailleur automatique : la taille minimale demandée pour le second maillage est de 0.0081 ; la taille minimale effectivement obtenue est de 0.018, soit plus du double. Cet écart est considérable, il peut s'expliquer par une forme particulièrement perturbée du champ de tailles demandé, que le mailleur n'aurait pas réussi à respecter.

3.5. Règles de remaillage retenues de ces essais

Parmi les règles empiriques donnant un champ de tailles à partir des résultats d'un calcul élastique de la structure, nous constatons que la règle

$$\frac{h}{r_r} = \frac{k}{(r_r \text{ Sup}_t || \text{grad } s_{\text{eq}}(t) ||)^{0.5}} \quad (\text{V.3.2})$$

avec $r_r = \sqrt{S/\pi}$ et $s_{\text{eq}} = \frac{\sqrt{3/2} \mathbf{S}^{\text{el}} : \mathbf{S}^{\text{el}}}{\sigma_0}$, où \mathbf{S}^{el} est tiré d'un calcul élastique,

donne des maillages voisins des courbes d'optimalité, ceci pour tous les types d'erreur et tous les chargements testés, sous réserve que le nombre de DDL soit suffisant. Nous proposons donc cette règle comme règle générale en plasticité. Nous rappelons ses hypothèses :

- effet du pas de temps sur l'erreur rendu négligeable
- domaines 2-D Ω d'aire S , maillages par triangles P1
- correction plastique implicite
- écoulement cinématique linéaire positif

La constante k est déterminée itérativement pour obtenir sur la structure un certain nombre d'éléments (par la loi (III.4.6)). Nous n'avons pas cherché à relier ce coefficient k au niveau atteint par les erreurs. Cette règle empirique ne permet pas de construire un maillage respectant une erreur donnée, si on ignore le nombre d'éléments d'un tel maillage.

Si on dispose d'un moyen d'estimer l'erreur commise en élastoplasticité, alors la règle d'optimalité (III.4.7) prise sur l'erreur $c_{2\Omega}$ ou $c_{4\Omega}$ en contraintes (III.2.28) ou en énergie (III.2.35) est utilisable avec profit. Elle donne de meilleurs résultats que (V.3.1). Il faut éviter (III.4.7) avec l'erreur en déformations (III.2.33), qui est très mauvaise dans certains cas.

4. QUELQUES RESULTATS SUR LES PAS DE TEMPS

Nous présentons brièvement quelques résultats concernant l'influence des pas de temps sur les erreurs obtenues. Le cas quasi-statique est seul considéré. Il n'a pas été possible d'effectuer une

étude systématique sur les discrétisations temporelles, et aucune règle empirique n'est proposée.

4.1. Chargements pseudo-radiaux

Nous savons (cf. §II.4.5) que les méthodes de correction plastique implicite sont exactes pour un chargement radial (ou pseudo-radial). Si l'incrément de déformation est linéaire selon (IV.4.1), la taille du pas de temps n'est pas limitée par la précision de la correction plastique. Les solutions exactes nous permettent de vérifier la remarque faite *a priori* au §III.5.1 en calculant l'erreur à la fin d'un chargement pseudo-radial, et en comparant sa valeur en fonction de la discrétisation temporelle retenue.

Nous présentons le chargement pseudo-radial CR2 calculé sur CAR1 avec un maillage de 250 éléments et des pas de temps $Dt = 1.25, 5$ et 20 . L'évolution au cours du temps des déformations exactes est linéaire par morceaux, avec un pas de temps de 20 . Le pas de temps de calcul d'erreur Δt_E est de 0.25 . L'évolution de quelques forces nodales est présentée figure IV-6-9.

Si la remarque du §III.5.1 est vraie, les erreurs instantanées e_Ω doivent être identiques aux temps $20, 40, 60, 80$ et 100 , quel que soit le pas de temps $Dt (\leq 20)$ retenu. Il convient toutefois que les temps $20, 40, \dots, 100$ correspondent à un temps de calcul t_C .

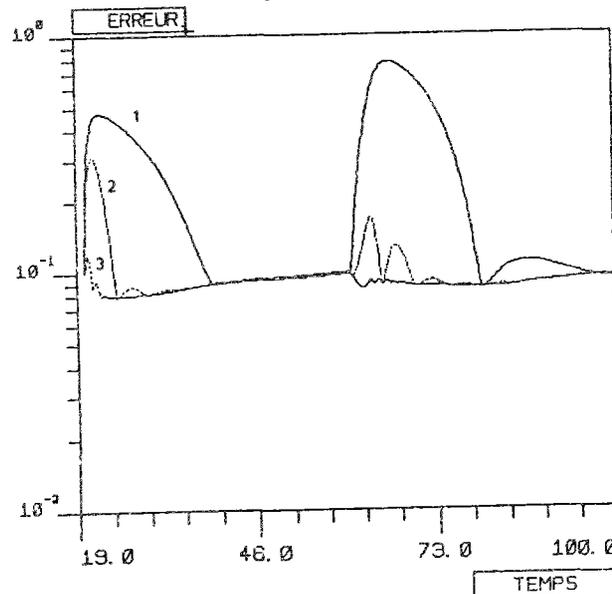


Fig. V-4-1. Erreur $e_{4\Omega}$ en critère pour $Dt = 20$ (1), 5 (2) et 1.25 (3)

On constate que cette propriété est parfaitement vérifiée. Si on se contente de la solution à la fin du chargement ou d'une enveloppe partielle (cf. §III.2.1.5.5) avec $\Delta t_E = 20$, un pas $Dt = 20$ est suffisant. Les erreurs instantanées plus élevées aux temps non multiples de 20 sont dues à l'interpolation linéaire des contraintes entre les temps t_C , qui ne peut pas être exacte en élastoplasticité. Pour cette même raison, les erreurs enveloppes c_Ω sont elles aussi plus grandes pour les grands pas de temps et décroissent avec ces derniers, jusqu'à une valeur qui ne dépend plus que du maillage.

On peut en fait distinguer deux pas de temps limites :

- le premier pas limite correspond à la stabilisation des erreurs instantanées e_{Ω} à la fin du chargement, sans prise en compte des temps intermédiaires. Il vaut 20 dans cet exemple, pour lequel nous savons que la variation en temps des déformations est linéaire par morceaux avec un pas de 20. Pour un chargement pseudo-radial, le premier pas limite est indépendant du maillage et n'est lié qu'à la complexité de l'évolution des déformations au cours du temps, donc à la discrétisation maximale élastique.

- le second pas limite est le pas de temps en-dessous duquel les erreurs enveloppes c_{Ω} ne décroissent plus de manière significative (il reste toujours la décroissance asymptotique de la figure III-3-2). Il peut dépendre du maillage. Une discrétisation temporelle plus fine est superflue. En respectant ce second pas limite, on est sûr de disposer d'une approximation en temps correcte, à tout instant du trajet de chargement. Cela revient à disposer de la solution du problème approché non discrétisé en temps (cf. §II.4.1).

Dans notre exemple CR2 avec un maillage à 250 éléments (cf. Fig. V-4-1), ce second pas limite est légèrement inférieur à 1.25. Pour cette valeur, il reste au temps $t=21$ environ un léger pic qui disparaîtra en diminuant faiblement Δt .

Pour un chargement non radial, deux effets supplémentaires peuvent nécessiter une diminution des premier et second pas limites :

- la discrétisation du trajet de déformations exact en incréments linéaires, qui ne doit pas aboutir à des erreurs trop grandes (cf. Fig. IV-4-1)
- la précision des corrections plastiques (cf. §II.4.5).

4.2. Chargements non radiaux

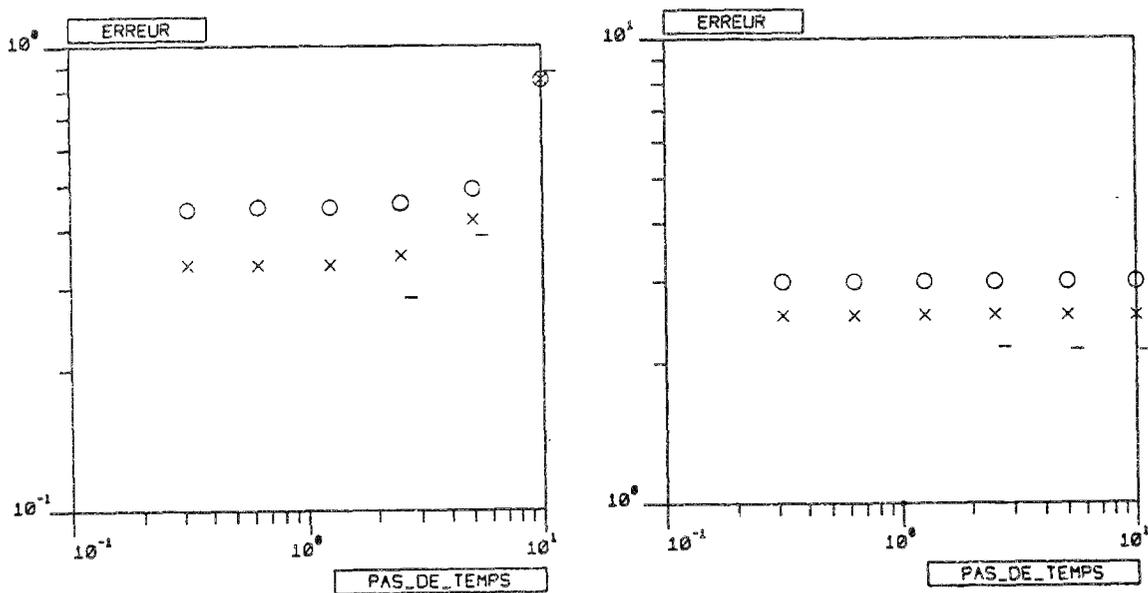


Fig. V-4-2 a b. NR3 : Erreurs globales $c_{2\Omega}(\sigma)$ et $c_{2\Omega}(\epsilon')$, pour des pas de temps de 0.3125, 0.625, 1.25, 2.5, 5 et 10 et des maillages à 224 (O), 564 (x) et 1434 (-) DDL

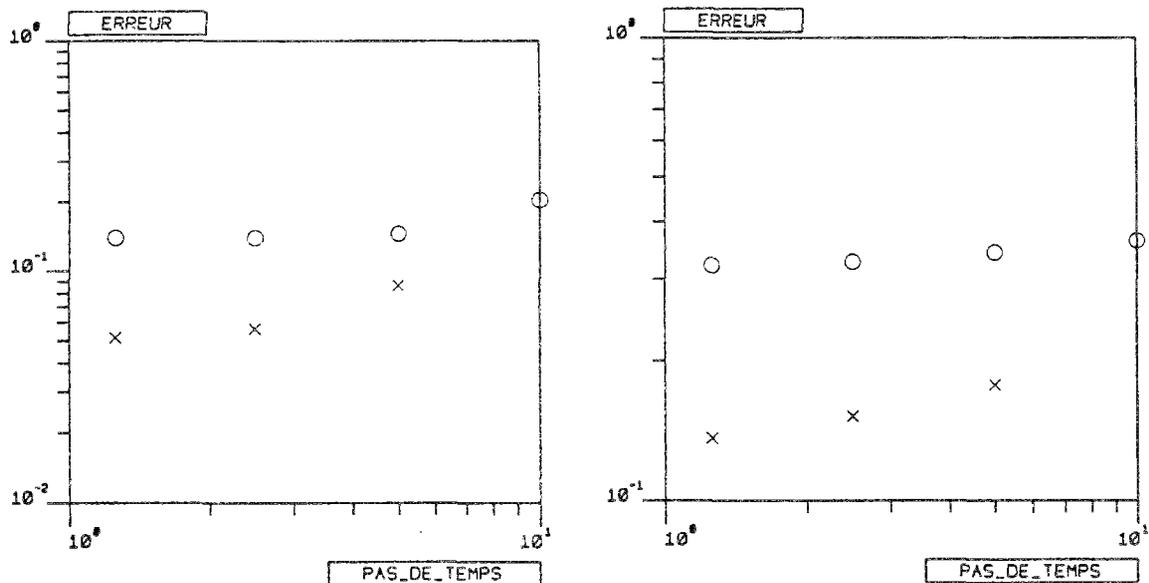


Fig. V-4-3 a b. NR15 : Erreurs $c_{2\Omega}(\sigma)$ et $c_{2\Omega}(\epsilon')$, pour les pas de temps de 1.25, 2.5, 5 et 10 et des maillages à 480 (O) et 3807 (x) DDL

On constate que, pour NR3, les erreurs en déformations sont indépendantes du pas de temps. On pourrait expliquer ceci par l'évolution des déformations exactes dans la méthode inverse, qui est linéaire par morceaux : un pas de temps de 10 suffit pour une interpolation linéaire correcte. Mais il en est de même pour NR15, l'explication est à chercher ailleurs. Pour les autres erreurs, on constate l'existence du second pas de temps limite, qui dépend à la fois du chargement et du maillage.

Le chargement singulier NR4 défini sur FIS1 avec un maillage de 138 éléments donne l'évolution instantanée des erreurs relatives $e_{4\Omega}$ sur les contraintes et les déviateurs des déformations de la figure suivante :

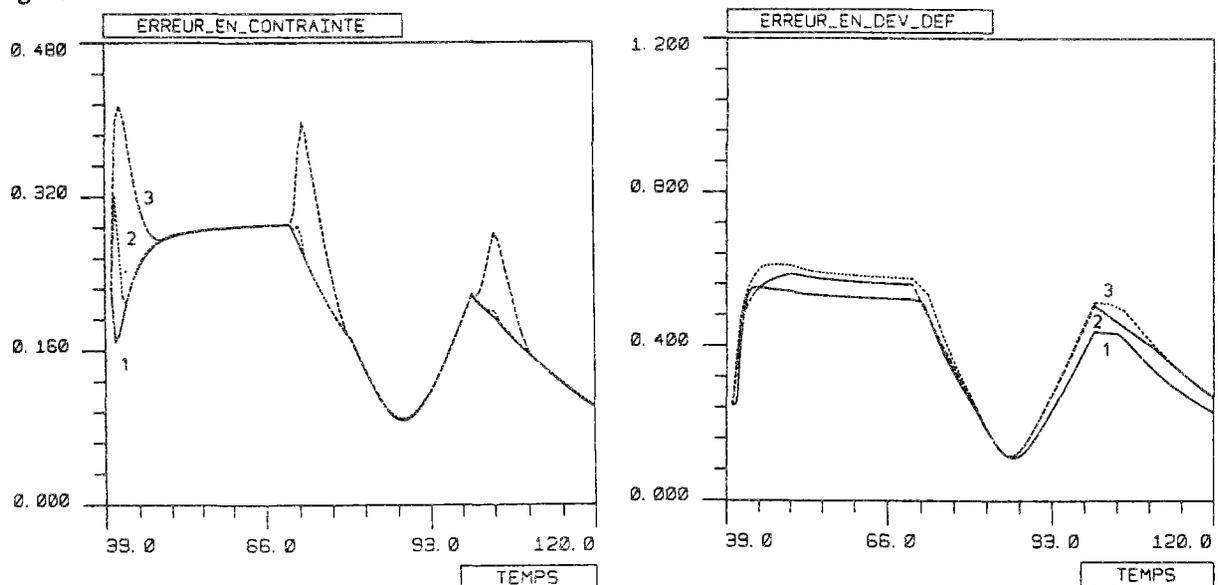


Fig. V-4-4 a b. Erreurs $e_{4\Omega}$ pour un pas de temps de 0.625 (1), 2.5 (2) et 10 (3)

Les pics d'erreur en contrainte ne correspondent qu'à une mauvaise interpolation au cours du temps.

Nous avons également testé l'effet du pas de temps sur les chargements NR21 et NR22. Ces chargements ont un champ de contraintes exact uniforme, donc la part de l'erreur due au maillage est nulle.

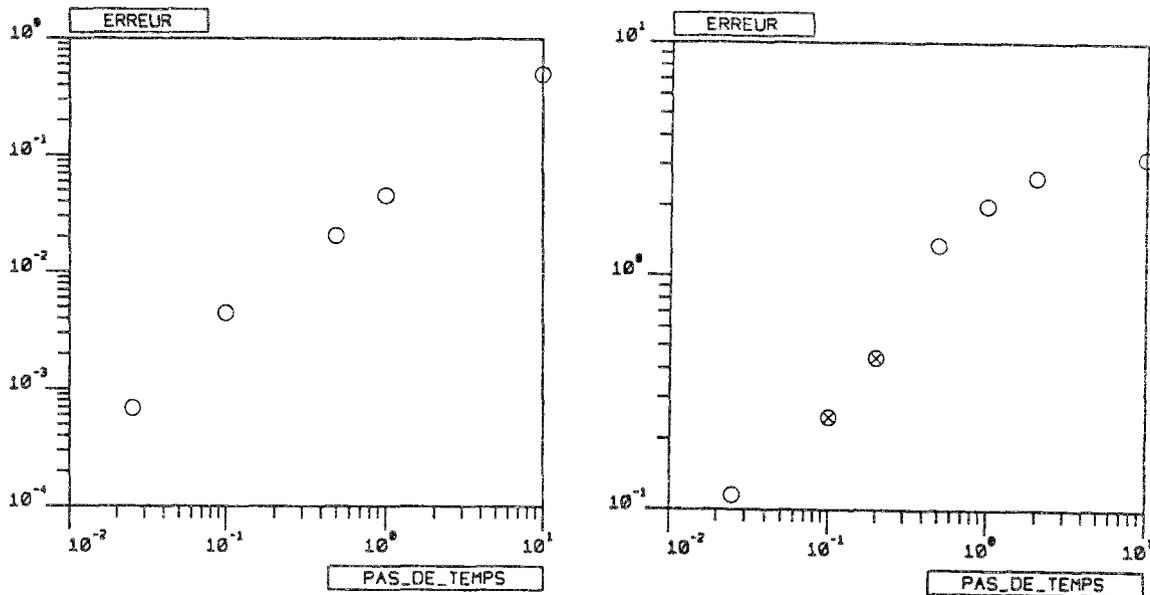


Fig. V-4-5 a b. Erreurs $e_{2\Omega}(\sigma)$ pour NR22 et erreur $e_{2\Omega}(\epsilon')$ pour NR21. Maillages arbitraires

On constate la décroissance quasi-linéaire de l'erreur en fonction du pas de temps. Cette dernière devrait tendre vers zéro avec le pas de temps.

4.3. Incréments élastiques

A chaque temps t_{k+1} d'une discrétisation temporelle, nous pouvons calculer en tout point de la structure les incréments de contrainte élastique

$$\Delta\sigma^{el} = \text{equiv} [\sigma_{k+1}^{el} - \sigma_k^{el}] \quad (V.4.1)$$

en supposant le comportement de la structure élastique. Nous retenons l'équivalent de Mises $\sqrt{3/2} S^{el} : S^{el}$. On peut se demander si le module de ces incréments est lié à l'erreur due à la discrétisation temporelle, ou peut indiquer le pas de temps limite (cf. la remarque de Nguyen et Zarka (1974) au §III.5.1).

On peut calculer son sup sur le domaine Ω_h d'aire S mais aussi sa moyenne. Au cours du temps, nous retenons son sup (après que la plasticité soit apparue dans la structure). Il y a donc 2 valeurs possibles

$$\Delta\sigma_{\max} = \text{Sup}_t [\text{Sup}_{\Omega} \Delta\sigma^{el}(\mathbf{x}, t)] \quad (V.4.2)$$

$$\Delta\sigma_{\text{moy}} = \text{Sup}_t \left[\frac{\int_{\Omega} \Delta\sigma^{el}(\mathbf{x}, t) d\Omega}{S} \right] \quad (V.4.3)$$

Cet incrément est une quantité intrinsèque de la structure pour une discrétisation temporelle donnée.

Nous avons choisi l'évolution en temps des chargements qui ne présente pas de "sauts" d'efforts (cf. §IV.4.3.3), ce qui implique que les incréments élastiques tendent vers zéro si les pas de temps sont indéfiniment affinés.

L'incrément est évalué de manière approchée à partir des résultats d'un calcul numérique. Il peut être très élevé en quelques points si le chargement est singulier. Son sup sera donc élevé mais la moyenne sur le domaine sera généralement ramenée à une valeur "raisonnable".

Les exemples suivants utilisent le chargement régulier NR3/REC64-3 avec 3 maillages de 224, 564 et 1420 DDL, puis le chargement singulier NR4/FIS1 avec 2 maillages de 138 et 384 éléments.

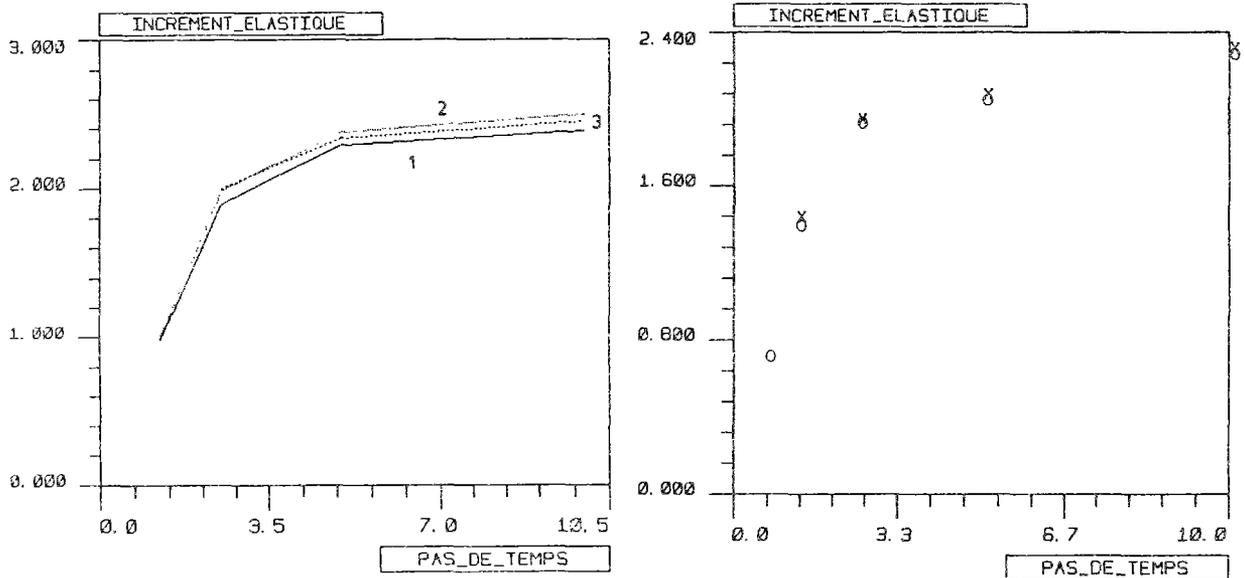


Fig. V-4-6 a b. Incréments élastiques $\Delta\sigma_{\max}/\sigma_0$ pour NR3 et des maillages à 224 (1), 564 (2) et 1424 (3) DDL
puis : incréments moyens $\Delta\sigma_{\text{moy}}/\sigma_0$ pour NR4 et des maillages à 138 (O) et 386 (x) éléments

Ces exemples montrent la faible dépendance vis-à-vis des maillages des incréments moyens (et des incréments maximaux si le problème est régulier). Dans le cas des problèmes singuliers, les incréments maximaux, égaux à plusieurs dizaines de fois le seuil et étroitement dépendants de la finesse du maillage, n'ont pas été retenus.

Deux autres exemples, NR1/REC64-1 et NR3/REC64-3, donnent les incréments suivants :

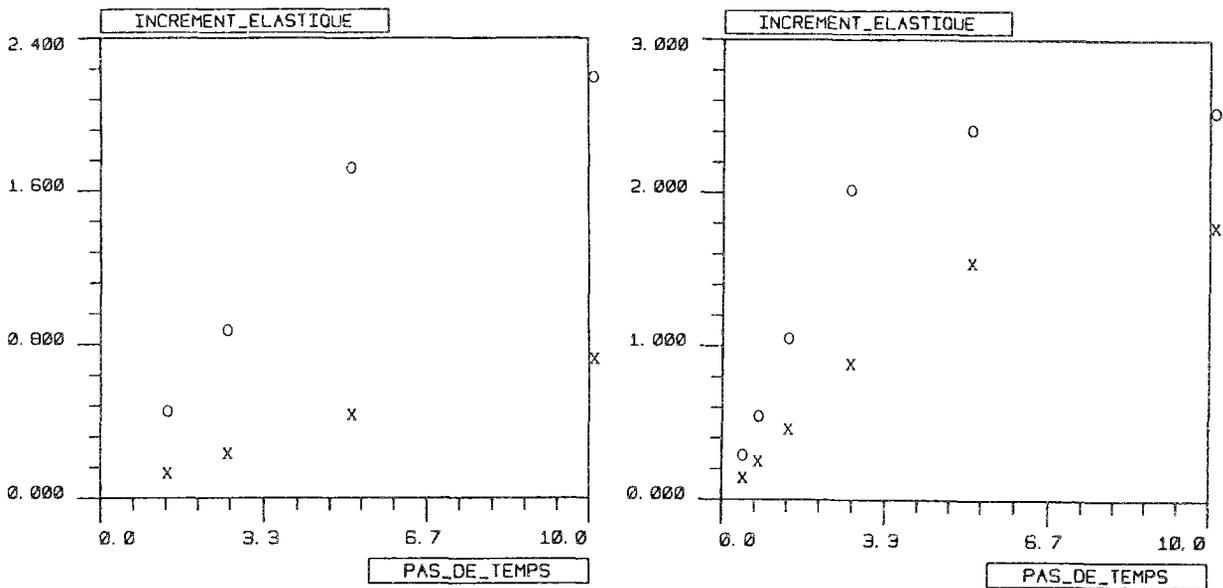


Fig. V-4-7 a b. Incréments $\Delta\sigma_{\max}/\sigma_0$ (O) et $\Delta\sigma_{\text{moy}}/\sigma_0$ (x) pour NR1 et NR3

Les incréments de NR1 comme NR3 croissent linéairement avec le pas de temps, puis moins vite. Le pas maxi retenu correspond à la discrétisation maximale élastique et un pas plus grand n'a pas de sens physique. De telles évolutions ont été constatées sur la plupart des exemples testés, bien qu'un nombre insuffisant de mesures aient été fait pour certains d'entre eux.

L'évolution des erreurs en fonction du pas de temps a été montrée au §V.4.2. Pour un maillage donné, les erreurs décroissent avec le pas de temps jusqu'à un plancher. Ce plancher peut changer si le maillage est changé. On pourrait tenter de relier l'incrément élastique correspondant au pas de temps limite, à des quantités comme par exemple l'erreur due au seul maillage :

$$\Delta\sigma^{\text{el}} \text{ limite} = f(e_{\Omega}), f \text{ fonction décroissante dépendant du chargement.}$$

Par exemple, pour une quinzaine de chargements et des maillages de 200 à 400 DDL, les erreurs $c_{2\Omega}(\sigma)$ varient de 0.05 à 1.5 et les incréments élastiques limites correspondants, de 0.04 à 1.5. Les chargements uniformes comme NR22 ont un incrément limite voisin de zéro, la figure V-4-5 montrant que l'erreur décroît quasi-linéairement avec le pas de temps.

La connaissance de l'erreur e_{Ω} est possible si on connaît les courbes d'optimalité. L'incrément élastique limite, trouvé par une telle règle, donnerait immédiatement le pas de temps : les courbes comme (V.4.6) sont traçables sans disposer de la solution exacte du problème.

Nous avons estimé que nous ne disposions de pas assez de données pour tenter de trouver une telle règle. Il faut aussi tenir compte de l'évolution en temps des déplacements exacts, qui est choisie linéaire par morceaux. Les chargements non radiaux réels peuvent présenter des évolutions courbes.

Aucune conclusion ne peut être tirée prématurément pour la recherche d'un pas de temps optimal. Nous n'avons pu que remarquer que ce dernier est très variable selon les chargements et les maillages, et qu'en général il diminue lorsque la qualité du maillage (donc son nombre de DDL) augmente.

Points essentiels du chapitre V

1. Utilisations diverses des solutions exactes

Les solutions construites par la méthode inverse peuvent être utilisées dans divers buts :

- des tests de validation d'algorithmes, de codes de calcul, etc.
- des tests de performance ou de comparaison pour des éléments, des maillages, des codes complets, etc.
- la formation des utilisateurs : maîtrise des données et des paramètres spécifiques du calcul numérique élastoplastique
- la recherche d'estimations de l'erreur
- la recherche de règles de remaillage.

Nous avons porté notre effort sur ce dernier point. Avant cela, nous présentons quelques exemples d'erreurs atteintes lors des calculs sur plusieurs solutions exactes. L'évolution des erreurs au cours du temps est généralement imprévisible, l'erreur peut décroître lorsque le chargement conduit à la plastification du domaine. Le niveau atteint par les erreurs ponctuelles est souvent très élevé en plasticité.

La fiabilité du calcul des erreurs est rapidement étudiée. Il convient d'évaluer les erreurs avec un minimum de précision, pour ne pas fausser les conclusions qui en seraient tirées, par exemple sur la validité d'une règle de remaillage. Les paramètres importants sont le pas de temps de calcul des erreurs Δt_E (inférieur au pas Δt utilisé lors du calcul numérique : la qualité des résultats est mesurée à tout instant) et le nombre de points d'intégration.

2. Recherche de règles de remaillage

Nous cherchons des règles simples permettant de construire un bon maillage (sans forcément en estimer l'erreur). Les règles de remaillage sont testées sur plusieurs solutions exactes. Pour chacune de ces solutions, une série de maillages déduits des règles testées sont construites et les erreurs correspondantes sont calculées.

La notion de "courbe d'optimalité" est introduite. Une telle courbe est l'enveloppe inférieure des erreurs atteintes en fonction du nombre de DDL, pour tous les maillages possibles.

La définition retenue pour un maillage optimal est la minimisation d'une erreur pour un nombre donné d'éléments ou de DDL. Un maillage optimal est donc situé sur la courbe d'optimalité. Une règle de remaillage est d'autant meilleure qu'elle est proche de la courbe d'optimalité, et ceci pour le plus grand nombre de solutions analytiques.

Une règle de remaillage est proposée dans (Coffignal, 1987) à partir de l'erreur en relation de com-

portement. Nous l'avons appliquée aux erreurs réelles calculées grâce aux solutions analytiques. Elle se révèle la meilleure si elle est utilisée à partir des erreurs globales en contraintes ou en énergie. Elle nécessite un moyen d'estimer l'erreur *a posteriori* et un calcul élastoplastique préalable, donc peut avoir un coût relativement important.

Nous proposons aussi une règle empirique tirée des gradients des contraintes calculées sur la structure supposée élastique. Le coût d'un tel calcul est faible. La qualité de la règle est bonne, quoique légèrement inférieure à la règle précédente. Cette règle a l'expression

$$\frac{h}{r_r} = \frac{k}{(r_r \text{ Sup}_t || \text{grad } s_{\text{eq}}(t) ||)^{0.5}}$$

avec $r_r = \sqrt{S/\pi}$ et $s_{\text{eq}} = \frac{\sqrt{3/2} \mathbf{S}^{\text{el}} : \mathbf{S}^{\text{el}}}{\sigma_0}$, où \mathbf{S}^{el} est tiré d'un calcul élastique. On peut construire par cette règle le champ de tailles d'un maillage fils ayant un nombre fixé d'éléments, par ajustement de la constante k .

3. Etude rapide des pas de temps

Les chargements quasi-statiques sont considérés. Nous cherchons l'influence des pas de temps sur les erreurs.

Dans le cas des chargements radiaux, nous constatons l'existence d'un premier pas limite en-dessous duquel les erreurs instantanées à certains temps caractéristiques du chargement ne décroissent plus. Les erreurs aux autres temps sont dues à une mauvaise interpolation des champs calculés.

Dans tous les cas, il existe un second pas de temps limite en-dessous duquel les erreurs enveloppes ne décroissent plus. L'interpolation des résultats entre les temps de calcul n'augmente pas l'erreur. On peut donc considérer que cette erreur n'est due qu'à la discrétisation spatiale.

Le pas de temps physique utilisé lors d'un calcul élastoplastique n'ayant pas de signification mécanique, nous introduisons la notion d'incrément élastique moyen et maximal. Cette quantité intrinsèque est représentative du trajet de chargement et de sa discrétisation.

Nous n'avons pas trouvé de relation simple entre ces pas de temps limites et des quantités simples caractéristiques du trajet de chargement, comme les incréments élastiques. Nous avons seulement remarqué que le second pas limite dépend étroitement du maillage et du chargement, et que les incréments élastiques moyens qui lui sont associés peuvent varier largement. Le pas de temps limite, et par conséquent l'incrément élastique correspondant, décroît en général lorsque le maillage est affiné (et donc que l'erreur due au seul maillage décroît).

CHAPITRE VI

MISE AU POINT

DE DESCRIPTIONS UTILISABLES

EN APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE

Nous avons précédemment évoqué l'utilisation des solutions exactes par des techniques d'apprentissage automatique. Cette approche nécessite la description des exemples selon des moyens automatiques, fiables et reproductibles. Nous allons présenter dans ce chapitre le principe des descripteurs retenus.

1. ADAPTATION DES EXEMPLES AUX TECHNIQUES D'APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE

1.1. Principe de l'apprentissage

L'approche "apprentissage automatique" est valable pour les problèmes pouvant se mettre sous la forme : caractéristiques → conclusions. Les caractéristiques sont en quelque sorte les "données" de chaque exemple, et les conclusions les "résultats", bien que ces deux termes ne soient pas applicables dans tous les cas.

Le but de l'apprentissage est construire des règles capables de prédire les conclusions en fonction des caractéristiques. Cette approche requiert de disposer d'une base d'exemples dont les caractéristiques et les conclusions sont connues. On sépare cette base d'exemples en deux parties disjointes : une base d'apprentissage, sur laquelle sont construites les règles, et une base de test, sur laquelle les règles sont validées.

Les caractéristiques des exemples sont décrites dans un système de descripteurs (Sebag, 1990). De la qualité de ces descripteurs et des exemples disponibles dépend la qualité des règles construites. Ainsi, une partie des descripteurs peuvent être inutiles ou non pertinents, ou alors manquants pour certains exemples de la base. Ces défauts peuvent conduire certaines méthodes d'apprentissage à fournir de mauvais résultats, voire à être inapplicables.

Une fois les règles construites, la base d'exemples n'est plus nécessaire. On peut la conserver en vue de générer une nouvelle base de règles ou de compléter la base existante, si de nouveaux exemples sont disponibles ultérieurement.

1.2. Forme de la description d'un exemple

Les méthodes d'apprentissage permettent de générer une loi reliant le vecteur des descripteurs à m composantes au vecteur des conclusions à p composantes. Le nombre de descripteurs, leur ordre et leur signification doivent être exactement les mêmes pour tous les exemples, quelle que soit la complexité de ceux-ci. Chaque "coordonnée" de ces vecteurs, qui représente un descripteur, doit être présente (ou déclarée indéterminée) et avoir la même signification. Les p composantes du vecteur conclusion d'un exemple sont connues au moins en partie (et indéterminées pour un cas inconnu).

1.3. Propriétés d'une description

Le choix d'une bonne description est primordial pour toute tentative d'apprentissage automatique. Pour celui qui l'a généré, un exemple représente quelque chose de concret, de complet, de bien défini. Les traitements ultérieurs voient la description de l'exemple et non l'exemple lui-

même, en d'autres termes la carte du territoire et non ce dernier ; aussi faut-il que cette représentation soit correcte.

La description d'un objet quelconque peut être vue à deux niveaux :

- on retient d'abord les caractéristiques de l'objet qui semblent significatives ;
- on cherche ensuite à représenter ces caractéristiques par des descripteurs.

Par exemple, on peut estimer que la caractéristique "état de surface" d'une pièce mécanique usinée est significative pour l'étude de sa durée de vie en fatigue. Il faut maintenant décrire cet état de surface. On peut retenir par exemple la dernière phase d'usinage de la pièce (ébauche ; pièce rectifiée ; pièce polie ; pièce superfinie), ou la valeur numérique de la rugosité, etc.

Pour ce problème de tenue en fatigue, d'autres caractéristiques interviennent : matériau constitutif de la pièce, chargement, traitements thermiques éventuels, etc. Chacune d'elles doit aussi être décrite.

