



HAL
open science

Étude expérimentale de suspensions de particules anisotropes en écoulement élongationnel

Anne Mongruel

► **To cite this version:**

Anne Mongruel. Étude expérimentale de suspensions de particules anisotropes en écoulement élongationnel. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1994. Français. NNT : . tel-00520739

HAL Id: tel-00520739

<https://pastel.hal.science/tel-00520739>

Submitted on 20 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

X

de Doctorat de
L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité : STRUCTURES ET MATERIAUX

présentée par
Anne Mongruel

**ETUDE EXPERIMENTALE DE SUSPENSIONS
DE PARTICULES ANISOTROPES
EN ECOULEMENT ELONGATIONNEL**

soutenue le 8 Avril 1994 devant le jury composé de :

Mme R. Gatignol	président
M. R. Blanc	rapporteur
M. F. Feuillebois	rapporteur
Mme C. Allain	examineur
M. J.P. Chabard	examineur
M. M. Cloitre	examineur



Ce travail a été réalisé au laboratoire Fluides, Automatique et Systèmes thermiques, à Orsay.

Michel Cloitre a dirigé cette thèse avec beaucoup d'enthousiasme, d'énergie et d'efficacité. Je le remercie pour la disponibilité et la patience dont il a constamment fait preuve, et l'ouverture scientifique dont il a su me faire profiter.

Mes remerciements vont aussi à Catherine Allain, qui a été étroitement associée à ce travail. A travers son aide attentive et ses conseils judicieux, elle m'a fait bénéficier de ses connaissances et de son expérience.

Je suis reconnaissante à François Feuillebois et Robert Blanc d'avoir accepté de se charger du rapport de thèse, et assumé cette tâche avec compétence et méticulosité.

Je remercie Renée Gatignol et Jean-Paul Chabard d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Enfin, j'associe dans une même pensée amicale tous ceux qui m'ont aidée dans ce travail.

Ce mémoire comporte deux parties indépendantes. La première partie est consacrée à une étude expérimentale de suspensions de particules anisotropes en écoulement élongationnel. Dans la seconde partie, nous proposons une analyse en lois d'échelles de la convection thermosolutale.

PLAN GENERAL

PREMIERE PARTIE : ETUDE DE SUSPENSIONS DE PARTICULES ANISOTROPES EN ECOULEMENT ELONGATIONNEL	p.5
<u>INTRODUCTION</u>	p.7
<u>CHAPITRE 1</u> : Introduction aux propriétés des particules anisotropes en écoulement élongationnel	p.9
I. Position du problème	
II. Comportement d'une particule allongée en écoulement de Stokes	
III. Viscosité d'une suspension de particules anisotropes	
IV. Mise en oeuvre pratique d'écoulements à composantes élongationnelles	
<u>CHAPITRE 2</u> : Mise en oeuvre et caractérisation de l'écoulement à composantes élongationnelles	p.65
I. Description du montage expérimental	
II. Caractérisation expérimentale du champ de vitesse newtonien	
III. Comparaison avec l'écoulement à travers une plaque infinie	
<u>CHAPITRE 3</u> : Dynamique d'orientation d'une fibre en régime dilué	p.127
I. Etude expérimentale	
II. Etude théorique de la dynamique d'orientation d'une fibre	
III. Interprétation des expériences	
<u>CHAPITRE 4</u> : Etude de suspensions de fibres en régime semi-dilué	p.169
I. Etude expérimentale de suspensions de fibres en régime semi-dilué	
II. Etude théorique	
<u>CONCLUSION</u>	p.227
<u>REFERENCES</u>	p.229

**DEUXIEME PARTIE : ETUDE EN LOIS D'ECHELLES DES COUCHES LIMITES
EN CONVECTION THERMOSOLUTALE**

p.235

Introduction

I. Analyse en ordre de grandeur

II. Solution de similitude

III. Article : "Scaling of boundary layer flows driven by double-diffusive convection".

PREMIERE PARTIE

**ETUDE EXPERIMENTALE DE SUSPENSIONS DE PARTICULES ANISOTROPES
EN ECOULEMENT ELONGATIONNEL**

INTRODUCTION

La première partie du travail que nous avons mené dans le cadre de cette thèse est consacrée à l'étude de suspensions de particules anisotropes en écoulement élongationnel.

L'étude des suspensions de particules dans un fluide connaît actuellement un essor nouveau. D'un point de vue pratique, les suspensions interviennent dans de nombreux systèmes dont les applications sont multiples. Sur le plan fondamental, la prédiction des propriétés d'écoulement des suspensions est un problème difficile qui demeure encore non résolu, en particulier dans les régimes concentrés. L'étude des propriétés d'écoulement met en jeu de façon générale un aspect statistique, nécessaire pour connaître la répartition spatiale des particules dans la suspension (position, orientation), et un aspect hydrodynamique pour traiter les interactions entre les particules qui sont transmises par le fluide et qui sont de type longue portée. Le cas des suspensions de particules sphériques est très étudié, et des progrès importants ont été réalisés récemment grâce en particulier au développement de nouvelles méthodes analytiques et numériques, et à l'étude expérimentale de systèmes bien caractérisés.

Les suspensions de particules anisotropes auxquelles nous allons nous intéresser dans ce travail présentent sous écoulement des comportements spécifiques, qui sont liés à la géométrie des particules. Celles-ci sont d'abord susceptibles de s'orienter dans l'écoulement sous l'effet des gradients de vitesse. De plus, elles apportent une contribution importante à la viscosité de la suspension. En particulier, en écoulement élongationnel, les particules s'orientent de manière stable parallèlement aux lignes de courant ; dans cette orientation la contribution des particules à la contrainte est maximale, ce qui se traduit par l'apparition d'une viscosité élongationnelle élevée. Les propriétés de nature locale induites par l'écoulement à l'échelle des particules modifient en retour les propriétés globales de l'écoulement, et ce couplage peut être à l'origine de comportements nouveaux qui sont actuellement mal compris.

Dans ce travail, nous étudions des suspensions de fibres modèles dans une géométrie d'écoulement à travers un orifice mettant en jeu de fortes composantes élongationnelles. Les suspensions sont constituées de fibres rigides, macroscopiques, de forme cylindrique, qui sont dispersées dans un fluide newtonien. Le dispositif expérimental que nous avons mis en oeuvre présente l'originalité de permettre à la fois d'effectuer des mesures de type rhéologique (mesures de débit et de pression) et de visualiser la suspension afin d'en étudier la structuration spatiale à l'échelle macroscopique (lignes de courant) ou à l'échelle des particules

(orientation des fibres dans l'écoulement). Nous nous intéressons à deux régimes de concentrations en particules. Dans le régime *très dilué*, nous étudions la dynamique d'orientation d'une fibre et nous montrons que les résultats peuvent être décrits à partir de la connaissance du champ de vitesse de l'écoulement. En ce qui concerne les suspensions plus *concentrées*, nous mettons en évidence un comportement non-newtonien caractérisé en particulier par l'apparition d'une structuration spécifique de l'écoulement.

Le premier chapitre est consacré à la présentation générale des propriétés des suspensions de particules allongées. Nous insistons sur la spécificité de la sollicitation élongationnelle, qui conduit à une orientation stable des particules et à une forte augmentation de la viscosité élongationnelle. Nous passons aussi en revue les diverses réalisations pratiques d'un écoulement élongationnel et justifions le choix que nous avons adopté pour nos expériences.

Dans le deuxième chapitre, nous décrivons de manière détaillée la cellule d'écoulement que nous avons utilisée dans les expériences, ainsi que l'ensemble du montage expérimental. Puis nous présentons une caractérisation expérimentale de l'écoulement de base *newtonien* dans la cellule ; les résultats sont discutés en relation avec des solutions analytiques pour des géométries d'écoulement voisines.

Le troisième chapitre concerne la dynamique d'orientation d'une fibre en régime *très dilué* dans l'écoulement de base newtonien étudié au chapitre précédent. Il comprend une étude expérimentale dans la cellule d'écoulement et une étude théorique à l'aide des équations d'orientation d'une fibre dans un écoulement de Stokes.

Les suspensions de fibres *semi-diluées* font l'objet du dernier chapitre. Nous présentons les observations et les mesures que nous avons effectuées sur les propriétés d'écoulement globales de ces suspensions, en fonction de différents paramètres, en particulier la fraction volumique et le rapport de forme des particules. Nous mettons en évidence l'existence d'une structuration remarquable de l'écoulement, que nous étudions de façon systématique. Les résultats expérimentaux peuvent être interprétés en terme d'augmentation de la viscosité élongationnelle, en relation avec les caractéristiques microscopiques des suspensions.

CHAPITRE 1

Introduction aux propriétés des particules anisotropes en écoulement élongationnel

Ce chapitre est consacré à la présentation des propriétés des suspensions de particules anisotropes en écoulement élongationnel, et des principaux concepts qui nous seront utiles tout au long de ce travail. Nous insistons particulièrement sur les propriétés spécifiques de ce type de suspension.

Après avoir posé le problème, nous discutons brièvement les moyens d'étude théoriques classiquement utilisés, et nous abordons les propriétés d'une particule unique placée dans un écoulement à faible nombre de Reynolds. Ces propriétés concernent d'une part son orientation dans l'écoulement et d'autre part la perturbation de vitesse dans son voisinage.

Ensuite, nous étudions les conséquences de ces propriétés locales à l'échelle d'une particule sur la rhéologie des suspensions de particules anisotropes, en régime dilué et en régime semi-dilué. En particulier, nous mettons en évidence l'intérêt de la sollicitation élongationnelle pour les suspensions de particules anisotropes.

Dans une dernière partie, nous discutons la mise en oeuvre expérimentale d'écoulements à composantes élongationnelles.

PLAN DU CHAPITRE 1

I. POSITION DU PROBLEME p.13

I.1 Les particules étudiées

I.2 L'hydrodynamique à faible nombre de Reynolds

I.2.1 L'équation de Stokes

I.2.2 Méthode de la fonction de courant

I.2.3 Méthode des singularités et développements multipolaires

II. COMPORTEMENT D'UNE PARTICULE ALLONGEE EN ECOULEMENT DE STOKES p.22

II.1 Equations d'orientation d'une particule isolée

II.1.1 Hypothèses

II.1.2 Approche de Jeffery

II.1.3 Les équations d'orientation

II.2 Perturbation de vitesse apportée par une particule allongée à l'écoulement

II.2.1 La théorie du corps mince

II.2.2 Application à un champ de vitesse uniforme

II.2.3 Application à un champ de vitesse linéaire

III VISCOSITE D'UNE SUSPENSION DE PARTICULES ANISOTROPES p.34

III.1 Généralités

III.1.1 Différents régimes de concentration d'une suspension de particules anisotropes

III.1.2 Suspensions de particules anisotropes et viscosité

III.1.3 Intérêt de la sollicitation élongationnelle

III.2 Calcul de Batchelor pour la viscosité d'une suspension de particules anisotropes en écoulement élongationnel

III.2.1 Calcul général de la contrainte dans une suspension de particules non browniennes

III.2.2 Cas particulier d'une particule allongée dans un écoulement élongationnel

III.2.3 Cas d'une suspension diluée

III.2.4 Cas d'une suspension semi-diluée

III.2.5 Conclusion

III.3 Lois de comportement

III.3.1 Forme générale

III.3.2 Application à une suspension en écoulement de cisaillement simple

III.3.3 Corrections à la loi de comportement : le calcul de Shaqfeh et
Fredrickson

IV. MISE EN OEUVRE PRATIQUE D'ÉCOULEMENTS A COMPOSANTES
ELONGATIONNELLES

p.53

IV.1 Différents types d'écoulements élongationnels

IV.2 Réalisation pratique

IV.2.1 Écoulements à points de stagnation

IV.2.2 Dispositifs de filage

IV.2.3 Écoulements dans des conduites de section variable

IV.2.4 Conclusion

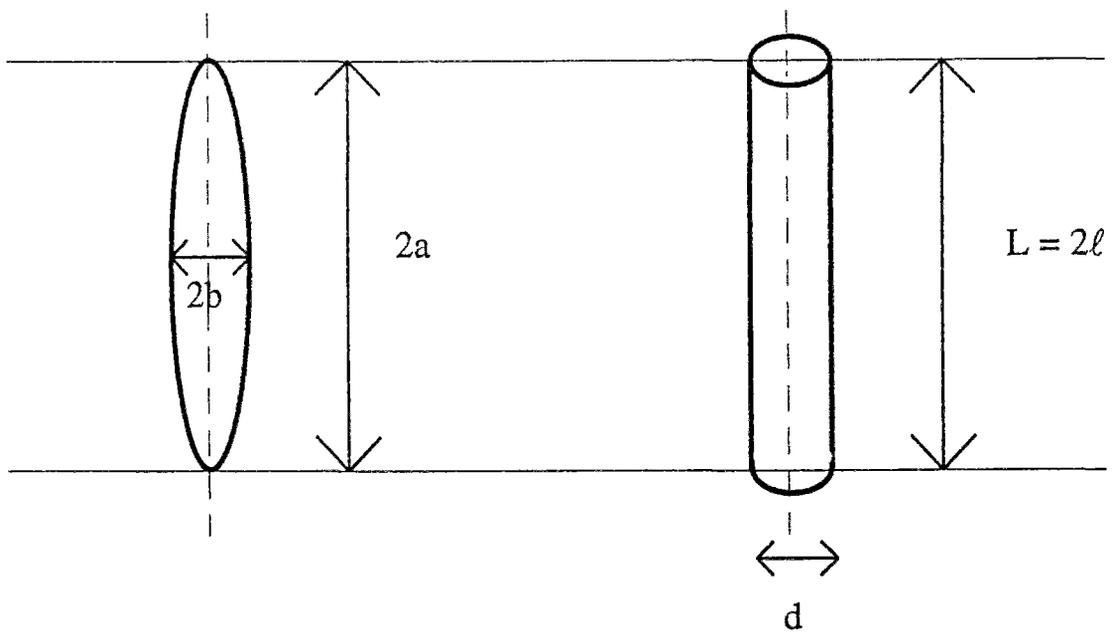


Figure 1.1

Deux exemples de particules allongées : ellipsoïde de révolution et fibre cylindrique.

I. POSITION DU PROBLEME

Ce travail concerne l'étude de particules anisotropes dans des écoulements à faible nombre de Reynolds, encore appelés écoulements de Stokes. Nous allons dans ce paragraphe préciser ces notions, et présenter les outils théoriques qui permettent de les aborder et qui nous seront utiles dans toute la suite.

I.1 Les particules étudiées

Nous nous intéressons à des particules anisotropes rigides, dont la longueur est très grande devant les dimensions transversales, et qui sont de plus axisymétriques. Le terme anisotrope s'applique donc ici à la géométrie allongée de la particule (et ne concerne pas une anisotropie éventuelle du matériau qui la constitue). Deux exemples de particules allongées sont représentés sur la figure 1.1 : d'une part un ellipsoïde de révolution dont le grand-axe est désigné par $2a$, le petit-axe par $2b$, avec $a \gg b$, d'autre part un cylindre de longueur $L = 2\ell$ et de diamètre d , que nous appellerons "fibre". La géométrie ellipsoïdale présente l'intérêt de permettre des traitements théoriques. Nous verrons que les résultats obtenus peuvent être généralisés à la géométrie cylindrique, pourvu que le rapport de forme des particules, noté r , et défini indifféremment comme $r = L/d$ ou $r = a/b$, soit très grand.

Les forces hydrodynamiques exercées à la surface de la particule par le fluide en mouvement induisent un mouvement de la particule dans le fluide. Ce mouvement comporte non seulement une translation, mais aussi une rotation autour des axes de la particule, conduisant ou non à une orientation privilégiée de la particule dans l'écoulement. L'existence de cette orientation est une première propriété spécifique des particules anisotropes.

La présence de la particule dans l'écoulement apporte par ailleurs une perturbation à l'écoulement. De manière tout à fait générale en rhéologie des suspensions, la connaissance de cette perturbation, ou, ce qui est équivalent, du champ de vitesse autour de la particule, est importante à deux points de vue. La connaissance du champ de vitesse permet d'abord de remonter à la contrainte exercée par la particule sur le fluide, qui est à l'origine de l'augmentation de viscosité dans la suspension due à la présence des particules. Par ailleurs, la perturbation apportée par une particule à l'écoulement est à l'origine des interactions entre particules transmises par le fluide, appelées interactions hydrodynamiques ; dans ce problème, c'est la portée de la perturbation (son étendue spatiale) qui est déterminante. Dans le cas particulier des *particules allongées*, le calcul du champ de vitesse autour d'une particule est un

problème compliqué de l'hydrodynamique à petit nombre de Reynolds, qui a été abordé à l'aide de méthodes très différentes. La solution dépend non seulement de l'écoulement considéré, mais aussi de l'orientation de la particule dans cet écoulement.

Dans le paragraphe II, nous nous intéresserons plus particulièrement à ces deux aspects: orientation d'une particule allongée dans un écoulement et champ de vitesse dans son voisinage. Auparavant, nous allons rappeler quelques méthodes générales utilisées en hydrodynamique de Stokes qui nous seront utiles dans la suite de ce travail.

I.2 L'hydrodynamique à faible nombre de Reynolds

I.2.1 L'équation de Stokes.

En hydrodynamique, le nombre de Reynolds traduit l'importance relative des effets de viscosité et des effets d'inertie :

$$Re = \frac{\rho_f VD}{\mu}$$

où ρ_f est la masse volumique du fluide, μ sa viscosité, V et D sont une vitesse et une longueur caractéristiques de l'écoulement considéré. Les écoulements aux faibles nombres de Reynolds sont caractérisés par la prédominance des effets dus à la viscosité devant ceux dus à l'inertie. L'équation dite de Stokes qui décrit la conservation de la quantité de mouvement de ces écoulements est alors *linéaire*, puisque le terme convectif non-linéaire peut être négligé. En régime permanent, elle se présente sous la forme :

$$\mu \Delta \vec{V} = \nabla P \tag{1.1}$$

où \vec{V} est le champ de vitesse dans l'écoulement, P le champ de pression, Δ et ∇ désignent respectivement les opérateurs laplacien et gradient. En utilisant la relation d'incompressibilité, nous trouvons que le champ de pression qui satisfait l'équation de Stokes est un champ Laplacien tel que :

$$\Delta P = 0 \tag{1.2}$$

La linéarité de l'équation de Stokes confère aux écoulements à faible nombre de Reynolds un certain nombre de propriétés remarquables : unicité des solutions pour des conditions aux

limites données, réversibilité, additivité des solutions compatibles avec les conditions aux limites, dissipation d'énergie minimale.

I.2.2 Méthode de la fonction de courant.

Historiquement, la première méthode rencontrée consiste à résoudre les équations (1.1) et (1.2) avec les conditions aux limites appropriées, pour trouver les champs de vitesse et de pression dans les deux classes de situations suivantes :

- l'écoulement s'effectue à l'intérieur de parois solides de forme donnée, et les conditions aux limites sont données sur ces parois.
- l'écoulement s'effectue autour d'une particule de forme donnée, les conditions aux limites sont données à la surface de la particule et infiniment loin de celle-ci.

Au point de vue analytique, les calculs sont facilités lorsque les écoulements présentent des propriétés de symétrie particulières. Lorsque l'écoulement est plan ou axisymétrique, la réduction du problème à deux variables d'espace autorise l'utilisation de la fonction de courant Ψ , qui permet de se ramener à l'étude d'un scalaire. Cette méthode de la fonction de courant a été utilisée pour calculer le champ de vitesse autour de particules de géométries diverses : sphères, ellipsoïdes [1,2]. Pour un écoulement plan, par exemple, Ψ est reliée aux composantes V_x et V_y de la vitesse par :

$$V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad V_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.3)$$

L'équation de Stokes prend alors la forme biharmonique:

$$\Delta^2 \Psi = 0 \quad (1.4)$$

Pour un écoulement axisymétrique, à symétrie de révolution autour de l'axe z , Ψ est reliée aux composantes V_ρ et V_z de la vitesse suivant les axes de coordonnées ρ et z par :

$$V_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad V_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \quad (1.5)$$

L'axe Oz est l'axe de symétrie, ρ est la coordonnée radiale dans la direction orthogonale à Oz . L'équation de Stokes s'écrit dans ce système de coordonnées :

$$E^4 \Psi = 0 \quad (1.6)$$

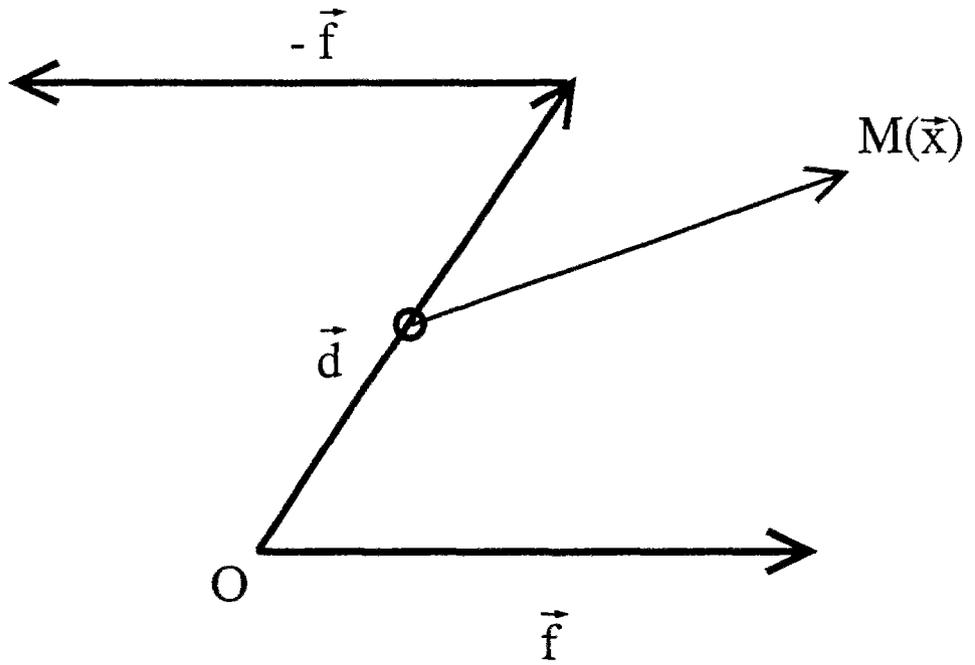
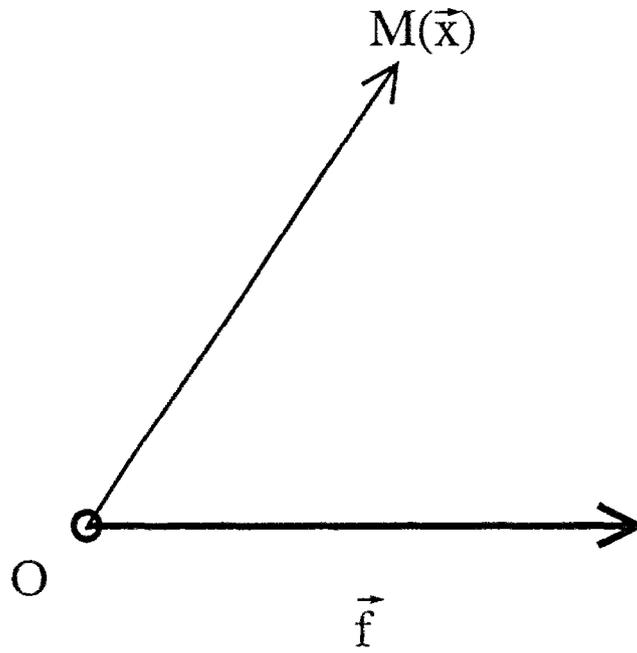


Figure 1.2
Point-force, doublet de Stokes.

où E^2 est l'opérateur $E^2 = \Delta - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$.

Dans la suite, notamment au chapitre II, nous serons amenés à caractériser de tels écoulements axisymétriques ou plans et nous utiliserons ces équations pour calculer le champ de vitesse et de pression.

1.2.3 Méthode des singularités et développements multipolaires.

Dans le cas où l'on cherche à connaître le champ de vitesse autour d'une particule, ou encore, ce qui revient au même, la perturbation que la particule apporte à l'écoulement moyen, la méthode des singularités est particulièrement adaptée. Elle consiste à remplacer la particule par un ensemble de singularités, qui sont des *perturbations* élémentaires apportées à l'écoulement sous la forme de forces ponctuelles, de doublets de forces ou encore de combinaisons de forces plus compliquées... que l'on inclut dans l'équation de Stokes. En ce qui concerne les particules allongées, cette méthode a été largement développée, depuis l'utilisation de simples points-forces [3] jusqu'au recours à des singularités d'ordre supérieur [4-6].

a) Le point-force

La singularité la plus simple que l'on puisse considérer est une force ponctuelle \vec{f} , appelée "point-force" ou Stokeslet, et appliquée en un point O que l'on choisit comme origine des coordonnées (figure 1.2). La vitesse \vec{v} qui en résulte au point M de coordonnée \vec{x} est obtenue en résolvant l'équation de Stokes :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \mu \Delta \vec{v} + \delta(\vec{x}) \vec{f} = \nabla P \end{cases}$$

Cette vitesse \vec{v} s'obtient en prenant la transformée de Fourier de l'équation de Stokes. Elle s'écrit sous la forme suivante [7] :

$$\vec{v} = \underline{\underline{I}} \cdot \vec{f}$$

Le tenseur $\underline{\underline{I}}$ est appelé le tenseur d'Oseen et a pour composantes :

$$I_{ij} = \frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{\delta_{ij}}{|\vec{x}|} + \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^3} \right)$$

où δ_{ij} est la composante (i,j) du tenseur identité. Le tenseur d'Oseen décrit la façon dont la perturbation créée par le point force se transmet dans le fluide. Ainsi, le champ de vitesse créé par un point-force décroît avec ρ , la distance au point-force, comme $v \sim f/\mu\rho$.

b) Le doublet de Stokes

Le multipôle d'ordre immédiatement supérieur au point-force est celui que l'on construit à l'aide d'un couple de points-forces opposés, séparés d'une distance \vec{d} l'un de l'autre (figure 1.2) ; il est appelé "doublet". Le champ de vitesse \vec{v} créé par ce doublet est la somme des vitesses dues à chaque point-force. En effectuant un développement de Taylor, pour \vec{d} petit, cette vitesse s'écrit sous la forme du produit contracté de deux tenseurs :

$$\vec{v} = -(\vec{d}\vec{f}) : \nabla \underline{\underline{I}} \quad (1.7)$$

où ∇ désigne l'opérateur gradient, et $\underline{\underline{I}}$ le tenseur d'Oseen, de sorte que $\nabla \underline{\underline{I}}$ est un tenseur d'ordre 3. Par ailleurs, $(\vec{d}\vec{f})$ est un tenseur d'ordre 2 obtenu en effectuant le produit tensoriel des vecteurs \vec{d} et \vec{f} ; le produit contracté est donc bien un vecteur. Ce champ de vitesse (1.7) peut se décomposer en une partie symétrique et une partie antisymétrique vis à vis d'une permutation de \vec{f} et \vec{d} . La partie symétrique est le champ de vitesse créé par un tenseur d'ordre 2, appelé le stresslet, ayant pour expression :

$$\underline{\underline{S}} = \frac{1}{2}(\vec{d}\vec{f} + \vec{f}\vec{d})$$

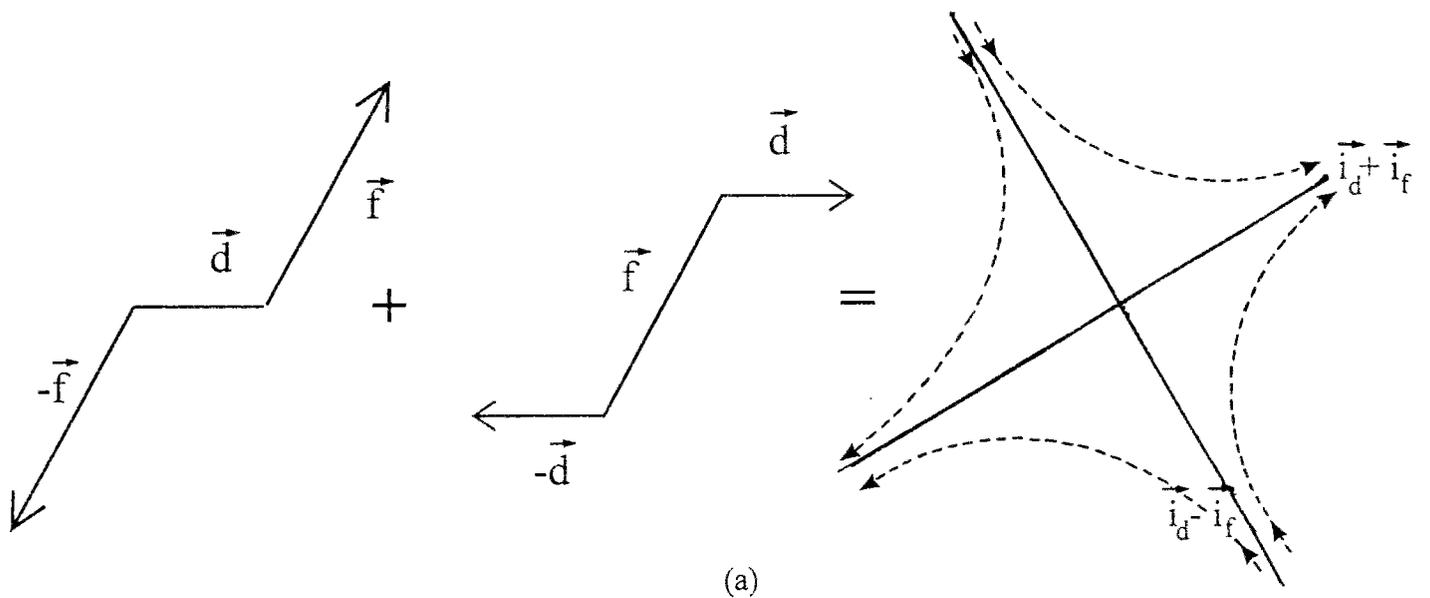
La partie antisymétrique se ramène au champ de vitesse créé par :

$$\underline{\underline{C}} = \frac{1}{2}(\vec{d}\vec{f} - \vec{f}\vec{d})$$

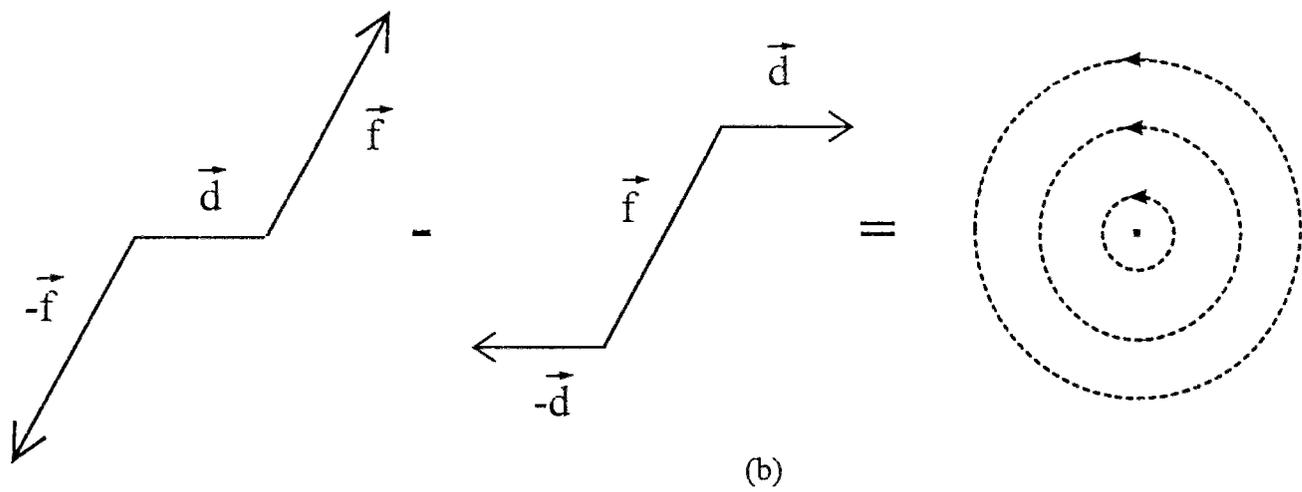
A ce tenseur antisymétrique, appelé "rotlet" ou "couplet", est associé un vecteur \vec{C} appelé couple. Le vecteur \vec{C} s'exprime à partir du tenseur $\underline{\underline{C}}$ par la formule :

$$C_i = \varepsilon_{ijk} C_{jk}$$

au moyen d'un tenseur d'ordre 3 complètement antisymétrique (tenseur de Levi-Civita). La figure 1.3 illustre schématiquement, à deux dimensions, la signification de cette décomposition du champ de vitesse : la partie symétrique correspond à une elongation dans les directions $\vec{i}_d + \vec{i}_f$ et $\vec{i}_d - \vec{i}_f$, les vecteurs \vec{i}_d et \vec{i}_f étant unitaires et colinéaires à \vec{d} et \vec{f} , tandis que la partie antisymétrique correspond à une rotation autour du centre du dipôle. Nous ne donnons pas ici les expressions complètes des champs de vitesse créés par le stresslet et le



(a)



(b)

Figure 1.3

Champ de vitesse dû à un stresslet (figure a) et à un couplet (figure b).

couplet [5]. En ordre de grandeur, ils varient respectivement avec la distance ρ comme : $v \sim S/\mu\rho^2$ et $v \sim C/\mu\rho^2$.

Les singularités introduites ici présentent de fortes analogies avec les singularités utilisées en électrostatique. Ceci provient de la parenté de forme de l'équation de Stokes (vectorielle) et de l'équation de Laplace (scalaire) qui utilisent toutes deux l'opérateur laplacien. Une correspondance peut ainsi être établie entre les grandeurs qui interviennent en électrostatique et celles qui interviennent en hydrodynamique, en remarquant que ces dernières sont des tenseurs dont l'ordre est immédiatement supérieur à celui qui leur correspond en électrostatique. La perturbation de vitesse joue le rôle du potentiel en électrostatique. Le point-force joue le rôle de la charge, le doublet celui du dipôle électrostatique.

c) Développement multipolaire

L'introduction des singularités débouche naturellement sur la méthode des développements multipolaires ; en effet, le champ de vitesse au voisinage d'une particule peut s'écrire comme la superposition de l'écoulement de base non perturbé, noté \vec{V} , et d'une perturbation \vec{v} qui résulte de l'action de points-forces répartis sur la surface de la particule (figure 1.4). Ces point-forces s'écrivent $\vec{f} = -\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}$ ($\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}$ est la force par unité de surface exercée par le fluide sur la particule) [7] :

$$\vec{v}(\vec{x}) = - \int_A \underline{\underline{I}}(\vec{x} - \vec{x}') \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) dA \quad (1.8)$$

Cette méthode est équivalente aux développements utilisés en électrostatique. A l'infini, la perturbation est nulle, et $\vec{v} = \vec{V}$. Très loin de la particule, on ne "distingue" pas les point-forces individuels répartis à sa surface, et la particule est assimilée à un seul point-force dont la valeur est la *force totale* exercée par la particule sur le fluide. Un peu plus près de la particule, celle-ci apparaît comme un doublet qui se décompose en une partie symétrique, le *stresslet* et une partie antisymétrique, le *couplet*. Ceci peut se formaliser de manière plus rigoureuse en effectuant un développement de Taylor du terme $\underline{\underline{I}}(\vec{x} - \vec{x}')$ de l'intégrale (1.8). Finalement, on trouve :

$$\vec{v} = -\underline{\underline{I}} \cdot \vec{F} + (\underline{\underline{S}} \cdot \nabla) \cdot \underline{\underline{I}} + \frac{1}{2} (\vec{C} \wedge \nabla) \cdot \underline{\underline{I}} + O\left(\frac{1}{\rho^3}\right)$$

\vec{F} , \vec{C} et $\underline{\underline{S}}$ ont une signification physique liée à l'action du fluide sur la particule ; en effet, ils représentent respectivement la force totale, le couple, et le stresslet exercés par le fluide sur la particule. Nous donnons ici les expressions de la force totale, du "couplet" associé au couple, et du stresslet :

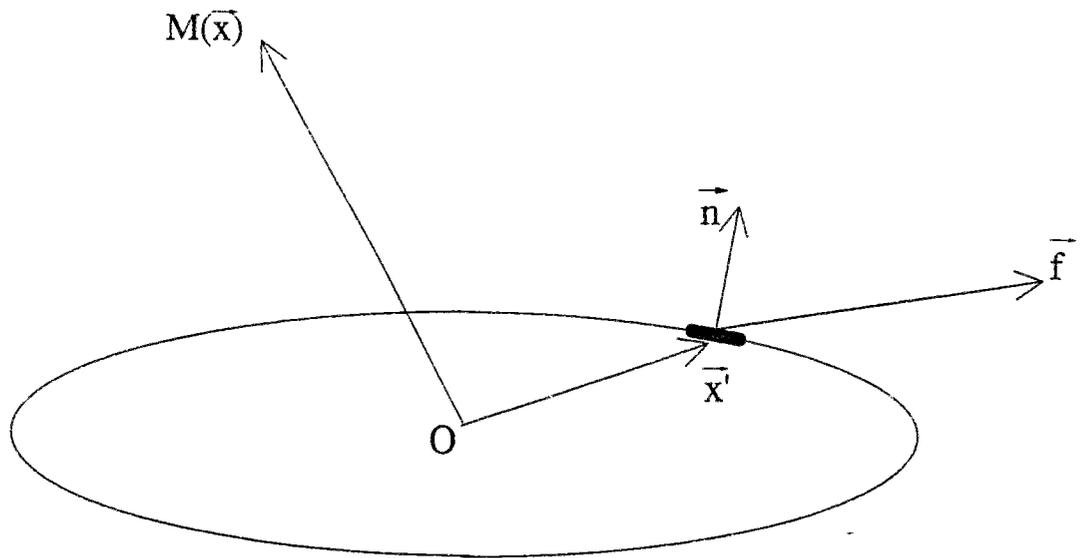


Figure 1.4

Développement multipolaire du champ de vitesse autour d'une particule.

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F}} &= \int_A (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) dA \\ \underline{\underline{C}} &= \frac{1}{2} \int_A [\underline{\underline{x}}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) - (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}})\underline{\underline{x}}] dA \\ \underline{\underline{S}} &= \frac{1}{2} \int_A [\underline{\underline{x}}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) + (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}})\underline{\underline{x}}] dA\end{aligned}$$

Nous verrons plus loin que le stresslet joue un rôle essentiel dans la prédiction de la viscosité d'une suspension de particules. En effet, en l'absence de forces extérieures et d'effets d'inertie, la force totale et le couple sont nuls, et le stresslet s'écrit :

$$\underline{\underline{S}} = \int_A (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}})\underline{\underline{x}} dA$$

qui correspond à la contribution d'une particule à la contrainte totale dans la suspension.

II. COMPORTEMENT D'UNE PARTICULE ALLONGEE EN ECOULEMENT DE STOKES

II.1 Equations d'orientation d'une particule isolée

Dans ce paragraphe, nous présentons et discutons les équations d'orientation d'une particule isolée, équations qui nous seront utiles au chapitre 3 dans le cas de l'écoulement à composantes élongationnelles que nous étudions. Pour caractériser l'orientation d'une particule dans l'écoulement, nous utilisons le vecteur directeur \bar{p} , vecteur unitaire parallèle à l'axe de la particule (figure 1.5). Nous appellerons équations d'orientation les équations qui décrivent l'évolution du vecteur directeur \bar{p} au cours du temps.

II.1.1 Hypothèses

L'hypothèse essentielle dans la suite consiste à supposer que l'échelle de longueur caractéristique de l'écoulement (échelle macroscopique) est très supérieure à l'échelle caractéristique de la particule (échelle microscopique). Autrement dit, on suppose que le mouvement du fluide varie dans l'espace sur une échelle grande devant la taille de la particule. Ceci permet de considérer, à une échelle intermédiaire qui reste très supérieure à celle de la particule, l'écoulement environnant comme la somme d'un écoulement uniforme et d'un

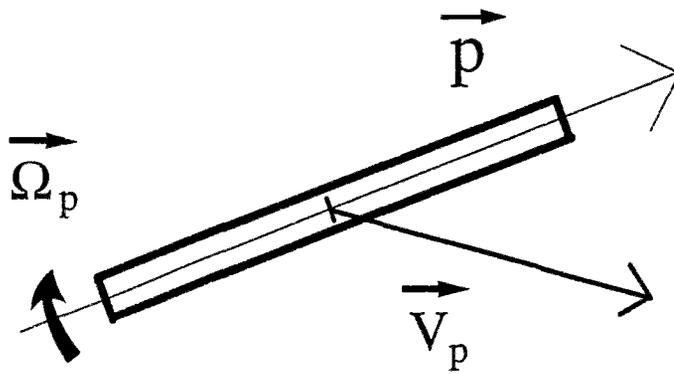


Figure 1.5

Vecteur directeur \vec{p} de la particule anisotrope, vitesse de translation \vec{V}_p et de rotation $\vec{\Omega}_p$.

écoulement linéaire, à gradients de vitesse constants. Le champ de vitesse du fluide non perturbé s'écrit en particulier, dans un repère fixe :

$$\vec{V}(\vec{x}) = \vec{V}_0 + \vec{\Omega} \wedge \vec{x} + \underline{\underline{E}} \cdot \vec{x}$$

où \vec{V}_0 est le vecteur translation d'ensemble, $\vec{\Omega}$ le vecteur de rotation angulaire (vorticité) et $\underline{\underline{E}}$ le tenseur des taux de déformation, tel que $\underline{\underline{E}} = (\nabla\vec{V} + {}^t\nabla\vec{V})/2$. Les grandeurs \vec{V}_0 , $\vec{\Omega}$, $\underline{\underline{E}}$ sont constantes dans tout l'écoulement. Par ailleurs le mouvement de la particule dans ce même repère fixe est décrit par le vecteur translation \vec{V}_p et le vecteur rotation $\vec{\Omega}_p$ (figure 1.5).

II.1.2 Approche de Jeffery

Les équations d'orientation ont été explicitées et exploitées pour la première fois par Jeffery [8] puis généralisées par Bretherton [9]. La démarche de Jeffery consiste à résoudre l'équation de Stokes au voisinage de l'ellipsoïde, dans le repère mobile lié à celui-ci, en respectant les conditions aux limites à l'infini (fluide non-perturbé) et à la surface de la particule. Jeffery trouve les solutions de l'équation de Laplace $\Delta p = 0$ en utilisant des harmoniques ellipsoïdales, en déduit le champ de vitesse autour de la particule, la force et le couple subis par la particule, et enfin les équations d'orientation. Les développements mathématiques de cette méthode ont tendance à masquer un peu l'interprétation, aussi nous allons présenter une démarche plus récente [10], basée sur l'utilisation de la matrice de résistance, qui permet de parvenir au même résultat sous une forme plus physique.

II.1.3 Les équations d'orientation

a) Linéarité de la relation entre la force et la vitesse

L'équation de Stokes étant linéaire, il est possible de montrer que la force \vec{F} , le couple \vec{C} et le stresslet $\underline{\underline{S}}$ qui s'exercent sur la particule d'une part, et les différentes quantités qui caractérisent le mouvement relatif de la particule et du fluide non perturbé d'autre part, sont reliés de façon linéaire par l'intermédiaire de la matrice de résistance [10] :

$$\begin{bmatrix} \vec{F} \\ \vec{C} \\ \underline{\underline{S}} \end{bmatrix} = \mu[\mathbf{R}] \begin{bmatrix} \vec{V}_0 - \vec{V}_p \\ \vec{\Omega} - \vec{\Omega}_p \\ \underline{\underline{E}} \end{bmatrix}$$

où μ est la viscosité du fluide,

$\vec{V}_0 - \vec{V}_p$ est la différence entre la vitesse de translation d'ensemble du fluide et la vitesse de la particule,

$\bar{\Omega} - \bar{\Omega}_p$ est la différence entre le vecteur rotation du fluide et celui de la particule, $\underline{\underline{E}}$ est le tenseur de déformation.

La matrice de résistance [R] ne dépend que de la géométrie de la particule. Elle est composée de sous-matrices ou tenseurs, d'ordre 2, 3, ou 4. Ces tenseurs possèdent des propriétés de symétrie très générales indépendantes de la forme de la particule. En particulier, ce sont des tenseurs symétriques. Pour une particule possédant trois plans de symétrie perpendiculaires comme l'ellipsoïde de révolution qui nous intéresse ici, certaines des sous-matrices *non-diagonales* de la matrice de résistance sont nulles [10-12]. La conséquence est le découplage complet entre les mouvements de translation et de rotation. Pour l'équation du couple \bar{C} on a en particulier :

$$\bar{C} = \mu \underline{\underline{A}} \cdot (\bar{\Omega} - \bar{\Omega}_p) + \mu \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{E}}$$

où $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont des tenseurs d'ordre 2 et 3 respectivement qui font intervenir le vecteur directeur \bar{p} de la particule. Leurs expressions exactes ont été calculées par les différentes techniques présentées dans le paragraphe précédent et sont bien connues [6,8,10].

b) Equation d'évolution du directeur

En l'absence de champ extérieur (gravité, champ électromagnétique ...) et d'effets d'inertie, aucune force et aucun couple ne s'exercent sur la particule. La condition $\bar{F} = \bar{0}$ entraîne que dans un champ de vitesse linéaire, la particule se déplace avec une vitesse de translation \bar{V}_p qui est celle de l'écoulement de base en son centre de gravité. La condition $\bar{C} = 0$ permet de calculer le vecteur rotation $\bar{\Omega}_p$ de la particule à partir de l'équation précédente:

$$\bar{\Omega}_p = \bar{\Omega} + \bar{r}(\bar{p} \wedge (\underline{\underline{E}} \cdot \bar{p}))$$

Ce résultat a été donné pour la première fois sous cette forme par Leal et Hinch [13]. Pour un ellipsoïde de révolution de rapport de forme r défini au I.1, le coefficient \bar{r} , qui est obtenu à partir des composantes de la matrice de résistance, vaut :

$$\bar{r} = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$$

Pour une particule allongée de forme non ellipsoïdale, cette expression s'applique à condition de choisir pour r un rapport de forme équivalent [14]. Lorsque r est grand, le coefficient \bar{r} est

toujours proche de 1. L'équation d'évolution du vecteur \vec{p} au cours du temps s'écrit finalement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{p} + \bar{r} [\underline{\underline{E}} \cdot \vec{p} - (\vec{p} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \vec{p}) \vec{p}] \quad (1.9)$$

Ce résultat est l'équation fondamentale sur laquelle repose l'étude détaillée au chapitre 3. Elle s'interprète physiquement de la manière suivante (figure 1.6). Le terme $\vec{\Omega} \wedge \vec{p}$ indique que le mouvement de rotation du vecteur directeur de la particule comporte une composante qui coïncide avec la vitesse angulaire du fluide, $\vec{\Omega}$. Le terme $\underline{\underline{E}} \cdot \vec{p} - (\vec{p} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \vec{p}) \vec{p}$ est une contribution supplémentaire provenant du champ de déformation de l'écoulement, dont l'action consiste à aligner le vecteur \vec{p} suivant la direction principale de ce champ de déformation. Le terme $\underline{\underline{E}} \cdot \vec{p}$ traduit à la fois la rotation du directeur dans le champ de déformation $\underline{\underline{E}}$, et sa variation de longueur. Cette variation de longueur est égale à $(\vec{p} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \vec{p}) \vec{p}$, qu'il est nécessaire de retrancher. Notons que ce terme d'alignement est nul pour une particule isotrope ($r=1$ et $\bar{r}=0$), mais augmente avec l'anisotropie de la particule (r infini et $\bar{r}=1$).

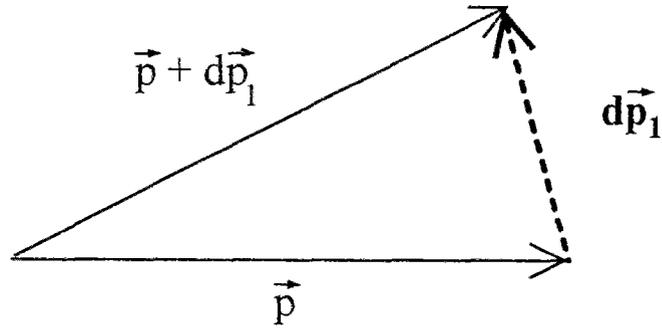
c) Conséquences physiques

L'équation (1.9) sera utilisée dans le chapitre 3 de ce travail. Nous établirons alors de façon détaillée les équations d'orientation d'une fibre dans divers écoulements. Signalons cependant dès-à-présent deux résultats qui sont d'une grande importance pour la suite.

En écoulement de *cisaillement* simple, une particule allongée n'a pas de position d'équilibre. Elle est animée d'un mouvement de rotation périodique, tout en passant la majorité du temps dans la direction des lignes de courant. Le comportement d'une particule anisotrope dans un écoulement de cisaillement simple a fait l'objet de nombreux travaux expérimentaux [14-16].

En écoulement *élongationnel* pur, caractérisé par un tenseur de déformation diagonal, une particule acquiert une position d'équilibre stable, qui dépend du signe de l'élongation. Si l'élongation est positive (extension) la particule s'oriente parallèlement à l'axe d'élongation, qui est aussi la direction des lignes de courant. Dans le cas contraire (compression), elle s'oriente perpendiculairement à l'axe d'élongation. Comparativement au cas du cisaillement, le comportement d'une particule anisotrope en écoulement élongationnel a fait l'objet de peu d'études théoriques et expérimentales [17,18].

rotation avec le fluide
 $d\vec{p}_1 = (\vec{\Omega} \wedge \vec{p})dt$



action de la déformation
 $d\vec{p}_2 = (\underline{\underline{E}} \cdot \vec{p} - \vec{p}(\vec{p} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \vec{p}))dt$

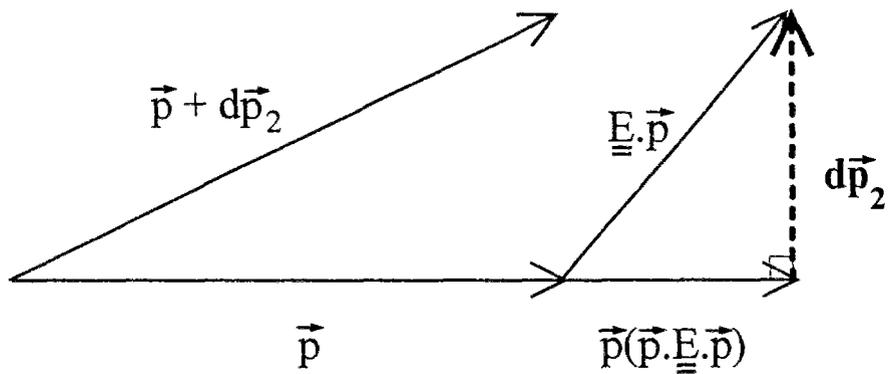


Figure 1.6

Equation d'évolution du vecteur \vec{p} : signification physique des différents termes.

II.2 Perturbation de vitesse apportée par une particule allongée à l'écoulement

Le problème de la perturbation créée par une particule dans un écoulement est d'une grande importance. En effet, nous avons vu au paragraphe I que sa connaissance est indispensable pour calculer la viscosité d'une suspension, et les interactions hydrodynamiques entre particules. L'étude du champ de vitesse autour d'une particule allongée a été abordée à partir des différentes approches citées plus haut : résolution de l'équation de Stokes au voisinage de la particule (problème intérieur) et à l'infini (problème extérieur) avec raccordement asymptotique des deux solutions [19-21], méthode des développements multipolaires [7], méthode des singularités [3,5,6].

C'est cette dernière approche que nous allons utiliser en suivant la démarche de Batchelor pour une particule dite "corps mince". Cette méthode fournit un développement de la perturbation au premier ordre seulement, mais nous verrons que cette précision est suffisante pour les applications qui vont nous intéresser dans la suite.

Après avoir présenté la méthode de façon générale, nous l'appliquerons à divers types d'écoulement. Le cas de l'écoulement uniforme permettra de traiter le problème de la sédimentation ; celui des écoulements linéaires, comme l'élongation, nous sera utile pour le calcul de la viscosité élongationnelle d'une suspension au paragraphe III.

II.2.1 La théorie du corps mince

a) Champ de vitesse

Considérons une particule de forme cylindrique, dont la longueur $L = 2\ell$ est très grande devant son diamètre d . L'idée de base consiste à considérer la perturbation apportée par ce "corps mince" à l'écoulement comme étant la même qu'une distribution de point-forces sur une ligne de longueur L , et dont l'intensité est judicieusement choisie. La perturbation de vitesse \bar{v} qui en résulte au point M est alors l'intégrale des vitesses dues à chaque point-force (voir paragraphe I.2.3). Dans le cas où la particule est alignée suivant l'axe x_1 des coordonnées (figure 1.7), la vitesse au point M s'écrit *dans le repère de la particule* :

$$v_i(x_1, \rho) = \frac{1}{8\pi\mu} \int_{-\ell}^{\ell} \left[\frac{f_i(x_1')}{(\rho^2 + (x_1 - x_1')^2)^{1/2}} + \frac{f_j(x_1')(x_1' - x_i)(x_1' - x_j)}{(\rho^2 + (x_1 - x_1')^2)^{3/2}} \right] dx' \quad (1.10)$$

où $v_i(x_1, \rho)$ désigne la perturbation de vitesse au point M repéré par ses coordonnées cylindriques (x_1, ρ) , $f_i(x_1')$ désigne la composante i du point-force placé au point d'abscisse x_1' , et ρ est tel que $\rho^2 = x_2^2 + x_3^2$. Dans la suite, nous omettrons les indices sur l'axe 1 des coordonnées et nous noterons $x_1 = x$ et $x_1' = x'$.

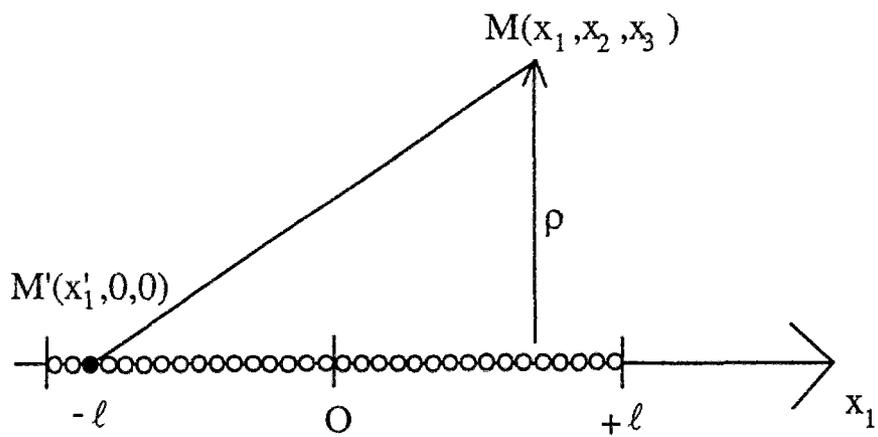


Figure 1.7

Représentation d'une particule anisotrope par une ligne de point-forces.

b) Condition de non-glissement à la surface de la particule

L'étape suivante du raisonnement consiste à spécifier les valeurs des points-forces $f_i(x')$. Ces derniers sont fonction uniquement du type d'écoulement dans lequel est placée la particule, c'est-à-dire du champ de vitesse non perturbé, que nous notons comme précédemment \vec{V} . En effet, il faut assurer la condition de non-glissement à la surface de la particule, qui s'écrit dans le repère lié à la particule :

$$\vec{v} + \vec{V} = \vec{0} \quad \text{à la surface de la particule.}$$

La détermination des points-forces comporte deux difficultés. Tout d'abord, la condition de non-glissement ne peut être assurée en général si l'on utilise une ligne de point-forces : il est nécessaire d'introduire des singularités d'ordre supérieur (doublets, quadrupôles, etc...) [3,5]. Cependant, si l'on assure la condition de non-glissement non pas strictement sur le segment compris entre $-\ell$ et $+\ell$, mais partout au voisinage de ce segment, on peut déterminer la distribution de point-forces avec une erreur qui est de l'ordre de $1/\text{Log}(2r)$, où $r = L/d$ est le rapport de forme de la particule. Comme r est très grand devant 1, l'erreur commise est petite. La deuxième difficulté réside dans la résolution analytique de l'équation (1.10) associée à la condition de non-glissement : cette équation intégrale ne possède pas de solution générale. Une façon de procéder consiste à chercher une forme asymptotique de (1.10) dans la limite où la distance ρ du point M au corps mince est très petite devant la longueur ℓ . En ne retenant que le terme dominant (en $\text{Log}(2r)$), il est possible d'assurer la condition de non-glissement. Le calcul est technique et nous renvoyons pour plus de détails à la référence [3].

II.2.2 Application à un champ de vitesse uniforme

Considérons une particule dans un champ de vitesse uniforme \vec{V} de composantes (V_1, V_2, V_3) dans le repère de la particule. L'axe 1 coïncide avec le grand-axe de la particule. Nous allons chercher la distribution de point-forces représentant la particule cylindrique dans cet écoulement sous la forme d'une distribution uniforme \vec{f} de composantes (f_1, f_2, f_3) . La perturbation de vitesse \vec{v} au voisinage de l'axe (dans la limite $1/\text{Log}(2r) \rightarrow 0$) s'écrit [3] :

$$v_i(x) = \frac{\text{Log}(2r)}{4\pi\mu} (f_i + \delta_{i1}f_1 + O(1/\text{Log}(2r)))$$

Cette perturbation est elle-aussi uniforme et correspond à une translation d'ensemble. Pour assurer la condition de non-glissement il suffit de choisir :

$$f_1 = -\frac{2\pi\mu}{\text{Log}(2r)} V_1 \quad \text{et} \quad f_i = -\frac{4\pi\mu}{\text{Log}(2r)} V_i \quad \text{pour } i = 2,3.$$

La force totale \vec{F} de composantes (F_1, F_2, F_3) exercée par le fluide sur la particule s'obtient par l'intégrale :

$$F_i = \int_{-\ell}^{+\ell} f_i(x') dx'$$

$$\text{ce qui donne : } F_1 = -\frac{4\pi\mu\ell}{\text{Log}(2r)} V_1 \quad \text{et} \quad F_i = -\frac{8\pi\mu\ell}{\text{Log}(2r)} V_i \quad \text{pour } i = 2,3.$$

Nous retrouvons que la résistance au mouvement d'une particule allongée en écoulement uniforme est deux fois plus faible dans la direction parallèle à la longueur de la particule que perpendiculairement à celle-ci. Ceci est un résultat bien connu de l'hydrodynamique des particules allongées [11].

Ces résultats permettent de traiter le cas d'une particule anisotrope qui sédimente dans un fluide au repos à l'infini. La vitesse de sédimentation de cette particule est le vecteur \vec{U} de composantes (U_1, U_2, U_3) dans le *repère fixe du laboratoire* (figure 1.8). Nous avons donc simplement $\vec{V} = -\vec{U}$. Le bilan des forces qui s'exercent sur la particule fournit :

$$\begin{aligned} F_1 &= \Delta\rho g\pi \frac{d^2}{2} \ell \cos\theta & \text{et } F_3 &= 0 \\ F_2 &= \Delta\rho g\pi \frac{d^2}{2} \ell \sin\theta \end{aligned}$$

où θ désigne l'inclinaison de la particule par rapport à la verticale et $\Delta\rho$ l'écart de densité entre la particule et le fluide. Nous en déduisons les composantes de la vitesse de sédimentation :

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\Delta\rho g d^2}{8\mu} \text{Log}(2r) \cos\theta & \text{et } U_3 &= 0 \\ U_2 &= \frac{\Delta\rho g d^2}{16\mu} \text{Log}(2r) \sin\theta \end{aligned}$$

Nous trouvons que la particule sédimente obliquement dans un plan vertical ; la vitesse de sédimentation \vec{U} fait un angle α avec l'axe de la particule (figure 1.8) tel que :

$$\tan \alpha = \frac{U_2}{U_1}$$

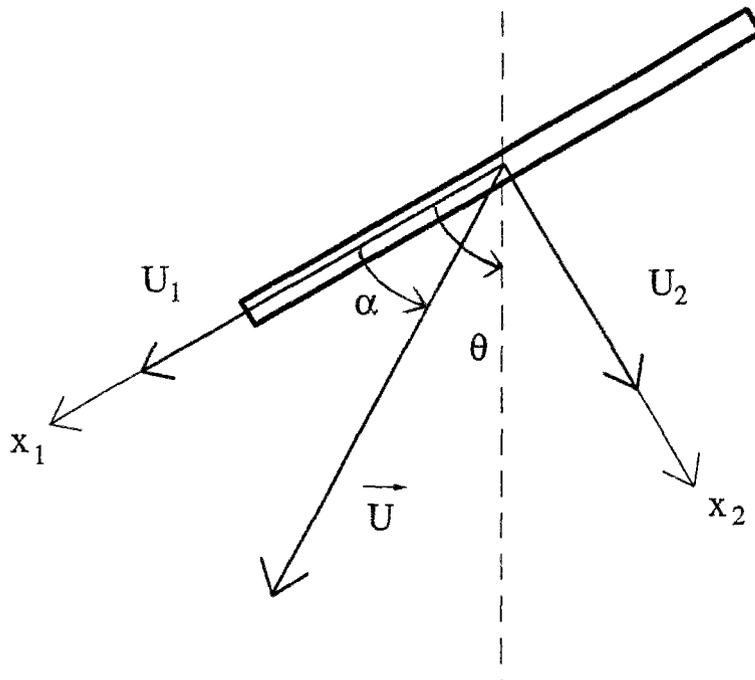


Figure 1.8

Sédimentation d'une particule anisotrope dans un fluide au repos.

Nous avons de plus la relation entre l'angle de chute α et l'angle d'inclinaison θ :

$$\tan \alpha = \frac{F_1}{2F_2} = \frac{1}{2} \tan \theta$$

Nous retiendrons l'expression de la vitesse de sédimentation d'une particule qui sédimente verticalement ($\theta=\alpha=0$) :

$$U_1 = \frac{\Delta\rho g d^2}{8\mu} \text{Log}(2r) \quad (1.11)$$

Des calculs plus complets [11] conduisent à des expressions voisines, qui deviennent identiques à (1.11) lorsque le rapport de forme de la particule est très grand. Cette dernière expression nous sera utile pour calculer l'ordre de grandeur de la vitesse de sédimentation des fibres dans nos expériences.

II.2.3 Application à un champ de vitesse linéaire

Dans le cas d'un champ de vitesse linéaire tel que $\vec{V}(x) = \vec{\Omega} \wedge \vec{x} + \underline{\underline{E}} \cdot \vec{x}$, on cherche une distribution de points-forces qui varie linéairement avec l'abscisse curviligne le long de la particule. En particulier, considérons le cas d'un écoulement élongationnel pur dans la direction 1 (paragraphe II.1). Le champ de vitesse non perturbé s'écrit dans le repère de la particule :

$$V_1(x) = E_{11}x$$

où E_{11} désigne le taux d'élongation et est une constante. Dans ce cas, la distribution de points-forces qui représente la particule alignée suivant la direction 1 est de la forme :

$$\vec{f}(x') = -\frac{2\pi\mu}{\text{Log}(2r)} E_{11}x' \vec{p}$$

Ce résultat nous sera utile au paragraphe III lorsque nous calculerons la contrainte due à une particule dans un écoulement élongationnel.

III. VISCOSITE D'UNE SUSPENSION DE PARTICULES ANISOTROPES

Dans cette partie, nous étudions la viscosité d'une suspension de particules *anisotropes, rigides et non browniennes* dans différents régimes de fraction volumique. En particulier, nous présentons de façon détaillée un traitement analytique dû à Batchelor, qui conduit à des prédictions théoriques de la viscosité élongationnelle d'une suspension de particules anisotropes alignées. Ceci nous permettra de dégager l'intérêt et les spécificités de la sollicitation élongationnelle, qui sera mise en oeuvre expérimentalement dans les chapitres suivants.

III.1 Généralités

III.1.1 Différents régimes de concentration d'une suspension de particules anisotropes

Considérons une suspension contenant des particules anisotropes, telles qu'elles ont été définies au paragraphe I, dispersées dans un fluide suspendant. La concentration en particules peut être caractérisée par le nombre n de particules par unité de volume de suspension, ou de manière équivalente par la fraction volumique Φ qui est le rapport du volume occupé par les particules sur le volume total de la suspension. Φ et n sont liés par la relation :

$$\Phi = n \pi d^2 \ell / 2$$

Nous allons établir une distinction entre les différents régimes de concentration possibles qui sont illustrés sur la figure 1.9. La limite supérieure du *régime dilué* correspond à un régime de concentration où chaque particule peut tourner librement dans une sphère de rayon ℓ . A la limite supérieure du *régime semi-dilué*, les particules, plus nombreuses et enchevêtrées, ne peuvent tourner que dans des disques de rayon ℓ et d'épaisseur d . A la limite supérieure du *régime concentré*, les particules sont complètement enchevêtrées et ne peuvent tourner librement que sur elles-mêmes.

Les limites supérieures du régime dilué et du régime semi-dilué correspondent respectivement à des empilements compacts de sphères et de disques, ce qui se traduit par les conditions suivantes sur le nombre de particules par unité de volume :

- la condition $n\ell^3 \ll 1$ définit le régime dilué,
- les conditions $n\ell^3 \gg 1$ et $n\ell^2 d \ll 1$ définissent le régime semi-dilué,
- la condition $n\ell^2 d \gg 1$ définit le régime concentré.

Notons que ces définitions sont complètement analogues à celles qui sont utilisées dans le cas des solutions de polymères rigides [22]. Il faut remarquer que dans le cas des particules macroscopiques, il n'y a jamais d'ordre spontané dans la suspension en l'absence d'écoulement, alors que dans le cas des particules browniennes, le régime concentré peut présenter un ordre orientationnel à grande échelle (transition isotrope-nématique [23]).

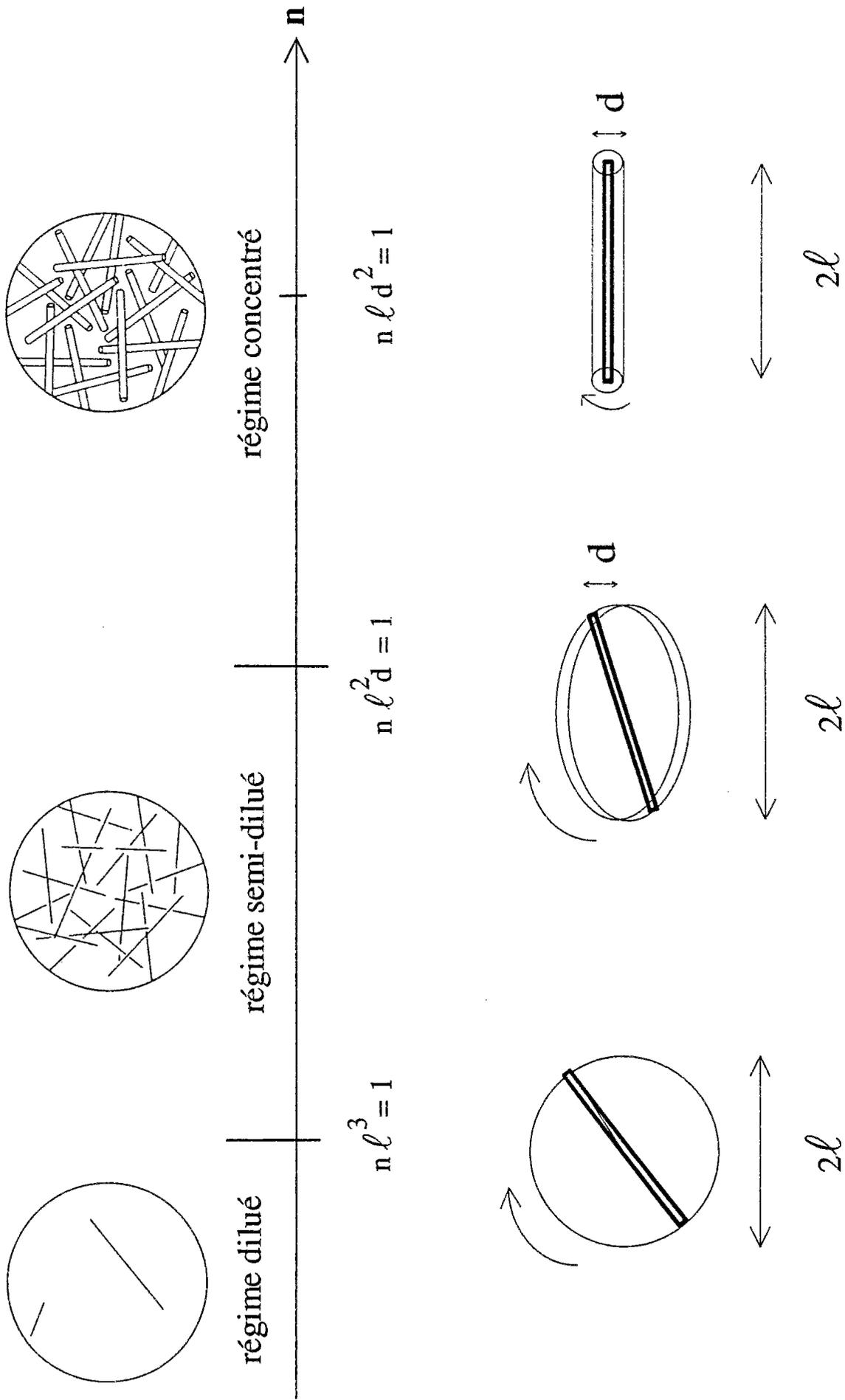


Figure 1.9

Différents régimes de concentration pour une suspension de particules anisotropes d'après [22] ; n désigne le nombre de particules par unité de volume.

Pour terminer, nous insistons sur le fait que ces régimes de concentration sont définis par des arguments purement stériques ; nous verrons plus loin dans quelle mesure ils sont également justifiés en ce qui concerne le comportement hydrodynamique de ces suspensions.

III.1.2 Suspensions de particules anisotropes et viscosité

La viscosité d'une suspension résulte de la contrainte due au fluide suspendant, $\underline{\underline{\Sigma}}^s$, et de la contrainte due aux particules elles-mêmes, $\underline{\underline{\Sigma}}^p$. Lorsque les particules ne sont pas browniennes, et ne présentent pas d'interactions de type électrique ou magnétique, cette contrainte $\underline{\underline{\Sigma}}^p$ est d'origine purement hydrodynamique. Ce résultat est tout à fait général et s'applique à des particules de géométrie quelconque. Dans le cas des suspensions de particules allongées que nous étudions ici, la contrainte associée aux particules, $\underline{\underline{\Sigma}}^p$, dépend de l'orientation des particules dans la suspension. Nous allons illustrer cette particularité dans le cas d'un écoulement élongationnel et d'un écoulement de cisaillement simple.

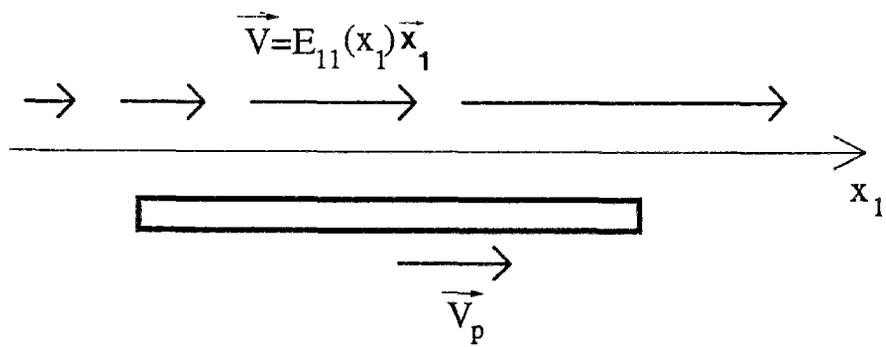
a) Écoulement élongationnel

Considérons une particule allongée, de forme cylindrique par exemple, placée dans un écoulement élongationnel, de telle manière que l'axe de la particule coïncide avec l'axe d'élongation (figure 1.10). Nous savons que cette position est la position d'équilibre stable de la particule dans l'écoulement, et que la particule se déplace avec une vitesse qui est celle de son centre de gravité (voir paragraphe II.1). Or le fluide autour de la particule est le siège de gradients de vitesse élongationnels. La nécessité de satisfaire la condition de non-glissement à la surface de la particule va donc générer des contraintes importantes dans le fluide qui l'entoure. La contribution à la contrainte qui en résulte est maximale dans cette configuration où la particule est orientée parallèlement aux lignes de courant ; elle est d'autant plus grande que la particule est longue.

b) Écoulement de cisaillement simple

En écoulement de cisaillement simple, la particule allongée ne possède pas de position d'équilibre stable (voir paragraphe II.1). La contribution à la contrainte de cette particule dépend de son orientation par rapport aux lignes de courant (figure 1.10). Cependant, un écoulement de cisaillement simple suivant l'axe x_1 peut se décomposer en une rotation d'ensemble du fluide et une élongation dont les axes sont situés à 45° des axes x_1 et x_2 (figure 1.11). Nous en déduisons, en utilisant le résultat précédent concernant l'élongation, que la contribution de la particule à la contrainte est maximale lorsque la particule est alignée suivant les axes propres de la déformation.

(a)



(b)

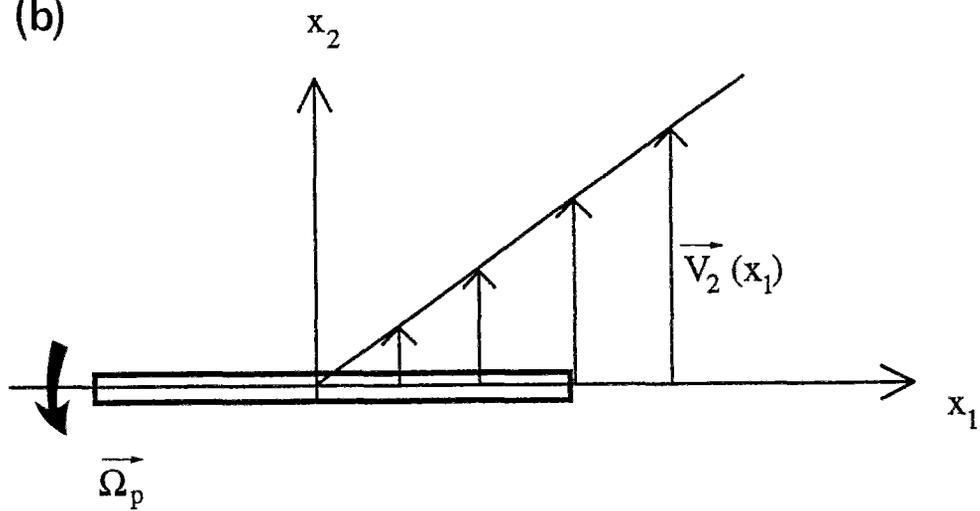


Figure 1.10

Particule anisotrope dans un écoulement élongationnel (figure a)
et dans un écoulement de cisaillement (figure b).

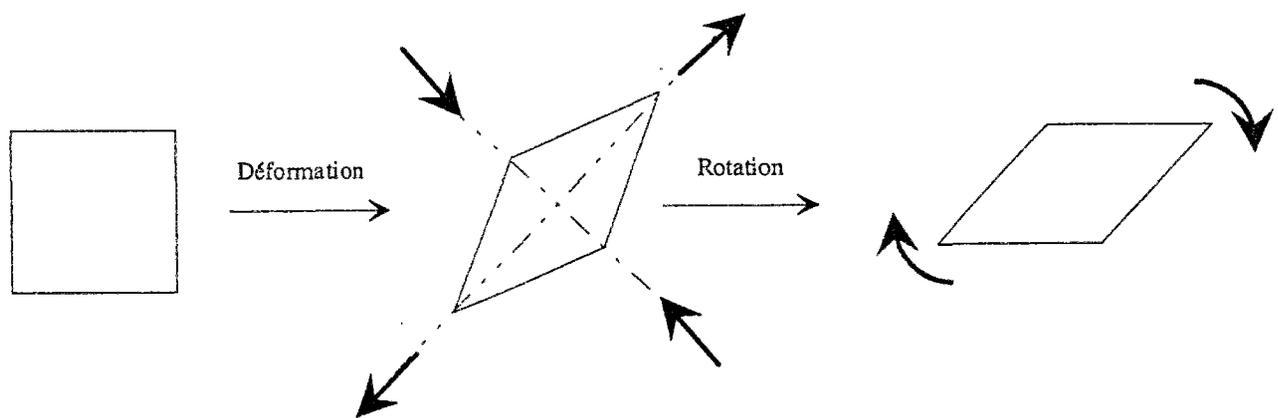


Figure 1.11

Décomposition d'un écoulement de cisaillement simple en une rotation d'ensemble et une élancement, d'après [12].

En conclusion, le calcul de la contrainte dans une suspension de particules allongées impose de connaître d'une part la distribution statistique d'orientation des particules, d'autre part la contribution à la contrainte pour chaque orientation. Dans sa généralité, le problème s'avère extrêmement complexe et continue de susciter de nombreux travaux théoriques [24-27]. Dans la suite, nous allons nous intéresser à la situation où les particules présentent une orientation privilégiée et stable dans l'écoulement, ce qui peut s'obtenir soit à l'aide d'un champ extérieur (magnétique ou électrique si les particules sont ferromagnétiques ou présentent un contraste de constante diélectrique avec le fluide suspensé), soit à l'aide du champ de vitesse lui-même (champ de vitesse à composantes élongationnelles).

III.1.3 Intérêt de la sollicitation élongationnelle

Nous voyons donc apparaître l'intérêt de la sollicitation élongationnelle pour une suspension de particules allongées. En effet, en écoulement élongationnel, une particule allongée s'oriente dans la direction de l'élongation, qui est aussi la direction dans laquelle sa contribution à la contrainte est maximale. La conséquence au niveau de la suspension est double. Au point de vue expérimental, l'augmentation de contrainte qui en résulte dans la suspension est telle qu'elle peut être mise en évidence facilement. De plus, cette augmentation de contrainte va modifier en retour les propriétés de l'écoulement. Il en résulte en général un couplage entre la structure microscopique de la suspension et les propriétés macroscopiques de l'écoulement. D'un point de vue théorique, la sommation des contributions des différentes particules à la contrainte dans la suspension est facilitée puisque la distribution d'orientation est connue. Cette simplification du problème permet d'obtenir facilement des prédictions théoriques pour la contrainte dans la suspension.

Il est commode de caractériser la relation entre la contrainte dans la suspension de particules anisotropes alignées et la déformation appliquée (élongation), par la viscosité élongationnelle définie de la manière suivante. Notons Σ_{ij} le tenseur des contraintes de la suspension et E_{ij} le tenseur des taux de déformation. Dans le cas d'une déformation élongationnelle uniaxiale (écoulement linéaire de directions principales x_1, x_2, x_3), le tenseur E_{ij} se réduit à ses composantes diagonales E_{ii} , avec $E_{11}=2E_{22}=2E_{33}$. Nous définissons alors la quantité μ_E par la relation suivante :

$$\Sigma_{11} - \frac{1}{2}(\Sigma_{22} + \Sigma_{33}) = \mu_E E_{11}$$

μ_E est appelée la *viscosité élongationnelle* de la suspension. Pour un fluide newtonien, on peut montrer qu'elle vaut 3μ , où μ désigne la viscosité de cisaillement. Pour une suspension de particules allongées, μ_E peut se décomposer en une contribution due au fluide suspensé, égale à 3μ , et une contribution due aux particules, de sorte que :

$$\mu_E / 3\mu > 1$$

Ce terme de viscosité élongationnelle peut prêter à confusion (le fait que $\mu_E = 3\mu$ pour un fluide newtonien résulte uniquement de la définition choisie pour μ_E), mais il a été néanmoins consacré par l'usage. En pratique, la viscosité élongationnelle traduit la résistance à l'élongation de la suspension. Le rapport $\mu_E / 3\mu$ est aussi appelé rapport de Trouton.

III.2 Calcul de Batchelor pour la viscosité d'une suspension de particules anisotropes en écoulement élongationnel

Le calcul de la viscosité d'une suspension de particules allongées effectué par Batchelor en 1971 [28] contient l'essentiel des idées qui nous seront utiles ; il est organisé de la manière suivante. Une première étape du calcul consiste à exprimer la contribution d'une particule de forme quelconque à la contrainte dans la suspension à partir des forces exercées par la particule sur le fluide. Dans le cas des particules allongées, ces forces sont connues grâce à la théorie du corps mince pour plusieurs géométries d'écoulement (voir paragraphe II.2) et en particulier pour l'écoulement élongationnel. Ceci permet, dans une deuxième étape, de calculer la contribution d'une seule particule à la contrainte en fonction de ses paramètres géométriques et pour un taux d'élongation donné. Enfin, la sommation des contributions de chaque particule est effectuée en supposant que l'orientation de toutes les particules est la même. A ce stade, il est nécessaire de distinguer deux régimes de concentration en particules. Lorsque la fraction volumique en particules est très faible, les particules contribuent à la contrainte de manière indépendante. Pour des fractions volumiques plus importantes, il est nécessaire de prendre en compte les interactions hydrodynamiques. Ce problème est traité en introduisant une longueur d'écran, dans une approche de type milieu-effectif.

III.2.1 Calcul général de la contrainte dans une suspension de particules non browniennes

Nous avons exprimé au paragraphe III.1.2 la contrainte totale dans une suspension de particules comme la somme de la contribution due au fluide et de la contribution due aux particules :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^s + \underline{\underline{\Sigma}}^p$$

Cette expression suppose que la répartition statistique des particules dans la suspension est uniforme. Le terme $\underline{\underline{\Sigma}}^s$ vaut pour un fluide newtonien :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^s = -P\underline{\underline{\delta}} + 2\underline{\underline{\mu}}\underline{\underline{E}}$$

La contribution des particules $\underline{\underline{\Sigma}}^p$ résulte d'une moyenne d'ensemble sur les différentes configurations statistiques, qui est supposée équivalente à la moyenne des contributions dues aux différentes particules dans le volume V de suspension considéré :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^p = \frac{1}{V} \sum_{\text{part}} \underline{\underline{\sigma}}^p$$

Une étape essentielle consiste à montrer que la contribution à la contrainte due à une seule particule, $\underline{\underline{\sigma}}^p$, s'exprime comme l'intégrale suivante sur la surface de la particule [29] :

$$\underline{\underline{\sigma}}^p = \int_A (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \underline{\underline{x}}' dA$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est la contrainte au point du fluide considéré, $\underline{\underline{n}}$ la normale en un point de la surface A , et $\underline{\underline{x}}'$ le vecteur repérant le point courant sur la particule (figure 1.4). Ce calcul de la contrainte totale de la suspension $\underline{\underline{\Sigma}}$ est valable pour toute forme de particule et toute concentration. Les seules hypothèses sont le caractère newtonien du fluide, le caractère non brownien et indéformable des particules et enfin l'absence d'effets d'inertie.

Toute la spécificité de la suspension est contenue dans le terme $\underline{\underline{\sigma}}^p$. De façon remarquable, nous trouvons en nous reportant au paragraphe I.2.3b que $\underline{\underline{\sigma}}^p$ est égal au stresslet exercé par le fluide environnant sur la particule (le couple étant nul, le doublet de forces est aussi égal à sa partie symétrique, le stresslet). Ainsi, $\underline{\underline{\sigma}}^p$ s'écrit encore :

$$\underline{\underline{\sigma}}^p = - \int_A (\underline{\underline{f}} \underline{\underline{x}}') dA$$

où $\underline{\underline{f}} = -\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}$ désigne comme précédemment le point-force dont l'intensité est lié à la perturbation apportée au fluide par un élément de surface dA de la particule considérée. Cette perturbation résulte d'une part de la présence de la particule elle-même (donc de sa géométrie et du type d'écoulement considéré), et d'autre part de la présence des autres particules dans la suspension, qui sont responsables des interactions d'origine hydrodynamique avec la particule considérée. Dans la suite, nous serons amenés à calculer $\underline{\underline{\sigma}}^p$ pour différents types de suspensions.

III.2.2 Cas particulier d'une particule allongée en écoulement élongationnel

Considérons tout d'abord le cas simple d'une particule *unique*, de forme cylindrique, dont la longueur $L=2\ell$ est très grande devant le diamètre d . Elle est placée dans un écoulement élongationnel pur dont le taux d'élongation dans la direction x_1 est E_{11} . Nous étudions le cas où le vecteur directeur unitaire \vec{p} de la particule est parallèle à l'axe d'élongation (figure 1.12). Nous avons calculé dans le paragraphe II.2 la perturbation apportée par cette particule à l'écoulement par la théorie du corps mince. Ceci nous a permis d'obtenir la force exercée par unité de surface de révolution de la particule sur le fluide (figure 1.12). Rappelons que dans le repère (x_1, x_2) lié à la particule, celle-ci s'écrit, au premier ordre en $1/\text{Log}(2r)$:

$$\vec{f}(x') = -\frac{2\pi\mu}{\text{Log}(2r)} E_{11} x' \vec{p} \quad (1.12)$$

où x' est une abscisse curviligne le long du segment $[-\ell, +\ell]$. La contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^P$, ou stresslet, se réduit donc à la composante σ_{11}^P qui s'exprime en utilisant l'expression établie précédemment comme une intégrale curviligne le long du segment $[-\ell, +\ell]$:

$$\sigma_{11}^P = \int_{-\ell}^{+\ell} \frac{2\pi\mu}{\text{Log}(2r)} E_{11} x'^2 dx' = \frac{4\pi\mu\ell^3}{3\text{Log}(2r)} E_{11} \quad (1.13)$$

Nous retrouvons que la force et le couple créés par la particule sont nuls ; seul le stresslet est non nul et égal à σ_{11}^P . Dans ce calcul, l'intensité des points-forces résulte uniquement de l'absence de mouvement relatif de la particule et des couches de fluide qui l'entourent immédiatement. En écoulement élongationnel, la particule rigide ne peut suivre l'élongation du fluide ; il en résulte une contrainte le long de la particule, d'autant plus importante que celle-ci est allongée. En effet, la longueur de la particule intervient au cube dans l'expression (1.13) de la contrainte σ_{11}^P . Par contre, le rapport de forme r intervient peu car il figure dans un logarithme. L'expression (1.13) montre par ailleurs que la contribution à la contrainte d'une particule cylindrique est beaucoup plus importante que celle d'une particule sphérique de même volume. Cette contribution est anisotrope puisque la particule allongée ne contribue qu'à σ_{11}^P . Enfin, la configuration où la particule est orientée dans la direction de l'élongation est celle qui rend maximale la contribution à la contrainte.

III.2.3 Cas d'une suspension diluée

Dans le cas d'une suspension diluée, contenant n particules par unité de volume, nous supposons que les particules sont indépendantes au point de vue hydrodynamique. Nous

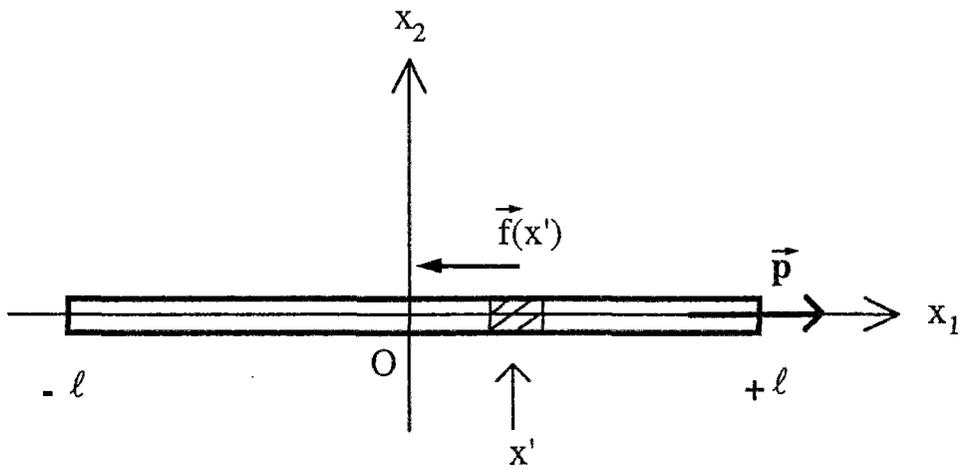


Figure 1.12

Particule anisotrope dans un écoulement élongationnel
dont la direction d'élongation est l'axe de la particule.

utilisons donc le calcul précédent qui donne la contribution d'une particule unique à la contrainte, et nous sommions les contributions de toutes les particules. Nous supposons de plus que les particules sont toutes orientées dans la direction de l'élongation, et que la suspension est monodisperse. Alors toutes les contributions sont identiques et nous obtenons directement la contrainte due aux particules dans la suspension :

$$\Sigma_{11}^p = \frac{4\pi\mu n\ell^3}{3\text{Log}(2r)} E_{11}$$

En revenant à la définition donnée précédemment pour la viscosité élongationnelle, nous pouvons écrire :

$$\frac{\mu_E}{3\mu} = 1 + \frac{4\pi n\ell^3}{9\text{Log}(2r)} \quad (1.14)$$

Finalement, compte-tenu de la condition $n\ell^3 \ll 1$, on s'attend à ce que l'augmentation de viscosité élongationnelle prédite par (1.14) reste faible.

La question qui se pose immédiatement à la vue de ce résultat, qui a été obtenu en supposant que les particules sont hydrodynamiquement indépendantes, concerne le domaine de validité de l'expression (1.14). Un argument physique simple permet de fournir un critère quantitatif. Considérons une particule "test" entourée par ses plus proches voisines (figure 1.13). Nous introduisons la distance moyenne entre particules, notée h , qui se calcule à l'aide du nombre moyen de particules rencontrées dans un plan normal à la direction d'élongation. Le nombre de particules qui intersectent un plan de surface unité normal à la direction des particules est égal, en moyenne, au nombre de particules situées dans un volume de même section et de longueur 2ℓ , soit $2n\ell$. La distance moyenne entre particules vérifie :

$$h = (2n\ell)^{-1/2} \quad (1.15)$$

Chaque particule est équivalente à un stresslet d'intensité σ_{11}^p . Considérons l'action sur la particule test de sa plus proche voisine située à la distance h ; celle-ci crée sur la particule test une perturbation de vitesse égale à $\sigma_{11}^p/\mu h^2$ (voir paragraphe I). Le taux d'élongation associé à cette perturbation de vitesse le long de la fibre test de longueur 2ℓ est $\sigma_{11}^p/2\mu h^2\ell$. Finalement, la condition d'indépendance hydrodynamique entre la particule test et son environnement s'obtient en écrivant que la perturbation apportée à l'élongation sur la particule test est négligeable devant l'élongation appliquée, E_{11} :

$$\frac{\sigma_{11}^p}{2\mu h^2\ell} \ll E_{11} \quad \text{soit} \quad \frac{4\pi}{3\text{Log}(2r)} n\ell^3 \ll 1$$

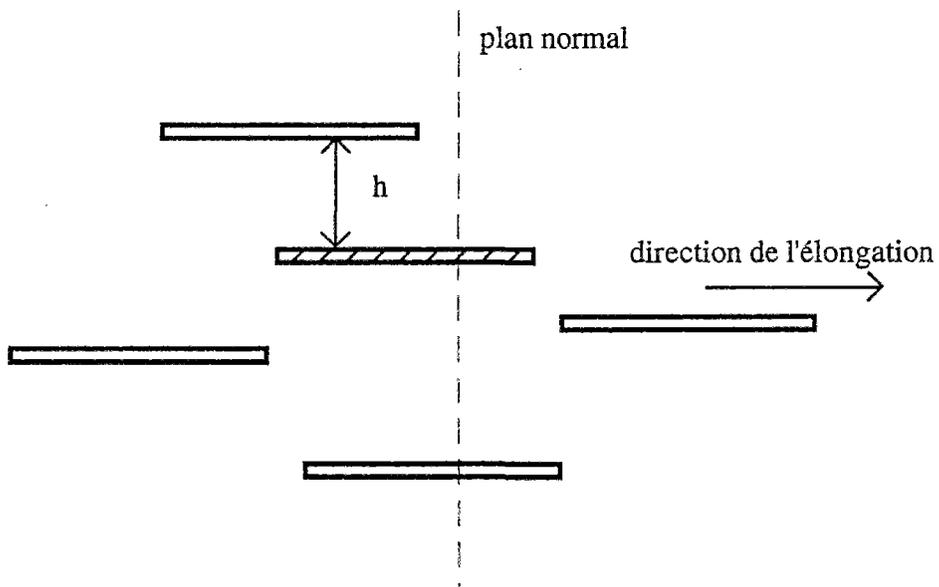


Figure 1.13

Suspension de particules anisotropes en *régime dilué* :
une particule test est placée dans l'environnement de ses voisines.

Cette condition correspond en ordre de grandeur au critère $n\ell^3 \ll 1$ qui nous indique que la suspension est en régime dilué. Notons que ce critère avait été établi sur des bases purement stériques. Nous venons de montrer qu'il a aussi une signification en ce qui concerne l'existence d'interactions hydrodynamiques.

III.2.4 Cas d'une suspension semi-diluée

Considérons à nouveau une configuration où toutes les particules sont alignées dans la direction de l'élongation. Nous introduisons aussi la distance moyenne entre particules, $h=(2n\ell)^{-1/2}$. Cette distance h est intéressante à plusieurs titres. D'abord, le rapport ℓ/h détermine l'importance des interactions entre particules (le régime dilué correspond à $\ell/h \ll 1$). De plus, l'espacement moyen entre particules est la seule longueur qui intervienne dans la caractérisation de l'arrangement statistique des particules.

Dans le cas d'une suspension semi-diluée, la contrainte totale dans la suspension ne peut plus être obtenue par simple sommation des contributions individuelles dues à chaque particule supposée isolée. L'idée centrale, due à Batchelor, consiste à calculer le champ de vitesse autour d'une particule en tenant compte de tout l'environnement, à en déduire la contrainte due à cette particule et à sommer ensuite sur toutes les particules. Pour cela, une particule considérée comme particule test est enfermée dans une "cellule" fictive cylindrique, de longueur L et de rayon h , dont le centre à l'abscisse x_G coïncide avec le centre de la particule (figure 1.14). Le champ de vitesse \vec{v} autour de la particule s'obtient en résolvant l'équation $\Delta\vec{v} = 0$ avec les conditions aux limites suivantes: $v=E_{11}x_G$ sur la particule et $v=0$ sur les bords de la cellule. Cette dernière condition est cruciale : d'un point de vue physique, elle revient à considérer que l'effet des interactions hydrodynamiques entre les particules est équivalent à celui d'un milieu effectif et que la perturbation de vitesse introduite par une particule, compte-tenu de son environnement, s'atténue sur une distance caractéristique égale à la distance moyenne entre particules. Dans cette approche, cette *longueur d'écran* résulte de la géométrie des particules et est spécifique au cas des particules allongées [28].

Dans ces conditions, il est possible de calculer la nouvelle expression de la force \vec{f} exercée sur le fluide par un élément de surface unité de la particule, repéré par l'abscisse curviligne x' :

$$\vec{f}(x') = -\frac{2\pi\mu}{\text{Log}(2h/d)} E_{11}x' \vec{p}$$

L'expression obtenue est voisine de celle valable en régime dilué (équation 1.12) ; seul le contenu du logarithme est modifié, et fait intervenir la distance h , ce qui traduit l'effet des

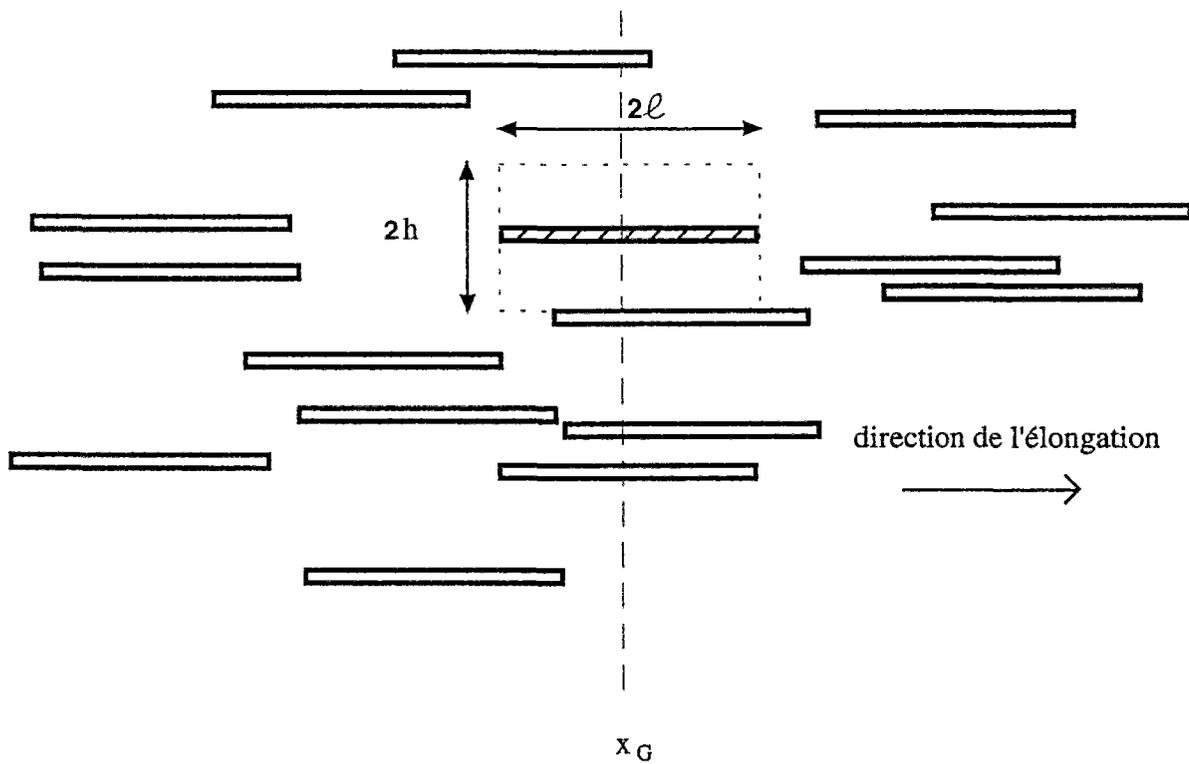


Figure 1.14

Suspension de particules anisotropes en régime *semi-dilué* : modèle cellulaire.

autres particules. En utilisant l'expression de h (équation 1.15) et la relation entre Φ et n , nous trouvons en fonction de la fraction volumique Φ :

$$\tilde{f}(x') = -\frac{4\pi\mu}{\text{Log}(\pi/\Phi)} E_{11} x' \bar{p} \quad (1.16)$$

En intégrant (1.16) sur la surface de la particule, on obtient la contribution d'une particule à la contrainte :

$$\sigma_{11}^p = \frac{8\pi\mu\ell^3}{3\text{Log}(\pi/\Phi)} E_{11}$$

Puis, en sommant sur l'ensemble des particules, la contrainte moyenne dans la suspension due à la présence des particules :

$$\Sigma_{11}^p = \frac{8\pi\mu n\ell^3}{3\text{Log}(\pi/\Phi)} E_{11}$$

et enfin l'expression de la viscosité élongationnelle μ_E de la suspension :

$$\frac{\mu_E}{3\mu} = 1 + \frac{8\pi n\ell^3}{9\text{Log}(\pi/\Phi)} \quad (1.17)$$

Nous voyons immédiatement sur cette expression que l'augmentation de viscosité élongationnelle en régime semi-dilué ($n\ell^3 \gg 1$) peut être importante. Par exemple, pour une suspension de particules vérifiant $n\ell^3=1$, cette augmentation permet de doubler la valeur du rapport $\mu_E/3\mu$. Typiquement, pour une suspension de fraction volumique $\Phi=0.5\%$, et pour des particules de rapport de forme $r=70$, $\mu_E/3\mu$ est de l'ordre de 3. La prédiction (1.17) a été vérifiée expérimentalement sur des suspensions de fibres semi-diluées, avec un écart de l'ordre de 10% entre la prédiction et les mesures [30,31].

L'expression (1.17) est valable tant que la distance entre les particules est grande devant leur diamètre, soit $d/h \ll 1$, qui correspond en ordre de grandeur à la condition $n\ell d^2 \ll 1$ qui définit le régime concentré d'un point de vue stérique.

Enfin, rappelons que cette prédiction pour la viscosité élongationnelle est obtenue de manière simple par un traitement global des interactions hydrodynamiques, qui consiste à introduire a priori une longueur d'écran correspondant à la distance moyenne entre particules. Nous verrons plus loin que des méthodes plus sophistiquées, reposant sur un calcul des interactions hydrodynamiques entre plusieurs particules et la sommation sur toutes les configurations de particules, donnent des résultats analogues [24].

II.2.5 Conclusion

Nous venons de montrer que la viscosité élongationnelle μ_E d'une suspension de particules allongées s'exprime simplement, en régime dilué et en régime semi-dilué, en fonction du nombre n de particules par unité de volume, de la demi-longueur ℓ des particules, et de leur rapport de forme r (équations 1.14 et 1.17). En utilisant la relation entre n et la fraction volumique Φ , nous pouvons écrire de manière plus concise l'expression de la viscosité élongationnelle, qui devient :

$$\frac{\mu_E}{3\mu} = 1 + \frac{4}{9}\beta \quad (1.18)$$

où β s'exprime en fonction de Φ et de r , et dépend du régime de concentration. Nous noterons:

$$\beta = \beta_d = \frac{\Phi \cdot r^2}{2\text{Log}(2r)} \quad \text{pour le régime dilué}$$

$$\beta = \beta_{sd} = \frac{\Phi \cdot r^2}{\text{Log}(\pi / \Phi)} \quad \text{pour le régime semi-dilué.}$$

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons largement cette variable β et la relation (1.18) associée. Il faut remarquer que la différence entre la variable β_d du régime dilué et la variable β_{sd} du régime semi-dilué n'intervient que dans un terme logarithmique. Nous verrons au chapitre 4 que ceci a des conséquences importantes en ce qui concerne la vérification expérimentale de l'approche milieu effectif.

III.3 Lois de comportement

III.3.1 Forme générale

Dans l'analyse que nous venons de présenter dans le paragraphe précédent, nous avons supposé à des fins de simplification que les particules étaient toutes alignées suivant l'axe principal d'élongation. Dans le cas où les particules ne sont pas orientées dans la même direction et où le champ de déformation est quelconque, le calcul précédent peut se généraliser et conduit à une loi de comportement qui fait intervenir la moyenne d'un tenseur

d'ordre 4 construit à partir du vecteur directeur \vec{p} , moyenne prise sur la distribution d'orientation des particules :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = -P\underline{\underline{\delta}} + 2\mu\underline{\underline{E}} + \mu_f \langle \vec{p}\vec{p}\vec{p}\vec{p} \rangle : \underline{\underline{E}} \quad (1.19)$$

où μ_f ne dépend que de la géométrie des particules, du régime de concentration, et de la fonction de distribution d'orientation des particules dans la suspension.

En particulier, dans le cas où les particules sont toutes alignées dans la direction de l'élongation (cas précédemment traité), l'expression de la viscosité élongationnelle conduit à cette loi de comportement (1.19) où le coefficient μ_f est tel que :

$$\mu_f = \frac{4}{3}\beta\mu$$

β ayant été défini au paragraphe précédent en régime dilué et semi-dilué.

La loi de comportement (1.19) traduit une relation entre la contrainte et la déformation qui fait intervenir le tenseur d'ordre 4 $\langle \vec{p}\vec{p}\vec{p}\vec{p} \rangle$ construit à partir du vecteur directeur des particules. De nombreux auteurs ont étudié et discuté la généralité de cette loi [10,31,32,34] ; ils ont notamment proposé des variantes qui en pratique diffèrent peu de la forme décrite ci-dessus dès lors que le rapport de forme r est grand [10]. Ainsi, nous nous limiterons dans la suite à l'utilisation de cette loi de comportement.

III.3.2 Application à une suspension en écoulement de cisaillement simple

Dans un tel écoulement, nous avons vu que les particules n'ont pas d'orientation stable, ce qui justifie l'écriture sous forme d'une moyenne de toutes les orientations. Considérons une suspension de particules allongées en écoulement de cisaillement simple dans le plan (Ox_1x_2). Seules les composantes E_{12} et E_{21} du tenseur de déformation sont non-nulles. En outre (figure 1.10) $dV_2/dx_1 = E_{12} = 2E_{21}$. On obtient en particulier pour la composante Σ_{12} du tenseur des contraintes de la suspension :

$$\Sigma_{12} = 2\mu E_{12} + 2\mu_f E_{12} \langle p_1^2 p_2^2 \rangle$$

La viscosité de cisaillement μ_s de la suspension est définie comme le rapport :

$$\mu_s = \frac{\Sigma_{12}}{2E_{12}}$$

Nous obtenons donc, en comparant cette viscosité de cisaillement de la suspension à celle du solvant newtonien que nous avons notée μ jusqu'ici :

$$\mu_S = \mu + \mu_f \langle p_1^2 p_2^2 \rangle$$

Cette dernière expression indique que la viscosité de cisaillement de la suspension dépend de la moyenne des orientations des particules dans le plan de cisaillement. Des études expérimentales [16,35] ont déterminé les distributions d'orientation en cisaillement simple pour les régimes dilué et semi-dilué. Dans tous les cas, la distribution d'orientation passe par un maximum au voisinage de la direction de l'écoulement, et la valeur trouvée pour $\langle p_1^2 p_2^2 \rangle$ ne dépasse pas 0,03. Compte-tenu de la valeur de μ_f pour une suspension de particules allongées en régime semi-dilué ($\Phi=0.5\%$, $r=70$), ceci conduit une augmentation de la viscosité de cisaillement ($\mu_s/\mu-1$) qui reste de l'ordre de 0.2, ce qui est en accord avec les mesures expérimentales [35,36]. En sollicitation élongationnelle, et pour la même suspension, l'augmentation de viscosité élongationnelle ($\mu_E/3\mu-1$) est de l'ordre de 2. Ces ordres de grandeur montrent l'importance du type de sollicitation appliquée à une suspension de particules allongées et confirment l'importance de l'élongation, où les particules s'orientent suivant l'axe d'élongation et apportent une contribution maximale à la contrainte. Notons que la viscosité de cisaillement d'une suspension de sphères dures à la même fraction volumique serait donnée par la relation d'Einstein ($\mu_s/\mu-1=2.5\Phi$) ; ceci conduirait à une augmentation de viscosité de l'ordre de 0.01.

III.3.3 Corrections à la loi de comportement : le calcul de Shaqfeh et Fredrickson

Récemment Shaqfeh et Fredrickson ont proposé une approche plus générale consistant à calculer et à sommer de façon explicite les interactions hydrodynamiques entre particules aux différents ordres [24]. L'idée consiste à approximer chaque particule par une ligne de point-forces dont l'intensité est fonction non seulement de l'écoulement et de l'orientation de la particule, mais aussi des interactions hydrodynamiques avec les particules voisines. Celles-ci sont calculées de manière explicite et sommées par une méthode diagrammatique. Nous ne donnons ici aucun détail de ce calcul difficile, mais nous discutons dans la suite les résultats essentiels qui portent sur plusieurs aspects.

a) Régime dilué

Dans ce régime de concentration, Shaqfeh et Fredrickson retrouvent la loi de variation établie au paragraphe III.2 pour la viscosité élongationnelle. Le coefficient μ_f est exprimé sous la forme d'une série dont le terme dominant coïncide avec le résultat de Batchelor :

$$\mu_f = \frac{4}{3} \mu \beta_d \left[1 + 0.15 \frac{\Phi \cdot r^2}{2\pi(\text{Log}(2r))^2} + \dots \right] \quad (1.20)$$

b) Régime semi-dilué

Shaqfeh et Fredrickson *démontrent* que la perturbation de vitesse introduite par une particule décroît sur une longueur caractéristique ζ . Autrement dit, ζ est une longueur d'écran au-delà de laquelle la perturbation de vitesse interagit avec l'environnement de la particule et s'annule. Ce résultat corrobore l'approche milieu effectif proposée a priori par Batchelor sur la base du modèle cellulaire. De plus, les mêmes auteurs démontrent que ζ n'est pas strictement égale à la distance h entre particules, mais en diffère par un terme logarithmique faisant intervenir la fraction volumique:

$$\zeta = h \text{Log}(\pi / \Phi)$$

Enfin, cette longueur d'écran est indépendante de l'orientation des particules. Deux cas asymptotiques sont traités : l'orientation isotrope et l'orientation unidirectionnelle.

Il en résulte que la contribution des fibres en régime semi-dilué se traduit par une loi de comportement analogue à la loi (1.20). Le coefficient μ_f vaut :

$$\mu_f = \frac{4}{3} \mu \beta_{sd} \left[1 - \frac{\text{Log}(\text{Log}(\pi / \Phi) + A)}{\text{Log}(\pi / \Phi)} \right] \quad (1.21)$$

A est une constante dont la valeur traduit les propriétés de la fonction de distribution d'orientation des particules. Dans le cas d'une distribution isotrope, c'est-à-dire sans orientation privilégiée, $A = -0.663$. Dans le cas d'une distribution unidirectionnelle, $A = 0.1585$. L'ordre de grandeur du terme $(\text{Log}(\text{Log}(\pi / \Phi) + A) / \text{Log}(\pi / \Phi))$ est par exemple de 0.2 pour une suspension de fraction volumique $\Phi = 0.5\%$ où toutes les particules sont alignées. Ainsi, la valeur de μ_f ne dépend que très faiblement de la distribution d'orientation, et là encore elle coïncide au premier ordre avec celle prédite par Batchelor.

IV. MISE EN OEUVRE PRATIQUE D'ÉCOULEMENTS A COMPOSANTES ÉLONGATIONNELLES

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons souligné à plusieurs reprises l'intérêt de la sollicitation élongationnelle dans l'étude des suspensions de particules allongées. Jusqu'à présent, nous avons simplement défini la sollicitation élongationnelle par l'existence de termes diagonaux dans le tenseur de déformation $\underline{\underline{E}}$. Dans la suite, nous décrivons comment de tels écoulements à composantes élongationnelles peuvent être mis en oeuvre expérimentalement.

IV.1 Différents types d'écoulements élongationnels

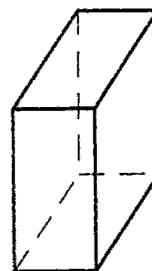
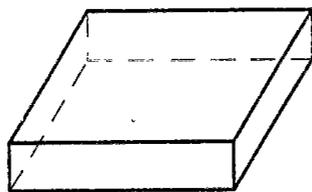
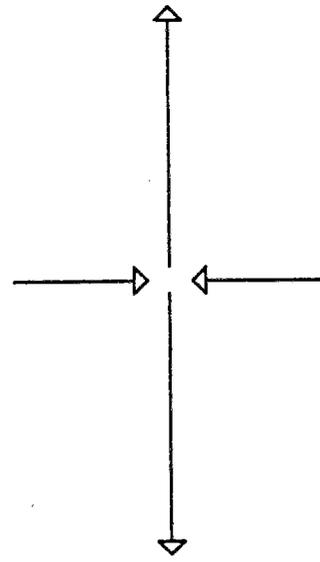
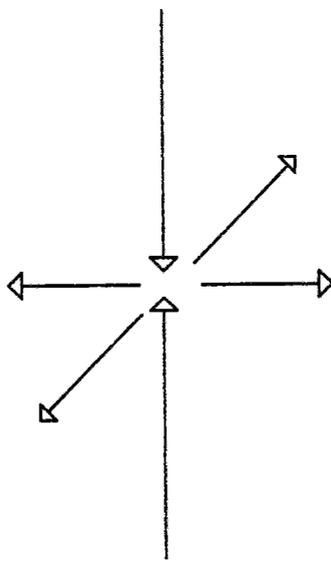
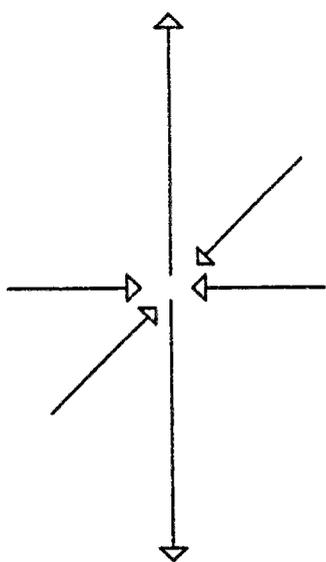
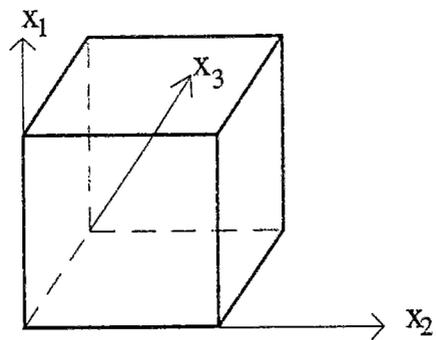
Les écoulements élongationnels purs, c'est à dire les écoulements qui ne comportent aucune composante de cisaillement, peuvent être décrits de manière générale par le champ de vitesse suivant:

$$\begin{aligned}V_1 &= (\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2)x_1 \\V_2 &= -\dot{\epsilon}_1 x_2 \\V_3 &= -\dot{\epsilon}_2 x_3\end{aligned}$$

où $\dot{\epsilon}_1$ et $\dot{\epsilon}_2$ sont les taux d'élongation et peuvent être positifs ou négatifs. Pour des valeurs particulières de $\dot{\epsilon}_1$ et $\dot{\epsilon}_2$, on retrouve des situations simples qui sont illustrées sur la figure 1.15. Ainsi, lorsque $\dot{\epsilon}_1$ et $\dot{\epsilon}_2$ sont égaux et positifs, la déformation est de type *élongation uniaxiale*: elle étire un cube de manière à le transformer en un parallélépipède rectangle comprimé dans le plan (x_2, x_3) , mais allongé dans la direction x_1 . Lorsque $\dot{\epsilon}_1$ et $\dot{\epsilon}_2$ sont égaux et négatifs, la déformation est une *élongation biaxiale* suivant les axes x_2 et x_3 : le cube est comprimé en un parallélépipède aplati suivant x_1 . Enfin, le cas où $\dot{\epsilon}_2$ est nul correspond à une *élongation planaire* dans le plan (x_1, x_2) : le cube ne subit pas de déformation dans la direction x_3 , mais il est étiré suivant x_1 et comprimé suivant x_2 dans le cas où $\dot{\epsilon}_1 > 0$ (ou comprimé suivant x_1 et étiré suivant x_2 dans le cas où $\dot{\epsilon}_1 < 0$).

Une grandeur utile pour la caractérisation des écoulements élongationnels est la mesure de la déformation subie par un élément de fluide au cours de son passage dans l'élongation. Par exemple, pour une élongation suivant l'axe d'élongation x_1 , dont le taux d'élongation est $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2$, la variation de la longueur ℓ d'un élément de fluide au cours du temps vérifie :

$$\frac{\partial \ell}{\partial t} = \dot{\epsilon} \ell$$



élongation
uniaxiale

élongation
biaxiale

élongation
plane

Figure 1.15

Différents types d'écoulements élongationnels purs.

Le rapport entre la longueur ℓ_1 de l'élément de fluide à l'instant t_1 et sa longueur ℓ_2 à l'instant t_2 est donc :

$$\frac{\ell_2}{\ell_1} = \exp \left[\int_{t_1}^{t_2} \dot{\epsilon} dt \right]$$

Nous retiendrons comme caractéristique de la déformation subie par le fluide et nous noterons ϵ l'intégrale :

$$\epsilon = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\epsilon} dt$$

IV.2 Réalisation pratique

A la différence des dispositifs de sollicitation en cisaillement, la réalisation pratique des écoulements à composantes élongationnelles se heurte à de nombreuses difficultés, aussi bien en ce qui concerne la mise en oeuvre que pour l'analyse des mesures expérimentales. La première difficulté concerne le *champ de vitesse*, généralement complexe, et qui comporte toujours des composantes de cisaillement. De plus, le taux d'élongation peut ne pas être constant dans l'écoulement. Ceci nécessite une étude préalable et complète du champ de vitesse. Par ailleurs, dans la plupart des cas, *il est difficile de contrôler les paramètres qui régissent l'écoulement*, et en particulier le taux d'élongation qui n'est pas imposé mais dépend de la réponse du fluide étudié à la sollicitation, et doit donc être mesuré. Enfin, *le taux d'élongation est rarement appliqué de façon permanente*, au sens où le temps d'exposition du fluide à la sollicitation élongationnelle peut être faible devant le temps de relaxation du fluide à la déformation (notamment dans le cas des solutions de polymères où le temps de relaxation le plus long des chaînes peut atteindre plusieurs secondes). D'où les problèmes qui se posent par rapport à l'existence d'un état de déformation stationnaire du fluide sollicité.

Différentes géométries élongationnelles ont été imaginées et utilisées pour des applications diverses, qui concernent en général l'étude de polymères flexibles, plus récemment l'étude de cristaux liquides. Elles se distinguent par la forme des champs de vitesse obtenus, par les ordres de grandeur des taux d'élongation applicables, par la possibilité ou non d'effectuer des mesures rhéologiques (viscosité élongationnelle) ou optiques (biréfringence, diffusion de lumière). Nous présentons ici les géométries les plus rencontrées, que nous avons choisies de regrouper suivant la forme du champ de vitesse. Nous distinguerons les écoulements à point d'arrêt, les dispositifs de filage (sans paroi) et les écoulements dans des conduites de section variable.

IV.2.1 Ecoulements à point d'arrêt

Ces écoulements possèdent un point de vitesse nulle appelé point d'arrêt, et présentent donc des gradients de vitesse élongationnels au voisinage de ce point.

a) Dispositif à rouleaux [37]

Ce dispositif comporte quatre cylindres rotatifs (fig 1.16) dont on peut faire varier les vitesses de rotation respectives. Le point d'arrêt est situé au centre du carré formé par les rouleaux. Lorsque les cylindres voisins tournent à la même vitesse mais en sens contraire, l'écoulement est élongationnel. Ce système ne permet pas d'effectuer de mesures rhéologiques, mais est particulièrement adapté pour les mesures optiques de type biréfringence et diffusion de la lumière. Le temps de résidence d'une molécule au point d'arrêt est infini.

b) Jets opposés [38,39]

Ce dispositif consiste dans l'immersion de deux aiguilles creuses en regard dans le fluide étudié (fig 1.17). On mesure la force F qui s'exerce sur les aiguilles et qui est due au flux de fluide sortant des aiguilles (injection) ou y entrant (pompage). On crée ainsi une extension uniaxiale (pompage) ou une compression (injection) par simple inversion du sens de l'écoulement. La force donne la contrainte $\sigma \sim F/S$ où S est la section des aiguilles ; le taux d'élongation est calculé à partir du débit Q et de la distance D entre les aiguilles : $\dot{\epsilon} \sim Q/SD$. Finalement, la viscosité élongationnelle est $\mu_E \sim FD/Q$. Ce dispositif, commode d'utilisation, permet à la fois des observations et des mesures rhéologiques sur des solutions de faible viscosité à forts taux d'élongation (jusqu'à $5000s^{-1}$).

IV.2.2 Dispositifs de filage

La création d'un écoulement par étirement du fluide étudié sous forme de fil permet d'obtenir un écoulement élongationnel approximativement uniaxial. Le profil d'écoulement n'est pas imposé et fait partie de la réponse du fluide à la sollicitation.

a) Rhéomètre spin-line [30,40]

On enroule autour d'un cylindre tournant le fluide qui s'écoule de l'extrémité d'un tube coudé (fig 1.18). La longueur du fil obtenu peut atteindre 200mm.

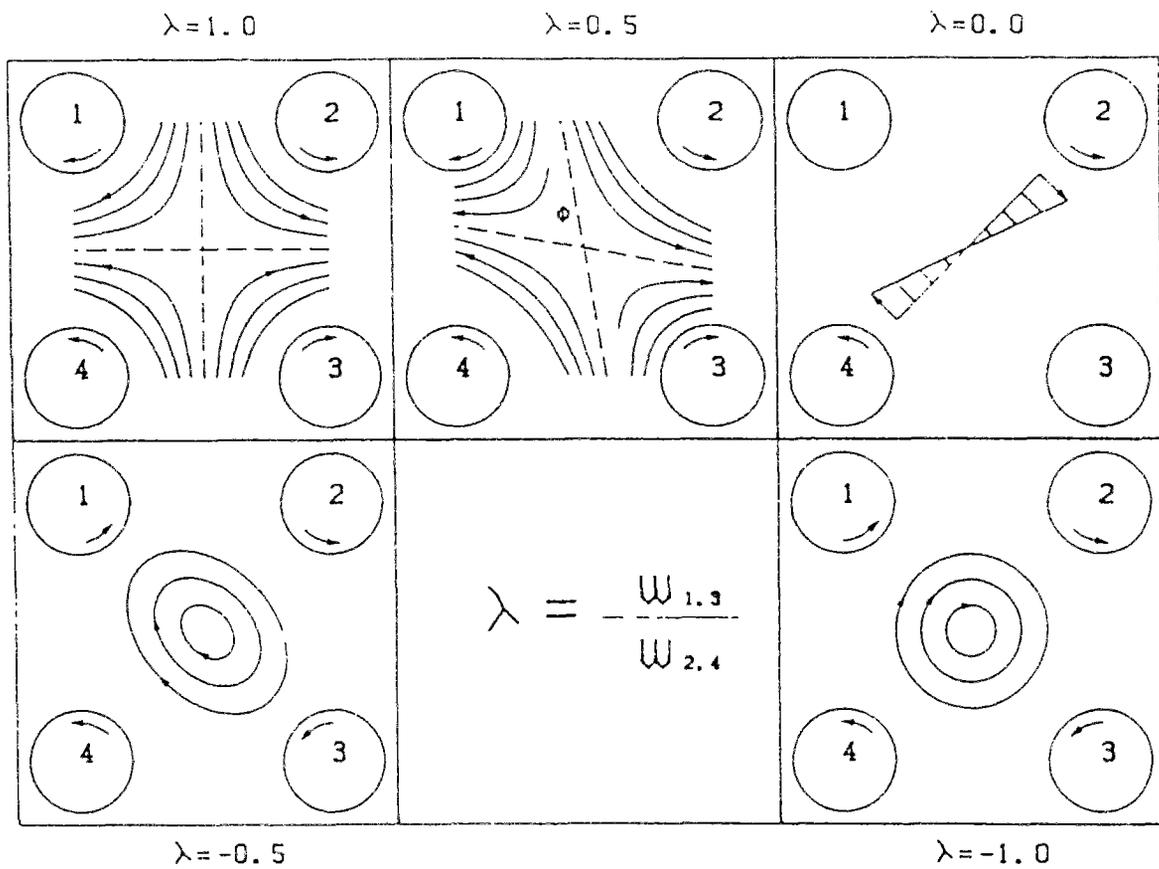


Figure 1.16

Dispositif à cylindres rotatifs, d'après [37]. Chaque figure illustre l'aspect du champ de vitesse pour différentes valeurs de λ , rapport des vitesses relatives des deux couples de cylindres opposés.

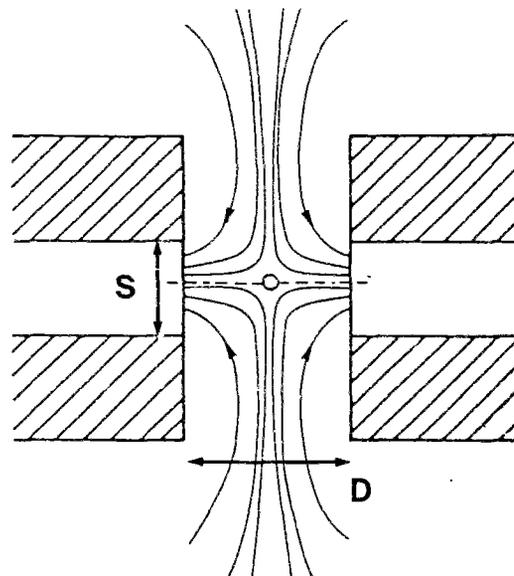


Figure 1.17

Jets opposés, d'après [38].

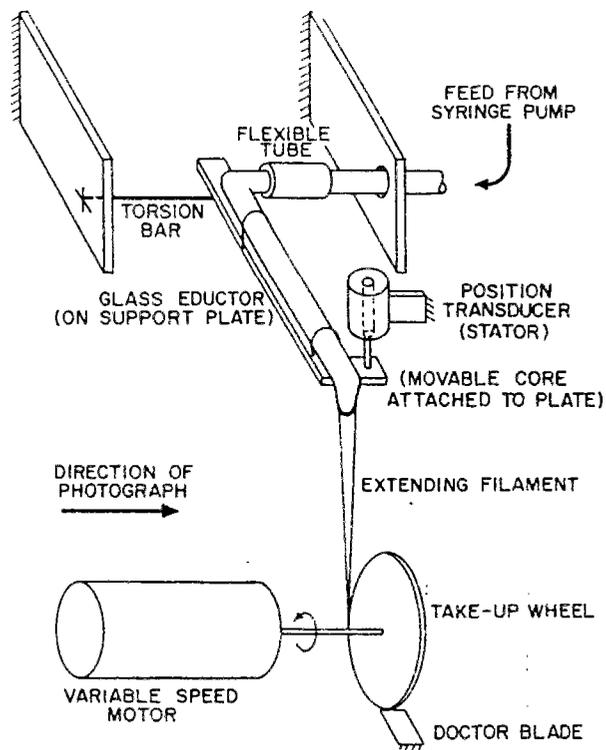


Figure 1.18

Rhéomètre Spin-line, d'après [40].

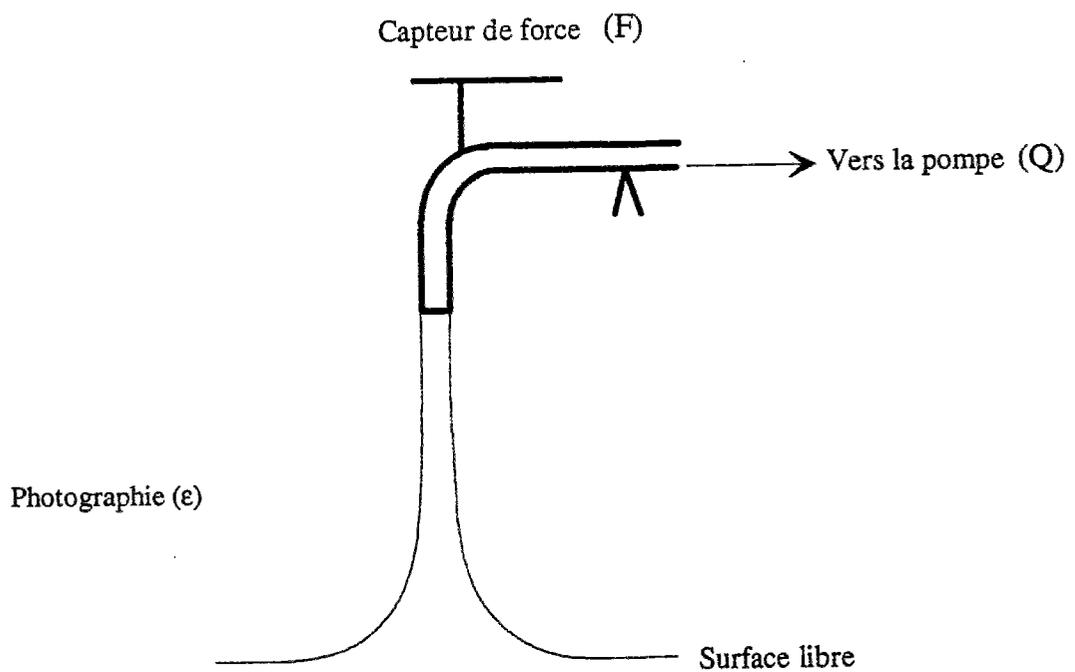


Figure 1.19

Schéma du siphon.

b) Siphon [41,42]

Une fois établi l'écoulement obtenu en pompant un fluide viscoélastique dans un réservoir à l'aide d'un tube vertical (fig 1.19), il est possible de lever le tube au dessus de la surface libre du réservoir (jusqu'à 70mm) sans interrompre l'écoulement.

Dans le cas du siphon comme dans celui du rhéomètre spin-line, la vitesse de l'écoulement résulte du débit du fluide qui s'écoule dans le tube : $V(z) \sim Q/\pi R^2(z)$. On mesure la force F qui s'exerce sur l'extrémité du tube, ce qui donne la contrainte σ , et on relève le profil de l'écoulement $R(z)$ en fonction de la hauteur, ce qui donne accès au taux de déformation $\dot{\epsilon}(z) = dV/dz$. Ces deux dispositifs sont adaptés à une classe limitée de fluides susceptibles de "filer", en général fortement viscoélastiques, de viscosité élongationnelle élevée (plus de 20 fois la viscosité de cisaillement), et sont limités à des taux d'élongation faibles (de 1 à $10s^{-1}$). De plus les rôles de la gravité, de la tension interfaciale, et du transitoire sont parfois non négligeables. Le temps de séjour du fluide étudié dans la zone d'élongation est fixé par le débit et la longueur du fil. Il faut remarquer que Mewis et Metzner ont utilisé le dispositif de filage avec succès pour des suspensions de fibres dont il ont mesuré la viscosité élongationnelle [30].

c) Dispositifs à élongation spécifiée [43]

Une dernière variante des dispositifs de filage (fig 1.20) présente l'originalité d'imposer le taux d'élongation $\dot{\epsilon}$. Le fluide à étudier est placé entre deux plateaux, le plateau inférieur se déplaçant vers le bas suivant la loi de déplacement $z=z_0 \exp(kt)$. La longueur du fil variant comme $\ell=\ell_0 \exp(kt)$, il est facile de montrer que le taux d'élongation est $\dot{\epsilon}=k$. La force qui s'exerce sur le plateau supérieur donne la valeur de la contrainte.

IV.2.3 Ecoulements dans des conduites de section variable

Le principe consiste à générer des gradients élongationnels en faisant varier la section de la conduite où s'écoule le fluide (figure 1.21). A débit Q donné, la vitesse suivant l'axe z varie fortement avec la section $S(z)$ suivant: $V(z) \sim Q/S(z)$, ce qui peut conduire à des taux d'élongation importants suivant z .

Les types de géométries rencontrées sont extrêmement variés. On distingue [44] :

- les géométries axisymétriques (écoulement à travers un orifice circulaire) et les géométries bidimensionnelles (écoulement à travers une fente rectangulaire).
- les sections continûment variables (convergentes ou divergentes à profils hyperboliques ou coniques) et les sections discontinues (orifice, contraction). Sur la figure 1.21 sont représentés une contraction et un convergent conique.

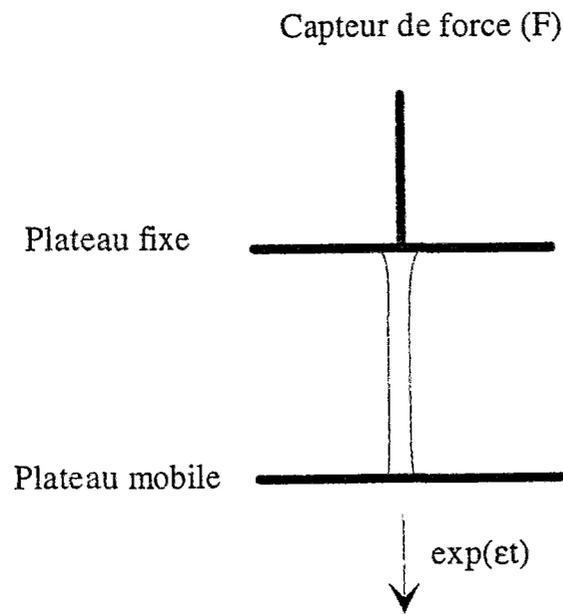


Figure 1.20

Schéma du dispositif à élongation spécifiée.

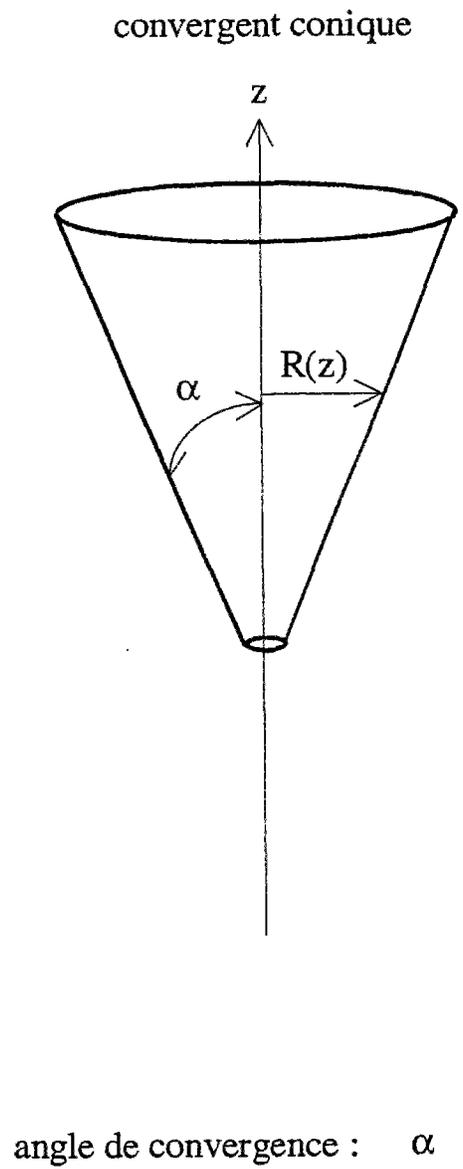
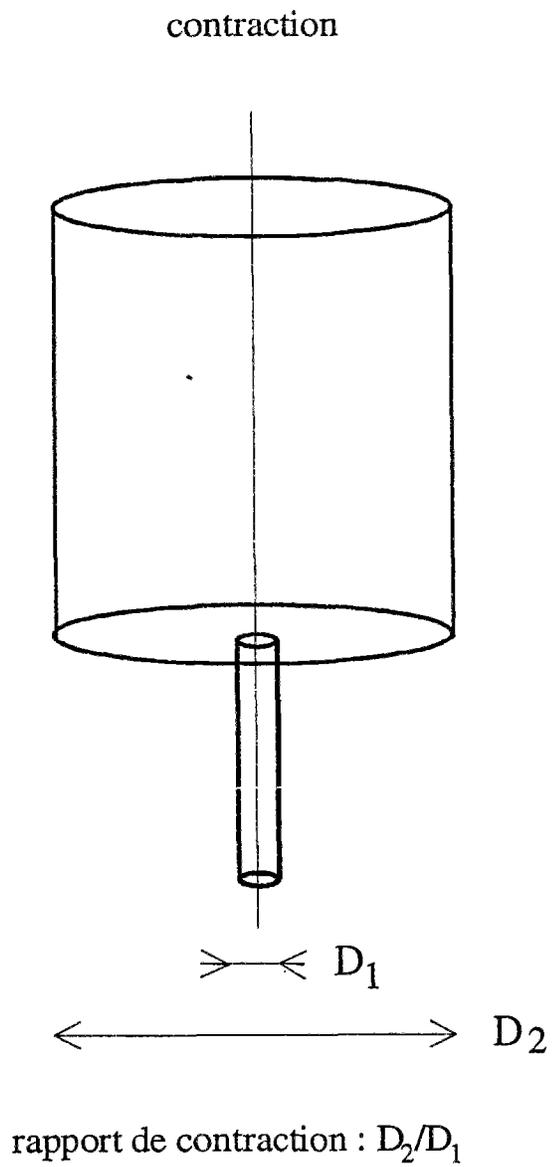


Figure 1.21

Deux exemples d'écoulement à section variable : contraction et convergent conique.

Dans tous les cas, ces écoulements sont faciles à mettre en oeuvre. On peut imposer soit la déformation (débit) soit la contrainte (différence de pression entre deux points) et les mesurer facilement. Les taux d'élongation sont de l'ordre de 10^3s^{-1} pour les écoulements à travers un orifice ou une contraction. Les fluides utilisés sont très variés : on trouve dans la littérature des solutions de polymères dans des conduites coniques [45], dans des contractions [46], à travers un orifice [47], et des suspensions de fibres dans des contractions [48,49].

Pour accéder à la viscosité élongationnelle du fluide étudié, qui ne peut pas être déduite directement des mesures de débit et de pression, il est nécessaire de connaître le champ de vitesse de l'écoulement [50]. Or, celui-ci est complexe, et présente de fortes variations spatiales entre des régions où l'élongation est prépondérante et des régions où le cisaillement l'emporte. De plus, l'existence de conditions aux limites compliquées rend difficile la connaissance analytique du champ de vitesse en tout point.

IV.2.4 Conclusion

Les caractéristiques des différents écoulements à composantes élongationnelles que nous venons de discuter sont résumées dans le tableau suivant.

	écoulements à point d'arrêt	dispositifs de filage	écoulements à section variable
taux d'élongation (s^{-1})	5000	10	1000
types de fluides	tous fluides	fluides viscoélastiques de grande viscosité	tous fluides
mesures rhéologiques	(jets opposés) viscosité élongationnelle	(tous) viscosité élongationnelle	mesures indirectes
mesures optiques	visualisation, diffusion, biréfringence	difficiles	visualisation
temps de séjour	infini au point d'arrêt	fixé par le débit et la longueur du fil	déformation totale importante

Malgré les quelques limitations que présentent les écoulements à section variable, c'est sur cette dernière catégorie d'écoulements que s'est porté notre choix pour la mise en oeuvre d'un écoulement à composantes élongationnelles. Nous avons choisi de réaliser un écoulement à travers un orifice en géométrie axisymétrique, qui présente les avantages suivants :

- ce dispositif est facile à mettre en oeuvre et les paramètres de l'écoulement sont aisément contrôlables et mesurables,
- il est adapté à l'étude de suspensions de particules allongées macroscopiques que nous voulons mener, aussi bien en ce qui concerne la dimension de l'écoulement par rapport à la taille des particules étudiées, qu'en ce qui concerne les ordres de grandeur attendus pour la viscosité élongationnelle ; les géométries utilisant des contractions sont moins adaptées pour nos particules à cause des dimensions réduites du capillaire de sortie, dans lequel le cisaillement est par ailleurs très important,
- il se prête facilement à des visualisations par plan laser qui permettent d'étudier la structure locale et globale de l'écoulement,
- la géométrie axisymétrique (orifice circulaire) présente certains avantages par rapport à la géométrie bidimensionnelle (fente) pour des raisons qui apparaîtront dans la suite de ce travail.

Nous allons dans le chapitre 2 décrire de manière détaillée la géométrie de la cellule d'écoulement choisie, ainsi que les critères qui ont été utilisés pour son dimensionnement. De plus, nous présenterons une caractérisation expérimentale du champ de vitesse et de déformation de l'écoulement ainsi obtenu, qui n'a jamais été décrite dans la littérature.

CHAPITRE 2

Mise en oeuvre et caractérisation de l'écoulement à composantes élongationnelles

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'écoulement de base newtonien à composantes élongationnelles que nous avons utilisé dans nos expériences.

Dans une première partie, qui concerne le montage expérimental, nous décrivons d'abord les caractéristiques de la cellule à orifice circulaire que nous avons choisie de mettre en oeuvre pour réaliser l'écoulement à composantes élongationnelles, puis les différents types de mesures que permet le montage.

Dans la deuxième partie, nous présentons la caractérisation expérimentale de l'écoulement dans la cellule. Les résultats expérimentaux sont ensuite comparés dans la troisième partie avec l'écoulement dans une plaque infinie percée d'un orifice axisymétrique, pour lequel nous disposons d'une solution analytique.

Enfin, dans la dernière partie, une comparaison analytique entre la géométrie axisymétrique (écoulement à travers un orifice circulaire) et la géométrie plane (écoulement à travers une fente rectangulaire) permet de préciser les spécificités de ces deux types d'écoulements à composantes élongationnelles.

PLAN DU CHAPITRE 2

I. DESCRIPTION DU MONTAGE EXPERIMENTAL

p.69

I.1 La cellule d'écoulement

I.1.1 Description générale

I.1.2 Critères de dimensionnement

I.2 Mesures de débit et de pression

I.2.1 Mesures de débit

I.2.2 Mesures de pression

I.3 Visualisation par plan laser

I.3.1 Propriétés des faisceaux gaussiens

I.3.2 Caractéristiques du faisceau laser utilisé

I.3.3 Le plan laser

II. CARACTERISATION EXPERIMENTALE DU CHAMP DE VITESSE NEWTONIEN

p.87

II.1 Fluides utilisés

II.1.1 Choix des fluides

II.1.2 Variation de la viscosité avec la température

II.2 Relation contrainte-débit

II.2.1 Protocole expérimental

II.2.2 Relation contrainte-débit

II.3 Champ de vitesse

II.3.1 Protocole expérimental

II.3.2 Lignes de courant

II.3.3 Mesures de vitesse

III. COMPARAISON AVEC L'ÉCOULEMENT A TRAVERS UNE PLAQUE INFINIE

p.105

III.1 Solution analytique de l'écoulement à travers un orifice dans une plaque infinie

III.1.1 Système de coordonnées sphéroïdales

III.1.2 Détermination de la fonction de courant

III.1.3 Champ de vitesse sur l'axe

III.1.4 Différence de pression due à la traversée de l'orifice

III.2 Comparaison entre l'écoulement dans la cellule expérimentale et l'écoulement à travers une plaque infinie

III.2.1 Champ de vitesse sur l'axe

III.2.2 Relation contrainte-débit

III.2.3 Champ de déformation

III.2.4 Conclusion

III.3. Comparaison entre la géométrie axisymétrique et la géométrie plane

III.3.1 Champ de vitesse

III.3.2 Champ de déformation

III.3.3 Conclusion

ANNEXE : Calcul du champ de vitesse de l'écoulement à travers une fente rectangulaire dans une plaque infinie. p.124

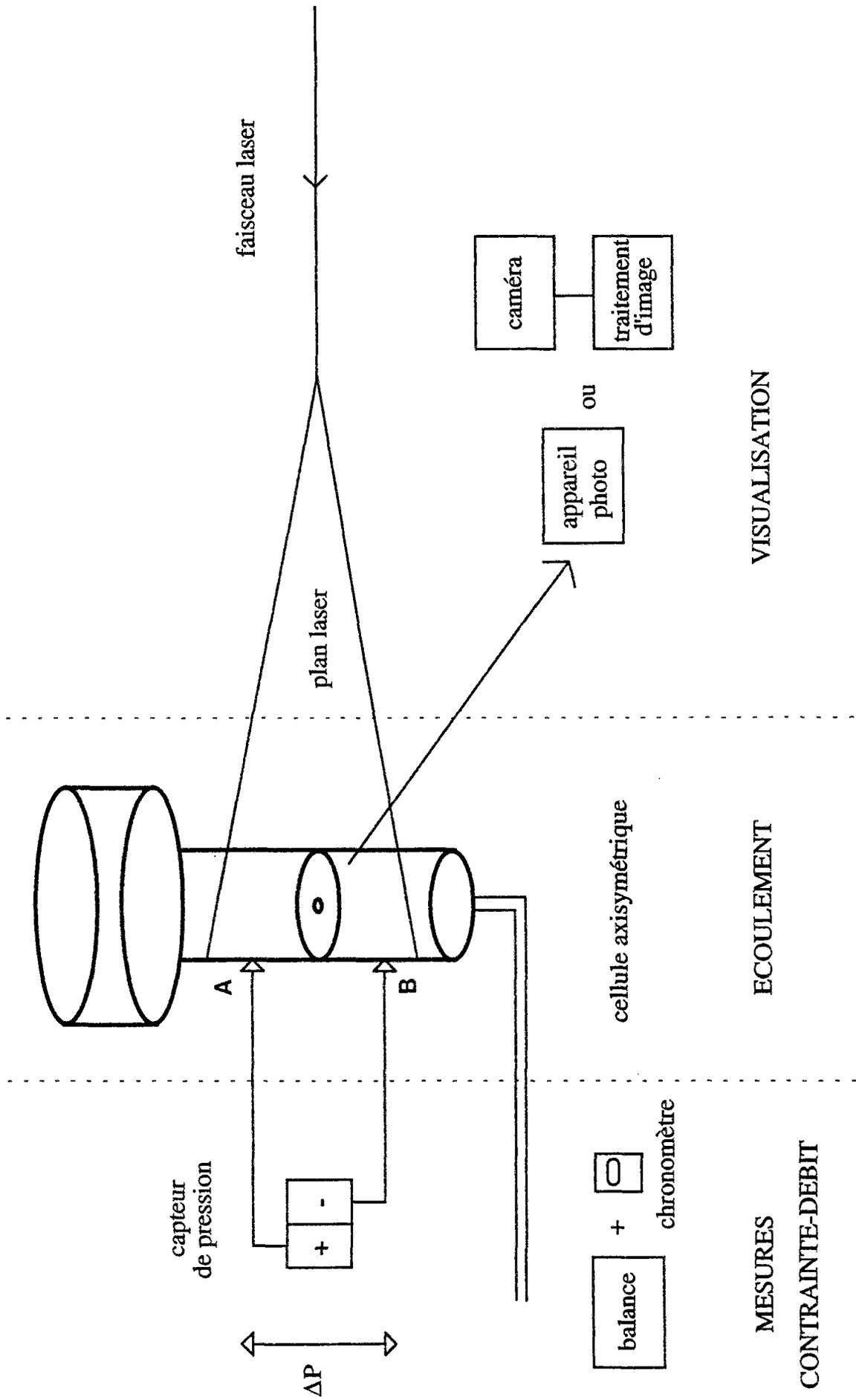


Figure 2.1

Schéma d'ensemble du montage expérimental.

I. DESCRIPTION DU MONTAGE EXPERIMENTAL

Le dispositif expérimental que nous avons installé pour cette étude comporte trois parties distinctes et indépendantes (figure 2.1) qui sont détaillées successivement dans ce paragraphe:

- une partie *écoulement* proprement dite, constituée de la cellule à orifice axisymétrique où s'écoule le fluide étudié,
- une partie *mesures globales* consacrée aux propriétés macroscopiques de l'écoulement, et qui comporte une balance de précision pour la mesure du débit et un capteur de pression pour la mesure de la différence de pression associée à la traversée de l'orifice,
- une partie *visualisation* qui comprend d'une part le dispositif optique nécessaire à la réalisation d'un plan laser, et d'autre part un dispositif d'observation qui peut être un appareil photo ou une caméra vidéo associée à un traitement d'images.

I.1 La cellule d'écoulement

I.1.1 Description générale

Pour permettre la visualisation, la cellule d'écoulement a été réalisée en plexiglas transparent (d'indice optique 1.50). Elle est constituée d'un tube cylindrique vertical de diamètre 24mm dans lequel a été placée à mi-hauteur une plaque horizontale en inox, comportant en son centre un orifice circulaire (figure 2.2). Le tube cylindrique est surmonté d'un réservoir cylindrique de diamètre 130mm. A l'autre extrémité, il est prolongé par un tuyau de sortie souple Rhodorsil de diamètre 8mm.

Le fluide s'écoule par gravité depuis le réservoir jusqu'à l'extrémité du tuyau de sortie. Dans ce dispositif à contrainte imposée, la contrainte est fixée par la différence de hauteur entre le niveau de la surface libre du fluide dans le réservoir et le niveau de l'extrémité du tuyau de sortie.

Le tube cylindrique est pratiqué dans un carré de plexiglas de 30mm de côté, afin d'obtenir des faces extérieures droites. Ceci est très important pour la visualisation car l'effet de dioptrisme cylindrique entre le plexiglas et l'air est ainsi supprimé. L'effet de dioptrisme plexiglas-suspension est équivalent à celui d'une lentille cylindrique de focale f , avec $f = n_2 R / (n_1 - n_2)$ où $n_1 = 1.50$ est l'indice optique du plexiglas, $n_2 = 1.48$ celui du milieu suspendant, et R le rayon de la cellule. Il en résulte que f est de l'ordre de 900mm ; l'action de ce dioptrisme sera négligée dans la suite. En pratique, le tube cylindrique a été réalisé en deux parties correspondant respectivement à l'amont et à l'aval de l'orifice; chaque élément a été alésé au tour dans le carré de plexiglas, puis poli soigneusement afin d'obtenir un état de surface satisfaisant pour

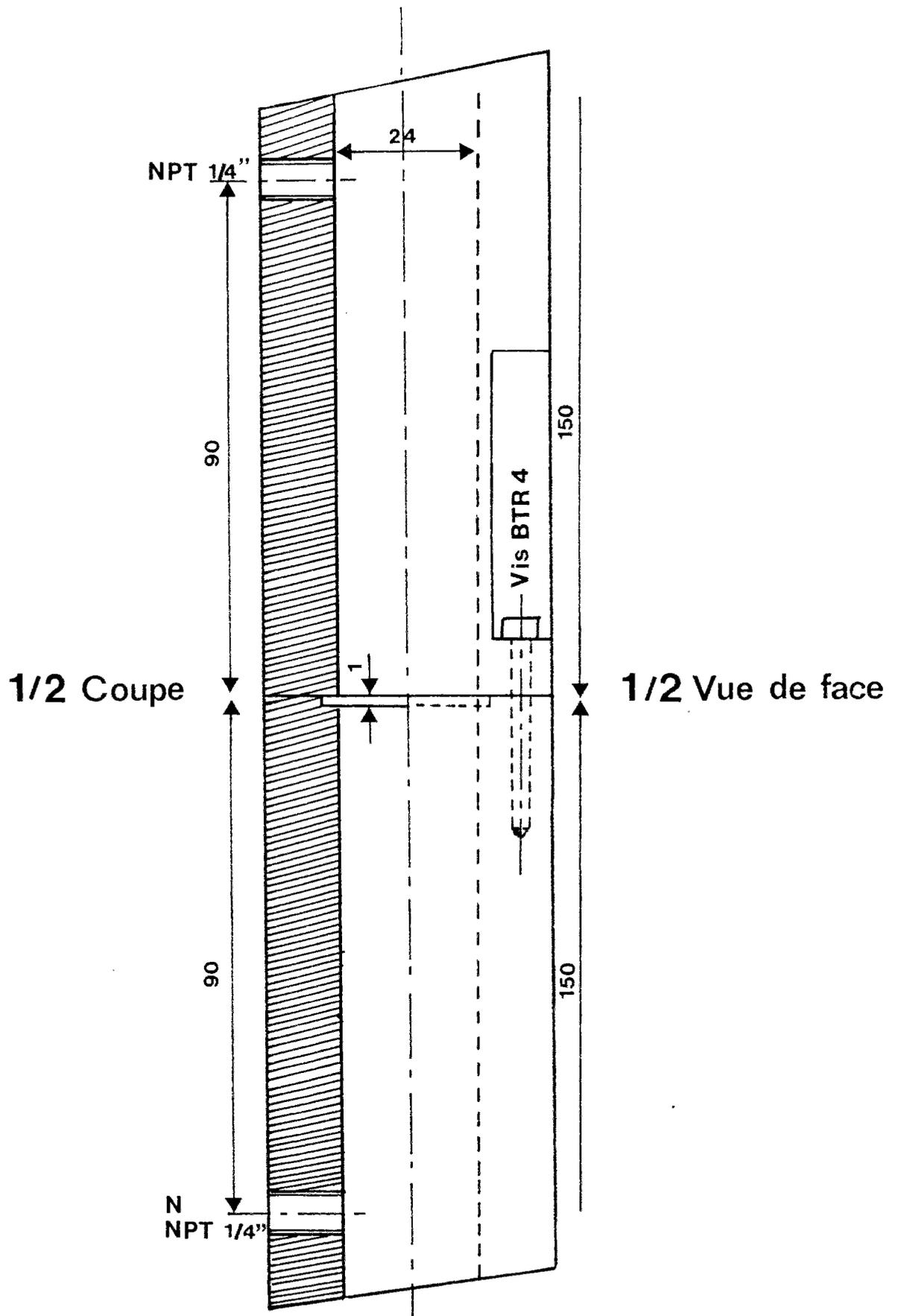


Figure 2.2

Vue générale de la cellule d'écoulement.

les observations optiques. La partie amont et la partie aval de l'orifice sont assemblées et maintenues solidaires à l'aide d'un système de fixation par vis BTR disposées en dehors des trajets optiques. Nous avons assuré l'étanchéité au niveau de l'orifice en réalisant un joint souple de silicone.

I.1.2 Critères de dimensionnement

a) Diamètre de l'orifice

Le diamètre de l'orifice, $2c$, fixe l'ordre de grandeur des gradients élongationnels qui sont obtenus en amont (et en aval) de l'orifice. Les ordres de grandeur des gradients obtenus seront analysés au paragraphe III.2.4. Ceux-ci sont d'autant plus importants que le diamètre est faible. En pratique, nous avons pris $2c$ égal à 1mm, ce qui est la valeur minimale admissible compte-tenu de la dimension des fibres dont la longueur est comprise entre 0.5 et 2 mm. La difficulté de réalisation de l'orifice et les délais nécessaires ne nous ont pas permis de disposer de diamètres différents. Notons que nous n'avons pas observé de phénomène de colmatage pour les suspensions que nous avons étudiées.

b) Diamètre de la cellule

En écoulement newtonien, l'étendue de la zone élongationnelle en amont de l'orifice est d'autant plus grande que le rapport de contraction de la cellule, défini comme le rapport R/c , est grand, R étant le rayon de la cellule (paragraphe III.2.4). La valeur que nous avons fixée, $R = 12\text{mm}$, assure un bon compromis entre d'une part la nécessité d'assurer une zone élongationnelle étendue, et d'autre part la possibilité d'observer les suspensions, qui ne sont pas parfaitement transparentes, par voie optique. Ce point sera discuté en détail au paragraphe II. Les expériences dans des géométries voisines rapportées dans la littérature sont réalisées le plus souvent avec des rapports de contraction plus faibles [46,48,51,52].

c) Hauteur du tube cylindrique

Afin d'éviter toute interaction entre la zone élongationnelle qui nous intéresse au voisinage de l'orifice et l'entrée du tube au niveau du réservoir, ou sa sortie au niveau du tube souple, nous avons prévu des longueurs de tube importantes de part et d'autre de la plaque (150mm). Cette longueur est le maximum compatible avec la réalisation de l'alésage ; nous verrons qu'elle est suffisante.

d) Diamètre du réservoir

Le dimensionnement du réservoir qui surmonte le tube cylindrique et alimente la cellule répond à la nécessité d'imposer une contrainte donnée constante pendant un temps suffisamment long, pour assurer l'établissement du régime permanent, et pour permettre

simultanément les observations et les mesures : photos à temps de pose long et mesures de débit sur des intervalles de temps de l'ordre de la minute.

Pour cela, il est nécessaire que la différence de hauteur entre le niveau supérieur du fluide dans le réservoir et l'extrémité du tube de sortie varie très lentement au cours du temps. La position du tube de sortie étant fixée pour une contrainte donnée, il est nécessaire de minimiser le déplacement de la surface libre du liquide dans le réservoir. Nous avons donc construit un réservoir cylindrique de grand diamètre égal à $D=130\text{mm}$. La vitesse de déplacement de la surface libre pour un débit Q est Q/S , où $S=4Q/\pi D^2$. Pour les débits maxima étudiés ($Q = 0.3\text{cm}^3\text{s}^{-1}$), cette vitesse vaut $2,2 \cdot 10^{-2}\text{mms}^{-1}$, ce qui correspond à un déplacement de la surface libre de l'ordre de 1mm pendant une minute; cette valeur est très inférieure à la différence de hauteur totale entre la surface libre et le tube de sortie (supérieure à 100mm).

e) Diamètre du tube de sortie

Le tube souple doit être de grande longueur pour permettre un positionnement aisé de son extrémité à différentes hauteurs. Son diamètre doit être suffisamment grand pour s'assurer que la chute de pression dans le tube soit au plus du même ordre de grandeur que la chute de pression au niveau de l'orifice. Un calcul de l'ordre de grandeur de la chute de pression dans ce tube pour les fluides utilisés, dont la viscosité est de l'ordre de 500cP (1cP=1mPas), nous a conduit à choisir un diamètre de 8 mm.

f) Epaisseur de la plaque

La partie la plus délicate de la réalisation de la cellule réside dans le choix du profil de l'orifice et dans l'usinage de celui-ci.

Dans un premier temps, nous avons utilisé une simple plaque en inox d'épaisseur 1mm percée d'un orifice de profil cylindrique. Ce dispositif donne lieu à des effets de jet immergé en sortie de l'orifice, en particulier à faible débit (fig 2.3), au lieu de l'écoulement symétrique de part et d'autre de l'orifice qui est attendu pour ce type d'écoulement à faible nombre de Reynolds. Nous avons attribué ce phénomène à des effets de paroi dus à l'épaisseur importante de la plaque devant le diamètre de l'orifice.

Pour y remédier, il est nécessaire de diminuer l'épaisseur de la plaque au niveau de l'orifice. Nous avons repris pour cela la solution adoptée à la référence [53]. Une coupe de la plaque est présentée sur la figure 2.4 : le profil conique permet de diminuer l'épaisseur de la plaque de $500\mu\text{m}$ à $50\mu\text{m}$ sur les bords de l'orifice. La réalisation a été assurée par un atelier de micromécanique [54].

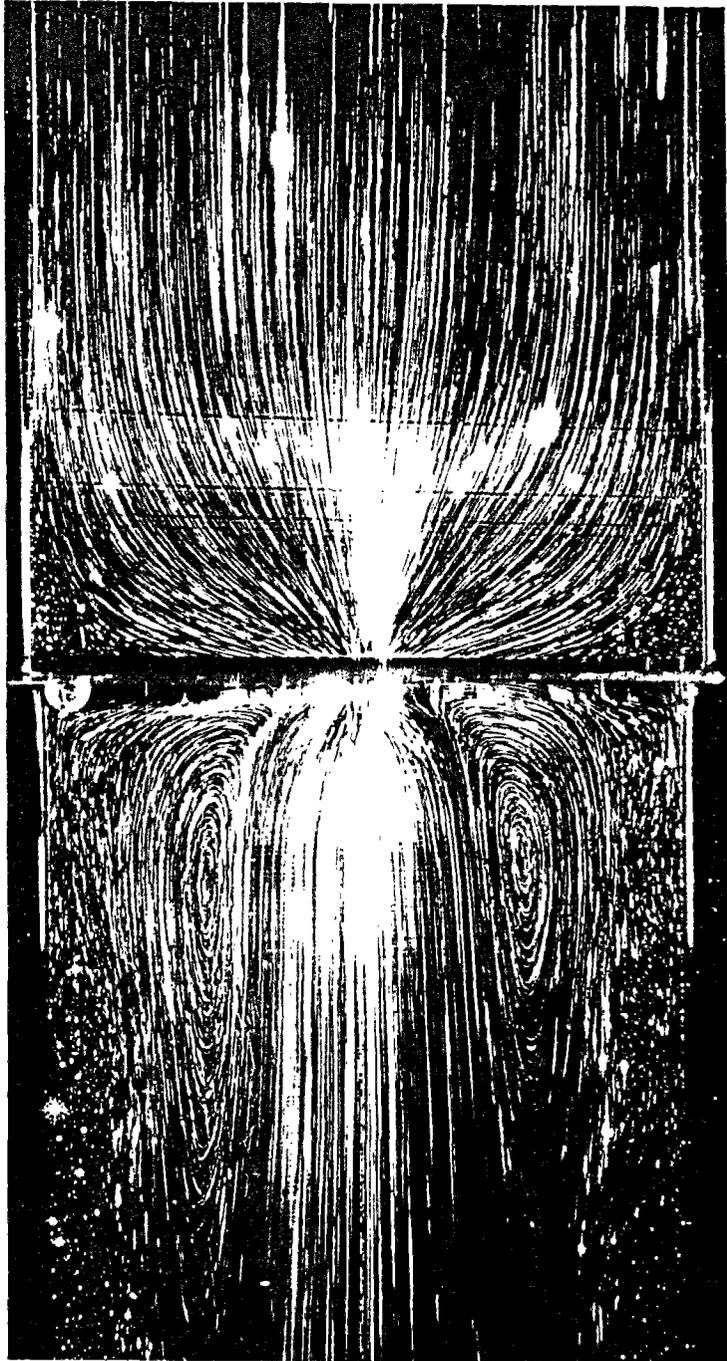


Figure 2.3

Photographie à temps de pose long montrant les lignes de courant obtenues avec une épaisseur de plaque de 1mm au niveau de l'orifice. Les effets de paroi épaisse sont responsables de l'existence d'un jet immergé à la sortie de l'orifice (le débit de l'écoulement est de l'ordre de $10^{-2}\text{cm}^3/\text{s}$, le temps de pose est de 2mn).

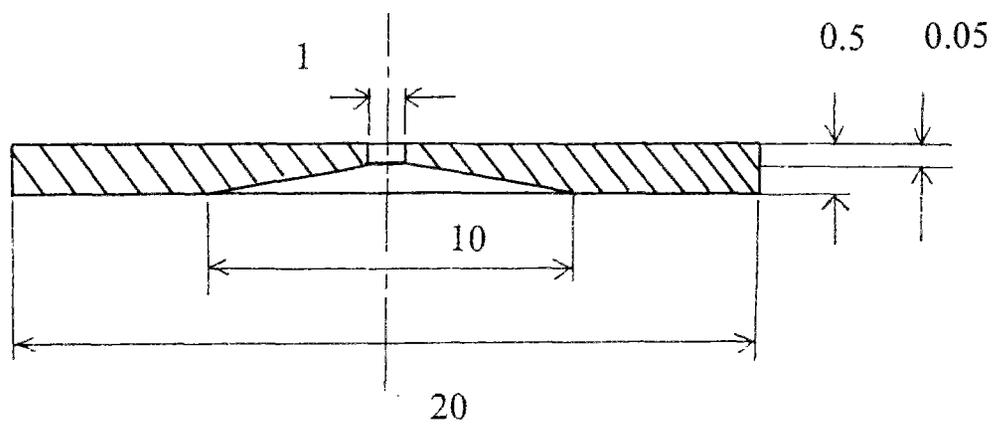


Figure 2.4

Coupe de la plaque et profil de l'orifice axisymétrique réalisés par [54].

g) Prises de pression

Deux prises de pression sont réalisées à 90mm de part et d'autre de l'orifice (fig 2.2) en des points A et B où l'écoulement est complètement établi et ne subit aucune influence de la part de l'orifice, du réservoir, ou du tube de sortie. Ces prises de pression sont deux orifices de diamètre 4mm équipés de raccords NPT 1/4" en inox de type Swagelock. Le pas conique du filetage assure une étanchéité complète.

I.2 Mesures de débit et de pression

I.2.1 Mesures de débit

Nous rappelons que dans ce dispositif à contrainte imposée, nous fixons la différence de hauteur entre le niveau supérieur de fluide dans le réservoir de la cellule et le niveau du tube de sortie. Il en résulte un écoulement par gravité du haut vers le bas de la cellule, dont nous mesurons le débit par pesée, à l'aide d'une balance de précision et d'un chronomètre.

L'incertitude sur la mesure du débit provient à la fois de l'erreur sur la lecture du chronomètre et de l'erreur sur la mesure de la masse. L'erreur relative sur la mesure du temps peut être minimisée en choisissant des intervalles de temps assez grands, pendant lesquels nous savons par ailleurs que le débit ne varie pratiquement pas grâce au réservoir supérieur de grande section. En estimant l'erreur à une seconde sur la lecture du chronomètre, l'erreur relative est égale à 1/60 sur des intervalles de temps de l'ordre de la minute.

L'erreur sur la lecture de la masse sur l'écran de la balance est faible, puisque les débits étudiés restent suffisamment faibles pour permettre une lecture facile de la masse instantanée. En pratique, nous avons observé que la mesure du débit par pesée est reproductible à 1% près.

I.2.2 Mesures de pression

La différence de pression entre les deux points situés à 90mm de part et d'autre de l'orifice est mesurée à l'aide d'un capteur de pression différentiel.

a) Principe du capteur de pression différentiel

Le capteur de pression différentiel permet de mesurer uniquement des différences de pression entre deux points. Il est constitué de deux cavités, ou chambres, remplies de fluide, et séparées par une membrane mobile (fig 2.5). La différence de pression de part et d'autre de la membrane entraîne le déplacement de celle-ci. Un élément sensible à inductance variable enregistre ce déplacement. Un dispositif électronique permet de convertir la variation

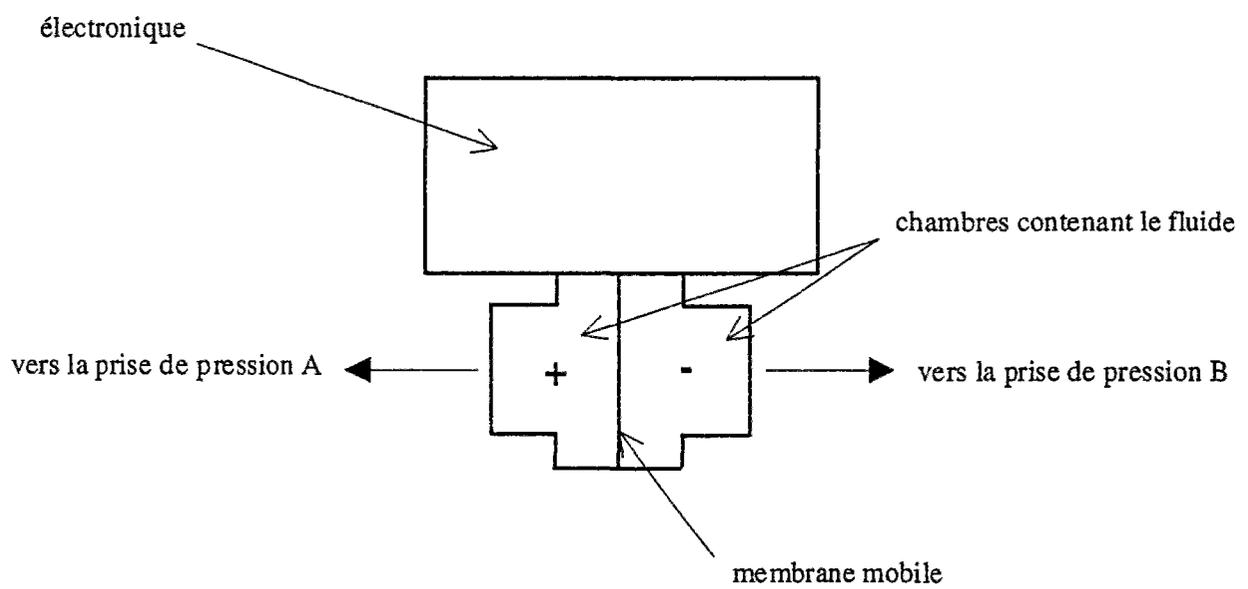


Figure 2.5

Schéma de principe du capteur de pression différentiel.

d'inductance en un signal haut-niveau en tension, directement proportionnel à la différence de pression.

Nous avons utilisé un capteur différentiel unidirectionnel dont la membrane ne se déplace que dans un sens. Son étendue de mesure va de 0 à 100mbar, ce qui est bien adapté aux ordres de grandeurs attendus dans la cellule. Le capteur fonctionne avec une alimentation de 15 mA, le signal de sortie est compris entre -0.5 et 5 V.

b) Etalonnage et erreur sur la mesure

Nous avons étalonné le capteur de pression par de simples mesures de pression hydrostatique en utilisant un mélange eau-glucose (fig 2.6). Ceci a permis le réglage du zéro correspondant à des différences de pression nulles, et la vérification des données du constructeur (5V de signal de sortie correspondant à 100mbar).

Le constructeur certifie une précision de mesure meilleure que $\pm 0.5\%$ de l'étendue de mesure, ce qui correspond à une erreur sur le signal de sortie de $\pm 0.025V$, soit de $\pm 0.5mbar$.

c) Montage sur la cellule et signification de la mesure

Chacune des chambres du capteur est reliée à la prise de pression correspondante sur la cellule par l'intermédiaire de tuyaux souples en Rhodorsil. Le fluide qui s'écoule dans la cellule sert aussi à remplir les tuyaux souples et les chambres du capteur, transmettant ainsi les pressions qui règnent au niveau des deux prises de pression A et B.

En l'absence d'écoulement, aucune différence de pression n'est enregistrée puisque la pression hydrostatique qui règne dans chacune des chambres du capteur est la même. Examinons le cas où un écoulement permanent est établi du haut vers le bas dans la cellule. La quantité transmise jusqu'à la membrane du capteur par le fluide (incompressible) contenu dans le tuyau souple est la contrainte normale totale exercée par le fluide au niveau de la prise de pression [55], soit :

$$(\Sigma_{\rho\rho})_i = (-P + T_{\rho\rho})_i \quad i=A \text{ ou } B$$

où $\Sigma_{\rho\rho}$ est la composante radiale de la contrainte totale et $T_{\rho\rho}$ est la composante radiale de la contrainte de viscosité (fig 2.7). Or nous avons choisi la position verticale des prises de pression A et B de manière à ce qu'elles soient situées dans des sections où l'écoulement est établi. Ceci implique que la contrainte normale en A $(T_{\rho\rho})_A$ est identique à la contrainte normale en B $(T_{\rho\rho})_B$, quelle que soit la nature du fluide étudié. Le capteur de pression mesure donc la différence:

$$(-P + T_{\rho\rho})_B - (-P + T_{\rho\rho})_A = P_A - P_B$$

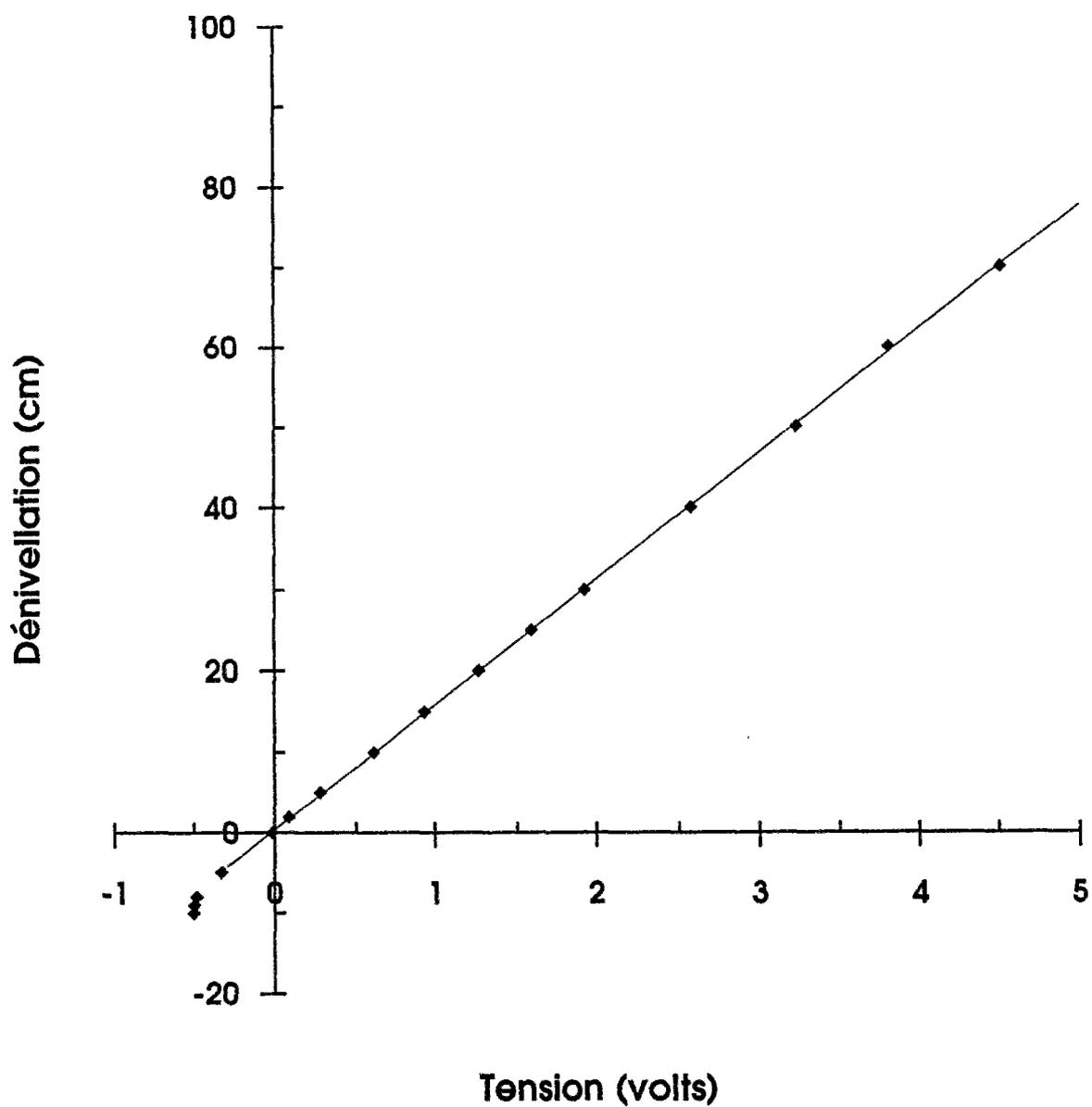


Figure 2.6

Courbe d'étalonnage du capteur différentiel par mesures de pression hydrostatique. Le fluide utilisé est un mélange eau-glucose de densité $\rho=1.30\pm 0.1 \text{ g/cm}^3$. Sur l'axe horizontal, 1Volt représente 20mbar.

$$\Sigma_{\rho\rho} = -P + T_{\rho\rho}$$

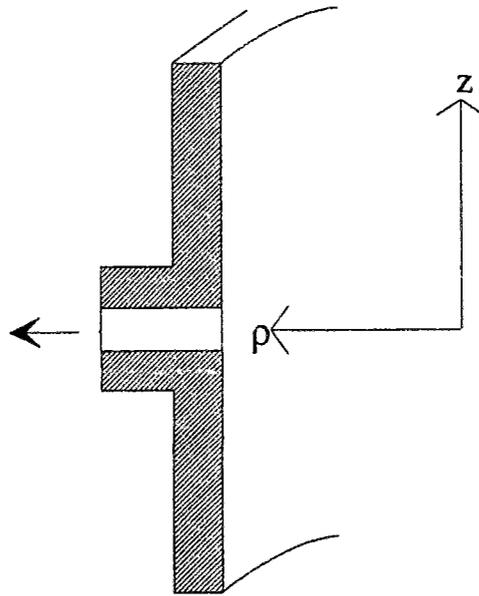


Figure 2.7

Contrainte normale $\Sigma_{\rho\rho} = -P + T_{\rho\rho}$ transmise au capteur de pression.

L'écoulement ayant lieu de A vers B, et la pression étant plus grande avant le franchissement de l'orifice, la différence de pression $P_A - P_B$ est positive.

I.3 Visualisation par plan laser

Le principe de la visualisation par plan laser est de réaliser à l'aide d'un plan laser une coupe plane et lumineuse de l'écoulement, le fluide ayant étéensemencé de petites particules qui réfléchissent la lumière. Lorsqu'on observe le plan laser à 90° , les particules réfléchissantes se détachent sur un fond sombre, matérialisant ainsi le déplacement du fluide.

Nous avons conçu un dispositif optique qui permet d'obtenir un plan laser dont nous contrôlons les caractéristiques géométriques et le positionnement par rapport à la cellule d'écoulement. Ce plan laser est obtenu en interposant différents composants optiques sur le trajet d'un faisceau laser Hélium-Néon (modèle 106 de chez Spectra). Avant d'étudier sa réalisation proprement dite, nous rappelons certaines propriétés des faisceaux gaussiens dont nous aurons besoin.

I.3.1 Propriétés des faisceaux gaussiens

Un faisceau laser possède certaines propriétés qui le différencient d'une onde plane [56]. Considérons un faisceau se déplaçant suivant l'axe Ox. La distribution d'intensité de lumière n'est pas uniforme dans une section transverse du faisceau, mais est concentrée autour de l'axe Ox de propagation suivant une gaussienne, dans le mode fondamental TE_{00} (fig 2.8). Le paramètre $w(x)$ est une mesure de la décroissance de l'intensité avec la distance ρ à l'axe Ox: à la distance $w(x)$ l'intensité vaut $1/e$ fois l'intensité sur l'axe (où $\rho=0$). Nous appelons w le rayon du faisceau dans la section considérée, $2w$ est le diamètre du faisceau. Il faut noter que la distribution d'intensité est gaussienne dans chaque section du faisceau, mais que la largeur du profil d'intensité varie suivant l'axe Ox ; w est donc fonction de x .

Le faisceau gaussien se contracte à un diamètre minimum $2w_0$, en un point de l'axe Ox situé dans la cavité laser et appelé "beam-waist", où le front de l'onde est plan (fig 2.9). Le contour du faisceau $w(x)$ est une hyperbole d'équation :

$$\left(\frac{w(x)}{w_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda x}{\pi w_0^2}\right)^2 \quad (2.1)$$

où w_0 est le rayon au beam-waist
 λ est la longueur d'onde du faisceau
 x est la distance au beam-waist.

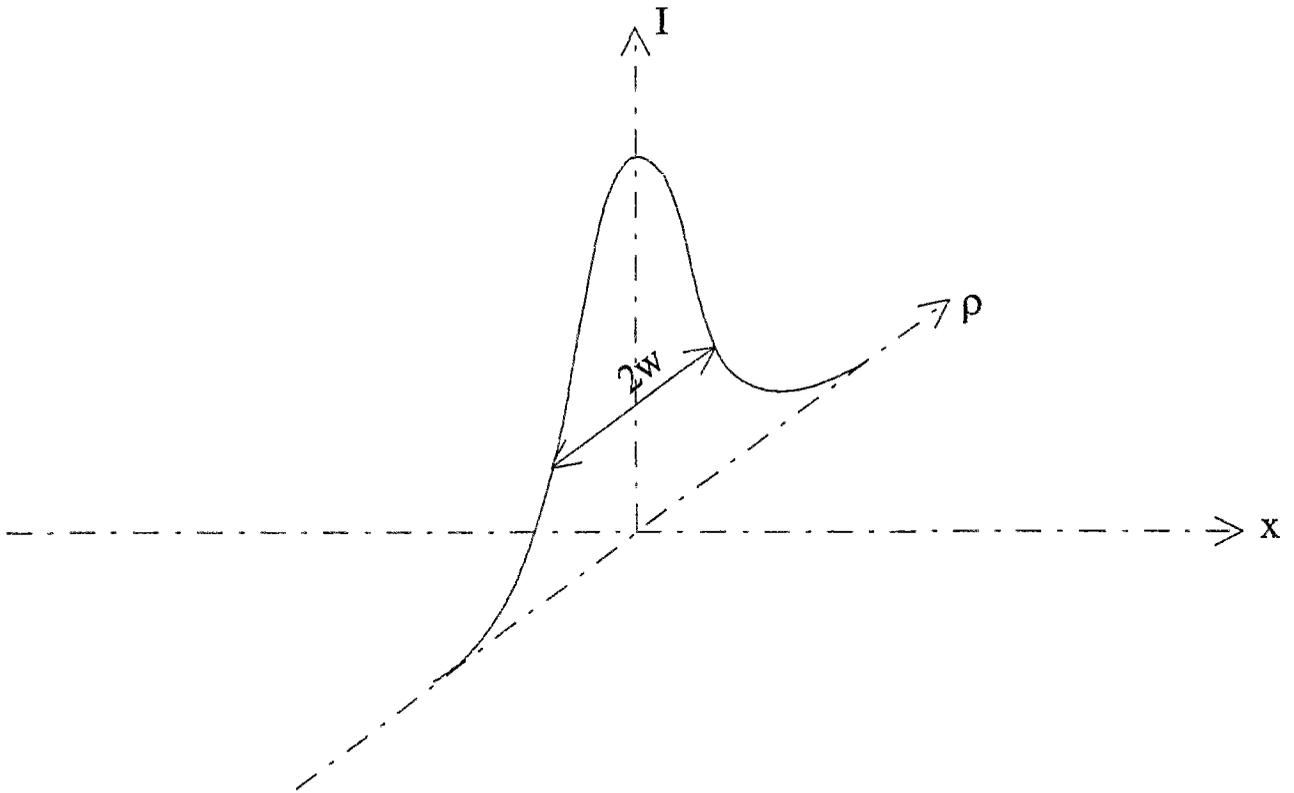


Figure 2.8

Distribution d'intensité dans une section du faisceau laser.
 $w(x)$ définit le rayon du faisceau dans la section d'abscisse x .

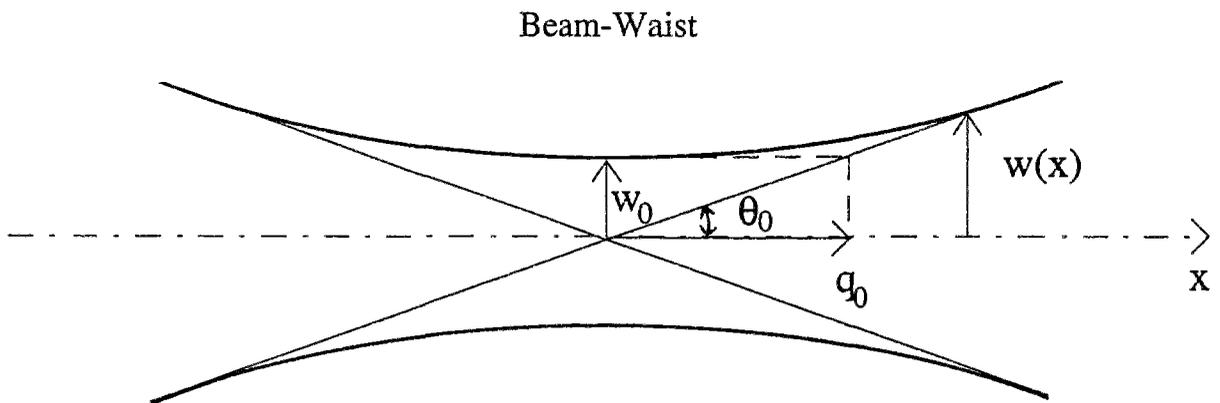


Figure 2.9

Contraction du faisceau laser au beam-waist.
 w_0 est le rayon du faisceau au beam-waist,
 θ_0 la divergence et q_0 la longueur de Rayleigh.

Les asymptotes de l'hyperbole font avec l'axe du faisceau un angle θ_0 qui est appelé la divergence du faisceau, et qui vaut :

$$\theta_0 = \lambda / \pi w_0 \quad (2.2)$$

Nous serons amenés à discuter dans la suite une dernière quantité importante qui est la longueur q_0 sur laquelle l'onde est approximativement plane (longueur de Rayleigh) :

$$q_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{w_0}{\theta_0} \quad (2.3)$$

I.3.2 Caractéristiques du faisceau laser utilisé

C'est un faisceau laser HeNe de puissance 15mV. Le constructeur indique :

- la longueur d'onde : $\lambda = 0.6328\mu\text{m}$
- la divergence : $\theta_0 = 6.10^{-4}\text{rad}$
- le diamètre du faisceau en sortie de la cavité laser : 0.680mm.

Ces caractéristiques seront utiles par la suite pour appliquer les lois de l'optique à ce faisceau laser. Dans l'immédiat, elles permettent de déterminer, à l'aide des relations (2.1), (2.2), et (2.3) :

- le rayon du faisceau au beam-waist : $w_0 = 0.335\text{mm}$
- la position du beam-waist dans la cavité laser, qui est situé à $x_s = 96\text{mm}$ de la fenêtre de sortie
- la longueur de Rayleigh : $q_0 = 558\text{mm}$.

I.3.3 Le plan laser

Nous avons cherché à obtenir une tranche laser dont les dimensions vérifient les critères suivants. La *hauteur* de la tranche, notée ℓ_z sur la figure 2.10, doit être suffisante pour éclairer une zone de la cellule d'écoulement comprenant à la fois l'entrée et la sortie de l'orifice, typiquement $\ell_z = 6\text{cm}$. L'*épaisseur* de la tranche, notée ℓ_y , doit être à peu près constante sur toute la *largeur* d'observation ℓ_x qui coïncide avec le diamètre de la cellule. De plus, cette épaisseur doit être très inférieure au diamètre de l'orifice, qui est une dimension sur laquelle l'écoulement varie beaucoup. Nous avons fixé l'épaisseur de la tranche à 1/10 du diamètre de l'orifice, soit $100\mu\text{m}$. Ceci permet d'enregistrer des informations dans un plan bien défini de l'écoulement.

Un contrôle de ces paramètres géométriques ne peut être obtenu avec une seule lentille cylindrique qui élargirait le faisceau dans la direction verticale. Le dispositif optique est donc

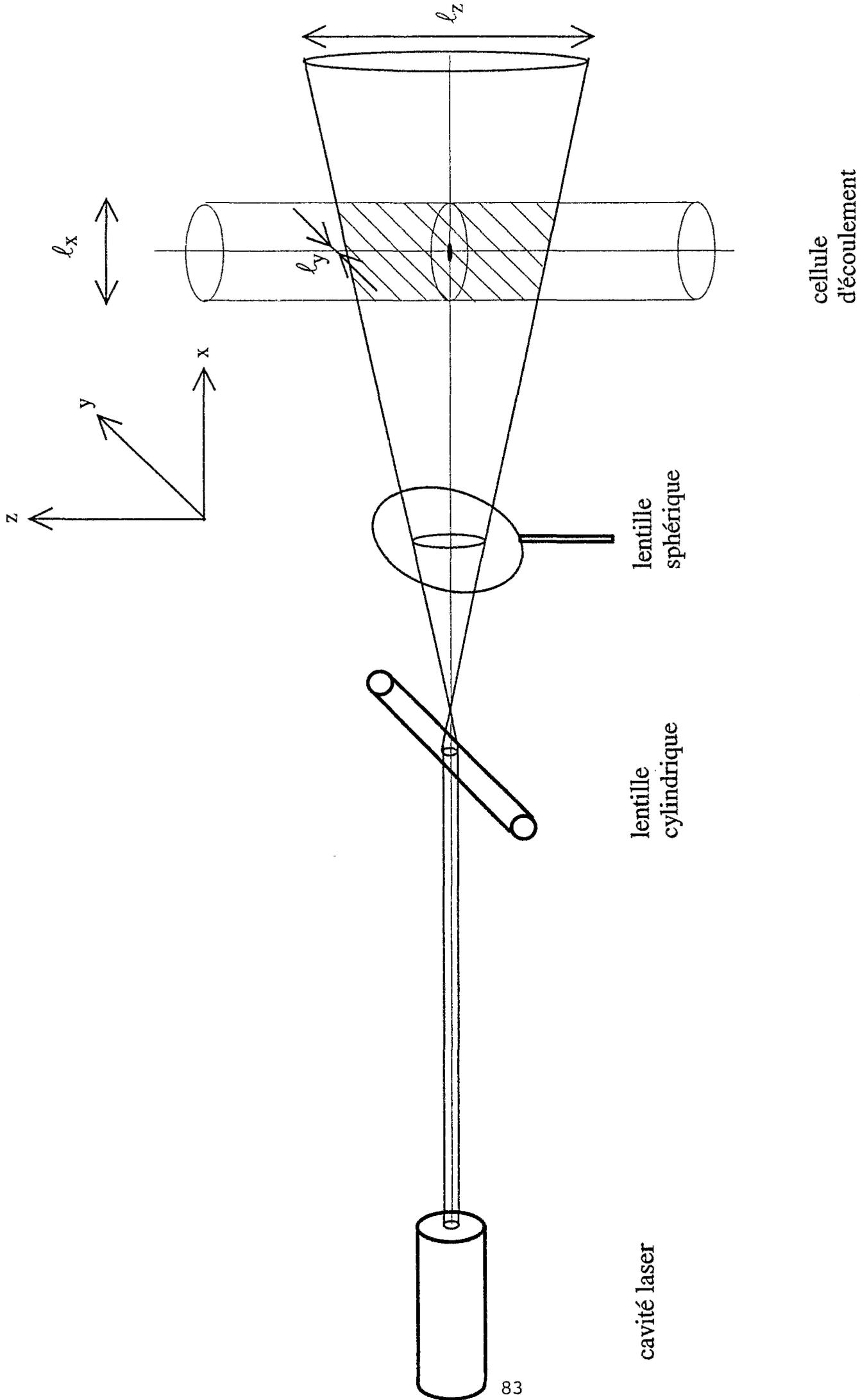


Figure 2.10

Schéma général du dispositif optique et signification des longueurs l_x , l_y et l_z .

composé d'une lentille sphérique qui contrôle ℓ_x et ℓ_y , et d'une lentille cylindrique qui contrôle ℓ_z .

a) La lentille sphérique

Pour contrôler l'épaisseur de tranche, ℓ_y , et la longueur ℓ_x sur laquelle celle-ci est constante, nous avons réalisé l'image du beam-waist situé dans la cavité laser par une lentille sphérique convergente (fig 2.11). L'axe de la cellule d'écoulement est placé au beam-waist image obtenu. L'épaisseur de la tranche est alors fixée par le diamètre du faisceau au beam-waist image, la longueur sur laquelle cette épaisseur est constante est la longueur de Rayleigh au beam-waist image.

Soit w_2 le rayon du faisceau au beam-waist image (nous noterons avec des indices 1 les grandeurs concernant le beam-waist objet, et avec de indices 2 celles qui concernent le beam-waist image). L'épaisseur de la tranche laser ℓ_y vaut donc $2w_2$. La longueur de Rayleigh sur laquelle cette épaisseur est constante est:

$$q_2 = \frac{2\pi w_2^2}{\lambda} = \frac{\pi \ell_y^2}{2\lambda}$$

En fixant ℓ_y à $100\mu\text{m}$, on obtient une longueur q_2 d'environ 25mm , comparable au diamètre de la cellule. Par ailleurs, nous noterons γ la quantité suivante qui est très petite devant 1 (2.10^{-2}):

$$\gamma = \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^2$$

Le faisceau obéit aux relations de conjugaison des faisceaux gaussiens [56] qui donnent, en fonction de la focale de la lentille f , les expressions suivantes pour :

- la relation entre les distances des beam-waists objet et image à la lentille, respectivement d_1 et d_2 (fig 2.11) :

$$d_2 = f \frac{d_1(d_1 - f) + q_1^2}{(d_1 - f)^2 + q_1^2}$$

- la quantité γ :

$$\gamma = \frac{f^2}{(d_1 - f)^2 + q_1^2}$$

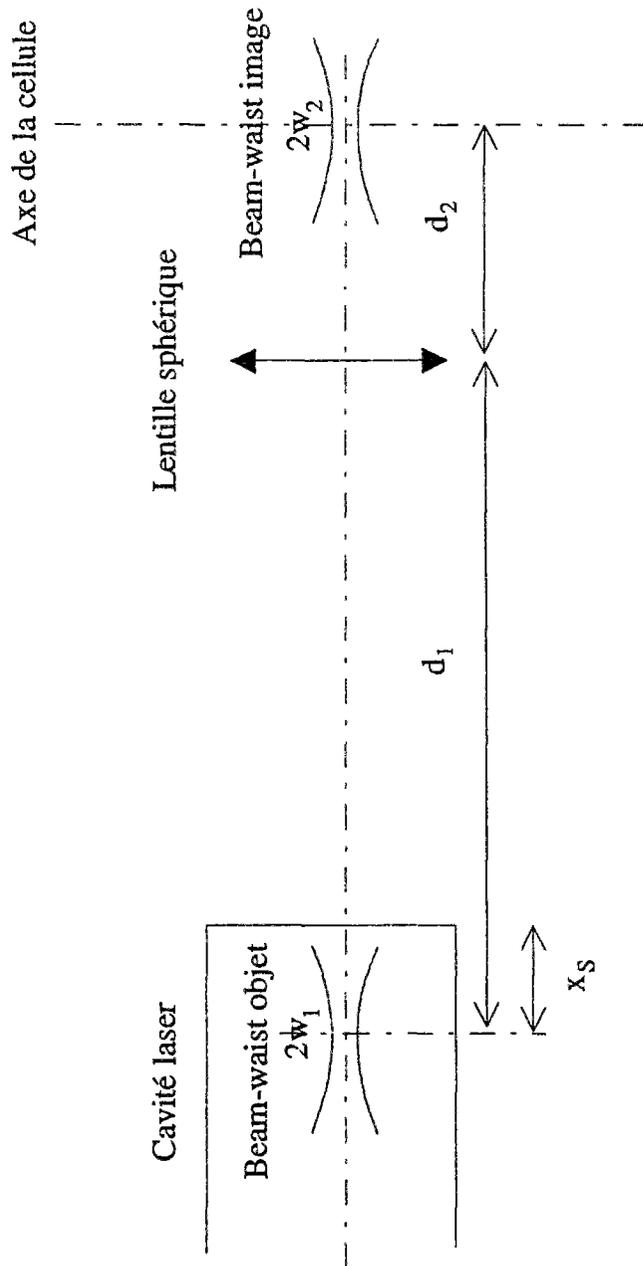


Figure 2.11

Focalisation par une lentille sphérique.

En éliminant la longueur de Rayleigh q_1 entre les équations précédentes, et en fixant la distance d'encombrement $D = d_1 + d_2$, on obtient plus simplement :

$$d_1 = \frac{D + (\gamma - 1)f}{\gamma + 1}$$

Un calcul au premier ordre valable pour $\gamma \ll 1$ permet d'obtenir les distances d_1 et d_2 :

$$d_1 \cong D - f$$

$$d_2 \cong f$$

ce qui revient en pratique à placer l'axe de la cellule dans le plan focal image de la lentille. La quantité γ vaut alors :

$$\gamma = \frac{f^2}{(D - 2f)^2 + q_1^2}$$

En fixant la distance d'encombrement D égale à 1m, et pour une valeur de γ égale à $2 \cdot 10^{-2}$, nous déduisons la valeur de la focale qui est appropriée : $f \cong 150\text{mm}$. La position de la lentille par rapport au beam-waist objet est alors : $d_1 \cong 0.85\text{m}$.

b) La lentille cylindrique

La lentille cylindrique, placée de telle sorte que son grand-axe soit horizontal, transforme le faisceau laser en une tranche laser étendue verticalement. En effet, cette lentille est équivalente à un dioptre plan dans la direction parallèle à son axe, de sorte que sa présence ne modifie ni l'épaisseur ℓ_y de la tranche, ni sa longueur ℓ_x , qui sont fixées par la lentille sphérique. En pratique, il suffit de choisir la position de la lentille cylindrique avant la lentille sphérique et la cellule (figure 2.10) pour obtenir la hauteur ℓ_z requise. Nous avons utilisé une lentille cylindrique en verre, de diamètre 6mm, placée à 160mm de la face d'entrée de la cellule d'écoulement ; ceci permet d'obtenir une hauteur de tranche de l'ordre de 60mm.

II. CARACTERISATION EXPERIMENTALE DU CHAMP DE VITESSE NEWTONIEN

Dans ce paragraphe, nous étudions l'écoulement de base dans la cellule expérimentale obtenu avec des fluides newtoniens de grande viscosité. Nous utilisons pour cela les deux parties du montage expérimental qui ont été présentées au paragraphe I :

- mesures de pression et de débit pour la caractérisation du comportement rhéologique (relation contrainte-débit),
- visualisation par plan laser pour la caractérisation locale et globale du champ de vitesse.

II.1 Fluides utilisés

II.1.1 Choix des fluides

Dans toute cette étude, nous avons toujours utilisé des fluides de grande viscosité pour nous placer dans le cadre de l'hydrodynamique de Stokes. Ces fluides doivent être transparents, avec un indice optique proche de celui du plexiglas, de manière à éviter les effets de dioptre pour la visualisation. Ils doivent de plus satisfaire plusieurs critères vis-à-vis des fibres que nous utiliserons pour les suspensions : densité proche de celle des fibres pour éviter la sédimentation, indice optique voisin de celui des fibres pour une bonne visualisation, mouillabilité des fibres pour assurer une bonne dispersion.

Compte-tenu de ces critères, notre choix s'est porté sur deux types de fluides suspendants :

- une huile silicone (HSV500 Rhône-Poulenc) dont la viscosité à 20°C est de 0.5Pa.s [57],
- une solution de glucose sirupeux constitué d'un mélange de polysaccharides (glucose sirupeux, Prolabo), dans l'eau, dont la viscosité à 20°C est voisine de 0.7Pa.s. La fraction massique de glucose dans le produit brut varie suivant le lot fourni par le fabricant, de sorte que sa viscosité varie fortement d'un lot à l'autre. Nous avons utilisé des fractions massiques de glucose de 85% et 83% suivant les lots dont nous avons disposé.

Les caractéristiques de ces fluides sont résumées dans le tableau suivant :

	viscosité à 20°C (Pa.s)	indice optique	densité
huile silicone	0.5	1.4	0.97
mélange eau-glucose	≈0.7	≈1.48	≈1.31

L'indice optique du plexiglas est de 1.50, celui des fibres de polyamide de 1.52.

II.1.2 Variation de la viscosité avec la température

Ces fluides présentent des variations importantes de viscosité en fonction de la température, notamment le mélange eau-glucose. Nous avons donc effectué une étude de la variation de la viscosité de cisaillement en fonction de la température, pour ces différents fluides, à l'aide d'un rhéomètre de type Couette (LS 30) associé à une régulation de température. Ce rhéomètre permet d'obtenir la viscosité de cisaillement avec une précision de l'ordre de 1%. Les résultats sont présentés sur la figure 2.12 où nous avons tracé la viscosité de cisaillement mesurée en fonction de la température ; ils serviront de référence pour déterminer la viscosité des milieux suspendants à la température de l'expérience dans toute notre étude.

Les courbes en traits continus représentent des lois de variation ajustées sur les points expérimentaux, et dont la forme a été choisie en fonction des mécanismes microscopiques responsables de la viscosité dans chaque type de milieu. Pour le mélange eau-glucose, il s'agit d'un mécanisme de saut avec barrière d'énergie qui conduit à une variation de la viscosité en fonction de la température suivant une loi d'Arrhénius du type [58] :

$$\mu = \mu_0 e^{\frac{T_a}{T}}$$

où T désigne la température absolue (en Kelvin), T_a représente une température d'activation, et μ_0 une viscosité de référence. Pour le mélange eau-glucose à 85%, nous trouvons la loi de variation suivante :

$$\mu = 9,56 \cdot 10^{-8} \exp(6,65 \cdot 10^3 / T) \quad (\text{en mPa.s})$$

En ce qui concerne l'huile silicone, nous avons trouvé qu'une loi de variation linéaire suffit à décrire les variations de la viscosité dans le domaine de température considéré, ce qui conduit à la loi de variation empirique:

$$\mu = -9,78T + 6,90 \cdot 10^2 \quad (\text{en mPa.s})$$

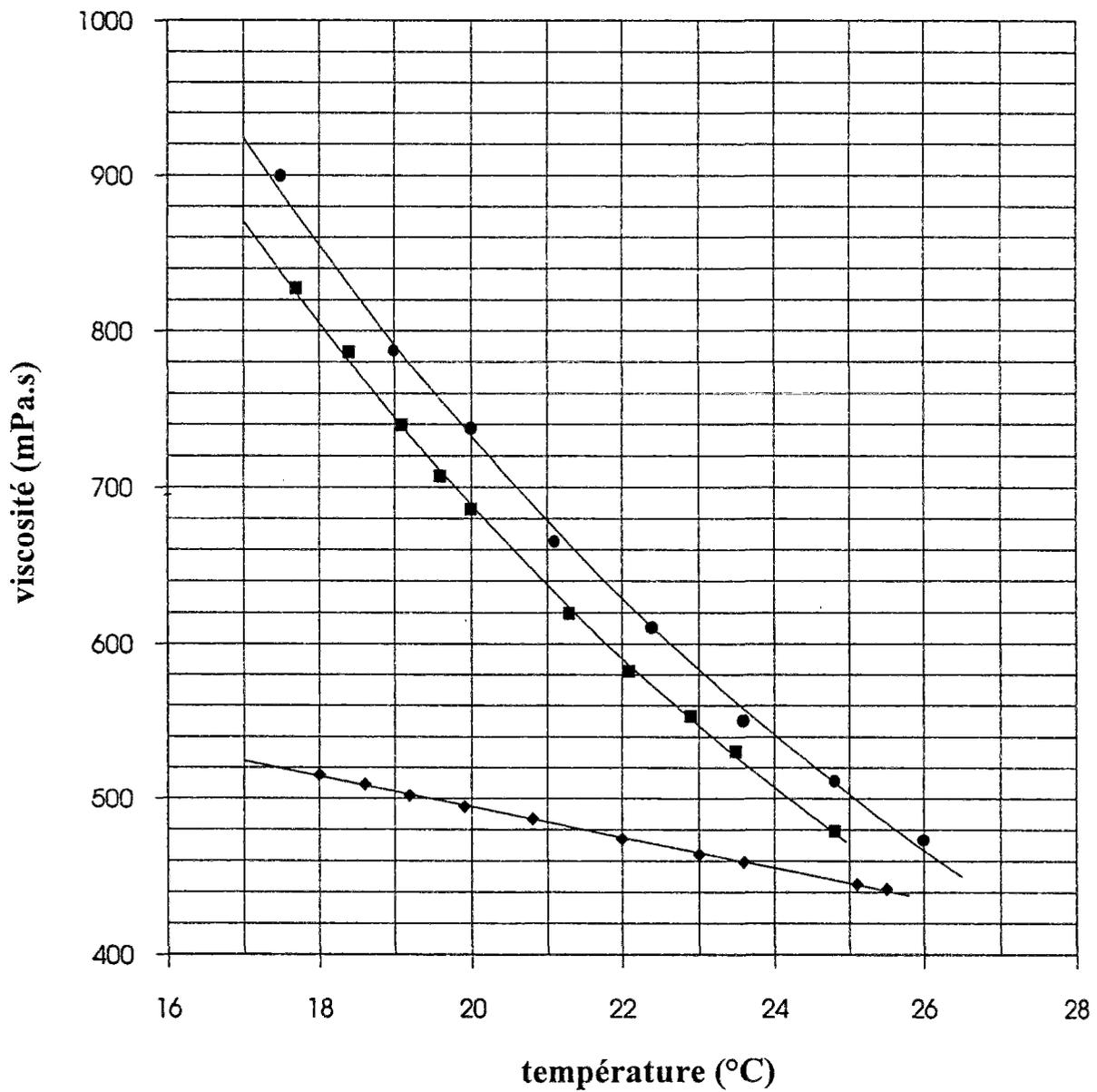


Figure 2.12

Variation de la viscosité de cisaillement avec la température pour les deux types de fluides utilisés dans les expériences : ● mélange eau-glucose à 83% (lot n°1), ■ mélange eau-glucose à 85% (lot n°2), ◆ huile silicone HSV500.

II.2 Relation contrainte-débit

II.2.1 Protocole expérimental

a) Remplissage de la cellule

La cellule est remplie par gravité dans le sens opposé à l'écoulement, qui aura lieu ultérieurement du haut vers le bas. Le fluide provenant d'un réservoir annexe remonte du bas vers le haut de la cellule en direction de l'orifice, qu'il franchit en occupant tout l'espace disponible. Ce protocole est le seul qui permette un remplissage complet de la cellule. Quelques bulles résiduelles peuvent rester piégées sous la plaque, elles sont éliminées en inclinant la cellule de manière à ce qu'elles franchissent l'orifice sous l'effet de la poussée d'Archimède. Une fois le réservoir rempli, celui-ci est fermé de manière étanche par un film souple (Parafilm) pour éviter l'évaporation.

b) Remplissage du capteur de pression

Nous procédons ensuite au remplissage du capteur. Cette opération est assez délicate car il faut éviter la formation de bulles d'air dans les tuyaux et dans les chambres du capteur. Celles-ci sont compressibles et fausseraient la mesure. Le capteur est rempli par gravité, en ouvrant les orifices de purges situés sur chaque chambre ainsi que les vannes qui commandent la communication entre les tuyaux souples et les prises de pression.

En l'absence d'écoulement, le capteur doit indiquer une différence de pression nulle. Dans la pratique, le signal indiqué par le voltmètre varie d'une expérience à l'autre dans des limites inférieures à $\pm 0.050V$. Nous attendons que ce signal se stabilise à une valeur constante au cours du temps, nous consignons cette valeur au début de chaque expérience et nous vérifions en fin d'expérience que le voltmètre indique de nouveau cette valeur au repos. L'origine de cette valeur initiale ne s'explique pas par l'incertitude nominale du capteur, qui est de $\pm 0.025V$. Nous pensons qu'elle est due à la position initiale prise par la membrane lors du remplissage du capteur, et qui varie d'un remplissage à l'autre.

c) Application d'un échelon de contrainte

Partant du repos complet, après avoir noté la valeur indiquée par le voltmètre, nous appliquons un échelon de contrainte en imposant une différence de hauteur ΔH entre le niveau de la surface libre du réservoir et la position du tuyau de sortie (fig 2.13). Compte tenu de la dénivellation maximale que nous pouvons imposer, la différence de pression mesurée par le capteur de pression est en général inférieure à 50mbar. Ceci correspond à la limite où le nombre de Reynolds au niveau de l'orifice est de l'ordre de 1. L'utilisation d'un système à pression contrôlée permettrait d'appliquer des contraintes supérieures.

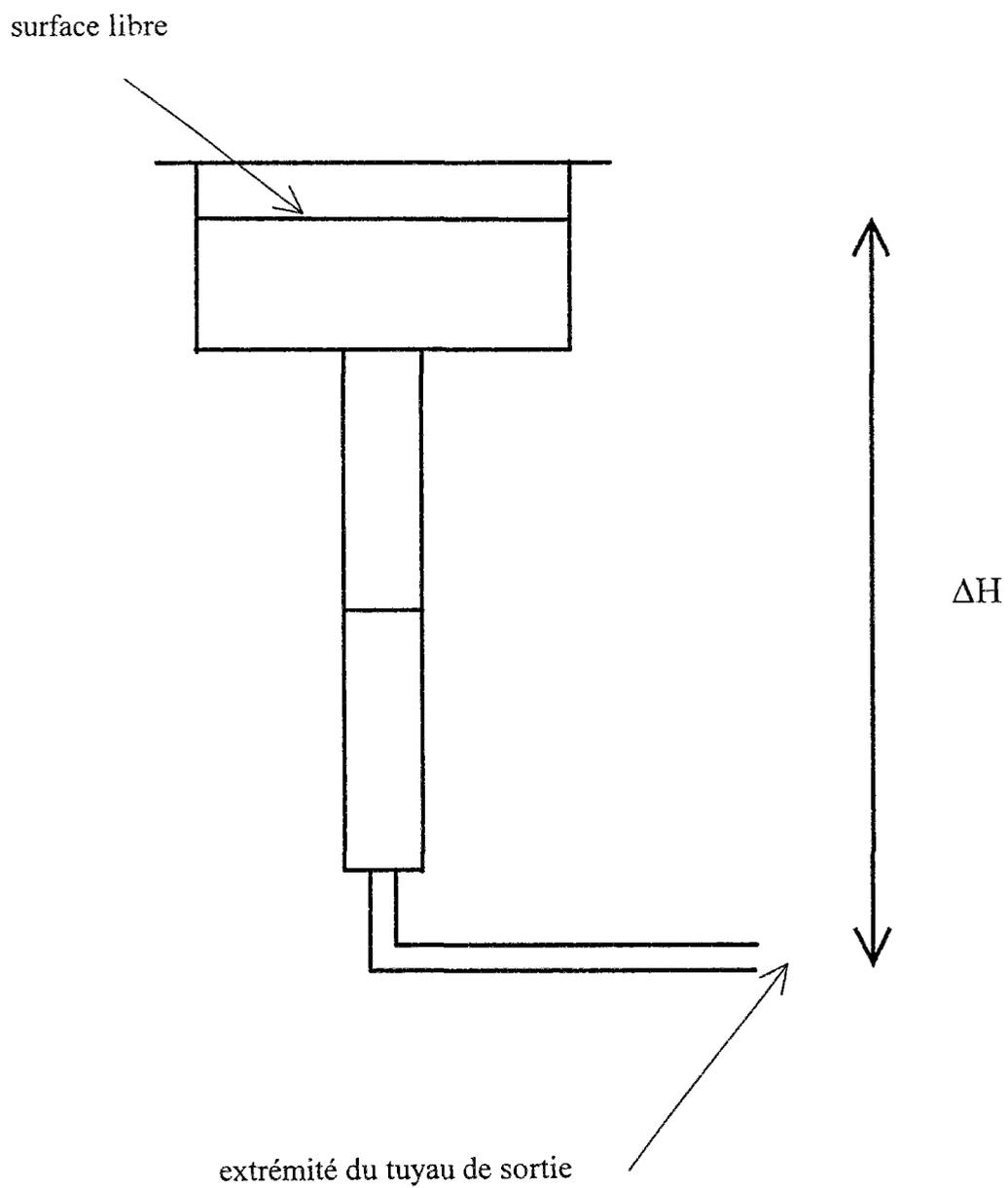


Figure 2.13
Application d'un échelon de contrainte.