La description d'un objet ne peut généralement pas être exhaustive ; de plus, cela n'est pas nécessaire. Seules les caractéristiques nécessaires au problème d'apprentissage donné doivent être retenues, les autres sont superflues.

C'est à ce niveau qu'intervient l'expert. Il doit séparer, dans les caractéristiques de l'objet à décrire, ce qui est utile de ce qui est superflu. A cette étape, il faut prendre garde de n'éliminer *a priori* que ce qui est réellement inutile. Il vaut mieux conserver une caractéristique dont l'utilité est douteuse, que d'en retirer une dont le pouvoir discriminant est réel (mais non évident *a priori* aux yeux de l'expert). Les méthodes d'apprentissage doivent permettre de rejeter les descripteurs non significatifs. Le problème doit cependant rester traitable (cf. §VI.1.3.2).

Dans la suite de ce paragraphe, nous donnons quelques indications sur les propriétés que doivent vérifier les descripteurs d'un objet.

1.3.1. Suffisance

Un système de descripteurs doit d'abord être fixe : tous les objets sont décrits dans le même système de descripteurs. Rien ne peut être appris si chaque exemple possède son propre système de description.

Un tel système est suffisant si on vérifie

Conclusion (E_1) \neq Conclusion (E_2) \Rightarrow Description (E_1) \neq Description (E_2)

pour tout couple d'exemples E_1 et E_2 *non contradictoires*.

Deux exemples sont contradictoires si leurs descriptions sont identiques et leurs conclusions incompatibles. Au moins l'un d'entre eux est erroné. Cela se produit dans deux cas de figure :

- l'un au moins des deux exemples est erroné ; on dira que la base est bruitée ;
- des descripteurs discriminants sont manquants, la description ne peut donc différencier ces exemples. Cette absence introduit des incohérences dans la base d'apprentissage, qui est dite inconsistante.

Dans ces deux cas de figure, les méthodes d'apprentissage doivent être assez robustes pour supporter

le bruit et l'inconsistance de la base d'exemples.

La description d'un objet n'est généralement ni injective ni surjective. Cela implique :

- qu'à partir de la description, on ne peut généralement pas retrouver l'objet ;
- que deux exemples différents peuvent être décrits de façon identique. Ce fait est sans conséquence si les conclusions sont elles aussi identiques ou voisines. Dans ce cas, les exemples sont équivalents *pour le problème d'apprentissage étudié.*

1.3.2. Coût

Les descripteurs ne doivent pas être trop nombreux pour être traitables en un temps raisonnable. Le coût propre de la description d'un exemple doit aussi être raisonnable. Le coût de la recherche des règles augmente un peu avec le nombre d'exemples, mais beaucoup avec le nombre de descripteurs. Par contre, une fois les règles trouvées, le traitement d'un cas inconnu, par utilisation de la base de règles, est très rapide et augmente peu avec le nombre de descripteurs.

Il y a donc un juste milieu à trouver entre la suffisance des descripteurs, et le coût de leur obtention et de leur traitement.

1.3.3. Sens physique

Les descripteurs doivent être indépendants de tout ce qui n'est pas significatif. Par exemple, si on cherche à décrire la forme d'une pièce, la description doit être indépendante de la position de la pièce dans l'espace. En calcul des structures, les caractéristiques non significatives sont notamment les unités du calcul, les systèmes d'axes de coordonnées, etc. Là encore, l'expert doit choisir ses descripteurs dans ce but. Il est souhaitable que la description de deux objets physiquement équivalents soit identique.

La description d'un paramètre dimensionné peut être tentée de deux façons :

- soit on choisit une fois pour toutes un système d'unités et on exprime le paramètre dans ce système, pour tous les exemples (et tous les cas inconnus) ;
- soit on rend ce paramètre adimensionnel en le divisant par une quantité "de référence".

1.3.4. Stabilité et indépendance de l'observateur

La description d'un objet peut être définie de façon calculable ou être demandée à un expert (par exemple un diagnostic médical).

Dans ce dernier cas, la base d'exemples peut contenir des exemples différents décrits par des experts différents. La base sera d'autant meilleure que les descriptions retenues seront plus indépendantes de l'expert qui les a formulées. Le problème se pose de l'unicité de la description (cf. §VI.1.3.1).

On pourrait penser *a priori* qu'une description calculable élimine la subjectivité et l'imprécision dues à l'intervention de l'expert, et en conséquence est parfaitement fiable. En fait, tout dépend de la stabilité du calcul qui conduit à la description.

1.4. Types de descripteurs

Les descripteurs peuvent être de plusieurs types. On peut citer :

- les réels : un descripteur a une valeur réelle, qui peut *a priori* varier dans $]-\infty, +\infty[$, mais qui généralement varie entre deux bornes a et b non forcément connues. La variation du descripteur est supposée continue : si deux exemples sont proches, leur description est voisine ; inversement, deux descripteurs proches décrivent deux réalités voisines.
- les entiers : le descripteur est un nombre entier, quelconque ou compris dans un intervalle. Comme pour les réels, l'ordre des valeurs intervient ;
- les booléens : un descripteur vaut 0 ou 1, vrai ou faux...
- les multivalués : un descripteur peut prendre une valeur dans un ensemble fini. Ces valeurs peuvent être représentées par les éléments de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Sont à classer dans les multivalués les numéros donnés à des objets (comme les départements français), les chaînes de caractères (noms de couleurs, de personnes, codes de produits...), etc. Ce codage ne prend pas en compte l'ordre des valeurs ; deux valeurs successives d'un même descripteur peuvent n'avoir aucun rapport entre elles.

Les divers traitements d'apprentissage automatique peuvent exiger des descripteurs codés sous un ou plusieurs des types précités. Ainsi, les algorithmes de régression permettent le traitement de descripteurs numériques (Diday, 1985) ; les algorithmes de type arbre de décision sont essentiellement adaptés aux multivalués (Breiman, 1984) ; les algorithmes de généralisation symbolique (Ganascia, 1987), aux booléens ou aux multivalués.

Les descripteurs doivent être éventuellement recodés, compte tenu des possibilités de représentation disponibles. Par exemple, si un traitement n'accepte pas les descripteurs numériques, ces derniers doivent être segmentés (par exemple Lebowitz, 1985) et recodés en multivalués. Une partition en intervalles disjoints est définie sur l'ensemble des valeurs prises par un descripteur. Une valeur réelle est ensuite codée par le numéro de l'intervalle à laquelle elle appartient.

La discrétisation est aussi faite sur une base d'exemples. Si cette dernière est incomplète, il est possible que les descripteurs d'un cas inconnu tombent hors des intervalles trouvés lors de la discrétisation. Dans ce cas, les descripteurs sont codés comme indéterminés, ce qui élimine une information *a priori* disponible.

2. DESCRIPTION DE LA GEOMETRIE D'UN OBJET

Nous verrons plus loin que plusieurs des caractéristiques d'une structure se ramènent à des domaines de \mathbf{R}^n dont la forme doit être décrite. Nous présentons dans ce chapitre plusieurs techniques de description de formes, sans nous attacher à ce que ces formes représentent.

2.1. Types d'objets à décrire

2.1.1. Domaine Ω dans \mathbb{R}^n

Un tel domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ est supposé connu et fixe.

La frontière $\partial\Omega$ peut contenir des informations complémentaires. Par exemple, en mécanique des structures, on sépare $\partial\Omega$ en deux parties $\partial_u\Omega$ et $\partial_F\Omega$. Cette séparation est une caractéristique de la structure et doit être décrite.

2.1.2. Champ ϕ scalaire défini sur Ω

Certaines données à décrire sont constituées de champs d'isovaleurs *scalaires* pouvant être mis sous la forme $\phi = f(x, y)$ ou $\phi = f(x, y, z)$ et constituant donc des surfaces gauches appuyées sur un contour, ou des hypersurfaces appuyées sur un volume. Il n'est pas judicieux de décrire directement le volume compris entre le domaine et la surface $\phi = f(\mathbf{x})$, comme un domaine de \mathbb{R}^{n+1} . En effet, ce volume s'appuie sur une base Ω incluse dans \mathbb{R}^n , qui est identique pour tous les champs ϕ calculés sur un même domaine. La solution choisie pour décrire ϕ est de considérer ce champ comme un volume à "densité variable", ce qui revient à remplacer, dans les calculs d'intégrales sur le domaine Ω , le terme $d\Omega$ par le terme $\phi(\mathbf{x}) d\Omega$.

2.1.3. Champ ϕ vectoriel ou tensoriel

La valeur ϕ , connue en tout point du domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, peut être vectorielle ou tensorielle à p composantes.

La plus simple façon de décrire une telle quantité est d'en calculer un équivalent scalaire (cf. §III.2.1.1) et de le traiter comme un champ scalaire sur Ω . Cet équivalent élimine l'information contenue dans les différents termes du tenseur ou du vecteur.

Il est aussi possible de décrire p champs scalaires sur Ω . Cela n'a d'intérêt que si un changement de repère ne modifie pas ces champs, ce qui implique de décrire les invariants du tenseur et non ses termes bruts, et d'y ajouter les "directions" par rapport à un repère de référence qui reste à définir. Par exemple, un vecteur dans le plan est décrit par sa norme et sa direction dans un repère de référence de la base. Le coût d'une telle description est évidemment plus élevé.

2.1.4. Champ ϕ évoluant dans le temps

Les champs $\phi = f(\mathbf{x})$ sont définis sur Ω et dans l'intervalle $[t_1, t_2]$. Il convient de distinguer le temps physique réel d'un temps descriptif ou paramètre d'évolution.

2.1.4.1. Cas du temps réel

Lorsque la dépendance en temps est réelle, il n'y a pas d'ambiguïté et les valeurs connues à un temps donné ne peuvent être déplacées à un autre temps sans fausser la description du phénomène réel.

Il est envisageable dans ce cas de considérer le temps comme une dimension supplémentaire du problème. Le champ ϕ s'écrit alors $\phi(\mathbf{x}, t)$ et est décrit comme une fonction définie sur $\Omega \times [t_1, t_2]$.

domaine de \mathbf{R}^{n+1} . Les descripteurs à utiliser sont ceux d'un volume à $n+1$ dimensions à densité variable (et non pas un volume à $n+2$ dimensions), comme il l'a été exposé au §VI.2.1.2.

Une autre possibilité est de chercher au cours du temps une ou plusieurs bornes de $\phi(\mathbf{x})$. Il n'y a que quelques champs à décrire, avec une dimension en temps de moins et donc moins de descripteurs. L'inconvénient est que ces bornes (le sup, l'inf ou la moyenne sur l'intervalle d'étude, par exemple) ne représentent qu'elles-mêmes et non la totalité de l'évolution. Suivant la nature du problème physique, cette approche peut être suffisante.

2.1.4.2. Cas du paramètre d'évolution

Contrairement à un temps réel, un paramètre d'évolution ne fait que décrire l'ordre du processus d'évolution. Seul le signe des dérivées du phénomène par rapport au temps a un sens physique.

Ce fait interdit de considérer le temps comme une dimension supplémentaire du problème. De même, des quantités comme la moyenne de ϕ sur l'intervalle d'étude ne sont pas significatives et ne peuvent être retenues. Il est toujours possible de décrire des bornes comme le sup ou l'inf du champ au cours de l'évolution.

Nous nous limiterons dans ce qui suit à deux types d'objets :

- les domaines bi- ou tridimensionnels ;
- les champs scalaires positifs définis sur ces domaines.

2.2. Caractéristiques d'un objet

Nous proposons de séparer les caractéristiques d'un objet géométrique en 3 familles de paramètres :

- des *paramètres de taille*, rattachés uniquement à la dimension de l'objet décrit : surface ou volume absolus ou relatifs. Ces paramètres sont invariants par translation, rotation ou changement de forme de l'objet.
- des *paramètres de position*, qui décrivent l'emplacement de l'objet par rapport à un repère de référence qui reste à définir. Ces paramètres ne devraient dépendre que de la position d'un repère lié à l'objet. Nous verrons au §VI.2.5 qu'il est possible et parfois plus commode d'y lier des termes dus à la forme.
- des *paramètres de forme*, qui décrivent cette fois l'aspect de l'objet, en-dehors de toute considération de taille. Ces paramètres sont invariants par rotation, translation ou homothétie de l'objet, et indépendants de sa position par rapport au repère de référence.

2.3. Description de la taille d'un objet

La taille d'un objet (sa surface ou son volume) ne doit être décrite que si elle est significative pour le problème d'apprentissage. Nous distinguons deux cas pour l'objet :

- soit ce dernier est l'objet principal Ω_0 (la structure entière, dans le cas qui nous intéresse)
- soit l'objet Ω est rattaché à l'objet principal Ω_0 . Il s'agit par exemple d'un sous-ensemble de Ω_0 , ou d'un volume appuyé sur Ω_0 .

Dans le premier cas, Ω_0 est décrit soit dans un système d'unités commun à tous les exemples et tous les cas inconnus, soit par référence à un "volume de référence" identique pour tous les exemples.

Dans le second cas, il est logique de rapporter le volume de Ω au volume de Ω_0 .

Pour un champ scalaire $\phi(x, y)$ défini sur Ω_0 bidimensionnel d'aire S_0 , le volume contenu sous la surface $\phi = f(x, y)$ a pour valeur

$$V_{\text{total}} = \int_{\Omega_0} \phi(x, y) dx dy \quad (\text{VI.2.1})$$

Il est possible de retenir comme paramètre de taille la valeur moyenne ϕ_{moy} définie par

$$\phi_{\text{moy}} = \frac{V_{\text{total}}}{S_0} \quad (\text{VI.2.2})$$

2.4. Description de la position d'un objet

La position d'un objet quelconque, si elle est considérée comme significative, doit être décrite par rapport à un système d'axes de référence qui restent à définir. Dans notre contexte, nous étudierons principalement des axes de référence liés à l'objet principal Ω_0 et servant à décrire la position de divers sous-objets Ω_i liés à Ω_0 . D'autres problèmes d'apprentissage peuvent faire intervenir des axes de référence identiques pour tous les exemples de la base, et la position de chaque exemple dans ces axes.

Le système d'axes de référence doit être fixe et déterminable de manière unique. Les paramètres de position sont exprimés dans ce système d'axes.

2.4.1. Choix d'un système d'axes de référence

Nous n'examinons que le cas où les axes de référence (x_r, y_r) sont liés à l'objet principal (plan) Ω_0 . Il est naturel de penser aux axes principaux d'inertie, l'axe majeur étant *a priori* choisi axe des x_r .

Si le domaine Ω_0 n'a pas plus de deux axes de symétrie, les directions de ces axes sont uniques mais leur orientation peut avoir 2 valeurs :

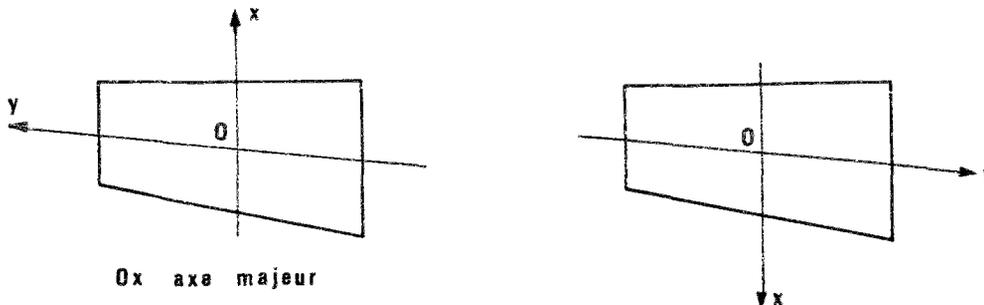


Fig. VI-2-1. Les deux systèmes d'axes principaux d'un domaine

Si le domaine plan a au moins 3 axes de symétrie, les inerties principales I_{XX} et I_{YY} sont identiques. N'importe quel axe est axe principal et aucun choix ne peut être fait à partir des axes principaux.

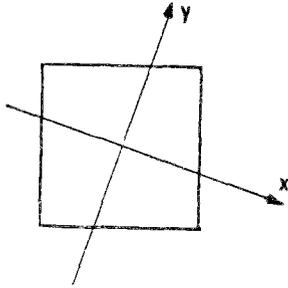


Fig. VI-2-2. Domaine symétrique à axes principaux arbitraires

Si les axes de symétrie sont retenus, leur choix est plus réduit mais non unique ; ce critère n'est donc pas suffisant.

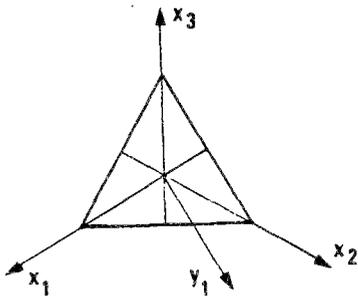


Fig. VI-2-3. Axes principaux et de symétrie pour un triangle équilatéral

Nous définissons donc un système d'axes de référence par rapport à un champ de référence $\phi_r(x, y)$ choisi une fois pour toutes et de nature identique pour tous les exemples. Ces axes sont d'abord des axes principaux de Ω_0 . Ils sont choisis *a priori* tels que le centre de gravité G_v du volume contenu sous ce champ ϕ_r est toujours situé du côté des $y_r < 0$ si les directions des axes principaux sont uniques, et vérifie en plus $x_r(G_v) = 0$ si les axes principaux sont arbitraires.

Les axes de référence vérifient

$$\int_{\Omega_0} \phi_r(x, y) y_r dx dy < 0 \tag{VI.2.3}$$

et si les inerties du domaine Ω_0 vérifient $I_{XX} = I_{YY}$ et $I_{XY} = 0$:

$$\int_{\Omega_0} \phi_r(x, y) x_r dx dy = 0 . \tag{VI.2.4}$$

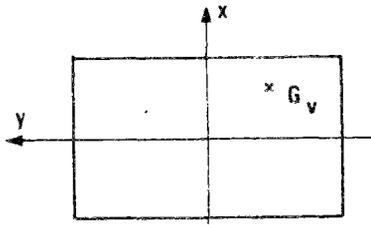


Fig. VI-2-4. Choix des axes de référence pour un domaine à axes principaux uniques

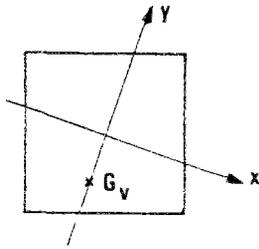


Fig. VI-2-5. Axes de référence d'un domaine à axes principaux arbitraires

S'il y a d'autres champs à décrire en plus du champ de référence ϕ_r , ils sont tous calculés dans ces axes de référence.

S'il arrive que ce champ ϕ_r soit lui aussi symétrique et ne permette pas de définir des axes de référence uniques (autrement dit G_v est confondu avec le centre de gravité G_0 du domaine Ω_0), des axes arbitraires sont retenus.

Dans ce qui suit, l'existence d'un système d'axes de référence unique pour la base Ω_0 sera toujours supposée. D'autres systèmes d'axes remarquables peuvent être choisis et sont repérés par rapport à ces axes de référence.

2.4.2. Paramètres de position

Les axes de référence étant définis à partir de l'objet principal Ω_0 , la position de ce dernier n'a pas à être décrite.

La position d'un sous-objet Ω est exprimée dans les axes de référence. Nous supposons les axes principaux du sous-objet Ω connus (mais non forcément uniques).

La position des axes principaux de Ω par rapport aux axes de référence fait intervenir trois paramètres indépendants : les 2 coordonnées du centre de gravité de la surface, et l'angle de rotation entre les axes principaux de la surface et les axes de référence. Ces paramètres peuvent être exprimés de multiples façons.

Dans le cas où les axes principaux de Ω sont arbitraires, l'angle θ entre ces axes et le repère de référence est lui aussi arbitraire. Il ne peut être question ici de définir des axes de référence pour Ω ; ceux définis pour Ω_0 sont uniques pour l'ensemble des sous-objets Ω attachés à Ω_0 .

Nous avons choisi après plusieurs essais de retenir simplement les coordonnées de G , centre de gravité de Ω , dans le repère de référence, et les sinus et cosinus de l'angle θ entre les deux repères. Ces deux derniers paramètres présentent une variation continue et ne sont pas définis modulo 2π . Ils sont arbitraires si Ω n'a pas d'axes principaux uniques.

Un autre terme peut être ajouté pour tenter de distinguer les cas de la figure suivante, pour lequel l'angle θ est arbitraire. Nous y reviendrons après l'étude des paramètres de forme.

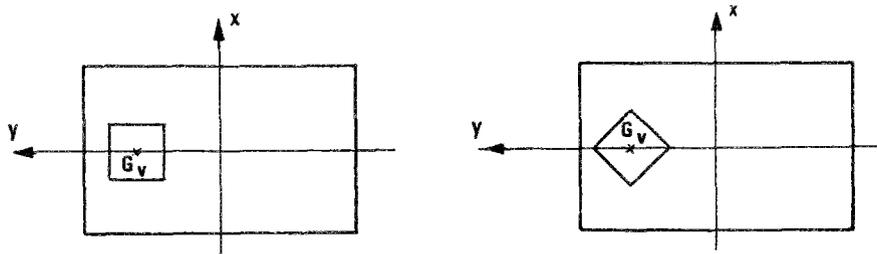


Fig. VI-2-6. Cas indiscernables avec ces paramètres

2.5. Description de la forme d'un objet

2.5.1. Bibliographie sommaire sur la reconnaissance de formes

Nous présentons rapidement dans ce paragraphe quelques techniques de description utilisées en reconnaissance automatique de formes. Des détails plus approfondis peuvent être trouvés par exemple dans (Fabre, 1989).

2.5.1.1. Techniques de représentation

Plusieurs critères permettent de classer les méthodes d'analyse des formes. On distingue les méthodes qui travaillent sur le contour des objets de celles qui considèrent tous ses points constitutifs. On distingue également les transformations selon qu'elles décrivent une forme par des scalaires, ou de façon plus complexe, par exemple par une autre forme plus simple.

On peut citer par exemple

- les techniques de morphologie mathématique : érosion, dilatation, etc.
- la recherche de contours, segments, zones, par des techniques de traitement d'images
- la description d'un contour par chaînes de formes (Samuel, 1989)
- la recherche du squelette d'une forme.

• *Codage de Freeman*

La description d'un objet filaire (ou du contour d'un objet massif) par chaîne de caractères peut utiliser le code de Freeman ((Montanvert, 1987) par exemple). Le principe en est le suivant : on choisit un point sur le contour discrétisé ; on décrit la direction du point suivant par un chiffre qui dépend de cette direction.

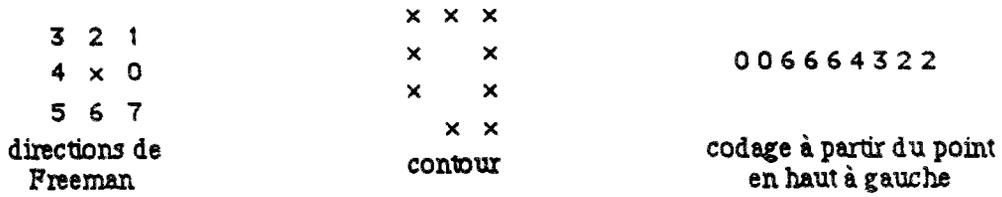


Fig. VI-2-7. Principe du code de Freeman (d'après Montanvert, 1987)

• *Squelette*

Une autre technique consiste à réduire un objet massif à un squelette filaire (Montanvert, 1987).

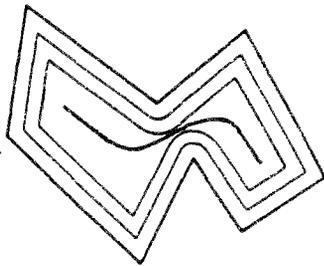
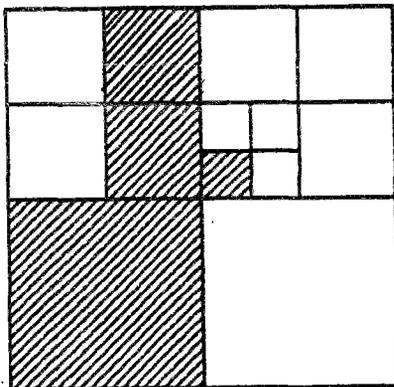


Fig. VI-2-8. Squelette d'un objet polygonal

Une représentation en arbre ou en graphe est associée à ce squelette. Un tel graphe ne semble pas pouvoir être retenu comme descripteur d'une forme. Par contre, considérer le squelette comme une seconde forme et calculer ses descripteurs par une autre méthode peut enrichir la description de l'objet initial.

• *Quadtree*

Le codage par "quadtree" d'une forme revient à la recouvrir par des carrés de plus en plus fins.



- forme à décrire (hachurée) et quadrillage correspondant

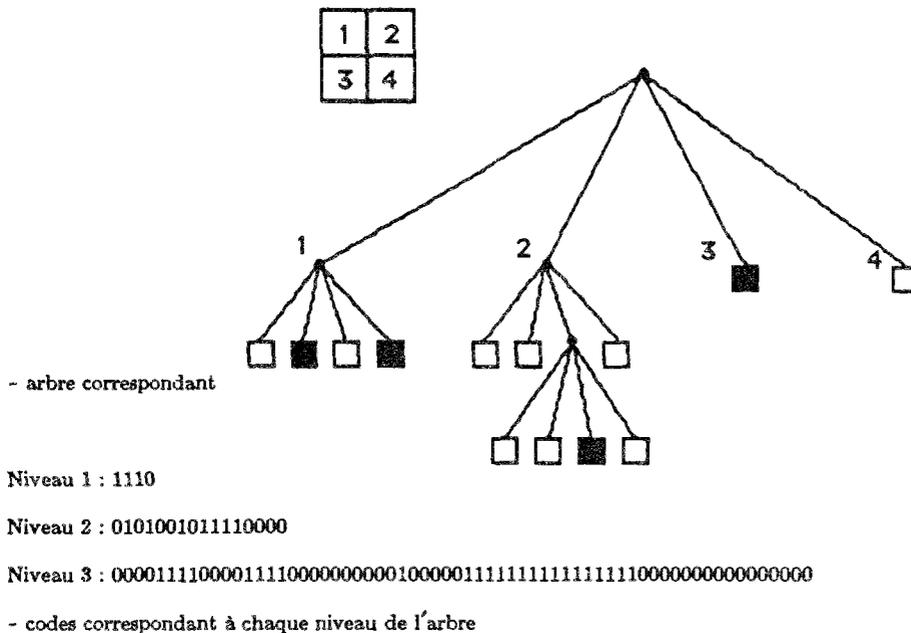


Fig. VI-2-9. Principe du codage par quadtree

La longueur de l'arbre dépend de la complexité de la forme et peut théoriquement être infinie ; pour une image numérique, le plus petit élément d'image est le pixel. La troncature de l'arbre à une certaine profondeur permet d'obtenir une approximation de la forme. La description de formes quelconques par un quadtree limité à une profondeur donnée (fixe pour tous les exemples) est donc possible ; les descripteurs seraient de type multivalué. Il conviendrait de choisir une orientation de référence (par exemple par la méthode décrite au §VI.2.4.1) pour assurer l'unicité du codage quelle que soit l'orientation de la forme.

2.5.1.2. Descripteurs proposés par divers auteurs

Fabre (1989) propose plusieurs types de descripteurs numériques pour divers types de formes géométriques.

- pour les signaux monodimensionnels, trois classes de paramètres :
 - les paramètres temporels : minimum, maximum, moyenne, écart-type, nombre de passages par zéro
 - les paramètres spectraux, qui correspondent en fait aux paramètres temporels du spectre du signal (trouvé par transformée de Fourier)
 - les paramètres autorégressifs, tirés de la modélisation du signal comme la sortie d'un filtre linéaire excité par un bruit blanc gaussien.
- pour les images : des paramètres géométriques (périmètre P, surface S, épaisseur, compacité, dispersion, moments invariants, courbure moyenne).

L'épaisseur est adaptée au traitement d'images où chaque point a un niveau de gris donné ; elle est inutile dans notre cas. La compacité est définie par $C_o = \frac{4\pi S}{P^2}$ et la dispersion par $D = \frac{S^2}{2\pi I_G}$, I_G étant l'inertie par rapport au centre de gravité de la surface.

Kouloundjian (1989) évalue la faisabilité d'un système de vision adapté à la robotique. Le but est de reconnaître un objet et de le classer dans une liste de modèles enregistrés. Une image numérique de l'objet est faite puis traitée suivant divers principes :

- recherche de points de contour par examen des variations des niveaux de gris de chaque pixel par rapport à ses voisins
- recherche de classes de points en regroupant les points de contour
- élimination d'accidents : contours incomplets, non reliés, etc. A ce niveau, le contour extérieur et les éventuels contours intérieurs de la pièce sont définis.
- recherche des angles significatifs du contour extérieur de la pièce
- approximation du contour extérieur par série de Fourier (avec un nombre d'harmoniques limité).

Des indices sont calculés à partir des regroupements en classes de points. Ils font intervenir des termes géométriques comme les rapports périmètre/surface, les moments d'inertie ou les dimensions des contours selon des axes orthogonaux. La pièce est décrite par l'ensemble des indices et des coefficients numériques directement exploitables (par exemple ceux des harmoniques de Fourier).

Il existe encore d'autres techniques de description, cette présentation rapide ne peut prétendre à l'exhaustivité.

2.5.2. Description d'objets par technologie de groupe

La technologie de groupe a été proposée pour classer des pièces mécaniques. Les applications industrielles d'une telle classification sont évidentes par exemple dans l'industrie mécanique, où le nombre de pièces différentes fabriquées par une même société peut se chiffrer en milliers et où une numérotation séquentielle est inappropriée à une recherche efficace.

Une série de codes est choisie selon un ordre et une signification bien définis. Un ou plusieurs codes sont attachés à la description de chaque caractéristique d'une pièce : dimensions, matériau constitutif, aspect global (de révolution, rectangulaire, allongée...), pièce creuse ou massive, absence ou nombre de trous, d'axes, de gorges, état de surface, etc.

2.5.3. Invariants géométriques

2.5.3.1. Principe : moyennes et moments en statistiques

L'analyse statistique des données discrètes ou continues est une technique classique très répandue dans presque tous les domaines scientifiques (Benzecri, 1973 par exemple).

Supposons une variable X prenant les n valeurs discrètes $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, ou alors une distribution continue X(x). La moyenne arithmétique X_{moy} vaut $\frac{\sum X_i}{n}$. Les moments centrés d'ordre p sont définis par

$$m_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - X_{moy})^p \quad (VI.2.5)$$

Ces moments sont rendus adimensionnels en posant $a_p = \frac{m_p}{m_2^{p/2}}$

où m_2 est donné par (VI.2.5) avec $p = 2$. Le moment d'ordre 1 n'est autre que la moyenne, le moment d'ordre 2 est la variance.

Le moment a_3 d'ordre 3 définit la "skewness" et donne la dissymétrie de la distribution des points X_i , par diverses mesures comme a_3 ou a_3^2 . Une distribution comportant une "queue" plus longue à droite qu'à gauche est dite étalée à droite, et inversement.

Le moment réduit d'ordre 4, a_4 , est la "kurtosis" et décrit l'aplatissement de la distribution. Sa valeur pour une courbe de Gauss étant de 3, l'aplatissement est parfois mesuré par $a_4 - 3$.

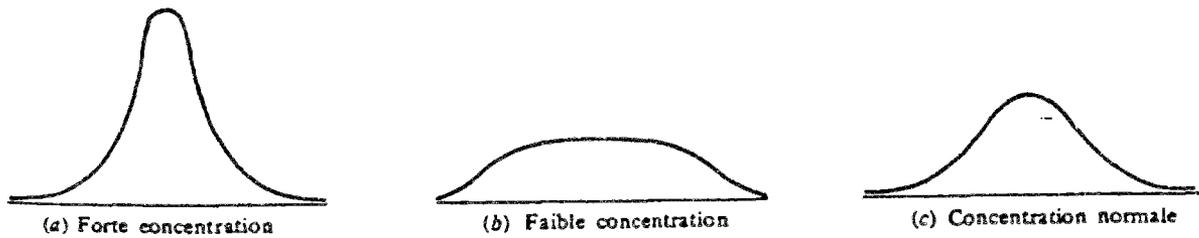


Fig. VI-2-10. Aplatissements pour diverses distributions

Ces quelques coefficients très classiques décrivent la forme d'une distribution par rapport à une référence, la distribution de Gauss. Il serait possible de pousser l'ordre des moments au-delà de 4. Les parties de la distribution éloignées de la moyenne deviennent alors prépondérantes dans le calcul et masquent la variation de la variable au voisinage de la moyenne.

Ces termes s'apparentent aux "moments invariants" cités par Fabre au §VI.2.5.1.2. Terrien (1987) retient entre autres, pour décrire un signal de fréquence d'une voix humaine, les moments d'ordre 1, 2, 3 et 4 de l'enveloppe du signal temporel et de son spectre.

2.5.3.2. Généralisation au cas multidimensionnel

Nous avons généralisé ce qui précède au cas d'espaces de dimension quelconque. La forme d'un domaine plan quelconque Ω d'aire S est représenté par les invariants adimensionnels de ses "tenseurs de forme" d'ordre croissant.

Le tenseur de forme $T_{m,n}$ d'ordre m sur un domaine de dimension n a un terme générique t défini par

$$t_{i_1, i_2, \dots, i_m} = \int_{\Omega} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} d\Omega \quad (VI.2.6)$$

avec $i_1, i_2, \dots, i_m = 1, \dots, n$.

Les invariants sont les valeurs classiques calculées sur un tenseur d'ordre m . Nous n'en retenons qu'une partie pour tenir compte des symétries dans ces tenseurs.

Le tenseur $T_{2,2}$ défini sur un domaine plan Ω contient les 4 termes

$$t_{11} = \int_{\Omega} x^2 d\Omega ; t_{12} = t_{21} = \int_{\Omega} xy d\Omega ; t_{22} = \int_{\Omega} y^2 d\Omega$$

Le tenseur d'ordre 3 a les 8 termes suivants

$$t_{111} = \int_{\Omega} x^3 d\Omega ; t_{112} = t_{121} = t_{211} = \int_{\Omega} x^2y d\Omega ; t_{122} = t_{212} = t_{221} = \int_{\Omega} xy^2 d\Omega ; t_{222} = \int_{\Omega} y^3 d\Omega$$

Enfin le tenseur d'ordre 4 a les 16 termes suivants

$$t_{1111} = \int_{\Omega} x^4 d\Omega ; t_{1112} = t_{1121} = t_{1211} = t_{2111} = \int_{\Omega} x^3y d\Omega ; t_{2222} = \int_{\Omega} y^4 d\Omega$$

$$t_{1122} = t_{1221} = t_{2211} = t_{2112} = t_{2121} = t_{1212} = \int_{\Omega} x^2y^2 d\Omega ; t_{1222} = t_{2221} = t_{2212} = t_{2122} = \int_{\Omega} xy^3 d\Omega$$

On remarquera que le tenseur de forme d'ordre 2 n'est pas le tenseur d'inertie ; en effet, ses éléments sont

$$\begin{bmatrix} I_{YY} & I_{XY} \\ I_{XY} & I_{XX} \end{bmatrix}$$

avec $I_{XX} = \int_{\Omega} y^2 d\Omega$. La définition mécanique du tenseur d'inertie est

$$\begin{bmatrix} I_{XX} & -I_{XY} \\ -I_{XY} & I_{YY} \end{bmatrix}$$

Ces deux tenseurs ont les mêmes invariants qui sont $I_{XX} + I_{YY}$ et $I_{XX} I_{YY} - I_{XY}^2$.

Par analogie avec les moments en statistiques, les invariants des tenseurs calculés dans des axes centraux sont notés m_{ij} , et les invariants adimensionnels calculés dans ces mêmes axes, a_{ij} . D'autres invariants calculés dans d'autres axes seront définis plus loin et notés p_{ij} , s_{ij} ou d_{ij} .

Les invariants dimensionnés des tenseurs de forme sont

- pour l'ordre 2 : t_{ii} et le déterminant (plutôt que $t_{ij} t_{ij}$), autrement dit

$$m_{21} = t_{11} + t_{22}$$

$$m_{22} = t_{11} t_{22} - t_{12}^2$$

(VI.2.7 a et b)

- pour l'ordre 3 : $t_{ijk} t_{ijk}$ et un invariant d'ordre 3, soit

$$m_{31} = t_{111}^2 + 3 t_{112}^2 + 3 t_{122}^2 + t_{222}^2 \quad \text{(VI.2.8 a)}$$

$$\text{et } m_{32} = t_{112} (t_{222} - t_{112}) + t_{122} (t_{111} - t_{122}) \quad \text{(VI.2.8 b)}$$

$$\text{soit } m_{31} = \left[\int_{\Omega} x^3 d\Omega \right]^2 + 3 \left[\int_{\Omega} x^2y d\Omega \right]^2 + 3 \left[\int_{\Omega} xy^2 d\Omega \right]^2 + \left[\int_{\Omega} y^3 d\Omega \right]^2$$

$$m_{32} = \left[\int_{\Omega} x^2y d\Omega \right] \left[\int_{\Omega} (y^3 - x^2y) d\Omega \right] + \left[\int_{\Omega} xy^2 d\Omega \right] \left[\int_{\Omega} (x^3 - xy^2) d\Omega \right]$$

- pour l'ordre 4 : t_{ijjj} , t_{iijk} , t_{lljk} et t_{ijkl} , soit

$$m_{41} = t_{1111} + 2 t_{1122} + t_{2222} \quad (\text{VI.2.9 a})$$

$$m_{42} = t_{1111}^2 + 4 t_{1112}^2 + 6 t_{1122}^2 + 4 t_{1222}^2 + t_{2222}^2 \quad (\text{VI.2.9 b})$$

et $m_{43} = (t_{1111} + t_{1122})^2 + 2 (t_{1112} + t_{1222})^2 + (t_{1122} + t_{2222})^2 \quad (\text{VI.2.9 c})$

soit $m_{41} = \int_{\Omega} (x^4 + 2 x^2 y^2 + y^4) d\Omega$

$$m_{42} = \left[\int_{\Omega} x^4 d\Omega \right]^2 + 4 \left[\int_{\Omega} x^3 y d\Omega \right]^2 + 6 \left[\int_{\Omega} x^2 y^2 d\Omega \right]^2 + 4 \left[\int_{\Omega} x y^3 d\Omega \right]^2 + \left[\int_{\Omega} y^4 d\Omega \right]^2$$

et $m_{43} = \left[\int_{\Omega} (x^4 + x^2 y^2) d\Omega \right]^2 + 2 \left[\int_{\Omega} (x^3 y + x y^3) d\Omega \right]^2 + \left[\int_{\Omega} (x^2 y^2 + y^4) d\Omega \right]^2$

Les invariants de ces tenseurs doivent être rendus adimensionnels par division par une quantité de référence. Cette quantité ne doit pas modifier l'aspect de la variation des invariants en fonction de la forme (comme, par exemple, les faire tendre vers l'infini si l'aire S de Ω tend vers zéro).

Nous définissons d'abord les valeurs suivantes :

- le rayon de giration $r_g^2 = \frac{I_{XX} + I_{YY}}{S} = \frac{1}{S} \int_{\Omega} (x^2 + y^2) d\Omega \quad (\text{VI.2.10})$

- le rayon de référence $r_r = \sqrt{S/\pi}$ (cf. §III.4.4.2).

Il peut arriver que le domaine Ω dont nous voulons décrire la forme se ramène à un point ou plusieurs points distincts. Il est aisé de constater que r_r et r_g ne se comportent pas de manière identique :

- si Ω tend vers un point, r_r et r_g tendent vers zéro ;
- si Ω tend par exemple vers deux points d'aire identique séparés d'une distance d , r_r tend vers zéro mais r_g tend vers $d/2$.

Les invariants seront donc divisés par un terme de référence de la forme $r_r^\alpha r_g^\beta$, choisi de telle sorte que les invariants adimensionnels restent finis lorsque Ω tend vers un ou plusieurs points. Les exposants α et β sont tels que :

- tout terme $d\Omega$ dans le calcul d'une intégrale est divisé par S , ce qui est équivalent à r_r^2
- tout terme x_i est divisé par r_g .

Le premier invariant $I_{XX} + I_{YY}$ du tenseur d'ordre 2, qui donnerait une constante s'il était calculé comme il est dit précédemment, est remplacé par le rapport S/r_g^2 .

Les invariants réduits a_{ij} ont donc les valeurs suivantes :

- 2 invariants du tenseur d'inertie d'ordre 2 :

$$a_{21} = \frac{S}{r_g^2} \quad (\text{VI.2.11})$$

$$a_{22} = \frac{I_{XX} I_{YY} - I_{XY}^2}{S^2 r_g^4} \quad (\text{VI.2.12})$$

- 2 invariants du tenseur d'ordre 3 :

$$a_{31} = \frac{t_{111}^2 + 3 t_{112}^2 + 3 t_{122}^2 + t_{222}^2}{S^2 r_g^6} \quad (\text{VI.2.13})$$

et
$$a_{32} = \frac{t_{112}(t_{222} - t_{112}) + t_{122}(t_{111} - t_{122})}{S^2 r_g^6} \quad (\text{VI.2.14})$$

- 3 invariants du tenseur d'ordre 4

$$a_{41} = \frac{t_{1111} + 2 t_{1122} + t_{2222}}{S r_g^4} \quad (\text{VI.2.15})$$

$$a_{42} = \frac{t_{1111}^2 + 4 t_{1112}^2 + 6 t_{1122}^2 + 4 t_{1222}^2 + t_{2222}^2}{S^2 r_g^8} \quad (\text{VI.2.16})$$

et
$$a_{43} = \frac{(t_{1111} + t_{1122})^2 + 2(t_{1112} + t_{1222})^2 + (t_{1122} + t_{2222})^2}{S^2 r_g^8} \quad (\text{VI.2.17})$$

D'autres termes décrivant la forme mais non déduits des tenseurs de forme peuvent être utilisés (cf. §VI.2.6.1.3).

Nous ne pouvons pas prouver que ces descripteurs sont suffisants (cf. §VI.1.3.1) pour décrire correctement la forme. Dans ce qui suit nous ferons la conjecture suivante :

"Les descripteurs d'une forme précédemment présentés sont supposés suffisamment représentatifs pour que la probabilité que deux objets très différents aient la totalité de leurs descripteurs très voisins soit négligeable".

2.5.3.3. Retour aux paramètres de position

Nous avons remarqué au §VI.2.4 que les paramètres de position ne pouvaient distinguer des cas comme celui de la figure VI-2-6. Les invariants géométriques calculés cette fois dans les axes de référence peuvent être utilisés pour décrire une position. On peut vérifier qu'un terme comme $p_{r42} - a_{r42}$, calculé dans les axes de référence sur un sous-domaine Ω , discrimine effectivement les cas précités. Ce paramètre peut être pris sous la forme

$$pp_4 = \frac{p_{r42} - a_{r42}}{16 S_0^2 r_{g_0}^8}$$

2.5.4. Paramètres numériques divers

D'autres termes décrivant la géométrie et non déduits des tenseurs de forme peuvent être trouvés (cf. §VI.2.5.1.2). Pour une surface plane, nous définissons le rapport périmétrique par

$$\Gamma_p = \frac{\text{périmètre de } \Omega}{\text{périmètre d'un cercle de même aire que } \Omega} \quad (\text{VI.2.18})$$

La généralisation au cas tridimensionnel ferait apparaître la surface latérale d'un solide ramenée à celle de la sphère de même volume.

Une autre possibilité serait de retenir les coefficients des premières harmoniques de l'approximation de Fourier du contour.

La description des points singuliers d'un contour pourrait être faite par intégration sur $\partial\Omega$ des

courbures, ou mesure des déviations angulaires cumulées d'une tangente suivant le contour, ou encore par comptage du nombre d'angles vifs du contour. Une partie de ce dernier est considérée comme un "angle" si le rayon de courbure minimal est inférieur à une certaine fois r_r , et si, autour de ce sommet, une portion à faible courbure d'une longueur supérieure à $k r_r$ existe. Une statistique sur la répartition de tels angles avec leur signe indique directement l'existence de singularités géométriques, que les invariants des tenseurs de forme prennent mal en compte.

2.5.5. Cas d'un champ ϕ défini sur un domaine Ω_0

• *Extrema du champ ϕ*

Les valeurs minimale ϕ_{\min} et maximale ϕ_{\max} sont liées à la forme de la variation de ϕ dans Ω_0 et sont donc des paramètres de forme. La moyenne sur Ω_0 est par contre un paramètre de taille (cf. §VI.2.3).

• *Répartition de ϕ dans Ω_0*

Une statistique sur la répartition spatiale de ϕ dans Ω_0 peut être faite :

- découpage en tranches disjointes $[\phi_i, \phi_{i+1}[$ de l'intervalle $[\phi_{\min}, \phi_{\max}]$
- pour chacune de ces tranches : aire S_i de la zone $\Omega_i \subset \Omega_0$ pour laquelle on vérifie

$$\forall M \in \Omega_i, \phi_i \leq \phi(M) < \phi_{i+1}$$

- description de la répartition par $\frac{S_i}{S_0}$.

• *Répartition dans un maillage*

Dans le cas où le champ ϕ se rapporte étroitement à un maillage (par exemple, si ϕ est le champ des tailles d'éléments, ou des allongements des triangles [cf. III.1]), et dans ce cas seulement, une statistique classique, "arithmétique", peut être faite et on peut retenir :

- la moyenne géométrique des valeurs ϕ sur les éléments
- l'écart-type
- la répartition (en nombre d'éléments et non plus en surface) de ϕ dans des tranches divisant l'intervalle $[\phi_{\min}, \phi_{\max}]$

La moyenne arithmétique des valeurs ϕ sur les éléments s'apparente à un paramètre de taille.

Ces statistiques n'auraient aucun sens si on voulait décrire une quantité intrinsèque au problème, par exemple un champ de contraintes, en faisant la moyenne sur les valeurs de la contrainte dans chaque élément. Le champ de contraintes réel est indépendant du maillage. Ce dernier n'est présent que pour déterminer les contraintes et non pour les décrire. Les statistiques arithmétiques ne peuvent décrire que des quantités relatives à un maillage et supposées constantes sur chaque élément.

• *Coefficient de remplissage*

Le volume V_{total} contenu sous la surface $\phi = f(x, y)$ peut être décrit par le "coefficient de remplissage"
$$\frac{V_{\text{total}}}{\phi_{\max} \cdot S_0} \quad (\text{VI.2.19})$$

Ce coefficient est toujours inférieur ou égal à 1. Sa valeur peut être mal définie si la hauteur maximale ϕ_{\max} est elle-même mal définie, notamment si elle résulte d'un calcul approché. Si la valeur maxi exacte (inconnue) de ϕ est élevée (voire infinie en cas d'évolution exacte asymptotique),

sa valeur approchée dépendra étroitement de l'algorithme numérique et de la discrétisation utilisés pour évaluer le champ ϕ . Le coefficient de remplissage et la valeur ϕ_{\max} deviennent alors aléatoires et sont à éliminer.

2.6. Description de formes élémentaires

Nous présentons les descripteurs que nous avons choisis pour divers types d'objets très généraux. La nature de ces objets est précisée au paragraphe suivant. L'apprentissage se fera sur une partie de ces descripteurs.

2.6.1. Codage d'une surface plane

Il peut s'agir du domaine de base Ω_0 sur lequel sont définis les axes de référence, ou alors d'un domaine plan quelconque Ω inclus dans Ω_0 .

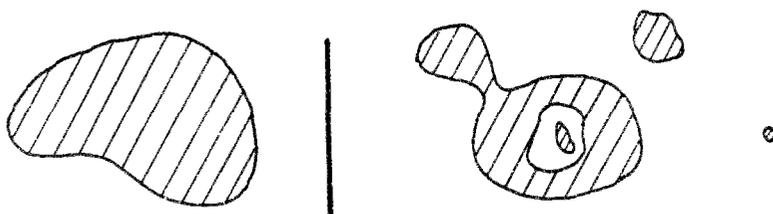


Fig. VI-2-11. Exemples de surfaces à décrire

- Paramètres de taille

Si Ω est la base Ω_0 , sa surface peut être mesurée dans un système d'unités commun à tous les exemples.

Si Ω n'est pas la base, sa surface S est décrite par le rapport $\frac{S}{S_0}$.

- Paramètres de forme

La forme du domaine est décrite par les 8 termes suivants :

- le rapport périmétrique r_p défini par (VI.2.18)
- les 7 paramètres d'ordre 2 à 4 définis par (VI.2.11) à (VI.2.17)

- Paramètres de position

La position d'une surface Ω de centre G_v par rapport aux axes de référence n'est décrite que s'il ne s'agit pas de la base Ω_0 . L'angle entre le repère de référence de la base et les axes principaux de Ω est θ .

Les 5 paramètres de position retenus sont $\frac{x_{G_v}}{r_r}$, $\frac{y_{G_v}}{r_r}$, $\cos \theta$, $\sin \theta$, pp_4

2.6.2. Codage d'un volume compris entre un domaine plan Ω_0 et une surface gauche $\phi = f(x,y)$ appuyée sur ce domaine plan

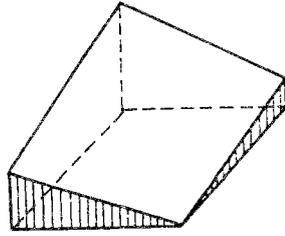


Fig. VI-2-12. Schéma d'un volume appuyé sur la base

Le domaine de base Ω_0 a l'aire S_0 , le rayon de giration r_{g_0} et ses invariants géométriques sont notés a_{0ij} pour les distinguer de ceux du volume. La forme la plus simple pour ce dernier est un cylindre : en tout point, $\phi(x, y)$ est constant, et le volume est déduit de la base Ω_0 par extrusion.

- Paramètres de taille

La valeur moyenne ϕ_{moy} du champ (et éventuellement la moyenne sur les éléments, cf. §VI.2.5.5) peut être utilisée. Elle doit être rendue adimensionnelle ou exprimée dans une unité commune pour tous les exemples.

- Paramètre de position

Les 5 paramètres de position sont les mêmes que ceux d'une surface plane, décrits au §VI.2.6.1.

- Paramètres de forme

La répartition de ϕ dans Ω_0 peut utiliser les descripteurs vus au §VI.2.5.5, soit :

ϕ_{min} , ϕ_{max} , surfaces $\frac{S_i}{S_0}$ pour un nombre de tranches fixé, coefficient de remplissage.

La forme du volume est décrite par des paramètres a_{ij} analogues à ceux vus pour un domaine plan. Il faut cependant remarquer que le volume ne peut pas avoir n'importe quelle forme. Du fait qu'il est appuyé sur Ω_0 , sa forme sera plus ou moins proche de celle de ce domaine. Utiliser les paramètres a_{ij} pour le volume risque de donner des descripteurs voisins des a_{ij} de la base, et de coder deux fois (presque) la même chose.

Ce qui nous intéresse est la *différence* entre la forme du volume et celle de la base. Nous proposons donc de réduire les a_{ij} du volume selon deux procédés :

- par soustraction : $s_{ij} = a_{ij} - a_{0ij}$, où a_{0ij} est la composante de la base correspondant au a_{ij} du volume ;
- par division : $d_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{0ij}}$. Il faut éliminer cette technique pour les paramètres qui peuvent être nuls (par exemple les invariants d'ordre 3). Les 7 paramètres de forme réduits ont finalement les valeurs suivantes :

$$s_{21} = a_{21} - a_{021} = a_{21} - \frac{S_0}{r_{g0}^2}; d_{21} = \frac{a_{21}}{a_{021}} \quad (\text{VI.2.20 a à g})$$

$$s_{22} = a_{22} - a_{022}; d_{22} = \frac{a_{22}}{a_{022}}$$

$$s_{31} = a_{31} - a_{031}; d_{31} \text{ non défini}$$

$$s_{32} = a_{32} - a_{032}; d_{32} \text{ non défini}$$

$$s_{41} = a_{41} - a_{041}; d_{41} = \frac{a_{41}}{a_{041}}$$

$$s_{42} = a_{42} - a_{042}; d_{42} = \frac{a_{42}}{a_{042}}$$

$$s_{43} = a_{43} - a_{043}; d_{43} = \frac{a_{43}}{a_{043}}$$

Evidemment, un seul paramètre est à retenir sur chaque ligne. Le plus souvent, nous avons conservé le d_{ij} partout où il est défini, le s_{ij} ailleurs.

Le terme analogue au rapport périmétrique (VI.2.18) disparaît, nous ne calculons pas les surfaces latérales des volumes.

2.6.3. Codage d'une surface $\phi = f(x,y)$ s'appuyant sur un domaine plan Ω_0

Nous supposons que la fonction ϕ est à valeurs positives. Nous ne décrivons pas directement la surface gauche mais des volumes et des surfaces planes qui en sont déduites. Nous proposons de choisir parmi :

- le volume contenu entre cette surface gauche et la base, codé comme il est dit au §VI.2.6.2 ;
- le volume de l'écart $e(x, y)$, défini par

$$e(x, y) = | \phi(x, y) - \phi_{\text{moy}} | \quad (\text{VI.2.21})$$

où ϕ_{moy} est la valeur moyenne de ϕ sur Ω_0 ; cet écart est codé selon le §VI.2.6.2 avec un paramètre de taille supplémentaire, son volume décrit par $\frac{V_{\text{écart}}}{V_{\text{total}}}$;

- un nombre donné NSV de sous-volumes.

Un sous-volume est défini par un champ $s(x, y)$ tel que le volume contenu sous ce champ est égal à k fois V_{total} , k prenant des valeurs simples fixées une fois pour toutes, comme par exemple 0.4, 0.5, ..., 0.9. Les valeurs d'ordre de grandeur inférieur à 0.4 ne sont pas retenues car la forme du sous-volume correspondant est en général très voisine de celle de la base. Il faut donc chercher une altitude ϕ_k telle que

$$s(x, y) = \text{Min} [\phi(x, y), \phi_k]$$

$$\int_{\Omega_0} s(x, y) dx dy = k V_{\text{total}}$$

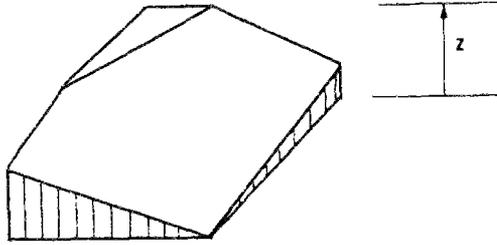


Fig. VI-2-13. Sous-volume d'altitude maxi $z = \phi_k$

Les descripteurs d'un sous-volume sont ceux d'un volume présentées au §VI.2.6.2. Nous avons retenu les valeurs réduites d_{ij} ou s_{ij} , la forme des sous-volumes étant généralement très voisine de celle du volume total.

Nous avons ajouté un paramètre de forme lié à la hauteur maximale, décrit par $\frac{\phi_k}{\phi_{moy}}$. Ce terme est égal à k si le sous-volume se réduit à un cylindre appuyé sur la base, supérieur à k sinon.

- un nombre donné NTR de tranches.

Une tranche ou couche est l'intersection de la surface gauche $\phi = f(x, y)$ par un plan horizontal situé à une altitude ϕ_i donnée. Ces tranches sont de nouvelles surfaces planes incluses dans Ω_0 et chacune incluse dans la précédente lorsque ϕ_i croît. Le contour de ces tranches est analogue aux courbes de niveau que l'on peut trouver par exemple sur les cartes topographiques.

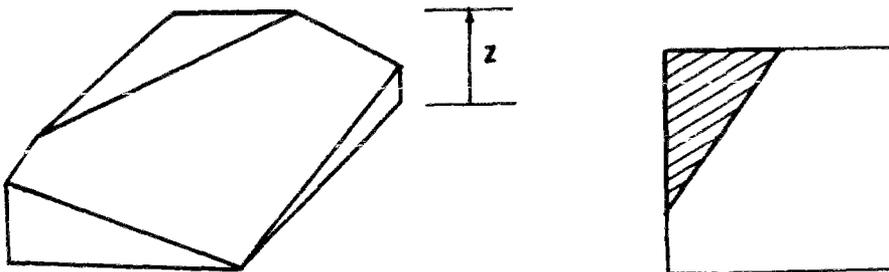


Fig. VI-2-14. Tranche d'un volume à l'altitude $z = \phi_i$

Les altitudes des tranches peuvent être absolues et avoir une signification physique, ou alors être relatives, comprises à égale distance d'une borne minimale et d'une borne maximale. La borne minimale b_{min} peut valoir zéro ou ϕ_{min} . La borne maximale b_{max} peut valoir ϕ_{max} ou une fonction de ϕ_{moy} si la détermination de ϕ_{max} est trop aléatoire. L'altitude de la i -ème tranche est

$$b_{min} + (b_{max} - b_{min}) \frac{i - 1}{NTR}.$$

Le paramètre de taille d'une tranche est sa surface relative, autrement dit $\frac{S_{tranche}}{S_0}$

Les 5 paramètres de position et les 8 paramètres de forme sont ceux décrits pour une surface plane au §VI.2.6.1. 7 des 8 paramètres de forme des tranches peuvent être réduits par différence ou par division (cf. §VI.2.6.2). Nous pensons cependant que, contrairement aux sous-volumes, cette réduction n'est pas opportune : les tranches peuvent avoir une forme totalement différente de celle

de la base.

2.6.4. Remarque sur le calcul du périmètre d'une surface plane

Le calcul du périmètre d'un domaine de base Ω_0 , discrétisé par éléments finis sans trop de lacunes géométriques, ne pose pas de difficultés.

En ce qui concerne les tranches, dans le cas très courant où le champ ϕ est le résultat d'un calcul numérique effectué sur un maillage de Ω_0 , les tranches sont constituées d'un sous-ensemble de Ω_0 pour lequel ϕ est plus grand qu'une certaine altitude ϕ_i .

La façon la plus simple de déterminer ce sous-domaine est de considérer ϕ constant sur chaque élément, et de sommer les surfaces des éléments pour lesquels ϕ est supérieur à ϕ_i . La surface ainsi obtenue aura une aire assez précise, si le maillage n'est pas trop grossier. Par contre, le périmètre risque d'être erroné. L'exemple de la discrétisation en escalier d'une ligne inclinée justifie ce fait :

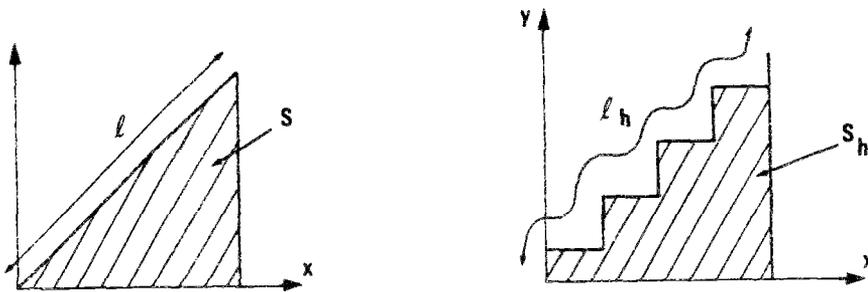


Fig. VI-2-15. Ligne inclinée discrétisée

Lorsque le nombre d'intervalles croît :

- la surface S_h sous la ligne discrétisée tend vers la surface S sous la ligne inclinée
- la longueur l_h de la ligne discrétisée reste constante et très différente de celle de la ligne inclinée.

Dans le cas du maillage, le contour de la tranche approchée de cette façon sera lui aussi "en dents de scie" et en conséquence le périmètre grossièrement approché.

Une méthode plus précise de recherche de la tranche serait l'interpolation dans les éléments de l'intersection du volume avec le plan $\phi = \phi_i$, les valeurs de ϕ étant connues aux noeuds. Les contours sont alors plus lisses et le périmètre est évalué correctement.

2.6.5. Généralisation au cas tridimensionnel

Notons qu'il est possible d'utiliser le même principe pour coder des volumes à 3 dimensions et des champs d'isovaleurs calculées sur un domaine tridimensionnel. Cette fois, les "courbes" seraient des hypersurfaces dans un espace à 4 dimensions. Les axes de référence et les tenseurs de forme ont une expression similaire à celle du cas bidimensionnel. La définition des tranches et des sous-volumes est elle aussi généralisable.

3. DESCRIPTION D'UN PROBLEME MECANIQUE

Nous proposons un ensemble de descripteurs pouvant représenter un problème mécanique. Une partie de ces descripteurs adopteront les techniques vues précédemment pour le codage de formes. Nous admettrons qu'ils sont suffisants (au sens du §VI.1.3.1) pour décrire toutes les caractéristiques du problème.

3.1. Quantités à décrire

Nous nous plaçons dans le cadre du calcul numérique des structures élastoplastiques *quasi-statiques* bi- ou tridimensionnelles. Les quantités que nous cherchons à représenter sont :

- caractéristiques intrinsèques
 - la géométrie de la structure
 - le(s) matériau(x) constitutif(s)
 - le chargement et son évolution dans l'espace et le temps
- caractéristiques non intrinsèques
 - le maillage
 - la discrétisation temporelle
- conclusions
 - les erreurs obtenues sur divers champs (déplacements, déformations, contraintes...)
 - le temps et le coût du calcul.

Toutes ces quantités sont supposées connues et définies sans ambiguïté.

3.2. Caractéristiques intrinsèques : description proposée

3.2.1. Quelques notions d'analyse dimensionnelle

Nous étudions dans quels cas des structures différentes peuvent être considérées comme équivalentes, et donc être codées par les mêmes descripteurs.

Il n'existe pas d'effet d'échelle en plasticité classique. Il n'est donc pas nécessaire de décrire la "taille" de la structure (soit celle du domaine Ω_0). Les dimensions de sous-ensembles de la structure peuvent être rendues adimensionnelles par division par la longueur de référence de la structure.

Mendelson (1968) étudie le problème de la sphère épaisse élastoplastique de rayon intérieur a , sous pression interne p et gradient thermique $\alpha\theta$. Il rend adimensionnels tous les paramètres du problème de la façon suivante :

- géométrie $r \rightarrow r/a$, a étant le rayon intérieur de la sphère
- contraintes $\sigma \rightarrow \sigma/\sigma_0$
- pression interne $p \rightarrow p/\sigma_0$
- déformations $\epsilon \rightarrow \epsilon E/\sigma_0$
- déplacements $u \rightarrow u E/(a \sigma_0)$

- dilatation thermique $\alpha\theta \rightarrow \alpha\theta \frac{E}{(1-\nu)\sigma_0}$
- écouissage $C \rightarrow E'/E$

Les seuls facteurs utilisés sont ν , σ_0 , σ_0/E , $E/(a\sigma_0)$, E'/E . Le rayon a joue ici le rôle du rayon de référence r_r ; nous avons vu que sa description n'était pas nécessaire. Des sphères de géométrie et chargement homothétiques sont donc équivalentes si les coefficients ν , σ_0 , σ_0/E , E'/E sont égaux ; toute modification d'un seul d'entre eux change au moins l'un des champs solutions du problème. Ces coefficients doivent faire partie des descripteurs.

Nous généralisons cet exemple à l'ensemble des structures élastoplastiques. Les 4 coefficients précédents sont suffisants pour décrire le matériau, dès l'instant où ce dernier vérifie le critère de Mises avec écouissage cinématique linéaire, et où la structure est homogène et isotrope.

Avant d'être décrits, les champs calculés sur une structure quelconque seront rendus adimensionnels de façon analogue à l'exemple de la sphère de Mendelson. Nous présentons dans la suite les champs retenus et la description utilisée.

3.2.2. La géométrie du domaine Ω_n

La taille (cf. §VI.3.2.1) et la position (cf. §VI.2.4) de la structure Ω_0 n'ont pas à être décrites. Il reste à décrire la forme du domaine. Les différentes techniques de description de forme sont présentées au §VI.2.5.

Le contour du domaine peut présenter des singularités géométriques. On peut distinguer les singularités dans le contour $\partial_F \Omega$ et les singularités dues aux liaisons. Ces dernières peuvent exister dans des parties "régulières" du contour.

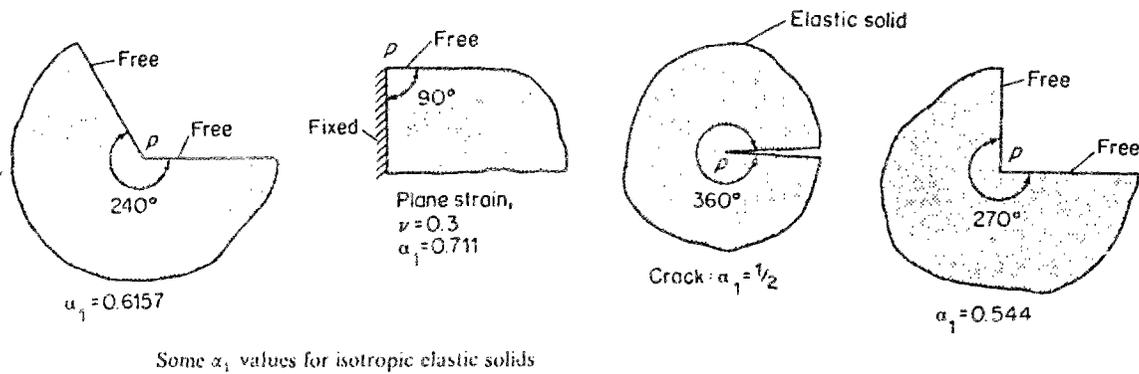


Fig. VI-3-1. Singularités géométriques dues au contour et aux liaisons pour un matériau élastique (d'après Szabo, 1987)

Nous verrons plus loin que ces singularités peuvent modifier l'aspect des champs calculés sur la structure supposée élastique. La description de ces derniers les prendra au moins partiellement en compte.

Nous avons retenu, comme descripteurs du domaine plan Ω_0 , les 8 paramètres de forme cités au §VI.2.6.1 pour une surface plane.

3.2.3. Le matériau

Lorsque le solide est homogène et isotrope, les 4 coefficients cités au §VI.3.2.1 suffisent à caractériser le matériau. Un solide hétérogène nécessite en plus la description de la répartition dans l'espace des différents matériaux, ce qui se ramène à plusieurs champs scalaires définis sur le domaine Ω_0 .

L'analyse dynamique nécessiterait en plus la masse volumique ρ du matériau. La prise en compte de dilatations thermiques nécessiterait le coefficient de dilatation α .

3.2.4. Le chargement

Aussi bien la répartition du chargement dans l'espace, que l'évolution de cette répartition au cours du trajet de chargement, doivent être décrits. Un chargement est quelque chose qui peut paraître difficilement descriptible. Ce qui est énuméré dans la liste suivante peut être considéré comme faisant partie d'un chargement possible :

- forces de surface, pressions, sur $\partial_F \Omega$
- forces de volume, densités dans Ω
- efforts ponctuels
- déplacements imposés sur $\partial_u \Omega$
- déformations initiales, provenant par exemple d'un gradient thermique
- etc.

Tenter de décrire séparément l'aspect de chacun de ces points est irréaliste. Il faut trouver une synthèse de toutes ces quantités.

Tout calcul numérique, élastique ou élastoplastique, réalisé sur la structure soumise à son chargement, donne un champ approché de déplacements et de contraintes. Ces champs dépendent évidemment du chargement et sont modifiés si on change celui-ci. Plutôt que de décrire ce qui constitue le chargement, nous allons en décrire les effets par l'intermédiaire de plusieurs champs d'isovaleurs obtenus par calcul numérique.

Nous effectuons un simple calcul élastique linéaire, dont le coût est négligeable par rapport à une analyse élastoplastique. Il donnera des champs d'isovaleurs élastiques sur la structure, qui seront décrits par les méthodes présentées au §VI.2.

Il faut maintenant choisir les champs d'isovaleurs qui doivent être codés. Tout d'abord, quelques remarques peuvent être faites :

- il est classique de mailler fin là où les gradients des champs de contraintes sont élevés ;
- la forme du champ de contraintes dépend directement du chargement mais aussi des discontinuités géométriques du domaine Ω .
- il faut tenir compte de l'évolution au cours du temps du chargement et donc de ces champs élastiques. Les endroits "les plus sollicités" peuvent se déplacer dans la structure au cours du temps.

Nous choisissons de décrire l'évolution dans le temps du chargement, par une enveloppe des champs obtenus à chaque instant. Comme nous sommes en quasi-statique, nous ne retenons pas l'ajout d'une

dimension correspondant au temps (cf. §VI.2.1.4).

Nous disposons donc d'un champ de contraintes approché σ , et un champ de déformations approché ϵ , définis sur le domaine Ω . Ces champs sont calculés par une analyse élastique, avec un maillage pas trop grossier pour ne pas masquer les évolutions du champ dans l'espace, et un pas de temps pas trop grand, pour ne pas éliminer les évolutions rapides du chargement. Un équivalent σ^{eq} du tenseur σ doit être choisi, par exemple l'équivalent Mises $\sqrt{3/2 \mathbf{S} : \mathbf{S}}$ ou la SED (strain energy density) $\sqrt{\epsilon.L.\epsilon}$ ou $\sqrt{\sigma.M.\sigma}$. Cet équivalent est supposé toujours positif ou nul. Il peut être nul lorsque σ n'est pas nul (ce qui est le cas de l'équivalent Mises si la contrainte est sphérique).

Comme dans l'exemple de la sphère de Mendelson, l'équivalent choisi σ^{eq} sera systématiquement rendu adimensionnel sous la forme

$$s_{eq} = \frac{\sigma^{eq}}{\sigma_0} \tag{VI.3.1}$$

Il y a lieu de se méfier des valeurs maximales des champs de contraintes calculés sur la structure car, suivant la géométrie et le chargement, ces valeurs peuvent être étroitement dépendantes du maillage utilisé pour leur calcul (cf. remarque du §VI.2.5.5).

A partir de ce champ de contraintes, nous définissons les champs suivants :

i) premier champ :

$$\phi_1 = \text{Sup}_t \left[\frac{s_{eq}}{\text{Sup}_{\Omega_0} s_{eq}} \right] \tag{VI.3.2}$$

donc l'enveloppe au cours du temps, des équivalents relatifs (compris entre 0 et 1). Ces équivalents repèrent à chaque instant les endroits les plus chargés, indépendamment de l'amplitude du chargement au temps étudié. Les tranches pourront être à altitude constante 0.25 ; 0.5 ; 0.75 et 1.

Un chargement radial aura tendance à conserver les endroits les plus chargés. Inversement, un chargement complexe pourra à la limite conduire à un champ ϕ_1 équivalent à 1 sur tout le domaine. Dans ce cas, en tout point, à au moins un instant de l'évolution du chargement, la contrainte obtenue a été maximale sur Ω_0 .

Ce champ dépend étroitement de la valeur maximale de la contrainte élastique, et est pour cette raison peu fiable. Une valeur maximale sous-évaluée "remonte" les contraintes en-dehors du pic et change le volume V_{total} .

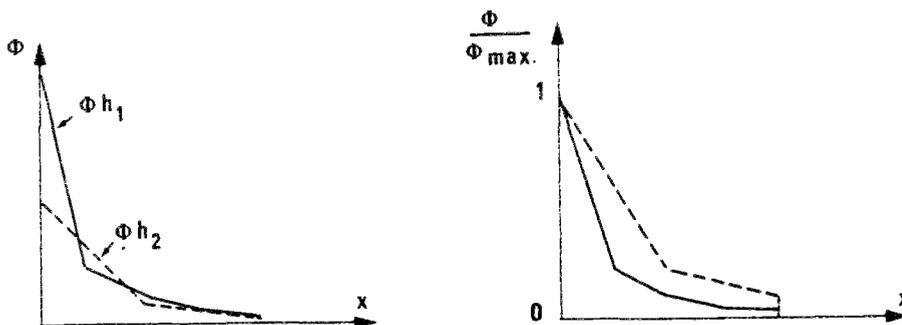


Fig. VI-3-2. Champ dépendant du maximum des contraintes

ii) second champ :

$$\phi_2 = \text{Sup}_t [s_{\text{eq}}] \quad (\text{VI.3.3})$$

soit l'enveloppe au cours du temps des équivalents **absolus**, ce qui revient au plus fort chargement. Les altitudes des tranches ont une signification physique et sont choisies correspondant à des contraintes égales à σ_0 , $2 \sigma_0$, $3 \sigma_0$, $5 \sigma_0$, $10 \sigma_0$, $25 \sigma_0$. On imagine difficilement (sauf dans des problèmes présentant des singularités, à traiter à part) un chargement vraisemblable donner une contrainte équivalente, même calculée élastiquement, supérieure à ces valeurs. La détermination des descripteurs est ici peu sensible à la valeur de la contrainte maximale.

iii) troisième champ :

$$\phi_3 = r_r \text{Sup}_t \left[\left\| \text{grad} \left[\frac{s_{\text{eq}}}{\text{Sup}_{\Omega_0} s_{\text{eq}}} \right] \right\| \right] \quad (\text{VI.3.4})$$

soit l'enveloppe des normes des gradients rendus adimensionnels des équivalents **relatifs** (ceux calculés pour ϕ_1). Il ne s'agit ni du gradient du sup, ni du sup sur le gradient ramené à 1.