La différence de hauteur est maintenue pendant quelques minutes, ce qui permet :

- l'établissement du régime permanent, qui intervient généralement quelques secondes après la mise en route de l'écoulement, quelques dizaines de secondes pour les débits plus faibles. Le régime permanent est atteint lorsque Q et ΔP ont une valeur constante au cours du temps à la précision des mesures,
- la mesure du débit Q et de la différence de pression $\Delta P = P_A - P_B$ suivant le protocole exposé au paragraphe I.

d) Mesure de la température de l'expérience

La viscosité de cisaillement des fluides newtoniens utilisés dépendent fortement de la température (voir paragraphe II.2). La cellule d'écoulement ne possédant pas de régulation de température, il est indispensable de connaître la température qui règne dans le fluide. Elle est mesurée à l'aide d'un thermomètre dont la précision est de 0.1°C , plongé dans le réservoir de la cellule. Nous attendons l'équilibre thermique entre le fluide et la pièce avant d'effectuer cette mesure. De plus, nous vérifions que cette température est uniforme dans toute la cellule, et qu'elle ne varie pas au cours de l'expérience (à l'exception de deux expériences où nous avons observé une variation de 0.5°C et où nous avons pris la température moyenne entre le début et la fin de l'expérience). Chaque expérience est donc caractérisée par la valeur de la viscosité de cisaillement du fluide correspondant à la température où elle a été effectuée.

II.2.2 Relation contrainte-débit

Dans la pratique, nous avons appliqué des échelons de contrainte successifs, non pas en partant du repos, mais en effectuant des montées et des descentes progressives en contrainte (en augmentant ou diminuant progressivement la dénivellation ΔH). Nous avons vérifié que les résultats obtenus sont les mêmes à débit donné, quelle que soit la manière dont nous procédons pour appliquer la contrainte (montée ou descente). Les résultats de deux expériences réalisées avec les deux fluides utilisés sont présentés sur la figure 2.14, où la différence de pression ΔP mesurée par le capteur a été portée en fonction du débit Q correspondant.

Nous constatons que

- les mesures sont indépendantes de l'ordre dans lequel sont appliqués les échelons de contrainte (montée ou descente en contrainte),
- la relation entre la différence de pression et le débit est linéaire,
- les droites ΔP fonction de Q , que l'on peut calculer par régression linéaire sur les points expérimentaux, tracées sur la figure 2.14, passent par l'origine des axes à la précision des mesures,

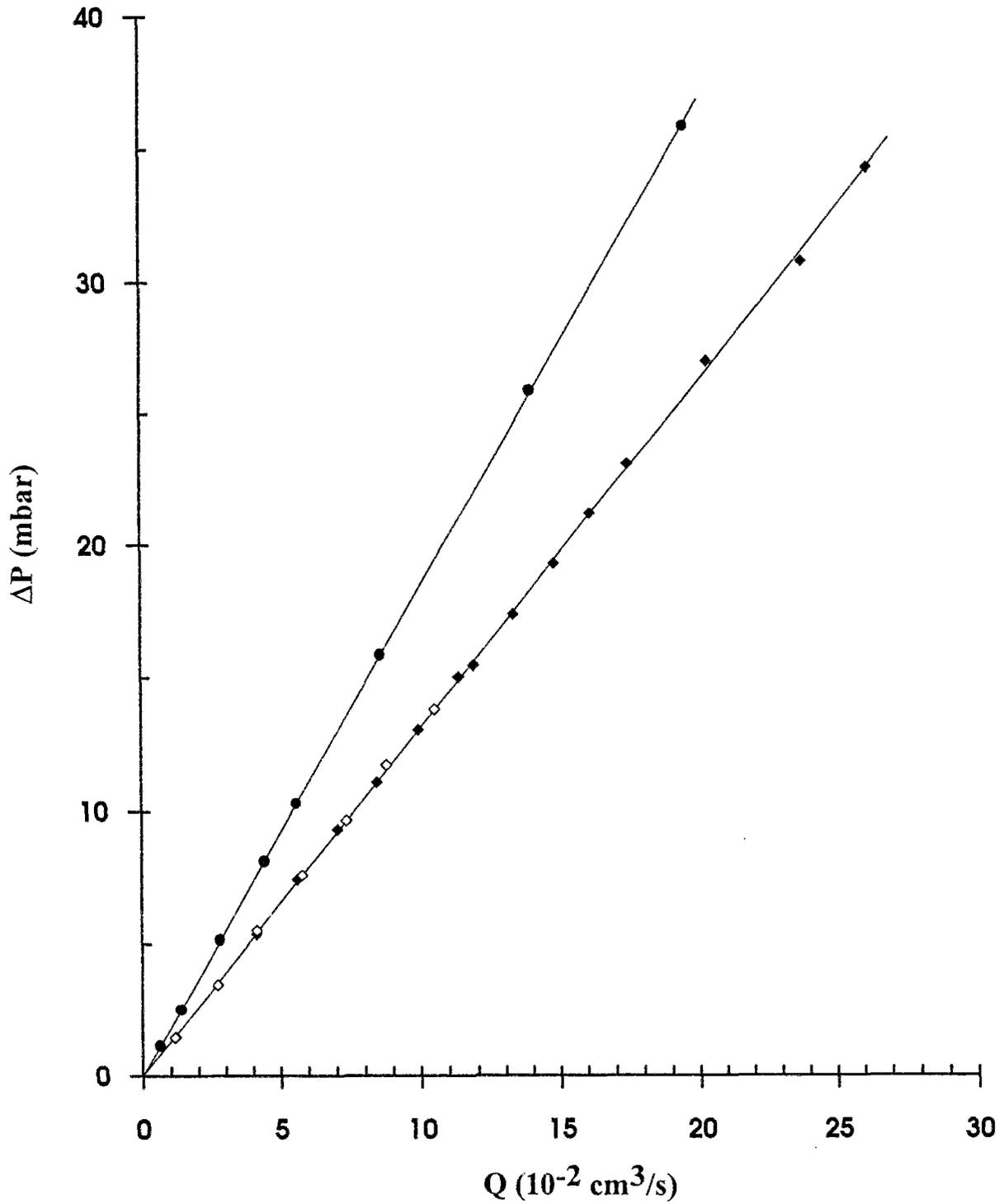


Figure 2.14

Variations de la différence de pression ΔP mesurée par le capteur de pression en fonction du débit Q de l'écoulement pour les deux types de fluides utilisés : ● mélange eau-glucose 83%, ◆ huile silicone HSV500 (débit croissant), ◇ huile silicone HSV500 (débit décroissant).

- les pentes de ces droites sont proportionnelles à la viscosité de cisaillement du fluide (une étude quantitative sera présentée au paragraphe III).

Tous ces résultats sont en accord avec le caractère newtonien des fluides étudiés. Dans le paragraphe III, nous donnerons une interprétation quantitative de ces résultats, et nous les comparerons avec l'écoulement à travers une plaque infinie percée d'un orifice.

II.3 Champ de vitesse

Afin d'étudier le champ de vitesse newtonien dans la cellule élongationnelle, nous avons utilisé une méthode de visualisation qui combine l'utilisation du plan laser décrit au paragraphe I.3 et de traceurs réfléchissant la lumière. Cette méthode permet d'obtenir une caractérisation à la fois qualitative (lignes de courant) et quantitative (mesures de vitesse).

II.3.1 Protocole expérimental

a) Traceurs

Nous avons utilisé comme traceurs des particules d'iriodine dont le diamètre moyen est de l'ordre de $10\mu\text{m}$. Cette taille est suffisamment grande pour négliger tout mouvement brownien. L'effet de la gravité est négligeable de sorte qu'il n'y a pas de sédimentation à l'échelle d'une expérience. Pour ensemercer le fluide avec les particules, il faut réaliser un compromis entre:

- une quantité importante de particules qui offre une bonne luminosité mais donne des informations trop grossières (taches de lumière au lieu de traces lumineuses fines),
- une quantité faible qui permet d'obtenir des traces lumineuses très fines et très distinctes les unes des autres, mais nécessite d'une part de travailler avec une faible luminosité, et d'autre part de réaliser des clichés plus nombreux à cause du faible nombre de traces.

En pratique, nous avons effectué des essais systématiques qui ont montré qu'une fraction de particules de l'ordre de 10^{-3}g/l donne des résultats satisfaisants. Les particules sont visibles à l'oeil nu dans l'écoulement éclairé par la tranche laser, et sont parfaitement observables aux grossissements utilisés, qui varient de 1 à 10.

b) Positionnements et réglages

Nous avons vu au paragraphe I.3 comment réaliser une tranche laser dont on contrôle la hauteur et l'épaisseur. Dans la pratique, il faut de plus s'assurer d'un certain nombre de positionnements et de réglages des différents éléments qui composent le dispositif expérimental.

- positionnement de la cellule

La cellule est montée sur un support à trois pieds, la longueur des pieds pouvant être modifiée au moyen des vis de réglage. On s'assure ainsi à l'aide d'un niveau à bulle de l'horizontalité du support, et donc de la verticalité du tube cylindrique.

- horizontalité du faisceau laser

Le laser est fixé sur un support comportant deux pieds situés sur son axe. Les deux pieds sont fixés sur un banc d'optique sur lequel viennent se positionner les autres éléments du montage. On peut modifier la position du laser par rapport au support grâce à un système de vis, ce qui permet de régler l'horizontalité du faisceau et son parallélisme par rapport à la cellule.

- positionnement et verticalité de la tranche laser

Le réglage de la tranche laser par rapport à l'axe de la cellule se fait en deux temps. Une platine à déplacement latéral permet d'abord de translater la lentille sphérique dans la direction perpendiculaire à l'axe du faisceau laser, et donc de faire pivoter la tranche laser autour d'un axe vertical, de manière à intersecter exactement le centre de l'orifice. Une platine de rotation permet ensuite de faire tourner la lentille cylindrique autour de l'axe du faisceau, ce qui a pour effet de faire pivoter la tranche laser autour de ce même axe et d'assurer un réglage fin de la verticalité de la tranche.

Ces deux réglages sont d'abord effectués de manière approximative en contrôlant à l'oeil nu la position de la tranche par rapport à l'orifice. Puis ils sont contrôlés au moyen de traceurs lumineux : en observant à l'aide d'un appareil photo ou d'une caméra vidéo le trajet de ces traceurs dans la zone éclairée par la tranche laser, on doit être en mesure de les suivre continûment depuis l'amont de l'orifice, à la traversée de l'orifice, jusqu'en aval de celui-ci. Ceci est la preuve que le plan laser contient l'axe de la cellule. Dans le cas contraire, la particule lumineuse sort du plan et la trace s'interrompt (photo figure 2.15). Il faut ici souligner l'intérêt de la géométrie axisymétrique dans laquelle tous les plans contenant l'axe de la cellule sont équivalents du point de vue de l'écoulement.

II.3.2 Lignes de courant

a) Photographies à temps de pose longs

Un appareil photo est placé à 90° de la tranche laser. Nous utilisons un objectif Nikon de focale $f=60\text{mm}$. Pendant le temps d'exposition, chaque traceur lumineux impressionne sur la pellicule photo sa trajectoire dans l'écoulement. Pour des temps de pose longs, qui dépendent de la vitesse des traceurs et donc du débit de l'écoulement, nous obtenons sur la pellicule des trajectoires suffisamment complètes et nombreuses qui nous donnent l'ensemble

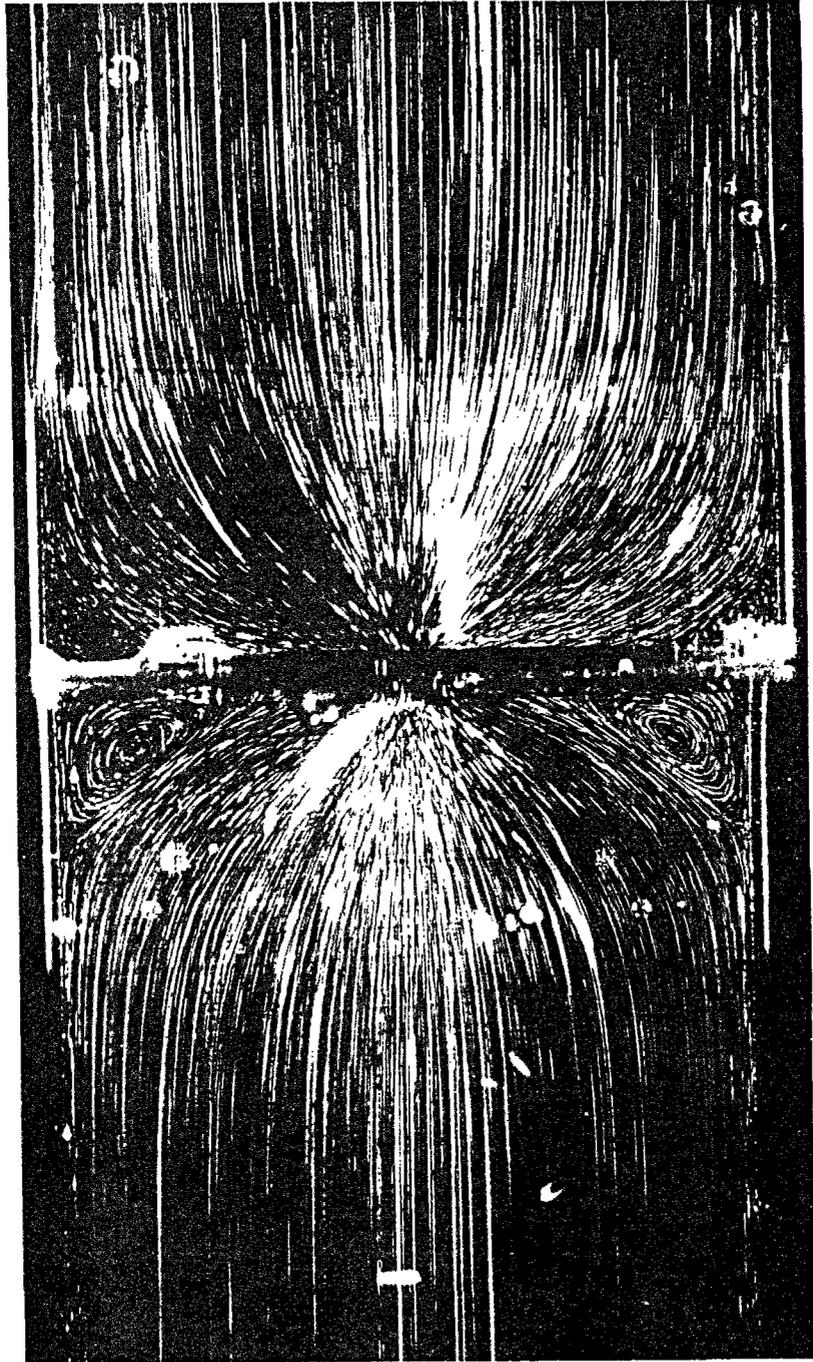


Figure 2.15

Photographie à temps de pose long montrant des lignes de courant interrompues, qui sont obtenues lorsque le plan laser n'intersecte pas l'axe de la cellule d'écoulement.

des lignes de courant. La sensibilité de la pellicule photographique est de 50 ou 125 ASA, ce qui permet d'obtenir des clichés bien contrastés. Typiquement, nous avons utilisé des temps de pose de l'ordre de 5 minutes pour des débits de l'ordre de $10^{-2}\text{cm}^3/\text{s}$, et une ouverture moyenne de l'objectif ($F=11$).

b) Résultats

La figure 2.16 présente un exemple des lignes de courant obtenues (en régime permanent). Nous avons observé que ces lignes de courant sont identiques quel que soit le fluide utilisé et le débit de l'écoulement. De plus, nous constatons sur la figure 2.16 que l'écoulement est symétrique par rapport à la plaque où est pratiqué l'orifice. Ces observations sont conformes à l'hydrodynamique à petit nombre de Reynolds. Il faut souligner que nous n'avons obtenu ce résultat que grâce à l'utilisation d'un profil de plaque particulièrement aminci au niveau de l'orifice, afin d'éliminer les effets de paroi épaisse.

Nous notons par ailleurs l'existence de deux petites recirculations dans les coins au-dessus et en-dessous de la plaque. Ce sont des zones de stagnation car leur vitesse de rotation est très faible comme le montrent les traces très courtes sur la photo.

Les inhomogénéités de lumière sur la photo rendent compte des inhomogénéités de vitesse dans l'écoulement : la vitesse est très grande dans la zone élongationnelle où le fluide est fortement accéléré, et le flux de lumière qui résulte du passage des traceurs, pendant un temps de pose donné, est donc plus important au centre que près des parois.

II.3.3 Mesures de vitesse

Afin d'étudier de manière quantitative le champ de vitesse dans la cellule, nous avons mis au point une méthode de mesure de la vitesse des traceurs, à l'aide d'un dispositif de traitement d'image.

a) Dispositif d'acquisition et de traitement d'image

L'objectif photographique est cette fois associé à une caméra CCD (fig 2.17). Le signal délivré par la caméra est numérisé par une carte CYCLOPE de Digital Vision fonctionnant en association avec un micro-ordinateur PC 486 DX266.

La numérisation de l'image consiste en une matrice de 512×512 pixels. A chaque pixel est associé un niveau de gris sur les 256 disponibles. La numérisation se fait en temps réel et de façon permanente, avec une fréquence de 2 images par seconde.

Une fois numérisée, l'image est placée dans le plan mémoire vidéo de la carte CYCLOPE, et peut être visualisée en noir et blanc ou en pseudo-couleur sur l'écran du moniteur. La carte CYCLOPE permet par ailleurs de superposer au plan vidéo, qui représente l'image visualisée, un plan graphique incrustable sur l'écran du moniteur, et accessible à

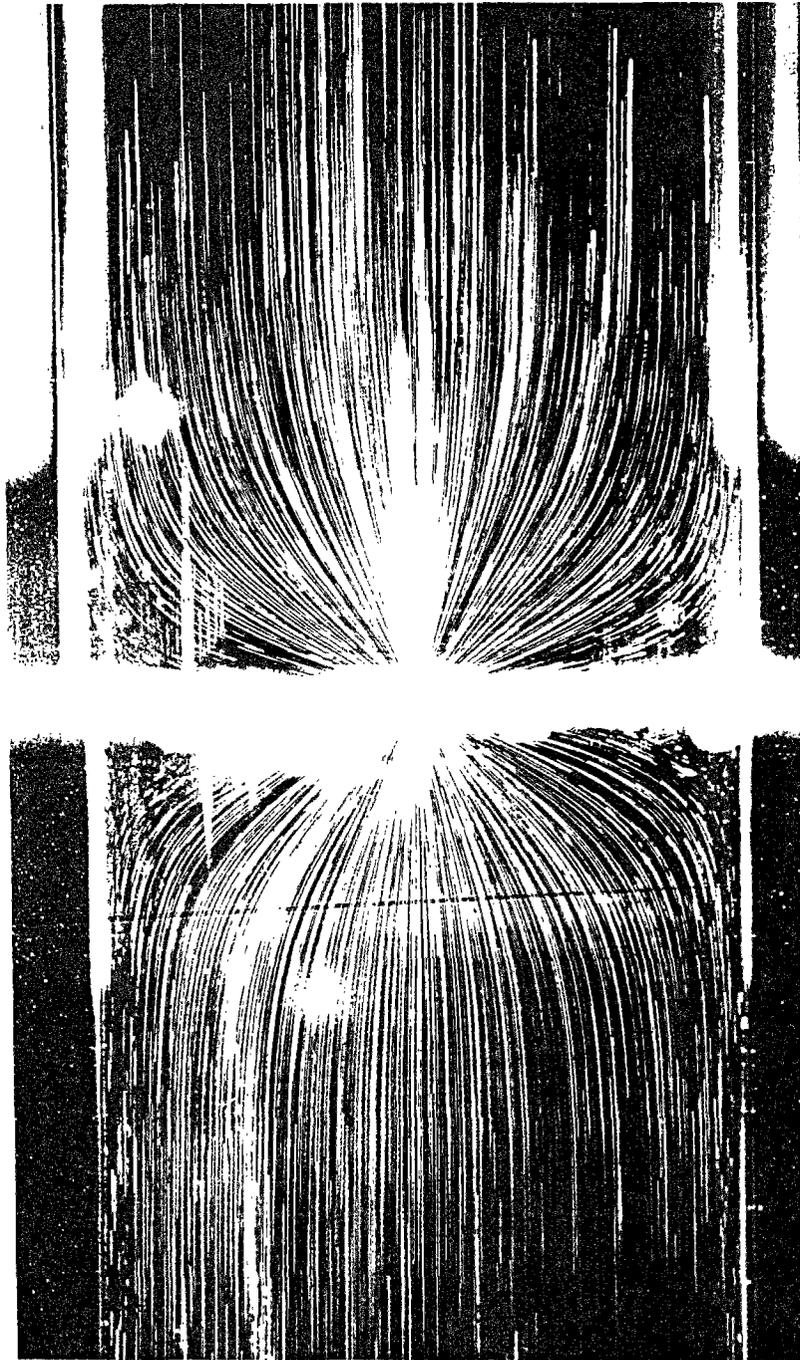


Figure 2.16

Photographie à temps de pose long montrant les lignes de courant correspondant à l'écoulement newtonien dans la cellule (le débit de l'écoulement est de $3 \cdot 10^{-2} \text{cm}^3/\text{s}$, le temps de pose est de 5 mn).

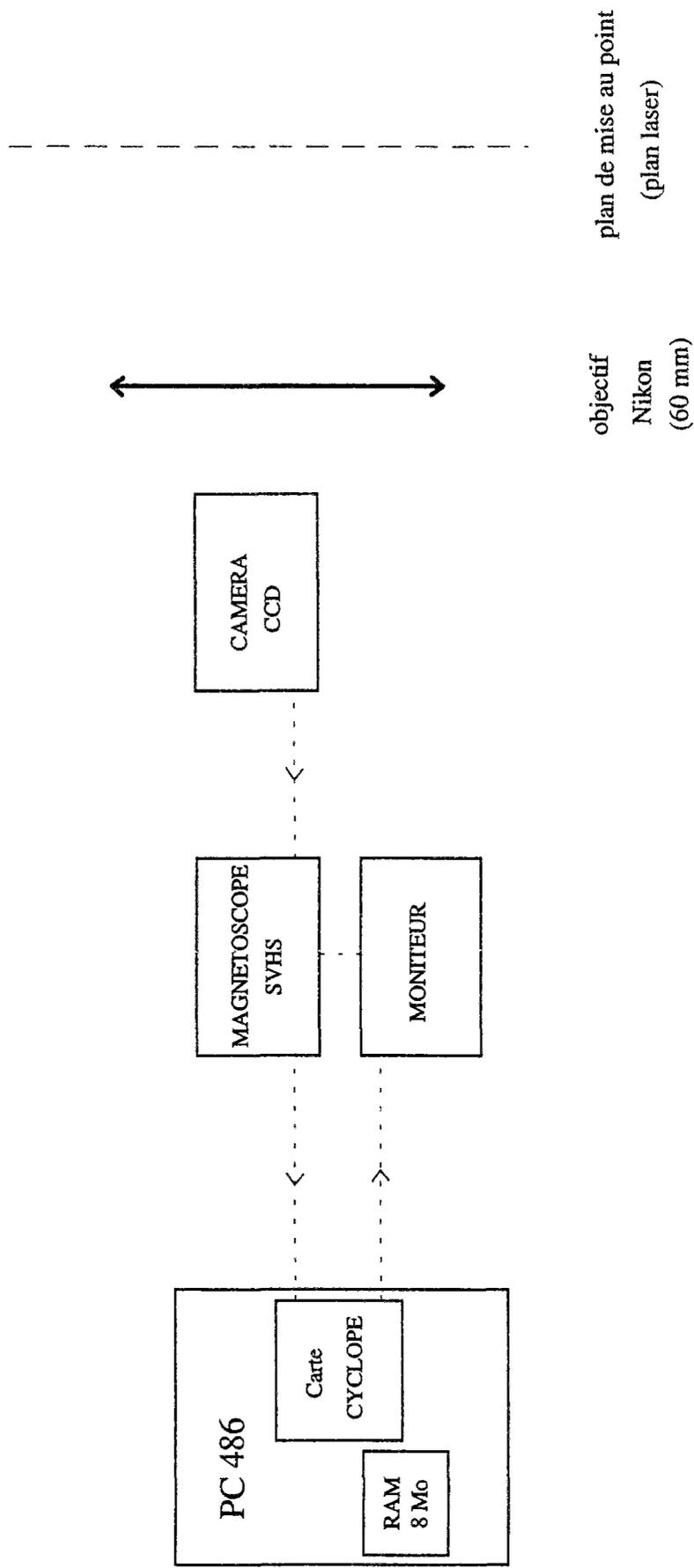


Figure 2.17

Schéma général du système d'acquisition et de traitement d'images.

l'utilisateur. Ce plan graphique comporte notamment un curseur de pointage commandé par la souris.

Le traitement des images nécessite leur enregistrement préalable sous forme numérisée dans la mémoire du micro-ordinateur. La gestion de la mémoire étendue du PC permet de conserver jusqu'à 28 images simultanément en mémoire RAM. En pratique, pour une plus grande souplesse d'utilisation, l'expérience est enregistrée sur une bande vidéo par un magnétoscope SVHS. C'est donc le signal délivré par le magnétoscope qui est numérisé et traité ultérieurement.

Nous avons réalisé un programme en Turbo-Pascal qui permet, de façon interactive pour l'utilisateur:

- de numériser et enregistrer une séquence d'images vidéo. En pratique, une succession de 28 images maximum est d'abord stockée en mémoire vive. Cette opération est très rapide et permet la numérisation de deux images très proches dans le temps (0.5s). En fin de séquence, les images numérisées sont transférées et enregistrées sur disque dur, pour leur traitement ultérieur,
- d'effectuer sur une image numérisée du disque dur un certain nombre d'opérations, en liaison avec le plan graphique, qui seront détaillées dans la suite : pointage au curseur, mesures de distances,
- de stocker les informations obtenues sous forme de fichiers compatibles avec le format du tableur EXCEL.

Ce programme utilise une bibliothèque de procédures permettant la numérisation des images en mémoire vive, leur transfert sur disque dur, l'accès et l'utilisation du plan graphique, l'utilisation interactive de la souris lors de la gestion du plan graphique.

b) Mesures de vitesse sur l'axe

Nous nous sommes particulièrement intéressés à la mesure de la vitesse sur l'axe de la cellule, où nous verrons que le champ de déformation possède des propriétés remarquables.

- protocole expérimental

Les mesures que nous allons décrire dans la suite ont été effectuées de la façon suivante. Nous commençons par repérer dans le plan graphique le centre O de l'orifice et le bord droit de la cellule, noté D (fig 2.18). Ce pointé est assez délicat en ce qui concerne le centre de l'orifice, mais l'erreur résultante est inférieure à ± 5 pixels pour une longueur OD de l'ordre de 380 pixels. Connaissant la longueur OD, qui est égale au rayon R de la cellule, cette opération fournit le rapport d'étalonnage $e=R/OD$, qui est de l'ordre de 0.03mm/pixel. L'incertitude relative sur e est inférieure à $\pm 1.5\%$.

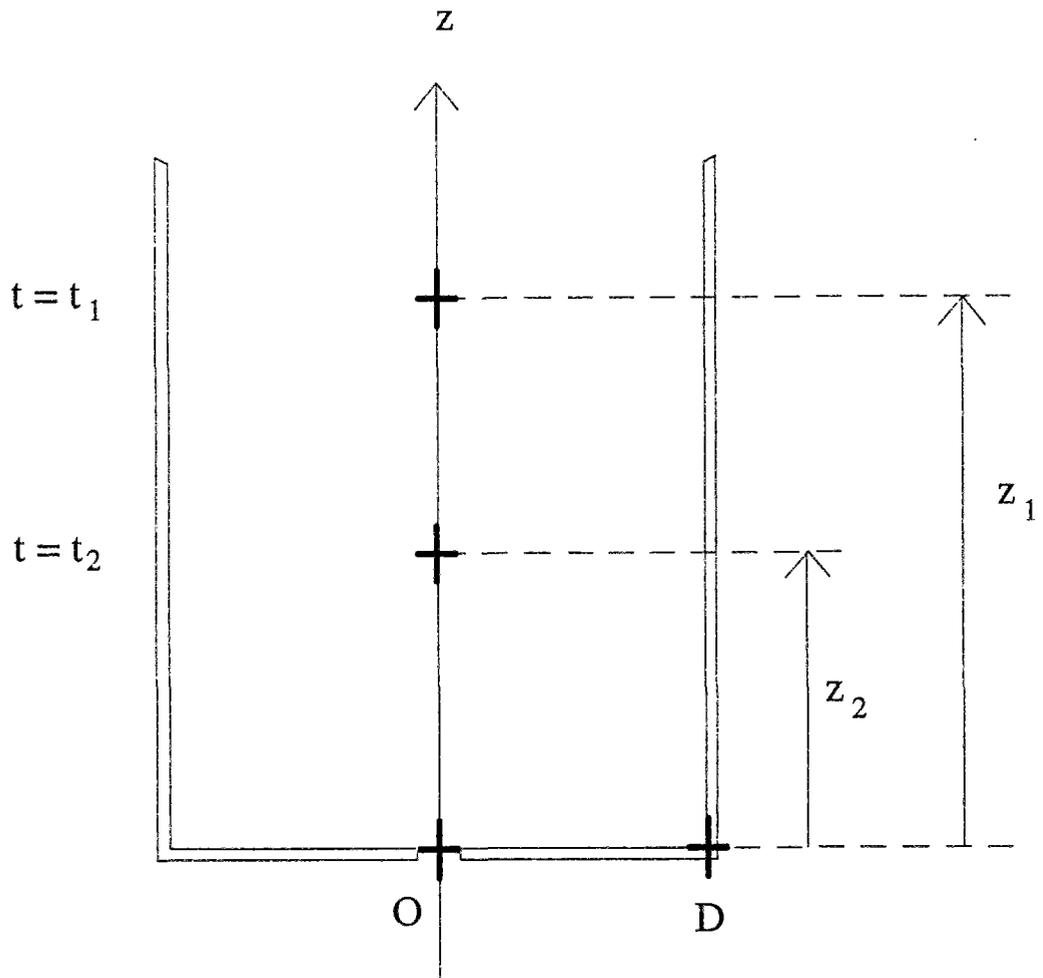


Figure 2.18

Détermination de la vitesse d'un traceur sur l'axe de la cellule, en fonction de la distance z à l'orifice, par pointage au curseur de ses positions successives sur sa trajectoire.

Puis nous procédons aux mesures de vitesse proprement dites. Celles-ci sont effectuées en suivant les positions successives d'une particule située sur l'axe de la cellule, depuis une distance située à environ 20mm de l'orifice, jusqu'à une distance de l'ordre de 1 mm de l'orifice. Plus près de l'orifice, la fréquence d'enregistrement des images n'est plus adaptée au suivi de la particule qui se déplace trop rapidement. Nous estimons la position des particules sur l'axe avec une tolérance de ± 0.5 mm. Chaque position est enregistrée avec la date correspondante grâce à l'horloge du micro-ordinateur. Nous effectuons ainsi la différence entre deux positions successives p_1 et p_2 exprimées en pixels et nous obtenons le déplacement en pixels pendant l'intervalle de temps t_1-t_2 . La vitesse moyenne de la particule entre t_1 et t_2 est donc :

$$V = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} e$$

Nous attribuons cette vitesse moyenne au point milieu de coordonnée sur l'axe :

$$z = \frac{p_1 + p_2}{2} e$$

l'origine des coordonnées étant située au centre de l'orifice O, et l'axe Oz pointant vers le haut, la vitesse V est négative.

- incertitudes sur les mesures

Les incertitudes sur les valeurs de la vitesse et de la position proviennent :

- de l'incertitude sur les instants t_1 et t_2 , qui est négligeable par rapport à toutes les autres sources d'erreur. La date est obtenue par l'horloge Turbo-Pascal au 1/100^{ème} de seconde, au moment de la saisie de l'image.
- de l'incertitude sur l'étalonnage de la cellule lors de la détermination du facteur e. Nous la prendrons égale à $\pm 1.5\%$ en valeur relative.
- de l'incertitude sur le pointé de la particule qui est de l'ordre de 1 pixel, compte-tenu du contraste relativement élevé des images qui permettent de pointer sans ambiguïté des particules de la taille du pixel.

Compte-tenu de ces incertitudes, l'erreur sur la mesure de z est donnée par :

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta(p_1 - p_2)}{z} e + \frac{\Delta e}{e}$$

A grande distance de l'orifice, l'erreur $\Delta z/z$ est dominée par l'incertitude provenant de l'étalonnage, si bien que $\Delta z/z$ est de l'ordre de $\pm 1.5\%$. Près de l'orifice, il faut tenir compte de l'erreur sur le pointé et de l'erreur sur l'étalonnage, et $\Delta z/z$ est de l'ordre de $\pm 4.5\%$.

En ce qui concerne l'erreur sur la vitesse, $\Delta V/V$ est donné par :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta(p_1 - p_2)}{(p_1 - p_2)} + \frac{\Delta e}{e}$$

Le déplacement de la particule ($p_1 - p_2$) entre deux points successifs est de 30 pixels environ ; l'erreur sur le pointé d'une particule est de 1 pixel. Il en résulte que l'erreur relative sur la vitesse $\Delta V/V$ est finalement de $\pm 7\%$ environ. L'erreur absolue sur la vitesse des particules situées près de l'orifice peut donc être importante. Nous rappelons que nous n'avons pas pu explorer des distances z inférieures à 1mm, la vitesse des traceurs devenant trop grande pour la fréquence de numérisation des images.

c) Résultats

Un exemple de variation de la vitesse V_z avec la distance z à l'orifice est présenté sur la figure 2.19. Les deux courbes sont relatives à deux expériences réalisées à deux débits différents. Les trois séries de points concernant le débit le plus faible sont le résultat du suivi de trois particules différentes par traitement d'image. Les résultats concernant l'expérience réalisée au débit le plus élevé ont été obtenus à l'aide de photographies ; nous avons réalisé des clichés à des temps de pose donnés, et mesuré la longueur des traces correspondant au déplacement du fluide pendant le temps de pose, et nous en avons déduit la vitesse moyenne du traceur. La précision des mesures fournie par cette méthode est inférieure à celle obtenue à l'aide du traitement d'image.

La dépendance en fonction du débit, et l'allure de la courbe qui représente V_z en fonction de z , seront discutées dans le paragraphe III en relation avec une solution analytique. Dès-à-présent, nous pouvons remarquer l'amplitude de variation très importante de la vitesse, qui est multipliée par un facteur de l'ordre de 30 entre la région éloignée de l'orifice et le voisinage de celui-ci.

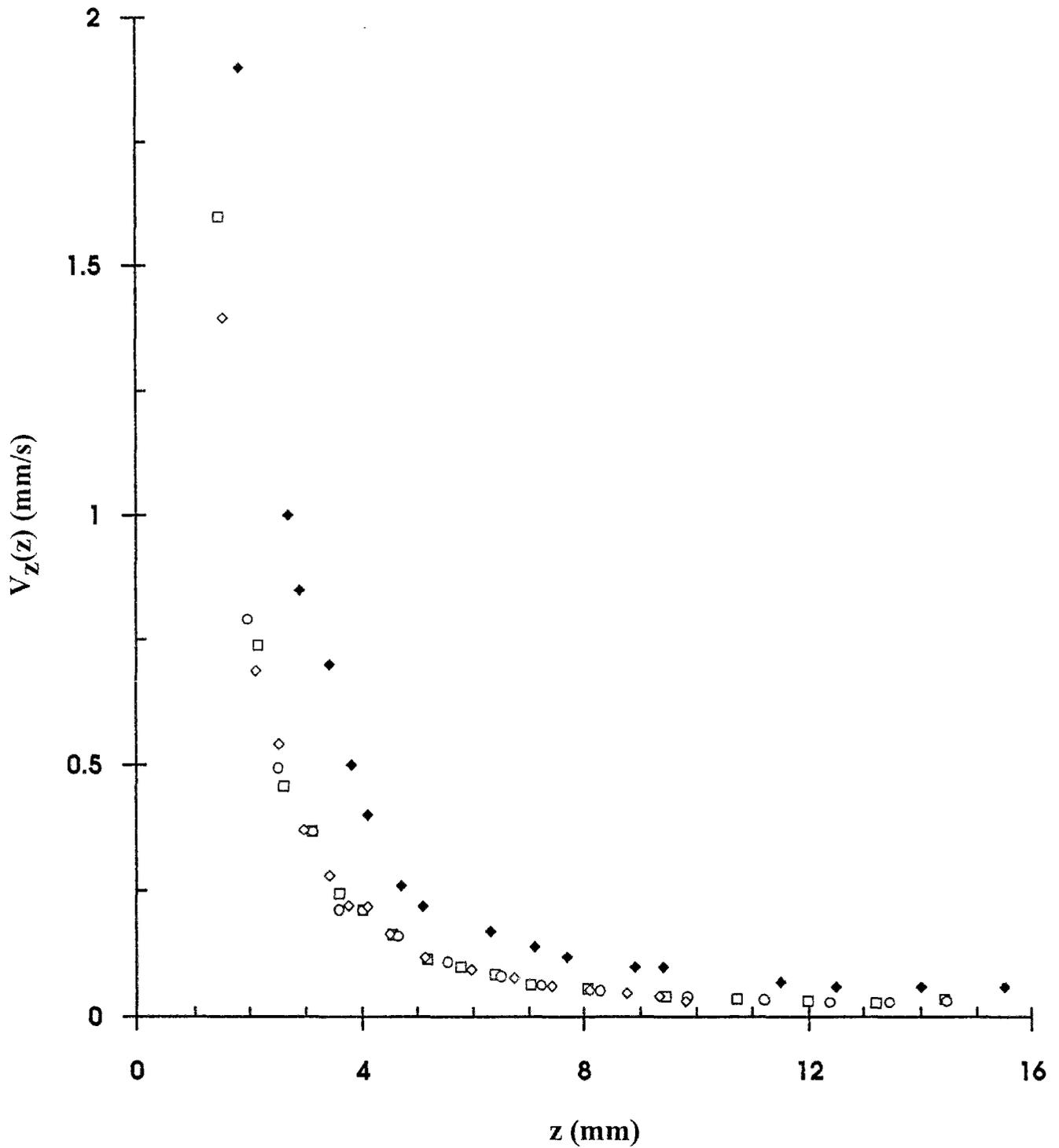


Figure 2.19

Variation de la vitesse V_z mesurée sur l'axe de la cellule, en fonction de la distance z à l'orifice, pour différents débits (◆ $Q=1.45 \cdot 10^{-2} \text{cm}^3/\text{s}$, □◇○ $Q=0.710 \cdot 10^{-2} \text{cm}^3/\text{s}$). L'orifice est situé en $z=0$.

III. COMPARAISON AVEC L'ÉCOULEMENT A TRAVERS UNE PLAQUE INFINIE

Dans ce paragraphe, nous comparons les résultats expérimentaux qui viennent d'être obtenus à la solution analytique de l'écoulement à travers un orifice dans une plaque infinie, en l'absence donc de parois verticales latérales. Ceci va nous permettre de caractériser très précisément pour un écoulement newtonien les champs de vitesse et de déformation dans la cellule expérimentale, ainsi que la relation contrainte-débit.

III.1. Solution analytique de l'écoulement à travers un orifice dans une plaque infinie

III.1.1 Système de coordonnées sphéroïdales

L'écoulement à travers la plaque infinie est considéré comme un cas limite de l'écoulement à travers une conduite axisymétrique d'axe Oz (fig 2.20) dont le profil est un hyperboloïde de révolution [59]. Le diamètre minimum de la section correspond à celui de l'orifice, et vaut donc $2c$. Dans cet écoulement, les lignes de courant sont des hyperboles dont les foyers sont situés aux bords de l'orifice. Il est commode d'utiliser pour la description de l'écoulement un système de coordonnées (ξ, η, ϕ) dites "sphéroïdales", défini à partir des coordonnées cylindriques usuelles (ρ, z, ϕ) par les relations :

$$\begin{aligned} \rho / c &= \operatorname{ch} \xi \sin \eta \\ z / c &= \operatorname{sh} \xi \cos \eta \end{aligned} \quad (2.4)$$

L'angle ϕ donne la position angulaire autour de l'axe de révolution ($0 \leq \phi \leq 2\pi$). Dans le plan de la figure 2.20, les lignes correspondant à $\eta = \text{constante}$ sont des hyperboles, donc des lignes de courant ($0 \leq \eta \leq \pi$). Les lignes correspondant à $\xi = \text{constante}$, qui sont orthogonales aux précédentes, sont des ellipses ($0 \leq \xi \leq \pi$). La ligne de courant $\eta = 0$ correspond à l'axe de l'écoulement, la ligne de courant $\eta = \eta_0$ correspond à la paroi solide, où la vitesse est nulle. En particulier, l'écoulement à travers un orifice axisymétrique dans une plaque plane infinie est obtenu en fixant η_0 égal à $\pi/2$.

III.1.2 Détermination de la fonction de courant

L'étape suivante du calcul consiste à résoudre l'équation de Stokes écrite en terme de fonction de courant Ψ (équation 1.6) :

$$E^4(\Psi) = 0 \quad \text{où } E^2 = \Delta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$$

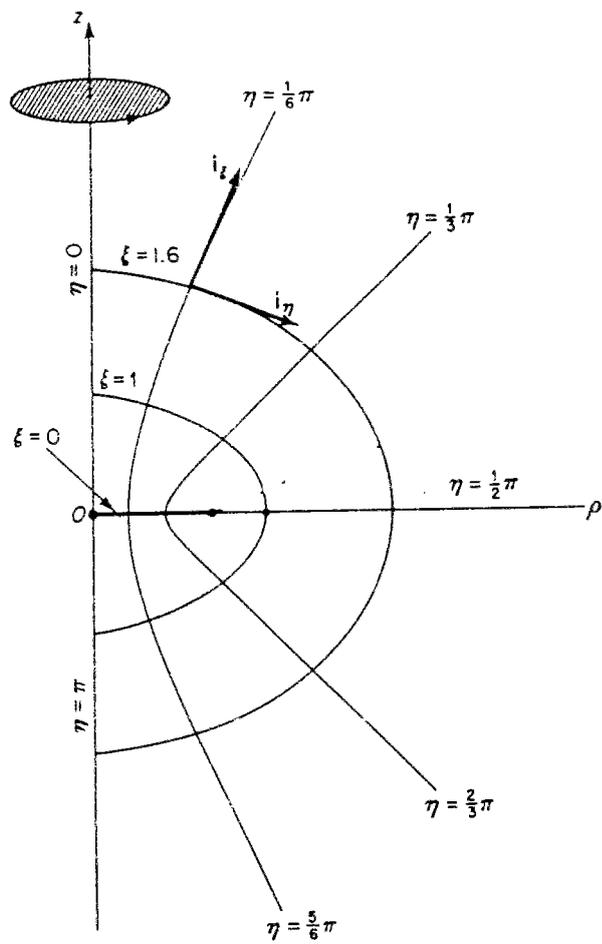
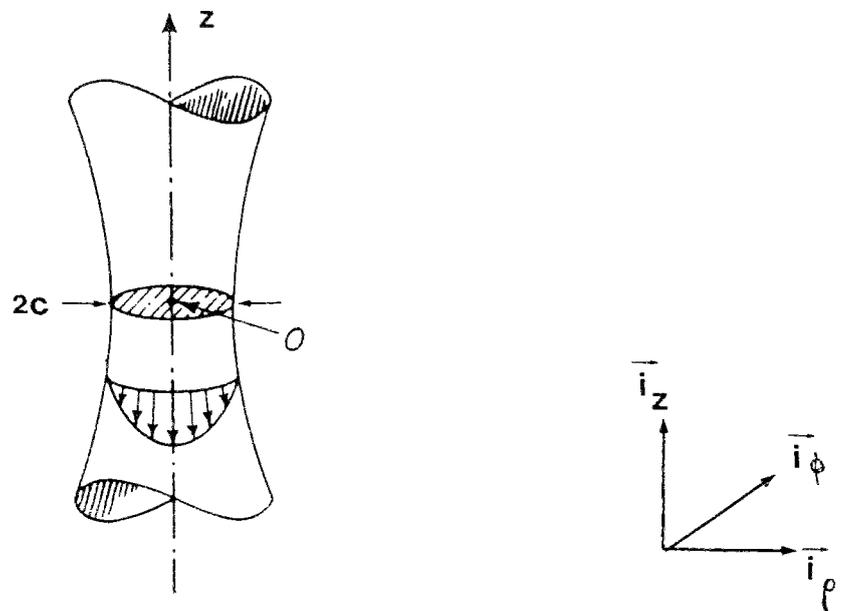


Figure 2.20

Écoulement dans une conduite axisymétrique (hyperboloïde de révolution)
et système de coordonnées sphéroïdales associé, d'après [59].

Compte-tenu de la symétrie du problème, on cherche une solution sous la forme $\Psi=\Psi(\eta)$ avec les conditions aux limites suivantes.

- la condition de non-glissement sur la paroi solide s'écrit : $\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} = 0$ en $\eta_0=\pi/2$

- la conservation du débit à travers une section implique que si $\Psi(0)=0$ sur l'axe (par convention) alors sur la paroi $\Psi(\pi/2)=Q/2\pi$.

Il faut ensuite exprimer l'opérateur E^2 , puis E^4 , en coordonnées sphéroïdales. Au terme d'un calcul technique qui exige plusieurs manipulations algébriques fastidieuses (nous renvoyons à la référence [59] pour plus de détails), on obtient la fonction de courant sous la forme :

$$\Psi(\eta) = \frac{Q}{2\pi}(1 - \cos^3(\eta)) \quad (2.5)$$

III.1.3 Champ de vitesse sur l'axe

La vitesse sur l'axe, notée $V_z(z,\rho)$, s'obtient facilement à partir de l'équation (1.5) du chapitre 1 :

$$V_z(z,\rho) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\Psi}{\partial\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial\rho}$$

Ceci permet de calculer la composante de la vitesse suivant z :

$$V_z(\xi, \eta) = -\frac{3Q}{2\pi c^2} \frac{\cos^3 \eta}{(\text{ch}^2 \xi - \sin^2 \eta)}$$

En particulier, sur l'axe Oz , où $\eta=0$ et $z/c=\text{sh}\xi$, nous obtenons l'expression suivante de la vitesse $V_z(z, \rho=0)$, que nous noterons simplement $V_z(z)$:

$$V_z(z) = -\frac{3Q}{2\pi c^2} \frac{1}{1+(z/c)^2} \quad (2.6)$$

Le signe - indique que le fluide s'écoule vers le bas, l'axe Oz étant orienté vers le haut.

III.1.4 Différence de pression due à la traversée de l'orifice

A partir de la fonction de courant, il est possible de calculer la distribution de pression dans l'écoulement en revenant à la forme courante de l'équation de Stokes. On en déduit la pression régnant en tout point de coordonnées (ξ,η) :

$$P(\xi, \eta) = P_0 + \frac{3\mu Q}{\pi c^3} \left(\frac{\text{sh}\xi}{\text{sh}^2\xi + \cos^2\eta} + \arctan(\text{sh}\xi) \right)$$

La pression de référence P_0 est la pression dans le plan de l'orifice, où $\xi=0$ et $\eta=\pi/2$. La pression à l'infini est obtenue simplement en faisant tendre ξ vers l'infini :

$$P(+\infty) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} P(\xi, \eta) = P_0 + \frac{3\mu Q}{2c^3} \quad \text{et} \quad P(-\infty) = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} P(\xi, \eta) = P_0 - \frac{3\mu Q}{2c^3}$$

La différence de pression à la traversée de l'orifice, ΔP_0 , est égale à la différence des pressions en amont $P(+\infty)$ et en aval de l'orifice $P(-\infty)$. Finalement, ΔP_0 s'exprime très simplement en fonction du débit Q , du rayon de l'orifice c , et de la viscosité du fluide sous la forme :

$$\Delta P_0 = \frac{3\mu Q}{c^3} \tag{2.7}$$

III.2 Comparaison entre l'écoulement dans la cellule expérimentale et l'écoulement à travers une plaque infinie

Nous allons maintenant analyser les résultats obtenus au paragraphe I sur la relation contrainte-débit et la vitesse sur l'axe dans la cellule expérimentale, en utilisant les expressions analytiques que nous venons d'exposer concernant l'écoulement à travers une plaque infinie.

III.2.1 Champ de vitesse sur l'axe

Nous appelons V_0 la valeur de la vitesse sur l'axe dans le plan de l'orifice qui est obtenue pour $z=0$ dans la solution analytique de l'écoulement à travers une plaque infinie (équation 2.6) :

$$V_0 = -\frac{3Q}{2\pi c^2}$$

et nous normalisons les vitesses mesurées au paragraphe I par cette quantité. Sur la figure 2.21, nous avons porté, en fonction de la distance z à l'orifice normalisée par le rayon de l'orifice c , les valeurs des vitesses mesurées sur l'axe en amont de l'orifice normalisées par V_0 .

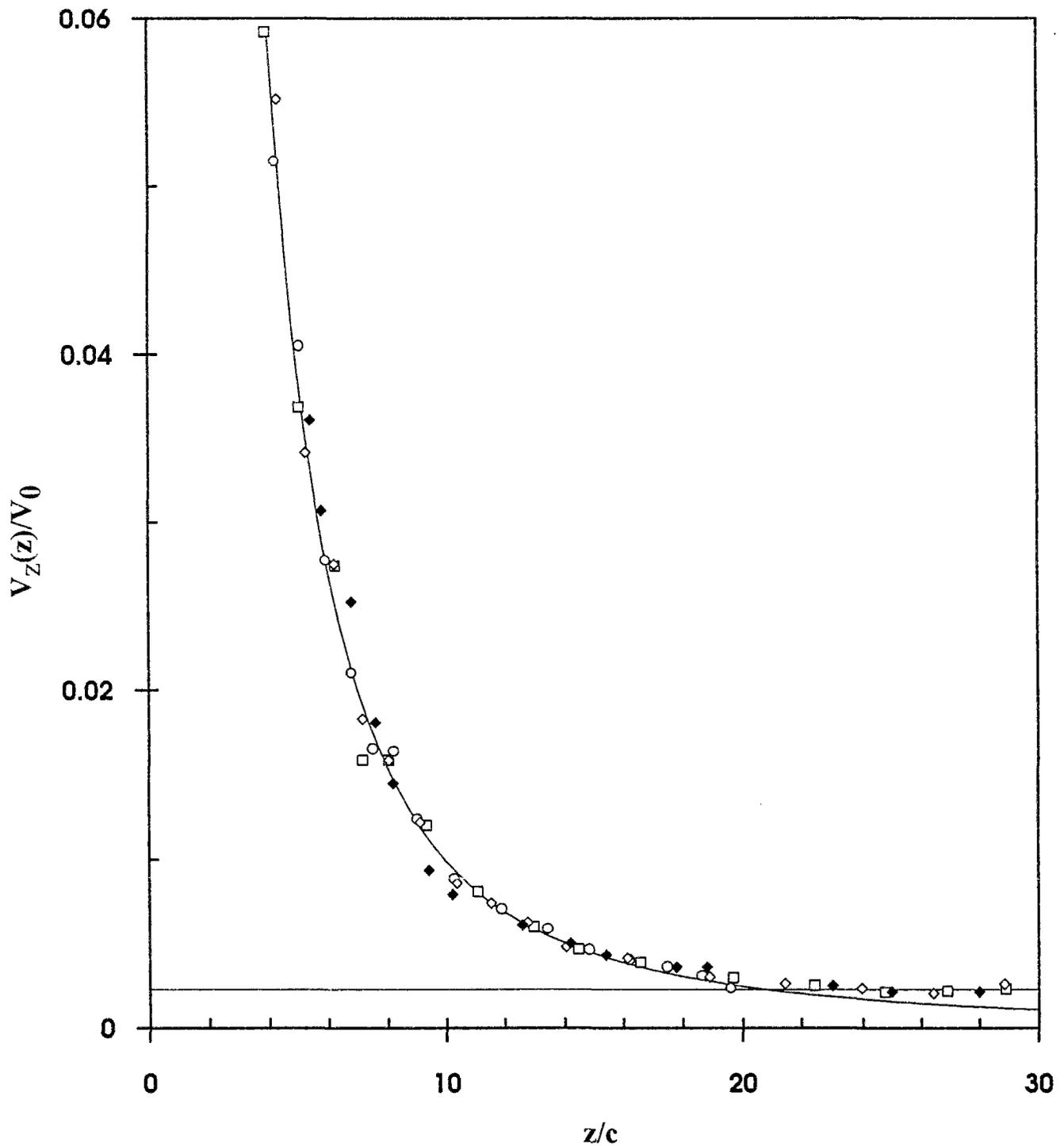


Figure 2.21

Variation de la vitesse V_z mesurée sur l'axe de la cellule, normalisée par $V_0 = 3Q/2\pi c^2$, en fonction de z/c ($\blacklozenge Q = 1,45 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^3/\text{s}$, $\square \diamond \circ Q = 0,7 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^3/\text{s}$). Les courbes en traits continus représentent la variation théorique de la vitesse sur l'axe dans le cas de l'écoulement à travers un orifice circulaire dans une plaque infinie, et dans le cas de l'écoulement de Poiseuille.

On rappelle que les différentes séries de points correspondent à différentes particules, et que les expériences ont été réalisées à deux débits différents. Nous constatons que :

- les points expérimentaux se placent au voisinage d'une même courbe, indépendamment du débit auquel est réalisée l'expérience,
- dans une région de l'axe proche de l'orifice ($z/c < 20$ environ) les points expérimentaux se placent avec une bonne précision sur la courbe théorique d'équation :

$$\frac{V_z(z)}{V_0} = \frac{1}{1+(z/c)^2}$$

ce qui montre que dans cette région, la vitesse de l'écoulement sur l'axe coïncide avec celui qui est attendu dans le cas d'une plaque infinie,

- dans une région de l'axe loin de l'orifice ($z/c > 20$ environ) les vitesses sont constantes et indépendantes de la distance à l'orifice. Nous avons tracé sur la figure 2.21 la valeur de la vitesse normalisée correspondant à l'écoulement de Poiseuille qui est attendu dans le tube cylindrique de rayon R :

$$\frac{V_z(z)}{V_0} = \frac{4c^2}{3R^2}$$

Nous observons un bon accord entre les points expérimentaux et la variation attendue.

Par ailleurs, nous avons mesuré la variation de la vitesse $V_z(\rho)$ à une hauteur z donnée (figure 2.22), et nous avons vérifié que les points expérimentaux se placent sur une parabole d'équation :

$$V_z(\rho) = \frac{2Q}{\pi R^2} \left[1 - (\rho/R)^2 \right]$$

Ainsi, loin de l'orifice ($z/c > 20$) l'écoulement est de type Poiseuille dans un tube circulaire.

Nous pouvons déduire des mesures précédentes la distance de l'orifice à partir de laquelle l'écoulement de Poiseuille devient dominant devant l'écoulement de type élongationnel. Cette distance, notée z_c , est obtenue sur l'axe en écrivant que la vitesse de l'écoulement de Poiseuille est égale à la vitesse de l'écoulement à travers la plaque infinie. Nous obtenons l'expression de z_c/c :

$$\frac{z_c}{c} = \left(\frac{3}{4} (R/c)^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

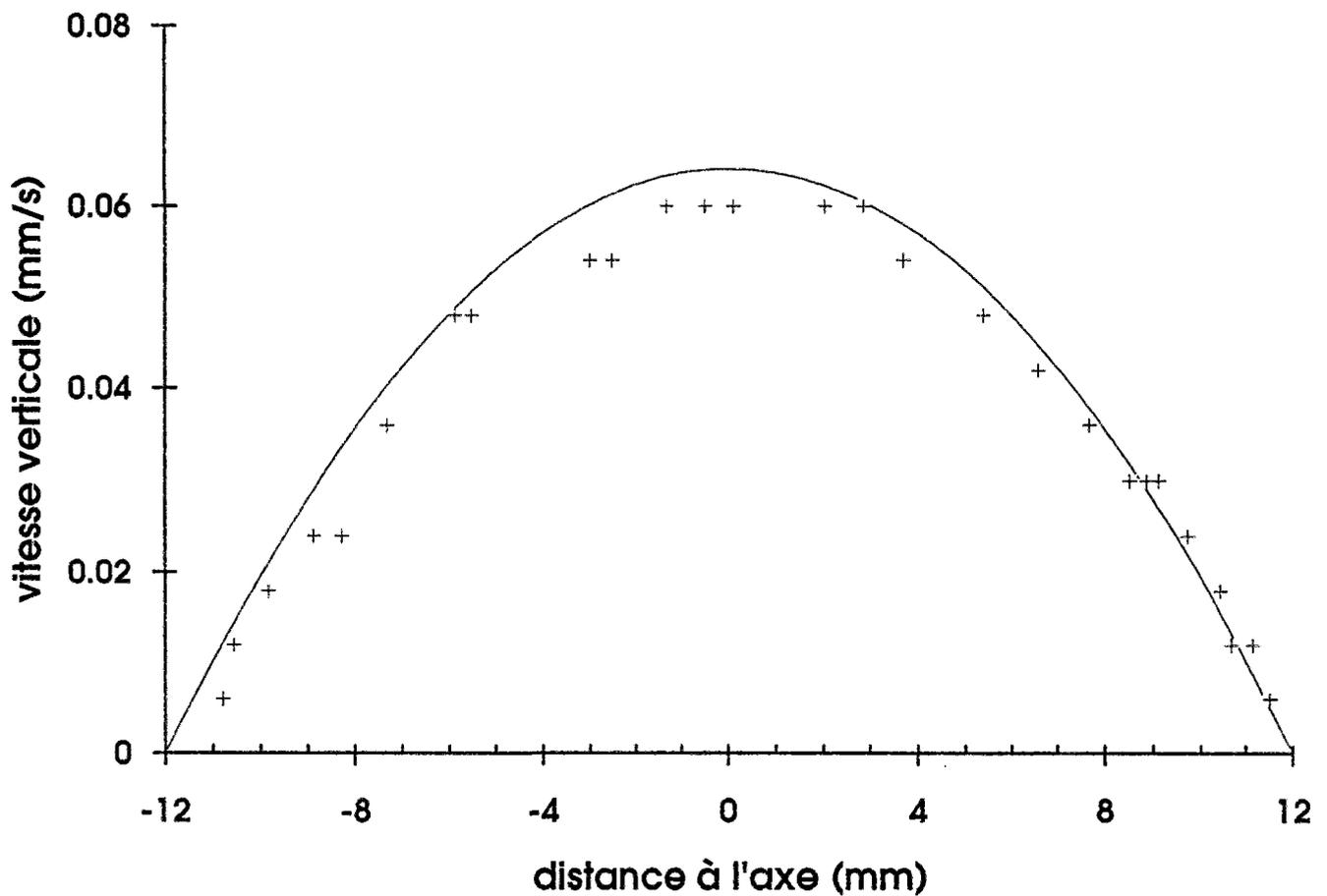


Figure 2.22

Variation de la vitesse verticale $V_z(\rho)$ mesurée à une hauteur z donnée, en fonction de la distance ρ à l'axe de la cellule. Le débit de l'écoulement est $Q=1,5 \cdot 10^{-2} \text{cm}^3/\text{s}$. Ces points sont obtenus sur des clichés à temps de pose donné, ce qui explique la valeur relativement importante de la barre d'erreur. La courbe en traits continus représente l'écoulement de Poiseuille calculé pour le débit de l'expérience.

La distance z_c est indépendante du débit, et ne dépend que de la valeur du rapport de contraction R/c pour un diamètre d'orifice donné. Dans notre cellule, où $R/c=24$, nous obtenons une valeur de z_c de 10mm environ (qui correspond bien par ailleurs à l'intersection des courbes théoriques sur la figure 2.21). Ce calcul montre que le choix du rapport de contraction détermine, à diamètre d'orifice donné, l'étendue de la zone élongationnelle, tandis que le taux d'élongation est fixé par le diamètre de l'orifice.

III.2.2 Relation contrainte-débit

Nous supposons que la différence de pression ΔP mesurée entre les deux prises de pression A et B a pour contribution essentielle la différence de pression due à la traversée de l'orifice (nous vérifierons que la contribution de l'écoulement de Poiseuille est effectivement négligeable). Dans la suite, nous comparons donc les valeurs trouvées expérimentalement pour ΔP avec la valeur théorique ΔP_0 (équation 2.7) de la plaque infinie.

a) Calcul du rapport $\Delta P/\Delta P_0$

Nous avons repris les données expérimentales qui sont représentées sur la figure 2.14, et calculé par régression linéaire la pente α de la droite ΔP en fonction du débit Q définie par :

$$\Delta P = \alpha Q$$

Pour la solution analytique de la plaque infinie, nous pouvons définir de même d'après l'équation (2.7) une pente α_0 par :

$$\Delta P_0 = \alpha_0 Q \quad \text{où} \quad \alpha_0 = 3\mu/c^3$$

Pour chacune des deux expériences, qui concernent deux fluides différents (huile silicone et mélange eau-glucose), nous formons le rapport α/α_0 , qui est aussi le rapport $\Delta P/\Delta P_0$ à débit donné.

b) Incertitude sur $\Delta P/\Delta P_0$

L'incertitude sur la quantité $\Delta P/\Delta P_0$ a essentiellement deux origines :

- l'erreur sur le calcul de la pente α de la droite qui représente la différence de pression en fonction du débit,
- l'erreur sur la viscosité de cisaillement μ du solvant à la température de l'expérience.

Nous estimons à $\pm 30\text{mPa.s}$ l'erreur maximale sur la viscosité de cisaillement du mélange eau-glucose, ce qui correspond à une incertitude relative sur la valeur de μ de l'ordre

de $\pm 4.5\%$. L'erreur sur la viscosité de l'huile silicone est plus faible, de l'ordre de $\pm 5\text{mPa.s}$, soit une incertitude relative de $\pm 1\%$.

L'erreur sur la pente α est estimée de la manière suivante. La droite de régression passant par tous les points expérimentaux a tendance à moyenniser les erreurs qui sont attachées à chaque mesure du couple (ΔP , Q). Nous pouvons cependant majorer l'erreur sur la pente en calculant les pentes extrémales obtenues en faisant l'erreur maximale sur le débit d'une part ($\pm 1\%$ en valeur relative) et sur la pression d'autre part ($\pm 0.5\text{mbar}$). Nous obtenons par cette méthode une erreur relative de $\pm 2.5\%$ sur la pente. Cette erreur est faible, ce qui explique que les droites qui représentent ΔP en fonction du débit passent par l'origine des axes avec une très bonne précision.

Finalement, l'incertitude relative sur la valeur de $\Delta P/\Delta P_0$ qui résulte de la somme des deux incertitudes précédemment calculées est de l'ordre de $\pm 7\%$ pour le mélange eau-glucose, et de $\pm 3.5\%$ pour l'huile silicone.

c) Résultats

Les données relatives à chaque expérience et les rapports $\Delta P/\Delta P_0$ qui en résultent sont consignés dans le tableau suivant :

	température (°C)	viscosité (mPa.s)	pente α_0 (calcul)	pente α (régression)	α/α_0 $\Delta P/\Delta P_0$
huile silicone	23	465	$1,11.10^4$	$1,31.10^4$	1.17 ± 0.03
mélange eau-glucose	20.8	690	$1,65.10^4$	$1,84.10^4$	1.09 ± 0.08

Le rapport $\Delta P/\Delta P_0$ est indépendant de la viscosité du fluide, à la précision des mesures, ce qui était attendu. Par ailleurs, nous trouvons un rapport $\Delta P/\Delta P_0$ proche de 1, ce qui indique un écart faible entre les résultats expérimentaux concernant notre cellule et la différence de pression calculée dans une plaque infinie. Cependant, le calcul de l'incertitude sur le rapport $\Delta P/\Delta P_0$ montre que l'écart à la valeur 1 est significatif, et que la signification de cet écart mérite d'être discutée.

d) Origine de l'écart entre ΔP et ΔP_0

Une première explication concernant l'écart constaté entre la différence de pression mesurée dans la cellule ΔP , et la différence de pression calculée pour une plaque infinie ΔP_0 , consiste à invoquer la contribution de l'écoulement de Poiseuille à la différence de pression mesurée. En effet, dans la région comprise entre les prises de pression et la zone élongationnelle, nous avons des portions d'écoulement de Poiseuille circulaire qui contribuent

pour une quantité notée ΔP_1 à la différence de pression. Une borne supérieure de ΔP_1 est obtenue en calculant la différence de pression dans un tube cylindrique de rayon R et de longueur h, h étant la distance entre les prises de pression A et B :

$$\Delta P_1 \leq \frac{8\mu h Q}{\pi R^4}$$

Le rapport $\Delta P_1/\Delta P_0$ est donc majoré de la manière suivante :

$$\frac{\Delta P_1}{\Delta P_0} \leq \frac{8}{3\pi} \frac{hc^3}{R^4}$$

En utilisant les caractéristiques géométriques de la cellule (c=0.5mm, R=12mm, h=180mm), nous trouvons que ΔP_1 vaut environ $\Delta P_0/1000$. Cet ordre de grandeur prouve que la contribution des portions d'écoulement de Poiseuille situées en dehors de la zone d'élongation est complètement négligeable et ne joue aucun rôle dans l'écart observé avec la plaque infinie.

Par ailleurs, de nombreux auteurs ont constaté expérimentalement (cités à la référence [60]), pour des écoulements à travers un orifice, des écarts à la plaque infinie qui sont liés à la fois à la présence des parois cylindriques et à l'épaisseur finie de la plaque. Notre résultat concernant la valeur de $\Delta P/\Delta P_0$ est tout à fait comparable à celui d'une étude expérimentale réalisée dans une géométrie analogue à celle de notre cellule [53].

III.2.3 Champ de déformation

Compte-tenu du bon accord que nous avons observé entre l'écoulement dans la cellule expérimentale et l'écoulement à travers une plaque infinie, en ce qui concerne le champ de vitesse sur l'axe et la relation contrainte-débit, nous poursuivons notre exploitation de la description analytique de l'écoulement dans une plaque infinie, en nous intéressant cette fois à la forme du champ de déformation.

Pour cela, nous nous plaçons dans le repère orthogonal $(\vec{i}_\xi, \vec{i}_\eta, \vec{i}_\phi)$ associé localement au point de coordonnées (ξ, η, ϕ) . Partant de l'expression de la fonction de courant obtenue précédemment (équation 2.5), nous calculons les composantes $(u_\xi, u_\eta = 0, u_\phi = 0)$ de la vitesse en ce point, et nous en déduisons l'expression du tenseur $\nabla \vec{V}$ dans le repère $(\vec{i}_\xi, \vec{i}_\eta, \vec{i}_\phi)$. Il est nécessaire pour le calcul de $\nabla \vec{V}$ de connaître l'expression de l'opérateur gradient dans le système de coordonnées sphéroïdales utilisées [59]. Le calcul est technique, mais permet finalement d'obtenir à partir du tenseur $\nabla \vec{V}$ l'expression du tenseur de déformation $\underline{\underline{E}}$ et du vecteur rotation $\vec{\Omega}$, respectivement :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 & \dot{\beta} & 0 \\ \dot{\beta} & -\dot{\epsilon}_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\epsilon}_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma}/2 \end{bmatrix}$$

Les composantes $\dot{\epsilon}_1$, $\dot{\epsilon}_2$, $\dot{\gamma}$ et $\dot{\beta}$ ont respectivement pour expression :

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{\dot{\epsilon}_0}{2} \frac{\cos^2 \eta \operatorname{sh} \xi}{(\operatorname{ch}^2 \xi - \sin^2 \eta)^2} \quad \dot{\epsilon}_2 = \frac{\dot{\epsilon}_0}{2} \frac{\cos^2 \eta \operatorname{sh} \xi}{(\operatorname{ch}^2 \xi - \sin^2 \eta) \operatorname{ch}^2 \xi}$$

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{\epsilon}_0}{2} \frac{\sin(2\eta) \operatorname{sh}^2 \xi}{(\operatorname{ch}^2 \xi - \sin^2 \eta)^2 \operatorname{ch} \xi} \quad \dot{\gamma} = \frac{\dot{\gamma}_0}{2} \frac{\sin(2\eta)}{(\operatorname{ch}^2 \xi - \sin^2 \eta) \operatorname{ch} \xi}$$

Ces résultats montrent que l'écoulement à travers une plaque infinie est un écoulement mixte, qui fait intervenir une combinaison d'élongation et de cisaillement. Les axes propres de la déformation dans le repère $(\vec{i}_\xi, \vec{i}_\eta, \vec{i}_\phi)$ peuvent être obtenus en diagonalisant le tenseur $\underline{\underline{E}}$. $\dot{\epsilon}_0$ et $\dot{\gamma}_0$ sont les taux d'élongation et de cisaillement construits à partir de la vitesse V_0 et du rayon de l'orifice :

$$\dot{\epsilon}_0 = \dot{\gamma}_0 = \frac{2|V_0|}{c} = \frac{3Q}{\pi c^3}$$

$\dot{\epsilon}_0$ et $\dot{\gamma}_0$ fournissent des ordres de grandeur du taux d'élongation et du taux de cisaillement dans la cellule. Nous allons maintenant nous intéresser à deux régions particulières de l'écoulement : l'axe de symétrie de révolution vertical Oz, et le plan horizontal contenant l'orifice.

a) Axe de révolution Oz

Sur l'axe Oz, où $\eta=0$ et $z/c=\operatorname{sh} \xi$, les expressions du tenseur de déformation $\underline{\underline{E}}$ et du vecteur rotation $\underline{\underline{\Omega}}$ se simplifient et deviennent :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\epsilon}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\epsilon}/2 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \frac{z/c}{(1+(z/c)^2)^2} \quad ; \quad \underline{\underline{\Omega}} = \vec{0}$$

Ceci démontre que sur l'axe Oz, l'écoulement est élongationnel pur (chapitre 1). Le taux d'élongation $\dot{\epsilon}$ n'est pas constant ; en particulier, il est nul dans le plan de l'orifice ($z=0$), positif en amont ($z>0$) où l'élongation est de type uniaxiale, et négatif en aval ($z<0$) où l'élongation est biaxiale. Remarquons de plus que ce taux d'élongation s'obtient bien en

calculant la dérivée par rapport à z de la vitesse verticale $V_z(z)$ (équation 2.6). La variation de $\dot{\epsilon} / \dot{\epsilon}_0$ en amont de l'orifice en fonction de la variable adimensionnée z/c est représentée sur la figure 2.23. Le taux d'élongation sur l'axe présente un maximum en $z = c\sqrt{3}$, le maximum $\dot{\epsilon}_{\max}$ vaut :

$$\dot{\epsilon}_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \dot{\epsilon}_0$$

L'allure de la courbe rappelle les résultats obtenus par résolution numérique des équations de Stokes dans une contraction brusque [51,52] ; des comparaisons quantitatives sont toutefois exclues car ces travaux concernent des géométries à faible rapport de contraction, où la zone élongationnelle en amont de l'orifice est très peu étendue.

b) Plan de l'orifice

Dans ce plan, où $\xi=0$ et $\rho/c=\sin\eta$, le tenseur \underline{E} s'annule. L'écoulement est donc un écoulement de cisaillement simple de taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ dont un ordre de grandeur est fourni par $\dot{\gamma}_0$ introduit plus haut.

III.2.4 Conclusion

Au cours de ce paragraphe comparatif, nous sommes parvenus à caractériser analytiquement de façon très précise le champ de vitesse et de déformation dans le cas théorique de l'écoulement à travers une plaque infinie. Nous avons montré d'autre part que l'écoulement dans la cellule expérimentale et l'écoulement à travers la plaque infinie sont identiques en ce qui concerne le champ de vitesse sur l'axe au voisinage de l'orifice. En ce qui concerne la relation contrainte-débit, nous avons montré que les quantités correspondantes se comparent bien entre les deux types d'écoulement, et nous avons donné l'origine de l'écart observé.

Ces résultats nous seront utiles dans les chapitres suivants. Dans l'immédiat, nous pouvons calculer les ordres de grandeur des paramètres caractéristiques de l'écoulement dans la cellule, en fonction des débits utilisés expérimentalement. Ces ordres de grandeur sont résumés dans le tableau suivant. Dans ce tableau, le nombre de Reynolds est calculé au niveau de l'orifice, où il est maximal. Il est donc construit à partir de la vitesse V_0 et de la longueur c .

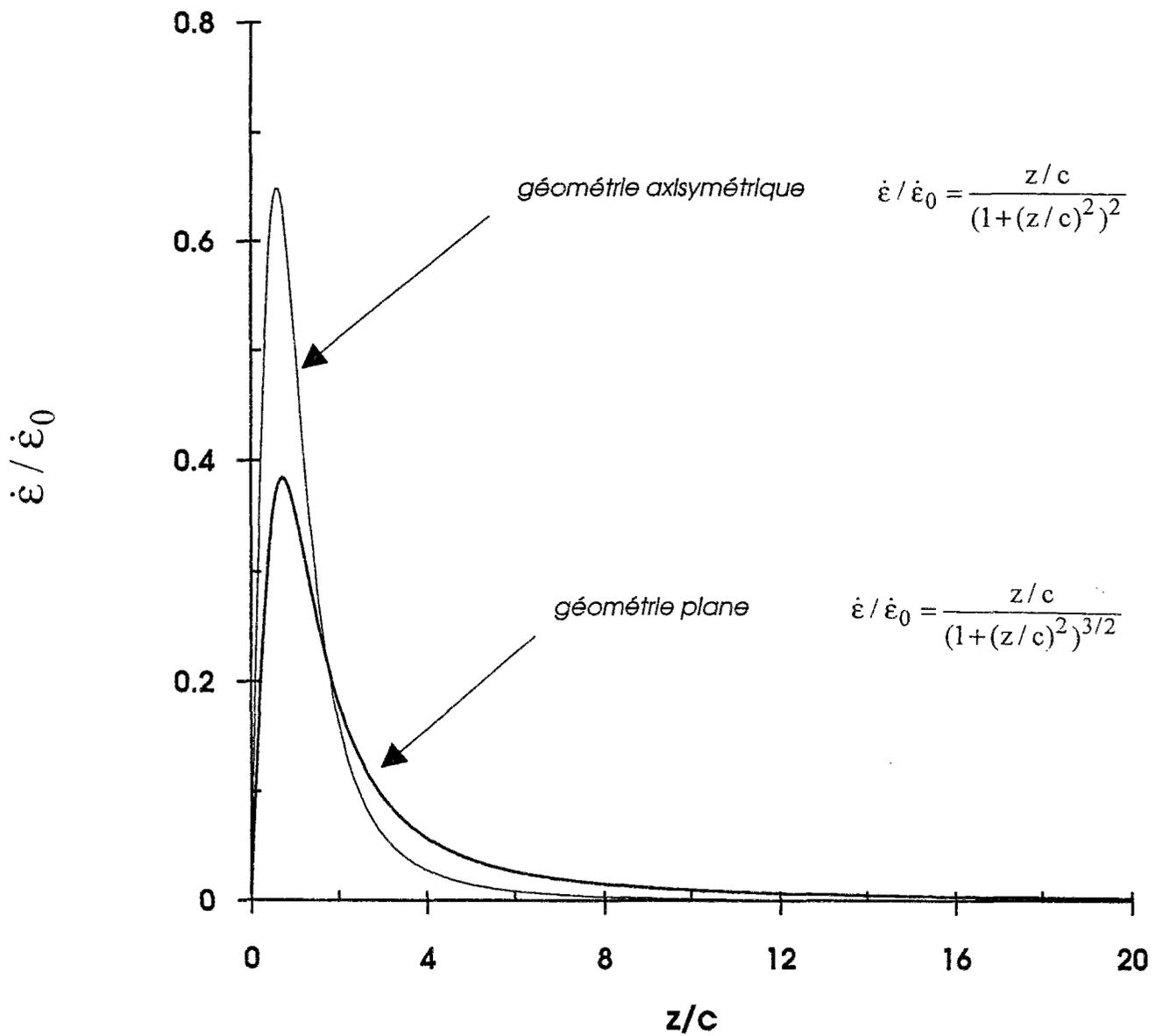


Figure 2.23

Variation sur l'axe vertical de la cellule du taux d'élongation $\dot{\epsilon}$ normalisé par $\dot{\epsilon}_0$, en fonction de la variable adimensionnée z/c , en géométrie axisymétrique (orifice circulaire) et en géométrie plane (fente rectangulaire).

	V_0 (mm/s)	Re (orifice)	$\dot{\epsilon}_0, \dot{\gamma}_0$ (s-1)	$\dot{\epsilon}_{\max}$ (s-1)
$Q_{\min} = 10^{-3} \text{cm}^3/\text{s}$	1.9	$2 \cdot 10^{-3}$	7.6	2.5
$Q_{\max} = 0,3 \text{cm}^3/\text{s}$	572	6	2290	744

Nous constatons que la valeur la plus grande du nombre de Reynolds dans nos expériences, correspondant à la vitesse maximale dans l'écoulement pour le débit maximum, est de l'ordre de 6, ce qui justifie l'approximation de Stokes effectuée dans tout ce travail.

Une dernière quantité intéressante pour caractériser la nature de l'élongation dans la cellule est la déformation d'un élément de fluide pendant l'intervalle de temps où il est soumis à l'élongation en traversant l'orifice (chapitre 1). Nous pouvons caractériser cette déformation en calculant l'intégrale ϵ entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\epsilon = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\epsilon}(t) dt = \int_{z_1}^{z_2} (\dot{\epsilon}(z) / V_z(z)) dz$$

En utilisant l'expression du taux d'élongation et de la vitesse sur l'axe de la cellule, nous calculons ϵ entre la limite amont de la zone d'élongation ($z_2 = z_c = 20c$) et l'orifice ($z_1 = 0$) :

$$\epsilon = \int_0^{20c} \frac{2z}{(z^2 + c^2)} dz \cong \text{Log}(400)$$

Or le rapport des longueurs initiales et finales de l'élément de fluide est égal à $\exp(\epsilon)$ (chapitre 1). Un carré de côté unité est donc transformé en un rectangle de longueur 400 après son passage dans la zone d'élongation amont.

III.3 Comparaison entre la géométrie axisymétrique et la géométrie plane

Dans ce paragraphe, nous présentons une étude analytique de l'écoulement à travers une fente rectangulaire dans une plaque infinie. Cet écoulement est l'équivalent bidimensionnel de l'écoulement à travers un orifice traité précédemment. Ne disposant pas de solutions analytiques pour le champ de vitesse comme dans le cas axisymétrique, nous avons calculé le champ de vitesse et de déformation pour cette géométrie plane en utilisant une méthode analogue, et nous donnons les résultats ci-dessous. L'intérêt est double : d'une part, cette étude n'est pas détaillée à notre connaissance dans la littérature, bien que l'écoulement à

travers une fente ait été fréquemment utilisé expérimentalement, d'autre part la confrontation de la géométrie axisymétrique et de la géométrie plane permet de mieux cerner les spécificités de chaque type d'écoulement, et l'intérêt de la géométrie axisymétrique que nous avons choisie.

III.3.1 Champ de vitesse

Nous étudions l'écoulement à travers une fente rectangulaire pratiquée dans une plaque infinie (figure 2.24). Cette fente est centrée sur l'axe Oy du repère, et a pour largeur $2c$. La profondeur d dans la direction Oy est supposée très grande, ce qui permet de réaliser un écoulement bidimensionnel ne possédant pas de composantes de vitesse dans la direction Oy. L'écoulement a lieu du haut vers le bas.

Nous considérons, comme au paragraphe précédent, que cet écoulement est un cas limite de l'écoulement à travers une conduite dont les parois sont des hyperboles (en coupe dans les plans parallèles au plan (Oxz)). Les lignes de courant sont des hyperboles dont les foyers sont situés aux bords de la fente. Pour étudier cet écoulement, nous utilisons cette fois un système de coordonnées elliptiques (ξ, η) définies par [61]:

$$\begin{cases} x/c = \operatorname{ch}\xi \cos \eta \\ z/c = \operatorname{sh}\xi \sin \eta \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 \leq \xi < +\infty \\ 0 \leq \eta < 2\pi \end{cases}$$

L'écoulement à travers une plaque plane est obtenu en fixant la coordonnée η_0 de la paroi solide à $\eta_0=0$.

a) Calcul de la fonction de courant

La solution analytique correspondant à l'écoulement décrit ci-dessus est obtenue en résolvant l'équation de Stokes écrite en terme de fonction de courant, $\Delta^2\Psi=0$, Ψ étant de la forme $\Psi(\eta)$, avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} = 0 \text{ pour } \eta=0, \quad \Psi(\pi/2)=0 \text{ et } \Psi(0)=q/2$$

q est le débit à travers une fente de longueur unité dans la direction y, il est donc égal à Q/d où Q désigne comme précédemment le débit volumique et d est la profondeur de la fente. Le calcul complet est détaillé en annexe de ce chapitre. Nous trouvons l'expression suivante de la fonction de courant :

$$\Psi(\eta) = \frac{q}{\pi} \left(\eta - \sin \eta \cos \eta - \frac{\pi}{2} \right)$$

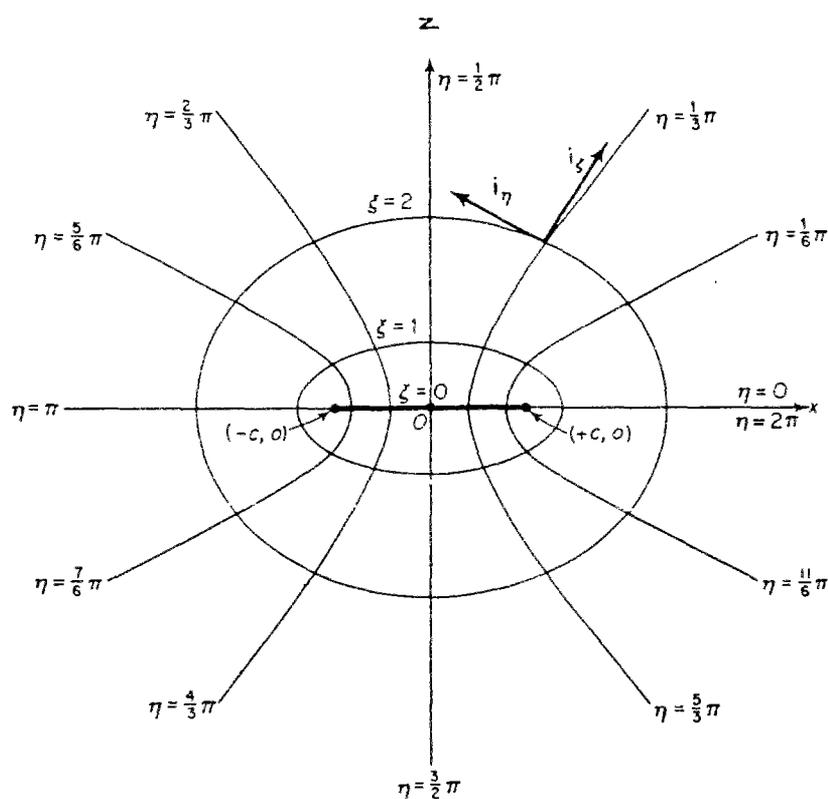
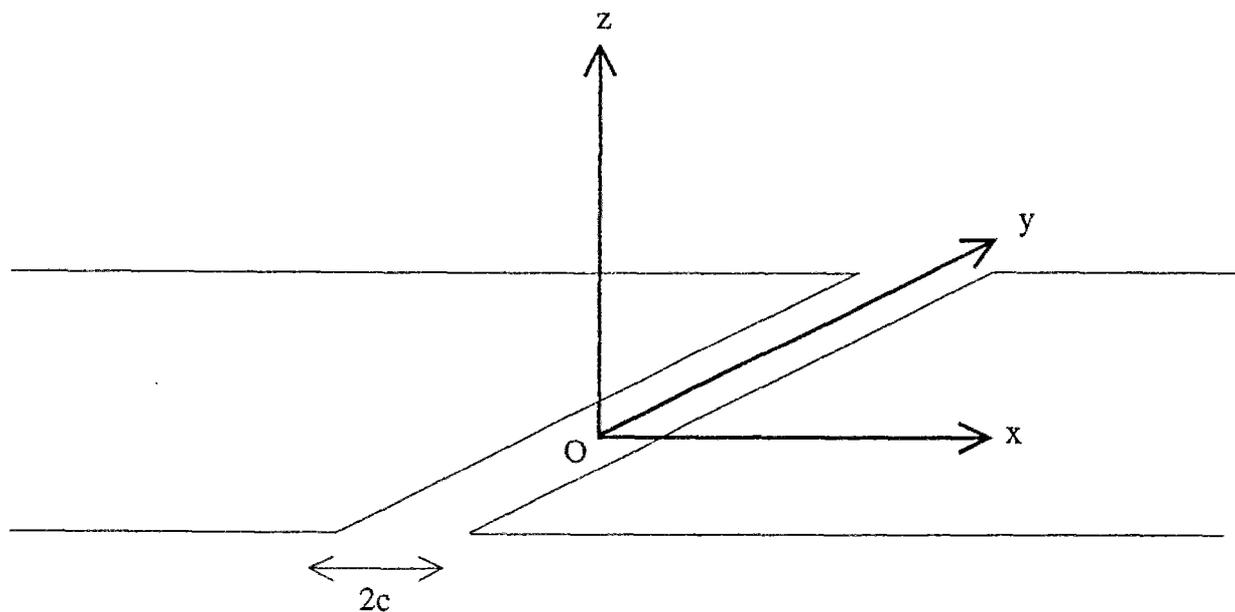


Figure 2.24

Écoulement dans une fente rectangulaire
et système de coordonnées elliptiques associé, d'après [61].

b) Champ de vitesse sur l'axe

L'expression de la fonction de courant nous permet de calculer les composantes de la vitesse. Nous donnons ici l'expression de la vitesse verticale sur l'axe Oz, notée $V_z(z)$:

$$V_z(z) = -\frac{2q}{\pi c} \frac{1}{(1+(z/c)^2)^{1/2}}$$

Le signe - indique que le fluide s'écoule vers le bas, l'axe Oz étant orienté vers le haut. Dans la suite, nous prendrons $V_0=2q/\pi c$ comme ordre de grandeur caractéristique de la vitesse.

c) Différence de pression due à la traversée de la fente

La différence de pression ΔP_0 , définie comme la différence entre la pression à l'infini en amont de la fente et la pression à l'infini en aval, s'obtient comme précédemment à partir du champ de pression, dont le calcul est détaillé dans l'annexe, et vaut :

$$\Delta P_0 = \frac{8\mu q}{\pi c^2}$$

III.3.2 Champ de déformation

a) Expression générale

A partir de l'expression de la fonction de courant et après avoir écrit les composantes de l'opérateur gradient dans le repère elliptique $(\bar{i}_\xi, \bar{i}_\eta, \bar{i}_y)$, nous obtenons au terme d'un calcul technique les expressions complètes du tenseur de déformation $\underline{\underline{E}}$ et du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de l'écoulement. Ces expressions sont données ci-dessous dans le même repère $(\bar{i}_\xi, \bar{i}_\eta, \bar{i}_y)$.

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} & \beta & 0 \\ \beta & -\dot{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma}/2 \end{bmatrix}$$

Les composantes $\dot{\epsilon}$, β et $\dot{\gamma}$ ont respectivement pour expression :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \frac{\sin^2 \eta \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi}{(\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta)^2}$$

$$\beta = -\dot{\epsilon}_0 \frac{\sin(2\eta) \operatorname{sh}^2 \xi}{(\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta)^2}$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \frac{\sin(2\eta)}{(\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta)}$$

où $\dot{\varepsilon}_0$ et $\dot{\gamma}_0$ sont définis à partir de V_0 et c :

$$\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\gamma}_0 = \frac{V_0}{c} = \frac{2q}{\pi c^2}$$

b) Champ de déformation sur l'axe vertical

Sur l'axe vertical Oz, où $\eta=\pi/2$ et $z/c=\text{sh}\xi$, les expressions précédentes se simplifient et l'on obtient dans le repère $(\vec{i}_z, \vec{i}_x, \vec{i}_y)$:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 \frac{z/c}{(1+(z/c)^2)^{3/2}}; \quad \underline{\underline{\Omega}} = \vec{0}$$

Ceci montre que sur l'axe Oz, la déformation est une *élongation planaire* dont le taux d'élongation est $\dot{\varepsilon}$. Ce taux d'élongation correspond bien à la dérivée par rapport à z de la composante $V_z(z)$ de la vitesse sur l'axe trouvée plus haut. L'évolution du taux d'élongation, normalisé par $\dot{\varepsilon}_0$, en fonction de la variable adimensionnée z/c est représentée sur la figure 2.23. Le taux d'élongation maximal est obtenu pour $z/c = \sqrt{2}$ et vaut $\dot{\varepsilon}_{\max} = 2\dot{\varepsilon}_0 / 3\sqrt{3}$. Le rapport entre les longueurs initiale et finale d'un élément de fluide ayant traversé la zone d'élongation est égal à $\exp(\varepsilon)$ où :

$$\varepsilon = \int_{z_1}^{z_2} (\dot{\varepsilon}(z) / V(z)) dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{z}{(z^2 + c^2)} dz$$

Cette expression montre que dans le cas plan ε est la moitié de la même grandeur calculée dans le cas axisymétrique sur la même distance, ce qui a des conséquences importantes sur $\exp(\varepsilon)$. En particulier, un carré de côté unité est étiré en un rectangle ayant pour longueur 20 après son passage dans la zone située entre $z=20c$ et $z=0$, alors que nous avons trouvé 400 pour le cas axisymétrique. Ceci fournit un argument quantitatif pour les observations expérimentales selon lesquelles les effets élongationnels sont plus faibles dans la géométrie plane que dans la géométrie axisymétrique [62].

III.3.3 Conclusion

Les résultats concernant les deux géométries d'écoulement sont résumées dans le tableau suivant, où nous avons rappelé les expressions respectives de la vitesse et du taux d'élongation sur l'axe vertical, ainsi que l'expression du tenseur de déformation, et du rapport des longueurs initiale et finale pour un élément de fluide se déplaçant entre $z=20c$ et $z=0$.

	géométrie axisymétrique (orifice)	géométrie plane (fente)
vitesse sur l'axe vertical	$V_z(z) = -\frac{3Q}{2\pi c^2} \frac{1}{(1+(z/c)^2)}$	$V_z(z) = -\frac{2q}{\pi c} \frac{1}{(1+(z/c)^2)^{1/2}}$
taux d'élongation sur l'axe vertical	$\dot{\epsilon}(z) = \frac{3Q}{\pi c^3} \frac{z/c}{(1+(z/c)^2)^2}$	$\dot{\epsilon}(z) = \frac{2q}{\pi c^2} \frac{z/c}{(1+(z/c)^2)^{3/2}}$
champs de déformation sur l'axe vertical	<p style="text-align: center;">élongation uniaxiale</p> $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\epsilon}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\epsilon}/2 \end{bmatrix}$	<p style="text-align: center;">élongation planaire</p> $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
déformation d'un élément de fluide sur l'axe vertical	$\ell_2/\ell_1=400$	$\ell_2/\ell_1=20$

La comparaison des solutions analytiques relatives aux écoulements à travers un orifice circulaire et à travers une fente peut être effectuée terme à terme en se plaçant à des débits équivalents. Ceci revient à remplacer dans les expressions précédentes le débit par unité de longueur de la fente, noté q , par Q/d , où Q est le débit volumique. En particulier, il est intéressant de calculer le rapport des taux d'élongation maximaux respectifs pour un même débit, $\dot{\epsilon}_{\max}(\text{fente})/\dot{\epsilon}_{\max}(\text{orifice})$, qui est de l'ordre de $1/d$. Ceci montre que le taux d'élongation dans la géométrie plane est très inférieur à celui de la géométrie bidimensionnelle puisque la profondeur d de la fente est très grande.

De plus la déformation d'un élément de fluide est beaucoup plus faible dans le cas plan que dans le cas axisymétrique. Enfin, il faut souligner la différence essentielle entre la forme des champs de déformation sur l'axe vertical. Dans le cas axisymétrique, cette déformation est une élongation *uniaxiale* ; dans le cas plan, c'est une élongation *planaire*. Nous verrons au chapitre suivant que cette différence est d'une grande importance en ce qui concerne la dynamique d'orientation d'une particule anisotrope se déplaçant sur l'axe d'élongation.

ANNEXE

Calcul du champ de vitesse et de pression de l'écoulement à travers une fente rectangulaire dans une plaque infinie

Le champ de vitesse et de pression correspondant à l'écoulement d'un fluide newtonien à travers une fente de largeur $2c$ pratiquée dans une plaque infinie se calcule à l'aide du système de coordonnées elliptiques introduit au paragraphe III.3 (figure 2.24). Ce système de coordonnées elliptiques (ξ, η) est relié au système cartésien (x, z) par les relations :

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \xi \cos \eta & \text{avec } 0 \leq \xi \leq +\infty \\ z &= c \operatorname{sh} \xi \sin \eta & 0 \leq \eta \leq 2\pi \end{aligned}$$

Nous allons résoudre l'équation de Stokes écrite en terme de la fonction de courant Ψ : $\Delta^2 \Psi = 0$ en cherchant une solution de la forme $\Psi = \Psi(\eta)$ qui est justifiée par la symétrie du problème. Dans la suite nous poserons :

$$\begin{aligned} \lambda &= \operatorname{sh} \xi \\ \zeta &= \sin \eta \end{aligned}$$

a) Calcul de la fonction de courant.

La première étape du calcul consiste à exprimer l'opérateur laplacien dans le système de coordonnées elliptiques [61] :

$$\Delta = \frac{1}{c^2(\lambda^2 + \zeta^2)} \left[(1 + \lambda^2) \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + (1 - \zeta^2) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right]$$

En appliquant cet opérateur à la fonction de courant nous trouvons :

$$\Delta \Psi = \frac{F(\zeta)}{c^2(\lambda^2 + \zeta^2)}$$

où la fonction F est définie par :

$$F(\zeta) = (1 - \zeta^2) \Psi'' - \zeta \Psi'$$

Puis nous calculons $\Delta^2 \Psi$ en appliquant une seconde fois l'opérateur laplacien :

$$\Delta^2\Psi = \frac{1}{c^2(\lambda^2 + \zeta^2)^3} \begin{bmatrix} \lambda^4 \{ (1-\zeta^2)F'' - \zeta F' + 4F \} \\ + 2\lambda^2 \{ \zeta^2(1-\zeta^2)F'' + \zeta(\zeta^2 - 2)F' + 2F \} \\ + \zeta^4(1-\zeta^2)F'' - \zeta^3(4-3\zeta^2)F' + 4\zeta^2(1-\zeta^2)F \end{bmatrix}$$

Comme nous cherchons une solution Ψ qui ne dépend que de η , donc de ζ , l'équation de Stokes $\Delta^2\Psi=0$ est équivalente au système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} (1-\zeta^2)F'' - \zeta F' + 4F = 0 \\ \zeta^2(1-\zeta^2)F'' + \zeta(\zeta^2 - 2)F' + 2F = 0 \\ \zeta^2(1-\zeta^2)F'' - \zeta(4-3\zeta^2)F' + 4(1-\zeta^2)F = 0 \end{cases}$$

Ce système se réduit au système de deux équations différentielles :

$$\begin{cases} (1-\zeta^2)F'' - \zeta F' + 4F = 0 \\ \zeta(1-\zeta^2)F' - (1-2\zeta^2)F = 0 \end{cases}$$

La seconde équation s'intègre aisément et admet pour solution générale :

$$F(\zeta) = C_1 \zeta (1-\zeta^2)^{1/2}$$

Nous vérifions que cette solution est aussi solution de la première équation. Il reste donc à intégrer :

$$(1-\zeta^2)\Psi'' - \zeta\Psi' = C_1 \zeta (1-\zeta^2)^{1/2}$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est $C_1 \zeta (1-\zeta^2)^{1/2}$; la solution générale de l'équation sans second membre est $C_2 \arcsin \eta + C_3$. Finalement, nous trouvons que:

$$\Psi(\eta) = C_1 \sin \eta \cos \eta + C_2 \eta + C_3$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des conditions aux limites : $\partial\Psi/\partial\eta=0$ pour $\eta_0=\pi/2$, $\Psi(0)=0$ et $\Psi(\pi/2)=q/2$. Nous trouvons :

$$\Psi(\eta) = \frac{q}{\pi} \left(\eta - \sin \eta \cos \eta - \frac{\pi}{2} \right)$$

b) Calcul du champ de pression

Le champ de pression s'obtient en revenant à l'équation de Stokes $\nabla P = \mu \Delta \vec{V}$; une fois exprimée en coordonnées elliptiques, nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial \xi} = -\frac{\partial(\Delta \Psi)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial(\Delta \Psi)}{\partial \xi} \end{cases}$$

Ce système d'équations différentielles s'explique en fonction de ξ et η , puis s'intègre facilement pour donner le champ de pression :

$$P = P_0 + \frac{2\mu q}{\pi c^2} \frac{\text{sh}(2\xi)}{\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}$$

où P_0 est la pression de référence dans le plan de l'orifice en $\xi=0$.

CHAPITRE 3

Dynamique d'orientation d'une fibre en régime dilué

Ce chapitre est entièrement consacré à l'étude de la dynamique d'orientation d'une fibre unique dans l'écoulement de base newtonien de la cellule expérimentale, qui a été étudié au chapitre 2.

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons une étude expérimentale de l'orientation des fibres placées dans cet écoulement, en nous intéressant particulièrement aux fibres situées sur l'axe d'élongation de la cellule. Cette étude est effectuée à l'aide de suspensions de fibres très diluées, que nous observons dans le plan laser et que nous analysons au moyen du traitement d'images.

Dans une seconde partie théorique, nous utilisons les équations d'orientation d'une particule anisotrope en écoulement de Stokes présentées au chapitre 1, en les appliquant au cas d'un écoulement élongationnel pur le plus général. Ceci permet de mettre en évidence les comportements spécifiques associés à ce type d'écoulement.

Dans la troisième partie, nous utilisons directement les équations précédentes pour les appliquer au champ de vitesse dans la cellule expérimentale, et nous en déduisons une description analytique de la dynamique d'orientation d'une fibre sur l'axe de la cellule. Cette prédiction théorique est comparée avec les résultats expérimentaux de la première partie. Nous discutons par ailleurs le comportement des fibres dans la zone d'écoulement de Poiseuille de la cellule, qui est un écoulement de cisaillement simple.

PLAN DU CHAPITRE 3

<u>I. ETUDE EXPERIMENTALE</u>	p.129
<u>I.1. Système utilisé</u>	
I.1.1 Caractéristiques géométriques	
I.1.2 Mise en suspension	
<u>I.2 Etude de la dynamique d'orientation d'une fibre sur l'axe de la cellule</u>	
I.2.1 Photographies instantanées	
I.2.2 Mesures de l'orientation des fibres par traitement d'image	
<u>II. ETUDE THEORIQUE DE LA DYNAMIQUE D'ORIENTATION D'UNE FIBRE</u>	p.143
<u>II.1 Position du problème</u>	
<u>II.2 Comportement d'une fibre dans un écoulement élongationnel</u>	
II.2.1 Solution générale	
II.2.2 Cas particuliers d'écoulements élongationnels avec un taux d'élongation constant	
<u>III. INTERPRETATION DES EXPERIENCES</u>	p.150
<u>III.1 Analyse des résultats expérimentaux dans la zone d'élongation</u>	
III.1.1 Prédiction théorique pour l'évolution de θ avec z	
III.1.2 Comparaison avec les mesures	
<u>III.2 Analyse du comportement d'une fibre dans l'écoulement de Poiseuille</u>	
<u>III.3 Conclusion</u>	
<u>ANNEXE</u> : Rappels sur les équations d'orientation d'une fibre en écoulement de cisaillement simple.	p.164

I. ETUDE EXPERIMENTALE

Dans cette partie, nous présentons l'étude expérimentale que nous avons réalisée dans la cellule élongationnelle avec des fibres de polyamide, dont nous avons étudié l'orientation à l'aide de la visualisation par plan laser.

I.1 Système utilisé

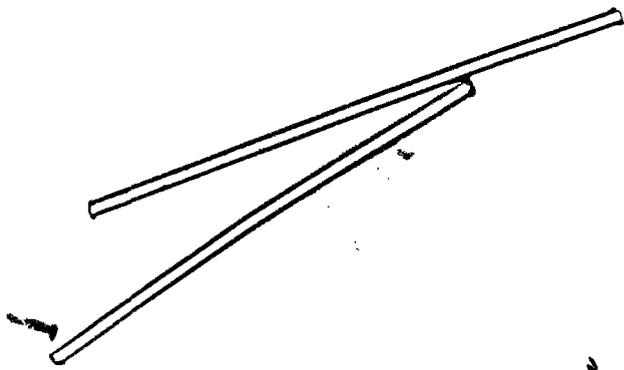
Les particules allongées que nous utilisons dans les expériences sont des fibres de polyamide commercialisées par Le Flockage [63,64]. Ces fibres sont fabriquées industriellement par Rhône-Poulenc et utilisées pour des applications variées (isolation thermique, renforcement des matériaux polymères etc...).