La valeur dont on calcule le gradient étant sans dimension, le gradient est homogène à l'inverse d'une longueur et est rendu adimensionnel par multiplication par le rayon de référence r_r . Cette règle restera valable pour tout codage du gradient d'une isovaleur.

Ce champ exprime au cours du temps à quels endroits de la structure se trouvent les gradients maximaux, quelle que soit à ce moment l'importance de la contrainte absolue. *A priori*, c'est là où devraient être mis les éléments les plus fins. Ce champ évite que la contrainte la plus forte ne masque des endroits de la structure à peine moins sollicités. Inversement, il prend en compte les temps où les contraintes sont très faibles, sans grand intérêt. Il aurait pu être judicieux de choisir, pour le maximum sur Ω_0 de σ^{eq} , un seuil (par exemple $\sigma_0/2$) en-dessous duquel le temps correspondant aurait été éliminé du calcul de ϕ_3 . Sa définition serait ainsi devenue

$$\phi_3 = r_r \text{Sup}_t \left[\frac{\langle \text{Sup}_{\Omega_0} s_{\text{eq}} \rangle - 0.5}{\text{Sup}_{\Omega_0} s_{\text{eq}} - 0.5} \left\| \text{grad} \left[\frac{s_{\text{eq}}}{\text{Sup}_{\Omega_0} s_{\text{eq}}} \right] \right\| \right] \quad (\text{VI.3.5})$$

On remarquera que la valeur maximale théorique de la norme du gradient n'est pas limitée, contrairement à la valeur maximale de l'équivalent élastique qu'on imagine difficilement dépasser quelques multiples de σ_0 (abstraction faite des chargements singuliers). Même dans le cas où la contrainte est finie, le gradient peut être arbitrairement grand. Il n'est donc pas possible de coder des tranches à altitude fixée. Les tranches à altitude relative sont possibles mais sans intérêt.

Ici encore, dans le cas d'une évolution illimitée des déformations, la valeur maximale de la contrainte et *a fortiori* de son gradient dépend étroitement de la finesse du maillage utilisé, et tend vers l'infini lorsque celui-ci est affiné indéfiniment.

iv) quatrième champ :

$$\phi_4 = r_r \text{Sup}_t [\left\| \text{grad} (s_{\text{eq}}) \right\|] \quad (\text{VI.3.6})$$

soit l'enveloppe des normes des gradients des équivalents **absolus**, qui exprime les plus forts gradients de contrainte atteints au cours du chargement. Il ne faut pas confondre cette quantité avec le gradient du sup, qui n'a aucun sens.

Ce qui a été dit précédemment sur la valeur maximale des gradients, en théorie non limitée, reste valable.

v) enfin, le cinquième champ : nous souhaitons un paramètre capable de mesurer si le chargement conduit à des contraintes à croissance monotone ou s'il y a des changements de sens de son trajet, ou des chargements non radiaux. Cette caractéristique ne peut être omise de la description : l'examen des évolutions des erreurs enveloppes au cours du temps (cf. chapitre V) montre clairement leur augmentation au cours du trajet de chargement.

L'évolution des contraintes au cours du temps peut être différente suivant le point du domaine, donc ce paramètre est défini dans tout Ω_0 et décrit comme tel.

Pour cela, nous calculons, à chaque point de la structure, le rapport entre la somme des valeurs absolues des incréments d'équivalents de contrainte élastique, et la plus grande contrainte élastique trouvée au cours du temps :

$$\phi_5 = \frac{\sum_i \text{equiv} [\sigma_{i+1} - \sigma_i]}{\text{Sup}_i [\text{equiv} (\sigma_i)]}$$

ou, par passage à la limite,

$$\phi_5 = \frac{\int_0^t \text{equiv}(d\sigma)}{\text{Sup}_{\tau \leq t} [\text{equiv}(\sigma(\tau))]} \quad (\text{VI.3.7})$$

Ce rapport vaut 1 pour un chargement monotone radial, et plus de 1 si le chargement est alterné ou non radial. Nous représentons l'aspect de ϕ_5 dans le domaine et ses valeurs extrêmes.

Ce calcul nécessite un pas de temps suffisamment fin pour ne pas masquer des changements de sens du trajet de chargement. Le pas de temps choisi doit être inférieur ou égal au plus petit des pas de temps Δt utilisés lors des calculs numériques par éléments finis.

3.3. Description des caractéristiques non intrinsèques

3.3.1. Maillage

Tous les maillages ont utilisé des triangles P1 à 1 point de Gauss. La description des éléments utilisés n'est donc pas nécessaire. Il n'en serait pas de même dans le cas général, où des éléments de degré plus élevé peuvent être utilisés, ou alors des éléments de type différent en divers endroits de la structure.

Le maillage utilisé est décrit par son nombre d'éléments et de DDL, les tailles mini, moyenne et

maxi des éléments et le champ de tailles $\frac{h}{r_r}$ rendu adimensionnel. La répartition spatiale et les statistiques arithmétiques sont utilisables. Les valeurs du champ de tailles sont définies sans approximation et on peut utiliser le coefficient de remplissage.

L'existence d'axes de référence et de paramètres de position pour le codage du champ de tailles est indispensable et on le comprend aisément : si la géométrie (mais pas le chargement) de la structure est symétrique et si un bon maillage a donné une erreur faible, retourner ce maillage doit modifier les descripteurs afin que le système d'apprentissage ne prédise pas la même erreur que pour le cas précédent. Les invariants géométriques étant par définition invariants par rotation et translation, seuls les paramètres de position permettent de faire la différence.

3.3.2. Pas de temps

En élastoplasticité classique quasistatique, le pas de temps se ramène à un paramètre d'évolution et n'a pas de signification en lui-même. Nous choisissons de le décrire par l'incrément de contrainte qu'il produit dans la structure supposée élastique :

$$\Delta\sigma^{el} = \text{équiv} (\sigma^{el}(t_{i+1}) - \sigma^{el}(t_i)) \quad (\text{V.4.1})$$

Nous décrirons cet incrément de contrainte par l'évolution au cours du temps de son sup et de sa moyenne sur Ω_0 , la valeur minimale étant sans intérêt. Le sup sur Ω_0 de $\Delta\sigma^{el}$ peut être mal défini si le chargement comporte des singularités.

En dynamique, le temps physique est significatif et devrait obligatoirement être ajouté à cette description.

3.3.3. Paramètres divers du calcul élastoplastique

Les paramètres "secondaires" du calcul élastoplastique (tolérance, etc.) ont une influence sur l'erreur que nous ne maîtrisons pas. Si une étude systématique de leurs effets était faite, il conviendrait de les décrire.

La tolérance TOL peut être décrite par elle-même. Le nombre maximal d'itérations plastiques par pas de charge *imax* peut être décrit par exemple par

$$\frac{\text{imax}}{\text{Sup}_t [\text{Moyenne}_{\Omega_0} \Delta\sigma^{el}]} \quad (\text{VI.3.8})$$

L'algorithme d'intégration (NRM *i*, QN *i*, etc.) est descriptible par un terme multivalué ; l'espacement *i* des refactorisations par sa valeur.

3.4. Description des conclusions

3.4.1. Erreurs

Plusieurs champs peuvent servir de base à une erreur (cf. §III.2.5) et plusieurs types d'erreur sont calculables (cf. §III.2). Une conclusion peut être constituée par n'importe laquelle de ces erreurs. Du point de vue de l'ingénieur d'études, tout dépend de ce qu'il cherche à connaître et des limites règlementaires qu'il ne doit pas franchir. On peut avoir à respecter une contrainte limite, et dans ce

cas l'erreur absolue locale et globale en contraintes sera demandée. On prend aussi en compte la déformation plastique maximale ; les erreurs globales et locales absolues en déformation seront retenues. Les erreurs sur les déplacements peuvent être utiles si des problèmes de jeu ou d'encombrement existent.

Du point de vue du chercheur, la plupart des résultats publiés retiennent les erreurs relatives.

Nous voyons donc que le choix d'une erreur dépend de l'usage qui en sera fait. La solution exacte permettant le calcul de toutes les erreurs possibles et imaginables, il est aisé de les calculer toutes et de générer si nécessaire des bases de règles pour les plus intéressantes d'entre elles. Nous avons systématiquement calculé plusieurs dizaines d'erreurs différentes. Les erreurs retenues dans les problèmes d'apprentissage sont présentées au chapitre VII.

3.4.2. Coût des calculs

Le coût des analyses élastoplastiques est important par rapport à celui des calculs élastiques. Nous avons systématiquement noté les temps CPU des calculs élastoplastiques, et ceux des calculs élastiques avec les mêmes discrétisations pour permettre une comparaison.

L'inconvénient est l'influence des paramètres "secondaires" du calcul élastoplastique sur le coût, que nous ne maîtrisons pas non plus. Le changement de ces paramètres peut totalement modifier les temps de calcul. Leurs valeurs ayant été choisies plus ou moins arbitrairement, une comparaison des coûts qui ne prendrait pas en compte les paramètres choisis serait sans intérêt.

D'autres mesures du coût, comme le stockage disque, le nombre d'itérations plastiques, le temps humain de l'analyse, etc., auraient pu être choisies. Seul le nombre d'itérations a été systématiquement noté. L'exploitation de ces coûts n'a pas été entreprise.

4. FIABILITE DES DESCRIPTEURS PRESENTES

Les descripteurs d'un problème mécanique ont été présentés dans leur ensemble au paragraphe précédent. La plupart d'entre eux utilisent les résultats d'un calcul élastique de la structure. Ce calcul, effectué par éléments finis, donne des résultats dépendant des maillages et pas de temps retenus. Il convient de s'assurer que les descripteurs ne varient pas trop en fonction de ces paramètres.

La stabilité des incréments élastiques (V.4.1) a été présentée au §V.4.3, dans le cadre de l'étude des erreurs en fonction des pas de temps. La quasi-invariance par rapport au maillage des incréments moyens est montrée sur la figure V-4-6. Les incréments maximaux sont extrêmement sensibles à la finesse du maillage, si les chargements sont singuliers.

La stabilité du calcul des descripteurs du champ des contraintes absolues ϕ_2 dépend de la "régularité" du chargement. On constate sur la figure suivante la nécessité d'une finesse minimale du maillage, lorsque le chargement donne des contraintes élevées. L'utilisation du logarithme des contraintes maximales réduirait ces variations :

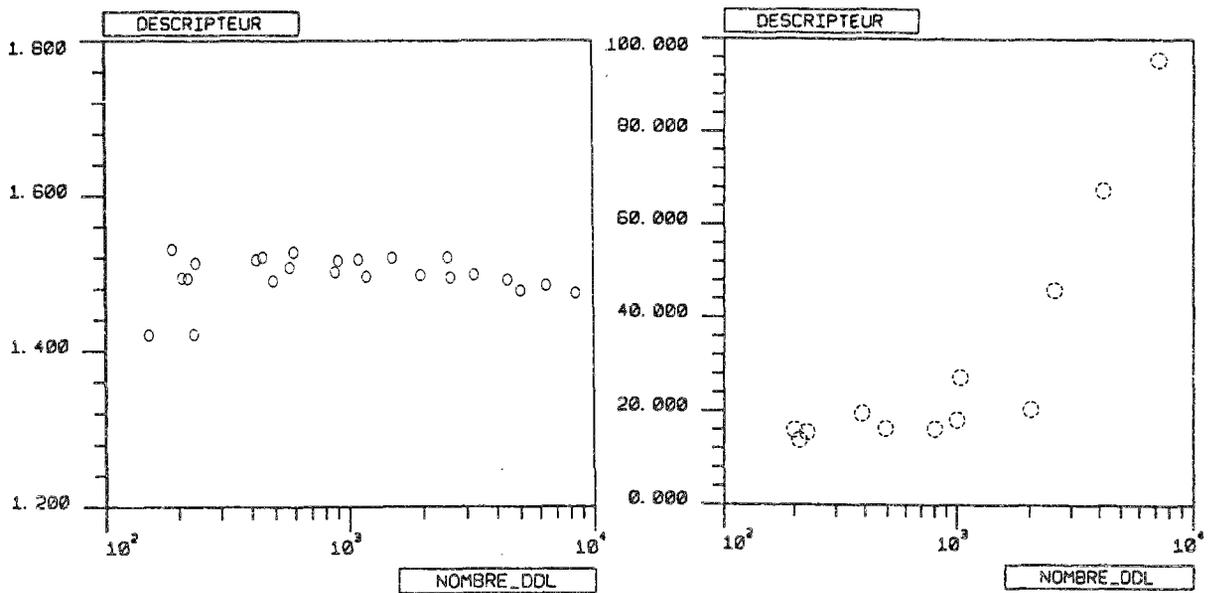


Fig. VI-4-1 a b. Contrainte maximale $\text{Sup}_t \text{Sup}_\Omega \phi_2$, pour NR3 et NR7

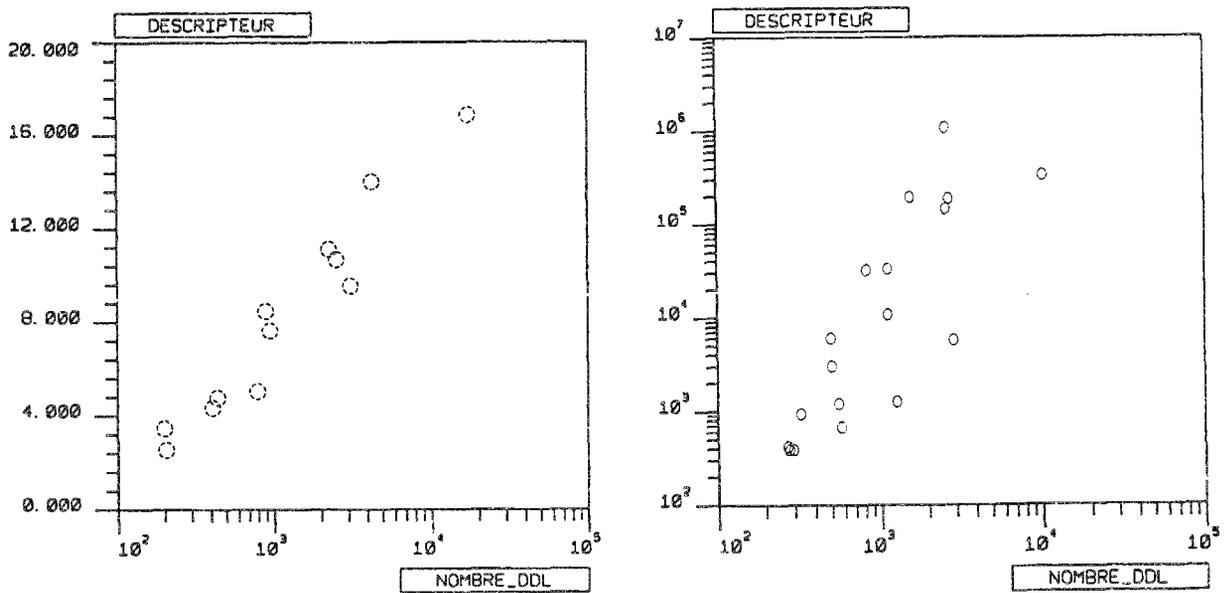


Fig. VI-4-2 a b. Gradient maximal $\text{Sup}_t \text{Sup}_\Omega \phi_4$, pour NR2 et NR4

La valeur du gradient maximal, pour un chargement régulier comme NR2, n'est pas encore stabilisée pour un maillage de 18000 DDL. Pour NR4, chargement dont le point singulier est rejeté hors du domaine, il est vain de tenter d'estimer ce descripteur. Sa valeur est si élevée qu'il faudrait probablement des maillages de centaines de milliers de DDL, ou des éléments de degré très élevé, pour la déterminer.

L'exemple SPH1 permet d'estimer la précision du calcul des descripteurs. Pour la fonction de déplacement SPHERE, le calcul analytique des descripteurs $\phi_{2\text{moy}}$, $\phi_{2\text{max}}$, $\phi_{4\text{moy}}$ et $\phi_{4\text{max}}$ donne

$$\text{contrainte moyenne} = \phi_{2\text{moy}} = \frac{3p a^2 b^2}{\sigma_0 (a + b)(b^3 - a^3)}$$

$$\text{contrainte maximale} = \phi_{2\text{max}} = \frac{3p b^3}{2\sigma_0 (b^3 - a^3)}$$

$$\text{gradient moyen} = \phi_{4\text{moy}} = \frac{9p ab \sqrt{b^2 - a^2}}{4\sigma_0 (b^3 - a^3)}$$

$$\text{gradient maximal} = \phi_{4\text{max}} = \frac{9p b^3 \sqrt{b^2 - a^2}}{4\sigma_0 a (b^3 - a^3)}$$

où p est la pression maximale atteinte à la fin du chargement. Dans le cas de SPH1, on a $p = 2.1134 \sigma_0$. Les descripteurs valent respectivement 0.55, 3.292, 1.5518 et 13.97. Leur évolution en fonction du nombre de DDL des maillages est représentée sur les figures suivantes :

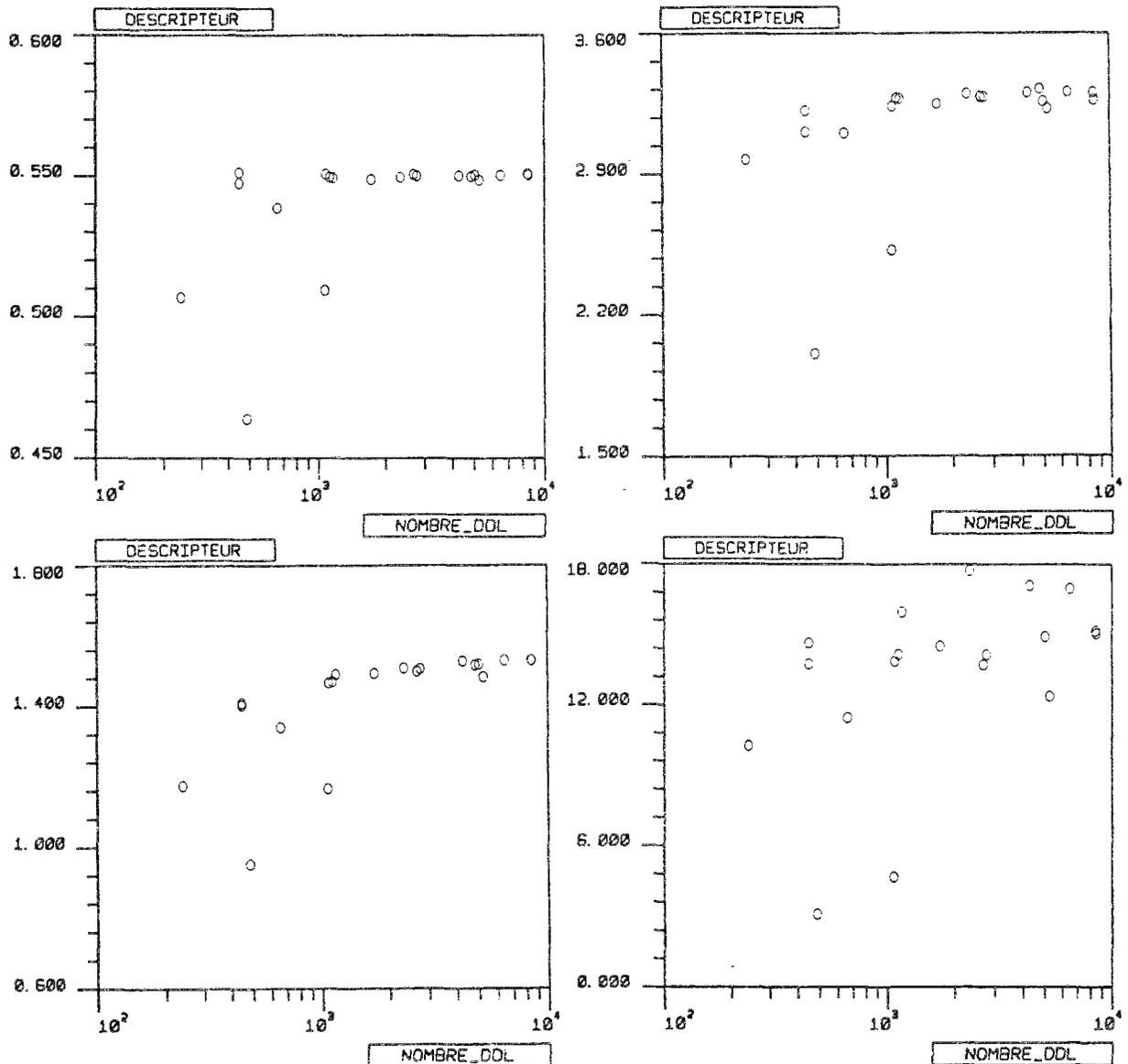


Fig. VI-4-3 a b c d. Evolution des 4 descripteurs en fonction du maillage

On constate une convergence correcte des 3 premiers descripteurs vers leur valeur exacte, à partir d'environ 2000 DDL. La convergence du gradient maximal est plus lente et moins franche.

Nous avons pu remarquer, notamment sur d'autres exemples non représentés ici, que la qualité de l'estimation des gradients dépend très étroitement de la qualité du maillage. Il faut donc éviter de calculer les descripteurs sur des maillages moyens ou uniformes. Les valeurs trouvées formeront un nuage autour des estimations les plus précises obtenues sur les meilleurs maillages, empêchant souvent le choix de ces dernières (cf. Fig. VI-4-3 d).

Points essentiels du chapitre VI

1. Notion de description

Nous envisageons l'utilisation de techniques d'apprentissage automatique, qui sont capables de construire des règles à partir d'une base d'exemples représentatifs d'un problème donné. Les règles relient les caractéristiques des exemples aux conclusions. L'application des règles à un cas inconnu donne la conclusion de ce cas.

Il est nécessaire de décrire les exemples. Pour être utilisable, une description doit vérifier diverses propriétés. Il existe également plusieurs formes de descripteurs ; nous nous sommes limités aux descripteurs calculables numériques ou multivalués.

2. Description de la géométrie d'un objet

Ces objets peuvent être des domaines plans, des fonctions scalaires ou tensorielles définies sur un domaine plan, etc. Nous proposons un système de descripteurs pour de tels objets. Nous séparons les caractéristiques de ces objets :

- en paramètres de taille, liés uniquement à la "dimension" de l'objet ;
- en paramètres de position, décrivant la position de l'objet dans un repère de référence ;
- en paramètres de forme, uniquement liés à la forme de l'objet.

Ces paramètres de forme peuvent être repris des méthodes de reconnaissance de formes développées par exemple dans la vision artificielle, le traitement d'images, etc. Après une étude rapide de ce qui se fait dans ce domaine, nous proposons des descripteurs liés notamment aux invariants de tenseurs de forme d'un objet.

3. Description d'un problème mécanique

Nous nous restreignons aux problèmes bidimensionnels. Nous séparons les caractéristiques en plusieurs familles :

- les caractéristiques intrinsèques, indépendantes de toute discrétisation : géométrie, matériau, chargement
- les caractéristiques non intrinsèques, liées à la discrétisation spatiale ou temporelle
- les conclusions, qui peuvent être les erreurs, le coût, etc.

Le domaine est décrit comme une forme géométrique plane.

Le matériau est décrit par ses propriétés mécaniques : modules élastique et d'écrouissage, coefficient de Poisson, etc.

Le chargement est décrit par le champ de contraintes qu'il crée dans la structure supposée élastique. Un tel calcul est peu coûteux et tient compte à la fois des particularités du chargement et de la géométrie. Ces contraintes sont représentées par 5 champs :

- le champ des sups des contraintes relatives
- le champ des sups des contraintes absolues
- le champ des sups des gradients des contraintes relatives
- le champ des sups des gradients des contraintes absolues
- le champ des coefficients de "cyclicité", qui tiennent compte des trajets de chargement.

Les maillages sont décrits par leur champ de tailles rendues adimensionnelles. Les discrétisations temporelles retiennent les sups des incréments élastiques au cours du trajet de chargement.

Certains de ces descripteurs, tirés des résultats d'un calcul élastique, peuvent être sensibles aux maillages utilisés pour ce calcul. Il convient de retenir des discrétisations suffisantes, ou alors d'éliminer les descripteurs trop dépendants des maillages.

CHAPITRE VII

ESTIMATION DES ERREURS

PAR APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE

1. DIFFERENTES TECHNIQUES D'APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE

1.1. Généralités

L'apprentissage automatique construit une base de règles à partir d'une base d'exemples, de caractéristiques et de conclusions connues. Chaque exemple est représenté par un ensemble de descripteurs, de nombre et signification identique pour tous les exemples. L'application des règles trouvées aux descripteurs d'un cas inconnu donne la conclusion de ce cas. Les "données" du problème d'apprentissage sont les bases d'exemples, et les "résultats", les règles. Il ne faut pas confondre ces termes avec les caractéristiques et les conclusions de chacun des exemples.

Il reste à présenter les techniques de construction des règles. Nous nous limiterons à une présentation rapide des principales méthodes. Nous en avons utilisé plusieurs dans le cadre de notre travail.

- *Notion de classement*

Avant cela, nous introduisons la notion de classement. Ce terme est souvent repris dans la littérature. Le classement, appelé aussi discrimination, suppose que les classes auxquelles appartiennent les exemples initiaux sont connues. Il consiste à trouver à quelle classe appartient un exemple ultérieur. Pour un cas inconnu et dans un contexte d'apprentissage, cette prédiction se fait à partir des caractéristiques du cas inconnu et des règles trouvées.

Le classement (en anglais *classification*) ne doit pas être confondu avec la classification (en anglais *cluster analysis*). Cette dernière technique a pour objectif le regroupement des individus de la base d'apprentissage en un nombre fixé de classes. Ce regroupement peut être tel que la distance intra-classes est minimisée, et la distance inter-classes est maximisée. La classification peut être vue comme la définition d'une fonction conclusion (qui associe à un exemple la classe de cet exemple), couplée à la recherche d'une estimation de cette conclusion (comme pour un problème de discrimination classique).

Dans ce qui suit, nous ne nous intéressons qu'aux problèmes de type classement et supposons que les classes à discriminer sont définies et invariables. Le but de l'apprentissage est alors de discriminer la classe associée à l'exemple.

- *Répartition apprentissage/test*

La base d'exemples est donnée en un seul bloc. La répartition entre exemples d'apprentissage et exemples de test est laissée à l'initiative de l'expert. La répartition entre apprentissage et test dépend de la richesse de la base d'exemples et de la complexité du problème d'apprentissage. Si on dispose de nombreux exemples, une répartition du type 60/40 permet d'obtenir une estimation significative de la validité des règles. Si les exemples sont en faible nombre, le cas limite est de tenter un seul exemple en test contre le reste en apprentissage, et de changer l'exemple de test afin de voir si la qualité des prédictions varie (technique de *jackknife*).

Si l'ordre de stockage des exemples n'est pas quelconque, il peut être intéressant de choisir l'appren-

tissage et le test par un tirage aléatoire dans la base d'exemples. La prédiction est fiable si un changement aléatoire des exemples de chacune des bases (à répartition identique) modifie peu les règles.

1.2. Techniques de l'analyse de données

On suppose qu'il n'y a qu'une conclusion à prédire. Il faut trouver un résultat Y pour chaque vecteur X (à k composantes) des descripteurs de chacun des n exemples. Ce résultat peut être un terme numérique, si on fait une prédiction numérique. Pour un classement, le résultat est censé appartenir à une seule de N classes. Le résultat Y correspond au numéro de la classe qui définit la conclusion.

Diverses techniques peuvent être utilisées (par exemple Foucart, 1985). Nous nous contenterons d'en donner le principe général sans entrer dans les détails.

1.2.1. Régression multiple

Cette méthode cherche les coefficients A_i qui minimisent

$$\sum_{i=1}^n \left[Y_i - \left(A_0 + \sum_{j=1}^k X_{ij} A_j \right) \right]^2 \quad (\text{VII.1.1})$$

Les X_{ij} sont les composantes de l'observation i et Y_i est la valeur observée de la variable que l'on veut estimer. Dans le cas d'un classement, la variable Y_i est le numéro de classe (lorsqu'il y a 2 classes). Quand il n'y a que des termes linéaires, la résolution du système se fait directement, sauf s'il y a des relations entre certaines variables qui rendent singulière la matrice du système d'équations. Il faut alors, préalablement à toute résolution, éliminer les variables liées. L'examen de la matrice de corrélation peut indiquer quelles sont les variables liées deux à deux, mais la méthode suivante donne une estimation sur le nombre de variables indépendantes.

1.2.2. Analyse en Composantes Principales

On cherche à réduire le nombre de composantes du vecteur X par une transformation linéaire de la forme :

$$Z_i = \sum_{j=1}^n B_{ij} X_j \quad (\text{VII.1.2})$$

les Z_i sont appelés les composantes principales. Les nouveaux axes sont obtenus de manière itérative. On impose que la variance des projections sur le premier axe soit maximale ; les axes suivants sont obtenus en maximisant la variance et en imposant que le nouvel axe soit orthogonal aux axes précédents. Comme on a une infinité de solutions, on impose en plus que les vecteurs projections soient unitaires.

Les vecteurs B_j sont obtenus à partir des vecteurs propres de la matrice de covariance, les carrés des valeurs propres sont proportionnels à la variance des variables transformées. Le nombre de valeurs

propres non nulles (ou très peu différentes de zéro) indique le nombre de variables indépendantes.

1.2.3. Analyse de Variance

Cette technique s'applique généralement à des mesures faites dans conditions expérimentales dépendant de plusieurs paramètres comportant plusieurs modalités. Elle teste si les diverses modalités d'une variable influent de manière significative sur le résultat. On peut également tester l'influence de plusieurs variables conjointement. Cette méthode est intéressante pour éliminer des variables non significatives, en particulier pour les multivalués, mais l'utilisation directe pour le classement n'est pas adaptée.

1.2.4. Analyse Discriminante

L'analyse discriminante étudie le lien entre une variable qualitative (multivaluée) et un certain nombre de variables quantitatives. Chaque individu appartient à une classe. Il s'agit de discriminer les classes à partir des variables quantitatives. On utilise pour cela les matrices de covariance totale, inter-classes et intra-classes. On cherche une combinaison linéaire des variables qui maximise la variance inter-classes et qui a une variance totale égale à 1.

1.2.5. Problèmes rencontrés

Ces techniques peuvent être mises en échec dans divers cas, notamment :

- certaines bases d'apprentissage comportent un nombre d'observations par classe trop faible pour que l'on puisse raisonnablement effectuer un traitement statistique. Pour appliquer l'analyse de données, il faut faire l'hypothèse (Benzecri, 1973) que le rapport du nombre d'exemples au nombre de descripteurs doit être nettement supérieur à 1. Dans le cas contraire, il faudra éliminer certains descripteurs supposés inutiles ou redondants.
- si des descripteurs sont linéairement dépendants, le fait est signalé : l'analyse par régression multiple conduit par exemple à observer des matrices singulières, mais sans indiquer les variables à éliminer. Il faut alors les déterminer par une autre méthode.
- les données manquantes ou erronées peuvent également conduire à de mauvais classements.

L'analyse en composantes principales donne une estimation du nombre de variables indépendantes.

1.3. Apprentissage numérique

1.3.1. Régression multiple non linéaire

Cette technique utilise d'abord un pré-traitement des données voisin de l'ALN (Adaptive Learning Network (Mucciardi, 1972), (Cook et Craig, 1980)). On effectue des régressions multiples en cherchant à approximer au sens des moindres carrés la sortie S_{ij} , comme une fonction linéaire des monômes X_i , X_j et $X_i X_j$, où (X_i, X_j) décrit les couples de variables initiales.

$$S_{ij} = A_{0ij} + A_{1ij} X_i + A_{2ij} X_j + A_{3ij} X_i X_j \quad (\text{VII.1.3})$$

Les fonctions S_{ij} sont traitées comme des nouvelles variables initiales au pas suivant.

Généralement, au bout de quelques couches, le nombre de termes du polynôme construit par ALN devient très grand et supérieur au nombre d'exemples. Une deuxième stratégie est appliquée : on cherche par optimisation globale un sous-ensemble de monômes compatible avec le nombre d'exemples (environ entre le tiers et les deux tiers du nombre d'individus). Cette recherche est elle aussi effectuée de manière itérative. On construit d'abord le meilleur polynôme retenant 2 monômes, puis 3... jusqu'au nombre maximal de monômes cité précédemment. A chaque couche, les monômes retenus et/ou leurs coefficients multiplicatifs peuvent être différents de ceux de la couche précédente. Il est difficile de construire un test d'arrêt fiable indiquant à quelle couche il faut s'arrêter. En effet, si en principe la prédiction sur l'apprentissage s'améliore quand le nombre de monômes augmente, la prédiction du test peut se dégrader : le polynôme construit a tendance à perdre de sa généralité en "collant" aux exemples de l'apprentissage, avec des variations arbitraires hors de ceux-ci (phénomène d'overfitting).

1.3.2. Réseaux neuronaux

Les réseaux neuronaux ou connexionnistes (Hecht-Nielsen, 1990) sont construits à base d'automates quasi-linéaires, définis par :

- leurs connexions
- les pondérations attachées à ces connexions
- leur seuil de déclenchement.

L'état d'un neurone de la couche k se déduit de la somme pondérée des connexions avec la couche $k-1$, par une fonction de transition :

$$u_{i,k} = f \left[\sum_j \alpha_{j,k-1} u_{j,k-1} - \text{seuil } u_{i,k} \right]$$

où f désigne une fonction discontinue du type seuil ou Heaviside, soit une fonction continue linéaire par morceaux ou dérivable de même comportement général (sigmoïde par exemple).

La topologie du réseau étant définie, les coefficients α_{ij} sont optimisés en considérant tour à tour les exemples de la base d'apprentissage, par la méthode dite de la rétro-propagation du gradient. Il est nécessaire que les fonctions f soient dérivables.

L'inconvénient de l'approche est que la topologie du réseau est supposée connue. Une autre topologie peut donner un meilleur résultat. On ne peut le savoir qu'en l'essayant à son tour. Les réseaux sont plus efficaces s'ils disposent de plus de neurones et de couches intermédiaires entre l'entrée et la sortie, mais le coût de la recherche des coefficients augmente avec le carré du nombre de connexions.

Les coefficients sont optimisés globalement, des itérations sont effectuées sur l'ensemble des exemples de la base d'apprentissage, jusqu'à stabilisation de leur valeur. Cette phase est plus coûteuse

que dans le cas de l'ALN, où les coefficients sont optimisés localement, et non remis en cause.

1.4. Apprentissage symbolique

1.4.1. Principe

L'apprentissage multi-couches ou AMC (Sebag, 1990) (Schoenauer et Sebag, 1988, 1989 et 1991) est de type symbolique, dans le sens où les traitements effectués sont de type logique et non statistique. L'AMC correspond à un algorithme de génération de règles à partir d'exemples en logique des propositions multivaluées. Chaque exemple est en lui-même une règle : il est écrit pour relier ses descripteurs à ses conclusions sous une forme booléenne. La base de règles construite ne peut être évidemment le simple stockage des exemples de la base d'apprentissage : ces règles donneraient un classement parfait sur l'apprentissage (à moins qu'il n'existe des exemples contradictoires), et auraient toutes les chances d'être mauvaises sur la base de test ou les cas inconnus. Il est donc nécessaire de généraliser les connaissances contenues dans les exemples de la base d'apprentissage.

Les options prises sont celles d'une généralisation ascendante maximale discriminante (Michalski, 1984). Les exemples de la base sont généralisés un par un. Pour chaque exemple s , le but est d'apprendre des règles maximale discriminantes. Ces règles sont les plus générales possibles mais ne recouvrent pas de contre-exemples (exemples de conclusion différente de celle de s). La notion de "recouvrement" d'une règle ou d'un exemple par une autre règle a une définition précise (Sebag, 1990).

Ce traitement est de type logique : il suffit d'un contre-exemple pour inhiber une règle, indépendamment du nombre d'exemples qu'elle recouvre. *Pour construire des règles représentatives d'un problème donné, il n'est pas nécessaire de disposer de beaucoup d'exemples si on a les bons.*

Ces techniques logiques peuvent être très sensibles aux défauts des données initiales. Un certain nombre de paramètres et d'heuristiques ont été mis en place afin de composer avec les défauts inévitables des données réelles.

1.4.2. Paramètres spécifiques

Le logiciel d'AMC utilisé est capable de traiter des données de type multivalué. Les données de type réel sont segmentées par un préprocesseur utilisant par exemple les méthodes de discrétisation de (Lebowitz, 1985). La sortie est unique, de type multivalué. Nous précisons la définition des principaux paramètres à définir lors de tout traitement.

- *Taux d'erreur*

La généralisation peut être adaptée en fonction d'un taux d'erreur τ_e . Le but est d'éviter que les règles significatives ne soient inhibées par des contre-exemples erronés. En effet, si la base est bruitée, les règles parfaitement discriminantes ont un faible pouvoir prédictif et les règles significatives admettent des exceptions. On suppose que la base contient suffisamment d'exemples "corrects" par rapport au nombre d'exemples "bruités", pour lesquels la conclusion est fausse.

Ce taux d'erreur τ_e est choisi par l'utilisateur. Pour toutes les règles r_i construites, on impose

$$\frac{\text{nombre d'exemples pour lesquels } r_i \text{ donne une conclusion fautive}}{\text{nombre d'exemples pour lesquels } r_i \text{ donne une conclusion correcte}} \leq \tau_e$$

soit $\frac{\text{erreur}(r_i)}{\text{score}(r_i)} \leq \tau_e$ avec $0 \leq \tau_e \leq 1$.

Une augmentation du taux d'erreur conduit à des règles plus générales, ou recouvrant plus d'exemples, et moins nombreuses.

• *Taille critique*

Cette taille correspond au nombre minimal N_c d'exemples que doit recouvrir chaque règle pour être retenue. Le minimum est de 1. Plus cette taille est élevée, plus la sélection est sévère et moins il y aura de règles. Ce paramètre est représentatif de la redondance de la base d'apprentissage.

On constate souvent que des exemples isolés de la base génèrent une foule de règles ne recouvrant qu'eux-mêmes. Un choix judicieux de la taille critique permet l'élimination de telles règles.

• *Taux de redondance*

Ce taux correspond à la suffisance de la base d'apprentissage. De façon intuitive, si la base d'apprentissage est suffisante, il convient de garder les "meilleures" règles. On impose alors, si la règle r est une généralisation de s :

$$\text{score}(r) = \max(\text{score}(t)) \text{ où les } t \text{ sont des règles généralisant } s.$$

Sur des bases réelles, ce critère conduit à des bases de règles instables et insuffisantes. On retient des règles plus nombreuses et redondantes. Le taux de redondance $\tau_r \in [0, 1]$ est fixé, et on impose

$$\text{score}(r) \geq \tau_r \max(\text{score}(t))$$

• *Seuil cul-de-sac*

L'exploration est combinatoire et peut se révéler longue. Il peut être utile d'élaguer l'arbre d'exploration. Le seuil S_c correspond au nombre d'échecs au bout duquel le programme déclenchera des oublis aléatoires, dans le but d'accélérer la recherche.

Ce paramètre est critique : s'il est trop grand, le coût de la recherche peut être élevé ; s'il est insuffisant, on risque de rater des généralisations intéressantes.

• *Relancement (ou nombre de couches)*

L'apprentissage multi-couches est une méthode itérative : le principe est d'extraire des règles par approximations successives.

Ainsi, une première base de règles approchées, redondantes et imparfaitement discriminantes, peut être extraite d'une base d'exemples. Une étape de transition, la réduction, permet de se ramener au problème de l'amélioration d'une base de règles. Une seconde étape de généralisation apprend de nouvelles règles par amélioration des règles précédentes, et ainsi de suite.

L'itération conduit à élaborer une suite de bases de règles, appelée réseau de règles ; chaque couche de règles raffine et corrige les règles de la couche précédente. L'apprentissage en plusieurs couches se révèle plus robuste qu'une approche symbolique directe, en cas de défaut des données (Sebag, 1990).

Pour une base d'apprentissage et une base de test fixées, la liste des paramètres d'un traitement

AMC est

τ_e ; N_c ; τ_c ; S_c ; numéro de la couche (s'il y a eu itération sur le réseau de règles).

Enfin, on notera que, pour l'AMC comme pour les autres méthodes d'apprentissage, un excès de descripteurs non significatifs peut empêcher la construction de règles fiables. Le couplage de méthodes de type analyse de données, rejetant les descripteurs non significatifs, et d'apprentissage symbolique, traitant les descripteurs restants, peut être une approche intéressante.

2. APPLICATIONS EN CALCUL DES STRUCTURES

Notre objectif premier concerne l'estimation *a priori* de l'erreur et des maillages optimaux (cf. §VII.3). Nous présentons ici quelques autres applications possibles de l'apprentissage automatique au calcul des structures élastoplastiques.

2.1. Choix optimal des paramètres d'un calcul élastoplastique

Nous avons évoqué au §V.1.1.1. la possibilité d'utiliser les solutions exactes pour mettre en évidence l'influence des paramètres du calcul élastoplastique comme la tolérance, le nombre maximum d'itérations, l'algorithme d'intégration (cf. §II.4.4). Il n'existe pas de règles donnant la valeur *optimale* de ces paramètres. Leur recherche peut être menée par apprentissage automatique.

Il faut d'abord définir ce qu'est la valeur optimale d'un paramètre de calcul. Nous retenons la définition suivante : un paramètre est optimal lorsqu'il minimise le rapport coût/efficacité du calcul. Le coût est ici mesuré par le temps CPU ; les discrétisations n'interviennent pas (elles sont supposées inchangées lors de la recherche des paramètres optimaux). La qualité correspond à une des erreurs définies au §III.2.

Nous savons (cf. §III.2.7) que le coût d'un calcul peut considérablement augmenter lorsqu'on diminue la tolérance (et qu'on autorise un nombre élevé d'itérations par pas). L'examen de l'erreur correspondante montre qu'elle ne décroît plus à partir d'un certain seuil et que les calculs supplémentaires sont faits quasiment en pure perte. Il est logique de supposer qu'il existe des valeurs optimales des paramètres qui optimisent le rapport coût/efficacité.

La valeur optimale d'un paramètre est donc la conclusion de l'apprentissage. Il reste à définir quelles sont les caractéristiques à décrire. On peut choisir dans la liste suivante :

- la géométrie de la structure, décrite selon §VI.3.2.1
- le matériau, décrit selon §VI.3.2.3
- le chargement de la structure, décrit selon §VI.3.2.4
- les discrétisations spatiale et temporelle
- les autres paramètres retenus, à choisir parmi le type d'algorithme d'intégration, la tolérance, le nombre maximal d'itérations exprimé par exemple selon (VI.3.9).

2.2. Estimation du coût

Une autre conclusion intéressante est le coût du calcul, assimilé le plus souvent au temps de calcul. On peut y ajouter le stockage disque et/ou mémoire maximal. La prédiction *a priori* du coût du calcul permet par exemple à un ingénieur de lancer ses calculs en connaissance de cause, en lui évitant de se demander quand il obtiendra ses résultats et si sa configuration matérielle est suffisante. Cette prédiction peut être utile pour établir un devis d'affaire lors d'un appel d'offres industriel.

Les caractéristiques intrinsèques sont la géométrie, le matériau et le chargement décrits selon §VI.3. Doivent figurer parmi les caractéristiques complémentaires :

- le code de calcul utilisé. Il peut être imposé (et dans ce cas tous les exemples de la base ont été construits avec ce code) ou choisi dans un catalogue (ce qui implique que des exemples de chaque code figurent dans la base).
- les discrétisations spatiale et temporelle. Elles peuvent être déduites d'une étude de l'erreur (par exemple selon les techniques du §VII.3) ou données *a priori*.
- les paramètres du calcul élastoplastique. L'idéal serait la prédiction simultanée du coût de l'analyse et des paramètres optimaux, mais cet objectif peut être difficile à atteindre.

3. ESTIMATION D'ERREUR EN CALCUL DES STRUCTURES ELASTOPLASTIQUES

Les différents types d'erreur ont été définis au §III.2. Un choix d'erreur est supposé fait et conservé dans toute l'analyse, de la construction de la base d'apprentissage à la déduction des règles et leur exploitation sur un cas inconnu.

3.1. Différents types de problèmes à résoudre

3.1.1. Les deux approches retenues

Nous considérons dans la suite deux familles de Problèmes d'Apprentissage (PA) :

- 1ère famille : *recherche d'une discrétisation respectant une erreur donnée*

Les caractéristiques sont prises parmi la géométrie, le matériau, le chargement, l'erreur demandée, éventuellement une des 2 discrétisations (temporelle ou spatiale) et les paramètres du calcul.

Les conclusions sont l'autre discrétisation, ou les deux à la fois si aucune n'est prise en hypothèse, ou encore la ou les discrétisations **optimales** respectant l'erreur demandée. Peuvent s'y ajouter les paramètres du calcul (éventuellement optimaux).

- 2ème famille : *recherche de l'erreur obtenue avec une discrétisation donnée*

Les caractéristiques sont à prendre parmi la géométrie, le matériau, le chargement, les paramètres du calcul, les deux discrétisations. La conclusion est l'erreur.

Cette approche impose que les règles soient capables de prédire l'erreur pour **tous** les types de maillages qui lui seront présentés, aussi bien les bons que les mauvais. N'importe quel individu situé dans le nuage de points des figures comme V-3-1 doit être prévu. En conséquence, la base

d'apprentissage doit comporter des maillages optimaux, mais aussi des maillages moyens, mauvais et très mauvais. Ces derniers ne sont pas forcément les moins coûteux à calculer. Il peut paraître illogique de dépenser de l'argent pour construire des solutions exactes sur des maillages absurdes ; c'est cependant nécessaire pour ne pas mettre en défaut l'apprentissage.

Cette remarque est valable pour la discrétisation temporelle si celle-ci est retenue dans l'apprentissage.

Cette deuxième approche peut être utilisée pour construire une discrétisation respectant *a priori* une erreur donnée. L'utilisateur devra définir "manuellement" une discrétisation, évaluer l'erreur par la base de règles, puis "tenter sa chance" avec un maillage plus fin ou de topologie différente si cette erreur ne lui convient pas. La recherche d'un maillage optimal ne peut être tentée qu'au coup par coup, en cherchant d'abord un maillage de N_1 éléments respectant l'erreur demandée, puis en le modifiant de façon à diminuer N_1 sans augmenter l'erreur.

3.1.2. Approche à deux niveaux

La résolution des problèmes d'apprentissage de la première famille uniquement par apprentissage automatique soulève des difficultés importantes.

Il faut d'abord être capable de déduire de l'apprentissage une discrétisation (éventuellement optimale). Nous avons précédemment remarqué qu'il n'est pas possible de déduire un maillage de ses descripteurs calculés selon §VI.3.3.1.

Nous éliminons donc la prédiction directe *a priori* d'une discrétisation (optimale ou non), que nous ne savons pas faire *par apprentissage* dans l'état actuel de nos travaux.

On peut cependant conserver le principe de cette approche s'il existe une règle empirique de maillage quasi-optimal donnant un "bon" maillage à partir d'un paramètre facile à représenter et à prédire. Cela peut être par exemple un nombre d'éléments ou un nombre de DDL d'un maillage. Prédire ce nombre, simple paramètre numérique, par apprentissage automatique, ne pose pas de difficultés de principe. Ensuite, la règle de remaillage construit seule un bon maillage ayant par exemple le nombre d'éléments demandé. Ce nombre correspondrait au nombre d'éléments (d'un type donné : triangles P1 dans ce qui suit) du maillage quasi-optimal respectant l'erreur demandée.

La recherche d'une règle empirique donnant les pas de temps optimaux est moins évidente. Elle peut être conduite à partir des incréments élastiques (cf. §V.4).

Cette approche est à deux niveaux : il est demandé à l'apprentissage automatique la prédiction d'un nombre d'éléments, lié à un seuil d'erreur lui-même dépendant de la structure. Une règle empirique doit permettre de construire un maillage correct.

Nous avons étudié l'existence de règles de remaillage spatial au §V.3. et proposé finalement la règle (V.3.2). On notera que cette règle empirique est elle aussi tirée d'un apprentissage (manuel) sur une base d'exemples... L'apprentissage doit prédire le nombre N_{opt} de DDL ou d'éléments que doit contenir le maillage respectant l'erreur demandée. L'expérience montre que la courbe d'optimalité,

qui relie N_{opt} à l'erreur, a la forme d'une droite ou d'un arc de courbe simple et peut être décrite par 2 ou 3 termes numériques, par exemple l'erreur obtenue pour $N_{opt} = 100, 1000$ et 10000 . Il est donc plus simple de prédire directement la courbe d'optimalité, donc ces 2 ou 3 paramètres. L'erreur pour une autre valeur de N_{opt} est simplement interpolée linéairement ou paraboliquement.

La prédiction de la courbe d'optimalité autorise la résolution de 2 problèmes :

- Premier problème : prédiction d'un maillage respectant une erreur donnée

Comme nous venons de le dire, il suffit de rechercher le nombre de DDL correspondant à l'erreur fixée (Fig. VII-1-3 a), et de construire ce maillage par une règle de remaillage adaptée.

- Second problème :

On suppose dans ce cas qu'un ingénieur dispose d'un budget donné pour une étude de structure élastoplastique. La connaissance des ressources informatiques nécessaires est supposée liée à celle du nombre de DDL par des relations simples. Avant d'avoir lancé tout calcul, l'ingénieur saura quel est l'erreur associée à la meilleure analyse qu'il lui est possible de faire avec les ressources qui lui sont allouées. Si cette précision lui convient, il peut lancer le calcul. Sinon, la précision est insuffisante, et il faut soit augmenter les ressources, soit s'accomoder d'une erreur trop élevée (Fig. VII-3-1 b).

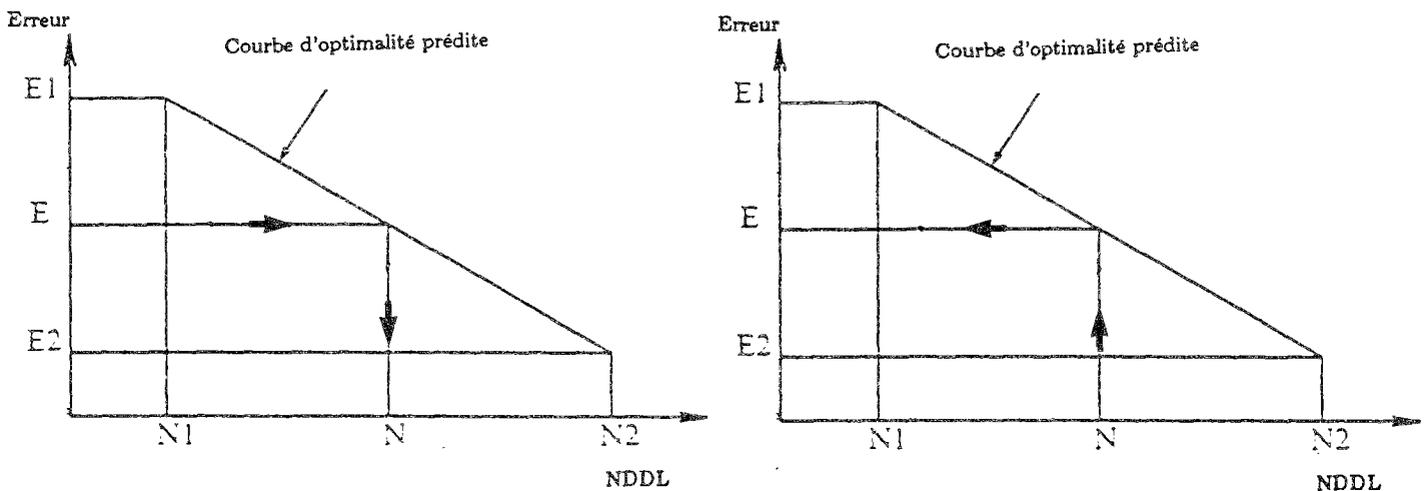


Fig. VII-3-1 a b. Diverses utilisations de la courbe d'optimalité prédite (supposée linéaire)

Chaque exemple de la base contient donc :

- ces 2 ou 3 coefficients comme conclusions
- comme caractéristiques les plus générales : géométrie, matériau et chargement ; la discrétisation temporelle ; les paramètres du calcul.

La discrétisation temporelle peut être éliminée si les exemples de la base sont construits systématiquement en utilisant la discrétisation temporelle limite. Nous avons montré au §V.4 l'existence de deux pas de temps limites, en-dessous desquels les erreurs ne décroissent plus. Il est donc possible de chercher pour chaque exemple ces pas de temps limites. Faute de trouver des règles donnant leur

valeur pour n'importe quel chargement, plusieurs calculs avec des pas de temps différents devront être effectués pour un cas inconnu. Il faudra retenir le pas de temps pour lequel les résultats approchés se stabilisent.

3.1.3. Divers exemples de Problèmes d'Apprentissage

Les PA contenant toutes les caractéristiques décrites sont les plus complexes à résoudre car ils nécessitent un nombre élevé d'exemples. Ces exemples doivent couvrir une très grande variété de cas, car tout est variable : les chargements, les matériaux, les discrétisations, les paramètres. Or, il est connu (Sebag, 1990) que lorsqu'on multiplie les données d'un problème, le nombre de solutions possibles connaît une explosion combinatoire. Pour conserver une représentativité suffisante, le nombre d'exemples de la base d'apprentissage devrait connaître une forte augmentation.

Pour diminuer ce nombre, il est possible de définir des PA réduits qui supposent constantes certaines des caractéristiques. Les règles trouvées ne peuvent évidemment pas être extrapolées aux PA plus généraux. Par contre, l'examen par un expert, des règles et des descripteurs qu'elles retiennent, peut apporter une information, en mettant en relief les caractéristiques significatives des exemples. L'analyse de PA plus généraux pourra alors être faite en ne retenant que les descripteurs les plus significatifs du PA simple, et en y ajoutant ceux que l'expert estime convenables pour traiter les données supplémentaires.

Il serait vain de tenter de dresser une liste de tout ce qu'il est possible de prédire par apprentissage, et à partir de quelles caractéristiques on peut le faire. Nous éliminons d'office les PA les plus généraux et présentons ceux que nous avons traités :

- *Première famille de problèmes d'apprentissage*

Ici, l'objectif est la prédiction (indirecte) d'une discrétisation respectant une erreur fixée *a priori*. Les "caractéristiques éliminées" représentent des données qui peuvent être variables et donc mises dans les caractéristiques d'un PA, mais que nous avons choisi de considérer comme fixes. Les règles construites ne seront donc pas valables pour d'autres valeurs de ces données.

Caractéristique retenue : chargement

Conclusion retenue : courbe d'optimalité de la discrétisation spatiale quasi-optimale

Caractéristique non décrite : géométrie

Caractéristique éliminée : matériau

Conclusions éliminées : paramètres du calcul, coût

Il s'agit donc de trouver la courbe d'optimalité, pour n'importe quel chargement d'un solide élasto-plastique de propriétés mécaniques fixées. La géométrie n'est pas décrite par elle-même car elle est supposée prise en compte dans la description du chargement.

- *Seconde famille de problèmes d'apprentissage*

Caractéristique retenue : discrétisation spatiale

Conclusion : erreur

Caractéristiques éliminées : paramètres du calcul, géométrie, matériau, chargement, discrétisation temporelle (supposée limite).

Il s'agit donc de la prédiction de l'erreur en fonction de n'importe quel maillage, pour un seul problème mécanique (géométrie, matériau, chargement fixés).

3.2. Prédiction de l'erreur en fonction du maillage

3.2.1. Généralités

Ce problème semble élémentaire. Tout ce qui concerne la géométrie, le matériau et le chargement est éliminé et il ne reste plus que la discrétisation spatiale comme variable. Les règles générées ne sont valables que pour la structure choisie et ne peuvent être généralisées.

Les éléments sont tous des triangles à 3 noeuds et 1 point de Gauss et leur nature n'est pas décrite. Seul le maillage, donc en fait son champ de tailles, doit être décrit. Nous renvoyons au §VI.3.3.1. pour la liste des descripteurs utilisables. Nous allons ici nous limiter à ceux qui ont effectivement été retenus pour faire l'apprentissage sur la plupart des chargements utilisés pour ce type de PA.

La conclusion demandée est une erreur. Nous avons retenu pour tous les exemples présentés, l'erreur $c_{2\Omega}$ en contraintes. La prédiction peut être faite sous deux formes :

- soit on segmente l'intervalle possible des erreurs et on affecte un numéro de classe à chaque intervalle. On se ramène à un classement ;
- soit on choisit une prédiction numérique de l'erreur. Aucun découpage en classes n'est effectué. On ne peut donc pas comparer les résultats de l'apprentissage sur la proportion d'exemples "bien classés", mais retenir un diagramme (valeur réelle ; valeur prévue) et constater la dispersion du nuage de points autour de la droite à 45 degrés (qui correspond à une prédiction parfaite). Un "écart quadratique moyen" peut être calculé, sa comparaison entre deux apprentissages différents indique le meilleur.

Chacun des descripteurs est écrit X_i , $i=1,\dots,n$. Les maillages sont décrits par leur champ de tailles

rendues adimensionnelles $\frac{h}{l_r}$, à l'aide des 39 descripteurs suivants :

- Statistiques arithmétiques :

X_1 = taille adimensionnelle minimale des éléments

X_2 = taille maximale des éléments

X_3 = moyenne arithmétique des tailles

X_4 = moyenne géométrique des tailles

X_5 = écart-type des tailles

X_6 = nombre d'éléments du maillage

X_7 = nombre de DDL du maillage

- Codage du volume compris entre la base et le champ des tailles adimensionnelles :

X_8 = moyenne sur le domaine des tailles des éléments (calculée par (VI.2.2))

X_9 = coefficient de remplissage du volume

X_{10} à X_{13} = les 4 premiers paramètres de position (cf. §VI.2.6.2) du volume

X_{14} et X_{15} = paramètres de forme réduits d_{21} et d_{22}

X_{16} à X_{18} = paramètres de forme réduits d_{41} à d_{43}

X_{19} et X_{20} = paramètres de forme réduits s_{31} et s_{32}

- Codage de l'écart :

X_{21} = rapport du volume de l'écart sur le volume total (cf. §VI.2.6.3)

X_{22} = coefficient de remplissage de l'écart

X_{23} à X_{26} = les 4 premiers paramètres de position du volume de l'écart

X_{27} et X_{28} = paramètres de forme réduits d_{21} et d_{22}

X_{29} à X_{31} = paramètres de forme réduits d_{41} à d_{43}

X_{32} et X_{33} = paramètres de forme réduits s_{31} et s_{32}

- Codage de 6 sous-volumes (cf. §VI.2.6.3) de coefficients $k = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ et 0.9 :

X_{34} à X_{39} = rapport $\frac{\phi_k}{\phi_{moy}}$ de chacun des 6 sous-volumes.

- Conclusion

L'erreur globale absolue normée $c_{2\Omega}$ en contraintes.

3.2.2. Chargement NRI

Le chargement est présenté à l'annexe 2 du §IV, et le nuage de points (erreur $c_{2\Omega}$ en contraintes ; nombre de DDL) est sur la figure V-3-11. Cette figure n'est indiquée qu'à titre d'illustration : il n'y a aucune raison de privilégier *a priori* le descripteur X_7 par rapport aux autres. En toute rigueur, il faudrait présenter un tel nuage de points pour les 39 descripteurs.

Le nombre d'exemples est de 100, séparés en 60 dans l'apprentissage et 40 dans le test.

3.2.2.1. Classement par AMC

Les 39 descripteurs numériques sont segmentés en termes multivalués. La conclusion, l'erreur globale absolue en contraintes, est discrétisée en classes du type $[e_i, e_{i+1}[$. Le nombre et la répartition de ces classes sont laissés à l'initiative de l'expert. Il est évident que, plus le nombre de classes est élevé, plus grande est la difficulté de l'apprentissage. Il faut également qu'il y ait dans chaque classe un nombre suffisant d'exemples pour permettre un apprentissage et un test fiables. Des classes très dissymétriques peuvent être choisies, pour mettre à l'épreuve l'apprentissage (l'intérêt pratique d'une segmentation dissymétrique est moins évident).

Le pourcentage d'exemples "bien classés" dans la base de test permet de juger la qualité de la base de règles. Comme la conclusion est continue avant sa discrétisation, on peut considérer comme "assez mal classés" les exemples dont le résultat est décalé d'une classe à gauche ou à droite, les autres étant "très mal classés". Les exemples pour lesquels l'application des règles ne donne pas de conclusion sont décrits comme "inconnus" mais peuvent être considérés comme "très mal classés".

Nous avons tenté 3 essais avec différentes segmentations de la conclusion. Pour les exemples de la base, l'erreur réelle est comprise dans l'intervalle $[0.17, 0.75]$ environ. La répartition apprentissage/test est 60/40.

• *Essai à 4 classes*

Les classes retenues sont de largeur comparable :

classe C_1 → erreur comprise dans $[0., 0.3]$

classe C_2 → erreur comprise dans $[0.3, 0.45]$

classe C_3 → erreur comprise dans $[0.45, 0.6]$

classe C_4 → erreur supérieure à 0.6

La répartition des exemples dans les classes est relativement régulière.

Le meilleur classement par AMC, obtenu après plusieurs essais sur les paramètres spécifiques, donne les résultats suivants :

apprentissage 95% bien classés, 0% mal classés, 5% inconnus

test 85 % bien classés, 12% mal classés, 3% inconnus

• *Essai à 8 classes*

La base d'exemples est identique à l'essai précédent. Les classes retenues sont de largeur voisine mais plus réduite :

classe C_1 → erreur comprise dans [0., 0.24]

classe C_2 → erreur comprise dans [0.24, 0.29]

classe C_3 → erreur comprise dans [0.29, 0.35]

classe C_4 → erreur comprise dans [0.35, 0.41]

classe C_5 → erreur comprise dans [0.41, 0.5]

classe C_6 → erreur comprise dans [0.5, 0.6]

classe C_7 → erreur comprise dans [0.6, 0.7]

classe C_8 → erreur supérieure à 0.7

Certaines classes ont un faible effectif, ce qui diminue la fiabilité de l'apprentissage.

Le classement par AMC donne

apprentissage 93% bien classés, 0% mal classés, 7% inconnus

test 55 % bien classés, 25% mal classés, 20% inconnus

et le tableau de classement des exemples du test est

CLASSE # ORIGINE#	GROUPE D' AFFECTATION								INCONNU	#EFFEC- # TIF	
	1	2	3	4	5	6	7	8			
1 #	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
2 #	0	1	0	0	1	0	0	0	2	2	4
3 #	0	1	1	0	0	0	0	0	2	2	4
4 #	0	1	0	1	1	1	0	0	2	2	6
5 #	0	0	1	0	5	1	0	0	1	1	8
6 #	0	0	0	1	0	4	0	0	0	0	5
7 #	0	1	0	0	0	0	7	0	1	1	9
8 #	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	2

POURCENTAGE DE BIEN CLASSES : 55 %

Table VII-3-1. Classement des exemples de la base de test

La qualité de la prédiction est inévitablement inférieure au cas précédent. Elle est cependant largement supérieure à une prédiction au hasard (12.5 % de bien classés).

Un troisième essai a été tenté avec 10 classes. Le nombre d'exemples par classe est encore réduit. On trouve cependant

apprentissage 81% bien classés, 0% mal classés, 19% inconnus

test 36 % bien classés, 15% mal classés, 49% inconnus

Le hasard donnerait 10 % de bien classés. Le nombre de prédictions inconnues montre clairement l'insuffisance de la base d'apprentissage : il n'y a plus assez d'exemples dans chaque classe pour permettre une discrimination fiable.

Ces trois exemples montrent que les prédictions ne peuvent en aucun cas être dues au hasard. Les descripteurs utilisés représentent assez bien les maillages. On notera cependant que le problème mécanique est un peu trop "régulier", et que des maillages assez différents peuvent avoir la même erreur (cf. §V.3).

Les résultats de l'AMC dépendent des paramètres retenus (cf. §VII.1.4.2). La qualité des résultats est cependant bonne sur une large plage de leurs valeurs.

3.2.2.2. Classement par analyse discriminante modifiée

Nous avons vu précédemment les défauts des méthodes statistiques classiques.

L'utilisation d'un logiciel commercial d'analyse discriminante s'est soldée par un échec, le programme ayant trouvé des descripteurs liés et n'ayant pu poursuivre l'analyse. Nous avons utilisé un logiciel d'analyse discriminante capable de rejeter les descripteurs liés ou non significatifs, et de prendre en compte les carrés et les cubes des descripteurs (Terrien, 1989 à 1991). L'analyse discriminante modifiée sélectionne les descripteurs qui lui semblent les plus significatifs et en déduit le classement. L'application à cet exemple retient notamment les descripteurs X_2 , X_5 , X_9 , X_8 et ses puissances. Les résultats de la discrimination en 8 classes sont :

test 41 % bien classés, 59% mal classés (il n'y a pas d'inconnus avec cette méthode).

Le tableau de classement de l'échantillon test donne

CLASSE # ORIGINE#	CLASSE D'AFFECTATION								# EFFECTIF	
	1	2	3	4	5	6	7	8		
1 #	0	2	0	0	0	0	0	0	#	2
2 #	0	4	0	0	0	0	0	0	#	4
3 #	0	3	1	0	0	0	0	0	#	4
4 #	0	1	1	1	3	0	0	0	#	6
5 #	0	0	0	2	5	1	0	0	#	8
6 #	0	0	0	0	3	1	1	0	#	5
7 #	0	0	0	0	2	2	5	0	#	9
8 #	0	0	0	0	0	1	0	1	#	2

POURCENTAGE DE BIEN CLASSES : 41.2

Table VII-3-2. Classement de la base de test

On constate que le score des bien classés est inférieur à celui de l'AMC. Cependant, si on compare les "très mal classés", il y en a beaucoup moins dans ce cas qu'avec l'AMC. La prévision est donc

moins précise (si on exige 8 classes, un résultat décalé d'une classe n'est pas satisfaisant), mais les cas erronés le sont moins qu'avec l'AMC.

3.2.2.3. Prédiction numérique par analyse discriminante modifiée

L'analyse discriminante peut être adaptée à la prédiction d'une conclusion réelle, sans qu'il soit nécessaire de la segmenter en classes. Le principe est le suivant : la sélection des descripteurs significatifs est faite par analyse discriminante. Ensuite, une régression linéaire sur ces descripteurs donne la conclusion donc la valeur numérique de l'erreur. L'application à notre exemple est la suivante.

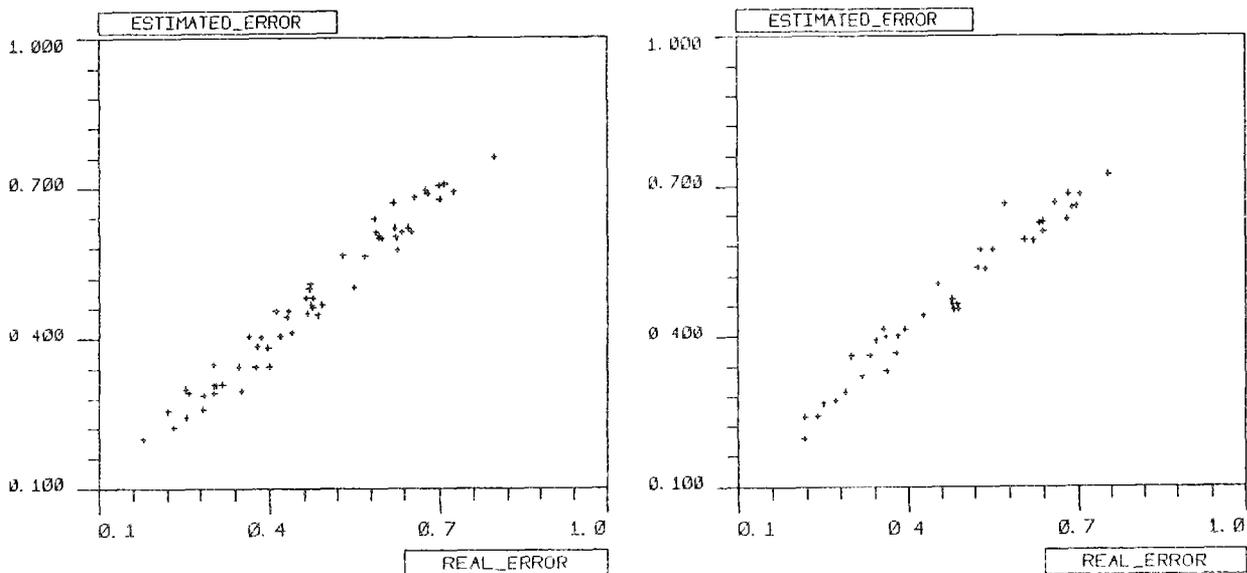


Fig. VII-3-2 a b. Estimations pour l'apprentissage et le test

Les nuages de points sont relativement étalés autour de la ligne à 45 degrés (cette dernière correspond à une prédiction parfaitement exacte). La prédiction est moins précise en comparaison des résultats suivants (fig. VII-3-3). Il n'y a cependant aucun point "largement erroné".

3.2.2.4. Apprentissage par régression multiple non linéaire

Le logiciel de régression (Terrien, 1989 à 1991) recherche les coefficients d'un polynôme qui relie les descripteurs et donne une conclusion numérique. Un résultat en classes pourrait être construit à partir des résultats numériques. Nous avons préféré conserver la prédiction numérique, mieux adaptée au problème traité. Il est possible de retenir les carrés des descripteurs lors de l'apprentissage. Nous présentons les résultats obtenus sans les prendre en compte.