I.1.1 Caractéristiques géométriques

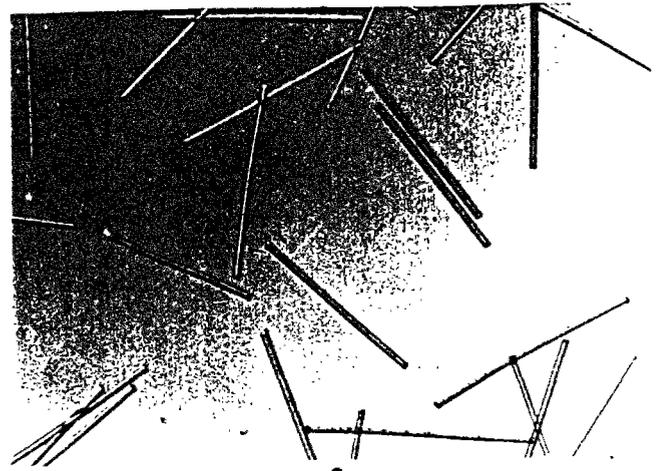
Ce sont des particules macroscopiques de forme cylindrique (voir photographies figure 3.1) : nous avons disposé de différents lots correspondant à des diamètres différents ($10\mu\text{m} < d < 40\mu\text{m}$) et des longueurs différentes (entre 0.5mm et 2mm). Ces cylindres sont obtenus à partir d'un fil cylindrique de polyamide, dont le diamètre est fixé lors du filage, et qui est coupé en segments de longueurs égales. Ce procédé de fabrication permet d'obtenir des lots de fibres de même diamètre, celui du fil de polyamide utilisé. Ce diamètre peut être calculé à partir de la donnée par le constructeur de la masse par unité de longueur de fil, la tolérance sur cette valeur du diamètre est égale à 2%. La coupe du fil en segments de longueur donnée n'est pas assez précise pour éviter une légère polydispersité sur la longueur dans un même lot de fibres. D'autre part, le procédé de coupe, entièrement mécanique, présente l'inconvénient d'écraser légèrement les extrémités de la fibre, conduisant à une forme dite "en os de chien". Ces imperfections des extrémités, bien que légères, sont discernables sur les clichés de la figure 3.1. Cependant, dans toutes nos interprétations, nous considérerons les fibres comme des cylindres parfaits.

a) Polydispersité

Nous avons étudié la polydispersité de longueur sur deux échantillons de fibres, dont la longueur annoncée par le constructeur est de 0.5mm, et les diamètres respectifs de 13 et 19 μm . Pour cela, nous avons effectué une étude statistique de la longueur des fibres sur des clichés obtenus au microscope optique. Les échantillons comprennent une centaine de fibres dans chaque cas, et la mesure des longueurs s'effectue sur les photos agrandies, avec une précision finale de l'ordre de $\pm 6\mu\text{m}$. La figure 3.2 présente les histogrammes obtenus. Nous avons trouvé une valeur moyenne de 0.496mm pour le premier échantillon, et de 0.501mm

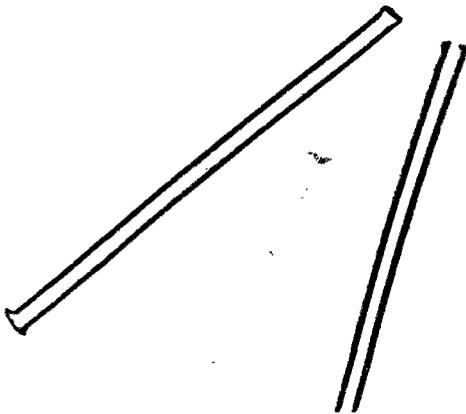


1



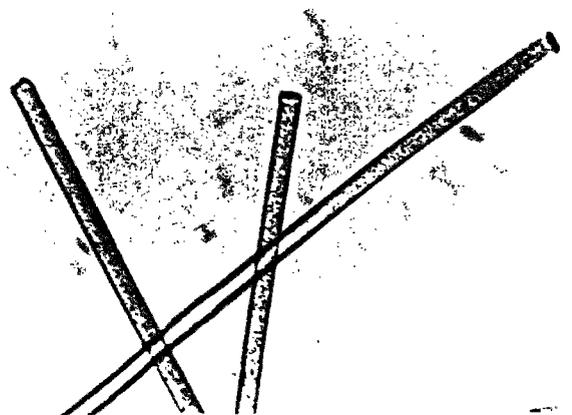
2

$L = 0.5\text{mm}$
 $d = 13.7\mu\text{m}$



3

$L = 0.5\text{mm}$
 $d = 19.1\mu\text{m}$



4

$L = 1\text{mm}$
 $d = 19.1\mu\text{m}$

Figure 3.1

Photographies au microscope optique de différents échantillons de fibres utilisés dans les expériences. Les photos 1, 3 et 4 sont réalisées au même grandissement.

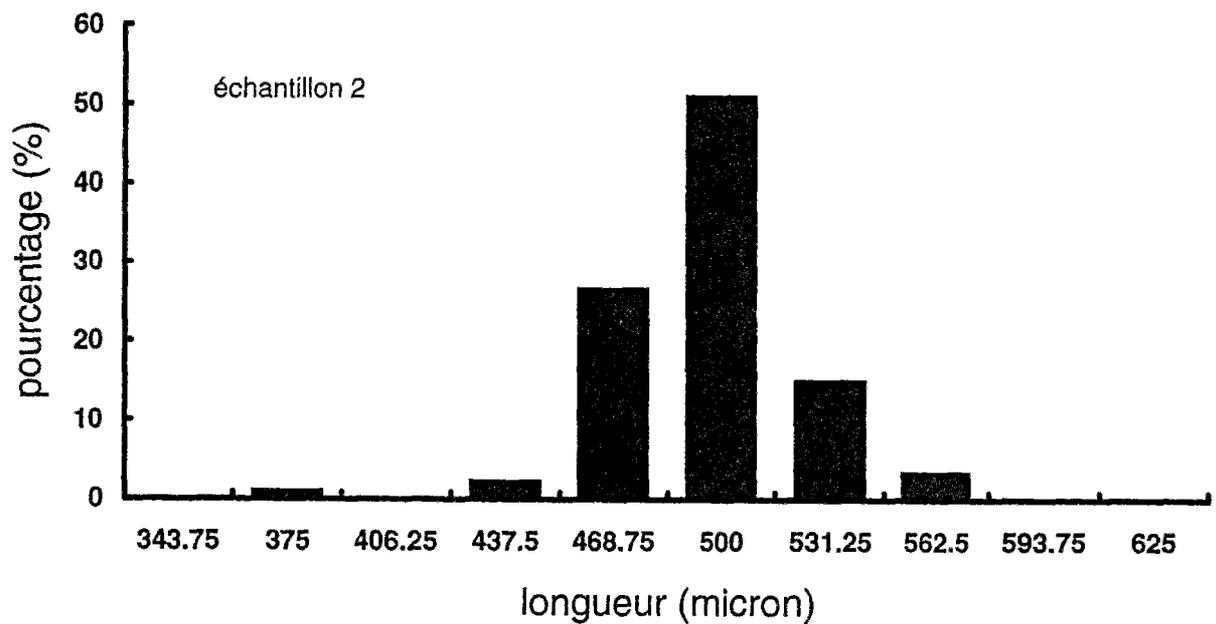
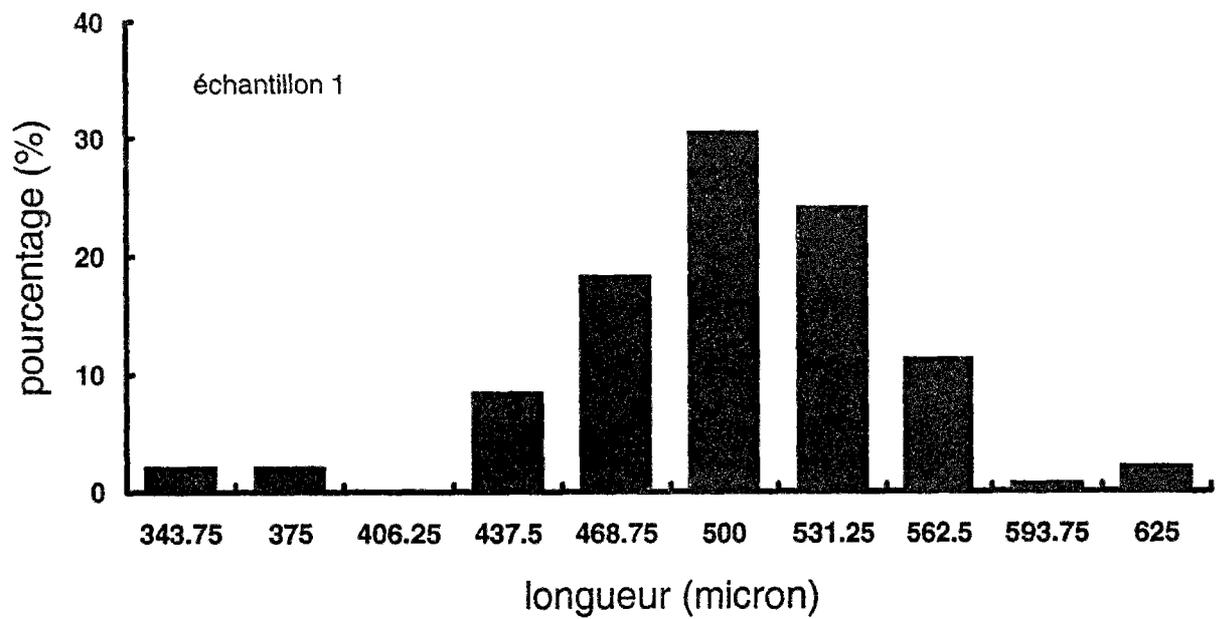


Figure 3.2

Histogrammes représentant la dispersion des longueurs mesurée sur deux échantillons de fibres.

pour le second. La dispersion autour de la valeur moyenne est caractérisée par les écarts types, qui valent respectivement : $43\mu\text{m}$ et $28\mu\text{m}$. Nous avons aussi caractérisé la longueur des fibres sur d'autres échantillons que nous avons à notre disposition ; nous avons trouvé un très bon accord entre la longueur annoncée par le fabricant, et une faible polydispersité autour de la valeur moyenne. En ce qui concerne le diamètre, nous n'avons pas pu le mesurer au microscope optique à cause d'une part de l'incertitude élevée, et d'autre part des effets de diffraction de la lumière du microscope par la fibre cylindrique, qui rendent la détermination de son contour imprécise. Nous avons donc utilisé les données fournies par le fabricant qui certifie la valeur du diamètre à 2% près.

b) Rapport de forme

Le rapport de forme des fibres est défini (voir chapitre 1) comme le rapport de la longueur L sur le diamètre d , et il est noté r . Nous avons utilisé des rapports de forme supérieurs à 20.

c) Rigidité

Dans la littérature, plusieurs études se sont intéressées à la déformation de fibres macroscopiques dans un écoulement [65,66]. Dans les écoulements que nous avons utilisés, nous avons toujours observé que les fibres restent rectilignes.

I.1.2 Mise en suspension

Avant utilisation, les fibres doivent être nettoyées soigneusement pour éliminer l'enduit dont elles sont recouvertes lors de la fabrication (ensimage). Pour cela, elles sont lavées à l'alcool (pendant plusieurs heures sous agitation), rincées soigneusement, et séchées à l'air. Après ce traitement, les fibres se dispersent aisément par simple agitation aussi bien dans l'huile silicone que dans le mélange eau-glucose, sans former d'agrégats.

a) Sédimentation

La densité du polyamide est de 1.15. Celle des fluides suspendants que nous avons utilisés est légèrement différente : 0.97 pour l'huile silicone, 1.315 pour le mélange eau-glucose. Les fibres vont donc sédimenter au cours du temps. La vitesse de sédimentation d'une particule allongée dans un fluide au repos augmente avec l'écart de densité $\Delta\rho$ entre la particule et le fluide, mais diminue avec la viscosité μ du fluide suivant la variation explicitée au chapitre 1 (relation 1.11). Compte-tenu des valeurs des différentes quantités physiques qui interviennent dans cette loi, nous estimons l'ordre de grandeur de la vitesse de sédimentation à $0.03\text{mm}/\text{min}$. Cette vitesse est négligeable à l'échelle de la préparation d'une expérience

(fluide au repos), et a fortiori devant les vitesses d'écoulement qui interviennent par la suite. Tout effet de la gravité peut donc être négligé dans nos expériences.

b) Nombre de Peclet

Pour vérifier le caractère macroscopique de nos particules, nous calculons le nombre de Peclet, qui caractérise l'importance relative des effets de diffusion brownienne et des effets hydrodynamiques sur une particule. Il peut concerner la diffusion par translation ou par rotation, et il est défini par les expressions suivantes :

$$\text{en translation : } Pe_t = \frac{UL}{D_t}; \quad \text{en rotation : } Pe_r = \frac{U}{LD_r}.$$

L désigne la longueur de la particule, U une vitesse caractéristique, D_t et D_r les coefficients de diffusion translationnelle et rotationnelle de la particule. De façon générale, le coefficient de diffusion s'exprime comme le rapport de l'énergie d'agitation thermique kT et du coefficient de résistance hydrodynamique ζ pour le mouvement considéré :

$$D = \frac{kT}{\zeta}$$

En général, pour des particules dont la taille est supérieure au micron, le nombre de Peclet est très grand devant 1, et les effets browniens sont donc négligeables. Nous détaillons le calcul de Pe pour une particule allongée. En ce qui concerne la translation, le coefficient de résistance d'une particule allongée vaut $4\pi\mu L / \text{Log}(2r)$ dans la direction parallèle au grand axe de la particule, et vaut la moitié dans la direction orthogonale (chapitre 1). Nous en déduisons que le coefficient de diffusion de translation est $D_t = kT \text{Log}(2r) / 4\pi\mu L$. En ce qui concerne la rotation, le coefficient de résistance vaut $4\pi\mu L^3 / \text{Log}(2r)$ [22] de sorte que le coefficient de diffusion rotationnelle est $D_r = kT \text{Log}(2r) / 4\pi\mu L^3$. Dans les deux cas, en prenant une vitesse caractéristique de l'ordre de 1mm/s, nous trouvons pour les fibres macroscopiques un nombre de Peclet très supérieur à 1.

c) Propriétés optiques

Certaines des fibres que nous avons utilisées sont transparentes, avec un indice optique de 1.52. Le fluide suspendant qui réalise le meilleur accord d'indice avec ces fibres est le mélange eau-glucose (indice optique 1.48) et c'est celui qui sera utilisé de préférence pour les expériences de visualisation. Eclairées par la tranche laser, et observées à l'aide de la caméra vidéo ou de l'appareil photo, les fibres en suspension se détachent nettement et avec un bon contraste sur le fond sombre constitué par le solvant.

d) Tension superficielle

Le fluide suspensif dont les propriétés de mouillage vis-à-vis des fibres sont les plus favorables est l'huile silicone (tension superficielle de 20 dynes/cm environ). Nous ne connaissons pas la tension superficielle du mélange eau-glucose ; cependant nous n'avons pas observé pour ce fluide de problèmes particuliers comme le piégeage de bulles d'air à la surface des fibres.

I.2 Etude de la dynamique d'orientation d'une fibre sur l'axe de la cellule

L'étude de la dynamique d'orientation d'une fibre *seule* placée dans l'écoulement de base newtonien de la cellule élongationnelle est menée en utilisant des suspensions très diluées, dans lesquelles nous avons cherché à obtenir que :

- la modification apportée par les fibres à l'écoulement est négligeable
- les interactions hydrodynamiques entre fibres sont absentes.

Le critère retenu pour la première condition consiste à vérifier que les lignes de courant pour la suspension à la concentration en fibres choisie sont identiques aux lignes de courant de l'écoulement newtonien. Pour vérifier la deuxième condition, nous nous sommes placés à des concentrations en fibres extrêmement faibles qui se situent en régime très dilué ($n\ell^3 \ll 1$). Nous avons utilisé comme fluide suspensif le mélange eau-glucose. Les caractéristiques de chaque expérience sont résumées dans le tableau ci-dessous.

longueur L (mm)	diamètre d (μm)	rapport de forme r	fraction volumique Φ
0.5	14	36	$2 \cdot 10^{-5}$
1	28	36	$4 \cdot 10^{-5}$

I.2.1. Photographies instantanées

Le plan laser est positionné de façon et à intersecter l'axe de la cellule et à observer la zone élongationnelle au voisinage de l'orifice. L'observation à l'aide de l'objectif Nikon 60mm des fibres situées dans le plan laser permet de réaliser des photographies instantanées sur lesquelles les fibres sont visibles avec une grande netteté.

La figure 3.3 présente des photographies instantanées réalisées en multiexposition (4 expositions successives) dans le voisinage de l'orifice, en amont et en aval de celui-ci, quelques minutes après le début de l'écoulement (le débit est stationnaire). Ces photos permettent plusieurs constatations préliminaires.

Plusieurs fibres sont visibles dans le champ de la photo ; pour chacune d'elle, nous distinguons nettement 4 positions successives. En *amont* de l'orifice, toutes les fibres situées dans le plan laser à la première exposition demeurent dans ce plan aux instants ultérieurs. Nous pouvons suivre nettement le déplacement des fibres suivant les lignes de courant de l'écoulement newtonien, et leur orientation progressive *parallèlement* à ces lignes de courant. Cette orientation est conservée une fois acquise. En pratique, toutes les fibres sont orientées parallèlement aux lignes de courant lorsqu'elles franchissent l'orifice. En *aval* de l'orifice nous constatons de même que les fibres suivent les lignes de courant de l'écoulement newtonien, tout en s'orientant progressivement et de manière définitive *perpendiculairement* à ces lignes de courant.

Ces résultats sont en accord qualitatif avec les observations pratiquées sur des fibres dans des écoulements convergents ou divergents [18]. Une fibre placée dans un écoulement élongationnel acquiert une orientation qui est :

- stable,
- parallèle à l'axe d'élongation pour un taux d'élongation positif (extension) comme c'est le cas en amont de l'orifice,
- perpendiculaire à l'axe d'élongation pour un taux d'élongation négatif (compression), comme c'est le cas en aval de l'orifice.

Dans la suite, nous allons effectuer une étude quantitative de la dynamique d'orientation, en nous intéressant plus particulièrement aux fibres situées sur l'axe de la cellule.

Pour des temps d'observation longs, supérieurs à plusieurs dizaines de minutes après la mise en route de l'écoulement, les fibres qui arrivent dans la zone d'élongation sont pratiquement toutes orientées parallèlement aux lignes de courant. Nous avons vérifié que ceci est déjà le cas dans l'écoulement de Poiseuille amont, dans lequel la majorité des fibres est orientée parallèlement aux lignes de courant, c'est-à-dire parallèlement aux parois de la cellule. Nous proposerons plus loin une explication de cette "préorientation" des fibres par l'écoulement de Poiseuille.

1.2.2 Mesures de l'orientation des fibres par traitement d'image

Une étude quantitative de la dynamique d'orientation d'une fibre située sur l'axe de la cellule et dans le plan d'observation consiste à mesurer l'évolution de l'angle entre le vecteur directeur de la fibre (chapitre 1) et l'axe de la cellule, en fonction de la distance à l'orifice. A cause de la dimension réduite de la fenêtre d'observation, et pour maintenir un grandissement

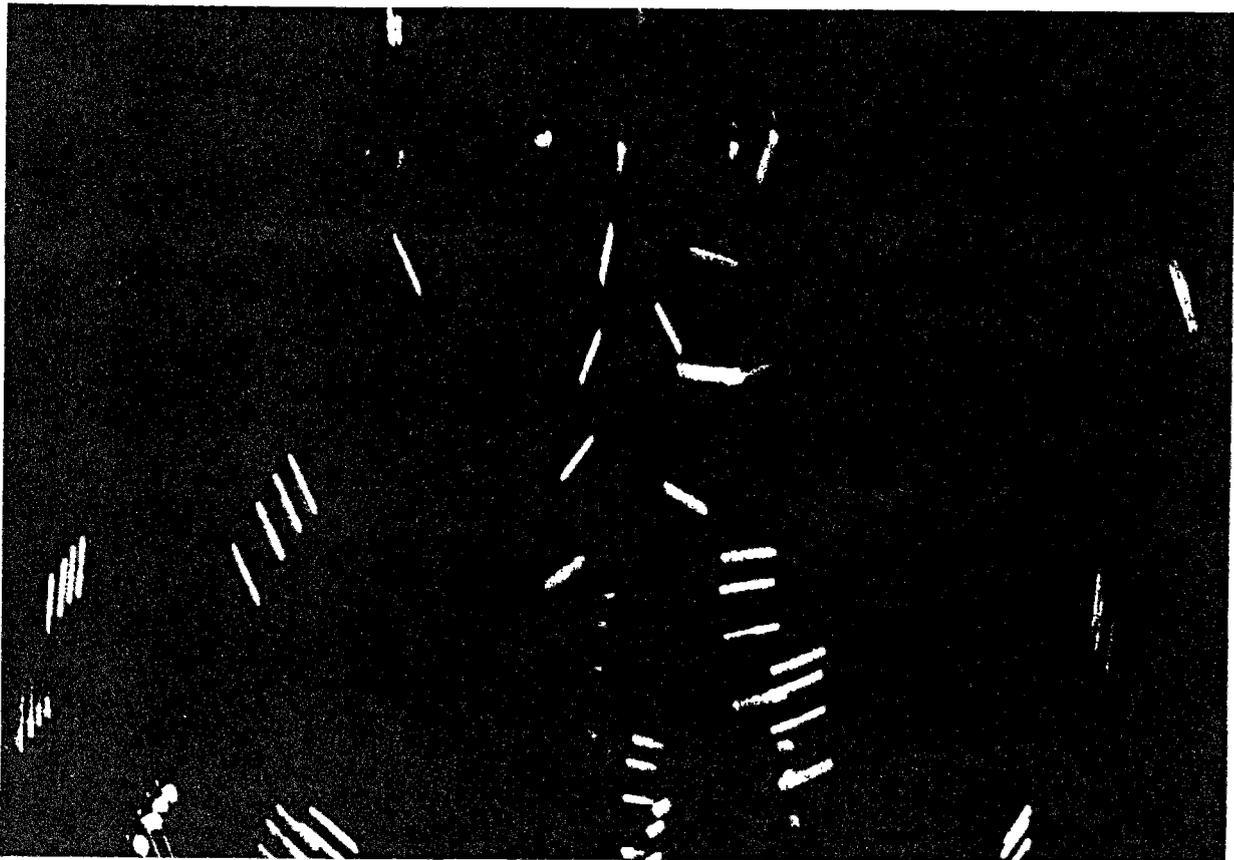
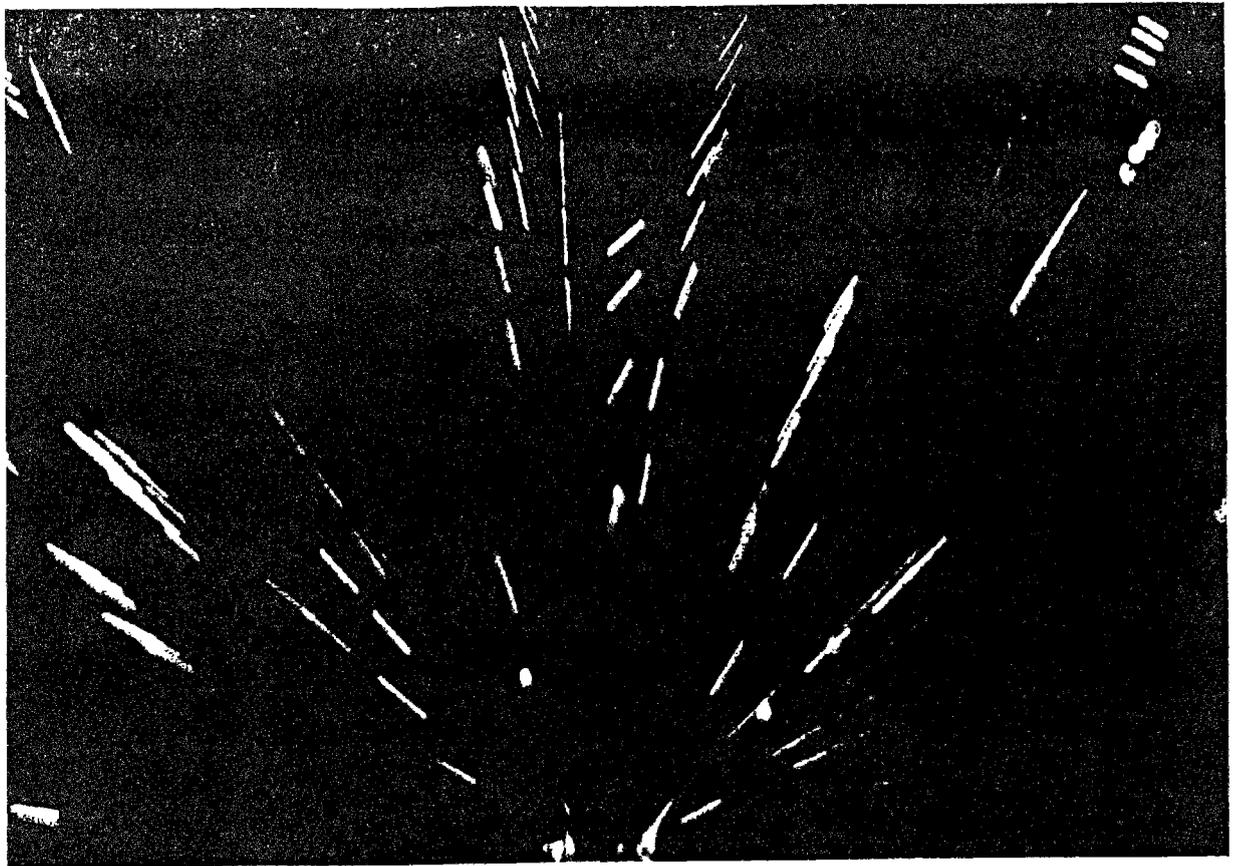


Figure 3.3

Photographies instantanées en multiexposition montrant l'orientation progressive des fibres dans l'écoulement : *en amont* de l'orifice (photo du haut), les fibres s'orientent *parallèlement* aux lignes de courant, *en aval* de l'orifice (photo du bas), elles s'orientent *perpendiculairement* aux lignes de courant.

important permettent une bonne précision des mesures, nous n'avons pas pu suivre une fibre continûment depuis l'amont de l'orifice jusqu'en aval de celui-ci. Aussi nous avons effectué deux études séparées en amont et en aval de l'orifice.

a) Protocole

La méthode utilisée est analogue à celle que nous avons déjà décrite pour les mesures de vitesse sur l'axe (chapitre 2). Des images successives sont enregistrées, numérisées et traitées à l'aide de la carte Cyclope et du traitement d'images décrits précédemment. Tout d'abord, nous procédons à l'étalonnage par pointage à l'aide du curseur de la position de l'orifice O et du bord droit de la cellule D (figure 3.4) ; cette opération permet aussi de repérer l'axe de la cellule. Les points A et B, intersections du grand axe de la fibre avec ses extrémités (figure 3.4), sont repérés au curseur sur chaque image au cours du déplacement de la fibre sur l'axe (jusqu'à 28 images), et leurs coordonnées sont enregistrées dans un fichier. La position de la fibre sur l'axe est estimée avec une tolérance de $\pm 0.5\text{mm}$. Un programme en Turbo-Pascal calcule à partir des coordonnées de A et B la distance entre le centre de la fibre et l'orifice (notée z), et l'angle entre l'axe Oz et l'axe de la fibre (noté θ). Les couples (θ, z) correspondant aux positions successives de la fibre pendant son trajet sur l'axe sont enregistrés dans un tableau.

b) Incertitudes sur les mesures

L'erreur sur la mesure de la distance z a été discutée au chapitre 2 (§ II.3.3), l'incertitude relative est de l'ordre de $\pm 1.5\%$.

L'erreur sur la mesure de l'angle θ provient de l'erreur sur le pointé des extrémités A et B. Cette erreur est liée à l'épaisseur de la fibre telle qu'elle apparaît sur l'écran du moniteur (16 pixels pour les fibres de $28\mu\text{m}$ de diamètre). Il faut noter que cette épaisseur est supérieure au diamètre réel de la fibre, à cause des effets de diffraction et de réfraction de la lumière du laser par la fibre cylindrique. L'erreur sur le pointage au curseur est estimée à 2 pixels pour une fibre de longueur 1mm dont la longueur sur l'écran du moniteur est d'environ 140 pixels. L'erreur absolue sur l'angle θ est donc égale à $\pm 1.6^\circ$. On voit que l'erreur sur l'angle est diminuée si l'on utilise des fibres de grande longueur, le grandissement de l'objectif étant fixé.

c) Résultats en amont de l'orifice

La figure 3.5 présente les résultats obtenus en amont de l'orifice ($z > 0$) pour les fibres de longueur $L=1\text{mm}$ et de rapport de forme 36. L'évolution de l'angle θ a été portée en fonction de la distance z à l'orifice. Les différents réseaux de courbes correspondent à différentes orientations initiales θ_0 des fibres au début de la zone élongationnelle, qui est située à environ 10mm de l'orifice (voir chapitre 2).

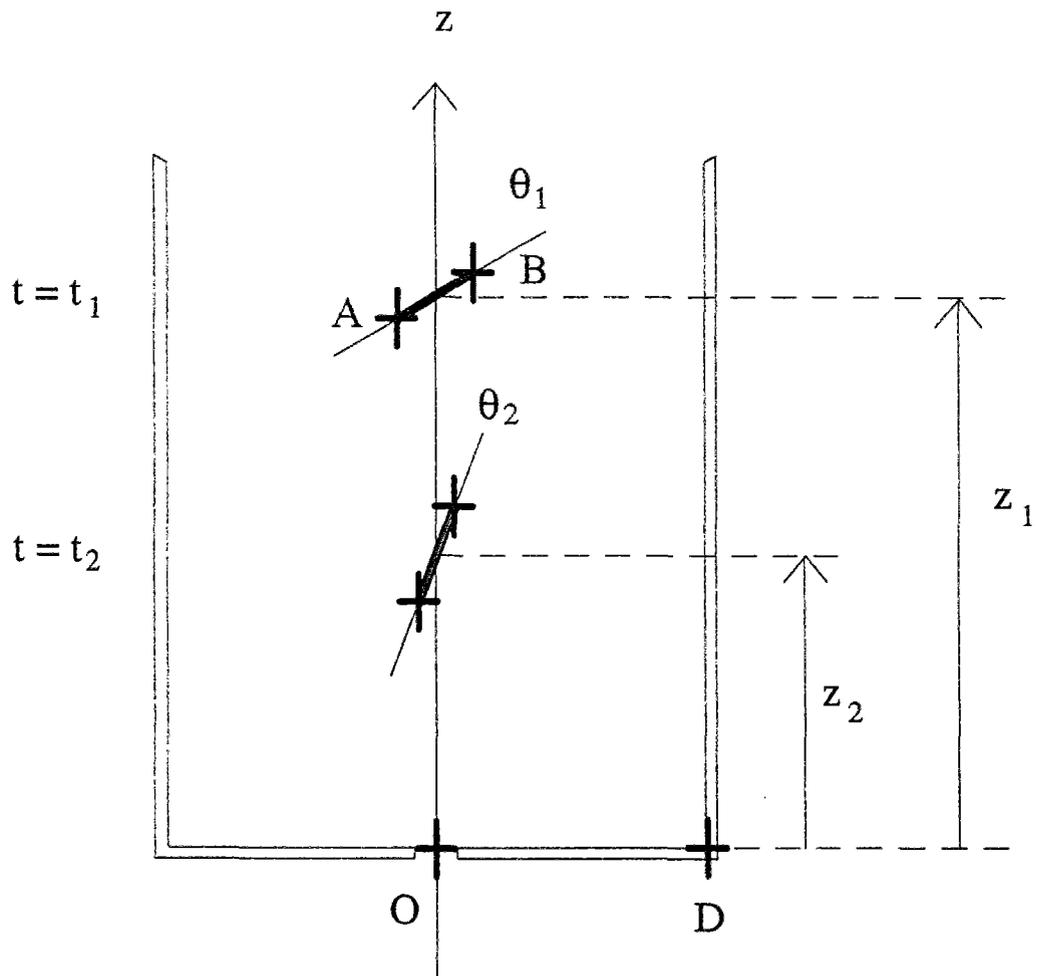


Figure 3.4

Mesure de l'orientation d'une fibre sur l'axe de la cellule, en fonction de la distance z à l'orifice, par pointage au curseur des extrémités A et B.

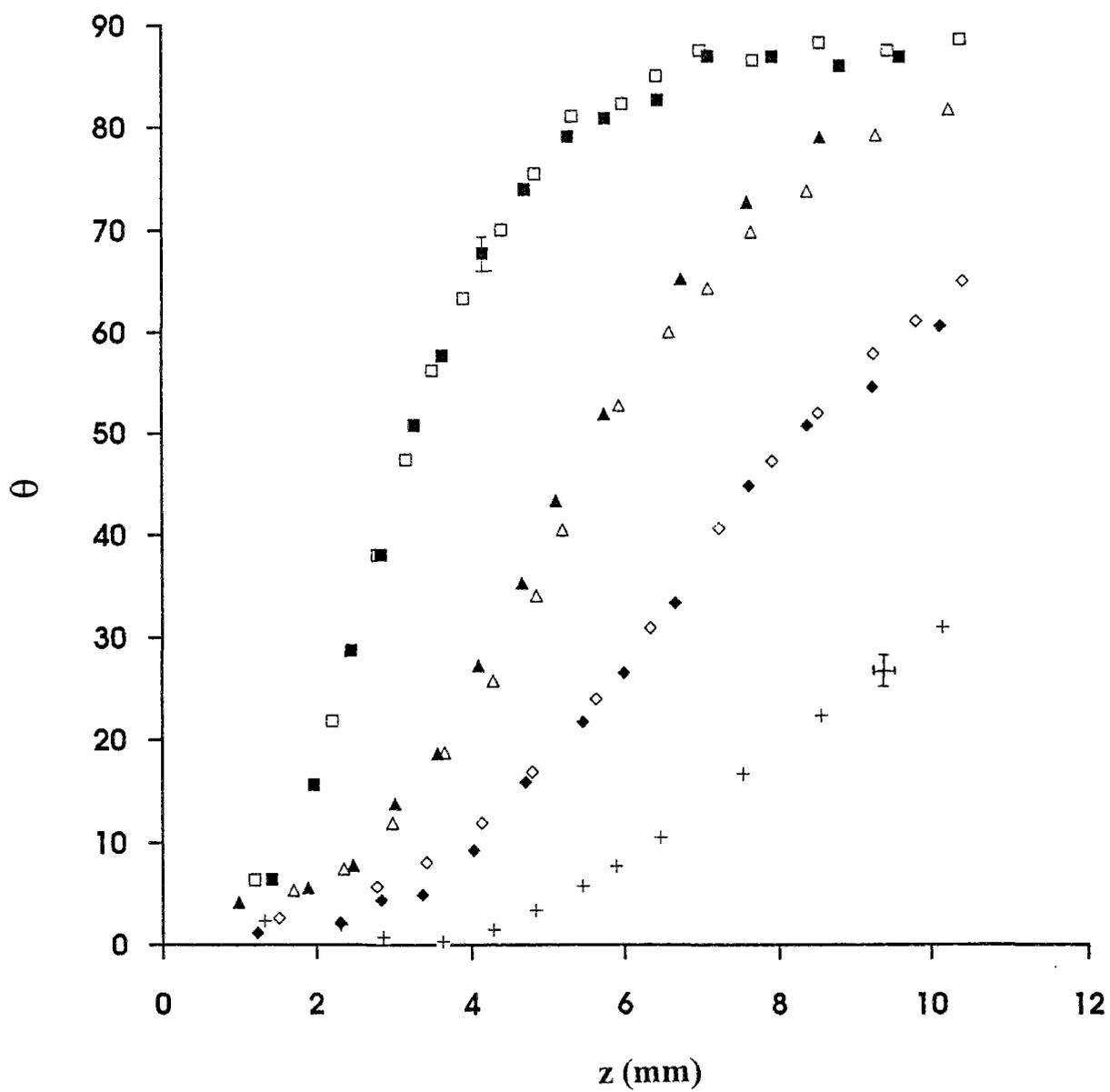


Figure 3.5

Evolution de l'angle θ en fonction de la distance z à l'orifice, pour des fibres situées sur l'axe de la cellule *en amont* de l'orifice. Chaque série de points correspond au suivi d'une fibre.

Nous constatons que les fibres s'orientent progressivement parallèlement à l'axe d'élongation Oz : l'angle θ évolue vers une valeur nulle ou proche de zéro (à la précision des mesures) au fur et à mesure que la distance z à l'orifice diminue. Cette orientation progressive se fait plus ou moins rapidement suivant l'orientation initiale θ_0 : les fibres qui s'orientent le plus tardivement sont celles qui ont une orientation initiale la plus éloignée de l'axe (90°). La dynamique d'orientation ne semble dépendre que de θ_0 , puisque les courbes correspondant à des θ_0 proches sont identiques à la précision des mesures près.

Les résultats obtenus avec les fibres plus courtes de longueur $L=0.5\text{mm}$ et de même rapport de forme sont analogues à ceux présentés sur la figure 3.5, c'est-à-dire que les réseaux de courbes (θ, z) sont superposables aux précédents.

Enfin, nous avons vérifié que les réseaux de courbes obtenus ne dépendent pas du débit de l'écoulement.

d) Résultats en aval de l'orifice

La même étude a été réalisée en aval de l'orifice. Elle présente plus de difficultés que l'étude en amont, pour des raisons qui sont liées au caractère divergent de l'écoulement aval.

Nous procédons de la même manière qu'en amont, c'est-à-dire que nous suivons le parcours d'une fibre se déplaçant sur l'axe de la cellule depuis une position initiale immédiatement après sa sortie de l'orifice (l'orifice lui-même n'étant pas visible). Une fibre sortant de l'orifice et visible initialement dans le plan d'observation peut se déplacer ultérieurement dans des plans différents ; nous voyons alors sa projection dans le plan d'observation diminuer au fur et à mesure qu'elle s'oriente. De plus, même si elle demeure dans le plan d'observation, elle peut aussi se déplacer sur des lignes de courant qui s'éloignent progressivement de l'axe. A cause de la précision réduite du repérage, nous ne pouvons déceler la position exacte d'une fibre en sortie de l'orifice, et donc prévoir sa trajectoire ultérieure. Néanmoins, statistiquement, il y a autant de fibres sur l'axe en sortie de l'orifice qu'en entrée, comme le montrent les photographies instantanées de la suspension (figure 3.6).

Sur la figure 3.7, nous avons représenté les résultats concernant l'orientation des fibres en sortie de l'orifice. Nous constatons que le réseau de courbes obtenu est identique à celui observé en amont de l'orifice (figure 3.5), à ceci près que le sens de parcours est inversé. Cependant, les points expérimentaux obtenus sont tous voisins de la même courbe, pour laquelle les fibres s'orientent rapidement à 90° de l'axe ; trois seulement de ces événements ont été représentés. Des événements pour lesquels les fibres s'orienteraient plus lentement dans la direction perpendiculaire à l'axe n'ont pas été observés. Dans la suite, nous allons interpréter ces résultats à l'aide des équations de dynamique d'orientation d'une particule anisotrope en écoulement de Stokes.



Figure 3.6

Photographie instantanée montrant la répartition spatiale et l'orientation des fibres dans la cellule pour une suspension diluée ($\Phi=0.002\%$, $L=0.5\text{mm}$, $d=13.7\text{mm}$).

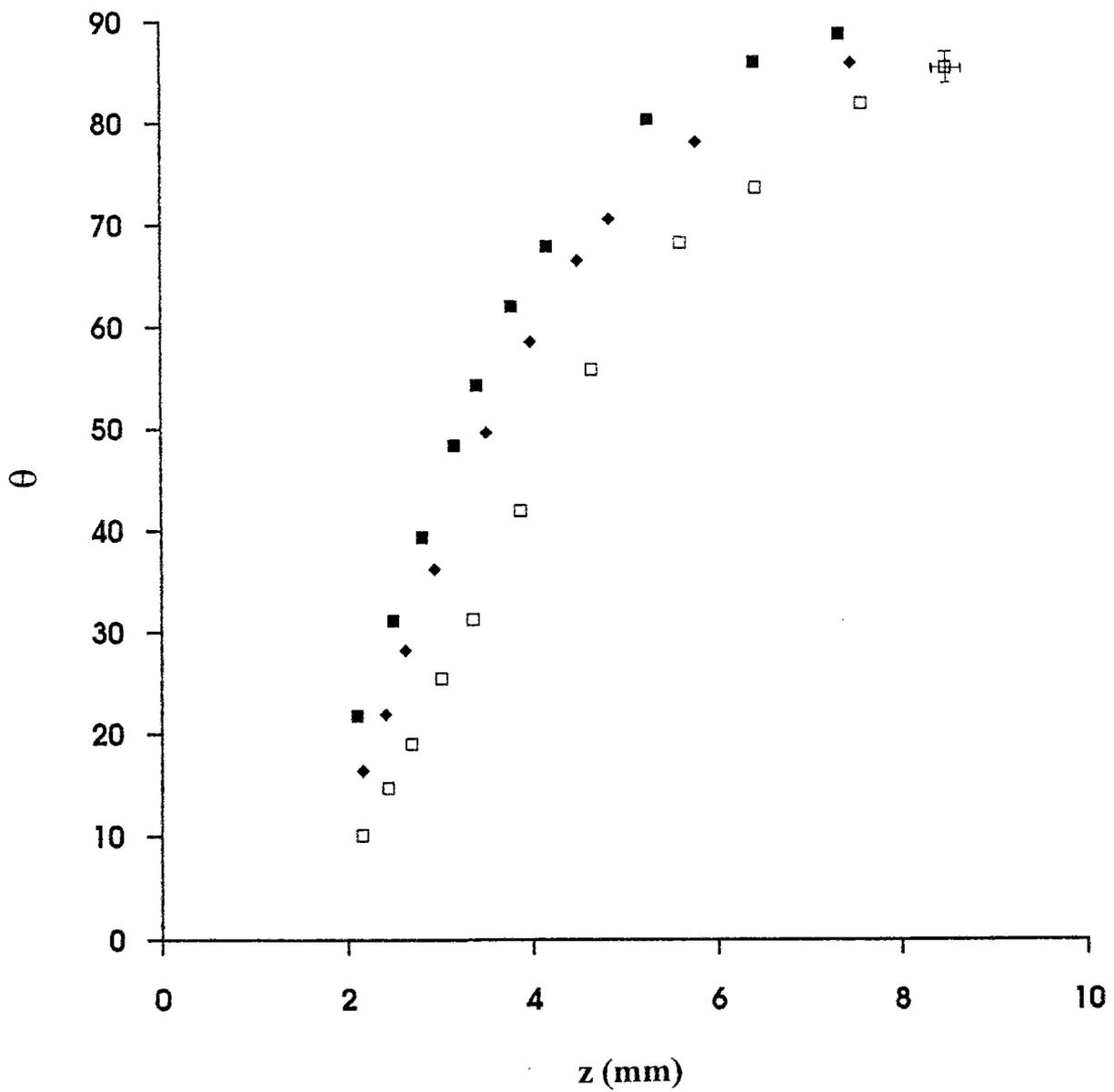


Figure 3.7

Evolution de l'angle θ en fonction de la distance z à l'orifice, pour des fibres situées sur l'axe de la cellule *en aval* de l'orifice.

II. ETUDE THEORIQUE DE LA DYNAMIQUE D'ORIENTATION D'UNE FIBRE

Avant d'interpréter les résultats expérimentaux que nous venons d'obtenir, nous allons effectuer une étude détaillée du comportement d'une fibre dans un écoulement élongationnel pur. Cette étude est motivée non seulement par l'application à l'écoulement dans la cellule expérimentale, mais aussi par la rareté des résultats disponibles dans la littérature [17,18,67].

II.1 Position du problème

Nous indiquons dans ce paragraphe la méthode que nous utilisons pour obtenir les équations d'orientation d'une particule allongée dans les cas simples où nous connaissons le champ de vitesse \vec{V} dans lequel évolue la particule. Cette méthode s'appuie sur l'équation générale (1.9) démontrée au chapitre 1, et qui décrit l'évolution du vecteur directeur \vec{p} de la particule :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{p} + \bar{r} [\underline{\underline{E}} \cdot \vec{p} - \vec{p} (\underline{\underline{E}} \cdot \vec{p})] \quad (3.1)$$

Dans cette équation, $\bar{r} = (r^2 - 1)/(r^2 + 1)$; $\underline{\underline{E}}$ et $\vec{\Omega}$ sont respectivement le tenseur de déformation et le vecteur rotation de l'écoulement, définis par la relation :

$$\vec{V}(\vec{x}) = \vec{V}_0 + \underline{\underline{E}} \cdot \vec{x} + \vec{\Omega} \wedge \vec{x} \quad (3.2)$$

Nous considérons à présent un repère (O, x_1, x_2, x_3) lié au centre de la particule, et dont les axes restent parallèles aux axes d'un repère fixe, au cours du déplacement et de la rotation de la particule. La description du mouvement de rotation du vecteur directeur \vec{p} de la particule nécessite l'introduction de deux paramètres angulaires (nous ne nous intéressons pas à la rotation de la particule autour de son grand-axe, qui nécessiterait l'introduction d'un troisième paramètre). Ces paramètres angulaires sont : l'angle polaire autour d'un des axes du repère, et l'angle azimuthal dans le plan orthogonal à cet axe. Ces deux angles correspondent respectivement à la latitude et à la longitude sur la sphère décrite par le vecteur directeur \vec{p} . Si nous choisissons par exemple l'axe Ox_1 comme axe polaire, comme nous l'avons représenté sur la figure 3.8, les coordonnées (p_1, p_2, p_3) du vecteur \vec{p} s'expriment de la manière suivante en fonction des angles θ et ϕ (θ est l'angle polaire et ϕ est l'angle azimuthal) :

$$\begin{cases} p_1 = \cos \theta \\ p_2 = \sin \theta \cos \phi \\ p_3 = \sin \theta \sin \phi \end{cases}$$

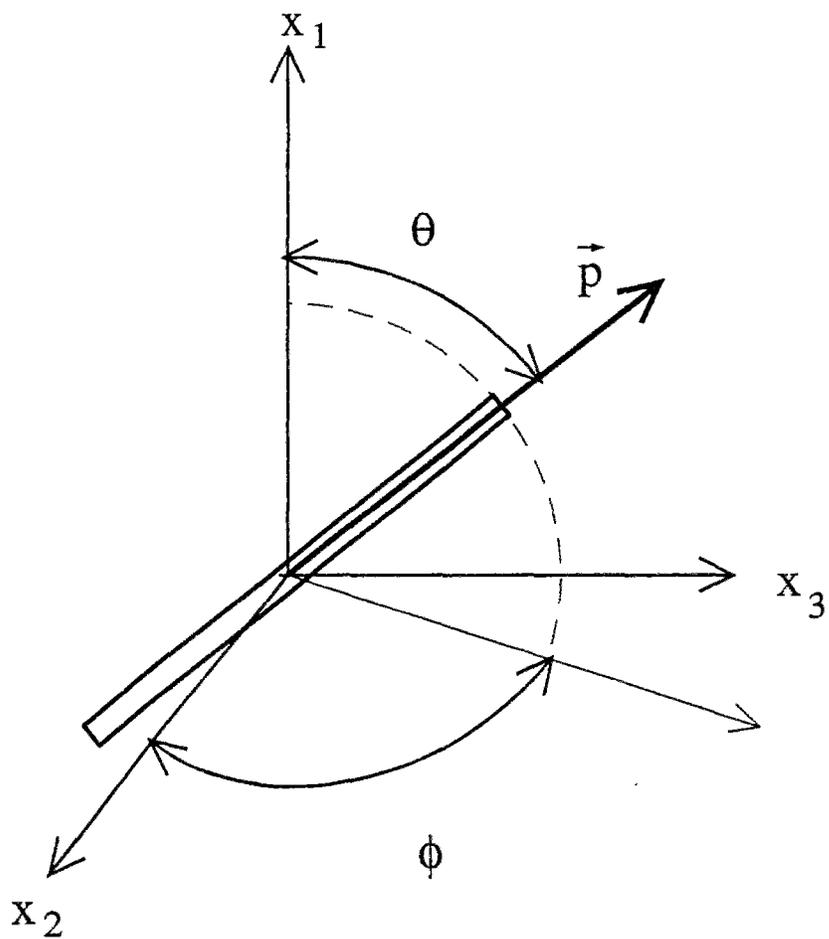


Figure 3.8

Paramètres angulaires θ et ϕ repérant l'orientation du vecteur directeur \vec{p} de la particule allongée. Sur cette figure, l'axe polaire est l'axe x_1 .

Il en résulte que les coordonnées $(\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3)$ du vecteur $d\vec{p}/dt$ s'écrivent dans ce même repère :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{p}_2 = \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{p}_3 = \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \end{cases}$$

Pour utiliser l'équation (3.1) d'évolution du vecteur \vec{p} , il faut encore connaître le tenseur de déformation et le vecteur rotation de l'écoulement considéré, qui s'obtiennent à partir du champ de vitesse non perturbé \vec{V} (équation 3.2). On obtient un système différentiel pour les angles θ et ϕ qui se réduit à deux équations indépendantes. L'intégration de ces équations donne l'évolution de θ et ϕ en fonction du temps. Cette méthode est plus simple que les autres méthodes dérivées de l'approche de Jeffery [8] qui ont été utilisées dans la littérature, essentiellement parce que l'utilisation de l'équation générale (3.1) permet de se placer dans un repère qui est en translation avec le repère fixe du laboratoire, et non dans un repère dont l'orientation est liée à celle de la particule. Il faut cependant préciser que le choix de l'axe polaire définissant l'angle polaire θ a une grande influence sur la simplicité de l'intégration du système différentiel ci-dessus. Nous allons maintenant utiliser cette méthode.

II.2 Comportement d'une fibre dans un écoulement élongationnel

II.2.1 Solution générale

a) Equations d'orientation

Considérons tout d'abord le cas particulier d'un écoulement élongationnel pur, dont le champ de vitesse dans le repère (O, x_1, x_2, x_3) prend la forme générale présentée au chapitre 1 (§IV) :

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} (\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2)x_1 \\ -\dot{\epsilon}_1 x_2 \\ -\dot{\epsilon}_2 x_3 \end{bmatrix}$$

où $\dot{\epsilon}_1$ et $\dot{\epsilon}_2$ sont des taux d'élongation constants. Le tenseur de déformation est diagonal et s'écrit :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\epsilon}_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\epsilon}_2 \end{bmatrix}$$

Le vecteur rotation est identiquement nul. Nous choisissons ici l'axe d'élongation principal Ox_1 comme axe polaire pour décrire l'orientation de la particule dans l'écoulement. La figure 3.8 décrit donc encore les paramètres angulaires de la particule, et les expressions des coordonnées des vecteurs \bar{p} et $d\bar{p}/dt$ en fonction de θ et ϕ sont les mêmes que précédemment (§II.1). Nous explicitons alors les différents termes figurant dans l'équation d'évolution du vecteur directeur de la particule et nous obtenons le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = \bar{r}p_1 [(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2)(1 - p_1^2) + \dot{\epsilon}_1 p_2^2 + \dot{\epsilon}_2 p_3^2] \\ \dot{p}_2 = \bar{r}p_2 [-(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2)p_1^2 - \dot{\epsilon}_1(1 - p_2^2) + \dot{\epsilon}_2 p_3^2] \\ \dot{p}_3 = \bar{r}p_3 [-(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2)p_1^2 + \dot{\epsilon}_1 p_2^2 - \dot{\epsilon}_2(1 - p_3^2)] \end{cases}$$

En remplaçant $\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, p_1, p_2, p_3$ par leurs expressions en fonction des angles θ et ϕ , le système précédent se réduit au système de deux équations :

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{2} \bar{r} \sin(2\theta) [\dot{\epsilon}_1(1 + \cos^2 \phi) + \dot{\epsilon}_2(1 + \sin^2 \phi)] \quad (3.3)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2} \bar{r} \sin(2\phi)(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) \quad (3.4)$$

Une première remarque physique concerne l'existence d'un couplage entre les deux angles θ et ϕ décrivant l'orientation de la particule (équation (3.3)). Nous allons donc d'abord intégrer l'équation (3.4) pour obtenir directement l'évolution de l'angle ϕ en fonction du temps :

$$\tan \phi = \tan \phi_0 \exp[\bar{r}(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)t] \quad (3.5)$$

où ϕ_0 est la valeur de l'angle ϕ à l'instant $t=0$.

Le traitement de l'équation (3.3) est plus compliqué. L'intégration est cependant possible si l'on réécrit cette équation en séparant les variables sous la forme suivante :

$$\frac{\dot{\theta}}{\sin(2\theta)} = -\frac{1}{2} \bar{r} \left[(\dot{\epsilon}_1 + 2\dot{\epsilon}_2) + (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) \frac{\sin(2\phi)}{2 \tan(\phi)} \right]$$

En utilisant l'équation (3.4), nous obtenons une simplification supplémentaire :

$$\frac{\dot{\theta}}{\sin(2\theta)} = -\frac{1}{2} \bar{r}(\dot{\epsilon}_1 + 2\dot{\epsilon}_2) - \frac{\dot{\phi}}{2 \tan \phi}$$

Il reste donc à intégrer terme à terme l'équation suivante :

$$\frac{d\theta}{\sin(2\theta)} = -\frac{1}{2} \bar{r}(\dot{\epsilon}_1 + 2\dot{\epsilon}_2) dt - \frac{d\phi}{2 \tan \phi}$$

entre l'orientation initiale (θ_0, ϕ_0) à $t=0$ et l'orientation courante (θ, ϕ) à l'instant t . Ce qui donne finalement :

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan \theta}{\tan \theta_0} \right| = -\frac{1}{2} \bar{r}(\dot{\epsilon}_1 + 2\dot{\epsilon}_2)t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin \phi}{\sin \phi_0} \right|$$

Ce dernier résultat peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\tan \theta \sin \phi = \tan \theta_0 \sin \phi_0 \exp[-\bar{r}(\dot{\epsilon}_1 + 2\dot{\epsilon}_2)t] \quad (3.6)$$

qui est caractéristique du couplage entre les deux angles θ et ϕ . Nous pouvons encore, en combinant les relations (3.5) et (3.6), déduire l'évolution de l'angle θ en fonction du temps :

$$\tan \theta = \tan \theta_0 \left[\cos^2 \phi_0 \exp[-2\bar{r}(2\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2)t] + \sin^2 \phi_0 \exp[-2\bar{r}(\dot{\epsilon}_1 + 2\dot{\epsilon}_2)t] \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

b) Discussion

L'évolution de l'orientation de la particule dans le champ de vitesse élongationnel dépend des signes des quantités qui interviennent dans les exponentielles. Nous nous attendons donc à des situations très différentes suivant les valeurs relatives de $\dot{\epsilon}_1$ et $\dot{\epsilon}_2$. Un résultat remarquable concerne la valeur des angles θ et ϕ pour des temps d'exposition infinis de la fibre à l'élongation. Les équations (3.5) et (3.7) montrent que θ_∞ et ϕ_∞ dépendent des signes de $(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)$, $(2\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2)$ et $(\dot{\epsilon}_1 + 2\dot{\epsilon}_2)$. Une façon commode de présenter les différentes situations est de se placer dans un diagramme $(\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2)$, représenté sur la figure 3.9, où quatre régions peuvent être distinguées, dont les limites sont la droite d'équation : $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2$, et les deux demi-droites d'équations : $\dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_2/2$ ($\dot{\epsilon}_1 < 0$) et $\dot{\epsilon}_1 = -2\dot{\epsilon}_2$ ($\dot{\epsilon}_1 > 0$). Dans la région située au-dessus de la droite $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2$, l'angle limite ϕ_∞ est nul ; au-dessous de cette droite, il est égal à $\pi/2$. L'angle θ_∞ est nul dans un secteur angulaire limité par les demi-droites $\dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_2/2$ et $\dot{\epsilon}_1 = -2\dot{\epsilon}_2$. A l'extérieur de ce secteur angulaire, θ_∞ est égal à $\pi/2$.

Les orientations θ_∞ et ϕ_∞ correspondent à des positions *stables* de la particule. Considérons par exemple le domaine $(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) < 0$ et $(2\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2) > 0$ où θ_∞ et ϕ_∞ sont nuls. Ecartons la particule de sa position $\phi_\infty = 0$ d'un angle $d\phi < 0$. D'après (3.4), comme $(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) < 0$ et $d\phi < 0$, la particule tend à revenir à sa position initiale. De même, la particule une fois

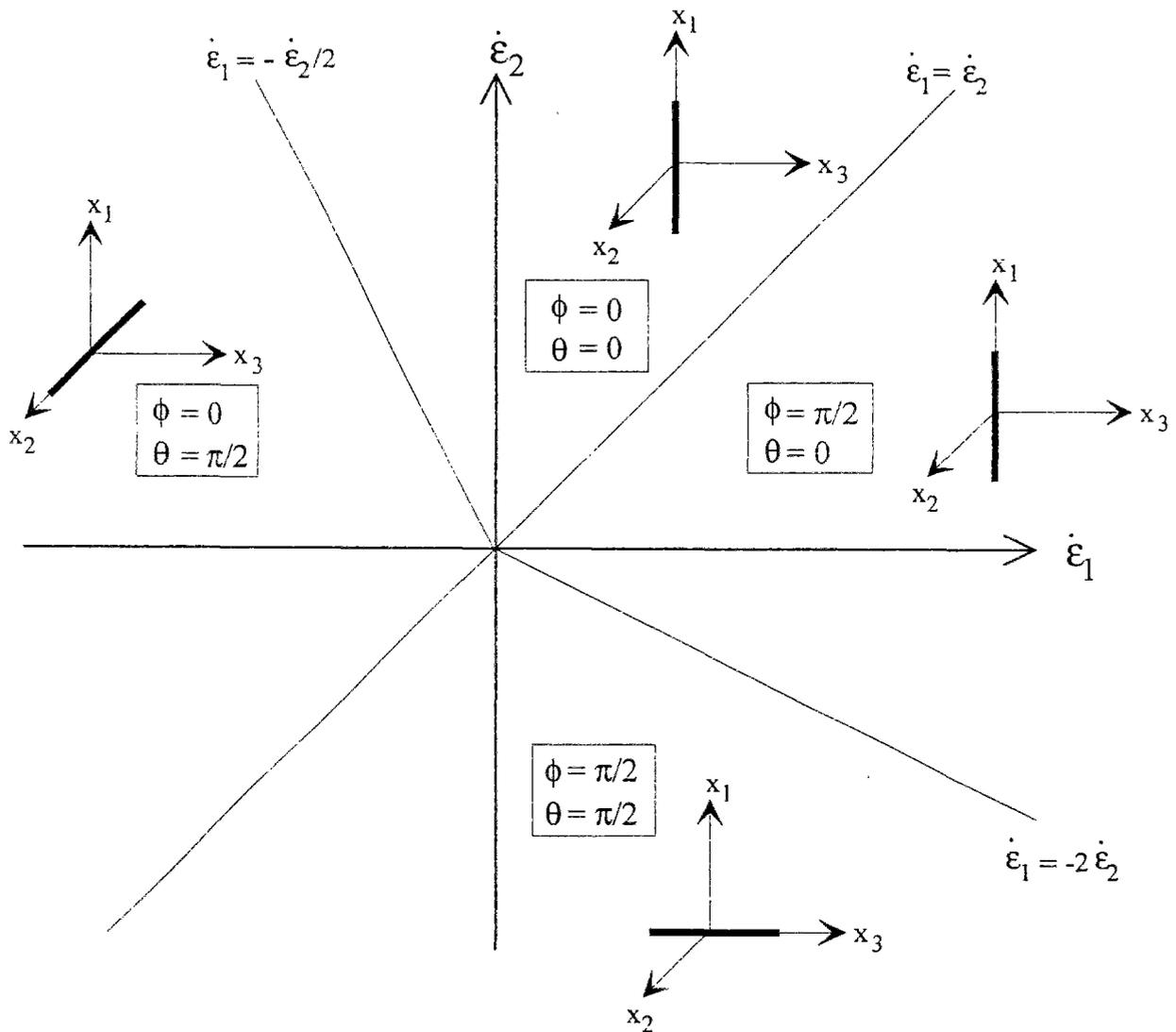


Figure 3.9

Diagramme dans le plan $(\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2)$ montrant les domaines correspondant aux différentes valeurs limites des angles ϕ et θ aux temps longs, et les orientations finales de la particule qui sont associées à ces valeurs limites.

écartée de θ_∞ tend à y revenir. Le même raisonnement s'applique aux autres domaines du diagramme.

Dans le paragraphe suivants, nous allons nous placer à des valeurs de $\dot{\epsilon}_1$ et $\dot{\epsilon}_2$ qui correspondent aux limites des domaines définis plus haut. Nous traiterons le cas de l'élongation uniaxiale pour laquelle $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2$, et l'élongation planaire qui correspond à $\dot{\epsilon}_2 = 0$.

II.2.2 Cas particuliers d'écoulements élongationnels avec un taux d'élongation constant

a) Cas de l'élongation uniaxiale : $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2$

Dans ce cas, il est commode de poser $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}/2$. Les équations (3.5) et (3.7) deviennent :

$$\tan \theta = \tan \theta_0 \exp\left[-\frac{3}{2} \bar{r} \dot{\epsilon} t\right] \quad (3.8)$$

$$\tan \phi = \tan \phi_0 \quad (3.9)$$

Le couplage entre θ et ϕ disparaît. L'angle ϕ garde une valeur constante. Quant à l'angle θ , son évolution dépend uniquement du signe du taux d'élongation $\dot{\epsilon}$. Lorsque le taux d'élongation est *positif* (élongation uniaxiale suivant x_1) la valeur de l'exponentielle dans l'équation (3.8) tend vers 0 aux temps longs. Ceci signifie que la particule s'oriente progressivement *parallèlement* à l'axe Ox_1 . Lorsqu'au contraire le taux d'élongation est *négatif* (compression uniaxiale), la valeur de l'exponentielle dans (3.8) croît indéfiniment, si bien que l'angle θ évolue vers la valeur $\pi/2$. La particule s'oriente progressivement *perpendiculairement* à l'axe Ox_1 .

Dans tous les cas, l'orientation finale est atteinte d'autant plus rapidement que le taux d'élongation est important. L'influence du rapport de forme r de la particule n'est pas très importante, puisque dès que $r \gg 1$ le rapport $\bar{r} = (r^2 - 1)/(r^2 + 1)$ est proche de 1 et varie peu en fonction de r .

Enfin, quel que soit le signe de $\dot{\epsilon}$, les orientations finales parallèles ou perpendiculaires à l'axe d'élongation constituent des positions d'équilibre *stables*.

b) Cas de l'élongation plane : $\dot{\epsilon}_2 = 0$

Nous posons $\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}$. Les équations d'orientation (3.5) et (3.7) s'écrivent :

$$\tan \theta = \tan \theta_0 \left[\cos^2 \phi_0 \exp(-2\bar{r}\dot{\epsilon}t) + \sin^2 \phi_0 \exp(-4\bar{r}\dot{\epsilon}t) \right] \quad (3.10)$$

$$\tan \phi = \tan \phi_0 \exp(\bar{r}\dot{\epsilon}t) \quad (3.11)$$

Ces équations sont plus difficiles à interpréter que celles de l'élongation uniaxiale, à cause du couplage entre les angles θ et ϕ . Lorsque le taux d'élongation $\dot{\epsilon}$ est *positif* (extension suivant Ox_1) les angles θ et ϕ tendent pour des temps longs vers les valeurs $\theta_\infty = 0$ et $\phi_\infty = \pi/2$ (figure 3.10). En pratique, la fibre tend à s'orienter parallèlement à l'axe vertical Ox_1 ; au cours du mouvement, le plan qui la contient tourne autour de cet axe (figure 3.10). La description exacte du mouvement nécessite la prise en compte du couplage entre θ et ϕ , qui dépend des conditions initiales θ_0 et ϕ_0 . Lorsque le taux d'élongation est *néгатif* (compression suivant Ox_1), nous trouvons qu'aux temps longs $\theta_\infty = \pi/2$ et $\phi = 0$. La fibre s'oriente perpendiculairement à l'axe Ox_1 dans le plan Ox_1x_2 (figure 3.10). Le comportement d'une fibre en élongation plane est donc très différent de celui observé en élongation uniaxiale, où nous avons montré que la fibre s'oriente parallèlement à l'axe Ox_1 dans le plan qui contient à la fois l'axe Ox_1 et la fibre, sans tourner autour de l'axe Ox_1 . Ce résultat indique que l'étude expérimentale du comportement d'une fibre en élongation plane nécessiterait l'enregistrement simultané des variations de θ et ϕ . Ceci renforce a posteriori l'intérêt de la géométrie axisymétrique choisie dans nos expériences.

III. INTERPRETATION DES EXPERIENCES

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser l'étude que nous venons d'effectuer sur le comportement d'une fibre en écoulement élongationnel pour interpréter quantitativement les résultats expérimentaux obtenus au paragraphe I. Nous allons détailler le comportement des fibres successivement sur l'axe de la cellule dans la zone élongationnelle proche de l'orifice, et dans la zone de cisaillement de l'écoulement de Poiseuille loin de l'orifice.

III.1 Analyse des résultats expérimentaux dans la zone élongationnelle

III.1.1 Prédiction théorique pour l'évolution de θ avec z

a) Préliminaire

Nous allons identifier le repère (O, x_1, x_2, x_3) , que nous avons utilisé dans l'exposé général des équations d'orientation, avec le repère $(O, \vec{i}_z, \vec{i}_\rho, \vec{i}_\phi)$ introduit dans le chapitre 2 (figure 2.20), qui est adapté à la géométrie de la cellule. L'angle azimuthal ϕ introduit au paragraphe II.2 est alors identique à la troisième coordonnée qui décrit la symétrie de révolution autour de l'axe Oz . Nous avons montré dans le chapitre 2, que l'écoulement de base newtonien dans la cellule expérimentale coïncide au voisinage de l'axe, dans la partie proche

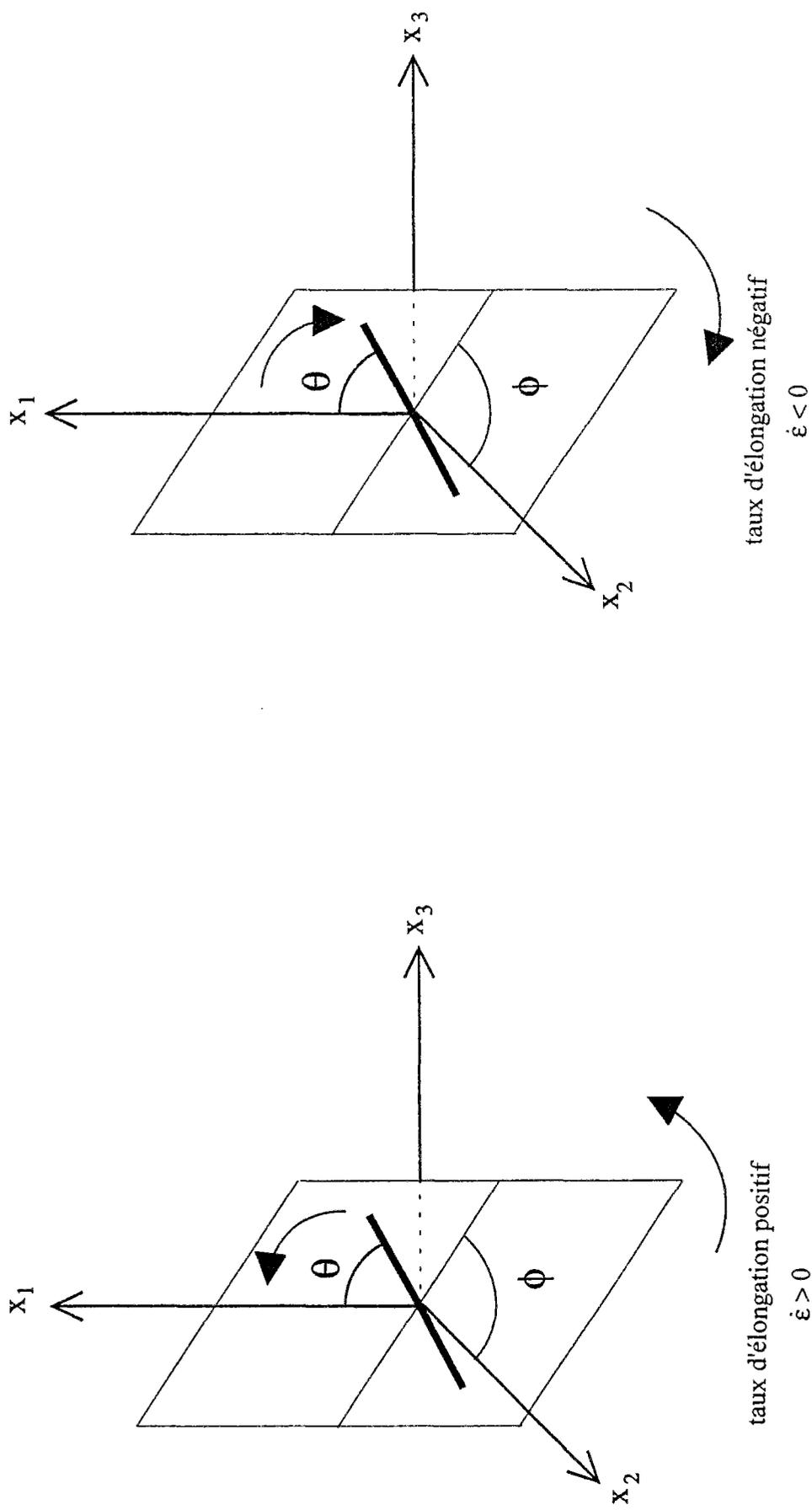


Figure 3.10

Cas de l'élongation planaire : évolution aux temps longs des angles ϕ et θ .

de l'orifice, avec un écoulement élongationnel uniaxial, dont le tenseur de déformation est de la forme :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\epsilon}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\epsilon}/2 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \dot{\epsilon}(z) = \frac{3Q}{\pi} \frac{z}{(z^2 + c^2)^2}$$

Le taux d'élongation $\dot{\epsilon}$ n'est *pas constant*, mais est fonction de la distance à l'orifice z . Ce taux d'élongation décrit à la fois ce qui se passe en amont et en aval de l'orifice ($z \geq 0$ et $z \leq 0$). Faisant l'hypothèse que le taux d'élongation est constant sur une échelle comparable à la longueur de la particule, nous allons transposer les équations d'orientation obtenues au paragraphe I pour l'élongation uniaxiale, en utilisant la valeur du taux d'élongation $\dot{\epsilon}(z)$ ci-dessus.

b) Evolution de θ avec z

Nous rappelons qu'en élongation uniaxiale, l'angle ϕ reste constant, égal à sa valeur initiale. L'équation différentielle régissant l'évolution de l'angle θ s'écrit alors :

$$\dot{\theta} = -\frac{9Q}{4\pi} \bar{r} \frac{z}{(z^2 + c^2)^2} \sin(2\theta) \quad (3.12)$$

Par ailleurs, nous connaissons la vitesse sur l'axe Oz donc la valeur de \dot{z} sur l'axe ($\dot{z} = dz/dt$) :

$$\dot{z} = -\frac{3Q}{2\pi} \frac{1}{z^2 + c^2} \quad (3.13)$$

En éliminant la variable t entre les équations (3.12) et (3.13), nous obtenons une équation différentielle à variables séparables en θ et en z qui s'intègre sous la forme :

$$\frac{\tan \theta}{\tan \theta_0} = \left[\frac{z^2 + c^2}{z_0^2 + c^2} \right]^{\frac{3}{2} \bar{r}} \quad (3.14)$$

où θ_0 et z_0 désignent respectivement l'orientation et la position initiale de la fibre.

c) Commentaires

Le résultat obtenu ci-dessus pour la dynamique d'orientation des fibres sur l'axe d'élongation de la cellule appelle sous cette forme plusieurs commentaires.

Considérons d'abord l'équation (3.14) d'un point de vue purement mathématique, indépendamment des applications expérimentales. Les couples (θ, z) et (θ_0, z_0) qui interviennent dans cette équation peuvent désigner deux configurations quelconques de la fibre au cours de son déplacement. La forme de l'équation est en effet homothétique, au sens où deux couples quelconques (θ_1, z_1) et (θ_2, z_2) caractérisant deux configurations de la fibre à deux instants différents de son parcours vérifient eux-aussi :

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \left[\frac{z_1^2 + c^2}{z_2^2 + c^2} \right]^{\frac{3}{2}\bar{r}}$$

Cependant, il reste vrai que l'évolution de θ avec z dépend de la configuration initiale (θ_0, z_0) . De plus, l'orientation de la fibre est complètement symétrique de part et d'autre de l'orifice (remplacer z par $-z$ ne change rien à l'équation (3.14)). Sur la figure 3.11, nous avons représenté différentes évolutions de θ avec z correspondant à différentes configurations initiales (θ_0, z_0) , dans la limite où le rapport de forme de la particule est infini ($\bar{r} = 1$). Nous voyons qu'aux extrémités de ces courbes ($|z| \rightarrow \pm\infty$) l'angle θ tend vers $\pi/2$, et que toute orientation θ_1 à l'abscisse z_1 est retrouvée sur la même courbe à l'abscisse $-z_1$. Les différentes courbes se distinguent seulement par la rapidité avec laquelle elles rejoignent l'angle $\pi/2$ à l'infini, ainsi que l'angle correspondant à $z=0$, qui est toujours voisin de 0. La façon dont θ tend vers $\pi/2$ ainsi que la valeur de θ en $z=0$ sont fixées par le choix de θ_0 et z_0 .

En ce qui concerne l'étude expérimentale menée dans la cellule élongationnelle, il faut remarquer que l'équation (3.14) s'applique dans les limites où le taux d'élongation $\dot{\epsilon}(z)$ existe, c'est-à-dire dans les zones proches de l'orifice où l'écoulement de Poiseuille est négligeable devant l'écoulement à composantes élongationnelles. Nous avons montré au chapitre 2 que cette zone correspond à $|z| \leq 20c$, c étant le rayon de l'orifice. Nous verrons que la symétrie de la solution analytique de part et d'autre de l'orifice ne se retrouve pas dans la cellule, à cause de la perturbation apportée aux fibres par l'orifice.

En ce qui concerne le rôle du rapport de forme des particules, nous constatons que l'exposant $(3/2)\bar{r}$ est d'autant plus proche de 1.5 que le rapport de forme r de la fibre est grand. L'influence du rapport de forme sur cet exposant est de plus très faible au-delà d'une certaine valeur. Dans nos expériences, l'exposant vaut 1.4977 pour les fibres de rapport de forme 36. Il vaudrait 1.4985 si on doublait ce rapport de forme. En pratique, la précision des mesures ne permet pas d'accéder expérimentalement à la valeur de r .

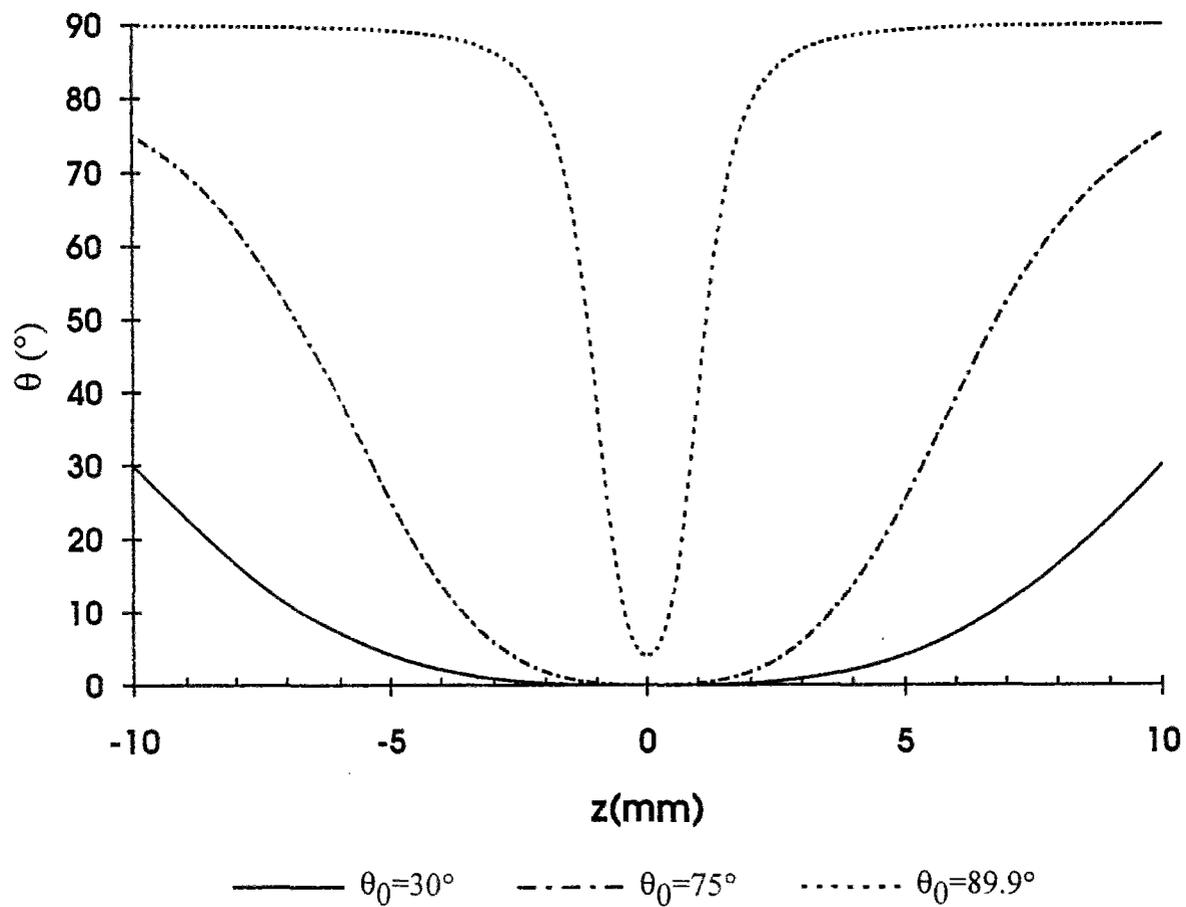


Figure 3.11

Représentation de l'évolution de l'angle θ avec la distance z à l'orifice prédite par l'équation (3.14), pour différentes orientations initiales (θ_0, z_0) et un rapport de forme infini ($\bar{r} = 1$).

III.1.2 Comparaison avec les mesures

a) Recherche de la meilleure description analytique des points expérimentaux

Une première méthode d'exploitation des données expérimentales des figures 3.5 et 3.6 consiste à représenter pour chaque fibre la courbe théorique θ en fonction de z qui rend le mieux compte des résultats expérimentaux. En pratique, nous avons choisi parmi les données expérimentales, pour chaque série de points expérimentaux concernant une fibre, le couple (θ_0, z_0) qui permet d'obtenir le meilleur accord avec la courbe théorique.

De façon générale, il apparaît que le choix du couple (θ_0, z_0) est meilleur pour les points situés dans une zone intermédiaire qui est éloignée à la fois de l'orifice ($z_0 > 2\text{mm}$) et de l'influence de l'écoulement de Poiseuille ($z_0 < 8\text{mm}$). En effet, près de l'orifice, les erreurs absolues sur la mesure de l'angle θ sont importantes et affectent considérablement la courbe $\theta(z)$. Loin de l'orifice, la fibre se situe dans la zone de transition entre l'écoulement de Poiseuille et l'écoulement élongationnel.

b) Discussion des résultats en amont de l'orifice

Sur la figure 3.12, nous avons tracé grâce à la méthode décrite précédemment la courbe théorique qui s'approche le mieux d'une série de points expérimentaux correspondant au déplacement d'une fibre en *amont* de l'orifice, et ceci pour chaque fibre. Nous observons un bon accord entre les courbes théoriques et les points expérimentaux, compte-tenu de la précision sur les mesures.

De plus, nous pouvons maintenant justifier pourquoi la majorité des fibres ont le temps de s'aligner parallèlement à l'axe d'élongation avant de franchir l'orifice. Ceci est dû à l'étendue de la zone élongationnelle (10mm) qui implique que la valeur de θ en $z=0$ est toujours petite, quelle que soit l'orientation initiale θ_0 au début de la zone élongationnelle. En effet, $\tan(\theta)$ en $z=0$ est égal à $\tan(\theta_0)$ multiplié par la quantité :

$$\left[\frac{c^2}{z_0^2 + c^2} \right]^{\frac{3}{2}}$$

qui est petite puisque $z_0 = 20c$. Ce raisonnement ne s'applique plus lorsque l'angle θ_0 est rigoureusement égal à $\pi/2$, situation que nous n'avons pas rencontrée dans les expériences.

c) Discussion des résultats en aval de l'orifice

Par le même procédé, nous obtenons les courbes représentées sur la figure 3.13, qui sont en bon accord avec les points expérimentaux. Pour tous ces points expérimentaux, la valeur finale de l'angle θ est proche de 90° . D'après l'équation (3.14), ceci implique que les fibres sortent de l'orifice avec une orientation θ qui n'est pas proche de zéro, alors qu'elles ont

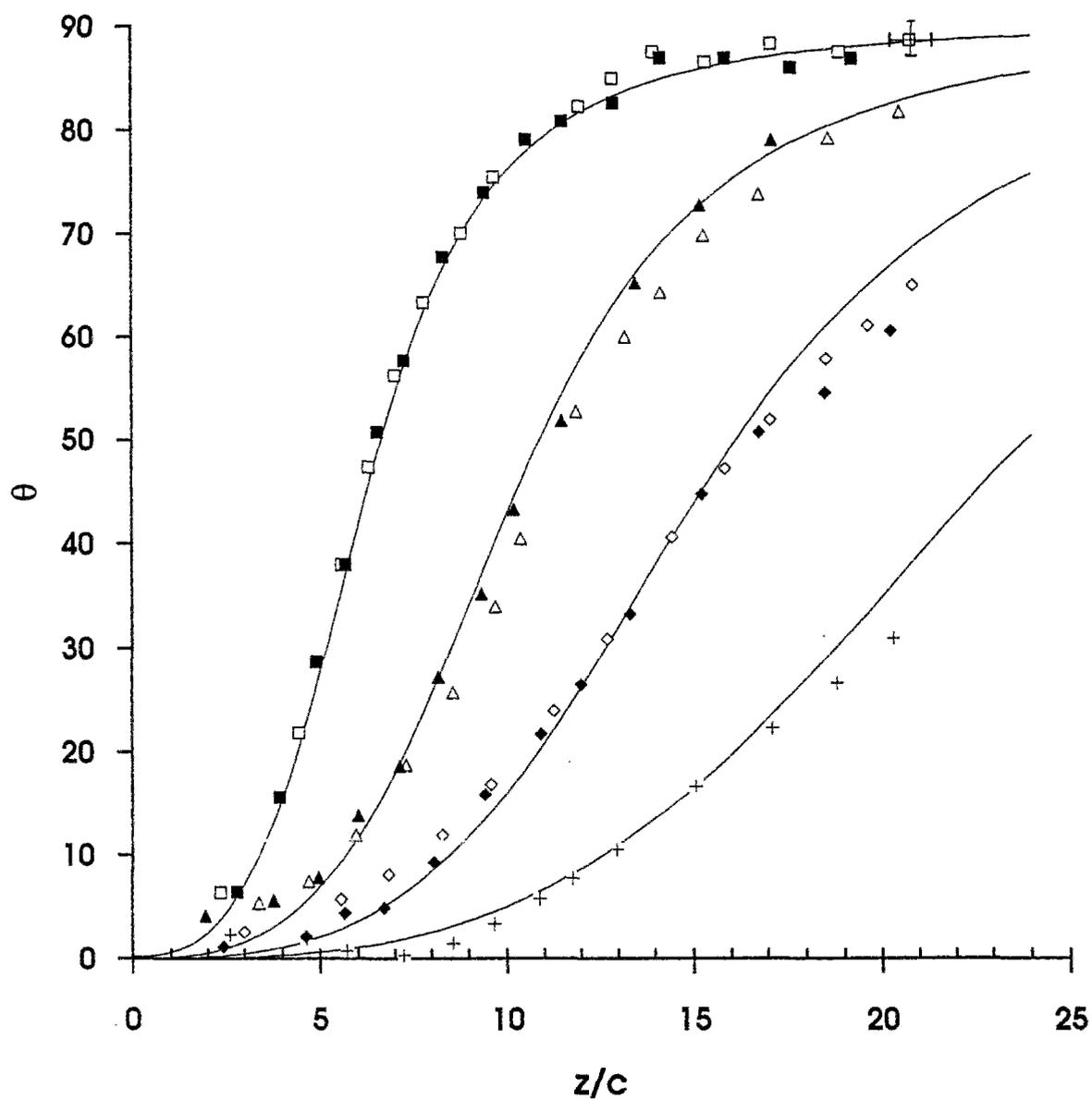


Figure 3.12

Représentation des courbes théoriques (équation 3.14) qui décrivent le mieux les points expérimentaux obtenus sur l'axe *en amont* de l'orifice.

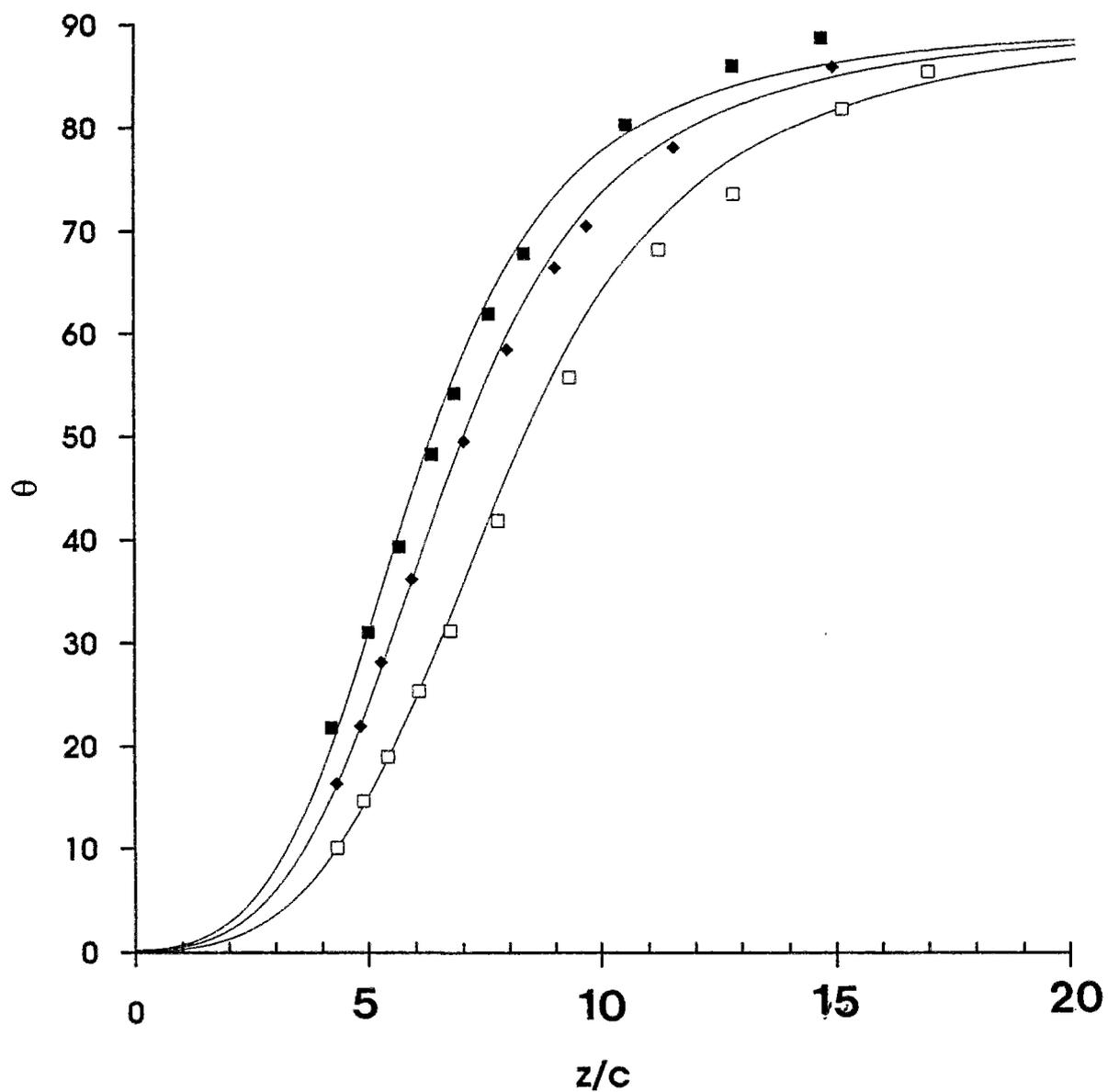


Figure 3.13

Représentation des courbes théoriques (équation 3.14) qui décrivent le mieux les points expérimentaux obtenus sur l'axe *en aval* de l'orifice.

été orientées précédemment par l'écoulement amont. Nous en concluons que l'orifice apporte une perturbation à l'orientation initiale θ_0 en $z=0$, si bien que la symétrie mathématique de l'équation (3.14) disparaît dans les expériences, pour faire place à une situation où toutes les fibres en sortie de l'orifice s'orientent très rapidement à 90° de l'axe.

d) Conclusion

Une représentation équivalente aux figures 3.12 et 3.13 est présentée sur la figure 3.14. Elle consiste à porter la variable $Y = \tan\theta / \tan(\theta_0)$ en fonction de la variable adimensionnée $X = (z^2 + c^2) / (z_0^2 + c^2)$, en gardant chaque couple (θ_0, z_0) déterminé précédemment. Dans ce système de coordonnées, tous les points expérimentaux correspondant à des fibres différentes se placent sur la courbe théorique d'équation :

$$Y = X^{\frac{3}{2}}$$

Les deux types de représentations mettent en évidence l'accord entre les points expérimentaux et leur description analytique par l'équation (3.14). Cet accord peut être nuancé dans le détail (influence du rapport de forme, des dimensions de la fibre etc...) mais il montre de manière convaincante :

- l'exactitude de la description analytique du champ de vitesse sur l'axe sous forme d'une élongation uniaxiale dont le taux d'élongation est donné par l'équation (3.11)
- la validité du calcul des équations d'orientation d'une particule anisotrope, même si la dimension des particules ($L=1\text{mm}$) n'est pas négligeable devant l'échelle caractéristique de l'écoulement ($c=0.5\text{mm}$). Cet accord est dû au fait que nous nous sommes intéressés à des régions de la zone élongationnelle où le taux d'élongation varie lentement et de façon uniforme (figure 2.23), et que nous n'avons pas cherché à explorer le voisinage immédiat de l'orifice où le taux d'élongation décroît très rapidement.

III.2 Analyse du comportement d'une fibre dans l'écoulement de Poiseuille

Avant d'arriver dans la zone élongationnelle, les fibres parcourent une distance assez grande (150mm) dans le tube cylindrique de la cellule, lequel est le siège d'un écoulement de Poiseuille (figure 3.15). La vitesse est parallèle à l'axe z et varie avec la distance ρ à l'axe suivant :

$$V_z(\rho) = -\frac{2Q}{\pi R^4} (R^2 - \rho^2)$$

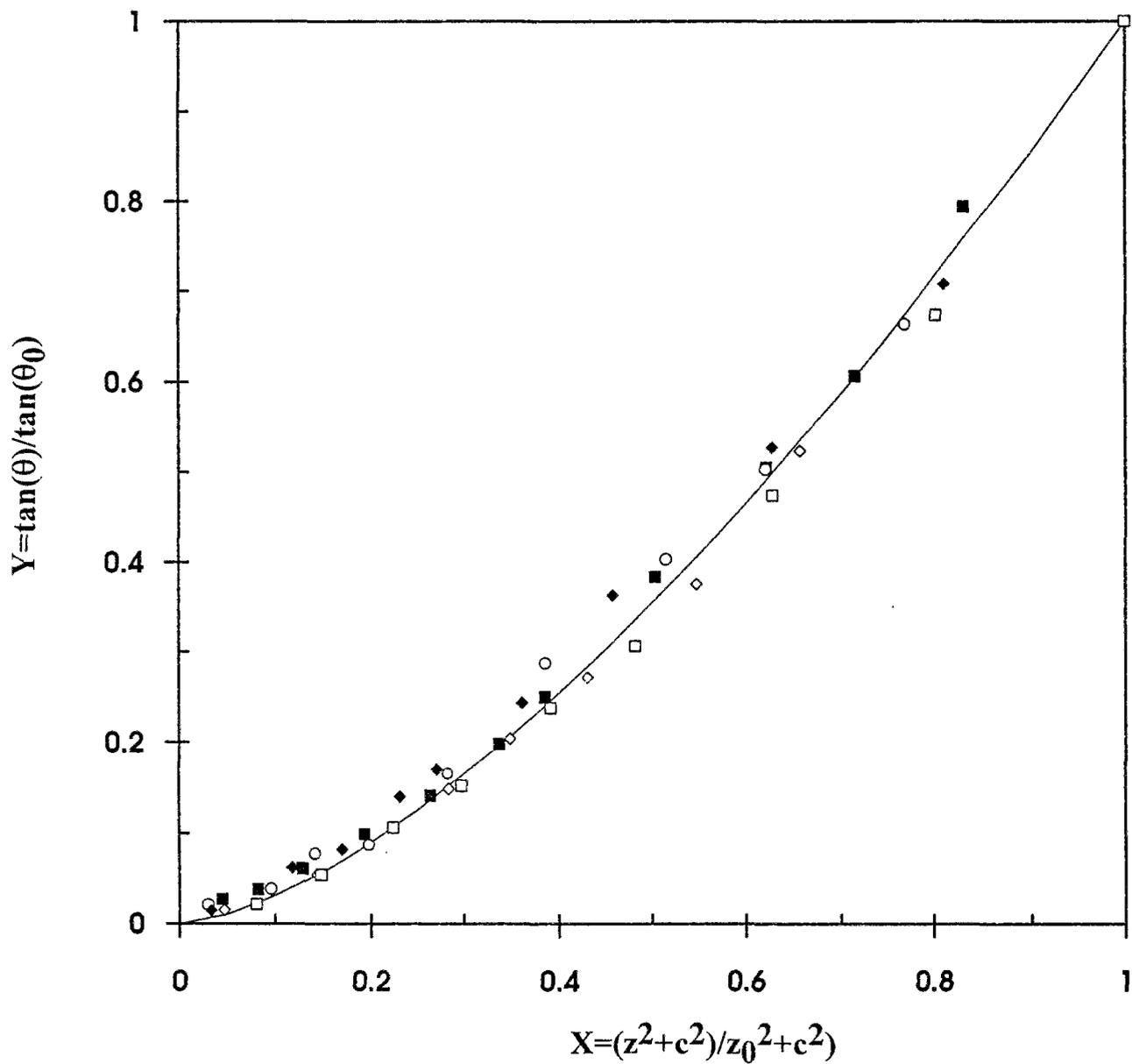


Figure 3.14

Représentation de $Y = \tan(\theta) / \tan(\theta_0)$ en fonction de $X = (z^2 + c^2) / (z_0^2 + c^2)$ pour les points expérimentaux obtenus en amont de l'orifice ; la courbe en trait continu a pour équation $Y = X^{3/2}$. Chaque série de points correspond à une série de points expérimentaux (figure 3.5).

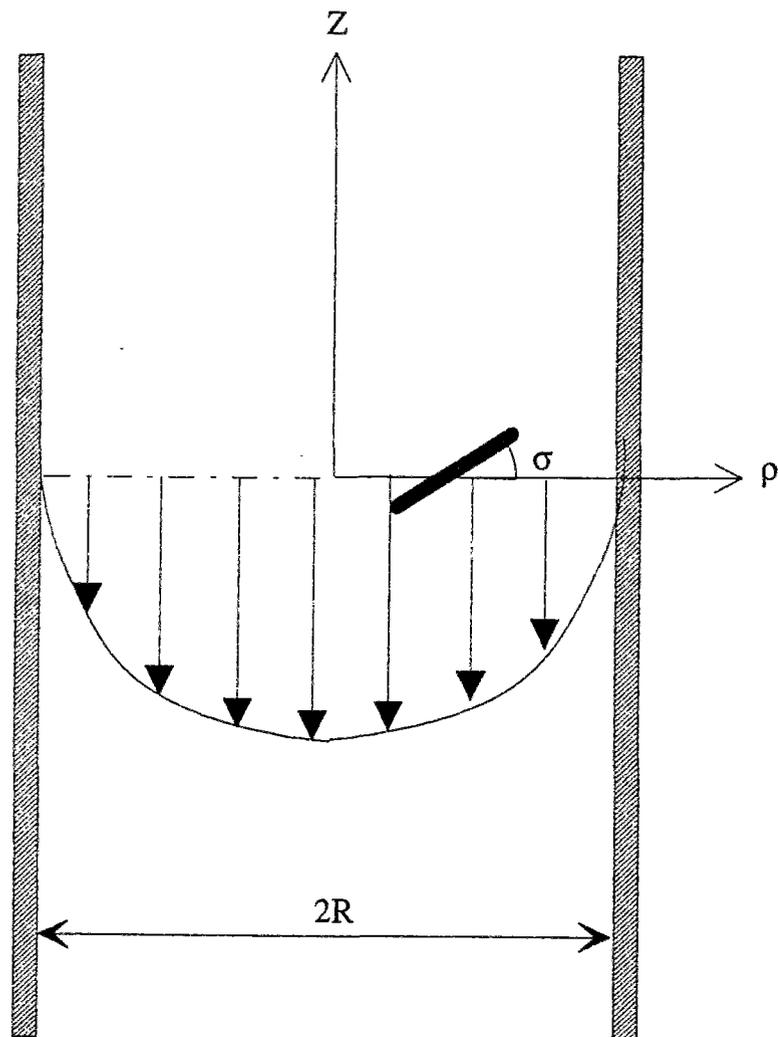


Figure 3.15

Paramétrisation de l'écoulement de Poiseuille dans la cellule.

où R est le diamètre de la cellule, Q le débit de l'écoulement. Le signe - indique que le fluide s'écoule vers le bas (l'axe Oz est orienté vers le haut). Dans le repère cylindrique (O,z,ρ,φ), cet écoulement est *localement* un écoulement de cisaillement simple dans le plan (Ozρ) de révolution autour de l'axe Oz. Le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ n'est pas constant, c'est une fonction de la distance à l'axe ρ :

$$\dot{\gamma}(\rho) = -\frac{3Q}{\pi R^4} \rho$$

En particulier, le cisaillement est nul sur l'axe et maximum sur les bords.

Nos observations expérimentales concernant l'orientation des fibres dans l'écoulement de Poiseuille sont en accord avec les résultats d'études précédentes en écoulement de cisaillement, tant expérimentales que théoriques [14-16], qui sont détaillées dans l'annexe du chapitre avec les équations d'orientation d'une fibre en écoulement de cisaillement. Ces résultats prévoient une trajectoire périodique du vecteur directeur, avec une orientation préférentielle des fibres dans un plan de cisaillement, et parallèlement aux lignes de courant. Nous allons nous intéresser plus particulièrement aux fibres situées dans un plan de cisaillement. Ces fibres demeurent dans le plan de cisaillement et y décrivent un mouvement de rotation périodique autour des lignes de courant, mouvement qui se superpose à la translation avec le fluide. La période T de ce mouvement est donnée par l'équation (voir annexe) :

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\gamma}} \left[r + \frac{1}{r} \right]$$

où r est le rapport de forme des particules. Sur la figure 3.16, nous avons tracé l'évolution de l'angle σ prédite par les équations d'orientation (voir annexe) en fonction de la variable t/T, pour différentes valeurs du rapport de forme r de la particule. Ce type de représentation permet de rendre compte du pourcentage du temps passé par la particule dans la direction des lignes de courant ($\theta = \pm\pi/2$). Nous constatons que ce pourcentage est très important, les transitions pour passer de $\theta = +\pi/2$ à $\theta = -\pi/2$ s'effectuant d'autant plus rapidement que le rapport de forme de la particule est grand. Le mouvement de la particule est donc proche d'un mouvement de basculement périodique de part et d'autre des lignes de courant.

Plus on s'éloigne de l'axe de la cellule, plus le taux de cisaillement augmente, donc plus la période de rotation diminue. Les fibres situées sur l'axe de la cellule ont une période de rotation infinie, ce qui signifie qu'elles se translatent sans tourner. Nous donnons dans le tableau suivant les ordres de grandeur des demi-périodes de rotation T/2 pour des fibres situées près des bords de la cellule ($\rho=R$) et près de l'axe ($\rho=R/4$), ceci pour les débits

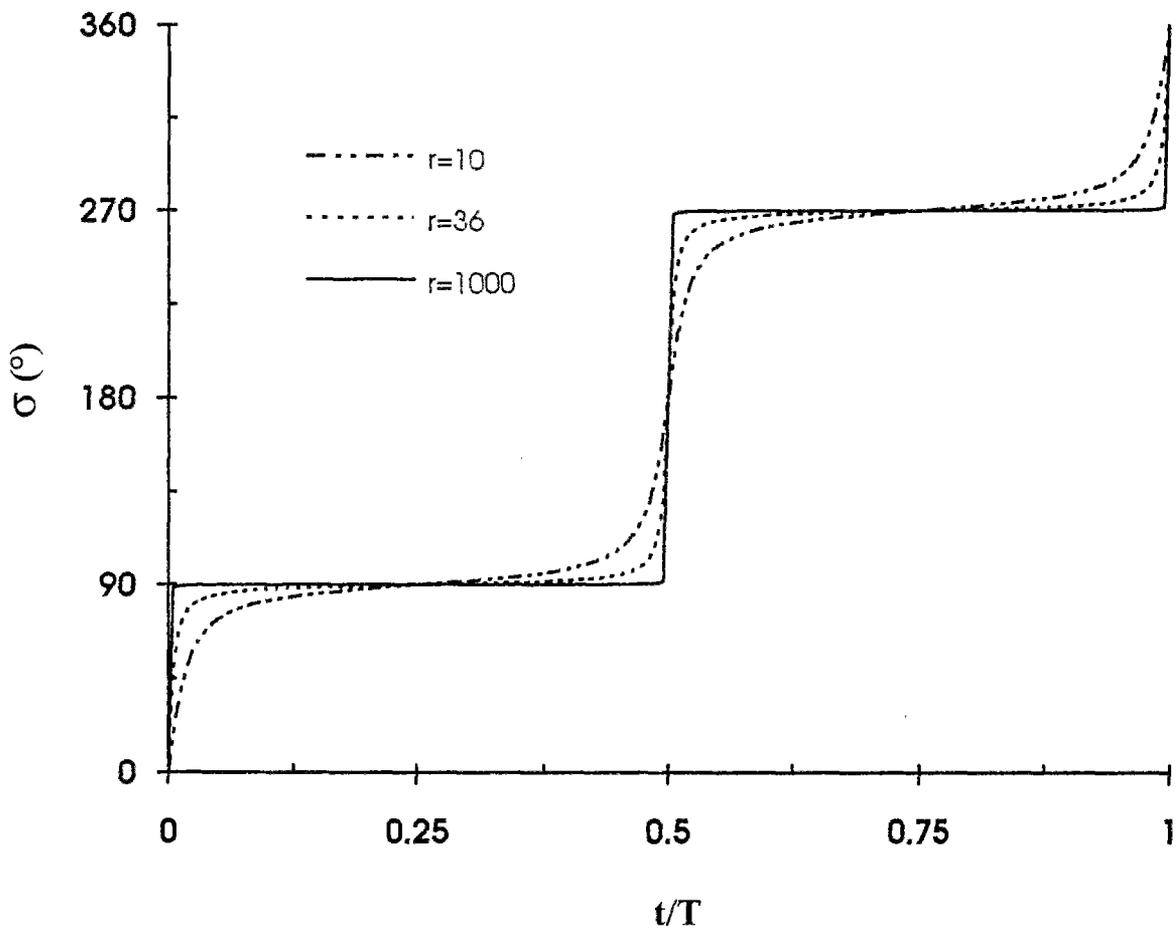


Figure 3.16

Evolution de l'angle σ en fonction de la variable t/T (équation 3.10) pour une fibre située dans le plan de cisaillement, pour différentes valeur du rapport de forme r . T désigne la période du mouvement et vaut $T = \frac{2\pi}{\dot{\gamma}} \left[r + \frac{1}{r} \right]$.

minimal et maximal de nos expériences. Cette valeur $T/2$ représente le temps qui sépare deux basculements successifs autour de la ligne de courant.

(pour $r=36$)	demi-période en $\rho=R_0$	demi-période en $\rho=R_0/4$
$Q=10^{-3}\text{cm}^3/\text{s}$	43h	172h
$Q=0.3\text{cm}^3/\text{s}$	8.5mn	35mn

III.3 Conclusion

Nous avons obtenu une description quantitative satisfaisante de la dynamique d'orientation d'une fibre sur l'axe de la cellule. Ceci a été rendu possible par une bonne connaissance préalable du champ de vitesse. Nous rappelons que cette description est limitée aux suspensions très diluées : il serait intéressant d'étendre cette étude au cas de suspensions plus concentrées, afin d'étudier la modification éventuelle de la dynamique d'orientation sous l'effet des interactions hydrodynamiques. Dans les régimes plus concentrés, nous observons cependant un comportement *qualitativement identique*, caractérisé par une orientation globale des fibres parallèle aux lignes de courant en amont de l'orifice, et perpendiculaire aux lignes de courant en aval. Ceci a des conséquences importantes sur les propriétés de l'écoulement de telles suspensions, comme nous le verrons au chapitre suivant qui concerne les suspensions de fibres en régime semi-dilué.

ANNEXE

Rappels sur les équations d'orientation d'une fibre en écoulement de cisaillement simple.

Le comportement d'une fibre en écoulement de cisaillement simple a été très étudié dans la littérature [14-16]. Néanmoins, nous en rappelons ici les propriétés principales. L'intérêt est double : d'une part, les résultats sont utiles dans nos expériences, d'autre part nous mettons ainsi en évidence les spécificités de la sollicitation élongationnelle par rapport au cisaillement.

Equations d'orientation

Considérons le cas d'un écoulement de cisaillement simple dans le plan Ox_1x_2 , dont le champs de vitesse est parallèle à Ox_1 et s'écrit :

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous choisissons comme axe polaire l'axe orthogonal au plan de cisaillement, c'est-à-dire l'axe Ox_3 et nous appelons ψ l'angle polaire (figure 3.17). L'angle azimuthal, que nous appelons σ , décrit donc la rotation de la particule dans le plan de cisaillement. Les coordonnées des vecteurs \vec{p} et $d\vec{p}/dt$ s'expriment en fonction de ψ et σ suivant :

$$\begin{cases} p_1 = \sin \psi \cos \sigma \\ p_2 = \sin \psi \sin \sigma \\ p_3 = \cos \psi \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{p}_1 = \dot{\psi} \cos \psi \cos \sigma - \dot{\sigma} \sin \psi \sin \sigma \\ \dot{p}_2 = \dot{\psi} \cos \psi \sin \sigma + \dot{\sigma} \sin \psi \cos \sigma \\ \dot{p}_3 = -\dot{\psi} \sin \psi \end{cases}$$

Calculons le tenseur de déformation et le vecteur rotation correspondant à cet écoulement :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\gamma}/2 \end{bmatrix}$$

Nous calculons ensuite chacun des termes qui interviennent dans l'équation d'évolution du vecteur \vec{p} de coordonnées (p_1, p_2, p_3) dans le repère $Ox_1x_2x_3$, et nous obtenons le système suivant :

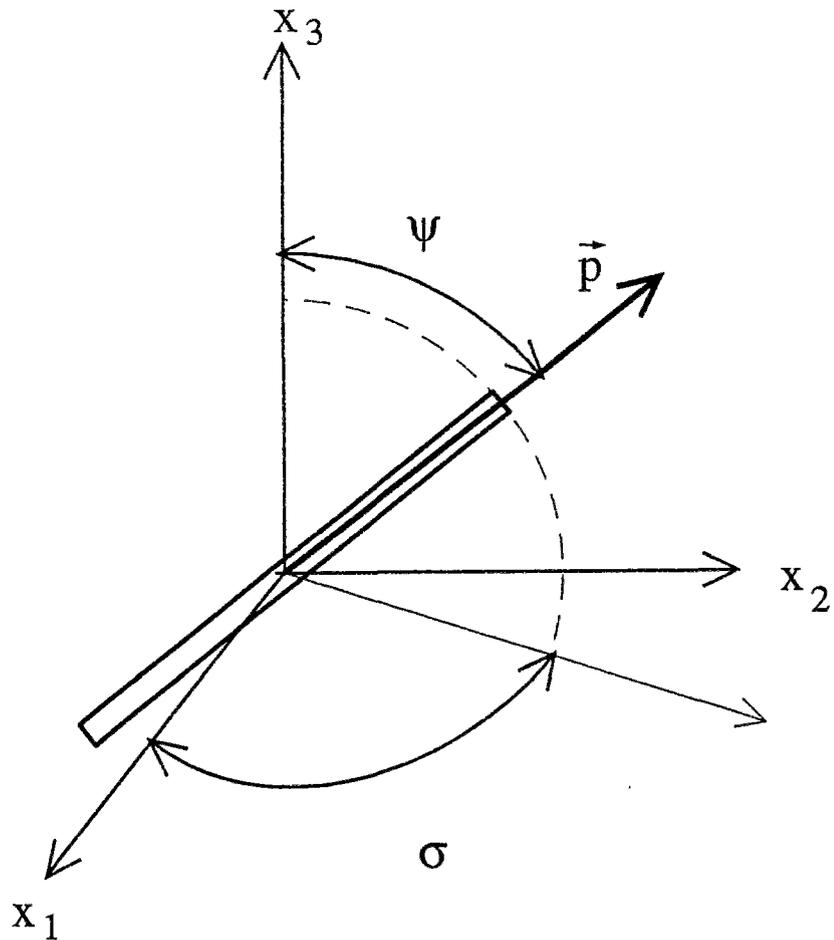


Figure 3.17

Paramètres angulaires σ et ψ repérant l'orientation du vecteur directeur \vec{p} de la particule allongée, utilisés pour décrire le mouvement de la particule dans un écoulement de cisaillement dans le plan (x_1, x_2) . Sur cette figure, l'axe polaire est l'axe x_3 .

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = \frac{\dot{\gamma}}{2} p_2 [1 + \bar{r}(1 - 2p_1^2)] \\ \dot{p}_2 = \frac{\dot{\gamma}}{2} p_1 [-1 + \bar{r}(1 - 2p_2^2)] \\ \dot{p}_3 = -\dot{\gamma} \bar{r} p_1 p_2 p_3 \end{cases}$$

Après avoir remplacé les composantes des vecteurs \bar{p} et $d\bar{p}/dt$ en fonction des angles ψ et σ , nous obtenons un système de deux équations indépendantes (r désigne le rapport de forme) :

$$\dot{\psi} = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \frac{\dot{\gamma}}{4} \sin(2\psi) \sin(2\sigma) \quad \text{et} \quad \dot{\sigma} = -\dot{\gamma} \left[\frac{1}{r^2 + 1} \cos^2 \sigma + \frac{r^2}{r^2 + 1} \sin^2 \sigma \right]$$

Ces équations s'intègrent pour donner d'une part l'évolution de l'angle σ avec le temps :

$$\tan \sigma = r \tan \left[\frac{r}{r^2 + 1} \dot{\gamma} t + C_\sigma \right] \quad (\text{A.1})$$

et d'autre part le couplage entre les deux angles ψ et σ :

$$\tan \psi = \frac{C_\psi \sqrt{r^2 - 1}}{\sqrt{\sin^2 \sigma + r^2 \cos^2 \sigma}} \quad (\text{A.2})$$

C_ψ et C_σ sont des constantes d'intégration qui dépendent de l'orientation initiale de la particule au temps $t=0$.

Discussion

La trajectoire de l'extrémité du vecteur \bar{p} est une trajectoire périodique connue sous le nom d'orbite de Jeffery. La période T s'exprime en fonction du taux de cisaillement et du rapport de forme de la particule suivant :

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\gamma}} \left(r + \frac{1}{r} \right)$$

La période T augmente lorsque le taux de cisaillement diminue et lorsque le rapport de forme augmente. La description des orbites est délicate car elles sont tridimensionnelles dans le cas le plus général. Elles ont été très étudiées expérimentalement [14-16].

Un cas simple d'orbite est obtenu pour les particules se trouvant dans le plan de cisaillement Ox_1x_2 à $t=0$. Dans ce cas, l'angle ψ est égal à $\pi/2$ à $t=0$, et la constante d'intégration C_ψ est infinie. Ceci implique que l'angle ψ reste égal à $\pi/2$ pour tous les instants ultérieurs : la particule demeure dans le plan de cisaillement. L'équation (A.1) qui régit l'évolution de l'angle σ montre que la particule décrit dans le plan de cisaillement un mouvement de rotation périodique, dont la vitesse de rotation n'est pas constante : on montre que la fibre passe la majorité du temps alignée dans la direction des lignes de courant.

De façon plus générale, des observations expérimentales et des calculs statistiques concernant les valeurs des constantes d'intégration [15] ont montré qu'une fibre dans un écoulement de cisaillement simple passe la majorité du temps *dans le plan de cisaillement et alignée* dans la direction des lignes de courant. Mais il ne s'agit pas d'une orientation stable, contrairement au cas de l'élongation.

CHAPITRE 4

Etude de suspensions de fibres en régime semi-dilué

En régime semi-dilué, les suspensions de fibres présentent un comportement non-newtonien qui se manifeste par une modification complète des propriétés d'écoulement. La première partie de ce chapitre est consacrée à la mise en évidence expérimentale et à la caractérisation de ce comportement non-newtonien.

Dans la seconde partie, nous proposons une interprétation à l'aide de différents modèles d'écoulement : un modèle global qui décrit le champ de vitesse dans sa totalité, et un modèle simplifié qui consiste à séparer l'écoulement en plusieurs régions et à ne traiter le champ de vitesse que dans la région où les effets d'élongation sont prépondérants. Ces modèles permettent de bien rendre compte des résultats expérimentaux en terme d'augmentation de la viscosité élongationnelle de la suspension.

PLAN DU CHAPITRE 4

I. ETUDE EXPERIMENTALE DE SUSPENSIONS DE FIBRES EN REGIME SEMI-DILUE

p.171

I.1 Préparation et caractéristiques des suspensions étudiées

I.1.1 Préparation

I.1.2 Différents types de fibre

I.2 Structuration de l'écoulement

p.173

I.2.1 Description qualitative

I.2.2 Paramètres géométriques pour décrire la structuration de l'écoulement

I.2.3 Etude quantitative de la structuration de l'écoulement en amont de l'orifice

I.2.4 Etude des autres paramètres géométriques

I.3 Relation entre le débit de l'écoulement et la différence de pression

p.189

I.3.1 Existence d'une relation linéaire entre le débit de l'écoulement et la différence de pression mesurée

I.3.2 Influence du solvant

I.3.3 Etude de la quantité $\Delta P/\Delta P_0$ pour différentes suspensions

II. ETUDE THEORIQUE

p.195

II.1 Analyse de l'ensemble de l'écoulement par une fonction courant homogène

p.195

II.1.1 Position du problème

II.1.2 Etude de l'écoulement d'une suspension de fibres dans une conduite conique

II.1.3 Solution homogène pour la fonction courant de l'écoulement en amont d'une contraction

II.2 Analyse de l'écoulement central par minimisation de la dissipation d'énergie

p.203

II.2.1 Relation entre l'énergie dissipée et la différence de pression

II.2.2 Détermination du champ de vitesse newtonien

II.2.3 Calcul et minimisation de la dissipation d'énergie totale

II.2.4 Discussion des résultats

II.2.5 Discussion de l'hypothèse de champ de vitesse newtonien

II.2.6 Comparaison de la différence de pression prédite par le modèle de minimum de dissipation d'énergie et par le calcul numérique

II.3 Interprétation des résultats expérimentaux

p.216

II.3.1 Structuration de l'écoulement

II.3.2 Différence de pression

II.3.3 Conclusion

I. ETUDE EXPERIMENTALE DE SUSPENSIONS DE FIBRES EN REGIME SEMI-DILUE

Cette partie concerne la mise en évidence expérimentale et la caractérisation du comportement non-newtonien des suspensions de fibres semi-diluées.

Nous avons utilisé le même montage expérimental qu'en régime dilué, en explorant cette fois des valeurs de fraction volumique qui vont du régime dilué ($n\ell^3 > 1$) à la limite supérieure du régime semi-dilué ($n\ell^2 d < 1$). Dans cette gamme de fractions volumiques, les suspensions de fibres présentent un comportement complètement différent du comportement de type newtonien que nous avons observé pour le solvant seul (chapitre 2) ou pour les suspensions très diluées (chapitre 3).

Ce changement se manifeste d'abord de manière frappante par l'apparition d'une structuration particulière de l'écoulement : les lignes de courant en amont de l'orifice de la cellule sont complètement modifiées par rapport aux lignes de courant de l'écoulement newtonien. L'écoulement se structure en deux zones : un écoulement central dans une région de forme conique, et des zones de recirculation latérales dans lesquelles la vitesse de l'écoulement est très faible. Par ailleurs, la relation entre le débit et la différence de pression associée à la traversée de l'orifice est toujours linéaire, mais la pente des droites représentant ΔP en fonction de Q augmente avec la fraction volumique et le rapport de forme des fibres.

Avant de comprendre l'origine de ces propriétés remarquables, qui est liée comme nous le verrons au paragraphe II à l'augmentation de la viscosité élongationnelle de la suspension, nous présentons d'abord l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus pour les différentes suspensions étudiées.

I.1 Préparation et caractéristiques des suspensions étudiées

I.1.1 Préparation

Les fibres utilisées dans la préparation des suspensions semi-diluées sont des fibres de polyamide rigides, macroscopiques, de forme cylindrique, identiques à celles utilisées au chapitre 3. La caractérisation géométrique des fibres a été effectuée précédemment ; en particulier, nous avons montré que la longueur mesurée est en bon accord avec la valeur nominale annoncée par le fabricant, et que la dispersion autour de la valeur moyenne est faible. Ces fibres sont dispersées après nettoyage et séchage dans un solvant très visqueux constitué d'un mélange eau-glucose ($\approx 0.7 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ à 20°C) ou d'huile silicone ($0.5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ à 20°C), dont les caractéristiques ont été présentées au chapitre 2. En pratique, nous avons procédé par pesée. Ainsi, pour préparer une suspension dont la fraction volumique en fibres est Φ , nous avons ajouté une masse m_f de fibres à une masse M_s de solvant :

$$m_f = \frac{\rho_f}{\rho_s} \frac{\Phi}{1 - \Phi} M_s$$

La masse volumique des fibres est notée ρ_f , celle du solvant ρ_s . La dispersion des fibres dans le solvant se fait par agitation à l'aide d'un barreau magnétique. Compte-tenu des quantités de fibres importantes à disperser dans un volume de suspension d'environ 400cm³, cette dispersion nécessite plusieurs heures d'agitation. Il faut de plus éviter la formation de bulles lors de l'agitation, qui s'éliminent d'autant moins facilement que les solvants sont très visqueux.

I.1.2 Différents types de fibre

Nous avons disposé de plusieurs types de fibre, dont les rapports de forme sont compris entre 26 et 144. Nous avons récapitulé pour chaque type de fibre dans le tableau 4.1 la longueur L, le diamètre d, le rapport de forme r associé, ainsi que les valeurs des fractions volumiques Φ^* et Φ^{**} correspondant respectivement aux limites du régime dilué ($n\ell^3=1$ et $\Phi^* = 2\pi/r^2$) et semi-dilué ($n\ell^2d=1$ et $\Phi^{**} = \pi/r$). Nous avons aussi indiqué pour les fractions volumiques Φ^* et Φ^{**} la valeur du rapport h/d, h étant la distance moyenne entre fibres définie au chapitre 1 dans l'hypothèse où les fibres sont alignées.

L (mm)	d (µm)	r	Φ^*	Φ^{**}	h(Φ^*)/d	h(Φ^{**})/d
0,5	13,7	36	4,8.10 ⁻³	8,7.10 ⁻²	12,7	3,0
1	13,7	72	1,2.10 ⁻³	4,3.10 ⁻²	25,4	4,3
2	13,7	144	3,0.10 ⁻⁴	2,2.10 ⁻²	50,9	6,0
1	19,1	52	2,3.10 ⁻³	6,0.10 ⁻²	18,4	3,6
0,6	10,1	60	1,7.10 ⁻³	5,2.10 ⁻²	21,2	3,8
0,5	19,1	26	9,3.10 ⁻³	1,2.10 ⁻¹	9,2	2,5

Tableau 4.1

Caractéristiques des différents types de fibres utilisés.

I.2 Structuration de l'écoulement

I.2.1 Description qualitative

La figure 4.1 présente une photographie à temps de pose long d'une suspension de fibres éclairée par la tranche laser. Les fibres de polyamide réfléchissent la lumière du laser et servent ici de traceurs. La trajectoire des fibres permet donc de visualiser les lignes de courant.

a) Ecoulement en amont de l'orifice

Nous observons que l'écoulement en amont de l'orifice est complètement modifié par rapport au cas du fluide newtonien (figure 2.16). L'écoulement se structure en deux parties : un cône central à bords quasiment droits qui converge vers l'orifice, et des recirculations latérales. Recirculations et cône sont de révolution autour de l'axe vertical de la cellule. Le contraste entre la quantité importante de lumière diffusée par le cône central, qui apparaît en blanc sur la photo, et l'aspect plus sombre des recirculations latérales appelle plusieurs commentaires. Tout d'abord, nous constatons en observant l'écoulement dans l'objectif de l'appareil photo que la vitesse des fibres dans le cône central est beaucoup plus grande que dans les zones de recirculation, qui sont des zones de stagnation. Ceci est confirmé par des mesures de vitesse à l'aide du dispositif décrit au chapitre 2, qui montrent que la vitesse sur le bord des tourbillons est environ 100 fois plus faible que la vitesse sur l'axe. D'autre part, nous observons une différence de concentration en fibres entre le cône central, constamment alimenté en fibres par l'écoulement amont, et les zones de recirculation qui s'appauvrissent en fibres au cours du temps. Cet effet sera étudié plus loin lors de l'étude de l'évolution de la structuration au cours du temps.

b) Ecoulement en aval de l'orifice

En aval de l'orifice, l'écoulement n'est pas modifié par rapport au cas newtonien, au sens où les lignes de courant sont les mêmes. Par contre, nous constatons que les fibres n'occupent pas tout l'écoulement mais seulement une zone centrale. En dehors de cette zone centrale, nous avons visualisé les lignes de courant en ajoutant des traceurs (iriodine) dans la suspension, ce qui a permis de vérifier que les lignes de courant sont identiques aux lignes de courant obtenues pour le milieu suspendant seul.

Ce phénomène d'exclusion des fibres n'est pas caractéristique du régime semi-dilué : il se produit aussi pour des fractions volumiques en fibres extrêmement faibles. Les lignes de courant obtenues pour une suspension très diluée sont présentées sur la figure 4.2. Sur cette photo, les zones d'exclusion en sortie de l'orifice sont très visibles : tout se passe comme si les



Figure 4.1

Photographie à temps de pose long d'une suspension de fibres en *régime semi-dilué* montrant la structuration de l'écoulement de part et d'autre de l'orifice (fraction volumique $\Phi=0.15\%$, longueur des fibres $L=2\text{mm}$, diamètre $d=13.7\mu\text{m}$). Le débit est de $4,7 \cdot 10^{-2} \text{cm}^3/\text{s}$, le temps de pose est de 2 minutes, l'ouverture de l'appareil photographique est 16.

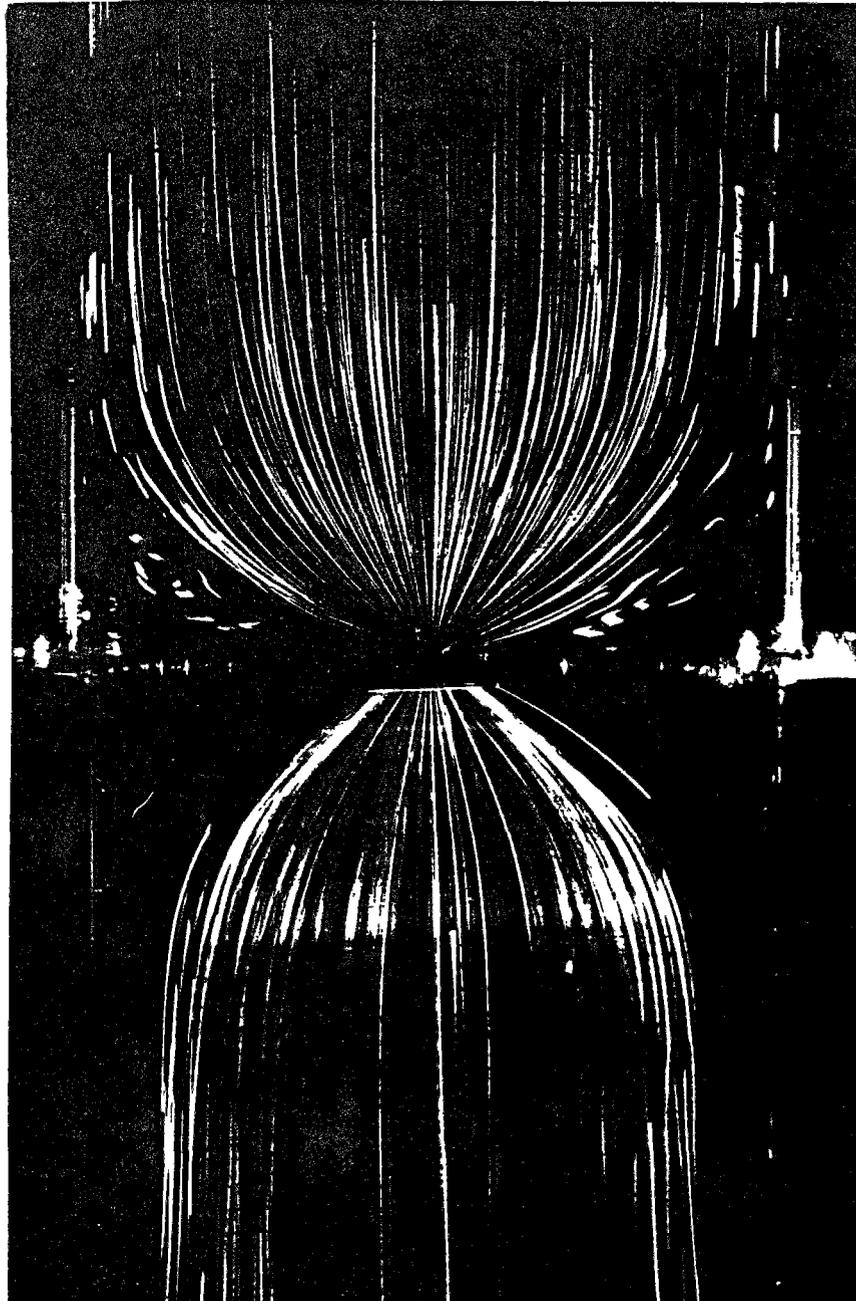


Figure 4.2

Photographie à temps de pose long d'une suspension de fibres en *régime dilué* montrant la zone d'exclusion des fibres en sortie de l'orifice (fraction volumique $\Phi=0.002\%$, longueur des fibres $L=0.5\text{mm}$, diamètre $d=13.7\mu\text{m}$).

lignes de courant situées au-delà d'une ligne de courant limite ne peuvent être empruntées par les fibres.

c) Orientation des fibres dans l'écoulement

Contrairement au régime dilué, nous n'avons pas effectué d'étude systématique de la dynamique d'orientation des fibres en régime semi-dilué, et nous avons privilégié l'étude globale de la structuration de l'écoulement. Cependant, l'observation de la suspension à l'échelle locale en utilisant un grandissement important permet d'affirmer que l'orientation globale des fibres dans la zone convergente en amont de l'orifice est parallèle aux lignes de courant. En aval de l'orifice, les fibres s'orientent perpendiculairement aux lignes de courant. Ces deux observations, qui rejoignent l'étude effectuée au chapitre 3, sont importantes pour l'interprétation du comportement de la suspension en régime semi-dilué.

1.2.2 Paramètres géométriques utilisés pour décrire la structuration de l'écoulement

Pour étudier quantitativement la structuration de la suspension, nous avons choisi plusieurs grandeurs qui peuvent être mesurées facilement à partir des lignes de courant. Sur la figure 4.3, nous avons représenté schématiquement la structuration de l'écoulement et les différents paramètres géométriques que nous avons utilisés pour la décrire.

a) Structuration de l'écoulement en amont de l'orifice

Un premier paramètre caractérisant la structure de la suspension en amont de l'orifice est le demi-angle d'ouverture du cône central. Cet angle est noté χ sur la figure 4.3, l'angle complémentaire ϕ étant repéré à partir de la plaque horizontale. Sur les photos de la suspension, la mesure des angles χ ou ϕ est délicate car il est difficile de repérer avec précision la ligne de courant séparant le bord du cône de la recirculation.

Par contre, sur les parois de la cellule, les lignes de courant qui appartiennent à l'écoulement central conique et celles qui appartiennent aux recirculations se séparent nettement au niveau d'une zone appauvrie en fibres, qui apparaît en sombre sur la photographie de la figure 4.1. La ligne de courant qui suit les parois de la cellule s'en détache à ce niveau pour s'incurver et suivre l'extérieur du cône, en un point que nous appellerons "point de détachement". Ce point peut être repéré facilement sur les photographies. Il est situé à une distance de la plaque horizontale que nous notons L_V sur la figure 4.3. En identifiant l'intersection du bord du cône central avec la paroi et le point de détachement, nous obtenons une estimation de l'angle ϕ , avec $\tan\phi=L_V/R$.

Nous appellerons L_R la hauteur de la ligne de courant supérieure dans la recirculation, repérée à partir de la plaque horizontale. Nous verrons plus loin que les hauteurs L_V et L_R sont en général distinctes.

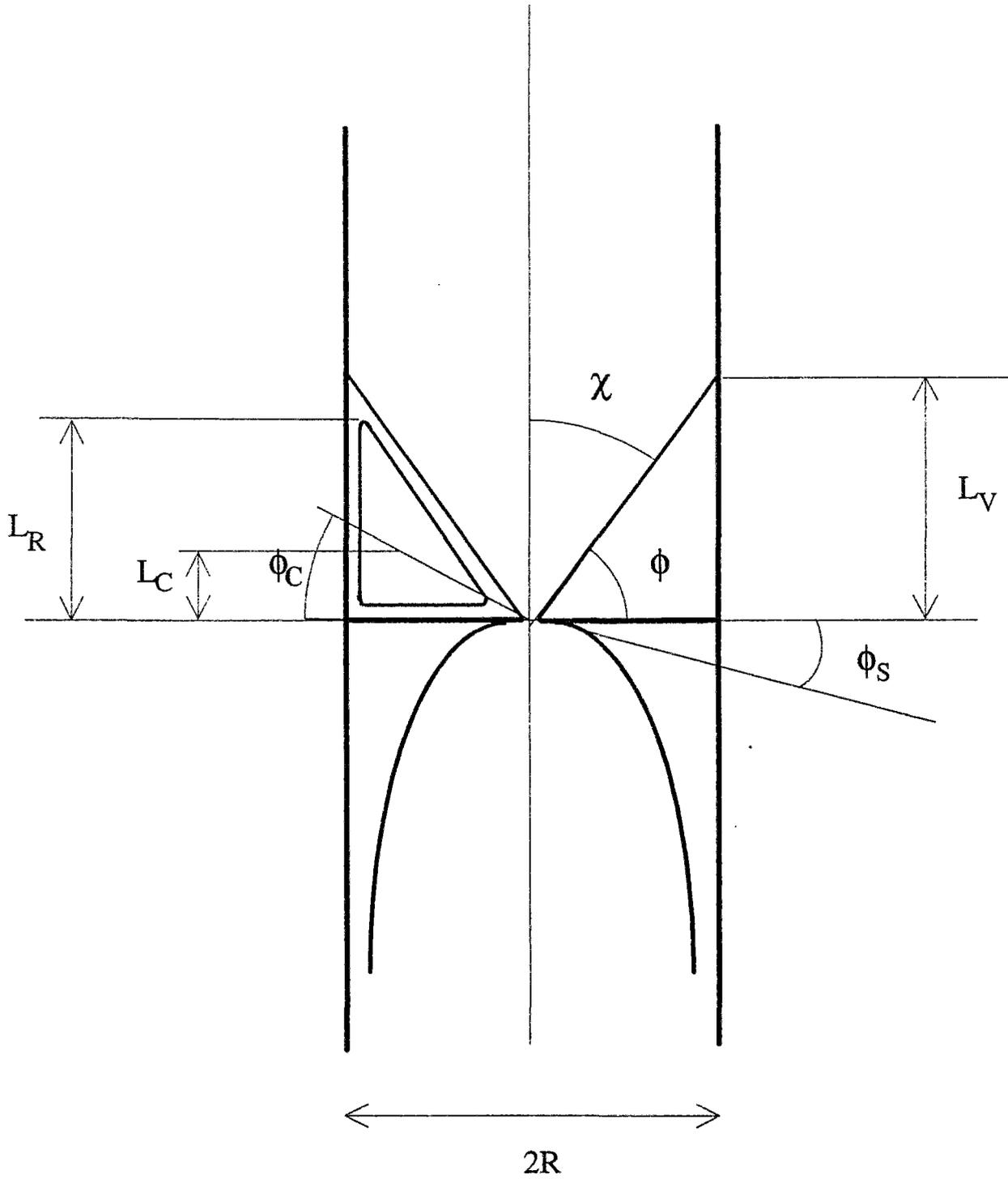


Figure 4.3

Schéma décrivant la structuration de l'écoulement d'une suspension de fibres en régime semi-dilué, et les paramètres géométriques utilisés pour sa description.

Enfin, nous appellerons L_C la hauteur qui sépare le centre de la recirculation de la plaque horizontale, et ϕ_C l'angle correspondant repéré à partir de la plaque horizontale.

b) Structuration en sortie de l'orifice

La zone d'exclusion des fibres en sortie de l'orifice est caractérisée par la mesure de l'angle ϕ_S (figure 4.3). La mesure de cet angle est peu précise ; elle s'obtient en traçant la tangente à la ligne de courant limitant la zone d'exclusion.

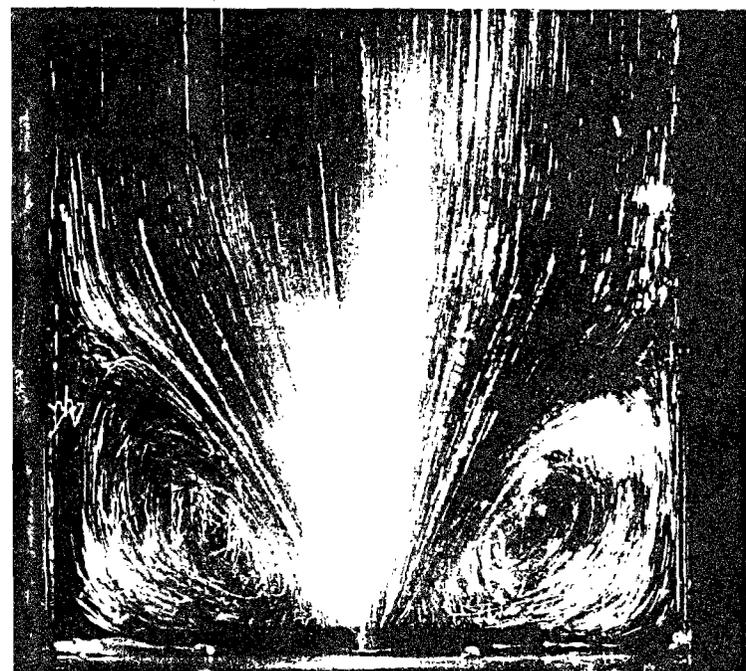
I.2.3 Etude quantitative de la structuration de l'écoulement en amont de l'orifice

De tous les paramètres présentés ci-dessus, la hauteur L_V est la plus commode à relever sur les photos. Nous avons utilisé de préférence la quantité sans dimension $L_V/2R$, où R désigne le rayon de la cellule. La hauteur L_V est mesurée avec un double décimètre sur les négatifs projetés à l'aide d'un agrandisseur. Le grandissement est tel que le diamètre $2R$ de la cellule mesuré sur les projections est de 200mm. Nous estimons à ± 5 mm l'erreur sur la détermination de L_V , qui résulte essentiellement de la difficulté de repérage du point de détachement. L'incertitude absolue sur la mesure de $L_V/2R$ est donc de ± 0.025 sur les photos de bonne qualité. Remarquons que les photos qui permettent la meilleure détermination du point de détachement sont obtenues avec les fibres transparentes, pour lesquelles le contraste entre les lignes de courant et le fond est le meilleur (peu de lumière diffusée), et pour les concentrations en fibres les plus faibles. Nous avons été amenés par ailleurs à utiliser des fibres non transparentes, pour lesquelles les photos obtenues permettent une détermination de $L_V/2R$ avec une incertitude absolue plus élevée, que nous estimons à ± 0.05 .

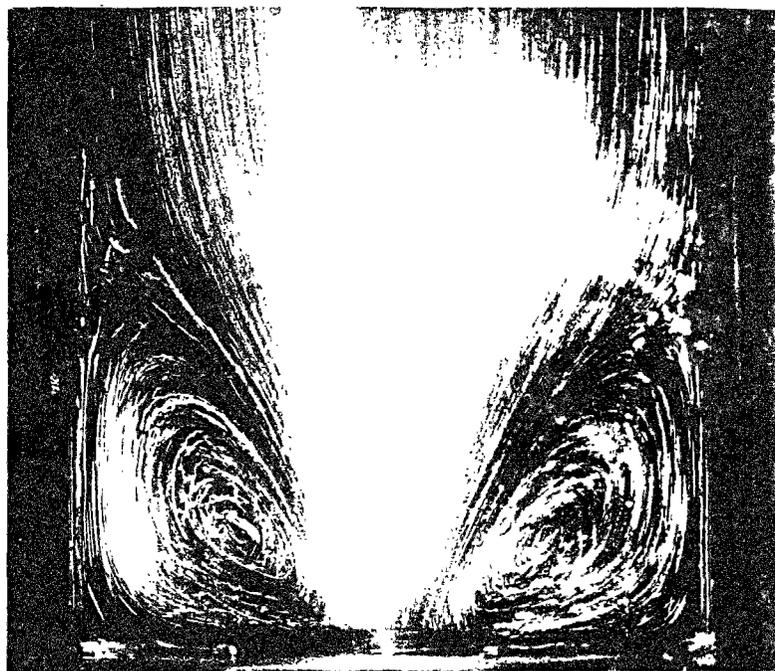
a) Etude de l'évolution de la structuration au cours du temps

Nous avons dans un premier temps étudié l'évolution de la structuration de la suspension au cours du temps. Pour cela, partant d'une suspension désordonnée au repos, nous appliquons un échelon de contrainte et nous maintenons le débit de l'écoulement constant pendant des temps très longs, de l'ordre de 90 minutes.

La série de photographies des figures 4.4 et 4.5 représente l'évolution de la suspension au cours du temps, pour deux débits différents : un débit faible (figure 4.4) et un débit plus élevé (figure 4.5). L'observation de ces photos montre qu'au cours du temps, les zones de recirculation deviennent de plus en plus sombres et les fibres peuvent être de mieux en mieux distinguées individuellement. L'évolution de l'aspect des zones de recirculation montre sans ambiguïté qu'elles s'appauvrissent progressivement en fibres ; ce phénomène est d'autant plus rapide que le débit est grand. Le "vidage" des zones de recirculation s'accompagne d'une diminution de la hauteur apparente des tourbillons L_R , tandis que la position du point de détachement L_V ne varie pratiquement pas, à la précision des relevés près. Nos moyens



1 mn



17 mn



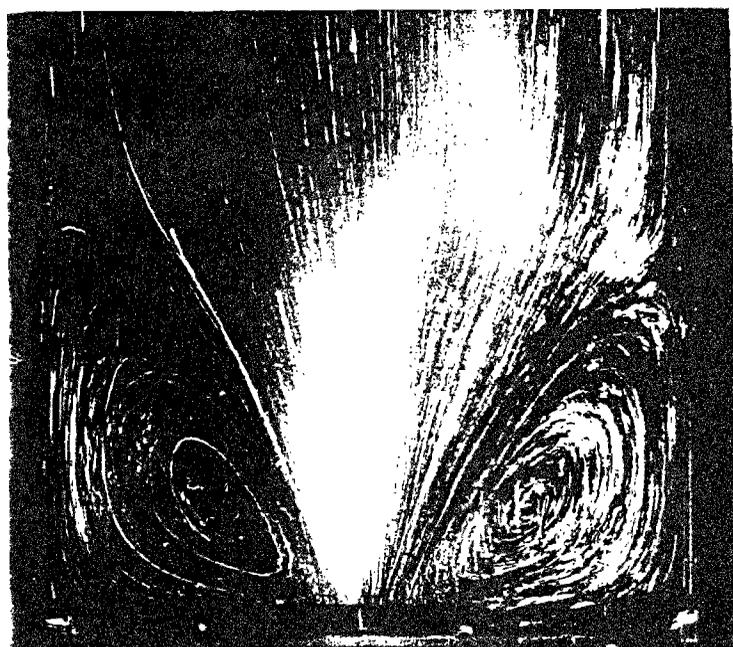
40 mn



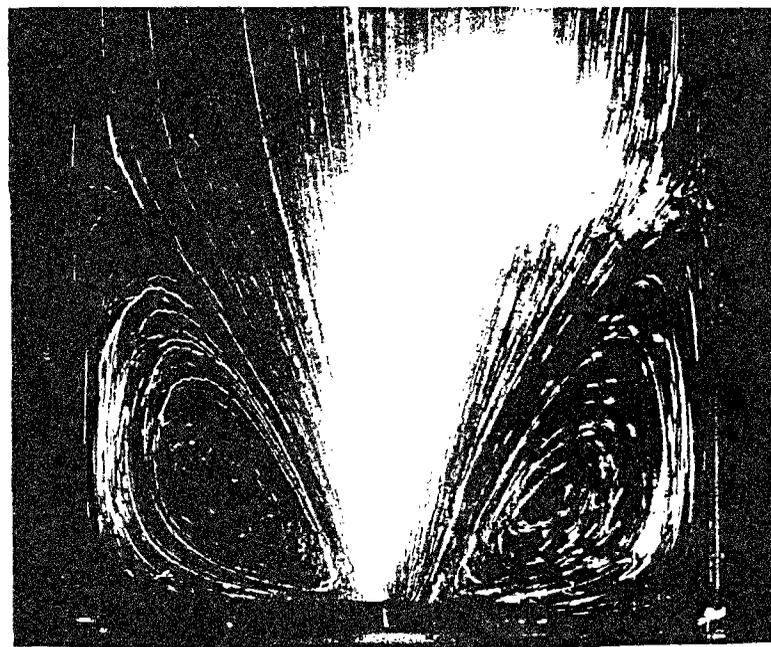
80 mn

Figure 4.4

Série de photographies à temps de pose long montrant l'évolution au cours du temps des zones de recirculation en amont de l'orifice, le débit de l'écoulement étant maintenu stationnaire (débit faible : $Q=4,7 \cdot 10^{-2} \text{cm}^3/\text{s}$). On constate que les zones de recirculation deviennent de plus en plus sombres, ce qui s'explique par un appauvrissement en fibres au cours du temps (longueur des fibres $L=2\text{mm}$, rapport de forme $r=144$, fraction volumique $\Phi=0.15\%$).



1 mn



10 mn



13 mn



40 mn

Figure 4.5

Série de photographies à temps de pose long montrant le vidage des tourbillons en amont de l'orifice au cours du temps pour un débit plus important que sur la figure 4.4 ($Q=16 \cdot 10^{-2} \text{cm}^3/\text{s}$). Le phénomène de vidage est plus rapide.

d'investigation ne permettent pas de déterminer quantitativement la concentration en fibres dans les zones de recirculation. Nous n'avons donc pas effectué d'étude systématique concernant par exemple la cinétique du vidage de ces zones. Partant d'observations locales à fort grandissement, nous pensons qu'un mécanisme possible permettant d'expliquer cet effet est le suivant (figure 4.6). A cause de sa longueur, une fibre située sur le bord des recirculations est amenée à emprunter plusieurs lignes de courant pour tourner dans les zones de forte courbure, en particulier sur les bords de l'orifice. Quittant alors sa ligne de courant initiale où elle est parfaitement alignée, elle est entraînée dans l'orifice. Ce mécanisme peut reposer sur un effet purement stérique, ou sur un effet hydrodynamique. Pour conclure, une étude systématique devrait être effectuée en fonction de la longueur des fibres notamment, et en relation avec d'autres problèmes de transport ou de migration [68].

Sur la figure 4.7, nous avons représenté pour chacune des deux expériences réalisées à deux débits différents l'évolution du débit Q , de la différence de pression ΔP , et de la hauteur de point de détachement normalisée $L_V/2R$, en fonction du temps. Il faut noter que ces quantités ne varient pas sur les mêmes échelles. Nous constatons que, le débit étant maintenu constant au cours du temps, la différence de pression mesurée ΔP reste également constante à la précision des mesures, et ceci quel que soit le débit de l'écoulement. Le vidage des zones de recirculation n'a donc aucune influence sur la différence de pression mesurée. En ce qui concerne la quantité $L_V/2R$, mesurée sur des photos prises à des instants successifs, nous n'avons pas décelé de variation à la précision des relevés, à l'exception d'une légère augmentation pendant les premières minutes qui suivent la mise en route de l'écoulement. Cette augmentation est à la limite de la précision des relevés ; en effet, comme le voisinage du point de détachement s'appauvrit en fibres au cours du temps, le repérage de celui-ci se fait sans aucune ambiguïté aux temps longs alors qu'il est plus imprécis aux temps courts. Dans la suite, nous retiendrons comme une caractéristique de la suspension à un débit donné la valeur de $L_V/2R$ relevée aux temps longs, typiquement supérieurs à la dizaine de minutes.

b) Influence du débit

Sur la figure 4.8, nous avons représenté l'évolution de $L_V/2R$ en fonction du débit de l'écoulement, pour plusieurs fractions volumiques en fibres, et deux types de fibre. La valeur de $L_V/2R$ qui est portée pour chaque débit correspond à la valeur stationnaire aux temps longs. Nous constatons que pour une suspension donnée, la valeur du débit de l'écoulement n'a généralement pas d'influence sur la valeur de $L_V/2R$, à la précision des relevés. La légère augmentation de $L_V/2R$ avec le débit qui est observée pour les fractions volumiques en fibres les plus grandes (0.3% et 0.4%) est à la limite de la précision des relevés à ces fractions volumiques. De plus, la valeur de $L_V/2R$ est la même que l'on décrive la courbe dans le sens des débits croissants ou des débits décroissants. En conclusion, chaque suspension peut être caractérisée par la hauteur du point de détachement L_V , qui est stationnaire et indépendante du

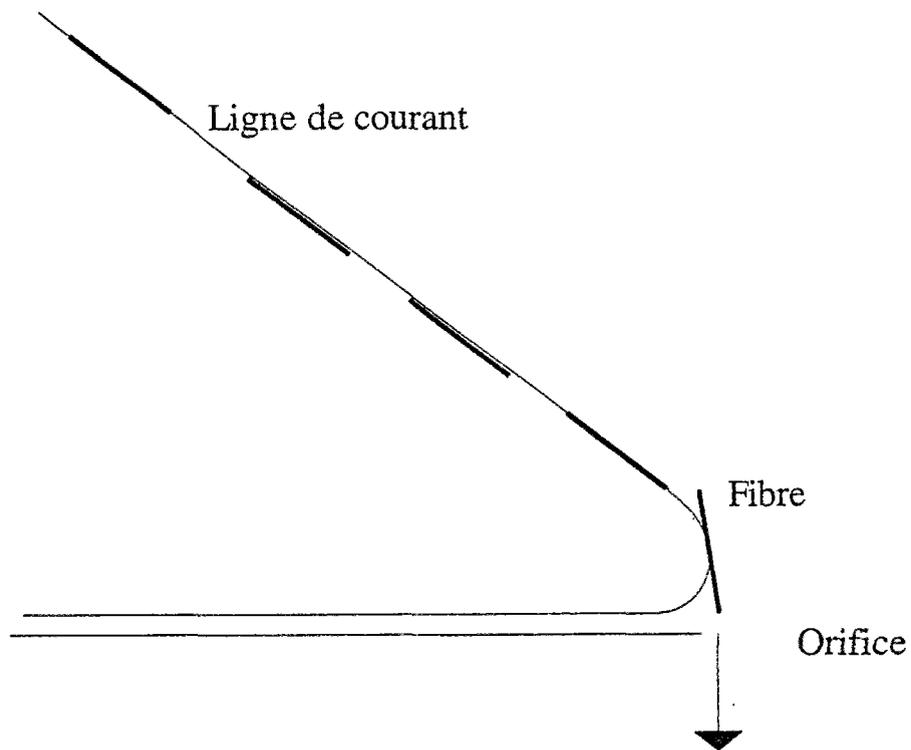


Figure 4.6

Schéma reproduisant les observations à fort grossissement et montrant le mécanisme par lequel une fibre peut quitter la zone de recirculation et être entraînée dans l'orifice.

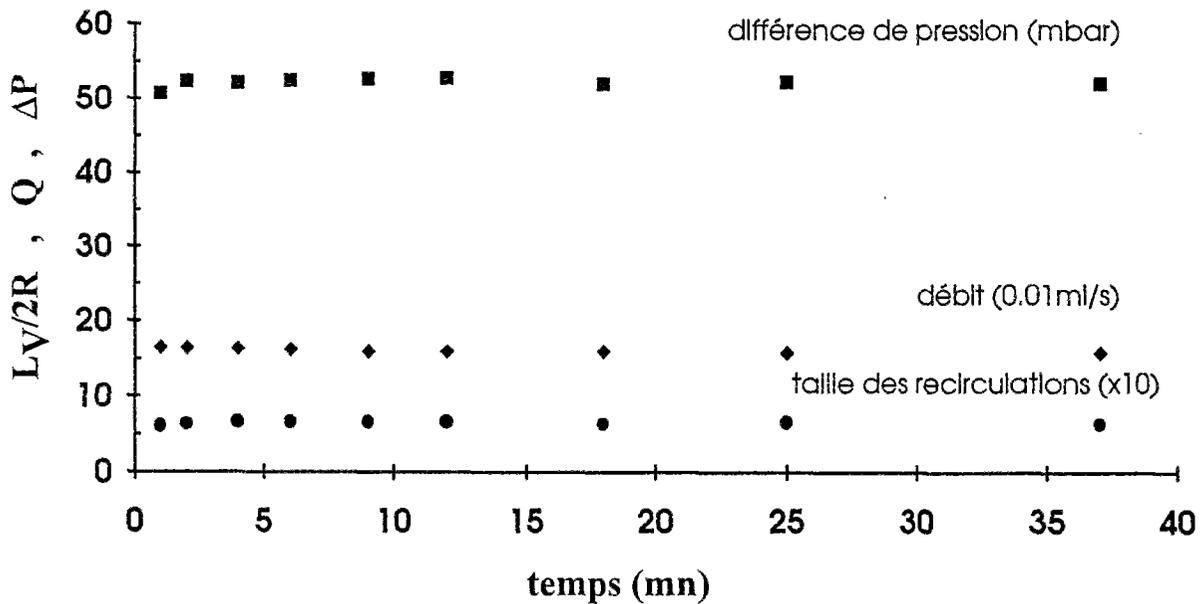
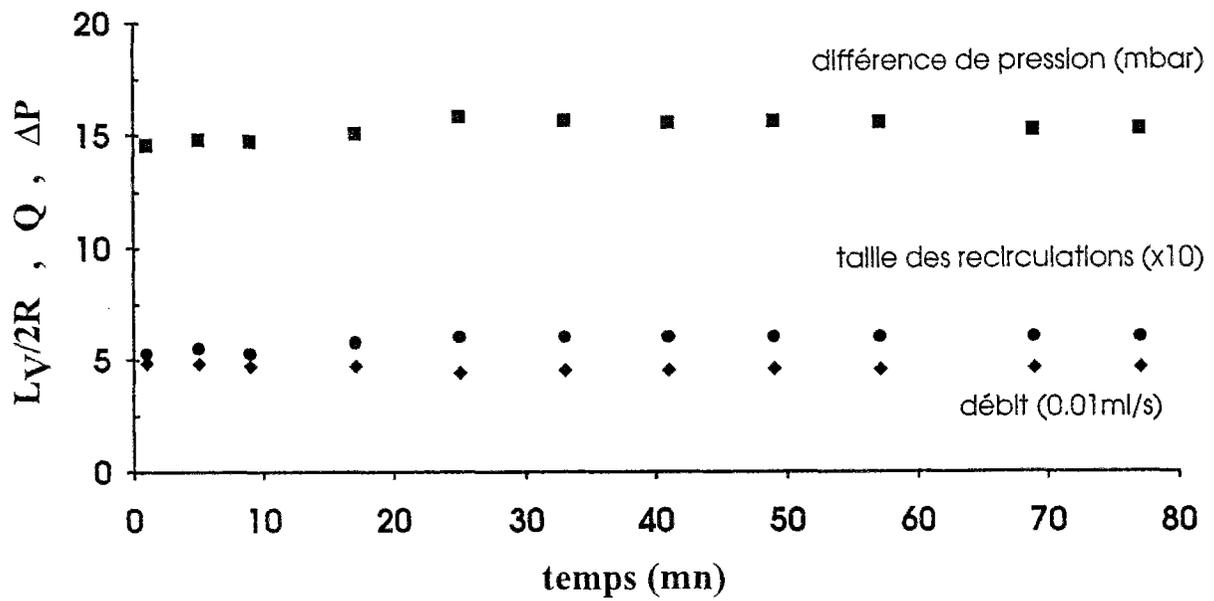


Figure 4.7

Evolution de la différence de pression mesurée ΔP et de la position du point de détachement normalisée $L_V/2R$ lorsque le débit de l'écoulement est maintenu stationnaire, pour les deux valeurs du débit correspondant aux figures 4.4 et 4.5 : en haut $Q=4,7 \cdot 10^{-2} \text{cm}^3/\text{s}$, en bas $Q=16 \cdot 10^{-2} \text{cm}^3/\text{s}$.

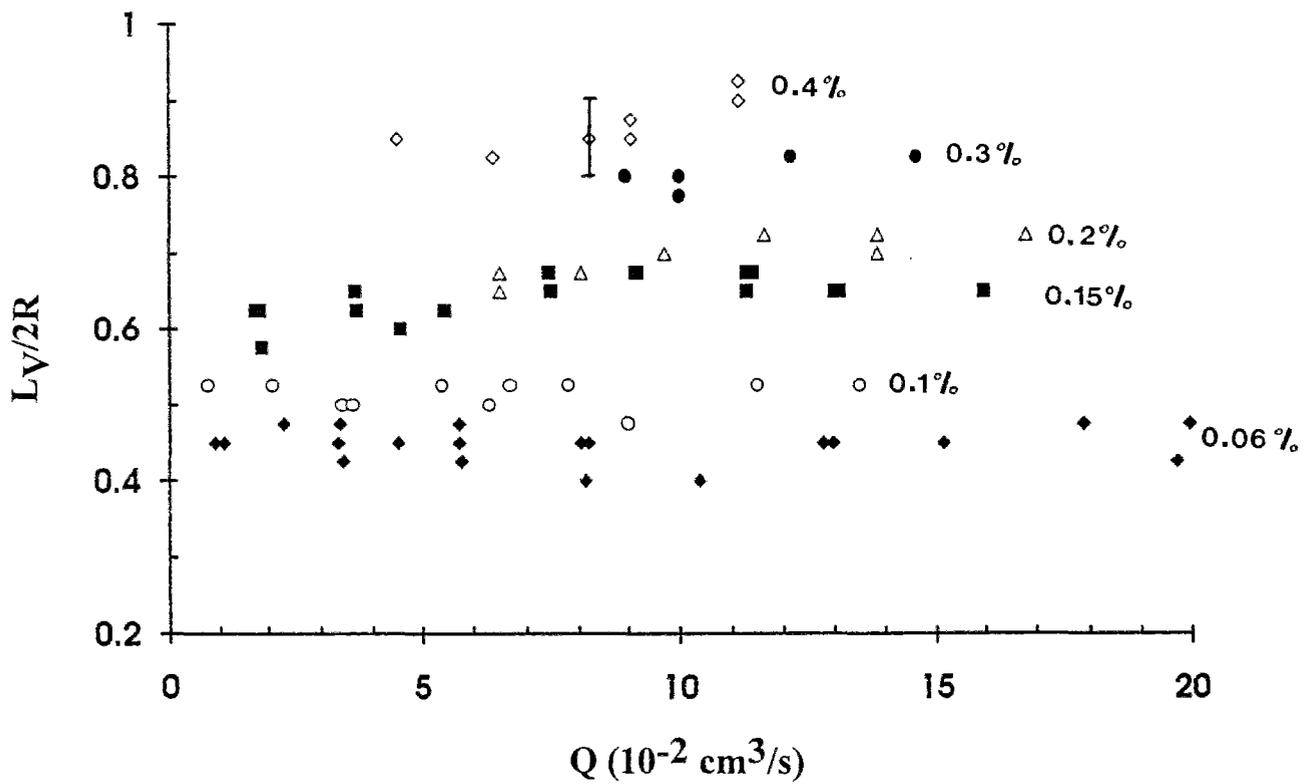
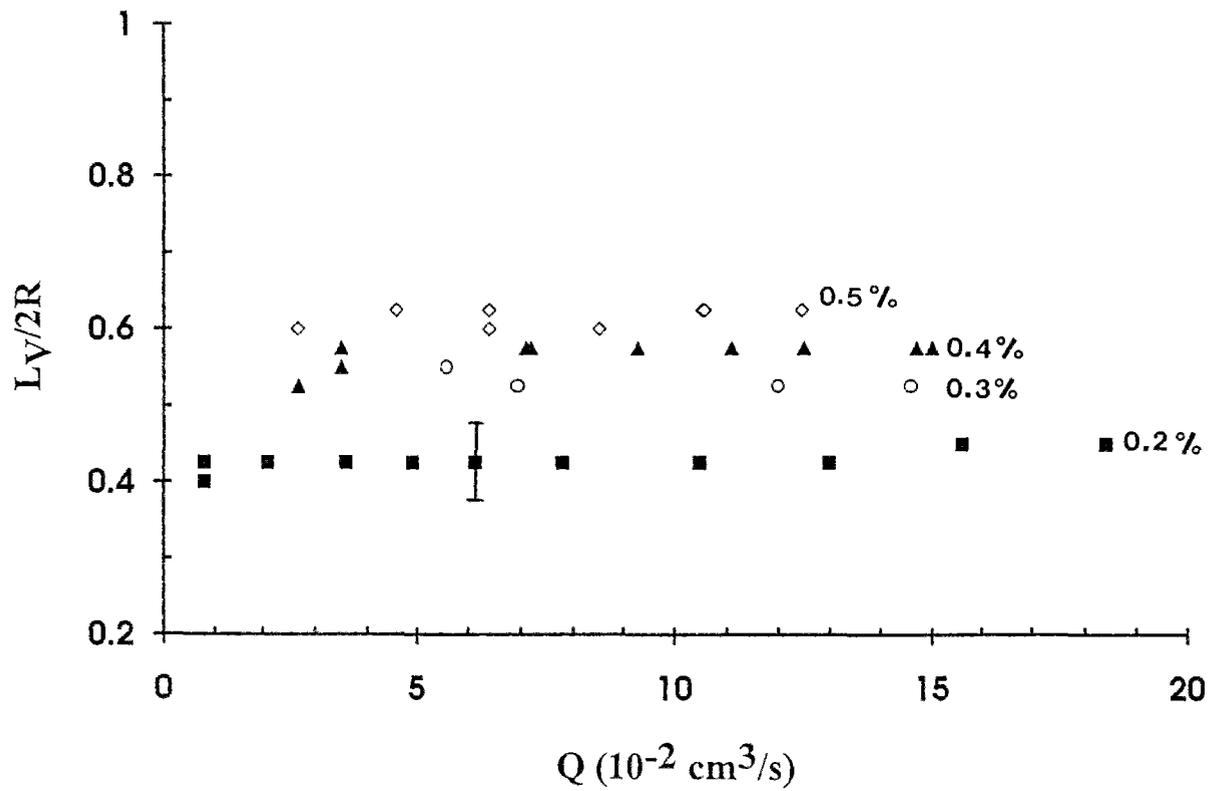


Figure 4.8

Evolution de la position du point de détachement normalisée $L_V/2R$, en fonction du débit Q de l'écoulement, pour différentes valeurs de la fraction volumique en fibres. La figure du haut concerne des fibres de longueur $L=1\text{mm}$ et de rapport de forme $r=72$, celle du bas des fibres de longueur $L=2\text{mm}$ et de rapport de forme $r=144$.

débit de l'écoulement. Cette valeur donne accès à l'angle du cône de la zone convergente, et nous sera utile pour l'interprétation théorique de la structuration de l'écoulement dans les paragraphes suivants.

c) Influence du solvant

Nous n'avons pas observé de variation de la hauteur du point de détachement ou de la taille des recirculations en fonction de la viscosité du solvant dans les gammes de variations utilisées, et en particulier en fonction de la variation de la viscosité avec la température.

d) Influence de la fraction volumique et du rapport de forme

La série de photographies de la figure 4.9, qui concerne quatre suspensions préparées à partir du même type de fibre mais à différentes fractions volumiques, illustre l'augmentation significative de la taille des tourbillons et de la hauteur du point de détachement avec la fraction volumique. Sur la figure 4.10, nous avons porté par ailleurs en fonction de la fraction volumique les valeurs de $L_V/2R$ mesurées pour l'ensemble des suspensions étudiées. Nous constatons sur cette courbe qu'à fraction volumique constante, la taille des recirculations augmente avec le rapport de forme, même pour des fibres de longueurs égales.

1.2.4 Etude des autres paramètres géométriques

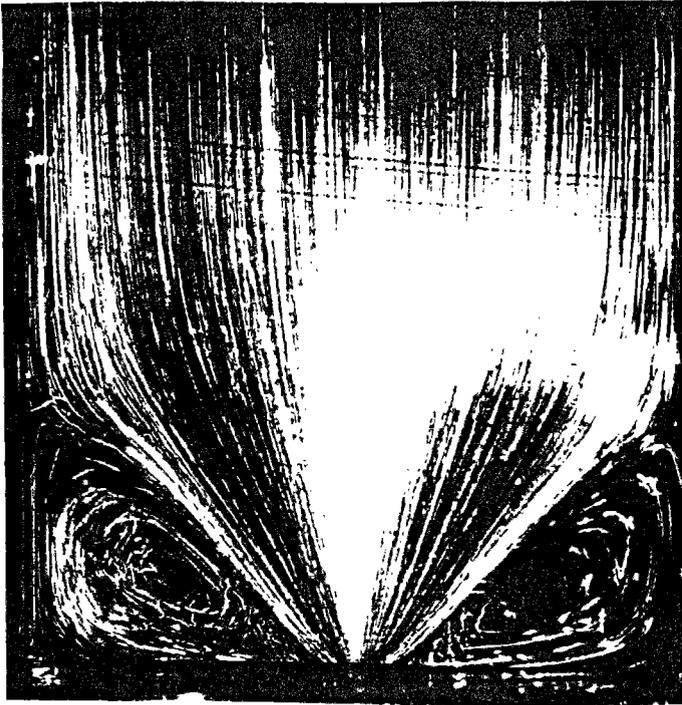
a) Position du centre des tourbillons

Des mesures effectuées sur des photographies de différentes suspensions ont montré que la hauteur L_C ainsi que la position latérale du centre du tourbillon subissent des variations très faibles en fonction du débit, et que la valeur de l'angle ϕ_C associé (figure 4.3) reste pratiquement constante quel que soit le débit de l'écoulement. En ce qui concerne la variation de l'angle ϕ_C en fonction de la fraction volumique, nous pouvons observer sur la série de photographies de la figure 4.9 que cet angle varie peu avec la fraction volumique, comparativement à la variation de l'angle ϕ délimitant les zones de recirculation. Nous avons résumé à titre d'exemple dans le tableau 4.2 les résultats obtenus pour des suspensions réalisées avec un même type de fibre à différentes fractions volumiques.

Φ (%)	0.06	0.1	0.2	0.3	0.4
ϕ_c (°)	25	30	40	40	45

Tableau 4.2

Evolution de ϕ_C en fonction de la fraction volumique (longueur des fibres $L=2\text{mm}$, rapport de forme $r=144$).



$\Phi=0.06\%$



$\Phi=0.1\%$



$\Phi=0.2\%$



$\Phi=0.4\%$

Figure 4.9

Série de photographies à temps de pose long montrant les recirculations en amont de l'orifice et leur évolution en fonction de la fraction volumique Φ (longueur des fibres $L=2\text{mm}$, rapport de forme $r=144$).

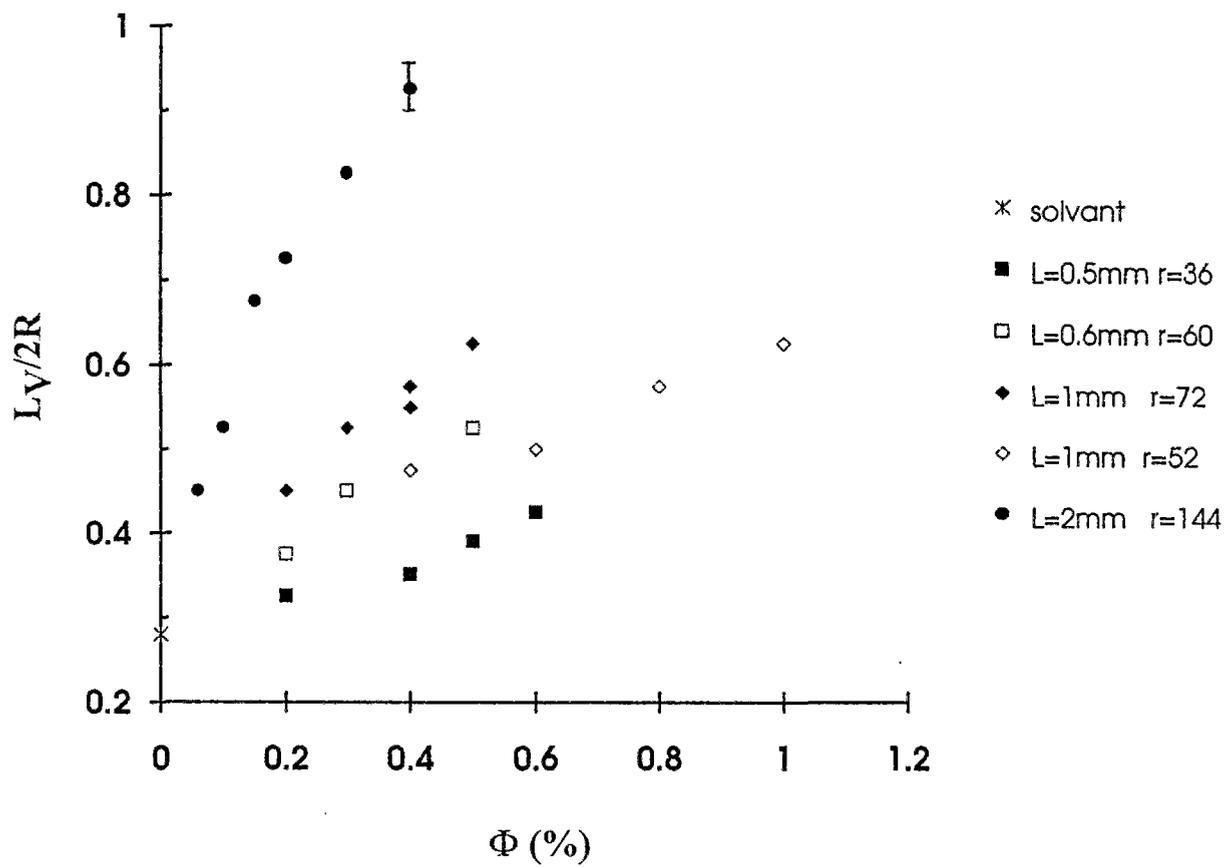


Figure 4.10

Courbe résumant l'ensemble des résultats obtenus en fonction de la fraction volumique Φ .

b) Zone d'exclusion en sortie

L'angle ϕ_S défini sur la figure 4.3 a été mesuré pour plusieurs suspensions. Les mesures ont montré que cet angle diminue légèrement avec le débit. De plus, nous avons constaté que plus la longueur des fibres est grande, plus l'angle ϕ_S est grand, c'est-à-dire plus la zone d'exclusion est grande. Cette tendance est illustrée dans le tableau 4.3 où nous avons indiqué pour chaque longueur de fibre l'intervalle de variation de ϕ_S , pour toutes les concentrations en fibres et pour tous les débits.

type de fibres	r=144 L=2mm	r=72 L=1mm	r=52 L=1mm	r=36 L=0.5mm	r=60 L=0.6mm
angle ϕ_S (°)	41-53	30-35	30-32	25-32	23-25

Tableau 4.3

Valeurs de l'angle ϕ_S caractérisant la zone d'exclusion des fibres en sortie de l'orifice ; les intervalles de variation représentent l'ensemble des valeurs relevées (pour plusieurs fractions volumiques et plusieurs débits).

La corrélation observée entre la longueur des fibres et l'angle ϕ_S nous conduit à interpréter la zone d'exclusion comme le résultat d'un effet stérique en sortie de l'orifice : au cours de la rotation qu'entreprend la fibre en sortie de l'orifice pour se placer à 90° des lignes de courants, les bords de l'orifice gênent celle-ci et empêchent les fibres de venir se placer sur les lignes de courant proches de la plaque horizontale. La rotation des fibres est d'autant plus difficile que celles-ci sont longues. Cet argument permet d'expliquer assez simplement ce qui est observé en régime dilué (photo de la figure 4.2) ; en régime semi-dilué, nous ne savons pas dans quel mesure ce mécanisme est renforcé ou atténué par les interactions entre les fibres, ou par les effets éventuels liés à la forme particulière de l'écoulement amont, et notamment à la structuration de l'écoulement.

I.3 Relation entre le débit de l'écoulement et la différence de pression associée à la traversée de l'orifice

Parallèlement à la visualisation, nous effectuons pour chaque suspension des mesures de différence de pression et de débit ; le protocole utilisé a été décrit au chapitre 2.

I.3.1 Existence d'une relation linéaire entre le débit et la différence de pression.

Pour toutes les suspensions, nous avons obtenu une relation *linéaire* entre la différence de pression mesurée par le capteur de pression et le débit de l'écoulement, ceci quels que soient le solvant utilisé, le type de fibre et la fraction volumique. La figure 4.11 représente les points expérimentaux obtenus pour deux suspensions différentes : dans chaque cas, on constate que les points se placent avec une très bonne précision sur une droite passant par l'origine des coordonnées, qui a été tracée par régression linéaire. De plus, cette droite est indépendante de la manière dont est appliqué l'échelon de contrainte pendant l'expérience, en particulier elle est décrite aussi bien dans le sens des débits croissants que dans le sens des débits décroissants.

I.3.2 Influence du solvant

Lorsque nous traçons les points expérimentaux concernant deux suspensions qui ne diffèrent que par la viscosité du solvant, les droites obtenues ont des pentes α différentes, que nous calculons par régression linéaire. En adoptant la même démarche qu'au chapitre 2, nous allons normaliser cette pente α par la pente α_0 que l'on obtiendrait pour l'écoulement à travers une plaque infinie, avec le même solvant à la même température d'expérience. Nous formons donc le rapport α/α_0 , qui est aussi égal au rapport $\Delta P/\Delta P_0$. Nous rappelons que l'erreur sur la quantité $\Delta P/\Delta P_0$ est de $\pm 7\%$ pour le mélange eau-glucose et de $\pm 3.5\%$ pour l'huile silicone. Un exemple de résultat est présenté dans le tableau 4.4 : à la précision des mesures, le rapport $\Delta P/\Delta P_0$ est le même pour les deux expériences. Il est donc caractéristique du nombre et de la géométrie des fibres en suspension. Les résultats du tableau 4.4 illustrent par ailleurs une très bonne reproductibilité de la valeur de $\Delta P/\Delta P_0$.

De plus, la valeur de $\Delta P/\Delta P_0$ obtenue pour la suspension est supérieure à celle obtenue pour le solvant seul, qui était de 1.17 ± 0.08 . Autrement dit, la présence des fibres dans la suspension se manifeste par une augmentation de l'ordre de 50% de la différence de pression associée à la traversée de l'orifice, qui s'ajoute à la contribution du solvant seul. Cette augmentation est significative et ne peut pas s'expliquer seulement par une augmentation de la viscosité de cisaillement due au fibres, qui est très faible (chapitre 1).

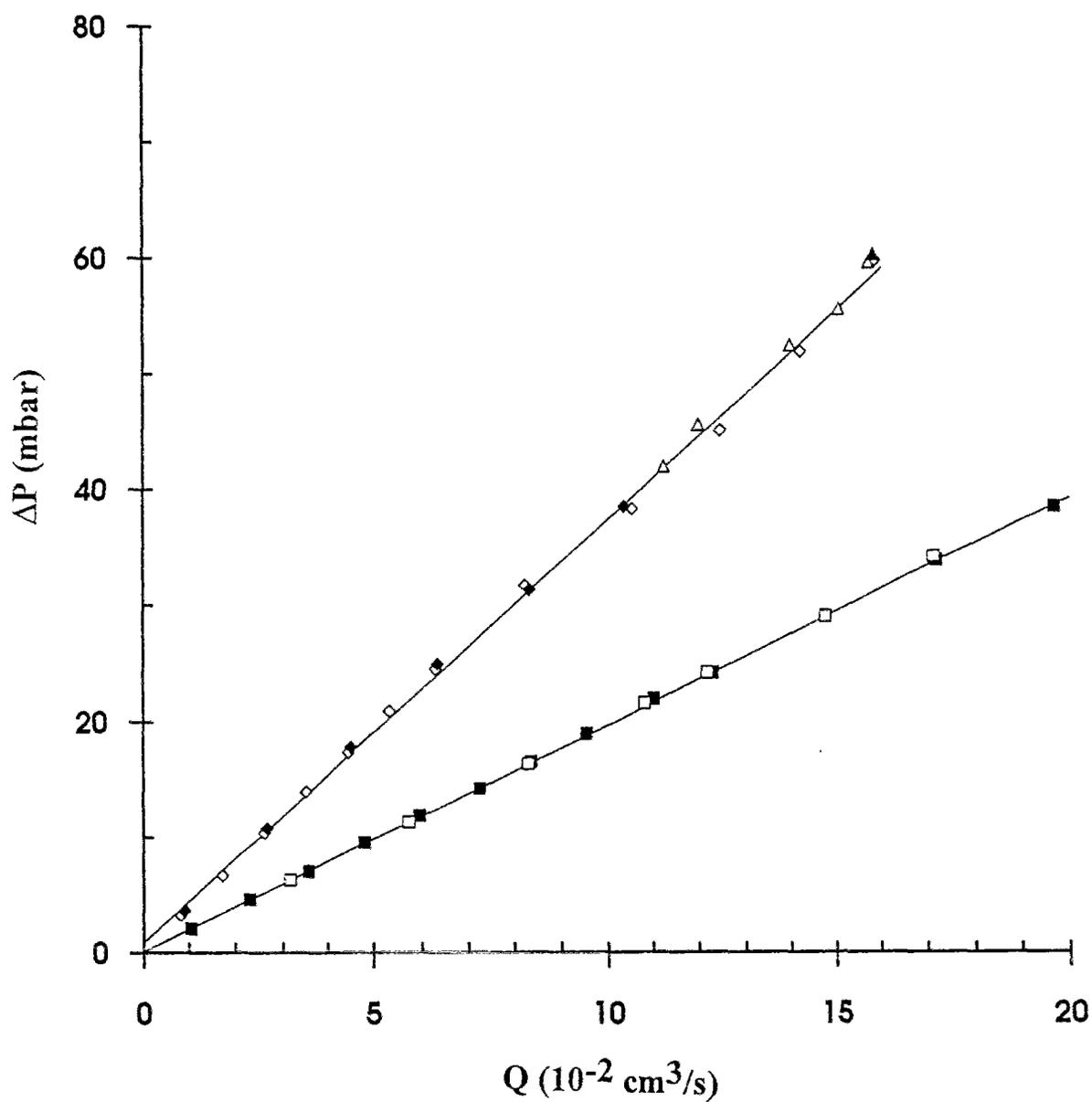


Figure 4.11

Linéarité de la différence de pression mesurée en fonction du débit pour deux suspensions de fibres : $\diamond \blacklozenge \triangle$ $\Phi=0.5\%$, $L=1\text{mm}$, $d=13.7\mu\text{m}$, solvant : mélange eau-glucose.

$\square \blacksquare$ $\Phi=0.6\%$, $L=0.5\text{mm}$, $d=13.7\mu\text{m}$, solvant : huile silicone.

Les symboles noirs correspondent à un débit croissant, les symboles blancs à un débit décroissant.

solvant	température (°C)	viscosité (cPo)	pente α (régression)	pente α_0	α/α_0 $\Delta P/\Delta P_0$
huile silicone	21.3	481	$1,95.10^4$	$1,15.10^4$	1.68 ± 0.06
mélange eau-glucose	20.7	651	$2,64.10^4$	$1,56.10^4$	1.68 ± 0.12

Tableau 4.4

Calcul de $\Delta P/\Delta P_0$ pour deux suspensions préparées avec deux solvant différents ($\Phi=0.6\%$, $L=0.5\text{mm}$, $r=36$).

I.3.3 Etude de la quantité $\Delta P/\Delta P_0$ pour différentes suspensions

Nous avons exploré des gammes de fraction volumique qui couvrent pour chaque type de fibres l'étendue du régime semi-dilué ($\Phi^* \ll \Phi \ll \Phi^{**}$). Cette série d'expériences permet dans un premier temps de dégager la dépendance de la quantité $\Delta P/\Delta P_0$ en fonction des paramètres caractéristiques de la suspension : fraction volumique, rapport de forme et longueur des fibres. Elle servira de base à une interprétation en terme de viscosité élongationnelle. Nous reviendrons sur ces résultats expérimentaux au paragraphe II.

a) Influence de la fraction volumique

Sur la figure 4.12, nous avons représenté les valeurs de ΔP en fonction du débit Q mesurées pour des suspensions réalisées avec le même type de fibre à des fractions volumiques différentes. Le solvant est le même pour toutes les suspensions (huile silicone). La pente des droites obtenue augmente avec la fraction volumique Φ . Nous avons aussi représenté les valeurs de $\Delta P/\Delta P_0$ déduites de ces droites, en fonction de Φ . Pour la fraction volumique $\Phi=0$, correspondant au solvant seul, la valeur de $\Delta P/\Delta P_0$ est de 1.17, conformément aux résultats du chapitre 2.

b) Influence du rapport de forme

Pour étudier l'influence du rapport de forme, nous pouvons faire varier la longueur des fibres à diamètre constant ou au contraire utiliser des fibres de même longueur ayant des diamètres différents (figure 4.13). Dans les deux cas, nous constatons que $\Delta P/\Delta P_0$ augmente avec le rapport de forme. A fraction volumique constante, la valeur de $\Delta P/\Delta P_0$ évolue à peu près linéairement avec le rapport de forme. Les valeurs de $\Delta P/\Delta P_0$ obtenues pour toutes les suspensions utilisées sont représentées sur la figure 4.14 en fonction de la fraction volumique .

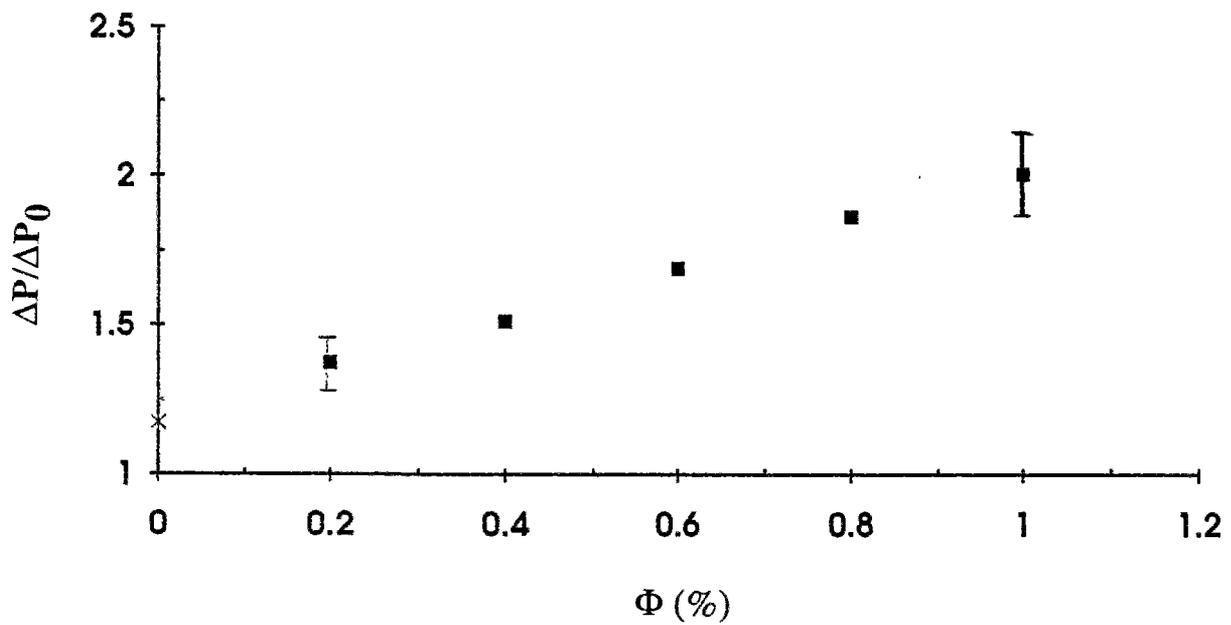
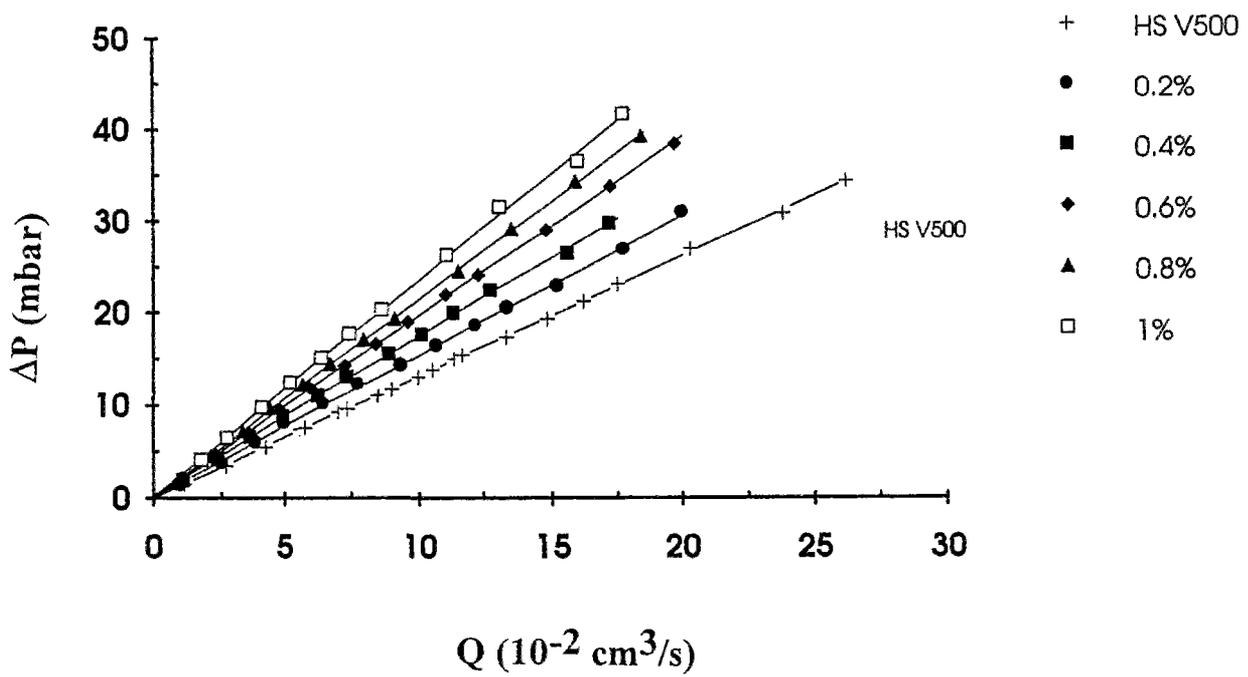


Figure 4.12

Influence de la fraction volumique en fibres sur la relation entre la différence de pression et le débit : en haut, courbes ΔP en fonction de Q , en bas différence de pression normalisée $\Delta P/\Delta P_0$ en fonction de la fraction volumique Φ . Les fibres utilisées pour cette série d'expériences sont les mêmes ($L=0.5\text{mm}$, $r=36$).

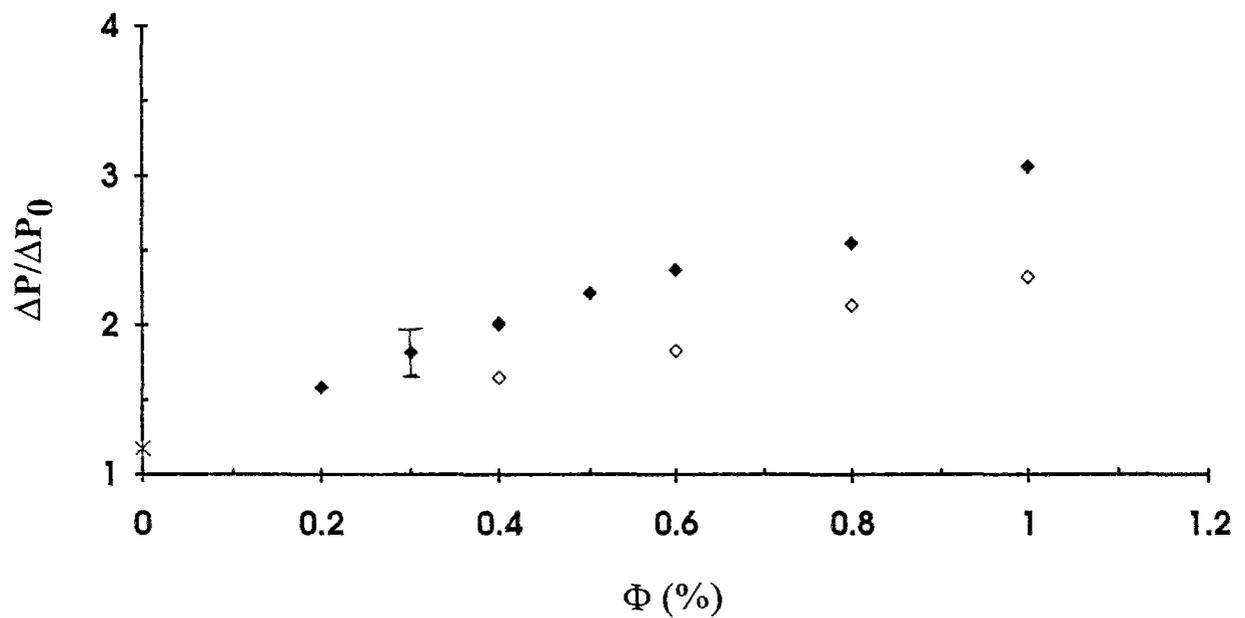
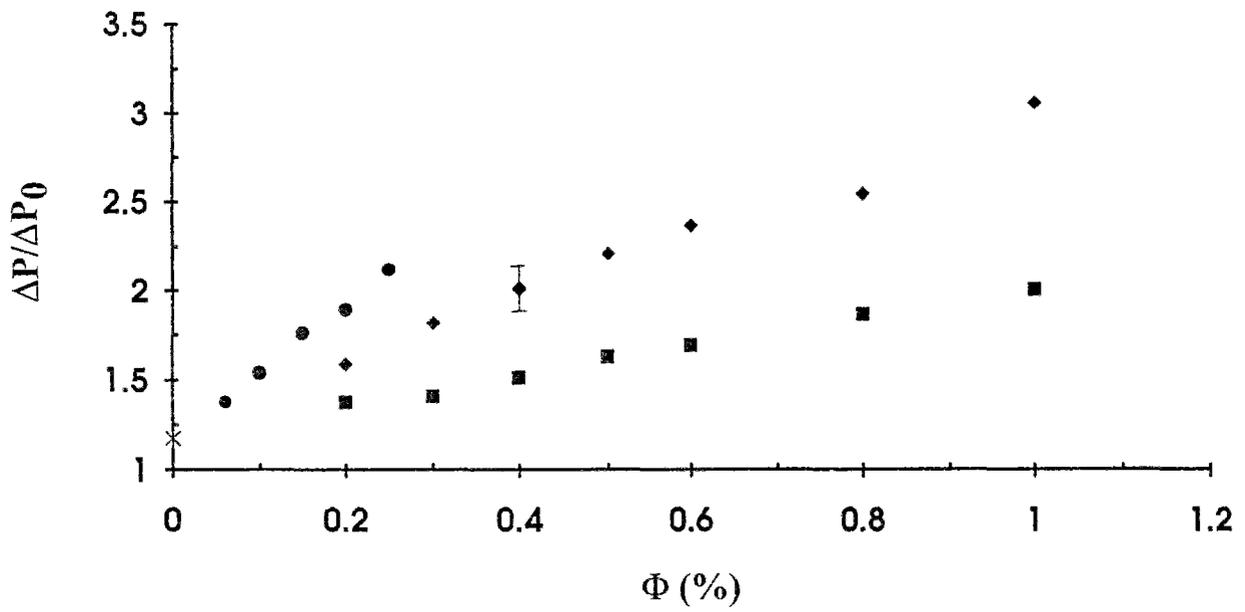


Figure 4.13

Influence du rapport de forme sur la valeur de la différence de pression normalisée $\Delta P/\Delta P_0$.

en haut : même diamètre $d=13.7\mu\text{m}$, ● $r=144$, ◆ $r=72$, ■ $r=36$.

en bas : même longueur $L=1\text{mm}$, ◇ $r=52$, ◆ $r=72$.

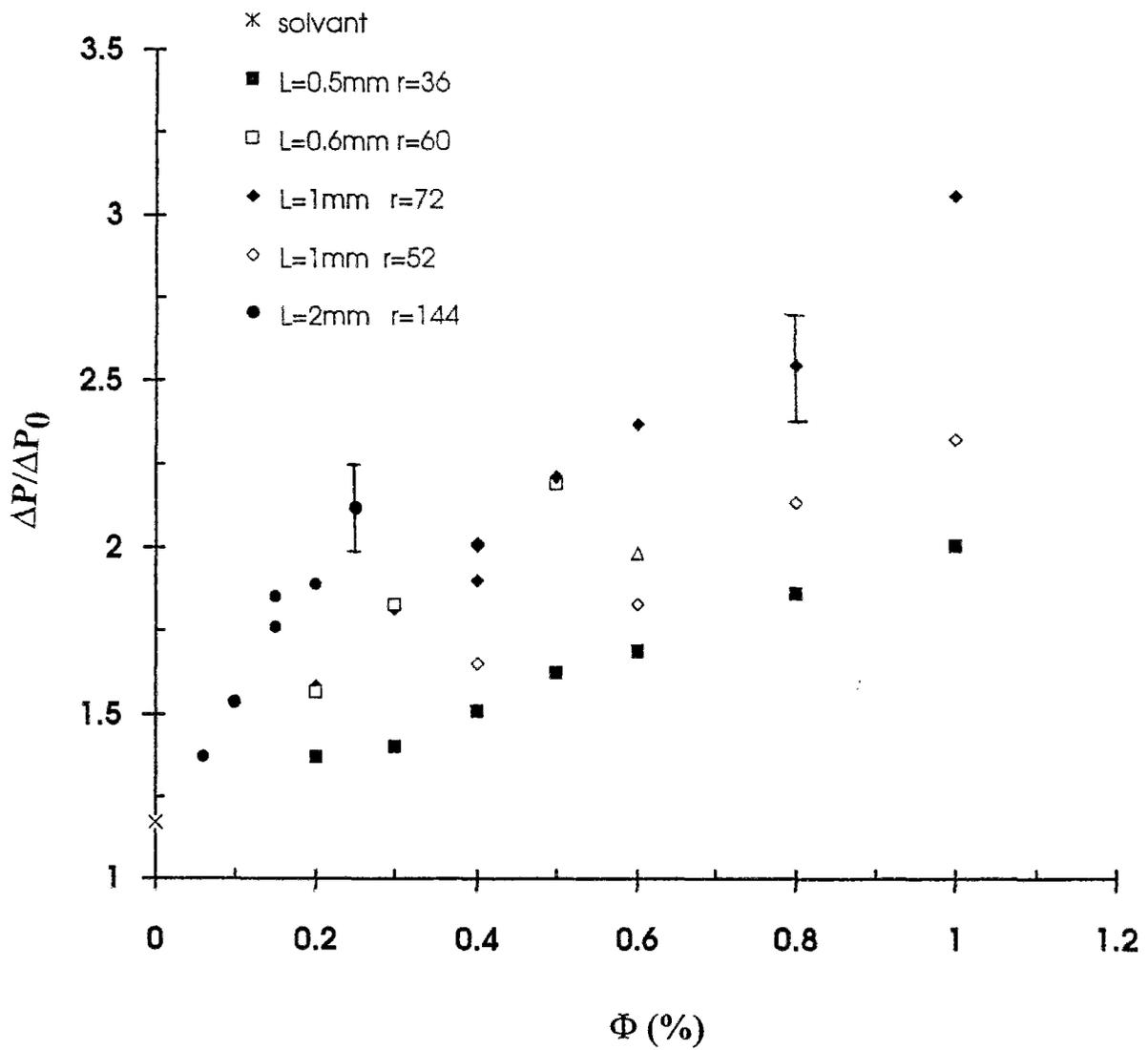


Figure 4.14

Courbe présentant l'ensemble des résultats obtenus pour la différence de pression normalisée $\Delta P / \Delta P_0$, en fonction de la fraction volumique Φ , pour les différents types de fibres.

II. ETUDE THEORIQUE

L'objectif de cette partie est d'interpréter à l'aide de différents modèles d'écoulement les observations expérimentales qui viennent d'être décrites. Ceci comporte deux aspects : d'une part comprendre l'origine de la structuration de l'écoulement et d'autre part relier la différence de pression mesurée aux grandeurs physiques pertinentes.

Dans la littérature, deux approches ont été utilisées jusqu'ici pour rendre compte de l'existence de zones de recirculations dans l'écoulement d'une suspension de fibres semi-diluée à travers une contraction : une approche entièrement numérique [48,69], et une approche semi-analytique [69,70]. Dans les deux cas, le modèle d'écoulement repose sur la loi de comportement établie pour les particules allongées (chapitre 1). L'équation de conservation de la quantité de mouvement est ensuite résolue soit par une méthode d'éléments finis, soit en recherchant une solution particulière de la fonction courant. Nous mettrons l'accent sur l'approche semi-analytique, qui présente l'avantage de mettre en évidence un certain nombre d'arguments et de résultats physiques qui contribuent à la compréhension des mécanismes mis en jeu.

Ensuite, nous proposerons une analyse différente, qui consiste à modéliser uniquement la région centrale convergente de l'écoulement en amont de l'orifice. Cette analyse utilise un champ de vitesse newtonien et repose sur le principe de minimisation de la dissipation d'énergie dans un écoulement de Stokes. Nous comparerons les résultats obtenus dans les différentes approches, y compris dans l'approche numérique, et nous discuterons la validité des hypothèses effectuées.

Enfin, nous reviendrons sur les résultats expérimentaux et leur interprétation à l'aide de ces prédictions théoriques.

II.1 Analyse de l'ensemble de l'écoulement en amont d'une contraction par une fonction courant homogène

II.1.1 Position du problème

Dans cette partie essentiellement bibliographique, nous allons nous intéresser à la description du champ de vitesse correspondant à l'écoulement d'une suspension de fibres en amont d'une contraction ou d'un orifice pratiqués dans une *plaque infinie*. Nous allons nous appuyer sur une série de travaux récents [69-71], qui montrent qu'il est possible de trouver une solution du champ de vitesse en terme de fonction de courant qui rende compte de l'existence des recirculations observées expérimentalement.

L'analyse repose sur l'utilisation de la loi de comportement (1.19) qui décrit la relation entre le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}$ de la suspension et le tenseur de déformation de

l'écoulement $\underline{\underline{E}}$, en fonction de l'orientation des fibres dans la suspension caractérisée par le vecteur directeur \bar{p} :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = -P\underline{\underline{\delta}} + 2\mu\underline{\underline{E}} + \mu_f \langle \bar{p}\bar{p}\bar{p}\bar{p} \rangle : \underline{\underline{E}} \quad (4.1)$$

Nous avons vu au chapitre 1 que la quantité μ_f est reliée aux propriétés microscopiques de la suspension par la relation explicitée par Batchelor [28] :

$$\frac{\mu_f}{3\mu} = \frac{4}{9}\beta \quad \text{où} \quad \beta = \beta_{sd} = \frac{\Phi \cdot r^2}{\text{Log}(\pi / \Phi)} \quad \text{en régime semi-dilué.}$$

Dans le cas le plus général, la fermeture du problème nécessite l'utilisation, couplée à l'équation (4.1), de l'équation d'évolution du vecteur \bar{p} décrivant l'orientation des fibres dans l'écoulement. Dans le cas d'un écoulement mettant en jeu de l'élongation, les fibres sont supposées alignées dans la direction des lignes de courant et \bar{p} est un vecteur colinéaire au vecteur vitesse \bar{V} .

II.1.2 Etude de l'écoulement d'une suspension de fibres dans une conduite conique

Nous allons dans un premier temps nous intéresser à l'écoulement d'une suspension de fibres semi-diluée dans un cône de demi-angle d'ouverture θ_0 repéré à partir de l'axe vertical Oz (figure 4.15). Cet écoulement décrit en particulier pour $\theta_0 = \pi/2$ l'écoulement en amont d'une contraction ou d'un orifice ; ρ désigne la distance au sommet O du cône et θ l'angle polaire repéré à partir de Oz. la géométrie peut être plane ou axisymétrique. Nous présenterons ici par souci de simplicité le cas de la géométrie plane, les résultats étant tout à fait analogues à ceux de la géométrie axisymétrique.

a) Solution radiale du champ de vitesse

Nous allons chercher tout d'abord une solution simple du champ de vitesse en supposant que les lignes de courant sont radiales et ne dépendent pas de l'ouverture $2c$ à l'extrémité inférieure du cône [69]. Remarquons que cette forme de solution décrit correctement le champ de vitesse loin de l'orifice mais ne permet pas de traiter le voisinage immédiat de l'orifice. La vitesse est de la forme $\bar{V} = V(\rho, \theta)\bar{i}_\rho$ et le vecteur directeur des fibres coïncide avec \bar{i}_ρ . Dans le tenseur des contraintes (4.1), seule la composante $\Sigma_{\rho\rho}$ est modifiée par rapport au cas newtonien et vaut $\Sigma_{\rho\rho} = -P + (2\mu + \mu_f)E_{\rho\rho}$.

La relation d'incompressibilité montre que $V(\rho, \theta)$ est de la forme $V(\rho, \theta) = f(\theta)/\rho$. La conservation de la quantité de mouvement en l'absence de termes d'inertie impose que $\text{div}(\underline{\underline{\Sigma}}) = 0$. Pour éliminer les termes de pression, on applique l'opérateur rotationnel à cette dernière équation. On cherchera la fonction $f(\theta)$ qui vérifie la conservation du débit dans une

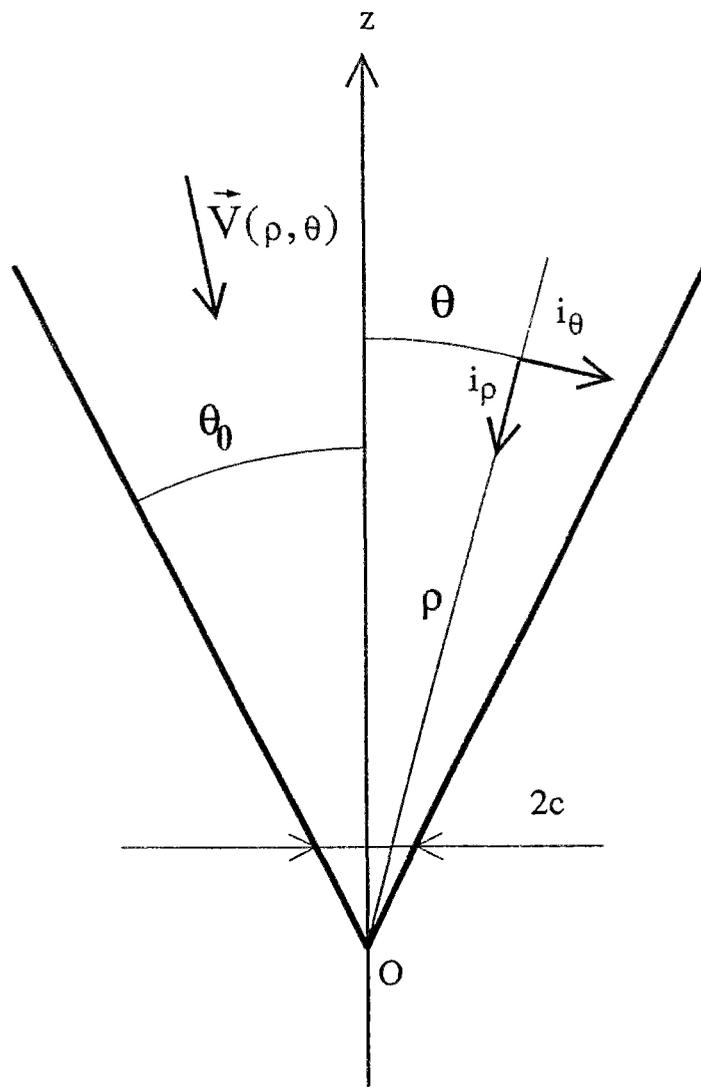


Figure 4.15

Écoulement dans une conduite conique.

tranche horizontale de l'écoulement et les conditions aux limites $f(\theta_0)=f(-\theta_0)=0$. Le système d'équations différentielles s'intègre et le champ de vitesse est de la forme [69] :

$$V(\rho, \theta) = \frac{vQ}{2\rho} \frac{\cos(v\theta) - \cos(v\theta_0)}{\sin(v\theta_0) - v\theta_0 \cos(v\theta_0)} \quad \text{où} \quad v^2 = 4(1 + \beta/3) \quad (4.2)$$

Dans le cas de l'écoulement newtonien, $v=2$ et l'on retrouve la solution de l'écoulement d'un fluide newtonien dans un cône. Pour $\theta_0=\pi/2$, cette solution coïncide loin de l'orifice avec la solution étudiée au chapitre 2.

b) Discussion

La forme du champ de vitesse obtenu dépend de la valeur de la quantité $v\theta_0$. Fixons par exemple la valeur de l'angle du cône θ_0 , et augmentons progressivement la variable microscopique β caractéristique de la suspension, donc la valeur du paramètre v .

Différents profils d'écoulement obtenus pour $\theta_0=\pi/3$, extraits de la référence [69], sont représentés sur la figure 4.16(a). Pour $v\theta_0 < \pi$ ($\beta < 3.75$), l'écoulement converge partout vers l'intérieur du cône. Pour $\pi \leq v\theta_0 < \theta_C$, ($3.75 \leq \beta < 10.75$), où l'angle critique $\theta_C=257^\circ$ est tel que $\tan\theta_C = v\theta_C$, l'écoulement présente une région centrale où la vitesse est dirigée vers l'intérieur du cône, et deux régions latérales où la vitesse est dirigée vers l'extérieur du cône. Pour $v\theta_0 = \theta_C$ ($\beta = 10.75$), le dénominateur de l'équation (4.2) s'annule et la solution radiale n'est pas définie. Pour $\theta_C < v\theta_0 < 2\pi$ ($10.75 < \beta < 24$), l'écoulement dans la région centrale est dirigé vers l'extérieur du cône alors qu'il est dirigé vers l'intérieur dans les régions latérales. Au delà, il y a apparition de multiples régions où l'écoulement est dirigé alternativement vers l'intérieur ou l'extérieur du cône.

Dans le cas de l'écoulement en amont d'un orifice ($\theta_0=\pi/2$) la valeur de l'angle critique θ_C est atteinte pour une valeur critique $v_C=2,85$. On s'attend donc à observer des profils d'écoulement où la vitesse dans la zone centrale est dirigée vers l'extérieur à partir de $\beta \approx 3$ en géométrie plane. La valeur correspondante est $\beta \approx 1.5$ en géométrie axisymétrique. Alors que les profils de vitesse décrits pour $0 < v\theta_0 < \theta_C$ semblent correspondre aux observations expérimentales (existence d'une zone centrale convergente et de zones latérales divergentes), ni nos expériences, où nous avons exploré des valeurs de β allant jusqu'à 16, ni les observations antérieures [48,49], ne révèlent l'existence de situations où l'écoulement dans la zone centrale est dirigé vers l'extérieur du cône, ou encore l'existence de multiples zones de recirculations. Très récemment, Keiller et Rallison [69] ont suggéré que cette solution radiale a en fait un domaine de validité limité à $v\theta_0 < \theta_C$, et que pour les valeurs de $v\theta_0$ supérieures à θ_C il est nécessaire de rechercher d'autres types de solutions.