La régression étant une méthode à plusieurs couches, on ne sait pas *a priori* quand il faut arrêter les calculs. Nous présentons pour NRI la prédiction par le polynôme trouvé à la quatrième couche :

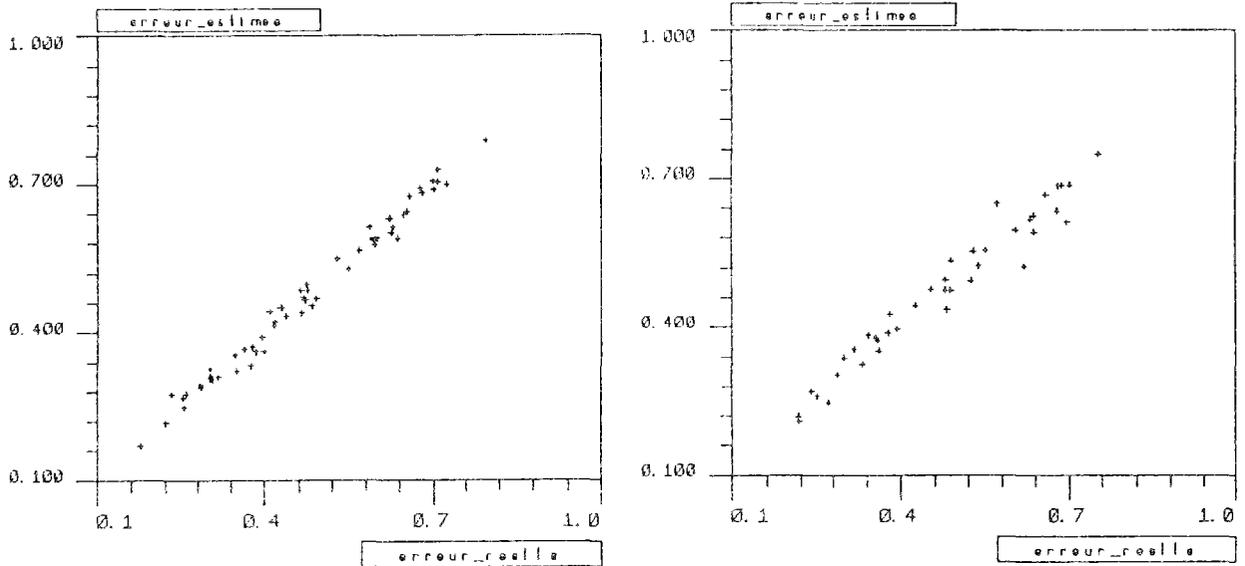


Fig. VII-3-3 a b. Prédiction par régression 4e couche pour l'apprentissage et le test

et à la quatorzième couche :

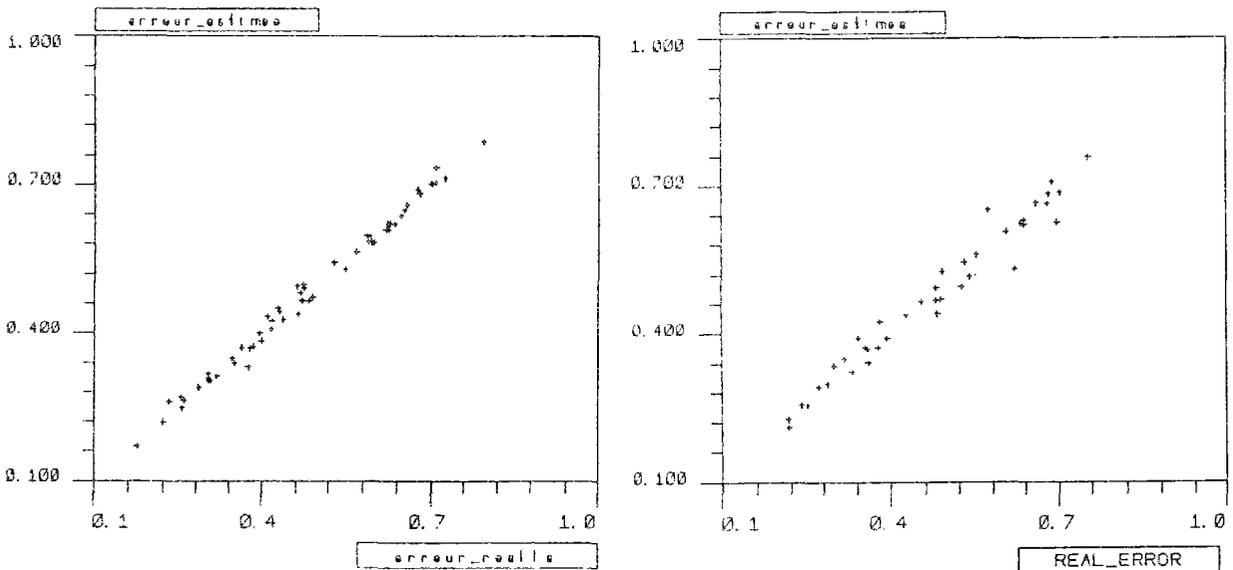


Fig. VII-3-4 a b. Idem à la couche 14

Le nuage de points de l'apprentissage se resserre nettement, mais celui du test change peu entre ces deux couches. Pour ce dernier, le résultat de la 4e couche peut suffire. La qualité de la prédiction ne peut être jugée que sur le test : les coefficients du polynôme sont calculés pour estimer au mieux les conclusions des exemples d'apprentissage. Lorsque le nombre de couches augmente, il est normal que leur prédiction soit meilleure, et donc que le nuage de points soit plus serré autour de la ligne à 45 degrés.

3.2.3. Chargement NR2

L'erreur globale absolue $c_{2\Omega}$ en contraintes est prédite. Le chargement est présenté au §IV. Annexe 2 et le nuage de points à la figure V-3-13. Nous avons constaté que ce chargement "se

prête le mieux" à toutes les techniques d'apprentissage, probablement à cause de la faible dispersion des exemples. Il y a 81 exemples, la répartition apprentissage/test a été le plus souvent prise à 60/40, mais aussi quelquefois 80/20. Comme pour NR1, des prédictions numériques ou par classement ont été faites. Les 39 descripteurs utilisés sont les mêmes que pour NR1.

3.2.3.1. Classements par AMC et analyse discriminante modifiée

Nous avons tenté 4 essais avec différentes segmentations de la conclusion. Pour les exemples de la base, l'erreur réelle est comprise dans l'intervalle [0.08, 0.33] environ.

- *Essai à 3 classes réparties ; répartition 80/20*

Ce classement revient à classer les erreurs dans des catégories du type "faible, moyen, fort". Les classes retenues sont :

classe C_1 → erreur comprise dans [0., 0.15]

classe C_2 → erreur comprise dans [0.15, 0.25]

classe C_3 → erreur supérieure à 0.25

La répartition des exemples dans les classes est relativement régulière, aucune classe ne contient moins de 17 exemples en apprentissage et 4 en test.

Le classement par AMC donne une prédiction parfaite : 100% de bien classés en apprentissage comme en test. L'analyse discriminante donne 98% de bien classés en apprentissage, et 92% en test. Le problème est donc également bien appréhendé par les techniques de l'analyse de données.

- *Essai à 3 classes dissymétriques ; répartition 60/40*

On demande cette fois de discriminer les exemples compris dans un intervalle très étroit, ce qui permet de tester la fiabilité de l'apprentissage :

classe C_1 → erreur comprise dans [0., 0.29]

classe C_2 → erreur comprise dans [0.29, 0.33]

classe C_3 → erreur supérieure à 0.33

La classe C_1 contient en tout 71 exemples, contre 6 et 4 aux suivantes. Le classement est néanmoins parfait : 100% pour l'apprentissage et le test. Il est bien plus improbable que les classes mal représentées puissent être discriminées aléatoirement, les résultats de cet apprentissage sont donc plus satisfaisants.

L'analyse discriminante modifiée donne 96% sur l'apprentissage, et 70% sur le test. Nous n'avons pas cherché à savoir si les classes les plus mal représentées sont ou non bien classées.

- *Essai à 6 classes réparties ; répartition 60/40*

classe C_1 → erreur comprise dans [0., 0.13]

classe C_2 → erreur comprise dans [0.13, 0.17]

classe C_3 → erreur comprise dans [0.17, 0.21]

classe C_4 → erreur comprise dans [0.21, 0.25]

classe C_5 → erreur comprise dans [0.25, 0.29]

classe $C_6 \rightarrow$ erreur supérieure à 0.29

Le classement par AMC donne :

apprentissage 100% bien classés

test 90 % bien classés, 4% mal classés, 6% inconnus

L'analyse discriminante donne 85% sur l'apprentissage et 63% sur le test et n'utilise que les descripteurs X_6 et X_8 . Dans le test, seuls deux exemples sont "très mal classés".

La qualité de la prédiction est à peine inférieure au cas précédent. La différence avec le traitement par analyse discriminante est nettement plus marquée.

3.2.3.2. Prédiction numérique par régression multiple

Les carrés des descripteurs ont été retenus. La répartition apprentissage/test est 60/40. A la troisième couche, les résultats de l'apprentissage sont les suivants :

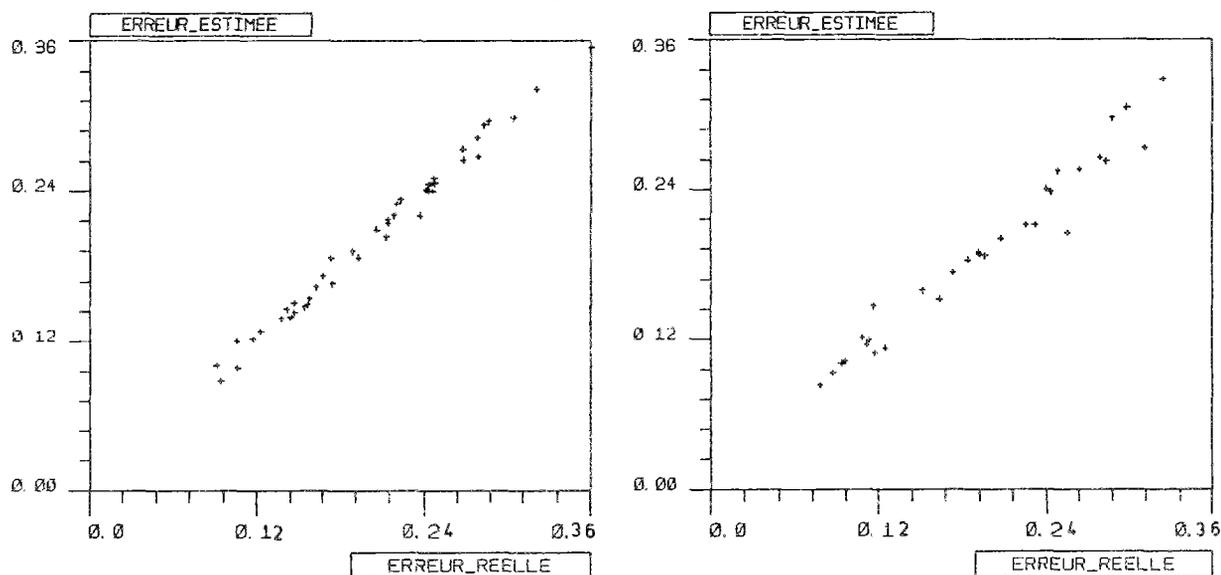


Fig. VII-3-5 a b. Prédiction des erreurs pour l'apprentissage et le test

et à la couche 19 :

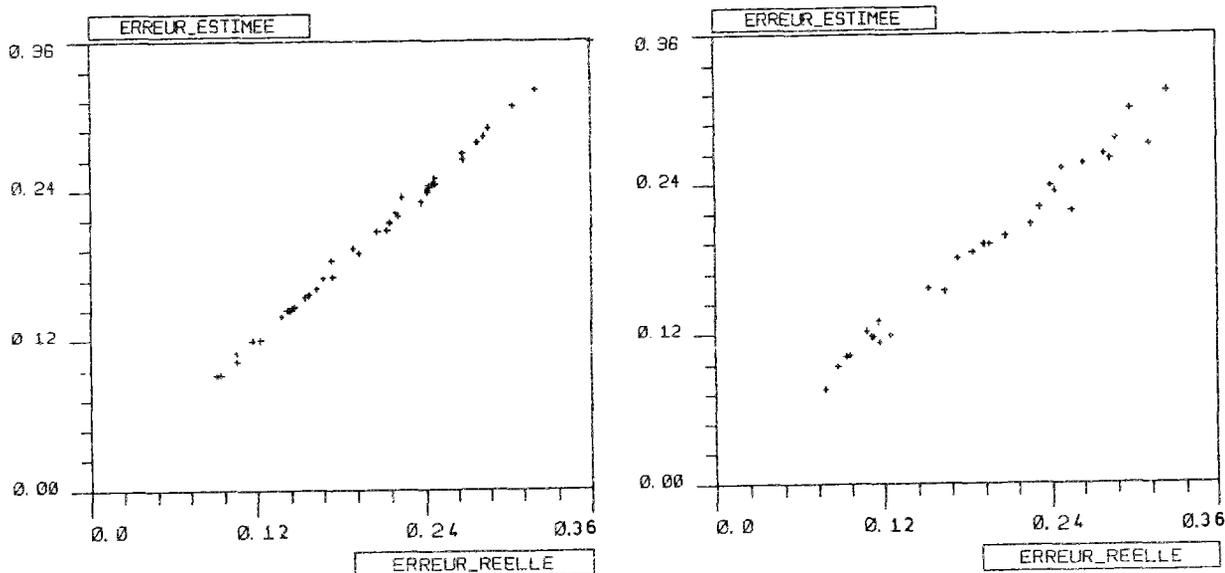


Fig. VII-3-6 a b. Résultats pour l'apprentissage et le test, à la couche 19

On constate la prédiction quasi-parfaite pour l'apprentissage à la couche 19. Le test est par contre du même ordre de grandeur qu'à la couche 3. La dispersion du nuage de points du test est plus faible que sur l'exemple NRI.

3.2.4. Sphère sous pression SPH1

L'erreur globale absolue en contraintes est cherchée. Il y a 86 exemples avec une répartition apprentissage/test de 60/40. Les 39 descripteurs présentés pour NRI sont repris.

3.2.4.1. Classements par AMC

Nous avons tenté 2 essais avec différentes segmentations de la conclusion. Pour les exemples de la base, l'erreur réelle est comprise dans l'intervalle [0.07, 0.85] environ.

- *Essai à 4 classes*

classe C_1 → erreur comprise dans [0., 0.15]

classe C_2 → erreur comprise dans [0.15, 0.3]

classe C_3 → erreur comprise dans [0.3, 0.5]

classe C_4 → erreur supérieure à 0.5

Le classement donne : apprentissage 98% bien classés, 0% mal classés, 2% inconnus ; test 94 % bien classés, 0% mal classés, 6% inconnus. La qualité de ce classement est satisfaisante et comparable aux exemples précédents.

- *Essai à 7 classes*

Les classes retenues sont bien réparties :

classe C_1 → erreur comprise dans [0., 0.12]

classe C_2 → erreur comprise dans [0.12, 0.2]

classe C_3 → erreur comprise dans [0.2, 0.3]

classe C_4 → erreur comprise dans [0.3, 0.4]

classe C_5 → erreur comprise dans [0.4, 0.5]

classe C_6 → erreur comprise dans [0.5, 0.6]

classe C_7 → erreur supérieure à 0.6

Le classement par AMC donne :

apprentissage 98% bien classés, 2% inconnus

test 65 % bien classés, 3% mal classés, 32% inconnus

La qualité de la prédiction est dégradée. On constate la difficulté de prédire des classes plus nombreuses, et le nombre élevé de cas inconnus. Les effectifs moyens des 7 classes sont de 7 exemples/classe en apprentissage. Il est possible que ce nombre soit insuffisant pour discriminer des classes trop étroites.

3.2.4.2. Prédiction par régression multiple

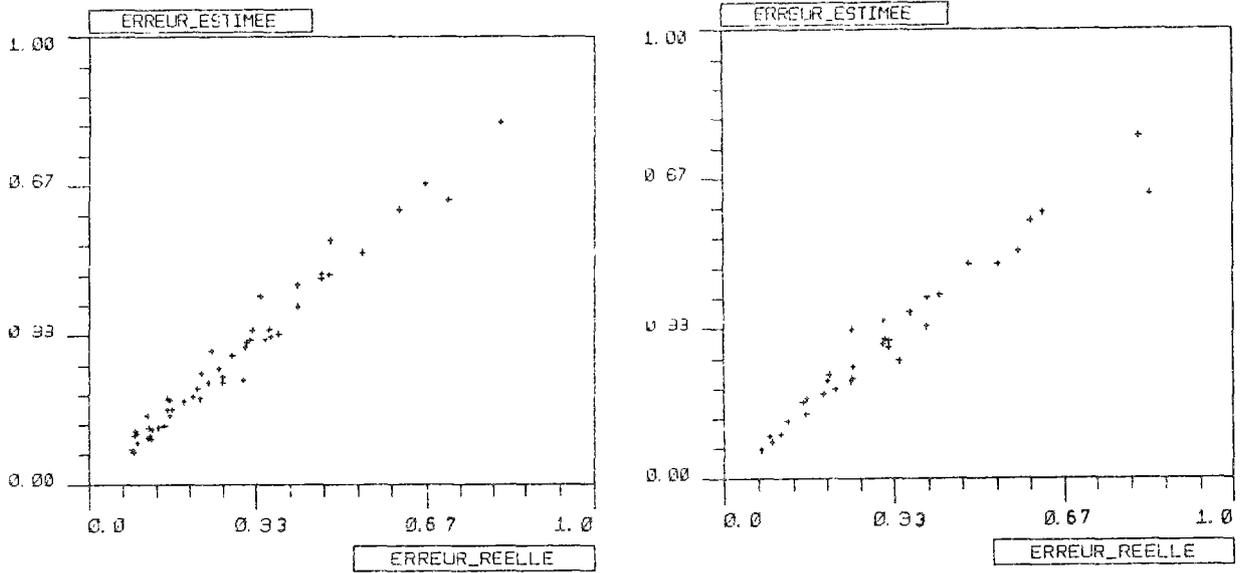


Fig. VII-3-7 a b. Prédiction des erreurs pour l'apprentissage et le test, à la couche 3

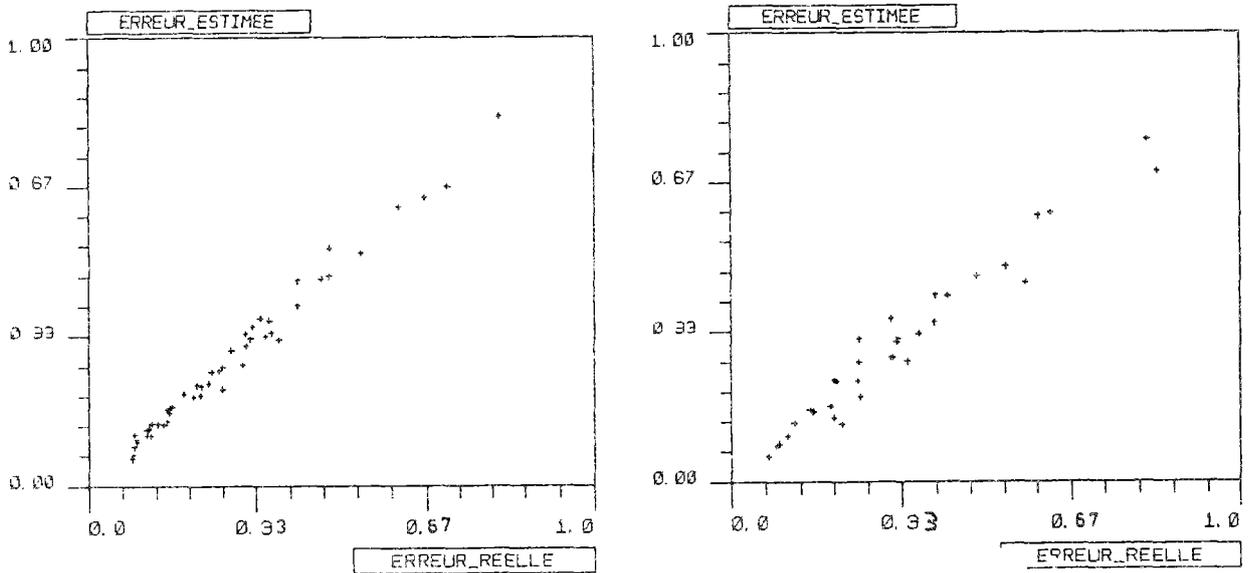


Fig. VII-3-8 a b. Prédiction pour apprentissage et test, à la couche 7

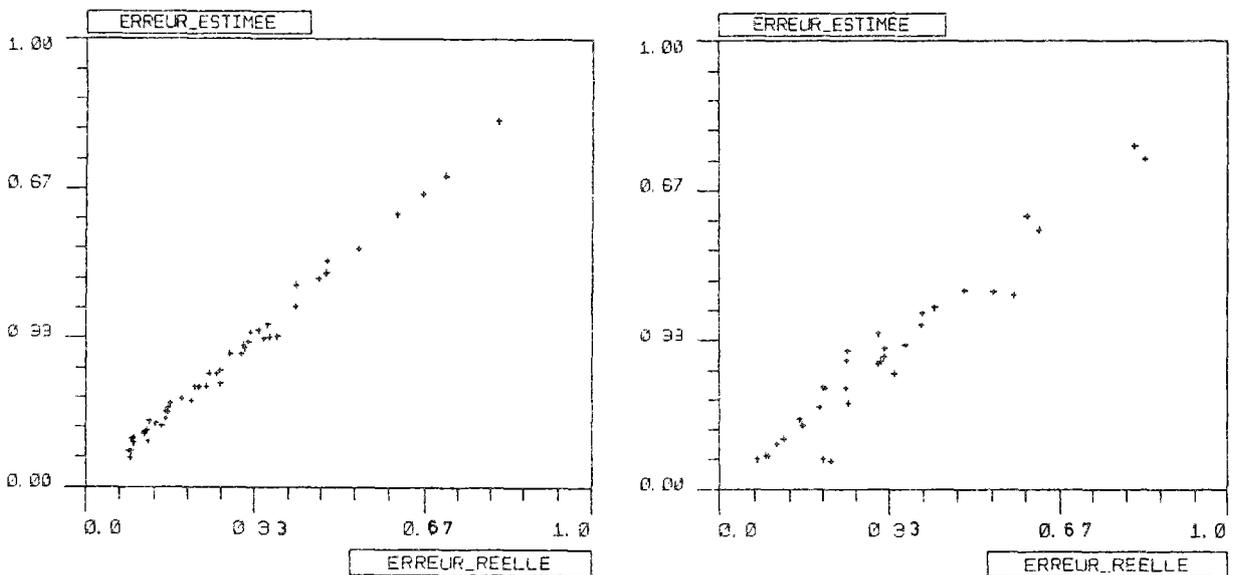


Fig. VII-3-9 a b. Résultats pour l'apprentissage et le test, à la couche 19

Les carrés des descripteurs ont été retenus.

La prédiction de l'apprentissage s'améliore à chaque nouvelle couche, ce qui est normal. Par contre, on constate que les résultats sur le test à la couche 19 se dégradent par rapport aux résultats de la couche 7, eux-mêmes meilleurs que la couche 3. La couche 19 comporte en partie inférieure deux points très mal prédits : 0.07 estimé pour 0.2 réel. Ces exemples étaient mieux classés à la couche 7. On constate ainsi la dégradation des résultats en approfondissant trop la recherche des coefficients : le mieux est l'ennemi du bien... On perçoit également l'importance du test d'arrêt.

Parmi les descripteurs retenus, on peut citer X_2 , X_{15} , X_{15}^2 , X_{27}^2 . La taille maximale X_2 est retenue, un maillage avec de trop gros éléments a une erreur élevée. La taille moyenne X_8 n'est plus retenue : dans le cas de la sphère, la position des bons éléments influe nettement plus sur l'erreur que pour les exemples précédents (NR1 et NR2).

3.2.5. Conclusion sur ce type d'apprentissage

On peut d'abord faire les remarques générales suivantes :

- quel que soit le chargement : les prédictions sont le plus souvent correctes. Vu le nombre d'exemples traités, il semble exclu que ce fait soit dû au hasard. Les descripteurs choisis sont donc significatifs.
- le nombre de descripteurs réellement significatifs peut être abaissé à une dizaine environ, lorsque les chargements sont réguliers. Nous avons remarqué au §V.3.3 que des maillages assez différents, sans être absurdes, avaient des erreurs voisines. Pour des problèmes singuliers, la position des bons éléments est primordiale. Il n'a cependant pas été possible de traiter ce problème d'apprentissage sur un des exemples NR4, NR5 ou NR6.
- les règles sont inapplicables à un autre chargement que celui sur lequel elles sont construites
- les domaines symétriques (correspondant aux chargements NR1 et NR2) contenaient des maillages obtenus par retournement de maillages optimaux. Ces individus n'étaient discriminés que par les paramètres de position X_{10} à X_{13} et X_{23} à X_{26} . Ce retournement modifie relativement peu les erreurs (cf. §V.3.4.2). Le retournement d'un maillage optimal d'un chargement singulier comme NR4 ou NR6 aurait donné de tout autres résultats.

3.3. Prédiction de la courbe d'optimalité en fonction du chargement

3.3.1. Principes retenus pour l'apprentissage

Ici, nous cherchons le nombre de DDL à utiliser pour respecter une erreur donnée *a priori*. Ce nombre de DDL est obtenu par interpolation à partir des courbes d'optimalité (cf. §V.3.1.2) et les résultats bruts de l'apprentissage sont les 2 paramètres de ces courbes (supposées être des droites). Ces droites peuvent être décrites par 2 de leurs points, ou un point et la pente. Quelle que soit la description choisie, il est inévitable que la prédiction faite pour un cas inconnu soit affectée d'une dispersion. La prise en compte de la dispersion introduit, pour la prédiction des courbes d'optimalité, les intervalles d'incertitudes de ce type :

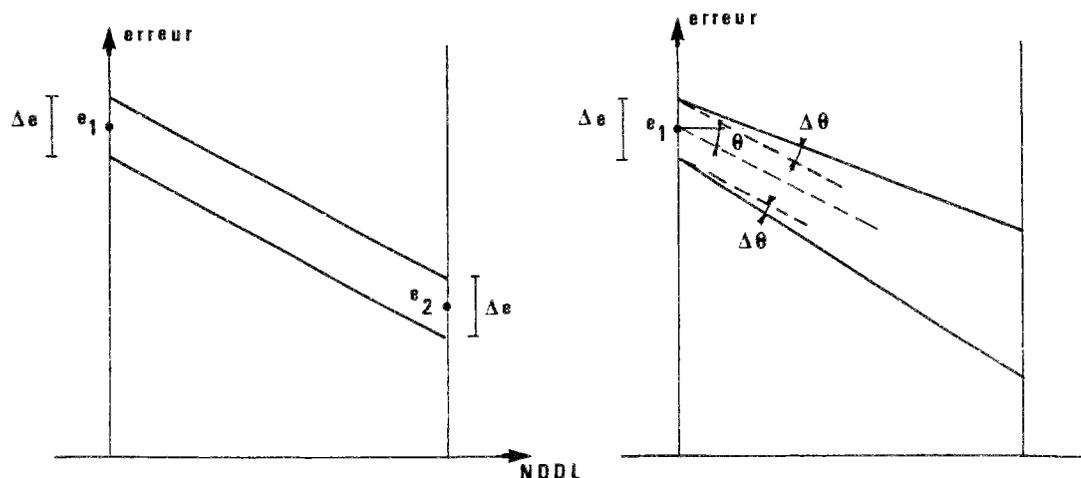


Fig. VII-3-10 a b. Intervalles d'incertitude pour la prédiction par 2 points, et 1 point et la pente

Si on admet que l'incertitude sur chacun des 2 points est identique, la prédiction par les 2 points a un intervalle d'incertitude plus réduit que celle d'un point et de la pente.

3.3.2. Exemples mis dans la base

Les 26 exemples contenus dans la base sont les chargements NR1, NR2, NR3, NR4, NR5, NR6, NR7, NR8, NR9, NR10, NR11, NR12, NR13, NR14, NR15, NR16, NR17, NR18, CR19, NR20, NR21, NR22, CR25, CR26, CR30 et SPH1. A l'exception de ce dernier, ils sont définis sur une géométrie identique, mais avec des conditions aux limites distinctes. Nous avons choisi de ne pas décrire la géométrie et les conditions aux limites, partiellement prises en compte dans la description du chargement.

Le coût et le temps très élevés de construction de ces courbes d'optimalité nous ont empêché de mettre un nombre plus important d'exemples dans la base. La construction de chaque cas de charge doit d'abord respecter les conditions de cohérence et de vraisemblance présentées au §IV.5.1, ce qui peut nécessiter un temps humain de mise au point important. Une fois qu'un chargement "intéressant" et non semblable à un précédent a été obtenu, il faut chercher les paramètres de son calcul : nombre de points de Gauss nécessaire pour une intégration précise des quantités exactes, discrétisation temporelle limite, etc.

Chaque courbe d'optimalité nécessite environ une douzaine de maillages construits selon les meilleures règles : la règle d'optimalité (III.4.7) et la règle empirique (III.4.14) avec les paramètres les plus efficaces ($\alpha = 0.5$ et $\beta = 1$). Evidemment, les familles de maillages construites pour résoudre le problème d'apprentissage précédent sont utilisables, les maillages moyens ou mauvais étant ignorés. Les droites d'optimalité sont d'autant plus précises que les maillages couvrent uniformément un intervalle qui soit le plus large possible. Un calcul avec un maillage de 100 DDL et un autre de 5000 DDL ne suffisent donc pas.

Le nombre maximum de DDL a rarement dépassé les 9000, le coût du calcul devenant rapidement insupportable. Il n'est pas envisageable de limiter la taille maximale des maillages à environ 1000

DDL : les nuages de points présentés au chapitre V montrent clairement que le comportement de l'erreur pour un grand nombre de DDL (> 3000 pour fixer les idées) peut notablement différer de celui constaté pour quelques centaines de DDL.

Les droites d'optimalité ont été tracées manuellement en veillant à approximer au mieux les valeurs obtenues pour les nombres de DDL élevés, quitte à perdre de la précision pour les faibles nombres de DDL. Elles sont présentées au §V.3.4.1.

Les matériaux sont les mêmes pour tous les exemples, sauf pour quelques chargements comme NR4 et SPH1 qui ont un module d'écroutissage légèrement différent. La base de règles sera donc valable pour un matériau de rapport $\sigma_0/E = 0.002$ environ, de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et d'écroutissage "très faible" ($E'/E \leq 10^{-2}$).

3.3.3. Descripteurs utilisés

La géométrie et le matériau ne sont pas décrits.

Le chargement, et donc les 5 champs définis au §VI.3.2.3, utilisent une description réduite, le faible nombre d'exemples ne nous permettant pas un trop grand nombre de descripteurs.

La difficulté de calcul de certains descripteurs, décrite au §VI.2.5.5, nous conduit à ne pas retenir les champs ϕ_1 et ϕ_3 et certains autres descripteurs comme les coefficients de remplissage de ϕ_2 et ϕ_4 ou les gradients maximaux. Le chargement est finalement représenté par les 3 champs ϕ_2 , ϕ_4 et ϕ_5 (cf. §VI.3.2.3).

Les descripteurs de ces 3 champs ont été choisis selon le principe suivant :

- tout d'abord, 33 descripteurs ont été retenus par l'expert, parmi ceux qui lui semblaient les plus significatifs ;
- des apprentissages ont été lancés avec ces 33 descripteurs ;
- une statistique sur la fréquence d'utilisation de chacun d'eux dans les règles a été faite ;
- de nouveaux apprentissages ont été lancés avec les descripteurs les plus significatifs.

Nous présentons d'abord la liste des 33 descripteurs initiaux :

- Codage du champ ϕ_2 (Mises absolues) :

$X_1 = \phi_2$ moyen sur le domaine

$X_2 =$ logarithme décimal de ϕ_2 maximal

$X_3 =$ paramètre de forme (PF) d_{21} du champ ϕ_2

$X_4 =$ PF d_{22} de ϕ_2

X_5 et $X_6 =$ PF d_{41} et d_{42}

X_7 et $X_8 =$ PF s_{31} et s_{32}

$X_9 =$ rapport $V_{\text{écart}}/V_{\text{total}}$ pour ϕ_2

X_{10} à $X_{14} =$ rapport $h_{\text{max}}/h_{\text{moy}}$ des sous-volumes de rapport 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9

X_{15} à $X_{17} =$ rapport S_{tranche}/S_0 des tranches d'altitude absolue 1, 2 et 3

- Codage du champ ϕ_4 (gradients adimensionnels des Mises absolues) :

$X_{18} = \phi_4$ moyen sur le domaine

X_{19} et $X_{20} =$ PF d_{21} et d_{22} du champ ϕ_4

X_{21} et $X_{22} =$ PF d_{41} et d_{42}

X_{23} et $X_{24} =$ PF s_{31} et s_{32}

$X_{25} =$ rapport $V_{\text{écart}}/V_{\text{total}}$ pour ϕ_4

X_{26} à $X_{29} =$ rapport $h_{\text{max}}/h_{\text{moy}}$ des sous-volumes de rapport 0.5, 0.6, 0.7, 0.8

- Codage du champ ϕ_5 (cyclicité) :

$X_{30} = \phi_5$ minimal sur le domaine

$X_{31} = \phi_5$ moyen
 $X_{32} = \phi_5$ maximal
 $X_{33} =$ rapport $V_{\text{écart}}/V_{\text{total}}$ pour ϕ_5

Le calcul des maxima des contraintes (descripteur X_2) est étroitement dépendant du maillage pour les chargements singuliers. Nous avons donc pris le logarithme décimal, qui réduit l'amplitude de sa variation. Les paramètres $V_{\text{écart}}/V_{\text{total}}$, qui ont théoriquement la valeur indéterminée 0/0 lorsque le champ décrit est identiquement nul sur le domaine Ω , ont été forcés à zéro.

3.3.4. Quantités prédites

Nous avons effectué une prédiction sur 3 types d'erreurs différents, calculées sur 2 champs :

- les erreurs absolues normées enveloppes $c_{2\Omega}(\sigma)$ et $c_{2\Omega}(\epsilon')$
- les erreurs enveloppes relatives en sup $c_{4\Omega}(\sigma)$ et $c_{4\Omega}(\epsilon')$
- les erreurs ponctuelles $e_{p2}(\sigma)$ et $e_{p2}(\epsilon')$.

Il y a donc 6 droites d'optimalité à prédire. Bien que 2 paramètres par droite soient strictement nécessaires, nous avons préféré en prédire 3. Il sera possible de constater après l'apprentissage pour quel(s) paramètre(s) les prédictions seront les plus fiables.

Ces paramètres sont :

- le logarithme décimal de l'erreur pour NDDL = 100 ("point gauche" de la droite optimale) ;
- le logarithme décimal de l'erreur pour NDDL = 10000 ("point droit" de cette droite) ;
- la différence entre ces deux valeurs. Ce terme se ramène au double de la pente de la droite d'optimalité (en coordonnées log-log). Comme on peut le voir sur les figures V-3-22 et V-3-23, ces pentes sont toujours négatives ou nulles.

Le nombre total des prédictions à faire est donc de $6 * 3 * 26 = 468$. C'est sur l'ensemble de ces prédictions que seront jugées la qualité et la fiabilité de l'apprentissage.

On remarquera qu'il aurait été plus rigoureux de prédire les logarithmes des erreurs, et non les erreurs, dans le problème d'apprentissage précédent (cf. §VII.3.2). La faible dispersion de ces dernières, en comparaison des valeurs traitées ici (10^{-3} à 10^3), a permis une prédiction correcte.

Les intervalles de variation *admissible* des logarithmes des erreurs ont été fixés comme suit :

[-3, +3] pour chacun des points de chacune des 6 courbes

[-4, 0] pour les pentes de chaque courbe.

Les bornes de ces intervalles sont non pas les valeurs extrêmes des erreurs trouvées sur les 26 exemples de la base, mais les bornes de variation que nous avons estimées plausibles pour n'importe quel chargement (y compris n'appartenant pas à la base). Par exemple, la plus grande pente trouvée est d'environ -1.5, mais on ne peut pas exclure des valeurs plus fortes pour des cas inconnus. Les valeurs de -3 et +3 pour les logarithmes des erreurs correspondent aux seuils d'erreurs "quasi-nulles" et "quasi-infinies".

3.3.5. Méthodologie de l'apprentissage

- *Techniques d'apprentissage utilisées*

Nous avons retenu 3 techniques :

- la prédiction numérique par prétraitement ALN puis régression multiple (Terrien, 1989 à 1991).
- le classement des erreurs par analyse discriminante modifiée (Terrien, 1989 à 1991)
- le classement des erreurs par apprentissage multicouche (Schoenauer et Sebag, 1988 à 1991).

Les deux dernières techniques nécessitent la discrétisation de l'intervalle des variations des erreurs, en un nombre fini de classes.

- *Découpage en classes*

Suivant le type d'erreur et leur répartition, nous avons retenu de 6 à 9 classes non vides, le nombre le plus courant étant 7. Nous avons créé des classes vides intermédiaires lorsque l'intervalle vide entre 2 erreurs nous semblait trop large par rapport à l'intervalle total admissible ($[-4, 0]$ pour les pentes par exemple). L'existence de classes vides intermédiaires est due au faible nombre d'exemples de la base (cf. §V.3.4.1). Il est vraisemblable de supposer qu'une base plus riche aurait eu des exemples contenus dans ces classes vides intermédiaires. Par conséquent, nous pouvons dire, avant tout apprentissage, que la base d'exemples est incomplète.

Pour de nombreux types d'erreurs, il existe des classes vides d'extrémité. Ces classes relient l'erreur maximale ou minimale trouvée sur la base d'exemples actuelle, à la borne correspondante de l'intervalle admissible. Contrairement aux classes vides intermédiaires, il n'est pas certain que des cas inconnus soient localisés dans les classes d'extrémité. Elles ne seront donc pas prises en compte pour établir le score des prédictions aléatoires.

L'existence de classes vides interdit la construction de règles associées à ces classes.