(a)

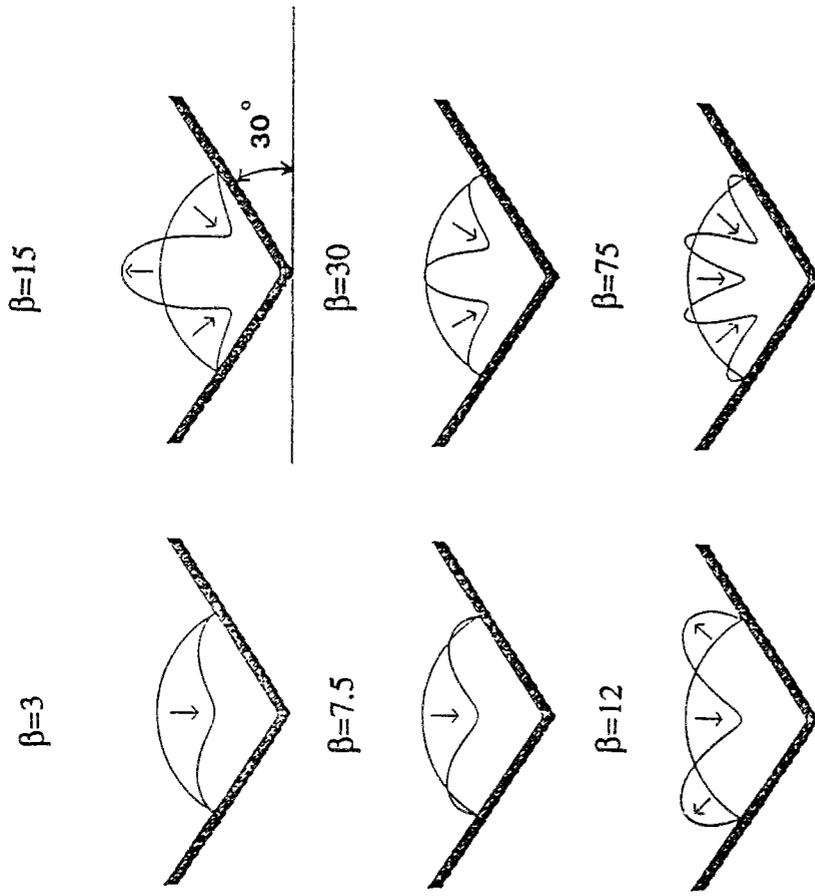
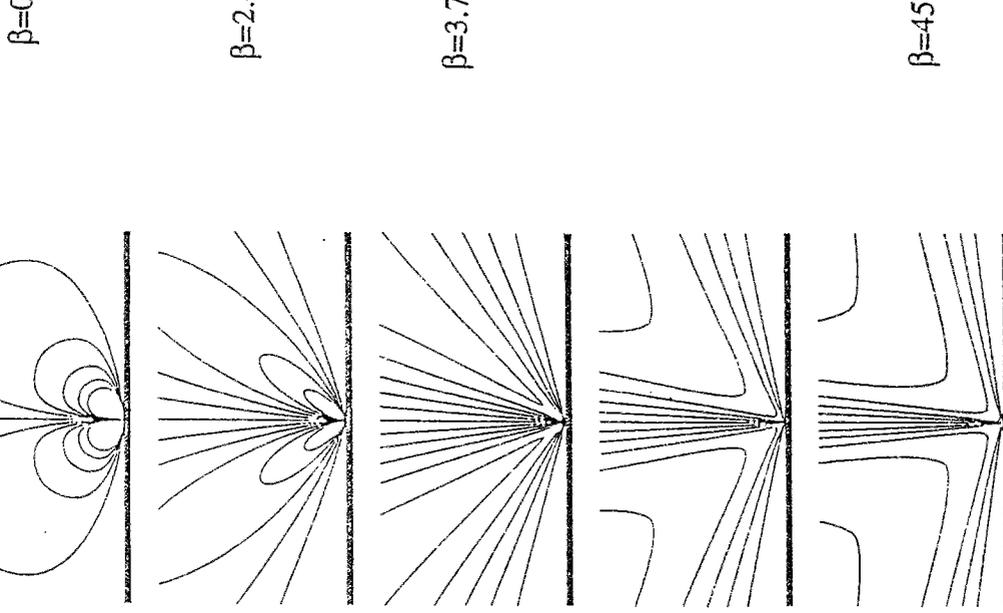


Figure 4.16

(a) Solution radiale d'après [69] en géométrie plane pour différentes valeurs du paramètre β .
(b) Lignes de courant correspondant à la solution homogène d'après [69] en géométrie plane, pour différentes valeurs du paramètre β .

II.1.3 Solution homogène pour la fonction courant de l'écoulement en amont d'un orifice ou d'une contraction

a) Recherche d'une solution homogène

L'idée consiste à rechercher une solution du champ de vitesse qui *domine* la solution radiale, laquelle est valable seulement pour $v\theta_0 < \theta_C$. La géométrie plane ou axisymétrique autorise l'utilisation de la fonction courant $\Psi(\rho, \theta)$. La forme cherchée pour $\Psi(\rho, \theta)$ s'inspire d'études précédentes portant sur l'écoulement newtonien autour d'un coin. La fonction de courant dans ce cas est la somme d'une série de fonctions propres [71] :

$$\Psi(\rho, \theta) = \sum_{i=1}^{+\infty} \rho^{\lambda_i} f_i(\theta)$$

Dans le cas de l'écoulement non-newtonien d'une suspension de fibres, la loi de comportement (4.1) n'est pas linéaire et une telle solution ne convient pas. Cependant, si l'on suppose que toutes les fibres sont alignées suivant les lignes de courant et que ces dernières sont radiales, alors l'orientation des fibres est indépendante de ρ et une fonction de courant homogène en ρ convient. Par contre, la relation (4.1) n'est pas linéaire en \vec{V} et l'on ne peut sommer plusieurs solutions propres. On cherche donc une fonction courant de la forme [69,70] :

$$\Psi(\rho, \theta) = \rho^{\lambda} f(\theta) \quad (4.3)$$

La fonction $f(\theta)$ qui vérifie la conservation de la quantité de mouvement associée à la loi de comportement (4.1), et les conditions aux limites $f(\pm\pi/2)=0$ et $f(0)=f'(0)=0$, est solution d'un système d'équations différentielles non-linéaires qui ne s'intègre pas analytiquement. La fonction propre $f(\theta)$ ainsi que la valeur propre λ associée sont obtenues par résolution numérique.

b) Résultats pour l'écoulement en amont d'un orifice ou d'une contraction ($\theta_0 = \pi/2$) en géométrie plane

La valeur propre λ trouvée numériquement augmente de $\lambda = -1$ pour $v=2$ à $\lambda=0$ pour $v=v_C$ ($\beta \approx 3$) et devient positive ensuite pour $v > v_C$ ($\beta > 3$). Dans ce domaine, λ est proche de zéro ($\lambda \approx 0.2$ pour $\beta=45$) et augmente très lentement avec v ; la solution homogène (4.3) domine bien la solution radiale (4.2) pour $v > v_C$. Différents réseaux de lignes de courant en géométrie plane correspondant à différentes valeurs de v , donc de β , et extraites de la référence [69], sont présentés sur la figure 4.16(b). Notons que les premiers profils correspondant à $v < v_C$ ($\beta \leq 3$) sont dominés par la solution radiale et ne sont donc pas réalistes. Au-delà de cette valeur critique ($\beta \geq 3$), les lignes de courant mettent en évidence une zone

centrale conique où l'écoulement est dirigé vers l'orifice est des recirculations latérales. De plus, nous remarquons que la position du centre de la zone où la vitesse change de sens, qui correspond dans notre situation expérimentale au centre de la recirculation, est sensiblement la même pour l'ensemble des profils d'écoulement. L'angle correspondant est de l'ordre de 50° . Il est intéressant de remarquer qu'il est voisin de l'angle ϕ_C qui caractérise la position du centre du tourbillon dans nos expériences (figure 4.3 et tableau 4.2).

d) Conclusion

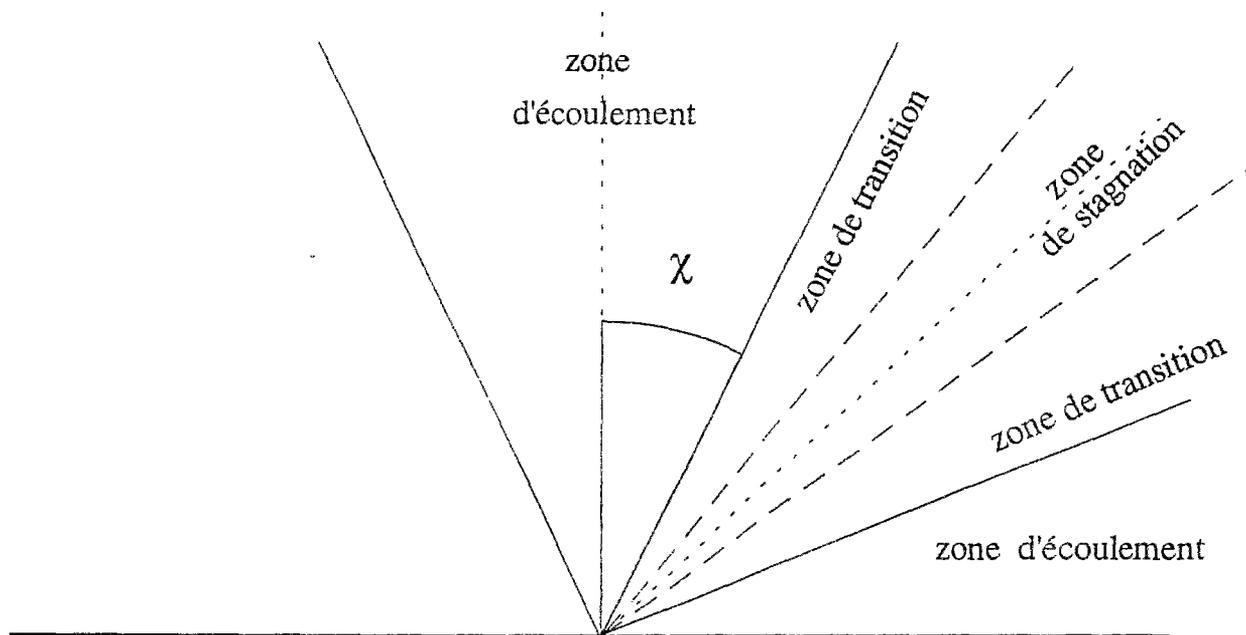
Il faut préciser tout d'abord que la comparaison des résultats expérimentaux avec la situation théorique de la plaque infinie n'est pas directe. En effet, les parois du tube vertical modifient la forme des lignes de courant par rapport au cas de la plaque infinie, même si dans notre cas le rapport de contraction est grand.

Les résultats de l'approche en terme de fonction de courant présentent par contre l'intérêt de fournir une solution valable dans tout l'écoulement qui montre l'existence d'une structuration particulière. En effet, l'utilisation de la fonction courant pour décrire l'ensemble de l'écoulement en amont d'une contraction met en évidence une transition entre une solution purement radiale et une solution homogène qui rend compte de l'existence des recirculations. Cette transition a lieu lorsque le paramètre β , qui décrit les propriétés microscopiques de la suspension, excède une valeur critique correspondant à l'existence d'une singularité dans la solution radiale.

La modification de l'écoulement newtonien et la structuration associée ont donc pour origine la viscosité élongationnelle de la suspension : les recirculations sont dues à la sollicitation particulière de l'écoulement, notamment aux composantes élongationnelles induites par la contraction, et non à une singularité des conditions aux limites sur les bords de la contraction [71].

Cette interprétation est confirmée par la possibilité qu'offre cette approche de comparer, dans l'expression du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}$, la contribution des différentes composantes de l'écoulement : contrainte de cisaillement due au solvant, contrainte de cisaillement due aux fibres, contrainte élongationnelle due aux fibres, et enfin gradient de pression. Ce travail a été effectué à la référence [70] à l'aide de développements asymptotiques dans l'hypothèse d'écoulement quasi-parallèle. Les résultats sont résumés sur la figure 4.17 où nous avons représenté les différentes régions de l'écoulement et l'origine des contributions dominantes à la contrainte dans chaque région. Nous constatons que dans la région d'écoulement centrale les contributions à la contrainte sont l'élongation due aux fibres et le cisaillement dû au solvant.

Enfin, cette approche en terme de fonction courant homogène ne fournit pas dans l'état actuel de son développement des prédictions analytiques portant sur la structuration de



Description de la région considérée	Terme dominant dans le tenseur des contraintes
zone d'écoulement	cisaillement dû au solvant élongation due aux fibres gradient de pression
zone de transition	cisaillement dû au solvant cisaillement dû aux fibres
zone de stagnation	cisaillement dû aux fibres gradient de pression

Figure 4.17

Différentes régions de l'écoulement correspondant à la solution homogène d'après [70] et origine des contributions au tenseur des contraintes dans chaque région.

l'écoulement ni sur la différence de pression associée à la traversée de la région amont. Ceci nous conduit à proposer une autre approche qui est exposée dans le paragraphe suivant.

II.2 Analyse de l'écoulement dans la région centrale en amont d'une contraction par le principe du minimum de dissipation d'énergie

Dans cette partie, nous mettons en oeuvre une approche qui utilise le principe du minimum de dissipation d'énergie par un écoulement de Stokes. Une approche identique a déjà été utilisée dans l'étude du comportement de solutions de polymères flexibles en écoulement élongationnel [72]. Nous allons déterminer la forme adoptée par l'écoulement dans la région centrale convergente en écrivant qu'elle correspond à un minimum de dissipation.

Cette méthode fournit des prédictions théoriques pour les différentes quantités que nous avons mesurées expérimentalement. Ainsi, la forme de la région d'écoulement centrale peut être déterminée quantitativement. De plus, la différence de pression est reliée très simplement, comme nous le verrons plus loin, à l'énergie dissipée par viscosité dans l'écoulement. Nous discuterons les hypothèses utilisées et nous confronterons les prédictions obtenues avec des résultats numériques disponibles dans la littérature.

II.1.1 Relation entre l'énergie dissipée par l'écoulement et la différence de pression

a) Cas général

Considérons un écoulement de Stokes dont le champ de vitesse est noté \vec{V} , le tenseur de déformation $\underline{\underline{E}}$, et dont le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}$ se décompose en :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = -P\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{T}}$$

P est le champ de pression, $\underline{\underline{T}}$ est le tenseur des contraintes de viscosité dont la trace est nulle. Dans un tel écoulement, la transformation irréversible d'énergie par dissipation visqueuse \dot{W} dans un volume de contrôle Ω est minimale, et elle s'exprime comme :

$$\dot{W} = \int_{\Omega} (\underline{\underline{T}}:\underline{\underline{E}})d\Omega$$

où l'opérateur : a été défini au chapitre 1. Cette expression permet de calculer la dissipation à partir du tenseur de déformation et du tenseur des contraintes en intégrant dans tout le volume de l'écoulement.

Par ailleurs, la conservation de l'énergie mécanique permet d'exprimer \dot{W} à partir du flux d'énergie mécanique ($\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{V}}$) [73]:

$$\dot{W} = \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{V}}) d\Omega$$

Nous transformons cette expression en intégrale de surface sur le bord A du domaine :

$$\dot{W} = \int_A (\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{V}} dA$$

Cette seconde expression de \dot{W} fait intervenir uniquement le travail des composantes des contraintes de viscosité *normales* à la surface du domaine d'écoulement considéré.

b) Application à l'écoulement étudié

Nous calculons l'énergie dissipée par viscosité dans la cellule d'écoulement, dans un volume de contrôle Ω compris entre les deux sections horizontales S_A et S_B situées au niveau des prises de pression A et B (figure 4.18) :

$$\dot{W} = \int_{S_B} \Sigma_{zz} V_z dA - \int_{S_A} \Sigma_{zz} V_z dA \quad (4.4)$$

Nous écrivons la contrainte Σ_{zz} sous la forme $\Sigma_{zz} = N_1 + \Sigma_{\rho\rho}$ où N_1 désigne la première différence des contraintes normales. Nous utilisons maintenant un *repère cylindrique* où ρ désigne la distance à l'axe, et z la hauteur dans la direction verticale. D'après la conservation de la quantité de mouvement dans la direction ρ , $\Sigma_{\rho\rho}$ ne dépend que de z , donc est constant dans une section horizontale S_A ou S_B . L'équation (4.4) devient donc :

$$\dot{W} = [(\Sigma_{\rho\rho})_{S_B} - (\Sigma_{\rho\rho})_{S_A}] Q + \left[\int_{S_B} N_1 V_z dA - \int_{S_A} N_1 V_z dA \right]$$

où Q est le débit de l'écoulement. Dans l'équation précédente, le second terme du membre de droite est nul : N_1 est identique dans les sections S_A et S_B puisque l'écoulement est complètement développé. Dans le premier terme du membre de droite, la différence $(\Sigma_{\rho\rho})_{S_B} - (\Sigma_{\rho\rho})_{S_A}$ est égale exactement à la différence de pression $\Delta P = (P_A - P_B)$ mesurée par le capteur de pression (chapitre 2), de sorte que $\dot{W} = \Delta P / Q$.

Pour calculer la dissipation d'énergie totale \dot{W} dans le volume Ω de l'écoulement, nous allons séparer l'écoulement en différentes régions et effectuer des hypothèses simplificatrices sur la dissipation d'énergie dans chacune de ces régions, en nous inspirant des résultats de l'approche semi-analytique présentés figure 4.17. En *amont de l'orifice*, nous supposons que la dissipation d'énergie dans les zones de recirculation est négligeable devant la dissipation

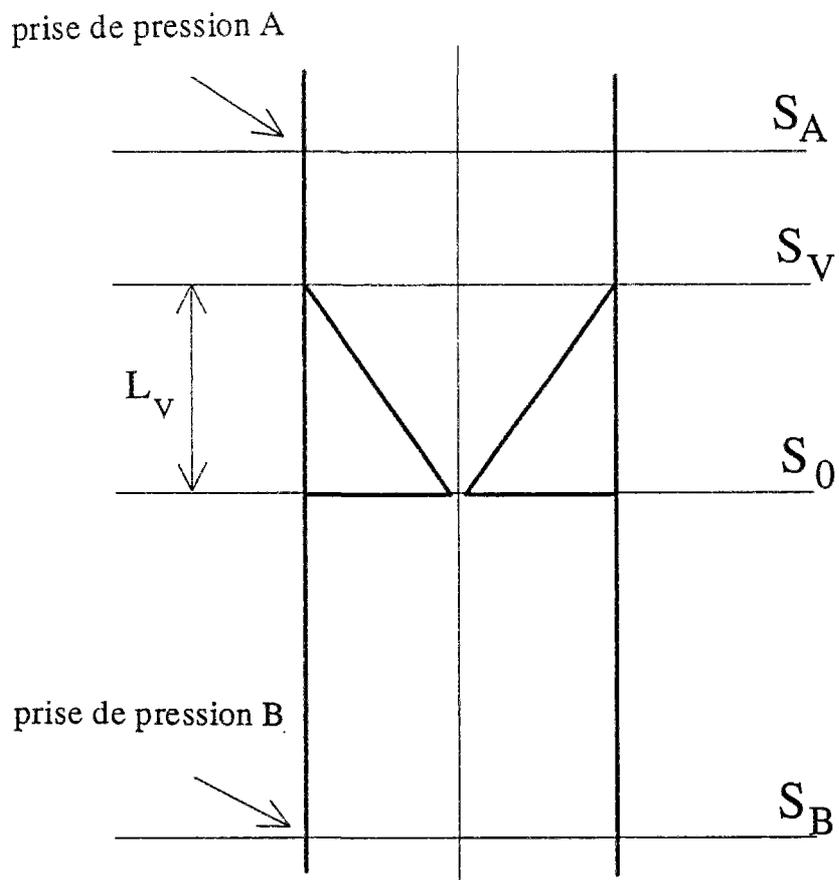


Figure 4.18

Volume de contrôle dans la cellule d'écoulement.

dans la zone centrale. Deux arguments justifient cette hypothèse. Tout d'abord, expérimentalement, la vitesse dans les zones de recirculation est beaucoup plus faible que dans la zone centrale. De plus, la dissipation provient essentiellement des contraintes de cisaillement (figure 4.17) ; la contribution à la dissipation est donc beaucoup plus faible que dans la zone d'écoulement centrale où la contribution due à l'élongation est très importante. Nous négligerons aussi la dissipation dans l'écoulement de Poiseuille compris entre les sections S_A et S_V devant la dissipation dans la zone centrale. En *aval de l'orifice*, nous avons vu que les lignes de courant sont identiques aux lignes de courant de l'écoulement newtonien correspondant au solvant seul. Nous supposons que la contribution apportée par les fibres à la dissipation est négligeable.

Nous nous intéresserons donc exclusivement à la zone centrale de l'écoulement amont, où nous allons déterminer le champ de vitesse, le champ de déformation et la dissipation d'énergie.

II.2.2 Détermination du champ de vitesse newtonien

Nous utiliserons pour la modélisation de cette région un champ de vitesse de type newtonien. Ce modèle suppose donc que la modification apportée par les fibres au champ de vitesse dans la zone convergente est négligeable, et que le champ de vitesse est identique à un écoulement de Poiseuille convergent. Il faut noter que la présence des fibres est cependant prise en compte dans ce modèle. En effet, les fibres sont responsables de l'existence de cette zone convergente dont elles déterminent la géométrie. D'autre part, l'énergie dissipée par l'écoulement fait intervenir l'augmentation de viscosité élongationnelle due à la présence des fibres. L'hypothèse de champ de vitesse newtonien sera discutée en détail dans le paragraphe II.3.

a) Géométrie étudiée

La géométrie de l'écoulement est représentée sur la figure 4.19. Nous nous intéressons à l'écoulement à l'intérieur d'une surface de révolution autour de l'axe (Oz), paramétrée dans le plan (O, ρ ,z) par le rayon $R(z)$ de la section à l'altitude z. L'écoulement étant axisymétrique, la vitesse \vec{V} a deux composantes dans le plan (O, ρ ,z) qui sont $V_\rho(\rho,z)$ et $V_z(\rho,z)$. Nous insistons sur le fait que la forme de $R(z)$ n'est pas donnée a priori.

b) Champ de vitesse

La vitesse est supposée nulle sur les bords du domaine, ce qui revient à considérer la surface $R(z)$ comme une paroi solide. Cette hypothèse ne correspond pas exactement à la réalité, puisqu'on observe dans les expériences une vitesse non-nulle sur les bords de la zone convergente. Cependant, l'hypothèse se justifie dans la mesure où cette vitesse est très

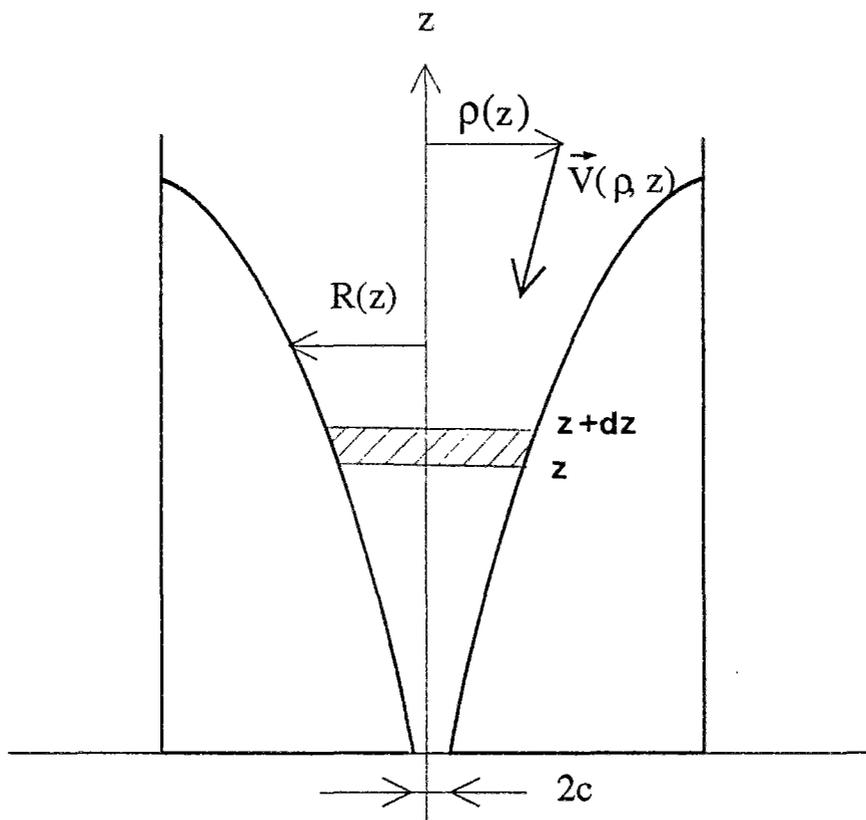


Figure 4.19

Paramétrisation de l'écoulement dans une conduite de révolution de rayon $R(z)$.

inférieure à la vitesse observée sur l'axe (environ 100 fois plus faible d'après nos estimations).

Pour déterminer le champ de vitesse dans la région convergente située à l'intérieur de la surface $R(z)$, nous utilisons l'hypothèse classique d'écoulement quasi-parallèle, qui suppose que $R(z)$ est lentement variable et que la dérivée dR/dz est petite. Nous allons donc adopter pour la composante axiale de la vitesse V_z celle d'un écoulement de Poiseuille dans une conduite de révolution dont le rayon est $R(z)$:

$$V_z(\rho, z) = \frac{2Q}{\pi R(z)^2} \left[1 - \left(\frac{\rho}{R(z)} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

En utilisant la relation d'incompressibilité, nous trouvons la composante radiale V_ρ sous la forme d'une fraction de V_z :

$$V_\rho(\rho, z) = \frac{\rho}{R(z)} \frac{dR(z)}{dz} V_z(\rho, z) \quad (4.6)$$

c) Champ de déformation

Le champ de déformation $\underline{\underline{E}}$ correspondant au champ de vitesse explicité ci-dessus, qui permettra ultérieurement d'obtenir l'énergie dissipée par l'écoulement, est calculé à partir des expressions connues en coordonnées cylindriques. L'hypothèse d'écoulement quasi-parallèle permet de négliger les termes en $(dR/dz)^2$ et (d^2R/dz^2) dans l'expression des composantes du tenseur de déformation et plus loin dans l'expression de la dissipation. Nous obtenons $\underline{\underline{E}}$ sous la forme :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_{zz} & E_{\rho z} & 0 \\ E_{\rho z} & E_{\rho\rho} & 0 \\ 0 & 0 & E_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

Nous noterons dans la suite le taux d'élongation $\dot{\epsilon} = E_{zz}$, et le taux de cisaillement $\dot{\gamma} = 2E_{\rho z}$. Les composantes de $\underline{\underline{E}}$ ont pour expressions :

$$\begin{aligned} E_{\rho\rho} &= \frac{2Q}{\pi R^3} \left\{ 1 - 3 \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right\} \frac{dR}{dz} & E_{\theta\theta} &= \frac{2Q}{\pi R^3} \left\{ 1 - \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right\} \frac{dR}{dz} \\ E_{zz} &= \frac{4Q}{\pi R^3} \left\{ 2 \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 - 1 \right\} \frac{dR}{dz} & E_{\rho z} &= -\frac{2Q}{\pi R^3} \frac{\rho}{R} \end{aligned}$$

II.2.3 Calcul et minimisation de la dissipation d'énergie totale

a) Dissipation d'énergie dans une tranche de l'écoulement

La dissipation d'énergie par viscosité \dot{w} dans un volume infinitésimal est :

$$\dot{w} = \underline{T}:\underline{E} = (T_{zz} - T_{\rho\rho})E_{zz} + 2T_{\rho z}E_{\rho z} + (T_{\theta\theta} - T_{\rho\rho})E_{\theta\theta}$$

Le dernier terme dans l'expression de \dot{w} est négligeable : en effet, la deuxième différence des contraintes normales ($T_{\theta\theta} - T_{\rho\rho}$) est très petite devant la première différence ($T_{zz} - T_{\rho\rho}$) à cause du caractère axisymétrique de l'écoulement. Par ailleurs, le facteur ($T_{zz} - T_{\rho\rho}$) s'exprime en fonction de la viscosité élongationnelle μ_E :

$$T_{zz} - T_{\rho\rho} = \mu_E \dot{\epsilon}$$

tandis que la viscosité de cisaillement μ_S intervient dans :

$$T_{\rho z} = \mu_S \dot{\gamma}$$

Dans cette approche, nous supposons que les fibres sont toutes alignées dans la direction des lignes de courant. La viscosité μ_E est alors une constante qui ne dépend pas du taux de délongation (chapitre 1). Nous supposons aussi que la viscosité de cisaillement μ_S est indépendante du taux de cisaillement. Finalement, \dot{w} s'écrit simplement comme la somme d'une dissipation par élongation et d'une dissipation par cisaillement :

$$\dot{w}(\rho, z) = \mu_E \dot{\epsilon}^2 + \mu_S \dot{\gamma}^2$$

Cette expression permet de trouver la dissipation d'énergie \dot{w}_z dans une tranche cylindrique d'épaisseur dz située entre les hauteurs z et $z+dz$ et représentée sur la figure 4.19 :

$$\dot{w}_z = \int_0^{R(z)} 2\pi\rho \dot{w}(\rho, z) dz$$

qui s'explique sous la forme :

$$\dot{w}_z = \frac{16Q^2}{\pi R^4} \left[\frac{1}{3} \mu_E \left(\frac{dR}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu_S \right]$$

b) Dissipation totale et condition de dissipation minimale

La dissipation d'énergie totale \dot{W} dans l'ensemble du volume de l'écoulement situé à l'intérieur de la surface $R(z)$ et entre les plans S_0 et S_V (figure 4.18) s'écrit :

$$\dot{W} = \int_0^{L_V} \dot{w}_z(R, \frac{dR}{dz}) dz$$

La dernière étape du raisonnement consiste à trouver la frontière $R(z)$ pour laquelle l'écoulement satisfait la condition de dissipation minimale des écoulements de Stokes. Nous fixons tous les paramètres (Q , μ_E , μ) et nous cherchons la fonction $R(z)$ qui réalise le minimum de \dot{W} . Le principe variationnel d'Euler appliqué à la fonction \dot{W} conduit, après quelques transformations [72], à une fonction $R(z)$ vérifiant :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\dot{W}}{X} \right) = 0 \quad \text{où } X = \frac{dR}{dz}$$

Nous en déduisons l'équation du profil $R(z)$ de la zone convergente de l'écoulement :

$$\frac{dR}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mu_E}{3\mu_S} \right)^{-1/2} \quad (4.7)$$

D'autre part, nous trouvons l'énergie totale dissipée en reportant l'équation ci-dessus dans l'expression de \dot{W} , et finalement la chute de pression ΔP_e dans la zone convergente entre les niveaux S_V et S_0 :

$$\Delta P_e = \frac{16\sqrt{2}}{3\pi c^3} \mu_S \left(\frac{\mu_E}{3\mu_S} \right)^{1/2} \left[1 - (c/R)^3 \right] Q \quad (4.8)$$

Dans cette dernière expression, R désigne le rayon de la cellule, c/R est l'inverse du rapport de contraction (chapitre 2). L'équation (4.8) montre que ΔP_e est indépendant du rapport de contraction dès que celui-ci est suffisamment grand, comme c'est le cas dans nos expériences ($R/c=24$).

II.2.4 Discussion des résultats

Les résultats que nous venons d'obtenir appellent plusieurs commentaires physiques, que nous détaillerons au paragraphe II.4 en relation avec les résultats expérimentaux. Dans l'immédiat, nous pouvons faire un certain nombre de remarques importantes.

a) Commentaires sur la forme de dR/dz et ΔP_e

Un premier résultat concerne le rôle essentiel dans les expressions (4.7) et (4.8) du rapport $\mu_E/3\mu_S$ introduit au chapitre 1. Ce rapport traduit la compétition entre la dissipation par effet de cisaillement et la dissipation par effet élongationnel. Tout se passe comme si l'augmentation de viscosité élongationnelle de la suspension conduisait l'écoulement à adopter la géométrie qui dissipe le moins d'énergie possible. Il est intéressant de remarquer que pour la solution trouvée, l'énergie dissipée par cisaillement est alors égale à l'énergie dissipée par élongation.

Ensuite, le rapport $\mu_E/3\mu_S$ étant une constante, l'équation (4.7) montre que dR/dz est indépendant de l'altitude z et du débit. La région convergente est donc un cône de révolution, dont l'angle d'ouverture ϕ repéré à partir de la plaque horizontale vérifie $\tan\phi=(dR/dz)^{-1}$ et est indépendant du débit. Il faut souligner que ce résultat est très différent de celui qui est obtenu pour des solutions de polymères, où μ_E et μ_S varient avec le taux d'élongation et le taux de cisaillement. Cette dépendance conduit à des exposants différents et à des variations de dR/dz en fonction du débit et de la hauteur z . La même remarque vaut pour la différence de pression ΔP_e , pour laquelle nous trouvons une dépendance linéaire en fonction du débit Q ; cette dépendance linéaire est aussi modifiée dans le cas de solutions de polymères.

b) Discussion des hypothèses

La connaissance de dR/dz permet de remonter à la hauteur du point de détachement défini dans le premier paragraphe en écrivant : $L_V/2R \simeq 1/2(dR/dz)^{-1}$. L'extrapolation de l'équation (4.7) au cas du solvant seul, pour lequel $\mu_E=3\mu_S$, fournit des tailles de tourbillons très élevées ($L_V/2R=0.707$). Cette surestimation peut s'expliquer par les différentes approximations effectuées au cours du calcul. Surtout, l'hypothèse d'écoulement quasi-parallèle n'est pas valide lorsque l'angle d'ouverture du cône est très grande, et l'extrapolation au cas newtonien est donc délicate.

Une autre hypothèse effectuée dans le calcul qui mérite d'être discutée est la condition de vitesse nulle sur les bords du domaine $R(z)$. Nous avons étudié l'influence de cette condition sur le champ de vitesse et les valeurs de dR/dz et ΔP_e associées, en imposant une vitesse tangentielle non-nulle sur l'enveloppe $R(z)$. Nous trouvons que ceci n'entraîne aucune modification en ce qui concerne la forme des expressions de dR/dz et ΔP_e ; seuls sont modifiés les préfacteurs numériques.

Par ailleurs, signalons qu'il est possible de calculer la différence de pression ΔP_e par une méthode légèrement différente de celle que nous venons de présenter. Cette méthode, qui a aussi été utilisée pour les polymères flexibles [74], consiste à calculer une différence de pression élémentaire $dP_e(z)$ dans une tranche de l'écoulement située entre les hauteurs z et

$z+dz$ (figure 4.19) en utilisant la conservation de la quantité de mouvement, dont l'équation suivant z s'écrit ici :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho T_{\rho z}) + \frac{\partial}{\partial z} (T_{zz})$$

Le premier terme exprime la contribution du cisaillement, le second celle de l'élongation. Dans chaque tranche, dont l'angle de convergence n'est pas donné a priori, nous avons calculé en utilisant le champ de vitesse newtonien la contribution à la différence de pression $dP_e(z)$ qui provient de l'élongation et celle qui provient du cisaillement. Après sommation et minimisation des différences de pression élémentaires $dP_e(z)$ entre les sections S_0 et S_V , nous trouvons une différence de pression totale ΔP_e et un profil de convergence dR/dz qui sont décrits par des équations entièrement analogues aux équations (4.7) et (4.8) sauf au niveau des préfacteurs numériques.

c) Résultats pour la géométrie plane

Le calcul que nous avons présenté pour la géométrie axisymétrique s'effectue de manière analogue pour une géométrie plane. Les résultats obtenus sont identiques sauf en ce qui concerne les préfacteurs numériques.

d) Utilisation du modèle de Batchelor pour la viscosité élongationnelle

Dans la suite, nous utiliserons les prédictions que nous venons d'obtenir pour interpréter nos expériences. Nous adopterons pour expression de la viscosité élongationnelle le modèle de Batchelor (chapitre 1) :

$$\frac{\mu_E}{3\mu} = 1 + \frac{4}{9}\beta$$

où β est relié aux propriétés microscopiques de la suspension. Dans le régime semi-dilué qui nous intéresse ici :

$$\beta = \beta_{sd} = \frac{\Phi r^2}{\text{Log}(\pi / \Phi)}$$

La variable β va donc jouer un rôle essentiel dans l'interprétation des expériences.

En considérant que la modification apportée par les fibres à la viscosité de cisaillement est très faible (chapitre 1), nous pouvons dans l'équation (4.7) assimiler la viscosité de cisaillement de la suspension μ_S à la viscosité de cisaillement μ du solvant seul. En reportant l'expression de μ_E dans (4.7) nous obtenons :

$$\frac{L_V}{2R} = \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dz} \right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{4}{9} \beta \right)^{1/2} \quad (4.9)$$

où nous avons identifié la position du point de détachement et l'intersection du bord de la région centrale avec le bord de la cellule. Dans cette nouvelle expression, la viscosité du solvant n'intervient plus, ce qui est conforme à ce que nous avons observé dans nos expériences.

De même nous obtenons à partir de l'équation (4.8) pour la différence de pression ΔP_e dans la zone centrale en amont de l'orifice la variation :

$$\Delta P_e = \frac{16\sqrt{2}\mu}{3\pi c^3} Q \left(1 + \frac{4}{9} \beta \right)^{1/2}$$

En normalisant cette différence de pression d'entrée par la différence de pression $\Delta P_0 = 3\mu Q/c^3$, qui est la valeur que nous avons utilisée jusqu'ici pour normaliser la différence de pression mesurée ΔP , nous obtenons :

$$\frac{\Delta P_e}{\Delta P_0} = \frac{16\sqrt{2}}{9\pi} \left(1 + \frac{4}{9} \beta \right)^{1/2} \quad (4.10)$$

Cette quantité normalisée est elle-aussi indépendante de la viscosité du solvant et du débit.

II.2.5 Discussion de l'hypothèse de champ de vitesse newtonien

Dans l'analyse que nous venons de développer, nous avons considéré que la modification apportée par les fibres au champ de vitesse dans la région centrale d'écoulement est négligeable et nous avons cherché le champ de vitesse sous la forme d'un champ de vitesse newtonien. Dans ce paragraphe, nous voulons discuter cette hypothèse en relation avec les champs de vitesse étudiés au paragraphe II.1 : champ de vitesse radial valable lorsque le paramètre v n'excède pas une valeur critique v_C , solution homogène prédite pour $v > v_C$. Cette comparaison est effectuée dans un cas particulier pour lequel nous disposons des trois solutions simultanément.

Sur la figure 4.20(a), nous avons reporté la composante radiale de la vitesse obtenue à partir d'une solution homogène de la fonction courant à la référence [70]. La suspension s'écoule dans un cône dont le demi-angle d'ouverture au sommet est $\theta_0 = 0.5 \text{ rad}$; pour cet angle, la valeur critique de v_C est $v_C \approx 8,97$. La solution tracée sur la figure correspond à une

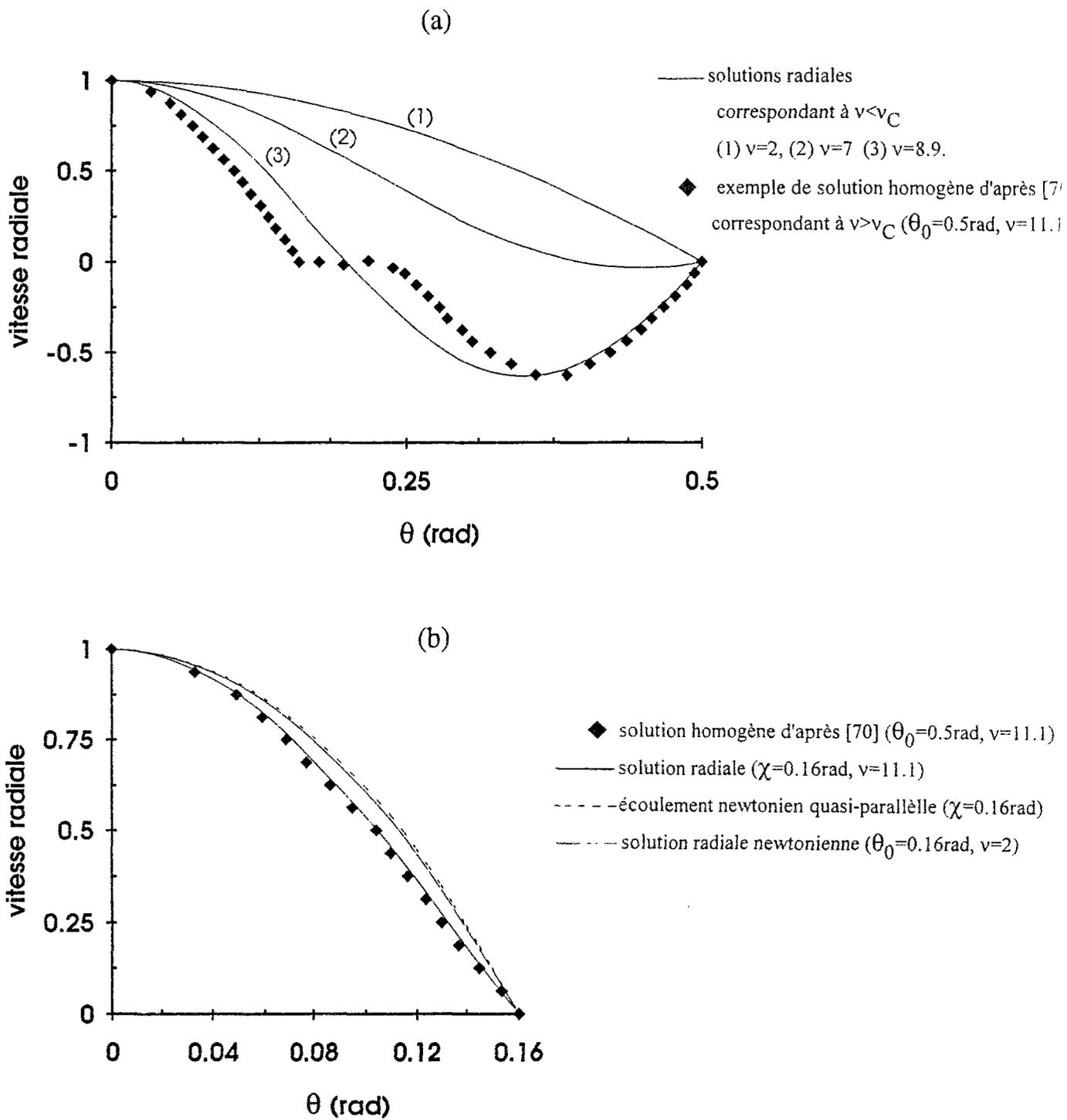


Figure 4.20

Comparaisons des champs de vitesse correspondant à l'écoulement dans un cône de demi-angle d'ouverture $\theta_0=0.5\text{rad}$ en géométrie plane. Pour cette valeur de l'angle θ_0 , la valeur critique de ν est $\nu_C=8.97$.

valeur de β de 90, ce qui donne $v \approx 11.1 > v_C$. La valeur de λ trouvée numériquement est très faible ($\lambda \approx 0.032$) de sorte que la vitesse radiale :

$$V_\rho = \frac{1}{\rho^{1-\lambda}} f(\theta)$$

croît de façon inversement proportionnelle à ρ en première approximation. La vitesse V_ρ a été normalisée de sorte que $V_\rho(\theta=0)=1$. Nous reconnaissons sur ce profil de vitesse la région centrale où l'écoulement est dirigé vers l'intérieur du cône, la région externe où il est dirigé vers l'extérieur, la zone de transition et la zone de stagnation où la vitesse est pratiquement nulle. Par comparaison, nous avons porté les profils de vitesse radiale obtenus pour différentes valeurs de $v < v_C$.

Sur la figure 4.20(b), nous avons tracé la vitesse correspondant à la solution homogène en nous limitant à l'intérieur de la zone centrale ($\theta < 0.16 \text{ rad}$), et nous l'avons comparée à un profil de vitesse radial d'une part et à un profil de vitesse newtonien d'autre part. Le profil de vitesse radial correspond à l'écoulement dans un cône d'angle χ :

$$V_\rho = \frac{vQ}{\rho} \frac{\cos(v\theta) - \cos(v\chi)}{\sin(v\theta) - v\chi \cos(v\chi)}$$

La condition de vitesse nulle est ici imposée pour $\chi = 0.16 \text{ rad}$, qui correspond à la limite de la région d'écoulement central dans la solution homogène (figure 4.20(a)), la valeur de v est $v \approx 11.1$. Nous constatons que les deux tracés coïncident exactement ce qui montre que la solution homogène peut être décrite à l'intérieur de la zone centrale d'écoulement par un champ de vitesse radial. Ce résultat est dû au fait que les termes dominants dans le tenseur des contraintes sont la contrainte élongationnelle due aux fibres, la contrainte de cisaillement du solvant, et le gradient de pression.

Ensuite, nous avons tracé la composante radiale du champ de vitesse newtonien que l'on obtient dans l'hypothèse d'écoulement quasi-parallèle dans un cône d'angle χ :

$$V_\rho = \frac{3Q}{4\rho} \frac{1}{\cos^2 \theta} \left[1 - \left(\frac{\tan \theta}{\tan \chi} \right)^2 \right]$$

avec $\chi = 0.16 \text{ rad}$, et en normalisant V_ρ de manière à ce que $V_\rho(\theta=0)=1$. Cette courbe est très proche des précédentes, ce qui montre que l'hypothèse de champ de vitesse newtonien dans la zone d'écoulement centrale est satisfaisante. Elle coïncide par ailleurs avec la courbe correspondant à la solution radiale en écoulement newtonien ($v=2$).

En conclusion, ce paragraphe établit un lien entre les hypothèses utilisées dans les différentes approches. En effet, pour ces valeurs très faibles de l'angle d'ouverture du cône correspondant à la zone d'écoulement centrale ($\chi=0.16\text{rad}=9^\circ$), le champ de vitesse obtenu par l'approche en fonction de courant homogène est très bien décrit par un champ de vitesse radial, qui est lui même très proche du champ de vitesse newtonien d'écoulement quasi-parallèle.

II.2.6 Comparaison de la différence de pression prédite par le modèle de minimum de dissipation d'énergie et par le calcul numérique

Dans ce paragraphe, nous allons en ce qui concerne la différence de pression d'entrée confronter les prédictions de notre modèle utilisant le minimum de dissipation d'énergie aux résultats d'un calcul numérique disponibles à la référence [69]. Ces résultats ont été obtenus par résolution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement associée au tenseur des contraintes (4.1), à l'aide d'une méthode d'éléments finis. La suspension s'écoule depuis un réservoir infini dans une contraction de diamètre $2c$. Nous avons normalisé les données disponibles à la référence [69] par la différence de pression δP_0 à l'entrée d'un orifice en l'absence de fibres, en utilisant les résultats du chapitre 2 : $\delta P_0 = \Delta P_0 / 2 = 4\mu Q / \pi c^2$ en géométrie plane et $\delta P_0 = \Delta P_0 / 2 = 3\mu Q / 2c^3$ en géométrie axisymétrique. Les points obtenus sont reportés sur la figure 4.21 en fonction de la variable β . Ensuite, nous avons tracé les prédictions de notre modèle en normalisant ΔP_e de manière à ce que $\Delta P_e = 1$ pour $\beta = 0$. Nous constatons que l'accord entre les résultats numériques et notre prédiction est très bon dans le cas d'une contraction plane. Dans le cas axisymétrique, la prédiction est inférieure aux valeurs numériques d'environ 20%. Nous avons par ailleurs porté les valeurs de $(\Delta P_e / \delta P_0)^2$, afin de tester la variation en loi de puissance prédite par le modèle. Dans les deux géométries, les points correspondant aux résultats numériques suivent une variation proche d'une variation linéaire, ce qui montre que la loi de puissance avec un exposant 1/2 décrit correctement les variations trouvées numériquement pour ΔP_e .

II.3 Interprétation des résultats expérimentaux

Dans cette partie, nous allons interpréter les résultats expérimentaux que nous avons décrits au paragraphe I en les confrontant aux prédictions théoriques que nous venons d'établir. En particulier, nous allons discuter les variations de la différence de pression mesurée et de la structuration de l'écoulement en fonction de la viscosité élongationnelle μ_E de la suspension.

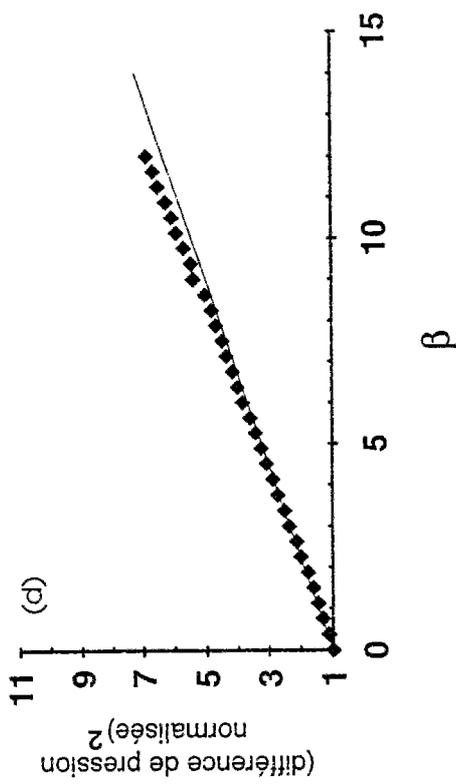
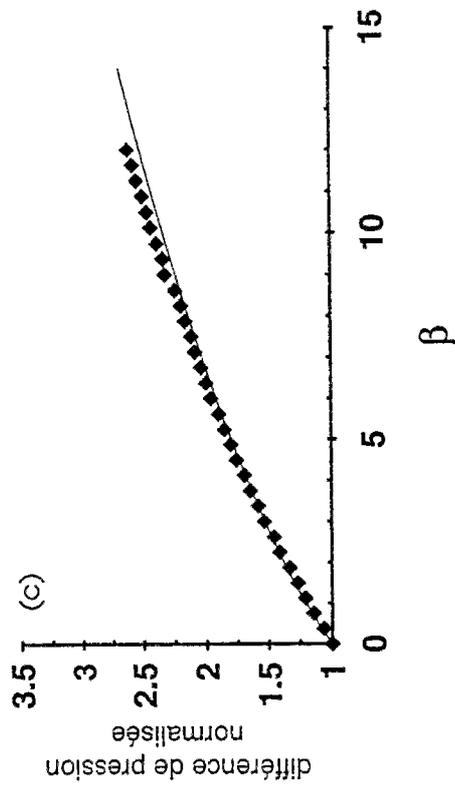
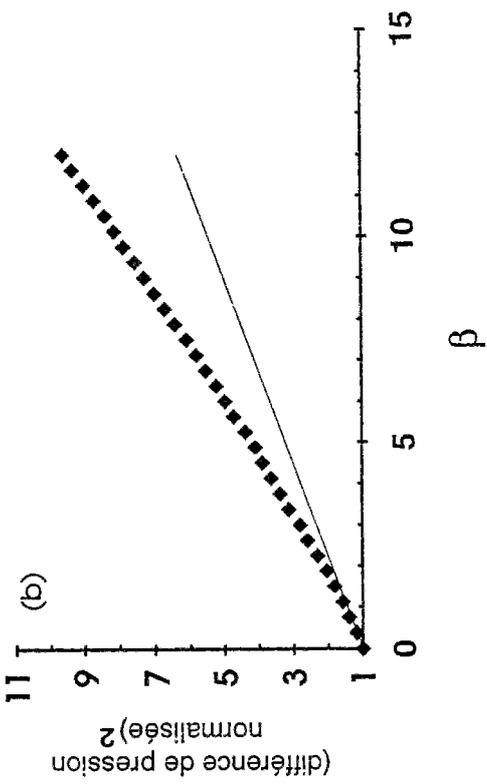
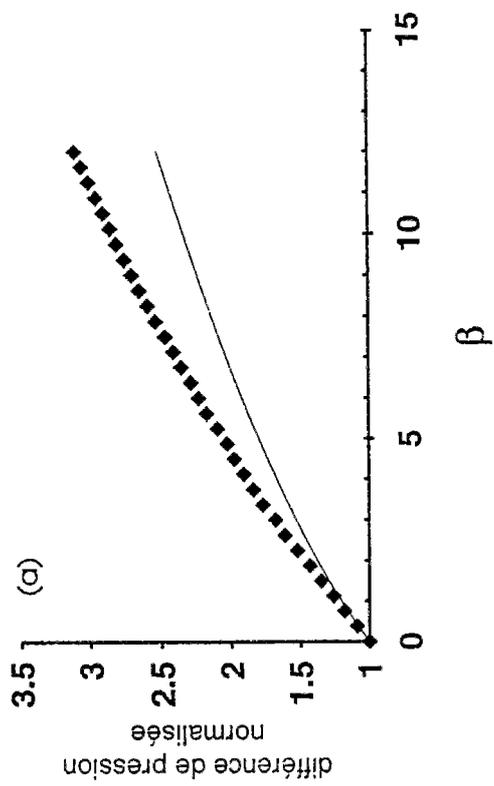


Figure 4.21

Comparaison des différences de pression d'entrée normalisées qui sont obtenues :

◆ au moyen d'un calcul numérique par éléments finis d'après [69].

— dans le modèle utilisant le minimum de dissipation d'énergie.

(figures (a) et (b) géométrie axisymétrique, figures (c) et (d) géométrie plane).

II.3.1 Structuration de l'écoulement

Nous avons constaté au paragraphe II.2 que les prédictions du modèle utilisant le minimum de dissipation d'énergie étaient en accord qualitatif avec les résultats expérimentaux : forme conique de la zone centrale convergente, indépendance de l'angle de convergence avec le débit et avec la viscosité du solvant. Plus précisément, ce modèle prévoit que la hauteur du point de détachement normalisée s'exprime comme :

$$\frac{L_V}{2R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{4}{9} \beta \right)^{1/2}$$

où le préfacteur $1/\sqrt{2}$ ne correspond pas aux observations en écoulement newtonien en raison des approximations effectuées dans le modèle, en particulier l'hypothèse d'écoulement quasi-parallèle.

Sur la figure 4.22, nous avons porté les valeurs mesurées dans les expériences de $L_V/2R$ en fonction de la variable β_{sd} calculée pour les différentes suspensions. Nous constatons que les points expérimentaux, qui correspondent à différentes valeurs de la fraction volumique en fibres, de la longueur des fibres et du rapport de forme, se placent sur une courbe unique, à la précision des mesures près. Ce résultat est d'une grande importance car il établit d'une part que la structuration de la suspension a pour origine la viscosité élongationnelle et d'autre part que les recirculations peuvent être décrites à partir d'une variable unique qui est caractéristique des propriétés microscopiques de la suspension,

Pour tester par ailleurs la variation de $L_V/2R$ en loi de puissance avec un exposant 1/2, nous avons porté les valeurs de $(L_V/2R)^2$ en fonction de la variable β_{sd} . Les points se placent approximativement sur une droite, à la précision des mesures. Le calcul par régression linéaire de cette droite fournit la description des données expérimentales suivante :

$$\frac{L_V}{2R} = A(1 + B\beta_{sd})^{1/2} \text{ avec } A=0.32\pm 0.05 \text{ et } B=0.6\pm 0.1$$

qui est tracée en trait continu sur la figure 4.22. Nous remarquons que le préfacteur A est proche de l'estimation de la taille des recirculations pour l'écoulement newtonien ($L_V/2R=0.28$), et que le préfacteur B est assez proche du préfacteur $4/9=0.44$ du modèle de Batchelor en régime semi-dilué.

Lorsque nous portons les valeurs de $L_V/2R$ en fonction cette fois de la variable microscopique correspondant au régime dilué dans le modèle de Batchelor (figure 4.23), nous obtenons une renormalisation analogue. Nous rappelons que la variable du régime diluée est

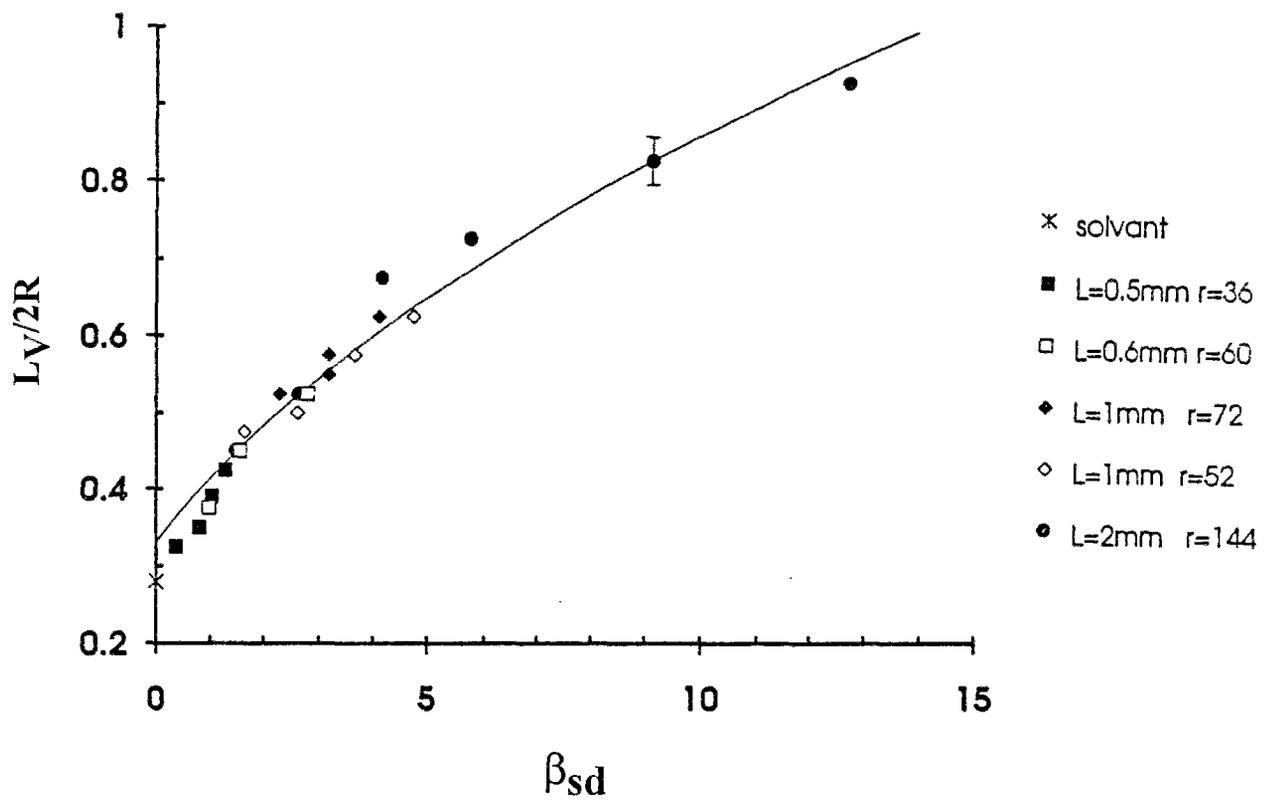


Figure 4.22

Variations de la hauteur du point de détachement normalisée $L_V/2R$ en fonction de la variable du régime semi-dilué $\beta_{sd} = \Phi \cdot r^2 / \text{Log}(\pi/\Phi)$.

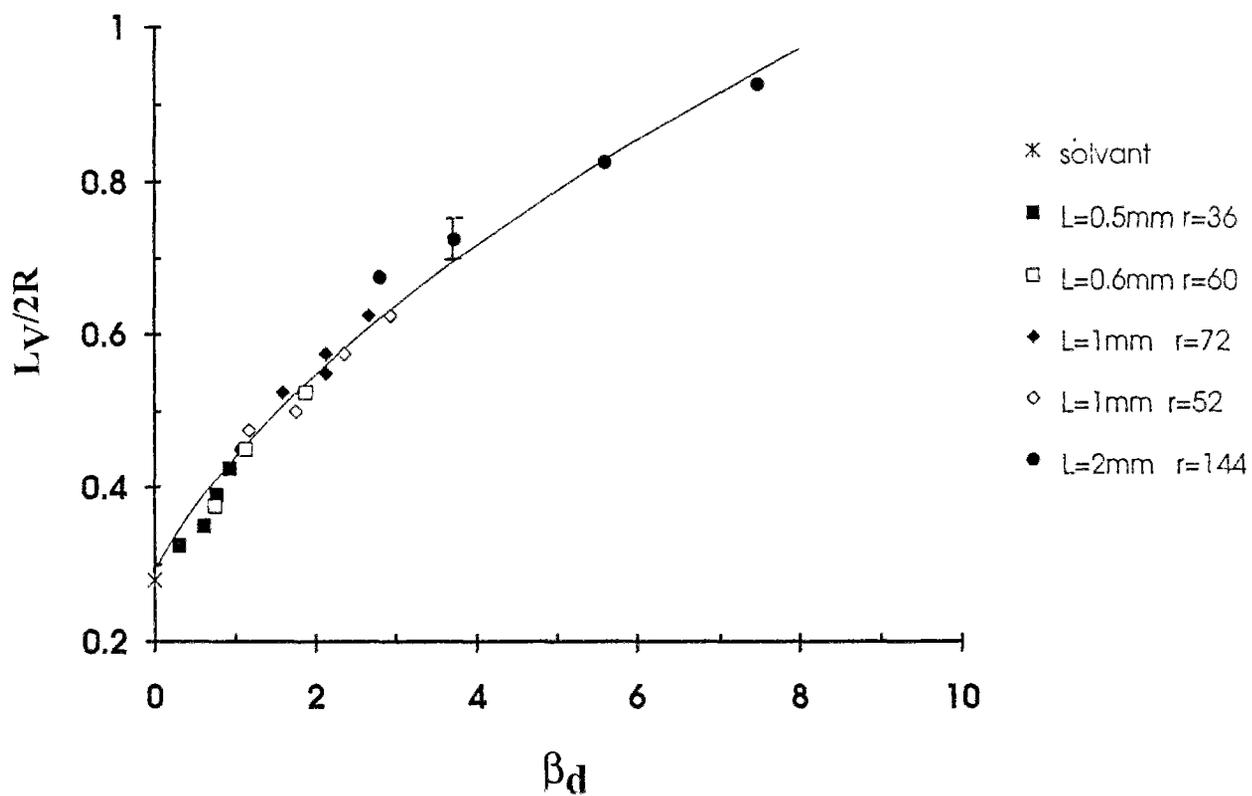


Figure 4.23

Variations de la hauteur du point de détachement normalisée $L_V/2R$ en fonction de la variable du régime dilué $\beta_d = \Phi \cdot r^2 / 2L \log(2r)$.

(chapitre 1) : $\beta_d = \Phi \cdot r^2 / 2 \text{Log}(2r)$. Par contre, nous avons vérifié que la variable $\Phi \cdot r^2$ ne donne pas de bonne renormalisation.

Le fait que l'utilisation de la variable du régime dilué ou du régime semi-dilué soit apparemment équivalente du point de vue de la renormalisation des données s'explique par l'extension finie du domaine de variation du rapport de forme et de la fraction volumique dans nos expériences. En effet, dans ce domaine de variation, les variables β_{sd} et β_d sont très proches. Pour preuve, nous avons tracé sur la figure 4.24 les variations de β_{sd} et de β_d en fonction de Φ , pour différentes valeurs du rapport de forme. Nous constatons que les droites correspondant respectivement à la variable semi-diluée et à la variable diluée ont des pentes voisines. Ceci montre que les variables peuvent être considérées comme proportionnelles dans le domaine de variation que nous explorons et permet de comprendre pourquoi la renormalisation est valable dans les deux cas. De plus, la variable semi-diluée et la variable diluée ne se distinguent significativement que pour des rapports de forme très supérieurs à ceux de nos expériences. Pour décider sans ambiguïté de la validité de la variable semi-diluée, et donc de l'approche champ moyen qui est à son origine (chapitre 1), il faudrait donc utiliser des rapports de forme de l'ordre de 1000, et explorer un domaine de fraction volumique plus étendu.

La meilleure description des données expérimentales de la figure 4.23 est donnée par la courbe d'équation :

$$\frac{L_V}{2R} = A(1 + B\beta_d)^{1/2} \quad \text{avec } A=0.29 \pm 0.05 \text{ et } B=1.2 \pm 0.1$$

Le préfacteur B est à comparer avec le préfacteur $4/9=0.44$ du modèle de Batchelor en régime dilué. Nous constatons que l'accord est moins bon que pour la variable du régime semi-dilué en ce qui concerne la comparaison des données expérimentales avec le modèle.

II.3.2 Différence de pression ΔP

a) Etude de la variation de $\Delta P/\Delta P_0$ en fonction de la variable β

Compte-tenu de la renormalisation observée pour la quantité $L_V/2R$ caractérisant la structuration de la suspension, nous avons porté la différence de pression normalisée $\Delta P/\Delta P_0$ en fonction de la variables β_{sd} (figure 4.25). Les points expérimentaux correspondant à des fibres de même longueur (1mm) ou de longueur voisine (0.5 et 0.6mm) se placent sur une même courbe, mais chaque courbe dépend de la longueur de la fibre. Ce résultat diffère de celui de la quantité $L_V/2R$ pour lequel nous n'observons pas d'effet de la longueur.

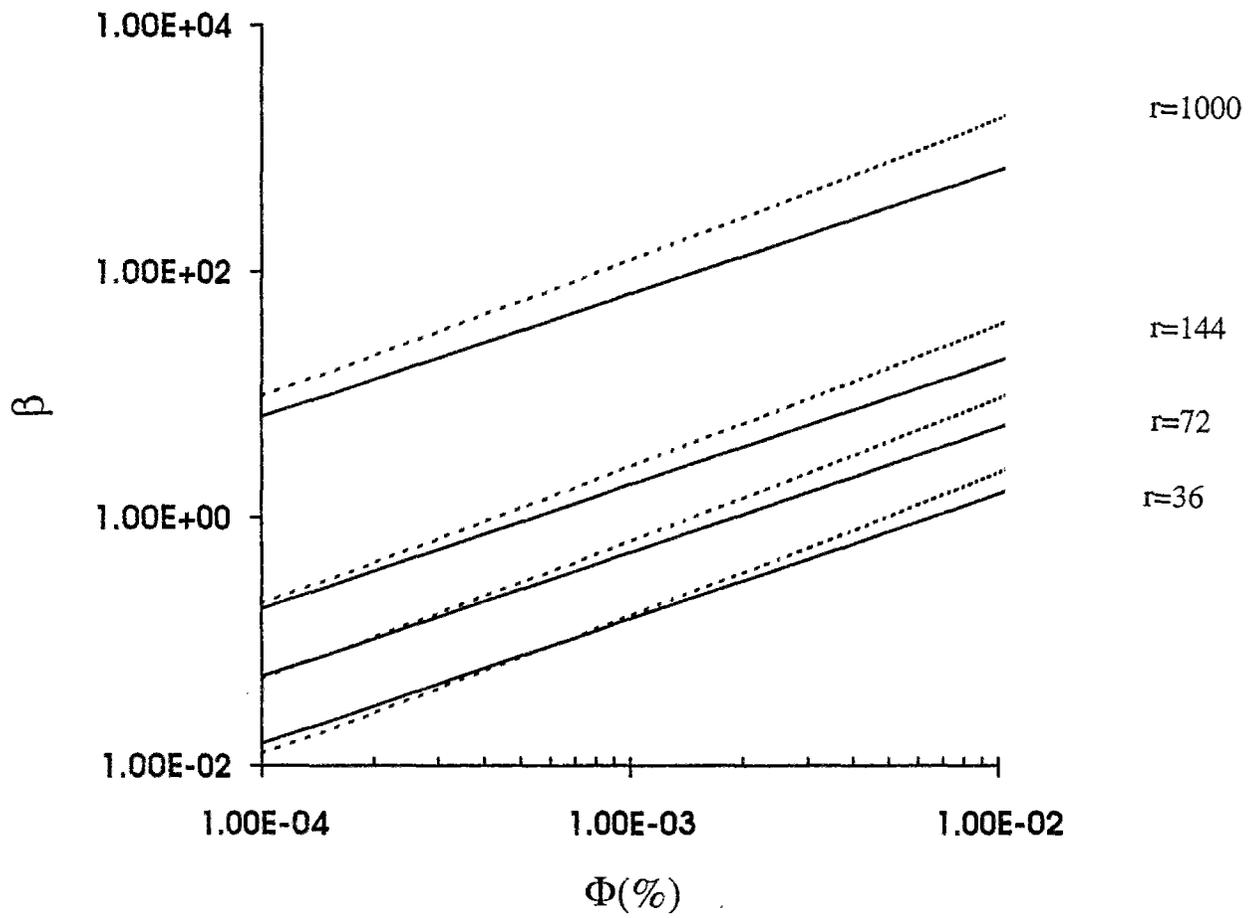


Figure 4.24
 Comparaison des variables diluée β_d et semidiluée β_{sd}
 - - - - β_d
 - - - - β_{sd}

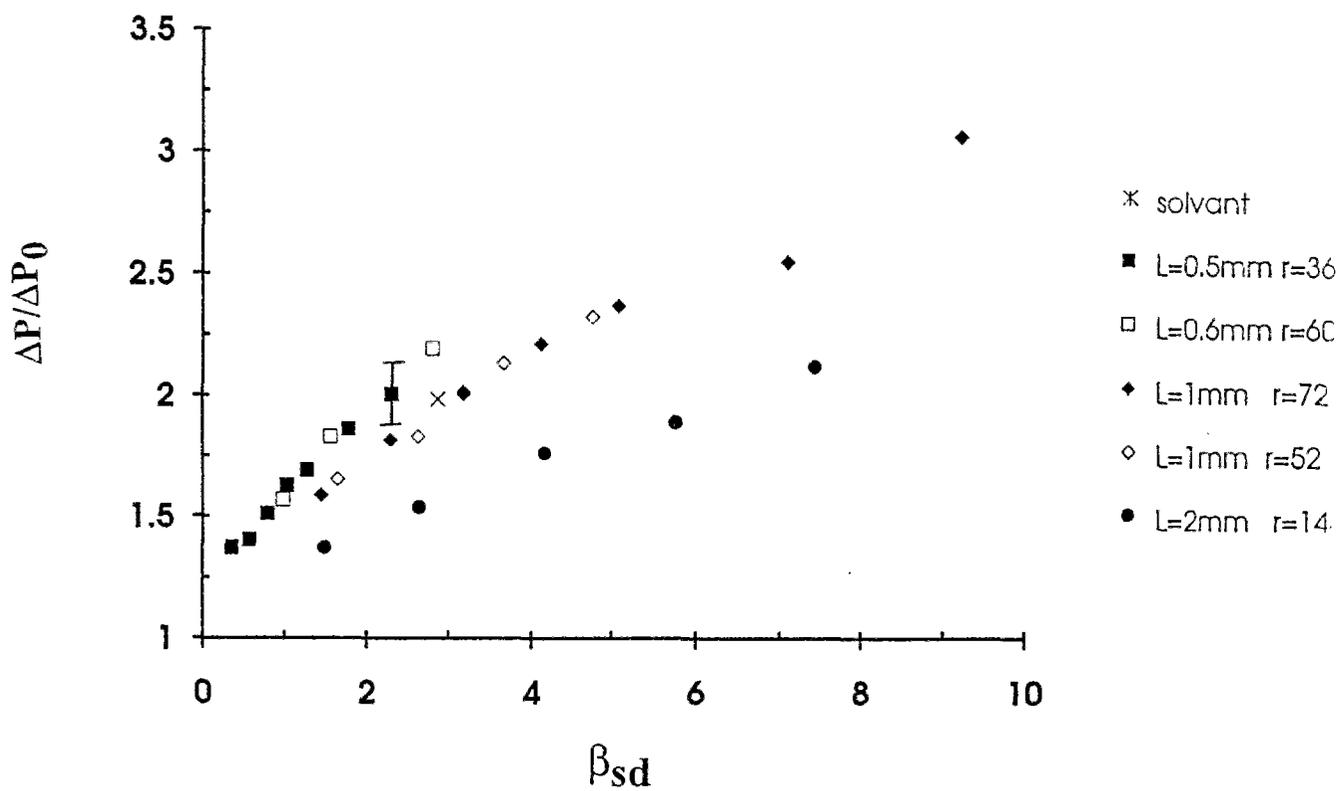


Figure 4.25

Variations de la différence de pression normalisée ($\Delta P / \Delta P_0$) en fonction de la variable du régime semi-dilué $\beta_{sd} = \Phi \cdot r^2 / \text{Log}(\pi / \Phi)$

b) Discussion

Nous avons porté sur la figure 4.26 les valeurs de $\Delta P/\Delta P_0$ élevées au carré en fonction de la variable β_{sd} . Les séries de points déjà regroupées en fonction de la longueur des fibres se placent avec une bonne approximation sur des droites. Les différentes droites correspondent à une longueur de fibre donnée, et s'extrapolent toutes en $\beta=0$ au point correspondant au solvant seul. La pente de ces droites diminue avec la longueur des fibres. Nous avons vérifié que des exposants voisins mais différents de 2 faisaient apparaître de légères courbures et ne donnaient pas de droites à la précision des points expérimentaux. Ces résultats montrent que la différence de pression mesurée ΔP varie comme :

$$\frac{\Delta P}{\Delta P_0} = A(1 + B\beta_{sd})^{1/2}$$

Les valeurs de A et B obtenues par régression linéaire (figure 4.26) sont résumées dans le tableau suivant. La valeur de B diminue avec la longueur des fibres.

longueur des fibres	0.5mm 0.6mm	1mm	2mm
A	1.16±0.05	1.14±0.05	1.14±0.05
B	0.85±0.05	0.66±0.05	0.32±0.05

En pratique, la valeur mesurée de ΔP est la somme de la différence de pression en amont de l'orifice dans la zone centrale de l'écoulement que nous avons notée ΔP_e et dont nous avons obtenu des prédictions théoriques, de la différence de pression dans les zones de recirculation que nous avons négligée sur la base d'arguments physiques, et enfin de la différence de pression en sortie de l'orifice. Une première approximation consiste à considérer que les effets élongationnels sont négligeables en sortie de l'orifice, en nous appuyant sur les observations expérimentales (lignes de courant qualitativement semblables à celles de l'écoulement newtonien et fibres orientées à 90° des lignes de courant en sortie de l'orifice). Dans cette hypothèse, la variation observée pour ΔP correspond à la variation de ΔP_e , dont la forme prédite par les modèles est bien en accord avec la forme ci-dessus. Les valeurs de A et B sont alors à comparer aux ordres de grandeurs donnés par le modèle utilisant le minimum de dissipation d'énergie (équation 4.10). Nous constatons que la valeur de B obtenues avec les fibres les plus longues (0.32) est la plus proche de la valeur de B fournie par le modèle (0.44).

Une comparaison plus poussée avec les modèles nécessiterait une meilleure compréhension de la contribution de l'écoulement en sortie de l'orifice à la différence de pression mesurée.

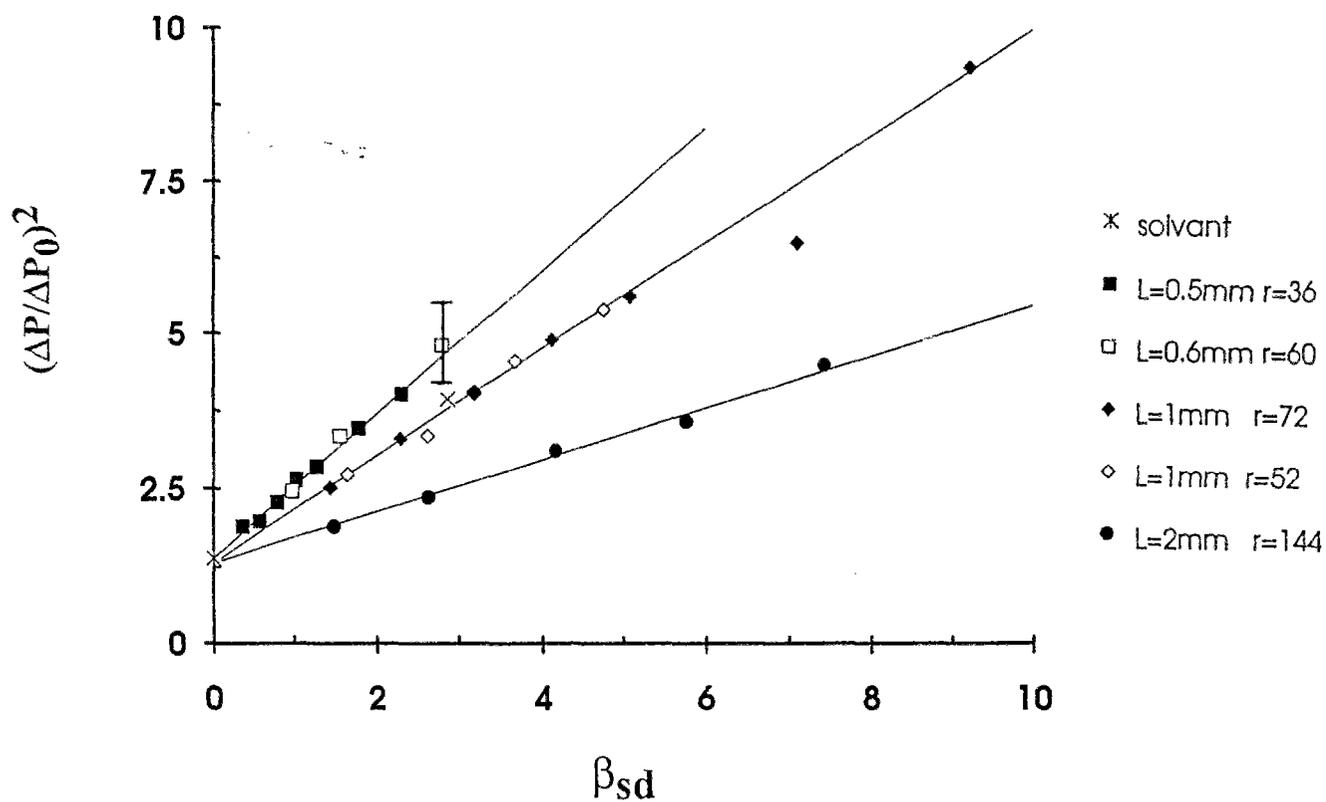


Figure 4.26

Variations du carré de la différence de pression normalisée $(\Delta P/\Delta P_0)^2$ en fonction de la variable du régime semi-dilué $\beta_{sd} = \Phi \cdot r^2 / \text{Log}(\pi/\Phi)$

II.3.3 Conclusion

En ce qui concerne la structuration de l'écoulement, nous avons montré qu'elle pouvait être décrite par une variable unique, caractéristique des propriétés microscopiques de la suspension. Cette variable coïncide, pour l'étendue de variation des paramètres dans nos expériences, avec la variable du modèle de Batchelor pour les suspensions de fibres en régime semi-dilué. Elle permet la renormalisation des valeurs de $(L_V/2R)$ sur une courbe unique. De plus, la meilleure description de la variation de $(L_V/2R)$ en fonction de cette variable, qui est de la forme $(L_V/2R)=A(1+B\beta_{sd})^{1/2}$, est en bon accord avec les modèles. Cependant, pour confirmer la pertinence de la variable $\beta_{sd}=\Phi.r^2/\text{Log}(\pi/\Phi)$, il serait intéressant d'utiliser dans les expériences des fibres de rapport de forme important.

En ce qui concerne la différence de pression mesurée, nous avons montré que l'utilisation de cette même variable microscopique $\beta_{sd}=\Phi.r^2/\text{Log}(\pi/\Phi)$ ne permet pas de renormaliser complètement les courbes, mais de regrouper des points correspondant à une longueur de fibre donnée. Par ailleurs, l'exposant 1/2 de la loi de puissance prédite par les modèles pour la variation de $\Delta P/\Delta P_0$ en fonction de la viscosité élongationnelle est confirmé.

Si la différence de pression dans la zone centrale semble correctement décrite, plusieurs expériences complémentaires mériteraient d'être menées pour améliorer la compréhension de l'écoulement en sortie de l'orifice et de l'effet de la longueur des fibres. Pour comprendre l'effet de la longueur des fibres qui est observé sur la quantité $\Delta P/\Delta P_0$, il faudrait pouvoir explorer expérimentalement un domaine de variation des longueurs plus grand, ce qui n'est pas facile étant donné les échantillons dont nous disposons. Le rôle de la dimension de l'orifice par rapport à la longueur des fibres devrait aussi être étudié expérimentalement, éventuellement en faisant varier le diamètre de l'orifice. Enfin, pour comprendre la contribution à la différence de pression mesurée de l'écoulement en sortie de l'orifice, une expérience permettant de mesurer uniquement la différence de pression en entrée de l'orifice apporterait une information intéressante à la fois sur l'ordre de grandeur de la pression en sortie, et les effets éventuels de la longueur des fibres en sortie de l'orifice. Au point de vue théorique, la contribution des fibres à la différence de pression en sortie de l'orifice pourrait être mieux connue à l'aide d'une analyse dans la configuration qui est observée, c'est-à-dire où les fibres sont orientées à 90° des lignes de courant.

CONCLUSION

Ce travail avait pour but l'étude des propriétés d'écoulement en déformation élongationnelle de suspensions de particules anisotropes, en relation avec la structure locale à l'échelle des particules. Ce type de sollicitation est responsable d'un alignement stable des particules le long des lignes de courant. Dans cette orientation, la contribution à la contrainte des particules est maximale et l'augmentation de la viscosité élongationnelle qui en résulte est responsable d'une modification complète des propriétés d'écoulement. Celles-ci ont été étudiées expérimentalement de façon systématique, et analysées d'un point de vue théorique.

Cette étude a été rendue possible par la mise en oeuvre d'une cellule d'écoulement à orifice permettant d'obtenir une sollicitation élongationnelle bien définie et par la mise au point d'un dispositif expérimental autorisant à la fois des mesures locales et des caractérisations globales de la suspension. L'analyse de l'écoulement que nous avons effectuée débouche sur une connaissance précise du champ de vitesse et de déformation dans cette classe de dispositif élongationnel. Dans notre cas, ces résultats ont montré l'intérêt de la configuration axisymétrique choisie et ont servi de base à une étude quantitative de la dynamique d'orientation des fibres en *régime dilué*. Les résultats expérimentaux sont en très bon accord avec les équations d'évolution du directeur d'une fibre isolée que nous avons pu établir de façon analytique.

En ce qui concerne la structuration de l'écoulement en *régime semi-dilué*, nous avons trouvé que les hauteurs des recirculations toroïdales qui apparaissent autour de l'orifice, mesurées à différentes fractions volumiques et différents rapports de forme, se renormalisent sur une courbe unique en fonction d'une variable "microscopique", qui a pour origine la contribution à la contrainte apportée par les particules à l'échelle locale. Dans le régime semi-dilué, la forme de cette variable résulte d'un traitement type milieu effectif des interactions hydrodynamiques entre particules. La courbe unique que nous avons obtenue est en très bon accord avec les prédictions d'un modèle d'écoulement qui repose sur le principe de minimum de dissipation de l'énergie. Enfin, nous avons établi que la structuration de l'écoulement peut s'interpréter comme le résultat de la compétition entre dissipation d'énergie par effets de cisaillement et par effets d'élongation. La mesure de la viscosité élongationnelle, à partir de la relation entre la contrainte appliquée à l'écoulement et le débit, est délicate dans le type de dispositif que nous avons utilisé. Néanmoins, nous avons trouvé que les données expérimentales obtenues pour différentes suspensions, à longueur de fibre donnée, se renormalisent en fonction de la variable locale. De plus, les variations trouvées semblent en

accord avec les prédictions de notre modèle. Des questions subsistent cependant sur l'effet de la longueur des fibres et la contribution de la partie aval de l'écoulement. Nous avons suggéré un certain nombre d'expériences qui devraient permettre de réaliser des progrès dans ces deux voies.

Ce travail ouvre des perspectives dans plusieurs directions. Tout d'abord, les progrès réalisés sur notre système modèle permettent maintenant d'aborder l'étude de systèmes anisotropes browniens en sollicitation élongationnelle. Nous avons déjà effectué des expériences avec des solutions de polymères semi-rigides, qui montrent des analogies de comportement avec les suspensions de fibres macroscopiques. Nous pensons que ce travail doit être poursuivi et étendu à des systèmes physico-chimiques variés.

Une deuxième ouverture concerne l'étude du rôle des interactions hydrodynamiques sur l'orientation des particules. En effet, en dehors du régime très dilué, on s'attend à ce que les interactions hydrodynamiques soient responsables à l'échelle locale d'une modification de la répartition statistique d'orientation et de la dynamique d'orientation des particules. Partant de notre dispositif expérimental et des connaissances acquises sur le traitement des interactions hydrodynamiques, nous pensons qu'il est maintenant possible d'aborder la mise en évidence et l'étude quantitative des ces effets de dispersion hydrodynamique en écoulement élongationnel.

REFERENCES

- [1] Lamb H., "*Hydrodynamics*" (Dover, New-York, 1932).
- [2] Happel J. et Brenner H., "*Low Reynolds number hydrodynamics*" (Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1983), chapitre 4.
- [3] Batchelor G.K., J. Fluid Mech. 44, 419-440, 1970.
- [4] Chwang A.T et Wu T., J. Fluid Mech. 63, 607-622, 1974.
- [5] Chwang A.T et Wu T., J. Fluid Mech. 67, 787-815, 1975.
- [6] Kim S., Int. J. Multiphase Flow 12, 469-491, 1986.
- [7] Kim S. et Karrila S.J., "*Microhydrodynamics*" (Butterworth-Heinemann, Boston, 1991) chapitre 2.
- [8] Jeffery G.B., Proc. Roy. Soc. A, 102, 161, 1922.
- [9] Bretherton F.P., J. Fluid Mech. 14, 264, 1962.
- [10] Kim S. et Karrila S.J., "*Microhydrodynamics*" (Butterworth-Heinemann, Boston, 1991) chapitre 5.
- [11] Happel J. et Brenner H., "*Low Reynolds number hydrodynamics*" (Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1983) chapitre 5.
- [12] Guyon E., Hulin J.P. et Petit L., "*Hydrodynamique physique*" (InterEditions, Paris, 1991) chapitre 8.
- [13] Leal L.G. et Hinch E.J., J. Fluid Mech. 55, 745-765, 1972.
- [14] Anczurowski E. et Mason S.G., J. Colloid Interface Sci. 23, 522-532, 1967.
- [15] Anczurowski E. et Mason S.G., J. Colloid Interface Sci. 23, 533-546, 1967.

- [16] Anczurowski E., Cox R.G. et Mason S.G., *J. Colloid Interface Sci.* 23, 547-562, 1967.
- [17] Harris J.B. et Pittman J.F T., *Trans. Instn. Chem. Engrs* 54, 73-83, 1976.
- [18] Vincent M., *"Etude de l'orientation de fibres de verre courtes lors de la mise en place de thermoplastiques chargés"*, Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale des Mines de Paris, 1984.
- [19] Cox R.G., *J. Fluid Mech.* 44, 791-810, 1970.
- [20] Cox R.G., *J. Fluid Mech.* 45, 625-657, 1971.
- [21] Brenner H., *Int. J. Multiphase Flow* 1, 195-341, 1974.
- [22] Doi M. et Edwards S.F., *"The theory of polymer dynamics"* (Oxford University Press, New-York, 1986), chap 8, 9 et 10.
- [23] Onsager L., *Ann. N.Y. Acad. Sci* 51, 627-659, 1949.
- [24] Shaqfeh E. et Fredrickson G., *Phys. Fluids A* 2, 7-24, 1990.
- [25] Claeys I. et Brady J., *J. Fluid Mech.* 251, 411-442, 1993.
- [26] Claeys I. et Brady J., *J. Fluid Mech.* 251, 443-477, 1993.
- [27] Claeys I. et Brady J., *J. Fluid Mech.* 251, 479-500, 1993.
- [28] Batchelor G.K., *J. Fluid Mech.* 46, 813-829, 1971.
- [29] Batchelor G.K., *J. Fluid Mech.* 41, 545-570, 1970.
- [30] Mewis J. et Metzner A.B., *J. Fluid Mech.* 62, 593-600, 1974.
- [31] Pittman J.F.T. et Bayram J., *Int. J. Multiphase Flow* 16, 545-559, 1990.
- [32] Hinch E.J. et Leal L.G., *J. Fluid Mech.* 71, 481-495, 1975.
- [33] Hinch E.J. et Leal L.G., *J. Fluid Mech.* 76, 187-208, 1976.

- [34] Dinh S.M. et Armstrong R.C., J. of Rheology 28, 207-227, 1984.
- [35] Stover C.A., Koch D.L. et Cohen C., J. Fluid Mech. 238, 277-296, 1992.
- [36] Milliken W.J., Gottlieb M., Graham A.L., Mondy L.A. et Powell R.L., J. Fluid Mech., 202, 217-232, 1989.
- [37] Fuller G.G. et Leal L.G., Rheol. Acta 19, 580, 1980.
- [38] Müller A.J., Odell J.A. et Keller A., J. of Non Newtonian Fl. Mech. 30, 99, 1988.
- [39] Cathey C.A. et Fuller G.G., J. of Non Newtonian Fl. Mech. 30, 303, 1988.
- [40] Weingerger C.B. et Goddard J.D., Int. J. of Multiphase Flow 1, 465, 1974.
- [41] Mac Sporrán W.C., J. of Non Newtonian Fl. Mech. 8, 119, 1981.
- [42] Moan M. et Magueur A., J. of Non Newtonian Fl. Mech. 30, 343, 1988.
- [43] Sridhar T., Tirtaatmadja V., D.A. Nguyen et R.K. Gupta, J. of Non Newtonian Fl. Mech. 40, 271, 1991.
- [44] Boger D.V. et Walters K., *"Rheological Phenomena in focus"* (Rheology Series 4, Elsevier 1993).
- [45] James D.F. et Saringer J.H., J. Fluid Mech. 97, 665-671, 1980.
- [46] Binding D.M. et Walters K., J. of Non Newtonian Fl. Mech. 30, 233-250, 1988.
- [47] Cartalos U. et Piau J.M., J. of Non Newtonian Fl. Mech. 45, 231-285, 1992.
- [48] Lipscomb II G.G., Denn M.M., Hur D.U. et Boger D.V., J. of Non Newtonian Fl. Mech. 26, 297-325, 1988.
- [49] Binnington R.J. et Boger D.V., J. of Non Newtonian Fl. Mech. 26, 115-123, 1987.
- [50] Zahorski S., J. of Non Newtonian Fl. Mech 41, 309-322, 1992.

- [51] Armstrong R.C., Gupta S.K. et Basaran O., *Polymer Eng. and Sci.* 20 7, 466,1980.
- [52] Sonntag R. C. et Russel W.B., *J. Colloid Interface Sci.* 115 2, 390, 1987.
- [53] Cartalos U., "*Écoulements complexes de polymères dans un solvant épais : conformation des molécules et viscosité élongationnelle*", Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988.
- [54] Assistance Proto Industrie, Meylan, France.
- [55] Cartalos U., "*Écoulements complexes de polymères dans un solvant épais : conformation des molécules et viscosité élongationnelle*", Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988, page III-36 et suivantes.
- [56] Kogelnick A. et Li T., *Applied Optics* 5,1550,1966.
- [57] Rhodorsil huiles, documentation technique Rhône-Poulenc chimie fine, Paris, 1979.
- [58] Guyon E., Hulin J.P. et Petit L., "*Hydrodynamique physique*" (InterEditions, Paris,1991) page 75.
- [59] Happel J. et Brenner H., "*Low Reynolds number hydrodynamics*" (Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1983) p.150 et 513.
- [60] Happel J. et Brenner H., "*Low Reynolds number hydrodynamics*" (Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1983) page 153.
- [61] Happel J. et Brenner H., "*Low Reynolds number hydrodynamics*" (Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1983) page 495.
- [62] White S.A. ,Gotsis A.D. et Baird D.G., *J. of Non Newtonian Fl. Mech* 24, 121-160, 1987.
- [63] Le Flockage, Chateauroux, France.
- [64] Novalis Fibres, France.
- [65] De Teresa S.J., *J. Colloid Interface Sci.*159,400,1993.

- [66] Yamamoto S. et Matsuoka T., J. Chem. Phys. 98 1, 644, 1993.
- [67] Takserman-Krozer R. et Ziabicki A., J.of Polymer Science A1, 491, 1963.
- [68] L.G. Leal, J. of Non Newtonian Fl. Mech 5, 33-78, 1979.
- [69] Keiller R.A., Rallison J.M. et Evans J.G., J. of Non-Newtonian Fl. Mech. 42, 249, 1992.
- [70] Keiller R.A. et Rallison J.M., J. of Non-Newtonian Fl. Mech. 48, 237-259, 1993.
- [71] Keiller R.A. et Hinch E.J., J. of Non-Newtonian Fl. Mech. 40, 323-335, 1991.
- [72] Binding D.M., J. of Non-Newtonian Fl. Mech. 27, 173, 1988.
- [73] Happel J. et Brenner H., "*Low Reynolds number hydrodynamics*" (Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1983) p.29.
- [74] Cogswell F.N., Polymer Eng. and Sci., 12, 1, 64-73, 1972.

DEUXIEME PARTIE

**ETUDE EN LOIS D'ECHELLES DES COUCHES LIMITES
EN CONVECTION THERMOSOLUTALE**

PLAN

I. ANALYSE EN ORDRE DE GRANDEUR p.241

- I.1 Présentation du problème
- I.2 La méthode intégrale
- I.3 Résultats de l'analyse en ordre de grandeur
 - I.3.1 Profils de vitesse
 - I.3.2 Lois d'échelle
 - I.3.3 Conclusion

II. SOLUTIONS DE SIMILITUDE p.251

- II.1 Système différentiel associé à la recherche d'une solution de similitude
- II.2 Résultats numériques
 - II.2.1 Profils de vitesse
 - II.2.2 Lois d'échelle
 - II.2.3 Termes prépondérants dans l'équation de quantité de mouvement

III. ARTICLE: "Scaling of boundary layer flows driven by double diffusive convection" p.267

INTRODUCTION

La deuxième partie de cette thèse concerne l'étude des couches limites au voisinage d'une paroi verticale plongée dans un fluide soumis à des gradients de température et de concentration horizontaux.

Dans ce problème de convection thermosolutale, les forces ascensionnelles ont pour origine deux grandeurs scalaires, la température et la concentration, qui diffusent avec des coefficients différents. Il en résulte une grande richesse de situations suivant l'importance relative des forces d'origine thermique et solutale, et suivant les valeurs des diffusivités thermique et solutale.

Dans la géométrie que nous étudions, les gradients de température et de concentration sont responsables de l'existence d'une vitesse verticale le long de la paroi. Le mouvement convectif qui en résulte s'oppose à la diffusion de la température et de la concentration vers l'intérieur du fluide. Il apparaît alors une couche limite de température et une couche limite de concentration, qui sont les longueurs caractéristiques sur lesquelles ces deux grandeurs varient dans la direction transversale. La difficulté du problème réside dans le couplage entre le champ de vitesse et les deux champs scalaires diffusifs, et dans les échelles de variation très différentes des diverses couches limites.

Nous nous intéressons dans ce travail aux variations de l'épaisseur des couches limites en fonction des paramètres adimensionnels du problème. Pour cela, nous utilisons une méthode nouvelle qui combine une analyse en ordre de grandeur et une méthode intégrale. Contrairement aux analyses en ordre de grandeur effectuées jusqu'ici en convection thermosolutale, notre approche tient compte non seulement de l'importance relative des différentes contributions aux équations de conservation du problème, mais aussi des longueurs caractéristiques sur lesquelles elles interviennent. Elle nous permet de prédire complètement les différents régimes d'écoulement possibles (profil de vitesse, de température et de concentration), dans une large gamme de paramètres d'intérêt pratique. Les résultats sont corroborés par des solutions de similitude obtenues numériquement.

Le texte est essentiellement constitué d'une proposition d'article en anglais, précédée de deux parties introductives. Dans la première partie, qui concerne l'analyse en ordre de grandeur, nous présentons succinctement le problème étudié et la méthode intégrale utilisée pour l'analyse en ordre de grandeur, ainsi qu'un résumé des résultats obtenus. La deuxième partie est consacrée à la recherche d'une solution de similitude pour la fonction de courant, et à la résolution numérique du système différentiel associé. Les résultats des calculs numériques sont comparés aux prédictions de l'analyse d'échelle.

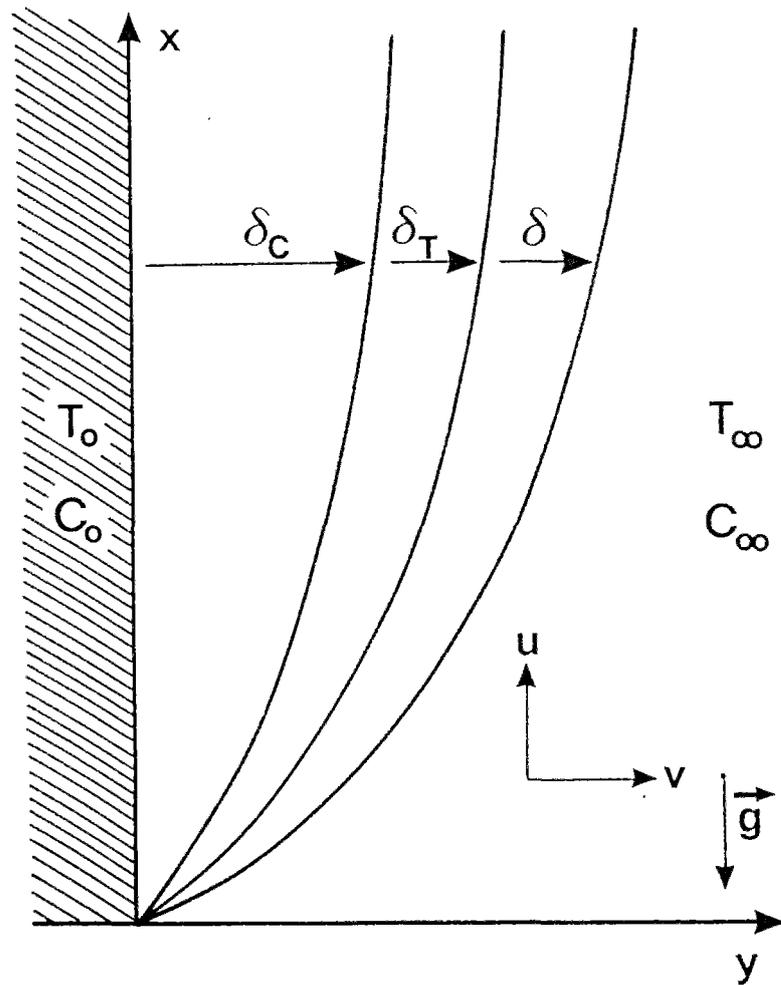


Figure 1

Géométrie d'écoulement considérée
et signification des couches limites de température et de concentration.

I. ANALYSE EN ORDRE DE GRANDEUR

I.1 Présentation du problème

Nous étudions la convection naturelle thermosolutale créée dans un milieu fluide au voisinage d'une plaque verticale (figure 1). Les valeurs de la température et de la concentration sur la plaque (T_0 et C_0) et à l'infini dans le fluide (T_∞ et C_∞) sont fixées.

Le problème est régi, dans l'approximation de couche limite, par les équations suivantes :

- l'équation d'incompressibilité :
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

- l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta_T(T - T_\infty) + g\beta_C(C - C_\infty) \quad (2)$$

- l'équation de conservation de la chaleur :
$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

- l'équation de conservation de la masse :
$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (4)$$

La vitesse verticale suivant x est notée u , la vitesse horizontale suivant y est notée v . Dans ces équations, T et C désignent les champs de température et de concentration, α et D les diffusivités thermique et massique, ν la viscosité cinématique ou coefficient de diffusion de la quantité de mouvement, β_T et β_C les coefficients d'expansion thermique et massique.

Les hypothèses sous-jacentes à l'obtention de ce système d'équations sont détaillées au paragraphe 2 de l'article. Nous rappelons en particulier que les équations sont écrites dans l'approximation de Boussinesq. Il n'y a qu'une seule échelle de longueur suivant la verticale, qui sera notée x . Cette échelle verticale est supposée beaucoup plus grande que toutes les échelles horizontales du problème.

Les échelles horizontales comprennent en particulier les épaisseurs des couches limites de température et de concentration, notées $\delta_T(x)$ et $\delta_C(x)$. Ce sont les longueurs sur lesquelles la température (ou la concentration) décroît depuis la valeur T_0 (ou C_0) sur la paroi, à la valeur T_∞ (ou C_∞) à l'infini. Nous serons amenés à introduire par la suite d'autres échelles de longueur.

Les paramètres adimensionnels qui interviennent dans les ordres de grandeur des différents termes qui figurent dans les équations (1) à (4) sont les suivants. Le nombre $N = \beta_C(C_0 - C_\infty) / (\beta_T(T_0 - T_\infty))$ mesure l'importance relative des forces ascensionnelles d'origine thermique et d'origine solutale. Lorsque N est négatif, les deux forces agissent en sens opposé, ce qui peut conduire à des situations très variées. Dans la suite, nous nous limiterons aux situations où N est positif, mais peut prendre des valeurs très faibles (force thermique dominante, $N \ll 1$) ou très importantes (force solutale dominante $N \gg 1$). Le nombre de Rayleigh thermique est défini comme $Ra(x) = g\beta_T|T_0 - T_\infty|x^3 / \alpha\nu$. Nous nous limitons aux situations où $Ra(x)$ est plus grand que 1 mais suffisamment faible pour que l'écoulement soit laminaire.

Enfin, nous utiliserons les trois nombres adimensionnels qui comparent l'importance relative des différents coefficients de diffusion α , D et ν : le nombre de Lewis $Le = \alpha/D$, le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\alpha$, et le nombre de Schmidt $Sc = \nu/D$. En général, la température diffusant beaucoup plus rapidement que la masse, α est très supérieur à D et le nombre de Lewis est très grand devant 1. En remarquant que $Le = Sc/Pr$, nous voyons que la condition $Le \gg 1$ conduit à trois cas asymptotiques différents :

- cas n°1 : $Pr \ll Sc \ll 1$
- cas n°2 : $Pr \ll 1 \ll Sc$
- cas n°3 : $1 \ll Pr \ll Sc$.

Chacun de ces trois cas correspondent à des situations physiques dont des exemples sont donnés dans l'article. Ces trois cas font l'objet de notre étude et sont envisagés successivement dans l'analyse en ordre de grandeur et dans les calculs numériques.

1.2 La méthode intégrale

La méthode que nous avons mise en oeuvre comporte plusieurs étapes. Dans un premier temps, nous introduisons les différentes échelles de longueur et de vitesse qui décrivent les profils de température, de concentration, et de vitesse. Dans un deuxième temps, nous écrivons les équations de conservation sous forme intégrale et nous distinguons différentes régions de l'écoulement dans lesquelles nous estimons l'ordre de grandeur des différents termes. Dans une troisième étape, nous nous plaçons dans des régimes asymptotiques qui permettent de simplifier les équations de conservation du problème ainsi obtenues, en ne retenant que les termes dominants dans chaque région de l'écoulement. Ceci nous permet en particulier suivant les valeurs de N , Pr , et Sc , d'identifier les différentes échelles de longueur avec les différentes régions de l'écoulement. Nous disposons alors de suffisamment de relations pour décrire complètement les différentes échelles caractéristiques du problème, que nous obtenons en fonction des paramètres adimensionnels. Enfin, nous

vérifions a posteriori que les lois d'échelles obtenues sont compatibles avec les hypothèses effectuées, et que toute autre hypothèse conduirait à des résultats contradictoires.

I.2.1 Introduction des différentes échelles caractéristiques

Nous sommes amenés à introduire différentes échelles caractéristiques en plus des échelles δ_T et δ_C caractérisant les profils de température et de concentration. La description complète du profil de vitesse vertical nécessite l'introduction de deux échelles de longueur supplémentaires, δ_m et δ qui sont respectivement les distances, repérées à partir de la plaque verticale, sur lesquelles la vitesse atteint son maximum et celle où elle s'annule (figure 2). Nous appelons U_m la valeur maximale de la vitesse u en δ_m . Nous notons U_T et U_C les valeurs de la vitesse u en δ_T et en δ_C . Selon les cas, nous pouvons avoir $U_C = U_m$ ou $U_T = U_m$.

Nous introduisons par ailleurs une dernière échelle de longueur, δ_v , qui repère la distance à la paroi au-delà de laquelle le terme de viscosité devient négligeable dans l'équation de quantité de mouvement.

Des hypothèses préliminaires sur les valeurs relatives des échelles de longueur δ_T , δ_C , et δ_v , peuvent être effectuées en s'appuyant sur l'analyse en ordre de grandeur effectuée dans le cas de la convection thermique pure ($N=0$). Cette analyse est exposée au paragraphe 3 de l'article. Elle permet de distinguer deux grandes classes de profils de vitesse, suivant que le nombre de Prandtl est grand ou petit devant 1. Dans la première classe de profils ($Pr \ll 1$), la vitesse et la température s'annulent en même temps à cause de l'absence de termes de viscosité au-delà de δ_T . Dans la deuxième classe de profils ($Pr \gg 1$), la vitesse s'étend au-delà de δ_T car les termes de viscosité jouent un rôle d'entraînement. De plus, le fait que le nombre de Prandtl soit très grand devant 1 entraîne que la quantité de mouvement diffuse plus vite que la température et par conséquent $\delta_v \geq \delta_T$. Par analogie, la valeur du nombre de Schmidt permet de comparer δ_v et δ_T . En résumé, nous avons dans les trois cas étudiés :

- cas n°1 : ($Pr \ll Sc \ll 1$) $\delta_v \leq \delta_C \leq \delta_T$
- cas n°2 : ($Pr \ll 1 \ll Sc$) $\delta_C \leq \delta_v \leq \delta_T$
- cas n°3 : ($1 \ll Pr \ll Sc$) $\delta_C \leq \delta_T \leq \delta_v$.