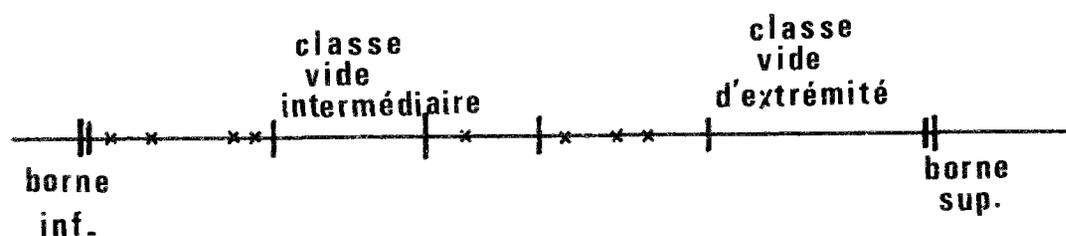


Fig. VII-3-11. Classes vides

- *Répartition apprentissage/test*

Un ensemble fixe de descripteurs est choisi. Le très faible nombre d'exemples nous conduit à tenter des apprentissages avec une base de test constituée d'un seul exemple, et le reste en apprentissage (*jackknife*, cf. § VII.1.1). Cette procédure est répétée pour chaque exemple de la base. La qualité de la prédiction est jugée sur chaque exemple de test. Les règles construites dans chaque cas sont conservées, ce qui permet de voir ce qu'elles peuvent avoir en commun, et de faire une

statistique sur les descripteurs utilisés. On notera que, si la base d'exemples est redondante, les règles doivent très peu changer lors du jackknife ; pour une base incomplète, les modifications peuvent être très importantes.

- *Test d'arrêt*

Les deux programmes de classement utilisés possèdent au moins un test d'arrêt. Le programme de régression multiple, lui, ne possède pas (dans sa version actuelle) de test d'arrêt fiable. Une possibilité de test d'arrêt de toute méthode d'apprentissage automatique multicouche est le double test. La base d'exemples est séparée cette fois en trois parties disjointes, un apprentissage, un premier et un second tests. Les règles sont construites sur l'apprentissage de manière multicouche. On décide d'arrêter lorsque les prédictions sur le premier test se dégradent par rapport aux couches précédentes. Le second test est traité comme un ensemble de cas inconnus. Il permet de valider les règles ainsi construites, sans avoir participé en aucune façon à leur élaboration.

Dans notre cas, un double jackknife systématique aurait conduit à lancer jusqu'à 11700 apprentissages, ou à faire par tirage aléatoire "quelques milliers" de prédictions. Nous y avons renoncé et avons fait un jackknife simple, pour lequel nous nous sommes efforcés de séparer l'exemple de test de la base d'apprentissage.

- *Base de règles applicable à des cas inconnus*

Le jackknife (simple) est lancé pour n'importe quelle méthode d'apprentissage, en vue d'évaluer la fiabilité des prédictions sur la base d'exemples. On dispose donc de N bases de règles, N étant le nombre d'exemples disponibles. Une fois ce travail fait, si le calcul sur des cas inconnus ultérieurs est nécessaire, il faudra disposer d'une base de règles unique.

Il est possible de lancer un apprentissage sur les N exemples, en ayant une base de test vide. On a alors des règles dont la fiabilité ne peut pas être évaluée rigoureusement. En effet, le jackknife précédent a testé les règles construites sur $N - 1$ exemples, qui peuvent être très différentes des règles construites sur les N exemples lorsque la base d'exemples est incomplète.

On peut aussi procéder en deux étapes :

- d'abord, estimer sur les N exemples le "corps" de la base de règles. Ce corps comprend par exemple les monômes du polynôme dans le cas de la régression multiple ;
- ensuite, estimer par jackknife une "valeur moyenne" des paramètres numériques associés au corps de la base de règles, soit les coefficients de chaque monôme pour la régression multiple.

3.3.6. Prédiction numérique des erreurs par régression multiple

3.3.6.1. Méthodologie

Le polynôme global obtenu par pré-traitement de type ALN est supposé construit. Ensuite, à chaque couche k du processus itératif, l'algorithme de régression multiple recherche les k monômes les plus significatifs, parmi tous ceux existant dans le polynôme global, ainsi que leurs facteurs multiplicatifs. Le nombre de monômes choisis ne peut dépasser le nombre d'exemples de la base d'apprentissage, diminué d'une unité, soit 25 dans notre cas. Le nombre de descripteurs distincts utilisés dans les polynômes successifs peut être plus ou moins élevé : un monôme peut contenir

plusieurs descripteurs ; inversement, deux monômes peuvent utiliser les mêmes descripteurs (avec des exposants différents).

Dans les faits, l'algorithme peut s'arrêter pour un nombre de coefficients encore plus faible, s'il s'avère par exemple que plusieurs individus de la base sont liés ou équivalents, au vu des seuls descripteurs utilisés.

Les techniques d'apprentissage pouvant se révéler instables s'il y a trop de descripteurs superflus ou peu utilisés, nous avons pratiqué 2 apprentissages avec différents ensembles de descripteurs. Le premier apprentissage utilise les descripteurs X_1 à X_{33} . Une statistique sur les résultats de cet apprentissage a permis de retenir les 8 descripteurs les plus utilisés et de lancer un second apprentissage.

3.3.6.2. Stabilité des prédictions

La stabilité des prédictions peut être étudiée en fonction de deux facteurs :

- le numéro de couche (donc le nombre de monômes retenus), pour analyser par exemple la régularité de l'évolution des résultats sur le test ;
- les descripteurs retenus lors de l'apprentissage.

L'évolution de la prédiction du test à diverses couches a été présentée au §VII.3.2.4.2 pour le problème d'apprentissage précédent. Cette évolution est très régulière : l'écart quadratique moyen décroît au début du processus itératif, puis augmente légèrement si le nombre de couches devient trop élevé. Dans notre cas, l'incomplétude de la base d'apprentissage interdit quasiment une évolution de ce type.

Nous présentons quelques exemples d'évolution de la prédiction sur l'exemple de test, en fonction du nombre de monômes retenus.

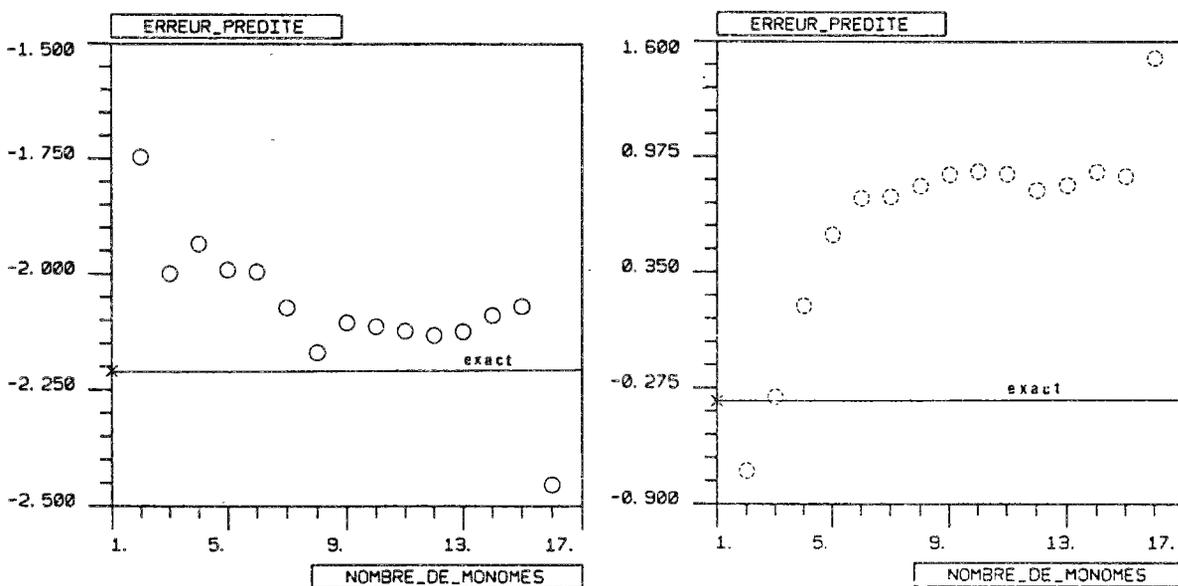


Fig. VII-3-12 a b. Prédications des conclusions en fonction du nombre de monômes

Première figure : point droit de la courbe d'optimalité de l'erreur absolue en contraintes de NR18

Seconde figure : point gauche de la courbe d'optimalité de l'erreur absolue en déviateur des déformations de NR2

Ces deux exemples montrent une remarquable stabilité des prédictions, pour un nombre de monômes raisonnable (ni trop grand, ni trop petit). La Fig. VII-3-12 a montre un palier de prédiction très proche de la valeur exacte. La Fig. VII-3-12 b montre cette fois un palier très éloigné de la valeur exacte à prédire. La stabilité des prédictions ne peut donc être un critère de qualité des polynômes.

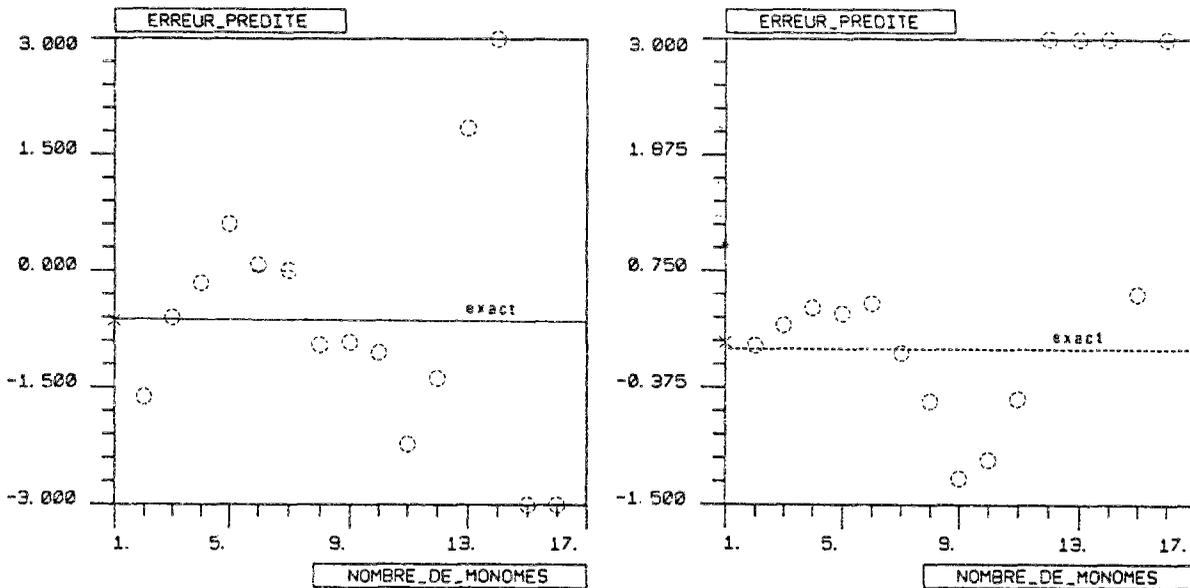


Fig. VII-3-13 a b. Prédiction en fonction du nombre de monômes

- première figure : point gauche de la courbe d'optimalité de l'erreur absolue en déformations pour NR14
- seconde figure : point gauche de la courbe d'optimalité en contraintes, pour NR12

On constate que la prédiction peut osciller très fortement d'une couche à une autre, autour d'une moyenne qui peut être proche ou éloignée de la valeur exacte. Bien sûr, si la base d'exemples était redondante, la plupart des prédictions auraient un aspect comparable à la Fig. VII-3-12a.

3.3.6.3. Une méthode de prédiction plus stable

Nous venons de voir que les prédictions de l'exemple test par régression multiple en fonction du nombre de monômes pouvaient être très instables. Le nombre maximal étant de 25, nous n'avons aucune raison de préférer *a priori* un nombre particulier de monômes plutôt qu'un autre. Choisir la couche qui minimise l'erreur sur l'apprentissage conduira quasi-systématiquement à l'ordre le plus élevé. Choisir la couche qui donne les meilleurs résultats sur le test est inacceptable : cela revient à construire les règles sur la totalité de la base d'exemples. On perçoit ici l'intérêt d'un double test.

Nous avons remarqué auparavant (cf. §VII.1.3.1) qu'il était raisonnable de retenir un nombre de coefficients indépendants compris entre le tiers et les deux tiers de l'effectif de la base d'exemples. Cette recette restreindrait le choix aux couches d'ordre 7 à 16 environ. On comprend qu'un polynôme de degré inférieur à 7, même s'il peut donner un bon résultat sur le test, a encore une erreur élevée sur l'apprentissage. Inversement, un polynôme de degré trop élevé "colle" trop aux exemples d'apprentissage et perd de sa généralité.

Nous avons finalement choisi de retenir comme prédiction unique la *médiane* des 7 prédictions

d'ordre successif 7 à 13. La base de règles comprend donc 7 polynômes. La procédure pratique de prédiction est la suivante :

- on fait les prédictions pour chacun des 7 polynômes
- on ramène dans l'intervalle admissible (cf. §VII.3.3.4) les prédictions qui n'y sont pas contenues. Par exemple, un logarithme d'erreur prédit à +4.6 est ramené à +3.
- on retient la médiane des 7 prédictions corrigées, soit la valeur pour laquelle 3 prédictions sont plus petites, et 3 prédictions plus grandes.

On pourrait objecter que cette procédure heuristique retient trop de coefficients indépendants : non pas entre 1/3 et 2/3 du nombre d'exemples, mais près du triple ($7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 70$). En fait, ces 70 coefficients ne sont pas indépendants. Ils sont calculés par blocs d'au plus 13 coefficients, et la construction des coefficients d'une couche i ignore la valeur de ceux retenus aux autres couches.

Les résultats de cette procédure sont analysés dans la suite.

3.3.6.4. Apprentissage à 33 descripteurs : qualité des prédictions

Nous présentons une statistique sur la qualité des 468 prédictions du résultat de l'exemple test. Nous classerons la qualité des prédictions d'une erreur e dans les intervalles suivants :

Qualité	Intervalle pour les logs	Intervalle pour les erreurs
très bonne	$[\log e - 0.08 ; \log e + 0.08]$	$[0.8 e ; 1.2 e]$
bonne	$[\log e - 0.2 ; \log e + 0.2]$	$[0.6 e ; 1.6 e]$
moyenne	$[\log e - 0.5 ; \log e + 0.5]$	$[0.33 e ; 3. e]$
mauvaise	$[\log e - 1. ; \log e + 1.]$	$[0.1 e ; 10. e]$
très mauvaise	Hors des intervalles précédents.	

On remarquera que les logarithmes des erreurs varient en général entre -3 et $+1$ à $+3$; les pentes, entre -1.5 et 0 . Il est donc légitime de réduire ces intervalles, pour évaluer la qualité des pentes prédites. Nous choisissons donc, pour ces dernières, des intervalles de largeur inférieure de moitié aux précédents (par exemple, une très bonne évaluation d'une pente p est comprise dans $[p - 0.04 ; p + 0.04]$).

La prise en compte du problème traité, l'estimation *a priori* des erreurs, conduirait à pénaliser les prédictions qui sous-évaluent l'erreur, en tolérant plus facilement une surévaluation. Cette distinction se justifie moins pour les pentes.

Nous numérotons les erreurs de la façon suivante :

indice a = "point gauche" de la droite optimale ; b = point droit ; c = pente

numéro 1 = $c_{2\Omega}(\sigma)$; 2 = $c_{2\Omega}(\epsilon')$; 3 = $c_{4\Omega}(\sigma)$; 4 = $c_{4\Omega}(\epsilon')$; 5 = $e_{p2}(\sigma)$; 6 = $e_{p2}(\epsilon')$.

Le tableau suivant présente la qualité des prédictions pour les 26 exemples et chacune des 18 erreurs :

TYPE D'ERREUR	C L A S S E M E N T (%)				
	TRES BON	BON	MOYEN	MAUVAIS	TRES MAUVAIS
1 a	38.5	23.1	19.2	15.4	3.8
1 b	19.2	11.5	34.6	23.1	11.6
1 c	26.9	7.7	19.2	15.4	30.8
2 a	26.9	3.8	19.2	26.9	23.2
2 b	19.2	11.5	3.8	26.9	38.5
2 c	15.4	0.	30.8	50.	3.8
3 a	26.9	23.1	38.5	3.8	7.7
3 b	38.5	11.5	15.4	19.2	15.4
3 c	15.4	19.2	30.8	15.4	19.2
4 a	23.1	15.4	30.7	15.4	15.4
4 b	26.9	19.2	26.9	19.2	7.8
4 c	7.7	15.4	42.3	23.1	11.5
5 a	30.8	7.7	38.5	11.5	11.5
5 b	30.8	3.8	23.1	30.8	11.5
5 c	30.8	11.5	19.2	30.8	7.7
6 a	38.5	0	30.8	19.2	11.5
6 b	19.2	11.5	30.8	15.4	23.1
6 c	11.5	7.7	23.1	26.9	30.8
MOYENNES					
a	30.78	12.18	29.48	15.38	12.18
b	25.63	11.5	22.43	22.43	18.01
c	17.95	10.26	27.56	26.92	17.31
TOTAL	24.79	11.31	26.49	21.58	15.83

Table VII-3-3. Qualité des 468 prédictions

La proportion de prédictions *bonnes et très bonnes* est de 36 % ; en y ajoutant les moyennes, on obtient 62 %. Cette qualité est satisfaisante, bien que le faible nombre d'exemples de la base ne permette pas d'atteindre d'aussi bons résultats que pour le problème d'apprentissage précédent.

3.3.6.5. Descripteurs utilisés

Il peut être intéressant de chercher les descripteurs les plus utilisés lors des différents apprentissages. Nous avons donc fait une statistique sur l'utilisation des descripteurs. Le tableau suivant montre, pour chacune des 18 erreurs prédites par jackknife, le nombre de fois où chaque descripteur a été utilisé. Ce nombre est au maximum égal au nombre d'exemples (soit 26). Nous considérons qu'un descripteur X est utilisé pour un exemple i si au moins un des polynômes d'ordre 2 à 13 de la base de règles construite avec l'exemple i mis en test, contient au moins une fois le descripteur X. Nous ne comptons pas le nombre de fois où ce descripteur intervient dans les 12 polynômes examinés.

NUMERO DESC.	T Y P E D'						E R R E U R									TOTAUX		SCORE					
	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b		6c	1	2		
1			1			16			1			10							28	26	14		
2						14		1				3	25	26	1	12	17	9	108	94	7		
3				1		1		7	4			6	2	21			18		64	39	10		
4			4	1				12	1	2		5	19			1	2	1	48	31	13		
5			15					4									4		23	15	19		
6			4			2			2		1								22	13	21		
7			23		1	3			16							17	3		63	56	9		
8					4						14								18	14	20		
9			3	24	1	2		4	20	26		3	3	3	3	3	23	12	1	1	132	105	6
10			1	1	1	2					1					2	11		8		27	11	22
11											1						4				5	0	NUL
12																	1				2	0	NUL
13			1	3		5					1	3				16				33	16	18	
14			3					3		2					1	6	23	14	9		61	37	12
15			26	11	9	24	25	19		2				5	22		1	13	5		163	140	5
16						5						1						1			8	0	NUL
17						5											5				10	0	NUL
18			26	26	18	23	26	9	26	26	26	26	26	25		13	14		9	14	333	315	2
19			24	3		3	1	4	4	1	1				1	1	1	2	5	2	55	24	15
20			1			8	22	6			2		8		1			1	5		54	22	16
21			3	1		10		4	1		2									7	28	10	23
22				13		2	6		11	4		14	6	1			2		1	1	61	38	11
23			1	15		9	4	1	1	2	3	1	4			1	21	2	1		66	36	15
24			1			4									2				7		14	0	NUL
25			26	26	26	25	26	18	24	24	26	26	25	26	26	26	26	26	26	26	454	454	1
26			15	21		3	12		4	14	26		8	26	2		26		26		183	166	4
27			9	7		1	7	1		19		4	18	1			1		6		75	37	12
28			1	3		2	1	5		1			2	21		1	1			1	38	21	17
29			1	1		1	5			1		1				1					10	0	NUL
30			1	3		1	24		3		12	3		23					24		94	83	8
31			3			1					13					24	4				45	37	12
32				2		1							3		1	2			1	1	11	0	NUL
33			26	21	3	22	12	1	26	17	11	26	11	4	25	22	2	26	25	14	294	284	3

Table VII-3-4. Statistique sur l'utilisation des descripteurs.

Les 2 colonnes "totaux" ont la signification suivante :

- la première fait simplement la somme du nombre d'occurrences de chaque descripteur
- la deuxième n'additionne que les occurrences supérieures ou égales à 10. Nous avons considéré que la présence d'un descripteur qui intervenait moins de 10 fois dans un jacknife à 26 exemples, était plus due au hasard qu'à la significativité réelle du descripteur. Si la base d'exemples était redondante, la presque totalité des descripteurs sélectionnés pour une erreur donnée aurait une occurrence voisine de 26, et il n'y aurait pas de scores faibles. Le classement des descripteurs par ordre de significativité (colonne SCORE) retient le second total.

Il apparaît beaucoup de vide dans ce tableau : peu de descripteurs sont effectivement utilisés. Les 8 descripteurs finalement les plus significatifs sont dans l'ordre X_{25} , X_{18} , X_{33} , X_{26} , X_{15} , X_9 , X_2 et X_{30} . On remarquera que 2 des 3 meilleurs descripteurs (et de très loin : le score du troisième est de 284 occurrences ; celui du quatrième est de 166 occurrences seulement) sont les rapports $V_{\text{écart}}/V_{\text{total}}$ des champs décrits. Aucun paramètre de forme tensoriel n'intervient avant l'ordre 9. Parmi les 4 meilleurs descripteurs, 3 sont relatifs au champ des gradients absolus.

Dans l'état actuel de nos recherches, nous ne pouvons fournir aucune explication précise pour la significativité des descripteurs.

3.3.6.6. Prédiction à 8 descripteurs

Nous avons relancé la régression avec les 8 meilleurs descripteurs. Les résultats sont les suivants :

TYPE D'ERREUR	C L A S S E M E N T (%)				
	TRES BON	BON	MOYEN	MAUVAIS	TRES MAUVAIS
1 a	46.2	19.2	19.2	7.7	7.7
1 b	19.2	30.8	15.4	23.1	11.5
1 c	23.1	11.5	23.1	15.4	26.9
2 a	15.4	7.7	23.1	26.9	26.9
2 b	23.2	11.5	26.9	11.5	26.9
2 c	15.4	11.5	34.6	30.8	7.7
3 a	30.7	38.5	15.4	7.7	7.7
3 b	30.8	7.7	34.6	11.5	15.4
3 c	26.9	15.4	11.5	30.8	15.4
4 a	23.1	19.3	26.9	26.9	3.8
4 b	19.2	11.5	38.6	19.2	11.5
4 c	19.2	11.5	30.8	15.4	23.1
5 a	30.8	23.1	19.2	19.2	7.7
5 b	23.1	26.9	15.4	23.1	11.5
5 c	19.2	19.2	30.8	15.4	15.4
6 a	26.9	11.5	23.2	26.9	11.5
6 b	30.8	3.8	23.1	26.9	15.4
6 c	30.8	0.	26.9	26.9	15.4
MOYENNES					
a	28.85	19.88	21.17	19.22	10.88
b	24.38	15.37	25.67	19.22	15.37
c	22.44	11.54	26.28	22.44	17.3
TOTAL	25.22	15.6	24.37	20.29	14.52

Table VII-3-5. Qualité des prédictions

On remarque que la qualité globale des prédictions est améliorée (très bons et bons = 41 % ; avec les moyens : 65 %). Ce score reste très supérieur à une prédiction aléatoire. L'élimination de descripteurs non significatifs a augmenté en moyenne l'efficacité de l'algorithme d'apprentissage. Cependant, pour quelques prédictions, on constate une dégradation.

3.3.7. Classement par analyse discriminante modifiée

3.3.7.1. Méthodologie

Les valeurs numériques des erreurs sont segmentées en intervalles jointifs. A chaque intervalle est associé un numéro de classe, et il peut y avoir des classes vides. Le but de l'apprentissage est de prévoir la classe qui contient la valeur numérique de l'erreur. Le découpage en classes est forcément arbitraire, et il paraît illogique de considérer comme fausse la prédiction de l'intervalle [0.5, 0.7], au lieu de [0.7, 0.9], pour une erreur qui vaut 0.71. C'est pourquoi nous considérerons comme moyennes les prédictions décalées d'une classe à gauche ou à droite. Ce décalage doit prendre en compte les classes vides intermédiaires. Les prédictions écartées de plus d'une classe de la

valeur exacte sont considérées mauvaises.

Le nombre de classes, ainsi que leurs frontières, sont variables pour chacune des 18 erreurs prédites. Nous précisons dans les tableaux de résultats le nombre de classes (non vides ou vides intermédiaires) retenues pour chaque erreur. En moyenne, nous arrivons à environ 7 classes, ce qui donne pour une prédiction aléatoire 15 % de bien classés, et 40 % de classements bons et moyens. Les résultats des apprentissages sont à comparer à ces valeurs.

Il peut se produire que des classes ne contiennent qu'un seul individu. Dans ce cas, au cours du jackknife, cet individu sera rejeté dans le test et la classe correspondante deviendra vide. Aucune règle ne pourra donc être apprise pour cette classe et la prédiction de cet exemple sera nécessairement fausse.

Plusieurs tests d'arrêt sont implémentés dans le logiciel d'analyse discriminante. Il est donc possible de choisir un numéro de couche sans avoir à faire une moyenne de diverses prédictions. Nous avons choisi de retenir un test d'arrêt simple, même s'il n'est pas le plus efficace.

Le programme retient les descripteurs pour leur valeur ainsi que plusieurs de leurs puissances. Là aussi, nous présenterons les statistiques d'utilisation des 33 descripteurs, et relancerons un calcul avec 8 descripteurs.

3.3.7.2. Prédications à 33 descripteurs

Les résultats des 468 prédictions sont les suivants :

ERREUR	NB. CLASSES	C L A S S E M E N T nombre d'exemples										IN- CONNUS nb.	BIEN CLASSES PONDERES %	BIEN CLASSES %	MOYENS %	SUR- EVALUE %	SOUS- EVALUE %	
		-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4								
1a	7		2	6	1		9	3	3	1		1	36	34.6	15.4	26.9	34.6	
1b	6		1	2	6		8	5	2	1		1	25.	30.8	42.3	30.8	34.6	
1c	6	1	2	2	2		10	1	3	5			31.4	38.5	11.5	34.6	26.9	
2a	8		2	4	1		9	3	5	0	1	1	32.1	34.6	15.4	38.5	26.9	
2b	7	1	2	4	5		3	6	5				10.7	11.5	42.3	42.3	46.2	
2c	6	1	2	1	5		10	2	2	2		1	36.7	38.5	26.9	23.1	34.6	
3a	7		1	4	7		9	3	1			1	41	34.6	38.5	15.4	46.2	
3b	6	1	1	2	6		5	7	1	1		2	18.9	19.2	50.	34.6	34.6	
3c	7		1	7	3		7	2	3		2	1	25.7	26.9	19.2	19.2	38.5	
4a	7	2	4	4	4		5	4	1			2	18.8	19.2	30.8	19.2	53.7	
4b	7		2	4	4		4	5	3	2		2	15.3	15.4	34.6	38.5	38.5	
4c	6	1	2	4	4		9	4	1	1			34.1	34.6	30.8	23.1	42.3	
5a	9	1	3	2	4		6	8	1			1	22.6	23.1	46.2	34.6	38.5	
5b	10	3	4	4	1		7	1	2	3	1		26.	26.9	7.7	26.9	46.2	
5c	6	3	2	0	2		16	0	1	0	1	1	53.1	61.5	7.7	7.7	26.9	
6a	8	4	2	4	3		8	4	0	1			31.4	30.8	26.9	19.2	50.	
6b	10	4	3	3	3		7	1	2	1	1	1	23.3	26.9	15.4	19.2	50.	
6c	6	2	2	1	3		9	5	1	1	2		27.7	34.6	30.8	34.6	30.8	
MOYENNE																		
a													30.32	29.48	28.9	25.6	41.6	
b													19.87	21.72	32.1	32.1	47.5	
c													34.78	39.1	21.1	23.7	33.3	
TOTAL													28.32	30.1	27.4	27.1	40.8	

Table VII-3-6. Qualité des prédictions pour l'analyse discriminante à 33 descripteurs

On obtient 30 % de bien classés, 57 % en ajoutant les moyens. Nous rappelons que les scores respectifs d'une prédiction aléatoire sont de 15 et 40 %.

On peut faire les remarques suivantes :

- les "bien classés pondérés" correspondent à la moyenne des bien classés **par classe**, et non globalement. Par exemple, supposons une base de 100 exemples et 2 classes, une à 99 individus, l'autre à 1 seulement. Une prédiction des 100 exemples dans la première classe donnera 99 % de bien classés en moyenne globale, mais seulement 50 % = $1/2 (99/99 + 0/1)$ en moyenne pondérée. Dans notre cas, la différence entre ces deux estimations est généralement faible.
- il y a quelques prédictions inconnues. Ce fait est dû au logiciel utilisé, qui peut être mis en défaut dans certains cas assez rares. En théorie, l'analyse discriminante donne toujours un diagnostic (correct ou erroné).
- nous présentons dans le tableau VII-3-6 l'écart entre la classe réelle et la classe prédite (les écarts plus grands que 4 sont notés aux colonnes 4 ou -4). Un écart négatif correspond donc à une sous-évaluation de l'erreur. Nous rappelons que les classes vides intermédiaires sont prises en compte.
- les résultats du classement ne peuvent pas être directement comparés à ceux de la régression multiple. C'est par commodité que la précision de ces derniers a été exprimée par un classement (il aurait été plus logique, mais moins parlant, de retenir un écart moyen).

3.3.7.3. Descripteurs utilisés

Les descripteurs peuvent intervenir par eux-mêmes ou plusieurs de leurs puissances. Nous avons considéré les descripteurs qui interviennent au moins une fois, par eux-mêmes ou par une de leurs puissances, dans au moins une des couches 2 à 6. Ici, non plus, nous ne pondérons pas ce comptage par la fréquence d'apparition du descripteur. Il y a également des cas assez nombreux où un descripteur n'intervient quasiment jamais par lui-même, mais par une ou deux de ses puissances seulement. Ces particularités ne sont pas non plus étudiées, mais peuvent faire l'objet de développements ultérieurs.

Comme pour la régression, les totaux 1 et 2 évaluent le nombre total d'occurrences de chaque descripteur, avec respectivement un seuil de 0 et 10 occurrences.

On constate sur la Table VII-3-7 que les 10 descripteurs les plus significatifs sont dans l'ordre X_{25} , X_{18} , X_{15} , X_{24} , X_9 , X_2 , X_{21} , X_{30} , X_{26} et X_{31} ex aequo. Deux des 10 meilleurs descripteurs sont des paramètres de forme tensoriels. On remarquera que 7 des 8 meilleurs descripteurs trouvés par l'algorithme de régression se trouvent dans cette liste, et dans un ordre très voisin. Par contre, l'occurrence moyenne de chaque descripteur est plus élevée. Cela ne signifie pas forcément que l'analyse discriminante a besoin de plus de descripteurs pour donner une prédiction, mais plutôt que, d'une couche à l'autre, les descripteurs utilisés peuvent notablement changer.

NUMERO DESC.	T Y P E						E R R E U R									TOTAUX		SCORE			
	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b		6c	1	2
1		15			1					3			1						20	15	22
2		1	2		24	25	2	3		1	1	6	26	25	5	26	24	1	172	150	6
3				3				4		1	2					1			11	0	NUL
4		1	1		1	1				1	1		5			1	11	3	26	11	25
5					1			22	21	4	4	2	1	1	1			1	58	43	18
6					5	6			4		5	2	8	1		1	5		37	0	NUL
7		24	20		2	26	2	6	20	1	15	5	3	18		5	7		154	123	9
8		1	22		2	3	24		1	23	4	3	3			4	1	1	94	69	15
9			2		3	14	1	2	24	25	23	21	1	1	25	21	8		171	153	5
10		6	17			17		1	1								1		43	34	19
11					1	1				1							2		1	0	NUL
12		10						4		1	2	3					3		24	10	26
13										1	1	3				1	3		9	0	NUL
14		9	2	4				2		5	3	2	3		1	1	4	9	45	0	NUL
15		25	25	21	3	7	26		9	25	26	26	17	21	21	14	1	26	293	273	3
16		1	1																2	0	NUL
17		1	12		1	2			3	2									21	12	24
18		26	25	24	20	8	25	25	23	24	23	26	26	1	11	25	2	1	313	301	2
19		6	5		3			1	1	1	4		1			14	5	2	44	14	23
20			2	9	4	4	24	1	18	5	2		2	6		6	2	21	104	63	16
21		3	16	15	1	2		22		4	5	4	22	26	18			25	163	144	7
22				8		1						1					6	22	39	22	20
23		2	6	17				1	1	4	1	4	17	16	3	25			134	111	12
24		7	22	25				18	25	22	24	26	16	1	11	25	24	22	248	240	4
25		24	12	21	25	15	4	25	23	25	24	8	9	26	19	24	24	23	331	310	1
26		20	17	20		3		25	18	22	1	1			1	2	4		136	123	9
27		15	2	1	1	3	1	1	3	23	14	1		1	1		1	1	69	52	17
28						2				1									3	0	NUL
29						17													17	17	21
30		6	14	4	23	26	17	4	21		4	9	4	7	5	25	4	1	177	126	8
31		4		7	23	22	1		17		10	20	2	5	1	13		18	135	123	9
32		1	3	11	21	1	10	1	15	13	1	4	1	1	1			25	108	95	14
33		25	1	2	24	6	14	24	16	1	1	2	6	4	1		8	1	138	103	13

Table VII-3-7. Utilisation des descripteurs

3.3.7.4. Prédications à 8 descripteurs

Nous avons relancé une analyse discriminante en retenant les 8 meilleurs descripteurs trouvés par la régression multiple. Nous avons préféré éliminer les paramètres de forme tensoriels, car il nous a semblé que les descripteurs plus simples devaient être prioritaires.

Les résultats des 468 prédictions sont les suivants :

ERREUR	NB. CLASSES	C L A S S E M E N T nombre d'exemples									IN- CONNUS nb.	BIEN	BIEN	MOYENS	SUR-	SOUS-
		-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4		CLASSES PONDERES %	CLASSES %	%	EVALUE %	EVALUE %
1a	7			5	2	12	3	2	2		1	46.3	46.2	19.2	26.9	26.9
1b	6			1	3	15	4	0	2			50	57.7	26.9	23.1	15.4
1c	6		1	1	4	8	3	3	3	3		33.9	30.8	26.9	46.2	23.1
2a	8	2		4	2	6	3	5	1	2	1	21.4	23.1	19.2	42.3	30.8
2b	7		2	4	4	6	7	2	1			25	23.1	42.3	38.5	38.5
2c	6	1		1	7	10	3	3	1			35.9	38.5	38.5	26.9	34.6
3a	7		2	2	3	13	4	1			1	55.7	50.	26.9	15.4	26.9
3b	6	1	1	4	7	6	5	2				22.5	23.1	46.2	26.9	50.
3c	7	1	1	4	6	7	3	3			1	26.1	26.9	38.5	23.1	46.2
4a	7	2	2	1	6	5	7	2			1	22.2	19.2	50.	38.5	42.3
4b	7		3	3	5	8	4	1	2			26.2	30.8	34.6	26.9	42.3
4c	6	1	4	3	2	7	4	3	2			22	26.9	23.1	34.6	38.5
5a	9		1	5	5	7	4	3	1			27.4	26.9	34.6	30.8	42.3
5b	10	2	2	3	1	10	3	2	3			37.5	38.5	15.4	30.8	30.8
5c	6	1	5	1	3	12		1	1	1	1	47.8	46.2	11.5	11.5	38.5
6a	8		1	6	3	12	1	1	2			51	46.2	15.4	15.4	38.5
6b	10		4		3	9	2	5	2		1	30	34.6	19.2	38.5	26.9
6c	6	2	3	2	2	9	3	2	2	1		26.9	34.6	19.2	30.8	34.6
MOYENNE																
a												37.33	35.12	27.6	28.2	34.6
b												31.87	34.63	30.8	30.8	34
c												32.1	33.98	26.3	28.9	35.9
TOTAL												33.76	34.58	28.2	29.3	34.8

Table VII-3-8. Qualité des prédictions pour l'analyse discriminante à 8 descripteurs

Les bien classés sont 34 % et 63 % en y ajoutant les moyens. On obtenait 30 % et 57 % avec 33 descripteurs. Là aussi, les résultats sont meilleurs que lors de l'utilisation de 33 descripteurs. Le score des prédictions sous-évaluées a baissé, ce qui est bon pour la sécurité. On notera que le résultat du classement avec un test d'arrêt plus efficace donne 37 % de bien classés.