I.2.2 Equations intégrales pour les couches limites

Nous utilisons une forme alternative du système d'équation (1) à (4), qui est obtenue en combinant l'équation (1) avec les équations (2) (3) et (4). Les équations qui en résultent sont intégrées par rapport à la variable y , entre deux bornes qui sont notées dans un premier temps y_1 et y_2 , pour donner :

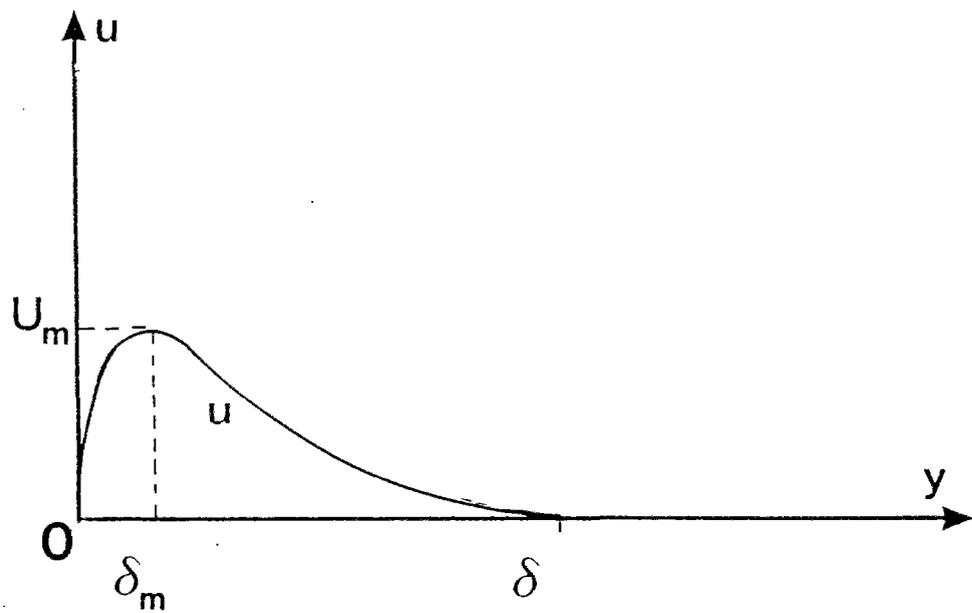


Figure 2

Introduction d'échelles caractéristiques supplémentaires.

- quantité de mouvement intégrée entre y_1 et y_2 :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dy + u(y_2)v(y_2) - u(y_1)v(y_1) = v \left\{ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y_2} - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y_1} \right\} + \int_{y_1}^{y_2} [g\beta_T(T - T_\infty) + g\beta_C(C - C_\infty)] dy$$

- conservation de la chaleur intégrée entre y_1 et y_2 :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial(uT)}{\partial x} dy + u(y_2)T(y_2) - v(y_1)T(y_1) = \alpha \left\{ \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y_2} - \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y_1} \right\}$$

- conservation de la masse intégrée entre y_1 et y_2 :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial(uC)}{\partial x} dy + u(y_2)C(y_2) - u(y_1)C(y_1) = D \left\{ \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y_2} - \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y_1} \right\}$$

Nous utilisons ensuite ces équations de conservation écrites sous forme intégrale de la manière suivante. Nous commençons par évaluer chaque terme figurant dans les différentes équations, en nous plaçant dans les régions de l'écoulement définies par les échelles de longueur introduites précédemment, et en utilisant les échelles de vitesse appropriées. Nous nous plaçons dans des situations asymptotiques où en pratique il n'est pas nécessaire de tenir compte simultanément de tous les mécanismes physiques mis en jeu (advection, viscosité, forces ascensionnelles d'origine thermique ou solutale). Nous retenons alors dans chaque région les mécanismes dominants, ce qui permet de résoudre complètement le problème en déterminant les différentes échelles de longueur et de vitesse.

I.3 Résultats de l'analyse en ordre de grandeur

Nous avons résumé dans les tableaux 1, 2 et 3 les résultats de l'analyse en ordre de grandeur pour chacun des trois cas asymptotiques considérés. Sur chaque figure sont dessinés schématiquement l'allure des différents profils de vitesse prédits par l'analyse. Nous avons mentionné dans chaque région de l'écoulement les termes dominants dans l'équation de quantité de mouvement. Enfin, nous donnons les expressions des lois d'échelle concernant les longueurs δ_T , δ_C , δ_v , et δ , et les vitesses U_T et U_C , en fonction des paramètres adimensionnels du problème et pour les différents régimes d'écoulement. Les longueurs sont toutes

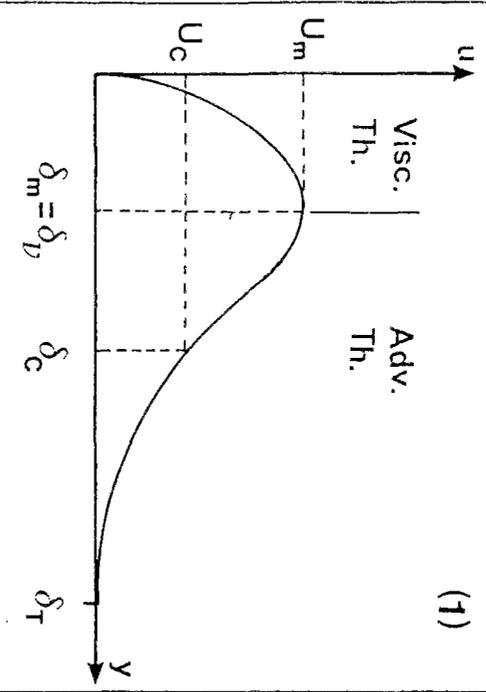
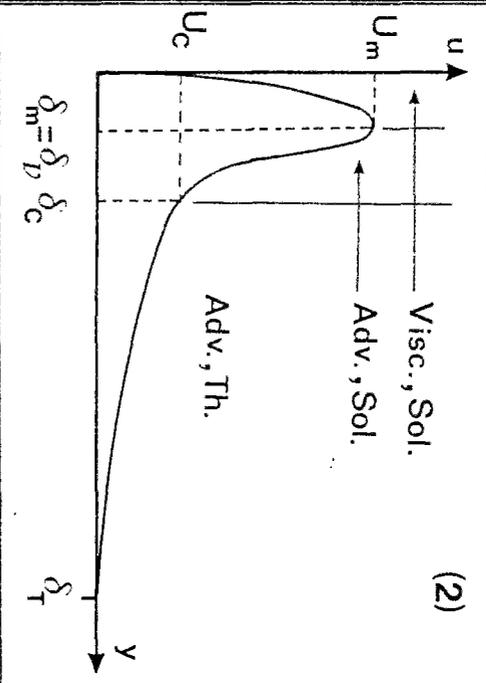
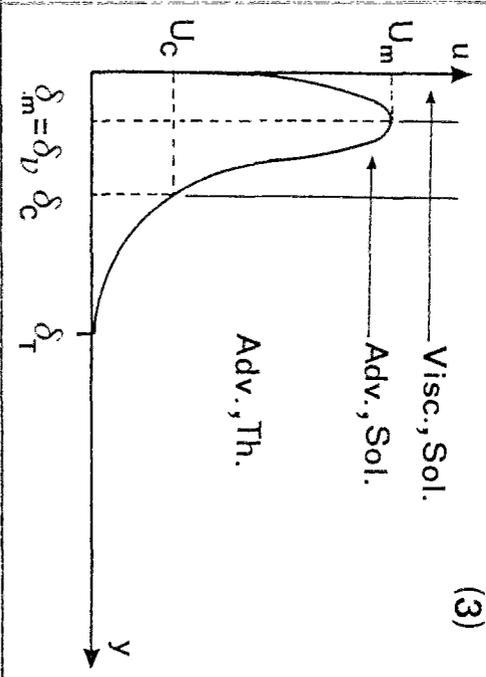
$N \ll 1$	$N \gg 1$	
 <p>(1)</p>	 <p>(2)</p>	 <p>(3)</p>
$\delta_m = \delta_v \sim Pr^{-1/4}$	$\delta_m = \delta_v \sim N^{-1/4} Pr^{1/4}$	$\delta_m = \delta_v \sim N^{-1/4} Pr^{1/4}$
$U_m = U_v \sim Pr^{1/2}$	$U_m = U_v \sim N^{1/2} Pr^{1/2}$	$U_m = U_v \sim N^{1/2} Pr^{1/2}$
$\delta_c \sim Pr^{-1/4} Le^{-1/2}$	$\delta_c \sim N^{-1/4} Pr^{-1/4} Le^{-1/2}$	$\delta_c \sim N^{-1/4} Pr^{-1/4} Le^{-1/2}$
$U_c \sim Pr^{1/2}$	$U_c \sim Pr^{1/2}$	$U_c \sim Pr^{1/2}$
$\delta_T = \delta \sim Pr^{-1/4}$	$\delta_T = \delta \sim N^{-1/4} Pr^{-1/4} Le^{1/2}$	$\delta_T = \delta \sim N^{-1/4} Pr^{-1/4} Le^{1/2}$

Tableau 1. résumé des profils de vitesse et des lois d'échelle obtenus dans les différents régimes asymptotiques dans le cas $Pr \ll Sc \ll 1$. Les échelles de longueur et les échelles de vitesse sont proportionnelles respectivement à $xRa(x)^{-1/4}$ et $\alpha Ra(x)^{1/2}/x$, qui ne sont pas mentionnés dans le tableau.
 Th. : terme source d'origine thermique, Sol. : terme source d'origine solutale, Adv. : terme d'advection, Visc. : terme de viscosité.

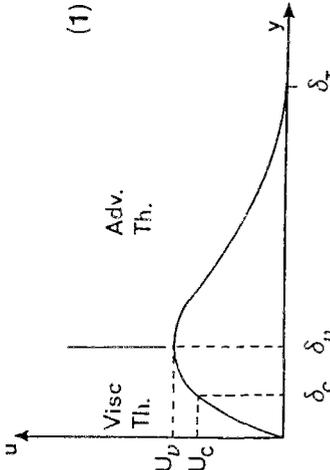
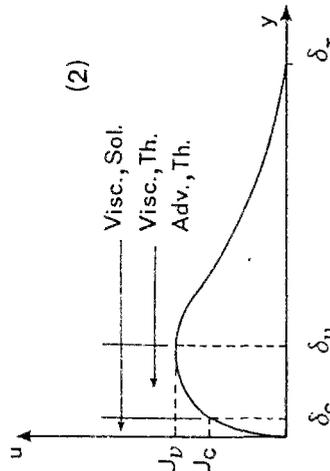
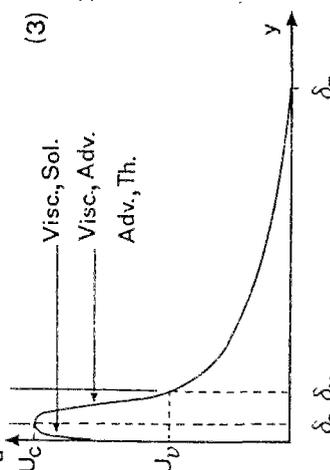
$N \ll Sc^{1/3}$	$N \gg Sc^{1/3}$	
$N \ll Sc$		
 <p>(1)</p>	 <p>(2)</p>	 <p>(3)</p>
$\delta_C \sim Pr^{1/4} Sc^{-1/3}$	$\delta_C \sim N^{-1/4} Pr^{1/4} Sc^{-1/4}$	
$U_C \sim Pr^{1/2} Sc^{-1/3}$	$U_C \sim N^{1/2} Pr^{1/2} Sc^{-1/2}$	
$\delta_V \sim Pr^{1/4}$	$\delta_V \sim N^{-1/4} Pr^{1/4} Sc^{1/4}$	
$N \gg Sc$		
$N \gg Pr^2 Sc$		
$\delta_T = \delta \sim Pr^{-1/4}$		$\delta_T = \delta \sim N^{-1/4} Pr^{-3/4} Sc^{1/4}$

Tableau 2: résumé des profils de vitesse et des lois d'échelle obtenus dans les différents régimes asymptotiques dans le cas $Pr \ll 1 \ll Sc$. Les échelles de longueur et les échelles de vitesse sont proportionnelles respectivement à $xRa(x)^{-1/4}$ et $\alpha Ra(x)^{1/2}/x$, qui ne sont pas mentionnés dans le tableau.

Th. : terme source d'origine thermique, Sol. : terme source d'origine solutale, Adv. : terme d'advection, Visc. : terme de viscosité.

$N \ll Pr^{-1/3} Sc^{1/3}$		$N \gg Pr^{-1/3} Sc^{1/3}$	
$N \ll Pr^{-1} Sc$		$N \gg Pr^{-1} Sc$	
<p>(1)</p>		<p>(2)</p>	
<p>(3)</p>		<p>(4)</p>	
$\delta_c \sim Pr^{1/3} Sc^{-1/3}$		$\delta_c \sim N^{-1/4} Pr^{1/4} Sc^{-1/4}$	
$U_c \sim Pr^{1/3} Sc^{-1/3}$		$U_c \sim N^{1/2} Pr^{1/2} Sc^{-1/2}$	
	$\delta_T \sim 1$		$\delta_T \sim N^{-1/4} Pr^{-1/4} Sc^{1/4}$
	$U_T \sim 1$		$U_T \sim N^{1/2} Sc^{-1/2}$
	$\delta_v \sim \delta \sim Pr^{1/2}$		$\delta_v \sim \delta \sim N^{-1/4} Pr^{1/4} Sc^{1/4}$

Tableau 3. résumé des profils de vitesse et des lois d'échelle obtenus dans les différents régimes asymptotiques dans le cas $1 \ll Pr \ll Sc$. Les échelles de longueur et les échelles de vitesse sont proportionnelles respectivement à $x Ra(x)^{-1/4}$ et $\alpha Ra(x)^{1/2}/x$, qui ne sont pas mentionnés dans le tableau. (N.B : le terme de viscosité intervient dans tous les cas). Th. : terme source d'origine thermique, Sol. : terme source d'origine solutale, Adv. : terme d'advection

proportionnelles à $xRa(x)^{-1/4}$ et les vitesses sont toutes proportionnelles à $\alpha Ra(x)^{1/2}/x$. Nous n'avons pas mentionné ces préfacteurs dans les tableaux.

I.3.1 Profils de vitesse

A l'intérieur même des deux grandes classes de profils de vitesse déjà mentionnées au paragraphe 2, qui constituent le point de départ des raisonnements en ordre de grandeur, nous parvenons au terme de l'analyse à distinguer une grande variété de profils de vitesse, qui présentent des propriétés distinctes.

Une première distinction s'effectue à partir de la position du maximum de la vitesse U_m . Nous rencontrons en effet des profils de vitesse où le maximum de la vitesse est en δ_C , en δ_T , ou encore en δ_v .

Une deuxième différence concerne la pente à l'origine de la vitesse, $\partial u / \partial y(0)$, qui peut être déterminée soit par la convection thermique soit par la convection solutale. Cette pente à l'origine est une grandeur physiquement intéressante puisqu'elle est directement reliée à la contrainte de cisaillement exercée par le fluide sur la paroi : $\tau(\text{paroi}) = \nu \partial u / \partial y(0)$.

Enfin, dans le cas où $Pr \ll 1$ et où par conséquent la vitesse et la température s'annulent sur la même distance $\delta = \delta_T$, il existe des profils qui se distinguent uniquement par la valeur de cette distance δ (tableau 1, profils (2) et (3); tableau 2, profils (3) et (4)). Cette différence se manifeste au niveau du transfert de chaleur, qui sera dû à la convection thermique dans la région comprise entre δ_C et δ_v , ou à la convection thermique dans la région voisine comprise entre δ_v et δ .

Par ailleurs, nous pouvons classer les profils de vitesses qui présentent des propriétés communes en plusieurs groupes. Un premier groupe concerne les profils de vitesse numérotés (1) sur les figures, qui sont des profils de type "thermique pur", c'est-à-dire qu'ils sont identiques à ceux que l'on obtient pour $N=0$. Il faut remarquer que la condition d'obtention de ces profils n'est pas simplement $N \ll 1$, mais une combinaison plus compliquée des différents paramètres adimensionnels. Par exemple, dans le cas n°2 où $Pr \ll 1 \ll Sc$, et dans le cas n°3 où $1 \ll Pr \ll Sc$, le profil thermique pur se rencontre lorsque les paramètres adimensionnels vérifient respectivement $N \ll Sc^{1/3}$ et $N \ll Pr^{-1/3} Sc^{1/3}$, ce qui autorise des valeurs de N très supérieures à 1, pourvu que les valeurs de Sc ou du rapport Sc/Pr restent grandes.

Lorsque $Pr \ll 1 \ll Sc$ et $1 \ll Pr \ll Sc$, les profils de vitesse de type (2) sont analogues dans la mesure où ils sont déterminés par la convection solutale dans la première partie de l'écoulement située entre la paroi verticale et δ_C et par la convection thermique au-delà.

Les profils de type (3) pour $Pr \ll Sc \ll 1$ et de type (4) pour $Pr \ll 1 \ll Sc$ et $1 \ll Pr \ll Sc$ sont analogues. Il faut cependant noter que la convection solutale est couplée à la convection

thermique, sauf dans le dernier cas où la convection thermique ne joue pas, et où le profil de vitesse est donc de type "solutal pur".

Enfin, les autres profils de type (2) pour $Pr \ll Sc \ll 1$ et de type (3) pour $Pr \ll 1 \ll Sc$ et $1 \ll Pr \ll Sc$ sont régis par un couplage entre la convection thermique et la convection thermosolutale, et sont tous différents entre eux.

1.3.2 Lois d'échelle

Chaque domaine asymptotique est régi par un ensemble de lois d'échelles qui décrivent les couches limites δ_T et δ_C , les longueurs δ_v et δ , ainsi que les vitesses U_T et U_C .

L'apparition d'un changement dans le profil de vitesse, tels que ceux que nous venons de décrire, est associé à un changement de régime dans les lois d'échelles. Prenons l'exemple du cas n°2. Le passage d'un profil de vitesse où la pente à l'origine est déterminée par la température (profil (1)) à un profil où elle est déterminée par la concentration (profil(2)) est associé à un changement de régime pour les lois d'échelles de δ_C et U_C . Le passage du maximum de vitesse de δ_v (profil (2)) à δ_C (profil (3)) est associé à un changement de régime pour la loi d'échelle de δ_v . Enfin, le passage du profil (3) au profil (4) détermine le changement de régime pour la loi d'échelle de δ_T .

La signification physique de ces différents régimes est décrite en détail dans l'article. Nous rappelons cependant que dans chacun des trois cas étudiés, le changement de loi d'échelle pour δ_C traduit le passage d'une situation où le transfert des espèces chimiques est régi par la convection thermique, à une situation où ce transfert est régi par la convection solutale. De même, le changement de régime pour δ_T correspond au passage d'une situation où le transfert de chaleur est déterminé par la convection thermique à une situation où il est déterminé par la convection solutale.

1.3.3 Conclusion

Il est intéressant de remarquer que les changements de régimes concernant les profils de vitesse et les lois d'échelles qui leur sont associées font intervenir des combinaisons souvent compliquées des paramètres adimensionnels du problème N , Le , Pr , et Sc . Nous insistons sur le fait que ces résultats sont obtenus grâce à la méthode intégrale, qui met en évidence des changements de régime qu'une simple analyse en ordre de grandeur ne peut déceler.

Un des résultats les plus inattendus concerne en particulier l'existence de profils de vitesse identiques à ceux que l'on rencontre en convection thermique pure ($N=0$) alors même que les forces d'origine solutale sont dominantes.

II. SOLUTIONS DE SIMILITUDE

Afin de tester la validité des lois d'échelle obtenues précédemment, nous avons cherché des solutions aux équations de couche limite sous la forme d'une solution de similitude pour la vitesse verticale $u(x,y)$.

Une solution de similitude signifie que la vitesse au point de coordonnées (x_1, y_1) est la même qu'au point de coordonnées (x_2, y_2) à condition que la variable vitesse soit renormalisée par une échelle de vitesse $U(x)$ qui ne dépende que de x , et que la variable y soit renormalisée par une longueur $\delta(x)$ qui ne dépende que de x . Autrement dit, la quantité $u(x, y/\delta(x))/U(x)$ est indépendante de x et nous sommes alors ramenés à un problème qui ne comporte plus qu'une variable d'espace $\eta = y/\delta(x)$. Ceci présente l'avantage de remplacer le système d'équations aux dérivées partielles constitué par les équations (1) à (4) par un système d'équations différentielles ordinaires.

Nous choisissons pour échelle de longueur $\delta(x)$ la longueur $xRa(x)^{-1/4}$, puisque nous avons trouvé au paragraphe I que toutes les échelles de longueur sont proportionnelles à cette quantité qui a la dimension d'une longueur. Nous introduisons la fonction de courant Ψ , que nous chercherons sous la forme : $\Psi(x, \eta) = c(x)\Phi(\eta)$ où c et Φ sont respectivement des fonctions de x et de η seulement. La fonction Φ est sans dimension. La vitesse verticale $u(x, \eta)$ s'exprime en fonction de Φ et c suivant :

$$u(x, \eta) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = c(x)\delta(x)\Phi'(\eta)$$

Nous choisissons pour ordre de grandeur de la vitesse u l'échelle de vitesse $\alpha Ra(x)^{1/2}/x$, puisque nous avons trouvé précédemment que toutes les vitesses sont proportionnelles à cette quantité. Finalement, $c(x)\delta(x) = \alpha Ra(x)^{1/2}/x$ et les vitesses u et v deviennent :

$$\begin{cases} u(x, \eta) = -\frac{\alpha}{x} Ra(x)^{1/2} \Phi'(\eta) \\ v(x, \eta) = \frac{\alpha}{x^2} Ra(x)^{1/4} [3\Phi(\eta) - \eta\Phi'(\eta)] \end{cases}$$

La température et la concentration sont transformées en variables adimensionnelles θ et γ :

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T} \qquad \gamma = \frac{C - C_\infty}{C_0 - C_\infty} = \frac{C - C_\infty}{\Delta C}$$

En substituant dans les équations (2) à (4), nous obtenons le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned}\Phi'' + 3\Phi\Phi'' - 2\Phi'^2 + (\theta + N\gamma) &= 0 \\ \theta'' + 3Pr\Phi\theta' &= 0 \\ \gamma'' + 3Sc\Phi\gamma' &= 0\end{aligned}$$

avec les conditions aux limites : $\theta(0)=\gamma(0)=1$; $\Phi(0)=0$; $\theta(\infty) = \gamma(\infty) = 0$.

Nous voulons résoudre ce système d'équations différentielles non-linéaires sur un intervalle d'intégration compris entre $\eta=0$ et $\eta=+\infty$, avec des conditions aux limites réparties entre les deux extrémités de l'intervalle. Une démarche classique consiste d'abord à se ramener à un système du premier ordre en effectuant le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}z_1(\eta) &= \Phi(\eta) \\ z_2(\eta) &= \theta(\eta) \\ z_3(\eta) &= \Phi'(\eta) \\ z_4(\eta) &= \theta'(\eta) \\ z_5(\eta) &= \Phi''(\eta)\end{aligned}$$

Le système différentiel devient :

$$\begin{aligned}z'_1 &= z_3 \\ z'_2 &= z_4 \\ z'_3 &= z_5 \\ z'_4 &= \frac{3}{4}z_1z_2 \\ z'_5 &= \left(\frac{3}{4}z_1z_5 - \frac{1}{2}z_3^2\right) / Pr + z_2 + Nz_6 \\ z'_6 &= z_7 \\ z'_7 &= \frac{3}{4}Lez_1z_7\end{aligned}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned}\text{- en } \eta=0 : & \quad z_1=0, \quad z_2=1, \quad z_3=0, \quad z_4=1 \\ \text{- en } \eta=+\infty & \quad z_3=0, \quad z_4=0, \quad z_5=0.\end{aligned}$$

Nous avons utilisé pour résoudre ce système numériquement une méthode de différences finies avec pas variable, afin de tenir compte des échelles de longueur très différentes du problème. Nous disposons d'une bibliothèque de programmes en fortran (IMSL) qui comporte un module d'intégration par différences finies (DVCPR). Ce module permet de choisir une discrétisation de départ de l'intervalle d'intégration, qui est ensuite adaptée au

cours du calcul de manière à ce que les erreurs locales soient approximativement de la même importance partout. Ceci est très important dans notre problème où les différentes quantités varient sur des échelles de longueur très différentes. Par exemple, pour les valeurs très grandes du nombre de Lewis ($Le \geq 10^3$) nous avons été amenés à choisir une discrétisation de départ très fine au voisinage de la paroi afin de tenir compte dans cette région des variations de la concentration.

Pour résoudre le problème de l'extension infinie de l'intervalle d'intégration, nous avons cherché des solutions sur des intervalles successifs $[0, \eta_f]$, où l'extrémité de l'intervalle η_f augmente progressivement jusqu'à ce que les solutions obtenues ne diffèrent plus. En pratique, des intervalles de longueur $\eta_f = 30$ suffisent pour obtenir des solutions qui sont identiques, la tolérance sur la valeur relative comparant deux solutions voisines étant de l'ordre de 10^{-4} . Les résultats de l'intégration du système ont été testés dans le cas de la convection thermique pure ($N=0$), pour lequel les profils de vitesse et de température sont connus.

II.2 Résultats

Nous avons obtenus des solutions pour une large gamme de variation des paramètres adimensionnels du problème, qui s'étend selon les cas sur plusieurs décades.

II.2.1 Profils de vitesse

Les résultats concernant les profils de vitesse dans chacun des trois cas asymptotiques sont présentés sur les figures 3 à 5. Nous avons résolu le système différentiel pour les valeurs des paramètres adimensionnels qui correspondent aux différents régimes prévus par l'analyse en ordre de grandeur. Sur les profils obtenus pour la vitesse, la température et la concentration, nous pouvons identifier la position et la valeur du maximum de la vitesse, et l'extension des couches limites δ_C et δ_T . En comparant avec les profils schématisés présentés dans les tableaux 1, 2 et 3, nous observons un très bon accord avec les prédictions de l'analyse en ordre de grandeur.

II.2.2 Lois d'échelle

Numériquement, nous avons accès facilement aux valeurs à la paroi des dérivées de la température et de la concentration adimensionnelles, $\theta'(0)$ et $\gamma'(0)$. En pratique, ces deux quantités peuvent servir d'estimation pour δ_T et δ_C , puisque :

$$\delta_T \equiv \delta(x) / |\theta'(0)| \quad \text{et} \quad \delta_C \equiv \delta(x) / |\gamma'(0)|.$$

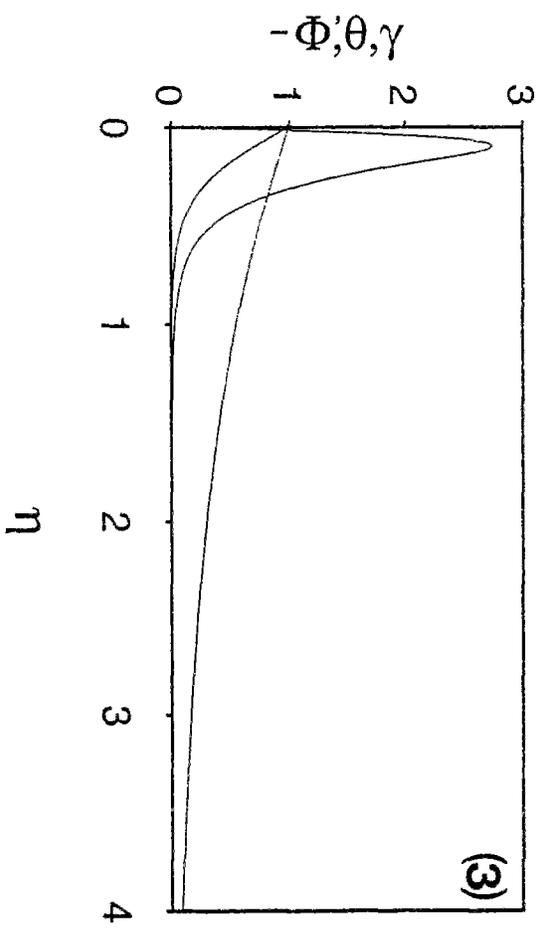
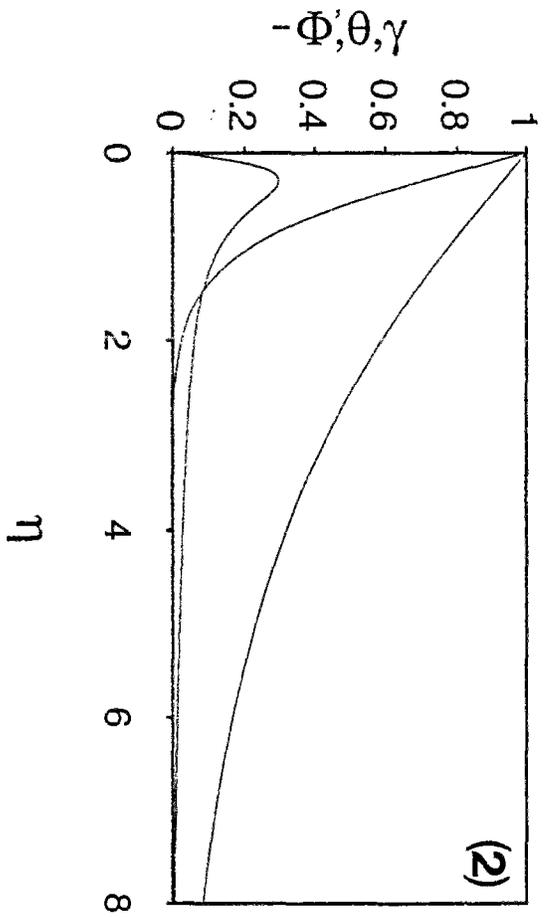
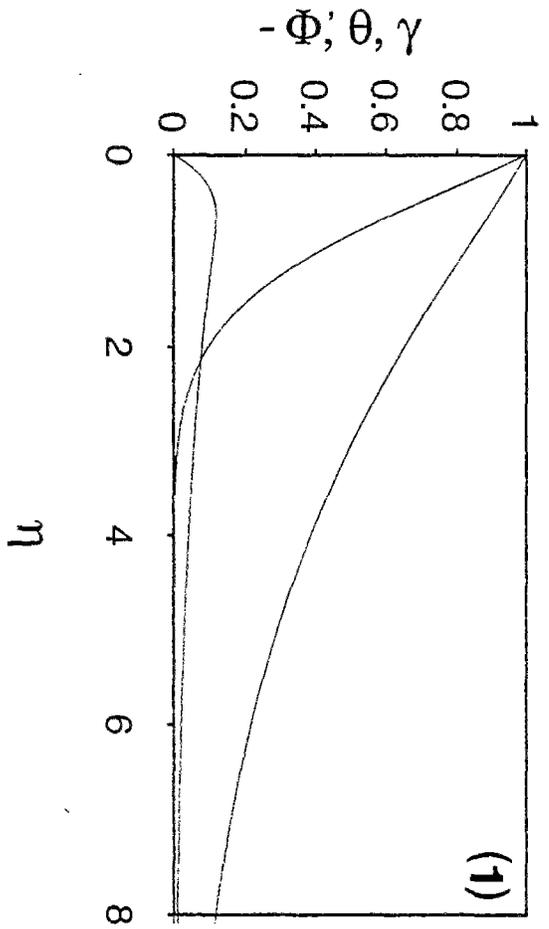


Figure 3

Profils d'écoulements obtenus numériquement dans le cas asymptotique $Pr \ll Sc \ll 1$.

(1) $N=0.1$, $Pr=10^{-2}$, $Le=10$; (2) $N=10$, $Pr=10^{-2}$, $Le=10$; (3) $N=10^3$, $Pr=10^{-2}$, $Le=10$.

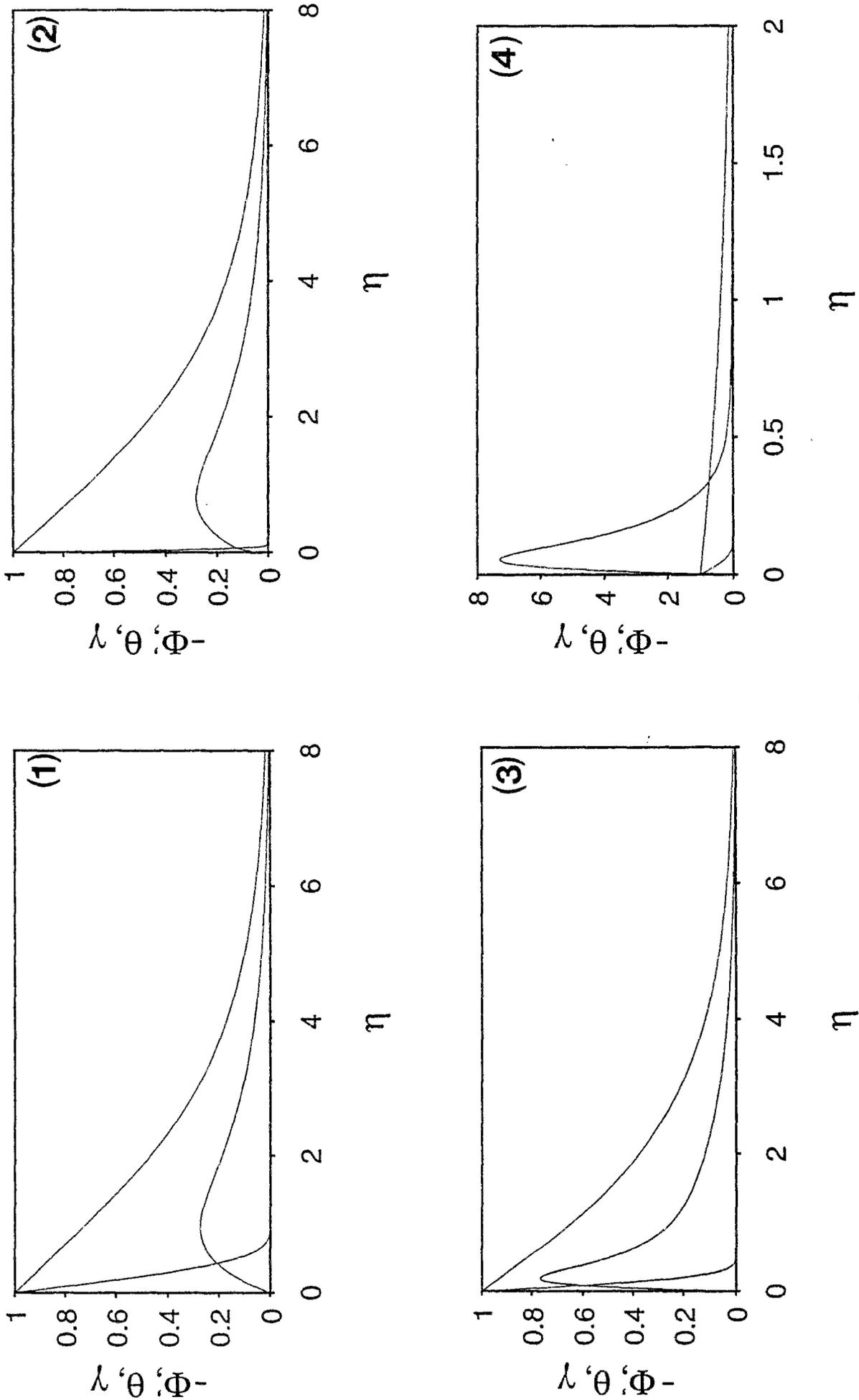


Figure 4

Profils d'écoulements obtenus numériquement dans le cas asymptotique $Pr \ll 1 \ll Sc$.

(1) $N=0.1, Pr=0.1, Sc=10$; (2) $N=10^2, Pr=0.1, Sc=10^3$

(3) $N=10^2, Pr=0.1, Sc=10$; (4) $N=10^4, Pr=0.1, Sc=10$.

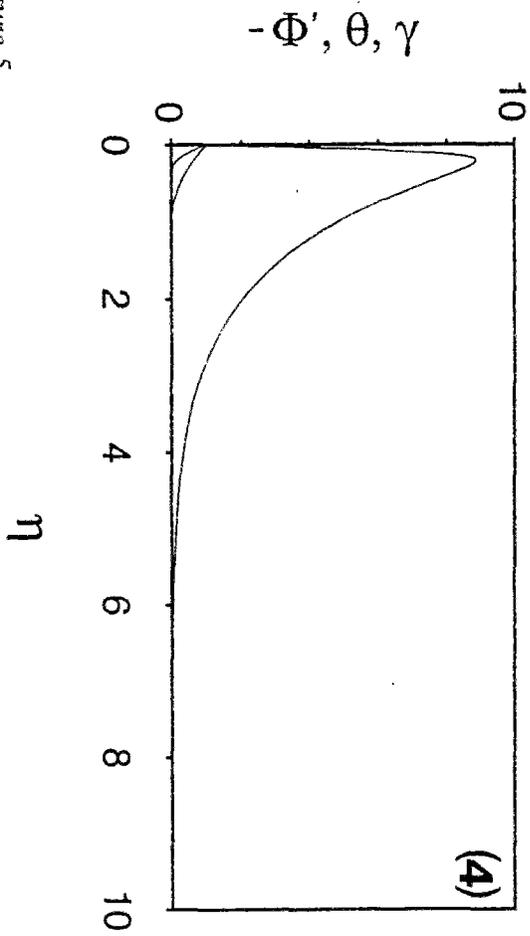
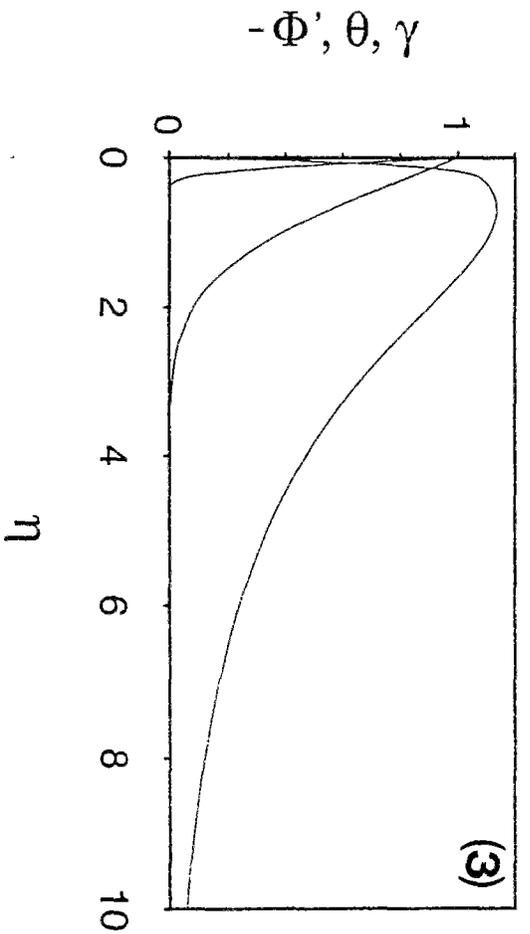
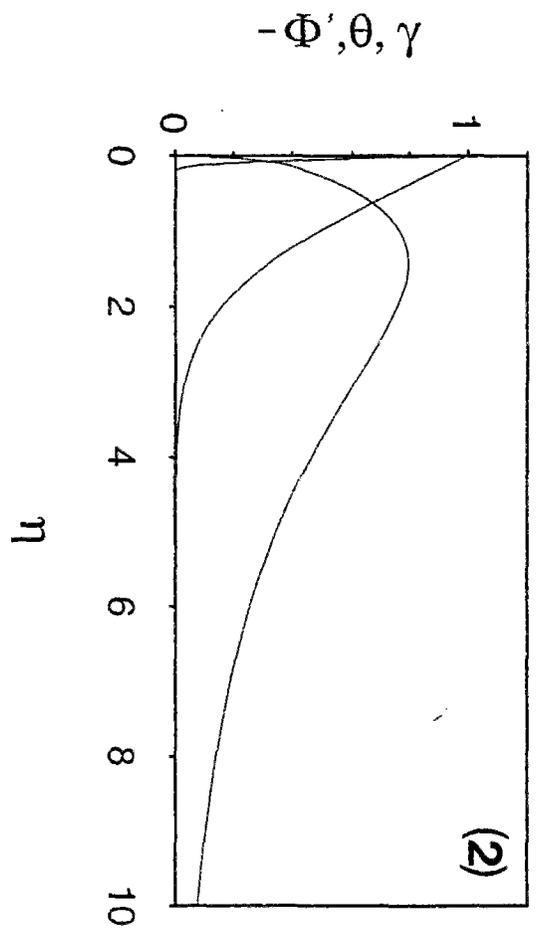
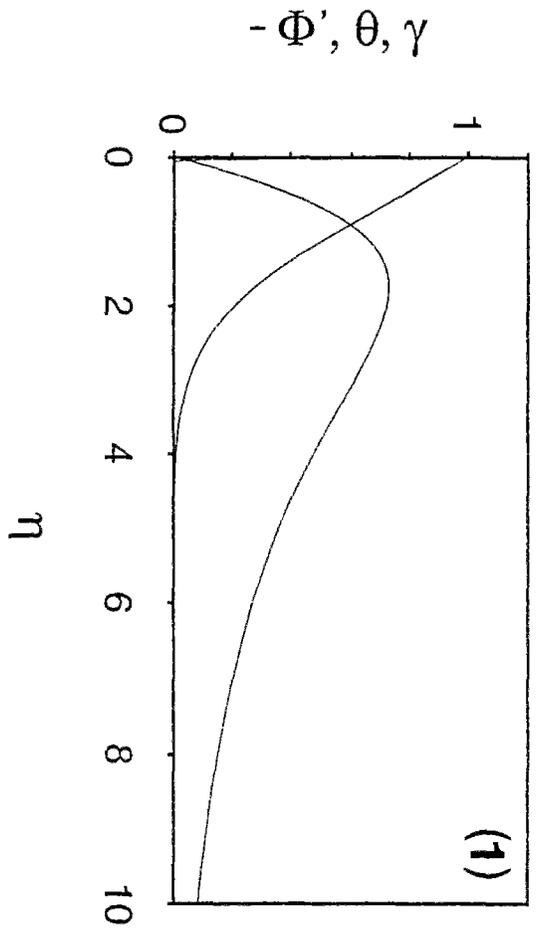


Figure 5

Profils d'écoulements obtenus numériquement dans le cas asymptotique $1 \ll Pr \ll Sc$.

(1) $N=0.1$, $Pr=10$, $Sc=10^2$; (2) $N=10^2$, $Pr=10$, $Sc=10^4$

(3) $N=10^2$, $Pr=10$, $Sc=10^3$; (4) $N=10^3$, $Pr=10$, $Sc=10^2$.

Elles sont donc bien adaptées pour tester les lois d'échelles attendues pour δ_T et δ_C .

Sur les figures 6, 7, et 8, nous avons utilisé les valeurs de $\theta'(0)$ et $\gamma(0)$ obtenues numériquement dans chaque cas asymptotique. Par exemple, sur la figure 7 qui correspond au cas n°2 ($Pr \ll 1 \ll Sc$), nous avons tracé les variations de $-\theta'(0)Pr^{-1/4}$ en fonction de la quantité NPr^2/Sc , en utilisant une échelle logarithmique. La courbe obtenue se divise en deux parties. Lorsque $NPr^2/Sc \ll 1$, les points se regroupent sur une droite horizontale, ce qui indique que $\theta'(0)$ varie comme $Pr^{1/4}$. La couche limite de température δ_T varie donc comme $Pr^{-1/4}$, ce qui correspond bien à la loi d'échelle prévue par l'analyse en ordre de grandeur (voir tableau 2). Dans la deuxième partie de la courbe, pour $NPr^2/Sc \gg 1$, les points se placent sur une droite de pente 1/4, ce qui indique que δ_T varie comme $N^{-1/4}Pr^{-3/4}Sc^{1/4}$, conformément aux prédictions de l'analyse en ordre de grandeur. De la même façon, la deuxième courbe où nous avons porté les valeurs de $-\gamma(0)Pr^{1/4}Sc^{-1/3}$ en fonction de la quantité $NSc^{-1/3}$ comprend deux régimes de variations différents selon que $NSc^{-1/3} \gg 1$ ou $NSc^{-1/3} \ll 1$; la pente des droites obtenues dans chacun des régimes est conforme aux lois d'échelles prédites pour δ_C par l'analyse en ordre de grandeur. Les figures 6 et 8 correspondant aux cas n°1 et n°3 ($Pr \ll Sc \ll 1$ et $1 \ll Pr \ll Sc$) mettent en évidence de manière tout à fait analogue l'existence de deux régimes de variation dans lesquels les lois d'échelles attendues pour δ_T et δ_C se trouvent confirmées (voir tableaux 1 et 3).

De façon générale, les résultats numériques montrent l'existence d'un changement de régime entre une situation où les couches limites de température et de concentration sont déterminées par la convection thermique, et une situation où elles sont déterminées par la convection solutale. Il est intéressant de constater que la transition entre les deux régimes de variation est souvent très étroite (de l'ordre d'une décade), sauf en ce qui concerne les couches limites de température lorsque $Pr \ll 1$ (figures 6 et 7). Dans ces deux derniers cas, nous observons un élargissement relatif du changement de régime.

II.2.3 Termes prépondérants dans l'équation de quantité de mouvement

Dans ce paragraphe, nous allons discuter sur un exemple les résultats de l'analyse en ordre de grandeur en ce qui concerne la valeur relative des différents termes dans l'équation de quantité de mouvement. Pour cela, nous allons comparer les valeurs des différentes contributions à la quantité de mouvement qui résultent de l'intégration numérique, en nous plaçant dans le cas n°2 ($Pr \ll 1 \ll Sc$).

Dans l'équation (2) de quantité de mouvement, nous considérons séparément :

- le terme d'advection : $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$

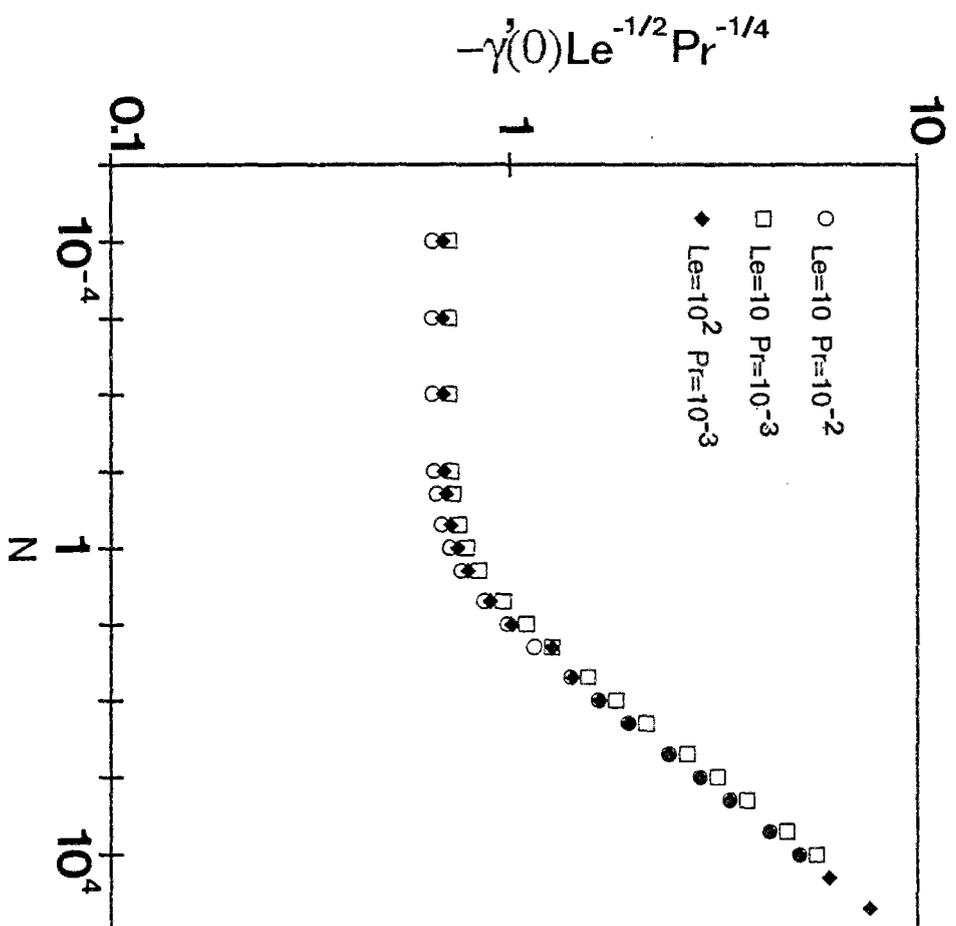
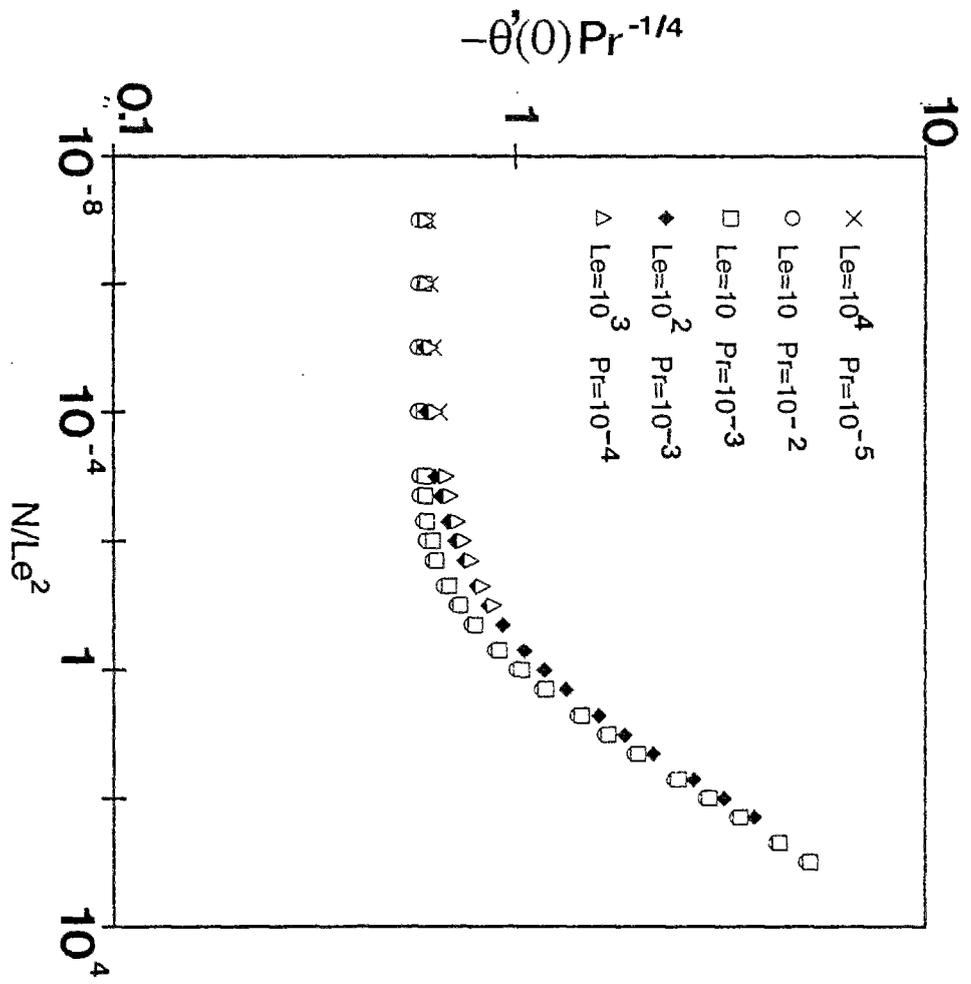


Figure 6

$Pr \ll Sc \ll 1$: Variations de $\theta'(0)$ et $\gamma'(0)$ obtenues numériquement, en fonction des paramètres adimensionnels.

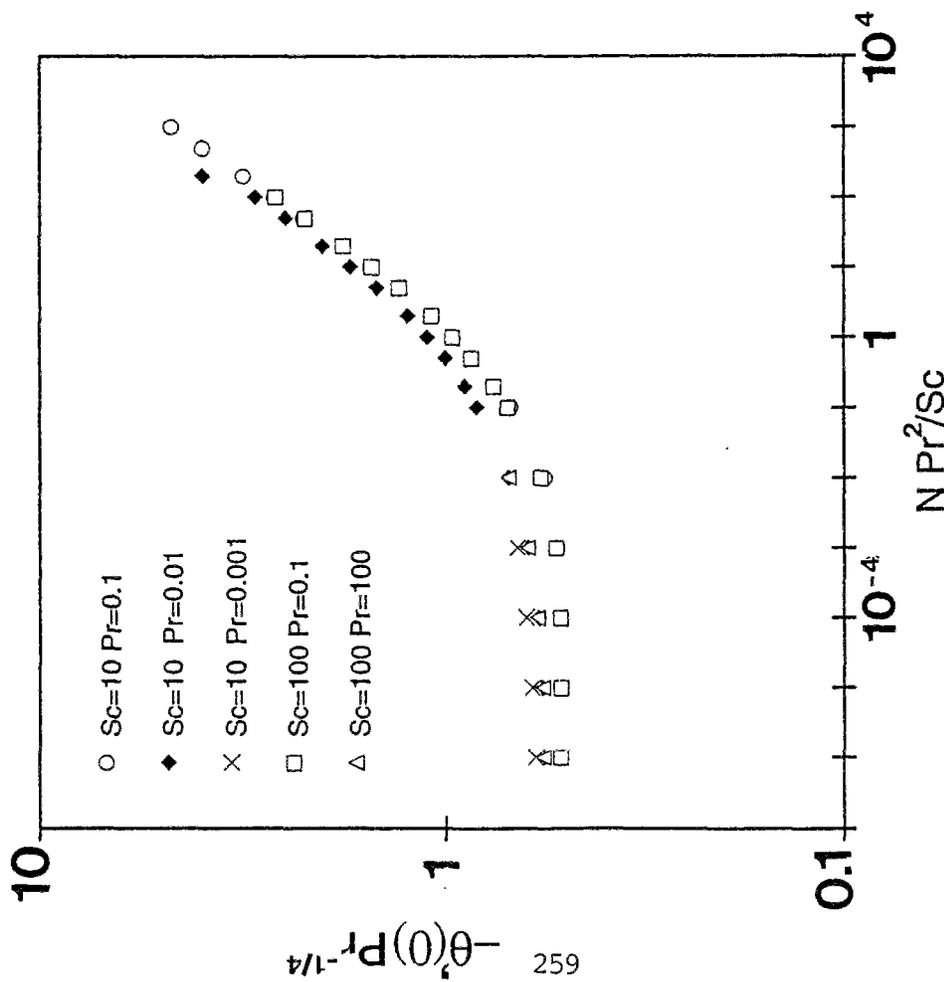
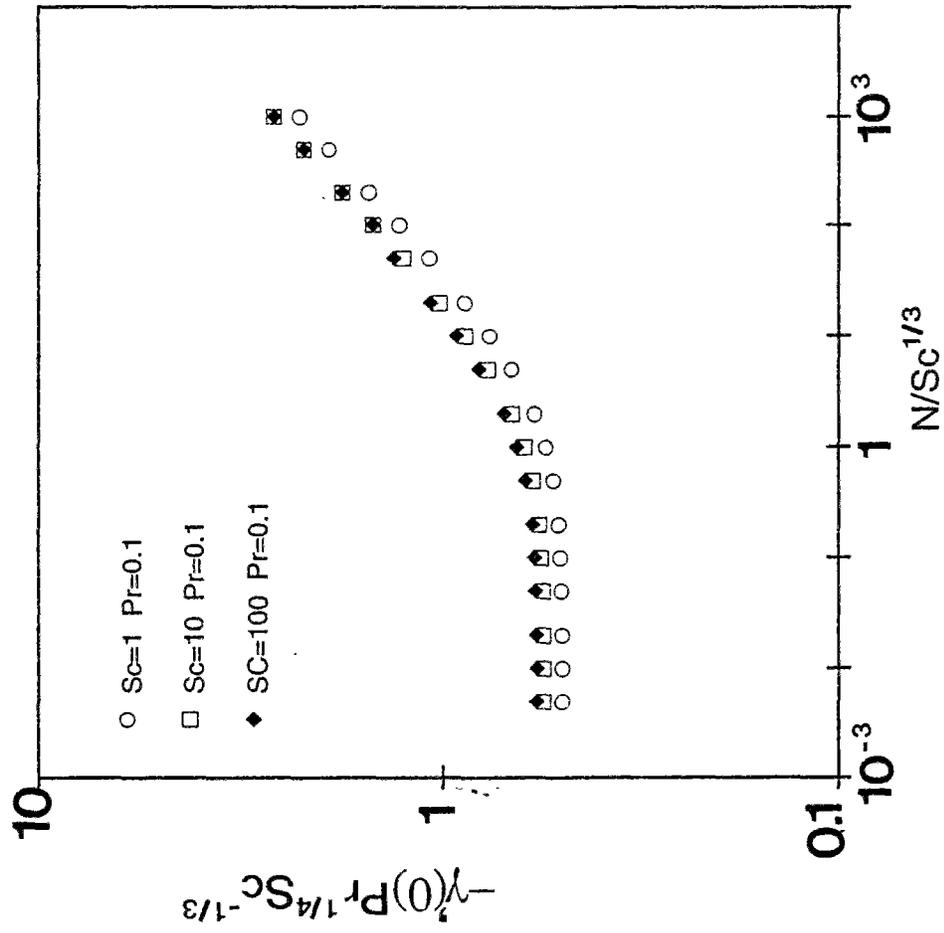


Figure 7
 $Pr \ll 1 \ll Sc$: Variations de $\theta(0)$ et $\gamma(0)$ obtenues numériquement, en fonction des paramètres adimensionnels.

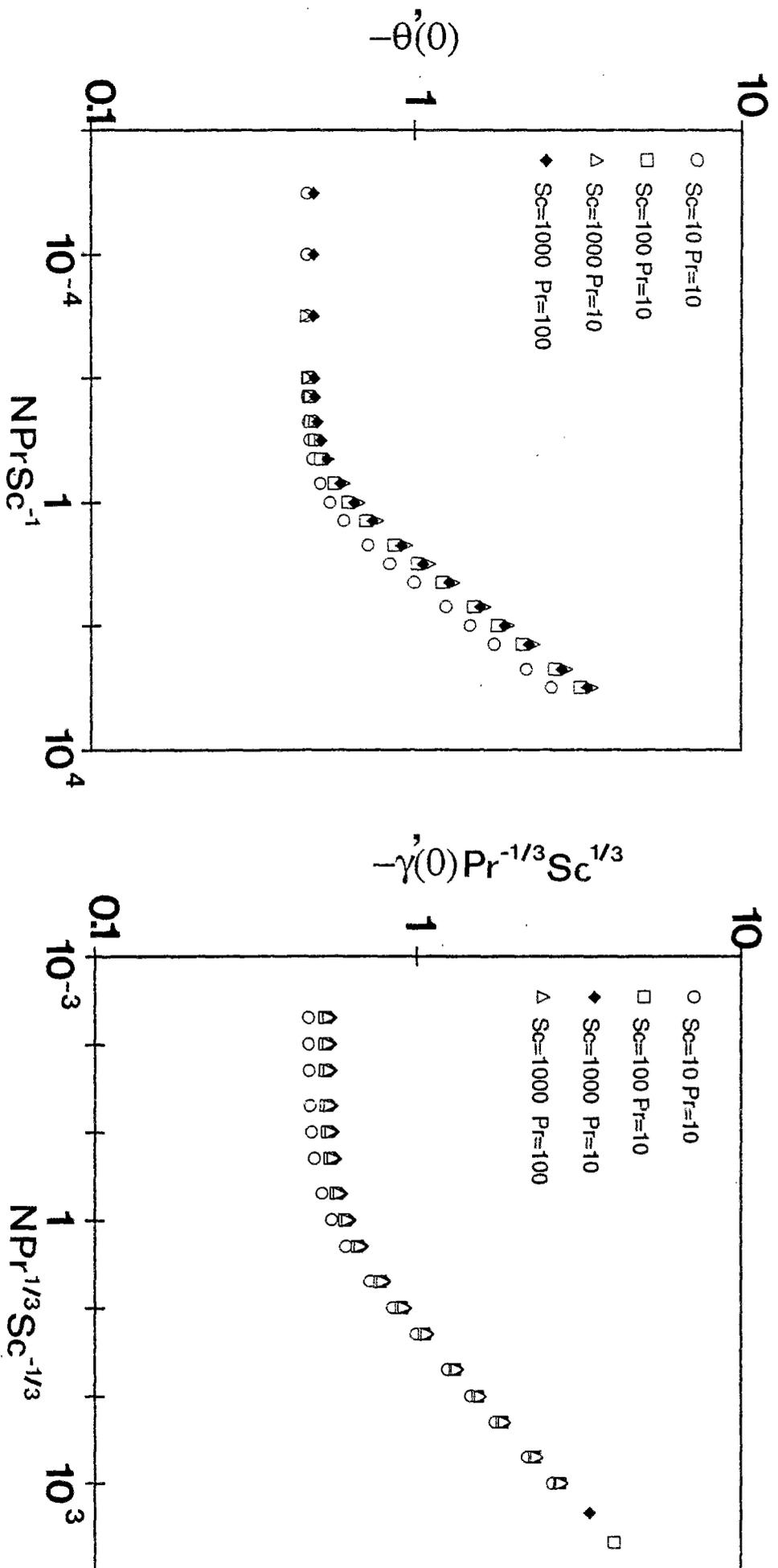


Figure 8

$1 \ll Pr \ll Sc$: Variations de $\theta'(0)$ et $\gamma'(0)$ obtenues numériquement, en fonction des paramètres adimensionnels.

- le terme de viscosité : $v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

- le terme source : $g\beta_T(T - T_\infty) + g\beta_C(C - C_\infty)$.

Nous substituons dans ces différents termes les variables adimensionnelles introduites au paragraphe II.1, puis nous les divisons par la quantité $\alpha v Ra(x)/x^3$. Nous sommes donc ramenés à comparer :

- le terme d'advection: $Pr^{-1} \left(\frac{1}{2} \Phi'^2 - \frac{3}{4} \Phi \Phi'' \right)$ (8)

- le terme de viscosité : $(-\Phi''')$ (9)

- le terme source : $(\theta + N\gamma)$ (10)

Sur les figures 9 à 12, nous avons tracé les valeurs du terme source, du terme d'advection, et du terme de viscosité correspondant aux expressions (8) (9) et (10), pour des valeurs des paramètres adimensionnels correspondant à chacun des profils de vitesse identifiés dans l'analyse en ordre de grandeur. Nous rappelons que les profils de vitesse prévus par l'analyse en ordre de grandeur d'une part, et obtenus numériquement d'autre part, sont représentés respectivement sur le tableau 2 et la figure 4.

Sur la figure 9, qui correspond au profil numéroté (1), le terme source décroît de la valeur 1.1 ($N=0.1$) à 0, le terme d'advection qui part de la valeur 0 passe par un maximum avant de s'annuler, et enfin le terme de viscosité, qui est négatif dans un premier temps, s'annule rapidement. Nous constatons que l'écoulement peut donc se diviser en deux parties : dans la première partie les termes prépondérants sont le terme de viscosité et le terme source, alors que dans la seconde partie, le terme de viscosité est nul et le terme d'advection devient égal au terme source, la transition entre ces deux régimes a lieu à la distance δ_v de la paroi.

Sur la figure 10, qui correspond au profil numéroté (2), nous remarquons une décroissance rapide du terme source, qui vaut N à la paroi, jusqu'à une valeur proche de 1 en δ_C ; au delà de cette longueur seul le terme d'origine thermique intervient. Cette décroissance rapide du terme source se répercute sur les autres termes, qui comportent des points anguleux en δ_C . Le terme de viscosité équilibre le terme source d'origine solutale dans la région comprise entre 0 et δ_C . Au-delà de δ_C , le terme source d'origine thermique, le terme d'advection, et le terme de viscosité sont du même ordre de grandeur. Le terme de viscosité s'annule ensuite, à une distance de la paroi qui correspond à la longueur δ_v , au-delà de laquelle le terme source est équilibré uniquement par le terme d'advection.

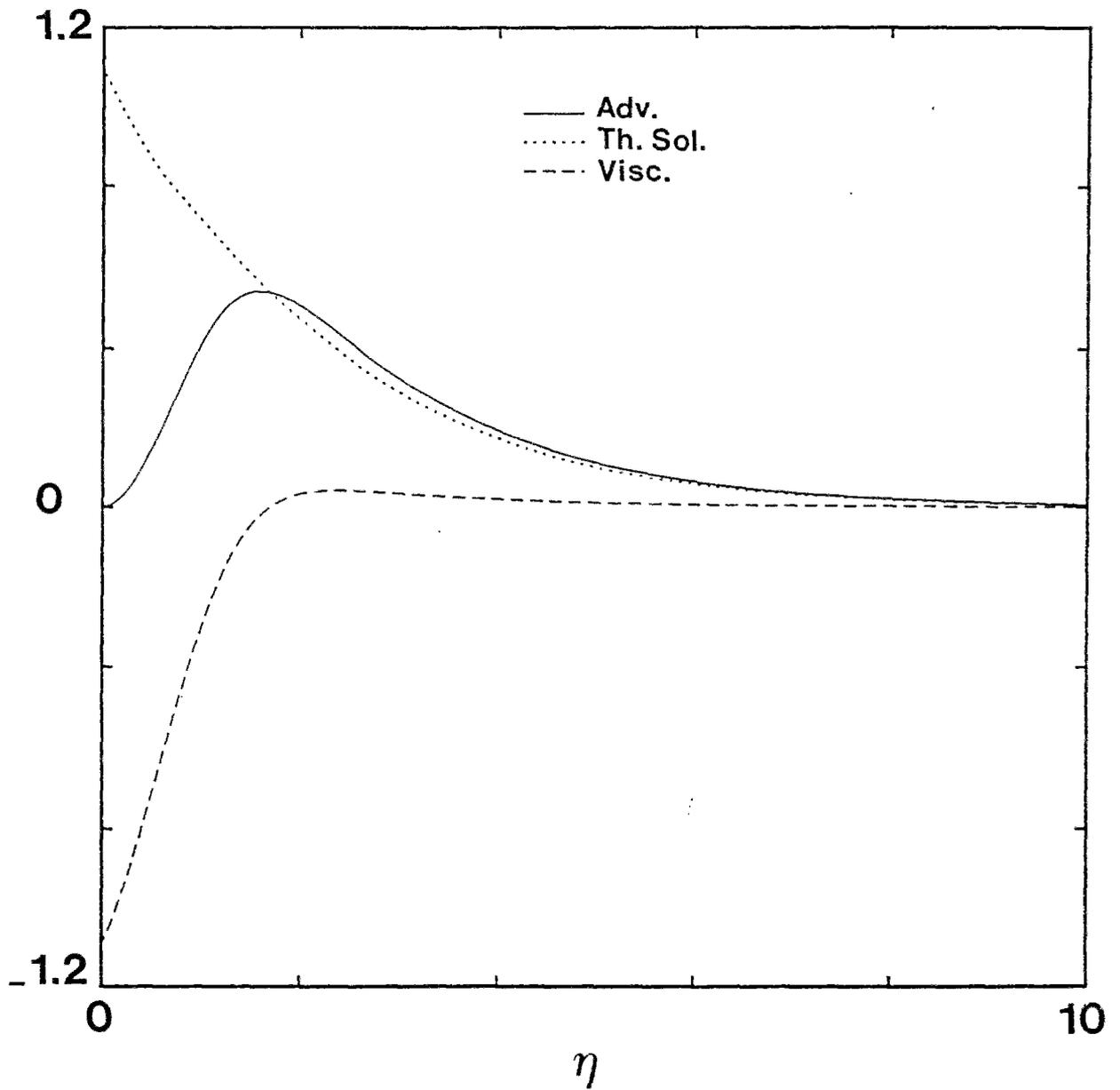


Figure 9

$Pr \ll 1 \ll Sc$: variations des différents termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, pour des valeurs des paramètres adimensionnels correspondant au profil (1) ($N=0.1$, $Pr=0.1$, $Sc=10$).

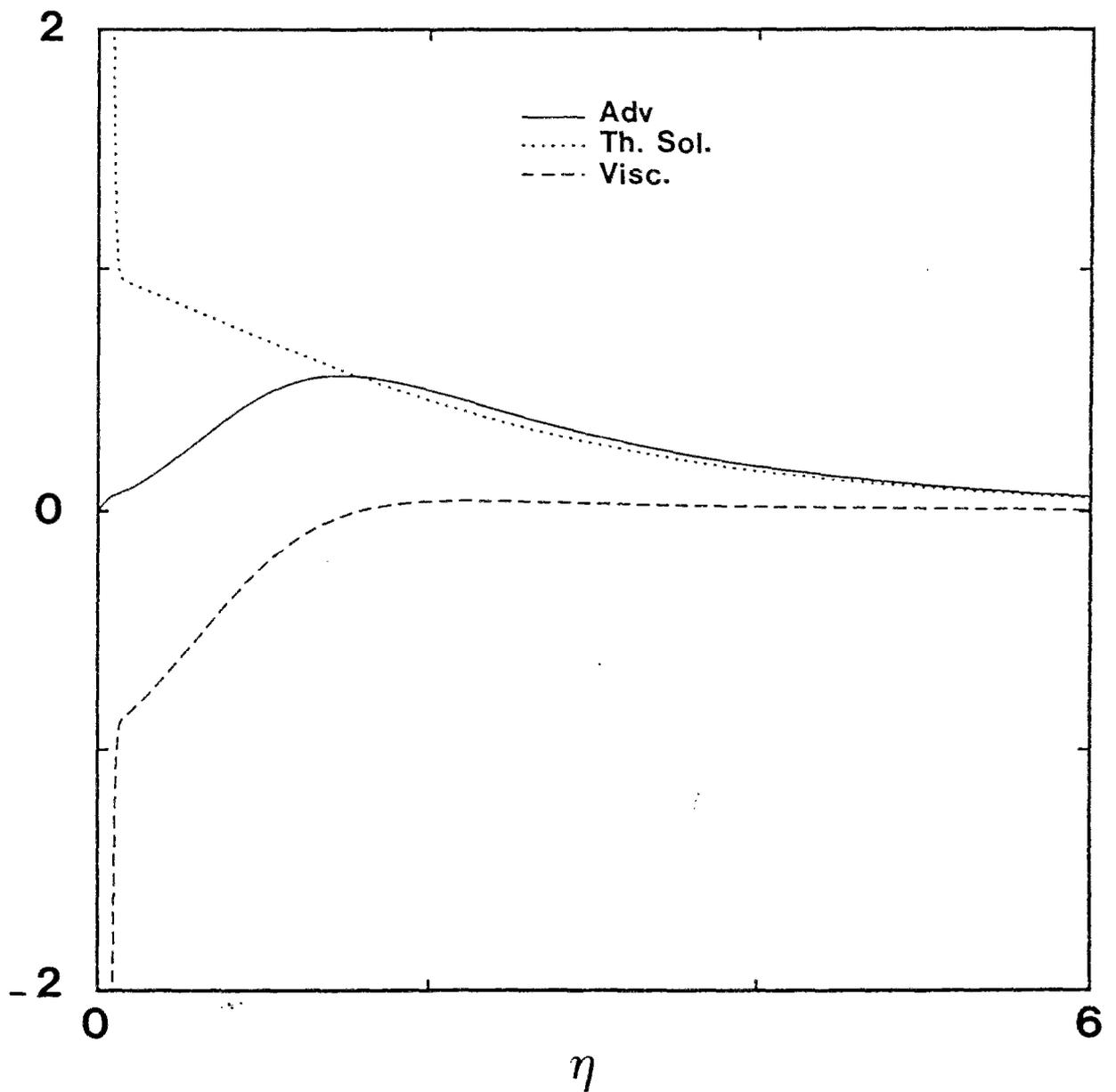


Figure 10

$Pr \ll 1 \ll Sc$: variations des différents termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, pour des valeurs des paramètres adimensionnels correspondant au profil (2) ($N=100$, $Pr=0.1$, $Sc=10^3$).

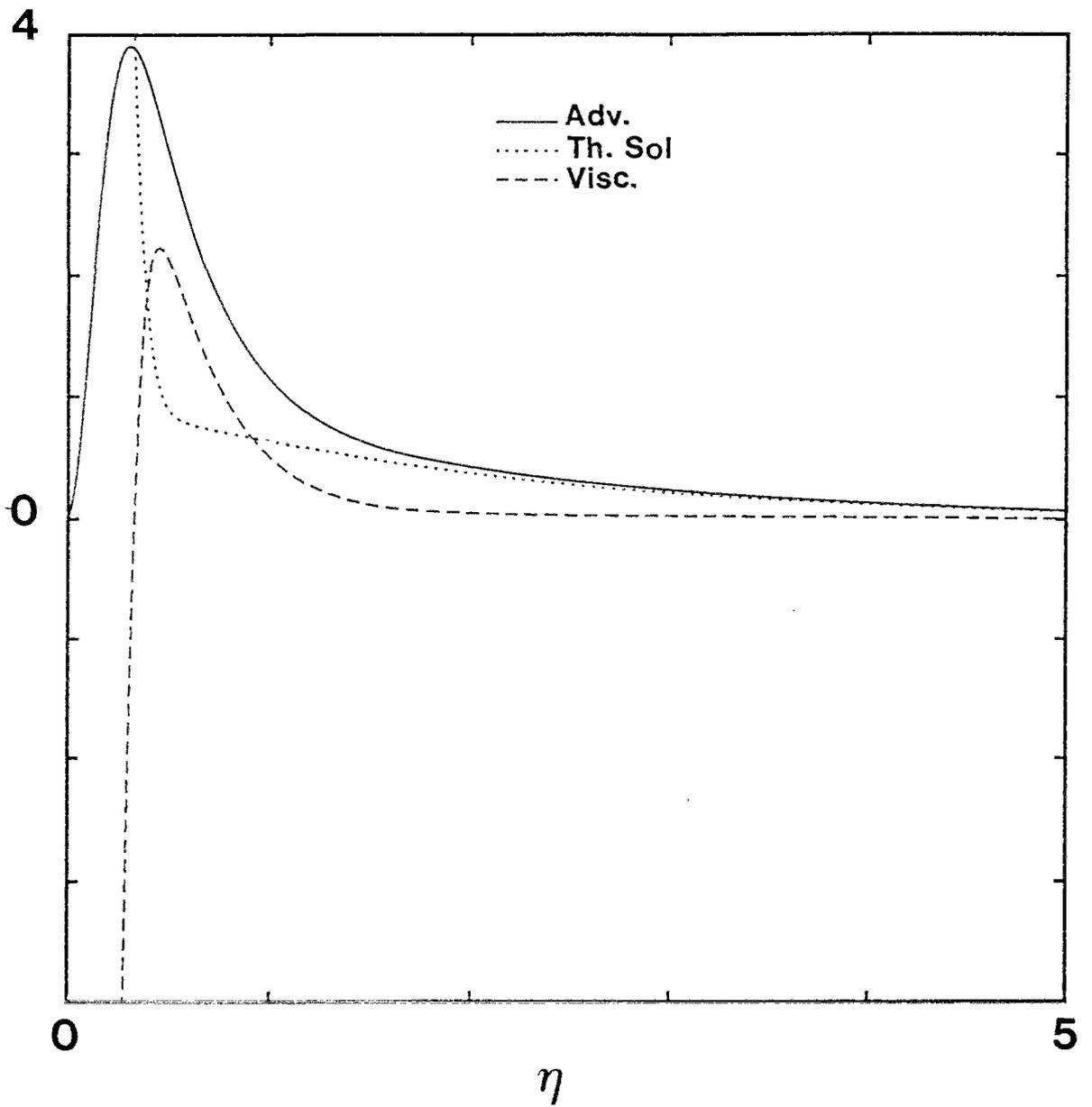


Figure 11

$\text{Pr} \ll 1 \ll \text{Sc}$: variations des différents termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, pour des valeurs des paramètres adimensionnels correspondant au profil (3) ($N=100$, $\text{Pr}=0.1$, $\text{Sc}=10$).

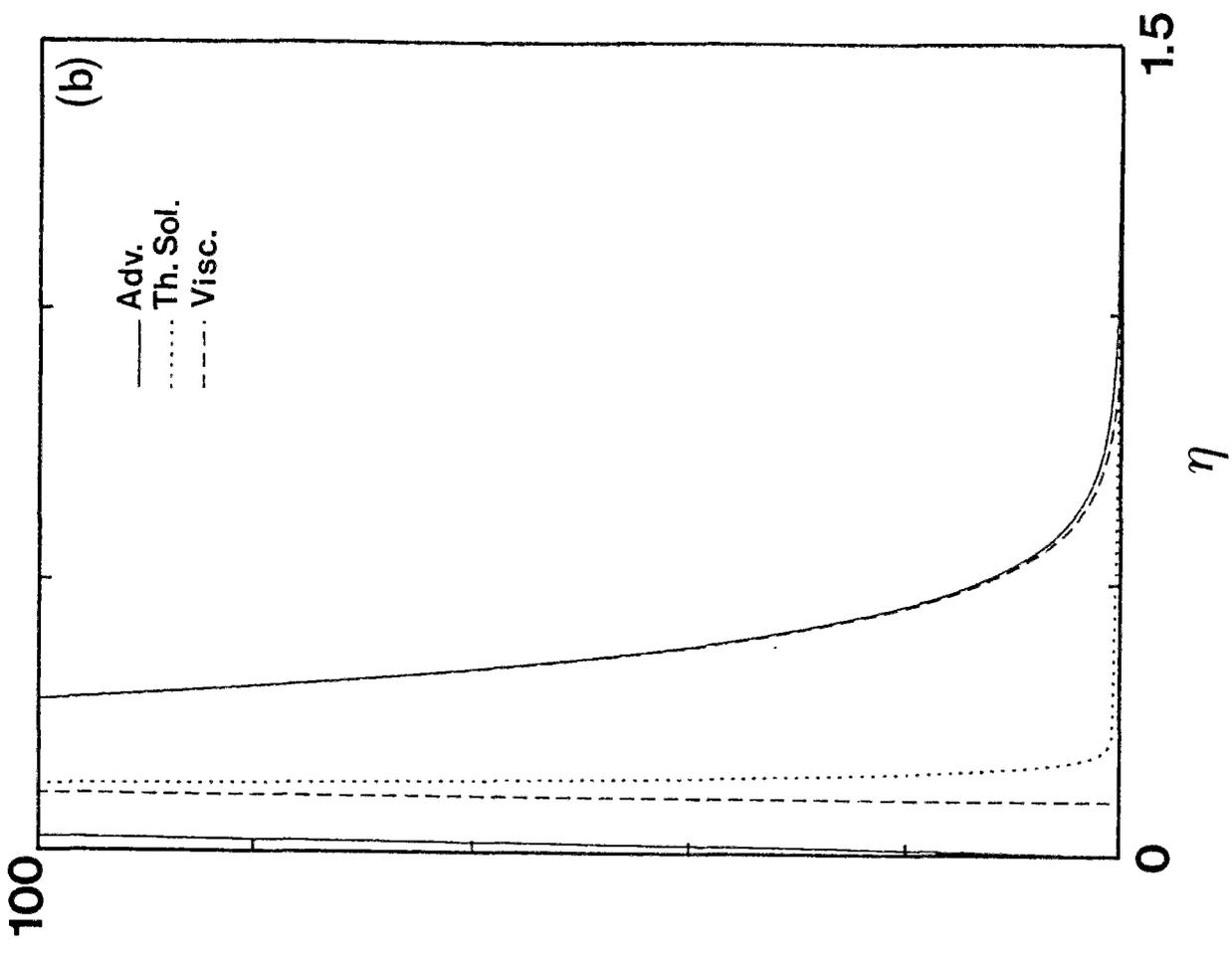
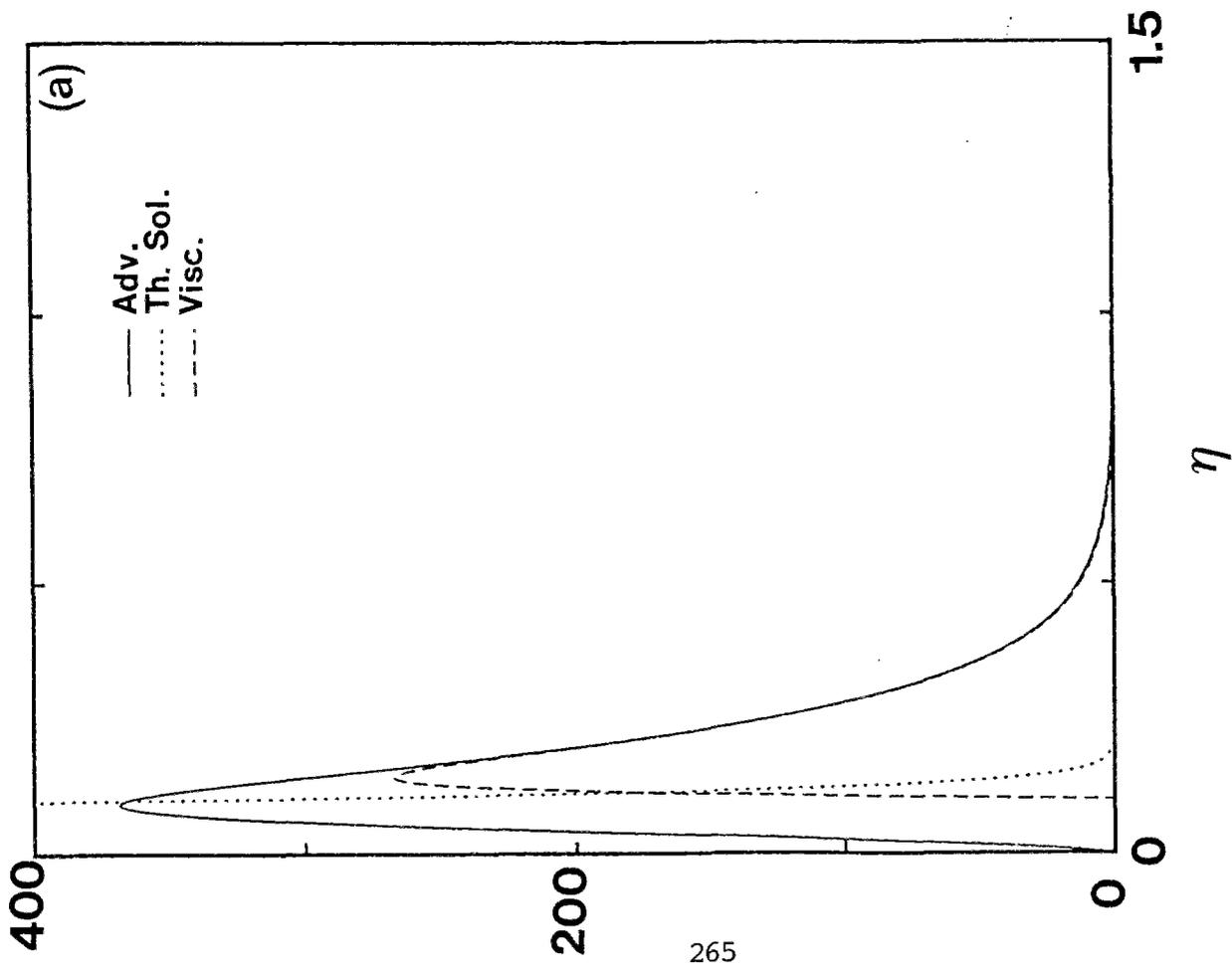


Figure 12

$Pr \ll 1 \ll Sc$: variations des différents termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, pour des valeurs des paramètres adimensionnels correspondant au profil (4) ($N=10^4$, $Pr=0.1$, $Sc=10$).

La figure 11 concerne le profil de type (3). Elle est analogue à la figure 10 en ce qui concerne la décroissance rapide du terme source, l'équilibre entre le terme source et le terme de viscosité dans la région comprise entre la paroi et δ_C , et enfin l'équilibre entre le terme source et le terme d'advection au delà de δ_v . Par contre, entre δ_C et δ_v , nous constatons que c'est l'advection qui l'emporte sur le terme source pour équilibrer la viscosité.

Sur la figure 12 correspondant au profil de type (4), nous avons tracé les différents termes sur deux courbes dont les échelles sont différentes. De plus, seules les variations positives ont été représentées. Sur la figure 12.a, nous pouvons repérer une première échelle de longueur associée à la décroissance rapide du terme source ($N=10^4$), et aux valeurs maximales des termes de viscosité et d'advection. Entre la paroi et cette première échelle de longueur, qui coïncide donc avec δ_C , le terme de viscosité (qui est négatif et n'est pas visible sur la figure) et le terme source d'origine solutale l'emportent sur l'advection. Au-delà de δ_C , le terme de viscosité et le terme d'advection sont égaux, et l'emportent très nettement sur le terme source. Sur la figure 12.b, nous constatons qu'après δ_C le terme source ne s'est pas encore annulé, mais qu'il a une valeur de l'ordre de 1 correspondant à la convection thermique. Au-delà d'une deuxième échelle de longueur qui coïncide donc avec δ_v , ce terme source d'origine thermique prendra le relais du terme de viscosité pour équilibrer le terme d'advection.

Nous pouvons vérifier que dans chacun de ces cas (profils (1) à (4)), les résultats de l'analyse en ordre de grandeur concernant les termes prépondérants dans l'équation de quantité de mouvement (voir tableau 2) sont en accord avec les valeurs de ces termes calculées numériquement. Ceci est un dernier résultat qui confirme la validité de l'analyse.

Scaling of Boundary-layer Flows Driven By Double-diffusive Convection.

A. Mongruel, M. Cloitre, C. Allain,

Laboratoire Fluides, Automatique et Systèmes Thermiques,
Bâtiment 502, Campus Universitaire, 91405 Orsay Cedex, France

Abstract : The combined effect of heat and mass convection results in a great variety of flow configurations which have yet to be elucidated. The objective of this paper is to investigate natural convection driven by two buoyancy sources, such as heat and mass, in vertical boundary layers. Starting from the integral equations for flows and using scale analysis, we derive the different asymptotic flow types encountered with different buoyancy forces and diffusion coefficients. Each type of flow is characterised by a set of scaling relations yielding the variation of the velocity, temperature, and concentration fields. Our most striking result gives evidence that flows may be heat-driven, even though solutal buoyancy forces dominate. All our results are perfectly corroborated by numerical investigations in a wide range of parameters.

PACS numbers : 47.15.Cb, 47.27.Te, 44.25.+f

Submitted to Physical Review E.

1. INTRODUCTION

Double-diffusive convection takes place in fluids where two components with different molecular diffusivities (heat, solute concentration, or phase compositions) act in conjunction to create buoyancy forces driving the fluid upwards or downwards [1]. Such double-diffusive processes occur in many fields, including solid state physics [2] (solidification of binary alloy and crystal growth), oceanography [3] (melting and cooling near a vertical ice surface), geophysics (dispersion of dissolved materials or particulate matter in flows), and others. Because of the coupling between the velocity field and the diffusive scalar fields, double-diffusive convection is more complex than the convection associated with a single diffusive scalar and many different behaviours may be observed. Recently, a variety of experimental [4, 5, 6], theoretical [7] and numerical [8, 9, 10, 11] investigations have addressed double-diffusive convection in various geometries. However, the different flow configurations arising from the combined effect of two scalar fields are still poorly characterized even for the simplest geometries.

In this paper, we focus on double-diffusive convection in two-dimensional boundary layers, which are observed in the vicinity of a vertical side wall maintained at fixed temperature and concentration. The governing equations are the classical conservation equations for mass, momentum, heat, and chemical species [7, 12]. While these are easy to formulate, the existence of two buoyancy forces results in a non-linear differential problem which has defied analytical treatment so-far. A careful examination of the past theoretical studies of double-diffusive convection from a vertical wall [13-21] reveals that three broad approaches exist : analytical studies, numerical investigations, and scale analysis. Most of the analytical techniques developed in the field of boundary-layer theory [7, 21] have been applied to double-diffusive configurations : search for similarity solutions [17], integral methods [14], and series expansion [16]. The results contain evidence of many different and complicated flows, but the predictions are scarce and restricted to some specific cases. Numerical methods solve the basic flow equations generally using finite-difference schemes [19, 20]. Here, the difficulty resides in getting a physical characterisation of the different flow

configurations over a wide range of physical parameters. Scale analysis was used to obtain valuable predictions about the heat and mass transfer at the side wall [7, 18]. However, these studies rely on single-scale analysis and do not take into account the existence of multiple length scales coupled together, in double-diffusive convection.

In this paper, we develop a new method that provides a physical understanding of double-diffusive boundary layers and predicts the different asymptotic behaviours that can be observed over a wide range of physical parameters. This method combines scale analysis and the so-called integral boundary-layer equations. Recently, we successfully applied this idea to double-diffusive convection in a fluid-filled porous medium [22]. When considering a fluid, as we do here, the higher degree of complexity gives rise to many new situations. Although our problem is simplified in comparison with real flows, its advantage is that it can be treated analytically, and that it provides much physical insight that is useful in interpreting more complex geometries.

The paper is organized as follows. In section 2, we formulate the boundary-layer equations for double-diffusive convection near a vertical wall, and discuss the main parameters of physical relevance. Section 3 begins by setting out the scaling properties of pure thermal convection, which will serve as a basis for reasoning in the following sections. In sections 4,5,and 6, we investigate the three asymptotic cases, which are of physical relevance. We distinguish between different types of flows, each of them being characterized by a particular set of scaling relations. All our results are perfectly corroborated by numerical investigations presented in section 7.

2. FORMULATION OF THE BOUNDARY-LAYER EQUATIONS

The geometry of the flows investigated in this paper is depicted in figure 1. An infinitely high half-plate is held vertically in an infinite fluid. The plate is maintained at a fixed temperature T_0 and at a fixed concentration C_0 . The temperature T and concentration C

in the fluid decline from T_0 and C_0 on the plate to their values T_∞ and C_∞ at infinity. The variations of T and C inside the fluid are responsible for density differences, and therefore for buoyancy forces which drive the fluid along the plate at a velocity \vec{V} . The basic equations governing the flow variations are the conservation of mass, momentum, energy and chemical species [12]. In the following, we shall consider stationary flows and we write the following set of equations :

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.1.a)$$

$$\rho(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = -\nabla p + \eta\Delta\vec{V} + \rho\vec{g} \quad (2.1.b)$$

$$(\vec{V} \cdot \nabla)T = \alpha\Delta T \quad (2.1.c)$$

$$(\vec{V} \cdot \nabla)C = D\Delta C \quad (2.1.d)$$

p is the pressure and \vec{g} the gravitational acceleration. ρ , η , α and D are respectively the fluid density, the viscosity, and the thermal and chemical diffusivities. Using the Boussinesq approximation, we shall assume that η , α and D do not depend on temperature or concentration, and we shall retain the leading term in the development of ρ as a function of T and C :

$$\rho = \rho_\infty[1 - \beta_T(T - T_\infty) - \beta_C(C - C_\infty)]$$

where β_T and β_C are the coefficients of volumetric thermal and concentration expansion at constant pressure : $\beta_T = (1/\rho)(\partial\rho/\partial T)_P$ and $\beta_C = (1/\rho)(\partial\rho/\partial C)_P$. Lastly, equations (2.1) must be complemented by appropriate boundary conditions specifying the velocity on the plate ($\vec{V} = 0$) and at infinity ($\vec{V} = 0$), and the values of temperature and concentration on the side wall (T_0 and C_0) and at infinity (T_∞ and C_∞).

The set of non-linear equations (2.1) describes a wide class of double-diffusive situations. In the idealized situation of boundary-layer flows on which we focus in this paper, some approximations and simplifications can be made then allowing analytical treatment. In the following, the flow is laminar and two-dimensional. The coordinate and velocity vectors are (x,y) and (u,v) , with x and u being the streamwise components, and y and v the spanwise components. In the free-convective situation considered here, the only vertical scale is the height x above the leading edge of the plate (figure 1). Accordingly, the scale of variation of

T , C , u and v along the vertical axis is x . From the forms of equations (2.1.c) and (2.1.d), T and C decrease from their values on the side wall to their values at infinity over the characteristic length scales $\delta_T(x)$ and $\delta_C(x)$. $\delta_T(x)$ and $\delta_C(x)$ are the boundary-layer thicknesses for T and C . By contrast, the velocity fields involves several length scales which will be discussed in detail in the following, depending on the orders of magnitude of inertia, friction and buoyancy as a function of the side wall distance. We emphasize that all these scales vary with x but, for clarity, we shall ignore this x dependence in the notations.

Our main assumption is the so-called boundary-layer approximation [7, 12], which states that the vertical scale is much larger than all the horizontal scales of the problem. One obvious requirement is that we consider only those areas far from the leading edge of the plate. This approximation then has several important consequences. First, let U and V be the orders of magnitude of the streamwise and spanwise velocities u and v . δ is some horizontal length characterizing the velocity boundary-layer thickness, which will be discussed at greater length in the following sections. From equation (2.1.a), which expresses incompressibility, we get : $V/U \sim \delta/x \ll 1$. Accordingly, the amplitude of the spanwise component is negligible compared with that of the streamwise component so that the horizontal projection of the momentum equation (2.1.b) gives $\partial p / \partial y = 0$; therefore, p is approximately only a function of x and $p(x) = p(x, y = \infty) = \rho_\infty g x$, i.e. $p(x)$ reduces to the hydrostatic pressure at height x [7, 12]. Thirdly, we shall neglect all the velocity derivatives with respect to the coordinate x compared to the velocity derivatives with respect to y . Finally in the framework of these approximations, the flow equations become :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.2.a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta_T(T - T_\infty) + g\beta_C(C - C_\infty) \quad (2.2.b)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.2.c)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (2.2.d)$$

where $\nu = \eta/\rho_\infty$ is now the kinematic diffusivity. The boundary conditions on the side wall are such that u and v are equal to zero, and T and C are T_0 and C_0 , while at infinity u again becomes zero, and T and C are T_∞ and C_∞ .

The next step is to introduce the various parameters needed to characterize the orders of magnitude of the different terms appearing in system (2.2). These are the thermal Rayleigh number, $Ra(x) = g\beta_T \Delta T x^3 / \alpha \nu$; the buoyancy ratio, $N = \beta_C \Delta C / \beta_T \Delta T$; and three non-dimensional numbers built from the kinematic viscosity, the thermal diffusivity, and the chemical species diffusivity : the Prandtl number, $Pr = \nu / \alpha$; the Schmidt number, $Sc = \nu / D$; and the Lewis number, $Le = \alpha / D$. ΔT and ΔC represent $T_0 - T_\infty$ and $C_0 - C_\infty$. The definition of Ra involves x , which is the only geometrical vertical scale. It will be convenient in sections 4, 5 and 6 to introduce the solutal Rayleigh number $Ra_S(x) = g\beta_T \Delta C x^3 / D \nu$ which is related to the thermal Rayleigh number by $Ra_S(x) = Ra(x) Le N$. In the following, we restrict our analysis to Rayleigh numbers for which the flow is laminar. The buoyancy ratio N is a measure of the relative importance of the buoyancy forces due to thermal and solutal convection. Thermal buoyant forces are dominant when $N < 1$, and negligible when $N > 1$. When $N = 0$ and $N = \infty$, we recover the case where a single scalar is diffusing. In practice, N may be negative leading to a great variety of situations. In particular, the flow field can reverse when the thermal and solutal forces drive the flow in opposite directions [10, 11]. In the present study, we shall restrict our analysis to $N > 0$. The values of Pr , Sc and Le depend on the nature of the fluid and on the physical mechanisms governing the diffusion of the heat and chemical species. In gases, we have $\nu \cong \alpha \cong D$, leading to Pr , Sc and Le being all of the order of 1. In most liquids, the Prandtl and Schmidt numbers are greater than unity, except in molten metals, where the Prandtl number is less than unity. Usually, heat diffusion is more efficient than mass diffusion, yielding a Lewis number greater than 1. Typical values of Le in common solutions are about 100; but Le can be very large in complex solutions containing macromolecules or colloidal dispersions. It should be noted that Pr , Sc and Le are related through $Le = Sc / Pr$. Consequently, only three asymptotic cases fit the requirement $Le \gg 1 : 1 \ll Pr \ll Sc$ which relies on double-diffusive convection in solutions (section 6); $Pr \ll 1 \ll Sc$, which applies to molten metals

(section 5) ; and $Pr \ll Sc \ll 1$, whose physical relevance is less clear but which will be analyzed for its fundamental interest in section 4. These asymptotic cases are studied in the following in the order of increasing complexity.

3. SCALING OF THERMAL CONVECTION REVISITED.

When heat is the single diffusive scalar, equations (2.2.a), (2.2.b) and (2.2.c) describe classical thermal free-convection. Before investigating the general case of double-diffusive convection, it will be useful to re-examine the scaling behaviour of pure thermal convection briefly. In free convection, the streamwise velocity increases from zero on the side wall, reaches its maximum value U_m at $y \approx \delta_m$, and then decreases to zero at $y \approx \delta$. Scales δ_m and δ can be used to describe the existence of two distinct layers along the wall, the first extending from 0 to δ_m and the second from δ_m to δ . The temperature decreases from T_0 to T_∞ over the characteristic length δ_T . Scales δ_m , δ and δ_T verify $0 \leq \delta_m \leq \delta_T \leq \delta$. U_m is chosen as the unique streamwise velocity scale. From incompressibility, the spanwise velocity scales as $U_m \delta_m / x$ in $[0, \delta_m]$ and as $U_m \delta / x$ in $[0, \delta]$. Accordingly, on the left-hand side of equations (2.2.b) and (2.2.c), momentum and heat advection by the spanwise component v have the same order of magnitude as momentum and heat advection by the streamwise component u . From (2.2.c), we derive $U_m \approx \alpha x / \delta_T^2$. Using this value to estimate the different terms in (2.2.b), we find that the ratio of inertia to viscous friction is (i) $\delta_m^2 / Pr \delta_T^2$ in layer $[0, \delta_m]$ and (ii) $\delta^2 / Pr \delta_T^2$ in layer $[\delta_m, \delta]$.

Let us first consider a small Prandtl number. In layer $[\delta_m, \delta]$, (ii) tells us that inertia dominates over friction ($\delta_T \leq \delta$), so that the fluid motion is governed by a balance between inertia and buoyancy. Therefore, the streamwise component vanishes when buoyancy disappears, indicating that $\delta = \delta_T$. The balance between inertia and buoyancy and the value of U_m yield $\delta_T \approx x Ra(x)^{-1/4} Pr^{-1/4}$. In layer $[0, \delta_m]$, the flow is constrained by viscous friction on the wall. If we assume that friction has the same order of magnitude as buoyancy, we find $\delta_m \approx x Ra(x)^{-1/4} Pr^{1/4}$. From (i), we note that inertia, friction, and buoyancy have in fact the same

order of magnitude but the scaling remains unchanged. We emphasize that two different mechanisms balance thermal buoyancy at low Prandtl numbers : friction and inertia in layer $[0, \delta_m]$, and inertia alone in layer $[\delta_m, \delta]$. We express this change of behaviour by introducing a new length scale δ_v , which is the characteristic length from the wall where friction becomes negligible. Here, we simply have $\delta_v = \delta_m$. Summarizing, table 1 lists the different scaling laws that hold in low-Prandtl-number thermal convection. The shapes of the velocity profiles which may be inferred from δ_m and δ are depicted in figure 2.

The reasoning at high Prandtl number is quite similar. (i) tells us that inertia can be neglected in layer $[0, \delta_m]$ where the fluid is driven upwards by buoyancy and restrained by viscous friction. In layer $[\delta_m, \delta]$, a balance between inertia and buoyancy, which would imply $\delta = \delta_T$, contradicts (ii). Therefore, the terms to be retained are inertia and friction, and the fluid is isothermal ($\delta_m = \delta_T$). Motion in this layer arises from viscous friction which drags the fluid along ($\delta_v = \delta$). Inertia is responsible for the decay of momentum, and slows down the flow. Writing out explicitly these equilibria that hold below and beyond δ_m , we deduce the values of δ_m , δ , δ_T and δ_v which are reported in table 1. A typical velocity profile at large Prandtl number is sketched in figure 2.

Until now scale analysis of boundary-layer flows driven by thermal convection has been performed in somewhat different ways, and most of the results reported here are known in the field of free convection [7, 23]. But our method gives a comprehensive insight into the mechanisms responsible for the motion, and sets out some of the physical elements which will be used for the treatment of double-diffusive convection in the next sections.

4. SCALE ANALYSIS OF DOUBLE-DIFFUSIVE CONVECTION FOR $Pr \ll Sc \ll 1$.

In double-diffusive convection, the coexistence of two diffusing scalars introduces a great variety of flow possibilities and makes the analysis more complex than in pure thermal convection. Our investigation relies on the set of characteristic length scales δ_m , δ , δ_v , δ_T , δ_C

which was introduced in the previous section. δ_m and δ are, respectively, the distance from the wall where the streamwise velocity reaches its maximum value, U_m , and the distance where it vanishes. δ_v characterizes the distance where friction becomes negligible in the momentum equation. δ_C and δ_T are the heat and the concentration boundary-layer thicknesses respectively. Some of these length scales are equal, and several relations can be found before any calculation is made. Firstly, we have $\delta_C \ll \delta_T$ as a consequence of the efficiency of heat diffusion compared to chemical species diffusion ($Le \gg 1$). Secondly, on the basis of thermal convection, $Pr \ll Sc \ll 1$ dictates that the streamwise velocity is the greatest just before inertia begins to act ($\delta_m = \delta_v \ll \delta_C$) and that it vanishes when thermal buoyancy disappears ($\delta = \delta_T$). Therefore, we have : $0 < \delta_m = \delta_v \ll \delta_C \ll \delta = \delta_T$. As a consequence of these multiple length scales, the flow along the side wall splits into three different layers, each with a characteristic thickness and a characteristic velocity scale :

- $[0, \delta_m = \delta_v]$ where the physical mechanisms to be retained are friction, thermal buoyancy and solutal buoyancy. u is equal to zero on the side wall, and its value at δ_m (U_m) is the velocity scale.
- $[\delta_m = \delta_v, \delta_C]$ where the flow results from a balance between inertia, thermal buoyancy and solutal buoyancy. In the following, we assume that U_m is greater than U_C , and we take U_m as the velocity scale.
- $[\delta_C, \delta = \delta_T]$ where the leading terms are inertia and thermal buoyancy. The velocity scale is given by the value U_C of the streamwise velocity at $y \approx \delta_C$.