3.3.8. Classement par apprentissage multicouches

3.3.8.1. Méthodologie

Le principe du découpage en classes est rigoureusement identique à celui présenté pour l'analyse discriminante. Il est donc possible de comparer directement les résultats des 2 classements, contrairement à la régression.

Le choix des paramètres spécifiques de l'AMC (cf. §VII.1.4.2) a été fait d'une manière automatique, selon le principe suivant :

- la base d'exemple est découpée en 1/3 en apprentissage, 2/3 en test
- des prédictions sont faites en retenant cette division, mais en faisant varier dans une large proportion les différents paramètres
- les paramètres effectivement retenus pour le jackknife sont ceux qui ont donné les meilleurs résultats dans la phase précédente
- contrairement au problème d'apprentissage précédent (cf. §VII.3.2), la segmentation a été faite de

manière "bestiale" sur l'ensemble des 26 exemples. Le principe est de découper en tranches identiques, l'intervalle séparant les valeurs extrêmes de chaque descripteur trouvées sur les 26 exemples de la base.

Les résultats et les descripteurs utilisés sont, comme pour les autres algorithmes, ceux trouvés lors du jackknife.

3.3.8.2. Prédications à 33 descripteurs

Les résultats des 468 prédictions sont les suivants :

ERREUR	NB. CLASSES	C L A S S E M E N T nombre d'exemples									IN- CONNUS %	BIEN CLASSES %	MOYENS %	SUR- EVALUE %	SOUS- EVALUE %
		-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4					
1a	7			1	5	11	4	4			3.8	42.	34.6	30.8	23.1
1b	6	1	1	4	4	8	2	1	3		7.7	30.8	23.1	23.1	38.5
1c	6		1	0	1	9	3	3	5	4	0	34.6	15.4	57.7	7.7
2a	8	1	1	9	2	5	2	3	0	1	3.8	19.2	15.4	23.1	53.8
2b	7	2	2	1	2	7	6	4	1		3.8	26.9	30.8	42.3	26.9
2c	6		3	1	1	11	4	2	1	2	3.8	42.3	19.2	34.6	19.2
3a	7				6	15	3				7.7	57.7	34.6	11.5	23.1
3b	6	2	1	2	3	16	1	0	1		0	61.5	15.4	7.7	30.8
3c	7				5	7	6	2	4		7.7	26.9	42.3	46.2	19.2
4a	7	2	1	0	3	12	6	0	2		0	46.2	34.6	30.8	23.1
4b	7	1	2	4	2	9	5	2			3.8	34.6	26.9	26.9	34.6
4c	6		1	1	1	13	3	1			23.1	50.	15.4	15.4	11.5
5a	9	2	1	4	1	8	4	3	1	1	3.8	30.8	65.4	34.6	30.8
5b	10			1	2	9	2	2	4		23.1	34.6	15.4	30.8	11.5
5c	6	1	4	1	1	9	0	1	4	1	15.4	34.6	3.8	23.1	26.9
6a	8	1	0	5	1	9	2	3	3		7.7	34.6	11.5	30.8	26.9
6b	10	2	1	3	0	8	2	5	3		19.2	30.8	11.5	26.9	23.1
6c	6	3	2	2	1	6	2	3	3	1	11.5	23.1	11.5	34.6	30.8
MOYENNE															
a											4.5	38.41	32.7	26.9	30.1
b											9.6	36.53	20.5	26.3	27.6
c											10.3	35.25	17.9	35.3	19.2
TOTAL											8.1	36.73	23.7	29.5	25.6

Table VII-3-9. Qualité des prédictions pour l'AMC à 33 descripteurs

Il y a une petite proportion de prédictions indéterminées, ce qui est permis par l'algorithme d'apprentissage. Les "bien classés" sont un peu plus nombreux que pour l'analyse discriminante ; par contre, la somme "bien et moyennement classés" est comparable.

3.3.8.3. Descripteurs utilisés

Dans le cas de l'AMC, les descripteurs sont affectés d'un poids (inférieur ou égal à 1) pour leur comptabilisation. Nous avons donc retenu un seuil minimal de 8, au lieu de 10, pour considérer comme significative la contribution d'un descripteur.

Table VII-3-10.

NUM. DESC.	T Y P E										E R R O R										T O T A U X		SCORE
	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c	5a	5b	5c	6a	6b	6c	1	2			
1	8	19	12.9	7.8	6	4.9	18	10.3	11.8	10.3	9.4	12	10	12	21.6	11.9	15	6.2	207.1	182.2	26		
2	8	12.5	10.5	9.3	8.6	3.6	15.5	9.5	13.3	10	6	6	9	16	15	11.9	17.3	11.5	193.5	177.9	27		
3	16	7.4	10.1	8.5	10.1	3	17.5	10.8	15.7	11.7	7.1	18.2	11.4	14.7	20.1	12.5	16.2	10.2	221.2	203.7	12		
4	12.4	11.5	14.7	7.2	10.1	8.1	16.3	13	15	13.8	8	14	9.2	17	16.9	11.1	19	7.7	225	210.1	10		
5	14.5	10.4	10.6	7.1	4.5	9.2	18.3	12.5	14.8	13.2	9.6	18	13	16	5.8	13	17.3	10.3	218.1	200.7	15		
5	14.5	16.8	12.5	7.7	4.5	6.1	18.3	10.7	19.3	11.5	7.1	18	11.7	18.7	23	12.7	18.6	8.5	240.2	214.8	8		
7	13.3	13.8	9.9	7.8	6	8	16.8	11	16	18	7.2	18	13.5	16	7.1	12	15.7	9.9	220	191.9	17		
8	15.8	15.8	14.3	8.2	14.9	6.1	19.8	12.7	15.6	12.4	7.8	15	13.1	18.7	17.7	14.2	19	8.1	249.2	235.3	2		
9	13.3	22.0	13.9	8.4	9.9	6.8	16.3	10.8	16	15.7	8.1	20	12.5	14.7	18.1	10.9	17	8.4	242.8	236	1		
10	14.6	14	10.3	8.5	4.5	4.3	21	11.8	15.6	12.2	8.2	15	11.5	14.7		11	18.2	7.9	203.3	186.6	20		
11	13	6	8.3	8.9	13.5	8	18.3	11.6	19.3	10.4	7	15	11.3	16.8	17	12.6	16.8	6.2	214	200.8	14		
12	13.3	6	11.4	6.3	4.5	7.7	16.5	12.5	17	10.9	7.5	15	12.6	16	8	8.8	17	9.3	200.3	168.3	29		
13	12.4	19.5	11.1	4.1	8.5	8	17.2	11.2	15.6	14.4	8	18	7.3	14.7	19.3	10.6	15.8	7.6	223.3	204.3	11		
14	13.3	20.5	11.4	8.1	11	12	19.8	12.4	19.3	14.3	6.3	15	12.6	16.7	12.2	11.1	17	8.6	241.6	235.3	2		
15	9.3	15.5	16.3	8.2	10.3	4.7	13.7	8.3	14.7	5.4	10.4	6	16.5	8	15.9	15.3	16.2	8.3	203	186.9	20		
16	8	6.2	9.1	5.6	17.1	7	10	7.5	17.5	13	5.7	15	9.4	8	8.9	12.3	22.7	9	177	150.6	33		
17	14.7	9	11.4	6	6	6.2	14	10.8	26	12	5.8	15	9.5	8	25.6	12.2	18.3	10.2	214.7	196.7	16		
18	12.4	17.2	14.1	9	14.1	3.5	19.8	13.8	15.6	12.8	10.1	15	10.7	16	16.5	11.2	22	7.1	240.9	230.3	4		
19	8.7	11.2	13.4	7.5	5.9	6	13.7	9.1	14.7	8.9	8.3	9	12.3	8	14.9	12.4	16.8	11.9	192.7	173.3	28		
20	8	21.6	11.8	9.3	17.4	6	15.5	10.8	14	12	7.9	15	15.7	8	22.8	13.8	15	9.7	234.3	220.4	7		
21	11.3	6.7	13	7.7	5.7	3.4	15.5	10.5	14.7	8.8	9.1	14	10.6	18.7	21.8	10.5	18.8	8.9	209.7	186.2	20		
22	11.3	11.5	13.3	7.3	5.8	3.4	20	11.5	12.5	15.1	6.9	16	11.3	16	6.1	11.7	15.8	7.9	193.4	150	33		
23	8	10.7	12.7	7	7	12	15.5	10	12.5	11.7	7.3	12	9.8	14.7	5.1	11.8	14	7.6	189.4	155.4	32		
24	13.3	20	9.1	6.3	6.7	10	12.8	10.4	17	14.3	6.9	11.3	11.6	20	7.4	11	16.5	8.2	212.8	185.5	25		
25	13	10.1	9.3	8.5	15	6.8	16.3	11.4	15.6	12.3	9.5	15	9.2	18.7	25.2	9.7	17.5	8.2	231.3	224.5	6		
26	13.3	18.9	10	6	6.2	8	17.8	12.2	16	13.5	9.8	20	8.8	16.8	6.9	12.3	19.8	11.3	227.6	214.7	9		
27	13.3	15.7	15.7	7.8	6.4	8	18.3	11	14.8	12	7.5	18	7.8	16	21.5	11.1	17.6	9.5	232	202.5	13		
28	13.3	5	15.3	7.5	9.5	6.3	16.3	11.3	17	11.7	7.9	15	10.9	16	13.7	11.7	16	8.5	212.9	186.2	20		
29	13.3	8	14	4.6	16	3.1	16	10.7	19.3	13.2	8.5	15	9.1	14.7		16	16	8.5	198	190.3	18		
30	8.7	8.5	12.7	6.5	7	8.5	26	9.5	17	16.7	7.4		7.6		14.5	12.5	26	7.8	196.9	160.6	31		
31	10.3	6.8	12.4	6.5	9	5.3	18	11.7	16.3	10	7.6	6	8.6	16	17.6	9.7	15	8.1	194.9	162.7	30		
32	8.7	5.7	11.3	8.6	16.3	6.3	13.8	10.9	16	13.3	7.9	12	12	8	21.9	11.8	15	10.3	209.8	189.9	19		
33	12	17.9	9.5	8.2	20.2	6.5	15.8	12	16	14	8	15	10.7	14.7	20.2	13.1	17.3	7	238.1	224.6	5		

On constate une différence considérable avec les résultats des 2 autres algorithmes d'apprentissage. Une explication partielle peut être le principe même de l'AMC. L'algorithme généralise au maximum les informations contenues dans les exemples. Comme le nombre de ces derniers est faible, des règles trop générales peuvent être créées, par suite de défaut de contre-exemples. Un nombre de règles trop élevé indique, dans ces conditions, qu'une partie (non quantifiable) de ces règles est due au hasard.

Contrairement aux deux autres algorithmes, les règles construites pour chacune des 18 erreurs retiennent à des degrés divers quasiment tous les descripteurs disponibles, et aucun descripteur ne se détache nettement du lot. Les 10 descripteurs les plus utilisés sont $X_9, X_8, X_{14}, X_{18}, X_{33}, X_{25}, X_{20}, X_6, X_{26}$ et X_4 . S'il est vrai que 5 d'entre eux sont parmi les 8 retenus dans la régression, l'écart qui les sépare des suivants est faible, et, parmi les 5 autres, certains ne sont quasiment pas utilisés par les autres algorithmes.

3.3.8.4. Prédications à 8 descripteurs

Nous avons relancé l'AMC en retenant les 8 meilleurs descripteurs trouvés par la régression multiple. Les résultats des 468 prédictions sont les suivants :

ERREUR	NB. CLASSES	C L A S S E M E N T nombre d'exemples								IN- CONNUS %	BIEN CLASSES %	MOYENS %	SUR- EVALUE %	SOUS- EVALUE %
		-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3					
1a	7		1	3	1	11	4	2	1	11.5	42.3	19.2	26.9	19.2
1b	6		1	1	3	15	1	0	1	15.4	57.7	15.4	7.7	19.2
1c	6		2	1	2	9	4	3	1	7.7	34.6	23.1	38.4	19.2
2a	8		1	4	3	7	3	2		23.1	26.9	23.1	19.2	30.8
2b	7	1	1	1	5	7	5	2		15.4	26.9	38.5	26.9	30.8
2c	6		3	1	2	11	2	3	2	7.7	42.3	15.4	26.9	23.1
3a	7		1	2	3	14	5			3.8	53.8	30.8	19.2	23.1
3b	6			1	5	9	4	1	2	15.4	34.6	34.6	26.9	23.1
3c	7			4	4	12	2	1	1	3.8	46.2	23.1	19.2	30.8
4a	7		3	4	6	6	5	1	1	0	23.1	42.3	26.9	50.
4b	7		2	2	3	10	3	0	1	19.2	38.5	23.1	15.4	26.9
4c	6				3	13	4	0	1	19.2	50.	26.9	19.2	11.5
5a	9	1	2	4	3	7	2	3	1	7.7	26.9	19.2	26.9	38.5
5b	10	1	4	3	0	8	4	2	1	11.5	30.8	15.4	26.9	30.8
5c	6	2	1	1	5	9	1	0	3	11.5	34.6	23.1	19.2	34.6
6a	8	1	3	3	2	11	4	0	1	3.8	42.3	23.1	19.2	34.6
6b	10	2	3	1	2	8	0	2	1	15.4	30.8	7.7	23.1	30.8
6c	6	2	1	3	2	9	3	0	2	15.4	34.6	19.2	19.2	30.8
MOYENNE														
a										8.3	35.88	26.3	23.1	32.7
b										15.4	36.55	22.5	21.1	26.9
c										10.9	40.38	21.8	23.7	25
TOTAL										11.5	37.7	23.5	22.6	28.2

Table VII-3-11. Qualité des prédictions pour l'AMC à 8 descripteurs

Le résultat du classement donne 37.5 % de bien classés, et 61 % bien ou moyennement classés. Là

aussi, les résultats sont meilleurs que lors de l'utilisation de 33 descripteurs. Le nombre de cas inconnus a augmenté, ce qui se comprend car il y a moins de descripteurs disponibles.

Ce résultat est le meilleur des 4 trouvés par un algorithme de classement. Il a cependant été nécessaire de retenir un algorithme de régression pour le choix des descripteurs les plus efficaces. Cela prouve que le couplage de techniques d'apprentissage très différentes permet à la fois de vérifier la cohérence des prédictions (qui doivent rester comparables), et d'utiliser au mieux les points forts de chaque technique. Bien évidemment, aucune technique d'apprentissage ne peut fournir plus d'informations que n'en contient la base d'exemples.

3.3.9. Conclusion sur ce type d'apprentissage

Nous avons pu prédire, avec 8 descripteurs et par 3 algorithmes d'apprentissage totalement différents, une estimation bonne ou moyenne des erreurs obtenues pour un chargement donné, avec une qualité voisine de 60 %. L'existence de seulement 8 descripteurs significatifs pour la prédiction de 18 erreurs de nature très différente est un résultat important, qui n'était pas prévisible. L'approche utilisée est donc justifiée. Il est possible de tenter d'appliquer les règles trouvées à des cas inconnus, en ayant toutefois à l'esprit le risque de prédiction erronée : la base d'exemples actuelle n'est pas encore suffisante.

Nous n'avons pas non plus pris en compte les liens entre les différentes erreurs. Par exemple, la prédiction d'une erreur plus élevée pour 10000 DDL que pour 100 DDL est forcément erronée, et une correction est nécessaire. La qualité des prédictions peut encore être améliorée par la prise en compte de ces liens.

Enfin, l'extension de l'étude peut être vue dans plusieurs directions différentes :

- enrichissement de la base d'exemples, pour obtenir des prédictions plus fiables et des règles plus générales
- utilisation de techniques d'apprentissage nouvelles, qui prennent en compte les liens qui existent entre les conclusions
- généralisation de la méthode aux solides tridimensionnels, aux coques, etc.

Points essentiels du chapitre VII

1. Différentes techniques d'apprentissage automatique

L'apprentissage automatique construit une base de règles à partir d'une base d'exemples, de caractéristiques et de conclusions connues. Chaque exemple est représenté par un ensemble de descripteurs, de nombre et signification identique pour tous les exemples. Les règles sont construites sur une base d'apprentissage, et validées sur une base de test.

Les techniques de l'analyse de données peuvent être retenues. Elles construisent généralement des règles numériques (polynomiales par exemple) à partir de descripteurs du même type.

L'apprentissage numérique de type ALN + régression multiple ou réseaux de neurones est basé sur la notion de réseau multicouche. Le nombre de couches est variable dans l'ALN, fixe dans les réseaux neuronaux.

L'apprentissage symbolique (AMC) utilise un traitement logique des données du problème d'apprentissage. Divers paramètres doivent être fixés ; le résultat de l'apprentissage peut largement dépendre de ces paramètres. Il existe une procédure automatique permettant de trouver leur valeur optimale.

Enfin, on notera que, pour l'AMC comme pour les autres méthodes d'apprentissage, un excès de descripteurs non significatifs peut empêcher la construction de règles fiables. Il faut éviter d'éliminer *a priori* des descripteurs qui paraissent non significatifs. Il est préférable de lancer d'abord un apprentissage avec "plutôt trop" de descripteurs, faire une statistique sur les descripteurs les plus utilisés, puis relancer l'apprentissage en ne retenant que ces derniers.

2. Estimation d'erreur a priori

Nous traitons deux problèmes :

- recherche d'une discrétisation respectant un erreur donnée. Nous choisissons de prédire la courbe d'optimalité associée au chargement, et de construire le maillage par la règle empirique présentée au chapitre V.
- recherche de l'erreur obtenue avec une discrétisation donnée. Cette approche impose que les règles soient capables de prédire l'erreur pour tous les types de maillages qui lui seront présentés, aussi bien les bons que les mauvais. En conséquence, la base d'apprentissage doit comporter des maillages de toute qualité.

La prédiction de l'erreur pour n'importe quel maillage de 3 chargements a été entreprise. Diverses techniques d'apprentissage ont été utilisées. Les résultats sont bons dans l'ensemble, les prédictions correctes étant largement plus nombreuses que les prédictions erronées, et dépassent nettement le score d'une prédiction aléatoire.

La prédiction de la courbe d'optimalité de 6 types différents d'erreurs, en fonction du problème mécanique, a été effectuée à partir d'une base d'exemples de 26 individus. Une restriction du problème d'apprentissage à un matériau élastoplastique unique a été faite. La base de règles n'est donc valable que pour n'importe quel problème mécanique 2-D utilisant ce matériau.

Deux ensembles de 33 et 8 descripteurs ont été essayés, le second retenant les meilleurs descripteurs utilisés dans le premier.

Les résultats donnent 60 % des prédictions bonnes ou moyennes. Ce score, inférieur au problème précédent, peut être expliqué par le faible effectif de la base d'exemples. Les règles construites sont cependant applicables, sous réserve d'évidentes précautions, à des cas inconnus.

La construction de règles d'estimation d'erreur *a priori*, valables pour toute structure élastoplastique, reste envisageable à partir d'une base d'exemples plus complète.

3. Procédure pratique

3.1. Prédiction d'une droite d'optimalité

La prédiction d'une droite d'optimalité nécessite les étapes suivantes :

- donnée d'un problème mécanique élastoplastique : géométrie, matériau, chargement
- calcul élastique de cette structure (par éléments finis ou une autre méthode)
- calcul des descripteurs à partir des résultats du calcul élastique
- application de la base de règles à partir des descripteurs. On obtient les paramètres de la droite d'optimalité.

3.2. Utilisations de la droite d'optimalité prédite

Cette droite, qui associe les erreurs aux nombres de DDL des maillages optimaux, peut être utilisée de 2 façons :

- construction d'un maillage respectant une erreur donnée

L'erreur étant connue, il suffit d'interpoler sur la droite d'optimalité le nombre de DDL du meilleur maillage respectant cette erreur. L'utilisation d'une règle de maillage optimal (cf. chapitre V) construira ce maillage, à partir de ce nombre de DDL et d'un calcul préliminaire de la structure.

- estimation de la fiabilité d'une analyse

Dans ce cas, on suppose que l'analyse d'une structure élastoplastique doit être faite avec des ressources données. Il est possible de lier ces ressources (coût, espace disque, etc.) à la taille du maillage. La courbe d'optimalité prédite donne directement la plus faible erreur qu'il sera possible d'atteindre avec les ressources disponibles.

Si cette erreur convient, on peut alors lancer le calcul. Sinon, il faut soit disposer de ressources supplémentaires, soit s'accomoder d'une erreur plus élevée.

CONCLUSION

L'objet de ce travail était d'apporter un élément de réponse aux questions suivantes : quel crédit accorder aux résultats des calculs de structures élastoplastiques par éléments finis ? Et comment choisir les discrétisations spatiale et temporelle pour respecter *a priori* une erreur fixée, si possible à moindre coût ?

Après avoir constaté que l'utilisation des systèmes experts classiques se heurte à l'inexistence de règles d'estimation d'erreur ou d'expert pouvant fournir de telles règles, nous avons retenu les techniques d'apprentissage.

Leur application à l'estimation de l'erreur *a priori* nécessite une base d'exemples liant des problèmes mécaniques, leur discrétisation et l'erreur commise. Cette erreur a été évaluée de façon rigoureuse, par différence entre la solution exacte du problème et la solution approchée calculée numériquement. En élastoplasticité, il existe très peu de problèmes de solution exacte connue. Nous avons donc choisi de construire des solutions exactes par une méthode inverse.

Nous avons utilisé la base de solutions exactes pour valider des règles simples de maillage quasi-optimal d'une structure. Ces règles fournissent le champ de tailles d'un maillage ayant un nombre d'éléments ou de DDL fixé. Un mailleur automatique capable de respecter un champ de tailles d'éléments est nécessaire pour construire le maillage.

Deux types de règles de remaillage ont été proposés. L'un d'eux définit le champ des tailles du maillage fils à partir des erreurs calculées sur chaque élément ; il nécessite donc un moyen d'estimer *a posteriori* l'erreur commise. La seconde règle ne retient que les gradients du champ des contraintes calculées sur la structure supposée élastique.

Ensuite, plusieurs méthodes d'évaluation des erreurs par apprentissage automatique ont été présentées.

Une première application à la prédiction des erreurs en fonction du seul maillage a donné de très bons résultats et confirmé la validité de l'approche.

L'objectif final, la prédiction *a priori* de l'erreur commise pour n'importe quel problème mécanique, a été abordé par une approche à deux niveaux :

- la recherche par apprentissage du nombre de DDL ou d'éléments d'un maillage quasi-optimal respectant une erreur fixée ;
- l'utilisation des règles empiriques précédentes pour construire ce maillage.

Un essai a été tenté sur une base d'exemples 2-D assez variés ; les résultats ont été pour l'instant assez bons. Il reste donc à étoffer cette base d'exemples pour obtenir des règles plus générales et plus fiables. Il est aussi envisageable d'utiliser de nouvelles techniques d'apprentissage, qui prendraient en compte les liens qui existent entre les différentes erreurs.

De nombreux prolongements sont envisageables : l'extension de cette méthode d'estimation aux structures tridimensionnelles et aux milieux continus généralisés (plaques, coques), l'utilisation d'éléments de degré élevé, la prédiction du coût du calcul... L'approche par apprentissage peut aussi être appliquée aux problèmes de la comparaison directe expérience/calcul numérique, de l'optimisation de structures, etc.

De même, les applications potentielles des solutions exactes en élastoplasticité sont très vastes : test d'algorithmes ou de codes de calcul, formation des utilisateurs, etc.

BIBLIOGRAPHIE

- AKEL, S. *Sur le flambage des structures élastoplastiques*, thèse de docteur-ingénieur, ENPC, Paris, 1987
- BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W. C. *Adaptive approaches and reliability estimations in finite element analysis*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng, vol. 17/18, pp 519-540, 1979
- BABUSKA, I. and SZABO, B. *On the rates of convergence of the finite element method*, Int. J. of Num. Meth. in Engng, vol. 18, pp 323-341, 1982
- BAINES, M.J. *Moving finite elements*, Journées sur la génération automatique et l'adaptation de maillages, Grenoble, 1-2 octobre 1987
- BAKER, T.J. *Generation of Tetrahedral Meshes around complete aircraft*, Proceedings of the Second Conference on Grid generation in Computational Fluid Dynamics, Sengupta, Hauser, Eiseman, Thompson Editors, Pineridge Press, Swansea, 1988
- BASU, P.K. and PEANO, A. *Adaptivity in p-version finite element analysis*, J. of Struct. Engng, vol. 109, n 10, pp 2310-2324, 1983
- BATHE, K.J. and SUSSMAN, T.D. *An algorithm for the construction of optimal finite element meshes in linear elasticity*, Proc. Symposium "Recent Developments in computing methods for non linear solid and structural mechanics", ASME, Houston, 1983
- BENZECRI, J.P. et al. *L'analyse de données. Tome I : la taxinomie. Tome II : l'analyse des correspondances*, Dunod, Paris, 1973
- BOISSE, P. *Nouvel algorithme à grand incrément de temps pour le calcul des structures élastoplastiques*, Thèse Univ. Paris VI, juin 1987
- BONOMI, E. *Generation of a structured self-adaptive mesh based upon molecular dynamics*, Journées sur la génération automatique et l'adaptation de maillages, Grenoble, 1-2 octobre 1987
- BREIMAN, L., Friedman, J.H., Olshen, R.A., Stone, C.J. *Classification and regression by trees*, Belmont California, Wadsworth, 1984
- CARNET, J. *Une méthode heuristique de maillage dans le plan pour la mise en oeuvre des éléments finis*, Thèse de 3ème cycle, Univ. Paris VI, 1978
- CARROL, W.E. *A theorem for optimum finite element idealizations*, Int. J. of Solids and Structures, Vol. 9, PP 883-895, 1973
- CHENG *Quadtree/octree meshing with adaptive analysis*, Proceedings of the Second Conference on Grid generation in Computational Fluid Dynamics, Sengupta, Hauser, Eiseman, Thompson Editors, Pineridge Press, Swansea, 1988
- CHOU, P.C., LIANG, D., Wu, L. *Mesh rezoning for a dynamic triangular finite element hydrocode*, Finite Element in Analysis and Design, pp 175-192, North-Holland, 1988
- COFFIGNAL, G. *Optimisation et fiabilité des calculs éléments finis en élastoplasticité*, Thèse de doctorat d'Etat, Univ. Paris VI, 1987
- COULOMB, J.L. *2D and 3D mesh generation. Experimentation with the Delaunay's tessellation*, Journées sur la génération automatique et l'adaptation de maillages, Grenoble, 1-2 octobre 1987

- DIDAY, E., LEMAIRE, J., POUGET, J., TESTU, F. *Elements d'analyse de données*, Dunod, Paris, 1985
- DUBOIS, M., MAGNY, J., CAMBIER, J.P. *Procédures adaptatives d'automillage*, Calcul des Structures et Intelligence Artificielle, vol. 2, Fouet, Ladevèze, Chayon Editeurs, Pluralis, Paris, 1988
- FABRE, P. *Exercices de reconnaissance des formes par ordinateur*, Masson, Paris, 1989
- FOUCART, T. *Analyse factorielle : programmation sur micro-ordinateurs*, Masson, Paris, 1985
- GANASCIA, J.G. *AGAPE et CHARADE : deux techniques d'apprentissage symbolique appliquées à la construction de bases de connaissances*, thèse d'Etat, Univ. Paris Sud Orsay, mai 1987
- GEORGE, P.L. *Modulef : génération automatique de maillages*, Collection didactique n°2, INRIA, 1988
- GHOURI-DHATT, TOUZOT, G. *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, Paris, 1984
- HECHT-NIELSEN, R. *Neuro-Computing*, Addison Wesley, 1990
- HINTON, E., HELLEN, T.K., LYONS, L.P.K. *On elastoplastic benchmark philosophies*, Second International Conference on Computational Plasticity, Onate, Owen and Hinton Editors, Barcelone, septembre 1989
- HOFFMANN, A. et NGUYEN QUOC SON *Méthodes numériques en plasticité incrémentale. Application à des structures industrielles*, in Matériaux et Structures sous chargement cyclique, Presses de l'ENPC, Paris, 1978
- JACQUOTTE, O.P. *A new mechanical approach for grid generation in computational fluid dynamics*, Journées sur la génération automatique et l'adaptation de maillages, Grenoble, 1-2 octobre 1987
- KELLY, D. W., GAGO J.P., ZIENKIEWICZ O.C., BABUSKA I. *A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method- Part I : error analysis*, Int. J. Num. Meth. in Engng, vol. 19, pp 1593-1619, 1983
- KOULOUDJIAN, S. *Un système décisionnel de vision par ordinateur pour la robotique*, Thèse Université Paris-Sud, 1989
- KRIEG, D.B, KRIEG, R.D. *Accuracies of Numerical Solutions Methods for the Elastic-perfectly plastic model*, J. of Pressure Vessel Technology, ASME, vol. 99, pp 510-515, 1977
- LADEVEZE, P. *Optimal mesh for finite element analysis*, Journées sur la génération automatique et l'adaptation de maillages, Grenoble, 1-2 octobre 1987
- LADEVEZE, P. et LEGUILLON, D. *Error estimate procedure in the finite element method and applications*, SIAM J. Num. Anal., vol. 20, n°3, pp 485-509, 1983
- LEBOWITZ, M. *Categorizing Numeric Information for generalization*, Cognitive Science 9, pp 285-308, 1985
- LEGRAS, J. *Méthodes et techniques de l'analyse numérique*, Dunod, Paris, 1971
- LEMAIRE, M., REYNOUARD, J.M. *Introduction à la méthode des éléments finis*, Cours INSA - ULB, Lyon, 1983
- LEMAITRE, J. et CHABOCHE, J.L. *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris, 1985
- LO, S.H. *A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains*, Int. J. for Num. Meth. in

Engng, vol. 21, pp 1403-1426, 1985

LORET, B. *Problèmes numériques et théoriques de la géomécanique*, thèse de doctorat d'Etat, Univ. Paris VI, 1986

MANDEL, J. *Mécanique des milieux continus*, tome 2, Gautier-Villars, Paris, 1966

MAVRIPLIS, D.J. *Adaptive mesh generation for viscous flow using Delaunay triangulation*, Proceedings of the Second Conference on Grid generation in Computational Fluid Dynamics, Sengupta, Hauser, Eiseman, Thompson Editors, Pineridge Press, Swansea, 1988

MELOSH, R.J. and MARCALO, P.V. *An energy basis for mesh refinement of structural continua*, Int. J. Num. Meth. in Engng, vol. 11, pp 239-244, 1977

MELTZ, B. *A fast high-precision rezoning algorithm*, Journées sur la génération automatique et l'adaptation de maillages, Grenoble, 1-2 octobre 1987

MENDELSON, A. *Plasticity : theory and application*, Macmillan, New York, 1968

MICHALSKI, R. S. *A theory and methodology for inductive learning*, Machine Learning : An Artificial Intelligence Approach, Michalsky, Carbonnel, Mitchell Editors, Palo Alto, 1984

MONTANVERT, A. *Contribution au traitement de formes discrètes : squelette et codage de la ligne médiane*, Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, octobre 1987

MUCCIARDI, A.M. *Neuromime nets as the basis for the predictive component of robot brains*, Proceedings of the fourth annual symposium of the American Society for Cybernetics, Robinson and Knight Editors, Spartan Books, New York, 1972

NEWMARK, N.M. *A method of computation for structural dynamics*, J. Engng Mechanics, ASCE, 85, EM3, pp 67-94, 1959

NGUYEN QUOC SON et ZARKA, J. *Quelques méthodes de résolution numérique en plasticité classique et en viscoplasticité*, in Plasticité et Viscoplasticité, séminaire LMS septembre 1972, Radenkowic et Salençon Editeurs, Ediscience, Paris, 1974

NGUYEN QUOC SON *Contribution à la théorie macroscopique de l'élastoplasticité avec écrouissage*, thèse de doctorat d'Etat, Univ. Paris VI, 1973

NGUYEN QUOC SON *Problèmes de plasticité et de rupture*, Cours de DEA, Publications mathématiques d'Orsay, 1980

PREVOST, J.H. *Dynaflow : user's manual*, Univ. Princeton, 1983

SAMUEL, A. *Caractérisation de formes élémentaires par apprentissage : application à la reconnaissance de la parole*, thèse d'Université, Faculté de Luminy, février 1989

SCHOENAUER, M. et SEBAG, M. *Generation of rules with certainty and confidence factors from incomplete and incoherent learning bases*, Proceedings EKAW, Bonn, 1988

SCHOENAUER, M. et SEBAG, M. *Iterative learning and redundant generalizations*, Journées internationales d'Analyse de données / Apprentissage de connaissances symboliques et numériques, Antibes, septembre 1989

SCHOENAUER, M. et SEBAG, M. *Discovery of Meta-rules from Rules and Examples*, Expert Systems and their Applications, Avignon, mai 1991, à paraître

SEBAG, M. *Une approche symbolique-numérique pour la discrimination à partir d'exemples et de*

- règles : l'apprentissage multi-couches*, thèse Université Paris Dauphine, janvier 1990
- SHEPARD, M.S. , Gallagher, R.H. and Abel, J.F. *The synthesis of near-optimum finite element meshes with interactive computer graphics*, Int. J. Num. Meth. in Engng, vol. 15, pp 1021-1039, 1980
- SPECHT, B. *A general construction of local error estimators for conforming finite elements*, Comp. and Struct., vol. 19, n 5-69, pp 815-822, 1984
- SZABO, B.A. *Estimation and control of error based on p-convergence*, Accuracy estimates and adaptivity for finite elements, chap. 3, pp 61-78, Babuska- Zienkiewicz-Gago-Oliveira Editors, Wiley, 1986
- TALON, J.Y. *Algorithmes pour l'amélioration topologique des maillages 2D et 3D*, Journées sur la génération automatique et l'adaptation de maillages, Grenoble, 1-2 octobre 1987
- TERRIEN, M. Etude SEA : Rapport d'avancement n° 2, 1987
- TERRIEN, M. Rapport d'activité LMS, 1989
- TERRIEN, M. Rapport d'activité LMS, 1990
- TERRIEN, M. *Systèmes experts par apprentissage en contrôle non destructif*, Expert Systems and their Applications, Avignon, mai 1991, à paraître
- THOMPSON, J.F., WARSI, Z.U.A. and MARTIN, C.W. *Numerical grid generation*, North-Holland, 1985
- TURCKE, D.J. and McNEICE, G.M. *Guidelines for selecting finite element grids based on an optimization study*, Comp. and Struct., vol. 4, pp 499-519, 1974
- YODER, P.J. and WHIRLEY, R.G. *On the numerical implementation of elastoplastic models*, J. of Applied Mechanics, vol. 51, pp 283-288, 1984
- ZARKA, J. *Calcul des Structures*, cours, 1978
- ZARKA, J., FRELAT, J., INGLEBERT, G., NAVIDI, P.K. *A new approach to Inelastic Analysis of Structures*, Martinus Nijhoff Publishers, 1989
- ZIENKIEWICZ, O.C. *La méthode des éléments finis*, Ediscience, Paris, 1973
- ZIENKIEWICZ, O.C., GAGO, J.P. and KELLY, D.W. *The hierarchical concepts in finite element analysis*, Comp. and Struct., vol. 16 n 1-4, pp 53-65, 1983
- ZIENKIEWICZ, O.C. and CRAIG, A. *Adaptive refinement, error estimators, multigrid solution and hierarchic finite element method concepts*, Accuracy estimates and adaptivity for finite elements, chap. 2, pp 25-59, Babuska- Zienkiewicz-Gago-Oliveira Editors, Wiley, 1986
- ZIENKIEWICZ, O.C., PERAIRE, J., PEIRO, J. and MORGAN, N. *Finite element mesh generation and adaptive procedures for CFD*, Journées sur la génération automatique et l'adaptation de maillages, Grenoble, 1-2 octobre 1987