The existence of these coupled multiple scales precludes any simple estimate of the different terms appearing in the conservation equation from order-of-magnitude arguments, as would be done in pure thermal convection. Our key idea is to integrate the governing equations through the layers already defined and to assess the orders of magnitude of the different contributions to convection using suitable scales. Following this procedure (detailed in the appendix) we set :

- the momentum conservation in $[0, \delta_m]$:

$$U_m \approx \frac{g\beta_T\Delta T}{\nu}(N+1)\delta_m^2 \quad (4.1.a)$$

- the momentum conservation in $[\delta_m, \delta_C]$: $U_m^2 \approx g\beta_T \Delta T (N+1)x$ (4.1.b)

- the momentum conservation in $[\delta_C, \delta]$: $U_C^2 \approx g\beta_T \Delta T x$ (4.1.c)

- the chemical species conservation in $[0, \delta_C]$: $U_m \approx \frac{Dx}{\delta_C^2}$ (4.1.d)

- the heat conservation in $[0, \delta_T]$: $U_m \delta_C + U_C \delta_T \approx \frac{\alpha x}{\delta_T}$ (4.1.e)

In (4.1.b) and (4.1.c), we considered that the momentum advection by the spanwise component v is at most equal to the momentum advection by the streamwise component u . This stems from the fact that the order of magnitude of v is much lower than that of u .

At this stage, we can identify and characterize the different types of flows which may be encountered.

1. $N \ll 1$: on the right-hand side of equation (4.1.a), we neglect N compared with unity. U_m , U_C , δ_m and δ_C result directly from equations (4.1.a) to (4.1.d). Among the two solutions which may be obtained for δ_T from equation (4.1.e), one contradicts the inequality $N \ll 1$ and must be discarded. The values of the different scales as functions of Ra , N , Pr are reported in table 2. This set of solutions defines a first type of flow which will be referred to type 1 flows in the following. In the (N, Le) diagram depicted in figure 3, type 1 flows are located below the vertical line $N=1$.

2. $N \gg 1$: in (4.1.a), we make the approximation $N+1 \cong N$. New values are obtained for U_m , U_C , δ_m and δ_C from equations (4.1.a) to (4.1.d). Equation (4.1.e) yields two different asymptotic behaviours for δ_T depending on which contribution to heat transfer predominates (table 2 and figure 3).

2.1. Advection in layer $[\delta_C, \delta_T]$ prevails : $U_m \delta_C \ll U_C \delta_T$. δ_T scales as in thermal convection ; these flows will be termed type 2.

2.2. Advection is the leading contribution to heat transfer in layer $[0, \delta_C]$: $U_m \delta_C \gg U_C \delta_T$, and the left-hand side of equation (4.1.e) reduces to $U_m \delta_C$. δ_T no longer scales as in pure thermal convection. These flows are said to be of type 3. The crossover between types 2 and 3 occurs at $N=Le^2$.

The variations of the streamwise velocity can be inferred from the scaling properties listed in table 2, and they are shown schematically in figure 4. Type 1 flows are heat-driven (figure 4.1). Near the wall, the fluid is driven upwards by thermal buoyancy and restrained by friction. The velocity reaches its maximum at $\delta_m = \delta_v$. Beyond $\delta_m = \delta_v$, inertia overrides friction, and the velocity decreases and vanishes at $\delta = \delta_T$, where the fluid becomes isothermal. The velocity and the temperature vary as in pure thermal convection. The velocity profile involves only two length scales, δ_m and δ_T . The concentration field does not participate in the fluid motion, and δ_C and U_C are entirely determined by thermal effects. Flows of types 2 and 3 are driven simultaneously by a combination of coupled thermal and solutal effects ; the velocity variations now involve three length scales : δ_m , δ_C and δ_T (figures 4.2 and 4.3). Below δ_C , the flow is driven by solutal buoyancy alone. It is worth expressing δ_m , δ_C and U_m as functions of D (the chemical species diffusivity), of $Ra_S(x) = Ra(x)LeN$ (the solutal Rayleigh number), and of Sc instead of α , Ra , N , Pr and Sc . Then, it appears clearly that $U_m (= Dx^{-1} Ra_S(x)^{1/2} Sc^{1/2})$, $\delta_m (= x Ra_S(x)^{-1/4} Sc^{1/4})$ and $\delta_C (= x Ra_S(x)^{-1/4} Sc^{-1/4})$ scale exactly as they do in pure solutal convection ($Sc \ll 1$). Beyond δ_C , the flow is driven solely by thermal forces and restrained by inertia before finally vanishing at $\delta = \delta_T$. The difference between type 2 and 3 flows resides in the temperature boundary-layer. Strikingly, in flows of type 2, δ_T scales as it does in pure thermal convection even though the amplitude of solutal buoyancy is much larger than that of thermal buoyancy. One physical explanation is that heat is transferred by advection in layer $[\delta_C, \delta_T]$ where solutal effects are negligible. This type of flow is predicted here for the first time. In flows of type 3, heat transfer is coupled with solutal convection yielding a shorter thermal layer thickness than in types 1 or 2.

To finish with this discussion, we emphasize that these three types of flows are the only asymptotic solutions that can be found for $Pr \ll Sc \ll 1$. It is easily verified that all the physical assumptions are satisfied. Inversely, any other combination of scales and leading mechanisms turns out to be inconsistent.

5. SCALE ANALYSIS FOR $Pr \ll 1 \ll Sc$

Double-diffusive convection for $Pr \ll 1 \ll Sc$ exhibits a higher degree of complexity than in the previous section, yielding several new physical features. The analysis proceeds on the same basis as previously. Let us first specify the different length scales, δ_m , δ , δ_v , δ_C and δ_T , and we set out the relations between them. From $Le \gg 1$, we deduce $\delta_C \ll \delta_T$ as before. On the basis of pure thermal convection, we argue that $Pr \ll 1$ and $Sc \gg 1$ imply $\delta_v \ll \delta = \delta_T$ and $\delta_C \ll \delta_v$ respectively ; accordingly, we have : $\delta_C \ll \delta_v \ll \delta = \delta_T$. It is worth noting that δ_v is not unambiguously related to δ_m or δ as in sections 3 and 4, and therefore δ_v will play a central role in the foregoing discussion. From these scales, we separate the flow into three distinct layers as a function of the side wall distance :

- $[0, \delta_C]$ where the leading mechanisms are viscous friction, thermal and solutal buoyancy ($Sc \gg 1$).
 - $[\delta_C, \delta_v]$ where the leading mechanisms may be either friction and thermal buoyancy or friction and inertia. These two physical situations will be examined separately.
 - $[\delta_v, \delta]$ where the flow results from a balance between inertia and thermal buoyancy ($Pr \ll 1$).
- The streamwise velocity takes the value U_v in δ_v and vanishes at $y = \delta$. U_v is chosen as the characteristic velocity scale in layer $[\delta_v, \delta]$.

Let us first consider that the leading mechanisms in $[\delta_C, \delta_v]$ are friction and thermal buoyancy. Advection, which is responsible for the decrease of the streamwise momentum component, occurs only in layer $[\delta_v, \delta]$. Therefore, we anticipate that the streamwise velocity necessarily reaches its maximum at $y = \delta_v$ and then decreases : $\delta_m = \delta_v$ and $U_m = U_v$. We also assume that $U_v \gg U_C$ or possibly $U_v \approx U_C$; U_C and U_v are the velocity scales respectively in layer $[0, \delta_C]$ and in layer $[\delta_C, \delta_v]$. Expressing the conservation equations in their integral forms and replacing each term by its order of magnitude, we obtain (see also appendix) :

$$\text{- the momentum conservation in } [0, \delta_v] : \quad U_C \approx \frac{g\beta_T\Delta T}{\nu}(\delta_v + N\delta_C)\delta_C \quad (5.1.a)$$

$$\text{- the momentum conservation in } [\delta_C, \delta_v] : \quad U_v - U_C \approx \frac{g\beta_T\Delta T}{\nu}\delta_v^2 \quad (5.1.b)$$

- the momentum conservation in $[\delta_v, \delta]$: $U_v^2 \approx g\beta_T\Delta T x$ (5.1.c)

- the chemical species conservation in $[0, \delta_C]$: $U_C \approx \frac{Dx}{\delta_C^2}$ (5.1.d)

- the heat conservation in $[0, \delta_T]$: $U_v \approx \frac{\alpha x}{\delta_T^2}$ (5.1.e)

The two terms on the right-hand side of equation (5.1.a) arises respectively from thermal and solutal buoyancy within $[0, \delta_v]$.

When the flow in $[\delta_C, \delta_v]$ is governed by a balance between friction and inertia, we expect that the streamwise velocity will reach its maximum at $y=\delta_C$: $\delta_m=\delta_C$ and $U_m=U_C \gg U_v$. U_C is the velocity scale in layers $[0, \delta_C]$ and $[\delta_C, \delta_v]$. Once integrated and expressed in terms of the suitable scales, the conservation equations yield :

- the momentum conservation in $[0, \delta_C]$: $U_C \approx \frac{g\beta_T\Delta T}{\nu}(1+N)\delta_C^2$ (5.2.a)

- the momentum conservation in $[\delta_C, \delta_v]$: $U_C \approx \frac{\nu x}{\delta_v^2}$ (5.2.b)

- the momentum conservation in $[\delta_v, \delta]$: $U_v^2 \approx g\beta_T\Delta T x$ (5.2.c)

- the chemical species conservation in $[0, \delta_C]$: $U_C \approx \frac{Dx}{\delta_C^2}$ (5.2.d)

- the heat conservation in $[0, \delta_T]$: $U_C\delta_v + U_v\delta_T \approx \frac{\alpha x}{\delta_T}$ (5.2.e)

Let us now investigate these two systems of equations beginning with system (5.1). In equation (5.1.a), two situations are possible depending on the value of N compared with the ratio δ_v/δ_C .

1. $N \ll \delta_v/\delta_C$. In this case, U_C is governed by thermal buoyancy forces. Neglecting $N\delta_C$ on the right-hand side of equation (5.1.a) and solving system (5.1), we derive a first set of solutions for δ_C , U_C , δ_v , U_v and δ which is reported in table 3. These scaling properties characterize a first type of flow, which for convenience will be called flows of type 1 from now on. We check that $U_v=U_m \gg U_C$ and $\delta_C \ll \delta_v \ll \delta$; $N \ll \delta_v/\delta_C$ translates into $N \ll Sc^{1/3}$. Inertia is of the same order as friction but this does not change the scaling. In the three-dimensional diagram

(N , Pr , Sc) depicted in figure 5, flows of type 1 occupy the domain located above the surface $N=Sc^{1/3}$.

2. $N \gg \delta_v / \delta_c$ or $N \gg Sc^{1/3}$. U_C is imposed by solutal buoyancy. The right-hand side of (5.1.a) reduces to $g\beta\Delta TN\delta_c^2/\nu$ and system (5.1) admits new solutions. We check that friction and thermal buoyancy are the leading mechanisms within $[\delta_c, \delta_v]$ as required if N and Sc verify the additional requirement $N \ll Sc$. Therefore, the following asymptotic cases can be distinguished :

2.1. $Sc^{1/3} \ll N \ll Sc$ which defines flows of type 2. The scaling laws are given in table 3. In figure 5, these flows are located in the domain between $N=Sc^{1/3}$ and $N=Sc$.

2.2. $N \gg Sc$ for which the flow in layer $[\delta_c, \delta_v]$ cannot be dictated by a balance between friction and thermal buoyancy. Accordingly, we now consider that the leading mechanisms are friction and inertia, and we solve system (5.2). U_C and δ_c result directly from (5.2.a) and (5.2.d). δ_v is deduced from (5.2.b). From heat equation (5.2.e), we introduce two different asymptotic solutions as in section 4.

2.2.1. $U_C\delta_v \ll U_v\delta_T$. The main contribution to heat transfer here comes from advection in $[\delta_v, \delta_T]$. From equation (5.2.e), we find that δ_T scales as in thermal convection.

2.2.2. $U_C\delta_v \gg U_v\delta_T$. Heat advection prevails in $[\delta_c, \delta_T]$, yielding flows of type 4.

We can easily be verified that these two asymptotic solutions satisfy the different conditions upon which system (5.2) was established. The cross-over between types 3 and 4 occurs for $N=Pr^2Sc$. The scaling properties are reported in table 3 and the location of each type in an (N , Pr , Sc) diagram is given in figure 5.

The results of the scale analysis makes it possible to predict the streamwise velocity variations for the different types of flows (figure 6). Flows of type 1 are heat-driven ($N \ll Sc^{1/3}$) : clearly, the velocity and temperature fields vary as in thermal convection ($Pr \ll 1$). Only two length scales are involved. The concentration field is entirely determined by thermal effects and has no reverse action on the flow. We emphasize that strikingly flows of type 1 include flows where the amplitude of solutal forces dominates over that of the

thermal forces. Flows of types 2, 3 and 4 are driven by a combination of thermal and solutal effects. The shapes of the velocity curves involve three length scales : δ_C , δ_v and δ_T . In the foregoing discussion, it will be convenient to express the length scales δ_C and δ_v and the velocity scales U_C and U_v in terms of D , $Ra_S=RaLeN$, and Sc , instead of α , Ra , N , Pr and Sc . In layer $[0, \delta_C]$, the fluid is driven upwards by solutal forces. In type 2 ($Sc^{1/3} \ll N \ll Sc$), the streamwise velocity goes on increasing after δ_C under the action of thermal forces, and reaches its greatest value as inertia begins to prevail over viscous friction: the flow is mass-driven in layer $[0, \delta_C]$ and heat-driven in $[\delta_C, \delta_T]$. We observe that $\delta_C (=xRa_S(x)^{-1/4})$, $U_C(=Dx^{-1} Ra_S(x)^{1/2})$ and δ_v , δ_T , U_v scale respectively the same way as in pure solutal convection ($Sc \gg 1$) and in pure thermal convection ($Pr \ll 1$), which results in the velocity shape given in figure 6.2. In types 3 and 4, solutal forces are so large that the streamwise velocity reaches its maximum at $y=\delta_C$. The fluid is mass-driven in layer $[0, \delta_v]$ and heat-driven in layer $[\delta_v, \delta_T]$. In both types, $\delta_C (=xRa_S(x)^{-1/4})$, $\delta_v (=xRa_S(x)^{-1/4}Sc^{1/2})$ and U_C scales as in pure solutal convection. The difference between types 3 and 4 relates to the thermal boundary layer thickness. In type 3 ($Sc \ll N \ll Pr^2Sc$), the main contribution to heat transfer comes from advection in $[\delta_v, \delta_T]$, which is itself heat-driven, and δ_T scales as in thermal convection (figure 6.3). On the other hand, in type 4 ($N \gg Pr^2Sc$) heat transfer arises mainly from advection in $[\delta_C, \delta_v]$ and is therefore coupled with solutal convection leading to a shorter boundary layer thickness δ_T (figure 6.4). It is remarkable that the cross-over between these two behaviours takes place for $N=Pr^2Sc$ and not simply for $N=1$, as might be argued assuming that thermal effects act independently of solutal effects.

6. SCALE ANALYSIS FOR $1 \ll Pr \ll Sc$.

This case is the most complex, yielding very different boundary-layer configurations ranging from heat-driven to mass-driven flows. As in sections 4 and 5, the foregoing analysis is based on the existence of multiple length scales, δ_m , δ , δ_v , δ_T , δ_C , which here verify $0 \ll \delta_C \leq \delta_m \leq \delta_T \ll \delta = \delta_v$. Indeed, $Le \gg 1$ implies that $\delta_C \ll \delta_T$, while on the basis of pure thermal convection, we infer from $Pr \gg 1$ that $\delta_T \ll \delta$ and $\delta_v = \delta$. If solutal convection were the only

driving mechanism, the streamwise velocity would reach maximum at $\delta_m = \delta_C$ since $Sc \gg 1$. In the opposite case where thermal buoyancy works alone, we should have $\delta_m = \delta_T$. Therefore, the location of δ_m results from a competition between solutal and thermal effects. These length scales make it possible to divide the flow into several layers, each with a different combination of leading mechanisms :

- In $[0, \delta_C]$, the flow is ruled by friction, solutal and thermal buoyancy ($Sc \gg 1$).
- In $[\delta_C, \delta_T]$, we cannot decide before hand whether friction is balanced by advection or by thermal buoyancy. In the following, we shall examine these two possibilities.
- in $[\delta_T, \delta]$, the terms to be retained are advection and friction ($Pr \gg 1$). The value U_T of the streamwise velocity at $y \approx \delta_T$ is the velocity scale.

Let us first consider that a balance between friction and thermal buoyancy holds in layer $[\delta_C, \delta_T]$. Since advection is negligible below δ_T , we anticipate that u reaches its maximum at $\delta_m = \delta_T$. In addition, we assume that $U_m \gg U_C$ or perhaps $U_m \approx U_C$. U_C and U_T are the velocity scales in layers $[0, \delta_C]$ and $[\delta_C, \delta_T]$ respectively. The conservation equations, once integrated, become :

$$\text{- the momentum conservation in } [0, \delta_T] : \quad U_C \approx \frac{g\beta_T\Delta T}{\nu}(\delta_T + N\delta_C)\delta_C \quad (6.1.a)$$

$$\text{- the momentum conservation in } [\delta_C, \delta_T] : \quad U_T \approx U_C + \frac{g\beta_T\Delta T}{\nu}\delta_T^2$$

$$\text{which can be combined with (6.1.a) to get :} \quad U_T \approx \frac{g\beta_T\Delta T}{\nu}(\delta_T^2 + N\delta_C^2) \quad (6.1.b)$$

$$\text{- the momentum conservation in } [\delta_T, \delta] : \quad U_T \approx \frac{vx}{\delta^2} \quad (6.1.c)$$

$$\text{- the chemical species conservation in } [0, \delta_C] : \quad U_C \approx \frac{Dx}{\delta_C^2} \quad (6.1.d)$$

$$\text{- the heat conservation in } [0, \delta_T] : \quad U_T \approx \frac{\alpha x}{\delta_T^2} \quad (6.1.e)$$

When inertia and friction prevail in $[\delta_C, \delta_T]$, advection restrains the flow above δ_C indicating that δ_m is now equal to δ_C . U_C is the velocity scale in $[0, \delta_T]$. This new combination of scales and leading mechanisms lead to the following equations :

$$\text{- from momentum conservation in } [0, \delta_C] : \quad U_C \approx \frac{g\beta_T\Delta T}{\nu}(1+N)\delta_C^2 \quad (6.2.a)$$

$$\text{- from momentum conservation in } [\delta_C, \delta_T]: \quad U_C \approx \frac{v_x}{\delta_T^2} \quad (6.2.b)$$

$$\text{- from momentum conservation in } [\delta_T, \delta]: \quad U_T \approx \frac{v_x}{\delta^2} \quad (6.2.c)$$

$$\text{- from chemical species conservation in } [0, \delta_C] U_C \approx \frac{Dx}{\delta_C^2} \quad (6.2.d)$$

$$\text{- from heat conservation in } [0, \delta_T]: \quad U_T \approx \frac{\alpha x}{\delta_T^2} \quad (6.2.e)$$

We now proceed to the determination of the different possible flows. We begin with equation (6.1.a), which gives evidence for two distinct cases depending on the value of N compared with δ_C/δ_T :

1. $N \ll \delta_C/\delta_T$. Velocity U_C is ruled by thermal buoyancy in layer $[0, \delta_T]$. We neglect $N\delta_C$ on the right hand side of equation (6.1.a), $N\delta_C^2$ in equation (6.1.b) since $N\delta_C^2 \ll \delta_T\delta_C \ll \delta_T^2$, and we easily derive a set of values for δ_C , δ_T , δ , U_C and U_T . To establish the physical relevance of these scales, we check that δ_C , δ_T and δ satisfy the inequality $\delta_C \ll \delta_T \ll \delta$, that the flow in layer $[\delta_C, \delta_T]$ is well controlled by the interplay between thermal buoyancy and friction, and that we have $U_C \ll U_T$. $N \ll \delta_C/\delta_T$ requires that $N \ll Pr^{-1/3} Sc^{1/3}$. This condition is equivalent to $N \ll Le^{1/3}$ but in the foregoing discussion, it is convenient to use parameters Pr and Sc . These flows are said to be of type 1. Their location in a three-dimensional diagram (N , Pr , Sc) is depicted in figure 7, and the different scales are reported in table 4.

2. $N \gg \delta_C/\delta_T$ or $N \gg Pr^{-1/3} Sc^{1/3}$. U_C results from solutal buoyancy in layer $[0, \delta_T]$. In equation (6.1.a), we set $\delta_T \ll N\delta_C$. The form of equation (6.1.b) leads us to consider separately:

2.1. $N\delta_C^2 \ll \delta_T^2$. System (6.1) here yields another set of solutions, which are reported in table 4. U_T is still much larger than U_C and viscous friction dominates over inertia as required. Condition $N\delta_C^2 \ll \delta_T^2$ translates into $N \ll Pr^{-1} Sc$. These flows are said to be of type 2 (see table 4 and figure 7).

2.2. $N\delta_C^2 \gg \delta_T^2$ or $N \gg Pr^{-1} Sc$. U_T is of the same order of magnitude as U_C . The reasoning upon which system (6.1) was derived remains valid, provided that inertia is negligible compared with friction in layer $[\delta_C, \delta_T]$, which requires $N \gg Sc$. The solutions characterize flows of type 3 (table 4, figure 7).

2.3. $N \gg Sc$. The combination friction and thermal buoyancy is no longer appropriate in layer $[\delta_C, \delta_T]$, and system (6.1) fails. Therefore, we now consider that the flow in $[\delta_C, \delta_T]$ results from a competition between friction and inertia, and we solve system (6.2). The solutions define flows of type 4 (table 4 and figure 7).

The velocity curves expected for the different types of flow are drawn schematically in figure 8 and we will now discuss their relation with the scaling relations in table 4. Flows of type 1 ($N \ll Pr^{-1/3} Sc^{1/3}$) are heat-driven. Solutal forces have no action on the flow. The velocity and temperature curves are the same as in pure thermal convection and, therefore, involve only two length scales (figure 8.1). It is worth noting that heat-driven flows occur when $N \ll Pr^{-1/3} Sc^{1/3}$, and not simply when $N \ll 1$. Types 2, 3, 4 are driven by a combination of thermal and solutal effects. The variations of the streamwise velocity now requires three length scales : δ_C , δ_T and δ . $\delta_C (=xRa_S(x)^{-1/4})$ and $U_C(=Dx^{-1}Ra_S(x)^{-1/4})$ scale as in pure solutal convection, but the values of δ_T , δ and U_T differ from one type to the other. In type 2 ($Pr^{-1/3} Sc^{1/3} \ll N \ll Pr^{-1} Sc$), the fluid motion in layer $[0, \delta_C]$ results mainly from solutal buoyancy, streamwise velocity continues to increase within $[\delta_C, \delta_T]$ because of the thermal forces, and then decreases to zero after δ_T . δ_T , δ , U_T are the same as in pure thermal convection. In types 3 and 4, the amplitude of solutal forces near the wall is so large compared with the amplitude of the thermal forces that the streamwise velocity reaches its maximum at $y \approx \delta_C$. $\delta = xRa_S(x)^{-1/4} Sc^{1/2}$ is the same as in pure solutal convection. The difference between types 3 and 4 resides in the behaviour of the streamwise velocity field above δ_C : in type 3, the curve is very flat between δ_C and δ_T , expressing the fact that $U_T \approx U_C$; in type 4, the flow is entirely mass-driven and only two scales are involved, U_T and δ_T being determined by solutal convection.

At this point, we should stress the salient features of the asymptotic analyses reported in sections 4 ($Pr \ll Sc \ll 1$), 5 ($Pr \ll 1 \ll Sc$), and 6 ($1 \ll Pr \ll Sc$). We have exhaustively derived the possible combinations of leading mechanisms which result in a great variety of flow configurations, all of them different. However, we emphasize that several common

features emerge from the physical results reported in tables 2, 3, and 4 and in figures 4, 6, and 8. For the sake of clarity, we focus on the two asymptotic cases which are physically meaningful, namely $Pr \ll 1 \ll Sc$ and $1 \ll Pr \ll Sc$. Firstly, we note that all flows of type 1 are heat-driven. In the same manner, flows of type 2 are mass-driven in layer $[0, \delta_C]$ and heat-driven outside. In the three-dimensional diagrams (N, Sc, Pr) depicted in figures 5 and 7, these similarities are expressed by the fact that flows of both types 1 and 2 on the other hand are located in contiguous domains connected to each other through the plane $Pr=1$. In the same vein, flows of type 4 resemble one another, except that solutal convection works alone when $Pr \gg 1$, while it is coupled with thermal effects when $Pr \ll 1$. Accordingly, in diagrams 5 and 7, flows of type 4 are located in contiguous regions separated by the plane $Pr=1$. Lastly, flows of type 3, which exhibit very different properties, are located in disconnected domains. As a consequence of the complex interaction between thermal and solutal effects, we note that the cross-overs between the different flow configurations are not trivial and cannot be found a priori from simple order of magnitude arguments. To finish with this discussion, we emphasize that certain flow configurations refer to degenerate cases, in the sense that only two length scales are involved, exactly as in single-diffusive convection (flows of type 1, which are heat-driven, and flows of type 4 when $Sc \ll 1$, which are mass-driven). Apart from these cases, our scale analysis relies on at least three length scales.

7. COMPARISON WITH NUMERICAL SOLUTIONS

To test the validity of this analysis, we solved the boundary-layer equations numerically over a wide range of parameters. Practically speaking, we looked for similarity solutions, which state that \bar{V} , T and C at a height x above the leading edge are the same as at x_0 , provided that y is rescaled by a characteristic length $\delta(x)$. In view of the previous results, the length scales of the problem all being proportional to $xRa(x)^{-1/4}$, a suitable choice for $\delta(x)$ is $\delta(x) = xRa(x)^{-1/4}$ and the similarity variable is written : $\eta = y/\delta(x) = y/(xRa(x)^{-1/4})$. It is also convenient to introduce the stream function, which takes the form : $\Psi(\eta) = \alpha Ra(x)^{1/4} \Phi(\eta)$. Φ

is a non-dimensionalized function of η alone. In this description, u and v are the derivatives of Ψ with respect to the coordinates $u=\partial\Psi/\partial y$ and $v=-\partial\Psi/\partial x$ and we get easily :

$$u = -\frac{\alpha}{x} \text{Ra}(x)^{1/2} \Phi'(\eta) \quad (7.1.a)$$

$$v = \frac{\alpha}{x^2} \text{Ra}(x)^{1/4} [3\Phi - \eta\Phi'(\eta)] \quad (7.1.b)$$

Now we rescale the temperature and the concentration by $\Delta T = T_0 - T_\infty$ and $\Delta C = C_0 - C_\infty$, and we define $\theta = (T - T_\infty) / \Delta T$ and $\gamma = (C - C_\infty) / \Delta C$; θ and γ decline from unity on the side wall to zero at infinity. Substituting into system (2.2), we set out the following system of non-linear differential equations :

$$\Phi''' + 3\Phi\Phi'' - 2\Phi'^2 + (\theta + N\gamma) = 0 \quad (7.2.a)$$

$$\theta'' + 3\text{Pr}\Phi\theta' = 0 \quad (7.2.b)$$

$$\gamma' + 3\text{Sc}\Phi\gamma' = 0 \quad (7.2.c)$$

The boundary conditions are $\theta(0)=\gamma(0)=1$; $\Phi(0)=0$; $\theta(\infty)=\gamma(\infty)=0$.

We solved this system by finite-differences with an adaptive stepsize procedure to account for the fact that θ and γ decrease over very different length scales [24]. This provides numerical solutions of double-diffusive boundary layers over a wide range of physical parameters. For the sake of brevity, here we report only on results obtained when Pr and Sc are both larger than unity. An exhaustive presentation of this numerical study will be given elsewhere. Figure 9 depicts the variations of $-\Phi'$, θ , γ as functions of η for values of N , Pr and Sc in the different domains depicted in figure 7. From (7.1), $-\Phi'(\eta)$ represents the variations of the streamwise velocity at given x and variable y and therefore figure 9 can be compared directly to figure 8. Clearly, the computations corroborate the results of the scaling analysis presented in section 6. For instance, we checked that the streamwise velocity in figure 9.1 is exactly the same as in pure thermal convection at the same Prandtl number (flows of type 1). The streamwise velocity in figure 9.2 is identical to the velocity in figure 9.1 except near the side wall, where the derivative is governed by solutal convection (type 2 flows). We also note that the variations of θ in figures 9.1 and 9.2 are nearly identical, as predicted (see table 4). In figure 9.3, the velocity is mass-driven near the wall, peaks on a flat plateau reflecting the fact

that U_T has the same order of magnitude as U_C in the scale analysis, and then decreases to zero (type 3 flows). Lastly, the streamwise velocity in 9.4 is entirely mass-driven and θ declines much more quickly than previously, mainly because heat transfer is now determined by solutal effects (flows of type 4).

To make this analysis more quantitative, we now focus on the values of $\theta'(0)$ and $\gamma(0)$. On the one hand, $|\theta'(0)|$ and $|\gamma(0)|$ scale as $\Delta T/\delta_T$ and $\Delta C/\delta_C$ indicating that they are well suited to reliably testing the scaling laws expected for δ_T and δ_C . On the other hand, the heat and chemical species transfer coefficients at the side wall, the so-called Nusselt and Sherwood numbers [7], which can be measured in practical situations, are simply proportional to $|\theta'(0)|$ and $|\gamma(0)|$. The agreement between the values calculated for $|\theta'(0)|$ and $|\gamma(0)|$, and the predictions of our scale analysis is very good. Figure 10 is a log-log representation of the variations of $|\gamma(0)|\text{Pr}^{-1/3}\text{Sc}^{1/3}$ as a function of $\text{NPr}^{1/3}\text{Sc}^{-1/3}$. With this set of coordinates, all the points fall on a universal curve provided that the ratio Sc/Pr is large enough. When $\text{NPr}^{1/3}\text{Sc}^{-1/3} \ll 1$, flows are heat-driven, the chemical species transfer is governed entirely by thermal convection and, accordingly, $|\gamma(0)|\text{Pr}^{-1/3}\text{Sc}^{1/3}$ is constant. For $\text{NPr}^{1/3}\text{Sc}^{-1/3} \gg 1$, the points are located on a straight line with a slope 1/4 in agreement with the result of our scale analysis (table 4). The cross-over between these two domains of variation is narrow. When $\text{NPr}^{1/3}\text{Sc}^{-1/3} \gg 1$, it is worth noting that the asymptotic scaling found for $|\gamma(0)|$ holds even if $\text{Sc}=\text{Pr}$. This comes from the fact that the chemical species transfer is governed mainly by solutal convection and that, accordingly, it does not depend on the relative efficiency of heat and mass diffusion. When $\text{NPr}^{1/3}\text{Sc}^{-1/3} \ll 1$, the points calculated for $\text{Sc}=\text{Pr}$ fall on a horizontal line which is parallel but not superimposed on the line obtained for $\text{Sc} \gg \text{Pr}$. Here, thermal convection dictates the velocity field, and the chemical species transfer so that two prefactors are found, depending on whether δ_C and δ_T are equal ($\text{Sc}=\text{Pr}$) or not ($\text{Sc} \neq \text{Pr}$).

Figure 11 is a log-log representation of $|\theta'(0)|$ as a function of NPrSc^{-1} . It also indicates a perfect agreement with the predictions of our scale analysis (table 4). Provided that the ratio Sc/Pr is large enough, the numerically calculated points fall on a universal curve with a very

good approximation. When $NPrSc^{-1} \ll 1$, the flows are heat-driven and $|\theta'(0)|$ does not depend on N . In addition, the scaling expected for $Sc \gg Pr$ still holds for $Sc = Pr$ and the prefactors are equal. This arises from the fact that heat transfer is determined by thermal effects only. Moreover, we have checked that $|\theta'(0)|$ tends towards the same limit as in pure thermal convection for $N=0$. When $NPrSc^{-1} \gg 1$ and $Sc \gg Pr$, the points are well described by a straight line with a slope of $1/4$, as predicted. Now, heat transfer is ruled by solutal effects and the prefactors found for $Sc = Pr$ and $Sc \gg Pr$ are different.

8. CONCLUSIONS

Through the combined use of scale analysis and integral equations, the method developed here reveals new and meaningful features of double-diffusive convection. Our analysis makes it possible to derive systematically of the different asymptotic flow configurations occurring in the vicinity of a vertical side wall in the presence of horizontal temperature and concentration gradients. For the first time, we have obtained exhaustive predictions of the velocity, temperature and concentration fields as a function of buoyancy forces and molecular diffusivities. Each solution is characterized unambiguously by several scaling relations involving a set of length and velocity scales following from $xRa(x)^{-1/4}$ and $\alpha Ra(x)^{1/2}/x$ through factors depending on N , Pr , and Sc . These solutions are valid for asymptotically large or small N , Pr , and Sc values, but our numerical study has revealed that the cross-overs between the different flows are fairly narrow, thus making our predictions suitable for practical purposes. Our most striking result deals with the existence of flows which are driven entirely by the temperature field, even though the amplitude of solutal forces is much greater than that of the thermal forces.

APPENDIX

In pure thermal convection, the streamwise velocity involves two independent length scales, δ_m and δ , which are related unambiguously to δ_v and δ_T , yielding only two separate layers in the flow. Scale analysis can be performed simply by evaluating the different terms appearing in the conservation equations from the length scale and velocity scales existing in each layer. This procedure fails in the case of double diffusive convection, where the existence of multiple length and velocity scales leads us to distinguish at least three layers in the flow. Our key idea is to investigate each layer separately, which is possible using integral equations.

Integral Equations for Boundary Layers.

An alternative form to system (2.2) is obtained by combining (2.2.a) with (2.2.b), (2.2.c) and (2.2.d) :

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta_T(T - T_\infty) + g\beta_C(C - C_\infty) \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (A.2)$$

$$\frac{\partial(uC)}{\partial x} + \frac{\partial(vC)}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (A.3)$$

Now, these equations can be integrated with respect to variable y , which is the distance to the the side wall, yielding :

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dy + u(y_2)v(y_2) - u(y_1)v(y_1) = v \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y_2} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y_1} \right\} + \int_{y_1}^{y_2} [g\beta_T(T - T_\infty) + g\beta_C(C - C_\infty)] dy \quad (A.4)$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial(uT)}{\partial x} dy + u(y_2)T(y_2) - v(y_1)T(y_1) = \alpha \left\{ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y_2} - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y_1} \right\} \quad (A.5)$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial(uC)}{\partial x} dy + u(y_2)C(y_2) - u(y_1)C(y_1) = D \left\{ \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y_2} - \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y_1} \right\} \quad (A.6)$$

Derivation of equation (4.1.a).

Let us first derive equation (4.1.a) from integral equation (A.4). When $Pr \ll Sc \ll 1$, the leading contributions to momentum conservation in layer $[0, \delta_m = \delta_v]$ are friction, thermal and solutal buoyancy. Accordingly, we set the left-hand side of equation (A.4) equal to zero. The velocity derivative in δ_m is zero and the order of magnitude of the velocity derivative on the side wall is U_m/δ_m . Now, thermal buoyancy integrated between 0 and δ_m scales as $g\beta_T \Delta T \delta_m$. The corresponding expression for solutal buoyancy is $g\beta_C \Delta C \delta_m = N g\beta_T \Delta T \delta_m$. Substituting directly into equation (A.4), we get equation (4.1.a). It is worth noting that a crude estimation of the orders of magnitude of the different terms appearing in equation (2.2.b) would yield the same result. This arises from the fact that u varies uniformly between 0 and δ_m . We emphasize that this way of reasoning fails in those instances where the length and velocity scales are different in a given layer. We now turn our attention towards these situations.

Derivation of equation (4.1.e).

The conservation of heat in the flow results from a balance between heat diffusion and heat advection by the streamwise velocity in layers $[0, \delta_C]$ and $[\delta_C, \delta_T]$, where the velocity scales are respectively U_C and U_m . Advection by the spanwise velocity is zero since $v(0)=0$ and $T(\delta_T)=T_\infty$. Accordingly, the integral in the left-hand side of equation (A.5) is the sum of two integrals, the first ranging from 0 to δ_C ($\approx U_m \Delta T \delta_C/x$) and the other from δ_C to δ_T ($\approx U_m \Delta T \delta_T/x$). Now, the value of the derivative $\partial T/\partial y$ at $y=\delta_T$ is zero. In addition, T decreases from T_0 on the side wall to T_∞ at infinity over the characteristic length scale δ_T , so that the side wall derivative $(\partial T/\partial y)_0$ scales as $\Delta T/\delta_T$. Substituting into (A.5) yields easily equation (4.1.e).

Derivation of equation (5.1.a)

The derivation of equation (5.1.a) from equation (A.4) proceeds as follows. Assuming that the leading contributions to momentum conservation in layer $[0, \delta_v]$ are friction, thermal buoyancy and solutal buoyancy, the left hand side of equation (A.4) is zero. The streamwise velocity is maximum at $y=\delta_v$ so that $(\partial u/\partial y)_{\delta_v} \approx 0$; the side wall derivative $(\partial u/\partial y)_0$ scales as U_C/δ_C . Now, the integral of buoyancy forces between 0 and δ_v is the sum of two terms, the

first arising from thermal forces ($\approx g\beta_T\Delta T\delta_v$) and the second from solutal forces ($\approx g\beta_T\Delta CN\delta_v$). Substituting into (A.4) gives equation (5.1.a).

Acknowledgements.

"Laboratoires Fluides, Automatique et Systèmes Thermiques" is a laboratory of Université Paris VI and is associated with CNRS (URA 871).

REFERENCES

- [1] J.S Turner, *Buoyancy effects in fluids*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [2] W.A. Tiller, *The Science of Crystallization : macroscopic phenomena and defect generation* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [3] J.S. Turner, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 17, 11 (1985).
- [4] Y. Kamotani, L.W. Wang, S. Ostrach, H.D. Jiang, *Int. J. Heat Mass Transfer* 28, 165 (1985).
- [5] J. Lee, H.T. Hyun, K.W. Kim, *Int. J. Heat Mass Transfer* 31, 1969 (1988).
- [6] H. Han, T.H. Kueln, *Int. J. Heat Mass Transfer* 34, 449 (1991).
- [7] A. Bejan, *Convection Heat Transfer* (John Wiley & Sons, New-York, 1993).
- [8] O.V. Trenisan, A. Bejan, *J. Heat Transfer* 109, 104 (1987).
- [9] W. Shyy, M.H. Chen, *Phys. Fluids* A3, 2592 (1991).
- [10] J.A. Weaver, R. Viskanta, *Int. J. Heat Mass Transfer* 34, 3107 (1991).
- [11] J.A. Weaver, R. Viskanta, *Int. J. Heat Mass Transfer* 34, 3121 (1991).
- [12] B. Gebhart, *Heat Transfer* (McGraw-Hill, New-York, 1971).
- [13] W.N. Gill, E. Del Casal, D. W. Zech, *Int. J. Heat Mass Transfer* 8, 1135 (1965).
- [14] E.N. Lightfoot, *Chem. Eng. Sc.* 23, 931 (1968).
- [15] J.A. De Leeuw den Bouten, B. de Mennik, P.M. Heertjes, *Chem. Eng. Sc.* 23, 1185 (1968).
- [16] D.A. Saville, S.W. Churchill, *AIChE Journal* 16, 268 (1970).
- [17] B. Gebhart, L. Pera, *Int. J. Heat Mass Transfer* 14, 2035 (1971).
- [18] K.R. Khair, A. Bejan, *J. Heat Trans.* 107, 979 (1985).
- [19] H.B. Keller, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 10, 417 (1978).
- [20] J. Srinivasan, D. Angirasa, *Int. J. Heat Mass Transfer* 31, 2033 (1988).
- [21] H. Schlichting, *Boundary Layer Theory* (McGraw-Hill, New-York, 1968).
- [22] C. Allain, M. Cloitre and A. Mongruel, *Europhys. Lett.* 20, 313 (1992).
- [23] J. Patterson, J. Imberger, *J. Fluid Mech.* 100, 65 (1980).

[24] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, *Numerical Recipes* (Cambridge University Press, Cambridge, 1986)

TABLE CAPTIONS

Table 1 : Summary of the different scales involved in the analysis of pure thermal convection at low and high Prandtl numbers.

Table 2 : Summary of the different scales involved in double-diffusive convection when $Pr \ll Sc \ll 1$. From section 4, the length scales are all proportional to $xRa(x)^{-1/4}$ and the velocity scales to $\alpha Ra(x)^{1/2} / x$. Therefore, for clarity we have omitted these factors and the table gives only the multiplicative coefficients.

Table 3 : Summary of the different scales involved in double-diffusive convection when $Pr \ll 1 \ll Sc$. From section 5, the length scales are all proportional to $xRa(x)^{-1/4}$ and the velocity scales to $\alpha Ra(x)^{1/2} / x$. Therefore, the table only gives the multiplicative coefficients.

Table 4 : Summary of the different scales involved in double-diffusive convection when $1 \ll Pr \ll Sc$. From section 6, the length scales are all proportional to $xRa(x)^{-1/4}$ and the velocity scales to $\alpha Ra(x)^{1/2} / x$. The table only gives the multiplicative coefficients.

FIGURE CAPTIONS

Figure 1 : Schematic representation of the boundary-layer flow near a vertical wall in a fluid. δ_C and δ_T are the thermal and solutal boundary layer thicknesses. The streamwise velocity is zero beyond δ . Physically acceptable configurations must satisfy : $\delta_C \leq \delta_T \leq \delta$.

Figure 2 : Schematic representation of typical velocity profiles in pure thermal convection at low (top) and high Prandtl numbers (bottom).

Figure 3 : Different asymptotic types of flow occurring as a function of parameters N and Le when $Pr \ll Sc \ll 1$. Each type of flow is characterized by a set of length scales and velocity scales, which are summarized in table 2.

Figure 4: Schematic representation of the three types of velocity curves predicted by our scale analysis when $Pr \ll Sc \ll 1$. We indicate the combination of leading mechanisms acting in each layer (Visc.=viscous friction ; Adv.=advection ; Th.=thermal buoyancy ; Sol.=solutal buoyancy).

Figure 5 : Different asymptotic types of flow occurring as a function of parameters N , Pr and Sc when $Pr \ll Sc \ll 1$.

Figure 6: Schematic representation of the four types of velocity curves predicted by our scale analysis when $Pr \ll 1 \ll Sc$. We indicate the combination of leading mechanisms acting in each layer (Visc.=viscous friction, Adv.=advection, Th.=thermal buoyancy, Sol.=solutal buoyancy).

Figure 7 : Different asymptotic types of flow occurring as a function of parameters N , Pr and Sc when $1 \ll Pr \ll Sc$. Note the continuity between this diagram and figure 5.

Figure 8: Schematic representation of the four types of velocity curves predicted by our scale analysis when $1 \ll \text{Pr} \ll \text{Sc}$. In each layer, we indicate the leading mechanism balancing the viscous friction (Adv.=advection ; Th.=thermal buoyancy ; Sol.=solutal buoyancy).

Figure 9 : $-\Phi'$, θ , γ as functions of η for different values of N , Pr and Sc . (1) $N=5$, $\text{Pr}=10$, $\text{Sc}=1.25 \cdot 10^6$; (2) $N=10^2$, $\text{Pr}=10$, $\text{Sc}=10^4$; (3) $N=10^2$, $\text{Pr}=10$, $\text{Sc}=10^3$; (4) $N=10^4$, $\text{Pr}=10$, $\text{Sc}=10^2$.

Figure 10 : Log-Log representation of $|\gamma(0)|\text{Pr}^{-1/3}\text{Sc}^{1/3}$ as a function of $N\text{Pr}^{1/3}\text{Sc}^{-1/3}$ for $\text{Pr}=10$ and $\text{Sc}=10$ (\square) ; $\text{Pr}=10$ and $\text{Sc}=10^2$ (\circ) ; $\text{Pr}=10^2$ and $\text{Sc}=10^3$ (\triangle) ; $\text{Pr}=10$ and $\text{Sc}=10^3$ (\diamond).

Figure 11 : Log-Log representation of $|\theta'(0)|$ as a function of the ratio $N\text{Pr}\text{Sc}^{-1}$ for $\text{Pr}=10$ and $\text{Sc}=10$ (\square) ; $\text{Pr}=10$ and $\text{Sc}=10^2$ (\circ) ; $\text{Pr}=10^2$ and $\text{Sc}=10^3$ (\triangle) ; $\text{Pr}=10$ and $\text{Sc}=10^3$ (\diamond).

	δ_m	U_m	δ
$Pr \ll 1^{(1)}$	$xRa(x)^{-1/4}Pr^{1/4}$	$\frac{\alpha}{x}Ra(x)^{1/2}Pr^{1/2}$	$xRa(x)^{-1/4}Pr^{-1/4}$
$Pr \gg 1^{(2)}$	$xRa(x)^{-1/4}$	$\frac{\alpha}{x}Ra(x)^{1/2}$	$xRa(x)^{-1/4}Pr^{1/2}$

(1) : $\delta_v = \delta_m$; $\delta_T = \delta$

(2) : $\delta_v = \delta$; $\delta_T = \delta_m$

Table 1

	$\delta_m = \delta_v$	U_m	δ_c	U_c	$\delta = \delta_T$
Type 1 $N \ll 1$	$Pr^{1/4}$	$Pr^{1/2}$	$Pr^{-1/4} Le^{-1/2}$	$Pr^{1/2}$	$Pr^{-1/4}$
Type 2 $1 \ll N \ll Le^2$	$N^{-1/4} Pr^{1/4}$	$N^{1/2} Pr^{1/2}$	$N^{-1/4} Pr^{-1/4} Le^{-1/2}$	-	-
Type 3 $N \gg Le^2$	-	-	-	-	$N^{-1/4} Pr^{-1/4} Le^{1/2}$

Table 2

	δ_C	U_C	δ_v	U_v	$\delta_T = \delta$
Type 1(1) $N \ll Sc^{1/3}$	$Pr^{1/4} Sc^{-1/3}$	$Pr^{1/2} Sc^{-1/3}$	$Pr^{1/4}$	$Pr^{1/2}$	$Pr^{-1/4}$
Type 2(1) $Sc^{1/3} \ll N \ll Sc$	$N^{-1/4} Pr^{1/4} Sc^{-1/4}$	$N^{1/2} Pr^{1/2} Sc^{-1/2}$	-	-	-
Type 3(2) $Sc \ll N \ll Pr^2 Sc$	-	-	$N^{-1/4} Pr^{1/4} Sc^{1/4}$	-	-
Type 4(2) $N \gg Pr^2 Sc$	-	-	-	-	$N^{-1/4} Pr^{-3/4} Sc^{1/4}$

(1) : $\delta_m = \delta_v$; $U_m = U_v$

(2) : $\delta_m = \delta_C$; $U_m = U_C$

Table 3

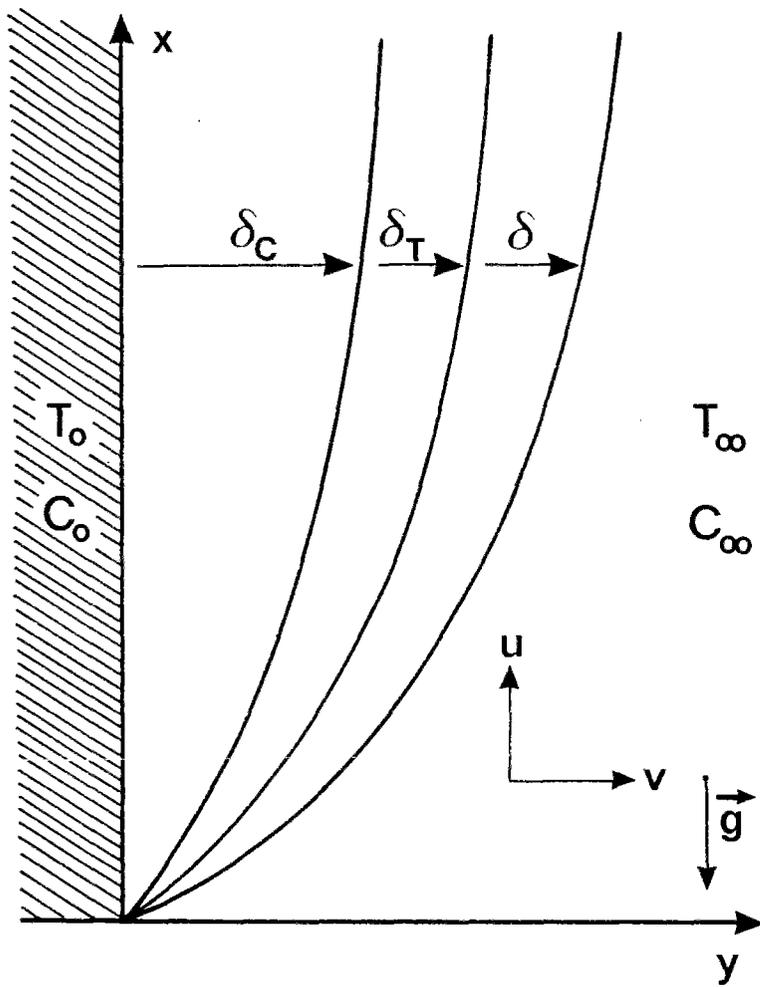
	δ_C	U_C	δ_T	U_T	$\delta_V = \delta$
Type 1(1) $N \ll Pr^{-1/3} Sc^{1/3}$	$Pr^{-1/3} Sc^{-1/3}$	$Pr^{-1/3} Sc^{-1/3}$	1	1	$Pr^{1/2}$
Type 2(1) $Pr^{-1/3} Sc^{1/3} \ll N \ll Pr^{-1} Sc$	$N^{-1/4} Pr^{1/4} Sc^{-1/4}$	$N^{1/2} Pr^{1/2} Sc^{-1/2}$	-	-	-
Type 3(2) $Pr^{-1} Sc \ll N \ll Sc$	-	-	$N^{-1/4} Pr^{-1/4} Sc^{1/4}$	$N^{1/2} Pr^{1/2} Sc^{-1/2}$	$N^{-1/4} Pr^{1/4} Sc^{1/4}$
Type 4(3) $N \gg Sc$	-	-	-	$N^{1/2} Sc^{-1/2}$	-

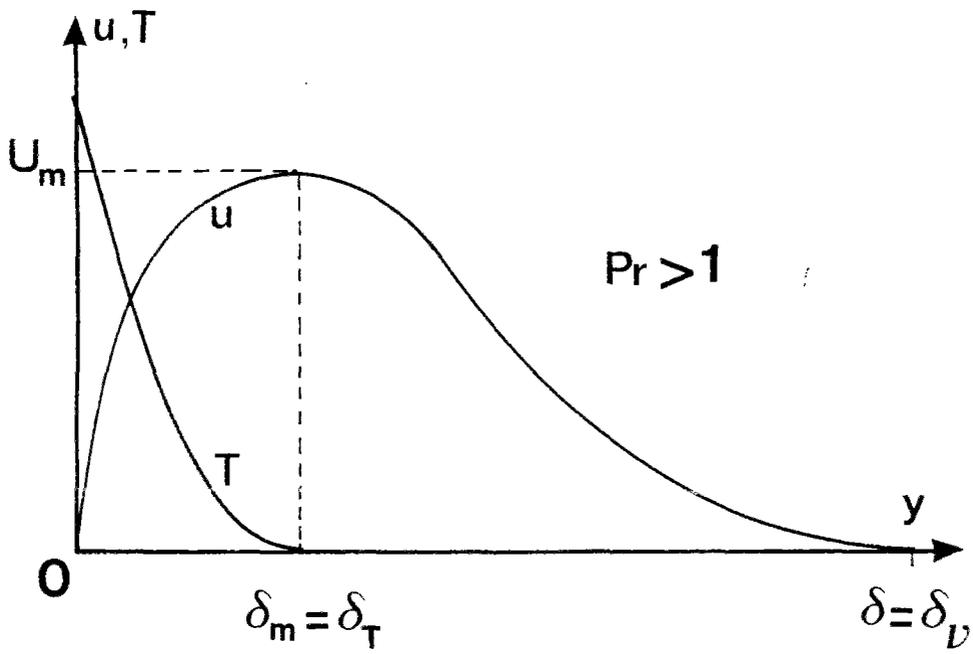
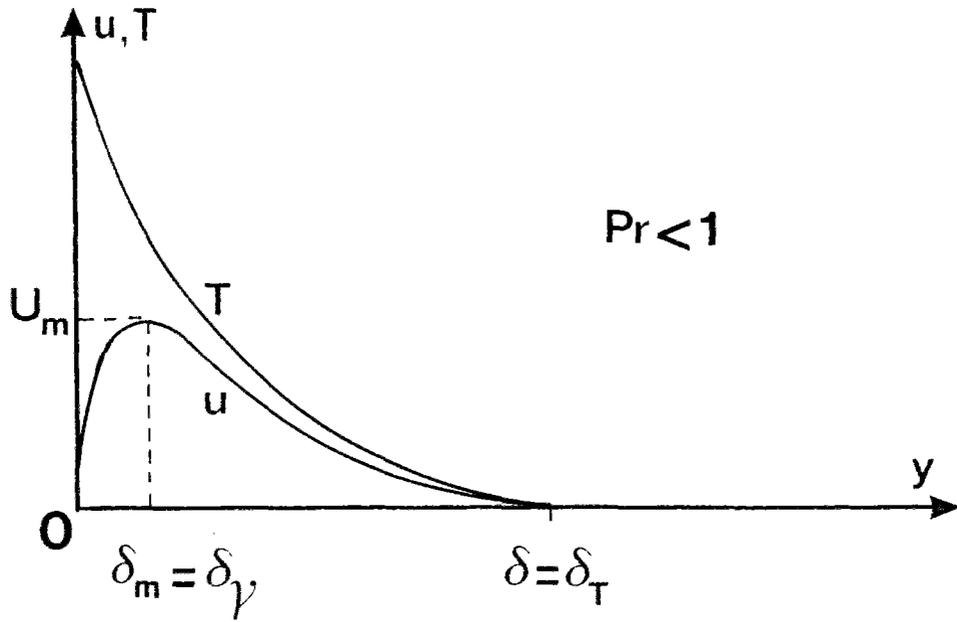
(1) : $\delta_m = \delta_T$; $U_m = U_T$

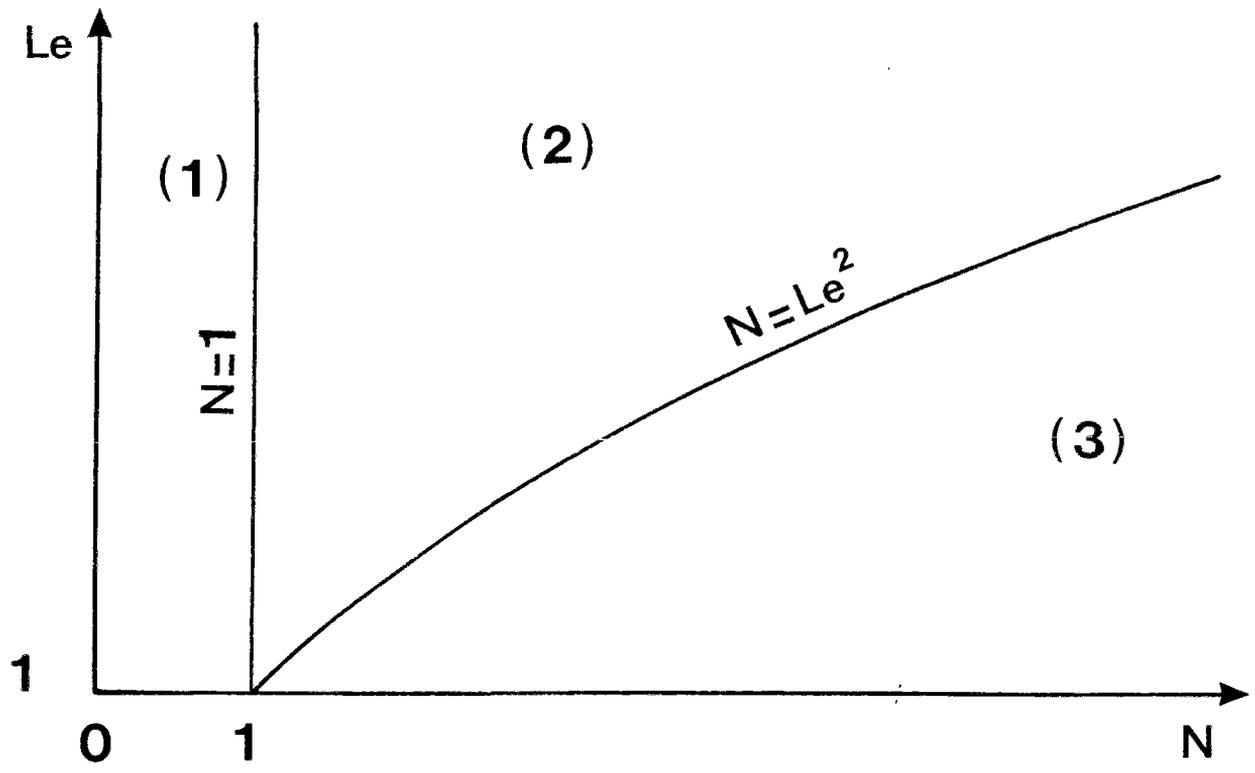
(2) : $U_m = U_C = U_T$

(3) : $\delta_m = \delta_C$; $U_m = U_C$

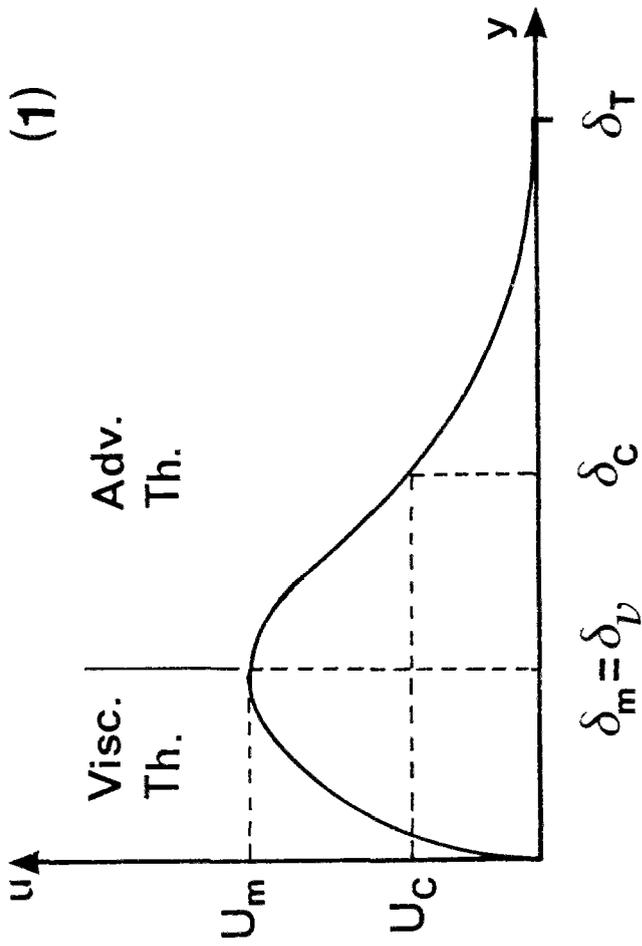
Table 4



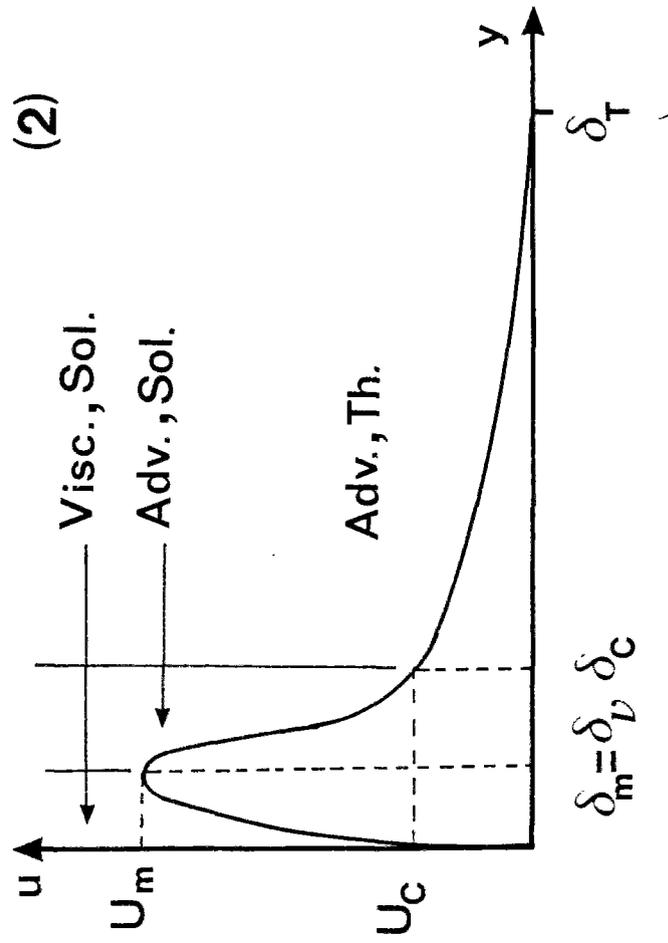




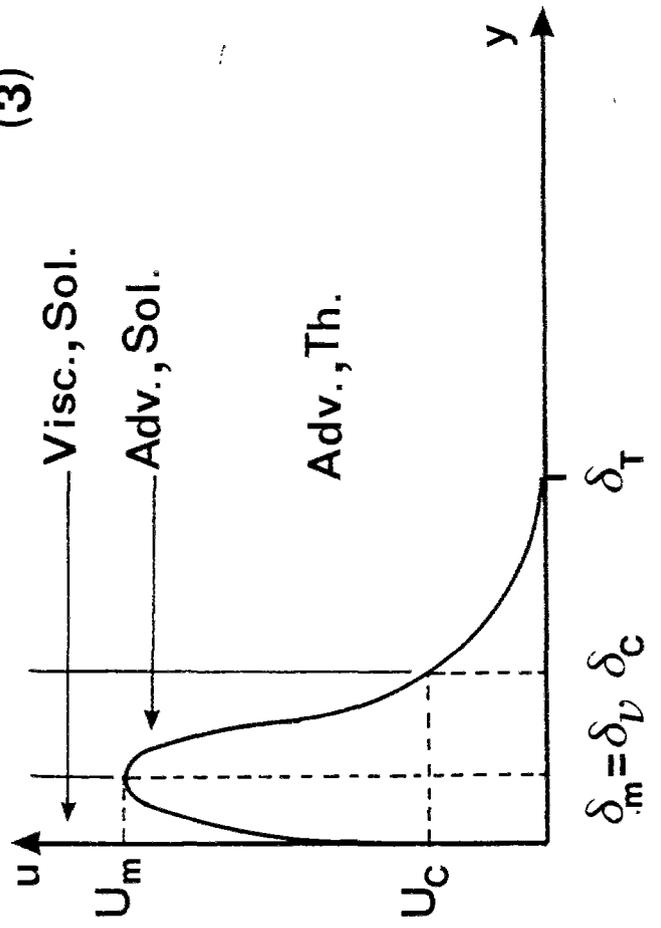
(1)

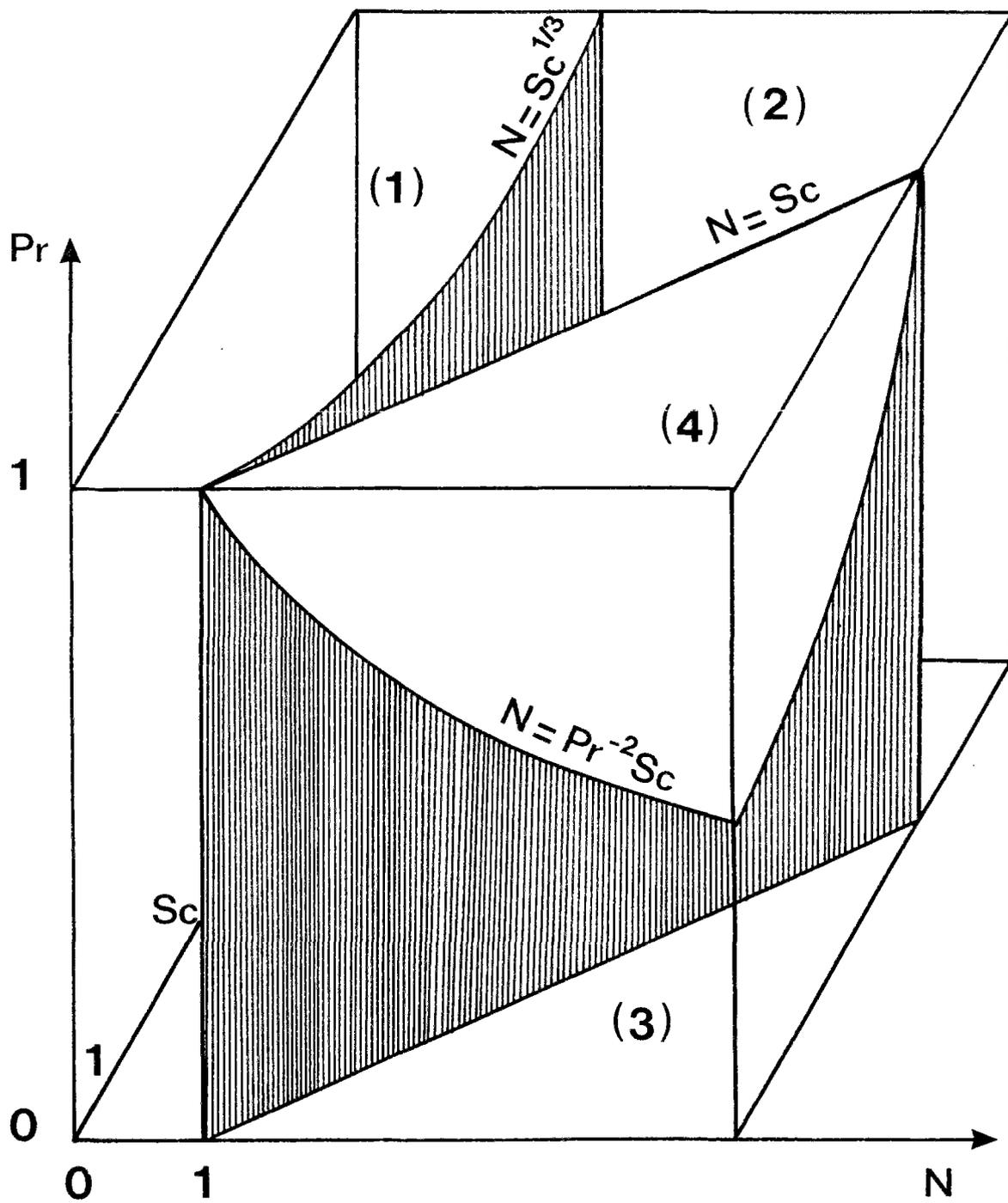


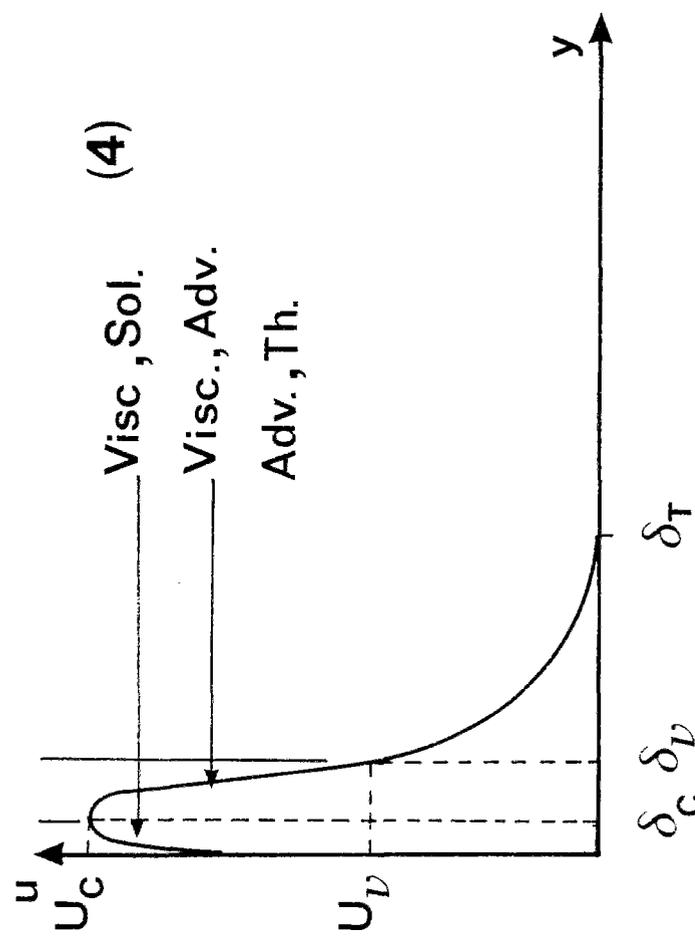
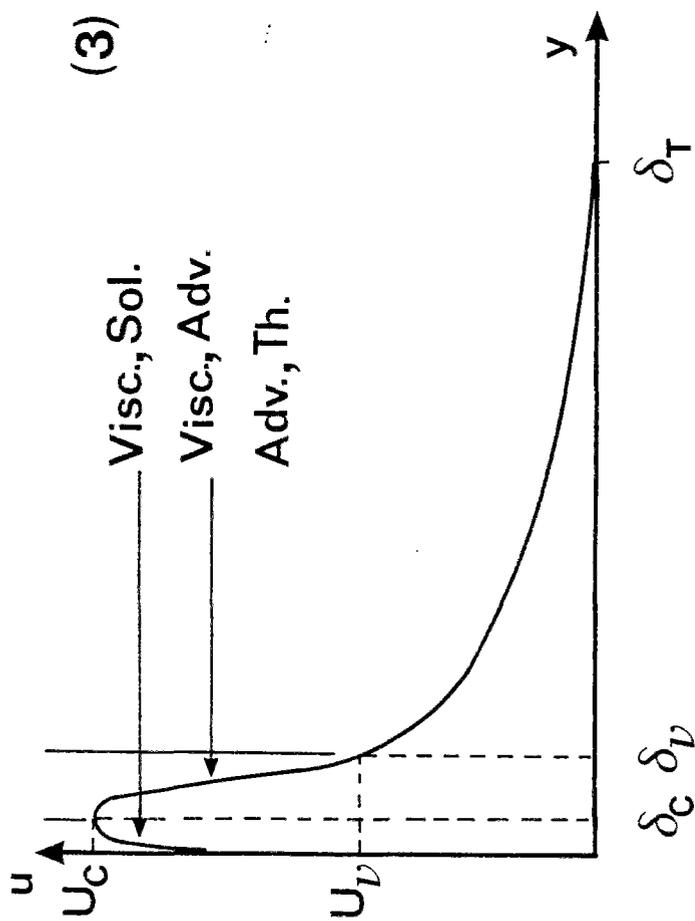
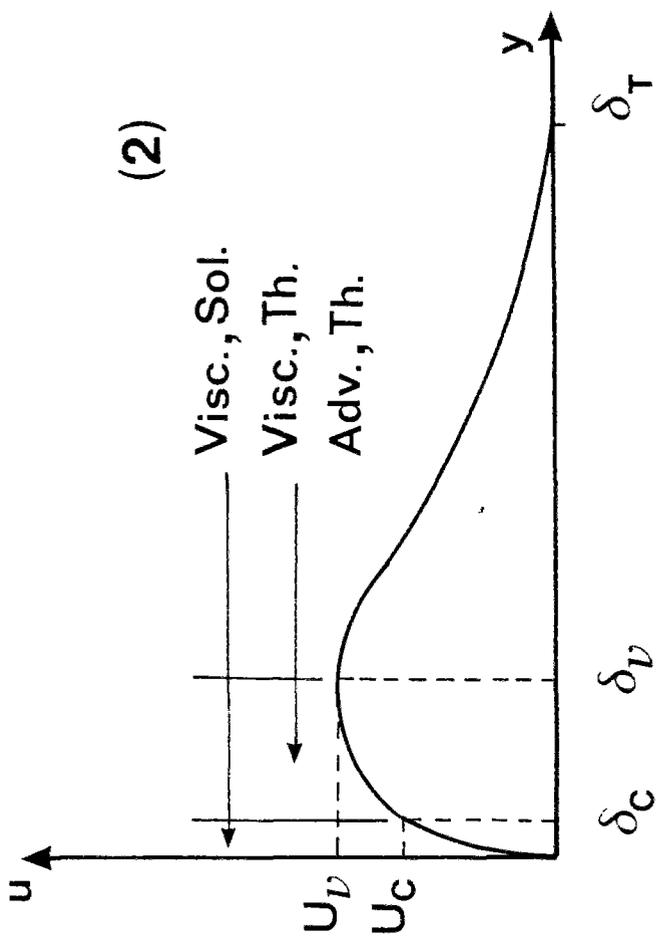
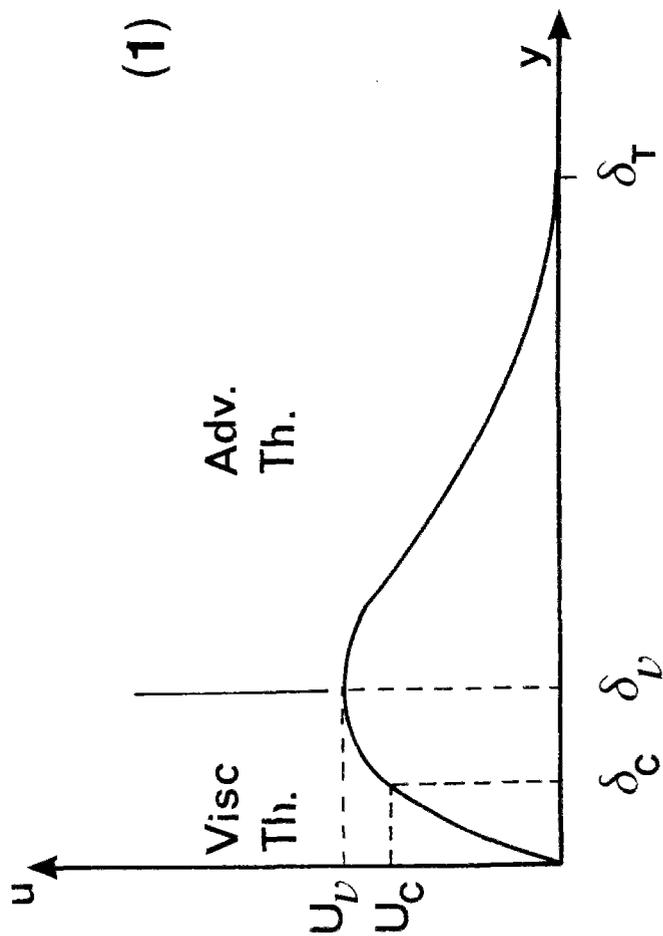
(2)

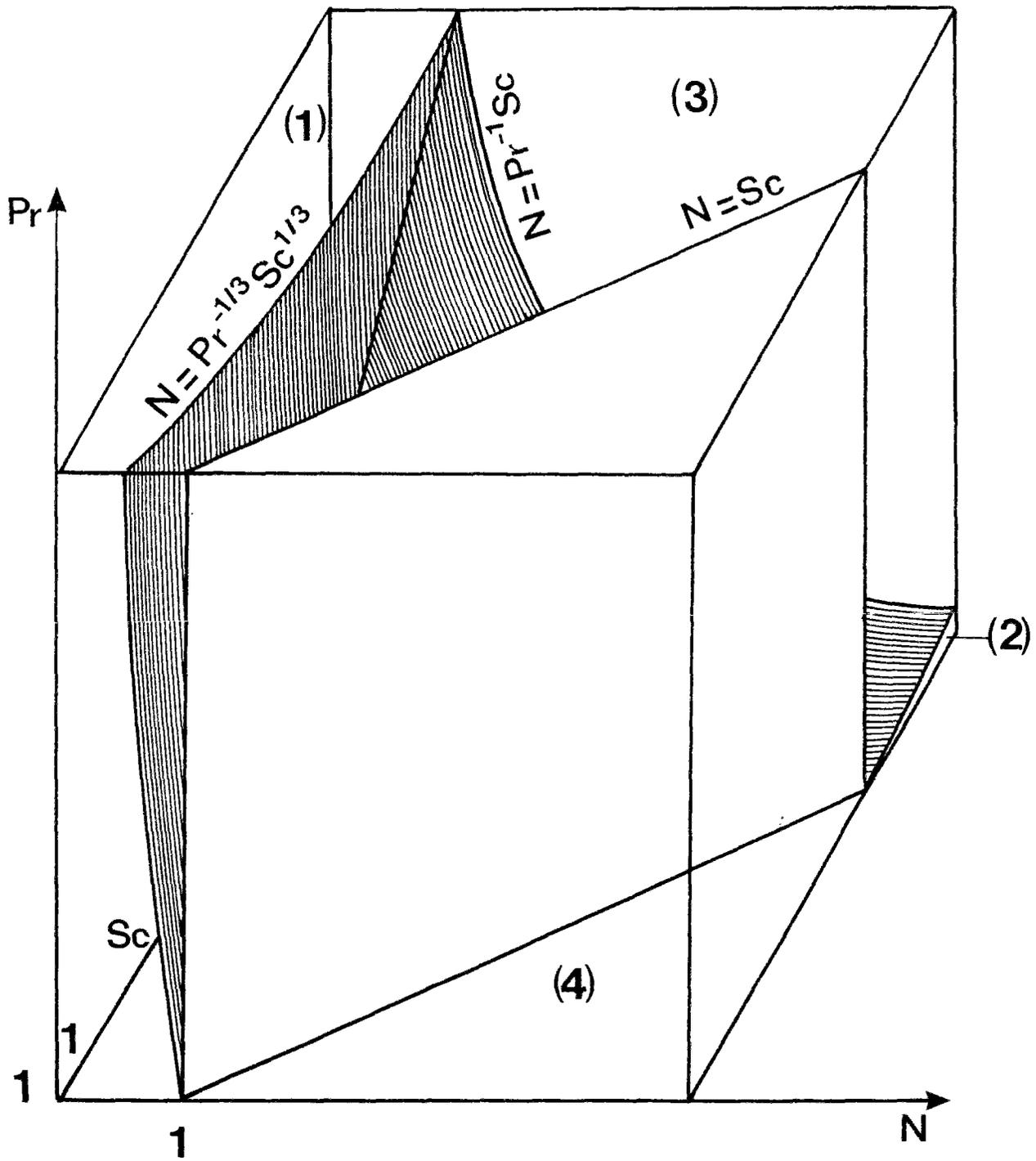


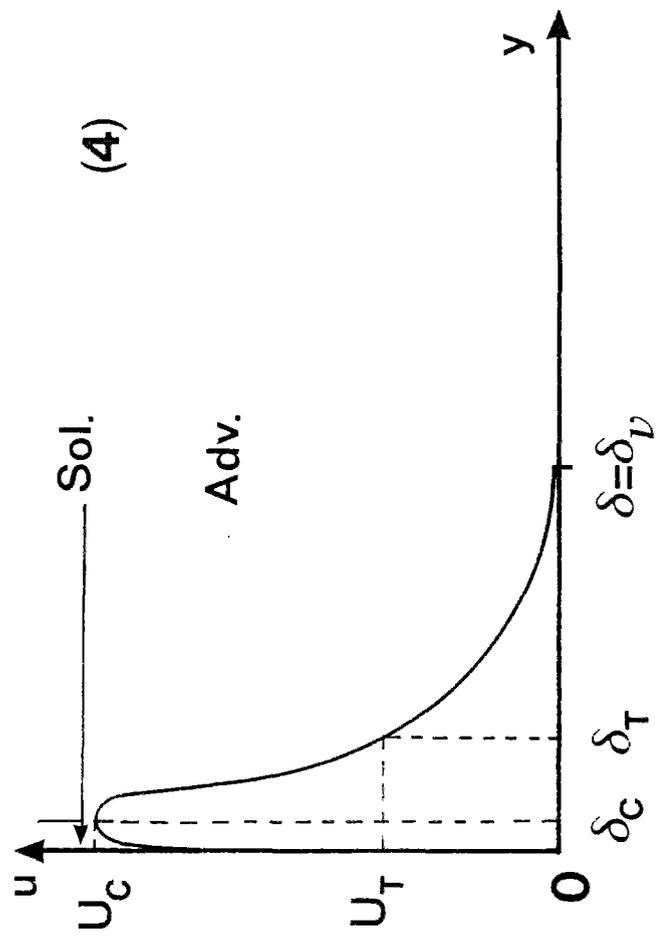
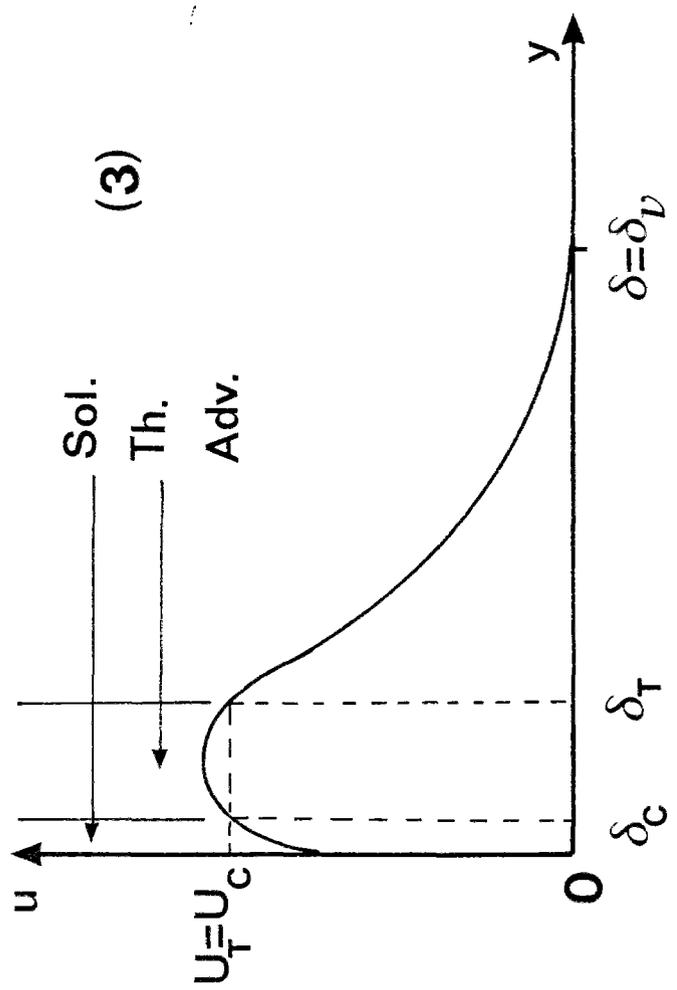
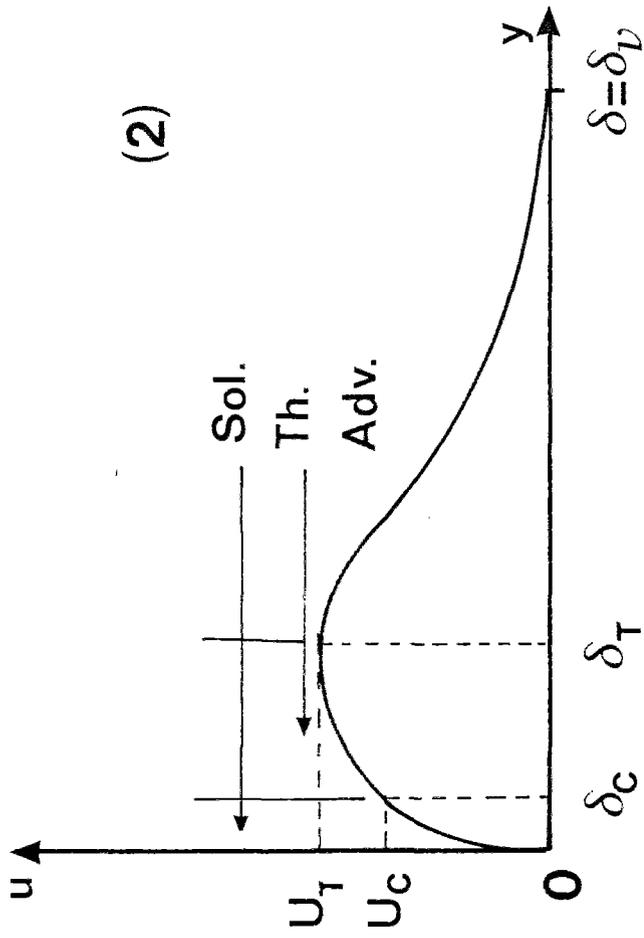
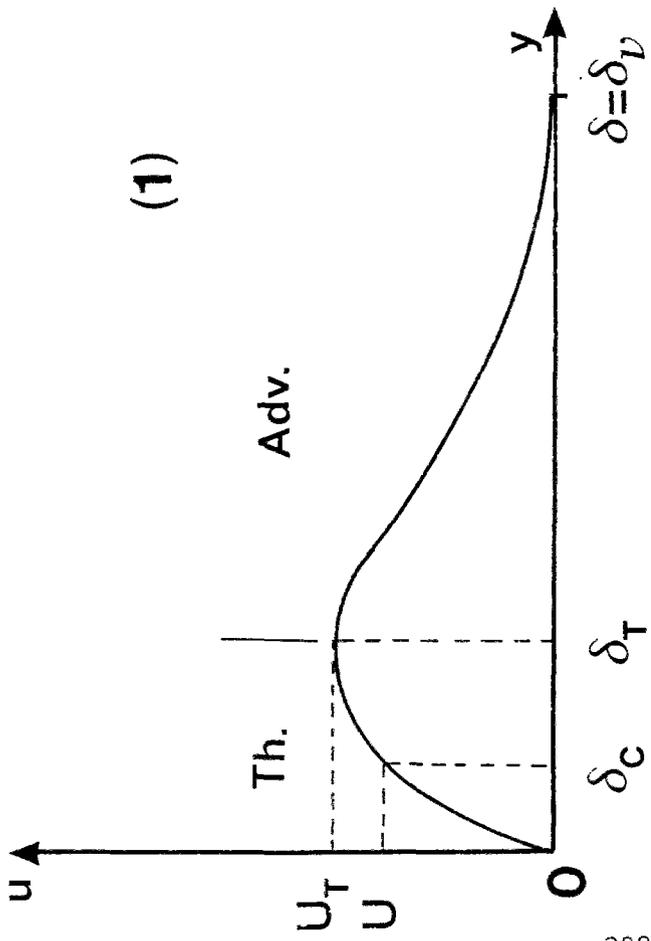
(3)

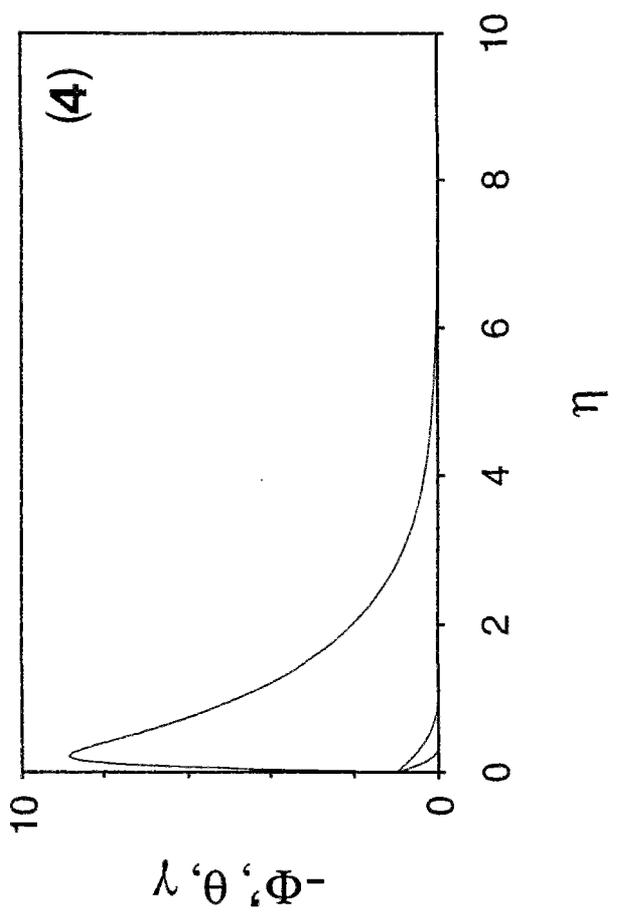
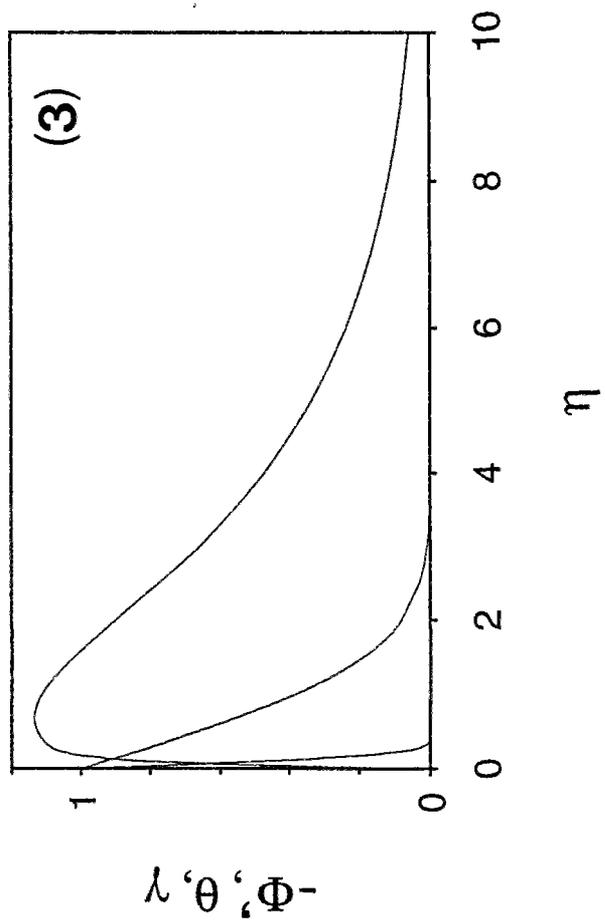
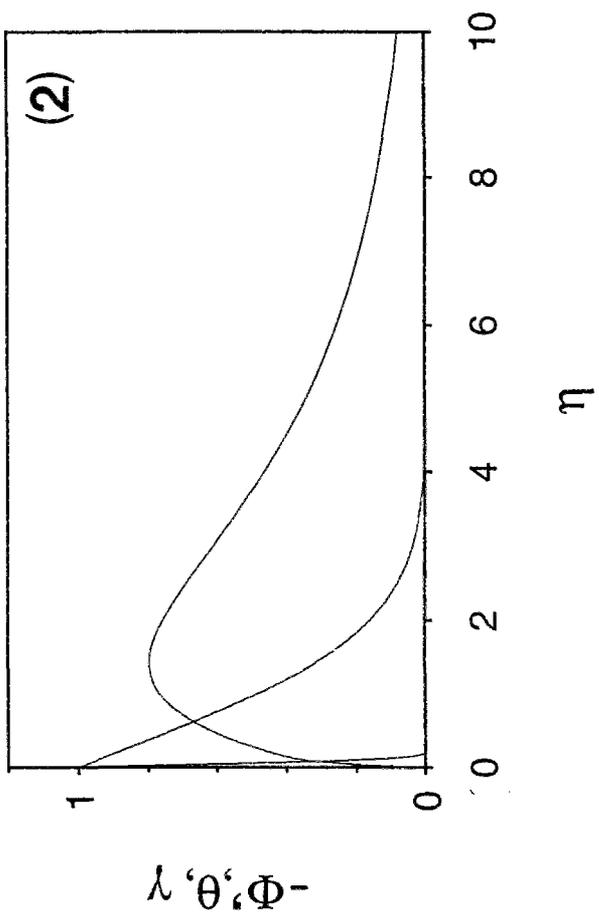
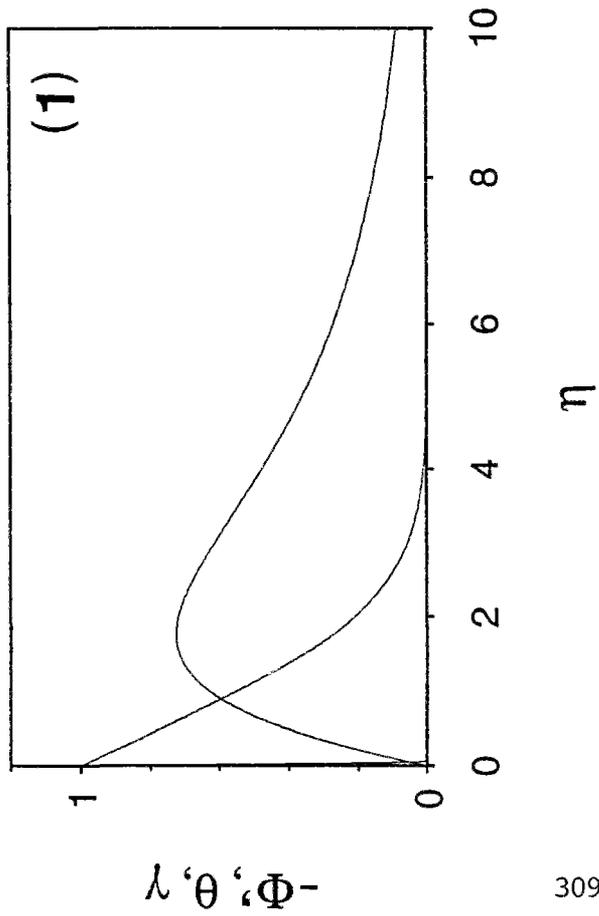


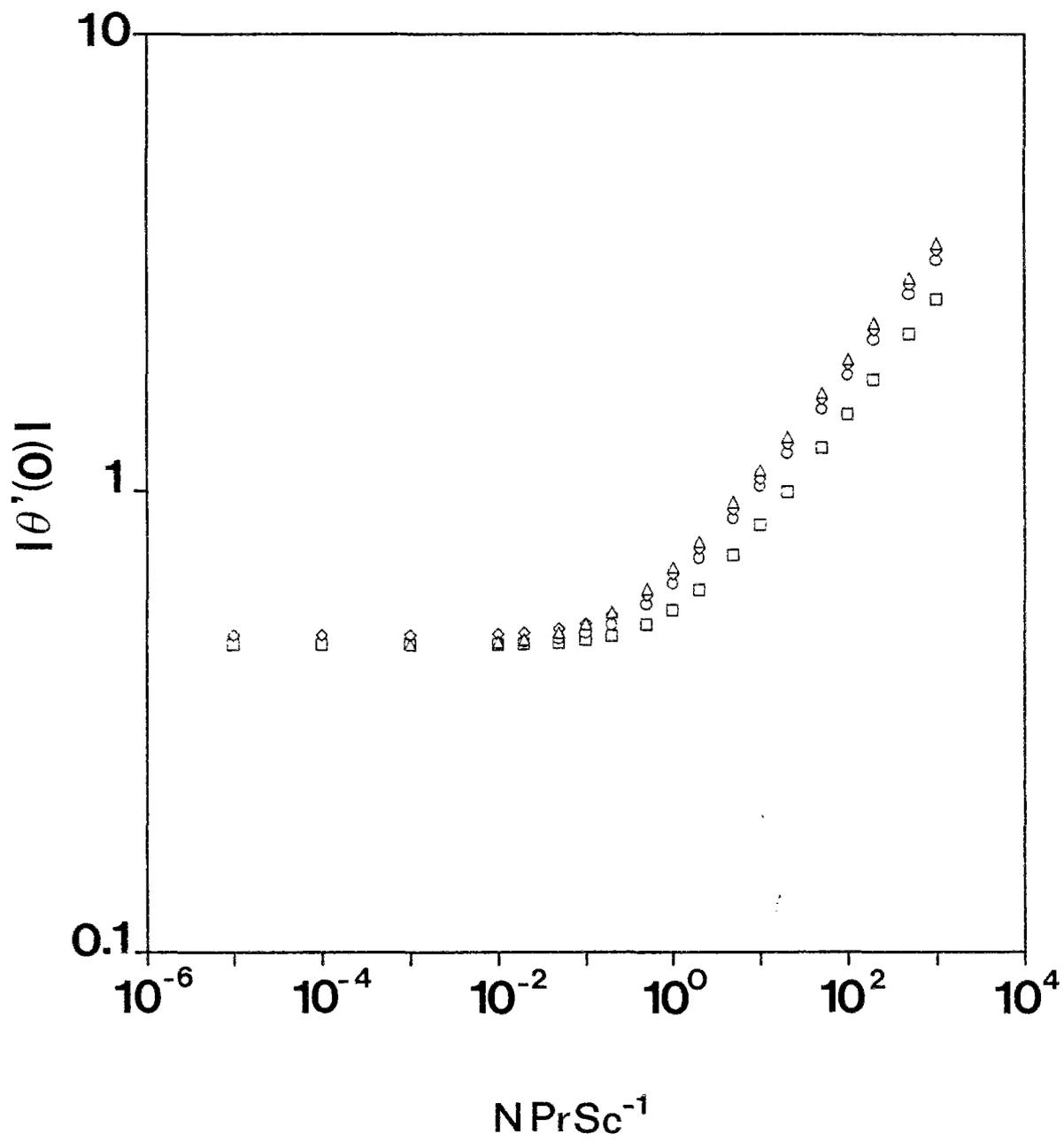


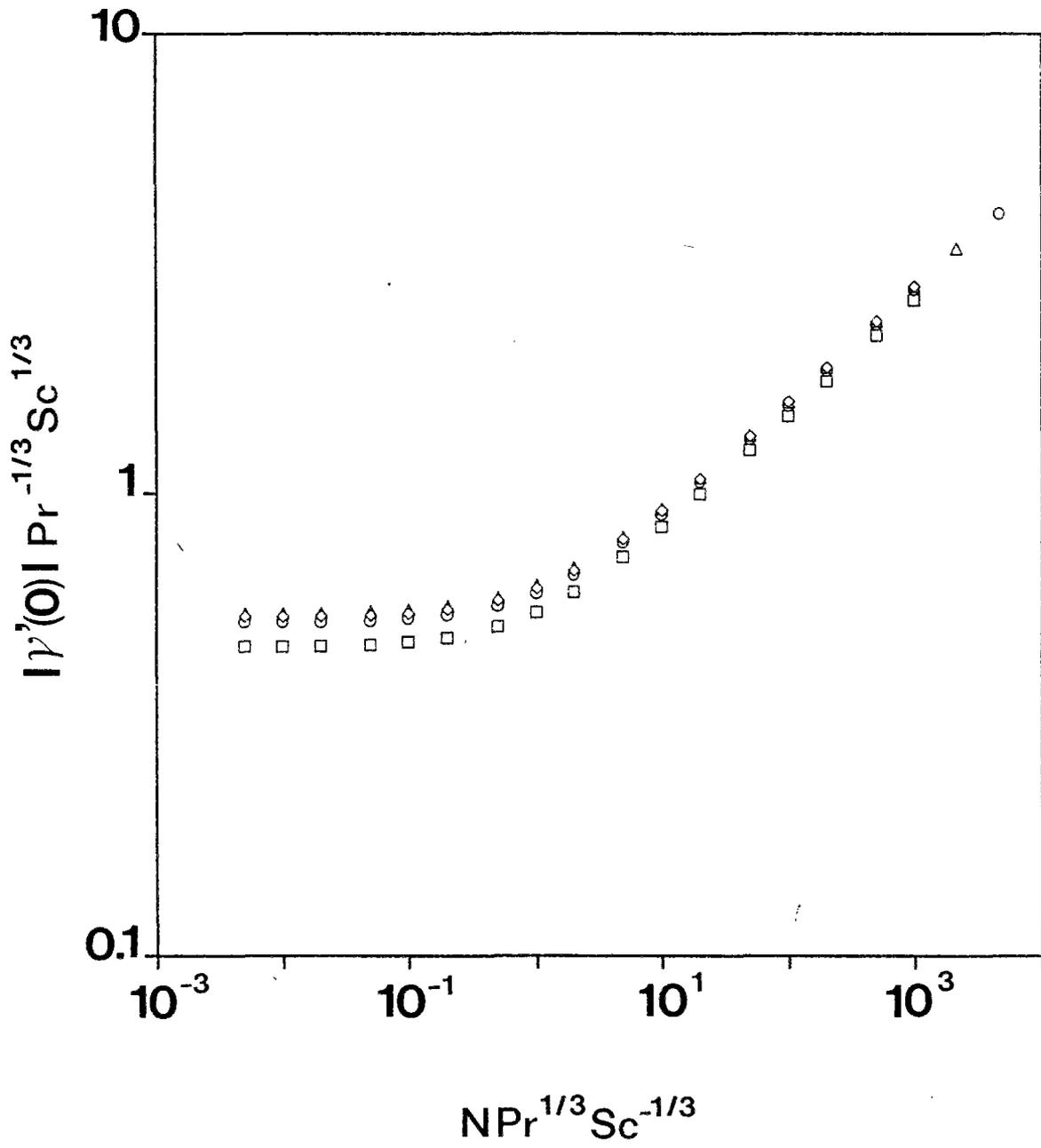












RESUME : Ce travail comporte deux parties indépendantes : la première concerne les suspensions de particules anisotropes en écoulement élongationnel, la seconde porte sur l'étude en lois d'échelle des couches limites en convection thermosolutale.

L'écoulement de suspensions de particules anisotropes présente en déformation élongationnelle des propriétés spécifiques liées à la géométrie des particules. Après la mise en oeuvre d'une cellule d'écoulement à orifice réalisant une sollicitation élongationnelle bien définie, des suspensions de fibres non-browniennes sont étudiées dans deux régimes de concentration. En régime dilué, les résultats expérimentaux concernant la dynamique d'orientation d'une fibre sont bien décrits par les équations d'orientation du vecteur directeur obtenues analytiquement. En régime semi-dilué, l'écoulement présente une structuration remarquable, qui est étudiée en fonction de la fraction volumique et du rapport de forme des particules. Un modèle d'écoulement obtenu en minimisant l'énergie dissipée permet d'interpréter les résultats expérimentaux en termes de viscosité élongationnelle, et en relation avec les propriétés de la suspension à l'échelle des particules.

Les écoulements de couche limite au voisinage d'une paroi verticale dans un milieu fluide soumis à des gradients de température et de concentration horizontaux présentent une grande variété de situations suivant la valeur des paramètres adimensionnels du problème. Une analyse combinant raisonnements en lois d'échelle et méthode intégrale permet de prédire complètement les différents régimes d'écoulement et les variations des couches limites. Les résultats sont corroborés par des solutions de similitude obtenues numériquement.

MOTS-CLES : suspensions, particules anisotropes, écoulement élongationnel, viscosité élongationnelle, orientation de particules anisotropes, couches limites, convection thermosolutale.

ABSTRACT : This work consists of two independent parts : the first one is an experimental study of suspensions of anisotropic particles in elongational flow, the second one deals with the scaling properties for boundary-layer flows driven by double-diffusive convection.

In elongational flows, suspensions of anisotropic particles exhibit several specific properties, due to the particle geometry. After the realization of a flow through a circular orifice, in order to obtain well-defined elongational components, suspensions of non-brownian fibers are studied in two concentration ranges. In dilute suspensions, experimental results concerning the fiber orientation dynamics are in good agreement with the orientation equations obtained analytically. In semi-dilute suspensions, a striking structuration of the flow is observed and studied for several volume fractions of particles and for different aspect ratios. A flow model based on the minimization of the energy dissipated by viscosity is used, which gives an interpretation of the experimental results in terms of elongational viscosity in relation with the suspension properties at the particle scale.

Boundary-layer flows in the vicinity of a vertical wall, in a fluid medium subjected to horizontal temperature and concentration gradients, show a great diversity of situations, depending on the value of the non-dimensional parameters of the problem. An analysis combining an integral method and scaling arguments provides exhaustive predictions of the different types of flows, and of the boundary-layer variations. Results are in very good agreement with similarity solutions obtained numerically.

KEY-WORDS : suspensions, anisotropic particles, elongational flows, elongational viscosity, orientation of anisotropic particles, boundary-layers, double-diffusive convection.